Sokszínű matematika

11-12



Sokszínű matematika

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal

11–12

Letölthető megoldásokkal

Harmadik, a NAT2020 szerint átdolgozott kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2024

A könyvet írta: Árki Tamás · *középiskolai tanár*
Konfárné Nagy Klára · *középiskolai tanár*
Kovács István · *középiskolai tanár*
Trembeczki Csaba · *középiskolai tanár*
Dr. Urbán János · *középiskolai tanár*

Lektorálta: Biróné Füle Zsuzsanna · *középiskolai tanár*
Kunovszki István · *középiskolai tanár*

Felelős szerkesztő: Tóth Katalin
Borítóterv, tipográfia: Reményfy Tamás
Ábrák: Becsei György, Horváth Péter
Fotók: Bozsó Márton, Mozaik Archívum, képügynökségek
Műszaki szerkesztő: Becsei György, Horváth Péter

A feladatgyűjtemény átdolgozása a NAT2020 és a 2024-től érvényes érettségi vizsgakövetelmények alapján készült.

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, ill. rövidített változat kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más hordozó) nem sokszorosítható.

ISBN 978 963 697 882 2

Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2010, 2022

Tisztelt Olvasó!

Ez a kötet, amelybe belelapozott, a korábbi *Sokszínű matematika 11–12.* feladatgyűjtemény megújult, a NAT 2020 tanterv és az annak megfelelő érettségi követelményrendszer alapján átdolgozott változata.

Az átdolgozáskor arra törekedtünk, hogy minél többet megőrizzünk a korábbi feladatgyűjtemény értékeiből, ezért a jól felépített feladatsorokon csak akkor módosítottunk, ha azt az érettségi követelményrendszer megváltozása indokolta.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a kötetben mindenki bőségesen találhat a maga számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így akár a Mozaik Kiadó 11.-es vagy 12.-es *Sokszínű matematika* tankönyveit, akár az állami tankönyveket használják az iskolában, a feladatgyűjtemény feladatainak megoldása önmagában is kellő segítséget nyújthat ahhoz, hogy az érettségi felkészüléshez szükséges feladatmegoldási jártasságra szert tegyenek.

A feladatok nehézségének jelölése

Segíti az eligazodást, hogy a feladatok sorszámának színezése utal azok nehézségi szintjére:

3142 **Gyakorlófeladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. A középszintű érettségi I. részében található „villámkérdésekhez" hasonlóan könnyen megoldhatók. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

3467 **Középszintű feladatok:** az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismétlését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. *(kék színű feladatsorszám)*

3831 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

3852 **Kiegészítő feladatok:** az új alaptantervben már nem tárgyalt, de matematika irányú továbbtanulás esetén hasznos ismereteket tartalmazó feladatok. *(lila színű feladatsorszám)*

A feladatok sorszámozása

A *Sokszínű matematika* feladatgyűjtemény köteteiben a 9. évfolyam feladatai az 1001., a 10. évfolyam feladatai a 2001., a 11. évfolyamé a 3001., a 12. évfolyamé pedig a 4001. sorszámmal kezdődnek.

A 12.-es kötet második részében található *Rendszerező összefoglalás* már célzottan az érettségi felkészülés szempontjai szerint tekinti át a négy év tananyagát. Ennek feladatai az 5001. sorszámmal indulnak.

Megoldások

A feladatok megoldásai letölthetők a **www.mozaik.info.hu/matematika** oldalról. *(Részletes információ a könyv 295. oldalán olvasható.)*

A gyakorlófeladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők

TARTALOMJEGYZÉK



Bevezető 5
A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések 10

A 11. évfolyam feladatai

11.1. *Kombinatorika, gráfok* (3001–3160)

Fibonacci-számok 12
Permutációk, variációk 12
Ismétlés nélküli kombinációk, Pascal-háromszög 14
Binomiális együtthatók, ismétléses kombináció 16
Vegyes összeszámlálási feladatok (kiegészítő anyag) 18
GRÁFOK – pontok, élek, fokszám 19
GRÁFOK – út, vonal, séta, kör, Euler-vonal 22
Fagráfok 24
A kombinatorika gyakorlati alkalmazásai 25
Vegyes feladatok 27



11.2. *Hatvány, gyök, logaritmus* (3161–3241)

Hatványozás és gyökvonás (emlékeztető) 29
Hatványfüggvények és gyökfüggvények 30
Törtkitevőjű hatvány 31
Irracionális kitevőjű hatvány, exponenciális függvény 32
Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek 33
A logaritmus fogalma 37
A logaritmusfüggvény 38
A logaritmus azonosságai 40
Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek 41
Vegyes feladatok 44

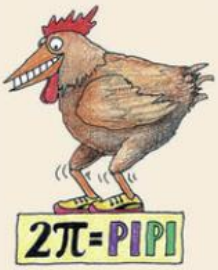


11.3. *A trigonometria alkalmazásai* (3242–3459)

Vektorműveletek rendszerezése, alkalmazások (emlékeztető) 47
A skaláris szorzat 48
Vektor hossza, és skaláris szorzat a koordináta-rendszerben 50
A szinusztétel 52
A koszinusztétel 54
Trigonometrikus összefüggések alkalmazásai 55
Összegzési képletek 57



Az összegzési képletek alkalmazásai 58
Trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek 60
Trigonometrikus egyenlőtlenségek 63
Vegyes feladatok 64



11.4. *Függvények* (3460–3554)

Az exponenciális és logaritmusfüggvény 67
Egyenletek és függvények 69
Trigonometrikus függvények 70
Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek (kiegészítő anyag) 72
Vegyes feladatok 74
Inverz függvények 78



11.5. *Koordináta-geometria* (3555–3776)

Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal (emlékeztető) 80
Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge. Területszámítási alkalmazások 82
Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái 84
Az egyenest meghatározó adatok a koordináta-rendszerben 87
Az egyenes egyenletei 90
Két egyenes metszéspontja, távolsága, hajlásszöge 94
A kör egyenlete 96
A kör és az egyenes kölcsönös helyzete; két kör közös pontjai 99
A parabola 101
Vegyes feladatok 102



11.6. *Valószínűség-számítás, statisztika* (3777–3892)

Klasszikus valószínűségi modell 106
Visszatevéses mintavétel 111
Mintavétel visszatevés nélkül 113
Valószínűségi játékok gráfokon (kiegészítő anyag) 114
Valóság és statisztika 116
Vegyes feladatok 117

A feladatok megoldásai letölthetők a ***www.mozaik.info.hu/matematika*** *oldalról.*

A 12. évfolyam feladatai



12.1. *Logika, bizonyítási módszerek* (4001–4067)

Logikai feladatok, kijelentések 120
Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció 123
Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia 125
Teljes indukció (emelt szintű tananyag) 127
Vegyes feladatok 128

12.2. *Számsorozatok* (4068–4165)

A sorozat fogalma, példák sorozatokra 130
Példák rekurzív sorozatokra 131
Számtani sorozatok 131
Mértani sorozatok 134
Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása 135
Vegyes feladatok 136



12.3. *Térgeometria* (4166–4511)

Térelemek 139
Testek osztályozása, szabályos testek 143
A terület fogalma, a sokszögek területe 147
A kör és részeinek területe 151
A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata 154
A gúla és a kúp térfogata 159
A csonka gúla és a csonka kúp 162
A gömb térfogata és felszíne 165
Egymásba írt testek (kiegészítő anyag) 167
Vegyes feladatok I. 169
Vegyes feladatok II. 171



12.4. *Valószínűség-számítás, statisztika* (4512–4578)

Geometriai valószínűség 174
Várható érték (emelt szintű tananyag) 176
Statisztika 177
Vegyes feladatok 181



Készüljünk az érettségire!



12.5. *Rendszerező összefoglalás* (5001–5617)

Gondolkodási módszerek (5001–5139)

Halmazok ... 184
Kijelentések, események ... 187
Kombinatorika ... 188
Gráfok ... 192
Valószínűség-számítás ... 193
Statisztika ... 198

Algebra és számelmélet (5140–5303)



Számok és műveletek ... 201
Számelmélet, oszthatóság ... 202
Hatvány, gyök, logaritmus ... 205
Műveletek racionális kifejezésekkel ... 209
Egyenletek, egyenlőtlenségek ... 211
Egyenletrendszerek ... 219

Függvények (5304–5404)

A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai ... 222
Műveletek függvényekkel ... 231
Függvénytulajdonságok ... 233

Geometria (5405–5617)



Alapvető fogalmak ... 239
Geometriai transzformációk ... 241
Vektorok. Szögfüggvények ... 247
Nevezetes síkidomok tulajdonságai ... 251
Koordináta-geometria ... 256

12.6. *Érettségi gyakorló feladatsorok*

Középszintű feladatsorok ... 262
Emelt szintű feladatsorok ... 286

A feladatok megoldásai letölthetők a ***www.mozaik.info.hu/matematika*** *oldalról.*



A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset$, $\{\}$	üres halmaz
$\overline{A}$	az A halmaz komplementere
$\lvert A \rvert$	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}$, $\vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\sphericalangle$	szög

11. évfolyam



Kombinatorika, gráfok 12

Hatvány, gyök logaritmus 29

A trigonometria alkalmazásai 47

Függvények 67

Koordináta-geometria 80

Valószínűség-számítás, statisztika 106



11.1. KOMBINATORIKA, GRÁFOK

Fibonacci-számok

3001 Határozzuk meg a tizenötödik és a huszadik Fibonacci-számot.

3002 Változtassunk a Fibonacci-számok eredeti képzési szabályán. Írjuk fel az első tíz értéket, ha ugyanúgy két szomszédos érték összeadásával kapjuk meg a rájuk következőt, de

a) az első szám –1, a második 1;

b) az első szám 1, a második –1.

3003 Egy sorozat első három tagja 1, 1, 2. Legyen minden további tag az előtte álló három tag összege.

a) Számítsuk ki a sorozat első tizenöt tagját.

b) Van-e a felírt számok között (az első három kivételével) Fibonacci-szám?

3004 Folytassuk visszafelé a Fibonacci-sorozatot: írjunk fel tíz tagot, amelyek megelőzik a két első egyest a számsorozatban! (A képzési szabályon nem változtatunk.)

3005 Lehet-e úgy kezdő értékeket adni egy Fibonacci-szerű sorozatnak (amelyben minden érték az előtte levő kettő összege), hogy az bizonyos számú elem után önmagát ismételje?

Permutációk, variációk

3006 Egy parkon át hétköznap reggelenként 7:40 és 7:50 között 86 ember szokott munkába sietni véletlenszerűen. Hányféle sorrendben kelhettek át egyik reggel a park bejáratán, ha egyszerre csak egy fő ment át a kapun?

3007 Egy világutazó az Európai Unió fővárosait szeretné körbejárni, mindegyiket pontosan egyszer felkeresve. Hányféle sorrendben veheti fel a listájára a fővárosokat?

3008 Jani a szelektív hulladékgyűjtő szigetre vitt 6 egyforma üres üveget, 5 egyforma összelapított műanyag palackot és 10 ugyanolyan fajta üres konzervdobozt. Útközben arra gondolt, hogy összevissza fogja bedobálni egymás után a megfelelő hulladékgyűjtőbe a szemétdarabokat. Hányféle sorrendben szabadulhat meg Jani a nála levő felesleges holmiktól?

3009 *a)* Hányféleképp lehet a polcon egymás mellé tenni 3 zöld és 2 piros, amúgy egyforma bögrét?

b) Hányféleképp lehet a polcon egymás mellé tenni 3 zöld, 2 piros és 0 kék, egyforma bögrét?

c) Az előző két kérdés alapján magyarázzuk meg, miért van értelme 0!-nak.

3010 Egy lóversenyen a 18 indulóból csak 6 ló ért célba. Ha ezt tudni lehetett volna a rajt előtt, akkor hány befutóra fogadhattak volna a bukmékerek? (Befutó = a célba érkező lovak sorrendje, holtverseny nincs.)



3011 Egy kis cégnél 10 fő dolgozik. A munkatársak reggel sorban egymás után érkeznek munkába. Hányféle sorrendben jöhetnek be véletlenszerűen a kapun, ha ma hat fő

a) jön be dolgozni; *b)* beteget jelentett?



3012 Rudi papagája rátalált a televízió távkapcsolójára. Most azzal játszik, hogy a nagy kék számgombokra egymás után 7-szer rálép. Minden alkalommal pontosan egy gombot nyom le (akár ugyanazt többször). Hányféle különböző „csatornasorrendet" jegyezhet meg a televízióban levő memória a papagáj játéka során?



3013 A fél éves Dorka magabiztosan fogja jobb kezében a macis, bal kezében a zsiráfos bélyegzőt. Ha elhúznak előtte egy papírlapot, kitörő örömmel bélyegez rá sorban egymás után véletlenszerűen állatokat hol jobb, hol bal kézzel. A papíron nyolc figura fér el. Hányféle állatsereglet keletkezhet Dorka munkája során a keskeny papírlapon?

3014 Hány induló volt azon a futóversenyen, melyen az összes lehetséges – holtverseny nélküli – végeredmények száma 39 916 800? (Minden induló célba ér.)

3015 Egy dobozban 0-tól 9-ig számozott cédulák találhatók, és van egy hagyományos dobókockánk. Hányféle hatjegyű szám képezhető úgy, hogy háromszor dobunk a dobókockával, majd három cédulát húzunk a dobozból visszatevés nélkül, és a kapott hat számjegyet a dobás, illetve a húzás sorrendjében egymás mellé írjuk?

3016 Mennyi különböző ülésrendben ültethetünk le 8 főt egy

a) egyenes asztal mellé;

b) kör alakú asztal köré, ha az adott körüljárás szerinti szomszédságot vesszük figyelembe;

c) kör alakú asztal köré, ha csak a szomszédokat vesszük figyelembe, de azt nem, hogy jobb vagy bal oldaliak?

3017 Klári a piacon a zöldség-gyümölcs pult előtt áll. Hány darabot tett összesen a kosarába, ha a paradicsom, paprika, barack, sárgadinnye, hagyma, káposzta közül választott, mindegyikből vehetett többet is, és azokat egyesével 1 679 616-féle sorrendben rakhatta a kosarába?

3018 Van két dobozunk. Az egyikben 0-tól 9-ig számozott cédulák vannak, a másikban pedig két 3-as, három 4-es és négy 5-ös számjegyet tartalmazó cédula. Először a második dobozból egymás után kihúzzuk az összes cédulát, majd az elsőből négyet húzunk úgy, hogy a cédulákat visszatesszük a dobozba, és az így kapott számokat sorban egymás mellé írjuk. Hányféle számot kaphatunk így?

3019 Hányas számrendszerben van pontosan 2 097 152 különböző, legfeljebb 7-jegyű szám?

3020 Egy bolha üldögél egy négyzet mellett. Egyszer csak ráugrik a négyzet egyik csúcsára, majd onnantól kezdve a csúcsokon ugrál még kilencszer. Hányféle sorrendben érintheti a csúcsokat, ha

a) bármikor bármelyikre ugorhat;

b) oda nem ugrik, ahol éppen áll;

c) nem ugrik sem oda, ahol éppen áll, sem pedig az eggyel korábbi állomáshelyére?

3021 Egy televíziós vetélkedőben a stúdióközönség soraiból választanak ki játékra két főt. Hányan ülnek a nézőtéren, ha 1980-féleképp választhatják ki először az első, majd a második játékost?

3022 Az Európai Unió 10 legnagyobb országának miniszterelnökei megbeszélést tartanak az Unió nem hivatalos fővárosában, Brüsszelben. Az angol és francia miniszterelnöknek a protokoll szerint közre kell fogni a németet. Hányféle ülésrend lehetséges, ha

a) egyenes asztal mellé ülnek;

b) kör alakú asztal mellé ülnek? (Két ülésrendet akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egy főnek legalább egy szomszédja más.)

3023 Laci barátom legfeljebb 21 db-os DVD-gyűjteményében 4 koncertfilm és 5 vígjáték van, de található nála legalább két színházi előadás is. A DVD-ket – csupán a besorolásukat figyelembe véve – 27 720-féle módon tudja a polcon sorba rendezni. Pontosan hány színpadi mű van meg DVD-n Lacinak?

3024 Emese és Karcsi öt gyermeket szeretne. Fel is írták az alábbi neveket, amelyek közül mindig véletlenszerűen adnak egyet az éppen születő csöppségnek (persze kétszer nem adják ugyanazt). Hányféle sorrendben adhatják a neveket a megszületendő öt gyermeknek? (Tételezzük fel, hogy ikreik nem születnek.)

Aladár Eszter Csilla Tamás Andrea Kamilla Gáspár Vivien János Csaba

3025 Melyek azok az n és k nemnegatív egész értékek, melyekre n elem k-tagú ismétlés nélküli variációinak száma megegyezik az ismétléses variációk számával?

Ismétlés nélküli kombinációk, Pascal-háromszög

3026 Határozzuk meg számológép nélkül, definíció alapján a következők pontos értékét:

a) $\binom{4}{2}$; *b)* $\binom{15}{2}$; *c)* $\binom{11}{6}$; *d)* $\binom{11}{8}$; *e)* $\binom{11}{9}$; *f)* $\binom{122}{120}$;

g) $\binom{145}{144}$; *h)* $\binom{1578}{1}$; *i)* $\binom{135}{0}$.

3027 Határozzuk meg papíron, a definíció alapján a következők pontos értékét:

a) $\binom{n}{0}$; *b)* $\binom{n}{1}$; *c)* $2\cdot\binom{n}{2}$; *d)* $\binom{n}{n-2}$; *e)* $\binom{n}{n-1}$; *f)* $\binom{n}{n}$.

3028 Az $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ azonosság segítségével adjuk meg az összegek eredményét:

a) $\binom{134}{43}+\binom{134}{44}$; *b)* $\binom{211}{101}+\binom{210}{100}+\binom{210}{99}$;

c) $\binom{111}{55}+\binom{110}{54}+\binom{109}{53}+\binom{109}{52}$.

3029 *a)* Van-e olyan természetes szám, amit nem találunk meg a Pascal-háromszögben?

b) Írjuk fel a Pascal-háromszöget a 10. sorig. Keressünk olyan számokat, amik pontosan egy, kettő, három, négy helyen fordulnak elő a Pascal-háromszögben.

3030 A dobókockával dobható számok halmazának mennyi

a) 2; *b)* 3; *c)* 4; *d)* 5; *e)* 7

elemű részhalmaza van?

3031 *a)* Hány elemből áll az a halmaz, amelyből 6-féleképpen lehet egyelemű részhalmazokat kiválasztani?

b) Az előző halmazból hány elemű részhalmazt lehet még 6-féleképp kiválasztani?

3032 Hányféle szorzatot képezhetünk a következő számok közül négyet kiválasztva:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.



3033 *a)* Legfeljebb mennyi érvényes, de különböző hatoslottó-szelvényt adhatunk fel?

b) Számítsuk ki, hányszorosa a hatos lottón fogadható számhatosok darabszámának az ötös lottón megfogadható számötösök száma. Az eredményt adjuk meg tovább már nem egyszerűsíthető törtként és egy tizedesre kerekítve is.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45				

3034 A térben adott 9 különböző pont, melyek közül semelyik négy nem esik egy síkba. Hány különböző síkot határoznak meg?

3035 Miután Hófehérke megette a mérgezett almát, a törpék küldöttséget indítottak a mostohához, hogy legyen szíves élessze újra Hófehérkét. Persze nem segített a gonosz, kénytelenek voltak megvárni a Királyfit. Hány különböző háromtagú küldöttséget indíthattak? (A törpék a küldöttség összeállítása során nem figyeltek kiválasztásuk sorrendjére.)

3036 Az autószerelő műhely egy dobozában 60 kerékanya van (minden kerékre négy kell). Mennyi anyacsavar-szettet választhat ki Sanyi a jobb első kerékre, ha az anyákat megkülönböztetjük?

3037 A Pascal-háromszög tulajdonságai alapján határozzuk meg, k mely értékére (értékeire) van maximuma a

a) $\binom{24}{k}$; *b)* $\binom{13}{k}$ értékének.

3038 Törpapa, Nótata, Törpilla, Okoska, Törperős, Ügyi, Ügyifogyi, Lusti, Hami, Törpojáca, Tréfi és Dulifuli közül egyszerre négyet elkap és zsákba dug Hókuszpók.

a) Hány összeállításban kerülhetnek a zsákba a törpök?

A többiek most azon tanakodnak, hogyan szabadítsák ki őket. Úgy határoznak, hogy egy kétfős brigád eltereli Sziamiaú figyelmét, másik két törp elvonja Hókuszpók figyelmét, a többiek pedig kiszabadítják a fogva tartottakat.

b) Hány különböző szabadcsapat-összeállítás közül választhatnak a törpök?

3039 Karcsi randevúra készül, és bemegy a virágboltba, ahol egy vázában kilenc vörös és négy fehér rózsa van. Hány különböző, három vörös és kettő fehér rózsát tartalmazó csokrot köttethet ezekből a virágokból? (Az azonos színű virágok egyformák, csokorbeli helyük nem érdekes.)

3040 Sanyi autószerelő műhelyében egy dobozban 60 kerékanya van. Egy négykerekű személyautó fékjeinek beállítása után éppen ezeket teszi a helyükre. (Az anyákat megkülönböztetjük, és az autó minden kerekére négy anyacsavart kell tenni.) A megoldás során ne használjunk számológépet!

a) Hányféleképp veheti ki a dobozból egyszerre az összes kerékre való csavart Sanyi?

b) Sanyi egyszerre mindig csak egy kerékre való csavart vesz ki a dobozból. Ezt hányféleképp teheti meg?

c) Melyik érték a több, és miért: ha egyszerre veszi ki az összes csavart, vagy ha kerekenként? Mit vegyünk még figyelembe (vagy mitől tekintsünk el), hogy a két érték egyenlő legyen?

3041 A 32 lapos magyar kártyából 4 lapot osztunk le. Hány olyan leosztás van, ahol a lapok között van

a) a piros király?

b) pontosan egy piros lap vagy pontosan egy király?

c) legalább egy piros vagy legalább egy király?

3042 Az 52 lapos franciakártya-csomagból négy játékosnak leosztunk 3-3 lapot. Számítsuk ki nagyságrendileg ($x \cdot 10^y$ alakban, $y \in \mathbb{N}$, x-et egy tizedesre kerekítsük), hányféle leosztás lehetséges.



3043 A 32 lapos magyar kártyából leosztottunk négy lapot. Hány darab, legalább egy ászt tartalmazó különböző leosztás lehetséges?

3044 Mennyi, legfeljebb egy tököt tartalmazó leosztás van, ha 32 lapos magyar kártyából osztunk le 4 lapot?

3045 Legfeljebb hány különböző ötöslottó-szelvényünk lehet akkor, ha ezek mindegyikén a találataink száma

a) 0; *b)* 1; *c)* 2; *d)* 3; *e)* 4; *f)* 5?

3046 Hány fő vett részt azon a tanácskozáson, amely előtt mindenki mindenkivel kezet fogott, és összesen 45 kézfogás történt?

3047 Bizonyítsuk be az $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ definíció alapján, hogy $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.

3048 *a)* Adjunk meg két konkrét számpéldát a Pascal-háromszögből, amelyre igaz a következő összefüggés:

$$\binom{n}{k-1}+2\cdot\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+2}{k+1}.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy az összefüggés bármely n és k, $n\geq k+1\geq 2$ természetes számra teljesül.

3049 *a)* Keressünk több konkrét számpéldát a Pascal-háromszögből a következő összegre:

$$\binom{n}{k-2}+3\cdot\binom{n}{k-1}+3\cdot\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}.$$

b) A Pascal-háromszöget megfigyelve keressünk zárt formulát a fenti összegre.

c) Igazoljuk, hogy az összefüggés bármely n és k, $n\geq k+1\geq 3$ természetes számra teljesül.

3050 *a)* Adjunk meg a Pascal-háromszögben a következő összegnek megfelelő számokat ($n>k$):

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}.$$

b) A Pascal-háromszög számait megfigyelve keressünk zárt formulát a fenti összegre.

c) Bizonyítsuk is be a megfigyelésünket.

d) Mit kapunk az összefüggésből, ha k helyére 1-et írunk?

3051 Hány főt kell 13 emberből kiválasztani, hogy a kiválasztást 715-féleképpen tudjuk megtenni? (A kiválasztásnál a sorrendet nem vesszük figyelembe.)

3052 Hány főből kell kiválasztani 7 embert, hogy a kiválasztást 77 520-féleképp tudjuk megtenni? (A kiválasztásnál a sorrendet nem vesszük figyelembe.)

3053 A Pascal-háromszög hányadik sorának hányadik eleme a 8568?

Binomiális együtthatók, ismétléses kombináció

3054 Fejtsük ki a következő kéttagú összegek hatványait:

a) $(3-b)^2$; *b)* $(e+2f)^3$; *c)* $(x-2)^4$; *d)* $(2x+1)^5$;

e) $(1-0{,}5a)^7$.

3055 Fejtsük ki a következő binomokat, majd vonjunk össze, amit csak lehet:

a) $(x^2+2x)^6$; *b)* $(2a-0{,}5b)^8$; *c)* $\left(\sqrt[3]{x}+x\right)^9$; *d)* $\left(x+3\cdot\sqrt{x}\right)^7$;

e) $\left(2x-3x^3\right)^6$.



3056 Felhasználva a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggést, hozzuk a legegyszerűbb alakra a kifejtett kéttagú összegeket:

a) $(\sin x - \cos x)^2$; *b)* $(\sin x + \cos x)^4$.

3057 Írjuk fel két tag összegének adott hatványaként a következő összegeket!

a) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$; *b)* $0{,}125x^6 - 1{,}5x^4y + 6x^2y^2 - 8y^3$;

c) $x^8 - 4x^9 + 6x^{10} - 4x^{11} + x^{12}$; *d)* $x^2 + 4 \cdot \sqrt{x} \cdot x^2 + 6x^3 + 4 \cdot \sqrt{x} \cdot x^3 + x^4$.

3058 Hány részhalmaza van egy

a) egyelemű; *b)* kételemű; *c)* ötelemű; *d)* nulla elemű halmaznak?

3059 Hány elemű az a halmaz, amelynek

a) 1; *b)* 2; *c)* 3; *d)* 16; *e)* 256; *f)* 0

részhalmaza van?

3060 A számítógépen több különböző adattípusban ábrázolják az egész számokat. Például a nyolc biten ábrázolt egészek neve *shortint,* a tizenhat biten ábrázolt egészeket *integernek* nevezik.

Melyik az a legnagyobb szám, amit a számítógépen

a) shortintként; *b)* integerként ábrázolhatunk?

Hány részhalmaza van

c) a shortint; *d)* az integer típusú számok halmazának?

3061 Egy osztályban a lányok közül 1024 különböző csoportot választhatunk ki (beleértve az üres csoportot is), a fiúk közül pedig 8192-félét. Hány különböző csoport választható ki az egész osztályból?

3062 A nagypályás lány focicsapatnak Enikő és Évike a csatárai. (A focicsapat kezdőjátékosainak száma 11.)

a) Hány olyan részhalmaza van a csapatnak, amelynek Enikő nem eleme?

b) Az előbbi részhalmazok közül hány olyan van, amelynek Évike eleme?

c) Számoljuk össze azon részhalmazokat, melyekről tudjuk, hogy azoknak a csapat öt adott tagja eleme. Hányad része ezen részhalmazok száma az összes részhalmaznak?



3063 A nagypályás fiú focicsapat legutóbbi mérkőzésének első félidejében leginkább védekezett. Mind a 16 szabadrúgást, amit a bíró nekik ítélt, saját térfelükről végezhették el – ezért a három csatár nem, de a kapus rúghatott szabadot. A szabadrúgások elvégzőit a másodedző jelölte ki. Hányféle lehetőség közül választhatott, ha

a) a szabadrúgások időbeli sorrendjét is figyelembe vesszük;

b) csak azt vesszük figyelembe, hogy kik végezték el a szabadrúgásokat?

A második félidőre az edző kicsit átszervezte a csapatot, így a játék végig az ellenfél térfelén folyt. Most 13 szabadrúgást végeztek el, de a kapus már nem rúgott labdába. Így hányféle lehetőség volt a szabadrúgások elvégzésére, ha

c) a szabadrúgások időbeli sorrendjét is figyelembe vesszük;

d) csak azt tekintjük, hogy kik végezték el a szabadrúgásokat?



Vegyes összeszámlálási feladatok (kiegészítő anyag)

3064 *a)* Hányféleképpen választhatunk ki 100 főből 4-et? (A kiválasztásnál a sorrend nem számít.)

b) Hányféleképpen állíthatjuk sorba a kiválasztott 4 főt?

c) Milyen kombinatorikai alapfeladathoz jutunk, ha először kiválasztunk n különböző elemből k darabot (ismétlés nélküli kombináció), majd sorba rakjuk a kiválasztottakat (ismétlés nélküli permutáció)?

3065 *a)* Hányféleképpen lehet a 32 lapos kártyacsomagból 4 lapot kiválasztani és sorban egymás mellé tenni figurával felfelé (például egyes pasziánsz játékokban)?

b) Ha eltekintünk a lerakott lapok sorrendjétől, milyen kombinatorikai alapfeladatot kapunk?

3066 Egy 30 fős osztállyal pszichológus foglalkozik. Minden terápiás foglalkozásra 8 főt választ ki, majd körben leülteti őket. Hányféleképpen választhatja ki és ültetheti le a diákokat az egyes órákon, ha két rendezést akkor tekintünk különbözőnek, amennyiben valamely körüljárás szerint legalább az egyik diák legalább egyik szomszédja különböző? (A pszichológus nem ül le.)

3067 Egy krimirajongónak három díszdoboz Sherlock Holmes-gyűjteménye van. Az egyes dobozokban három, négy és öt lemez található (a dobozokra rá van írva, hogy pontosan melyik filmeket tartalmazza). Hányféleképpen teheti őket sorban egymás mellé a polcon, ha

a) csak a díszdobozok sorrendjét veszi figyelembe?

b) kiveszi a filmeket a dobozokból, és így helyezi el őket?

A kivett filmeket újra visszateszi a dobozokba, a dobozokat pedig felteszi a polcra. Hányféleképp állhatnak a dobozokban a filmek a polcon, ha

c) összevissza helyezi a filmeket a dobozokba?

d) úgy teszi vissza a filmeket, hogy egyik film sem kerül a saját dobozába?

A dobozok sorrendjét mindkét esetben figyelembe vesszük, ám az egyes dobozokon belül a filmek sorrendjét nem.

3068 Egy dobozban 1-től 9-ig sorszámozott cédulák vannak. Visszatevés nélkül kiemelünk belőlük öt darabot. Hány olyan húzás lehetséges, amiben van 8-as, ha

a) a kivett számokból egymás után írva egy ötjegyű számot képezünk;

b) a kivett számokat egy másik dobozba helyezzük?

3069 Határozzuk meg az összes n és k természetes számot, amire teljesül, hogy

a) $\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}$; *b)* $\binom{n}{k}=\binom{n}{k-2}$.

3070 Egy kispályás focitornára 12 csapat nevezett. A tornán mindenki mindenkivel egyszer játszik. Határozzuk meg a lejátszott mérkőzések számát

a) az első n természetes szám összegeként;

b) az alapján, hogy külön-külön a csapatok mennyi mérkőzést játszanak;

c) ismétlés nélküli kombinációk segítségével.

3071 Egy dobozban 1-től 9-ig sorszámozott cédulák vannak. Kiemelünk belőlük öt darabot, a kivett cédulát megnézzük, majd visszatesszük. Hány olyan húzás lehet, amiben legalább kettő 8-as van, ha

a) a kivett számokból egymás után írva egy ötjegyű számot képezünk?

b) a kivett számokat üres cédulákra írva egy másik dobozba helyezzük?



3072 A fagyizóban 20-féle fagylaltot árulnak. A zsebünkben összesen három különböző címletű pénz található, címletenként 5, 3, 3 darab. A vásárlás során a kiszolgáló tölcsérbe (a sorrend fontos) vagy kehelybe (a sorrend nem fontos) adja a fagylaltot. Fizetéskor mi a pénzt vagy egyesével leszámolva (a sorrend fontos), vagy egy marékban (a sorrend nem fontos) adjuk át. Hányféleképp történhet a vásárlás a fagyi kimérése és a fizetés szerint, ha

a) 4 gombóc különböző fagyit kérünk tölcsérbe, egyesével adva át az összes nálunk levő pénzt?

b) 3 gombóc különböző fagyit kérünk kehelybe, és egyben átadunk 2, 2, 1 darabot az 5, 3, 3 darab címletből?

c) 5 gombóc fagyit kérünk tölcsérbe (lehetnek egyformák is), majd egyben átadunk 3, 2, 2 darabot az 5, 3, 3 darab címletből?

d) 7 gombóc fagyit kérünk kehelybe (lehetnek egyformák is), és egyesével átadunk 2, 3, 1 darabot az 5, 3, 3 darab címletből?

3073 Egy furcsa kártyajátékban 5 lapot osztunk az első játékosnak, majd 7 lapot a másodiknak az 52 lapos kártyacsomagból. Ezután az első játékos bedob 2, a második pedig 4 lapot, majd a bedobott lapokat felfordítják, és véletlenszerűen

a) egyenes sorba rakják;

b) kör alakban rendezik el (két rendezést akkor tekintünk különbözőnek, ha valamilyen körbejárás szerint legalább egy lap legalább egy szomszédja különböző).

Hányféleképpen kerülhetnek az asztalra a felfordított lapok?

3074 *a)* 52 lapos kártyacsomagból az első játékosnak 4, a másodiknak 6, a harmadiknak 8 lapot osztunk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

b) Adott egy n elemű halmaz. Válasszunk ki belőle egy k_1 elemű részhalmazt, majd a maradékból egy k_2 elemű részhalmazt, majd a maradékból egy k_3 elemű részhalmazt, …, míg végül egy k_r elemű részhalmaz marad. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

c) Egyszerűsítsük az *a)* és *b)* részben kapott eredményt. Milyen kombinatorikai alapfeladathoz jutottunk?

GRÁFOK – pontok, élek, fokszám

3075 Aladár és Betti ismerik egymást, Betti ismeri Gábort is. Karcsi mindhármukat ismeri. Ábrázoljuk gráffal az ismeretségeket. (Az ismeretség kölcsönös.)

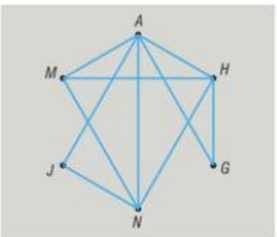
3076 A kutyakiképző tréningen Bamba, a bernáthegyi összebarátkozott Csucsuval, a csaucsauval. Aladár, az afgán agár, Ubul, a bulldog és a tacskó Tacsi már előző héten találkoztak. Most éppen Bamba haverkodik Ubullal és Aladárral. Ábrázoljuk gráffal, kik szagolgatták már egymást a kutyakiképző telepen, ha Loverman, a doberman kivonja magát a társasági életből.

3077 Az alábbi ábrán a Szegedi Tudományegyetem egy kispályás labdarúgótornájának hat csapata által már lejátszott mérkőzéseket látjuk. A csapatok nevei:

A – Alma Rostok; M – Menetelő Rákok; H – Hátulütők;

J – Jatematikusok; N – N alatt a K; G – Geomókusok.

Soroljuk fel a még hátralevő mérkőzéseket, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik.



3078 Az angol titkosszolgálat (MI5) legjobb ügynöke éppen akciót vezet egy egzotikus város főterén. James Bond (007) látja a célszemélyt és kollégáit: 008-at és 009-et. Kollégái is látják őt és egymást, de nem látják a célszemélyt. Ekkor feltűnik a téren a célszemély mellett a személyi testőre, aki régebben szintén tagja volt az MI5-nak. Észreveszi a tömegben Bondot és 008-t, majd kimenti a célszemélyt. Bond ezt látva lefújja az akciót.

Ábrázoljuk gráffal, ki kit lát a meghiúsult akcióban a főtéren a szereplők közül. (A célszemély végig a testőrét figyeli.)

3079 Sorszámozzuk egy szabályos hétszög csúcsait 1-től 7-ig. Kössük össze élekkel a páratlan sorszámú csúcsokat, majd ugyanígy a páros sorszámúakat, végül a hárommal osztható sorszámúakat. Írjuk le a legrövidebb útvonalat a csúcsok sorszámaival (pl. 1–5–7), amelyen keresztül

a) a 2-es sorszámú csúcsból a 3-as sorszámúba;

b) az 5-ös csúcsból a 4-esbe juthatunk.

3080 Egy közösségi portál hatfős klubjába a klubalapító András hívott meg mindenkit. Rajta kívül János ismeri még Csillát és Edinát, Csilla pedig Zolit és Gábort.

a) Ábrázoljuk gráffal a fenti ismeretségeket.

b) Időközben kiderült, hogy két klubtag eltitkolt egy ismeretséget, és egyedül Edinának van a klubban a legkevesebb ismerőse. Kik titkolóztak eddig?

3081 A Csücsöri család kirándulni indul. Anya szendvicseket készít: kettőt-kettőt saját magának és Csücsöri Csongor családfőnek; hármat fiuknak, Csanádnak és egyet lányuknak, Csengének. Jelöljük irányítás nélküli gráffal a szendvicskészítést, ha a pontok a Csücsöri család tagjait jelölik; minden él pedig egy, az adott személynek készült szendvicset.

3082 Egy város térképén tekintsük a kereszteződéseket pontoknak, a közöttük futó utakat éleknek. Keressünk a térképen

a) hurokéleket; *b)* többszörös éleket.

3083 Sorszámozzuk 0-tól 6-ig egy szabályos hétszög csúcsait. Kössük össze más és más színű élekkel a páratlan sorszámú, a páros sorszámú és a hárommal osztható sorszámú csúcsokat. Tekintve az összes ábrázolt élt, egyszerű gráfot rajzoltunk-e?

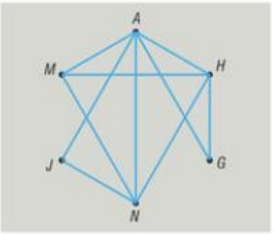
3084 A, B, C pontok a síkon. Hány különböző egyszerű gráfot készíthetünk a három pontból, ha

a) sem a pontokat, sem az éleket nem különböztetjük meg;

b) az AB, BC és AC éleket megkülönböztetjük?

Rajzoljuk is le őket.

3085 Olvassuk le a pontok fokszámait az ábráról. (➡)



3086 Ábrázoljuk azt az ötpontú egyszerű gráfot, melyben a pontok fokszámai:

a) 1, 1, 2, 2, 2; *b)* 0, 1, 1, 1, 3; *c)* 1, 1, 1, 1, 2.

Hány éle van ezeknek a gráfoknak?

3087 Egy négypontú egyszerű gráfban három él fut. Hogyan alakulhatnak a pontok fokszámai? Ábrázoljuk is a lehetséges gráfokat, ha a pontokat nem különböztetjük meg.

3088 Ábrázoljuk azt az ötpontú egyszerű gráfot, melyben a pontok fokszámai:

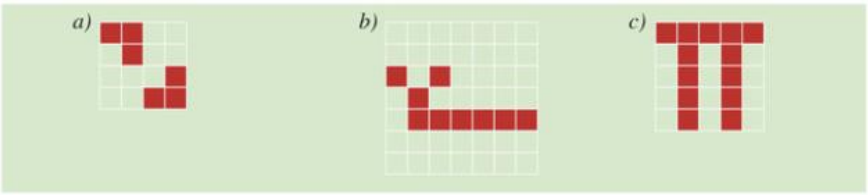
a) 1, 2, 3, 3, 3; *b)* 1, 1, 2, 2, 4; *c)* 1, 2, 3, 3, 4.

3089 Egy város térképén tekintsük a kereszteződéseket pontoknak, a közöttük futó utakat éleknek.

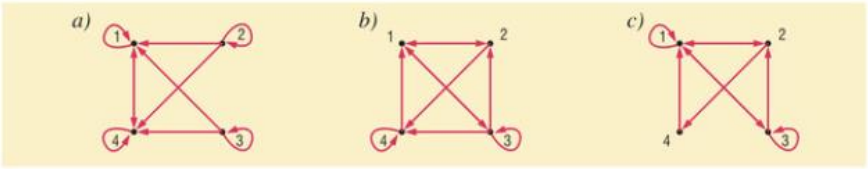
a) Keressünk minél nagyobb fokszámú pontokat.

b) Melyik fokszámú pontból találjuk a legtöbbet?

3090 Készítsük el a következő ábrákhoz tartozó irányított gráfokat.



3091 Ábrázoljuk sorrendben egymás mellett az alábbi gráfokkal ábrázolt pixel-négyzeteket. Mit olvashatunk ki belőlük?



3092 Rendeljünk hozzá az egyes sakkfigurákhoz egy-egy gráfot a következő szabály szerint: Legyenek a sakktábla mezői a gráf csúcsai (pl. F3). Ebben a 64 pontú gráfban két pont közötti él azt jelenti, hogy az adott figura az egyik mezőről átléphet a másikra (az iránytól eltekintve). Például mivel egy gyalog E2-ről léphet E3-ra, a két mezőnek megfelelő pontokat él köti össze. Mennyi a

a) G8 mezőhöz tartozó pont fokszáma;

b) D4 mezőnek megfelelő pont fokszáma;

ha egy huszár áll a mezőn, és csak L alakban léphet? (Tételezzük fel, hogy a többi mező üres.)



3093 Rendeljünk hozzá az egyes sakkfigurákhoz egy-egy gráfot a következő szabály szerint: legyenek a sakktábla mezői egy gráf csúcsai. Ebben a gráfban két pont közötti él azt jelenti, hogy az adott figura az egyik mezőről átléphet a másikra (az él a mozgás irányát nem mutatja). Van-e olyan figura, amire az összes pont fokszáma ugyanannyi? (A táblán más figura nem áll. Az egyes figurák lépési szabályainak utánanézhetünk a Wikipédia sakkról szóló fejezetében.)

3094 Egy n pontú egyszerű gráfban n él van. Hány élt kell még berajzolnunk, hogy n pontú teljes gráfot kapjunk? (n pozitív egész.)

3095 Egy hatpontú egyszerű gráfban van izolált pont. Legfeljebb hány éle lehet?

3096 Egy 25 főt foglalkoztató kisvállalkozásnak különböző nemzetiségű dolgozói vannak. Az új cégvezető megkérdezett néhány főt, hogy hány azonos nemzetiségű munkatársa dolgozik a cégnél. A válaszok a következők voltak: 5 fő mondott 6-ot, 12 fő mondott 4-et, 1 fő mondott 2-t.

a) Hány különböző nemzet tagjai vesznek részt dolgozóként a kisvállalkozásban?

b) Ha megkérdezte volna a többi dolgozót is, milyen válaszokat hallott volna az új cégvezető?

3097 A, B, C, D pontok a síkon. Hány különböző egyszerű gráfot készíthetünk a négy pontból, ha

a) sem a pontokat, sem az éleket nem különböztetjük meg?

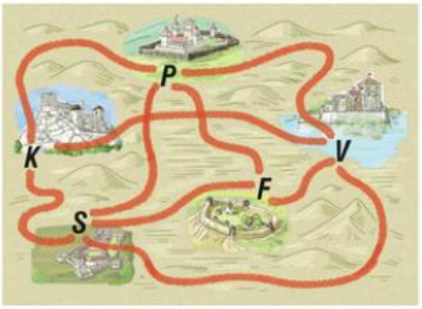
b) két élt különbözőnek tekintünk, ha legalább egyik végpontjuk más (pl. AC és AD)?

3098 Tekintsünk n megkülönböztetett pontot. Hány különböző egyszerű gráfot készíthetünk a pontokból? (Két élt különbözőnek tekintünk, ha legalább egyik végpontjuk más, $n \in \mathbb{Z}^+$.)

3099 Lehetséges-e, hogy egy n pontú egyszerű gráfban a pontok fokszámai különböző, de egymás után következő egész számok? ($n \in \mathbb{Z}^+$)

3100 *a)* Egy kalandjátékban bejártunk minden Kővárból induló utat, ám Palánkvárból, Sárvárból, Fővárból és Vízivárból csak 2-2 utat. Hány élű a bejárt utak komplementer gráfja? Adjunk rá példát!

b) Van-e olyan egyszerű gráf, amely *izomorf a komplementerével?* Mi ennek a szükséges feltétele?

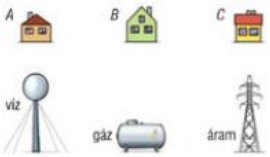


3101 *a)* Három élből szeretnénk egyszerű gráfot készíteni. Legalább hány pontú legyen a gráf, ha ebben a gráfban a lehető legtöbb különböző három élű egyszerű gráfot akarjuk előállítani? (A csúcsokat és az éleket nem különböztetjük meg.)

b) Általánosítsuk az előző kérdést n élre. Ekkor mit mondhatunk?

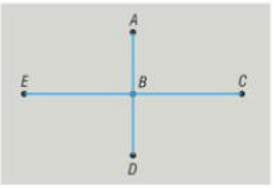
3102 Lehetséges-e, hogy egy n pontú gráfban a pontok fokszámai különböző, de egymás után következő pozitív egész számok? ($n \in \mathbb{Z}^+$)

3103 Egy faluban van három ház (A, B és C), velük szemben három közműcsatlakozás (víz, gáz és áramszolgáltatás). Minden közművet minden házhoz be akarunk vezetni. Megtehetjük-e ezt úgy, hogy egyik közműcsatlakozás sem halad át egy másik alatt vagy felett?



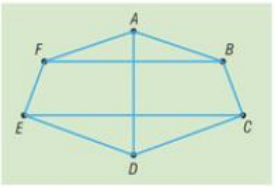
GRÁFOK – út, vonal, séta, kör, Euler-vonal

3104 Adjunk meg két sétát az alábbi gráfban, melyen át A-ból E-be juthatunk.

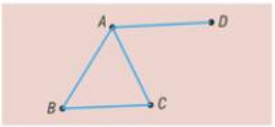




3105 Adjunk meg öt olyan utat az alábbi gráfban, amelyek az A pontból indulnak, minden pontot érintenek és különböző a végpontjuk.



3106 Írjuk fel az alábbi gráfban az összes olyan vonalat, amely a gráf minden élét tartalmazza.

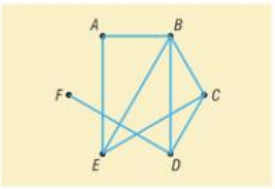


3107 Adjunk meg az alábbi gráfban olyan bejárást, ami az A pontból F-be visz és

a) séta, de nem vonal és nem út;

b) vonal, de nem út;

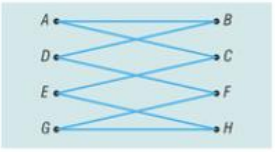
c) út.



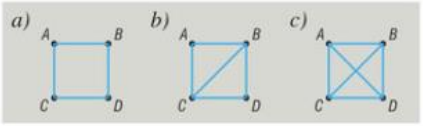
3108 Tartalmaz-e kört az ábrán látható „cipőfűző" gráf? (➡)

3109 Van-e olyan gráf, amelyben van zárt és nyitott Euler-vonal is?

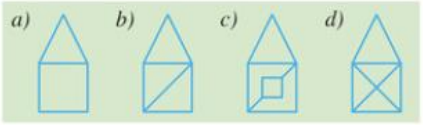
3110 Van-e olyan séta, amely út, de nem vonal?



3111 Az alábbi gráfok közül melyikben van zárt és melyikben van nyitott Euler-vonal?



3112 Melyik házikót tudjuk lerajzolni a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy egyik vonalat sem rajzoljuk át többször?



3113 Rajzoljuk le azokat az egyszerű, nem összefüggő gráfokat, melyekben a pontok fokszámai:

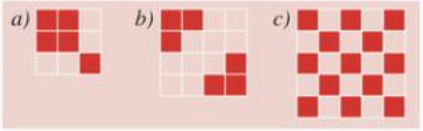
a) 1, 1, 1, 1, 2;

b) 2, 2, 2, 2, 2, 2;

c) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3.

3114 *a)* Ábrázoljuk a következő pixelekből felépített ábrákat irányított gráfok segítségével.

b) Hagyjuk el a kapott gráfokból az irányítást. Mi a közös a három gráfban?



3115 Adjunk elégséges feltételt fokszámok segítségével, ami biztosítja, hogy az egyszerű n pontú gráf
a) nem összefüggő; *b)* összefüggő.

3116 Egy pixelekből álló rajzot irányított gráffal ábrázolunk, majd elhagyjuk a gráf irányítását. Azt látjuk, hogy az így kapott gráf több komponensre esik szét. Mit tudhat meg az eredeti ábráról az, aki csak az utóbbi információt hallja?

3117 Igazoljuk, hogy bármely gráfban az élek és a pontok számának hányadosa nagyobb vagy egyenlő, mint a minimális fokszámú pont fokszámának fele és kisebb vagy egyenlő, mint a maximális fokszámú pont fokszámának fele.

3118 Bizonyítsuk be, hogy egy $2n$ pontú egyszerű gráf összefüggő, ha minden pontjának fokszáma legalább n.

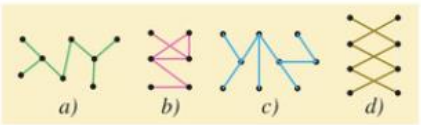
3119 Egy n pontú egyszerű gráf minden pontjának fokszáma 2 és minden komponense egyetlen kör. Hány kört tartalmazhat maximum ez a gráf?

Fagráfok

3120 Hány különböző kettő, illetve három pontból álló fagráf van?

3121 Egy társaság tagjai most találkoztak először, eddig 13 e-mailcím-csere történt a megbeszélés alatt. Tudjuk, ennyi elegendő ahhoz, hogy pontosan egy úton bárki üzenete eljusson bárkihez. Legfeljebb hány fős lehet ez a társaság?

3122 Döntsük el, hogy melyik fa az alábbi gráfok közül. A fákban határozzuk meg a pontok, élek, illetve levelek, kettő- és háromfokú pontok számát.



3123 *a)* Minek neveznénk azokat a fagráfokat, melyeknek minden pontja legfeljebb másodfokú?
b) Hány elsőfokú pontja van egy ilyen fának?

3124 Ábrázoljuk az összes lehetséges 7 pontú fagráfot, melyben a pontok fokszámai rendre:
1, 1, 1, 1, 2, 3, 3.

3125 Azonos gyöngyszemeket kell összekötnünk egyenlő hosszú cérnaszálakkal. A gyöngyöket csak az oda befutó cérnaszálak száma szerint különböztetjük meg, két gyöngyöt csak egy cérnaszál köthet össze. Hány különböző módon lehet
a) négy; *b)* öt; *c)* hat
szem gyöngyöt a lehető legkevesebb cérnaszállal összekötni? Rajzoljuk is le ezeket.

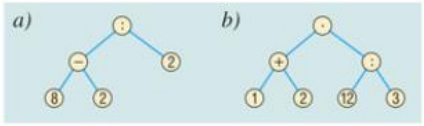
3126 Adjuk meg fagráf segítségével a következő számok prímtényezős felbontását:
a) 1638; *b)* 57 200.

3127 Hány pontja és mennyi levele lehet annak a fának, melyben a pontok fokszámainak összege 16?

3128 A matematikai műveleteket hagyományos módon úgy jelöljük, hogy a műveleti jelet a számok közé írjuk: $5 + 3$, $6 - 5$ vagy $2 \cdot 3$ (ún. infix jelölés). A műveletek sorrendjét zárójelekkel befolyásoljuk, például: $7 \cdot (2 + 4)$. Azonban ezt jelölhetjük fagráffal is: a fa levelei a számok, a csomópontok pedig a műveletek. Mégpedig a legkésőbb elvégzendő művelet a fa csúcsánál, a legkorábban kiszámolandó pedig a fa legalsó szintjén található.



Számoljuk ki az alábbi gráfokkal meghatározott műveletek eredményeit. (A nem kommutatív műveletek esetén a bal oldali levél a kisebbítendő vagy a számláló, a jobb oldali a kivonandó vagy a nevező.)



Adjuk meg fagráf alakban a következő műveleteket:

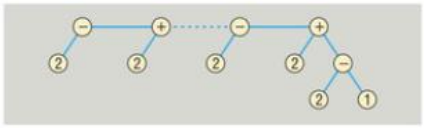
c) $1+2+3$; *d)* $2\cdot 6+3\cdot 4$; *e)* $\dfrac{1+3}{2+4}$.

3129 Mutassuk be fagráfok segítségével, hogy a szorzás művelet kommutatív, az összeadás művelet asszociatív tulajdonságú, illetve a szorzás művelet disztributív az összeadásra.

3130 Van-e olyan fagráf, melyben van nyitott Euler-vonal? Ha van, akkor milyen kell legyen a gráf?

3131 *a)* Pozitív vagy negatív az alábbi összeg?

b) Ha kicseréljük az összes kivonás jelet osztásra és minden összeadás jelet szorzásra, akkor páros vagy páratlan számot kapunk eredményül?



3132 Egy 15 pontú fagráfban 12 levél van.

a) Mennyi lehet a többi pont fokszáma?

b) Hány élen halad át a gráf leghosszabb útja?

3133 Erdőnek nevezzük azokat a gráfokat, melyek minden komponense fa. Hány pontból áll az az erdő, melynek 5 fájában összesen 16 él van?

3134 *a)* Bizonyítsuk be, hogy amennyiben egy n pontú gráf fokszámainak összege $2n$, akkor a gráfban van kör.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha a fenti gráf ráadásul egyszerű és összefüggő is, akkor pontosan egy kört találunk benne.

3135 *a)* Igazoljuk, hogy bármely, legalább két pontból álló fagráfban az elsőfokú pontok száma legalább kettővel több, mint a legalább háromfokú pontok száma.

b) Mit állíthatunk azokról a fagráfokról, melyekben az elsőfokú pontok száma pontosan kettővel több, mint a legalább háromfokú pontok száma?

A kombinatorika gyakorlati alkalmazásai

3136 Egy számítástechnikai vállalkozás három szobában öt-öt-öt egyforma számítógépet üzemeltet. Az egy helyiségben levő gépek hálózatba vannak kötve, illetve minden szobában van pontosan egy gép, amely összeköttetésben áll a másik két szoba egy-egy számítógépével.

a) Ábrázoljuk gráffal, hogyan kötötték hálózatba a számítógépeket.

b) Hány kapcsolatot kellene megszüntetni a gépek között, ha azt szeretnénk, hogy a hálózatot fagráffal ábrázolni tudjuk?

c) Hányféle gráfot kaphatunk, ha csak annyit tudunk, hogy bármely két szobát tekintve pontosan egy olyan géppár van – egyik gép az egyik, másik gép a másik szobában –, melyek összeköttetésben állnak? (A gépeket megkülönböztetjük a sorszámuk alapján.)

d) A cég szeretne bemutatkozni a nagyközönségnek, ezért egy számítógépekkel foglalkozó szakkiállításon standot állítanak fel. A bemutatóra minden szobából két gépet elvisznek. Hányféleképpen választhatják ki a bemutatóra szánt gépeket a szobákból?

e) A bemutatón kiderült, hogy csupán három hálózati összeköttetést biztosító kábelt hoztak magukkal a cég emberei. Egy kábellel csupán két gépet lehet összekötni, de minden gépen van három csatlakozó, ahova a kábel illeszkedik. (Két gép között legfeljebb egy kábelt húznak ki.) Hányféleképp köthetik hálózatba a három kábellel a sorszámozott gépeket?

f) Ábrázoljuk a lehetséges kapcsolatokat, ha a gépeket nem különböztetjük meg. Milyen határok között változhat a hálózatba nem kötött gépek száma?

3137 Olvassuk el Kányádi Sándor: *Tarlón túzok lépeget* című versét, majd válaszoljunk a kérdésekre.

Tarlón túzok lépeget,
mögötte a népe megy:
felesége, fia, lánya,
veje, menye, unokája,
apja, anyja, bátyja, nénje,
nagyszüleje és a dédje,
ipa, napa, sógor, após,
s nem maradhat el az anyós.
Ki totyogva, ki meg futva,
ott megy egész pereputtya.

Tarlón túzok lépeget,
mögötte a népe megy.
Szemezgetnek, tallózgatnak,
estére nagy begyet raknak.



A rokoni kapcsolatok magyarázata:
- *veje, menye: gyermekének férje, illetve felesége;*
- *bátyja, nénje (nagybácsi, nagynéni): szülő fiú- vagy lánytestvére;*
- *dédszülők: a nagyszülők szülei;*
- *ipa, napa: ma úgy mondjuk, após vagy anyós – házastárs apja vagy anyja;*
- *sógor: itt házastárs férfitestvére.*

a) Van-e a vers szerint a túzoknak testvére?

b) Hány generáció szemezget a tarlón?

c) Hány fős a pereputty, ha a túzok minden nagyszülője és dédszülője jó egészségnek örvend, illetve egy nagybácsi, egy nagynéni és két unoka lépeget a túzok mögött?

d) Ábrázoljuk gráffal a tarlón szemezgetők családfáját, ha a nagybácsi apai ágon, a nagynéni anyai ágon rokona a túzoknak. Hányféle gráfot rajzolhatunk ennyi információ alapján?

(Két szereplőt akkor kapcsoljon össze él, ha vérségi rokonságban állnak. Ornitológusok – madártannal foglalkozó tudósok – szerint a túzokok sohasem házasodnak saját vérrokonaikkal.)

e) Fa-e a családfa gráfja? Ha nem, hány kört és mennyi izolált pontot tartalmazhat a gráf?

f) Az ükszülők a dédszülők szülei. Hány ükszülője van a túzoknak?

g) Hányféleképpen vonulhat a pereputty, ha „libasorban" mennek?

h) Hányféleképp rakhatja a begyet a pereputty, ha az egyes generációk életkor szerint növekvő rendben követik egymást, egy-egy generáció tagjai pedig – köztük maga a túzok is – sorban egymás mellett vonulnak?

i) Az ornitológusok előzőleg három csapdát állítottak fel a tarlón, mert meg szeretnék gyűrűzni a madarakat. Minden csapda legfeljebb 10 madarat képes befogni. Hányféleképpen kerülhettek a csapdákba a túzokok, ha rajtuk kívül más madarat nem fogtak be, közülük viszont mindenkit?



Vegyes feladatok

3138 Változtassunk a Fibonacci-számokat előállító szabályon: hagyjuk meg kiinduló értéknek a két egyest, azonban a következő számot az előtte levők különbsége adja, $f_{n+2} = f_n - f_{n+1}$. Írjuk fel ennek a sorozatnak az első tíz tagját.

3139 Eszternek hétféle nyaklánca van, minden nap másikat vesz fel, és kétszer nem veszi fel ugyanazt. Hányféleképpen veheti fel Eszter a nyakláncait?

3140 Az elemes építőjátékban a 20 egység hosszú fal 1 egység magas alapját szeretnénk kirakni. Ehhez van egy 6, két 4 és néhány 2 egység hosszú elemünk. Hányféle sorrendben tehetjük egymás mellé őket?

3141 Zsóka minden reggel kinyitja az újságot, és rápillantva azonnal kiválasztja az oldalon levő 12 cikkből azt a 3-at, amely érdekli. Hányféleképpen választhatja ki és olvashatja el holnap a három cikket?

3142 A wurlitzerben ma hét zeneszám található. A nap során 10 vendég rendel egy-egy zenét (kérhetik ugyanazt is). Hányféle sorrendben hallhatja a végig a teremben levő csapos a számokat?

3143 Számológép nélkül, a definíció alapján határozzuk meg

a) $\binom{25}{3}$ értékét; *b)* melyik a nagyobb: $\binom{8}{3}$ vagy $\binom{11}{2}$?

3144 *a)* Hányféleképpen lehet tíz fürt szőlőből hetet kiválasztani?

b) Válasszunk ki most tíz szem barackból hármat. Ezt hányféleképp tehetjük meg?

3145 A pályán levő 6 fős jégkorongcsapatot 18 fős keretből választja ki az edző. A keretben van egy 4 fős baráti társaság is. Hány különböző kezdőcsapatot állíthat össze a keretből az edző, ha

a) bármelyik játékos csapattag lehet;

b) a 4 fős baráti társaságból senki sem kerül a csapatba;

c) a 4 fős baráti társaság minden tagja csapattag lesz;

d) a 4 fős baráti társaságból ketten kerülnek a kezdőcsapatba?

3146 Hány csúcsú az a konvex sokszög, melynek 170 átlója van?

3147 Mennyi különböző nyertes ötöslottó-szelvényt tölthetünk ki?

3148 A binomiális tétel alapján fejtsük ki a következő hatványokat:

a) $(2x - y)^4$; *b)* $(a + 2b)^9$; *c)* $(1 + \sqrt{2})^{10}$; *d)* $\left(\frac{1}{2} \cdot x + 2y\right)^8$.

3149 A számítógépen nyolc biten ábrázolt egészek neve *shortint*, a szintén nyolc biten ábrázolt természetes számok neve *byte*. A tizenhat biten ábrázolt egészek neve *integer*, az ugyanennyi biten ábrázolt természetes számok neve *word*.

Melyik a legnagyobb számítógépen ábrázolható

a) byte típusú; *b)* word típusú szám?

Melyik a több:

c) a shortintek részhalmazainak száma vagy a byte-ok részhalmazainak száma?

d) az integerek részhalmazainak száma vagy a wordök részhalmazainak száma?

3150 Boldizsár tudja Anna és Dénes telefonszámát, Elemér Cecilét. Dénes is beszélt már telefonon Cecillel. Ábrázoljuk gráffal, ki kinek a telefonszámát ismeri (ez az ismeretség is kölcsönös)! Minimum hány hívás szükséges, hogy Anna beszélhessen telefonon Elemérrel?

3151 Létezik-e olyan

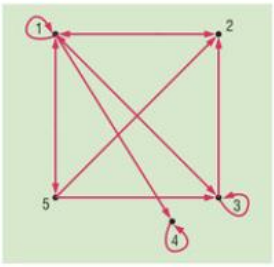
a) négy; *b)* öt; *c)* hat; *d)* hét; *e)* nyolc

pontú egyszerű gráf, melyben minden pont foka három?

3152 Egy unatkozó titkárnő megszámolta, hogy a japán küldöttség megérkezésekor a japán és a magyar cég egyenként ötfős tárgyalócsoportjának tagjai 2, 3, 1, 4, 5, 3 alkalommal hajoltak meg a másik csapat tagjai felé. Még hány meghajlást láthat a titkárnő, ha továbbra is éberen figyel, és minden tag pontosan egyszer hajol meg a másik küldöttség minden tagja felé?

3153 *a)* Ábrázoljuk gráffal az 5×5-ös fekete-fehér sakktábla pixeleit. Mit vehetünk észre a gráfon?

b) Hányast kap az a diák, aki pixelekkel ábrázolja az alábbi gráfot? (➡)



3154 Legyen *ABCDEFGH* egy kocka, amelynek alja az *ABCD* négyzet. *A* felett *E* csúcs van, továbbá *EFGH* és *ABCD* körüljárása megegyezik. Tekintsük most az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* csúcsú gráfot, melyben két pont között pontosan akkor van él, ha a kocka két megfelelő csúcsa valamely lapátló két vége. Eljuthatunk-e a gráf *B* pontjából a *H* csúcsba az éleken közlekedve?

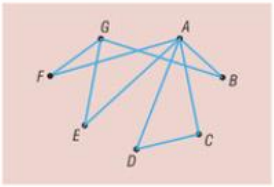
3155 Adjunk meg az alábbi gráfban *A*-ból *G*-be

a) egy sétát (amely nem vonal és nem út);

b) egy vonalat (amely nem út);

c) egy utat

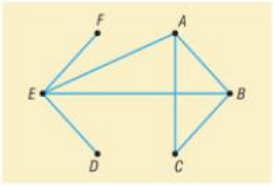
úgy, hogy *A*-n és *G*-n kívül ne legyen közös pontjuk.



3156 Az alábbi gráfban nem találunk sem nyitott, sem zárt Euler-vonalat.

a) A lehető legkevesebb él berajzolásával érjük el, hogy legyen a gráfban nyitott/zárt Euler-vonal.

b) Melyik él törlésével érhetjük el, hogy nyitott Euler-vonal legyen a gráfban?



3157 Egy pixelekből álló négyzet alapú rajzot irányított gráffal ábrázolunk. Az eredeti ábrát nem látjuk, csak annyit tudunk, hogy a gráf minden éle mindkét irányban irányított. Mit tudhatunk meg ebből az információból az eredeti ábráról?

3158 *a)* Rajzoljuk fel a családfánkat a dédszülőkig (vagy ameddig tudjuk). Fagráfot kapunk?

b) Tételezzük fel, hogy valaki nem fagráfot rajzolt fel. Ez mit jelent?

3159 Vegetália kicsiny országában Andalógiából építettek utat Celebbe és Dőrébe, Butulból pedig Együgybe. Az egyetlen helység, ahol még nem építkeztek, Félnóta. Mennyi utat kell még építeni, hogy minden helységből minden helységbe pontosan egy úton lehessen eljutni? Adjunk meg két különböző lehetséges megvalósítást. (Vegetáliát csak az említett helységek alkotják.)

3160 Van egy kétkarú mérlegünk és hét érménk, melyek közül az egyik hamis: nehezebb a többinél. Legkevesebb hány méréssel tudjuk kideríteni, melyik a hamis? Ábrázoljuk fagráffal.

11.2. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

Hatványozás és gyökvonás (emlékeztető)

3161 A hatványozás azonosságait felhasználva hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket a változók lehetséges értékei mellett:

a) $\dfrac{(a^{-1})^3\cdot(a^3)^{-2}\cdot(a^2)^4}{(a^{-4})^3}$;

b) $\dfrac{(b^2)^{-4}}{b^{-2}\cdot(b^{-1})^{-1}\cdot(b^3)^{-1}}$;

c) $\dfrac{(x^2)^3\cdot(x^{-2})^{-3}}{(x^3)^{-1}\cdot(x^{-4})^2}$;

d) $\dfrac{(y^{-5})^{-2}\cdot(y^2)^2}{(y^{-3})^2\cdot(y^4)^{-1}}$;

e) $\dfrac{(x^2\cdot y^{-3})^{-2}\cdot(x^{-1}\cdot y^2)^{-3}}{(x^{-3})^5\cdot(x^4\cdot y^{-2})^{-1}}$;

f) $\dfrac{(a^{-3}\cdot b^{-4})^{-2}\cdot(a^{-2}\cdot b^3)^{-1}}{(a^4\cdot b^{-1})^{-3}\cdot(a^2\cdot b^{-3})^{-2}}$;

g) $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^4}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{b^{-2}}{a^{-3}}\right)^3\cdot\left(\dfrac{a^{-4}}{b^3}\right)^{-2}$;

h) $\left(\dfrac{a^5}{b^{-2}}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{b^{-1}}{a}\right)^{-3}:\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{-3}}\right)^2$;

i) $\left[\left(\dfrac{b^{-2}}{a^3}\right)^{-4}:\left(\dfrac{a^{-1}}{b^3}\right)^{-3}\right]^{-2}:\left(\dfrac{b^{-4}}{a^{-2}}\right)^3$;

j) $\dfrac{\left(\dfrac{a^{-5}}{b^7}\right)^{-3}}{\left[\left(\dfrac{a^2}{b^4}\right)^{-4}:\left(\dfrac{a^6}{b^5}\right)^{-3}\right]^{-4}}$.

3162 Adjuk meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, melyen a következő kifejezések értelmezhetők, majd hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

a) $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^7}}$;

b) $\dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[3]{y^4}}$;

c) $\dfrac{\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^{-3}}}$;

d) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\cdot b^{-1}}\cdot\sqrt[3]{a^{-2}\cdot b^4}}{\sqrt[3]{a^5\cdot b^{-3}}\cdot\sqrt[3]{a^{-4}\cdot b^{-1}}}$;

e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^{-2}}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a^{-3}}\cdot\sqrt[6]{a^{-5}}}$;

f) $\dfrac{\sqrt[4]{a^{-1}\cdot b^3}\cdot\sqrt[6]{a^5\cdot b^{-3}}}{\sqrt[3]{a^4\cdot b^{-2}}\cdot\sqrt{a^3\cdot b^{-3}}}$;

g) $\sqrt[6]{\dfrac{a^7}{b^{-5}}}\cdot\sqrt[8]{\dfrac{b^4}{a^{-3}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a^{-4}}{b^{-2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}}$;

h) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^{-7}}{b^{-5}}}:\sqrt[4]{\dfrac{a^{-3}}{b^{-1}}}\right):\left(\sqrt[5]{\dfrac{b^{-2}}{a^{-6}}}:\sqrt[6]{\dfrac{a^{-1}}{b^{-5}}}\right)$.

3163 A hatványozás és a gyökvonás azonosságait felhasználva vizsgáljuk meg, hogy a következő kifejezés közül melyik a nagyobb:

a) $6^9\cdot9^3$ vagy $8\cdot18^7$;

b) $\sqrt[3]{7^{53}}$ vagy 49^9;

c) $\sqrt[6]{60^{2010}}$ vagy $\sqrt[3]{1024^{201}\cdot15^{1005}}$;

d) $\sqrt[3]{100^{-4}}$ vagy $\sqrt[5]{\dfrac{1}{1000^3}}$;

e) $20^{-5}\cdot16^{-8}$ vagy $100^{-7}\cdot\left(\dfrac{8}{5}\right)^{-9}$;

f) $\sqrt{45^{-7}\cdot75^{-21}}$ vagy $15^{-17}\cdot5^{-8}$.

3164 A hatványozás és a gyökvonás azonosságait felhasználva számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\dfrac{3^{-5}\cdot 10^{-6}\cdot 21^{-5}\cdot 25^{-2}}{6^{-7}\cdot 15^{-5}\cdot 35^{-5}}$;

b) $\left(\dfrac{6^{-6}\cdot 10^{-2}}{9^{-3}\cdot 200^{-1}\cdot 32^{-1}}\right)^{100}$;

c) $\sqrt{\dfrac{24^{-4}\cdot 36^{-3}}{18^{-4}\cdot 256^{-1}\cdot 72^{-2}}}$;

d) $\sqrt[15]{\dfrac{2000^{-20}\cdot 25^{11}}{(-800)^{-19}}}$;

e) $\sqrt[5]{45^{-12}} : \left(\sqrt[5]{15^{-7}}\cdot\sqrt[5]{27^{-4}}\right)$;

f) $\dfrac{\sqrt[3]{100^{-5}}\cdot\sqrt[4]{20^{-3}}\cdot\sqrt[12]{5^{7}}}{\sqrt[6]{1000^{-5}}\cdot\sqrt[3]{2^{-7}}}$.

3165 Zsebszámológép használata nélkül végezzük el a következő gyökvonásokat:

a) $\sqrt{7+4\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt[4]{28+16\cdot\sqrt{3}}-\sqrt[4]{28-16\cdot\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt[3]{8+3\cdot\sqrt[3]{49}+3\cdot\sqrt[3]{7}}-\sqrt[3]{15+6\cdot\sqrt[3]{49}+12\cdot\sqrt[3]{7}}$;

d) $\sqrt[3]{6\cdot\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\cdot\sqrt{3}-10}$.

Hatványfüggvények és gyökfüggvények

3166 Határozzuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők. Ábrázoljuk a függvények grafikonját a valós számoknak azon a részhalmazán, amelyen értelmezhetők.

a) $f(x)=(x-1)^3+1$;

b) $f(x)=(x+4)^3-3$;

c) $f(x)=-(x+3)^3+4$;

d) $f(x)=\dfrac{1}{3}\cdot(x+2)^3-5$;

e) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+1$;

f) $f(x)=\sqrt[3]{x+4}-3$;

g) $f(x)=-\sqrt[3]{x+3}+4$;

h) $f(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{x+2}-5$;

i) $f(x)=(x-2)^4-3$;

j) $f(x)=(x+4)^4+1$;

k) $f(x)=-(x-3)^4+6$;

l) $f(x)=-3\cdot(x+1)^4+4$;

m) $f(x)=\sqrt[4]{x-1}-2$;

n) $f(x)=\sqrt[4]{x+3}-3$;

o) $f(x)=-\sqrt[4]{x+1}+4$;

p) $f(x)=-2\cdot\sqrt[4]{x-2}+2$.

3167 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, növekedés, csökkenés, szélsőérték, zérushely) a következő függvények grafikonját:

a) $f(x)=x^3+2,\ x\in[-2;2]$;

b) $g(x)=x^4-6,\ x\in[-2;2]$;

c) $h(x)=\sqrt[3]{x-2},\ x\in[-6;10]$;

d) $i(x)=\sqrt[4]{x+2},\ x\in[-2;14]$;

e) $j(x)=\sqrt[3]{x+4}+2,\ x\in[-5;4]$;

f) $k(x)=-\sqrt[4]{x-4}+3,\ x\in[4;20]$;

g) $l(x)=\sqrt[3]{-x+1},\ x\in[-7;2]$;

h) $m(x)=\sqrt[4]{3-x}-2,\ x\in[-13;3]$.

3168 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, növekedés, csökkenés, szélsőérték, zérushely) a következő függvények grafikonját:

a) $f(x) = |x-2| \cdot (x^2 - 4x + 4) - 1$, $x \in [0; 4]$; *b)* $g(x) = \left|\sqrt[3]{x} + 1\right| + \left|\sqrt[3]{x} - 1\right| - 2$, $x \in [-8; 8]$;

c) $h(x) = |x^3 - 3x^2 + 3x - 2|$, $x \in [-1; 3]$.

Törtkitevőjű hatvány

3169 Számítsuk ki a következő hatványok értékét:

a) $4^{\frac{3}{2}}$; *b)* $27^{\frac{2}{3}}$; *c)* $32^{\frac{2}{5}}$; *d)* $81^{\frac{1}{4}}$;

e) $25^{-\frac{1}{2}}$; *f)* $64^{-\frac{1}{6}}$; *g)* $100^{-\frac{3}{2}}$; *h)* $1000^{-\frac{2}{3}}$;

i) $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$; *j)* $0{,}00001^{-\frac{3}{5}}$; *k)* $\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$; *l)* $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

3170 Írjuk fel gyökjelekkel a következő hatványokat:

a) $5^{\frac{1}{8}}$; *b)* $13^{\frac{2}{7}}$; *c)* $10^{\frac{3}{11}}$; *d)* $11^{\frac{7}{3}}$;

e) $15^{-\frac{2}{3}}$; *f)* $23^{-\frac{4}{9}}$; *g)* $7^{-\frac{20}{7}}$; *h)* $41^{-\frac{2}{21}}$;

i) $9^{-0{,}7}$; *j)* $10^{-0{,}23}$; *k)* $a^{-\frac{3}{5}}$ $(a>0)$; *l)* $2b^{-\frac{2}{3}}$ $(b>0)$.

3171 Az ötnek hányadik hatványa:

a) $\sqrt[10]{5}$; *b)* $\sqrt[7]{5^4}$; *c)* $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; *d)* $\sqrt[11]{25^3}$;

e) $\sqrt[5]{\frac{1}{5}}$; *f)* $\sqrt[8]{\frac{1}{125}}$; *g)* $\sqrt[3]{5^7} \cdot \sqrt[3]{5^4}$; *h)* $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{5}$;

i) $\frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5}}$; *j)* $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5}}}{5}$; *k)* $\frac{\sqrt[5]{25} \cdot \sqrt{125}}{\sqrt[4]{5^5}}$; *l)* $\frac{\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{5}}}}{\sqrt[6]{5 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{5}}}}$.

3172 Végezzük el a következő műveleteket a változók lehetséges értékei mellett. A végeredményeket írjuk fel a változók hatványaként:

a) $\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-\frac{5}{6}}}$; *b)* $\frac{\sqrt[5]{b^{-3}} \cdot b^{-\frac{3}{10}}}{\sqrt{b^{-1}} \cdot \sqrt[10]{b^{-7}}}$; *c)* $\frac{\sqrt[3]{c^{\frac{1}{4}}}}{\sqrt[6]{c^{-1}}} \cdot \frac{\sqrt{c^{-\frac{1}{3}}}}{\sqrt[4]{c^{-\frac{5}{3}}}}$; *d)* $\frac{\left(\sqrt{d^{-1}} \cdot \sqrt[3]{d^2}\right)^{-\frac{7}{5}}}{\left(d^{-\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[4]{d^{-3}}\right)^{-\frac{2}{3}}}$.

3173 Rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat:

a) $2^{-\frac{3}{5}}$, $4^{-\frac{4}{3}}$, $\sqrt[5]{8^{-2}}$, $\sqrt[3]{32^{-1}}$, $\sqrt[8]{8^{-3}}$; *b)* $\sqrt[3]{9^{-1}}$, $3^{-\frac{5}{7}}$, $\sqrt{27^{-3}}$, $\sqrt[7]{3^{-6}}$, $\sqrt[5]{81^{-3}}$;

c) $\sqrt[3]{25^{-1}}$, $5^{-\frac{2}{5}}$, $\sqrt[4]{5^{-5}}$, $\sqrt{125^{-1}}$, $25^{-\frac{7}{5}}$; *d)* $7^{-\frac{1}{2}}$; $\sqrt[4]{7}$; $\sqrt[3]{49}$; $\sqrt[3]{343}$; $7^{-\frac{3}{5}}$.

3174 Legyen $4^{\frac{2}{5}} = a$ (irracionális szám). Írjuk fel a hatványaként a következő számokat:

a) $2^{\frac{4}{5}}$; *b)* $16^{\frac{2}{5}}$; *c)* $4^{\frac{1}{3}}$; *d)* $8^{\frac{1}{2}}$; *e)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$; *f)* $32^{-\frac{2}{3}}$.

Irracionális kitevőjű hatvány, exponenciális függvény

3175 A következő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, növekedés, csökkenés, zérushely) a függvények grafikonját.

a) $a(x) = 2^x - 8$; *b)* $b(x) = 2^x + 3$; *c)* $c(x) = 3^x - 1$; *d)* $d(x) = 3^x + 2$;

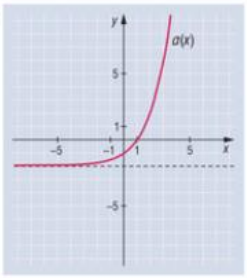
e) $e(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$; *f)* $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$; *g)* $g(x) = 2^{x-4}$; *h)* $h(x) = 3^{x-2}$;

i) $i(x) = 2^{x-3} - 2$; *j)* $j(x) = 3^{x+1} + 1$; *k)* $k(x) = 4^{x-1} - 1$; *l)* $l(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 1$;

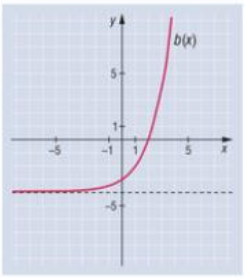
m) $m(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} - 5$; *n)* $n(x) = 3 \cdot 2^{x-1} - 3$; *o)* $o(x) = \frac{3}{2} \cdot 3^{x-1} + 1$; *p)* $p(x) = \frac{2^{x-1}}{4} - 3$.

3176 A következő ábrákon az $f(x) = 2^x$ függvényből kapott grafikonokat látunk. A grafikonok alapján adjuk meg az exponenciális függvények hozzárendelési szabályát.

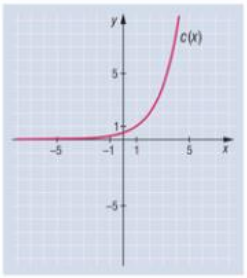
a)



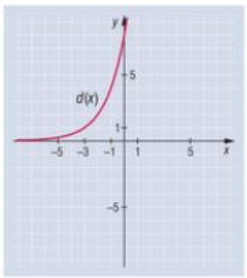
b)



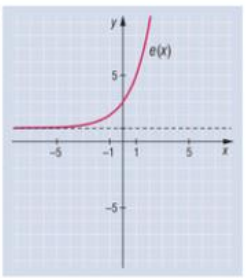
c)



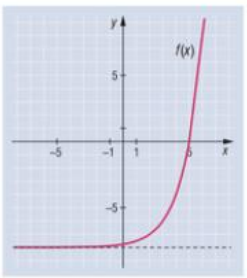
d)



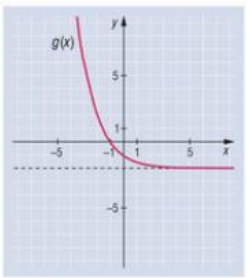
e)



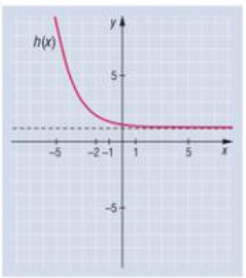
f)



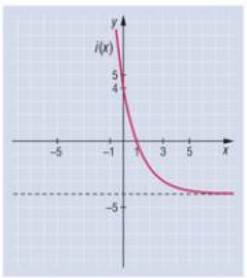
g)



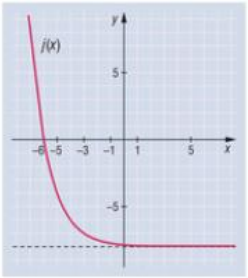
h)



i)



j)



3177 Az autóverseny pályákon óránként mérik az aszfalt hőmérsékletét. Egy nyári napon azt tapasztalták, hogy 0 órától délután 3 óráig az aszfalt hőmérséklete jó közelítéssel megadható a

$$t(x) = 22 \cdot 10^{\frac{x}{34}},$$

függvénnyel, ahol x a 0 órától eltelt időt jelenti órában mérve, a hőmérsékletet pedig °C-ban kapjuk.

a) Mennyi volt az aszfalt hőmérséklete 0 órakor, illetve reggel 6 órakor?

b) Délután háromkor elérte-e az aszfalt hőmérséklete a kritikus 60 °C-ot?

c) Hány százalékkal nőtt az aszfalt hőmérséklete reggel 8 és déli 12 óra között?

3178 Ábrázoljuk a következő, valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját:

a) $f(x) = \operatorname{sgn}(3^x - 3)$;

b) $g(x) = \operatorname{sgn}\left[(5^{x+1} - 1) \cdot (5^x - 25)\right]$;

c) $h(x) = |2^{x-1} - 4|$;

d) $i(x) = |2 \cdot 3^{x+1} - 18|$.

3179 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

a) $2^{x+4} + 11 = 15 \cdot (x + 3)$;

b) $2^{x+2} = -4x^2 + 3x + 9$.

Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

3180 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $2^{4x-3} = 4$;

b) $3^{3-2x} = 27$;

c) $4^{4x-1} = \frac{1}{16}$;

d) $5^{8x-7} = \frac{1}{125}$;

e) $2^{x-3} \cdot 2^x = 16$;

f) $3^x \cdot 3^{2x-1} = 9$;

g) $5^{2x+3} \cdot 25 = 5^{3x-4}$;

h) $49^x \cdot 7^{x-3} = 7^{4x-5}$;

i) $\frac{2^{3x+5}}{2^x} = \frac{1}{8}$;

j) $\frac{3^{x-2}}{3^{2x+3}} = \frac{1}{81}$;

k) $\frac{11^{4x-1}}{121^{x+1}} = 11^{x-3}$;

l) $\frac{125^{x+2}}{25^{x+1}} = 5^{3x-6}$;

m) $\sqrt{2^{x+5}} = 4^2$;

n) $\sqrt[3]{3^{x-1}} = \frac{1}{9}$;

o) $\sqrt[4]{4^{2x-1}} = 64$;

p) $\sqrt[6]{5^{5x+2}} = 25^{\frac{1}{4}}$;

q) $13^{2x-7} = 1$;

r) $7^{2x+5} - 1 = 0$;

s) $10^x \cdot 100^{2x-3} - 1 = 0$;

t) $121^{x-5} \cdot 11^{4-x} - 1 = 0$;

u) $7^x = 12^x$.

3181 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $7^{2x-1} = 9^{4x-2}$;

b) $\left(\frac{1}{16}\right)^{4-2|x-3|} = 256$;

c) $0{,}5^{x^2+2x-35} = 1$;

d) $16^{|x|-2} = 4$;

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^{3x+7} = \left(\frac{9}{25}\right)^{x-3}$;

f) $100^x = 0{,}000001$;

g) $49^x = -7$;

h) $\left(\frac{1}{0{,}3}\right)^{4+3x} = \left(\frac{100}{9}\right)^{x}$;

i) $7^{2-4x} = \frac{1}{49^{7+6x}}$.

3182 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $125 \cdot 5^{3x} = 27 \cdot 27^x$;

b) $3 \cdot 16^x = 2 \cdot 9^{2x}$;

c) $9 \cdot 2^x \cdot 5^x = 100 \cdot 3^x$;

d) $8^{x+1} + 4 \cdot 5^{3x+2} = 125^{x+1} + 2^{3x+2}$;

e) $2^{2x+4} = 7 \cdot 4^x + 7 \cdot 3^x + 3^{x+2}$;

f) $3^{2x+3} - 5 \cdot 2^{4x} = 11 \cdot 9^x + 4^{2x+1}$.

3183 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $2^{x+3} + 2^{x+1} = 10$;

b) $5^{x+4} - 5^{x+2} = 24$;

c) $2 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+3} = 83$;

d) $3^x - 3^{x-1} - 7 \cdot 3^{x-3} = 33$;

e) $3 \cdot 2^{x+2} - 5 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{x-2} = 50$;

f) $10^{x+1} - 4 \cdot 10^x - 3 \cdot 10^{x-1} = 570$;

g) $5^x - 2 \cdot 5^{x-1} - 4 \cdot 5^{x-2} + 3 \cdot 5^{x-3} = 58$;

h) $5 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 7 \cdot 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x-3} - 9 \cdot 2^{x-2} = 26$.

3184 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$;

b) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$;

c) $25^x - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$;

d) $2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$;

e) $9^{x+1} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$;

f) $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$;

g) $3 \cdot 4^x - 94 \cdot 2^x - 64 = 0$;

h) $9^{x+\frac{1}{2}} + 26 \cdot 3^x - 9 = 0$;

i) $10^x + \frac{200}{10^x} = 30$;

j) $0{,}2^x = \frac{24}{5} + 5^x$;

k) $10^x + 10^{-x} = 2$;

l) $9^{x+\frac{1}{2}} + 9 \cdot 3^{x-1} = \frac{4}{3}$.

3185 Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{matrix} 2^x + 3^y = 7 \\ 5 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = 11 \end{matrix}\right\}$;

b) $\left.\begin{matrix} 7^x + 5 \cdot 2^y = 41 \\ 5 \cdot 7^x + 3 \cdot 2^y = 29 \end{matrix}\right\}$;

c) $\left.\begin{matrix} 3 \cdot 4^x + 4 \cdot 3^y = 42 \\ 11 \cdot 4^x - 3^y = 13 \end{matrix}\right\}$;

d) $\left.\begin{matrix} 2^{x+2} + 3^{y-1} = 17 \\ 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^y = 24 \end{matrix}\right\}$;

e) $\left.\begin{matrix} 10^{x-2} + 7^{y+1} = 8 \\ 10^x - 2 \cdot 7^{y+2} = 2 \end{matrix}\right\}$;

f) $\left.\begin{matrix} 5^{x+2} - 5 \cdot 6^{y-1} = 120 \\ 100 \cdot 5^{x-2} + 12 \cdot 6^{y-2} = 22 \end{matrix}\right\}$;

g) $\left.\begin{matrix} 7^{2x+y-1} = 49 \\ 2^{x+y+8} = 64 \end{matrix}\right\}$;

h) $\left.\begin{matrix} 9 = 3^{x+2y} \\ 5^{4x-y} = 125 \cdot \sqrt{5} \end{matrix}\right\}$;

i) $\left.\begin{matrix} 15^{3x+1} = 15^{2y+3} \\ 8^{x-y} = 2^{x-7} \end{matrix}\right\}$;

j) $\left.\begin{matrix} 9^{x+y-5} = 3^{4-2x} \\ 16^{2x-y+1} = 8^{y+7} \end{matrix}\right\}$.

3186 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $3^{4x-5} < 27^{x}$;

b) $16^{x-1} \geq \frac{1}{4}$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+3} \leq \frac{1}{64}$;

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+4} > \frac{8}{27}$;

e) $5^{x-1} \cdot 25^{x+3} > \frac{1}{125}$;

f) $\sqrt[4]{7^{3x+1}} \leq \sqrt[3]{49}$;

g) $\sqrt{32^{x-1}} > \sqrt[5]{16^{x}}$;

h) $4^{x-1} \cdot 8^{x+3} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \cdot 128^{x+2}$;

i) $\frac{81^{x+\frac{1}{4}}}{9^{x-1}} > 27^{2x-3} \cdot 3^{x+2}$;

j) $\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} \cdot \sqrt[4]{8^{x}} \cdot \sqrt[3]{4^{x}} < \sqrt{\frac{1}{32^{x}}} \cdot \sqrt[3]{16^{x+1}}$.

3187 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $2^{4x-1} \cdot 2^{x+2} = 4^{3x-1} \cdot 2^{x-3}$;

b) $9^{2-x} \cdot 3^{x+3} = \frac{27^{x-1}}{3^{x+2}}$;

c) $\frac{5^{4x-3}}{125^{x+1}} = 25^{x-4} \cdot 5^{2x-1}$;

d) $\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}}{16^{x+3}} = \frac{32^{x-1}}{2^{x-3}}$;

e) $\sqrt[3]{2^{x+1}} \cdot \sqrt[3]{2^{4x-4}} = \sqrt[3]{4^{x-3}} \cdot \frac{1}{8}$;

f) $\frac{\sqrt[4]{27^{x+5}}}{\sqrt{3^{x-2}}} = \sqrt[4]{9^{x+3}} \cdot \sqrt{3^{2x-1}}$;

g) $\sqrt{7^{x-1}} \cdot \sqrt[3]{7^{x-2}} \cdot \sqrt[4]{7^{x-3}} = \sqrt[4]{7}$;

h) $\sqrt{32^{x}} \cdot 16^{\frac{1}{5}-x} \cdot \sqrt[3]{4^{x-1}} = \frac{\sqrt{8^{x+1}}}{\sqrt[3]{16^{x-1}}} \cdot \sqrt[10]{8}$;

i) $2^{x+2} + 2^{1-x} = 9$;

j) $3^{4-x} + 3^{x+2} - 730 = 0$;

k) $2 \cdot 5^{x^2+1} \cdot 2^{x^2} = 0{,}01^{x}$;

l) $\left(\frac{3}{5}\right)^{3+x} : \frac{5^{3}}{27} = \left(\frac{25}{9}\right)^{x-4}$;

m) $\left(\frac{5}{12}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{2x-1} = 0{,}3^{-1}$;

n) $2 \cdot 64^{\frac{1}{2} \cdot x+1} + 3 \cdot 8^{x+1} - 15 \cdot 2^{3x-1} = 72{,}25$;

o) $\frac{1}{3} \cdot 3^{x+1} - 3^{x-2} + \frac{1}{9} \cdot 3^{x+3} = 35$;

p) $\left(\frac{8}{27}\right)^{x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} = \frac{64}{729}$.

3188 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $23^{x^2-9x+14} = 1$;

b) $19^{x^2-2x-14} = 19$;

c) $11^{|x|-1} = 121$;

d) $5^{|2x-5|} = 125$;

e) $4^{|x|-1} = 2^{|x|+3}$;

f) $2^{\sqrt{x}-5} = 8$;

g) $10^{\sqrt{4x-4}} = 100$;

h) $4^{\sqrt{x}-1} \cdot 8^{\sqrt{x}+2} = 16^{\sqrt{x}} \cdot 32$;

i) $12^{\cos x} = \frac{1}{12}$;

j) $100^{\sin x} = 0{,}1$;

k) $4^{(2^{x})} = 16^{16}$;

l) $64 \cdot \sqrt[4]{2^{2x-6}} = \frac{1}{16}$;

m) $\frac{1}{243}\cdot\sqrt{27^{x+3}}=81$ *n)* $7^x\cdot\sqrt[4]{4^{4x^2-16}}-\frac{7^x}{16}=0$;

o) $\left(\frac{13}{8}\right)^x-13^x\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^{3x^2-12}=0$; *p)* $\frac{1}{100^3}\cdot\left(100^{3-x}\right)^2=25^{x^2}\cdot 4^{x^2}$.

3189 Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{array}{l}5\cdot 3^{x+2}-7\cdot 2^{y-1}=17\\4\cdot 3^{x+1}+5\cdot 2^{y-3}=17\end{array}\right\}$; *b)* $\left.\begin{array}{l}9^{x-1}\cdot 3^y=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\\5^{x+3y-1}=\sqrt{5}\end{array}\right\}$;

c) $\left.\begin{array}{l}\left(25^x\right)^y=125\\4^{x\cdot y}\cdot 2^x=2\cdot 8^{\frac{1}{y}}\end{array}\right\}$; *d)* $\left.\begin{array}{l}8^{x\cdot y}=4\\3^{2x-y}=\sqrt[3]{3}\end{array}\right\}$.

e) $\left.\begin{array}{l}5\cdot 6^x+8\cdot 5^y=13\\\frac{5}{6^x}+\frac{8}{5^y}=13\end{array}\right\}$; *f)* $\left.\begin{array}{ll}(1) & y+x=1\\(2) & y^{x^2-7y-1}-1=0\end{array}\right\}$.

3190 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $7^{\frac{x+3}{x+2}}>49$; *b)* $4^{\frac{2x-1}{3x+2}}\geq\frac{1}{8}$;

c) $3^{\frac{2x+3}{4x-1}}<\sqrt{3}$; *d)* $2^{x^2-2x}>256$;

e) $\frac{3^{x^2}}{3^{15}}<\left(\frac{1}{9}\right)^x$; *f)* $2^{x^2}\cdot 8\geq\left(\frac{1}{64}\right)^{x+1}$;

g) $25^{|x|}\leq 25\cdot 5^x$; *h)* $13^{|x-3|}>\sqrt{13^x}$;

i) $2^x+2^{1-x}\geq 3$; *j)* $25+25^{x+\frac{1}{2}}\leq 126\cdot 5^x$;

k) $0{,}0625<\left[(0{,}5)^{\frac{1}{x}}\right]^2$ $(x\neq 0)$; *l)* $\left(\frac{1}{16}\right)^{2|x|-1}>\frac{1}{256}$.

3191 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\left[5\cdot\left(5^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=25$; *b)* $1-6y-y^2=5^{-x}+5^{x+2}$;

c) $4^{\operatorname{tg}^2 x}+2^{\frac{1}{\cos^2 x}}-80=0$.

3192 Milyen p valós paraméter értékek esetén van két különböző valós megoldása az alábbi egyenletnek:

$$9^x+2\cdot(p-3)\cdot 3^x+p^2-4=0.$$

3193 Mely $(x;y)$ számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{l}64^x+64^y=12\\2^{x+y}=\sqrt[6]{32}\end{array}\right\}.$$

3194 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $4^{-x}-3^{-x-\frac{1}{2}}>3^{\frac{1}{2}-x}-2^{-2x-1}$; *b)* $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x}-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}-128\leq 0$.



A logaritmus fogalma

3195 Számítsuk ki a következő logaritmusértékeket:

a) $\log_4 16$; *b)* $\log_5 125$; *c)* $\log_2 128$; *d)* $\log_9 \frac{1}{3}$;

e) $\log_7 \frac{1}{49}$; *f)* $\log_8 128$; *g)* $\log_{32} 4$; *h)* $\log_{128} 2$;

i) $\lg 1000$; *j)* $\lg 0{,}0001$; *k)* $\lg 1$; *l)* $\lg 10^{23}$;

m) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; *n)* $\log_{\frac{1}{3}} 81$; *o)* $\log_{\frac{1}{5}} 125$; *p)* $\log_{0,1} 100$.

3196 Számítsuk ki a következő hatványokat:

a) $2^{\log_2 10}$; *b)* $3^{\log_3 57}$; *c)* $4^{\log_4 41}$; *d)* $10^{\lg 11}$;

e) $4^{\log_2 7}$; *f)* $8^{\log_2 3}$; *g)* $16^{\log_4 5}$; *h)* $25^{\log_5 13}$;

i) $2^{\log_4 9}$; *j)* $5^{\log_{25} 64}$; *k)* $4^{\log_{16} 25}$; *l)* $16^{\log_8 27}$;

m) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 10}$; *n)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 25}$; *o)* $\left(\frac{1}{49}\right)^{\log_7 5}$; *p)* $0{,}1^{\lg 17}$.

3197 Számítsuk ki x értékét ($x > 0$):

a) $\log_2 x = 6$; *b)* $\log_5 x = 4$; *c)* $\log_3 x = -1$; *d)* $\log_4 x = -2$;

e) $\log_{49} x = \frac{1}{2}$; *f)* $\log_{125} x = \frac{1}{3}$; *g)* $\log_8 x = \frac{2}{3}$; *h)* $\log_{16} x = -\frac{1}{4}$;

i) $\log_{27} x = -\frac{2}{3}$; *j)* $\log_4 x = -\frac{5}{2}$; *k)* $\log_{1000} x = -\frac{5}{3}$; *l)* $\log_{64} x = -\frac{7}{6}$.

3198 Számítsuk ki a logaritmusok alapjait:

a) $\log_x 8 = 3$; *b)* $\log_x 16 = 2$; *c)* $\log_x 32 = 5$; *d)* $\log_x 1000\,000 = 6$;

e) $\log_x 1000\,000 = 3$; *f)* $\log_x 1000\,000 = 2$; *g)* $\log_x 6 = 2$; *h)* $\log_x 16 = \frac{4}{3}$;

i) $\log_x 6 = -1$; *j)* $\log_x 25 = -2$; *k)* $\log_x \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}$; *l)* $\log_x 9 = -\frac{2}{3}$;

m) $\log_x \frac{81}{16} = -\frac{4}{3}$; *n)* $\log_x 1 = 0$; *o)* $\log_x 3 = 0$; *p)* $\log_x \sqrt[4]{8} = 0{,}25$.

3199 Határozzuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők:

a) $\lg(x+1) + 3 \cdot \lg(x+4)$; *b)* $\log_8(6x-5) - \log_7(5x-6)$;

c) $\log_2(2x-3) + \log_3(4x+1)$; *d)* $\log_4(4-5x) - \log_5(7x+5)$;

e) $\log_5(4x-1) - \log_5(3x+2)$; *f)* $\log_5 \frac{4x-1}{3x+2}$;

g) $\log_\pi(x-2) - \log_{11}(4x-7) + \lg(3x-8)$; *h)* $\log_7 \frac{4-5x}{7x+5}$;

i) $\log_x(4x-3)$; *j)* $\log_{x-4}(1-4x)$.

3200 Számítsuk ki a következő logaritmusértékeket:

a) $\log_{\sqrt{2}} 4$; *b)* $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{2}$; *c)* $\log_4 \sqrt{2}$;

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 32$; *e)* $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[7]{3}$; *f)* $\log_{\frac{1}{\sqrt[4]{5}}} \sqrt[5]{25}$;

g) $\log_a \sqrt[5]{a^2}$, $(a>0,\ a\neq 1)$; *h)* $\log_x \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $(x>0,\ x\neq 1)$; *i)* $\log_{\frac{1}{\sqrt{b}}} b^{\frac{2}{3}}$, $(b>0,\ b\neq 1)$.

3201 A logaritmus definíciója alapján számítsuk ki a következő értékeket:

a) $\log_2\left[\log_2\left(\log_2 16\right)\right]$; *b)* $\log_5\left[\log_3\left(\log_{11} 11^3\right)\right]$;

c) $\lg\left[\lg\left(\lg 10^{(10^{10})}\right)\right]$; *d)* $\log_5\left[\log_2\left(\log_6 \sqrt[32]{6}\right)\right]$.

3202 Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

a) $10^{1+\lg 5}$; *b)* $3^{2-\log_3 6}$; *c)* $5^{1-\log_5 3}$; *d)* $4^{1+\log_2 5}$;

e) $2^{3-\log_4 25}$; *f)* $3^{1+3\cdot\log_9 4}$; *g)* $7^{\log_7 5+\log_{49} 16}$; *h)* $5^{3\cdot\log_{25} 9-2\cdot\log_5 4}$;

i) $16^{\log_4 5-\log_2 3}$; *j)* $9^{2-\log_3 2}$; *k)* $\sqrt{5^{4+\log_5 4}}$; *l)* $\sqrt[3]{10^{6-\lg 27}}$;

m) $\log_a \frac{a^{-2}\cdot\left(a^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{a}}{\left(a^{-3}\right)^2\cdot a^{\frac{3}{2}}}$, $a>0,\ a\neq 1$; *n)* $\log_x\left(x^{-1}\cdot\sqrt[4]{x\cdot\sqrt{x^{-1}}}\right)$, $x>0;\ x\neq 1$.

3203 Határozzuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők:

a) $\lg(x^2-2x-8)$; *b)* $\lg(x^2-9)+\log_9(1-3x)$;

c) $\lg(3x^2-16x+5)\cdot\lg(7x+5)$; *d)* $\lg(12x^2+5x-3)\cdot\lg(x^2+2x)$;

e) $\lg\left(3-|x|\right)-\lg(2x+3)$; *f)* $\lg\left(|x|-2\right)\cdot\lg(x+5)$;

g) $\lg\left(2\cdot|x|-1\right)\cdot\lg(x^2-x)$; *h)* $\lg(3^x-9)\cdot\lg(3x+2)$;

i) $\log_x(4x+5)+\log_{x+3}(1-3x)$; *j)* $\log_{x-1}(17x-2)-\log_{\sqrt{x}}(6-2x)$.

3204 Határozzuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők:

a) $\lg(-4^{x+1}+33\cdot 2^x-8)$; *b)* $\lg\sin x\cdot\lg\cos x\cdot\lg\operatorname{tg} x$; *c)* $\lg\sin x\cdot\lg(x^2-3x+2)$.

A logaritmusfüggvény

3205 Határozzuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők. Ábrázoljuk a függvények grafikonját a valós számoknak azon a részhalmazán, amelyen értelmezhetők. Állapítsuk meg a függvények zérushelyeit és növekedési viszonyait.

a) $a(x)=\log_2 x+3$; *b)* $b(x)=\log_2 x-1$; *c)* $c(x)=\log_{\frac{1}{2}} x+2$;

d) $d(x)=\log_{\frac{1}{3}} x-3$; *e)* $e(x)=\log_2(x+3)$; *f)* $f(x)=\log_3(x-1)$;

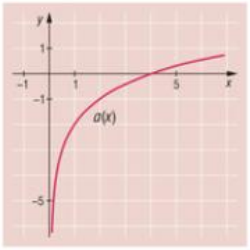
g) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$; *h)* $h(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-3)$; *i)* $i(x) = 1 + \log_2(x-2)$;

j) $j(x) = \log_3(x+1) - 2$; *k)* $k(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) - 3$; *l)* $l(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + 1$;

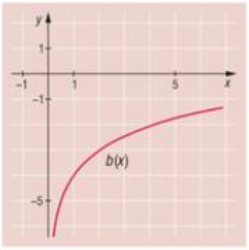
m) $m(x) = 1 - \log_3 x$; *n)* $n(x) = 2 - \log_2(x+4)$; *o)* $o(x) = 3 - \log_3(x-3)$.

3206 A következő ábrákon az $f(x) = \log_2 x$ függvényből kapott grafikonokat látunk. A grafikonok alapján adjuk meg a logaritmusfüggvények hozzárendelési szabályát:

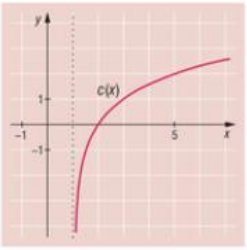
a)



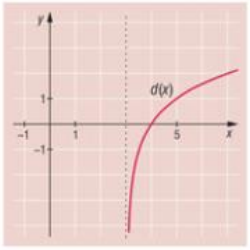
b)



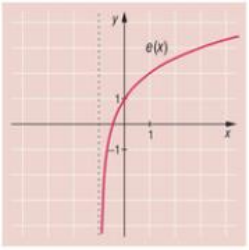
c)



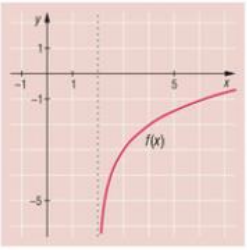
d)



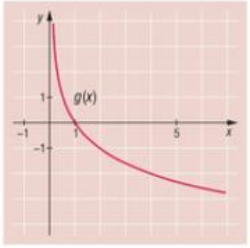
e)



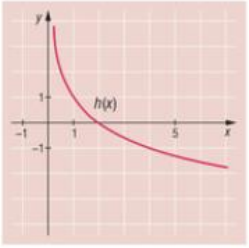
f)



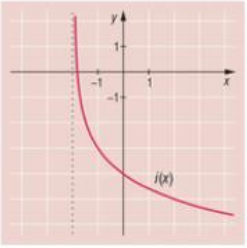
g)



h)



i)



3207 Egy informatikai eszközöket gyártó cég olcsó laptopok forgalomba hozását tervezi. A cég marketing osztályának szakemberei szerint az eladott termékek száma – ezer darabban számolva – várhatóan az

$$s(t) = 100 + 30 \cdot \lg(7t + 1)$$

függvény szerint alakul, ahol t a forgalomba kerüléstől eltelt idő években számolva.

a) Várhatóan hány darab laptopot adnak el a piacon való megjelenéskor, és hány darabot egy év múlva?

b) Hány év múlva érné el az eladás a megjelenéskor eladott mennyiség kétszeresét?

3208 Határozzuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők. Ábrázoljuk a függvények grafikonját a valós számoknak azon a részhalmazán, amelyen értelmezhetők.

a) $a(x) = |\log_3 x|$; *b)* $b(x) = |\log_3 x - 1|$; *c)* $c(x) = \log_3 |x|$;

d) $d(x) = \operatorname{sgn}(\lg x)$; *e)* $e(x) = \operatorname{sgn}[\lg(x+4)]$.

3209 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

a) $\log_2 |x| = |x| - 1$; *b)* $4 \cdot \log_3 x = x^2 - 2x + 1$.

A logaritmus azonosságai

3210 Az x, y és z változókkal fejezzük ki az a, b, c stb. ismeretlenek értékét:

a) $\lg a = \lg x - \lg y + \lg z$; *b)* $\lg b = 2 \cdot \lg x + \lg y$; *c)* $\lg c = 3 \cdot \lg z + 4 \cdot \lg 3$;

d) $\lg d = 2 \cdot \lg y - 3 \cdot \lg z$; *e)* $\lg e = \frac{1}{2} \cdot \lg y - \frac{2}{3} \cdot \lg x$; *f)* $\lg f = 1 - \lg x$;

g) $\lg g = 2 - 3 \cdot \lg 5 + \frac{1}{2} \cdot \lg x$; *h)* $\lg h = \frac{1}{3} \cdot \lg z - \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \cdot \lg y$; *i)* $\lg i = -\lg(x+1) - 3 \cdot \lg y - 4$;

j) $\lg j = x - y + \lg z$.

3211 Adjuk meg a változók értékeit:

a) $\log_2 a = \log_2 12 + \log_2 10 - \log_2 15$; *b)* $\log_3 b = \log_3 15 + \log_3 12 - \log_3 36$;

c) $\log_5 c = \log_5 21 - \log_5 12 - \log_5 7 + \log_5 44$; *d)* $\log_6 d = 2 \cdot \log_6 5 + \log_6 8 - \log_6 20$;

e) $\log_7 e = \log_7 6 - \log_7 50 + 2 \cdot \log_7 10$; *f)* $\lg f = \lg 9 - 4 \cdot \lg 3 + \lg 13$;

g) $\lg g = \lg 32 - 4 \cdot \lg 2 + \frac{1}{2} \cdot \lg 7$;

h) $\log_8 h = 2 \cdot \log_8 27 - 3 \cdot \log_8 5 - 2 \cdot \log_8 81 + \log_8 25$.

