Konfárné Nagy Klára • Kovács István

PRÓBAÉRETTSÉGI FELADATSOROK

12 feladatsor megoldásokkal, magyarázatokkal

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINT

A 2024-től érvényes követelményekhez, 1. kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2023

A könyvet írta: **Konfárné Nagy Klára** • *középiskolai tanár*
Kovács István • *középiskolai tanár*

Lektorálta: Németh Sarolta • *középiskolai tanár*

Felelős szerkesztő: Tóth Katalin

Borítóterv: Szőke András
Műszaki szerkesztő: Horváth Péter
Ábrák: Horváth Péter
Anyanyelvi lektor: Varró Sándor
Fotók: shutterstock.com

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is.
A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában nem sokszorosítható.

ISBN: 978 963 697 898 3

Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2020, 2023

Kedves Érettségiző!

Az írásbeli érettségire készülve – a középiskolai matematika-tananyag rendszerező ismétlése során vagy után – célszerű a vizsgadolgozathoz hasonló teljes feladatsorok megoldásával tréningezni a sikeres vizsgára.

Kiadványunk, amely 12, az érettségi feladatsorokkal megegyező nehézségű és terjedelmű próbafeladatsort tartalmaz, ehhez nyújt segítséget. A könyvben található megoldások nem csupán a gondolatmenetek helyes leírásához, ellenőrzéséhez nyújtanak segítséget, hanem részletes pontozási útmutatót is tartalmaznak, így a felkészülés eredményessége folyamatosan értékelhető.

Jó tanácsok a próbaérettségik és a vizsgadolgozat megírásához

A középszintű matematikaérettségi-dolgozat két részből áll. Az I. rész megírására 45 perc, a II. rész megírására 135 perc áll rendelkezésre.

Az I. rész

- 12 rövid feladatot tartalmaz, amelyek összes pontszáma 30. A vizsgán a 45 perc letelte után ehhez a részhez már nem lehet visszatérni.
- A feladatok többsége esetén elég csak a helyes választ megadni, kivéve, ahol a szöveg indoklást vagy a megoldás részletezését kéri. Ekkor a megoldás gondolatmenetének, legfontosabb lépéseinek leírása is szükséges a maximális pontszám eléréséhez.
- A feladatokat tetszőleges sorrendben oldhatja meg. Érdemes azokkal kezdeni, amelyek helyességében biztos.
- A végeredményt a kijelölt helyre, a pontozott vonalra írja!
- Minden feladatnak egy megoldása pontozható, több megoldási próbálkozás esetén az utolsót kell értékelni.

A II. rész

- A és B részből áll, az ezek megoldására összesen fordítható idő 135 perc.
- Az A rész három, több kérdésből álló feladatot tartalmaz, ezekből összesen 36 pont szerezhető.
- A B részben szintén három, több részből álló, 17 pontos feladat található, de ezek közül csak kettőt kell megoldani, így maximum 34 pontot lehet szerezni.
- Azt a vizsgázónak kell eldöntenie, hogy melyik feladatot nem oldja meg, vagy – ha részben vagy egészben mindháromra ad megoldást – melyiknek a javítását nem kéri. Ennek a sorszámát az erre kijelölt négyzetbe kell beírnia. Ha ezt elmulasztja, akkor a vizsgadolgozat javítója az utolsó, 18. sorszámú feladat megoldását nem veszi majd figyelembe. (Akkor sem, ha esetleg az hibátlan.)
- A II. rész minden feladatának megoldását az egyes lépéseket indokolva, a megoldás során alkalmazott tételeket megnevezve, részletesen le kell írni!

Egy kis vizsgataktika

Mivel a feladatok az I. és a II. részen belül tetszőleges sorrendben oldhatók meg, célszerű azokkal kezdeni, amelyek megoldásában járatosabbnak érzi magát.

Ha több feladatrész egymásra épül, és van olyan, amelynek megoldásában bizonytalan, akkor is érdemes folytatni a többi rész kidolgozását. Ha egy feladatrész megoldásakor hibás adatokból indul ki, de a gondolatmenete helyes, arra jár a megfelelő részpontszám.

Ha egy feladattal készen van, olvassa el még egyszer a szövegét, vizsgálja meg, hogy minden kérdésre válaszolt-e, illetve ellenőrizte-e a megoldást.

Ha egy probléma megoldásánál elakad, akkor ellenőrizze, hogy minden feltételt kihasznált-e. Érdemes visszagondolni, hogy találkozott-e már hasonló feladattal, és azt hogyan oldotta meg. Végső esetben a függvénytáblázat is segíthet.

Egy-egy feladatsor befejezése után a *Megoldások* fejezetben található pontozási útmutató segít abban, hogy értékelje, vagy akár ki is javítsa a dolgozatát. A hibák mellett elsősorban azt ellenőrizze, hogy elég részletesen írta-e le a megoldásait. Az esetleges hibák, hiányosságok mindig lehetőséget adnak arra, hogy tanuljon belőlük!

A vizsgán használható eszközök

Fontos megjegyezni, hogy az írásbeli vizsgán sem számológépként, sem az idő mérésére nem használhat telefont! A teljes 180 perc alatt korlátozás nélkül használható viszont bármely forgalomban lévő függvénytáblázat, valamint olyan zsebszámológép, amely nem alkalmas szöveges adatok megjelenítésére és tárolására. Ezért már a felkészülés során érdemes megtanulni ezek gyors és pontos alkalmazását. A vizsgán csak olyan függvénytáblát és számológépet használjon, amelyet jól ismer, mert egy szokatlan, pl. az érettségire kölcsönkért számológép kellemetlen meglepetéseket okozhat.

A vizsgadolgozatot kék tollal kell írni, ceruzával csak az ábrák rajzolása fogadható el. Kiemelésre, színezésre véletlenül se használjon piros színt, az a javítás színe.

Az esztétikus ábrák rajzolásához vonalzóra, körzőre, a kördiagramok elkészítéséhez szögmérőre is szüksége lehet.

Reméljük, hogy könyvünkkel mi is hozzájárulhatunk a sikeres érettségijéhez!

A szerzők



Feladatsorok

Tanácsok a feladatok megoldásához

A feladatsorokat önálló gyakorlásra javasoljuk.

Mivel a vizsgán az I. részt 45 perc, a II. részt 135 perc alatt kell megoldani, a gyakorlásra is kb. ennyit érdemes szánni. Az első néhány alkalommal még nem szükséges tartani az időkorlátot, de hasznos visszajelzést ad, ha megméri, hogy mennyi idő kellett a feladatsorok megoldásához. A vizsgához közeledve persze már célszerű időre írni a próbaérettségit.

Az alapfogalmak ismeretét ellenőrző I. rész megoldására van hely, ezt célszerű a könyvbe beírni. Így rutint szerezhet abban is, hogy a választ hogyan kell megadni. Az útmutatást követve csak ott kell részleteznie a megoldást, ahol ezt a szöveg kéri. A választ mindig a pontozott helyre írja be.

A II./A és II./B rész összetettebb, gyakorlati problémákat tartalmaz, ezért a feladatok szövegét különös gondossággal olvassa el. Ennél a résznél minden megoldást részletesen le kell írni.

A gyakorláskor lehetőleg a II./B rész mindhárom feladatát oldja meg, és utána döntse el, hogy a vizsgán melyiknek a javítását nem kérné. Válaszadás előtt mindig újra olvassa el a feladatot, gondolja végig, hogy mindenre figyelt-e, az ellenőrzést elvégezte-e, és csak ezután válaszoljon.

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

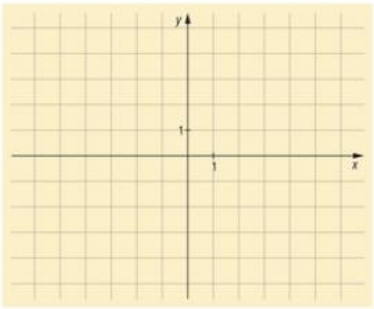
1 Mekkora az a tompaszög, amelynek szinusza 0,5? ● 2

A keresett tompaszög: _____ .

2 A Bükk turistatérképének méretaránya 1 : 40 000. Egy turistautat követve a Tar-kő és a Három-kő közötti távolság a térképen 44 mm. Hány méter hosszú ez az út a valóságban? ● 2

Az út a valóságban: _____ m.

3 Ábrázolja a $[-3; 6]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \frac{5}{3}x - 2$ függvényt! ● 2



4 Egy szám kettes számrendszerben felírt alakja 1110110_2. Írja át a számot 10-es számrendszerbe! ● 2

A szám értéke: _____ .

5 Egy számtani sorozat második eleme 12, hatodik eleme 44. Mennyi a sorozat differenciája? ● 2

A differencia: _____.

6 Mekkorák a szabályos 24 oldalú sokszög szögei? ● 3

A sokszög szögei: _____.

7 Egy derékszögű háromszög átfogója 115 cm, az egyik befogója 92 cm hosszú. Igaz-e, hogy a harmadik oldal mérőszáma is egész szám? Válaszát indokolja! ● 2

8 Melyik szám a nagyobb: $\log_2 16$ vagy $\log_3 27$? ● 2

A _____ a nagyobb.

9 Az „irracionális" szó betűit hány különböző módon lehet egymás mellé leírni? ● 2

_____ különböző módon.

10 Milyen távolságra van az origótól az $5x - 2y = 23$ egyenletű egyenes 1 ordinátájú pontja? ● 3

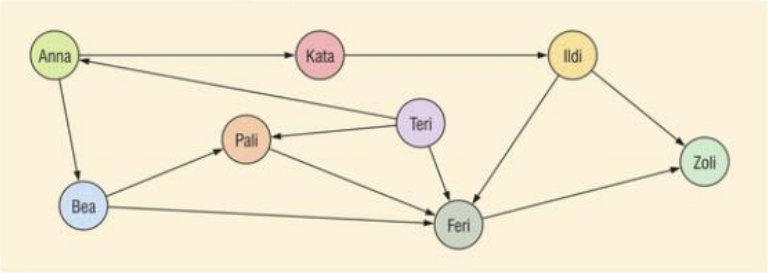
A pont távolsága az origótól: _____.

11 A Pénzes család bevételéhez anya és apa fizetése 2 : 3 arányban járul hozzá. Hány százalékkal nő a család bevétele, ha anya fizetését 20%-kal, apáét pedig 25%-kal emelik? ● 4

_____%-kal.

12 Egy baráti társaság találkozót szeretne szervezni, ezért egyikük felhívta néhányukat, hogy segítsenek értesíteni a többieket. Rövid idő múlva mindenki értesült a találkozóról. Az ábrán nyilak jelzik, hogy ki kit hívott fel.

● 4 ☐



Döntse el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz és melyik hamis!

A) A találkozót Teri kezdte szervezni.

B) Kata előbb tudott a találkozó szervezéséről, mint Anna.

C) Feri nem hívott fel senkit.

D) Bea nem hívta fel Zolit.

A) ..... *B)* ..... *C)* ..... *D)* .....

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 Egy 12 cm sugarú körhöz érintőket húzunk a kör középpontjától 30 cm távolságra lévő pontból.

a 7 ☐
b 5 ☐
ö 12 ☐

a) Mekkora szöget zár be a két érintő?

b) Milyen hosszú az érintési pontokat összekötő húr a körben? Az eredményt centiméterben egész értékre kerekítve adja meg!

14 A Zöld Oroszlán étteremben lakodalomhoz készülődnek. Ha valahány 6 személyes asztallal terítenek, akkor 3 hely üresen marad, ha pedig 5-tel kevesebb 8 személyes asztalt helyeznek el, akkor 3 vendégnek nem jut hely.

a 7 ☐
b 5 ☐
ö 12 ☐

a) Hány vendégre számítanak?

A lakodalom végén a szervezők megkérdezték a vendégektől, hogy ki hány vendéggel táncolt. Érdekes módon mindenki páratlan számot mondott.

b) Előfordulhat-e, hogy valaki rosszul számolt? Válaszát indokolja!

→ 84

15 Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\frac{x(x+4)}{x-5} = 2 - \frac{45}{5-x}$

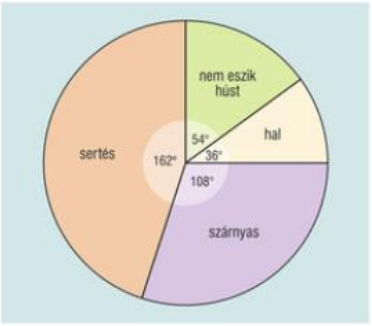
b) $\sqrt{4x+44} = x+3$

a 6
b 6
ö 12

II. rész/B

A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

16 Egy felmérés során 500 embertől megkérdezték, hogy milyen húsfajtát fogyaszt leggyakrabban. A felmérésről egy kördiagram készült.



a 6
b 4
c 3
d 4
ö 17

a) Töltse ki a következő táblázatot a felmérés adataival!

Húsfajta	hal	sertés	szárnyas	nem eszik húst
Létszám				

b) Készítsen oszlopdiagramot a felmérés eredményéről!

A felmérésben részt vevők között egy ajándékcsomagot sorsolnak ki.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy az ajándékcsomagot olyan ember nyeri, aki nem fogyaszt húst?

d) Ha két különböző ajándékot sorsolnának ki, mennyi lenne a valószínűsége, hogy mindkettőt olyan ember nyeri, aki halat fogyaszt leggyakrabban?

17 Egy bankban elhelyezünk 1 000 000 Ft-ot, amely évente kamatozik. Egy év után a kapott kamatot is hozzáadják a tőkéhez, tehát a következő évben már az is kamatozik.

a) Mennyi az éves kamat, ha két év után 1 071 225 Ft-ot vehetünk ki a bankból?

a 4
b 6
c 7
ö 17

Egy kisbaba születésekor a nagyszülők betesznek a *Jólét Bankba* 2 000 000 Ft-ot. Az unokájuk a kamatokkal növelt összeget 18 éves korában veheti fel. A bank 10 éven át minden évben 2,5%-os kamatot ad, majd 8 éven keresztül 4%-os lesz az éves kamat.

b) Mennyi pénzhez jut az unoka 18 éves korában?

A *Profit Bankban* is lehet ilyen számlát nyitni, de ott 18 éven keresztül változatlan a kamatláb.

c) Mekkora az éves kamat a *Profit Bankban,* ha 18 éves korában a gyerek ugyanannyi pénzt kap, mint amennyit a *Jólét Bankban* a változó kamattal kapott volna?

18 A tájékozódási futóversenyeken a keresett tereptárgyakat bójával jelölik meg. A bója alakja háromszög alapú hasáb, amelynek minden oldala egyenlő, 30 cm. Az oldallapjait selyemből készítik, és minden lapot az átlója mentén két részre osztanak. A két részt fehér és narancssárga színű anyagból varrják össze.



a 4 ☐
b 7 ☐
c 3 ☐
d 3 ☐
ö 17 ☐

a) Hány négyzetméter fehér, illetve narancssárga anyagot kell vásárolni 100 darab bója elkészítéséhez, ha a varrásra és hulladékra 10% veszteséggel számolunk?

A bója felső éleibe merevítő drótot helyeznek. A bóját a talajba leszúrt állványra fel kell függeszteni. A felfüggesztéshez a három merevítő drót felezőpontjához rögzített, egyenlő hosszúságú zsinegeket használnak.

b) Milyen hosszú egy-egy rögzítő zsineg, ha a bója felső „lapja" vízszintesen, a felakasztás helye alatt 18 cm-rel helyezkedik el?

Egy megyei tájékozódási futóversenyen a felnőtt női kategóriában 18 induló van, közülük az első három helyezett versenyző – az elért helyezéstől függetlenül – jut az országos döntőbe.

c) Hányféleképpen alakulhat ki a továbbjutók mezőnye?

A versenyen induló 18 futó egyike Saci.

d) A verseny előtt mennyi a valószínűsége, hogy Saci a továbbjutók között lesz?

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

1 Van-e olyan háromszög, amely oldalainak hossza 150 cm, 20 dm és 3,4 m? ● 2

Ilyen háromszög _____.

2 Melyek a zérushelyei az $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ hozzárendelési szabállyal felírt függvénynek? ● 3

A függvény zérushelyei: _____.

3 A hatványozás azonosságait felhasználva számítsa ki a következő értékeket! ● 2

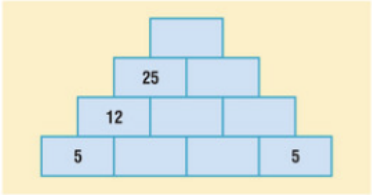
$4^{\frac{7}{2}}$ és $27^{\frac{4}{3}}$

A két hatvány értéke: $4^{\frac{7}{2}} =$ _____, $27^{\frac{4}{3}} =$ _____.

4 Egy trapéz egyik alapján lévő szögek nagysága 75° és 81°. Mekkora a trapéz másik két szöge? ● 2

A másik két szög: _____ és _____.

5 Írja be a számpiramis hiányzó számait, ha minden négyzetbe az alatta lévő két négyzet számainak összege kerül!



2

6 A $\frac{2}{7}$ szám tizedes tört alakjában milyen számjegy áll a tizedesvessző utáni 2020. helyen?

2

A 2020. helyen _____ áll.

7 Egy 5 pontú gráf pontjainak fokszáma rendre 4; 3; 2; 2; 1. Rajzolja le a gráfot!



2

8 Három különböző prímszám összege 20. Melyek lehetnek ezek a prímszámok?

2

A három prímszám: _____.

9 Egy számtani sorozat első eleme −5, negyedik eleme 13. Eleme-e ennek a sorozatnak a 32? Válaszát indokolja! ● 3

→ 91

A 32 a sorozatnak _____.

10 Egy dobókockával háromszor dobunk egymás után. A dobott számokat a dobások sorrendjében leírva egy háromjegyű számot kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott háromjegyű szám páratlan? ● 2

A valószínűség: _____.

11 Döntse el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis! ● 4

A) Nincs olyan négyszög, amely középpontosan szimmetrikus, de tengelyesen nem szimmetrikus.

B) Van olyan négyszög, amelynek csak egy szimmetriatengelye van.

C) Minden paralelogramma középpontosan szimmetrikus, de tengelyesen nem szimmetrikus.

D) Van olyan deltoid, amelynek egynél több szimmetriatengelye van.

A) _____ *B)* _____ *C)* _____ *D)* _____

12 Melyik a több: a 8000-nek a 30%-ának a 20%-a, vagy a 3000-nek a 20%-ának a 80%-a? ● 3

A két szám viszonya: _____

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 A Tisza-vetélkedőt évente rendezik Szegeden. Az általános iskolások két kategóriában versenyeznek, az *A* kategóriában alsósok (3. vagy 4. osztály), az *F* kategóriában felsősök (5. vagy 6. osztály). A versenyben 4 fős csapatok vesznek részt. Egy általános iskolából a két kategóriában legfeljebb két-két csapat indulhat.

A Fecske Utcai Általános Iskola 4 csapatot indít a Tisza-vetélkedőn.

a) Igaz-e, hogy a Fecske utcai iskolából indulók között biztosan van két olyan diák, aki ugyanabban a hónapban született?

A verseny második fordulójába mindkét kategóriában 8 csapat jutott be.

b) Hányféleképpen alakulhat ki az első három helyezett csapat sorrendje az *A* kategóriában?

A Tiszavirág nevű csapat megnyerte az *F* kategória versenyét, jutalmuk egy kajaktúra a Tiszán. A versenyzők és két kísérőjük háromszemélyes kajakokkal indulnak el. Mindegyik kajakban két tanuló és egy kísérő helyezkedik el.

c) Hányféleképpen ülhetnek be a túrázók a kajakokba, ha csak azt vesszük figyelembe, hogy ki kivel utazik (a kajakokon belüli ülésrend nem lényeges)?

a 3 ☐
b 4 ☐
c 5 ☐
ö 12 ☐

14 Dóra és Edit közösen szeretne lakást bérelni Szegeden. Az internetes kereső összesen 293 lakást ajánl fel. A keresőben három szempont állítható be: a lakás mérete, a szobák száma és a havi bérleti díj.

Ha beállítják, hogy legfeljebb 60 m^2-es legyen a lakás, 170 ajánlat érkezik, a minimum 2 szobával rendelkező lakások száma 252. 100 000 Ft-nál alacsonyabb bérleti díjat beállítva 124 lakás jelenik meg.

Olyan lakás, amely legfeljebb 60 m^2-es, de minimum 2 szobás, 130 van, ebből 69-nek alacsonyabb a bérleti díja 100 000 Ft-nál.

Olyan lakás, amely legfeljebb 60 m^2-es és 100 000 Ft-nál alacsonyabb a bérleti díja, 103 van.

90 olyan lakás van, amely legalább 2 szobás, de a 100 000 Ft-ot nem éri el a bérleti díj.

a) Hány olyan lakás van a keresőn, amely legfeljebb 60 m^2-es, 2 vagy több szobás, de a bérleti díja legalább 100 000 Ft?

b) Hány olyan lakást hirdetnek, amelynek mérete nagyobb 60 m^2-nél, a szobák száma 2-nél kevesebb, és a bérleti díj 100 000 Ft alatt van?

c) Van-e olyan lakás a hirdetésben, amely nagyobb, mint 60 m^2, a bérleti díja pedig legalább 100 000 Ft, de csak egy szoba van?

a 6 ☐
b 2 ☐
c 3 ☐
ö 11 ☐

↑ 94

15 Gábor bácsi téglalap alakú kertjének két különböző oldala 14 m és 24 m hosszú. Egy reggel beindít egy szórófejes locsolót, amely 7 m sugarú körben öntöz úgy, hogy a két hosszabb oldal mellett az egyik rövidebb oldalig is éppen ellocsol.

a) A kert hány százalékát nem locsolja ekkor a locsoló?

a 4 ☐
b 9 ☐
ö 13 ☐

Egy óra múlva áthelyezi a locsolót a kert másik végébe úgy, hogy most is három oldalig locsol a szórófej. Itt is egy órán át működik a locsoló.

b) A kert hány százalékát locsolta meg mind a két órában?

II. rész/B

A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

16 A diagramon egy panzió vendégéjszakáiról két egymást követő évben készült kimutatás látható.



a) Hány %-kal nőtt a magyar vendégéjszakák száma 2018-ról 2019-re?

b) Ábrázolja kördiagramon a vendégéjszakák nemzetek közötti eloszlását a 2018-as évben!

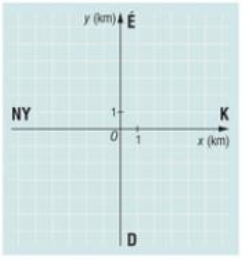
c) 2019-ben a vendégéjszakák hány százalékában voltak olasz vendégek?

d) A két egymást követő év összes vendégéjszakáját figyelembe véve hány százalékos volt a csökkenés a 2019. évben?

a 3 ☐
b 7 ☐
c 4 ☐
d 3 ☐
ö 17 ☐

17 A halradar a tengeri élőlények elhelyezkedését mutatja az égtájaknak megfelelően, derékszögű koordináta-rendszerben.

A készülék kijelzője úgy van beállítva, hogy a műszer a koordináta-rendszer kezdőpontjában található, és hatósugara minden irányban 5 km. A koordináta-rendszerben egy egység 1 km.



a) Érzékeli-e a halradar az $A(2; 3)$ koordinátájú pontban lévő cápát, illetve a $B(4; -6)$ koordinátájú pontban tartózkodó kék bálnát?

a 6 ☐
b 8 ☐
c 3 ☐
ö 17 ☐

A *B* pontban lévő kék bálna megállás nélkül É felé halad. A halradar nem mozdul el.

b) A koordináta-rendszer melyik pontjában lesz a bálna, amikor a radar felfedezi?

A bálna nem áll meg, és mozgásának irányát sem változtatja meg.

c) Útjának hány kilométeres szakaszán érzékeli a mozgását a halradar?

47 ↑

18 Anett és Babett szerdánként reklámanyagokat terjesztenek egy városrészben. Az egyik héten délután 17:00-kor kezdték együtt a munkát, és 19:00-kor végeztek. A következő héten 16:00-kor kezdtek, de Anettnek 17:00-kor el kellett mennie, ekkor Babett 20:00-kor végzett a munkával.

a) Mennyi idő alatt végeznék el a munkát külön-külön?

A második alkalommal 5000 Ft-ot kaptak a munkáért. Ennek 10%-a Babettnek jár, mert ő hozta el a reklámújságokat a központból.

b) Mennyi pénzt kapjon egy-egy lány, ha azt a munkavégzés idejének arányában osztják el?

c) Mennyi pénzt kapjon egy-egy lány, ha azt az elvégzett munka arányában osztják el?

A lányok kilenc különböző kiadványt raknak a postaládákba. Ezek közül 3 színes reklámújság, a többi fekete-fehér szórólap.

d) Véletlenszerűen összeszedve a kilenc kiadványt, mennyi a valószínűsége, hogy a három színes egymás mellé kerül?

a 8
b 2
c 3
d 4
ö 17

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

1 Egy mértani sorozat hányadosa 2, az ötödik tagja 320. Mennyi a sorozat első tagja? ● 2

A sorozat első tagja: _____.

2 Igaz-e, hogy a 360 és a 840 legkisebb közös többszöröse az 5040? Válaszát indokolja! ● 2

Az állítás _____.

3 Egy banknál a készpénz automatából való felvételének díját a következő módon számolják: térítés nélkül havonta összesen 150 000 Ft-ot lehet felvenni, legfeljebb két részletben. Magasabb összeg esetén a készpénzfelvétel díjaként a 150 000 Ft-ot meghaladó rész 1,1%-át számolják fel. ● 2

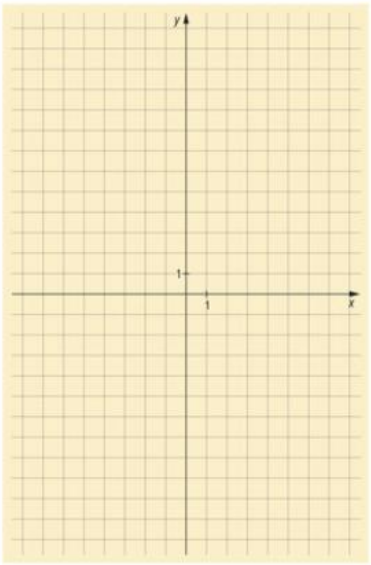
Mennyibe kerül, ha valaki az adott hónapban első alkalommal 200 000 Ft készpénzt vesz fel egy automatából?

_____ Ft-ba kerül.

4 Egy egyenlő szárú háromszög alapja 17 cm, szárai 13 cm hosszúak. Mekkorák az alapon fekvő szögek? ● 2

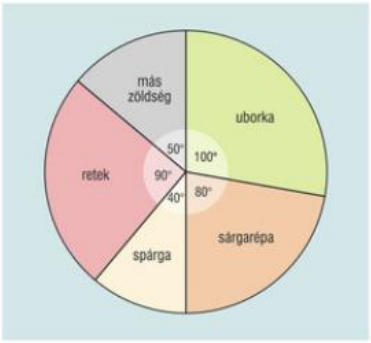
Az alapon fekvő szögek _____ °-osak.

5 Ábrázolja a $[-1; 6]$ intervallumon értelmezett $f(x) = (x - 2)^2 - 4$ hozzárendelési szabállyal felírt függvényt!



● 2

6 Egy piacon felmérték, hogy a retek, a sárgarépa, a spárga és az uborka közül ki melyik zöldségből vásárol a legtöbbet. A felmérés eredményét a kördiagram mutatja.



● 4

Döntse el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis!

A) A válaszolóknak körülbelül 17%-a nem a megnevezett négy zöldségből vásárol legtöbbet.

B) Akik legtöbbet uborkából vesznek, kétszer annyian vannak, mint akik spárgából vásárolnak legtöbbet.

C) A vásárlók többsége az uborkából vásárolja a legtöbbet.

D) A válaszadók között többen kedvelik a retket, mint a sárgarépát.

A) _____ *B)* _____ *C)* _____ *D)* _____

7 Valaki egy összeget 2,5%-os kamatra szeretne elhelyezni egy bankban. Mekkora összeget tegyen be, ha három év múlva 4 000 000 Ft-ot szeretne kivenni? ● 2

..... Ft-ot.

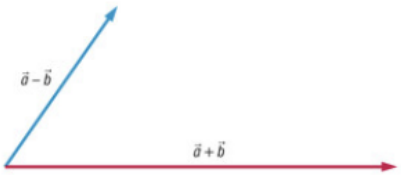
8 Adja meg a 2^{100} szám számjegyeinek számát! ● 3

A szám ..... jegyű.

9 Egy füves terület lenyírását 2 fűnyíró robot 8 óra alatt végzi el. Mennyi idő alatt végez 5 robot, ha azonos intenzitással dolgoznak? ● 2

..... alatt.

10 Rajzolja be az ábrába az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat, ha az ábra szerint adottak az $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}-\vec{b}$ vektorok! ● 2



11 A magyar kártya egy csomagjában 32 lap van, mind a négy színből 8 darab. A „színek": piros, zöld, tök és makk. Egy jól összekevert magyarkártya-csomagból kiveszünk 2 lapot. Megnézzük, mind a kettő zöld. Ezután anélkül, hogy a kihúzott két lapot visszatennénk, újra húzunk kettőt. ● 3

Mennyi a valószínűsége, hogy mind a két kihúzott lap piros?

A valószínűség: ..... .

12 A *Vaktérkép Magyarország* egy olyan internetes játék, amelyben településeket kell az ország vaktérképén elhelyezni. Öt település elhelyezése után a program értékel: kiírja, hogy az öt tipp átlaga mennyivel tér el a valóságtól, illetve a résztvevőkhöz viszonyítva milyen a játékos eredménye. Gábornak egyszer ezt írta ki: „A helyes választól való eltéréseid átlaga 75 km. Jobb vagy, mint a játékban részt vevők 50,74%-a".

● 4

Az alábbi állítások mindegyikéről döntse el, hogy igaz vagy hamis!

A) Gábor minden tippje 70 km-nél közelebb volt a valósághoz.

B) Biztosan nem volt 120 km-nél nagyobb eltérés Gábor tippjei és a valóság között.

C) A játékban részt vevők több mint harmada jobb, mint Gábor.

D) Ha Gábornál az átlagos eltérés 74 km lenne, jobb lenne a résztvevők felénél.

A) _____ *B)* _____ *C)* _____ *D)* _____

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 Pisti és Tibi kerékpárral készül a 63 km-re élő barátjukhoz, Petihez. Pisti szerint ha a tervezett idő első felében 18 $\frac{km}{h}$, a másik felében 24 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladnak, átlagsebességük ugyanannyi lesz, mint ha az út első felét 18 $\frac{km}{h}$, a másik felét 24 $\frac{km}{h}$ sebességgel teszik meg. Tibi rövid fejszámolás után közli, hogy nem ért egyet.

a 8
b 4
ö 12

a) Melyiküknek van igaza?

Végül úgy döntenek, hogy egész úton 24 $\frac{km}{h}$ sebességgel kerékpároznak. Délelőtt 9 órakor el is indultak. Egy óra múlva elindult Peti szintén kerékpárral, ugyanazon az útvonalon velük szemben. Háromnegyed tizenegykor találkoztak.

b) Mekkora sebességgel kerékpározott Peti?

14 A pentalux társasjátékban a játékosoknak egy szabályos ötszög oldalait és átlóit bejárva vissza kell jutniuk a kiindulási csúcsba.

a 3
b 3
c 6
ö 12

a) Bejárható-e a pálya úgy, hogy minden oldalon és minden átlón csak egyszer halad át a játékos? Válaszát indokolja!

b) Egy konvex sokszög belső szögeinek összege 1980°. Hány oldalú a sokszög?

c) Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 777-tel több átlója van, mint oldala?

15 Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az e egyenes egyenlete:

$$5x + 3y = 15.$$

a) Mekkora területű háromszöget határoz meg az e egyenes a koordinátatengelyekkel?

b) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az e egyenessel és áthalad a $(-2; -3)$ koordinátájú ponton!

c) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges e-re és áthalad az $(1; -4)$ ponton!

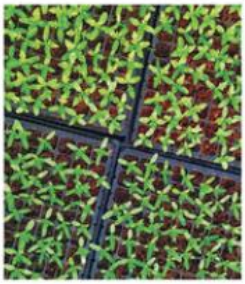
a 4 ☐
b 4 ☐
c 4 ☐
ö 12 ☐

103

II. rész/B

A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

16 A kertészetekben a magok elvetésére szaporítóládákat használnak. Egy téglatest alakú láda belső méretei: 27 cm és 57 cm, a láda magassága 7 cm. A magokat a ládába szemenként vetik úgy, hogy vetéskor a sortávolság és a sorokon belül a tőtávolság is 3 cm, mert a kikelő palántának 9 cm^2 tenyészterületre van szüksége.



a) Ha vásárolunk 50 liter virágföldet, azzal hány darab szaporítóládát tudunk teljes magasságáig megtölteni?

b) Egy szaporítóládába legfeljebb hány darab vetőmagot tudunk elvetni a fenti szabály szerint?

A gyakorlat azt mutatja, hogy a magoknak sajnos csak a 80%-a kel ki.

c) Hány darab vetőmagot, ehhez hány darab szaporítóládát, és hány liter virágföldet vegyünk, ha 1000 darab kis virágot szeretnénk majd a szaporítóládánkból kiültetni?

a 4 ☐
b 3 ☐
c 10 ☐
ö 17 ☐

17 Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk. A dobott számokat a dobások sorrendjében egymás mellé leírva egy háromjegyű számot kapunk. Tekintsük az így létrejövő összes lehetséges háromjegyű számot.

a) Hányféle háromjegyű számot kaphatunk?

b) Szerepel-e a számok között a legnagyobb és legkisebb létrejöhető szám különbsége is?

c) Hány olyan szám van közöttük, amelynek minden jegye különböző?

a 3 ☐
b 3 ☐
c 3 ☐
d 3 ☐
e 5 ☐
ö 17 ☐

A létrejövő háromjegyű számok között vannak olyanok, amelyekben minden számjegy megegyezik.

d) Mennyi ezeknek a számoknak az összege?

Az összes lehetséges szám közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet.

e) Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám osztható lesz 4-gyel?

105

18 A valós számokon értelmezett $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ elsőfokú függvény grafikonja az x tengelyt az A, az y tengelyt a B pontban metszi.

a) Mennyi az A és B pontok távolsága?

Pali internetes reklámok készítésével foglalkozik. A reklámokért kapott fizetés attól függ, hogy hányan nézik meg azt. A bér a megtekintések számának a nemnegatív valós számokon értelmezett elsőfokú függvénye.

Ha 1 000 000 ember nézi meg a reklámot, Pali 600 dollárt kap, 2 000 000 megtekintés esetén a járandósága 700 dollár.

b) Írja fel a bért meghatározó elsőfokú függvény hozzárendelési szabályát!

c) Mekkora összeghez jut Pali, amikor még senki nem nézte meg a reklámot?

Pali Budapesten él, és távmunkában szeretne dolgozni egy chicagói cégnél. A távmunka azt jelenti, hogy a dolgozó az otthonában végzi a munkát, és interneten tartja a kapcsolatot a munkahellyel.

A két város közötti időeltolódásról ezt tudjuk:

Amikor a helyi idő Budapesten május 15. 4.30, akkor a helyi idő Chicagóban május 14. 21.30.

A távmunka feltétele, hogy legalább 6 órát kell dolgozni chicagói idő szerint 8 és 16 óra között.

d) Részt tud-e venni Pali ebben a távmunkában, ha budapesti idő szerint 21 óra és reggel 6 óra között nem szeretne dolgozni?

a 3
b 9
c 2
d 3
ö 17

4. feladatsor

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

1 Két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 12, legkisebb közös többszörösük 120. Igaz-e, hogy mindkét szám osztható 5-tel? Válaszát indokolja! ● 2

→ 107

Az állítás _____.

2 Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 10 cm és 11 cm. Egy hozzá hasonló háromszög kerülete 84 m. Mekkorák az utóbbi háromszög oldalai? ● 2

A háromszög oldalai: _____.

3 Ötven – nem feltétlenül különböző – pozitív egész szám átlaga 42. Szerepelhet-e a számok között a 2020? Válaszát indokolja! ● 2

A válasz: _____.

4 Egy trapéz alapjainak hossza 12 cm és 5 cm, a szárai egyenlőek. A hosszabb alapon fekvő szögek 73°-osak. Mekkorák a trapéz szárai? ● 2

A trapéz szárai: _____.

5 Melyik szám a nagyobb: a $\sqrt[4]{8^5}$ vagy a $\sqrt[3]{2^7}$? Válaszát indokolja! ● 2

A _____ a nagyobb.

→ 107

6 Egy telefon árát 5%-kal felemelik. Két hónap múlva az aktuális árat újra felemelik 5%-kal. Igaz-e, hogy az új ár annyi, mintha az eredeti árat 10%-kal emelték volna? Válaszát indokolja! ● 2

Az állítás _____.

7 Az ábrán a $[-5; 10]$ intervallumon az

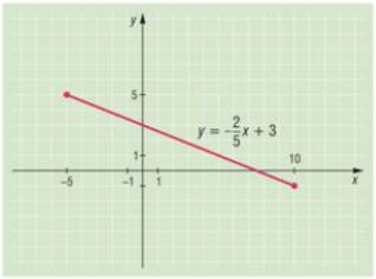
$$f(x) = -\frac{2}{5}x + 3$$

hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja látható. ● 2

Adja meg a függvény értékkészletét és zérushelyét!

A függvény értékkészlete: _____.

A függvény zérushelye: $x =$ _____.



8 Van-e olyan 5 pontú gráf, amelyben a csúcsok fokszáma rendre: 1; 1; 3, 3; 3? ● 2

A válasz: _____.

9 Egy 7 cm belső átmérőjű, henger alakú, 10 cm magas pohárban 9 cm magasan áll a víz. A pohárba (óvatosan) egy 3 cm élhosszúságú játékkockát ejtünk, amely teljesen lesüllyed a pohár aljára. Mennyi víz folyik ki a pohárból? ● 3

→ 108

Válasz: _____

10 Milyen távol van a koordináta-rendszer kezdőpontjától a $7x - 3y = -1$ egyenletű egyenes 5 abszcisszájú pontja? ● 3

A két pont távolsága: _____.

11 A globális felmelegedés egyik következménye az, hogy csökken az északi-sarki jég felülete. Ha csak annyit feltételezünk, hogy az északi-sarki jég mennyisége évente 2%-kal csökken, hány év múlva csökken felére a jég mennyisége? ● 3

_____ év múlva.

12 Döntse el a szabályos hatszögre vonatkozó alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis! ● 4

A) A szabályos hatszög köré írható kör sugara kétszerese a beírható kör sugarának.

B) A szabályos hatszög legnagyobb átlójának hossza kétszerese az oldal hosszának.

C) A szabályos hatszög minden szöge 120°-os.

D) A szabályos hatszögnek 6 szimmetriatengelye van.

A) ..... *B)* ..... *C)* ..... *D)* .....

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 Egy labdarúgó-mérkőzés kétszer 45 percig tart. A játékvezető mindkét félidő végén hosszabbíthat néhány percet a cserék és ápolások miatt. a 4

A játék nem folyamatos, a tiszta játékidő egy mérkőzésen az az időtartam, ameddig a labda játékban van. b 4

Egy mérkőzésen a játékvezető az első félidő végén 1 percet, a második félidő végén 5 percet hosszabbított, így a mért tiszta játékidő 63 perc volt. c 4 ö 12

a) A játékidő hány százalékában volt játékban a labda? A választ egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Azt is lemérték, hogy a hazai csapat a tiszta játékidő 58%-ában birtokolta a labdát.

b) Mennyi ideig volt a vendégcsapatnál a labda? Az eredményt egész másodpercre kerekítve adja meg!

A mérkőzés során mindkét csapatnak 11 játékosa van a pályán, de cserékre is lehetőség van. A hazai csapat átlagéletkora a mérkőzés kezdetén pontosan 27 év volt. A második félidőben végrehajtott első cserénél egy 33 éves játékos helyett egy 18 éves játékos állt be.

c) Mennyi lett így a csapat életkorának átlaga? Az eredményt egy tizedesre kerekítve adja meg!

14 A hőmérséklet mérésére többfajta skálát használnak, ezek kapcsolatát a táblázat mutatja. A skálák egyenesen arányosak.

a 3 ☐
b 4 ☐
c 5 ☐
ö 12 ☐

Hőmérsékletskála	A jég olvadáspontja	A víz forráspontja
Celsius: °C	0	100
Kelvin: K	273	373
Fahrenheit: °F	32	212
Réaumur: °R	0	80

→ 110

a) Adja meg Réaumur-fokban a 300 K hőmérsékletet!

b) A 28 °C hőmérséklet hány Fahrenheit-fok?

c) Adja meg Kelvinben az 50 °F hőmérsékletet!

15 Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a 5 ☐
b 7 ☐
ö 12 ☐

a) $x + 4 = \sqrt{5v + 26}$

b) $\frac{8^{2x-1}}{16^x} \cdot 32^{2x-3} = 16 \cdot 4^{x-1}$

II. rész/B

A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

16 A „mindkét irányból behajtani tilos" közlekedési tábla kör alakú. A kör átmérője 60 cm, a szélén 7 cm széles piros sáv veszi körül a belső fehér részt. (A tábla külső, keskeny fehér szegélyét nem vesszük figyelembe.)



a 6 ☐
b 5 ☐
c 6 ☐
ö 17 ☐

a) A tábla hány százaléka piros?

b) Milyen széles piros sáv esetén lenne a táblán a fehér és piros részek aránya 2 : 1?

Egy közlekedési táblákat tartó szerkezetre egymás mellé négy táblát szeretnének kirakni: egy téglalap, egy háromszög, és két különböző kör alakú táblát.

c) Hány különböző sorrendben helyezhetik el a táblákat úgy, hogy a két kör alakú tábla ne legyen egymás mellett?

17 Az ötöslottó-sorsoláson 90 számból 5-öt húznak ki, a játékosok szintén 5 számot jelölnek be a szelvényükön.

a 4 ☐
b 4 ☐
c 9 ☐
ö 17 ☐

Józsi bácsi kitöltött egy ötöslottó-szelvényt, és nézi a televízióban a lottósorsolást.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy az első kihúzott szám szerepel a szelvényén? Az eredményt négy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Amikor kihúzzák az első számot, kiderül, hogy nem találta el, és ugyanez történik a második számnál is.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy harmadikra kihúznak egyet a számai közül? Az eredményt négy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

A harmadik kihúzott szám egyike Józsi bácsi számainak. A sorsolás folytatódik.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a sorsolás végén legalább 2 találata lesz Józsi bácsinak? Az eredményt négy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

↑ 112

18 Amikor Léna született, az édesanyja 24 éves volt.

a 5 ☐
b 12 ☐
ö 17 ☐

a) Hány éves lesz Léna akkor, amikor az anyukája háromszor annyi idős lesz, mint a lánya?

Egy családban három gyermek van. Peti két évvel fiatalabb Matyinál, Zsuzsi szintén két évvel fiatalabb Petinél. Az apa 4 évvel idősebb, mint az anya.

Ha a család minden tagjának életkorát összeadjuk, 75 évet kapunk.

A három gyerek életkorának összege úgy aránylik a szülők életkorának összegéhez, mint 1 : 4.

b) Adja meg a család minden tagjának életkorát!

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

1 Írja át az 1848, tízes számrendszerbeli számot kettes számrendszerbe! ● 2

A szám kettes számrendszerben: _____

→ 115

2 Írja fel normálalakban a 0,000 000 078 · 0,000 035 szorzás eredményét! ● 2

A szorzat normálalakban: _____.

3 Adottak az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ ellentétes irányú vektorok, $|\vec{a}| = 13$ cm, $|\vec{b}| = 21$ cm. Mekkora az $|\vec{a} + \vec{b}|$? ● 2

$|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

4 Egy α hegyesszög esetén $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Adja meg $\sin\alpha$ pontos értékét! ● 2

$\sin\alpha =$ _____.

5 Átalakítások után döntse el, hogy melyik szám a nagyobb: ● 2

$$\log_7 \sqrt[3]{7^{10}} \quad \text{vagy} \quad \lg 10\,000?$$

A _____ a nagyobb.

6 A *Ki nevet a végén?* társasjátékban az a játékos teheti fel a bábuját a táblára, aki a dobókockával 6-ost dob. Mennyi a valószínűsége, hogy egy játékos a negyedik próbálkozására dob először 6-ost? ● 3

A valószínűség: _____.

7 Egy áru árát 20%-kal csökkentették, így 2944 Ft lett. Mennyi volt az ár a csökkentés előtt? ● 2

A csökkentés előtti ár: _____.

8 Hány átlója van a konvex, 16 oldalú sokszögnek? ● 2

Az átlók száma: _____.

9 Két pozitív szám közül a kisebb kétharmad része a nagyobbnak. A nagyobb szám hány százaléka a kisebbnek? ● 3

A nagyobb szám _____ %-a a kisebbnek.

10 Határozza meg a legkisebb pozitív egész számot, amely csak 0 és 7 számjegyeket tartalmaz és osztható 15-tel! ● 3

→ 116

A keresett szám: _____.

11 A 37 és 201 közé adjon meg három számot úgy, hogy az adott két számmal együtt egy számtani sorozat öt szomszédos elemét alkossák! ● 4

A három szám: _____; _____; _____.

12 Régen a tengerészek olyan távcsövet használtak, amelynek üvegébe négyzetháló volt karcolva. Ennek segítségével meg tudták állapítani, milyen messze van a távcsővel figyelt tárgy. ● 3



A tárgy magassága a távcsőben fordítottan arányos a távolsággal. A távolságot a hajózásban tengeri mérföldben mérték.

Az ábrán látható 3 egység magas hajó 24 tengeri mérföldre van a megfigyelőtől.

Milyen messze van a megfigyelőtől az az ugyanilyen hajó, amelyet 4 egység magasnak látnak a távcsőben?

A hajó _____ tengeri mérföldre van a megfigyelőtől.

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 A budapesti libegő a Zugligetből a János-hegyre vezető drótkötélpályás felvonó. A két állomás között a szintkülönbség 262 m, a libegő hossza 1040 m, ezt a távolságot 12 perc alatt teszi meg.

a) Mekkora szöget zár be a vízszintessel a kötélpálya?

b) Határozza meg a libegő sebességét $\frac{m}{s}$-ban és $\frac{km}{h}$-ban!

A libegőn az utasok 2 személyes padokon ülnek.

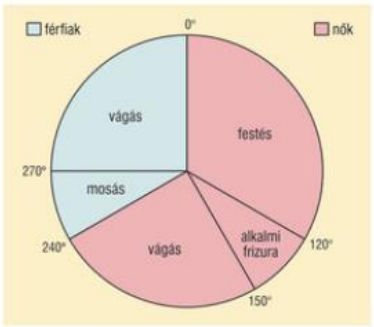
c) Hányféleképpen tud egy 10 fős társaság 5 egymást követő padon lemenni, ha a társaság két tagja, Lilla és Gábor az utolsó padon szeretne ülni együtt?

a 4
b 4
c 4
ö 12

→ 117

14 A „Vágesz" fodrászszalon női és férfi vendégeket is fogad. Az előző hónapban összesen 240-en vették igénybe a szalon szolgáltatásait.

A következő kördiagram azt mutatja, hogy a vendégek elsősorban milyen szolgáltatást kértek.



a) Készítsen kördiagramot az előző hónap női vendégeiről!

A hajfestést kérő nők 80%-a szőkítést kért. A szőkítést kérők 25%-a sminket is kért.

b) Kik voltak többen, akik szőkítést nem kérve festették a hajukat, vagy azok, akik szőkítést és sminket is kértek?

A hajvágást kérő férfiak közül 9-en díszcsík vágását is kérték a hajukba.

c) A hajvágást kérő férfiak hány százaléka kért díszcsíkot?

a 6
b 3
c 3
ö 12

15 Balázs és Oszkár kávézót működtet. Az üdítőitalok tálalásához félgömb alakú talpas poharakat szeretnének beszerezni.

Nem tudják eldönteni, hogy félliteres vagy 4 decis poharakat vegyenek. Balázs szerint legyen inkább 4 decis, annak legalább 1 cm-rel kisebb az átmérője, mint a félliteresnek, így több pohár férne a polcra.

a) Igaza van-e Balázsnak a két pohár átmérőjével kapcsolatban?

a 7
b 5
ö 12

A kávézó reklámakciója: „Nyerje vissza a számlája felét!".

Amikor fizetésre kerül sor, a pincér a 32 lapos magyar kártyából húz egy lapot, nem teszi vissza. Majd a társaság minden tagja szintén húz egyet-egyet, visszatevés nélkül. Ha a társaságból bárkinek a lapja „üti" a pincér által kihúzott lapot, akkor a számlán szereplő összegnek csak a felét kell kifizetni.

(A magyar kártyában négy „szín" van: piros, tök, zöld, makk. Mindegyik színből nyolc lap, erősorrendben: hetes, nyolcas, kilences, tízes, alsó, felső, király, ász. Egy lap akkor „üti" a másikat, ha azonos színű, és az erősorrendben felette áll. A zöld alsó például „üti" a zöld nyolcast, de nem üti a piros hetest.)

Egy ötfős társaság fizetni készül, a pincér hozza a számlát és a kártyacsomagot, kihúz belőle egy lapot, a makk kilencest. A társaság minden tagja húz egy-egy lapot.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a számla felét kell kifizetniük, azaz legalább egy vendég az öt közül olyan lapot húz, amelyik „üti" a makk kilencest?

II. rész/B

A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

16 Az A halmaz a valós számoknak az a részhalmaza, amelynek a elemeire teljesül, hogy $a^2 - a - 6 \leq 0$.

a) Írja fel intervallumként az A halmazt!

A B a valós számoknak az a részhalmaza, amelynek b elemeire teljesül a következő egyenlőtlenségek mindegyike:

$$2b - [6 - 2 \cdot (b - 1)] > -12 - 4 \cdot [b - 3 \cdot (2 - b)]$$

és

$$\frac{3}{4} \cdot (b + 2) - \frac{1}{2} \cdot (b - 2) < \frac{5}{6} \cdot (b + 6) - \frac{1}{3} \cdot (2b + 6).$$

b) Adja meg a B halmazt intervallumként!

c) Határozza meg az $A \cup B$ halmazt!

d) Mely egész számok vannak a $B \setminus A$ halmazban?

a 4
b 7
c 3
d 3
ö 17

17 Egy laboratóriumban egy veszélyes vírus ellenszerének hatását vizsgálják elektronmikroszkóp alatt. Az ellenszer alkalmazása során azt tapasztalják, hogy a mintában a vírusok száma az idő függvényében a $V_1(t) = 1000 \cdot 10^{-0{,}05t}$ függvény által leírhatóan változik, ahol t a kísérlet kezdetétől eltelt idő, órában mérve.

a) Hány darab vírus volt a mintában a kísérlet kezdetén?

b) Mennyi lesz a vírusok száma a mintában a kísérlet kezdete után 10 órával?

a 2
b 3
c 3
d 9
ö 17

A kutatók azt tapasztalták, hogy 20 órán keresztül az előbbi függvény szerint csökken a vírusok száma, ekkora viszont megszűnik az ellenszer hatása, és a vírusok szaporodni kezdenek, számuk az alábbi függvénnyel írható le: $V_2(t) = V_1(20) \cdot 10^{0{,}05(t-20)}$, ahol t a kísérlet kezdetétől eltelt idő órában mérve, $V_1(20)$ pedig a megelőző folyamat 20. órájában a vírusok száma.

c) Hány darab vírus lesz a mintában a kísérlet kezdetétől eltelt 40 óra múlva?

d) A kísérlet kezdetétől mérve mennyi idő múlva éri el a vírusok száma a kezdeti érték kétszeresét?

