Sokszínű matematika

9



Sokszínű matematika

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Gyakorló
és érettségire
felkészítő
feladatokkal

9

Megoldásokkal

Mozaik Kiadó – Szeged, 2009

A könyvet írta: Árki Tamás · *középiskolai tanár*
Konfárné Nagy Klára · *középiskolai tanár*
Kovács István · *középiskolai tanár*
Trembeczki Csaba · *középiskolai tanár*
Dr. Urbán János · *középiskolai tanár*

Lektorálta: Biróné Füle Zsuzsanna · *középiskolai tanár*
Kunovszki István · *középiskolai tanár*
Tóthné Bertalan Éva · *középiskolai tanár*

Felelős szerkesztő: Tóth Katalin
Borítóterv, tipográfia: Reményfy Tamás
Ábrák: Becsei György, Horváth Péter
Fotók: Mozaik Archívum
Műszaki szerkesztő: Horváth Péter

KERETTANTERV:
MOZAIK Kerettantervrendszer 17/2004 (V. 20.) OM rendelet
OM Kerettanterv 17/2004 (V. 20.) OM rendelet 3. sz. melléklet

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, ill. rövidített változat kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más hordozó) nem sokszorosítható.

ISBN 978 963 697 611 8
Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2009

Tisztelt Olvasó!

Feladatgyűjtemény-sorozatunk egyedülálló a középiskolai matematika feladatgyűjtemények között. A könyvek felépítése pontosan követi a *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád köteteinek szerkezetét, így akik ezekből a tankönyvekből tanulnak, közvetlenül alkalmazhatják az órai munka és az önálló gyakorlás, sőt az érettségi felkészülés során is.

Ugyanakkor – mivel a feladatgyűjtemények felépítése természetesen megfelel a tantárgy belső logikájának és az iskolákban általánosan alkalmazott kerettanterveknek – minden nehézség nélkül használhatják azok is, akik más tankönyvekből tanulják, illetve tanítják a matematikát.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a tanulók bőségesen találnak a maguk számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a tankönyveket és a feladatgyűjteményt együtt használva kellő jártasságot szerezhetnek a feladatmegoldásban.

Az egyes fejezetek végén található *Vegyes feladatok* áttekintést adnak az adott fejezet anyagából, ezért jól segíthetik az átfogóbb számonkérés előtti felkészülést.

A feladatok nehézségének jelölése

Minden fejezetben három különböző szintre bontva találjuk a feladatokat:

1198 **Gyakorló feladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

1430 **Középszintű feladatok:** az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismétlését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. *(kék színű feladatsorszám)*

1758 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

A feladatok sorszámozása

A feladatgyűjtemények feladatainak sorszámozása a tankönyvcsalád egyes köteteire utal.

A 9. évfolyam feladatai az 1001-es, a 10. évfolyam feladatai a 2001-es, a 11. évfolyamé a 3001-es, a 12. évfolyamé pedig a 4001-es sorszámtól kezdődnek.

Megoldások

A feladatgyűjtemény minden feladat megoldását tartalmazza. A gyakorló feladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők



TARTALOMJEGYZÉK



Bevezető 5
A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések 8

9.1. *Kombinatorika, halmazok* (1001–1106)

MEGOLDÁS

Számoljuk össze! 10 100
Halmazok 12 101
Halmazműveletek 15 104
Halmazok elemszáma, logikai szita 17 108
Számegyenesek, intervallumok 20 112
Vegyes feladatok 22 116



9.2. *Algebra és számelmélet* (1107–1193)

Betűk használata a matematikában 24 118
Hatványozás, a számok normálalakja 25 118
Egész kifejezések, nevezetes szorzatok, a szorzattá alakítás módszerei 27 120
Műveletek algebrai törtekkel 29 122
Oszthatóság, számrendszerek 31 124
Vegyes feladatok 32 127

9.3. *Függvények* (1194–1282)

A derékszögű koordináta-rendszer, ponthalmazok 34 128
Lineáris függvények 34 128
Az abszolútérték-függvény 35 130
A másodfokú függvény 37 133
A négyzetgyökfüggvény 39 140
Lineáris törtfüggvények 40 143
Az egészrész-, a törtrész- és az előjelfüggvény 41 147
Vegyes feladatok 42 148



9.4. *Háromszögek, négyszögek, sokszögek* (1283–1474)

Néhány alapvető geometriai fogalom (pont, egyenes, sík, távolság, szög) 46 158
Háromszögek oldalai, szögei 47 160
Pitagorasz-tétel 49 163
Négyszögek 50 166
Sokszögek 52 170



Nevezetes ponthalmazok 53 173
Háromszög beírt és köré írt köre 54 178
Thalész tétele 55 182
Érintőnégyszög, érintősokszög 56 186
Vegyes feladatok 57 189



9.5. *Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek* (1475–1570)

Az egyenlet, azonosság fogalma 60 196
Az egyenlet megoldásának grafikus módszere 60 196
Az egyenlet értelmezési tartományának és értékkészletének vizsgálata 61 198
Egyenlet megoldása szorzattá alakítással 61 199
Egyenletek megoldása lebontogatással, mérlegelvvel 62 200
Egyenlőtlenségek 63 202
Abszolút értéket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek 64 205
Paraméteres egyenletek 65 207
Egyenletekkel megoldható feladatok 66 210
Egyenletrendszerek 69 215
Vegyes feladatok 70 217



9.6. *Geometriai transzformációk* (1571–1759)

Tengelyes tükrözés 72 220
Középpontos tükrözés 75 230
Háromszögek, négyszögek néhány jellegzetes vonala (súlyvonal, magasságvonal, középvonal) 78 237
Forgatás 80 245
Eltolás 84 256
Geometriai transzformációk 86 265
Vegyes feladatok 88 270



9.7. *Statisztika* (1760–1807)

Az adatok ábrázolása 91 285
Az adatok jellemzése 94 289
Vegyes feladatok 97 295



A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset$, $\{\}$	üres halmaz
$\overline{A}$	az A halmaz komplementere
$\lvert A \rvert$	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}$, $\vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\sphericalangle$	szög

Feladatok



Kombinatorika, halmazok 10

Algebra és számelmélet 24

Függvények 34

Háromszögek, négyszögek, sokszögek 46

Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek 60

Geometriai transzformációk 72

Statisztika 91



9.1. KOMBINATORIKA, HALMAZOK

Számoljuk össze!

1001 *a)* Legfeljebb hányféle különböző összeget képezhetünk az 1, 2, 3, 4 számok közé tett összeadás- vagy kivonásjelekkel?

b) Írjuk fel, és számítsuk ki az összegeket.

1002 *a)* Hányféle különböző számot állíthatunk elő a 2, 2, 2, 2 számok közé írt összeadás- vagy kivonásjelekkel?

b) Számítsuk ki ezeket az összegeket.

1003 Tekintsük az $1 - 2 + 3 - 4$ összeget.

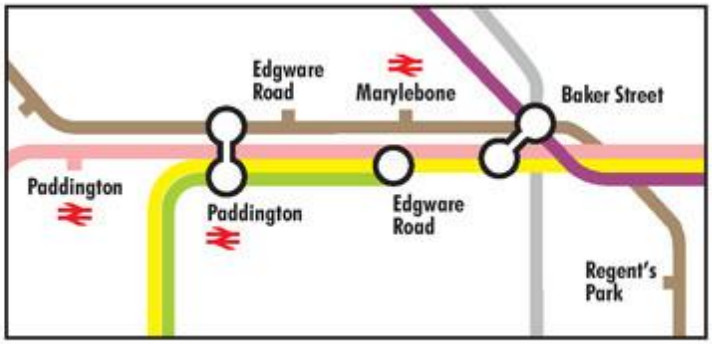
a) Hányféleképpen zárójelezhetjük egy zárójelpár segítségével?

b) Hány különböző eredménye lesz így az összegnek?

1004 Katinak van egy csupasz babája. A babához már kapott kétféle kalapot, három különböző blúzt, valamint három különböző szoknyát. Hányféleképpen öltöztetheti fel belőlük a babáját Kati, ha egy szoknyát, egy blúzt és egy kalapot ad rá?

1005 Barnabás nagy koncertrajongó, de negyedévente csak pontosan egy koncertet enged meg magának. Jövőre januárban 2, márciusban 1, májusban 4, júliusban, augusztusban és októberben 2-2-2 nagy koncert lesz más-más előadókkal. Hányféleképpen állíthatja össze Barnabás a jövő évi koncertprogramját?

1006 Ha ma élne, Sherlock Holmes a Paddington állomásról *sárga, rózsaszín* vagy *barna* metróval juthatna el a Baker Streetre. A Baker Street felső végéről a *York Bridge-en,* a *Hannover Gate-en* vagy gyalogoshídon léphetne a Regent's Park területére. Hányféleképp juthatna az állomásról a parkba, ha csak az említett útvonalakat veszi igénybe? Írjuk is fel ezeket az utakat.





1007 *a)* Összesen hányféle mondatot készíthetünk a következő szavak, szókapcsolatok: „a fiú"; „tanul"; „jól" és a mondatvégi pont, felkiáltójel, illetve kérdőjel segítségével?

b) Írjunk fel közülük néhányat.

c) Találjunk ki olyan helyzeteket, amelyekben elhangozhatnak.

d) Van köztük olyan, amelyik semmilyen helyzetben sem értelmes magyar mondat?

1008 Hány darab ötjegyű kettes számrendszerbeli szám van?



1009 A képen látható szekrény tetején kétfelé nyíló ajtó van. Alatta egy nyitott könyvespolc, az alatt pedig egy lefelé nyíló ajtajú bárszekrény található. A szekrény aljára szintén egy kétfelé nyíló részt építettek. A szekrénnyel szemben állva hányféle helyzetben láthatjuk kinyitva vagy becsukva az összes ajtót?



1010 *a)* Mondjuk ki a Pitagorasz-tételt.

b) Ha csak formálisan ismerjük az összefüggést, akkor összesen hányféleképpen írhatjuk be a 3, 4, 5 számokat a Pitagorasz-tételben szereplő a, b és c oldalak helyére?

c) Ezek közül hány esetben teljesül az egyenlőség?

1011 Jani kisöccsének két különböző mozdonya és öt különböző kocsija van a kisvasútjához.

a) Hányféle szerelvényt állíthat elő belőlük mindet felhasználva, ha a két mozdonyt közvetlenül egymás mögé, de a kocsik elé teszi?

b) Hányféle, a képen látható összetételű és hosszúságú szerelvényt állíthat össze belőlük?



1012 Egy kör alakú asztal mellett három szék van: egy az ajtó felől, egy az ablak mellett és egy a kandalló előtt. Írjuk fel, hogyan ülhet le az asztal köré 3 fő, ha

a) figyelembe vesszük, hogy ki ül az ajtó, az ablak, illetve a kandalló felől;

b) csak az asztal melletti sorrendjüket vesszük figyelembe valamilyen körbejárás szerint;

c) csak annyit veszünk figyelembe, hogy ki kinek a szomszédja.

1013 Az $\{1; 2; 3\}$ halmaz elemeihez hozzárendeljük valamilyen sorrendben a $\{2; 4; 6\}$ halmaz elemeit, különböző elemekhez különböző elemeket.

a) Hányféle hozzárendelést (függvényt) kaphatunk így?

b) Adjunk meg hozzárendelési szabályt a lineáris függvényekhez.

1014 Hányféleképpen színezhetünk ki egy

a) 2×2-es négyzetet két színnel; *b)* 3×3-as négyzetet három színnel;

ha minden sorban és oszlopban minden szín csak egyszer szerepel?

1015 Egy tolóajtós ruhásszekrény felső és alsó részén is három-három tolóajtó csúszik két párhuzamos sínen. Az első sínen csúsznak a most középen álló tükrös részek (ezek kicsit előrébb is vannak), a két szélső ajtó pedig a hátsó sínen (ezek kicsit hátrébb vannak). A három ajtó mindegyike a képen is látható három állás valamelyikébe mozgatható. A hátsó ajtók, mivel egy sínen mozognak, nem tolhatók egymásra.

a) Hányféle helyzetbe mozgathatjuk a felső rész hátsó sínén mozgó két szélső ajtót?

b) Hányféle helyzetbe mozgathatjuk a felső rész összes ajtaját?

c) A szekrénnyel szemben állva hányféle állapotban láthatjuk az összes ajtót?





1016 Tekintsünk a síkon egy $ABCD$ deltoidot (a szomszédos egyenlő oldalak az A és a C csúcsokból indulnak). Irányítsuk valahogy az AB, AC és AD szakaszokat, így kapjuk a $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektorokat. Hány különböző pontba mutathat az A-ból induló $\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ vektor?

Halmazok

1017 Döntsük el, halmazok-e vagy sem a következők:

a) A = {az osztály magas tanulói};

b) B = {az osztály 180 cm-nél magasabb tanulói};

c) C = {az osztály azon tanulói, akiknek tanulmányi átlaga 5,8 matematikából};

d) X = {az ötös lottó jövő heti nyerőszámai};

e) Y = {az ötös lottó 2000. évi 1. heti nyerőszámai}.

1018 Adjuk meg utasítással a következő halmazokat:

a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81\}$;

b) C = {a; e; i; o; ö; ü}, D = {R; k; c; z; F; C}.

1019 Ábrázoljuk egyetlen Venn-diagrammal az alábbi halmazokat:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$;

B = {a hagyományos dobókockával dobható számok};

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$.

1020 Egyenlők-e a következő halmazpárok?

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$ és $B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$;

b) $C = \left\{x \in \mathbb{Z}^+ \left| \frac{x-1}{4} < 1 \right.\right\}$ és $D = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; \ldots\}$;

c) {prímszámok} és {csak 1-gyel és önmagukkal osztható egész számok};

d) {A és B különböző pontoktól egyenlő távolságra levő pontok} és {AB szakasz felezőmerőlegesének pontjai}.

1021 Egy pozitív egész egyjegyű pozitív osztóinak részhalmaza a következő: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$.

a) Hány ilyen szám van? *b)* Melyik a legkisebb ilyen szám?

1022 Soroljuk fel az ábrán látható kártyafigurák halmazának összes kételemű részhalmazát.



1023 Soroljuk fel az

a) A = {a hagyományos dobókockával dobható prímszámok} halmaz összes részhalmazát;

b) E = {a 20-nál kisebb pozitív négyzetszámok} halmaz kételemű részhalmazait.



1024 Adjunk meg úgy egy A halmazt, hogy teljesüljenek a következők:

$$\emptyset \subseteq A, \quad \emptyset \in A \quad \text{és} \quad \{\{\emptyset\}\} \subset A.$$

1025 *a)* Soroljuk fel az $A = \{1; 2; 3\}$ halmaz valódi részhalmazait.

b) Hány olyan B halmaz van, amelyre $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$, ha $A = \{1; 2; 3\}$?

1026 Legyen A a szabályos, B az egyenlő szárú, C az egyenlő szárú derékszögű, D a derékszögű, E az általános háromszögek halmaza.

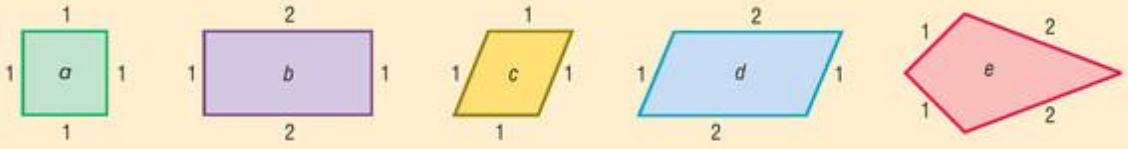
a) Döntsük el, melyik állítás igaz, és melyik hamis.

$$A \subset B, \quad B \subset C, \quad C \subset D, \quad D \subset E$$

b) Van-e olyan halmaz, amelynek bármelyik másik halmaz részhalmaza? Van-e olyan halmaz, amely bármelyik másiknak részhalmaza?

c) Tekintsünk el az alakzatok méretétől. Ekkor van-e olyan halmaz, amely véges?

1027 Jelölje P a paralelogrammák, T a trapézok, R a rombuszok, D a deltoidok halmazát, és tekintsük a rajzon látható a, b, c, d, e alakzatokat is. Döntsük el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül.



a) $R \subset P$ vagy $P \subset R$; *b)* $P \subset T$ vagy $T \subset P$; *c)* $P \subset D$ vagy $D \subset P$;

d) $a \in P$, $a \in T$, $a \notin D$, $b \in D$, $c \notin T$, $d \in R$, $e \notin P$.

1028 Ábrázoljuk a füzet S síkján a következő halmazokat:

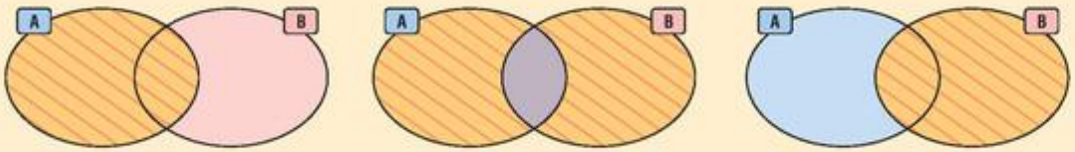
a) $K = \{S$ azon pontjai, melyek S egy adott P pontjától pontosan 2 cm távolságra vannak$\}$;

b) $L = \{S$ azon pontjai, melyek S egy s zárt szakaszától pontosan 1 cm távolságra vannak$\}$;

c) $M = \{S$ azon pontjai, melyek S egy e egyenesétől legfeljebb 2 cm távolságra vannak$\}$;

d) $N = \{S$ azon pontjai, melyek S egy zárt t téglalapjától legfeljebb 2 cm távolságra vannak$\}$. (Zárt az alakzat, ha minden határoló és minden belső pont is hozzá tartozik.)

1029 Figyeljük meg az alábbi Venn-diagramokat, és válaszoljunk a kérdésekre.



1. ábra 2. ábra 3. ábra

a) Milyen feltételek mellett lesz az első ábrán vonalkázással jelölt halmaz valódi részhalmaza a második ábrán vonalkázással jelölt halmaznak?

b) Milyen feltételek mellett lesz az első két ábrán vonalkázással jelölt halmaz egyenlő?

c) Tudjuk, hogy $A \subset B$. Mi a kapcsolat a második és a harmadik ábrán vonalkázással jelölt halmazok között?



1030 Jelölje T a tér összes pontjainak halmazát, $d(X; Y)$ pedig az X és Y alakzatok távolságát. Milyen alakzatok lehetnek a következők? (Az r mindig pozitív valós számot jelöl.)

a) $\{P \in T \mid d(P; A) = r$, ahol $A \in T$ adott pont$\}$;

b) $\{P \in T \mid d(P; A) < r$, ahol $A \in T$ adott pont$\}$;

c) $\{P \in T \mid d(P; A) = d(P; B)$, ahol $A, B \in T$ különböző pontok$\}$;

d) $\{P \in T \mid d(P; e) = r$, ahol $e \subseteq T$ adott egyenes$\}$.

1031 Írjuk fel és számoljuk össze a hatelemű $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmaz háromelemű részhalmazait.

1032 Az alábbiakban 1, 2, 3, 4 elemű halmazok különböző elemű részhalmazainak számát kell összegyűjtenünk. Mivel az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, azt már beírtuk.

	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c, d\}$
0 elemű részhalmaz	1	1	1	1
1 elemű részhalmaz				
2 elemű részhalmaz	–			
3 elemű részhalmaz	–	–		
4 elemű részhalmaz	–	–	–	

a) Töltsük ki a táblázat hiányzó celláit.

b) Próbáljuk meg kitalálni, hogy az ötelemű halmazra milyen értékek adódnak. *Ha nem sikerül, írjuk fel és számoljuk össze a részhalmazokat.*

1033 Egy végtelen szálloda egyetlen végtelen hosszú folyosóján – nevéhez híven – végtelen sok egyágyas szoba van. A szobaajtók sorszámozása a recepció mellett kezdődik: 1, 2, 3, … Minden szobában van egy hangosbemondó: azon keresztül kérheti meg a recepciós a vendégeket, hogy tegyenek meg valamit. A szállodában telt ház van. Mire szólítsa fel a már bent lakó vendégeket a recepciós, ha

a) egy öttagú család érkezik;

b) a Nagy Kínai Szakácskongresszus résztvevői érkeznek végtelen sok (B_1, B_2, B_3, … jelű) végtelen hosszú autóbusszal (minden buszon s_1, s_2, s_3, … számú ülés van)?

A recepciós senkit sem küldhet haza, és minden érkezőnek külön szobát kell biztosítania, viszont bármelyik szobába elköltöztetheti a már bent lakókat. Mindezt úgy kell megtennie, hogy egyértelmű legyen, melyik busz melyik ülésének utasa melyik szobát kapja meg. Természetesen az átköltöztetett vendégeknek is meg kell mondani, melyik szobából melyik szobába költözzenek.

1034 Jelölje T a tér összes pontjainak halmazát, $d(X; Y)$ pedig az X és Y alakzatok távolságát. Milyen alakzatok lehetnek a következők? (Az r mindig pozitív valós számot jelöl.)

a) $\{P \in T \mid d(P; s) = r$, ahol $s \subseteq T$ adott zárt szakasz$\}$;

b) $\{P \in T \mid d(P; t) \leq r$, ahol $t \subseteq T$ adott zárt téglalap$\}$;

c) $\{P \in T \mid d(P; t') < r$, ahol $t' \subseteq T$ adott zárt téglatest$\}$.



Halmazműveletek

1035 Az A halmaz elemei a pozitív prímszámok, a B halmaz elemei pedig azok a száznál kisebb pozitív egész számok, melyek számjegyeinek összege 7. Soroljuk fel az $A \cap B$ halmaz elemeit.

1036 *a)* Legyen $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ és $A = \{2; 4; 5\}$. Hány olyan B halmaz van az univerzumban, amely diszjunkt A-val? Soroljuk is fel őket.

b) Legyen most U és $A \subseteq U$ tetszőleges halmazok. Írjunk fel olyan halmazokat, amelyek biztosan diszjunktak A-val.

1037 Jelölje U a hagyományos dobókockával dobható számok halmazát. Tekintsük a következő dobások halmazait: $A = \{\text{prímszámok}\}$, $B = \{\text{páratlan számok}\}$, $C = \{\text{páros számok}\}$, $D = \{1; 4; 6\}$, $E = \{7\text{-nél nagyobb számok}\}$, ahol $A, B, C, D, E \subseteq U$. Keressük meg közöttük a diszjunkt halmazpárokat.

1038 Adott az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ és a $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ halmaz.

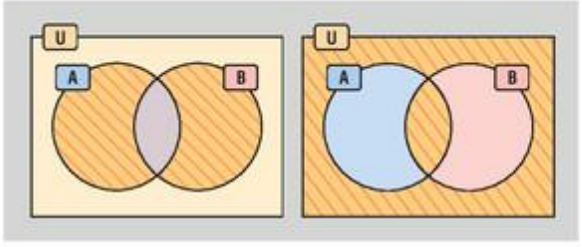
a) Adjuk meg elemeik felsorolásával az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat.

b) Adjunk meg úgy egy C halmazt, hogy a $(B \setminus C) \subseteq A$ legyen.

1039 A két ábra alapján válaszoljunk a kérdésekre.

a) Milyen kapcsolat van a két Venn-diagramon vonalkázással jelölt halmazok között?

b) Adjuk meg mindkét halmazt legalább két-két módon A-val, B-vel és halmazműveletekkel.



1040 Adott három halmaz: $A = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$, $B = \{a; c; d; f; i; j; k; l; m\}$, $C = \{o; n; m; i; h; g; e; c; a\}$.

a) Határozzuk meg az $A \setminus B$, $B \setminus C$, $A \cap C$ és $A \cup B$ halmazokat.

b) Határozzuk meg az $A \setminus (B \cup C)$ halmazt.

c) Ábrázoljuk az A, B, C halmazokat Venn-diagrammal.

1041 Szemléltessük Venn-diagrammal az $A, B, C \subseteq U$ halmazokat. Milyen kapcsolatban vannak a feladatokban szereplő halmazpárok?

a) $(A \cup B) \setminus C$ és $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

b) $\overline{A \cap B \cap C}$ és $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$;

c) $(B \setminus A) \cup (A \cap C)$ és $B \cup ((A \cap C) \setminus B)$.

1042 Két halmazról a következőket tudjuk: $A \cup B = \{p; q; r; s; t; u; x; y; z\}$, $A \cap B = \{x; u\}$, valamint $B \setminus A = \{r; t; y; z\}$. Mely betűket tartalmazza az A halmaz?

1043 Legyen $U \neq \emptyset$ alaphalmaz, A, B, C pedig az U tetszőleges részhalmazai. Döntsük el, hogy az alábbi kijelentések igazak-e minden $A, B, C \subseteq U$-ra.

a) $A \setminus (B \cup C) \subseteq A$;

b) $B \setminus (B \setminus A) \subseteq A$;

c) $C \cup (A \setminus B) \subseteq B$.

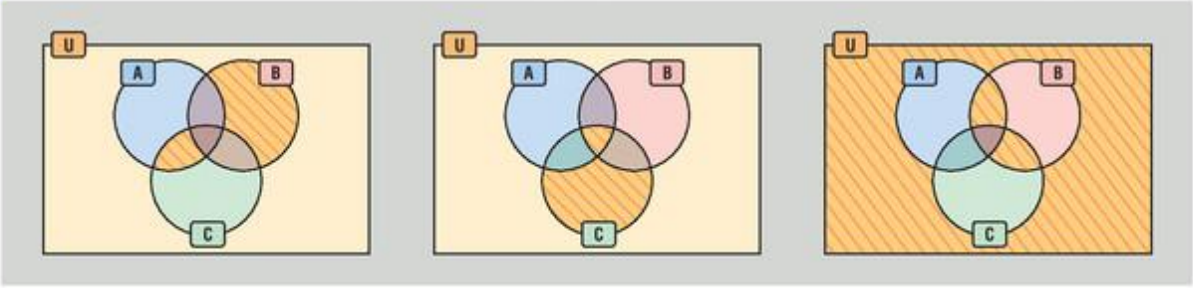
d) Melyik részhalmaza a másiknak: $A \setminus (B \setminus C)$, vagy $(A \setminus B) \setminus C$?

1044 Legyen $A = \{-1; 1; -2; 2; -3; 0\}$. Határozzuk meg a következő halmazokat:

a) $A \cup \{1; 2; 3; 4\}$, $A \cap \{-1; -2; -3; -4\}$, $A \setminus \{0; 2; 4\}$ és $\{\text{az egyjegyű pozitív prímszámok}\} \setminus A$;

b) $\overline{A}$, ha $U = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } -5 \leq x < 5\}$.

1045 Tekintsük az alábbi Venn-diagramokat. A téglalapok minden esetben az univerzumot jelölik.



a) Milyen kapcsolat van a Venn-diagramokon vonalkázással jelölt halmazok között?

b) Adjuk meg a vonalkázással jelölt halmazokat A, B, C és halmazműveletek segítségével.

c) Színezzük be egy ábrában a vonalkázással megadott három halmazt. Adjuk meg a fehéren maradt részt a lehető legkevesebb művelettel.

1046 Adjuk meg az A halmaz elemeit, ha $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$; $B = \{3; 5; 7; 8\}$; $A \cap B = \{3; 7\}$ és $\overline{A \cup B} = \emptyset$.

1047 Legyen az univerzum az $U = \{\text{egyjegyű nemnegatív egész számok}\}$ halmaz, és benne az $A = \{\text{egyjegyű pozitív prímszámok}\}$ halmaz. Határozzuk meg az $A \cup B$ komplementerét, ha $B \subseteq U$ és

a) $B = \{\text{összetett számok és a nulla}\}$; *b)* $B = \{\text{5-nél nagyobb számok}\}$.

1048 Adott a következő négy halmaz: $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+ \text{ és } x \leq 100\}$; $B = \{\text{101-nél kisebb pozitív prímek}\}$; $C = \{\text{120-nál kisebb négyzetszámok}\}$ és $D = \{\text{pozitív egy- és kétjegyű összetett számok}\}$.

a) Adjuk meg, melyik halmaz részhalmaza valamelyik másik halmaznak.

b) Vannak-e diszjunkt halmazok a felsoroltak között? Melyek azok?

c) Ábrázoljuk a halmazokat egyetlen Venn-diagrammal.

1049 Legyen $U \neq \emptyset$ alaphalmaz, A, B, C pedig U tetszőleges részhalmazai.

a) Ábrázoljuk Venn-diagrammal a $B \cup (A \cap C)$ és $(C \setminus A) \cup (A \cap B)$ halmazokat.

b) Adjunk meg úgy A, B, C néhány elemű halmazokat, hogy ne teljesüljenek a következő tartalmazások:

$$(C \setminus A) \cup (A \cap B) \subseteq B \cup (A \cap C),$$
$$B \cup (A \cap C) \subseteq (C \setminus A) \cup (A \cap B).$$

c) Adjunk meg külön-külön olyan feltételeket, amelyek mellett már igazak a tartalmazások.

