Sokszínű matematika

# Az analízis elemei
## FELADATGYŰJTEMÉNY




Sokszínű matematika

Kovács István
Trembeczki Csaba

sokszínű

# Matematika

## FELADATGYŰJTEMÉNY

## Az analízis elemei

## 11–12

EMELT SZINT

Kilencedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2023

*A könyvet írta:* Kovács István · *középiskolai tanár*
Trembeczki Csaba · *középiskolai tanár*

*Lektorálta:* Kovácsné Németh Sarolta · *középiskolai tanár*
Kunovszki István · *középiskolai tanár*

*Felelős szerkesztő:* Tóth Katalin
*Borítóterv, tipográfia:* Reményfy Tamás
*Ábrák:* Becsei György, Horváth Péter
*Fotók:* Mozaik Archívum, képügynökségek
*Műszaki szerkesztő:* Becsei György, Horváth Péter

KERETTANTERV:
OM Kerettanterv 17/2004 (V. 20.) OM rendelet 3. sz. melléklet

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, ill. rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más hordozó) nem sokszorosítható.

*ISBN* 978 963 697 683 5

*Copyright:* Mozaik Kiadó – Szeged, 2011

## Tisztelt Olvasó!

Feladatgyűjtemény-sorozatunk egyedülálló a középiskolai matematika feladatgyűjtemények között. A könyvek felépítése pontosan követi a *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád köteteinek szerkezetét, így akik ezekből a tankönyvekből tanulnak, közvetlenül alkalmazhatják az órai munka és az önálló gyakorlás, sőt az érettségi felkészülés során is.

A feladatok nagy számának és változatosságának köszönhetően a tanulók bőségesen találnak a maguk számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a tankönyveket és a feladatgyűjteményt együtt használva kellő jártasságot szerezhetnek a feladatmegoldásban.

Az egyes fejezetek végén található *Vegyes feladatok* áttekintést adnak az adott fejezet anyagából, ezért jól segíthetik az átfogóbb számonkérés előtti felkészülést.

### A feladatok nehézségének jelölése

Minden fejezetben három különböző szintre bontva találjuk a feladatokat:

6028 **Gyakorló feladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

6135 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

6204 **Kiegészítő feladatok:** az érettségi szintjét meghaladó feladatok. *(lila színű feladatsorszám)*

### A feladatok sorszámozása

Könyvünk a *Sokszínű matematika 9–12. feladatgyűjtemények* sorozatának befejező tagja. A sorozathoz illeszkedik a feladatok számozása is, amely ebben a kötetben a 6001-es sorszámmal kezdődik.

### Megoldások

A feladatgyűjtemény minden feladat megoldását tartalmazza. A gyakorló feladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

*A szerzők*

# TARTALOMJEGYZÉK – FELADATOK




## Sorozatok (6001–6032)

A sorozat fogalma ..... 10
A sorozatok tulajdonságai I. Korlátosság és monotonitás ..... 10
A sorozatok tulajdonságai II. A határérték fogalma ..... 11
A sorozatok tulajdonságai III. Konvergens sorozatok tulajdonságai ..... 11
Nevezetes sorozatok határértékei I. ..... 12
Nevezetes sorozatok határértékei II. Műveletek konvergens sorozatokkal ..... 12
Vegyes feladatok ..... 13

## Függvények tulajdonságai (6033–6060)

Függvények, érdekes függvények, ábrázolásuk és alapvető tulajdonságaik ..... 14
Függvények határértéke ..... 15
Függvény folytonossága ..... 17
Vegyes feladatok ..... 18



## Differenciálszámítás (6061–6122)

A differenciálhányados fogalma ..... 19
Műveletek differenciálható függvényekkel ..... 21
Néhány konkrét függvény deriváltfüggvénye ..... 23
Miről informál a differenciálhányados? ..... 23
Szélsőérték-feladatok ..... 25
Derivált deriváltja. Miről informál a második derivált? ..... 26
Differenciálható függvények vizsgálata ..... 27
Vegyes feladatok ..... 28

## Integrálszámítás (6123–6182)

Primitív függvény ..... 29
Függvénygörbe alatti terület meghatározása a kétoldali közelítés módszerével ..... 30
A Newton–Leibniz-tétel ..... 32
A határozott integrál alkalmazásai ..... 34
Improprius integrálok ..... 36
Vegyes feladatok ..... 37



## Valószínűség-számítás (6183–6224)

A valószínűség-számítás új megközelítése: valószínűségi változó ..... 38
Vegyes feladatok ..... 42



# TARTALOMJEGYZÉK – MEGOLDÁSOK

## *Sorozatok* (6001–6032)


A sorozat fogalma ..... 44
A sorozatok tulajdonságai I. Korlátosság és monotonitás ..... 44
A sorozatok tulajdonságai II. A határérték fogalma ..... 47
A sorozatok tulajdonságai III. Konvergens sorozatok tulajdonságai ..... 49
Nevezetes sorozatok határértékei I. ..... 50
Nevezetes sorozatok határértékei II. Műveletek konvergens sorozatokkal ..... 51
Vegyes feladatok ..... 54





## *Függvények tulajdonságai* (6033–6060)


Függvények, érdekes függvények, ábrázolásuk és alapvető tulajdonságaik ..... 56
Függvények határértéke ..... 68
Függvény folytonossága ..... 72
Vegyes feladatok ..... 75




## *Differenciálszámítás* (6061–6122)


A differenciálhányados fogalma ..... 77
Műveletek differenciálható függvényekkel ..... 83
Néhány konkrét függvény deriváltfüggvénye ..... 86
Miről informál a differenciálhányados? ..... 86
Szélsőérték-feladatok ..... 92
Derivált deriváltja. Miről informál a második derivált? ..... 96
Differenciálható függvények vizsgálata ..... 98
Vegyes feladatok ..... 104


## *Integrálszámítás* (6123–6182)


Primitív függvény ..... 106
Függvénygörbe alatti terület meghatározása a kétoldali közelítés módszerével ..... 112
A Newton–Leibniz-tétel ..... 118
A határozott integrál alkalmazásai ..... 123
Improprius integrálok ..... 131
Vegyes feladatok ..... 133




## *Valószínűség-számítás* (6183–6224)


A valószínűség-számítás új megközelítése: valószínűségi változó ..... 134
Vegyes feladatok ..... 142



## A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

| Jelölés | Magyarázat |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | a természetes számok halmaza |
| $\mathbb{Z}$ | az egész számok halmaza |
| $\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$ | a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza |
| $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$ | a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza |
| $\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$ | a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza |
| $\mathbb{R}$ | a valós számok halmaza |
| $\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$ | a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza |
| $a \in A$; $b \notin A$ | $a$ eleme az $A$ halmaznak; $b$ nem eleme az $A$ halmaznak |
| $A \subseteq B$ | $A$ halmaz részhalmaza $B$ halmaznak |
| $C \subset D$ | $C$ halmaz valódi részhalmaza $D$ halmaznak |
| $E \not\subset F$ | $E$ halmaz nem részhalmaza $F$ halmaznak |
| $A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$ | $A$ és $B$ halmaz uniója; $C$ és $D$ halmaz metszete; $E$ és $F$ halmaz különbsége |
| $\emptyset$, $\{\}$ | üres halmaz |
| $\overline{A}$ | az $A$ halmaz komplementere |
| $\lvert A \rvert$ | az $A$ halmaz elemszáma |
| $A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$ | ha $A$, akkor $B$; $C$ akkor és csak akkor, ha $D$ |
| $[a; b]$ | $a$, $b$ zárt intervallum |
| $[a; b[$ | $a$, $b$ balról zárt, jobbról nyitott intervallum |
| $]a; b]$ | $a$, $b$ balról nyitott, jobbról zárt intervallum |
| $]a; b[$ | $a$, $b$ nyitott intervallum |
| $n!$ | $n$ faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ |
| $f: x \mapsto$ | az $f$ függvény hozzárendelési szabálya |
| $f(x_0)$ | az $f$ függvény helyettesítési értéke az $x_0$ helyen |
| $\lvert x \rvert$ | az $x$ szám abszolút értéke |
| $[x]$ | az $x$ szám egészrésze |
| $\{x\}$ | az $x$ szám törtrésze |
| $\sqrt{x}$ | az $x$ szám négyzetgyöke |
| $\sqrt[n]{x}$ | az $x$ szám $n$-edik gyöke |
| $a \mid b$ | az $a$ szám osztója a $b$ számnak |
| $(a, b)$ | az $a$ és $b$ szám legnagyobb közös osztója |
| $[a, b]$ | az $a$ és $b$ szám legkisebb közös többszöröse |
| $\overrightarrow{AB}$ | az $A$ pontból $B$ pontba mutató vektor |
| $\vec{a}$, $\vec{0}$ | $a$ vektor, nullvektor |
| $\sphericalangle$ | szög |

# Feladatok




Sorozatok 10

Függvények tulajdonságai 14

Differenciálszámítás 19

Integrálszámítás 29

Valószínűségszámítás 38

# SOROZATOK

## A sorozat fogalma

**6001** Írjuk fel a következő sorozatok első négy tagját, és ábrázoljuk őket számegyenesen.

*a)* $a_n = 0{,}5n - 2$; *b)* $b_n = n^3 - 4n^2$; *c)* $c_n = |n^3 - 4n^2|$;

*d)* $d_n = 3 + (-1)^{n+1}$; *e)* $e_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$; *f)* $f_n = \cos(n\pi)$;

*g)* $g_n = \frac{n-5}{n+1}$.

**6002** Számítsuk ki a következő mértani sorozatokban a megjelölt tagokat.

*a)* $a_1 = 6$, $q = 1$; $a_4$ és $a_7$; *b)* $b_1 = 3$, $q = -1$; $b_2$ és $b_3$; *c)* $c_1 = -4$, $q = 2$; $c_6$ és $c_{11}$;

*d)* $d_4 = 27$, $q = 3$; $d_1$ és $d_5$; *e)* $e_1 = 1$, $e_4 = 8$; $e_2$ és $e_3$; *f)* $f_2 = 5$, $f_4 = 20$; $f_3$ és $f_5$.

## A sorozatok tulajdonságai I. Korlátosság és monotonitás

**6003** Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából.

*a)* $a_n = \frac{2}{3}n - 7$; *b)* $b_n = \frac{4}{7} - \frac{3n}{4}$; *c)* $c_n = \frac{4+3n}{7-4n}$;

*d)* $d_n = \frac{3n-5}{n^2+1}$; *e)* $e_n = 2 + \lg n$; *f)* $f_n = 2n^2 - 7n + 9$;

*g)* $g_n = \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 7} + \frac{2}{7\cdot 9} + \ldots + \frac{2}{(2n+1)\cdot(2n+3)}$;

*h)* $h_n = \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1) + (-1)^{7n+2}\cdot(7n+2)}{8n+3}$.

**6004** Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = \log_2 n$ sorozat felülről nem korlátos.

**6005** Létezik-e közös része az egyes intervallum-sorozatoknak? Melyek egymásba ágyazottak?

*a)* $I_n = \left[2 - \frac{1}{2^n}; 3 + \frac{1}{3^n}\right]$; *b)* $J_n = [n; n+2]$; *c)* $K_n = \left[1 + \frac{1}{n}; 2 + \frac{2}{n}\right]$;

*d)* $L_n = \left[2 + \frac{1}{n}; 2 + \frac{2}{n}\right]$; *e)* $M_n = ]-n; n[$; *f)* $N_n = \left]10 - \frac{1}{n}; 10 + \frac{1}{n}\right[$;

*g)* $O_n = \left]10; 10 + \frac{1}{n}\right]$; *h)* $P_n = \left[10; 10 + \frac{1}{n}\right[$.

**6006** Döntsük el, hogy a következő sorozatok monoton növők vagy csökkenők.

*a)* $a_n = \frac{(n+5)!}{5^n}$; *b)* $b_n = \frac{n^5}{5^n}$; *c)* $c_n = \frac{(n+3)!}{(n-1)!}$.

**6007** Keressünk olyan természetes számokból álló növekvő sorozatot, amelyben bármely két egymás után következő tag összege egyenlő a különbségük négyzetével.

## A sorozatok tulajdonságai II. A határérték fogalma

**6008** Adjuk meg a következő környezeteket intervallumként, az intervallumokat pedig környezetként (azaz $P$ középpontjával és $\varepsilon$ sugarával).

*a)* $P=6,\ \varepsilon=2$; *b)* $P=-1,\ \varepsilon=1$; *c)* $P=2{,}3,\ \varepsilon=3{,}2$;

*d)* $P=\sqrt{5},\ \varepsilon=1+\sqrt{5}$; *e)* $I=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2<x<4{,}6\}$; *f)* $J=\left]3{,}7;\,5{,}3\right[$;

*g)* $K=\left]-1{,}8;\,3{,}6\right[$; *h)* $L=\left]-5;\,-2{,}7\right[$.

**6009** Adjunk példát olyan nem monoton sorozatra, amelynek a határértéke 10.

**6010** Adjunk $\varepsilon$-hoz küszöbszámot, ha tudjuk, hogy $\{a_n\}\to A$:

*a)* $a_n=\dfrac{n-3}{n+2},\ A=1,\ \varepsilon=0{,}1$; *b)* $a_n=\dfrac{5n^2+20}{n^2-100},\ A=5,\ \varepsilon=0{,}01$;

*c)* $a_n=\sqrt[2n]{7},\ A=1,\ \varepsilon=3\cdot10^{-3}$.

**6011** Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét. Adjuk meg az $\varepsilon=10^{-3}$ értékhez tartozó küszöbszámokat.

*a)* $a_n=\dfrac{7}{2n+3}$; *b)* $b_n=\dfrac{5n-3}{4n+1}$; *c)* $c_n=\dfrac{5-3n}{7n-2}$;

*d)* $d_n=\dfrac{n-11}{n^2+4n+3}$; *e)* $e_n=\dfrac{n^2-4n+3}{n^2-n-2}$.

**6012** Adjuk meg a következő sorozatok határértékét. Tetszőleges $\varepsilon$-hoz határozzuk meg a küszöbszámokat.

*a)* $\left\{\dfrac{2010}{3n+1}\right\}$; *b)* $\left\{\dfrac{11n+5}{7n-3}\right\}$; *c)* $\left\{\dfrac{n^2-n+5}{3n^2+2n+3}\right\}$.

**6013** Bizonyítsuk be, hogy a következő sorozatoknak nincs határértéke.

*a)* $a_n=\cos\dfrac{n\pi}{11}$; *b)* $b_n=\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)+(-1)^{7n+2}\cdot(7n+2)}{8n+3}$.

**6014** Adjunk meg olyan sorozatot, amelynek elemei között az összes pozitív egész szám reciproka előfordul, más számok nem szerepelnek benne, és a sorozatnak nincs határértéke.

## A sorozatok tulajdonságai III. Konvergens sorozatok tulajdonságai

**6015** Vizsgáljuk meg, melyik sorozat korlátos, monoton, konvergens. Adjuk meg határaikat is.

*a)* $a_n=\dfrac{2n-6}{n}$; *b)* $b_n=\dfrac{n+20}{n-100}$; *c)* $c_n=0{,}2^n$; *d)* $d_n=\sqrt[n]{0{,}9}$;

*e)* $e_n=\cos\left(n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$; *f)* $f_n=(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n^2}$; *g)* $g_n=(-1)^n\cdot n^2$.

## Nevezetes sorozatok határértékei I.

**6016** Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő végtelen szakaszos tizedes törteket.

*a)* $1,\dot{4}$; *b)* $2,1\dot{4}$; *c)* $3,2\dot{1}\dot{4}$; *d)* $4,3\dot{2}1\dot{4}$.

**6017** Adjuk meg tört alakban az $52,26\dot{1}56\dot{5}$ végtelen szakaszos tizedes törtet.

**6018** Igazoljuk, hogy $3,99999\ldots = 4$ (a végtelen sok tizedesjegy mindegyike 9).

**6019** Képzeljük el a következő alakzatot! Induljunk ki egy négyzetből, harmadoljuk minden oldalát, és a középső harmadokra kifelé rajzoljunk újabb négyzeteket. Az így létrejött külső határoló szakaszokat ismét harmadoljuk, majd a középső harmadokra kifelé rajzoljunk négyzeteket – és így tovább, folytassuk a végtelenségig az eljárást. Mekkora a végül kialakuló alakzat területe? Mekkora a kerülete?

## Nevezetes sorozatok határértékei II. Műveletek konvergens sorozatokkal

**6020** Határozzuk meg a következő határértékeket:

*a)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n+3}{11n-7}$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-5n}{9n-22}$; *c)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7}{2n^2-5n}$;

*d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{13n^2-4n+1}{7n+100}$; *e)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{245n+312}{n^2-4n-1}$; *f)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^2+5n+4}{3n^2-7n+11}$;

*g)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^3+1)^2}{1+n^6}$; *h)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+5+9+\ldots+(4n-3)}{13n^2}$;

*i)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

**6021** Határozzuk meg a következő határértékeket:

*a)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n+10}-\sqrt{3n}\right)$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2-6}-2n\right)$; *c)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n+2}\right)$;

*d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

**6022** Határozzuk meg a következő határértékeket:

*a)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{1}{8n+1}}$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+2}{n^2+5}}$; *c)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n+5}}{1+\sqrt{9n+1}}$;

*d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{25n^2+1}}$.

**6023** Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

*a)* $\left\{\sqrt[n]{10^n+324}\right\}$; *b)* $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{9}-1}{\sqrt[n]{3}-1}\right\}$; *c)* $\left\{\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-4}\right\}$;

*d)* $\left\{\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right\}$; *e)* $\left\{\dfrac{n^{2010}}{2^n}\right\}$; *f)* $\left\{\dfrac{10^{100n}}{n!}\right\}$.

**6024** Igazoljuk, hogy ha $\{a_n\}$ pozitív tagú sorozat és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

**6025** Bizonyítsuk be a definíció alapján, hogy a $\dfrac{n^2 - 8n - 28}{100n + 593} \to \infty$.

**6026** Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

*a)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n+3}\right)^n$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{5}{n}\right)^n$; *c)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{2n}$.

## Vegyes feladatok

**6027** Adjuk meg az intervallumot, ha ismert a környezet középpontja és sugara, illetve adjuk meg a környezet középpontját és sugarát, ha adott az intervallum.

*a)* $P = 3$; $\varepsilon = 2$; *b)* $P = -10$; $\varepsilon = 0{,}001$; *c)* $P = 8$; $\varepsilon = \dfrac{2}{7}$;

*d)* $]12{,}6;\ 13{,}2[$; *e)* $]-0{,}5;\ 1{,}8[$; *f)* $\left]\dfrac{6}{5};\ \dfrac{22}{7}\right[$.

**6028** Vizsgáljuk meg monotonitás és korlátosság szempontjából az alábbi sorozatokat:

*a)* $a_n = 5n + 1$; *b)* $b_n = \dfrac{12}{7n}$; *c)* $c_n = \operatorname{tg}\left((2n-1)\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**6029** Sejtsük meg a következő sorozatok határértékét. Igazoljuk úgy, hogy bármely $\varepsilon$-hoz küszöbszámot adunk meg.

*a)* $a_n = \dfrac{3n - 6}{n + 5}$; *b)* $b_n = \dfrac{n+2}{n^2 - 25}$.

**6030** Vizsgáljuk meg, melyik sorozat korlátos, monoton, konvergens. Adjuk meg határaikat is.

*a)* $a_n = \dfrac{6n + 10}{3n}$; *b)* $b_n = \dfrac{n - 5}{n + 10}$; *c)* $c_n = 0{,}99^n$; *d)* $d_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$.

**6031** Határozzuk meg a következő határértékeket:

*a)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12 - 7n}{14n - 35}$; *c)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n^{10}}$.

**6032** Egy egységnégyzet egyik oldalát harmadoljuk, és a középső harmad fölé *befelé* írt négyzetet távolítsuk el. Ezután az üres hely legbelső oldalát ismét harmadoljuk, majd írjunk a középső harmad fölé *kifelé* négyzetet. Ezt folytassuk, váltakozva a befelé írt négyzet kivágásával és a kifelé írt négyzet hozzáadásával. Mennyi a keletkezett alakzat területe?

# FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

## Függvények, érdekes függvények, ábrázolásuk és alapvető tulajdonságaik

Az alábbi feladatokban $p$ periódus alatt a lehető legkisebb pozitív $p$-t, az ún. alapperiódust értjük.

**6033** Adjunk meg olyan függvényt, amely az értelmezési tartományán

*a)* páros és nem páratlan; *b)* páratlan és nem páros;

*c)* nem páros és nem páratlan; *d)* páros és páratlan.

**6034** Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvény értelmezési tartományának metszetén értelmezett $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ szorzatfüggvény

*a)* páros, ha mindkettő páros vagy mindkettő páratlan;

*b)* páratlan, ha egyik páros, másik páratlan;

*c)* $p$ szerint periodikus, ha mindkét függvény $p$ szerint periodikus.

*d)* Igaz-e a fenti állítások megfordítása? Adjunk ellenpéldát, ha nem.

*e)* Tegyük fel, hogy $f(x)$ $p$ szerint periodikus, és $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ is az. Igaz-e, hogy ekkor $g(x)$ is $p$ szerint periodikus? Mivel kell kiegészítenünk a feltételeket, hogy igaz legyen az állítás?

**6035** Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét. Vizsgáljuk meg tulajdonságaikat (monotonitás, korlátosság, szélsőérték, periodikusság). Amennyiben lehetséges, vázoljuk a függvénygörbéket koordináta-rendszerben.

*a)* $a(x) = x + 2 \cdot |x|$; *b)* $b(x) = 2x + |x|$; *c)* $c(x) = x^2 - 2x - 3$;

*d)* $d(x) = |-2x^2 + 16x - 30|$; *e)* $e(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 \cdot |x|$; *f)* $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;

*g)* $g(x) = \sqrt{|x|}$; *h)* $h(x) = \sqrt{|x|} \cdot \operatorname{sgn} x$; *i)* $i(x) = -\sqrt{3 - x}$;

*j)* $j(x) = \sqrt{9 - x^2}$; *k)* $k(x) = \frac{2}{x - 1} + 1$; *l)* $l(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$;

*m)* $m(x) = \sin 2x$; *n)* $n(x) = 2\cos(x + \pi)$; *o)* $o(x) = \big|\lg |x|\big|$;

*p)* $p(x) = \lg(\sin x)$; *q)* $q(x) = 2^{\cos x}$; *r)* $r(x) = 2^{-|x|}$;

*s)* $s(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in ]2k; 2k+1], \ k \in \mathbb{Z}, \\ 2, & \text{ha } x \in ]2k+1; 2k+2], \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

**6036** Állapítsuk meg, párosak vagy páratlanok az alábbi függvények. Vázoljuk grafikonjaikat.

*a)* $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a(x) = -\frac{1}{2}x^2$; *b)* $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b(x) = \frac{1}{3}x^3$;

*c)* $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c(x) = |x - 1| + |x + 1|$; *d)* $d\colon [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $d(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$;

*e)* $e\colon [-2; 1] \to \mathbb{R}$, $e(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$; *f)* $f\colon [-2; 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$;

*g)* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot \sin x$; *h)* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x \cdot \cos x$;

*i)* $i\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $i(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.

**6037** Állapítsuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, értékkészletét és szélsőértékeit. Van-e a függvények között alulról, felülről korlátos? Ha igen, melyik? Vázoljuk a görbéket.

*a)* $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$; *b)* $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

*c)* $h(x) = x^n + \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{Z})$; *d)* $i(x) = x + \dfrac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$.

**6038** Határozzuk meg az alábbi függvények periódusát:

*a)* $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{2}x\right)$; *b)* $g(x) = \sin 3x$;

*c)* $h(x) = \{x\} + \{2x\}$; *d)* $i(x) = \sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{3}$;

*e)* $j(x) = \sin\dfrac{x}{a} + \cos\dfrac{x}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Q}^+)$.

**6039** Vizsgáljuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, tulajdonságait, és vázoljuk a függvények grafikonját.

*a)* $a(x) = [x]^2$; *b)* $b(x) = \{x\}^2$; *c)* $c(x) = [x^2]$; *d)* $d(x) = \{x^2\}$;

*e)* $e(x) = x \cdot [x]$; *f)* $f(x) = [x] \cdot \{x\}$; *g)* $g(x) = x \cdot \{x\}$.

**6040** Adjuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, periódusát, és vázoljuk a függvények grafikonját.

*a)* $f(x) = [\sin x]$; *b)* $g(x) = \{\sin x\}$; *c)* $h(x) = \{2\sin x\}$.

**6041** Korlátosak-e az alábbi függvények? Ha igen, adjunk meg alsó, felső korlátokat. Határozzuk meg szélsőértékeik helyét és értékét is.

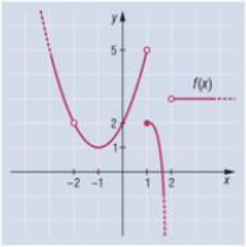
*a)* $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$; *b)* $g(x) = a\sin x + b\cos x$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

**6042** Periodikusak-e az alábbi függvények? Amelyik az, annak állapítsuk meg a periódusát. Bizonyítsuk is állításunkat.

*a)* $f(x) = \sin\{x\}$; *b)* $g(x) = \sin[x]$; *c)* $h(x) = \{x\} + \sin x$.

## Függvények határértéke

**6043** Határozzuk meg az ábrán vázolt $f(x)$ függvény határértékeit az $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ és $x_4 = 2$ véges pontokban, illetve $+\infty$-ben és $-\infty$-ben. (A szaggatottal jelölt részek után a függvény menete már nem változik.)



**6044** Határozzuk meg a következő függvények határértékét a megadott véges pontban.

*a)* $\lim\limits_{x\to 3}(3x-2)$; *b)* $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-5x+2)$; *c)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-2}$; *d)* $\lim\limits_{x\to -5}\operatorname{sgn} x$;

*e)* $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4}$; *f)* $\lim\limits_{x\to \pi}\sin x$.

**6045** Határozzuk meg a következő függvények határértékét a megadott „töréspontban".

*a)* $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{ha} \quad x\geq 2,\\ 3, & \text{ha} \quad x<2;\end{cases}$ $x_0=2$; *b)* $g(x)=\begin{cases}x^2+3, & \text{ha} \quad x\geq 1,\\ 2x+2, & \text{ha} \quad x<1;\end{cases}$ $x_0=1$.

**6046** Határozzuk meg a függvények határértékét az értelmezési tartományukon kívüli pontban.

*a)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x}{x}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+3x^3+x}{x^3+x^2-2x}$; *c)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$; *d)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$;

*e)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; *f)* $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+7x+12}$; *g)* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

**6047** Vizsgáljuk meg az alábbi függvények jobb és bal oldali határértékét a kérdéses pontban.

*a)* $a(x)=\operatorname{sgn} x$; $x_0=0$; *b)* $b(x)=\begin{cases}x^2, & \text{ha} \quad x\leq 1,\\ x+1, & \text{ha} \quad x>1;\end{cases}$ $x_0=1$;

*c)* $c(x)=\begin{cases}\lg x, & \text{ha} \quad x>0,\\ x^2, & \text{ha} \quad x\leq 0;\end{cases}$ $x_0=0$; *d)* $d(x)=\dfrac{1}{x-2}$; $x_0=2$;

*e)* $e(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $x_0=-1$; *f)* $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$; $x_0=1$.

**6048** A $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ nevezetes határérték segítségével adjuk meg az alábbi függvények adott pontbeli határértékét.

*a)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; *b)* $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$; *c)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$;

*d)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{2x}$; *e)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; *f)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;

*g)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$; *h)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$; *i)* $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

**6049** Határozzuk meg a következő függvények végtelenben vett határértékét.

*a)* $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+1}{x-100}$; *b)* $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+500x}{x^2-10^7}$; *c)* $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2-10}}{x+1}$;

*d)* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$; *e)* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}\right)$; *f)* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{x+1}-x\right)$;

*g)* $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|\sin x|}{x}$.




## Függvény folytonossága

**6050** Igazoljuk a folytonosság Heine-féle definíciójával, hogy az alábbi függvények az $x_0 = 2$ pontban folytonosak:

*a)* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 3x + 1$;

*b)* $g\colon \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$.

**6051** Igazoljuk a Cauchy-féle definícióval, hogy a függvények folytonosak az $x_0 = 4$ pontban.

*a)* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5x + 2$;

*b)* $g\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}$.

**6052** Igazoljuk jobb és bal oldali függvényhatárérték segítségével, hogy folytonosak a valós számokon értelmezett függvények a jelzett pontban:

*a)* $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x < 1, \\ (x-2)^2, & \text{ha } x \geq 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

*b)* $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x^2-4}, & \text{ha } x \notin \{2; -2\}, \\ \dfrac{1}{|x|}, & \text{ha } x \in \{2; -2\}, \end{cases}$ $x_0 = -2$.

**6053** Bizonyítsuk be, hogy a 6052. feladat *b)* részében szereplő függvény az $x_0 = 2$ helyen nem folytonos.

**6054** Igazoljuk, hogy a következő függvények az $x_0 = 0$ pontban nem folytonosak:

*a)* $f(x) = (x-1)^2 \cdot \operatorname{sgn} x$;

*b)* $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

*c)* $h(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

**6055** Mely pontokban folytonosak a következő függvények?

*a)* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \\ 3, & \text{ha } x \in \mathbb{Z}; \end{cases}$

*b)* $g(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus\left\{k \cdot \dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha } x \in \left\{k \cdot \dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{cases}$

**6056** Adjuk meg úgy a paraméter(ek) értékét, hogy a függvény mindenütt folytonos legyen.

*a)* $f(x) = \begin{cases} -(x^2+4x+1), & \text{ha } x < -1, \\ 2x + b, & \text{ha } x \geq -1; \end{cases}$

*b)* $g(x) = \begin{cases} -(x^2+4x+1), & \text{ha } x < -1, \\ x^2 + ax + b, & \text{ha } x \geq -1; \end{cases}$

*c)* $h(x) = \begin{cases} -(x^2+4x+1), & \text{ha } x < -1, \\ x^2 + ax + b, & \text{ha } -1 \leq x \leq 2, \\ -x^2 + 6x - 3, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$

## Vegyes feladatok

**6057** Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét. Vizsgáljuk meg tulajdonságaikat (monotonitás, korlátosság, szélsőérték, paritás, periodikusság). Vázoljuk a függvénygörbéket koordináta-rendszerben.

*a)* $f(x) = -(x+2)^2 + 1$;

*b)* $g(x) = \sqrt{x+4}$;

*c)* $h(x) = -\cos 2x$.

**6058** Határozzuk meg a következő határértékeket:

*a)* $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 1)$;

*b)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 - 2x^3}{x^2}$;

*c)* $\lim\limits_{x \to 0} (x+1) \cdot \operatorname{sgn} x$;

*d)* $\lim\limits_{x \to 0} \begin{cases} x^{-1}, & \text{ha} \quad x > 0, \\ 1, & \text{ha} \quad x < 0; \end{cases}$

*e)* $\lim\limits_{x \to -\pi} \dfrac{\sin 3(x+\pi)}{2(x+\pi)}$.

**6059** Vizsgáljuk meg, hogy folytonosak-e az alábbi függvények a megadott pontban:

*a)* $f(x) = 3x^4 + 4x^2 - 6x + 2, \quad x_0 = 1$;

*b)* $g(x) = \dfrac{2}{x-3} + 1, \quad x_0 = 2$;

*c)* $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x}, \quad x_0 = -1$.

**6060** Adjuk meg $b$ paraméter értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen az $x_0 = b$ és $x_1 = -b$ helyeken.

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sgn}(x), & \text{ha} \quad |x| < b, \\ 3, & \text{különben.} \end{cases}$$

# DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

## A differenciálhányados fogalma

### Szelő, érintő

**6061** Határozzuk meg az alábbi függvények megadott pontokon átmenő szelőinek meredekségét.

*a)* $f(x) = x^2 - 1$; $x_1 = -1$, $x_2 = 3$;

*b)* $g(x) = \sqrt{x+1}$; $x_1 = 0$, $x_2 = 3$;

*c)* $h(x) = \cos x + 2$; $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$;

*d)* $i(x) = 2^{-x}$; $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

**6062** Adjuk meg az alábbi függvények megadott pontokon átmenő szelőinek egyenletét.

*a)* $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$;

*b)* $g(x) = \frac{1}{x}$; $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$;

*c)* $h(x) = \operatorname{tg} x$; $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$;

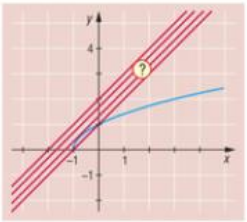
*d)* $i(x) = \log_3(x-2) + 1$; $x_1 = 5$, $x_2 = 7$.

**6063** Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = 0{,}5(x-1)^2 + 2$ függvénynek érintője az $y = 2x - 2$ egyenes. Melyik pontban valósul meg az érintés?

**6064** Igazoljuk, hogy a $g(x) = \frac{1}{x-5} + 2$ függvényt érinti az $y = -x + 5$ egyenes. Melyik pontban valósul meg az érintés?

**6065** Határozzuk meg $b$ értékét úgy, hogy az $y = -2x + b$ egyenes érintse az $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ függvényt.

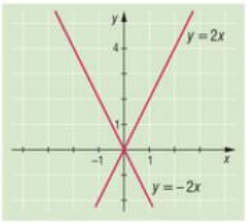
**6066** Adjuk meg $b$ értékét úgy, hogy az $y = x + b$ egyenes érintse a $g(x) = \sqrt{x+1}$ függvényt.




**6067** Határozzuk meg $m$ értékét úgy, hogy az $y = mx - 1$ egyenes érintője legyen az $f(x) = -x^2 + x - 2$ függvénynek. Ábrázoljuk is a függvényeket.

**6068** Számítsuk ki $m$ azon értékeit, melyekre az $y = mx + \frac{1}{2}$ egyenes érinti a $g(x) = -\sqrt{-x+1} + 2$ függvényt.

**6069** Tudjuk, hogy egy normál állású parabolát érintenek az $y = 2x$ és $y = -2x$ egyenesek. Adjuk meg az összes lehetséges, említett feltételeknek megfelelő parabola egyenletét.



**6070** Egy másodfokú függvénynek ismert három érintője:

(1) $y = -x - 0{,}5$; (2) $y = 2x - 8$; (3) $y = -3x - 0{,}5$.

Határozzuk meg a függvény explicit képletét!

### Differencia- és differenciálhányados

**6071** Írjuk fel a megadott $x_0$ pontban az alábbi függvény differenciahányadosát a lehető legegyszerűbb formában.

*a)* $x_0 = 7$; $f(x) = -2x + 1$;

*b)* $x_0 = 2$; $f(x) = 3x^2 - 5$;

*c)* $x_0 = -2$; $f(x) = \sqrt{x+3}$;

*d)* $x_0 = -5$; $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + 2$;

*e)* $x_0 = 0$; $f(x) = 2\operatorname{tg} x$.

**6072** Számítsuk ki az adott függvény adott $x_0$ pontbeli differenciálhányadosát.

*a)* $x_0 = -8$; $f(x) = 3x - 2$;

*b)* $x_0 = 1$; $f(x) = 6x^2 + 2x - 4$;

*c)* $x_0 = 3$; $f(x) = 2\sqrt{x}$;

*d)* $x_0 = -2$; $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3$;

*e)* $x_0 = 0$; $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

**6073** Írjuk fel az alábbi függvény adott pontbeli érintőjének egyenletét:

*a)* $f(x) = 2x^2 - x + 3$, $x_0 = 3$;

*b)* $g(x) = -(x+3)^2 + 3$, $x_0 = -1$;

*c)* $h(x) = \dfrac{2}{x} - 2$, $x_0 = 4$;

*d)* $i(x) = 3\sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

*e)* $j(x) = x^3 + x^2$, $x_0 = 1$.

**6074** Bizonyítsuk be, hogy egyik alábbi függvény sem differenciálható a megadott $x_0$ pontban. $\operatorname{Sgn} x$ az előjelfüggvény:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad x < 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0, \\ 1, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

*a)* $f(x) = \dfrac{x^3}{x}$; $x_0 = 0$;

*b)* $g(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$; $x_0 = -2$;

*c)* $h(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 1, & \text{ha} \quad x \le 2, \\ \sqrt{x-1} + 1, & \text{ha} \quad x > 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$;

*d)* $i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & \text{ha} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

*e)* $j(x) = x$, $D_j = ]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty[$; $x_0 = 0$.

**6075** Adjuk meg a differenciálhányados definíciója szerint a függvény deriváltfüggvényét az értelmezési tartományon. Ábrázoljuk a függvényt és deriváltját egy koordináta-rendszerben.

*a)* $f(x) = 2(x-1)^2 + 1$;

*b)* $g(x) = x^2 - 3x + 3$;

*c)* $h(x) = \dfrac{2}{x+2} + 2$;

*d)* $i(x) = \sqrt{x-1} + 1$.

## Műveletek differenciálható függvényekkel

**6076** A hatványfüggvény deriváltját és a függvények konstansszorosára, összegére, különbségére vonatkozó deriválási szabályokat alkalmazva határozzuk meg a következő függvények deriváltjait:

*a)* $a(x) = 2x - 1$;
*b)* $b(x) = -3x + 2$;
*c)* $c(x) = \sqrt{3}x$;
*d)* $d(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{2}$;
*e)* $e(x) = 2x^2 + 1$;
*f)* $f(x) = x^2 - 6x$;
*g)* $g(x) = -3x^2 + 7x + 9$;
*h)* $h(x) = \sqrt{7}x^2 - \frac{3}{5}x + \pi$;
*i)* $i(x) = 2x^3 - 3x^2$;
*j)* $j(x) = -x^3 + 3x - 2$;
*k)* $k(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$;
*l)* $l(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + x + 1$.

**6077** A hatványfüggvény deriváltját és a függvények konstansszorosára, összegére, különbségére vonatkozó deriválási szabályokat alkalmazva határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjait:

*a)* $a(x) = (2x)^3$;
*b)* $b(x) = 7x^{81} - 9x^{25}$;
*c)* $c(x) = \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4$;
*d)* $d(x) = 6x^7 + (7x)^2 + 8x^9 + (9x)^3$;
*e)* $e(x) = 5x^{2,4} + 2x^{1,9}$;
*f)* $f(x) = -10x^{0,8} + 3x^{0,4}$;
*g)* $g(x) = x^{\frac{5}{4}} + 6x^{\frac{2}{3}}$;
*h)* $h(x) = 3x^{\frac{1}{6}} - 4x^{\frac{7}{2}} + 2{,}5x^{\frac{2}{5}}$;
*i)* $i(x) = 4x^{-3} - 5x^{-2}$;
*j)* $j(x) = 5x^{-1,6} + 7x^{-\frac{4}{9}}$;
*k)* $k(x) = 6x^n$;
*l)* $l(x) = 2x^{n+5}$;
*m)* $m(x) = (6 + \sqrt{3})x^{6-\sqrt{3}}$;
*n)* $n(x) = \sqrt{2}x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

**6078** Írjuk át a függvényeket hatvány alakba (tört-, illetve negatív kitevővel), majd deriváljuk őket a konstansszorosra, összegre, különbségre vonatkozó szabályokat alkalmazva. A deriváltakat írjuk fel újra gyökös, illetve tört formában.

*a)* $a(x) = \sqrt{x} - 3$;
*b)* $b(x) = 5\sqrt{x}$;
*c)* $c(x) = 3\sqrt{7x}$;
*d)* $d(x) = 10 \cdot \sqrt[5]{x}$;
*e)* $e(x) = 2 \cdot \sqrt[4]{5x}$;
*f)* $f(x) = \frac{5}{3}x \cdot \sqrt{x^3}$;
*g)* $g(x) = \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^8} - \sqrt{x^7}$;
*h)* $h(x) = \sqrt[7]{\sqrt[5]{x^6}}$;
*i)* $i(x) = \frac{1}{x} + 5$;
*j)* $j(x) = \frac{5}{x}$;
*k)* $k(x) = \frac{2}{3x}$;
*l)* $l(x) = \frac{x+3}{x}$;
*m)* $m(x) = \frac{7}{x} + 5\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2x}\right)$;
*n)* $n(x) = \frac{1}{x^2}$;
*o)* $o(x) = -\frac{x^4 - 2}{x^3}$;
*p)* $p(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}$.

**6079** Deriváljuk az alábbi trigonometrikus függvényeket:

*a)* $a(x) = \sin x + 2$;
*b)* $b(x) = 3\cos x$;
*c)* $c(x) = \sin x + \cos x$;
*d)* $d(x) = 4\sin x - \cos x$;
*e)* $e(x) = -\sin x + 5\cos x$;
*f)* $f(x) = -\cos x - \pi \sin x$;
*g)* $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$;
*h)* $h(x) = 3\sin x + 4\cos x - \sqrt{2}\sin x$.

**6080** Deriváljuk a következő exponenciális és logaritmusfüggvényeket:

*a)* $a(x) = 3^x$;
*b)* $b(x) = 4 \cdot 5^x$;
*c)* $c(x) = 2^{3x}$;
*d)* $d(x) = 3e^x$;
*e)* $e(x) = 7^x - (3x)^4 + 2^{2x} - 4^{3x}$;
*f)* $f(x) = 4\ln x$;
*g)* $g(x) = \log_2 x$;
*h)* $h(x) = 5\lg x$;
*i)* $i(x) = 7\log_5 x$;
*j)* $j(x) = 6\ln x - 3\log_3 x$;
*k)* $k(x) = \frac{1}{2}\ln x$.

**6081** Felhasználva az alapderiváltakat, valamint a szorzásra és hányadosra vonatkozó szabályt, deriváljuk az alábbi függvényeket:

*a)* $a(x) = x^4 \cdot \sqrt[5]{x}$;
*b)* $b(x) = (x^3 + 2x)(x^7 - 3x^5 + 5x^2)$;
*c)* $c(x) = \frac{4x^5 + 5x^{3.6} - 2x^2}{5x^{10} - 3x^6 - 9x^2}$;
*d)* $d(x) = \frac{4x^2 + x^{0,6}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x^5}}$;
*e)* $e(x) = x^3 \cdot \sin x$;
*f)* $f(x) = \sin x \cdot \cos x$;
*g)* $g(x) = \operatorname{tg} x$;
*h)* $h(x) = \operatorname{ctg} x$;
*i)* $i(x) = x \cdot \ln x$;
*j)* $j(x) = \frac{\ln x}{x}$.

**6082** Felhasználva az alapderiváltakat és az összetett függvényre vonatkozó szabályt, deriváljuk az alábbi függvényeket:

*a)* $a(x) = (5x + 3)^2$;
*b)* $b(x) = 2(6 - 4x^2)^{-3}$;
*c)* $c(x) = (x^4 - 3x^2 + 5x)^{10}$;
*d)* $d(x) = \sqrt{3x + 1}$;
*e)* $e(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 7x}$;
*f)* $f(x) = 10 \cdot \sqrt[5]{x^4 - 2x^2 + 6x}$;
*g)* $g(x) = \sin^2 x$;
*h)* $h(x) = \cos^3 2x$;
*i)* $i(x) = \sqrt{\sin(5x + \pi)}$;
*j)* $j(x) = \sin 2x \cdot \cos^4 x$;
*k)* $k(x) = \operatorname{tg}^2 3x$;
*l)* $l(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$;
*m)* $m(x) = \ln \sqrt{x}$;
*n)* $n(x) = e^{\sin x}$;
*o)* $o(x) = \ln(\cos 3x)$.

**6083** Deriváljuk a következő függvényeket:

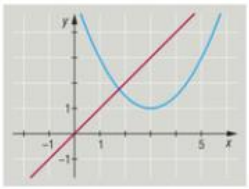
*a)* $f(x) = 3\sqrt{(3x^2 + x)^5} - 4(2x - 1)\left(x^{8,2} + x^{-6}\right)^2 + \frac{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x}}{x^4 - 3x^2}$;

*b)* $g(x) = \sin^{-3} 4x \cdot \operatorname{tg}(\pi - x) + \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$;
*c)* $h(x) = \ln \frac{x-1}{x+1} - e^{x^2 - 3x + 1}$;
*d)* $i(x) = (\sin x)^x$;
*e)* $j(x) = (\ln x)^{\ln x}$.

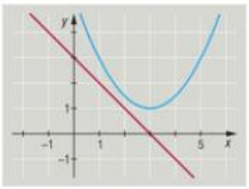
## Néhány konkrét függvény deriváltfüggvénye

**6084** Lehet-e a piros függvény a kék deriváltja?

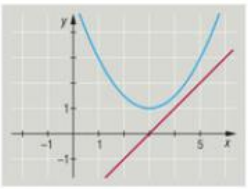
*a)*



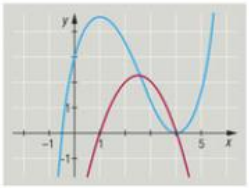
*b)*



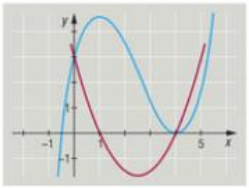
*c)*



*d)*



*e)*



**6085** Adjunk meg minden olyan függvényt, melynek deriváltja a következő:

*a)* $a'(x) = 5$; *b)* $b'(x) = 2x$; *c)* $c'(x) = 4x - 2$;

*d)* $d'(x) = 5x^{1,5}$; *e)* $e'(x) = \sqrt{x}$; *f)* $f'(x) = x^{-2}$;

*g)* $g'(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; *h)* $h'(x) = -\cos x$.

## Miről informál a differenciálhányados?

### Érintő

**6086** Írjuk fel a függvény adott helyen tekintett érintőjének egyenletét. Használjuk a deriváltfüggvényt.

*a)* $f(x) = -0{,}2x^2 + 6x + 3$, $x_0 = 5$; *b)* $g(x) = x^7 + \sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

*c)* $h(x) = 2\sin^2 x \cdot \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{3}$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$; *d)* $i(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $x_0 = \pi$;

*e)* $j(x) = e^{\cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

### Derivált és szélsőérték kapcsolata

**6087** Állapítsuk meg a következő függvények deriváltjainak zérushelyét, amennyiben létezik.

*a)* $a(x) = 8$; *b)* $b(x) = 3x - 2$; *c)* $c(x) = x^2 - 7$;

*d)* $d(x) = -x^2 + 5x$; *e)* $e(x) = 4x^2 + 3x - 9$; *f)* $f(x) = -3x^2 + 8x - 2$;

*g)* $g(x) = 2(x - 3)^2 + 1$; *h)* $h(x) = -(5x + 7)^2 - 3$; *i)* $i(x) = x^3 - 4x^2$;

*j)* $j(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$; *k)* $k(x) = (x + 2)^3 - 6$; *l)* $l(x) = 5(x^2 - 1)^3 + 8$;

*m)* $m(x) = \sqrt{2x + 6}$; *n)* $n(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$; *o)* $o(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 3x}$;

*p)* $p(x) = \frac{1}{2x + 1}$; *q)* $q(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$; *r)* $r(x) = \frac{10}{x^3 + 4x^2 - x + 2}$;

*s)* $s(x) = \sin(3x^2)$; *t)* $t(x) = \operatorname{ctg} \pi x$.

**6088** A derivált segítségével döntsük el, lehet-e szélsőértéke a függvényeknek az adott pontokban.

*a)* $x_1 = 1,\ x_2 = 10,\ f(x) = x^2 - 2x + 3$;

*b)* $x_1 = -7,\ x_2 = 2,\ g(x) = 2x^3 + 15x^2 - 84x + 106$;

*c)* $x_1 = -1,\ x_2 = \sqrt{2},\ x_3 = 7,\ h(x) = 5x^6 + 18x^5 - 22{,}5x^4 - 90x^3 + 30x^2 + 180x + 13$;

*d)* $x = \sqrt[3]{k \cdot \frac{\pi}{2}},\ i(x) = \cos(x^3)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

**6089** A derivált segítségével döntsük el, hogy a megadott pontokban helyi maximuma van-e az alábbi függvényeknek.

*a)* $x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ f(x) = -x^2 + 6x + 3$;

*b)* $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ g(x) = 0{,}25x^4 - 2x^3 + 5{,}5x^2 - 6x + 7{,}2$;

*c)* $x = 0,\ h(x) = -\operatorname{tg}(x^2)$;

*d)* $x = \sqrt{k\pi},\ i(x) = \sin\left(x^2 - \frac{\pi}{2}\right)$, ahol $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

**6090** Határozzuk meg, hol van helyi minimuma a következő függvényeknek. Mennyi a függvény-minimum értéke?

*a)* $f(x) = 2x^2 - 10x + 5$;

*b)* $g(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 6x + 1$;

*c)* $h(x) = x^7 - x^5$;

*d)* $i(x) = \sin x \cdot \cos x$.

**6091** Hol és milyen helyi szélsőértéke van az alábbi függvényeknek? A *d)* megoldását adjuk meg fokban.

*a)* $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$;

*b)* $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - x + 1$;

*c)* $h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$;

*d)* $i(x) = 2\sin x - \cos x$.