18 A monitorok képátmérőjét – ami a téglalap alakú monitor átlójának hosszát jelenti – általában colban adják meg. Egy col 2,54 cm.

a) Hány centiméter a 27 colos monitor szélessége és magassága, ha az oldalak aránya 16 : 9? Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

a 6 ☐
b 7 ☐
c 4 ☐
ö 17 ☐

→ 12:3

A fenti monitort, a rögzítése miatt, műanyag keret veszi körül. A keret alul 34 mm, a másik három oldalon 17 mm széles.

b) A készülék területének hány százaléka a rögzítő keret területe?

A monitor adatainál azt látjuk, hogy a képernyő felbontása 1920 × 1080 pixel.

c) Hány négyzetmilliméter egy képpont (pixel) területe? Az eredményt normálalakban adja meg!

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

1 Melyik a legnagyobb háromjegyű szám, amely 17-tel osztva 10-et ad maradékul? ● 2

A megfelelő szám: _____.

2 A (−3; 5) pontot tükrözzük a koordináta-rendszer x tengelyére. Adja meg a tükörkép koordinátáit! ● 2

→125

A tükörkép koordinátái: (_____; _____).

3 Adjon meg hét (nem mind egyenlő) pozitív egész számot, amelyek átlaga, mediánja és módusza egyaránt 17! ● 2

A hét lehetséges szám: _____

4 Mennyi a 360 és az 1200 legkisebb közös többszöröse? ● 2

A 360 és az 1200 legkisebb közös többszöröse: _____.

5 Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egymással 90°-os szöget zárnak be, $|\vec{a}| = 4$ cm, $|\vec{b}| = 3$ cm. Adja meg $|\vec{a} - \vec{b}|$ nagyságát! ● 2

$|\vec{a} - \vec{b}| =$ _____ .

6 Adja meg a $\sqrt{2x - 11}$ kifejezés értelmezési tartományát! ● 2

→125

Az értelmezési tartomány: _____ .

7 Mekkora területű körcikk tartozik a 28 cm sugarú körben a 67°-os középponti szöghöz? ● 2

A körcikk területe: _____ .

8 Alakítsa szorzattá az $x^2 - 8x + 12$ kifejezést! ● 3

A kifejezés szorzat alakja: (_____) · (_____).

9 A 32 és az 500 közé írjon két számot úgy, hogy az adott két számmal együtt egy mértani sorozat négy egymást követő tagját alkossák! ● 3

A beiktatott két szám: _____; _____.

10 Egy szabályos háromszög oldalai 16 cm hosszúak. Mekkora a háromszögbe írható kör sugara? ● 3

126

A háromszögbe írható kör sugara: _____.

11 A tőzsdén egy részvény árfolyama öt hónapon át a következők szerint változott: az első hónapban 12%-kal csökkent; a második hónapban 8%-kal nőtt; a harmadik hónapban 7%-kal nőtt; a negyedik hónapban 5%-kal csökkent; az ötödik hónapban 9%-kal nőtt. ● 3

Hogyan változott a kezdeti értékhez képest az ötödik hónap végére az árfolyam?

Az ötödik hónap végére _____ %-kal _____ a részvény árfolyama.

12 Az alábbi állítások mindegyikének adja meg a logikai értékét! ● 4

A) Két relatív prím szám összege lehet páratlan szám és páros szám is.

B) Az irracionális számok tizedes tört alakja mindig végtelen szakaszos.

C) Két racionális szám összege mindig racionális.

D) Két racionális szám szorzata nem lehet egész szám.

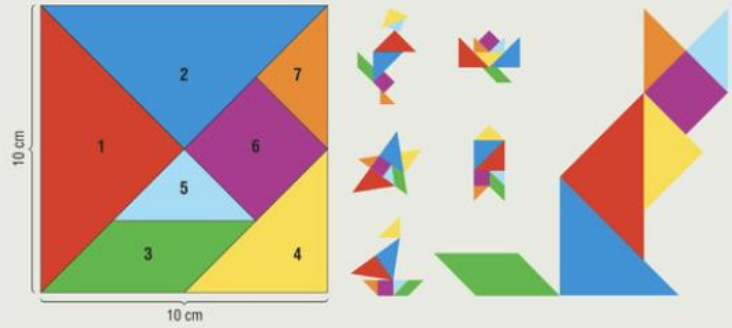
A) _____ *B)* _____ *C)* _____ *D)* _____

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 A tangram egy ősi kínai kirakójáték. A játék célja: 7 „tangramkő" segítségével kirakni különböző alakzatokat, illetve megfejteni, hogy egy megadott alakzatban hogyan helyezkednek el a kövek. A játék során minden követ fel kell használni. Az egyenlő szárú derékszögű háromszögek, a négyzet és a paralelogramma egy 10 cm oldalhosszúságú négyzet feldarabolásával jönnek létre.

a 3 ☐
b 4 ☐
c 5 ☐
ö 12 ☐



a) Mekkorák a 6-os számmal jelölt négyzet oldalai? Az eredményt centiméterben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

b) A 3-as számú paralelogramma területe hány százaléka az eredeti négyzet területének?

c) Hányféleképpen színezhetők ki az ábra szerinti négyzetben elrendezett kövek piros, zöld és kék színekkel, ha az egymással oldallal szomszédos részek nem lehetnek azonos színűek?

14 *a)* Hány olyan 4 jegyű pozitív egész szám van, amelyek 12-vel osztva 5-öt adnak maradékul?

a 7 ☐
b 5 ☐
ö 12 ☐

b) Mennyi az összege azoknak a legfeljebb 4 jegyű pozitív egész számoknak, amelyek 12-vel osztva 5-öt adnak maradékul?

15 A derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(5; 4)$ és a $B(10; -6)$ pontok.

a 4 ☐
b 8 ☐
ö 12 ☐

a) Az abszcisszatengely melyik pontja van A-tól és B-től egyenlő távolságra?

b) Az abszcisszatengely mely P pontjára igaz, hogy $\frac{AP}{BP} = \frac{1}{2}$?

→ 127

II. rész/B

A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

→ 130

16 Színaranyból nem készítenek ékszert, mert az lágy ahhoz, hogy tartósan viselhető legyen. Ezért, hogy keményebbé és egyben ellenállóbbá tegyék, a színaranyhoz meghatározott arányban más fémeket adnak. A színarany tartalom határozza meg, hogy hány karátos az arany. Az ötvösök rendszerint 14 és 18 karát érték közötti arannyal dolgoznak; ezekben $\frac{14}{24}$ és $\frac{18}{24}$ tömegrész közötti arany van.

a 3 ☐
b 6 ☐
c 8 ☐
ö 17 ☐

Egy arany karkötő 12 gramm rezet, 28 gramm aranyat és 8 gramm ezüstöt tartalmaz.

a) Hány karátos a karkötő?

Összeolvasztanak egy 20 grammos 15 karátos és egy 50 grammos 18 karátos arany ékszert.

b) Hány karátos lesz az ötvözet? Az eredményt két tizedes pontossággal adja meg!

Egy 30 grammos 14 karátos gyűrűből színarany hozzáadásával 18 karátos aranyat szeretnének előállítani.

c) Hány gramm színaranyat adjanak hozzá?

17 A matematikus család – anya, apa és fiuk, Félix – strandra mentek. A strandon 6 óriás csúszda van. Félix nagyon szeretne sokszor lecsúszni, de mivel drága, a szülei olyan jegyet vesznek neki, amellyel két csúszdán összesen 5-ször csúszhat le.

a 7 ☐
b 5 ☐
c 5 ☐
ö 17 ☐

a) Hány különböző módon tud Félix 5-ször lecsúszni, ha ő választhatja ki, hogy melyik kettőt használja, és legalább egyszer mind a kettőt kipróbálja?

Félix nem tud dönteni, mert a 2-es és 5-ös csúszda a leghosszabb, de a többinek meg az alakja érdekesebb. Végül az apja javaslatára dobókockával sorsolnak.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy kockával kétszer dobunk, akkor a két dobás eredménye (valamilyen sorrendben) 2-es és 5-ös lesz?

A sorsolás eredménye 1-es és 5-ös lett. Félix kétszer csúszott az 1-esen és háromszor az 5-ösön.

c) Hány különböző sorrendben tehette ezt meg?

18 A Föld legmagasabb hegycsúcsának a neve tibeti nyelven Csomolungma (A Föld Istenasszonya). A csúcs angol elnevezése Mount Everest, nevét Sir George Everestről kapta, aki 1823 és 1843 között feltérképezte egész Indiát. Mérési módszere az úgynevezett „háromszögelés" volt. A módszer lényege, hogy két pont ismert távolságának és a mérhető szögeknek a segítségével ki lehet számítani újabb távolságokat.

a 6
b 11
ö 17

a) A tengerparton két világítótorony távolsága 10 000 m. Legyen az egyik pont A, a másik B, mindkét pont jól látható a másikból. A tengeren áll egy hajó, szintén mindkét helyről jól látható, helyét jelöljük C-vel. Az A és B pontoknál egy-egy szögmérő eszközt elhelyezve lemérhetők az alábbi szögek: $CAB\sphericalangle = 42°$ és $CBA\sphericalangle = 35°$.

Milyen távol van a hajó az AB egyenestől (vagyis a tengerparttól)?

b) A síkságon vegyünk fel két egymásból is jól látható helyet, A-t és B-t, ezek távolsága 1000 m. Mindkét pontból jól látható a síkság szélén lévő hegy. Jelölje a hegy csúcsát C, a csúcsnak a síkra eső merőleges vetületét T. (Ez a pont nem látható, de csak az A és B pontoktól mérhető irányára lesz szükség). Az A és B pontokban felállított szögmérő eszközökkel lemérjük a vízszintes síkban mérhető $TAB\sphericalangle = 78°$ és $TBA\sphericalangle = 83°$ szögeket. Az A pontban pedig a függőleges síkban mérhető $TAC\sphericalangle = 18°$ szöget, ami a hegyhez tartozó A pontbéli látószög. Ezen adatok ismeretében számítsa ki a hegy magasságát, vagyis a TC távolságot!

→ 132

7. feladatsor

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

1 Ha egy szem búza tömege $5 \cdot 10^{-2}$ gramm, akkor 1 kg búza hány szemet tartalmaz? ● 2

1 kg búza _____ szemet tartalmaz.

2 A gyorsúszás döntőjébe 8-an kerültek be. Hányféle dobogós sorrend lehet, ha nincs holtverseny? ● 2

→135

_____-féle dobogós sorrend lehet.

3 Adja meg a következő állítások logikai értékét! (Melyik igaz, melyik hamis?) ● 2

A) Egy deltoid nem lehet trapéz.

B) Minden rombusz trapéz.

A) _____ *B)* _____

4 Évi 20%-os kamatra betettünk 1 000 000 forintot a bankba. Hány év múlva kaptunk vissza 2 985 984 forintot, ha a kamatláb végig 20% volt? (A pénzükből ez idő alatt nem vettünk ki, és a bank évenként tőkésítette a kamattal megemelt összeget.) ● 3

A pénzünket _____ évre tettük be a bankba.

5 Egy kör középpontja a koordinátasík második negyedében van. Írja fel az egyenletét, ha a kör sugara 10 egység, és érinti mindkét koordinátatengelyt! ● 2

A kör egyenlete: _____.

6 Egy derékszögű háromszög egyik befogójával szemben lévő szög 20°. Hány centiméter a derékszögű háromszög átfogója, ha 5 cm-rel hosszabb, mint a 20°-os szöggel szemben lévő befogó? (Válaszát egy tizedesjegy pontossággal adja meg!) ● 4

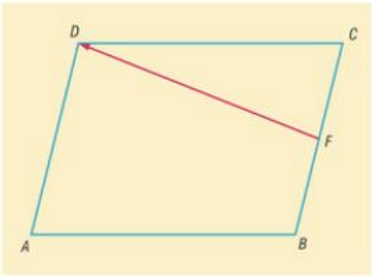
A derékszögű háromszög átfogója _____ cm.

7 Hány olyan 200-nál kisebb pozitív egész szám van, amely osztható 6-tal és 4-gyel, de nem osztható 5-tel? ● 4

_____ darab ilyen szám van.

↑ 135

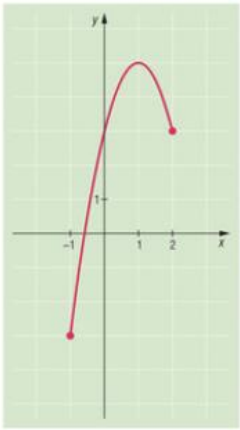
8 Az $ABCD$ paralelogramma CB oldalának felezőpontja F. Fejezze ki $\overrightarrow{FD}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokkal!



2

$\overrightarrow{FD} =$ _____.

9 Az ábrán látható függvény a $[-1; 2]$ intervallumon van értelmezve. Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát!



2

A) $f(x) = -2(x + 1)^2 + 5$

B) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 5$

C) $f(x) = -2(x - 1)^2 + 5$

D) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 5$

A helyes válasz betűjele: _____.

→ 136

10 Egy derékszögű háromszög befogói 20 cm és 21 cm hosszúak. Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?

2

$r =$ _____.

11 Egy 10 cm oldalú négyzetlap pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a választott pont a négyzet valamelyik csúcsától legfeljebb 5 cm távolságra van? ● 2

A valószínűség: _____.

12 Egy matematikaversenyen 15 feladatot kellett megoldani. A pontozás $8H - 4R$ képlettel történik, ahol H a helyesen megoldott feladatok száma, R a rossz megoldások száma. Félix minden feladatra adott megoldást, így 84 pontot kapott. Hány jó megoldása volt Félixnek? ● 3

→137

Félixnek _____ jó megoldása volt.

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 A koordináta-rendszerben felrajzolt ABC háromszögben $A(2; -3)$, $B(-7; 2)$, és a BC oldal felezéspontja $F(5; 6)$. a 4 b 4 c 4 ö 12

a) Adja meg a C csúcs koordinátáit!

b) Írja fel a háromszög AB oldalával párhuzamos középvonalának az egyenletét!

Az A, B, C és F betűket az összes lehetséges sorrendben leírjuk egymás mellé.

c) Ezek között hány olyan sorrend szerepel, amelyben az A és B betű nem egymás mellett áll?

14 Oldja meg

a) az $\frac{x^2+1}{2} = 2x - 1$ egyenletet a valós számok halmazán!

b) a $\sqrt{x+4} = x+2$ egyenletet az egész számok halmazán!

a 5 ☐
b 7 ☐
ö 12 ☐

15 Egy rendezvényházban húrtrapéz alakú nézőteret alakítottak ki, amelynek hosszabbik alapja 20 m, rövidebbik alapja 8 m, a szára pedig 12 m hosszú.

a) Legfeljebb hány széksor helyezhető el az alapokkal párhuzamosan, ha egy széksor mélysége legalább 110 cm?

a 3 ☐
b 5 ☐
c 4 ☐
ö 12 ☐

A nézőtérre 8 sort építettek be. Az első sorba 18 széket helyeztek el, és minden további sorba ugyanannyival többet, mint az előzőbe. Így a nézőtéren 200 ember láthatja az előadásokat.

b) Hány székkel van több minden sorban, mint az előzőben?

A rendezvényház által szervezett vetélkedőre 8 csapat nevezett. A csapatok elért pontszámait az alábbi táblázat mutatja.

Csapatok sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Pontszám	60	90	50	50	70	80	60	50

c) Ábrázolja a pontszámokat dobozdiagramon!

↑ 139

II. rész/B

A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

16 Rudolf elfelejtette a laptopja hatjegyű belépési kódját. Arra emlékezett, hogy az első négy számjegy ebben a sorrendben 5913, valamint a hatjegyű szám osztható volt öttel és kilenccel is.

a) Mi lehetett Rudolf belépési kódja?

a 4 ☐
b 10 ☐
c 3 ☐
ö 17 ☐

Rudolf egyik facebookos bejegyzésével három nap alatt 156 megosztást ért el. Rudolf mindennap felírta az aznapi megosztások számát, és azt vette észre, hogy a három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Ha az első napi megosztások számából kivonta a harmadik napi megosztások számát, 96 lett a különbség.

b) Hány megosztása volt Rudolf bejegyzésének a második napon?

Rudolf, Lali, Guszti, Hunor és Kázmér is tagja a *Szeretem a matematikát* csoportnak. Lali szerint az elmúlt héten ötük közül mindenki pontosan három emberrel találkozott személyesen, hogy megoldják a matematika házi feladatot.

c) Igaza lehet-e Lalinak? (A válaszát indokolja!)

17 Egy társaság találkozót szervez, amelyen vacsorázni is szeretnének. A szóba jöhető helyszíneken pizza, lazacos szendvics vagy hamburger közül legalább az egyiket lehet kapni. Közülük négy helyen árulnak pizzát, három helyen lazacos szendvicset és négy helyen hamburgert. A megadott ételek közül pontosan kétfélét egy helyszínen lehet kapni, és ez a kétféle étel a lazacos szendvics és a hamburger. Tudjuk, hogy mind a három ételt csak egyetlen helyen árulják.

a 6 ☐
b 6 ☐
c 5 ☐
ö 17 ☐

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az adott helyszínek közül kettőt kiválasztva, mind a kettőben (a felsorolt ételek közül) csak pizzát lehet kapni?

A társaságban megbeszélik, hogy mindenki piros, fehér, zöld vagy kék színű pólót húz az esti találkozóra. Hat ember kivételével mindenki piros pólót húzott, öt ember kivételével mindenki fehéret, hat ember kivételével mindenki zöldet, és hét ember kivételével mindenki kéket.

b) Hány fős a társaság?

A társaság két tagja, Béla és Zoli kerékpárral érkezik a találkozó helyszínére. Béla $24\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, Zoli $20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel kerékpározik. Zoli 18 órakor indul, és így 30 perc alatt ér a helyszínre.

c) Hány órakor induljon Béla, ha Zolival egy időben szeretne odaérni, de az általa megtett út 2 km-rel kevesebb?

18 Adél anyukája csonkakúp alakú felmosóvödröt vásárolt. A magassága 30 cm, az alja 20 cm átmérőjű kör, a teteje 28 cm átmérőjű kör.

a 3 ☐
b 5 ☐
c 9 ☐
ö 17 ☐

a) Hány liter víz fér a vödörbe? (A választ egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

Adél anyukája az új vödörbe 15 cm magasságig tiszta vizet enged.

b) Hány liter víz van a vödörben? (A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

Amikor a vödörben 15 cm magasan áll a víz, Adél beleteszi a vödörbe a játék teknősét.

c) Hány köbcentiméter a játék teknős térfogata, ha azt teljesen ellepi a víz, és a vízszint 3 cm-t emelkedik?

143

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

1 Egy zacskóban kétféle cukorka van. Hány szem cukor van a zacskóban, ha a cukrok 35%-a málnás, és a narancsos cukorkák száma 39? ● 2

A zacskóban _____ szem cukor van.

2 Adja meg a 992^{2021} utolsó számjegyét! (Válaszát indokolja!) ● 3

Az utolsó számjegy: _____.

3 Egy háromszög két oldala 20 m és 50 m, az általuk bezárt szög 70°. Hány méter a háromszög harmadik oldala? (Válaszát méterekben, egészekre kerekítve adja meg!) ● 3

A háromszög harmadik oldala: _____ m.

4 Adja meg a értékét, ha teljesül rá, hogy $9^3 \cdot (3^{-1} \cdot 3^a)^4 = 3^{20}$! (Válaszát indokolja!) ● 4

Az a értéke: _____.

5 Egy osztály 32 tanulója közül 18 már járt Sopronban, és 87,5%-a volt már a Tisza-tónál. Hányan jártak már mind a két helyen, ha nincs olyan tanuló, aki egyik helyen sem volt még? ● 2

Mindkét helyen _____ tanuló járt.

6 Egyszerűsítse a következő algebrai törtet! ● 2

$$\frac{a^2 - 4b^2}{a^2 - 2ab}$$

A tört egyszerűsített alakja: _____.

7 Egy háromszög oldalainak hossza 8 cm, 11 cm és 13 cm. Mekkora annak a hozzá hasonló háromszögnek a legrövidebb oldala, amelynek kerülete 4,8 dm? ● 2

A hasonló háromszög legrövidebb oldala: _____ cm.

8 A következő táblázat egy dolgozat eredményeit tartalmazza: ● 2

Érdemjegy	jeles	jó	közepes	elégséges	elégtelen
Dolgozatok száma	3	12	9	4	2

Adja meg az adathalmaz átlagát és mediánját!

Az adathalmaz átlaga: _____.

Az adathalmaz mediánja: _____.

→ 149

9 Egy dobozban 5 fehér, 4 piros és 3 kék golyó van. Háromszor egymás után véletlenszerűen kihúzunk egy-egy golyót, megnézzük és visszatesszük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyik kihúzott golyó sem lesz piros? ● 3

A valószínűség: _____.

10 Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! ● 3

A) Van olyan prímszám, amelynek az osztói között van páros szám.

B) Ha egy szám osztható 6-tal és 4-gyel, akkor osztható $6 \cdot 4 = 24$-gyel is.

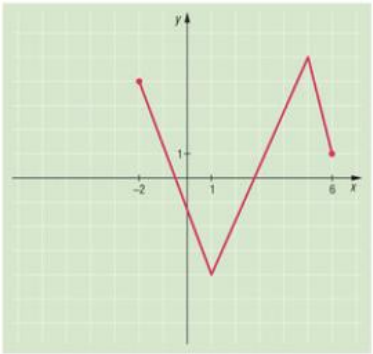
C) A 101001_2 kettes számrendszerbeli szám nem osztható kettővel a tízes számrendszerben.

A) _____ *B)* _____ *C)* _____

11 Egy 9 csúcspontú teljes gráf minden élét kiszíneztük piros vagy kék színnel. Hány élt színeztünk kékkel, ha a piros élek száma 30? ● 2

A kék élek száma: _____.

12 Adja meg az ábrán látható függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! ● 2



Az értelmezési tartomány:

_____

Az értékkészlet:

_____

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 Az A és B halmazokat a következőképpen definiáljuk:

$A = \{\text{Az } \frac{1}{x^2 - 6x - 16} \text{ kifejezés értelmezési tartománya.}\}$

$B = \{\text{A } \sqrt{x^2 - 6x - 16} \text{ kifejezés értelmezési tartománya.}\}$

a 6 ☐
b 2 ☐
c 4 ☐
ö 12 ☐

a) Adja meg az A és B halmazokat!

b) Adja meg az $A \cap B$ és az $A \cup B$ halmazokat!

Tekintsük a B halmaz azon pozitív egész elemeit, amelyek nem nagyobbak 19-nél, majd rendezzük ezeket az elemeket sorba!

c) Az összes lehetséges sorba rendezés között hány olyan van, amelyben a 15, 16 és 17 számok egymás után növekvő sorrendben szerepelnek?

14 Egy takarítócég egy nagy teljesítményű porszívót vett 108 000 forintért, és egy felmosógépet 735 000 forintért. A porszívó évenkénti amortizációja 15%, a felmosógépé 8%. (Az évi amortizáció azt jelenti, hogy egy év elteltével a gép ára hány százalékkal csökken.)

a 3 ☐
b 6 ☐
c 3 ☐
ö 12 ☐

a) Hány százalékra csökken a két gép együttes ára 3 év múlva? (Válaszát két tizedesjegy pontossággal adja meg!)

A cég az egyik ügyfelének irodaházát a régi felmosógéppel 3 órával hosszabb idő alatt takarítja ki, mint az újjal. Mindkét gépet egyszerre használva 2 óra alatt végeznek.

b) Hány óra alatt takarítja ki a cég az irodaházat az új felmosógéppel?

Az irodaház dolgozóinak legmagasabb iskolai végzettségét összesíti a következő táblázat:

c) Ábrázolja kördiagramon, hogy hány nő és hány férfi dolgozója van az irodaháznak!

Legmagasabb iskolai végzettség	Férfi (fő)	Nő (fő)
Általános iskola	12	21
Középiskola	23	65
Felsőfok	15	44

→151

15 Egy pékségben kifliből, zsemléből, sajtos pogácsából és túrós pogácsából zárás előtt fél órával már csak 60 darab van összesen. A zsemlék száma a kiflik számának $\frac{2}{5}$ része, a sajtos pogácsák száma pedig a zsemlék számának 75%-a. Túrós pogácsából 9 darab van.

a) Adja meg, hogy a pékségben a fenti péksüteményekből zárás előtt fél órával hány darab van!

A kifli, zsemle, sajtos pogácsa és túrós pogácsa darabonkénti árának aránya: 2 : 2 : 4 : 5. Zárás előtt ezeket 25%-kal leárazták, így a péksütemények ára összesen 2475 forint lett.

b) Hány forintba került eredetileg egy túrós pogácsa?

c) Hány forint volt leárazás előtt a 60 péksütemény árának szórása?

a 4 ☐
b 4 ☐
c 4 ☐
ö 12 ☐

II. rész/B

A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

→ 153

16 A koordinátasíkon az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának két végpontja $A(6; 2)$ és $B(0; 10)$. Az egyik befogó egyenlete $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

a) Írja fel az átfogó egyenletét!

b) Adja meg a háromszög C csúcsának koordinátáit!

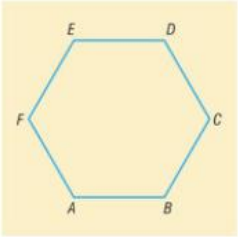
Az ABC derékszögű háromszög átfogójának hossza egy mértani sorozat első tagja. A második és harmadik tagjának összege 20.

c) Adja meg a mértani sorozat első hat tagjának összegét!

a 3 ☐
b 8 ☐
c 6 ☐
ö 17 ☐

17 Az ábrán az egységnyi oldalú, belül festetlen $ABCDEF$ szabályos hatszög látható.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}$ vektor hosszát!



Egy hangya a hatszög kerületén mászik pozitív forgásirányban. Az A csúcsból indul, az első percben egy egységnyi utat tesz meg, és minden rákövetkező percben egy egységgel nagyobb távolságot tesz meg, mint az előzőben.

b) A hatszög melyik csúcsában lesz a hangya 25 perc elteltével?

a 3 ☐
b 5 ☐
c 5 ☐
d 4 ☐
ö 17 ☐

A hatszög belsejében és határvonalán mindazon P pontokat pirosra festjük, amelyekre teljesül, hogy $PB \leq PA$ és $PB \leq PC$.

c) Adja meg a pirosra festett síkidom kerületét!

Az $ABCDEF$ hatszög 6 különböző csúcsába Marika elhelyezett 4 piros és 2 kék korongot.

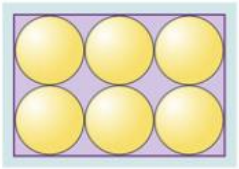
d) Hányféleképpen tehette ezt meg Marika, ha a 2 kék korong nem került egymás mellé?

18 Egy cukrászdában olyan marcipángolyókat készítenek, amelyeknek a közepében egy-egy szem mogyoró van. A marcipángolyók 3 cm átmérőjű gömbök, bennük az ugyancsak gömb alakú mogyorószemek átmérője 12 mm.

a) A marcipán térfogata hány százaléka a mogyoró térfogatának?

a 3 ☐
b 3 ☐
c 5 ☐
d 6 ☐
ö 17 ☐

A golyókat tizenkettesével csomagolják egy téglatest alakú papírdobozba, amelyben egymás fölé az ábrán látható módon 6-6 golyót tesznek.



b) Hány négyzetméter karton szükséges 100 doboz elkészítéséhez, ha a felhasznált karton mennyiségének 15%-a az összeilleszésekhez kell?

A cukrászdában 100 marcipángolyót készítettek. Azonban kiderült, hogy a kikészített 100 szem mogyoró nem fogyott el, megmaradt 5 szem. (A száz darab édesség között tehát van 5, amelybe nem került mogyoró.)

c) A 100 golyó közül véletlenszerűen kiválasztva 12 darabot, mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb egy marcipángolyóban nincs mogyoró? (Válaszát három tizedesjegyre adja meg.)

Nagy mennyiségű vízben kisebb mennyiségű cukor oldódása időben exponenciálisan zajlik az $M(t) = M_0 \cdot 0{,}95^t$ formula szerint. (A t a cukor vízbe kerülésétől eltelt időt jelenti percekben mérve; $M(t)$ a t időpontig még fel nem olvadt cukor mennyisége; M_0 pedig a teljes cukor mennyisége, amit a vízbe teszünk.)

A cukrászdában limonádét is készítenek.

d) A limonádéhoz szükséges vízben hány perc alatt oldódik fel a cukor $\frac{2}{3}$ része? (Válaszát percekben mérve egy tizedesjegyre kerekítse!)

→157

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

1 Egy cipő árát 30%-kal csökkentették, így az ára 14 700 forint lett. Mennyibe került eredetileg a cipő? ● 2

A cipő eredeti ára _____ forint volt.

2 Adottak a következő számok: $a = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^2$ és $b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. ● 2
Adja meg $[a; b]$ és $(a; b)$ prímtényezős felbontását!

$[a; b] =$ _____.

$(a; b) =$ _____.

3 Két pozitív szám mértani közepe 12. Ha az egyik szám 6, akkor mekkora a másik szám? ● 2

A másik szám: _____.

4 Adottak a következő intervallumok: $A = [-2; 3[$ és $B = [1; 5]$. ● 3
Adja meg a következő intervallumokat: $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \backslash B$!

$A \cup B =$ _____.

$A \cap B =$ _____.

$A \backslash B =$ _____.

5 A következő táblázat egy dolgozat eredményeit tartalmazza: ● 3 ☐

Érdemjegy	jeles	jó	közepes	elégséges	elégtelen
Dolgozatok száma	3	9	10	3	1

Adja meg annak a valószínűségét, hogy a dolgozatok közül egyet kiválasztva, annak az érdemjegye prímszám! Megoldását részletezze!

A keresett valószínűség: _____.

6 Adja meg a következő egyenlet megoldáshalmazát a valós számok körében! Megoldását részletezze! ● 3 ☐

$$(x + 1)^2 - 2x = 5$$

Az egyenlet megoldáshalmaza: _____.

7 Egy sífelvonó, amely percenként 120 m utat tesz meg, 4 perc alatt ér fel a hegytetőre. Hány méter magasra visz a sífelvonó, ha az emelkedési szög végig 32°? ● 3 ☐

A sífelvonó _____ m magasra visz.

8 Adja meg a következő kifejezés értékét, ha $a > 0$, $a \neq 1$! ● 3 ☐

$$\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{a^{-2}}$$

A kifejezés értéke: _____.

→ 160

9 Adja meg a értékét úgy, hogy az $y = 2x + 3$ és az $y = -\frac{a}{4}x + 3$ egyenletű egyenesek egymásra merőlegesek legyenek! ● 2

$a =$ _____.

10 *„Legalább hét ötösöm lesz matematikából."* ● 2

Adja meg, hogy a következő kifejezések közül melyik lehet ennek a mondatnak a tagadása!

A: Matematikából négy ötösöm lesz.

B: Legfeljebb hat ötösöm lesz matematikából.

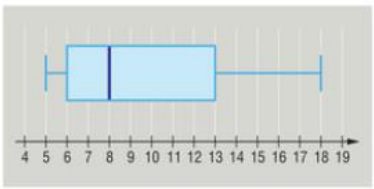
C: Matematikából nyolc ötösöm lesz.

Az állítás tagadásának betűjele: _____.

11 Egy mértani sorozat hányadosa 3, első három tagjának összege 52. Adja meg a sorozat második tagját! Megoldását részletezze! ● 3

A sorozat második tagja: _____.

12 Adjon meg 7 olyan adatot, amelyeknek a mellékelt ábrán látjuk a dobozdiagramját! ● 2



Adatok: _____ _____

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 Adott a következő függvény: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)^2 - 2$.

a) Adja meg $f(-10)$ értékét ötös számrendszerben!

b) Adja meg az f függvény értelmezési tartományának azon elemeit, amelyekhez a függvény a 2 értéket rendeli!

c) Oldja meg az $(x - 1)^2 - 2 \leq x - 1$ egyenlőtlenséget grafikus úton!

a 2 ☐
b 3 ☐
c 6 ☐
ö 11 ☐

14 Egy 30 fős kártyaklub tagjai között kétszer annyi szakállas van, mint szemüveges. Közülük öten szakállasok és szemüvegesek is.

a) Hány olyan ember van, aki csak szakállas, ha 8 embernek nincs se szakálla, se szemüvege?

a 4 ☐
b 5 ☐
c 3 ☐
ö 12 ☐

Egy pókerpartihoz véletlenszerűen kiválasztanak 6 játékost a klubtagok közül.

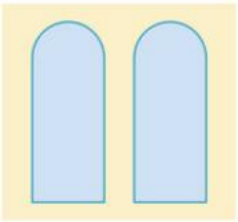
b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott emberek közül 1 szakállas és szemüveges is, 2 szakállas, de nem szemüveges, 3 pedig nem szakállas és nem szemüveges?

A kiválasztott hat ember Lajos, József, Kálmán, István, Mihály és Sándor. A játék előtt mindenki pontosan három emberrel fogott kezet. Kálmánnal István és Mihály is kezet fogott, Lajos viszont Józseffel és Istvánnal nem fogott kezet.

c) Kikkel fogott kezet Sándor?

→ 163

15 Egy iskola ablakainak alakja egy téglalap, felette egy félkör, és az egész felület üvegezve van. A téglalap függőleges oldala kétszer olyan hosszú, mint a vízszintes oldala.



a) Az iskola 22 ilyen ablakán összesen hány négyzetméter üvegfelületet van, ha egy ablak kerülete 591 cm? (Válaszát egy tizedesjegy pontossággal adja meg!)

a 7 ☐
b 3 ☐
c 3 ☐
ö 13 ☐

A hőveszteség mértéke egyenesen arányos a szigetelőfelület méretével, valamint a külső és belső hőmérséklet közötti különbséggel. A hőátbocsátási tényező azt mutatja meg, hogy a szigetelő közeg egy négyzetméterén egy másodperc idő alatt hány joule hőenergia távozik, ha a külső és a belső oldal hőmérséklete között 1 °C a különbség.

Télen az iskolában 5 napon keresztül átlagosan 21 °C volt a belső, és −2 °C volt a külső hőmérséklet. Az ablakokban lévő nem hőszigetelt ablaküveg hőátbocsátási tényezője 5,8.

b) Hány megajoule hő távozott az iskola 22 ablakának üvegfelületén keresztül a megfigyelt időszakban összesen?

Az iskola udvarán 36 tanuló vesz részt testnevelésórán.

c) Hányféleképpen sorakozhatnak fel a tanulók téglalap alakzatban, ha a sorok és oszlopok számának is nagyobbnak kell lennie 1-nél? (A sorokat és oszlopokat megkülönböztetjük.)

II. rész/B

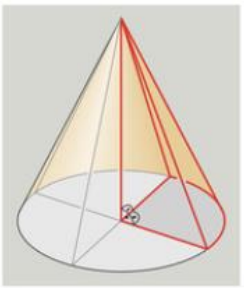
A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

16 Egy fából készült forgáskúp térfogata 2261,95 cm^3, alaplapja 24 cm átmérőjű kör.

a) Mekkora a kúp alkotója? (Válaszát centiméterekben mérve két tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

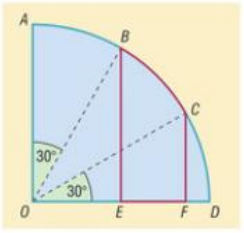
a 4 ☐
b 6 ☐
c 7 ☐
ö 17 ☐

Egy kirakós játékhoz a forgáskúpot a forgástengelyén áthaladó síkokkal az ábrán látható módon négy egybevágó, negyed körlap alapú kúpszerű testre vágtak szét, majd a teljes felületüket pirosra festették.



b) Hány négyzetcentiméter felületet kellett befesteni? (Válaszát százasokra kerekítse!)

Az ábrán egy 12 cm sugarú negyed körlap látható, amelynek középponti szögét harmadoltuk.



c) Adja meg a piros vonallal határolt síkrész kerületét!

→166

17 Egy kisvárosi klub 10 rendezvényén a következő számú nézőt regisztrálták:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
60	90	51	42	67	80	62	210	112	46

a) Mennyi a nézőszámok átlaga, mediánja és szórása?

Minden rendezvényre 950 Ft volt a belépő, és a klub alkalmanként 10 000 Ft-os önkormányzati támogatást is kapott. Ezenfelül a szponzorok minden eladott jegy után 60 Ft támogatást adtak.

b) A klub bevételének hány százaléka származott szponzori támogatásból?

A klub a nyereségének egy részét befekteti. Minden hónap első napján 10 000 forintot helyez el a bankban, amelyre a bank havi 0,1%-os kamatot fizet havonkénti tőkésítéssel. (A havonkénti tőkésítés azt jelenti, hogy a bankban lévő pénzhez minden hónap végén hozzáadják a havi kamatot, és a következő hónapban a kamatokkal megnövelt összeg kamatozik tovább.)

c) Mennyi lesz a klub kamatokkal megnövelt megtakarítása 50 hónap elteltével?

A klub olyan logót tervez, amely szabályos sokszög alakú.

d) Hány oldalú a szabályos sokszög, ha 18-cal több átlója van, mint oldala?

a 4
b 3
c 6
d 4
ö 17

18 Egy konyhai csap kifolyócsövének keresztmetszete 18 mm átmérőjű kör, amelyen keresztül 0,6 $\frac{m}{s}$ sebességgel folyik ki a víz.

a) Hány másodperc alatt telik meg egy 22 cm átmérőjű, 30 cm magas fazék?

Savanyúság eltevéséhez 5 liter 2%-os töménységű ecetes vizet kell készíteni. Ehhez 20%-os töménységű ecetet használunk.

b) Hány másodpercre kell megnyitni a csapot, hogy éppen annyi vizet engedjünk, amennyi a felöntőlé elkészítéséhez szükséges?

Eltettünk 6 üveg csalamádét és 5 üveg uborkát télire. Az üvegeket véletlenszerűen egy sorba rendezve feltettük a kamra polcára.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a csalamádés és mind az uborkás üveg egymás után helyezkedik el a polcon? (Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg!)

Egy áruházlánc gúlába rendezve árulja a dobozos savanyúságot. A legfelső sorban 4 doboz van, lefelé haladva pedig minden sorban 3-mal több, mint a felette lévőben.

d) Hány sor van a gúlában, ha összesen 175 dobozból áll?

a 3
b 4
c 5
d 5
ö 17

168

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

1 Két halmazról, A-ról és B-ről tudjuk, hogy $A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\}$, $A \cap B = \{d\}$ és $A \setminus B = \{a; b; c\}$. Adja meg elemeik felsorolásával a B halmaz elemeit! ● 2

$B =$ _____.

2 Az a-nak hányadik hatványa az $\frac{(a^3)^2 \cdot a^{-2}}{a^5}$ kifejezés? ● 2

A kifejezés a-nak _____ hatványa.

3 Adja meg az alábbi adathalmaz móduszát, mediánját és terjedelmét! ● 3

3; 3; −1; −1; −1; 5; 5; 8

→ 173

Módusz: _____. Medián: _____. Terjedelem: _____.

4 Adja meg t értékét úgy, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2t + 3)^x$ függvény szigorúan monoton növekedő legyen! ● 2

A t értéke: _____.

5 A hárommal osztható kétjegyű pozitív egészek közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám öttel is osztható? ● 2

A valószínűség: _____.

6 Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $y = \frac{2}{3}x + 2$ egyenletű egyenessel, és áthalad a $P(5; -2)$ ponton! ● 2

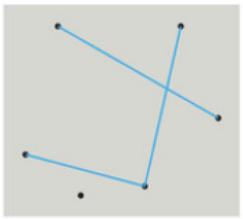
Az egyenes egyenlete _____.

7 Adja meg az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 3$ függvény minimumának a helyét és értékét! Megoldását részletezze! ● 4

→173

A minimum helye: _____. A minimum értéke: _____.

8 Az ábrán látható hatpontú gráfot egészítse ki további élekkel úgy, hogy mindegyik pont fokszáma 2 legyen! ● 2



9 A 40°-os szöget bezáró $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hossza egyaránt 20 egység. Milyen hosszú az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor? (Válaszát egy tizedesjegyre adja meg.) ● 4

Az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor hossza _____ egység.

10 Adja meg azt a valós számot, amelyhez az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ függvény a 4 értéket rendeli! ● 2

A valós szám: _____.

11 *Ha két egész szám mindegyike páratlan, akkor összegük páros.* ● 3

Fogalmazza meg a fenti állítás megfordítását, és adja meg a megfordítás logikai értékét (igaz vagy hamis)!

Az állítás megfordítása:

→175

Az állítás megfordításának logikai értéke: _____.

12 Adja meg a 4 cm élű kockába írt gömb felszínét! ● 2

A gömb felszíne: _____ cm^2.

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 A Budapest–Bamako jótékonysági túra és verseny hossza 2020-ban 8235 km volt. Egy csapat tagjai azt tervezték, hogy az első nap 1109 km-t vezetnek, majd minden további napon 80 kilométerrel kevesebbet, mint az előző napon, mivel a terep egyre nehezebb.

a) 4 ☐
b) 4 ☐
c) 4 ☐
ö) 12 ☐

a) Hány kilométert tettek meg a terv szerint a 12. napon, és hány kilométert tettek meg az első 12 napon összesen?

b) A terv szerint hány nap alatt tették meg a teljes távot, és hány kilométer maradt az utolsó napra?



Mali zászlója három színből áll: zöld, sárga és piros. A zöld a természetre, a sárga a tisztaságra és az ásványkincsekre, a vörös a bátorságra és a függetlenségért folytatott küzdelem során kiontott vérre utal. Egy iskolában a tanulóknak választ kell adniuk, hogy a természetet, a tisztaságot, az ásványkincseket, a bátorságot és a kiontott vért melyik szín szimbolizálja a zászlóban.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind az öt válasz helyes, ha véletlenszerűen választunk a zászlóban előforduló három szín közül, ügyelve arra, hogy ne csak egy szín szerepeljen a válaszok között?

14 Balog úr összesen 1 000 000 Ft-ot akar befektetni két nem egyenlő részletben kamatos kamatra. A pénz egyik részére egy év múlva lesz szüksége. Egyéves lekötésre a bank évi 3%-os kamatot fizet. A másik részt két évre fekteti be, amelynek a kamatlába évi 5%. (A kamatláb a befektetés ideje alatt változatlan.)

a) 7 ☐
b) 4 ☐
ö) 11 ☐

Balog úr azonban véletlenül felcserélte, hogy melyik összeget mennyi időre akarta befektetni, így a két befektetés után összesen 43 500 Ft-tal kevesebbet kap.

a) Mekkora összeget akart Balog úr egy évre betenni a bankba?

A 315 cm széles és 405 cm hosszú konyha felújításához négyzet alakú járólapokat vásárolnak. A járólap lerakását úgy szeretnék megoldani, hogy ne kelljen a lapok közül egyet sem elvágni.

b) Adja meg a feltételeknek megfelelő legnagyobb járólap oldalhosszúságát!

15 Egy derékszögű háromszög átfogója 39 cm, az egyik befogója 15 cm hosszú.

a) 4 ☐
b) 7 ☐
c) 2 ☐
ö) 13 ☐

a) Számítsa ki a háromszög harmadik oldalát és a szögeit!

A háromszög derékszögű csúcsánál lévő szögét osszuk 3 egyenlő részre két félegyenessel. Ezek a félegyenesek az átfogót három részre osztják.

b) Mekkora az átfogó három darabja?

→ 175

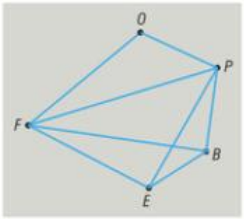
A derékszögű háromszöget a két félegyenes három területre osztotta.

c) Öt színnel hányféleképpen lehet kiszínezni a három területet úgy, hogy két szomszédos mező nem lehet azonos színű?

II. rész/B

A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

16 Erzsi reggel elindul otthonról (*O*). Délelőtt el akar menni a fodrászhoz (*F*), a postára (*P*), a bankba (*B*), majd utoljára meg akar ebédelni a kedvenc helyén (*E*). A következő ábra a most felsorolt helyeket mutatja az őket összekötő utakkal. Erzsi minden helyet csak egyszer szeretne érinteni, ezért megtervezi az utat, de látja, hogy több lehetőség is van, amelyek közül véletlenszerűen kiválaszt egyet.



a 5 b 8 c 4 ö 17

a) Adja meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott útvonalon Erzsi előbb jár a bankban, mint a postán!

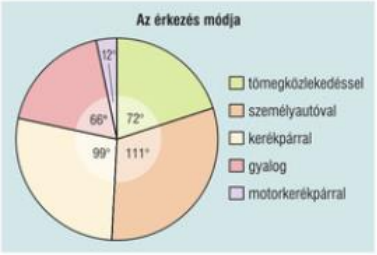
Erzsi kedvenc ebédlőhelyén ebben az évben már kétszer emelték a menü árát. Most másodszor – az alapanyagok drágulására hivatkozva – kétszer annyi százalékkal emelték az árat, mint előtte. Így ebben az évben a menü ára összesen 15,5%-kal emelkedett.

b) Hány százalékkal emelték másodszor a menü árát?

A menühöz Erzsi egy hasáb alakú mini lúdlábszeletet is kapott, amelyről megállapította, hogy az alapja egy 6,2 cm, 2,2 cm és 4,8 cm oldalhosszúságú háromszög. Szerinte így épp van egy 120°-os szöge a süteménynek.

c) Igaza van-e Erzsinek?

17 Felsőtárkányban a Bükk Nyugati Kapuja Látogatóközpont munkatársai egy szép őszi vasárnapon felmérték, hogy a központ vendégei milyen közlekedési eszközzel érkeztek. A felmérésről egy kördiagram készült.



a 4 b 8 c 5 ö 17

a) A kördiagram alapján töltse ki az alábbi táblázatot!

Közlekedési eszköz	tömeg-közlekedés	személy-autó	kerékpár	gyalog	motor-kerékpár
Létszám (fő)				22	

Egy másik hétvégi napon összesen 245 ember töltötte a szabadidejét a környéken. Mindenki az alábbi három elfoglaltság közül valamelyiken, esetleg több különbözőn is részt vett: gyalogtúra, kerékpározás és kisvonatozás. Nem volt olyan, aki kerékpározás mellett gyalogtúrázott volna, de a kerékpározók 10%-a felült a kisvonatra. A gyalogtúrázók 30%-a kisvonatozott is. A kisvonatra összesen 96 ember szállt fel, ebből 55-en csak a kisvonatot választották.

b) Számítsa ki, hogy hányan kerékpároztak ezen a napon Felsőtárkány környékén a 245 ember közül!

A felsőtárkányi erdei iskolába érkező 24 fős osztály számára 2 db 6 ágyas, 1 db 8 ágyas és 1db 4 ágyas szobát biztosítottak. Az osztályban 12 fiú és 12 lány van.

c) Hányféleképpen lehet a 24 tanulót elhelyezni az erdei iskola szobáiban úgy, hogy lányok és fiúk nem kerülhetnek egy szobába?

18 Egy repülőgép 11 000 m magasan repül. A Föld egy pontjából megfigyelve 56 perc idő telik el a horizont felett való megjelenésétől a horizont alá való érkezéséig.

a) Mekkora a repülőgép sebessége? (A repülőgép sebességét $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban százasokra kerekítve adja meg! A Föld sugarát vegye 6373 kilométernek!)

a 9 ☐
b 4 ☐
c 4 ☐
ö 17 ☐

A csillagok látszó fényességét magnitúdóban mérik. A Vega csillag látszólagos fényessége közelítőleg 0 magnitúdó.

Ha két csillag látszólagos fényessége m_1, illetve m_2 magnitúdó, valamint a két csillagról érkező fény intenzitása I_1, illetve I_2, akkor ezek között a következő összefüggés áll fenn: $m_1 - m_2 = -2{,}5 \lg \frac{I_1}{I_2}$.

b) Egy átlagember még képes látni egy olyan csillagot, amelynek a látszólagos fényessége 6 magnitúdó. A Vega fényintenzitása hányszorosa ennek a csillagénak?

A Nap látszólagos fényessége −26,8 magnitúdó.

c) Hány magnitúdó a telihold látszólagos fényessége, ha a Nap körülbelül 478 000-szer nagyobb fényintenzitású?

↑ 183

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

1 Hány éle van a 8 szögpontú teljes gráfnak? ● 2

A gráf éleinek száma: _____.

2 Legyen H = {20-nál kisebb pozitív egész számok}, P = {prímszámok}. Adja meg a $H \cap P$ halmaz elemeit! ● 2

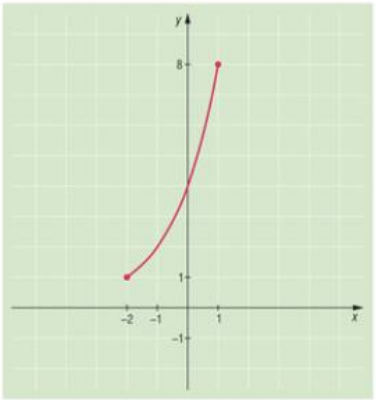
$H \cap P$ = {_____}.

3 Mekkora középponti szöghöz tartozik 17 cm hosszúságú húr a 11 cm sugarú körben? ● 2

A középponti szög: _____.

4 Az ábrán egy a $[-2; 1]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Döntse el, hogy a függvény hozzárendelési szabálya ● 2

$f(x) = 2^{x+2}$ vagy $g(x) = 4 \cdot 2^x$.



A függvény hozzárendelési szabálya:

_____.

→ 185

5 Az ABC háromszög két szögének nagysága a szokásos jelöléssel: $\alpha = 77°$; $\beta = 54°$. Mekkora szöget zár be a C pontból húzott szögfelező a szemközti oldallal? ● 2

A keresett szög: _____.

6 Mennyi a $2x^2 - 11x + 8 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa? ● 2

A diszkrimináns: $D =$ _____.

7 Ha egy útszakaszt $70\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 4 óra alatt teszünk meg, akkor mennyi idő alatt tennénk meg $90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel? ● 2

Az út megtételéhez szükséges idő: _____

8 Egy kör egy átmérőjének két végpontja $A(-3; 2)$ és $B(7; 4)$. Írja fel a kör egyenletét! ● 3

A kör egyenlete: _____

→ 185

9 A templomok harangjai általában negyedóránként jelzik az időt. Az egyik templom „kis" harangja minden egész óra után 15 perccel egyet kongat, 15 perc múlva kettőt, majd újabb 15 perc elteltével hármat, 15 perc múlva, azaz „egész órakor" pedig négyet. A kis harang négy kongatása után a „nagy" harang annyit kongat, ahány óra van. Az órákat 12 órás ciklussal méri, például délután 13 órakor csak egyet kongat. 4

Hányat kongat a kis harang, illetve a nagy egy nap alatt?

Egy nap alatt a kis harang kongatásainak száma _____, a nagy harangé _____.

10 Határozza meg azokat a négyjegyű számokat, amelyekben minden számjegy annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke! 2

A keresett számok: _____

11 Adott az *e* egyenesen 5 pont, a vele párhuzamos *f* egyenesen pedig 4 pont. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki? 4

→ 186

A létrejövő háromszögek száma: _____.