1050 Az A, B, C halmazokról a következőket tudjuk: $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$; $A \setminus C = \{2; 7\}$; $A \cap B = \{2; 11\}$; $(B \cap C) \setminus A = \{3; 4\}$; $(B \cup C) \setminus A = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}$.

a) Határozzuk meg az A halmaz elemeit.

b) Időközben azt is megtudtuk, hogy a B halmaznak csak két páratlan eleme van. Határozzuk meg B és C halmazokat is.

1051 A füzet S síkjában adottak a következő ponthalmazok: 1 cm sugarú k_1 és 2 cm sugarú k_2 zárt körlapok, valamint egy e egyenes. Az alakzatok elhelyezkedésétől függően határozzuk meg

a) $e \cap k_1$-et. Adjuk meg e és k_1 kölcsönös helyzetét az egyes esetekben.

b) $k_1 \cap k_2$-t. Mi a kapcsolat a körlapok mint ponthalmazok között, ha koncentrikusak?

c) Legyenek a körök koncentrikusak. Hogyan nevezzük ekkor a $k_2 \setminus k_1$ halmazt?



1052 Adott egy körben egy teljesszög, tekintsük ezt U univerzumnak. Jelöljük U-ban a következő szögtartományokat mint ponthalmazokat:

a) $F = \{0° \le \alpha \le 90°\}$, $G = \{60° < \beta < 120°\}$, $H = \{210° < \gamma \le 315°\}$;

b) $F \cap G$, $F \cup G$, $\overline{H} \setminus F$, $\overline{F \cup G} \cap \overline{H}$.

Minden halmazt külön ábrán jelenítsünk meg.

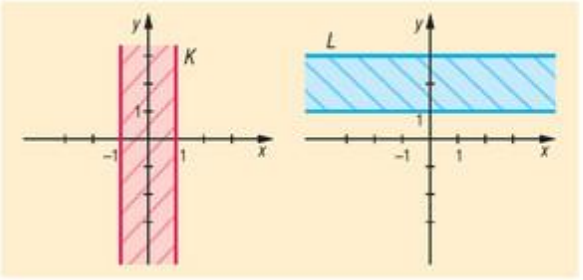
1053 Tekintsük a teret U alaphalmaznak. Legyen $H \subseteq U$ egy végtelen zárt hengertest, $e \subseteq U$ egyenes és $S \subseteq U$ sík. Mik lehetnek a következő ponthalmazok az alakzatok elhelyezkedésétől függően?

a) $H \cap e$; *b)* $S \setminus e$; *c)* $\overline{H} \cap S$.

1054 Figyeljük meg jól a két ábrát, majd oldjuk meg a feladatokat.

a) Adjuk meg halmazként K és L zárt sávokat.

b) Forgassuk el K-t és L-t pozitív irányban 90°-kal az origó körül, majd ábrázoljuk őket közös koordináta-rendszerben. Adjuk meg az így kapott halmazok különbségeit és metszetét.



1055 Az A, B és C halmazokról a következőket tudjuk: mindegyik halmaznak pontosan négy eleme van; $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 5; 7; 8; 9; 10\}$; $[(A \cup B) \cap C] \setminus (A \cap B \cap C) = \{2; 7\}$; $B \setminus C = \{1; 5\}$, valamint $A \cap B = A \cap B \cap C = \{10\}$.

a) Adjuk meg B halmaz elemeit.

b) Igaz-e, hogy $7 \in A$?

c) Hány megoldása van a feladatnak, ha A, B és C elemeit kérdezzük? Írjunk fel a lehetséges megoldások közül hármat.

Halmazok elemszáma, logikai szita

1056 Hány elemű a $W = \{$100-nál kisebb, 4-gyel és 6-tal osztható pozitív egész számok$\}$ halmaza?

1057 Hány eleműek a következő halmazok? Soroljuk is fel az elemeket, ahol lehetséges.

a) $A = \{$a „pepita zakós hegyi vízigőtepete” magánhangzói$\}$;

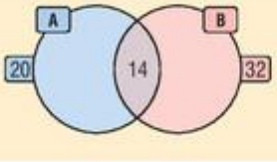
b) $B = \{$az $\{a; b\}$ halmaz összes részhalmazai$\}$;

c) $C = \{$a sík szabályos sokszögei méretüktől és helyüktől függetlenül$\}$;

d) $D = \{$30 valódi osztói$\}$.

1058 Egy társasház lakói közül 123-an gyűjtik külön csak a műanyag palackokat, 87-en csak a papírszemetet, 45-en pedig a műanyag palackokat és a papírszemetet is. Hány fő lakik a társasházban, ha saját bevallásuk szerint az említettek közül valamilyen formában mindannyian hozzájárulnak a szelektív hulladékgyűjtéshez?

1059 Írjuk a szita formulába helyettesítve a Venn-diagramon látható elemszámokat. Hány elemű az $A \cup B$ halmaz?





1060 A 26 fős osztályból 15-en tanulnak norvégul, 20-an dánul. Azt is tudjuk, hogy mindenki tanulja a két nyelv legalább egyikét. Hányan tanulnak csak dánul?

1061 Egy 10 fős baráti társaságból 5 fő szereti a focit, 4 a kosárlabdát, egyvalaki pedig mind a két sportágat. Hányan nem kedvelik a két labdajáték egyikét sem ebből a baráti társaságból?

1062 Egy ornitológus megfigyelte, hogy a területén élő 200 szarka 60%-ának a farka tarka, 70%-ának hosszú a csőre. A tarka farkú és hosszú csőrű szarkák aránya az összes szarkához viszonyítva 40%. Hány egyed van, amelyiknek rövid csőréhez egyszínű faroktollazat tartozik?

1063 Magdi minden golyóstolla két részből áll. Van köztük hét, amelynek a teteje szürke, és négy, amelynek az alja piros. Hány olyan tolla lehet, amelynek a teteje szürke és az alja piros?

1064 Lili és Evelin majdnem minden órán leveleznek egymással a fiúkról. Ma pont saját osztálytársaikat vitatják meg, amikor a matematikatanár elcsípi az alábbi postát. Fiú vagy lány jár több Liliék osztályába, ha a lányoknak van még 14 lány osztálytársa?



1065 A bölcsőde udvarán leginkább két játékot szeretnek játszani a gyerekek: hintázni vagy homokozni. Egy szép őszi délutánon a 14 gyerkőc közül ketten csak kergetőztek, négyen csak homokvárat építettek, öten hintáztak is és a homokozóban is segédkeztek. Hányan voltak, akik csak hintáztak ezen a délutánon? *(Az említetteken kívül más játékot senki sem játszott.)*

1066 Lehetséges-e, hogy egy racionális számokból álló véges számhalmaz elemeinek $\frac{2}{3}$-a $\frac{1}{2}$-nél határozottan nagyobb, $\frac{3}{4}$-e $\frac{5}{3}$-nál határozottan kisebb, és a számok fele $\frac{1}{2}$ és $\frac{5}{3}$ közé esik? Válaszunkat indokoljuk.

1067 Eszter a kiránduláson vásárolt nyolc zacskó gumicukrot egyetlen nagy tálba öntötte. A gumicukrok 40%-a állatfigurás, 80%-a többszínű volt. Az egyszínű, nem állatfigurás cukorka az összesnek 10%-a volt. Belőlük Csaba megevett 9-et, így ebből a fajtából csak a képen láthatók maradtak. Hány darab többszínű állatfigurás gumicukor volt eredetileg a tálban összesen?



1068 Egy csoportban 13 tanuló készített matematika, 15 tanuló magyar nyelvtan házi feladatot. 8-an készítették el a házi feladatukat mindkét tantárgyból, de volt 3 olyan gyerek is, aki egyik órára sem készült.

a) Hány fős a csoport?

b) A csoportba járók hány százaléka készítette el csak a matek házi feladatát?

1069 Egy gyümölcsfagylaltot gyártó cég felmérte a 11/B osztály tanulóit, hogy ki szereti az eper, a málna, illetve a citrom ízű fagylaltot. A következő eredményt kapták: csak egyféle ízt összesen 13-an kedvelnek. Az epret és a málnát együtt 4, az epret és a citromot eggyel több, a citromot és málnát eggyel kevesebb fő jelezte, hogy szereti. Mindhárom ízt csak egy gyerek szereti. Hány fős az osztály, ha a felméréskor nem volt hiányzó és mindenki felemelte legalább egyszer a kezét?

1070 A könyvespolcon háromféle könyv van: csak verseket, csak prózát, illetve verseket és prózát is tartalmazó könyvek, mindegyikből legalább egy. Tudjuk, hogy a könyvek közül 9-ben vannak versek, és 7-ben van prózai szöveg. Hány könyv lehet a polcon?



1071 Minarik Ede focicsapatot szeretne alapítani. Felhívására sokan megjelentek a plakátokon meghirdetett gyűlésen. Amikor Ede megkérdezte a jelenlévőket, hogy kik játszottak már a különböző pontokon, kiderült, hogy korábban védőt 19-en, középpályást 20-an, csatárt 22-en játszottak.

A további kérdésekből kiderült, hogy 10 fő játszott már védőt és középpályást, 9 fő csatárt és védőt, 11-en csatárt és középpályást. 4-en mindhárom poszton fociztak már. Hányan voltak ott az alakuló gyűlésen, ha Ede hozott magával 3 kapusjelöltet is? *(Az említetteken kívül más nem volt ott, és a kapusok egyszer sem jelentkeztek.)*

1072 Egy hatalmas kertben sok fát ültettek egymástól távol. Minden fa körül háromféle vadvirág legalább egyike nyílik az év során. Az összes fa $\frac{2}{3}$-a körül nyílik ibolya, $\frac{7}{15}$-e körül hóvirág, és a fák $\frac{1}{3}$-a körül találunk pipacsot. Pipacs és hóvirág együtt a fák $\frac{1}{10}$-e, pipacs és ibolya a fák $\frac{1}{5}$-e, hóvirág és ibolya pedig az összes fa $\frac{7}{30}$-a körül nyílik. Összesen 20 fát számolhatunk meg, amely körül az év során mindhárom virág nyílik. Hány fa található a hatalmas kertben?

1073 Az A, B, C halmazok számosságáról a következőket tudjuk:

(1) $|A \cap B \cap C| = |A \cap C| = 5$;

(2) $|B| = |A| + 10$;

(3) $|C| = 12$;

(4) $2 \cdot |(A \cap B) \setminus (B \cap C)| = |A \setminus (B \cup C)|$;

(5) $2 \cdot |A \setminus B| = |B \setminus A|$;

(6) $|B \cap C| = 8$.

a) Határozzuk meg A, B halmazok számosságát.

b) Határozzuk meg $A \cup B \cup C$ halmaz számosságát.

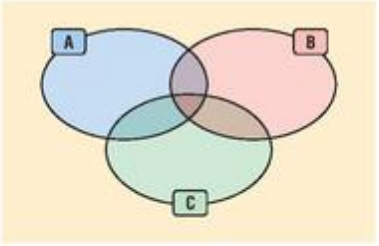
1074 Egy színjátszó csoport már három külföldi fellépéssel büszkélkedhet: jártak Bécsben, Helsinkiben és Prágában. A társulat minden tagja fellépett legalább az egyik helyen. Azon tagok, akik Ausztriában és Finnországban is felléptek, 15-en voltak. 21-en Prágában és Bécsben is játszottak. Olyan nem volt, aki csak Helsinkiben és Prágában járt, de Bécsben nem.

a) Hányan léptek fel mindhárom fővárosban, ha az összesen 60 fős társulatnak 55%-a csak egy városba jutott el?

A színjátszók vezetőjétől tudjuk azt is, hogy azok közül, akik csak egy külföldi fellépésre tudtak elmenni, Prágában pont feleannyian jártak, mint Bécsben. Kizárólag Helsinkiben 3 fő járt.

b) Hány fővel lépett fel a társulat az egyes városokban?

1075 Legyenek A, B, C véges halmazok.



a) Bizonyítsuk be, hogy metszetük elemszáma nem nagyobb, mint elemszámaik számtani közepe.

b) Adjuk meg k segítségével uniójuk elemszámát, ha tudjuk, hogy közülük egyik sem tartalmazza a másik kettő bármelyikét, metszetük elemszáma k, és elemszámaik számtani közepe $k + 1$.

c) Adjunk uniójuk elemszámára alsó és felső becslést, ha tudjuk, hogy minden halmaz n elemű; metszetük elemszáma k ($n > k$, és vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan).

Segítség: A megoldás során használjuk a három halmaz Venn-diagramját!



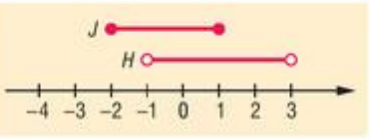
Számegyenesek, intervallumok

1076 *a)* Ábrázoljuk számegyenesen a balról zárt és jobbról nyitott $I = [2; 4[$ intervallumot.

b) Ábrázoljuk számegyenesen a balról nyitott és jobbról zárt, $K = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$ halmazként megadott intervallumot.

c) Adjuk meg intervallumként a számegyenesen ábrázolt J intervallumot.

d) Adjuk meg halmazként a számegyenesen ábrázolt H intervallumot.



1077 Adottak az alábbi intervallumok:

$$I =]0; 2]; \quad J =]-1; 1[; \quad K = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 2\}; \quad L = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

a) Ábrázoljuk őket egy számegyenesen. Közülük melyik zárt, nyitott, illetve félig nyitott félig zárt intervallum?

b) Van-e köztük olyan, amely valamelyik másiknak részhalmaza? Ha van, írjuk fel a tartalmazást.

c) Adjuk meg a számegyenesen a legrövidebb olyan intervallumot, amelynek K valódi részhalmaza.

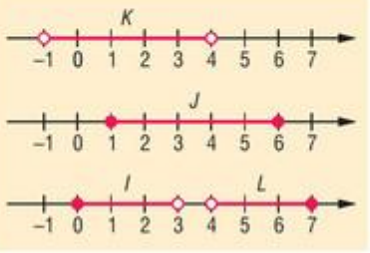
1078 Figyeljük meg a következő intervallumokat.

a) Melyik nyitott, zárt, illetve félig nyitott, félig zárt?

b) Írjuk fel intervallum jelöléssel az I, J, K, L, $I \setminus J$, $K \setminus I$, $J \setminus L$, $I \cap J$, $J \cap L$, $J \cup L$ és $K \cup J$ halmazokat.

c) Vannak-e diszjunktak az I, J, K, L intervallumok között? Adjuk meg őket.

d) Legyen $U = [-1; 7]$. Határozzuk meg az $\overline{L}$ és $\overline{K}$ halmazokat.

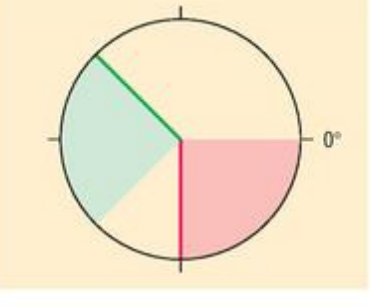


1079 *a)* Ábrázoljuk az $I = \left]-\frac{4}{5}; -\frac{7}{15}\right[$ intervallumot a számegyenesen, és adjuk meg halmazként is.

b) Adjunk meg 4 olyan racionális számot, amely ebbe az intervallumba esik.

1080 *a)* Ábrázoljuk az egységkörben a következő forgásszögekkel megadott intervallumokat: $S = [90°; 135°[$; $S' = [210°; 300°]$.

b) Adjuk meg forgásszögek segítségével intervallumként az ábrán látható egységkörben pirossal és zölddel ábrázolt szögeket. (A zöld szögtartomány 90°-os, és a tengely a szögfelezője.) Adjuk meg őket többféleképpen is.



1081 Ábrázoljuk számegyenesen a következő halmazokat:

a) $G = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } x < 3\}$;

b) $H = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } |x| < 3\}$;

c) $I = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } |x| \geq 4\}$;

d) $J = \{x \mid x \in \mathbb{R}^- \text{ és } |x + 3| \geq 2\}$.

e) A H halmaz leírásában egyetlen jelet megváltoztatva adjuk meg $\overline{H}$-t, ha az univerzum a számegyenes. Működik ez a többi halmazra is?

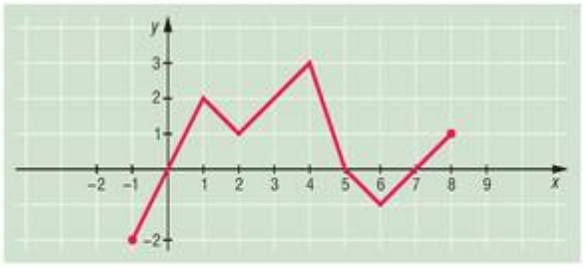


1082 Az ábrán látható függvény értelmezési tartománya $[-1; 8]$. Határozzuk meg, hogy

a) hol vannak a függvénynek zérushelyei;

b) mely intervallumokon vesz fel negatív értéket a függvény;

c) mely intervallumokon monoton növő a függvény.



1083 Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a következő halmazokat.

a) $A = \{(x; y) \mid x \le 2 \text{ és } y < 1, \text{ ahol } x, y \in \mathbb{R}\}$;

b) $B = \{(x; y) \mid x > 2 \text{ vagy } y \ge 1, \text{ ahol } x, y \in \mathbb{R}^+\}$;

c) $C = \{(x; y) \mid 2x < 2 \text{ és } y \le 3, \text{ ahol } x, y \in \mathbb{R}^+\}$;

d) $D = \{(x, y) \mid 1 < x < 3 \text{ és } -1 < y \le 1, \text{ ahol } x, y \in \mathbb{R}\}$.

1084 Legyen $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$ halmaz. Ábrázoljuk számegyenesen, és adjuk meg halmaz formájában H komplementerét, ha az univerzum

a) a valós számok halmaza;

b) a negatív valós számok halmaza;

c) a nemnegatív valós számok halmaza;

d) az 5-nél kisebb egész számok halmaza.

Írjuk fel H-t és *a), b), c)* komplementereit intervallum formában is.

1085 Adottak az $I = [4; 7]$, $J = [6; \infty[$, $K =]3; 6[$ és $L =]2; 5]$ intervallumok. Ábrázoljuk számegyenesen, és írjuk fel intervallum formában a következő halmazokat:

a) $L \cap K$; $K \cap I$; $I \setminus J$; $J \setminus I$; $(L \cup I) \setminus K$; $(K \cup J) \setminus L$.

b) Legyen $U =]2; \infty[$. Határozzuk meg az $\overline{L}$, $\overline{J}$, $\overline{I \cup J}$, $\overline{I \cup K}$, $\overline{J \cup L \cup K}$ halmazokat intervallum formában.

1086 *a)* Oldjuk meg az $\frac{x-1}{3} + 2 > 0$ és $\frac{x}{2} - \frac{4{,}5}{3} \le 0$ egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

b) Ábrázoljuk a megoldásokat számegyenesen, valamint adjuk meg őket intervallumként is.

c) Jelölje I az első, J a második egyenlőtlenség megoldásainak halmazát. Határozzuk meg a következő halmazokat: $I \cap J$; $I \setminus J$; $J \setminus I$.

d) Mivel egyenlő az $I \cup J$ halmaz?

1087 Legyenek $J_n = [n - 1; n + 1]$ intervallumok a számegyenesen, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) Határozzuk meg a $J_1 \cap J_2 \cap J_3$ halmazt.

b) Határozzuk meg a $(J_2 \cup J_4) \setminus J_3$ halmazt.

1088 Ábrázoljuk közös Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a következő halmazokat.

a) $K = \{(x; y) \mid x + y \le 2 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$; $L = \{(x; y) \mid -x + y > -3 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$; $L \setminus K$

b) $M = \{(x; y) \mid x - y \le 2 \text{ és } x - y \ge -1 \text{ és } x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\}$

c) $N = \{(x; y) \mid |2x + y| < 4 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$; $O = \{(x; y) \mid |x - 2y| \le 2 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$; $O \setminus N$

d) $P = \{(x; y) \mid |x| + |y| = 6 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$; $Q = \{(x; y) \mid 2 \cdot |x| + |y| \le 4 \text{ és } x, y \in \mathbb{Z}\}$; $P \cap Q$

1089 Adottak az $I_n =]0; n]$ intervallumok, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) Találunk-e közöttük halmaz-részhalmaz párokat? Ha igen, melyek azok?

b) Írjuk fel intervallummal az $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap \ldots$ halmazt.

c) Adjuk meg az $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup \ldots$ halmazt.



1090 Adottak a $J_n = \left\{ x \,\middle|\, 0 \le x < \frac{1}{n} \right\}$ halmazok, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) Ábrázoljuk számegyenesen, és írjuk fel őket intervallum-jelöléssel.

b) Van-e olyan pontja a számegyenesnek, amely minden J_n halmaznak eleme?

1091 Adottak az $I_n = \left[-\frac{1}{n}; 0 \right[$ intervallumok, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) Ábrázoljuk őket számegyenesen.

b) Adjuk meg az $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap \ldots$ halmazt.

c) Adjuk meg n segítségével az $I_n \setminus I_{n+1}$ intervallumot.

Vegyes feladatok

1092 Hány különböző négytagú sorozatot képezhetünk a következő számokból:

a) 1, 2, 3, 4; *b)* 1, 1, 1, 2; *c)* 1, 1, 2, 2?

1093 Az egyik városon átvezető úton összesen 4 villanyrendőr van. Működésüket összehangolva úgynevezett „zöldhullámot" lehet beállítani: a megfelelő sebességgel közlekedő autósok mindig akkor érnek a következő lámpához, amikor az zöldre vált. Egy meghibásodás miatt azonban most a lámpák véletlenszerűen mutatnak zöldet, sárgát vagy pirosat. Mind a négy lámpát figyelembe véve hányféle jelzést láthatunk egy időben a villanyrendőrökön?

1094 Kati bővítette babájának ruhatárát. Van kétféle kalapja, négy különböző blúza, három felső- és két alsószoknyája, illetve két nadrágja. Blúzt mindenképpen ad a babára, kalapot azonban nem. Ha szoknyába öltözteti, akkor mindenképpen ad rá egy alsószoknyát is.

a) Hányféleképpen öltöztetheti fel babáját, ha nadrágot ad rá?

b) Hányféleképpen öltöztetheti fel babáját, ha szoknyát ad rá?

1095 Tekintsük az $\left(\frac{1}{2} \blacksquare \frac{4}{3} \right) \blacksquare \frac{5}{6}$ kifejezést. Töltsük ki az üres helyeket szorzás- vagy osztásjelekkel.

a) Hányféle eredményt kaphatunk?

b) Számítsuk is ki ezeket.

1096 Egy négyzetes hasáb alapéle 3 cm, magassága 5 cm. A hasábot kívülről lefestjük zöldre, majd oldalaival párhuzamos vágásokkal 1 centiméteres élű kis kockákra daraboljuk.

a) Hány kis kockára vágtuk fel a téglatestet?

A kapott kis kockákat négy csoportba szedjük: három, kettő, egy és nulla zöld oldallappal rendelkezőkre. Az egyes csoportokon belül a kis kockákat sorszámozzuk. A sorszámozást figyelembe véve hányféleképpen tehetjük sorban egymás mellé a(z)

b) három; *c)* kettő; *d)* egy; *e)* nulla

zöld oldallappal rendelkező kis kockákat?

1097 *a)* Adjuk meg elemei felsorolásával a 60 kétjegyű pozitív osztóinak halmazát.

b) Ábrázoljuk egy Venn-diagrammal az $A = \{$20-nál kisebb, 6-tal osztható pozitív egész számok$\}$, $B = \{$15-nél kisebb, 3-mal osztható pozitív egész számok$\}$, $C = \{3n \mid n = 1, 2, 3\}$ halmazokat.

c) Igaz-e, hogy $C \subseteq B$? És az igaz-e, hogy $C \subset B$?



1098 Tekintsük a $T = \{a; b; c; d\}$ halmazt.

a) Soroljuk fel a T halmaz valódi részhalmazait.

b) Hányféle, a-t és b-t tartalmazó, $B \subset T$ feltételeknek megfelelő B halmazt adhatunk meg?

1099 Legyen A a tizenhatnál kisebb, nemnegatív páros számok halmaza, B a pozitív, hússzal nem nagyobb, hárommal osztható számok halmaza.

a) Adjuk meg elemeik felsorolásával az $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B$, $A \cap B$ halmazokat.

b) Határozzuk meg az $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \setminus B}$ halmazokat, ha $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 10\}$.

1100 Adott három halmaz: $A = \{2; 4; 5; 7; 8; 9\}$, $B = \{1; 7; 9; 10\}$, $C = \{2; 3; 6; 7; 8; 10\}$, valamint $U = A \cup B \cup C$.

a) Ábrázoljuk az A, B, C halmazokat Venn-diagrammal.

b) Határozzuk meg a $B \setminus A$, $C \setminus B$, $A \cap C$ és $C \cup B$ halmazok elemeit.

c) Határozzuk meg a $B \setminus (A \cup C)$, $\overline{A} \cap (B \cup C \cup \{11\})$, $\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)}$ halmazokat.

1101 Legyen U a magyar magánhangzók halmaza. A, B, C halmazok az alaphalmazban. A következőket tudjuk róluk: $(C \setminus B) \cup A = \{a; á; e; o; ö; ő; u; ü; ű\}$, $A \cap B = \{a; u\}$, $C \cap (A \cup B) = \{í; u; ü\}$, $\overline{A \cup B} = \{i; o; ö; ő\}$. Milyen betűk esnek az $\overline{A \cup C} \setminus \overline{B}$ halmazba?

1102 Hány elemű az A és B halmazok metszete, ha $|A \cup B| = 82$, $|A| = 56$, és $|B| = 93$?

1103 A Visító Vízilovak zenekar 13 saját számában gitároznak és 10-ben dobolnak. A számok közül 8-ban kíséri dob a gitárt (mindegyik dalban szól valamelyik hangszer a kettő közül). Hány saját száma van a Visító Vízilovaknak?

1104 Dávidnak 30 képregénye van. Közülük 14-ben szuperhősök, 9-ben járművek és 20-ban mesefigurák a főszereplők. (Olyan képregénye egy sincs, amelyikben a három közül valamelyik ne szerepelne.) 5 képregényben a mesefigurák járművekkel közlekednek, 3-ban a járművek szuperhősöket szállítanak. Csak egy olyan képregénye van, amelyben a főszereplő járművek szuperhősöket és mesefigurákat is szállítanak. Hány olyan képregénye van, amelyben a mesefigurák és a szuperhősök gyalog járnak együtt?

1105 Adott négy intervallum: $I =]-1; 3[$, $J =]2; 4]$, $K = [1; 3]$ és $L = [0; 2[$.

a) Ábrázoljuk őket számegyenesen.

b) Határozzuk meg az $I \setminus K$, $J \cap K$, $K \cup L$ intervallumokat.

c) Vannak-e diszjunkt intervallumok az I, J, K, L között? Melyek azok? Van-e olyan intervallum, amely tartalmaz egy másikat? Ha igen, melyik melyiket?

1106 *a)* Oldjuk meg a valós számok halmazán a $2x + 6 > 0$ és $3x - 9 \leq -3$ egyenlőtlenségeket, majd ábrázoljuk a megoldásukat számegyenesen.

Jelölje I az első, J a második egyenlőtlenség megoldásait. Adjuk meg azt az intervallumot, ahol

b) a két egyenlőtlenség egyszerre teljesül;

c) csak az első egyenlőtlenség teljesül, a második nem;

d) csak a második egyenlőtlenség teljesül, az első nem.

9.2. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

Betűk használata a matematikában

1107 Adjuk meg – algebrai kifejezéseket használva – azokat a

a) pozitív egész számokat, amelyek 5-tel osztva 4 maradékot adnak;

b) pozitív egész számokat, amelyek 8-cal osztva 5 maradékot adnak;

c) egész számokat, amelyek két nullára végződnek;

d) pozitív egész számokat, amelyek 17-re végződnek;

e) racionális számokat, amelyeknek a számlálója 7, a nevezője pedig a 3 többszöröse;

f) racionális számokat, amelyeknek a számlálója 4-nek többszöröse, nevezője pedig 3-mal nagyobb a számlálónál.

1108 Milyen számokat határoznak meg a következő kifejezések?

a) $9n$, ha n pozitív egész szám;

b) $8n-3$, ha n pozitív egész szám;

c) $100n+23$, ha n pozitív egész szám;

d) $2-a$, ha a egész szám;

e) n^2+1, ha n egész szám;

f) $\frac{3x-1}{10}$, ha x pozitív egész szám.

1109 Az alábbi kifejezéseket állítsuk együtthatóik szerint növekvő sorrendbe:

a) $3{,}8xyz$; $-0{,}8x\cdot 5z$; $-3x\cdot(-1{,}2yz)$; $2x\cdot(-2{,}1y)$; $4x\cdot(-0{,}7yz)$;

b) $-4{,}2a^2$; $4a\cdot(-1{,}5b)$; $2a\cdot(-3b)$; $(-2b^2)\cdot(3{,}5a)$; $(-2{,}2a^4)\cdot 2b$.