### Derivált és monotonitás kapcsolata

**6092** Deriváltak segítségével döntsük el, hogy az alábbi függvények az adott intervallumokon monoton növők-e.

*a)* $a(x) = 1{,}001x - 3$; $]-\infty; 5]$;

*b)* $b(x) = 3x^2 + 1$; $[0; 2]$;

*c)* $c(x) = -x^2 + 2x + 5$; $[-5; 2]$;

*d)* $d(x) = x^3 + x^2$; $[-3; -2] \cup [0; 2]$;

*e)* $e(x) = -x^3 - 3x^2 + 4x + 5$; $]0; 1[$;

*f)* $f(x) = \frac{1}{x^2 + 0{,}5}$; $]-\infty; 0]$;

*g)* $g(x) = \frac{1}{x^2}$; $]-\infty; 0]$;

*h)* $h(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$; $[-2; 2]$;

*i)* $i(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x - 3}$; $]-\infty; \infty[$;

*j)* $j(x) = \sin 3x$; $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$;

*k)* $k(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $]-\pi; 0[$;

*l)* $l(x) = x \cdot \sin x$; $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

**6093** Deriváltak segítségével keressük meg, mely intervallumokon monoton csökkenők a következő függvények:

*a)* $f(x) = -x^2 + 3x + 4$;

*b)* $g(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 3$;

*c)* $h(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$;

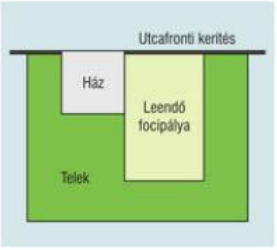
*d)* $i(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

**6094** Határozzuk meg deriváltak segítségével az adott függvények monotonitási viszonyait.

*a)* $f(x) = 8x + 2$;
*b)* $g(x) = x^2 - 2x + 8$;
*c)* $h(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 5$;
*d)* $i(x) = x^7 + 3x^6 + x^5$.

## Szélsőérték-feladatok

**6095** Liver Pál gyerekkora óta nagyon szeret focizni. Kisiskolás volt, amikor édesapja vásárolt 150 m dróthálót. A hálóval egy focipályát keríthettek le az udvarból úgy, hogy felhasználják a telek kerítését és a 25 m hosszú házfalat. Mekkorák legyenek a pálya méretei, ha a lehető legnagyobb területű pályát akarják kialakítani? (A ház falára és az utcafronti kerítésre – ami gyakorlatilag tetszőlegesen hosszúnak tekinthető – nem húznak ki hálót.)




**6096** Pali középiskolás korában is focizik. Nem sok babér terem a számára, ugyanis gyakran rúg „gyertyát" (olyan lövést, amely függőlegesen felfelé száll). Milyen magas gyertyát rúg Pál, ha az éppen aláhullni készülő labdát 75 cm magasságban találja el, és ezzel $v_0 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességet ad neki?

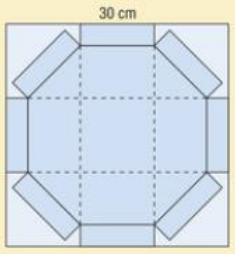
A labda magasságát a kezdőponttól $t$ másodperc múlva az $y = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$ képlet írja le, ahol $g = 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a gravitációs gyorsulás.

**6097** Pál belátva sikertelenségét, a foci után squashra váltott. Egyik meccsén pontosan a $20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel megütött labda irányára merőlegesen egy légy repül komótosan, $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel. Az ütés pillanatában a légy épp Palival szemben repül. A légy és a labda mozgása is tekinthető egyenes vonalú egyenletes mozgásnak.

A squashpálya 9,75 m hosszú, a légy az egyik, Pali a másik végében van. Hány centiméterre kerüli el egymást a légy és a labda? (Mennyi a közöttük levő legkisebb távolság?)

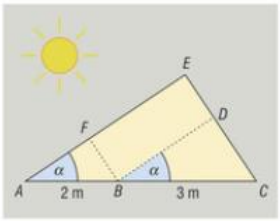
**6098** Eszter két méter hosszú drótból egy téglatest alakú papírdoboz élvázát szeretné elkészíteni. Annyi kikötése van, hogy a dobozka pontosan 5 cm-rel legyen szélesebb, mint amilyen magas (hosszúsága bármekkora lehet). Segítsünk neki: mekkorák a doboz méretei, ha a lehető legnagyobb térfogatú dobozt akarja elkészíteni a drótból? (A téglatest térfogata az élek szorzata.)

**6099** Csomagolóüzemünkbe nemrég új gépsor érkezett, amellyel 30 cm oldalú, négyzet formájú kartonlapokból szabályos nyolcszög alapú dobozokat tudunk formára vágni és hajtogatni. Mekkorára állítsuk be a gépen a doboz magasságát, hogy a lehető legnagyobb térfogatú dobozokat állíthassuk elő? (A doboz térfogatát az alapterület és a magasság szorzataként kapjuk meg.)



**6100** Egy 75 m magas és 6 m átmérőjű hengeres torony tetején 25 m magas, kúp alakú kupola található (az épület összesen 100 m magas, a kupola illeszkedik a hengerre). A torony közepébe egy kör alakú liftet építenek úgy, hogy a lift a lehető legtöbb embert vigye fel egyszerre a toronyba (a lift kupolába eső térfogata maximális legyen). Mekkora átmérőjű liftet tervezzenek a toronyba? (Az $R$ sugarú, $m$ magasságú henger térfogata $V = R^2 \cdot \pi \cdot m$.)

**6101** Az $AC$ talapzatra építettünk egy csuklós-teleszkópos szerkezetet. Ez a szerkezet szétcsúsztatható $AE$ napelemtáblákat emel fel az $A$ pont körüli forgatással a Nap állásának megfelelően. A $BD$ és $BF$ merevítők is teleszkóposak. Hány fokos szög esetén lesz a merevítők összhossza a legnagyobb, ha a $B$ pont $A$-tól 2 méterre, $C$-től 3 méterre található? ($D$, $E$, $F$ pontokban derékszögek vannak.)




**6102** Egy hegy alá a mérnökök fordított parabola keresztmetszetű, egyenes alagutat terveztek. Az alagút 15 m magas és a legalján 10 m széles. Mekkora lehet annak a legnagyobb kamionnak a téglalap alakú keresztmetszete (szélessége és magassága), amely még éppen át tud hajtani az alagúton? (Az alagút egysávos, villanyrendőr szabályozza a haladás irányát.)

**6103** Gáz Géza hivatásos partibiciklista, a cégének több különböző hosszúságú tandem kerékpárja van. (A partibiciklista kerékpárral szállít utasokat.) Legújabb megbízása egy viszonylag szűk (2,5 m széles) utcába szól, ahová csak egy arra merőleges, 4 m széles utcából lehet behajtani. Legfeljebb hány üléses kerékpárral induljon, hogy be tudjon kanyarodni az utcába? (A kihajtás már nem okoz gondot, mert egy soksávos sugárútra kell kifordulnia. Egy főre átlagosan 1,5 méternyi kerékpárt lehet számítani.)



**6104** A 30 cm átmérőjű pizza alapját készítéskor négy egyforma részre vágják. Feltétnek minden szeletre egy téglalap alakú felvágottat tesznek úgy, hogy a felvágott két sarka a köríven legyen, két sarka pedig a két határoló sugárra essen (a felvágott egyik éle párhuzamos a pizzaszelet szimmetriatengelyével).

*a)* Mekkora lehet a legnagyobb területű felvágott, amelyet ebben a formában erre a pizzára sütnek?

*b)* Határozzuk meg a felvágott méreteit, ha a pizzát nem négy, hanem $n$ egybevágó részre osztják, és úgy tesznek minden szeletre egy téglalap alakú felvágottat.

## Derivált deriváltja. Miről informál a második derivált?

**6105** Deriváljuk kétszer az alábbi függvényeket:

*a)* $a(x) = 5x + 3$;
*b)* $b(x) = x^2 - 3x - 1$;
*c)* $c(x) = -3x^2 + 5x - 13$;
*d)* $d(x) = -x^3 + 5x$;
*e)* $e(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 6$;
*f)* $f(x) = x^{13} + 3x^7$;
*g)* $g(x) = \frac{1}{x}$;
*h)* $h(x) = \frac{1}{x^2 + 3x}$;
*i)* $i(x) = \sqrt{x^2 + x}$;
*j)* $j(x) = \sin x + \cos x$.

**6106** Hányszor kell deriválnunk a szinusz- és koszinuszfüggvényt ahhoz, hogy visszakapjuk az eredeti függvényt?

**6107** Határozzuk meg a második derivált zérushelyét.

*a)* $f(x) = 5x^2 - 3$;

*b)* $g(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 3$;

*c)* $h(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$;

*d)* $i(x) = \dfrac{1}{2x+1}$;

*e)* $j(x) = \sin x \cdot \cos x$.

**6108** Döntsük el csak a második deriváltak segítségével, inflexiós pontja van-e az alábbi függvényeknek az adott helyen.

*a)* $f(x) = 12x^2 - 5x + 3, \quad x_0 = 4$;

*b)* $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = -1$;

*c)* $h(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = 0$;

*d)* $i(x) = x^{10} - x^8, \quad x_0 = 0, \; x_1 = \dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{7}{5}}$.

**6109** Határozzuk meg a következő függvények inflexiós pontjait. Adjuk meg, mely intervallumokon konvexek, mely intervallumokon konkávak a függvények. Csak a második deriváltat használjuk.

*a)* $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 6$;

*b)* $g(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 2$;

*c)* $h(x) = \dfrac{x^6}{30} + \dfrac{x^5}{20} - \dfrac{x^4}{6}$;

*d)* $i(x) = 2\sin x + 3\cos x$.

**6110** Az első és második derivált segítségével döntsük el, hogy a függvényeknek mely pontokban lehet, és mely pontokban van szélsőértéke.

*a)* $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 1$;

*b)* $g(x) = \cos x - x$.

**6111** A második és a harmadik deriváltak segítségével döntsük el, mely pontokban lehet, és mely pontokban van az alábbi függvényeknek inflexiós pontja:

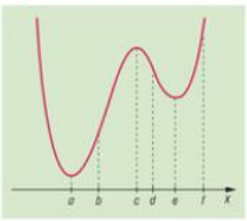
*a)* $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \left( \dfrac{1}{10}x^5 + x^4 + 3x^3 + 1 \right)$;

*b)* $g(x) = -\cos^2 x$;

*c)* $h(x) = x \cdot \ln x - x^3$.

## Differenciálható függvények vizsgálata

**6112** Az alábbi ábrán egy negyedfokú függvény grafikonjának részletét látjuk. Figyeljük meg alaposan, majd egészítsük ki a mondatokat, hogy azok igazzá váljanak!




A függvénynek az ábra alapján

*a)* ..... helyen helyi maximuma van;

*b)* ..... helyen helyi minimuma van;

*c)* ..... helyen abszolút maximuma van;

*d)* ..... helyen abszolút minimuma van;

*e)* ..... helyen inflexiós pontja van.

A függvény az ábra alapján

*f)* ..... intervallumon szigorúan monoton növő;

*g)* ..... intervallumon monoton csökken;

*h)* ..... intervallumon konvex;

*i)* ..... intervallumon konkáv.

**6113** Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a következő folytonos függvényeknél! Állapítsuk meg az értelmezési tartományt, a zérushelyeket (ahol lehet), a paritást, a periodikusságot, a folytonosságot, a szakadási helyeket, a határértékeket, a szélsőértékek minőségét, helyét és értékét, a monotonitási viszonyokat, az inflexiós pontok helyét és értékét, a konvexitási viszonyokat és az értékkészletet. Ábrázoljuk a vizsgálat alapján a függvényeket.

*a)* $f(x) = x^2 - x - 2$; *b)* $g(x) = -x^2 + 2x + 3$; *c)* $h(x) = x^3 - 4x$;

*d)* $i(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$; *e)* $j(x) = x^5 - x^3$; *f)* $k(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

**6114** Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a következő függvényeknél! Állapítsuk meg az értelmezési tartományt, a zérushelyeket, a szimmetriatulajdonságokat, a folytonosságot, a határértékeket, az alaki tulajdonságokat és az értékkészletet. Ábrázoljuk a vizsgálat alapján a függvényeket.

*a)* $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$; *b)* $g(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; *c)* $h(x) = \cos x(2\sin x - 1)$;

*d)* $i(x) = x \cdot \ln x$; *e)* $j(x) = \frac{e^x}{x}$; *f)* $k(x) = x^x$.

## Vegyes feladatok

**6115** Érinti-e, és ha igen, mely pontban az $f(x) = -x^2 + 5x + 6$ függvény grafikonját az $y = 3x + 7$ egyenes?

**6116** Számítsuk ki az $f(x) = x^4$ függvény differenciálhányadosának értékét az $x_0 = 3$ helyen.

**6117** Deriváljuk a következő függvényeket:

*a)* $f(x) = (x^3 - 2x^2)(3x^2 + \sqrt{x} - 2)$; *b)* $g(x) = \cos(2x) \cdot \sin(x + \pi)$;

*c)* $h(x) = \frac{x^3}{\sin x}$; *d)* $i(x) = \sin(\cos(x^3))$.

**6118** Adjuk meg az alábbi függvények meghatározott pontbeli érintőjének egyenletét.

*a)* $f(x) = x^3 - x^2 + 4$, $x_0 = -1$; *b)* $g(x) = x \cdot \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

**6119** Adott az $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ függvény.

*a)* Határozzuk meg szélsőértékeit. *b)* Határozzuk meg monotonitási viszonyait.

**6120** A csomagolóüzem gépsorával a 30 centiméter oldalú, négyzet formájú kartonlapokból már szabályos hatszög alapú dobozokat is tudunk formára vágni és hajtogatni. Mekkorának állítsuk be a gépen a doboz magasságát, hogy a lehető legnagyobb térfogatú dobozokat állíthassuk elő? (A doboz térfogatát az alapterület és a magasság szorzataként kapjuk meg.)

**6121** Inflexiós pontja van-e az $f(x) = \frac{x^5 - 6x^3}{x}$ függvénynek az adott pontokban?

*a)* $x_0 = -2$; *b)* $x_1 = 0$; *c)* $x_2 = 1$.

**6122** Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ függvénynél. Állapítsuk meg az értelmezési tartományt, a zérushelyeit, a szimmetriatulajdonságait, a folytonosságát, a határértékeit, az alaki tulajdonságait és az értékkészletét. Ábrázoljuk is a függvényt.



# INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

## Primitív függvény

Az integrálok kiszámítása után könnyen ellenőrizhetjük munkánkat: deriváljuk az eredményt! Ha jól számoltunk, akkor a kiindulási függvényt kapjuk vissza.

**6123** Határozzuk meg az alábbi primitív függvényeket az értelmezési tartományukon.

*a)* $\int 6\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int 2x\,\mathrm{d}x$; *c)* $-2\int x^{-3}\,\mathrm{d}x$; *d)* $\int 4x^3\,\mathrm{d}x$;

*e)* $\int nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$; *f)* $\int x^5\,\mathrm{d}x$; *g)* $\int 2x^4\,\mathrm{d}x$; *h)* $\int \frac{x^{-3}}{5}\,\mathrm{d}x$;

*i)* $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; *j)* $\int \sqrt[3]{x^7}\,\mathrm{d}x$; *k)* $\int (4x^3+8x-3)\,\mathrm{d}x$; *l)* $\int (x-2)(2x+7)\,\mathrm{d}x$;

*m)* $\int \frac{x\cdot\sqrt{x^3}}{x^4}\,\mathrm{d}x$; *n)* $\int \frac{x+\sqrt{x^3}}{x^4}\,\mathrm{d}x$; *o)* $\int (x+2)^2\,\mathrm{d}x$; *p)* $\int (x-1)^3\,\mathrm{d}x$;

*q)* $\int \frac{x^2-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$; *r)* $\int \frac{x^3-8}{x-2}\,\mathrm{d}x$; *s)* $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$; *t)* $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$.

**6124** Mi az alábbi függvények antideriváltja? (Az *e)–j)* feladatokat addíciós összefüggésekkel oldjuk meg!)

*a)* $2\sin x$; *b)* $\frac{\cos x}{5}$; *c)* $\frac{-3}{\sin^2 x}$; *d)* $\frac{5}{\cos^2 x}$;

*e)* $\sin x\cdot\cos x$; *f)* $\frac{4}{\sin^2(2x)}$; *g)* $\sqrt{1-\cos^2 x}$; *h)* $\mathrm{tg}^2 x$;

*i)* $\cos^2 x$; *j)* $\sin^2 x$.

**6125** Határozzuk meg a következő határozatlan integrálokat.

*a)* $\int 3e^x\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int \left(e^x\right)^2\mathrm{d}x$; *c)* $\int \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x$; *d)* $\int \frac{x+e^{-x}}{x\cdot e^{-x}}\,\mathrm{d}x$;

*e)* $\int \left(\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

**6126** Integráljuk parciálisan a következő szorzatokat.

*a)* $\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$; *c)* $\int x\cdot e^{x+2}\,\mathrm{d}x$; *d)* $\int x\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$;

*e)* $\int \mathrm{arcctg}\,x\,\mathrm{d}x$; *f)* $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$; *g)* $\int \sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$; *h)* $\int e^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$;

*i)* $\int e^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$; *j)* $\int x^2\cdot e^x\,\mathrm{d}x$; *k)* $\int x^2\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$; *l)* $\int x^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$;

*m)* $\int x^4\cdot e^x\,\mathrm{d}x$.

**6127** *a)* A 6126. feladat *g)* alpontjában parciálisan meghatároztuk $\int \sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$-et. Most határozzuk meg ismét parciálisan, de az előbbi megoldásunktól eltérően! Mit tapasztalunk?

*b)* Hasonlítsuk össze ezeket egymással és a 6124. feladat *e)* alpontjában addíciós összefüggésekből kapott eredményével. Mi az eltérés magyarázata?

**6128** Határozzuk meg parciális törtre bontással a következő határozatlan integrálokat:

*a)* $\int \frac{2}{(x+1)(x+3)}\,dx$; *b)* $\int \frac{1}{x^2-3x-10}\,dx$; *c)* $\int \frac{10}{x^2+x-6}\,dx$; *d)* $\int \frac{4x+8}{4x^2+8x+3}\,dx$.

**6129** Keressük meg a következő törtek antideriváltjait:

*a)* $\frac{x^5}{1+x^3}$; *b)* $\frac{x^7}{x^2+4}$; *c)* $\frac{x^8}{x^2+4}$.

**6130** Az összetett függvény deriválási szabálya alapján (helyettesítéses módszerrel) keressük meg a következő primitív függvényeket:

*a)* $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$; *b)* $\int \operatorname{ctg} x\,dx$; *c)* $\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,dx$; *d)* $\int 2x\cdot\cos(x^2)\,dx$;

*e)* $\int 6x^2\cdot\sqrt{x^3+2}\,dx$; *f)* $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx$; *g)* $\int \sin x\cdot\cos x\,dx$; *h)* $\int \sin^{55}x\cdot\cos x\,dx$;

*i)* $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}\,dx$; *j)* $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$; *k)* $\int \sin x\cdot\cos x\cdot\frac{e^{\cos^2 x}}{e^{\sin^2 x}}\,dx$.

## Függvénygörbe alatti terület meghatározása a kétoldali közelítés módszerével

Az alábbi feladatokban az intervallumokat – vagy azok részintervallumait – az egyszerűség kedvéért mindig osszuk $n$ egyenlő részre.

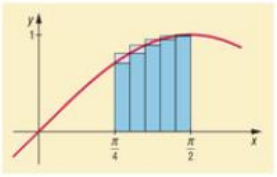
**6131** Osszuk fel a feladatban megadott intervallumot négy egyenlő részre öt osztópont segítségével, majd számoljuk ki az alsó és felső közelítő téglalapösszegeket.

*a)* $f(x)=x^2+3$, $I=[0;2]$; *b)* $g(x)=-2x^2$, $I=[0;1]$.

**6132** Osszuk fel a megadott intervallumot öt egyenlő részre, majd határozzuk meg a függvényhez tartozó alsó és felső közelítő összegeket.

*a)* $I=[0;1]$, $f(x)=2^x$;

*b)* $I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=\sin x$. (➡)




**6133** Határozzuk meg alsó és felső közelítő összegek segítségével az adott $I$ intervallumon az $f(x)$ függvény görbéje és az $x$ tengely közötti területet.

*a)* $f(x)=x^2$, $I=[0;1]$; *b)* $g(x)=-x^2+4$, $I=[0;2]$.

**6134** Hány külön részre célszerű bontanunk az alábbi véges zárt intervallumokat, hogy meghatározzuk az adott függvény $x$ tengellyel bezárt területét? Adjuk is meg a területet.

*a)* $I=[0;3]$, $f(x)=x^2-4x+5$; *b)* $I=[0;2]$, $g(x)=x^2-1$;

*c)* $I=[0;3]$, $h(x)=-(x-1)^2+1$.

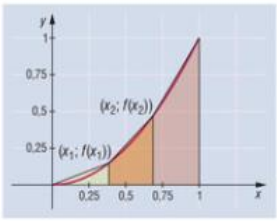
**6135** Legyenek $0 \le a < b$ tetszőlegesen rögzített valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az $I = [a; b]$ intervallumon az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény felső és alsó közelítő összegeinek különbsége 0-hoz tart.

**6136** Legyenek $0 < a < b$ tetszőlegesen rögzített valós számok.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy az $I = [a; b]$ intervallumon az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény felső és alsó közelítő összegeinek különbsége 0-hoz tart.

*b)* Adjuk meg az előző részfeladat alapján, hogy legalább hány osztáspont felvétele szükséges az $I = [1; 2]$ intervallum felett az $f(x)$ függvény görbéje és az $x$ tengely által bezárt területet 0,01 pontossággal történő meghatározásához.

**6137** Tekintsük az $I = [0; 1]$ intervallumot, osszuk fel $x_i$ osztópontokkal $n$ egyenlő részre ($i = 0, \ldots, n$), majd kössük össze a szomszédos $(x_i; f(x_i))$, $(x_i + 1; f(x_{i+1}))$ pontokat egymással és az $(x_i; 0)$, $(x_{i+1}; 0)$ pontokkal ($i = 0, \ldots, n - 1$) az ábrán látható módon. Adjuk össze minden $n$-re a kialakuló trapézok területeit, jelölje az összeget $t_n$. Mit tapasztalunk, ha $n \to \infty$?




*a)* $f(x) = x^2$;

*b)* $f(x) = -2x^2$.

**6138** Magyarázzuk meg a példákban látott függvények tulajdonságai és a sorozatoknál tanult tételek segítségével, hogy a vizsgált esetekben miért működik a trapézmódszer.

### A határozott integrál fogalma és tulajdonságai

**6139** Számítsuk ki az $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$ határozott integrált a határozott integrál meghatározása alapján!

**6140** A határozott integrál meghatározása alapján számítsuk ki $\int_{-1}^{1} (x^3 + 1) \,\mathrm{d}x$ értékét!

**6141** Legalább mennyi osztópont felvételére van szükség, ha

*a)* $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x$ értékét (negyed egységkör területe);

*b)* $\int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x$ értékét

szeretnénk meghatározni egy tizedes pontossággal?

**6142** Számítsuk ki $\int_2^3 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$ értékét fél tizedes pontossággal!

**6143** *a)* Legyen az $f(x)$ páratlan függvény értelmezve, és legyen integrálható is a $[-a; a]$ intervallumon. Mivel egyenlő $\int_{-a}^{a} f(x) \,\mathrm{d}x$?

*b)* Mit mondhatunk, ha $f(x)$ páros?

**6144** Az ismert, hogy $\int_a^b c \cdot f(x) \,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$. De mivel egyenlő $\int_{ca}^{cb} c \cdot f\left(\frac{x}{c}\right) \mathrm{d}x$?

(Tételezzük fel, hogy $f(x)$ az $[a; b]$ és $[ca; cb]$ intervallumokon integrálható.)

## A Newton–Leibniz-tétel

**6145** Az adott intervallumon egy minden határon túl finomodó $\{F_n\}$ felosztássorozathoz tartozó alsó és felső közelítő összegek segítségével határozzuk meg a következő integrálokat (ha léteznek):

*a)* $\int_1^7 5\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int_{10}^3 7\,\mathrm{d}x$; *c)* $\int_3^6 2x\,\mathrm{d}x$; *d)* $\int_2^7 -5x\,\mathrm{d}x$; *e)* $\int_4^2 3x\,\mathrm{d}x$.

**6146** Határozzuk meg a határozott integrálra vonatkozó addíciós, szorzási és határokra vonatkozó szabályok alkalmazásával az alábbi összeget:

$$\int_1^3 (2x-4)\,\mathrm{d}x + 2\int_3^5 (x-2)\,\mathrm{d}x + \int_7^5 (4-2x)\,\mathrm{d}x.$$

**6147** Határozzuk meg a szignumfüggvény (előjelfüggvény) integráljainak értékeit.

*a)* $\int_2^4 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int_{-4}^{-3} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x$; *c)* $\int_{-3}^2 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x$.

**6148** Határozzuk meg a következő Riemann-integrálokat. ($[x]$ az $x$ egész része, $\{x\}$ a törtrésze.)

*a)* $\int_2^4 [x]\mathrm{d}x$; *b)* $\int_{0,5}^5 [x]\mathrm{d}x$; *c)* $\int_0^3 \{x\}\mathrm{d}x$; *d)* $\int_{0,5}^{3,8} \{x\}\mathrm{d}x$.

**6149** A Newton–Leibniz-tétel segítségével határozzuk meg az alábbi integrálokat. Használjuk fel a primitív függvények meghatározásainál kapott eredményeket.

*a)* $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int_{-2}^0 (x^2+3)\mathrm{d}x$; *c)* $\int_0^2 (-3x^2+4x)\mathrm{d}x$;

*d)* $\int_2^3 \left(\frac{1}{2}(x-5)^2+2\right)\mathrm{d}x$; *e)* $\int_{-1}^{\sqrt{2}} (5x^2+4x-3)\mathrm{d}x$; *f)* $\int_1^3 \left(\frac{3x^3}{2}-\frac{2x^2}{5}+\frac{x}{4}+2\right)\mathrm{d}x$;

*g)* $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$; *h)* $\int_1^2 x^{-2}\mathrm{d}x$; *i)* $\int_2^3 \frac{3}{x^5}\,\mathrm{d}x$;

*j)* $\int_{-2}^2 (x-1)^3\mathrm{d}x$; *k)* $\int_3^4 \frac{x^3-8}{x-2}\,\mathrm{d}x$; *l)* $\int_2^3 \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

*m)* $\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x$; *n)* $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 3\sin x\,\mathrm{d}x$; *o)* $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$;

*p)* $\int_{-2}^{-1} 3e^x\,\mathrm{d}x$; *q)* $\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$; *r)* $\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$;

*s)* $\int_0^{\pi/2} x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$; *t)* $\int_0^1 (x\cdot e^x-1)\mathrm{d}x$; *u)* $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$;

*v)* $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; *w)* $\int_{100}^{101} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$; *x)* $\int_2^3 \frac{3}{(x-1)(x+4)}\,\mathrm{d}x$;

*y)* $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos x \cdot \sin x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

**6150** Létezik-e a következő Riemann-integrál? Ha igen, mennyi az értéke? ([$x$] jelöli az $x$ egész részét.)

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{ahol} \quad g(x) = \begin{cases} [x], & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

**6151** Milyen valós számot írjunk a $b$ paraméter helyére, hogy igaz legyen az egyenlőség?

*a)* $\int_{-4}^{-1} (2{,}5x^2 + bx)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$; *b)* $\int_1^2 (3x^2 - 2bx + 2)\,\mathrm{d}x = 6$;

*c)* $\int_0^{\pi/4} (b\cos x + 2\sin x)\,\mathrm{d}x = 3\sqrt{2}$.

**6152** Adjuk meg $c$ értékét úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség.

*a)* $\int_1^c x^2\,\mathrm{d}x = 114$; *b)* $\int_0^c x^3\,\mathrm{d}x = 324$;

*c)* $\int_c^{2c} 4x^4\,\mathrm{d}x = 793{,}6$; *d)* $\int_{\pi/2}^c -2\sin x\,\mathrm{d}x = 1 \ \left(c \in [-2\pi; 2\pi]\right)$.

**6153** Határozzuk meg úgy a $b$ paraméter értékét, hogy teljesüljön az egyenlőség.

*a)* $\int_1^b (3x + 2)\,\mathrm{d}x = 4$; *b)* $\int_b^6 (x^3 + x)\,\mathrm{d}x = 336$;

*c)* $\int_1^b (2x + b)\,\mathrm{d}x = 14$; *d)* $\int_0^b \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)\mathrm{d}x = 0$.

**6154** Számítsuk ki, milyen határok között mozoghat az egyes esetekben az $a$ paraméter értéke, hogy igazzá váljanak az egyenlőtlenségek.

*a)* $\int_a^0 (4x + 3)\,\mathrm{d}x < 1$; *b)* $\int_0^a (3x^2 - 1)\,\mathrm{d}x \geq 0$;

*c)* $\int_{-a}^{2a} (-4x^3 + 1)\,\mathrm{d}x > 0$; *d)* $\int_a^{\pi/2} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x < 1$.

**6155** Adjuk meg a valós számokon értelmezett $F(x) = \int_{\pi/3}^x \sin t\,\mathrm{d}t$ függvény értékkészletét.

## A határozott integrál alkalmazásai

**6156** Számítsuk ki a következő függvények görbéje és az $x$ tengely által bezárt terület nagyságát az adott intervallumon.

*a)* $a(x) = x^2 - 4x + 3$, $I = [0; 1]$;
*b)* $b(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 10$, $I = [1; 4]$;
*c)* $c(x) = x \cdot \sqrt{x} - x$, $I = [1; 4]$;
*d)* $d(x) = x^4 - x^3 + x^2$; $I = [-1; 1]$;
*e)* $e(x) = 3\cos x$, $I = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$;
*f)* $f(x) = \frac{\sin x}{2}$, $I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]$;
*g)* $g(x) = x^2 - 1$; $I = [-1; 1]$;
*h)* $h(x) = (x-1)^2 - 4$, $I = [0; 5]$;
*i)* $i(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, $I = [0; 3]$;
*j)* $j(x) = -x^3 - x^2 + 2x$, $I = [-2; 2]$;
*k)* $k(x) = \sin x$, $I = \left[\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right]$;
*l)* $l(x) = 1{,}5\cos x$, $I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} + 3\pi\right]$.

**6157** Tekintsük az első síknegyedben azokat a zárt síkidomokat, melyeket az adott függvény görbéje és egy tengely vagy a tengelyek zárnak közre. Mekkora ezen síkidomok területe?

*a)* $a(x) = -x(x-2)$;
*b)* $b(x) = 4x - x^2$;
*c)* $c(x) = (1-x)(x-4)$;
*d)* $d(x) = -(2x^2 - 14x + 20)$;
*e)* $e(x) = -x^2 + 2x + 3$;
*f)* $f(x) = 2\sqrt{1-x}$;
*g)* $g(x) = -x(x-4)(x-6)$;
*h)* $h(x) = 4x - x^3$;
*i)* $i(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$;
*j)* $j(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - x$.

**6158** Határozzuk meg a két függvény görbéje által közrefogott, korlátos és zárt síkidom területét.

*a)* $f(x) = x^2$, $g(x) = -x + 2$;
*b)* $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = 0{,}5x^2 - x$;
*c)* $f(x) = -x^2 + 5$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$;
*d)* $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = -x$;
*e)* $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^2 - 1$;
*f)* $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$, $g(x) = x^2 - 2x$;
*g)* $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ (a $[0; 2\pi]$-on);
*h)* $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = -x^2 + 2x + 1$;
*i)* $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}x$.

**6159** Az $y = \frac{x^2}{4}$ függvény görbéjét toljuk el a $\vec{v}(2; 4)$ vektorral, majd számítsuk ki a két görbe közé eső területet a $[0; 4]$ intervallum felett!

**6160** Határozzuk meg annak a konvex, $x$ tengellyel érintkező, zárt síkidomnak a területét, melyet az $y = \frac{x^2}{2}$ parabola, az $y = -x + 4$ és az $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ egyenesek határolnak!

**6161** Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^3}$ függvény $[0; 3]$ intervallum feletti ívhosszát.

**6162** A feladatokban szereplő függvények görbéit megforgatjuk az $x$ tengely körül. Számítsuk ki a kapott testek térfogatát.

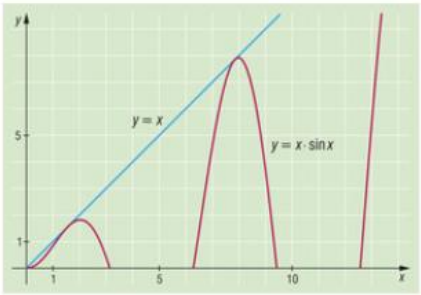
*a)* $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cdot \sqrt[3]{x}$, $I = [0; 8]$; *b)* $g\colon I \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $I = D_f$;

*c)* $h\colon I \to \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x - 1$, $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; *d)* $i\colon I \to \mathbb{R}$, $i(x) = \frac{2}{x}$, $I = [0{,}5; 2]$.

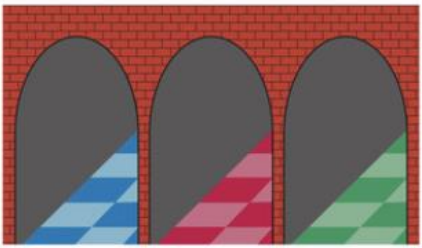
**6163** A következő függvények görbéinek adott intervallumhoz tartozó részét megforgatjuk az $x$ tengely körül. Határozzuk meg az így keletkezett nyitott test külső felszínét.

*a)* $f(x) = x$, $I = [2; 3]$; *b)* $g(x) = 2\sqrt{x}$, $I = [1; 4]$; *c)* $h(x) = x^3$, $I = [-1; 2]$.

**6164** Tekintsük az $f(x) = x \cdot \sin x$ függvénynek a koordináta-rendszer első síknegyedével alkotott metszetét! Hányadik „dombocska" területe lesz először nagyobb 1000-nél?



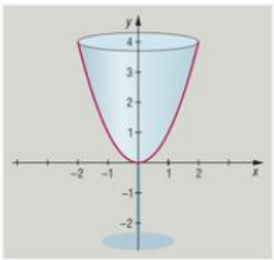

**6165** Az ábrán egy régi épület boltíves folyosóinak bejáratát látjuk. Az építész kíváncsi a három boltív hosszára. A méretarányos maketten úgy látja, hogy a boltívek görbéit a $]0; 3\pi[$-on tekintett $f(x) = \ln|\sin x| + 2$ függvény $x$ tengely feletti része írja le. Segítsünk az építésznek, határozzuk meg a boltívek összhosszát! (A boltívet tartó egyenes oszlopok hosszától tekintsünk el.) Az integrációs intervallumot és a végeredményt két tizedesre pontosan adjuk meg!



**6166** Adott a $[0; 3]$-on értelmezett $f(x) = 3x^2 + 11$ függvény. Hova kell rajzolnunk azt a függőleges vonalat, amely a görbe alatti területet elfelezi?

**6167** Forgassuk meg az $f(x) = x^3$ függvény görbéjének $[0; 2]$ intervallum feletti részét az $y$ tengely körül. Határozzuk meg a kapott test térfogatát.

**6168** Egy üvegpohár „tengelymetszete" az $f(x) = x^2$ függvény $[-2; 2]$ intervallum feletti része. Buli előtt a házigazda úgy gondolja, hogy különböző színű üvegfestékkel festi be kívülről poharait: minden vendég választ magának egy színt, így nem keverik össze a poharakat. Mekkora felületet kell lefestenie egy-egy színnel? (A pohár szárától és talpától eltekintünk.) Egy egység három centimétert jelent, $e = 3$ cm.



### Fizikai alkalmazások

**6169** Egy matematikus megtervezte a tökéletes autót. Elektromos motor és lendkerék hajtja. Az elektromotor állandó $v_{\text{emotor}} = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességet biztosít, a lendkerék pedig szinuszhullámban növeli vagy csökkenti a jármű sebességét (az indulástól eltelt $x$ idő függvényében): $v_{\text{lendkerék}} = \sin x\ \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$.

*a)* Számítsuk ki a jármű által egy perc alatt megtett utat.

*b)* Mennyi idő alatt érne a járművel közlekedő Kaposvárról Balatonlellére (51 km)?

**6170** Az autópályára való felhajtáskor egy jármű kezdősebessége 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A sofőr két szakaszban gyorsít. Kilenc másodpercig a gázpedált nyomja növekvő intenzitással, majd bekapcsolja a 125 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ állított tempomatot. (A tempomat olyan berendezés, amely az előre beállított sebességre gyorsítja/lassítja a járművet, majd azt tartja, míg a sofőr be nem avatkozik.)

A jármű gyorsulását a következő függvény írja le (az eltelt $x$ másodperc függvényében):

$$a(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\sqrt{x}, & \text{ha} \quad 0 \le x < 9, \\ \frac{81}{4x}, & \text{ha} \quad 9 \le x. \end{cases}$$

*a)* Hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s sebességre gyorsította a sofőr az autót a gázpedállal?

*b)* Hány másodpercig gyorsította az autót a tempomat a kívánt sebességig?

**6171** Mennyi munkát kellene végeznünk, ha a teljesen kiépült 400 tonnás Nemzetközi Űrállomást (ISS – International Space Station) egyben szeretnénk 350 km magasságban Föld körüli pályára állítani?

$M_{\text{ISS}} = 400$ tonna, $M_{\text{Föld}} = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg, $R_{\text{Föld}} = 6372{,}8$ km, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}}$.

## Improprius integrálok

**6172** Határozzuk meg az alábbi improprius integrálokat:

*a)* $\int_3^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

*b)* $\int_5^\infty \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x$;

*c)* $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$;

*d)* $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

*e)* $\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$;

*f)* $\int_{-27}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$;

*g)* $\int_{-\infty}^1 e^x\,\mathrm{d}x$;

*h)* $\int_{-\infty}^4 2^x\,\mathrm{d}x$;

*i)* $\int_2^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^x \mathrm{d}x$.

**6173** Határozzuk meg a következő improprius integrálokat:

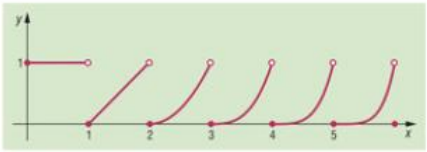
*a)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi + (\sqrt{\pi}x)^2}\,\mathrm{d}x$;

*b)* $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

*c)* $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

**6174** Létezik-e a $\int_0^{\infty} \{x\}^{[x]}\,dx$ improprius integrál?

Ha igen, mennyi az értéke? ($\{x\}$ az $x$ törtrészét, $[x]$ az $x$ egész részét jelenti. Az $x^x$ függvény 0-ban vett határértéke alapján $0^0 = 1$.)




## Vegyes feladatok

**6175** Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit:

*a)* $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} + 5$; *b)* $g(x) = 2\cos 2x - 6\sin 3x$; *c)* $h(x) = \sin 2x \cdot \cos x$.

**6176** Számítsuk ki a határozott integrál definíciója alapján az $\int_1^7 (x+4)\,dx$ értékét.

**6177** Számítsuk ki a következő integrálok értékét:

*a)* $\int_0^5 5x^4\,dx$; *b)* $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt[5]{(x-2)^3}}\,dx$; *c)* $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} -\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$.

**6178** Számítsuk ki az $f(x) = x^2 - 9$ függvény és az $x$ tengely közé zárt területet az $I = [1; 4]$ intervallumon.

**6179** Határozzuk meg az $f(x) = \cos x$ és a $g(x) = \sin x + 1$ által a $[0; 2\pi]$ felett közrefogott kisebb mértékű területet.

**6180** Határozzuk meg az osztópontok számát az egyenlő részekre osztott $[0; 2]$ intervallumon, hogy a közelítő összegek a függvény alatti területet egy ezred hibánál kisebb eltéréssel megközelítsék.

*a)* $f(x) = x^2 - 6x + 8$; *b)* $g(x) = x^3 + x^2$.

**6181** Határozzuk meg az improprius integrálokat:

*a)* $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{12}}\,dx$; *b)* $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$; *c)* $\int_{-1}^{0} x^{-\frac{1}{5}}\,dx$.

**6182** Mit kell írnunk a $c$ paraméter helyére, hogy teljesüljön az egyenlőség?

$$\int_c^{2c} (cx^2 + 5c)\,dx = \frac{100}{21}.$$

# VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

## A valószínűség-számítás új megközelítése: valószínűségi változó

**6183** A Balláb FC idei formája alapján 0,1 annak az esélye, hogy a jövő héten győztesen hagyja el a pályát. Jancsi mégis a győzelmükre fogad az Igazságos Fogadóirodában.

*a)* Mennyi pénzt fizessen a fogadóiroda a 10 eurós téttel fogadó Jancsinak, ha nyer?

*b)* Mekkora téttel fogadott Jancsi, ha 117 eurót nyert a fogadással?

**6184** Egy igazságos fogadáson az 1 eurós tétre 3 eurót fizetnek ki a fogadó győzelme esetén. Mekkora valószínűséggel nyer a fogadó?

**6185** Adjunk meg három olyan valószínűségi kísérletet egy kocka segítségével, melynek eseménytere

*a)* véges;

*b)* megszámlálhatóan végtelen;

*c)* kontinuum végtelen.

**6186** Döntsük el, hogy az alább leírt eseményterek közül melyik diszkrét és melyik folytonos. Adjuk meg a kísérlet egy konkrét lehetséges kimenetelét és az eseményteret.

Ejtőernyősök egy $40 \times 40$ méteres négyzet alakú területen gyakorolják a landolást 300 méter magasból.

*a)* A négyzetet középvonalaival felosztjuk I., II., III., IV. részekre. A kísérlet kimenetelének azt tekintjük, hogy melyik részen landolt az ugró.

*b)* A mezőre egy képzeletbeli rácsot fektetünk (a rácsvonalak 5 m-re vannak egymástól). Az ejtőernyősök ezen rácspontokba ugranak véletlenszerűen. A kísérlet kimenetele az, hogy melyik rácsponton landolt az ugró.

*c)* A négyzetet egy koordináta-rendszer egységnégyzetének tekintjük. A kísérlet kimenetele az a pont, ahol földet ért az ugró.

**6187** Egy szabálytalan érme a fej oldalára 0,6 valószínűséggel esik. A kísérletben egyszer dobjuk fel az érmét. Adjunk meg egy valószínűségi változót, majd ábrázoljuk az eloszlását oszlopdiagrammal.

**6188** Egy hagyományos kockát kétszer dobunk fel. A két dobott számból képezünk egy kétjegyű számot (az első jegy az első dobás eredménye). A valószínűségi változó rendeljen 1-et a kapott számhoz, ha az 10 és 22,5; 2-t, ha az 22,5 és 41,5; 3-at, ha az 41,5 és 70 közé eső esemény. Ábrázoljuk oszlopdiagrammal az eloszlást.

**6189** Egy szabályos érmét addig dobunk fel, míg írás nem lesz. A valószínűségi változó jelentse azt, hogy hányadik dobás lett írás.

*a)* Igazoljuk, hogy ez valóban eloszlás.

*b)* Ábrázoljuk az eloszlást oszlopdiagrammal.

*c)* Adjuk meg pontosan azt az általunk is ismert, eredetileg folytonos valós függvényt, amely leírja ezt az eloszlást.

**6190** Egy társasjátékban a szabályos kockával dobva 3 pontot kapunk, ha prímet dobunk; 2 pontot kapunk, ha összetett számot dobunk, és $-5$ pontot kapunk, ha mást dobunk. Várhatóan hány pontot szerzünk egy fordulóban?

**6191** Egy nem szabályos érmével 0,3 valószínűséggel dobunk fejet.

*a)* Mennyi a várható nyeremény, ha fej esetén 3 eurót kapunk, írás esetén pedig 1 eurót fizetünk ki?

*b)* Mennyi a várható bevételünk, ha a játék ára 0,5 euró?

**6192** Egy szerencsekerék 5 részre van osztva úgy, hogy az 1000 ponthoz tartozó körcikk középponti szöge 30°-os. Ez a többi (500, 100, 10, –750 értékeket tartalmazó) körcikk középponti szögeivel együtt számtani sorozatot alkot. Egy pörgetéssel annyi pont szerezhető, amennyi a kipörgetett mezőn látható. Mennyi az egy pörgetésből szerezhető pontok várható értéke?

**6193** Határozzuk meg a 13 + 1-es totójáték várható nyereményét, ha egy szelvénnyel játszunk és a telitalálatra 13 millió, a 13-asra 1 millió, a 12-esre 500 000, 11-esre 10 000, 10-esre 1000 Ft-ot fizet. (A többi lehetséges kimenetel esetén nem fizet semmit.)

**6194** Határozzuk meg a 4-et az 50-ből „hagyományos" lottójátékon várható bevételt, ha egy szelvény ára 2 euró, és telitalálatra 1000, 3-asra 500, 2-esre 50 eurót fizet.

**6195** Egy piros és egy zöld kockával dobunk egyszerre. Három eseményt különböztetünk meg ebben a sorrendben:



$A_1$ = Mindkét kockán legfeljebb 1-es vagy 2-es áll.

$A_2$ = Legalább egy kockán 3 vagy 4 értéket dobtunk, és a másik dobott szám sem nagyobb 4-nél.

$A_3$ = Legalább az egyik kockán legalább 5-öst dobtunk.

Milyen értékeket rendeljen az $A_1$, $A_2$, $A_3$ eseményekhez a valószínűségi változó, ha azt akarjuk, hogy $x_1$, $x_2$, $x_3$ értékei mértani sorozatot alkossanak 2 kezdő értékkel ($A_i \to x_i$, $i = 1, 2, 3$), és a változó várható értéke 2 legyen?

**6196** A következő játékot játsszuk a Pascal-háromszög számain. Képzeljük el, hogy kiindulásképp a legfelső 1-esen állunk. Valaki kijelöl egy elemet a következő sorban, de nem tudjuk, melyiket. Tippelünk: ha eltaláljuk, hogy melyik a kijelölt elem, nyertünk. Ha nem, akkor rálépünk a kijelölt elemre, és újra választanak a következő sorban egy elemet.

A $\xi$ valószínűségi változó jelentse azt, hogy hányadik lépésben nyerünk.

*a)* Igazoljuk, hogy $P(\xi = k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ valószínűségi eloszlás.

*b)* Igazoljuk, hogy ennek a valószínűségi eloszlásnak nincs várható értéke.

**6197** Egy állítható dobókockával dobva az 1-es, 2-es dobás valószínűsége 0,1-0,1, a 3-as, 4-es dobás valószínűsége 0,15-0,15 értékre van beállítva, és az 5-ös, 6-os dobás valószínűsége is ugyanaz. Mennyi egy dobás várható értéke és szórása? ($\xi$ értéke a dobás eredménye.)

**6198** Egy 10 egybevágó körcikkre osztott szerencsekerék 3 mezőjén az 5, 2-2 mezőjén a 10 és a –7, továbbá 1-1-1 mezőjén a 15, a 0 és a –20 érték van feltüntetve. Egy pörgetés után a játékosnak annyival változik a pontszáma, amennyit a kerék mutat. Mennyi egy pörgetés várható értéke és szórása?

**6199** Egy áruház a beérkezett árut visszatevéses mintavétellel vizsgálja meg, mielőtt átvenné. A legutóbbi 500 darabos szállítmányból is ellenőriztek 40 darabot (tapasztalatból tudják, hogy az érkezett áruból minden 25. hibás). Várhatóan mennyi hibás lesz a kiválasztott mintában? Mennyi a hibás darabok számának szórása?

**6200** Az egyik memóriagyártó cég a naponta elkészített 1500 darab memóriakártyából 250 darabot tesztel visszatevéses mintavétellel. Normál üzemben a gép 120 darab hibás memóriát állít elő naponta. Számítsuk ki az egy nap alatt legyártott hibás alkatrészek számának szórását!

**6201** Sokéves átlagban elmondható, hogy Fáradt 100 lóversenyből 1-et nyer meg. Határozzuk meg, hogy a jövő évi 223 futamból Fáradt várhatóan hány győzelmet tudhat majd magáénak! Számítsuk ki a jövő évi futamgyőzelmek számának szórását is!

**6202** Egy zacskóban 10 péksütemény van, közülük 4 csokis, a többi lekváros. Jani belenyúl a zacskóba, és kivesz 3 darabot. Így gondolkodik: „a tízes boldogságskálán 8, ha csak csokist vettem ki; 6, ha kettő csokist; 5, ha egy csokist, és 2, ha az összes kivett sütim lekváros". Határozzuk meg Jani boldogsága mértékének

*a)* várható értékét; *b)* szórását.

**6203** Határozzuk meg a $p$ paraméterű Pascal-eloszlás szórását. (Használjuk fel a várható értéknél használt ötleteket is.)

**6204** Határozzuk meg határozott integrál segítségével az $a < b$ paraméterű egyenletes eloszlás várható értékét és szórását.

**6205** Legyen $\xi$ valószínűségi változó esetén $m = 7$, $\sigma = 2$. Becsüljük meg Csebisev tételét alkalmazva, hogy mennyi

*a)* $P(|\xi - 7| \geq 6)$; *b)* $P(|\xi - m| < 3{,}5)$.

**6206** Egy városban eső után a közlekedési lámpák egy része sárgán villog (várható értékük 23, szórásuk 4 darab). Becsüljük meg, mennyi annak a valószínűsége, hogy a sárgán villogó lámpák száma egy nagy eső után 13 és 33 közé esik.

**6207** Iskolába menet minden munkanap reggelén át kell kelnünk egy közlekedési lámpán, melyhez véletlenszerűen érkezünk. A lámpa 2 percig mutat pirosat és 30 másodpercig zöldet. Becsüljük meg 90%-os valószínűséggel, hogy nyolc hét alatt hányszor kapunk pirosat ennél a lámpánál. (Használjuk a nagy számok Bernoulli-féle gyenge törvényét.)