12 Egy dobozban 5 kék golyó van. Hány sárga golyót kell a dobozba tennünk, ha azt akarjuk, hogy ezután egy golyót véletlenszerűen kihúzva a dobozból, a kihúzott golyó 0,2 valószínűséggel legyen kék? ● 3 ☐

..... sárga golyót kell berakni a dobozba.

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 A gyümölcsitalokat általában téglatest alakú dobozban árusítják. Az egyik üdítőital dobozának alapja olyan téglalap, amelynek két oldala 63 mm és 70 mm. a 3 ☐ b 4 ☐ c 5 ☐ ö 12 ☐

a) Milyen magas a doboz, ha 1 liter ananászlé van benne? Az eredményt milliméter pontossággal, egész értékre kerekítve adja meg!

Egy másik doboz, amelyben ugyancsak egy liter gyümölcslé van, 195 mm magas. Alapéleinek aránya 2 : 3.

b) Mekkorák a doboz alapjának élei? Az eredményt milliméter pontossággal, egész értékre kerekítve adja meg!

Egy gyümölcsitalokat gyártó cég kóstolóval egybekötött bemutatót tart a termékeiből. A bemutatón ananász-, alma-, szőlő-, körte- és ribizliitalt kóstolnak a vendégek.

c) Hányféle sorrendben kínálhatják az italokat, ha az ananász és a ribizli nem jöhet egymás után?

→ 187

14 Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság 13 cm és 24 cm hosszú részekre vágja az átfogót. a 6 ☐ b 6 ☐ ö 12 ☐

a) Adja meg a háromszög oldalait és szögeit!

Az *ABC* szabályos háromszög oldalai 60 cm hosszúak. Az *A* csúcsot összekötjük a *BC* oldal két harmadolópontjával.

b) Mekkora részekre osztják a berajzolt szakaszok az *A* pontnál lévő szöget?

15 Babett az első félévben 23 jegyet szerzett az iskolában. A jegyeinek átlaga egy tizedesjegyre kerekítve 4,1.

a) Mennyi Babett ötöseinek maximális száma?

b) Minimum hány ötöse lehet Babettnek?

c) Lehet-e Babett jegyeinek egyetlen módusza hármas? Válaszát indokolja!

a 6 | b 3 | c 3 | ö 12

II. rész/B

A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

16 A kötvény egy speciális értékpapír, melyet kiadhat egy cég, önkormányzat vagy az állam. A megvásárló gyakorlatilag kölcsönt ad a kötvény kiadójának, az pedig a futamidő lejárta után visszafizeti azt, és meghatározott kamatot is ad.

Egy kötvény futamideje egy év, az éves kamata 5,2%, de a futamidő lejárta előtt is visszaváltható. Ebben az esetben a kötvény kibocsátója időarányos kamatos kamatot fizet, havi periódusban.

a 4 | b 3 | c 10 | ö 17

a) Karcsi ebből a kötvényből 5 000 000 Ft értékben vásárolt, de három hónap után szüksége van a pénzére, és szeretné visszaváltani a kötvényt. Mekkora összeget kaphat érte?

Egy másik kötvényt ötéves futamidővel és sávosan változó kamattal hirdetnek. Az első évben a kamat 3,5%, a második évben 4%, a harmadik évben 4,5%, a negyedik évben 5%, és az ötödik évben 5,5%. Ha valaki nem veszi ki közben a pénzét, az ötödik év végéig a kamatok is kamatoznak.

b) Béla 2 000 000 Ft-ért vásárolt ebből a kötvényből. Öt év múlva mekkora összegre tarthat igényt?

A *Babakötvény* a kisgyermek születésekor vagy később is vásárolható. Az állam a kötvény vásárlásakor 42 500 Ft támogatást ad egy összegben. A kamat változó, a mai állapot szerint évi 6,4%. A futamidő 19 év.

c) Mekkora összeghez jut 19 éves korában az a gyermek, akinek a szülei a születésétől 18 éves koráig, minden hónapban 5000 Ft-ot fizetnek be a kötvényre, ha az éves kamat 6,4%, és a kamatot év végén számítják a befizetések után?

17 A szabályos nyolcszög alakú kerti asztalunk minden oldala 54 cm hosszú. Kör alakú terítővel szeretnénk leteríteni.

a) Mekkora a legkisebb sugarú, kör alakú terítő, amely teljesen lefedi az asztalt?

Az asztalra 8 darab 24 cm átmérőjű tányért és 3 darab téglalap alakú tálcát helyezünk. Egy tálca oldalainak hossza 32 cm és 43 cm.

b) Az asztal területének hány százalékát takartuk le az edényekkel?

c) Hányféleképpen tud leülni nyolc ember a nyolcszögű asztal mellé, ha két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy olyan ember a társaságban, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző?

a 6
b 8
c 3
ö 17

18 Egy termálfürdő medencéjét két csapon át lehet feltölteni. Az első csap egyedül 3 óra alatt, a második 6 óra alatt tölti fel az üres medencét. A lefolyón a tele medence 4 óra alatt ürül ki.

A fürdő reggel nyolc órakor nyit.

a) Hány órakor kell megnyitni a csapokat, ha mindkettőt üzembe helyezik, hogy nyitásra megteljen a medence?

Egy alkalommal az első csap meghibásodott, ezért csak 2 órával a második csap megnyitása után tudták üzembe helyezni, ettől kezdve hibátlanul működött.

b) Ebben az esetben a második csap megnyitása után mennyi idővel telt meg az üres medence?

Egy napon mindkét csapot beindították, de 30 perc után észrevették, hogy a lefolyó is nyitva maradt, ekkor zárták el.

c) A csapok megnyitása után mennyi idővel telt meg így a medence?

a 5
b 6
c 6
ö 17

→ 192

I. rész

Az I. rész feladatainak megoldására 45 perc fordítható.

1 Egy számtani sorozat első tagja 8, differenciája 12. Adja meg a sorozat első 10 tagjának összegét! ● 2

Az első 10 tag összege: _____.

2 Adja meg a $\frac{2x+3}{4x-5}$ kifejezés értelmezési tartományát! ● 2

A kifejezés értelmezési tartománya: _____.

3 Egy 13 fős társaság minden tagja beszéli az angol és a német nyelv közül valamelyiket. Németül 7-en beszélnek, angolul 11-en. Hányan beszélik mind a két nyelvet? ● 2

Mind a két nyelvet _____ beszélik.

4 Adja meg $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ reciprokának értékét két egész szám hányadosaként! ● 2

A reciprok: _____.

5 Egy öttagú társaságban két olyan ember van, aki senkit sem ismer, és két olyan, aki 1-1 embert ismer a társaságból. Hány embert ismer az ötödik ember a társaságból? ● 2

Az ötödik ember _____ másikat ismer a társaságból.

6 Az *ABC* háromszög *AB* oldala 10 cm, a rajta fekvő két szög 30° és 70°. Mekkora a 70°-os szöggel szemben lévő oldala? Megoldását részletezze! (A válaszát centiméterekben mérve, két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) ● 4

A háromszög 70°-os szögével szemben lévő oldala: _____ cm.

7 Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy piros és egy sárga kockával dobva, 6 lesz a dobott számok összege! Megoldását részletezze! ● 3

A valószínűség: _____.

8 Hány egység területű háromszöget zár be az $x - 3y = 6$ egyenletű egyenes a koordinátatengelyekkel? Megoldását részletezze! ● 3

A háromszög területe: _____ egység.

9 Egy táskáért a boltban 6350 Ft-ot fizettünk. Ez az úgynevezett *bruttó ár* a táska nettó árának 27%-os általános forgalmi adóval növelt ára. Mennyi a táska nettó ára? ● 2

A táska nettó ára _____ forint.

→196

10 Adja meg a következő állítások logikai értékét! (igaz, hamis) ● 3

A) Trapézban az egy oldalon nyugvó két belső szög összege 180°.

B) A szabályos tízszög egy belső szöge 144°.

C) Hasonló testek térfogatának aránya egyenlő a hasonlóság arányának a négyzetével.

A) _____ *B)* _____ *C)* _____

11 Adja meg az $5^x = 7$ egyenlet megoldását két tizedesjegy pontossággal! ● 2

$x =$ _____.

12 Hány liter víz fér a henger alakú tartályba, ha alapkörének átmérője 60 cm, magassága pedig 1,2 m? ● 3

A tartályba _____ liter víz fér.

II. rész/A

A II. rész feladatainak megoldására 135 perc fordítható.

13 Egy versenypálya bármely két állomása között pontosan egy közvetlen út van. a 5 b 6 ö 11

a) Hány állomása van a pályának, ha az utak száma az állomások számának kétszeresénél 3-mal nagyobb?

Az állomásokon feladatokat kell megoldani, és csak akkor mehetünk tovább, ha helyesen válaszolunk. Az egyik feladat a következő:

Ármin kisautós matricákat gyűjt. Kezdetben 12 darab volt, és néhány héten keresztül minden héten megnégyszerezte az addig gyűjtött matricák számát. Adél a macskás matricákat szereti. Neki kezdetben csak 3 volt, és háromszor annyi héten keresztül, mint Ármin, hetente megkétszerezte a matricái számát. Hány hétig gyűjtötte Adél a matricákát, ha a gyűjtés végén egyenlő számú matricájuk volt?

b) Adjuk meg a helyes választ!

14 A táblázatban Magyarország tíz legnépszerűbb elektromos autójának 2022. évi eladási statisztikáját látjuk. Az eladott autók száma mellett a 2021. évi eladásokhoz képest láthatjuk a változást is.

a 3
b 3
c 6
ö 12

	Márka	Darab	Változás (db)		Márka	Darab	Változás (db)
1.	Tesla	597	+413	6.	Volkswagen	324	−173
2.	Kia	524	−137	7.	Hyundai	299	−138
3.	BMW	469	+255	8.	Škoda	206	−39
4.	Mercedes	455	+214	9.	Nissan	202	−272
5.	Dacia	386	+123	10.	Volvo	176	+141

(forrás: https://infostart.hu/gazdasag/2023/01/17/elektromos-autok-2022-ben-magyarorszagon-itt-az-eladasi-toplista)

a) Melyik autómárka eladási száma csökkent a legkevesebb százalékkal? Adja meg ennek a csökkenésnek a százalékos értékét! (Válaszát századokra kerekítve adja meg.)

András vett egy elektromos autót 13,7 millió forintért. Az azóta eltelt három évben összesen 675 órán keresztül 34 824 km utat tett meg, és az autó töltéséhez szükséges elektromos áramért 188 400 forintot fizetett ki.

b) Mekkora átlagsebességgel utazott az autójával ez idő alatt, illetve hány forintjába került 100 kilométer megtétele, ha most az autóját 11,5 millió forintért eladja?

Egy elektromos autó szélcsendes időben $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességnél 16 kWh, $130\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességnél 22 kWh elektromos energiát használ el 100 kilométerenként. Ezek az értékek viharban 20%-kal megnőnek. Az autóban a klíma működtetése óránként 1,3 kWh energiába kerül.

Az autó 55 kWh töltöttségi szintjével 260 km távolságot szerettünk volna megtenni töltés nélkül, kedvező időjárási feltételek mellett. Azonban csak az út egy részén tudtunk $130\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel a klímát bekapcsolva autózni, mert útközben viharba kerültünk. Az autónk sebességét ezért a hátralévő úton csökkentettük $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra, kikapcsoltuk a klímát, és így is tudtuk teljesíteni a távot töltés nélkül.

c) Legfeljebb hány kilométert autóztunk kedvező időjárási feltételek mellett? (Válaszát egész kilométerben adja meg.)

↑ 199

15 Adott az $f\colon [0; 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény.

a 5 ☐
b 4 ☐
c 4 ☐
ö 13 ☐

a) Ábrázolja a megadott f függvényt!

b) Oldja meg az $(x - 2)^2 \leq 1$ egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

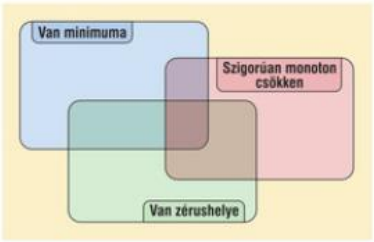
c) Adottak a következő függvények:

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$;

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$;

$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4$;

$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



Írja be a halmazábrába a függvények betűjeleit!

II. rész/B

A 16–18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

16 Hetedhét ország fővárosa köré szabályos hétszög alakú várfalat építettek, amelynek oldala 777 méter.

a 5 ☐
b 5 ☐
c 4 ☐
d 3 ☐
ö 17 ☐

Helyi rendelkezés szerint a zöldterület a városon belül nem lehet kevesebb, mint az összterület 37%-a.

a) Legalább hány négyzetkilométer a zöldterület a fővárosban? (Válaszát négyzetkilométerben mérve két tizedesjegy pontossággal adja meg!)

Hetedhét országot 16 lovag védelmezi a környéken portyázó hétfejű sárkány ellen. A lovagok képességeik szerint három különböző létszámú csoportba sorolhatók. Legtöbben azok vannak, akik a sárkánnyal vívott harc során a sárkány mind a hét fejét levágják. Legkevesebben azok vannak, akik csak egy fejét tudják levágni a sárkánynak, illetve vannak olyanok, akik pontosan négy fejet vágnak le egy összecsapás során. Tudjuk, hogy az egyes csoportokba tartozó lovagok száma mindhárom esetben prímszám.

b) Adja meg az egyes csoportokba tartozó lovagok számát!

Hetedhét ország királya elrendelte, hogy az egyik harcosnak meg kell vívnia a portyázó sárkánnyal, és ehhez első körben kijelölt nyolc lovagot. A kijelöltek között öt a sárkánynak pontosan 7 fejét, kettő a sárkánynak pontosan 4 fejét és egy

a sárkánynak pontosan 1 fejét tudja levágni. A Tanács ezek közül véletlenszerűen kiválaszt egyet.

c) Határozza meg a véletlenszerűen kiválasztott lovag által levágott sárkányfejek számának a várható értékét!

Éjszakai őrségben egy lovag megfigyelt egy sárkányt, amelynek hét különböző feje volt. A sárkány minden feje egymástól függetlenül hét különböző színű lángot tudott kifújni (de egy fej egyszerre csak egyszínű lángot fújt).

d) Hányféleképpen jöhetett láng a hétfejű sárkány fejeiből, ha látott lángot a lovag, de nem feltétlen jött láng minden fejből?

17 Vivien megkapta az első ötösét az iskolában. Nagymamája nagyon megörült, és azt mondta, ad neki ezért 5 forintot. Miután ezt az unoka kevesellte, azzal vigasztalta, hogy minden további ötösért kétszer annyi pénzt ad, mint az előzőért. Az év során Vivien összesen 25 db ötöst kapott.

a) 4 ☐
b) 5 ☐
c) 8 ☐
ö) 17 ☐

a) Ha a nagymama betartja az ígéretét, összesen hány forintot kellene kapnia Viviennek ebben a tanévben?

Az év végi bizonyítványban a magyar, történelem, matematika, angol és földrajz tárgyakból Vivien átlaga 4,2 lett.

b) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

A) A jegyek között biztosan van 5-ös.

B) A jegyek mediánja 3-as.

Vivien osztálya a tavaszi kirándulásra cseresznyét vásárolt 4320 forintért. Ha olyat vásároltak volna, amelyből egy kilogramm 60 forinttal kevesebbe kerül, akkor 1 kg-mal több cseresznyét vehettek volna.

c) Hány kilogramm cseresznyét vett az osztály?

18 Adél az egyéves születésnapjára különböző színű és méretű labdákat kapott, amelyek egy játék dinoszaurusz hasában vannak elrejtve. Van köztük rózsaszín, zöld, kék és sárga, és minden színből kétféle méretű van, kicsi és nagy. Az azonos színű és méretű labdákból pontosan öt darab van.

a) 4 ☐
b) 6 ☐
c) 7 ☐
ö) 17 ☐

a) A labdákból véletlenszerűen kettőt húzva mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a kettő rózsaszín?

Adél 5 labdával játszott tegnap: egy nagy és egy kis sárga, egy nagy és egy kis rózsaszín, valamint egy kis zöld labdával, amelyeket egy fekete és egy fehér dobozba rakott.

b) Hányféleképpen tehette ezt meg Adél, ha mind a két dobozban kell lennie nagy labdának, és egyik dobozban sem lehet csak sárga labda?

203

Adél az ábrán látható módon három kis labdát egymás mellé helyezett. Anyukája a labdákat egy 70 cm hosszú szalaggal egymáshoz rögzítette úgy, hogy még egy kis masnit is kötött a szalagból.



c) Mekkora egy labda sugara, ha a masni megkötéséhez 25 cm hosszú szalag szükséges? (Válaszát centiméterben mérve két tizedesjegy pontossággal adja meg!)



Megoldások

A feladatsor megírása után ugyancsak időigényes munka következik: a javítás.

Ha a megoldásai jók (vagy annak tűnnek), akkor is érdemes őket az itt található részletes megoldásokkal összehasonlítani; a pontozási útmutató segítségével pedig leellenőrizni, hogy minden részpontszám jár-e rájuk.

Az I. rész javítása egyszerűbb, mert ahol a szöveg nem kérte a válasz indoklását, a helyes végeredmény esetén a teljes pontszám jár. Itt azonban súlyos pontokat lehet veszíteni az elírt számok vagy a hibásan használt jelölések miatt! Ahol indoklás is szükséges, ott csak annak leírása esetén járnak a részpontszámok.

A II. rész feladatait egységenként pontozzák, ezért a megoldások részleteit is ellenőrizni kell. Ha egy részben számolási hiba van, arra a részre nem lehet pontot adni. Elvi hiba után az azt követő részekre sem jár a pont.

A könyvben általában igyekeztünk többféle megoldást is adni, de természetesen ezektől eltérő megközelítéssel is lehet tökéletes a problémára adott válasz.

A II./B részben ne felejtse el ellenőrizni azt is, hogy jól döntött-e annak a feladatnak a kiválasztásakor, amelyiknek a javítását „passzolta"!

Érdemes a hibákból tanulni, hiszen a vizsga előtt még van lehetőség pótolni a hiányosságokat!

I. rész

1 Mekkora az a tompaszög, amelynek szinusza 0,5? ● 2

A keresett tompaszög: **150°.** (2 pont)

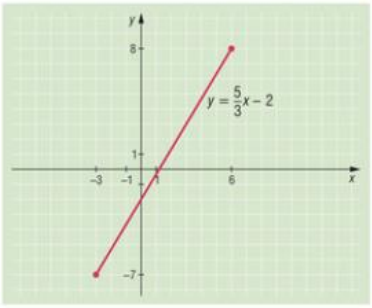
2 A Bükk turistatérképének méretaránya 1 : 40 000. Egy turistautat követve a Tar-kő és a Három-kő közötti távolság a térképen 44 mm. Hány méter hosszú ez az út a valóságban? ● 2

Az út a valóságban:

$$40\,000 \cdot 44 \text{ mm} = 1\,760\,000 \text{ mm} = \mathbf{1760} \text{ m}.$$ (2 pont)

3 Ábrázolja a $[-3; 6]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \frac{5}{3}x - 2$ függvényt! ● 2

M: A függvény ábrája jobbra látható. (2 pont)



4 Egy szám kettes számrendszerben felírt alakja 1110110_2. Írja át a számot 10-es számrendszerbe! ● 2

A szám értéke:

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 64 = \mathbf{118}.$$ (2 pont)

5 Egy számtani sorozat második eleme 12, hatodik eleme 44. Mennyi a sorozat differenciája? ● 2

A differencia:

$$a_6 = a_1 + 5d = a_2 + 4d, \quad \text{amiből} \quad d = \mathbf{8}.$$ (2 pont)

6 Mekkorák a szabályos 24 oldalú sokszög szögei? ● 3

M: A 24 oldalú sokszög szögeinek összege:

$$(24 - 2) \cdot 180° = 3960°.$$ (2 pont)

Ebből egy szög $3960° : 24 = \mathbf{165°}$. (1 pont)

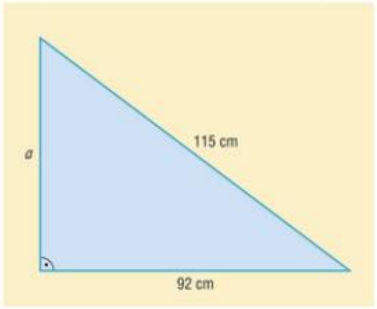
7 Egy derékszögű háromszög átfogója 115 cm, az egyik befogója 92 cm hosszú. Igaz-e, hogy a harmadik oldal mérőszáma is egész szám? Válaszát indokolja! ● 2

M: A Pitagorasz-tétellel:

$$a^2 + 92^2 = 115^2,$$

amiből $a = 69$ cm.

Tehát **igaz,** a harmadik oldal mérőszáma is egész szám. **(2 pont)**



8 Melyik szám a nagyobb: $\log_2 16$ vagy $\log_3 27$? ● 2

M: $\log_2 16 = 4$ és $\log_3 27 = 3$.

Tehát $\log_2 16 > \log_3 27$, a **$\log_2 16$** a nagyobb. **(2 pont)**

9 Az „irracionális" szó betűit hány különböző módon lehet egymás mellé leírni? ● 2

M: A szó 12 betűből áll, ebből 2 db „r" és 3 db „i" egyforma.

Tehát a lehetséges sorrend:

$$\frac{12!}{2! \cdot 3!} = \mathbf{39\,916\,800.}$$ **(2 pont)**

10 Milyen távolságra van az origótól az $5x - 2y = 23$ egyenletű egyenes 1 ordinátájú pontja? ● 3

M: Az $y = 1$ értéket behelyettesítve az egyenletbe $x = 5$ adódik. A pont koordinátái: (5; 1). **(1 pont)**

Távolsága a (0; 0) ponttól:

$$\sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx \mathbf{5{,}099.}$$ **(2 pont)**

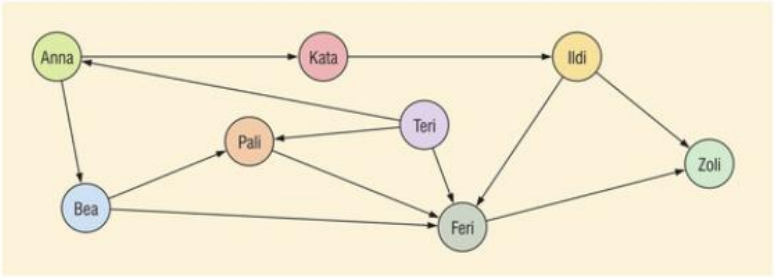
11 A Pénzes család bevételéhez anya és apa fizetése 2 : 3 arányban járul hozzá. Hány százalékkal nő a család bevétele, ha anya fizetését 20%-kal, apáét pedig 25%-kal emelik? ● 4

M: Ha az eredeti bevételük $5a$, akkor az emelés után:

$$(2a \cdot 1{,}20) + (3a \cdot 1{,}25) = 6{,}15a.$$ **(2 pont)**

Ez az eredetinek $\frac{6{,}15a}{5a} = 1{,}23$-szorosa, vagyis **23%-kal** emelkedik a család bevétele. **(2 pont)**

12 Egy baráti társaság találkozót szeretne szervezni, ezért egyikük felhívta néhányukat, hogy segítsenek értesíteni a többieket. Rövid idő múlva mindenki értesült a találkozóról. Az ábrán nyilak jelzik, hogy ki kit hívott fel. ● 4



Döntse el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz és melyik hamis!

A) A találkozót Teri kezdte szervezni.

B) Kata előbb tudott a találkozó szervezéséről, mint Anna.

C) Feri nem hívott fel senkit.

D) Bea nem hívta fel Zolit.

M: A helyes válaszok: **(1-1 pont)**

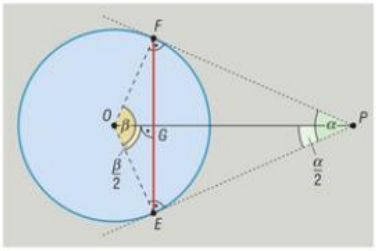
A) **igaz** *B)* **hamis** *C)* **hamis** *D)* **igaz**

II. rész/A

13 Egy 12 cm sugarú körhöz érintőket húzunk a kör középpontjától 30 cm távolságra lévő pontból. a 7

a) Mekkora szöget zár be a két érintő?

M: A helyes ábra. **(3 pont)**



Az ábrán használt jelölésekkel, ha a keresett szög α, akkor az OEP derékszögű háromszögben:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{OE}{OP}=\frac{12}{30},$$

ahonnan

$$\frac{\alpha}{2}=23{,}578°.$$ **(3 pont)**

Ennek kétszerese a két érintő által bezárt szög:

$$\alpha = 47{,}156°.$$ **(1 pont)**

b) Milyen hosszú az érintési pontokat összekötő húr a körben? Az eredményt centiméterben egész értékre kerekítve adja meg! b 5

M: A keresett *EF* szakasz az *OEF* egyenlő szárú háromszög alapja.

Ha az *O*-nál lévő szöget β-val jelöljük, az *OEP* háromszögből:

$$\frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} = 66{,}422°.$$ (2 pont)

Az *OEG* derékszögű háromszögben:

$$\frac{EG}{12} = \sin\frac{\beta}{2},$$

amiből $EG = 10{,}998$.

Ennek kétszerese a keresett szakasz:

$$EF = 21{,}996.$$ (2 pont)

Egész értékre kerekítve az eredmény **22 cm.** (1 pont) ö 12

14 A Zöld Oroszlán étteremben lakodalomhoz készülődnek. Ha valahány 6 személyes asztallal terítenek, akkor 3 hely üresen marad, ha pedig 5-tel kevesebb 8 személyes asztalt helyeznek el, akkor 3 vendégnek nem jut hely.

a) Hány vendégre számítanak? a 7

M: Jelöljük a 6 személyes asztalok számát *x*-szel, a vendégek számát *y*-nal. Az információk alapján egyrészt $6x - 3 = y$, másrészt $8(x - 5) = y - 3$.

Meg kell oldani a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 6x - 3 &= y \\ 8(x-5) &= y - 3 \end{aligned}\right\}.$$ (3 pont)

Az első egyenletből *y*-t a másodikba helyettesítve:

$$8(x - 5) = 6x - 3 - 3,$$

aminek a megoldása $x = 17$, amiből $y = 99$. (2 pont)

Valóban, ha 17 db 6 személyes asztalt helyeznek el, ahhoz 102 ember tudna leülni, de ha 12 db 8 személyes asztallal terítenek, ahhoz 96 ember tud helyet foglalni. (1 pont)

Tehát **99** vendégre számítanak. (1 pont)

A lakodalom végén a szervezők megkérdezték a vendégektől, hogy ki hány vendéggel táncolt. Érdekes módon mindenki páratlan számot mondott.

b) Előfordulhat-e, hogy valaki rosszul számolt? Válaszát indokolja! b 5

M: Ha gráffal szemléltetnénk, hogy ki kivel táncolt, a 99 pontból álló gráf minden csúcsából páratlan számú él indulna ki. A 99 db páratlan szám összege páratlan. A pontok fokszámainak összege ebben az esetben páratlan szám lenne, ami nem fordulhat elő. (4 pont)

Tehát **egészen biztos, hogy valaki rossz számot mondott.** (1 pont) ö 12

15 Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\frac{x(x+4)}{x-5} = 2 - \frac{45}{5-x}$ *b)* $\sqrt{4x+44} = x+3$

Megoldás:

a) Az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq 5$. (1 pont) a 6

Ha beszorzunk $(x-5)$-tel: $x(x+4) = 2(x-5) + 45$.

A zárójel felbontása és rendezés után: $x^2 + 2x - 35 = 0$. (2 pont)

Ennek megoldásai: $x_1 = 5$ és $x_2 = -7$. (1 pont)

Mivel az 5-öt kizártuk, csak az $x_2 = -7$ lehet. (1 pont)

Ellenőrzéssel meg is győződhetünk, hogy ez valóban helyes megoldás. (1 pont)

b) A négyzetgyökös egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \geq -11$ a négyzetgyök értelmezési tartománya miatt, és $x \geq -3$ a négyzetgyök értékkészlete miatt. (1 pont) b 6

A négyzetre emelés után: $4x + 44 = (x+3)^2$.

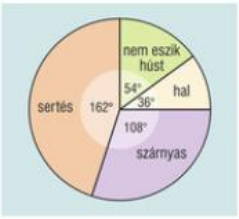
A zárójel felbontása és rendezés után: $0 = x^2 + 2x - 35$. (2 pont)

Ennek megoldásai: $x_1 = 5$ és $x_2 = -7$. (1 pont)

Az értelmezési tartománynak mindkét szám eleme, de az ellenőrzésből kiderül, hogy csak az $x = 5$ megoldás. (2 pont) ö 12

II. rész/B

16 Egy felmérés során 500 embertől megkérdezték, hogy milyen húsfajtát fogyaszt leggyakrabban. A felmérésről egy kördiagram készült.



a) Töltse ki a következő táblázatot a felmérés adataival! a 6

M: A táblázat helyes kitöltése: (1-1 pont)

Húsfajta	hal	sertés	szárnyas	nem eszik húst
Létszám	50	225	150	75

A halhoz tartozó középponti szög 36°, a halat fogyasztók száma:

$$500 \cdot \frac{36^\circ}{360^\circ} = 50.$$

A sertéshez tartozó középponti szög 162°, a sertést fogyasztók száma:

$$500 \cdot \frac{162^\circ}{360^\circ} = 225.$$

A szárnyashoz tartozó középponti szög 108°, a szárnyast fogyasztók száma:

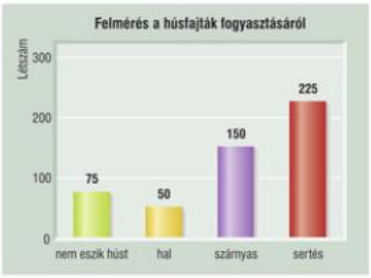
$$500 \cdot \frac{108^\circ}{360^\circ} = 150.$$

A húst nem fogyasztókhoz tartozó középponti szög 54°, a húst nem fogyasztók száma:

$$500 \cdot \frac{54^\circ}{360^\circ} = 75.$$ (2 pont)

b) Készítsen oszlopdiagramot a felmérés eredményéről! b 4

M: Az oszlopdiagram jobbra látható. (4 pont)



A felmérésben részt vevők között egy ajándékcsomagot sorsolnak ki.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy az ajándékcsomagot olyan ember nyeri, aki nem fogyaszt húst? c 3

M: Az összes esetek száma 500, a kedvező esetek száma 75.

A valószínűség:

$$p = \frac{75}{500} = 0{,}15.$$ (3 pont)

d) Ha két különböző ajándékot sorsolnának ki, mennyi lenne a valószínűsége, hogy mindkettőt olyan ember nyeri, aki halat fogyaszt leggyakrabban? d 4

M: Az összes esetek száma $\binom{500}{2}$. (1 pont)

A kedvező esetek száma $\binom{50}{2}$. (1 pont)

A valószínűség:

$$p = \frac{\binom{50}{2}}{\binom{500}{2}} = 0{,}0098.$$ (2 pont) ö 17

17 Egy bankban elhelyezünk 1 000 000 Ft-ot, amely évente kamatozik. Egy év után a kapott kamatot is hozzáadják a tőkéhez, tehát a következő évben már az is kamatozik.

a) Mennyi az éves kamat, ha két év után 1 071 225 Ft-ot vehetünk ki a bankból? a 4

M: Legyen az éves kamatláb x%.

A két év után felvehető összeg:

$$1\,071\,225 = 1\,000\,000 \cdot \left(1+\frac{x}{100}\right)^2. \qquad \text{(2 pont)}$$

Leosztva:

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = 1{,}071225,$$

négyzetgyökvonással:

$$1+\frac{x}{100} = 1{,}035, \quad \text{amiből} \quad x = 3{,}5.$$

Tehát **3,5%** az éves kamat. (2 pont)

Egy kisbaba születésekor a nagyszülők betesznek a *Jólét Bankba* 2 000 000 Ft-ot. Az unokájuk a kamatokkal növelt összeget 18 éves korában veheti fel. A bank 10 éven át minden évben 2,5%-os kamatot ad, majd 8 éven keresztül 4%-os lesz az éves kamat.

b) Mennyi pénzhez jut az unoka 18 éves korában? b 6

M: Mivel 10 éven át 2,5%-os, 8 éven át pedig 4%-os a kamat, a felvehető összeg:

$$2\,000\,000 \cdot 1{,}025^{10} \cdot 1{,}04^8 = \mathbf{3\,503\,768}\ \text{Ft}.$$

(A felírás 3 pont, a számítás 3 pont.)

A *Profit Bankban* is lehet ilyen számlát nyitni, de ott 18 éven keresztül változatlan a kamatláb.

c) Mekkora az éves kamat a *Profit Bankban*, ha 18 éves korában a gyerek ugyanannyi pénzt kap, mint amennyit a *Jólét Bankban* a változó kamattal kapott volna? c 7

M: I. megoldás

Ha 18 éven át x%-os lenne az éves kamat:

$$3\,503\,768 = 2\,000\,000 \cdot \left(1+\frac{x}{100}\right)^{18}. \qquad \text{(3 pont)}$$

Az osztás után:

$$1{,}7519 = \left(1+\frac{x}{100}\right)^{18}.$$

Elvégezve a 18. gyökvonást:

$$1+\frac{x}{100} = 1{,}0316, \quad \text{amiből} \quad x \approx 3{,}2. \qquad \text{(3 pont)}$$

Tehát körülbelül **3,2%-os** éves kamattal lenne ugyanakkora az összeg 18 év múlva. (1 pont)

II. megoldás

Legyen az éves kamatláb x%, ekkor az éves kamattényező:

$$q = \frac{100 + x}{100}.$$ (1 pont)

A 18 év után felvehető összeg:

$$3\,503\,768 = 2\,000\,000 \cdot q^{18}, \quad \text{amiből} \quad q = 1{,}0316.$$ (2 pont)

Behelyettesítve:

$$1{,}0316 = \frac{100 + x}{100}, \quad \text{amiből} \quad x \approx 3{,}2.$$ (3 pont)

Tehát körülbelül **3,2%-os** éves kamattal lenne ugyanakkora az összeg 18 év múlva. (1 pont)

ö 17

18 A tájékozódási futóversenyeken a keresett tereptárgyakat bójával jelölik meg. A bója alakja háromszög alapú hasáb, amelynek minden oldala egyenlő, 30 cm. Az oldallapjait selyemből készítik, és minden lapot az átlója mentén két részre osztanak. A két részt fehér és narancssárga színű anyagból varrják össze.



a 4

a) Hány négyzetméter fehér, illetve narancssárga anyagot kell vásárolni 100 darab bója elkészítéséhez, ha a varrásra és hulladékra 10% veszteséggel számolunk?

M: A fehér és narancssárga anyagokból ugyanannyira van szükség, számoljuk a narancssárgát.

Egy oldalon a sárga háromszög területe:

$$t = \frac{30 \cdot 30}{2} = 450 \text{ cm}^2,$$

egy bója 3 lapján:

$$T = 3 \cdot 450 = 1350 \text{ cm}^2.$$

100 db bójához

$$1350 \text{ cm}^2 \cdot 100 = 135\,000 \text{ cm}^2 = 13{,}5 \text{ m}^2$$

sárga színű anyag kell. (2 pont)

Ha a 10%-os veszteséggel számolunk, akkor ez a mennyiség a vásárolt mennyiség 90%-a.

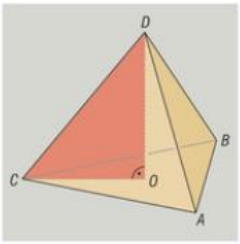
Tehát $\frac{13{,}5}{90} \cdot 100 = \mathbf{15\ m^2}$ anyagot kell vásárolnunk a fehér és narancssárga szövetekből is. (2 pont)

A bója felső éleibe merevítő drótot helyeznek. A bóját a talajba leszúrt állványra fel kell függeszteni. A felfüggesztéshez a három merevítő drót felezőpontjához rögzített, egyenlő hosszúságú zsinegeket használnak.

b) Milyen hosszú egy-egy rögzítő zsineg, ha a bója felső „lapja" vízszintesen, a felakasztás helye alatt 18 cm-rel helyezkedik el? b 7

M: A felfüggesztési pont és az oldalfelező pontok egy háromszög alapú gúlát határoznak meg.

(jó ábra 2 pont)



Az ábra jelöléseit használva:

$$AB = BC = CA = 15 \text{ cm},$$

valamint

$$OD = 18 \text{ cm}.$$

Az O pont az alaplapon lévő ABC szabályos háromszög súlypontja.

OC a háromszög súlyvonalának $\frac{2}{3}$ része:

$$OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 15 \approx 8{,}66 \text{ cm}.$$ (2 pont)

Innen kétféleképpen számolhatunk tovább.

I. megoldás

Felírjuk a Pitagorasz-tételt az OCD háromszögre:

$$8{,}66^2 + 18^2 = CD^2,$$

amiből

$$CD = 19{,}97 \text{ cm}.$$ (2 pont)

Tehát egy-egy rögzítő zsineg kb. **20 cm** hosszú. (1 pont)

II. megoldás

Jelölje az OCD háromszögben a C pontnál lévő szöget γ.

Így felírható, hogy

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{18}{8{,}66},$$

amiből

$$\gamma \approx 64{,}3°.$$

A γ szög szinuszára teljesül, hogy

$$\sin\gamma = \frac{18}{CD},$$

ebből

$$CD = \frac{18}{\sin\gamma} = 19{,}97 \text{ cm}.$$ (2 pont)

Tehát egy-egy rögzítő zsineg kb. **20 cm** hosszú. (1 pont)

Egy megyei tájékozódási futóversenyen a felnőtt női kategóriában 18 induló van, közülük az első három helyezett versenyző – az elért helyezéstől függetlenül – jut az országos döntőbe.

c) Hányféleképpen alakulhat ki a továbbjutók mezőnye? c 3

M: A továbbjutó 3 versenyzőt a sorrend figyelembevétele nélkül $\binom{18}{3}$-féleképpen választhatjuk ki. $\binom{18}{3} = 816$. (2 pont)

A továbbjutók mezőnye **816-féleképpen** alakulhat ki. (1 pont)

A versenyen induló 18 futó egyike Saci.

d) A verseny előtt mennyi a valószínűsége, hogy Saci a továbbjutók között lesz? d 3

M: Mivel 3-an jutnak tovább, a keresett valószínűség:

$$p = \frac{3}{18} = 0{,}1667.$$ (2 pont)

Annak a valószínűsége, hogy Saci a továbbjutók között lesz: **0,1667.** (1 pont) ö 17

I. rész

1 Van-e olyan háromszög, amely oldalainak hossza 150 cm, 20 dm és 3,4 m? ● 2

Mivel $1{,}5\text{ m} + 2\text{ m} > 3{,}4\text{ m}$, ilyen háromszög **létezik.** (2 pont)

2 Melyek a zérushelyei az $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ hozzárendelési szabállyal felírt függvénynek? ● 3

M: Meg kell oldani a $2x^2 + 3x - 5 = 0$ egyenletet.

Megoldásai: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{2}$. (2 pont)

A függvény zérushelyei: $\mathbf{x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{5}{2}}$. (1 pont)

3 A hatványozás azonosságait felhasználva számítsa ki a következő értékeket! ● 2

$$4^{\frac{7}{2}} \quad \text{és} \quad 27^{\frac{4}{3}}$$

M: Az első szám:

$$4^{\frac{7}{2}} = (2^2)^{\frac{7}{2}} = 2^7 = \mathbf{128}.$$ (1 pont)

A második szám:

$$27^{\frac{4}{3}} = (3^3)^{\frac{4}{3}} = 3^4 = \mathbf{81}.$$ (1 pont)

4 Egy trapéz egyik alapján lévő szögek nagysága 75° és 81°. Mekkora a trapéz másik két szöge? ● 2

M: A trapéz egy szárához tartozó szögeinek összege 180°.

A hiányzó szögek:

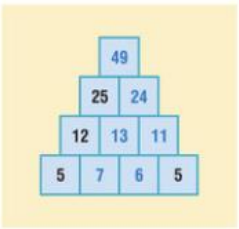
$$180° - 75° = \mathbf{105°},$$ (1 pont)

illetve

$$180° - 81° = \mathbf{99°}.$$ (1 pont)

5 Írja be a számpiramis hiányzó számait, ha minden négyzetbe az alatta lévő két négyzet számainak összege kerül! ● 2

M: A számpiramis helyesen kitöltve: (2 pont)



6 A $\frac{2}{7}$ szám tizedes tört alakjában milyen számjegy áll a tizedesvessző utáni 2020. helyen? ● 2

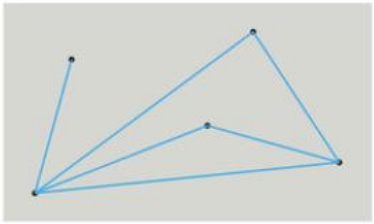
M: $\frac{2}{7} = 0{,}285714285714\ldots = 0{,}\dot{2}85714\dot{2}$, hat jegy ismétlődik. (1 pont)

Osszuk el a 2020-at 6-tal, a hányados 336, a maradék 4. Tehát a ciklus negyedik jegye lesz a megoldás.

A 2020. helyen **7** áll. (1 pont)

7 Egy 5 pontú gráf pontjainak fokszáma rendre 4; 3; 2; 2; 1. Rajzolja le a gráfot! ● 2

M: Egy megfelelő ábra: (2 pont)



8 Három különböző prímszám összege 20. Melyek lehetnek ezek a prímszámok? ● 2

M: Mivel az összeg páros, az egyik prím a 2.

A 18 kétféleképpen áll elő prímek összegeként.

A három prímszám **2; 7; 11** vagy **2; 5; 13.** (2 pont)

A megoldások közléséért is jár a pontszám.

9 Egy számtani sorozat első eleme −5, negyedik eleme 13. Eleme-e ennek a sorozatnak a 32? Válaszát indokolja! ● 3

M: I. megoldás

A számtani sorozatban $a_4 = a_1 + 3d$, ebből $d = 6$. (1 pont)

A sorozat elemei: −5; 1; 7; 13; 19, 25, 31, 37… (1 pont)

A 32 a sorozatnak **nem eleme.** (1 pont)

II. megoldás

A számtani sorozatban $a_4 = a_1 + 3d$, ebből $d = 6$. (1 pont)

A számtani sorozat n-edik tagja $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, ebben az esetben:

$$32 = -5 + (n - 1) \cdot 6,$$

amiből

$$n = \frac{43}{6}.$$ (1 pont)

Mivel n nem egész, a 32 a sorozatnak **nem eleme.** (1 pont)

10 Egy dobókockával háromszor dobunk egymás után. A dobott számokat a dobások sorrendjében leírva egy háromjegyű számot kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott háromjegyű szám páratlan? ● 2

M: A szám akkor páratlan, ha az utolsó jegye páratlan. (1 pont)

Ennek a valószínűsége:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$ (1 pont)

11 Döntse el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis! ● 4

A) Nincs olyan négyszög, amely középpontosan szimmetrikus, de tengelyesen nem szimmetrikus.

B) Van olyan négyszög, amelynek csak egy szimmetriatengelye van.

C) Minden paralelogramma középpontosan szimmetrikus, de tengelyesen nem szimmetrikus.

D) Van olyan deltoid, amelynek egynél több szimmetriatengelye van.

Megoldás: (1-1 pont)

A) **hamis** *B)* **igaz** *C)* **hamis** *D)* **igaz**

12 Melyik a több: a 8000-nek a 30%-ának a 20%-a, vagy a 3000-nek a 20%-ának a 80%-a? ● 3

M: Az első szám:

$$8000 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}20 = 480,$$ (1 pont)

A második szám:

$$3000 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}80 = 480.$$ (1 pont)

A két szám **egyenlő.** (1 pont)

II. rész/A

13 A Tisza-vetélkedőt évente rendezik Szegeden. Az általános iskolások két kategóriában versenyeznek, az *A* kategóriában alsósok (3. vagy 4. osztály), az *F* kategóriában felsősök (5. vagy 6. osztály). A versenyben 4 fős csapatok vesznek részt. Egy általános iskolából a két kategóriában legfeljebb két-két csapat indulhat.

A Fecske Utcai Általános Iskola 4 csapatot indít a Tisza-vetélkedőn.

a) Igaz-e, hogy a Fecske utcai iskolából indulók között biztosan van két olyan diák, aki ugyanabban a hónapban született? a 3

Az indulók száma 16, ez több, mint a hónapok száma. A skatulyaelv miatt **van** legalább egy olyan hónap, amelyben 1-nél többen születtek. (3 pont)

A verseny második fordulójába mindkét kategóriában 8 csapat jutott be.

b) Hányféleképpen alakulhat ki az első három helyezett csapat sorrendje az *A* kategóriában? b 4

A 8 döntőbe jutott csapatból az első 3 sorrendje $8 \cdot 7 \cdot 6 = \mathbf{336}$. (4 pont)

A Tiszavirág nevű csapat megnyerte az *F* kategória versenyét, jutalmuk egy kajaktúra a Tiszán. A versenyzők és két kísérőjük háromszemélyes kajakokkal indulnak el. Mindegyik kajakban két tanuló és egy kísérő helyezkedik el.

c) Hányféleképpen ülhetnek be a túrázók a kajakokba, ha csak azt vesszük figyelembe, hogy ki kivel utazik (a kajakokon belüli ülésrend nem lényeges)? c 5

M: Az egyik kajakba 2-féleképpen választhatunk kísérőt, és a 4 tanuló közül 2-t, $\binom{4}{2}$-féleképpen. (3 pont)

Ez már azt is meghatározza, hogy kik ülnek a másik kajakba.

Tehát a megoldás:

$$2 \cdot \binom{4}{2} = \mathbf{12}.$$ (2 pont) ö 12

14 Dóra és Edit közösen szeretne lakást bérelni Szegeden. Az internetes kereső összesen 293 lakást ajánl fel. A keresőben három szempont állítható be: a lakás mérete, a szobák száma és a havi bérleti díj.

Ha beállítják, hogy legfeljebb 60 m^2-es legyen a lakás, 170 ajánlat érkezik, a minimum 2 szobával rendelkező lakások száma 252. 100 000 Ft-nál alacsonyabb bérleti díjat beállítva 124 lakás jelenik meg.

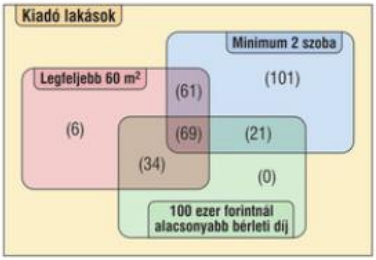
Olyan lakás, amely legfeljebb 60 m^2-es, de minimum 2 szobás, 130 van, ebből 69-nek alacsonyabb a bérleti díja 100 000 Ft-nál.

Olyan lakás, amely legfeljebb 60 m^2-es és 100 000 Ft-nál alacsonyabb a bérleti díja, 103 van.

90 olyan lakás van, amely legalább 2 szobás, de a 100 000 Ft-ot nem éri el a bérleti díj.

a) Hány olyan lakás van a keresőn, amely legfeljebb 60 m^2-es, 2 vagy több szobás, de a bérleti díja legalább 100 000 Ft? a 6

M: A helyesen kitöltött halmazábra: (5 pont)



A feltételnek megfelelő lakások száma: **61.** (1 pont)

b) Hány olyan lakást hirdetnek, amelynek mérete nagyobb 60 m^2-nél, a szobák száma 2-nél kevesebb, és a bérleti díj 100 000 Ft alatt van? b 2

M: Az ábrából kiolvasható, hogy **0** ilyen lakás van. (2 pont)

c) Van-e olyan lakás a hirdetésben, amely nagyobb, mint 60 m^2, a bérleti díja pedig legalább 100 000 Ft, de csak egy szoba van? c 3

M: Az ábrába beírt számok összege 292, de összesen 293 lakás szerepel a listán. (2 pont)

Tehát **1** olyan lakás van, amely nagyobb 60 m^2-nél, a bérleti díja legalább 100 000 Ft, de csak egy szoba van. (1 pont) ö 11

15 Gábor bácsi téglalap alakú kertjének két különböző oldala 14 m és 24 m hosszú. Egy reggel beindít egy szórófejes locsolót, amely 7 m sugarú körben öntöz úgy, hogy a két hosszabb oldal mellett az egyik rövidebb oldalig is éppen ellocsol.

a) A kert hány százalékát nem locsolja ekkor a locsoló? a 4

M: A kert területe: $14 \cdot 24 = 336\ m^2$. (1 pont)

A kör területe: $7^2 \cdot \pi \approx 153{,}94\ m^2$. (1 pont)

I. megoldás

Hányadosuk: $\frac{153{,}94}{336} \approx 0{,}458$. (1 pont)

Nem locsolja a kert $100 - 45{,}8 = $ **54,2%-át.** (1 pont)

II. megoldás

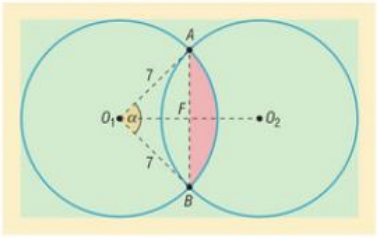
A nem locsolt terület: $336 - 153{,}94 = 182{,}06\ m^2$. (1 pont)

Hányadosuk: $\frac{182{,}06}{336} \approx 0{,}542$. Nem locsolja a kert **54,2%-át.** (1 pont)

Egy óra múlva áthelyezi a locsolót a kert másik végébe úgy, hogy most is három oldalig locsol a szórófej. Itt is egy órán át működik a locsoló.

b) A kert hány százalékát locsolta meg mind a két órában? b 9

M: A keresett terület két szimmetrikus körszelet együttese.



$$O_1O_2 = 24 - 2 \cdot 7 = 10.$$

Az ábra jelöléseit használva az O_1FA háromszögben

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{O_1F}{O_1A} = \frac{5}{7},$$

ahonnan

$$\frac{\alpha}{2} = 44{,}415°,$$

amiből

$$\alpha = 88{,}83°.$$ (4 pont)

A jelölt körszelet területe, az őt tartalmazó körcikk és háromszög területének különbsége:

$$T_{szelet} = T_{cikk} - T_{ABO_1} = \frac{7^2 \cdot \pi \cdot 88{,}83°}{360°} - \frac{7^2 \cdot \sin 88{,}83°}{2} = 13{,}49 \text{ m}^2.$$ (3 pont)

A két órán át locsolt terület ennek a kétszerese: 26,98 m^2. (1 pont)

Ennek aránya a teljes területhez: $\frac{26{,}98}{336} = 0{,}08$, tehát a kert **8%-át** locsolta kétszer. (1 pont) ö 13

II. rész/B

16 A diagramon egy panzió vendégéjszakáiról két egymást követő évben készült kimutatás látható.



a) Hány %-kal nőtt a magyar vendégéjszakák száma 2018-ról 2019-re? a 3

M: 2018-ban 10, 2019-ben pedig 14 magyar vendégéjszaka volt, arányuk:

$$\frac{14}{10} = 1{,}4.$$ (2 pont)

40%-os volt a növekedés. (1 pont)

b) Ábrázolja kördiagramon a vendégéjszakák nemzetek közötti eloszlását a 2018-as évben! b 7

M: 2018-ban összesen 60 vendégéjszaka volt. A kördiagramon 1 éjszakához 6°-os középponti szög tartozik.