1110 Számítsuk ki az alábbi kifejezések helyettesítési értéket, ha $a=4$, $b=-1{,}2$ és $c=\frac{5}{6}$:

a) $6c-2a$;

b) $4a^2-5b$;

c) $a+6bc$;

d) $-2a-5b+12c$;

e) $\frac{-3abc}{2a+1}$;

f) $2\cdot\left(\frac{a-b}{c}+\frac{c}{a}\right)$.

1111 Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

a) $\frac{17x-3}{x}$;

b) $\frac{4x-6}{x+2}$;

c) $\frac{3a-1}{2a+3}$;

d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{4x+1}{x-1}$;

e) $\frac{1}{5x-4}-\frac{3x-1}{3x+1}$;

f) $\frac{a+1}{2a+7}-\frac{a-2}{8a-3}$;

g) $1-\frac{5y-6}{y^2-9}+\frac{3-y}{4-y^2}-\frac{3y+1}{1+y^2}$.

1112 Egy háromszög oldalai egymást követő páros számok. Mekkora a háromszög kerülete, ha a legkisebb oldal hossza $2x-2$? Mekkora értékeket vehet fel az x?

1113 Egy szám hárommal osztva 2, egy másik néggyel osztva 3 maradékot ad. Tizenkettővel osztva mennyi a maradéka

a) az egyes számoknak;

b) a két szám összegének?

Hatványozás, a számok normálalakja

1114 Vizsgáljuk meg, melyik szám a kisebb az alábbi esetekben:

a) 2^6 vagy 4^4; *b)* 4^8 vagy 8^4; *c)* 9^3 vagy 3^9;

d) 8^5 vagy 16^4; *e)* 6^3 vagy $27 \cdot 16$; *f)* 27^7 vagy 81^5;

g) 10^{15} vagy $8^4 \cdot 125^5$; *h)* 40^{100} vagy 100^{50}.

1115 Zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki a következő kifejezések értékeit:

a) $\dfrac{27 \cdot 16}{6^3}$; *b)* $\dfrac{12^5}{9^2 \cdot 4^4}$; *c)* $\dfrac{16^3 \cdot 4^2 \cdot 8^2}{32^4}$;

d) $\dfrac{18^4 \cdot 256 \cdot 72^2}{24^4 \cdot 36^3}$; *e)* $\left(\dfrac{6^6 \cdot 10^2}{9^3 \cdot 200 \cdot 32}\right)^3$; *f)* $\dfrac{6^7 \cdot 15^5 \cdot 35^5}{3^5 \cdot 10^6 \cdot 21^5 \cdot 25^2}$.

1116 Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $(a^7)^3 \cdot (a^4)^5$; *b)* $\left[(x^2)^2\right]^3 \cdot \left[(x^3)^2\right]^4$; *c)* $\dfrac{(x^3)^5 \cdot x^8}{(x^4)^3}$;

d) $\dfrac{(b^2)^6 \cdot b^5}{(b^3)^4 \cdot (b^2)^2}$; *e)* $\dfrac{(x^4)^4 \cdot (x^5)^5}{(x^3)^3 \cdot (x^3)^2}$; *f)* $\dfrac{(a^3 \cdot b)^4 \cdot (a \cdot b^2)^3}{(a^4 \cdot b^2)^2 \cdot (a \cdot b)^3}$;

g) $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{b^3}{a^4}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{a^5}{b}\right)^2$; *h)* $\dfrac{(c^4 \cdot d^3)^5 \cdot (c^7)^2 \cdot d^3}{(c^3)^2 \cdot (d^6 \cdot c^5)^4}$.

1117 Számítsuk ki a következő műveletek eredményét:

a) 3^{-4}; *b)* $(-5)^{-3}$; *c)* $(2^{-1})^{-3}$;

d) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2}$; *e)* $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^{-3}$; *f)* $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}$;

g) $\left[\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-1}\right]^2$; *h)* $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{-2}{5}\right)^3$; *i)* $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-4} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-6}$;

j) $\dfrac{(7^{-5})^2 \cdot (7^{-3})^{-4}}{(7^{-6})^{-2} \cdot 7^{-11}}$.

1118 *a)* A 2-nek hányadik hatványai a következő törtek?

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{256},\ \frac{1}{1024},\ \frac{1}{(2^{-5})^6}$$

b) A 3-nak hányadik hatványai a következő törtek?

$$\frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \frac{1}{243},\ \frac{1}{3^{11}},\ \frac{1}{(3^{-5})^8}$$

1119 Végezzük el a következő hatványozásokat, és hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

a) $(a^3)^{-2}\cdot(a^{-2})^{-4}\cdot(a^{-1})^{-1}$; *b)* $(x^{-2})^{-4}\cdot\left[(x^3)^{-3}\right]^{-2}\cdot(x^2)^{-8}$; *c)* $(2a^{-3})^{-1}\cdot 2^{-2}\cdot a^{-4}$;

d) $(a^{-1}\cdot b^{-3})^{-2}\cdot(a^{-4}\cdot b^{-2})^{-1}$; *e)* $\left(\frac{5^{-2}\cdot b^{-1}}{b^{-4}}\right)^{-3}\cdot\frac{b^{-3}}{5^{-4}}$; *f)* $\frac{(c^{-3})^{-1}\cdot c^{-4}\cdot c^{-1}}{c^{-2}\cdot(c^{-3})^2\cdot c}$;

g) $\left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{b^{-4}}{a^{-3}}\right)^{2}\cdot\left(\frac{b^{-1}}{a^4}\right)^{-5}$; *h)* $\frac{(3d^2)^{-2}\cdot(9^{-2}\cdot d^{-5})^{-2}}{(3^3\cdot d^{-4})^3\cdot(3d^3)^{-1}}$; *i)* $\frac{(12^{-3}\cdot e^{-1})^{-2}\cdot(18^2\cdot e^3)^{-3}}{(8^{-2}\cdot e^{-4})^2\cdot(3^{-5}\cdot e^3)^2}$.

1120 Zsebszámológép használata nélkül döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb az alábbi esetekben:

a) 6^{-3} vagy 3^{-6}; *b)* 8^{-4} vagy 4^{-8}; *c)* 10^{-20} vagy 20^{-10};

d) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ vagy $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}$; *e)* $5^{-3}\cdot 7^2$ vagy $\left(\frac{7}{5}\right)^3$; *f)* $\frac{9^{-3}\cdot 27^{-2}}{81^{-5}}$ vagy $\left(\frac{1}{3}\right)^{-8}$;

g) $\left(2^{-1}+2^{-2}-2^{-3}\right)^{-1}$ vagy 1,6.

1121 *a)* Adjuk meg a testtömegünket grammban, illetve tonnában, írjuk fel az eredményt normálalakban.

b) Egy ember átlagos tömege 58 kg, és 6,5 milliárd ember él a Földön. Mennyi az emberiség összes tömege grammban és tonnában?

1122 *a)* Mennyi idő alatt tesz meg a fény 1 mm-t, ha a sebessége $3\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

b) Mennyi utat tesz meg a fény 45 perc alatt?

1123 Hányadik hatványra kell emelni a 4^4-t, hogy 8^8 legyen belőle?

1124 Hány nullára végződik a $2^{2007}\cdot 125^{345}\cdot 25^{200}$ szorzat?

1125 A következő állításokról döntsük el, hogy melyik igaz és melyik hamis.

a) A pozitív számok minden egész kitevőjű hatványa pozitív.

b) Az egész számok minden pozitív egész kitevőjű hatványa pozitív.

c) A negatív egész számoknak van olyan negatív egész kitevőjű hatványa, amely pozitív.

d) A pozitív egész számok egész kitevőjű hatványai is pozitív egészek.

e) Az egész számok negatív egész kitevőjű hatványai nem egész számok.

1126 Ha három hangya tömege 1 gramm, akkor mennyi a tömege a 20 millió hangyát tartalmazó hangyabolynak?

1127 Egy baktériumtenyészetben a baktériumok száma óránként háromszorosára növekszik.

a) Ha az időmérés kezdetén 1 baktérium van a tenyészetben, mennyi lesz a baktériumok száma az ötödik óra végén?

b) Hányszorosára növekszik a baktériumszám a tizedik óra kezdetétől a tizenharmadik óra végéig?

1128 Az egyik legfényesebb csillag, az Altair 16,5 fényév távolságra van a Földtől.

a) Adjuk meg a távolságot méterben, ha a fény terjedési sebessége $3\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Hányszorosa ez a távolság a Nap–Föld-távolságnak, amely közelítőleg $1{,}5\cdot 10^8$ km?



1129 Az egyik héten az ötös lottón minden kihúzott szám ugyanazon egész szám egész kitevős hatványa volt. Melyek voltak a kihúzott számok? Hány eset lehetséges?

Egész kifejezések, nevezetes szorzatok, a szorzattá alakítás módszerei

1130 Az alábbi kifejezésekben végezzük el a lehetséges műveleteket, és rendezzük a tagokat csökkenő fokszám szerint:

a) $3a - 2a^2 - 4 + a^2 + a - 4a^2 - 5a + 1 - a^2 + 2a$;

b) $3b - b^3 + 4b^2 - 1 + 4b^3 - 2b^2 - 4b + 2 - 2b^3 - b^2 + b - 4 + 2b^2$;

c) $3cd^2 - 4c^2 + d + 2c^2 - d^2c + 5d - 4cd^2 + 3 - d - c^2 - cd^2$;

d) $(3a^2 - 2a + 1) - (a^2 - a - 3) - (a^2 + 5a - 2)$;

e) $(2x^2 - x - 3) - (x^2 - 3x - 4) - (-2x^2 + 4x + 1) - (3x^2 - 2x - 1)$;

f) $2 \cdot (a^2 - a + 1) + 3 \cdot (a^2 + 2a - 3) - 4 \cdot (a^2 + 3a + 4)$;

g) $2 \cdot (x^3 - 2x^2 + 2) + 3 \cdot (x^2 + x - 1) - 4 \cdot (x^3 - 2x^2 + 4x - 1) - (x^3 - x^2 + x + 1)$;

h) $3x \cdot (2x^2 - x + 2) - 2x^2 \cdot (3x - 2) - 3 \cdot (x^3 + 2x^2 + x - 4) - x \cdot (x^2 - x - 3) + 4x^3 + 4x^2 + 2x - 4$;

i) $(3a - 1) \cdot (2a + 3) - (4a - 2) \cdot (3a + 5)$;

j) $2 \cdot [(3x^2 - 1) + (2x - 2) \cdot (3x - 1)] - [2x^2 + 3 \cdot (2x + 1) - x] - 3$;

k) $3x - \{2x - [3x + 1 - (2x - 1)] - 3\} - \{4 - [x - (3x - 4) + 2x] + x\}$;

l) $(4x + 1) \cdot (3x - 2) - 2 \cdot \{3 - 2 \cdot [(x - 3) \cdot (2x + 1) - x \cdot (3x + 1)] - x^2\} + (2x + 3) \cdot (x - 2)$.

1131 Határozzuk meg a következő kifejezések értékét, ha $a = -2$, $b = \frac{2}{3}$:

a) $2a - 1 + 4b - a + 3b + 6 - 4a - 10b + 3a - 2$;

b) $2b + 5 - 2a + 4a - 3b - 1 + 4b - 3a - 7 - 3b$;

c) $(3a - 2) \cdot (a - 1) - 3a^2 + 3a - 1$;

d) $(4a - b) \cdot (2a + 1) - (8a + 3) \cdot (a + 2) - 2b + 2ab$;

e) $(3a - 2) \cdot (2a - b) - 6 \cdot (a - 3) \cdot (a + b) - b \cdot (11 - 9a)$;

f) $4a - \{4 - [6b - 2 \cdot (a - 2) - a]\}$.

1132 Végezzük el a következő négyzetre emeléseket:

a) $(a + 7)^2$; *b)* $(8 - b)^2$; *c)* $(-7 + b)^2$; *d)* $(3y + 2x)^2$;

e) $(4x - 3y)^2$; *f)* $(10a - 3b)^2$; *g)* $(x^2 + 3z)^2$; *h)* $\left(2x^3 - 3y^2\right)^2$;

i) $\left(8a^3 - 5b^2\right)^2$; *j)* $\left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot y\right)^2$; *k)* $\left(\frac{5}{6} \cdot x - \frac{7}{3} \cdot y\right)^2$; *l)* $(z + 2x + y)^2$;

m) $(3x + 2y - z)^2$; *n)* $\left(4x - \frac{2}{5} \cdot y - \frac{1}{7} \cdot z\right)^2$.

1133 Melyik kifejezés négyzete a következő kifejezés?

a) $a^2 + 8a + 16$; *b)* $b^2 - 10b + 25$; *c)* $c^2 + 14c + 49$;

d) $x^2 - 40x + 400$; *e)* $d^4 - 20d^2 + 100$; *f)* $x^8 + 10x^4 + 25$;

g) $x^6 + 6x^3y^5 + 9y^{10}$; *h)* $0{,}25x^2 - 6xy^3 + 36y^6$; *i)* $\frac{4}{9} \cdot x^4 + \frac{1}{3} \cdot yx^2 + \frac{1}{16} \cdot y^2$.

1134 Bontsuk fel a zárójeleket:

a) $(a+3)^3$; *b)* $(2b-1)^3$; *c)* $(3c^2+4)^3$;

d) $(4d^3-2x^2)^3$; *e)* $(0{,}5x^2+2y)^3$; *f)* $\left(\frac{2}{3}\cdot x-\frac{4}{5}\cdot y\right)^3$.

1135 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(3a+5)\cdot(3a-5)$; *b)* $(8x-7)\cdot(8x+7)$;

c) $(4b-2x)\cdot(4b+2x)$; *d)* $(6a+5b)\cdot(6a-5b)$;

e) $(5c-3y)\cdot(5c+3y)$; *f)* $(5a^3+1)\cdot(5a^3-1)$;

g) $(3d^2-8)\cdot(3d^2+8)$; *h)* $(9x^2+2y)\cdot(2y-9x^2)$;

i) $(7e^5+10x^3)\cdot(7e^5-10x^3)$; *j)* $\left(\frac{2}{7}\cdot x^7-\frac{1}{3}\cdot y^3\right)\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot x^7+\frac{1}{3}\cdot y^3\right)$.

1136 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(3a-1)^2-(2a+3)\cdot(2a-3)+(a+2)^2$;

b) $(4x+3)\cdot(4x-3)-(3x+2)^2+(x-7)^2$;

c) $(5x+4)^2-(3x-4)^2-(2x+3)\cdot(2x-3)$;

d) $(x-5)^2-(2x+5)\cdot(2x-5)+(3x+1)^2-(2x-1)^2$;

e) $(4b-5)^2+3\cdot(4-b)\cdot(4+b)-(2b+4)^2-(4b-3)^2$;

f) $2\cdot(5x+1)^2-3\cdot(4x-1)\cdot(4x+1)-2\cdot(x-4)^2-(3x+2)^2$;

g) $(2c-1)^3+(3c+2)^2-8c\cdot(c-2)\cdot(c+2)+3\cdot(c-5)^2$;

h) $(x-2y)^3-(3x+y)^2-(4x-2y)\cdot(4x+2y)+(3y-x)^2$;

i) $(x^2-2x)^2+2\cdot(x^2+3)\cdot(x^2-3)-5\cdot(x^2+1)^2$;

j) $\left(2y-\frac{1}{2}\cdot x\right)\cdot\left(2y+\frac{1}{2}\cdot x\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot x-y\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\cdot y\right)^2$.

1137 Bontsuk fel a zárójeleket:

a) $(a-1)\cdot(a^2+a+1)$; *b)* $(b+5)\cdot(b^2-5b+25)$; *c)* $(3x+4)\cdot(9x^2-12x+16)$.

1138 Alakítsuk teljes négyzetté az alábbi kifejezéseket:

a) x^2-2x-3; *b)* a^2+4a+6; *c)* a^2+6a+1;

d) $x^2-8x+20$; *e)* $a^2-10a+2$; *f)* $x^2+12x+50$;

g) $x^2+14x+31$; *h)* $2x^2-16x+26$; *i)* $-x^2-6x+3$;

j) $-x^2+12x+1$; *k)* $3x^2+12x+2$; *l)* $-5x^2-20x-7$.

1139 Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

a) $3a^3-2a^2+a$; *b)* $6x^3-10x^2+2x$; *c)* $4b^4+8b^3+28b^2-4b$;

d) $35x^3+15x^2+20x$; *e)* $6a^4-9a^3+3a^2$; *f)* $4x^5-24x^4+12x^3$;

g) $5a^3b^2-15a^2b^3+10a^2b$; *h)* $17a^3b^5+17a^2b^6-34ab^4$; *i)* $16a^4b^3+24a^2b^4-40a^4b^4$.

1140 A csoportosítás módszerével alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

a) $ab+3b-2a-6$; *b)* $2ax+bx+2a+b$; *c)* $2ax+5y+10x+ay$;

d) $ab-8x+4a-2bx$; *e)* $6a-bx-2b+3ax$; *f)* $4ax+2b-8bx-a$;

g) $6ax+20b+15a+8bx$; *h)* $20bx^2+a-4x^2-5ab$; *i)* $9a^2+8b^3x^2-6a^2x^2-12b^3$.

1141 Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

a) $16x^2 - 25$; *b)* $49a^2 - 100b^2$; *c)* $64b^2 - 9x^2$;

d) $36x^4 - 121y^6$; *e)* $x^2 - 20x + 100$; *f)* $36a^2 - 84a + 49$;

g) $\frac{4}{25} \cdot x^2 + 4x + 25$; *h)* $16x^4 - 1$; *i)* $16 - 81x^4$;

j) $4a^4 + 49b^6 + 28a^2b^3$; *k)* $6x^2 + 12x + 6$; *l)* $4x^3 - 24x^2 + 36x$;

m) $3x^4 + 12x^3 + 12x^2$; *n)* $5x^6 - 40x^4 + 80x^2$; *o)* $1 - x^{12}$;

p) $x^2 + 8x + 15$; *q)* $x^2 - x - 12$; *r)* $4x^4 - 13x^2 - 12$;

s) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$; *t)* $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3$; *u)* $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$;

v) $a^3 - 27$; *w)* $x^3 + 64$; *x)* $27a^3 + 125b^3$.

1142 Zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki a következő műveletek eredményét:

a) $9998 \cdot 10002$; *b)* $\frac{526^2 - 74^2}{726^2 - 274^2}$; *c)* $\frac{54321 \cdot 54325 - 54323 \cdot 54320}{54323 \cdot 54322 - 54321^2}$.

1143 Az a és b számokról azt tudjuk, hogy $a + b = 23$ és $a \cdot b = -7$. Számítsuk ki $a^2 + b^2$ értékét.

1144 Mennyi az együtthatók összege az $(x^2 - 3x + 1)^{2007}$ kifejezés polinom alakjában?

1145 Egy téglalap kerülete 74 cm. A téglalap minden oldalára kifelé négyzeteket rajzolunk. A négy négyzet területének összege 1642 cm^2. Mekkora a téglalap területe?

1146 Két szám különbsége 2, a szorzatuk 7. A számok megadása nélkül határozzuk meg a köbeik különbségét.

Műveletek algebrai törtekkel

1147 Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\frac{27a^5b^2}{12a^2b^3}$; *b)* $\frac{3x^4 \cdot (x-2)}{6x^3 \cdot (x-2)}$; *c)* $\frac{32a \cdot (a-5)}{24a^2 \cdot (5-a)}$;

d) $\frac{10a^4 + 30a^2}{5a^3 + 15a}$; *e)* $\frac{-8a^5 - 8a^3}{10a^3 + 10a}$; *f)* $\frac{12x^2y^2 + 20xy^3}{6x^2y + 10xy^2}$;

g) $\frac{6ax + 9a + 8x + 12}{3ax + 15a + 4x + 20}$; *h)* $\frac{4x^2 - 4x + 1}{1 - 4x^2}$; *i)* $\frac{9x^2 - 25}{12x^2 - 20x}$;

j) $\frac{8xy - 6y - 3 + 4x}{16x^2 - 9}$; *k)* $\frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 + 12x + 36}$; *l)* $\frac{6x^2 - 2x - 20}{3x^2 + 11x + 10}$.

1148 Végezzük el a következő szorzásokat és osztásokat, és egyszerűsítsük az eredményt:

a) $\frac{17a^3b^2}{50x^4y^2} \cdot \frac{10x^3y}{34a^2b}$; *b)* $\frac{4a^5b^2}{27x^2y^4} : \frac{32a^6b}{81xy^6}$;

c) $\frac{x^2 + xy}{xy - y^2} \cdot \frac{xy^2 - y^3}{x^3 + x^2y}$; *d)* $\frac{20a^4 - 15a^3b}{7a^2 + 2ab} : \frac{40ab^2 - 30b^3}{14ab^3 + 4b^4}$;

e) $\frac{ab-3a}{a^2b+2a^2}\cdot\frac{b^2-4}{b^2-6b+9}$;

f) $\frac{9b^2-6b+1}{9b^2-1}\cdot\frac{9b^2+6b+1}{3b^2-b}$;

g) $\frac{16-x^2}{16x-8x^2+x^3}:\frac{x^4+8x^3+16x^2}{4x^3-x^4}$;

h) $\frac{10a^7-20a^6+10a^5}{4a^6+8a^5+4a^4}\cdot\frac{2a^3+6a^2+6a+2}{5a^4-5a^2}$.

1149 Végezzük el a következő algebrai törtek összevonását:

a) $\frac{5}{2x}-\frac{1}{x}+\frac{2x}{5}$;

b) $\frac{3}{4y^2}+\frac{1}{2y}-\frac{5}{y}$;

c) $\frac{6a+7}{a^2+a}-\frac{5}{a+1}$;

d) $\frac{a+1}{8a+3}+\frac{5a}{24a+9}$;

e) $\frac{x+2}{2x-1}-\frac{4x+1}{4x-2}+\frac{3-x}{10x-5}$;

f) $\frac{2a+1}{9a+15}+\frac{a-2}{3a+5}-\frac{5a-2}{12a+20}$;

g) $\frac{3x+1}{21-9x}+\frac{x+2}{3x-7}-\frac{x+1}{6x-14}$;

h) $\frac{x+1}{x+2}+\frac{2x-3}{2-x}+\frac{x^2+2x+4}{x^2-4}$;

i) $\frac{x+2}{3x+2}+\frac{3x-1}{3x-2}+\frac{3x^2+7x-2}{4-9x^2}$;

j) $\frac{y}{y+5}-\frac{5y+9}{y^2+10y+25}-\frac{2y}{3y+15}$;

k) $\frac{x+5}{4x^2-25}-\frac{x-1}{4x^2+20x+25}+\frac{1}{2x+5}$;

l) $\frac{y-3}{y^2+2y+1}-\frac{1}{y+1}-\frac{3-y^2}{y^3+3y^2+3y+1}$.

1150 A változók mely értékei esetén vannak értelmezve a következő kifejezések? Hozzuk őket egyszerűbb alakra.

a) $\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)^2}{4ab^2+4abc}$;

b) $\frac{a^2b-ab^2}{a^2-b^2}+\frac{a^3+a^2b}{a^2+2ab+b^2}-\frac{a^2-2ab}{a+b}$;

c) $\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}+\frac{1}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a^2+ab}-\frac{a}{b^2+ab}\right)$.

1151 Igazoljuk a következő azonosságokat a változók lehetséges értékeit figyelembe véve.

a) $\left(2a-\frac{a^2+9b^2}{3b}\right):\left(a+\frac{9b^2}{a-6b}\right)+\frac{a}{3b}\cdot\left(1-3b-\frac{6b}{a}\right)=-a$;

b) $\left(\frac{4a^2-1}{a^3-a^2-a+1}:\frac{a}{(1-a)^2}\right):\left(\frac{4}{a-1}-\frac{2}{a^2+a}+\frac{8}{1-a^2}\right)=\frac{2a+1}{2}$.

1152 Az a és b valós számokra teljesülnek a következő feltételek:

$$a\neq 0,\quad b\neq 0,\quad a\neq b \quad \text{és} \quad \left(a-\frac{ab}{a-b}\right):\left(\frac{ab}{a-b}-b\right)-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\left(2-\frac{b}{a}\right)=-6.$$

Számítsuk ki a $\frac{3a-2b}{a+b}$ kifejezés értékét.

Oszthatóság, számrendszerek

1153 Milyen számjegyre végződik $n \in \mathbb{N}^+$ szám esetén:
a) $10n + 4$; *b)* $10n + 32$; *c)* $5n + 1$?

1154 Milyen $n \in \mathbb{N}^+$ szám esetén osztható 4-gyel
a) $20 + 3n$; *b)* $8n + 3$; *c)* $5n + 6$?

1155 Milyen számjegyek írhatók x és y helyére, ha
a) $100 \mid \overline{1352xy}$; *b)* $6 \mid \overline{135x2}$; *c)* $24 \mid \overline{14x52y}$; *d)* $45 \mid \overline{135x2y}$?

1156 Bizonyítsuk be, hogy ha a és b olyan természetes számok, amelyekre $7 \mid 2a - 3b$, akkor igaz az is, hogy $7 \mid 18a - 6b$.

1157 Bizonyítsuk be, hogy ha a és b olyan természetes számok, amelyekre $11 \mid a + b$ és $11 \mid 6a - 5b$, akkor $11 \mid 8a - 3b$.

1158 Bizonyítsuk be, hogy:
a) $10 \mid 1956^{2010} + 1982^{1982}$; *b)* $5 \mid 2001^{2007} + 2002^{2006}$;
c) $3 \mid 2001^{2008} + 1848^{2007} - 1704^{2006}$.

1159 Van-e olyan p prímszám, hogy
a) $p + 15$ is prímszám; *b)* $p + 19$ is prímszám?

1160 Határozzuk meg azokat a p, q, r különböző prímszámokat, amelyekre $p + q + r = 30$.

1161 Melyik számnak van több osztója: a 360-nak vagy a 3750-nek?

1162 Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek osztója a 6, és hat osztója van?

1163 Számítsuk ki a következőket:
a) $(420; 560)$; *b)* $[600; 720]$; *c)* $(972; 648)$; *d)* $[392; 448]$;
e) $(2205; 14175)$; *f)* $[800; 3400]$; *g)* $(1584; 9504)$; *h)* $[43875; 27300]$.

1164 A törtek egyszerűsítése után végezzük el az összeadásokat:
a) $\frac{81}{972} + \frac{32}{640}$; *b)* $\frac{112}{5040} + \frac{297}{13365}$; *c)* $\frac{135}{26460} + \frac{144}{63504}$.

1165 Melyek azok a 20-nál kisebb pozitív egész számok, melyek relatív prímek a 20-szal?

1166 Mennyi a és b legkisebb közös többszöröse, ha a és b relatív prímek?

1167 Határozzuk meg azokat a pozitív egész a számokat, amelyekre $[a; 18] = 90$.

1168 Írjuk át tízes számrendszerbe a következő számokat:
a) 1110011_2; *b)* 210112_3; *c)* 10432_5; *d)* 2013045_6.

1169 Írjuk át az 1956 tízes számrendszerbeli számot
a) 2-es számrendszerbe; *b)* 5-ös számrendszerbe; *c)* 6-os számrendszerbe.

1170 Rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat:
$$1001_2;\ 102_3;\ 101_4;\ 23_5;\ 31_6;\ 22_7.$$

1171 Írjuk át 6-os számrendszerbe a 10010110_2 számot.

1172 Keressük meg a hibát az alábbi összeadásban: $3124_5 + 10232_5 = 14411_5$. Adjuk össze helyesen a számokat.

1173 Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel a 21 600-at elosztva hányadosként négyzetszámot kapunk?

1174 Van-e olyan négyzetszám, amely 40-re végződik?

1175 Legalább hány foka van az olyan lépcsőnek, amelyből ha kettesével lépünk rajta, végül egy fok marad; ha hármasával, akkor kettő; ha négyesével, akkor három; ha ötösével, akkor négy; ha hatosával, akkor öt; ha hetesével, akkor egy sem?



1176 Tibor az édesanyja 28-adik születésnapján született. Legfeljebb hányszor lehet Tibor életkora osztója az édesanyja életkorának?

1177 A következő állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, és melyik hamis.

a) Két szám legnagyobb közös osztója kisebb mindegyik számnál.

b) Két szám legkisebb többszöröse nem kisebb, mint a legnagyobb közös osztója.

c) Két szám legnagyobb közös osztója mindkét szám osztóinak többszöröse.

d) Két szám legkisebb közös többszörösének osztója a két szám legnagyobb közös osztója.

e) Ha két szám relatív prím, akkor a legkisebb közös többszörösük a két szám szorzata.

f) Két prímszám összege soha nem prím.

1178 Hány pozitív osztója van a legkisebb olyan pozitív egész számnak, amelynek tízszerese négyzetszám, hatszorosa pedig köbszám?

1179 Határozzuk meg a $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{4n}$ szám utolsó két számjegyét, ha n pozitív egész szám.

1180 Hány olyan pozitív egész szám van, amelyik osztója a 10^{40} és 20^{30} számok valamelyikének?

1181 Van-e a 2001-nek olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyekből áll?

1182 Írjunk az 523…-hoz három számjegyet úgy, hogy az így keletkezett hatjegyű szám osztható legyen 7-tel, 8-cal és 9-cel is. Hány megoldás van?