3212 A logaritmus azonosságait felhasználva számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

a) $\log_{\sqrt{2}} 9 + \log_{\sqrt{2}} 48 - 3 \cdot \log_{\sqrt{2}} 6$;

b) $5 \cdot \log_6 12 - 2 \cdot \log_6 9 - 4 \cdot \log_6 4 - \log_6 2$;

c) $4 \cdot \log_3 18 - 3 \cdot \log_3 36 + \log_3 256 + 2 \cdot \log_3 72 - 4 \cdot \log_3 24$;

d) $6 \cdot \log_5 6 - \log_5 32 + 2 \cdot \log_5 10 - 3 \cdot \log_5 9 - \log_5 200$;

e) $7 \cdot \log_{\frac{1}{18}} 6 - 6 \cdot \log_{\frac{1}{18}} 10 - 5 \cdot \log_{\frac{1}{18}} 21 + 5 \cdot \log_{\frac{1}{18}} 15 - 2 \cdot \log_{\frac{1}{18}} 25 - 5 \cdot \log_{\frac{1}{18}} 3 + 5 \cdot \log_{\frac{1}{18}} 35$;

f) $\log_8 \sqrt{2200} - \log_8 \sqrt{55} + \log_8 \sqrt{40} - \log_8 10$;

g) $\log_2 \operatorname{tg} 60^\circ + \log_2 \cos 30^\circ + \log_2 \sin 30^\circ - \log_2 3$;

h) $\log_4 \sin 45^\circ + \log_4 \sqrt{2} - \log_4 \sin 60^\circ - \log_4 \operatorname{tg} 30^\circ$;

i) $\log_5 15 + 2 + \log_5 \sqrt{63} - \log_5 126 + \frac{1}{2} \cdot \log_5 28$.

3213 A logaritmus azonosságait felhasználva számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

a) $\lg \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \lg \sin 60^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \lg 5$;

b) $\lg \cos 30^\circ + \lg 4 - \lg \sin 60^\circ + 2 \cdot \lg \sin 30^\circ$;



c) $\lg[(\sin 60^\circ - \cos 60^\circ)^2 + \cos 30^\circ]$;

d) $\log_6\left(\frac{a+2}{a-1} + \frac{6-a}{a}\right)$, ha $a = 2$, $(a \neq 0,\ a \neq 1)$;

e) $\log_{0,1}\left[\left(\frac{4x}{2x-5} - 2\right) \cdot \frac{4x^2-25}{5}\right]$, ha $x = 0$, $\left(x \neq \frac{5}{2}\right)$.

3214 Zsebszámológép használata nélkül döntsük el, hogy melyik kifejezés a nagyobb:

a) $\lg(6 \cdot 10^{23})$ vagy $\log_2 16^6$;

b) $\lg(9{,}1 \cdot 10^{-31})$ vagy $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)^{10}$;

c) $\log_2\left[5 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^{16}\right]$ vagy $\log_3\left[5 \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{20}\right]$;

d) $\lg\left[\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_7 \sqrt[3]{49}\right)\right]$ vagy $\log_2\left[\log_{\frac{5}{6}}\left(\log_8 \sqrt{32}\right)\right]$.

3215 Legyen $a = \lg 50$ és $b = \lg 15$. Fejezzük ki a és b felhasználásával a következő kifejezéseket:

a) $\lg 2250$; *b)* $\lg 75$; *c)* $\lg 3$.

3216 Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b > 0$ és $a, b \neq 1$ akkor:

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{2}{\log_{a^2} b} + \frac{3}{\log_{a^3} b} - \frac{4}{\log_{a^4} b} = \log_b \frac{1}{a}.$$

Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

3217 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\log_4(7x - 5) = 2$; *b)* $\log_2(6x + 2) = 5$; *c)* $\log_{25}(8x + 1) = \frac{1}{2}$;

d) $\lg(11x - 10) = -2$; *e)* $\log_{\sqrt{2}}(10x - 3) = 4$; *f)* $\log_4(13x - 10) = -0{,}5$;

g) $\lg(|x| - 8) = 1$; *h)* $\log_{15}(x^2 - 7x - 7) = 0$; *i)* $\log_8(x^2 - 3x + 10) = 1$;

j) $\log_5(x^2 - 9x + 15) = 2$; *k)* $\log_x(4x - 15) = 1$; *l)* $\log_{2x+1}(3x - 7) = 1$;

m) $\log_x(2x + 3) = 2$; *n)* $\log_x(6x - 5) = 2$; *o)* $\log_x(7x^2 - 10x) = 3$.

3218 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\log_2(x + 1) + \log_2 3 = \log_2 24$;

b) $\log_2(3x - 4) - \log_2 5 = \log_2(x + 2)$;

c) $\lg(2x - 3) - \lg(4x + 2) = \lg 3$;

d) $\log_3(5x - 3) - \log_3 4 = \log_3(4x + 3) - \log_3 5$;

e) $\log_7(3x - 5) + \log_7 2 = 1 + \log_7(2x - 1)$;

f) $\lg 12 - \lg(1 - x) = \lg 20 - \lg(x + 7)$;

g) $\log_4(5x + 7) - \log_4(x + 5) = \log_4 3$;

h) $2 \cdot \log_3(4x + 8) - \log_3(3x + 5) = \log_3(x + 9)$;

i) $\lg(3x + 5) + \lg(x + 5) = \lg(43x - 5)$;

j) $\lg 5 + \lg(x + 5) - 2 \cdot \lg(3x - 1) = -\lg(x + 13)$;

k) $\log_4(4x - 7) - \log_4(1 - x) = \log_4(7x + 3)$;

l) $\lg(x - 8) - \lg(3x - 4) = \lg(x - 5)$;

m) $\log_5 2 - \log_5(x - 6) = \log_5(x - 3) - 1$;

n) $\log_8(3x + 1) + \log_8(5x - 1) = \frac{4}{3}$.

3219 Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{array}{r}\log_2 x - \log_2 y = 6\\ 2\cdot\log_2 x + 3\cdot\log_2 y = 32\end{array}\right\}$;

b) $\left.\begin{array}{r}\log_3 x + 2\cdot\log_3 y = 8\\ \log_3 x - \log_3 y = 2\end{array}\right\}$;

c) $\left.\begin{array}{r}3\cdot\log_5 x - \log_5 y = 7\\ 2\cdot\log_5 x + 3\cdot\log_5 y = 1\end{array}\right\}$;

d) $\left.\begin{array}{r}2\cdot\log_7 x + 3\cdot\log_7 y = 8\\ \log_7 x - 2\cdot\log_7 y = -3\end{array}\right\}$;

e) $\left.\begin{array}{r}5\cdot\log_4 x + 3\cdot\log_4 y = 3\\ 4\cdot\log_4 x + 2\cdot\log_4 y = 2\end{array}\right\}$;

f) $\left.\begin{array}{r}3\cdot\log_8 x + \log_8 y = 4\\ 6\cdot\log_8 x - \log_8 y = 2\end{array}\right\}$;

g) $\left.\begin{array}{r}\log_{16} x = 2\cdot\log_{16} y - 2\\ \log_{16} x + 8\cdot\log_{16} y = 5{,}5\end{array}\right\}$;

h) $\left.\begin{array}{r}2\cdot\lg x = 3\cdot\lg y - 5\\ 3\cdot\lg x + 7\cdot\lg y = 4\end{array}\right\}$.

3220 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\log_7(4x-3) \le \log_7(x+1)$;

b) $\log_{0,1}(5x-1) \ge \log_{0,1}(7x+5)$;

c) $\log_5(4x-3) > 2$;

d) $\log_4(3x-5) \le 1$;

e) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-3) < -3$;

f) $\log_{\frac{1}{5}}(4x+3) > 2$.

3221 Adjuk meg azokat a valós számokat, amelyekre teljesülnek a következő egyenletek:

a) $\dfrac{\log_4(3x+5)}{\log_4(7x-1)} = 1$;

b) $\dfrac{\log_7(5x+11)}{\log_7(2x-1)} = 1$;

c) $\dfrac{\log_5(3x+7)}{2} = \log_5(x+1)$;

d) $\dfrac{\log_3(8x+9)}{\log_3(3x-1)} = 2$;

e) $\dfrac{\lg(x-1000)}{2-\lg 5} = 2$;

f) $\dfrac{\lg 4}{\lg(x+1)} = 2$;

g) $\dfrac{\lg(x-5)\cdot(x-1)}{\lg(2x-10)} = 1$;

h) $\lg(x-2) + 3\cdot\lg 2 = \lg(x-1) + \lg(x+1)$;

i) $\log_2\{\log_3[\log_4(\log_5 x)]\} = 0$;

j) $\log_6[5 + \log_3(1 + \log_5 x)] = 1$;

k) $\log_{25}\left[7 - \log_3\left(2 - \log_{\frac{1}{2}} x\right)\right] = \dfrac{1}{2}$;

l) $\log_{\frac{1}{4}}\left[15 - \log_{\frac{1}{5}}\left(1 - \log_{\frac{1}{3}}(5x+1)\right)\right] = -2$.

3222 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\log_x(3x^2 - 20x + 33) = 0$;

b) $\log_x(2x^2 - 19x + 42) = 1$;

c) $\log_x(2x^2 - 7x - 30) = 2$;

d) $\log_x(4x^2 - 3x) = 3$;

e) $2\cdot\lg^2 x - 11\cdot\lg x + 5 = 0$;

f) $\log_5^2 x - 4\cdot\log_3 x^2 + 15 = 0$;

g) $\log_5^2 x^2 + 9\cdot\log_5 x - 9 = 0$;

h) $\lg\left(x - \dfrac{2}{x}\right) + 1 = \lg 30 - \lg\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$;

i) $\dfrac{2}{\log_2 x + 1} - \dfrac{1}{\log_2 x - 5} = 1$;

j) $\log_x 16x = 5$.

3223 Mely $(x; y)$ valós számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszereket?

a) $\left.\begin{array}{l} 3\cdot\lg(x-1)-5\cdot\lg(y-4)=6 \\ \lg(x-1)+7\cdot\lg(y-4)=2 \end{array}\right\}$;

b) $\left.\begin{array}{l} \log_3 x+\log_y 8=5 \\ 4\cdot\log_3 x+1=3\cdot\log_y 8 \end{array}\right\}$;

c) $\left.\begin{array}{l} \log_2(2x+2)=2+\log_3(5-y) \\ 3\cdot\log_2(2x+2)+2\cdot\log_3(5-y)=16 \end{array}\right\}$;

d) $\left.\begin{array}{l} \log_x 16+\log_y 9=2 \\ \log_x 16-5\cdot\log_y 9=-2 \end{array}\right\}$;

e) $\left.\begin{array}{l} x-10y=90 \\ \lg x=2+\lg y \end{array}\right\}$;

f) $\left.\begin{array}{l} \lg 4+\lg(x-y)=\lg(x+y)-\lg 3 \\ \lg 2900-1=\lg\left(x^2+y^2\right) \end{array}\right\}$;

g) $\left.\begin{array}{l} \log_4\dfrac{x}{y}=1 \\ \log_{\frac{1}{6}} xy=2 \end{array}\right\}$.

3224 Mely valós számokra igazak a következő egyenlőtlenségek:

a) $\lg(2x^2+x-1)>\lg(3x-1)$;

b) $\log_{\frac{3}{4}}(x^2+x-6)>\log_{\frac{3}{4}}(3x+2)$;

c) $\log_3(2x-1)-\log_3(3x+2)\geq 0$;

d) $\log_3(5x-4)-\log_3(x+2)\geq 1$;

e) $\log_5(4x-7)-\log_5(3x-1)\leq 2$;

f) $\log_{0,5}(7x-3)-\log_{0,5}(2x+1)\geq 2$;

g) $2\cdot\log_4(x-2)-\log_4(x-6)\geq 2$;

h) $\log_2(15x+17)-2\cdot\log_2(3x-1)\geq 3$;

i) $\lg(4x-3)+\lg(x-3)\geq 2$;

j) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)+\log_{\frac{1}{3}}(x-12)\geq -3$;

k) $\log_2\dfrac{3x+4}{2x-1}\leq 1$;

l) $1+\log_4\dfrac{x^2-4x}{x-1}\leq\log_4 5$;

m) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\cdot(x-4)\geq -1$;

n) $\log_{0,25}(3+x)\cdot(x-4)<\log_{\frac{1}{4}}(2x+6)$;

o) $\log_{\frac{1}{8}}\left(4-|x|\right)\leq -\dfrac{1}{3}$;

p) $0{,}5\cdot\lg(x^2-3x)>\lg\sqrt{3-x}$.

3225 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\log_2(x+1)-\log_4(3x-5)=1$;

b) $\log_3 x+8\cdot\log_x 3=6$;

c) $x+\lg(5^x+1)=x\cdot\lg 2+\lg 30$;

d) $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{3+\lg x}=3\cdot 10^4$.

3226 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paraméter:

$$\log_x(px)=p.$$

3227 Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\lg x}+\dfrac{1}{\lg y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{\lg x}{\lg y}+\dfrac{\lg y}{\lg x}=\dfrac{13}{6} \end{array}\right\}$;

b) $\left.\begin{array}{l} 2\cdot\log_2(x-4)=\log_2\dfrac{y-1}{2}+\log_2\dfrac{y+1}{3} \\ \log_5(x+2y+2)-\log_5(x-y+5)=\log_5 5^{\log_5 3} \end{array}\right\}$.

Vegyes feladatok

3228 Rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$A=16^{-\frac{3}{4}}, \qquad B=\log_{\frac{1}{2}}(\log_5 625), \qquad C=10^{1-\log_{100}1024},$$

$$D=\log_{\sin^2\frac{\pi}{4}}8, \qquad E=\log_3\sqrt{27}+\log_{\sqrt{27}}3, \qquad F=4^{3-\log_2 5},$$

$$G=\left(\frac{64^{\frac{3}{2}}-64^{\frac{2}{3}}}{62}\right)^{-\frac{1}{3}}, \qquad H=\log_4\left[\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_7\sqrt[25]{7}\right)\right].$$

3229 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik hamis, melyik igaz:

a) Ha $2^{\frac{1}{a}}=7$, akkor $2^{\frac{2}{a}}=49$.

b) Ha $\log_4 x=-2$, akkor $x^{-\frac{1}{2}}=2$.

c) Ha $\log_a x=-3$, akkor $a=\sqrt[3]{x}$.

d) Ha $\sqrt[5]{x^2}=y$, akkor $\log_x y=\frac{2}{5}$.

e) Ha $\log_{17}23=a$, akkor $23^{\frac{1}{a}}=17$.

f) Ha $\log_8 a=b$, akkor $\log_2 a=3b$.

3230 Mely valós számok esetén igazak a következő egyenletek?

a) $4^x-6\cdot 2^{x+2}+128=0$;

b) $9^{x+1}+3^{2x+1}-972=0$;

c) $16^{x-1}-4^{2x+1}+16128=0$;

d) $\log_3 5+\log_3(4x+1)=\log_3(4x^2+5)$;

e) $\lg(4x+2)-\lg(3-x)=\lg(2-5x)$;

f) $\log_{2^2}x-\log_2\sqrt{x}=\frac{1}{2}$;

g) $3\cdot 3^{\sqrt{x}}-2=9^{\sqrt{x}}$;

h) $11^{2x}-13^x-50\cdot 11^{2x}+50\cdot 13^x=0$;

i) $x+\log_2(12-2^x)=5$;

j) $4^{\log_2 16}-17\cdot 2^{\log_2 16}+16=0$.

3231 Mely valós számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

a) $\left.\begin{aligned}32^{x+y}&=4\cdot 16^x\\27^{x+1}&=9^{3y+4}\cdot 3\end{aligned}\right\}$;

b) $\left.\begin{aligned}\log_3(2x-3)+\log_3 5&=\log_3(4y+15)\\\log_2(3x-1)+\log_2(y-4)&=9\end{aligned}\right\}$.

c) $\left.\begin{aligned}\log_{\sqrt{3}}(y-x)&=2\\2^x\cdot 3^y&=972\end{aligned}\right\}$;

d) $\left.\begin{aligned}\lg(x+y)+\lg(x-y)&=\lg 1000\\\log_2\frac{x+y}{x-y}&=1\end{aligned}\right\}$;

e) $\left.\begin{aligned}\frac{x+y}{x-y}&=2\\\lg(x+y)+\lg(x-y)&=\lg 2\end{aligned}\right\}$;

f) $\left.\begin{aligned}3^x-9^3\cdot 27^y&=0\\\log_3 xy&=2\end{aligned}\right\}$;

g) $\left.\begin{aligned}2\cdot\log_2 x-\log_2 y&=3-\log_2 3\\0{,}5^{y-x-2}&=1\end{aligned}\right\}$.

3232 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $2^{2x+10} - 5 \cdot 2^{x+4} + 1 \le 0$;

b) $\lg(x+1) + \lg(x+4) \le 1$;

c) $\lg(-3x-1) < \lg(x^2 - 5x - 36)$;

d) $\log_2 \log_5 (x-1) < 1$;

e) $3^{(x+2)\cdot(x-1)} < 1$;

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8x+18} \ge \frac{1}{8}$.

3233 Zsebszámológép használata nélkül adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

a) $8^{-\frac{2}{3}} + \log_4\left(\frac{1}{8}\right) + 7^{\log_7 3}$;

b) $10^{\log_{\sqrt{10}} 6 - \lg 12} + 8^{\log_2 3 - \log_4 9}$.

3234 Mely valós számok elégítik ki a következő egyenleteket?

a) $x^{\log_2 x + 4} = 32$;

b) $x^{8 \cdot \lg x} = 100$.

3235 Adott a következő függvény:

$$f(x) = \lg(x - a) + b.$$

A függvény grafikonjára illeszkednek az $(5; -2)$ és $(95; -1)$ pontok. Adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát.

3236 Egy biológiai kísérlet során baktériumokat szaporítanak. Azt tapasztalják, hogy megfelelő körülmények között a baktériumállomány 6 óra alatt megduplázódik. A kísérlet kezdetén 1000 baktérium volt.

a) Mennyi baktérium volt a kísérlet kezdete után 2 nappal?

b) A kísérlet addig tart, amíg a baktériumok száma el nem éri a 10^9 darabot. Mennyi ideig folyik a kísérlet?

3237 A pH egy dimenzió nélküli kémiai mennyiség, mely egy adott oldat kémhatását (savasságát vagy lúgosságát) jellemzi. Híg vizes oldatok esetén a pH egyenlő az oxóniumion-koncentráció $\left(\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}\right)$ tízes alapú logaritmusának ellentettjével:

$$\text{pH} = -\lg(H_3O^+).$$

a) Szobahőmérsékleten 1 dm^3 tiszta víz 10^{-7} mol oxóniumiont tartalmaz. Mennyi a tiszta víz pH-értéke?

b) Egy testápolót úgy reklámoznak, hogy a pH-értéke 5,5. Mennyi az oxóniumion-koncentráció ebben az oldatban?

c) Egy oldatban az oxóniumion-koncentrációt a 100 szorosára növeljük. Hogyan változik az oldat pH-értéke?

3238 Egy tóba honosítás céljából 500 darab csíkos sügért telepítettek 2005 márciusában. A halbiológusok figyelemmel kísérték az állomány gyarapodását és azt találták, hogy a halak száma a

$$h(t) = 500 \cdot \log_3(2t + 3)$$

függvénnyel írható le, ahol t a telepítéstől eltelt évek számát jelenti.

a) Mennyi csíkos sügér élt a tóban 2006 márciusában?

b) Hány százalékkal nőtt a halak száma 2007 és 2009 márciusa között?

c) Várhatóan mikor éri el a hal populáció az 1500 darabot?

3239 Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{array}{l} x^3 = y^2 \\ \dfrac{\lg x}{\lg y} = \lg \dfrac{x}{y} \end{array}\right\}$;

b) $\left.\begin{array}{l} \log_4 x + \log_{16} y = \dfrac{3}{2} \\ \log_x 4 + \log_y 16 = 3 \end{array}\right\}$;

c) $\left.\begin{array}{l} x^{\lg y} = 9 \\ xy = 300 \end{array}\right\}$.

3240 Mely valós számok elégítik ki a következő egyenleteket:

a) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1} = \dfrac{\lg 4}{\lg 8}$;

b) $1 + \lg(3^{x-3} + 15) = \lg 3 + \lg(9^{x-3} - 1)$;

c) $x^{(\lg\sqrt{x})^3 - \frac{5}{8}\cdot\lg x} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$;

d) $\log_2(3^x - 2) + \log_2(3^x - 5) = 2$.

3241 Milyen x érték esetén lesz a

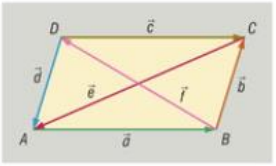
$$\log_7^2(2x-1) + \frac{16}{\log_7^2(2x-1)}$$

kifejezés értéke a legkisebb és mennyi ez a legkisebb érték?

11.3. A TRIGONOMETRIA ALKALMAZÁSAI

Vektorműveletek rendszerezése, alkalmazások (emlékeztető)

3242 Egy paralelogramma oldalait és átlóit az ábrán látható módon vektorokként irányítottuk. Keressünk az ábrán



a) egyenlő vektorokat;

b) ellentett vektorokat;

c) olyan vektorokat, amelyek összege nullvektor.

3243 Az $ABCDEF$ szabályos hatszög O középpontjából az A csúcsba mutató vektor legyen $\vec{a}$, a C csúcsba mutató vektor $\vec{c}$. Adjuk meg a következő vektorokat $\vec{a}$ és $\vec{c}$ segítségével:

a) $\overrightarrow{OB}$; *b)* $\overrightarrow{AF}$; *c)* $\overrightarrow{FD}$; *d)* $\overrightarrow{BD}$;

e) $\overrightarrow{EA}$; *f)* $\overrightarrow{EC}$; *g)* $\overrightarrow{FC}$.

3244 Mekkora szöget zár be az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektor, ha $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 4$, valamint

a) $|\vec{a} + \vec{b}| = 12$; *b)* $|\vec{a} - \vec{b}| = 12$?

3245 Az $ABCD$ paralelogrammában $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Fejezzük ki a következő vektorokat $\vec{a}$ és $\vec{b}$ segítségével:

a) $2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$; *b)* $\overrightarrow{DB} - 3 \cdot \overrightarrow{CD}$.

3246 Egy $ABCD$ téglalapban $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm. Adjuk meg a következő vektorok hosszát centiméterben mérve:

a) $2 \cdot \overrightarrow{AB} + 3 \cdot \overrightarrow{AD}$; *b)* $\overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{AD}$.

3247 A 40°-os szöget bezáró $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hossza egyaránt 10 egység. Milyen hosszú az $\vec{a} + \vec{b}$, illetve az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor?

3248 Egy ABC szabályos háromszögben $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$. Állítsuk elő ezek segítségével

a) a C csúcsból kiinduló súlyvonal vektorát;

b) az A csúcsból a háromszög súlypontjába mutató vektort;

c) a háromszög magasságpontjából a B csúcsba mutató vektort.

3249 Keressünk olyan $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat, amelyekre igaz, hogy

a) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$; *b)* $\vec{a} - \vec{b}$ vektor merőleges $\vec{a} + \vec{b}$ vektorra.

3250 Adottak az $\vec{a}(5; -7)$, $\vec{b}(2{,}5; 0{,}5)$ és $\vec{c}(4; 5{,}2)$ vektorok. Számítsuk ki a következő vektorok koordinátáit:

a) $2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$; *b)* $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$; *c)* $\dfrac{3 \cdot \vec{a} - \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}}{10}$.

3251 Adott a koordinátasíkon két pont: $A(3; -1)$ és $B(5; 7)$. Írjuk fel az

a) $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátáit;

b) az AB szakasz felezőpontjának helyvektorát.

3252 Egy ABC háromszögben $AB = 25$ cm, $BC = 20$ cm és $AC = 10$ cm. A háromszög C csúcsánál lévő belső szög szögfelezője az AB oldalt egy D pontban metszi. Adjuk meg a $\overrightarrow{CD}$ vektort a $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ vektorok segítségével.

3253 Egy 12 egység hosszú $\vec{a}$ vektort elforgattunk pozitív irányba 60°-kal, így $\vec{b}$ vektorhoz jutottunk. A $\vec{b}$ vektort is elforgattuk pozitív irányba 60°-kal, így a $\vec{c}$ vektort kaptuk.

a) Mekkora szöget zár be az $\vec{a} + \vec{b}$ és $\vec{c}$ vektor?

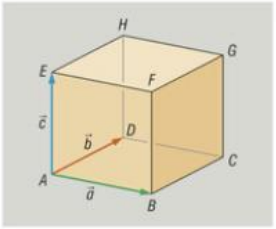
b) Adjuk meg az $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektor hosszát.

3254 Az ábrán látható $ABCDEFGH$ kocka A csúcsából kiinduló élvektorok legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Fejezzük ki $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ segítségével az A csúcsból a

a) CG él I felezőpontjába;

b) HG él H-hoz közelebbi J harmadolópontjába mutató vektort.

c) Adjuk meg az I pontból a J pontba mutató vektort.



3255 Bontsuk fel a $\vec{v}(6; 5)$ vektort az $\vec{a}(4; 1)$ és $\vec{b}(-2; 3)$ vektorokkal parhuzamos összetevőkre.

3256 Legyen O az ABC háromszög köré írt körének középpontja, M a háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$.

3257 Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög köré írt körének középpontja egy oldaltól feleakkora távolságra van, mint a háromszög magasságpontjának a szemközti csúcstól vett távolsága.

3258 Igazoljuk, hogy egy háromszög M magasságpontja, S súlypontja és a körülírható körének O középpontja egy egyenesen van, valamint az S pont az MO szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja (Euler-egyenes).

3259 Legyen F egy háromszög köré írható körének középpontja és a magasságpont által meghatározott szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy F egyenlő távolságra van

a) a háromszög minden oldalának felezőpontjától;

b) a háromszög minden csúcsát a háromszög magasságpontjával összekötő szakasz felezőpontjától.

A skaláris szorzat

3260 Számítsuk ki a következő vektorok skaláris szorzatát:

a) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 8$ és a két vektor hajlásszöge 60°;

b) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 8$ és a két vektor hajlásszöge 90°;

c) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 8$ és a két vektor hajlásszöge 135°;

d) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 8$ és a két vektor hajlásszöge 180°.

3261 Mekkora az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge, ha

a) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 4$ és $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$;

b) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$ és $\vec{a} \cdot \vec{b} = -9 \cdot \sqrt{2}$;

c) $|\vec{a}| = 100$, $|\vec{b}| = 52$ és $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

d) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 8$ és $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$?

3262 Mekkora az $\vec{a}$ vektor hossza, ha

a) $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=18\cdot\sqrt{3}$ és az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge 30°;

b) $|\vec{b}|=9$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=18$ és az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge 60°;

c) $|\vec{b}|=7$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-12$ és az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge 135°;

d) $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ és az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge 30°?

3263 Két vektor hossza 12 és 7 egység. Mekkora lehet a két vektor skaláris szorzatának legkisebb, illetve legnagyobb értéke?

3264 Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszögben a C csúcsból kiinduló magasság talppontja T. Számítsuk ki a következő skaláris szorzatokat:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; *b)* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; *c)* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AT}$; *d)* $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{TC}$.

3265 Az $ABCD$ négyzet minden oldala $\sqrt{2}$ hosszúságú. Adjuk meg a következő skaláris szorzatok értékét:

a) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$; *b)* $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$;

c) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$; *d)* $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$.

3266 Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egységvektorok 60°-os szöget zárnak be. Számítsuk ki a következő szorzatokat:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; *b)* $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$; *c)* $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{b}$; *d)* $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$;

e) $\left(2\cdot\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-3\cdot\vec{b}\right)$.

3267 Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszögben határozzuk meg a következő kifejezés értékét:

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

3268 Adjunk meg olyan $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat, amelyekre

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|$; *b)* $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}$; *c)* $\vec{a}\cdot\vec{b}<|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$; *d)* $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$;

e) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=2\cdot\vec{b}$.

3269 Egy egységnyi élhosszúságú kocka egyik csúcsából kiinduló élvektorok $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Számítsuk ki a következő skaláris szorzatok értékét:

a) $\vec{c}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$; *b)* $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$; *c)* $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$.

3270 Mekkora az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egységvektorok bezárt szöge, ha a $3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}$ vektor merőleges az $\vec{a}-2\cdot\vec{b}$ vektorra?

3271 Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egyenlő hosszúságú vektorok 120°-os szöget zárnak be. Mekkora szöget zárnak be az $\vec{a}-2\cdot\vec{b}$ és az $5\cdot\vec{a}+4\cdot\vec{b}$ vektorok?

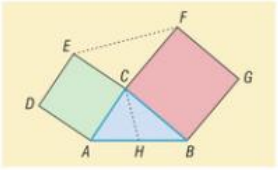
3272 Bizonyítsuk be, hogy a következő vektor merőleges az $\vec{a}$ vektorra:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}-\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{b}.$$

3273 Az $ABCD$ tetraéder D csúcsából induló DA, DB és DC élek páronként merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög hegyesszögű.

3274 Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő.

3275 Az ábrán látható ABC háromszög oldalaira kifelé $ACED$ és $BGFC$ négyzeteket rajzoltunk. Igazoljuk, hogy ha AB oldal felezőpontja H, akkor CH egyenese merőleges EF egyenesére, és $EF = 2 \cdot CH$.



3276 Bizonyítsuk be, hogy ha M az ABC háromszög BC oldalának egy tetszőleges belső pontja, akkor:

$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM = AM^2 \cdot BC + BM \cdot MC \cdot BC.$$ (Stewart-tétel)

3277 Az ABC háromszög súlypontja körül szerkesszünk egy r sugarú kört. Bizonyítsuk be, hogy a kör kerületének bármely P pontjára $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg ugyanakkora.

3278 Az ABC háromszög síkjában keressük meg azt a P pontot, amelyre $PA^2 + PB^2 + PC^2$ minimális.

Vektor hossza, és skaláris szorzat a koordináta-rendszerben

3279 Adjuk meg a következő vektorok hosszát:

a) $\vec{a}(5; -3)$; *b)* $\vec{b}\left(3; \frac{1}{2}\right)$; *c)* $\vec{c}\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$;

d) $\vec{d}\left(\sqrt{2}; -3 \cdot \sqrt{2}\right)$; *e)* $\vec{e}\left(\sqrt{5} - 1; \sqrt{5} + 1\right)$;

f) $\vec{f}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3280 Adott a koordinátasíkon két pont: A és B. Adjuk meg az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszát, ha

a) $A(12; 8)$ és $B(-5; 7)$; *b)* $A\left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1}; 1\right)$ és $B\left(\sqrt{2}; -11\right)$.

3281 Írjuk fel az $\vec{a}$ vektorral egyirányú egységvektor koordinátáit, ha

a) $\vec{a}(8; -6)$; *b)* $\vec{a}\left(\sqrt{7} - 1; \sqrt{7} + 1\right)$; *c)* $\vec{a}(m^2 - n^2; 2mn)$, $m, n \in \mathbb{R}$.

3282 Adjuk meg az $\vec{a}$ vektorral megegyező irányú 5 egység hosszú vektor koordinátáit, ha

a) $\vec{a}(-5; 12)$; *b)* $\vec{a}(9; 7)$; *c)* $\vec{a}(-2; 4)$.

3283 Adjuk meg az $\vec{a}$ vektorral ellentétes irányú 3 egység hosszú vektor koordinátáit, ha

a) $\vec{a}(-5; 12)$; *b)* $\vec{a}(9; 7)$; *c)* $\vec{a}(-2; 4)$.

3284 Adottak az $\vec{a}(5; -7)$, $\vec{b}(2{,}5; 0{,}5)$ és $\vec{c}(4; 5{,}2)$ vektorok. Számítsuk ki a következő skaláris szorzatokat:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; *b)* $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$; *c)* $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$;

d) $2 \cdot \left(\vec{a} - 3 \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$; *e)* $\left(\vec{a} + 2 \cdot \vec{b}\right) \cdot \left(3 \cdot \vec{a} - \vec{b}\right)$.

3285 Adjuk meg a következő két vektor hajlásszögét:

a) $\vec{a}(4; -3)$ és $\vec{b}(12; -5)$; *b)* $\vec{a}(-0{,}5; -3)$ és $\vec{b}(12; -1{,}4)$; *c)* $\vec{a}\left(\frac{12}{5}; -3\right)$ és $\vec{b}\left(\frac{7}{2}; -\frac{9}{4}\right)$;

d) $\vec{a}(8xz; -3y)$ és $\vec{b}(6y; 16xz)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

3286 Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok merőlegesek egymásra. Adjuk meg y értékét, ha

a) $\vec{a}(9; y)$ és $\vec{b}(9; -7)$; *b)* $\vec{a}(\sqrt{3}; y)$ és $\vec{b}(2; -8)$; *c)* $\vec{a}(7; 12-y)$ és $\vec{b}(1; 9-2y)$.

3287 Adott a koordinátasíkon az alábbi két pont:

$$A\left(\frac{a}{a^2-b^2}; \frac{1}{a+b}\right) \quad \text{és} \quad B\left(\frac{1}{a+b}; \frac{1}{a-b}\right).$$

Adjuk meg az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszát a és b függvényében $(a, b \in \mathbb{R},\ |a| \neq |b|)$.

3288 Adott a koordinátasíkon két pont: $A(-12; 7)$ és $B(8; 2)$. Számítsuk ki az OAB háromszög kerületét, ha O a koordináta-rendszer kezdőpontja.

3289 Adjuk meg a következő vektorok hajlásszögét:

$$\vec{a}\left(-\sqrt{4-2\cdot\sqrt{3}}; 1\right) \quad \text{és} \quad \vec{b}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}; \sqrt{3}\right).$$

3290 Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok merőlegesek egymásra, és hosszuk egyenlő. Adjunk meg ilyen $\vec{b}$ vektort, ha

a) $\vec{a}(5; -3)$; *b)* $\vec{a}\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{5}\right)$; *c)* $\vec{a}(k; 2k-1)$, ahol $k \in \mathbb{R}$.

3291 Három vektorról a következőket tudjuk:

$$\vec{a}(3; -2), \quad \vec{b}(4; -1), \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 7 \quad \text{és} \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = 1.$$

Adjuk meg a $\vec{c}$ vektor koordinátáit.

3292 Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által bezárt szög 45°. Adjuk meg a $\vec{b}$ vektor első koordinátáját, ha második koordinátája -7, és $\vec{a}(4; -3)$.

3293 Adottak az $\vec{a}(12; 5)$ és a $\vec{b}(4; -3)$ helyvektorok. Írjunk fel egy olyan vektort, amely a két vektor szögfelezőjének irányába mutat.

3294 Adott a koordinátasíkon két pont: $A(-12; 7)$ és $B(14; 24)$. Igaz-e, hogy az OAB háromszög derékszögű, ha O a koordináta-rendszer kezdőpontja? Adjuk meg a háromszög beírt és köré írt körének sugarát.

3295 Adottak az $\vec{a}(2-2p; x^2)$ és a $\vec{b}(x+1; 5-p)$ vektorok. Adjuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok minden valós x esetén tompaszöget zárjanak be.

3296 Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a_1, a_2, b_1, b_2 valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2},$$

és egyenlőség akkor áll fenn, ha létezik olyan $\lambda \geq 0$ valós szám, hogy $a_1 = \lambda\cdot b_1$ és $a_2 = \lambda\cdot b_2$ (Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség).

3297 Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket (a, b valós számok):

a) $12a + 5b \leq 13\cdot\sqrt{a^2+b^2}$;

b) $\sqrt{7a+1} + \sqrt{7b+1} \leq 3\cdot\sqrt{2}$, ha $a+b=1$ $(7a+1\geq 0,\ 7b+1\geq 0)$.

3298 Adjuk meg $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$ minimumát, ha $a+b=7$ (a, b pozitívak).

A szinusztétel

3299 Egy háromszög oldalainak hossza a, b és c. A velük szemben levő belső szögek rendre α, β és γ. Töltsük ki a következő táblázatot.

a	b	c	α	β	γ
5 cm				45°	62°
		9 m	12°	74°	
	4 dm		51°		73°

3300 Egy háromszög oldalainak hossza a, b és c. A velük szemben levő belső szögek rendre α, β és γ. Töltsük ki a következő táblázatot.

a	b	c	α	β	γ
9 cm	5 cm		70°		
	12 m	8 m		102°	
18 dm		120 cm	65°		

3301 Egy háromszög két oldala 10 cm, illetve 6 cm hosszú. Mekkora lehet a háromszög harmadik oldala, illetve mekkorák lehetnek a szögei, ha a 6 cm-es oldallal szemben levő belső szög

a) 30°; *b)* 20°?

3302 Legyen egy háromszög két oldala a és b, valamint a velük szemben levő szögek α és β. Mekkorák a háromszög oldalai, ha

a) $a + b = 12$ cm, $\alpha = 42{,}8°$ és $\beta = 72{,}5°$;

b) $a + b = 48$ cm, $\alpha = 34°12'$ és $\beta = 91°43'$?

3303 Legyen egy háromszög két oldala a és b, valamint a velük szemben levő szögek α és β. Mekkorák a háromszög oldalai, ha

a) $a - b = 54$ cm, $\alpha = 64{,}5°$ és $\beta = 34{,}8°$;

b) $a - b = 30$ cm, $\alpha = 51°24'$ és $\beta = 13°48'$?

3304 Egy háromszög kerülete 100 cm, két szöge 54°12', illetve 48°24'. Mekkorák a háromszög oldalai?

3305 Egy háromszög szögeinek aránya 2 : 3 : 4, a kerülete 50 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

3306 Egy háromszög oldalainak hossza a, b és c. A velük szemben levő belső szögek rendre α, β és γ. Igaz-e, hogy ha $2a + b = c$, akkor $2 \cdot \sin\alpha + \sin\beta = \sin\gamma$?

3307 Egy paralelogramma egyik átlójának hossza 15 cm. Ez az átló a paralelogramma egyik szögét egy 32°-os és egy 43°-os szögre osztja. Mekkorák a paralelogramma oldalai?

3308 Egy 100 N nagyságú erőt két olyan összetevőre bonthatunk fel, amelyek

a) 45° és 78°; *b)* 51°15' és 13°54'

szöget alkotnak vele. Mekkorák az összetevők?

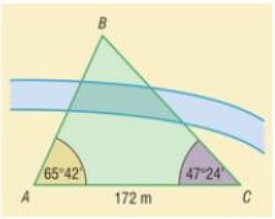
3309 Egy háromszög két szöge 46° és 60°. Mekkora a háromszög területe, ha a 60°-os szöggel szemben levő oldal hossza

a) 8 cm; *b)* 102 cm?

3310 Egy háromszög területe 103 cm^2. Mekkorák a háromszög oldalai, ha két szöge

a) 50° és 82°; *b)* 40°16' és 72°51'?

3311 Egy patak két különböző partján levő A és B ponttal jelölt két épület távolságát szeretnénk meghatározni. Ez a távolság közvetlenül nem mérhető le, de tudjuk a patak egyik partján levő A és C pontok távolságát, valamint teodolittal megmértük a CAB, illetve az ACB szögek nagyságát. Mekkora a két épület távolsága, ha $AC = 172$ m, $CAB\sphericalangle = 65°42'$ és $ACB\sphericalangle = 47°24'$?



3312 Egy paralelogramma egyik szöge 64°. Ezzel a szöggel szemközti 22,4 cm hosszú átló a paralelogramma másik szögét két olyan részre osztja, amelyek különbsége 42°. Számítsuk ki a paralelogramma oldalainak hosszát.

3313 Egy trapéz párhuzamos oldalai 23 cm és 44 cm hosszúak. A 44 cm-es oldalon levő szögei 41° és 57°. Mekkora a trapéz

a) két szára; *b)* területe?

3314 Egy trapéz hosszabbik alapja 3 dm, a szárai 22 cm és 16 cm hosszúak. A hosszabbik alappal a 16 cm-es szár 72°-os szöget zár be.

a) Mekkora a trapéz rövidebbik alapja?

b) Mekkorák a trapéz szögei?

3315 Egy folyó sodrási sebessége $0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A folyó egyik oldaláról a túloldalra szeretnénk átkelni egy, a kiindulási ponttól a folyási iránnyal 50°-os szöget bezáró kikötőbe. A víz sodrása miatt a cél irányától mekkora szöggel kell eltérő irányban eveznünk, hogy éppen a kikötőbe érjünk, ha a csónakunk sebessége állóvízben $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$?



3316 Egy szabályos ötszögbe négyzetet írunk úgy, hogy a négyzet egyik oldala párhuzamos a szabályos ötszög egyik oldalával. Mekkora az ötszög oldala, ha a négyzet területe 625 cm^2?

3317 Igazoljuk, hogy egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha szögeire teljesül az alábbi összefüggés:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\gamma.$$

3318 Egy háromszög két oldalának hossza 23 cm és 10 cm. Mekkora lehet a 10 cm-es oldallal szemben lévő szög, ha

a) két ilyen háromszög van; *b)* egy ilyen háromszög van;

c) nincs a feltételeknek megfelelő háromszög?

3319 Egy egyenes országútból 30° alatt egy egyenes gyalogút ágazik el. A gyalogút mentén két épület egymástól ismeretlen távolságban fekszik. Az elágazástól 300 m-rel tovább haladva az országúton, az épületek felé mutató irányok 110°-os, illetve 80°-os szöget zárnak be a haladási iránnyal.

a) Milyen messze van a két épület egymástól?

b) Az egyik épülettől a másikig egy gyalogos halad $1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel. Jókedvű kutyája $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel elszalad a másik épületig, majd vissza a gazdájához, ott megfordul, és ismét ellohol a másik épületig. Ezt addig folytatja, amíg a gazda el nem éri a másik épületet. Mekkora utat tesz meg a kutya?

A koszinusztétel

3320 Egy háromszög oldalainak hossza a, b és c. A velük szemben levő belső szögek rendre α, β és γ. Töltsük ki a következő táblázatot.

a	b	c	α	β	γ
9 cm	8 cm				70°
	12,4 m	8,3 m	110°		
18 dm		120 cm		69°	

3321 Egy háromszög három oldalának hosszúsága 18 cm, 32 cm és 40 cm. Mekkora a háromszög
a) legnagyobb; *b)* legkisebb szöge?

3322 Egy falióra kismutatója 10 cm, nagymutatója 14 cm hosszú. Milyen távol van egymástól a két mutató végpontja 10 órakor?

3323 Egy paralelogramma két oldala 49 cm és 63 cm hosszú. Az általuk közbezárt szög 72°. Mekkorák a paralelogramma átlói?

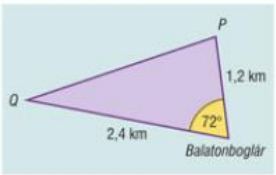
3324 Mekkora egy 18 N és egy 42 N nagyságú, 87°54' szöget bezáró erő eredője?

3325 Egy paralelogramma területe 169,71 cm^2, az átlók hossza 16 cm és 30 cm. Mekkorák a paralelogramma oldalai?

3326 Egy paralelogramma egyik oldala 8 cm hosszú, területe 94 cm^2, egyik szöge 36°.
a) Mekkora a paralelogramma másik oldala?
b) Mekkorák a paralelogramma átlói?

3327 Egy kikötőből egymástól 110°-ban eltérő irányban indul el két hajó. Az egyik sebessége $18\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másiké $48\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Milyen messze lesz a két hajó egymástól 3 óra 40 perc múlva?

3328 A balatoni Kékszalag vitorlásverseny egy egyenes mentén haladó hajóját figyeljük Balatonboglárról. Az ábrán látható P pontból a Q pontba 36 perc alatt ér el a vitorlás. Mekkora ez idő alatt az átlagsebessége, ha P pont tőlünk 1,2 km-re, Q pont pedig 2,4 km-re van, és Balatonboglárról a PQ szakasz 72° szög alatt látszik?



3329 Számítsuk ki az ABC háromszög hiányzó oldalainak hosszát, ha $AB = 10$ cm, és az AB oldallal szemben levő szög 54°, valamint $BC = 3 \cdot AC$.

3330 Egy körvonal egy pontjából kiinduló két húr 42°-os szöget zár be. Mekkora a kör sugara, ha a húrok hossza 12 cm és 45 cm?

3331 Egy biliárdgolyó az asztal egyik falától 10 cm távolságra van. A golyót ellökve, az visszapattan az asztal ezen faláról, majd ugyanettől a faltól 15 cm távolságra megáll. Adjuk meg a golyó két helyzete közötti távolságot, ha a golyó útjának a fallal bezárt szöge 33°.

3332 Egy toronyóra kis- és nagymutatójának két végpontja 8 órakor 120 cm, 9 órakor 100 cm távolságra van egymástól. Adjuk meg a mutatók hosszát centiméterekben mérve tized pontossággal.

3333 Az ABC háromszög területe 24 cm^2, és az A csúcsból húzott szögfelező a BC oldalt 3:4 arányban osztja. Mekkorák a háromszög oldalai, ha az A csúcsnál levő szög 70°-os?



3334 Egy hegyszirten lévő sasfészekről szeretnénk megtudni, hogy milyen magasan van. Ehhez a vízszintes talajon felvettünk két pontot, A-t és B-t, amelyek távolsága 400 m. Az A pontból az S ponttal jelölt fészek 18°, a B pontból 16° emelkedési szög alatt látszik, valamint az ASB szög 82°. Számítsuk ki méter pontossággal, milyen magasan lakik a sas.

3335 Egy háromszög oldalai hosszának mérőszámai egymást követő háromnál nagyobb természetes számok. Lehet-e ez a háromszög tompaszögű?

3336 Bizonyítsuk be a koszinusztétel segítségével, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalaik négyzetösszegével.

3337 Győző és Viktor befektetésként háromszög alakú telket vásárolnak. Tudják, hogy a területe 18 000 m^2, két oldalának hossza 250 m és 180 m. Győző szerint a harmadik oldala nem lehet hosszabb, mint 250 m.

a) Igaza van-e Győzőnek?

b) Biztosan elfér-e a telken egy 50 m sugarú, kör alakú delfinárium?

3338 Adjuk meg egy háromszög belső szögfelezőjének a háromszög belsejébe eső hosszát az oldalak hosszának függvényében.

Trigonometrikus összefüggések alkalmazásai

3339 Egy háromszög oldalainak hossza a, b és c. A velük szemben levő belső szögek rendre α, β és γ. Töltsük ki a következő táblázatot.

a	b	c	α	β	γ
6 cm	9 cm	12 cm			
12,5 dm	6,3 dm	9,8 dm			
51 dm	420 cm	2 m			

3340 Egy paralelogramma egyik oldala 25 cm, egyik átlója 30 cm hosszú. Az adott átló és az adott oldal 22°58' szöget zár be. Milyen hosszú a paralelogramma másik oldala és másik átlója?

3341 Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor 84°-os szöget zár be, valamint $|\vec{a}| = 4{,}8$ cm és $|\vec{b}| = 7{,}2$ cm.

a) Határozzuk meg az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor hosszát.

b) Határozzuk meg az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor hosszát.

c) Mekkora szöget zár be az eredő vektor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal?

3342 Egy háromszög oldalai 12 cm, 13 cm és 17 cm hosszúak. Adjuk meg a háromszög súlyvonalainak a hosszát.

3343 Egy háromszögben két oldal aránya 3:4, az általuk bezárt szög 42°41', a harmadik oldal 8,14 cm. Adjuk meg a háromszög oldalainak és szögeinek nagyságát.

3344 Egy háromszög egyik oldala 12 cm, a vele szemben levő szög 60°, a másik két oldalának különbsége 6 cm. Adjuk meg a háromszög többi oldalának és szögének nagyságát.

3345 Egy paralelogramma két oldalának összege 30 cm, az általuk bezárt szög 60°. Ezzel a szöggel szemben lévő átló hossza 23 cm.

a) Mekkorák a paralelogramma oldalai?

b) Mekkora a paralelogramma másik átlója?

3346 Egy háromszög területe 96 cm^2, egyik oldala 12 cm, egy másik oldalával szemben levő szöge 30°. Mekkora a háromszög többi

a) oldala; *b)* szöge?

3347 Mekkorák lehetnek annak a háromszögnek az oldalai és szögei, amelynek a területe 30,64 cm^2 és két oldala 8 és 10 cm hosszú?

3348 Egy háromszög két oldalának hossza 43 cm és 52 cm, az általuk bezárt szög 38°. Mekkora a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal hossza?

3349 Egy háromszög két oldalának hossza 16 cm és 8 cm, a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal pedig 9 cm hosszú.

a) Mekkora a háromszög harmadik oldalának a hossza?

b) Mekkora az adott súlyvonal és a háromszög harmadik oldalának hajlásszöge?

3350 Egy háromszög alakú kert két oldalának hossza 20 m és 12 m, a közbezárt szöge 118°.

a) Hány méter kerítéssel lehet a kertet körbekeríteni?

b) A két adott oldal közös végpontjából kiindulva egy egyenes utat szeretnénk építeni, amelyik felezi a kert területét. Milyen hosszú lesz ez az út?

3351 Egy háromszög oldalainak aránya 6 : 7 : 10, a köré írt kör sugara 35 cm.

a) Mekkorák a háromszög szögei? *b)* Mekkorák a háromszög oldalai?

c) Mekkora a háromszög beírt körének a sugara?

3352 Egy trapéz egyik átlója 40 cm hosszú. Ez az átló az alapokkal 50°-os, a szárakkal pedig 30°-os és 100°-os szöget zár be.

a) Adjuk meg a trapéz oldalainak hosszát. *b)* Milyen hosszú a trapéz másik átlója?

3353 Egy háromszögben az egyik oldal 30 cm, a hozzá tartozó súlyvonal 18 cm, az oldalon fekvő egyik szög 34°. Mekkorák a háromszög szögei, oldalai?

3354 Egy háromszögben két oldal négyzetösszege 296 cm^2, az általuk bezárt szög 30°. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei, ha területe 35 cm^2?

3355 Egy háromszögben két oldal négyzetösszege 244 dm^2, a harmadik oldal hossza $2 \cdot \sqrt{31}$ dm. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei, ha területe $30 \cdot \sqrt{3}$ dm^2?

3356 A vízszintes terepen levő A és B pontok távolsága közvetlenül nem mérhető le, ezért A pontból kiinduló félegyenesre felvették a P és Q pontokat úgy, hogy $AP = 200$ m, $AQ = 600$ m legyen. Ekkor méréssel megállapították, hogy $APB\sphericalangle = 130°$, $AQB\sphericalangle = 100°$. Mekkora az A és B pontok távolsága?

3357 Egy hegy tetején álló épület, az épület lábától egyenletesen lejtő úton mért 24 m távolságból 35°, a lejtőn 28 m-rel lejjebb haladva 19° szög alatt látszik.

a) Milyen magas a hegy tetején álló épület?

b) Mekkora a lejtő hajlásszöge?

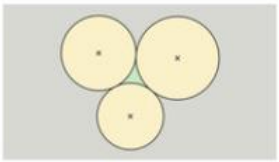
3358 Egy 12 m magas vadászlesből látjuk, hogy egy nyúl egy egyenes mentén fut a tőle 50 méter távolságra lévő rekettyésbe 8 $\frac{m}{s}$ sebességgel, utána egy róka 10 $\frac{m}{s}$ sebességgel. A két állat távolságát a lesből 35° szögben, a rókát 28°, a nyulat 42° depressziószög alatt látjuk. Utoléri-e a róka a nyulat a rekettyésig?

3359 Egy trapéz alakú telket egyik átlója két olyan háromszögre bont, amelyek közül az egyik egy szabályos háromszög. A szabályos és a másik háromszög területének aránya ebben a sorrendben 5 : 3. Mekkorák a trapéz oldalai és szögei, ha területe 1000 m^2?

3360 Az ABC derékszögű háromszög A csúcsánál lévő hegyesszöge 30°, az AB átfogója 20 egység hosszú. A D pont a háromszög köré írt körének a C csúcsot nem tartalmazó ívén van, és C-ből az AD szakasz 40° szög alatt látszik. Mekkorák az ADC háromszög

a) szögei; *b)* oldalai?

3361 Egy parkban három egymást páronként kívülről érintő kör alakú virágágyás található. Az ágyások közti területet fűmaggal vetik be. Hány gramm fűmagra van szükség, ha 1 m^2-re 8 dkg fűmag kell, és a virágágyások sugarai 8 m, 9 m és 10 m?



3362 Egy húrnégyszög oldalai rendre 40 cm, 52 cm, 68 cm és 60 cm. Mekkorák a szögei?

3363 Egy háromszög oldalainak hossza a, b és c, a velük szemben levő belső szögek rendre α, β és γ. A háromszög oldalai és szögei között fennáll az alábbi összefüggés:

$$\cos\beta + \cos\gamma = \frac{b+c}{a}.$$

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű.

Összegzési képletek

3364 Írjuk fel α szög szögfüggvényeivel a következő kifejezéseket:

a) $\sin(180° + \alpha)$, $\cos(180° + \alpha)$; *b)* $\sin(90° + \alpha)$, $\cos(90° + \alpha)$;

c) $\sin(45° - \alpha)$, $\cos(45° - \alpha)$; *d)* $\sin(240° + \alpha)$, $\cos(240° + \alpha)$;

e) $\sin(150° - \alpha)$, $\cos(150° - \alpha)$.

3365 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékeit zsebszámológép használata nélkül:

a) $\sin 36° \cdot \cos 24° + \cos 36° \cdot \sin 24°$; *b)* $\sin 96° \cdot \cos 36° - \cos 96° \cdot \sin 36°$;

c) $\cos 125° \cdot \cos 25° - \sin 125° \cdot \sin 25°$; *d)* $\cos 104° \cdot \cos 44° + \sin 104° \cdot \sin 44°$.

3366 Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket az összegzési képletek segítségével:

a) $\cos(150° + \alpha) + \cos(60° - \alpha) - \sin(30° + \alpha) - \sin(120° - \alpha)$;

b) $\sin(45° + \alpha) - \cos(30° - \alpha) - \cos(45° - \alpha) + \sin(60° + \alpha)$;

c) $\sin^2(\beta + \alpha) - \sin^2(\beta - \alpha)$, $\cos^2(\beta + \alpha) - \cos^2(\beta - \alpha)$;

d) $\dfrac{\sin^2(30° + \alpha) - \sin^2(30° - \alpha)}{\cos^2(30° + \alpha) - \cos^2(30° - \alpha)}$, ahol $\cos^2(30° + \alpha) - \cos^2(30° - \alpha) \neq 0$.

3367 Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét:

a) $\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos\beta$;

b) $\cos\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin\beta$;

c) $\sin\alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos\beta$;

d) $\cos\alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) - \sin\alpha \cdot \cos(\alpha - \beta) = -\sin\beta$.

3368 Számítsuk ki a következő szögek szinuszának, koszinuszának pontos értékét:

a) 15°; *b)* 75°; *c)* 105°; *d)* 165°; *e)* 345°.

3369 Adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\sin 105° - \sin 15°$;

b) $\sin 105° + \sin 15°$;

c) $\cos 105° - \cos 15°$;

d) $\cos 105° + \cos 15°$.

3370 Számítsuk ki közelítő értékek használata nélkül $\operatorname{tg} 40° \cdot \cos 10° + \sin 10°$ értékét.

3371 Egy háromszög két szögének a számtani közepe éppen a harmadik szögével egyenlő. Mekkorák a háromszög szögei, ha szinuszaik összege $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$?

3372 Egy szabályos háromszög oldalait merőlegesen vetítjük egy egyenesre. Adjuk meg a merőleges vetületek négyzetösszegének maximumát és minimumát, ha a háromszög oldala 10 cm hosszú.

3373 Adjuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin x + \cos x$ függvény minimumát és maximumát.

3374 A 20 cm átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek a kerülete maximális?

3375 Adjuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ függvény minimumát és maximumát!

3376 Az a és b valós számokra teljesül, hogy $a^2 + b^2 = 1$. Adjuk meg az $a^2 + ab$ kifejezés maximumát és minimumát.

3377 Egy háromszög szögei α, β és γ. Mit állíthatunk a háromszög oldalairól, ha $2 \cdot \cos\gamma = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$?

3378 Igazoljuk, hogy egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha hegyesszögeire fennáll a következő összefüggés:

$$\sin\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \cos\beta.$$

Az összegzési képletek alkalmazásai

3379 Igazoljuk, hogy a következő egyenlőségek fennállnak minden olyan valós x esetén, amelyekre az egyenlőség jobb, illetve bal oldala is értelmezve van:

a) $2 \cdot \sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x = \sin 2x$;

b) $2 \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x$;

c) $\frac{\sin 2x}{\sin^2 x} = 2 \cdot \operatorname{ctg} x$;

d) $\frac{\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$;

e) $\cos 2x = \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x}$;

f) $\operatorname{ctg} x - \sin 2x = \operatorname{ctg} x \cdot \cos 2x$;

g) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$;

h) $4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \sin 4x$;

i) $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = |\sin x|$;

j) $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = |\cos x|$;

k) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$;

l) $2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin 2x$;

m) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{\sin 3x}{4 \cdot \sin x}$.

3380 Írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket az x lehetséges értékeinél:

a) $\dfrac{\sin 2x}{2\cdot\cos x}$;

b) $2\cdot\sin^2 x+\cos 2x$;

c) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$;

d) $\dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$;

e) $\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\cos 2x}$;

f) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\sin 2x$;

g) $\dfrac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\sin^2 2x}$;

h) $\dfrac{\sin 3x+\sin x}{2\cdot\cos x\cdot\sin 2x}$;

i) $\dfrac{\cos 3x-\cos x}{2\cdot\sin x\cdot\sin 2x}$.

3381 Számítsuk ki a következő szögek tangensének, kotangensének pontos értékét:

a) 15°; *b)* 75°.

3382 Igazoljuk, hogy a következő egyenlőségek fennállnak minden olyan valós x esetén, amelyekre az egyenlőség jobb, illetve bal oldala is értelmezve van:

a) $\operatorname{tg}^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;

b) $\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$;

c) $\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg} x}-\dfrac{1}{1-\operatorname{ctg} x}=\operatorname{tg} 2x$;

d) $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=2\cdot\operatorname{ctg} x$;

e) $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=1$.

3383 Írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket az x lehetséges értékeinél:

a) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$;

b) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\dfrac{2}{\cos 2x}$;

c) $\operatorname{tg}\left(45°+\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$.

3384 Számítsuk ki közelítő értékek használata nélkül, mivel egyenlő

a) $\sin^4\dfrac{13\pi}{12}-\cos^4\dfrac{23\pi}{12}$;

b) $\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°$.

3385 Adott a következő két kifejezés:

$$A=\log_2 0{,}5^{\sin x} \quad \text{és} \quad B=\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Adjuk meg

a) A; *b)* B; *c)* $A+B$; *d)* $A\cdot B$ szélsőértékeit.

3386 Bizonyítsuk be, hogy

$$\cos 12°\cdot\cos 24°\cdot\cos 36°\cdot\cos 48°\cdot\cos 60°\cdot\cos 72°\cdot\cos 84°=\frac{1}{2^7}.$$

3387 Igazoljuk, hogy

a) $\operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{3\cdot\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}$, ahol $1-3\cdot\operatorname{tg}^2\alpha \neq 0$ és $\alpha \neq \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{3}\cdot k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$;

b) $\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ = 3$.

3388 Egy háromszög két szögének aránya 1:2, a velük szemben levő oldalak hossza 6,4 cm és 9,3 cm. Mekkorák a háromszög szögei, és mekkora a háromszög harmadik oldala?

3389 Adott két párhuzamos egyenes, és közte egy C pont, amelynek a két párhuzamostól mért távolsága 5 cm és 10 cm. Az ABC derékszögű háromszögben C-nél van a derékszög, és az A csúcsa az egyik, B csúcsa a másik egyenesen van. Adjuk meg ezen derékszögű háromszögek közül azt, amelyiknek legkisebb a területe.

3390 Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben igaz, hogy

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

(A háromszög oldalai a szokásos jelölés szerint a, b és c, és a velük szemben lévő szögek rendre α, β és γ.)

3391 Szögei szerint milyen az a háromszög, amelyre igaz, hogy:

a) $\dfrac{a}{b} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}$;

b) $\sin\gamma = \dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$;

c) $\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma = -1$?

(A háromszög oldalai a szokásos jelölés szerint a, b és c, és a velük szemben lévő szögek rendre α, β és γ.)

Trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek

3392 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sin x = 0{,}5$;
b) $2\cdot\sin x = -\sqrt{2}$;
c) $\sin x = 0{,}9243$;
d) $\cos x = -0{,}5$;
e) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
f) $\cos x = 0{,}5403$;
g) $\cos x = -0{,}8011$;
h) $\operatorname{tg}x = -1$;
i) $3\cdot\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$;
j) $\operatorname{tg}x = 14{,}1014$;
k) $\operatorname{ctg}x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
l) $\operatorname{ctg}x = 1{,}0734$.

3393 Mely valós számokra igazak a következő egyenlőségek?

a) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
b) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -0{,}5$;
c) $2\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) = \sqrt{2}$;
d) $\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$;
e) $3\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$;
f) $\operatorname{tg}\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$;
g) $\operatorname{ctg}\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$;
h) $\operatorname{ctg}\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

3394 Határozzuk meg a következő egyenletek megoldásait a valós számok halmazán:

a) $2 \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; *b)* $2 \cdot |\sin 2x| = 1$; *c)* $\sin^2\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$;

d) $3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; *e)* $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 1 = 0$; *f)* $\operatorname{tg}^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 0$.

3395 Adjuk meg a következő egyenletek valós megoldásait:

a) $\sin 3x = \sin 2x$; *b)* $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; *c)* $\cos\frac{x}{2} = \cos 4x$;

d) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; *e)* $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} x$; *f)* $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \operatorname{ctg} x$.

3396 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sin 5x = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; *b)* $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$; *c)* $\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

d) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = -\cos(5x + \pi)$; *e)* $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$; *f)* $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg} x$.

3397 Határozzuk meg a következő egyenletek megoldásait a valós számok halmazán:

a) $\sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x$; *b)* $\cos x = -3 \cdot \sin x$;

c) $5 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - 4 \cdot \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; *d)* $3 \cdot \sin^2 x = \cos^2 x$.

3398 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\cos 4x = -\cos 2x$; *b)* $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$.

3399 Adjuk meg a következő egyenletek valós megoldásait a $[0; 2\pi]$ intervallumon:

a) $2 \cdot \sin^2 x + 11 \cdot \sin x - 6 = 0$; *b)* $2 \cdot \cos^2 x = 5 \cdot \cos x + 3$;

c) $2 \cdot \sin^2 x + \sqrt{3} \cdot \sin x - 3 = 0$; *d)* $\operatorname{tg}^2 x - 4 \cdot \operatorname{tg} x + 3 = 0$.

3400 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $2 \cdot \sin x = 3 \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \sin^2 x$; *b)* $\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$;

c) $2 \cdot \operatorname{tg} x = \cos x$; *d)* $\frac{2}{\cos^2 x} = 1 + 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x$;

e) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{6}$; *f)* $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2$;

g) $2 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$; *h)* $2 \cdot \sin^2 x = \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x$.

3401 Adjuk meg a következő egyenletek valós megoldásait:

a) $2 \cdot \sin x = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x$; *b)* $3 \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

c) $\frac{\sin x + 2 \cdot \cos x}{3} = 0$; *d)* $\sqrt{3} \cdot \sin x = |\cos x|$.

3402 Adjuk meg a következő egyenletek pozitív valós megoldásait:

a) $\sin x + 2 \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x}$; *b)* $\sin x - \cos x + 2 \cdot \operatorname{tg} x = 2$.

3403 Van-e a következő egyenleteknek valós megoldása?

a) $3 \cdot \sin x + 4 \cdot \cos x = 8$; *b)* $2^{\sin^2 x} = \cos x$.

3404 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = (1 + \sqrt{3}) \cdot \sin x$; *b)* $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

c) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x$; *d)* $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} x$.

3405 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x = \sqrt{3}$; *b)* $4 \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x = 1$.

3406 Adjuk meg a $\sin(\pi \cdot \cos x) = \cos(\pi \cdot \sin x)$ egyenlet megoldásait.

3407 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sin^2 x - \cos 2x = 2 - \sin 2x$; *b)* $\sin^2 x + (\sqrt{3} + 1) \cdot \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cdot \cos^2 x = 0$;

c) $3 \cdot \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 2$; *d)* $12 \cdot \sin^4 x + \sin^2 2x = \cos^4 x$;

e) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$; *f)* $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2 \cdot \sqrt{2}$;

g) $\sin 4x + \sqrt{3} \cdot \cos 4x = 2 \cdot \sin 3x$; *h)* $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 16 \cdot \cos 2x$;

i) $(\sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x) \cdot \sin 3x = 2$; *j)* $2 \cdot \sin 2x = 5 \cdot \operatorname{tg} x + 5 \cdot \operatorname{ctg} x$.

3408 Oldjuk meg a következő egyenleteket a $[0; 2\pi]$ intervallumon:

a) $\sin 2x - \sin x = \cos 2x - \cos x$; *b)* $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

3409 Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 - \sin|x|$; *b)* $\sqrt{3} \cdot \pi \cdot \operatorname{ctg} x = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| - \left|x + \frac{\pi}{2}\right|$.

3410 Mely valós számok elégítik ki a következő egyenleteket?

a) $16^{\operatorname{tg}^2 x} - 4^{\frac{1}{\cos^2 x}} = 192$; *b)* $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$.

3411 Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1.$$

3412 Mely valós p paraméter esetén van a következő egyenletnek megoldása?

$$\sin^2 x - 2 \cdot (p + 1) \cdot \sin x + 4p = 0.$$

3413 Hány megoldása van a következő egyenletnek a $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon, ha m valós paraméter?

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x + 3m^2 = 4m \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x).$$

3414 Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \sqrt{3} \cdot \sin y \end{array}\right\}$; *b)* $\left.\begin{array}{l} \sin x + \cos y = 0 \\ \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} \end{array}\right\}$; *c)* $\left.\begin{array}{l} 3^{\cos 2x + \cos 2y} = 1 \\ 9^{\cos x \cdot \cos y} = 3 \end{array}\right\}$.

3415 Mely x, y valós számok elégítik ki a következő egyenleteket:

a) $x^2 + 2x \cdot \sin xy + 1 = 0$; *b)* $x + \frac{1}{x} = 2 \cdot \cos y$?

3416 Egy kör 120°-os középponti szögét egy félegyenessel két részre osztottunk úgy, hogy a 120°-os szöghöz tartozó húrt a félegyenes 1:2 arányú részekre osztotta . Mekkora a két részszög nagysága?

3417 A Manchester United veterán játékosa, Ryan Giggs szögletrugáshoz készül. Mekkora utat kell megtennie a pálya hozzá legközelebb eső sarkáig, ha a pálya egy olyan pontjában tartózkodik, amelyből a pálya 68 méteres oldala 150°-os, a 105 méteres oldala 90°-os szögben látszik?

Trigonometrikus egyenlőtlenségek

3418 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\sin x > 0$; *b)* $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$; *c)* $\cos x \geq \frac{1}{2}$;

d) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; *e)* $\sin x < -\frac{1}{2}$; *f)* $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

g) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$; *h)* $\operatorname{tg} x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$; *i)* $\operatorname{ctg} x \leq -1$.

3419 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$; *b)* $2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$; *c)* $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} \geq 0$;

d) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} > 0$; *e)* $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \leq 0$; *f)* $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < 1$;

g) $\cos^2 x \geq 1$; *h)* $2 \cdot \sin x \geq \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

3420 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\operatorname{tg}^2 x \geq 1$; *b)* $\sin^4 x < \frac{\pi}{3}$; *c)* $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x > 2$;

d) $2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \cos x \leq 2$; *e)* $\cos^2 x - \sin^2 x < \cos x$.

3421 Adjuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát:

a) $\log_{\frac{1}{\pi}}(2 \cdot \cos x - \sqrt{3})$; *b)* $\sqrt{\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}}$; *c)* $\sqrt{\lg(\sin x)}$;

d) $\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} - 1}$.

3422 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\cos^4 x - \sin^4 x \geq \frac{1}{2}$; *b)* $\sin 2x < \sin x$; *c)* $\sin x < \sqrt{3} \cdot \cos x$;

d) $\frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} > 0$.

3423 Adjuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát:

a) $\sqrt{\log_2(4 \cdot \sin x \cdot \cos x + 1)}$; *b)* $\log_\pi(\sin x + \cos x + 1)$.

3424 A p valós paraméter mely értékeire lesz a következő egyenletnek két különböző valós megoldása?

$$2 \cdot \sin 2p \cdot x^2 - 4 \cdot \cos p \cdot x + \sqrt{3} = 0.$$

3425 Igazoljuk, ha egy háromszög szögei α, β és γ, akkor igaz, hogy

a) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$; *b)* $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \le \frac{1}{8}$.

Vegyes feladatok

3426 Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalainak hossza 1 egység. Számítsuk ki a következő skaláris szorzatok értékét:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$; *b)* $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EC}$; *c)* $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}\right) \cdot \overrightarrow{DC}$;

d) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \cdot \overrightarrow{DC}$.

3427 Milyen helyzetű egymáshoz képest az a két egységvektor, amelynek skaláris szorzata

a) 0; *b)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $-0{,}5$?

3428 Egy paralelogramma átlói 12 cm és 20 cm hosszúak, az általuk bezárt szög 68°. Mekkorák a paralelogramma oldalai?

3429 Szögeit tekintve milyen az a háromszög, amelyikben a szokásos jelöléssel

a) $a = 35$ dm, $b = 480$ cm és $c = 62$ dm; *b)* $a = 22$ cm, $b = 15$ cm és $\gamma = 13°$?

3430 A görög abc Δ (delta) nagybetűjét felírtuk egy táblára. A betűt jelképező háromszög egyik oldala 8 cm hosszú, a rajta levő két szög 60° és 80°. Mekkora a háromszög másik két oldala?

3431 Háromszög alakú kertünket be szeretnénk keríteni dróthálóval. Két oldalának hossza 15 m és 20 m, valamint az általuk bezárt szög 76,41°. Hány négyzetméter dróthálóra lesz szükségünk, ha azt akarjuk, hogy a kerítés 185 cm magas legyen?

3432 Egy tompaszögű háromszög két oldalának hossza 30 cm és 52 cm. Mekkorák a háromszög szögei, ha a területe 400 cm^2?

3433 Egy hegyesszögű háromszög egyik oldala 21 cm, a másik két oldalának aránya 4 : 5. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei, ha ezen két oldal által bezárt szög 60°?

3434 Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sin x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; *b)* $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x - 2 \cdot \sin x = 0$; *c)* $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 3x$.

3435 Adjuk meg a következő függvények zérushelyeit:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$; *b)* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

3436 A valós számok mely halmazán értelmezhetők a következő kifejezések:

a) $\sqrt{2 \cdot \cos x - 1}$; *b)* $\log_3(\sin x - 1)$; *c)* $\sqrt[6]{\operatorname{tg} x - 1}$?

3437 A 10 egység oldalú $ABCD$ négyzet köré írt kör egy tetszőleges pontja P. Számítsuk ki a következő skaláris szorzatok értékét:

a) $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD})$; *b)* $(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})\cdot(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PD})$.

3438 Adjunk meg az $\vec{a}$ vektorra merőleges 7 egység hosszú vektort, ha

a) $\vec{a}(-3;4)$; *b)* $\vec{a}(-5;12)$.

3439 Adjuk meg a következő kifejezések értékeit, ha $\operatorname{tg}x=\frac{3}{4}$:

a) $\sin x\cdot\cos x$; *b)* $\dfrac{1}{\sin^2 x+\operatorname{ctg}x}$.

3440 Egy paralelogramma egyik szöge 68°. Ezzel a szöggel szemközti 20 cm hosszú átló a paralelogramma másik szögét két olyan részre osztja, amelyek aránya 1:3. Számítsuk ki a paralelogramma oldalainak hosszát.

3441 Egy háromszög alakú terítőt Kati a 18 cm-es oldalának egyik csúcsán, Erzsi ezen oldal másik csúcsán áthaladó egyenessel szeretné két egyenlő területű részre szétvágni. Mekkora a terítő másik két oldalának hossza, ha ehhez Katinak 21 cm, Erzsinek 15 cm hosszúságú vágásra lenne szüksége?

3442 Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai $AB=15$ dm és $CD=8$ dm, szárai $BC=8$ dm és $AD=6$ dm hosszúak.

a) Mekkorák a trapéz szögei? *b)* Mekkora a trapéz területe?

3443 Egy háromszög 78°-os szögének szögfelezője a szemközti oldalt egy 24 cm-es és egy 36 cm-es részre osztja.

a) Mekkorák a háromszög oldalai?

b) Mekkorák a háromszög szögei?

c) Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

d) Mekkora a háromszög köré írt körének sugara?

3444 Egy 400 m magas hegycsúcsról két tengeri kikötő 80°12' szög alatt látszik. Mekkora a két kikötő távolsága, ha azok a hegycsúcsról 8°14', illetve 10°42' depresszió szög alatt látszanak? (A távolságot méterben adjuk meg egészekre kerekítve!)

3445 Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $2\cdot\cos^2 x=5\cdot\sin x-1$; *b)* $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x=\frac{8}{3}$;

c) $\cos^2 x+\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}+\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{6}$; *d)* $\cos x+\frac{1}{\cos x}=-\frac{5}{2}$;

e) $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin x}$; *f)* $\sin^3 x-\sin^2 x=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.

3446 Hol értelmezhetők az alábbi kifejezések?

a) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1-2\cdot\cos^2 x}}$; *b)* $\log_{\sin x}(2\cdot\cos x-1)$.

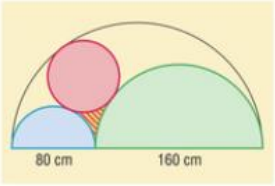
3447 Ha az $\vec{a}+3\cdot\vec{b}$ vektor merőleges a $7\cdot\vec{a}-5\cdot\vec{b}$ vektorra, továbbá az $\vec{a}-4\cdot\vec{b}$ vektor merőleges a $7\cdot\vec{a}-2\cdot\vec{b}$ vektorra, akkor mekkora szöget zár be az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor?

3448 Adjuk meg a^2+b^2 minimumát, ha $2a+3b=9$.

3449 Egy szimmetriát nem kedvelő középkori építész az ábrán látható gótikus ablakot készítette.

a) Mekkora a három félkört érintő kör sugara, ha a nagy félkör átmérőjére írt két kisebb félkör átmérője 80, illetve 160 cm?

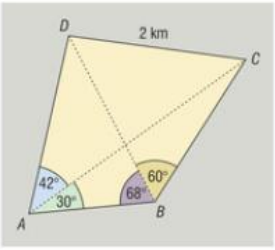
b) Hány cm^2 az ábrán látható vonalkázott területet?



3450 Az A és B tereppontok távolságát közvetlenül nem tudjuk leméri. Tudjuk, hogy CD távolság 2 km, valamint meg tudtuk mérni a következő szögeket:

$DAC\sphericalangle = 42°$, $DBC\sphericalangle = 60°$, $CAB\sphericalangle = 30°$, $DBA\sphericalangle = 68°$.

Mekkora az AB távolság, ha A, B, C és D pontok az ábrán látható módon egy síkban vannak?



3451 Egy háromszög egyik oldala 2 egységgel nagyobb, másik oldala 2 egységgel kisebb, mint a harmadik oldala. A háromszög területe 24 területegység. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

3452 Adjuk meg α szög szögfüggvényeinek pontos értékét α kiszámítása nélkül, ha $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$.

3453 Adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét az x szög kiszámítása nélkül, ha $\operatorname{tg} x = 2$.

a) $\dfrac{1+\sin 2x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$;

b) $\dfrac{1-\sin^4 x - \cos^4 x}{\cos^4 x}$.

3454 Szögei szerint milyen az a háromszög, amelyben:

a) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$;

b) $\cos^2 2\alpha - \cos^2 2\beta = \sin^2 2\alpha - \sin^2 2\beta$?

3455 Egy háromszög szögei tangensének aránya 2 : 3 : 4. Adjuk meg a háromszög oldalainak arányát.

3456 Mely valós számokra igaz, hogy $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$?

3457 Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sin x - \cos x = \sin x \cdot \cos 2x$;

b) $\sin\left(2x + \dfrac{5\pi}{2}\right) - 3 \cdot \cos\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right) = 1 + 2 \cdot \sin x$.

3458 Adjuk meg az alábbi kifejezés minimális és maximális értékét:

$$\cos^2 x \cdot \sin^4 x + \cos^4 x \cdot \sin^2 x.$$

3459 A következő egyenletnek mely konvex α szögekre van két valós gyöke:

$$(2 \cdot \cos\alpha + 1) \cdot x^2 - 4x + 4 \cdot \cos\alpha - 2 = 0.$$



11.4. FÜGGVÉNYEK

Az exponenciális és logaritmusfüggvény

3460 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett következő függvények grafikonját ugyanabban a koordináta-rendszerben.

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x+1}$, $h(x) = 2^x + 1$;

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$.

3461 Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját. Határozzuk meg az értelmezési tartományukat, értékkészletüket és tengelymetszeteiket.

a) $f(x) = 4^{x-1}$;

b) $g(x) = 3^x - 3$;

c) $h(x) = 2^{x+3} - 2$.

3462 Tekintsük a következő függvényt:

$$f\colon x \mapsto \log_3(x-2) + 3 \quad (x > 2).$$

Határozzuk meg az $f(11) + f(3)$ értékét.

3463 Fejezzük ki az $f(x) = 2^x$ függvény esetén az $f(a+1) - f(a-1)$ helyettesítési értékét, ha $a \in \mathbb{R}$.

3464 Toljuk el az $f(x) = 2^x$ hozzárendelési szabállyal értelmezett függvény grafikonját a $(-3; -2)$ vektorral.

a) Írjuk fel az így kapott függvény hozzárendelési szabályát.

b) Hogyan változik ekkor az értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely?

3465 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto 2^{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $x \mapsto 3^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $x \mapsto 9^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $x \mapsto 4^{\frac{x-2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$;

e) $x \mapsto 2^{-x+2}$, $x \in \mathbb{R}$;

f) $x \mapsto \log_2 2x$, $x \in \mathbb{R}^+$;

g) $x \mapsto \log_2(x-4)$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 4$;

h) $x \mapsto \log_2 4 \cdot (x-1)$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$.

3466 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $]1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x-1)$;

b) $]-1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = -2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 1$;

c) $]-2; +\infty[\to \mathbb{R}$, $h(x) = \log_2(4x+8) - \log_2 8$;

d) $]1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $k(x) = 4 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x-1}$.

3467 Átalakítások után ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto \left(\sqrt[3]{3}\right)^{3-3x}$;

b) $x \mapsto \frac{2}{2^x}$;

c) $x \mapsto \frac{-3}{2^{-x}}$;

d) $x \mapsto \sqrt{2^{2x-2}} - 2$;

e) $x \mapsto \frac{4}{4^{x-1}}$;

f) $x \mapsto 3^{|2-x|}$;

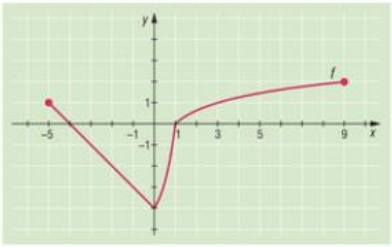
g) $x \mapsto 2^{1-x} + \frac{3}{2^x}$;

h) $x \mapsto \frac{1}{4} \cdot 2^{x+6} + 3$;

i) $x \mapsto 16^{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$;

j) $x \mapsto 1{,}5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$.

3468 Az alábbi ábrán $[-5; 9]$-on értelmezett f függvény grafikonja egy egyenes, egy exponenciális és egy logaritmusfüggvény íveiből tevődik össze, balról jobbra haladva az ábrán.



a) Adjuk meg az f függvényt az alábbi módon:

$$f: [-5; 9] \mapsto \mathbb{R};$$

$$f(x) = \begin{cases} \ldots, & \text{ha} \quad -5 \le x < 0, \\ \ldots, & \text{ha} \quad 0 \le x < 1, \\ \ldots, & \text{ha} \quad 1 \le x \le 9. \end{cases}$$

b) Határozzuk meg a függvény értékkészletét.

c) Határozzuk meg, hol negatív a függvény.

d) Milyen x-re teljesül az $f(x) \le 1$ egyenlőtlenség?

e) Hol veszi fel a függvény a 0 értéket?

3469 A megfelelő azonosságok alkalmazásával alakítsuk át a függvényt értelmező kifejezést, majd ábrázoljuk a függvény grafikonját:

a) $x \mapsto 2^{\frac{x^2-4}{x-2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$;

b) $x \mapsto 1 - 3^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $x \mapsto \dfrac{1}{4^{-\frac{x}{2}}}$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $x \mapsto \log_2 4x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$;

e) $x \mapsto \log_{0,5} 2x$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$;

f) $x \mapsto \log_{0,5}(x-2)^2$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$.

3470 Adjuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát, majd ábrázoljuk és jellemezzük a függvény grafikonját:

a) $x \mapsto 2 \cdot \log_2 x$;

b) $x \mapsto 2 \cdot \log_2(x-1)$;

c) $x \mapsto \log_2(x^2 - 2x + 1)$;

d) $x \mapsto 2 \cdot \log_2 |1 - x|$.

3471 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját. Jellemezzük a függvényeket a következő szempontok alapján: zérushelyek, monotonitás.

a) $f(x) = \begin{cases} \log_2(x+2), & \text{ha} \quad -2 < x \le 2, \\ 2^{x-1}, & \text{ha} \quad 2 < x; \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 3^{-x+1}, & \text{ha} \quad x \le 1, \\ 2x - x^2, & \text{ha} \quad x > 1; \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{ha} \quad x \ge 0, \\ 4^{-2x}, & \text{ha} \quad x < 0; \end{cases}$

d) $i(x) = \left| \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{x}{4} \right|$;

e) $j(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha} \quad x \le 1, \\ \log_2 x + 1, & \text{ha} \quad x > 1; \end{cases}$

f) $k(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{ha} \quad |x| \le 1, \\ 1 + \log_{\frac{1}{2}} |x|, & \text{ha} \quad |x| > 1; \end{cases}$

g) $l(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x|, & \text{ha} \quad x < 2, \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2} - 1, & \text{ha} \quad x \ge 2. \end{cases}$



3472 Ábrázoljuk az alábbi kifejezéssel megadott függvények grafikonját. Adjuk meg értelmezési tartományukat.

a) $f(x) = \log_2(x^2 + x - 6) - \log_2(x - 2)$; *b)* $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4) - 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x+2}$;

c) $h(x) = \lg x - \log_{0,1}\frac{1}{x}$.

Egyenletek és függvények

3473 Oldjuk meg függvények felhasználásával a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $9^{x+1} = 3$; *b)* $4^{-x} = 16$; *c)* $3^x = 2^x$;

d) $6^{x+1} = 2^{x+1} + 2^{x+2}$; *e)* $2^{x+3} = 0{,}5$; *f)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 9$;

g) $3^{1-x} = 3 - 2x$.

3474 Oldjuk meg a valós számok halmazán függvények felhasználásával:

a) $\log_2(x+1) = 1$; *b)* $\log_3(x-2) = 0$; *c)* $\log_2(x+3) = 3 - x$;

d) $\log_3(x-1) = 12 - x$.

3475 Készítsünk grafikus ábrát a következő egyenletekhez. Állapítsuk meg, hány gyöke van az adott egyenleteknek.

a) $x^2 - 5 + \log_2 x = 0$; *b)* $2^x - 2 - 2x = -1 - x^2$; *c)* $\log_4 x = 1 - x^2$.

3476 Oldjuk meg függvények segítségével a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $2^{x+2} > 2^{4-x}$; *b)* $5^{x+1} > 5^x + 4$; *c)* $\log_5(3x-1) < 1$;

d) $3^{x-2} \geq 9$; *e)* $\log_3(1-x) \geq 2$; *f)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq 1$;

g) $\log_2|x| > 2$; *h)* $2^{|x|} < 2$.

3477 Ábrázoljuk a következő két egyenlőtlenség megoldáshalmazát:

(1) $2^{x+3} \geq 8$, (2) $|2^x - 4| < 4$.

Az első egyenlőtlenség megoldásai legyenek az A halmaz, a második egyenlőtlenség megoldásai pedig a B halmaz elemei. Adjuk meg

a) $A \cap B$; *b)* $A \cup B$; *c)* $A \setminus B$ elemeit.

3478 Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán (használjuk fel a függvények tulajdonságait):

a) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{4x+6}{x} \geq 0$; *b)* $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$; *c)* $x^2 \cdot 5^x - 5^{x+2} < 0$.

3479 Oldjuk meg függvénygrafikonok felhasználásával a valós számok halmazán:

a) $2^x = \frac{15}{4} \cdot x + 1$; *b)* $2^x = x^2$; *c)* $\log_{\frac{1}{2}} x = x + 0{,}5$;

d) $\log_2 x = 3 - x$; *e)* $2^{x-2} = 5 - x$; *f)* $3^x = \frac{3}{x}$;

g) $\log_2(2-x) = x - 1$; *h)* $\log_3 x = \frac{3}{x}$; *i)* $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{x}{3}$.



3480 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket:

a) $3^x + 3x - 6 \geq 0$; *b)* $\frac{1}{2} \cdot \log_2 x^4 + x - 4 < 0$.

3481 Függvénygrafikonok segítségével oldjuk meg a valós számok halmazán:

a) $x = 3^{x-2}$; *b)* $2^x = 3 - x$; *c)* $3^{x+1} = 3 - 2x^2$;

d) $3^x = 2x + 1$; *e)* $2^{x+2} = -\frac{2}{x}$; *f)* $4 \cdot 2^{x+4} - 3 = 5$.

3482 A következő logaritmikus egyenleteket függvénygrafikonok segítségével oldjuk meg a valós számok halmazán:

a) $\lg x = 1 - x$; *b)* $\log_2(x + 2) + 1 = -2x + 7$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

3483 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x-6} > 2^{x^2-x-6}$; *b)* $2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 2^x - 9 \cdot 3^x = 18$;

c) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) > \log_3(2 - x)$; *d)* $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.

3484 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

a) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \frac{x+1}{x-1} \geq 0$; *b)* $\log_{0,5} \log_5(x^2 - 4) > 0$;

c) $\log_{\frac{1}{5}} \left(\log_2 \frac{x}{1+x}\right) > 0$.

Trigonometrikus függvények

3485 Döntsük el, melyik állítás igaz, melyik hamis:

a) ha $\alpha \in]-\pi; 0[$, akkor $\sin\alpha < 0$; *b)* ha $\alpha \in]-\pi; 0[$, akkor $\cos\alpha \geq 0$;

c) ha $\alpha \in]-\pi; 0[$, akkor $\sin\alpha > \cos\alpha$;

d) ha $\alpha, \beta \in]-\pi; 0[$ és $\alpha < \beta$, akkor $\sin\alpha < \sin\beta$;

e) ha $\alpha, \beta \in]-\pi; 0[$ és $\alpha < \beta$, akkor $\cos\alpha > \cos\beta$.

3486 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto \sin(x + \pi) - 1$, $x \in \mathbb{R}$; *b)* $x \mapsto 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$; *d)* $x \mapsto \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $0 < x < \pi$;

e) $x \mapsto 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $-\pi < x < \pi$; *f)* $x \mapsto \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$.



3487 Hozzárendelési szabályuk átalakítása után ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto \cos(-x) + \cos x$;

b) $x \mapsto \sin(-x) + \sin x$;

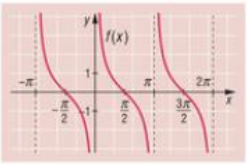
c) $x \mapsto \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

d) $x \mapsto \sin x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

e) $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x$.

3488 Értelmezzük az f függvényt a következő hozzárendelési szabállyal: $f(x) = \operatorname{tg} 2x$. Határozzuk meg az $f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ értékét.

3489 A tangensfüggvény grafikonján végrehajtott függvénytranszformációk után az ábrán látható grafikont kaptuk. Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát, majd határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:



a) $-3 \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3 \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot f\left(\frac{\pi}{6}\right)$;

b) $\dfrac{2 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3 \cdot f\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 6 \cdot f\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$;

c) $3 \cdot \left[f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] - 2 \cdot f\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 4 \cdot f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

3490 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos x}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

b) $x \mapsto \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

c) $x \mapsto \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $-\pi < x < \pi$;

d) $x \mapsto 2 \cdot \cos(x + \pi) + 1$, $-\pi < x < \pi$;

e) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \sin(\pi - x) + 2$, $0 < x < 2\pi$.

3491 Egy harmonikus rezgőmozgást végző test pályáját az alábbi függvény írja le:

$$f\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R},\quad t \mapsto 2 \cdot \sin(4t).$$

a) Határozzuk meg a test kitérését, ha $t = 2$.

b) Mekkora t értéke, ha a kitérés 2?

c) Mennyi ideig tart egy teljes rezgés?

d) Ábrázoljuk a test pályáját.

3492 *a)* Adjuk meg a $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \pi$ helyeken a következő függvény értékeit:

$$f(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Ábrázoljuk a függvény grafikonját a $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$-on.

c) Jellemezzük a függvényt értékkészlete, zérushelye, menete szempontjából, az adott intervallumon.

3493 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $f(x) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = 1 - 2 \cdot \cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $h(x) = 2 \cdot \cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.

3494 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját. Jellemezzük a függvényeket a következő szempontok szerint: monotonitás, szélsőértékek.

a) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x$, $0 \le x \le 2\pi$;

b) $x \mapsto \cos x - \sin x$, $|x| \le \pi$;

c) $x \mapsto \sin 2x - \cos 2x$, $|x| \le \pi$;

d) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$.

3495 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$, $0 \le x \le 2\pi$;

b) $g(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2 \cdot \sin x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

c) $h(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

d) $k(x) = 4 \cdot (\cos^3 x \cdot \sin x - \sin^3 x \cdot \cos x)$, $|x| \le \pi$.

3496 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto |\sin x|$, $-2\pi \le x \le 2\pi$;

b) $x \mapsto |\sin x| - \sin|x|$, $-2\pi \le x \le 2\pi$;

c) $x \mapsto |\sin x| \cdot \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$.

Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek (kiegészítő anyag)

3497 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket a függvények tulajdonságainak felhasználásával:

a) $2 \cdot \sin x = -2$;

b) $2 \cdot \sin x = -1$;

c) $2 \cdot \sin x = \sqrt{3}$;

d) $2 \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x = 5$;

e) $\sin x = \cos x$.



3498 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket a függvények tulajdonságainak felhasználásával:

a) $\cos x < 1$; *b)* $\cos x < \sin x$; *c)* $|\operatorname{tg} x| \geq 1$; *d)* $\operatorname{tg} x > \sin x$.

3499 Függvénygrafikonok segítségével oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $3 \cdot \sin x < -5$; *b)* $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; *d)* $|\sin x| > 0{,}5$.

3500 Függvénygrafikonok segítségével oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $\sin x < \frac{1}{2}$; *b)* $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\cos^2 x \leq \frac{1}{4}$.

3501 Függvénygrafikonok segítségével oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $(2 \cdot \cos x - 1) \cdot (\cos x + 3) > 0$; *b)* $2 \cdot \sin^2 x + \sin x - 1 > 0$;

c) $4 \cdot \cos^2 x + 2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \cos x - \sqrt{6} \leq 0$; *d)* $\sin^2 x - 9 \cdot \sin x - 4 > \cos^2 x$;

e) $2 \cdot \sin^3 x + 3 \cdot \sin^2 x + \sin x > 0$.

3502 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket a függvények tulajdonságainak felhasználásával:

a) $\operatorname{tg}^2 x \geq \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x$; *b)* $\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg} x = 0$; *c)* $\operatorname{tg}^3 x \geq 1$;

d) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$; *e)* $|\operatorname{tg} x| \leq \sqrt{3}$.

3503 Hány megoldása van az egyenletnek a valós számok halmazán? Függvénygrafikonokkal oldjuk meg:

a) $\cos x = 2x$; *b)* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; *c)* $\sin x = -x$;

d) $\cos x = \frac{|x|}{2}$; *e)* $\cos 2x = x^2$.

3504 Oldjuk meg a való számok halmazán az alábbi egyenleteket.

a) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$; *b)* $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$;

c) $(\sin x + \cos x) \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$; *d)* $(\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x) \cdot \sin 4x = 2$.

3505 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

a) $\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{2} - (\sin x + \cos x)} > 0$; *b)* $(1 - \operatorname{tg}^2 x) \cdot (1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x) \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x) > 0$;

c) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 0{,}8$.

3506 Határozzuk meg a következő függvények legnagyobb és legkisebb értékét:

a) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = 2 \cdot \sin^2 x + 4 \cdot \cos^2 x + 6 \cdot \sin x \cdot \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $h(x) = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 + 2}$, $x \in \mathbb{R}$.

3507 Az $n > 0$ egész mely értékeire igaz, hogy a következő függvény 3π szerint periodikus:

$$f(x) = \cos nx \cdot \sin\frac{5}{n} \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3508 Határozzuk meg az alábbi egyenlet legkisebb pozitív gyökét:

$$\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin 3x + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos 3x = 0{,}5.$$

3509 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\cos x \cdot (2 - \sin^2 x) = (2 + \sin^2 3x) \cdot \sqrt{1 + \sin^2 3x}.$$

3510 Az a paraméter mely pozitív értékére igaz, hogy az alábbi egyenletnek 2001 gyöke van a valós számok körében:

$$\sin\left(\pi \cdot \sqrt{x \cdot (a - x)}\right) = 1?$$

3511 Határozzuk meg a következő függvény értékkészletét:

$$f(x) = \sin\left(\sqrt{\pi^2 - x^2} - \frac{\pi}{3}\right), \quad |x| \le \pi.$$

3512 Határozzuk meg az alábbi függvény értékkészletét:

$$g(x) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5 \cdot \sin x - 3}{\sin x + 1}, \quad x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}.$$

Vegyes feladatok

3513 Az $f(x) = a^x$; $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ függvényre teljesül, hogy $f(3) = 27$.

a) Adjuk meg az a értékét, majd ábrázoljuk a függvény grafikonját.

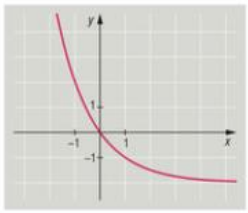
b) Mely x értékeknél veszi fel a függvény az $\frac{1}{3}$, valamint a $\sqrt{3}$ értéket?

3514 Ábrázoljuk az $f(x) = 3 \cdot 2^{x+1}$ hozzárendelési szabállyal a valós számok halmazán értelmezett függvény grafikonját.

Töltsük ki az értéktáblázatot.

x		-1		3
$f(x)$			$\frac{3}{2}$	

3515 Az ábrán látható grafikont az $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ hozzárendelési szabállyal értelmezett függvény grafikonjából függvénytranszformációk után kaptuk. Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát.





3516 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket a két oldal közös értelmezési tartományán:

a) $6^x \le 2^x$; *b)* $\frac{1}{3} \ge \log_3 x$; *c)* $|\log_2 x| \ge 1$;

d) $2 \cdot \lg x > 1$; *e)* $2 \cdot \log_2 x \le 1$; *f)* $|\sin x| - \frac{\sqrt{2}}{2} \le 0$.

3517 Átalakítások után ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

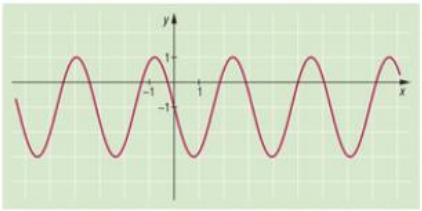
a) $f(x) = \log_3 9^x + 1$, $(x \in \mathbb{R})$; *b)* $g(x) = 2 - 3^{\log_3(2x-1)}$, $\left(x > \frac{1}{2}\right)$;

c) $h(x) = \log_2(x^2 - x - 6) - \log_2(x + 2)$, $(x > 3)$; *d)* $i(x) = 1 - \frac{\log_3 x}{2}$, $(x > 0)$;

e) $j(x) = \log_5(3x - 3) + 1 + \log_5 \frac{1}{3}$, $(x > 1)$; *f)* $k(x) = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 + 6x + 9}$, $(x \ne -3)$;

g) $l(x) = \log_2(2x - 2) + \log_2 0{,}5 - 2$, $(x > 1)$.

3518 Az ábrán látható grafikont az $f(x) = \sin x$ hozzárendelési szabállyal értelmezett függvény grafikonjából függvénytranszformációk után kaptuk. Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát (a függvény periódusa π).



3519 Egy $g(x) = \log_a x + b$, $x \in]0; 8]$ függvény görbéje átmegy az $(1; -1)$ ponton, és az x tengelyt a 2 pontban metszi.

a) Adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát.

b) Ábrázoljuk a függvény grafikonját.

c) Határozzuk meg az értékkészletét az adott értelmezési tartományon.

d) Illeszkednek-e az $A(5; 1)$, $B(2; 0)$, illetve $C(16; 3)$ pontok az adott függvény görbéjére?

3520 Adott három exponenciális függvény: $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$. A függvények hozzárendelési szabálya:

$$x \mapsto a^x, \quad x \in \mathbb{R}, \ a > 0.$$

a) Határozzuk meg az egyes esetekben a értékét és a függvények hozzárendelési szabályát, ha

$$f(-1) = 2 \ \wedge \ g(2) = 16 \ \wedge \ h(2) = 25.$$

b) Ábrázoljuk a függvények grafikonját.

c) Adjuk meg a függvények értékkészletét a $[-2; 1]$-on.

d) Peti véleménye szerint $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(-1)$. Teljesül-e ez az egyenlőség?

3521 Adjuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az adott pont a megadott függvény grafikonjára illeszkedjen:

a) $A(2; 9)$, $x \mapsto p^x$, $x \in \mathbb{R}$; *b)* $B(0{,}5; 1)$, $x \mapsto \log_p x$, $x \in \mathbb{R}^+$;

c) $C(0; 1)$, $x \mapsto \sin(x + p)$, $|x| < \pi$; *d)* $D(-1; 0)$, $x \mapsto \log_2 p \cdot |x|$, $x \ne 0$, $x \in \mathbb{R}$.

3522 Mely valós számokra értelmezhetőek a következő kifejezések?

a) $\dfrac{\sqrt{4-x}}{\lg(x-3)}$; *b)* $\sqrt{\lg(x^2+4x-5)}$.

3523 Ábrázoljuk az $x \mapsto |\sin x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$ függvény grafikonját, és a kapott grafikon segítségével oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$|\sin x - 1| \geq 1.$$

3524 Ábrázoljuk egy derékszögű koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját:

$$x \mapsto |\sin x|,\ x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad x \mapsto |\cos x|,\ x \in \mathbb{R},$$

és az így kapott grafikonok felhasználásával oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget:

$$|\sin x| \geq |\cos x|.$$

3525 Határozzuk meg a következő függvények legnagyobb értékét:

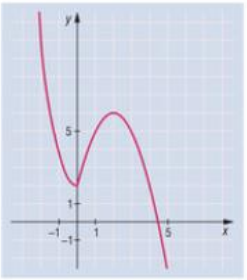
a) $x \mapsto 2^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$; *b)* $x \mapsto 3 \cdot 3^{|\cos x|}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $x \mapsto 5^{1-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$.

3526 Az f függvényt az alábbi hozzárendelési szabállyal értelmezzük:

$$f(x) = \begin{cases} a^x + b, & \text{ha } x < 0, \\ p \cdot (x-u)^2 + v, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

A függvény grafikonja az ábrán látható. Adjuk meg az a, b, p, u, v paraméterek értékét.



3527 Géza 500 000 Ft értékű megtakarítását bankban szeretné elhelyezni. A bank az elhelyezett betét után évente p százalékos kamatot fizet. Jelölje $f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) a számlanyitást követő n teljes év eltelte után Géza számláján elérhető megtakarítás összegét.

a) Írjuk fel az f függvény hozzárendelési szabályát.

b) Határozzuk meg, hogy legalább hány teljes évet kell várnia Gézának ahhoz, hogy a számláján elhelyezett összeg 1,5-szer annyit érjen, ha a p kamatláb értéke 5%.

3528 Egy országban 10 évente tartanak népszámlálást. Az adatok elemzése során kiderült, hogy az ország népessége 1980. január 1. és 2000. január 1. között 10 millióról 12,5 millióra növekedett.

a) Hány százalékos ebben az országban az éves természetes szaporodás mértéke, ha a vizsgált 20 éves időszakban exponenciális ütemű növekedést feltételezünk?

b) Mekkora volt a népesség az országban 1990. január 1-én? A választ ezerre kerekítve adjuk meg.

3529 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $5^x + 12^x = 13^x$; *b)* $4^x + (x-7) \cdot 2^x = x - 6$; *c)* $3^{x^2} + x^2 = 3^x + x$.

3530 Oldjuk meg a valós számok halmazán, a függvény tulajdonságait felhasználva:

a) $\log_{0,5}\log_5(x^2 - 11) > 0$; *b)* $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;

c) $(0,4)^{\lg^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \lg x}$.



3531 Az α és x mely értékeire teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\log_2 x + \log_x 2 + 2 \cdot \cos\alpha \le 0.$$

3532 Határozzuk meg a következő függvény legnagyobb értékét:

$$f(x) = \log_2^4 x + 12 \cdot \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x}, \quad 1 \le x \le 64.$$

3533 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$x^{3-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > 1.$$

3534 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\log_{|x|}(x+2) < 2.$$

3535 Igazoljuk, hogy ha $0 < x < \pi$, akkor:

$$\frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} > x.$$

3536 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

a) $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1$;

b) $1 < 3^{|x^2 - x|} < 9$;

c) $\log_{x^2}(3 - 2x) > 1$.

3537 Igazoljuk, hogy az alábbi függvény nem periodikus:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x + \sin\sqrt{2}x.$$

3538 Igazoljuk, hogy a következő függvény periodikus:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\sqrt{3}x - \cos\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

3539 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$3^x - 7 = 4^{\frac{1}{x}}.$$

3540 Igazoljuk, hogy ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor:

a) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} > 1 - x$;

b) $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$.

3541 Igazoljuk, hogy ha $0 \le \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, akkor:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \quad \text{és} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$$

3542 Számítsuk ki a 3541. feladatban igazolt azonosságok felhasználásával a következő kifejezések pontos értékét:

$$\cos\frac{\pi}{8}, \quad \sin\frac{\pi}{8}, \quad \cos\frac{\pi}{16}, \quad \sin\frac{\pi}{16}.$$

3543 Igazoljuk a következő azonosságot:

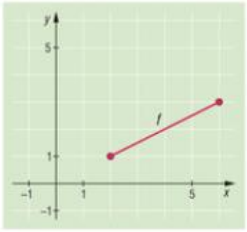
$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{16}=\frac{\sin x}{16\cdot\sin\frac{x}{16}},\quad \text{ha } \sin\frac{x}{16}\neq 0.$$

3544 Határozzuk meg, hogy a következő függvény az értelmezési tartományában hol pozitív:

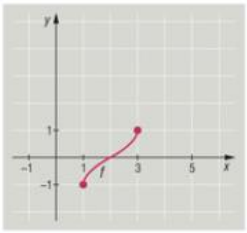
$$f\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sin 3x\cdot\sin 4x-\sin x\cdot\sin 2x.$$

Inverz függvények

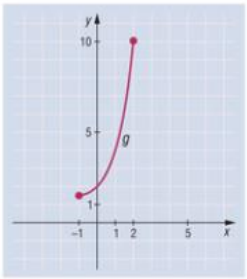
3545 Írjuk fel az alábbi ábrán grafikonjával adott f függvény értelmezési tartományát, értékkészletét és hozzárendelési szabályát. Tükrözzük az f függvény grafikonját az $x\mapsto x$ függvény grafikonjára. Írjuk fel a tükrözés után kapott függvény értelmezési tartományát, értékkészletét és hozzárendelési szabályát.



3546 Az alábbi ábrán grafikonjával adtunk meg egy függvényt. Adjuk meg a függvény inverzének értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyeit.



3547 Az alábbi ábrán megadtuk a g függvény grafikonját. Vizsgáljuk meg a g függvény inverz függvényét az alábbi szempontok alapján: értelmezési tartomány, értékkészlet, monotonitás, zérushelyek.



3548 Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az adott függvény, valamint inverz függvényének grafikonját. Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát, hozzárendelési szabályát.

a) $f\colon [-1;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+2;$ *b)* $g\colon [-2;+\infty[\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{x+2}.$



3549 Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az adott függvény, valamint inverz függvényének grafikonját. Adjuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát, hozzárendelési szabályát.

a) $f\colon\ ]0;5] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+1}{x}$;

b) $g\colon\ [0;+\infty[\to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 + 1$.

3550 Tekintsük a következő függvényt:

$$f\colon\ \mathbb{R} \to]0;+\infty[,\ x \mapsto 2^x.$$

Adjuk meg annak a függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonját úgy kapjuk, hogy az f függvény grafikonját tükrözzük az

a) x-tengelyre;

b) y-tengelyre;

c) az $y = x$ egyenletű egyenesre;

d) az $y = -x$ egyenletű egyenesre.

3551 Tekintsük a következő függvényt:

$$f\colon\ ]1;+\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \log_2 \sqrt{x-1}.$$

Adjuk meg az f függvény inverz függvényének értelmezési tartományát, értékkészletét, hozzárendelési szabályát. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az f függvény, valamint inverz függvényének grafikonját.

3552 Tekintsük a $[3;+\infty[$ halmazon az $f(x) = x^2 - 6x + 4$ hozzárendelési szabállyal értelmezett függvényt. Jelölje az f függvény inverzét g. Számítsuk ki a $g(4) + f(4)$ összeg értékét!

3553 Értelmezzük a $[0;+\infty[$ intervallumon az f függvényt az $f(x) = x^2 - 4$ hozzárendelési szabállyal. Jelöljük az f függvény inverzét g-vel. Számításokkal igazoljuk, hogy az f függvény értékkészletének bármely y elemére $f(g(y)) = y$ teljesül.

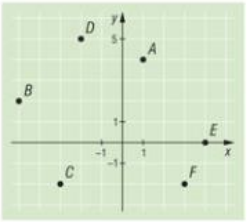
3554 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{x+3} = x^2 - 3.$$

11.5. KOORDINÁTA-GEOMETRIA

Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal (emlékeztető)

3555 Adjuk meg az ábrán látható pontok helyvektorát az **i** és **j** bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Adjuk meg a helyvektorok koordinátáit.



3556 Adottak az $\vec{a}(1; -3)$ és $\vec{b}(-2; 5)$ vektorok. Adjuk meg az alábbi vektorok koordinátáit:

a) $\vec{a} + \vec{b}$; *b)* $\vec{a} - \vec{b}$;

c) $2\vec{a}$; *d)* $3\vec{b}$;

e) $2\vec{a} - 3\vec{b}$; *f)* $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$;

g) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) + (2\vec{a} - 3\vec{b})$; *h)* $2\left(\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}\right)$.

3557 Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(1; 1)$, $B(7; 1)$ és $C(3; 5)$. Írjuk fel az alábbi vektorokat az **i** és **j** bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

a) $\overrightarrow{AB}$; *b)* $\overrightarrow{AC}$; *c)* $\overrightarrow{BC}$; *d)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

3558 Számítsuk ki a következő vektorok hosszát (a és b pozitív valós számok):

a) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$; *b)* $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; *c)* $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; *d)* $-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{5}{2}\mathbf{j}$;

e) $\frac{5}{13}\mathbf{i} - \frac{12}{13}\mathbf{j}$; *f)* $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$; *g)* $\vec{a}(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$; *h)* $\vec{a}(1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$;

i) $\vec{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}; \sqrt{a} - \sqrt{b})$.

3559 Adjuk meg a következő vektorok abszolút értékét. Milyen közös tulajdonsága van a felsorolt vektoroknak?

a) $\vec{a}(-13; 84)$; *b)* $\vec{b}(65; -72)$; *c)* $\vec{c}(-39; -80)$; *d)* $\vec{d} = 20\mathbf{i} - 21\mathbf{j}$;

e) $\vec{e} = 2(15\mathbf{i} - 8\mathbf{j})$.

3560 Írjuk fel a megadott vektorral egyirányú, egységnyi hosszúságú vektor koordinátáit:

a) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$; *b)* $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; *c)* $-2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$; *d)* $\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$.

3561 Ábrázoljuk a következő helyvektorokat. Forgassuk el $+90°$-kal, illetve $-90°$-kal az origó körül az ábrázolt vektorokat, majd írjuk fel a kapott vektorok koordinátáit.

a) $-3\mathbf{i} + \mathbf{j}$; *b)* $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; *c)* $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.



3562 Adottak az $\vec{a}(2; -1)$ és $\vec{b}(1; 7)$ vektorok. Számítsuk ki az alábbi vektorok skaláris szorzatát:

a) $\vec{a}$ és $\vec{b}$; *b)* $-\vec{a}$ és $\vec{b}$; *c)* $-\vec{a}$ és $-\vec{b}$; *d)* $2\vec{a}$ és $\vec{b}$;

e) $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}-\vec{b}$; *f)* $2\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}+2\vec{b}$.