**6208** A magyar nyelv hosszabb szövegeiről általában elmondható, hogy 100 betűből 19 „e" vagy „a" (nagyjából azonos gyakorisággúak). Becsüljük meg, hogy milyen határok között mozog legalább 80%-os valószínűséggel e két magánhangzó előfordulása egy 1350 betűt tartalmazó véletlen mintában.

**6209** A choppertalálkozón 75 feketére festett és 35 színes motort láthatott a közönség. A fekete motorok 40%-ában, míg a színesek 80%-ában V8-as motor dübörgött – ezeknek a hangját messziről megismerte mindenki. Ha reggel félálomban valaki meghallotta egy V8-as motor hangját, és megkereste a hang forrását, mekkora valószínűséggel pillantott meg színes choppert?

**6210** Egy dolgozat alkalmával 30 diák közül 25 jól megoldotta az első feladatot, közülük 10 a másodikat is. A második példát összesen 13 fő oldotta meg. Mekkora valószínűséggel oldotta meg valaki jól

*a)* a második feladatot, ha az első feladatot sikerült megoldania?

*b)* az első feladatot, ha a másodikat nem sikerült jól megoldania?



**6211** Egy gyógyszerkísérletben a kisorsolt betegeknek gyógyszert adtak, a többi résztvevőnek – a kontrollcsoportnak – pedig placebót (hatóanyag nélküli, de gyógyszernek látszó szert). Az eredményeket a táblázat tartalmazza.

| | Javult | Nem javult |
|---|---|---|
| Gyógyszert kapott | 67 | 33 |
| Placebót kapott | 40 | 54 |

*a)* Mekkora a valószínűsége, hogy placebót kapott az a kísérletben részt vevő, akinek nem javult az állapota?

*b)* Mekkora valószínűséggel kapott gyógyszert az, akinek javult az állapota?

◆ ◆ ◆

A következő három feladat *a)* részében a teljes valószínűség tételét, a többi részkérdésben a Bayes-tételt alkalmazzuk!

**6212** A focicsapat az egész meccset Aladár, Balázs és Csaba csatárokkal támadta végig. Aladár 15 helyzetéből 2, Balázs 4 helyzetéből 1, Csaba pedig 7 helyzetéből 2 gólt rúgott (helyzetük is csak nekik volt a pályán lévő 22 játékosból és gólt is csak ők lőttek). A televízió sportműsorában bejátszanak a mérkőzésből egy találomra kiválasztott helyzetet.

*a)* Mekkora valószínűséggel látunk gólt a bejátszásban?

*b)* Ha gólt látunk a bejátszásban, azt mekkora valószínűséggel rúgta Csaba?

*c)* Ha mégsem gólt látunk, akkor mennyi a valószínűsége, hogy Aladár hagyta ki a helyzetet?

**6213** Egy történelemtanár tavaly két osztályban érettségiztetett. A feleletek 58%-át a $C$ osztályban hallotta, a többit a $D$-ben. A $C$-ben a diákok 20%-a, a $D$-ben 36%-a kapott dicséretet a szép feleletéért.

*a)* Ha a töritanárnak véletlenszerűen eszébe jut majd egy tavalyi szóbeli érettségi felelet, mekkora valószínűséggel fog rá szívesen emlékezni?

*b)* Ha szép felelet jut eszébe, akkor mekkora valószínűséggel járt a feleletet adó tanuló a $D$ osztályba?

**6214** Az újonnan épült társasház 2. emeletén három lakás található. Az itt lakók, miután megismerkedtek az első grillpartin, elmesélték egymásnak, hogy az építtető az eredeti tervekhez képest kinek mennyit változtatott a lakásán. A változtatások 45%-a a $B_1$ lakásban, 35%-a a $B_2$-ben, a többi a $B_3$-ban történt. A $B_1$ lakás tulajdonosa 60%-ban, a $B_2$ lakásé 30%-ban, a $B_3$ lakásé pedig 70%-ban nem örült a változtatásoknak.

*a)* A szinten egy változtatást véletlenszerűen kiválasztva, mennyi a valószínűsége, hogy örültek neki?

*b)* Ha tudjuk, hogy a kiválasztott változtatásnak nem örültek, akkor mekkora valószínűséggel történt ez a változás a $B_1$ lakásban?

**6215** Répalopási ügyben összehívták az erdei bíróságot, Szamár ül a vádlottak padján. Nyuszi szerint kizárt, hogy Szamár lopta el a répát, legalábbis a valószínűsége csupán 1%. Dr. Farkas ügyész bemutatja új bizonyítékát: Szamár óljában megtalálták a répa zöldjének maradékait. A bíró Bagoly megjegyzi, hogy az FBI statisztikái szerint az esetek 90%-ában akkor találnak ilyesmit, ha az illető bűnös, és csak 15%-ban akkor, ha az illető ártatlan.

*a)* Hogyan változtatja meg az új bizonyíték Szamár bűnösségének Nyuszi által vélt 1%-os valószínűségét?

*b)* Hogyan változna Nyuszi vélekedése, ha Bagoly 99%-os és 1%-os statisztikákat említene?

**6216** A szabályos kockát egyszer feldobva tekintsük az alábbi eseményeket: $A = \{\text{prímet dobunk}\}$, $B = \{\text{legalább 5-öt dobunk}\}$. Igazoljuk, hogy $A$ és $B$ egymástól független események.

**6217** Piros és kék kockával dobunk. Bizonyítsuk be, hogy a piros kockával való 2-es dobás független a kék kockával való 5-ös dobástól (azaz a definíció illeszkedik a tapasztalatainkhoz).



**6218** A nyolc mókus alapította Mókus őrsben a tagok fele gyűjt mogyorót. Hárman gyűjtenek diót, egyikük pedig diót és mogyorót is.

Jelentse az $M$ esemény azt, hogy egy találomra kiválasztott mókus mogyorót, a $D$ pedig azt, hogy diót gyűjt.

*a)* Függnek-e egymástól az $M$ és $D$ események?

*b)* Változik-e a függetlenségi viszony, ha csak ketten gyűjtenek diót, és kettejük közül az egyik mogyorót is?

**6219** Dobjunk fel kétszer egymás után egy szabályos pénzérmét. Legyenek $A = \{\text{az első dobás fej}\}$, $B = \{\text{a második dobás fej}\}$, $C = \{\text{két dobásból pontosan egy fej}\}$ események.

*a)* Vajon $A$, $B$, $C$ események közül melyik kettő független?

*b)* Vizsgáljuk meg, hogy három esemény esetén fennáll-e a függetlenség. ($A$, $B$, $C$ függetlenek, ha páronként függetlenek, és $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.)

**6220** Hagyományos kockával dobva, értelmezzük a valószínűségi változót a következőképpen:

$$\xi\colon \{\text{a dobás eredménye 1 vagy 2 vagy 3}\} \to 1,$$
$$\{\text{a dobás eredménye 4 vagy 5}\} \to 2,$$
$$\{\text{a dobás eredménye 6}\} \to 3.$$

Ábrázoljuk az eloszlást és az eloszlásfüggvényt.

**6221** Egy dobozban 4 almazöld, 3 kék, 2 piros és 1 fekete golyó van. Valószínűségi kísérlet az, hogy húzunk egy golyót, és felírjuk a színét. Ábrázoljuk a valószínűségi változó eloszlását és eloszlásfüggvényét, ha a változó

*a)* a fenti sorrendben rendeli az 1, 2, 3, 4 értékeket a színekhez;

*b)* a színek ábécérendjében rendeli az eseményekhez az 1, 2, 3, 4 értékeket;

*c)* a golyók dobozban való előfordulásainak megfelelő számot rendel a színekhez. (Feltesszük, hogy minden golyót egyenlő valószínűséggel húzunk ki a dobozból.)

## Vegyes feladatok

**6222** Egy kosárlabda-mérkőzés lelkes közönségét 623 férfi és 377 nő alkotja. A televízióban 20 alkalommal vágják be véletlenszerűen a közönség egy-egy tagját (egy főt akár többször is).

*a)* Mi a valószínűsége annak, hogy a 20 bejátszásból 7 alkalommal mutatnak nőt?

*b)* Mi várható, hány férfi fog feltűnni a képernyőn?

*c)* Adjuk meg az $]m - \sigma; m + \sigma[$ intervallumot, ahol $m$ a képernyőn megjelenő urak számának várható értéke, $\sigma$ pedig a szórása.

**6223** Legyen $\xi$ valószínűségi változó esetén $m = 5$, $\sigma = 1$. Becsüljük meg, hogy mennyi

*a)* $P(|\xi - 5| \geq 2)$; *b)* $P(|\xi - 5| < 1{,}5)$.

**6224** A karácsonyfadíszek egyesével csomagolva egy nagy dobozban vannak. Közülük véletlenszerűen választva 0,2 valószínűséggel veszünk ki piros gömböt. Azt is tudjuk, hogy a díszek fele gömb.

*a)* Mennyi a valószínűsége annak, hogy piros díszt veszünk elő, ha a dísz gömb?

*b)* 120 díszünk van összesen. Ha tudjuk, hogy a piros színű dísz és a gömb alakú dísz kiválasztásának eseménye független egymástól, akkor hány piros díszünk van a csomagban?

# Megoldások




Sorozatok 44

Függvények tulajdonságai 56

Differenciálszámítás 77

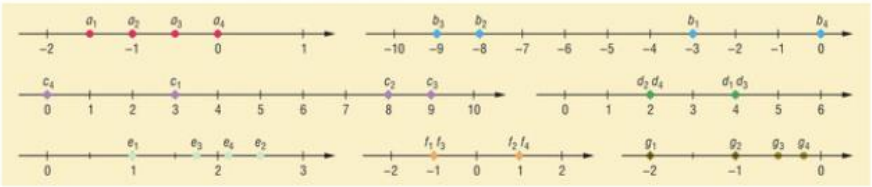
Integrálszámítás 106

Valószínűségszámítás 134

# SOROZATOK

## A sorozat fogalma – megoldások

**6001** *a)* $a_1 = -1{,}5$, $a_2 = -1$, $a_3 = -0{,}5$, $a_4 = 0$;
*b)* $b_1 = -3$, $b_2 = -8$, $b_3 = -9$, $b_4 = 0$;
*c)* $c_1 = 3$, $c_2 = 8$, $c_3 = 9$, $c_4 = 0$;
*d)* $d_1 = 4$, $d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 2$;
*e)* $e_1 = 1$, $e_2 = 2{,}5$, $e_3 = 1{,}75$, $e_4 = 2{,}125$;
*f)* $f_1 = -1$, $f_2 = 1$, $f_3 = -1$, $f_4 = 1$;
*g)* $g_1 = -2$, $g_2 = -1$, $g_3 = -0{,}5$, $g_4 = -0{,}2$.




**6002** *a)* $a_4 = 6$, $a_7 = 6$;
*b)* $b_2 = -3$, $b_3 = 3$;
*c)* $c_6 = -128$, $c_{11} = -4096$;
*d)* $d_1 = 1$, $d_5 = 81$;
*e)* $e_2 = 2$, $e_3 = 4$;
*f)* $f_3 = 10$, $f_5 = 40$ vagy $f_3 = -10$, $f_5 = -40$.

## A sorozatok tulajdonságai I. Korlátosság és monotonitás – megoldások

**6003** *a)* A sorozat szigorúan monoton növekvő, mert bármely $n$ ($\in \mathbb{Z}$)-re:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}(n+1) - 7 - \left(\frac{2}{3}n - 7\right) = \frac{2}{3} > 0.$$

A sorozat alulról korlátos, mert $a_n \geq a_1 = -\frac{19}{3}$, felülről nem korlátos.

*b)* A sorozat szigorúan monoton csökkenő, mert bármely $n$ ($\in \mathbb{Z}$)-re:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{4}{7} - \frac{3(n+1)}{4} - \left(\frac{4}{7} - \frac{3n}{4}\right) = -\frac{3}{4} < 0.$$

A sorozat felülről korlátos, mert $b_n \leq b_1 = -\frac{5}{28}$, alulról nem korlátos.

*c)* Ha $n \geq 2$, a sorozat monoton növekszik, mert:

$$c_{n+1} - c_n = \frac{4 + 3(n+1)}{7 - 4(n+1)} - \frac{4 + 3n}{7 - 4n} = \frac{37}{(4n-3)(4n-7)} > 0.$$

A sorozat korlátos, mert $-10 = c_2 \leq c_n \leq c_1 = \frac{7}{3}$.

*d)* Ha $n \geq 4$, a sorozat monoton csökkenő, mert:

$$d_{n+1} - d_n = \frac{3(n+1)-5}{(n+1)^2+1} - \frac{3n-5}{n^2+1} = \frac{-3n^2+7n+8}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0.$$

A sorozat korlátos, mert $-1 = d_1 \leq d_n \leq d_4 = \frac{7}{17}$.

*e)* A sorozat szigorúan monoton növekvő, mivel $\frac{n+1}{n} > 1$, és

$$e_{n+1} - e_n = 2 + \lg(n+1) - (2 + \lg n) = \lg(n+1) - \lg n = \lg\frac{n+1}{n} > 0.$$

A sorozat alulról korlátos, mert $2 = e_1 \leq e_n$, felülről nem korlátos.

*f)* Ha $n \geq 2$, a sorozat monoton növekvő, mert:

$$f_{n+1} - f_n = 2(n+1)^2 - 7(n+1) + 9 - (2n^2 - 7n + 9) = 4n - 5 > 0.$$

Mivel $f_n = 2\left(n - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$, a sorozat alulról korlátos, mert $f_n \geq \frac{23}{8}$, felülről nem korlátos.

*g)* Az összeg általános tagja átalakítható:

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}.$$

Ezt felhasználva:

$$g_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}.$$

A sorozat szigorúan monoton növekvő, mert bármely $n$ pozitív egész számra:

$$g_{n+1} - g_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2(n+1)+3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n+5} + \frac{1}{2n+3} = \frac{2}{(2n+5)(2n+3)} > 0.$$

A sorozat korlátos, hiszen $\frac{2}{15} = g_1 \leq g_n < \frac{1}{3}$.

*h)* Mivel a szomszédos tagok ellenkező előjelűek, a sorozat nem monoton.

Vizsgáljuk a sorozat páros és páratlan sorszámú tagjait!

Ha $n$ páros, $h_n = \frac{6n+1}{8n+3}$, amire teljesül, hogy $0 < \frac{6n+1}{8n+3} < \frac{3}{4}$.

Ha $n$ páratlan, $h_n = \frac{-6n-1}{8n+3}$, amire teljesül, hogy $0 > \frac{-6n-1}{8n+3} > -\frac{3}{4}$.

A sorozat korlátos, hiszen $-\frac{3}{4} < h_n < \frac{3}{4}$.

**6004** Végezzük indirekt módon a bizonyítást. Tegyük fel, hogy a sorozat felülről korlátos, azaz létezik $K$, amelyre minden pozitív egész $n$ esetén $\log_2 n \leq K$.

Ez azonban azt jelenti, hogy $n \leq 2^K$, ez pedig ellentmondás. Tehát a sorozat felülről nem korlátos.

**6005** *a)* A bal végpontok nőnek, de nem lesznek nagyobbak 2-nél. A jobb végpontok csökkennek, de nem lesznek kisebbek 3-nál. Közös rész a $[2; 3]$. Az intervallumok egymásba ágyazottak.

*b)* Nincs közös rész, és nem is egymásba ágyazottak.

*c)* A bal végpontok csökkennek, közülük az első a legnagyobb: 2. A jobb végpontok is csökkennek, de nem mennek 2 alá. Egyetlen közös pont a 2. Nem egymásba ágyazottak.

*d)* Nem egymásba ágyazottak, és nincs közös pont.

*e)* Nem egymásba ágyazottak, közös részük $]-1; 1[$.

*f)* Egymásba ágyazottak, közös pont a 10.

*g)* Egymásba ágyazottak, közös pont nincs.

*h)* Egymásba ágyazottak, közös pont a 10.

**6006** Mindhárom esetben a szomszédos tagok hányadosát vizsgáljuk, megtehetjük, mert a sorozatok tagjai pozitív számok.

*a)* A sorozat szigorúan monoton növő, mert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+6)!}{5^{n+1}}}{\frac{(n+5)!}{5^n}} = \frac{n+6}{5} > 1.$$

*b)* A sorozat a 3. tagtól csökken, mert

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5}{5} < 1, \quad \text{ha} \quad n > \frac{1}{\sqrt[5]{5}-1} \approx 2{,}63.$$

*c)* A sorozat szigorúan monoton növő, mert

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(n+4)!}{n!}}{\frac{(n+3)!}{(n-1)!}} = \frac{n+4}{n} = 1+\frac{4}{n} > 1.$$

**6007** A feltétel szerint:

$$a_n + a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n)^2.$$

Kifejtve és rendezve az alábbi másodfokú egyenlet adódik:

$$a_{n+1}^2 - (2a_n + 1) \cdot a_{n+1} + (a_n^2 - a_n) = 0.$$

A növekedés miatt csak a következő megoldás felel meg:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1 + \sqrt{8a_n + 1}}{2}.$$

Az $a_{n+1}$ akkor lesz természetes szám, ha $8a_n + 1$ páratlan négyzetszám, legyen:

$$8a_n + 1 = (2k+1)^2, \quad \text{ebből} \quad a_n = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Tehát a sorozat a következő természetes számokból áll:

$$\frac{1 \cdot 2}{2}, \ \frac{2 \cdot 3}{2}, \ \frac{3 \cdot 4}{2}, \ \ldots, \ \frac{k(k+1)}{2}, \ \ldots$$

# A sorozatok tulajdonságai II. A határérték fogalma – megoldások

**6008** *a)* $]4; 8[$; *b)* $]-2; 0[$; *c)* $]-0{,}9; 5{,}5[$;
*d)* $]-1; 2\sqrt{5}+1[$; *e)* $P=3{,}3;\ \varepsilon=1{,}3$; *f)* $P=4{,}5;\ \varepsilon=0{,}8$;
*g)* $P=0{,}9;\ \varepsilon=2{,}7$; *h)* $P=-3{,}85;\ \varepsilon=1{,}15$.

**6009** Például az $a_n=10+\frac{(-1)^n}{n^2}$ sorozat.

**6010** *a)* $\left|\frac{n-3}{n+2}-1\right|<\varepsilon$-ból $\left|\frac{-5}{n+2}\right|<\varepsilon$, $\frac{5}{n+2}<\varepsilon$, majd $5-2\varepsilon<n\varepsilon$. Innen $\frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon}<n$. Behelyettesítve $\varepsilon=0{,}1$-et $48<n$, tehát $N=48$.

*b)* A sorozatnak a nevező miatt nincs 10. tagja, ezért elegendő az $n>10$ tagokat vizsgálni. $\left|\frac{5n^2+20}{n^2-100}-5\right|<\varepsilon$-ból $\left|\frac{520}{n^2-100}\right|<\varepsilon$. Ha $n>10$, akkor $\frac{520}{n^2-100}<\varepsilon$, azaz $520+100\varepsilon<n^2\varepsilon$.

Innen adódik: $\sqrt{\frac{520+100\varepsilon}{\varepsilon}}<n$. Behelyettesítve $\varepsilon=0{,}01$-et $228{,}25<n$, tehát $N=228$.

*c)* $\left|\sqrt[2n]{7}-1\right|<\varepsilon$-ból $\sqrt[2n]{7}<1+\varepsilon$, majd $7<(1+\varepsilon)^{2n}$. Innen $\log_{1+\varepsilon}7<2n$ és $0{,}5\cdot\log_{1+\varepsilon}7<n$. Behelyettesítve $\varepsilon=3\cdot10^{-3}$-at: $324{,}8<n$, tehát $N=324$.

**6011** *a)* A sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Az $\left|\frac{7}{2n+3}\right|<\frac{1}{1000}$ egyenlőtlenség megoldásával adódik: $n>3498{,}5$. Tehát a küszöbszám: $N=3498$.

*b)* A sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{5}{4}$.

Az $\left|\frac{5n-3}{4n+1}-\frac{5}{4}\right|<\frac{1}{1000}$ egyenlőtlenségből $\frac{17}{16n+4}<\frac{1}{1000}$ adódik, aminek a megoldása: $n>1062{,}25$. Tehát a megfelelő küszöbszám: $N=1062$.

*c)* A sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=-\frac{3}{7}$.

Az $\left|\frac{5-3n}{7n-2}+\frac{3}{7}\right|<\frac{1}{1000}$ egyenlőtlenségből a következőket kapjuk: $\frac{29}{49n-14}<\frac{1}{1000}$, ennek a megoldása: $n>592{,}12$. Tehát a megfelelő küszöbszám: $N=592$.

*d)* A sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$.

Az $\left|\frac{n-11}{n^2+4n+3}\right|<\frac{1}{1000}$ egyenlőtlenségből, mivel a nevező pozitív, ha $n>11$, a következő adódik: $0<n^2-996n+11003$, ennek megoldásaiból: $n\geq984{,}8$. Tehát a küszöbszám: $N=984$.

*e)* A sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 1$.

Az $\left|\frac{n^2-4n+3}{n^2-n-2}-1\right| < \frac{1}{1000}$ egyenlőtlenséget átalakítva: $\left|\frac{-3n+5}{n^2-n-2}\right| < \frac{1}{1000}$, ha $n > 2$, akkor $\frac{3n-5}{n^2-n-2} < \frac{1}{1000}$, ahonnan: $0 < n^2 - 3001n + 4998$. Ebből: $n \geq 2999{,}3$. Tehát: $N = 2999$.

**6012** *a)* A sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2010}{3n+1} = 0$.

Az $\left|\frac{2010}{3n+1}\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenség megoldása: $n > \frac{2010-\varepsilon}{3\varepsilon}$. Így a küszöbszám: $N = \left[\frac{2010-\varepsilon}{3\varepsilon}\right]$.

*b)* A sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{11n+5}{7n-3} = \frac{11}{7}$.

Az $\left|\frac{11n+5}{7n-3}-\frac{11}{7}\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenség megoldása: $n > \frac{68+21\varepsilon}{49\varepsilon}$.

Tehát a küszöbszám: $N = \left[\frac{68+21\varepsilon}{49\varepsilon}\right]$.

*c)* A sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n+5}{3n^2+2n+3} = \frac{1}{3}$.

Az $\left|\frac{n^2-n+5}{3n^2+2n+3}-\frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Elvégezve az összevonást $\left|\frac{-5n+12}{9n^2+6n+9}\right| < \varepsilon$ adódik. Ha $n > 3$, akkor az $\frac{5n-12}{9n^2+6n+9} < \varepsilon$ másodfokú paraméteres egyenlőtlenséghez jutunk. Megoldható a másodfokú egyenlőtlenség is, de van más út:

$$\frac{5n-12}{9n^2+6n+9} < \frac{5n}{9n^2+6n+9} < \frac{5n}{9n^2+6n} = \frac{5}{9n+6},$$

ha teljesül az $\frac{5}{9n+6} < \varepsilon$ egyenlőtlenség, akkor az eredeti is teljesül. Ez utóbbinak a megoldása: $n > \frac{5-6\varepsilon}{9\varepsilon}$. Tehát a megfelelő küszöbszám: $N = \left[\frac{5-6\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$.

**6013** *a)* A sorozat periodikus: $a_n = a_{n+22}$. Az első 22 tag különböző, majd mindből végtelen sok követi, tehát bármilyen valós érték tetszőleges kicsi környezetén kívül a sorozatnak végtelen sok tagja van, ami azt jelenti, hogy nem konvergens.

*b)* A sorozat páros sorszámú tagjai:

$$b_n = \frac{6n+1}{8n+3} \to \frac{3}{4}.$$

A páratlan sorszámú tagok:

$$b_n = \frac{-6n-1}{8n+3} \to -\frac{3}{4}.$$

Tehát a sorozat nem konvergens.

**6014** Például a következő sorozat:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{2}{n}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

# A sorozatok tulajdonságai III. Konvergens sorozatok tulajdonságai – megoldások

**6015** *a)* Vizsgáljuk a sorozat monotonitását. Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ számra:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-6}{n+1} - \frac{2n-6}{n} = \frac{2n^2 - 4n - 2n^2 - 2n + 6n + 6}{n(n+1)} = \frac{6}{n(n+1)} > 0,$$

tehát a sorozat monoton növő.

Lássuk a konvergenciát! Sejtésünk, hogy $A = 2$:

$$\left|\frac{2n-6}{n} - 2\right| < \varepsilon, \quad \text{majd} \quad \frac{6}{\varepsilon} < n \quad \Rightarrow \quad N = \left[\frac{6}{\varepsilon}\right].$$

A sorozat határértéke 2. Határai: $H = 2$, $h = a_1 = -4$.

*b)* Vizsgáljuk a sorozat monotonitását. Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ $(n \neq 99, n \neq 100)$ számra:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+21}{n-99} - \frac{n+20}{n-100} = \frac{n^2 + 21n - 100n - 2100 - n^2 - 20n + 99n + 1980}{(n-99)(n-100)} =$$

$$= -\frac{120}{(n-99)(n-100)} < 0,$$

Ha $n < 100$, akkor a sorozat tagjai negatívak és a sorozat monoton csökkenő; $n > 100$ esetén a sorozat tagjai pozitívak és a sorozat monoton csökkenő. (A sorozatnak nincs 100. tagja.)

Lássuk a konvergenciát! Sejtésünk, hogy $B = 1$:

$$\left|\frac{n+20}{n-100} - 1\right| < \varepsilon, \quad \text{majd} \quad \frac{120 + 100\varepsilon}{\varepsilon} < n \quad \Rightarrow \quad N = \left[\frac{120 + 100\varepsilon}{\varepsilon}\right].$$

Valóban $B = 1$. Így határai: $h = b_{99} = -119$, $H = b_{101} = 121$.

*c)* A sorozat monoton csökkenő, ugyanis bármely $n \in \mathbb{N}^+$ számra:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{0{,}2^{n+1}}{0{,}2^n} = 0{,}2 < 1.$$

Határértéke sejtésünk szerint $C = 0$:

$$|0{,}2^n - 0| < \varepsilon, \quad 0{,}2^n < \varepsilon \quad \text{és} \quad n > \log_{0,2}\varepsilon, \quad C = 0.$$

Tehát határai: $h = 0$, $H = c_1 = 0{,}2$.

*d)* A sorozat monoton növő, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}^+$ számra:

$$\sqrt[n+1]{0{,}9} > \sqrt[n]{0{,}9}.$$

Ugyanis

$$0{,}9 > 0{,}9 \cdot \sqrt[n]{0{,}9} \quad \Rightarrow \quad 1 > \sqrt[n]{0{,}9}.$$

Határértéke $D = 1$:

$$\left|\sqrt[n]{0{,}9} - 1\right| < \varepsilon, \quad (1-\varepsilon)^n < 0{,}9, \quad n > \log_{1-\varepsilon} 0{,}9.$$

Tehát határai: $H = 1$, $h = d_1 = 0{,}9$.

*e)* Mivel a sorozat nem konstans és a koszinuszfüggvény periodikus, ezért a sorozat nem monoton.

A sorozat periodikussága kizárja a konvergenciát.

A sorozat korlátos, hiszen a koszinuszfüggvény értékkészlete $[-1; 1]$. A szélső értékeket a sorozat fel is veszi, így $H = 1$ és $h = -1$.

*f)* A sorozat nem monoton, hiszen minden tagja ellenkező előjelű, mint az utána jövő.

A sorozat konvergens, ugyanis $\frac{1}{n^2} \to 0$. Gondoljuk meg: ha egy 0-hoz tartó sorozat tetszőleges tagjainak előjelét megváltoztatjuk, az a 0-hoz való konvergenciát nem befolyásolja. Hiszen ha a 0 egy környezetébe beleesik valamelyik tag, akkor azt tükrözve a 0-ra (ellenkező előjelét véve), az is bele fog esni a szimmetrikus környezetbe.

A sorozat korlátos, mégpedig $H = f_2 = 0{,}25$ és $h = f_1 = -1$.

*g)* A sorozat nem monoton, hiszen minden tagjával előjelet vált.

A sorozat nem konvergens, hiszen tagjai nem közelítenek valamely érték felé, hanem épp ellenkezőleg, bizonyos tagtól kezdve egyre távolodnak bármely értéktől.

A sorozat nem korlátos, hiszen a páros indexű tagok minden határon túl nőnek, a páratlan indexű tagok pedig minden határon túl csökkennek.

## Nevezetes sorozatok határértékei I. – megoldások

**6016** *a)* $\frac{13}{9}$; *b)* $\frac{212}{99}$; *c)* $\frac{3211}{999}$; *d)* $\frac{43210}{9999}$.

**6017** Fejtsük le a számból az ismétlődő szakaszt:

$$A = 52{,}26 + 1565 \cdot 10^{-6} + 1565 \cdot 10^{-10} + 1565 \cdot 10^{-14} + \dots$$

Az első tag utáni összeg végtelen mértani sor: $a_1 = 1565 \cdot 10^{-6}$ és $q = 10^{-4}$.

Mivel $0 < q < 1$:

$$S = \frac{1565}{10^6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^4}} = \frac{1565}{999900},$$

majd

$$A = \frac{5226}{100} + \frac{1565}{999900} = \frac{52254774 + 1565}{999900} = \frac{52256339}{999900}.$$

**6018** Tekintsük a tört egészrészét (3) és a tizedeseket:

$$A = 3 + 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \dots$$

Ebben a végtelen sorban a mértani sor rész a 3 utáni, itt $a_1 = 9 \cdot 10^{-1}$ és $q = 10^{-1}$ $(0 < q < 1)$.

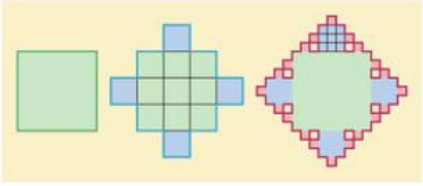
Ekkor:

$$S = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{10} = 1.$$

Tehát az összeg által jelölt szám 3 + 1 = 4.

*Megjegyzés:* Azért a 9-es számjegy esetén „vált" a szám, mert ez az utolsó jegy a 10-es számrendszerben. Ötös számrendszerben pl. 2,44444… = 3.

**6019** Készítsünk ábrát! Az első három lépés ábrája a következő:



Tegyük fel, hogy a kiinduló négyzet oldala és területe is 1 egység. Figyeljük meg, hogy minden lépésben egy szakaszból öt újabb határolószakasz keletkezik, harmad hosszúsággal.

Így a kerület:

$$K_1 = 4, \quad K_2 = 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3}, \quad K_3 = 4 \cdot 5^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2, \quad \dots$$

Szebben írva:

$$\lim_{n\to\infty} 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} = \infty.$$

A területe:

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 1 + 4 \cdot \frac{1}{9}, \quad T_3 = 1 + 4 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2, \quad \dots$$

Általában:

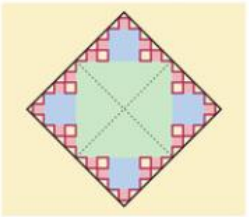
$$T_n = 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \dots + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}.$$

Innen a végső alakzat területe:

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \dots + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}\right] = 1 + \frac{4}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{5}{9}\right)^i = 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{9}} = 2.$$

Ezt az eredményt szemléletünkre támaszkodva is megsejthettük volna, ha feltesszük, hogy a növekedő alakzat kitölti a nagy négyzetet.

Így viszont felhasználhatjuk annak igazolására, hogy a növekedő alakzat *valóban* kitölti a nagy négyzetet.



## Nevezetes sorozatok határértékei II. Műveletek konvergens sorozatokkal – megoldások

6020 *a)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n+3}{11n-7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8+\frac{3}{n}}{11-\frac{7}{n}} = \dfrac{8}{11}$;

*b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-5n}{9n-22} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{4}{n}-5}{9-\frac{22}{n}} = -\dfrac{5}{9}$;

*c)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7}{2n^2-5n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{7}{n^2}}{2-\frac{5}{n}} = 0$;

*d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{13n^2-4n+1}{7n+100} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{13n-4+\frac{1}{n}}{7+\frac{100}{n}} = \infty$;

*e)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{245n+312}{n^2-4n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{245}{n}+\frac{312}{n^2}}{1-\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}} = 0$;

*f)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^2+5n+4}{3n^2-7n+11} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{3-\frac{7}{n}+\frac{11}{n^2}} = \dfrac{8}{3}$;

*g)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^3+1)^2}{1+n^6} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^6+2n^3+1}{1+n^6} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}+1} = 1$;

*h)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+5+9+\ldots+(4n-3)}{13n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(4n-2)n}{2}}{13n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n}{13n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{n}}{13}=\dfrac{2}{13};$

*i)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}.$

**6021** *a)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+10}-\sqrt{3n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{3n+10}-\sqrt{3n}\right)\left(\sqrt{3n+10}+\sqrt{3n}\right)}{\sqrt{3n+10}+\sqrt{3n}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10}{\sqrt{3n+10}+\sqrt{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{10}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3+\frac{10}{n}}+\sqrt{3}}=\dfrac{0}{2\sqrt{3}}=0;$

*b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-6}-2n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4n^2-6}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2-6}+2n\right)}{\sqrt{4n^2-6}+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-6}{\sqrt{4n^2-6}+2n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{-6}{n}}{\sqrt{4-\frac{6}{n^2}}+2}=\dfrac{0}{2+2}=0;$

*Megjegyzés:* A megoldásban felhasználtuk azt az egyszerű tételt, hogy ha $K\in\mathbb{R}$ és $|a_n|\to\infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{K}{a_n}=0.$

*c)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{2+\dfrac{8}{n}}-\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+\dfrac{8}{n}}-\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}\right)=\infty\cdot(2-1)=\infty;$

*d)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{2}.$

**6022** *a)* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{8n+1}}=0;$ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n^2+2}{n^2+5}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}}=1;$

*c)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n+5}}{1+\sqrt{9n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{5}{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{9+\dfrac{1}{n}}}=\dfrac{2}{3}$;

*d)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3\cdot\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{25n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-3\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}}{\sqrt{25+\dfrac{1}{n^2}}}=-\dfrac{1}{5}$.

**6023** *a)* $\left\{\sqrt[n]{10^n+324}\right\}\to 10$; *b)* $\dfrac{\left(\sqrt[n]{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt[n]{3}+1\right)}{\sqrt[n]{3}-1}=\sqrt[n]{3}+1\to 2$.

*c)* Használjuk fel az $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ azonosságot:

$$\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-4}=\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-4}\right)\cdot\left[\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2+\sqrt[3]{(n+2)(n-4)}+\left(\sqrt[3]{n-4}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2+\sqrt[3]{(n+2)(n-4)}+\left(\sqrt[3]{n-4}\right)^2}=$$

$$=\frac{n+2-(n-4)}{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2+\sqrt[3]{(n+2)(n-4)}+\left(\sqrt[3]{n-4}\right)^2}=\frac{6}{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2+\sqrt[3]{(n+2)(n-4)}+\left(\sqrt[3]{n-4}\right)^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{6}{\sqrt[3]{n^2}}}{\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\dfrac{4}{n}\right)}+\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{4}{n}}\right)^2}\to 0.$$

*d)* Az előző azonosság felhasználásával:

$$\sqrt[3]{n^2-n^3}+n=n-\sqrt[3]{n^3-n^2}=\frac{n^2}{n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n}}+\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2}}\to\frac{1}{3};$$

*e)* Tetszőleges $k$ pozitív egész szám és tetszőleges $a>1$ valós szám esetén:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0,\quad \text{ezért}\quad \left\{\frac{n^{2010}}{2^n}\right\}\to 0.$$

*f)* Ha $a>0$ valós szám, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$. Mivel

$$\frac{10^{100n}}{n!}=\frac{\left(10^{100}\right)^n}{n!},$$

ezért

$$\left\{\frac{10^{100n}}{n!}\right\}\to 0.$$

**6024** Elég belátnunk, hogy a $\left\{\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right\}$ sorozat határértéke 0.

Ha $a \neq 0$, akkor mivel a számláló 0-hoz, a nevező $2\sqrt{a}$-hoz tart:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}=0.$$

Ha $a=0$, akkor indirekt úton vagy a definíció segítségével belátható az állítás.

**6025** Be kell látnunk, hogy bármely $K\in\mathbb{R}$ számhoz létezik $N\in\mathbb{Z}^+$ küszöbszám, amelyre ha $n>N$, akkor $a_n>K$. Azaz:

$$\frac{n^2-8n-28}{100n+593}>K.$$

Ha $n>28$ és $n>593$, a következő becsléseket végezhetjük el:

$$\frac{n^2-8n-28}{100n+593}>\frac{n^2-8n-n}{100n+593}>\frac{n^2-9n}{100n+n}=\frac{n^2-9n}{101n}=\frac{n-9}{101},$$

így $a_n>\frac{n-9}{101}>K$. Az $\frac{n-9}{101}>K$ egyenlőtlenség megoldása: $n>101K+9$.

Tehát a megfelelő küszöbszám: $N=[101K+9]$.

**6026** *a)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{-3}=e\cdot 1=e;$

*b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^n=e^{-5}=\frac{1}{e^5};$

*c)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right]^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{6}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n}}=\frac{e^6}{e^2}=e^4.$

## Vegyes feladatok – megoldások

**6027** *a)* $]1;5[$; *b)* $]-10{,}001;-9{,}999[$; *c)* $\left]\frac{54}{7};\frac{58}{7}\right[$;

*d)* $P=12{,}9;\ \varepsilon=0{,}3$; *e)* $P=0{,}65;\ \varepsilon=1{,}15$; *f)* $P=\frac{76}{35};\ \varepsilon=\frac{34}{35}$.

**6028** *a)* A sorozat szigorúan monoton növő, mivel

$$a_n=5n+1<5(n+1)+1=a_{n+1},$$
$$0<5.$$

A sorozat alulról korlátos, hiszen pont a növekedés miatt $h=a_1=6$. A sorozat felülről nem korlátos. Tegyük fel indirekt, hogy létezik $K$ valós szám, amire minden $n$-re $a_n=5n+1\le K$. Átalakítva $n\le\frac{K-1}{5}$, ami egy idő után biztosan nem teljesül, hiszen $n$ minden határon túl növekszik.

*b)* A sorozat szigorúan monoton csökkenő:

$$b_n = \frac{12}{7n} > \frac{12}{7(n+1)} = b_{n+1},$$

$$1 > 0.$$

A sorozat korlátos, ugyanis pont a csökkenés miatt $H = b_1 = \frac{12}{7}$. Ugyanakkor mivel minden tagja pozitív, alulról korlátozza a nulla (melyet minden határon túl meg is közelít): $h = 0$.

*c)* A sorozat tagjai periodikusan ismétlődnek (van köztük pozitív is, negatív is), tehát nem lehet monoton.

A periodikus ismétlődés miatt a sorozat biztosan korlátos, mégpedig $H = 1$ és $h = -1$.

**6029** *a)* Sejtésünk az $A = 3$. Írjuk fel a definíciót:

$$\left|\frac{3n-6}{n+5} - 3\right| = \left|\frac{-21}{n+5}\right| = \frac{21}{n+5} < \varepsilon,$$

$$21 < (n+5)\varepsilon,$$

$$\frac{21-5\varepsilon}{\varepsilon} < n.$$

Tehát az $A = 3$ $\varepsilon$ sugarú környezetébe a sorozat $N = \left[\frac{21-5\varepsilon}{\varepsilon}\right]$-edik indexű tagjától esnek a sorozat tagjai.

*b)* Sejtésünk $B = 0$. Írjuk fel a definíciót:

$$\left|\frac{n+2}{n^2-25} - 0\right| = \left|\frac{n+2}{n^2-25}\right| = \frac{n+2}{n^2-25} < \varepsilon, \quad \text{(ha } n > 5\text{)}$$

$$n + 2 < (n^2 - 25)\varepsilon,$$

$$0 < \varepsilon n^2 - n - 2 - 25\varepsilon.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai $n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon \cdot (2 + 25\varepsilon)}}{2\varepsilon}$. Tehát a $B = 0$ $\varepsilon$ sugarú környezetbe a sorozat $N = \left[\frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon \cdot (2 + 25\varepsilon)}}{2\varepsilon}\right]$-edik indexű tagjától esnek a sorozat tagjai ($\varepsilon > 0$).

**6030** *a)* A sorozat monoton csökkenő, $A = 2$, $H = a_1 = \frac{16}{3}$, $h = A = 2$.

*b)* A sorozat monoton növő, $A = 1$, $H = A = 1$, $h = a_1 = -\frac{4}{11}$.

*c)* A sorozat monoton csökkenő, $A = 0$, $H = a_1 = 0{,}99$, $h = A = 0$.

*d)* A sorozat monoton növő, $A = \sqrt{e}$, $h = a_1 = 1{,}5$, $H = \sqrt{e}$.

**6031** *a)* 0; *b)* $-0{,}5$; *c)* $\infty$.

**6032** A keletkezett alakzat területe:

$$T = 1 - \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 - \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \ldots = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{9}\right)^{2i} - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{9}\right)^{2i-1} = \frac{81}{80} - \frac{9}{80} = \frac{72}{80} = \frac{9}{10}.$$

# FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

## Függvények, érdekes függvények, ábrázolásuk és alapvető tulajdonságaik – megoldások

6033 *a)* $f(x) = x^2$; *b)* $g(x) = x$; *c)* $h(x) = x - 2$; *d)* $i(x) = 0$.

6034 *a)* Ha $f$ és $g$ páros, akkor

$$F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = F(x).$$

Ha $f$ és $g$ páratlan, akkor

$$F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot (-g(x)) = F(x).$$

*b)* Tegyük fel, hogy $f$ páros és $g$ páratlan:

$$F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x) = -F(x).$$

*c)* Tegyük fel, hogy az $f$ és $g$ függvény $p$ szerint periodikus:

$$F(x + p) = f(x + p) \cdot g(x + p) = f(x) \cdot g(x) = F(x).$$

*d)* Egyik állítás megfordítása sem igaz. Ha $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ páros/páratlan/periodikus, abból nem következik, hogy $f$ és $g$ paritása azonos/különböző, illetve hogy periodikusak.

Például legyen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \neq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad x = 1; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \neq 1, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 1. \end{cases}$$

Ekkor $F(x)$ szorzatfüggvényük konstans 0, ami egyszerre páros, páratlan és periodikus is, bár sem $f$, sem $g$ nem páros, nem páratlan és nem is periodikus.

*e)* Nem igaz. Ugyanis tegyük fel, hogy $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, és $f(x)$ is $p$ szerint periodikus, azaz

$$F(x) = F(x + p) = f(x + p) \cdot g(x + p) = f(x) \cdot g(x + p).$$

A fenti sor elejét és végét összevetve azt kapjuk, hogy

$$f(x) \cdot g(x + p) = f(x) \cdot g(x).$$

Ebből arra következtethetnénk, hogy leosztva $f(x)$-szel, $g(x + p) = g(x)$ adódik. Azonban tudjuk, hogy ismeretlen kifejezésekkel nem oszthatunk!

Például ha $f$ az adott $x$ pontban zérus, akkor az, hogy $x + p$-ben is periodikus, nem érdekes, ugyanis:

$$0 \cdot g(x + p) = 0 \cdot g(x),$$

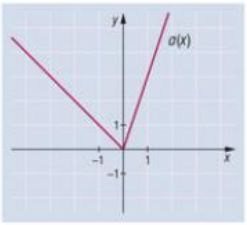
valóban teljesül, csakhogy $g(x)$ és $g(x + p)$ értékétől teljesen függetlenül! Tehát ezeken a helyeken $g$ bárhogy viselkedhet, nem kell periodikusnak lennie. Lehetséges, hogy

$$g(x) \neq g(x + p).$$

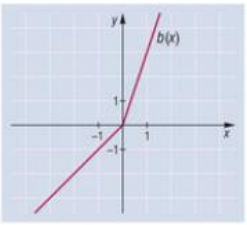
Mivel ez a probléma csak és kizárólag az $f(x) = 0$ helyeken jelentkezik, elegendő azt kikötnünk, hogy pl. közös értelmezési tartományukon $f(x)$ sehol sem egyenlő 0-val. Így az osztás elvégezhető, és valóban: $g(x + p) = g(x)$, tehát $g$ is $p$ szerint periodikus.

**6035** A feladatok során $k \in \mathbb{Z}$, $h$ az alsó határt (legnagyobb alsó korlátot), $H$ a felső határt (legkisebb felső korlátot) jelöli. A monotonitás az utolsó feladatot kivéve szigorú. A szélsőértékeknek először a helyét ($x$), majd az értékét ($y$) adjuk meg. Külön jelöljük, ha a szélsőérték helyi.

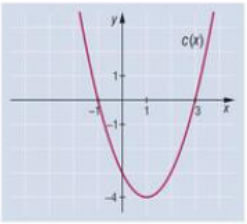
*a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R}_0^+$;
zérushely: $x = 0$;
monoton csökkenő: $x \in ]-\infty; 0]$;
monoton növő: $x \in [0; \infty[$;
korlátosság: csak alulról, $h = 0$;
minimum: $x = 0$, $y = 0$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



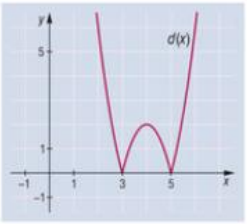

*b)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$;
zérushely: $x = 0$;
monoton csökkenő: nem;
monoton növő: $\mathbb{R}$;
korlátosság: nem;
minimum: nincs;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.




*c)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [-4; \infty[$;
zérushely: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$;
monoton csökkenő: $x \in ]-\infty; 1]$;
monoton növő: $x \in [1; \infty[$;
korlátosság: csak alulról, $h = -4$;
minimum: $x = 1$, $y = -4$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.

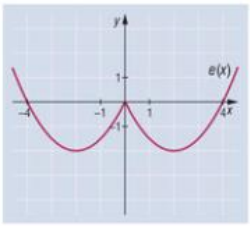



*d)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R}_0^+$;
zérushely: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$;
monoton csökkenő: $x \in ]-\infty; 3] \cup [4; 5]$;
monoton növő: $x \in [3; 4] \cup [5; \infty[$;
korlátosság: csak alulról, $h = 0$;
minimum: $x_1 = 3$, $y_1 = 0$ és $x_2 = 5$, $y_2 = 0$;
maximum: $x = 4$, $y = 2$ (helyi);
periodikusság: nem.



*e)* Átalakítás után:

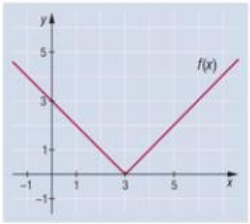
$$e(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-2x, & \text{ha} \quad x\geq 0,\\ \frac{1}{2}x^2+2x, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$




Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}$;
értékkészlet: $y\in[-2;\infty[$;
zérushely: $x_1=-4,\ x_2=0,\ x_3=4$;
monoton csökkenő: $x\in\,]-\infty;-2]\cup[0;2]$;
monoton növő: $x\in[-2;0]\cup[2;\infty[$;
korlátosság: csak alulról, $h=-2$;
minimum: $x_1=-2,\ y_1=-2$ és $x_2=2,\ y_2=-2$;
maximum: $x=0,\ y=0$ (helyi);
periodikusság: nem.

*f)* Átalakítás után:

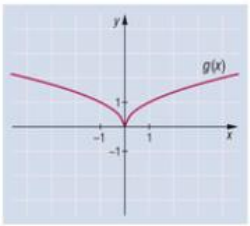
$$f(x)=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|.$$




Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}$;
értékkészlet: $y\in\mathbb{R}_0^+$;
zérushely: $x=3$;
monoton csökkenő: $x\in\,]-\infty;3]$;
monoton növő: $x\in[3;\infty[$;
korlátosság: csak alulról, $h=0$;
minimum: $x=3,\ y=0$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.

*g)* Átalakítás után:

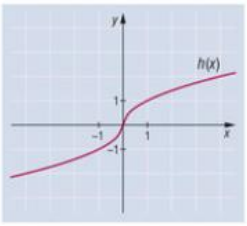
$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{ha} \quad x\geq 0,\\ \sqrt{-x}, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$




Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}$;
értékkészlet: $y\in\mathbb{R}_0^+$;
zérushely: $x=0$;
monoton csökkenő: $x\in\,]-\infty;0]$;
monoton növő: $x\in[0;\infty[$;
korlátosság: csak alulról, $h=0$;
minimum: $x=0,\ y=0$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.

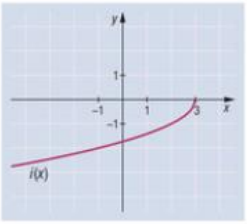
*h)* Átalakítás után:

$$h(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}=\sqrt{x}, & \text{ha} \quad x\geq 0,\\ -\sqrt{|x|}=-\sqrt{-x}, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$

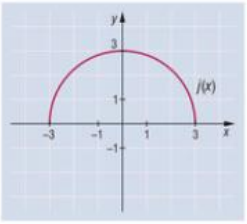



Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}$;
értékkészlet: $y\in\mathbb{R}$;
zérushely: $x=0$;
monoton csökkenő: nem;
monoton növő: $x\in\mathbb{R}$;
korlátosság: nem;
minimum: nincs;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.