Táblázat az adatokkal: (3 pont)

Nemzet	magyar	német	angol	olasz	francia
Vendégéjszaka	10	13	9	18	10
Középponti szög	60°	78°	54°	108°	60°

A helyes kördiagram: (2 pont)



c) 2019-ben a vendégéjszakák hány százalékában voltak olasz vendégek? c 4

M: 2019-ben összesen 38 vendégéjszaka volt. (2 pont)

Ebből 10 esetben voltak olasz vendégek. (1 pont)

Arányuk $\frac{10}{38} = 0{,}263$, tehát a 2019-es vendégéjszakák **26,3%-ban** voltak olasz vendégek. (1 pont)

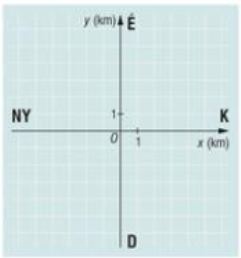
d) A két egymást követő év összes vendégéjszakáját figyelembe véve hány százalékos volt a csökkenés a 2019. évben? d 3

M: A 2019-es és 2018-as vendégéjszakák aránya $\frac{38}{60} = 0{,}633$. (2 pont)

Ez **36,7%-os** csökkenést jelent. (1 pont) ö 17

17 A halradar a tengeri élőlények elhelyezkedését mutatja az égtájaknak megfelelően, derékszögű koordináta-rendszerben.

A készülék kijelzője úgy van beállítva, hogy a műszer a koordináta-rendszer kezdőpontjában található, és hatósugara minden irányban 5 km. A koordináta-rendszerben egy egység 1 km.



a) Érzékeli-e a halradar az $A(2; 3)$ koordinátájú pontban lévő cápát, illetve a $B(4; -6)$ koordinátájú pontban tartózkodó kék bálnát? a 6

M: Ha O a koordináta-rendszer kezdőpontja, az OA távolság:

$$OA = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} < 5,$$

tehát a cápát **érzékeli** a radar. (3 pont)

Az OB távolság:

$$OB = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} > 5,$$

a bálnát **nem érzékeli** a radar. (3 pont)

A B pontban lévő kék bálna megállás nélkül É felé halad. A halradar nem mozdul el.

b) A koordináta-rendszer melyik pontjában lesz a bálna, amikor a radar felfedezi? b 8

M: I. megoldás

Ha a bálna észak felé halad, akkor minden tartózkodási helyének első koordinátája 4 lesz.

Ha a radar először a $C(4; c)$ pontban érzékeli, (2 pont)

akkor

$$OC = 5, \quad \text{azaz} \quad \sqrt{4^2 + c^2} = 5, \quad \text{(2 pont)}$$

amiből $c^2 = 9$. (2 pont)

Ennek megoldásai $c_1 = 3$ és $c_2 = -3$. (1 pont)

A kiindulási helyet figyelembe véve a **(4; −3)** pontban érzékeli először a radar a bálnát. (1 pont)

II. megoldás

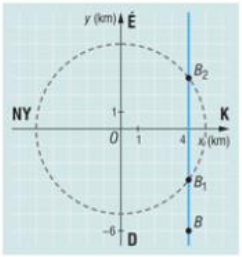
A radar az $x^2 + y^2 = 5^2$ egyenletű körön és annak belsejében érzékel. (2 pont)

A bálna az $x = 4$ egyenletű egyenesen mozog. (2 pont)

Behelyettesítve a kör egyenletébe:

$$4^2 + y^2 = 25.$$ (2 pont)

Ebből $y_1 = -3$ és $y_2 = 3$ adódik. (1 pont)



A kiindulási helyet is figyelembe véve a **(4; −3)** pontban érzékeli először a radar a bálnát. (1pont)

A bálna nem áll meg, és mozgásának irányát sem változtatja meg.

c) Útjának hány kilométeres szakaszán érzékeli a mozgását a halradar? c 3

M: Az előző megoldásból kiderül, hogy a körön a (4; −3) és (4; 3) pontokban található a bálna. (2 pont)

Ennek a két pontnak a távolsága 6 egység, azaz **6 km.** Ekkora a radar által érzékelt út. (1 pont) ö 17

18 Anett és Babett szerdánként reklámanyagokat terjesztenek egy városrészben. Az egyik héten délután 17:00-kor kezdték együtt a munkát, és 19:00-kor végeztek. A következő héten 16:00-kor kezdtek, de Anettnek 17:00-kor el kellett mennie, ekkor Babett 20:00-kor végzett a munkával.

a) Mennyi idő alatt végeznék el a munkát külön-külön? a 8

M: Ha Anett x óra alatt, Babett pedig y óra alatt végezné el egyedül a munkát, akkor 1 óra alatt $\frac{1}{x}$, illetve $\frac{1}{y}$ részét végzik el. Mindketten 2 órát dolgoznak, így az első alkalomra a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1.$$ (2 pont)

A második alkalomnál Anett 1, Babett 4 órát dolgozik:

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1.$$ (2 pont)

Meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} &= 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{y} &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Szorozzuk meg a második egyenletet 2-vel: $\frac{2}{x} + \frac{8}{y} = 2$, és ebből vonjuk ki az első egyenletet.

Adódik: $\frac{6}{y} = 1$, amiből $y = 6$, visszahelyettesítve $x = 3$. (3 pont)

Tehát külön-külön **Anett 3 óra** alatt, **Babett** pedig **6 óra** alatt végezné el a munkát. (1 pont)

A második alkalommal 5000 Ft-ot kaptak a munkáért. Ennek 10%-a Babettnek jár, mert ő hozta el a reklámújságokat a központból.

b) Mennyi pénzt kapjon egy-egy lány, ha azt a munkavégzés idejének arányában osztják el? b 2

M: Babett kap 500 Ft-ot, a maradék 4500 Ft-ot öt részre osztjuk, mert 5 órát dolgoztak. $4500 : 5 = 900$ Ft. Egy óra munkáért Anett **900 Ft-ot** kap. (1 pont)

Babett pedig $4 \cdot 900 + 500 =$ **4100 Ft-ot** kap. (1 pont)

c) Mennyi pénzt kapjon egy-egy lány, ha azt az elvégzett munka arányában osztják el? c 3

M: Anett 1 óra alatt elvégezte a munka $\frac{1}{3}$ részét, Babett 1 óra alatt az $\frac{1}{6}$, 4 óra alatt a $\frac{2}{3}$ részt. Tehát a 4500 Ft-ot 3 részre kell osztani, Anett kap **1500 Ft-ot,** (2 pont)

Babett pedig $2 \cdot 1500 + 500 =$ **3500 Ft-ot.** (1 pont)

A lányok kilenc különböző kiadványt raknak a postaládákba. Ezek közül 3 színes reklámújság, a többi fekete-fehér szórólap.

d) Véletlenszerűen összeszedve a kilenc kiadványt, mennyi a valószínűsége, hogy a három színes egymás mellé kerül? d 4

M: A 9 kiadvány lehetséges sorrendje 9!. (1 pont)

Ha egymás mellé kerül a 3 színes újság, akkor ezek egy külön csoportot alkotnak, velük együtt 7 dolgot kell sorba rakni, ami 7!-féleképpen lehetséges. (1 pont)

A 3 színes újságot egymás között 3! sorrendben tudjuk elhelyezni. (1 pont)

A valószínűség:

$$\frac{3! \cdot 7!}{9!} \approx \mathbf{0{,}083.}$$ (1 pont) ö 17

I. rész

1 Egy mértani sorozat hányadosa 2, az ötödik tagja 320. Mennyi a sorozat első tagja? ● 2

M: Az $a_1 \cdot 2^4 = 320$ egyenlet megoldása: $a_1 = 20$.

A sorozat első tagja: **20.** (2 pont)

2 Igaz-e, hogy a 360 és a 840 legkisebb közös többszöröse az 5040? Válaszát indokolja! ● 2

M: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

A legkisebb közös többszörösük: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. (1 pont)

Az állítás **nem igaz.** (1 pont)

3 Egy banknál a készpénz automatából való felvételének díját a következő módon számolják: térítés nélkül havonta összesen 150 000 Ft-ot lehet felvenni, legfeljebb két részletben. Magasabb összeg esetén a készpénzfelvétel díjaként a 150 000 Ft-ot meghaladó rész 1,1%-át számolják fel. ● 2

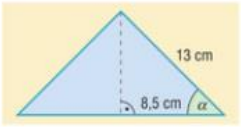
Mennyibe kerül, ha valaki az adott hónapban első alkalommal 200 000 Ft készpénzt vesz fel egy automatából?

M: $50\,000 \cdot 0{,}011 = 550$ Ft, **550 Ft-ba** kerül. (2 pont)

4 Egy egyenlő szárú háromszög alapja 17 cm, szárai 13 cm hosszúak. Mekkorák az alapon fekvő szögek? ● 2

M: Az ábra alapján:

$$\cos\alpha = \frac{8{,}5}{13} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 49{,}16°.$$



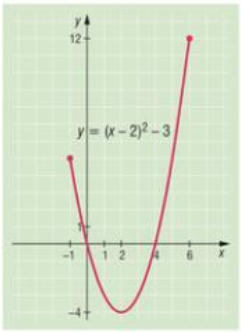
Az alapon fekvő szögek **49,16°-osak.** (2 pont)

5 Ábrázolja a $[-1; 6]$ intervallumon értelmezett ● 2

$$f(x) = (x-2)^2 - 4$$

hozzárendelési szabállyal felírt függvényt!

A függvény grafikonja az ábrán látható. (2 pont)



6 Egy piacon felmérték, hogy a retek, a sárgarépa, a spárga és az uborka közül ki melyik zöldségből vásárol a legtöbbet. A felmérés eredményét a kördiagram mutatja.



Döntse el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis!

A) A válaszolóknak körülbelül 17%-a nem a megnevezett négy zöldségből vásárol legtöbbet.

B) Akik legtöbbet uborkából vesznek, kétszer annyian vannak, mint akik spárgából vásárolnak legtöbbet.

C) A vásárlók többsége az uborkából vásárolja a legtöbbet.

D) A válaszadók között többen kedvelik a retket, mint a sárgarépát.

● 4

Megoldás: (1-1 pont)

A) **hamis** *B)* **hamis** *C)* **hamis** *D)* **igaz**

7 Valaki egy összeget 2,5%-os kamatra szeretne elhelyezni egy bankban. Mekkora összeget tegyen be, ha három év múlva 4 000 000 Ft-ot szeretne kivenni?

● 2

Megoldva az $x \cdot 1{,}025^3 = 4\,000\,000$ egyenletet, $x \approx$ **3 714 398 Ft.** (2 pont)

8 Adja meg a 2^{100} szám számjegyeinek számát!

● 3

M: $2^{100} = 10^x$. (1 pont)

$\lg 2^{100} = 30{,}1$, tehát a szám **31 jegyű.** (2 pont)

9 Egy füves terület lenyírását 2 fűnyíró robot 8 óra alatt végzi el. Mennyi idő alatt végez 5 robot, ha azonos intenzitással dolgoznak?

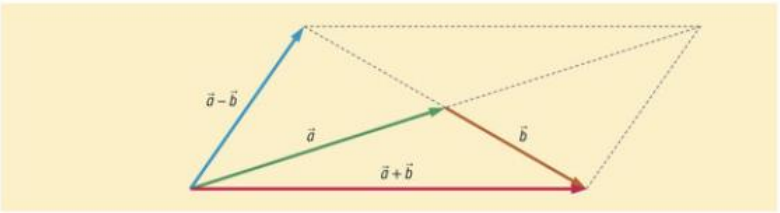
● 2

1 robot 16 óra alatt, 5 robot $\frac{16}{5}$ = **3,2 óra = 3 óra 12 perc** alatt végez. (2 pont)

10 Rajzolja be az ábrába az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat, ha az ábra szerint adottak az $\vec{a} + \vec{b}$ és $\vec{a} - \vec{b}$ vektorok!

● 2

A keresett vektorok az ábrán láthatók. (2 pont)



11 A magyar kártya egy csomagjában 32 lap van, mind a négy színből 8 darab. A „színek": piros, zöld, tök és makk. Egy jól összekevert magyarkártya-csomagból kiveszünk 2 lapot. Megnézzük, mind a kettő zöld. Ezután anélkül, hogy a kihúzott két lapot visszatennénk, újra húzunk kettőt. ● 3

Mennyi a valószínűsége, hogy mind a két kihúzott lap piros?

M: A valószínűség:

$$p = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{30}{2}} = \mathbf{0{,}064.}$$ (3 pont)

12 A *Vaktérkép Magyarország* egy olyan internetes játék, amelyben településeket kell az ország vaktérképén elhelyezni. Öt település elhelyezése után a program értékel: kiírja, hogy az öt tipp átlaga mennyivel tér el a valóságtól, illetve a résztvevőkhöz viszonyítva milyen a játékos eredménye. Gábornak egyszer ezt írta ki: „A helyes választól való eltéréseid átlaga 75 km. Jobb vagy, mint a játékban részt vevők 50,74%-a". ● 4

Az alábbi állítások mindegyikéről döntse el, hogy igaz vagy hamis!

A) Gábor minden tippje 70 km-nél közelebb volt a valósághoz.

B) Biztosan nem volt 120 km-nél nagyobb eltérés Gábor tippjei és a valóság között.

C) A játékban részt vevők több mint harmada jobb, mint Gábor.

D) Ha Gábornál az átlagos eltérés 74 km lenne, jobb lenne a résztvevők felénél.

Megoldás: (1-1 pont)

A) **hamis** *B)* **hamis** *C)* **igaz** *D)* **igaz**

II. rész/A

13 Pisti és Tibi kerékpárral készül a 63 km-re élő barátjukhoz, Petihez. Pisti szerint ha a tervezett idő első felében 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másik felében 24 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladnak, átlagsebességük ugyanannyi lesz, mint ha az út első felét 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másik felét 24 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel teszik meg. Tibi rövid fejszámolás után közli, hogy nem ért egyet.

a) Melyiküknek van igaza? a 8

M: Ha a kerékpározás tervezett ideje t, akkor felírható a következő egyenlet:

$$63 = \frac{t}{2} \cdot 18 + \frac{t}{2} \cdot 24,$$ (2 pont)

amiből $t = 3$ óra. (1 pont)

Az átlagsebességük az első esetben: $\frac{63}{3} = 21\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. (1 pont)

A második esetben az út első felét $\frac{31{,}5}{18}$ óra alatt, (1 pont)

a második felét pedig $\frac{31{,}5}{24}$ óra alatt teszik meg. (1 pont)

A második esetben így az átlagsebesség: $\frac{63}{\frac{31{,}5}{18} + \frac{31{,}5}{24}} = 20{,}57\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. (1 pont)

Tehát **Tibinek** van igaza. (1 pont)

Végül úgy döntenek, hogy egész úton $24\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel kerékpároznak. Délelőtt 9 órakor el is indultak. Egy óra múlva elindult Peti szintén kerékpárral, ugyanazon az útvonalon velük szemben. Háromnegyed tizenegykor találkoztak.

b) Mekkora sebességgel kerékpározott Peti? b 4

M: Egy óra alatt 24 km-t tettek meg, hátravan még 39 km. (1 pont)

Ha Peti sebessége x, akkor $39 = \frac{3}{4} \cdot 24 + \frac{3}{4} \cdot x$. (1 pont)

Amiből $x = 28\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Tehát Peti **28** $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel kerékpározott. (2 pont) ö 12

14 A pentalux társasjátékban a játékosoknak egy szabályos ötszög oldalait és átlóit bejárva vissza kell jutniuk a kiindulási csúcsba.

a) Bejárható-e a pálya úgy, hogy minden oldalon és minden átlón csak egyszer halad át a játékos? Válaszát indokolja! a 3

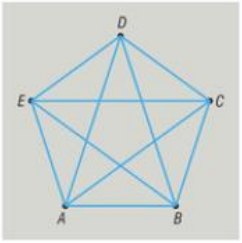
M: I. megoldás

Mivel minden csúcsból páros számú él indul – konkrétan 4 –, ezért a pálya **bejárható** úgy, hogy a játékos minden oldalon és minden átlón egyszer halad át és visszajut a kiindulási helyre. (3 pont)

II. megoldás

A bejárás egy lehetséges sorrendje:

$A, B, C, D, E, B, D, A, C, E, A.$ (3 pont)



b) Egy konvex sokszög belső szögeinek összege 1980°. Hány oldalú a sokszög? b 3

M: Az n oldalú sokszög szögeire vonatkozó összefüggés szerint:

$$(n - 2) \cdot 180° = 1980°,$$

ezt megoldva $n = 13$ adódik. (2 + 1 pont)

c) Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 777-tel több átlója van, mint oldala? c 6

M: Az n oldalú sokszög átlói és oldalai közötti összefüggés szerint:

$$\frac{n(n-3)}{2} = n + 777.$$ (3 pont)

Átalakítás után az $n^2 - 5n - 1554 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. (2 pont)

Az egyenlet két megoldása: $x_1 = 42$ és $x_2 = -37$, de x csak a pozitív érték lehet.

Tehát a sokszögnek **42 oldala** van. (1 pont) ö 12

15 Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az e egyenes egyenlete:

$$5x + 3y = 15.$$

a) Mekkora területű háromszöget határoz meg az e egyenes a koordinátatengelyekkel? a 4

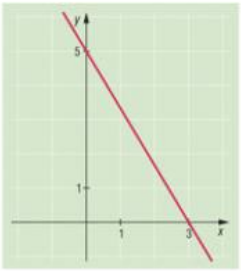
M: Keressük meg a koordinátatengelyekkel való metszéspontokat.

Ha $x = 0$, akkor $y = 5$, az ordinátatengelyt a (0; 5) pontban metszi. (1 pont)

Ha $y = 0$, akkor $x = 3$, az abszcisszatengelyt a (3; 0) pontban metszi. (1 pont)

A létrejövő derékszögű háromszög befogói 3 és 5, a területe:

$$T = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7{,}5.$$ (2 pont)



b) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az e egyenessel és áthalad a $(-2; -3)$ koordinátájú ponton! b 4

M: Az adott egyenes meredeksége $m = -\frac{5}{3}$. (1 pont)

A párhuzamos egyenes meredeksége ezzel megegyezik. (1 pont)

A keresett egyenes egyenlete:

$$y + 3 = -\frac{5}{3}(x + 2),$$

rendezve:

$$5x + 3y = -19.$$ (2 pont)

c) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges e-re és áthalad az $(1; -4)$ ponton! c 4

M: Az adott egyenesre merőleges egyenes meredeksége $m_1 = \frac{3}{5}$. (2 pont)

A keresett egyenes egyenlete:

$$y + 4 = \frac{3}{5}(x - 1),$$

rendezve:

$$-3x + 5y = -23.$$ (2 pont) ö 12

II. rész/B

16 A kertészetekben a magok elvetésére szaporítóládákat használnak. Egy téglatest alakú láda belső méretei: 27 cm és 57 cm, a láda magassága 7 cm. A magokat a ládába szemenként vetik úgy, hogy vetéskor a sortávolság és a sorokon belül a tőtávolság is 3 cm, mert a kikelő palántának 9 cm^2 tenyészterületre van szüksége.



a) Ha vásárolunk 50 liter virágföldet, azzal hány darab szaporítóládát tudunk teljes magasságig megtölteni? a 4

M: Egy szaporítóláda térfogata:

$$27 \cdot 57 \cdot 7 = 10\,773\ cm^3 = 10{,}773 \text{ liter.}$$ (2 pont)

A hányadosuk:

$$\frac{50}{10{,}773} = 4{,}64.$$

Tehát **4 ládát** tudunk megtölteni 50 liter földdel. (2 pont)

b) Egy szaporítóládába legfeljebb hány darab vetőmagot tudunk elvetni a fenti szabály szerint? b 3

M: A szaporítóláda hasznos területe:

$$27 \cdot 57 = 1539\ cm^2.$$ (2 pont)

Egy maghoz 9 cm^2 szükséges, így a vetőmagok száma:

$$\frac{1539}{9} = 171.$$

Tehát egy ládába **171 magot** vethetünk el. (1 pont)

A gyakorlat azt mutatja, hogy a magoknak sajnos csak a 80%-a kel ki.

c) Hány darab vetőmagot, ehhez hány darab szaporítóládát, és hány liter virágföldet vegyünk, ha 1000 darab kis virágot szeretnénk majd a szaporítóládánkból kiültetni? c 10

M: Ha 1000 db növényre van szükségünk és ez az elvetett magok számának a 80%-a, akkor a szükséges vetőmagok száma:

$$\frac{1000}{80} \cdot 100 = 1250 \text{ db.}$$ (4 pont)

Mivel egy szaporítóládába a *b)* alapján 171 magot vethetünk el és $\frac{1250}{171} = 7{,}3$, ez azt jelenti, hogy 8 szaporító ládára van szükségünk. (3 pont)

A 8 szaporítóládába szükséges virágföld:

$$8 \cdot 10{,}773 = \mathbf{86{,}184 \text{ liter.}}$$ (3 pont) ö 17

17 Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk. A dobott számokat a dobások sorrendjében egymás mellé leírva egy háromjegyű számot kapunk. Tekintsük az így létrejövő összes lehetséges háromjegyű számot.

a) Hányféle háromjegyű számot kaphatunk? a 3

Minden dobásnál 6-féle eredmény lehet, tehát összesen $6 \cdot 6 \cdot 6 = \mathbf{216}$ különböző háromjegyű szám jöhet létre. (3 pont)

b) Szerepel-e a számok között a legnagyobb és legkisebb létrejöhető szám különbsége is? b 3

A legnagyobb szám, amely létrejöhet, a 666, a legkisebb a 111, különbségük 555, ez szintén **létrejöhet.** (3 pont)

c) Hány olyan szám van közöttük, amelynek minden jegye különböző? c 3

Az első jegy 6-féle, a második 5, a harmadik 4-féle lehet, tehát $6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{120}$ olyan szám van, amelynek különbözők a jegyei. (3 pont)

A létrejövő háromjegyű számok között vannak olyanok, amelyekben minden számjegy megegyezik.

d) Mennyi ezeknek a számoknak az összege? d 3

Azonos számjegyekből álló szám 6 darab van: 111, 222, 333, 444, 555, 666.

Ezek összege: $3 \cdot 777 = 2331$. (3 pont)

Az összes lehetséges szám közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet.

e) Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám osztható lesz 4-gyel? e 5

M: Egy szám akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két jegyből képezett kétjegyű szám osztható 4-gyel. A lehetséges végződések nagyság szerint: 12; 16; 24; 32; 36; 44; 52; 56; 64, mindegyik előtt 6-féle lehet az első jegy.

A kedvező esetek száma:

$$6 \cdot 9 = 54.$$ (3 pont)

A valószínűség:

$$\frac{54}{216} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$ (2 pont) ö 17

18 A valós számokon értelmezett $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ elsőfokú függvény grafikonja az x tengelyt az A, az y tengelyt a B pontban metszi.

a) Mennyi az A és B pontok távolsága? a 3

M: Az A pont második koordinátája 0. A $0 = -\frac{1}{2}x + 4$ egyenletből $x = 8$, tehát $A(8; 0)$.

A B pont első koordinátája 0, a második 4, $B(0; 4)$. (2 pont)

A két pont távolsága:

$$AB = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} \approx \mathbf{8{,}944}.$$ (1 pont)

Pali internetes reklámok készítésével foglalkozik. A reklámokért kapott fizetés attól függ, hogy hányan nézik meg azt. A bér a megtekintések számának a nemnegatív valós számokon értelmezett elsőfokú függvénye.

Ha 1 000 000 ember nézi meg a reklámot, Pali 600 dollárt kap, 2 000 000 megtekintés esetén a járandósága 700 dollár.

b) Írja fel a bért meghatározó elsőfokú függvény hozzárendelési szabályát! b 9

M: Az elsőfokú függvényt keressük $f(x) = ax + b$ alakban. (2 pont)

Tudjuk, hogy $f(1\,000\,000) = 600$ és $f(2\,000\,000) = 700$, azaz a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} 600 &= a \cdot 1\,000\,000 + b \\ 700 &= a \cdot 2\,000\,000 + b \end{aligned}\right\}. \quad \text{(3 pont)}$$

A második egyenletből kivonva az elsőt:

$$100 = 1\,000\,000 \cdot a, \quad \text{tehát} \quad a = \frac{1}{10\,000}.$$

Visszahelyettesítve $b = 500$. (2 + 1 pont)

Tehát a keresett függvény:

$$f(x) = \frac{1}{10\,000}x + 500. \quad \text{(1 pont)}$$

c) Mekkora összeghez jut Pali, amikor még senki nem nézte meg a reklámot? c 2

M: A válasz az $x = 0$-hoz tartozó érték, ami **500 dollár.** (2 pont)

Pali Budapesten él, és távmunkában szeretne dolgozni egy chicagói cégnél. A távmunka azt jelenti, hogy a dolgozó az otthonában végzi a munkát, és interneten tartja a kapcsolatot a munkahellyel.

A két város közötti időeltolódásról ezt tudjuk:

Amikor a helyi idő Budapesten május 15. 4.30, akkor a helyi idő Chicagóban május 14. 21.30.

A távmunka feltétele, hogy legalább 6 órát kell dolgozni chicagói idő szerint 8 és 16 óra között.

d) Részt tud-e venni Pali ebben a távmunkában, ha budapesti idő szerint 21 óra és reggel 6 óra között nem szeretne dolgozni? d 3

M: Az időeltolódás a két város között 7 óra. (1 pont)

Amikor Chicagóban 8 óra van, akkor Budapesten 15 óra van. Este 21 óráig éppen 6 óra van hátra. Tehát **részt tud venni** a távmunkában. (2 pont) ö 17

I. rész

1 Két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 12, legkisebb közös többszörösük 120. Igaz-e, hogy mindkét szám osztható 5-tel? Válaszát indokolja! ● 2 ☐

M: Nem. (1 pont)

A legnagyobb közös osztó (12) nem osztható 5-tel, ezért nem lehet mindkét szám osztható 5-tel. (1 pont)

2 Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 10 cm és 11 cm. Egy hozzá hasonló háromszög kerülete 84 m. Mekkorák az utóbbi háromszög oldalai? ● 2 ☐

M: Az adott háromszög kerülete 28 cm. A kerületek aránya:

$$\frac{84\text{ m}}{28\text{ cm}} = \frac{8400}{28} = 300,$$

tehát 300-szorosára kell nagyítani az adott háromszöget. (1 pont)

Tehát a keresett oldalak: **21 m, 30 m és 33 m.** (1 pont)

3 Ötven – nem feltétlenül különböző – pozitív egész szám átlaga 42. Szerepelhet-e a számok között a 2020? Válaszát indokolja! ● 2 ☐

M: A számok összege $50 \cdot 42 = 2100$. Ha a 2020 szerepel a számok között, a többi 49 szám összegének 80-nak kell lenni. Ez **lehetséges,** például 18 db 1-es és 31 db 2-es. (2 pont)

4 Egy trapéz alapjainak hossza 12 cm és 5 cm, a szárai egyenlőek. A hosszabb alapon fekvő szögek 73°-osak. Mekkorák a trapéz szárai? ● 2 ☐

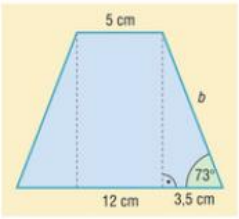
M: Az ábra alapján:

$$\cos 73° = \frac{3{,}5}{b},$$ (1 pont)

amiből

$b = 11{,}97$ cm. (1 pont)

Tehát a húrtrapéz szárainak hossza **11,97 cm.**



5 Melyik szám a nagyobb: a $\sqrt[4]{8^5}$ vagy a $\sqrt[3]{2^7}$? Válaszát indokolja! ● 2 ☐

M: Átírva törtkitevős hatványra:

$$\sqrt[4]{8^5} = 8^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{15}{4}}; \quad \sqrt[3]{2^7} = 2^{\frac{7}{3}}.$$ (1 pont)

Mivel $\frac{15}{4} > \frac{7}{3}$, az exponenciális függvény monoton növekedése miatt, vagyis az **első szám** a nagyobb. (1 pont)

6 Egy telefon árát 5%-kal felemelik. Két hónap múlva az aktuális árat újra felemelik 5%-kal. Igaz-e, hogy az új ár annyi, mintha az eredeti árat 10%-kal emelték volna? Válaszát indokolja! ● 2 ☐

M: A telefon ára két áremelés után $1{,}05 \cdot 1{,}05 = 1{,}1025$-szeresére nőtt, vagyis 10,25%-kal. (1 pont)

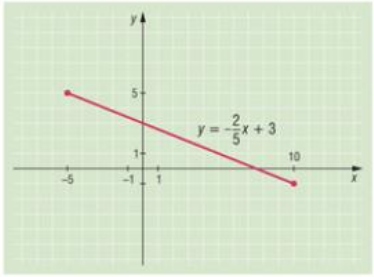
Tehát **nem igaz,** hogy 10%-kal lett drágább a telefon. (1 pont)

7 Az ábrán a $[-5; 10]$ intervallumon az

$$f(x) = -\frac{2}{5}x + 3$$

hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja látható.

Adja meg a függvény értékkészletét és zérushelyét! ● 2 ☐



A függvény értékkészlete: $[-1; 5]$. (1 pont)

A függvény zérushelye: $x = 7{,}5$. (1 pont)

8 Van-e olyan 5 pontú gráf, amelyben a csúcsok fokszáma rendre: 1; 1; 3, 3; 3? ● 2 ☐

M: Mivel a fokszámok összege páratlan szám, ezért ilyen gráf **nincs.** (2 pont)

9 Egy 7 cm belső átmérőjű, henger alakú, 10 cm magas pohárban 9 cm magasan áll a víz. A pohárba (óvatosan) egy 3 cm élhosszúságú játékkockát ejtünk, amely teljesen lesüllyed a pohár aljára. Mennyi víz folyik ki a pohárból? ● 3 ☐

M: Az 1 cm magas üres rész térfogata:

$$V_{henger} = 1 \cdot 3{,}5^2 \cdot \pi \approx 38{,}48 \text{ cm}^3.$$ (1 pont)

A bedobott kocka térfogata:

$$V_{kocka} = 3^3 = 27 \text{ cm}^3.$$ (1 pont)

Mivel ez utóbbi a kisebb, **nem folyik ki víz** a pohárból. (1 pont)

10 Milyen távol van a koordináta-rendszer kezdőpontjától a $7x - 3y = -1$ egyenletű egyenes 5 abszcisszájú pontja? ● 3 ☐

M: Az egyenes egyenletébe $x = 5$-öt helyettesítve $y = 12$ adódik. Tehát a pont az (5; 12). (2 pont)

Távolsága az origótól:

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = \mathbf{13 \text{ egység.}}$$ (1 pont)

11 A globális felmelegedés egyik következménye az, hogy csökken az északi-sarki jég felülete. Ha csak annyit feltételezünk, hogy az északi-sarki jég mennyisége évente 2%-kal csökken, hány év múlva csökken felére a jég mennyisége? ● 3

M: A $0{,}98^x = 0{,}5$ egyenletet kell megoldanunk. (1 pont)

Mindkét oldal logaritmusát véve:

$$\lg 0{,}98^x = \lg 0{,}5. \quad \text{(1 pont)}$$

Átalakítva:

$$x \cdot \lg 0{,}98 = \lg 0{,}5 \quad \text{vagy} \quad x = \log_{0{,}98} 0{,}5. \quad \text{(1 pont)}$$

Ebből $x = \dfrac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}98} = 34{,}3$. Tehát **kb. 35** év múlva következik be az északi-sarki jég felére csökkenése. (1 pont)

12 Döntse el a szabályos hatszögre vonatkozó alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis! ● 4

A) A szabályos hatszög köré írható kör sugara kétszerese a beírható kör sugarának.

B) A szabályos hatszög legnagyobb átlójának hossza kétszerese az oldal hosszának.

C) A szabályos hatszög minden szöge 120°-os.

D) A szabályos hatszögnek 6 szimmetriatengelye van.

Megoldás: (1-1 pont)

A) **hamis** *B)* **igaz** *C)* **igaz** *D)* **igaz**

II. rész/A

13 Egy labdarúgó-mérkőzés kétszer 45 percig tart. A játékvezető mindkét félidő végén hosszabbíthat néhány percet a cserék és ápolások miatt.

A játék nem folyamatos, a tiszta játékidő egy mérkőzésen az az időtartam, ameddig a labda játékban van.

Egy mérkőzésen a játékvezető az első félidő végén 1 percet, a második félidő végén 5 percet hosszabbított, így a mért tiszta játékidő 63 perc volt.

a) A játékidő hány százalékában volt játékban a labda? A választ egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! a 4

M: Az összes játékidő $45 + 1 + 45 + 5 = 96$ perc volt. (1 pont)

A tiszta játékidő 63 perc, hányadosuk $\dfrac{63}{96} = 0{,}65625$. (2 pont)

Egy tizedesjegyre kerekítve, a mérkőzés **65,6%-ában** volt játékban a labda. (1 pont)

Azt is lemérték, hogy a hazai csapat a tiszta játékidő 58%-ában birtokolta a labdát.

b) Mennyi ideig volt a vendégcsapatnál a labda? Az eredményt egész másodpercre kerekítve adja meg! b 4

M: A vendégcsapat a 63 perc tiszta játékidő 42%-ában birtokolta a labdát. (1 pont)

$63 \cdot 0{,}42 =$ **26,46 perc,** azaz 26 perc és 27,6 másodperc. (3 pont)

A mérkőzés során mindkét csapatnak 11 játékosa van a pályán, de cserékre is lehetőség van. A hazai csapat átlagéletkora a mérkőzés kezdetén pontosan 27 év volt. A második félidőben végrehajtott első cserénél egy 33 éves játékos helyett egy 18 éves játékos állt be.

c) Mennyi lett így a csapat életkorának átlaga? Az eredményt egy tizedesre kerekítve adja meg! c 4

M: A 11 játékos életkorának összege az átlag alapján:

$11 \cdot 27 = 297$ év. (2 pont)

Amikor a 33 éves játékos helyett egy 18 éves ált be, az összeg 15 évvel csökkent, 282 lett. (1 pont)

Így az új átlag $\frac{282}{11} = 25{,}6363$ év, egy tizedesre kerekítve **25,6 év.** (1 pont) ö 12

14 A hőmérséklet mérésére többfajta skálát használnak, ezek kapcsolatát a táblázat mutatja. A skálák egyenesen arányosak.

Hőmérsékletskála	A jég olvadáspontja	A víz forráspontja
Celsius: °C	0	100
Kelvin: K	273	373
Fahrenheit: °F	32	212
Réaumur: °R	0	80

a) Adja meg Réaumur-fokban a 300 K hőmérsékletet! a 3

$300\ \text{K} = 27\ °\text{C} = 0{,}8 \cdot 27\ °\text{R} =$ **21,6 °R.** (3 pont)

b) A 28 °C hőmérséklet hány Fahrenheit-fok? b 4

$28\ °\text{C} = \frac{28}{100} \cdot 180 + 32\ °\text{F} =$ **82,4 °F.** (4 pont)

c) Adja meg Kelvinben az 50 °F hőmérsékletet! c 5

$50\ °\text{F} = (50 - 32) \cdot \frac{100}{180} + 273\ \text{K} =$ **283 K.** (5 pont) ö 12

15 Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $x + 4 = \sqrt{5v + 26}$ a 5

M: A négyzetgyök miatt az egyenletnek akkor van értelme, ha $x \geq -5{,}2$. (1 pont)

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$x^2 + 8x + 16 = 5x + 26.$$ (2 pont)

Rendezve az egyenletet:

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$ (1 pont)

Ennek megoldásai: $x_1 = 2$ és $x_2 = -5$.

Az értelmezési tartományban mindkettő benne van, de az ellenőrzésből kiderül, hogy csak az x_1 megoldás.

Tehát az egyenlet megoldása: $x = 2$. (1 pont)

b) $\frac{8^{2x-1}}{16^x} \cdot 32^{2x-3} = 16 \cdot 4^{x-1}$ b 7

M: Minden hatványt írjunk fel a 2 alappal:

$$\frac{(2^3)^{2x-1}}{(2^4)^x} \cdot (2^5)^{2x-3} = 2^4 \cdot (2^2)^{x-1}.$$ (2 pont)

A zárójelek felbontása és a hatványműveletek elvégzése után:

$2^{6x-3-4x+10x-15} = 2^{4+2x-2}$, azaz $2^{12x-18} = 2^{2x+2}$. (2 pont)

Az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő: (1 pont)

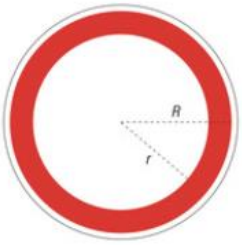
$$12x - 18 = 2x + 2.$$

Ennek megoldása: $x = 2$. (1 pont)

Az ellenőrzés mutatja, hogy az $x = 2$ valóban megoldás. (1 pont) ö 12

II. rész/B

16 A „mindkét irányból behajtani tilos" közlekedési tábla kör alakú. A kör átmérője 60 cm, a szélén 7 cm széles piros sáv veszi körül a belső fehér részt. (A tábla külső, keskeny fehér szegélyét nem vesszük figyelembe.)



a) A tábla hány százaléka piros? a 6

M: Az adatokból: a külső kör sugara $R = 30$ cm, a belső, fehér kör sugara $r = 23$ cm. (2 pont)

A tábla területe: $30^2 \cdot \pi = 900\pi$. (1 pont)

A piros körgyűrű területe: $30^2 \cdot \pi - 23^2 \cdot \pi = 371\pi$. (2 pont)

A hányadosuk:

$$\frac{371\pi}{900\pi} = 0{,}41222.$$

Tehát a táblának kb. **41%-a** piros. (1 pont)

b) Milyen széles piros sáv esetén lenne a táblán a fehér és piros részek aránya 2 : 1? b 5

M: Ha a fehér kör sugara r, felírható a következő összefüggés:

$$\frac{r^2 \cdot \pi}{(30^2 - r^2) \cdot \pi} = \frac{2}{1}.$$ (2 pont)

Egyszerűsítés és beszorzás után:

$$r^2 = 1800 - 2r^2,$$
$$r^2 = 600,$$
$$r \approx 24{,}49 \text{ cm}.$$ (2 pont)

Tehát a piros sáv szélessége ebben az esetben $30 - 24{,}49 \approx$ **5,51 cm** lenne. (1 pont)

Egy közlekedési táblákat tartó szerkezetre egymás mellé négy táblát szeretnének kirakni: egy téglalap, egy háromszög, és két különböző kör alakú táblát.

c) Hány különböző sorrendben helyezhetik el a táblákat úgy, hogy a két kör alakú tábla ne legyen egymás mellett? c 6

M: Négy tábla esetén az összes lehetséges elrendezések száma: $4! = 24$. (2 pont)

Könnyebb megadni azoknak az elrendezéseknek a számát, amikor a két kerek tábla egymás mellett van. Ha egy elemnek tekintjük őket, akkor 3! ilyen elrendezés van, de a két tábla 2-féleképpen lehet egymás mellett, ezért: $2 \cdot 3! = 12$. (2 pont)

Amikor nincs egymás mellett két kör, az a kettő különbsége: $24 - 12 = 12$.

Tehát **12-féleképpen** helyezhetik el a táblákat úgy, hogy ne legyen két kerek egymás mellett. (2 pont) ö 17

17 Az ötöslottó-sorsoláson 90 számból 5-öt húznak ki, a játékosok szintén 5 számot jelölnek be a szelvényükön.

Józsi bácsi kitöltött egy ötöslottó-szelvényt, és nézi a televízióban a lottósorsolást.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy az első kihúzott szám szerepel a szelvényén? Az eredményt négy tizedesjegyre kerekítve adja meg! a 4

M: Az első húzáskor az összes esetek száma 90. (1 pont)

A kedvező esetek száma 5. (1 pont)

A valószínűség: $\frac{5}{90} =$ **0,0556.** (2 pont)

Amikor kihúzzák az első számot, kiderül, hogy nem találta el, és ugyanez történik a második számnál is.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy harmadikra kihúznak egyet a számai közül? Az eredményt négy tizedesjegyre kerekítve adja meg! b 4

M: Két szám kihúzása megtörtént, az összes esetek száma 88. (1 pont)

A kedvező esetek száma még mindig 5. (1 pont)

A valószínűség: $\frac{5}{88} = \mathbf{0{,}0568.}$ (2 pont)

A harmadik kihúzott szám egyike Józsi bácsi számainak. A sorsolás folytatódik.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a sorsolás végén legalább 2 találata lesz Józsi bácsinak? Az eredményt négy tizedesjegyre kerekítve adja meg! c 9

M: Legalább két találat úgy lehet, hogy a hátralévő számhúzások közül egy vagy mindkettő talál. (1 pont)

Mindkét esetben az összes esetek száma $87 \cdot 86 = 7482$. (1 pont)

1 találathoz egy számot kell húzni a megmaradt 4-ből, egyet pedig a be nem jelölt és még megmaradt 83-ból. De ezek kétféle sorrendben jöhetnek egymás után: $2 \cdot 4 \cdot 83 = 664$. Ennyi a kedvező esetek száma. (2 pont)

A valószínűség: $\frac{664}{7482} = 0{,}0887$. (2 pont)

A másik esetben a bejelölt számokból húznak 2-t, a kedvező esetek száma $4 \cdot 3 = 12$.

A valószínűség: $\frac{12}{7482} = 0{,}0016$. (2 pont)

A megoldás a két valószínűség összege lesz: **0,0903.** (1 pont) ö 17

18 Amikor Léna született, az édesanyja 24 éves volt.

a) Hány éves lesz Léna akkor, amikor az anyukája háromszor annyi idős lesz, mint a lánya? a 5

M: Jelöljük x-szel Léna életkorát, amikor a korok közötti kapcsolat létrejön. (1 pont)

Az édesanya 24 évvel idősebb a lányánál, azaz $x + 24$ éves. (1 pont)

Felírható a következő egyenlet: $3x = x + 24$. (1 pont)

Ennek megoldása: $x = 12$. (1 pont)

Amikor **Léna 12 éves** lesz, az **anyukája 36,** valóban a 3-szorosa. (1 pont)

Egy családban három gyermek van. Peti két évvel fiatalabb Matyinál, Zsuzsi szintén két évvel fiatalabb Petinél. Az apa 4 évvel idősebb, mint az anya.

Ha a család minden tagjának életkorát összeadjuk, 75 évet kapunk.

A három gyerek életkorának összege úgy aránylik a szülők életkorának összegéhez, mint 1 : 4.

b) Adja meg a család minden tagjának életkorát! b 12

M: Jelöljük a legfiatalabb gyermek, vagyis Zsuzsi életkorát x-szel, ezzel Peti $x + 2$; Matyi pedig $x + 4$ éves. (1 pont)

Ha az anya életkora y, akkor az apa $y + 4$ éves. (1 pont)

Az életkorok összege 75 év, azaz:

$$x + (x + 2) + (x + 4) + y + (y + 4) = 75.$$ (1 pont)

A zárójeleket felbontva és összevonva:

$$3x + 2y = 65.$$ (1 pont)

Az adott arányt felírva:

$$\frac{x + (x + 2) + (x + 4)}{y + (y + 4)} = \frac{1}{4}.$$ (1 pont)

Beszorzás és összevonás után:

$$12x + 24 = 2y + 4.$$ (1 pont)

A két egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 65 \\ 12x + 20 &= 2y \end{aligned}\right\}.$$ (1 pont)

A második egyenletből y-t kifejezve:

$$y = 6x + 10.$$ (1 pont)

Beírva az első egyenletbe:

$$3x + 2(6x + 10) = 65.$$ (1 pont)

Megoldva az egyenletet: $x = 3$; visszahelyettesítve: $y = 28$. (2 pont)

A szöveg alapján ellenőrizhetők az eredmények.

Tehát **Zsuzsi 3 éves, Peti 5 éves, Matyi 7 éves,** az **anya 28 éves,** az **apa 32 éves.** (1 pont)

ö 17

I. rész

1 Írja át az 1848, tízes számrendszerbeli számot kettes számrendszerbe! ● 2

M: $1848 = 1 \cdot 1024 + 1 \cdot 512 + 1 \cdot 256 + 0 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$, tehát $1848_{10} = 11100111000_2$. (1 + 1 pont)

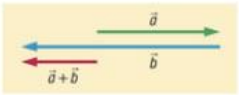
A szám kettes számrendszerben: $\mathbf{11100111000_2}$.

2 Írja fel normálalakban a $0{,}000\,000\,078 \cdot 0{,}000\,035$ szorzás eredményét! ● 2

M: $0{,}000\,000\,078 \cdot 0{,}000\,035 = 7{,}8 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-5} = 27{,}3 \cdot 10^{-13} = \mathbf{2{,}73 \cdot 10^{-12}}$. (2 pont)

3 Adottak az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ ellentétes irányú vektorok, $|\vec{a}| = 13$ cm, $|\vec{b}| = 21$ cm. Mekkora az $|\vec{a} + \vec{b}|$? ● 2

$|\vec{a} + \vec{b}| = \mathbf{8}$ cm. (2 pont)

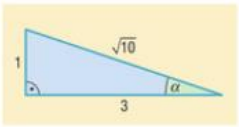


4 Egy α hegyesszög esetén $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Adja meg $\sin\alpha$ pontos értékét! ● 2

M: A megfelelő derékszögű háromszög befogóinak hossza 1 és 3 egység. (1 pont)

Pitagorasz-tétellel számolva, az átfogó $\sqrt{10}$. (1 pont)

Tehát $\sin\alpha = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{10}}}$. (1 pont)



5 Átalakítások után döntse el, hogy melyik szám a nagyobb: ● 2

$$\log_7 \sqrt[3]{7^{10}} \quad \text{vagy} \quad \lg 10\,000?$$

$\log_7 \sqrt[3]{7^{10}} = \log_7 7^{\frac{10}{3}} = \mathbf{\frac{10}{3}} < \lg 10\,000 = \mathbf{4}$. (2 pont)

6 A *Ki nevet a végén?* társasjátékban az a játékos teheti fel a bábuját a táblára, aki a dobókockával 6-ost dob. Mennyi a valószínűsége, hogy egy játékos a negyedik próbálkozására dob először 6-ost? ● 3

M: Az összes esetek száma 4 dobásnál 6^4. A kedvező esetek száma $5^3 \cdot 1$. (1 pont)

A valószínűség: $\frac{5^3}{6^4} = 0{,}096$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy egy játékos negyedik próbálkozásra dob először hatost: **0,096.**

7 Egy áru árát 20%-kal csökkentették, így 2944 Ft lett. Mennyi volt az ár a csökkentés előtt? ● 2

M: I. megoldás

Az eredeti ár:

$$\frac{2944}{80} \cdot 100 = 3680 \text{ Ft.}$$ (2 pont)

A csökkentés előtti ár: **3680 Ft.**

II. megoldás

$x \cdot 0{,}8 = 2944$, ebből $x = 3680$. (2 pont)

A csökkentés előtti ár: **3680 Ft.**

8 Hány átlója van a konvex, 16 oldalú sokszögnek? ● 2

M: Az n oldalú konvex sokszögnek $\frac{n(n-3)}{2}$ átlója van. (1 pont)

Ebben az esetben:

$$\frac{16 \cdot 13}{2} = 104,$$ (1 pont)

ennyi átlója van a sokszögnek.

Az átlók száma: **104.**

9 Két pozitív szám közül a kisebb kétharmad része a nagyobbnak. A nagyobb szám hány százaléka a kisebbnek? ● 3

M: Legyen a kisebb szám a, a nagyobb b.

A feltétel szerint $a = \frac{2}{3}b$. (1 pont)

Átrendezve:

$$b = \frac{3}{2}a = 1{,}5a.$$ (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy a nagyobb szám 150%-a a kisebbnek. (1 pont)

A nagyobb szám **150%-a** a kisebbnek.

10 Határozza meg a legkisebb pozitív egész számot, amely csak 0 és 7 számjegyeket tartalmaz és osztható 15-tel! ● 3

M: Egy szám osztható 15-tel, ha osztható 3-mal és 5-tel. (1 pont)

Az 5-tel oszthatóság úgy valósítható meg, ha az utolsó jegye 0. (1 pont)

A 3-mal oszthatósághoz három 7-es szükséges, tehát a legkisebb ilyen szám a 7770. (1 pont)

A keresett szám: **7770.**

11 A 37 és 201 közé adjon meg három számot úgy, hogy az adott két számmal együtt egy számtani sorozat öt szomszédos elemét alkossák! 4

M: A számtani sorozat első és ötödik tagja közötti összefüggés:

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot d.$$ (1 pont)

Jelen esetben: $201 = 37 + 4 \cdot d$. (1 pont)

Ebből $d = 41$. (1 pont)

Tehát a közéjük iktatott három szám:

$37 + 41 = 78$; $37 + 2 \cdot 41 = 119$ és $37 + 3 \cdot 41 = 160$. (1 pont)

A három szám: **78; 119; 160.**

12 Régen a tengerészek olyan távcsövet használtak, amelynek üvegébe négyzetháló volt karcolva. Ennek segítségével meg tudták állapítani, milyen messze van a távcsővel figyelt tárgy. 3



A tárgy magassága a távcsőben fordítottan arányos a távolsággal. A távolságot a hajózásban tengeri mérföldben mérték.

Az ábrán látható 3 egység magas hajó 24 tengeri mérföldre van a megfigyelőtől.

Milyen messze van a megfigyelőtől az az ugyanilyen hajó, amelyet 4 egység magasnak látnak a távcsőben?

M: Jelöljük x-szel a hajó távolságát tengeri mérföldben.

A fordított arányosság miatt $3 \cdot 24 = 4 \cdot x$. (2 pont)

Ebből $x = \frac{72}{4} = 18$ tengeri mérföld. (1 pont)

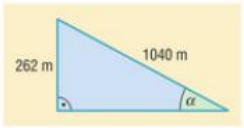
A hajó **18** tengeri mérföldre van a megfigyelőtől.

II. rész/A

13 A budapesti libegő a Zugligetből a János-hegyre vezető drótkötélpályás felvonó. A két állomás között a szintkülönbség 262 m, a libegő hossza 1040 m, ezt a távolságot 12 perc alatt teszi meg.

a) Mekkora szöget zár be a vízszintessel a kötélpálya? a 4

M: Készítsünk ábrát! (1 pont)



Az ábra alapján:

$$\sin\alpha = \frac{262}{1040}.$$ (1 pont)

Ebből $\alpha = 14{,}59°$.

b) Határozza meg a libegő sebességét $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-ban és $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban! b 4

M: A 12 perc = 12 · 60 sec = 720 sec. (1 pont)

A sebesség:

$$v = \frac{1040}{720}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \mathbf{1{,}44\,\frac{m}{s}}.$$ (1 pont)

A 12 perc $= \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ óra. (1 pont)

A sebesség:

$$v = \frac{1{,}040}{0{,}2}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \mathbf{5{,}2\,\frac{km}{h}}.$$ (1 pont)

A libegőn az utasok 2 személyes padokon ülnek.

c) Hányféleképpen tud egy 10 fős társaság 5 egymást követő padon lemenni, ha a társaság két tagja, Lilla és Gábor az utolsó padon szeretne ülni együtt? c 4

M: 8 embert kell 2-es csoportokba osztani.