3563 Az alábbi vektorokról döntsük el, hogy derékszöget, hegyesszöget vagy tompaszöget zárnak-e be egymással. Válaszunkat számításokkal igazoljuk.

a) $\vec{a}(1; 5)$ és $\vec{b}(10; -2)$;

b) $\vec{a}(3; 4)$ és $\vec{b}\left(-4; \frac{7}{2}\right)$;

c) $\vec{a}(2; -5)$ és $\vec{b}\left(15; \frac{13}{2}\right)$;

d) $\vec{a}\left(2; \frac{3}{2}\right)$ és $\vec{b}\left(\frac{15}{2}; -10\right)$.

3564 Bizonyítsuk be, hogy a megadott pontok egy-egy derékszögű háromszög csúcspontjai. Melyik pontnál található a derékszög az egyes esetekben?

a) $A(2; 5)$, $B(-6; -3)$, $C(4; 3)$;

b) $A(4; 3)$, $B(-5; -4)$, $C(-2; 5)$;

c) $A(2008; 2009)$, $B(2011; 2025)$, $C(2015; 2011)$.

3565 Az A pont helyvektora $\vec{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, a B ponté $\vec{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. A C pont helyvektorára teljesül a következő:

$$\vec{c} = 3\vec{b} - 2\vec{a}.$$

a) Számítsuk ki az A, B és C pontok koordinátáit.

b) Igaz-e, hogy a három pont egy egyenesre illeszkedik? Válaszunkat számításokkal igazoljuk.

3566 A derékszögű koordináta-rendszerben egy pont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A megfigyelés kezdetén helyvektorának koordinátái $(-3; 5)$, a következő másodpercben a test a $(-1; 6)$ koordinátájú pontban tartózkodik.

a) Adjuk meg a test sebességvektorának koordinátáit.

b) Melyik pontban lesz a test a megfigyelés kezdetét követő harmadik másodpercben?

c) Mozgása során áthalad-e a test a $(11; 12)$ koordinátájú ponton?

3567 Határozzuk meg α értékét úgy, hogy az $\vec{a}\left(\sqrt{2}+2; \sqrt{2}\right)$ és a $\vec{b}(-1; \alpha)$ koordinátájú vektorok merőlegesek legyenek egymásra.

3568 Az A, B, C és D pontok helyvektorai rendre $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, $7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ és $7\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra.

3569 A koordináta-rendszerben kijelöljük a következő négy pontot: $A(1; 1)$, $B(9; 2)$, $C(11; 7)$ és $D(3; 6)$. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

3570 Hány olyan pont van a koordináta-rendszerben, amely az alábbi pontokkal együtt paralelogrammát alkot: $(-1; -1)$, $(5; 1)$, $(2; 4)$? Adjuk meg az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáit.

3571 Tekintsük a következő 2009 vektort:

$$\vec{v}_1\left(\sqrt{1}; \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\right),\ \vec{v}_2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}; \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right),\ \ldots,\ \vec{v}_{2009}\left(\sqrt{2009}-\sqrt{2008}; \frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2009}}\right).$$

a) Számítsuk ki a $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_{2009}$ vektor koordinátáit.

b) Melyik koordinátatengelyhez van közelebb a fenti összegvektorral megegyező helyvektor végpontja?

Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge. Területszámítási alkalmazások

3572 Számítsuk ki a következő pontok origótól való távolságát:

a) $A(3; 0)$; *b)* $B(0; -5)$; *c)* $C(-3; -4)$; *d)* $D(5; -12)$;

e) $E\left(\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right)$; *f)* $F\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$.

3573 Adjuk meg az A és B pontok távolságának pontos értékét, ha:

a) $A(-3; 2)$ és $B(-3; 5)$; *b)* $A(-1; -6)$ és $B(2; -2)$;

c) $A(2008; 2010)$ és $B(2013; 2022)$; *d)* $A(3; -5)$ és $B(-3; 5)$;

e) $A(1; 1)$ és $B\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$; *f)* $A\left(\sqrt{3}; \sqrt{6}\right)$ és $B\left(\sqrt{2}; -1\right)$;

g) $A\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ és $B\left(3; -\frac{5}{2}\right)$; *h)* $A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ és $B\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

3574 Igazoljuk, hogy az alábbi pontok egy egyenlő szárú háromszög csúcsai:

a) $A(-2; -4)$, $B(5; -3)$, $C(-1; 3)$; *b)* $A(-4; -2)$, $B(1; 1)$, $C(-1; 3)$;

c) $A(-2; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; -3)$.

Van-e a háromszögek között olyan, amelyik derékszögű? Ha igen, akkor melyek?

3575 Az alábbi pontokról számításokkal döntsük el, hogy melyek illeszkednek az $O(-5; -1)$ középpontú, 13 sugarú körre:

a) $(0; 11)$; *b)* $(-17; 4)$; *c)* $(6; -5)$; *d)* $(7; -6)$.

3576 Számítsuk ki az ABC háromszög oldalainak hosszát és kerületét egy tizedes pontossággal, ha

a) $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(0; 3)$; *b)* $A(12; 13)$, $B(1; -8)$, $C(-2; 5)$.

3577 Milyen alakzaton találhatók azok a pontok, amelyek az

a) x tengelytől; *b)* y tengelytől 3 egység távolságra helyezkednek el?

Mit tudunk mondani az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáiról?

3578 Milyen alakzaton találhatók azok a pontok, amelyek a két koordinátatengelytől ugyanakkora távolságra helyezkednek el? Mit tudunk mondani az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáiról?

3579 Számítsuk ki a következő vektorok által bezárt szög nagyságát egy tizedes pontossággal:

a) $\vec{a}(0; 5)$ és $\vec{b}(-3; 0)$; *b)* $\vec{a}(1; 3)$ és $\vec{b}(-6; 2)$;

c) $\vec{a}(-2; 3)$ és $\vec{b}\left(1; -\frac{3}{2}\right)$; *d)* $\vec{a}(7; -2)$ és $\vec{b}(-3; 8)$;

e) $\vec{a}(-1; -5)$ és $\vec{b}(-3; -2)$; *f)* $\vec{a}(-3; 7)$ és $\vec{b}(-2; -1)$.

3580 Számítsuk ki a következő pontok által meghatározott háromszög szögeit és területét:

a) $A(1; 1)$, $B(5; 3)$, $C(2; 7)$; *b)* $A(-4; -5)$, $B(-1; 5)$, $C(3; 1)$;

c) $A(-3; -2)$, $B(4; -3)$, $C(-4; 9)$.

3581 A koordináta-rendszerben egy pontszerű test egyenes pályán mozog. Mozgása során áthaladt a $(-7; 1)$ és a $(3; 2)$ pontokon. Milyen távolságra volt a koordináta-rendszer kezdőpontjától, amikor ahhoz a legközelebb volt?



3582 Számítsuk ki a következő pontok által meghatározott négyszögek területét:

a) (2; 2), (10; 2), (7; 6), (3; 6);

b) (−4; −3), (4; −2), (5; 3), (0; 4);

c) (−3; 1), (2; −2), (3; 2), (−2; 5);

d) (1; −1), (5; −2), (4; −6), (0; −5).

Vizsgáljuk meg, hogy van-e a négyszögek között trapéz, paralelogramma, rombusz, téglalap, négyzet vagy deltoid.

3583 A $P(x; y)$ pont ugyanolyan távolságra van az $A(3; 1)$ ponttól, mint a $B(-2; 5)$ ponttól. Milyen algebrai összefüggés van a P pont x és y koordinátái között?

3584 Bizonyítsuk be, hogy ha a $P(x; y)$ pont az $O(2; -1)$ ponttól 5 egység távolságra található, akkor a P pont koordinátáira teljesül, hogy

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0.$$

3585 Peti háromszög alakú kitűzőt szeretne készíteni kartonból. Tervei megvalósítása érdekében négyzetrácsos kartonból kivágott egy háromszöget. A háromszög csúcsainak koordinátái a négyzetrácsra rajzolt koordináta-rendszerben (melyben az egység 1 cm):

$$A(-3; 5), \quad B(5; 1) \quad \text{és} \quad C(-6; -5).$$

a) Számítsuk ki a kivágott háromszög területét.

b) A kivágott ABC háromszög melyik oldalára állítva lesz a legmagasabb?

c) Mekkora a *b)* feladatban megadott oldalhoz tartozó legnagyobb magasság?

d) Peti az ABC háromszög legnagyobb magasságát három egyenlő részre osztotta, majd az osztópontokon át párhuzamosokat húzott a háromszög megfelelő oldalával; így az ABC háromszöget egy kisebb háromszögre, valamint két trapézra osztotta. A középső részt fehéren hagyta, a kis háromszöget pirosra, a nagyobb trapézt zöldre satírozta. Mekkora területű részt satírozott pirosra, illetve zöldre?

3586 Magyarország 1 : 1 100 000 méretarányú térképén elhelyezünk egy koordináta-rendszert, amelynek tengelyei észak–dél, illetve kelet–nyugat irányúak, a tengelyeken az egységek pedig 1 cm hosszúak. Az így kapott koordináta-rendszerben néhány város koordinátái a következőképpen alakulnak:

Veszprém(−7; 1), Győr(−8; 7), Szeged(8; −7), Debrecen(18; 5).

a) Számítsuk ki, hogy a felsorolt városok páronként hány kilométer távolságra vannak egymástól.

b) Melyik magyarországi városban lehet a koordináta-rendszer kezdőpontja?

3587 Adottak a koordinátasík A és B pontjai, amelyeknek koordinátáira: $A(-3; 2)$ és $B(5; 3)$.

a) Melyek a koordinátái annak az x tengelyre illeszkedő P pontnak, amelyre a $PA^2 + PB^2$ összeg a lehető legkisebb?

b) Mennyi az *a)* feladatban szereplő összeg minimuma?

3588 Egy bútoráruház olyan háromszöglappal rendelkező asztalokat árusít, amelynek oldalait egy-egy körszelet alakú toldalékkal kiegészítve pontosan kör alakú asztalhoz juthatunk. A tervező a gyártónak elküldte a háromszöglap kicsinyített képének koordinátáit: (0; 0), (3; 0), (2; 2) (egy egység hossza a valóságban 50 cm). A számításokat egy tizedes pontossággal elvégezve válaszoljunk a következő kérdésekre.

a) Mekkorák a háromszöglap oldalai a valóságban?

b) Hány centiméter a kerek asztal sugara?

c) Mekkora a magassága az asztal leghosszabb oldalához illeszthető körszelet alakú toldaléknak?

d) Legfeljebb mekkora sugarú kör alakú abrosz helyezhető el a háromszöglapú asztalon, ha az asztalról sehol nem lóghat le?

3589 Béla bácsi egy erdőt örökölt, amely jó közelítéssel nyolcszög alakú. Az 1:5000 méretarányú térképszelvényen elhelyezett derékszögű koordináta-rendszerben az erdőterület csúcsainak koordinátái:

$(0; 0)$, $(8; 1)$, $(13; 3)$, $(14; 5)$, $(8; 10)$, $(0; 9)$, $(-5; 7)$, $(-6; 5)$.

a) Számítsuk ki, hogy hány hektár erdőt örökölt Béla bácsi, ha a koordináta-rendszer egységei 1 cm hosszúak. Az eredményt egész hektárra kerekítve adjuk meg.

b) Rendelkezik-e az erdő valamilyen szimmetriatulajdonsággal? Ha igen, akkor milyennel?

3590 Adott egy AB szakasz, amelynek hossza $2 \cdot R$. Vegyünk fel egy koordináta-rendszert, amelynek x tengelye tartalmazza az AB szakaszt, kezdőpontja pedig egybeesik annak felezőpontjával. Az AB átmérőjű kör egy C pontjának koordinátáira: $C(c_1; c_2)$.

a) Írjuk fel az A és B pontok koordinátáit.

b) Írjuk fel a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok koordinátáit.

c) Számítsuk ki a $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ skaláris szorzat értékét.

d) Melyik nevezetes elemi geometriai tétel állítására következtethetünk a kiszámított skaláris szorzatból? Hogyan?

Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái

3591 Számítsuk ki a szakasz felezőpontjának koordinátáit az alábbi esetekben, ha végpontjainak koordinátái:

a) $(-3; 2)$ és $(5; 4)$;

b) $(1; -5)$ és $(-3; 3)$;

c) $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$ és $\left(-2; \frac{2}{3}\right)$;

d) $\left(1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}\right)$ és $\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{8}}{2}\right)$;

e) $\left((a+b)^2; \frac{1}{a+b}\right)$ és $\left((a-b)^2; \frac{1}{a-b}\right)$, ahol a és b különböző pozitív számok.

3592 Számítsuk ki az A pont koordinátáit, ha ismertek a B pont, valamint az AB szakasz F felezőpontjának koordinátái:

a) $B(2; 2)$ és $F(3; 5)$;

b) $B\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$ és $F\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

c) $B(1; 4)$ és $F(e; f)$, ahol e és f valós számok.

3593 Számítsuk ki a következő, végpontjainak koordinátáival adott szakaszok negyedelőpontjainak koordinátáit:

a) $(2; 2)$ és $(8; 8)$;

b) $(-3; -8)$ és $(9; 10)$.

3594 Az $A(-4; 7)$ pontot tükrözzük az

a) origóra;

b) $(5; -2)$ koordinátájú pontra.

Írjuk fel a tükörkép koordinátáit az egyes esetekben.

3595 Egy szakasz végpontjának koordinátái: $A(2006; 2009)$ és $B(2020; 2001)$. Az A pontot tükrözzük az AB szakasz

a) A-hoz legközelebbi;

b) B-hez legközelebbi negyedelőpontjára.

Írjuk fel a tükörkép koordinátáit az egyes esetekben.



3596 Írjuk fel az AB szakasz harmadolópontjainak koordinátáit, ha

a) $A(3; 2)$ és $B(12; 4)$; *b)* $A(-2; -5)$ és $B(5; -8)$;

c) $A\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right)$ és $B\left(\frac{4}{9}; -4\right)$.

3597 Írjuk fel az AB szakasz B végpontjának koordinátáit, ha ismertek az A pont, valamint az AB szakasz A-hoz közelebbi H harmadolópontjának koordinátái:

a) $A(-6; -2)$ és $H\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$; *b)* $A(-1; 7)$ és $H(1; -1)$.

3598 A térképre helyezett koordináta-rendszerben két pont koordinátái: $A(-3; 1)$ és $B(5; 3)$. Egy kerékpáros a nyílegyenes AB úton állandó sebességgel halad, és 1 óra alatt jut el az A pontból a B pontba. Adjuk meg a koordinátáit annak a pontnak, amelybe a kerékpáros az A pontból elindulva

a) fél óra; *b)* másfél óra; *c)* két óra; *d)* öt óra múlva ér el.

3599 Adottak egy paralelogramma két csúcsának koordinátái: $(-2; -3)$ és $(7; -2)$. Számítsuk ki a hiányzó csúcsok koordinátáit, ha a paralelogramma átlóinak metszéspontja a $(3; 0)$ koordinátájú pont.

3600 Az $ABCD$ paralelogramma két szemközti csúcsának koordinátái: $A(-7; 1)$ és $C(6; 5)$. Írjuk fel a hiányzó csúcsok koordinátáit, ha a paralelogramma egyik átlóvektorának koordinátái: $(9; -2)$.

3601 Egy négyzet két

a) szomszédos; *b)* szemközti

csúcspontjának koordinátái $(-3; 3)$ és $(5; 1)$. Írjuk fel a hiányzó csúcsok, valamint a négyzet középpontjának koordinátáit. Hány megoldása van az egyes feladatoknak?

3602 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-1; -1)$, $B(1; 3)$ és $C(2; -2)$.

a) Számítsuk ki a háromszög oldalfelező pontjainak koordinátáit.

b) Írjuk fel a háromszög oldalvektorainak, valamint középvonal-vektorainak koordinátáit.

c) Igazoljuk, hogy a háromszög bármely oldala párhuzamos a másik két oldal felezőpontját összekötő középvonalával.

3603 Számítsuk ki a háromszög súlypontjának koordinátáit, ha csúcspontjai:

a) $A(-4; -2)$, $B(7; 1)$ és $C(3; 10)$;

b) $A\left(-\sqrt{32}; \sqrt{8}\right)$, $B\left(2 \cdot \sqrt{8}; -\sqrt{18}\right)$ és $C\left(0; \sqrt{2}\right)$;

c) $A\left(\frac{4}{5}; -\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{2}{15}; \frac{1}{4}\right)$ és $C\left(\frac{3}{5}; \frac{5}{6}\right)$.

3604 Számítsuk ki az ABC háromszög A csúcspontjának koordinátáit, ha adott B és C csúcsának, valamint S súlypontjának koordinátái:

a) $B(-2; 5)$, $C(8; 5)$ és $S(2; 4)$; *b)* $B(-3; -4)$, $C(1; 2)$ és $S\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

3605 Alex a koordináta-rendszerben berajzolt egy háromszöget, majd megkereste az oldalak felezőpontjait. Később Barnabás kiradírozta a háromszög csúcspontjait, csak az oldalak felezőpontjai maradtak; ezek koordinátái: $(-4; -2)$, $(7; 1)$ és $(3; 10)$.

a) Számítsuk ki az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög súlypontjának koordinátáit.

b) Számítsuk ki az Alex által berajzolt háromszög csúcspontjainak és súlypontjának koordinátáit.

c) Milyen kapcsolat van a két háromszög súlypontja között? Miért?

3606 Peti a koordináta-rendszerben megszerkesztette az $ABCD$ négyszöget, melynek csúcsai a következő pontok: $A(-2; -5)$, $B(4; -3)$, $C(2; 5)$, $D(-1; 3)$. Ezután tükrözte az $ABCD$ négyszöget a BC oldal felezőpontjára.

a) Mik a koordinátái a tükörképként keletkező négyszög csúcsainak?

b) Bizonyítsuk be, hogy a két négyszög egyesítésével előálló hatszög szemközti oldalai párhuzamosak.

3607 Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(6; 6)$, $B(1; -4)$, $C(-2; 5)$. A háromszöget az $O(-4; -4)$ pontból

a) felére; *b)* harmadára kicsinyítjük.

Írjuk fel a kicsinyített háromszög csúcsainak koordinátáit.

3608 Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(6; 6)$, $B(1; -4)$, $C(-2; 5)$. A háromszögön végrehajtjuk azt a hasonlósági transzformációt, melynek középpontja $O(-4; -4)$, a hasonlóság aránya pedig

a) $\lambda = 2$; *b)* $\lambda = 3$.

Írjuk fel a képháromszög csúcspontjainak koordinátáit.

3609 Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$.

a) Írjuk fel az ABC háromszög oldalfelező pontjainak koordinátáit.

b) Bizonyítsuk be (koordináta-geometriai eszközökkel), hogy a háromszög bármely középvonala párhuzamos a háromszög megfelelő (a középvonal végpontjait nem tartalmazó) oldalával.

c) Igazoljuk, hogy a háromszög középvonala feleolyan hosszú, mint a vele párhuzamos háromszögoldal.

3610 Az $ABCD$ paralelogramma három csúcspontjának koordinátái: $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$.

a) Írjuk fel a D csúcs koordinátáit az A, B, C csúcsok koordinátái segítségével.

b) Bizonyítsuk be (koordináta-geometriai eszközökkel), hogy a paralelogramma bármely középvonala párhuzamos a paralelogramma megfelelő (a középvonal végpontjait nem tartalmazó) oldalával.

c) Igazoljuk, hogy a paralelogramma középvonala ugyanolyan hosszúságú, mint a vele párhuzamos paralelogrammaoldal.

3611 *a)* Soroljunk fel minél több elegendő feltételt arra vonatkozóan, hogy egy négyszög paralelogramma.

b) A felsorolt feltételek teljesülésével igazoljuk, hogy a következő pontok paralelogrammát alkotnak:

$A(2000; 2007)$, $B(2007; 2010)$, $C(2009; 2014)$, $D(2002; 2011)$.

3612 Sík területen négy kiemelkedő tereptárgy figyelhető meg, melyek koordinátái: $A(0; 0)$, $B(12; 3)$, $C(2; 6)$, $D(6; 7)$.

a) Bizonyítsuk be, hogy a tereptárgyak egy trapéz négy csúcsában helyezkednek el.

b) Az A és D tárgyat, valamint a B és C tárgyat egy-egy egyenes út köti össze. Összesen hány kilométer hosszú a két út, ha a koordináta-rendszer egysége 1000 méter?

c) A koordináta-rendszer melyik pontjában metszi egymást a két útszakasz?

3613 A koordináta-rendszerben kijelöljük az $A(-2; -5)$ és $B(5; 8)$ pontokat. Számítsuk ki a P pont koordinátáit, ha az $\frac{AP}{PB}$ tört értéke

a) $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{2}{3}$; *c)* $\frac{4}{5}$.

3614 Írjuk fel az AB szakasz B végpontjának koordinátáit, ha $A(-3; 0)$, továbbá $AP : PB = 2 : 3$ és a P pont koordinátái $(1; -2)$.



3615 Pista bácsi háromszög alakú rétjének csúcspontjai a megfelelően választott koordináta-rendszerben: $A(-11; 2)$, $B(-3; 0)$ és $C(-8; 5)$.

a) Bizonyítsuk be, hogy a rétet határoló utak közül kettő derékszögben metszi egymást.

b) Pista bácsi a rét derékszögű csúcsából olyan ösvény kialakítását tervezi, amelynek pontjai egyenlő távolságra találhatók a rét befogóitól. Számítsuk ki annak a pontnak a koordinátáit, amelyben a tervezett ösvény metszi a rét átfogóját.

c) Mekkora távolságra van a rét oldalaitól az a pont, amely mindhárom határoló úttól ugyanolyan messze van?

d) Számítsuk ki a fenti pont koordinátáit.

3616 Az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD oldalának felezőpontja rendre: $E(-3; 1)$, $F(2; -2)$, $G(3; 2)$.

a) Számítsuk ki az AD oldal felezőpontjának koordinátáit.

b) Milyen négyszöget alkot a négy oldalfelező pont?

3617 Bizonyítsuk be koordináta-geometriai módszerekkel a következő elemi geometriai tételeket.

a) Bármely négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát alkotnak.

b) Bármely négyszög átlóinak felezőpontját összekötő szakasz felezőpontja egybeesik a négyszög oldalfelező pontjai által meghatározott paralelogramma középpontjával.

c) A trapéz szárait összekötő középvonala párhuzamos a trapéz alapjaival, továbbá a középvonal hossza a trapéz alapjai hosszának számtani közepe.

3618 Két kör közül az egyik középpontja az $O(5; 4)$ pont, sugara 3, a másik középpontja a $Q(0; -1)$ pont, sugara 1 egység. Írjuk fel a két kör közös

a) belső; *b)* külső

érintői metszéspontjának koordinátáit.

Az egyenest meghatározó adatok a koordináta-rendszerben

3619 Adjuk meg az egyenes három különböző irányvektorának koordinátáit, ha adott két pontja:

a) $A(-3; 2)$ és $B(3; 2)$;
b) $A(2; 2)$ és $B(2; -1)$;
c) $A(-1; 4)$ és $B(3; 9)$;
d) $A(2; 5)$ és $B(-3; -2)$;
e) $A(-7; 5)$ és $B(2; 1)$;
f) $A(2010; 2020)$ és $B(-2010; 2020)$.

3620 Adott egy egyenes két pontja. Adjuk meg az egyenes egy olyan irányvektorát, amelynek mindkét koordinátája egész szám.

a) $A\left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{2}\right)$ és $B\left(3; -\frac{5}{2}\right)$;
b) $A\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{3}\right)$ és $B\left(-2; \frac{5}{3}\right)$;
c) $A\left(-\sqrt{2}; \sqrt{8}\right)$ és $B\left(\sqrt{32}; -\sqrt{2}\right)$.

3621 Adjuk meg az egyenes egy olyan normálvektorát, amelynek koordinátái egész számok, ha adott az egyenes két pontja:

a) $A(-2; 1)$ és $B(-2; 7)$;
b) $A(7; -3)$ és $B(-2; -3)$;
c) $A(-1; 5)$ és $B(2; -3)$;
d) $A\left(-\frac{5}{7}; \frac{2}{3}\right)$ és $B\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{7}\right)$;
e) $A\left(\sqrt{3}; -\sqrt{12}\right)$ és $B\left(-2 \cdot \sqrt{27}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3622 Számítsuk ki az egyenes irányszögét, valamint ha létezik, akkor iránytangensét, amennyiben két pontja:

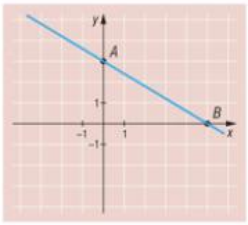
a) $A(0; 4)$ és $B(0; -2)$; *b)* $A(-3; 2)$ és $B(7; 2)$;

c) $A(-3; -3)$ és $B\left(\sqrt{2010}; \sqrt{2010}\right)$; *d)* $A(1; 2)$ és $B(5; 7)$;

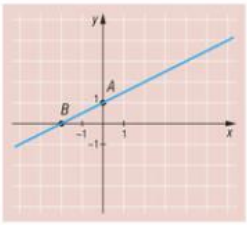
e) $A(-3; 4)$ és $B(2; -1)$.

3623 Adjuk meg az ábrán látható egyenes egy-egy irányvektorának, illetve normálvektorának koordinátáit. Számítsuk ki az egyenes irányszögét, illetve iránytangensét (ha létezik).

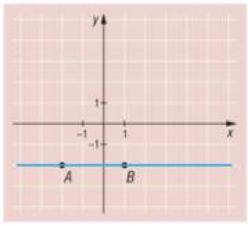
a)



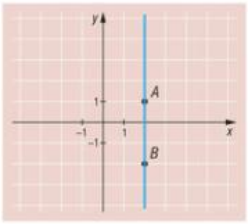
b)



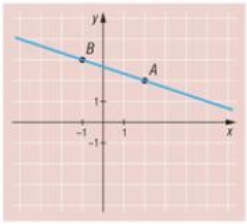
c)



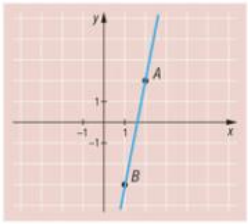
d)



e)



f)



3624 Számítsuk ki az egyenes egy normálvektorának koordinátáit, valamint irányszögét és iránytangensét (ha létezik), amennyiben egy pontja, valamint egy irányvektorának koordinátái:

a) $P(1; 3)$ és $\vec{v}(0; -1)$; *b)* $P(-2; 1)$ és $\vec{v}(1; -1)$; *c)* $P(5; 2)$ és $\vec{v}\left(\sqrt{3}; 0\right)$;

d) $P(-4; -2)$ és $\vec{v}(-2; 1)$; *e)* $P(1; -2)$ és $\vec{v}\left(1; \sqrt{3}\right)$.

Ábrázoljuk az egyeneseket.

3625 Számítsuk ki az egyenes egy irányvektorának koordinátáit, valamint irányszögét és meredekségét (ha létezik), amennyiben egy pontja, valamint egy normálvektorának koordinátái:

a) $P(1; 3)$ és $\vec{n}(0; -1)$; *b)* $P(5; 2)$ és $\vec{n}(3; 0)$; *c)* $P(2; -1)$ és $\vec{n}(1; 1)$;

d) $P(3; 1)$ és $\vec{n}(2; -1)$.

Ábrázoljuk az egyeneseket.

3626 Ábrázoljuk az egyenest, ha adott egy pontja, valamint irányszöge. Adjuk meg az egyenes egy-egy irányvektorának, illetve normálvektorának koordinátáit. Számítsuk ki az egyenes meredekségét (ha létezik).

a) $P(0; 2)$ és $\alpha = 90°$; *b)* $P(3; 2)$ és $\alpha = 30°$; *c)* $P(-2; 5)$ és $\alpha = -45°$;

d) $P(1; -2)$ és $\alpha = -60°$.

3627 Számítsuk ki az egyenes irányszögét, ha meredeksége:

a) 0; *b)* -1; *c)* $\frac{1}{3}$; *d)* $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; *e)* 2010.



3628 Számítsuk ki az egyenes meredekségét, ha irányszöge:

a) 30°; *b)* −45°; *c)* 0°; *d)* 75°; *e)* −60°.

Adjuk meg az egyenesek egy-egy irányvektorának, illetve normálvektorának koordinátáit.

3629 Számítsuk ki az e és f egyenesek iránytangensét, ha adott két pontjuk. Igazoljuk, hogy a két egyenes merőleges egymásra.

a) e: $A(0; 3)$, $B(2; 4)$ és f: $P(1; 6)$, $Q(-1; 10)$;

b) e: $A(-5; -1)$, $B\left(2; \frac{2}{5}\right)$ és f: $P(1; 2)$, $Q(2; -3)$;

c) e: $A(-3; -6)$, $B(2; -1)$ és f: $P(0; 0)$, $Q(-1; 1)$;

d) e: $A\left(1; \frac{4}{3}\right)$, $B\left(3; \frac{8}{3}\right)$ és f: $P(3; -4{,}5)$, $Q(2; -3)$;

3630 Számítsuk ki az e és f egyenesek meredekségét, ha adott egy irányvektoruk koordinátái. Igazoljuk, hogy a két egyenes párhuzamos egymással.

a) $\vec{v}_e(1; 3)$ és $\vec{v}_f(-2; -6)$; *b)* $\vec{v}_e\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ és $\vec{v}_f(-20; 6)$; *c)* $\vec{v}_e\left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$ és $\vec{v}_f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{2}\right)$;

d) $\vec{v}_e(a - b; a + b)$ és $\vec{v}_f\left(b^2 - a^2; -(a + b)^2\right)$, ahol a és b pozitív valós számok.

3631 Az $A(2; 2)$ és a $B(5; 4)$ pontokra illeszkedő egyenes C pontjának abszcisszája (első koordinátája) 2007. Számítsuk ki a C pont ordinátáját (második koordinátáját). Az alábbi pontok közül melyik illeszkedik az AB egyenesre?

a) $P(35; 24)$; *b)* $Q(-13; -8)$; *c)* $R(-16; -9)$.

Válaszunkat számításokkal igazoljuk.

3632 A készülő autópálya tervezésekor egy koordináta-rendszert helyeznek el a térképen, majd egy-egy jellemző tereptárgy koordinátáit leolvassák. Az új útszakaszt nyílegyenesnek tervezik, és összeköti majd a $(-2; -1)$ és $(3; 2)$ koordinátájú pontokat.

a) Áthalad-e a tervezett autópálya a koordináta-rendszer kezdőpontján?

b) Adjuk meg annak az autópálya nyomvonalán található pontnak a koordinátáit, amelynek abszcisszája 1.

c) Az autópálya keresztez egy már meglévő, szintén egyenes utat. Ennek az útnak két pontja $P(8; 5)$, illetve $Q(9; 2)$. Igazoljuk, hogy az autópálya a P pontban fogja keresztezni a másik utat.

d) Mekkora szögben metszi majd egymást a két útszakasz?

3633 Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-1; -2)$, $B(7; 2)$, $C(2; 4)$. Számítsuk ki a háromszög magasságvonalainak irányszögét, illetve amennyiben létezik, úgy a meredekségét.

3634 Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-1; -2)$, $B(7; 2)$, $C(2; 4)$. Számítsuk ki a háromszög súlyvonalait tartalmazó egyenesek egy-egy irányvektorának, illetve normálvektorának koordinátáit.

3635 Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-1; -2)$, $B(7; 2)$, $C(2; 4)$. Mekkora szögben metszi egymást az

a) A csúcsból induló magasságvonal és súlyvonal;

b) A csúcsból induló magasságvonal és a B csúcsból induló súlyvonal?

3636 Az alábbi feladatokban határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az irányvektorukkal adott e és f egyenes merőleges legyen egymásra:

a) $\vec{v}_e(2;1)$ és $\vec{v}_f(5;p)$; *b)* $\vec{v}_e(p;-2)$ és $\vec{v}_f(3;p)$; *c)* $\vec{v}_e(p;1)$ és $\vec{v}_f(p;-8)$.

3637 Mekkora szöget zár be egymással az a két egyenes, amelyek meredeksége 2, illetve -3?

3638 Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-3;2)$, $B(5;3)$ és $C(3;-4)$.

a) Írjuk fel mindhárom oldalegyenes egy-egy irányvektorának koordinátáit.

b) Számítsuk ki az A csúcsnál lévő szögfelező egy irányvektorának koordinátáit.

c) Mekkora az A csúcsnál lévő szögfelező irányszöge?

3639 Bizonyítsuk be, hogy ha két egyenes mindegyike rendelkezik iránytangenssel, és azok értéke m_1, illetve m_2, továbbá a két egyenes nem merőleges egymásra, akkor a két egyenes φ hajlásszögére:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|.$$

Az egyenes egyenletei

3640 Írjuk fel az egyenes egyenletét, ha adottak egy normálvektorának, valamint egy pontjának koordinátái:

a) $\vec{n}(0;2)$ és $P(2;3)$; *b)* $\vec{n}(-3;0)$ és $P(3;-2)$;

c) $\vec{n}(1;1)$ és $P(2;3)$; *d)* $\vec{n}(-2;1)$ és $P(-1;-2)$;

e) $\vec{n}(1;-3)$ és $P(1;5)$; *f)* $\vec{n}(-1;-2)$ és $P(-2;-1)$;

g) $\vec{n}\left(\sqrt{2};-\sqrt{8}\right)$ és $P(-1;-3)$; *h)* $\vec{n}\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$ és $P(2;3)$.

3641 Írjuk fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét, ha

a) $A(0;0)$ és $B(2010;0)$; *b)* $A(-2;-2)$ és $B(-2;5)$;

c) $A(1;3)$ és $B(-1;-3)$; *d)* $A(2;-3)$ és $B(-1;7)$.

3642 Milyen algebrai összefüggés van azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a koordinátái között, amelyek egyenlő távolságra vannak az $A(-3;2)$ és $B(5;-1)$ pontoktól?

3643 Írjuk fel az egyenes egyenletét, ha adottak egy irányvektorának, valamint egy pontjának koordinátái:

a) $\vec{v}\left(0;\sqrt{17}\right)$ és $P(2;5)$; *b)* $\vec{v}(-3;0)$ és $P(2;-5)$;

c) $\vec{v}(1;1)$ és $P(-1;-3)$; *d)* $\vec{v}\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ és $P(-2;-1)$;

e) $\vec{v}(2;-1)$ és $P(-1;4)$; *f)* $\vec{v}(-3;-1)$ és $P(0;0)$;

g) $\vec{v}\left(1+\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$ és $P(1;7)$; *h)* $\vec{v}\left(\log_2 4;\log_2\frac{1}{8}\right)$ és $P(2;5)$.

3644 Írjuk fel az AB egyenes egyenletét, ha

a) $A(0;0)$ és $B(2010;0)$; *b)* $A(-2;-2)$ és $B(-2;5)$;

c) $A(1;3)$ és $B(-1;-3)$; *d)* $A(2;-3)$ és $B(-1;7)$;

e) $A\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right)$ és $B\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{5}\right)$; *f)* $A\left(\sqrt{27};\sqrt{3}\right)$ és $B\left(\sqrt{12};-\sqrt{3}\right)$.



3645 Egy egyenesre illeszkednek-e a megadott pontok? Ha igen, akkor írjuk fel az egyenes egyenletét.

a) $A(-2; 5)$, $B(0; 1)$ és $C(4; -7)$;

b) $A(2005; 2005)$, $B(2007; 2008)$ és $C(2013; 2017)$;

c) $A(3; -3)$, $B(11; 9)$ és $C(-21; -39)$;

d) $A(5; 1)$, $B(-10; 7)$, $C(100; -38)$.

3646 Írjuk fel az A ponton átmenő, a PQ egyenessel párhuzamos, illetve arra merőleges egyenesek egyenletét, ha

a) $A(0; 0)$, $P(1; -3)$ és $Q(2; 1)$;

b) $A(-2; 4)$, $P(7; 1)$ és $Q(-1; 7)$;

c) $A(-3; -2)$, $P(0; 0)$ és $Q(1; 4)$;

d) $A(1; -5)$, $P(-5; 2)$ és $Q(2; 8)$.

3647 Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az A ponton, továbbá párhuzamos az egyenletével adott e egyenessel.

a) $A(1; 1)$ és e: $3x + 2y = 5$;

b) $A(-3; 2)$ és e: $y = 2x - 4$;

c) $A(0; 0)$ és e: $y - x = 5$;

d) $A(-2; -5)$ és e: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

3648 Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az A ponton, továbbá merőleges az egyenletével adott e egyenesre.

a) $A(0; 0)$ és e: $y = x$;

b) $A(-2; 2)$ és e: $-2x + y = 15$;

c) $A(7; 1)$ és e: $y = 3x + 1$;

d) $A(-3; -2)$ és e: $y = -x - 1$.

3649 Írjuk fel a P ponton átmenő, α irányszögű egyenes egyenletét, ha

a) $P(0; 0)$ és $\alpha = 30°$;

b) $P(0; 0)$ és $\alpha = 45°$;

c) $P(-1; 4)$ és $\alpha = -30°$;

d) $P(7; -2)$ és $\alpha = \frac{\pi}{2}$;

e) $P(-3; 5)$ és $\alpha = -\frac{\pi}{3}$;

f) $P(-1; -2)$ és $\alpha = 0°$.

Ábrázoljuk az adott egyeneseket.

3650 Írjuk fel a P pontra illeszkedő, m iránytangensű egyenes egyenletét, ha

a) $P(0; 0)$ és $m = 0$;

b) $P(0; 0)$ és $m = 2$;

c) $P(2; -3)$ és $m = -\frac{1}{3}$;

d) $P(-5; 1)$ és $m = 4$;

e) $P(-2; -1)$ és $m = -2$;

f) $P(1; -4)$ és $m = -\frac{2}{3}$.

Ábrázoljuk az adott egyeneseket.

3651 Írjuk fel az egyenes egyenletének tengelymetszetes alakját, ha az x tengelyt az a abszcisszájú, az y tengelyt pedig a b ordinátájú pontban metszi:

a) $a = 2$ és $b = 3$;

b) $a = -6$ és $b = 4$;

c) $a = -1$ és $b = -3$;

d) $a = \frac{3}{2}$ és $b = -\frac{5}{2}$.

Ábrázoljuk az egyeneseket a koordináta-rendszerben.

3652 Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben az egyenletükkel megadott egyeneseket. Adjuk meg az egyenesek egy-egy normál- és irányvektorának koordinátáit, meredekségét (amennyiben létezik), illetve irányszögét.

a) $x = -3$;

b) $y = -3$,

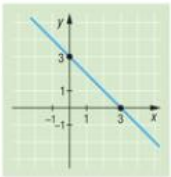
c) $x + y = -3$;

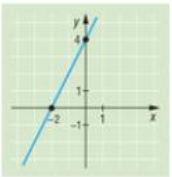
d) $2x - y = 4$;

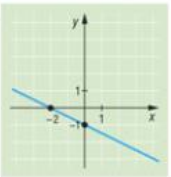
e) $\sqrt{12}x - 2y = 6$;

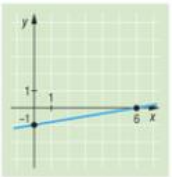
f) $-x + 3y = -6$.

3653 Írjuk fel az ábrákon látható egyenesek egyenletét. Minden esetben adjuk meg az egyenes egy-egy normál- és irányvektorának koordinátáit, meredekségét (ha létezik), illetve irányszögét.

a) 

b) 

c) 

d) 

3654 Ábrázoljuk a $2x + y = 5$ egyenletű egyenest a koordináta-rendszerben. Írjuk fel az egyenes P pontra vonatkozó tükörképének egyenletét, ha

a) $P(2; 1)$; *b)* $P(-1; 3)$; *c)* $P(0; 0)$.

3655 Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2; 3)$, $B(2; -2)$ és $C(6; 2)$. Az alábbi, egyenletükkel adott egyenesekről döntsük el, hogy oldalegyenesei-e az ABC háromszögnek.

a) $y = x - 4$; *b)* $4x = 3y + 11$; *c)* $-5x + 3y = -16$; *d)* $x + y = 1$;

e) $x + 8y = 22$; *f)* $5x + 4y = 2$; *g)* $\frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 1$.

3656 Egy négyszög négy oldalegyenesének egyenlete:

$$x = 1, \quad y = 3, \quad x = 4 \quad \text{és} \quad y = -2.$$

a) Ábrázoljuk az egyeneseket közös koordináta-rendszerben. Adjuk meg a négyszög csúcsainak koordinátáit.

b) Milyen négyszöget fognak közre a megadott egyenesek?

c) A négyszöget az origó körül $+90°$-kal elforgatjuk. Számítsuk ki az elforgatott négyszög csúcsainak koordinátáit.

d) Írjuk fel az elforgatott négyszög oldalegyeneseinek egyenletét.

e) Számítsuk ki az eredeti, valamint az elforgatott négyszög közös részének, valamint egyesítésének kerületét és területét.

3657 Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2; 2)$, $B(3; -3)$ és $C(5; 3)$.

a) Írjuk fel a háromszög oldalegyeneseinek egyenletét.

b) Írjuk fel a háromszög magasságvonalainak egyenletét.

c) Számításokkal igazoljuk, hogy az $M(2{,}5; 0{,}5)$ koordinátájú pont illeszkedik a háromszög minden magasságvonalára.

3658 Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2; 2)$, $B(3; -3)$ és $C(5; 3)$.

a) Írjuk fel a háromszög oldalfelező merőlegeseinek egyenletét.

b) Számításokkal igazoljuk, hogy az $O\left(\frac{7}{4}; \frac{3}{4}\right)$ koordinátájú pont illeszkedik a háromszög minden oldalfelező merőlegesére.

c) Bizonyítsuk be, hogy az O pont a háromszög mindhárom csúcsától ugyanakkora távolságra található.

d) A háromszög melyik nevezetes pontjával esik egybe az O pont?

3659 Egy háromszög oldalfelező pontjainak koordinátái: $(0; 2)$, $(4; 1)$, valamint $(1; 0)$. Írjuk fel a háromszög oldalegyeneseinek egyenletét.



3660 Tibi és Pisti matematika iránt érdeklődést mutató diákok. Tibi kijelölte a koordináta-rendszerben az $A(-2; 1)$ és $B(1; -4)$ pontokat. Pisti rövid gondolkodás után közölte Tibivel, hogy az e: $x = 2$ egyenletű egyenesen pontosan két olyan pont található, amely az A és B pontokkal együtt egy olyan derékszögű háromszög csúcsait alkotják, amelyben AB az átfogó.

a) Bizonyítsuk be, hogy Pisti helyes következtetésre jutott, és adjuk meg a szóban forgó pontok koordinátáit.

b) Jelölje C azt a pontot, amely illeszkedik az e egyenesre, második koordinátája negatív szám, és amelyre az ABC derékszögű háromszögnek AB az átfogója. Írjuk fel az ABC háromszög befogóinak egyenletét.

c) Számítsuk ki az AC és a BC egyenesek meredekségét.

d) Mekkora az ABC háromszög köré írható kör sugara?

3661 Teljesen homogén fémlapból háromszöget tervezünk kivágni, amelynek csúcsai a fémlapra helyezett koordináta-rendszerben: $A(-3; -4)$, $B(3; -3)$ és $C(0; 5)$. A fémlapon szeretnénk kijelölni azokat az egyeneseket, amelyek mentén a kivágott háromszöglapot alátámasztva az egyensúlyi helyzetben marad. Írjuk fel az ilyen tulajdonságú egyenesek egyenletét.

3662 Ábrázoljuk a megadott egyenletű egyeneseket a koordináta-rendszerben. Számítsuk ki az egyenesek tengelymetszeteit. Mekkora területű háromszöget fog közre az egyes esetekben az egyenes, valamint a koordináta-rendszer két tengelye?

a) $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$; *b)* $2x + 5y = 10$; *c)* $y = -3x - 5$; *d)* $y - 4x = 8$.

3663 Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a megadott egyenletű egyenesek merőlegesek legyenek egymásra:

a) e: $2x - 3y = 5$, f: $ax + 2y = -4$;

b) e: $y = \frac{4}{5}x + 2$, f: $ax + y = 1$;

c) e: $x = 5$, f: $x - ay = 0$;

d) e: $ax - 5y = -1$, f: $ax + 5y = 1$.

3664 Határozzuk meg az a és b valós paraméter értékét úgy, hogy a $2x - by = 1$ és a $4x - y + a = 0$ egyenletű egyenesek

a) párhuzamosak;

b) egymásra merőlegesek;

c) azonosak legyenek.

3665 Határozzuk meg az a és a b paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy a $P(4; 6)$ és a $Q(-6; 21)$ pontok illeszkednek az $ax + by = 4$ egyenletű egyenesre.

3666 Laci bácsi szőlőbirtoka négyszög alakú, és csúcsainak koordinátái egy olyan koordináta-rendszerben, melynek egysége 50 m: $A(-1; -1)$, $B(4; 1)$, $C(2; 5)$ és $D(-4; 5)$.

a) Írjuk fel az $ABCD$ négyszög átlóegyeneseinek egyenletét.

b) Bizonyítsuk be, hogy a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

c) Hány hektáros Laci bácsi birtoka? Az eredményt egy tizedes pontossággal adjuk meg.

3667 Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-3; 5)$, $B(-4; 0)$, $C(6; 0)$.

a) Adjuk meg a B csúcshoz tartozó belső és külső szögfelező meredekségének pontos értékét.

b) Írjuk fel a háromszög B csúcsához tartozó belső szögfelező egyenletét.

3668 Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $P(2; 5)$ ponton, továbbá a koordináta-rendszer tengelyeinek pozitív felével a lehető legkisebb területű háromszöget fogja közre.

3669 Béla bácsi egy derékszögű háromszög alakú földterület tulajdonosa, amelyet az alábbi egyenletű egyenesek határolnak: $x = 0$, $y = 0$, $7x + 5y = 35$. Béla bácsi a háromszög átfogójának egy P pontjából merőlegest emel a kert befogóira, így a kertet egy téglalapra és két derékszögű háromszögre bontja. A téglalap alakú részbe epret ültet unokája számára. Határozzuk meg a P pont koordinátáit, ha Béla bácsi a lehető legnagyobb területű részen szeretne epret ültetni.

3670 Adottak az $A(-3; 5)$ és a $B(1; -4)$ pontok, továbbá a λ valós szám.

a) Bizonyítsuk be, hogy a $PA^2 - PB^2 = \lambda$ egyenlőségnek eleget tevő P pontok egy egyenesre illeszkednek. Írjuk fel az egyenes egyenletét.

b) Bizonyítsuk be, hogy a különböző λ értékekhez tartozó egyenesek párhuzamosak egymással.

c) Határozzuk meg λ értékét, ha tudjuk, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontja illeszkedik az egyenesre.

3671 Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyeknek koordinátáira teljesül, hogy:

a) $9x^2 - 4y^2 = 0$; *b)* $6x^2 - 6y^2 + 5xy = 0$; *c)* $|2x + 3y - 2| = 4$.

Két egyenes metszéspontja, távolsága, hajlásszöge

3672 Számítsuk ki az egyenleteikkel megadott egyenesek metszéspontjának koordinátáit:

a) $4x + 3y = 7$ és $3x - 2y = 1$; *b)* $x = 3$ és $2x - y = 9$;

c) $3x + 7y = 29$ és $-2x + 3y = -4$; *d)* $7x + 13y = 50$ és $-7x + 11y = -15$.

3673 Határozzuk meg a háromszög csúcspontjainak koordinátáit, ha oldalegyeneseik egyenlete:

a) $2x + 7y = 31$, $-5x + 6y = -7$ és $7x + y = -9$;

b) $-5x + 3y = 0$, $9x - 2y = 17$ és $4x + y = 0$;

c) $x - 12y = -28$, $-8x + 9y = -37$ és $7x + 3y = -22$;

d) $3x + 4y = 15$, $x - 7y = 5$ és $7x + y = -15$.

3674 Az $ABCD$ négyszög csúcspontjai: $A(-2; 5)$, $B(5; 4)$, $C(7; -4)$ és $D(-1; -2)$.

a) Számítsuk ki az átlók metszéspontjának koordinátáit.

b) Bizonyítsuk be, hogy a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

c) Milyen négyszög az $ABCD$ négyszög?

3675 Számítsuk ki az ABC háromszög köré írt kör középpontjának koordinátáit, valamint a kör sugarát, ha

a) $A(6; 2)$, $B(-1; -5)$ és $C(7; -5)$; *b)* $A(2; 4)$, $B(-4; 2)$ és $C(4; -2)$;

c) $A(-3; 1)$, $B(-3; -7)$ és $C(-9; -1)$; *d)* $A(-3; 1)$, $B(-6; -4)$ és $C(-8; -4)$.

3676 Számítsuk ki az ABC háromszög magasságpontjának koordinátáit, ha

a) $A(-2; 4)$, $B(-1; -4)$, $C(6; 1)$; *b)* $A(-1; 5)$, $B(-1; -4)$, $C(9; 1)$;

c) $A(2; 3)$, $B(-1; -3)$, $C(9; 2)$.

3677 Melyik pontban metszi egymást az ABC háromszög BC oldalához tartozó magasságvonala és az AC oldalhoz tartozó súlyvonala, ha $A(-2; 4)$, $B(-1; -4)$ és $C(7; 2)$?

3678 Számítsuk ki a P pont és az e egyenes távolságát, ha

a) $P(-2; 4)$ és e: $y = x - 2$; *b)* $P(0; 0)$ és e: $x - 2y = 5$;

c) $P(-1; -1)$ és e: $x + 2y = 7$; *d)* $P(1; -3)$ és e: $x = 5 - 2y$.



3679 A 3678. feladatban szereplő P pontokat a hozzájuk tartozó e egyenesre tükrözzük. Írjuk fel a tükörképek koordinátáit.

3680 Számítsuk ki a megadott egyenletű egyenesek távolságát:

a) $x - y = 4$ és $x - y = -1$;

b) $-2x + y = 5$ és $-2x + y = -5$;

c) $x + y = 1$ és $y = 2 - x$.

3681 Számítsuk ki az ABC háromszög területét, illetve adjuk meg magasságai hosszának pontos értékét, ha $A(-2; 2)$, $B(4; 4)$ és $C(8; -3)$.

3682 Egy alföldi városban három, a város fölé magasodó templomtorony található, melyeket egyenesnek tekinthető utak kötnek össze. A megfelelő koordináta-rendszerben a tornyokat összekötő utak közül kettőnek az egyenlete:

$$b\colon\ 4x + y = 1 \quad \text{és} \quad c\colon\ 2x + 9y = 43.$$

A város építészei úgy döntöttek, hogy a három tornyot összekötő utak által határolt háromszög magasságpontjába egy kilátópontot létesítenek. A tervezőasztalon ki is számolták a kilátó leendő helyének koordinátáit: $K\left(2; \frac{3}{2}\right)$. Számítsuk ki a templomtornyok koordinátáit.

3683 András kijelölt három pontot a koordináta-rendszerben, majd megszerkesztette a háromszög magasságpontját. Ezután Béla kiradírozta András ábráját, csak a háromszög két csúcsát, valamint magasságpontját hagyta a rajzlapon. A megmaradt csúcsok koordinátái: $(0; 3)$, $(2; -3)$, a magasságponté pedig $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Számítsuk ki az András által rajzolt háromszög harmadik csúcsának koordinátáit.

3684 Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete:

$$-2x + 7y = -24 \quad \text{és} \quad -6x + y = 8.$$

A négyszög középpontjának koordinátái $(2; 0)$. Számítsuk ki a paralelogramma csúcsainak koordinátáit, valamint írjuk fel a paralelogramma hiányzó oldalegyeneseinek egyenletét.

3685 Az $ABCD$ négyszög három oldalegyenesének egyenlete:

$$AB\colon\ 4x + 3y = -13, \quad BC\colon\ x - 7y = 20 \quad \text{és} \quad CD\colon\ 7x + 4y = 34.$$

A BD átló felezőpontja $F\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, az A pont abszcisszája -4.

a) Ábrázoljuk a megadott egyeneseket, valamint számítsuk ki a négyszög csúcsainak koordinátáit.

b) Írjuk fel az AD egyenes egyenletét.

c) Mekkora területű háromszöget vág le az $ABCD$ négyszögből az $x = -1$ egyenletű egyenes?

3686 Egy rombusz két oldalegyenesének egyenlete:

$$x - 5y = -7 \quad \text{és} \quad x - 5y = 17.$$

a) Mekkora a rombusz területe, ha oldalának hossza $\sqrt{26}$?

b) Írjuk fel a másik két oldalegyenes egyenletét, ha a rombusz átlói az $(5; 0)$ pontban metszik egymást, továbbá egyik csúcsa a $(2; -3)$ pont.

3687 Az ABC háromszög csúcspontjai: $A(-1; 0)$, $B(2; 0)$ és $C(1; 3)$. A háromszög csúcsain át párhuzamosokat állítunk a csúccsal szemközti oldallal.

a) Írjuk fel a kapott egyenesek egyenletét.

b) Számítsuk ki a kapott egyenesek által közrefogott DEF háromszög csúcspontjainak koordinátáit.

c) Számítsuk ki az ABC háromszög magasságpontjának koordinátáit.

d) Számítsuk ki a DEF háromszög köré írt kör középpontjának koordinátáit.

3688 Az ABC háromszög csúcspontjai: $A(-2; -3)$, $B(8; -1)$ és $C(4; 6)$.

a) Számítsuk ki a háromszög magasságpontjának koordinátáit.

b) Számítsuk ki a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit.

c) A háromszög magasságpontját és köré írható körének középpontját tartalmazó egyenest a háromszög Euler-egyenesének nevezzük. Írjuk fel az ABC háromszög Euler-egyenesének egyenletét.

d) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlypontja illeszkedik a háromszög Euler-egyenesére.

e) Milyen arányban osztja a háromszög súlypontja a körülírt kör középpontja és a magasságpont közti szakaszt?

3689 Bizonyítsuk be, hogy a $P(x_0; y_0)$ pont és az e: $Ax + By + C = 0$ egyenletű egyenes (A, B, C valós számok, $A^2 + B^2 \neq 0$) távolságára teljesül, hogy

$$d(P, e) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

3690 Számítsuk ki a következő, egyenleteikkel megadott egyenesek hajlásszögét:

a) $x = 3$ és $2x + y = 0$;

b) $2x - y = -1$ és $-3x + y = 2$;

c) $y = 1 - 2x$ és $y = 5 + 3x$.

3691 Az ABC háromszög csúcspontjai: $A(-1; -2)$, $B(7; -2)$ és $C(0; 5)$.

a) Bizonyítsuk be, hogy a $P(8; 1)$ pont illeszkedik a megadott ABC háromszög köré írható körre.

b) Jelölje E, F, illetve G a P pontnak az AB, BC, illetve CA egyenesekre vonatkozó merőleges vetületét. Számítsuk ki az E, F és G pontok koordinátáit.

c) Bizonyítsuk be, hogy az E, F és G pontok egy egyenesre illeszkednek. (A kapott egyenest a P ponthoz tartozó Simson-egyenesnek nevezzük.)

3692 A koordináta-rendszer $(0; 8)$ koordinátájú pontjából egy biliárdgolyót indítunk a $\vec{v}(4; -3)$ koordinátájú vektorral párhuzamos egyenes mentén. A golyó az $x - 2y = 4$ egyenletű egyenesről visszapattan. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyen a golyó a visszapattanás után halad.

A kör egyenlete

3693 Írjuk fel a kör egyenletét $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ alakban, ha középpontja O, sugara pedig r (A, B, C valós számokat jelölnek):

a) $O(0; 0)$ és $r = 0{,}5$;

b) $O(0; 0)$ és $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$;

c) $O(-1; 2)$ és $r = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

d) $O\left(-\sqrt{3}; -\sqrt{6}\right)$ és $r = 2$;

e) $O(-5; -5)$ és $r = 5$;

f) $O\left(1 + \log_2 \frac{1}{8}; 1 - \log_2 \frac{1}{16}\right)$ és $r = \log_2 32$.

3694 Írjuk fel az O középpontú, P ponton áthaladó kör egyenletét $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ alakban (A, B, C valós számokat jelölnek), ha

a) $O(0; 2)$ és $P(-1; 3)$;

b) $O(-2; -3)$ és $P(-5; -2)$;

c) $O(1; -4)$ és $P(2; 5)$;

d) $O(2; 2)$ és $P(0; 0)$.



3695 Írjuk fel a kör egyenletét, ha AB átmérőjének végpontjai:

a) $A(-2;-3)$ és $B(3;-2)$;

b) $A(5;-4)$ és $B(-3;2)$;

c) $A\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ és $B\left(\frac{7}{2};\frac{11}{2}\right)$;

d) $A\left(1-\sqrt{2};-3\sqrt{3}\right)$ és $B\left(1+\sqrt{2};\sqrt{27}\right)$.

3696 Egy kör középpontja a $(2;-1)$ pont, sugara 5 egység. Számítsuk ki a kör azon pontjainak koordinátáit, amelyeknek

a) abszcisszája 5;

b) ordinátája 2.

3697 Határozzuk meg az egyenletével megadott kör középpontjának koordinátáit, valamint sugarát:

a) $x^2+y^2=30$;

b) $x^2+y^2-6y-3=0$;

c) $x^2+y^2-4x+8y-16=0$;

d) $x^2+y^2+3x-5y-25=0$;

e) $x^2+y^2-7x+2y-80=0$;

f) $x^2+y^2-\sqrt{8}\cdot x-\sqrt{12}\cdot y=0$;

g) $2x^2+2y^2-4x+6y=20$.

3698 Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a következő, egyenletükkel megadott alakzatokat. Mely egyenletek határoznak meg kört?

a) $x^2+y^2-6x-6y-7=0$;

b) $x^2-y^2=0$;

c) $x^2+y^2+4x-2y=-5$;

d) $x^2+y^2-12x+6y-55=0$;

e) $x^2+y^2-8y+16=0$;

f) $x^2+2xy+y^2=4$;

g) $x^2-3x+1{,}25=y^2+2y$.

3699 Írjuk fel az ABC háromszög köré írható kör egyenletét, ha

a) $A(-1;-4)$, $B(5;-4)$ és $C(0;1)$;

b) $A(-2;-3)$, $B(0;5)$ és $C(0;-5)$.

3700 Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C és D pontok egy körre illeszkednek. Írjuk fel a kör egyenletét.

a) $A(7;1)$, $B(5;3)$, $C(-1;-3)$ és $D(5;-5)$; *b)* $A(6;0)$, $B(-4;4)$, $C(-1;-3)$ és $D(3;-3)$.

3701 Írjuk fel a kör egyenletét, ha adottak O középpontjának koordinátái, valamint e érintőjének egyenlete:

a) $O(1;-2)$ és e: $x=0$;

b) $O(-3;5)$ és e: $y=-2$;

c) $O(1;4)$ és e: $x+y=10$;

d) $O(-1;-2)$ és e: $y=2x+5$.

3702 Írjuk fel az r sugarú kör egyenletét, ha mindkét koordinátatengelyt érinti, továbbá középpontja az

a) első;

b) második;

c) harmadik;

d) negyedik síknegyedben található.

3703 Az ABC háromszög A csúcsa az origóban, B csúcsa pedig az y tengelyen található, BC oldalának felezőpontja a $(2;4)$ pont. A háromszög C csúcsa illeszkedik az $y=\frac{3}{2}x-4$ egyenletű egyenesre. Írjuk fel az ABC háromszög köré írható körének egyenletét.

3704 A derékszögű ABC háromszög átfogójának végpontjai $A(-1;4)$, $B(5;-3)$. A háromszög BC befogóját tartalmazó egyenes meredeksége $\frac{1}{4}$.

a) Írjuk fel a háromszög köré írható körének egyenletét.

b) Számítsuk ki a háromszög C csúcsának koordinátáit.

3705 Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az $x^2+y^2-14x-6y=-54$ egyenletű kör legkisebb ordinátájú pontja, továbbá áthalad az origón. Az ordinátatengely melyik pontja illeszkedik még a kapott körre?

3706 Írjuk fel a $(-2; 2)$ és $(5; -1)$ pontokra illeszkedő kör egyenletét, ha

a) középpontja illeszkedik az y tengelyre;

b) középpontja illeszkedik a h: $4x + 3y = 24$ egyenletű egyenesre;

c) a megadott két pont a kör egy átmérőjének két végpontja.

3707 Egy egyenes nyomvonalú autópálya egyenlete a megfelelő koordináta-rendszerben $y = 2 - x$. A pálya közelében található két település koordinátái: $A(-9; 3)$ és $B(-1; -1)$.

a) Az autópálya mely pontjában kell kijáratot építeni, ha azt szeretnénk, hogy onnan a két faluig ugyanolyan hosszú egyenes útszakaszt lehessen építeni?

b) Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyre illeszkednek az A és B pontok, továbbá középpontja a tervezett kijárat.

c) Milyen hosszú csatlakozó utakat kell építeni a két faluból az iménti pontig, ha a koordinátarendszerben 1 egység 1 km-nek felel meg? A választ egy tized pontossággal adjuk meg.

3708 Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely mindkét koordinátatengelyt érinti, továbbá áthalad a

a) $\left(4; \frac{1}{2}\right)$ ponton; *b)* $(-2; 1)$ ponton; *c)* $(-1; -8)$ ponton; *d)* $(2; -9)$ ponton.

3709 Béla bácsi kertjében négy gyönyörű díszfa található, amelyeket tulajdonosuk rendszeresen locsol. Egy nap Béla bácsi elhatározta, hogy munkája megkönnyítése érdekében forgófejes locsolóberendezést állít a kertbe, amely minden irányban ugyanakkora, előre beállított távolságra képes locsolni. Béla bácsi kijelölte egy koordináta-rendszer tengelyeit, majd meghatározta a négy fa koordinátáit: $(6; -1)$, $(2; 7)$, $(0; 5)$ és $(0; 1)$.



a) Bizonyítsuk be, hogy valóban található olyan pont, amelybe elhelyezve a locsolóberendezést, az pontosan képes meglocsolni mind a négy díszfát.

b) Mekkora „hatótávolságra" kell beállítani a berendezést, ha azt szeretnénk, hogy mind a négy díszfát meglocsolja?

c) A fenti beállítással meglocsolja-e a berendezés a $(3; -2)$ pontban lévő tujját?

3710 Az ABC háromszög csúcsai: $A(-3; -2)$, $B(7; -2)$ és $C(1; 6)$. A háromszög oldalfelező pontjait tartalmazó kört a háromszög Feuerbach-körének nevezzük.

a) Írjuk fel az ABC háromszög Feuerbach-körének egyenletét.

b) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög magasságvonalainak talppontjai illeszkednek a háromszög Feuerbach-körére.

c) Igazoljuk, hogy az ABC háromszög magasságpontját a háromszög csúcsaival összekötő szakaszok felezőpontjai szintén illeszkednek a háromszög Feuerbach-körére.

d) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög Feuerbach-körének, valamint körülírt körének sugara úgy aránylik egymáshoz, mint $1:2$.

3711 Az ABC háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

$$AB\colon\ y = 0, \quad AC\colon\ y = \frac{5}{12}x \quad \text{és} \quad BC\colon\ y = 6 - \frac{3}{4}x.$$

a) Számítsuk ki az ABC háromszögbe írható, valamint a háromszög BC oldalához írt körök sugarának pontos értékét.

b) Írjuk fel az *a)* feladatban szereplő körök egyenletét.



3712 Írjuk fel azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek érintik mindkét koordinátatengelyt, valamint az (5; 5) középpontú, 5 egység sugarú kört.

3713 Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyet az alábbi egyenletű körök mindegyike kívülről érint:

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 16 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 28 = 0.$$

3714 Adott a síkon az $A(0; 3)$, valamint a $B(6; 1)$ pont.

a) Határozzuk meg a Q pont koordinátáit úgy, hogy a $QA^2 + QB^2$ összeg a lehető legkisebb legyen. Mennyi a fenti összeg minimuma?

b) Határozzuk meg a sík azon Q pontjainak halmazát, amelyekre $QA^2 + QB^2 = \lambda$ teljesül ($\lambda \geq 0$). A λ paraméter mely értékeire nincs a feltételnek megfelelő Q pont a síkon?

A kör és az egyenes kölcsönös helyzete; két kör közös pontjai

3715 Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az adott egyenletű kört, illetve egyenest. Ha a két alakzatnak van közös pontja, akkor adjuk meg ezek koordinátáit.

a) $x^2 + y^2 - x - 4y - 2 = 0$ és $x - 2y = -6$;
b) $x^2 + y^2 - 2x - 1{,}5y - 10 = 0$ és $y = 4 + 6x$;
c) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 17$ és $4x + y + 6 = 0$;
d) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$ és $3x + 2y = -7$.

3716 Számításokkal döntsük el, hogy milyen helyzetű az adott egyenletű kör, illetve egyenes a következő esetekben:

a) $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$ és $y = 1$;
b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$ és $x = 2y - 5$;
c) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ és $x + 2y + 1 = 0$;
d) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$ és $x + y = 1$.

3717 Milyen hosszúságú húrt metsz ki az $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$ egyenletű kör az $x = 3y - 2$ egyenletű egyenesből?

3718 Adottak az $A(-2; -3)$ és $B(4; 1)$ pontok. Számítsuk ki azoknak az $x + y = 1$ egyenletű egyenesre illeszkedő pontoknak a koordinátáit, amelyek a megadott pontokkal olyan derékszögű háromszöget alkotnak, amelyben AB az átfogó.

3719 Egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai $A(-1; 3)$ és $B(3; -3)$, körülírt körének egyenlete:

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - 3y - \frac{15}{2} = 0.$$

Számítsuk ki a háromszög ismeretlen csúcsának koordinátáit.

3720 Írjuk fel az $O(-2; -3)$ középpontú, 5 egység sugarú kör $P(-1; -1)$ belső pontján átmenő legrövidebb, illetve leghosszabb húrját tartalmazó egyenes egyenletét.

3721 Egy téglalap köré írható kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 11x - 2y + 10 = 0$, a téglalap két csúcsa pedig illeszkedik az $y = -4x + 6$ egyenletű egyenesre. Számítsuk ki a téglalap csúcsainak koordinátáit.

3722 Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az adott egyenletű egyenes és kör érintse egymást:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ és $2x + y = p$;
b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$ és $y = px + 1$;
c) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ és $y = x + p$.

3723 Írjuk fel az adott egyenletű kör P pontján átmenő érintőjének egyenletét:

a) $x^2 + y^2 = 18$ és $P(3; 3)$;

b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ és $P(-2; 1)$;

c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 6$ és $P(1; 1)$;

d) $x^2 + y^2 = 5$ és $P\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{3}\right)$.

3724 Kalózok elveszett kincs nyomába eredvén, találtak egy térképvázlatot, valamint egy kissé homályos leírást a kincs helyéről. A térképen egy rendkívül magas fa, valamint egy könnyen beazonosítható sziklaképződmény látható, ezek koordinátái: $(-5; -6)$, valamint $(-2; 3)$. A leírás szerint a kincs a fát a sziklával összekötő egyenes útszakaszon van elásva, a koordinátarendszer kezdőpontjától pontosan 5 egység távolságra.



a) Mely koordinátájú pontban van elrejtve a kalózok által keresett kincs?

b) Milyen arányban osztja a kincs a fa és a szikla közötti útszakaszt?

3725 Egy repülésirányító radar 100 km sugarú körben pásztázza a légteret. Egy utasszállító repülőgép a radar képernyőjén megjelenő koordináta-rendszerben az $y = 7x - 50$ egyenletű egyenes mentén halad. Milyen hosszú utat tesz meg a repülőgép a radar által felügyelt légtérben, ha a koordinátarendszer egysége a valóságban 10 km-nek felel meg?

3726 Az ABC szabályos háromszög két csúcspontjának koordinátái $A(1; 1)$ és $B(-2; -2)$.

a) Számítsuk ki a háromszög C csúcsának koordinátáit.

b) Számítsuk ki a háromszög köré írható kör sugarának pontos értékét.

3727 *a)* Vannak-e olyan pontok az $x - 3y = -5$ egyenletű egyenesen, amelyekből az AB szakasz 90°-os szög alatt látszik, ha $A(-3; -2)$ és $B(4; -1)$? Ha igen, akkor adjuk meg az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáit.

b) Melyek azok a C pontok, amelyekre az ABC háromszög egyenlő szárú és derékszögű, továbbá AB az átfogója?

3728 Adott a $(2; 2)$ középpontú, $\sqrt{5}$ egység sugarú kör. Írjuk fel a körnek az $y = \frac{1}{2}x - 3$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintőinek egyenletét. Számítsuk ki az érintők érintési pontjának koordinátáit.

3729 Írjuk fel az $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0$ egyenletű kör $-\frac{4}{3}$ meredekségű érintőinek egyenletét. Számítsuk ki az érintők érintési pontjának koordinátáit.

3730 Írjuk fel az $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ egyenletű kör $3x + y = 1$ egyenletű egyenesre merőleges érintőinek egyenletét. Számítsuk ki az érintők érintési pontjának koordinátáit.

3731 Állapítsuk meg az egyenleteikkel adott körök közös pontjainak számát. Amennyiben a két körnek van közös pontja, úgy számítsuk ki azok koordinátáit.

a) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 14 = 0$ és $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$ és $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$ és $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$;

d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ és $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

3732 Adott a k kör, valamint a P pont. Írjuk fel a P ponton átmenő, a k kört érintő egyenesek egyenletét. Minden esetben számítsuk ki az érintők hajlásszögét.

a) k: $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 2$ és $P(0; 0)$;

b) k: $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$ és $P(3; 0)$;

c) k: $x^2 + y^2 + 4x + 4y = 0$ és $P(1; 3)$.



3733 A c kör középpontja $(2; -2)$, sugara $\sqrt{10}$, a k kör középpontja $(-1; 1)$, sugara 2.

a) Számítsuk ki a két kör metszéspontjainak koordinátáit.

b) Bizonyítsuk be, hogy azok a pontok, amelyekből a k és c körökhöz egyenlő hosszúságú érintőszakasz húzható, egy egyenesre illeszkednek. Írjuk fel a szóban forgó egyenes egyenletét.

c) Bizonyítsuk be, hogy a két kör metszéspontjai illeszkednek a *b)* feladatban meghatározott egyenesre.

3734 Adottak a c: $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$, illetve a k: $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletű körök. Írjuk fel a két kör közös érintőinek egyenletét.

3735 Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + y^2 - 11x - 7y + c = 0$ egyenletű körből az x tengely háromszor akkora húrt metsszen ki, mint az y tengely.

A parabola

3736 A parabola fókuszpontját F, vezéregyenesét v, tengelypontját (csúcspontját) T jelöli. Írjuk fel a parabola egyenletét a következő adatokból:

a) $F(0; 2)$ és v: $y = -2$;

b) $F(-2; 1)$ és v: $x = 3$;

c) $F(4; -3)$ és v: $x = 1$;

d) v: $y = -4$ és $T(2; -5)$;

e) v: $x = 3$ és $T(1; -1)$;

f) $F(-1; -3)$ és $T(0; -3)$.

Ábrázoljuk a parabolát az egyes esetekben.

3737 Határozzuk meg a parabola paraméterét, fókuszpontjának, tengelypontjának (csúcspontjának) koordinátáit, valamint vezéregyenesének egyenletét, ha egyenlete:

a) $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$;

b) $x^2 = -2y + 3$;

c) $y^2 - 2y - 2x = -4$;

d) $x^2 - 6x - 2y + 12 = 0$;

e) $y^2 = -8x + 2y + 7$;

f) $y = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.

Ábrázoljuk a parabolát az egyes esetekben.

3738 Írjuk fel a parabola egyenletét, ha tengelye az x tengellyel párhuzamos, paramétere 0,5, valamint áthalad az $(1; 0)$ és a $(6; 5)$ pontokon.

3739 Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

a) tengelye az y tengellyel párhuzamos, valamint áthalad az $A(2; 3)$, $B(3; 0)$ és a $C(6; 3)$ pontokon;

b) tengelye az x tengellyel párhuzamos, valamint áthalad az $A(-8; 0)$, $B(-2; -3)$ és a $C(0; -2)$ pontokon.

3740 Adott a p: $y = -x^2 - x + 2$ egyenletű parabola. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelyet a p parabolából úgy kapunk, hogy azt

a) tükrözzük az origóra;

b) tükrözzük a vezéregyenesére;

c) tükrözzük az $x = 1$ egyenletű egyenesre;

d) eltoljuk a $\vec{v}(1; -3)$ vektorral.

3741 Ábrázoljuk az egyenleteikkel megadott f és g alakzatokat közös koordináta-rendszerben. Számítsuk ki a két alakzat metszéspontjainak koordinátáit.

a) f: $y = 2x + 7$ és g: $y^2 - 6y + 9 = 4x$;
b) f: $y = 4x - 3$ és g: $y = 2x^2 - 4x + 5$;
c) f: $x + 2y = 8$ és g: $x^2 - 4x = 4y - 8$;
d) f: $x^2 + y^2 - 6y - 4 = 0$ és g: $x^2 - 4y = 4$;
e) f: $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ és g: $x^2 + 8y - 16 = 0$.

3742 Mely pontokban metszi az $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ egyenletű parabola fókuszpontján átmenő, $\vec{v}(4; 3)$ irányvektorú egyenes a parabolát?

3743 Adott az $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ egyenletű parabola. Írjuk fel a parabola érintőjének egyenletét, ha az

a) áthalad a parabola $(3; 5)$ koordinátájú pontján;
b) áthalad a $(-1; -1)$ koordinátájú ponton;
c) párhuzamos az $y = 2x - 5$ egyenletű egyenessel.

3744 Barnabás gyakran dobál kavicsokat a Dunába. A köveket a vízszintes síkkal hegyesszöget bezáró röppálya mentén indítja el (ferde hajítást végez). Megfigyelte, hogy az egyik eldobott kavics 4 méter magasra emelkedett, és 12 méter távolságra esett a folyóba. A vízszinteshez képest milyen szögben hajította el Barnabás a kavicsot? A választ egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

3745 Az $y = -x^2 + 5x$ egyenletű parabola melyik pontja van legközelebb a $3x - y = -5$ egyenletű egyeneshez? Mekkora a két alakzat pontjai közötti legkisebb távolság?

3746 Az $y = x^2$ egyenletű parabola fókuszpontját F, vezéregyenesének egy tetszőleges pontját P jelöli. Bizonyítsuk be, hogy a PF szakasz felezőmerőlegese érinti a parabolát.

3747 Az $y = -x^2 + 6$ egyenletű parabolából az x tengely egy parabolaszeletet metsz le. A lemetszett parabolaszeletbe téglalapokat írunk úgy, hogy annak egyik oldala az x tengelyre, az ezzel párhuzamos oldal végpontjai pedig a parabolára illeszkednek. Számítsuk ki a maximális területű beírt téglalap csúcsainak koordinátáit, valamint területét.

3748 Melyek a koordinátái annak az abszcisszatengelyre illeszkedő pontnak, amelyből az $x = y^2$ egyenletű parabolához két olyan érintőt lehet húzni, amelyek az y tengellyel egy szabályos háromszöget fognak közre? Számítsuk ki a kialakuló szabályos háromszög további csúcsainak koordinátáit.

3749 Bizonyítsuk be, hogy az $y = x^2$ egyenletű parabolatükör fókuszából kiinduló fénysugarak a tükörről való visszaverődés után a parabola tengelyével párhuzamosan haladnak tovább.

Vegyes feladatok

3750 Az A pont koordinátái $(-4; 3)$, a B ponté $(5; 8)$. Számítsuk ki az alábbi vektorokkal megegyező helyvektorok végpontjának koordinátáit:

a) $\overrightarrow{AB}$; *b)* $\overrightarrow{BA}$; *c)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$; *d)* $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BA}$.

3751 Az A pont helyvektora $\vec{a}(-3; 2)$. Számítsuk ki a B pont koordinátáit, ha tudjuk, hogy $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, továbbá a C pont koordinátái $(7; 5)$.

3752 Adottak az $\vec{a}(-3; -1)$ és $\vec{b}(4; -1)$ vektorok. Számítsuk ki az alábbi vektorok skaláris szorzatát:

a) $\vec{a}$ és $\vec{b}$; *b)* $2\vec{a}$ és $2\vec{b}$; *c)* $\lambda\vec{a}$ és $\lambda\vec{b}$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.

Az eredmények alapján fogalmazzuk meg, miként változik két vektor skaláris szorzata, ha a vektorokat ugyanazzal a számmal szorozzuk.



3753 Bizonyítsuk be, hogy az alábbi esetekben a P pont illeszkedik az AB szakaszra. Minden esetben számítsuk ki az $\frac{AP}{PB}$ tört értékét.

a) $A(-3; 2)$, $B(13; -10)$ és $P(1; -1)$;
b) $A(-1; 7)$, $B(4; -3)$ és $P(1; 3)$;
c) $A(0; 2)$, $B(-12; 5)$ és $P(-8; 4)$;
d) $A(-2; 2)$, $B(8; -10)$ és $P(3; -4)$.

3754 Írjuk fel a $3x + 8y = 5$ és $4x - 3y = -7$ egyenletű egyenesek metszéspontján átmenő, az $y = 4x - 1$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét.

3755 Írjuk fel az $x - 6y = 19$ és $-8x + y = -11$ egyenletű egyenesek metszéspontján átmenő, az $y = -2x + 1$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenletét.

3756 Határozzuk meg a p és q paraméterek értékét úgy, hogy az $x^2 + y^2 + px + qy - 20 = 0$ egyenletű kör tartalmazza az $A(1; 3)$ és $B(2; -4)$ pontokat. Mekkora a kör sugara?

3757 Adott a k: $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ egyenletű kör. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyet a k körből úgy kapunk, hogy azt

a) tükrözzük az x tengelyre;
b) tükrözzük az y tengelyre;
c) tükrözzük az origóra;
d) tükrözzük a $(4; -3)$ pontra;
e) eltoljuk a $\vec{v}(-3; -2)$ vektorral;
f) elforgatjuk az origó körül $+90°$-kal;
g) az origóból kétszeresére nagyítjuk;
h) a $(2; 5)$ pontból felére kicsinyítjük.

3758 Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszöget az AC átlója két egyenlő területű négyszögre bontja, ha $A(-2; -2)$, $B(3; -1)$, $C(8; 3)$ és $D(5; 3)$.

3759 Adott két pont: $A(1; -3)$ és $B(-3; 5)$. Számítsuk ki a $3x - 2y = -13$ egyenletű egyenesre illeszkedő C pont koordinátáit, ha tudjuk, hogy második koordinátája negatív, valamint az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög van.

3760 Vannak-e olyan x valós számok, amelyekre az alábbi vektorok merőlegesek egymásra?

a) $\vec{a}(x; x + 2)$ és $\vec{b}(x - 1; x + 3)$;
b) $\vec{a}(x; x + 2)$ és $\vec{b}(x + 3; x + 3)$.

3761 Barnabás berajzolta a koordináta-rendszerbe a következő pontokat: $A(-2; -3)$, $B(4; -1)$, $C(4; 5)$ és $D(1; 4)$. Noémi, miután megnézte az elkészült ábrát, azt állította, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz.

a) Igaza van-e Noéminek? Válaszunkat számításokkal igazoljuk.
b) Barnabás szerint a négyszög átlói $2:1$ arányban osztják egymást. Hogyan gondolkodhatott Barnabás?
c) Számítsuk ki, hogy mely pontban metszik egymást az átlók.

3762 Az ABC háromszög csúcspontjai: $A(0; 0)$, $B(6; -4)$ és $C(3; 2)$.

a) Számítsuk ki az ABC háromszög A csúcsánál lévő szögét.
b) Igaz-e, hogy az A csúcsnál lévő szög szögfelezője illeszkedik az x tengelyre? Válaszunkat indokoljuk.

3763 Az $ABCD$ trapéz csúcsainak koordinátái: $A(-1; -2)$, $B(7; 2)$, $C(2; 4)$, $D(0; 3)$. Az AD szár D-hez közelebbi, valamint a BC szár C-hez közelebbi harmadolópontja E, illetve F.

a) Számítsuk ki az $\overrightarrow{EF}$ koordinátáit.
b) Igaz-e, hogy EF párhuzamos a trapéz alapjaival?

3764 Írjuk fel az ABC háromszög Euler-egyenesének egyenletét, ha $A(-2; -1)$, $B(8; -1)$ és $C(5; 6)$.

3765 Egy rombusz egyik csúcsa (5; 3), az átlók a (4,5; 1,5) pontban metszik egymást. Határozzuk meg a rombusz hiányzó csúcsainak koordinátáit, ha egyik oldalegyenesének egyenlete $x + y = 4$.

3766 Egy négyszög egy-egy oldalegyenesének egyenlete:

$$a\colon\ x - 2y = -8, \quad b\colon\ 2x + y = -6, \quad c\colon\ x - 2y = 7 \quad \text{és} \quad d\colon\ 2x + y = 9.$$

a) Bizonyítsuk be, hogy a négy egyenes egy négyzetet fog közre.

b) Írjuk fel a négyzet köré írható kör egyenletét.

c) Számoljuk ki, hogy a négyzet köré írható kör területe hány százaléka a négyzet területének. Az eredményt egészre kerekítve adjuk meg.

d) Az $e\colon\ 7x + y = 4$ egyenletű egyenes a négyzetet két trapézra bontja. Számítsuk ki a keletkező trapézok területének arányát.

3767 Egy rombusz egyik csúcsa $A(-1; 4)$, egyik átlója pedig illeszkedik az $e\colon\ y = \frac{1}{2}x + 2$ egyenletű egyenesre. Számítsuk ki a négyszög hiányzó csúcsainak koordinátáit, ha tudjuk, hogy oldalának hossza $\sqrt{10}$.

3768 A koordináta-rendszer y tengelye mentén egy hosszú egyenes útszakasz húzódik. Az $A(1; -4)$ és $B(7; 4)$ pontokban egy-egy kiemelkedően magas templomtorony található.

a) Milyen messze van egymástól a két templom, ha a koordináta-rendszer egysége 1 km hosszúságú?

b) Vannak-e az útszakaszon olyan pontok, amelyekből a két templom 90°-os szög alatt látszik? Ha igen, akkor melyek a koordinátái az ilyen tulajdonságú pontoknak?

c) Az útszakasz hány kilométer hosszú részén látjuk a két templomot tompaszög alatt?

3769 Bodri kutyát gazdája kikötötte a $(-1; 3)$ pontban egy 3 méter hosszúságú láncra. Az $y = x - 1$ egyenletű egyenes mentén hosszú sétaút húzódik. Bizonyítsuk be, hogy a sétaúton közlekedők biztonságban vannak Bodritól, ha a koordináta-rendszer tengelyeinek egysége 1 méter.

3770 Határozzuk meg a következő függvények legkisebb helyettesítési értékét. A változó mely értékénél veszik fel a függvények minimumukat?

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$;

b) $g(x) = \sqrt{17x^2 - 24x + 9} + \sqrt{17x^2 - 12x + 36}$.

3771 Egy autópálya nyomvonala az $y = \frac{1}{2}x - 1$ egyenletű egyenes mentén halad. A pálya ugyanazon oldalán található két település, melyeknek koordinátái: $A(-2; 2)$, illetve $B(0; 4)$ (a koordináta-rendszer egysége 1 km). A két település polgárai a sztrádán kialakításra kerülő lehajtóért lobbiznak.

a) Mely pontban kell kialakítani a lejárót, ha azt szeretnénk, hogy annak az A és B falvaktól mért távolságösszege a lehető legkisebb legyen?

b) Összesen mennyibe kerül a két településnek a kijáratig tervezett egyenes útszakaszok megépítése, ha 1 km út megépítése 150 millió Ft-ba kerül?

3772 A koordináta-rendszer egy pontját rácspontnak nevezzük, ha annak mindkét koordinátája egész szám.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy kör középpontja rácspont, valamint sugara egész szám, akkor a körvonal legalább négy rácspontot tartalmaz. Mutassunk példát arra az esetre, amikor a kör pontosan négy rácsponton megy át.

b) Bizonyítsuk be, hogy az $O\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{4}\right)$ középpontú bármely kör legfeljebb egy rácspontot tartalmazhat.



3773 Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a következő ponthalmazokat:

a) $A=\{P(x;y)\,|\,|x|\le 4 \quad \text{és} \quad |y|\ge 3\}$;

b) $B=\left\{P(x;y)\,\middle|\,\frac{x-y+2}{2x+y-1}\le 1\right\}$;

c) $C=\{P(x;y)\,|\,x^3-2x-|x|\cdot y>0\}$;

d) $D=\{P(x;y)\,|\,x^3y+xy^3=16xy\}$;

e) $E=\{P(x;y)\,|\,|x^2+y^2-4x-4|\le 2\cdot|y|\}$;

f) $F=\{P(x;y)\,|\,x^4\le y^2\}$.

3774 A koordináta-rendszerben kijelölünk két pontot: $A(-2;3)$ és $B(4;0)$. Mi a halmaza azoknak a P pontoknak, amelyekre teljesül, hogy

a) $\frac{AP}{PB}=1$;

b) $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$?

3775 Adott az $y=x^2-ax+a-1$ egyenletű parabola, ahol a valós számot jelöl.

a) Adjuk meg az a paraméter függvényeként a parabola tengelypontjának koordinátáit.

b) Mi a halmaza a parabolák tengelypontjának, ha az a paraméter befutja az összes valós számot?

c) Milyen halmazt alkot az $y=x^2-ax+\frac{a^2}{4}+a-1$ egyenletű parabolák tengelypontja, ha az a paraméter szintén végigfut a valós számok halmazán?

3776 Egy cukrász kétféle sütemény (A és B) elkészítéséhez összesen 45 kilogramm lisztet, 35 kilogramm cukrot, valamint 25 kilogramm margarint használhat fel. A táblázat azt mutatja, hogy az egyes sütemények elkészítéséhez mennyi nyersanyag szükséges.

	A sütemény	*B* sütemény
Liszt	1 kg	2 kg
Cukor	2 kg	1 kg
Margarin	1 kg	1 kg

A cukrász nyeresége az A süteményen 70 Ft, a B süteményen 50 Ft.

a) Hány darabot kell készíteni az A, illetve a B süteményből ahhoz, hogy a nyereség maximális legyen?

b) Mennyi a cukrász maximális nyeresége?

11.6. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Klasszikus valószínűségi modell

3777 A hagyományos dobókockával egyet dobunk, és a 32 lapos magyarkártya-csomagból keverés után egyetlen lapot húzunk. Komplementer események-e az alábbiak? Amennyiben nem, adjuk meg összegük komplementerének valószínűségét.

a) $A = \{\text{párosat dobunk}\}$ és $B = \{\text{páratlant dobunk}\}$.

b) $A = \{\text{prím dobás}\}$ és $B = \{\text{összetett szám dobás}\}$.

c) $A = \{\text{pirosat húzunk}\}$ és $B = \{\text{hetest húzunk}\}$.

3778 Mennyi a valószínűsége, hogy az alaposan megkevert 32 lapos magyar kártyából négy lapot kihúzva, a kihúzott lapok között lesz piros? Az eredményt adjuk meg egy tizedesjegy pontossággal.

3779 Egy dobozban 20 natúr túrószelet van. Legalább mennyi töltött túrószeletet kell a dobozba tenni, hogy egy natúr túrószelet kiválasztásának valószínűsége 0,2 alá csökkenjen?

3780 Egy társasház lakóinak kor szerinti megoszlását kördiagramon ábrázolták. A 40 éves, vagy annál idősebb lakókat 60°-os középponti szögű körcikk jelöli. Egy lakót véletlenszerűen kiválasztva ebből a társasházból, mekkora valószínűséggel lesz az illető 40 évesnél fiatalabb?

3781 Weöres Sándor: *Csiribiri* című versében összeírtuk a magánhangzók előfordulási gyakoriságait. Mennyi a valószínűsége, hogy a vers 108 magánhangzójából egy találomra kiválasztott magánhangzó az „u” előtt van az ábécében?

Betű	a	á	e	é	i	í	o	ó	ö	ő	u	ú	ü	ű
Darab	25	12	4	3	50	1	8	1	1	1	0	0	2	0

3782 Tegyük a telitalálat elérésének valószínűsége szerint növekvő sorrendbe az alábbi játékokat: *A*: ötös lottó, *B*: hatos lottó, *C*: totó. (Az ötös lottón 90 számból ötöt, a hatos lottón 45 számból hatot húznak, a totón 13 + 1 mérkőzésre tippelhetünk hazai győzelmet, vendég győzelmet, illetve döntetlent.)

3783 Mekkora valószínűséggel érünk el egy szelvénnyel az ötös lottón nyereményt? (Az ötös lottón legalább 2 találatot kell elérni, hogy kifizetés történjen.)

3784 Mennyi a valószínűsége, hogy a hatos lottón nyereményt fizetnek ki nekünk, ha egy szelvénnyel játszunk? (A hatos lottón legalább 3 találatot kell elérni, hogy kifizetés történjen.)

3785 Mennyi a valószínűsége, hogy a totón nyereményt fizetnek ki nekünk, ha egy tipposzlopot töltünk ki? (A totón legalább 10 találatot kell elérni, hogy kifizetés történjen. A 14. sort csak az első 13 sor helyes kitöltése esetén veszik figyelembe.)

3786 Magdi tolltartójában háromféle toll található. Egy részüknek fekete az alja, egy részüknek fémszínű a teteje, egy részük pedig mindkét tulajdonsággal rendelkezik. A tolltartóból találomra kiveszünk egy tollat. Ennek $\frac{3}{4}$ valószínűséggel lesz fekete az alja; de 0,23 valószínűséggel lesz fekete az alja és fémszínű a teteje. Mekkora valószínűséggel lesz a véletlenszerűen kiválasztott toll teteje fémszínű?

3787 Egy dobozban 100 színes labda van: piros, fehér és piros-fehér. Annak a valószínűsége, hogy egy labdát kihúzva, azon lesz piros szín, 0,6. Annak a valószínűsége 0,75, hogy egy labdát kihúzva, lesz rajta fehér szín. Mennyi piros-fehér labda van a dobozban?



3788 Gabi és Peti sűrűn játszanak kétszemélyes társasjátékot. Peti megfigyelte, hogy háromszor több alkalommal veszít, mint ahány alkalommal nyer. Mekkora valószínűséggel nyer Gabi ebben a játékban?

3789 Hapci és Vidor kártyáznak. Hapci 0,3-del nagyobb valószínűséggel nyer, mint Vidor. 20 játékból várhatóan hányszor nyeri Hapci és hányszor Vidor a kártyapartit?

3790 Gabi, Peti és kicsi Tamás társasjátékkal játszanak. Peti megfigyelte, hogy Gabi kétszer, Tomi pedig háromszor több alkalommal nyer, mint ő. Mekkora valószínűséggel nyeri meg a játékot Tomi?

3791 Eszter, Tamás és Csaba társasjátékoznak. Csaba megfigyelte, hogy pontosan akkora valószínűséggel nyer Tamás, mint amekkora valószínűséggel veszít Eszter. Mekkora valószínűséggel nyer Csaba?

3792 Egy 25 fős osztályban 7 főnek barna színű szeme van, 8 főnek kék színű szeme van, 5 főnek zöld. Mekkora a valószínűsége, hogy egy főt véletlenszerűen kiválasztva ebből az osztályból, szemének színe eltér az említett három színtől?

3793 Tudjuk, hogy egy csoportból $\frac{1}{4}$ valószínűséggel választhatunk ki véletlenszerűen egy főt, akinek fekete haja van, 0,16 valószínűséggel olyat, akinek vörös, $\frac{7}{25}$ valószínűséggel pedig barna hajút. Mekkora valószínűséggel választunk ebből a csoportból az említett három színtől eltérő hajszínű illetőt?

3794 Egy ládába vegyesen szedtek a képen látható gyümölcsökből sok darabot. Tapasztalatból tudjuk, hogy ha véletlenszerűen választunk a ládából gyümölcsöt, akkor almát $\frac{1}{3}$, barackot $\frac{1}{4}$, körtét $\frac{1}{5}$, szilvát $\frac{1}{7}$ valószínűséggel fogunk majszolni.



a) Legalább hány darab gyümölcs lehetett a ládában, ha a megadott valószínűségek pontosak?

b) $\frac{1}{3}$-nál nagyobb vagy kisebb valószínűséggel választunk ekkor kivit a ládából?

3795 Gombóc Artúr titkos fiókjában egy dobozban négyféle csokoládé van: lyukas csokoládé, kerek csokoládé, tömör csokoládé és lapos csokoládé – ez utóbbi fajtát csak tegnap tette bele, pontosan 6 darabot. Picur és Pom Pom kiszámolták Artúrnak, hogy ha véletlenszerűen választ ki egy csokit a titkos fiókból, akkor az $\frac{1}{3}$ valószínűséggel lesz lyukas csokoládé, $\frac{1}{5}$ valószínűséggel lesz kerek csokoládé és $\frac{1}{15}$ valószínűséggel lesz tömör csokoládé.

a) Mekkora valószínűséggel lesz lapos a kiválasztott csokoládé?

b) Mennyi csokoládé van összesen a fiókban?

(Artúr minden csokoládéja pontosan az egyik említett tulajdonságot bírja.)

3796 Egy buszvezető pontos statisztikát vezet arról, hogy melyik megállóban melyik ajtót kellett kinyitnia és melyiket nem. Azt látja, hogy a négy ajtó közül bármelyiket $\frac{7}{8}$ valószínűséggel nyitja ki minden megállóban. Mennyi a valószínűsége, hogy egyszerre minden ajtót ki kell nyitnia egy megállóban?

3797 Egy szabálytalan dobókockával négyszer dobva $\frac{1}{81}$ a valószínűsége, hogy minden dobásunk hatos. Hányszor nagyobb valószínűséggel dobunk ezzel a dobókockával hatost, mint a hagyományos dobókockával?

3798 Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy egy hagyományos, szabályos dobókockát ötször eldobva, lesz a dobott számok között legalább egy hatos.

3799 Egy villamosvezető egy megállóban a villamos nyolc ajtaja közül bármelyiket 0,8 valószínűséggel nyitja ki.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy nem nyitja ki az összes ajtót a megállóban?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy nem nyit ki egyetlen ajtót sem a megállóban?

3800 Egy szabálytalan dobókockával ötször dobunk egymás után. Annak a valószínűsége, hogy nem minden dobásunk lesz hatos, 0,99999. Mekkora a hatos dobás valószínűsége, ha egyszer dobunk ezzel a kockával?



3801 A $]0; 10[$ intervallumból véletlenszerűen választunk egy olyan racionális számot, melynek nevezője 3. Mekkora valószínűséggel lesz ennek a számnak a 2-es alapú logaritmusa 1-nél kisebb?

3802 Két vektor közös kezdőpontja az $A(2; 1)$ pont. Egyikük végpontja az origó, másikuk $B(x; y)$ végpontját pedig véletlenszerűen választjuk az egész koordinátájú pontok közül úgy, hogy $0 \le x \le 5$ és $-4 \le y \le 4$ legyen. Mekkora valószínűséggel lesz az $\overrightarrow{AB}$ vektor és az $\overrightarrow{A0}$ vektor skaláris szorzata nullától különböző érték?

3803 A zsírozás nevű kártyajáték játékosai nagyon örülnek, ha leosztáskor ász, tízes vagy hetes kerül a kezükbe (az ász és a tízes jelenti a zsírt, amit a végén összeszámolnak, és az nyer akinek több van belőlük, a hetes pedig minden lapot üt). Az osztáskor én kapom az első négy lapot a kártyacsomagból. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) egyetlen „értékes" lap sem lesz a kezemben;

b) legalább egy értékes lapot kapok;

c) legfeljebb három értékes lapot kapok?

3804 A Vörös hajú Szemüvegesek Klubjának – melybe vörös hajú, szemüveges vagy vörös hajú és szemüveges egyének léphetnek be – 50 tagja van. A klubtagok közül véletlenszerűen kiválasztunk egy főt. Annak a valószínűsége, hogy vörös hajút választunk: 0,82, annak pedig, hogy szemüvegest: 0,76.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy vörös hajú és szemüveges tagot választunk ki véletlenszerűen?

b) Hány olyan tagja van a klubnak, aki mindkét tulajdonsággal rendelkezik?

3805 Egy ismerősöket gyűjtő weboldalon Teréz két klubnak is tagja, a kígyóbűvölőknek és a hastáncosoknak. Egy jeles napon jobban körülnézett a weblapon, és azt tapasztalta, hogy amikor véletlenszerűen rákattintott ismerősei közül egyre, az adott ismerős 0,6 valószínűséggel volt tagja a hastáncosoknak és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel volt kígyóbűvölő hastáncos. Mi, a Nemzetbiztonság Bt.-nél

tudjuk, hogy Teréz ismerősei közül 0,1 valószínűséggel választhatunk olyat, aki egyik klubnak sem tagja, és azt is, hogy Teréznek csak kígyóbűvölő ismerőse pontosan 30 van. Milyen jeles alkalomból kutakodott Teréz az oldalon?

3806 Egy osztályban 17 gyereknek van kutyája, 18-nak van macskája, és 18-nak kanárija (nekik ezen kívül nincs másfajta háziállatuk). 6-an mindhárom fajta állatot tartják, 8 gyereknek van kutyája és kanárija, 10-nek macskája és kanárija, 11-nek pedig kutyája és macskája. Az osztályba jár még 10 tanuló, akik fejenként egyet-egyet tartanak az ábrán látható állatokból. Mennyi a valószínűsége, hogy az osztályból kiválasztva egy főt, annak pontosan két fajta állatról kell gondoskodnia otthon?



3807 Feledékeny Ferenc elfeledte Ede mobiltelefon-számát. Még azt sem tudja, hogy a kilencjegyű számból az első két jegy 20, 30 vagy 70. Azért arra emlékszik, hogy az első két jegy utáni öt szám között két 1-es, két 2-es és egy 4-es van. Az is rémlik neki, hogy az utolsó kettő teljesen ismeretlen számmal kiegészítve az utolsó hétjegyű hívószám hárommal osztható. Feledékeny Ferenc véletlenszerűen begépel egy 9 jegyű hívószámot, ami a feltételeknek megfelel. Mekkora valószínűséggel lesz téves a hívás?

3808 Egy dobozban 20 gyalogos és valamennyi lovas ólomkatona van. A dobozból egymás után véletlenszerűen kiveszünk két katonát (az először kivett nem kerül vissza). $\frac{1}{30}$ annak a valószínűsége, hogy mindkettő lovas lesz.

a) Hány darab lovas katona volt eredetileg a dobozban?

b) Jani azt játssza, hogy amikor kivesz egy gyalogos katonát a dobozból, beletesz egy lovast. Egyszer csak abbahagyja, majd a következőt mondja: „Jé, most annak a valószínűsége, hogy csukott szemmel egymás után két lovas katonát veszek ki, 0,5-nél nagyobb!" Hány cserét hajtott végre Jani?

3809 Egy villamosvezető p valószínűséggel nyitja ki egy villamos összes ajtaját egyenként a megállóban.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy ajtót ki kell nyitnia a nyolcból egy adott megállóban?

b) Milyen p értéktől kezdődően fog a vezető 0,5-nél nagyobb valószínűséggel kinyitni legalább egy ajtót egy adott megállóban?

3810 Károly bácsi és Irma néni előszeretettel dédelgetik kedvenc macskáikat, Szerénkét és Lukréciát. A két macska utálja egymást, ezért egyszerre mindkettő nincs egyikük ölében sem. Olyan sem fordul elő, hogy egy macska egyszerre kettejük ölében legyen. Károly bácsi ölében 0,2 valószínűséggel találjuk meg Szerénkét és 0,15 valószínűséggel Lukréciát. Irma néni ölében 0,55 valószínűséggel ül valamelyik macska. Azt is tudjuk még, hogy Lukréciát 0,1-del nagyobb valószínűséggel találjuk meg valamelyikük ölében, mint Szerénkét.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy egyik macskát sem látjuk az öregek ölében ülni, ha véletlenszerűen odapillantunk?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy most éppen Irma néni ölében ül Szerénke?

3811 Egy autóversenyen induló 25 autó között van néhány kabrió, és van valamennyi vörös színű. Verseny közben az autók közül jó pár ütközött a gumifallal. A verseny végén $\frac{1}{5}$ valószínűséggel választunk olyan kabriót, amely nincs összetörve. Ugyanilyen valószínűséggel választunk vörös színű, jó állapotú autót, valamint összetört, vörös, nem kabrió autót. A vörös kabrió valószínűsége $\frac{2}{5}$, a törött vörös kabriójé pedig $\frac{7}{25}$. Egy gumifalból kivett nem vörös kabrió választásának valószínűsége megegyezik a gumifalból kivett, de sem vörös, sem kabrió autó választásának valószínűségével. Mekkora valószínűséggel találunk olyan autót végül, amely nem ment a gumifalnak, nem kabrió és nem vörös?

3812 Egy hotelben a vendégek egy kívülről az ajtóra akasztható táblával hozhatják a személyzet tudtára, hogy az időpont nem alkalmas például a szoba kitakarítására. Minden szoba esetében bármely időpontban 50% annak a valószínűsége, hogy a tábla az ajtón van. Azt is tudjuk, hogy 0,999-nél nagyobb a valószínűsége, hogy legalább egy szoba takarítható.



a) Legalább hány szoba van a hotelben?

b) Időközben a hotelt átalakították kissé, és megváltoztak a vendégek szokásai is. Most 0,79 annak a valószínűsége, hogy legalább egy szoba ajtaján lóg tábla. Ha viszont a szobák csak 0,75 valószínűséggel lennének a személyzet számára megközelíthetőek, illetve 2-vel több szoba lenne a hotelben, akkor 0,01 valószínűséggel nem lógna egy ajtón sem a „Kérem, ne zavarjon!" felirat. Hány szoba van most a hotelben? (A mellékszámításokat legalább öt tizedesjegyre, az eredményeket pedig egy tizedesjegyre kerekítsük.)

3813 Tekintsük a következő függvényt, ahol $A < B$ pozitív egyjegyű számok:

$$f(x) = x^2 - (A + B) \cdot x + A \cdot B.$$

Mennyi a valószínűsége, hogy ha A és B helyére találomra beírunk egy számot, akkor a függvény két zérushelye között legalább három egész számot találunk a számegyenesen?

3814 Sanyi műhelyében három ládában vannak csavarok. Az elsőben van 50 tízes, 70 tizenkettes és 30 tizennégyes. A második ládában van 10 tízes, valamennyi tizenkettes és 80 tizennégyes csavar. A harmadikban 20 tízes, 40 tizenkettes és néhány tizennégyes csavart találunk. Ha egyszer csak leborulna az összes láda és a földről vennénk fel találomra egy csavart, akkor az $\frac{1}{3}$ valószínűséggel lenne a második ládából való tizenkettes, vagy a harmadik ládából való tizennégyes.

a) Hány csavar van összesen a három ládában?

b) Sanyi a legutóbbi autóversenyen összetört vörös kabrió sportautó javításához felhasználta az összes tizennégyes csavart a harmadik ládából (a többi csavarra nem volt szüksége). Később kivesz véletlenszerűen még egy-egy csavart mindhárom ládából, ezek méretei $\frac{40}{187}$ valószínűséggel lesznek különbözőek. Hány darab tizenkettes csavar volt eredetileg a második és hány tizennégyes csavar volt a harmadik ládában?

c) Bizonyítsuk be, hogy akármennyi tizenkettes csavart is tesz a második ládába Sanyi, 0,068 és 0,294 közé esik annak a valószínűsége, hogy véletlenszerűen választva egy-egy csavart a három ládából, azok méretben különböznek. (A harmadik ládában továbbra sincs tizennégyes csavar.)



Visszatevéses mintavétel

3815 A gyártósor végén a termékeket egy nagy dobozba öntik. Ha a dobozból kiveszünk egy terméket, megvizsgáljuk, majd visszatesszük, akkor az a termék 0,13 valószínűséggel nem felel meg az előírásoknak. Most éppen öt terméket ellenőrzünk egyesével (ellenőrzés után visszatesszük őket). Mennyi a valószínűsége, hogy

a) minden kivett termék megfelel az előírásoknak;

b) egyik kivett termék sem felel meg az előírásoknak?

3816 Barbi a játék osztályon előszeretettel nézi meg a Barbie babákat. A babákon vagy nadrág van, vagy szoknya, de ez első pillantásra nem látszik a dobozon. Tudjuk, hogy 10 babából 7 szoknyát visel, a többi nadrágot. Mennyi a valószínűsége, hogy ha Barbi hat Barbie-t vesz le a polcról egymás után véletlenszerűen (de megtekintésük után gondosan visszahelyezve őket), akkor

a) mindegyik nadrágot visel; *b)* mind szoknyát visel?

3817 Emil, a kosárlabdázó 0,35 valószínűséggel dob be egy hárompontost. Az edző a tegnapi meccs statisztikái alapján dicséri Emilt, mert csak egy hárompontos dobását rontotta el a négyből.

a) Mennyi volt előzőleg ennek a valószínűsége?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a következő meccsen Emil hét hárompontos kísérletből egyszer talál be?

3818 Erika nagyon jól kézilabdázik. A statisztika szerint átlagban 20 büntetőből 19-et értékesít. Mekkora valószínűséggel fog

a) pontosan egy dobást elrontani 3 büntetőből;

b) pontosan egy gólt dobni 9 büntetőből?

3819 Egy 30 fős osztályból 24-en folyamatosan készülnek az órákra történelemből, ők mindig szépen is felelnek. A tanár egy hónap alatt tíz főt feleltet, egy órán egy tanulót. Mennyi a valószínűsége, hogy a hónap során a tanár 7 szép feleletet fog hallani a tárgyból? (Természetesen a következő órán újra felelhet az, aki egyszer már felelt, és felkészületlenül nem lehet szépen felelni.)

3820 Egy zenelejátszón Zsófi 12 számot tárol. Közülük négyet szeret nagyon, a többi inkább csak tetszik neki. A lejátszón van EVL, azaz úgynevezett „egyes véletlen lejátszás" funkció. Ha bekapcsolja, a lejátszó véletlenszerűen lejátszik egy számot, majd alaphelyzetbe áll. Mennyi a valószínűsége, hogy ötször használva az EVL funkciót,

a) éppen öt olyan számot fog hallani, amit nagyon szeret;

b) felváltva hall majd általa nagyon szeretett zenét és olyan számot, ami csak tetszik neki;

c) pontosan négy szeretett számot fog hallani?

3821 A magyar szövegekben nagyjából minden tizedik betű „E" betű. Egy magyar író éppen most gépeli új regényének utolsó fejezetét. Minek nagyobb a valószínűsége, hogy A = {a következő 20 karakterből háromszor nyomja le az „E" billentyűt}, vagy B = {a következő 25 karakterből négyszer nyomja le az „E" billentyűt}?

3822 Hagyományos dobókockával hétszer dobva minek nagyobb a valószínűsége: hogy A = {háromszor dobunk négynél kisebbet}, vagy B = {négyszer dobunk háromnál nagyobbat}?

3823 Egy szabálytalan érmével kétszer dobva annak a valószínűsége, hogy

a) mindkét dobás fej lesz, 0,49; *b)* mindkét dobás írás lesz, 0,81.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy az érmét feldobva fejet dobunk?

3824 Van egy nem szabályos dobókockánk, amelyen pontosan beállítható, hogy melyik érték mekkora valószínűséggel következzen be. Mennyire állítsuk be az egyes dobás valószínűségét, ha azt szeretnénk, hogy nagyobb valószínűséggel következzen be hétszer, mint nyolcszor tíz dobásból?

3825 Vera, a teniszezőnő 0,2 valószínűséggel ad ász szervát. Mennyi a valószínűsége, hogy a meccs során eddig adott tíz szervájából legfeljebb nyolcat nem tudott visszaadni az ellenfele?

3826 A képen látható összes dobókocka mindegyikével sorban egymás után egyszer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két dobás esetén összetett számot kapunk?



3827 Egy céllövöldében Feri tíz lövésből háromszor találja el a nyereményeket tartó hurkapálcákat. Mennyi a valószínűsége, hogy 7 lövésből legalább 5 nyeremény az övé lesz?

3828 Egy társasjátékban a játékosok minden fordulóban négyszer dobnak a szabályos dobókockával. A játékban kiemelt fontosságú, hogy ki hány darab hatost dobott. Számítsuk ki az összes lehetséges hatos dobások számának valószínűségét, majd ábrázoljuk oszlopdiagramon.

3829 Jani az eddig megírt matematikadolgozatai alapján kiszámolta, hogy minden feladatot körülbelül 0,6 valószínűséggel tud megoldani. Minek van a legnagyobb valószínűsége, hogy a következő dolgozat nyolc feladatából hány feladatot old meg majd Jani?