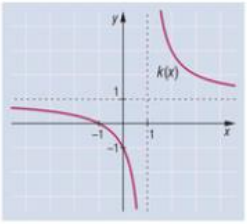
*i)* Értelmezési tartomány: $x\in\left]-\infty;3\right]$;
értékkészlet: $y\in\mathbb{R}_0^-$;
zérushely: $x=3$;
monoton csökkenő: nem;
monoton növő: $x\in\left]-\infty;3\right]$;
korlátosság: csak felülről, $H=0$;
minimum: nincs;
maximum: $x=3,\ y=0$;
periodikusság: nem.



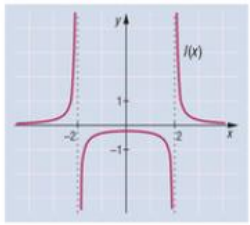

*j)* Értelmezési tartomány: $x\in[-3;3]$;
értékkészlet: $y\in[0;3]$;
zérushely: $x_1=-3,\ x_2=3$;
monoton csökkenő: $x\in[0;3]$;
monoton növő: $x\in[-3;0]$;
korlátosság: igen, $h=0,\ H=3$;
minimum: $x_1=-3,\ y_1=0,\ x_2=3,\ y_2=0$;
maximum: $x=0,\ y=3$;
periodikusság: nem.



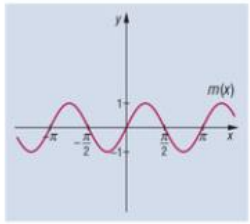

*k)* Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$;
értékkészlet: $y\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$;
zérushely: $x=-1$;
monoton csökkenő: $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;\infty\right[$;
monoton növő: nem;
korlátosság: nem;
minimum: nincs;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



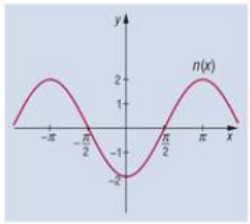
*l)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R}\setminus\left]-0{,}25; 0\right]$;
zérushely: nincs;
monoton csökkenő: $x \in [0; 2[ \cup ]2; \infty]$;
monoton növő: $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]-2; 0]$;
korlátosság: nem;
minimum: nincs;
maximum: $x = 0$, $y = -0{,}25$ (helyi);
periodikusság: nem.



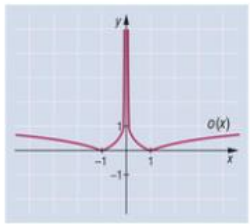

*m)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [-1; 1]$;
zérushely: $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$;
monoton csökkenő: $x \in \left[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right]$;
monoton növő: $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$;
korlátosság: igen, $h = -1$, $H = 1$;
minimum: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = -1$;
maximum: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = 1$;
periodikusság: igen, $p = \pi$.



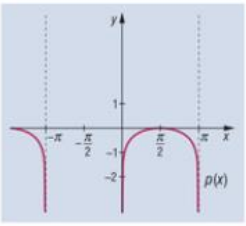

*n)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [-2; 2]$;
zérushely: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$;
monoton csökkenő: $x \in [\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$;
monoton növő: $x \in [2k\pi; \pi + 2k\pi]$;
korlátosság: igen, $h = -2$, $H = 2$;
minimum: $x = 2k\pi$, $y = -2$;
maximum: $x = \pi + 2k\pi$, $y = 2$;
periodikusság: igen, $p = 2\pi$.



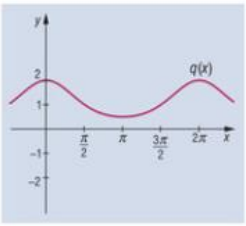

*o)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R}_0^+$;
zérushely: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;
monoton csökkenő: $x \in ]-\infty; -1] \cup ]0; 1]$;
monoton növő: $x \in [-1; 0[ \cup [1; \infty[$;
korlátosság: csak alulról, $h = 0$;
minimum: $x_1 = -1$, $y_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_2 = 0$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



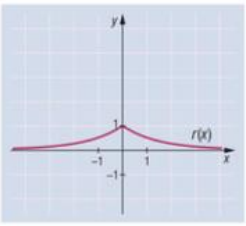
*p)* Értelmezési tartomány: $x \in ]2k\pi;\ \pi + 2k\pi[$;
értékkészlet: $y \in ]-\infty;\ 0]$;
zérushely: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;
monoton csökkenő: $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi\right[$;
monoton növő: $x \in \left]2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$;
korlátosság: csak felülről, $H = 0$;
minimum: nincs;
maximum: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $y = 0$;
periodikusság: igen, $p = 2\pi$.



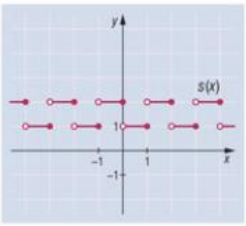

*q)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [0{,}5;\ 2]$;
zérushely: nincs;
monoton csökkenő: $x \in [2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$;
monoton növő: $x \in [\pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi]$;
korlátosság: igen, $h = 0{,}5$, $H = 2$;
minimum: $x = \pi + 2k\pi$, $y = 0{,}5$;
maximum: $x = 2k\pi$, $y = 2$;
periodikusság: igen, $p = 2\pi$.




*r)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in ]0;\ 1]$;
zérushely: nincs;
monoton csökkenő: $x \in [0;\ \infty[$;
monoton növő: $x \in ]-\infty;\ 0]$;
korlátosság: igen, $h = 0$, $H = 1$;
minimum: nincs;
maximum: $x = 0$, $y = 1$;
periodikusság: nem.



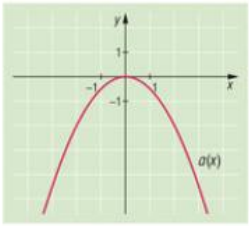

*s)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \{1;\ 2\}$;
zérushely: nincs;
monoton csökkenő: $x \in ]2k;\ 2k + 1] \cup ]2k + 1;\ 2k + 2]$;
monoton növő: $x \in ]2k;\ 2k + 1] \cup ]2k + 1;\ 2k + 2]$;
korlátosság: igen, $h = 1$, $H = 2$;
minimum: $x \in ]2k;\ 2k + 1]$, $y = 1$;
maximum: $x \in ]2k + 1;\ 2k + 2]$, $y = 2$;
periodikusság: igen, $p = 2$.



**6036** *a)* $a(x)$ páros, mivel

$$a(-x) = -\frac{1}{2}(-x)^2 = -\frac{1}{2}x^2 = a(x),$$

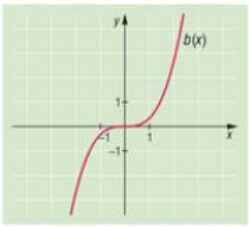
minden $x \in D_a$ esetén.




*b)* $b(x)$ páratlan, mivel

$$b(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 = -\frac{1}{3}x^3 = -b(x),$$

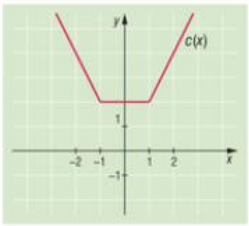
minden $x \in D_b$ esetén.




*c)* $c(x)$ páros, mivel

$$c(-x) = |-x-1| + |-x+1| = |x+1| + |x-1| = c(x),$$

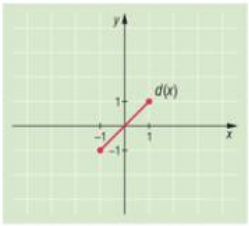
minden $x \in D_c$ esetén.



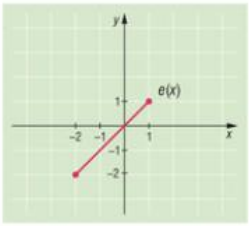

*d)* $d(x)$ páratlan, mivel

$$d(-x) = \frac{(-x)^2 - 3(-x)}{(-x) - 3} = -\frac{x^2 + 3x}{x + 3} = -d(x),$$

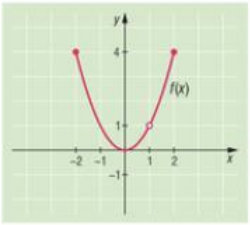
minden $x \in D_d$ esetén.



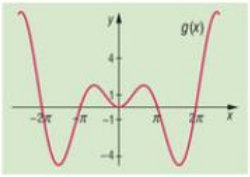

*e)* $e(x)$ nem páros és nem is páratlan, mivel az értelmezési tartománya nem szimmetrikus 0-ra.



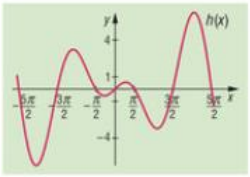
*f)* $f(x)$ nem páros és nem is páratlan, mivel az értelmezési tartománya nem szimmetrikus 0-ra ($x \neq 1$).



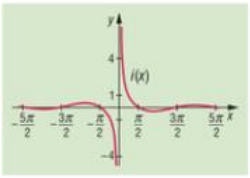

*g)* Mivel mind $y = x$, mind $y = \sin x$ páratlan, ezért $g(x)$ szorzatuk páros.




*h)* Mivel $y = x$ páratlan, és $y = \cos x$ páros, ezért $h(x)$ szorzatuk páratlan.




*i)* Mivel $y = x^{-1}$ páratlan, és $y = \cos x$ páros, ezért $i(x)$ szorzatuk páratlan.




**6037** A feladatokban próbáljuk megsejteni a szélsőértékeket. Segítségül hívhatjuk a próbálgatást, a függvények felvázolt ábráját vagy a nevezetes azonosságokat. Az értékkészletet akkor tudjuk könnyen felírni, amikor a szélsőértéket már meghatároztuk.

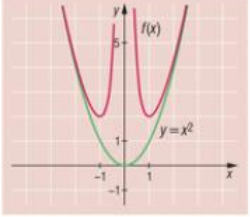
*a)* Az értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Észre kell vennünk, hogy a függvény egy pozitív szám és reciprokának összege:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2,$$

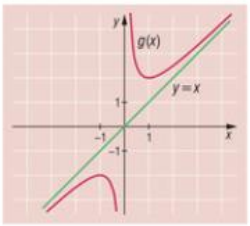
ami átalakítható $x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$, azaz $(x^2 - 1)^2 \geq 0$ formába. Utóbbi természetesen teljesül, egyenlőség pedig pontosan $x^2 = 1$, azaz $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$ helyeken van. A függvénynek itt van minimuma, értéke mindkét esetben $y = 2$.

Értékkészlet: $y \in [2; \infty[$.

A függvény alulról korlátos, $h = 2$.



*b)* Az értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. A függvény egy szám és reciprokának összege. Mivel a szám lehet pozitív és negatív is, szét kell bontanunk a kifejezést két részre.




Ha $x > 0$, akkor $x + \frac{1}{x} \geq 2$, ami ekvivalens az $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, azaz $(x-1)^2 \geq 0$ alakkal.

Ha $x < 0$, akkor $x + \frac{1}{x} \leq -2$, ami ekvivalens az $x^2 + 2x + 1 \geq 0$, azaz $(x+1)^2 \geq 0$ alakkal.

Előbbi $x = 1$, utóbbi $x = -1$ helyet jelöli ki a helyi szélsőérték helyének, ami az első esetben minimum, értéke $y = 2$; míg a második esetben maximum, értéke pedig $y = -2$.

Értékkészlet: $y \in ]-\infty; -2] \cup [2; \infty[$.

A függvény sem alulról, sem felülről nem korlátos.

*Megjegyzés:* Ahogy távolodunk $x = 0$-tól, mindkét függvény esetében az első tag válik hangsúlyossá, a reciprok értéke pedig elhanyagolhatóvá. Ezért van az – látjuk az ábrákon is –, hogy a függvénygörbék egyre jobban megközelítik a zölddel jelölt függvényeket.

*c)* Ezek a függvények páros $n$-re ugyanúgy viselkednek, mint $f(x)$, páratlan $n$-re pedig mint $g(x)$. (Természetesen az éppen adott $y = x^{|n|}$ görbéhez fognak közelíteni az origótól kifelé haladva.)

*d)* Gondoljunk arra, hogy ebben az esetben is ki akarjuk alakítani a teljes négyzetet. Ezt csak úgy tehetjük meg, ha a második négyzetes tag maga az $a$, vagyis az egyenlőtlenség másik oldalára $2\sqrt{a}$ kerül. Most is meg kell különböztetnünk a pozitív és negatív változókat.

Ha $x > 0$, akkor $x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$, ami ekvivalens az $x^2 - 2x \cdot \sqrt{a} + a \geq 0$, azaz $\left(x - \sqrt{a}\right)^2 \geq 0$ alakokkal.

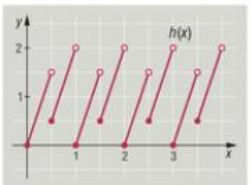
Ha $x < 0$, akkor $x + \frac{a}{x} \leq -2\sqrt{a}$, ami ekvivalens az $x^2 + 2x \cdot \sqrt{a} + a \geq 0$, azaz $\left(x + \sqrt{a}\right)^2 \geq 0$ alakokkal.

A függvénynek az $x = \sqrt{a}$ helyen $y = 2\sqrt{a}$ értékű helyi minimuma van, az $x = -\sqrt{a}$ helyen pedig $y = -2\sqrt{a}$ értékű helyi maximuma.

Értékkészlete is ennek megfelelően módosul: $y \in ]-\infty; -2\sqrt{a}] \cup [2\sqrt{a}; \infty[$.

**6038** *a)* $p = 4\pi$;

*b)* $p = \frac{2\pi}{3}$;




*c)* $p = 1$ (lásd az ábrán).

*d)* A periódusok legkisebb közös többszöröse a megoldás:

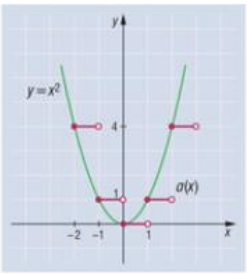
$$p = [4\pi; 6\pi] = [4; 6] \cdot \pi = 12\pi.$$

*e)* Olyan törtet kell megadnunk, amely a két tört legkisebb közös többszöröse. Legyen $a = \frac{p}{q}$ és $b = \frac{r}{s}$. Ekkor

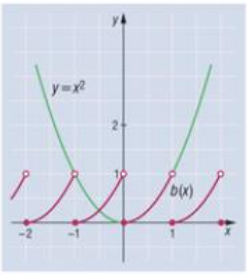
$$p = [a \cdot 2\pi; b \cdot 2\pi] = [a; b] \cdot 2\pi = \left[\frac{p}{q}; \frac{r}{s}\right] \cdot 2\pi = \left[\frac{ps}{qs}; \frac{rq}{sq}\right] \cdot 2\pi = [ps; rq] \cdot \frac{2\pi}{qs}.$$

**6039** A megoldások leírásában a fejezet 3. feladatában leírtakat tartjuk szem előtt.

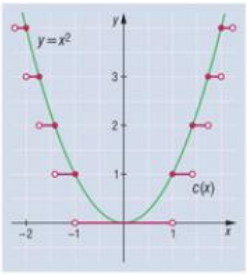
*a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \{\text{négyzetszámok}\}$;
zérushely: $x \in [0; 1[$;
monoton csökkenő: $x \in ]-\infty; 1[$ (nem szigorú);
monoton növő: $x \in [0; \infty[$ (nem szigorú);
korlátosság: csak alulról, $h = 0$;
minimum: $x \in [0; 1[$, $y = 0$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



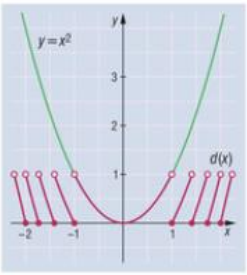

*b)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [0; 1[$;
zérushely: $x = k$ $(k \in \mathbb{Z})$;
monoton csökkenő: nem;
monoton növő: $x \in [k; k+1[$;
korlátosság: $h = 0$, $H = 1$;
minimum: $x = k$ $(k \in \mathbb{Z})$, $y = 0$;
maximum: nincs;
periodikusság: $p = 1$.



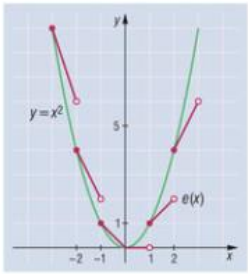

*c)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{N}$;
zérushely: $x \in ]-1; 1[$;
monoton csökkenő: $x \in ]-\infty; 1[$ (nem szigorú);
monoton növő: $x \in ]-1; \infty[$ (nem szigorú);
korlátosság: csak alulról, $h = 0$;
minimum: $x \in ]-1; 1[$, $y = 0$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



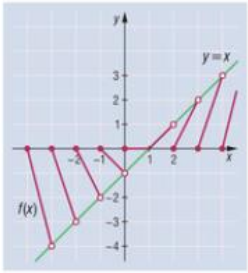

*d)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [0; 1[$;
zérushely: $x = \pm\sqrt{k}$ $(k \in \mathbb{N})$;
monoton csökkenő: $x \in ]-\sqrt{k+1}; -\sqrt{k}\,]$ $(k \in \mathbb{N})$;
monoton növő: $x \in [\sqrt{k}; \sqrt{k+1}[$ $(k \in \mathbb{N})$;
korlátosság: $h = 0$, $H = 1$;
minimum: $x = \pm\sqrt{k}$ $(k \in \mathbb{N})$, $y = 0$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



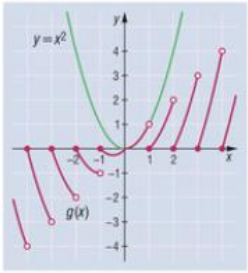
*e)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [0; \infty[ \setminus \{t(t+1) \text{ alakú sz.}\}$, $t \in \mathbb{Z}^+$;
zérushely: $x \in [0; 1[$;
monoton csökkenő: $x \in [-k; -(k-1)[$ $(k \in \mathbb{N})$;
monoton növő: $x \in [k; k+1[$ $(k \in \mathbb{N})$;
korlátosság: csak alulról, $h = 0$;
minimum: $x \in [0; 1[$, $y = 0$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



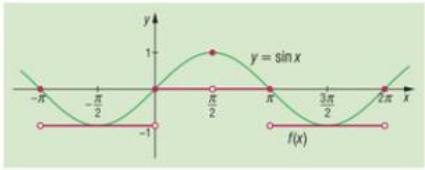

*f)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$;
zérushely: $x = t$ $(t \in \mathbb{Z})$ és $x \in ]0; 1[$;
monoton csökkenő: $x \in [-k; -(k-1)[$ $(k \in \mathbb{N})$;
monoton növő: $x \in [k; k+1[$ $(k \in \mathbb{N})$;
korlátosság: nem;
minimum: $x = u$ $(u \in \mathbb{Z}^+)$, $y = 0$ (helyi);
maximum: $x = m$ $(m \in \mathbb{Z}_0^-)$, $y = 0$ (helyi);
periodikusság: nem.



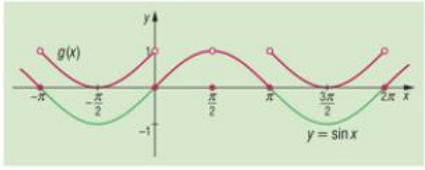

*g)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$;
zérushely: $x = n$ $(n \in \mathbb{Z})$;
monoton csökkenő: $x \in [-1; -0{,}5] \cup [-(k+1); -k[$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$;
monoton növő: $x \in [-0{,}5; 0] \cup [t; t+1[$ $(t \in \mathbb{N})$;
korlátosság: nem;
minimum: $x = r$ $(r \in \mathbb{Z}^+)$, $y = 0$ (helyi);
maximum: $x = s$ $(s \in \mathbb{Z}^-)$, $y = 0$ (helyi);
periodikusság: nem.



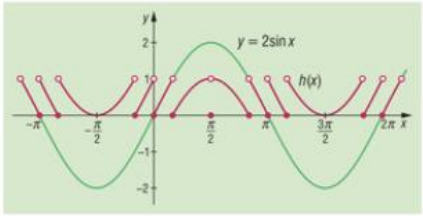

**6040** *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in \{-1; 0; 1\}$;
periodikusság: $p = 2\pi$.




*b)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [0; 1[$;
periodikusság: $p = 2\pi$.



*c)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [0; 1[$;
periodikusság: $p = 2\pi$.




**6041** *a)* Alakítsuk át a függvényt eképpen:

$$f(x) = 3\sin x + 4\cos x = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right).$$

Mivel a zárójelben szereplő számokra igaz, hogy $3^2 + 4^2 = 5^2$, ezért belőlük, mint oldalhosszakból, derékszögű háromszöget alkothatunk. A 3, 4 befogójú, 5 átfogójú derékszögű háromszög egyik szögére igaz, hogy koszinusza $\frac{3}{5}$ és szinusza $\frac{4}{5}$. Jelölje ezt $\alpha$ ($\alpha \approx 53{,}13°$).
Ekkor

$$f(x) = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) = 5(\sin x \cdot \cos\alpha + \cos x \cdot \sin\alpha) = 5\sin(x + \alpha).$$

A függvény korlátos, $h = -5$, $H = 5$.

Minimumának helye $x = \frac{3\pi}{2} - \alpha + 2k\pi$, értéke $y = -5$; maximumának helye $x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi$, értéke $y = 5$ ($k \in \mathbb{Z}$).

*b)* Végezzünk az *a)* részhez hasonló átalakítást. Jelölje $\alpha$ azt a legkisebb nemnegatív szöget, amelyre

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha \quad \text{és} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha.$$

(Ilyen biztosan van, hiszen négyzetösszegük 1.)
Ekkor

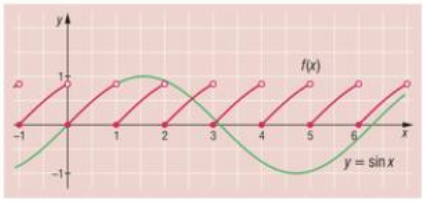
$$g(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos x\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \cdot (\sin x \cdot \cos\alpha + \cos x \cdot \sin\alpha) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x+\alpha), \quad \text{ahol} \quad \alpha = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

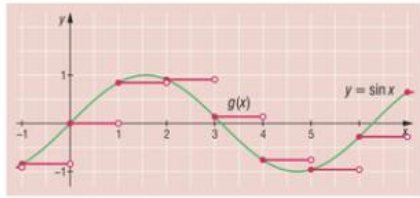
A függvény korlátos, $h = -\sqrt{a^2+b^2}$, $H = \sqrt{a^2+b^2}$.

Minimuma $x = \frac{3\pi}{2} - \alpha + 2k\pi$, $y = -\sqrt{a^2+b^2}$; maximuma $x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi$, $y = \sqrt{a^2+b^2}$.

**6042** *a)* Az $y = \{x\}$ függvény $p = 1$ periódussal ismétli önmagát. Alkalmazva rá az $y = \sin x$-et, az is ismételni fogja az értékeket $p = 1$ periódussal.



*b)* Mivel az $y = [x]$ függvény bármely $[k; k+1[$ szakaszon ($k \in \mathbb{Z}$) konstans, ezért $g(x)$ is az. Tehát $g(x)$ egységhosszú szakaszokból áll: ha periodikus is, periódusa csak pozitív egész szám lehet.




Tegyük fel, hogy van ilyen, jelölje $p$. Ekkor:

$$g(x+p) = \sin[x+p] = \sin[x] = g(x).$$

Az egészrészfüggvény tulajdonsága, hogy $[x+p] = [x] + p$ bármely $p$ pozitív egészre.

Így

$$\sin[x+p] = \sin([x]+p) = \sin[x].$$

A szinuszfüggvény tulajdonságaiból adódik, hogy ekkor

$$[x] + p = [x] + 2k\pi$$

vagy

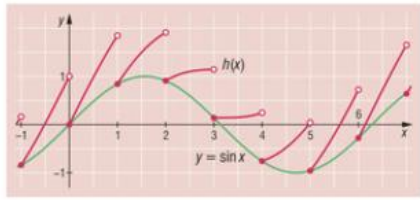
$$[x] + p = \pi - [x] + 2k\pi$$

valamely $k$ egészre. Kifejezve $\pi$-t mindkettő egyenlőségből:

$$\pi = \frac{p}{2k}, \quad \text{illetve} \quad \pi = \frac{2\cdot[x]+p}{2k+1}.$$

Mivel mindkét tört számlálója és nevezője is egész szám, ezért $\pi$-nek racionális számnak kellene lennie. De nem az! Feltevésünk helytelen volt, nincs olyan $p$ pozitív egész, amelyre $g(x)$ periodikus. Minden más számot pedig korábbi okoskodásunkkal kizártunk. Tehát $g(x)$ nem periodikus.

*c)* A problémánk megegyezik az előző esettel: a törtrészfüggvény miatt a periódus csak pozitív egész szám lehet, a szinusz miatt pedig $2\pi$ többszöröse. $h(x)$ sem periodikus.




## Függvények határértéke – megoldások

**6043** A keresett határértékek:

$$\lim_{x\to-2} f(x) = 2; \qquad \lim_{x\to-1} f(x) = 1;$$

$$\lim_{x^-\to1} f(x) = 5; \qquad \lim_{x^+\to1} f(x) = 2;$$

$$\lim_{x^-\to2} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x^+\to2} f(x) = 3;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty; \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 3.$$

Az $x = 1$ és $x = 2$ helyen csak féloldali határértékekről beszélhetünk.




**6044** Használjuk $x_n \to A$ esetén $x_n = A + h_n$ helyettesítést, ahol $h_n \to 0$. (Minden $n$-re $h_n \neq 0$.)

*a)* $\lim\limits_{x\to 3}(3x-2) = \lim\limits_{h_n\to 0}\big(3\cdot(3+h_n)-2\big) = 3\cdot 3 - 2 + 3\cdot\lim\limits_{h_n\to 0} h_n = 7;$

*b)* $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-5x+2) = \lim\limits_{h_n\to 0}[(h_n-1)^2 - 5(h_n-1)+2] = 1+5+2+\lim\limits_{h_n\to 0}\big(h_n^2-7h_n\big) = 8;$

*c)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-2} = \lim\limits_{h_n\to 0}\dfrac{1}{h_n-2} = -\dfrac{1}{2};$

*d)* $\lim\limits_{x\to -5}\operatorname{sgn} x = \lim\limits_{h_n\to 0}\operatorname{sgn}(h_n-5) = \operatorname{sgn}(-5) = -1;$

*e)* $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4} = \lim\limits_{h_n\to 0}\sqrt{5+h_n+4} = \sqrt{9} = 3;$

*f)* $\lim\limits_{x\to \pi}\sin x = \lim\limits_{h_n\to 0}\sin(\pi+h_n) = \sin\pi = 0.$

**6045** Mivel a függvények több darabból állnak, és éppen a találkozási pontban vett határértékre vagyunk kíváncsiak, külön-külön kell vizsgálnunk az egyes részeket.

*a)* $\lim\limits_{x^+\to 2}(2x-1) = \lim\limits_{h_n^+\to 0}\big(2(2+h_n)-1\big) = 3$ és $\lim\limits_{x^-\to 2} 3 = \lim\limits_{h_n^-\to 0} 3 = 3;$

*b)* $\lim\limits_{x^+\to 1}(x^2+3) = \lim\limits_{h_n^+\to 0}\big((1+h_n)^2+3\big) = 4$ és $\lim\limits_{x^-\to 1}(2x+2) = \lim\limits_{h_n^-\to 0}\big(2(1+h_n)+2\big) = 4.$

Mindkét esetben az adott pontban vett jobb és bal oldali határérték egyenlő, és ez egyben a függvényérték is.

**6046** Az alábbi feladatokban mindig $x \neq A$, ahol $A$ a vizsgált pont.

*a)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x^2-2) = -2;$

*b)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+3x^3+x}{x^3+x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+3x^2+1}{x^2+x-2} = -\dfrac{1}{2};$

*c)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6;$

*d)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2} = \dfrac{12}{4} = 3;$

*e)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2};$

*f)* $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+7x+12} = \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x-2)}{(x+4)(x+3)} = \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{-6}{-1} = 6;$

*g)* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x-2}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{1}{1+x}\right) = -\dfrac{1}{2}.$

*Megjegyzés:* Eredményeink szerint mindegyik részkérdésben egyenlő a jobb és a bal oldali határérték, így ún. *megszüntethető* szakadási helyeket találtunk.

**6047** *a)* Jobb oldali: $\lim\limits_{x^+\to 0} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{h_n^+\to 0} \operatorname{sgn}(h_n) = 1$, bal oldali: $\lim\limits_{x^-\to 0} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{h_n^-\to 0} \operatorname{sgn}(h_n) = -1$;

*b)* jobb oldali: $\lim\limits_{x^+\to 1} (x+1) = \lim\limits_{h_n^+\to 0} (1+h_n+1) = 2$, bal oldali: $\lim\limits_{x^-\to 1} x^2 = \lim\limits_{h_n^-\to 0} (1+h_n)^2 = 1$;

*c)* jobb oldali: $\lim\limits_{x^+\to 0} \lg x = \lim\limits_{h_n^+\to 0} \lg(h_n) = -\infty$, bal oldali: $\lim\limits_{x^-\to 0} x^2 = \lim\limits_{h_n^-\to 0} h_n^2 = 0$;

*d)* jobb oldali: $\lim\limits_{x^+\to 2} \dfrac{1}{x-2} = \lim\limits_{h_n^+\to 0} \dfrac{1}{h_n} = \infty$, bal oldali: $\lim\limits_{x^-\to 2} \dfrac{1}{x-2} = \lim\limits_{h_n^-\to 0} \dfrac{1}{h_n} = -\infty$;

*e)* jobb oldali: $\lim\limits_{x^+\to -1} \dfrac{1}{(x+1)^2} = \lim\limits_{h_n^+\to 0} \dfrac{1}{h_n^2} = \infty$, bal oldali: $\lim\limits_{x^-\to -1} \dfrac{1}{(x+1)^2} = \lim\limits_{h_n^-\to 0} \dfrac{1}{h_n^2} = \infty$;

*f)* jobb oldali: $\lim\limits_{x^+\to 1} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{h_n^+\to 0} \dfrac{2+h_n}{h_n} = 1 + \lim\limits_{h_n^+\to 0} \dfrac{2}{h_n} = \infty$,

bal oldali: $\lim\limits_{x^-\to 1} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{h_n^-\to 0} \dfrac{2+h_n}{h_n} = 1 + \lim\limits_{h_n^-\to 0} \dfrac{2}{h_n} = -\infty$.

*Megjegyzés:* A feladok mindegyikében nem megszüntethető szakadási pontokat találtunk. Az *a)* és *b)* részfeladatban ún. *elsőfajú*, a többi esetben ún. *másodfajú* a szakadás.

**6048** *a)* **I. megoldás:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cdot\cos x}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\cos x = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot \lim_{x\to 0}\cos x = 2\cdot 1\cdot 1 = 2.$$

**II. megoldás:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\sin 2x}{2x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2\lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 2\cdot 1 = 2,$$

ahol $X = 2x$, és ha $x\to 0$, akkor $X\to 0$.

*b)* $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$, ahol $X = x-\pi$.

*c)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x} = \dfrac{5}{3}\cdot\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = \dfrac{5}{3}$, ahol $X = 5x$, és ha $x\to 0$, akkor $X\to 0$.

*d)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}\cdot\sin 3x = \dfrac{3}{2}\cdot\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x = \dfrac{3}{2}\cdot 0 = 0$, hasonlóan *b)*-hez.

*e)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x\cdot\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$.

*f)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cdot(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2} = \dfrac{2}{1^2} = 2$.

*g)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}=0\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=0.$

*h)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-(\cos^2 x-\sin^2 x)}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\cdot|\sin x|}{x}=\sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}.$

Ezen a ponton vizsgálatunk az abszolút érték miatt kettéválik:

$$\sqrt{2}\cdot\lim_{x^-\to 0}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)=-\sqrt{2}\cdot\lim_{x^-\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\sqrt{2}\quad\text{és}\quad\sqrt{2}\cdot\lim_{x^+\to 0}\frac{\sin x}{x}=\sqrt{2}.$$

*Megjegyzés:* A függvénynek elsőfajú meg nem szüntethető szakadási helye van $x=0$ helyen.

*i)* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\sin(x-\pi)}{x-\pi}=-1.$

*Megjegyzés:* Teve-módszert és addíciós összefüggést is alkalmazhattunk volna.

6049 *a)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x-100}=\lim\limits_{h_n\to\infty}\dfrac{3h_n+1}{h_n-100}=\lim\limits_{h_n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{h_n}}{1-\dfrac{100}{h_n}}=\dfrac{3}{1}=3;$

*b)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+500x}{x^2-10^7}=\lim\limits_{h_n\to-\infty}\dfrac{2h_n^2+500h_n}{h_n^2-10^7}=\lim\limits_{h_n\to-\infty}\dfrac{2+\dfrac{500}{h_n}}{1-\dfrac{10^7}{h_n^2}}=\dfrac{2}{1}=2;$

*c)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-10}}{x+1}=\lim\limits_{h_n\to\infty}\dfrac{\sqrt{h_n^2-10}}{h_n+1}=\lim\limits_{h_n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{10}{h_n^2}}}{1+\dfrac{1}{h_n}}=1.$

*d)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=0,$ mert a nevező végtelenbe tart, a számláló konstans.

*e)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)=\infty.$

*f)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{-x+\sqrt{x-1}-1}{x+1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{-1+\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=-\infty.$$

*g)* Induljunk ki abból, hogy $0 \le |\sin x| \le 1$. Mivel $x < 0$, ezért $0 \ge \frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{1}{x}$. Így kapjuk:

$$\lim_{x\to-\infty} 0 \ge \lim_{x\to-\infty} \frac{|\sin x|}{x} \ge \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}.$$

Most legyen $x = h_n \to -\infty$, így a sorozatoknál megismert rendőrelv szerint:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|\sin x|}{x} = 0.$$

## Függvény folytonossága – megoldások

**6050** Mindkét függvény értelmezve van az $x_0 = 2$ pontban és valamely környezetében. Legyen $h_n \to 0$ tetszőleges sorozat és $x_n = 2 + h_n$. Ekkor

*a)* $f(x_n) = f(2+h_n) = (2+h_n)^2 - 3(2+h_n) + 1 = -1 + h_n + h_n^2 \to -1 = f(2) = f(x_0)$;

*b)* $g(x_n) = g(2+h_n) = \frac{(2+h_n)+3}{(2+h_n)^2-1} = \frac{5+h_n}{3+4h_n+h_n^2} \to \frac{5}{3} = g(2) = g(x_0)$.

*Megjegyzés: b)* esetben még azt is tegyük fel, hogy minden $n$-re pl. $|h_n| < 1$. Így minden $n$-re $x_n$ biztosan eleme $g$ értelmezési tartományának.

**6051** Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges kicsiny valós szám. Vizsgáljuk az $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget (mindkét függvény értelmezve van az $x_0 = 4$ pontban és valamely környezetében).

*a)* Az egyenlőtlenség ($f(4) = 22$):

$$|5x + 2 - 22| = |5x - 20| < \varepsilon.$$

Másképp felírva és rendezve:

$$\begin{aligned} -\varepsilon < 5x - 20 < \varepsilon,\\ -\varepsilon + 20 < 5x < \varepsilon + 20,\\ \frac{-\varepsilon}{5} + 4 < x < \frac{\varepsilon}{5} + 4,\\ \frac{-\varepsilon}{5} < x - 4 < \frac{\varepsilon}{5},\\ |x-4| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta. \end{aligned}$$

Így ha $x$ 4-től vett távolsága kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{5}$, akkor $f(x) = 5x + 2$ eltérése $f(4) = 22$-től kisebb, mint $\varepsilon$, tehát $f(x)$ folytonos az $x_0 = 4$ pontban Cauchy szerint.

*b)* Az egyenlőtlenséget felírva és rendezve ($f(4) = 2$):

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - 2| < \varepsilon,\\ -\varepsilon < \sqrt{x} - 2 < \varepsilon,\\ 2 - \varepsilon < \sqrt{x} < 2 + \varepsilon,\\ 4 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 < x < 4 + 2\varepsilon + \varepsilon^2,\\ \varepsilon^2 - 2\varepsilon < x - 4 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$




Csökkentsük a bal oldalt, ugyanis $-\varepsilon^2 - 2\varepsilon < \varepsilon^2 - 2\varepsilon$:

$$-(\varepsilon^2 + 2\varepsilon) < x - 4 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon,$$
$$|x - 4| < \varepsilon^2 + 2\varepsilon = \delta.$$

*Megjegyzés: b)*-ben a négyzetre emelésnél nem változnak a relációk, hiszen mindhárom oldal pozitív ($\varepsilon$ kicsi pozitív szám, feltehető, hogy $\varepsilon < 2$).

**6052** Mindkét függvény értelmezve van az adott pontban és annak valamely környezetében.

*a)* $f(1) = 1$, a függvényhatárértékek:

$$\lim_{x_n^+ \to 1} f(x_n) = \lim_{h_n^+ \to 0} (1 + h_n - 2)^2 = 1 + \lim_{h_n^+ \to 0} (h_n^2 - 2h_n) = 1,$$

$$\lim_{x_n^- \to 1} f(x_n) = \lim_{h_n^- \to 0} (1 + h_n) = 1 + \lim_{h_n^- \to 0} h_n = 1.$$

Mivel a jobb és bal oldali részsorozatok is a függvényértékhez tartanak, így a Heine-féle definíció szerint bármely $x_n \to 1$ esetén $f(x_n) \to f(1)$.

*b)* $g(-2) = \dfrac{1}{2}$, a függvényhatárértékek:

$$\lim_{x_n \to -2} g(x_n) = \lim_{h_n \to 0} \frac{-2 + h_n}{-2 + h_n - 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Feltettük, hogy $|h_n| < 4$.

Mivel mind a bal, mind a jobb oldali közelítő sorozatok megegyeznek „formailag", elegendő volt egyetlen formulában vizsgálni őket.

**6053** A függvény értelmezve van a pontban és valamely környezetében.

A függvényérték: $g(2) = \dfrac{1}{2}$.

A bal oldali függvényhatárérték:

$$\lim_{x_n^- \to 2} g(x_n) = \lim_{h_n^- \to 0} \frac{2 + h_n}{2 + h_n - 2} = \lim_{h_n^- \to 0} \frac{2 + h_n}{h_n} = -\infty.$$

Ez már elegendő ahhoz, hogy tudjuk: a függvény nem folytonos az $x_0 = 2$ helyen.

Azért vizsgáljuk meg a másik oldalt is:

$$\lim_{x_n^+ \to 2} g(x_n) = \lim_{h_n^+ \to 0} \frac{2 + h_n}{2 + h_n - 2} = \lim_{h_n^+ \to 0} \frac{2 + h_n}{h_n} = \infty.$$

**6054** *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$. $f(0) = 0$.

Érdemes megvizsgálni a jobb oldali határértéket:

$$\lim_{x_n^+ \to 0} f(x_n) = \lim_{h_n^+ \to 0} (h_n - 1)^2 \cdot \operatorname{sgn} h_n = 1 \cdot 1 = 1.$$

Már kimondhatjuk, hogy a függvény nem folytonos. (Például Heine szerint: találtunk olyan 0-hoz tartó $x_n$ sorozatot, amelyre $f(x_n)$ nem tart $f(0)$-hoz.)

*Megjegyzés:* A bal oldali határérték $-1$, a függvénynek elsőfajú szakadása van.

*b)* A függvény nincs értelmezve az $x_0 = 0$ pontban, így ott nem lehet folytonos sem.

*c)* A függvény értelmezve van az $x_0 = 0$ pontban és bármely környezetében is, $h(0) = 0$.

Legyen

$$x_n = \frac{2}{(4n+1)\cdot\pi} \quad (\neq 0) \to 0,$$

ekkor

$$h(x_n) = \sin\left((4n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \to 1.$$

Ha pedig

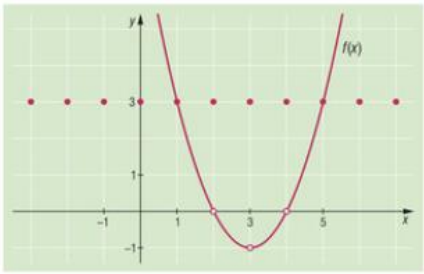
$$x_n = \frac{2}{(4n-1)\cdot\pi} \quad (\neq 0) \to 0,$$

akkor

$$h(x_n) = \sin\left((4n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \to -1.$$

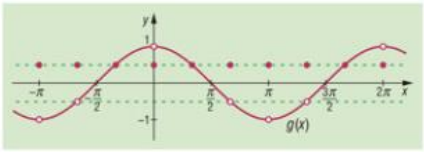
*Megjegyzés:* A sorozatot megtaláljuk Leindler László *Analízis* című könyvében. Ügyesen megválasztva az $x_n$ sorozatot, gyakorlatilag bármely, a $[-1; 1]$-ba eső számhoz tudunk oda konvergáló függvényérték-sorozatot készíteni.

**6055** *a)* $f(x)$ folytonos minden nem egész pontban, hiszen a másodfokú függvény bármely pontban folytonos. Az egész pontok közül pedig azokban lesz folytonos, ahol a másodfokú függvény amúgy is a 3 értéket venné fel. Meg kell tehát oldanunk az $x^2 - 6x + 8 = 3$ egyenletet. Ennek megoldásai: $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$. A többi egész helyen szakadása van a függvénynek.




*b)* A kivételek helyén kívül a függvény minden pontban folytonos. A kivételek közül azokban a pontokban lesz folytonos, ahol $\cos x = \frac{1}{2}$.

Ennek megoldásai pedig $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.



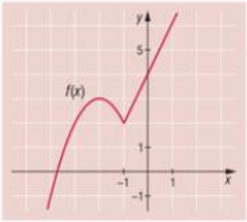

A függvény folytonos minden $\frac{\pi}{3}$ egész többszörösei közötti pontban, illetve az alábbi helyeken:

$$\pm\frac{\pi}{3},\ \pm\frac{5\pi}{3},\ \pm\frac{7\pi}{3},\ \pm\frac{11\pi}{3},\ \pm\frac{13\pi}{3},\ \ldots$$

**6056** *a)* Az $y = -(x^2 + 4x + 1)$ függvénynek bal oldali határértéke véges az $x_0 = -1$ helyen. A folytonossághoz az $y = 2x + b$ függvény jobb oldali véges határértéke is ezzel a határértékkel kell, hogy megegyezzen (ami maga a függvényérték):

$$\lim_{x_n^- \to -1} f(x_n) = \lim_{x_n^- \to -1} -(x_n^2 + 4x_n + 1) = 2 = 2\cdot(-1) + b,$$

innen $b = 4$.

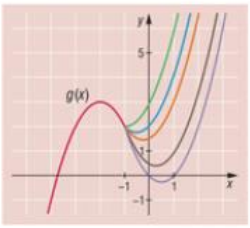


*b)* Az előző példa alapján:

$$\lim_{x_n^- \to -1} g(x_n) = 2 = (-1)^2 + (-1) \cdot a + b,$$

innen $b - a = 1$. Mivel más feltétel nincs, ezért csak paraméteres megoldást adhatunk.

A keresett végtelen sok függvény $y = x^2 + ax + (a + 1)$ alakú, ahol $a$ bármely valós szám lehet.

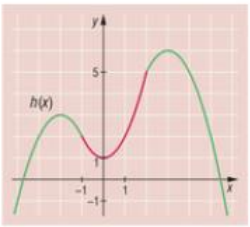



*c)* Most a keresett másodfokú görbét két oldalról is közrefogják, ezért egyrészt

$$\lim_{x_n^- \to -1} h(x_n) = 2 = (-1)^2 + (-1) \cdot a + b,$$

másrészt

$$\lim_{x_n^+ \to 2} h(x_n) = 5 = 2^2 + 2a + b.$$



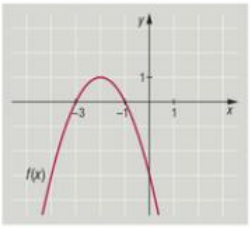

Így $a$-ra és $b$-re egy kétismeretlenes, két egyenletből álló rendszert kapunk:

$$\left.\begin{aligned} b - a &= 1 \\ b + 2a &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

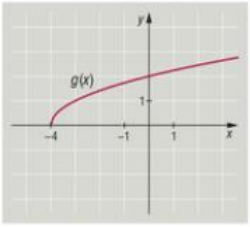
Az egyenletrendszer megoldásai: $a = 0$ és $b = 1$. Tehát a keresett folytonos függvény hiányzó része $y = x^2 + 1$.

## Vegyes feladatok – megoldások

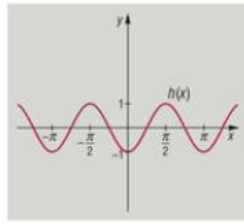
**6057** *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in ]-\infty; 1]$;
zérushely: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$;
monoton csökkenő: $x \in [-2; \infty[$;
monoton növő: $x \in ]-\infty; -2]$;
korlátosság: csak felülről, $H = 1$;
minimum: nincs;
maximum: $x = -2$, $y = 1$;
periodikusság: nem.




*b)* Értelmezési tartomány: $x \in [-4; \infty[$;
értékkészlet: $y \in [0; \infty[$;
zérushely: $x = -4$;
monoton csökkenő: nem;
monoton növő: $x \in [-4; \infty[$;
korlátosság: csak alulról, $h = 0$;
minimum: $x = -4$, $y = 0$;
maximum: nincs;
periodikusság: nem.



*c)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$;
értékkészlet: $y \in [-1; 1]$;
zérushely: $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$;
monoton csökkenő: $x \in \left[\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$;
monoton növő: $x \in \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$;
korlátosság: $h = -1$, $H = 1$;
minimum: $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
maximum: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
paritás: páros;
periodikusság: $p = \pi$.




**6058** *a)* $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + 1) = \lim\limits_{h_n \to 0}\left((3 + h_n)^2 + 1\right) = 10$;

*b)* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^5 - 2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0}(x^3 - 2x) = 0$;

*c)* $\lim\limits_{x^+ \to 0}(x + 1) \cdot \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{h_n^+ \to 0}(h_n + 1) \cdot \operatorname{sgn}(h_n) = 1 \cdot 1 = 1$,

$\lim\limits_{x^- \to 0}(x + 1) \cdot \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{h_n^- \to 0}(h_n + 1) \cdot \operatorname{sgn}(h_n) = 1 \cdot (-1) = -1$;

A jobb és bal oldali határérték nem egyenlő, ezért nincs a pontban a függvénynek határértéke.

*d)* $\lim\limits_{x^+ \to 0} \frac{1}{x} = \lim\limits_{h_n^+ \to 0} \frac{1}{h_n} = \infty$, $\lim\limits_{x^- \to 0} 1 = 1$;

A jobb és bal oldali határérték nem egyenlő, ezért nincs a pontban a függvénynek határértéke.

*e)* $\lim\limits_{x \to -\pi} \frac{\sin 3(x + \pi)}{2(x + \pi)} = \lim\limits_{x \to -\pi} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 3(x + \pi)}{3(x + \pi)} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin X}{X} = \frac{3}{2}$,

$X = 3(x + \pi)$ és ha $x \to -\pi$, $X \to 0$.

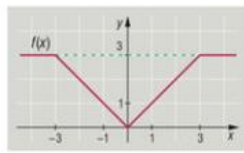
**6059** Az első két függvény értelmezve van az adott pontban és valamely környezetében.

*a)* $f(1) = 3$, $\lim\limits_{x_n \to 1}(3x_n^4 + 4x_n^2 - 6x_n + 2) = 3 + 4 - 6 + 2 = 3$, tehát folytonos.

*b)* $g(2) = -1$, $\lim\limits_{x_n \to 2}\left(\frac{2}{x_n - 3} + 1\right) = \frac{2}{2 - 3} + 1 = -1$, tehát folytonos.

*c)* Nincs értelmezve az adott pontban $h(x)$, tehát nem lehet folytonos.

**6060** Mivel $x \cdot \operatorname{sgn}(x) = |x|$ minden valós számra, ezért $b = 3$.



# DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

## A differenciálhányados fogalma – megoldások

### Szelő, érintő – megoldások

**6061** *a)* $m = 2$; *b)* $m = \frac{1}{3}$; *c)* $m = \frac{3\sqrt{3} - 12}{\pi}$; *d)* $m = -\frac{7}{6}$.

**6062** *a)* $y = 4x - 4$; *b)* $y = -2x + 3$;

*c)* $y = \frac{4}{\pi}x$; *d)* $y = \frac{\log_3 5 - 1}{2} \cdot (x - 5) + 2$.

**6063** Egy parabolának pontosan akkor érintője egy egyenes, ha két feltétel teljesül rá: egyetlen közös pontjuk van, és az egyenes vagy teljes egészében a görbe alatt, vagy teljes egészében felette fut. (Vagy másképp: nem párhuzamos a parabola tengelyével.) Jelen esetben, mivel normál állású paraboláról van szó, az érintő csak alatta mehet, vagyis:

$$0{,}5(x - 1)^2 + 2 \geq 2x - 2.$$

Fejtsük ki a zárójelet, majd rendezzük egy oldalra:

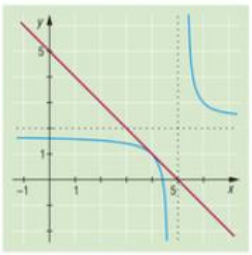
$$0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5 \geq 0.$$

Kettővel beszorozva még jobban látható, hogy nevezetes szorzatot kaptunk:

$$(x - 3)^2 \geq 0.$$

A szigorú egyenlőtlenség valóban teljesül minden valós számra, kivéve az $x = 3$-at, amikor az egyenlőség igaz. Tehát az adott egyenes érinti a parabolát, mégpedig az $E(3; 4)$ pontban.