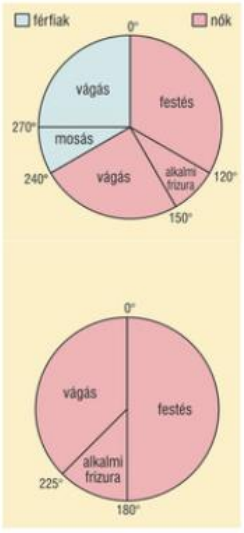
Az elsőbe $\binom{8}{2}$-féleképpen, (1 pont)

a másodikba $\binom{6}{2}$-féleképpen, (1 pont)

a harmadikba $\binom{4}{2}$-féleképpen ülhetnek, az utolsó már egyértelmű. (1 pont)

Összesen $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 1 = \mathbf{2520}$ különböző módon utazhatnak. (1 pont) ö 12

14 A „Vágesz” fodrászszalon női és férfi vendégeket is fogad. Az előző hónapban összesen 240-en vették igénybe a szalon szolgáltatásait. A következő kördiagram azt mutatja, hogy a vendégek elsősorban milyen szolgáltatást kértek.



a) Készítsen kördiagramot az előző hónap női vendégeiről! a 6

M: $\frac{360°}{240} = 1{,}5°$. (1 pont)

Az egyes szögekhez tartozó nők létszáma: (2 pont)

Szolgáltatás	Szög	Létszám
festés	120°	80
vágás	90°	60
alkalmi frizura	30°	20

A megfelelő kördiagram az ábrán látható. (3 pont)

A hajfestést kérő nők 80%-a szőkítést kért. A szőkítést kérők 25%-a sminket is kért.

b) Kik voltak többen, akik szőkítést nem kérve festették a hajukat, vagy azok, akik szőkítést és sminket is kértek? b 3

M: A festést kérő nők 80%-a, azaz $0{,}8 \cdot 80 = 64$ fő, ennek a 25%-a, azaz $0{,}25 \cdot 64 = 16$ ember, ennyi a sminket is kérők száma. (1 pont)

A szőkítést nem kérők száma a 80-nak a 20%-a, ami 16. (1 pont)

Tehát **ugyanannyian** kértek a szőkítés mellé sminket, mint ahányan festést kértek, de szőkítést nem. (1 pont)

A hajvágást kérő férfiak közül 9-en díszcsík vágását is kérték a hajukba.

c) A hajvágást kérő férfiak hány százaléka kért díszcsíkot? c 3

M: A hajvágást kérő férfiak száma 60. (1 pont)

Kilencen kértek díszcsíkot: $\frac{9}{60} = 0{,}15$. (1 pont)

Tehát a hajvágást kérők **15%-a** kért díszcsíkot is. (1 pont) ö 12

15 Balázs és Oszkár kávézót működtet. Az üdítőitalok tálalásához félgömb alakú talpas poharakat szeretnének beszerezni.

Nem tudják eldönteni, hogy félliteres vagy 4 decis poharakat vegyenek. Balázs szerint legyen inkább 4 decis, annak legalább 1 cm-rel kisebb az átmérője, mint a félliteresnek, így több pohár férne a polcra.

a) Igaza van-e Balázsnak a két pohár átmérőjével kapcsolatban? a 7

M: A félliteres pohár térfogata 500 cm^3, a sugara legyen R. (1 pont)

A térfogatra felírható:

$$500 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3}.$$ (1 pont)

Ebből $R = 6{,}2$ cm, tehát az átmérő 12,4 cm. (1 pont)

A 4 dl-es pohár térfogata 400 cm^3, a sugara legyen r. (1 pont)

A térfogat most:

$$400 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}.$$ (1 pont)

Amiből $r \approx 5{,}76$ cm, tehát az átmérő 11,52 cm. (1 pont)

A két átmérő között 1 cm-nél kisebb az eltérés, tehát Balázsnak **nincs igaza.** (1 pont)

A kávézó reklámakciója: „Nyerje vissza a számlája felét!".

Amikor fizetésre kerül sor, a pincér a 32 lapos magyar kártyából húz egy lapot, nem teszi vissza. Majd a társaság minden tagja szintén húz egyet-egyet, visszatevés nélkül. Ha a társaságból bárkinek a lapja „üti" a pincér által kihúzott lapot, akkor a számlán szereplő összegnek csak a felét kell kifizetni.

(A magyar kártyában négy „szín” van: piros, tök, zöld, makk. Mindegyik színből nyolc lap, erősorrendben: hetes, nyolcas, kilences, tízes, alsó, felső, király, ász. Egy lap akkor „üti” a másikat, ha azonos színű, és az erősorrendben felette áll. A zöld alsó például „üti” a zöld nyolcast, de nem üti a piros hetest.)

Egy ötfős társaság fizetni készül, a pincér hozza a számlát és a kártyacsomagot, kihúz belőle egy lapot, a makk kilencest. A társaság minden tagja húz egy-egy lapot.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a számla felét kell kifizetniük, azaz legalább egy vendég az öt közül olyan lapot húz, amelyik „üti” a makk kilencest? b 5

M: I. megoldás

Számoljuk ki annak az eseménynek a valószínűségét, hogy senki nem húz a makk kilencest ütő lapot. (1 pont)

Az összes esetek száma, mivel egy lap már ki van húzva:

$$31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 20\,389\,320.$$ (1 pont)

A kedvező esetek száma, mivel 24 (más színű) + 2 (makk hetes és makk nyolcas) lap van, ami nem üti a makk kilencest:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600.$$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy senki nem húz ütő lapot:

$$\frac{7\,893\,600}{20\,389\,320} = 0{,}3871.$$ (1 pont)

Tehát annak a valószínűsége, hogy felezik a számlát, mert legalább egy ember ütő lapot húz: $1 - 0{,}3871 = \mathbf{0{,}6129}$. (1 pont)

II. megoldás

Számoljuk ki annak az eseménynek a valószínűségét, hogy senki nem húz a makk kilencest ütő lapot. (1 pont)

Az összes esetek száma, mivel már egy lap ki van húzva: $\binom{31}{5}$. (1 pont)

A kedvező esetek száma, mivel 24 (más színű) + 2 (makk 7 és makk 8) = 26 lap van, ami nem üti a makk kilencest, ebből húznak 5-öt: $\binom{26}{5}$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy senki nem húz ütő lapot:

$$\frac{\binom{26}{5}}{\binom{31}{5}} = 0{,}3871.$$ (1 pont)

Tehát annak a valószínűsége, hogy felezik a számlát, mert legalább egy ember ütő lapot húz: $1 - 0{,}3871 = \mathbf{0{,}6129}$. (1 pont) ö 12

Megjegyzés: Az eredmény természetesen függ attól, hogy milyen lapot húz a pincér, de minél többen vannak a társaságban, annál nagyobb a felezés esélye.

II. rész/B

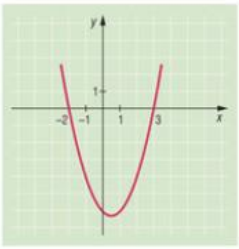
16 Az A halmaz a valós számoknak az a részhalmaza, amelynek a elemeire teljesül, hogy $a^2 - a - 6 \leq 0$.

a) Írja fel intervallumként az A halmazt! a 4

M: Az $a^2 - a - 6 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai: $a_1 = -2$, $a_2 = 3$. (1 pont)

Az egyenlőtlenség megoldása: $-2 \leq a \leq 3$. (2 pont)

Intervallumjelekkel: $A = [-2; 3]$. (1 pont)



A B a valós számoknak az a részhalmaza, amelynek b elemeire teljesül a következő egyenlőtlenségek mindegyike:

$$2b - [6 - 2 \cdot (b - 1)] > -12 - 4 \cdot [b - 3 \cdot (2 - b)]$$

és

$$\frac{3}{4} \cdot (b + 2) - \frac{1}{2} \cdot (b - 2) < \frac{5}{6} \cdot (b + 6) - \frac{1}{3} \cdot (2b + 6).$$

b) Adja meg a B halmazt intervallumként! b 7

M: Az első egyenlőtlenség a zárójelek felbontása után:

$$2b - 6 + 2b - 2 > -12 - 4b + 24 - 12b,$$ (1 pont)

amiből $b > 1$. (1 pont)

A második egyenlőtlenségben a közös nevező 12:

$$\frac{9}{12} \cdot (b + 2) - \frac{6}{12} \cdot (b - 2) < \frac{10}{12} \cdot (b + 6) - \frac{4}{12} \cdot (2b + 6).$$ (1 pont)

12-vel beszorozva és a zárójeleket felbontva kapjuk:

$$9b + 18 - 6b + 12 < 10b + 60 - 8b - 24,$$ (1 pont)

amiből $b < 6$. (1 pont)

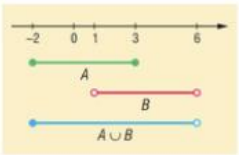
A két egyenlőtlenség közös megoldása: $1 < b < 6$. (1 pont)

Intervallumjelekkel: $B =]1; 6[$. (1 pont)

c) Határozza meg az $A \cup B$ halmazt! c 3

Szemléltetve: (2 pont)

A megoldás: $A \cup B = [-2; 6[$. (1 pont)



d) Mely egész számok vannak a $B \setminus A$ halmazban? d 3

Az ábra alapján $B \setminus A =]3; 6[$. (2 pont)

Az ebben az intervallumban található egész számok a **4** és az **5.** (1 pont) ö 17

17 Egy laboratóriumban egy veszélyes vírus ellenszerének hatását vizsgálják elektronmikroszkóp alatt. Az ellenszer alkalmazása során azt tapasztalják, hogy a mintában a vírusok száma az idő függvényében a $V_1(t) = 1000 \cdot 10^{-0,05t}$ függvény által leírhatóan változik, ahol t a kísérlet kezdetétől eltelt idő, órában mérve.

a) Hány darab vírus volt a mintában a kísérlet kezdetén? a 2

M: A kísérlet kezdetén $t = 0$. (1 pont)

Behelyettesítve:

$$V_1(0) = 1000 \cdot 10^{-0,05 \cdot 0} = \mathbf{1000.}$$ (1 pont)

b) Mennyi lesz a vírusok száma a mintában a kísérlet kezdete után 10 órával? b 3

M: A $t = 10$-et behelyettesítve:

$$V_1(10) = 1000 \cdot 10^{-0,05 \cdot 10} = 1000 \cdot 10^{-0,5} =$$
$$= 1000 \cdot 0,316 = \mathbf{316.}$$ (3 pont)

A kutatók azt tapasztalták, hogy 20 órán keresztül az előbbi függvény szerint csökken a vírusok száma, ekkorra viszont megszűnik az ellenszer hatása, és a vírusok szaporodni kezdenek, számuk az alábbi függvénnyel írható le: $V_2(t) = V_1(20) \cdot 10^{0,05(t-20)}$, ahol t a kísérlet kezdetétől eltelt idő órában mérve, $V_1(20)$ pedig a megelőző folyamat 20. órájában a vírusok száma.

c) Hány darab vírus lesz a mintában a kísérlet kezdetétől eltelt 40 óra múlva? c 3

M: $V_1(20) = 1000 \cdot 10^{-0,05 \cdot 20} = 1000 \cdot 10^{-1} = 100.$ (1 pont)

A $t = 40$-et behelyettesítve:

$$V_2(40) = V_1(20) \cdot 10^{0,05(40-20)} = 100 \cdot 10^{1} = 1000.$$ (2 pont)

d) A kísérlet kezdetétől mérve mennyi idő múlva éri el a vírusok száma a kezdeti érték kétszeresét? d 9

M: Az első 20 órában 1000-től csökken a vírusok száma, így a növekedés 20 óra után éri el a 2000-et. (1 pont)

Meg kell oldani a $2000 = 100 \cdot 10^{0,05(t-20)}$ egyenletet. (1 pont)

Osztás után:

$$20 = 10^{0,05(t-20)}.$$ (1 pont)

Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\lg 20 = 0,05 \cdot (t - 20).$$ (3 pont)

Számolás és osztás után: $26 = t - 20$. (1 pont)

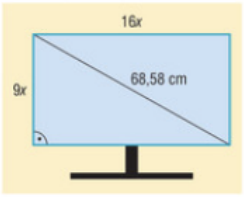
Ebből $t = 46$. (1 pont)

A kísérlet kezdetétől mérve **46 óra után** lesz a vírusszám a kezdeti kétszerese. (1 pont) ö 17

18 A monitorok képátmérőjét – ami a téglalap alakú monitor átlójának hosszát jelenti – általában colban adják meg. Egy col 2,54 cm.

a) Hány centiméter a 27 colos monitor szélessége és magassága, ha az oldalak aránya 16 : 9? Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! a 6

M: 27 col = 27 · 2,54 cm = 68,58 cm. (1 pont)



Az arányossági tényező legyen x.

Az ábra alapján a Pitagorasz-tétel:

$$(16x)^2 + (9x)^2 = 68{,}58^2.$$ (2 pont)

Átalakítva, a számolást elvégezve:

$$337 \cdot x^2 = 4703{,}2164.$$ (1 pont)

Ebből $x = 3{,}736$. (1 pont)

Tehát a monitor oldalai:

$$16 \cdot 3{,}736 = 59{,}78 \text{ cm}$$

és

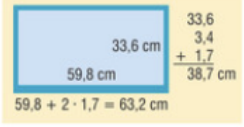
$$9 \cdot 3{,}736 = 33{,}62 \text{ cm}.$$

Egy tizedesjegyre kerekítve **59,8 cm** és **33,6 cm.** (1 pont)

A fenti monitort, a rögzítése miatt, műanyag keret veszi körül. A keret alul 34 mm, a másik három oldalon 17 mm széles.

b) A készülék területének hány százaléka a rögzítő keret területe? b 7

M: A keret területét például úgy számolhatjuk ki, hogy a külső téglalap területéből elvesszük a monitor területét. (1 pont)



A külső méretek cm-ben:

$$59{,}8 + 2 \cdot 1{,}7 = 63{,}2 \text{ cm};$$

$$33{,}6 + 3{,}4 + 1{,}7 = 38{,}7 \text{ cm}.$$ (1 pont)

A készülék teljes területe:

$$63{,}2 \cdot 38{,}7 = 2445{,}84 \text{ cm}^2.$$ (1 pont)

A monitor területe:

$$59{,}8 \cdot 33{,}6 = 2009{,}28 \text{ cm}^2.$$ (1 pont)

A keret területe:

$$2445{,}84 - 2009{,}28 = 436{,}56 \text{ cm}^2.$$ (1 pont)

A hányadosuk:

$$\frac{436{,}56}{2445{,}84} = 0{,}1785.$$ (1 pont)

Tehát a keret területe a készülék területének **17,85%-a.** (1 pont)

A monitor adatainál azt látjuk, hogy a képernyő felbontása 1920 × 1080 pixel.

c) Hány négyzetmilliméter egy képpont (pixel) területe? Az eredményt normálalakban adja meg! c 4

M: A monitor területe:

$$2009{,}28\ \text{cm}^2 = 200\,928\ \text{mm}^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

A pixelek száma:

$$1920 \cdot 1080 = 2\,073\,600. \qquad \text{(1 pont)}$$

Egy pixelre jutó terület:

$$\frac{200\,928}{2\,073\,600} = 0{,}0969\ \text{mm}^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát normálalakban egy pixel területe $\mathbf{9{,}69 \cdot 10^{-2}\ mm^2}$. (1 pont) ö 17

I. rész

1 Melyik a legnagyobb háromjegyű szám, amely 17-tel osztva 10-et ad maradékul? ● 2

M: $999 = 58 \cdot 17 + 13$, a 3-mal kisebb szám esetén lesz 10 a maradék. (2 pont)

A megfelelő szám: **996.**

2 A $(-3; 5)$ pontot tükrözzük a koordináta-rendszer x tengelyére. Adja meg a tükörkép koordinátáit! ● 2

M: Az első koordináta nem változik, a második az ellentettje lesz. (2 pont)

A tükörkép koordinátái: **$(-3; -5)$.**

3 Adjon meg hét (nem mind egyenlő) pozitív egész számot, amelyek átlaga, mediánja és módusza egyaránt 17! ● 2

A hét lehetséges szám például: **15; 16; 17; 17; 17; 18; 19.** (2 pont)

4 Mennyi a 360 és az 1200 legkisebb közös többszöröse? ● 2

M: A prímtényezős felbontások:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \text{és} \quad 1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2.$$ (1 pont)

A legkisebb közös többszörös:

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600.$$ (1 pont)

A 360 és az 1200 legkisebb közös többszöröse: **3600.**

5 Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egymással 90°-os szöget zárnak be, $|\vec{a}| = 4$ cm, $|\vec{b}| = 3$ cm. Adja meg $|\vec{a} - \vec{b}|$ nagyságát! ● 2

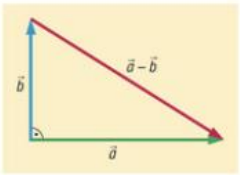
M: Derékszögű háromszög jön létre. (1 pont)

Pitagorasz-tétellel:

$$c^2 = 4^2 + 3^2,$$

amiből $c = 5$ cm. (1 pont)

$|\vec{a} - \vec{b}| =$ **5 cm.**



6 Adja meg a $\sqrt{2x - 11}$ kifejezés értelmezési tartományát! ● 2

M: A négyzetgyökös kifejezésnek akkor van értelme, ha a gyökjel alatt nemnegatív szám áll.

$2x - 11 \geq 0$, azaz $x \geq 5{,}5$.

Az értelmezési tartomány: **$x \geq 5{,}5$.** (2 pont)

7 Mekkora területű körcikk tartozik a 28 cm sugarú körben a 67°-os középponti szöghöz? ● 2

M: A körcikk területe:

$$T_{cikk} = \frac{r^2 \cdot \pi}{360°} \cdot \alpha = \frac{28^2 \cdot \pi}{360°} \cdot 67° = 458{,}4 \text{ cm}^2. \quad \text{(2 pont)}$$

A körcikk területe: **458,4 cm².**

8 Alakítsa szorzattá az $x^2 - 8x + 12$ kifejezést! ● 3

M: A szorzattá alakításhoz az $x^2 - 8x + 12 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani: $x_1 = 6$, $x_2 = 2$. (2 pont)

Tehát a szorzat:

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 6) \cdot (x - 2). \quad \text{(1 pont)}$$

A kifejezés szorzat alakja: **$(x - 6) \cdot (x - 2)$.**

9 A 32 és az 500 közé írjon két számot úgy, hogy az adott két számmal együtt egy mértani sorozat négy egymást követő tagját alkossák! ● 3

M: A mértani sorozat negyedik tagja: $a_4 = a_1 \cdot q^3$. (1 pont)

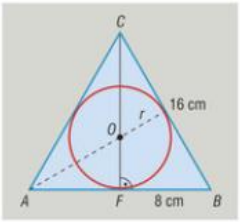
Jelen esetben $500 = 32 \cdot q^3$, amiből $q^3 = \frac{125}{8}$, azaz $q = \frac{5}{2}$. (1 pont)

A számok: $32 \cdot \frac{5}{2} = 80$, $80 \cdot \frac{5}{2} = 200$. (1 pont)

A beiktatott két szám: **80; 200.**

10 Egy szabályos háromszög oldalai 16 cm hosszúak. Mekkora a háromszögbe írható kör sugara? ● 3

M: I. megoldás



A szabályos háromszög magassága az oldalának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szöröse. (1 pont)

$CF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 16 = 8 \cdot \sqrt{3} \approx 13{,}86$ cm. (1 pont)

Ennek harmada a beírt kör sugara: 4,62 cm. (1 pont)

A háromszögbe írható kör sugara: **4,62 cm.**

II. megoldás

Az *AFO* derékszögű háromszögben az *A* csúcsnál lévő szög 30°. (1 pont)

A szög tangense: $\text{tg}30° = \frac{r}{8}$. (1 pont)

Ebből $r = 8 \cdot \text{tg}30° \approx$ **4,62 cm.** (1 pont)

11 A tőzsdén egy részvény árfolyama öt hónapon át a következők szerint változott: az első hónapban 12%-kal csökkent; a második hónapban 8%-kal nőtt; a harmadik hónapban 7%-kal nőtt; a negyedik hónapban 5%-kal csökkent; az ötödik hónapban 9%-kal nőtt. ● 3

Hogyan változott a kezdeti értékhez képest az ötödik hónap végére az árfolyam?

M: Legyen az eredeti érték a.

Az ötödik hónap végére a változások eredménye:

$$a \cdot 0{,}88 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}07 \cdot 0{,}95 \cdot 1{,}09 \approx 1{,}053 \cdot a.$$ (2 pont)

Ami azt jelenti, hogy 5,3%-kal nőtt a részvény árfolyama. (1 pont)

Az ötödik hónap végére **5,3%-kal nőtt** a részvény árfolyama.

12 Az alábbi állítások mindegyikének adja meg a logikai értékét! ● 4

A) Két relatív prím szám összege lehet páratlan szám és páros szám is.

B) Az irracionális számok tizedes tört alakja mindig végtelen szakaszos.

C) Két racionális szám összege mindig racionális.

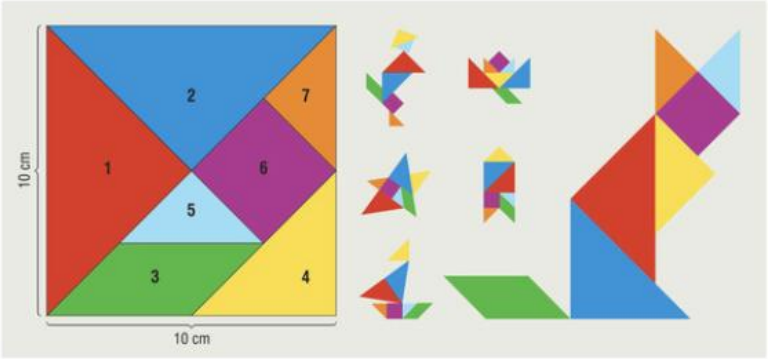
D) Két racionális szám szorzata nem lehet egész szám.

Megoldás: (1-1 pont)

A) **igaz** *B)* **hamis** *C)* **igaz** *D)* **hamis**

II. rész/A

13 A tangram egy ősi kínai kirakójáték. A játék célja: 7 „tangramkő" segítségével kirakni különböző alakzatokat, illetve megfejteni, hogy egy megadott alakzatban hogyan helyezkednek el a kövek. A játék során minden követ fel kell használni. Az egyenlő szárú derékszögű háromszögek, a négyzet és a paralelogramma egy 10 cm oldalhosszúságú négyzet feldarabolásával jönnek létre.

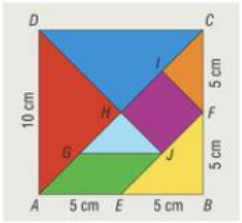


a) Mekkorák a 6-os számmal jelölt négyzet oldalai? Az eredményt centiméterben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! a 3

M: Mivel egyenlő szárú derékszögű háromszögek jönnek létre, ezért $IC = IF$. (1 pont)

A HI szakasz a HC-nek a fele, ami pedig az AC fele. AC a négyzet átlója, az oldalának $\sqrt{2}$-szerese. (1 pont)

Tehát $HI = \frac{1}{4} \cdot AC = \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{3{,}53\ cm.}$ (1 pont)



b) A 3-as számú paralelogramma területe hány százaléka az eredeti négyzet területének? b 4

M: A paralelogramma egyik oldala 5 cm. A másik oldal:

$$AG = HI = 2{,}5 \cdot \sqrt{2}.$$ (1 pont)

Az A-nál levő szög fele a derékszögnek, 45°. (1 pont)

A terület:

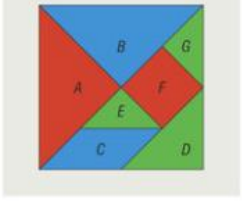
$$T = AE \cdot AG \cdot \sin 45° = 5 \cdot 2{,}5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12{,}5\ \text{cm}^2.$$ (1 pont)

Az eredeti négyzet területével összehasonlítva: $\frac{12{,}5}{100} = 0{,}125$.

Tehát a négyzet területének **12,5%-a** a paralelogramma területe. (1 pont)

c) Hányféleképpen színezhetők ki az ábra szerinti négyzetben elrendezett kövek piros, zöld és kék színekkel, ha az egymással oldallal szomszédos részek nem lehetnek azonos színűek? c 5

M: Kezdjük a színezést az A jelű háromszöggel, ez bármilyen lehet, tehát 3-féleképpen színezhető ki. (1 pont)



Legyen például piros. A vele szomszédos B, C és E részek közül a B a maradék két szín mindegyikével színezhető, ez 2 lehetőség. A C és E rész két ellentétes színnel szintén 2-féleképpen színezhető. (1 pont)

Ha a B és E ellentétes színű (6 esetben), akkor az F színe csak piros lehet, a D azonos az E-vel, a G szintén. Ebben az esetben tehát hatféleképpen színezhetünk. (1 pont)

Ha a B és E rész azonos színű, például kék (6 esetben), akkor az F rész színe lehet piros vagy zöld (2 eset), a D színe a C-től és F-től eltérő, a G színe a B-től és F-től eltérő, mindegyik egyértelmű. Ebben az esetben $6 \cdot 2 = 12$-féleképpen színezhetünk. (1 pont)

Tehát összesen $6 + 6 \cdot 2 = \mathbf{18}$ lehetséges színezés van. (1 pont) ö 12

Megjegyzés: Természetesen bármely más részből kiindulva is ugyanerre az eredményre juthatunk.

14 *a)* Hány olyan 4 jegyű pozitív egész szám van, amelyek 12-vel osztva 5-öt adnak maradékul? a 7

M: Keressük az első 4 jegyű számot a sorozatból. $1000 = 83 \cdot 12 + 4$, tehát az első szám az 1001. (1 pont)

A legnagyobb 4 jegyű: mivel $9999 = 833 \cdot 12 + 3$, ezért a 9989. (1 pont)

A számtani sorozat n-edik tagja: $a_n = a_1 + (n-1)d$. (1 pont)

Behelyettesítve:

$$9989 = 1001 + (n-1) \cdot 12,$$
$$8988 = (n-1) \cdot 12,$$
$$n = 750.$$ (2 pont)

Tehát **750** olyan négyjegyű szám van, amely 12-vel osztva 5-öt ad maradékul. (1 pont)

b) Mennyi az összege azoknak a legfeljebb 4 jegyű pozitív egész számoknak, amelyek 12-vel osztva 5-öt adnak maradékul? b 5

M: A 12-vel osztva 5 maradékot adó számok számtani sorozatot alkotnak, melynek differenciája 12. (1 pont)

Most az első 5 maradékot adó pozitív számtól, az 5-től kell összeadnunk a számokat 9989-ig. (1 pont)

Az előbbihez hasonlóan:

$$9989 = 5 + (n-1) \cdot 12.$$ (1 pont)

Amiből $n = 833$. (1 pont)

A számtani sorozatnál: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. (1 pont)

Jelen esetben:

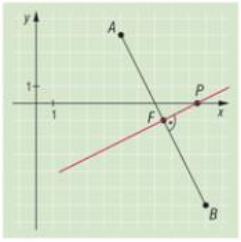
$$S_{833} = \frac{5 + 9989}{2} \cdot 833 = 4\,162\,501.$$

A legfeljebb 4 jegyű, 12-vel osztva 5 maradékot adó számok összege **4 162 501.** ö 12

15 A derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(5; 4)$ és a $B(10; -6)$ pontok.

a) Az abszcisszatengely melyik pontja van A-tól és B-től egyenlő távolságra? a 4

M: I. megoldás



A szakaszfelező pont koordinátái:

$$F(7{,}5; -1).$$ (1 pont)

A felezőmerőleges egy normálvektora:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}(5; -10).$$ (1 pont)

A felezőmerőleges egyenlete:

$$5x - 10y = 37{,}5 + 10$$

vagy

$$x - 2y = 9{,}5.$$ (1 pont)

Az x tengellyel való metszéspontja: $y = 0$; $x = 9{,}5$.

Tehát az abszcisszatengely azon pontja, amely egyenlő távolságra van az A és B pontoktól: $P(9{,}5; 0)$. (1 pont)

II. megoldás

Keressük az abszcisszatengely $P(x; 0)$ pontját, amely egyenlő távol van A és B pontoktól. (1 pont)

A távolságok:

$$\sqrt{(x-5)^2+(0-4)^2} = \sqrt{(x-10)^2+(0+6)^2}. \quad \text{(1 pont)}$$

Elvégezve a négyzetre emelést és felbontva a zárójeleket:

$$x^2 - 10x + 25 + 16 = x^2 - 20x + 100 + 36. \quad \text{(1 pont)}$$

Ahonnan:

$$10x = 95, \quad \text{amiből} \quad x = 9{,}5. \quad \text{(1 pont)}$$

A keresett pont: $P(9{,}5; 0)$. (1 pont)

b) Az abszcisszatengely mely P pontjára igaz, hogy $\frac{AP}{BP} = \frac{1}{2}$? b 8

M: Keressük az abszcisszatengely $Q(x; 0)$ pontját, amelyre fennáll a távolságok aránya, azaz

$$\frac{\sqrt{(x-5)^2+(0-4)^2}}{\sqrt{(x-10)^2+(0+6)^2}} = \frac{1}{2}. \quad \text{(2 pont)}$$

Beszorzás után:

$$2 \cdot \sqrt{(x-5)^2+16} = \sqrt{(x-10)^2+36}. \quad \text{(2 pont)}$$

Négyzetre emelve:

$$4x^2 - 40x + 100 + 64 = x^2 - 20x + 100 + 36. \quad \text{(1 pont)}$$

Átrendezve a $3x^2 - 20x + 28 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, (1 pont)

amelynek megoldásai: $x_1 = \frac{14}{3}$; $x_2 = 2$. (1 pont)

Két pont felel meg a távolságok arányának:

$Q_1\left(\frac{14}{3}; 0\right)$ és $Q_2(2; 0)$. (1 pont) ö 12

II. rész/B

16 Színaranyból nem készítenek ékszert, mert az lágy ahhoz, hogy tartósan viselhető legyen. Ezért, hogy keményebbé és egyben ellenállóbbá tegyék, a színaranyhoz meghatározott arányban más fémeket adnak. A színarany tartalom határozza meg, hogy hány karátos az arany. Az ötvösök rendszerint 14 és 18 karát érték közötti arannyal dolgoznak; ezekben $\frac{14}{24}$ és $\frac{18}{24}$ tömegrész közötti arany van.

Egy arany karkötő 12 gramm rezet, 28 gramm aranyat és 8 gramm ezüstöt tartalmaz.

a) Hány karátos a karkötő? a 3

M: A karkötő teljes tömege: $12 + 28 + 8 = 48$ gramm. (1 pont)

Ebből az arany 28 gramm, az aránya: $\frac{28}{48} = \frac{14}{24}$. (1 pont)

Tehát a karkötő **14 karátos.** (1 pont)

Összeolvasztanak egy 20 grammos 15 karátos és egy 50 grammos 18 karátos arany ékszert.

b) Hány karátos lesz az ötvözet? Az eredményt két tizedes pontossággal adja meg! b 6

M: Az ötvözet karátértékét jelöljük x-szel.

Az ötvözetben lévő arany mennyiségére felírható a következő egyenlet:

$$20 \cdot \frac{15}{24} + 50 \cdot \frac{18}{24} = 70 \cdot \frac{x}{24}.$$ (3 pont)

24-gyel beszorozva:

$$300 + 900 = 70x.$$ (1 pont)

A megoldás: $x = 17{,}14$. (1 pont)

Tehát az ötvözet **17,14 karátos** lesz. (1 pont)

Egy 30 grammos 14 karátos gyűrűből színarany hozzáadásával 18 karátos aranyat szeretnének előállítani.

c) Hány gramm színaranyat adjanak hozzá? c 8

M: Jelöljük x-szel a hozzáadott színarany tömegét. (1 pont)

A 30 grammos, 14 karátos gyűrűben az arany mennyisége:

$$30 \cdot \frac{14}{24} \text{ gramm.}$$ (1 pont)

Az x tömegű színaranyban az arany mennyisége így is írható:

$$x \cdot \frac{24}{24} \text{ gramm.}$$ (1 pont)

Az ötvözet tömege $30 + x$ gramm.

Mivel 18 karátos, így az aranytartalma:

$$(30 + x) \cdot \frac{18}{24} \text{ gramm.}$$ (1 pont)

A következő egyenlet írható fel az ötvözetben lévő arany mennyiségére:

$$30 \cdot \frac{14}{24} + x \cdot \frac{24}{24} = (30 + x) \cdot \frac{18}{24}.$$ (1 pont)

24-gyel beszorozva:

$$420 + 24x = 540 + 18x.$$ (1 pont)

Megoldva: $x = 20$. (1 pont)

20 gramm színaranyat kell hozzáadni, hogy 18 karátos legyen az ötvözet. (1 pont) ö 17

17 A matematikus család – anya, apa és fiuk, Félix – strandra mentek. A strandon 6 óriás csúszda van. Félix nagyon szeretne sokszor lecsúszni, de mivel drága, a szülei olyan jegyet vesznek neki, amellyel két csúszdán összesen 5-ször csúszhat le.

a) Hány különböző módon tud Félix 5-ször lecsúszni, ha ő választhatja ki, hogy melyik kettőt használja, és legalább egyszer mind a kettőt kipróbálja? a 7

M: A 2 csúszdát a 6-ból $\binom{6}{2}$ = 15-féleképpen választhatjuk ki. (2 pont)

Összesen 5-ször csúszik, minden csúszásnál 2 csúszda közül választhat, ez 2^5 lehetőség. (2 pont)

Mivel mindkét csúszdát használnia kell, az előzőből el kell venni azokat, amikor csak az egyiket használta, ez 2 lehetőség. (1 pont)

Összesen

$$\binom{6}{2} \cdot (2^5 - 2) = 15 \cdot 30 = \textbf{450-féle}$$

sorrendben csúzhat le. (2 pont)

Félix nem tud dönteni, mert a 2-es és 5-ös csúszda a leghosszabb, de a többinek meg az alakja érdekesebb. Végül az apja javaslatára dobókockával sorsolnak.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy kockával kétszer dobunk, akkor a két dobás eredménye (valamilyen sorrendben) 2-es és 5-ös lesz? b 5

M: Két kockával dobva, az összes esetek száma: $6^2 = 36$. (2 pont)

Az 1 és 5 két különböző sorrendben jöhet ki, ennyi a kedvező esetek száma. (2 pont)

A valószínűség:

$$p = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = \textbf{0,056.}$$ (1 pont)

A sorsolás eredménye 1-es és 5-ös lett. Félix kétszer csúszott az 1-esen és háromszor az 5-ösön.

c) Hány különböző sorrendben tehette ezt meg? c 5

M: Két darab 1-es és három darab 5-ös összes lehetséges sorrendje ismétléses permutációt ad. (3 pont)

Ennek száma: $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \textbf{10.}$ (2 pont) ö 17

18 A Föld legmagasabb hegycsúcsának a neve tibeti nyelven Csomolungma (A Föld Istenasszonya). A csúcs angol elnevezése Mount Everest, nevét Sir George Everestről kapta, aki 1823 és 1843 között feltérképezte egész Indiát. Mérési módszere az úgynevezett „háromszögelés" volt. A módszer lényege, hogy két pont ismert távolságának és a mérhető szögeknek a segítségével ki lehet számítani újabb távolságokat.

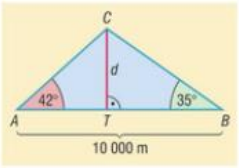
a) A tengerparton két világítótorony távolsága 10 000 m. Legyen az egyik pont A, a másik B, mindkét pont jól látható a másikból. A tengeren áll egy hajó, szintén mindkét helyről jól látható, helyét jelöljük C-vel. Az A és B pontoknál egy-egy szögmérő eszközt elhelyezve lemérhetők az alábbi szögek: $CAB\sphericalangle = 42°$ és $CBA\sphericalangle = 35°$.

a 6

Milyen távol van a hajó az AB egyenestől (vagyis a tengerparttól)?

M: I. megoldás

Készítsünk ábrát.



A derékszögű háromszögekben:

$$\operatorname{tg}42° = \frac{d}{AT} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}35° = \frac{d}{BT}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ebből:

$$AT = \frac{d}{\operatorname{tg}42°} \quad \text{és} \quad BT = \frac{d}{\operatorname{tg}35°}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A T pont két részre osztja az AB szakaszt, AT és BT összege AB:

$$\frac{d}{\operatorname{tg}42°} + \frac{d}{\operatorname{tg}35°} = 10\,000. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből:

$$d = \frac{10\,000}{\frac{1}{\operatorname{tg}42°} + \frac{1}{\operatorname{tg}35°}} \approx 3938{,}93 \text{ m} \approx 3939 \text{ m}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Tehát a hajó a parttól **3939 m** távolságra van.

II. megoldás

Az ABC háromszög C-nél lévő szöge 103°. (1 pont)

Az AC oldalt jelöljük b-vel, a szinusztétellel:

$$\frac{b}{10\,000} = \frac{\sin 35°}{\sin 103°}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből $b \approx 5886{,}64$ m. (1 pont)

Az ATC derékszögű háromszögben:

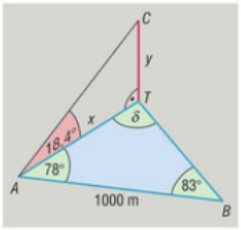
$$\sin 42° = \frac{d}{5886{,}64}, \quad \text{amiből} \quad d \approx 3938{,}93 \text{ m} \approx 3939 \text{ m}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Tehát a hajó a parttól **3939 m** távolságra van.

b) A síkságon vegyünk fel két egymásból is jól látható helyet, A-t és B-t, ezek távolsága 1000 m. Mindkét pontból jól látható a síkság szélén lévő hegy. Jelölje a hegy csúcsát C, a csúcsnak a síkra eső merőleges vetületét T. (Ez a pont nem látható, de csak az A és B pontoktól mérhető irányára lesz szükség). Az A és B pontokban felállított szögmérő eszközökkel lemérjük a vízszintes síkban mérhető $TAB\sphericalangle = 78°$ és $TBA\sphericalangle = 83°$ szögeket. Az A pontban pedig a függőleges síkban mérhető $TAC\sphericalangle = 18°$ szöget, ami a hegyhez tartozó A pontbéli látószög. Ezen adatok ismeretében számítsa ki a hegy magasságát, vagyis a TC távolságot!

b 11

M: A megfelelő ábra:



Az ABT háromszögben a T-nél levő szög:

$$\delta = 180° - (78° + 83°) = 19°. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ebben a háromszögben szinusztétellel:

$$\frac{x}{1000} = \frac{\sin 83°}{\sin 19°}. \qquad \text{(3 pont)}$$

Ebből $x = 1000 \cdot \frac{\sin 83°}{\sin 19°} \approx 3048{,}66$ m. (2 pont)

Az ATC derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} 18{,}4° = \frac{y}{x}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ebből:

$$y = 3048{,}66 \cdot \operatorname{tg} 18{,}4° \approx 1014{,}15 \text{ m} \approx 1014 \text{ m}.$$

Tehát a hegy magassága **1014 m.** (1 pont)

ö 17

I. rész

1 Ha egy szem búza tömege $5 \cdot 10^{-2}$ gramm, akkor 1 kg búza hány szemet tartalmaz? ● 2

1 kg = 1000 g = 10^3 g, tehát 1 kg búzában

$$\frac{10^3}{5 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^4 = \mathbf{20\,000}\text{ szem}$$

búza van. (2 pont)

2 A gyorsúszás döntőjébe 8-an kerültek be. Hányféle dobogós sorrend lehet, ha nincs holtverseny? ● 2

$8 \cdot 7 \cdot 6 = \mathbf{336}$**-féle.** (2 pont)

3 Adja meg a következő állítások logikai értékét! (Melyik igaz, melyik hamis?) ● 2

A) Egy deltoid nem lehet trapéz.

B) Minden rombusz trapéz.

Megoldás:

A) **Hamis** állítás, mert a négyzet deltoid és trapéz is egyben. (1 pont)

B) **Igaz,** mert a rombusznak van két párhuzamos oldala. (1 pont)

4 Évi 20%-os kamatra betettünk 1 000 000 forintot a bankba. Hány év múlva kaptunk vissza 2 985 984 forintot, ha a kamatláb végig 20% volt? (A pénzükből ez idő alatt nem vettünk ki, és a bank évenként tőkésítette a kamattal megemelt összeget.) ● 3

M: Ha n évre tettük be a pénzünket, akkor:

$$1\,000\,000 \cdot 1{,}2^n = 2\,985\,984, \quad \text{(1 pont)}$$

$$1{,}2^n = 2{,}985984,$$

$$n = \log_{1,2} 2{,}985984 = \frac{\lg 2{,}985984}{\lg 1{,}2} = 6. \quad \text{(2 pont)}$$

A pénzünket **6** évre tettük be a bankba.

5 Egy kör középpontja a koordinátasík második negyedében van. Írja fel az egyenletét, ha a kör sugara 10 egység, és érinti mindkét koordinátatengelyt! ● 2

M: A kör középpontja $C(-10; 10)$. (1 pont)

A kör egyenlete:

$$\mathbf{(x + 10)^2 + (x - 10)^2 = 100.} \quad \text{(1 pont)}$$

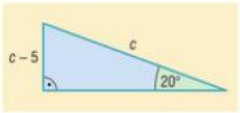
6 Egy derékszögű háromszög egyik befogójával szemben lévő szög 20°. Hány centiméter a derékszögű háromszög átfogója, ha 5 cm-rel hosszabb, mint a 20°-os szöggel szemben lévő befogó? (Válaszát egy tizedesjegy pontossággal adja meg!) ● 4

M: $\sin 20° = \frac{c-5}{c}$. (2 pont)

$c \cdot \sin 20° = c - 5 \Rightarrow 5 = c(1 - \sin 20°)$,

amiből

$c = \frac{5}{1-\sin 20°} \approx$ **7,6 cm.** (2 pont)



7 Hány olyan 200-nál kisebb pozitív egész szám van, amely osztható 6-tal és 4-gyel, de nem osztható 5-tel? ● 4

M: Egy pozitív egész szám pontosan akkor osztható 6-tal és 4-gyel is, ha osztható 12-vel. (1 pont)

A 200-nál kisebb 12-vel osztható pozitív egész számok száma 16 (200 : 12 = 16,67).

Ezek közül 5-tel azok oszthatók, amelyek 60-nal is oszthatók. Ezek száma 3 (200 : 60 = 3,33). (2 pont)

Tehát 16 – 3 = **13** olyan 200-nál kisebb pozitív egész szám van, amely osztható 6-tal és 4-gyel, de nem osztható 5-tel. (1 pont)

8 Az *ABCD* paralelogramma *CB* oldalának felezőpontja *F*. Fejezze ki $\overrightarrow{FD}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokkal! ● 2

A vektor: $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. (2 pont)



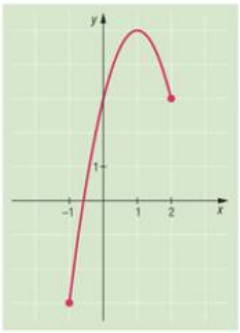
9 Az ábrán látható függvény a $[-1; 2]$ intervallumon van értelmezve. Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! ● 2

A) $f(x) = -2(x+1)^2 + 5$

B) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 5$

C) $f(x) = -2(x-1)^2 + 5$

D) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 5$



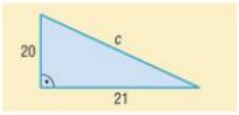
M: A transzformációs lépéseket figyelembe véve ***C)*** a helyes válasz betűjele. (2 pont)

10 Egy derékszögű háromszög befogói 20 cm és 21 cm hosszúak. Mekkora a háromszög köré írható kör sugara? ● 2

M: Pitagorasz tételét felírva:

$$c^2 = 20^2 + 21^2,$$

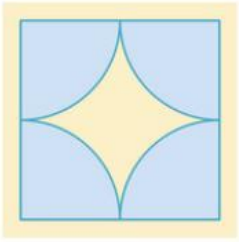
ahonnan az átfogó $c = 29$ cm. (1 pont)



Thalész tételének megfordítása alapján a körülírható kör sugara az átfogó fele, vagyis **14,5 cm.** (1 pont)

11 Egy 10 cm oldalú négyzetlap pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a választott pont a négyzet valamelyik csúcsától legfeljebb 5 cm távolságra van? ● 2

M: A kiválasztott pont a négyzet valamelyik csúcsától legfeljebb 5 cm távolságra van, ha beleesik a négyzet egy-egy csúcsa köré írt 5 cm sugarú zárt negyedkörbe. (1 pont)



A geometriai valószínűség fogalma alapján a keresett valószínűség:

$$p = \frac{t_{kék}}{t_{négyzet}} = \frac{4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5^2 \cdot \pi}{10^2} = \frac{\pi}{4} \approx \mathbf{0{,}785.}$$ (1 pont)

12 Egy matematikaversenyen 15 feladatot kellett megoldani. A pontozás $8H - 4R$ képlettel történik, ahol H a helyesen megoldott feladatok száma, R a rossz megoldások száma. Félix minden feladatra adott megoldást, így 84 pontot kapott. Hány jó megoldása volt Félixnek? ● 3

M: I. megoldás

Az összes szerezhető pont 120. Rossz megoldás esetén nem jár a 8 pont, és még 4 pontot le is vonnak, vagyis rossz feladatonként $8 + 4 = 12$ ponttal kevesebb lesz Félix összes pontszáma a 120-nál. $120 - 84 = 36$ pontot vontak le Félixtől, tehát 3 rossz megoldást adott. (2 pont)

A jó megoldások száma tehát: $15 - 3 = \mathbf{12}$. (1 pont)

II. megoldás

A jó megoldások száma legyen x, ekkor a rossz megoldások száma: $15 - x$.

A feladat szövege alapján: $8x - 4(15 - x) = 84$. (1 pont)

Az egyenletet megoldva:

$$8x - 60 + 4x = 84,$$
$$12x = 144,$$
$$x = 12.$$ (1 pont)

Félixnek **12** jó megoldása volt. (1 pont)

II. rész/A

13 A koordináta-rendszerben felrajzolt ABC háromszögben $A(2; -3)$, $B(-7; 2)$, és a BC oldal felezéspontja $F(5; 6)$.

a) Adja meg a C csúcs koordinátáit! a 4

M: Legyen C csúcs $C(c_1; c_2)$.

BC szakasz F felezőpontjának koordinátáira felírható a következő két összefüggés:

$$5 = \frac{-7 + c_1}{2} \quad \text{és} \quad 6 = \frac{2 + c_2}{2}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az első egyenletből $c_1 = 17$, a másodikból $c_2 = 10$.

A háromszög C csúcsának koordinátái: $\mathbf{C(17; 10).}$ (2 pont)

b) Írja fel a háromszög AB oldalával párhuzamos középvonalának az egyenletét! b 4

M: I. megoldás

Az AB oldal középvonala párhuzamos az AB oldallal, így irányvektora:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(-9; 5).$$

Innen a középvonal meredeksége: $m = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{5}{9}$. (2 pont)

A középvonal egyenlete $y = -\frac{5}{9}x + b$ alakban keresendő. Az egyenes egy pontja $F(5; 6)$, amelynek koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét, tehát:

$$6 = -\frac{5}{9} \cdot 5 + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{79}{9}.$$

A középvonal egyenlete: $\mathbf{y = -\frac{5}{9}x + \frac{79}{9}.}$ (2 pont)

II. megoldás

Az AB oldal középvonala párhuzamos az AB oldallal, így irányvektora:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(-9; 5).$$

Innen a középvonal normálvektora: $\vec{n}(5; 9)$. (2 pont)

A középvonal egy pontja $F(5; 6)$. A középvonal normálvektoros egyenlete:

$$5x + 9y = 5 \cdot 5 + 9 \cdot 6.$$

A középvonal egyenlete: $\mathbf{5x + 9y = 79.}$ (2 pont)

III. megoldás

Az AC oldal E felezőpontjának koordinátái:

$$E\left(\frac{17 + 2}{2}; \frac{10 + (-3)}{2}\right), \quad \text{vagyis} \quad E\left(\frac{19}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

Az FE középvonal egyenesének egy irányvektora:

$$\overrightarrow{FE}\left(\frac{19}{2}-5;\frac{7}{2}-6\right), \quad \text{vagyis} \quad \overrightarrow{FE}\left(\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right).$$

A középvonal egy normálvektora lehet az $\overrightarrow{FE}$ irányvektor 90°-os forgatottjának kétszerese: $\vec{n}(5; 9)$. (2 pont)

A középvonal normálvektoros egyenlete:

$$5x + 9y = 5 \cdot 5 + 9 \cdot 6.$$

A középvonal egyenlete: $\mathbf{5x + 9y = 79.}$ (2 pont)

Az A, B, C és F betűket az összes lehetséges sorrendben leírjuk egymás mellé.

c) Ezek között hány olyan sorrend szerepel, amelyben az A és B betű nem egymás mellett áll? c 4

M: I. megoldás

A négy betű $4! = 24$-féleképpen rendezhető sorba. (1 pont)

Tekintsük egy elemnek az A és B betűt, így C és F betűvel együtt 3!-féleképpen rendezhető sorba. Az A és B sorrendje felcserélhető. Így azon sorba rendezések száma, amelyekben az A és B betű egymás mellett áll $3! \cdot 2 = 12$. (2 pont)

Kivonva az összes sorba rendezési lehetőség számából azok számát, amelyek esetén A és B egymás mellett van, megkapjuk a kérdésre a választ.

Az olyan sorba rendezések száma, amelyekben az A és B betű nem egymás mellett áll: $24 - 12 = 12$. (1 pont)

II. megoldás

A C és F betűket egymás után kétféle sorrendben írhatjuk le. (1 pont)

Az A és B betűket el kell, hogy válassza a C vagy F betű, tehát a sorrendjüket is figyelembe véve kerülhetnek a leírt első betű elé, a két leírt betű közé, vagy a két betű után.

Az A betűt a három hely valamelyikére háromféleképpen, a B betűt a fennmaradó két hely valamelyikére kétféleképpen helyezhetjük el. (2 pont)

Az olyan sorba rendezések száma, amelyben az A és B betű nem egymás mellett áll: $2 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{12}$. (1 pont) ö 12

14 Oldja meg

a) az $\frac{x^2+1}{2} = 2x - 1$ egyenletet a valós számok halmazán! a 5

M: Az egyenlet átrendezve $x^2 - 4x + 3 = 0$ alakra hozható. (2 pont)

Ennek megoldásai: $\mathbf{x_1 = 1}$ és $\mathbf{x_2 = 3.}$ (2 pont)

Ellenőrzés után mind a két gyök megoldás. (1 pont)

b) a $\sqrt{x+4} = x + 2$ egyenletet az egész számok halmazán! b 7

M: A bal oldali négyzetgyökös kifejezés értelmezési tartománya: $x + 4 \geq 0$, amiből $x \geq -4$. (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve:

$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2 = (x+2)^2,$$
$$x + 4 = x^2 + 4x + 4,$$
$$0 = x^2 + 3x. \qquad \text{(2 pont)}$$

A bal oldalt szorzattá alakítva:

$$0 = x(x+3). \qquad \text{(1 pont)}$$

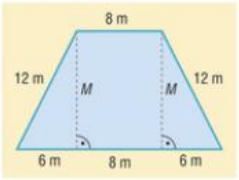
Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, tehát $x_1 = 0$, vagy $x_2 = -3$. Ezen x értékek ugyan beletartoznak a gyökös kifejezés értelmezési tartományába, azonban a négyzetre emelés hozhat be hamis gyököt. (2 pont)

Ellenőrzés után kiderül, hogy csak **$x = 0$** megoldása az egyenletnek, és ez bele is tartozik az egész számok halmazába. (1 pont) ö 12

15 Egy rendezvényházban húrtrapéz alakú nézőteret alakítottak ki, amelynek hosszabbik alapja 20 m, rövidebbik alapja 8 m, a szára pedig 12 m hosszú.

a) Legfeljebb hány széksor helyezhető el az alapokkal párhuzamosan, ha egy széksor mélysége legalább 110 cm? a 3

M: A trapéz magasságát kell kiszámolnunk.