3830 Egy szabálytalan érmével kétszer dobva annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás lesz, 0,18. Mennyi a valószínűsége a fejnek és mennyi az írásnak?

3831 Egy sorsjegyjátéknak csak két eredménye lehet: vagy nyerünk, vagy veszítünk. Annak a valószínűsége, hogy hat sorsjegyet véve kétszer nyerünk, ugyanannyi, mint hogy hat sorsjegyből kétszer veszítünk. Mennyi a valószínűsége, hogy egy szelvénnyel nyerünk?

3832 Van egy nem szabályos dobókockánk, amelyen pontosan beállítható, hogy melyik érték mekkora valószínűséggel következzen be. Milyen értékre állítsuk be az ötös dobás valószínűségét, ha azt akarjuk, hogy nagyobb valószínűséggel következzen be hét dobásból hatszor, mint négyszer?

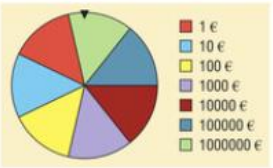
Az alábbi feladatok olyan egyenletekre vezetnek, melyek megoldási módozatairól nem tanultunk. A megoldások megtalálásához igénybe vesszük számítógép segítségét.

3833 Van egy kétoldalú érménk, amelyen pontosan szabályozható, hogy egy feldobásnál melyik oldal mekkora valószínűséggel következik be. Milyen valószínűséggel legyen egy feldobás eredménye írás, ha azt szeretnénk, hogy az írás maximális valószínűséggel következzen be hat dobásból ötször?

3834 Hányadfokú egyenlet megoldására vezet az alábbi feladat? Írjuk fel az egyenletet. Adjunk rá közelítő megoldást számítógép segítségével.

Egy távolsági autóbusz hat falun keresztül közlekedik. A sofőrnek az útja során minden megállóban p valószínűséggel kell megállnia utasokat felvenni. Annak a valószínűsége, hogy pontosan két faluban nincs sem fel-, sem leszálló utas, 0,01536. Határozzuk meg p értékét.

3835 Az ábrán látható szerencsekerék minden körcikkéhez különböző nyeremény tartozik (az egyes nyeremények bekövetkezéseinek valószínűsége egyforma). Annak a valószínűsége, hogy kilenc forgatásból pár alkalommal a főnyeremény adódik, megközelítőleg 0,25. Hány alkalommal forgattuk ki kilenc próbálkozásból a főnyereményt? (A feladat megoldása során kerekítsük két tizedesre a kapott értékeket.)





3836 A *Garázdálkodj okosan!* nevű társasjátékot három játékos játssza egy 20-oldalú „dobókockával". A játék bizonyos mezőin különböző pénzösszegeket kell kifizetniük egymásnak, például az egyik mezőn a soron levő játékos egyszer dob, és

– ha a dobás eredménye 1 és 10 közötti szám (az 1-et és a 10-et is beleértve), akkor nincs kifizetés;

– ha a dobás 11 és 16 közötti, akkor a körben utána jövő játékosnak fizet 100 eurót;

– egyébként a körben előtte levőnek fizet 50 eurót.

Az egyik játékosra a játék folyamán tízszer került sor, és összesen 400 eurót vesztett ezen a mezőn.

a) Írjuk fel az összes lehetséges esetet.

b) Mennyi volt ennek előzetesen a valószínűsége?

Mintavétel visszatevés nélkül

3837 Egy osztályban minden héten másik két tanuló a „hetes". A 30 fős osztályba betérő helyettesítő tanár – miután nem megy senki jelenteni – két főt találomra kiválaszt. Mennyi a valószínűsége, hogy mindketten azt mondják: „A héten nem is én vagyok a hetes!"?

3838 Murphy törvénye szerint mindig azt az alkatrészt nem találjuk, amit keresünk. A 135 szegecset tartalmazó dobozban 27 darab olyan van, amely nekünk éppen megfelelne. A dobozba markolunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a tenyerünkbe került 10 szegecs közül

a) mindegyik megfelel a célunknak; *b)* egyik sem felel meg?

3839 Nagymama elküldte Piroskát egy tégely fagylaltért. A tégelybe pontosan 6 gombóc fagyi fér el. Mivel a farkas feltartotta Piroskát, a fagylaltospultban már csak egy-egy gombóc maradt mind a 13-féle fagyiból. A nagymama elfelejtette Piroskának felsorolni, hogy melyik hét fajta fagyit szereti. Mennyi a valószínűsége, hogy Piroska olyan fagyit visz haza, amit a nagyi szeret?

3840 A büfében egy letakart tálcán sajtos-párizsis és téliszalámis szendvicsek vannak ugyanabban az árban – előbbiből 12, utóbbiból 15 darab. Zsolt négy darab szendvicset kér válogatás nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy mind téliszalámis lesz?

3841 Az út szélén kifeszített dróton 7 házi és 10 mezei veréb tollászkodik. Egy ajtó becsapódására véletlenszerűen felrebben és elszáll 5. Mennyi a valószínűsége, hogy ezután ötször annyi mezei, mint házi veréb fog a dróton tovább tollászkodni?

3842 A verebekkel szemben fecskék ülnek: 6 parti- és 11 füstifecske. Egy ajtócsapódásra 10 madár száll el. Mennyi a valószínűsége, hogy a zaj után csak füstifecskék ülnek majd a dróton?

3843 A 27 fős A és a 31 fős B osztályok együtt kirándulnak. A kirándulók közül találomra kiválasztunk egy 8 fős csapatot. Mennyi a valószínűsége, hogy ugyanannyi A-s és B-s lesz a csapatban?

3844 Tominak egy nagy zsákban van 63 labdája, ezek közül 42 egyszínű, a többi tarka. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 labdát véletlenszerűen kivéve a zsákból, pontosan 7 egyszínű lesz köztük?

3845 Gábor bűvészkedik. Most is van 6 ász és 4 Jolly Joker az ingujjában. Találomra előhúz öt lapot. Mekkora valószínűséggel lesz köztük 2 ász és 3 Jolly?

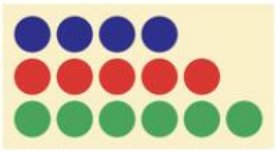
3846 Károly összehord minden tücsköt-bogarat – egészen pontosan 135 tücsköt és 92 bogarat. Véletlenül 15 kis állat kiszabadul, Károly feleségének legnagyobb örömére. Mekkora valószínűséggel repül/csúszik/mászik el legalább 3 bogár a kissé bogaras Károlytól?

3847 A nagypályás focimeccs egyik pillanatában Klári a televízióra pillantva megállapítja, hogy a kezdőkörben éppen öt játékos tartózkodik. Mennyi a valószínűsége, hogy ekkor mindkét csapatból voltak a kezdőkörben, ha a játékosok teljesen véletlenszerűen tűnnek fel a pálya bármely pontján?

3848 A „Hullócsillagot lelünk" antitalentum-kutató versenyre 17 fiú és 23 lány jelentkezett az énekes kategóriában. A zsűri hét főt válogat a döntőbe. Mekkora valószínűséggel lesznek

a) csak azonos neműek a döntőben; *b)* többen a lányok, mint a fiúk a döntőben?

3849 Egy dobozba az alábbi golyókat dobáltuk, majd belemarkoltunk és néhány golyót kivettünk.



a) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két darab zöld golyót tartunk a tenyerünkben, ha éppen annyi golyót veszünk ki, amennyi ahhoz szükséges, hogy legalább egy színből legyen legalább kettő?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan három piros van a kezünkben, ha kivesszük a legkevesebb számú golyót, ami ahhoz szükséges, hogy mindhárom színből legyen legalább egy?

3850 Egy kis ruhazsákban 15 kamillás és 25 mentolos papír zsebkendő van. Öt zsebkendőt veszünk ki véletlenszerűen. Hány darab kamillás lesz közöttük a legnagyobb valószínűséggel? Számítsuk ki az összes lehetséges eset valószínűségét, és ábrázoljuk oszlopdiagramon.

3851 Egy kekszesdobozban összesen 100 darab mogyorós és csokoládés keksz van. Mennyi legyen a dobozban az egyes fajtákból, ha azt akarjuk, hogy négy darabot kivéve a legnagyobb valószínűséggel legyen köztük

a) két-két darab mindkét kekszből;

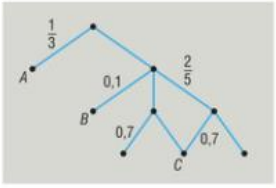
b) három darab a mogyorósból és egy darab a csokoládésből?

3852 Egy gazdaságban barackszüreten voltunk, összesen 1880 szem barackot szedtünk le. Válogatás után egy részükből lekvárt főznek (I. kategória), másik részükből konzerv készül (II. kategória), a harmadik részt pedig egy közeli szállodába szállítják azonnali fogyasztásra (III. kategória).

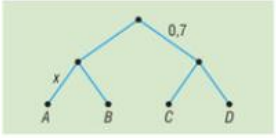
A gazda szerint a szedett mennyiség 15%-a kerül a hotelbe, 35%-ából lesz konzerv, a maradékot ők megfőzik lekvárnak. Még a válogatás előtt adott a leszedett barackból 20 szemet. Mekkora a valószínűsége, hogy közöttük pontosan 10 darab I. kategóriás és 8 darab II. kategóriás barackot találunk?

Valószínűségi játékok gráfokon (kiegészítő anyag)

3853 Határozzuk meg az alábbi gráfjáték lehetséges öt végeredményéből az *A*, *B*, *C*-vel jelölt kimenetelek valószínűségeit.

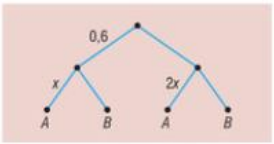


3854 Tekintsük az alábbi gráfot és az adott valószínűségeket. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az A esemény 0,27-nál kisebb valószínűséggel következzen be.





3855 Tekintsük az alábbi gráfot és az adott valószínűségeket. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az A esemény 0,42 valószínűséggel következzen be.



3856 Ákos ezt mondta a barátainak: „Ha ötös lesz a matematikadolgozatom, akkor 80% esélyem van arra, hogy elengednek bulizni. Ha nem, akkor csak 5%. Úgy 50% esélyt adok magamnak, hogy ötös legyen a dolgozatom." Mekkora valószínűséggel megy Ákos a buliba?

3857 A 90 éves Józsi bácsi memóriája már nem a régi, a teendőinek harmadát el szokta felejteni. Ha reggel nem veszi be a gyógyszerét, akkor biztosan rosszul lesz délelőtt. Ha beveszi a gyógyszert, akkor 90% valószínűséggel nem lesz rosszul aznap. Mekkora valószínűséggel érzi ma jól magát Józsi bácsi?

3858 Holnapra az Országos Meteorológiai Szolgálat 60% esélyt ad arra, hogy sütni fog a Nap és 40%-ot, hogy felhős lesz az ég. Napsütésben a Desedára 40%-kal nagyobb eséllyel megyünk fürdeni, mint a Balatonra. Rossz időben háromszor akkora valószínűséggel ülünk be egy kávéházba, mint a könyvtárba.

a) Magyarázzuk el ábrákkal a lehetőségeket.

b) Számítsuk ki az egyes kimenetelek valószínűségeit.

3859 Julinak három fiatalember udvarol, közülük választ egyet. „Ha Józsit választom, akkor moziba visz vagy pizzériába. Ha Jenőt, akkor cukrászdába visz vagy kirándulni. Ha Jeromost, akkor moziba megyünk vagy kosármeccsre." Mekkora valószínűséggel fog Juli mozifilmet látni a randevún, ha az egyes lehetőségek közül minden helyzetben egyenlő valószínűséggel választ? Ábrázoljuk gráffal.

3860 Egy cicának két játéka van: egy színes labda és egy játékegér. Öt esetből átlag egyszer fut a labdához. Ha odaért valamelyik játékszerhez, négy esetből átlag egyszer püföli a jobb mellső lábával. Mekkora valószínűséggel püföli bal mellső lábbal az egeret?

3861 Két, azonos képességű csapat kézilabdázik egymás ellen, helyzetkihasználásuk 50-50%-os. Most éppen 20:20 az állás. Mekkora valószínűséggel lesz a végeredmény 22:22?

3862 Egy csomag 32 lapos magyar kártyából két lapot húzunk egymás után visszatevés nélkül. Ha tök vagy király a kihúzott lap, akkor kapunk 1 pontot, ha nem, akkor veszítünk.

a) Ábrázoljuk gráffal, és írjuk az élekre az egyes ágak valószínűségeit.

b) Mekkora valószínűséggel jövünk ki pontveszteség nélkül a két körből?

3863 Határozzuk meg x értékét a 3855. feladatban úgy, hogy az A esemény 0,42-nál nagyobb valószínűséggel következzen be.

3864 Egy cselgáncs olimpikonnak a selejtezőn négy mérkőzésen kell bizonyítania rátermettségét. Minden mérkőzésen erősebb ellenféllel kell megküzdenie. Az ellenfelek erőssége egy ötös skálán rendre 1, 2, 3 és 4 (azaz öt mérkőzésből az első ellenfél általában 1, a második 2, a harmadik 3, az utolsó ellenfél pedig 4 mérkőzést nyer meg).

a) Mekkora a valószínűsége, hogy olimpikonunk végső győzelmet arat?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a harmadik mérkőzésén veszít?

c) Ha megnyeri a fenti négy mérkőzést, akkor az ötös skálán milyen erőssége lehet az olimpikonunknak?



3865 Biga csiga és Batka manó lábtengóznak, az állás éppen 4:3 Biga csiga javára. A játék hat pontig tart. Mekkora valószínűséggel

a) nyer Biga csiga 6:3 arányban;

b) nyer Batka manó 5:6 arányban;

c) alakul ki játék közben döntetlen;

ha Batka manó jelen pillanatban 0,064 valószínűséggel nyer 4:6 arányban?

3866 Andor és Boldizsár darts játékot játszik: az nyer, aki elsőnek dobja a nyilat a tábla közepébe. Andor az első körben 70%-os valószínűséggel talál a tábla közepébe, Boldizsár 80%-os valószínűséggel. Ahogy egyre jobban belejönnek, minden körben 10%-kal növekszik mindkét fiú találati esélye. A játékot Andor kezdi.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy végigjátsszák a játékot?

b) Mekkora valószínűséggel nyeri a játékot Andor?

3867 Egy erősebb és egy gyengébb focicsapat egy gólig tartó bemutatómérkőzéseket játszik összesen négyszer, különböző helyszíneken. Tudjuk, hogy a négy mérkőzés után az összesített eredmény 0,24-nál kisebb valószínűséggel lesz az, ami a kijelzőn látható.



Legalább hányszor nagyobb a valószínűsége, hogy az erősebb csapat nyer egy meccset, mint hogy a gyengébb?

3868 Tarzan és Jane lasszóhajítást gyakorol felváltva a dzsungelben. Az nyer, aki először dobja Bagira, a fekete párduc fejére a hurkot. Annak a valószínűsége, hogy Jane talál, minden egyes körben 10%-kal nagyobb lesz. Tarzan teljesítménye idővel nem változik. A játékot Jane kezdi. Tudjuk, hogy

- Tarzan győzelmi esélye az első körben 0,48;
- Jane győzelmi esélye a harmadik körben 0,03584;
- Tarzan győzelmi esélye a harmadik körben 0,032256.

Mekkora valószínűséggel szaladgál Bagira megzabolázatlanul a harmadik kör után is?

Valóság és statisztika

3869 Ha egy választáson reggel 6 órától lehet szavazni este 7 óráig és feltételezzük, hogy a szavazók egyenletesen járulnak az urnákhoz, akkor hány óra hány perckor adja le szavazatát a szavazók 40%-a?

3870 Polimorfiában az országgyűlési választásokon a 3 100 000 szavazásra jogosultnak körülbelül 40%-a megy el szavazni. A szavazók körülbelül 15%-a szavaz a Polimorf Nemzeti Pártra. A biztos PNP szavazók hány százaléka a teljes négymilliós lakosságnak?

3871 Megnyerte-e a választást két párt közül az, amelyik a szavazatok 80%-nak összeszámlálása esetén a szavazatok 60%-át szerezte meg?

3872 Egy választáson a szavazatok 80%-át számolták eddig össze. Milyen arányt kell elérnie a két párt közül annak, amelyik azt akarja, hogy már most győztesnek tekinthesse magát?

3873 A választás éjszakáján valaki büszkén említi: „A szavazatok egy részének összeszámlálása után már a szavazatok 60%-át megszereztük. Biztos a győzelem!" A szavazatok hány százalékát számolták már össze, ha az illetőnek igaza van? (Két pártra szavazhattunk.)



3874 Egy banktól felveszünk 300 euró kölcsönt, amit fél éven keresztül, heti 30 eurós részletekben törlesztünk. A felvett összeg hány százalékát fizetjük vissza? (A fél évet számoljuk 26 hétnek.)

3875 Egy 200 g-os szeletelt, vákuumcsomagolt szalámi címkéjén olvashatók az alábbiak:

– 110% marhahúsból készült (az eljárás során a hús víztartalma csökken);

– a késztermék 5,5% „házi fűszert" tartalmaz.

Hány százalék „házi fűszert" kellett hozzáadni az eredeti marhahús-mennyiséghez a termék előállításakor, ha annak aránya az elkészítés során nem változik?

3876 Egy újságcikkben ez áll: „A megnyíló üzletház üzleteinek 65%-a ruhát és műszaki cikket árul, a többi 28 üzlet más profilú." Később egy másik kérdésre válaszolva ezt olvashatjuk: „…mindkét műszaki boltban lehet kapni napelemes napszemüveget…". Hány ruhabolt van az üzletházban?

3877 Ha valami 60%-ának 40%-a 18, akkor adjuk meg az eredeti mennyiség kiszámítása nélkül, hogy mennyi ezen mennyiség 70%-ának 50%-a.

Vegyes feladatok

3878 Eszter pénzes ládájában 12 darab 1 eurós, 7 darab 2 eurós és 6 darab 5 eurós érme van.

a) Mekkora valószínűséggel vesz ki találomra egy 5 eurós érmét a ládikából?

b) Eszter tudja, hogy ha szülei megjönnek külföldről, hoznak még érméket, amit neki fognak adni. Később kiderült, hogy csak 1 eurós érmét hoztak haza. Mennyi érmét hozhattak, ha legalább 0,8 annak a valószínűsége, hogy 1 eurós érmét vesz ki Eszter találomra a ládából?

3879 Egy szigeten csak háromféle madár él: *kótyák, kelék* és a keresztezésükből keletkezett *kelekótyák* (utóbbi fajta egyben kótya és kele is). 0,7 a valószínűsége, hogy a szigetre látogató környezetvédők éppen egy kótyát fognak be és 0,3 valószínűséggel kelekótyát. Mekkora valószínűséggel fognak be egy kelét?

3880 Kati, Ágnes, Judit, Flóra és Rita nagyon jó barátnők, bár Ágnes és Judit éppen haragban vannak. Ma este moziba mennek, és egymás mellé vesznek öt jegyet, amelyeket véletlenszerűen osztanak szét egymás között. Mekkora a valószínűsége, hogy nem ülnek egymás mellett a haragosok?

3881 Gábor 0,3 valószínűséggel rúg gólt, ha a kapu felé fordul és rálövi a labdát. Tegnap nagy meccset játszottak, a statisztika szerint Gábor hatszor rúgott kapura, végül 5:4-re nyertek. Mekkora valószínűséggel rúgott Gábor legalább egy gólt az ötből?

3882 Károly bácsi és Irma néni minden este együtt vacsorázik. Vacsorára vagy hidegtálat, vagy meleg ételt készít pontosan egyikük. Ha Irma néni serénykedik, akkor 10 esetből háromszor van hidegtál és hétszer meleg vacsora. Ha Károly bácsi tüsténkedik a konyhában, akkor 0,1 valószínűséggel kerül meleg étel az asztalra és 0,9 valószínűséggel van hidegtál. Mekkora valószínűséggel készítette Károly bácsi a vacsorát, ha tudjuk, hogy ma meleg ételt esznek?

3883 Egy áruház áruátvevője éppen vizsgálja az érkezett termékeket. Ezt úgy teszi meg, hogy véletlenszerűen kivesz a cikkek közül sorban egymás után nyolcat, és ha nem talál köztük hibásat, akkor átveszi az összeset. Mekkora valószínűséggel veszi át az összes árut, ha a gyártósor minden 100. terméket elront?

3884 Gyuri zongorázni tanul. Még az elején tart a tanulásnak, 20 esetből 13-szor melléüt a billentyűknek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy hét hangból álló dallamot négyszer zongorázva

a) már minden második hangot eltalálja; *b)* pontosan a hangok felét játssza le helyesen?

3885 A dartsjátékos Zsolt $\frac{1}{3}$ valószínűséggel találja el a maximális pontot érő „tripla húszas” mezőt. Mennyi a valószínűsége, hogy kilenc nyílból legfeljebb 7-szer dob maximum alatti pontszámot?

3886 Zsófi a zenelejátszóján sokszor használja az EVL (egyes véletlen lejátszás) funkciót. Ezt bekapcsolva a lejátszó találomra lejátszik egy számot, majd alaphelyzetbe áll. A lejátszóra Zsófi 16, testvére pedig 24 számot töltött fel. Az EVL funkciót hétszer használva, mekkora valószínűséggel hall Zsófi

a) pontosan kettő általa feltöltött zenét; *b)* több általa feltöltött zeneszámot?

3887 Mennyi a valószínűsége, hogy egy csomag kártyából 4 lapot kivéve, közülük

a) mindegyik tök; *b)* pontosan három tök;

c) legfeljebb három tök?

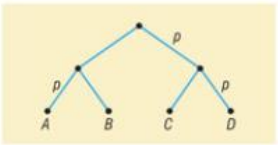
3888 Zsani kapott 100 szem cseresznyét, most azt válogatja. Úgy látja, hogy minden negyedik szem hibás. Laci belemarkol a cseresznyés zacskóba, kivesz belőle 10 szemet. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyszer annyi jó szem lesz a markában, mint amennyi hibás?

3889 Zsóka szekrényében piros és sárga bögrék sorakoznak: 6 darab piros és 4 darab sárga. A reggeli félhomályban kivesz a szekrényből kettőt. Írjuk fel az összes lehetséges eset valószínűségét.

3890 Feldobunk egy érmét, majd dobunk egy kockával. Ha fej volt az érmén és a kocka 3-nál kisebbet mutat, akkor Rákóczi-túrást veszünk, különben dobostortát. Ha írás volt az érmén és a kocka párosat mutat, akkor túrós bélest veszünk, különben meggyes rétest. Mekkora valószínűséggel eszünk meggyes rétest vagy dobostortát?

3891 Eszti, ha eléri a vonatot, akkor 90% az esélye, hogy időben hazaér. Ha nem éri el, akkor 100%, hogy csak holnap ér haza. Mekkora valószínűséggel kell majd rá várni valamennyit, ha az esetek 60%-ában el szokta érni a vonatot?

3892 Adjuk meg az alábbi gráfjátékban p valószínűséget úgy, hogy a B és C kimenetelek együttes valószínűsége 0,4-nél kisebb legyen.



12. évfolyam



Logika, bizonyítási módszerek 120

Számsorozatok 130

Térgeometria 139

Valószínűség-számítás, statisztika 174

12.1. LOGIKA, BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

Logikai feladatok, kijelentések

4001 Logikai kijelentésnek tekinthetjük-e az alábbi állításokat?

a) Jómagam matematikából okos vagyok.

b) Jómagam matematikából ötös voltam tavaly év végén.

c) Te vagy a legszebb lány a világon!

d) Repül a bálna.

e) Sápadt a Hold.

f) A Hold fényrendje ebben a pillanatban 5 vizuális magnitúdó.

4002 Logikai kijelentések-e az alábbi mondatok? Ha igen, akkor mi a logikai értékük?

a) A 100 nagy szám.

b) A 100 a 10-nek négyzete.

c) A 100 csak a 10-nek négyzete.

d) Láttál-e már karón varjút?

e) Esik az eső.

f) Józsi alacsonyabb, mint Géza; Géza alacsonyabb, mint Feri, és Józsi magasabb, mint Feri.

4003 Adjuk meg a következő kijelentések logikai értékeit.

a) A 12 osztója a 156-nak.

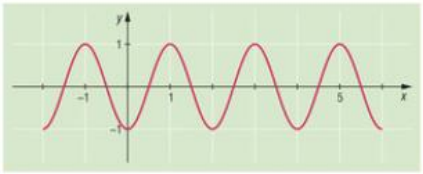
b) Minden téglalap négyzet.

c) A rombusz átlói egymás felezőmerőlegesei.

d) A szinuszhullám transzformálható úgy, hogy minden egész helyen szélsőértéke legyen.

e) Az $f(x) = \{\operatorname{sgn}([x^2 - 4])\}$ függvény szigorúan monoton növő.

(Utóbbi kérdésben $[x]$ az x egészrészét, $\{x\}$ az x törtrészét jelenti.)



4004 Töltsük ki az alábbi 5+1-es geometriai totó tipposzlopát. Jelentse 1 az igaz, 2 a hamis állítást, X pedig, ha az állítás nem kijelentés.

Állítás	Tipp
1. Van olyan deltoid, amely rombusz.	
2. Minden rombusz deltoid.	
3. Nem létezik olyan paralelogramma, amely deltoid.	
4. Minden deltoid trapéz?	
5. Van olyan trapéz, amely deltoid.	
+1. A tipposzlop nem telitalálatos.	



4005 Döntsük el, igazak-e az alábbi kijelentések. Töltsük ki a táblázatot.

Állítás	Logikai értéke
a) Az öt négyzetgyöke racionális szám.	
b) Az öt négyzetgyöke valós szám.	
c) Van olyan szám, amely negatív, és abszolút értéke az öt négyzetgyöke.	

4006 Jancsi és Juliska gyermekkorukban sokat játszottak együtt a mézeskalács ház kertjében. A *hazudós* játékuk vagy úgy kezdődött, hogy Jancsi kijelentette:

a) *„Én most hazudok."*

vagy úgy, hogy azt mondta:

b) *„Én most hazudni fogok."*

Logikailag egyenértékű-e a két kijelentés?

4007 Ravaszdi Rudolf elsőéves hallgató a rókaképzőben. A hét első négy napján hazudik, a többi napon igazat mond. Mikor mondhatta a következőket?

a) *„Holnap igazat mondok."*

b) *„Holnap hazudok."*

4008 Ravaszdi Rudolf elvégezte a rókaképzőt, nemrég diplomázott. Már minden második napon mond csak igazat (jó eséllyel fel is veszik a *masterképzésre*). Mikor mondhatta a következőket?

a) *„Holnap hazudok."*

b) *„Holnap igazat mondok."*

4009 Egy bolondokházában négyféle emberrel találkozhatunk. Vannak egészségesek, akik meg tudják különböztetni az igaz és a hamis dolgokat, és vannak betegek, akik pontosan fordítva gondolják: az igazat hamisnak és a hamisat igaznak vélik. Másrészt a lakók egy része ápolt, a többiek orvosok. Sajnos lehetnek az intézetben egészséges ápoltak és beteg orvosok is.

A bolondokházában Jani kijelenti: *„Nem vagyok egészséges orvos."* Mi Jani:

a) beteg ápolt; *b)* egészséges ápolt; *c)* beteg orvos; *d)* egészséges orvos?

4010 A tizedikes fiúk foci közben kirúgták az ablakot. A *„Ki rúgta ki az ablakot?"* kérdésre csapat négy tagja – Laci, Marci, Nándi, valamint Oszi – a következőket válaszolta ebben a sorrendben:

Laci: *„Nándi volt."* Marci: *„Nem én voltam."* Nándi: *„Oszi tette."* Oszi: *„Nándi hazudik."*

Később kiderült, hogy pontosan ki tette, és az is, hogy a fiúk közül csak hárman mondtak igazat. Döntsük el ennyi információból mi is, hogy László, Márton, Nándor, Oszkár közül ki volt a tettes.

4011 Mivel az ellentétek vonzzák egymást, az igazmondó juhász és a hazudós királylány összeházasodott. Nos, hosszú együttélés után már nem mondott mindig igazat a juhász, és nem hazudott mindig a királylány. Azonban, hogy az ellentét megmaradjon, egyszerre nem teszik ugyanazt. Döntsük el egyetlen kérdéssel, hogy ki mond éppen igazat, és melyikük hazudik.

4012 Tizenegyedik évfolyam elején az osztályba négy új diák érkezett. Keresztneveik: Emma, Tivadar, Konrád, Csilla. Vezetékneveik: Kis, Nagy, Fekete és Fehér, de ebben a sorrendben egyik vezetéknév sem a sorban megfelelő helyen álló keresztnévhez tartozik. Azt is tudjuk, hogy Tivadar, Fekete és Fehér különböző iskolából érkeztek, valamint Konrád és Emma vezetéknevei ellentétek. Mi az új tanulók teljes neve?



4013 A január elsején megrendezett korhelyfutáson 50 fő indult, és ugyanennyien célba is értek. A célban megkérdeztek mindenkit, hogy véleménye szerint hányadik lett. Negyvenen tévedtek. Mi lehetett a legkisebb és a legnagyobb összege azoknak az értékeknek, amit a célbaérkezők mondtak?

4014 Egy bolondokházában négyféle emberrel találkozhatunk. Vannak egészségesek, akik meg tudják különböztetni az igaz és a hamis dolgokat, és vannak olyanok, akik pontosan fordítva gondolják: az igazat hamisnak és a hamisat igaznak vélik. Másrészt a lakók egy része ápolt, a többiek orvosok. Sajnos lehetnek az intézetben egészséges ápoltak és beteg orvosok is.

A bolondokházában Józsi azt hiszi, hogy Jani beteg; Jani pedig azt, hogy Józsi orvos. Mit tudhatunk meg ebből Janiról és Józsiról?

4015 Logikai kijelentésnek tekinthetők-e a következő mondatpárok? Ha igen, mi lehet a logikai értékük?

a) Ez a mondat igaz. Az előző mondat hamis.

b) A következő mondat hamis. Ez a második mondat igaz.

c) A következő mondat igaz. Az előző mondat hamis.

d) A következő mondat hamis. Az előző mondat hamis.

4016 Károly, Pista és Zsolt moziba mennek, jegyük egymás mellé szól. Három különböző italt és három különböző ételt vesznek a pénztárnál: jeges teát, kólát és gyömbért, illetve sós mogyorót, pattogatott kukoricát és ropit. Tudjuk, hogy az alábbi kijelentések csak rájuk vonatkoznak:

1. Károly nem iszik kólát.
2. Aki ropit eszik, középen ül.
3. A Zsolti jobbján ülő kólát iszik.
4. A pattogatott kukoricát balra kellett adni, mert a sós mogyoró hamar elfogyott.
5. Pista csak a sor szélén szeret ülni.
6. Károly szomszédja gyömbért iszik.

Ki hol ül a moziban, mit eszik és mit iszik?

4017 Hugi, Angi, Kati, Feri és Lóri, öt jó barát együtt reggelizik egy kör alakú asztal mellett. Öten ötféle ételt esznek és ötféle italt isznak: hideg szendvicset, rántottát, főtt tojást, pirítóst, konzervhalat, illetve baracklevet, teát, kakaót, vizet, narancslevet (nem ebben a sorrendben). Tudjuk a következőket:

1. A fiúk nem egymás mellett ülnek.
2. Feri nem szereti a gyümölcsleveket.
3. Angi kakaót iszik, és egyik szomszédja süti magának a reggelit.
4. A rántottát reggelizőnem gyümölcslevet kért.
5. Aki szendvicset eszik, vizet iszik hozzá.
6. Hugi Lóri mellett ül.
7. A narancslét ivó a rántottát és a főtt tojást evő között ül.
8. Az egyik fiú narancslevet iszik.
9. Kati teát iszik.
10. Lényeges információ, hogy aki a pirítóst szereti, nem kér hozzá teát.

Ki hol ül az asztalnál, mit reggelizik és mit iszik hozzá?



Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció

4018 Adjuk meg formulával az alábbi kijelentéseket. Használjuk az A, B, C, D betűket, a logikai műveleteket és zárójelet.

a) Nem vagyok hazudós.

b) Kimegyünk a strandra és megiszunk egy bambit.

c) Ötöst kapok vagy világgá megyek.

d) Nyerek a lottón és gazdag leszek, vagy holnap is bemegyek dolgozni.

e) Nem igaz, hogy ronda és kopasz vagyok.

f) Jó vagyok matekból és fizikából, de nem vagyok jó se németből, se biológiából.

g) Holnap kirándulni megyünk és hegyet mászunk, vagy csak ülünk a tv előtt és pop-cornt eszünk.

4019 Fogalmazzuk meg a következő kijelentések tagadását.

a) Nem félek a dolgozattól.

b) Minden filmet láttam már.

c) Minden szarka farka tarka.

d) Van rövid nyakú zsiráf, amely jól fésült.

e) Létezik olyan geometriai rendszer, amelyben a háromszög belső szögeinek összege nem 180°.

f) Minden érettségi feladatsorban van ilyen feladat.

g) Létezik holló, amely nem fekete.

h) Egyik 7-tel osztható szám sem osztható 5-tel.

i) Bármely két egyenes metszi egymást.

4020 Jelölje A = *hideg van*, B = *jól felöltözöm*, C = *fázom*, D = *mozogni kell* kijelentéseket. Írjuk le szöveggel a következőket:

a) $A \wedge C$; *b)* $B \vee D$; *c)* $D \wedge \neg C$;

d) $\neg(C \wedge D) \vee B$; *e)* $(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg D)$.

4021 Ma kedd van. Melyik kijelentés igaz és melyik hamis?



a) Nincs hétvége.

b) Vasárnap van vagy hétköznap.

c) Holnap kedd van vagy ma hétfő.

d) Holnap szerda van és ma csütörtök.

e) Tegnap hétköznap volt és holnap nem lesz hétvége.

f) Holnap péntek lesz, vagy tegnapelőtt hétvége volt vagy csütörtök.

4022 Az alábbi mondatok közül melyik a *„Zsoltinak matematikából minden jegye ötös."* kijelentés tagadása?

a) Zsoltinak matematikából csak hármasai vannak.

b) Zsoltinak matekból van ötösnél rosszabb jegye is.

c) Zsoltinak matekból két hármasa van és biológiából megbukott félévkor.

d) Zsoltinak nincs ötöse matekból.



4023 Keressük meg, melyik kijelentésnek melyik a tagadása. Állítsuk párba őket.

A = Minden egész szám osztható hárommal.

B = Van olyan egész szám, amely osztható hárommal.

C = Egyetlen egész szám sem osztható hárommal.

D = Van olyan egész szám, amely nem osztható hárommal.

4024 A De Morgan-azonosságok segítségével fogalmazzuk át a következő kijelentéseket.

a) Nem igaz, hogy jól biliárdozok és golfozok.

b) Nem igaz, hogy a neved Kata vagy Klára.

c) Nem vagyok James és nem vagyok Bond.

d) Nem megyek a boltba vagy nem porszívózok fel.

4025 *a)* Fogalmazzuk meg az állítások tagadását.

b) Döntsük el, hogy melyik kijelentés igaz vagy hamis. Írjuk a logikai értékeket a táblázatba.

	Állítás	Tagadás
A = Minden trapéznak van két párhuzamos oldala és minden szöge különböző.		
B = Van olyan deltoid, melynek minden szöge különböző.		
C = Létezik négyzet, melynek minden oldala vagy területe egységnyi.		

4026 Mit kell tennünk ahhoz, hogy igazzá váljanak a kijelentések?

a) Délután megcsinálom a matek és a fizika házit, vagy megtanulom a verset.

b) Vacsorára rántottát sütök vagy bundás kenyeret és este megnézem a *Szívszerelem* című filmet.

4027 Fogalmazzunk meg kijelentéseket, melyeknek negációja a következő:

a) Van olyan nap, amelynek egy bizonyos órája egyik percében nem gondolok rád.

b) Létezik együttes, amelynek minden számában van olyan versszak, amit nem értek.

c) Minden ételnek van olyan elkészítési módja, melyet egy bizonyos napszakban nem vagyok hajlandó megenni.

4028 Értékeljük ki a következő kijelentések logikai értékét minden lehetséges esetben.

a) Nem igaz, hogy Karcsi korán kelt és sokat dolgozott.

b) Ez a labda gömbölyű és piros, vagy én színvak vagyok.

c) A színházi előadás rövid vagy izgalmas, és nem alszom el közben.

4029 Fogalmazzuk meg a következő kijelentések negációját.

a) Minden feladat könnyű volt és mindet meg is oldottam.

b) Ebben a pizzériában minden pizza finom, vagy van olyan, amit még nem kóstoltunk meg.

c) Létezik olyan háromszög, amelynek minden szöge derékszög.

d) Minden Rubik-kockának van olyan oldala, hogy az azon levő összes négyzet kék.

4030 Milyen logikai értéket adjunk az A, B, C, D kijelentéseknek, hogy a formulák logikai értéke hamis legyen? Keressünk minél egyszerűbb megoldást.

a) $(\neg(A\wedge B)\vee C)\wedge D$; *b)* $A\vee B\vee C\vee D$; *c)* $(A\vee B)\wedge(C\vee D)$; *d)* $\neg(A\wedge B)\wedge(C\vee D)$.



4031 Értékeljük ki igazságtáblázat segítségével a következő logikai formulákat.

a) $A \wedge (\neg B)$; *b)* $(A \wedge B) \vee \neg A$; *c)* $A \wedge (B \vee \neg A)$.

4032 Értékeljük ki igazságtáblázat segítségével a következő logikai formulákat.

a) $\neg(A \wedge B) \vee C$; *b)* $\neg A \wedge (B \vee C)$; *c)* $\neg(A \wedge B) \wedge (C \vee D)$.

Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia

4033 Írjuk fel az A, B, C, D betűk és logikai műveletek felhasználásával a következő kijelentéseket. Ugyanazon kijelentésekre azonos betűket használjunk az *e)* és *f)* feladatokban.

a) Ha Dezső felkér, akkor elmegyek vele táncolni.

b) Ha Xénia rám kacsint vagy dob egy puszit, akkor meghívom cukrászdába.

c) Akkor veszek nagykabátot, ha hideg van és esik az eső.

d) Ha megtanulok úszni, akkor csak a Desedát úszom át, de a Balatont soha.

e) Akkor és csak akkor fáj a lábam, ha ráléptek vagy ha bokán rúgsz.

f) Ha rálépnek vagy bokán rúgsz, akkor fáj a lábam, és ha fáj a lábam, akkor ráléptek vagy bokán rúgtál.

g) Pontosan akkor félek, ha sötét van.

4034 Az alábbi kijelentések csak négyszögekről szólnak. Használjuk a következő jelöléseket: N = négyzet, P = paralelogramma, R = rombusz, E = két-két szemközti oldala egyenlő, K = két-két szomszédos oldala egyenlő, T = szögei egyenlők. Fordítsuk le „magyarra” az alábbi kijelentéseket, majd döntsük el, igazak-e vagy sem.

a) $N \to P$; *b)* $P \to R$; *c)* $P \leftrightarrow E$; *d)* $(E \wedge K) \to R$;

e) $(E \wedge K \wedge T) \to N$; *f)* $(E \wedge K \vee T) \to R$; *g)* $N \leftrightarrow (R \wedge T)$.

4035 *a)* Melyik tétel egyik irányú megfogalmazása a következő kijelentés?

T = Ha egy háromszög derékszögű, akkor az átfogó felezőpontja a háromszög köré írt kör középpontja.

b) Döntsük el, az alábbi mondatok közül melyik az így kimondott tétel megfordítása.

A = Ha egy háromszög átfogójának felezőpontja a háromszög köré írt kör középpontja, akkor a háromszög derékszögű.

B = Ha egy háromszög egyik oldalának felezőpontja a háromszög köré írt kör középpontja, akkor a háromszög derékszögű.

C = Ha egy háromszög egyik oldalának felezőpontja a háromszög köré írt kör középpontja, akkor a háromszög befogóinak négyzetösszege az átfogó négyzetével egyenlő.

4036 *a)* Fogalmazzuk meg az alábbi állítások megfordítását.

b) Döntsük el az állításról és megfordításáról, hogy igaz vagy hamis. Töltsük ki a táblázatot.

	Állítás	Megfordítás
A = Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az paralelogramma.		
B = Ha egy háromszög súlypontja a háromszögön kívülre esik, akkor belső szögeinek felezői egy pontban metszik egymást.		
C = Ha egy függvénynek van minimuma, akkor felülről korlátos.		
D = Ha egy egész szám osztható 7-tel, akkor osztható 21-gyel.		



4037 Melyik alábbi tételeket lehet csak implikációként, illetve melyeket lehet ekvivalenciaként megfogalmazni úgy, hogy igaz legyen?

a) Ha egy háromszög derékszögű, akkor befogóinak négyzetösszege az átfogójának négyzetével egyenlő.

b) Ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 5-tel is.

c) Ha egy háromszög köré írt körének középpontja az egyik oldal felezőpontja, akkor a háromszög derékszögű.

d) Ha egy $\mathbb{R}$-en értelmezett függvény monoton növő, akkor nem monoton csökkenő.

4038 Fejezzük be úgy az alábbi mondatot, hogy az implikáció

a) igaz; *b)* hamis legyen.

Ha egy háromszög belső szögfelezői belső pontban metszik egymást, akkor...

4039 Egészítsük ki úgy az alábbi mondatot, hogy az implikáció

a) igaz; *b)* hamis legyen.

Ha ..., akkor a 100 négyzetgyöke 50.

4040 Figyeljük meg az alábbi kijelentéseket:

A = Ha a 15 osztható 7-tel, akkor...

B = Ha ..., akkor $\sqrt{x^2-2x+1}=|x-1|$.

Egészítsük ki úgy a mondatokat, hogy

a) az A mondat igaz legyen;

b) a B mondat igaz legyen;

c) az A mondat hamis legyen;

d) a B mondat hamis legyen.

4041 Az alábbi kijelentések n pozitív egész számokra vonatkoznak:

$A = n$ 3-mal osztható.

$B = n$ 8-cal osztható.

$C = n$ 24-gyel osztható.

$D = n$ páros.

$E = n$ osztható 12-vel.

$F = n$ prím.

a) Fogalmazzuk meg szövegesen a következő formulákat:

$$(A\wedge B)\to C,\quad D\to\neg F,\quad E\leftrightarrow(A\vee B),\quad (F\wedge\neg A)\to D.$$

b) Adjuk meg a formulák logikai értékét.

4042 A következő kijelentések két pozitív számról szólnak, de mindegyik állítás csak az egyikről. Keressük meg a lehető legkisebb ilyen számokat.

A = Számjegyeinek összege 6.

B = Páros.

C = Utolsó jegye 5.

D = Osztható hárommal.

E = Prím.



4043 Értékeljük ki a következő állítások igazságtartalmát. Mit figyelhetünk meg?

a) A = Ha hideg van, akkor fázom. B = Nincs hideg, vagy fázom.

b) A = Ha piszkálnak, akkor mérges leszek. B = Nem piszkálnak, vagy mérges leszek.

c) A = Ha süt a nap, akkor jó a kedvem. B = Ha nem jó a kedvem, akkor nem süt a nap.

d) A = Ha most nem mond igent, akkor soha. B = Ha egyszer igent mond, akkor most.

4044 Igazoljuk igazságtáblázattal, hogy:

a) $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$; *b)* $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.

4045 Bizonyítsuk ekvivalens formulák felhasználásával, hogy:

a) $A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$; *b)* $(A \to B) \to C \equiv [(\neg A) \to C] \wedge [B \to C]$.

Teljes indukció (emelt szintű tananyag)

4046 Bizonyítsuk be, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorában levő számok összege 2^n. (A legfelül álló 1-et nulladik sornak tekintjük.)

4047 Mutassuk meg, hogy 3 osztója $2 \cdot 7^n + 1$-nek bármely n természetes számra.

4048 Bizonyítsuk be, hogy:

a) 2 osztója az $n^2 - n$ kifejezésnek bármely n természetes számra;

b) 27 osztója a $10^n + 18n - 1$ kifejezésnek minden n természetes számra;

c) 6 osztója az $n^3 + 11n$ kifejezésnek minden n természetes számra.

4049 Igazoljuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget: bármely $a \geq -1$ és n természetes számra

$$(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

4050 Bizonyítsuk be, hogy az első n pozitív egész szám négyzeteinek összege:

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

4051 Bizonyítsuk be, hogy bármely $n > 1$-re teljesül:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}}.$$

4052 Igazoljuk, hogy bármely n pozitív egész számra:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

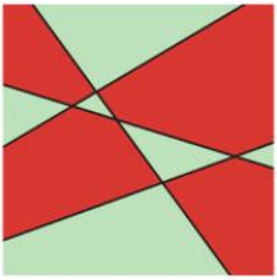
4053 Adjunk sejtést arra, mivel egyenlő az első n pozitív páratlan szám összege. Igazoljuk is sejtésünket teljes indukcióval.

4054 Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n-re:

$$3 + 33 + 333 + \ldots + 33\ldots3 = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27},$$

ahol a bal oldalon pontosan n darab tag szerepel. (Minden tagban eggyel több 3-as számjegy található, mint az előzőben.)

4055 Bizonyítsuk be, hogy bárhogy is rajzolunk a síkon n darab egyenest, a kapott „térkép" mindig kiszínezhető két színnel úgy, hogy az oldalszomszédos részek ne legyenek azonos színűek.



4056 Igazoljuk, hogy bármely n természetes számra 11 osztója a következő kifejezésnek:

$$2^{6n+1}+3^{2n+2}$$

4057 Milyen kezdőértéktől teljesül a

a) $n!>3^n$ egyenlőtlenség bármely n egész számra?

b) $3^n>n^3$ egyenlőtlenség bármely n egész számra?

Bizonyítsuk is be az egyenlőtlenségeket.

4058 Bizonyítsuk, hogy az

$$1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+1\cdot\pi\right)+2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi\right)+3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\cdot\pi\right)+\ldots+n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi\right)$$

összeg eredménye

$$-\frac{n+1}{2}\quad\text{vagy}\quad\frac{n}{2}.$$

4059 Olvassuk el az alábbi gondolatmenetet, és keressük meg benne a hibát.

Állítás: Bármely a pozitív valós számra és bármely n természetes kitevőre $a^n=1$.

Bizonyítása teljes indukcióval történik, $(*)$ lépésben használjuk ki az indukciós feltevést.

1. $n=0$-ra az állítás teljesül, $a^0=1$ bármely $a>0$-ra.
2. Tegyük fel, hogy valamely k természetes szám esetén bármely $n\le k$-ra $a^n=1$.
3. Ekkor $a^{k+1}=a^{2k-(k-1)}=\dfrac{a^k\cdot a^k}{a^{k-1}}=(*)=\dfrac{1\cdot 1}{1}=1$.

Vegyes feladatok

4060 Igaz vagy hamis?

a) Bármely két prím összege páros.

b) Van olyan szög, amely szinuszának és koszinuszának szorzata 1.

c) Egész oldalú derékszögű háromszög egyik befogójának hossza mindig osztható 3-mal.

d) Van olyan függvény, amely páros és páratlan, monoton növő és csökkenő, periodikus, de nincs legkisebb periódusa.

4061 Logikailag egyenértékű kijelentések-e az alábbiak?

a) A = Nem igaz, hogy tanultam és hármast kaptam.

B = Nem tanultam és nem is kaptam hármast.

b) A = Kerékpározom, és futok vagy síelek.

B = Kerékpározom és futok, vagy kerékpározom és síelek.

4062 *a)* Írjuk le magyar mondattal a következő kijelentést, ha A = *kinyitottam a sütőt*, B = *kivettem a tálat*, C = *megégettem a kezem:*

$$(A\vee B)\wedge C,\quad \neg(A\wedge B),\quad (A\wedge B)\vee(\neg B\wedge C).$$

b) Írjuk le a kijelentések tagadását.



4063 Jelölje A = *próbára megyek*, B = *fáradt vagyok*, C = *esik az eső* kijelentéseket. Írjuk fel formulával a következő összetett kijelentéseket:

a) Akkor és csak akkor vagyok fáradt, ha próbára megyek és esik az eső.

b) Ha esik az eső és fáradt vagyok, akkor nem megyek próbára.

Írjuk le magyar mondattal a következő formulákat:

c) $C \rightarrow (A \vee B)$; *d)* $A \wedge (\neg B) \wedge C$.

4064 *„Beteg ápolt vagyok."* – állítja a bolondokháza egy lakója, ahol mindenki ápolt vagy orvos és mindenki egészséges vagy beteg (a beteg az igazat hamisnak véli és fordítva). Mit tudunk meg kijelentése alapján erről a lakóról?

4065 Legyen $I =]1; 3[$. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz vagy hamis, és jelöljük X-szel a táblázatban.

a) I-nek van legnagyobb eleme.

b) I-nek minden eleménél van nagyobb eleme.

c) I-be esik prímszám.

d) I pontosan kettő prímet tartalmaz.

Állítás	Igaz	Hamis
a)		
b)		
c)		
d)		

4066 Igazoljuk, hogy $6 \mid n \cdot (n^2 + 5)$ bármely n természetes számra.

4067 Olvassuk el az alábbi gondolatmenetet, és keressük meg benne a hibát.

Állítás: Minden lánynak ugyanolyan színű a haja.

Bizonyítása a lányok száma szerinti teljes indukcióval történik.

1. $n = 1$-re az állítás igaz.
2. Tegyük fel, hogy valamely $n = k$ értékre az állítás teljesül.
3. Tekintsünk $n = k + 1$ leányt. Közülük kiválasztva k főt, az indukciós feltevés szerint hajuk színe azonos. Most az előbb kimaradó egy főt cseréljük ki a kiválasztottak valamelyikével, így ismét k fős csoportot alkottunk, az indukciós feltevés rájuk is érvényes (és ez a hajszín csak az lehet, ami az eredetileg résztvevő $k - 1$ főnek már az előbb is volt). Tehát $n = k + 1$ leánynak is egyforma a hajszíne.

12.2. SZÁMSOROZATOK

A sorozat fogalma, példák sorozatokra

4068 Számítsuk ki a következő sorozatok ötödik és huszadik elemét:

a) $a_n = 2n - 12$; *b)* $b_n = 100 - 5n$; *c)* $c_n = 2n^2 - 30n$;

d) $d_n = n^3 - 15n + 3$; *e)* $e_n = \sqrt{3n+4}$; *f)* $f_n = \sqrt{4n+1} - n$;

g) $g_n = \frac{3n-15}{2n+1}$; *h)* $h_n = \frac{n^2-3}{n-3}$.

4069 Folytassuk az alábbi sorozatokat, adjuk meg a sorozat általános tagját:

a) 5; 6; 7; 8; 9; ... *b)* −3; −1; 1; 3; 5; ... *c)* −1; −2; −4; −8; −16; ...

d) 1; −1; 1; −1; 1; ... *e)* 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ... *f)* $\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{7}$; $\sqrt[4]{7}$; $\sqrt[5]{7}$; $\sqrt[6]{7}$; ...

g) 0; 1; $\log_2 3$; 2; $\log_2 5$; ... *h)* 1; 2; 3; 1; 2; ...

4070 Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben és számegyenesen a következő sorozatok első hat tagját:

a) $a_n = \frac{3n}{5}$; *b)* $b_n = 2 - (-1)^n$; *c)* $c_n = \frac{2n+3}{n+2}$;

d) $d_n = \frac{5-3n}{n+1}$; *e)* $e_n = 3 - \frac{2}{n}$; *f)* $f_n = 2 \cdot (-1)^{n+3}$.

4071 Határozzuk meg a következő sorozatok első hat tagját:

a) $a_n = \frac{64}{4^n}$; *b)* $b_n = 2010 - 4n$; *c)* $c_n = \sqrt{4n-1}$.

4072 Határozzuk meg az $a_n = 3 - 2 \cdot (-1)^n$ sorozat 2010. tagját és az első 2010 tag összegét.

4073 Döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb az alábbi esetekben:

a) az $a_n = 9 + 3 \cdot (-1)^n$ sorozat 50. tagja vagy a $b_n = \sqrt{n} + 7$ sorozat 25. tagja;

b) az $a_n = \frac{5 \cdot n}{n+3}$ sorozat 12. tagja vagy a $b_n = (-1)^{n+6} + 5$ sorozat 99. tagja;

c) az $a_n = 1$ sorozat 60. tagja vagy a $\frac{8}{7}$ tizedes tört alakjában a tizedes vessző utáni 67. jegy;

d) az $a_n = \cos\frac{7 \cdot n \cdot \pi}{3}$ sorozat 43. tagja vagy a $b_n = \frac{7n-7}{12n+88}$ sorozat 101. tagja;

e) Az $a_n = \lg(13n - 1)$ sorozat 77. tagja vagy a $b_n = \sqrt[n+3]{146n+2}$ sorozat 7. tagja?

4074 Hányadik tagja az alábbi sorozatoknak a 30?

a) $a_n = 8n - 18$; *b)* $b_n = \frac{10n+20}{3n-26}$; *c)* $c_n = |47 - 7n|$;

d) $d_n = n^2 - 11n + 18$; *e)* $e_n = \log_2 n$; *f)* $f_n = 60 \cdot \sin\frac{n \cdot \pi}{6}$.

Példák rekurzív sorozatokra

4075 Egy számsorozat első eleme 5. Számítsuk ki a sorozat első öt tagját, ha a második tagtól kezdve igaz, hogy

a) $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 6$; *b)* $a_n = -3 \cdot a_{n-1} + 21$; *c)* $a_n = \frac{2}{3} \cdot a_{n-1} - 1$; *d)* $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$.

4076 Hányféleképpen juthatunk fel egy 10 lépcsőből álló lépcsősoron, ha egyszerre egyet, kettőt vagy három lépcsőfokot lépünk?

4077 Egy sorozat tagjaira a harmadiktól kezdve teljesül, hogy $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$. Mennyi a sorozat 2010. eleme és az első 2010 elem összege, ha $a_1 = a_2 = 1$?

4078 Egy sorozat elemeire a harmadiktól kezdve teljesül, hogy $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Mennyi a sorozat 2009. eleme és az első 2009 tag összege, ha $a_1 = a_2 = 1$?

4079 Az a_n sorozatban $a_1 = p$, $a_2 = q$, adott pozitív számok, a sorozat tagjaira igaz, hogy:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}.$$

Adjuk meg a sorozat 2014. tagját p és q segítségével.

4080 Egy sorozat elemei pozitív egész számok, a harmadiktól kezdve mindegyik elem az összes őt megelőző elem összege. A sorozat első eleme 1.

a) Lehet-e eleme a sorozatnak a 2010?

b) Mekkora lehet a sorozat második eleme, ha a sorozat n-edik eleme 1000, és n a lehető legnagyobb?

Számtani sorozatok

4081 Egy számtani sorozat első tagja –7, differenciája 3. Adjuk meg a sorozat következő tagjait:

a) a_{11}; *b)* a_{56}; *c)* a_{237}; *d)* a_{2010}.

4082 Egy számtani sorozat huszadik tagja 41, differenciája 5. Mennyi a sorozat

a) 21-edik; *b)* 30-adik; *c)* 1956-odik tagja?

4083 Egy számtani sorozat első tagja 1, differenciája $\frac{2}{3}$. Hányadik tagja a sorozatnak az

a) 1849; *b)* 2011; *c)* 3000?

4084 Egy számtani sorozat negyvenedik tagja 25-tel kevesebb, mint a tizenötödik tag. Mennyi a sorozat differenciája?

4085 Kvarc Laci 12 éve gyűjti az értékes ásványokat. Az első évben 17 darabot gyűjtött, majd a következő évek során minden évben 9-cel többet, mint az előző évben.



a) Hány darab ásványt gyűjtött Laci a 12. évben?

b) Mennyi ásványt gyűjtött a 12 év alatt összesen?

4086 A Menő Manók Társasága hétnapos gyalogtúrát szervezett. A túra első napján 23 km-t gyalogoltak, minden további napon pedig 5 km-rel többet, mint az előző napon.

a) Hány kilométer tettek meg a hatodik napon?

b) Hány kilométer volt a túra teljes hossza?

4087 Frédi részt vett a kőemelő-bajnokságon. Az első edzésen egy 7 kg-os követ emelt fel. Az edzések során napról napra 5 kg-mal sikerül emelnie a felemelt legnagyobb kő tömegét. Az edzések 30 napig tartottak.

A kőemelő-bajnokságon minden versenyző ötször próbálkozhat, az nyer, aki a legnehezebb követ felemeli.

Frédi első kísérletére 10 kg-mal kevesebbet emelt, mint a versenyt megelőző utolsó edzésen, de minden további emeléskor 4 kg-mal tudott többet emelni, mint az előző emeléskor. A versenyt Frédi világcsúccsal nyerte. Mekkora tömegű kő felemelése jelentette a világcsúcsot?

4088 Egy számtani sorozat harmadik tagja 13, hetedik tagja pedig 25.

a) Mennyi a sorozat első eleme és különbsége?

b) Mennyi a sorozat első negyven elemének összege?

4089 Egy számtani sorozat hatodik tagja 30, tizenegyedik tagja 10.

a) Számítsuk ki a sorozat első tagját és differenciáját.

b) Mennyi a sorozat első 50 tagjának összege?

4090 Van-e olyan számtani sorozat, amelynek első három eleme:

$$3\cdot\sqrt{5}+1;\quad \frac{11\cdot\sqrt{5}-1}{2};\quad 8\cdot\sqrt{5}-2?$$

4091 Az a_n számtani sorozat esetén ismert a következő tagok összege:

$$a_3+a_8=34 \quad \text{és} \quad a_2+a_{11}=46.$$

a) Mennyi a sorozat első eleme és differenciája?

b) Tagja-e a sorozatnak a 2012?

4092 Egy számtani sorozat első és negyedik tagjának összege 38, a hetedik és harmadik tag különbsége 16.

a) Mennyi a 40. és 17. tag különbsége?

b) Mennyi a sorozat 23. tagja?

c) Mennyi a sorozat első 60 tagjának összege?

4093 Egy számtani sorozat tagjaira teljesül, hogy $a_5\cdot a_{10}=-25$ és $a_2+a_8=10$. Adjuk meg a sorozat első tagját és differenciáját.

4094 Egy számtani sorozat első három tagjának összege -9, a harmadik, negyedik és ötödik tag összege pedig 39. Melyik ez a sorozat?

4095 Egy számtani sorozat első nyolc tagjának összege 14, a hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik tag összege pedig 1. Határozzuk meg a sorozatot.

4096 Egy számtani sorozat első négy tagjának összege harmada a következő négy tag összegének. Határozzuk meg az első tíz tag és a következő tíz tag arányát.

4097 Egy számtani sorozat ötödik tagja 10. Az első öt tag összege ötöde a következő öt tag összegének. Mennyi a sorozat differenciája?



4098 *a)* A Long Street páratlan oldalán egytől 2011-ig vannak számozva a házak. Egy napon a postás az utca páratlan oldalán végighaladva először a 3-as számú, majd minden negyedik házhoz kézbesített levelet.

Hány házhoz hozott levelet ezen a napon a postás az utca páratlan oldalán?

b) A Long Street páros oldalán kettőtől 2010-ig vannak számozva a házak. Egy napon a postás az utca páros oldalán végighaladva először a 6-os számú, majd minden ötödik házhoz kézbesített levelet.

Hány házhoz hozott levelet ezen a napon a postás az utca páros oldalán?



4099 Az a_n számtani sorozatból ismert tagok: $a_1 = 18$ és $a_k = 99$. Mennyi a k értéke, ha az első k tag összege 1638?

4100 A 17-től kezdve a pozitív egész számok sorában összeadtunk minden tizedik számot. Hány darab számot adtunk össze, ha a kapott összeg 1472?

4101 Egy számtani sorozat differenciája 3. Az első n elem összege 5010, az első $n + 10$ elem összege pedig 6895. Mennyi a sorozat első tagjának és az n-nek az értéke?

4102 Egy diáknak 385 oldalas kötelező olvasmányt kell elolvasnia. Az első napon 22 oldalt olvas és úgy dönt, hogy mindennap 5 oldallal többet olvas el, mint az előző napon.

a) Hány nap alatt tudja befejezni a kötelező olvasmány elolvasását?

b) Hány oldal marad az utolsó napra?

4103 Egy nyomdában 30 papírlap közül néhányat 10 részre vágtak, majd az így kapott részek közül néhányat ismét 10 részre vágtak szét és így tovább. Egy ilyen munkaszakasz után valaki azt mondta: „Most 2010 papírdarabunk van." Jól számolt-e az illető?

4104 Egy számtani sorozat első eleme 13, a sorozatra jellemző különbség pedig 17. Hány olyan tagja van a sorozatnak, amely ötjegyű szám?

4105 Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszáma egy számtani sorozat három szomszédos eleme. Mekkorák a háromszög szögei?

4106 Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat szomszédos elemei. A háromszög kerülete 120 cm. A legrövidebb és leghosszabb oldal szorzata 1431 cm^2. Adjuk meg a háromszög területét egy tizedesjegyre kerekítve.

4107 Egy konvex sokszög belső szögeinek mérőszámai egy számtani sorozat egymást követő elemei. Hány oldalú a sokszög, ha a legkisebb szög 142°30', a legnagyobb szög pedig 172°30'?

4108 Az első 201 természetes szám összegében akárhánynak az előjelét megváltoztatjuk. El lehet-e érni, hogy a kapott összeg 2010 legyen?

4109 Adjunk meg különböző pozitív egész számokból álló számtani sorozatot, amelynek elemei között nincs négyzetszám.

4110 Egy számtani sorozat első három eleméről a következőket tudjuk: az első tag kétjegyű szám, a második tag az első jegyeinek felcserélésével jön létre, a harmadik pedig az elsőből úgy kapható, hogy a jegyei közé egy 0-t írunk. Határozzuk meg a számokat.

4111 Az a_n számtani sorozatról tudjuk, hogy $a_k = m$ és $a_m = k$ $(k \neq m)$. Adjuk meg az a_n sorozatot k, m és n függvényeként.

4112 Az a_n számtani sorozat differenciája d. Első 5 elemének összege legyen b_1, a következő öt elem összege b_2, a következő öt elem összege b_3, és így tovább. Igazoljuk, hogy b_n számtani sorozat. Adjuk meg a_1-gyel és d-vel a b_n sorozat első tagját és differenciáját.

Mértani sorozatok

4113 Egy mértani sorozat első tagja -2, hányadosa $q = -\frac{3}{8}$. Számítsuk ki a sorozat első hat tagját.

4114 Egy mértani sorozat negyedik tagja 5, hányadosa -3. Mennyi a sorozat első, hatodik, illetve kilencedik tagja?

4115 Egy mértani sorozat első tagja 20, a negyedik tag $-2{,}5$. Mennyi a sorozat hányadosa? Adjuk meg a tizedik elemet és az első 10 tag összegét.

4116 Egy mértani sorozat első tagja -3, az ötödik tag -48. Adjuk meg a sorozat hányadosát, számítsuk ki a nyolcadik elemét, és az első nyolc tag összegét.

4117 Egy mértani sorozat hatodik eleme 28, a nyolcadik eleme pedig 7. Mennyi a sorozat első tagja? Számítsuk ki az első hat tag összegét.

4118 Egy mértani sorozat ötödik és nyolcadik tagja is 23. Mennyi az első kilenc tag összege?

4119 Egy mértani sorozat hetedik tagja 17, a tizedik tagja pedig -17. Mennyi az első 100 tag összege?

4120 Az 1, a 8 és a 22 számokhoz ugyanazt a valós számot adva egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Mennyi a mértani sorozat hányadosa?

4121 Egy lián hossza mindennap az előző napi hosszánál 25%-kal több. Az első napon 1 méteres volt. Hányadik napon éri el a 15 méteres hosszúságot?

4122 Egy mértani sorozat első eleme 3, a hányadosa 5. Hány ötjegyű tagja van a sorozatnak?

4123 Egy mértani sorozat harmadik és negyedik tagjának összege 80, az ötödik és harmadik tag különbsége 240. Melyik ez a sorozat?

4124 Egy-egy mértani sorozat tagjaira teljesülnek a következő összefüggések. Számítsuk ki az egyes sorozatok első tagját és hányadosát.

a) $\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 15 \\ a_3 + a_4 &= 60 \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 56 \\ a_2 &= 16 \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 57 \\ a_1 - a_3 &= 15 \end{aligned}\right\}$; *d)* $\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 160 \\ a_6 + a_7 &= 1215 \end{aligned}\right\}$.

4125 Egy mértani sorozat első négy tagjának összege 468, az ötödik, hatodik, hetedik és nyolcadik tag összege 292 500. Melyik ez a sorozat?

4126 Igaz-e, hogy a következő számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai:

$$\frac{7 + 4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}; \quad \frac{\sqrt{3} + 2}{2 - \sqrt{3}}; \quad 5 + 3 \cdot \sqrt{3}?$$

4127 Egy számtani sorozat negyedik tagja 10. A sorozat második, harmadik és hatodik eleme egy mértani sorozat három szomszédos tagja. Mennyi a számtani sorozat első tagja, a sorozatra jellemző differencia és a mértani sorozat hányadosa?

4128 Egy számtani sorozat első három tagjának összege 6. Ha az első taghoz 5-öt, a másodikhoz 2-t, a harmadikhoz 1-et adunk, egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Melyik ez a mértani sorozat?

4129 Egy mértani sorozat második tagja 12. Ha a sorozat első tagjához 4-et, a másodikhoz 3-at, a harmadikhoz pedig 1-et adunk, egy számtani sorozat egymást követő elemeit kapjuk. Mennyi a mértani sorozat hányadosa?

4130 Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszáma egy mértani sorozat három szomszédos eleme. Mekkorák a háromszög szögei?

4131 Egy háromszög oldalainak hosszai egy mértani sorozat egymást követő elemei. A háromszög legnagyobb oldala 9 cm, a kerülete pedig 19 cm. Mekkora a háromszög másik két oldala? Számítsuk ki a háromszög legnagyobb szögét.

4132 Egy mértani sorozat első három tagjának összege 63, ha a második tagot megszorozzuk az első és harmadik összegével, 810-et kapunk. Melyik ez a sorozat?

4133 Egy nem állandó számtani sorozat első és második, második és harmadik, illetve harmadik és első tagjának szorzata – ebben a sorrendben – egy mértani sorozat három, egymás utáni eleme. Mekkora a mértani sorozat hányadosa?

4134 Egy mértani sorozat negyedik és hatodik tagjának összege –40, a harmadik és hetedik tag összege pedig 68. Melyik ez a sorozat?

Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása

4135 Ha elhelyezünk egy bankban 180 000 Ft-ot évi 7%-os kamatra, és a kamat is kamatozik 10 éven át, akkor 10 év múlva mekkora összeghez jutunk?

4136 Egy település lakossága 2000-ben 9800 fő volt. A következő tíz évben évről évre 3%-kal csökkent a lakosok száma. Hányan éltek a településen 2010-ben?

4137 Egy pénzintézet évi 6%-os kamatot ad annak, aki 8 évre leköti a pénzét. Mekkora haszonhoz jut 8 év múlva az, aki most 500 000 Ft-ot tesz be a bankba?

4138 Péter elhelyez egy bankban 1 000 000 Ft-ot, hogy 20 évig kamatoztassa. Mekkora összeghez jut 20 év múlva, ha a bank az első 5 évben 8%-os, a következő 15 évben pedig csak 6%-os kamatot fizet?

4139 Szeged lakossága 1960-ban 118 ezer fő volt, 1990-ben pedig 170 ezer. Feltételezzük, hogy évről évre azonos arányban nőtt a lakosok száma. Hány százalékkal nőtt évente Szeged lakossága 30 év alatt?

4140 A madártani szakemberek azt tapasztalták, hogy az utóbbi évek ben csökkent a hazánkban fészkelő fecskék száma. A csökkenés évente 13% volt.

Ha így folytatódik a folyamat, hány év múlva számíthatunk feleannyi fecskére, mint ebben az évben?



4141 Pénzes Dénes egy bankban tartotta a pénzét 6 évig. Hat éve lekötött 4,8 millió forintot, most pedig felvett 6 506 300 Ft-ot. A bank minden évben azonos kamatot adott. Mennyi volt az éves kamat?

4142 Hány év alatt növekszik háromszorosára egy bankban elhelyezett betétünk, ha a kamat 4,7%, és évek alatt nem változik?

4143 A Gondos szülők Szilveszter nevű gyermekük megszületésekor, és azután minden évben befizetnek egy bankszámlára 200 000 Ft-ot, amíg a gyermek eléri a 14 éves kort. Ezután még 6 évig nem veszik ki a pénzt. Mekkora összeghez jut ilyen módon 20 éves korában Szilveszter, ha a bank minden évben 4,5%-os kamatot ad?

4144 Ha 2000. január elején elhelyezett valaki egy bankban 250 000 Ft-ot, és a bank minden évben 5%-os kamatot fizet, akkor melyik évben éri el az illető bankbetétje a 400 000 Ft-ot? (Feltesszük, hogy közben nem vesz ki a pénzből és nem is tesz hozzá).

4145 A Vastag nagyszülők úgy döntöttek, hogy 1 700 000 Ft megtakarított pénzüket bankba rakják 5 évre. Az a céljuk, hogy 5 év múlva a lehető legnagyobb összeggel támogathassák az egyetemre készülő unokájukat.

A Fitying Bank a náluk elhelyezett összeg esetén 1 millió forintig 4%-ot, az 1 millió feletti összegre 6,3% éves kamatot ad.

A Peták Bank háromhavonta írja jóvá a kamatot, és negyedévre 1,9% kamatot fizet.

Melyik bankot válasszák a Vastag nagyszülők?

4146 Szerencsés Flótás a szilveszteri tombolán nyert 100 000 000 Ft-ját január elején egy bankban helyezi el, ahol éves 5% kamatot fizetnek. Úgy dönt, hogy 20 év alatt fogja felhasználni a nyereményt, mégpedig úgy, hogy minden év elején azonos összeget fog kivenni a bankból. Mekkora összeget vehet fel évente, ha 20 év múlva nem marad pénze a bankban?

4147 Egy fiatal család lakásépítésre felvesz 15 000 000 Ft kölcsönt 15 évre, évi 8%-os kamatra.

a) Mennyi lesz a havi törlesztőrészletük, ha havonta egyenlő összeget kell befizetni, és a havi kamat az éves kamat 12-ed része?

b) Mennyi lenne a törlesztőrészlet, ha a bank évente azonos összeget kérne, de azt 12 egyenlő részletben?

c) Mindkét esetben számítsuk ki, hogy a felvett összegnek hányszorosát fizetik vissza.

Vegyes feladatok

4148 Számítsuk ki az $\{5n-7\}$ sorozat első 30 elemének összegét.

4149 Számítsuk ki a $\{7\cdot 2^{n-1}\}$ sorozat első 20 tagjának összegét.

4150 A következő sorozatok közül válasszuk ki a számtani, illetve a mértani sorozatokat:

a) $a_n = 8n-3$; *b)* $b_n = \frac{4-17n}{9}$; *c)* $c_n = \cos(n\pi)$;

d) $d_n = \frac{n^2-25}{n+5}$; *e)* $e_n = \frac{n-7}{n^2-49}$; *f)* $f_n = n^2+2$;

g) $g_n = (-1)^n$; *h)* $h_n = 23\cdot(-1)^{3n-5}$; *i)* $i_n = 11\cdot 4^{n-3}$;

j) $j_n = \lg(3\cdot 10^n)$; *k)* $k_n = 3n+\sin(3n\pi)$; *l)* $l_n = \sin\frac{n\pi}{2}$.

4151 Egy számtani sorozat első tagja $a_1 = \frac{13}{\sqrt{3}+1}$, differenciája $\sqrt{3}$. Számítsuk ki az első 30 tag összegét.

4152 Egy számtani sorozat első tagja 7, differenciája $\frac{3}{7}$. Hány tagja van a sorozatnak 500 és 1000 között?

4153 Melyik az a mértani sorozat, amelynél az első 3 tag szorzata 1157 625, és ennek a három tagnak az összege 1687?

4154 Az $\{a_n\}$ sorozat első n tagjának összege: $S_n = 2n^2 - 7n$. Mutassuk meg, hogy $\{a_n\}$ számtani sorozat. Adjuk meg a sorozat első tagját és differenciáját.

4155 Számítsuk ki azoknak a négyjegyű számoknak az összegét, amelyek 11-gyel osztva 7-et adnak maradékul.

4156 Egy mértani sorozat harmadik tagja 18, a huszadik tagja pedig 120. Tagja-e a sorozatnak a

a) 108; *b)* 800?

4157 Adjuk meg azokat a mértani sorozatokat, amelyeknek elemeire igaz, hogy

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot a_5 &= 4 \\ a_2 \cdot a_6 &= 16 \end{aligned}\right\}.$$

4158 Egy mértani sorozat első három tagjának összege 5,25. Ugyanezen három tag reciprokának összege $\frac{7}{3}$. Határozzuk meg az első három tag szorzatát.

4159 A 3 és 48 közé iktassunk be három számot úgy, hogy a kapott számokkal együtt egy

a) számtani sorozat; *b)* mértani sorozat

öt egymást követő elemét alkossák. Írjuk fel az öt számot.

4160 Egy számtani sorozat első három elemének összege 18. Ha az első számhoz egyet adunk, egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Mennyi a számtani sorozat első eleme és a mértani sorozat hányadosa?

4161 Egy mértani sorozat első három elemének összege 114. Ez a három szám egy számtani sorozat első, negyedik és huszonötödik tagja. Melyik ez a három szám?

4162 A következő számok olyan valós számok, melyekben az első három egy számtani sorozat, az utolsó három pedig egy mértani sorozat három szomszédos eleme:

$$y, \quad x, \quad 4x - 5, \quad 7x + 10.$$

a) Határozzuk meg a négy számot.

b) Adjuk meg a számtani sorozat különbségét, illetve a mértani sorozat hányadosát.

4163 Statisztikai adatok szerint az 1997-es év utáni években 2003-mal bezárólag a világon évente átlagosan 1,1%-kal több autót gyártottak, mint a megelőző évben. A 2003-at követő években, egészen 2007-tel bezárólag évente átlagosan már 5,4%-kal gyártottak többet, mint a megelőző évben.



2003-ban összesen 41,9 millió autó készült.

a) Hány autót gyártottak a világon 2007-ben?

b) Hány autót gyártottak a világon 1997-ben?

2008-ban az előző évhez képest csökkent a gyártott autók száma, ekkor a világon összesen 48,8 millió új autó hagyta el a gyárakat. 2008-ban előrejelzés készült a következő 5 évre vonatkozóan. Eszerint 2013-ban 38 millió autót fognak gyártani. Az előrejelzés úgy számolt, hogy minden évben az előző évinél ugyanakkora százalékkal csökken a termelés.

c) Hány százalékkal csökken az évenkénti termelés a 2008-at követő 5 év során az előrejelzés szerint?

d) Elfogadjuk az előrejelzés adatait, majd feltételezzük, hogy 2013 után évente 3%-kal csökken a gyártott autók száma. Melyik évben lesz így az abban az évben gyártott autók száma a 2013-ban gyártottaknak a 74%-a?

4164 Az $\{a_n\}$ pozitív tagú számsorozatról azt tudjuk, hogy $a_1 = 1$; $a_4 = 0{,}125$, és $\{\log_5 a_n\}$ számtani sorozatot alkot. Számítsuk ki az $\{a_n\}$ sorozat tizedik elemét.

4165 A pozitív a és b számok $(a < b)$ közé iktassunk négy számot úgy, hogy a kapott számok egy

a) számtani; *b)* mértani

sorozat hat egymást követő elemei legyenek. Adjuk meg a hat számot.

12.3. TÉRGEOMETRIA

Térelemek

4166 A térben kijelölünk 10 pontot úgy, hogy közülük semelyik 3 nem illeszkedik egy egyenesre.

a) Hány különböző egyenest határoznak meg az adott pontok közül kiválasztható pontpárok?

b) Legalább hány síkot határoznak meg a pontok közül kiválasztható ponthármasok?

c) Legfeljebb hány síkot határoznak meg a pontok közül kiválasztható ponthármasok?

4167 Legalább, illetve legfeljebb hány metszésvonala lehet 10 különböző síknak?

4168 Hány olyan sík van, amely egy adott kocka csúcsai közül

a) pontosan; *b)* legalább

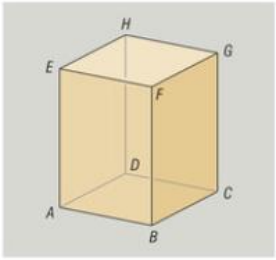
hármat tartalmaz?

4169 Az ábrán látható téglatest mely élei

a) párhuzamosak az AE egyenessel;

b) merőlegesek az AB egyenesre;

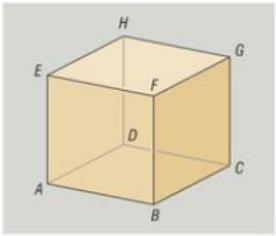
c) illeszkednek az AB egyenessel kitérő helyzetű egyenesre?



4170 Határozzuk meg, hogy az ábrán látható kockában az alábbi egyenesek mekkora szöget zárnak be az AC lapátlót tartalmazó egyenessel. Vannak-e a felsorolt egyenesek közt olyanok, amelyekkel az AC egyenes kitérő helyzetű, illetve párhuzamos?

a) FB; *b)* GC; *c)* HF; *d)* EG;

e) AB; *f)* ED; *g)* HG.



4171 Milyen hosszúságú az a élű kocka

a) lapátlója; *b)* testátlója?

4172 Egy téglatest egy csúcsából kiinduló élei hosszának aránya 1 : 1 : 3. Mekkorák a téglatest lapátlói, illetve testátlói, ha legrövidebb éle 3 cm?

4173 Egy kocka testátlója 12 cm. Mekkora a kocka éle?

4174 Mekkora szöget zár be a 4170. feladat ábráján látható kocka AB éle az AG testátlóval?

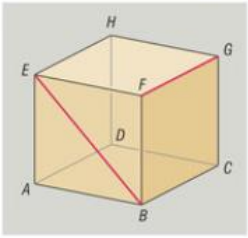
4175 Mekkora szöget zár be egymással a kocka egy csúcsából kiinduló két lapátlója?

4176 Mekkora szöget zár be a kocka egyik csúcsából kiinduló lapátlója és testátlója?

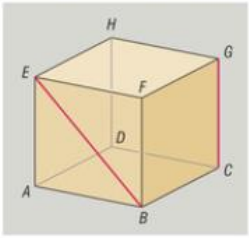
4177 Mekkora távolságra vannak az a élű kocka csúcsai valamely élének felezőpontjától? Hány különböző távolságot kaphatunk eredményül?

4178 Határozzuk meg az a élű $ABCDEFGH$ kocka pirossal jelölt szakaszainak távolságát és hajlásszögét. Minden esetben rajzoljuk be a piros szakaszokat tartalmazó egyenesek normál transzverzálisát.

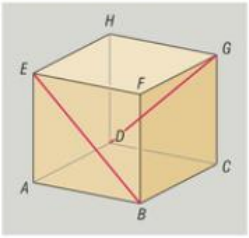
a)



b)



c)



4179 A 4170. feladat látható kocka $ABFE$, $BCGF$ és $EFGH$ lapjainak középpontja egy háromszöget fog közre. Számítsuk ki a háromszög oldalainak hosszát, ha a kocka minden éle 5 cm hosszú. Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

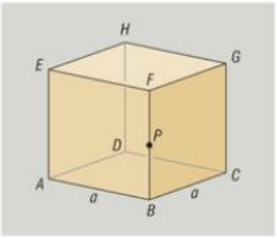
4180 Bizonyítsuk be, hogy ha egy kocka négy oldallapjának középpontja egy síkra illeszkedik, akkor négyzetet fog közre. Számítsuk ki a négyzet területét, ha a kocka éle a egység hosszúságú.

4181 Az $ABCDEFGH$ kocka éleinek hossza a, BF élének felezőpontja pedig P.

a) Milyen távolságra van a P pont a kocka H csúcsától?

b) Mekkora a hossza a legrövidebb olyan útnak, amely P-ből H-ba vezet és csak a kocka élei mentén halad?

c) Mekkora a hossza a legrövidebb olyan útnak, amely a kocka lapjain halad, és a P pontot a H ponttal köti össze?



4182 A 12 cm élű $ABCDEFGH$ fakockából kifaragtuk az $ABCDO$ gúlát, ahol O a kocka fedőlapjának középpontja.

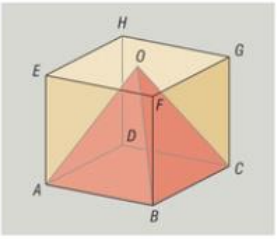
a) Mekkorák a keletkező gúla élei?

b) Mekkora szöget zár be a gúla oldallapja az $ABCD$ síkkal?

c) Mekkora szöget zár be a gúla oldaléle az alaplappal?

d) Mekkora szöget zár be a gúla oldaléle az alapéllel?

e) Mekkora szöget zár be egymással a gúla két szomszédos oldallapja?

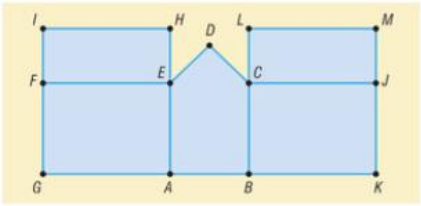


4183 Egy kocka csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott csúcsok által közrefogott háromszög

a) szabályos; *b)* derékszögű?

4184 Igaz-e, hogy ha két párhuzamos (egymástól különböző) síkot metszünk egy harmadik síkkal, akkor a kialakuló két metszésvonal egymással párhuzamos? Válaszunkat indokoljuk.

4185 Egy óvodásoknak készült magazinban gyakran találjuk kivágható és összeragasztható testek síkbeli hálóját. A legutóbbi számból az ábrán is látható mozdonygarázs hálózatát lehetett kivágni.



a) Az elkészült garázs mely élei párhuzamosak az AE éllel?

b) A garázs mely élei merőlegesek az ED szakaszt tartalmazó egyenesre?

c) A garázsnak melyek azok az élei, amelyek az EF szakaszt tartalmazó egyenessel kitérő helyzetű egyenesre illeszkednek?

4186 A Balaton-felvidék 1 : 40 000 méretarányú turistatérképének tanúsága szerint a Szent György-hegy magassága 415 méter, a szomszédos Csobáncé 376 méter.

a) Milyen távolságra van egymástól a két hegy csúcsa a valóságban, ha a térképen mért távolságuk 15 cm? A választ egy tizedesjegy pontossággal, méterben kerekítve adjuk meg.

b) Mekkora emelkedési szögben látja a Csobánc tetején álló turista a Szent György-hegy tetejét?

4187 Mekkora távolságra van egymástól az a élű kocka két kitérő helyzetű élének felezőpontja?

4188 Egy téglatest alaplapjának két éle 15 cm, illetve 20 cm, a téglatest testátlója az alaplap síkjával 60°-os szöget zár be.

a) Mekkora szöget zár be egymással az alaplap két átlója?

b) Számítsuk ki a téglatest testátlójának hosszát.

c) Mekkora a téglatest ismeretlen hosszúságú éle?

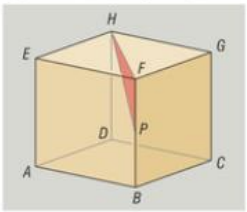
4189 Mekkora szöget zár be egymással a kocka egyik testátlója és a vele kitérő helyzetű lapátlója?

4190 Határozzuk meg az $ABCDEFGH$ kockában (ld. 4170. feladat ábrája) az alábbi szögek nagyságát:

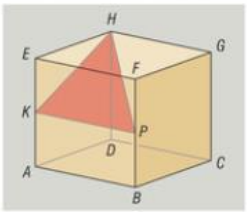
a) $HAF\sphericalangle$; *b)* $ADG\sphericalangle$; *c)* $FGD\sphericalangle$; *d)* $BDF\sphericalangle$.

4191 Számítsuk ki az ábrákon megjelölt háromszögek oldalainak hosszát, ha az $ABCDEFGH$ kocka éleinek hossza 10 cm. Vannak-e a háromszögek közt derékszögűek, illetve egyenlő szárúak? Ha igen, akkor melyek? (Az ábrák a kocka csúcsain kívül csak oldalfelező pontokat tartalmaznak.)

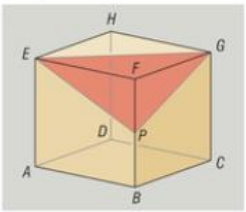
a)



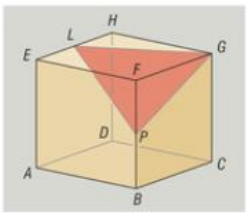
b)



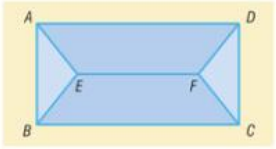
c)



d)



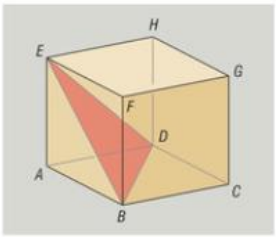
4192 Az ábra egy hétvégi ház tetőszerkezetének felülnézeti képét mutatja. Számítsuk ki, hogy mekkora szöget zárnak be a tető síkjai a vízszintes síkkal, ha tudjuk, hogy $AB = 5$ m, $AD = 10$ m, $EF = 6$ m, továbbá az EF gerenda az $ABCD$ tetősík felett 4 méter magasságban helyezkedik el. A választ minden esetben egész fokra kerekítve adjuk meg.



4193 Az ábrán látható $ABCDEFGH$ kocka minden éle 10 cm. A kockát az EBD síkkal két részre vágjuk.

a) Bizonyítsuk be, hogy a kocka EBD síkmetszete szabályos háromszög.

b) Mekkora szöget zár be az EBD sík a kocka $ABCD$ alaplapjával?



4194 Egy vízszintes terepen kijelölt téglalap alakú leszállópálya csúcsai A, B, C és D. Egy helikopter az A pont fölött 120 méter magasságban tartózkodik, amikor a B ponttól 130, a C ponttól 133 méter távolságra található. Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal megadva válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

a) Mekkorák a leszállópálya méretei?

b) Milyen messze van a helikopter a leszállópálya D sarkától?

c) Mekkora emelkedési szögben látja a C pontban álló megfigyelő a helikoptert?

d) Hány méterrel van az A pontra illeszkedő vízszintes sík felett a helikopter akkor, amikor a D pontból kétszer akkora emelkedési szög alatt látszik, mint a C pontból?

4195 Bizonyítsuk be, hogy ha az e egyenes merőleges az S sík két metsző helyzetű egyenesére, akkor az e egyenes merőleges az S síkra.

4196 Az $ABCDEFGH$ kocka BF élének felezőpontja P. Számítsuk ki, hogy a következő pontok milyen távolságra vannak az AG testátlótól, ha a kocka élei a hosszúságúak.

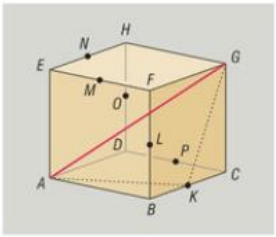
a) H; *b)* P; *c)* a $BCGF$ lap középpontja.

4197 Az ábrán megjelöltük az a élű $ABCDEFGH$ kocka néhány élének felezőpontját.

a) Mutassuk meg, hogy a megjelölt felezőpontok (K, L, M, N, O és P) a kocka AG testátlójától ugyanakkora távolságra vannak.

b) Számítsuk ki az *a)* feladatban megadott pontok AG testátlótól mért távolságát.

c) Mutassuk meg, hogy a K, L, M, N, O és P pontok egy síkra illeszkednek. Mekkora szöget zár be ez a sík az AG testátlóval?



d) Számítsuk ki az $AKG\sphericalangle$ koszinuszának pontos értékét.

4198 Adott az S sík, valamint a tér egy AB szakasza. Az AB szakasz S síkra vonatkozó merőleges vetülete $A'B'$.

a) Számítsuk ki az $\frac{A'B'}{AB}$ tört értékét, ha az AB szakasz az S síkkal α szöget zár be.

b) Mely α esetén lesz minimális, illetve maximális az $A'B'$ szakasz hossza?

4199 A 4193. feladat ábráján látható kocka minden éle 10 cm.

a) Számítsuk ki az EBD háromszög területét.

b) Határozzuk meg az EBD háromszögnek az $ABCD$ síkra vonatkozó merőleges vetületét.

c) Bizonyítsuk be, hogy ha az EBD háromszög $ABCD$ síkra vonatkozó merőleges vetületének területét T jelöli, akkor

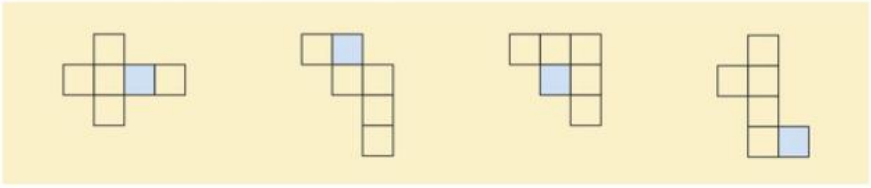
$$T = T_{EBD} \cdot \cos\alpha,$$

ahol α az EBD sík és az $ABCD$ alaplap síkja által bezárt szög.

d) A *c)* feladat eredménye alapján számítsuk ki α értékét.

Testek osztályozása, szabályos testek

4200 Az alábbi ábrák közül melyik lehet egy kocka síkbeli hálózata? Amelyik lehet, abban melyik a színezéssel megjelölt lappal szemközti lap?



4201 Egy fából készült $4\times4\times4$-es kocka lapjait pirosra festjük, majd a kockát egységkockákra daraboljuk. Hány olyan kockát kapunk, amelynek pontosan

a) 1; *b)* 2; *c)* 3

piros lapja van?

4202 Hányféle síkbeli hálója lehet egy kockának, ha az egybevágó ábrákat nem különböztetjük meg? Rajzoljuk le az összes lehetőséget.

4203 Barnabás fa építőkockákból „tornyot" épített. Az ábrák a tornyot elölnézetből, illetve oldalnézetből mutatják.

a) Legfeljebb hány építőkockát használt fel Barnabás a torony megépítéséhez?

b) Lehetséges-e, hogy pontosan 10 építőkockából áll az építmény?



4204 Az alábbiak közül melyik lehet egy kocka síkmetszete:

a) szabályos háromszög; *b)* négyzet;

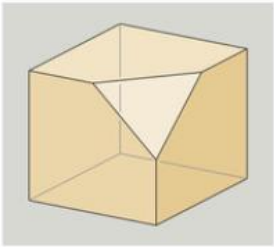
c) szabályos hatszög; *d)* szabályos nyolcszög?

4205 Legfeljebb mekkora sugarú földgömb helyezhető el abban a kocka alakú kartondobozban, amelynek minden éle 45 cm?

4206 Legalább mekkora annak a gömbnek a sugara, amelyben elfér az a kocka, amelynek minden éle 12 cm? Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

4207 Mekkora a 12 cm élű szabályos oktaéder köré írható gömb sugara?

4208 Az alábbi ábrán látható testet úgy kaptuk, hogy egy kockát elmetszettünk egy olyan síkkal, amely tartalmazza egy csúcsából kiinduló 3 élének felezőpontját.



a) Milyen síkidomok határolják a levágott (az ábrán nem látható) testet?

b) Milyen testet vágott le a metsző sík a kockából?

c) Hány lapja, csúcsa, éle van a kockából visszamaradó (az ábrán is látható) testnek?

d) Ellenőrizzük az Euler-féle poliédertétel teljesülését a visszamaradó testen.

e) Milyen síkidomok határolják az ábrán látható testet?

4209 A 4208. feladatban leírt csonkolást a kocka minden csúcsánál elvégezzük.

a) Milyen síkidomok határolják a csonkolás után megmaradt testet?

b) Hány lapja, csúcsa, illetve éle van az így kapott testnek?

c) Ellenőrizzük az Euler-féle poliédertétel teljesülését a visszamaradó testre vonatkozóan.

4210 Készítsük el az öt szabályos test egy-egy lehetséges síkbeli hálózatát.

4211 Töltsük ki az alábbi táblázatot. Ellenőrizzük az Euler-féle poliédertétel teljesülését az egyes esetekben.

Test neve	Lapok száma	Csúcsok száma	Élek száma
Kocka			
Szabályos tetraéder			
Oktaéder			
Háromszög alapú hasáb			
Háromszög alapú gúla			
Négyzet alapú hasáb			
Négyzet alapú gúla			
Ötszög alapú hasáb			
Ötszög alapú gúla			
Tizenkétszög alapú hasáb			
Tizenkétszög alapú gúla			

4212 Egy hasáb síkbeli hálóját alkotó sokszögek belső szögeinek összege 3600°. Hány oldallapja van a hasábnak?

4213 Hány oldallapja van annak a gúlának, amelynek síkbeli hálóját alkotó sokszögei belső szögeinek összege 3960°?

4214 Számítsuk ki az n oldalú

a) hasáb; *b)* gúla

lapjait alkotó sokszögek belső szögeinek összegét.



4215 Lehetnek-e egy szabályos hatoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek? Válaszunkat indokoljuk.

4216 Mekkora az egyenes körkúp nyílásszöge, ha

a) alkotója 5 m, alapkörének sugara 3 m;

b) alkotója 5 m, magassága 4 m;

c) magassága 3 m, alapkörének sugara 5 m;

d) alkotója 4 m, alapkörének sugara 2 m?

4217 Mekkora szöget zár be az egyenes körkúp alkotója az alapkör síkjával, ha

a) alkotója 13 m, alapkörének sugara 5 m;

b) magassága 12 m, alkotója 13 m;

c) magassága 8 m, alapkörének sugara 6 m?

Mekkora a kúp nyílásszöge az egyes esetekben?

4218 Mekkora az egyenes körkúp nyílásszöge, ha alkotója és alapkörének átmérője ugyanolyan hosszúságú?

4219 Mekkora szöget zár be az alaplap síkjával annak a szabályos négyoldalú gúlának az oldallapja, amelynek

a) minden éle egyenlő;

b) oldaléle kétszer akkora, mint az alapéle?

4220 Mekkora szöget zár be a szabályos hatoldalú gúla oldallapja az alaplap síkjával, ha az alapél hossza 5 cm, az oldaléleké pedig 10 cm?

4221 Mekkora távolságra van az a élű szabályos tetraéder csúcsa a szemközti lapjától?

4222 Mekkora a szabályos tetraéder két szomszédos lapjának hajlásszöge?

4223 Mekkora szöget zár be a szabályos tetraéder éle az élt nem tartalmazó lapjával?

4224 Mutassuk meg, hogy egy kocka csúcsai közül kiválasztható négy úgy, hogy azok egy szabályos tetraéder csúcsai legyenek. Mekkora a keletkező szabályos tetraéder élének hossza, ha a kocka éle a hosszúságú?

4225 Számítsuk ki az a élű szabályos tetraéder két kitérő helyzetű élének távolságát, illetve hajlásszögét.

4226 Egy szabályos tetraéder minden csúcsát levágjuk egy-egy olyan síkkal, amely tartalmazza az adott csúcsra illeszkedő élek felezőpontjait.

a) Készítsük el a visszamaradó test síkbeli hálózatát.

b) Hány lapja, csúcsa, éle van a visszamaradó testnek?

c) Ellenőrizzük az Euler-féle poliédertétel teljesülését a kapott testre vonatkozóan.

4227 Egy kocka minden éle 20 cm hosszú. A kocka szomszédos lapjainak középpontját összekötjük, így egy test éleit kapjuk.

a) Számítsuk ki a keletkező test éleinek hosszát.

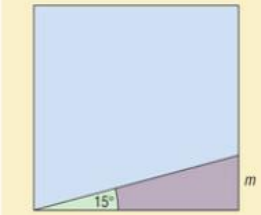
b) Hány lapja, csúcsa, éle van a keletkezett testnek?

c) Milyen testet kapunk?

4228 Mekkora szöget zárhat be egymással egy szabályos oktaéder két éle?

4229 Hány testátlója van egy szabályos oktaédernek? Mekkora ezek hossza, ha az oktaéder minden éle 10 cm? Mekkora szöget zárhat be a szabályos oktaéder két testátlója?

4230 Egy 5 cm élű fakockából éket készítünk konyhabútorunk alá, ezért a kockát elfűrészeljük. Az alábbi ábra a fűrészelés után mutatja a kocka keresztmetszetét, valamint a vágás vonalát.



a) Milyen „magas" a keletkező ék, azaz mekkora az m-mel jelölt szakasz hossza?

b) Mekkora területű síkidomban metszettük el a kockát a fűrészelés során?

c) Milyen testek keletkeznek a kockából a fűrészelés után?

4231 Egy társasjáték szabályai szerint a játékosok nem dobókockával, hanem úgynevezett dobótetraéderrel dobnak. A dobótetraéder egy szabályos tetraéder, melynek lapjai az 1, 2, 3, 4 számokkal vannak számozva.

A játék tartalmaz egy dobóoktaédert, egy dobódodekaédert és egy dobóikozaédert is. Ez utóbbiak olyan szabályos testek, amelyeknek lapjai az $1, 2, \ldots, n$ számokkal vannak számozva, ahol n a test lapjainak számát jelöli.

Ági a négy tárggyal egyszerre dob.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy Ági mindegyik tárggyal prímszámot dob?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az Ági által dobott számok összege legalább 42?

4232 Mekkora szöget zár be egymással egy szabályos oktaéder két szomszédos lapja?

4233 Egy kisvárosban olyan köztéri szobrot adtak át, amelynek fémváza egy szabályos oktaéder, lapjai pedig erős, átlátszó plasztikból készültek. A test egyik csúcsa a szobor talapzatán áll, a szemközti csúcs pedig pontosan fölötte helyezkedik el. Az oktaéder belsejében elhelyeztek egy kockát is, amelynek csúcsai az oktaéder lapjainak középpontjába esnek.

a) A talapzattól számítva milyen magas a szobor, ha az oktaéder minden éle 1 méter hosszú?

b) Mekkora az oktaéder belsejében elhelyezett kocka éle?

4234 Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder paralelogrammában, illetve rombuszban is metszhető.

4235 Lehet-e egy szabályos oktaédert szabályos hatszögben metszeni? Válaszunkat indokoljuk.

4236 *a)* Egy szabályos háromszög belsejében kiválasztunk egy tetszőleges P pontot, majd a pontból merőlegest állítunk a háromszög oldalaira. A kapott merőlegesek rendre az X, Y, illetve Z pontokban metszik a háromszög oldalait.

Bizonyítsuk be, hogy a $PX + PY + PZ$ összeg a P pont választásától függetlenül állandó.

Mekkora az összeg, ha a háromszög minden oldala a?

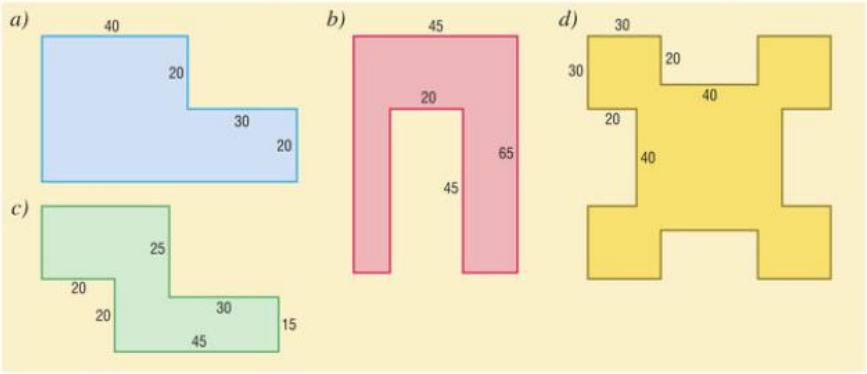
b) Egy szabályos tetraéder alaplapjának belsejében kiválasztunk egy tetszőleges P pontot, majd a pontból merőlegest állítunk a tetraéder alaplapjának síkjára. A kapott merőleges rendre az X, Y, illetve Z pontokban metszi az oldallapok síkjait.

Bizonyítsuk be, hogy a $PX + PY + PZ$ összeg a P pont választásától függetlenül állandó.

Mekkora az összeg, ha a tetraéder minden éle a?

A terület fogalma, a sokszögek területe

4237 Számítsuk ki az alábbi sokszögek területét. Az oldalak centiméterben vannak megadva.



4238 Számítsuk ki a háromszög területét a következő adatokból:

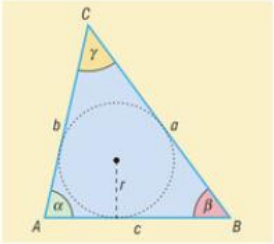
a) $a = 12$ cm, $b = 18$ cm, $\gamma = 30°$;

b) $a = 5$ cm, $\beta = 40°$, $\gamma = 50°$;

c) $a = 1{,}7$ dm, $c = 8$ cm, $\alpha = 120°$;

d) $a = 25$ cm, $b = 52$ cm, $c = 6{,}3$ dm;

e) $a = 13$ cm, $\alpha = 90°$, $r = 2$ cm. (➡)



4239 Mekkora a háromszög legrövidebb magassága, ha oldalai 21 cm, 17 cm és 10 cm hosszúak?

4240 Mekkora a háromszögbe írható kör sugara, ha oldalai

a) 10 cm, 24 cm, 26 cm; *b)* 16,8 cm, 13,6 cm, 8 cm?

4241 Egy téglalap és egy (vele nem egybevágó) paralelogramma oldalai páronként megegyeznek. Melyiknek nagyobb a területe? Válaszunkat indokoljuk.

4242 Számítsuk ki a paralelogramma területét, ha az egyik csúcsából kiinduló két oldala a és b, a csúcsnál lévő szöge pedig α. Minden esetben adjuk meg a paralelogramma magasságainak hosszát.

a) $a = 3$ cm, $b = 7$ cm, $\alpha = 90°$; *b)* $a = 2{,}4$ cm, $b = 3{,}7$ cm, $\alpha = 30°$;

c) $a = 12$ cm, $b = 17$ cm, $\alpha = 120°$; *d)* $a = 8{,}3$ cm, $b = 5{,}6$ cm, $\alpha = 55°$.

4243 Mekkora a paralelogramma területe, ha két átlóját e és f, az átlók által bezárt szögét pedig φ jelöli? Számítsuk ki a paralelogramma oldalait és szögeit. Minden esetben adjuk meg a paralelogramma magasságainak hosszát.

a) $e = 3$ cm, $f = 7$ cm, $\varphi = 90°$; *b)* $e = 2{,}5$ cm, $f = 3{,}5$ cm, $\varphi = 45°$;

c) $e = 5$ cm, $f = 8$ cm, $\varphi = 65°$.

4244 Mekkora szöget zár be a T területű paralelogramma két átlója, ha hosszuk e és f?

a) $e = 5$ cm, $f = 1{,}2$ dm, $T = 30$ cm^2; *b)* $e = 3{,}5$ cm, $f = 7{,}2$ cm, $T = 6{,}3$ cm^2;

c) $e = 12$ cm, $f = 18$ cm, $T = 57$ cm^2; *d)* $e = 4{,}2$ cm, $f = 6$ cm, $T = 0{,}11$ dm^2.

4245 Mekkora a rombusz területe, ha magassága 3 cm, hegyesszöge 60°?

4246 Számítsuk ki a húrtrapéz területét, ha alapjai 6 cm és 12 cm, szárai 5 cm hosszúak.

4247 Számítsuk ki a trapéz területét, ha a szárakat összekötő középvonala 7 cm, magassága 5 cm.

4248 Számítsuk ki a szabályos

a) hatszög; *b)* nyolcszög; *c)* tízszög

területét, ha oldalai 12 cm hosszúak. Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

4249 Egy szabályos ötszög átlója 10 cm. Számítsuk ki az ötszög területét.

4250 Számítsuk ki a szabályos hétszög területét, ha

a) beírt; *b)* körülírt

körének sugara 3 cm.

4251 Számítsuk ki a szabályos tizenkétszög és a szabályos négyszög területének arányát, ha mindkettő oldala a.

4252 A Vasvilla étteremben szabályos hatszög alakú tányéron szolgálják fel a túrós csuszát. A nagy adagot egy 1,2-szer akkora oldalú tányéron hozza ki a pincér, mint a kis adagot. Megéri-e kis adagot rendelni 950 Ft-ért, ha a nagy adag ára 1400 Ft?

4253 Az A4-es lap méretei 210 mm × 297 mm. Lerajzolható-e egy A4-es lapra egy 110 m^2-es családi ház 1 : 40 méretarányú kicsinyített tervrajza?

4254 Egy konvex négyszög területe 50 cm^2. A négyszöget az átlói négy olyan háromszögre bontják, melyek közül két szomszédosnak a területe 8 cm^2, illetve 12 cm^2. Számítsuk ki a másik két háromszög területét.

4255 Vanda 1 : 40 000 méretarányú turistatérképén lemérte egy jó közelítéssel paralelogramma alakú erdő két oldalának, valamint egyik átlójának hosszát; az oldalak 3,5, illetve 4 cm, az átló 7 cm. Az erdőben az átlók mentén egy-egy jelzett turistautat építettek ki.

a) Hány hektáros az erdő a valóságban?

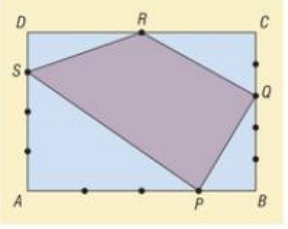
b) Hány kilométer hosszú az erdőt átszelő másik turistaút?

c) Mekkora szögben metszi egymást a két turistaút?

4256 Dorka az $ABCD$ téglalap alakú kartonlapból kivágta a $PQRS$ négyszöget. Az $ABCD$ téglalap oldalain megjelölt belső pontok a kartonlap egy-egy oldalát egyenlő részekre bontják.

a) Hány százaléka a kivágott négyszög területe az $ABCD$ kartonlap területének?

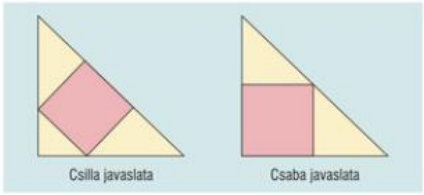
b) Igaz-e, hogy a Dorka által kivágott négyszög PS és QR oldalai párhuzamosak? Válaszunkat indokoljuk.



4257 Melyek azok a négyszögek, amelyeknek területét valamelyik középvonala megfelezi? Válaszunkat indokoljuk.

4258 Egy húrtrapéz alapjai 27 cm, illetve 12 cm. A trapézba olyan kör írható, amely a trapéz minden oldalát érinti. Számítsuk ki a trapéz területét, valamint a trapézba írható kör sugarát.

4259 Csaba és Csilla olyan saroktelket vásároltak, melynek befogói 24 m, illetve 25 m. A telekre négyzet alaprajzú házat szeretnének építeni, de a ház tájolásáról még nem tudtak megállapodni. Az ábrák Csaba, illetve Csilla javaslatát mutatják. Döntsük el, hogy melyik terv elfogadása esetén építenének nagyobb alapterületű házat.



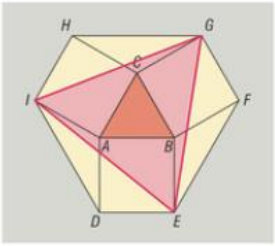
4260 Két testvér, András és Béla, egy konvex négyszög alakú kertet örököltek. A telket fele-fele arányban kellett felosztaniuk.

Kezdetben tanácstalanok voltak, majd András javasolta, hogy a telket valamelyik középvonala mentén próbálják felosztani. A javasolt középvonal valóban megfelezte a telket. Ekkor Béla azt tanácsolta, hogy mégis inkább a másik középvonal mentén osszák két részre az örökségüket. Azt tapasztalták, hogy a telket a másik középvonala is megfelezi.

a) Milyen alakú lehetett az örökölt telek?

b) Mekkora területű részt kaptak a testvérek, ha a telek egyik csúcsából kiinduló két oldala 18 m és 15 m, a csúccsal szemközti átló hossza pedig 22,4 m?

4261 Az *ABC* szabályos háromszög oldalaira kifelé egy-egy négyzetet rajzolunk. A kapott hat pont egy konvex hatszög (a *DEFGHI* hatszög) csúcsait alkotják.