**6064** Mivel egy hiperbola két ágból áll, először próbáljuk megtippelni, hogy melyik ágat kell megvizsgálnunk. Készítsünk vázlatot! Látható, hogy ha érinti az egyenes a görbét, akkor a bal oldali ágat érinti. Szűkítsük le a függvény értelmezési tartományát $x < 5$-re. Ekkor kérdés, hogy:




$$\frac{1}{x - 5} + 2 \leq -x + 5.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $x - 5$-tel (vigyázat, negatív számmal szorzunk):

$$1 + 2(x - 5) \geq -(x - 5)^2.$$

Fejtsük ki a zárójelet, és rendezzünk egy oldalra:

$$x^2 - 8x + 16 \geq 0.$$

A bal oldali nevezetes szorzatra mindig igaz a reláció. Egyenlőséget pedig csak az $x = 4$ helyen kapunk, tehát ebben a pontban érinti az egyenes a hiperbolát.

**6065** Mivel a parabola normál állású, az érintő csak alatta haladhat. Ebből adódóan úgy kell $b$ értékét megválasztanunk, hogy $-2x + b \leq 2x^2 - 3x + 1$ legyen. Egy oldalra rendezve: $0 \leq 2x^2 - x + 1 - b$. Az érintéshez egyetlen közös pont léte szükséges, ezért a másodfokú egyenlet diszkriminánsának nulla értéket kell felvennie (a parabola normál állású, tehát az egyenlőtlenség teljesül):

$$D = 1 - 8(1 - b) = 0, \quad \text{ahonnan} \quad b = \frac{7}{8}.$$

Tehát az érintő egyenlete: $y = -2x + \frac{7}{8}$.

**6066** Az előző feladat meggondolásai alapján (értelmezési tartomány $-1 \le x$):

$$x + b \ge \sqrt{x+1},$$
$$x + 1 - \sqrt{x+1} + b - 1 \ge 0.$$

Vizsgáljuk a diszkriminánst: $D = 1 - 4(b-1) = 0$.

Innen $b = \frac{5}{4}$, vagyis az érintő egyenlete: $y = x + 1{,}25$.

**6067** Lefelé nyíló paraboláról lévén szó, az érintőnek a görbe felett kell futnia. Azaz:

$$mx - 1 \ge -x^2 + x - 2.$$

Átalakítva:

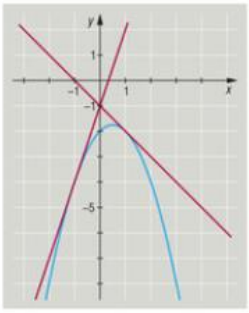
$$x^2 + (m-1)x + 1 \ge 0.$$

A már jól ismert diszkrimináns: $D = (m-1)^2 - 4 = 0$.

Megoldva a másodfokú egyenletet, $m_1 = 3$ és $m_2 = -1$ értékeket kapjuk. Tehát két érintő is létezik a megadott feltételekkel: $y = 3x - 1$ és $y = -x - 1$.

Az ábrázoláshoz alakítsuk teljes négyzetté a függvényt:

$$f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}.$$




**6068** A feladatban megadott négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya $]-\infty; 1]$ és monoton növő, így minden érintőnek a görbe alatt kell futnia. Tehát

$$mx + \frac{1}{2} \le -\sqrt{-x+1} + 2.$$

Rendezve és négyzetre emelve:

$$\sqrt{-x+1} \le 1{,}5 - mx,$$
$$-x + 1 \le 2{,}25 - 3mx + m^2x^2.$$

Egy oldalra rendezve:

$$0 \le m^2x^2 + (1-3m)x + 1{,}25.$$
$$D = (1-3m)^2 - 5m^2 = 4m^2 - 6m + 1 = 0.$$

Kifejtve és a másodfokú egyenletet megoldva:

$$m_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \quad \text{és} \quad m_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

A két érintő egyenlete:

$$y = \frac{3+\sqrt{5}}{4}x + \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad y = \frac{3-\sqrt{5}}{4}x + \frac{1}{2}.$$

**6069** Ha egy normál állású parabolát érintenek az $y = 2x$ és $y = -2x$ egyenesek, akkor az szimmetrikus az $y$ tengelyre, vagyis csak $f(x) = ax^2 + b$ alakú lehet $(a, b > 0)$. Ez abból adódik, hogy adott $(m = 2)$ meredekségű egyenes csak egy adott $x_0$ pontban lehet érintő (ami igaz akkor is, ha nem tudjuk pontosan, melyik az a pont). Mivel a másik érintő tengelyesen szimmetrikus képe az előző érintőnek az $y$ tengelyre, és a parabola tengelyes szimmetriája miatt csak az előző $x_0$ pont tükörképében húzható meg, magának a parabolagörbének is az $y$ tengelyre kell szimmetrikusnak lennie.

Először tekintsük az $y = 2x$ érintőt és az $f(x) = ax^2 + b$ parabolát. Az érintő a görbe alatt fut:

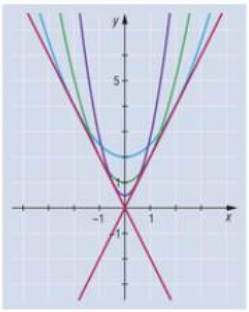
$$2x \le ax^2 + b,$$
$$0 \le ax^2 - 2x + b.$$

Az érintőnek pontosan egy közös pontja lehet a függvénygörbével:

$$D = 4 - 4ab = 0, \quad \text{innen} \quad a = \frac{1}{b}.$$

Tehát $a$ és $b$ egymás reciprokai: a feltételeknek megfelelő függvénycsaládot $f(x) = ax^2 + \frac{1}{a}$ alakban kell keresnünk. Amennyiben a másik érintőt vizsgáljuk, ugyanerre az eredményre jutunk, hiszen a diszkriminánsban négyzetre emeljük $x$ együtthatóját.

Néhány példa az ábrán látható.



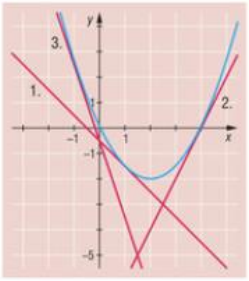

**6070** A függvény egyenletét keressük $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakban. Az egyenesek elhelyezkedéséből adódóan a parabola csak felfelé nyílhat, és nagyjából a 0 és 4 közötti részen metszi az $x$ tengelyt.

Az eddigi feladatokban látott módszert használjuk fel most is mindhárom érintő esetén. Itt rögtön az átalakított egyenleteket és a belőlük kapott diszkriminánsokat adjuk meg:

(1) $0 \le ax^2 + (b+1)x + c + 0{,}5$, innen
$$D = (b+1)^2 - 4a(c+0{,}5) = 0;$$

(2) $0 \le ax^2 + (b-2)x + c + 8$, innen
$$D = (b-2)^2 - 4a(c+8) = 0;$$

(3) $0 \le ax^2 + (b+3)x + c + 0{,}5$, innen
$$D = (b+3)^2 - 4a(c+0{,}5) = 0.$$




Az első és a harmadik diszkriminánst vizsgálva, vegyük észre, hogy majdnem mindenben megegyeznek. Vonjuk ki őket egymásból!

$$(3) - (1): \quad (b+3)^2 - (b+1)^2 \Rightarrow 4b + 8 = 0.$$

Azonnal megkapjuk, hogy $b = -2$.

Tehát a keresett függvény $f(x) = ax^2 - 2x + c$ alakú.

Az első és a második diszkriminánsba visszahelyettesítve:

$$(1) \quad D = 1 - 4a(c+0{,}5) = 0.$$
$$(2) \quad D = 4 - a(c+8) = 0.$$

A másodikból kifejezve $a = \frac{4}{c+8}$-at kapunk. Visszahelyettesítve: $1 - 16 \cdot \frac{c+0{,}5}{c+8} = 0$.

A tört eltüntetése (nevezővel való beszorzás) és rendezés után $c = 0$ értéket kapunk. Ezt a kifejezett alakba helyettesítve $a = \frac{1}{2}$ adódik.

Tehát a keresett függvény:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

## Differencia- és differenciálhányados – megoldások

6071 *a)* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-2;$

*b)* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=3(x+2);$

*c)* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+1};$

*d)* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{1}{8(x-3)};$

*e)* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{2}{x}\cdot\operatorname{tg}x.$

6072 *a)* $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{3x-2-(3\cdot(-8)-2)}{x+8}=\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{3x+24}{x+8}=\lim\limits_{x\to-8}3\cdot\dfrac{x+8}{x+8}=3;$

*b)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2+2x-4-(6\cdot1^2+2\cdot1-4)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}2\cdot\dfrac{3x^2+x-4}{x-1}=$

$=2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(3x+4)}{x-1}=2\lim\limits_{x\to1}(3x+4)=14;$

*c)* $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2\sqrt{x}-2\sqrt{3}}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}2\cdot\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=2\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})}=$

$=2\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}};$

*d)* $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{0{,}5x^3-0{,}5\cdot(-2)^3}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}0{,}5\cdot\dfrac{x^3+2^3}{x+2}=$

$=0{,}5\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=0{,}5\lim\limits_{x\to-2}(x^2-2x+4)=6;$

*e)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{2}}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2-(x+2)}{2(x+2)}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{2(x+2)}=$

$=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x+2}=-\dfrac{1}{4}.$

**6073** Az érintőt három lépésben határozzuk meg. Kiszámítjuk a függvény adott pontbeli differenciálhányadosát, és a kapott meredekségű $(x_0; f(x_0))$ ponton átmenő egyenes egyenletét írjuk fel. (Ehhez először ki kell számítani a függvény $x_0$-beli helyettesítési értékét is).

*a)* $f(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 + 3 = 18$;

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - x - 15}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(2x+5)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(2x+5) = 11;$$

$y = 11(x-3) + 18 = 11x - 15$;

*b)* $g(-1) = -(-1+3)^2 + 3 = -1$;

$$\lim_{x \to -1} \frac{4 - (x+3)^2}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{-(x+1)(x+5)}{x+1} = -\lim_{x \to -1}(x+5) = -4;$$

$y = -4(x+1) - 1 = -4x - 5$;

*c)* $h(4) = \frac{2}{4} - 2 = -\frac{3}{2}$;

$$\lim_{x \to 4} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{2}}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{4-x}{2x}}{x-4} = -\lim_{x \to 4} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{8};$$

$y = -\frac{1}{8}(x-4) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}x - 1$;

*d)* $i(4) = 3\sqrt{4} = 6$;

$$\lim_{x \to 4} 3 \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{x-4} = 3\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = 3\lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{3}{4};$$

$y = \frac{3}{4}(x-4) + 6 = \frac{3}{4}x + 3$;

*e)* $j(1) = 1^3 + 1^2 = 2$;

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1 + x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x^2+2x+2) = 5;$$

$y = 5(x-1) + 2 = 5x - 3$.

*Megjegyzés:* Ha jobban megismerjük a differenciálhányadost, egyszerűbbé válik az eljárás.

**6074** *a)* Az $f(x)$ függvény nincs értelmezve a kérdéses pontban, ami szükséges feltétele lenne a differenciálhányados létének. A függvény tehát nem differenciálható.

*b)* A feladatbeli $g(x)$ függvény értelmezve van az adott pontban és annak tetszőleges környezetében (értelmezési tartománya $\mathbb{R}$). Ha $x_0$ kellően kis környezetéből vesszük az $x$ értékeket (például $\delta < 0{,}5$), akkor a jobb és bal oldali differenciálhányadosokat felírva:

$$\lim_{x^+ \to -2} \frac{\operatorname{sgn}(x^2-4) - 0}{x+2} = \lim_{x^+ \to -2} \frac{-1}{x+2} = -\infty, \text{ illetve } \lim_{x^- \to -2} \frac{\operatorname{sgn}(x^2-4) - 0}{x+2} = \lim_{x^- \to -2} \frac{1}{x+2} = -\infty.$$

A jobb és bal oldali differenciálhányados egyenlő, azonban nem véges. Mivel ez a differenciálhatóság szükséges feltétele lenne, a függvény nem differenciálható.

*c)* A függvény értelmezési tartománya most is $\mathbb{R}$. Vizsgáljuk meg ismét a bal és jobb oldali differenciálhányadosokat. Használjuk fel, hogy $x-2=\sqrt{x-1}^2-1$:

$$\lim_{x^+\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x^+\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2},\quad \text{illetve}\quad \lim_{x^-\to 2}\frac{(x-1)^2-1}{x-2}=\lim_{x^-\to 2}x=2.$$

Jelen esetben bár létezik és véges mindkét oldali határérték, azonban nem egyenlők.

*d)* A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. Ám a jobb és bal oldali differenciálhányadosok nem egyenlők, ráadásul nem is végesek:

$$\lim_{x^+\to 0}\frac{\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x^+\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty,\quad \text{illetve}\quad \lim_{x^-\to 0}\frac{-\frac{1}{x}-0}{x-0}=-\lim_{x^-\to 0}\frac{1}{x^2}=-\infty.$$

*e)* Bár $j(x)$ értelmezve van $x_0$-ban, azonban nincs értelmezve tetszőlegesen kis környezetében, így $x$ nem tarthat $x_0$-hoz.

6075 *a)* $$\lim_{x\to x_0}\frac{2(x-1)^2+1-\left(2(x_0-1)^2+1\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}2\cdot\frac{(x-x_0)(x+x_0-2)}{x-x_0}=2\lim_{x\to x_0}(x+x_0-2)=4x_0-4,$$

így $f'(x)=4x-4$.

*b)* $$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-3x-(x_0^2-3x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0-3)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0-3)=2x_0-3,$$

így $g'(x)=2x-3$.

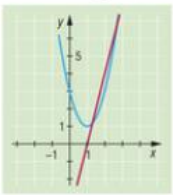
*c)* $$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x_0+2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\cdot\frac{x_0+2-(x+2)}{(x+2)(x_0+2)}}{x-x_0}=-2\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x+2)(x_0+2)}=\frac{-2}{(x_0+2)^2},$$

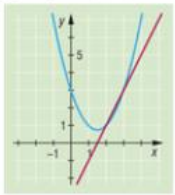
így $h'(x)=\dfrac{-2}{(x+2)^2}$.

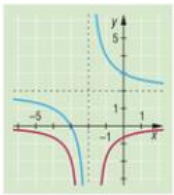
*d)* $$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x_0-1}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x_0-1}\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x_0-1}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}},$$

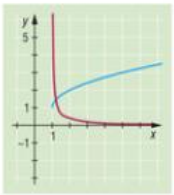
így $i'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

A deriváltak (piros) és a függvények (kék) ábrái:

*a)*



*b)*



*c)*



*d)*


## Műveletek differenciálható függvényekkel – megoldások

**6076** *a)* $a'(x) = 2$; *b)* $b'(x) = -3$; *c)* $c'(x) = \sqrt{3}$;

*d)* $d'(x) = \frac{1}{2}$; *e)* $e'(x) = 4x$; *f)* $f'(x) = 2x - 6$;

*g)* $g'(x) = -6x + 7$; *h)* $h'(x) = 2\sqrt{7}x - \frac{3}{5}$; *i)* $i'(x) = 6x^2 - 6x$;

*j)* $j'(x) = -3x^2 + 3$; *k)* $k'(x) = 3x^2 + 4x - 5$; *l)* $l'(x) = \sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x + 1$.

**6077** *a)* $a'(x) = 24x^2$; *b)* $b'(x) = 567x^{80} - 225x^{24}$; *c)* $c'(x) = 2x^5 - x^4 + 2x^3$;

*d)* $d'(x) = 42x^6 + 98x + 72x^8 + 2187x^2$; *e)* $e'(x) = 12x^{1,4} + 3{,}8x^{0,9}$;

*f)* $f'(x) = -8x^{-0,2} + 1{,}2x^{-0,6}$; *g)* $g'(x) = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} + 4x^{-\frac{1}{3}}$; *h)* $h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{6}} - 14x^{\frac{5}{2}} + x^{-\frac{3}{5}}$;

*i)* $i'(x) = -12x^{-4} + 10x^{-3}$; *j)* $j'(x) = -8x^{-2,6} - \frac{28}{9}x^{-\frac{13}{9}}$; *k)* $k'(x) = 6nx^{n-1}$;

*l)* $l'(x) = (2n + 10)x^{n+4}$; *m)* $m'(x) = 33x^{5-\sqrt{3}}$; *n)* $n'(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}$.

**6078** *a)* $a'(x) = \left(\sqrt{x} - 3\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} - 3\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

*b)* $b'(x) = \left(5\sqrt{x}\right)' = 5 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$;

*c)* $c'(x) = \left(3\sqrt{7x}\right)' = 3\sqrt{7} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{3\sqrt{7}}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{x}}$;

*d)* $d'(x) = \left(10 \cdot \sqrt[5]{x}\right)' = 10 \cdot \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = 2x^{-\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt[5]{x^4}}$;

*e)* $e'(x) = \left(2 \cdot \sqrt[4]{5x}\right)' = 2 \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{\sqrt[4]{5}}{2}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt[4]{5}}{2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}$;

*f)* $f'(x) = \left(\frac{5}{3}x \cdot \sqrt{x^3}\right)' = \left(\frac{5}{3}x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{25}{6}x^{\frac{3}{2}} = \frac{25}{6}\sqrt{x^3}$;

*g)* $g'(x) = \left(\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^8} - \sqrt{x^7}\right)' = \left(x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{7}{2}}\right)' = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} =$

$= \frac{3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}} + \frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5} + \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$;

*h)* $h'(x) = \left(\sqrt[7]{\sqrt[5]{x^6}}\right)' = \left(\left(\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^6\right)^{\frac{1}{7}}\right)' = \left(x^{\frac{6}{35}}\right)' = \frac{6}{35}x^{-\frac{29}{35}} = \frac{6}{35 \cdot \sqrt[35]{x^{29}}}$;

*i)* $i'(x)=\left(\frac{1}{x}+5\right)'=\left(x^{-1}+5\right)'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$;

*j)* $j'(x)=\left(\frac{5}{x}\right)'=5\left(x^{-1}\right)'=-5x^{-2}=-\frac{5}{x^2}$;

*k)* $k'(x)=\left(\frac{2}{3x}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^{-1}\right)'=-\frac{2}{3}x^{-2}=-\frac{2}{3x^2}$;

*l)* $l'(x)=\left(\frac{x+3}{x}\right)'=\left(1+\frac{3}{x}\right)'=3\left(x^{-1}\right)'=-3x^{-2}=-\frac{3}{x^2}$;

*m)* $m'(x)=\left(\frac{7}{x}+5\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{2x}\right)\right)'=\frac{9}{2}\left(x^{-1}\right)'=-\frac{9}{2}x^{-2}=-\frac{4{,}5}{x^2}$;

*n)* $n'(x)=\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\left(x^{-2}\right)'=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$;

*o)* $o'(x)=\left(-\frac{x^4-2}{x^3}\right)'=\left(2x^{-3}-x\right)'=-6x^{-4}-1=-\frac{6}{x^4}-1$;

*p)* $p'(x)=\left(\frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$.

**6079** *a)* $a'(x)=\cos x$; *b)* $b'(x)=-3\sin x$; *c)* $c'(x)=\cos x-\sin x$;
*d)* $d'(x)=4\cos x+\sin x$; *e)* $e'(x)=-\cos x-5\sin x$; *f)* $f'(x)=\sin x-\pi\cos x$;
*g)* $g'(x)=0$; *h)* $h'(x)=3\cos x-4\sin x-\sqrt{2}\cos x$.

**6080** *a)* $a'(x)=3^x\cdot\ln 3$; *b)* $b'(x)=4\cdot\ln 5\cdot 5^x$; *c)* $c'(x)=8^x\cdot\ln 8$;
*d)* $d'(x)=3e^x$; *e)* $e'(x)=7^x\cdot\ln 7-324x^3+4^x\cdot\ln 4-64^x\cdot\ln 64$;
*f)* $f'(x)=\frac{4}{x}$; *g)* $g'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln 2}$; *h)* $h'(x)=\frac{5}{x\cdot\ln 10}$;
*i)* $i'(x)=\frac{7}{x\cdot\ln 5}$; *j)* $j'(x)=\frac{6}{x}-\frac{3}{x\cdot\ln 3}$; *k)* $k'(x)=\frac{1}{2x}$.

**6081** *a)* $a'(x)=4x^3\cdot\sqrt[5]{x}-\frac{1}{5}x^4\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$;

*b)* $b'(x)=\left(3x^2+2\right)\left(x^7-3x^5+5x^2\right)+\left(x^3+2x\right)\left(7x^6-15x^4+10x\right)$;

*c)* $c'(x)=\frac{\left(20x^4+18x^{2.6}-4x\right)\left(5x^{10}-3x^6-9x^2\right)-\left(4x^5+5x^{3.6}-2x^2\right)\left(50x^9-18x^5-18x\right)}{\left(5x^{10}-3x^6-9x^2\right)^2}$;

*d)* $d'(x)=\frac{\left(8x+0{,}6x^{-0.4}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{5}{2}}\right)-\left(4x^2+x^{0.6}\right)\left(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}-\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{5}{2}}\right)^2}$;

*e)* $e'(x) = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$;

*f)* $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$;

*g)* $g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

*h)* $h'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

*i)* $i'(x) = \ln x + 1$;

*j)* $j'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

**6082** *a)* $a'(x) = 10(5x + 3)$;

*b)* $b'(x) = 48x(6 - 4x^2)^{-4}$;

*c)* $c'(x) = 10(x^4 - 3x^2 + 5x)^9 \cdot (4x^3 - 6x + 5)$;

*d)* $d'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$;

*e)* $e'(x) = \dfrac{3x^2 - 10x + 7}{2\sqrt{x^3 - 5x^2 + 7x}}$;

*f)* $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{4x^3 - 4x + 6}{\sqrt[5]{(x^4 - 2x^2 + 6x)^4}}$;

*g)* $g'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$;

*h)* $h'(x) = -6\cos^2 2x \cdot \sin 2x$;

*i)* $i'(x) = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{\cos(5x + \pi)}{\sqrt{\sin(5x + \pi)}}$;

*j)* $j'(x) = 2\cos 2x \cdot \cos^4 x - 4\sin 2x \cdot \cos^3 x \cdot \sin x$;

*k)* $k'(x) = 6 \cdot \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x} = 6 \cdot \dfrac{\sin 3x}{\cos^3 3x}$;

*l)* $l'(x) = \dfrac{1}{(1 - x) \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$;

*m)* $m'(x) = \dfrac{1}{2x}$;

*n)* $n'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$;

*o)* $o'(x) = -3 \cdot \operatorname{tg} 3x$.

**6083** *a)* $f'(x) = \dfrac{15}{2}\left(3x^2 + x\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (6x + 1) - 8\left(x^{8,2} + x^{-6}\right) \cdot \left[\left(x^{8,2} + x^{-6}\right) + (2x - 1) \cdot \left(8,2x^{7,2} - 6x^{-7}\right)\right] +$

$$+ \frac{\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(x^4 - 3x^2\right) - \left(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x}\right) \cdot \left(4x^3 - 6x\right)}{\left(x^4 - 3x^2\right)^2};$$

*b)* $g'(x) = -\left(12\sin^{-4} 4x \cdot \cos 4x \cdot \operatorname{tg}(\pi - x) + \sin^{-3} 4x \cdot \dfrac{1}{\cos^2(\pi - x)} + \sin x\right)$;

*c)* $h'(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1} - (2x - 3) \cdot e^{x^2 - 3x + 1}$.

*d)* Mivel

$$\left[\ln(\sin x)^x\right]' = \left[x \cdot \ln(\sin x)\right]' = \ln(\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = x \cdot \operatorname{ctg} x + \ln(\sin x),$$

továbbá

$$\left[\ln\left(i(x)\right)\right]' = \frac{i'(x)}{i(x)} = \frac{i'(x)}{(\sin x)^x},$$

így

$$i'(x) = (\sin x)^x \cdot \left(x \cdot \operatorname{ctg} x + \ln(\sin x)\right).$$

*e)* Mivel

$$\left[\ln\left(j(x)\right)\right]' = \left[(\ln x)\cdot\ln(\ln x)\right]' = \frac{\ln(\ln x)}{x} + \ln x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1+\ln(\ln x)}{x},$$

továbbá

$$\left[\ln\left(j(x)\right)\right]' = \frac{j'(x)}{j(x)} = \frac{j'(x)}{(\ln x)^{\ln x}},$$

így

$$j'(x) = (\ln x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1+\ln(\ln x)}{x}\right).$$

## Néhány konkrét függvény deriváltfüggvénye – megoldások

**6084** *a)* Nem, mert a függvény szélsőértékénél a derivált nulla.

*b)* Nem, mert ahol a függvény csökken, ott a derivált negatív értéket kell, hogy felvegyen.

*c)* Igen.

*d)* Nem, lásd *b)*.

*e)* Igen.

**6085** A keresett függvények minden esetben csak egy konstans erejéig határozhatók meg. A $c$ paraméter helyére bármilyen valós számot beírva, a kérdezett függvényt kapjuk.

*a)* $a(x) = 5x + c$;

*b)* $b(x) = x^2 + c$;

*c)* $c(x) = 2x^2 - 2x + c$;

*d)* $d(x) = 2x^{2,5} + c$;

*e)* $e(x) = \frac{2}{3}x^{1,5} + c$;

*f)* $f(x) = -\frac{1}{x} + c$;

*g)* $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$;

*h)* $h(x) = -\sin x + c$.

## Miről informál a differenciálhányados? – megoldások

### Érintő – megoldások

**6086** A megoldások során felhasználjuk, hogy az érintő egyenlete $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$ alakban írható fel.

*a)* $f(x_0) = 28$, $f'(x_0) = 4$, $y = 4(x-5) + 28 = 4x + 8$;

*b)* $g(x_0) = 2$, $g'(x_0) = 7{,}5$, $y = 7{,}5(x-1) + 2 = 7{,}5x - 5{,}5$;

*c)* $h(x_0) = \frac{3}{4}$, $h'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}\pi + 9}{12}$;

$h(x_1) = 0$, $h'(x_1) = -2$, $y = -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 = -2x + \pi$;

*d)* $i(x_0) = 0$, $i'(x_0) = \frac{1}{\pi}$, $y = \frac{1}{\pi}(x - \pi) + 0 = \frac{1}{\pi}x - 1$;

*e)* $j(x_0) = \sqrt{e}$, $j'(x_0) = -\frac{\sqrt{3e}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{3e}}{2}\cdot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{e} = -\frac{\sqrt{3e}}{2}x + \sqrt{e}\cdot\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{6} + 1\right)$.

## Derivált és szélsőérték kapcsolata – megoldások

**6087** *a)* $a'(x) = 0$; $x \in \mathbb{R}$;

*b)* $b'(x) = 3$; nincs zérushely;

*c)* $c'(x) = 2x$; $x = 0$;

*d)* $d'(x) = -2x + 5$; $x = 2{,}5$;

*e)* $e'(x) = 8x + 3$; $x = -\frac{3}{8}$;

*f)* $f'(x) = -6x + 8$; $x = \frac{4}{3}$;

*g)* $g'(x) = 4(x - 3)$; $x = 3$;

*h)* $h'(x) = -10(5x + 7)$; $x = -\frac{7}{5}$;

*i)* $i'(x) = 3x^2 - 8x$; $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{8}{3}$;

*j)* $j'(x) = 6x^2 - 6x - 36$; $x_1 = -2$ és $x_2 = 3$;

*k)* $k'(x) = 3(x + 2)^2$; $x = -2$;

*l)* $l'(x) = 30x(x^2 - 1)^2$; $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 1$;

*m)* $m'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$; nincs zérushely;

*n)* $n'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}$; nincs zérushely $\left(\frac{3}{2} \notin D_n\right)$;

*o)* $o'(x) = \frac{-2x + 3}{3 \cdot \sqrt[3]{(-x^2 + 3x)^2}}$; $x = \frac{3}{2}$;

*p)* $p'(x) = \frac{-2}{(2x + 1)^2}$; nincs zérushely;

*q)* $q'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$; $x = 0$;

*r)* $r'(x) = \frac{-10(3x^2 + 8x - 1)}{(x^3 + 4x^2 - x + 2)^2}$; $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{19}}{3}$;

*s)* $s'(x) = 6x \cdot \cos\left(3x^2\right)$; $x = 0$ és $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}}$, ahol $k \in \mathbb{Z}_0^+$;

*t)* $t'(x) = \frac{-\pi}{\sin^2(\pi x)}$; nincs zérushely

**6088** A szélsőérték szükséges feltétele, hogy a derivált az adott pontban nulla értéket vegyen fel.

*a)* $f'(x) = 2x - 2$;

$f'(1) = 0$, $f'(10) = 18$: $x_1$-ben igen, $x_2$-ben nem lehet szélsőérték.

*b)* $g'(x) = 6x^2 + 30x - 84$;

$g'(-7) = 0$, $g'(2) = 0$: $x_1$-ben és $x_2$-ben is lehet.

*c)* $h'(x) = 30x^5 + 90x^4 - 90x^3 - 270x^2 + 60x + 180$;

$h'(-1) = 0$, $h'\left(\sqrt{2}\right) = 0$, $h'(7) = 676\,800$: $x_1$-ben és $x_2$-ben lehet szélsőérték, $x_3$-ban nem.

*d)* $i'(x) = -3x^2\sin\left(x^3\right)$;

$i'\left(\sqrt[3]{2t \cdot \frac{\pi}{2}}\right) = 0$: csak páros $k$-ra $(k = 2t,\ t \in \mathbb{Z})$ lehet szélsőérték.

**6089** A helyi maximum létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény legyen értelmezve az adott helyen és valamely környezetében, valamint ott 0 legyen a derivált értéke. Elégséges feltétel, hogy az adott hely előtt pozitív, utána negatív értéket vegyen fel a derivált.

*a)* $f'(x) = -2x + 6$; $f'(1) = 4$, $f'(3) = 0$. Ha $x < 3$, akkor $f'(x) > 0$ és ha $x > 3$, akkor $f'(x) < 0$. Tehát $x_1$-ben nem lehet szélsőérték, $x_2$-ben helyi maximuma van a függvénynek.

*b)* $g'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; $g'(-1) = -24$, $g'(1) = 0$, $g'(2) = 0$, $g'(3) = 0$. Tudjuk, hogy a harmadfokú függvénynek legfeljebb három zérushelye lehet.

Bontsuk szorzattá: $g'(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

| | $x<1$ | $x=1$ | $1<x<2$ | $x=2$ | $2<x<3$ | $x=3$ | $3<x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | negatív | 0 | pozitív | 0 | negatív | 0 | pozitív |

A szorzat alakból már leolvashatók az előjelek. Összegezve: $x_1$-ben nem lehet szélsőérték, $x_2$-ben és $x_4$-ben helyi minimum van. Csak $x_3$-ban találunk helyi maximum pontot: $x_{max} = 2$.

*c)* $h'(x) = \dfrac{-2x}{\cos^2(x^2)} = 0$; $h'(0) = 0$.

A derivált előjelét csak a számláló befolyásolja: $x = 0$-ban helyi maximuma van a függvénynek.

*d)* $i'(x) = 2x \cdot \cos\left(x^2 - \dfrac{\pi}{2}\right)$; $i'(\sqrt{k\pi}) = 0$ bármely $k \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén.

A szorzat első $2x$ tényezője $x = 0$ ($k = 0$ eset) környezetében előjelet vált (negatívról pozitívra), a második $\cos\left(x^2 - \dfrac{\pi}{2}\right)$ tényező ekkor pozitív. Tehát itt a függvénynek helyi minimuma van.

Ha $k > 0$, akkor a derivált első tényezője folyamatosan pozitív, csak a második tényezőre szükséges koncentrálnunk.

$0 < x < \sqrt{\pi}$ esetén $-\dfrac{\pi}{2} < x^2 - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, aminek koszinusza pozitív.

$\sqrt{\pi} < x < \sqrt{2\pi}$ esetén $\dfrac{\pi}{2} < x^2 - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{3\pi}{2}$, aminek koszinusza negatív.

A továbbiakban ezt a két esetet ismétli újra és újra a függvény. Ebből már meg tudjuk mondani a szélsőértékeket: az $i(x) = \sin\left(x^2 - \dfrac{\pi}{2}\right)$ függvénynek az $x = \sqrt{k\pi}$ helyeken ($k$ nemnegatív egész) páros $k$-ra helyi minimuma, páratlan $k$-ra helyi maximuma van.

Ez utóbbit kerestük: $x_{max} = \sqrt{(2k+1)\pi}$.

**6090** A helyi minimum létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen az adott helyen és valamely környezetében, valamint ott nulla legyen a derivált értéke. Elégséges feltétel, hogy az adott hely előtt negatív, utána pozitív legyen a derivált.

*a)* $f'(x) = 4x - 10$; $f'(x) = 0$ megoldása: $x = 2{,}5$. Mivel a deriváltban $x$ együtthatója pozitív, $f'$ szigorúan monoton növő lineáris függvény. Ezért a zérushely előtt negatív, utána pozitív a derivált, tehát az $x = 2{,}5$ pontban $f(x)$-nek helyi minimuma van, értéke: $f(2{,}5) = -7{,}5$.

*b)* $g'(x) = 3x^2 + 3x - 6$; $g'(x) = 0$ megoldásai: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. A derivált egy felfelé nyíló parabola, így a két zérushely között negatív, rajtuk kívül pozitív értékeket kapunk. Tehát csak $x_2$-nél kapunk az eredeti $g(x)$ függvényre helyi minimumot, melynek értéke: $g(1) = -2{,}5$.

*c)* $h'(x) = 7x^6 - 5x^4 = x^4(7x^2 - 5)$; $h'(x) = 0$ megoldásai: $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{\frac{5}{7}}$; $x_3 = -\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Figyeljük meg, hogy az előjelet csak a második $7x^2 - 5$ tényező határozza meg, $x^4$ ugyanis mindenütt nemnegatív. Ez a kifejezés pozitív, ha $x < x_3$ vagy $x > x_2$, különben negatív (felfelé nyíló parabola). Tehát az eredeti $h(x)$ függvénynek $x_2$-ben van helyi minimuma ($x_3$-ban helyi maximuma van, $x_1$ pedig nem szélsőértéke). A helyi minimum értéke $h\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right) = -\frac{50}{343} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}}$.

*d)* $i'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$; $i'(x) = 0$ megoldásai: $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vizsgáljunk meg egy teljes szöget! (A deriváltfüggvény periódusa nem lehet nagyobb $2\pi$-nél.) Készítsünk táblázatot:

| | $x = \frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ | $x = \frac{3\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ | $x = \frac{5\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ | $x = \frac{7\pi}{4}$ | $\frac{7\pi}{4} < x < \frac{9\pi}{4}$ | $x = \frac{9\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x - \sin x$ | 0 | negatív | negatív | negatív | 0 | pozitív | pozitív | pozitív | 0 |
| $\cos x + \sin x$ | pozitív | pozitív | 0 | negatív | negatív | negatív | 0 | pozitív | pozitív |
| $i'(x)$ | 0 | negatív | 0 | pozitív | 0 | negatív | 0 | pozitív | 0 |

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy $i(x) = \sin x \cdot \cos x$ függvény az $x_{\min} = \frac{(4t-1)\pi}{4}$ helyeken éri el helyi minimumát, ahol $t \in \mathbb{Z}$. Értéke mindegyik esetben azonos: $i(x_{\min}) = -\frac{1}{2}$.

**6091** Első lépésben meg kell keresnünk a deriváltak zérushelyeit, majd azokról eldönteni, hogy van-e, és ha igen, milyen helyi szélsőérték.

*a)* $f'(x) = 6x - 4$; $x_1 = \frac{2}{3}$. Mivel $f'$ szigorúan monoton növő lineáris függvény, ezért a zérushely előtt negatív, utána pozitív az értéke. Így $x_1$-ben a függvénynek van helyi szélsőértéke, mégpedig minimuma.

*b)* $g'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x - 1$; $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}$. A derivált lefelé nyíló parabola, ezért a két zérushely között pozitív, azokon kívül negatív. Tehát $x_1 = \frac{4 - \sqrt{10}}{3}$-ban helyi minimuma, $x_2 = \frac{4 + \sqrt{10}}{3}$-ban helyi maximuma van az eredeti függvénynek.

*c)* $h'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$; $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$. A nevező nem befolyásolja a derivált előjelét, hiszen értéke minden valós $x$-re pozitív. A számláló egy fordított állású parabola, ezért a két zérushely között pozitív, rajtuk kívül negatív értéket vesz fel. Tehát a függvénynek $x_1 = -1$-ben minimuma és $x_2 = 1$-ben maximuma van.

*d)* $i'(x) = 2\cos x + \sin x$; $x = \operatorname{arctg}(-2) + k\pi$, fokban megadva kb. $-63{,}435° + k \cdot 180°$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

| $k$ | 0 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x = -63{,}435°$ | $-63{,}435° < x < 116{,}565°$ | $x = 116{,}565°$ | $116{,}565° < x < 296{,}565°$ | $x = 296{,}565°$ |
| $2\cos x + \sin x$ | 0 | pozitív | 0 | negatív | 0 |

Tehát $i(x) = 2\sin x - \cos x$ függvénynek páros $k$-ra helyi minimuma ($x_{\min} \approx -63{,}435° + t \cdot 360°$), páratlan $k$ értékre pedig helyi maximuma van ($x_{\max} \approx 116{,}565° + t \cdot 360°$, $t \in \mathbb{Z}$).

## Derivált és monotonitás kapcsolata – megoldások

**6092** A monotonitás vizsgálatához szükség van a függvényre: első lépésben meg kell vizsgálnunk, értelmezve van-e a függvény a kérdéses intervallumon. (Ezt csak ott jelöljük, ahol $\mathbb{R}$-től eltér.) Ha igen, akkor meg kell állapítani, hogy a derivált hol nemnegatív, és a megadott intervallum része-e ennek.

*a)* $a'(x) = 1{,}001$. $a'(x) > 0$ megoldásai: $x \in \mathbb{R}$. $]-\infty; 5] \subseteq \mathbb{R}$. A megadott intervallumon a függvény szigorúan monoton növő.

*b)* $b'(x) = 6x$. $b'(x) \geq 0$ megoldásai: $x \geq 0$. $[0; 2] \subseteq [0; \infty[$, a függvény monoton nő a $[0; 2]$ intervallumon. A növekedés szigorú.

*c)* $c'(x) = -2x + 2$; $c'(x) \geq 0$ megoldásai: $x \leq 1$. Mivel $[-5; 2]$ nem részhalmaza $]-\infty; 1]$-nak, így a függvény nem monoton növő a $[-5; 2]$ intervallumon.

*d)* $d'(x) = 3x^2 + 2x$; $d'(x) \geq 0$ megoldásai: $x \leq -\frac{2}{3}$ vagy $x \geq 0$. A $[-3; -2] \cup [0; 2]$ valódi részhalmaza a $\left]-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [0; \infty[$ halmaznak, ezért $f(x) = x^3 + x^2$ a megadott intervallumon szigorúan monoton növő.

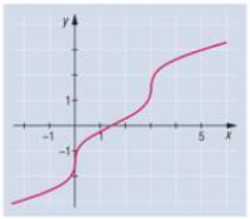
*e)* $e'(x) = -3x^2 - 6x + 4$. $e'(x) \geq 0$ megoldásai: $-1 - \sqrt{\frac{7}{3}} \leq x \leq -1 + \sqrt{\frac{7}{3}}$. Mivel $-1 + \sqrt{\frac{7}{3}} < 1$, ezért a teljes kérdéses intervallumon nem monoton növő a függvény.

*f)* $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 0{,}5)^2}$. $f'(x) \geq 0$ megoldásai: $x \leq 0$. A $]-\infty; 0]$ éppen ez az intervallum, így a feladatban kérdezett $f(x) = \frac{1}{x^2 + 0{,}5}$ függvény (szigorúan) monoton növő az adott intervallumon.

*g)* $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a függvény nincs értelmezve az intervallum jobb végpontjában.

*h)* $D_g = [-\infty; -2] \cup [-1; \infty[$, a függvény nincs értelmezve a $]-2; -1[$ intervallumon.

*i)* $i'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-3)^2}}$. Bár a derivált két pontban ($x_1 = 0$ és $x_2 = 3$) nincs értelmezve, ám ahol van, ott pozitív.




Az eredeti $i(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-3}$ függvény mindenütt folytonos, ezért igaz, hogy mindenhol szigorúan monoton növő is.

*Megjegyzés:* A kérdéses pontokban az érintő függőleges egyenessé válik egy pillanatra, így nem tudjuk iránytangensét megadni a derivált segítségével.

*j)* $j'(x) = 3\cos(3x)$. $j'(x) \geq 0$ megoldásai: $-\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$.

Behelyettesítve a $k = 1$ értéket, éppen az adott $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$ intervallumot kapjuk. Tehát a függvény monoton növő itt. A növekedés szigorú.

*k)* $D_k = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$. A kérdezett intervallum valódi részhalmaza az értelmezési tartománynak.

$k'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$, $k'(x) > 0$ ahol értelmezve van a függvény, így a kérdéses $k(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ függvény szigorúan monoton növő a $]-\pi; 0[$ intervallumon.

*l)* $l'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$. Külön megvizsgálva a függvényeket, figyeljük meg, hogy $\sin x \geq 0$, $\cos x \geq 0$, $x \geq 0$ az adott intervallumon.

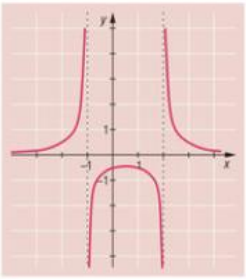
Így a deriváltra is $l'(x) \geq 0$: $l(x)$ monoton növő a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon.

**6093** Ott monoton csökken a függvény, ahol létezik a deriváltja, és az nem pozitív.

*a)* $f'(x) = -2x + 3$. $f'(x) \leq 0$, ha $1{,}5 \leq x$. A függvény (szigorúan) monoton csökkenő a $\left[\frac{3}{2}; \infty\right[$ intervallumon.

*b)* $g'(x) = 3x^2 - 8x + 6$. A $g'(x) = 0$ másodfokú egyenletnek nincs megoldása, a deriváltfüggvény nem metszi az $x$ tengelyt. Mivel $g'$ felfelé nyíló parabola, ezért végig az $x$ tengely felett halad: minden valós $x$-re $g'(x) > 0$. A megadott $g(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ függvény sehol sem csökken.

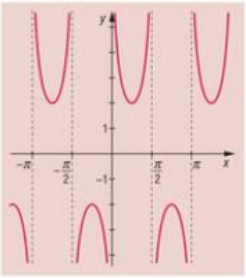
*c)* $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$. $h'(x) = \frac{-(2x-1)}{(x^2 - x - 2)^2}$, $h'(x) \leq 0$, ha $x \geq 0{,}5$.



Mivel ezt csak $D_h$-n tekinthetjük, azt kell mondanunk:

$h(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$ az $\left[\frac{1}{2}; 2\right[ \cup ]2; \infty[$ halmazon (szigorúan) monoton csökken.

*d)* $D_i = \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$, $i'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\cos x \cdot \sin x)^2}$.



$i'(x) \leq 0$, ha a számláló nem pozitív:

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

A függvény nincs értelmezve ezen intervallumok felezőpontjaiban, ezért a megoldás:

$\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi; k\pi\right[ \cup \left]k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$ intervallumokon (szigorúan) monoton csökkenő az $i(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ függvény. ($k \in \mathbb{Z}$.)

**6094** Először deriválnunk kell a függvényeket (mindegyik függvény értelmezve van a teljes valós számhalmazon), majd a derivált előjelét megvizsgálva válaszolunk a kérdésre.

*a)* $f'(x) = 8 > 0$, így a függvény szigorúan monoton növő.

*b)* $g'(x) = 2x - 2$. Ez $x < 1$ esetén negatív, $x > 1$-re pozitív értéket vesz fel.

Tehát az eredeti $g(x) = x^2 - 2x + 8$ függvény $x < 1$ esetén szigorúan monoton csökken, $x > 1$ esetén szigorúan monoton nő.

*c)* $h'(x) = 6x^2 + 2x - 4$. Egy felfelé nyíló paraboláról lévén szó, a zérushelyek között negatív, azokon kívül pozitív a derivált.

Tehát a $]-\infty; -1[ \cup \left]\frac{2}{3}; \infty\right[$ halmazon szigorúan monoton növő, a $\left]-1; \frac{2}{3}\right[$-on pedig szigorúan monoton csökkenő a $h(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 5$ függvény.

*d)* $i'(x) = 7x^6 + 18x^5 + 5x^4 = x^4 \cdot (7x^2 + 18x + 5)$. Mivel $x^4$ nem befolyásolja a derivált előjelét, így a függvény monotonitásában sem következik be változás az $x = 0$ helyen, elegendő a zárójelben található másodfokú kifejezést vizsgálni. Egyenes állású parabola, ezért az $i(x) = x^7 + 3x^6 + x^5$ függvény a $\left]-\infty; \frac{-9-\sqrt{46}}{7}\right[ \cup \left]\frac{-9+\sqrt{46}}{7}; \infty\right[$-on szigorúan monoton növő, a zérushelyek közötti $\left]\frac{-9-\sqrt{46}}{7}; \frac{-9+\sqrt{46}}{7}\right[$-on viszont szigorúan monoton csökkenő.

## Szélsőérték-feladatok – megoldások

**6095** Legyen a pálya házfallal párhuzamos hosszabb élének hosszúsága $x$ méter, akkor a rövidebb oldala $x - 25$ méter, a kerítéssel párhuzamos oldala pedig:

$$150 - x - (x - 25) = 175 - 2x \text{ méter.}$$

A focipálya területe ekkor:

$$T(x) = x(175 - 2x) = -2x^2 + 175x.$$

Deriválva a területfüggvényt:

$$T'(x) = -4x + 175.$$

A derivált zérushelye $x = 43{,}75$. Mivel a szigorúan monoton csökkenő lineáris függvény előtte pozitív, utána negatív, így az eredeti $T(x)$ függvénynek itt valóban maximuma van. A keresett pálya méretei tehát: 43,75 méter széles és 87,5 méter hosszú.

**6096** Behelyettesítve a megadott értékeket, az

$$y(t) = -4{,}9t^2 + 10t$$

függvénynek kell megkeresnünk a szélsőértékét.

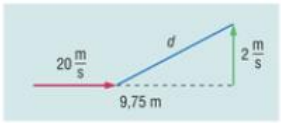
Deriválva:

$$y'(t) = -9{,}8t + 10,$$

aminek zérushelye $t \approx 1{,}02$. Ez szigorúan monoton csökkenő lineáris függvény, a zérushely előtt pozitív, utána negatív, tehát az eredeti $y(t)$ függvény itt veszi fel a maximumát. A labda a lövés után kb. 1,02 másodperc múlva éri el legmagasabb helyzetét.

Mivel a lövés a földtől 0,75 méter magasságban történt, így a labda $y(1{,}02) + 0{,}75 \approx 5{,}852$ méter magasban lesz ekkor.

**6097** Készítsünk ábrát a megadott adatokkal! A squashlabda $t$ másodperc alatt $20t$, a légy közben $2t$ méter távolságot tesz meg. A távolságukat az idő függvényében leíró $d$ függvény:




$$d(t) = \sqrt{(9{,}75 - 20t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{404t^2 - 390t + 95{,}0625}.$$

Ennek deriváltja pedig

$$d'(t) = \frac{808t - 390}{2\sqrt{404t^2 - 390t + 95{,}0625}}.$$

A derivált zérushelyét csak a számláló határozza meg: $t = \frac{390}{808} \approx 0{,}4827$ (itt a kifejezés értelmezve is van). Mivel a nevező az értelmezési tartományon pozitív, a derivált előjelét csak a számláló befolyásolja: monoton növő függvény, tehát a zérushely előtt negatív, utána pozitív. Így a $d(t)$ függvénynek $t \approx 0{,}4827$ másodperc helyen minimuma van. Ekkor $d(t) \approx 0{,}97$ méter, vagyis a labda elég messzire volt a légytől, közelítőleg 97 centiméterre.

**6098** Az Eszter által elképzelt doboz magasságát jelölje $x$, szélességét $x + 5$, hosszúsága ekkor

$$\frac{200 - 4x - 4(x+5)}{4} = 45 - 2x.$$

A doboz térfogatát a magasság függvényében a

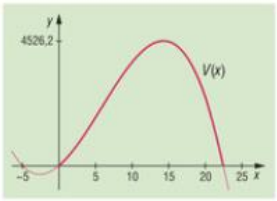
$$V(x) = x(x+5)(45-2x) = -2x^3 + 35x^2 + 225x$$

függvény írja le $(D_V = ]0;\ 22{,}5[)$. Deriváltja:

$$V'(x) = -6x^2 + 70x + 225.$$

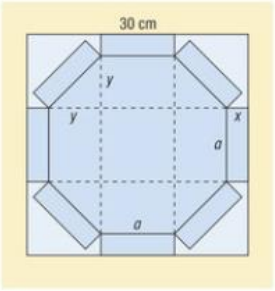
A derivált zérushelyei:

$$x_{1,2} = \frac{-70 \pm \sqrt{10\,300}}{-12}, \quad \text{innen} \quad x_1 \approx -2{,}624,\ x_2 \approx 14{,}29.$$




Mivel a derivált lefelé nyíló parabola, a két zérushely között pozitív, rajtuk kívül negatív. Tehát a $V(x)$ függvénynek $x_2$-ben van maximuma. Eszternek körülbelül 143 milliméter magas, 193 milliméter széles és nagyjából 164 milliméter hosszú dobozt kell készítenie.