1183 Az alábbi összeadást 5-ös számrendszerben végeztük el. A különböző betűk különböző számokat jelölnek. Melyik betű milyen számot jelent?

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C_5 \\ + & B & C & A_5 \\ \hline C & E & D & B_5 \end{array}$$

Vegyes feladatok

1184 Melyik a nagyobb: az $A = 3a^2 - 2a + 5$ kifejezés helyettesítési értéke az $a = \frac{2}{3}$ helyen, vagy a $B = \frac{b-1}{b+1} + \frac{16}{b+7}$ kifejezés helyettesítési értéke a $b = -3$ helyen?

1185 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\frac{2}{a+1} - \frac{3a+6}{(a+1)\cdot(a+3)} + \frac{3}{a+3}$;

b) $\frac{1}{3x+1} + \frac{1}{3x-1} - \frac{1}{9x^2-1}$;

c) $\frac{7}{x+5} + \frac{30}{x^2-25} - \frac{3}{x-5}$;

d) $\left[\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-3}{x+2} - \frac{2x^2-6x}{x^2-4}\right]\cdot(x-2)$.

1186 Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\dfrac{3a+3b}{a^2-b^2}$; *b)* $\dfrac{x^2-y^2}{5x-5y}$; *c)* $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$; *d)* $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$.

1187 A 2-nek hányadik hatványai a következő számok?

a) 1024^{1024}; *b)* 32^{-32}; *c)* $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{500}$; *d)* $\left(\dfrac{1}{128}\right)^{-128}$.

1188 Rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat:

a) 111_5, 11110_2, 1010_3, 133_4. *b)* $\left(\dfrac{4}{13}\right)^{-1}$, $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-2}$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$, $\left(\dfrac{39}{26}\right)^{2}$.

1189 Határozzuk meg a 96-nak azt a legkisebb többszörösét, amely

a) osztható 10-zel; *b)* osztható 30-cal;

c) osztható 100-zal; *d)* egy pozitív egész szám négyzete;

e) egy pozitív egész szám harmadik hatványa; *f)* többszöröse az 54-nek is.

1190 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, és melyik hamis:

a) ha $2^{-x}=\dfrac{1}{32}$, akkor $3^x=243$;

b) ha $abc_5+123_5=224_5$, akkor $abc_5+111_5=212_5$;

c) ha $x+y=7$ és $x^2+y^2=39$, akkor $x\cdot y=6$;

d) ha egy pozitív egész szám osztója két pozitív egész szám legnagyobb közös osztójának, akkor osztója mindkét számnak;

e) ha egy pozitív egész szám osztója két pozitív egész szám legkisebb közös többszörösének, akkor osztója mindkét számnak.

1191 Melyik az a legnagyobb szám, amellyel az 1848-at és a 6048-at elosztva mindkét esetben 48 lesz a maradék?

1192 Malter Valter a fürdőszoba padlóját 20×30 cm méretű téglalap alakú járólapokkal burkolja. Kiszámította, hogy bármelyik oldalfallal lesz párhuzamos a téglalap hosszabb oldala, a lapok elvágása nélkül le tudja azokat rakni. Mekkorák a fürdőszoba méretei, ha tudjuk, hogy a területe 5,4 m^2?



1193 A tapasztalat szerint 1 cm^2 füves területen körülbelül 12 fűszál nő.

a) Hány fűszál lehet egy 100 m hosszú és 73 m széles futballpályán?

b) Európa területe 10 700 000 km^2. Hány futballpálya férne el rajta?

Az eredményeket normálalakban adjuk meg.

9.3. FÜGGVÉNYEK

A derékszögű koordináta-rendszer, ponthalmazok

1194 Adott a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán értelmezett következő függvény:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Adjuk meg a függvény grafikonjának a következő x értékekhez tartozó pontjait:

$$x = -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4.$$

1195 Adott a következő két ponthalmaz: $A = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } y \geq 1\}$, $B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } x \geq 2\}$. Ábrázoljuk a következő ponthalmazokat:

a) $A \cap B$; *b)* $A \cup B$; *c)* $A \setminus B$.

1196 Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ függvény. Adjuk meg a függvény grafikonjának a következő x értékekhez tartozó pontjait:

$$x = -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4.$$

1197 Ábrázoljuk a síkon azokat a ponthalmazokat, amelyekhez tartozó pontok koordinátái kielégítik a megadott feltételt:

a) $\min(x; y) = 1$; *b)* $\max(x; y) = 1$; *c)* $\max(|x|; |y|) = 1$.

Lineáris függvények

1198 Ábrázoljuk a következő valós számokon értelmezett függvényeket a derékszögű koordináta-rendszerben:

a) $x \mapsto 2x - 1$; *b)* $x \mapsto -2x + 3$; *c)* $x \mapsto 3x - 6$;

d) $x \mapsto 4x - 2$; *e)* $x \mapsto -5x + 7$; *f)* $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x + 2$;

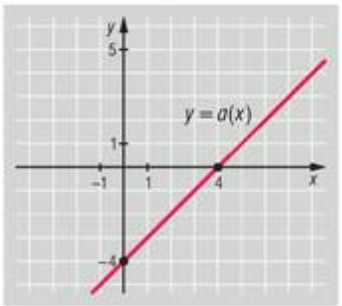
g) $x \mapsto \frac{1}{3} \cdot x - 1$; *h)* $x \mapsto \frac{2}{5} \cdot x$; *i)* $x \mapsto -\frac{3}{2} \cdot x + 6$;

j) $x \mapsto -\frac{2}{5} \cdot x + 4$; *k)* $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x - 4) + 1$; *l)* $x \mapsto -\frac{1}{3} \cdot (x - 6) + 2$;

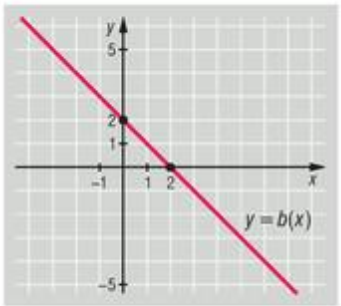
m) $x \mapsto 2 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (x + 1)$.

1199 Az alábbi ábrákon lineáris függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát.

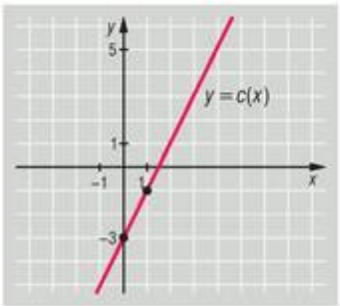
a)



b)

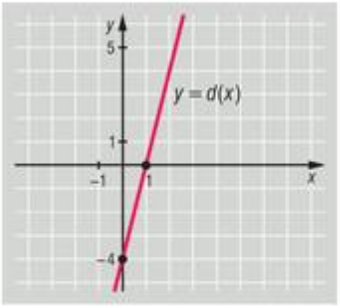


c)

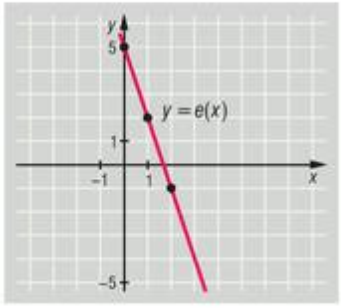




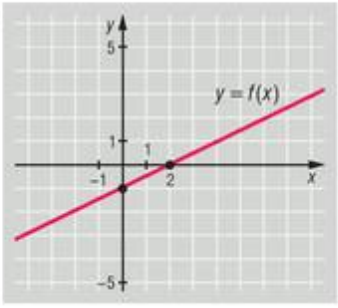
d)



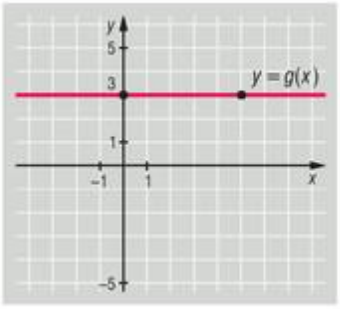
e)



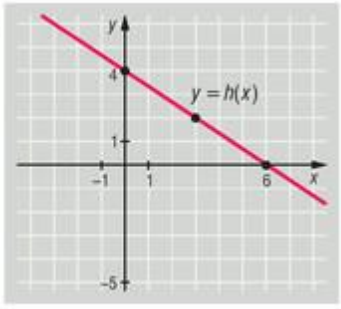
f)



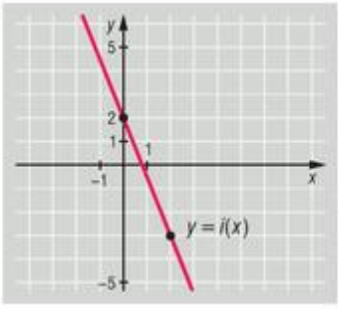
g)



h)



i)



1200 Döntsük el, hogy az adott pontok közül melyik illeszkedik a megadott egyenesekre:

$$P(0; -1), \quad Q(1; 1), \quad R(2; 5).$$

Az adott egyenesek a következő függvények képei:

a) $f(x) = 3x - 1$; *b)* $g(x) = 2x - 1$; *c)* $h(x) = 2x + 1$.

1201 Határozzuk meg annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek a grafikonja áthalad az adott $P(3; 3)$ és $Q(2; 0)$ pontokon. Adjuk meg a függvény meredekségét és azokat a pontokat, ahol a grafikon (egyenes) metszi az x és y tengelyeket.

1202 Az $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy a és b valós számok, valamint $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$. Adjuk meg képlettel az f függvényt.

1203 Az A és B város távolsága 400 km. A-ból egy teherautó indul B-be, és 6 óra alatt ér oda. Ugyanakkor indul egy személyautó B-ből A-ba ugyanazon az útvonalon, és 4 óra alatt ér A-ba. Az indulás után hány óra múlva találkozik a két autó? Oldjuk meg a feladatot függvények segítségével.

1204 Két város, A és B közötti távolság 300 km. A-ból egy lassú jármű indul B-be, megállás nélkül 6 óra alatt ér oda. Ugyanakkor indul B-ből egy gyorsabb teherautó A-ba, az is megállás nélkül megy, és 4 óra alatt ér A-ba. Hol találkozott a két jármű útközben, és indulásuk után hány órával?

Az abszolútérték-függvény

1205 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett következő függvényeket a derékszögű koordinátarendszerben.

a) $x \mapsto |x| - 2$; *b)* $x \mapsto |x| + 1$; *c)* $x \mapsto |x - 3|$; *d)* $x \mapsto |x + 4|$;

e) $x \mapsto -|x| + 1$; *f)* $x \mapsto -|x - 1|$; *g)* $x \mapsto |x + 1| - 2$; *h)* $x \mapsto |x - 2| + 2$;

i) $x \mapsto |x - 4| - 3$; *j)* $x \mapsto 2 \cdot |x|$; *k)* $x \mapsto 2 \cdot |x - 1|$; *l)* $x \mapsto |2x - 3|$;

m) $x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot |x + 2| + 2$.

1206 Ábrázoljuk a következő intervallumokon értelmezett valós függvényeket:

a) $x \mapsto \dfrac{|x+1|-|x-1|}{2}$, $x \in [-2; 2]$;

b) $x \mapsto \dfrac{x-1}{|x-1|}$, $x \neq 1$, $x \in [-3; 3]$;

c) $x \mapsto |x+2|-|x-1|$, $x \in [-3; 2]$;

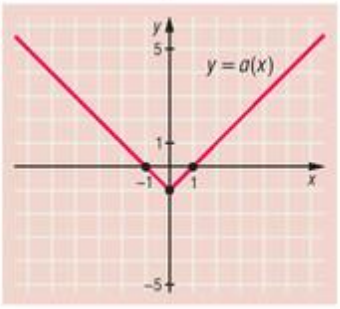
d) $x \mapsto 2 \cdot |x+3|$, $x \in [-4; 2]$;

e) $x \mapsto x-1-2 \cdot |x-1|$, $x \in [-3; 3]$;

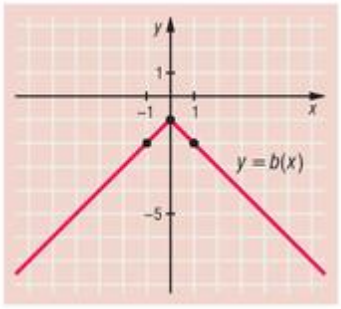
f) $x \mapsto |x+1|+|x-2|$, $x \in [-2; 3]$.

1207 Az alábbi ábrákon abszolútérték-függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát.

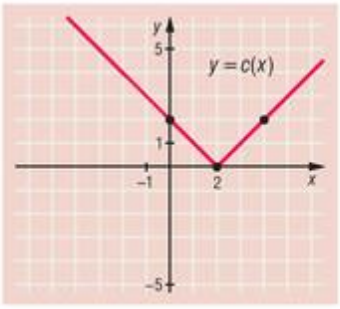
a)



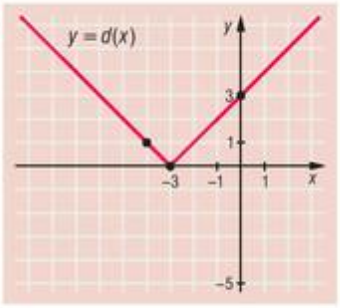
b)



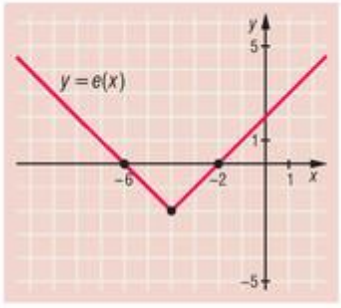
c)



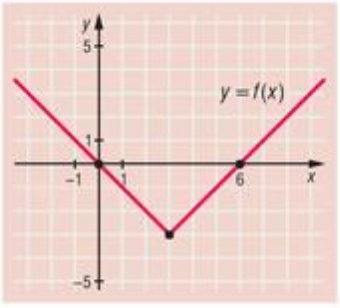
d)



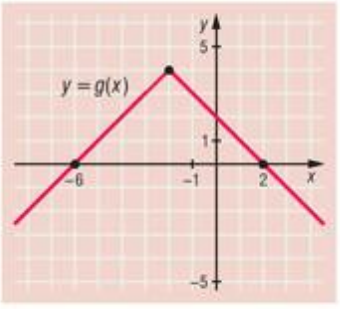
e)



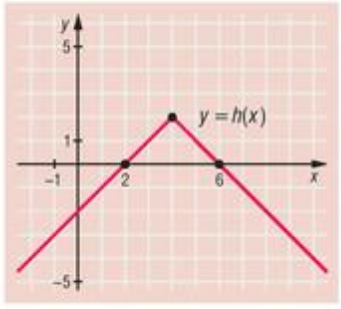
f)



g)



h)



1208 Ábrázoljuk az alábbi függvényt ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$g(x) = \frac{-|x|}{x}.$$

1209 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett következő függvényt:

$$f(x) = \Big|\big||x|-3\big|-2\Big|.$$

1210 Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$



1211 Ábrázoljuk a síkon azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő feltételt:

a) $|x| = 0$; *b)* $|x| = |y|$; *c)* $|x| + |y| \geq 1$; *d)* $|x| + |y| = 2$.

1212 Ábrázoljuk a síkon azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő feltételeket:

a) $|x + y| + |y - x| \leq 4$; *b)* $|2x| = |y|$; *c)* $|y| - |x| = 1$.

A másodfokú függvény

1213 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, menete, szélsőérték, paritás szempontjából) a következő, valós számok halmazán értelmezett függvényeket:

a) $x \mapsto x^2 + 2$; *b)* $x \mapsto (x + 2)^2$; *c)* $x \mapsto (x - 3)^2$;

d) $x \mapsto -x^2 + 4$; *e)* $x \mapsto -(x - 2)^2$; *f)* $x \mapsto -(x + 3)^2$;

g) $x \mapsto (x - 1)^2 - 4$; *h)* $x \mapsto -(x + 2)^2 + 1$; *i)* $x \mapsto 2 \cdot (x - 4)^2 - 2$;

j) $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x + 2)^2 + 1$; *k)* $x \mapsto x^2 - 4x + 3$; *l)* $x \mapsto x^2 + 2x - 3$.

1214 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, menete, szélsőérték, paritás szempontjából) a következő függvényeket az adott intervallumon:

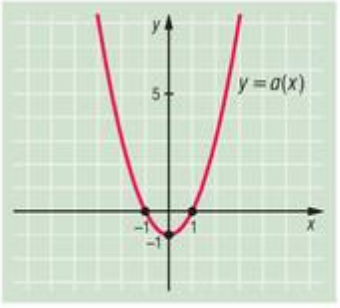
a) $x \mapsto x^2 - 4$, $x \in [-3; 3]$; *b)* $x \mapsto 2x - x^2$, $x \in [-2; 3]$;

c) $x \mapsto |4x - x^2|$, $x \in [-2; 2]$; *d)* $x \mapsto \left|2 \cdot |x| - x^2\right|$, $x \in [-3; 3]$;

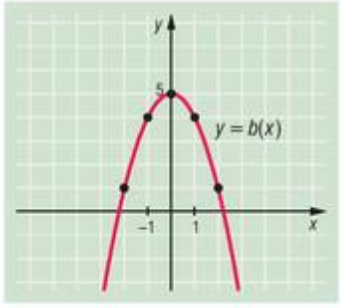
e) $x \mapsto \left|2x^2 - 3x + |x - 1|\right|$, $x \in [-1; 2]$; *f)* $x \mapsto x \cdot |x|$, $x \in [-2; 2]$.

1215 Az alábbi ábrákon másodfokú függvények grafikonja látható. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát:

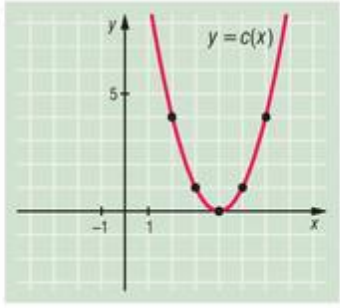
a)



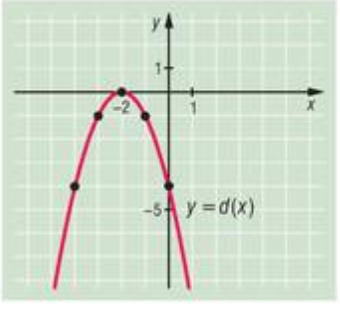
b)



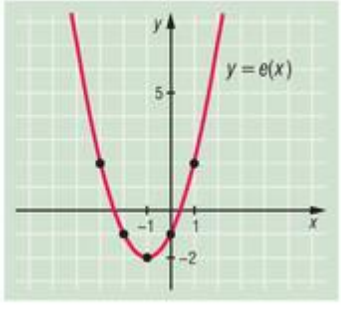
c)



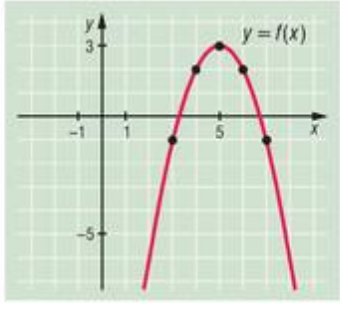
d)



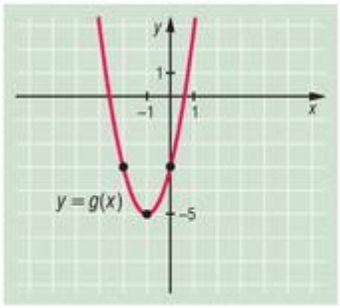
e)



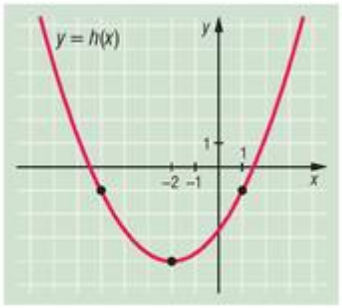
f)



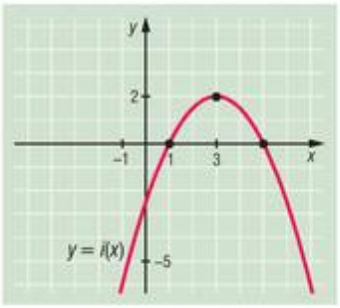
g)



h)



i)



1216 Ábrázoljuk a következő intervallumokon értelmezett valós értékű függvényeket:

a) $x \mapsto x \cdot |x-3|$, $x \in [-2; 4]$;

b) $x \mapsto x^2 - 2 \cdot |x+1| - 1$, $x \in [-2; 2]$;

c) $x \mapsto x \cdot |x| - 4x - 5$, $x \in [-3; 3]$;

d) $x \mapsto \frac{|x-1|}{x-1} \cdot (x^2+3)$, $x \neq 1$, $x \in [-2; 2]$.

1217 Oldjuk meg függvénygrafikonok alkalmazásával a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

b) $9x - 14 - x^2 > 0$;

c) $x^2 - 5 \cdot |x| + 4 < 0$;

d) $|x^2 - 4x| > 0$;

e) $2x^2 - 5 \cdot |x| + 3 \geq 0$.

1218 Oldjuk meg lineáris függvények segítségével az alábbi másodfokú egyenlőtlenségeket:

a) $(x-3) \cdot (x+2) \geq 0$;

b) $\frac{(x-4) \cdot (x+1)}{(2-x) \cdot (x-1)} \leq 0$.

1219 Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényt:

$$f: [-3; 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - |x| + 2.$$

Oldjuk meg grafikusan az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenséget.

1220 Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény másodfokú, és $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(3) = 10$. Adjuk meg képlettel f-et.

1221 Egy labdát ferde hajítással felrúgnak, pályáját az idő (másodperc) függvényeként (méterben) az $f(x) = 10x - x^2$ függvény írja le. Mennyi idő múlva esik le a labda, és milyen magasra jut? Az elrúgás után hány másodperc múlva lesz a legmagasabban?

1222 Egy bárány egy 48 méter hosszú drótkerítéssel körülvett téglalap alakú telken legel. A telek egyik oldala közvetlenül egy ház falához csatlakozik. Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalainak méretét, ha azt szeretnénk, hogy a bárány által lelegelhető kert területe maximális legyen?

1223 *a)* Bontsuk fel a 40-et két összeadandóra úgy, hogy a két adott rész szorzata maximális legyen.

b) Lássuk be, hogy az így kapott két rész az adott számtól függetlenül mindig a szám fele lesz.

1224 A p valós paraméter mely értékére igaz, hogy az

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = px^2 + (p^2 - 40{,}5) \cdot x - 12$$

másodfokú függvénynek az $x = \frac{9}{4}$ helyen maximuma van? Mennyi ez a maximális érték?

1225 Adott a következő függvény:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10.$$

Adjuk meg képlettel az alábbi függvényeket:

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{2} \cdot \big(f(x) + f(-x)\big), \quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{1}{2} \cdot \big(f(x) - f(-x)\big).$$



1226 Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényt:

$$f\colon [-3;3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 10x^2 + 9.$$

1227 Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$f\colon [0;3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 8x^2 - 9.$$

A négyzetgyökfüggvény

1228 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, menete, szélsőérték, paritás szempontjából) a következő függvényeket:

a) $x \mapsto \sqrt{x} - 3,\ x \in [0;4]$;

b) $x \mapsto \sqrt{x+3},\ x \in [-3;1]$;

c) $x \mapsto \sqrt{-x+2},\ x \in [-2;2]$;

d) $x \mapsto \sqrt{x+2} - 3,\ x \in [-2;2]$;

e) $x \mapsto \sqrt{x+2} - 1,\ x \in [-2;2]$;

f) $x \mapsto \sqrt{7-x} + 1,\ x \in [-2;3]$;

g) $x \mapsto \sqrt{1-|x|},\ x \in [-1;1]$;

h) $x \mapsto \sqrt{(x^2+1)^2 - 4x^2},\ x \in [-2;2]$.

1229 Oldjuk meg függvénygrafikonok alkalmazásával a következő egyenleteket:

a) $x + 1 = \sqrt{11 - x}$;

b) $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1$;

c) $\sqrt{12 - x} = x$;

d) $\sqrt{7 - x} = x - 1$;

e) $x - \sqrt{x+1} = 5$.

1230 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, szélsőérték szempontjából) a következő függvényt:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 8x + 16},\ x \in [-3;5].$$

1231 Adjuk meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2},\ x \in [-1;3].$$

Hol veszi fel ezeket az értékeket az f függvény? Vázoljuk a függvény grafikonját.

1232 Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátáira teljesül:

a) $1 + \sqrt{x} \geq y$;

b) $\sqrt{x - y} \geq \sqrt{x + y}$.

1233 Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő képlettel valós értékű függvényt értelmezhetünk:

a) $\sqrt{x+1}$;

b) $\sqrt{x - x^2}$;

c) $\sqrt{2 + x - x^2}$;

d) $\sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

1234 Vázoljuk a következő függvény grafikonját:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ -1 \leq x \leq 1.$$

Igazoljuk, hogy a grafikon minden pontja az origótól 1 egység távolságra van.

1235 Ábrázoljuk azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:

$$y - 2 \leq \sqrt{1 - x^2}.$$

1236 Ábrázoljuk a síkon azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:

$$y + \frac{1}{2} > \sqrt{x^2 - 2x + 1}.$$

1237 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{10 - 2x} = x - 1.$$



1238 Függvények használatával oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{2x+1} = x-1.$$

1239 Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{5-x^2} = x+1.$$

Lineáris törtfüggvények

1240 Ábrázoljuk és jellemezzük (zérushely, szélsőérték, monotonitás szempontjából) a következő függvényeket:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, $x \in [-2; 3]$;

b) $g(x) = -\dfrac{1}{x+2}$, $x \neq -2$, $x \in [-3; 1]$;

c) $h(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2$, $x \neq 2$, $x \in [-1; 5]$;

d) $i(x) = \dfrac{1}{x+3} - 4$, $x \neq -3$, $x \in [-6; 0]$;

e) $j(x) = \dfrac{2}{x-1} + 3$, $x \neq 1$, $x \in [-2; 4]$;

f) $k(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x \neq 1$, $x \in [-3; 2]$;

g) $l(x) = \dfrac{2}{2-x} + 1$, $x \neq 2$, $x \in [-1; 5]$;

h) $m(x) = \dfrac{1}{|x-1|}$, $x \neq 1$, $x \in [-2; 2]$.

1241 Ábrázoljuk és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, monotonitás, szélsőérték szempontjából) a következő függvényeket:

a) $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-1}$, $x \neq 1$, $x \in [-1; 3]$;

b) $x \mapsto \dfrac{2 \cdot |x| - 1}{x-3}$, $x \neq 3$, $x \in [-1; 4]$;

c) $x \mapsto \left|\dfrac{x-2}{x-3}\right|$, $x \neq 3$, $x \in [0; 5]$;

d) $x \mapsto \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-8x+16}$, $x \neq 4$, $x \in [2; 6]$.

1242 Oldjuk meg a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket függvénygrafikonok felhasználásával:

a) $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{3}{x-3}$;

b) $\dfrac{1}{|x|-3} = \dfrac{1}{2}$;

c) $\dfrac{2}{|x-4|} > 1$;

d) $\dfrac{x-1}{x+1} < x$.

1243 Adott a következő függvény:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Határozzuk meg az

$$f(f(x)) \quad \text{és az} \quad f(f(f(x)))$$

függvényeket.

1244 Igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \frac{x^2+16}{4x}, \quad 1 \leq x \leq 6$$

függvény legkisebb értéke 2. Vázoljuk a függvény grafikonját.

1245 Függvények használatával oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\frac{x-1}{x+1} < x.$$



1246 Oldjuk meg grafikusan a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

a) $\left.\begin{aligned} x+y&=7\\ y&=\dfrac{6}{x}\end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} xy&=-12\\ x-y&=7\end{aligned}\right\}$.

1247 Melyek azok a p valós számok, amelyekre az

$$\left.\begin{aligned} xy&=1\\ y&=px+1\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek egyetlen $(x; y)$ valós számpár a megoldása? Használjunk a megoldáshoz függvényeket.

1248 Igazoljuk, hogy ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$, akkor

$$4\cdot\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-12\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+17$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén nemnegatív.

1249 Ábrázoljuk a következő két függvényt:

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+1)\cdot(x-1), \qquad g\colon \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

A grafikonok alapján oldjuk meg:

a) $f(x)=g(x)$; *b)* $f(x)<g(x)$; *c)* $f(x)>g(x)$.

1250 Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$2x^4-4xy+2y^4+1=0.$$

1251 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x^2-6x+6y&=0\\ y^2-2xy+9&=0\end{aligned}\right\}.$$

Az egészrész-, a törtrész- és az előjelfüggvény

1252 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $x\mapsto[2x]$, $x\in[-2;2]$; *b)* $x\mapsto[x-1]+1$, $x\in[-3;3]$;

c) $x\mapsto\operatorname{sgn}(x-2)$, $x\in[-2;6]$; *d)* $x\mapsto\{x\}-1$, $x\in[-3;3]$;

e) $x\mapsto-2\cdot\operatorname{sgn}(x+2)$, $x\in[-6;2]$; *f)* $x\mapsto-[x+2]+2$, $x\in[-6;2]$;

g) $x\mapsto[x]^2+[-x]$, $x\in[-2;3]$; *h)* $x\mapsto\operatorname{sgn}(x^2+2x)$, $x\in[-3;2]$;

i) $x\mapsto\operatorname{sgn}|[-x]+2|$, $x\in[-3;3]$.