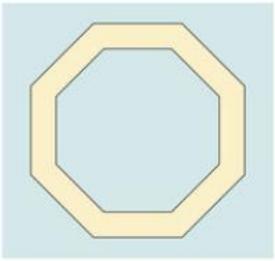
a) Számítsuk ki a kialakuló hatszög szögeit.

b) Milyen szimmetriatulajdonságokkal rendelkezik a kapott hatszög?

c) Mekkora a hatszög területe, ha a szabályos háromszög oldalai 10 cm hosszúak?

d) Számítsuk ki a *GEI* háromszög területét.

4262 Egy festő szabályos nyolcszög alakú képkeretbe szereti rámáztatni a képeit. Legújabb keretének külső oldalai 50 centiméteresek, maga a keret pedig 5 cm széles. Hány m^2-es vászon fér el a keretben?



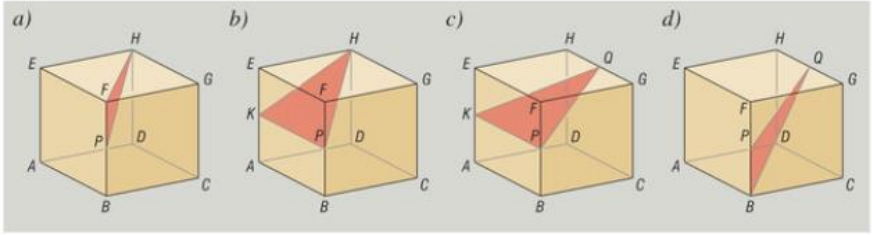
4263 Egy 8 cm oldalú szabályos hatszög középpontját tükrözzük a hatszög oldalfelező pontjaira, így egy újabb hatszöget kapunk. Mekkora a kapott hatszög területe?

4264 Egy szabályos sokszögben összekötjük a szomszédos oldalfelező pontokat, így egy újabb szabályos sokszöget kapunk. Számítsuk ki az eredeti, valamint az így kapott sokszög területének arányát, ha a kiindulásul vett sokszög oldalainak száma

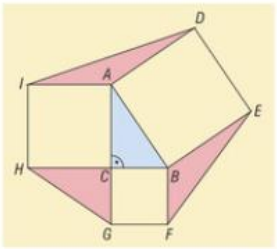
a) 3; *b)* 4; *c)* 6; *d)* 8.

e) Számítsuk ki az n oldalú szabályos sokszög, valamint az oldalfelező pontjai által közrefogott sokszög területének hányadosaként értelmezett sorozat határértékét, ha n tart a végtelenbe.

4265 Számítsuk ki, hogy a megjelölt háromszögekre illeszkedő síkok mekkora területű alakzatot metszenek ki az $ABCDEFGH$ kockából, ha a kocka minden éle 5 cm hosszú. Rajzoljuk be a kialakuló síkmetszeteket az egyes ábrákba. (A kocka csúcsain kívül csak oldalfelező pontok láthatók az ábrákon.)



4266 Az ABC derékszögű háromszög (a derékszög a C csúcsnál van) oldalaira kifelé négyzeteket szerkesztettünk, majd a kapott négyzetek csúcspontjait az ábra szerint összekötöttük.



a) Bizonyítsuk be, hogy a megjelölt háromszögek (azaz az ADI, a HGC, valamint az FEB háromszögek) területe megegyezik.

b) Hogyan kell megválasztanunk az ABC háromszög befogóinak hosszát ahhoz, hogy a $DEFGHI$ hatszög területe a lehető legkisebb legyen, ha a befogók hosszának összege 10 cm?

4267 Az ABC (nem derékszögű) háromszög oldalai a szokásos módon a, b, c. Jelölje továbbá a háromszög A csúcsából induló magasságvonalának BC oldalegyenesre illeszkedő pontját T, az A csúcsnak a körülírt kör középpontjára vonatkozó tükörképét A'.

a) Bizonyítsuk be, hogy a CAT háromszög hasonló az $A'AB$ háromszöghöz.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszög területe T, a körülírt körének sugara pedig R, akkor:

$$T = \frac{abc}{4R}.$$

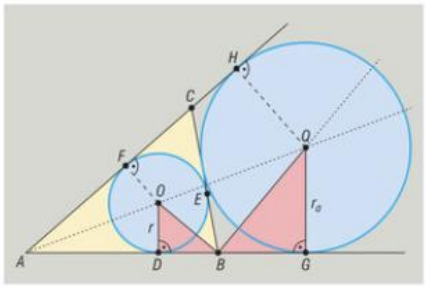
c) Igaz-e a fenti területképlet derékszögű háromszögre?

4268 (A Heron-képlet bizonyítása.) Az ABC háromszög oldalai:

$$AB = c, \quad BC = a \quad \text{és} \quad AC = b,$$

területe T, kerületének fele s, beírt körének sugara r, a BC oldalához írt körének sugara pedig r_a.

Az ábra további jelöléseit figyelembe véve oldjuk meg a következő feladatokat.



a) Mutassuk meg, hogy a háromszögbe írt kör a háromszög oldalait olyan pontokban érinti, amelyekre:

$$AD = AF = s - a, \quad BE = BD = s - b \quad \text{és} \quad CE = CF = s - c.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög BC oldalához írt kör az AB és AC egyeneseket olyan pontokban érinti, amelyekre:

$$AG = AH = s.$$

c) Igazoljuk, hogy a BOD háromszög hasonló a QBG háromszöghöz.

d) Az ABC háromszög ABO, BCO, CAO háromszögekre bontása alapján mutassuk meg, hogy:

$$T = r \cdot s.$$

e) Az $ABQC$ négyszög területének kétféle kiszámításával igazoljuk, hogy:

$$T = r_a \cdot (s - a).$$

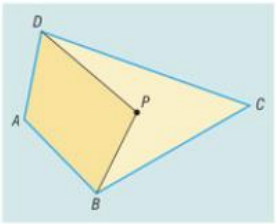
f) A BOD és QBG háromszögek hasonlóságának felhasználásával bizonyítsuk be, hogy:

$$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}.$$

4269 Pista bácsi konvex négyszög alakú $ABCD$ földjén kétféle takarmányt kíván vetni, mindkettőt ugyanakkora területen. Keressük meg a birtok belsejében azokat a P pontokat, amelyekre teljesül, hogy

$$T_{ABPD} = T_{BCDP}$$

Milyen alakzaton helyezkednek el a megfelelő P pontok?



4270 Az $ABCD$ konvex négyszöget átlói négy háromszögre bontják. Bizonyítsuk be, hogy a „szemközti" háromszögek területének szorzata megegyezik, azaz ha az átlók metszéspontját O jelöli, akkor:

$$T_{ABO} \cdot T_{CDO} = T_{BCO} \cdot T_{DAO}$$

4271 Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja O. Az ABO, BCO, illetve CDO háromszögek területe rendre 8 cm^2, 4 cm^2, illetve 2 cm^2.

a) Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét.

b) Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz.

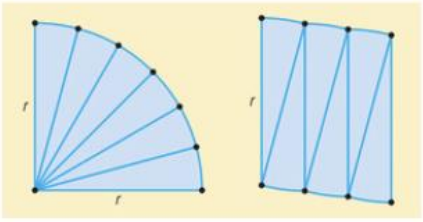
4272 Az $ABCDEFGH$ kocka alapja a 18 cm oldalú $ABCD$ négyzet, az alaplapra merőleges élei AE, BF, CG, illetve DH. A kocka FG élének felezőpontja P, a GH élé pedig Q.

a) Milyen alakzatban metszi a kockát az A, P és Q pontokra illeszkedő sík?

b) Mekkora az *a)* feladatban szereplő alakzat területe?

A kör és részeinek területe

4273 Az alábbi ábrán egy negyed körlapot 15°-onként haladva körcikkekre bontottunk, majd a kapott körcikkeket egymás mellé helyeztük. Figyeljük meg a két ábrát. Milyen „négyszög" területével közelíthető a negyed körlap területe? Mekkorák az oldalai a közelítő „négyszögnek"? Hogyan alakul a közelítés pontossága, ha a körcikkek középponti szögét csökkentjük? Észrevételeink alapján adjunk becslést a kör területére.



4274 Számítsuk ki a körcikk területét, ha sugara r, középponti szöge pedig α. Minden esetben adjuk meg a határoló körív hosszát.

a) $r = 5$ cm, $\alpha = 65°$;

b) $r = 12$ cm, $\alpha = 135°$;

c) $r = 13$ cm, $\alpha = 275°$;

d) $r = 8$ cm, $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

e) $r = 18$ cm, $\alpha = \frac{2\pi}{5}$.

4275 Mekkora a középponti szöge annak a körcikknek, amelynek területe T, sugara pedig r?

a) $T = 6{,}75$ cm^2, $r = 3$ cm;

b) $T = 16{,}36$ cm^2, $r = 2{,}5$ cm;

c) $T = 16{,}76$ cm^2, $r = 0{,}4$ dm.

4276 Mekkora területű körszeletekre bontja az 5 cm sugarú kört egy 8 cm hosszú húrja?

4277 A 12 cm sugarú kör egy húrja a kör középpontjából 65°-os szögben látszik. Milyen hosszú a húr? Mekkora a területe a húr által a körből levágott nagyobb körszeletnek?

4278 Mekkora a körgyűrű területe, ha határoló köreinek sugara

a) $r = 2{,}3$ cm, $R = 5{,}4$ cm;

b) $r = 12$ cm, $R = 15$ cm?

4279 Egy CD lemez átmérője 12 cm, a közepén található lyukas köré pedig 1,5 cm. A CD lemez tetejére gyakran helyeznek el színes képet. Legfeljebb mekkora lehet egy ilyen kép területe?

4280 Mekkora a körgyűrű területe, ha középkörének sugara 14 cm, szélessége pedig 4 cm?

4281 Két koncentrikus kör sugara 3 cm, illetve 7 cm. Mekkora területű részekre bontja a két kör által határolt körgyűrűt a két kör középköre?

4282 Egy dísztányér pereme 5 cm szélességben népi motívumokat tartalmaz. Mekkora területű a motívumokat tartalmazó rész területe, ha a tányér átmérője 28 cm?

4283 Egy 30 cm átmérőjű pizza ára 1500 Ft. Tegyük fel, hogy a pizza ára egyenesen arányos a területével. Mennyibe kerül

a) egy 30°-os középponti szöggel rendelkező pizzaszelet;

b) egy 18 cm átmérőjű pizza;

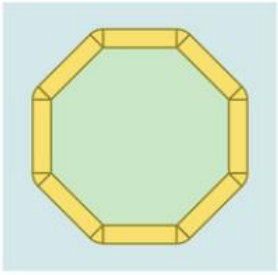
c) egy 60°-os középponti szöggel rendelkező 12 cm sugarú pizzaszelet;

d) az 1500 Ft értékű pizzából nyerhető legnagyobb, négyzet alakú pizza?

4284 Számítsuk ki az a oldalú szabályos háromszög köré írt, valamint beírt körének területarányát.

4285 Egy újságárus pavilon felülnézeti képe olyan szabályos nyolcszög, amelynek minden oldala 2 méter.

Mekkora területet kell leaszfaltozni a pavilon körül, ha az aszfaltozásnak mindenhol pontosan 50 cm szélesnek kell lennie? Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg. (➡)



4286 Két koncentrikus kör sugara r, illetve R ($R > r$). A két kör középköre a körgyűrűt két kisebb körgyűrűre bontja. Számítsuk ki a két keletkező körgyűrű területének arányát.

4287 Két koncentrikus kör sugara r, illetve R $(R > r)$. Mekkora annak a körökkel koncentrikus körnek a sugara, amelyik

a) megfelezi a két kör által határolt körgyűrű szélességét;

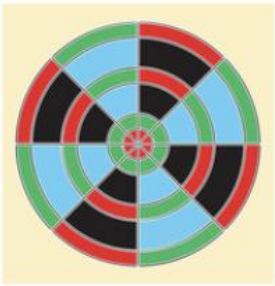
b) két olyan körgyűrűre bontja az eredetit, amelyek területe úgy aránylik egymáshoz, mint $r : R$, továbbá a középponthoz közelebb eső rész területe a kisebb;

c) megfelezi a két kör által határolt körgyűrű területét?

d) A határoló körök közül melyikhez vannak közelebb a kapott körök?

4288 Az ábrán egy speciális dartstáblát látunk. A koncentrikus körök sugara rendre:

5 cm, 10 cm, 18 cm, 23 cm, 31 cm és 36 cm.



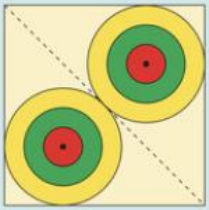
a) Mekkora a feketével jelölt részek területösszege?

b) Számítsuk ki a zölddel megjelölt részek területösszegét.

c) Mekkora valószínűséggel találja el Bence a tábla pirossal megjelölt részét?

(A színes részek határainak területe elhanyagolható.)

4289 Berci és Marci szeretnek íjjal célba lőni. Egy 2 m × 2 m-es négyzet alakú hungarocelltáblából két céltáblát vágtak ki maguknak (ld. ábra).



Egy-egy céltáblát koncentrikus körökkel három ugyanolyan széles részre osztottak, amelyeket különböző színekkel festettek be.

A találat szempontjából legértékesebb részt pirossal jelölték meg.

a) A tábla hány százaléka veszett kárba?

b) Hány cm^2 területű részt festettek pirosra a fiúk egy-egy céltáblán?

c) Hányszor akkora valószínűséggel találja el Marci a legértéktelenebb (sárga) részt, mint a legértékesebb pirosat, ha tudjuk, hogy Marci a céltáblát mindenképpen eltalálja, és a találat ugyanakkora valószínűséggel esik a tábla bármely pontjára?

4290 Barbara a szabadidejében gyakran kertészkedik. Legutóbb egy 35 cm oldalú szabályos háromszög alakú kovácsoltvas virágtartót vásárolt. Később úgy döntött, hogy új virágtartóját kör alakú terítővel takarja le.

a) Mekkora a területe a legkisebb kör alakú terítőnek, amely teljes egészében lefedi a virágtartó tetejét?

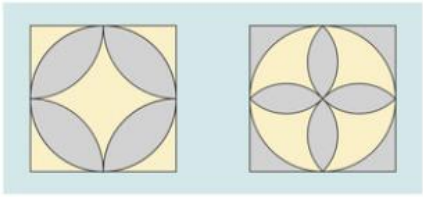
b) Mekkora az alapterülete annak a legnagyobb kör alapú cserépnek, amely még elhelyezhető a virágtartón úgy, hogy semelyik irányba ne lógjon le arról?

c) Számítsuk ki a terítő és a virágcserép alapköre sugarának arányát.

d) Hányszorosa a terítő területe a virágcserép alapterületének?

4291 Egy 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikkből a lehető legnagyobb kört szeretnénk kivágni. Számítsuk ki, hogy a körcikknek hány százaléka lesz hulladék.

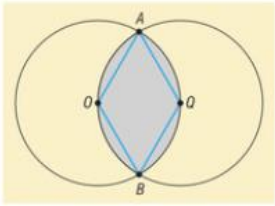
4292 Egy négyzetbe kört, valamint néhány körívet rajzoltunk. Számítsuk ki, hogy az egyes esetekben a négyzet területének hány százalékát színeztük szürkére. (Az első ábrán a négyzet egy-egy csúcsa köré írt negyedköröket, a másodikon pedig két-két szomszédos oldalfelező pont fölé emelt félköröket láthatunk.) Az eredményt egész százalékra kerekítve adjuk meg.



4293 Az O középpontú és a Q középpontú körök sugara 12 cm. A két kör további metszéspontjai A és B (ld. ábra).

a) Milyen speciális négyszög az $OAQB$ négyszög? Mekkora a területe?

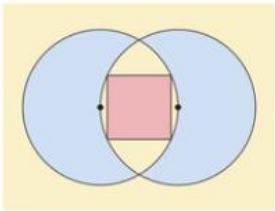
b) Mekkora a területe az ábrán szürkével megjelölt síkidomnak?



4294 Három kör (melyek egy síkban fekszenek) páronként érinti egymást. A körök sugara rendre 2 cm, 3 cm, illetve 4 cm. Számítsuk ki a körök által közrefogott síkidom területét.

4295 Béla bácsi kiskertje négyzet alakú, melynek oldalai 15 m hosszúak. Béla bácsi olyan mozgófejes öntözőberendezést használ, amelynek hatótávolsága 4 méter, azaz a rögzítés helyétől legfeljebb 4 méter távolságra található helyeket éri el. Egyik alkalommal a berendezést olyan helyen rögzítette, amely a telek két oldalától egyaránt 1 méter távolságban volt. A telek hány százalékát éri el az öntözőberendezés?

4296 Zsuzsa pogácsát készít a családjának. A vékonyra kinyújtott tésztából egy 8 cm átmérőjű kör alakú szaggatóval szaggatja ki a süteményt. Először kivág egy kör alakú részt, majd a szaggatót úgy helyezi arrébb, hogy középpontja az imént kivágott körvonalra kerüljön. Ezzel az eljárással hold alakú pogácsákat tud kiszaggatni (ld. ábra). A két pogácsa közötti részből még kivág egy lehető legnagyobb négyzet alakú pogácsát.



a) Mekkora egy hold alakú tésztadarab területe?

b) Számítsuk ki a négyzet alakú tészta területét.

A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata

4297 Egy kocka felszíne 337,5 cm^2. Mekkora a kocka

a) egy oldallapjának átlója; *b)* testátlója?

4298 Egy kocka oldallapjának átlója 20 cm hosszú. Mekkora a kocka

a) felszíne; *b)* térfogata?

4299 Egy kocka testátlója 3 centiméterrel hosszabb, mint az oldaléle. Mekkora a kocka

a) felszíne; *b)* térfogata?

4300 Egy kocka éle 5 centiméterrel hosszabb, mint egy másik kocka éle. Térfogatuk különbsége 1385 cm^3. Mekkora a két kocka éle?



4301 Egy négyzetes oszlop alapéle 5 centiméterrel rövidebb az oldalélénél. Mekkora a négyzetes oszlop térfogata, ha a felszíne 250 cm^2?

4302 Ha egy téglatest éleinek hosszát 1, 3, illetve 5 centiméterrel megnöveljük, akkor olyan kockát kapunk, amelynek térfogata 1 dm^3. Adjuk meg a téglatest felszínét.

4303 Az alumínium sűrűsége 2700 $\frac{kg}{m^3}$. Hány gramm alumíniumból készült egy 20 méter hosszú, 30 cm széles és 10 mikrométer vastag alufólia tekercs?

4304 Falazótéglát vásárolunk, amelynek méretei centiméterekben mérve $38 \times 25 \times 23{,}8$. Mekkora egy raklapnyi tégla tömege, ha sűrűsége 0,8 $\frac{kg}{dm^3}$, és egy raklapra 60 db tégla fér?

4305 Egy téglatest két éle 12 cm és 9 cm, a testátlója $\sqrt{325}$ cm hosszú. Mekkora a téglatest

a) térfogata; *b)* felszíne?

4306 Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 12 cm, magassága 20 cm. Mekkora a hasáb

a) felszíne; *b)* térfogata?

4307 Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapéle 24 cm, magassága 42 cm. Mekkora a hasáb

a) felszíne; *b)* térfogata?

4308 Egy 20 cm magas egyenes hasáb alaplapja olyan húrtrapéz, amelynek alapjai 12 cm és 6 cm, szárai 10 cm hosszúak. Mekkora a hasáb

a) felszíne; *b)* térfogata?

4309 Egy egyenes hasáb valamennyi éle egyenlő hosszú. Az alaplapja olyan rombusz, amelynek egyik hegyesszöge 60°. Mekkora a hasáb egy éle, ha a felszíne 143,3 cm^2?

4310 Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 12 cm. A palást területe az alaplap területének harminchatszorosa. Mekkora a hasáb térfogata?

4311 Egy négyzet alapú ferde hasáb oldaléle az alaplap síkjával 73°-os szöget zár be. Mekkora a hasáb térfogata, ha az alapéle 12 cm, az oldaléle 40 cm hosszú?

4312 Egy 5 cm oldalú négyzetet megforgatunk egyik oldala körül. Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata és felszíne?

4313 Egy téglalap oldalai 10 cm és 12 cm hosszúak. A téglalapot megforgatjuk a

a) rövidebbik; *b)* hosszabbik középvonala körül.

Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata és felszíne?

4314 Egy egyenes körhenger alakú poharat egy 6 cm élű kocka alakú dobozba csomagoltak. Mennyi víz fér a pohárba, ha teteje és alja illeszkedik a doboz két szemben lévő lapjára, és a pohár érinti a doboz másik négy lapját is? (A pohár falvastagságát hanyagoljuk el.)

4315 Egy egyenes körhenger alaplapjának kerülete 25,13 cm, magasságának és az alaplap sugarának összege 22 cm. Mekkora a körhenger térfogata és felszíne?

4316 Egy egyenes körhenger tengelymetszete olyan téglalap, amelynek oldalai 12 cm és 30 cm hosszúak. Mekkora lehet a körhenger térfogata?

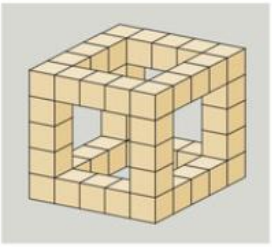
4317 Elfér-e 2 dl kakaó abban a henger alakú bögrében, amelynek az alaplapja 7 cm átmérőjű kör, magassága pedig 10 cm?

4318 Egy egyenes körhenger palástja egy 20 cm átlójú négyzet. Mekkora a körhenger
a) felszíne; *b)* térfogata?

4319 Egy egyenes körhenger felszíne 691,15 cm^2. A henger magasságának és az alapkör sugarának az összege 22 cm. Mekkora a henger térfogata?

4320 Egy egyenes körhenger magasságának hossza az alapkör átmérőjének hosszához úgy aránylik, mint 3 : 2. Mekkora a körhenger térfogata, ha tengelymetszetének területe 384 cm^2?

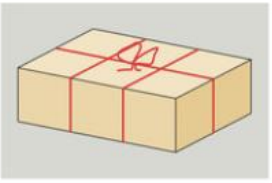
4321 Öt egység élű kockából az ábrán látható módon kifúrtunk három „alagutat". Mekkora az így keletkezett test
a) térfogata; *b)* felszíne?



4322 Mekkora annak a kockának a térfogata, amelynek egy csúcsa a hozzá képest kitérő testátlótól 16,33 cm távolságra van?

4323 Befektető Béla 108,8×46,2×11,7 mm méretekkel rendelkező mobiltelefonjával azonos méretű aranyrudat szeretne vásárolni. Interneten utánajárt, hogy jelenleg 1 uncia arany ára 1161 dollár (1 uncia = 31,103 gramm).
a) Az arany sűrűsége 19,3 $\frac{g}{cm^3}$. Hány gramm egy ilyen aranyrúdnak a tömege?
b) Hány forintot ér ekkor ez az aranyrúd, ha 1 dollár 182 forint?
c) Befektető Béla azt is olvasta az interneten, hogy Manhattan központjában 7000 tonna aranyat őriznek. Szívesen vásárolna belőle, de aggódik, hogy nem lenne elég helye a tároláshoz. Felesége szerint viszont az egész elférne az úszómedencéjükben, amelynek szélessége 10 m, hosszúsága 20 m és 2,5 m mély. Igaza van-e?

4324 A téglatest alakú csomagunk hosszúságának, szélességének és magasságának aránya 3 : 2 : 1. Postai szállításhoz az ábrán látható módon 260 cm hosszú zsineggel átkötöttük, amelyből a csomó megkötéséhez 20 centimétert használtunk fel.
a) Mekkorák a csomag oldalélei?
b) Hány dm^2 papír kellett a becsomagoláshoz, ha az átfedések miatt a veszteség 4%?
c) Elfér-e a csomagban egy 50 cm hosszú rúd?



4325 Egy téglatest egyik lapján az élek hosszának aránya 3 : 4. A téglatest 50 cm hosszú testátlója ezzel a lappal 30°-os szöget zár be. Mekkora a téglatest
a) felszíne; *b)* térfogata?

4326 Egy négyzet alapú egyenes hasáb két szemközti oldalélén áthaladó síkmetszetének területe $60\sqrt{2}$ cm^2, az alap- és fedőlap két szemközti élén áthaladó síkmetszet területe pedig 65 cm^2. Mekkora a hasáb
a) felszíne; *b)* térfogata?

4327 Egy szabályos ötszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm, magassága 22 cm. Mekkora a hasáb
a) felszíne; *b)* térfogata?

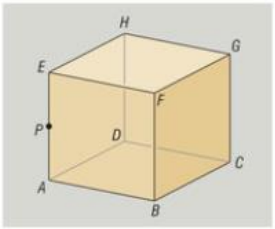
4328 Vera 8 éves születésnapjára édesanyja szabályos nyolcszög alapú egyenes hasáb alakú tortát készít. A torta magassága 8 cm lesz, és a lehető legnagyobb, ami egy 30 cm-es átmérőjű kör alakú sütéményes tálcán még elfér.
a) Hány cm^2-es felületet kell csokimázzal bevonni, ha a tortának a tetejét és az oldalát fedi majd máz?
b) Hány százalékkal lesz a tortán nagyobb a bevonandó felület Vera 10 éves születésnapján, ha édesanyja ugyanerre a tálcára szabályos tízszög alapú, és 10 cm magasságú tortát fog készíteni?

4329 Egy 2,5 m magas hirdetőoszlop szabályos háromszög alapú egyenes hasáb, amelynek az oldalait és a tetejét kell befesteni. Mekkora a hasáb alapéle, ha a befestendő felület 6,28 m^2?

4330 Egy háromszög alapú egyenes hasáb magassága 20 cm. Két oldallapja 70°31'-os szöget zár be, és a területük aránya 2 : 3. Mekkora a hasáb térfogata, ha a harmadik oldallap területe 120 cm^2?

4331 Egy 3 m mély csatorna keresztmetszete olyan lefelé keskenyedő egyenlő szárú trapéz, amelynek alapjai 8 m és 6 m.
a) Ha a víz folyásának sebessége 1,4 $\frac{m}{s}$, akkor egy óra alatt legfeljebb mennyi vizet tud elvezetni a csatorna?
b) Számoljuk ki mennyi vizet vezet el a csatorna óránként, ha félig van vízzel, és a víz folyásának sebessége 0,9 $\frac{m}{s}$.

4332 Az ábrán látható kockát kettévágjuk az AE él P felezőpontján, illetve a H és G csúcsokon áthaladó síkkal. Adjuk meg az így keletkezett testek felszínét és térfogatát, ha a kocka éle 10 cm.



4333 Egy paralelepipedon két éle 15 cm és 30 cm, a közbezárt szögük 42°. Mekkora a paralelepipedon térfogata, ha a harmadik éle 24 cm hosszú, és a másik két él által meghatározott síkkal 75°-os szöget zár be?

4334 Új úszómedencénk alapja 3,6 m átmérőjű kör.
a) Mennyi idő alatt telik meg a medencénk 90 cm magasan vízzel, ha a csapból percenként 30 liter víz folyik?
b) Hány forinttal emelkedik az éves vízdíjunk, ha kéthavonta egyszer kell cserélni a vizet a medencében, és 1 m^3 víz ára 542 Ft?

4335 A kétéves Bendegúz beledobta az építőkockáját a fazékba. Hány centiméter a kocka éle, ha a 22 cm átmérőjű fazékban a húsleves szintje 1 cm-t emelkedett? (A kockát teljesen ellepi a leves.)

4336 Öntözéshez 80 cm átmérőjű 120 cm magas henger alakú hordóba gyűjtjük az ereszcsatornán kiömlő csapadékvizet. Házunk alapterülete 120 m^2, és ma 8 mm eső esett. Megtelt-e az üres hordó esővízzel, ha a tetőre hullott összes csapadékot fel tudjuk fogni?

4337 Szüreteléshez egy henger alakú felül nyitott vaskádat kívül-belül lefestenek. A kád magassága és átmérője egyaránt 150 cm, és 1 m^2 lefestéséhez 4,5 dkg festéket használnak fel. Mennyi festéket kell venni, ha háromszor szükséges a kádat átfesteni? (A kádfal vastagsága elhanyagolható.)

4338 Mekkora annak a két méter hosszú egyenes fémcsőnek a tömege, amelynek belső átmérője 5,4 cm, a falvastagsága pedig 3 mm, ha anyagának sűrűsége 7,2 $\frac{kg}{dm^3}$?

4339 Egy ferde körhenger alkotói 20 cm hosszúak, és az alaplappal 80°-os szöget zárnak be. Mekkora a henger térfogata, ha a henger magassága az alaplap sugarának kétszerese?

4340 Egyenes körhenger alakú fahasábot tengelyével párhuzamos két síkkal 3 részre hasítunk szét úgy, hogy a síkok az alapkör egy átmérőjét három egyenlő részre osztják. Mekkora a keletkezett részek tömege, ha a fahasáb alapkörének sugara 15 cm, magassága 45 cm, és a fa sűrűsége 0,71 $\frac{g}{cm^3}$?

4341 Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló három élének összege 18 cm, testátlója $\sqrt{110}$ cm. Mekkora a felszíne?

4342 Egy téglatest testátlójának a téglatest két élével bezárt szöge 23° és 72°.

a) Mekkora a testátlónak a harmadik éllel bezárt szöge?

b) Mekkora a téglatest térfogata, ha a testátló hossza 80 cm?

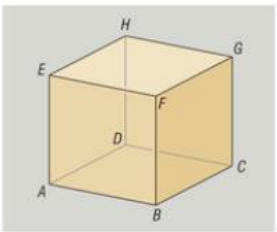
4343 Egy paralelepipedon minden oldallapja olyan rombusz, amelynek oldala 18 cm hosszú, és hegyesszöge 60°. Mekkora a paralelepipedon

a) felszíne; *b)* térfogata?

(Az ilyen testet romboédernek is szokás nevezni.)

4344 Az $ABCDEFGH$ téglatest AE, AD és AB éleinek aránya 3 : 4 : 5. Az AB él egyenesének az EC testátló egyenesétől mért távolsága 2,4 méter. Mekkora a téglatest térfogata?

4345 Egy kocka két szemközti csúcsa F és D. Tekintsük az ezen csúcsokba be nem futó élek felezőpontjait. Bizonyítsuk be, hogy ezek egy szabályos hatszög csúcsai. (➡)



4346 Egy 12 cm élű kocka minden lapján kijelöltük a középvonalak negyedelőpontjait.

Mekkora az ezen pontok mint csúcsok által meghatározott test

a) térfogata; *b)* felszíne?

4347 Egy szobor talapzata olyan szabályos háromszög alapú egyenes hasáb, amelynek alapéle 1 m, magassága pedig 1,5 m. A talapzatot szabályos tizenkétszög alapú egyenes hasábbá kívánjuk alakítani. Ehhez a hasáb magasságát megtartva az oldalélekkel párhuzamosan úgy hasítunk le belőle részeket, hogy a térfogata a lehető legnagyobb legyen.

a) Mekkora az így kapott hasáb alapéle?

b) Mekkora tömegű hulladékot kell elszállítanunk, ha a talapzat olyan bazaltból készült, amelynek sűrűsége 2,85 $\frac{kg}{dm^3}$?

4348 A 125 cm^3 térfogatú téglatestek közül melyiknek a felszíne a legkisebb?

4349 Az egyenlő felszínű egyenes körhengerek közül melyiknek a térfogata a legnagyobb?

A gúla és a kúp térfogata

4350 A következő táblázatban szabályos gúlák néhány adatát tüntettük fel. Számítsuk ki a hiányzó adatokat.

Alaplap	Alapél	Oldalél	Testmagasság	Felszín	Térfogat
négyzet	10 cm		22 cm		
négyzet	2 dm	26 cm			
négyzet		30 cm	20 cm		
négyzet			42 cm		5600 cm^3
szabályos háromszög	1,2 dm		20 cm		
szabályos háromszög	18 cm	15 cm			
szabályos hatszög	12 cm		20 cm		
szabályos hatszög	24 cm	30 cm			

4351 A Kheopsz-piramis megközelítőleg olyan szabályos négyoldalú gúla, amelynek alapéle 232 m, magassága 148 m. Határozzuk meg a piramis

a) térfogatát;

b) az alaplap és az oldallap szögét.



4352 Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 10 cm, az oldallapok az alaplappal 45°-os szöget zárnak be. Mekkora a gúla

a) felszíne; *b)* térfogata?

4353 Egy szabályos négyoldalú gúla térfogata 648 cm^3, magassága harmada az alapélnek. Mekkora a gúla

a) alapéle; *b)* felszíne?

4354 A következő táblázatban egyenes körkúpok néhány adatát tüntettük fel. Számítsuk ki a hiányzó adatokat.

Alapkör sugara	Kúp magassága	Alkotó hossza	Felszín	Térfogat
6 cm	10 cm			
	20 cm	30 cm		
7 cm		18 cm		
	2 dm			2094,40 cm^3
8 cm			452,39 cm^2	

4355 Egy egyenes körkúp magassága 10 cm, nyílásszöge 40°. Mekkora a forgáskúp
a) felszíne; *b)* térfogata?

4356 Egy talpas koktélospohár magassága 24 cm. A felső része egyenes körkúp alakú, amelynek magassága a teljes magasság kétharmada. Legfeljebb hány deciliter ital tölthető a pohárba, ha a teteje 12 cm átmérőjű kör?

4357 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 12 cm és 5 cm. Forgassuk meg a derékszögű háromszöget a
a) rövidebbik; *b)* hosszabbik befogója körül.
Mekkora az így keletkezett forgástestek felszíne és térfogata?

4358 Egy forgáskúp kiterített palástja 8 cm sugarú 150°-os középponti szögű körcikk. Mekkora a forgáskúp
a) alapkörének sugara; *b)* nyílásszöge;
c) térfogata; *d)* felszíne?

4359 Mekkora annak a kúpnak a térfogata, amelynek palástja egy 100 cm^2 területű negyed körcikk?

4360 Mekkora a forgáskúp kiterített palástjának középponti szöge, ha alkotója 40 cm, magassága 32 cm?

4361 Egy egyenes körkúp tengelymetszete olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárai 28 cm hosszúak, és az általuk bezárt szög 30°. Mekkora a forgáskúp
a) felszíne; *b)* térfogata?

4362 Egy szabályos négyoldalú gúlának minden éle 18 cm. Mekkora a gúla
a) felszíne; *b)* térfogata?

4363 Egy szabályos négyoldalú gúla térfogata 147,8 cm^3. Ha a gúlát az alaplapra merőleges, annak egyik középvonalára illeszkedő síkkal elmetsszük, a síkmetszet szabályos háromszög lesz. Mekkora a gúla
a) magassága; *b)* oldaléle; *c)* felszíne?

4364 Egy szabályos háromoldalú gúla felszíne 202,65 cm^2. Egy oldallapjának területe az alaplap területének $\frac{3}{4}$ része. Mekkora a gúla térfogata?

4365 Egy $ABCD$ tetraéder ABC alaplapja olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelyben $AC = BC = 10$ cm. A CD él merőleges az alaplap síkjára, valamint az ABC alaplap és az ABD oldallap 45°-os szöget zár be. Mekkora a tetraéder felszíne és térfogata?

4366 Kerti pavilonunk alapja 2 m oldalú szabályos ötszög, amelyen lévő tetőnek a lejtésszöge minden oldalról 48°. Hány darab cserepet kell vásárolnunk a tető befedéséhez, ha 1 négyzetméterre 10 darabot kell számolnunk, és a veszteség 10%?

4367 Egy téglalap alapú gúla alaplapjának élei 12 cm és 20 cm hosszúak. A gúla csúcsából az alaplapra bocsátott merőleges talppontja a téglalap átlóinak metszéspontja. Ha a gúla térfogata 1200 cm^3, akkor mekkora a gúla
a) felszíne; *b)* oldaléleinek az alaplappal bezárt szöge?

4368 Egy 20 cm élű kocka minden lapjára kifelé egy-egy 30 cm magas szabályos négyoldalú gúlát állítunk. Mekkora az így keletkezett test
a) felszíne; *b)* térfogata?



4369 Egy 30 cm élű kocka minden csúcsából levágunk egy-egy olyan tetraédert, amelynek egyik csúcsa a kocka csúcsa, a másik három pedig ezen csúcsba futó éleknek a csúcshoz közelebbi harmadolópontjai. Mekkora az így keletkezett test

a) felszíne; *b)* térfogata?

4370 Egy gúla magassága 15 cm. Az alaptól 8 cm távolságban levő, az alappal párhuzamos síkmetszet területe 100 cm^2. Mekkora a gúla térfogata?

4371 A pattogatott kukoricát egyenes körkúp alakú tölcsérekben árulják. Három tölcsért készítenek egy 30 cm sugarú körlapból úgy, hogy azt három egybevágó körcikkre vágják, majd összeragasztják.

a) Mekkora lesz egy-egy tölcsér magassága?

b) Legfeljebb hány liter pattogatott kukorica fér egy ilyen tölcsérbe?

4372 Egy teherautó 2 m^3 sódert öntött le az udvarunkba egy 2 m oldalú négyzet alakú fólia közepére. A sóder olyan forgáskúp alakot vett fel, amelynek nyílásszöge 100°.

a) Elfért-e a sóder a kikészített fólián? *b)* Milyen magas a sóderkúp?

4373 Egy háromszög két oldalának hossza 42 cm és 30 cm, az általuk bezárt szög 100°. Forgassuk meg a háromszöget a harmadik oldala körül. Mekkora az így keletkezett forgástest

a) felszíne; *b)* térfogata?

4374 Egy húrtrapéz alapjainak hossza 30 cm és 60 cm, magassága 15 cm. Megforgatjuk a

a) hosszabbik; *b)* rövidebbik alapja körül.

Mekkora az így keletkezett forgástestek térfogata és felszíne?

4375 Egy egyenes körkúp tengelymetszete 5,56 dm^2. Mekkora a térfogata, ha alkotója 4 dm?

4376 Egy 20 cm alapsugarú és 40 cm magasságú forgáskúpból egy 12 cm alapsugarú forgáskúp alakú részt kivágunk. A két kúpnak közös a tengelye, és egyenlő a nyílásszöge. Mekkora a megmaradt rész térfogata?

4377 Egy ferde körkúp leghosszabb alkotója 40 cm, legrövidebb alkotója 32 cm, az alapkör sugara 10 cm. Mekkora a kúp

a) magassága; *b)* térfogata?

4378 Az $ABCD$ gúla ABC alaplapja 18 cm oldalú szabályos háromszög, a gúla oldalélei $6\sqrt{6}$ cm hosszúak. Az AB és AC élek felezőpontjain át az AD éllel párhuzamos síkot fektetünk.

a) Adjuk meg a síkmetszet területét.

b) Számítsuk ki, hogy ez a sík mekkora térfogatú részekre osztja a gúlát.

4379 Az $ABCD$ téglalapban $AB = 16$ cm, $BC = 12$ cm. A téglalap síkjára az A és C pontokban állítsunk egy-egy merőlegest, és az egyik félsíkban a merőlegeseken vegyük fel az AM és CN szakaszokat. Az M és N pontokra teljesül, hogy az MDB, illetve az NBD sík a téglalap síkjával 30°, illetve 60° szöget zár be. Adjuk meg az $MNBD$ tetraéder térfogatát.

4380 Házunk alapja egy 10 m széles és 20 m hosszú téglalap. A tető minden oldalról 60°-os szöget zár be a vízszintessel.

a) Hány légköbméter a padlás térfogata?

b) Egészekre kerekítve hány m^2-nyi cserepet kell vásárolnunk a tetőfedéséhez, ha 18% a hulladék?

c) Azokat az éleket, ahol a tető síkja megtörik, kúpcseréppel fedjük le. Hány cserepet vegyünk, ha 1 méterre 5 cserepet számolunk, és praktikus okokból a kiszámolt mennyiségen felül 20%-kal több cserepet vásárolunk?

4381 Üvegből készült, szabályos négyoldalú gúla alakú, belül üreges zárt ajándéktárgy belső magassága 10 cm. Ha az alaplapjára állítjuk, a benne levő színes folyadék a gúla magasságának feléig ér. Milyen magasan áll benne a folyadék, ha megfordítjuk, és a csúcsával lefelé tartjuk úgy, hogy az alaplapja ismét vízszintes legyen,?

4382 Hányadrésze egy tetraéder lapjainak súlypontjai által meghatározott tetraéder felszíne és térfogata az eredeti tetraéder felszínének és térfogatának?

4383 Egy 12 cm élhosszúságú szabályos tetraédert egy olyan síkkal kettévágunk, amelyik a tetraéder egyik élét tartalmazza, és a vele kitérő élt 2 : 1 arányban osztja. Adjuk meg az így keletkezett testek

a) térfogatát; *b)* felszínét.

4384 Egy 25 cm magas forgáskúp alapkörének sugara 10 cm. A kúp csúcsán áthaladó sík az alapkör síkjával 80°-os szöget képez, és kettévágja a kúpot. Számítsuk ki a részek térfogatát.

4385 Egy egyenlő magasságú forgáshenger és forgáskúp alapköre egyenlő sugarú. Mekkora a forgáskúp nyílásszöge, ha felszínük aránya 8 : 5?

4386 Egy egyenes körkúp felszíne 634,86 cm^2, tengelymetszetének területe 90 cm^2. Mekkora a térfogata?

4387 Bakelitből készült egyenes körkúp alakú belül üreges test falvastagsága mindenütt 3 cm. A kúp 40 cm magas, és az alapkörének sugara 30 cm.

a) Mekkora a test tömege, ha a bakelit sűrűsége 1,3 $\frac{kg}{dm^3}$?

b) Milyen mélyen merül el a vízben, ha csúcsával lefelé fordítjuk?

4388 Adott egy 20 cm sugarú bádog körlap, amelyből tölcsért kell készítenünk. Mekkora középponti szögű körcikket kell kivágnunk ahhoz, hogy ezt egy kúp palástjává összehajtva, a kúp térfogata a legnagyobb legyen?

A csonka gúla és a csonka kúp

4389 Egy négyzet alapú csonka gúla alapéle 20 cm, fedőlapjának éle 15 cm, magassága 30 cm. Mekkora a csonka gúla térfogata?

4390 Egy szabályos háromszög alapú csonka gúla alapéle 18 cm, fedőlapjának éle 12 cm, magassága 10 cm. Mekkora a csonka gúla térfogata?

4391 Egy csonka gúla fedőlapjának területe 50 cm^2, az alaplap területe 1250 cm^2. Mekkora a magassága, ha a térfogata 15 500 cm^3?

4392 Egy tartály lefelé keskenyedő csonka gúla alakú. Felső lapja téglalap, amelynek oldalai 18 dm és 20 dm hosszúak, az alsó élek hossza 9 dm és 10 dm. Hány liter folyadék fér bele, ha mélysége 1 m?

4393 Egy vászonnal bevont lámpabura szabályos hatoldalú csonka gúla palástja. Hány cm^2 vászon szükséges a bura elkészítéséhez, ha az alapél és oldalél 20 cm, a fedőlap éle 15 cm hosszú?

4394 Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla felszíne 905 cm^2. Az alapél 10 cm, a fedőlap éle 5 cm. Mekkora a csonka gúla

a) egy oldallapjának a magassága; *b)* oldaléle?

4395 Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla alapéle 10 cm, térfogata 584 cm^3. Mekkora a fedőlap éle, ha a csonka gúla magassága 8 cm?

4396 A fez csonka kúp formájú fejfedő, amelyen általában bojt lóg. Milyen magas az a fez, amelynek az alsó nyílása 52 cm, a teteje 28 cm kerületű kör, és a csonka kúp alkotója 25 cm?



4397 Egy egyenes csonka kúp alapkörének sugara 10 cm, fedőlapjának sugara 7 cm, magassága 12 cm. Mekkora a csonka kúp

a) alkotója; *b)* felszíne; *c)* térfogata?

4398 Egy egyenes csonka kúp alapkörének sugara 15 cm, alkotója 10 cm, magassága 8 cm. Mekkora a csonka kúp

a) fedőlapjának sugara; *b)* felszíne; *c)* térfogata?

4399 Egy egyenes csonka kúp alapkörének sugara 20 cm, fedőlapjának sugara 7 cm, térfogata 6168 cm^3. Mekkora a csonka kúp

a) magassága; *b)* alkotója; *c)* felszíne?

4400 Egy egyenes csonka körkúp 20 cm hosszú alkotója az alaplappal 60°-os szöget zár be. Az alaplap sugara 30 cm. Mekkora a csonka kúp

a) felszíne; *b)* térfogata?

4401 Egy húrtrapéz alapjai 10 cm és 6 cm, szárai 8 cm hosszúak. A húrtrapézt megforgatjuk a szimmetriatengelye körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

4402 Egy egyenes csonka kúp alapkörének sugara 23 cm, fedőlapjának sugara 17 cm, felszíne pedig 4454,78 cm^2. Mekkora a csonka kúp

a) alkotója; *b)* magassága; *c)* térfogata?

4403 Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla alapéle 12 cm, a fedőlap éle 6 cm, a testmagassága 8 cm. Mekkora a csonka gúla

a) oldallapjának a magassága;

b) oldaléle;

c) oldallapjának és alaplapjának a hajlásszöge;

d) térfogata;

e) felszíne?

4404 Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla alapéle 12 cm, a fedőlap éle 4 cm, oldaléle 15 cm. Mekkora a csonka gúla

a) oldallapjának a magassága;

b) testmagassága;

c) oldalélének és az alaplapjának a hajlásszöge;

d) térfogata;

e) felszíne?

4405 Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla felszíne 1264 cm^2. Az alapél 18 cm, a fedőlap éle 10 cm hosszú. Mekkora a csonka gúla térfogata?

4406 Egy szabályos négyzet alapú csonka gúla alapterülete 36 cm^2, fedőlapja feleakkora területű. Mekkora egy oldallapjának területe, ha térfogata 180 cm^3?

4407 Egy szabályos négyzet alapú csonka gúla fedőlapjának területe az alaplap területének negyede. A palást területe a fedőlap területének ötszöröse. Mekkora a csonka gúla térfogata, ha az alapéle 20 cm?

4408 Virágtartó edényünk lefelé keskenyedő szabályos négyzet alapú csonka gúla. Az aljának az éle 14 cm, felső éle 20 cm. Hány liter virágföld van benne, ha a 20 centiméteres magasságának feléig töltjük meg?

4409 Egy egyenes csonka kúp alakú bádogvödör alapkörének átmérője 20 cm, felső körének átmérője 26 cm, magassága 36 cm.

a) Hány liter víz fér bele? (Az eredményt egészre kerekítve adjuk meg.)

b) Mennyi bádog kell 1000 vödör elkészítéséhez, ha az összeállítás során 18% hulladék termelődik?

4410 Egy egyenes csonka kúp alapkörének sugara 12 cm, alkotója 10 cm, felszíne 1130,97 cm^2. Mekkora a csonka kúp

a) fedőlapjának a sugara; *b)* térfogata?

4411 Egy csonka kúp palástja olyan körgyűrűcikk, amelyet egy 15 cm és egy 30 cm sugarú körív határol, és középponti szöge 150°. Mekkora a csonka kúp

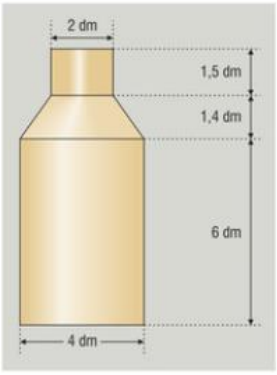
a) felszíne; *b)* térfogata?

4412 Egy 6 dm magas egyenes csonka kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal magasságának felénél két részre vágunk. Mekkora az így levágott felső csonka kúp felszíne és térfogata, ha az eredeti csonka kúp alapkörének sugara 30 cm, és a fedőlap sugara 20 cm?

4413 A mellékelt ábrán egy mézesbödön oldalnézetét láthatjuk.

a) Hány kilogramm méz fér bele, ha a méz szintje legfeljebb a perem alatt 2 centiméterre lehet, és a méz sűrűsége 1,4 $\frac{kg}{dm^3}$?

b) Adjuk meg, hogy mennyi bádog kell a bödön elkészítéséhez, ha az összeállításakor az illesztések miatt 8% anyagtöbblettel kell számolni.



4414 Egy gúlát az alaplapjával párhuzamos síkkal úgy vágunk ketté, hogy a keletkezett csonka gúla térfogata 1000π cm^3. Milyen magas ez a csonka gúla, ha az eredeti gúla magassága 40 cm, az alaplap területe pedig 300π cm^2?

4415 Egy vízgyűjtő medence lefelé keskenyedő szabályos hatoldalú csonka gúla alakú. Mélysége 6 m, az alapéle 9 m, a fedőlap éle 12 m. Mennyi víz van benne, ha magasságának

a) harmadáig; *b)* kétharmadáig van benne víz?

4416 Egy egyenes csonka gúla alaplapja $ABCD$, fedőlapja $A'B'C'D'$ négyzet. Két szemben lévő AA' és CC' oldalélén áthaladó síkmetszetének területe a palástja területének harmada, valamint az AC' testátló merőleges az $A'C$ testátlóra.

a) Mekkora a csonka gúla alaplapjának és az oldallapjának a hajlásszöge?

b) Mekkora a csonka gúla térfogata, ha magassága 30 cm?

4417 Egy szabályos háromszög alapú csonka gúla formájú levélnehezék bronzból készült. Egy oldallapjának területe az alaplap és fedőlap területének mértani közepe. Az alaplap éle 10 cm, a fedőlap éle 8 cm.

a) Mekkora a levélnehezék oldallapjának a magassága?

b) Mekkora a levélnehezék tömege, ha a bronz sűrűsége $8\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$?

4418 Egy csonka kúpszerű testet az alaplappal párhuzamosan, a két alaplaptól egyenlő távolságra egy síkkal elmetszünk. Bizonyítsuk be, hogy a kimetszett síkidom területe a két alapterület számtani és mértani közepének a számtani közepe.

4419 Egy csonka kúp alaplapjának, illetve fedőlapjának a sugara R, illetve r. A csonka kúpot egy, az alaplappal párhuzamos síkkal két egyenlő térfogatú részre vágjuk. Mekkora az így keletkezett síkmetszet sugara?

4420 Egy egyenes csonka kúp alaplapjának, illetve fedőlapjának a sugara R, illetve r. A csonka kúpot egy, az alaplappal párhuzamos síkkal két részre vágjuk úgy, hogy az a palást területét felezze. Mekkora az így keletkezett síkmetszet sugara?

4421 A háziasszony egy üvegtálba két liter tejet öntött. A tál egyenes csonka kúp alakú, amely 9 cm magas, alapkörének átmérője 20 cm, fedőkörének átmérője 30 cm. Milyen magasan áll a tej az üvegtálban? (Az edény falvastagságát hanyagoljuk el.)

A gömb térfogata és felszíne

4422 Otto Guericke 1657-ben mutatta be világhíres kísérletét, amellyel bizonyította a vákuum erejét. Ebben két egymáshoz illesztett 35 cm átmérőjű félgömbből kiszivattyúzta a levegőt (magdeburgi féltekék). A félgömböket 12 lóval is alig bírta széthúzatni. Mekkora a két félgömbből álló gömb térfogata? (➡)



4423 Mekkora a gömb felszíne, ha térfogata

a) $200\ \text{cm}^3$; *b)* $1400\ \text{cm}^3$?

4424 Mekkora a gömb térfogata, ha felszíne

a) $1200\ \text{cm}^2$; *b)* $630\ \text{cm}^2$?

4425 Egy gömb sugarát háromszorosára növeltük. Hányszorosára nőtt a

a) felszíne; *b)* térfogata?

4426 Hány négyzetméter polimerizált szövetből készült az az ejtőernyő, amelyik 6 m sugarú félgömb alakú, és a felhasznált anyag 20%-a veszteség?

4427 Egy 8 cm sugarú ólomgömbből három egyenlő sugarú gömböt öntöttünk. Hányszorosa a három gömb felszínének az összege az eredeti gömb felszínének?

4428 Pisti zsebében 4 darab 2 cm átmérőjű, Zoli zsebében 2 darab 4 cm átmérőjű üveggolyó van. Kinek a zsebét húzza le jobban a benne levő üveggolyó? (A golyók sűrűsége ugyanakkora.)

4429 Egy középkori ágyúgolyó átmérője a korrózió miatt 2%-kal csökkent. Hány cm^3-rel csökkent az ágyúgolyó térfogata, ha most a sugara 6,8 cm?

4430 Jelenleg a Föld felszínének harmada szárazföld. Hány km^2 az óceánok, tengerek területe? (A Földet tekintsük gömb alakúnak, és vegyük a sugarát 6378 km-nek.)

4431 Hány kilométert utazunk akkor, ha a Föld Ráktérítőjén haladva 2 hosszúsági fokot teszünk meg? (A Ráktérítő a 23°26'22" szélességi kör, és a Föld sugara 6378 km.)

4432 A Vénusz bolygó felszíne a Föld felszínének 0,9-szerese.

a) Mekkora a Vénusz sugara?

b) Hányszorosa a Föld térfogatának a Vénusz térfogata?

(A Föld sugara 6378 km, és mindkét bolygót tekintsük gömbnek.)

4433 Egy víztartály alul félgömbben végződő 5 m átmérőjű henger. Milyen magas a hengeres rész, ha a tartályba 100 m^3 víz fér?

4434 Mekkora annak a hidroglóbusznak a belső átmérője, amely 1 hétig képes biztosítani napi 50 m^3 vízmennyiséget?



4435 Milyen távolságra halad a 26 cm sugarú gömb középpontjától az a sík, amelyiknek a gömbbel való síkmetszete 100π cm^2 területű?

4436 Egy gömböt a középpontjától 4 centiméterre haladó síkkal elmetszettünk. Mekkora a gömb térfogata és a felszíne, ha a síkmetszet területe

a) 9π cm^2; *b)* 3421 cm^2?

4437 Két gömb felszínének összege 2060,88 cm^2, sugaraik különbsége 2 cm. Mekkora a két gömb sugara?

4438 Két gömb térfogatának különbsége 4255,81 cm^3, sugaraik különbsége 2 cm. Mekkora a két gömb sugara?

4439 Egy fából készült téglatest éleinek hossza 8 cm, 10 cm és 12 cm. A téglatest csúcsai körül szerkesztünk egy-egy 3 cm sugarú gömböt, majd a gömböknek a téglatestbe eső részeit a téglatestből kiesztergáljuk. Mekkora a megmaradt test térfogata?

4440 Milyen távolságra van az 1000 cm^3 térfogatú gömb középpontjától az a sík, amelyik a gömbből feleakkora területű kört metsz ki, mint amekkora a gömb főkörének területe?

4441 Adjuk meg a tér azon pontjainak halmazát, amelyekből egy 10 cm sugarú gömbhöz húzott érintőszakaszoknak a hossza is 10 cm.

4442 Adott két koncentrikus gömb. Vegyük a kisebbik gömbnek egy érintősíkját, ez a nagyobbikat egy körben metszi. Bizonyítsuk be, hogy annak a gömbnek a felszíne, amelynek főköre ez a kör, egyenlő a másik két gömb felszínének a különbségével.

4443 Egy alumíniumból készült üreges gömb külső átmérője 10 cm, falvastagsága 6 mm.

a) Mekkora az üreges gömb tömege, ha az alumínium sűrűsége 2,7 $\frac{kg}{dm^3}$?

b) Hány százalékkal nagyobb a külső gömbfelszín, mint a belső?

4444 Egy tekegolyó 1,4 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ sűrűségű műanyagból készült. Hányszor fordul meg az egyenes vonalban guruló tekegolyó a 16,5 m hosszú pályán, ha tömege 2,8 kg?

4445 Gömb alakú szilvás gombócokat készítünk, amelyek átmérője 4 cm. Közülük 20 darabot egy olyan fazékban szeretnénk megfőzni, amelynek átmérője 20 cm és magassága 28 cm. Milyen magasan töltsük meg a fazekat vízzel, ha azt akarjuk, hogy miután beletettük a gombócokat a vízbe, a víz a fazék felső peremétől számítva 4 cm magasan álljon benne? (A gombócokat ellepi a víz.)

4446 Mekkora a gömb térfogata, ha két egymástól 17 centiméterre lévő párhuzamos körmetszetének sugara 5 cm és 12 cm?

4447 Egy csapágy külső gyűrűjének belső átmérője 54 mm.

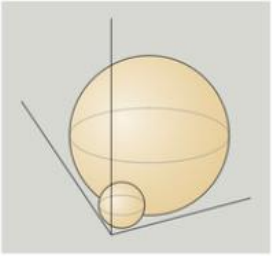
a) Legfeljebb hány darab 5 mm átmérőjű csapágygolyót lehet elhelyezni a csapágyba?

b) Adjuk meg a csapágyba elhelyezhető 5 mm átmérőjű csapágygolyók tömegének az összegét, ha azokat olyan fémből készítették, amelynek sűrűsége 7,14 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.



4448 Egy asztallapra 3 biliárdgolyót helyeztünk el úgy, hogy azok páronként érintsék egymást, majd ezek tetejére egy negyediket tettünk úgy, hogy az az előző három mindegyikét érintse. Milyen magas az így létjött „gúla”, ha a biliárdgolyó átmérője 52,4 mm?

4449 Az asztalfiók egyik sarkában egy 7 cm átmérőjű teniszlabda áll, amely érinti a fiók oldalfalait. Mekkora annak a golyónak a sugara, amelyik a teniszlabda és a fiók sarka között van, és érinti a teniszlabdát és a fiók oldalfalait is?



Egymásba írt testek (kiegészítő anyag)

4450 Egy gömb köré írt kocka térfogata 1728 cm^3. Mekkora a gömb

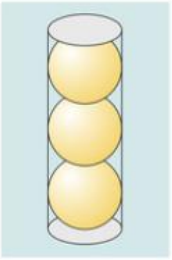
a) felszíne; *b)* térfogata?

4451 Egy gömbbe írt kocka felszíne 864 cm^2. Mekkora a gömb

a) felszíne; *b)* térfogata?

4452 Egy téglatest köré 30 cm sugarú gömb írható. Mekkorák a téglatest élei, ha az élek hosszának aránya 2 : 3 : 4?

4453 Egy négyzetes oszlop köré írt gömb sugara 40 cm. Mekkora a négyzetes oszlop térfogata, ha az alapél és a magasság hosszának aránya 2 : 3?



4454 Három darab 4 cm átmérőjű gömb alakú karácsonyfadíszt henger alakú műanyag dobozba csomagolnak az ábrán látható módon. Mekkora a doboz palástjának a területe?

4455 Egy 8 cm átmérőjű 15 cm magasságú egyenes körhenger alakú gyertyát téglatest alakú papírdobozba csomagolnak. A gyertya alja és teteje illeszkedik a téglatest két szemben lévő lapjára, és palástja érinti a téglatest egy-egy oldallapját. Hány cm^2 a doboz felszíne?

4456 Egy 20 cm élű kockába olyan körkúpot írunk, amelynek kör alaplapja illeszkedik a kocka egyik lapjára, és érinti annak oldalait. Mekkora a körkúp

a) felszíne; *b)* térfogata,

ha a kúp csúcsa a kocka szemben lévő lapjának középpontja?

4457 Egy négyzetes oszlop alapéle 24 cm, magassága 10 cm. A négyzetes oszlopba egy olyan négyzet alapú gúlát írunk, amelynek alaplapja a négyzetes oszlop alaplapja, a szemben lévő csúcsa pedig a négyzetes oszlop fedőlapjának egyik csúcsa. Mekkora a gúla

a) felszíne; *b)* térfogata?

4458 Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 10 cm, magassága 12 cm. Mekkora a belőle csiszolható legnagyobb térfogatú körkúp

a) felszíne; *b)* térfogata?

4459 Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasábba gömb írható. Mekkora a hasáb magassága, ha alapéle 24 cm?

4460 Hogyan aránylik egymáshoz annak a három gömbnek a

a) felszíne; *b)* térfogata,

amelyek közül az elsőt egy a élű kockába, a másodikat a kocka köré írjuk, a harmadik pedig érinti a kocka éleit?

4461 Egy téglatest köré $5\sqrt{2}$ cm sugarú gömb írható. Mekkora a téglatest térfogata, ha két oldallapjának területe 48 cm^2 és 60 cm^2?

4462 Egy szabályos hatszög alapú gúla alapéle 15 cm, oldaléle 20 cm. Lehető legnagyobb térfogatú kúpot akarunk belőle esztergálni. Hány százalék a hulladék?

4463 Egy szabályos négyzet alapú gúla magassága 30 cm, alapéle 12 cm.

a) Mekkora a gúlába írható gömb sugara?

b) Mekkora a gúla köré írt gömb sugara?

4464 Egy szabályos négyzet alapú gúla magassága 30 cm, az alaplap és az oldallap bezárt szöge 60°.

a) Mekkora a gúlába írható gömb sugara?

b) Mekkora a gúla köré írt gömb sugara?

4465 Egy szabályos négyzet alapú gúla magassága 32 cm, a gúla lapjait érintő gömb sugara 8 cm. Mekkora a gúla térfogata?

4466 Egy szabályos háromszög alapú gúla magassága 20 cm, alapéle 18 cm.

a) Mekkora a gúlába írható gömb sugara?

b) Mekkora a gúla köré írt gömb sugara?



4467 Egy háromszög alapú $ABCD$ gúla alaplapja olyan ABC derékszögű háromszög, melynek befogói $AC = BC = 12$ cm hosszúak. A gúla DC éle merőleges az alaplapra, és 10 cm hosszú. Mekkora a gúlába írható gömb sugara?

4468 Egy szabályos négyzet alapú gúla alapéle 15 cm, magassága 10 cm.

a) Mekkora a gúla oldalélének az alaplappal bezárt szöge?

b) A gúlába olyan kockát helyezünk el, amelynek egyik lapja a gúla alaplapjára, négy csúcsa pedig a gúla egy-egy oldalélére illeszkedik. Mekkora ennek a kockának az éle?

4469 Egy 10 cm sugarú gömbbe olyan hengert írunk, amelynek alapköre és fedőköre illeszkedik a gömb felszínére. Mekkora a henger térfogata, ha palástjának területe kétszerese az alaplap területének?

4470 Egy gömbbe olyan egyenes körkúpot írtunk, amelynek nyílásszöge 50°. A gömb felszíne 400π cm^2.

a) Hány cm^2 a kúp felszíne?

b) Mekkora területű kört metsz ki a kúpból a gömb középpontján átmenő, a kúp alaplapjával párhuzamos sík?

4471 Egy vágódeszkán lévő téglatest alakú sajt alaplapjának élei 8 cm és 10 cm. Legfeljebb mekkora a sajt magassága, ha lefedhető egy 30 cm belső átmérőjű félgömb alakú üvegfedővel úgy, hogy annak főköre illeszkedik a vágódeszka síkjára?

4472 Egy asztalon álló vasgolyót megvilágítunk egy, a golyó középpontja fölött az asztallaptól 24 cm-re levő pontszerű fényforrással. A golyó árnyéka egy 10 cm sugarú kör. Határozzuk meg a golyó átmérőjét.

4473 Egy egyenes csonka kúpba ρ sugarú gömb írható úgy, hogy a gömb érinti a csonka kúp alap- és fedőkörét, továbbá egy körben a palástját is. Mekkora a csonka kúp felszínének és térfogatának hányadosa?

4474 Pisti homokozó vödre csonka kúp alakú. A vödörbe beletette a 12 cm átmérőjű labdáját, amely érinti a vödör alját, és egy körben a vödör oldalát is. Mekkora a vödör magassága, ha a vödör aljának az átmérője 10 cm, a felső nyílásának az átmérője 16 cm?

4475 Egy forgáskúp felszíne kétszer akkora, mint a beírt gömb felszíne. Mekkora a kúp nyílásszöge?

4476 Egy forgáskúpba írt gömb térfogata harmada a kúp térfogatának. Hanyadrésze a gömb felszíne a kúp felszínének?

4477 Egy talpas koktélospohár felső része olyan forgáskúp, amelynek magassága 12 cm, alkotója 13 cm. A pohárban 7,5 cm magasan áll a koktél, amikor beleteszünk egy 2 cm átmérőjű gömb alakú ringlószilvát. Mennyivel emelkedik meg a pohárban a koktél szintje?

4478 Számítsuk ki egy 30 cm oldalélű oktaéder

a) oldallapjait érintő;

b) csúcsain áthaladó gömb sugarát.

Vegyes feladatok I.

4479 A $3\times3\times3$-as bűvös kockánk leesett, és minden csúcsánál kiesett belőle egy-egy $1\times1\times1$-es kis kocka. Számoljuk meg, hogy hány csúcsa, éle, lapja van a bűvös kockából visszamaradó testnek.

4480 Egy gúla alaplapja szabályos hatszög, amelynek oldalai 3 cm hosszúak. A gúla magasságának felezőpontján keresztül az alaplappal párhuzamos síkot fektetünk. Mekkora területű síkidomban metszi a sík a gúlát?

4481 Számítsuk ki a T területű háromszög szögeit és ismeretlen oldalának hosszát, ha a szokásos jelöléseket használva

a) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm és $T = 12$ cm^2;

b) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm és $T = 6$ cm^2.

4482 Mekkora szöget zárhat be egymással annak a paralelogrammának a két szomszédos oldala, amelynek területe 100 cm^2, két oldalának hossza pedig

a) $a = 10$ cm és $b = 10$ cm;

b) $a = 10$ cm és $b = 50$ cm?

4483 Mekkora a körgyűrűcikk szélessége és középponti szöge, ha területe 45 cm^2, határoló köríveinek hossza 14 cm, továbbá kisebb körívének sugara 7 cm?

4484 Egy kartonból kivágott háromszög oldalai 13 cm, 14 cm, illetve 15 cm.

a) Számítsuk ki a háromszög területét.

b) Mekkora a területe annak a legkisebb kör alakú kartonlapnak, amelyből a háromszöget kivághattuk?

c) Mekkora a háromszögből kivágható legnagyobb kör területe?

4485 Az $ABCD$ négyszög oldalai $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 5$ cm és $DA = 3$ cm, a négyszög AC átlójának hossza $2\sqrt{13}$ cm.

a) Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét.

b) Van-e olyan kör, amelyre a négyszög mind a négy csúcsa illeszkedik?

c) Mekkora a területe a legkisebb olyan körnek, amellyel a négyszöget teljes egészében le lehet fedni?

d) Igaz-e, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz?

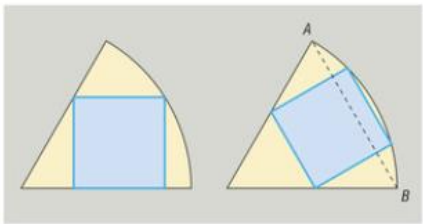
4486 Egy kör alakú futópálya mind a négy futósávja 1 méter széles. Egy-egy futósáv hosszát a középkörének hosszával adjuk meg. A legbelső futósáv hossza 400 méter.

a) Hány méter hosszú a futópálya többi futósávja? Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

b) Hány m^2 salak borítja az egyes futósávokat?

4487 Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes egy háromszöget két olyan részre bont, amelyeknek területe és kerülete is megegyezik, akkor az egyenesnek van olyan pontja, amely a háromszög oldalaitól ugyanakkora távolságra található.

4488 Egy 60°-os középponti szöggel rendelkező 12 cm sugarú körcikkbe kétféleképpen írunk négyzetet. Melyik esetben lesz nagyobb a négyzet területe? (A második ábrán a négyzet két oldala párhuzamos az AB szakasszal.)



4489 Egy fából készült tömör kocka éleinek centiméterben mért hossza egész szám. A kockát a lapjaival párhuzamos vágások mentén felbonthatjuk egy szintén egész hosszúságú élekkel rendelkező, valamint további 152 darab 1 cm élű kockára. Mekkora lehet az eredeti kocka éle?

Vegyes feladatok II.

4490 Egy téglatest alapélei 24 cm és 10 cm hosszúak. Mekkora a téglatest

a) felszíne; *b)* térfogata,

ha az alaplapra merőleges átlósíkja négyzetet metsz ki belőle?

4491 Egy négyzetes hasáb testátlója 22 cm, és az alaplappal 50°-os szöget zár be. Mekkora a hasáb térfogata?

4492 Egy sátortetős ház alapja 12 m oldalú négyzet. A padlástér szabályos négyoldalú gúla alakú, és térfogata 384 légköbméter. Mekkora a padlástér legnagyobb magassága?

4493 Hollandiában 2002-ben elkészítették a világ legnagyobb, 562 kg tömegű sajtját. A kolosszus henger alakú volt, amelynek magassága 60 cm, és az átmérője 1 m. Az elkészítéshez 4000 liter tejet használtak fel.

a) Hány darab szokásos méretű (6 cm magas 13 cm átmérőjű) sajt készülhetett volna belőle?

b) Mennyi tejből készül egy ilyen minőségű 1,4 kg tömegű sajt?

c) Michael Phelps többszörös olimpiai bajnok úszó napi kalóriaszükséglete 12 ezer kilokalória. Hány napra lenne elegendő neki ez a rekord méretű sajt, ha 10 dkg 390 kcal?

4494 A hangyaleső lárvái a homokba tölcsért készítenek, és ott lesnek hangyákra és más kisebb rovarokra. Egy 10 mm hosszú lárva negyedóra alatt 8 cm átmérőjű, 5 cm mély tölcsért ásott. Mekkora volt a megmozgatott homok térfogata?



4495 A gyulai Százéves Cukrászdában árult borbonbont tokaji aszúval töltik. Hány darabot készíthetnek 1 liter aszúból, ha egy-egy bonbon egyenes körkúp alakú, és a benne lévő ugyancsak körkúp alakú üreg magassága 7 cm, valamint az alapkör átmérője 1,5 cm?

4496 Egy derékszögű háromszög átfogója 13 cm, egyik befogója 12 cm. Megforgatjuk a háromszöget a rövidebb befogója körül. Mekkora az így keletkezett forgástest

a) felszíne; *b)* térfogata?

4497 Hány liter víz fér abba a csonka kúp alakú lavórba, amelynek magassága 20 cm, alapkörének átmérője 35 cm, a fedőkör átmérője 40 cm?

4498 50 darab 1,5 cm átmérőjű és 40 darab 0,8 cm átmérőjű csapágygolyót megolvasztunk, és az anyagukból két egyenlő sugarú golyót készítünk. Mekkora lesz az új golyók felületének az összege?

4499 Egy négyzetes oszlop térfogata 2880 cm^3. Mekkora a felszíne, ha a testátlója az alaplappal 49°41' szöget zár be?

4500 Ha egy átlagos testalkatú ember teljesen belemerül egy 1,5 m^2-nyi vízfelülettel rendelkező fürdőkádba, a vízszint 8 cm-t emelkedik. A Föld lakossága jelenleg 6,9 milliárd fő. Mennyivel emelkedne az 594 km^2 vízfelületű Balaton szintje, ha a Föld összes lakosa egyszerre (és teljesen) elmerülne vizében?

4501 Egy 11 mm belső átmérőjű csőbe két 5,5 mm külső átmérőjű UTP kábelt húztak.

a) Mekkora a tömege 20 m csőnek a két UTP kábellel együtt, ha a cső méterenként 0,5 dkg, és az UTP kábel sűrűsége $0{,}8\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$?

b) Legfeljebb mekkora külső átmérőjű kábel húzható még ebbe a csőbe?

4502 Egy kör keresztmetszetű csatorna átmérője 90 cm. Hány liter vizet vezet el a csatorna óránként, ha átmérőjének harmadáig van vízzel tele, és a víz folyásának sebessége $0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

4503 Legyen az ABC háromszög A csúcsánál levő szöge 90°. Az A csúcsban állítsunk merőlegest a háromszög síkjára, és ezen a merőlegesen vegyünk fel egy D pontot úgy, hogy $AD = 20$ cm legyen. Ha $AB = 15$ cm és $AC = 20$ cm hosszú, akkor mekkora az így keletkezett $ABCD$ tetraéder

a) térfogata; *b)* felszíne?

4504 Egy 2 méter magas egyenes gúla alaplapja 1 m sugarú kör köré írt szabályos ötszög. Mekkora a gúla

a) térfogata; *b)* palástjának területe?

4505 Egy 12 cm oldalú szabályos háromszöget megforgatunk egy olyan egyenes körül, amely átmegy a háromszög egyik csúcsán, és párhuzamos a szemközti oldal egyenesével. Mekkora a keletkezett forgástest

a) felszíne; *b)* térfogata?

4506 Adott egy csonka kúp alakú tejfölös doboz, amelynek alul az átmérője 6,5 cm, felül 8,5 cm, az alkotója pedig 12 cm. Mekkora a tejföl sűrűsége, ha a tele doboz 450 g tejfölt tartalmaz?

4507 Mekkora annak a forgáskúpnak a felszíne, amelyet egy 20 cm sugarú gömbbe írunk, és a kúp alkotója a gömb átmérőjének a $\frac{3}{4}$-e?

4508 Egy szabályos háromoldalú gúla 28 cm-es oldaléle az alaplappal 60°-os szöget zár be. Mekkora a gúla

a) felszíne; *b)* térfogata?

4509 Az asztalon egy egyenes körkúp alakú süvegcukor áll. Az alaplapja 12 cm átmérőjű kör, magassága 30 cm.

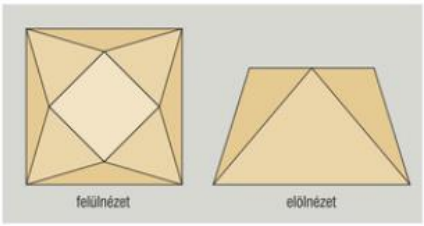
a) Egy légy a süvegcukor felületén haladva az alaplap kerületének L pontjából kiindulva a körkúpot megkerüli. Mekkora utat tesz meg, ha a lehető legrövidebb utat választja?

b) A kúp palástján levő P pontból induló hangya a palást felületén haladva a legrövidebb úton jut vissza a P pontba. Mekkora utat tesz meg, ha a P pont az alaplap síkjától 5 cm távolságra van?

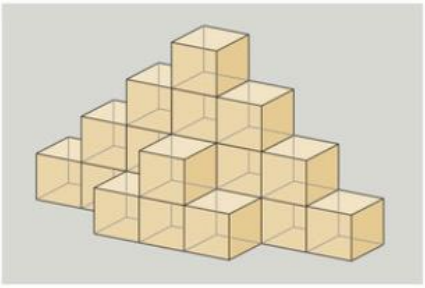
c) Találkozhat-e a hangya és a légy útjuk során a süvegcukor felületén?

4510 Egy szobor talapzata 1,5 dm magas. Az alaplapja 4 dm oldalú négyzet, a fedőlapja pedig 2 dm oldalú négyzet, amely az alaplaphoz képest 90°-kal van elforgatva. A talapzat felülnézete és elölnézete látható az ábrán.

Hány kilogramm tömegű a talapzat, ha $2{,}7\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ sűrűségű gránitból készítették?



4511 Egybevágó 1 cm élű kockákból a kockákat egymás mellé, illetve egymásra helyezve az alábbi minta szerint induló építményt készítünk.



A soron következő függőleges réteg mindig két kockányival magasabb az előzőnél, és az ábrának megfelelően lépcsőzetesen halad felfelé mindkét irányból egészen addig, amíg el nem éri a 12 kockányi magasságot. Ezután az előző szabályok szerint két kockányival csökkentve fejezzük be az építményt.

a) Hány kockából áll az építmény?

b) Hány cm^2 felületet kell lefestenünk, ha az építmény oldalait és tetejét szeretnénk befesteni?

c) Az építményben hány kockának nem lesz egy oldala sem festett?

12.4. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Geometriai valószínűség

4512 Egy számegyenesen kijelöltük a $J = [0; 10]$ intervallumot és annak $I = [2; 6]$ részhalmazát. Véletlenszerűen rádobunk egy pontot J-re.

a) Mekkora valószínűséggel esik a pont az I intervallumba?

b) Csökken-e a találat valószínűsége, ha I-t a nyitott $]2; 6[$ intervallumra cseréljük?

4513 Játsszuk párban a következő játékot. Mindkét játékos előtt van egy papírlap, amit a társa nem lát. A játékosok előre megegyeznek egy kiinduló intervallumban, amit jelöljön J. Az A játékos saját papírjára felír egy, a kiinduló intervallumba eső x valós számot, B pedig felírja az intervallum egy I részhalmazát. Ezután megmutatják a papírokat. Ha $x \in I$, akkor B nyert, ha $x \notin I$, akkor A. A következő fordulóban szerepet cserélnek. Az A játékos nyereménye annyi, ahány százaléka az I összhossza J-nek. B nyereménye a komplementer százaléka.

Például J alapintervallum legyen $[0; 5]$. Az A játékos megjelöli az $x = 4{,}5$ számot, B pedig az $I = [0; 3]$ intervallumot. Ekkor $x \notin I$, tehát A nyert. Mégpedig $\frac{|I|}{|J|} \cdot 100 = \frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$-nak megfelelő 60 pontot. Ha $x = 2$-t választotta volna, akkor B nyer $100 - 60 = 40$ pontot.

4514 Gizi és Géza a fenti játékot játsszák. Mekkora valószínűséggel nyer az intervallumot író, ha

a) $J = [1; 10]$ és $I = [1; 5]$; *b)* $J =]0; 8[$ és $I = [2; 7]$;

c) $J = [-3; 3[$ és $I = [-2; -1] \cup]1; 2[$?

4515 Péter és Pál is a fenti játékot játssza. Mekkora valószínűséggel nyer a számot író, ha $J = [1; 10]$, és az intervallumot író

a) az összes páratlan számmal kezdődő zárt egységnyi intervallum unióját felírja;

b) az összes prímszámmal kezdődő zárt egységnyi intervallum egyesítését felírja?

4516 A $J = [8; 15]$ intervallumon belül úgy szeretnénk kijelölni az I intervallumot, hogy ha véletlenül ráejtünk J-re egy pontot, akkor 0,7 valószínűséggel I-be essen. Adjunk meg ilyen I intervallumot.

4517 Menő Manó, a rajzfilmfigura a számegyenes $[0; 1]$ intervallumán barangol. Egyszer csak az ábrán látható dobbantó feldobja a levegőbe, miközben a másik oldalon eltűnik a vonal egy része. Most azon izgulunk, hogy a mi Manónk a lyukba esik-e. Mekkora ennek a valószínűsége, ha Menő Manó véletlenszerűen hullik vissza a $[0; 1]$ szakaszra?



4518 Táborozás alkalmával a ruhaszárító kötelet két, egymástól 12 méterre álló fához kötöttük. Mivel a kötél nagyon hosszú, egymástól azonos távolságra 5 darab Y alakú tartóoszlopot helyeztünk el. Az Y két felső szára 80 cm-re van egymástól, azokon rögzítve fut át a kötél. Arra lettünk figyelmesek, hogy egy kismadár reggelente véletlenszerűen rászáll valahol a kötélre, és csipkedni kezdi. Ha az Y két szára között csípi el a kötelet, az nem gond. Ám ha az oszlopok között, az már igen! Mekkora annak a valószínűsége, hogy ilyen részre száll a madár?



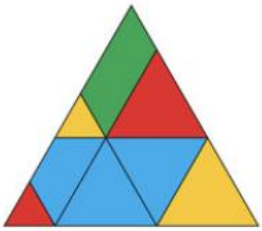


4519 Egy 5 cm × 15 cm-es fa téglalapból valahol kivágunk kettő, egymást nem fedő 3 cm oldalú négyzetet, és a „lyukas" téglalapot az ágyra tesszük. Magasról ráejtünk egy golyót a téglalapra. Mekkora valószínűséggel hallunk koppanást?

4520 A darts tábla 33,5 cm átmérőjű kör. A közepén levő nagyobb (általában zöld) kört *bullnak* nevezik, átmérője 3 cm. Az ebben levő kis piros kör a *bull's eye*, átmérője 1,5 cm. Dávid dartsozni tanul. Már eljutott arra a szintre, hogy a táblába biztosan dobja a nyilat, de azon belül még véletlenszerűen talál. Mekkora valószínűséggel dob

a) legalább bullt; *b)* bull's eye-t?

4521 Juliska egy ultramodern mézeskalács ház padlásterében lakik. A padlástérnek egyetlen szabályos háromszög formájú ablaka van, azon is csak a kékkel jelölt részt lehet kinyitni. Jancsi csúzlival próbál bejuttatni az ablakon egy Juliskának szánt üzenetet. Mekkora valószínűséggel fog kilőni színes üvegtáblát, ha az ablak épp nyitva van? (Jancsi az ablakot mindenképpen eltalálja. A kis háromszögek oldalai éppen feleakkorák, mint a nagyobbakéi.)



4522 A céltáblán minden sáv 2 cm széles, a középkör átmérője 4 cm. A legbelső kör 10 pontot ér, utána sorban kifelé 9, 8, 7, 6, 4, 2, 1 pontot érnek a sávok. A céltáblát biztosan eltaláljuk, de azon belül véletlenszerűen érünk el pontszámot. Mekkora valószínűséggel érünk el egy lövésből

a) 10; *b)* 9; *c)* 7; *d)* 4;

e) legalább 8; *f)* legfeljebb 4 pontot;

g) 8 és 4 pont között, beleértve a 8-at és a 4-et is?

h) Mekkora valószínűséggel érünk el két lövésből 15 pontot?



4523 A dartstábla 33,5 cm átmérőjű kör, amely 20 egybevágó körcikkre van osztva. A külső, 1 cm széles színes sáv a duplázó. A belső triplázó sáv ugyanolyan széles, külső széle 5 cm-re van a duplázó belső szélétől. (A zöld bull átmérője 3 cm.) Dávid már sokat gyakorolt, biztosan megdobja a 20-at. Azon belül azonban még véletlenszerűen talál. Mekkora valószínűséggel dob

a) dupla 20-at;

b) tripla 20-at;

c) két nyíllal 80 pontot,

ha csak a 20-as mezőbe érkeznek a dobónyilai?



4524 Hány százaléka legyen a céltábla sugarának a középső kör sugara, ha azt akarjuk, hogy a céltáblát érő véletlen találatok esetén a maximális pontszám valószínűsége 0,01 legyen?

4525 Mennyi a valószínűsége, hogy az $x^2 - 4x + c = 0$ egyenlet mindkét megoldása 1-nél nagyobb, ha c-t a $[-2; 4]$ intervallumból választjuk véletlenszerűen?

4526 Tekintsük az $A(-4; -3)$, $B(4; -3)$, $C(4; 3)$, $D(-4; 3)$ csúcsokkal adott téglalapot. Válasszunk véletlenszerűen egy $P(x; y)$ pontot az $ABCD$ téglalapból. Mennyi a valószínűsége, hogy ekkor a pont koordinátáira $|x| + |y| \leq 2$?

4527 Jancsi és Juliska összeköltöztek a mézeskalács házban. Mindketten 6^{30}-kor kelnek, és 7^{40}-ig be kell fejezniük a reggeli készülődést, hogy odaérjenek a munkahelyükre. Julisnak 30 perc, Jancsinak 10 perc a fürdőszobai elfoglaltsága. A ház finom, ám kicsi, két ember kényelmesen nem fér el a fürdőben. Mindketten véletlenszerűen mennek be, és mivel szemérmesek, nem örülnek, ha nem lehetnek egyedül. Mekkora valószínűséggel vesznek reggelente örömmel búcsút egymástól? (Mosdatlanul egyikük sem indul a munkába, és feltételezzük, hogy a fürdőn kívül teljes a béke közöttük.)

4528 Az $y = mx + c$ egyenletű egyenes m és c paramétereit a $[-2; 2]$ intervallumból választhatjuk meg véletlenszerűen. Mekkora a valószínűsége, hogy ekkor az $y = mx + c$ egyenes az x tengelyt a $[-3; 3]$ intervallumon kívül metszi?

4529 Károly bácsi és Irma néni konyhája nagyon pici. Ha Irma néni bemegy, Károly bácsinak ki kell jönnie. Irma néni a délelőtt folyamán (7^{00} és 12^{00} óra között, de véletlenszerűen) 2 folyamatos órát tölt el az ebéd elkészítésével, amiben Károly bácsi nem szeretné zavarni. Legfeljebb mennyi időt tölthet el Károly bácsi folyamatosan a konyhában, ha annak esélyét, hogy megzavarja az ebédfőzést

a) 50% alatt szeretné tartani?

b) a legkisebb mértékűnek szeretné tudni? Mennyi ez a minimális valószínűség?

Várható érték (emelt szintű tananyag)

4530 Egy játékban a négy lehetséges kimenetel valószínűsége rendre:

$$P(A) = 0{,}1; \quad P(B) = 0{,}2; \quad P(C) = 0{,}3; \quad P(D) = 0{,}4.$$

Az egyes A, B, C, D esetekben a játékos nyereménye $1, -2, 3, -4$ pont. Érdemes-e ebben a játékban részt venni?

4531 Egy játékban a négy lehetséges kimenetel valószínűsége rendre:

$$P(A) = 0{,}4; \quad P(B) = 0{,}3; \quad P(C) = 0{,}2; \quad P(D) = 0{,}1.$$

Az egyes A, B, C, D esetekben a játékos nyereménye $1, -2, 3, -4$ pont. Igazságos-e a játék?

4532 Határozzuk meg a kockadobás várható értékét.

4533 Egy játékban két játékos játszik egy hagyományos érmét feldobva. Ha fej, akkor A fizet B-nek 10 eurót, ha írás, akkor B fizet A-nak 8 eurót. Mennyi a várható nyeremény

a) A szempontjából; *b)* B szempontjából?

4534 2010. február elején egy ötöslottó-szelvény ára 225 Ft volt. Az ötödik héten 1145 Ft-ot fizettek ki a kettesekre, 17 690 Ft-ot a hármasokra, 2 127 600 Ft-ot a négyesekre, és 675 millió volt a főnyeremény. Megérte ezen a héten lottózni?

4535 Egy szerencsekeréken a következő „nyeremények" találhatók: nullázó, negyedelő, felező, –1000, 1000, 2000, 3000, duplázó. A játékosnak a játék kezdetekor 2000 pontja van. (A játék során nullánál kevesebb pontja nem lehet a játékosnak.)



a) Maximum hány pontja lehet 3 pörgetés után a játékosnak?

b) Az első pörgetés után hány pontra számíthat a játékos?

c) Mennyi a játékos pontszámának várható értéke a pörgetés után, ha előtte lenullázta magát?

d) Hány pontra számíthat a pörgetés után a játékos, ha 10 000 ponton áll?



4536 Dani a diáknapra egy egyszerű játékot talált ki. A játékos dob egyet a hagyományos kockával. Ha ötöst vagy hatost dob, akkor Dani fizet neki 6 játékeurót. Mennyiért árulja Dani a játékot, ha csak a játék kedvéért csinálja (hosszú távon nem akar sem veszteséget, sem nyereséget)?

4537 Balázs, látva Dani játékának sikerét, jövőre egy másik, hasonló játékot akar szervezni a diáknapra. Danihoz hasonlóan 2 játékeuróért fogja árulni a játékot, amin 6 eurót lehet nyerni. Balázs szeretné, ha játékonként átlagosan 1 játékeuró nyereséget hozna neki a játék. Adjunk neki ötletet, hogyan alakítsa ki a szabályokat: melyik dobott számokra fizessen nyereményt és melyekre ne?

4538 Egy edzőnek kétféle labdarúgó áll a rendelkezésére: tapasztalt és rutintalan játékosok. Közülük kell összeválogatnia 10 főt a csapatba. Biztosra veszi, hogy a meccs végén tizenegyesrúgások lesznek és azt is, hogy minden játékosára szüksége lesz. A tapasztalt játékosok az esetek 80%-ában rúgják be a büntetőket, míg a fiatalok csupán minden negyediket értékesítik. Legalább hány rutinos játékos legyen a csapatban, ha az edző azt szeretné, hogy tíz büntetőből ötnél többet rúgjanak majd be várhatóan a játékosok?

4539 Egy játékban a négy lehetséges kimenetel valószínűsége:

$$p_1 = 0{,}4; \quad p_2 = 0{,}3; \quad p_3 = 0{,}2; \quad p_4 = 0{,}1.$$

A játékos nyereménye $1, -2, 3, -4$ pont lehet.

a) Hozzárendelhetjük-e úgy az egyes kimenetelekhez a nyereményeket, hogy a játékosnak megérje játszani ezt a játékot?

b) Mennyi lehet a legnagyobb várható nyeremény ebben a játékban?

4540 Egy nagy dobozban van 2 meggyes és 4 vaníliás krémtúró. Ha még beleteszünk 4 kekszes krémtúrót, akkor várhatóan hányadikra fogunk véletlenszerűen választva először vaníliás krémtúrót kivenni a dobozból

a) visszatevés nélkül; *b)* visszatevéssel?

A *b)* esetben az első 10 esetig felírva számítsuk ki a várható értéket.

4541 A szerencsekeréken a következő „nyeremények" találhatók: nullázó, negyedelő, felező, -1000, 1000, 2000, 3000, duplázó. (A játék során nullánál kevesebb pontja nem lehet a játékosnak. Ha 1000-nél kevesebb pontja van és -1000-t forgat ki, akkor 0-ról folytatja.)

a) Adjunk meg egy függvényt, amely az éppen aktuális pontszám függvényében megadja a sok játék átlagában tekintett, egy forgatás után elért várható pontszámot.

b) Mennyi az a pontérték, ami felett a játékszabályok miatt a forgatások után nagy átlagban várhatóan kevesebb pontja lesz a játékosnak? Elemezzük a kapott értéket.

Statisztika

4542 A 101 férőhelyes Ikarus 412-est helyi közlekedésre alkalmazzák a busztársaságok. Az egyik hét öt hétköznapján a maximális utaslétszámok így alakultak:

hétfőn 115 fő, kedden 98 fő, szerdán 107 fő, csütörtökön 85 fő, pénteken 70 fő.

Határozzuk meg a hétköznapok maximális utaslétszámainak számtani átlagát.

4543 Tornaórán a jelenlevő fiúk magasságai:

187, 188, 176, 180, 182, 169, 190, 177, 188 centiméter.

A csökkenő tornasorban legalább hányadik helyre kell állnia az egyetlen hiányzónak, ha tudjuk, hogy az összes fiú magasságainak átlaga kisebb, mint 182,2 cm?

4544 Határozzuk meg az alábbi minta mediánját és alsó-, felső kvartiliseit:

2, 6, 5, 2, 6, 8, 6, 6, 3, 4.

4545 Egy üzletlánc neve „1 €URÓS", mert sok terméket lehet kapni náluk 1 euróért. Egyik boltjukban az eladó összeírta nyitás után egy órával, melyik vevő hány darab 1 eurót adott addig neki:

2, 5, 3, 4, 2, 2, 3 darabot.

a) Mennyi bevétele van eddig a boltosnak, ha csak két vevőnek kellett fél-fél eurót visszaadnia?

b) Mi az egyszerre kapott 1 eurósok darabszámainak mediánja és alsó-, felső kvartilise?

4546 Dávid elég sokszor késik az első órákról. A tanárok felírták, mikor hány percet késett:

5, 7, 7, 3, 10, 2, 6, 5, 5, 7, 3, 5 percet.

Vajon legközelebb mennyit késik? Matektanára szerint a legvalószínűbb válasz a késések módusza. Mennyi ez a módusz?

4547 100 elhaladó autót megnézve felírjuk, hogy hány fő utazik a gépjárműben. Legalább hány alkalommal kell az egyes számot felírnunk, hogy a létrejövő minta

a) egyik módusza biztosan 1 legyen; *b)* egyetlen módusza az 1 legyen?

4548 A kördiagram egy osztályban a tavaly év végén szerzett érdemjegyek megoszlását mutatja; bukás nem volt.



Adjuk meg a kördiagram alapján a jegyek

a) móduszát; *b)* mediánját.

4549 Egyik télen egy kis lakásban havonta

54,7; 115,6; 120,1; 116,9 és 78,9 köbméter

gázt fűtöttek el. Mennyi a kapott értékek terjedelme?

4550 Fizikai kísérleteknél abszolút hibának nevezik a mért és a tényleges érték eltérését. Egy hosszméréskísérletben az abszolút hibák 2, 3, 4, 2 és 5 mm-nek adódtak. Ám nem tudjuk, hogy melyik hiba tért el pozitív és melyik negatív irányban a valós értéktől. Ezt figyelembe véve mennyi lehet az előjeles eltérések terjedelmének

a) maximuma; *b)* minimuma?

4551 Egy ötelemű mintáról tudjuk, hogy két módusza a 2 és a 4, mediánja 4 és terjedelme 7. Mi a minta ötödik eleme?

4552 Egy minta terjedelme, mediánja, számtani átlaga egyaránt 7, módusza pedig 4. Írjuk fel ezt az öt elemű mintát.

◆ ◆ ◆



Roland kosárlabdázó, csapatában hármas-négyes poszton játszik magas bedobót-centert.

Egy őszi szezon első 10 mérkőzésén a következő statisztikát érte el, minden oszlop egy mérkőzés adatait tartalmazza (forrás: ferfikosar.hu).

A következő kérdések (4553–4563. feladat) a statisztika egyes adataira vonatkoznak.



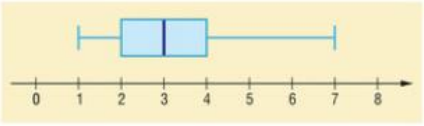
Mérkőzés	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Idő	18	27	29	31	40	30	23	22	35	36
Pt	10	9	27	24	21	20	11	12	21	24
2ZK	3	5	11	8	10	12	6	5	10	14
2KK	2	2	2	0	2	1	1	0	1	2
3PK	1	3	5	3	2	0	0	0	1	3
BDK	4	2	8	6	5	7	2	4	5	4
ÖL	7	3	7	7	10	7	4	1	9	9

Jelmagyarázat: **Idő:** pályán töltött idő (perc); **Pt:** dobott pontok; **2ZK:** zóna dobáskísérletek; **2KK:** középtávoli dobáskísérletek; **3PK:** távoli (hárompontos) dobáskísérletek; **BDK:** büntetődobás kísérletek; **ÖL:** összes lepattanó száma az adott mérkőzésen.

4553 Ábrázoljuk közös oszlopdiagramban az első hat mérkőzésen a közeli (2ZK), középtávoli (2KK) és távoli (3PK) dobáskísérletek számát!

4554 Ábrázoljuk kördiagrammal a harmadik mérkőzésen végrehajtott különböző dobáskísérletek (2ZK, 2KK, 3PK, BDK) számát.

4555 Az alábbi dobozdiagramon a tíz mérkőzésen dobott sikeres büntetődobások számát ábrázoltuk. Kiugró adat nincs az értékek között.



a) Olvassuk le a diagramról az adatok minimumát, maximumát, kvartiliseit, interkvartilis terjedelmét!

b) Értelmezzük a diagramot! Mire számíthatunk a játékostól ez alapján?

4556 Ábrázoljuk egymás mellett két sávdiagrammal az utolsó két mérkőzés közeli (2ZK), középtávoli (2KK), hárompontos (3PK) és büntetődobás (BDK) kísérletek számait. Mit állapíthatunk meg?

4557 *a)* Készítsünk egyenlő osztályközökkel egy három kategóriát tartalmazó gyakorisági táblázatot a mérkőzésenként dobott pontokból (Pt). A kategóriák neve legyen „Nagyon jó", „Jó", „Közepes". Tüntessük fel a táblázatban az osztályközöket is.

b) Számítsuk ki a dobott pontok átlagát a dobott pontszámokból.

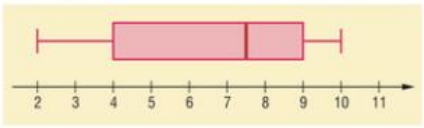
c) Számítsuk ki a dobott pontok átlagát a táblázat alapján, az osztályközepek segítségével.

d) Mekkora eltérést tapasztalunk a *c)* és a *b)* pontban kapott átlagok között? Mi okozza az eltérést?

4558 Készítsünk dobozdiagramot a tíz mérkőzésen megszerzett összes lepattanók (ÖL) számából!

4559 *a)* Ábrázoljuk a tíz mérkőzés közeli dobáskísérleteinek (2ZK) számát dobozdiagramon!

b) Hasonlítsuk össze a kapott diagramot az alábbi, sikeres közeli dobások számáról készült dobozdiagrammal! Milyen következtetést vonhatunk le belőlük és mit nem?





4560 Határozzuk meg a mérkőzésenként pályán töltött percek

a) A számtani közepét;

b) s szórását.

c) Tekintsük az $I =]A - s; A + s[$ intervallumot. Hány mérkőzésen esnek a pályán töltött percek az intervallumba?

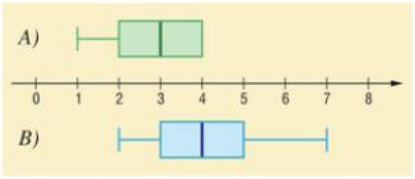
4561 Határozzuk meg a mérkőzésenként dobott pontok

a) Me-vel jelölt mediánját;

b) AE-vel jelölt abszolút átlagos eltérését.

c) Tekintsük az $I =]Me - AE; Me + AE[$ intervallumot. Hány mérkőzésen esnek a dobott pontok az intervallumba?

4562 *a)* A táblázatban nem szerepelnek külön a mérkőzésen megszerzett támadó és védőlepattanók számai, ezeket ábrázoltuk egy-egy dobozdiagramon. Döntsük el, melyik készült az ellenfél palánkja alatt megszerzett támadó-, és melyik a saját palánk alatt megszerzett védőlepattanók számából!



b) A *B)* diagramot 10 adatból rajzoltuk fel. Kilencet ismerünk: 3, 2, 4, 4, 6, 4, 2, 7, 5. Mi lehet a tizedik adat?

c) A *B)* diagramot 11 adatból rajzoltuk fel. Kilencet ismerünk: 3, 2, 5, 5, 6, 4, 2, 7, 5. Mi a hiányzó két adat, ha azt is tudjuk, hogy a mintának egy módusza van?

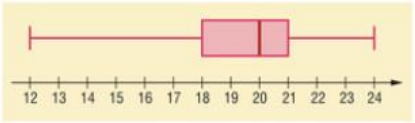
d) A *B)* diagramot 12 adatból rajzoltuk fel. Tudjuk, hogy a mintában nincs 5-ös érték. Hány különböző mintából készülhetett el a *B)* diagram?

Válaszainkat minden esetben indokoljuk is.

4563 *a)* Ábrázoljuk Roland táblázatban látható dobott pontjainak értékeit dobozdiagrammal!

b) A táblázat csak a bajnokság őszi idényének tíz mérkőzését mutatja.

A tavaszi tíz fordulóban a Roland által dobott pontokból készített dobozdiagram a következő:



Gondolkodjunk el, hogyan vélekedhet a játékos teljesítményéről a diagramok alapján a szurkoló és az edző!

c) Ennyi ismeret birtokában meg tudjuk határozni *az egész évre vonatkozó* Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 értékeket? Vázoljuk fel a lehetséges egész éves, dobott pontokat bemutató dobozdiagramokat!

4564 A középiskola vége felé járva egy osztály tanulói közül páran kiszámolták az utolsó két év végén megszerzett, továbbtanulásba számító pontjaikat:

76, 83, 80, 94, 88, 86, 92, 83.

a) Határozzuk meg a kapott pontok számtani átlagát. Adjuk meg egész pontra kerekítve.

b) Mennyi a pontok mediánja, módusza és terjedelme?

c) Készítsünk egy három kategóriát tartalmazó gyakorisági táblázatot.

d) Készítsünk oszlopdiagramot a gyakorisági táblázat alapján.



4565 Igazoljuk, hogy az A számtani átlag

a) $A + b$, ha minden adathoz hozzáadunk b valós számot;

b) $c \cdot A$, ha minden adatot c valós számmal szorzunk.

4566 Hogyan változik a módusz és a kvartilisek, ha a minta

a) minden eleméhez hozzáadunk egy valós b értéket;

b) minden elemét megszorozzuk egy valós c számmal?

4567 Hogyan változik egy minta terjedelme, abszolút átlagos eltérése és szórása, ha

a) a minta minden eleméhez ugyanazt a b valós számot adjuk;

b) a minta minden elemét ugyanazzal a c valós számmal szorozzuk?

4568 Tekintsük egy minta valamely gyakorisági táblázatból számított átlagának és közvetlenül a minta elemeiből számított átlagának eltérését. Mennyi lehet az eltérés maximuma, ha egyenlők az osztályközök?

4569 Bizonyítsuk be, hogy adott minta szórása a számtani középpel számítva minimális.

4570 Bizonyítsuk be, hogy adott minta átlagos abszolút eltérése a mediánnal számítva minimális.

Vegyes feladatok

4571 A $J =]-3; 7[$ intervallumra véletlenszerűen ejtünk egy Q pontot. Az 1 ponttól melyik irányba mérjük fel azt a nyitott I intervallumot, amelyre 0,5 valószínűséggel esik Q? Írjuk fel I-t.

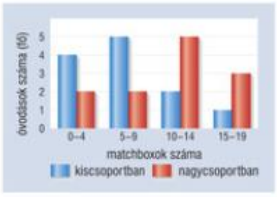
4572 Egy doboz teteje 15 cm × 35 cm-es téglalap, a rajta levő nyílás pedig 5 cm × 7 cm. Mekkora valószínűséggel találunk a nyílásba, ha a doboztetőt biztosan eltaláljuk?

4573 Egy energiatakarékos égőket gyártó cégnél úgy osztályozzák a minőségellenőrök a termékeket, hogy azok hány százaléka megy tönkre 1, 2, 3, 4 és 5 vagy több év alatt. Eredményeik a táblázatban láthatók.

Életkor	1	2	3	4	5 ≤
Összes %-a	2,00%	3,00%	24,00%	60,00%	11,00%

Mennyi egy véletlenszerűen kiválasztott termék várható élettartama?

4574 A diagramon azt látjuk, hogy egy kis létszámú óvodáscsoport tagjai hány matchboxszal rendelkeztek kis-, illetve nagycsoportos korukban. Válaszoljunk a kérdésekre.



a) Hány fő jár a csoportba?

b) Hány darab matchboxszal rendelkeztek átlagosan az óvodások kis-, illetve nagycsoportos korukban a diagramok alapján? (Az egyes kategóriákban osztályközepekkel számoljunk.)

4575 A gyakorisági táblázatból azt olvashatjuk ki, hogy a 40 pontos dolgozaton a 30 fős osztályból hány tanuló milyen eredménnyel szerepelt. (Nullapontos dolgozat nem volt.)

Érdemjegy	elégtelen	elégséges	közepes	jó	jeles
Pontszám	1–8	9–16	17–24	25–32	33–40
Gyakoriság	4	9	6	8	3

a) Meg tudjuk-e határozni a táblázat alapján az érdemjegyek móduszát, kvartiliseit?

b) Meg tudjuk-e határozni a táblázat alapján a pontszámok móduszát, mediánját?

c) Számítsuk ki a pontszámok A átlagát, s szórását és az $I =]A - s; A + s[$ intervallumot. (Számoljunk az osztályközepekkel.)

d) Adjuk meg a jegyek AE abszolút átlagos eltérését és az $I =]Me - AE; Me + AE[$ intervallumot.

4576 Mi tudjuk, hogy a múzeum padlóját egymástól 10 cm-re futó derékszögű infravörös (láthatatlan) lézerrács védi (ha valami a lézerfény útjába kerül, riaszt). A betörő csak sejti ezt, ezért próbaképpen az erkélyről a padlóra ejt egy 3 cm átmérőjű puha korongot. A korong leesik, és tompa puffanással a padlón marad. Vajon nagyobb valószínűséggel szólal meg a riasztó, mint marad a csend?

4577 Zsófi zenelejátszóján sokszor használja az EVL funkciót. (Az „egyes véletlen lejátszás"-t bekapcsolva, a lejátszó találomra lejátszik egy számot, majd alaphelyzetbe áll.) A lejátszóra Zsófi 18, testvére pedig 32 számot töltött fel. Az EVL funkciót hétszer használva, várhatóan hány olyan zeneszámot fog hallani Zsófi, amelyet ő maga töltött fel?



4578 *a)* Készítsünk a 4575. feladat táblázata alapján az érdemjegyekről oszlop-, sáv-, kör- és dobozdiagramot.

b) Melyik diagramról mi olvasható le?

c) Csak a kapott dobozdiagramot látva, mi lehet a legjobb, illetve legrosszabb átlag?

Készüljünk az érettségire!

Rendszerező összefoglalás
184

Gondolkodási módszerek
Algebra és számelmélet
Függvények
Geometria

Érettségi gyakorló feladatsorok
262



12.5. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – ÖSSZEFOGLALÁS

Halmazok

5001 Döntsük el, halmazok-e vagy sem a következők. Ha igen, adjuk meg az elemszámukat, illetve soroljuk fel elemeiket is, ahol lehetséges.

a) $A = \{7\text{-nél nagyobb, hatoldalú szabályos dobókockával dobott számok}\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0{,}5 < x < 0{,}6\}$;

c) $C = \{\{1; 2; 3; 4\}$ halmaz valódi részhalmazai, melyeknek részhalmaza $\{2; 3\}\}$;

d) $D = \{x \mid x \notin D\}$.

5002 *a)* Soroljuk fel az $A = \{a; b; c\}$ halmaz összes részhalmazát. Hány diszjunkt párt találunk közöttük?

b) Hány részhalmaza van a $B = \{16\text{-nál kisebb pozitív prímszámok}\}$ halmazának?

5003 Adott az $A = \{\text{egyjegyű pozitív prímek}\}$ és a $B = \{\text{páratlan egyjegyű pozitív egészek}\}$ halmaz.

a) Adjuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ halmazokat.

b) Mivel egyezik meg $\overline{A}$, illetve $\overline{B}$, ha az univerzum $U = A \cup B$?

c) Legyen az alaphalmaz $U = \{\text{egyjegyű pozitív egészek}\}$. Adjunk meg úgy egy $C \subseteq U$ halmazt, hogy a lehető legtöbb eleme legyen, és $B \cap C$ diszjunkt legyen A-val.

5004 Adott az $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 10\}$ alaphalmazban a következő két halmaz: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 4\}$ és $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3t$ valamely $t \in \mathbb{Z}$-re$\}$.

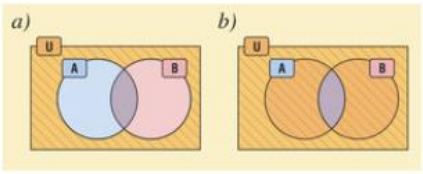
a) Ábrázoljuk U, A és B halmazt közös Venn-diagramon.

b) Adjuk meg $\overline{A}$ és $\overline{B}$ halmazokat.

c) Olvassuk le a diagramról, hogy milyen elemek alkotják az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ halmazokat.

5005 Ábrázoljuk Venn-diagrammal az $A \setminus \overline{B}$ halmazt (U, A, B nem üres halmazok). Adjuk meg másképp is a kapott eredményt.

5006 Írjuk le legalább kétféleképpen az alábbi Venn-diagramokon vonalkázással jelzett részeket. (➡)



5007 Szemléltessük Venn-diagrammal, hogy

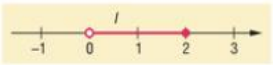
$$(B \cup C) \setminus (A \setminus (B \cap C)) =$$
$$= (B \setminus A) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

5008 A rock and roll klubban hat fő iszik bambit, nyolc pedig tvisztel. Hárman – ugyancsak elítélhető módon – bambival a kezükben tvisztelnek, tizenhárman pedig csak beszélgetnek. Hány vendég van éppen a rock and roll klubban? (A klubban csak bambi kapható.)

5009 Egy szobában 12 fő tartózkodik, közülük négy fő haja barna, öt fő szeme fekete. Van három fő, aki nem rendelkezik egyik tulajdonsággal sem. Hány barna hajú fekete szemű illető van itt?

5010 A 30 fős osztály röpdolgozatot írt matematikából. 15-en megoldották az első feladatot, öten mindkét feladatot, hét személy pedig csak a másodikat. A csoport létszámának hány százaléka nem tudott megbirkózni egyik kérdéssel sem?

5011 Adott az ábrán látható I intervallum. Határozzuk meg I komplementerét, ha



a) $U =]0, 5]$; *b)* $U =]-2, 2]$;

c) $U = [0, 7]$; *d)* $U = \mathbb{R}$.

5012 Ábrázoljuk számegyenesen az I, J, K halmazokat.

a) $I = [2, 4[$; *b)* $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 5 < 0\}$;

c) $K = \left\{ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-6}} \text{ függvény értelmezési tartománya} \right\}$.

Jelöljük számegyenesen és adjuk meg intervallummal is a következőket.

d) $J \setminus I$; *e)* $I \cap K$; *f)* $(K \setminus J) \cup I$.