**6099** Jelölje $x$, $y$, $a$ a rajzon látható szakaszokat! Az ábrát megfigyelve vegyük észre, hogy az alapterület két $a$ oldalú négyzetből (középen és a négy egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszöget összetolva), illetve négy egybevágó téglalapból áll.




$$T(x) = 2a^2 + 4ay.$$

Ne feledjük, a kifejezést végül $x$-től kell függővé tennünk. Előbb azonban keressünk összefüggést $a$ és $y$ között. Írjuk fel a Pitagorasz-tételt az előbb említett egyenlő szárú derékszögű háromszögre: $2y^2 = a^2$, innen $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$T(x) = 2a^2 + 2\sqrt{2}a^2 = 2a^2\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Mivel a lap oldala 30 cm, így $2x + 2y + a = 30$. Ebből kifejezve $a$-t $x$ segítségével, az

$$a = 2 \cdot \frac{15 - x}{1 + \sqrt{2}}$$

kifejezést kapjuk. Behelyettesítve a területbe:

$$T(x) = 8\frac{(15-x)^2}{1+\sqrt{2}}.$$

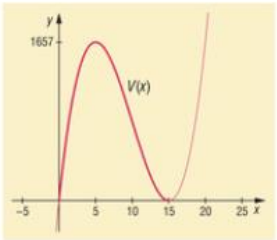
A térfogathoz az alapterületet meg kell szorozni a magassággal:

$$V(x) = 8 \cdot \frac{x(15-x)^2}{1+\sqrt{2}} = \frac{8}{1+\sqrt{2}} \cdot (x^3 - 30x^2 + 225x).$$

Deriváljuk a térfogatot leíró függvényt $(D_V = ]0;\ 15[)$:

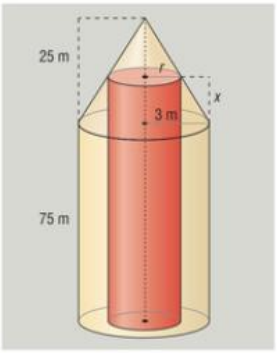
$$V'(x) = \frac{24}{1+\sqrt{2}} \cdot (x^2 - 20x + 75).$$

$V'(x)$ zérushelyei: $x_{1,2} = \frac{20 \pm 10}{2}$, $x_1 = 15$, $x_2 = 5$.




Mivel a derivált egyenes állású parabola, ezért a két zérushely között negatív, rajtuk kívül pozitív. Maximumot így a kisebb helyen produkál, tehát $x_{max} = 5$. A maximális térfogatú nyolcszögletű dobozhoz 5 cm széles füleket kell a géppel hajtogattatni. A térfogata ekkor megközelítőleg 1656,85 cm$^3$.

**6100** Tekintve az ábrát, koncentráljunk a kupolát alkotó kúpra. Vegyük észre a két hasonló derékszögű háromszöget, majd írjuk fel a megfelelő oldalak arányát:




$$\frac{r}{3}=\frac{25-x}{25}.$$

Innen

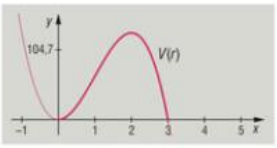
$$x=25\left(1-\frac{r}{3}\right).$$

A kupolába eső henger térfogata alapterület és magasság szorzata:

$$V(r)=r^2\pi\cdot 25\left(1-\frac{r}{3}\right)=25\pi\left(-\frac{r^3}{3}+r^2\right).$$

Deriváljuk a térfogatfüggvényt $(D_V=]0;3[)$:

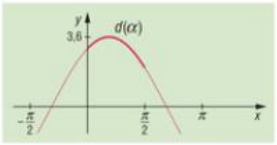
$$V'(r)=25\pi\cdot\left(-\frac{3r^2}{3}+2r\right)=25\pi\cdot r(2-r).$$




A két zérushely $r_1=0$ és $r_2=2$. Fordított állású parabola esetén maximumot a nagyobb helyen találunk, $r_{max}=2$. Ekkor a lift teteje megközelítőleg 83,3 méter magasságban lesz.

**6101** A feladat szövegénél levő ábrát figyelve két derékszögű háromszöget ($ABF_\triangle$ és $BCD_\triangle$) kell észrevennünk. Mindkettőben van ugyanakkora $\alpha$ nagyságú szög ($0°<\alpha<90°$). Ezért $BF=2\sin\alpha$; $BD=3\cos\alpha$. Összegük az $\alpha$ szög nagyságától függ:

$$d(\alpha)=BF+BD=2\sin\alpha+3\cos\alpha.$$

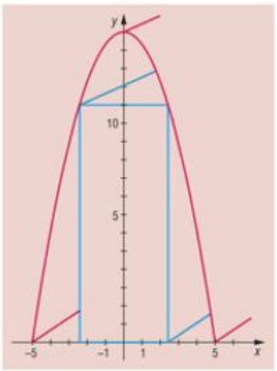



Deriváljuk a $d$ távolságfüggvényt! A derivált zérushelyét $\alpha$ értelmezési tartományát figyelembe véve keressük:

$$d'(\alpha)=2\cos\alpha-3\sin\alpha=0\ \Rightarrow\ \frac{2}{3}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Innen $\alpha\approx 33{,}69°$. A derivált ennél kisebb szögekre pozitív, nagyobbakra pedig negatív értéket vesz fel, tehát a függvénynek ez valóban maximuma. (A megadott intervallumon mind a szinusz, mind a koszinusz szögfüggvény értéke pozitív.)

**6102** Helyezzük a feladat által leírt dolgokat egy ügyesen választott koordináta-rendszerbe. A rendszer ordinátatengelye essen egybe a parabola tengelyével, az abszcisszatengely pedig az alagút aljával. Egy 15-tel felfelé eltolt, fordított állású parabola egyenletét keressük, melynek zérushelyei 5 és –5.




Ha $y=-ax^2+15$ és $x=5$ zérushelye $(0=-25a+15)$, akkor $a=\frac{3}{5}$. A parabola egyenlete: $y(x)=-\frac{3}{5}x^2+15$. Legyen a kamion félszélessége $x$, ekkor magassága $y(x)$. Vagyis a kamion keresztmetszetét a $]0;\sqrt{10}[$-on értelmezett

$$T(x)=2x\left(-\frac{3}{5}x^2+15\right)=-\frac{6}{5}x^3+30x$$

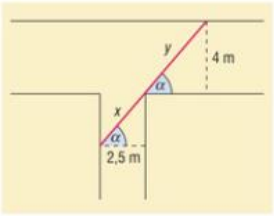
függvény írja le. Deriváljunk:

$$T(x)=-\frac{18}{5}x^2+30.$$

A derivált zérushelyei $x_{1,2} = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}$. Fordított állású parabola lévén, a maximum a nagyobb zérushelynél van: $x_{max} = \frac{5}{\sqrt{3}}$. Ez $]0; \sqrt{10}[$-on globális, hiszen előtte nő, utána csökken $T(x)$.

A kamion szélessége ennek duplája (kb. 5,77 méter), magassága pedig $y(x_{max}) = -\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 + 15$, azaz kereken 10 méter lehet. Úgy tűnik, még a speciálisan nagy rakományt szállító kamionok is gond nélkül át tudnak kelni az alagúton.

**6103** A járművet tekintsük egyenes szakasznak. Azt a szakaszt keressük, amit még be tudunk fordítani az ábrának megfelelően. Bontsuk a szakaszt $x$ és $y$ részre. A berajzolt derékszögű háromszögekben érvényesek a következők $(0° < \alpha < 90°)$:

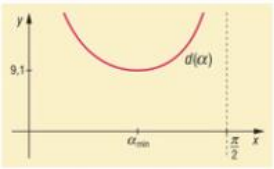



$$4 = y\cdot\sin\alpha \quad \text{és} \quad 2{,}5 = x\cdot\cos\alpha.$$

Kifejezve $x$-et és $y$-t, a szakasz $d$ hosszára kapjuk:

$$d(\alpha) = x + y = \frac{4}{\sin\alpha} + \frac{2{,}5}{\cos\alpha}.$$

A szakaszhosszfüggvény deriváltja:



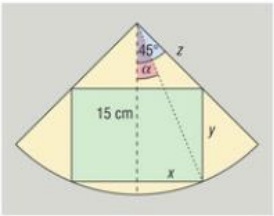

$$d'(\alpha) = \frac{-4\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{2{,}5\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{-4\cos^3\alpha + 2{,}5\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}.$$

A nevező nem befolyásolja a zérushelyet, csak a számlálótól függ:

$$\frac{4}{2{,}5} = \operatorname{tg}^3\alpha,$$

ahonnan $1{,}1696 \approx \operatorname{tg}\alpha$ és $\alpha_{max} \approx 49{,}47°$. Kisebb szögre a derivált negatív, nagyobbra pozitív értéket ad, vagyis itt $d(\alpha)$ függvénynek minimuma van. Visszahelyettesítve ide $d(\alpha_{min}) \approx 9{,}1$. Átlagosan 1,5 métert számítva egy főre, ez a tandem legfeljebb 6 fős lehet. Ha Géza vezet, akkor maximum 5 utast szállíthat. (Még így is egy fővel jobb, mint egy ötszemélyes autó.)

**6104** *a)* Ismét tekintsük az ábrát. A két derékszögű háromszöget felhasználva kapjuk $(0° < \alpha < 45°)$:



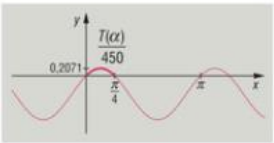

$$x = 15\sin\alpha = z\cdot\sin 45°, \quad \text{innen} \quad z = 15\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 45°}.$$

Ugyanezen derékszögű háromszögekből a téglalap $y$ oldalát is felírhatjuk:

$$y = 15\cos\alpha - z\cdot\cos 45° = 15\cos\alpha - 15\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 45°}\cdot\cos 45° =$$
$$= 15\cos\alpha - 15\operatorname{ctg}45°\cdot\sin\alpha.$$

Mivel $\operatorname{ctg}45° = 1$, $y = 15(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

Kifejeztük a téglalap oldalait $\alpha$ segítségével, írjuk fel a területet a szög függvényében:




$$T(\alpha) = 2xy = 450(\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \sin^2\alpha).$$

Deriváljuk a területet:

$$T'(\alpha) = 450(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha) = 450(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha).$$

Itt felhasználtuk a duplaszögekre vonatkozó összefüggéseket. $T'(\alpha) = 0$, ha $\operatorname{tg}2\alpha = 1$, amiből $\alpha = 22{,}5°$. $\alpha$-nál kisebb szögre a derivált pozitív, nagyobbra pedig negatív. Így a maximális területű, téglalap alakú felvágottszelet közelítőleg $2x = 30\sin 22{,}5° \approx 11{,}48$ cm hosszú és $y = 15(\cos 22{,}5° - \sin 22{,}5°) \approx 8{,}12$ cm széles lehet.

*b)* Nézzük át, mi változik az *a)* részhez képest, ha a rajzon jelölt szög nem 45°, hanem $\frac{180^\circ}{n}$. Először is

$$z = 15\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{180^\circ}{n}} \quad \text{és} \quad y = 15\left(\cos\alpha - \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\cdot\sin\alpha\right).$$

A terület a következőképpen módosul:

$$T(\alpha) = 450\left(\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\cdot\sin^2\alpha\right).$$

Deriváltja:

$$T'(\alpha) = 450\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right) = 450\left(\cos 2\alpha - \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\cdot\sin 2\alpha\right).$$

A derivált zérushelye:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{90^\circ}{n}.$$

Ekkor a téglalap méreteire adódik:

$$2x = 30\sin\frac{90^\circ}{n}, \quad \text{illetve} \quad y = 15\sin\frac{90^\circ}{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{90^\circ}{n} - \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\right).$$

## Derivált deriváltja. Miről informál a második derivált? – megoldások

**6105** *a)* $a''(x) = 0$;

*b)* $b''(x) = 2$;

*c)* $c''(x) = -6$;

*d)* $d''(x) = -6x$;

*e)* $e''(x) = 12x - 6$;

*f)* $f''(x) = 156x^{11} + 126x^5$;

*g)* $g''(x) = \frac{2}{x^3}$;

*h)* $h''(x) = -2(x^2+3x)\cdot\frac{x^2+3x-(2x+3)^2}{(x^2+3x)^4}$;

*i)* $i''(x) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x^2+x)^3}}$;

*j)* $j''(x) = -\sin x - \cos x$.

**6106** Mindkettőt négyszer.

$(\sin x)'''' = (\cos x)''' = (-\sin x)'' = (-\cos x)' = (-(-\sin x)) = \sin x$.

$(\cos x)'''' = (-\sin x)''' = (-\cos x)'' = (-(-\sin x))' = (-(-\cos x)) = \cos x$.

**6107** *a)* $f''(x) = 10$, nincs zérushely;

*b)* $f''(x) = 30x - 4$, zérushelye: $x = \frac{2}{15}$;

*c)* $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{228}}{24}$;

*d)* $f''(x) = \frac{8}{(2x+1)^3}$, nincs zérushelye;

*e)* $f''(x) = -4\sin x\cdot\cos x$, $x = k\cdot\frac{\pi}{2}$, ahol $k$ tetszőleges egész szám.

**6108** *a)* $f''(x) = 24$, nincs inflexiós pont;

*b)* $g''(x) = 6x + 6$. Mivel $g''(-1) = 0$ és $g''$ előjelet vált $x_0$-ban, ezért $x_0 = -1$ inflexiós pont.

*c)* $h''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$. Mivel $h''(0) = 0$ és a szinusz előjelet vált a 0-ban, így inflexiós pontja van.

*d)* $i''(x) = 90x^8 - 56x^6 = 2x^6(45x^2 - 28)$. Bár $x_0 = 0$-ban a második derivált 0, azonban nem vált előjelet, így ez nem inflexiós pont. A másik megadott pontban mindkét feltétel teljesül, így ott a függvénynek valóban inflexiós pontja van.

**6109** *a)* $f''(x) = 24x - 6$. $f''(x) = 0$ megoldása $x = 0{,}25$.

Mivel $f''$ szigorúan monoton növő függvény, 0,25-nél kisebb $x$-re negatív, nagyobbra pozitív. Így $f(x)$-nek $x = 0{,}25$-ben inflexiós pontja van, és $]-\infty; 0{,}25[$ intervallumon konkáv, $]0{,}25; \infty[$ intervallumon konvex.

*b)* $g''(x) = 6(2x^2 - 2x - 1)$. A felfelé nyíló parabola zérushelyei $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Mindkettő pontban konvexitást vált a függvény, mindkettő inflexiós pont. A $g(x)$ függvény pedig

– konvex a $\left]-\infty; \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}; \infty\right[$ intervallumon,

– konkáv a $\left]\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right[$ intervallumon.

*c)* $h''(x) = x^2(x^2 + x - 2) = x^2(x + 2)(x - 1)$. Ebből adódik a második derivált három zérushelye: 0, –2 és 1.

Közülük a 0-nál nem vált előjelet $h''(x)$, –2-nél pozitívról negatívra, 1-nél pedig negatívról pozitívra változik az előjele. Így $h(x)$-nek –2-ben és 1-ben van inflexiós pontja. A függvény konkáv a $]-2; 1[$ intervallumon, illetve konvex a $]-\infty; -2[$ és $]1; \infty[$ intervallumokon.

*d)* $i''(x) = -2\sin x - 3\cos x$. Zérushelyei a $\operatorname{tg} x = -\dfrac{3}{2}$ egyenlet megoldásai: $x \approx -56{,}31° + k \cdot 180°$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ezekben a pontokban előjelet is vált a második derivált, tehát az eredeti függvénynek ezek inflexiós pontjai.

Már csak a második derivált előjelét kell meghatároznunk.

– Ha $-236{,}31° < x < -56{,}31°$, akkor $i''(x) > 0$.

Tehát a függvény konvex a $]-236{,}31° + k \cdot 360°; -56{,}31° + k \cdot 360°[$ intervallumokon.

– Ha $-56{,}31° < x < 123{,}69°$, akkor $i''(x) < 0$.

Tehát a függvény konkáv a $]-56{,}31° + k \cdot 360°; 123{,}69° + k \cdot 360°[$ intervallumokon.

**6110** *a)* $f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2 = 0$ az $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ pontokban. Ezeken a helyeken lehet helyi szélsőérték. Továbbá $f''(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0$ az $\hat{x}_1 = \dfrac{2}{3}$ és $\hat{x}_2 = 2$ pontban.

Mivel $f''(0) > 0$, ezért $x = 0$-ban $f$-nek helyi minimuma van. Mivel az $x = 2$ pontban mind az első, mind a második derivált 0, ezért ott ezek alapján nem tudunk nyilatkozni a szélsőértékről. Azt viszont tudjuk, hogy az első derivált $x = 2$ pl. 1 sugarú $]1; 3[$ környezetében pozitív, tehát $f(x)$ monoton növő, azaz valóban nincs szélsőérték.

*b)* $g'(x) = -\sin x - 1 = 0$ az $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ helyeken $(k \in \mathbb{Z})$. Itt lehet szélsőérték. Mivel azonban $g''(x) = -\cos x$ és $g''\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$, ezért egyik kérdéses pontban sem dönthet a második derivált. Viszont az első igen: $g'(x) \le 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, tehát $g(x)$ függvény az értelmezési tartományán monoton csökkenő, nincs szélsőértéke.

**6111** *a)* $f'(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{9}{2}x^2$, $f''(x) = x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9) = x(x+3)^2 = 0$, ha $x_1 = 0$ vagy $x_2 = -3$. Ezen helyeken lehet inflexiós pontja a függvénynek.

$f'''(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3) = 3(x+3)(x+1) = 0$, ha $\hat{x}_1 = -3$, $\hat{x}_2 = -1$. Mivel $f'''(0) > 0$, ezért $x = 0$-ban az $f(x)$ függvénynek inflexiós pontja van. Az $x = -3$ pontról így dönteni nem tudunk. Újra vizsgálva a második deriváltat, $f''(x)$ a $-3$ pont pl. 1 sugarú $]-4; -2[$ környezetében negatív és nulla értékeket vesz fel. Ebből adódik, hogy ezen az intervallumon a függvény végig konkáv, tehát itt nincs inflexiós pont.

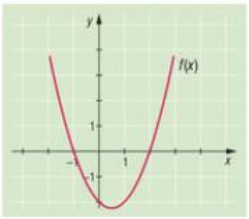
*b)* Felhasználva az addíciós összefüggést, $f'(x) = -2\cos x(-\sin x) = \sin(2x)$. $f''(x) = 2\cos(2x) = 0$, ha $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Itt lehet inflexiós pont. $f'''(x) = -4\sin(2x)$. Mivel a kérdéses helyeken a szinuszfüggvény 1 vagy $-1$ értékeket vesz fel, mindenhol inflexiós pont van.

*c)* $h'(x) = \ln x + 1 - 3x^2$, $h''(x) = \frac{1}{x} - 6x = 0$, ha $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$. Mivel $D_h = \mathbb{R}^+$, így csak $x = \sqrt{\frac{1}{6}}$ jöhet szóba. $h'''(x) = -\frac{1}{x^2} - 6 < 0$ minden $D_h$-beli számra, tehát a kapott pont inflexiós pont.

## Differenciálható függvények vizsgálata – megoldások

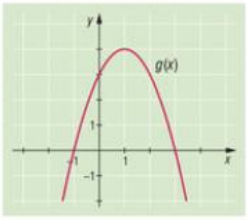
**6112** *a)* $c$; *b)* $a, e$; *c)* nincs;
*d)* $a$; *e)* $b, d$; *f)* $[a; c]$ és $[e; \infty[$;
*g)* $]-\infty; a]$ és $[c; e]$; *h)* $]-\infty; b]$ és $[d; \infty[$; *i)* $[b; d]$.

**6113** *a)* 1. $D_f = \mathbb{R}$.




2. Zérushelyek: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
3. $f(x) = (x+1)(x-2)$, tehát nem páros és nem páratlan, nem periodikus.
4. Mivel hatványfüggvény, minden valós pontban folytonos. Határértékei:
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$
5. $f'(x) = 2x - 1 = 0$, ha $x = \frac{1}{2}$. A derivált szigorúan monoton növő, ez a pont abszolút minimum.
A függvény szigorúan monoton csökken a $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$-on, az $\left]\frac{1}{2}; \infty\right[$-on pedig növekszik.
A minimum értéke: $f(0{,}5) = -2{,}25$.
6. $f''(x) = 2$, ezért a függvény konvex a teljes értelmezési tartományon.
7. $R_f = [-2{,}25; \infty[$.

*b)* 1. $D_g = \mathbb{R}$.




2. Zérushelyek: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

3. $g(x) = -(x+1)(x-3)$, nincs paritása, nem periodikus.

4. Folytonos $\mathbb{R}$-en, határértékei:

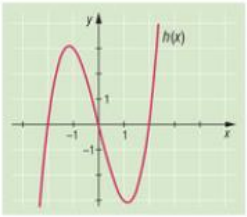
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

5. $g'(x) = -2x + 2 = 0$, ha $x = 1$. A derivált szigorúan monoton csökkenő, ezért ez a pont maximum. A függvény a $]-\infty; 1[$-on szigorúan monoton nő, az $]1; \infty[$-on csökken. A maximum értéke: $g(1) = 4$.

6. $g''(x) = -2$, ezért a függvény minden pontban konkáv.

7. $R_g = ]-\infty; 4]$.

*c)* 1. $D_h = \mathbb{R}$.




2. Zérushelyek: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

3. $h(x) = x(x+2)(x-2)$. Így

$$h(-x) = (-x)\cdot[(-x)+2]\cdot[(-x)-2] =$$
$$= (-1)\cdot x\cdot(-1)\cdot[x-2]\cdot(-1)\cdot[x+2] = -h(x),$$

tehát a függvény páratlan. Nem periodikus.

4. $D_h$-n folytonos, határértékei:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} h(x) = \infty.$$

5. $h'(x) = 3x^2 - 4 = 0$ az $\hat{x}_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\hat{x}_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ pontokban.

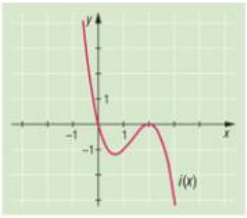
6. $h''(x) = 6x$, $x = 0$. $h''(\hat{x}_1) < 0$ (helyi maximum), $h''(\hat{x}_2) > 0$ (helyi minimum).

A minimum értéke: $h(\hat{x}_2) = -\frac{16}{3\sqrt{3}}$, a maximum értéke: $h(\hat{x}_1) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$. A két szélsőérték között szigorúan monoton csökken, rajtuk kívül növekszik a függvény.

$h'''(x) = 6$, tehát $x = 0$-ban inflexiós pont van (előtte konkáv, utána konvex a függvény).

7. $R_h = \mathbb{R}$.

*d)* 1. $D_i = \mathbb{R}$.




2. Zérushelyek: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

3. Nincs paritása, nem periodikus.

4. Folytonos $\mathbb{R}$-en, határértékei:

$$\lim_{x\to-\infty} i(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} i(x) = -\infty.$$

5. $i'(x) = -3x^2 + 8x - 4 = 0$, $\hat{x}_1 = \frac{2}{3}$, $\hat{x}_2 = 2$.

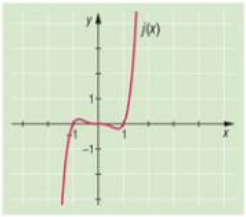
6. $i''(x) = -6x + 8 = 0$, $x = \frac{4}{3}$. $i''(\hat{x}_1) > 0$ (helyi minimum), $i''(\hat{x}_2) < 0$ (helyi maximum).

A függvény a két szélsőérték között szigorúan monoton növő, rajtuk kívül csökkenő.

A minimum értéke $i(\hat{x}_1) = -\frac{32}{27}$, a maximum értéke $i(\hat{x}_2) = 0$. $i'''\left(\frac{4}{3}\right) = -6$, tehát ez a pont inflexiós pont, mert a $\left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$-on konvex, a $\left[\frac{4}{3}; \infty\right[$-on konkáv a görbe.

7. Értékkészlet: $R_i = \mathbb{R}$.

*e)* 1. $D_j = \mathbb{R}$.




2. Zérushelyek: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

3. Mivel

$$j(-x) = (-x)^3 \cdot [(-x)^2 - 1] = (-1) \cdot x^3 \cdot (x^2 - 1) = -j(x),$$

a függvény páratlan, nem periodikus.

4. Folytonos, határértékei:

$$\lim_{x \to -\infty} j(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} j(x) = \infty.$$

5. $j'(x) = 5x^4 - 3x^2 = x^2 \cdot (5x^2 - 3)$.

Ennek zérushelyei: $\hat{x}_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\hat{x}_2 = 0$, $\hat{x}_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

A derivált szorzat alakjából látható, hogy $\hat{x}_1$ előtt és $\hat{x}_3$ után pozitív, $\hat{x}_1$ és $\hat{x}_3$ között negatív (csak $\hat{x}_2$-ben 0). Így $\hat{x}_1$-ben helyi maximum, $\hat{x}_3$-ban helyi minimum van, $\hat{x}_2$-ben nincs szélsőérték. A függvény $\hat{x}_1$-ig és $\hat{x}_3$-tól szigorúan monoton növő, közöttük csökkenő.

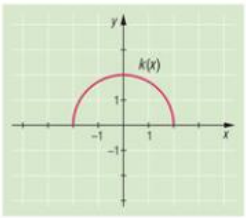
A maximum értéke: $j(\hat{x}_1) = \frac{6}{25} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$. A minimum értéke: $j(\hat{x}_3) = -\frac{6}{25} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$.

6. $j''(x) = 20x^3 - 6x$, ennek zérushelyei: $\bar{x}_1 = -\sqrt{0{,}3}$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = \sqrt{0{,}3}$.

A második derivált $\bar{x}_1$-nél kisebb $x$-ekre, valamint $\bar{x}_2$ és $\bar{x}_3$ között negatív, illetve $\bar{x}_3$-nál nagyobb, valamint $\bar{x}_1$ és $\bar{x}_2$ közötti $x$-ekre pozitív, így az eredeti függvénynek mindhárom helyen inflexiós pontja van. A függvénygörbe $]-\infty; -\sqrt{0{,}3}\,]$ és $[0; \sqrt{0{,}3}\,]$ intervallumokon konkáv; $[-\sqrt{0{,}3}; 0]$ és $[\sqrt{0{,}3}; \infty[$ intervallumokon konvex.

7. $R_j = \mathbb{R}$.

*f)* 1. $D_k = [-2; 2]$.




2. Zérushelyek: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

3. Mivel

$$k(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = k(x),$$

a függvény páros, nem periodikus.

4. $D_k$-n folytonos. A bal végpontban jobbról, a jobb végpontban balról folytonos:

$$\lim_{x \to -2} k(x) = k(-2) = \lim_{x \to 2} k(x) = k(2) = 0.$$

5. $k'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$, $x = 0$.

Csak a számláló befolyásolja a derivált értékét, ami $x = 0$-nál kisebb változóra pozitív ($k(x)$ szigorúan monoton növő), nagyobbra negatív ($k(x)$ szigorúan monoton csökkenő). Ez maximumhely, a maximum értéke $k(0) = 2$.

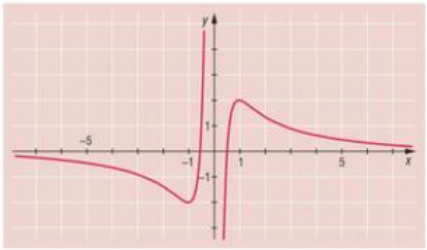
6. $$k''(x) = -\frac{\sqrt{4 - x^2} - x \cdot \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}}{4 - x^2} = -\frac{4 - x^2 + x^2}{(4 - x^2) \cdot \sqrt{4 - x^2}} = -\frac{4}{(4 - x^2) \cdot \sqrt{4 - x^2}} < 0.$$

$k(x)$ konkáv, nincs inflexiós pontja.

7. $R_k = [0; 2]$.

**6114** *a)* 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Zérushelyek: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.




3. A függvény páratlan, nem periodikus:

$$f(-x) = \frac{3}{-x} - \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} =$$

$$= -\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = -f(x).$$

4. $D_f$-en folytonos, határértékei:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x^- \to 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x^+ \to 0} f(x) = -\infty.$$

5. $f'(x) = \frac{3}{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$, zérushelyei: $\hat{x}_1 = -1$, $\hat{x}_2 = 1$.

Csak a második szorzótényező befolyásolja az előjelet, ez a $]-1; 0[$ és $]0; 1[$ intervallumon pozitív, a $]-\infty; -1[$ és $]1; \infty[$ intervallumon negatív. $f(x)$-nek $-1$-ben helyi minimuma, 1-ben helyi maximuma van.

Szigorúan monoton növő $]-1; 0[$ és $]0; 1[$-on, szigorúan monoton csökkenő $]-\infty; -1[$ és $]1; \infty[$-on.

A maximum értéke: $f(1) = 2$, a minimumé pedig $f(-1) = -2$.

6. $f''(x) = \frac{6}{x^3} \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = 6 \cdot \frac{x^2 - 2}{x^5}$, zérushelyei: $\bar{x}_1 = -\sqrt{2}$, $\bar{x}_2 = \sqrt{2}$. A tényezők táblázatban:

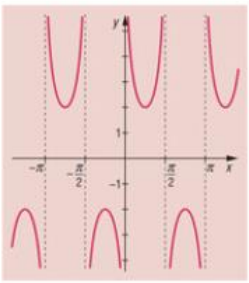
| | $x < -\sqrt{2}$ | $x = -\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2} < x < 0$ | $x = 0$ | $0 < x < \sqrt{2}$ | $x = \sqrt{2}$ | $\sqrt{2} < x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^5$ | negatív | negatív | negatív | – | pozitív | pozitív | pozitív |
| $x^2 - 2$ | pozitív | 0 | negatív | – | negatív | 0 | pozitív |
| $f''(x)$ | negatív | 0 | pozitív | – | negatív | 0 | pozitív |

Mindkét pont inflexiós pont.

A $]-\infty; -\sqrt{2}]$ és $]0; \sqrt{2}]$-on konkáv, a $[-\sqrt{2}; 0[$ és $]\sqrt{2}; \infty[$-on konvex a függvény.

7. $R_f = \mathbb{R}$.

*b)* 1. $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.




2. Zérushelye nincs a függvénynek.

3. A $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ is páratlan és $\pi$ szerint periodikus, összegük is az.

4. $D_g$-n folytonos a függvény, határértékei:

$$\lim_{x^+ \to k\pi} g(x) = \lim_{x^- \to \frac{\pi}{2} + k\pi} g(x) = \infty, \quad \lim_{x^- \to k\pi} g(x) = \lim_{x^+ \to -\frac{\pi}{2} + k\pi} g(x) = -\infty.$$

5. $g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}=0,\ x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$.

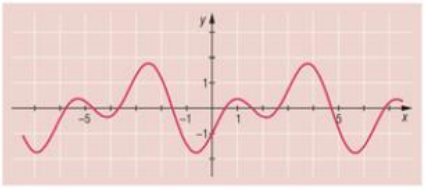
Csak a számláló befolyásolja az előjelet: a $\left]k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right[$ és $\left]\frac{3\pi}{4}+k\pi;\pi+k\pi\right[$-on negatív (ezen intervallumokon $g(x)$ szigorúan monoton csökkenő), míg a $\left]\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ és $\left]\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right[$-on pozitív (itt $g(x)$ szigorúan monoton növő). Az első derivált minden zérushelye helyi szélsőérték. Az $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ helyeken minimum, az $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ helyeken maximum van. Előbbi értéke $g\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=2$, a maximum értéke pedig $g\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=-2$. (A szélsőértékek helyiek.)

6. $g''(x)=2\cdot\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{\cos x}{\sin^3 x}\right)=2\cdot\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\cos^3 x\cdot\sin^3 x}$, zérushelye nincs.

A derivált előjelét csak nevező befolyásolhatja. Vizsgálata után elmondhatjuk, hogy az első és a harmadik síknegyedben – azaz a $\left]k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ intervallumon – $g''(x)$ pozitív, tehát $g$ konvex. A második és negyedik síknegyedben – azaz a $\left]\frac{\pi}{2}+k\pi;\pi+k\pi\right[$ intervallumon – $g''(x)$ negatív, tehát $g(x)$ konkáv. Az eredeti függvénynek nincs inflexiós pontja, mert a konvexitást váltó $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$ pontokban a függvény nincs értelmezve.

7. $R_g=\mathbb{R}\setminus]-2;2[$.

*c)* 1. $D_h=\mathbb{R}$.




2. $x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{2}+k\pi,$

$x_3=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

3. Nincs paritása, periódusa $2\pi$.
4. Mindenütt folytonos, nincs $\pm\infty$-ben vett határértéke.
5. $h'(x)=-4\sin^2 x+\sin x+2=0$, zérushelyei: $\hat{x}_1\approx 1{,}003+2k\pi$, $\hat{x}_2\approx 2{,}138+2k\pi$, $\hat{x}_3\approx 3{,}776+2k\pi$, $\hat{x}_4\approx 5{,}648+2k\pi$.

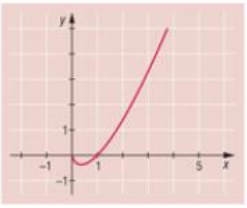
Mivel $]\hat{x}_1;\hat{x}_2[$ és $]\hat{x}_3;\hat{x}_4[$-on $h'(x)<0$, itt $h(x)$ szigorúan monoton csökken, különben szigorúan monoton nő. Tehát $\hat{x}_1$-ben és $\hat{x}_3$-ban helyi maximum, $\hat{x}_2$-ben és $\hat{x}_4$-ben pedig helyi minimum van. Értékeik: $h(\hat{x}_1)\approx 0{,}369$, $h(\hat{x}_2)\approx -0{,}369$, $h(\hat{x}_3)\approx 1{,}76$, $h(\hat{x}_4)\approx -1{,}76$.

6. $h''(x)=\cos x(1-8\sin x)=0$, amiből a zérushelyekre kapjuk: $\bar{x}_1\approx 0{,}125+2k\pi$, $\bar{x}_2\approx\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\bar{x}_3\approx 3{,}016+2k\pi$.

A második derivált a $\left]0{,}125+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ és $\left]3{,}016+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$-on negatív, ezért ott a függvény konkáv. Viszont a $\left]\frac{\pi}{2}+2k\pi;3{,}016+2k\pi\right[$ és $\left]\frac{3\pi}{2}+2k\pi;6{,}408+2k\pi\right[$-on pozitív, tehát ott a függvény konvex. A kiszámított pontokban a függvénynek inflexiós pontja van.

7. $R_h=[-1{,}76;1{,}76]$.

*d)* 1. $D_i = ]0; \infty[$.



2. Zérushely: $x = 1$.

3. Nincs paritása, nem periodikus.

4. $D_i$-n folytonos.

Határértékei:

$$\lim_{x \to \infty} i(x) = \infty,$$

$$\lim_{x^+ \to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x^+ \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x^+ \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x^+ \to 0} -x = 0.$$

(Utóbbiban alkalmaztuk a l'Hospital-szabályt).

5. $i'(x) = \ln x + 1 = 0$, $x = \frac{1}{e}$.

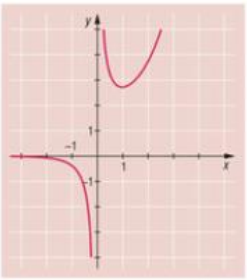
Előtte negatív a derivált ($i(x)$ szigorúan monoton csökkenő), utána pozitív ($i(x)$ szigorúan monoton növő), ezért ez minimumhely, a minimum értéke: $i(x) = -\frac{1}{e}$.

6. $i''(x) = \frac{1}{x}$, aminek nincs zérushelye, és az értelmezési tartományon pozitív.

A függvény mindenhol konvex.

7. $R_i = \left[-\frac{1}{e}; \infty\right[$.

*e)* 1. $D_j = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



2. Zérushelye nincs a függvénynek.

3. Nincs paritása, nem periodikus.

4. $D_j$-n folytonos.

Határértékei l'Hospitallal:

$$\lim_{x \to \infty} j(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} j(x) = 0,$$

$$\lim_{x^+ \to 0} j(x) = \infty, \qquad \lim_{x^- \to 0} j(x) = -\infty.$$

5. $j'(x) = e^x \cdot \frac{x-1}{x^2} = 0$, $x = 1$.

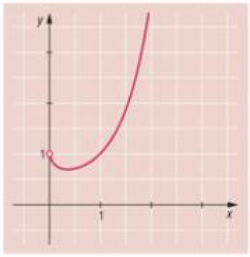
Ennél kisebb változóra a derivált negatív ($j(x)$ szigorúan monoton csökkenő), nagyobbra pozitív ($j(x)$ szigorúan monoton növő), ezért ez helyi minimum, értéke $j(1) = e$.

6. $j''(x) = e^x \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = e^x \cdot \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$. Mivel a számlálóban $D < 0$, így $j''(x)$-nek nincs zérushelye.

A negatív tartományban negatív, a pozitív tartományban pozitív. Tehát $x < 0$-ra konkáv, $x > 0$-ra konvex $j(x)$.

7. $R_j = ]-\infty; 0[ \cup [e; \infty[$.

*f)* 1. $D_k = ]0; \infty[$.




2. Zérushelye nincs a függvénynek.

3. Nincs paritása, nem periodikus.

4. $D_k$-n folytonos, határértékei:

$$\lim_{x\to\infty} k(x) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x^+\to 0} x^x = \lim_{x^+\to 0} e^{x\cdot\ln x} = 1.$$

(A *d)* példában $x \cdot \ln x \to 0$, ha $x^+ \to 0$).

5. $k'(x) = \left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = x^x \cdot (\ln x + 1) = 0$, ha $x = e^{-1}$.

$k'(x)$ a $\left]0; \frac{1}{e}\right[$-on negatív ($k(x)$ szigorúan monoton csökkenő), az $\left]\frac{1}{e}; \infty\right[$-on pozitív ($k(x)$ szigorúan monoton növő), $x = e^{-1}$ minimumhely.

6. $k''(x) = x^x \cdot \left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\right)$, nincs zérushelye. Ugyanis $x^x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$, a négyzet pedig nemnegatív. Így $k''(x) > 0$, $k(x)$ konvex.

7. Mivel a minimum $\left(e^{-1}\right)^{e^{-1}} \approx 0{,}6922$, ezért $R_k \approx [0{,}6922; \infty[$.

*Megjegyzés:* Kilencedik évfolyamon szokott felmerülni a $0^0$ problémája. Értelmezzük úgy, hogy „0 minden hatványa 0", vagy inkább „minden szám 0-adik hatványa 1"? Nem tudunk dönteni, ezért a $0^0$-t kizárjuk a számok világából. A fenti függvény 0-ban vett határértéke az utóbbit erősíti (erősebben „hat" a kitevő konvergenciája): $0^0 = 1$, $x > 0$-ra $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$. Azonban ha jelentősen gyorsítjuk az alap 0-hoz való konvergenciáját, akkor befolyásoljuk az eredményt: $\lim\limits_{n\to 0}\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = 0$, ami alapján $0^0 = 0$. Próbáljuk meg igazolni, hogy $\frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{1}{n!}\right) \to -\infty$.

## Vegyes feladatok – megoldások

**6115** Igen, az (1; 10) pontban.

**6116** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} (x+3)(x^2+9) = 6 \cdot 18 = 108.$

**6117** *a)* $f'(x) = (3x^2 - 4x)(3x^2 + \sqrt{x} - 2) + (x^3 - 2x^2)\left(6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$;

*b)* $g'(x) = -2\sin(2x) \cdot \sin(x + \pi) + \cos(2x) \cdot \cos(x + \pi)$;

*c)* $h'(x) = x^2 \cdot \frac{3\sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$;

*d)* $i'(x) = -3x^2 \cdot \sin(x^3) \cdot \cos\left(\cos(x^3)\right)$.

**6118** *a)* $f(x_0) = 2$, $f'(x_0) = 5$, $y = 5(x + 1) + 2 = 5x + 7$;

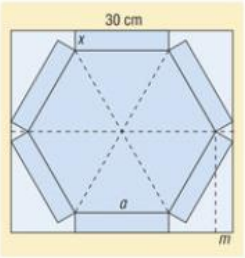
*b)* $g(x_0) = \frac{\pi}{2}$, $g'(x_0) = 1$, $y = 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = x$.

**6119** *a)* $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$; ennek zérushelyei: $x_1 = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$, $x_2 = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$.

$x_1 = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$-ben helyi maximuma, $x_2 = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$-ben helyi minimuma van a függvénynek.

*b)* Mivel $f'(x)$ a $]-\infty; x_1[$ és $]x_2; \infty[$-on pozitív, ott a függvény monoton növő. Az $]x_1; x_2[$-on negatív, így ott a függvény szigorúan monoton csökkenő.

**6120** A szabályos hatszög területét hat egybevágó szabályos háromszög területének összege adja:




$$T(x) = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

A lap vízszintes szimmetriatengelyét tekintve $2a + 2m = 30$.

Mivel $m = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, így $a = 15 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Behelyettesítve a területbe:

$$T(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(15 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2.$$

Felírva a térfogatot:

$$V(x) = \frac{9\sqrt{3}}{2}\left(75x - 5\sqrt{3}x^2 + \frac{x^3}{4}\right).$$

A derivált térfogatfüggvény:

$$V'(x) = \frac{9\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4}x^2 - 10\sqrt{3}x + 75\right).$$

Felfelé nyíló parabola, így helyi maximuma a kisebb zérushelynél van. Ennek értéke $\frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5{,}77$ cm.
A dobozka térfogata ekkor $V_{max} = 1500\ \text{cm}^3$.

**6121** *a)* Nem, mert $f''(x_0) \neq 0$.

*b)* Nem, mert nincs értelmezve a függvény.

*c)* Igen.

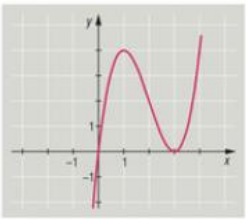
**6122** 1. $D_f = \mathbb{R}$.

2. Zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

3. Nincs paritása, nem periodikus.

4. Folytonos, határértékei:

$$\lim_{x \to -\infty} i(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} i(x) = \infty.$$




5. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, amiből a zérushelyek: $\hat{x}_1 = 1$-ben helyi maximum, $\hat{x}_2 = 3$-ban helyi minimum van.

A $]-\infty; 1]$ és $[3; \infty[$-on monoton nő, az $[1; 3]$-on csökken a függvény.

Szélsőértékek: $f(1) = 4$, $f(3) = 0$.

6. $f''(x) = 6x - 12$, zérushely: $x = 2$, inflexiós pont.

A $]-\infty; 2]$-on konkáv, a $[2; \infty[$-on konvex a függvény.

7. $R_f = \mathbb{R}$.

# INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

## Primitív függvény – megoldások

**6123** A szorzatokat érdemes kifejteni, a törteket egyszerűsíteni és átírni negatív kitevőre, a gyököket átírni törtkitevőre (a megoldást mindkét formában közöljük). Az *o)–t)* részfeladatokban nevezetes szorzatokkal dolgozunk.

*a)* $6x + c$;

*b)* $x^2 + c$;

*c)* $x^{-2} + c$;

*d)* $x^4 + c$;

*e)* $x^n + c$;

*f)* $\frac{x^6}{6} + c$;

*g)* $\frac{2x^5}{5} + c$;

*h)* $-\frac{x^{-2}}{10} + c = -\frac{1}{10x^2} + c$;

*i)* $2\sqrt{x} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c$;

*j)* $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^{10}}}{10} + c = \frac{3x^{\frac{10}{3}}}{10} + c$;

*k)* $x^4 + 4x^2 - 3x + c$;

*l)* $\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 14x + c$;

*m)* $-\frac{2}{\sqrt{x}} + c$;

*n)* $-\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{3\sqrt{x^3}} + c$;

*o)* $\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + c$;

*p)* $\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - x + c$;

*q)* $\frac{x^2}{2} - x + c$;

*r)* $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + c$;

*s)* $\frac{x^3}{3} + 2x - x^{-1} + c$;

*t)* $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - x + c$.

**6124** Az *a) – d)* részfeladatokban gondoljunk a trigonometrikus függvények deriváltjaira!

*a)* $-2\cos x + c$;

*b)* $\frac{\sin x}{5} + c$;

*c)* $3\operatorname{ctg} x + c$;

*d)* $5\operatorname{tg} x + c$.

*e)* Alkalmazzuk a kétszeres szög szinuszára vonatkozó addíciós tételt:

$$\int \sin x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2\sin x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{4} + c;$$

*f)* Nagyon hasonlít *c)*-re, de $2x$ van az argumentumban, és előjele pozitív:

$$\int \frac{4}{\sin^2 2x} \, \mathrm{d}x = -2\operatorname{ctg} 2x + c;$$

*g)* Átalakításokkal:

$$\int \sqrt{1 - \cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \sqrt{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = \int |\sin x| \mathrm{d}x = \begin{cases} \int \sin x \, \mathrm{d}x, & \text{ha} \quad x \in [2k\pi; (2k+1)\pi], \\ \int -\sin x \, \mathrm{d}x, & \text{ha} \quad x \in [(2k-1)\pi; 2k\pi], \end{cases}$$

bármely $k$ egészre. Így

$$\int |\sin x| \mathrm{d}x = \begin{cases} -\cos x + c, & \text{ha} \quad x \in [2k\pi; (2k+1)\pi], \\ \cos x + c, & \text{ha} \quad x \in [(2k-1)\pi; 2k\pi]. \end{cases}$$

*Megjegyzés:* Mivel a koszinusz nem ott vált előjelet, ahol a szinusz, a végeredményben nem alkalmazhatunk abszolútértékjelet.

*h)* A tangenst átírhatjuk szinuszra és koszinuszra, majd a szinuszt koszinuszra:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + c.$$

*i)* Alkalmazzuk a $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ addíciós összefüggést:

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

*j)* Hasonlóan *i)*-hez, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

**6125** *a)* $3e^x + c$; *b)* $\frac{e^{2x}}{2} + c$; *c)* $5\ln|x| + c$;

*d)* $e^x + \ln|x| + c$; *e)* $-\frac{1}{x^2} - \frac{7}{x} + \ln|x| + c$.

**6126** A megoldásokban $f(x)$ helyett egyszerűen $f$-et, $g(x)$ helyett $g$-t, deriváltjaikra $f'$-t és $g'$-t írunk. Ez a rövidítés nem fog zavart okozni.

*a)* Érdemes $x$-et $f$-nek, $\sin x$-et $g'$-nek választani, mert így $f' = 1$ és $g = -\cos x$.
$\int f' \cdot g\,\mathrm{d}x$-et könnyen megkapjuk:

$$\int x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = -x \cdot \cos x + \int 1 \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = -x \cdot \cos x + \sin x + c.$$

*b)* Hasonlóan az előzőhöz, csak most $f = x$ és $g' = \cos x$, $f' = 1$ és $g = \sin x$:

$$\int x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = x \cdot \sin x + \cos x + c.$$

*c)* Az ötlet ugyanaz. $f = x$, $g' = e^{x+2}$ (mindegy, hogy derivált vagy nem), $f' = 1$ és $g = e^{x+2}$:

$$\int x \cdot e^{x+2}\,\mathrm{d}x = x \cdot e^{x+2} - \int 1 \cdot e^{x+2}\,\mathrm{d}x = x \cdot e^{x+2} - e^{x+2} + c =$$

$$= e^{x+2} \cdot (x-1) + c.$$

*d)* Ebben a példában egy ügyes fogást alkalmazunk. Bár itt is szerepel $x$, mellette viszont $\ln x$ van – utóbbinak egyrészt nem tudjuk még az antideriváltját (az a következő feladat), másrészt $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Az $f' \cdot g$ szorzat a fordított kiosztással lesz könnyen kezelhető.

Tehát $f = \ln x$, $g' = x$, $f' = \frac{1}{x}$ és $g = \frac{x^2}{2}$:

$$\int x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c =$$

$$= \frac{x^2}{4} \cdot (2\ln x - 1) + c.$$

*e)* Az ilyen kérdések általában nagyon nehezen kitalálhatók, ha csak a függvényt látjuk, és nem ismerjük a „szorozzunk eggyel" trükköt. Így felírva viszont könnyen kezelhető, hiszen nincs más választásunk, mint $g' = 1$. (Próbáljuk ki, hogy $f = 1$ választással nem jutunk előbbre!)

$f = \operatorname{arcctg} x$, $g' = 1$, $f' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ és $g = x$:

$$\int 1 \cdot \operatorname{arcctg} x \,\mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arcctg} x + \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \,\mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c.$$

*f)* Látszólag itt nem szorzat, hanem hányados van, de a hányadost könnyű felírni $\ln x$ és $x$ reciprokának szorzataként. Legyen $f = \ln x$, $g' = \dfrac{1}{x}$, $f' = \dfrac{1}{x}$, $g = \ln x$:

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \ln^2 x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \,\mathrm{d}x.$$

Tekintsük ezt mint egyenletet, adjuk mindkét oldalhoz az integrált:

$$2\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \ln^2 x \quad \text{és} \quad \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + c;$$

*g)* Ha $f = \sin x$, $g' = \cos x$, akkor $f' = \cos x$, $g = \sin x$:

$$\int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \sin^2 x - \int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Fejezzük ki az integrált:

$$\int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + c;$$

*h)* Ha $f = \sin x$, $g' = e^x$, akkor $f' = \cos x$, $g = e^x$.

$$\int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Ezzel nem jutottunk közelebb a megoldáshoz. Próbáljuk megoldani a következő feladatot, hátha az könnyebb!