1253 Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenleteket:

a) $2\cdot[x]=[2x]$; *b)* $[x+3]=3+[x]$; *c)* $[x+0{,}5]+[x-0{,}5]=[2x]$;

d) $[x]+[x+0{,}5]=[2x]$.

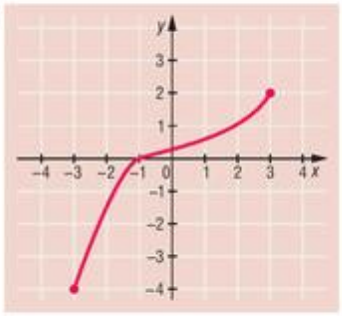
1254 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $x\mapsto[x]+[-x]$, $x\in\mathbb{R}$; *b)* $x\mapsto-[-x+0{,}5]$, $x\in\mathbb{R}$; *c)* $x\mapsto x+\{x\}$, $x\in\mathbb{R}$.

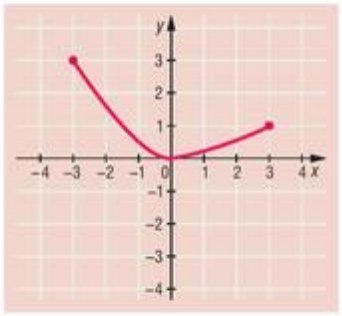
Vegyes feladatok

1255 Az alábbi ábrákon egy-egy $[-3; 3]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Mely intervallumokon növekszik, illetve fogy a függvény? Határozzuk meg a függvények szélsőértékeit, zérushelyeit.

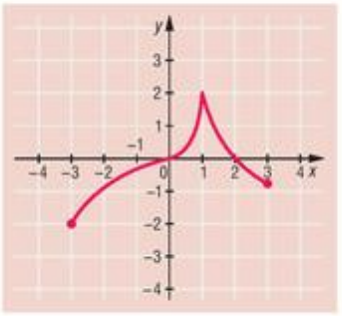
a)



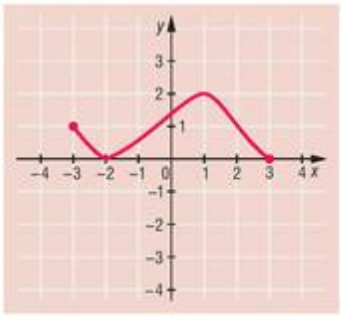
b)



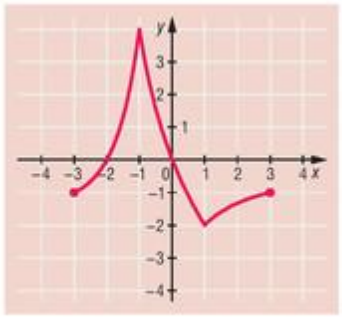
c)



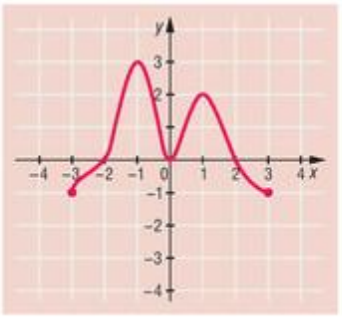
d)



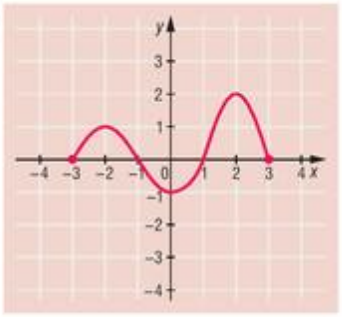
e)



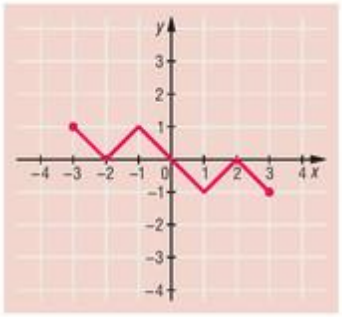
f)



g)



h)



1256 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $f: [-9; 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -|x+5|+3, & \text{ha} \quad x < -2, \\ \sqrt{x+2}, & \text{ha} \quad x \geq -2; \end{cases}$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 2 \cdot (4-x), & \text{ha} \quad x \geq 1, \\ (x+1)^2, & \text{ha} \quad x < 1. \end{cases}$

1257 Határozzuk meg a következő függvények grafikonjának a koordináta-tengelyekre illeszkedő pontjait, ha vannak. Ábrázoljuk is a függvényeket.

a) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{-5}{x}$;

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 5$;

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -4x$;

d) $i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2x-6}{3}$;

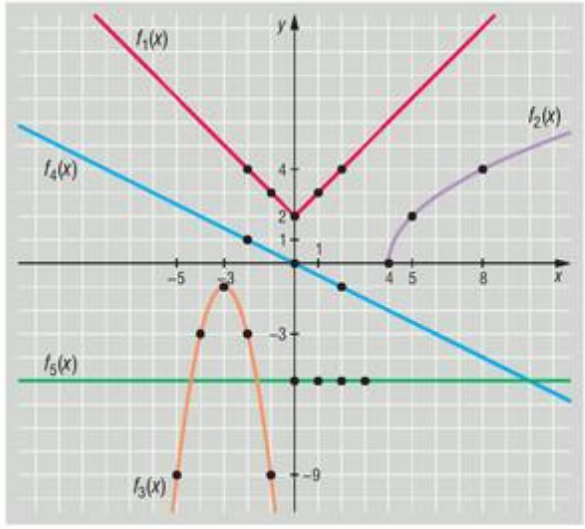


e) $j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2 - \frac{5}{3} \cdot x$;

f) $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2} \cdot |x - 2|$;

g) $l\colon \mathbb{R} \setminus]3; \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{3 - x}$.

1258 Állítsuk párba az ábrán látható függvényeket a hozzárendelési szabályukkal.



a) $x \mapsto |x| + 2$;

b) $x \mapsto -5$;

c) $x \mapsto 2 \cdot \sqrt{x - 4}$;

d) $x \mapsto -2 \cdot (x + 3)^2 - 1$;

e) $x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot x$.

Válaszoljunk a következő kérdésekre.

f) Melyik az egyenes arányosság függvény?

g) Melyik függvénynek van zérushelye?

h) Melyik függvénynek van maximuma? Határozzuk is meg.

i) Az $f_2(x)$ függvény milyen helyen veszi fel a 2 függvényértéket?

j) Mennyi a meredeksége az $f_5(x)$ függvénynek?

k) Az $f_1(x)$ függvénynek mennyi lesz az $f_1(1)$ helyen vett függvényértéke?

l) Igaz-e, hogy $f_3(-2) = -3$?

1259 Melyek a szélsőértékei az alábbi függvényeknek, ha $x \in [-3; 6]$? Hol veszik fel azokat? Ábrázoljuk is őket.

a) $a(x) = -\frac{1}{3} \cdot x$;

b) $b(x) = -3$;

c) $c(x) = |2x - 4|$;

d) $d(x) = -|x + 1|$;

e) $e(x) = \sqrt{x + 3}$.

Hol pozitívak az adott függvények? A válaszokat intervallumokkal adjuk meg.

1260 Ábrázoljuk a következő függvényt:

$$f\colon [0; 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x, & \text{ha } x < 3, \\ 1, & \text{ha } x = 3, \\ x, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

Válaszoljunk a kérdésekre.

a) Határozzuk meg a függvény zérushelyét.

b) Hol negatív a függvény?

c) Hol nő a függvény?

1261 Ábrázoljuk az $f(x) = \big||x| - 2\big| - 3$ függvényt, majd állapítsuk meg, mely helyeken veszi fel a $-3, -2, -1, 0, 1$ értékeket. Mit mondhatunk a függvény paritásáról?

1262 Ábrázoljuk az $f(x) = |x - 2| - |3 - x|$ függvényt.

a) Számoljuk ki a következő függvényértékeket: $f(4), f(2), f(0)$.

b) Milyen helyen veszi fel a függvény az 1 értéket?

c) Határozzuk meg a függvény zérushelyét.



1263 Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket:

a) $\frac{x}{3} = 7 - 2x$; *b)* $|x-2| = \sqrt{x}$; *c)* $\sqrt{x^2-6x+9} = x-3$;

d) $3 - |x-4| = \sqrt{x-1}$; *e)* $\frac{2}{x} = (x-1)^2 \ (x \neq 0)$.

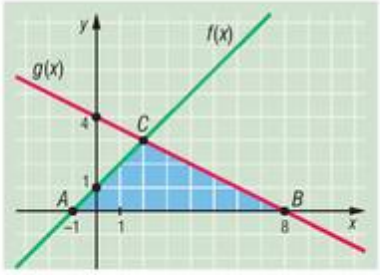
1264 Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{x-2} > (x-2)^2$; *b)* $-2 \cdot |x| + 3 \geq x^2$; *c)* $\frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot x + 1$;

d) $x^2 - 6x + 7 < \frac{2}{x-4}$.

1265 Bontsuk fel a 30-at két pozitív szám összegére úgy, hogy az így kapott két pozitív egész szám négyzetének összege minimális legyen. Melyik ez a két szám?

1266 Írjuk fel az ábrázolt két függvény hozzárendelési szabályait. Határozzuk meg a színezett háromszög területét.



1267 Melyik az a valós szám, amelyhez a négyzetét hozzáadva a lehető legkisebb értéket kapjuk?

1268 A koordináta-rendszer $P(2;1)$ pontján áthaladó egyenesek közül melyik az, amely az első síknegyedből a legkisebb területű háromszöget metszi le?

1269 Adott az $f(x-1) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvény. Adjuk meg az $f(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt.

1270 Adott az $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ függvény. Határozzuk meg az alábbi függvényt:

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots(f(x))\ldots))}_{n\text{-szer}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

1271 Adjuk meg a valós számok megfelelő részhalmazán értelmezett f függvényt, ha tudjuk, hogy

a) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$; *b)* $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x}$, $x > 0$; *c)* $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x > 0$.

1272 Határozzuk meg a következő függvények inverz függvényét:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$; *b)* $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

c) $f: \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; *d)* $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$;

e) $f: [-1; 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; *f)* $f: [0; 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1273 Határozzuk meg a következő függvények legnagyobb és legkisebb értékét (ha van ilyen):

a) $x \mapsto |x-1| + |x-3|$, $x \in \mathbb{R}$; *b)* $x \mapsto \frac{2x-5}{x-2}$, $0 \leq x \leq 1$;

c) $x \mapsto \frac{x+1}{x+2} - 3$, $-1 \leq x \leq 2$.

1274 Igazoljuk, hogy ha $|x| \leq \frac{1}{2}$, $x \neq 0$, akkor

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{2x} \leq 1.$$



1275 Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+1=\frac{5}{1+y^2}.$$

1276 Hány gyöke van a valós számok halmazán az alábbi egyenletnek:

$$|x^2-1|=|x|\,?$$

1277 *a)* Igazoljuk, hogy azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmaza, amelyeknek koordinátái kielégítik az

$$y=\sqrt{4x-x^2},\ 0\le x\le 4$$

egyenletet, egy $(2; 0)$ középpontú, 2 sugarú félkör, amely az $y\ge 0$ félsíkban van.

b) Határozzuk meg a következő függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$x\mapsto\sqrt{x\cdot(4-x)},\ 0\le x\le 4.$$

1278 Oldjuk meg függvénygrafikonok felhasználásával a következő egyenleteket:

a) $x^3=2x+4$; *b)* $|x|-1=1-x^2$; *c)* $\sqrt{x+2}=4-x$;

d) $x^2-4x=x-6$; *e)* $\frac{1}{x+1}+2=x+3$.

1279 Melyek azok az $(x; y)$ valós számpárok, amelyek egyszerre kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

$$\left.\begin{aligned} y+\frac{1}{2}&>|x^2-2x|\\ y&<2-|x-1| \end{aligned}\right\}.$$

Oldjuk meg függvénygrafikonokkal.

1280 Döntsük el, hogy a következő függvények közül melyik páros, melyik páratlan, és melyik se nem páros, se nem páratlan. A függvények $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be képeznek.

a) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$; *b)* $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

c) $f(x)=x^4-5x^2+6\cdot|x|$; *d)* $f(x)=x^3-6x^2+5x$;

e) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

1281 Vázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $f\colon\ ]-\infty;-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$; *b)* $g\colon[-1;1]\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{2x}{1+x^2}$;

c) $h\colon[1;+\infty[\to\mathbb{R},\ h(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

Adjuk meg képlettel mindegyik függvény inverzét is, és ezek grafikonját is vázoljuk.

1282 Igazoljuk, hogy az alábbi függvény az egész számegyenesen korlátos:

$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}.$$



9.4. HÁROMSZÖGEK, NÉGYSZÖGEK, SOKSZÖGEK

Néhány alapvető geometriai fogalom (pont, egyenes, sík, távolság, szög)

1283 Egy egyenes 4 különböző pontja hány

a) részre osztja az egyenest; *b)* szakaszt határoz meg?

1284 Hány egyenest határoznak meg a síkon egy szabályos

a) ötszög csúcsai; *b)* hatszög csúcsai?

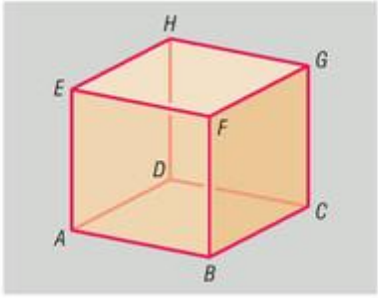
1285 Hány részre osztják a síkot egy szabályos

a) ötszög oldalegyenesei; *b)* hatszög oldalegyenesei?

1286 Tekintsük az $ABCDEFGH$ kockán az AB, CG, CD, EG, BD szakaszokra illeszkedő egyeneseket.

a) Melyek párhuzamosak egymással?

b) Melyek kitérők?



1287 Micimackó, Füles és Bagoly otthona egy egyenes ösvény mellett található. Micimackó és Füles 1,2 km-re lakik egymástól, Bagoly és Füles 800 m-re. Milyen távolságra lehet egymástól Bagoly és Micimackó háza?

1288 Az AB szakasz hossza 20 cm, a BC szakasz hossza 1,5 dm. Mekkora az AB és az AC szakaszok felezőpontjainak távolsága, ha a

a) B pont az A és a C pontok között van; *b)* C pont az A és a B pontok között van?

1289 Az AB szakasz hossza a, a BC szakasz hossza b. Mekkora az AB és az AC szakaszok felezőpontjainak távolsága, ha a

a) B pont az A és C pontok között van; *b)* C pont az A és B pontok között van?

1290 A 30 cm hosszú AB szakaszt P pont úgy osztja két részre, hogy $AP : PB = 3 : 2$. Milyen hosszú az AP, illetve a PB szakasz?

1291 Az a hosszúságú AB szakaszt P pont úgy osztja két részre, hogy $AP : PB = p : q$. Milyen hosszú az AP, illetve a PB szakasz?

1292 Fejezzük ki fokokkal a következő szögek nagyságát:

a) 19°24'; *b)* 42°33'; *c)* 92°45'18".

1293 Fejezzük ki fokokban, szögpercekben és szögmásodpercekben a következő szögeket:

a) 32,5°; *b)* 123,15°; *c)* 9,42°.

1294 Öt szög együtt teljes szöget alkot, továbbá minden szög 20°-kal nagyobb az előzőnél. Hány fokosak a szögek?

1295 Mekkora az a szög, amelyik mellékszögének $\frac{2}{7}$-ed része?

1296 Két merőleges szárú szög közül az egyik fele a másiknak. Hány fokosak a szögek?



1297 Egy derékszögű háromszögben rajzoljuk be az átfogóhoz tartozó magasságot. Keressünk merőleges szárú szögeket a háromszögben.

1298 Egy ABC háromszögben $AB = AC$. B-ből az AC oldalra bocsátott merőleges az AC oldalt D pontban metszi. Mekkora a CBD szög, ha az A csúcsnál lévő szög 48°?

1299 Két metsző egyenes által meghatározott egyik szögtartomány 32°51'. Állítsunk merőlegest a metszéspontban az egyik, illetve a másik egyenesre. Külön-külön hány fokos szöget zárnak be ezek a merőlegesek az eredeti szögtartomány szögfelezőjével?

1300 Hány fokos szöget zárnak be az óramutatók

a) 3 óra 40 perckor; *b)* 10 óra 25 perckor; *c)* 6 óra 12 perckor?

1301 Négy óra után mikor fedi egymást először a kis- és a nagymutató az óra számlapján?

1302 Adott a síkon 9 pont, amelyek közül 3 egy egyenesen, 6 egy másik, az előzővel párhuzamos egyenesen helyezkedik el. Hány egyenest határoz meg összesen ez a 9 pont?

1303 Adott a síkban 8 különböző egyenes, amelyek közül legfeljebb kettő metszi egymást egy pontban. Hány metszéspontjuk van összesen, ha

a) nincs köztük párhuzamos;

b) az egyenesek közül 3 páronként párhuzamos;

c) az egyenesek közül 4 páronként párhuzamos;

d) az egyenesek közül 5 páronként párhuzamos?

1304 Mit állíthatunk három különböző, egy síkba eső egyenesről, ha ezek az egyenesek a síkot

a) 4 részre; *b)* 6 részre; *c)* 7 részre osztják?

1305 Mikor indul Kati iskolába, ha megvárja, amíg 7 óra után az óra kis- és nagymutatója először zár be ugyanakkora szöget a vízszintessel?

1306 Helyezzünk el 7 pontot és 6 egyenest a síkon úgy, hogy mindegyik egyenesen 3 pont legyen.

1307 Egy egyenesen vegyük fel az O, A, B és C pontokat az adott sorrendben. Legyen M az AB, N a BC és P a CA szakaszok felezőpontja. Igazoljuk, hogy

$$OM \cdot AB + ON \cdot BC = OP \cdot AC.$$

1308 Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes véges sok zárt szakasza közül bármely kettőnek van közös pontja, akkor létezik olyan pont, amelyik az összes szakasznak pontja.

Háromszögek oldalai, szögei

1309 Egy háromszög belső szögeit jelölje α, β és γ, a hozzájuk tartozó külső szögeit pedig rendre α', β' és γ'. Töltsük ki a táblázatot.

α	β	γ	α'	β'	γ'
20°	40°				
	80°		110°		
				120°	90°

1310 Egy háromszög egyik szöge 42°25', a fennmaradó két szög közül az egyik kétharmada a másiknak. Adjuk meg a háromszög hiányzó szögeinek nagyságát.



1311 Szögei szerint milyen az a háromszög, amelyben a belső szögek aránya

a) $1:2:3$; *b)* $5:6:7$; *c)* $1:2:7$?

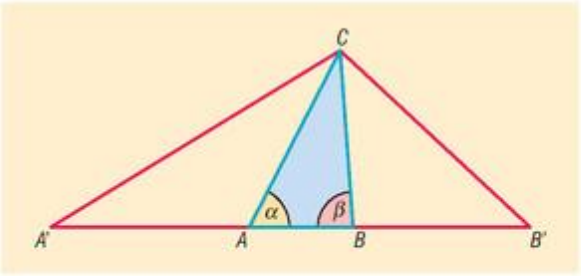
1312 Egy egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge 102°. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei?

1313 Az $ABCD$ négyzet síkjában lévő E pont az A és B csúcsokkal szabályos háromszöget alkot. Mekkora lehet a BEC szög?

1314 Az ABC háromszög AB oldalegyenesére A-n túl felmértük az AC oldal hosszát, B-n túl a BC oldal hosszát, így A', illetve B' pontokat kaptuk. Mekkorák az $A'B'C$ háromszög szögei, ha

a) az A csúcsnál lévő szög 40°, a B csúcsnál lévő szög pedig 70°;

b) az A csúcsnál lévő szög α, a B csúcsnál lévő szög pedig β?



1315 Az ABC háromszög egy belső pontja M. Bizonyítsuk be, hogy az AMB szög nagyobb, mint az ACB szög.

1316 Létezik-e olyan háromszög, amelynek a, b és c oldalainak hosszára igaz, hogy

a) $a = 4{,}8$ cm, $b = 6{,}2$ cm, $c = 3{,}7$ cm; *b)* $a = 22$ mm, $b = 3{,}4$ cm, $c = 0{,}7$ dm;

c) az a oldal hossza a b oldal hosszának kétszerese, és a c oldal hossza egyenlő a b oldal hosszával?

1317 Egy egyenlő szárú háromszög két oldala 4 és 10 cm. Mekkora a harmadik oldal?

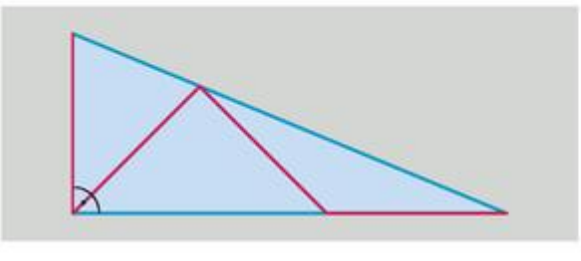
1318 Hány olyan háromszög van, amelynek két oldala 6 és 10 cm, és tudjuk, hogy a harmadik oldal is centiméterekben mérve egész szám?

1319 Egy háromszög három oldalának hossza a, b és c. Legyen $a \geq b \geq c$. Lehet-e egy háromszög három oldala $2a$, b, c hosszúságú?

1320 Igazoljuk, ha P pont az ABC háromszög egy belső pontja, akkor

$$AB + AC > PB + PC.$$

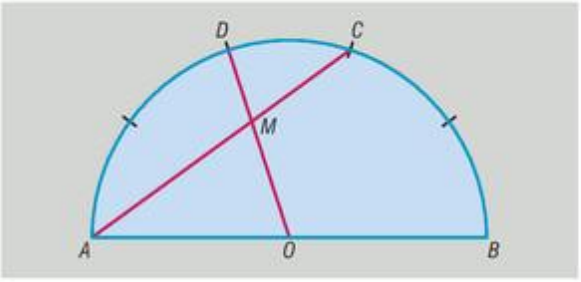
1321 Mekkorák a derékszögű háromszög hegyesszögei, ha az ábrán látható módon három egyenlő szárú háromszögre tudjuk felbontani? (A pirossal jelölt négy szakasz egyenlő hosszú.)



1322 Az O középpontú AB átmérőjű félkört az ábrán látható módon öt egyenlő részre osztottuk.

a) Mekkora a DMC szög?

b) Ha a DC szakasz hossza 10 cm, akkor milyen hosszú az OM szakasz?





1323 Egy négyszög oldalainak hossza ebben a sorrendben 7 cm, 8 cm, 11 cm és 9 cm. Lehet-e valamelyik átlójának hossza 16 cm?

1324 Egy egyenlő szárú háromszög szárszöge 120°. Daraboljuk fel a háromszöget 5 egyenlő szárú háromszögre.

1325 Igazoljuk, hogy konvex négyszögben az átlók hosszának összege nagyobb, mint két szemközti oldal hosszának összege.

1326 Az ABC háromszögben az A-nál lévő szög nem hegyesszög. A háromszög egy belső pontja P. A PB egyenes AC-t D-ben, a PC egyenes AB-t E-ben metszi. Igazoljuk, hogy

$$BD + CE > BE + ED + DC.$$

1327 Legyen P pont az ABC háromszög egy tetszőleges belső pontja. Igazoljuk, hogy P pontnak a csúcsoktól vett távolságösszege a háromszög kerületénél kisebb, de a háromszög félkerületénél nagyobb.

Pitagorasz-tétel

1328 A következő táblázatban megadtuk néhány derékszögű háromszög két oldalának hosszát. Számítsuk ki a hiányzó oldalak hosszúságait. ($a, b > 0$)

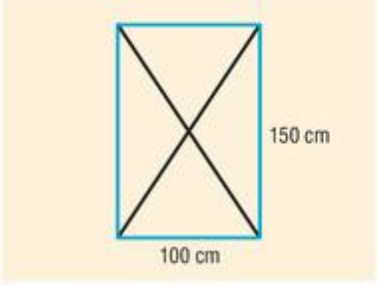
Egyik befogó	Másik befogó	Átfogó
12 cm	5 cm	
	7,2 dm	970 mm
$\sqrt{3} \cdot a$	a	
	b	$\sqrt{2} \cdot b$

1329 Lehetnek-e ugyanannak a derékszögű háromszögnek oldalai a következő szakaszok?

a) 6 cm, 8 cm, 10 cm;
b) 50 cm, 1,2 m, 13 dm;
c) 254 cm, 45 cm, 210 cm;
d) $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$ $(a > b; a, b > 0)$?

1330 Lehet-e egy derékszögű háromszög mindhárom oldalának mértékszáma páratlan természetes szám?

1331 Az andráskereszt építészeti szakkifejezés, jellegzetes X formájáról kapta az elnevezését. Akkor alkalmazzák, ha egy szerkezet vízszintes irányú elmozdulását szeretnék megakadályozni. Egy 150 cm magas és 100 cm széles kertkapura andráskeresztet készítünk. Milyen hosszú a két ferde rúd hossza együtt? (A hosszúságot centiméterekben mérve századokra kerekítve adjuk meg.)



1332 Egy egyenlő szárú háromszög alapja 16 cm, szára 10 cm. Mekkora az alaphoz tartozó magassága?

1333 A képen látható daru 40 m magas. Az ellensúly a tartóoszloptól 10 méterre, a darugém vége 18 méterre van. Mekkora távolságra van a tartóoszlop lábától az ellensúly, illetve a darugém vége? (A hosszúságokat méterre kerekítve adjuk meg.) (➡)



1334 Egy monitort képátmérőjének colban megadott hosszával jellemeznek. Hány colos az a monitor, amelynek szélessége 33,7 cm, magassága 27 cm? (1 col = 2,54 cm)



1335 Két egymástól 10 méterre álló egyenes fa magassága 7, illetve 12 méter. Milyen távol van egymástól a két fa csúcsa?

1336 Az ABC derékszögű háromszögben C csúcsnál derékszög van, $AC = 18$ cm és $BC = 15$ cm. A háromszögben O egy olyan belső pont, amelyre az OAB, OAC és OBC háromszögek egyenlő területűek.

a) Adjuk meg az O pont távolságát a befogóktól.

b) Mekkora az OC szakasz hossza?

1337 Adjuk meg annak az egyenlő szárú háromszögnek a területét, amelynek szára b hosszúságú, szárszöge 120°.

1338 Egy thai-box mérkőzés küzdőtere 8 m oldalú négyzet. Hány méter távol van a küzdőtér négy sarkától az a versenyző, aki a négyzet egyik átlójának egyik harmadolópontjában tartózkodik? (A távolságokat méterben két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.)

1339 Egy ABC egyenlő szárú háromszög alapja 60 cm, magassága 40 cm. Az AB alap F felezőpontjából bocsássunk merőlegeseket a szárakra, ezek talppontjai D és E. Mekkora a $CEFD$ négyszög kerülete és területe?

1340 A kis herceg bolygója 2 km sugarú gömb.

a) Hány kilométert gyalogol az egyenlítő mentén, ha az egyenlítő hosszának negyedrészét teszi meg?

b) A kiindulási és érkezési pont között létesített egyenes alagút milyen hosszú?

c) A megtett út felénél egy 100 m magas kilátótorony van. Az érkezési pontból visszatekintve láthatja-e a tornyot a kis herceg?

1341 Az ABC derékszögű háromszögben O egy olyan belső pont, amelyre az OAB, OAC és OBC háromszögek egyenlő területűek. Bizonyítsuk be, hogy ha a derékszögű csúcs C-nél van, akkor

$$OA^2 + OB^2 = 5 \cdot OC^2.$$

1342 Hány olyan derékszögű háromszög van, amelyben az oldalak mértékszáma pozitív egész szám, és az egyik befogó 15 egység?

Négyszögek

1343 Hány hegyesszöge lehet egy konvex négyszögnek?

1344 Mely állítások igazak?

a) Minden paralelogrammának van hegyesszöge.

b) Minden trapéznak van tompaszöge.

c) Bármely négyszögnek van legalább egy tompaszöge.

d) Bármely négyszögnek van egy legalább 90°-os szöge.

e) Van olyan paralelogramma, amelyik nem trapéz.

f) A téglalap átlói nem merőlegesek egymásra.

g) Ha egy deltoid minden oldala egyenlő, akkor az négyzet.

h) Ha egy rombusznak van derékszöge, akkor az négyzet.



1345 Az $ABCD$ négyzet BC oldalának B-hez közelebbi harmadolópontja E, CD oldalának felezőpontja F. Mekkora az AEF háromszög kerülete, területe, ha a négyzet oldala 12 cm?