Pitagorasz tétele alapján:

$$M = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10{,}39 \text{ m}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel $\frac{10{,}39}{1{,}1} \approx 9{,}44$, a nézőtérre legfeljebb **9 sor** helyezhető el. (1 pont)

A nézőtérre 8 sort építettek be. Az első sorba 18 széket helyeztek el, és minden további sorba ugyanannyival többet, mint az előzőbe. Így a nézőtéren 200 ember láthatja az előadásokat.

b) Hány székkel van több minden sorban, mint az előzőben? b 5

M: A székek soronkénti száma számtani sorozatot alkot. Az első elem 18, az első 8 elem összege 200. (1 pont)

Az összegképlet alapján:

$$200 = 8 \cdot \frac{18 + a_8}{2},$$
$$50 = 18 + a_8,$$
$$a_8 = 32. \qquad \text{(2 pont)}$$

A nyolcadik elem kiszámítására vonatkozó képlet alapján:

$$32 = 18 + 7d.$$

Az összefüggésből $d = 2$. (1 pont)

Minden sorban **kettővel** több szék van, mint az előzőben, és ez megfelel a feladat feltételeinek. (1 pont)

A rendezvényház által szervezett vetélkedőre 8 csapat nevezett. A csapatok elért pontszámait az alábbi táblázat mutatja.

Csapatok sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Pontszám	60	90	50	50	70	80	60	50

c) Ábrázolja a pontszámokat dobozdiagramon! c 4

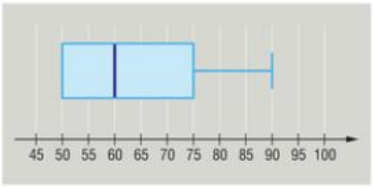
M: A pontszámokat sorbarendezve: 50; 50; 50; 60; 60; 70; 80; 90.

Medián: $\frac{60+60}{2}=60$.

Alsó kvartilis: $\frac{50+50}{2}=50$.

Felső kvartilis: $\frac{70+80}{2}=75$. (2 pont)

A diagram jobbra látható. (2 pont)



ö 12

II. rész/B

16 Rudolf elfelejtette a laptopja hatjegyű belépési kódját. Arra emlékezett, hogy az első négy számjegy ebben a sorrendben 5913, valamint a hatjegyű szám osztható volt öttel és kilenccel is.

a) Mi lehetett Rudolf belépési kódja? a 4

M: Az elfelejtett hatjegyű belépési kód legyen $\overline{5913xy}$, ahol x, y számjegyek.

A számnak oszthatónak kell lennie 5-tel és 9-cel. Egy szám öttel pontosan akkor osztható, ha 0-ra vagy 5-re végződik, kilenccel pedig pontosan akkor osztható, ha a számjegyek összeg osztható 9-cel. (1 pont)

Tehát y értéke lehet 0 vagy 5.

Ha $y=0$, akkor a számjegyek összege $18+x$, ami akkor osztható 9-cel, ha $x=0$ vagy $x=9$. (1 pont)

Ha $y=5$, akkor a számjegyek összege $23+x$, ami akkor osztható 9-cel, ha $x=4$. (1 pont)

A feladat feltételeinek három $(x; y)$ számjegyből álló számpár felel meg:

$(0; 0)$, $(9; 0)$, $(4; 5)$.

Vagyis a belépési kód lehet **591300, 591390** vagy **591345.** (1 pont)

Rudolf egyik facebookos bejegyzésével három nap alatt 156 megosztást ért el. Rudolf mindennap felírta az aznapi megosztások számát, és azt vette észre, hogy a három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Ha az első napi megosztások számából kivonta a harmadik napi megosztások számát, 96 lett a különbség.

b) Hány megosztása volt Rudolf bejegyzésének a második napon? b 10

M: I. megoldás

A mértani sorozat első tagja legyen a, hányadosa q.

A megosztások száma: első nap a, második nap aq, harmadik nap aq^2.

A felírt összefüggések:

$$\left.\begin{aligned} a + aq + aq^2 &= 156 \\ a - aq^2 &= 96 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(2 pont)}$$

A két egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva:

$$\left.\begin{aligned} a(1 + q + q^2) &= 156 \\ a(1 - q^2) &= 96 \end{aligned}\right\}.$$

Osszuk el az első egyenlet bal és jobb oldalát a második egyenlet bal és jobb oldalával: (megtehetjük, mert egyik oldal sem 0):

$$\frac{a(1+q+q^2)}{a(1-q^2)} = \frac{156}{96}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Egyszerűsítések és rendezés:

$$\frac{(1+q+q^2)}{(1-q^2)} = \frac{13}{8},$$

$$8 + 8q + 8q^2 = 13 - 13q^2,$$

$$21q^2 + 8q - 5 = 0. \qquad \text{(2 pont)}$$

A megoldások: $q_1 = -\frac{5}{7}$ és $q_2 = \frac{1}{3}$. (2 pont)

Negatív nem lehet a szöveg értelmében a hányados, tehát $q = \frac{1}{3}$. (1 pont)

Az $a(1 - q^2) = 96$ egyenletbe helyettesítve:

$$a\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 96.$$

Innen $a = 108$.

A második napon Rudolf bejegyzésének $aq = 108 \cdot \frac{1}{3} = \mathbf{36}$ megosztása volt. (1 pont)

Ellenőrzés után ez megfelel a feladat feltételeinek. (1 pont)

II. megoldás

Jelölje b a második napi bejegyzések számát, q pedig a mértani sorozat hányadosát.

A feladat szövege alapján felírható:

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{q} + b + bq &= 156 \\ \frac{b}{q} - bq &= 96 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az egyenleteket szorozzuk be q-val és mindkettő bal oldalán emeljünk ki b-t:

$$\left.\begin{aligned} b+bq+bq^2&=156q\\ b-bq^2&=96q\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} b(1+q+q^2)&=156q\\ b(1-q^2)&=96q\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Osszuk el az első egyenlet bal és jobb oldalát a második egyenlet bal és jobb oldalával (megtehetjük, mert egyik oldal sem 0):

$$\frac{b(1+q+q^2)}{b(1-q^2)}=\frac{156q}{96q}.$$

Egyszerűsítések és rendezés:

$$\frac{(1+q+q^2)}{(1-q^2)}=\frac{13}{8},$$

$$21q^2+8q-5=0. \qquad \text{(2 pont)}$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $q_1=-\frac{5}{7}$ és $q_2=\frac{1}{3}$. (2 pont)

Negatív nem lehet a szöveg értelmében a hányados, tehát $q=\frac{1}{3}$.

Ezt az értéket a $b(1-q^2)=96q$ egyenletbe helyettesítve:

$$b\left(1-\frac{1}{9}\right)=96\cdot\frac{1}{3}.$$

Innen $b=36$.

A második napon Rudolfnak **36** megosztása volt. (1 pont)

Ellenőrzés után ez megfelel a feladat feltételeinek. (1 pont)

Rudolf, Lali, Guszti, Hunor és Kázmér is tagja a *Szeretem a matematikát* csoportnak. Lali szerint az elmúlt héten ötük közül mindenki pontosan három emberrel találkozott személyesen, hogy megoldják a matematika házi feladatot.

c) Igaza lehet-e Lalinak? (A válaszát indokolja!) c 3

M: Legyenek egy gráf csúcsai a résztvevők: Rudolf, Lali, Guszti, Hunor és Kázmér. A személyes találkozások a gráf élei. (1 pont)

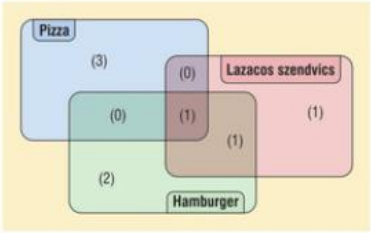
Mivel Lali szerint ebben a gráfban minden csúcs fokszáma három, a fokszámok összege 15. Ez nem lehet, mivel egy gráfban a fokszámok összege csak páros lehet.

Lalinak **nincs igaza.** (2 pont) ö 17

17 Egy társaság találkozót szervez, amelyen vacsorázni is szeretnének. A szóba jöhető helyszíneken pizza, lazacos szendvics vagy hamburger közül legalább az egyiket lehet kapni. Közülük négy helyen árulnak pizzát, három helyen lazacos szendvicset és négy helyen hamburgert. A megadott ételek közül pontosan kétfélét egy helyszínen lehet kapni, és ez a kétféle étel a lazacos szendvics és a hamburger. Tudjuk, hogy mind a három ételt csak egyetlen helyen árulják.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az adott helyszínek közül kettőt kiválasztva, mind a kettőben (a felsorolt ételek közül) csak pizzát lehet kapni? a 6

M: A szöveg alapján a halmazábrában jelöljük a megfelelő részbe tartozó helyszínek számát. (3 pont)



A három halmaz uniójában 8 elem van. Ebből kettőt $\binom{8}{2}$-féleképpen választhatunk. Ez az összes esetek száma. (1 pont)

Kedvezők azon esetek, amikor a csak pizzát tartó helyszín közül választunk ki kettőt, ezt $\binom{3}{2}$-féleképpen tehetjük meg. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy az adott helyszínek közül kettőt kiválasztva, mind a kettőben csak pizzát lehet kapni (a felsorolt ételek közül):

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28} \approx 0{,}1071.$$ (1 pont)

A társaságban megbeszélik, hogy mindenki piros, fehér, zöld vagy kék színű pólót húz az esti találkozóra. Hat ember kivételével mindenki piros pólót húzott, öt ember kivételével mindenki fehéret, hat ember kivételével mindenki zöldet, és hét ember kivételével mindenki kéket.

b) Hány fős a társaság? b 6

M: I. megoldás

Tekintsünk egy színt, például a pirosat. A piros pólóban lévők száma szerepel azok között

– akik nem húztak fehéret,

– akik nem húztak zöldet,

– akik nem húztak kéket.

Tehát a piros pólósokat háromszor számoltuk. (2 pont)

Hasonló igaz a többi színű pólóban megjelentekre is.

Tehát a társaság létszámának háromszorosa: $6 + 5 + 6 + 7 = 24$. (2 pont)

A társaság tehát **8 fős.** (1 pont)

Ellenőrzés: piros pólósok: $8 - 6 = 2$ fő, fehér pólósok: $8 - 5 = 3$ fő, zöld pólósok: $8 - 6 = 2$ fő, kék pólósok: $8 - 7 = 1$ fő. (1 pont)

II. megoldás

Legyen a piros pólóban lévők száma p, a fehér pólóban lévők száma f, a zöld pólóban lévők száma z, a kék pólóban lévők száma k. Keressük $p + f + z + k$ értékét. (1 pont)

A feladat szövege alapján felírható:

$$\left.\begin{aligned} f+z+k&=6\\ p+z+k&=5\\ p+f+k&=6\\ p+f+z&=7 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az egyenletek bal, illetve jobb oldalait összeadva:

$$3p + 3f + 3z + 3k = 24,$$

ahonnan

$$p + f + z + k = 8,$$

vagyis **8 fős** a társaság. (2 pont)

Ez a feladat feltételeinek megfelel. (1 pont)

A társaság két tagja, Béla és Zoli kerékpárral érkezik a találkozó helyszínére. Béla $24\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, Zoli $20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel kerékpározik. Zoli 18 órakor indul, és így 30 perc alatt ér a helyszínre.

c) Hány órakor induljon Béla, ha Zolival egy időben szeretne odaérni, de az általa megtett út 2 km-rel kevesebb? c 5

M: Zoli fél óra alatt $s = v \cdot t = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$ km utat tesz meg. (1 pont)

Bélának 2 km-rel kevesebbet, 8 km-t kell megtennie $24\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ óra sebességgel. Az út megtételéhez szükséges idő:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \text{ óra} = 20 \text{ perc}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Bélának **18 óra 10 perckor** kell indulnia ahhoz, hogy fél hétre odaérjen, és ez megfelel a feladat feltételeinek. (2 pont) ö 17

18 Adél anyukája csonkakúp alakú felmosóvödröt vásárolt. A magassága 30 cm, az alja 20 cm átmérőjű kör, a teteje 28 cm átmérőjű kör.

a) Hány liter víz fér a vödörbe? (A választ egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) a 3

M: A csonkakúp alapkörének sugara 10 cm, fedőkörének sugara 14 cm, magassága 30 cm. (1 pont)

A vödörbe férő víz mennyisége:

$$V = \frac{m\pi(R^2 + Rr + r^2)}{3} = \frac{30\pi(10^2 + 10 \cdot 14 + 14^2)}{3} = 4360\pi\ \text{cm}^3 \approx 13\,697\ \text{cm}^3.$$

Tehát kb. **13,7 liter** víz fér a vödörbe. (2 pont)

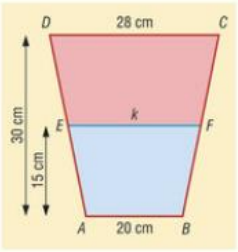
Adél anyukája az új vödörbe 15 cm magasságig tiszta vizet enged.

b) Hány liter víz van a vödörben? (A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) b 5

M: Tekintsük a csonkakúp tengelymetszetét, amely egy trapéz.

A vödörbe öntött víz felszíne a trapéz középvonala. Hossza:

$$k = \frac{20 + 28}{2} = 24 \text{ cm}. \qquad \text{(2 pont)}$$



A vödörben lévő víz térfogata egy olyan csonkakúp térfogatával egyezik meg, amelynek magassága 15 cm, alapkörének sugara 10 cm, fedőkörének sugara 12 cm. **(1 pont)**

A vödörbe öntött víz térfogata:

$$V = \frac{m\pi(R^2 + Rr + r^2)}{3} = \frac{15\pi(10^2 + 10 \cdot 12 + 12^2)}{3} =$$

$$= 1820\pi \text{ cm}^3 \approx 5718 \text{ cm}^3.$$

Tehát kb. **5,72 liter** víz van a vödörben. **(2 pont)**

Amikor a vödörben 15 cm magasan áll a víz, Adél beleteszi a vödörbe a játék teknősét.

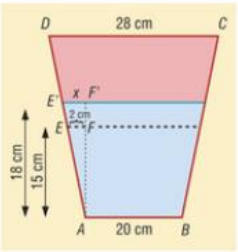
c) Hány köbcentiméter a játék teknős térfogata, ha azt teljesen ellepi a víz, és a vízszint 3 cm-t emelkedik? c 9

M: Ismét tekintsük a csonkakúp tengelymetszetét, amely egy trapéz.

Az ábra jelöléseit használva az $AEF_\triangle \sim AE'F'_\triangle$, mivel szögeik páronként egyenlőek. **(2 pont)**

A két háromszögben a megfelelő oldalak hosszának aránya egyenlő: **(1 pont)**

$$\frac{x}{2} = \frac{18}{15} \Rightarrow x = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ cm}. \qquad \text{(2 pont)}$$



A vödörben lévő víz és a teknős térfogata egy olyan csonkakúp térfogatával egyezik meg, amelynek magassága 18 cm, alapkörének sugara 10 cm, fedőkörének sugara 12,4 cm. **(1 pont)**

A vödörbe öntött víz és a teknős térfogata:

$$V = \frac{m\pi(R^2 + Rr + r^2)}{3} = \frac{18\pi(10^2 + 10 \cdot 12{,}4 + 12{,}4^2)}{3} =$$

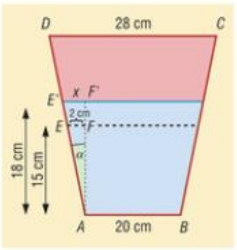
$$= 2266{,}56\pi \text{ cm}^3 \approx 7121 \text{ cm}^3. \qquad \text{(2 pont)}$$

A teknős térfogata $7121 - 5718 = \mathbf{1403 \text{ cm}^3}$. **(1 pont)**

Megjegyzés: Az x hosszúság kiszámításához használhatjuk az $AEF_{\triangle}$ és az $AE'F'_{\triangle}$ derékszögű háromszögben a tangens szögfüggvényt: **(1 pont)**

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{15} = \frac{x}{18}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A $\frac{2}{15} = \frac{x}{18}$ egyenletet megoldva $x = 2{,}4$ cm. **(2 pont)**



ö 17

I. rész

1 Egy zacskóban kétféle cukorka van. Hány szem cukor van a zacskóban, ha a cukrok 35%-a málnás, és a narancsos cukorkák száma 39? ● 2

M: A 39 szem narancsos cukor a zacskóban lévők 65%-a, tehát a zacskóban $\frac{39}{65} \cdot 100 = 60$ darab cukor van. (2 pont)

A zacskóban **60** szem cukor van.

2 Adja meg a 992^{2021} utolsó számjegyét! (Válaszát indokolja!) ● 3

M: A 2-re végződő egész számok hatványainak végződései 2 hatványainak végződéseivel egyenlők. (2 pont)

2 hatványai	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
Utolsó számjegyek	2	4	8	6	2

A végződések négyes periódussal ismétlődnek. Mivel a 2021-et 4-gyel osztva 1 maradékot kapunk, a végződés 2. (1 pont)

Az utolsó számjegy: **2.**

3 Egy háromszög két oldala 20 m és 50 m, az általuk bezárt szög 70°. Hány méter a háromszög harmadik oldala? (Válaszát méterekben, egészekre kerekítve adja meg!) ● 3

M: Írjuk fel a koszinusztételt a harmadik, c oldalra:

$$c^2 = 20^2 + 50^2 - 2 \cdot 20 \cdot 50 \cdot \cos 70°.$$ (2 pont)

Innen a harmadik oldal: $c \approx 47$ m. (1 pont)

A háromszög harmadik oldala: **47 m.**

4 Adja meg σ értékét, ha teljesül rá, hogy $9^3 \cdot (3^{-1} \cdot 3^{\sigma})^4 = 3^{20}$! (Válaszát indokolja!) ● 4

M: A bal oldalon használjuk a hatványozás azonosságait:

$$9^3 \cdot (3^{-1} \cdot 3^{\sigma})^4 = 3^6 \cdot (3^{\sigma - 1})^4 = 3^6 \cdot 3^{4\sigma - 4} = 3^{4\sigma + 2}.$$

Így az egyenletünk:

$$3^{4\sigma + 2} = 3^{20}.$$ (3 pont)

Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért

$$20 = 4\sigma + 2, \quad \text{ahonnan} \quad \sigma = 4{,}5.$$ (1 pont)

Az σ értéke: **4,5.**

5 Egy osztály 32 tanulója közül 18 már járt Sopronban, és 87,5%-a volt már a Tisza-tónál. Hányan jártak már mind a két helyen, ha nincs olyan tanuló, aki egyik helyen sem volt még? ● 2

M: A tanulók 87,5%-a, $32 \cdot 0{,}875 = 28$ fő járt a Tisza-tónál.

A logikai szita formula alapján: $28 + 18 - 32 = 14$ tanuló járt már mind a két helyen. (2 pont)

Mindkét helyen **14** tanuló járt.

6 Egyszerűsítse a következő algebrai törtet! ● 2

$$\frac{a^2 - 4b^2}{a^2 - 2ab}$$

M: Használjuk az ismert nevezetes azonosságot a számlálóban, és emeljünk ki a nevezőben:

$$\frac{a^2 - 4b^2}{a^2 - 2ab} = \frac{(a - 2b)(a + 2b)}{a(a - 2b)} = \frac{a + 2b}{a}.$$ (2 pont)

A tört egyszerűsített alakja: $\frac{a + 2b}{a}$.

7 Egy háromszög oldalainak hossza 8 cm, 11 cm és 13 cm. Mekkora annak a hozzá hasonló háromszögnek a legrövidebb oldala, amelynek kerülete 4,8 dm? ● 2

M: Az eredeti háromszög kerülete 32 cm, a hozzá hasonló háromszögé pedig 4,8 dm = 48 cm.

A hasonlóság aránya:

$$k = \frac{48}{32} = \frac{3}{2}.$$

A háromszög legrövidebb oldala:

$$\frac{3}{2} \cdot 8 = 12 \text{ cm}.$$ (2 pont)

A hasonló háromszög legrövidebb oldala: **12 cm.**

8 A következő táblázat egy dolgozat eredményeit tartalmazza: ● 2

Érdemjegy	jeles	jó	közepes	elégséges	elégtelen
Dolgozatok száma	3	12	9	4	2

Adja meg az adathalmaz átlagát és mediánját!

M: Az adathalmaz átlaga: **3,33.** (1 pont)

Az adathalmaz mediánja: **3,5.** (1 pont)

9 Egy dobozban 5 fehér, 4 piros és 3 kék golyó van. Háromszor egymás után véletlenszerűen kihúzunk egy-egy golyót, megnézzük és visszatesszük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyik kihúzott golyó sem lesz piros? ● 3

M: Összesen 12 golyó van, ezért az összes eset száma visszatevéses mintavétel alapján: 12^3. (1 pont)

Nem piros golyók száma 8, tehát a kedvező esetek száma: 8^3. (1 pont)

A keresett valószínűség:

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{8^3}{12^3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27} \approx \mathbf{0{,}296.}$$ (1 pont)

10 Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! ● 3

A) Van olyan prímszám, amelynek az osztói között van páros szám.

B) Ha egy szám osztható 6-tal és 4-gyel, akkor osztható $6 \cdot 4 = 24$-gyel is.

C) A 101001_2 kettes számrendszerbeli szám nem osztható kettővel a tízes számrendszerben.

Megoldás:

A) **Igaz.** (1 pont)

Igaz, mivel a 2 prímszám megfelel a feltételeknek.

B) **Hamis.** (1 pont)

Ellenpélda pl. a 12, mivel osztható 6-tal és 4-gyel, de nem osztható 24-gyel.

C) **Igaz.** (1 pont)

Igaz, mivel 10-es számrendszerbe átváltva páratlan számot kapunk:

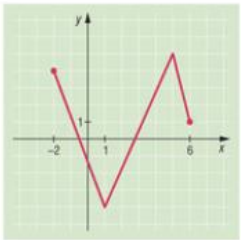
$$101001_2 = 41_{10}.$$

11 Egy 9 csúcspontú teljes gráf minden élét kiszíneztük piros vagy kék színnel. Hány élt színeztünk kékkel, ha a piros élek száma 30? ● 2

M: A 9 csúcsú teljes gráf éleinek száma $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$, tehát a kék élek száma $36 - 30 = 6$. (2 pont)

A kék élek száma: **6.**

12 Adja meg az ábrán látható függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! ● 2



M: Az értelmezési tartomány: $[-2; 6]$. (1 pont)

Az értékkészlet: $[-4; 5]$. (1 pont)

II. rész/A

13 Az A és B halmazokat a következőképpen definiáljuk:

$A = \{\text{Az } \frac{1}{x^2 - 6x - 16} \text{ kifejezés értelmezési tartománya.}\}$

$B = \{\text{A } \sqrt{x^2 - 6x - 16} \text{ kifejezés értelmezési tartománya.}\}$

a) Adja meg az A és B halmazokat! a 6

M: Az $\frac{1}{x^2 - 6x - 16}$ kifejezésben a nevező nem vehet fel 0 értéket:

$$x^2 - 6x - 16 \neq 0. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az $x^2 - 6x - 16 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai:

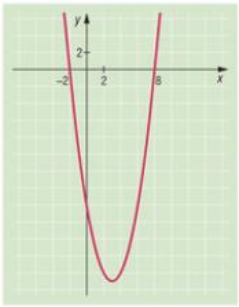
$$x_1 = 8 \quad \text{és} \quad x_2 = -2.$$

Tehát $A = \mathbb{R} \setminus \{8; -2\}$. (2 pont)

A $\sqrt{x^2 - 6x - 16}$ kifejezésben a gyökjel alatt nem állhat negatív szám:

$$x^2 - 6x - 16 \geq 0.$$

Az $f(x) = x^2 - 6x - 16$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény grafikonja felfelé nyíló parabola.



Zérushelyei:

$$x_1 = 8 \quad \text{és} \quad x_2 = -2. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az egyenlőtlenség megoldása a B halmaz:

$B =]-\infty; -2] \cup [8; \infty[$. (1 pont)

b) Adja meg az $A \cap B$ és az $A \cup B$ halmazokat! b 2

M: $A \cap B =]-\infty; -2[\cup]8; \infty[$. (1 pont)

$A \cup B = \mathbb{R}$. (1 pont)

Tekintsük a B halmaz azon pozitív egész elemeit, amelyek nem nagyobbak 19-nél, majd rendezzük ezeket az elemeket sorba!

c) Az összes lehetséges sorba rendezés között hány olyan van, amelyben a 15, 16 és 17 számok egymás után növekvő sorrendben szerepelnek? c 4

M: A feladat feltételének megfelelően 8, 9, …, 18, 19 egészekről van szó. (1 pont)

Tekintsük egy elemnek a 15, 16 és 17 számokat ebben a sorrendben. Így a 8, 9, …, 14 és a most létrehozott elem, 18, 19 sorba rendezési lehetőségeinek számát kell megadnunk. (1 pont)

Ezt a 10 különböző elemet $10! = 3\,628\,800$-féleképpen rendezhetjük sorba.

Az összes lehetséges sorba rendezés között **3 628 800** olyan van, amelyben a 15, 16 és 17 számok egymás után növekvő sorrendben szerepelnek. (2 pont) ö 12

14 Egy takarítócég egy nagy teljesítményű porszívót vett 108 000 forintért, és egy felmosógépet 735 000 forintért. A porszívó évenkénti amortizációja 15%, a felmosógépé 8%. (Az évi amortizáció azt jelenti, hogy egy év elteltével a gép ára hány százalékkal csökken.)

a) Hány százalékra csökken a két gép együttes ára 3 év múlva? (Válaszát két tizedesjegy pontossággal adja meg!) a 3

M: A porszívó 3 év múlva $108\,000 \cdot 0{,}85^3 = 66\,325{,}5$ forintot ér. (1 pont)

A felmosógép 3 év múlva $735\,000 \cdot 0{,}92^3 = 572\,335{,}68$ forintot ér. (1 pont)

A két gép együttes ára 3 év múlva

$$\frac{66\,325{,}5 + 572\,335{,}68}{108\,000 + 735\,000} \cdot 100 = \textbf{75,76 százalékra} \text{ csökken.}$$ (1 pont)

A cég az egyik ügyfelének irodaházát a régi felmosógéppel 3 órával hosszabb idő alatt takarítja ki, mint az újjal. Mindkét gépet egyszerre használva 2 óra alatt végeznek.

b) Hány óra alatt takarítja ki a cég az irodaházat az új felmosógéppel? b 6

M: Ha az új gép egyedül x óra alatt végez, akkor a régi $x + 3$ óra alatt.

Egy óra alatt az új gép az iroda $\frac{1}{x}$ részét, a régi $\frac{1}{x+3}$ részét takarítja fel.

Mivel közösen 2 óra alatt végeznek:

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{x+3} = 1.$$ (2 pont)

A közös nevezővel beszorozva:

$$2(x + 3) + 2x = x(x + 3).$$

Rendezve:

$$0 = x^2 - x - 6.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = 3$ és $x_2 = -2$. (3 pont)

A feladat feltételeinek csak $x = 3$ felel meg.

Az irodaházat az új felmosógép **3 óra** alatt takarítja ki, és ez megfelel a feladat feltételeinek. (1 pont)

Az irodaház dolgozóinak legmagasabb iskolai végzettségét összesíti a következő táblázat:

Legmagasabb iskolai végzettség	Férfi (fő)	Nő (fő)
Általános iskola	12	21
Középiskola	23	65
Felsőfok	15	44

c) Ábrázolja kördiagramon, hogy hány nő és hány férfi dolgozója van az irodaháznak! c 3

M: A férfi dolgozók száma: 50 fő.

A női dolgozók száma: 130 fő.

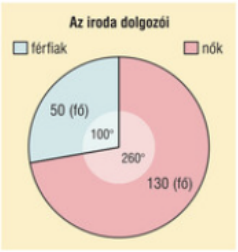
A kördiagramon 180 főnek 360° felel meg, így 1 főnek 2° felel meg.

Kördiagramon való ábrázoláshoz a középponti szögek:

férfiak: $\frac{50}{180} \cdot 360° = 100°$;

nők: $\frac{130}{180} \cdot 360° = 260°$. **(2 pont)**

A kördiagram az ábrán látható. **(1 pont)**



ö 12

15 Egy pékségben kifliből, zsemléből, sajtos pogácsából és túrós pogácsából zárás előtt fél órával már csak 60 darab van összesen. A zsemlék száma a kiflik számának $\frac{2}{5}$ része, a sajtos pogácsák száma pedig a zsemlék számának 75%-a. Túrós pogácsából 9 darab van.

a) Adja meg, hogy a pékségben a fenti péksüteményekből zárás előtt fél órával hány darab van!

a 4

M: A kiflik számát jelölje x.

A feladat szövege alapján a zsemlék száma $\frac{2}{5}x$, a sajtos pogácsák száma $\frac{2}{5}x \cdot 0{,}75 = \frac{3}{10}x$. **(1 pont)**

A darabszámokra felírható:

$$x + \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}x + 9 = 60,$$

$$\frac{17}{10}x = 51,$$

$$x = 30.$$ **(2 pont)**

A kiflik száma **30,** így a zsemlék száma $\frac{2}{5}x = \mathbf{12}$, a sajtos pogácsák száma $0{,}3x = \mathbf{9}$, a túrós pogácsák száma **9.** **(1 pont)**

A kifli, zsemle, sajtos pogácsa és túrós pogácsa darabonkénti árának aránya: 2 : 2 : 4 : 5. Zárás előtt ezeket 25%-kal leárazták, így a péksütemények ára összesen 2475 forint lett.

b) Hány forintba került eredetileg egy túrós pogácsa?

b 4

M: Leárazás előtt a péksütemények összértéke: $\frac{2475}{0{,}75} = 3300$ forint. **(1 pont)**

A kifli, zsemle, sajtos pogácsa és túrós pogácsa leárazás előtti darabonkénti árát jelölje rendre $2y$, $2y$, $4y$ és $5y$.

Az összértékre felírható:

$$30 \cdot 2y + 12 \cdot 2y + 9 \cdot 4y + 9 \cdot 5y = 3300,$$
$$165y = 3300,$$
$$y = 20.$$ (2 pont)

Egy túrós pogácsa $5y = \mathbf{100}$ forintba került eredetileg. (1 pont)

c) Hány forint volt leárazás előtt a 60 péksütemény árának szórása? c 4

M: Eredetileg a péksütemények darabonkénti árai:

kifli és zsömle $2y = 40$ forint;
sajtos pogácsa $4y = 80$ forint;
túrós pogácsa $5y = 100$ forint. (1 pont)

A 60 péksütemény árának átlaga:

$$\left(\frac{30 \cdot 40 + 12 \cdot 40 + 9 \cdot 80 + 9 \cdot 100}{60} = \right) \frac{3300}{60} = 55 \text{ forint.}$$ (1 pont)

A 60 péksütemény árának szórása: (2 pont) ö 12

$$\sqrt{\frac{30 \cdot (40-55)^2 + 12 \cdot (40-55)^2 + 9 \cdot (80-55)^2 + 9 \cdot (100-55)^2}{60}} = \mathbf{23{,}56.}$$

II. rész/B

16 A koordinátasíkon az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának két végpontja $A(6; 2)$ és $B(0; 10)$. Az egyik befogó egyenlete $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

a) Írja fel az átfogó egyenletét! a 3

M: Az AB átfogó egyenesének egy irányvektora:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(-6; 8).$$

Innen az átfogó egyenesének meredeksége:

$$m = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{4}{3}.$$ (2 pont)

Az átfogó egyenlete $y = -\frac{4}{3}x + b$ alakban keresendő, valamint egy pontja $A(6; 2)$, amelynek koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét:

$$2 = -\frac{4}{3} \cdot 6 + b \Rightarrow b = 10.$$

Az átfogó egyenlete: $\mathbf{y = -\frac{4}{3}x + 10.}$ (1 pont)

b) Adja meg a háromszög C csúcsának koordinátáit! b 8

M: A háromszög C csúcsának koordinátáit az AC és BC befogók metszéspontja adja. (1 pont)

Az $y = -\frac{1}{2}x + 5$ befogón rajta van az $A(6; 2)$ pont, mivel koordinátái kielégítik a befogó egyenletét. Tehát az adott egyenlet az AC befogó egyenlete, és a meredeksége $-\frac{1}{2}$. (1 pont)

Írjuk fel a BC befogó egyenletét. A BC befogó merőleges az AC befogóra, így meredeksége BC befogó meredeksége reciprokának ellentettje: $-\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$. (1 pont)

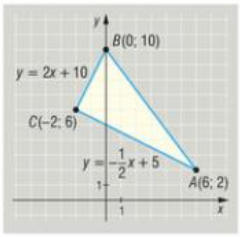
A BC befogó egyenlete $y = 2x + b$ alakban keresendő, valamint egy pontja $B(0; 10)$, amelynek koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét:

$$10 = 2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 10.$$

A BC befogó egyenlete: $y = 2x + 10$. (1 pont)

Az AC és BC befogók metszéspontját a következő egyenletrendszer megoldásával kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x + 5 \\ y &= 2x + 10 \end{aligned}\right\}.$$



A jobb oldalakat egyenlővé téve az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$-\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 10.$$ (1 pont)

Innen $x = -2$; visszahelyettesítve valamelyik egyenletbe $y = 6$. (2 pont)

A háromszög C csúcsának koordinátái: **$C(-2; 6)$.** (1 pont)

Az ABC derékszögű háromszög átfogójának hossza egy mértani sorozat első tagja. A második és harmadik tagjának összege 20.

c) Adja meg a mértani sorozat első hat tagjának összegét! c 6

M: A háromszög átfogójának hossza:

$$AB = \sqrt{(6-0)^2 + (2-10)^2} = 10.$$ (1 pont)

Ha a mértani sorozat hányadosa q, akkor igaz rá, hogy

$$10q + 10q^2 = 20,$$

$$q^2 + q - 2 = 0.$$ (1 pont)

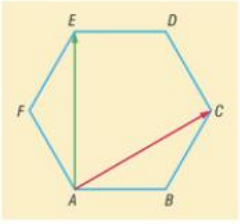
A másodfokú egyenlet megoldásai: $q_1 = -2$ és $q_2 = 1$. (2 pont)

Ha $q = -2$, akkor az első hat tag összege:

$$S_6 = \frac{(-2)^6 - 1}{-2 - 1} = \frac{63}{-3} = -21.$$ (1 pont)

Ha $q = 1$, akkor olyan mértani sorozatról van szó, amelynek minden tagja 10, tehát az első hat tag összege **60.** (1 pont) ö 17

17 Az ábrán az egységnyi oldalú, belül festetlen *ABCDEF* szabályos hatszög látható.



a 3

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}$ vektor hosszát!

M: Az ábrán látható *ABCDEF* szabályos hatszög *A*, *C* és *E* pontjai egy olyan szabályos háromszög csúcsai, amely háromszög oldalának hossza a hatszög legrövidebb átlójának hossza. (1 pont)

Az *AC* átló egy egységnyi oldalú szabályos háromszög magasságának a kétszerese: $AC = \sqrt{3}$. (1 pont)

Megjegyzés: Az *AC* átló hossza meghatározható koszinusztétellel is:

$$AC^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120°.$$

Mivel $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$, az $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}$ vektor hossza a szabályos háromszög oldalának hosszúsága, vagyis $\sqrt{3}$. (1 pont)

Egy hangya a hatszög kerületén mászik pozitív forgásirányban. Az *A* csúcsból indul, az első percben egy egységnyi utat tesz meg, és minden rákövetkező percben egy egységgel nagyobb távolságot tesz meg, mint az előzőben.

b 5

b) A hatszög melyik csúcsában lesz a hangya 25 perc elteltével?

M: A hangya által percenként megtett utak hossza egy számtani sorozat egymást követő tagjai.

A sorozat első tagja $a_1 = 1$, valamint a differenciája $d = 1$. (1 pont)

A 25 perc alatt megtett út:

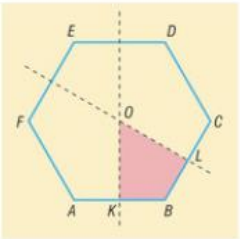
$$S_{25} = 25 \cdot \frac{2 \cdot 1 + 24 \cdot 1}{2} = 325 \text{ egység.}$$ (2 pont)

Mivel a hatszög kerülete 6 egység és $325 = 6 \cdot 54 + 1$, ezért a hangya 25 perc elteltével **a hatszög *B* csúcsában** lesz. (2 pont)

A hatszög belsejében és határvonalán mindazon *P* pontokat pirosra festjük, amelyekre teljesül, hogy $PB \leq PA$ és $PB \leq PC$.

c 5

c) Adja meg a pirosra festett síkidom kerületét!



M: A $PB \leq PA$ feltétel az *AB* szakasz felezőmerőlegese által meghatározott, *B*-t tartalmazó zárt félsík pontjaira teljesül.

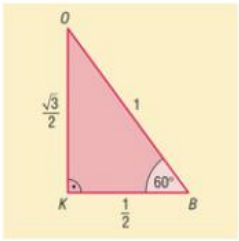
A $PB \leq PC$ feltétel a *BC* szakasz felezőmerőlegese által meghatározott, *B*-t tartalmazó zárt félsík pontjaira teljesül.

Az ábra jelöléseit használva, a hatszög belsejében a $PB \leq PA$, és $PB \leq PC$ feltételeket teljesítő *P* pontok halmaza a *KBLO* deltoid határvonalának és belső pontjainak halmaza. (2 pont)

A deltoidot a szimmetriatengelye két olyan egybevágó derékszögű háromszögre bontja, amely egy szabályos háromszög fele. (2 pont)

A piros négyszög, vagyis a deltoid oldalai a két háromszög befogói, így a kerülete:

$$K = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + 1 \text{ egység.}$$ (1 pont)



Az *ABCDEF* hatszög 6 különböző csúcsába Marika elhelyezett 4 piros és 2 kék korongot.

d) Hányféleképpen tehette ezt meg Marika, ha a 2 kék korong nem került egymás mellé? d 4

M: I. megoldás

A hatszög hat különböző csúcsába $\frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$-féleképpen helyezheti el Marika a 4 piros és 2 kék korongot. (2 pont)

Ezen esetek között 6 van, amikor a 2 kék korong egymás mellé kerül. (*AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FA*). (1 pont)

Tehát $15 - 6 = \mathbf{9}$ **esetben** nem kerül 2 kék korong egymás mellé. (1 pont)

II. megoldás

Elég a két kék korong elhelyezésének számát megadni, a többi helyre piros korongot teszünk. (2 pont)

Az első kéket 6 csúcsba, a másodikat már csak 3 csúcsba tehetjük. (A kék mellé nem kerülhet kék.) Így összesen $6 \cdot 3 = 18$ eset lenne. (1 pont)

Azonban a két kéket nem tudjuk megkülönböztetni, ezért $\frac{18}{2} = \mathbf{9}$ **esetben** nem kerülhet két kék korong egymás mellé. (1 pont)

III. megoldás

A két kék korong helyét $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen választhatjuk ki. (2 pont)

Ezen esetek közül 6 olyan van, amelyekben a két kék korong egymás mellé kerül. (1 pont)

Tehát $15 - 6 = \mathbf{9}$ **esetben** nem kerül 2 kék korong egymás mellé. (1 pont) ö 17

18 Egy cukrászdában olyan marcipángolyókat készítenek, amelyeknek a közepében egy-egy szem mogyoró van. A marcipángolyók 3 cm átmérőjű gömbök, bennük az ugyancsak gömb alakú mogyorószemek átmérője 12 mm.

a) A marcipán térfogata hány százaléka a mogyoró térfogatának? a 3

M: A mogyoró 0,6 cm sugarú gömb, amelynek térfogata:

$$V_m = \frac{4 \cdot r^3\pi}{3} = \frac{4 \cdot 0{,}6^3\pi}{3} \approx 0{,}90 \text{ cm}^3.$$ (1 pont)

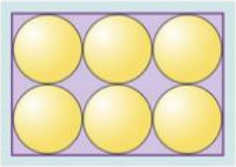
A mogyoró a marcipánnal együtt egy 1,5 cm sugarú gömb, amelynek térfogata összesen:

$$V_{ö} = \frac{4 \cdot R^3\pi}{3} = \frac{4 \cdot 1{,}5^3\pi}{3} \approx 14{,}14 \text{ cm}^3. \qquad \text{(1 pont)}$$

A marcipán a mogyoró térfogatának

$$\frac{V_{ö} - V_{m}}{V_{m}} \cdot 100 \approx \mathbf{1471\%\text{-a.}} \qquad \text{(1 pont)}$$

A golyókat tizenkettesével csomagolják egy téglatest alakú papírdobozba, amelyben egymás fölé az ábrán látható módon 6-6 golyót tesznek.



b 3

b) Hány négyzetméter karton szükséges 100 doboz elkészítéséhez, ha a felhasznált karton mennyiségének 15%-a az összeillesztésekhez kell?

M: A doboz egy olyan téglatest, amelynek élei 9 cm, 6 cm és 6 cm. Felszíne:

$$A = 2(6 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 6 \cdot 9) = 288 \text{ cm}^2,$$

amely az elkészítéshez szükséges mennyiség 85%-a. (2 pont)

Tehát a 100 doboz elkészítéséhez szükséges karton mennyisége:

$$100 \cdot \frac{288}{0{,}85} = 33\,882 \text{ cm}^2 \approx \mathbf{3{,}4 \text{ m}^2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A cukrászdában 100 marcipángolyót készítettek. Azonban kiderült, hogy a kikészített 100 szem mogyoró nem fogyott el, megmaradt 5 szem. (A száz darab édesség között tehát van 5, amelybe nem került mogyoró.)

c 5

c) A 100 golyó közül véletlenszerűen kiválasztva 12 darabot, mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb egy marcipángolyóban nincs mogyoró? (Válaszát három tizedesjegyre adja meg.)

M: A 100 golyó közül a 12-t $\binom{100}{12}$-féleképpen választhattuk ki, tehát az összes esetek száma:

$$\binom{100}{12}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha a 12 golyó mindegyikében van mogyoró, akkor azt $\binom{95}{12}$-féleképpen választhattuk. Ha a kiválasztottak között pontosan egyben nincs mogyoró, azt $\binom{95}{11} \cdot \binom{5}{1}$-féleképpen tehettük meg, tehát a kedvező esetek száma:

$$\binom{95}{12} + \binom{95}{11} \cdot \binom{5}{1}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Annak a valószínűsége, hogy a 12 marcipángolyó közül legfeljebb egyben nincs mogyoró:

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{\binom{95}{12} + \binom{95}{11} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{100}{12}} \approx \mathbf{0{,}892}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Nagy mennyiségű vízben kisebb mennyiségű cukor oldódása időben exponenciálisan zajlik az $M(t) = M_0 \cdot 0{,}95^t$ formula szerint. (A t a cukor vízbe kerülésétől eltelt időt jelenti percekben mérve; $M(t)$ a t időpontig még fel nem olvadt cukor mennyisége; M_0 pedig a teljes cukor mennyisége, amit a vízbe teszünk.)

A cukrászdában limonádét is készítenek.

d) A limonádéhoz szükséges vízben hány perc alatt oldódik fel a cukor $\frac{2}{3}$ része? (Válaszát percekben mérve egy tizedesjegyre kerekítse!) d 6

M: Ha t idő alatt a cukor $\frac{2}{3}$ része oldódik fel, akkor az eredeti mennyiség $\frac{1}{3}$ része nem oldódott fel, vagyis t idő múlva $M(t) = \frac{1}{3}M_0$. (1 pont)

Az összefüggés alapján: $\frac{1}{3}M_0 = M_0 \cdot 0{,}95^t$.

Mivel $M_0 \neq 0$, oszthatjuk mindkét oldalt M_0-val.

A következő exponenciális egyenletet kell megoldani: $\frac{1}{3} = 0{,}95^t$. (2 pont)

Mivel mindkét oldal pozitív, vehetjük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát, és használhatjuk a logaritmus azonosságait:

$$\lg\frac{1}{3} = \lg 0{,}95^t,$$

$$\lg\frac{1}{3} = t \cdot \lg 0{,}95,$$

$$t = \frac{\lg\frac{1}{3}}{\lg 0{,}95} \approx 21{,}42.$$ (2 pont)

Megjegyzés: az egyenletből t megadható $t = \log_{0{,}95}\frac{1}{3} \approx 21{,}42$ alakban.

Tehát **21,4 perc** múlva oldódik fel a cukor $\frac{2}{3}$ része. (1 pont) ö 17

I. rész

1 Egy cipő árát 30%-kal csökkentették, így az ára 14 700 forint lett. Mennyibe került eredetileg a cipő? ● 2

M: A cipő ára: $\frac{14\,700}{70} \cdot 100 = 21\,000$ forint. (2 pont)

A cipő eredeti ára **21 000** forint volt.

2 Adottak a következő számok: $a = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^2$ és $b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. ● 2

Adja meg $[a; b]$ és $(a; b)$ prímtényezős felbontását!

M: A legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös kiszámítási módja alapján:

$[a; b] = \mathbf{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2}$, (1 pont)

$(a; b) = \mathbf{2^3 \cdot 3^2}$. (1 pont)

3 Két pozitív szám mértani közepe 12. Ha az egyik szám 6, akkor mekkora a másik szám? ● 2

M: A $\sqrt{6 \cdot x} = 12$ összefüggésből: $x = 24$. (2 pont)

A másik szám: **24.**

4 Adottak a következő intervallumok: $A = [-2; 3[$ és $B = [1; 5]$. ● 3

Adja meg a következő intervallumokat: $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \backslash B$!

M: A keresett intervallumok:

$A \cup B = \mathbf{[-2; 5]}$, (1 pont)

$A \cap B = \mathbf{[1; 3[}$, (1 pont)

$A \backslash B = \mathbf{[-2; 1[}$. (1 pont)

5 A következő táblázat egy dolgozat eredményeit tartalmazza: ● 3

Érdemjegy	jeles	jó	közepes	elégséges	elégtelen
Dolgozatok száma	3	9	10	3	1

Adja meg annak a valószínűségét, hogy a dolgozatok közül egyet kiválasztva, annak az érdemjegye prímszám! Megoldását részletezze!

M: Az érdemjegyek közül az 5-ös, a 3-as és a 2-es prímszám. (1 pont)

A kedvező esetek száma: $3 + 10 + 3 = 16$.

Az összes esetek száma: $3 + 9 + 10 + 3 + 1 = 26$.

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{16}{26}.$$ (2 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{8}{13}$.

6 Adja meg a következő egyenlet megoldáshalmazát a valós számok körében! Megoldását részletezze! ● 3

$$(x + 1)^2 - 2x = 5$$

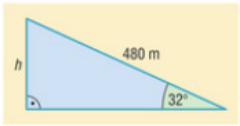
M: Az egyenletet rendezve az $x^2 = 4$ egyenlethez jutunk. (1 pont)

Ez utóbbi egyenletnek két megoldása van, a 2 és a -2, tehát a megoldáshalmaz: $\{2; -2\}$. (2 pont)

Az egyenlet megoldáshalmaza: $\{2; -2\}$.

7 Egy sífelvonó, amely percenként 120 m utat tesz meg, 4 perc alatt ér fel a hegytetőre. Hány méter magasra visz a sífelvonó, ha az emelkedési szög végig 32°? ● 3

M: A sífelvonó $s = 120 \cdot 4 = 480$ m utat tesz meg, mire felér a hegyre. (1 pont)



Felírható:

$$\frac{h}{480} = \sin 32°.$$

A sífelvonó tehát $h = 480 \cdot \sin 32° \approx 254$ m magas hegytetőre visz. (2 pont)

A sífelvonó **254 m** magasra visz.

8 Adja meg a következő kifejezés értékét, ha $a > 0$, $a \neq 1$! ● 3

$$\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{a^{-2}}$$

M: Használjuk a törtkitevős hatvány definícióját, a hatványozás azonosságait, és a logaritmus definícióját:

$$\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{a^{-2}} = \log_a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{-2}} = \log_a a^{\frac{1}{3}+2} = \log_a a^{\frac{7}{3}} = \frac{7}{3}.$$ (3 pont)

A kifejezés értéke: $\frac{7}{3}$.

9 Adja meg a értékét úgy, hogy az $y = 2x + 3$ és az $y = -\frac{a}{4}x + 3$ egyenletű egyenesek egymásra merőlegesek legyenek! ● 2

M: I. megoldás

Az első egyenes meredeksége 2, a másodiké pedig $-\frac{a}{4}$.

A két egyenes merőleges egymásra, tehát meredekségeik szorzata -1: (1 pont)

$$2 \cdot \left(-\frac{a}{4}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2.$$ (1 pont)

A keresett érték: $a = 2$.

II. megoldás

Az $y = 2x + 3$ egyenletet átrendezve $2x - y = -3$, ahonnan az egyenes egy normálvektora $\vec{n}_1(2; -1)$; a második egyenlet átrendezve $ax + 4y = 12$, ennek az egyenesnek egy normálvektora $\vec{n}_2(a; 4)$. (1 pont)

A két egyenes merőleges egymásra, tehát a normálvektorok skalárszorzata 0, vagyis $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2a - 4 = 0$.

A keresett érték: $a = 2$. (1 pont)

10 *„Legalább hét ötösöm lesz matematikából."* ● 2

Adja meg, hogy a következő kifejezések közül melyik lehet ennek a mondatnak a tagadása!

A: Matematikából négy ötösöm lesz.

B: Legfeljebb hat ötösöm lesz matematikából.

C: Matematikából nyolc ötösöm lesz.

M: A kijelentés tagadása a *B*,

Legfeljebb hat ötösöm lesz matematikából. (2 pont)

Az állítás tagadásának betűjele: ***B***.

11 Egy mértani sorozat hányadosa 3, első három tagjának összege 52. Adja meg a sorozat második tagját! Megoldását részletezze! ● 3

M: I. megoldás

Legyen a sorozat második tagja a_2, amelyre felírható:

$$52 = \frac{a_2}{3} + a_2 + a_2 \cdot 3.$$ (2 pont)

Az egyenletet rendezve:

$$156 = a_2 + 3a_2 + 9a_2,$$

amiből $a_2 = 12$. (1 pont)

A sorozat második tagja: **12.**

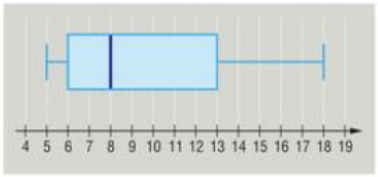
II. megoldás

A mértani sorozat első tagja legyen a_1, amelyre felírható:

$$a_1 + a_1 \cdot 3 + a_1 \cdot 3^2 = 52,$$
$$13a_1 = 52,$$
$$a_1 = 4.$$ (2 pont)

A mértani sorozat második tagja: $a_1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = \mathbf{12}$. (1 pont)

12 Adjon meg 7 olyan adatot, amelyeknek a mellékelt ábrán látjuk a dobozdiagramját!



M: A dobozdiagram alapján nem csökkenő sorrendben az első adat 5, a hetedik 18, a negyedik 8. **(1 pont)**

A második adat 6, a hatodik 13, a harmadik és ötödik feleljen meg a nem csökkenő sorrendnek. **(1 pont)**

Adatok például: **5; 6; 7; 8; 11; 13; 18.**

● 2

II. rész/A

13 Adott a következő függvény: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)^2 - 2$.

a) Adja meg $f(-10)$ értékét ötös számrendszerben!

a 2

M: $f(-10) = (-10 - 1)^2 - 2 = 119$. **(1 pont)**

Ennek ötös számrendszerbeli alakja: 434_5. **(1 pont)**

b) Adja meg az f függvény értelmezési tartományának azon elemeit, amelyekhez a függvény a 2 értéket rendeli!

b 3

M: Mivel az értelmezési tartomány a valós számok halmaza, keressük azon x valós értékeket, amelyekre $(x - 1)^2 - 2 = 2$ teljesül: **(1 pont)**

$$(x - 1)^2 = 4,$$
$$|x - 1| = 2.$$

Ez akkor lehetséges, ha

$$x - 1 = 2 \quad \text{vagy} \quad x - 1 = -2.$$

A függvény az $x = 3$ vagy az $x = -1$ helyeken vesz fel 2 értéket. **(2 pont)**

c) Oldja meg az $(x - 1)^2 - 2 \leq x - 1$ egyenlőtlenséget grafikus úton!

c 6

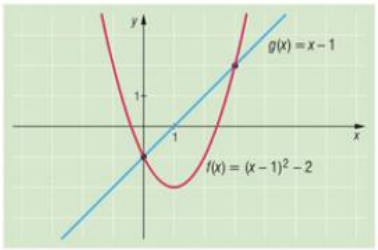
M: Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = (x - 1)^2 - 2$$

és

$$g(x) = x - 1$$

függvényeket! **(3 pont)**



A helyettesítési értékek számolása alapján $f(0) = g(0)$ és $f(3) = g(3)$.