*i)* $f = \cos x$, $g' = e^x$, $f' = -\sin x$, $g = e^x$:

$$\int e^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Ez a feladat sem tűnik annak. Próbáljunk összerakni a kettőből egyet!

$$\int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= e^x \cdot (\sin x - \cos x) - \int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Ismét egyenletként tekintve a sor elejét és végét, rendezzük az integrálra:

$$\int e^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x - \cos x) + c.$$

Hasonlóan adódik:

$$\int e^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x + \cos x) + c.$$

*j)* A feladat nagyon hasonlít a *c)* részhez annyi különbséggel, hogy ott $x$ első hatványon szerepel. Próbáljuk ki az ottani trükköt: $f = x^2$, $g' = e^x$, $f' = 2x$, $g = e^x$.

$$\int x^2 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x^2 \cdot e^x - 2e^x \cdot x + 2e^x + c = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + c.$$

Látjuk, hogy $x$ kitevőjének csökkentésével célba érünk.

*k)* Legyen most $f = x^2$, $g' = \cos x$, $f' = 2x$, $g = \sin x$.

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x \, dx = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + c.$$

*l)* Hasonlóan: $f = x^2$, $g' = \sin x$, $f' = 2x$, $g = -\cos x$.

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2\int x \cdot \cos x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + c.$$

*m)* Első lépés: $f = x^4$, $g' = e^x$, $f' = 4x^3$, $g = e^x$.

$$\int x^4 \cdot e^x dx = x^4 \cdot e^x - 4\int x^3 \cdot e^x dx.$$

Második lépés: $f = x^3$, $g' = e^x$, $f' = 3x^2$, $g = e^x$.

$$\int x^4 \cdot e^x dx = x^4 \cdot e^x - 4\int x^3 \cdot e^x dx = x^4 \cdot e^x - 4\left(x^3 \cdot e^x - 3\int x^2 \cdot e^x dx\right).$$

Harmadik lépés: $f = x^2$, $g' = e^x$, $f' = 2x$, $g = e^x$.

$$\int x^4 \cdot e^x dx = x^4 \cdot e^x - 4\int x^3 \cdot e^x dx = x^4 \cdot e^x - 4\left(x^3 \cdot e^x - 3\left[x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx\right]\right).$$

Negyedik lépés: $f = x$, $g' = e^x$, $f' = 1$, $g = e^x$.

$$\int x^4 \cdot e^x dx = x^4 \cdot e^x - 4\int x^3 \cdot e^x dx = x^4 \cdot e^x - 4\left(x^3 \cdot e^x - 3\left[x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - \int e^x dx\right)\right]\right).$$

Ha most integráljuk az utolsó tagot is, és kifejtjük a zárójeleket, ezt kapjuk:

$$\int x^4 \cdot e^x dx = e^x \cdot (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c.$$

*Megjegyzés:* Bár nem könnyű, formulát is készíthetünk általában $\int x^n \cdot e^x dx$, $\int x^n \cdot \cos x \, dx$, $\int x^n \cdot \sin x \, dx$ vagy az itt elő nem került $\int x^n \cdot \ln x \, dx$ felírására.

**6127** *a)* Mi a megoldásban az $f = \sin x$, $g' = \cos x$, $f' = \cos x$, $g = \sin x$ kiosztást választottuk. Ekkor

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c.$$

Fordítsuk most meg a kiosztást! Legyen $f = \cos x$, $g' = \sin x$, $f' = -\sin x$, $g = -\cos x$:

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = -\cos^2 x - \int \sin x \cdot \cos x \, dx, \quad \text{innen} \quad \int \sin x \cdot \cos x \, dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + c.$$

Látszólag két különböző eredményünk született.

*b)* Korábbi eredményünk az alábbi volt:

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = -\frac{\cos 2x}{4} + c.$$

Hogyan egyeztethető össze ez a három, látszólag különböző eredmény? A titok az, hogy minden esetben csak a konstans értéke más (jelöljük őket a fenti sorrendben rendre $c$, $c'$, $c''$-vel). Alakítsuk át a kifejezéseket:

$$\frac{\sin^2 x}{2} + c = \frac{1 - \cos^2 x}{2} + c = -\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{1}{2} + c = -\frac{\cos^2 x}{2} + c',$$

$$-\frac{\cos^2 x}{2} + c' = -\frac{2\cos^2 x}{4} + c' = -\frac{\cos^2 x + 1 - \sin^2 x}{4} + c' =$$

$$= -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4} - \frac{1}{4} + c' = -\frac{\cos 2x}{4} + c''.$$

Vagyis $c'' = c' - 0{,}25 = c + 0{,}25$ és $c' = c + 0{,}5$. A három eredmény ugyanazt a függvénysereget adja meg.

**6128** *a)* A számlálókat kell kiszámolnunk:

$$\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx+B}{(x+1)(x+3)}=\frac{0x+2}{(x+1)(x+3)},\quad \text{azaz}\quad A+B=0\quad \text{és}\quad 3A+B=2.$$

Ezt az egyszerű egyenletrendszert megoldva, $A=1$ és $B=-1$.

$$\int\frac{2}{(x+1)(x+3)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+1)}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{(x+3)}\,\mathrm{d}x=\ln|x+1|-\ln|x+3|+c;$$

*b)* Például a megoldóképlet segítségével kitalálhatjuk, hogy $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$. Így

$$\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-5)}=\frac{Ax-5A+Bx+2B}{(x+2)(x-5)}=\frac{0x+1}{(x+2)(x-5)},\quad \text{azaz}\quad A+B=0\quad \text{és}\quad 2B-5A=1.$$

Innen $B=\frac{1}{7}$ és $A=-\frac{1}{7}$.

$$\int\frac{1}{(x+2)(x-5)}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{7}\int\frac{1}{(x+2)}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int\frac{1}{(x-5)}\,\mathrm{d}x=\frac{-\ln|x+2|+\ln|x-5|}{7}+c;$$

*c)* $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$.

$$\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}=\frac{0x+10}{(x+2)(x+3)}.$$

$A+B=0,\ 3A-2B=10,\ A=2,\ B=-2.$

$$\int\frac{10}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{(x-2)}\,\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{(x+3)}\,\mathrm{d}x=2\big(\ln|x-2|-\ln|x+3|\big)+c;$$

*d)* $4x^2+8x+3=(2x+1)(2x+3)$.

$$\frac{A}{(2x+1)}+\frac{B}{(2x+3)}=\frac{2Ax+3A+2Bx+B}{(2x+1)(2x+3)}=\frac{4x+8}{(2x+1)(2x+3)}.$$

$A+B=2,\ 3A+B=8,\ A=3,\ B=-1.$

$$\int\frac{4x+8}{4x^2+8x+3}\,\mathrm{d}x=3\int\frac{1}{(2x+1)}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{(2x+3)}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+3|+c.$$

**6129** *a)* Mivel a számláló magasabb fokszámú a nevezőnél, bontsuk le teve-módszerrel:

$$\int\frac{x^5}{1+x^3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^5+x^2-x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2\cdot(x^3+1)}{1+x^3}\,\mathrm{d}x-\int\frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x=\int x^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+c=\frac{x^3-\ln|1+x^3|}{3}+c.$$

*b)* Mivel nagyobb a különbség a számláló és nevező fokszáma között, többször bontunk:

$$\int\frac{x^7}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^7+4x^5-4x^5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\int x^5\,\mathrm{d}x-4\int\frac{x^5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x;$$

$$\int\frac{x^5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^5+4x^3-4x^3}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\int x^3\,\mathrm{d}x-4\int\frac{x^3}{x^2+4}\,\mathrm{d}x;$$

$$\int\frac{x^3}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^3+4x-4x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}x-2\int\frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-2\ln|x^2+4|+c.$$

Most visszafelé lépegetve behelyettesítünk:

$$\int \frac{x^7}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} - 4\left[\frac{x^4}{4} - 4\left(\frac{x^2}{2} - 2\ln|x^2+4|\right)\right] + c = \frac{x^6}{6} - x^4 + 8x^2 - 32\ln|x^2+4| + c.$$

*c)* Használjuk ki, hogy $(x^2+4)(x^2-4)(x^4+16) = x^8 - 256$.

$$\int \frac{x^8}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int (x^2-4)(x^4+16)\,\mathrm{d}x + \int \frac{256}{x^2+4}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int (x^6 - 4x^4 + 16x^2 - 64)\,\mathrm{d}x + 64\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Az első integrálban minden tag könnyen meghatározható:

$$\int (x^6 - 4x^4 + 16x^2 - 64)\,\mathrm{d}x = \frac{x^7}{7} - 4\cdot\frac{x^5}{5} + 16\cdot\frac{x^3}{3} - 64x.$$

A második kis átalakítás után helyettesítéssel integrálható, $\frac{x}{2} = t$, $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$:

$$128\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 128\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 128\operatorname{arctg} t + c = 128\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c.$$

Az eredmény így:

$$\int \frac{x^8}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{x^7}{7} - 4\cdot\frac{x^5}{5} + 16\cdot\frac{x^3}{3} - 64x + 128\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c.$$

*Megjegyzés:* A fenti példákból az is kitűnhet, hogy a másodfokú nevezőjű törtek primitív függvényei szinte mindig ln-t vagy arctg-t tartalmaznak.

**6130** *a)* Mivel a számláló a nevező deriváltja és $\int \frac{1}{X}\,\mathrm{d}X = \ln|X| + c$, ezért $(X = x^2+1,\ \mathrm{d}X = 2x\,\mathrm{d}x)$:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+1| + c.$$

*b)* Gondoljunk arra, hogy $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $(X = \sin x,\ \mathrm{d}X = \cos x\,\mathrm{d}x)$:

$$\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c.$$

*c)* Teve-módszerrel a számláló a nevező deriváltja lesz $(X = x^2+2x-1,\ \mathrm{d}X = 2x+2\,\mathrm{d}x)$:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x-1| + c.$$

*d)* A belső függvény deriváltját látjuk szorzatként. Mivel $\int \cos X\,\mathrm{d}X = \sin X + c$, ezért

$$\int 2x\cdot\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \sin\left(x^2\right) + c.$$

*e)* $2\int 3x^2\cdot\sqrt{x^3+2}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{(x^3+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{3}(x^3+2)^{\frac{3}{2}} + c.$

*f)* Írjuk fel kicsit másképp, hogy lássuk a derivált kapcsolatot $\left(X = \ln x,\ \mathrm{d}X = \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)$:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + c.$$

*g)* Mivel $\int X\,\mathrm{d}X = \frac{X^2}{2} + c$, ezért $(X = \sin x,\ \mathrm{d}X = \cos x\,\mathrm{d}x)$:

$$\int \sin x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + c.$$

Itt azt használtuk, hogy $\sin' x = \cos x$. Ha $\cos' x = -\sin x$, akkor ugyanabból kiindulva:

$$\int \sin x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c.$$

*Megjegyzés:* A fentiekben a $\sin x \cdot \cos x$ szorzatot integráltuk addíciós tételekkel, kétféle úton parciálisan, és kétféle úton behelyettesítéssel, látszólag három különböző eredményt kapva. Ezek után mondja valaki, hogy nem érdekes a matematika!

*h)* Csak a $\sin' x = \cos x$ összefüggésben láthatjuk a szorzatot, $f(X) = X^{55}$:

$$\int \sin^{55} x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{56} x}{56} + c.$$

*i)* Kissé átalakítva a $\mathrm{tg}^6 x = \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x}$ azonossággal, már megfelelő formában van:

$$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{tg}^6 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{tg}^7 x}{7} + c.$$

*j)* Mivel $(\cos^2 x)' = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x$, ezért

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\ln|1 + \cos^2 x| + c.$$

*k)* A hatványozás azonosságait és addíciós összefüggéseket felhasználva:

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{e^{\cos^2 x}}{e^{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}e^{\cos 2x} + c.$$

## Függvénygörbe alatti terület meghatározása a kétoldali közelítés módszerével – megoldások

A megoldásokban a szumma jelet csak a jobb helykihasználás végett használtuk. Aki még nem barátkozott meg a jelöléssel, nyugodtan számoljon a megszokott módon, az eredmény a fontos!

6131 *a)* Az osztópontok:

$$x_0 = 0;\ \ x_1 = 0{,}5;\ \ x_2 = 1;\ \ x_3 = 1{,}5\ \ \text{és}\ \ x_4 = 2.$$

Ezeket kell behelyettesítenünk a függvénybe, az alsó közelítő összeghez az első négyet:

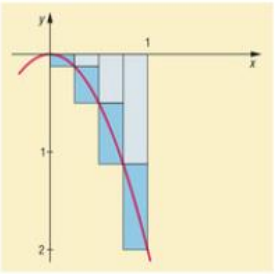
$$s_4 = 0{,}5(3 + 3{,}25 + 4 + 5{,}25) = 7{,}75;$$

a felső közelítéshez pedig a második négyet:

$$S_4 = 0{,}5(3{,}25 + 4 + 5{,}25 + 7) = 9{,}75.$$

*b)* Az osztópontok:

$x_0 = 0;\ x_1 = 0{,}25;\ x_2 = 0{,}5;\ x_3 = 0{,}75$ és $x_4 = 1$.




Az alsó közelítő összeg

$$s_4 = 0{,}25(-0{,}125 - 0{,}5 - 1{,}125 - 2) = -0{,}9375;$$

a felső közelítés pedig

$$S_4 = 0{,}25(0 - 0{,}125 - 0{,}5 - 1{,}125) = -0{,}4375.$$

**6132** *a)* Az osztópontok:

$$x_0 = 0;\ x_1 = 0{,}2;\ x_2 = 0{,}4;\ x_3 = 0{,}6,\ x_4 = 0{,}8 \text{ és } x_5 = 1.$$

A közelítő összegek:

$$s_5 = 0{,}2(2^0 + 2^{0{,}2} + 2^{0{,}4} + 2^{0{,}6} + 2^{0{,}8}) \approx 1{,}345;$$

$$S_5 = 0{,}2(2^{0{,}2} + 2^{0{,}4} + 2^{0{,}6} + 2^{0{,}8} + 2^1) \approx 1{,}545.$$

*b)* Az osztópontok:

$$x_0 = \frac{5\pi}{20};\ x_1 = \frac{6\pi}{20};\ x_2 = \frac{7\pi}{20};\ x_3 = \frac{8\pi}{20};\ x_4 = \frac{9\pi}{20} \text{ és } x_5 = \frac{10\pi}{20}.$$

A közelítő összegek:

$$s_5 = \frac{\pi}{20}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{20}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{9\pi}{20}\right)\right] \approx 0{,}6826;$$

$$S_5 = \frac{\pi}{20}\left[\sin\left(\frac{6\pi}{20}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{10\pi}{20}\right)\right] \approx 0{,}7286.$$

**6133** *a)* A függvény folytonos és a kérdezett intervallumon monoton növő.

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(i\cdot\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{6}\cdot\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \frac{1}{6}\cdot\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right);$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}\cdot\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right);$$

$s_n \to \frac{1}{3}$ és $S_n \to \frac{1}{3}$, ezért a keresett terület $\frac{1}{3}$.

*b)* A függvény folytonos és monoton csökkenő az intervallumon. Az eredmény $T = \frac{16}{3}$.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n}\left[-\left(i\cdot\frac{2}{n}\right)^2 + 4\right]\cdot\frac{2}{n} = 8 - \frac{8}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2 = 8 - \frac{4}{3}\cdot\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \to \frac{16}{3};$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left[-\left(i\cdot\frac{2}{n}\right)^2 + 4\right]\cdot\frac{2}{n} = 8 - \frac{8}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = 8 - \frac{4}{3}\cdot\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \to \frac{16}{3}.$$

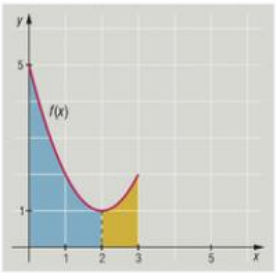
*Megjegyzés:* Felhasználtuk, hogy $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**6134** Tekintsük a függvényeket a megadott intervallumokon.

*a)* $f(x)$ a $[0; 3]$-on először monoton csökken, majd monoton nő.

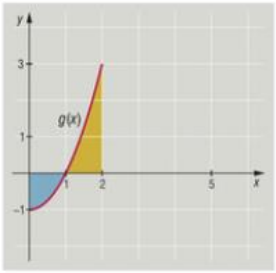
A csökkenő részen az alsó közelítő összegeket a részintervallumok jobb, a növekvő részen pedig a bal végpontokban tekintett függvényértékekkel kell számolnunk. (Hasonlóan a felső közelítő összegre.) Itt tehát $[0; 2]$ és $[2; 3]$ részekre érdemes bontanunk a megadott intervallumot a monotonitás szerint.

$$T = \frac{14}{3} + \frac{4}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$



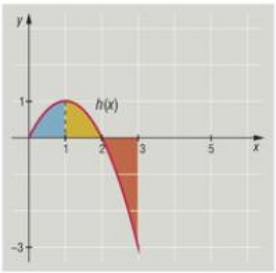

*b)* A $g(x)$ függvény a megadott intervallumon metszi az $x$ tengelyt. Azt már láttuk, hogy az $x$ tengely alatti területek a függvényértékek miatt negatív előjellel kerülnek a végső összegbe. Ezért külön kell választanunk a függvény pozitív és negatív felét: egyszer $[0; 1]$-on, majd $[1; 2]$-on kell elvégeznünk a számításokat.

$$T = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$




*c)* $h(x)$ esetén egyszer a monotonitás, azután pedig az $x$ tengellyel való metszés miatt érdemes az intervallumot $[0; 1]$, $[1; 2]$ és $[2; 3]$ részekre bontanunk.

$$T = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$




*Megjegyzés:* Mivel a közelítő téglalapok „ráhúzódnak" a függvényekre, a monotonitás miatti felbontást nem kell annyira szigorúan vennünk.

**6135** A négyzetgyökfüggvény a megadott intervallumok mindegyikén monoton növő. Ezért

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{a + i \cdot \frac{b-a}{n}} \cdot \frac{b-a}{n},$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a + i \cdot \frac{b-a}{n}} \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Különbségüket tekintve a tagok kettő kivételével kiesnek (teleszkopikus összeg):

$$S_n - s_n = \sqrt{a + n \cdot \frac{b-a}{n}} \cdot \frac{b-a}{n} - \sqrt{a + 0 \cdot \frac{b-a}{n}} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) \to 0.$$

**6136** *a)* A reciprokfüggvény a pozitív $[a; b]$-on monoton csökken.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}} \cdot \frac{b-a}{n},$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}} \cdot \frac{b-a}{n}.$$

A különbségben most is csak két tag marad:

$$S_n - s_n = \frac{1}{a + 0 \cdot \dfrac{b-a}{n}} \cdot \frac{b-a}{n} - \frac{1}{a + n \cdot \dfrac{b-a}{n}} \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \to 0.$$

*b)* Akkor éri el a pontosság az említett értéket, ha a közelítő összegek különbsége ennél már kisebb (hiszen a kettő között van valahol a kérdéses terület). Helyettesítsük be $[1; 2]$-ot:

$$S_n - s_n = \frac{2-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2n} < 0{,}01.$$

Innen $n > 50$. Tehát egyenletes részekre osztással 50-nél több osztópont felvétele esetén a reciprokfüggvény alatti területet egy századnál pontosabban meg tudjuk határozni közelítő téglalapokkal.

**6137** A Descartes-féle koordináta-rendszer miatt a trapézok is derékszögűek, területüket a függőleges alapok összege felének és az egyenlő vízszintes kis szakaszoknak a szorzata adja.

*a)* $$t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(\dfrac{i}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{i+1}{n}\right)^2}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + (i+1)^2 = \frac{1}{2n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (2i^2 + 2i + 1) =$$

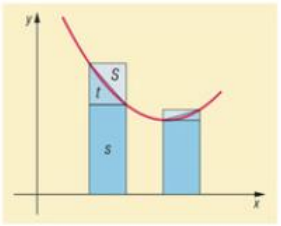
$$= \frac{1}{2n^3} \cdot \left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{3} + (n-1)n + n\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{2n} \to \frac{1}{3};$$

*b)* $$t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-2\left(\dfrac{i}{n}\right)^2 - 2\left(\dfrac{i+1}{n}\right)^2}{2} \cdot \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + (i+1)^2 = -\frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (2i^2 + 2i + 1) =$$

$$= -\frac{1}{n^3} \cdot \left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{3} + (n-1)n + n\right] = -\frac{2}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{n} \to -\frac{2}{3}.$$

Mindkét esetben a területek mérőszámait kaptuk meg újra (az eredeti eredmények a fejezet első feladatában találhatók).

**6138** Példáinkban minden függvény folytonos volt és monoton csökkenő vagy növő (ha nem, akkor felbontottuk ilyen részekre). A monotonitás miatt a részintervallum jobb vagy bal végpontjában vette fel szélsőértékét (minimumát, maximumát). Így természetesen adódott, hogy minden egyes téglalap-párra különkülön $s \le S$.




Mivel a trapézt az intervallumok végpontjaiban felvett függvényértékeket összekötve kaptuk, így minden kis részintervallumon a trapéz területe a két téglalap területe közé esik: $s \le t \le S$.

Ha tekintjük az alsó téglalap-, felső téglalap-, illetve trapéz-területösszegek $s_n$, $S_n$ és $t_n$ sorozatait, akkor $s_n \le t_n \le S_n$.

A sorozatokra vonatkozó rendőrelv alapján ha a téglalapok területösszegei tartanak ugyanahhoz az értékhez (mint ahogy példáink mindegyikében), akkor a trapézösszeg is oda kell, hogy tartson. Amennyiben egy olyan zárt intervallumon szeretnénk trapézokkal közelíteni a folytonos függvényünket, ahol az növekedést és csökkenést egyaránt produkál, akkor célszerű úgy választani a felosztást, hogy az egyforma részintervallumok határára essenek az osztáspontok. Ha például a $[0; 4]$ intervallumon tekintjük az $f(x) = (x-1)^2 + 10$ függvényt (amely 1-ig csökkenő, utána növő), akkor az eredeti intervallumot osszuk először 8 egyenlő részre. Így felosztottuk a $[0; 1]$ részt két részintervallumra, az $[1; 4]$-ot pedig hat részre úgy, hogy ezek egyforma hosszúak. Utána tekintsünk $8n$ számú osztáspontot, $n \to \infty$.

*Megjegyzés:* Utolsó gondolatunk csak összemérhető részekre való bontás esetében működik. A határozott integrál fogalma mostani meggondolásunknál jóval általánosabb.

### A határozott integrál fogalma és tulajdonságai – megoldások

**6139** Tekintsük a következő összegeket:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(i\cdot\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{6}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\to\frac{1}{3};$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\to\frac{1}{3}.$$

Mivel a határozott integrált egyre finomodó beosztások segítségével képezzük (például a már meglévő osztópontokhoz veszünk hozzá újabbakat), válogassuk ki a fenti sorozatokból az azonos alapú indexű tagokat, pl. a 2 hatványokat. Ezek a konvergens sorozatok részsorozatai, így ezek is tartanak a közös határértékhez. A megoldás:

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

**6140** Tekintsük az alábbi összegeket:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(-1+i\cdot\frac{2}{n}\right)^3+1\right]\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=0}^{n-1}\left[-1+3i\cdot\frac{2}{n}-3i^2\cdot\frac{4}{n^2}+\frac{8i^3}{n^3}+1\right]\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{8i^3}{n^3}-\frac{12i^2}{n^2}+\frac{6i}{n}\right]\cdot\frac{2}{n} =$$

$$= \frac{4}{n^4}\sum_{i=0}^{n-1}\left[4i^3-6ni^2+3n^2i\right] = \frac{4}{n^2}\cdot\left[(n-1)^2-(n-1)(2n-1)+3\frac{(n-1)n}{2}\right] = \frac{4}{n^2}\cdot\left[\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right]\to 2;$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(-1+i\cdot\frac{2}{n}\right)^3+1\right]\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\left[4i^3-6ni^2+3n^2i\right] =$$

$$= \frac{4}{n^2}\cdot\left[(n+1)^2-(n+1)(2n+1)+3\frac{(n+1)n}{2}\right] = \frac{4}{n^2}\cdot\left[\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right]\to 2.$$

Ismét válasszuk ki pl. az $n = 2^m$ részsorozatokat mindkét sorozatból, így egy finomodó beosztással dolgozunk. A megoldás így

$$\int_{-1}^{1}(x^3+1)\,\mathrm{d}x = 2.$$

**6141** Ebben a feladatban az osztópontok száma érdekel bennünket, ezért a megfelelő kiindulás után már nem kell finomítanunk a beosztást.

*a)* A kérdés, hogy hány darab részintervallumra teljesül, hogy

$$S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \left(\sqrt{1-\left(\frac{0}{n}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} < 0{,}1.$$

Látható, ha $n > 10$, akkor az eltérés egy tizednél kevesebb. Osztópont legalább 12 kell.

*b)* Ugyanúgy:

$$S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(i \cdot \frac{\pi}{2n}\right) \cdot \frac{\pi}{2n} - \sum_{i=1}^{n} \cos\left(i \cdot \frac{\pi}{2n}\right) \cdot \frac{\pi}{2n} = \left[\cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{2n}\right) - \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2n}\right)\right] \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} < 0{,}1$$

akkor, ha $n > 15{,}7$, azaz $n$ legalább 16. Tehát minimum 17 osztáspont szükséges.

**6142** Először határozzuk meg a szükséges osztópontok számát.

$$S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6n} < 0{,}05; \quad \text{ha} \quad n > 3{,}333.$$

Tehát a legalább 4 egyenlő részintervallumhoz legalább 5 osztáspont szükséges.

Legyenek ezek a $x_0 = 2$; $x_1 = 2{,}25$; $x_2 = 2{,}5$; $x_3 = 2{,}75$ és $x_4 = 3$. Ekkor

$$s_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2{,}25} + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{2{,}75} + \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}385 \text{ és } S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2{,}25} + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{2{,}75}\right) \approx 0{,}427.$$

Ha a trapézösszeggel számolunk, akkor

$$t_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2{,}25} + 2 \cdot \frac{1}{2{,}5} + 2 \cdot \frac{1}{2{,}75} + \frac{1}{3}}{2} \approx 0{,}406.$$

A valódi érték közelítőleg 0,405465.

**6143** *a)* Mivel $f(x)$ páratlan, ezért szimmetrikus az origóra: a szimmetrikus intervallumon az $x$ tengely alatt és felett „ugyanannyit" tartózkodik. A negatív és pozitív részek összege 0.

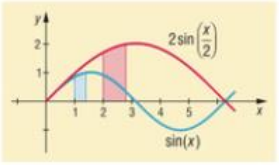
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

*b)* Minden páros függvény szimmetrikus az $y$ tengelyre, ezért a $[-a; 0]$ feletti terület egyenlő a $[0; a]$ feletti területtel. Azaz

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**6144** Azt kell észrevennünk, hogy a leírt transzformáció egy $c$ arányú nyújtás az origóból. Azonban hasonló alakzatok területeinek aránya a hasonlósági arány négyzete, vagyis

$$\int_{ca}^{cb} c \cdot f\left(\frac{x}{c}\right)\mathrm{d}x = c^2 \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



# A Newton–Leibniz-tétel – megoldások

**6145** Az első négy példában szereplő $c$ konstansfüggvények esetén minden $i$-re $m_i = M_i = c$.

*a)* $m_i = M_i = 5$, így $s_n = S_n = \sum_{i=1}^{n} 5(x_i - x_{i-1}) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 1 = 30 = \int_1^7 5 \,\mathrm{d}x$.

*b)* $m_i = M_i = 7$, így $s_n = S_n = \sum_{i=1}^{n} 7(x_i - x_{i-1}) = 7 \cdot 3 - 7 \cdot 10 = -49 = \int_{10}^{3} 7 \,\mathrm{d}x$.

*c)* Mivel a függvény szigorúan monoton növő, ezért $m_i = 2x_{i-1}$ és $M_i = 2x_i$ minden $i$-re. Legyenek az osztópontok egyenlő $\Delta = \frac{6-3}{n}$ távolságra, így $x_i = 3 + i \cdot \frac{3}{n}$, és

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} 2x_{i-1} \cdot \frac{3}{n} = \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} 3 + (i-1) \cdot \frac{3}{n} = \frac{6}{n} \cdot 3n + \frac{6}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 18 + 9\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to 27,$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2x_i \cdot \frac{3}{n} = \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} 3 + i \cdot \frac{3}{n} = \frac{6}{n} \cdot 3n + \frac{6}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 18 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 27.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 27$, ezért (kihasználva, hogy $n \to \infty$):

$$\int_3^6 2x \,\mathrm{d}x = 27.$$

*d)* $f(x)$ szigorúan monoton csökken, $m_i = -5x_i$ és $M_i = -5x_{i-1}$ minden $i$-re. Legyenek az osztópontok egyenlő $\Delta = \frac{7-2}{n}$ távolságra, így $x_i = 2 + i \cdot \frac{5}{n}$ és

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} -5x_i \cdot \frac{5}{n} = -\frac{25}{n} \sum_{i=1}^{n} 2 + i \cdot \frac{5}{n} = -50 - \frac{125}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = -50 - 62{,}5\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to -112{,}5,$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} -5x_{i-1} \cdot \frac{5}{n} = -\frac{25}{n} \sum_{i=1}^{n} 2 + (i-1) \cdot \frac{5}{n} = -50 - 62{,}5\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to -112{,}5.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = -112{,}5$, ezért (kihasználva, hogy $n \to \infty$):

$$\int_2^7 -5x \,\mathrm{d}x = -112{,}5.$$

*e)* A függvény monoton növő, azonban a határok „fordítottak”:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} 3x_{i-1} \cdot \frac{-2}{n} = -\frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} 4 - (i-1) \cdot \frac{2}{n} = -24 + 6\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to -18,$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 3x_i \cdot \frac{-2}{n} = -\frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} 4 - i \cdot \frac{2}{n} = -24 + 6\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to -18.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = -18$, ezért (kihasználva, hogy $n \to \infty$):

$$\int_4^2 3x \,\mathrm{d}x = -18.$$

**6146** Három lépést teszünk.

1. A második tagba bevisszük a konstans szorzót.
2. Az utolsó tagból kiemelünk $-1$-et.
3. Felcseréljük az utolsó tag határait.

Így

$$\int_1^3 (2x-4)\,\mathrm{d}x + \int_3^5 (2x-4)\,\mathrm{d}x + \int_5^7 (2x-4)\,\mathrm{d}x = \int_1^7 (2x-4)\,\mathrm{d}x = 24.$$

**6147** A *c)* részben kihasználjuk azt, hogy ha véges sok pontban megváltozik az integrandus, az nem befolyásolja a Riemann-integrál értékét.

*a)* $\int_2^4 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = \int_2^4 1\,\mathrm{d}x = 2;$ *b)* $\int_{-4}^{-3} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{-3} -1\,\mathrm{d}x = -1.$

*c)* Bontsuk két részre az integrációs tartományt úgy, hogy azokon a függvény már konstans legyen:

$$\int_{-3}^{2} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} -1\,\mathrm{d}x + \int_0^2 1\,\mathrm{d}x = -3+2 = -1.$$

**6148** Itt is kihasználjuk azt, hogy ha véges sok pontban megváltozik az integrandus, az nem befolyásolja a Riemann-integrál értékét.

*a)* Bontsuk fel a $[2;4]$ intervallumot a $[2;3]$ és $[3;4]$ intervallumokra. Ezeken az $[x]$ függvény már konstans:

$$\int_2^4 [x]\,\mathrm{d}x = \int_2^3 2\,\mathrm{d}x + \int_3^4 3\,\mathrm{d}x = 2+3 = 5.$$

*b)* Bontsuk fel az integrációs tartományt olyan részekre, melyeken a függvény konstans:

$$\int_{0,5}^{5} [x]\,\mathrm{d}x = \int_{0,5}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_1^2 1\,\mathrm{d}x + \int_2^3 2\,\mathrm{d}x + \int_3^4 3\,\mathrm{d}x + \int_4^5 4\,\mathrm{d}x = 0+1+2+3+4 = 10.$$

*c)* Ezt az intervallumot is érdemes felbontani három egyenlő részre a periodikus függvény periódusa szerint (teljes periódusok):

$$\int_0^3 \{x\}\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

*d)* Figyeljük meg, hogy amennyiben a függvény értékeit és az integrációs tartományt is azonos mértékkel eltoljuk az $x$ tengely mentén, a Riemann-integrál értéke nem változik. Ezt felhasználva bontsuk fel az integrációs tartományt négy részre:

$$\int_{0,5}^{3,8} \{x\}\,\mathrm{d}x = \int_{0,5}^{1} \{x\}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \{x\}\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \{x\}\,\mathrm{d}x + \int_3^{3,8} \{x\}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{0,5}^{1} x\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^{0,8} x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + 1 + \frac{8}{25} = \frac{339}{200}.$$

**6149** *a)* $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$;

*b)* $\int_{-2}^0 (x^2+3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_{-2}^0 = 0 - \left(-\frac{8}{3} - 6\right) = \frac{26}{3}$;

*c)* $\int_0^2 (-3x^2+4x)\,dx = \left[-x^3 + 2x^2\right]_0^2 = -8 + 8 - 0 = 0$;

*d)* $\int_2^3 \left(\frac{1}{2}(x-5)^2 + 2\right)dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{5x^2}{2} + 14{,}5x\right]_2^3 = 4{,}5 - 22{,}5 + 43{,}5 - \left(\frac{8}{6} - 10 + 29\right) = \frac{31}{6}$;

*e)* $\int_{-1}^{\sqrt{2}} (5x^2+4x-3)\,dx = \left[\frac{5x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_{-1}^{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3} + 4 - 3\sqrt{2} - \left(-\frac{5}{3} + 2 + 3\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$;

*f)* $\int_1^3 \left(\frac{3x^3}{2} - \frac{2x^2}{5} + \frac{x}{4} + 2\right)dx = \left[\frac{3x^4}{8} - \frac{2x^3}{15} + \frac{x^2}{8} + 2x\right]_1^3 = \frac{243}{8} - \frac{54}{15} + \frac{9}{8} + 6 - \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{15} + \frac{1}{8} + 2\right) =$

$= 4 + \frac{248}{8} - \frac{52}{15} = \frac{473}{15}$;

*g)* $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx = \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_1^8 = \frac{96}{5} - \frac{3}{5} = \frac{93}{5}$;

*h)* $\int_1^2 x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$;

*i)* $\int_2^3 \frac{3}{x^5}\,dx = \left[-\frac{3}{4x^4}\right]_2^3 = -\frac{1}{108} + \frac{3}{64} = \frac{65}{1728}$;

*j)* $\int_{-2}^2 (x-1)^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - x\right]_{-2}^2 = 4 - 8 + 6 - 2 - (4 + 8 + 6 + 2) = -20$;

*k)* $\int_3^4 \frac{x^3-8}{x-2}\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_3^4 = \frac{64}{3} + 16 + 16 - (9 + 9 + 12) = \frac{70}{3}$;

*l)* $\int_2^3 \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \sqrt{x}\right]_2^3 = \sqrt{3} - \sqrt{3} - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$;

*m)* $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1$;

*n)* $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 3\sin x\,dx = -3\left[\cos x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -3\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

*o)* $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\left[\sin x+\operatorname{tg}x\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{3\sqrt{3}-2-\sqrt{2}}{2};$

*p)* $\int_{-2}^{-1}3e^x\,\mathrm{d}x=3\left[e^x\right]_{-2}^{-1}=\frac{3}{e}-\frac{3}{e^2};$

*q)* $\int_1^e\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\left[\ln x\right]_1^e=\ln e-\ln 1=1;$

*r)* $\int_1^e\ln x\,\mathrm{d}x=\left[x(\ln x-1)\right]_1^e=e(1-1)-1(0-1)=1;$

*s)* $\int_0^{\pi/2}x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x=\left[-x\cdot\cos x+\sin x\right]_0^{\pi/2}=-\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-(0+\sin 0)=1;$

*t)* $\int_0^1(x\cdot e^x-1)\mathrm{d}x=\left[e^x\cdot(x-1)-x\right]_0^1=-1-1\cdot(0-1)=0;$

*u)* $\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_e^{e^2}=2-0{,}5=1{,}5;$

*v)* A következő feladatokban először meg kell határoznunk a primitív függvényt. Próbálkozzunk parciális integrálással!

$f=x,\ g'=\frac{1}{\cos^2 x},\ f'=1,\ g=\operatorname{tg}x$: $\int\frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=x\cdot\operatorname{tg}x-\int\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x=x\cdot\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+c;$

$$\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\left[x\cdot\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

*w)* Gondoljunk az összetett függvény deriválására. $(x^2)'=2x$ és $\int\frac{1}{\sqrt{X}}\,\mathrm{d}X=2\sqrt{X}+c$:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^2}+c;$$

$$\int_{100}^{101}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_{100}^{101}=\sqrt{10202}-\sqrt{10001}\approx 1.$$

*x)* Parciális törtekre bontással a közös nevező után a számlálóban: $Ax+4A+Bx-B=0x+3$.

Innen $A=\frac{3}{5},\ B=-\frac{3}{5}$.

$$\int_2^3\frac{3}{(x-1)(x+4)}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+4}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\left[\ln|x-1|-\ln|x+4|\right]_2^3=$$

$$=\frac{3}{5}(\ln 2-\ln 7+\ln 6)=\frac{3}{5}\cdot\ln\frac{12}{7}.$$

*y)* $\int\left(\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}\right)^2 \mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{(\cos x\cdot\sin x)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\,\mathrm{d}x=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+c;$

$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\left[\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}-(1-1)=\frac{2}{\sqrt{3}}.$

**6150** Igen, létezik az integrál, értéke 0. Magyarázata, hogy bár Dirichlet-szerű a függvény, a $[0;1]$-on mindkét ág 0 értéket vesz fel, tehát itt $g(x)=m_i=M_i=0$.

**6151** *a)* $\int\limits_{-4}^{-1}(2{,}5x^2+bx)\mathrm{d}x=\left[\frac{2{,}5x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\right]_{-4}^{-1}=-\frac{2{,}5}{3}+\frac{b}{2}-\left(-\frac{160}{3}+8b\right)=0{,}5;\ b=\frac{104}{15};$

*b)* $\int\limits_{1}^{2}(3x^2-2bx+2)\mathrm{d}x=\left[x^3-bx^2+2x\right]_1^2=8-4b+4-(1-b+2)=9-3b=6;\ b=1;$

*c)* $\int\limits_{0}^{\pi/4}(b\cos x+2\sin x)\mathrm{d}x=\left[b\sin x-2\cos x\right]_0^{\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}b-\sqrt{2}-(0-2)=3\sqrt{2};\ b=8-2\sqrt{2}.$

**6152** *a)* $\int\limits_{1}^{c}x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^c=\frac{c^3}{3}-\frac{1}{3}=114.$ Megoldás: $c=7.$

*b)* $\int\limits_{0}^{c}x^3\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^c=\frac{c^4}{4}=324;\ |c|=6.$ Megoldások: $c_1=6,\ c_2=-6.$

*c)* $\int\limits_{c}^{2c}4x^4\mathrm{d}x=\left[\frac{4x^5}{5}\right]_c^{2c}=\frac{128c^5}{5}-\frac{4c^5}{5}=\frac{124c^5}{5}=793{,}6.$ Megoldás: $c=2.$

*d)* $\int\limits_{\pi/2}^{c}-2\sin x\,\mathrm{d}x=2\left[\cos x\right]_{\pi/2}^{c}=2\cos c=1;\ \cos c=\frac{1}{2},$ innen $c=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi.$

A megoldások a kívánt $[-2\pi;2\pi]$ intervallumon: $c_1=-\frac{5\pi}{3},\ c_2=-\frac{\pi}{3},\ c_3=\frac{\pi}{3},\ c_4=\frac{5\pi}{3}.$

**6153** *a)* $\int\limits_{1}^{b}(3x+2)\mathrm{d}x=\left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^b=\frac{3b^2}{2}+2b-\left(\frac{3}{2}+2\right)=4;\ 3b^2+4b-15=0.$

Megoldások: $b_1=\frac{5}{3},\ b_2=-3.$

*b)* $\int\limits_{b}^{6}(x^3+x)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_b^6=324+18-\left(\frac{b^4}{4}+\frac{b^2}{2}\right)=336;\ 0=b^4+2b^2-24.$

Megoldások: $b_1=2,\ b_2=-2.$

*c)* $\int\limits_{1}^{b}(2x+b)\mathrm{d}x=\left[x^2+bx\right]_1^b=b^2+b^2-(1+b)=14;\ 2b^2-b-15=0.$

Megoldások: $b_1=3,\ b_2=-2{,}5.$

*d)* $\int_0^b (\sqrt{3}\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{3}\sin x + \cos x\right]_0^b = \sqrt{3}\sin b + \cos b - 1 = 0.$

Leosztva mindkét oldalt 2-vel, és addíciós tételt alkalmazva jutunk $\sin\left(b + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ alakra.

Ennek megoldásai: $b_1 = 2k\pi$ és $b_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, ahol $k$ egész szám.

**6154** *a)* $\int_a^0 (4x+3)\,\mathrm{d}x = \left[2x^2 + 3x\right]_a^0 = 0 - (2a^2 + 3a) < 1;\ 0 < 2a^2 + 3a + 1.$

Megoldások: $a < -1$, vagy $-0{,}5 < a$.

*b)* $\int_0^a (3x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = \left[x^3 - x\right]_0^a = a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1) \geq 0.$

Megoldások: $-1 \leq a \leq 0$, illetve $1 \leq a$.

*c)* $\int_{-a}^{2a} (-4x^3 + 1)\,\mathrm{d}x = \left[-x^4 + x\right]_{-a}^{2a} = -16a^4 + 2a - (-a^4 - a) = -15a^4 + 3a = 3a\left(1 - 5a^3\right) =$

$= 3a\left(1 - \sqrt[3]{5}a\right)\left(1 + \sqrt[3]{5}a + \sqrt[3]{5^2}a^2\right) > 0.$

Az utolsó tényező mindig pozitív ($D < 0$), így az előjelet csak $a\left(1 - \sqrt[3]{5}a\right)$ befolyásolja.

Megoldások: $0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

*d)* $\int_a^{\pi/2} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x = \left[\sin x + \cos x\right]_a^{\pi/2} = 1 - \sin a - \cos a < 1;\quad 0 < \sin a + \cos a.$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel végigszorozva, majd alkalmazva az addíciós tételt, a $\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Megoldásai: $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < a < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

**6155** $F(x) = \int_{\pi/3}^{x} \sin t\,\mathrm{d}t = \left[-\cos t\right]_{\pi/3}^{x} = -\cos x + \frac{1}{2}$, így mivel $-1 \leq \cos x \leq 1$, $R_F = [-0{,}5;\ 1{,}5]$.

## A határozott integrál alkalmazásai – megoldások

**6156** Figyeljük meg, a kérdéses függvények az adott intervallum belsejében váltanak-e előjelet, illetve hol pozitívak (határozott integrál) és hol negatívak (határozott integrál mínusz egyszerese).

*a)* Nem vált, $T = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$

*b)* Nem vált, de negatív: $\int_1^4 \left(\frac{x^2}{2} - 2x - 8\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6} - x^2 - 8x\right]_1^4 = -28{,}5;\quad T = 28{,}5.$

*c)* Nem vált: $T = \int_1^4 \left(x^{\frac{3}{2}} - x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_1^4 = 4{,}9.$

*d)* Nem vált: $T=\int_{-1}^{1}\left(x^4-x^3+x^2\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{16}{15}$.

*e)* Nem vált: $T=3\int_{-\pi/3}^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x=3\left[\sin x\right]_{-\pi/3}^{\pi/2}=3\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

*f)* Nem vált: $T=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{2\pi/3}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[-\cos x\right]_{\pi/4}^{2\pi/3}=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$.

*g)* Nem vált, negatív: $\int_{-1}^{1}(x^2-1)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}=-\frac{4}{3}$; $T=\frac{4}{3}$.

*h)* Előjelet vált az $x=3$ pontban (előtte negatív, utána pozitív).

$$\int_0^3(x^2-2x-3)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_0^3=-9 \quad \text{és} \quad \int_3^5(x^2-2x-3)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_3^5=\frac{32}{3},$$

így $T=9+\frac{32}{3}=\frac{59}{3}$.

*i)* Előjelet vált az $x=2$ pontban (előtte pozitív, utána negatív).

$$\int_0^2(x^3-6x^2+8x)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_0^2=4 \quad \text{és} \quad \int_2^3(x^3-6x^2+8x)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_2^3=-1{,}75,$$

így $T=4+1{,}75=5{,}75$.

*j)* Előjelet vált az $x=0$ és $x=1$ pontokban (negatív – pozitív – negatív).

$$\int_{-2}^{0}(-x^3-x^2+2x)\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-2}^{0}=-\frac{8}{3},$$

$$\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{1}=\frac{5}{12},$$

$$\int_{1}^{2}(-x^3-x^2+2x)\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{1}^{2}=-\frac{37}{12},$$

így $T=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}+\frac{37}{12}=\frac{37}{6}$.

*k)* Előjelet vált az $x=\pi$ pontban (előtte pozitív, utána negatív).

$$\int_{2\pi/3}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=-\left[\cos x\right]_{2\pi/3}^{\pi}=\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=-\left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=-2, \quad \text{így} \quad T=2{,}5.$$

*l)* Érdemes megfigyelni, hogy a kérdéses intervallumon három darab teljes félhullámot ír le a függvény. Ebből kiindulva elegendő a következőt kiszámolni:

$$3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1{,}5\cos x\,\mathrm{d}x=4{,}5\left[\sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=4{,}5\cdot 2=9.$$

**6157** Az integrációs tartomány meghatározásához tudnunk kell, hogy a függvényből milyen rész esik az első síknegyedbe. Vizsgáljuk meg a zérushelyeket és a köztük levő előjelviszonyokat.

*a)* $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$, $I = [0; 2]$; $T = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$;

*b)* $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$, $I = [0; 4]$; $T = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = \frac{32}{3}$;

*c)* $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$, $I = [1; 4]$; $T = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = 4{,}5$;

*d)* $x_1 = 2$ és $x_2 = 5$, $I = [2; 5]$; $T = -2\int_2^5 (x^2 - 7x + 10)\,dx = -2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x\right]_2^5 = 9$;

*e)* $x_1 = -1$ és $x_2 = 3$, $I = [0; 3]$; $T = \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_0^3 = 9$;

*f)* $x_1 = 1$, $I = [0; 1]$; $T = 2\int_0^1 \sqrt{1 - x}\,dx = -\frac{4}{3}\left[(1 - x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$;

*g)* $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ és $x_3 = 6$, $I = [4; 6]$;

$T = \int_4^6 (-x^3 + 10x^2 - 24x)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{10x^3}{3} - 12x^2\right]_4^6 = \frac{20}{3}$;

*h)* $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 2$, $I = [0; 2]$;

$T = \int_0^2 (4x - x^3)\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4$;

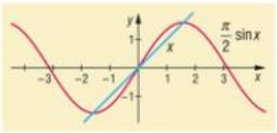
*i)* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ és $x_3 = 3$, $I = [0; 1] \cup [2; 3]$;

$T = \int_0^1 (-x^3 + 6x^2 - 11x + 6)\,dx + \int_2^3 (-x^3 + 6x^2 - 11x + 6)\,dx =$

$= \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{11x^2}{2} + 6x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{11x^2}{2} + 6x\right]_2^3 = 2{,}25 + 0{,}25 = 2{,}5$;

*j)* $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = 0$ és $x_3 = \frac{\pi}{2}$, $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$T = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2}\sin x - x\right)dx = \left[-\frac{\pi}{2}\cos x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{4\pi - \pi^2}{8}$.



**6158** Első lépésként meg kell határoznunk, a függvények hol metszik egymást (hiszen zárt területről van szó). Azután döntsük el, az adott intervallumon melyik függvény a nagyobb (az van „felül").

*a)* $x^2 = -x + 2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. $I = [-2; 1]$-on $g > f$.

$$T = \int_{-2}^{1} \left(-x + 2 - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

*b)* $x^2 - 2x = 0{,}5x^2 - x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. $I = [0; 2]$-on $g > f$.

$$T = \int_{0}^{2} (-0{,}5x^2 + x) \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = \frac{2}{3}.$$

*c)* $-x^2 + 5 = x^2 - 2x + 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. $I = [-1; 2]$-on $f > g$.

$$T = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4) \mathrm{d}x = \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = 9.$$

*d)* Mindkét függvény páratlan, ezért elegendő csak az origó egyik oldalán kiszámítani a területet.
$x^3 - 4x = -x$, $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$. $I = [0; \sqrt{3}]$-on $g > f$.

$$T = 2\int_{0}^{\sqrt{3}} \left(3x - x^3\right) \mathrm{d}x = 2\left[3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{3}} = 4{,}5.$$

*e)* $x^3 - x = x^2 - 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. $I = [-1; 1]$-on $f > g$.

$$T = \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 - x + 1) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

*f)* $x^3 - 5x^2 + 6x = x^2 - 2x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$. $I_1 = [0; 2]$-on $f > g$; $I_2 = [2; 4]$-on $g > f$.

$$\int_{0}^{2} (x^3 - 6x^2 + 8x) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_{0}^{2} = 4 \quad \text{és} \quad \int_{2}^{4} (-x^3 + 6x^2 - 8x) \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\right]_{2}^{4} = 4.$$

$T = 8$.