5013 Ábrázoljuk egységkörben azokat az $x \in U = [0°, 360°]$ szögeket, melyekre teljesül:

a) $I = \{x \mid 0 \le \operatorname{tg} x \le 1\}$; *b)* $J = \{x \mid 0{,}5 \le \sin x\}$; *c)* $x \in J \cap I$;

d) $x \in \overline{I} \setminus J$.

5014 Adott az A halmaz. Tudjuk róla, hogy $|A| = 10$.

a) Hány darab nullaelemű részhalmaza van? Hány kilencelemű részhalmaza van?

b) Hány kettő-, négy-, öt-, nyolcelemű részhalmaza van?

c) Hány elemű az a részhalmaza, amelyből 120 darab különböző számolhatunk össze?

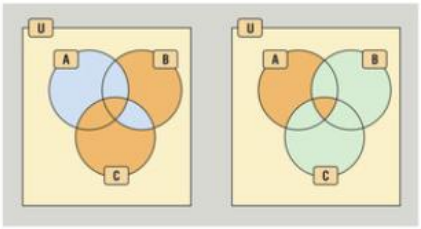
5015 Adjunk meg úgy négy halmazt, hogy közülük bármely háromnak legyen közös eleme, de a négy halmaz metszete üres legyen.

5016 Figyeljük meg az ábrákon jelölt halmazokat. (A kéket nevezzük P-nek, a zöldet Q-nak.)

a) Adjuk meg P-t és Q-t A, B, C és a halmazműveletek segítségével.

b) Milyen feltételt kell A, B, C-re adnunk, hogy P és Q diszjunkt halmazok legyenek?

c) Milyen feltételek mellett lesz $P \subset Q$?



5017 Legyen $U = \{a; b; c; d; e\}$. Ebben az univerzumban A, B, C halmazokról tudjuk, hogy elemszámaik megegyeznek, továbbá:

$$A \cap B \cap C = \{b\}, \quad B \setminus A = \{c\}, \quad A \setminus (B \cap C) = \{d\} \quad \text{és} \quad C \setminus B = \emptyset.$$

Adjuk meg $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ elemeit.

5018 Az $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmaz A, B, C részhalmazairól ismerjük a következőket:

$$A \cap B = \{2\}, \quad (A \cup B) \cap C = \{5; 6\}, \quad A \setminus C = \{2; 3; 4\} \quad \text{és} \quad C \setminus B = \{1; 5\}.$$

Határozzuk meg az A, B, C halmazokat.

5019 Az $U = \{1; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ halmaz A, B, C részhalmazairól tudjuk, hogy:

$A \setminus B = \{7; 8; 9\}$, $C \setminus B = \{5; 6; 7\}$, $A \cap B = \{10\}$, $(A \cup B) \setminus C = \{1; 8; 9; 10\}$.

a) Határozzuk meg az A, B és C halmazokat. *b)* Ábrázoljuk Venn-diagrammal.

c) Hány elemű az $A \cap B \cap C$ halmaz? *d)* Hány elemű $(A \cup B) \cap C$ halmaz?

5020 Az A, B, C halmazok az $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ részhalmazai. Tudjuk róluk, hogy:

$A \setminus (B \cup C) = \{2; 5\}$, $\{3; 6; 7\} \subseteq A \cap B$, $B \setminus C = \{3; 4; 6; 7\}$, $C \setminus B = \emptyset$.

Megmondhatjuk-e A, B, C elemeit, ha

a) $|C| = 0$; *b)* $|C| = 1$?

5021 Legyen $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Az A, B, $C \subset U$ halmazokról a következőket tudjuk:

$A \cap B = \{1; 5\}$, B-nek csak páratlan számok az elemei, $(A \cup B) \cap C = \{1; 3; 5; 8\}$,

$\overline{A \cup B \cup C}$-be eső elemek összege 8, $(B \cup C) \setminus A = \{3; 4; 7\}$, B elemeinek összege páros.

a) Készítsünk Venn-diagramot.

b) Mennyi külön-külön az A, B, C halmazokba eső elemek összege?

5022 A Kiskunsági Nemzeti Park dolgozóinak dönteniük kell, hogy ősszel vagy tavasszal szeretnének-e ellátogatni a Hortobágyi Nemzeti Parkba. A dolgozók 60%-a ősszel, 80%-a tavasszal menne, így akadt olyan is, aki mindkét évszakban szívesen látogatna a Hortobágyra, ők 8-an voltak.

a) Hányan dolgoznak a Kiskunsági Nemzeti Parkban, ha mindenki válaszolt a feltett kérdésre?

b) Hányan szeretnének inkább csak ősszel utazni?

5023 Egy osztályban 20 tanuló gyűjt a Forma–1 versenyzőitől dedikált emléket. Lewis Hamilton 12, Jenson Button 16, Fernando Alonso 15 főnek dedikált már. A 20 tanuló mindegyike szeretne mindhárom pilótától autogramot, így természetesen akad 8 olyan is, akinek Hamiltontól és Buttontól, 12 akinek Buttontól és Alonsótól és 7 fő, akinek Hamiltontól és Alonsótól is van már emléke.

a) Hány tanuló szerzett mindhárom említett versenyzőtől emléket?

b) Hányan gyűjtöttek csak Jenson Buttontól emléket?

5024 Amikor Hófehérkét az ételmérgezés után kiengedték a kórházból, a törpék nagy vigasságot csaptak. A hét törpe (akik között nincsenek testvérek) mindegyike meghívta 5-5 testvérét, akik szintén bányászok. A jelen levő törpék között volt 21 vájár, 21 telepvezető és 20 fő, aki narancssárga sapkát viselt. Telepvezető vájár annyi volt, mint narancssárga sapkás telepvezető (7-7 fő), ellenben narancssárga sapkában csak 6 vájár díszelgett. Hány telepvezető vájár jött az ünnepségre narancssárga sapkában? (A partira a törpéken kívül csak a királyfi és maga Hófehérke volt hivatalos, a sajtót – Réti Kurír – sem engedték be.)

5025 A 101 kiskutyát Szörnyella De Frász pribékjei három nagy csoportra osztották: fekete farkú, tarka fülű és fehér lábú csoportokba. Megszámolták, hogy az egyes csoportokban a fenti sorrendben 64, 60, 56 kutyus van. Fekete farkú és tarka fülű kölyök van 41, tarka fülű és fehér lábú van 22, fehér lábú és fekete farkú pedig 35.

a) Hány kutya bírja a fogva tartottak közül mindhárom tulajdonságot, ha egy megszökött a számolás előtt a pribékektől?

b) Hány olyan kutyus van Szörnyellánál, amelyiknek fehér a lába, de nem tarka a füle és nem fekete a farka?

5026 Egy panzióban ebédnél nyolcan rendeltek levest, tízen főételt.

a) Milyen határok között mozoghat azoknak a száma, akik mindkét ételtípusból kértek?

b) Összesen mennyien ülhettek asztalhoz délben a panzióban?

5027 Az A, B, C halmazokról a következőket tudjuk: $|C| = 13$. Ehhez képest A-nak 1-gyel több, B-nek 4-gyel kevesebb eleme van. $A \cap C$ elemszáma fele $|A|$-nak, $|A \cap B|$ kétharmada B elemszámának, $|B \cap C|$ pedig 5-tel kevesebb, mint $|B|$. A hármas metszet elemszáma az egyetlen páros prímszám. Hány elemű az alaphalmaz, ha $|\overline{A \cup B \cup C}| = 3$?

5028 Tekintsük az $\frac{5x-4}{2x+8} - \frac{x-3}{x+4} \geq 1$ egyenlőtlenséget a racionális számok halmazán.

a) Megoldás-e az 1?

b) Adjuk meg a legkisebb pozitív megoldását a feladatnak. Van-e legnagyobb negatív megoldás?

c) Soroljuk fel az összes olyan 2 nevezőjű valódi törtet, amely nem megoldása a feladatnak.

5029 Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi halmazokat.

a) $L = \{(x, y) | y \leq \log_2(x+3)\}$; *b)* $M = \{(x, y) | 2^{x-3} \leq y\}$;

c) $L \cap M$.

5030 Legyen az univerzum $U = \{1; 2; \ldots; n\}$. Adjunk meg úgy n darab A_1, A_2, …, A_n halmazt az alaphalmazból, hogy bármely $(n-1)$ halmaznak pontosan egy közös eleme legyen, mégpedig mindig a hiányzó index. Pl.: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} = \{n\}$.

5031 Adjuk meg úgy A, $B \subseteq U$ nemüres halmazok lehető legkisebb elemszámait, hogy teljesüljenek a következők:

$$2|A| = |U|, \quad 3|A \cap B| = |B|, \quad 10|A \cup B| = 9|U|.$$

5032 Tekintsük az $I_n = \left]0; \frac{1}{n}\right[$ és $J_n = \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[$ intervallum-sorozatokat.

a) Van-e közös pontja a J_n sorozat elemeinek?

b) Van-e közös pontja az I_n sorozat elemeinek?

c) Van-e közös pontja a $J_n \setminus I_n$ sorozat elemeinek?

Kijelentések, események

5033 Legyenek $A = \{\text{szép idő lesz}\}$ és $B = \{\text{kirándulni megyek}\}$ események.

a) Adjuk meg szövegesen az $A + B$ és az $A \cdot B$ eseményeket.

b) Írjuk le események közötti műveletekkel a „Nem lesz szép idő, de elmegyek kirándulni” kijelentést.

c) Tekintsük a „Ha szép idő lesz, akkor kirándulni megyek” kijelentést, és fogadjuk el, hogy mindig igazat mondok. Milyen idő lehet, ha most éppen kirándulok?

5034 Egy véletlenszám-generátor 1-nél nem kisebb és 20-nál nem nagyobb egész számot ad. Legyenek a következő események:

$$A = \{\text{páros szám}\}, \quad B = \{\text{hárommal osztható szám}\}, \quad C = \{\text{öttel osztható szám}\}.$$

a) Hány elemi eseményből állnak A, B, C események?

b) Adjuk meg szövegesen és elemi eseményeik felsorolásával a következő eseményeket:

$$A \cdot B, \quad B + C, \quad \overline{A} \cdot C.$$

c) Adjuk meg az A, B, C események és műveletek segítségével a $D = \{\text{második páratlan prím}\}$ eseményt.

5035 Egy körökre osztott céltábla belülről kifelé a 10, 8, 6, 4, 2 pontokat érő sávokra van osztva. Tekintsük az alábbi eseményeket:



$A = \{5\text{-nél kisebb lövés}\}$,

$B = \{3\text{-mal osztható lövés}\}$,

$C = \{2 \text{ hatvány értékű lövés}\}$.

a) Határozzuk meg elemi eseményeikkel az alábbi eseményeket:
$A + B + C$, $A \cdot B \cdot C$, $A \cdot B \cdot \overline{C}$, $\overline{A} \cdot B \cdot C$, $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$, $B \cdot \overline{A} \cdot \overline{C}$.

b) Adjuk meg az A, B, C események és a műveletek segítségével a telitalálat eseményt.

5036 Döntsük el, hogy a kijelentés vagy megfordítása igaz vagy hamis. Töltsük ki a táblázatot.

A = Ha egy háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást, akkor a háromszög derékszögű.

B = Ha egy négyszög négyzet, akkor minden szöge derékszög.

C = Ha egy tétel igaz, akkor a tagadása hamis.

D = Ha egy szám 3-mal osztható, akkor páros.

	A	B	C	D
Kijelentés				
Megfordítása				

5037 Döntsük el, hogy igazak vagy sem a következtetések.

a) Minden ember fenség. Ember vagyok. Ebből következik, hogy fenség vagyok.

b) Bármely tanya nádfedeles. Ez az épület nádfedeles. Tehát ez az épület tanya.

5038 Tagadjuk az alábbi kijelentéseket, és döntsük el, hogy az állítás, illetve a tagadása igaz vagy hamis.

a) Minden deltoid átlói merőlegesek egymásra.

b) Van olyan háromszög, melynek a legkisebb szöge is nagyobb 60°-nál.

c) Minden hattal osztható szám osztható kilenccel is.

d) Van olyan pozitív egész, melynek a prímtényezős felbontásában nem szerepel a 17.

e) A hét törpe közül egyik sem volt magasabb Hófehérkénél.

f) Sohasem írom le azt, hogy soha.

g) Ha egy szám 7-nek valamely hatványa, akkor osztható 3-mal.

h) Bármely kicsiny α ($\alpha > 0$) szöghöz létezik olyan pozitív egész n, hogy az n-nél több csúcsú szabályos sokszögek külső szöge kisebb, mint α.

Kombinatorika

5039 Egy kis ország kis demokráciájában öt párt állíthat országos listát. A választási bizottság sorsolással dönti el, melyik párt hányadik helyen szerepel a szavazólapon. Hányféle sorrendben kerülhetnek egymás alá a pártok nevei?

5040 Álmos összeírta hat ismerősét, akiket meghív a születésnapjára. Elsőnek Előd, utolsónak Töhötöm jutott eszébe. Hányféle sorrend alakulhatott ki a papíron, ha a többiek véletlenszerűen jutottak Álmos eszébe?



5041 Peti öccsének van egy-egy kör, háromszög, négyszög, ember és madár formájú bélyegzője. Úgy nyomta a papírra sorban őket, hogy a két élőlény egymás mellé került. Hány különböző ilyen bélyegzést készíthet még az előző alá?

5042 Katinak és Pistinek nagy családja van, két gyermekük mellé hármas ikreik születtek. Ebédnél hányféleképpen ültethetik őket sorban a hosszú asztalhoz, ha a két nagyobb gyerek nem lehet egymás mellett, mert folyton birkóznak?

5043 Lili hat vendéget vár délután. Kör alakú asztala mellé kikészített hét különböző széket. Hányféleképpen helyezhette el a székeket? (Két elhelyezést akkor tekintünk különbözőnek, ha valamilyen körüljárás szerint legalább egy szék egy szomszédja más.)

5044 György négy vendéget vár délután. Hányféleképpen foglalhatnak helyet a kör alakú asztalnál, ha Viktor és Ferenc biztosan nem fog egymás mellé ülni? (Két ülésrend akkor különböző, ha legalább egy fő legalább egy szomszédja más.)

5045 Hány különböző négyjegyű szám készíthető a páros számjegyekből? (Egy jegyet többször is felhasználhatunk.) Közülük hány osztható 5-tel?

5046 Ötször dobunk a dobókockával, a kapott számokat egymás után írjuk. Hány különböző 4-gyel osztható szám alakulhat így ki?

5047 Hány háromjegyű számot képezhetünk a páratlan számjegyekből, ha egy jegyet csak egyszer használhatunk fel?

5048 A 30 fős osztályból 5 főt véletlenszerűen felkérnek egy kérdőív kitöltésére. Hányféle sorrendben adhatják át az öt kérdőívet az osztály tanulóinak?

5049 Amikor a jószívű hétpettyes katicabogár találkozott a szomorú cserebogárral, felajánlott neki három pöttyöt a hátáról. Hányféleképpen választhatott a cserebogár a katica pettyeiből?

5050 Zsoltnak van 12 tolla. Tündinek a virágos toll nagyon tetszik. Zsolt felajánlja, hogy válasszon a tollai közül hármat. Hányféleképp választhat Tündi, ha a virágosat mindenképpen elkéri?

5051 A 2005. májusi középszintű matematika érettségi első részében volt 7 kettő, 4 három és 1 négy pontos feladat. Csak az értük kapható pontszámokat tekintve hányféle sorrendben oldhatták meg a diákok a feladatokat?

5052 A középszintű matematikaérettségik második részében általában van három 12 és három 17 pontos feladat (utóbbiak közül kettőt kell megoldani). Legfeljebb hány fős az a csoport, melynek minden tagja különböző sorrendben oldja meg a feladatokat, ha csak a példákért kapható pontokat vesszük figyelembe?

5053 Vendégségbe mentünk Humor Haroldékhoz. Miután levettük a lábbelijeinket, öt pár cipő sorakozott egymás mellett az előszobában. Vendéglátónk szokásos tréfás kedvében az este során többször is összecserélte a cipőket:



a) először a jobb-bal párokat ebben a sorban megtartva;

b) aztán a párokat együtt tartva, de a jobb-bal sorrendet nem feltétlenül;

c) végül a párokra tekintet nélkül az összeset.

Ekkor megelégelve a humort, hazajöttünk. Az egyes esetekben hányféle sorrendet alakíthatott ki cipőinkből a házigazda, Humor Harold?

5054 Egy 90 fős rendezvényen mindenki egy tombolát vásárolhat, és 8 egyforma nyereményt sorsolnak ki. A tombola után minden nyertest felhívnak a színpadra, ahol sorban egymás mellé állnak és készül egy közös fénykép róluk. Összesen hányféleképpen állhatnak a résztvevők a fotón, ha

a) már tudjuk, kik a nyertesek; *b)* még nem tudjuk, kik a nyertesek?

5055 Egy barátságos kispályás focikupán három csapat vett részt. A torna végén a csapatok tagjai felsorakoztak az oldalvonal mentén. Hányféleképpen állhatnak fel, ha a játékosokat csak az alapján különböztetjük meg, hogy melyik csapatban játszanak? Minden csapat 8 fős (a cserékkel együtt).

5056 Marcsi délután a piacon árul gyümölcsöt. Hogy ne legyen éhes, mindennap elfogyaszt 20 szemet az árult fajtákból. Tegnap például evett 5 szem epret, 6 szem cseresznyét, 7 szem meggyet és 2 szem szilvát.

a) Hányféle sorrendben ehette meg ezeket a nap folyamán?

b) Ma 4 szem szilvát evett és 1-1 szemmel kevesebb cseresznyét és meggyet. Válaszoljuk meg a lehetséges esetek meghatározása nélkül, hogy nőtt vagy csökkent a lehetséges sorrendek száma. Hányszoros a változás?

5057 A nyelvi tesztfüzet egyik feladatában ki kell egészíteni 7 mondatot 12 előre megadott, különböző szóval. (Minden mondatba pontosan egy szót kell beírni, és egy szót legfeljebb egy helyre lehet beírni.) Hányféleképpen tölthetjük ki a tesztet?

5058 A 30 körös MotoGP futam 20 indulójából 12 fő ér célba. Hányféle végeredmény alakulhat ki, ha

a) bárki bármelyik helyen célba érhet?

b) Gábor dobogóra állhat?

(Holtverseny nincs.)

5059 Puerto Rico tengerpartjára egy építész különleges 11 emeletes épületet tervezett. A tervek szerint az épület minden szintjét kivilágítják négy különböző színnel úgy, hogy a színek sorrendje óránként véletlenszerűen változik. Hány évezreden keresztül üzemelhet úgy az épület, hogy ne ismétlődjön meg egy korábbi színösszeállítás sem? (Vegyük az éjszakát 8 órásnak, az évet 365 napnak.)

5060 A labdarúgó-mérkőzés végeredménye 6-2 lett. Hányféleképp rúghatták a hat gólt a hazai csapat játékosai, ha csak annyit tudunk, hogy a 10 mezőnyjátékos közül

a) bárki rúghatta bármelyik gólt;

b) csak csatár lőtt gólt, és a csapatnak három csatára van;

c) az első négy gólt csatár lőtte, a maradékot pedig a négy középpályás közül bárki;

d) négy gólt csatárok lőttek, a maradékot pedig a középpályások közül bárki?

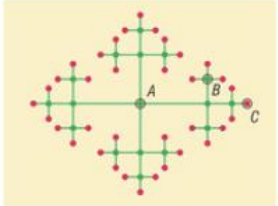
5061 Fejtsük ki a binomiális tétel segítségével a $(2 - a)^5$ hatványt.

5062 Tekintsük az alábbi fagráfot, melyben a leveleken kívül minden pont fokszáma 4. Hány különböző hosszúságú úton juthatunk a piros levelekbe

a) A; *b)* B; *c)* C

pontból kiindulva?

(Egy-egy élen csak egyszer mehetünk végig.)



5063 Vegyük a kettes, illetve a páratlan számjegyeket, és készítsünk belőlük ötjegyű számokat. (Egy számot csak egyszer használhatunk fel). Hány darab olyan számot írhatunk így fel,

a) amelyben az egymás után álló számjegyek növekednek;

b) amelyekben egymás mellett állnak a nem prím számjegyek;

c) amely 4-gyel osztható?

5064 10 betűből és 5 számjegyből 4-jegyű kódot készítünk (a betűk csak kisbetűk lehetnek). Hány különböző kódot állíthatunk elő, ha

a) minden karakter előfordulhat többször is;

b) a kódszónak tartalmaznia kell legalább egy betűt;

c) akármennyi szám szerepelhet, de a betűk mégis szerepelhetnek kis- és nagybetűként is?

5065 Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = [\sin x]$ ($\sin x$ egészrész) függvény értékkészletét. Hányféle módon írhatjuk le az értékkészlet egyes elemeit négyszer egymás után, ha

a) bármely érték akárhányszor felléphet;

b) legfeljebb egy érték szerepelhet legfeljebb kétszer;

c) ezt abban a sorrendben tesszük meg, ahogy a $g(x) = \sin x$ függvény is értékként adná őket?

5066 A tablót készítő cég megajándékozta a 22 fős osztályt egy olyan tortával, aminek a tetejére színes marcipánból elkészítették a tabló mását. A tablóra 12 tanár fényképe is felkerült.

a) A diákok persze a tanárok képeit akarták megszerezni. Hányféleképpen sorsolhatták ki egymás között a képeket, ha megegyeztek, hogy egy diák csak egy tanár képét kaphatja?

b) Valaki felvetette, hogy a lányok kapják a férfi tanárok képeit, a fiúk pedig a tanárnőkét. Az ötletet elfogadva hányféleképp oszthatják el a képeket, ha 14 lány jár az osztályba és 6 tanár férfi?

c) Erre a jelenlevő nyolc tanár is felvetette, hogy akkor ők meg a diákok képét szeretnék. Hányféle kiosztásban kaphatják a képeket, ha hat tanárnak 3-3, kettőnek pedig 2-2 diák marcipánképe jut?

5067 A fogyasztóvédelmi hatóság egyik akciójában a plüssmacikat ellenőrizték. A forgalmazók saját bevallása szerint is a macik 30%-a selejtes. Az egyik áruház 500 darabos készletéből 20-at visszatevés nélkül kiválasztva hányféleképpen fordulhat elő, hogy

a) nincs köztük selejtes; *b)* pontosan kettő selejtes van; *c)* legalább három selejtes van?

5068 A 30 fős osztályban pontosan ugyanaz a 21 fő készül minden földrajzórára, ők biztosan szépen is felelnek (a többiek pedig biztosan gyengén). A tanár a jövő hétre nagyjából 10 feleletet tervezett. A diákok tudják, hogy ennél a tanárnál bárki felelhet bármikor, akkor is, ha már akár aznap volt kint a térkép előtt. Hányféleképp fordulhat elő, hogy

a) 10 szép feleletet fog a földrajztanár hallani? *b)* pontosan 4 gyenge felelet lesz a héten?

c) legfeljebb 7 alkalommal ad jó jegyet?

5069 Esztinek van két egyforma babája. A babaszekrényében tart nekik 5 szoknyát, 8 inget és 4 kabátot (minden ruhadarab különbözik egymástól). Először kiválaszt mindegyik fajta ruhából kettő-kettő darabot, majd közülük az egyiket az egyik, a másikat a másik babára adja véletlenszerűen.

a) Hányféleképp öltöztetheti fel a babákat?

b) Hányféleképp teheti ugyanezt meg, ha három babája van és rájuk három-három szoknyát, inget és kabátot választ?

5070 Egy tehetségkutató műsorba 58 lány és 42 fiú jelentkezik. Közülük kiválasztanak 12 főt, akikkel a műsor reklámfilmjeit készítik (minden kiválasztott csak egy filmben szerepel). Hányféleképp választhatják ki a 12 főt, ha

a) a jelentkezők közül bárki bekerülhet a kiválasztottak közé?

b) pontosan 7 lányt és 5 fiút választanak ki?

c) mindig kettesével mutatnak be különböző nemű kiválasztott jelentkezőket?

d) nem tudjuk pontosan, hány fiút vagy lányt választanak ki, csak azt, hogy minden reklámfilmben hármasával mutatnak majd be azonos nemű kiválasztott jelentkezőket?

5071 Janinak 13 indiános és 2 cowboyos könyve van, és azt az ígéretet kapta, hogy születésnapjára megajándékozzák még néhány távol-keleti regénnyel. Hány könyvet kaphat, ha az ajándékot adó barátja szerint könyveit majd 406 980 különböző módon rendezheti el a polcon téma szerint?

5072 Készítsünk a páratlan számjegyekből hárommal osztható négyjegyű számokat. Hány ilyet írhatunk fel összesen, ha

a) egy jegyet csak egyszer használhatunk fel?

b) minden számjegyet többször is felhasználhatunk?

5073 Hányféleképpen lehet 8 főt 3 szobába elosztani, ha a szobák hatágyasak és

a) csak a személyek számát vesszük figyelembe, de a szobákat megkülönböztetjük;

b) csak a személyek számát vesszük figyelembe, a szobákat nem különböztetjük meg;

c) a személyeket megkülönböztetjük, de a szobákat nem;

d) a személyeket és a szobákat is megkülönböztetjük egymástól?

5074 A 23 fős 11/*n* osztály háromnapos kirándulásra megy. Kaptak 1 darab kétágyas, 3 darab háromágyas, 1 darab négyágyas és 1 darab nyolcágyas szobát. Hányféleképpen helyezhetők el a szobákban a diákok, ha a szobákban levő ágyak között

a) nem teszünk különbséget? *b)* különbséget teszünk?

Az osztályba 10 leány jár. Hányféleképpen oszthatják el a szobákat egymás között, ha a lányok nem kerülhetnek egy szobába fiúkkal és az ágyak között

c) nem teszünk különbséget? *d)* különbséget teszünk?

Gráfok

5075 Anita, Bea, Csilla, Dorka, Enikő és Franciska jó barátok, szoktak írni egymásnak mindennap. Ma reggel még csak Dorka váltott üzenetet Beával és Enikővel, Franci pedig Anitával, aki beszélt már Csillával is. Később Dorka váltott üzenetet azokkal is, akikkel addig nem.

a) Ábrázoljuk gráffal a beszélgetéseket, és adjuk meg, ki hány másik emberrel beszélt eddig.

b) Számítsuk ki ebből, hány beszélgetés történt.

5076 Janka, Manka, Panka és Rumcájsz Csibészke születésnapját szervezi. Janka ezért beszélt már mindenkivel (Csibészkével is), Manka pedig Pankával és Rumcájsszal.

a) Ábrázoljuk gráffal a szervezés jelen állapotát. Hány beszélgetés zajlott le eddig?

b) Hány beszélgetés zajlik le összesen, ha legkésőbb a szülinapig mindenki beszél mindenkivel?

5077 Egy egyszerű gráf pontjainak fokszámai rendre 1, 2, 2, 2, 2, 3, más pontja nincs. Hány élt kell még berajzolni a gráfba, hogy egyszerű maradjon és minden pont fokszáma 3 legyen?

5078 Ábrázoljuk az ötpontú gráfot, ha pontjainak fokszámai

a) 0, 2, 2, 3, 3; *b)* 0, 2, 3, 3, 4.

5079 Egy hatpontú gráfban vannak 5, 4, 3, 2, 1 fokú pontok. Mennyi a hatodik pont fokszáma?

5080 Egy nyolc csapatos tornán minden csapat játszik mindenkivel egyszer. Eddig három forduló zajlott le, vagyis minden csapat három meccset játszott. Mennyi mérkőzést láthat még a kitartó közönség?

5081 Egy hatpontú egyszerű gráf 5 pontjának fokszámai rendre 1, 2, 2, 3, 4. Mi lehet a hatodik pont fokszáma?

5082 Hány pontja lehet

a) legalább; *b)* legfeljebb

annak az egyszerű gráfnak, amelynek nincs izolált pontja, 13 éle van és egyik pontja 6 fokú?

5083 A 11 fős nagypályás labdarúgócsapat tagjai a középkezdés után nem sokkal gólt rúgtak. A félidőben alaposan elemezték ezt a gólt: a játékosok, akik passzoltak egymásnak, csak egyszer tették ezt meg. A passzokban érintett játékosok 7, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 2 alkalommal vettek részt a labda átadásában a gól előtt, az átadásokat az elemző be is rajzolta a monitorra.

a) A kapuson kívül hány játékos nem ért még labdához a gól előtt?

b) Döntsük el, hogy igaz-e az alábbi kijelentés: *„A passzok gráfja összefüggő és körmentes gráf."*

c) A mezőnyjátékosok még hány alkalommal passzolhattak volna legfeljebb egymásnak úgy, hogy egyszerű maradjon a passzok gráfja?

5084 *a)* Volt-e játékmegszakítás a középkezdés és a gól között az előző feladatban?

b) Ha volt, akkor legfeljebb mennyi lehetett?

5085 Van-e olyan fa gráf, ami izomorf a komplementerével?

5086 Egy hétpontú egyszerű gráf pontjainak fokszámai 0, 1, 2, 3, 3, 3, 4.

a) Hány újabb élt kell berajzolnunk, ha azt akarjuk, hogy minden pont fokszáma egyenlő legyen?

b) Áthelyezhető-e néhány él úgy, hogy minden pont fokszáma egyenlő legyen?

c) Milyen feltételek mellett helyezhető át néhány él úgy egy n pontú gráfban, hogy minden pont fokszáma egyenlő legyen? (A gráf minden kérdés esetén maradjon egyszerű a változtatások után is.)

Valószínűség-számítás

5087 Adjunk meg szövegesen egy-egy biztos és lehetetlen eseményt a következő valószínűségi kísérletben: négy hagyományos dobókockával egyszerre dobunk.

5088 Legyen a valószínűségi kísérlet egy érme egymás után négyszer való feldobása. Tekintsük a következő eseményeket: A = {két fejet és két írást dobtunk}; B = {elsőre írást, harmadikra fejet dobtunk}.

a) Hány elemi eseményből áll A komplementer eseménye? Adjunk meg belőlük kettőt.

b) Adjuk meg AB és $\overline{A+B}$ eseményeket elemi eseményeikkel.

c) Adjuk meg $P(A)$, $P(AB)$, $P\left(\overline{A+B}\right)$ értékét.

5089 Egy virágárus mindennap felírja, hogy a hozzá betérő vevők közül hány fogadta el az általa ajánlott virágcsokrot. A múlt héten a következőket tapasztalta: hétfőn 10-ből 8, kedden 12-ből 9, szerdán 7-ből 4, csütörtökön 18-ból 15, pénteken pedig 24-ből 20 vevő köttette meg az ajánlott csokrot.

a) Adjuk meg minden napra, mekkora relatív gyakorisággal találta el az árus a vevők ízlését.

b) Mit mondhatunk a találatok valószínűségéről?

5090 Jancsi biatlonozik (a biatlon téli sport, a sífutás és a lövészet összekapcsolása). Általában 20 lövésből 17-szer talál. Mekkora valószínűséggel nem találja el a célt

a) a következő lövése; *b)* a következő öt lövése?

5091 Gyuri gondolt egy 50-nél kisebb nemnegatív egész számra, amelyről annyit árult el Gyulának, hogy 5-tel osztható. Mekkora valószínűséggel találja ki Gyula ezt a számot?

5092 Teri rajzolt a füzetébe 3 négyzetet, 2 ellipszist és 5 háromszöget. Janka rábök találomra az egyikre. Mekkora valószínűséggel felezik egymást a Janka által kijelölt alakzat átlói?

5093 Ágnes megadta a hétjegyű vonalas telefonszámát Áronnak, aki azonban elfelejtette az egyik számot (423X567). Mekkora valószínűséggel hívja Ágit, ha tudja, hogy a teljes szám nem osztható hárommal?

5094 Az A, A, B, C, S betűket véletlenszerűen egymás mellé téve mekkora valószínűséggel jutunk értelmes magyar keresztnévhez?

5095 Egy zacskó a felirat szerint tartalmaz 30% kakaós és 35-35% vaníliás, illetve csokis kekszet. Mekkora valószínűséggel választunk találomra a zacskóból elsőnek csokis kekszet?

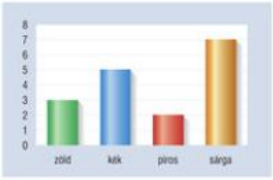
5096 A bécsi átlagos havi maximum hőmérsékleteket látjuk az alábbi táblázatban:

Hónap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
°C	2,9	5,1	10,3	15,2	20,5	23,4	25,6	25,4	20,3	14,2	7,5	4

Találomra kijelölve egy hónapot az évben, mennyi az esélye, hogy átlagos napi hőmérsékletének maximuma 20 °C alatt van?

5097 A 12/*c*-ben bukás nem volt félévkor matekból, elégséges 5, közepes 10, jó 7, jeles pedig 8 volt. Mekkora valószínűséggel jelölünk ki egy olyan tanulót, aki legalább közepes matekból?

5098 Nyuszi megszagolta a festett tojásokat, majd egy piros elé ült. Mennyi volt ennek előzetesen a valószínűsége, ha az oszlopdiagram mutatja a különböző színű tojások számát?



5099 A kördiagram igazából egy rágcsálnivalókat tartalmazó kör alakú doboz felülnézete. A gyártási eljárás miatt minden körcikk középponti szöge 30°-nak egész számú többszöröse. Összeöntve egy tálba a rágcsálnivalókat, mekkora valószínűséggel veszünk ki egy halacskát?

(A rágcsálnivalók azonos méretűek, és egyenletesen töltik meg a rekeszeket.)



5100 Mekkora valószínűséggel jön ki a bánya bejáratán a hét törpe növekvő ábécérendben, ha véletlenszerűen álltak sorba? (Mindegyik törpének más a neve.)

5101 Adottak az e, f, g, h, i, j egyenesek, melyek közül semelyik kettő nem párhuzamos és semelyik három nem megy át ugyanazon a ponton. Az egyenesek metszéspontjai közül egyet kiválasztva, mennyi a valószínűsége, hogy az éppen f és i egyenesek metszéspontja?

5102 Mennyi a valószínűsége, hogy az $\{a, b, c, d, e\}$ halmaz összes részhalmaza közül pont az $\{a, c, d\}$ halmazt választjuk ki véletlenszerűen?

5103 Egységsugarú körbe írunk egy négyzetet. Egy pontot véletlenül ráejtve a körre, mennyi a valószínűsége, hogy az a négyzet mellé esik? Kettő tizedesjegyre pontosan adjuk meg.

5104 Tekintsük az a, b, c, d, e, f, g, h, i, j betűket, közülük négyet kiválasztva és egymás után írva készítsük el az összes lehetséges négybetűs szót. Ha ezek közül véletlenszerűen választunk egyet, mekkora valószínűséggel szerepel a kiválasztott szóban az e betű?

5105 Hány üveggolyónk van összesen, ha közülük 14 színtelen, és egy színtelen véletlenszerű kiválasztásának esélye 70%?

5106 A szekrényben van 12 sima nyakkendő. Reggeli félálomban 0,4 annak a valószínűsége, hogy csíkos nyakkendőt veszünk fel. Hány csíkos nyakkendőnk van, ha a két említetten kívül nincs másfajta nyakkendőnk?

5107 Egy dobozkába beletettünk 5 zöld és 7 kék szalagot. Hány darab narancssárga szalagot kell ahhoz beletennünk, hogy a szalagok közül egyet véletlenszerűen kivéve az 0,25 valószínűséggel legyen narancssárga?

5108 A totó 13 + 1 fogadási tételéből néhánynak már ismerjük az eredményét, és még van esélyünk a telitalálatra. Hány tippünk jött eddig be, ha ebben a pillanatban nyerési esélyünk $\frac{1}{3^5}$?

5109 Egy dobókockával játszunk. Mennyi a valószínűsége, hogy hat dobásból minden számot kidobunk egyszer?

5110 Mekkora valószínűséggel készítünk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből egy hétjegyű, de csupa különböző jegyet tartalmazó számot, ha minden helyre minden jegyet ugyanakkora valószínűséggel választunk és egy jegyet többször is felhasználhatunk?

5111 Érmegyűjtő Ernő a következő korabeli érméit állítja ki egy üveges szekrényben:

Érme tipusa	Lajos-arany	Bethlen-garas	József-krajcár	Mária Terézia-tallér
Darabszám	5	3	4	

Tudjuk, hogy a vitrinből egy véletlenszerűen kiválasztott érme $\frac{1}{3}$ valószínűséggel lesz Mária Terézia korabeli tallér.

a) Töltsük ki a táblázat üres celláját.

b) Ábrázoljuk kördiagramon, melyik pénzből hány darabot tartalmaz Ernő gyűjteménye.

c) Hányféleképpen teheti Ernő egyetlen sorba a vitrinben az érméit?

d) Még legalább mennyi Lajos-aranyat kell Ernőnek összegyűjtenie, ha azt szeretné, hogy egy tallér kiválasztásának valószínűsége 0,3 alá csökkenjen? (A többi érme darabszáma nem változik.)

5112 Karola és Petra a kaszinó új játékát próbálják ki. Petra kezében egy piros és egy kék érme van, Karolánál egy dobókocka. Egyszerre kell dobniuk a náluk levő tárgyakkal. Ha Petra két fejet dob az érmékkel, akkor megduplázzák a Karola által dobott számot. Ha egy fejet és egy írást dob, akkor nem kapnak semmit. Ha két írást dob, akkor a Karola által dobott számhoz hozzáadnak 3-at. Nyereményük ennyi euró. Egyetlen játékot játszanak, amelynek az árát, 4 eurót, a játék előtt kell befizetni.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 4 euró veszteséggel zárnak a lányok?

b) Hányféleképpen kereshetnek a lányok 4 eurót a játékon (a játék árát is beleszámítva)? Mennyi ennek a valószínűsége?

c) Készítsünk áttekintő táblázatot a játékon nyerhető összegekről (a játék árát ne tekintsük).

d) Mennyi a valószínűsége, hogy pozitív mérleggel fejezik be a játékot (a játék árát is beleszámítva)?

5113 Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy a 26 fős osztályból ki hány pontot ért el a legutóbbi dolgozaton. (A tanár minden feladatra egész pontszámot adott.)

Pontszám	0–8	9–16	17–24	25–32	33–40
Gyakoriság	3	6	5	7	5

a) Készítsünk oszlopdiagramot az adatok ábrázolására.

b) Határozzuk meg a tanulók által átlagosan gyűjtött pontok számát egy tizedesjegyre. (A számításokat az osztályközepekkel végezzük.) A ponthatárokat a tanár így adta meg: 20%-ig elégtelen, 40%-ig elégséges, 60%-ig közepes, 80%-ig jó és afelett jeles.

c) Kiválasztva az osztály egy tanulóját, mennyi a valószínűsége, hogy legalább jó dolgozatot írt?

d) Ha kiválasztjuk az osztály öt tanulóját, mekkora valószínűséggel lesz közülük kettőnek jeles és háromnak jó a dolgozata?

5114 *a)* Határozzuk meg azon háromjegyű számokat, melyeknek a számjegyei a leírás sorrendjében mértani sorozatot alkotnak.

b) Tekintsük azon háromjegyű számokat, melyeknek a jegyei számtani vagy mértani sorozatot alkotnak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük egy számot kiválasztva, annak számjegyei éppen számtani sorozatot alkotnak?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a csupa különböző jegyből álló számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, annak jegyei nem alkotnak sem számtani, sem mértani sorozatot?

5115 Van egy szabályos tetraéder alakú dobókockánk, oldalain az 1, 2, 3, 4 számokkal. Ha 1-est dobunk, akkor feltett pénzünk háromnegyedét, ha 2-est, akkor felét elveszítjük. Ha 3-ast dobunk, akkor pénzünknél maradunk, ha 4-est, akkor megháromszorozzuk a feltett pénzünket. (Minden fordulóban feltesszük az egész rendelkezésünkre álló összeget.)

a) Két fordulót játszva mennyi lehet a maximális összeg, amit 10 €-t feltéve megnyerhetünk?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy három forduló alatt a lehető legkevesebb pénzünk marad?

c) Három forduló alatt mekkora valószínűséggel érünk el 10 €-ból 15 €-t?

5116 Egy dobókockával addig dobunk, míg hatos nem lesz. Minek nagyobb a valószínűsége: négy dobásnál többször nem kell, vagy legalább ötször kell dobnunk a kockával?

5117 Egy nem átlátszó üvegkehelyben van 10 epres és 15 meggyes cukorka. A kehelybe markolunk, és kiveszünk találomra 5 cukorkát. Mekkora valószínűséggel lesz

a) mind az öt epres;

b) mind az öt meggyes;

c) vegyesen epres és meggyes is?

5118 Egy rendezvényen Kati nagyjából 60% esélyt ad magának arra, hogy nyer a tombolán. Jani saját esélyét 50%-ra tartja. Hogy mindketten nyernek, azt egybehangzóan 25%-nak látják. Mekkora valószínűséggel nyer legalább egyikük, ha elfogadjuk az általuk mondott számokat?

5119 Eszter nyakláncot készít. Egyik dobozába beleöntött 5 csomag zöld és 3 csomag kék gyöngyöt (egy csomagban 10 darab gyöngy volt). Benyúl a dobozba, és a tenyerébe vesz belőlük nyolcat. Mekkora valószínűséggel lesz a tenyerében levő gyöngyök között legalább kettő kék?

5120 Károly nagy átlagban négy esetből egyszer tudja a választ a vetélkedő kérdéseire. Mekkora valószínűséggel találja el a következő

a) kérdésre a választ;

b) három kérdésre a választ;

c) két kérdésre a választ, majd utána háromra nem, végül az utolsóra ismét igen;

d) hat kérdés közül négyre a választ és kettőre nem?

5121 Az óvodai kis szekrényen áll egy 20 cm oldalú szabályos háromszög alakú óratok, melynek számlapja a háromszög beírt köre. A számlapot üveg fedi, ezen jól megtapad a gyurma (az óra többi részéről könnyen lecsúszik). Alfréd és Gerzson már vagy fél órája kis gyurmadarabokat dobálnak az órára, és az óratokot biztosan el is találják. Mekkora valószínűséggel találja el a következő

a) dobás a számlapot;

b) két dobás a számlapot, míg a harmadik lecsúszik;

c) öt dobásból három a számlapot, míg a többi lecsúszik?

5122 A 32 lapos kártyacsomagból 7 lapot húzunk (az éppen kihúzott lapot megtekintés után visszatesszük a csomagba). Mekkora a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok közül

a) 4 figurás (ász, király, felső vagy alsó) és 3 hetes;

b) legfeljebb öt figurás?

5123 Az azonos 24 fő létszámú *A* és *B* osztály közös kirándulásra megy. Az *A* osztály fele fiú, a *B*-ben kétszer annyi fiú van, mint lány. Kiválasztva a kiránduláson részt vevő tanulók közül

a) egy lányt, mekkora valószínűséggel lesz a *B* osztály tanulója?

b) kettő lányt, mekkora valószínűséggel jár mindegyikük az *A* osztályba?

c) három lányt, mekkora valószínűséggel jár kettő a *B*, egy az *A* osztályba?

d) négy fiút, mekkora valószínűséggel jár három az egyik, egy fő a másik osztályba?

e) hét tanulót, mekkora annak a valószínűsége, hogy többen járnak közülük az *A*, mint a *B* osztályba?

5124 Egy négy fordulóból álló játékban a játékosnak kezdetben 1296 pontja van. Minden fordulóban feltesznek neki egy kérdést, ami után dönthet három lehetőség közül:

A = megpróbálja megháromszorozni a pénzét,

B = megpróbálja megduplázni a pénzét,

C = kihagyja a kérdést.

Ha az *A* vagy *B* lehetőséget választja, akkor dob egy dobókockával. Az *A* esetben ha 5-öst vagy 6-ost dob, és jól válaszol a kérdésre, akkor megháromszorozza a pontjait. Ha mást dob, vagy mégsem tudja jól a választ, a pénzét harmadolják. A *B* esetben ugyanez a helyzet, csak 4-5-6-ost kell dobni és duplázni, vagy felezni lehet a pontokat. A *C* esetben dob a kockával: ha 6-ost dob, akkor pontjai megmaradnak, különben hattal osztják őket.

a) Mennyi a lehető legtöbb és legkevesebb szerezhető pont a játékon?

b) Ha valaki minden kérdésre tudja a választ, mekkora valószínűséggel szerzi meg a maximális pontot? Ha minden kérdést passzol, mekkora valószínűséggel jut el a minimális pontig?

c) Mekkora valószínűséggel ér el 5832 pontot a játékos, ha minden olyan kérdésre helyesen válaszolt, amelyet nem hagyott ki?

5125 Kornélia elhatározza, hogy ma délután különös módon internetezik: amikor megnyit egy weblapot, az oldalon található linkek közül ugyanakkora valószínűséggel nyitja meg bármelyiket. Tudjuk, hogy az általa látogatott *A*, *B*, *C*, *D* oldalakon sorban 4, 5, 2 és 4 hiperhivatkozás található. Az ötödik megnyitott oldal (*E*) egy női magazin weboldala. Mekkora volt előzetesen annak a valószínűsége, hogy pont ide jut (akár más útvonalon), ha

a) minden oldalon minden link különböző weblapokra mutat? (Tehát csak az utolsó, *D* oldal egyik linkje visz *E*-re.)

b) minden általa megtekintett *A*, *B*, *C*, *D* oldalról mutat egy link a női magazin *E* oldalára, de a többi link mind más, különböző oldalakra mutat?

c) minden általa megtekintett A, B, C, D oldalról mutat egy link a női magazin E oldalára, de a többi, egy oldalon található link mind ugyanarra az oldalra mutat?

d) Mekkora valószínűséggel nem talál Kornélia A, B, C, D weblapokon keresztül a női magazin E oldalára, ha

1. az A, B, C, D oldalakról egy-egy link mutat az E-re;
2. az A oldal többi linkje a B-re, a B oldal többi linkje a C-re, a C oldal többi linkje a D-re mutat, illetve
3. a D oldal minden linkje különböző oldalakra visz?

Statisztika

5126 Adott az alábbi rangsorba rendezett minta.

0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 9, 10, 10, 11, 12

A terjedelmet három egyenlő részre osztva soroljuk az adatokat „alacsony", „közepes", „magas" kategóriákba. Készítsünk belőlük gyakorisági diagramot. A diagram utolsó oszlopában tüntessük fel az osztályok relatív gyakoriságait is.

5127 Adottak a következő minták. Határozzuk meg mindegyik minta elemeinek átlagát, móduszát (vagy módusuait), mediánját, alsó és felső kvartiliseit.

a) 11, 8, 4, 4, 7, 2;

b) 12, 20, 7, 11, 16, 13, 15;

c) 6, 3, 3, 5, 2, 7, 5, 9;

d) 15, 8, 20, 11, 4, 43, 11, 1, 11.

5128 Határozzuk meg az előző feladat *a)* és *c)* mintáinak terjedelmét, szórását és a mediántól számított átlagos abszolút eltérését.

5129 Tekintsük a következő 10 elemű mintát:

3, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8.

A mintából készítettünk már egy gyakorisági táblázatot is A, B, C kategórianevekkel:

Kategória	Gyakoriság
A	2
B	5
C	3
Összesen	**10**

Készítsünk különböző diagramokat a mintából, ha be szeretnénk mutatni

a) az egyes kategóriák teljes mintához viszonyított arányait;

b) az egyes kategóriák egymáshoz viszonyított arányait;

c) hogy az elemek a mintán belül milyen megoszlást mutatnak.

5130 Tekintsük az alábbi gyakorisági diagramot, amelyben az egyes kategóriák osztályközökkel vannak megadva.

Osztályköz	Gyakoriság
0 – 4	7
5 – 9	11
10 – 14	2
Összesen	**20**

Adjunk becslést az adatok átlagára.

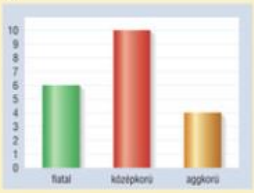
5131 Egy közösség tagjainak életkorairól az alábbi három diagram készült.

Melyikről milyen mintajellemzőt tudunk leolvasni?

Tudjuk még azt is, hogy az egyes kategóriákat hogyan alakították ki (évben megadva).

Kategória	Osztályköz
fiatal	0 – 30
középkorú	30 – 60
aggkorú	60 – 100

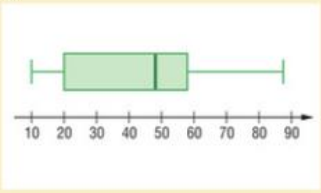
a)



b)



c)

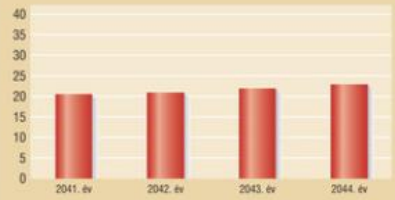


5132 Van négy becslésünk a jövőről: 2041-ben 20,5, 2042-ben 21, 2043-ban 22 és 2044-ben 23 pénzegység lesz a körte ára. Az alábbi négy diagramot különböző célokkal készítették az adatokról.

a) Mondjuk meg, melyik diagrammal mi lehetett a készítő célja.

b) Hogyan tudnánk reálisan ábrázolni az adatokat?

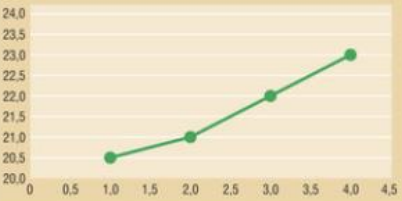
(1)



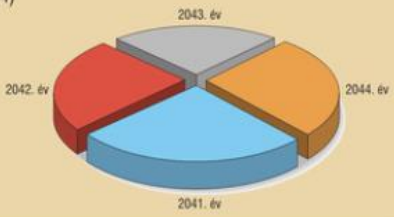
(2)



(3)



(4)



5133 Egy 30 fős osztályban 10 fiú tanul. A lányok magasságának átlaga 166 cm, a fiúké 175 cm. Hány centiméter a teljes osztály tanulóinak magassága?

5134 Egy osztályba 3-szor annyi leány jár, mint fiú. A fiúk átlagmagassága 10 cm-rel több a lányok átlagmagasságánál. Az összes tanuló átlagmagassága 170 cm. Mennyi a lányok átlagmagassága az osztályban?

5135 Két cég közzétett néhány adatot a dolgozói fizetéséről, ezeket az alábbi táblázatban összefoglaltuk.

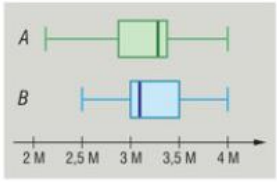
	Átlag	Módusz	Medián	Terjedelem
A cég	250	150	240	600
B cég	250	200	210	800

a) Melyik céget érdemes választania egy kezdő munkavállalónak?

b) Melyik céget érdemes választani egy sok év gyakorlattal rendelkező munkavállalónak?

c) Melyik céget érdemes választania annak, aki hosszú távra tervez és vezetői ambíciói vannak?

5136 Két hasonló korú, állapotú és népszerűségű, de különböző típusú használt autónk van. Bizonyos okok miatt valamelyiket el szeretnénk adni. Egy használtautó portál az adatbázisában szereplő azonos típusú járművek árairól automatikusan generált egy-egy dobozdiagramot (vagy más néven box-plot vagy sodrófadiagramot), ezek láthatók az ábrán.



a) Írjuk össze a lehetőségeket, milyen időbeli ütemezéssel szeretnénk pénzhez jutni.

b) Milyen helyzetben melyik autót, milyen áron érdemes meghirdetnünk?

5137 Két cégnél kiszámolták a dolgozók életkorának statisztikai mutatóit. A két mintáról a táblázatban látható értékeket tudjuk, de a táblázat szerkesztője az egyik adatot elgépelte.

	Átlag	Módusz	Medián	Szórás	Abs. átl. eltérés
A cég	42	38	41	10,5	7
B cég	33	30	44	7	6

a) Melyik adat „lóg" ki? Mi lehet a jó adat, ha csak egy számjegyet gépelt el a szerkesztő?

b) Mit állapíthatunk meg az adatokból?

5138 Egy hét elemű mintáról ismerjük a következőket:

$$A = 15,\quad R = 14,\quad Q_1 = 12,\quad Q_2 = 14,\quad Q_3 = 20.$$

Azt is tudjuk, hogy a minta egyetlen módusza 20. Képesek vagyunk-e az adatokból *egyértelműen* előállítani a mintát?

5139 Adott a négyelemű x, 86, 116, y rangsorba rendezett minta. Határozzuk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy

– a minta szórása 21;

– a mediántól vett abszolút átlagos eltérés 20;

– minden adat egész szám.

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET – ÖSSZEFOGLALÁS

Számok és műveletek

5140 Milyen (nem feltétlenül azonos) műveleti jelek írhatók a * helyére, hogy igaz legyen az állítás? Ha szükséges, zárójelet is használhatunk.

a) $20 + 7 * 3 - 4 * 11 = 9$;
b) $13 * 9 + 6 * 5 - 13 = 10$;
c) $1 + 2 * 3 + 4 * 5 = 6$;
d) $5 * 4 \cdot 3 - 2 * 1 = 15$;
e) $5 * 6 - 7 * 8 - 9 = -35$;
f) $10 \cdot 3 * 6 + 4 * 5 = 25$.

5141 Mi az alábbi műveletek eredménye? Ábrázoljuk számegyenesen a megoldást.

a) $[-1; 2] \cap [1; 3]$;
b) $]-2; 2[\cup [1; 3[$;
c) $[-4; 3[\setminus]2; 4]$;
d) $]2; 5[\cap [1; 4]$;
e) $]-4; 6[\setminus [-5; 7]$;
f) $[1; 7[\cup]2; 8[$;
g) $[-4; 3[\cap]-2; 5]$;
h) $]-3; 5[\cup [5; 7]$;
i) $[-3; 5] \setminus]6; 10[$;
j) $]-5; 3] \cap [4; 11]$;
k) $[2; 12] \setminus]4; 7]$;
l) $[-4; 2[\cup [-3; 1]$.

5142 Írjunk fel három racionális számot, melyek az $\left[\frac{1}{33}; \frac{2}{33}\right]$ intervallumban vannak.

5143 Írjunk fel három irracionális számot, melyek az $\left[\frac{1}{33}; \frac{2}{33}\right]$ intervallumban vannak.

5144 Két szám különbsége 8. Ha az elsőt osztjuk a másodikkal, a hányados 2 és a maradék is 2. Mennyi a két szám összege?

5145 Adjuk meg a következő két szám számtani és mértani közepét:

a) 2 és 8;
b) 1 és 16;
c) 4 és 16;
d) 2 és 2.

5146 Határozzuk meg az $a = 4$ szám ismeretében a b számot úgy, hogy a számtani közepük

a) 6;
b) 5;
c) 12;

illetve a mértani közepük

d) 6;
e) 5;
f) 12

legyen.

5147 Milyen számjegy áll a következő számok tizedes tört alakjában a tizedes vessző utáni 2010-edik helyen?

a) $\frac{21}{5}$;
b) $\frac{35}{6}$;
c) $\frac{13}{7}$;
d) $\frac{7}{17}$.

5148 Ha 7 szíriai aranyhörcsög 5 nap alatt 14 csomag olajos magkeveréket eszik meg, akkor

a) 10 aranyhörcsög 3 nap alatt hány ilyen csomag olajos magkeveréket fogyaszt el?

b) 4 aranyhörcsögnek hány napra elegendő 10 csomag a fenti keverékből?

5149 A tizenkettedik osztályos matematika-tankönyv oldalainak számozása 6-tal kezdődik, az utolsó számozott oldal 287. Hány számjegyet írtak le az oldalszámok nyomtatásakor? Az oldalak számozása során hányszor írták le az 5-ös számjegyet?

5150 A következő állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis:

a) Két természetes szám hányadosa nem lehet természetes szám.

b) Minden racionális szám reciproka racionális szám.

c) Két negatív egész szám szorzata lehet természetes szám.

d) Van olyan irracionális szám, amelyhez 1-et adva racionális számot kapunk.

e) Van olyan irracionális szám, amelynek a négyzete is irracionális.

f) Ha egy egész szám négyzetgyöke egész, akkor a harmadik gyöke irracionális szám.

5151 Hány nullára végződik az 56! szorzat?

5152 Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyben a számjegyek összege 2010?

5153 Melyik az a legkisebb természetes szám melyben a számjegyek szorzata 2000?

5154 A Minden Olcsó áruház akciót hirdet, amelyben minden termék árát 27%-kal csökkentik.

a) Az akció befejezése után hány %-kal növeljék az aktuális árakat, hogy minden annyiba kerüljön, mint az akció előtt?

b) Ha az akció befejezése után a „Senkinek sem kell" nevű termék pillanatnyi árát további 30%-kal csökkentik, hány %-a lesz a kapott ár az akció előtti árnak?

c) Az akció befejezése után a „Fogyi Fagyi" aktuális árát 45%-kal felemelik. Hány %-a lesz ekkor az ár az akció előtti árnak?

5155 Egy osztály tanulói a tanév során kétszer szerveztek közös színházlátogatást, télen és tavasszal. A tanulók közül mindenki el tudott menni legalább az egyik programra. A téli színházlátogatáson a tanulók 75%-a, a tavaszi színházlátogatáson pedig a diákok 60%-a vett részt. Az osztály tanulóinak hány százaléka vett részt mindkét színházlátogatáson? A tanulók hány százaléka volt csak a téli, illetve csak a tavaszi programon?

5156 Egy vállalat a dolgozóknak két csoportépítő tréninget szervezett. Minden dolgozónak kötelező volt legalább az egyik tréningen részt venni. Az elsőn a dolgozók 64%-a, a másodikon a dolgozók 72%-a vett részt. 54 olyan dolgozó volt, aki mindkét tréningen megjelent. Hányan dolgoznak a vállalatnál?

5157 Dús Kálmán havi bruttó fizetése 320 000 Ft. Adóra és egyéb járulékokra levonják a fizetése 38%-át.

a) Mennyi Dús Kálmán havi nettó fizetése? *b)* A nettó fizetésnek hány %-a a levonás?

c) A levont összegnek hány %-a a nettó bér?

5158 Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő végtelen szakaszos tizedes törteket:

a) $1,\dot{2}$; *b)* $1,\dot{9}$; *c)* $2,\dot{1}\dot{7}$; *d)* $0,5\dot{3}4\dot{2}$.

5159 Zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki ügyesen a következő műveletek eredményét:

a) $1623 \cdot 623 - 623^2$; *b)* $1956^2 - 956^2$; *c)* $\dfrac{314^2 - 196}{328}$.

Számelmélet, oszthatóság

5160 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis:

a) Ha egy szám osztható 4-gyel és 9-cel, akkor osztható 36-tal.

b) Ha egy szám osztható 2-vel és 18-cal, akkor osztható 36-tal.

c) Ha egy szám osztható 36-tal, akkor osztható 2-vel, 4-gyel, 9-cel és 18-cal.

5161 Fogalmazzunk meg

1. szükséges de nem elegendő;
2. elegendő, de nem szükséges;
3. szükséges és elegendő

feltételt

a) 15-tel; *b)* 45-tel; *c)* 12-vel

való oszthatóságra.

5162 Határozzuk meg azokat a pozitív egész a számokat, melyre:

a) $(15; a) = 1$; *b)* $(a; 48) = 24$; *c)* $[6; a] = 60$; *d)* $[a; 16] = 48$.

5163 Számológép használata nélkül egyszerűsítsük egy lépésben a következő törteket:

a) $\frac{126}{294}$; *b)* $\frac{720}{1176}$; *c)* $\frac{1425}{1725}$; *d)* $\frac{72^4}{24^6}$; *e)* $\frac{9240}{11088}$; *f)* $\frac{96^3}{144^2}$.

5164 Számológép használata nélkül (a legkisebb közös többszörös hatvány alakjának felhasználásával) számítsuk ki:

a) $\frac{7}{60} - \frac{5}{72}$; *b)* $\frac{3}{14} - \frac{2}{5} + \frac{8}{21}$.

5165 Írjunk természetes számot a jelek helyére úgy, hogy a szorzatok

a) 6 többszörösei; *b)* 10 többszörösei

legyenek:

$$A = 3 \cdot \square \cdot 2; \quad B = 9 \cdot \square \cdot \triangle \cdot 5; \quad C = 2 \cdot \triangle \cdot 5 \cdot \square.$$

5166 Számolás nélkül határozzuk meg, hogy hányszorosa a $11 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 5$ szorzat az alábbiaknak.

a) 13; *b)* 11; *c)* $5 \cdot 13$;
d) $11 \cdot 13$; *e)* $2 \cdot 13 \cdot 5$; *f)* $13 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11$;
g) 26; *h)* 22.

5167 Hány pozitív osztója van a 60-nak? Az eredményt ellenőrizzük felsorolással.

5168 Mennyinek felel meg a tízes számrendszerben?

a) 100111_2; *b)* 1201_3; *c)* 11002_4.

5169 Mennyinek felel meg az 1516

a) a kettes számrendszerben; *b)* a négyes számrendszerben; *c)* az ötös számrendszerben?

5170 Az alábbi tízes számrendszerbeli számokban milyen számjegy állhat az ismeretlenek helyén, ha igaz az oszthatóság:

a) $8 \mid \overline{6712a}$; *b)* $15 \mid \overline{34y25x}$; *c)* $12 \mid \overline{781b2a}$.

5171 Melyik az a legkisebb ötjegyű szám, amely 19-cel osztva 11-et ad maradékul?

5172 Az alábbi számok közül válasszuk ki a relatív prím párokat: 210, 297, 560, 800. Van-e közöttük három olyan szám, melyek relatív prímek?

5173 A kettő ötszöröséhez egyet adva újra prímszámot kapunk. Van-e másik prímszám, melynek az ötszörösét eggyel megnövelve az eredmény újra prímszám?

5174 A 28-nak melyik az a legnagyobb hatványa, amellyel a $16^{15} \cdot 35^{28}$ szorzat osztható?

5175 Az alábbi számokról döntsük el, hogy négyzetszámok-e vagy nem:
a) $2^8 \cdot 3^{16} \cdot 5^{20} \cdot 7^{100}$; *b)* $2^{2010} \cdot 3^{2009}$; *c)* $8^{42} \cdot 9^7 \cdot 25^9$.

5176 Indokoljuk meg, hogy miért nem prímszámok a következők:
a) $10^{10} + 8$; *b)* 10002000300040005; *c)* $10^{15} + 10^{25} + 25$.

5177 *a)* Milyen jegyre végződik öt darab egymást követő pozitív egész szám szorzata?
b) Milyen jegyre végződik öt darab egymást követő pozitív páratlan szám szorzata?
c) Milyen jegyre végződik az első hét prímszám szorzata?

5178 Egy pozitív számokból álló számtani sorozat első három eleme prímszám. Mennyi lehet a sorozat differenciája, ha az első három tag összege 51?

5179 Igazoljuk számológép használata nélkül a következő állításokat:
a) $9 \mid 10^{53} + 8$; *b)* $3 \mid 10^{10} - 4$; *c)* $6 \mid 10^{10} - 4$.

5180 Bizonyítsuk be, hogy a következő számok összetettek:
a) $10^{50} - 50$; *b)* $10^{70} - 7$; *c)* $10^{128} - 128$.

5181 Egy síparadicsomban az egyik csúcsról délre kék színű, nyugat felé piros pályán lehet lesiklani. Anna egész nap a kék pályán síel, ahol 8 perc alatt ér le, és a felvonóval 10 perc alatt jut fel a csúcsra. Bea folyamatosan a piros pályán síel, 12 perc alatt ér le és 11 perc alatt fel. Mindketten 2 percet töltenek a felvonóra való várakozással, pihenéssel minden leérkezéskor. Ha 8 óra 30 perckor egyszerre indulnak el a csúcsról lefelé, mikor fognak újra találkozni a csúcson?

5182 Határozzuk meg azokat a pozitív egész a és b számokat, amelyekre teljesül, hogy $(a; b) = 15$ és $[a; b] = 1350$.

5183 Félix matematikus. Ha ebben az évben megkérdezik tőle, hogy hány éves, így válaszol: *„Az életkorom fele prímszám, jövőre pedig a harmada lesz prím."* Hány éves lehet Félix, ha tudjuk, hogy életkora 20 és 70 év közé esik?

5184 Egy digitális óra kijelzőjén az órák és percek kettősponttal elválasztva jelennek meg, mindegyik rész egy-egy kétjegyű számot tartalmaz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha délelőtt 10 és 11 óra között valaki ránéz egy ilyen órára, akkor két relatív prím kétjegyű számot lát?

5185 Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható 10-zel és 10 db osztója van?

5186 Mennyi annak a számrendszernek az alapszáma, amelyben a tízes számrendszerben felírt 302-t így írjuk: 456_a?

5187 Milyen számjegyek írhatók a betűk helyére, hogy igaz legyen a következő összeadás?

$$1b341_5 + 213a_5 = 200c0_5.$$

5188 Milyen n egész számok esetén lesz a következő A kifejezés értéke egész szám?

$$A = \frac{n-2}{n+3} \quad (n \neq -3).$$

5189 Milyen n természetes számok esetén lesz a következő kifejezés értéke természetes szám?
a) $\frac{2n+10}{n+1}$; *b)* $\frac{3n+5}{n-5}$.

5190 Tudjuk, hogy $29 \mid 3a + 8b$ és $29 \mid 2a - 5b$. Bizonyítsuk be, hogy $29 \mid 11a - 12b$.

5191 Hány olyan $(x; y)$ pozitív egész számokat tartalmazó számpár van, amelyre

$$(x; y) = 5 \quad \text{és} \quad x + y = 200?$$

5192 Határozzuk meg a tízes számrendszerben az x értékét úgy, hogy igaz legyen a következő egyenlőség:

$$2^5 \cdot 9^x = \overline{259x}\,.$$

5193 Mennyi a 2^{2010} és 5^{2010} számok számjegyei számának az összege?

5194 Milyen n egész szám esetén lesz a következő szorzat prímszám:

$$|(n^3 - 63) \cdot (n^2 - 65)|\,?$$

5195 Osztható-e 2011-gyel a következő összeg:

$$1^{2011} + 2^{2011} + 3^{2011} + \ldots + 2009^{2011} + 2010^{2011} + 2011^{2011}?$$

Hatvány, gyök, logaritmus

5196 A 2-nek hányadik hatványai a következő számok:

a) $16^{-2} \cdot 128^3$; *b)* $\sqrt{1024} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; *c)* $\dfrac{32^3}{\sqrt[3]{512^5}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt[4]{256^{-3}} \cdot 4^{-1}}{\sqrt[3]{8^{-7}} \cdot 2^{-5}}$.

5197 Írjuk fel prímszámok hatványainak szorzataként a következő számokat:

a) $160^4 \cdot 28^3 \cdot 70$; *b)* $\dfrac{32^{-2} \cdot 14^5}{35^7 \cdot 16^{-3}}$; *c)* $\left[\dfrac{6 \cdot 125^{-1} \cdot 35^3}{14 \cdot (7 \cdot 3)^2}\right]^{-1}$; *d)* $\dfrac{180^{-4}}{90^{-8} \cdot 20}$.

5198 Zsebszámológép használata nélkül adjuk meg a következő műveletek eredményét:

a) $8^5 \cdot 2^8 : (64^3 \cdot 4^2)$; *b)* $(49^{-2} \cdot 7^5) \cdot \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-5}$; *c)* $\left[\left(\dfrac{213}{57}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^0$; *d)* $\dfrac{5^{11} - 5^{12} + 33 \cdot 5^{10}}{5^9 + 5^{11}}$.

5199 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\left(\dfrac{4}{2^4} + \dfrac{3}{2^3}\right) \cdot \dfrac{2^6}{5}$; *b)* $\left(\dfrac{4}{3^5} + \dfrac{2}{3^6}\right) \cdot \dfrac{3^9}{7}$; *c)* $\dfrac{3^3}{5^4} : \left(\dfrac{2}{5^3} - \dfrac{1}{5^4}\right)$; *d)* $\left(\dfrac{3^3}{4^5} - \dfrac{3^2}{4^5}\right) : \dfrac{3^2}{4^5}$;

e) $\dfrac{7^3}{5^4} : \left(\dfrac{9}{5^4} + \dfrac{4}{5^5}\right)$.

5200 Végezzük el a műveleteket:

a) $\sqrt{a^2 \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a}}}$ $(a > 0)$; *b)* $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{b}{a} \cdot \sqrt{a}}}$ $(a, b > 0)$;

c) $\sqrt[5]{\dfrac{2}{5}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{25}{4}} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{5}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt[20]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[10]{9} \cdot \sqrt[3]{3}}{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot 3^{-1} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}$.

5201 A nevezők gyöktelenítése után végezzük el a kijelölt műveleteket:

a) $\frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{5}{2\cdot\sqrt{3}}$;

b) $\frac{16}{3-\sqrt{7}} - \frac{2}{3+\sqrt{7}}$;

c) $\frac{3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}} + \frac{3\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}$;

d) $\left(\frac{7}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} + \frac{12}{2\sqrt{7}-\sqrt{24}}\right)\cdot(13\sqrt{7}+6)$;

e) $\left(\frac{13}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} - \frac{6}{4\sqrt{2}+\sqrt{28}}\right)\cdot(5\sqrt{8}-8\sqrt{7})$.

5202 Határozzuk meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők:

a) $\log_7(4x-3)$;

b) $\log_6\frac{5x+1}{2-3x}$;

c) $\log_9(2x^2+x-15)$;

d) $\log_x(7x-3)$;

e) $\log_{x-3}(7-x)$;

f) $\log_{x-1}(1-5x)$.

5203 Rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat:

a) $4^{-\frac{1}{2}}$, $3^{-\log_3 7}$, $\log_{25}\left(\frac{1}{5}\right)$, $\log_6\sqrt[3]{6}$;

b) $5^{1-\log_5 8}$, $\log_3 81$, $\sqrt[5]{-32}$, $9^{\sin\frac{\pi}{6}}$;

c) $100^{\lg 2}$, $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{-2}$, $\log_{11}\left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt[4]{11}}\right)$, $13^{\log_{\frac{1}{13}}1}$.

5204 Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

a) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{16}$;

b) $\log_{\sqrt{5}}25^{-3}$;

c) $\log_{\sqrt{27}}81^{-\frac{9}{5}}$;

d) $\log_{11}\frac{1}{121}$;

e) $\log_{25}\frac{1}{625}$;

f) $\log_7\frac{1}{\sqrt{7}}$;

g) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{8}$;

h) $\log_3\sqrt{243}$;

i) $\log_{\sqrt{27}}9$;

j) $\lg 0{,}001$;

k) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}32$;

l) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)^{-3}$;

m) $\log_a 1$, $a>0$, $a\neq 1$;

n) $\log_{a^5}\frac{1}{\sqrt[7]{a}}$, $a>0$, $a\neq 1$;

o) $\log_{\frac{1}{\sqrt{a}}}a^{\frac{3}{2}}$, $a>0$, $a\neq 1$;

p) $\log_a\sqrt[7]{a^{-2}}$, $a>0$, $a\neq 1$;

q) $\log_a\frac{1}{\sqrt[5]{a^{\frac{3}{8}}}}$, $a>0$, $a\neq 1$;

r) $\log_a\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}}{a}\right)$, $a>0$, $a\neq 1$;

s) $\log_a\left(a^{-2}\cdot\sqrt[6]{a^5}\right)$, $a>0$, $a\neq 1$;

t) $\log_a\left(\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}\right)$, $a>0$, $a\neq 1$;

u) $\log_a\left(\frac{a^{-1}\cdot\sqrt[3]{a^{-2}}}{\sqrt[6]{a^{-1}}\cdot\sqrt{a^{-3}}}\right)$, $a>0$, $a\neq 1$.

5205 Adjuk meg az x értékét a következő esetekben:

a) $\log_x 8 = 2$; *b)* $\log_8 x = 2$; *c)* $\log_8 2 = x$; *d)* $\log_x 27 = -\frac{3}{5}$;

e) $\log_{27} x = -\frac{5}{3}$; *f)* $\log_x 64 = -\frac{1}{6}$; *g)* $\log_x \sqrt{5} = 0{,}5$; *h)* $\log_{\sqrt{5}} x = -1$;

i) $\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{5}{3}$; *j)* $\log_{\sqrt{x}} 9 = 4$; *k)* $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = \frac{1}{2}$; *l)* $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = -2$.

5206 Végezzük el a következő hatványozásokat, majd adjuk meg a kifejezéseket a legegyszerűbb alakban:

a) $\dfrac{\left(25\cdot a^{-2}\cdot b^{5}\right)^{-4}}{\left(16\cdot b^{-2}\cdot a^{3}\right)^{-1}} : \dfrac{\left(8\cdot a^{-7}\cdot b^{-2}\right)^{5}}{\left(5\cdot a^{-6}\cdot b\right)^{3}}$; *b)* $\dfrac{a^{-3}\cdot\sqrt[3]{a^{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{-7}}}}{\left(\frac{5}{a^{8}}\right)^{-3}\cdot\sqrt{a^{-9}}}$.

5207 Pontos értékekkel számolva adjuk meg a következő műveletek eredményét:

a) $\sqrt{\sqrt{17}-2\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{17}-2\cdot\sqrt{2}}$; *b)* $\sqrt{\sqrt{57}+\sqrt{48}}\cdot\sqrt{\sqrt{57}-4\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{7}-2\cdot\sqrt{5}}$; *d)* $\left(\sqrt{5\cdot\sqrt{2}-1}+\sqrt{\sqrt{50}+1}\right)^{2}$;

e) $\left(\sqrt{\sqrt{27}-\sqrt{2}}+\sqrt{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^{2}$;

f) $\left(\sqrt{147}+\sqrt{45}-\sqrt{80}-\sqrt{75}\right)\cdot\left(\sqrt{75}+\sqrt{180}-\sqrt{125}-\sqrt{27}\right)$;

g) $\left(9\sqrt{3}-5\sqrt{18}+\sqrt{200}+4\sqrt{48}\right)\cdot\left(15\sqrt{3}+7\sqrt{8}+4\sqrt{27}-\sqrt{162}-\sqrt{12}\right)$;

h) $\sqrt{192x}+\sqrt{1200x}-\sqrt{300x}-\sqrt{48x}\quad (x>0)$;

i) $\left(\sqrt{245}+7\sqrt{5}+\sqrt{343}-\sqrt{125}\right)\cdot\left(9\sqrt{5}-7\sqrt{7}\right)$;

j) $\left(\sqrt[4]{1280}-\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{3125}-4\cdot\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$;

k) $\left(\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{320}+2\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{135}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}\right)$.

5208 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$; *b)* $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

5209 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis:

a) $\sqrt{11}+2=\sqrt{15+4\cdot\sqrt{11}}$; *b)* $\sqrt{12}-3=\sqrt{21-12\cdot\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{17-2\cdot\sqrt{15}}$; *d)* $\sqrt{28}-5\cdot\sqrt{3}=\sqrt{53-10\cdot\sqrt{21}}$.

5210 Zsebszámológép használata nélkül adjuk meg a következő kifejezések értékét:

a) $\log_{64}(\log_2 16\cdot\log_5 25)$; *b)* $\lg\left(25^{\log_3 2}\cdot 4^{\log_2 5}\right)$;

c) $\log_9\left(4^{\log_{16}25}-7^{\log_{49}16}\right)$; *d)* $(\log_{20}4+\log_{20}5)^{\log_4 27}$.

5211 A logaritmus definícióját és azonosságait felhasználva hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $3^{3+\log_3 5}$; *b)* $\sqrt[3]{10^{3+\lg 27}}$; *c)* $5^{1+\log_{25}16}$; *d)* $9^{1-\log_3 2}$;

e) $16^{\log_4 2}$; *f)* $2^{3-\log_2 3}$; *g)* $5^{3-\log_5 4}$; *h)* $10^{1-\lg 3}$;

i) $16^{\log_4 5}$; *j)* $\sqrt{7}^{\log_{49} 2}$; *k)* $16^{\log_2 3}$; *l)* $64^{\log_{\sqrt{2}} 2}$;

m) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5}$; *n)* $10^{-\lg 2} + 2^{2+\log_4 9}$; *o)* $8^{\log_4 3 - \log_2 3}$; *p)* $8^{\log_{64} 9 - \log_8 5}$;

q) $\sqrt{10^{6+\lg 36}}$; *r)* $19^{1+\frac{1}{2}\log_{19} 36}$; *s)* $\sqrt[3]{10^{\lg 8 + 3}}$; *t)* $25^{\log_5 2 + 1}$;

u) $\sqrt[3]{p^{9-\log_p 8}}$; *v)* $(\sqrt{2})^{1-\log_2 5}$; *w)* $10^{-\lg 2} + 3^{\log_9 16} - 9^{\log_3 2}$.

5212 Zsebszámológép használata nélkül döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb az egyes esetekben:

a) $(16^{\log_2 3})^{15}$ vagy $4^{15} \cdot 5^{30}$; *b)* $(\log_8 2)^{60}$ vagy $32^{-12\log_2 3}$;

c) $7(\lg 2 - \lg 5)$ vagy $\lg 128 + \lg 5^{-5}$; *d)* $\sqrt{48}$ vagy $-\frac{5}{\sqrt{12} - \sqrt{17}}$;

e) $\frac{60}{3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ vagy $\frac{50}{2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2}}$; *f)* $\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^5 \cdot 2^9}$ vagy $\frac{1}{3^4 \cdot 2^3} - \frac{1}{2^{11} \cdot 3^4}$;

g) $\dfrac{1000^{-2} : \left(\frac{1}{100}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} : 100^2}$ vagy $\dfrac{1}{\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot 10000^{-5}}}$.

5213 Adjuk meg normálalakban a következő műveletek eredményét:

a) $\frac{0{,}0037 \cdot 336 \cdot 10^5}{0{,}074 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}000048}$; *b)* $\frac{0{,}00000093 \cdot 1170000}{3 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5}}$.

5214 Végezzük el a műveleteket:

a) $\frac{2\sqrt{ab} + a}{4b - a} : \frac{2\sqrt{a}}{6\sqrt{b} - 3\sqrt{a}}$, $a > 0$, $b \geq 0$, $a \neq 4b$;

b) $\frac{5}{5\sqrt{x} + 15\sqrt{y}} \cdot \frac{x - 9y}{10\sqrt{x} - 30\sqrt{y}}$, $x, y \geq 0$, $x \neq 9y$;

c) $\frac{x + \sqrt{x} - 30}{x - 25} : \left(2 + \frac{2}{\sqrt{x} + 5}\right)$, $x \geq 0$, $x \neq 25$.

5215 Az Egyesült Arab Emirátusokban épül az első „ökováros", ahol várhatóan 50 000 ember fog lakni. A város energiaszükségletének 82%-át napenergiából biztosítják, 17%-át a városi szerves hulladék elégetésével nyerik, 1%-ot pedig szélturbinák adják.

Vizsgálatok szerint egy ember egy év (365 nap) alatt $1{,}7 \cdot 10^{11}$ J energiát használ fel.

a) Egy átlagos szélturbina teljesítménye 40 kW, a helyi időjárásnak megfelelően a szélturbinák átlagosan naponta 9 órát működnek ezzel a teljesítménnyel. Hány szélturbina megépítésére lesz szükség ahhoz, hogy a fenti feltételeket biztosítani tudják?

b) Egy átlagos napkollektor maximális teljesítménye 1800 W/m^2, de csak 70%-os hatásfokkal működik. Feltételezzük, hogy átlagosan naponta 11 órát süt a nap. Hány m^2 legyen az összes napkollektor területe?

5216 Egy apa a gyermeke születésekor elhelyezett egy bankban 100 000 forintot, évi 6%-os kamatra. Hány éves lesz a gyermek, amikor a betét eléri az 1 000 000 forintot, ha nem veszünk ki belőle és a kamat sem változik az évek során?

5217 Mely n természetes szám esetén igaz, hogy: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_n (n+1) = 7$?

5218 Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt[5]{5^{n-1}\sqrt{\ldots \sqrt[25]{\sqrt[5]{5}}}}, \quad \text{ha } n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Műveletek racionális kifejezésekkel

5219 Számítsuk ki $f\left(-\frac{7}{3}\right)$ értékét, ha

a) $f(x) = (3x-1)(3x+1) - 8 \cdot (x+2)^2 - (x-1)^2$;
b) $f(x) = (4x-1)^2 - (3x+2)^2 - 7(x-5)(x+5) - 4(x+13)$;
c) $f(x) = (5x+7)^2 - (2-x)^2 + (5x+6)(5x-6) - (7x-2)^2$.

5220 *a)* Igaz-e, hogy ha $4a - 3b = 5$, akkor $16a^2 - 24ab + 9b^2 = 25$?
b) Igaz-e, hogy ha $16a^2 - 24ab + 9b^2 = 25$, akkor $4a - 3b = 5$?

5221 Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

a) $49 - 25a^2$; *b)* $100b^3 - 81b$; *c)* $c^2 - 24c + 144$; *d)* $400 - 40d + d^2$;
e) $5e^2 - 60e + 180$; *f)* $49f - 56f^2 + 16f^3$.

5222 Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

a) $36p^4 + 12p^2q^2 + q^4$;
b) $-2pq + q^2 + p^2$;
c) $-p^2 - 2p - 1$;
d) $-6a - a^2 - 9$;
e) $3ab^2 + 3a + 6ab$;
f) $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$;
g) $16(m-z)^2 - 25(m+z)^2$;
h) $m^2 + 2mz + z^2 - p^2$;
i) $-2m^3z^4 - 4m^4z^3$;
j) $ab - am + kb - km$;
k) $5a(m-k) + m - k$.

5223 Írjuk fel elsőfokú tényezők szorzataként a következő polinomokat:

a) $a^2 + 4a - 21$;
b) $2b^2 + 11b + 15$;
c) $20c^2 - 13c + 2$;
d) $42d^3 + 85d^2 + 42d$.

5224 Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\dfrac{2a^2 + 7a + 6}{-2a^2 + 5a + 12}$;
b) $\dfrac{b^2 - 9b + 14}{6b^2 - 6b - 12}$.

5225 Adjuk meg a valós számoknak a legbővebb részhalmazát, melyen a következő kifejezések értelmezhetők. Egyszerűsítsük a kifejezéseket.

a) $\dfrac{a^2 - 4a}{a}$; *b)* $\dfrac{2 \cdot b^2 - 4b}{b-2}$; *c)* $\dfrac{c^4 - 4 \cdot c^3}{c-4}$; *d)* $\dfrac{d^2 - 49}{d+7}$;
e) $\dfrac{e-12}{e^2 - 144}$; *f)* $\dfrac{f^2 - 10f}{f^2 - 20f + 100}$; *g)* $\dfrac{g^2 - 36}{g^2 + 12g + 36}$.

5226 Határozzuk meg $x^2+\frac{1}{x^2}$ értékét, ha tudjuk, hogy $x+\frac{1}{x}=7$.

5227 Adjuk meg a valós számoknak a legbővebb részhalmazát, melyen a következő kifejezések értelmezhetők. Végezzük el az algebrai törtek szorzását és osztását:

a) $\frac{3a^2+a}{9a^2-6a+1}\cdot\frac{9a^2-1}{9a^2+6a+1}$;

b) $\frac{4b^2+12b+9}{2b-3}:\frac{20b^3-45b}{4b^2-12b+9}$;

c) $\frac{c^3-5c^2}{c^2-25}:\frac{c^3+5c^2}{c^2+10c+25}$;

d) $\frac{d^4-16}{d^2+4d+4}:\frac{d^4+4d^2}{d^3+2d^2}$;

e) $\frac{2e^2+e-3}{3e^2+5e-12}:\frac{2e^3+3e^2}{3e^2+2e-8}$;

f) $\frac{\frac{27}{f-4}+6}{1-\frac{f+5}{2f+1}}$;

g) $\frac{g^2+5g}{g^2-9}:\frac{g^2-25}{g^2-3g}$;

h) $\frac{g^2-gh}{gh+g^2}\cdot\frac{g^2h+h^2g}{2gh}$;

i) $\frac{i^2+6i+9}{24i+18}:\frac{i^3+27}{16i+12}$;

j) $\frac{5i+5j}{2i+2j}\cdot\frac{i^2-j^2}{2(j+i)^2}$.

5228 Adjuk meg a valós számoknak a legbővebb részhalmazát, melyen a következő kifejezések értelmezhetők. Végezzük el a következő törtek összevonását:

a) $\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{2x-3}$;

b) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}$;

c) $\frac{3a+5}{6a-2}-\frac{a+1}{3a-1}-\frac{4}{9a-3}$;

d) $\frac{b+5}{10b+25}-\frac{2b-4}{4b+10}-\frac{3-b}{2b+5}$;

e) $\frac{2c+1}{c+6}-\frac{2c-3}{c-6}+\frac{22c}{c^2-36}$;

f) $\frac{55+19{,}5d}{d^2-100}-\frac{2d+5}{2d-20}-\frac{7}{d+10}$;

g) $\frac{e+1}{2e+6}-\frac{9(e+5)}{2e^2-18}-\frac{2e}{3-e}$;

h) $\frac{f-2}{f^2+6f+9}-\frac{3}{3f+9}$;

i) $\frac{6}{g+5}\cdot\left(\frac{g+1}{4-2g}+\frac{g-1}{3(g-2)}\right)$;

j) $\frac{3}{2+j}-\frac{j+1}{4-j^2}+\frac{-1-3j}{j^2+4-4j}$.

5229 Adjuk meg a következő kifejezések értékét, ha tudjuk, hogy $3a-2b=5$ és a törtek nevezője nem 0.

a) $\frac{9a^2-4b^2}{30a+20b}$;

b) $\frac{15a^3}{9a^5-12\cdot a^4b+4\cdot a^3b^2}$.

5230 Hozzuk egyszerűbb alakra, majd adjuk meg a következő kifejezések helyettesítési értékét, ha $x=5$.

a) $\frac{6}{x+2}-\frac{x^2}{4-x^2}+\frac{x+2}{2-x}$;

b) $2-\frac{2}{2+\frac{1}{2-\frac{1}{x}}}$.

5231 Igazoljuk, hogy ha $a+b+c=0$, akkor $a^3+a^2\cdot c-a\cdot b\cdot c+b^2\cdot c+b^3=0$.

5232 Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ és $x \neq z$ és $\frac{x^2+y^2}{y^2+z^2} = \frac{x}{z}$, akkor $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$.

5233 Bizonyítsuk be, hogy ha k pozitív egész szám, akkor $\left(\frac{k}{3} - \frac{9}{k^2}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k}\right)$ értéke szintén egész szám.

Egyenletek, egyenlőtlenségek

5234 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $4(3x-1) - 2(x+5) = 3(4+3x)$;

b) $2(2x-11) - 5(2x+3) = 7(4-x)$;

c) $\frac{2}{3} \cdot (5x-3) = \frac{1}{2} \cdot (3x+5)$;

d) $\frac{4x-7}{4} - \frac{3x+10}{3} = 1$;

e) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{5} = x$;

f) $1 - x = \frac{1-2x}{2} + \frac{3-4x}{3}$;

g) $3(4-x) = 2[3-2(x+4)]$;

h) $\frac{3x+5}{18} + \frac{4x+1}{12} - \frac{5x-2}{6} = 0$;

i) $2x(x+1)(2-3x)(x-4) = 0$;

j) $2\frac{x-3}{5} + 3 = \frac{2-3x}{5} - 3\frac{x-2}{2}$;

k) $(x+4)(2x-1) = (-x-7)(4+x)$;

l) $x \cdot \frac{(15-x)(x+7)}{x-15} \cdot (2x-1) = 0$.

5235 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

a) $|x| = \frac{3-x}{2}$;

b) $-|x| + 3 = \frac{x+1}{3}$;

c) $x^2 - 6 = x$;

d) $x^2 = 3x - 2$.

5236 Adjuk meg a a következő egyenletek valós megoldásait:

a) $|2x+7| = 1$;

b) $|5x-13| = 7$;

c) $3 \cdot |7x-19| = 11$.

5237 Határozzuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletek megoldásait:

a) $14x^2 - 25x - 25 = 0$;

b) $3x - \frac{4}{x} - 1 = 0$;

c) $(4x+5)(5x-4) = x + 13$;

d) $(5x+1)(3x-5) = 2(1-19x)$;

e) $\frac{2x-2}{x-5} = 2x - 8$;

f) $\frac{2x}{x+6} = x$;

g) $2x - 2 = \frac{x^2+6}{x+3}$;

h) $x^2 = 9x$;

i) $4x^2 - x = 0$;

j) $3x^2 - 75 = 0$;

k) $(x+5)^2 = 25$;

l) $(x+1)^2 - 3 = 6$;

m) $\frac{3x-9}{x-3} = 3$;

n) $\frac{x^2-25}{x+5} = 0$;

o) $\frac{x^2+4}{x+4} = 1$.

5238 Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet,

a) amelynek a megoldásai: $x_1 = 5$, $x_2 = -3$;

b) amelynek az együtthatói egész számok és a gyökei $-\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{5}$;

c) amelynél a gyökök számtani közepe 5, a mértani közepük pedig 4;

d) amelynek az együtthatói egész számok és egyik gyöke: $x_1 = 3 - \sqrt{7}$.

5239 Mely valós számok esetén igazak a következő egyenletek:

a) $\sqrt{5x-3} = 2$;

b) $\sqrt{8-3x} = 4$;

c) $\sqrt{\frac{2x-1}{x}} = 3$;

d) $\sqrt{11-3x} = \sqrt{x-4}$;

e) $\sqrt{7x-5} = \sqrt{4x+7}$;

f) $\sqrt{3x+11} = \sqrt{2x-1}$;

g) $\sqrt[3]{x^2+28} - 4 = 0$;

h) $\sqrt[4]{2x - \frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 0$;

i) $\sqrt[7]{x+3} = -1$;

j) $\sqrt{x-7} - \sqrt{5-x} = 0$;

k) $\sqrt{20-x} = x - 20$;

l) $|3x+6| + \sqrt{(x-3y)^2} = 0$;

m) $|5y - 3x| + \sqrt{y-1} = 0$;

n) $x - \sqrt{25-x^2} = 1$;

5240 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő exponenciális egyenleteket:

a) $5^{x-1} = 625$;

b) $9^{2x-1} = 27^3$;

c) $2^{\frac{x}{3}-2} = 16^{1-x}$;

d) $\frac{4^{x-1}}{2^x} = 8^8$;

e) $5^{5x-2} - 1 = 0$;

f) $36 \cdot 2^x - 8 \cdot 6^{x-1} = 0$;

g) $\left(\frac{5}{3}\right)^{5x-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{3x-5}$;

h) $\frac{9}{\sqrt[3]{3^x}} = \frac{\sqrt{27}}{3}$;

i) $\sqrt[4]{5^x} = \sqrt[5]{625}$;

j) $\left(\frac{125}{343}\right)^x = \left(\frac{7}{5}\right)^9$;

k) $0{,}01 \cdot \sqrt{1000} = 10^{3x}$;

l) $\sqrt{7^x} \cdot \sqrt{2^x} = 196$;

m) $0{,}125^{2-x} = \frac{8}{2^{x-5}}$.

5241 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\log_3(2x+1) = 4$;

b) $\log_5(4x+1) = -1$;

c) $\lg(8x-15) = \lg(1-x)$;

d) $\lg(x-4)^2 = 2\lg(x-4)$;

e) $\frac{\log_4(x+2)}{\log_4(2x-1)} = 1$;

f) $\frac{\log_7(x+4)}{\log_7(x-2)} = 2$;

g) $\frac{\log_5(3x-2)}{2} = \log_5 x$;

h) $\lg(x-4) - \lg(x+1) = \lg(x-1) - \lg(2x+2)$;

i) $3 + \log_2 5 = \log_2(7x-2)$.

5242 Adjuk meg a $[0; 2\pi]$ intervallumon azokat a valós számokat, amelyekre igaz, hogy:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $2\cos x = -1$;

c) $\operatorname{tg} x = 1$;

d) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;

e) $\sin 8x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

f) $2\cos 5x = -\sqrt{3}$.

5243 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 \geq 6 - x$; *b)* $-x^2 + 2 \geq x$; *c)* $|x| - 3 < \frac{x-3}{2}$; *d)* $|x+2| - 1 \geq 2x$.

5244 Határozzuk meg a valós számoknak azt a részhalmazát, melynek elemeire teljesül a következő egyenlőtlenség:

a) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x+2}{5} \geq -1$; *b)* $\frac{13x-7}{4} - \frac{2x-3}{2} \leq -3$; *c)* $\frac{37}{4x-19} > 0$;

d) $\frac{17}{8x+13} < 0$; *e)* $\frac{x^2}{6x-1} \leq 0$; *f)* $\frac{13x+7}{x^2+22} > 0$;

g) $|2x-3| < 5$; *h)* $|7x-1| \geq 9$.

5245 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $2^{3x-7} \geq 16$; *b)* $3^{2-5x} < 81$; *c)* $16^{2x-3} \leq 32$;

d) $49^x < \frac{1}{343}$; *e)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \geq \frac{1}{32}$; *f)* $7^{3x-4} > \frac{1}{49}$;

g) $13^{2\cdot|x|-1} < 169$; *h)* $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x+4} \leq 1$; *i)* $\left(\frac{5}{7}\right)^{x-3} > \frac{49}{25}$.

5246 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\lg x \geq 4$; *b)* $\log_5 x > -1$; *c)* $\log_7 x \leq \frac{1}{2}$;

d) $\log_{0,5}(10-x) < 1$; *e)* $\log_5(x^2-25) \geq 0$; *f)* $\log_{\frac{1}{3}}(5x-3) \leq -3$;

g) $\log_{\frac{1}{5}}(5x-1) > -1$; *h)* $\log_{0,1}(10x-2) \geq -1$; *i)* $\lg(x^2-3) < 0$.

5247 Béla bácsi a piacon eladta a kivitt paradicsomok felét és még kettőt; másnap a megmaradt paradicsomok felét és még 2 paradicsomot. A harmadik napon Mari néninek adta a megmaradt paradicsomok felét és még kettőt, így neki is maradt még egy darab.

a) Hány paradicsomot vitt ki Béla bácsi eredetileg a piacra?

b) Mennyit adott Mari néninek a harmadik napon?

5248 Melyik az a szám, melyet hozzáadva 8-hoz, 5-höz és 3-hoz, három olyan számot kapunk, melyek közül az első úgy aránylik a másodikhoz, mint a második a harmadikhoz?

5249 Melyik az a két szám, melyek aránya 3 : 5, az összegük pedig 200?

5250 Egy apa életkora ebben az évben négyszerese a fia életkorának. Ezelőtt 6 évvel az apa hétszer volt idősebb a fiánál. Hány évesek most?

5251 Szonja anyukája 4 évvel ezelőtt 6-szor olyan idős volt, mint a lánya. 5 év múlva az anya életkora Szonjáénak a háromszorosa lesz. Hány évesek jelenleg?

5252 Móricka 12 éves, az anyukája háromszor annyi idős.

a) Hány évvel ezelőtt volt az anyukája négyszer annyi idős, mint ő?

b) Hány év múlva lesz kétszer annyi idős az anyuka, mint a fia?

5253 Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 10. Ha a számjegyeket felcseréljük, 72-vel kisebb számot kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

5254 Egy kétjegyű természetes szám egyik számjegye 3-mal kisebb a másiknál. Ha a jegyeit felcseréljük, az eredeti harmadánál 15-tel nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám?

5255 Antal gazda akácfákat telepít a földjére. Miután kijelölte a sorok helyét, elgondolkodott: *„Ha minden sorba 31 facsemetét ültetek, kimarad 12 csemete, de ha minden sorba 32-t teszek, az utolsó sorba nem jut, sőt, az előzőben is csak 28 kis fa lesz".*

Hány facsemetét vásárolt Antal gazda, és hány sort jelölt ki az ültetéshez?

5256 Két szám különbsége 100. Ha a nagyobb számot elosztjuk a kisebbel, a hányados is és a maradék is 4 lesz. Melyik ez a két szám?

5257 6 munkás napi 8 órai munkával 15 nap alatt végez egy feladattal. Hány nap alatt végez ugyanezzel a feladattal 5 munkás napi 3 órai munkával?

5258 Csaba és András együtt kezdenek egy munkához. András egyedül 12 óra alatt, Csaba 16 óra alatt végezne a munkával. Sajnos Csabának 4 óra munka után el kell mennie, így András egyedül fejezi be a munkát. Hány órát kell még dolgoznia?

5259 Mennyi 92%-os kénsavat kell hozzáönteni 10 g 80%-os kénsavhoz, hogy a keverék 82%-os legyen?

5260 Két tanya 12 km-re van egymástól. Bálint délután 13^{00} órakor indul *A* faluból gyalog *B* falu felé $2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, majd 16^{00} órakor barátja Gábor *B* falutól *A* felé $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel.

a) Mikor találkoznak?

b) Ki mennyi utat tesz meg a találkozásukig?

5261 Hajnali 5^{00} órakor indul egy tehervonat Szegedről $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel Budapest felé. 8^{00} órakor utána indul egy IC $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel.

a) Mikor éri utol az IC a tehervonatot?

b) Hány kilométert tettek meg a találkozásukig?

5262 Matyi futóedzéseket végez, és ma 3 km-rel többet futott, mint tegnap. Ha tegnap 7 km-rel kevesebbet futott volna, a tegnap lefutott hossz a mai mennyiségnek csak a harmada lett volna. Hány kilométert futott Matyi tegnap, illetve ma?

5263 Egy kisváros útjairól két géppel tisztítják el a havat. A régebbi autóval 8 óra, az újabbal 5 óra szükséges az utak megtisztításához.

a) Hány órakor végeznek az utak tisztításával, ha mindketten reggel 6-kor állnak munkába?

b) Hány órakor végeznek, ha reggel 6 órakor kezdenek, de a régebbi gép fél nyolckor meghibásodik, és nem tudja folytatni a munkát?

c) Hány órakor végeznek, ha reggel 6 órakor kezdenek, de az újabb gépet 8 órakor a városon kívülre irányítják?

5264 Egy kiránduló csoport egyes tagjai gyalog, mások kerékpárral indulnak el ugyanarról a helyről ugyanazon az útvonalon. A gyalogosok reggel nyolc órakor indulnak és egy óra ebédszünettel délután öt órára érnek célhoz. A gyalogosok óránként 5 km-t, míg a kerékpárosok 16 km-t tesznek meg.

a) Mekkora távot tesznek meg az adott napon a turisták?

b) Hány órakor induljanak el a kerékpárosok, ha útközben nem állnak meg és azt szeretnék, hogy egyszerre érkezzenek meg a gyalogosokkal?

5265 *a)* Mennyi 52%-os alkoholból lehet 3 liter tiszta víz hozzáadásával 28%-os alkoholt kapni?

b) 3 liter 52%-os alkoholhoz mennyi tiszta vizet kell öntenünk, ha 30%-os alkoholt szeretnénk kapni?

c) Mennyi 52%-os alkoholt és tiszta vizet öntsünk össze, ha 3 liter 28%-os alkoholt akarunk előállítani?

5266 Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 221 cm, két oldal aránya 3 : 7. Mekkorák a háromszög oldalai?

5267 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $|11x-7| = |19-9x|$;

b) $|3x-14| = |3x+26|$;

c) $|5x+13| = \frac{x+65}{5}$;

d) $|2x-3| = -9-8x$;

e) $|4x-11| = 2x-7$;

f) $|x-2| + |3x+1| = 5$;

g) $|x+2| + |x-5| = 10$;

h) $|3-x| - |4-x| = 2x+1$;

i) $5x+13 = \frac{|x|+65}{5}$;

j) $5x+13 = \frac{|x|+89}{5}$;

k) $3\cdot|5-x| + |x| = 25$;

l) $||x-1|-6| = 5$.

5268 Vizsgáljuk az $x^2 - 3ax + 2a^2 - a - 1 = 0$ másodfokú egyenletet, ahol a valós paraméter.

a) Milyen a paraméter értékek esetén lesz az egyenlet egyik gyöke $x_1 = 5$?

b) Adjuk meg azokat a paraméter értékeket, amelynél az egyenletnek lesz valós megoldása.

5269 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $(2x+1)(2x+2)(2x+3) = (x+1)(x+2)(x+3)$;

b) $\sqrt{x^2+4x-32}\cdot(x^2-3x-10) = 0$;

c) $(x-2)^2 - 5(x-2) + 6 = 0$;

d) $(x^2+x)^2 - 2(x^2+x) = 24$;

e) $(x^2+x+1)(x^2+x+2) - 30 = 0$.

5270 *a)* Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 252 átlója van?

b) Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 250-nel több átlója van, mint oldala?

c) Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynél az oldalak és átlók száma együtt 465?

5271 Adjuk meg a következő egyenletek valós megoldásait:

a) $x = \sqrt{2x+3}$;

b) $\sqrt{4-5x} = 3x$;

c) $x+2 = \sqrt{13x-4}$;

d) $2x-3 = \sqrt{7x+9}$;

e) $\sqrt{4x-7} = 1-x$;

f) $\sqrt{8x+1} = 1-2x$;

g) $\sqrt{x-3} - \frac{3}{\sqrt{x-3}} = 2$;

h) $\sqrt{2x^2+5x-3} = x+1$;

i) $\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+4)^2} = 11$;

j) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+4}$;

k) $\frac{x-1}{\sqrt{5x+1}} = \sqrt{x}$;

l) $\frac{x+1}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{2(x+1)}$;

m) $2x - 6\sqrt{x} = 8$;

n) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+5}} = \sqrt{4-x}$.

5272 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $15 \cdot 2^{x+3} - 7 \cdot 2^{x+1} + 2^x = 107$;

b) $8 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{x-2} - 3^{x-3} = 609$;

c) $5^{2x^2+5x-10} = 25$;

d) $0{,}5^{4x^2+11x-7} = 16$;

e) $3^{2x+2} - 10 \cdot 3^x + 1 = 0$;

f) $4^{x+2} - 65 \cdot 2^x + 2^2 = 0$;

g) $\sqrt{5^{2x+2}} \cdot \sqrt[3]{125^{x+4}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-3}$;

h) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2\cdot x^2-11x+10} = \frac{25}{4}$;

i) $2^{4x-1} \cdot 5^{4x-1} = 0{,}01^x$;

j) $2 \cdot 64^{\frac{x}{2}+1} + 3 \cdot 8^{1+x} = 289 + 15 \cdot 2^{3x-1}$;

k) $5^x = \frac{1}{5^x} + \frac{24}{5}$;

l) $3 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 2 = 9^{\sqrt{x}}$;

m) $9^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 81^{\sqrt{x}} + 3 = 0$;

n) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2x} = 3 \cdot 2^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}$;

o) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$;

p) $\left(\frac{1}{0{,}25}\right)^{2x} = 256$.

5273 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\log_3(5x-7) - \log_3(3x+9) = 2$;

b) $\lg(3x^2+8) - \lg(2x-1) = \lg(5x+6)$;

c) $2\lg(2x+3) = \lg(4x+1) + \lg(2x-3)$;

d) $\lg(14-x) = 2\lg(2x-4) - \lg(3x-11)$;

e) $\lg(9x-14) + \lg(3x+10) = 2$;

f) $\log_8(23x+8) - 2\log_8(4x+4) = -\frac{2}{3}$;

g) $\lg^2 x = \lg x^2 + 3$;

h) $1 - \frac{2}{\lg x + 1} = \frac{1}{5 - \lg x}$;

i) $\log_{x+1}(2x^2+1) = 2$;

j) $\log_x(x+7) + \log_x(2x+5) = 1 + \log_x(8x-4)$;

k) $\log_{\frac{1}{4}}[\log_{16}(\log_2 x)] = 1$;

l) $\frac{\lg x + \lg 4}{\lg x} = 3$;

m) $\ln(x^3+8) - \ln(x^2-2x+4) = \ln 3$;

n) $\log_3(x-4)(3+x) = \log_3(4+5x)$.

5274 Van-e olyan valós szám, amely mindkét egyenletnek megoldása?

a) $x + \frac{16}{x} = 10$ és $\frac{2^{x^2}}{4^x} = 8^{x+8}$;

b) $2\log_3 x = 2 - \log_3 4$ és $2x = |4x-3|$.

5275 Oldjuk meg a következő egyenleteket a $[-\pi; \pi]$ intervallumon:

a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;

c) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = -1$;

d) $\operatorname{tg}(2x - \pi) = \sqrt{3}$;

e) $\cos(2x+30^\circ)=\frac{1}{2}$;

f) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$;

g) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

h) $\sin^2\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$.

5276 Adjuk meg a következő egyenletek valós megoldásait:

a) $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin(2x+\pi)$;

b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}(x+\pi)$;

d) $\operatorname{ctg}\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$;

e) $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$;

f) $4\sin^2(x+\pi)=3$;

g) $\cos^2 x=\cos x$;

h) $\sin x=\sin^3 x$.

5277 Határozzuk meg a következő egyenletek valós megoldásait:

a) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$;

b) $2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cdot\cos x+3=0$;

c) $2\sin^2 x+3\cos x=3$;

d) $6-2\cos^2 x-9\sin x=0$;

e) $\sqrt{2}\cdot\sin x=\operatorname{tg} x$;

f) $2\cos x+\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg} x=0$;

g) $\frac{\cos x}{1-\sin x}=1+\sin x$;

h) $\cos^3 x=\cos^2 x$;

i) $\frac{1}{3}\cos^2 x=\sin^2 x$;

j) $\cos x\cdot\operatorname{tg} x=0$;

k) $\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x-4\cos^2 x=0$;

l) $\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg}^2 x=3+3\operatorname{ctg} x$.

5278 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{5}{x-3}\geq 0$;

b) $\frac{-2}{2x+1}<0$;

c) $\frac{5x-3}{2x+7}<0$;

d) $\frac{6x+5}{8x-3}\geq 0$;

e) $\frac{4x-3}{3-x}\leq 2$;

f) $\frac{7x+1}{3-2x}\geq -3$;

g) $\frac{x+5}{2x+1}+\frac{3x+1}{4x+2}>1$;

h) $\frac{7-3x}{6x-2}-\frac{4x+1}{3x-1}<-2$.

5279 Adjuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait:

a) $|4x-1|\geq x+3$;

b) $|8x-5|\leq 3x-1$;

c) $|2x-7|\geq 5x-9$;

d) $|7x-3|>4x-5$.

5280 Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait:

a) $(x+3)(2x-4)>0$;

b) $6x^2+x-15<0$;

c) $8x^2-10x-7>0$;

d) $(x+1)(3-x)(2x-1)>0$;

e) $\frac{-5,9}{x^2+3x-4} \geq 0$;

f) $\frac{3x+2}{2x^2-x-10} \geq 0$;

g) $\frac{-5-3x}{x^2-6x-7} \leq 0$;

h) $\frac{x^2-12}{3x} \geq \frac{4}{3}$;

i) $\frac{x^2-16}{x+4} < 0$;

j) $\frac{(3x+1)(x-2)}{(x-5)(3-x)} \leq 0$;

k) $\frac{x^2-x-30}{x^2-x-12} \leq 0$;

l) $\frac{3x^2+7x-6}{3x^2-14x-5} \geq 0$;

m) $1-\frac{x-1}{x-3} \geq 4 \cdot \frac{1}{x-1}$;

n) $\frac{2x-1}{(x-1)(x+4)} \leq \frac{1}{2}$;

o) $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-3} > 3$.

5281 Adjuk meg a természetes számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelynek elemeire teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

a) $\frac{4x+1}{11-3x} > 0$;

b) $4x^2-35x+24 \leq 0$.

5282 Mekkorák annak a szabályos sokszögnek a szögei, amelynek az átlóinak száma 100 és 200 között van?

5283 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $5^{3x-1} \geq 25^{4-x}$;

b) $32^{2x-1} \leq 8^{4x+11}$;

c) $9^{2x^2-x-10} \geq 1$;

d) $10^{7x-3} > 5$;

e) $\lg(7x-3) < \lg(4x+5)$

f) $\log_3(2x+5) > \log_3(x-1)$;

g) $\lg(3x-4)+\lg(2x+1) \leq \lg(4x+2)$;

h) $\lg(8x+4)-\lg(3x+5) \leq \lg(2x-4)$;

i) $\log_3[2+\log_2(x-4)] > 1$;

j) $\frac{\log_2(x+5)}{\log_2(x-4)} \geq 0$;

k) $216^{1-|x|} > \frac{1}{6}$;

l) $\log_2\frac{3-x}{3x-1} \geq 0$;

m) $\left(\frac{7}{3}\right)^{3x+2} > \frac{3}{7}$;

n) $2^x-3 < -2 \cdot 2^{-x}$.