1346 Egy 6 cm oldalú négyzet egyik csúcsából húzott két egyenes három egyenlő területű részre osztja a négyzetet. Milyen hosszú a két egyenesnek a négyzet belsejébe eső szakasza?

1347 Adott egy négyzet átlójának és oldalának különbsége. Adjunk eljárást a négyzet szerkesztésére.

1348 Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói az oldalakkal, ha az átlók szöge

a) 70°; *b)* φ?

1349 Egy rombusz egyik átlója az oldallal 24°-os szöget zár be. Mekkorák a rombusz szögei?

1350 Hány fokosak annak a rombusznak a szögei, amelynek magassága fele olyan hosszú, mint az oldala?

1351 Mekkorák lehetnek annak a deltoidnak a szögei, amelynek két szöge 40° és 102°?

1352 Egy deltoid 10 cm-es átlója a 24 cm-es átlót 3 : 5 arányban osztja. Mekkorák a deltoid oldalai?

1353 Egy paralelogramma egyik belső szögének és ehhez a szöghöz tartozó külső szögének aránya 4 : 5. Mekkorák a paralelogramma belső szögei?

1354 Hány fokosak a paralelogramma belső szögei, ha egyik belső szöge egy másik belső szög kétharmada?

1355 Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalainak négyzetösszegével.

1356 Egy paralelogramma köré kör írható. A paralelogramma szomszédos oldalainak hosszúsága 12, illetve 5 cm. Mekkora sugarú kör írható a paralelogramma köré?

1357 Van-e konkáv trapéz?

1358 Egy trapéz két szöge 38° és 102°. Mekkora a másik két szög?

1359 Egy derékszögű trapéz derékszögű szára 6 cm és egyik alapja 16 cm hosszú. Mekkora lehet a másik szára és az alapja, ha egyik szöge 45°?

1360 Egy konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra. Mekkora a négyszög területe, ha átlóinak hossza e és f?

1361 Egy 18 cm oldalú négyzet oldalaira kifelé szabályos háromszögeket rajzolunk. Milyen négyszöget alkotnak a háromszögeknek a négyzeten kívül lévő csúcsai? Mekkora ennek a négyszögnek a területe és a kerülete?

1362 Szerkesszünk egy téglalap oldalaira kifelé egyenlő szárú derékszögű háromszögeket, amelyek átfogói a téglalap oldalai. Milyen síkidomot határoznak meg ezek a háromszögek a téglalappal együtt?

1363 Egy konvex négyszög két-két szemben levő oldalának felezőpontjait összekötő szakaszok a négyszöget négy négyszögre bontják. Ezek közül háromnak a területe 15, 20 és 25 cm^2. Mekkora lehet az eredeti konvex négyszög területe?

1364 Konvex négyszög alakú kert mely belső pontjából vezet egyenes ösvény a kert négy sarkához, ha tudjuk, hogy az ösvények hosszának az összege a lehető legkisebb?

Sokszögek

1365 Töltsük ki a következő táblázatot, amely néhány konvex sokszög adatait tartalmazza.

A sokszög oldalainak száma	A sokszög egyik csúcsából kiinduló átlóinak a száma	A sokszög belső szögeinek összege
10		
	15	
		3960°
n		
	a	
		φ

1366 Ha egy konvex sokszög belső szögei összegéhez hozzáadjuk egy külső szögét, 2283°-ot kapunk. Hány oldalú a konvex sokszög?

1367 Melyik állítás igaz, melyik hamis?

a) A szabályos n oldalú sokszög oldalai egyenlők.

b) Ha egy n oldalú sokszög oldalai egyenlők, akkor az a sokszög szabályos.

c) A szabályos n oldalú sokszög szögei egyenlők.

d) Ha egy n oldalú sokszög szögei egyenlők, akkor az a sokszög szabályos.

1368 Töltsük ki a következő táblázatot, amely néhány szabályos sokszög adatait tartalmazza.

A szabályos sokszög oldalainak száma	A szabályos sokszög egy belső szöge	A szabályos sokszög egy külső szöge
20		
	144°	
		40°
n		
	α	
		β

1369 Egy konvex hatszög átlóinak legfeljebb hány darab csúcsoktól különböző metszéspontja lehet?

1370 Egy szabályos hatszög átlóinak hány darab csúcsoktól különböző metszéspontja van?

1371 Szerkesszünk szabályos hatszöget, ha adott a legrövidebb átlójának hossza.

1372 Hány fokos szöget zámak be egy szabályos ötszög egy csúcsából kiinduló átlói?

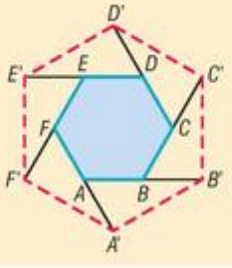
1373 Az $ABCDE$ szabályos ötszög AC átlóját a BD átló F, a BE átló a G pontban metszi. Hány fokosak a BFG háromszög szögei?

1374 Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldala 12 cm. Az oldalakat meghosszabbítjuk ciklikusan az ábrán látható módon 12 cm-rel. Az így kapott $A'B'C'D'E'F'$ hatszögnek

a) mekkorák a szögei?

b) mekkora a kerülete?

c) mekkora a területe?



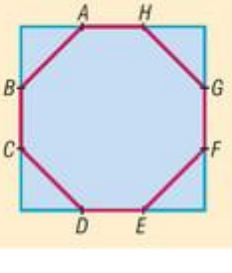
1375 Egy 2,4 m oldalú négyzet oldalait három egyenlő részre osztottuk, majd az osztópontokat az ábrán látható módon összekötöttük. Így keletkezett az $ABCDEFGH$ nyolcszög.

a) Hány fokosak a nyolcszög szögei?

b) Szabályos-e ez a nyolcszög?

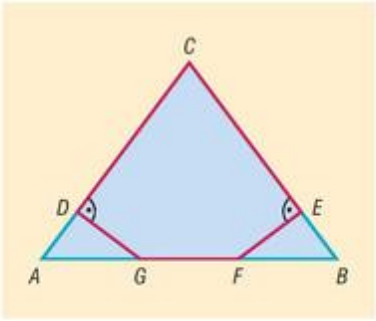
c) Mekkora a nyolcszög kerülete?

d) Mekkora a nyolcszög területe?





1376 Egy ABC egyenlő szárú háromszög alapja 24 cm, magassága 16 cm. Az AB alap F és G harmadolópontjaiból bocsássunk merőlegeseket a szárakra, ezek talppontjai rendre E és D. Mekkora a $CEFGD$ ötszög kerülete és területe?



1377 Egy konvex ötszöget felosztottunk 25 háromszögre, amelyek nem fedik egymást. Az ötszög oldalai egy-egy háromszög oldalai, és a háromszögek csúcsai között nincsenek olyanok, amelyek egy másik háromszög oldalának belsejébe esnének. Hány háromszög-csúcs esik az ötszög belsejébe?

1378 Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos kilencszög leghosszabb átlója az oldalának és a legrövidebb átlójának az összege.

Nevezetes ponthalmazok

1379 Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott ponttól 5 cm-re és egy adott egyenestől 3 cm-nél nagyobb távolságra vannak?

1380 Hol helyezkednek el síkon azok a pontok, amelyek két koncentrikus körtől egyenlő távol vannak?

1381 Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott P ponttól 4 cm-nél nem nagyobb és egy adott Q ponttól 6 cm-nél nagyobb távolságra vannak?

1382 Adott a síkon két szakasz. Szerkesszünk a szakaszok fölé mint alapok fölé egyenlő szárú háromszögeket, amelyeknek harmadik csúcsa egybeesik. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit és a megoldások számát.

1383 Adott a síkon egy egyenes, rajta egy E pont, valamint az egyenesen kívül egy P pont. Szerkesszünk olyan kört, amely az adott egyenest E-ben érinti és áthalad a P ponton.

1384 Szerkesszünk háromszöget, ha adott két szöge és a kerülete.

1385 Metsszünk el a síkon két párhuzamos egyenest egy harmadikkal. Hány olyan pont van a síkon, amely mind a három egyenestől egyenlő távol van?

1386 Az ABC háromszögben az A-nál lévő 60°-os belső szög szögfelezője a szemközi oldalt D pontban metszi. Mekkora az AD szakasz hossza, ha a D pont az AB egyenestől 5 cm távolságra van?

1387 Egy egyenlő szárú háromszög szárszöge 36°. Bizonyítsuk be, hogy az alapon levő egyik szög szögfelezője a háromszöget két egyenlő szárú háromszögre bontja.

1388 Az ABC háromszög B csúcsán keresztül húzzunk párhuzamost a C csúcsnál lévő belső szög szögfelezőjével. Ez az egyenes AC egyenesét D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $DC = BC$.

1389 Adott derékszögű háromszögbe szerkesszünk négyzetet úgy, hogy annak két szomszédos oldala egy-egy befogón legyen.

1390 Adott hegyesszögű háromszögbe szerkesszünk félkört úgy, hogy középpontja a háromszög egy adott oldalán legyen, és érintse a háromszög másik két oldalát.

1391 Az ABC háromszög A csúcsánál lévő külső szög szögfelezője párhuzamos a BC oldal egyenesével. Mit állíthatunk erről a háromszögről?

1392 Egy háromszög két szöge 38° és 76°. Mekkora szöget zárnak be ezen két szög szögfelezői?



1393 Egy háromszög egyik szöge

a) 48°; *b)* α.

Mekkora a másik két belső szög szögfelezőinek hajlásszöge?

1394 Egy háromszög két szöge 48°, illetve 74°. Mekkorák a külső szögfelezők által meghatározott háromszög belső szögei?

1395 Az ABC háromszög A és B csúcsánál lévő belső szögek szögfelezőinek metszéspontján át húzzunk párhuzamost az AB oldallal. Ez a párhuzamos az AC oldalt D-ben, a BC oldalt E-ben metszi. Mekkora a DE szakasz hossza, ha $DA = 5$ cm, és $EB = 4$ cm?

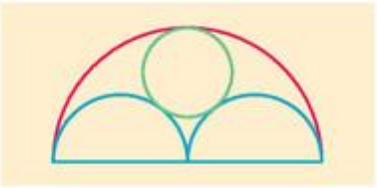
1396 Az ABC háromszögben $AB = AC$. A BC-re B-ben emelt merőleges az AB oldal felezőmerőlegesét M pontban, illetve a C csúcson áthaladó AB-vel párhuzamos egyenes az AC oldal felezőmerőlegesét N pontban metszi. Mekkorák az ABC háromszög szögei, ha MAN szög 120°-os?

1397 Egy szög egyik szárán mozgó P pontból húzzunk párhuzamost a szög másik szárával, és mérjük rá a P pontnak a szög csúcsától vett távolságát. Adjuk meg az így kapott pontok halmazát.

1398 Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ paralelogrammának az ABC és a BAD szögének szögfelezői akkor és csak akkor metszik egymást a CD oldalon, ha $AB = 2BC$.

1399 Két háromszögnek két-két oldala egyenlő hosszú. Bizonyítsuk be, hogy annak nagyobb a harmadik oldala, amelyikben a két oldal nagyobb szöget zár be.

1400 Az ábrán látható nagy félkör sugara 8 cm. A félkör átmérőjére két 4 cm sugarú félkört rajzoltunk. Számítsuk ki annak a körnek a sugarát, amelyik a nagy félkört belülről, a két kisebb félkört kívülről érinti.



1401 Egy 4 és egy 9 cm sugarú kör kívülről érintik egymást, és érintenek egy adott egyenest is.

a) Mekkora az egyenesen levő érintési pontok távolsága?

b) Mekkora lehet annak a körnek a sugara, amelyik a két kört és az egyenest is érinti?

Háromszög beírt és köré írt köre

1402 Szerkesszük meg egy háromszög beírt és köré írt körét, ha a háromszög

a) tompaszögű; *b)* hegyesszögű; *c)* derékszögű.

1403 Szerkesszünk szabályos háromszöget, ha adott

a) a körülírt körének sugara; *b)* a beírt körének sugara.

1404 Mutassuk meg, hogy a szabályos háromszög köré írt kör sugara kétszerese a beírt kör sugarának.

1405 Egy szabályos háromszög oldala a hosszúságú. Mekkora a háromszög

a) köré írt körének sugara; *b)* beírt körének sugara?

1406 Igazoljuk, hogy a háromszög köré írt körének középpontja a legnagyobb oldalhoz van a legközelebb.



1407 Töltsük ki a táblázatot a megadott adatok alapján. (➡)

Háromszög kerülete	Háromszög területe	Beírt kör sugara
60 cm	125 cm^2	
	30 cm^2	2 cm
k		r

1408 Egy derékszögű háromszög befogói 30 és 40 cm.

a) Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

b) Mekkora az átfogóhoz írt kör sugara?

c) Mekkorák a befogókhoz írt körök sugarai?

1409 Egy egyenlő szárú háromszög magassága 16 cm, szára 20 cm.

a) Mekkora a háromszög alapja?

b) Mekkora a háromszög szárhoz tartozó magassága?

c) Mekkora részekre osztja a szárat a szárhoz tartozó magasság?

d) Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

e) Mekkora a háromszög köré írt körének sugara?

1410 Egy háromszög két szöge 40° és 70°.

a) Mekkora szögben látszanak a háromszög oldalai a körülírt kör középpontjából?

b) Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyet a beírt körnek az oldalakkal vett érintési pontjai határoznak meg?

1411 Az ABC háromszög oldalait mekkora szakaszokra osztják a beírt kör érintési pontjai, ha $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm és $AC = 9$ cm?

1412 Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm, szára 5 cm.

a) Legalább mekkora annak a körlapnak a sugara, amellyel a háromszög lefedhető?

b) Milyen távol van a csúcsoktól a beírt kör középpontja?

1413 Egy pizza futárszolgálat a 26 cm átmérőjű kör alakú pizzát papírdobozban szállítja.

a) Ha a papírdoboz szabályos háromszög alapú, akkor legalább mekkora ennek a doboznak az alapéle?

b) Ha a papírdoboz négyzet alapú, akkor legalább mekkora ennek a doboznak az alapéle?

c) Melyik csomagolási módot válassza, ha a legkevesebb papírt akarja felhasználni? (A dobozok magassága mindkét esetben ugyanakkora.)

1414 Az ABC háromszög oldalait mekkora szakaszokra osztják a beírt kör érintési pontjai, ha $AB = c$, $BC = a$ és $AC = b$?

1415 Mutassuk meg, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalai hosszának mértékszáma egész szám, akkor a beírt kör sugarának hossza is egész szám.

1416 Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = BC$ és ABC szög 80°. A háromszög belsejében lévő P pontra igaz, hogy PAC szög 40° és ACP szög 30°. Mekkora a BPC szög?

Thalész tétele

1417 Mekkora sugarú kör írható egy derékszögű háromszög köré, ha befogóinak hossza

a) 8 cm és 24 cm; *b)* a és b.

1418 Egy 8 cm sugarú kör középpontjától 10 cm-re levő pontból szerkesszünk érintőt a körhöz. Mekkora az érintőszakasz hossza?

1419 Adjuk meg azon pontok halmazát a síkon, amelyekből egy r sugarú körhöz r hosszúságú érintő húzható.



1420 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a beírt körének sugara.

1421 Mekkora egy deltoid két szemben levő egyenlő szöge, ha kör írható köré?

1422 Adott a síkban két pont és egy egyenes. Szerkesszünk olyan derékszögű háromszöget, amely átfogójának két végpontja a két adott pont, a derékszögű csúcsa pedig az adott egyenesen van.

1423 Egy h hosszúságú szakasz két végpontja egy derékszög egy-egy szárán mozog. Adjuk meg a szakaszok felezőpontjainak halmazát.

1424 Egy kör kerületének adott pontján át húrokat rajzoltunk a körben. Hol helyezkednek el a húrok felezőpontjai?

1425 Az ABC háromszög AB oldalán felvett P pontból állítsunk merőlegeseket az AC és a BC oldalak egyenesére. Bizonyítsuk be, hogy ezen merőlegesek talppontjai, valamint a C és P pontok egy körön vannak.

1426 Egy háromszög oldalai 5, 12 és 13 cm hosszúak. Mekkora a háromszög köré írt körének sugara?

1427 Adott átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek a területe a legnagyobb?

1428 Egy trapéz szárai 10 és 15 cm hosszúak. Mekkora a szárak felezőpontjait összekötő szakasz hossza, ha a szárak mint átmérők fölé írt Thalész-körök érintik egymást?

1429 Két kör kívülről érinti egymást, és érint egy adott egyenest is. Adjuk meg az egyenesen lévő érintési pontok által meghatározott 20 cm hosszúságú szakasz felezőpontjának a két kör érintési pontjától vett távolságát.

1430 Az ABC háromszögben a B csúcsnál levő belső szög szögfelezője az AC oldalt D pontban metszi. Ugyanezen csúcsnál lévő külső szög szögfelezője az AC oldal egyenesét E pontban metszi. DB szakasz hossza 8 cm, BE szakasz hossza 6 cm. Mekkora a DBE háromszög

a) köré írt körének sugara? *b)* beírt körének sugara?

1431 Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD. Tudjuk, hogy $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm, $CD = 10$ cm és $AD = 10$ cm hosszú. Adjuk meg az AC átló hosszát.

1432 Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz alapja mint átmérő fölé írt Thalész-kör érinti a trapéz másik alapját, és felezi a szárakat. Mekkorák a trapéz szögei?

1433 Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$. Az A csúcsból induló magasságvonal D-ben metszi a BC oldalt. Állítsunk D-ből merőlegest AC-re, és igazoljuk, hogy ez az egyenes az ABD háromszög köré írt körét érinti.

1434 Bizonyítsuk be, hogy ha egy paralelogramma oldalai nem egyenlő hosszúak, akkor a belső szögfelezőinek metszéspontjai téglalapot határoznak meg. Mekkora ennek a téglalapnak az átlója, ha a paralelogramma oldalainak hossza a és b $(a > b)$?

Érintőnégyszög, érintősokszög

1435 Bizonyítsuk be, hogy a rombusz átlóinak metszéspontja egyenlő távol van az oldalaktól.

1436 Egy rombusz beírt körének sugara 12 cm. Mekkora az oldala, ha egyik hegyesszöge 45°?

1437 Milyen négyszöget határoznak meg a rombusz beírt körének az oldalakkal vett érintési pontjai? Mekkora szöget zárnak be ennek a négyszögnek az átlói, ha a rombusz egyik szöge 60°?



1438 Bizonyítsuk be, hogy egy érintőnégyszög t területe, k kerülete és beírt körének r sugara között érvényes a következő összefüggés:

$$t = \frac{k}{2} \cdot r.$$

1439 Egy deltoid köré kör írható. Mekkora a beírható körének sugara, ha két különböző hosszúságú oldala 12 és 5 cm?

1440 Szerkesszünk érintőnégyszöget, ha adott a beírt kör sugara, valamint

a) két szomszédos oldala és az általuk bezárt szög;

b) három szöge.

1441 Egy érintőnégyszög három oldalának hossza 12 cm, 14 cm és 20 cm. Mekkora lehet a harmadik oldala?

1442 Az $ABCDEF$ hatszögbe kör írható. Oldalainak hossza: $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $CD = 8$ cm, $DE = 7$ cm, $EF = 10$ cm. Milyen hosszú AF?

1443 A 12 cm oldalú $ABCD$ négyzet AB oldalának, illetve a DC oldalának felezőpontja E és G. A BC oldal C-hez közelebbi, illetve a DA oldal D-hez közelebbi harmadolópontjai F és H.

a) Az E, F, G és H pontok milyen négyszöget határoznak meg?

b) Adjuk meg $EFGH$ négyszög beírt körének sugarát.

1444 Egy derékszögű trapéz olyan érintőnégyszög, amelynek alapjai 9 és 11 cm hosszúak. Mekkora a trapéz magassága?

1445 Egy 20 cm sugarú kör köré olyan derékszögű trapézt írunk, amelynek legrövidebb oldala 30 cm hosszú. A trapéz területének hány százaléka esik a körön kívül?

1446 Papírból négyszög alakú sárkányt készítünk. Ennek az $ABCD$ négyszögnek az oldalai 30, 30, 40 és 40 cm hosszúak, és két szemben levő nem egyenlő szögének az összege 180°.

a) A sárkányt a négyszög átlói mentén hurkapálcával szeretnénk merevíteni. Milyen hosszú pálcikákra van szükségünk?

b) Hány dm^2 papír szükséges az elkészítéséhez, ha a felhasznált anyag 20%-a hulladék?

c) Egy olyan kört akarunk a sárkányba rajzolni, amelyik az alakzat mind a négy oldalát érinti. Hogyan szerkeszthetjük meg ennek a körnek az O középpontját?

d) Számítsuk ki a szóban forgó $ABCD$ négyszögben mekkora az AOB és a COD szögek nagyságának összege.

e) Egy $EFGH$ tetszőleges érintőnégyszög beírt körének középpontja O. Mekkora az EOF és a GOH szögek nagyságának összege?

Vegyes feladatok

1447 Egy körbe írt trapéznak három egyenlő hosszú oldala van, és egyik oldala éppen a kör egy átmérője. Mekkorák a trapéz szögei?

1448 Egy háromszög két szöge 42° és 64°. Mekkora szöget zár be egymással a harmadik csúcshoz tartozó magasság és szögfelező?

1449 Egy háromszög két belső szögfelezőjének hajlásszöge 48°. Mekkora a háromszög harmadik csúcsnál levő belső szöge?



1450 Mekkora szöget zár be az a két síktükör, amelynél az első tükörre beeső fénysugár a második tükörről úgy verődik vissza, hogy párhuzamos lesz a beeső fénysugárral?

1451 Egy derékszögű trapéz szárai a és $2a$, valamint az egyik alapja is a hosszúságú.

a) Mekkora a trapéz negyedik oldala? *b)* Mekkorák a trapéz szögei?

1452 Egy szabályos ötszög egyik csúcsát a hozzá csatlakozó két éllel együtt hagyjuk el. Mekkorák a megmaradó négyszög szögei?

1453 Adott a síkban két pont és egy egyenes. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, amely alapjának két végpontja az adott két pont, és egyik szára illeszkedik az adott egyenesre.

1454 Adjunk az ABC háromszög szerkesztésére eljárást, ha adott AB oldalának hossza, a másik két oldal hosszának összege, valamint az A csúcsnál levő α szög.

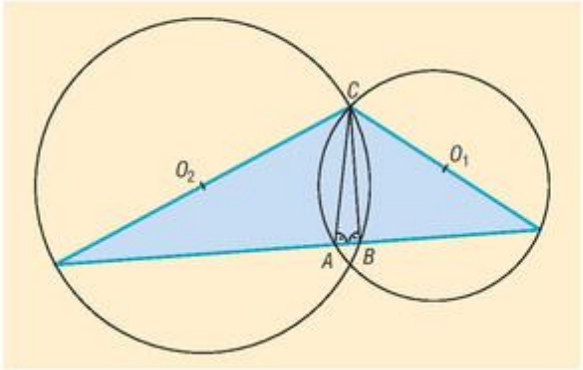
1455 Mekkora egy 18 cm sugarú körbe írt szabályos hatszög két szemközti

a) csúcsának; *b)* oldalának távolsága?

1456 Adott egy egyenlő szárú háromszög. Szerkesszünk egy olyan kört, amelyik a háromszög mindkét szárát, valamint a beírt körét is érinti.

1457 Egy derékszög mindkét szárát érintő kör érintési pontjait összekötő szakasz 10 cm hosszú. Mekkora távolságra van a kör középpontja a szakasztól?

1458 Az ábrán látható ABC háromszögnek Thalész tétele értelmében két derékszöge is van. Hol a hiba? (➡)



1459 Egy téglalap oldalainak hossza 10 és 20 cm. Hány olyan pont van a téglalap belsejében, amelyből valamelyik két oldal derékszög alatt látszik?

1460 Egy paralelogrammába 10 cm sugarú kör írható. A paralelogramma egyik szöge 45°. Mekkora a paralelogramma kerülete és területe?

1461 Egy érintőnégyszög két szemben levő oldala 10 és 12 cm hosszú. Adjuk meg a másik két oldal hosszát, ha tudjuk, hogy a másik két oldal hosszának különbsége 4 cm.

1462 Egy szabályos sokszögnek 20 átlója van. Mekkora a szabályos sokszög egy belső szöge?

1463 Szeretnénk vásárolni egy 81 centiméter képátmérőjű, 16 : 9 képarányú televíziót, amelynek a kerete fent és oldalt 10 cm, lent 18 cm széles. Elfér-e a készülék annak a szekrényünknek a polcán, amely 1 méter széles és 65 cm magas? (A 16 : 9 a kép szélességének és magasságának arányát adja meg.)

1464 Egy ABC háromszög AB oldalának hossza 20 cm. Mekkora a háromszög köré írt körének sugara, ha az A csúcsból kiinduló belső szögfelező a B csúcsból kiinduló külső szögfelezővel 45°-os szöget zár be?

1465 Rombusz alakú terítőnk átlóinak metszéspontjába egy vázát helyezünk el. Milyen távol van a váza a terítő széleitől, ha az átlóinak hossza 80, illetve 60 cm?

1466 Egy szabályos nyolcszög csúcsai közül hányféleképpen választhatunk ki hármat, hogy azok különböző háromszöget alkossanak? Ezek között hány derékszögű háromszög van?



1467 Egy régi térkép szerint egy paralelogramma kerületén valahol kincset ástak el. Tudjuk, hogy a paralelogramma egyik oldala 10, a másik 20 km hosszú, és az általuk bezárt szög 60°. Hol lehet a kincs, ha a lelőhelyéből a paralelogramma valamelyik hosszabbik oldala derékszög alatt látszik?

1468 Egy 24 cm oldalú szabályos háromszög oldalaira kifelé négyzeteket írunk. A négyzeteknek a háromszög csúcsaitól különböző pontjai egy hatszöget határoznak meg.

a) Igazoljuk, hogy a hatszög köré írható kör.

b) Mekkora a hatszög köré írható körének a sugara?

c) Mekkorák a hatszög oldalai?

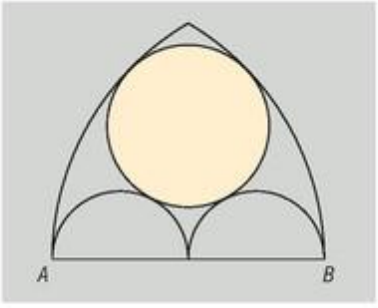
1469 A 18 cm oldalú ABC szabályos háromszög középpontja legyen O. Rajzoljuk be az OA, illetve az OB szakaszok felezőmerőlegesét.

a) Mekkora részekre osztják ezek az egyenesek a háromszög oldalait?

b) Mekkora területű részekre osztják ezek az egyenesek a szabályos háromszöget?

1470 A délnyugat felé haladó hajóról két, egymástól 50 km-re levő világítótorony közül az egyik déli, a másik nyugati irányban helyezkedik el. Két óra múlva az egyik keleti, a másik északnyugati irányban látszik. Mekkora a hajó átlagsebessége, ha egyenes vonalban halad?

1471 Az ábrán egy gótikus ablak látható. Úgy készítették el, hogy az AB párkányra két érintkező és egyenlő sugarú félkört rajzoltak, valamint az A és B pontok köré AB sugarú köríveket. Számítsuk ki, mekkora a két félkört és a köríveket érintő kör sugara, ha AB hossza 80 cm.

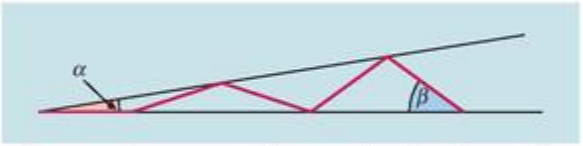


1472 Nagy Geométer háromszög alakú telkének egyik szöge 45°. A telekre háromszög alapú házat épít úgy, hogy a háznak mind a három sarka a telek határára esik, és a ház alkotta háromszög külső szögfelezői a telek határoló egyenesei.

a) Mekkora az épületnek a 45°-os szöggel szemben levő oldala, ha az épület másik két oldalának hossza 12 m és 16 m?

b) Legfeljebb mekkora lehet annak a négyszög alakú szobának az alapterülete, amelynek minden fala a ház 12 vagy16 méteres oldalával párhuzamos, és minden oldala egyenlő hosszú?

1473 Az ábrán vastagon kihúzott öt szakasz mindegyike egyenlő hosszú.



a) Mekkora a β szög, ha $\alpha = 9°$?

b) Tang Vu Sziangh a Sárkányünnep napjára sárkányának farkát 9 egyenlő hosszúságú szakasszal szeretné díszíteni a fenti módon. Legfeljebb hány fokos szögbe rajzolhat be 9 egyenlő hosszúságú szakaszt?

c) Ha az előző részben szereplő, vastagon kihúzott törött vonal n egyenlő hosszúságú szakaszból áll, akkor legfeljebb mekkora lehet az α szög?

1474 Az ABC háromszög A csúcsából kiinduló magasság talppontja E, a B csúcsból kiinduló magasság talppontja G, az AB oldal felezőpontja F. Számítsuk ki az EFG háromszög szögeit, ha a háromszög A csúcsánál levő szöge 42°, a B csúcsánál levő szöge 67°.