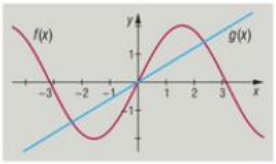
*g)* $\sin x = \cos x$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$. $I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$-on $f > g$.

$$T = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) \mathrm{d}x = \left[-\cos x - \sin x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}.$$

*h)* $\frac{2}{x} = -x^2 + 2x + 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. $I = [1; 2]$-on $g > f$.

$$T = \int_{1}^{2} \left(-x^2 + 2x + 1 - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + x - 2\ln|x|\right]_{1}^{2} = \frac{5}{3} - 2\ln 2.$$

*i)* Ismét páratlan függvényekkel van dolgunk.




$$2\sin x = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\cdot x, \quad x_1 = -\frac{3\pi}{4}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{3\pi}{4}.$$

$I = \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$-on $f > g$.

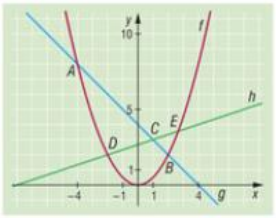
$$T = 2\int_0^{3\pi/4}\left(2\sin x - \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\cdot x\right)\mathrm{d}x = 2\left[-2\cos x - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}x^2\right]_0^{3\pi/4} = 4 + 2\sqrt{2} - \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}.$$

**6159** Az eltolt görbe egyenlete $y = \frac{(x-2)^2}{4} + 4$ (ez $[0; 4]$ intervallumon felette van az eredetinek.)

Így a kérdéses terület:

$$T = \int_0^4 (-x+5)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2} + 5x\right]_0^4 = 12.$$

**6160** Jelölje a görbéket:




$$f: y = \frac{x^2}{2}, \quad g: y = -x + 4, \quad h: y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Ha párosával tekintjük metszéspontjaikat, akkor

$$f \cap g = \{A(-4; 8); B(2; 2)\};$$

$$g \cap h = \{C(1; 3)\};$$

$$f \cap h = \left\{D(-2; 2); E\left(\frac{8}{3}; \frac{32}{9}\right)\right\}.$$

Számunkra $B$, $C$ és $D$ fontos, ők a síkidom „sarkai”. $I_1 = [-2; 1]$ és $I_2 = [1; 2]$. Mindkét intervallumon a lineáris függvények nagyobbak a parabolafüggvénynél.

$$\int_1^2\left(-\frac{x^2}{2} - x + 4\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_1^2 = \frac{4}{3} \text{ és } \int_{-2}^1\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} + \frac{8}{3}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} + \frac{8}{3}x\right]_{-2}^1 = 6,$$

így $T = \frac{22}{3}$.

**6161** Ismert, hogy az $f(x)$ sima függvény ívhossza az $[a; b]$ felett $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$. Mivel az $f(x) = \sqrt{x^3}$ sima a $[0; 3]$-on, deriváltja $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, ezért ívhosszára

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\int_0^3 \frac{9}{4}\sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\left[\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{31\sqrt{31} - 8}{27} \approx 6{,}096322.$$

**6162** *a)* $V=\pi\int_0^8 4\cdot\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x=4\pi\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^8=\frac{384\pi}{5}$;

*b)* $V_{\text{gömb}}=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{4\pi}{3}$;

*c)* $V=\pi\int_0^{\pi/2}(\cos^2x-2\cos x+1)\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}-2\sin x+x\right]_0^{\pi/2}=\frac{3\pi^2}{4}-2\pi$;

*d)* $V=\pi\int_{0,5}^{2}\frac{4}{x^2}\mathrm{d}x=4\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_{0,5}^{2}=6\pi$.

**6163** *a)* Vegyük észre, hogy az 1 magasságú, $r=2$ és $R=3$ sugarú csonkakúp palástjának felszínét határozzuk meg.

$$P=2\pi\int_2^3 x\sqrt{1+1^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\left[\sqrt{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_2^3=\sqrt{2}\pi\left[x^2\right]_2^3=9\sqrt{2}\cdot\pi-4\sqrt{2}\cdot\pi=5\sqrt{2}\cdot\pi\approx 22{,}21.$$

*b)* A keresett felszín:

$$2\pi\int_1^4 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=4\pi\int_1^4\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=4\pi\cdot\frac{2}{3}\int_1^4\frac{3}{2}\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{8\pi}{3}\cdot\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{8\pi}{3}\cdot\left[5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right]\approx 69{,}97.$$

*c)* A függvény szimmetrikus az origóra, ezért felbontjuk pozitív és negatív részre. Csak az integrációs tartomány változik a két esetben:

$$2\pi\int_0^2 x^3\sqrt{1+9x^4}\,\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{36}\int_0^2\frac{3}{2}\sqrt{1+9x^4}\cdot 36x^3\mathrm{d}x=\frac{\pi}{27}\cdot\left[\left(1+9x^4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2\approx 203{,}04,$$

$$2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{27}\cdot\left[\left(1+9x^4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\approx 3{,}56.$$

Az eredmény a kettő összege: 206,6.

**6164** Az $x$-szel való szorzás nem befolyásolja $\sin x$ zérushelyeit, így mindig az $I=[2k\pi;(2k+1)\pi]$ intervallum felett kell integrálnunk az $x\cdot\sin x$ függvényt. Lássuk a $k$-adik dombocska területét:

$$T_k=\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x=\left[-x\cdot\cos x+\sin x\right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}=(2k+1)\pi+2k\pi=\pi(4k+1)>1000,$$

$$k>\frac{1000-\pi}{4\pi}\approx 79{,}33.$$

Tehát a nyolcvanadik dombocska már 1000-nél nagyobb területet fog bezárni az $x$ tengellyel.

*Megjegyzés:* A feladat során természetesen $k$ pozitív egész számot jelentett.

**6165** Először is állapítsuk meg, hogy $\sin x$ tulajdonságai miatt a függvény $\pi$ szerint periodikus, ezért elegendő az első, $]0;\pi[$ intervallumon kiszámított görbehosszt szorozni 3-mal.

Az integrációs tartomány megállapításához oldjuk meg az $f(x)=0$ egyenletet:

$$\ln|\sin x|+2=0,\quad \ln|\sin x|=-2=\ln e^{-2},\quad |\sin x|=e^{-2}.$$

Mivel csak a $]0;\pi[$ tartományban keresünk megoldást, $x_0=\arcsin\left(e^{-2}\right)\approx 0{,}14$ (két tizedesre kerekítve). A görbe szimmetrikus $x=\frac{\pi}{2}$-re, tehát ha találunk egy $x_0$ zérushelyet, akkor $\pi-x_0\approx 3{,}01$ is az. Tehát az integrációs tartományra adódik: $[0{,}14;\ 3{,}01]$.

Lássuk az ívhosszt megadó integrált! $f'(x)=\operatorname{ctg} x$ (az intervallumon folytonos), $\left[f'(x)\right]^2=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$.

$$\int_{0{,}14}^{3{,}01}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x=\int_{0{,}14}^{3{,}01}\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x=\int_{0{,}14}^{3{,}01}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Helyettesítéssel határozzuk meg az $\int\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált: $x=2y$, $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$:

$$2\int\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{\sin 2y}\,\mathrm{d}y=2\int\frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{2\sin y\cdot\cos y}\,\mathrm{d}y=\int\frac{\sin y}{\cos y}\,\mathrm{d}y+\int\frac{\cos y}{\sin y}\,\mathrm{d}y=$$

$$=\int\frac{\cos y}{\sin y}\,\mathrm{d}y-\int\frac{-\sin y}{\cos y}\,\mathrm{d}y=\ln|\sin y|-\ln|\cos y|+c.$$

Visszahelyettesítve $y$ helyére megkapjuk egy boltív hosszát:

$$\left[\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]_{0{,}14}^{3{,}01}\approx 5{,}3773.$$

Az eredmény ennek háromszorosa, két tizedesjegyre kerekítve: 16,13.

**6166** Számítsuk ki a teljes intervallum feletti területet:

$$\int_0^3(3x^2+11)\,\mathrm{d}x=\left[x^3+11x\right]_0^3=60.$$

Kérdés, hogy meddig kell az integrációs tartományt tekinteni, hogy a terület 30-nak adódjon.

$$\int_0^c(3x^2+11)\,\mathrm{d}x=\left[x^3+11x\right]_0^c=c^3+11c=30.$$

Meg kell oldanunk a harmadfokú egyenletet:

$$c^3+11c-30=0.$$

Elméletileg nem tudjuk megoldani, de ha megpróbálunk $c^3$ mellé 30-ból csoportosítani valami köbszámot, akkor a 8-ra előrelépünk:

$$c^3-8+11c-22=0.$$

Mivel az első kettő és az utolsó kettő tagból is kiemelhető $(c-2)$, ezért $c=2$. Megmutatható, hogy az egyenletnek más valós megoldása nincs. A keresett egyenes egyenlete: $x=2$.

*Megjegyzés:* A harmadfokú egyenlet megoldását próbálkozással is megtalálhatjuk.

**6167** A feladat nehézsége abból adódik, hogy az $y$ tengely körüli forgatásra nem ismerünk formulát. Ha viszont invertáljuk a függvény $[0;2]$-ra való leszűkítését, akkor azt már nyugodtan megforgathatjuk az $x$ tengely körül: a forgástest egybevágó lesz az eredetileg kérdezettel, így térfogatuk is megegyezik. Jelölje $g$ az inverz függvényt.

$$f(x)=x^3, \quad D_f=[0;2], \quad R_f=[0;8];$$
$$g(x)=\sqrt[3]{x}, \quad D_g=[0;8], \quad R_g=[0;2];$$
$$V=\pi\int_0^8\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^8=19{,}2\pi.$$

**6168** A pohár álló helyzetben követi a megadott $f(x)=x^2$ függvényt, ekkor tehát az $y$ tengely körül kell megforgatni. Nekünk viszont az $x$ tengely körüli forgatásra van formulánk, először tehát invertáljuk a függvényt! Az ismert módon elvégezve a műveletet, $g(x)=\sqrt{x}$-et kapjuk a $J=[0;4]$ felett (az eredeti $[-2;2]$ intervallumot le kell szűkíteni $[0;2]$-re).

$$2\pi\int_0^4\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^4\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\pi\int_0^4\frac{3}{2}\sqrt{4x+1}\cdot 4\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}\cdot\left[(1+4x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4\approx 36{,}18.$$

A pohár felülete így $36{,}18e^2=36{,}18\cdot(3\text{ cm})^2=325{,}62\text{ cm}^2$.

### Fizikai alkalmazások – megoldások

**6169** A jármű sebességét a két meghajtás által biztosított sebességek összege adja: $v(x)=3+\sin x\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$.

*a)* $t=60$ s, $I=[0;60]$.

$$\int_0^{60}(3+\sin x)\mathrm{d}x=[3x-\cos x]_0^{60}\approx 182\text{ m}.$$

A jármű egy perc alatt körülbelül 182 métert fog megtenni.

*b)* Nem tudjuk, hogy mennyi ideig kell haladnunk, $I=[0;t]$.

$$\int_0^t(3+\sin x)\mathrm{d}x=[3x-\cos x]_0^t=3t-\cos t+\cos 0=51000.$$

Pontos megoldást ebben az esetben sem tudunk mondani a rendelkezésre álló eszközeinkkel. Azonban azt megfigyelhetjük, hogy $-1\le\cos t\le 1$ elhanyagolható az 51 000-hez képest, ezért gyakorlatilag

$$3t=50\,999\pm 1, \quad \text{ahonnan} \quad t=\frac{50\,999\pm 1}{3}\approx 16\,999{,}667\pm 0{,}333.$$

Ez körülbelül 283,33 percet jelent, ami nagyságrendileg 4,72 óra.

**6170** A feladat során oda kell figyelnünk arra, hogy a függvény által leírt gyorsulás mértékegysége $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$, míg a kezdő- és végsebesség $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$-ban van megadva.

*a)* $I=[0;9]$ és $\int_0^9\frac{3}{4}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9=13{,}5\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$.

A jármű sebessége 9 másodperc gyorsítás után $v(9)=50+48{,}6=98{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

*b)* Hogy elérje a kívánt sebességet, még $125 - 98{,}6 = 26{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 7{,}333\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességnövekedést kell produkálni az autóba épített technikának, $I = [9; t]$.

$$\int_9^t \frac{81}{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{81}{4}\left[\ln x\right]_9^t = \frac{81}{4}(\ln t - \ln 9) = 7{,}333.$$

Innen $\ln t \approx 2{,}56$ és $t \approx e^{2.56} \approx 13$ másodperc szükséges még a járműnek a beállított sebesség eléréséhez.

**6171** Az $M_1$ és $M_2$ tömegű testek között ható erő a tömegvonzás törvénye alapján $F = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{x^2}$, ahol $G$ a gravitációs állandó, $x$ pedig a testek közötti távolság. Az emeléshez szükséges munka:

$$W = \int_{6{,}37\cdot 10^6}^{6{,}72\cdot 10^6} G \cdot \frac{M_{\text{ISS}} \cdot M_{\text{Föld}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = G \cdot M_{\text{ISS}} \cdot M_{\text{Föld}}\left[-\frac{1}{x}\right]_{6{,}37\cdot 10^6}^{6{,}72\cdot 10^6} =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}} \cdot 4 \cdot 10^5\,\text{kg} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot \left(-\frac{1}{6{,}72 \cdot 10^6} + \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6}\right)\frac{1}{\text{m}} \approx 1{,}3 \cdot 10^{12}\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2},$$

azaz 1,3 millió MJ.

*Megjegyzés:* Összehasonlításként: egy átlagos lakóház fűtéséhez négyzetméterenként évi 150 J, egy passzívházéhoz pedig 15 J munkát kell végeznünk. Ennyi munkabefektetéssel 86,6 millió évig (!) lehetne fűteni egy 100 $\text{m}^2$-es lakást, illetve 866,6 millió évig egy ugyanekkora alapterületű passzívházat!

## Improprius integrálok – megoldások

**6172** *a)* $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_3^b x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_3^b = \frac{1}{3}$;

*b)* $\displaystyle\int_5^\infty \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_5^b \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{4}\int_5^b -4x^{-5}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^4}\right]_3^b = \frac{1}{324}$;

*c)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-2} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{3}\int_a^{-2} -3x^{-4}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^3}\right]_a^{-2} = \frac{1}{24}$;

*d)* $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} 2\int_a^2 \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} 2\left[\sqrt{x}\right]_a^2 = 2\sqrt{2}$ $(a > 0)$;

*e)* $\displaystyle\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\frac{4}{3}\int_a^{16} \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}}\right]_a^{16} = \frac{32}{3}$ $(a > 0)$;

*f)* $\displaystyle\int_{-27}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 0}\int_{-27}^b \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 0}\frac{3}{2}\int_{-27}^b \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 0}\frac{3}{2}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_{-27}^b = -\frac{27}{2}$ $(b < 0)$;

*g)* $\int\limits_{-\infty}^{1} e^x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1} e^x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^1 = e;$

*h)* $\int\limits_{-\infty}^{4} 2^x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{4} 2^x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_a^4 = \frac{16}{\ln 2};$

*i)* $\int\limits_{2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{2}^{b}\left(\frac{1}{2}\right)^x\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}\right]_2^b = \frac{1}{4\ln 2}.$

**6173** *a)* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi+\left(\sqrt{\pi}x\right)^2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}x\right]_a^b = 1;$

*b)* $\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{b\to1\\ a\to-1}}\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{b\to1\\ a\to-1}}\left[\arcsin x\right]_a^b = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi.$

*c)* Először végezzünk helyettesítéses integrálást. Legyen $t = x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$:

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}t + c.$$

Így a keresett improprius integrál:

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}x^2\right]_0^b = \frac{\pi}{4}.$$

**6174** Tekintsük a függvényt egységhosszú szakaszok felett, ekkor a kérdezett integrál a szakaszok feletti integrálok végtelen összege (az integrálra kimondott 6.8-as tétel alapján mindegyik intervallum zártnak tekinthető, csak egyes végpontokban kell módosítanunk a függvényt). Tehát

$$\int\limits_{0}^{\infty}\{x\}^{\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n-1}^{n}\{x\}^{\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x.$$

Az $\{x\}$ függvény minden $[n-1;\,n]$ intervallumon megegyezik a $[0;\,1]$ felett értelmezett $x$ függvénnyel (miután kiegészítettük a nyitott végpontban), ezért az utóbbi összeg a következő formába írható:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n-1}^{n}\{x\}^{\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{1}x^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$

A kitevő minden intervallumon egész szám. Az integrál eredménye:

$$\int\limits_{0}^{1}x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}.$$

Ezeket figyelembe véve:

$$\int\limits_{0}^{\infty}\{x\}^{\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Korábban láttuk, hogy az összeg nem véges, tehát a kérdezett improprius integrál nem létezik.

## Vegyes feladatok – megoldások

**6175** *a)* $\frac{5x^4}{4} - x^3 + 12 \cdot \sqrt[3]{x} + 5x + c$; *b)* $\sin 2x + 2\cos 3x + c$;

*c)* $-\frac{\sin x \cdot \sin 2x + 2\cos x \cdot \cos 2x}{3} + c = -2 \cdot \frac{\cos^3 x}{3} + c$.

**6176** 48.

**6177** *a)* 3125; *b)* 3,299; *c)* $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

**6178** $\int_1^3 (x^2 - 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_1^3 = -\frac{28}{3}$, $\int_3^4 (x^2 - 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_3^4 = \frac{10}{3}$, $T = \frac{38}{3}$.

**6179** $\sin x + 1 = \cos x$, $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $I = \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ és $f > g$.

$\int_{3\pi/2}^{2\pi} (\cos x - (\sin x + 1))\,dx = [\sin x + \cos x - x]_{3\pi/2}^{2\pi} = 2 - \frac{\pi}{2}$.

**6180** *a)* $n > 16000$; *b)* $n > 24000$.

**6181** *a)* $\int_1^\infty \frac{1}{x^{12}}\,dx = \frac{1}{11}$; *b)* $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$; *c)* $\int_{-1}^0 x^{-\frac{1}{5}}\,dx = -\frac{5}{4}$.

**6182** $49c^4 + 105c^2 - 100 = 0$; $c_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{7}}$.

# VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

## A valószínűség-számítás új megközelítése: valószínűségi változó – megoldások

**6183** *a)* A fogadást akkor tekintjük igazságosnak, ha $\frac{10}{x}=\frac{0{,}1}{0{,}9}$, azaz $x=90$ euró.

*b)* Ha 117 eurót nyert az igazságos fogadáson, akkor $\frac{x}{117}=\frac{0{,}1}{0{,}9}$, azaz $x=13$ euró volt a tét.

**6184** $\frac{1}{3}=\frac{p}{1-p}$, innen $1-p=3p$, vagyis $p=0{,}25$ valószínűséggel következik be a fogadott esemény.

**6185** *a)* Tekintsük elemi eseménynek a dobás lehetséges eredményét: $H=\{1;2;3;4;5;6\}$.

*b)* Tekintsük elemi eseménynek azt, hogy hányadiknak dobunk hatost: $H=\{1;2;3;\ldots\}$.

*c)* Dobjuk a kockát egy társasjáték dobozának nyitott téglatest alakú tetejében. Legyen elemi esemény a megálló kocka egyes oldalaktól való távolságainak szorzata.

**6186** *a)* Diszkrét. $A=$ II., $H=$ {I.; II.; III.; IV.}.

*b)* Diszkrét. $A=(2;3)$, $H=\{(0;0);\ldots;(8;8)\}$.

*c)* Folytonos. $A=\left(0{,}2;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $H=[0;1]^2$.

**6187** Legyen $\xi$: {fej} $\to 1$, {írás} $\to 2$.
Eloszlása: $P(\xi=1)=0{,}6$ és $P(\xi=2)=0{,}4$.




**6188** A képezhető számok alkotják az eseményteret:

$$H=\{11;12;\ldots;16;21;22;\ldots,26;\ldots;66\}.$$

Így

$$\{11;\ldots;22\}\to 1,\quad \{23;\ldots;41\}\to 2,\quad \{42;\ldots;66\}\to 3,$$

$$P(\xi=1)=\frac{8}{36},\qquad P(\xi=2)=\frac{11}{36},\qquad P(\xi=3)=\frac{17}{36}.$$



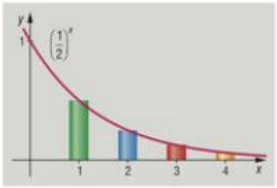

**6189** Jelölje $\xi$, hogy hányadikra dobtunk először írást, $\xi=\{1;2;3;\ldots\}$. Mivel szabályos érmével dobtunk, ezért $P(\text{fej})=P(\text{írás})=0{,}5$. A változó diszkrét, bár végtelen.

*a)* Akkor kapunk eloszlást, ha $\sum_{n=1}^{\infty}P(\xi=n)=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(\xi=n)=\sum_{n=1}^{\infty}0{,}5^n=0{,}5\cdot\sum_{n=0}^{\infty}0{,}5^n=0{,}5\cdot\frac{1}{1-0{,}5}=1.$$

*b)* $P(\xi=1)=\frac{1}{2}$, $P(\xi=2)=\frac{1}{4}$, $P(\xi=3)=\frac{1}{8}$, …

*c)* A keresett valós-valós függvény: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, természetesen leszűkítve $D_f=\mathbb{Z}^+$-ra.




**6190** A $\xi$ valószínűségi változó rendelje az egyes eseményekhez az azokért kapható pontot:

$$\{2;3;5\}\to 3,\quad \{4;6\}\to 2,\quad \{1\}\to -5.$$

Ekkor

$$M(\xi)=\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot(-5)=\frac{4}{3}.$$

**6191** A $\xi$ valószínűségi változó rendelje az egyes eseményekhez az azokért kapható összeget:

$$\{\text{fej}\}\to 3 \text{ és } \{\text{írás}\}\to -1, \text{ így } P(\xi=3)=0{,}3 \text{ és } P(\xi=-1)=0{,}7.$$

*a)* $M(\xi)=0{,}3\cdot 3-0{,}7=0{,}2$.

*b)* A várható nyeremény sajnos kevesebb a játék áránál, ezért a játék „bevétele" valójában $0{,}2-0{,}5=-0{,}3$, azaz 0,3 euró kiadás.

**6192** A számtani sorozat definíciójából adódóan:

$$360^\circ=30^\circ+30^\circ+d+\ldots+30^\circ+4d=5\cdot 30^\circ+10d, \quad \text{innen} \quad d=21^\circ.$$

$\xi$ rendelje az egyes eseményekhez a kipörgetett értéket, ekkor

$$P(\xi=1000)=\frac{30}{360},\quad P(\xi=500)=\frac{51}{360},\quad P(\xi=100)=\frac{72}{360},$$

$$P(\xi=10)=\frac{93}{360},\quad P(\xi=-750)=\frac{114}{360}.$$

Így

$$M(\xi)=\frac{30}{360}\cdot 1000+\frac{51}{360}\cdot 500+\frac{72}{360}\cdot 100+\frac{93}{360}\cdot 10+\frac{114}{360}\cdot(-750)=-60{,}75.$$

Fordulónként átlagosan 60,75 pontot *veszítünk*.

**6193** A totójátékban vegye fel $\xi$ a találatok számát értékként, $x_i$ legyen az $i$ találat esetén kifizetésre kerülő összeg. Pl. a szöveg szerint $x_{14}=13$ millió ($i<10$ esetén $x_i=0$).

$$P(\xi=14)=\frac{1}{3^{14}}\approx 0{,}000000209,\qquad P(\xi=13)=\frac{2}{3^{14}}\approx 0{,}000000418,$$

$$P(\xi=12)=\frac{\binom{13}{1}\cdot 2\cdot 3}{3^{14}}\approx 0{,}000016307,\qquad P(\xi=11)=\frac{\binom{13}{2}\cdot 2^2\cdot 3}{3^{14}}\approx 0{,}000195694,$$

$$P(\xi=10)=\frac{\binom{13}{3}\cdot 2^3\cdot 3}{3^{14}}\approx 0{,}001435091.$$

Így a várhatóan kifizetésre kerülő összeg:

$$M(\xi)=\sum_{n=10}^{14} x_n\cdot P(\xi=n)\approx 14{,}68.$$

**6194** Az előző példa megoldásához hasonlóan:

$$M(\xi)=\frac{1}{\binom{50}{4}}\cdot 1000+\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{46}{1}}{\binom{50}{4}}\cdot 500+\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{46}{2}}{\binom{50}{4}}\cdot 50\approx 1{,}752.$$

Tehát ha egy szelvény ára 2 euró, és egy szelvényen várhatóan 1,752 eurót „keresünk”, akkor számunkra veszteséges a játék, bár veszteségünk csekély (0,248 euró).

**6195** Az első feltétel szerint:

$$x_1=2,\quad x_2=2q,\quad x_3=2q^2.$$

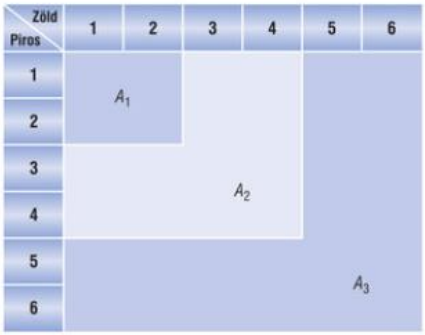
A második feltétel szerint:

$$M(\xi)=2=2\cdot P(\xi=1)+2q\cdot P(\xi=2)+2q^2\cdot P(\xi=3).$$

Foglaljuk táblázatba a lehetséges elemi eseményeket. A táblázatból leolvasható, hogy

$$P(\xi=1)=\frac{4}{36},\quad P(\xi=2)=\frac{12}{36},$$

$$P(\xi=3)=\frac{20}{36}.$$




A következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$2=2\cdot\frac{4}{36}+2q\cdot\frac{12}{36}+2q^2\cdot\frac{20}{36}.$$

Egyszerű átalakítások után az $5q^2+3q-8=0$ egyenlethez jutunk, melynek megoldásai: $q_1=1$ és $q_2=-1{,}6$. Tehát a két valószínűségi változó:

$$\xi_1\colon A_1\to 2,\ A_2\to 2,\ A_3\to 2 \quad\text{és}\quad \xi_2\colon A_1\to 2,\ A_2\to -3{,}2,\ A_3\to 5{,}12.$$

**6196** A feladatban a Pascal-háromszög azon tulajdonsága fontos egyedül, hogy az egymás utáni soroknak mindig eggyel több eleme van.

*a)* Mivel a második sorban kettő elem van:

$$P(\xi=1)=\frac{1}{2}.$$

Ha rosszul választottunk, akkor a következő sorban már három elem van, ám mivel elsőre rosszul választottunk:

$$P(\xi=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}.$$

Harmadikra akkor találjuk el, ha elsőre és másodikra is rosszul döntöttünk:

$$P(\xi=3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3\cdot 4}.$$

Általában:

$$P(\xi=k)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{k-1}{k}\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}.$$

Ez akkor alkot eloszlást, ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\xi=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1.$$

Vegyünk észre két dolgot. Egyrészt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

másrészt

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{k}{k+1}.$$

Tehát a fenti összeg

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Így

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \text{ami ha } n \to \infty, \quad \text{akkor} \quad S_n \to 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

*b)* A várható érték definíciója alapján:

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot P(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}.$$

Utóbbi végtelen sornak azonban nincs véges összege, ezt a 2.14-es tétel után láttuk.

**6197** Legyen $P(\xi = 5) = P(\xi = 6) = x$. Mivel eloszlásról van szó, $2 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}15 + 2x = 1$, ahonnan $x = 0{,}25$. A várható érték:

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot P(\xi = k) = 0{,}1 \cdot (1+2) + 0{,}15 \cdot (3+4) + 0{,}25 \cdot (5+6) = 4{,}1.$$

A szóráshoz szükséges:

$$M\left(\xi^2\right) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot P(\xi = k) = 0{,}1 \cdot \left(1^2 + 2^2\right) + 0{,}15 \cdot \left(3^2 + 4^2\right) + 0{,}25 \cdot \left(5^2 + 6^2\right) = 19{,}5.$$

A szórásnégyzet:

$$D^2(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi) = 19{,}5 - 4{,}1^2 = 2{,}69.$$

A szórás:

$$D(\xi) \approx 1{,}64.$$

**6198** Jelölje $\xi$ a pörgetés eredményét. Ekkor

$$P(\xi = 5) = 0{,}3; \quad P(\xi = 10) = P(\xi = -7) = 0{,}2; \quad P(\xi = 15) = P(\xi = 0) = P(\xi = -20) = 0{,}1.$$

A várható érték és a szórás:

$$M(\xi) = 0{,}1 \cdot (15 + 0 - 20) + 0{,}2 \cdot (10 - 7) + 0{,}3 \cdot 5 = 1{,}6;$$
$$M\left(\xi^2\right) = 0{,}1 \cdot \left(15^2 + 20^2\right) + 0{,}2 \cdot \left(10^2 + 7^2\right) + 0{,}3 \cdot 5^2 = 99{,}8;$$
$$D^2(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi) = 99{,}8 - 1{,}6^2 = 97{,}24 \quad \Rightarrow \quad D(\xi) \approx 9{,}861.$$

**6199** A szöveg szerint binomiális eloszlással van dolgunk. Határozzuk meg hát a paraméterét! Ha minden 25. áru hibás, akkor 100-ból 4 termék az, vagyis a hibás áru valószínűsége $p = 0{,}04$. Miután 40 terméket választanak ki vizsgálatra, ezért $n = 40$. A levezetett képlet szerint

$$M(\xi) = n \cdot p = 1{,}6$$

és

$$D^2(\xi) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 1{,}536.$$

Tehát a hibás darabok számának szórása:

$$D(\xi) \approx 1{,}239.$$

*Megjegyzés:* A binomiális eloszlás (a többi eloszláshoz hasonlóan) lehetőséget ad egyfajta minőség-ellenőrzésre is. Számítsuk ki a mintában talált hibás elemek egyes darabszámainak valószínűségeit a feladatban adott paraméterekkel (minden 25. hibás) négy tizedesjegyre kerekítve és foglaljuk táblázatba!

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\xi = k)$ | 0,1954 | 0,3256 | 0,2646 | 0,1396 | 0,0538 | 0,0161 | 0,0039 | 0,0008 | 0,0001 | 0,0000 |

Mit mondhatunk, ha a 40 darabos mintában pl. 7 vagy több hibás darabot találunk? Mondhatjuk, hogy micsoda pech, bejött ez a ritka eset. De mondhatjuk azt is, hogy ennek *túl* kicsi a valószínűsége. Valószínűbb, hogy nem is minden 25. hibás, ahogy feltételeztük, hanem több! Azaz nem érdemes az árut átvennünk, jobban járunk, ha visszaküldjük.

**6200** A feladatban binomiális eloszlással kell dolgoznunk. A szöveg alapján $n = 250$ és $1500p = 120$, amiből $p = 0{,}08$. Így $M(\xi) = 20$ és a szórás:

$$D(\xi) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 4{,}29.$$

**6201** Az esemény Bernoulli-kísérlet, ami binomiális eloszlásra vezet. Az esemény $A = \{\text{Fáradt győz}\}$, $p = P(A) = 0{,}01$. Jövőre $n = 223$ alkalommal teszteljük Fáradtat.

Ekkor

$$M(\xi) = 223 \cdot 0{,}01 = 2{,}23$$

és

$$D(\xi) = \sqrt{223 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99} \approx 1{,}486.$$

**6202** Rendelje $\xi$ a kivett csokis péksütemények számához az okozott boldogság mértékét. Visszatevés nélküli mintavétellel (hipergeometriai eloszlás) van dolgunk.

Így

$$P(\xi = 8) = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}}, \quad P(\xi = 6) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}, \quad P(\xi = 5) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}, \quad P(\xi = 2) = \frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}.$$

*a)* A várható érték:

$$M(\xi) = 8P(\xi = 8) + 6P(\xi = 6) + 5P(\xi = 5) + 2P(\xi = 2) =$$

$$= \frac{8 \cdot 4 + 6^3 + 5 \cdot 4 \cdot 15 + 2 \cdot 20}{120} = \frac{588}{120} = 4{,}9.$$

*b)* A szóráshoz szükséges:

$$M\left(\xi^2\right) = \frac{8^2 \cdot 4 + 6^4 + 5^2 \cdot 4 \cdot 15 + 2^2 \cdot 20}{120} = \frac{3132}{120} = 26{,}1.$$

A szórásnégyzet:

$$D^2(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi) = 26{,}1 - 4{,}9^2 = 2{,}09.$$

Így a szórás:

$$D(\xi) \approx 1{,}45.$$

**6203** Azt már tudjuk, hogy egy $p$ paraméterű, geometriai eloszlású $\xi$ változó esetén $M(\xi) = \frac{1}{p}$. A szórásnégyzethez szükséges $M\left(\xi^2\right)$ meghatározása is $(q = 1 - p)$:

$$M\left(\xi^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p \cdot q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} = p\left(1^2 + 2^2 \cdot q + 3^2 \cdot q^2 + 4^2 \cdot q^3 + 5^2 \cdot q^4 + \ldots\right).$$



Játsszunk a számokkal! A zárójelben álló kifejezés felbontható két végtelen sor szorzatára:

$$1^2 + 2^2 \cdot q + 3^2 \cdot q^2 + 4^2 \cdot q^3 + 5^2 \cdot q^4 + \ldots =$$
$$= (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots) \cdot (1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + 9q^4 + \ldots).$$

A második zárójelben álló tényező tovább alakítható:

$$1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + 9q^4 + \ldots =$$
$$= 2(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \ldots) - (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots).$$

Visszahelyettesítve mindent:

$$M(\xi^2) = p(1 + q + q^2 + \ldots) \cdot [2(1 + 2q + 3q^2 + \ldots) - (1 + q + q^2 + \ldots)].$$

Mindegyik zárójelben levő kifejezés egy-egy abszolút konvergens sor, ezért ezeket kivonhatjuk egymásból, és össze is szorozhatjuk őket. A középső zárójelben álló kifejezés $\frac{M(\xi)}{p}$. Így:

$$M(\xi^2) = p \cdot \frac{1}{1-q} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{1}{1-q}\right) = \frac{2-p}{p^2}.$$

A szórásnégyzet:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2},$$

innen a szórás:

$$D(\xi) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}.$$

**6204** A várható érték folytonos változó esetén:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Egyenletes eloszlás esetén:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha} \quad a < x \le b, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Leszűkíthetjük $f$-et az $f(x) \neq 0$ intervallumra:

$$M(\xi) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2},$$

$$M(\xi^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^2+ba+a^2}{3},$$

$$D^2(\xi) = \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{4b^2+4ba+4a^2-(3b^2+6ba+3a^2)}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Tehát az $a < b$ paraméterű egyenletes eloszlás esetén:

$$M(\xi) = \frac{b+a}{2}, \quad D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

**6205** *a)* Mivel $\lambda\sigma = 6$ és $\sigma = 2$, így $\lambda = 3$. $P(|\xi - 7| \ge 6) \le \frac{1}{9}$.

*b)* $P(|\xi - m| < 3{,}5) = 1 - P(|\xi - 7| \ge 3{,}5) \ge 0{,}67$. (Ekkor $\lambda = 1{,}75$.)

**6206** A szöveg szerint a villogó lámpák darabszámának várható értéke $m = 23$, szórása $\sigma = 4$. A kérdezett intervallum $]23 - 10; 23 + 10[$, tehát $\lambda\sigma = 10$, $\lambda = 2{,}5$.

$$P(|\xi - 23| < 10) = 1 - P(|\xi - 23| \geq 10) \geq 0{,}84.$$

**6207** Ha a lámpa 2 percig piros és fél percig zöld, akkor egy ciklusa 2,5 perc. $0{,}2 = p$ annak a valószínűsége, hogy zöldnél érkezünk. A nyolc hét minden munkanapján átkelünk rajta, ez összesen $8 \cdot 5 = 40 = n$ alkalom (feltesszük, hogy nem marad ki egy nap sem).

A $\xi$ jelölje a várakozás nélküli átjutások gyakoriságát:

$$P\left(\left|\frac{\xi}{40} - 0{,}2\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{40\varepsilon^2} = 0{,}9.$$

Innen $\varepsilon = \frac{1}{5}$. A keresett intervallum $\left|\frac{\xi}{40} - 0{,}2\right| < \frac{1}{5}$, más formában megadva $0 < \frac{\xi}{40} < 0{,}4$, illetve $0 < \xi < 16$. Tehát a 40 nap alatt legalább 24 esetben kell a lámpánál várakozni 90%-os valószínűséggel.

**6208** Ha 100 betűből általában 19 „e" vagy „a", akkor egy karakter $p = 0{,}19$ valószínűséggel lesz „e" vagy „a". $n = 1350$ betűt vizsgálunk, a kérdezett valószínűség legalább 0,8.

$\xi$ az előfordulások gyakorisága:

$$P\left(\left|\frac{\xi}{1350} - 0{,}19\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{0{,}19 \cdot 0{,}81}{1350\varepsilon^2} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 0{,}024.$$

Tehát $\left|\frac{\xi}{1350} - 0{,}19\right| < 0{,}024$, átalakítva $0{,}166 < \frac{\xi}{1350} < 0{,}214$, illetve $224{,}1 < \xi < 288{,}9$. Ebben a szövegben 224-nél több, 289-nél kevesebb „e" vagy „a" betűt találunk legalább 80% valószínűséggel.

**6209** Jelölje $A = \{\text{színes chopper}\}$, $B = \{\text{V8-as motor}\}$ eseményeket:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{0{,}8 \cdot 35}{0{,}4 \cdot 75 + 0{,}8 \cdot 35} = 0{,}4828.$$

**6210** Jelölje $A = \{1.\text{ példát jól megoldotta}\}$, $B = \{2.\text{ példát jól megoldotta}\}$ eseményeket.

*a)* $P(B|A) = \frac{P(B \cdot A)}{P(A)} = \frac{10}{25} = 0{,}4$;

*b)* $P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cdot \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{15}{17} \approx 0{,}88$.

**6211** Jelölje $A = \{\text{javult az állapota}\}$, $B = \{\text{gyógyszert kapott}\}$ eseményeket.

*a)* $P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cdot \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{54}{87} \approx 0{,}6207$;

*b)* $P(B|A) = \frac{P(B \cdot A)}{P(A)} = \frac{67}{107} \approx 0{,}6262$.

**6212** Jelölje $G$ azt az eseményt, hogy gólt mutat be a televízió. Továbbá jelölje $A$, $B$, $C$ rendre azt, hogy Aladár, Balázs vagy Csaba helyzetét mutatja. A könnyebb áttekinthetőség érdekében készítsünk táblázatot a szereplő értékekről.

| | Aladár | Balázs | Csaba | Össz. |
|---|---|---|---|---|
| Gólok száma | 2 | 1 | 2 | 5 |
| Kimaradt lövések | 13 | 3 | 5 | 21 |
| Helyzetek összesen | 15 | 4 | 7 | 26 |



*a)* $P(G) = P(G|A)\cdot P(A) + P(G|B)\cdot P(B) + P(G|C)\cdot P(C) = \frac{2}{15}\cdot\frac{15}{26} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{26} + \frac{2}{7}\cdot\frac{7}{26} \approx 0{,}1923.$

*Megjegyzés:* Természetesen a megadott adatokból azonnal megkapjuk a gól valószínűségét, ha a gólok számát (5) elosztjuk az összes helyzetek számával (26).

*b)* $P(C|G) = \frac{P(G|C)\cdot P(C)}{P(G)} = \frac{\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{26}}{\frac{5}{26}} = 0{,}4.$

*Megjegyzés:* Itt gyakorlatilag azt számoljuk ki, hogy a gólok (5) közül egyet mekkora valószínűséggel lőtt Csaba (2).

*c)* $P(A|\overline{G}) = \frac{P(\overline{G}|A)\cdot P(A)}{P(\overline{G})} = \frac{\frac{13}{15}\cdot\frac{15}{26}}{\frac{21}{26}} \approx 0{,}619.$

*Megjegyzés:* Ismét elég lett volna, ha az Aladár által kihagyott helyzetek számát (13) elosztjuk az összes helyzet számával (21).

**6213** Jelölje $S$, hogy szép feleletet hallott a tanár, $C$ és $D$ pedig, hogy a $C$ osztályban, illetve a $D$ osztályban hallgatott meg egy történelem szóbeli érettségit.

*a)* $P(S) = P(S|C)\cdot P(C) + P(S|D)\cdot P(D) = 0{,}2\cdot 0{,}58 + 0{,}36\cdot 0{,}42 = 0{,}2672;$

*b)* $P(D|S) = \frac{P(S|D)\cdot P(D)}{P(S)} = \frac{0{,}36\cdot 0{,}42}{0{,}2672} \approx 0{,}5659.$

**6214** Jelölje $\ddot{O}$ annak a valószínűségét, hogy a lakók örülnek egy változtatásnak, $B_1$, $B_2$, $B_3$ pedig azt, hogy mekkora valószínűséggel esik egy változás a $B_1$, $B_2$, $B_3$ lakásra.

*a)* $P(\ddot{O}) = P(\ddot{O}|B_1)\cdot P(B_1) + P(\ddot{O}|B_2)\cdot P(B_2) + P(\ddot{O}|B_3)\cdot P(B_3) =$
$= 0{,}4\cdot 0{,}45 + 0{,}7\cdot 0{,}35 + 0{,}3\cdot 0{,}2 = 0{,}485;$

*b)* $P(B_1|\overline{\ddot{O}}) = \frac{P(\overline{\ddot{O}}|B_1)\cdot P(B_1)}{P(\overline{\ddot{O}})} = \frac{(1-0{,}4)\cdot 0{,}45}{1-0{,}485} \approx 0{,}5243.$

**6215** Jelölje $S$, hogy Szamár bűnös, $B$ pedig az új bizonyíték bejelentését. Eredetileg Nyuszi szerint $P(S) = 0{,}01$. Bagoly által elmondottak alapján $P(B|S) = 0{,}9$.

A teljes valószínűség tétele szerint:

$$P(B) = P(B|S)\cdot P(S) + P(B|\overline{S})\cdot P(\overline{S}) =$$
$$= 0{,}9\cdot 0{,}01 + 0{,}15\cdot 0{,}99 = 0{,}1575.$$

*a)* Az új bizonyíték és a Bagoly által közöltek értelmében:

$$P(S|B) = \frac{P(B|S)\cdot P(S)}{P(B)} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}01}{0{,}1575} \approx 0{,}06,$$

tehát a bűnösség valószínűsége 5%-kal nőtt, hatszorosára emelkedett.

*b)* Ha változtatunk a számokon, akkor

$$P(B) = P(B|S) \cdot P(S) + P(B|\overline{S}) \cdot P(\overline{S}) =$$
$$= 0{,}99 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 \cdot 0{,}99 = 0{,}0198.$$

A bűnösség valószínűsége:

$$P(S|B) = \frac{P(B|S) \cdot P(S)}{P(B)} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}01}{0{,}0198} = 0{,}5.$$

Ekkor az új bizonyíték fényében Nyuszi teljesen elbizonytalanodna Szamár barátja ártatlanságában.

**6216** $A = \{2; 3; 5\}$ és $B = \{5; 6\}$. A definíció szerint $A$ és $B$ független, ha $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. Jelen esetben azok, hiszen:

$$P(A \cdot B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B).$$

**6217** Jelölje $A = \{\text{piros 2-es}\}$, $B = \{\text{kék 5-ös}\}$ eseményeket. Ekkor $P(A) = \frac{1}{6}$ és $P(B) = \frac{1}{6}$. A kettő egyszerre $A \cdot B = \{\text{piros 2-es és kék 5-ös}\}$ esemény, azaz valóban függetlenek:

$$P(A \cdot B) = \frac{1}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B).$$

**6218** *a)* $P(M) = 0{,}5$; $P(D) = 0{,}375$; $P(M \cdot D) = 0{,}125$.

$P(M \cdot D) \neq P(M) \cdot P(D)$, tehát igen, ez a két esemény függ egymástól.

*b)* $P(M) = 0{,}5$; $P(D) = 0{,}25$; $P(M \cdot D) = 0{,}125$.

Ekkor $P(M \cdot D) = P(M) \cdot P(D)$. Változik a viszony, így már függetlenek az események.

**6219** *a)* $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}5$; $P(C) = 0{,}5$. Ugyanakkor $P(A \cdot B) = 0{,}25$; $P(A \cdot C) = 0{,}25$; $P(B \cdot C) = 0{,}25$. Bármely két esemény független.

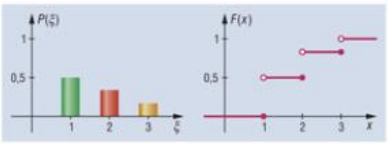
*b)* Mivel nincs olyan kimenetele a kísérletnek, amely mindhárom eseményben egyszerre teljesíti a megkövetelteket, ezért

$$P(A \cdot B \cdot C) = 0 \neq 0{,}125 = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Tehát a három esemény együtt nem független.

**6220** Az első ábrán az eloszlást, a másodikon pedig az eloszlásfüggvényt látjuk.

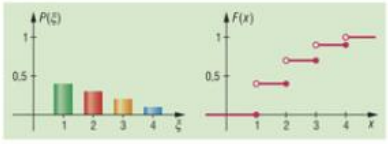
$$P(\xi = 1) = \frac{3}{6}; \quad P(\xi = 2) = \frac{2}{6}; \quad P(\xi = 3) = \frac{1}{6}.$$




**6221** Az első ábrán az eloszlást, utána az eloszlásfüggvényt látjuk.

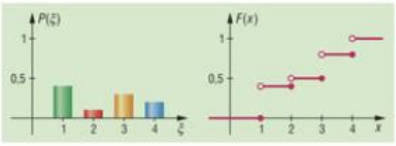
*a)* Az egyes valószínűségek:

$$P(\xi = 1) = 0{,}4; \quad P(\xi = 2) = 0{,}3;$$
$$P(\xi = 3) = 0{,}2; \quad P(\xi = 4) = 0{,}1;$$



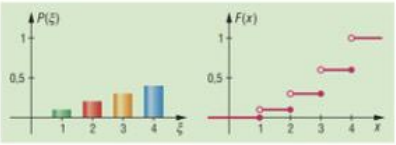
*b)* Az egyes valószínűségek:

$$P(\xi = 1) = 0{,}4; \quad P(\xi = 2) = 0{,}1;$$
$$P(\xi = 3) = 0{,}3; \quad P(\xi = 4) = 0{,}2;$$




*c)* Az egyes valószínűségek:

$$P(\xi = 1) = 0{,}1; \quad P(\xi = 2) = 0{,}2;$$
$$P(\xi = 3) = 0{,}3; \quad P(\xi = 4) = 0{,}4.$$




## Vegyes feladatok – megoldások

**6222** A feladat visszatevéses mintavételre vezet, tehát binomiális eloszlás.

*a)* $P(\text{7 hölgy}) = \binom{20}{7} \cdot 0{,}377^7 \cdot 0{,}623^{13} \approx 0{,}1787.$

*b)* Jelölje $\xi$ a mutatott urak számát. Egy úr kiválasztásának valószínűsége $p = 0{,}623$. Ekkor

$$M(\xi) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}623 = 12{,}46 \approx 12 \text{ fő}.$$

*c)* A szórásnégyzet:

$$D^2(\xi) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 20 \cdot 0{,}623 \cdot 0{,}377 = 4{,}69742.$$

Tehát $D(\xi) \approx 2{,}167$. Így a keresett intervallum:

$$]12{,}46 - 2{,}167;\ 12{,}46 + 2{,}167[ = ]10{,}293;\ 14{,}627[.$$

**6223** *a)* Csebisev tételét alkalmazzuk. Mivel $\lambda\sigma = 2$ és $\sigma = 1$, így $\lambda = 2$.

Ebből

$$P(|\xi - 5| \geq 2) \leq 0{,}25.$$

*b)* Csebisev tételét alkalmazva ($\lambda = 1{,}5$):

$$P(|\xi - 5| < 1{,}5) = 1 - P(|\xi - 5| \geq 1{,}5) \geq \frac{5}{9}.$$

**6224** *a)* A keresett valószínűség:

$$P(\text{piros}|\text{gömb}) = \frac{P(\text{piros és gömb})}{P(\text{gömb})} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4.$$

*b)* Teljesülnie kell, hogy

$$P(\text{piros és gömb}) = P(\text{piros}) \cdot P(\text{gömb}), \quad \text{azaz} \quad 0{,}2 = x \cdot 0{,}5.$$

Innen $x = 0{,}4$.

Mivel

$$P(\text{piros}) = \frac{y}{120} = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad y = 48 \text{ darab}.$$



Kiadja a Mozaik Kiadó, 6701 Szeged, Pf. 301, Telefon: (62) 470-101, 554-664
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült az Innovariant Kft.-ben, Szegeden • Felelős vezető: Drágán György
Terjedelem: 12,87 (A/5) ív • 2023. január • Tömeg: 300 g • Raktári szám: MS-2327