A két függvény az $x = 0$ és az $x = 3$ helyen metszi egymást. **(2 pont)**

Az egyenlőtlenség megoldása a grafikonról leolvasható: $x \in [0; 3]$. **(1 pont)**

ö 11

14 Egy 30 fős kártyaklub tagjai között kétszer annyi szakállas van, mint szemüveges. Közülük öten szakállasok és szemüvegesek is.

a) Hány olyan ember van, aki csak szakállas, ha 8 embernek nincs se szakálla, se szemüvege? a 4

M: I. megoldás

Ha a szemüvegesek száma x, akkor szakállasok száma $2x$. (1 pont)

Mivel 8 embernek nincs se szakálla, se szemüvege, a logikai szita formula alapján:

$$x + 2x - 5 = 30 - 8.$$ (1 pont)

Az egyenletet megoldva: $x = 9$, ami a szemüvegesek száma.

A szakállasok száma: $2x = 18$.

A szakállasok, de nem szemüvegesek száma: $18 - 5 = \mathbf{13}$ fő. (2 pont)

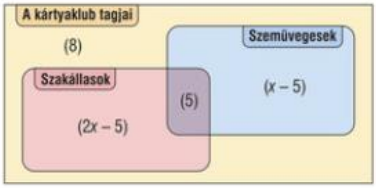
II. megoldás

Ha a szemüvegesek száma x, akkor szakállasok száma $2x$. (1 pont)

A feladat szövege alapján Venn-diagramot használva felírható:

$(2x - 5) + 5 + (x - 5) + 8 = 30$.

Ennek megoldása: $x = 9$. (2 pont)



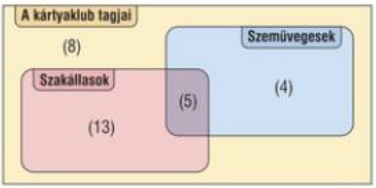
A szakállasok, de nem szemüvegesek száma: $2x - 5 = 18 - 5 = \mathbf{13}$ fő. (1 pont)

Egy pókerpartihoz véletlenszerűen kiválasztanak 6 játékost a klubtagok közül.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott emberek közül 1 szakállas és szemüveges is, 2 szakállas, de nem szemüveges, 3 pedig nem szakállas és nem szemüveges? b 5

M: Az összes esetek száma: $\binom{30}{6}$. (1 pont)

A szakállasok és szemüvegesek száma 5, a csak szakállasok, de nem szemüvegesek száma 13, és 8 embernek nincs se szakálla, se szemüvege.



Ezek alapján felírható a kedvező esetek száma: $\binom{5}{1} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{8}{3}$. (3 pont)

Annak a valószínűsége, hogy 6 emberből 1 szakállas és szemüveges is, 2 csak szakállas, de nem szemüveges, 3 pedig nem szakállas és nem szemüveges:

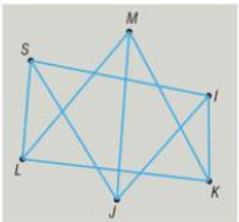
$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{8}{3}}{\binom{30}{6}} = \frac{21\,840}{593\,775} \approx \mathbf{0{,}0368}.$$ (1 pont)

A kiválasztott hat ember Lajos, József, Kálmán, István, Mihály és Sándor. A játék előtt mindenki pontosan három emberrel fogott kezet. Kálmánnal István és Mihály is kezet fogott, Lajos viszont Józseffel és Istvánnal nem fogott kezet.

c) Kikkel fogott kezet Sándor?

c 3

M: Szemléltessük gráffal a kézfogásokat, kihasználva, hogy mindenki három másikkal fogott kezet!



Mivel Lajos Istvánnal és Józseffel nem parolázott, ezért Lajos Sándorral, Kálmánnal és Mihállyal fogott kezet.

Ez azt jelenti, hogy Kálmán három kézfogása Lajossal, Mihállyal és Istvánnal történt.

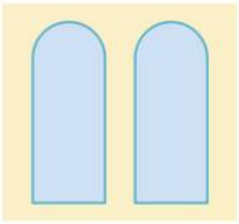
József tehát Lajoson kívül Kálmánnal sem foghatott kezet, tehát ő Sándort, Mihályt és Istvánt üdvözölte kézfogással.

Az ábrába Sándor és István kézfogását kell még berajzolni. (2 pont)

Tehát **Sándor Lajossal, Józseffel és Istvánnal** fogott kezet. (1 pont)

ö 12

15 Egy iskola ablakainak alakja egy téglalap, felette egy félkör, és az egész felület üvegezve van. A téglalap függőleges oldala kétszer olyan hosszú, mint a vízszintes oldala.



a) Az iskola 22 ilyen ablakán összesen hány négyzetméter üvegfelületet van, ha egy ablak kerülete 591 cm? (Válaszát egy tizedesjegy pontossággal adja meg!)

a 7

M: A félkör sugara legyen r cm.

Ekkor a téglalap vízszintes oldala $2r$, a függőleges $4r$ hosszúságú. (1 pont)

Az ablak kerületére felírható:

$$r\pi + 2r + 4r + 4r = 591,$$

$$(10 + \pi) \cdot r = 591. \quad \text{(1 pont)}$$

Az egyenletet megoldva: $r \approx 45$ cm.

A téglalap oldalainak hossza:

$$90 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 180 \text{ cm}. \quad \text{(2 pont)}$$

Egy ablaküveg területe:

$$\frac{1}{2} \cdot 45^2 \cdot \pi + 90 \cdot 180 \approx 19\,381 \text{ cm}^2. \quad \text{(1 pont)}$$

Az iskola 22 ilyen ablakának teljes üvegfelülete:

$$22 \cdot 19\,381 = 426\,382 \text{ cm}^2 \approx \mathbf{42{,}6 \text{ m}^2}. \quad \text{(2 pont)}$$

A hőveszteség mértéke egyenesen arányos a szigetelőfelület méretével, valamint a külső és belső hőmérséklet közötti különbséggel. A hőátbocsátási tényező azt mutatja meg, hogy a szigetelő közeg egy négyzetméterén egy másodperc idő alatt hány joule hőenergia távozik, ha a külső és a belső oldal hőmérséklete között 1 °C a különbség.

Télen az iskolában 5 napon keresztül átlagosan 21 °C volt a belső, és −2 °C volt a külső hőmérséklet. Az ablakokban lévő nem hőszigetelt ablaküveg hőátbocsátási tényezője 5,8.

b) Hány megajoule hő távozott az iskola 22 ablakának üvegfelületén keresztül a megfigyelt időszakban összesen? b 3

M: A vizsgált időintervallum:

$$5 \cdot 24 \cdot 3600 = 432\,000 \text{ másodperc,}$$

és a külső és a belső oldal hőmérséklete között 23 °C a különbség. (1 pont)

A 42,6 m^2 felületű üvegen távozott hő:

$$432\,000 \cdot 42{,}6 \cdot 5{,}8 \cdot 23 \approx 2455 \cdot 10^6 \text{ J} \approx \mathbf{2455 \text{ MJ}}.$$ (2 pont)

Az iskola udvarán 36 tanuló vesz részt testnevelésórán.

c) Hányféleképpen sorakozhatnak fel a tanulók téglalap alakzatban, ha a sorok és oszlopok számának is nagyobbnak kell lennie 1-nél? (A sorokat és oszlopokat megkülönböztetjük.) c 3

M: A sorok száma 36 osztója kell hogy legyen, és nem lehet 1, illetve 36 sem, mert ekkor a sorok, illetve oszlopok száma lenne 1.

36 pozitív osztóinak száma a prímtényezős felbontásból 9 ($36 = 3^2 \cdot 2^2$).

(2 pont)

A tanulók $9 - 2 =$ **7-féle** téglalap alakzatban sorakozhatnak fel. (1 pont) ö 13

II. rész/B

16 Egy fából készült forgáskúp térfogata 2261,95 cm^3, alaplapja 24 cm átmérőjű kör.

a) Mekkora a kúp alkotója? (Válaszát centiméterekben mérve két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) a 4

M: A forgáskúp sugara $r = 12$ cm, magassága m. A térfogatképletet használva:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3},$$ (1 pont)

$$2261{,}95 = \frac{12^2 \cdot \pi \cdot m}{3},$$

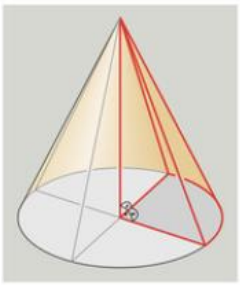
$$m = \frac{3 \cdot 2261{,}95}{144\pi} \approx 15.$$ (1 pont)

A testmagasság, az alkotó és az alapkör sugara derékszögű háromszöget határoznak meg, amelyre felírható a Pitagorasz-tétel:

$$12^2 + 15^2 = a^2.$$

Innen az alkotó megközelítőleg **19,21 cm.** (2 pont)

Egy kirakós játékhoz a forgáskúpot a forgástengelyén áthaladó síkokkal az ábrán látható módon négy egybevágó, negyed körlap alapú kúpszerű testre vágtuk szét, majd a teljes felületüket pirosra festettük.



b 6

b) Hány négyzetcentiméter felületet kellett befesteni? (Válaszát százasokra kerekítse!)

M: Egy test (negyedkúp) felszínét két egybevágó derékszögű háromszög, egy negyedkörlap, valamint az eredeti kúp palástjának negyedrésze alkotja. (1 pont)

Egy derékszögű háromszög területe az előző rész jelöléseit használva:

$$T_1 = \frac{r \cdot m}{2} = \frac{12 \cdot 15}{2} = 90 \text{ cm}^2.$$ (1 pont)

A negyedkör területe:

$$T_2 = \frac{r^2 \cdot \pi}{4} = \frac{12^2 \cdot \pi}{4} = 36\pi \approx 113{,}10 \text{ cm}^2.$$ (1 pont)

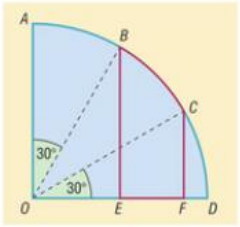
A kúppalást felszínének negyedrésze:

$$T_3 = \frac{r \cdot \pi \cdot a}{4} = \frac{12 \cdot \pi \cdot 19{,}21}{4} \approx 181{,}05 \text{ cm}^2.$$ (1 pont)

A festendő felület:

$$A \approx 4(2 \cdot 90 + 113{,}10 + 181{,}05) = 4 \cdot 474{,}15 =$$
$$= 1896{,}6 \text{ cm}^2 \approx \mathbf{1900 \text{ cm}^2}.$$ (2 pont)

Az ábrán egy 12 cm sugarú negyed körlap látható, amelynek középponti szögét harmadoltuk.



c 7

c) Adja meg a piros vonallal határolt síkrész kerületét!

M: Az ábra jelöléseit használva a síkidom kerülete a *BE*, *EF* és *FC* szakaszokból, valamint a *BC* körívből áll. (1 pont)

Az *OBE* háromszögben: $\sin 60° = \frac{BE}{12}$, amiből

$$BE = 12 \cdot \sin 60° = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39 \text{ cm}.$$ (1 pont)

Az *OFC* háromszögben: $\sin 30° = \frac{FC}{12}$, amiből

$$FC = 12 \cdot \sin 30° = 6 \text{ cm}.$$ (1 pont)

Az EF szakasz hossza az OF és EF szakaszok hosszának különbsége, amelyek az előző háromszögekből számolhatók:

$$EF = OF - OE = 12 \cdot \cos 30° - 12 \cdot \cos 60° =$$

$$= 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 12 \cdot \frac{1}{2} = 6\sqrt{3} - 6 \approx 4{,}39 \text{ cm.} \quad \text{(2 pont)}$$

A BC körív hossza a 12 cm sugarú kör kerületének $\frac{1}{12}$ része:

$$2r\pi \cdot \frac{1}{12} = 2 \cdot 12\pi \cdot \frac{1}{12} = 2\pi \approx 6{,}28 \text{ cm.} \quad \text{(1 pont)}$$

A síkidom kerülete:

$$K = 6\sqrt{3} + 6 + (6\sqrt{3} - 6) + 2\pi = 12\sqrt{3} + 2\pi \approx 27{,}07 \approx \mathbf{27\ cm.} \quad \text{(1 pont)}$$

ö 17

17 Egy kisvárosi klub 10 rendezvényén a következő számú nézőt regisztrálták:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
60	90	51	42	67	80	62	210	112	46

a) Mennyi a nézőszámok átlaga, mediánja és szórása?

a 4

M: Az átlag: **82 fő.** (1 pont)

A medián **64,5 fő.** (1 pont)

A szórás megközelítőleg **47,24 fő.** (2 pont)

Megjegyzés: Amennyiben nem a zsebszámológép statisztikai üzemmódjának segítségével számoljuk a szóródási mutatókat:

Átlag:
$$\frac{60 + 90 + 51 + 42 + 67 + 80 + 62 + 210 + 112 + 46}{10} = 82.$$

A medián az adatok sorba rendezése után határozható meg:

42; 46; 51; 60; 62; 67; 80; 90; 112; 210.

Mivel páros számú adatról van szó, a medián a két középső adat számtani közepe:

$$\frac{62 + 67}{2} = 64{,}5.$$

Szórás:

$$\sqrt{\frac{(60 - 82)^2 + (90 - 82)^2 + \ldots + (112 - 82)^2 + (46 - 82)^2}{10}} \approx 47{,}24.$$

Minden rendezvényre 950 Ft volt a belépő, és a klub alkalmanként 10 000 Ft-os önkormányzati támogatást is kapott. Ezenfelül a szponzorok minden eladott jegy után 60 Ft támogatást adtak.

b) A klub bevételének hány százaléka származott szponzori támogatásból?

b 3

M: Az összes bevétel:

820 db jegyből $820 \cdot 950 = 779\,000$ Ft;

10 rendezvény után az önkormányzattól $10 \cdot 10\,000 = 100\,000$ Ft;

820 db jegy után szponzori támogatás $820 \cdot 60 = 49\,200$ Ft.

Ezek összege: 928 200 Ft. (2 pont)

A szponzori támogatás az összes bevétel $\frac{49\,200}{928\,200} \cdot 100 \approx$ **5,3%-a.** (1 pont)

A klub a nyereségének egy részét befekteti. Minden hónap első napján 10 000 forintot helyez el a bankban, amelyre a bank havi 0,1%-os kamatot fizet havonkénti tőkésítéssel. (A havonkénti tőkésítés azt jelenti, hogy a bankban lévő pénzhez minden hónap végén hozzáadják a havi kamatot, és a következő hónapban a kamatokkal megnövelt összeg kamatozik tovább.)

c) Mennyi lesz a klub kamatokkal megnövelt megtakarítása 50 hónap elteltével? c 6

M: Egy hónap elteltével a megtakarítás kamatokkal növelt értéke:

$10\,000 \cdot 1{,}001$ forint. (1 pont)

Két hónap elteltével a megtakarítás kamatokkal növelt értéke:

$10\,000 \cdot 1{,}001^2 + 10\,000 \cdot 1{,}001$ forint.

Három hónap elteltével a megtakarítás kamatokkal növelt értéke:

$10\,000 \cdot 1{,}001^3 + 10\,000 \cdot 1{,}001^2 + 10\,000 \cdot 1{,}001$ forint.

Ötven hónap elteltével a megtakarítás kamatokkal növelt értéke:

$10\,000 \cdot 1{,}001^{50} + 10\,000 \cdot 1{,}001^{49} + \ldots + 10\,000 \cdot 1{,}001$ forint. (2 pont)

Ez egy mértani sorozat első 50 elemének az összege. A sorozat első tagja $10\,000 \cdot 1{,}001 = 10\,010$, a hányadosa 1,001.

Az első n tag összege:

$$S_{50} = 10\,010 \cdot \frac{1{,}001^{50} - 1}{1{,}001 - 1} = 10\,010 \cdot \frac{1{,}001^{50} - 1}{0{,}001} \approx 512\,961. \quad \text{(2 pont)}$$

A klubnak ötven hónap elteltével a kamatokkal megnövelt megtakarítása **512 961 forint** lesz. (1 pont)

A klub olyan logót tervez, amely szabályos sokszög alakú.

d) Hány oldalú a szabályos sokszög, ha 18-cal több átlója van, mint oldala? d 4

M: Legyen a sokszög oldalainak száma n. Az átlók számára vonatkozó összefüggés alapján:

$$n + 18 = \frac{n(n-3)}{2},$$

$$2n + 36 = n^2 - 3n,$$

$$0 = n^2 - 5n - 36. \quad \text{(1 pont)}$$

Az egyenlet megoldásai: $n_1 = 9$ és $n_2 = -4$. (2 pont)

Az egyenlet negatív megoldása nem jöhet szóba, tehát **9 oldalú** a szabályos sokszög. (1 pont) ö 17

18 Egy konyhai csap kifolyócsövének keresztmetszete 18 mm átmérőjű kör, amelyen keresztül 0,6 $\frac{m}{s}$ sebességgel folyik ki a víz.

a) Hány másodperc alatt telik meg egy 22 cm átmérőjű, 30 cm magas fazék? a 3

M: A csapból 1 másodperc alatt annyi köbcentiméter víz folyik ki, amekkora egy 0,6 m = 60 cm magas, 9 mm = 0,9 cm sugarú egyenes körhenger térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 0{,}9^2 \cdot \pi \cdot 60 = 152{,}68 \text{ cm}^3.$$ (1 pont)

A 11 cm sugarú, 30 cm magasságú fazék térfogata:

$$V_f = 11^2 \cdot \pi \cdot 30 = 11\,403{,}98 \text{ cm}^3.$$ (1 pont)

A fazék $\frac{V_f}{V} = \frac{11\,403{,}98}{152{,}68} \approx 74{,}69$ s ≈ **1,24 perc,** kb. 1 perc 15 másodperc alatt telik meg. (1 pont)

Savanyúság eltevéséhez 5 liter 2%-os töménységű ecetes vizet kell készíteni. Ehhez 20%-os töménységű ecetet használunk.

b) Hány másodpercre kell megnyitni a csapot, hogy éppen annyi vizet engedjünk, amennyi a felöntőlé elkészítéséhez szükséges? b 4

M: I. megoldás

5 liter 2%-os töménységű ecetes víz elkészítéséhez $5 \cdot 0{,}02 = 0{,}1$ liter tiszta ecet szükséges. Ennyi tiszta ecet $\frac{5}{20} \cdot 100 = 0{,}5$ liter 20%-os ecetben van. (2 pont)

Ez alapján az 5 liter 2%-os töménységű esetes víz elkészítéséhez 20%-os ecet felhasználásával 4,5 liter = 4500 cm^3 vízre van szükség. (1 pont)

Az ecetes víz elkészítéséhez szükséges víz $\frac{4500}{152{,}68} \approx 29{,}47$ s ≈ **29,5 másodperc** alatt folyik ki. (1 pont)

II. megoldás

Ha az 5 liter ecetes víz elkészítéséhez x liter vizet használunk, akkor a 20%-os ecetből $5 - x$ litert szükséges hozzáönteni.

Foglaljuk táblázatba a keverési feladat adatait! (1 pont)

	Térfogat (liter)	Töménység (%)	Oldott anyag térfogata (liter)
Víz	x	0	0
20%-os ecet	$5 - x$	20	$(5 - x) \cdot 0{,}2$
Keverék (ecetes víz)	5	2	$5 \cdot 0{,}2$

Feltételezhetjük, hogy keveréskor az oldott anyag térfogata állandó, tehát felírható:

$$(5 - x) \cdot 0{,}2 = 5 \cdot 0{,}02$$
$$1 - 0{,}2x = 0{,}1$$
$$0{,}2x = 0{,}9$$
$$x = 4{,}5.$$ (2 pont)

Az ecetes víz elkészítéséhez 4,5 liter = 4500 cm^3 vízre van szükség.

Ennyi víz a csapból $\frac{4500}{152{,}68} \approx 29{,}47$ s $\approx$ **29,5 másodperc** alatt folyik ki. (1 pont)

Eltettünk 6 üveg csalamádét és 5 üveg uborkát télire. Az üvegeket véletlenszerűen egy sorba rendezve feltettük a kamra polcára.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a csalamádés és mind az uborkás üveg egymás után helyezkedik el a polcon? (Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg!) c 5

M: I. megoldás

Különböztessük meg mind a 11 üveget.

Az összes eset száma: 11!. (1 pont)

Kedvező eset, ha elől van az összes csalamádés üveg, utána az összes uborkás üveg, vagy fordítva. Ezek száma: $2 \cdot 6! \cdot 5!$. (2 pont)

Annak a valószínűsége, hogy mind a csalamádés és mind az uborkás üveg egymás után helyezkedik el a polcon:

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{2 \cdot 6! \cdot 5!}{11!} = \frac{1}{231} \approx \mathbf{0{,}004.}$$ (2 pont)

II. megoldás

A 6 üveg csalamádés és 5 üveg uborkás üveget ne különböztessük meg egymástól.

Az összes eset száma: $\frac{11!}{6! \cdot 5!} = 462.$ (2 pont)

A kedvező esetek száma kettő. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy mind a csalamádés és mind az uborkás üveg egymás után helyezkedik el a polcon:

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{2}{462} \approx \mathbf{0{,}004.}$$ (2 pont)

Egy áruházlánc gúlába rendezve árulja a dobozos savanyúságot. A legfelső sorban 4 doboz van, lefelé haladva pedig minden sorban 3-mal több, mint a felette lévőben.

d) Hány sor van a gúlában, ha összesen 175 dobozból áll? d 5

M: Az egyes sorokban lévő dobozok száma számtani sorozatot alkot, amelynek első tagja 4, differenciája 3, az első n elem összege 175. (1 pont)

Az egyenlet:

$$175 = n \cdot \frac{2 \cdot 4 + 3(n-1)}{2},$$

$$350 = n(5 + 3n),$$

$$0 = 3n^2 + 5n - 350.$$ (1 pont)

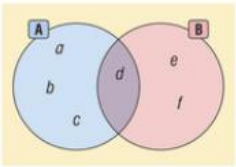
Az egyenlet megoldásai: $n_1 = 10$ és $n_2 = \frac{-35}{3}$. (2 pont)

A szöveg alapján csak pozitív egész lehet a sorok száma, tehát **10 sor** van a gúlában, és ez megfelel a feladat feltételeinek. (1 pont) ö 17

I. rész

1 Két halmazról, A-ról és B-ről tudjuk, hogy $A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\}$, $A \cap B = \{d\}$ és $A \setminus B = \{a; b; c\}$. Adja meg elemeik felsorolásával a B halmaz elemeit! ● 2

M: A feltételek alapján a halmazábra:



$B = \{d; e; f\}$ (2 pont)

2 Az a-nak hányadik hatványa az $\dfrac{(a^3)^2 \cdot a^{-2}}{a^5}$ kifejezés? ● 2

M: $\dfrac{(a^3)^2 \cdot a^{-2}}{a^5} = \dfrac{a^6 \cdot a^{-2}}{a^5} = \dfrac{a^4}{a^5} = a^{-1}$

A kifejezés a-nak **−1-edik** hatványa. (2 pont)

3 Adja meg az alábbi adathalmaz móduszát, mediánját és terjedelmét! ● 3

3; 3; −1; −1; −1; 5; 5; 8

M: Az adatok növekvő sorrendben: −1; −1; −1; 3; 3; 5; 5; 8.

A kért jellemzők:

Módusz: **−1.** (1 pont)

Medián: **3.** (1 pont)

Terjedelem: **9.** (1 pont)

4 Adja meg t értékét úgy, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2t + 3)^x$ függvény szigorúan monoton növekedő legyen! ● 2

M: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ exponenciális függvény szigorúan monton növekedő, ha $a > 1$. (1 pont)

A $2t + 3 > 1$ egyenlőtlenség megoldása: $t > -1$. (1 pont)

5 A hárommal osztható kétjegyű pozitív egészek közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám öttel is osztható? ● 2

M: Az összes esetek száma: $n = 30$, a kedvező esetek 15-tel osztható kétjegyű számok, ezek száma: $k = 6$,

$$p = \frac{k}{n} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

A valószínűség: $\frac{1}{5}$. (2 pont)

6 Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $y = \frac{2}{3}x + 2$ egyenletű egyenessel, és áthalad a $P(5; -2)$ ponton! ● 2

M: I. megoldás

Az adott egyenes meredeksége: $m = \frac{2}{3}$. (1 pont)

A párhuzamos egyenes egyenlete $y = \frac{2}{3}x + b$ alakban keresendő.

Az egyenes egy pontja $P(5; -2)$, amelynek koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét:

$$-2 = \frac{2}{3} \cdot 5 + b,$$

amiből

$$b = -\frac{16}{3}.$$

Az egyenes egyenlete: $y = \frac{2}{3}x - \frac{16}{3}$. (1 pont)

II. megoldás

Átrendezve az egyenes egyenletét:

$$2x - 3y = -6.$$

A párhuzamos egyenes egy normálvektora $\vec{n}(2; -3)$. (1 pont)

A párhuzamos egyenes egyenlete:

$$2x - 3y = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-2),$$

amiből

$$2x - 3y = 16.$$

Az egyenes egyenlete: $2x - 3y = 16$. (1 pont)

7 Adja meg az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 3$ függvény minimumának a helyét és értékét! Megoldását részletezze! ● 4

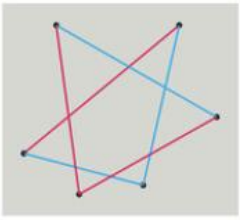
M: $x^2 - 8x + 3 = (x - 4)^2 - 13$. (2 pont)

A minimum helye: **4.** (1 pont)

A minimum értéke: **−13.** (1 pont)

8 Az ábrán látható hatpontú gráfot egészítse ki további élekkel úgy, hogy mindegyik pont fokszáma 2 legyen! ● 2

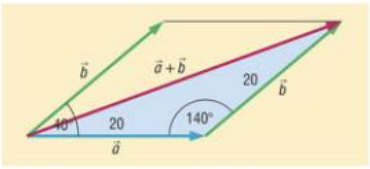
M: Egy lehetséges kiegészítés (az új éleket piros színnel jelöltük): (2 pont)



9 A 40°-os szöget bezáró $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hossza egyaránt 20 egység. Milyen hosszú az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor? (Válaszát egy tizedesjegyre adja meg.) ● 4

M: A paralelogramma módszer alapján a keresett $\vec{a} + \vec{b}$ vektor hossza egy olyan egyenlő szárú háromszög alapja, amelynek szárai 20 egység hosszúak, szárszöge pedig $180° - 40° = 140°$.

(1 pont)



Legyen a vektor hossza x. A koszinusztétel alapján:

$$x^2 = 20^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \cos 140°.$$ (2 pont)

Az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor hossza $x \approx$ **37,6 egység.** (1 pont)

10 Adja meg azt a valós számot, amelyhez az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ függvény a 4 értéket rendeli! ● 2

M: A $2x - 1 = 4$ egyenletből $x = 2{,}5$.

A valós szám: $x = 2{,}5$. (2 pont)

11 *Ha két egész szám mindegyike páratlan, akkor összegük páros.* ● 3

Fogalmazza meg a fenti állítás megfordítását, és adja meg a megfordítás logikai értékét (igaz vagy hamis)!

M: Az állítás megfordítása:

Ha két egész szám összege páros, akkor mind a két szám páratlan. (2 pont)

A megfordítás logikai értéke **hamis,** ellenpélda: $2 + 4 = 6$. (1 pont)

12 Adja meg a 4 cm élű kockába írt gömb felszínét! ● 2

M: A gömb sugara 2 cm. Felszíne: $A = 4 \cdot 2^2 \cdot \pi \approx 50{,}27$ cm^2.

A gömb felszíne: **50,27 cm^2.** (2 pont)

II. rész/A

13 A Budapest–Bamako jótékonysági túra és verseny hossza 2020-ban 8235 km volt. Egy csapat tagjai azt tervezték, hogy az első nap 1109 km-t vezetnek, majd minden további napon 80 kilométerrel kevesebbet, mint az előző napon, mivel a terep egyre nehezebb.

a) Hány kilométert tettek meg a terv szerint a 12. napon, és hány kilométert tettek meg az első 12 napon összesen? a 4

M: A naponta kilométerben megtett utak egy számtani sorozatot alkotnak, amelynek első tagja 1109, differenciája −80. (1 pont)

A 12. napon megtett út:

$$a_{12} = 1109 - 11 \cdot 80 = \textbf{229 kilométer.}$$ (1 pont)

Az első 12 nap összesen megtett távolság:

$$S_{12} = \frac{1109 + 229}{2} \cdot 12 = \textbf{8028 kilométer.}$$ (2 pont)

b) A terv szerint hány nap alatt tették meg a teljes távot, és hány kilométer maradt az utolsó napra? b 4

M: I. megoldás

A 13. napon megtett táv:

$$229 - 80 = 149 \text{ km},$$

tehát 13 nap alatt a teljes távból összesen teljesítettek

$$8028 + 149 = 8177 \text{ kilométert.}$$ (2 pont)

A 14. napra $8235 - 8177 = 58$ kilométer maradt.

A terv szerint a távot **14 nap** alatt teljesítették úgy, hogy az utolsó napon **58 km-t** tettek meg. (2 pont)

II. megoldás

A naponta kilométerben megtett utak egy számtani sorozatot alkotnak, amelynek első tagja 1109, differenciája −80.

Jelölje n egész azon napok számát, amelyekre $S_n \geq 8235$. Ezen n-ek közül a legkisebbet keressük.

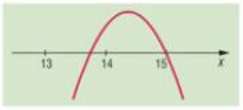
$$\frac{2 \cdot 1109 - (n-1) \cdot 80}{2} \cdot n \geq 8235,$$

$$\frac{2298 - 80n}{2} \cdot n \geq 8235,$$

$$(1149 - 40n)n \geq 8235,$$

$$-40n^2 + 1149n - 8235 \geq 0.$$ (1 pont)

A másodfokú egyenlőtlenséghez tartozó egyenlet megoldásai: 15 és 13,725. Az egyenlőtlenséghez tartozó másodfokú függvény nemnegatív értéket akkor vesz fel, ha $13{,}725 \leq n \leq 15$.



Tehát $n = 14$ és $n = 15$ esetén teljesül az $S_n \geq 8235$ egyenlőtlenség. Ezek közül a kisebb $n = 14$. (2 pont)

A távot 14 nap alatt teljesítik, és mivel

$$S_{13} = \frac{2 \cdot 1109 - 12 \cdot 80}{2} \cdot 13 = 8177,$$

a 14. napon $8235 - 8177 =$ **58 kilométert** tesznek meg. 1 pont)

Megjegyzés: Az *a)* és *b)* feladatrészek megoldásához az alábbi táblázat segítségével is eljuthatunk:

A nap sorszáma	Az adott napon megtett út (km)	Az összes megtett út az adott nappal bezárólag (km)
1.	1109	1109
2.	1029	2138
3.	949	3087
4.	869	3956
5.	789	4745
6.	709	5454
7.	629	6083
8.	549	6632
9.	469	7101
10.	389	7490
11.	309	7799
12.	229	8028
13.	149	8177
14.	58	8235

Mali zászlója három színből áll: zöld, sárga és piros. A zöld a természetre, a sárga a tisztaságra és az ásványkincsekre, a vörös a bátorságra és a függetlenségért folytatott küzdelem során kiontott vérre utal. Egy iskolában a tanulóknak választ kell adniuk, hogy a természetet, a tisztaságot, az ásványkincseket, a bátorságot és a kiontott vért melyik szín szimbolizálja a zászlóban.



c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind az öt válasz helyes, ha véletlenszerűen választunk a zászlóban előforduló három szín közül, ügyelve arra, hogy ne csak egy szín szerepeljen a válaszok között? c 4

M: Mind a három szín korlátlan használatával 3^5-féle lehetne a válasz.

Csak egy szín háromféleképpen használható (csak zöld, csak sárga, csak piros).

Összes eset száma: $3^5 - 3 = 240$. (2 pont)

Kedvező esetek száma egy. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy mind az öt válasz helyes, a feladat feltételeinek megfelelve:

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{1}{240} \approx \mathbf{0{,}004.}$$ (1 pont) ö 12

14 Balog úr összesen 1 000 000 Ft-ot akar befektetni két nem egyenlő részletben kamatos kamatra. A pénz egyik részére egy év múlva lesz szüksége. Egyéves lekötésre a bank évi 3%-os kamatot fizet. A másik részt két évre fekteti be, amelynek a kamatlába évi 5%. (A kamatláb a befektetés ideje alatt változatlan.)

Balog úr azonban véletlenül felcserélte, hogy melyik összeget mennyi időre akarta befektetni, így a két befektetés után összesen 43 500 Ft-tal kevesebbet kap.

a) Mekkora összeget akart Balog úr egy évre betenni a bankba? a 7

M: Az egy évre befektetendő pénz legyen x forint, ekkor a két évre befektetendő összeg:

$$1\,000\,000 - x \text{ forint.}$$ (1 pont)

Eredetileg a futamidők után Balog úr a következő üsszeget kapná:

$$x \cdot 1{,}03 + (1\,000\,000 - x) \cdot 1{,}05^2 \text{ forint.}$$

Felcserélés után azonban a kapott összeg:

$$x \cdot 1{,}05^2 + (1\,000\,000 - x) \cdot 1{,}03 \text{ forint.}$$ (2 pont)

Felírható:

$$x \cdot 1{,}03 + (1\,000\,000 - x) \cdot 1{,}05^2 - 43\,500 = x \cdot 1{,}05^2 + (1\,000\,000 - x) \cdot 1{,}03,$$ (1 pont)

amiből:

$$x \cdot 1{,}03 + 1\,102\,500 - x \cdot 1{,}1025 - 43\,500 = x \cdot 1{,}1025 + 1\,030\,000 - x \cdot 1{,}03,$$
$$-0{,}0725x + 1\,059\,000 = 0{,}0725x + 1\,030\,000,$$
$$29\,000 = 0{,}145x,$$
$$x = 200\,000.$$ (2 pont)

Balog úr egy évre **200 000 forintot** szeretett volna betenni a bankba, ami megfelel a feladat feltételeinek. (1 pont)

A 315 cm széles és 405 cm hosszú konyha felújításához négyzet alakú járólapokat vásárolnak. A járólap lerakását úgy szeretnék megoldani, hogy ne kelljen a lapok közül egyet sem elvágni.

b) Adja meg a feltételeknek megfelelő legnagyobb járólap oldalhosszúságát! b 4

M: A négyzet alakú legnagyobb járólap oldalának a hossza centiméterekben mérve a 315 és a 405 legnagyobb közös osztója. (1 pont)

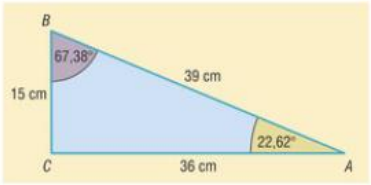
A prímtényezős felbontások:

$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad \text{és} \quad 405 = 3^4 \cdot 5.$$ (2 pont)

A legnagyobb járólap oldalhosszúsága $3^2 \cdot 5 = \mathbf{45 \text{ cm}}$. (1 pont) ö 11

15 Egy derékszögű háromszög átfogója 39 cm, az egyik befogója 15 cm hosszú.

a) Számítsa ki a háromszög harmadik oldalát és a szögeit! a 4



M: Pitagorasz tétele alapján a háromszög harmadik oldala:

$$\sqrt{39^2 + 15^2} = \mathbf{36\ cm.}$$ (1 pont)

Az ábra jelöléseit használva, az A csúcsnál lévő α szögre felírható:

$$\sin\alpha = \frac{15}{39} \Rightarrow \alpha \approx 22{,}62°.$$ (2 pont)

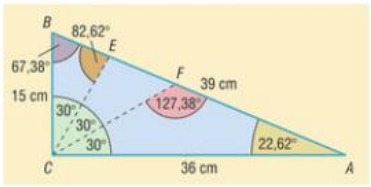
A háromszög B csúcsnál lévő szöge:

$$\beta = 90° - \alpha \approx 67{,}38°.$$

A háromszög szögei: **22,62°, 67,38° és 90°.** (1 pont)

A háromszög derékszögű csúcsánál lévő szögét osszuk 3 egyenlő részre két félegyenessel. Ezek a félegyenesek az átfogót három részre osztják.

b) Mekkora az átfogó három darabja? b 7



M: Az AFC háromszög F csúcsánál lévő szöge:

$$180° - 22{,}62° - 30° = 127{,}38°.$$

Írjuk fel a háromszögre a szinusztételt:

$$\frac{FA}{36} = \frac{\sin 30°}{\sin 127{,}38°} \Leftrightarrow FA = 36 \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 127{,}38°} \approx 22{,}65\ \text{cm}.$$ (3 pont)

Az EBC háromszög E csúcsnál lévő szöge:

$$180° - 67{,}38° - 30° = 82{,}62°.$$

Írjuk fel a háromszögre a szinusztételt:

$$\frac{EB}{15} = \frac{\sin 30°}{\sin 82{,}62°} \Leftrightarrow EB = 15 \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 82{,}62°} \approx 7{,}56\ \text{cm}.$$ (3 pont)

Az átfogó három darabja:

22,65 cm, 7,56 cm és $39 - 22{,}65 - 7{,}56 = \mathbf{8{,}79\ cm.}$ (1 pont)

A derékszögű háromszöget a két félegyenes három területre osztotta.

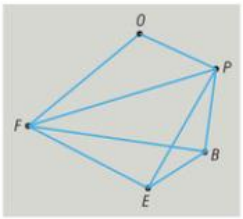
c) Öt színnel hányféleképpen lehet kiszínezni a három területet úgy, hogy két szomszédos mező nem lehet azonos színű? c 2

M: Az első terület ötféleképpen, a második és harmadik négyféleképpen színezhető.

A színezési lehetőségek száma: $5 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{80\text{-féle.}}$ (2 pont) ö 13

II. rész/B

16 Erzsi reggel elindul otthonról (O). Délelőtt el akar menni a fodrászhoz (F), a postára (P), a bankba (B), majd utoljára meg akar ebédelni a kedvenc helyén (E). A következő ábra a most felsorolt helyeket mutatja az őket összekötő utakkal. Erzsi minden helyet csak egyszer szeretne érinteni, ezért megtervezi az utat, de látja, hogy több lehetőség is van, amelyek közül véletlenszerűen kiválaszt egyet.



a) Adja meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott útvonalon Erzsi előbb jár a bankban, mint a postán! a 5

M: I. megoldás

A megadott ábra alapján a lehetséges útvonalak:

$$OFPBE, \quad OFBPE, \quad OPFBE, \quad OPBFE.$$ (3 pont)

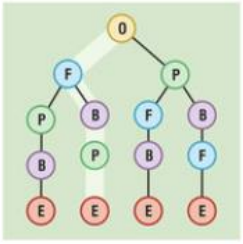
Az összes esetek száma 4, a kedvező esetek száma 1. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott útvonalon előbb jár a bankban, mint a postán:

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$ (1 pont)

II. megoldás

A lehetséges utakat gráffal is szemléltethetjük, amelyről leolvasható, hogy az összes lehetőségek száma 4, a kedvező lehetőségek száma 1. (4 pont)



Így annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott útvonalon előbb jár Erzsi a bankban, mint a postán:

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$ (1 pont)

Erzsi kedvenc ebédlőhelyén ebben az évben már kétszer emelték a menü árát. Most másodszor – az alapanyagok drágulására hivatkozva – kétszer annyi százalékkal emelték az árat, mint előtte. Így ebben az évben a menü ára összesen 15,5%-kal emelkedett.

b) Hány százalékkal emelték másodszor a menü árát? b 8

M: A menü ára legyen m.

Először p%-kal, másodszor pedig $2p$%-kal emelkedtek az árak. (1 pont)

A feladat szövege alapján felírható:

$$m\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{2p}{100}\right)=1{,}155m.$$ (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk m-mel, mert $m \neq 0$:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{2p}{100}\right)=1{,}155.$$

Vezessünk be új ismeretlent $x = \frac{p}{100}$:

$$(1+x)(1+2x)=1{,}155,$$
$$2x^2+3x-0{,}155=0.$$ (2 pont)

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = 0{,}05 \quad \text{és} \quad x_2 = -1{,}55.$$

Az egyenlet negatív megoldása nem jöhet szóba, tehát

$$x = 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad p = 5.$$ (3 pont)

A menü árát $2p$ = **10 százalékkal** emelték másodszor.

Ellenőrzés után ez megfelel a feladat feltételeinek. (1 pont)

A menühöz Erzsi egy hasáb alakú mini lúdlábszeletet is kapott, amelyről megállapította, hogy az alapja egy 6,2 cm, 2,2 cm és 4,8 cm oldalhosszúságú háromszög. Szerinte így épp van egy 120°-os szöge a süteménynek.

c 4

c) Igaza van-e Erzsinek?

M: Írjuk fel a háromszög formájú lúdlábszelet legnagyobb oldalára a koszinusztételt:

$$6{,}2^2 = 2{,}2^2 + 4{,}8^2 - 2 \cdot 2{,}2 \cdot 4{,}8 \cdot \cos\alpha.$$ (1 pont)

Az egyenletet rendezve:

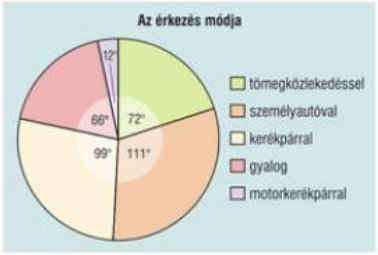
$$38{,}44 = 4{,}84 + 23{,}04 - 21{,}12 \cdot \cos\alpha,$$
$$38{,}44 = 27{,}88 - 21{,}12 \cdot \cos\alpha,$$
$$10{,}56 = -21{,}12 \cdot \cos\alpha,$$
$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}.$$ (2 pont)

Innen $\alpha = 120°$.

Tehát Erzsinek **igaza van.** (1 pont)

ö 17

17 Felsőtárkányban a Bükk Nyugati Kapuja Látogatóközpont munkatársai egy szép őszi vasárnapon felmérték, hogy a központ vendégei milyen közlekedési eszközzel érkeztek. A felmérésről egy kördiagram készült.



a) A kördiagram alapján töltse ki az alábbi táblázatot! a 4

M: A kördiagram alapján 1 főnek megfelel $\frac{66°}{22} = 3°$.

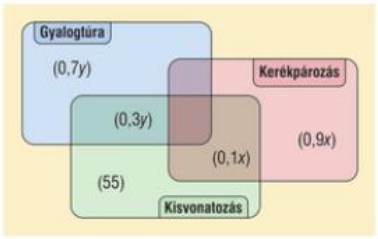
Ez alapján: **(4 pont)**

Közlekedési eszköz	tömeg-közlekedés	személy-autó	kerékpár	gyalog	motor-kerékpár
Létszám (fő)	24	37	33	22	4

Egy másik hétvégi napon összesen 245 ember töltötte a szabadidejét a környéken. Mindenki az alábbi három elfoglaltság közül valamelyiken, esetleg több különbözőn is részt vett: gyalogtúra, kerékpározás és kisvonatozás. Nem volt olyan, aki kerékpározás mellett gyalogtúrázott volna, de a kerékpározók 10%-a felült a kisvonatra. A gyalogtúrázók 30%-a kisvonatozott is. A kisvonatra összesen 96 ember szállt fel, ebből 55-en csak a kisvonatot választották.

b) Számítsa ki, hogy hányan kerékpároztak ezen a napon Felsőtárkány környékén a 245 ember közül! b 8

M: Legyen x a kerékpározók száma, y a gyalogtúrázóké. A feladatban szereplő információk alapján készítsünk Venn-diagramot. **(2 pont)**



Az információk alapján felírható:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 55 &= 245 \\ 0{,}1x + 0{,}3y + 55 &= 96 \end{aligned}\right\}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Egyszerűsítve:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 190 \\ x + 3y &= 410 \end{aligned}\right\}.$$

A második egyenlet mindkét oldalából kivonva az első egyenlet mindkét oldalát:

$$2y = 220, \quad \text{amiből} \quad y = 110.$$

Behelyettesítve: $x = 80$. **(3 pont)**

Ezen a napon Felsőtárkány környékén **110-en** kerékpároztak a 245 ember közül.

Ellenőrzés után eredményünk megfelel a feladat feltételeinek. **(1 pont)**

A felsőtárkányi erdei iskolába érkező 24 fős osztály számára 2 db 6 ágyas, 1 db 8 ágyas és 1db 4 ágyas szobát biztosítottak. Az osztályban 12 fiú és 12 lány van.

c) Hányféleképpen lehet a 24 tanulót elhelyezni az erdei iskola szobáiban úgy, hogy lányok és fiúk nem kerülhetnek egy szobába? c 5

M: Mivel a férőhelyek száma megegyezik az osztály tanulóinak számával, a 12 fiút csak kétféle módon lehet elhelyezni a szobákban. (1 pont)

Első eset, ha a 12 fiú a két 6 ágyas szobába, a 12 lány pedig a 8 ágyas és 4 ágyas szobába kerül.

Ebben az esetben az elhelyezések száma:

$$\binom{12}{6}\cdot\binom{6}{6}\cdot\binom{12}{8}\cdot\binom{4}{4} = 924 \cdot 1 \cdot 495 \cdot 1 = 457\,380. \quad \text{(2 pont)}$$

Második eset, ha a 12 fiú kerül a 8 ágyas és a 4 ágyas szobába, a 12 lány pedig a két 6 ágyasba.

Ebben az esetben az elhelyezések száma:

$$\binom{12}{8}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{12}{6}\cdot\binom{6}{6} = 457\,380. \quad \text{(1 pont)}$$

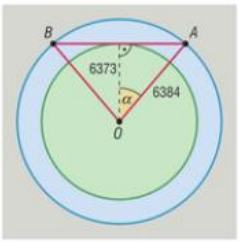
(Az első és második eset csak abban különbözik, hogy a lányok és fiúk helyet cserélnek, ezért egyenlő az elhelyezések száma.)

Az összes elhelyezési lehetőség száma ezek összege: **914 760.** (1 pont) ö 17

18 Egy repülőgép 11 000 m magasan repül. A Föld egy pontjából megfigyelve 56 perc idő telik el a horizont felett való megjelenésétől a horizont alá való érkezéséig.

a) Mekkora a repülőgép sebessége? (A repülőgép sebességét $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban százasokra kerekítve adja meg! A Föld sugarát vegye 6373 kilométernek!) a 9

M: Az ábra jelöléseit használva a repülőgép a $6373 + 11 = 6384$ km sugarú kör AB ívét teszi meg 56 perc alatt. (2 pont)



Az ív hosszának meghatározásához szükség van az $AOB\sphericalangle = 2\alpha$ középponti szögre.

Az OEA derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{6373}{6384} \Leftrightarrow 2\alpha \approx 6{,}728°. \quad \text{(3 pont)}$$

Az AB ív hossza:

$$s = \frac{2 \cdot 6384 \cdot \pi}{360°} \cdot 6{,}728° \approx 749{,}65 \text{ km}.$$

A repülőgép 749,65 km utat tesz meg $\frac{56}{60} \approx 0{,}9333$ óra alatt. (3 pont)

A repülőgép sebessége:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{749{,}65}{0{,}9333} \approx 803{,}22 \approx \mathbf{800}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad \text{(1 pont)}$$

A csillagok látszó fényességét magnitúdóban mérik. A Vega csillag látszólagos fényessége közelítőleg 0 magnitúdó.

Ha két csillag látszólagos fényessége m_1, illetve m_2 magnitúdó, valamint a két csillagról érkező fény intenzitása I_1, illetve I_2, akkor ezek között a következő összefüggés áll fenn: $m_1 - m_2 = -2{,}5 \lg \frac{I_1}{I_2}$.

b) Egy átlagember még képes látni egy olyan csillagot, amelynek a látszólagos fényessége 6 magnitúdó. A Vega fényintenzitása hányszorosa ennek a csillagénak? b 4

M: Használjuk az $m_1 - m_2 = -2{,}5 \cdot \lg \frac{I_1}{I_2}$ összefüggést: (2 pont)

$$0 - 6 = -2{,}5 \cdot \lg \frac{I_1}{I_2},$$

$$2{,}4 = \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

A logaritmus definíciója alapján:

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{2{,}4} \approx 251.$$

A Vega fényintenzitása **251-szerese** a szóban forgó csillagénak. (2 pont)

A Nap látszólagos fényessége $-26{,}8$ magnitúdó.

c) Hány magnitúdó a telihold látszólagos fényessége, ha a Nap körülbelül 478 000-szer nagyobb fényintenzitású? c 4

M: Az összefüggés alapján:

$$-26{,}8 - m_{\text{hold}} = -2{,}5 \cdot \lg 478\,000,$$
$$-26{,}8 - m_{\text{hold}} = -14{,}2,$$
$$m_{\text{hold}} = -12{,}6.$$

(2 pont)

A telihold látszólagos fényessége **$-12{,}6$ magnitúdó.** (2 pont) ö 17

I. rész

1 Hány éle van a 8 szögpontú teljes gráfnak? ● 2

M: Az n szögpontú teljes gráfnak $\frac{n(n-1)}{2}$ éle van, ez $n = 8$ esetében $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ élt jelent.

A gráf éleinek száma: **28.** (2 pont)

2 Legyen $H = \{20\text{-nál kisebb pozitív egész számok}\}$, $P = \{\text{prímszámok}\}$. ● 2

Adja meg a $H \cap P$ halmaz elemeit!

M: $H \cap P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$. (2 pont)

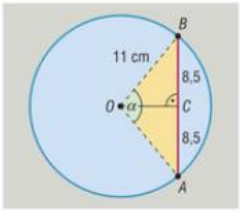
3 Mekkora középponti szöghöz tartozik 17 cm hosszúságú húr a 11 cm sugarú körben? ● 2

M: Az OBC derékszögű háromszögben:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{8{,}5}{11},$$

amiből $\alpha = 101{,}2°$. (2 pont)

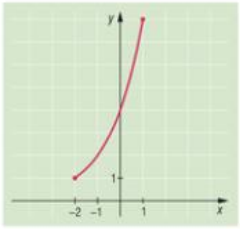
A középponti szög: $\alpha = 101{,}2°$.