9.5. EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK, EGYENLETRENDSZEREK

Az egyenlet, azonosság fogalma

1475 A következő kijelentő mondatok közül melyek tekinthetők állításnak? Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

a) Az elefánt nagy állat.
b) A bolygók a Nap körül keringenek.
c) A történelem érdekes tantárgy.
d) Petőfi Sándor híres költő volt.
e) A prímszámok páratlanok.
f) A fekete macska szerencsétlenséget jelent.
g) Minden másodfokú függvénynek két zérushelye van.

1476 Adjunk meg olyan halmazt, melynek elemeit a mondatok hiányzó részébe helyettesítve igaz állításokat kapunk.

a) A … konvex négyszög.
b) A legnagyobb kétjegyű prímszám a …
c) A … a Nap körül kering.
d) Az alma … gyümölcs.
e) A … a legjobb autó.
f) A … függvénynek mindig van szélsőértéke.
g) A … és a … a két legnagyobb magyarországi folyó.

1477 Írjunk fel olyan hiányos állításokat, melyekbe az alábbi halmazok bármely elemét behelyettesítve igaz állításokat kapunk:

a) $\{1; 2; 3; 4\}$;
b) {prímszámok};
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 19\}$;
d) $[2; 7]$;
e) $]-3; 5[$;
f) $\{\}$;
g) $\mathbb{N}$.

1478 Írjunk fel olyan egyenleteket, amelyek megoldásával választ kaphatunk a következő kérdésekre.

a) Melyik az a szám, amelyik 6-tal kisebb a háromszorosánál?
b) Melyik az a szám, amelyik 8-cal nagyobb a kétszeresénél?
c) Melyik az a szám, amelyik háromszorosa 4-gyel kisebb a 25-nél?
d) Melyik az a szám, amelyet kétszer kivonva a háromszorosából az eredeti számot kapjuk?
e) Melyik az a szám, amelyiknek az ötszöröse 8-cal nagyobb, mint a háromszorosánál 10-zel nagyobb szám?

Az egyenlet megoldásának grafikus módszere

1479 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

a) $|x| - 2 = x$;
b) $3x + 1 = 5 - |x|$;
c) $|x + 1| = 1 - \frac{x}{3}$;
d) $|x| = 1 - |x - 2|$;
e) $2 \cdot |x - 2| = 2x - 4$;
f) $x + 2 = x^2$;
g) $|x - 1| + |x + 3| = 6$;
h) $x^2 - 1 = 2x - 2$;
i) $\sqrt{x + 3} = \frac{x}{2}$.

1480 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

a) $(x - 2)^2 - 1 = |x - 1|$;
b) $2 - |x + 1| = 1 - (x + 2)^2$;
c) $|x + 2| = \sqrt{x + 4}$;
d) $\sqrt{-1 - x} - 4 = -1 - |x + 4|$;
e) $\big||x + 3| - 2\big| = 1$;
f) $|(x - 3)^2 - 4| = x - 1$.



1481 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket. ([x] az x egész részét, $\{x\}$ az x törtrészét jelenti.)

a) $[x] - 2 = 2x - 3$; *b)* $[x] = x^2 + 2x$; *c)* $\{x\} = 0{,}7$; *d)* $\{x\} = 1 - \frac{x}{2}$.

1482 Hány megoldása van a következő egyenletnek a valós számok halmazán?

$$\{x\} = \frac{x}{2010}$$

Az egyenlet értelmezési tartományának és értékkészletének vizsgálata

1483 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{x-4} = \sqrt{4-x}$; *b)* $\sqrt{3-2x} = \sqrt{2x-3}$; *c)* $\sqrt{4x-1} = \sqrt{1-4x}$;

d) $\sqrt{8x-5} = \sqrt{5-8x}$; *e)* $\sqrt{x+4} = \sqrt{-x-5}$; *f)* $\sqrt{3x-7} = \sqrt{35-15x}$;

g) $\sqrt{4x-2} = \sqrt{3-7x}$; *h)* $\frac{x}{x-5} = \frac{5}{x-5}$; *i)* $\frac{\sqrt{15-6x}}{2x-5} = \sqrt{4x-10}$.

1484 A p paraméter milyen értékei esetén lesz a következő egyenletek értelmezési tartománya üres halmaz?

a) $\sqrt{3x-5} = \sqrt{2p-x}$; *b)* $\sqrt{2x+3} = \sqrt{p-x}$;

c) $\sqrt{4x-3} = \sqrt{-3x+p}$; *d)* $\sqrt{7x+5} + \sqrt{4p-x} = 12$;

e) $\sqrt{-x} = \sqrt{5x-p}$; *f)* $\sqrt{2x-5} + \sqrt{3p-x} = 5$.

1485 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $(x-1)^2 + (x+2)^2 = 0$; *b)* $(x-2)^2 + |x+y-3| = 0$;

c) $\sqrt{4x-y} + (x+6)^2 = 0$; *d)* $|3x-5| + |2x-y+1| = 0$;

e) $|7y+5| + |3x-2y+1| = 0$; *f)* $\sqrt{2x-6} + |x+y+5| = 0$.

1486 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $x^2 + |21x - y + 1| + \sqrt{y+z-3} = 0$; *b)* $\sqrt{6x-2y} + \sqrt{3x-1} + \sqrt{8y-2z+10} = 0$;

c) $2x^2 + 2x + y^2 + 2xy + 1 = 0$; *d)* $x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xz - 2y - 4yz + 1 = 0$.

Egyenlet megoldása szorzattá alakítással

1487 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $(2x+3)\cdot(x+4)\cdot(x-1)\cdot(x+3) = 0$; *b)* $(4x-12)\cdot(x-11)\cdot(3x-6)\cdot(x+8) = 0$;

c) $\frac{(2x-5)\cdot(4x+3)\cdot(x-7)}{10-4x}\cdot(3x+1) = 0$; *d)* $\frac{(x+3)\cdot(2x-3)\cdot(3x+5)\cdot(4x+8)}{(x+2)\cdot(10x-15)} = 0$;

e) $(x+1)\cdot(2x+1) + (x+1)\cdot(3x-6) = 0$; *f)* $(x-4)\cdot(3x-1) - (x-4)\cdot(3-2x) = 0$;

g) $(2x+1)\cdot(3x-1) - (2x+1)\cdot(x-1) = 0$; *h)* $(5x-3)\cdot(4x-2) + (2x+8)\cdot(5x-3) = 0$;

i) $(8x+5)\cdot(7x-3) - (8x+5)\cdot(3x+7) = 0$;

j) $(4-2x)\cdot(3x+1) + (2x-4)\cdot(x-2) - (4-2x)\cdot(2x-3) = 0$.

1488 Öt egymást követő egész szám szorzata 0. Mennyi a számok összege?

1489 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $(3x-1)\cdot(2x+4)-(3x-1)\cdot(x+1)=(3x-1)\cdot(2x-3)$;

b) $(x+1)\cdot(2x-3)\cdot x-(3x+2)\cdot x\cdot(x+1)=(x+1)\cdot x$;

c) $(x-1)\cdot(3x+7)+(2x-2)\cdot(x+3)=(6x-6)\cdot(x+1)$.

1490 Határozzuk meg azokat a téglalapokat, melyeknél az oldalak mérőszáma egész szám, és a terület mérőszáma a kerület mérőszámának

a) kétszerese; *b)* háromszorosa.

1491 Szorzattá alakítással oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $4xy+6x-6y=10$; *b)* $6xy+15x-4y=21$.

Egyenletek megoldása lebontogatással, mérlegelvvel

1492 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $3\cdot(2x-7)-4\cdot(5-2x)=3x+3$;

b) $2\cdot(4x-3)-3\cdot(3x-1)-4\cdot(x+1)=5$;

c) $5\cdot(4x+1)-2\cdot(3x-4)=2\cdot(x+3)-(3x-7)$;

d) $(1+x)\cdot(3x+4)-(2x+1)\cdot(x-3)=x\cdot(x-4)+23$;

e) $(2-3x)\cdot(2x+5)-(4-x)\cdot(5x+1)-(3-x)\cdot(x+2)=0$;

f) $4\cdot[2\cdot(3x-4)-3]-4=0$; *g)* $2\cdot\{5\cdot[3\cdot(x-1)-4]-2\}=16$;

h) $3\cdot\{3\cdot[x-4\cdot(x+1)]-2\}=27$; *i)* $\frac{2}{3}\cdot(5x-1)-\frac{7}{3}\cdot(2x-3)=5$;

j) $\frac{1}{2}\cdot(x+7)-\frac{1}{3}\cdot(2x-4)=1$; *k)* $\frac{4}{5}\cdot(3x+4)-\frac{1}{2}\cdot(7x+1)=-2$;

l) $\frac{1}{5}\cdot(3x-1)-\frac{3}{4}\cdot(2x+3)=\frac{1}{2}\cdot(5x-7)$; *m)* $\frac{2x-4}{3}+\frac{x-4}{2}=2x$;

n) $\frac{4x-3}{6}+\frac{x+4}{3}=\frac{7x-5}{12}$; *o)* $\frac{3x-7}{5}-\frac{x-7}{4}+\frac{3x+5}{2}=1$;

p) $\frac{2x+3}{5}-\frac{x+2}{4}=\frac{x-3}{3}$; *q)* $\frac{2x}{x-2}-\frac{4}{x-2}=2$;

r) $\frac{x-4}{x+3}-\frac{x+2}{x+3}=3$.

1493 Egy gimnazista a háromnapos osztálykirándulásra kapott pénzének a harmadát elköltötte az első napon, a maradék harmadát a második napon, így a harmadik napra 4000 Ft-ja maradt. Mennyi pénzzel indult el a kirándulásra?

1494 Egy szeptemberi akció során csökkentették a füzetek árát, így 8 füzet áráért most 13-at tudok venni. Hány %-kal lettek olcsóbbak a füzetek?

1495 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\frac{2x-4}{25}-\frac{3x+8}{10}=\frac{4x-1}{20}$; *b)* $\frac{2x-4}{2x+4}-\frac{x-5}{x+2}=3$; *c)* $\frac{3x-9}{x-4}-\frac{2x+2}{x+3}=1$.

1496 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\frac{1-2x}{6-2x}-\frac{3x-4}{3-x}=4$; *b)* $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-5}=\frac{28}{x^2-3x-10}$;

c) $\frac{x+1}{2-2x^2}-\frac{2x-1}{x^2-1}+\frac{6}{x+1}+\frac{1}{2-2x}=0$; *d)* $\frac{2x-7}{2x^2-4x+2}+\frac{x+1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{3-3x}=\frac{2}{x-1}$.

Egyenlőtlenségek

1497 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket:

a) $3x-2\le -x+2$; *b)* $\frac{1}{3}\cdot x+1\ge 2x-4$; *c)* $3\cdot|x|<x+4$;

d) $|x-1|-2\ge\frac{x}{3}-1$; *e)* $x^2-1>2x+2$; *f)* $2x-3\ge\sqrt{x-1}$.

1498 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $4x+3\ge 5-2x$; *b)* $3x+5<\frac{x+3}{2}$;

c) $3\cdot(x-4)-2\cdot(3-4x)>4-x$; *d)* $2\cdot(1-3x)-4\cdot(x+1)\ge 10\cdot(-2-x)$;

e) $2\cdot\{x-3\cdot[4x-2\cdot(x-1)]\}>-2\cdot(3x+1)$; *f)* $\frac{5}{3}\cdot(2x-1)-\frac{1}{3}\cdot(8x+1)\le 1$;

g) $\frac{2x-1}{3}-\frac{x-1}{2}\le\frac{x-5}{6}$; *h)* $\frac{x-7}{5}-\frac{x+3}{2}\ge\frac{x+1}{10}$.

1499 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $(x+3)\cdot(2x-1)\ge 0$; *b)* $(x-1)\cdot(x+2)<0$;

c) $(3x+7)\cdot(x-5)\le 0$; *d)* $(2x-4)\cdot(5-x)<0$;

e) $(4x+13)\cdot(5x+1)>0$; *f)* $(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4)>0$;

g) $(3x-7)\cdot(4-x)\cdot(5+x)<0$; *h)* $(3x+4)\cdot(2x+5)\cdot(4x-3)\cdot(3x-5)\ge 0$.

1500 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{x+3}{x-4}>0$; *b)* $\frac{x-5}{x+2}\le 0$; *c)* $\frac{4x-3}{3x+1}\ge 0$;

d) $\frac{11x-7}{5x-17}<0$; *e)* $\frac{2x+3}{x-1}\ge 2$; *f)* $\frac{(x+4)\cdot(2x-3)}{x-2}\le 0$.

1501 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{3}{x+2}\le\frac{7}{x-5}$; *b)* $\frac{x+2}{x-2}\le\frac{x-1}{x+3}$; *c)* $\frac{2x+3}{x-3}\ge\frac{2x-5}{x-1}$.

1502 Legyen A az $\frac{(x-3)\cdot(x+1)}{x-5}\geq 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza, B pedig az $(x+2)\cdot(x-2)\cdot(4-x)\leq 0$ megoldáshalmaza.

a) Adjuk meg az $A\cup B$ és $A\cap B$ halmazokat.

b) Legyen P a prímszámok halmaza. Igaz-e, hogy $P\subset A$?

c) Legyen S a számjegyek halmaza. Adjuk meg az $S\setminus B$ halmazt.

1503 Legyen $x>0$, $y>0$ és $x+y=1$. Igazoljuk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9.$$

1504 A $\frac{3x+1}{2x-3}\leq\frac{3x+2}{2x+5}$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza legyen H.

a) Van-e a H halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

b) Hány olyan természetes szám van, amely eleme H-nak?

c) Adjuk meg H-nak két olyan A és B részhalmazát, amelyekre igaz, hogy

$$A\cap B=\emptyset \quad \text{és} \quad A\cup B=H.$$

Abszolút értéket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek

1505 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket:

a) $|x|+4=8$; *b)* $|x+4|=8$; *c)* $|x|+4\geq 8$;

d) $|x+4|\geq 8$; *e)* $2\cdot|x|+3=10$; *f)* $2\cdot|x+3|=10$;

g) $|2x+3|\leq 10$; *h)* $|2x|+13>10$.

1506 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $4x-2=|x|$; *b)* $|x|-5=3x+7$; *c)* $3\cdot|x|-5=x+2$;

d) $7-4\cdot|x|=\frac{1}{5}\cdot x+1$; *e)* $|x-3|=2x+5$; *f)* $|4x-3|=3x-5$;

g) $5-x=|2x-7|$; *h)* $|7-2x|=3x+4$.

1507 Mely valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

a) $|x|-2>3x$; *b)* $2\cdot|x|+1<5x+2$; *c)* $3\cdot|x|-1>4x+3$;

d) $|x+3|\leq\frac{1}{2}\cdot x+5$; *e)* $3\cdot|x-1|\geq 2x+8$; *f)* $|5x-4|<3x+1$.

1508 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $|x-2|+|x+3|=11$; *b)* $2\cdot|x-1|-|x+4|=x-6$;

c) $\big||x+2|-3\big|=2$; *d)* $\big||x-4|-4\big|=4$.



1509 Mely valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

a) $|x|+|x+5|\geq 7$;
b) $|x-3|-|x+2|\leq 5$;
c) $|2x-3|+|x+6|\geq 9$;
d) $|4x-5|+|5x-4|\leq 2$.

1510 Mely valós számok esetén igazak a következő egyenlőtlenségek?

a) $3\cdot|x+4|-|x-2|\geq -x+1$;
b) $2\cdot|x-1|+3\cdot|x+2|-|x-4|\leq 18$.

Paraméteres egyenletek

1511 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ahol a, b, c és d valós paraméter.

a) $ax=3a$;
b) $bx+b=3$;
c) $cx+4=2x$;
d) $ax-5a+3+4x=2a-1$;
e) $dx-1=d-x$;
f) $(a-3)\cdot x=a^2-9$;
g) $(b-2)\cdot x=b^2-4b+4$;
h) $cx-c^2=-4x-16$;
i) $(d^2+d)\cdot x=d^2+2d+1$.

1512 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ahol a valós paraméter.

a) $a\cdot(x+6-a)=3\cdot(x+3)$;
b) $2a\cdot(x-2a)=4\cdot(x-4)$;
c) $(a-3)\cdot(x-4)-(2x+1)\cdot(2-a)=a^2-x-3\cdot(a-2)$;
d) $\frac{2ax}{3}+1=\frac{a+x}{2}-1$.

1513 Egymástól 200 méter távolságból elindul egymással szemben két futó $v_1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, illetve $v_2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel. Mennyi idő múlva találkoznak?

1514 Két kerékpáros azonos irányban halad az országúton, egyikük egyenletesen $38\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másik $32\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Ha a gyorsabb s méter előnyt ad a másiknak, mennyi idő múlva éri utol?

1515 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ahol a és b valós paraméter.

a) $a^2\cdot(x-1)-2ab=b^2\cdot(x+1)$;
b) $(a-b)\cdot(2x-4a)-(9b+x)\cdot(b+a)=a\cdot(-x-17b)$;
c) $4a+7ax=a^2x+28$;
d) $\frac{a}{3a-x}=\frac{2}{b-x}$;
e) $\frac{x}{a+x}-\frac{a+x}{x-a}=\frac{x-a+4a^2}{a^2-x^2}$;
f) $\frac{x-a}{x-2}+\frac{x-b}{x-3}=2$;
g) $\frac{2a-5}{(a-1)\cdot(x+2)}-\frac{3}{x+1}=\frac{3x+4}{x^2+3x+2}$.

1516 Ha a liter p%-os és b liter q%-os alkohololdatot összeöntünk, hány %-os oldatot kapunk?

1517 Az a paraméter milyen értékei esetén kisebb -5-nél a következő egyenlet megoldása?

$$\frac{2\cdot(a+1)\cdot x}{a}=3\cdot(1+x)+\frac{7}{a}.$$

1518 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget, ahol m valós paraméter:

$$\frac{mx-1}{x-m}>1.$$

Egyenletekkel megoldható feladatok

1519 Egy háromszög egyik szöge a másiknál 20°-kal kisebb, a harmadik háromszorosánál pedig 10°-kal nagyobb. Mekkorák a háromszög szögei?

1520 Egy kétjegyű szám első jegye kétszerese a második jegynek. A szám és a számjegyek felcserélésével kapott kétjegyű szám különbsége 36. Mennyi az eredeti szám?

1521 Egy kétjegyű számban a második jegy 3-mal kisebb, mint az első. Ha a számhoz hozzáadjuk a számjegyeit, 59-et kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

1522 Egy 100 és 200 közötti egész szám középső jegye 1-gyel nagyobb, mint az utolsó jegy. Ha a számhoz hozzáadjuk az első és utolsó számjegyének felcserélésével kapott számot, az összeg 726 lesz. Melyik az eredeti szám?

1523 Egy pár cipő árát 12%-kal felemelték, majd egy akció során 40%-kal csökkentették. Így most 12 096 Ft-ba kerül. Mennyi volt a cipő eredeti ára?

1524 Egy táska árát 20%-kal csökkentették, majd 18%-kal felemelték, így az ár 3 776 Ft lett. Mennyi volt a táska eredeti ára?

1525 *a)* Mennyit öntsünk össze a rendelkezésre álló 40%-os és 80%-os sósavoldatból, hogy 4 kg 50%-os sósavoldatot kapjunk?

b) Mennyi 40%-os sósavat öntsünk 4 kg 80%-os sósavhoz, ha 70%-os oldatot szeretnénk kapni?

c) Mennyi tiszta vizet öntsünk 4 kg 80%-os sósavhoz, ha 60%-os oldatot szeretnénk előállítani?

d) Hány %-os oldatot kapunk, ha 4 kg 40%-os és 5 kg 80%-os sósavat összekeverünk?

1526 *a)* Menő Manó 7 órakor indult túrázni a Bükkben Cserépfaluból. Lóti-futi 8 órakor indult ugyanazon az útvonalon $10\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, és fél 10-kor utolérte Menő Manót. Mekkora távolságra voltak ekkor Cserépfalutól? Mekkora sebességgel gyalogolt Menő Manó?

b) Menő Manó és Lóti-futi ismét a Bükk hegységben túrázott. Lóti-futi Cserépfaluból, Menő Manó pedig Bélapátfalváról indult ugyanazon a turistaúton reggel 7 órakor. Mekkora sebességgel gyalogolt Lóti-futi, ha fél 10-kor találkoztak, a turistaút hossza a két hely között 35 km, és Menő Manó $6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt?

c) Menő Manó reggel 7 órakor indult túrázni Cserépfaluból Lillafüredre $6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Lóti-futi 2 órával később indult társa után, de óránként 2 km-rel több utat tett meg, így egyszerre érkeztek Lillafüredre. Hány órakor értek Lillafüredre, és mennyi a Cserépfalu–Lillafüred-távolság a turistaúton?

1527 A futópályán 400 méter egy „kör”. Két futó közül az egyik $3{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a másik $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel fut. A pálya azonos pontjáról egyszerre indulnak.



a) Mennyi idő múlva találkoznak, ha ellentétes irányban indulnak el?

b) Mennyi idő múlva „körözi” le a gyorsabb futó a társát, ha azonos irányban indulnak el?

1528 Az iskolai csúcsot 2000 méteres futásban Hosszúláb tartja 6 perc 15 másodperccel. Fürgeláb szintén jó futó, ő 8 perc alatt teljesíti ugyanezt a távot. Mekkora előnyt adjon Hosszúláb Fürgelábnak a 2000 méteres távon, hogy egyszerre érkezzenek a célba, ha feltételezzük, hogy egyenletesen futnak?

1529 Egy anya 29 éves volt, amikor a fia született. 11 év múlva az életkora 1 évvel lesz kevesebb, mint a fia akkori életkorának kétszerese. Hány évesek most?

1530 Andi és Bandi reklámanyagok kézbesítését végzi. Andi egyedül 8 óra, Bandi 12 óra alatt tudná elvégezni a munkát.

a) Ha délután 15 órakor együtt kezdik a munkát, mikor fejezik be?

b) Mikor végeznek, ha Andi 15 órakor kezd, de Bandi csak 17 órakor csatlakozik hozzá?

c) Mikor lesz készen Bandi a munkával, ha 15 órakor együtt kezdenek, de Andi csak három órát tud dolgozni?

1531 Apa 12 órás munkával vágja fel a tűzifát, ez a munka a fiának 16 órát vesz igénybe.

a) Mennyi idő alatt végeznek a favágással, ha együtt dolgoznak?

b) Mennyi idő alatt végeznek a munkával, ha együtt kezdik, de 2 óra munka után az apa elmegy, majd egy óra elteltével visszatér a favágáshoz?

c) Mennyi idő alatt fejeződik be a munka, ha együtt kezdik, de a fiú keze 4 óra múlva megfájdul, és nem tudja folytatni a munkát?

1532 Ha kilenc kályhában öt és fél nap alatt tizenkét köbméter bükkfa ég el, mennyi nap alatt ég el tizenkét kályhában kilenc köbméter bükkfa? *(Karinthy Frigyes: Tanítom a kisfiamat)*

1533 Egy sakkversenyen minden versenyző egyszer játszik mindenkivel. A második forduló után az egyik versenyző betegség miatt kénytelen feladni a versenyt, így összesen 15-tel kevesebb mérkőzésre kerül sor, mint tervezték. Hány versenyző nevezett eredetileg a versenyre?

1534 Egy vállalat két üzeme 3 : 7 arányban részesedik a termelésből. Hány százalékkal növekszik a vállalat termelése, ha az első üzem 21%-kal, a második pedig 20%-kal növeli a teljesítményét?

1535 Egy osztály tanulóinak hatoda kollégista, fele helyben lakik a szüleinél, 7 fiú és 5 lány pedig bejáró.

a) Ha az osztály lány tanulóinak negyede bejáró, akkor hány lány van az osztályban?

b) Hány fiú van az osztályban?

1536 Szegeden a belvárosi hidat a két pillér három részre osztja: a két pillér közötti rész a híd harmadánál 20 méterrel kevesebb, a jobb oldali pillértől a partig terjedő rész pedig a híd negyedénél 5 méterrel rövidebb. A leghosszabb a bal oldali pillértől a bal partig tartó rész, amely a híd felénél csak 30 méterrel kevesebb.



a) Milyen hosszú a híd?

b) Mennyi idő alatt ér át a hídon egy 18 m hosszú kamion, ha 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad?

1537 Egy szemüvegeket forgalmazó cég reklámja szerint a vásárló annyi százalékkal csökkentheti a megvásárolt szemüvegkeret árát, ahány éves.

a) Hány százalékkal csökkentheti a kész szemüveg árát egy 17 éves vásárló, ha a kiválasztott lencse 60 000 Ft-ba, a keret pedig 25 000 Ft-ba kerül?

b) Hány évesnek kell lennie annak a vásárlónak, aki a teljes szemüveg árát 17%-kal szeretné csökkenteni egy ugyanolyan szemüveg vásárlása esetén, mint az előző?

c) Milyen értékű keret vásárlása esetén érhetné el egy 17 éves vásárló, hogy szemüvegének ára a teljes ár 10%-ával csökkenjen, ha 60 000 Ft-os lencsére van szüksége?

1538 Anita és Tímea barátnők, egymástól 6 km-re laknak. Ha meg akarják egymást látogatni, az út gyalog mindkettejüknek 1 órát vesz igénybe, ha kerékpárral mennek, akkor 20 perc alatt érnek a másik lakásához.

a) Egy alkalommal mindketten 6 órakor indultak el egymáshoz ugyanazon az útvonalon, Anita gyalog, Tímea pedig kerékpárral. Hány órakor találkoztak?

b) Egy másik alkalommal Tímea 7 órakor gyalog indult Anitához, aki 7 óra 10 perckor kerékpárral indult a barátnője elé. Mikor találkoztak?

c) Egy napon 8 órakor mindketten elindultak egymáshoz, Anita gyalog, Tímea pedig kerékpárral. Tímea valamit otthon felejtett, ezért az elindulás után 5 perccel visszafordult és hazament. Ott töltött 5 percet, majd újra elindult Anitához. Ezen a napon hány órakor találkoztak?

1539 Egy strand medencéjét két csapon át lehet feltölteni. Az első csap egyedül 3 óra alatt, a második 6 óra alatt tölti fel az üres medencét. A lefolyón a tele medence 4 óra alatt ürül ki.



a) A strand 8 órakor nyit. Hány órakor kell megnyitni a csapokat, ha mindkettőt üzembe helyezik, hogy nyitásra megteljen a medence?

b) Egy alkalommal az első csap meghibásodott, ezért csak a második megnyitása után 2 órával tudták üzembe helyezni, ettől kezdve hibátlanul működött. A második csap megnyitása után mennyi idővel telt meg a medence?

c) Egy napon mindkét csapot beindították, de 30 perc múlva észrevették, hogy a lefolyó is nyitva maradt, ekkor zárták el. A csapok megnyitása után mennyi idővel telt meg így a medence?

1540 Melyik az az $\overline{abcd}$ négyjegyű szám, amelyre $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 2010$?

1541 Egy apa 6 000 000 Ft-os nyereményét úgy szeretné a bankban elhelyezni, hogy a 11 és 13 éves fiai 18 éves korukban egyforma összeghez jussanak. Mennyi pénzt helyezzen el egy-egy fiú nevére, ha a kamat minden évben 12%?

1542 Szilvia és Tünde amatőr zenészek, mindketten gitároznak és énekelnek. Egy fellépésen az előadott dalok negyedét Szilvia énekelte és Tünde kísérte gitáron, a dalok tizedrészét Tünde énekelte és Szilvia gitározott, a dalok háromötöd részét együtt énekelték és mindketten gitároztak, a záró számot gitárkíséret nélkül énekelték.

a) Hány dalt adtak elő ezen a fellépésen?

b) Az előadott dalok hány százalékában énekelt Szilvia?

c) A fellépésért 62 000 Ft honoráriumot kaptak, amit egymás között olyan arányban osztottak el, hogy ki hány dal előadásában gitározott. Melyiküknek mennyi pénz jut?

1543 Hány éves ebben az évben az az ember, aki a múlt században született, és 2010-ben annyi idős, mint születési évében a számjegyek összege?

1544 Egy kerékpáros kiránduló társaság Tihanyból Keszthelyre, majd ugyanazon az úton vissza túrázott a Balaton-felvidéken. Hegynek felfelé 15 km-t, lejtőn lefelé 30 km-t, vízszintes talajon 20 km-t haladtak óránként. Reggel 7-kor indultak és délután 7 órára érkeztek vissza. Csak Keszthelyen tartottak egy órás pihenőt. Milyen hosszú utat jártak be ezen a napon?





1545 Egy könyv 365 érdekes történetet tartalmaz, az év minden napjára egyet. Gergő év elején elkezdte olvasni a könyvet, minden nap elolvasott legalább egy történetet, de előfordult néha, hogy egy nap 4, máskor 5 történetet is elolvasott. Még 41 nap volt hátra az évből, amikor kiolvasta a könyvet. Hány nap fordult elő, hogy 4, illetve 5 történetet olvasott el?