5284 A következő egyenlőtlenségeket oldjuk meg a $[2; 5]$ intervallumon:

a) $7^{3x^2-11x-4} \leq 1$;

b) $1+\log_2 x+\log_2(x-1) < \log_2 3+\log_2(5x-7)$.

5285 Oldjuk meg a $[0; 2\pi]$ intervallumon a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\sin(x-\pi) \geq \frac{1}{2}$;

b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{3}$;

d) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5286 Határozzuk meg a következő egyenleteknél a kérdezett kifejezések értékét.

a) Mennyi az $x^2 - 11x + 3 = 0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege? A választ az egyenlet megoldóképletes megoldása nélkül adjuk meg.

b) A $2x^2 - 5x - 3 = 0$ egyenlet megoldása nélkül számítsuk ki az $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ kifejezés értékét, ahol x_1 és x_2 az egyenlet gyökei.

c) Határozzuk meg a $-2x^2 + 5x + 7 = 0$ egyenlet valós gyökei reciprokának az összegét az egyenlet megoldása nélkül.

d) Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, melynek együtthatói racionálisak, és az egyik gyöke:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}.$$

5287 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $x^2 - 3x - 13 - \dfrac{15}{x^2 - 3x - 15} = 0$;

b) $x + 2y + 3z = 2 \cdot \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2y-1} + \sqrt{3z-1}\right)$;

c) $7x + \dfrac{7}{x} = 14 - \sqrt{1 - x^2}$;

d) $\log_3^2(x^2 - 8x + 15) - \left[\log_3(x^2 - 8x + 15) - 1\right] \cdot \log_3 5 =$

$= \log_3(x^2 - 8x + 15) + \left[\log_3(x^2 - 8x + 15) - 1\right] \cdot \log_3 7.$

5288 Mely x, y pozitív egész számok a megoldásai a következő egyenletnek?

$$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2.$$

Egyenletrendszerek

5289 Bontsuk az 55-öt három részre úgy, hogy ha az első részt 3-mal osztjuk, a második részhez 3-at adunk, a harmadik részből 3-at kivonunk, mindig ugyanazt a számot kapjuk. Melyik ez a 3 szám?

5290 Határozzuk meg azokat a valós számpárokat, amelyekre teljesülnek a következő egyenletrendszerek:

a) $\left.\begin{matrix} 4x - 7y = 41 \\ x + 3y = -23 \end{matrix}\right\}$;

b) $\left.\begin{matrix} 2x - 3y = 9 \\ 3x + 6y = 17 \end{matrix}\right\}$;

c) $\left.\begin{matrix} 10x + y = 1 \\ 5x - 4y = 14 \end{matrix}\right\}$;

d) $\left.\begin{matrix} 2x - 3y = 12 \\ -4x + 9y = -31 \end{matrix}\right\}$;

e) $\left.\begin{matrix} 2x - 3y = 5 \\ 7x + 2y = -5 \end{matrix}\right\}$;

f) $\left.\begin{matrix} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{5} = \dfrac{1}{15} \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{7} = \dfrac{1}{35} \end{matrix}\right\}$;

g) $\left.\begin{matrix} \dfrac{7}{1-2x} - \dfrac{3}{y+1} = 15 \\ \dfrac{5}{1-2x} + 6 \cdot \dfrac{1}{y+1} = 27 \end{matrix}\right\}$;

h) $\left.\begin{matrix} x + 3y = 5 \\ x + 3y = x^2 + 5 \end{matrix}\right\}$;

i) $\left.\begin{matrix} x + y = 12 \\ x \cdot y = 32 \end{matrix}\right\}$;

j) $\left.\begin{array}{l} x-2y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right\}$;

k) $\left.\begin{array}{l} 4\cdot 3^x+2^y=16 \\ 5\cdot 3^x-3\cdot 2^y=3 \end{array}\right\}$;

l) $\left.\begin{array}{l} 5^{xy}=\dfrac{1}{25} \\ 9^x\cdot 3^y=27 \end{array}\right\}$;

m) $\left.\begin{array}{l} 2^x=4\cdot 16^y \\ \log_2 x+\log_2 y=1 \end{array}\right\}$;

n) $\left.\begin{array}{l} 5\cdot \lg x+\lg y=7 \\ 2\cdot \lg x-3\cdot \lg y=-4 \end{array}\right\}$;

o) $\left.\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}} y=1 \\ \log_2 x+\log_2 y=5 \end{array}\right\}$.

5291 Nagyi a befőzéshez meggyet és cseresznyét vásárol a piacon. Ha 3 kg meggyet és 5 kg cseresznyét vesz, 1980 Ft-ot kell fizetnie. Ha 5 kg meggyet és 3 kg cseresznyét vásárol, 1860 Ft-ba kerül. Mennyi 1 kg meggy, illetve cseresznye ára?

5292 Egy kamion és egy személyautó ugyanazon az úton közlekedik. Tíz órakor egymástól 40 km távolságra vannak. Ha azonos irányban haladnak, a személyautó tizenegy órakor éri utol a kamiont. Ha egymással szemben haladnának, már tizenkét perccel tíz óra után találkoznának. Mekkora a két jármű sebessége?

5293 Egy pozitív egész számot 19-cel osztva 5 lesz a maradék, ha az előző számnál 30-cal nagyobb számot 21-gyel osztjuk, a hányados ugyanannyi lesz, mint az imént, a maradék pedig 9. Mely számokat osztottuk, és mennyi a hányados?

5294 Mely valós számpárok a megoldásai a következő egyenletrendszereknek?

a) $\left.\begin{array}{r} x^2-y^2+x-y=20 \\ x+y+1=5 \end{array}\right\}$;

b) $\left.\begin{array}{r} 2xy=-3 \\ 6x+2y=-3 \end{array}\right\}$;

c) $\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=285 \\ 2x-3y=28 \end{array}\right\}$;

d) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{array}\right\}$;

e) $\left.\begin{array}{r} x\cdot y=36 \\ 2x^2+y^2=162 \end{array}\right\}$;

f) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{y-4}{x+1}=3 \\ (y-4)(x+1)=12 \end{array}\right\}$;

g) $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=-1 \\ x-3=\sqrt{3x+y} \end{array}\right\}$;

h) $\left.\begin{array}{r} x^2y-xy^2=-12 \\ x-y+xy=4 \end{array}\right\}$.

5295 Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{array}{l} 2^{x-3}+3^{y+1}=5 \\ 2^{x-4}+3^{y+3}=11 \end{array}\right\}$;

b) $\left.\begin{array}{l} 5^{2x-y}+2^{x+1}=21 \\ 5^{2x-y+1}-2^x=17 \end{array}\right\}$;

c) $\left.\begin{array}{l} \log_2(x+1)+\log_2(y-3)=2+\log_2 3 \\ \lg(6y-2)-\lg(x+2)=1 \end{array}\right\}$;

d) $\left.\begin{array}{l} 7\cdot \log_3 x-3\cdot \log_2 y=-6 \\ 3\cdot \log_3 x+8\cdot \log_2 y=81 \end{array}\right\}$;

e) $\left.\begin{array}{r} \log_7 \log_3(x+y)=0 \\ \lg x+\lg y=\lg 2 \end{array}\right\}$;

f) $\left.\begin{array}{r} \lg\left(x^2-13+y^2\right)=2 \\ \lg(x+y)=\lg 15+\lg(x-y) \end{array}\right\}$;

g) $\left.\begin{array}{l} y^{3x^2+7x-6}=1 \\ \lg(3x-y)=1 \end{array}\right\}$;

h) $\left.\begin{array}{l} 5^x-16y=0 \\ 4^x-25y=0 \end{array}\right\}$.

5296 Egy derékszögű háromszög átfogója 39 cm, a háromszög területe 270 cm^2. Mekkorák a háromszög befogói?

5297 János gazdának volt egy négyzet alakú földterülete, majd megvette a vele szomszédos, az övénél kisebb, szintén négyzet alakú földet, így 724 m^2-es lett az összes tulajdona. Ha körül akarja keríteni a teljes tulajdont, 116 m kerítésre van szükség. Mekkorák a négyzet alakú telkek oldalai?

5298 Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a következő egyenletrendszerek megoldásait. Határozzuk meg a kapott pontok távolságát.

a) $\left.\begin{array}{r} 17+x^2-y^2=10x-5y \\ 3x+4y=25 \end{array}\right\}$;

b) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=2x+15-6y \\ x^2+y^2+57=18x+2y \end{array}\right\}$.

5299 A 2010-et írjuk fel három természetes szám összegeként úgy, hogy ha a második számmal elosztjuk az első számot, hányadosul is és maradékul is 9-et kapunk. Ha a második számmal a harmadik számot osztjuk, a hányados ismét 9, de a maradék 82. Melyik ez a három természetes szám?

5300 Adjuk meg az egyenletrendszer megoldásait:

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot(x+6y)=27 \\ y\cdot(y-4x)=-11 \end{array}\right\}.$$

5301 Egy osztályban a statisztika tanításakor a tanár felmérte a tanulók lábméretét. Kiderült, hogy az osztály átlagos lábmérete pontosan 39,5. A lányok lábméretének átlaga néggyel kevesebb, mint a fiúké. Tudjuk még, hogy nyolccal több lány van, mint fiú. Hány lány és hány fiú jár az osztályba?

5302 Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{y}+\dfrac{x+1}{z}=1 \\ \dfrac{x+1}{y}-\dfrac{x-1}{z}=1 \end{array}\right\}.$$

5303 Milyen x, y, z valós számokra teljesül a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{r} x^4+y^4+z^4=178 \\ x^{2011}+y^{2011}+z^{2011}=2^{2011} \\ \dfrac{x+y+z}{yz}+\dfrac{1}{x}=0 \end{array}\right\}.$$

FÜGGVÉNYEK – ÖSSZEFOGLALÁS

A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai

5304 Rajzoljuk meg a következő lineáris függvények grafikonjait:

a) $x \mapsto 2x - 3$; *b)* $x \mapsto -\frac{3}{2}x + 5$; *c)* $x \mapsto -\frac{1}{2}x$; *d)* $x \mapsto 7$;

e) $x \mapsto \frac{6 - 2x}{2}$; *f)* $x \mapsto -5 - x$.

5305 Válasszuk ki az előző feladat lineáris függvényei közül

a) az egyenes arányosság; *b)* konstans;

c) egymással párhuzamos; *d)* nulladfokú

függvényeket.

5306 Írjuk fel annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, melynek képe illeszkedik az adott két pontra:

a) $A(3; 1)$ és $B(-1; 3)$; *b)* $A(0; -2)$ és $B(2; 1)$;

c) $A(-5; 3)$ és $B(7; 3)$; *d)* $A(0; 0)$ és $B(1; -3)$.

Melyik függvény

e) konstans; *f)* egyenes arányosság;

g) szigorúan monoton növekvő; *h)* szigorúan monoton csökkenő?

5307 Adjuk meg az $f: x \mapsto m \cdot x + b$ lineáris függvény hozzárendelési szabályát, ha

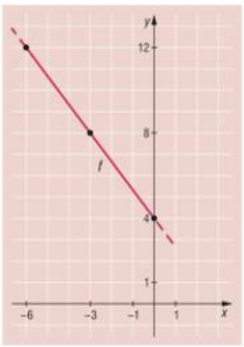
a) $m = 5$ és illeszkedik a $P(1; 7)$ pontra; *b)* $m = -\frac{3}{4}$ és illeszkedik a $P(2; 0)$ pontra;

c) $m = -0{,}25$ és illeszkedik a $P(8; 2)$ pontra; *d)* $m = 0$ és illeszkedik a $P(7; 5)$ pontra.

5308 Ábrázoljuk a $[-3; 6]$-on a következő lineáris függvények grafikonját, és jellemezzük értékkészlet, zérushely és monotonitás szerint.

a) $x \mapsto \frac{1}{3}x + 3$; *b)* $x \mapsto 1 - x$; *c)* $x \mapsto -3$; *d)* $x \mapsto \frac{2}{3}x$.

5309 Az alábbi ábrán egy f lineáris függvény grafikonjának részlete látható.



a) Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát.

b) Határozzuk meg a következő értéket:

$$\frac{f(-3) + f(-6)}{f(6)}.$$

c) Számoljuk ki a függvény zérushelyét.

5310 Ábrázoljuk a következő függvény grafikonját:

$$f(x)=\frac{4x-6}{3},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Határozzuk meg a függvény tengelymetszeteit.

5311 Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f(x)=2x-3 \quad \text{és} \quad g(x)=-\frac{1}{2}x+2.$$

A következő pontok közül melyek illeszkednek f, valamint g függvény grafikonjára?

$A(3;3)$, $B(4;0)$, $C(6;-1)$, $D(2;1)$, $E(0;-3)$, $F(-2;3)$.

5312 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját a $]-4;5[$-on:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2},\quad g(x)=\frac{x^2-16}{x-4} \quad \text{és} \quad h(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}.$$

Adjuk meg az egyes függvényeknél, hol pozitívak az adott intervallumon.

5313 Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetőek:

a) $\dfrac{2x^2-9x+4}{x-4}$; *b)* $2x-1$.

Ábrázoljuk az ezen a halmazon értelmezett

c) $x\mapsto\dfrac{2x^2-9x+4}{x-4}$; *d)* $x\mapsto 2x-1$

függvény grafikonját a $[-1;5[$-on. Állapítsuk meg a függvények értékkészletét.

5314 Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját:

a) $x\mapsto 2x$, $x\mapsto 2x-3$, $x\mapsto|2x-3|$;

b) $x\mapsto 3x$, $x\mapsto 3x+1$, $x\mapsto|3x+1|$.

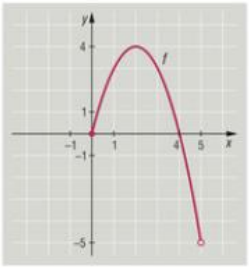
5315 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett következő függvények grafikonját:

a) $x\mapsto x-3$, $x\mapsto|x-3|$, $x\mapsto 2\cdot|x-3|$;

b) $x\mapsto x+2$, $x\mapsto|x+2|$, $x\mapsto -2\cdot|x+2|$;

c) $x\mapsto -2\cdot|x-1|+3$.

5316 Az alábbi ábrán egy másodfokú függvény grafikonja látható a $[0;5[$ intervallumon ábrázolva.



a) Adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát az adott intervallumon.

b) Mely intervallumon vesz fel a függvény negatív értéket?

c) Határozzuk meg, mely részeken növekszik a függvény.

d) Hány zérushelye van a függvénynek az adott intervallumon? Adjuk meg ezek helyét is.

5317 Ábrázoljuk függvénytranszformáció segítségével az alábbi függvények grafikonját ($x \in \mathbb{R}$):

a) $x \mapsto -2x^2 + 1$; *b)* $x \mapsto -(x-2)^2 + 3$; *c)* $x \mapsto x^2 - 4x + 4$;

d) $x \mapsto x^2 + 4x + 6$.

5318 Rajzoljuk meg a következő függvény grafikonját a $[-2; 3[$-on:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0, \\ -2x^2, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Jellemezzük a függvényt értékkészlet, zérushely, monotonitás szempontok szerint.

5319 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

$$f(x) = (x-4)^2 - 2 \quad \text{és} \quad g(x) = -(x+5)^2.$$

a) Állapítsuk meg, hol veszik fel a függvények a -1 értéket.

b) Határozzuk meg, hogy az adott pontok közül melyek illeszkednek az f és melyek a g függvény grafikonjára:

$$A(2; 2), \quad B(-3; -4), \quad C(1; 7),$$
$$D(6; 2), \quad E(-6; -1), \quad F(-1; -1).$$

5320 Ábrázoljuk függvénytranszformációval az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvények grafikonját:

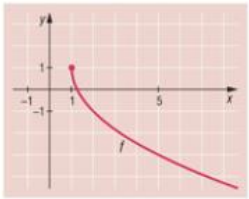
a) $x \mapsto \sqrt{x} - 3$; *b)* $x \mapsto \sqrt{x+4} - 2$; *c)* $x \mapsto -2 \cdot \sqrt{x}$;

d) $x \mapsto \sqrt{-x} - 4$; *e)* $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3-x}$; *f)* $x \mapsto \sqrt{4 \cdot (x-1)}$.

5321 Az ábrán a négyzetgyökfüggvény transzformált képét láthatjuk.

a) Fogalmazzuk meg, hogy milyen függvénytranszformációs lépések egymás utáni végrehajtásával kaptuk a grafikont.

b) Írjuk fel az így kapott függvény hozzárendelési szabályát.



5322 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-3} - 2$; *b)* $g(x) = x \mapsto \sqrt{4-x} - 2$.

Adjuk meg azokat az x értékeket, melyekre $f(x) \geq 2$, illetve $g(x) < 0$.

5323 Az alábbi függvények közül válasszuk ki, melyek a fordított arányosság hozzárendelési szabályai. Ábrázoljuk őket.

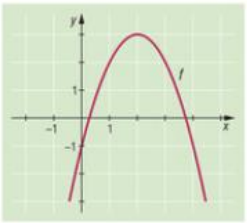
a) $f(x) = \frac{3}{x}$; *b)* $g(x) = \frac{5-2x}{2}$; *c)* $h(x) = \frac{-1}{x-2} + 2$;

d) $i(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ $(x \neq -3)$; *e)* $j(x) = \frac{2x-4}{3x-6}$ $(x \neq 2)$.

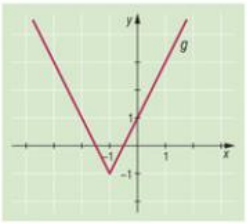
Milyen függvények hozzárendelési szabályát látjuk még? Nevezzük meg őket.

5324 Válasszuk ki, melyik hozzárendelési szabály tartozik a grafikonhoz. Adjuk meg a függvény szélsőértékét.

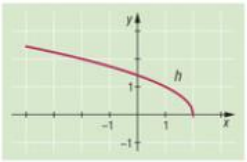
a) (1) $x \mapsto x^2 + 3$;
(2) $x \mapsto -(x+2)^2 + 3$;
(3) $x \mapsto (x-2)^2 - 3$;
(4) $x \mapsto -(x-2)^2 + 3$.



b) (1) $x \mapsto \frac{1}{2}|x-1| - 1$;
(2) $x \mapsto 2|x-1| - 1$;
(3) $x \mapsto 2|x-1| + 1$;
(4) $x \mapsto 2|x+1| - 1$.



c) (1) $x \mapsto \sqrt{x} + 2$;
(2) $x \mapsto -\sqrt{x+2}$;
(3) $x \mapsto \sqrt{2-x}$;
(4) $x \mapsto \sqrt{x+2}$.



5325 Adjunk meg 3 olyan értékpárt, amely eleget tesz a hozzárendelésnek:

a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ x \mapsto -\frac{2}{3}x$;

b) $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \frac{3x}{x-1}$ $(x \neq 1)$;

c) $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \frac{5}{7}x + 1$;

d) $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \sqrt{x-3}$ $(x \geq 3)$.

5326 Adjuk meg a következő függvények grafikonjairól kijelölt pontok hiányzó koordinátáit, és rajzoljuk meg a grafikonokat.

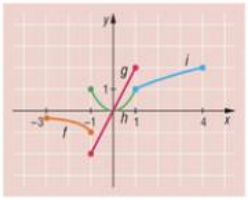
a) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{5}$, $A\left(\frac{1}{5}; \square\right)$, $B\left(-\frac{6}{5}; \square\right)$, $C(\square; 0)$;

b) $g(x) = (x-2)^2 - \frac{7}{4}$, $A\left(\square; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\square; \frac{9}{4}\right)$, $C(-1; \square)$;

c) $h(x) = |3 - 2x| + 1$, $A\left(-\frac{1}{2}; \square\right)$, $B(\square; 5)$, $C(\square; 1)$;

d) $i(x) = -2 \cdot \sqrt{2x-5}$, $A\left(\frac{1}{2}; \square\right)$, $B(7; \square)$, $C(\square; -4)$.

5327 A következő függvények grafikonját ábrázoltuk az ábrán:



a) $x \mapsto 2x$, $x \in [-1; 1]$;

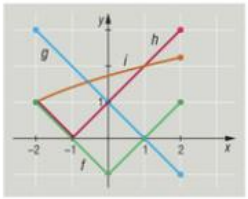
b) $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in [1; 4]$;

c) $x \mapsto x^2$, $x \in [-1; 1]$;

d) $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \in [-3; 1]$.

Az ábrán ezeket így neveztük el: f, g, h, i. Állapítsuk meg, melyik név melyik függvényhez tartozik.

5328 A következő függvények grafikonját ábrázoltuk az ábrán:



a) $x \mapsto 1 - x$, $x \in [-2; 2]$;

b) $x \mapsto |x| - 1$, $x \in [-2; 2]$;

c) $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 1}$, $x \in [-2; 2]$;

d) $x \mapsto \sqrt{x + 3}$, $x \in [-2; 2]$.

Melyik függvényhez melyik grafikon tartozik?

5329 Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $x \mapsto -x + 1$, $|x| \leq 2$;

c) $x \mapsto |x - 3|$, $|x| \leq 4$;

d) $x \mapsto \frac{1}{x - 2}$, $-3 \leq x < 2$, $2 < x \leq 3$;

e) $x \mapsto \sqrt{x + 1}$, $-2 \leq x < 2$;

f) $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 1}$, $-2 \leq x \leq 2$;

g) $x \mapsto \sqrt{2 - x}$, $-2 \leq x \leq 2$.

5330 Függvénytranszformációk segítségével ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $f(x) = 2 + \frac{1}{x - 3}$, $x \neq 3$;

b) $g(x) = -\frac{1}{x + 1}$, $x \neq -1$;

c) $h(x) = |\sqrt{x} - 1|$, $x \geq 0$;

d) $i(x) = 2 \cdot \sqrt{x - 2}$, $x \geq 2$.

5331 Ábrázoljuk a valós számok halmazán az alábbi hozzárendelési szabállyal értelmezett függvények grafikonját:

a) $f(x) = -2 \cdot 2^{x+1}$;

b) $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x-1} + 1$;

c) $h(x) = 2^{-x} - 2$.

5332 Adott az $f(x) = 2^x - 3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény. A függvény ábrázolása után jelöljük meg a grafikonján azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyek az alábbi két feltételt egyidejűleg teljesítik:

$$x < 3 \quad \text{és} \quad y \geq -2.$$

5333 Egy exponenciális függvényről tudjuk, hogy a hozzárendelési szabálya:

$$x \mapsto a^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A $P(3; 7)$ pont illeszkedik a függvényre.

a) Határozzuk meg a értékét. Ábrázoljuk a függvény grafikonját a $[0; 3[$-on.

b) Adjuk meg ezen az intervallumon a függvény értékkészletét.

c) Hogyan változna az értékkészlet, ha a függvény grafikonját az $[1; 3]$-on ábrázolnánk?

5334 Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját ($x \in \mathbb{R}$):

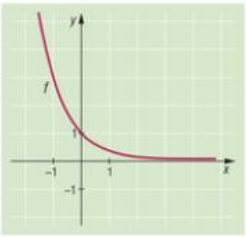
a) $x \mapsto 5 \cdot 5^x - 1$;

b) $x \mapsto \frac{2^x}{4} + 1$;

c) $x \mapsto \frac{3^x + 9}{3}$;

d) $2^{-x} - 3$.

5335 Az ábrán az $x \mapsto a^x$ exponenciális függvény grafikonja látható.



a) Határozzuk meg az a értékét.

Írjuk fel annak a függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonját úgy kapjuk, hogy az ábrán látható grafikont

b) tükrözzük az x tengelyre;

c) tükrözzük az y tengelyre;

d) eltoljuk az x tengely mentén 3 egységgel jobbra;

e) eltoljuk az y tengely mentén 2 egységgel lefelé.

5336 Adott az alábbi függvény:

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ f(x) = \log_a x,$$

melyről tudjuk, hogy a $P(9; 2)$ pont illeszkedik a grafikonjára.

a) Határozzuk meg a értékét, és adjuk meg az f hozzárendelési szabályát.

b) Mennyi $f(3)$, $f(-1)$ és $f(1)$ értéke?

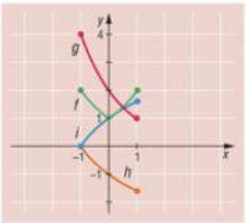
5337 Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto \log_2 x, \quad x \in]0{,}5; 8[$;

b) $x \mapsto \log_2(x - 3), \quad 3 < x \leq 5$;

c) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x + 1), \quad -1 < x \leq 3$.

5338 A következő függvények grafikonját ábrázoltuk az ábrán:



a) $x \mapsto \log_2(x + 2), \quad x \in [-1; 1]$;

b) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x + 2), \quad x \in [-1; 1]$;

c) $x \mapsto 2^{-x+1}, \quad x \in [-1; 1]$;

d) $x \mapsto 2^{|x|}, \quad x \in [-1; 1]$.

Melyik függvényhez melyik grafikon tartozik?

5339 Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját:

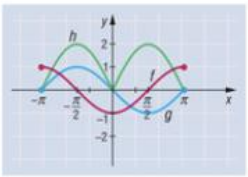
a) $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

b) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$;

c) $x \mapsto \operatorname{tg}(x - \pi)$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$;

d) $x \mapsto 2\cos x$, $0 \le x \le 2\pi$.

5340 A következő ábrán trigonometrikus függvények grafikonja látható. Adjuk meg képlettel az f, g, h függvényeket.



5341 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket:

a) $(3x - 6) - (2x - 4) \ge (x - 2)^2$;

b) $-\frac{2}{3}x + 1 < \frac{1}{3}x + 4$;

c) $|2 - 2x| \ge \frac{2}{3}x + 2$.

5342 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto x^2 + 2x$, $x \in [-3; 1]$;

b) $x \mapsto \frac{x}{x - 1}$, $-2 \le x \le 3$, $x \ne 1$;

c) $x \mapsto |x - 1| + |x + 2|$, $-3 \le x \le 2$;

d) $x \mapsto \sqrt{2 - x}$, $-2 \le x \le 2$;

e) $x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, $0 \le x \le 4$.

5343 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját, és határozzuk meg a zérushelyüket:

a) $x \mapsto |x - 2| - 2$, $0 \le x \le 4$;

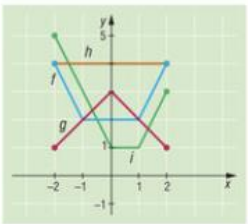
b) $x \mapsto \frac{x}{x + 1}$, $0 \le x \le 3$;

c) $x \mapsto \sin 2x$, $-\pi \le x \le \pi$;

d) $x \mapsto \sqrt{x - 2}$, $2 \le x \le 4$;

e) $x \mapsto \log_2 |x - 2|$, $0 \le x \le 5$, $x \ne 2$.

5344 A következő függvények grafikonját ábrázoltuk az ábrán:



a) $x \mapsto |x - 1| + |x + 1|$, $-2 \le x \le 2$;

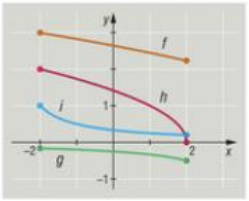
b) $x \mapsto |x - 2| + |x + 2|$, $-2 \le x \le 2$;

c) $x \mapsto \big||x| - 3\big|$, $-2 \le x \le 2$;

d) $x \mapsto |x - 1| + |x|$, $-2 \le x \le 2$.

A grafikonok mellé írtuk az f, g, h, i betűket. Döntsük el, melyik betű melyik függvényt jelöli.

5345 A következő függvények grafikonját ábrázoltuk az ábrán:



a) $x \mapsto \sqrt{2-x}$, $-2 \le x \le 2$;

b) $x \mapsto \sqrt{7-x}$, $-2 \le x \le 2$;

c) $x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$, $-2 \le x \le 2$;

d) $x \mapsto \dfrac{1}{x-4}$, $-2 \le x \le 2$.

Melyik függvényhez melyik grafikon tartozik?

5346 Határozzuk meg a valós számok halmazán azt a legbővebb részhalmazt, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetőek:

a) $\sqrt{(x-2)^2}$; *b)* $x-2$; *c)* $\left(\sqrt{x-2}\right)^2$.

Ábrázoljuk a kifejezésekkel megadott függvények grafikonját a $[-3; 4[$ intervallumon. Határozzuk meg a függvények értékkészletét.

5347 Határozzuk meg a valós számok halmazán azt a legbővebb részhalmazt, amelyen a következő kifejezések értelmezhetőek:

a) $\dfrac{x-7}{x-7}$; *b)* $\dfrac{|x-7|}{x-7}$.

Ábrázoljuk az alábbi függvények grafikonját:

$$f\colon x \mapsto \frac{x-7}{x-7} \quad \text{és} \quad g\colon x \mapsto \frac{|x-7|}{x-7}.$$

Határozzuk meg a függvények értékkészletét.

5348 Határozzuk meg a valós számok halmazán azt a legbővebb részhalmazt, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetőek:

a) $3^x + 1$; *b)* $\dfrac{9^x - 1}{3^x - 1}$.

Ábrázoljuk a $[-2; 1]$-on a következő függvények grafikonját:

c) $x \mapsto 3^x + 1$; *d)* $x \mapsto \dfrac{9^x - 1}{3^x - 1}$.

Határozzuk meg a függvények értékkészletét.

5349 Határozzuk meg a valós számok halmazán azt a legbővebb részhalmazt, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetőek:

a) $\log_{\frac{1}{2}} x$; *b)* $\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$.

Ábrázoljuk az ezen a halmazon értelmezett következő függvények grafikonját a $[0{,}5; 4[$-on:

c) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$; *d)* $x \mapsto \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$.

Adjuk meg a függvények értékkészletét.

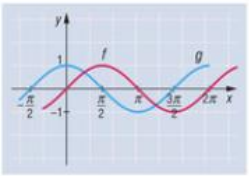
5350 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett alábbi függvény grafikonját:

$$f\colon x \mapsto \Big|\big|\,|x-3|-2\big|-4\Big|.$$

a) Adjuk meg a függvény zérushelyeit.

b) Hol veszi fel a függvény az 1 értéket?

5351 Az ábrán két ismert alapfüggvény grafikonja látható, jelölje őket f és g.



a) Mely függvényeket jelölik a grafikonok?

Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

b) $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f(\pi)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}$;

c) $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}$;

d) $\dfrac{g(2\pi)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{g\left(\frac{\pi}{4}\right)}$;

e) $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)+g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{f\left(\frac{\pi}{6}\right)+g\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.

5352 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } 0\le x\le 2,\\ 4-x, & \text{ha } 2<x\le 4;\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{ha } -1\le x\le 3,\\ 5-x, & \text{ha } 3<x\le 5;\end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x+1), & \text{ha } -1<x\le 1,\\ \log_2 x-1, & \text{ha } 1<x\le 4.\end{cases}$

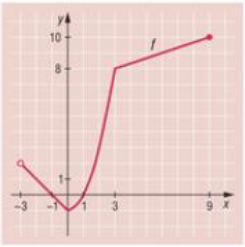
5353 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $-1\le x<1$ és $1<x\le 2$;

b) $g(x)=\begin{cases} x^2-4x+6, & \text{ha } 0\le x\le 2,\\ -x+4, & \text{ha } 2<x\le 4;\end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & \text{ha } -2\le x\le 0,\\ (x-1)^2, & \text{ha } 0<x\le 2.\end{cases}$

5354 Az ábrán a $]-3;9]$-on értelmezett f függvény grafikonja látható. A grafikon két egyenes szakaszból és egy parabolaívből áll össze.



a) Adjuk meg a függvényt az alábbi módon:

$$f\colon\ ]-3;9]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}\ldots, & \text{ha} \quad -3<x\le 0,\\ \ldots, & \text{ha} \quad 0<x\le 3,\\ \ldots, & \text{ha} \quad 3<x\le 9.\end{cases}$$

b) Határozzuk meg a függvény értékkészletét.

c) Adjuk meg az $f(x)\le 3$ egyenlőtlenség megoldásait.

5355 Két város távolsága 120 km. Marci reggel 7 órakor indul A-ból B-be kerékpárral $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Barátja, Jenő 9 órakor indul B faluból A felé $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. (Sebességük állandó.)

a) Ábrázoljuk Marci és Jenő mozgását (alkalmasan választott egységekkel) út–idő grafikonon.

b) Mikor találkoznak? Válaszunkat indokoljuk.

c) Hány kilométert tettek meg a találkozásukig külön-külön?

5356 Oldjuk meg függvények felhasználásával a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{x-2\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\cdot\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{x-1}$;

b) $\sqrt{x-2\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\cdot\sqrt{x-1}}=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$;

c) $2^{-|x|}=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\left(|x+1|+|x-1|\right)$.

5357 A megfelelő függvények felhasználásával oldjuk meg a következő egyenletet:

$$|1-\lg x|+|\lg x+1|=4\cdot\left(1-\frac{|x-5|}{5}\right).$$

Műveletek függvényekkel

5358 Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a megadott függvény grafikonját, és az adott függvény szintén megadott inverzét:

a) $x\mapsto x+4,\ -3\le x\le 3$; $\quad x\mapsto x-4,\ 1\le x\le 7$;

b) $x\mapsto 2x-1,\ -2\le x\le 2$; $\quad x\mapsto \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2},\ -5\le x\le 3$;

c) $x\mapsto 2-\dfrac{1}{2}x,\ -2\le x\le 6$; $\quad x\mapsto 4-2x,\ -1\le x\le 3$;

d) $x\mapsto x^2+1,\ 0\le x\le 2$; $\quad x\mapsto \sqrt{x-1},\ 1\le x\le 5$;

e) $x\mapsto \log_2 x,\ 1\le x\le 4$; $\quad x\mapsto 2^x,\ 0\le x\le 2$;

f) $x\mapsto \dfrac{1}{x+2},\ -1\le x\le 1$; $\quad x\mapsto \dfrac{1}{x}-2,\ \dfrac{1}{3}\le x\le 1$;

5359 Adottak a valós számok halmazán az alábbi hozzárendelési szabállyal értelmezett függvények:

$$f(x) = x + 1 \quad \text{és} \quad g(x) = 2x + 3.$$

Írjuk fel az alábbi függvények hozzárendelési szabályát. Adjuk meg a kapott függvények értelmezési tartományát, majd ábrázoljuk a függvények grafikonját.

a) $f + g$; *b)* $f \cdot g$; *c)* $\frac{g}{f}$; *d)* $f \circ g$; *e)* $g \circ f$.

5360 Az a, b, c függvényeket a következő hozzárendelési szabállyal értelmezzük:

$$a(x) = \sqrt{x}, \quad b(x) = x^2 \quad \text{és} \quad c(x) = x + 1.$$

Írjuk fel az összes olyan $f \circ g$ képzési szabállyal értelmezett függvény hozzárendelési szabályát, amelyben f és g az adott függvények valamelyikét jelöli. Adjuk meg a kapott függvények értelmezési tartományát.

5361 Adott a következő két függvény:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$$

$$g(x) = x^2, \quad x > 0.$$

Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

$$f \circ g, \quad g \circ f, \quad f \circ f, \quad g \circ g.$$

5362 Adjunk példát olyan különböző f és g függvényekre, amelyekre minden valós x-re

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

teljesül.

5363 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy igazak vagy hamisak. Válaszunkat indokoljuk.

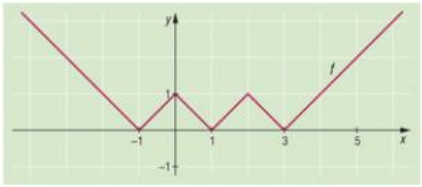
a) Ha az f és g függvény az $[a; b]$ intervallumon szigorúan monoton növő, akkor $f + g$ is szigorúan monoton nő az $[a; b]$ intervallumon.

b) Ha az f és g függvény az $[a; b]$ intervallumon szigorúan monoton növő, akkor $f \cdot g$ is szigorúan monoton nő az $[a; b]$ intervallumon.

5364 Az alábbi ábrán a valós számok halmazán az

$$f(x) = \Big|\big||x - 1| - 1\big| - 1\Big|.$$

hozzárendelési szabállyal értelmezett függvény grafikonja látható.



Adjuk meg az $[a; b]$ intervallumot úgy, hogy a függvény adott intervallumra való leszűkítésének

a) értékkészlete a $[0; 3]$ intervallum legyen;

b) három lokális minimumhelye legyen;

c) maximuma 2 legyen;

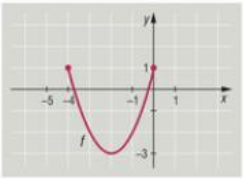
d) ne legyen zérushelye;

e) legyen inverz függvénye.

5365 Az alábbi ábrán egy másodfokú függvény grafikonja látható.

a) Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát és hozzárendelési szabályát.

b) Terjesszük ki a függvényt úgy, hogy a $[-6; 2]$ intervallumon folytonos maradjon, továbbá értékkészlete a $[-4; 3]$ intervallum legyen. Adjuk meg a kapott függvény hozzárendelési szabályát.



Függvénytulajdonságok

5366 Határozzuk meg az alábbi hozzárendelési szabállyal értelmezett függvények értelmezési tartományát:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$; *b)* $g(x) = \sqrt{2x-3}$; *c)* $h(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$;

d) $i(x) = \sqrt{x^2-4}$; *e)* $j(x) = \sqrt{x\cdot(x-1)}$; *f)* $k(x) = \sqrt{x^2+x-6}$.

5367 Állapítsuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát és zérushelyét:

a) $\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{x}-3}{4-\sqrt{x}}$; *c)* $\dfrac{x+2}{\sqrt{x-2}}$;

d) $\dfrac{x+3}{\sin x}$; *e)* $\dfrac{2x-7}{4x-14}$; *f)* $\dfrac{x-9}{\lg x}$;

g) $\log_2 2x - \log_2(x+1)$; *h)* $\log_x(4x-1)$.

5368 Mely valós számokra értelmezhetőek a következő kifejezések?

a) $\sqrt{\lg(4x^2-5x+1)}$; *b)* $\dfrac{3x^2}{\lg(x-4)} + \sqrt{x-3}$.

5369 Hány prímszámot tartalmaz a következő függvény értelmezési tartománya?

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+18x-17}}$$

5370 Adott a következő függvény:

$$f\colon \mathbb{R}^- \cup \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{-x+2}.$$

Határozzuk meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyhez tartozó függvényérték 3.

5371 Adjuk meg a következő függvények tengelymetszeteit:

a) $x \mapsto 3x-5$; *b)* $x \mapsto \sqrt{x-2}-1 \quad (x \geq 2)$; *c)* $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}-1 \quad (x \neq -1)$;

d) $x \mapsto 2^x - 2$; *e)* $x \mapsto -\log_2 x \quad (x > 0)$; *f)* $x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 4$.

5372 Adjuk meg a következő függvények értékkészletét:

a) $f(x) = x^2,\ -1 \leq x \leq 2$; *b)* $g(x) = \lg x,\ 0{,}1 \leq x \leq 10$;

c) $h(x) = 2^x - 1,\ -1 < x < 2$.

5373 Mi az értékkészlete az alábbi függvényeknek a $[-1; 7]$-on $(x \in \mathbb{R})$?

a) $f\colon x \mapsto \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$;

b) $g\colon x \mapsto \frac{1}{4}(x-3)^2 - 4$;

c) $h\colon x \mapsto -\frac{1}{4} \cdot |x-3| + 1$;

d) $i\colon x \mapsto \sqrt{x+2}$, $x \geq -2$.

5374 Adjunk egy-egy példát olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelynek értékkészlete

a) csak pozitív számokból áll;

b) csak negatív számokból áll;

c) a nemnegatív számok halmaza;

d) -5-nél kisebb elemet nem tartalmaz;

e) 6-nál nagyobb elemet nem tartalmaz.

5375 Határozzuk meg a következő függvények zérushelyeit:

a) $f(x) = \sqrt{2x-5}$;

b) $g(x) = x^2 + 3x$;

c) $h(x) = \frac{3x+5}{2x-1}$;

d) $i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 4$.

5376 Határozzuk meg a következő függvények zérushelyeit:

a) $f(x) = x^3 - x$, $-2 \leq x \leq 2$;

b) $g(x) = (x-2) \cdot \log_2 x$, $0 < x < 4$;

c) $h(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3}$, $x \neq 3$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $i(x) = x^2 - 5 \cdot |x| + 6$, $x \in \mathbb{R}$;

e) $j(x) = \sqrt{4x - x^2}$, $0 \leq x \leq 4$;

f) $k(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $0 < x < \pi$;

g) $l(x) = \frac{x^3 - x}{x-1}$, $x \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

5377 Mennyi a következő függvény legnagyobb értéke, és hol veszi fel ezt az értéket?

$$f(x) = -x^2 + 8, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5378 Az adott, valós számok halmazán értelmezett függvényeknek minimuma vagy maximuma van? Adjuk meg a szélsőérték helyét és értékét is.

a) $f\colon x \mapsto -(x-2)^2 + 3$;

b) $g\colon x \mapsto 2 \cdot |x| - 5$;

c) $h\colon x \mapsto -\sqrt{x+2}$;

d) $i\colon x \mapsto -|x-5|$;

e) $j\colon x \mapsto |x| + 4$;

f) $k\colon x \mapsto x^2 - 3$.

5379 Adjuk meg a következő függvények legnagyobb és legkisebb értékét:

a) $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$;

b) $g(x) = |x-1| + |x-3|$, $0 \leq x \leq 4$;

c) $h(x) = \log_2 4x$, $1 \leq x \leq 4$;

d) $i(x) = 2 + 2x - x^2$, $0 \leq x \leq 2$;

e) $j(x) = |x^2 - 4x|$, $0 \leq x \leq 4$;

f) $k(x) = \log_{0,5} x$, $1 \leq x \leq 4$;

g) $l(x) = x^2 - 4x$, $0 \leq x \leq 2$;

h) $m(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $0 \leq x \leq \pi$.

5380 Rendeljük hozzá az $[1; 6]$ pozitív egészeihez a pozitív osztóik számát.

a) Adjuk meg a függvény értékkészletét.

b) Ha léteznek a függvénynek szélsőértékei, akkor adjuk meg azokat.

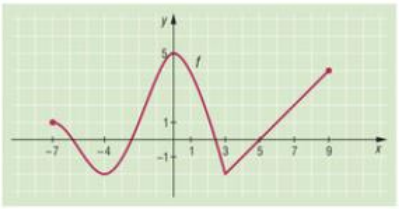
c) Van-e zérushelye a függvénynek, ha igen, hol?

5381 Határozzuk meg az alábbi függvények zérushelyeit, szélsőértékeit a függvény ábrázolása nélkül:

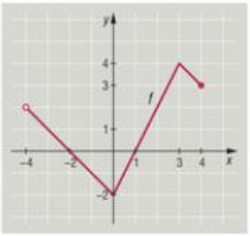
a) $f(x) = 10x^2 - 20x + 10$; *b)* $g(x) = x^2 - 14x + 49$; *c)* $h(x) = -x^2 - 5x + 6$;

d) $i(x) = 3x^2 - 5x + 1$; *e)* $j(x) = 4x^2 - 2x - 6$; *f)* $k(x) = -5x^2 + 16x - 3$.

5382 Adjunk meg olyan zárt intervallumot, ahol az alábbi, grafikonnal megadott függvény növekvő.



5383 Az alábbi függvény a grafikonjával adott. Válaszoljunk a következő kérdésekre:



a) Mi az értelmezési tartománya és értékkészlete a függvénynek?

b) Hol van a függvény zérushelye?

c) Adjuk meg a függvény szélsőértékeit.

d) Hol pozitív a függvény?

e) Hol negatív a függvény?

f) Írjunk fel olyan intervallumokat, ahol csökkenő a függvény.

5384 Állapítsuk meg, hol nő, hol fogy a következő függvény:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$; *b)* $g(x) = |x| - x, \quad x \in \mathbb{R}$;

c) $h(x) = 2^x, \quad x \in \mathbb{R}$; *d)* $i(x) = |3x - 1|, \quad x \in \mathbb{R}$.

5385 Határozzuk meg, hogy hol nő, hol fogy, hol van szélsőértéke a következő függvénynek:

a) $f(x) = x - x^2, \quad -2 \le x \le 2$; *b)* $g(x) = \sin 2x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$;

c) $h(x) = 2\log_2 x, \quad x > 0$; *d)* $i(x) = \log_2|x| + 6, \quad x \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$;

e) $j(x) = 2^{|x|}, \quad -2 \le x \le 2$; *f)* $k(x) = |\operatorname{tg} x|, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

g) $l(x) = |x^2 - 2x|, \quad 0 \le x \le 2$.

5386 Döntsük el, hogy a következő függvények közül melyik páros, melyik páratlan, esetleg melyik az, amelyik se nem páros, se nem páratlan:

a) $f(x) = |x| \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}$; *b)* $g(x) = \sin x \cdot \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$;

c) $h(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$; *d)* $i(x) = x^3 - 3x, \quad x \in \mathbb{R}$;

e) $j(x) = 0{,}5 \cdot (2^x + 2^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}$; *f)* $k(x) = x^2 - 2 \cdot |x| + 1, \quad x \in \mathbb{R}$;

g) $l(x) = x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R}; \cdot$ *h)* $m(x) = |x^2 - 3x|, \quad x \in \mathbb{R}$.

5387 Adjuk meg a következő függvények periódusát:

a) $x \mapsto \sin 2x$; *b)* $x \mapsto 2\cos\frac{1}{2}x$; *c)* $x \mapsto 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

d) $x \mapsto \frac{1}{2}\cdot\cos 3x$; *e)* $x \mapsto \operatorname{tg} 2x$.

5388 Jellemezzük a következő függvényeket paritás és periodicitás szempontjából ($x \in \mathbb{R}$):

a) $x \mapsto \cos x$; *b)* $x \mapsto \sin x$; *c)* $x \mapsto 7$;

d) $x \mapsto 2\operatorname{tg} 3x$; *e)* $x \mapsto 3^x$; *f)* $x \mapsto -x^3$;

g) $x \mapsto -\sin 3x$; *h)* $x \mapsto 3\cos\frac{1}{2}x$; *i)* $x \mapsto -|x|$.

5389 Egy függvény korlátosság szempontjából négyféle lehet:

1. csak alulról korlátos;
2. csak felülről korlátos;
3. korlátos, ha alsó és felső korlátja is létezik;
4. alulról sem, felülről sem korlátos.

Jellemezzük korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket:

a) $x \mapsto 3x-2$; *b)* $x \mapsto |3x-2|$; *c)* $x \mapsto 3^{x-2}$; *d)* $x \mapsto \log_3(x-2)$;

e) $x \mapsto -2^x+1$; *f)* $x \mapsto -\log_5(x-2)$; *g)* $x \mapsto -(x-2)^2$; *h)* $x \mapsto 2\sin 2x$.

5390 Válaszoljunk az alábbi kérdésekre. Válaszunkat indokoljuk.

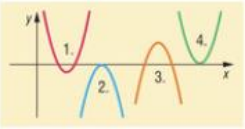
a) Adott a következő két függvény:

$$f(x) = 3^x + 2\cdot 3^{2x} \quad \text{és} \quad g(x) = x\cdot\log_2 x.$$

Melyik a nagyobb: $f(2)$ vagy $g(32)$?

b) Az $f(x) = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ függvényről tudjuk, hogy a diszkriminánsa 0, továbbá, hogy $f(2010) = 2010$.

Az ábrán látható grafikonok közül melyik lehet $f(x)$ grafikonja?



5391 Adott a következő függvény:

$$f\colon\ ]-3;11] \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2+9, & \text{ha } x \le 1, \\ -|x-5|+4, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját, és jellemezzük a következő szempontok szerint: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás.

b) Adjuk meg a következő függvényértékeket: $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(-4)$, $f(10)$.

c) Hol vesz fel negatív értékeket a függvény?

5392 A valós számok halmazán értelmezett f abszolútérték-függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy a

$$g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad g(x) = |x|-2$$

függvény grafikonját a $\vec{v}(3;\,1)$ vektorral eltoltuk.

a) Adjuk meg az f hozzárendelési szabályát. *b)* Határozzuk meg az f és g zérushelyeit.

c) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját a $[-3;\,7]$-on. Mi az így kapott függvény értékkészlete?

d) Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$|x|-2 \ge -x+2,\quad x \in [-3;\,7].$$

5393 Fogalmazzuk meg, hogy az

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+2)^2 - 1$$

függvény grafikonja milyen transzformációval származtatható az

$$f_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_0(x) = x^2$$

függvény grafikonjából. Ábrázoljuk az f függvény grafikonját a $[-5; 0]$-on.

Válaszoljunk a következő kérdésekre:

a) Mi a $[-5; 0]$-on értelmezett függvény értékkészlete?

b) Hol pozitív ez a függvény?

c) Adjuk meg a következő függvényértékeket:

$$f(-1),\ f(-2) \text{ és } f(-4).$$

d) Milyen helyen veszi fel a függvény a 3 értéket?

5394 Válaszoljunk a következő kérdésekre:

a) Melyek a zérushelyei az $f\colon x \mapsto x^2 - 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ másodfokú függvénynek, és határozzuk meg a helyettesítési értékét az 1,3 helyen.

b) A $g\colon x \mapsto -|x| + 7$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek mi a legnagyobb értéke, és hol veszi fel azt?

c) A $h\colon x \mapsto \sin x - 2$ függvénynek határozzuk meg az értékkészletét a függvény ábrázolása nélkül.

d) Adott az $i\colon x \mapsto \log_2(2x - 20) - 1$ függvény. Hol vesz fel nemnegatív értékeket?

e) Adott a $j\colon x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9} + 1$ függvény. Ábrázoljuk a függvény grafikonját az $[1; 4[$-on. Adjuk meg a következő értéket:

$$\frac{j(1) - j(3)}{j(2)}.$$

5395 Legyenek az A halmaz elemei a $\sqrt{-x^2 + 2x + 15}$, a B halmaz elemei pedig a $\sqrt{2\cos \pi x - 1}$ kifejezés értelmezési tartományának elemei.

a) Adjuk meg az A és a B halmazt.

b) Adjuk meg az $A \cap B$ elemeit, és ábrázoljuk is azokat.

c) Ábrázoljuk számegyenesen az $A \setminus B$ halmazt.

5396 Adott a következő függvény:

$$g(x) = \left|\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 2\right|.$$

a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját a valós számok halmazán.

b) Hány megoldása van a $g(x) = p$ egyenletnek, ahol $p \in \mathbb{R}$?

5397 Hogyan kell az adott $f\colon x \mapsto x^2 + bx + c$ függvénynél a b és c értékét megválasztani, hogy a függvénynek a szélsőértéke az $x = -2$ helyen $y = 4$ legyen?

a) Ábrázoljuk az így kapott függvény grafikonját a $]-3; 0]$ intervallumon, és állapítsuk meg az értékkészletét.

b) Adjuk meg a $]-3; 0]$ intervallumon értelmezett másodfokú g függvény hozzárendelési szabályát úgy, hogy a függvény maximuma 4 legyen és azt a -2 helyen vegye fel. Adjuk meg a g függvény értékkészletét.

5398 Határozzuk meg a következő függvény legkisebb értékét:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

5399 Adott az $a>0$ hosszúságú szakasz. Ezt két részre bontjuk, és mindegyik részre, mint oldalra, egy négyzetet rajzolunk. Fejezzük ki a négyzetek területének összegét egyváltozós függvénnyel. Mikor lesz a két négyzet területének összege a legkisebb?

5400 Igazoljuk, hogy az $f(x)=x^3+3x+5,\quad x\in\mathbb{R}$ függvény az egész értelmezési tartományában nő.

5401 Határozzuk meg az alábbi függvény legkisebb értékét:

$$f(x)=(x^2-2)^3+8,\quad x\in\mathbb{R}.$$

5402 Az alábbi függvény hol veszi fel a legkisebb értékét?

$$f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2+(x+c)^2\quad (a,b,c \text{ adott számok}),\quad x\in\mathbb{R}.$$

5403 Adott egy egyenlő szárú háromszög, az alapja a, az alaphoz tartozó magassága m. A háromszögbe olyan téglalapot írunk, amelynek két csúcsa az alapon van, másik két csúcsa egy-egy száron. Milyen esetben lesz a beírt téglalap területe maximális?

5404 Határozzuk meg az alábbi függvény legkisebb értékét:

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x-3},\quad x>3.$$

GEOMETRIA – ÖSSZEFOGLALÁS

Alapvető fogalmak

5405 Adott két egyenes út, amelyek párhuzamosak. Hova építhetjük azt az adótornyot, amelyik az egyik úttól kétszer akkora távolságra van, mint a másiktól? (Az utakat tekintsük végtelen hosszúnak.)

5406 Adjuk meg a sík azon pontjainak halmazát, amelyek egy 6 cm oldalú négyzet minden oldalegyenesétől 2 cm-nél nagyobb vagy egyenlő távolságra vannak.

5407 Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek két metsző egyenestől legfeljebb 3 cm távolságra helyezkednek el?

5408 Adjunk meg a térben 2010 pontot úgy, hogy létezzen mindegyiktől egyenlő távol lévő pont.

5409 Hol helyezkednek el a térben azok a pontok, amelyeknek egy adott szakasztól vett távolságuk 3 cm?

5410 Adott a térben 10 különböző pont, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesbe. Hány
a) egyenest; *b)* háromszöget
határoznak meg ezek a pontok?

5411 Hány részre osztják a teret egy tetraéder lapjainak síkjai?

5412 Mekkora az a szög, amelyik mellékszögének
a) $\frac{5}{4}$-ével; *b)* 260%-ával egyenlő?

5413 Egy szög és pótszögének nagysága úgy aránylik egymáshoz, mint
a) 2 : 3; *b)* $\frac{2}{\sqrt{2}+1} : \sqrt{2} - 1$.
Mekkorák ezek a szögek?

5414 Két párhuzamos egyenest egy harmadik 48° hajlásszögben metsz. Mekkora szögben metszi a 48°-os szögnek a szögfelezője a másik párhuzamos egyenest?

5415 Két egymás mellett levő szög szögfelezője merőleges egymásra. Mekkorák a szögek, ha az egyik 30°-kal nagyobb a másiknál?

5416 Két párhuzamos egyenest egy harmadikkal elmetszünk, és megszerkesztjük az így keletkezett szögek szögfelezőit. Milyen négyszöget határoz meg ez a négy szögfelező?

5417 Síktükörre 15°-os beesési szögben érkezik egy fénysugár, majd visszaverődik. Mekkora szögben fordul el a visszavert fénysugár, ha a síktükröt 20°-kal elforgatjuk?

5418 Egy háromszög oldalainak hossza 6 cm, 8 cm és 10 cm. Milyen messze van a 6 és 8 cm-es oldal felezőmerőlegeseinek a metszéspontja a 10 cm-es oldal felezőpontjától?

5419 Egy ABC háromszög A csúcsánál lévő szöge 70°. Mekkora szögben látszik a B és C csúcsoknál lévő szögek szögfelezőinek metszéspontjából a BC oldal?

5420 Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$. Mekkorák a háromszög oldalai, ha a belső szögfelezők metszéspontja az oldalaktól 6 cm távolságra van?

5421 Egy négyszög alakú telek három oldalának hossza ebben a sorrendben 50 m, 60 m és 40 m. Mekkora a telek negyedik oldala, ha a belső szögek felezői egy pontban metszik egymást?

5422 Mekkora szöget zár be egy négyzetes oszlop alaplapja a testátlójával, ha alaplapjának éle 10 cm, oldaléle 20 cm hosszú?

5423 Egy szabályos négyoldalú gúla alaplapjának éle 10 cm, magassága 40 cm. Mekkora szöget zár be

a) az alaplap az oldaléllel;

b) az alaplap az oldallappal;

c) két szemben levő oldallap egymással?

5424 Az $ABCDEF$ szabályos oktaéder csúcsain áthaladó összes egyenes közül véletlenszerűen kettőt kiválasztunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a kettő áthalad az oktaéder A csúcsán?

5425 Hány háromszöget határoznak meg egy $ABCDEFGH$ kocka csúcsai? Mekkora ezen háromszögek területének az összege, ha a kocka éle 10 cm?

5426 A kertünkben egymástól 4 m távolságra van egy fa és egy kút. A virágágyásunk minden pontja a fától legfeljebb 3 m távolságra van, de a kúthoz közelebb van, mint a fához. Mekkora területű a virágágyás?

5427 Egy rombusz alakú park két átlójának hossza 60 m és 100 m hosszú. Milyen hosszúak a park területén lévő, a park középpontjától 40 méterre haladó sétányok?

5428 Az ABC háromszögben $AC \neq BC$, és a háromszög körülírható körének sugara 10 cm.

a) Hány olyan pont van a háromszög síkjában, amely a háromszög AC és BC oldalegyeneseitől, valamint az A és a B csúcstól is egyenlő távol van?

b) Mekkora távolságra vannak egymástól ezek a pontok?

5429 Egy téglalap alakú telek határának mely pontjai vannak egyenlő távol a telek valamely két szemközti sarkától, ha a telek egyik oldala 18 m, a másik 12 m hosszú?

5430 Az $ABCD$ téglalap P belső pontja az A csúcstól 5, a B-től 11, a D-től 10 cm távolságra van. Milyen távol van a P pont a C csúcstól?

5431 Az ABC háromszög A csúcsánál levő szöge 60°, $AB = 10$ cm és $AC = 8$ cm. Az A csúcsból kiinduló belső szögfelező

a) mekkora távolságra halad a B és C csúcsoktól;

b) mekkora részekre osztja a BC oldalt?

5432 Egy háromszögbe írt kör középpontja a háromszög melyik csúcsától van a legtávolabb?

5433 Egy síktól az ABC háromszög csúcsainak a távolsága rendre 3 cm, 6 cm és 9 cm. Mekkora a háromszög súlypontjának a síktól vett távolsága?

5434 Két egymásra merőleges sík egyikén adott egy A pont, a másikon egy B pont. Mekkora távolságra van AB szakasz felezőpontjától az A, illetve B pontoknak a két sík metszésvonalára eső merőleges vetülete, ha az A és a B pontok távolsága 20 cm?

5435 Hány részre osztják a teret egy szabályos ötszög alapú egyenes hasábot határoló lapok síkjai?

5436 Van-e olyan pont a térben, amelyre igaz, hogy egy 12 cm élű szabályos tetraéder minden csúcsától $3 \cdot \sqrt{6}$ cm távolságra van?

5437 A piros labdánk a fal és a pad közé esett, majd ott leengedett, de nem esett le a földre. Milyen alakzaton mozgott eközben a labda középpontja? (A pad éle párhuzamos a fallal.)

5438 Egy szabályos háromszög csúcspontjain át egymással párhuzamos egyeneseket húzunk úgy, hogy a középsőnek a két szélsőtől vett távolsága 1, illetve 3 cm. Mekkora a szabályos háromszög oldala?

5439 Az $ABCD$ szabályos háromoldalú gúla alaplapja 18 cm oldalú szabályos háromszög. Az ABC alaplapon vegyünk fel egy P pontot, és állítsunk merőlegest az alaplapra. Ez a merőleges az ABD, BCD és ACD oldallapok síkját P_1, P_2 és P_3 pontokban metszi. Adjuk meg a PP_1, PP_2 és PP_3 szakaszok hosszának összegét, ha a gúla oldallapjai az alaplappal 45°-os szöget zárnak be.

Geometriai transzformációk

5440 Töltsük ki az egybevágósági transzformációk tulajdonságait összefoglaló alábbi táblázatot.

	Identikus transzformáció	Tengelyes tükrözés	Forgatás (mely nem identitás)	Eltolás (mely nem identitás)
Fixpontok				
Fixegyenesek				
Invariáns egyenesek				
Példa invariáns körre				
Szögtartó				
Távolságtartó				
Egyenes és képe párhuzamos?				
A körüljárási irányt megtartja?				

5441 Adjunk meg legalább 3 különböző egybevágósági transzformációt, amellyel egy kört egy vele megegyező sugarú körbe át lehet vinni.

5442 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) Ha egy trapéz tengelyesen szimmetrikus, akkor húrtrapéz.

b) Van olyan tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelynek átlói merőlegesek egymásra.

c) Ha egy négyszög tengelyesen szimmetrikus, akkor átlói merőlegesek egymásra.

d) Ha egy tengelyesen szimmetrikus négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor deltoid.

e) A szabályos tizenkétszög 30°-os forgatással önmagába vihető.

f) A szabályos sokszögek közül egyedül a 36 oldalú vihető önmagába 10°-os forgatással.

g) Van középpontosan szimmetrikus deltoid.

h) A szabályos háromszögön kívül van olyan szabályos sokszög, amelyik nem középpontosan szimmetrikus.

5443 Hány szimmetriatengelye van a szabályos sokszögnek, ha oldalainak száma

a) 13; *b)* 14?

Hány olyan szimmetriatengely van az egyes esetekben, amelyre illeszkedik a sokszög valamelyik átlója?

5444 Melyek a tengelyesen szimmetrikus paralelogrammák?

5445 Melyek a középpontosan szimmetrikus deltoidok?

5446 Egy trapézt egyik oldalegyenesére tükrözzük. Lehet-e a trapéz és tükörképének egyesítése

a) paralelogramma; *b)* konkáv hatszög;

c) szabályos hatszög; *d)* négyzet;

e) rombusz, melynek nincs derékszöge?

Indokoljuk válaszunkat.

5447 Egy trapézt egyik oldalának felezőpontjára tükrözzük. Lehet-e a trapéz és tükörképének egyesítése

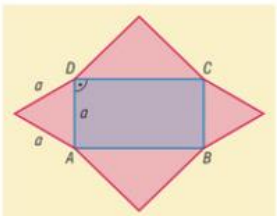
a) paralelogramma; *b)* konkáv hatszög;

c) szabályos hatszög; *d)* négyzet;

e) rombusz, amelynek nincs derékszöge?

Válaszunkat indokoljuk.

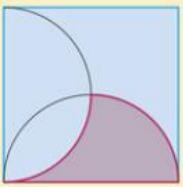
5448 Az $ABCD$ téglalap két szemközti oldalára egyenlő szárú derékszögű háromszögeket, másik két oldalára szabályos háromszögeket rajzoltunk. Milyen szimmetriatulajdonságokkal rendelkezik a kialakuló (az ábrán pirossal jelölt) konkáv nyolcszög?



5449 Az alábbi ábrán egy négyzet két oldala mint átmérők fölé egy-egy félkört rajzoltunk. A lilával jelölt síkidomot a négyzet középpontja körül négyszer egymás után 90°-kal elforgatjuk.

a) Hova kerül a lila alakzat az egyes forgatások után? Rajzzal válaszoljunk.

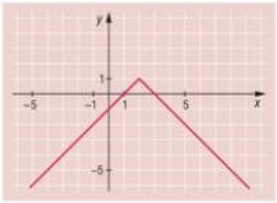
b) A négyzet területének hány százaléka van lilával megjelölve?



5450 *a)* Fogalmazzuk meg, hogy milyen egybevágósági transzformációk egymás utáni elvégzésével kaphatjuk meg az ábrán látható függvény grafikonját az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonjából.

b) Mi a hozzárendelési szabálya annak a függvénynek, amelynek grafikonja a fenti ábrán látható grafikon origóra vonatkozó tükörképe?

c) Írjuk fel annak a függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonját úgy kapjuk, hogy az ábrán látható grafikont a $\vec{v}(-3; -2)$ vektorral eltoljuk.



5451 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) Két négyzet mindig hasonló egymáshoz.

b) Két téglalap mindig hasonló egymáshoz.

c) Egy négyzet középpontos hasonlósággal bármely másik négyzetbe átvihető.

d) A háromszög magasságvonala két hasonló háromszögre bontja az eredeti háromszöget.

e) A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága két hasonló háromszögre bontja a derékszögű háromszöget.

f) Ha két háromszög minden szöge 60°-os, akkor a háromszögek hasonlók egymáshoz.

g) Ha két hatszög minden szöge 120°-os, akkor a hatszögek hasonlók egymáshoz.

5452 Egy derékszögű háromszög befogói 13 cm és 84 cm. Mekkorák a hozzá hasonló háromszög oldalai, ha átfogója 17 cm?

5453 Hogyan tudnánk jellemezni a

a) $\lambda = -\frac{3}{4}$; *b)* $\lambda = \frac{5}{4}$; *c)* $\lambda = -2$

hasonlósági arányú középpontos hasonlósági transzformációt?

5454 Adott egy ötszög az oldalainak hosszával. A hozzá hasonló ötszög legkisebb oldala 7 cm. Határozzuk meg a többi oldal hosszát, ha az eredeti ötszög oldalai:

30 cm, 14 cm, 28 cm, 20 cm és 42 cm.

5455 Hasonlóak-e az alábbi ABC és $A'B'C'$ háromszögek, ha oldalaik hossza

a) $a = 21$ cm, $b = 15$ cm, $c = 9$ cm és $a' = 7$ cm, $b' = 0{,}5$ dm, $c' = 3$ cm;

b) $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 0{,}6$ dm és $a' = 5$ cm, $b' = 2$ cm, $c' = 3$ cm?

5456 Felnagyítottunk egy háromszöget, mely oldalainak hossza:

$a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 3$ cm.

Mekkorák a hasonló háromszögnek az oldalai, ha tudjuk, hogy kerülete 24 cm?

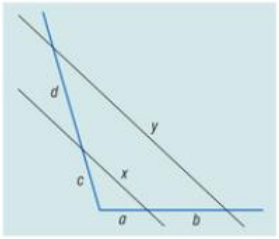
5457 Két négyzet egy-egy oldalának összege 27 cm. Számítsuk ki a négyzetek oldalainak hosszát, ha tudjuk, hogy a területeik aránya

a) 1:4; *b)* 16:25.

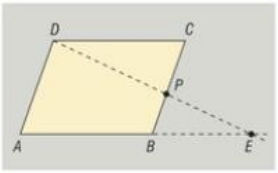
5458 Két hasonló test térfogatának aránya 8:27. Adjuk meg a hasonlósági arányt, és számítsuk ki a testek felszínének arányát.

5459 Az ábrán látható szög szárait párhuzamos egyenesekkel metszettük el. Töltsük ki a táblázat hiányzó celláit.

a	b	c	d	x	y
3 cm	5 cm	4 cm			15 cm
	4 cm	3,5 cm		2,5 cm	7 cm
2 cm	4 cm		4,3 cm	3 cm	
3,2 cm			7 cm	4 cm	11 cm



5460 Az ábrán látható $ABCD$ paralelogramma BC oldalát a P pont $3:4$ arányban osztja. Számítsuk ki a BE szakasz hosszát, ha tudjuk, hogy $AB = 1{,}2$ dm.



5461 Egy háromszög oldalainak hossza:

$$a = 6 \text{ cm}, \quad b = 8 \text{ cm} \quad \text{és} \quad c = 10 \text{ cm}.$$

Milyen hosszúságú szakaszokra osztják a szemközti oldalakat a belső szögfelezők?

5462 Adott egy szakasz. Hogyan lehet megszerkeszteni annak a szabályos ötszögnek az oldalát, amelynek kerülete megegyezik az adott szakasz hosszával?

5463 Egy település központjából két egyenes út is indul (a 12-es, illetve a 13-as számúak), melyek egymással tompaszöget zárnak be. A 12-es úton a falu központjától 5 km, illetve 8 km távolságra újabb útkereszteződések találhatók, amelyeket egy-egy szintén egyenes útszakasz köt össze a településből kiinduló másik, 13-as számú úttal. Az összekötő utak párhuzamosak egymással, és a 13-as út mentén 2,5 km a köztük lévő távolság.

a) Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével.

b) Mekkora távolságra található a 13-as úton az első útkereszteződés a település központjától?

c) Hány kilométer a távolság a 12-es és 13-as utakat összekötő hosszabb úton, ha a rövidebb út 7 km hosszú?

5464 *a)* Számítsuk ki a trapéz kiegészítő háromszögének oldalait, ha alapjai 6 cm és 15 cm, szárainak hossza pedig 7 cm.

b) Milyen arányban osztják egymást a trapéz átlói?

5465 Egy tó területe az $1:20\,000$ méretarányú térképen $3{,}5 \text{ cm}^2$.

a) Hány km^2 a tó felszíne a valóságban?

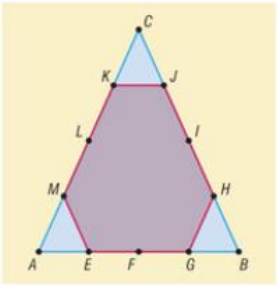
b) Hány cm^2 a területe a tónak egy $1:40\,000$ méretarányú térképen?

5466 Az egyik forgalmazó a tejföl (geometriai értelemben) egymáshoz hasonló dobozokban hozza forgalomba. Feltételezzük, hogy a tejföl ára egyenes arányos a doboz térfogatával. A legkisebb kiszerelés ára 0,4 €. A következő méretű doboz 20%-kal magasabb, mint a legkisebb. Mennyibe kerül a következő méretű doboz tejföl?

5467 *a)* Három négyzet területének aránya $9:25:49$, a legnagyobb és a legkisebb területének összege 232 m^2. Számítsuk ki a négyzetek oldalának hosszát.

b) Három kocka térfogatának aránya $1:27:512$, a legnagyobb és a legkisebb térfogatának összege $13\,851 \text{ m}^3$. Számítsuk ki a kockák élének hosszát.

5468 Az ábrán látható ABC egyenlő szárú háromszög ($AC = BC$) oldalait négy egyenlő részre osztottuk, majd berajzoltuk az $EGHJKM$ hatszöget.

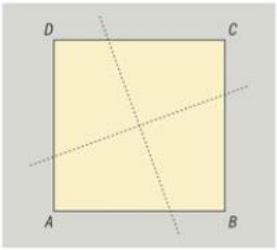


a) Mutassuk meg, hogy a hatszög tengelyesen szimmetrikus. Adjuk meg a szimmetriatengelyét.

b) Hányadrésze a hatszög kerülete az ABC háromszög kerületének?

c) Hányadrésze a hatszög területe az ABC háromszög területének?

5469 Az ábrán látható $ABCD$ négyzetet két egyenes vágással négy részre bontottuk.



a) Mutassuk meg, hogy ha a két vágás egymásra merőleges, és mindkettő átmegy a négyzet középpontján, akkor a keletkező részek területe megegyezik.

b) Mutassuk meg, hogy ha a keletkező részek területe megegyezik, akkor mindkét vágás átmegy a négyzet középpontján, továbbá merőlegesek egymásra.

5470 Az ABC háromszög BC oldala 6 cm hosszú, az oldalon fekvő két szög $\beta = 70°$, $\gamma = 45°$. A háromszög köré írható kör középpontját tükrözzük a háromszög oldalegyeneseire. A tükörképek az A, B és C pontokkal együtt egy hatszöget fognak közre.

a) Mutassuk meg, hogy a hatszög minden oldala ugyanakkora.

b) Mutassuk meg, hogy a kapott hatszög felbontható három rombuszra.

c) Mekkorák a kialakuló hatszög szögei?

d) Számítsuk ki a keletkező hatszög területét.

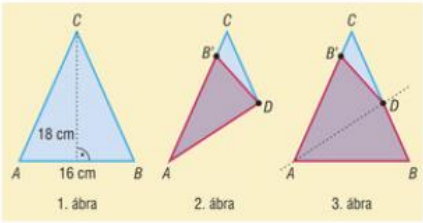
5471 Adott a koordináta-rendszerben három pont, amelyek koordinátái $A(3; -2)$, $B(6; 4)$ és $C(1; 4)$. Adjuk meg azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyek a megadott pontokkal együtt egy

a) középpontosan szimmetrikus;

b) tengelyesen szimmetrikus

négyszöget fognak közre. Mindkét esetben adjuk meg az összes megoldást.

5472 Egy origami nagymester az általa kifejlesztett madár elkészítéséhez az 1. ábrán látható egyenlő szárú ABC háromszög alakú színes papírlapból indul ki. A hajtogatás első lépése, hogy a B pontot a 2. ábrának megfelelően az AC szárra „hajtogatja" az AD vonal mentén. Végül a 3. ábrának megfelelően kivágja az $ABDB'$ négyszöget az ABC háromszögből, mivel a kapott négyszög képezi a madár törzsét.



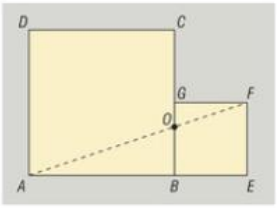
a) Milyen szimmetriatulajdonsággal rendelkezik az $ABDB'$ négyszög?

b) Milyen speciális négyszög képezi a madár törzsét?

c) Az ABC háromszög melyik nevezetes vonala mentén történt az első hajtogatás?

d) Számítsuk ki, hogy mekkora területű papírlapból készül a madártörzs.

5473 Az ábrán látható $ABCD$ négyzet területe négyszer akkora, mint a $BEFG$ négyzet területe.



a) Bizonyítsuk be, hogy az ABO háromszög hasonló az FGO háromszöghöz.

b) Mekkora távolságra van az O pont a négyzetek csúcsaitól, ha $BE = 6$ cm?

c) Igaz-e, hogy az ábrán látható kisebb négyzetet az O pontra vonatkozó középpontos hasonlósággal át lehet vinni az $ABCD$ négyzetbe? Ha igaz, akkor mekkora a hasonlóság aránya?

5474 Az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = 8$ cm, $CD = 4$ cm. A trapéz átlói az O pontban metszik egymást. Az AO és BO szakaszok O-hoz közelebbi negyedelőpontja F, illetve G, az O pont tükörképe a C és D pontokra pedig H, illetve I.

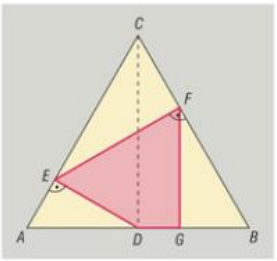
a) Mutassuk meg, hogy az $FGHI$ négyszög trapéz.

b) Számítsuk ki az $FGHI$ és $ABCD$ trapézok területének arányát.

c) Hogyan kell megválasztani az $ABCD$ trapéz alapjainak hosszát, ha azt szeretnénk, hogy az $FGHI$ és az $ABCD$ trapézok területe megegyezzen?

5475 A 20 cm oldalú $ABCD$ rombusz belsejében felveszünk egy P pontot. A DP egyenes a rombusz BC oldalát az E pontban, az AB oldal B csúcson túli meghosszabbítását pedig a B csúcstól 4 cm távolságra metszi. Az AP egyenes a rombusz BC oldalát F-ben, a DC oldal meghosszabbítását pedig K-ban metszi. Számítsuk ki a CK szakasz hosszát, ha $EF = 5$ cm.

5476 Noémi a szabályos háromszög alakú ABC virágágyás középső részébe tulipánt szeretne ültetni. Az AB oldal D felezőpontjából merőlegest állít az AC oldalra, majd a kapott E pontból ismét merőlegest állít, ezúttal a BC oldalra, végül a kapott F pontból párhuzamost húz a háromszög CD magasságával. Noémi végül úgy dönt, hogy a $DEFG$ négyszög alakú részbe ültet tulipánt.



a) Bizonyítsuk be, hogy virágágyás csúcsainál kialakuló ADE, CEF és FBG háromszög alakú részek mindegyike hasonló az ACD háromszöghöz.

b) Noémi az ABC virágágyás hány százalékába ültet tulipánt?

5477 Az ABC háromszög S súlypontját összekötjük a háromszög csúcsaival. A keletkező ABS, BCS és CAS háromszögek súlypontját jelölje rendre E, F és G.

a) Bizonyítsuk be, hogy az EFG és a CAB háromszögek hasonlók egymáshoz.

b) Mekkorák az EFG háromszög oldalai, ha az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm és $CA = 12$ cm?

c) Adjunk meg egy olyan hasonlósági transzformációt, amelyik az EFG háromszöget a CAB háromszögbe viszi át.

5478 Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$, továbbá $AB = 8$ cm. A háromszög A csúcsából induló magasságvonala az AB szakasz felezőmerőlegesét az M pontban, a BC oldalt a D pontban metszi. Tudjuk, hogy az M pont a háromszög C csúcsától szintén 8 cm távolságra található.

a) Mutassuk meg, hogy az ABD háromszög egybevágó a CMD háromszöggel.

b) Számítsuk ki az ABC háromszög szögeit.

5479 Az O középpontú R sugarú, valamint a Q középpontú r sugarú körök kívülről érintik egymást a P pontban. Az OQ egyenes a P ponton kívül az R sugarú kört A-ban, a másikat C-ben metszi. Az OQ egyenest a P pont körül 30°-kal elforgatjuk. Az elforgatott egyenes az R sugarú kört a P ponton kívül B-ben, a másikat D-ben metszi.

a) Milyen speciális négyszög az $ABCD$ négyszög?

b) Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét az r és R sugarak segítségével.

5480 Egy 3 cm és egy 5 cm sugarú kör középpontjának távolsága 16 cm.

a) Számítsuk ki, hogy a kisebb kör középpontjától mekkora távolságra találhatók azok a pontok, amelyekből közös érintő húzható a két körhöz.

b) Számítsuk ki, hogy milyen hosszú a két kör közös belső érintőjének a körök közé eső szakasza.

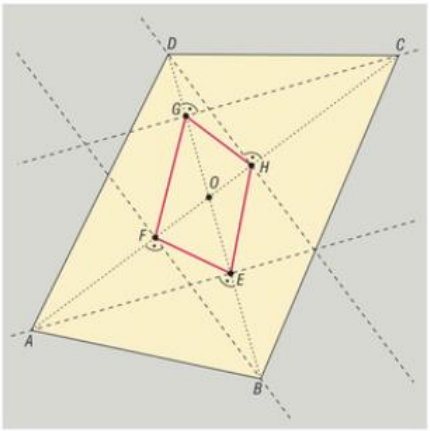
5481 Az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle = 90°$. A háromszög C csúcsából induló magasságvonala a háromszög átfogóját a T pontban metszi. A BCT háromszög beírt körének középpontja O, az ACT háromszögé pedig Q.

a) Bizonyítsuk be, hogy a QOT és ABC háromszögek hasonlók egymáshoz.

b) Mutassuk meg, hogy az OQ egyenes az ABC háromszögből egyenlő szárú derékszögű háromszöget vág le.

5482 Az $ABCD$ konvex négyszög A és C csúcsából merőlegest állítunk a BD átlóra, a B és D csúcsokból pedig az AC átlóra. A kialakuló négy merőleges talppontja, az ábrának megfelelően, az $EFGH$ négyszöget fogja közre.

Mutassuk meg, hogy az $EFGH$ és az $ABCD$ négyszögek hasonlók egymáshoz.



Vektorok. Szögfüggvények

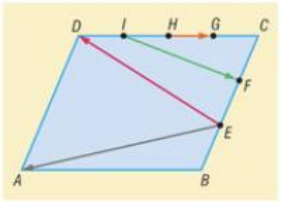
5483 Az ábrán látható $ABCD$ paralelogramma BC oldalának harmadolópontjai E és F, a DC oldalának negyedelőpontjai G, H és I. Fejezzük ki a következő vektorokat $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ segítségével:

a) $\overrightarrow{HG}$;

b) $\overrightarrow{IF}$;

c) $\overrightarrow{ED}$;

d) $\overrightarrow{EA}$.



5484 Az $ABCD$ négyzet oldala 10 cm hosszú. Adjuk meg a négyzet A csúcsából a

a) C csúcsába mutató;

b) CD oldal felezőpontjába mutató

vektor hosszát.

5485 Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

A: Ha két vektor skaláris szorzata pozitív, akkor a két vektor tompaszöget zár be.

B: Két párhuzamos vektor összege nem lehet nullvektor.

C: Két vektor különbségének abszolút értéke lehet ugyanakkora, mint összegük abszolút értéke.

D: Háromszög súlypontjába mutató vektor a csúcsokba mutató vektorok számtani közepe.

5486 Adjuk meg egy szabályos tízszög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összegét.

5487 Az $ABCDE$ négyzet alapú szabályos gúla E csúcsából az alaplap A és C csúcsába mutató vektorok legyenek $\vec{a}$ és $\vec{c}$. Adjuk meg az E csúcsból a gúla magasságának talppontjába mutató vektort $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével.

5488 Két nem párhuzamos vektorról tudjuk, hogy $|\vec{a}| = 5$ és $|\vec{b}| = 5$. Mekkora szöget zár be az $\vec{a} - \vec{b}$ és az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor?

5489 Az $ABCD$ paralelogramma síkjában adjuk meg annak a $\vec{v} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ vektornak a végpontját, amelynek kezdőpontja az A csúcs.

5490 Egy csónak sebessége állóvízben $15\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mekkora sebességgel mozog a csónak, ha $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű folyóban a partra merőlegesen indul?

5491 Mekkora a közös kezdőpontú 8 N és 12 N nagyságú erők eredője, ha 60°-os szöget zárnak be egymással?

5492 Hány fokos szöget zár be az a két egységvektor, amelyek skaláris szorzata

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $-\frac{1}{2}$; *c)* 0?

5493 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\frac{5 - 3\cos 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}$; *b)* $\frac{\cos 315^\circ}{\sin 315^\circ} + \sin^2 35^\circ \cdot \frac{1}{\cos^2 55^\circ}$;

c) $256^{\cos\frac{256}{3}\cdot\pi}$.

5494 Adjuk meg az α konkáv szög többi szögfüggvényének értékét (az α szög kiszámítása nélkül), ha

a) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; *b)* $\cos\alpha = 0{,}6$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$; *d)* $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

5495 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét zsebszámológép használata nélkül, és állítsuk őket növekvő sorrendbe:

$$\sin\frac{2\pi}{3};\quad \operatorname{tg} 2010^\circ;\quad \lg(\cos 8\pi);\quad \frac{1}{\operatorname{ctg} 390^\circ - 1};\quad \sqrt{3}\cdot\cos 240^\circ.$$

5496 Adjuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát, és hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

a) $\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}$; *b)* $\log_3 3^{\cos x}$; *c)* $\lg\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}$; *d)* $\sqrt{\sin^2 x - 1}$.

5497 Mekkora lehet $\sin x$ értéke, ha

$$\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{3}\ ?$$

5498 Adjuk meg az $a_n = \sin\frac{n\pi}{3}$ sorozat első

a) 100; *b)* 2010

tagjának összegét.

5499 Mekkora szögben esnek a Nap sugarai a Földre, ha egy 175 cm magas ember árnyéka 120 cm?



5500 A világ legmagasabb épülete a Burj Kalifa. Vízszintes terepen a lábától vett 100 m távolságban mekkora szög alatt láthatjuk a 828 m magas épületet? (➡)

5501 Egy hegyre vezető egyenes út emelkedési szöge 2,5°.

a) Hány százalékos az emelkedő?

b) Milyen magas a hegy, ha az út hossza 8 km?

5502 Egy 40 m magas épület teteje egy 30 m magas épület tetejéről 16° emelkedési szögben látszik. Milyen távol van egymástól a két épület?

5503 Egy villanyszerelő a talajon állva legfeljebb 2 m magasságig tud munkát végezni. Fel tud-e szerelni egy 3,8 m belmagasságú lakásban egy csillárt a mennyezetre, ha olyan kétágú létra áll rendelkezésére, amelynek szárai 1,9 m hosszúak, és biztonsági okokból a létra nyílásszögének legalább 30°-nak kell lennie?

5504 Egy teherautó platója 1,50 m magasságban van. Henger alakú hordót akarunk felgurítani a teherautóra úgy, hogy 20°-os emelkedési szögben egy pallót támasztunk a rakodótérhez. Hányszor fordul meg a tengelye körül a hordó, míg felgurítják, ha alapkörének átmérője 80 cm?

5505 Egy 18 cm oldalú szabályos háromszög egyik szögét osszuk fel 4 egyenlő részre. Mekkora részekre osztják a szögek szárai a háromszög szemközti oldalát?

5506 Egy rombusz kerülete 40 cm, területe 80 cm^2. Mekkora a rombusz

a) tompaszöge; *b)* két átlójának hossza?

5507 Egy körbe írható deltoid egyik szöge 48°, szimmetriatengelye 30 cm hosszú. Mekkora a deltoid

a) kerülete; *b)* területe; *c)* beírható körének sugara?

5508 Mekkora egy 20 cm sugarú körbe írt szabályos nyolcszög

a) kerülete; *b)* területe?

5509 Egy 50 m sugarú kör alakú park határoló ívén 20 m-t sétáltunk. Hány százalékkal rövidebb utat tettünk volna meg, ha egyenes mentén gyalogolunk?

5510 Egy háromszög köré 20 cm sugarú kör írható. Mekkora a háromszög 10 cm-es oldalával szemben levő szög?

5511 Az Apollo-13 űrhajó a Föld középpontjától 320 000 km távolságra volt, amikor felrobbant egy oxigéntartály. Mekkora szögben láthatták ekkor az asztronauták a Földet? (A Föld sugarát vegyük 6378 kilométernek.)

5512 Legalább milyen magasnak kell lennie annak a hegynek, amely a lábától mért 200 km távolságból is látszik? (A Föld sugarát vegyük 6378 kilométernek.)

5513 Két kör középpontjának távolsága 15 cm, sugaraik 6 cm és 4 cm hosszúak. Mekkora szöget zárnak be a két kör közös

a) külső; *b)* belső

érintői?

5514 Két nem párhuzamos $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor 30°-os szöget zár be. Hány fokos szöget zár be az $\vec{a}$ vektor az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektorral?

5515 Az ABC háromszögben $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével adjuk meg az AB oldal felezőpontjából az AC oldal C-hez közelebbi harmadolópontjába mutató vektort. Mekkora ennek a vektornak a hossza, ha $AB = 14$ cm, $AC = 9$ cm és $CAB\sphericalangle = 72°$?

5516 Egységnyi élű szabályos tetraéder egy csúcsából kiinduló élvektorai $\vec{a}$ és $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Adjuk meg a következő műveletek eredményeit:

a) $\vec{b} \cdot \vec{c}$; *b)* $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$; *c)* $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

5517 Adjuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát, és hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

a) $\dfrac{2^{\log_2 \sin x}}{\cos x}$; *b)* $\sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{ctg}^2 x}{x^2}}$.

5518 Mekkora $\dfrac{2 \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x}{5 \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x}$ értéke, ha $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 1}$?

5519 Egy háromszög két oldalának hossza 10 cm és 22 cm. Mekkora lehet a háromszög harmadik oldala, ha a két adott oldal által bezárt α szögre teljesül, hogy:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{9}?$$

5520 Adjuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -\cos^2 x + 2 \sin x - 1$ függvény értékkészletét.

5521 Az $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{6}$ sorozat első 200 tagja közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mi annak a valószínűsége, hogy mind a kettő irracionális szám lesz?

5522 Egy ingaóra ingája 20 cm hosszú, és percenként 50 lengést végez. (Egy lengés alatt az inga végpontja az egyik szélső helyzetéből a másik szélső helyzetébe jut el.)

a) Huszonnégy óra alatt mekkora utat tesz meg az inga végpontja, ha a két szélső helyzetben a végpont távolsága 8 cm?

b) Az óra nagymutatója 7 cm, a kismutató 5 cm hosszú. Milyen távol van egymástól a két mutató végpontja 2 óra 20 perckor?

5523 Egy rombusz egyik szöge 140°. Az oldalak felezőpontjai által meghatározott négyszög területe 100 cm^2. Mekkora a rombusz oldala?

5524 Mekkorák annak az egyenlő szárú háromszögnek a szögei, amelynek az alaphoz tartozó magassága, az alapja és a szára ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai?

5525 Egy szabályos sokszög köré írt kör területe 144π, a sokszögbe írt kör területe 108π.

a) Hány oldalú a szabályos sokszög?

b) Mekkora a szabályos sokszög egy oldala?

c) Tekintsük azt az egyenes gúlát, amelynek alaplapja a feladatban szereplő szabályos sokszög, és magassága 20 cm. Mekkora szöget zár be a gúla alaplapja az oldallapjával?

5526 Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezés minden x értékre állandó:

$$\sqrt{\sin^4 x + 4 \cdot \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \cdot \sin^2 x}.$$

5527 Igazoljuk, hogy a következő egyenlőségek fennállnak minden olyan valós x esetén, amelyekre az egyenlőség jobb, illetve bal oldala is értelmezve van:

a) $4 \cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \sin^2 x - 3$; *b)* $\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$.

5528 Adjuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a következő kifejezés x-től független állandó legyen:

$$(\sin^6 x + \cos^6 x) \cdot p^2 + (\sin^4 x + \cos^4 x) \cdot p - 4 \cdot (\sin^4 x + \cos^4 x).$$

5529 Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög oldalai a, b és c, a velük szemben lévő szögek rendre α, β és γ, valamint a háromszög területe t, akkor teljesül a következő egyenlőség:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot t}.$$

5530 Egy vízszintes terepen álló 60 m magas torony felső $\frac{3}{5}$ része a vízszintes sík mely pontjaiból látszik a legnagyobb szögben? Számítsuk ki ennek a szögnek a nagyságát.

Nevezetes síkidomok tulajdonságai

5531 Mekkora lehet a háromszög harmadik oldala, ha tudjuk, hogy $a = 7$ cm, $b = 11$ cm és a kérdezett oldal hossza prímszám?

5532 Egy háromszögben az egyik szög a másik két szög összegével egyenlő. A háromszög legnagyobb szöge 45°-kal nagyobb a legkisebbnél. Számítsuk ki a háromszög szögeit.

5533 Egy háromszög egyik szöge 55°. Mekkora szöget zár be egymással a másik két belső szög szögfelezője?

5534 Egy hegyesszögű háromszög egyik szöge 55°. Mekkora szöget zár be egymással a másik két csúcsból kiinduló magasságvonal?

5535 Egy háromszög két szöge 60° és 50°. Mekkora szöget zárnak be egymással a két szög csúcsából kiinduló magasságvonalak?

5536 Lehetnek-e egy háromszög középvonalai 4 cm, 5 cm és 9 cm hosszúak? Indokoljuk válaszunkat.

5537 Az A, B és C települések nincsenek egy vonalban, továbbá egymástól mért távolságaik mindegyike kilométerben mérve egész szám. Mekkora lehet az AB távolság, ha tudjuk, hogy $AC = 3$ km és $BC = 11$ km?

5538 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) A háromszög köré írható kör középpontja a háromszög belsejében van;

b) A háromszög köré írható kör sugara legalább akkora, mint a háromszög leghosszabb oldalának a fele;

c) Bármely hegyesszögű háromszög felbontható 3 egyenlő szárú háromszögre;

d) A háromszög magasságpontja nem eshet a háromszögön kívülre;

e) A háromszög egyik oldalához tartozó súlyvonala hosszabb, mint az oldalhoz tartozó magassága;

f) Van olyan háromszög, amelyben a magasságpont 2:1 arányban osztja a magasságvonalakat;

g) A háromszög súlypontja mindhárom oldaltól egyenlő távolságra van;

h) A háromszög magasságpontja a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra van;

i) A háromszög szögfelezőinek metszéspontja a háromszög oldalaitól egyenlő távolságra van.

5539 Egy kerületi és a hozzá tartozó középponti szög összege 22,5°. Adjuk meg (fokokban és radiánban) az említett két szöget külön-külön.

5540 Egy háromszög oldalai a köré írt kör középpontjából 140°, 130° és 90°-os szög alatt látszanak. Mekkorák a háromszög belső szögei?

5541 Számítsuk ki a háromszög köré írt kör sugarát, ha ismert a háromszög egyik oldala, valamint a vele szemközti szög.

a) $a = 8$ cm, $\alpha = 30°$; *b)* $a = 13$ cm, $\alpha = 90°$; *c)* $a = 7{,}5$ cm, $\alpha = 125°$.

5542 Szögeit tekintve milyen az a háromszög, amelynek oldalai

a) 48 cm, 55 cm, 73 cm; *b)* 5 cm, 8 cm, 11 cm; *c)* 10 cm, 7,6 cm, 9,8 cm;

d) 16 cm, 63 cm, 65 cm?

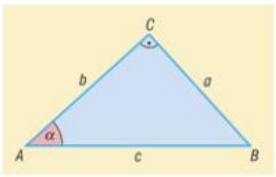
5543 Az ábrán látható derékszögű háromszögben $a = 65$ cm és $\alpha = 42°12'$. Számítsuk ki a háromszög

a) ismeretlen oldalainak hosszát;

b) körülírt körének sugarát;

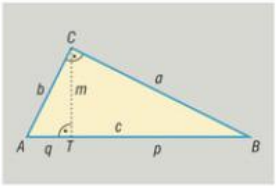
c) beírt körének sugarát;

d) súlyvonalainak hosszát.



5544 Az ábra alapján töltsük ki az alábbi táblázatot (az adatok cm-ben vannak megadva).

a	b	c	m	p	q
28	45				
				48	12
25				24	
		73	$\frac{2640}{73}$		



5545 Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót 1:4 arányban osztja. A háromszög magassága 4 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

5546 Számítsuk ki az ABC háromszög ismeretlen szögeit és oldalát, ha

a) $BC = 15$ cm, $AC = 7$ cm, $ABC\sphericalangle = 20°$; *b)* $BC = 15$ cm, $AC = 7$ cm, $ABC\sphericalangle = 27{,}83°$.

Milyen hibát követ el, aki a *b)* feladatban a szinusztétel alkalmazása során a szögfüggvény értékét két tizedesjegyre kerekíti?

5547 Az Andrásfalvát Barnabásfalvával összekötő egyenes út kétszer olyan hosszú, mint a Barnabásfalva és Csabaháza közti egyenes út hossza. A két említett út 60°-os szöget zár be egymással.

a) Hányszorosa az Andrásfalva és Csabaháza között húzódó, szintén egyenes út hossza a Barnabásfalvát Csabaházával összekötő út hosszának?

b) Mekkora szöget zár be egymással az Andrásfalván összefutó két út?

5548 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) Van olyan konkáv négyszög, amelyik tengelyesen szimmetrikus.

b) Van középpontosan szimmetrikus konkáv négyszög.

c) Ha egy négyszög tengelyesen szimmetrikus, akkor szimmetriatengelye tartalmazza valamelyik átlóját.

d) A deltoidnak legalább egy hegyesszöge van.

e) A deltoid átlói felezik egymást.

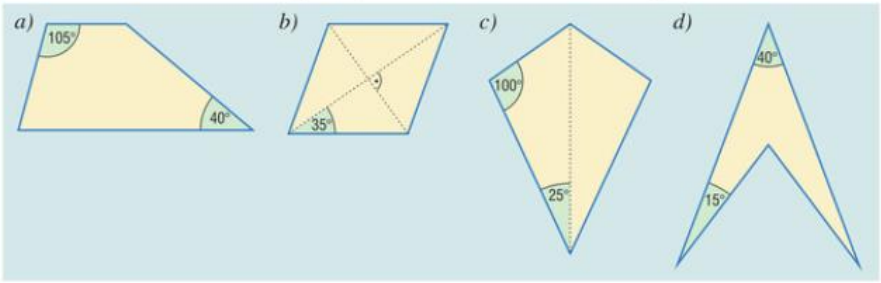
f) A paralelogramma egyik átlója szögfelező is egyben.

g) A húrtrapézok között vannak rombuszok is.

h) A deltoidok között vannak paralelogrammák is.

i) A rombusznak van körülírt köre.

5549 Számítsuk ki az ábrán látható trapézok, illetve deltoidok ismeretlen szögeit.



5550 Egy deltoid átlóinak hossza 22 cm és 80 cm. A rövidebb átló a hosszabb átlót 1 : 3 arányban osztja két részre. Számítsuk ki a deltoid oldalainak hosszát és szögeit. Mekkora a deltoid területe?

5551 Egy rombusz átlóinak hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 2 : 3, oldala $\sqrt{52}$ cm hosszú. Számítsuk ki a rombusz átlóinak hosszát, területét és szögeit.

5552 Határozzuk meg a paralelogramma középvonalainak hosszát és területét, ha átlóinak hossza 15 cm és 20 cm, továbbá az átlók 30°-os szöget zárnak be egymással. Mekkorák a paralelogramma szögei?

5553 Van-e olyan konvex sokszög, amelynek átlóinak száma pontosan

a) 324; *b)* 462?

5554 Mennyi a belső, illetve a külső szögek összege abban a konvex négyszögben, amelynek 42-vel több átlója van, mint ahány oldala?

5555 Hány szimmetriatengelye van és mekkora egy belső szöge annak a szabályos sokszögnek, amelyiknek 20 átlója van?

5556 Hány oldala lehet a konvex sokszögnek, ha az átlóinak és oldalainak száma úgy aránylik egymáshoz, mint 3 : 2?

5557 Jellemezzük szögei segítségével azokat a deltoidokat, amelyek húrnégyszögek. Hol található egy ilyen négyszög köré írt körének középpontja?

5558 Melyek azok a paralelogrammák, amelyek

a) húrnégyszögek; *b)* érintőnégyszögek?

5559 Egy deltoid két belső szöge 25° és 110°. Mekkora lehet a másik két szöge?

5560 Egy húrnégyszög egyik belső szöge 75°, egyik külső szöge pedig 55°. Mekkorák a négyszög további belső szögei?

5561 Milyen hosszú érintőszakaszok húzhatók a 24 cm átmérőjű körhöz abból a pontból, amelyik a kör középpontjától 20 cm távolságra található? Mekkora szöget zárnak be a pontból a körhöz húzható érintők?

5562 A 6 cm sugarú körben elhelyeztünk egy 4 cm hosszú húrt.

a) Mekkora szögben látszik (fokban és radiánban) a húr a kör középpontjából?

b) Mekkora szögben látszik (fokban és radiánban) a húr a körvonal pontjaiból?

c) Mekkora területű körcikkeket kapunk, ha a húr végpontjait a kör középpontjával összekötjük?

d) Milyen hosszú körívekre bontják a húr végpontjai a körvonalat?

e) Mekkora területű körszeletekre bontja a húr a kört?

5563 Az ABC háromszög oldalai $AB = c$, $BC = a$ és $CA = b$, a megfelelő oldalakhoz az s_a, s_b és s_c súlyvonalak tartoznak. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot (a + b + c) < s_a + s_b + s_c < \frac{3}{2} \cdot (a + b + c).$$

5564 Egy háromszög két külső szögének aránya 3 : 4, egyik belső szöge 65°-os. Számítsuk ki a háromszög belső szögeit.

5565 A hegyesszögű ABC háromszög C csúcsából induló magasságvonalának talppontja az A csúcstól 5 cm, a B csúcstól pedig 8 cm távolságra található. Az A csúcsból induló magasságvonal a B csúcstól 5 cm távolságra halad.

a) Számítsuk ki a háromszög oldalainak hosszát. *b)* Mekkorák a háromszög szögei?

5566 Az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $AC = BC = 8$ cm. Számítsuk ki, hogy mekkora távolságra található a háromszög C csúcsától a háromszög

a) súlypontja; *b)* magasságpontja;

c) beírt körének középpontja; *d)* köré írható körének középpontja.

5567 Egy magas épületet az épülettől bizonyos távolságra 42°-os emelkedési szög alatt látunk. Ha a megfigyelési ponttól 30 métert távolodunk az épülettől, akkor olyan pontba jutunk, amely az épület tetejéről 26°-os depressziós szög alatt látszik. Milyen magas az épület?

5568 Egy 800 m magas hegyről egy felhő 28°-os emelkedési szögben látszik. A hegy tövében levő tóban a felhő tükörképe 72°-os lehajlási szög alatt látszik. Milyen magasan van a felhő a hegycsúcs felett?

5569 Egy 100 m hosszú egyenes lejtős út végén levő emlékoszlopot 4,2°-os szög alatt látunk az út elejéről. Milyen magas az emlékoszlop, ha a lejtő hajlásszöge 18,3°?

5570 Az A, B és C településeket egyenesnek tekinthető utak kötik össze, amelyeknek hossza $AB = 30$ km, $AC = 25$ km és $BC = 35$ km. Az A és B településeket összekötő úton a két településtől egyenlő távolságra élményfürdő kialakítását tervezik, amelyet szintén egyenes úttal kívánnak összekötni a C településsel. Hány kilométer hosszú a tervezett útszakasz? A választ egy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.

5571 Egy kerékpártúrázó baráti társaság délkeleti irányba indult el egy egyenesnek tekinthető úton, majd 70 km megtétele után eredeti útirányukhoz képest 30°-kal déli irányba fordultak. Újabb 40 km megtétele után megálltak egy hosszabb pihenőre.

a) Mekkora távolságra kerültek légvonalban a kiindulási helyüktől?

b) Ha egyenes út vezetne a pihenőhelytől a kiindulási helyig, akkor hány fokos szöget zárna be az északi iránnyal?

5572 A 12/*b* osztály iskolai klubdélutánt tervez. Bori magára vállalta a teremdekoráció elkészítését. A díszítéshez színes kartonokból mintákat vág ki. Az egyik ilyen minta egy szabályos tizenkétszög. Ennek elkészítéséhez egy 14 cm oldalú négyzetből előbb egy maximális sugarú kört, majd a kapott körből szintén a lehető legnagyobb, szabályos tizenkétszög alakú mintát vágja ki.

a) Mekkora a kivágott sokszög oldalának hossza?

b) A kör alakú kartonlapnak hány százaléka megy kárba egy-egy dísz elkészítésekor?

c) Számoljuk ki, hogy a négyzet alakú kartonlapnak összesen hány százaléka megy kárba.

5573 Egy magashegység mellett hosszú egyenes autóút vezet. Az út mentén két szomszédos település központjának távolsága 3500 m. A településekről az egyik hegycsúcs 45°, illetve 40° emelkedési szög alatt látszik. A hegycsúcsról a településeket összekötő útszakasz 60°-os szögben látható. Az autóút síkjához képest milyen magasan van a hegy csúcsa? Az eredményt méterre kerekítve adjuk meg.

5574 Egy trapéz rövidebb alapjának hossza 2 cm, a hosszabb alapjának végpontjai az átlók metszéspontjától 6 cm, illetve 8 cm távolságra vannak.

a) Mekkora a trapéz szárakat összekötő középvonala, ha tudjuk, hogy a trapéz átlói 90°-os szöget zárnak be egymással?

b) Milyen hosszú a trapéz másik középvonala?

c) Milyen négyszöget fognak közre a trapéz középvonalainak végpontjai?

5575 A konvex $ABCD$ négyszög szögfelezői egy pontban metszik egymást.

a) Milyen speciális négyszög az $ABCD$ négyszög?

b) Mutassuk meg, hogy ha a szögfelezők közös pontja O, akkor:

$$AOB\sphericalangle + COD\sphericalangle = 180°.$$

5576 Két 3 cm sugarú kör középpontjának távolsága 5 cm. A két kör középpontja O és Q, metszéspontjaik A és B.

a) Milyen speciális négyszög az $OAQB$ négyszög? Mekkora a területe?

b) Számítsuk ki a két kör közös részének kerületét és területét.

c) Mekkora szög alatt látszik az AB szakasz a két kör közös részét határoló körívek pontjaiból?

5577 A P pont az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontja. A háromszög melyik nevezetes pontjával eshet egybe, ha

a) $PAB\sphericalangle = PCB\sphericalangle$, $PCA\sphericalangle = PBA\sphericalangle$ és $PAC\sphericalangle = PBC\sphericalangle$;

b) $APB\sphericalangle = 2 \cdot ACB$, $BPC\sphericalangle = 2 \cdot BAC$ és $CPA\sphericalangle = 2 \cdot CBA\sphericalangle$;

c) $APB\sphericalangle = 90° + \frac{ACB\sphericalangle}{2}$, $BPC\sphericalangle = 90° + \frac{BAC\sphericalangle}{2}$ és $CPA\sphericalangle = 90° + \frac{CBA\sphericalangle}{2}$?

5578 Egy konvex hatszögről tudjuk, hogy minden szöge egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy

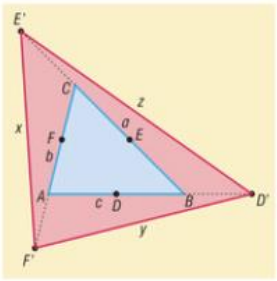
a) a hatszög szemközti oldalai párhuzamosak;

b) a hatszög három paralelogrammára és egy szabályos háromszögre bontható;

c) a hatszög szemközti oldalai hosszának különbsége megegyezik.

5579 Az ABC háromszög oldalai $AB = c$, $BC = a$ és $CA = b$, az AB oldal felezőpontja D, a BC oldalé E és a CA oldalé F. A D pont B-re vonatkozó tükörképe D', az E pont C-re vonatkozó tükörképe E' és végül az F pont A-ra vonatkozó tükörképe pedig F''. Az $E'F''D'$ háromszög oldalai x, y és z.

Számítsuk ki az $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ tört értékét.

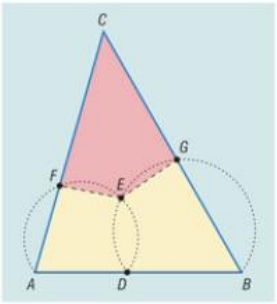


5580 A háromszögben a szokásos jelölések szerint az a oldallal szemben az α szög található, melyet a b és c oldalak fognak közre. Bizonyítsuk be, hogy ha az α szögfelezőjének hosszát f_a-val jelöljük, akkor

a) $f_a = \dfrac{2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c}$;

b) $f_a^2 = \dfrac{bc \cdot \left((b+c)^2 - a^2\right)}{(b+c)^2}$.

5581 Az ABC háromszög AB oldalán kijelöltünk egy D pontot, a háromszög belsejében pedig egy E pontot úgy, hogy az ADE, illetve BDE háromszögek köré írható körök metszik a háromszög AC, illetve BC oldalát (ld. ábra). Milyen speciális négyszög az $EGCF$ négyszög? Válaszunkat indokoljuk.



5582 Az ABC háromszög beírt körének középpontja O, az AC oldalhoz írt körének középpontja Q. Ez utóbbi kör érinti a háromszög AB és BC oldalegyenesét, valamint AC oldalát.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $AOCQ$ négyszög húrnégyszög.

b) Hol található az $AOCQ$ négyszög köré írt kör középpontja?

Koordináta-geometria

5583 Adottak az $\vec{a}(-3; 4)$ és $\vec{b}(7; -2)$ vektorok.

a) Számítsuk ki a $-2\vec{a} + 3\vec{b}$ vektor koordinátáit.

b) Számítsuk ki az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát.

c) Mekkora a két vektor abszolút értéke?

d) Mekkora az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge?

e) Állítsuk elő az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ és a $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektorokat az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Mekkora a két vektor hossza?

5584 Az alábbi vektorok közül melyek azok, amelyek merőlegesek a $\vec{v} = -5 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$ vektorra? Válasszuk ki a felsorolt vektorok közül azokat, amelyek párhuzamosak a $\vec{v}$ vektorral.

a) $\vec{a} = 3 \cdot \vec{v}$; *b)* $\vec{b} = 2 \cdot \mathbf{i} + 5 \cdot \mathbf{j}$; *c)* $\vec{c}\left(1; -\frac{2}{5}\right)$;

d) $\vec{d}(-6; -15)$; *e)* $\vec{e}(1; 2)$.

5585 A két vektor skaláris szorzatának kiszámolásával döntsük el, hogy a megadott vektorok hegyesszöget, derékszöget vagy tompaszöget zár be egymással.

a) $\vec{a}(-2; -3)$, $\vec{b}(-3; 2)$; *b)* $\vec{a}(7; -1)$, $\vec{b}(1; -6)$; *c)* $\vec{a}(-1; 1)$, $\vec{b}(5; 3)$.

5586 Számítsuk ki a megadott pontok távolságát, valamint a pontok által meghatározott szakasz felezőpontjának és harmadolópontjainak koordinátáit.

a) $A(-7; 3)$, $B(5; -1)$; *b)* $A(4; -1)$, $B(8; 5)$.

5587 Az ABC háromszög csúcsai $A(-1; -2)$, $B(6; -1)$, $C(2; 2)$.

a) Számításokkal igazoljuk, hogy a megadott pontok egyenlő szárú derékszögű háromszöget fognak közre.

b) Számítsuk ki az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit.

c) Írjuk fel az ABC háromszög köré írható kör egyenletét.

5588 A ABC háromszög csúcspontjai $A(-2; 1)$, $B(6; -1)$, $C(5; 6)$. Írjuk fel annak a háromszög belsejébe eső pontnak a koordinátáit, amelyet a háromszög csúcsaival összekötve olyan háromszögeket kapunk, amelyeknek a területe megegyezik. A háromszög melyik nevezetes pontját kapjuk?