4 Az ábrán egy a $[-2; 1]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Döntse el, hogy a függvény hozzárendelési szabálya ● 2

$$f(x) = 2^{x+2} \quad \text{vagy} \quad g(x) = 4 \cdot 2^x.$$

Mindkét hozzárendelési szabály helyes. (2 pont)



5 Az ABC háromszög két szögének nagysága a szokásos jelöléssel: $\alpha = 77°$; $\beta = 54°$. Mekkora szöget zár be a C pontból húzott szögfelező a szemközti oldallal? ● 2

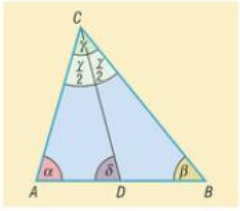
M: A háromszög harmadik szöge:

$$\gamma = 180° - (77° + 54°) = 49°. \quad \text{(1 pont)}$$

A metszéspontnál lévő szög:

$$\delta = 180° - \left(77° + \frac{49°}{2}\right) = 78{,}5°. \quad \text{(1 pont)}$$

A keresett szög: **78,5°.**



6 Mennyi a $2x^2 - 11x + 8 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa? ● 2

M: Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = b^2 - 4ac.$$ (1 pont)

Jelen esetben:

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 57.$$ (1 pont)

A diszkrimináns: $D = 57$.

7 Ha egy útszakaszt 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 4 óra alatt teszünk meg, akkor mennyi idő alatt tennénk meg 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel? ● 2

M: A 4 óra alatt megtett út:

$$4 \cdot 70 = 280 \text{ km}.$$ (1 pont)

Az idő 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel:

$$\frac{280}{90} = 3{,}11 \text{ óra} \approx 3 \text{ óra } 7 \text{ perc}.$$ (1 pont)

Az út megtételéhez szükséges idő: **3 óra 7 perc.**

8 Egy kör egy átmérőjének két végpontja $A(-3; 2)$ és $B(7; 4)$. Írja fel a kör egyenletét! ● 3

M: A kör középpontja az AB szakasz felezőpontja: $F(2; 3)$. (1 pont)

A kör sugara az

$$r = AF = BF = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$$ (1 pont)

A kör egyenlete: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 26$. (1 pont)

9 A templomok harangjai általában negyedóránként jelzik az időt. Az egyik templom „kis" harangja minden egész óra után 15 perccel egyet kongat, 15 perc múlva kettőt, majd újabb 15 perc elteltével hármat, 15 perc múlva, azaz „egész órakor" pedig négyet. A kis harang négy kongatása után a „nagy" harang annyit kongat, ahány óra van. Az órákat 12 órás ciklussal méri, például délután 13 órakor csak egyet kongat. ● 4

Hányat kongat a kis harang, illetve a nagy egy nap alatt?

M: A kis harang egy óra alatt $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ jelet ad, 24 óra alatt 240-szer kondul meg. (1 pont)

A nagy harang délig $1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ jelet ad. (2 pont)

A nap második felében ugyanennyit, tehát összesen $2 \cdot 78 = 156$-szor kondul meg. (1 pont)

Egy nap alatt a kis harang kongatásainak száma **240**, a nagy harangé **156**.

10 Határozza meg azokat a négyjegyű számokat, amelyekben minden számjegy annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke! ● 2

M: Csak az 1; 2; 3; 4 számjegyek fordulhatnak elő. (1 pont)

A megfelelő számok:

4444; 1333; 3133; 3313; 3331. (1 pont)

A keresett számok: **4444; 1333; 3133; 3313; 3331.**

11 Adott az e egyenesen 5 pont, a vele párhuzamos f egyenesen pedig 4 pont. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki? ● 4

M: Úgy jön létre háromszög, ha az egyik egyenesen 2, a másikon 1 pontot választunk. (1 pont)

Ha az e egyenesen választunk 2 pontot, a létrejövő háromszögek száma:

$$\binom{5}{2} \cdot 4 = 40.$$ (1 pont)

Ha az f egyenesen választunk 2 pontot, a létrejövő háromszögek száma:

$$\binom{4}{2} \cdot 5 = 30.$$ (1 pont)

Összesen $40 + 30 = 70$ háromszöget határoznak meg a pontok.

A létrejövő háromszögek száma: **70.** (1 pont)

12 Egy dobozban 5 kék golyó van. Hány sárga golyót kell a dobozba tennünk, ha azt akarjuk, hogy ezután egy golyót véletlenszerűen kihúzva a dobozból, a kihúzott golyó 0,2 valószínűséggel legyen kék? ● 3

M: I. megoldás

Jelöljük x-szel a sárga golyók számát.

Az adott valószínűség:

$$\frac{5}{x+5} = 0{,}2.$$ (2 pont)

Az egyenletet megoldva $x = 20$. (1 pont)

20 sárga golyót kell berakni a dobozba.

II. megoldás

Ha 0,2 valószínűséggel húzunk kék golyót, akkor az összes golyó $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ része kék, 5 darab. (1 pont)

A többi, a $\frac{4}{5}$ rész sárga, tehát

$4 \cdot 5 = 20$ darab. (2 pont)

20 sárga golyót kell berakni a dobozba.

II. rész/A

13 A gyümölcsitalokat általában téglatest alakú dobozban árusítják. Az egyik üdítőital dobozának alapja olyan téglalap, amelynek két oldala 63 mm és 70 mm.

a) Milyen magas a doboz, ha 1 liter ananászlé van benne? Az eredményt milliméter pontossággal, egész értékre kerekítve adja meg! a 3

M: A térfogat: 1 liter = 1 000 000 mm^3. (1 pont)

A téglatest térfogata:

$$63 \cdot 70 \cdot c = 1\,000\,000,$$ (1 pont)

amiből

$$c = 226{,}757 \approx 227 \text{ mm}.$$

A doboz magassága **227 mm.** (1 pont)

Egy másik doboz, amelyben ugyancsak egy liter gyümölcslé van, 195 mm magas. Alapéleinek aránya 2 : 3.

b) Mekkorák a doboz alapjának élei? Az eredményt milliméter pontossággal, egész értékre kerekítve adja meg! b 4

M: Legyen a két alapél $2x$ és $3x$. (1 pont)

A doboz térfogata:

$$2x \cdot 3x \cdot 195 = 1\,000\,000,$$ (1 pont)

amiből

$$x^2 = 854{,}7 \quad \text{és} \quad x \approx 29{,}24.$$ (1 pont)

Az alapélek:

$$2x = 58{,}48 \approx \mathbf{58\ mm} \quad \text{és} \quad 3x = 87{,}72 \approx \mathbf{88\ mm}.$$ (1 pont)

Egy gyümölcsitalokat gyártó cég kóstolóval egybekötött bemutatót tart a termékeiből. A bemutatón ananász-, alma-, szőlő-, körte- és ribizliitalt kóstolnak a vendégek.

c) Hányféle sorrendben kínálhatják az italokat, ha az ananász és a ribizli nem jöhet egymás után? c 5

M: Úgy érdemes számolni, hogy az összes lehetséges esetek számából elvesszük azoknak az eseteknek a számát, amikor az ananász és a ribizli egymás után következik. (1 pont)

Az 5 különböző italt $5! = 120$-féle sorrendben tálalhatják fel. (1 pont)

Az ananász és a ribizli 2-féleképpen lehet egymás mellett. (1 pont)

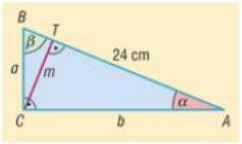
A fenti párost a 3 másik itallal $4! = 24$-féle sorrendbe rakhatjuk. (1 pont)

Tehát azon esetek száma, amikor a bemutatón nincs egymás után az ananász és a ribizli:

$$5! - 2 \cdot 4! = 120 - 48 = \mathbf{72}.$$ (1 pont) ö 12

14 Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság 13 cm és 24 cm hosszú részekre vágja az átfogót.

a) Adja meg a háromszög oldalait és szögeit! a 6



M: A megfelelő szögek megegyezése miatt az *ATC* és *CTB* háromszögek hasonlók, a megfelelő oldalaik aránya megegyezik:

$$\frac{m}{24}=\frac{13}{m}.$$

Ebből

$$m^2 = 13 \cdot 24 \Rightarrow m = \sqrt{13 \cdot 24} \Rightarrow m \approx 17{,}66 \text{ cm}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az *ACT* háromszögben:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{24} = \frac{17{,}66}{24}, \quad \text{amiből} \quad \alpha = 36{,}35°. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel a két hegyesszög összege 90°, így $\beta = 53{,}65°$. (1 pont)

A *BTC* háromszögben a Pitagorasz-tétel felhasználásával:

$$a^2 = m^2 + 13^2 = 312 + 169 = 481.$$

Ebből $a = 21{,}93$ cm. (1 pont)

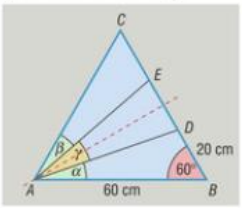
Az *ABC* háromszögben, szintén Pitagorasz-tétellel:

$$b^2 = 37^2 - a^2 = 1369 - 481 = 888.$$

Ebből $b = 29{,}80$ cm. (1 pont)

Az *ABC* szabályos háromszög oldalai 60 cm hosszúak. Az *A* csúcsot összekötjük a *BC* oldal két harmadolópontjával.

b) Mekkora részekre osztják a berajzolt szakaszok az *A* pontnál lévő szöget? b 6



M: Az *ABD* háromszögben koszinusztétellel számítjuk ki az *AD* szakasz hosszát:

$AD^2 = 60^2 + 20^2 - 2 \cdot 60 \cdot 20 \cdot \cos 60° = 2800$,

amiből $AD = 52{,}92$ cm. (2 pont)

I. megoldás

Az α szög szinusztétellel:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 60°} = \frac{20}{52{,}92}, \quad \text{amiből} \quad \alpha = 19{,}1°. \qquad \text{(2 pont)}$$

A tengelyes szimmetria miatt: $\beta = \alpha = 19{,}1°$. (1 pont)

Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 60°$, $\gamma = 21{,}8°$. (1 pont)

II. megoldás

Az *ADE* egyenlő szárú háromszögben:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{10}{52{,}92}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből $\frac{\gamma}{2} = 10{,}9°$. Tehát $\gamma = 21{,}8°$. (1 pont)

Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 60°$, és a tengelyes szimmetria miatt $\alpha = \beta$: $\alpha = \beta = 19{,}1°$. (1 pont) ö 12

15 Babett az első félévben 23 jegyet szerzett az iskolában. A jegyeinek átlaga egy tizedesjegyre kerekítve 4,1.

a) Mennyi Babett ötöseinek maximális száma?

b) Minimum hány ötöse lehet Babettnek?

c) Lehet-e Babett jegyeinek egyetlen módusza hármas? Válaszát indokolja!

Megoldás:

Jelöljük α-val Babett jegyeinek átlagát, S-sel pedig a jegyek összegét. ($S = 23 \cdot \alpha$)

Ha α egy tizedesre kerekítve 4,1, akkor: $4{,}05 \leq \alpha < 4{,}15$. (1 pont)

23-mal szorozva: $93{,}15 \leq S < 95{,}45$. (1 pont)

S pozitív egész számok összege, így csak pozitív egész lehet: S vagy 94 vagy 95. (1 pont)

a) Ha $S = 94$, az ötösök száma nem lehet 18, mert 4 egyessel csak 22 lenne a jegyek száma. a 6

17 ötöse lehet, pl. 5 egyessel és 1 négyessel. (1 pont)

Ha $S = 95$, akkor az ötösök száma lehet 18, 5 egyessel. (1 pont)

Tehát legfeljebb **18 ötöse** lehetett Babettnek. (1 pont)

b) Akkor lehet kevés ötös, ha magas a négyesek száma. b 3

Ha $S = 94$, a négyesek száma nem lehet 22, de 21 lehet, 2 ötössel. (1 pont)

Ha $S = 95$, a négyesek száma nem lehet 22 és 21.

A 20 darab négyes és 3 ötös lehetséges. (1 pont)

Tehát minimum **2 ötöse** volt Babettnek. (1 pont)

c) **Nem** lehet a jegyek egyetlen módusza 3. (1 pont) c 3

Ha hármasból lenne a legtöbb, legalább 8, akkor legfeljebb 7 ötös, 7 négyes 1 kettes lehetne, de akkor az átlag 3,89 lenne. (2 pont) ö 12

II. rész/B

16 A kötvény egy speciális értékpapír, melyet kiadhat egy cég, önkormányzat vagy az állam. A megvásárló gyakorlatilag kölcsönt ad a kötvény kiadójának, az pedig a futamidő lejárta után visszafizeti azt, és meghatározott kamatot is ad.

Egy kötvény futamideje egy év, az éves kamata 5,2%, de a futamidő lejárta előtt is visszaváltható. Ebben az esetben a kötvény kibocsátója időarányos kamatos kamatot fizet, havi periódusban.

a) Karcsi ebből a kötvényből 5 000 000 Ft értékben vásárolt, de három hónap után szüksége van a pénzére, és szeretné visszaváltani a kötvényt. Mekkora összeget kaphat érte? a 4

M: Ha p a havi kamatláb, akkor az éves kamattal megnövelt érték:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{12}=1+\frac{5{,}2}{100}, \quad \text{amiből} \quad 1+\frac{p}{100}=\sqrt[12]{1{,}052}.$$

Kiszámítva: $p = 0{,}42\%$. (3 pont)

Tehát 3 hónap múlva $5\,000\,000 \cdot 1{,}0042^3 \approx$ **5 063 265 Ft,** ennyit kaphat Karcsi a kötvényekért. (1 pont)

Egy másik kötvényt ötéves futamidővel és sávosan változó kamattal hirdetnek. Az első évben a kamat 3,5%, a második évben 4%, a harmadik évben 4,5%, a negyedik évben 5%, és az ötödik évben 5,5%. Ha valaki nem veszi ki közben a pénzét, az ötödik év végéig a kamatok is kamatoznak.

b) Béla 2 000 000 Ft-ért vásárolt ebből a kötvényből. Öt év múlva mekkora összegre tarthat igényt? b 3

M: A kamatokkal megnövekedett érték:

$$2\,000\,000 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}045 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}055.$$ (2 pont)

Kiszámítva: ≈ **2 492 079 Ft.** (1 pont)

A *Babakötvény* a kisgyermek születésekor vagy később is vásárolható. Az állam a kötvény vásárlásakor 42 500 Ft támogatást ad egy összegben. A kamat változó, a mai állapot szerint évi 6,4%. A futamidő 19 év.

c) Mekkora összeghez jut 19 éves korában az a gyermek, akinek a szülei a születésétől 18 éves koráig, minden hónapban 5000 Ft-ot fizetnek be a kötvényre, ha az éves kamat 6,4%, és a kamatot év végén számítják a befizetések után? c 10

M: Az egyszeri 42 500 Ft-os támogatás 19 év múlva

$$42\,500 \cdot 1{,}064^{19} = 138\,127 \text{ Ft-ot ér.}$$ (1 pont)

Egy évben 60 000 Ft-ot fizetnek be a szülők. Az első évben befizetett összeg 19 évig kamatozik, a második évben befizetett 18 évig és így tovább. (2 pont)

A végső összeg:

$60\,000 \cdot 1{,}064^{19} + 60\,000 \cdot 1{,}064^{18} + 60\,000 \cdot 1{,}064^{17} + \ldots + 60\,000 \cdot 1{,}064.$

Emeljünk ki:

$$60\,000 \cdot 1{,}064 \cdot (1{,}064^{18} + 1{,}064^{17} + \ldots + 1).$$ (2 pont)

A zárójelben egy mértani sorozat első 19 tagjának összege áll, fordított sorrendben. (1 pont)

A mértani sorozat összegképlete alapján:

$$60\,000 \cdot 1{,}064 \cdot 1 \cdot \frac{1{,}064^{19}-1}{1{,}064-1}.$$ (2 pont)

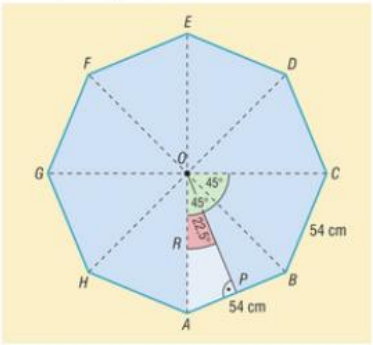
Kiszámítva: 2 244 432 Ft. (1 pont)

Hozzáadva az állami támogatásból elért összeget, 19 éves korában a gyermek **2 382 559 Ft-hoz** juthat. (1 pont) ö 17

17 A szabályos nyolcszög alakú kerti asztalunk minden oldala 54 cm hosszú. Kör alakú terítővel szeretnénk leteríteni.

a) Mekkora a legkisebb sugarú, kör alakú terítő, amely teljesen lefedi az asztalt? a 6

M: A szöveg alapján rajzoljuk le a kerti asztalt. (2 pont)



A szabályos nyolcszög köré írható kör sugarát határozzuk meg.

Az *ABO* háromszög egyenlő szárú, a szára adja meg a nyolcszög köré írható kör sugarát. (1 pont)

Az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságát behúzva derékszögű háromszöget kapunk.

Az *AOP* derékszögű háromszögben:

$$\sin 22{,}5° = \frac{27}{R}, \quad \text{amiből} \quad R = \frac{27}{\sin 22{,}5°} = 70{,}55 \text{ cm}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Tehát legalább **70,55 cm** sugarú kör alakú terítővel takarható le teljesen az asztal. (1 pont)

Az asztalra 8 darab 24 cm átmérőjű tányért és 3 darab téglalap alakú tálcát helyezünk. Egy tálca oldalainak hossza 32 cm és 43 cm.

b) Az asztal területének hány százalékát takartuk le az edényekkel? b 8

M: A szabályos nyolcszög területét a 8 egybevágó, egyenlő szárú háromszög területéből számítjuk ki.

A háromszögek területét a két oldal és a közbezárt szög felhasználásával érdemes számolni: (1 pont)

$$T_{\text{nyolcszög}} = 8 \cdot \frac{70{,}55^2 \cdot \sin 45°}{2} \approx 14\,077{,}9 \text{ cm}^2. \qquad \text{(2 pont)}$$

A 8 db kör alakú tányér területe:

$$T_{\text{tányérok}} = 8 \cdot r^2 \cdot \pi = 8 \cdot 12^2 \cdot \pi \approx 3619{,}1 \text{ cm}^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

A téglalap alakú tálcák területe:

$$T_{\text{tálcák}} = 3 \cdot 32 \cdot 43 = 4128 \text{ cm}^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az edények által eltakart terület: 7747,1 cm². (1 pont)

Nézzük a területek arányát:

$$\frac{7747{,}1}{14\,077{,}9} \approx 0{,}55. \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát az asztal területének **55%-át** takartuk el az edényekkel. (1 pont)

c) Hányféleképpen tud leülni nyolc ember a nyolcszögű asztal mellé, ha két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy olyan ember a társaságban, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző? c 3

M: Ha egymás mellé sorba akarnánk leültetni az embereket, azt 8!-féleképpen tehetnénk meg. (1 pont)

A szabályos sokszög köré való minden egyes leültetés 8-szor fordul elő az előbbiben, hiszen ennyi lehetőség van mindenkinek felállni és eggyel odébb leülni. (1 pont)

Tehát $\frac{8!}{8} = 7! = \mathbf{5040}$ lehetőség van a 8 ember leültetésére a szabályos nyolcszög alakú asztal mellé. (1 pont) ö 17

18 Egy termálfürdő medencéjét két csapon át lehet feltölteni. Az első csap egyedül 3 óra alatt, a második 6 óra alatt tölti fel az üres medencét. A lefolyón a tele medence 4 óra alatt ürül ki.

A fürdő reggel nyolc órakor nyit.

a) Hány órakor kell megnyitni a csapokat, ha mindkettőt üzembe helyezik, hogy nyitásra megteljen a medence? a 5

M: Jelöljük a feltöltés idejét x-szel. Felírható a következő egyenlet:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1.$$ (2 pont)

Beszorozva 6-tal:

$$2x + x = 6, \quad \text{aminek a megoldása} \quad x = 2.$$ (2 pont)

Tehát legkésőbb a nyitás előtt 2 órával, azaz **reggel 6 órakor** ki kell nyitni a csapokat. (1 pont)

Egy alkalommal az első csap meghibásodott, ezért csak 2 órával a második csap megnyitása után tudták üzembe helyezni, ettől kezdve hibátlanul működött.

b) Ebben az esetben a második csap megnyitása után mennyi idővel telt meg az üres medence? b 6

M: A második csap 2 órán át működik, jelöljük y-nal a közös munka idejét.

A megfelelő egyenlet:

$$\frac{2}{6} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} = 1.$$ (2 pont)

Beszorozva 6-tal:

$$2 + 2y + y = 6, \quad \text{amiből} \quad y = \frac{4}{3}.$$ (2 pont)

A $\frac{4}{3}$ óra = 1 óra 20 perc. (1 pont)

Tehát a második csap megnyitása után **3 óra 20 perccel** telik meg a medence. (1 pont)

Egy napon mindkét csapot beindították, de 30 perc után észrevették, hogy a lefolyó is nyitva maradt, ekkor zárták el.

c) A csapok megnyitása után mennyi idővel telt meg így a medence? c 6

M: Mivel a lefolyó fél óráig engedte ki a vizet, ha z-vel jelöljük a csapok megnyitásától a feltöltésig eltelt időt, akkor a megfelelő egyenlet:

$$\frac{z}{3}+\frac{z}{6}-\frac{0{,}5}{4}=1. \qquad \text{(2 pont)}$$

Beszorozva 12-vel:

$$4z+2z-1{,}5=12, \qquad \text{(2 pont)}$$

ennek a megoldása:

$$z=2{,}25 \text{ óra} = 2 \text{ óra } 15 \text{ perc}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát ebben az esetben a csapoknak **2 óra 15 percre** van szükségük a medence feltöltéséhez. (1 pont) ö 17

I. rész

1 Egy számtani sorozat első tagja 8, differenciája 12. Adja meg a sorozat első 10 tagjának összegét! ● 2

M: $S_{10} = 10 \cdot \frac{2 \cdot 8 + 9 \cdot 12}{2} = 620.$ (2 pont)

Az első 10 tag összege: **620.**

2 Adja meg a $\frac{2x+3}{4x-5}$ kifejezés értelmezési tartományát! ● 2

M: A nevező nem lehet 0:

$$4x - 5 \neq 0, \quad \text{így} \quad x \neq \frac{5}{4}.$$ (2 pont)

A kifejezés értelmezési tartománya: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{4}\right\}$.

3 Egy 13 fős társaság minden tagja beszéli az angol és a német nyelv közül valamelyiket. Németül 7-en beszélnek, angolul 11-en. Hányan beszélik mind a két nyelvet? ● 2

M: Az angolul és németül beszélők számát összeadva, a $7 + 11 = 18$ összeg kétszer tartalmazza a mindkét nyelven beszélőket. Vagyis $18 - 13 = 5$ ember beszéli mind a két nyelvet. (2 pont)

Mind a két nyelvet **5-en** beszélik.

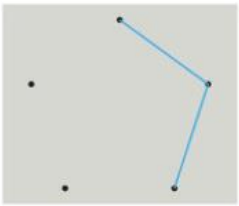
4 Adja meg $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ reciprokának értékét két egész szám hányadosaként! ● 2

M: A két tört összege: $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$. (1 pont)

A reciprok: $\frac{15}{11}$. (1 pont)

5 Egy öttagú társaságban két olyan ember van, aki senkit sem ismer, és két olyan, aki 1-1 embert ismer a társaságból. Hány embert ismer az ötödik ember a társaságból? ● 2

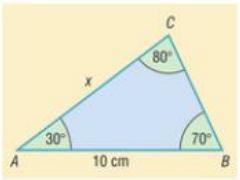
M: Lerajzoljuk a gráfot. Ha azok, akiknek 1-1 ismerősük van, egymás ismerősei lennének, akkor 3 olyan ember lenne, aki senkit sem ismer. Ők tehát az 5. személy ismerősei, akinek így 2 ismerőse van.



Az ötödik ember **2** másikat ismer a társaságból. (2 pont)

6 Az ABC háromszög AB oldala 10 cm, a rajta fekvő két szög 30° és 70°. Mekkora a 70°-os szöggel szemben lévő oldala? Megoldását részletezze! (A válaszát centiméterekben mérve, két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) ● 4

M: A háromszög harmadik szöge 80°. (1 pont)



Felírva a szinusztételt:

$$\frac{x}{10} = \frac{\sin 70°}{\sin 80°}.$$ (1 pont)

Az egyenletet megoldva, a harmadik oldal:

$$x = 10 \cdot \frac{\sin 70°}{\sin 80°} \approx 9{,}54 \text{ cm}.$$ (2 pont)

A háromszög 70°-os szögével szemben lévő oldala: **9,54 cm.**

7 Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy piros és egy sárga kockával dobva, 6 lesz a dobott számok összege! Megoldását részletezze! ● 3

M: Az összes esetek száma: $6 \cdot 6 = 36$. (1 pont)

A kedvező dobások:

$$5 + 1 = 6;\quad 1 + 5 = 6;\quad 4 + 2 = 6;\quad 2 + 4 = 6;\quad 3 + 3 = 6.$$

Tehát a kedvező esetek száma: 5.

Annak a valószínűsége, hogy a dobott pontszámok összege 6:

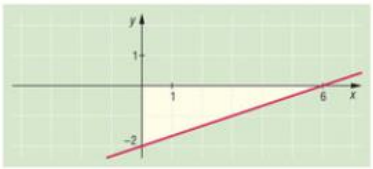
$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{5}{36} \approx 0{,}1389.$$ (2 pont)

A valószínűség: $\frac{5}{36}$.

8 Hány egység területű háromszöget zár be az $x - 3y = 6$ egyenletű egyenes a koordinátatengelyekkel? Megoldását részletezze! ● 3

M: Az x tengellyel való A metszéspont koordinátáira teljesül: $x - 3 \cdot 0 = 6$, tehát $A(6; 0)$.

Az y tengellyel való B metszéspont koordinátáira teljesül: $0 - 3 \cdot y = 6$, tehát $B(0; -2)$. (2 pont)



Az $x - 3y = 6$ egyenletű egyenes a koordinátatengelyekkel az alábbi területű háromszöget zárja be:

$$T = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ egység}.$$ (1 pont)

A háromszög területe: **6 egység.**

9 Egy táskáért a boltban 6350 Ft-ot fizettünk. Ez az úgynevezett *bruttó ár* a táska nettó árának 27%-os általános forgalmi adóval növelt ára. Mennyi a táska nettó ára? ● 2

M: I. megoldás

A táska nettó ára $\frac{6350}{1{,}27} = \mathbf{5000\ forint.}$ (2 pont)

II. megoldás

A táska nettó ára legyen x forint. Felírható:

$$x \cdot 1{,}27 = 6350.$$

Ebből $x = 5000$. (2 pont)

A táska nettó ára **5000** forint.

10 Adja meg a következő állítások logikai értékét! (igaz, hamis) ● 3

A) Trapézban az egy oldalon nyugvó két belső szög összege 180°.

M: Hamis. (1 pont)

Ellenpélda egy olyan húrtrapéz, amelynek alapon fekvő két hegyesszöge 60°.

B) A szabályos tízszög egy belső szöge 144°-os.

M: Igaz. (1 pont)

A szabályos tízszög egy belső szöge:

$$\frac{(10-2)\cdot 180^\circ}{10} = 144^\circ.$$

C) Hasonló testek térfogatának aránya egyenlő a hasonlóság arányának a négyzetével.

M: Hamis. (1 pont)

Mert a hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbével egyenlő.

11 Adja meg az $5^x = 7$ egyenlet megoldását két tizedesjegy pontossággal! ● 2

Az egyenlet megoldása: $x = \frac{\lg 7}{\lg 5} \approx \mathbf{1{,}21.}$ (2 pont)

Megjegyzés: A megoldás megadható $x = \log_5 7 \approx 1{,}21$ alakban is.

12 Hány liter víz fér a henger alakú tartályba, ha alapkörének átmérője 60 cm, magassága pedig 1,2 m? ● 3

M: A szokásos jelölésekkel $r = 30$ cm, $m = 120$ cm. (1 pont)

A tartály térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 30^2 \cdot \pi \cdot 120 \approx 339\,292\ \text{cm}^3 \approx 339\ \text{liter}.$$ (2 pont)

A tartályba **339** liter víz fér.

II. rész/A

13 Egy versenypálya bármely két állomása között pontosan egy közvetlen út van.

a) Hány állomása van a pályának, ha az utak száma az állomások számának kétszeresénél 3-mal nagyobb? a 5

M: A feladatot gráffal modellezhetjük, a csúcsok az állomások, az élek az őket összekötő utak.

Keressük azt az n pontú teljes gráfot, amelyben az élek száma a csúcsok számának kétszeresénél 3-mal nagyobb. (1 pont)

$$\frac{n(n-1)}{2} = 2n + 3, \quad \text{(1 pont)}$$

$$n(n-1) = 4n + 6,$$

$$n^2 - n = 4n + 6,$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0. \quad \text{(1 pont)}$$

Ez utóbbi egyenlet megoldásai: $n_1 = 6$, illetve $n_2 = -1$. (1 pont)

A feladat feltételeit csak a 6 elégíti ki, így az állomások száma **6.** (1 pont)

Az állomásokon feladatokat kell megoldani, és csak akkor mehetünk tovább, ha helyesen válaszolunk. Az egyik feladat a következő:

Ármin kisautós matricákat gyűjt. Kezdetben 12 darab volt, és néhány héten keresztül minden héten megnégyszerezte az addig gyűjtött matricák számát. Adél a macskás matricákat szereti. Neki kezdetben csak 3 volt, és háromszor annyi héten keresztül, mint Ármin, hetente megkétszerezte a matricái számát. Hány hétig gyűjtötte Adél a matricákát, ha a gyűjtés végén egyenlő számú matricájuk volt?

b) Adjuk meg a helyes választ! b 6

M: Árminnak x hét után $12 \cdot 4^x$ darab kisautós, Adélnak $3x$ hét után $3 \cdot 2^{3x}$ darab macskás matricája volt.

A matricák száma egyenlő:

$$12 \cdot 4^x = 3 \cdot 2^{3x}, \quad \text{(1 pont)}$$

$$4 \cdot 4^x = 2^{3x},$$

$$2^2 \cdot 2^{2x} = 2^{3x},$$

$$2^{2x+2} = 2^{3x}. \quad \text{(2 pont)}$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:

$$2x + 2 = 3x, \text{ vagyis } x = 2. \quad \text{(1 pont)}$$

Tehát Adél $3x =$ **6 hétig** gyűjtötte a matricákat, és ez megfelel a feladat feltételeinek. ö 11

14 A táblázatban Magyarország tíz legnépszerűbb elektromos autójának 2022. évi eladási statisztikáját látjuk. Az eladott autók száma mellett a 2021. évi eladásokhoz képest láthatjuk a változást is.

	Márka	Darab	Változás (db)		Márka	Darab	Változás (db)
1.	Tesla	597	+413	6.	Volkswagen	324	−173
2.	Kia	524	−137	7.	Hyundai	299	−138
3.	BMW	469	+255	8.	Škoda	206	−39
4.	Mercedes	455	+214	9.	Nissan	202	−272
5.	Dacia	386	+123	10.	Volvo	176	+141

(forrás: https://infostart.hu/gazdasag/2023/01/17/elektromos-autok-2022-ben-magyarorszagon-itt-az-eladasi-toplista)

a) Melyik autómárka eladási száma csökkent a legkevesebb százalékkal? Adja meg ennek a csökkenésnek a százalékos értékét! (Válaszát századokra kerekítve adja meg.) a 3

M: A Kia, Volkswagen, Hyundai, Škoda és Nissan márkák forgalmazásában történt visszaesés. A táblázat szerint: **(2 pont)**

Márka	2021	2022	Csökkenés százalékosan
Kia	524 + 137 = 661	524	$\frac{137}{661} \cdot 100 = 20{,}73\%$
Volkswagen	324 + 173 = 497	324	$\frac{173}{497} \cdot 100 = 34{,}81\%$
Hyundai	299 + 138 = 437	299	$\frac{138}{437} \cdot 100 = 31{,}58\%$
Škoda	206 + 39 = 245	206	$\frac{39}{245} \cdot 100 = 15{,}92\%$
Nissan	202 + 272 = 474	202	$\frac{272}{474} \cdot 100 = 57{,}38\%$

Legkevésbé a **Škoda** márka értékesítése csökkent, **15,92%-kal.** **(1 pont)**

András vett egy elektromos autót 13,7 millió forintért. Az azóta eltelt három évben összesen 675 órán keresztül 34 824 km utat tett meg, és az autó töltéséhez szükséges elektromos áramért 188 400 forintot fizetett ki.

b) Mekkora átlagsebességgel utazott az autójával ez idő alatt, illetve hány forintjába került 100 kilométer megtétele, ha most az autóját 11,5 millió forintért eladja? b 3

M: Átlagsebesség: $\frac{34\,824\text{ km}}{675\text{ h}} \approx 51{,}59\frac{\text{km}}{\text{h}}$. (1 pont)

Az autóra fordított összes költsége:

$$13\,700\,000 - 11\,500\,000 + 188\,400 = 2\,388\,400 \text{ forint.}$$ (1 pont)

András átlagosan $\frac{2\,388\,400}{348{,}24} \approx$ **6858 forint** költséggel utazott 100 kilométert. (1 pont)

Egy elektromos autó szélcsendes időben $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességnél 16 kWh, $130\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességnél 22 kWh elektromos energiát használ el 100 kilométerenként. Ezek az értékek viharban 20%-kal megnőnek. Az autóban a klíma működtetése óránként 1,3 kWh energiába kerül.

Az autó 55 kWh töltöttségi szintjével 260 km távolságot szerettünk volna megtenni töltés nélkül, kedvező időjárási feltételek mellett. Azonban csak az út egy részén tudtunk $130\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel a klímát bekapcsolva autózni, mert útközben viharba kerültünk. Az autónk sebességét ezért a hátralévő úton csökkentettük $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra, kikapcsoltuk a klímát, és így is tudtuk teljesíteni a távot töltés nélkül.

c) Legfeljebb hány kilométert autóztunk kedvező időjárási feltételek mellett? (Válaszát egész kilométerben adja meg.) c 6

M: Az út első felének hossza legyen x km.

Az út megtételéhez szükséges idő $\frac{x}{130}$ óra.

Az első rész megtételéhez $130\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességnél 100 kilométerenként 22 kWh energia kell. (1 pont)

Az út első feléhez elhasznált energia:

$$\frac{x}{100} \cdot 22 + \frac{x}{130} \cdot 1{,}3 = 0{,}23x \text{ kWh.}$$ (1 pont)

A második rész hossza $260 - x$ kilométer, amelyhez $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességnél 100 kilométerenként $16 \cdot 1{,}2 = 19{,}2$ kWh energia szükséges.

Az út második feléhez elhasznált energia:

$$\frac{260 - x}{100} \cdot 19{,}2 = 49{,}92 - 0{,}192x \text{ kWh.}$$ (1 pont)

Ha teljesítettük a távot, az út első és második felén felhasznált energia összesen legfeljebb 55 kWh:

$$0{,}23x + 49{,}92 - 0{,}192x \le 55,$$ (1 pont)

$$0{,}038x \le 5{,}08,$$

$$x \le 133{,}68.$$ (1 pont)

Az út első fele egész kilométerben megadva legfeljebb **133 km.** (1 pont) ö 12

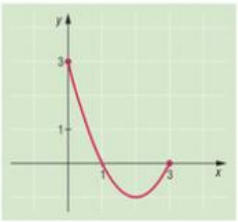
15 Adott az $f\colon [0;3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény.

a) Ábrázolja a megadott f függvényt! a 5

M: A hozzárendelési szabályt teljes négyzetté alakítva:

$$x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3 =$$
$$= (x-2)^2 - 1. \quad \text{(2 pont)}$$

Az $f\colon [0;3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)^2 - 1$ függvény grafikonja az ábrán látható. (3 pont)



b) Oldja meg az $(x-2)^2 \le 1$ egyenlőtlenséget az egész számok halmazán! b 4

M: Ekvivalens átalakítások után az $x^2 - 4x + 3 \le 0$ másodfokú egyenlőtlenséget kell megoldani. (1 pont)

Az $f(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény grafikonja felfelé nyíló parabola, amelynek két zérushelye 1 és 3.

Az egyenlőtlenség megoldása a valós számok halmazán: $x \in [1;3]$. (2 pont)

Az egész számok halmazán a megoldás: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ és $x_3 = 3$. (1 pont)

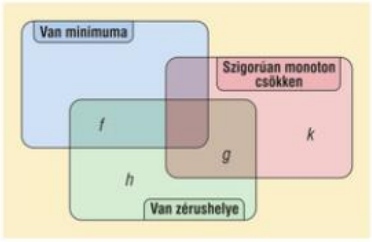
c) Adottak a következő függvények: c 4

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 1$;

$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4$; $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Írja be a halmazábrába a függvények betűjeleit! ö 13

A kitöltött ábra: (4 pont)



II. rész/B

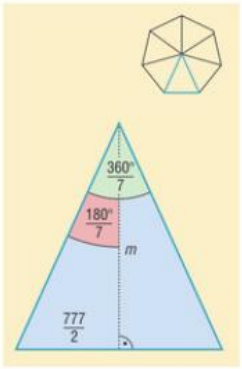
16 Hetedhét ország fővárosa köré szabályos hétszög alakú várfalat építettek, amelynek oldala 777 méter.

Helyi rendelkezés szerint a zöldterület a városon belül nem lehet kevesebb, mint az összterület 37%-a.

a) Legalább hány négyzetkilométer a zöldterület a fővárosban? (Válaszát négyzetkilométerben mérve két tizedesjegy pontossággal adja meg!) a 5

M: A 777 m oldalú szabályos hétszög területének 37%-át kell kiszámítani.

A hétszög 7 egyenlő szárú háromszögből áll, amelyek szárszöge $\frac{360°}{7}$, alapja 777 m. (1 pont)



A háromszög magasságát berajzolva kiszámíthatjuk annak hosszát:

$$\operatorname{tg}\frac{180°}{7} = \frac{\frac{777}{2}}{m},$$

$$m = \frac{777}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{7}} \approx 806{,}73.$$ (2 pont)

A szabályos hétszög területe:

$$T = 7 \cdot T_{\triangle} = 7 \cdot \frac{777 \cdot 806{,}73}{2} \approx 2\,193\,902 \text{ m}^2.$$

A zöldterület nagysága legalább:

$$2\,193\,902 \cdot 0{,}37 \approx 811\,743{,}74 \text{ m}^2 \approx \mathbf{0{,}81 \text{ km}^2}.$$ (2 pont)

Hetedhét országot 16 lovag védelmezi a környéken portyázó hétfejű sárkány ellen. A lovagok képességeik szerint három különböző létszámú csoportba sorolhatók. Legtöbben azok vannak, akik a sárkánnyal vívott harc során a sárkány mind a hét fejét levágják. Legkevesebben azok vannak, akik csak egy fejét tudják levágni a sárkánynak, illetve vannak olyanok, akik pontosan négy fejet vágnak le egy összecsapás során. Tudjuk, hogy az egyes csoportokba tartozó lovagok száma mindhárom esetben prímszám.

b) Adja meg az egyes csoportokba tartozó lovagok számát! b 5

M: Jelölje x a hét fejet, y a négy fejet és z pedig az egy fejet levágó lovagok számát.

Ekkor az $x + y + z = 16$ egyenletet kell megoldani, ahol x, y és z prímszám, valamint $x > y > z$. (1 pont)

Három különböző prímszám összege csak úgy lehet páros, ha közülük egy páros. Mivel az egyetlen páros prímszám a kettő, ami egyben a legkisebb prím is, $z = 2$. (1 pont)

Tehát a prímszámok körében az $x + y = 14$ egyenlet megoldásait kell keresnünk.

Mivel az eddigi megfontolásaink alapján $2 < y < 7$, csak az $y = 3$ és $y = 5$ értékek jöhetnek szóba:

$x + 3 = 14 \Rightarrow x = 11$ prím, (1 pont)

$x + 5 = 14 \Rightarrow x = 9$ nem prím. (1 pont)

A pontosan 7, 4 és 1 fejet levágó lovagok száma rendre **11, 3 és 2.** (1 pont)

Hetedhét ország királya elrendelte, hogy az egyik harcosnak meg kell vívnia a portyázó sárkánnyal, és ehhez első körben kijelölt nyolc lovagot. A kijelöltek között öt a sárkánynak pontosan 7 fejét, kettő a sárkánynak pontosan 4 fejét és egy a sárkánynak pontosan 1 fejét tudja levágni. A Tanács ezek közül véletlenszerűen kiválaszt egyet.

c) Határozza meg a véletlenszerűen kiválasztott lovag által levágott sárkányfejek számának a várható értékét! c 4

M: Táblázatba foglalva a 7, 4 és 1 fejet levágó lovagok kiválasztásának valószínűségét:

A harc során levágott sárkányfejek száma	7	4	1
A lovag kiválasztásának valószínűsége	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

(2 pont)

A levágott sárkányfejek számának a várható értéke:

$$E = 7 \cdot \frac{5}{8} + 4 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{44}{8} = 5{,}5.$$ (2 pont)

Éjszakai őrségben egy lovag megfigyelt egy sárkányt, amelynek hét különböző feje volt. A sárkány minden feje egymástól függetlenül hét különböző színű lángot tudott kifújni (de egy fej egyszerre csak egyszínű lángot fújt).

d) Hányféleképpen jöhetett láng a hétfejű sárkány fejeiből, ha látott lángot a lovag, de nem feltétlen jött láng minden fejből? d 3

M: Egy fej nyolcféle módon viselkedhet: vagy hétféle láng jöhet a szájából, vagy nem jön ki belőle tűz.

A hét fej esetében ez $8^7 = 2\,097\,152$ lehetőség. (2 pont)

Azt az 1 esetet nem kell számolnunk, amikor egyik fej sem lövell ki lángot, ezért a lovag az eseményt **2 097 151-féleképpen** láthatta. (1 pont) ö 17

17 Vivien megkapta az első ötösét az iskolában. Nagymamája nagyon megörült, és azt mondta, ad neki ezért 5 forintot. Miután ezt az unoka kevesellte, azzal vigasztalta, hogy minden további ötösért kétszer annyi pénzt ad, mint az előzőért. Az év során Vivien összesen 25 db ötöst kapott.

a) Ha a nagymama betartja az ígéretét, összesen hány forintot kellene kapnia Viviennek ebben a tanévben? a 4

M: Az ötösökért járó összegek mértani sorozatot alkotnak. Első tagja 5, hányadosa 2. Az első 25 tag összegét kérdezi a feladat: (2 pont)

$$S_{25} = 5 \cdot \frac{2^{25} - 1}{2 - 1} = 167\,772\,155.$$ (1 pont)

Tehát a nagymamának **167 772 155 forintot** kellene adnia ebben az évben Viviennek. (1 pont)

Az év végi bizonyítványban a magyar, történelem, matematika, angol és földrajz tárgyakból Vivien átlaga 4,2 lett.

b) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! b 5

A) A jegyek között biztosan van 5-ös.

B) A jegyek mediánja 3-as.

M: Az év végi érdemjegyek összege $5 \cdot 4{,}2 = 21$. (1 pont)

Az *A* állítás **igaz.** Ha nem lenne 5-ös a jegyek között, akkor minden jegy legfeljebb 4-es, aminek az összege legfeljebb 20, ami nem lehet. (2 pont)

A *B* állítás **hamis.** Ha a medián 3-as, akkor nagyság szerint nem csökkenő sorrendben tekintve a jegyeket, az első három jegy legfeljebb 3-as, amelyek összege nem több, mint 9. Mivel a jegyek összegének 21-nek kell lennie, a fennmaradó két jegy összegének legalább 12-nek kellene lennie, ami nem lehet. (2 pont)

Vivien osztálya a tavaszi kirándulásra cseresznyét vásárolt 4320 forintért. Ha olyat vásároltak volna, amelyből egy kilogramm 60 forinttal kevesebbe kerül, akkor 1 kg-mal több cseresznyét vehettek volna.

c) Hány kilogramm cseresznyét vett az osztály? c 8

M: I. megoldás

Jelölje x azt, hogy hány kilogramm cseresznyét vásároltak.

A vásárolt cseresznyéből 1 kg ára: $\frac{4320}{x}$.

Az olcsóbb cseresznye ára: $\frac{4320}{x+1}$. (1 pont)

A feladat szövege alapján:

$$\frac{4320}{x} - 60 = \frac{4320}{x+1}. \quad \text{(2 pont)}$$

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $x(x+1)$-gyel ($x \neq 0, x \neq -1$):

$$4320(x+1) - 60x(x+1) = 4320x,$$

$$0 = 60x^2 + 60x - 4320.$$

Az egyenlet mindkét oldalát 60-nal osztva: $0 = x^2 + x - 72$. (2 pont)

A megoldások: $x_1 = 8$ és $x_2 = -9$.

Az x nem lehet negatív a szöveg értelmében. (2 pont)

Az osztály **8 kg** cseresznyét vett, és ez megfelel a feladat feltételeinek. (1 pont)

II. megoldás

Ha az osztály x kg cseresznyét vásárolt kilogrammonként y forintért, akkor felírható:

$$\left.\begin{aligned} xy &= 4320 \\ (x+1)(y-60) &= 4320 \end{aligned}\right\}. \quad \text{(2 pont)}$$

Az első egyenletből fejezzük ki y-t, majd írjuk be a második egyenletbe:

$$(x+1)\left(\frac{4320}{x}-60\right)=4320. \qquad \text{(1 pont)}$$

Bontsuk fel a zárójelet, majd szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát x-szel, és redukáljuk 0-ra az egyenletet:

$$4320-60x+\frac{4320}{x}-60=4320,$$

$$-60x^2-60x+4320=0.$$

Az egyenlet mindkét oldalát -60-nal osztva:

$$x^2+x-72=0. \qquad \text{(2 pont)}$$

A megoldások: $x_1=8$ és $x_2=-9$.

Az x nem lehet negatív a szöveg értelmében. (2 pont)

Az osztály **8 kg** cseresznyét vett, és ez megfelel a feladat feltételeinek. (1 pont) ö 17

18 Adél az egyéves születésnapjára különböző színű és méretű labdákat kapott, amelyek egy játék dinoszaurusz hasában vannak elrejtve. Van köztük rózsaszín, zöld, kék és sárga, és minden színből kétféle méretű van, kicsi és nagy. Az azonos színű és méretű labdákból pontosan öt darab van.

a) A labdákból véletlenszerűen kettőt húzva mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a kettő rózsaszín? a 4

M: A labdák száma $4\cdot 2\cdot 5=40$, mivel 4 szín van, két méret, és minden fajtából 5 darab van. (1 pont)

Az összes esetek száma: $\binom{40}{2}$. (1 pont)

A rózsaszín labdák száma 10, tehát a kedvező esetek száma: $\binom{10}{2}$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy két labdát kiválasztva mind a kettő rózsaszín:

$$p=\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}=\frac{\binom{10}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{3}{52}\approx 0{,}0577. \qquad \text{(1 pont)}$$

Adél 5 labdával játszott tegnap: egy nagy és egy kis sárga, egy nagy és egy kis rózsaszín, valamint egy kis zöld labdával, amelyeket egy fekete és egy fehér dobozba rakott.

b) Hányféleképpen tehette ezt meg Adél, ha mind a két dobozban kell lennie nagy labdának, és egyik dobozban sem lehet csak sárga labda? b 6

M: *Jelölések:* S nagy sárga, R nagy rózsaszín, s kis sárga, r kis rózsaszín, z kis zöld.

Vizsgáljuk meg, hányféleképpen tehetjük a labdákat a fekete dobozba!

Mivel a nagy labdákat úgy kell elhelyezni, hogy az egyik a fekete, a másik a fehér dobozba kerül, a feketébe vagy *S*-t, vagy *R*-t tesszük bele, ez 2 lehetőség. (1 pont)

Ezek mellé a háromféle kis labdát $2^3 = 8$-féleképpen rakhatjuk a fekete dobozba. (Mindegyiket vagy beletesszük, vagy nem.) (2 pont)

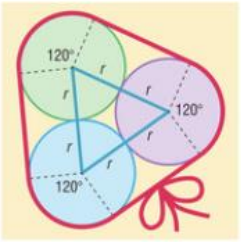
A fekete dobozba tehát $2 \cdot 8 = 16$-féleképpen tehetjük bele a labdákat (a kimaradók a fehér dobozba kerülnek). (1 pont)

Vegyük figyelembe a másik feltételt is: egyik dobozba se kerülhet csak sárga labda.

A 16 esetből két olyan eset van, amikor a fekete dobozba kerül csak sárga színű labda: *S*, *Ss*, és azon esetek szám is kettő, amikor a fehér dobozba kerül csak sárga színű labda.

Tehát $16 - 4 =$ **12-féleképpen** tehetjük a feltételeknek megfelelően a labdákat a két dobozba. (2 pont)

Adél az ábrán látható módon három kis labdát egymás mellé helyezett. Anyukája a labdákat egy 70 cm hosszú szalaggal egymáshoz rögzítette úgy, hogy még egy kis masnit is kötött a szalagból.



c 7

c) Mekkora egy labda sugara, ha a masni megkötéséhez 25 cm hosszú szalag szükséges? (Válaszát centiméterben mérve két tizedesjegy pontossággal adja meg!)

M: Ha a labdák sugara *r*, akkor a három labda középpontjai egy $2r$ oldalhosszúságú szabályos háromszöget határoznak meg. (2 pont)

A labdákat határoló három piros körív egy-egy *r* sugarú 120°-os középponti szöggel rendelkező körív, ezek mindegyikének hossza:

$$2r\pi \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = 2r\pi \cdot \frac{1}{3}.$$ (2 pont)

Mivel az ábrán látható piros vonal hossza masni nélkül $70 - 25 = 45$ cm, felírható:

$$3\left(2r + 2r\pi \cdot \frac{1}{3}\right) = 45,$$
$$6r + 2r\pi = 45,$$
$$r(6 + 2\pi) = 45,$$
$$r = \frac{45}{6 + 2\pi} \approx 3{,}66.$$ (2 pont)

A kis labdák sugara **3,66 cm,** és ez megfelel a feladat feltételeinek. (1 pont)

ö 17

TARTALOMJEGYZÉK

Feladatok

1. feladatsor 6
2. feladatsor 12
3. feladatsor 18
4. feladatsor 24
5. feladatsor 30
6. feladatsor 36
7. feladatsor 42
8. feladatsor 48
9. feladatsor 54
10. feladatsor 60
11. feladatsor 66
12. feladatsor 72

Megoldások

1. feladatsor 80
2. feladatsor 90
3. feladatsor 99
4. feladatsor 107
5. feladatsor 115
6. feladatsor 125
7. feladatsor 135
8. feladatsor 148
9. feladatsor 160
10. feladatsor 173
11. feladatsor 185
12. feladatsor 195

Kiadja a Mozaik Kiadó • 6701 Szeged, Pf. 301, Telefon: (62) 470-101, (62) 554-660
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Aggod István
Terjedelem: 19,76 (A/5) ív • 2023. augusztus • Raktári szám: MS-3166U