5589 A térképre helyezett koordináta-rendszerben két falu koordinátái $A(-4; -2)$ és $B(3; 1)$. A két településen át hosszú egyenes út húzódik.

a) Milyen messze van egymástól a két település, ha a koordináta-rendszer egysége 1 km?

b) A két település közti útszakasz mely pontjában van az a buszmegálló, amelyik a B falutól kétszer olyan távol van, mint az A falutól?

c) Írjuk fel a településeket összekötő út egyenletét.

d) Áthalad-e a falvakat összekötő út a következő pontokban található településeken:

$$C(10; 4), \quad D(-9; -4); \quad E\left(\frac{17}{2}; \frac{7}{2}\right)?$$

e) Mekkora szöget zár be az út a koordináta-rendszer x tengelyével?

5590 Írjuk fel az egyenes egyenletét, ha

a) két pontja $A(-3; 2)$ és $B(4; 1)$;

b) egy pontja $P(7; -2)$, x tengellyel bezárt szöge $60°$;

c) egy pontja $P(-3; -2)$, egy irányvektora $\vec{v}(4; -3)$;

d) egy pontja $P(3; 1)$, meredeksége $-\frac{2}{5}$;

e) pontjai egyenlő távolságra vannak az $A(5; 2)$ és a $B(-2; 5)$ pontoktól;

f) áthalad az $A(-6; 2)$ ponton és párhuzamos az y tengellyel;

g) egy pontja $P(-1; -3)$, továbbá merőleges az $A(-1; 3)$ és $B(2; 1)$ pontokat tartalmazó egyenesre;

h) egy pontja $P(-2; 5)$, továbbá párhuzamos az $A(-1; 2)$ és $B(3; 1)$ pontokra illeszkedő egyenessel.

5591 Írjuk fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét, ha

a) $A(2; 3)$ és $B(-2; -1)$;

b) $A(4; 1)$ és $B(-2; 3)$;

c) $A(4; -2)$ és $B(4; 4)$;

d) $A(1; -5)$ és $B(0; 0)$.

5592 Adott az $A(1; -2)$ pont. Hány olyan egyenes van, amelyik átmegy az A ponton, továbbá az x tengellyel 45°-os szöget zár be? Írjuk fel ezek egyenletét.

5593 Adott az $A(-3; 5)$ pont. Írjuk fel az A pontra illeszkedő, az egyenletével adott e egyenesre merőleges, illetve azzal párhuzamos egyenesek egyenletét, ha

a) e: $y = 5x - 4$;

b) e: $x = -3$;

c) e: $y = 2$;

d) e: $x + 4y = -7$.

5594 Az alábbi egyenletükkel adott egyenesek közül melyek párhuzamosak, illetve merőleges helyzetűek az $y = \frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$ egyenletű egyenessel?

a) a: $y = -7x - 10$;

b) b: $y + 7x = 0$;

c) c: $5x + y = 4$;

d) d: $x - 7y = 13$.

5595 Mely pontokban metszi az $x^2 + y^2 - 3x + 9y - 10 = 0$ egyenletű kör a(z)

a) x tengelyt;

b) y tengelyt;

c) $3x + 11y + 45 = 0$ egyenletű egyenest?

5596 Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben az egyenletükkel megadott alakzatokat. Az egyenesek esetében adjuk meg egy-egy irányvektoruk és normálvektoruk koordinátáit, meredekségüket (amennyiben létezik), illetve irányszögüket. A körök esetében adjuk meg középpontjuk koordinátáit, valamint sugarukat.

a) a: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$;

b) b: $x = -3$;

c) c: $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 2 = -3$;

d) d: $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$;

e) e: $x^2 + y^2 - 3x + 3y = 10$;

f) f: $4x^2 + 4y^2 + 16y = 9$;

g) g: $2x + y = -3$.

5597 Írjuk fel a kör egyenletét, ha

a) középpontja az $O(-5; 2)$ pont, sugara 3;

b) középpontja az $O(3; -7)$ pont, továbbá átmegy az $A(2; 2)$ ponton;

c) egyik átmérőjének két végpontja az $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ és a $B\left(4; -\frac{9}{2}\right)$ pontok;

d) a vele koncentrikus, fele akkora sugarú kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$;

e) az $A(2; -1)$ pontra vonatkozó tükörképének egyenlete: $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$.

5598 Az $ABCD$ négyszög csúcspontjai:

$$A(-2;-3),\quad B(3;-2),\quad C(2;3)\quad \text{és}\quad D(-3;2).$$

a) Számításokkal igazoljuk, hogy az $ABCD$ négyszög négyzet.

b) Számítsuk ki az AB oldal felezőpontjából a BC oldal felezőpontjába mutató vektor koordinátáit.

c) Írjuk fel az $ABCD$ négyszög szimmetriatengelyeinek egyenletét.

d) Írjuk fel a négyzetbe írható, illetve a négyzet köré írható kör egyenletét.

e) Mekkora területű részekre osztja az $y = 4x$ egyenletű egyenes az $ABCD$ négyzetet?

5599 Egy pontszerű test az $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 15$ egyenletű körpályán mozog.

a) Mekkora utat tesz meg egy körbefordulás alkalmával?

b) Áthalad-e a test a következő pontokon: $A(7;4)$, $B(0;5)$, $C(2;-4)$ és $D(6;-3)$?

c) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyen a test továbbhaladna, ha az $E(-1;4)$ pontban megszűnne a testet körpályára kényszerítő erőhatás.

5600 k mely értékére lesz egymással párhuzamos a következő két egyenes:

$$4x + ky = 30\quad \text{és}\quad kx + 16y = 28?$$

5601 m mely értékére lesz egymásra merőleges a következő két egyenes:

$$mx - y = 2\quad \text{és}\quad 5x - 7y = 12.$$

5602 Határozzuk meg a $P(2;3)$ pontnak és a $2x - y = 6$ egyenesnek a távolságát.

5603 Az a egyenes egyenlete $-2x + 3y = -14$, a b egyenesé $y = -\frac{4}{5}x + \frac{6}{5}$.

a) Melyik pontban metszi egymást a két egyenes?

b) Számítsuk ki a két egyenes hajlásszögét. Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

c) Mekkora a területe annak a síkidomnak, amelyet a koordináta-rendszer tengelyei, valamint az a és b egyenesek fognak közre?

5604 Az ABC háromszög csúcspontjai $A(-1;-2)$, $B(5;-2)$ és $C(4;3)$. Mekkora távolságra van egymástól a háromszög súlypontja és magasságpontja?

5605 Az ABC háromszög két súlyvonalának egyenlete:

$$s_a\colon\ -5x + 3y = 2\quad \text{és}\quad s_b\colon\ 11x + 6y = 4,$$

egyik csúcsának koordinátái $(2;4)$, míg egyik oldalának felezőpontja $F\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

a) Számítsuk ki a háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit.

b) Írjuk fel a harmadik súlyvonal egyenletét.

5606 Egy deltoid szimmetriaátlójának két végpontja $A(1;-3)$ és $C(4;3)$, egy további csúcsa pedig $D(-3;4)$.

a) Írjuk fel a deltoid szimmetriatengelyének egyenletét.

b) Számítsuk ki a deltoid hiányzó csúcsának koordinátáit.

c) Mekkora a deltoid területe?

5607 Az $ABCD$ négyszög csúcsai:

$$A(-7;-2),\quad B(1;-2),\quad C(-2;2)\quad \text{és}\quad D(-4;2).$$

A táblázat megfelelő celláiban jelöljük, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis. Válaszainkat indokoljuk.

Állítás	Igaz	Hamis
Az $ABCD$ négyszög trapéz.		
Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög.		
Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.		
Az $ABCD$ négyszögnek minden szöge kisebb, mint 120°.		
A négyszög átlói a $\left(-3;\frac{3}{2}\right)$ pontban metszik egymást.		
Az átlók metszéspontja az AC átló C-hez közelebbi negyedelőpontja.		

5608 Az A, B és C településeket egyenes utak kötik össze, ezek egyenlete a megfelelő koordináta-rendszerben:

$$AB:\quad y=\frac{2}{5}x-\frac{17}{5},$$
$$BC:\quad 4x+5y=19,$$
$$AC:\quad x=1.$$

A falvak egy szeméttelep közös kialakítását tervezik úgy, hogy mindhárom településtől ugyanolyan távolságra legyen.

a) Milyen távolságra vannak egymástól a települések, ha a koordináta-rendszer egysége 1 km?

b) Mekkora szögben metszi egymást az A településen összefutó két egyenes út?

c) Mekkora területet fog közre a három útszakasz?

d) A koordináta-rendszer mely pontja jelöli a tervezett szeméttelep helyét? Melyik nevezetes pontja ez az ABC háromszögnek?

5609 Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2+y^2+4x+6y-19=0\quad \text{és az}\quad x^2+y^2-8x-6y+17=0$$

egyenletű körök érintik egymást, valamint adjuk meg az érintési pont koordinátáit.

5610 Számítsuk ki a k kör és az e egyenes metszéspontjainak koordinátáit, ha

a) k: $x^2+y^2-2x-2y=11$ és e: $x-y=-1$;

b) a k kör középpontja a $(-1;-4)$ pont, sugara 5, az e egyenes átmegy a $(-11;1)$ ponton, meredeksége pedig $-\frac{1}{7}$.

5611 Adott az $x^2+y^2+10x+2y+1=0$ egyenletű kör, valamint az $y=7x+9$ egyenletű egyenes.

a) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a két alakzatot.

b) Számítsuk ki a két alakzat metszéspontjainak koordinátáit.

c) Írjuk fel a kapott metszéspontokban a körhöz húzható érintők egyenletét.

d) Mekkora a területe az egyenes által a körből levágott kisebb körszeletnek?

5612 Az $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ egyenletű c kört eltoljuk a $\vec{v}(4; 4)$ vektorral, így a k kört kapjuk.

a) Számítsuk ki a k és c körök metszéspontjainak koordinátáit.

b) Mekkora a területe annak a négyszögnek, amelyet a két kör középpontja és metszéspontjai fognak közre?

5613 Egy nagy réten két magas fa található, melyek koordinátái $A(1; -1)$, $B(3; 3)$. Mi a halmaza azoknak a pontoknak, amelyekből a két fa 45°-os szög alatt látszik? Írjuk fel a megfelelő alakzat egyenletét.

5614 Vannak-e olyan pontok a $-2x + 3y = 9$ egyenletű egyenesen, amelyekből az AB szakasz 60°-os szög alatt látszik, ha $A(\sqrt{3}; 0)$ és $B(-\sqrt{3}; 0)$? Ha igen, akkor adjuk meg az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáinak pontos értékét.

5615 Adott a k: $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ egyenletű kör, valamint a $P(0; -4)$ pont.

a) Írjuk fel a P pontból a k körhöz húzott érintők egyenletét.

A k kör P ponton áthaladó érintői érintik a c kört is, amelynek sugara a k kör sugarának háromszorosa. Írjuk fel a c kör egyenletét, ha az *a)* feladatban meghatározott egyenesek a k és c körök közös

b) külső; *c)* belső érintői.

5616 Tekintsük az $y = x^2 - 6x + 7$ egyenletű parabolát.

a) Határozzuk meg a parabola csúcspontjának és fókuszpontjának koordinátáit.

b) Írjuk fel a parabola vezéregyenesének egyenletét.

c) Írjuk fel a parabolát érintő, $A(1; 2)$ ponton áthaladó egyenes egyenletét.

A parabolát az origó körül mindkét irányba 90°-kal elforgatjuk.

d) Írjuk fel az elforgatott parabolák egyenletét.

5617 A koordináta-rendszer $A(1; 1)$ pontján áthaladó e, valamint a $B(-1; 1)$ pontján áthaladó f egyenesek meredekségének adott sorrendben vett különbsége 3. Adjuk meg egyenletével az e és f egyenesek metszéspontjának mértani helyét (halmazát).

12.6. ÉRETTSÉGI GYAKORLÓ FELADATSOROK

KÖZÉPSZINTŰ FELADATSOROK

1. Feladatsor I. rész

1. Egyszerűsítsük a következő törtet:

$$\frac{x^3 - 4x}{x - 2} \quad (x \neq 2).$$

2. Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága 2 cm, egyik hegyesszöge 25°-os. Számítsuk ki a háromszög köré írható kör sugarát. Az eredményt egytized centiméterre kerekítve adjuk meg.

3. Egy zöldségárus körtét, almát és banánt árul. A háromféle gyümölcsből összesen 81 kilogrammot adott el. Almából kétszer annyit adott el, mint körtéből, banánból pedig háromszor annyit, mint almából. Hány kilogrammot adott el az egyes gyümölcsökből?

4. Hány literes az a hűtőszekrény, amelynek belső méretei 30 cm, 25 cm, illetve 70 cm?

5. Magyarországon 2009-ben a bankban elhelyezett betétek kamatából 20% kamatadót kellett fizetni, amelyet a bank a kamat jóváírásakor automatikusan levont. Hány forint kamatadót vont le a bank, ha a levonás után 12 000 Ft kamatot fizetett?

6. Váltsuk át a 2345 tízes számrendszerben felírt számot kettes számrendszerbe.

7. Anna ebben a félévben matematikából a következő érdemjegyeket szerezte:

   3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5.

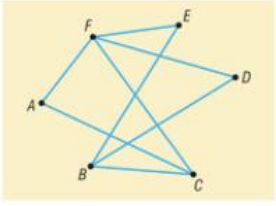
   Számítsuk ki Anna jegyeinek mediánját, valamint alsó és felső kvartilisét.

8. Írjuk fel az AB átmérőjű kör egyenletét, ha $A(-2; 2)$ és $B(4; 0)$.

9. Egy zacskóban 200 db gumicukor van. A cukrok 35%-a piros, $\frac{1}{5}$ része zöld, és feleannyi sárga van, mint zöld. A maradék cukrok mindegyike kék. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott gumicukor éppen kék színű?

10. Egy nagyváros lakosainak száma 180 000 fő. Hány év eltelte után haladja meg a város lélekszáma a 210 000 főt, ha a lakosok száma minden évben 5%-kal nő?

11. Az ábra hat nagyváros (A, B, C, D, E és F) közötti buszjáratokat mutatja. Ha két város vonallal van összekötve, akkor a két város közt közvetlen (átszállás nélküli) buszjárat közlekedik.

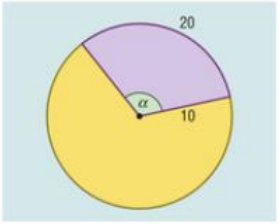
    Eljuthatunk-e az A városból a B városba

    a) átszállás nélkül;

    b) 1 átszállással;

    c) 3 átszállással?

12. Határozzuk meg az ábrán látható körcikk α középponti szögének nagyságát, ha sugara 10 cm, határoló körívének hossza 20 cm hosszúságú.



1. Feladatsor II. rész / A

13. A valós számok halmazán értelmezett f függvényt a következő hozzárendelési szabállyal értelmezzük:

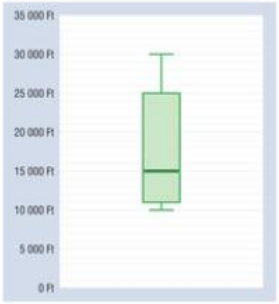
$$f(x) = -(x+2)^2 + 4.$$

a) Számítsuk ki a függvény helyettesítési értékét az $x = -6$ és az $x = 5$ helyeken.

b) Ábrázoljuk a függvény grafikonját a $[-5; 1]$ intervallumon.

c) Oldjuk meg az $f(x) = -21$ egyenletet a valós számok halmazán.

14. Berci új laptopra gyűjt. Az elmúlt 5 hónap mindegyikében sikeresen növelte megtakarítását. Az alábbi diagram azt mutatja, hogy Berci az egyes hónapokban mekkora összeget tudott félretenni a kiszemelt laptopra.



a) Összesen mennyi pénzt sikerült Bercinek az elmúlt 5 hónapban megtakarítania?

A Berci által választott új laptop ára 250 000 Ft és évente 35%-ot veszít értéből.

b) Mennyit ér majd Berci gépe a vásárlás után 3 évvel?

c) Összesen hány százalékos a laptop értékcsökkenése a 3 év alatt?

15. Kristóf a könyveit három polcon tárolja, az első polcon a szépirodalmi könyveket, a másodikon az albumokat, a harmadikon pedig a műszaki jellegű könyveket. A szépirodalmi könyvek és az albumok száma úgy aránylik egymáshoz, mint 7 : 5, továbbá tudjuk, hogy műszaki témát feldolgozó könyvből 1,8-szer annyi van, mint albumból. Kristóf egy antikváriumi akció során 15 új könyvet tervez vásárolni, amelyekből ha minden polcra ugyannyit helyezne el, akkor az egyes polcokon lévő könyvek számának aránya 4 : 3 : 5 lenne.

a) Hány szépirodalmi mű található Kristóf első polcán?

b) Hányféleképpen tud Kristóf 3 albumot kölcsönadni Károly nevű barátjának?

c) Összesen hány könyvet tárolna Kristóf a három polcon, ha mind a 15 tervezett könyvet megvenné?



1. Feladatsor II. rész / *B*

16. A komáromi vásárban rendkívül népszerűek a nagy méretű, mesefigurákkal díszített színes lufik. Az egyik árus ötféle színben és árban kínálja a héliummal felfújt lufikat. Az azonos színű, de még fel nem fújt lufikat az árus egy-egy dobozban helyezi el az asztalon. A színeket és a lufik árát az alábbi táblázat tartalmazza.

Piros	Kék	Citromsárga	Narancssárga	Fekete
1 €	1,2 €	1,4 €	1,5 €	2 €

Az egyik vásári nap első órájában az árus 3 piros, 3 kék, 2 citromsárga, 4 narancssárga és 2 fekete lufit adott el.

a) Hányféle sorrendben helyezheti el az árus egymás mellé a pulton a lufival teli dobozokat?

b) Hányféleképpen vehet András a lufikból egyet-egyet a három gyermekének, ha minden gyermek különböző színűt szeretne?

c) Átlagosan mennyi pénzt kért az árus egy lufiért az első órában? Az eredményt egész centre kerekítve adjuk meg. (1 € = 100 cent)

d) Mekkora haszonra tett szert az árus a vizsgált időszakban eladott lufikból, ha azok beszerzési ára egységesen a piros lufi eladási árának 40%-a? Hány százalékos haszonnal dolgozott az árus?

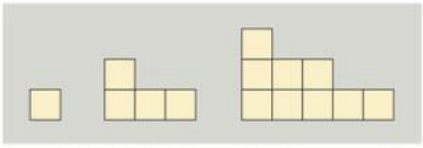
e) Hányféle sorrendben adhatta el az árus a lufikat, ha az egy árban lévő lufikat nem tudjuk megkülönböztetni egymástól?

17. Egy csonka kúp alakú gyertya tengelymetszete olyan szimmetrikus trapéz, amelynek rövidebb alapja 4 cm, hosszabb alapja 6 cm, szárai pedig $\sqrt{65}$ cm hosszúságúak.

a) Számítsuk ki a gyertya térfogatát.

b) A gyertyát az alapjaival párhuzamos síkkal két egyenlő magasságú részre vágjuk. Számítsuk ki a keletkező két rész térfogatának arányát.

18. Aladárnak 150 darab egybevágó építőkockája van. A kockákból „lépcsőket" épít úgy, hogy a lépcső legfelső szintjén 1 kocka van, majd minden következő szinten 2-vel több, mint a felette lévőn. Az egy szinten található szomszédos kockák teljes lapjukkal érintkeznek egymással csakúgy, mint a fölül lévő kocka az egy szinttel alatta lévővel. Példaként az ábrán az egy-, két-, illetve háromszintes „lépcsők" oldalnézeti képét láthatjuk.



a) Hány kockát tartalmaz a 15 szintes lépcső legalsó szintje?

b) Legfeljebb milyen magas (hány szintes) az a lépcső, amelyet Aladár megépíthet?

c) Hány építőkocka marad felhasználatlan, ha Aladár egy időben többféle (egymástól különböző) lépcsőt is építhet, és a lehető legtöbb kockát szeretné felhasználni?

2. Feladatsor I. rész

1. Adjuk meg az $5325 \cdot 10^{-21}$ szám normálalakját.

2. Egy munkahely 40 dolgozója közül 22 volt már Prágában. A dolgozók 60 százaléka korábban már járt Varsóban. Hányan voltak már mindkét városban, ha nincs olyan dolgozó, aki egyik várost sem látta?

3. Egy 10 000 € értékű áru értékcsökkenése (amortizációja) évi 12,5%. Az alábbiak közül melyik művelet fejezi ki az áru euróban megadott értékét a vásárlást követő ötödik év végén?

a) $10000 \cdot 0{,}125^5$;

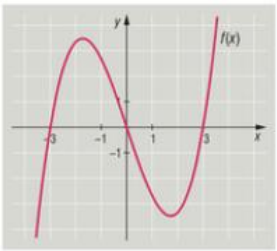
b) $\frac{10000 \cdot 12{,}5^5}{100}$;

c) $10000 \cdot \left(1 - \frac{12{,}5}{100}\right)^5$;

d) $\frac{10000}{0{,}125^5}$.

4. A Kovács család gyermekei: Barnabás, Bea, Bendegúz, Béla, Bianka, Boldizsár és Borbála. A nyári szünetben a gyerekek közül egyszerre két fiú és két lány utazhat a nagymamához. Hányféle utazó csapat alakítható ki a gyerekekből?

5. Az ábra az $x \mapsto f(x)$ harmadfokú függvény grafikonjának egy részletét mutatja. Mely x értékekre teljesül, hogy $f(x) = 0$?



6. Géza egy nap feljegyezte az ötös lottón kihúzott számokat:

11, 35, 48, 83, 7□.

Az utolsó számjegyet később már nem tudta elolvasni, csak arra emlékezett, hogy a kihúzott számok összege osztható volt 9-cel. Melyik lehetett az ötödik nyertes szám? Válaszunkat indokoljuk.

7. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) A deltoid hosszabb átlója megfelezi a rövidebbet.

b) Minden konvex deltoidba kör írható.

c) A deltoid átlói merőlegesen felezik egymást.

d) A deltoid szemközti oldalainak összege megegyezik.

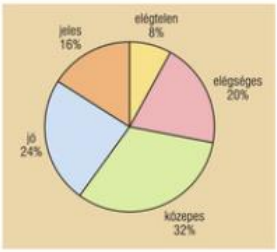
8. Adjunk meg 7 olyan egész számot, amelyek mediánja 3, alsó kvartilise 2, felső kvartilise pedig 4.

9. Egy téglatest alakú, felül nyitott akvárium alapjának méretei 80 cm, illetve 60 cm, magassága szintén 60 cm. Hány négyzetméter üveget használtak fel az akvárium elkészítéséhez?

10. Aladár lemérte Magyarország 1 : 2 300 000 méretarányú térképén a Szeged–Cegléd-távolságot, és 4,5 centimétert kapott. Milyen távolságra van Szeged Ceglédtől, Magyarország 1 : 1 200 000 méretarányú térképén? Az eredményt tized centiméter pontossággal adjuk meg. Válaszunkat indokoljuk.

11. Írjuk fel az $A(1; 3)$ ponton átmenő, -2 meredekségű egyenes egyenletét. Mik a koordinátái annak a pontnak, amelyben az egyenes metszi az x tengelyt?

12. Az alábbi diagramon egy 25 fős osztály legutóbbi matematika-dolgozatán elért eredményeinek eloszlását láthatjuk. Határozzuk meg az érdemjegyek mediánját és módusát, ha tudjuk, hogy a dolgozatot minden tanuló megírta.



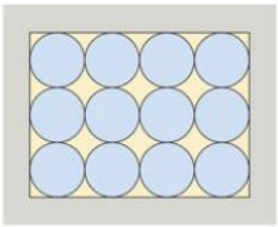
2. Feladatsor II. rész / A

13. Állapítsuk meg a következő egyenletek értelmezési tartományát. Oldjuk meg az egyenleteket értelmezési tartományukon.

a) $\sqrt{x+2} = 10 - x$;

b) $3^{x^2} = 9^6 \cdot 81^x$.

14. Nagymama a befőzéshez olyan egyenes körhenger alakú üvegeket használ, amelyeknek alapja 8 cm átmérőjű, magassága pedig 15 cm. A megtöltött üvegeket a kényelmes tárolás céljából 3×4-es elrendezésben, az ábrán felülnézetben látható módon, felül nyitott kartondobozokba helyezi. Nagymama összesen 45 üveget használt el a befőzéshez.



a) Hány deciliteresek a nagymama által használt üvegek?

b) Rajzoljuk le a kartondoboz síkbeli hálózatának 1:2 arányú kicsinyített képét.

c) Összesen hány dm^3 helyet foglalnak el az üvegek tárolására szolgáló dobozok?

15. Egy bank a következő, euróalapú megtakarítást kínálja ügyfelei számára.

A bank a lekötött betét után sávos rendszerben kamatot fizet:

– a 0 és 200 euró közötti rész után évi 1%-ot;

– a 200 eurót meghaladó összeg után pedig évi 4%-ot.

A bank a kamatot egy összegben, az egyéves futamidő lejárta után írja jóvá az ügyfél számláján.



a) Számítsuk ki, hogy mennyi kamatot fizet a bank 1500 euró lekötött összeg után.

b) Ténylegesen hány százalékos kamatot fizet a bank az 1500 eurós bankbetétre?

c) Mekkora összeget kell lekötnünk, ha azt szeretnénk, hogy arra legalább 3,8%-os kamatot fizessen a bank?

2. Feladatsor II. rész / B

16. Egy új autóút építéséhez húrtrapéz keresztmetszetű töltést építenek. A töltéskorona (a trapéz rövidebb alapja) szélessége 16 méter, a hosszabb alap szélessége 25 méter, a szárak hossza 8,1 méter.

a) Milyen magas a töltés?

b) Mekkora a töltés keresztmetszetének területe?

c) Hány fokos szöget zár be a töltés oldala a töltés alapjával?

17. Anna és Bori olyan társasjátékot játszanak, amelyben egy piros, egy zöld és egy kék szabályos dobókockával kell dobni, és a játékos a dobott pontok összegének megfelelő mezővel léphet tovább. Anna a végjátékban jól áll, így ha a következő dobása legalább 15, akkor a játékot megnyeri.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy Anna a következő dobással megnyeri a játékot?

Anna végül elhatározta, hogy előbb a piros kockával dob, majd utána a másik kettőt egyszerre gurítja el. A piros kockával hatost dobott.

b) A piros kockával történő dobás után mennyi a valószínűsége annak, hogy Anna a másik két kockával úgy dob, hogy azzal végül megnyeri a játékot?

18. A Fincsi Csoki cég egyik terméke 100 g-os kiszerelésben kerül a boltokba. A cég a minőség-ellenőrzés során a napi termelésből 10 darab csokoládét vizsgál meg, ezek tömege grammban mérve:

99, 97, 104, 98, 97, 101, 101, 100, 103, 98.

A termék akkor kerülhet forgalomba, ha a vizsgált csokoládék átlagtömege legfeljebb 1%-kal tér el a névleges tömegtől (100 g-tól), továbbá a mért értékek szórása 2,0 g-nál kisebb.

a) Forgalomba lehet-e hozni a vizsgált nap termékeit?

b) Számoljuk ki a mért adatok mediánját, alsó és felső kvartilisét, majd ábrázoljuk az adatokat dobozdiagramon.

3. Feladatsor I. rész

1. Mi a tagadása a „Mindenki kiváló matematikából" állításnak?

2. Az ötnek hányadik hatványa a $\frac{\sqrt[4]{125}}{\sqrt[3]{25}}$?

3. Az angolszász országokban még ma is használatos hosszúságegység a mérföld és az inch. Ha tudjuk, hogy 1 mérföld = 1,609 344 km és 1 inch = 2,54 cm, akkor hány inch egy mérföld?

4. Egyszerűsítsük a következő törtet:

$$\frac{15a+30}{5a^2-20}.$$

Milyen értékeket nem vehet fel az a változó?

5. Adott az $A=[-3;4[$ és $B=[-6;2]$ intervallum. Adjuk meg az $A\cup B$ és az $A\cap B$ intervallumokat.

6. Hány fokos az az α tompaszög, amelyre

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}?$$

7. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $\frac{5}{\sqrt{5x-2}}$ kifejezés értelmezhető.

8. Adjuk meg a 11; 12; 12; 14; 15; 16; 25 számok átlagát, móduszát és mediánját.

9. Egy egyenlő szárú háromszögnek az alapon fekvő egyik szögét felező egyenes a szemközti szárral 81°-os szöget zár be. Mekkorák a háromszög szögei?

10. Kanada kétnyelvű ország, hivatalos nyelvei az angol és a francia. Az egyik városban minden lakos beszéli a hivatalos nyelvek közül legalább az egyiket. A lakosság 85%-a beszél angolul, és 75% beszél franciául. Ha ebben a városban véletlenszerűen kiválasztunk egy lakost, mennyi annak a valószínűsége, hogy angolul és franciául is beszél?

11. Egy háromszög oldalai 19 cm, 22 cm és 31 cm. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

12. Ábrázoljuk a $[0; 6]$ halmazon értelmezett következő függvény grafikonját:

$$f(x) = -\frac{5}{6}x + 4.$$

Határozzuk meg a függvény értékkészletét.

3. Feladatsor II. rész / A

13. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{7x - 13} = x - 1$;

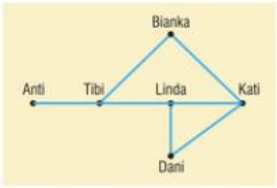
b) $(2^x)^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 2^8 \cdot 32^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x$.

14. Pató Pál január elsején 150 000 Ft-ot helyez el egy bankban, ahol évi 5%-os kamatot fizetnek.

a) Mekkora haszonra tesz szert, ha 12 év múlva kiveszi a bankból a pénzét, és közben nem tesz hozzá és nem is vesz ki a pénzéből, és a kamat is változatlan?

b) Mekkora haszonra tesz szert, ha 12 év múlva kiveszi a pénzét a bankból, de addig minden év elején újra hozzátesz 150 000 Ft-ot?

15. Tibi mozilátogatást szervez a barátaival. A mozi előtt egy kávézóban találkoznak. Az ábra azt mutatja, hogy a megjelentek közül ki kit ismer.



a) Akik nem ismerik egymást, azok a kávézóban kézfogással bemutatkoznak egymásnak. Hány kézfogásra kerül sor?

b) Le tudnak-e ülni a kávézóban egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki mellett egy-egy régi ismerőse ül?

c) Ha a moziban, egy sorban véletlenszerűen leülnek, mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy Tibi két lány között ül majd?

3. Feladatsor II. rész / B

16. Erős Pista naponta jár edzőterembe. A táblázat azt mutatja, hogy egy adott hét napjain hány percet fordított az egyes izomcsoportok erősítésére.

	Lábizom	Mellizom	Hátizom	Hasizom	Karizom	Pihenés (összesen)
Hétfő, szerda, péntek	15	–	15	10	20	30
Kedd	10	20	17	14	–	19
Csütörtök	–	20	10	10	10	20
Szombat, vasárnap	10	10	–	–	10	30

a) Ábrázoljuk kördiagramon az egyes tevékenységi formák heti mennyiségét. Adjuk meg a körcikkekhez tartozó középponti szögeket.

b) Az edzőteremben eltöltött idő hány %-ában pihen Erős Pista?

c) A keddi edzésen hányféle sorrendben végezheti a különböző testrészek erősítését, ha a pihenésre szánt időt a különböző gyakorlatok között használja fel, és nem végezhet egymás után mell- és hasizom-erősítést?

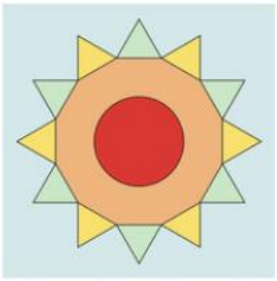
17. Csöpikénél csöpög a mosdó csapja, megszámolta: 1 perc alatt 4 csepp esik le. Egy csepp víz 3 mm átmérőjű gömbnek tekinthető.

a) Mennyi idő alatt telik meg a csap alá helyezett 2 dl-es pohár?

b) Hány liter víz csöpög el egy év (365 nap) alatt?

c) A lecsöpögő víztől a mosdón barna folt keletkezik. Hetente 1 dl folyékony tisztítószer szükséges az eltávolításához. Egy flakon félliteres tisztítószer ára 820 Ft. Mennyibe kerül egy éven át a mosdó tisztítása?

18. Az ábrán egy ősi napmotívum látható, amely egy szabályos tizenkét oldalú sokszögből, a sokszög oldalaira kifelé rajzolt szabályos háromszögekből és egy körből áll, amely koncentrikus a tizenkétszögbe írt körrel.



A kör sugara és a sokszög oldala egyaránt 6 cm hosszú.

a) Adjuk meg az egyes színekhez tartozó részek területét.

b) A sokszöget változatlanul hagyva mekkorának válasszuk a belső kör sugarát, hogy a piros és narancssárga területek egyenlők legyenek?

c) Hányféleképpen színezhető ki az ábra, ha mind a négy színt felhasználjuk, a szomszédos részek nem lehetnek azonos színűek, és a szabályos háromszögeket két színnel színezzük úgy, hogy a közös csúccsal rendelkező háromszögek sem lehetnek azonos színűek? (A forgatással egymásba átvihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek.)

4. Feladatsor I. rész

1. Legyen A a kétjegyű négyzetszámok halmaza, B pedig azon kétjegyű számok halmaza, melyek jegyeinek összege 9. Adjuk meg az $A \cap B$ halmazt.

2. Egy egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge 130°. Mekkorák a háromszög szögei?

3. Egy α tompaszög esetén $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Adjuk meg $\cos\alpha$ értékét az α kiszámítása nélkül.

4. Tekintsük állításnak a következő vallomást: „Nélküled az élet gyötrelem."

A következők közül, melyik a fenti állítás tagadása?

a) Veled az élet gyötrelem.

b) Nélküled az élet kellemes.

c) Nélküled az élet nem gyötrelem.

5. Számítsuk ki a $36^{3\cdot\log_6 2}$ hatvány értékét.

6. Melyik szám a nagyobb: a 9 és 21 legkisebb közös többszöröse vagy a 4032 és 8000 legnagyobb közös osztója?

7. Egy sícentrumban a szálloda kihasználtsága a három téli hónapban 88%-os, az év többi időszakában 44%. Hány %-os a szálloda kihasználtsága egész évre számítva?

8. Egy háromszög oldalainak hossza 12 cm, 16 cm és 8 cm. Egy másik, az előzőhöz hasonló háromszög kerülete 14,4 m. Hány méteresek a második háromszög oldalai?

9. Hány nullára végződik az első harminc darab prímszám szorzata?

10. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\log_4(8x - 11)$ kifejezés értelmezhető.

11. Ábrázoljuk a $[-4; 2]$ intervallumon értelmezett következő függvény grafikonját:

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

12. Egy háromszög egyik oldala 31 cm. Az adott oldalon lévő szögek 28° és 56° nagyságúak. Mekkora a háromszög legkisebb oldala?

4. Feladatsor II. rész / *A*

13. A boltban 10%-os ecet kapható.

a) Hány %-os ecetet kapunk, ha 0,5 liter ecethez 2,5 liter vizet öntünk?

b) Befőzéshez 3 liter 2%-os ecetre van szükség. Mennyi vizet és bolti ecetet keverjünk össze?

14. Egy diáknak a 413 oldalas kötelező olvasmány elolvasására 13 nap áll rendelkezésre. Az első napon 15 oldalt halad, majd úgy dönt, hogy ettől a naptól kezdve mindennap ugyanannyival növeli az elolvasott oldalak mennyiségét.

a) Hány oldallal olvasson többet napról napra, hogy időre befejezze a könyvet?

b) Ha naponta 4 oldallal olvasna többet, mint az előző napon, hány oldal maradna a 13. napra?

15. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az e egyenes, melynek egyenlete: $2x + 3y = 11$.

a) Írjuk fel a $P(6; 3)$ ponton áthaladó, az e egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét.

Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$. Adottak az $A(-1; 3)$ és $B(3; -9)$ csúcsok.

b) Adjuk meg a C pont koordinátáit, ha tudjuk, hogy rajta van az e egyenesen.

4. Feladatsor II. rész / *B*

16. A magánházak tulajdonosai a nagyobb biztonság érdekében egyre gyakrabban alkalmaznak mozgásérzékelővel vezérelt világító berendezéseket. Egy épületen a bejárat felett a talajtól 2,5 m magasságban fel van szerelve egy készülék, amely a tőle legfeljebb 10 méterre történő minden mozgást érzékel. A ház előtt 1,4 m széles gyalogjárda, majd 6 m széles úttest, és az út másik oldalán szintén egy 1,4 m széles járda húzódik.

a) Érzékeli-e a készülék annak a macskának a mozgását, amely a felszerelés helyével szemben a túlsó járda távolabbi szélén oson?

b) Az érzékelővel pontosan szemben az úttest távolabbi oldala és a járda határán áll egy magas fa. Milyen magasságban szállhat erre a fára egy bagoly, hogy a készülék ne érzékelje?

c) Milyen hosszú a távolabbi járda készülékhez közelebb eső szélén az a szakasz, amelyet a mozgásérzékelő ellenőriz?

17. A 12/*zs* osztályba 36 tanuló jár, és mindenki tanul legalább egy nyelvet az arab, japán vagy kínai közül. Az arabot összesen 21-en, a japánt 25-en, a kínait pedig 20-an tanulják. Akik nem tanulnak kínaiul, azoknak a fele arabul és japánul is tanul. Akik kínaiul és arabul is tanulnak, azoknak a fele, azaz négy fő mindhárom nyelvet tanulja.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha egy tanulót véletlenszerűen kiválasztunk az osztályból, ő nem tanul kínaiul?

b) Az iskolába ázsiai delegáció érkezik, köszöntésükre minden osztályból két embert sorsolnak ki. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 12/*zs* osztályból kisorsolt két diák arab, japán és kínai nyelvet is tanul?

c) Hány olyan tanuló jár az osztályba, aki csak egy nyelvet tanul a fentiek közül?

18. Eszter a 17 literes virágcserépben lévő leandert egy nagyobb edénybe szeretné átültetni. Vásárolt egy 51 cm magas csonka kúp alakú műanyag edényt, amelynek alul 38 cm, felül pedig 56 cm az átmérője. Átültetéskor a növény gyökerei akkor sérülnek legkevésbé, ha nem szedi le róluk a régi földet. A kertészeti áruházban a táblázatban felsorolt csomagolásban és árban lehet virágföldet kapni.

Térfogat	Ár
50 liter	725 Ft
20 liter	380 Ft
10 liter	240 Ft
5 liter	132 Ft

A tapasztalat szerint a megvásárolt föld ültetéskor vagy locsoláskor a 90 százalékára tömörödik össze.

a) Melyik virágföldből mennyit vásároljon, ha azt szeretné, hogy minél kevesebb legyen a maradék?

b) Melyik virágföldből mennyit vásároljon, ha a legolcsóbban szeretné megoldani az átültetést?

c) Hogyan alakulnak az előző eredmények, ha a kiürülő kisebb cserépbe is szeretne ültetni egy frissen vásárolt dísznövényt?

5. Feladatsor I. rész

1. Legyen $A = 5 \cdot 10^{12}$ és $B = 2 \cdot 10^{11}$. Írjuk fel normálalakban a következő számokat:

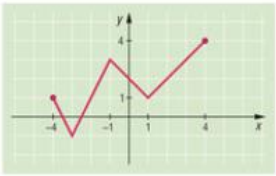
a) $A \cdot B$; *b)* $A + B$.

2. Legfeljebb hány egyenest határoz meg a síkon 8 különböző pont?

3. Adjuk meg az ábrán látható függvény

a) értelmezési tartományát;

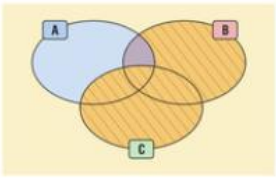
b) értékkészletét.



4. Egy háromszög oldalfelező pontjai által meghatározott háromszög oldalainak hossza 5 cm, 4 cm és 6 cm. Mekkora az eredeti háromszög kerülete?

5. Egy túra során első nap megtettük az út $\frac{3}{5}$ részét, a második nap a még hátralévő út 25%-át. Mekkora a túra teljes hossza, ha még 9 km van hátra?

6. Írjuk fel az A, B és C halmazok közötti műveletekkel az ábrán vonalkázással jelölt tartományt.



7. Egy paralelogramma egyik csúcsából a két szomszédos csúcsba mutató vektor legyen $\vec{a}$ és $\vec{b}$. Adjuk meg a paralelogramma átlóinak metszéspontjából a csúcsokba mutató vektorokat az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével.

8. Egy háromszög két oldalának hossza 10 cm és 8 cm, a területe 20 cm^2. Mekkora lehet a háromszög két adott oldala által bezárt szög?

9. A „Minden erdésznek van zöld kalapja." mondatnak az alábbiak közül melyik lehet a tagadása?

   A: „Nincs olyan erdész, akinek zöld kalapja van."

   B: „Van olyan erdész, akinek nincs zöld kalapja."

   C: „Nincs olyan erdész, akinek nincs zöld kalapja."

   D: „Akinek nincs zöld kalapja, az erdész."

10. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$x^2 - 3x - 10 > 0.$$

11. A koordinátasíkon egy kör átmérője AB. Adjuk meg az AB átmérő B végpontjának koordinátáit, ha az átmérő A végpontjának koordinátái $A(5; 7)$, és a kör középpontja $K(3; 4)$.

12. Lali leírta az összes 2-vel vagy 15-tel osztható kétjegyű pozitív egész számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük egyet véletlenszerűen kiválasztva, az 30-cal nem lesz osztható?

5. Feladatsor II. rész / *A*

13. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

   a) $\sqrt[3]{2^x} = 4 \cdot 8^{2x}$;

   b) $2 \cdot \frac{x^2+1}{x-1} - 1 = \frac{4x}{x-1} + x$.

14. Egy derékszögű háromszögben a két hegyesszög koszinuszának aránya $\frac{3}{4}$. Tudjuk, hogy az átfogó 25 cm.

   a) Mekkorák a háromszög befogói?

   b) Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

   c) Milyen hosszú a kisebb hegyesszög felezőjének a háromszög belsejébe eső szakasza?

15. Takarékos Oszkár be szeretne tenni a bankba 2 000 000 forintot három évre. Az alábbi lehetőségeket kínálja a bank:

   1. A betett pénz után évente 8% kamatot adnak, és minden év végén tőkésítenek, vagyis a következő évben a kamatokkal növelt érték kamatozik tovább.
   2. Az első évben 1%, a másodikban 8%, a harmadikban 15% kamatot adnak, és ugyanúgy évente tőkésítenek.

   a) Melyik befektetési forma esetén jut több pénzhez Takarékos Oszkár a 3 év letelte után?

   b) Takarékos Oszkár évenkénti tőkésítéssel évi 8%-os kamatra helyezett el 2 000 000 forintot a bankba, majd egy év leteltével pénzét kiegészítette még 1 000 000 forinttal. Legalább hány évet kell várnia a 2 000 000 forintos betét elhelyezése után, ha 5 000 000 forintot szeretne kivenni, és a kamatláb végig 8%?

5. Feladatsor II. rész / B

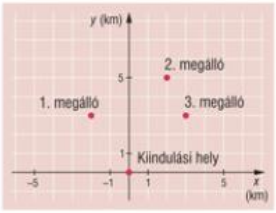
16. Egy buszmegállóban háromfajta buszjárat áll meg. A 70-es, 71-es és 72-es első járata reggel 5 órakor egyszerre indul. A 70-es 12, a 71-es 8 és a 72-es 14 percenként közlekedik.

a) Van-e olyan időpont délelőtt 10 és 11 óra között, amikor a megállóból egyszerre indul mind a három járat?

b) Az első buszra 35-en várnak. Ha véletlenszerűen szállnak fel az akkor induló három járat valamelyikére, akkor ezt hányféleképpen tehetik meg? (A felszállás sorrendjétől tekintsünk el, és a busz bármelyike képes mind a 35 utast egyszerre elszállítani.)

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utasok húsz százaléka a 70-es, $\frac{3}{7}$-e a 71-es, és a maradék a 72-es buszra száll fel?

d) A 70-es busz sík terepen közlekedik, és a koordináta-rendszerben ábrázoltuk az első három megállójának helyét. Mekkora utat tesz meg a kiindulási helyétől a harmadik megállóig a busz, ha két megálló közötti útszakasz egyenes? A tengelyeken egy beosztás 1 km.



17. Új labdarúgó-stadion épült. A nézőterének első sorában 200 ülőhely van, és minden továbbiban az előtte lévőnél 4-gyel több.

a) Hány soros lehet a nézőtér, ha a stadion befogadóképessége 11 500 és 12 000 között van?

b) A stadionban nemzetközi atlétikai versenyt rendeznek. A százméteres síkfutás nyolcas döntőjébe 3 angol, 2 holland és 1-1 francia, román és magyar versenyző jutott be. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három dobogós hely valamelyikére angol futó került?

c) A verseny utolsó napjára 4740 jegyet adtak el. Az eladott jegyek 40%-a 3200 forintos, a maradék egyik fele 4000, a másik fele 4700 forintos. Adjuk meg az eladott jegyek árainak átlagát, móduszát, mediánját.

18. Vendéglátó Vendel borral szeretné a látogatóit megkínálni. A számukra vásárolt 7,5 deciliter 12,5 térfogatszázalékos alkoholtartalmú bort az ábrán látható flaskába tölti.



A flaska alsó része egyenes csonka kúp alakú, az alkotója 13 cm, alapkörének átmérője 13 cm, a fedőkörée pedig 3 cm. A flaska felső része henger alakú, alapkörének átmérője 3 cm, magassága 12 cm.

a) A flaska felső peremétől számítva milyen magasan áll benne a bor? (A flaska falvastagságát hanyagoljuk el.)

b) Vendel a vendégek megérkezése előtt úgy gondolta, hogy meg kellene kóstolni a bort. Ki is öntött a flaskából annyit, hogy a bor szintje az üvegben 3 cm-rel csökkenjen. De hogy ne vegyék észre, a hiányt vízzel pótolta úgy, hogy az eredeti magasságig álljon a flaskában a folyadék. Mivel a bort finomnak tartotta, ezt még háromszor megismételte. Hány százalékos „borral" kínálta így a vendégeit Vendel?

6. Feladatsor I. rész

1. Egyszerűsítsük a következő törtet: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

2. Egy találkozón hat ember vett részt. A résztvevők felének 3, harmadának 2 és egy embernek 1 haragosa van a társaságban. Szemléltessük gráffal az egymással haragban levő embereket.

3. Egy népszavazáson, amelyen a feltett kérdésre igennel vagy nemmel lehetett válaszolni, a választásra jogosultak 46%-a szavazott. A leadott szavazatok között 658 122 igen volt. Hányan mentek el szavazni, ha az igenek száma az összes leadott szavazat 19%-a? (Feltesszük, hogy minden leadott szavazat érvényes volt.)



4. Mennyi a következő rekurzívan megadott sorozat első 5 elemének összege?

$$a_1 = 3 \quad \text{és} \quad a_n = n \cdot a_{n-1}, \text{ ha } n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}.$$

5. Legyen az A halmaz a téglalapok halmaza, a B a rombuszoké, a C pedig a deltoidoké. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

   a) $A \cap B$ a négyzetek halmaza.

   b) $C \setminus A$ azon deltoidok halmaza, amelyeknek pontosan egy szimmetriatengelye van.

6. Mekkora szögben látjuk azt a 30 cm átmérőjű focilabdát, amelynek középpontja tőlünk három méterre van?

7. Adjuk meg a $2^{x-1} = 5$ egyenlet megoldását két tizedesjegy pontossággal.

8. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja O. Mekkora az ABC szög, ha az $AOC\sphericalangle = 42°$?

9. Egy vállalat 70 dolgozója közül 30-nak a fizetése 90 000 forint, 20-nak 105 000, 12-nek 180 000, 7-nek 200 000 és egynek 500 000 forint. Adjuk meg a fizetések átlagát, móduszát, mediánját. (Az átlagot egészekre kerekítve adjuk meg.)

10. Számoljuk ki a következő másodfokú egyenlet diszkriminánsának pontos értékét:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot x^2 - \left(\sqrt{2} + 2\right) \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

11. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a $[0; 3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény grafikonját.

12. Attila, Ambrus, András, Orsi, Adri és Kriszti moziba mennek. Ha a jegyek egymás mellé szólnak, azokat véletlenszerűen osztják szét, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy Ambrus Adri mellett ül?



6. Feladatsor II. rész / A

13. Egy gyorsétteremben háromféle méretű pizzát lehet kapni. (A méret a kör alakú pizza átmérőjének hossza.)

	A pizza mérete	A pizza átlagos ára
Kicsi	24 cm	1150 Ft
Közepes	32 cm	1650 Ft
Nagy	40 cm	2650 Ft

a) Melyik pizzának a legmagasabb az átlagos ára négyzetcentiméterenként?

Hajni egy 24 cm átmérőjű pizzát rendelt. Öccse a pizzát kettévágta egy olyan egyenes mentén, amely a pizza középpontjától 3 cm-re haladt, majd a kisebb részt elfogyasztotta.

b) A pizza hány százaléka maradt meg Hajninak?

Egy diákmunkás pizzafutár kedvenc tantárgya az iskolában a matematika. Arra a kérdésre, hogy egy adott napon hány címre szállított pizzát, azt mondta, hogy az 10110_2 kettes számrendszerbeli szám adja meg a választ.

c) Hány címre szállított pizzát ez a futár?

14. Pista bácsi egy 20 házból álló lakótelep 1. számú házában lakik. Minden ház körül az ábrán látható módon téglalap alakú sétaút van, amelynek hosszabbik oldala 60 m, rövidebbik oldala 20 m. A házak közti utak egymástól 50 m távolságra vannak.



Pista bácsi húsz napon keresztül mindennap lemegy a kutyájával sétálni, és megáll az A ponttal jelölt helyen. Az első nap a kutya A-ból indulva a sétaúton körbefutja az első tömböt, majd visszatér a gazdájához. A második nap szintén A-ból indulva ugyanezt megteszi a második tömbbel, és így tovább.

a) Mekkora utat fut be a kutya a hetedik napon?

b) Mekkora utat fut be a kutya húsz nap alatt összesen?

15. Ha a számítógépen egyszerre több fájl másolását indítjuk, akkor két sávban láthatjuk, hogy a másolás hol tart. Az alsó sávban azt, hogy a teljes másolás hány százaléka történt meg, a felsőben pedig, hogy az aktuális fájl hány százalékát másolta át eddig a gép.

Most éppen három adatállományt másolunk. A képernyőre nézve ezt láthatjuk

az első fájl másolásakor:



a második fájl másolásakor:



Mit láthatunk a felső sávban a harmadik fájl másolása során, ha az alsó sávban 91% látható?

6. Feladatsor II. rész / B

16. A 2009-es Forma–1 futamokról készültek a következő táblázatok.

A verseny első 10 helyezettje		
	A pilóta neve	Pont
1.	Jenson Button	95
2.	Sebastian Vettel	84
3.	Rubens Barrichello	77
4.	Mark Webber	69,5
5.	Lewis Hamilton	49,0
6.	Kimi Raikkönen	48
7.	Nico Rosberg	34,5
8.	Jarno Trulli	32,5
9.	Fernando Alonso	26
10.	Timo Glock	24

Dátum	Futam	Győztes	A győztes csapata
2009. november 1.	Abu Dhabi nagydíj	Sebastian Vettel	Red Bull–Renault
2009. október 18.	Brazil nagydíj	Mark Webber	Red Bull–Renault
2009. október 4.	Japán nagydíj	Sebastian Vettel	Red Bull–Renault
2009. szeptember 27.	Szingapúr nagydíj	Lewis Hamilton	McLaren–Mercedes
2009. szeptember 13.	Olasz nagydíj	Rubens Barrichello	Brawn–Mercedes
2009. augusztus 30.	Belga nagydíj	Kimi Raikkönen	Ferrari
2009. augusztus 23.	Európa nagydíj	Rubens Barrichello	Brawn–Mercedes
2009. július 26.	Magyar nagydíj	Lewis Hamilton	McLaren–Mercedes
2009. július 12.	Német nagydíj	Mark Webber	Red Bull–Renault
2009. június 21.	Brit nagydíj	Sebastian Vettel	Red Bull–Renault
2009. június 7.	Török nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes
2009. május 24.	Monacoi nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes
2009. május 10.	Spanyol nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes
2009. április 26.	Bahrain nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes
2009. április 19.	Kínai nagydíj	Sebastian Vettel	Red Bull–Renault
2009. április 5.	Malajziai nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes
2009. március 29.	Ausztrál nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes

a) Melyik versenyző pontszáma van a legközelebb az első tíz versenyző átlagpontszámához?

b) Készítsünk oszlopdiagramot, amely a különböző csapatok győzelmének gyakoriságát ábrázolja. Adjuk meg ezen adatsor módusát.

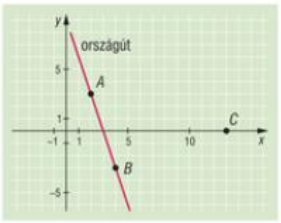
c) A versenybizottság a futamok számát túl soknak találja, ezért a helyszínek számát szeretné 15-re csökkenteni. Ha véletlenszerűen választanák ki ezeket, akkor mennyi lenne annak a valószínűsége, hogy Magyarország közte lenne?

d) A Hungaroring-pálya hossza 4381 méter. A versenyek során a leggyorsabb kört Michael Schumacher tette meg, megközelítőleg $199\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel. Egészekre kerekítve hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ annak az autónak a sebessége, amelyiket ezen a pályán $199\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel Schumacher 3 perc 20 másodpercenként köröz le? (Az autók sebességét tekintsük végig ugyanakkorának.)

17. Egy múzeum régészeti feltárásokat végez három helyen.

Az A, B és C helyen dolgozó régészeknek a száma ebben a sorrendben egy mértani sorozat első három tagja. Az összlétszám 38 fő, az A és B helyen együttesen 20 ember dolgozik.

a) Adjuk meg a B helyen dolgozó régészek számát.



A három feltárási helyet a koordinátasíkon három pont jelöli: $A(2; 3)$, $B(4; -3)$ és $C(13; 0)$. Az A és B helyek egy egyenes országút mentén helyezkednek el.

b) Igazoljuk, hogy az országút B pontja van legközelebb a C ásatási helyhez.

Az A pontban végzett feltárások során a régészek egy olyan leletre bukkantak, amelyből arra következtettek, hogy azon a helyen is érdemes lenne egy újabb feltárási helyet nyitni, amelyik az A, B és C pontoktól egyenlő távol van.

c) Adjuk meg ennek az újabb helynek a koordinátáit.

Az egyik helyszínen egy régi faleletet találtak, amely 72 000 db $^{14}_{6}C$ szénatomot tartalmaz cm^3-enként. Az ugyanilyen élő fa 90 000 db $^{14}_{6}C$ szénatomot tartalmaz cm^3-enként.

d) Adjuk meg ennek a leletnek a korát ezer évre kerekítve a következő képlet segítségével:

$$N(t) = N_0 \cdot 10^{-0{,}00005 \cdot t}.$$

(t a lelet kora, N_0 az élő fában cm^3-enként található $^{14}_{6}C$ szénatom száma, $N(t)$ a leletben t idő elteltével cm^3-enként található $^{14}_{6}C$ szénatom száma.)

18. Attila repülőgéppel Texas állam fővárosába, Austinba utazik néhány hetes kiküldetésre. A repülőgép Frankfurtból indul európai idő szerint 10 óra 5 perckor, és Austinba az ottani idő szerint 14 óra 15 perckor érkezik. A repülőgép menetideje 11 óra 10 perc.

a) Amikor Budapesten a munkatársak a déli harangszó idején ebédelni mennek, mivel foglalkozhat Austinban Attila? (A helyes válasz sorszámát karikázzuk be.)

(1) Marhasteaket eszik vacsorára.

(2) Alszik, de néhány óra múlva fel kell kelnie, hogy induljon dolgozni.

(3) A 40 fokos melegben autózik dél felé.

A repülőgépen három különböző osztályon összesen 301 utas fér el, és minden jegyet eladtak: Business Class 30 fő, Prémium Economy Class 16 fő és Economy Class 255 fő.

b) Határozzuk meg, hogy hányféleképpen lehet az utasok közül mindhárom osztályból két-két főt kiválasztani, ha a kiválasztás sorrendje nem számít, illetve adjuk meg a lehetőségek számát akkor is, ha a kiválasztás sorrendje számít.

A szállodában reggelire olyan gofrit adnak, amely a Texas állam szárazföldi területét megadó síkidomhoz hasonló, és a hasonlóság aránya 1 : 5 000 000.



c) Megközelítőleg hány négyzetkilométer Texas állam szárazföldi területe, ha a gofri a 20 cm átmérőjű tányér 87%-át fedi le? A választ 10 000 négyzetkilométerre kerekítve adjuk meg.

A Texas zászlóján szereplő ötágú csillagot egy szabályos ötszög átlóinak behúzásával szerkeszthetjük meg.



d) Mekkorák ennek a csillagnak a belső szögei?

7. Feladatsor I. rész

1. Egyszerűsítsük az $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$, $(x \neq -y)$ törtet.

2. A csokigyárban egy dobozban van 50 mazsolás csokigolyó, amelyekhez 30 marcipánost öntenek. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobozból egy golyót véletlenszerűen kivéve, az marcipános lesz?

3. Legfeljebb hány pontban metszhetik egymást két háromszög oldalai?

4. Mi a 4, 8, 0, 7, 10, 2, 5, 9 minta alsó és felső kvartilise?

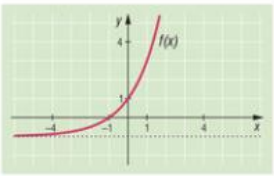
5. Számítsuk ki a rombusz területét, ha oldala 5 cm, hegyesszöge 60°.

6. Egy ötpontú gráf pontjainak fokszámai a következők: 2, 2, 2, 2, 4. Hány éle van a gráfnak?

7. Az e egyenes áthalad a $P(3, 5)$ ponton, és merőleges a $2x + 3y = 8$ egyenesre. Írjuk fel az egyenes egyenletét.

8. Oldjuk meg a negatív valós számok halmazán a $2x^2 + 18x = 0$ egyenletet.

9. Melyik függvény grafikonja látható az ábrán?



   a) $y = 2^x - 1$;
   b) $y = 2^{x-1} + 1$;
   c) $y = 2^{x+1} - 1$;
   d) $y = 2^{x-1} - 1$.

10. Adjuk meg azon 0 és 180° közé eső szöget, amelynek szinusza $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ és koszinusza negatív.

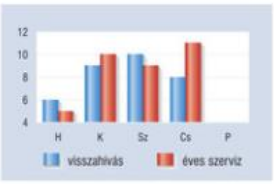
11. A 14 fős csoportból 10-en jártak Bécsben és ugyanennyien jártak Berlinben. Hányan jártak mindkét városban, ha a csoportból mindenki járt legalább az egyik helyen?

12. Adjuk meg a következő kifejezés értelmezési tartományát:

$$\log_3(2x - 4).$$

7. Feladatsor II. rész / A

13. A diagram egy autószervizben megfordult autók számát mutatja napi bontásban, hétfőtől csütörtökig. A kék oszlop a kötelező javításra visszahívott autók számát, a piros az éves szervizre érkezett járműveket mutatja.



   a) Számítsuk ki a péntekre visszahívott járművek számát, ha tudjuk, hogy egész héten a napi átlag 8 jármű volt.
   b) Határozzuk meg az első négy nap alapján, hogy átlagosan mennyi az éves szervizre érkezett járművek számának változása egyik napról a másikra. Jósoljuk meg, hogy hány járművet hívnak vissza pénteken, ha csütörtökön ezzel az átlaggal számolunk.

c) Előfordulhatott, hogy a műhelybe érkezett autón az éves szerviz keretén belül végezték el a kötelező javítást is. Milyen határok között mozoghat annak a valószínűsége, hogy hétfőtől csütörtökig egy autót kiválasztva az csak az egyik szolgáltatást vette igénybe a szervizben?

14. Oldjuk meg az egyenletet és az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

a) $2^{2x+4} - 3 = 5$; *b)* $\frac{x}{x+3} < 0$.

15. Eszter és Csaba családi házat terveznek. Kör alakú nappalijuk alját színes, összezúzott járólapdarabkákkal fogják koncentrikus körökben kirakni. Ehhez a nappali középpontja mint középpont körül körvonalakat rajzolnak. A szomszédos körök sugarainak különbsége mindig az első kör sugara. A járólap darabkáit a rajzolt körök közé építik be.

a) Az egymás után következő körgyűrűkben számtani vagy mértani sorozat szerint fog növekedni a felhasznált járólapdarabok száma, ha a darabszám arányos a külső határoló kör hosszával?

b) Hány járólapot zúztak össze, ha egy járólapot 6 darabra törtek, a kezdőkörbe 4 darabka került, és a kezdőkörrel együtt összesen 20 körgyűrűt kell kitölteniük?

7. Feladatsor II. rész / *B*

16. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának csúcsai $A(0; -2)$ és $B(6; -2)$, magassága 8 egység. C csúcsa az első síknegyedbe esik.

a) Határozzuk meg C koordinátáit.

b) Mekkora az ABC háromszög területe?

c) Egy kúp alapkörének átmérője 6 cm, magassága 4 cm. Mekkora a felszíne?

17. A fagyizóban Gombóc Artúr csak egy (gömb alakú) gombóc csokoládéfagyit kér. Kézhez kapva a fagylaltot megállapítja, hogy oldalról nézve a gömb magasságának egyharmada látszik ki a tölcsérből.

a) Hány köbcentiméter a gömb alakú gombóc fagyi térfogata, ha a kúp alakú tölcsér átmérője 5,6 cm, magassága 9,6 cm? Az eredményt egész köbcentiméterre kerekítve adjuk meg.

b) Ha Gombóc Artúr a fagyi elfogyasztása előtt elkezd Madárvédő Golyókapkodóval beszélgetni, és véletlenül elolvad kezében a fagyi, milyen magasan áll majd a tölcsérben az olvadt csoki? (Feltételezzük, hogya tölcsér alján semennyi nem folyik ki.)

18. Egy lefelé mozgó, $a\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$-tel gyorsuló liftben elhelyezett L méter hosszú inga lengésidejét a következő függvény írja le:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g-a}},$$

ahol $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a földi gravitációs gyorsulás.

a) Adjuk meg pontosan a 25 cm hosszú inga lengésidejét egy $a = 0{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$-tel gyorsuló liftben.

b) Hány centiméter hosszú legyen az inga, ha azt akarjuk, hogy a lengésideje 2 másodperc legyen a $8{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulású liftben?

c) Mekkora a lift gyorsulása, ha a benne elhelyezett $L = 1$ m hosszú inga lengésideje $T = 3$s?

8. Feladatsor I. rész

1. Milyen számjegyet írhatunk X helyére, hogy $1212X2$ osztható legyen 4-gyel? Soroljuk fel mindet.

2. Egy P pont 4 cm-re van egy 6 cm sugarú kör vonalától. Milyen hosszú a körön kívüli P ponttól a körig húzott érintő szakasz?

3. Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások megfordításai. Karikázzuk be a helyes választ.

Állítás	Az állítás megfordítása
Ha egy szám 2-vel és 6-tal osztható, akkor 12-vel is osztható.	Igaz / Hamis
Ha egy szám prímtényezős felbontásában nincs 2-es prímtényező, akkor a szám páratlan.	Igaz / Hamis
Ha egy pozitív egész szám prím, akkor csak 1-gyel és önmagával osztható.	Igaz / Hamis

4. Adott az $I =]2; 7]$ és $J = [1; 4]$ intervallum. Ábrázoljuk számegyenesen az $I \setminus J$, $J \setminus I$ intervallumokat.

5. Eszter dobozában 10 különböző gyöngy van, közülük találomra választ 4-et. Hányféleképpen választhatja ki és fűzheti fel sorban a gyöngyöket?

6. Iván 3 dolgozatot írt eddig a félévben, egy 15, egy 62 és egy 58 pontosat. Legalább hány pontos dolgozatot kell írnia negyedikre, hogy átlagban teljesítse a 60%-ot, ha az első és harmadik dolgozat 100, a második és negyedik 80 pontos?

7. Milyen előjelű $\operatorname{tg} \alpha$, ha $\sin \alpha$ pozitív és $\cos \alpha$ negatív?

8. Adjuk meg azt a legbővebb intervallumot, amelyen az $f(x) = -(x+4)^2 + 5$ függvény monoton növő.

9. Egy termék árát a karácsonyi vásár előtt 40%-kal növelték, utána 40%-kal csökkentették. Nőtt vagy csökkent az ár a vásár előttihez képest? Hány százalékkal?

10. Mi a kör egyenlete, ha középpontja $K(-2; 1)$ és sugara $r = 3$?

11. Legyen $p = \log_2 3$. Mivel egyenlő 2^p?

12. Egy négyzet alakú képkeret széleit érinti a kör alakú üveg. Az üveg mögött van egy kép Lidiről. Mekkora valószínűséggel találja el az üveget Lidi öccse, amikor köpőcsövével a képtartót veszi célba és biztosan el is találja?



8. Feladatsor II. rész / A

13. Oldjuk meg az egyenletet és az egyenletrendszert a valós számok halmazán.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$;

b) $\left.\begin{array}{l} y^2 + 2x = 4 + 7x \\ y - x = 2 \end{array}\right\}$.

14. Egy kör alakú asztalnál három házaspár foglal helyet. Hányféleképpen ülhetnek le, ha csak az egymáshoz viszonyított helyzetük érdekes valamilyen körüljárás szerint, és

a) bárki bárhova leülhet;

b) a házastársak egymás mellé ülnek?

Vacsora közben a salátástálat a vendégek egymás között adták-vették. Egy pincér megszámolta, hogy a hat személyből ötnél 4, 2, 3, 3, 5 alkalommal fordult meg a tál.

c) Hányszor lehetett legalább és legfeljebb a salátástál a hatodik vendég kezében? (Ugyanazon két személy kétszer nem adta a tálat egymásnak.) Adjunk konkrét példát mindkét esetre.

15. Az $f(x) = 2x^2 - 5x + c$ függvényről tudjuk, hogy áthalad a (4; 16) ponton.

a) Határozzuk meg c értékét.

b) Metszi-e a függvény az x tengelyt?

c) Melyik irányban, mennyivel kell eltolni függőlegesen a függvényt, hogy érintse az x tengelyt?

8. Feladatsor II. rész / *B*

16. A 13 emeletes szálloda minden szintjén 20 szoba található. A szobák három típusúak: van 2, 4 és 6 személyes. Az egy szinten levő szobák közül 7 kétszemélyes, 8 négyszemélyes, a többi hatszemélyes. Minden szinten van 6 konyhás szoba is, szobatípusonként 2-2.

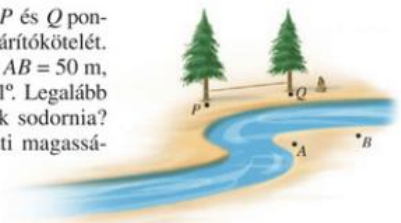
a) Egy turistacsoport érkezik a szállóba, 8 pár és 3 kétgyermekes család. Hányféleképpen kaphatnak szobákat, ha a recepciós a megfelelő számú és típusú szobákat véletlenszerűen osztja szét a párok és családok között? (A hotel éppen üres volt.)

b) Valaki beszáll a liftbe, véletlenszerűen kiválaszt egy emeletet, majd a liftből kiszállva találomra bekopog egy ajtón. Minek nagyobb a valószínűsége: a felső öt emelet valamelyikén egy négyszemélyes, vagy az alsó nyolc emeleten egy hatszemélyes szobába kopogott be?

c) Egy utazási iroda minden szinten mindenfajta szobából lefoglal egyet véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy szobához lesz konyha is?

17. Egy 30 fős osztályban megkérdezték a tanulókat, hányan olvasnak nem kötelező szépirodalmat, hányan olvasnak képregényeket és hányan újságot. Az első két kérdésre összesen 15 fő tette fel a kezét. A második kettőre 17-en, az elsőre vagy harmadikra 18-an jelentkeztek. Tudjuk, hogy az első kérdésre jelentkezők fele jelentkezett a második kérdésre is. Azok közül, akik a másodikra jelentkeztek, a harmadik kérdésre hatan már nem nyújtották a kezüket. Végül azt is tudjuk, hárman jelezték, hogy olvasnak szépirodalmat és újságokat is, egyetlen fő pedig mindhárom irodalmat. A diákok hány százaléka nem olvas sem szépirodalmat, sem képregényeket, sem újságot?

18. Nyuszitappancs, Nagy Papucs neje a folyó túlpartján P és Q pontokban álló két fa között szeretné kifeszíteni a szárítókötelét. Mielőtt átkelnek a folyón, lemérik a következőket: $AB = 50$ m, $PAB\sphericalangle = 100°$, $QAB\sphericalangle = 65°$, $QBA\sphericalangle = 60°$, $PBA\sphericalangle = 21°$. Legalább milyen hosszú szárítókötelet kell Nagy Papucsnak sodornia? (Minden tereptárgy ugyanazon a tengerszint feletti magasságon áll.)



9. Feladatsor I. rész

1. Egy 37 800 forintos okosóra árát 42 336 forintra emelték. Hány százalékos az áremelés?

2. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága 1 : 5 arányban osztja két részre a derékszöget. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

3. Egy rombusz két átlója 8 és 6 egység. Számítsuk ki a rombusz kerületét.

4. Egy forgáskúp tengelyén áthaladó sík olyan szabályos háromszögben metszi a kúpot, amelynek oldala 4 egység. Számítsuk ki a kúp felszínét.

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$\frac{(x+3)^2}{2} + 2 - (2x-1)(2x+1) = 5x + 6.$$

6. Egy szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám pímszám?

7. Egy számtani sorozat ötödik tagja 3. Számítsuk ki a sorozat első 9 elemének összegét.

8. Írjuk fel az (1; 2) ponton áthaladó, az $y = 2x + 1$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenletét.

9. A Szeged és Kiskunfélegyháza közötti távolságot a gyorsvonat 45 perc alatt teszi meg. Ugyanezt az utat egy tehervonat 1 óra 15 perc alatt teszi meg. A tehervonat sebessége hány százaléka a gyorsvonat sebességének?

10. Egy kocka minden élét 40%-kal megnöveljük. Hányszorosára nő a kocka térfogata?

11. Az első 100 pozitív egész szám között hány olyan van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal?

12. Egy háromszög két oldalának hossza 3 és 8 egység, a közbezárt szög 120°. Számítsuk ki a háromszög területét.

9. Feladatsor II. rész / A

13. *a)* Egy bankban lekötött betétként elhelyezünk 2 000 000 Ft-ot 8 évre. Ez idő alatt a kamat nem változik. A bank éves kamatot számol, amelyet az év végén hozzáadnak a tőkéhez, tehát a következő évben már az is kamatozik.

    Mekkora az éves kamat, ha 8 év múlva 2 800 000 Ft-ot vehetünk ki a bankból?

    b) Egy másik bankban ugyanilyen konstrukció szerint éves 3%-os kamatot adnak a lekötött betétre. Az itt elhelyezett 2 000 000 Ft hány év alatt nő 2 800 000 Ft-ra, ha a kamat az évek alatt nem változik?

14. Krisztián az előző tanévben a következő jegyeket kapta matematikából:

    5; 5; 3; 5; 1; 5; 4; 4; 2; 3; 1; 5.

    a) Szemléltessük kördiagramon az osztályzatok gyakorisági eloszlását. Adjuk meg az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek nagyságát.

    b) Adjuk meg az osztályzatok átlagát, mediánját, móduszát és szórását.

15. Egy derékszögű háromszög köré írható kör sugara 12,5 cm, az egyik befogója 15 cm hosszúságú.

    a) Mekkora az átfogóhoz tartozó súlyvonal hossza?

    b) Számítsuk ki a háromszög kerületét.

    c) Mekkora a háromszög területe?

    d) Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

9. Feladatsor II. rész / B

16. Ildikó meséket gyűjt. A meséi közül 60 olyan van, amelyben szerepelnek állatok, 65-ben jelennek meg tündérek, 78-ban pedig gyerekek. 47 olyan meséje van, amelyben tündérek és állatok is szerepelnek, de ezekben mindben megjelennek gyerekek is. 52 mese szól állatokról és gyerekekről, 58 pedig gyerekekről és tündérekről. 18 mesében sem állat-, sem gyerek-, sem tündérszereplő nincsen.

a) Készítsünk halmazábrát.

b) Összesen hány mesét gyűjtött Ildikó?

c) A tündérekről szóló mesék közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mennyi a valószínűsége, hogy abban sem állatok sem gyerekek nem szerepelnek?

d) Ildikót arra kérik, hogy válasszon kettőt a meséi közül. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen választva, mindkét mesében szerepelnek tündérek, állatok és gyerekek is?

17. Egy présgép műanyag dobozokat gyárt. A tapasztalat szerint a kész dobozok 6%-a selejt.

a) Kiveszünk 25 dobozt a kész termékek közül. Mennyi a valószínűsége, hogy egy sem selejtes?

b) Kiveszünk 40 dobozt a kész termékek közül. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 5 selejtes van közöttük?

c) A gép által gyártott dobozok külső felületét olyan bevonattal látják el, amely nem engedi át a fényt. Egy felül nyitott doboz esetén a bevonat 400 cm^2 területű. A doboz alapéleinek és magasságának aránya 2 : 3 : 1. A doboz falának vastagsága elhanyagolható. Hány liter folyadék fér a dobozba?

18. Egy természetes számot úgy hozunk létre, hogy a pozitív egész számokból annyit írunk egymás mellé, amennyi az értéke: 1223334444555556…

a) Hány jegyű lesz az a szám, amely úgy fejeződik be, hogy leírjuk a 10-eseket?

b) Az összes egy- és kétjegyű szám leírásával létrehozott számban hányszor írjuk le a 3-as számjegyet?

c) Az előbbi módon leírunk egy 2023 jegyű számot. Milyen számjegy áll az utolsó helyen?

10. Feladatsor I. rész

1. Mekkora az x tompaszög, ha $2 \cdot \cos x = -\sqrt{2}$?

2. Mennyi $4^{1+\log_2 3}$?

3. Adottak a koordináta-rendszerben az $A(1; -5)$ és $B(-3; 2)$ pontok.
Tükrözzük A-t a B pontra. Adjuk meg a tükörkép koordinátáit.

4. Két szabályos dobókockával (egy pirossal és egy kékkel) dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege nagyobb, mint 10?

5. Egy háromszög egyik szöge 50°, a másik két szög aránya 6 : 7. Mekkora ez a két szög?

6. Egy gömb térfogata $4{,}5\pi$. Számítsuk ki a gömb felszínét.

7. Adott egy kocka. Az A csúcsából kiinduló három élvektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Állítsuk elő az A csúcsból induló testátló vektort.

8. Egy vízilabda-mérkőzésen az egyik csapat éppen vízben lévő 7 játékosának átlagéletkora 26 év. Amikor az egyik játékost kiállítják, az életkorok átlaga 27 év lesz. Hány éves a kiállított játékos?

9. Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelyben az élek száma 66?

10. Számítsuk ki az egyenlő szárú háromszög területét, ha alapja 10 cm és szára 13 cm.

11. Az $\frac{a}{5}$ szám 70%-a 35. Mennyi az a értéke?

12. Ábrázoljuk a következő függvény grafikonját, és határozzuk meg a legnagyobb és legkisebb értékét:
$$x \mapsto x^2 - 5x + 6, \quad 0 \le x \le 5.$$

10. Feladatsor II. rész / A

13. *a)* Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak. Válaszunkat indokoljuk.
   1. Négy egymást követő egész szám szorzata soha nem 0.
   2. Négy egymást követő egész szám összege soha nem 0.
   3. Négy egymást követő egész szám négyzetének összege mindig páros szám.
   4. Négy egymást követő egész szám között mindig van pontosan egy, amely osztható 3-mal.
   5. Négy egymást követő egész szám között mindig van két páros szám.

   b) Négy egymást követő egész szám négyzeteinek összege 1374.
   Melyek ezek a számok?

14. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 57 cm. Az alap és szárak hosszának felcserélésével kapott egyenlő szárú háromszög kerülete 54 cm.
   a) Mekkorák az eredeti háromszög oldalai?

   Egy egyenlő szárú háromszög alapja 21 cm, szárai 29 cm hosszúak.
   b) Mekkora részekre vágja az egyik alapon fekvő szög szögfelezője a szemközti szárat?

15. A digitális órák gyakran óó:pp formában mutatják az időt. Az első két szám 00-tól 23-ig az órát adja meg, a második kettő 00-tól 59-ig a perceket. Néha előfordul, hogy a kettősponttal elválasztott két szám közül az egyik osztója a másiknak, pl. 16:04; 20:10 vagy 20:40-kor.
   a) 12:00 és 15:00 között hányszor fordul elő, hogy a perceket mutató szám osztója az órák számának?
   b) 08:00 és 11:00 között hányszor fordul elő, hogy az órát jelző szám osztója a perceket jelző számnak?

10. Feladatsor II. rész / B

16. A forró tea lehűlését a 22 °C-os konyhában a következő függvénnyel lehet közelíteni:
$$T(x) = 73 \cdot 10^{-\frac{x}{37}} + 22,$$
ahol x a lehűlés kezdetétől – a tea elkészítésétől – eltelt időt jelenti percekben mérve.

a) Mekkora a tea hőmérséklete a tea elkészítésekor?

b) Mekkora a tea hőmérséklete az elkészítését követően 37 perc múlva?

c) Az elkészítéstől számítva mennyi idő múlva éri el a tea a fogyasztható 60 °C hőmérsékletet?

A forró teát egy 9 cm magas 7,5 cm átmérőjű, henger alakú bögrébe öntjük, amely nincs tele, pontosan 7 cm magasan áll benne a folyadék. Úgy döntünk, hogy nem várjuk meg a tea lehűlését, hanem jéggolyókkal gyorsítjuk a folyamatot.

d) Hány darab 3 cm átmérőjű jéggolyót tehetünk a teába, hogy – azok teljes elolvadása után – a tea ne csorduljon ki a bögréből? Vegyük figyelembe, hogy a víz sűrűsége 1 g/cm^3, a szilárd állapotú jég sűrűsége pedig 0,9 g/cm^3. (Ez azt jelenti, hogy 1 cm^3 jég elolvadásakor 0,9 cm^3 víz jön létre.)

17. A magyarkártya-csomag 32 lapból áll. Mind a négy „színből": piros, zöld, makk, tök 8-8 lap van. Egy színen belül a 8 különböző értékű lap: hetes, nyolcas, kilences, tízes, alsó, felső, király, ász.

Hárman kártyáznak magyar kártyával. Az első „körben" – a jól megkevert csomagból – mindenki kap öt lapot.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első játékos 3 zöldet és 2 makkot kap?

Az első játékos valóban 3 zöldet és 2 makkot kapott.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a második játékos nem kap pirosat?

A második játékos 2 pirosat és 1-1 makk, zöld és tök színű lapot kapott.

c) Az első két játékosnak kiosztott lapok ismeretében mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik játékos 2 zöldet, 2 tököt és 1 pirosat kap?

Minden játékos megkapta az első 5 lapot.

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy senkinél nem lesz sem ász, sem hetes, sem tízes?

18. Egy 30 fős osztály matematikadolgozatainak kijavítása után a tanár szomorúan állapítja meg, hogy a dolgozatok 40%-a elégtelen lett.

a) Mennyi lehet a dolgozatok átlagának maximuma, illetve minimuma?

A dolgozatok kiosztásakor kiderült, hogy a 40% elégtelen mellett a dolgozatok 20%-a elégséges, 30%-a közepes, a többi pedig jeles lett.

b) Ábrázoljuk kördiagramon az elért eredmények eloszlását. Adjuk meg az egyes értékekhez tartozó középponti szögeket.

c) Mennyi a dolgozatok jegyeinek módusza és mediánja?

d) Számítsuk ki a jegyek átlagát és szórását.

e) Hány olyan érdemjegy van, amely az átlagtól a szórásnál nagyobb értékkel tér el?

EMELT SZINTŰ FELADATSOROK

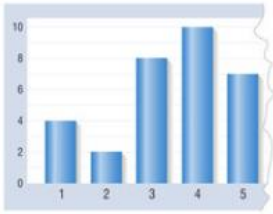
1. Feladatsor / A

1. Oldjuk meg az egyenletet és az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.
   a) $2^{2x} - 2^{x+3} + 3 \cdot 2^2 = 0$; *b)* $\log_3 x - \log_3(x+3) < 2$.

2. Egy videójátékban a főhős, Hiper Mária a talajról elrugaszkodva másodpercenként 1,5 távolságegységet emelkedik. Ellenfele, Gonoszka Boszka talajtól való távolságát a programozók (ugyanazon egységben) a
   $$g(x) = x^2 - 4x + 5$$
   függvénnyel írták le, ahol az x Boszinak a pályán való megjelenésétől eltelt idő másodpercben. A játékos akkor tudja legyőzni Boszit, ha Mari legalább 1 másodpercig legalább 2 egységgel fölléje kerül.
   a) Van-e a játékosnak erre lehetősége, ha Marival abban a pillanatban elugrik a talajról, amint Boszi megjelenik?
   b) Maximum mennyi lehet a játékos reakcióideje, ha a feltételek szerint le akarja győzni Marival Boszit?

3. Egy négyszögletű telek oldalait két, egymással derékszöget bezáró utca, egy patak és a szomszéd telek határolja. Tudjuk, hogy a teleknek az utcasarokból induló átlója kétszer akkora, mint a rá merőleges másik átló.
   a) Bizonyítsuk be, hogy a telek területe egyenlő a két utcafronti oldalra emelt négyzetek területeinek összegével.
   b) Mekkora a telek másik két oldala, ha az utcafronti oldalak 20 és 30 méter hosszúak? Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg, méterben.

4. *a)* Egy adatelemző nemrég egy kinyomtatott oszlopdiagrammal dolgozott. Kisgyermeke játék közben véletlenül a lapot eltépte, csak ezt a kis darabot tudta megmenteni. Annyira emlékezett eddigi munkájából, hogy a kilencelemű, kétmóduszú minta
   – terjedelme 10,
   – $Q_2 = 2 \cdot Q_1$,
   – kvartilisei egész számok és számtani sorozatot alkotnak.
   Vissza tudja-e állítani egyértelműen a fenti adatokból az eredeti mintát?



   b) Hányféleképpen lehetséges egy 12 elemű, hárommóduszú minta elemeit sorba rendezni?

1. Feladatsor / B

5. *a)* Egy csokigyár hűtőládájában van 68 csokis és valamennyi marcipános édesség. Egy óra múlva tesznek még bele ugyanannyi marcipános édességet. Tudjuk, hogy eredetileg egy marcipános édesség kivételének a valószínűsége 30%-a volt annak, mint amennyi egy csokis édesség kivételének a valószínűsége most. Hány darab marcipános édesség volt eredetileg a hűtőládában?

b) Egy másik hűtőládában csak 68 csokis és 32 marcipános édesség van. Ádám és Tomi véletlenszerűen vesznek ki egy-egy darabot, amit megnéznek, de Gabi szúrós tekintete miatt azonnal vissza is tesznek. Legalább hány darabot vegyenek ki, hogy legalább 99%-os valószínűséggel legyen köztük marcipános?

6. *a)* Janka a NASA új, embereket szállító űrkapszuláját úgy képzeli el, hogy a koordinátarendszerben a $[-2; 2]$-on értelmezett $f(x) = 4 - x^2$ parabolát megforgatja az y tengely körül. Ebbe a testbe szeretné az űrhajósok számára a lehető legnagyobb felszínű forgáshengert írni úgy, hogy a henger alapkörének középpontja az origó legyen. Mekkorának válassza a henger sugarát? Adjuk meg 3 tizedesjegyre kerekítve.

b) A $[-2; 2]$-on értelmezett $f(x) = 4 - x^2$ függvény alatti terület hány százalékát kapjuk, ha $y = 1$ magasságban levágjuk az alját? Az eredményt egész százalékra kerekítve adjuk meg.

7. *a)* Igazoljuk, hogy $\log_{x^2}4$ és $\log_2 x$ egymás reciprokai, ha $x > 0$ és $x \neq 1$.

b) Adott három szakasz, amelyek hossza 2^x, 4^x és 8^x centiméter (ahol x pozitív valós szám). Mi az a legnagyobb, három tizedesjegyre kerekített x érték, amelyre a szakaszokból még háromszög szerkeszthető?

8. A pisai ferde torony átlagmagassága 56,3 m. Függőlegestől való dőlésszöge 1990-ben már 5,5° volt délkeleti irányban, ami összeomlással fenyegetett. 1970 és 2001 között egy mérnökökből, matematikusokból, történészekből és munkásokból álló csapat munkája nyomán a dőlést visszafordították, jelenleg 3,99°. A ferde torony aljától északnyugati irányban 31,5 méterre a pisai dóm függőleges, 43 méter magas épületét találjuk (a dómot tekintsük a feladatban egyenes falnak).



a) Hány méter magasra ért a torony árnyéka 1990-ben a dómon, ha a délkelet felől érkező napsugarak 30°-os szöget zártak be a talajjal?

b) Hány fokos szögben érkeznek be napjainkban a napsugarak, ha a torony árnyéka a dóm tetején ér véget?

9. Két test egyszerre kezd el mozogni azonos irányban. Induláskor egymástól 20 méter távolságra vannak. A hátrább lévő test egyenletesen gyorsul, az első másodpercben 25 métert tesz meg, a következő másodpercben egyharmad méterrel többet. A másik test egyenletesen lassul, az első másodpercben 30 métert tesz meg, a következő másodpercben fél méterrel kevesebbet. Hány másodperc alatt éri utol az első test a másodikat?

2. Feladatsor / *A*

1. *a)* Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezés értelmezhető:

$$\log_2(-x^2 + 4x - 3) - 2 \cdot \log_2(x - 1).$$

b) Oldjuk meg a fenti értelmezési tartományon a következő egyenletet:

$$\log_2(-x^2 + 4x - 3) - 2 \cdot \log_2(x - 1) = 1.$$

2. Egy húrtrapéz két alapjának hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 3:7, magassága $10 \cdot \sqrt{2}$ cm hosszúságú. A trapéz egyik átlója egy derékszögű és egy nem derékszögű háromszögre vágja szét a trapézt.

a) Számítsuk ki a trapéz területét.

b) Mekkora annak a körnek a területe, amely átmegy a trapéz összes csúcsán?

3. Egy matematikatanár 10 éves megfigyelése alapján annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott tanuló önállóan készíti el a matematika házi feladatát, mindössze 0,65. A tanár egy 15 fős csoportba megy órát tartani.

   a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a csoportban mindenki önállóan készítette el a házi feladatot?

   b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a fenti csoportban pontosan 10 olyan diákot találunk, aki nem önállóan munkálkodott a házi feladaton?

4. Az amatőrök úszóversenyén a döntőbe hat versenyző került: Andor, Barnabás, Csanád, Dezső, Ervin és Fábián. A szoros döntőben valamelyik helyen kettős holtverseny alakult ki, azaz két versenyző századmásodperc pontossággal (a versenyen ez volt az időmérés pontossága) ugyanazt az eredményt érte el. Ha például a 2. helyen alakult ki a holtverseny, akkor a szervezők két második helyezést osztottak ki, és harmadik helyezést nem ért el senki. A dobogóra legfeljebb négy versenyző állhatott, mindenki pontosan arra a fokra, ahányadik időeredménnyel a célba ért.

   a) Hányféleképpen alakulhatott a verseny döntője, amennyiben két sorrendet akkor különböztetünk meg egymástól, ha legalább egy olyan versenyző van, akinek a helyezése a két sorrendben különböző?

   Időközben kiderült, hogy a versenyt Andor egyedül nyerte meg, továbbá Fábián az utolsó helyen végzett.

   b) Hányféleképpen alakulhatott végül a verseny eredménye?

2. Feladatsor / *B*

5. Az állam a fiatalok lakáshoz jutását a következő konstrukciójú bankszámlával támogatja. A spórolást vállaló személy minden hónap első napján köteles 10 000 Ft-ot befizetni a számlára. A számlavezető bank minden hónap utolsó napján 0,3% kamatot fizet a számlán szereplő összeg után. A kamaton felül az állam minden év első napján az előző évben a számlatulajdonos által elhelyezett összeg 30%-át utalja a számlára. A spórolási időszak 4 évig tart; a számla tulajdonosa a 4 teljes év eltelte utáni év első napján juthat hozzá megtakarításához (természetesen ekkor már a 4. évben elhelyezett összeg után is jár az állami támogatás). Anna január 1-jén nyit számlát a fenti feltételekkel.

   a) Összesen mennyi pénzt fizet be Anna a 4 éves spórolási időszak alatt?

   b) Számítsuk ki, hogy mennyi pénz lesz Anna számláján a számlanyitás évének december 31. napján, miután a bank a decemberi kamatot már jóváírta.

   c) Mennyi pénzt vehet fel Anna a 4 éves takarékoskodási időszak eltelte után?

6. Az alábbi diagram egy iskola végzős tanulóinak matematika, illetve történelem emelt szintű érettségi érdemjegyeinek százalékos megoszlását mutatja. A tanulók között nem volt olyan, aki két tárgyból érettségizett emelt szinten. Összesen 20 diák választotta a matematika, 40 pedig a történelem emelt szintű érettségit.



   a) Készítsünk olyan diagramot, amelyről leolvasható, hogy az emelt szinten érettségiző diákok közül összesen hányan kaptak 3-ast, 4-est, illetve 5-öst.

   b) Számítsuk ki az iskola diákjainak a matematika-, illetve történelemérettségin elért átlagát. Az eredményt két tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

c) A matematikából közepest szerző diákok közül legalább hánynak kellett volna 4-est szereznie a többiek változatlan teljesítménye mellett ahhoz, hogy a matematikaérettségi átlaga legalább 3,75 legyen?

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a történelemből érettségizett diákok közül véletlenszerűen kiválasztott 2 diák átlaga legalább 4,20?

7. Tekintsük az $f\colon x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$ hozzárendeléssel értelmezett függvényt.

a) Mutassuk meg, hogy az $A(1; 2)$, valamint a $B(3; 4)$ pontok illeszkednek az f függvény grafikonjára.

b) Írjuk fel az AB egyenes egyenletét.

c) Bizonyítsuk be, hogy az AB egyenes olyan pontban metszi az x tengelyt, amely illeszkedik az f függvény grafikonjára is.

d) Határozzuk meg az f függvény zérushelyeit.

e) Mekkora a területe annak a síkidomnak, amelyet az f függvény grafikonja, valamint az AB szakasz fog közre?

8. Zsuzsi gyakran túrázik a hegyekben. Turistatérképéről leolvasta három, egymás közelében lévő hegy magasságát: a Pokol-hegy (A) magassága 650 méter, a Tündér-hegyé (B) 950 méter, valamint a Magas-hegyé (C) 1300 méter. Térképén lemérte azt is, hogy a hegyek a valóságban milyen messze vannak egymástól: $AB = 3000$ méter, $AC = 4000$ méter, $BC = 5000$ méter.

Két tizedesjegy pontossággal válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

a) Mekkora emelkedési szög alatt látjuk a Tündér-hegy csúcsáról a Magas-hegy csúcsát?

b) A Magas-hegy csúcsáról mekkora szög alatt látszik a másik két hegy csúcsát összekötő szakasz?

9. Határozzuk meg az a, b, c valós paraméterek értékét úgy, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola az alábbi feltételek mindegyikét teljesítse.

1. Csúcspontja az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik.
2. Áthalad a $(0; 1)$, valamint a $(2; 10)$ pontokon.

3. Feladatsor / *A*

1. Egy motorcsónak a folyón a vízfolyás irányában haladva az AB utat 5 óra alatt, a BA utat a vízfolyással szemben haladva 5 óra 40 perc alatt teszi meg (a folyó és a hajó sebessége állandó). Mennyi idő alatt teszi meg az AB utat egy tutaj, amely a víz sebességével halad?

2. Határozzuk meg a p paraméter értékét, ha tudjuk, hogy az $x^2 + y^2 - 8x - 8y + p^2 = 0$ egyenletű kör a koordináta-rendszer kezdőpontjából 60°-os szögben látszik.

3. Attila, Balázs és Csanád kockáznak. Mindhárman egyszerre dobnak egy-egy szabályos dobókockával. Ha a dobott számok között van azonos, Attila nyer. Ha a három szám különböző és páronként relatív prímek, Balázs nyer. Ha a számok különbözőek, de előfordulnak közöttük nem relatív prím párok, akkor Csanád nyer.

Dobás előtt mind a hárman beraknak egy-egy tétet.

Az egyik játékban Balázs tétje 10 zseton. Mekkora legyen Attila és Csanád tétje, hogy igazságos legyen a játék?

4. Legyen az A halmaz a

$$\sin^2 x = 1 - \cos x \cdot \sin x$$

egyenlet $[0; 2\pi]$ intervallumba eső valós megoldásainak halmaza, a B halmaz pedig az

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 12) > -5$$

egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza.

Adjuk meg az $A \cap B$ és az $A \cup B$ halmazokat.

3. Feladatsor / *B*

5. Egy téglalap alakú kertben, melynek két oldala 30 m és 40 m, filmfelvételt készítenek. Az operatőr olyan helyen állítja fel a kamerát, ahonnan két szomszédos oldal 90°-os szögben látszik.

   a) Milyen távol van a kamera a kert sarkaitól?

   b) Mekkora szögben látszik a kamera helyéről a másik két oldal?

6. 2009 novemberében különösen sok eső esett. Vizesréten ebben a hónapban az átlagos napi csapadékmennyiség pontosan 7,5 mm volt. Az egyes napokon mért csapadékmennyiséget a táblázat mutatja.

2009. november	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
csapadék (mm)							19		7	2	7			5	
2009. november	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
csapadék (mm)			21			3			3					4	

A táblázat hiányzó adatairól azt tudjuk, hogy a hónapban tíz eső nélküli nap volt, a többi adat pedig egy olyan növekvő számtani sorozatba rendezhető, amelynek differenciája 2.

   a) Mekkora volt a mért legnagyobb napi csapadékmennyiség az adott hónapban?

   b) Hányféleképpen tölthető ki a táblázat hiányzó része, ha a számtani sorozat elemei nem feltétlenül követik egymást?

   c) Hányféleképpen tölthető ki a táblázat hiányzó része, ha a számtani sorozat elemei nem feltétlenül kerülnek szomszédos napokra, de egymást növekvő sorrendben követik?

7. Egy lakásfelújítás során a páraelszívó berendezésből a kivezetést csak úgy tudják megoldani, hogy hengerfúróval 12 cm átmérőjű lyukat fúrnak az 50 cm vastag falba úgy, hogy a fúrás iránya 60°-os szöget zár be a fal síkjával.

   a) A páraelvezetéshez a kifúrt lyukba 12 cm átmérőjű csövet helyeznek. Milyen hosszú legyen a megvásárolt cső?

   b) Mekkora területű a falon keletkezett lyuk?

   c) Ezzel a módszerrel hány százalékkal több törmelék kerül ki a falból, mintha a falra merőlegesen fúrtak volna?

8. Egy sportegyesületi közgyűlésen a jelenlévők igennel vagy nemmel szavaztak három kérdésre. Tartózkodás nem volt, minden jelenlévő mindhárom kérdésben szavazott. Az első kérdésre 35 fő szavazott igennel, a másodikra 26-an szavaztak nemmel, a harmadikra 31-en szavaztak igennel.

Azok, akik mindhárom kérdésre igennel szavaztak, ugyanannyian voltak, mint akik a második kérdésre igent mondtak, a többi kérdésre pedig nemet.

Akik az első és harmadik kérdésre igent mondtak, de a másodikra nemet, éppen annyival voltak kevesebben azoknál, akik a második és harmadik kérdésre mondtak igent és az elsőre nemet, mint amennyivel többen voltak azoknál, akik az első és második kérdésre mondtak igent és a harmadikra nemet, és ez az eltérés megadja azoknak a számát, akik mindhárom kérdésre nemmel szavaztak.

A harmadik kérdésre igennel szavazók közül ketten a másik két kérdésre nemmel szavaztak. Az első kérdésre igennel szavazók közül a másik kettőre nemmel szavazott 12 személy.

a) Hányan vettek részt a szavazáson?

b) Az egyesület 7 tagú elnökséget választ azok közül, akik az első kérdésre igennel szavaztak. Hányféle eredménye lehet a választásnak?

c) Az elektronikus szavazókészüléken három billentyű van: „igen", „nem" és „tartózkodás". Ha egy szavazáson harmincan szavaznak véletlenszerűen nyomva a gombokat, mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 igen, 10 nem és 10 tartózkodás lesz a szavazás eredménye?

9. Egy bérautó fogyasztását láthatjuk a következő táblázatban különböző sebességek esetén.

Sebesség (km/h)	Fogyasztás (liter/100 km)
50	5,5
100	7,0
150	9,5

a) Mekkora a fogyasztás 100 kilométeren $90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebesség mellett, ha a $30-200\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességtartományban a fogyasztás a sebesség másodfokú függvénye?

b) Az autót egy 300 km-es útra sofőrrel együtt szeretnénk kibérelni, akinek a bére óránként 2000 forint. Milyen sebesség esetén lesz az utazás költsége minimális, ha csak a sofőr óradíját és a benzinköltséget kell kifizetnünk, és egy liter benzin ára 320 forint? (Az autó sebességét tekintsük az egész úton egyenletesnek.)

4. Feladatsor / *A*

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 3^{3x+1} &= 3y^3+8y^2+8y+9 \\ x &= \log_3(y+1) \end{aligned}\right\}.$$

2. Egy (a_n) sorozatban minden pozitív n egész számra: $a_n = 2a_{n+1} - a_{n+2}$, továbbá $a_3 + a_7 = 12$. Adjuk meg a sorozat első 9 tagjának összegét.

3. Egy borversenyen a benevezett szekszárdi borászok átlagosan 5, a villányiak 4, az egriek 2 díjat kaptak.

a) Hány szekszárdi, villányi és egri borász indult a versenyen, ha ezen borvidékeket összesen 8-an képviselték, és összesen 25 díjat kaptak?

b) A 18 éven felüli emberek kétharmada jobban szereti a vörösbort, mint a fehéret. Tíz embert véletlenszerűen kiválasztva mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük heten mondják, hogy a vörösbort szeretik jobban?

4. Melyek azok az egyenesek, amelyek illeszkednek a koordináta-rendszer $A(2; 7)$ pontjára, és az x tengelyt és az y tengelyt is egész koordinátájú pontokban metszik?

4. Feladatsor / *B*

5. Tekintsük a $[-5; 5]$ intervallumon értelmezett következő függvényt:

$$f(x) = \frac{|x| + |x+2|}{|x| + |x-2|}.$$

Adjuk meg a függvény minimumát és maximumát, illetve azokat az x értékeket, ahol ezeket a függvény felveszi.

6. Andrásfalváról Bélatelepre és vissza egy időben indul egy autó és egy motor egyenletes sebességgel. Az autó előbb ér Bélatelepre, mint a motor, és onnan azonnal visszafordulva, Bélateleptől 5 kilométerre találkozik a motorossal. Az autó 20 perccel korábban ér vissza Andrásfalvára, mint a motor. Ha az autó ismét visszafordulna, akkor az Andrásfalva és Bélatelep közti távolság Bélateleptől számított harmadánál találkozna a motorral.

a) Hányszor nagyobb az autó sebessége, mint a motoré?

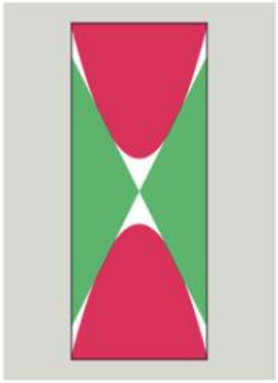
b) Mekkora az Andrásfalva és Bélatelep közti távolság?

c) Mekkora a két jármű sebessége?

7. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x - 2 = 0.$$

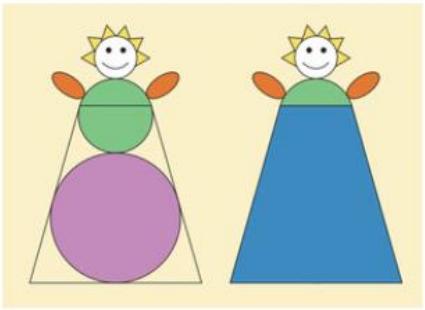
8. Születésnapi bulijára Péter, hogy a vendégeit szórakoztassa, darts játékot tervez. Ehhez az ábrán látható céltáblát készítette. A céltábla 1 méter magas és 40 cm széles, benne két parabolaívvel, amelyek csúcspontjai a tábla felső, illetve alsó szélétől 40 centiméterre, az oldalától 20 centiméterre vannak. Ezekhez a parabolaívekhez a tábla középpontjából érintőket húzott, és az így keletkezett síkrészeket piros, fehér és zöld színekkel befestette.



a) A céltáblára véletlenszerűen érkező lövések mekkora valószínűséggel esnek a különböző színű mezőkre?

b) A zöld, piros és fehér mezőbe érkezett lövés rendre 4, 5 és 6 pontot ér. Mekkora az egy lövésért kapható pont várható értéke?

9. Juliska keljfelbabája három egymásra helyezett gömbből áll. Jancsi szeretné meglepni Juliskát azzal, hogy a keljfelbabát olyan szoknyába öltözteti, amelyik érinti az alsó két gömböt. A szoknyát kartonból akarja elkészíteni úgy, hogy ha a baba függőleges helyzetben áll, akkor a szoknya az asztallap síkjától a középső gömbön lévő érintőkör síkjáig ér. Mekkora területű karton szükséges a szoknya elkészítéséhez, ha az alsó gömb sugara 7 cm, a középsőé pedig 4 cm?



5. Feladatsor / A

1. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számokon:

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2+2x+1}.$$

2. Adottak az alábbi egyenletű körök:

$$k_1\colon\ (x+1)^2+(y-4)^2=4 \quad \text{és} \quad k_2\colon\ (x-2)^2+(y+3)^2=25.$$

Határozzuk meg a két kör közös belső érintőinek egyenleteit.

3. Egy dobozban 3 darab piros, 4 fehér és 3 zöld egybevágó téglalap alakú kartondarab van, melyek csak színükben különböznek. A lapokat egymás után kihúzzuk a dobozból.

a) Hányféle sorrendben vehetjük ki a papírdarabokat a dobozból?

A kivett téglalapokat sorban egymás alá helyezzük úgy, hogy csak hosszabb oldalukkal érintkezzenek. Hány olyan eset lehet, amikor

b) három; *c)* kettő

magyar trikolórt (egymás alatt egy piros, egy fehér és egy zöld sáv) látunk a kialakuló alakzatban?

4. Az $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ függvényről az alábbiakat tudjuk:

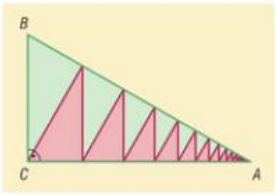
1. A függvény egyetlen zérushelye $x=-1$.
2. A függvény két szélsőértéke az $x=1$ és $x=3$ helyen van.

a) Adjuk meg az $f(x)$ függvény a, b, c, d paramétereit.

b) Mennyi a függvény lokális minimuma, ha $a=1$?

5. Feladatsor / B

5. Az ábrán egy kis ország derékszögű háromszög alakú zászlaját látjuk. A háromszög rövidebb befogója 80 cm, a hosszabb 140 cm. Minden egyszínű kis háromszög hasonló a zászlóhoz.



a) Adjuk meg a színes részeket elválasztó töröttvonal hosszát.

b) Hányszor nagyobb a zöld színű részek területe a piros színű részeknél?

6. *a)* Adjuk meg egy n pontú teljes gráf és egy n pontú fa élei számának hányadosát.

Figyeljük meg az alábbi fogalmakat. Bármely egyszerű gráfban az A és B pontokat összekötő AB út hossza alatt az AB úton előforduló élek számát értjük. Bármely egyszerű gráfban az A és B pontok távolsága alatt az összes AB utak közül a legrövidebb út hosszát értjük. (Például szomszédos pontok távolsága 1, izolált pontoké 0.) Bármely egyszerű és összefüggő gráf átmérője alatt a gráfban előforduló távolságok maximumát értjük.

b) Határozzuk meg az n pontú teljes gráf, valamint az n pontú fagráfok átmérőinek maximumát.

Az egyszerű, összefüggő G gráfnak 8 pontja van. Mennyi a feltételt kielégítő G gráfok átmérőinek maximuma, ha G minden pontjának foka

c) 2; *d)* 6; *e)* 4?

7. Egy tízelemű, egész számokból álló mintából ismerünk nyolc értéket: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 9, 10. Tudjuk továbbá, hogy a minta átlagának szórás sugarú környezete négy tizedesjegyre kerekítve

$$]A - s; A + s[=]2{,}5941; 9{,}4059[.$$

Határozzuk meg a minta hiányzó két elemét.

8. Legyen $I = [-2; 2]$ intervallum és $(p; q) \in I^2$. Tekintsük a $g(x) = x^2 + px + q$ polinomot. Mennyi a valószínűsége, hogy $g(x)$-nek két zérushelye van, ha a $(p; q)$ párt találomra választjuk ki I^2-ből?

9. A sebes sodrású folyó túlpartján P és Q pontokban áll két magas fa. Csúcsaik között kötélpályát akarnak építeni. Mielőtt a pályaépítők átkeltek a folyón, lemérték a következőket: $AB = 500$ m, $PAB\sphericalangle = 100°$, $QAB\sphericalangle = 65°$, $QBA\sphericalangle = 60°$, $PBA\sphericalangle = 21°$. Azt is tudjuk, hogy a P pontban álló fa 7°-os szögben látszik az A, a Q-ban álló fa 7,5°-os szögben látszik a B pontból. Számítsuk ki, legalább milyen hosszú kötél szükséges a kötélpályához, ha a csigák az ábrán látható módon mozgatják a kötelet. (Minden tereptárgy ugyanazon a tengerszint feletti magasságon áll.)



A FELADATOK MEGOLDÁSAI



A kötet feladatainak megoldásai letölthetők pdf-ben a **www.mozaik.info.hu/matematika** oldalról. A letölthető állományok megegyeznek a feladatgyűjtemény korábbi kiadásaihoz mellékelt CD-n lévő tartalommal.

A megoldások megtekintéséhez az *Acrobat Reader* program használata szükséges. A program ingyenesen letölthető az internetről. (Pl. www.adobe.com).

MEGOLDÁSOK – 11. ÉVFOLYAM

Az összes 11. évfolyamos feladat megoldását az alábbi állomány tartalmazza:

U_3001_3892_11_evfolyam.pdf

Az egyes fejezetek külön-külön (kisebb méretű) állományban is elérhetők (a feladatsorszámra és a fejezetre utaló elnevezéssel):

U_3001-3160_kombinatorika-grafok.pdf
U_3161-3241_hatvany-gyok-logaritmus.pdf
U_3242-3459_trigonometria.pdf
U_3460-3554_fuggvenyek.pdf
U_3555-3776_koordinata-geometria.pdf
U_3777-3892_valoszinuseg-szamitas-statisztika.pdf

MEGOLDÁSOK – 12. ÉVFOLYAM

Az összes 12. évfolyamos feladat és a rendszerező összefoglalás megoldásait az alábbi állomány tartalmazza:

U_4001_5617_12_evfolyam.pdf

Az egyes fejezetek külön-külön (kisebb méretű) állományban is elérhetők (a feladatsorszámra és a fejezetre utaló elnevezéssel):

U_4001-4067_logika-bizonyitasi-modszerek.pdf
U_4068-4165_szamsorozatok.pdf
U_4166-4511_tergeometria.pdf
U_4512-4578_valoszinuseg-szamitas-statisztika.pdf
U_5001-5617_rendszerezo-osszefoglalas.pdf
U_kozepszintu-feladatsorok.pdf
U_emelt-szintu-feladatsorok.pdf

EGY KONKRÉT FELADAT MEGOLDÁSÁNAK KERESÉSE

A pdf állományokban a **kereső funkciót** (Ctrl+f) használva az „*x+feladatsorszám*” begépelésével közvetlenül az adott sorszámú feladat megoldásához ugorhatunk (pl. az *x4318* szöveg keresésével a 4318-as feladat megoldásához).



Kiadja a Mozaik Kiadó, Szeged • Telefon: (62) 470-101, (62) 554-660
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Aggod István
Terjedelem: 28,12 (A/5) ív • 2024. május • Tömeg: 535 g • Raktári szám: MS-2326U