1546 99 tonna homokot 5 t és 7 t teherbírású teherautókkal szeretnénk elszállítani. Hányszor forduljanak az egyes autók, ha minden menetben telerakjuk őket?

Egyenletrendszerek

1547 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{aligned} 2x-y&=5\\ x+y&=4\end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} 3x-y&=1\\ 2x+y&=-1\end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} x-y&=-3\\ 2x+y&=-3\end{aligned}\right\}$; *d)* $\left.\begin{aligned} 3x+2y&=8\\ 4x-y&=7\end{aligned}\right\}$.

1548 Oldjuk meg behelyettesítő módszerrel a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{aligned} x+3y&=-5\\ 3x-2y&=7\end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} -3x+2y&=11\\ 4x+y&=11\end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} 3x+y&=6\\ 6x-2y&=-8\end{aligned}\right\}$; *d)* $\left.\begin{aligned} x+6y&=12\\ 4x+2y&=-7\end{aligned}\right\}$;

e) $\left.\begin{aligned} 4x+5y&=6\\ \frac{x-y}{3}&=5\end{aligned}\right\}$; *f)* $\left.\begin{aligned} 2x+10y&=15\\ \frac{x+5y}{3}&=4\end{aligned}\right\}$; *g)* $\left.\begin{aligned} 2x-7y&=11\\ \frac{x}{3}+y&=4\end{aligned}\right\}$; *h)* $\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot x-\frac{4}{3}\cdot y&=-30\\ \frac{x+y}{5}&=10\end{aligned}\right\}$.

1549 Oldjuk meg az egyenlő együtthatók módszerével a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{aligned} 2x+5y&=1\\ 2x-y&=-5\end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} 3x-2y&=8\\ 5x+2y&=24\end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} 4x+y&=-1\\ 8x-7y&=-29\end{aligned}\right\}$; *d)* $\left.\begin{aligned} 5x-2y&=10\\ 2x+y&=13\end{aligned}\right\}$;

e) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{2}-5y&=-3\\ \frac{x}{8}+10y&=15\end{aligned}\right\}$; *f)* $\left.\begin{aligned} 3x+y&=-4\\ 6x-\frac{y}{3}&=6\end{aligned}\right\}$; *g)* $\left.\begin{aligned} 4x-3y&=-2\\ -8x+6y&=4\end{aligned}\right\}$; *h)* $\left.\begin{aligned} 5x-7y&=12\\ 10x-14y&=21\end{aligned}\right\}$.

1550 Rózsa 10000 Ft-ból szeretne virágpalántákat vásárolni az erkélyládákba. Ha 12 muskátli és 25 petúnia palántát vesz, 160 Ft-ja marad; ha 21 muskátli és 14 petúnia palántát vesz, még 80 Ft-tal ki kell egészíteni a pénzét. Mennyibe kerül egy muskátli, illetve egy petúnia palánta?

1551 Károly motorcsónakkal kirándult Szegedről a 72 km-re lévő Csongrádra. Szombaton reggel 8 órakor elindult felfelé a Tiszán, délben megpihent Mártélyon. Onnan egy óra múlva indult tovább, így délután 6 órára ért Csongrádra. Másnap reggel ugyanakkor indult, mint az előző nap, és lefelé a folyón megállás nélkül haladva délután 2 órakor érkezett Szegedre. Mekkora a folyó sebessége, és mekkora sebességre képes Károly motorcsónakja állóvízben, ha menet közben végig a lehető legnagyobb sebességgel haladt?

1552 Egy laboratóriumban kétfajta sóoldat áll rendelkezésre. Ha az elsőből 4 cm^3-t és a másodikból 12 cm^3-t összekeverünk, 50%-os oldatot kapunk. Ha az elsőből 12 cm^3-t és a másodikból 4 cm^3-t keverünk össze, akkor 30%-os lesz az oldat. Hány százalékosak az eredeti oldatok?

1553 Egy kétjegyű szám első jegye nagyobb a másodiknál. Ha a számot elosztjuk a számjegyei összegével, hányadosul hetet, maradékul hatot kapunk. Ha a számjegyek különbségével osztjuk el a számot, a hányados tizenhat lesz, a maradék pedig három. Melyik ez a kétjegyű szám?

1554 A baromfiudvarban tyúkok, nyulak és kacsák élnek. Az állatoknak összesen 38 feje és 92 lába van. Melyik fajtából mennyi van, ha tudjuk, hogy a kacsák és nyulak számának aránya 3 : 2?

1555 Egy munka elvégzésére három gépet használnak. A munkát az első és második gép együtt 7,2 nap alatt, az első és harmadik gép együtt 9 nap alatt, a második és harmadik gép együtt 12 nap alatt végezné el. Hány nap alatt végeznék el a munkát a gépek külön-külön?

1556 Egy háromjegyű szám számjegyeinek az összege 20. Ha a számból 16-ot levonunk, az így nyert különbség fele olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei fordított sorrendben megegyeznek az eredeti szám számjegyeivel. Melyik ez a szám?

1557 Adott a következő egyenletrendszer, ahol b valós paraméter:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + by &= b - 2 \end{aligned}\right\}.$$

a) Milyen b paraméter érték esetén nincs megoldása az egyenletrendszernek?

b) Határozzuk meg a valós b paraméter értékét úgy, hogy a fenti egyenletrendszer mindkét megoldása pozitív valós szám legyen.

1558 Milyen egész értékeket vehet fel az m paraméter, ha tudjuk, hogy az

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 12 \\ 21x + 62y &= m \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásaként adódó valós számok nemnegatívak?

1559 Határozzuk meg az alábbi egyenlet pozitív egész megoldásait:

$$x^2 - 4y^2 = 116.$$

Vegyes feladatok

1560 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $7 \cdot (3x - 1) - 4 \cdot (4x + 5) - 6 \cdot (x - 13) = 5 \cdot (3x - 7) - 2 \cdot (x - 1)$;

b) $\dfrac{4x - 3}{15} - \dfrac{3x - 7}{10} + \dfrac{2x - 1}{6} = 5x - 1$;

c) $\dfrac{4x + 6}{2x + 1} + \dfrac{8}{4x + 2} + \dfrac{6}{6x + 3} = 7$;

d) $\dfrac{1 - x}{x + 4} + \dfrac{1 - x}{x - 4} + \dfrac{3x + 32}{x^2 - 16} = -2$.

1561 Mely valós számokra teljesülnek a következő egyenlőségek?

a) $4 \cdot |x| - 2x - 13 = 0$;

b) $3 \cdot |x - 4| + 5 = 2x$;

c) $\dfrac{2}{3} \cdot |x + 3| + 5x = 17$.

1562 Mely valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

a) $(3x - 5) \cdot (4x + 7) \leq 0$;

b) $3 \cdot (4x - 7) - 2 \cdot (5x - 3) - 4 \cdot (8x + 1) \geq -7x$;

c) $(2x + 7) \cdot (3x - 1) \cdot (4x + 3) \geq 0$;

d) $\dfrac{5x - 1}{7x + 5} \geq 0$;

e) $\dfrac{(2x - 3) \cdot (4x + 5)}{(3x - 7) \cdot (5x + 1)} < 0$;

f) $3 \cdot |x - 5| - 5 \geq 0$.

1563 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ahol p valós paraméter:

a) $4x + 5p - 3 = px$;

b) $3px + 2 = 6p + x$;

c) $25 + px - p^2 + 5x = 0$.

1564 Két kerékpáros egyszerre indult el Ágfalváról Bégfalvára. Az egyik sebessége 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másiké 24 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A gyorsabb 2 órával előbb ért Bégfalvára.

a) Hány óra alatt tette meg a két kerékpáros az utat?

b) Milyen messze van egymástól Ágfalva és Bégfalva?

1565 A tengervíz sótartalma 5%. A levesek sótartalma általában 2%. Halászlét akarunk főzni, úgy, hogy a tiszta vízhez tengervizet öntünk. Mennyi tengervízre van szükség 3 liter tiszta víz „sózásához"?



1566 Egy múlt században született ember születési évében az utolsó jegy 1-gyel nagyobb, mint az előtte álló számjegy. Ha az utolsó számjegyet elhagyjuk, 1761-gyel kisebb számot kapunk. Hány éves ez az ember 2010-ben?

1567 Három testvér életkorának összege 35 év. Amikor a középső született, a legidősebb 3 éves volt, egy évvel ezelőtt a legidősebb kétszer annyi idős volt, mint a legfiatalabb. Hány évesek most a testvérek?

1568 Egy iskola diákjai két autóbusszal mentek kirándulni. A két autóbuszon az utasok aránya 5 : 4. Ha az első autóbuszból 10-en átszállnak a másodikba, az utasok aránya 5 : 7 lesz. Hányan mentek kirándulni az iskolából?

1569 Juliska mamának kilenc unokája van, karácsonykor 39 000 Ft-ot költött az ajándékaikra. A lányok 5000 Ft-os, a fiúk 4000 Ft-os ajándékot kaptak. Hány lány és fiú unokája van Juliska mamának?

1570 Egy dobozban 200 golyó van, piros és kék vegyesen. Ha hozzáteszünk 27 kéket és 53 pirosat, akkor ugyanannyi piros golyó lesz, mint kék. Eredetileg hány piros és hány kék golyó volt a dobozban?



9.6. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Tengelyes tükrözés

1571 Vegyünk fel egy hegyesszögű háromszöget. Tükrözzük a háromszöget

a) egyik oldalának egyenesére; *b)* egyik belső szögfelezőjének egyenesére;

c) egyik külső szögfelezőjének egyenesére; *d)* egyik magasságvonalának egyenesére.

1572 Vegyünk fel egy tompaszögű háromszöget. Tükrözzük a háromszöget a

a) legrövidebb; *b)* leghosszabb

oldalának egyenesére. Milyen síkidomot alkot a kiindulási, valamint a képháromszög egyesítése?

1573 Szerkesszünk deltoidot, ha a szimmetriatengelyére illeszkedő átlója 3 cm, egy-egy oldala pedig 3,5 cm, illetve 5,5 cm hosszúságú.

1574 Tükrözzük az $A(3; 1)$, $B(-2; 5)$, valamint a $C(-4; -2)$ pontok által meghatározott háromszöget az

a) x tengelyre; *b)* y tengelyre.

Írjuk fel a tükörkép csúcsainak koordinátáit.

1575 Tükrözzük az $A(x; y)$ pontot az x tengelyre, majd a tükörképet az y tengelyre. Írjuk fel a második tükrözés után kapott pont koordinátáit. Fogalmazzuk meg, hogy milyen geometriai transzformációval helyettesíthető két, egymásra merőleges egyenesre vonatkozó tükrözés egymás utáni végrehajtása.

1576 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) Van olyan háromszög, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van.

b) Van olyan háromszög, amelynek pontosan három szimmetriatengelye van.

c) Van olyan háromszög, amelynek háromnál több szimmetriatengelye van.

d) Van olyan síkidom, amelynek végtelen sok szimmetriatengelye van.

e) Minden rombusznak két szimmetriatengelye van.

f) Van olyan konkáv négyszög, amely tengelyesen szimmetrikus.

g) Ha egy háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus.

h) Ha egy háromszögnek van két egyenlő szöge, akkor tengelyesen szimmetrikus.

i) Ha egy négyszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus.

j) Ha egy négyszögnek van két egyenlő szöge, akkor tengelyesen szimmetrikus.

k) A rombusz tengelyesen szimmetrikus.

l) Ha egy paralelogramma tengelyesen szimmetrikus, akkor rombusz.

m) A deltoid szimmetriatengelyére mindig a hosszabb átló illeszkedik.

n) Ha egy sokszög tengelyesen szimmetrikus, akkor szabályos.

o) Ha egy sokszög szabályos, akkor tengelyesen szimmetrikus.

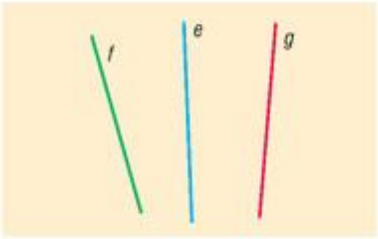
p) Van olyan tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelynek szimmetriatengelye a négyszögnek pontosan egy csúcsán megy át.

q) A szabályos sokszög bármely szimmetriatengelye tartalmazza a sokszög legalább egy csúcsát.

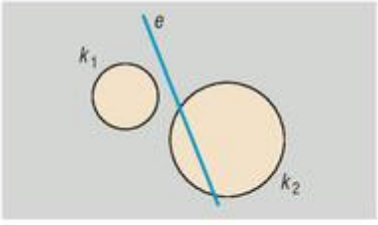
r) Minden szabályos sokszögnek van olyan átlója, amelynek egyenese szimmetriatengelye a sokszögnek.



1577 Adottak az e, f, g egyenesek. Adjunk szerkesztési eljárást olyan szabályos háromszög szerkesztésére, amelynek az e egyenes szimmetriatengelye, alapjának egy-egy végpontja pedig az f, illetve g egyenesre illeszkedik. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.



1578 Adott az e egyenes, valamint a k_1 és a k_2 kör. Adjunk szerkesztési eljárást olyan egyenlő szárú háromszög szerkesztésére, amelynek az e egyenes szimmetriatengelye, alapjának egy-egy végpontja pedig a k_1, illetve a k_2 körre illeszkedik. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.



1579 Adjunk szerkesztési eljárást deltoid szerkesztésére, ha adott a szimmetriatengelyére illeszkedő két csúcsa, továbbá két kör, amelyek mindegyike tartalmazza a deltoid egy-egy további csúcsát. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.

1580 Adjunk szerkesztési eljárást deltoid szerkesztésére, ha adott a szimmetriatengelyére illeszkedő két csúcsa, az egyik adott csúcsnál található szöge, továbbá

a) az adott szög melletti egyik oldala; *b)* az adott szöggel szemközti egyik oldala.

1581 Adjunk szerkesztési eljárást rombusz szerkesztésére, ha adott az egyik átlójának két végpontja, valamint az egyik adott pontnál található szöge.

1582 Adott két kör, valamint egy egyenes. Adjunk szerkesztési eljárást olyan szimmetrikus trapéz szerkesztésére, amelynek az adott egyenes szimmetriatengelye, valamint szárai húrt alkotnak egy-egy körben. Vizsgáljuk meg a feladat megoldásainak számát az adott alakzatok különböző helyzeteiben.

1583 Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 30°-os, akkor a háromszög egyik befogója feleakkora, mint az átfogója.

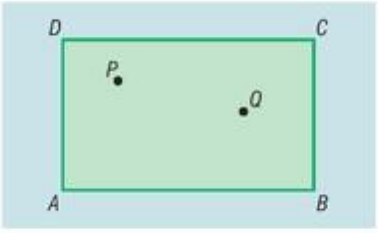
1584 Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei 30°-osak. A szárak felezőmerőlegesei az alapot három részre osztják. Számítsuk ki az egyes részek hosszát, ha a háromszög alapja 18 cm.

1585 Az ABC háromszögben a B csúcsnál 30°-os szög, az A csúcsnál tompaszög van. Jelölje az A, B, C pontoknak a háromszög C csúcsából induló magasságvonalára vonatkozó tükörképét rendre A', B' és C'. Igazoljuk, hogy ha az $A'CB$ szög 90°-os, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú.

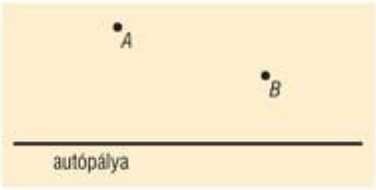
1586 Az $ABCD$ téglalapot tükrözzük a BD átlójára. Milyen tulajdonságú négyszöget határoz meg az eredeti és a tükörképként kapott téglalap közös része?

1587 Az ABC háromszög K belső pontjának AC egyenesre vonatkozó tükörképe P, BC egyenesre vonatkozó tükörképe Q. Bizonyítsuk be, hogy $AP = BQ$ akkor és csak akkor teljesül, ha K illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére.

1588 Az $ABCD$ téglalap alakú biliárdasztalon két golyó található: P és Q. Adjunk szerkesztési eljárást arra vonatkozóan, hogy milyen irányba kell ellökni a P golyót, ha azt akarjuk, hogy (más oldal érintése nélkül) az AB oldalról visszapattanva éppen eltalálja a Q golyót?



1589 Az A és B település egy egyenes autópálya ugyanazon oldalán helyezkedik el. Adjunk szerkesztési eljárást arra, hogy hová kell építeni a pálya mentén a bevásárlóközpontot, ha azt akarjuk, hogy az A és B településekből a bevásárlóközpontig megépítendő utak hosszának összege a lehető legkisebb legyen?



1590 Az ABC háromszög A csúcsához tartozó külső szögfelezőjén kijelölünk egy A-tól különböző P pontot. Bizonyítsuk be, hogy a PBC háromszög kerülete nagyobb, mint az ABC háromszög kerülete.

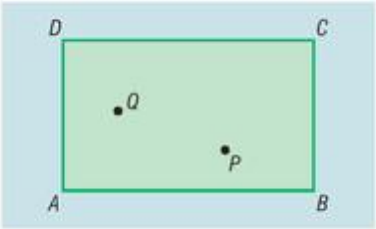
1591 Adjunk szerkesztési eljárást az ABC szabályos háromszög szerkesztésére, ha adott az A csúcshoz tartozó belső szögfelezőjének egyenese, továbbá egy egyenes, amelyre illeszkedik a B csúcs, valamint egy kör, amely átmegy a C csúcson.

1592 Az $ABCD$ téglalap alakú biliárdasztalon két golyó található: P és Q. Adjunk szerkesztési eljárást arra, hogy milyen irányba kell ellökni a P golyót, ha azt akarjuk, hogy az előbb az

a) AB, majd az AD oldalt érintve;

b) AB, majd a BC, CD, végül a DA oldalt érintve

eltalálja a Q golyót?



1593 Az $ABCD$ téglalap alakú biliárdasztalon elhelyezünk egy golyót, majd úgy lökjük meg, hogy az előbb az AB, majd a BC oldallal ütközve halad tovább. Bizonyítsuk be, hogy a golyó az első ütközés előtt, valamint a második ütközés után párhuzamos egyeneseken mozog.

1594 Az $ABCD$ téglalap A csúcsának a BD átló egyenesére vonatkozó tükörképét jelölje F.

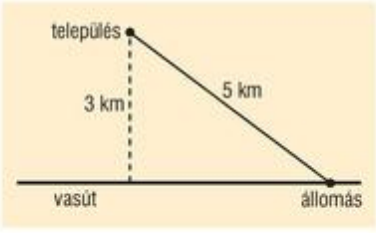
a) Bizonyítsuk be, hogy BF merőleges DF-re.

b) Igazoljuk, hogy ha a téglalap nem négyzet, akkor a B, F, C, D pontok valamilyen sorrendben szimmetrikus trapézt alkotnak.

1595 Az ABC szabályos háromszög AB oldalán tűzzünk ki egy P pontot. Mutassuk meg, hogy ennek a P pontnak az AC és BC oldalaktól mért távolságainak összege a P pont helyzetétől függetlenül állandó.

1596 Egy szabályos háromszög oldala 6 cm. A háromszög belsejében kijelölünk egy P pontot. Mutassuk meg, hogy a P pontnak a háromszög oldalaitól mért távolságösszege a P pont helyzetétől függetlenül állandó. Számítsuk ki az állandó értékét.

1597 Egy hosszú egyenes vasúti pálya mentén, a pályától 3 km távolságra található egy település. A legközelebbi vasútállomás a pálya mentén légvonalban 5 km távolságra van a településtől. A falu egy EU-s pályázaton annyi pénzt nyert, amelyből pontosan 8 km hosszú útszakasz építhető a vasútállomáshoz. Hogyan kell megépíteni az utat, ha annak két szakaszból kell állnia; egyik a falutól a vasúti pályáig tart, a másik a vasút mellett egyenesen az állomásig?



1598 Egy hegyesszög belsejében adott egy A pont. Adjunk szerkesztési eljárást a szög egy-egy szárán található olyan P és Q pontok szerkesztésére, amelyekre az $AP + PQ$ összeg minimális.

1599 Adott egy hegyesszög és belsejében egy A pont. Adjunk szerkesztési eljárást olyan ABC háromszög szerkesztésére, amelynek B és C csúcsa az adott szög egy-egy szárára illeszkedik, kerülete pedig a lehető legkisebb.



1600 Az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög van. A háromszög köré írt körének C-t nem tartalmazó AB ívén vegyünk fel egy tetszőleges M pontot. Az M pont AC egyenesre vonatkozó tükörképét jelölje P, BC egyenesre vonatkozó tükörképét jelölje Q.

a) Bizonyítsuk be, hogy a P, C, Q pontok egy egyenesre illeszkednek.

b) Hogyan kell megválasztanunk az M pontot ahhoz, hogy a PQ szakasz hossza a legkisebb, illetve legnagyobb legyen?

c) Bizonyítsuk be, hogy ha az M pont a C pontnak az AB egyenesre vonatkozó tükörképe, akkor a PQ egyenes C-ben érinti az ABC háromszög köré írt kört.

1601 Géza bácsi az elegendő nagy termőföldjén egy 1 hektáros, háromszög alakú földterületre szeretne gyümölcsfákat ültetni. A birtoka 200 méter hosszan egy egyenes bekötőúttal határos, amely a tervei szerint a gyümölcsöst is határolja majd. A vadkárok elkerülése érdekében a leendő gyümölcsöst kerítéssel szeretné elkeríteni.

a) Hogyan kell megválasztani a földterület méreteit, ha Géza bácsi a lehető legkevesebb kerítést szeretné felhasználni?

b) Legalább hány méter kerítést kell vásárolnia, ha a bekötőút mellett is ki kell építeni a kerítést? A számított értéket gyakorlati okokból 5%-kal növeljük meg, majd a kapott eredményt egész méterre kerekítve adjuk meg.

1602 Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalán kijelölünk egy P pontot.

a) Adjunk szerkesztési eljárást olyan minimális kerületű PQR háromszög szerkesztésére, amelynek Q és R csúcsa a háromszög egy-egy, a P-t nem tartalmazó oldalára illeszkedik.

b) Hogyan kell az AB oldal P pontját megválasztani, ha azt akarjuk, hogy az *a)* feladatban szereplő minimális kerületű PQR háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen?

c) Vizsgáljuk meg az *a)* feladat megoldhatóságát, ha az ABC háromszög derék-, illetve tompaszögű.

1603 Az $ABCD$ téglalap alakú telek méretei: $AB = 21$ m, $BC = 28$ m. A telek rafinált tulajdonosa az AB oldalon kijelölt egy P pontot, és elhatározta, hogy elkerít egy olyan négyszög alakú részt, amelynek csúcsai a téglalap egy-egy oldalára illeszkednek, egyik csúcsa pedig éppen P.

a) Bizonyítsuk be, hogy akárhol jelöljük is ki a P pontot az AB oldalon, a legrövidebb kerítéssel elkeríthető telekrész körbekerítéséhez mindig ugyanolyan hosszúságú kerítés szükséges.

b) Számítsuk ki a minimális kerületű telekrész elkerítéséhez szükséges kerítés hosszát.

c) Adjunk szerkesztési eljárást a lehető legrövidebb kerítést igénylő négyszög csúcsainak szerkesztésére, ha egyik csúcsa az adott P pont.

1604 Az ABC háromszög köré írt kör középpontját tükrözzük a háromszög oldalegyeneseire, így kapjuk a P, Q, R pontokat.

a) Bizonyítsuk be, hogy az ABC, valamint a PQR háromszögek egybevágók.

b) Adjunk szerkesztési eljárást az ABC háromszög szerkesztésére, ha adottak a P, Q, R pontok.

Középpontos tükrözés

1605 Tükrözzük az $A(3; 1)$, $B(-2; 5)$, valamint a $C(-4; -2)$ pontok által meghatározott háromszöget az

a) origóra;

b) a $(0; 4)$ koordinátájú pontra;

c) az $(1; 1)$ koordinátájú pontra;

d) a $(2; -1)$ koordinátájú pontra;

e) a $(-1; -2)$ koordinátájú pontra;

f) a $(-1; 7)$ koordinátájú pontra.

Írjuk fel a tükörkép csúcsainak koordinátáit.

1606 Tükrözzünk egy háromszöget egyik oldalának felezőpontjára. Milyen alakzatot határoz meg a két háromszög egyesítése? Válaszunkat indokoljuk.

1607 Tükrözzünk egy trapézt egyik szárának felezőpontjára. Milyen alakzatot határoz meg a két trapéz egyesítése?

1608 Vegyünk fel egy konvex négyszöget, majd tükrözzük egyik oldalának felezőpontjára. Számítsuk ki a két négyszög egyesítéséből álló hatszög szögeit, ha a kiindulásul vett négyszög szögei ismertek. Bizonyítsuk be, hogy a szóban forgó hatszög szemközti oldalai párhuzamosak.

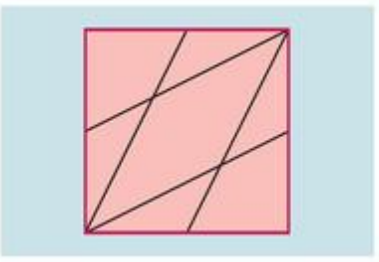
1609 Vegyünk fel két egyenlő hosszúságú párhuzamos szakaszt. Szerkesszünk olyan pontot, amelyre vonatkozó középpontos tükrözés az egyik szakaszt a másikba viszi át.

1610 Szerkesszünk egy paralelogrammát. Egy tetszőleges, de a csúcsoktól különböző pontot tükrözzünk a paralelogramma egyik csúcspontjára, majd a tükörképet tükrözzük a szomszédos csúcsra és így tovább, összesen négy tükrözést végezve. Mit tapasztalunk?

1611 András és Barnabás egy szabályos hatszög alakú asztalon a következő játékot játssza: felváltva helyeznek el az asztalon 1 eurós érméket úgy, hogy azok egymást nem fedhetik, és a lerakott érméknek teljes terjedelmükkel az asztalon kell lenniük. Az veszít, aki nem tud már a szabályoknak megfelelően érmét elhelyezni az asztalon. A játékot Barnabás kezdi. Nyerhet-e valamelyik játékos, ha ügyesen játszik?

1612 Az e és f egyenesek párhuzamosak, az O pont pedig egyenlő távolságra van a két egyenestől. Az O ponton keresztül húzott egyenes az e egyenest P-ben, az f egyenest Q-ban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $OP = OQ$.

1613 Az ábrán egy négyzet két szemközti csúcsát kötöttük össze oldalfelező pontokkal. Ezzel a négyzetet háromszögekre és három négyszögre bontottuk. Milyen szimmetriatulajdonságokkal rendelkeznek a keletkező négyszögek? Milyen négyszögek keletkeznek? (➡)



1614 Bizonyítsuk be, hogy ha a paralelogramma középpontján át egyenest húzunk, akkor azzal a paralelogrammát két olyan részre bontjuk, amelyek középpontos tükrözéssel egymásba vihetők.

1615 Adott egy konvex szögtartomány, valamint a belsejében egy pont. Adjunk szerkesztési eljárást a ponton átmenő olyan egyenes szerkesztésére, amelynek a szögtartományba eső szakaszát az adott pont felezi.

1616 Adott egy konvex szögtartomány, és azon kívül egy rögzített pont. Adjunk szerkesztési eljárást az adott ponton átmenő olyan egyenes szerkesztésére, amelynek a közelebbi szögszárig terjedő szakasza egyenlő a szögtartományba eső szakaszával.

1617 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) Nincs középpontosan szimmetrikus háromszög.

b) A középpontosan szimmetrikus négyszögek mind konvexek.

c) Van olyan középpontosan szimmetrikus négyszög, amelyik konkáv.

d) Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor átlói egyenlők.

e) Ha egy négyszög átlói egyenlők, akkor a négyszög középpontosan szimmetrikus.

f) A középpontosan szimmetrikus négyszög átlói felezik egymást.

g) A középpontosan szimmetrikus négyszögben van két egyenlő nagyságú szög.

h) Van olyan tengelyesen szimmetrikus sokszög, amelyik középpontosan is szimmetrikus.



i) Ha egy sokszög tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus, akkor a szimmetriatengelye tartalmazza a középpontos szimmetria középpontját.

j) Ha egy négyszög tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus, akkor rombusz.

k) Nincs olyan trapéz, amelyik középpontosan szimmetrikus.

l) Van olyan deltoid, amelyik középpontosan szimmetrikus.

m) Van olyan szimmetrikus sokszög, amelynek több középpontja van.

n) Minden szabályos sokszög középpontosan szimmetrikus.

o) A páros oldalszámú szabályos sokszögek középpontosan szimmetrikusak.

1618 Vegyünk fel két metsző helyzetű kört. Adjunk szerkesztési eljárást olyan szelő szerkesztésére, amely átmegy a körök egyik metszéspontján, valamint a két körbe eső egy-egy szakasza egyenlő hosszúságú. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.

1619 Adott két koncentrikus kör, valamint a kisebb körön egy rögzített pont. Adjunk szerkesztési eljárást olyan egyenes szerkesztésére, amely áthalad a rögzített ponton, és belőle a két kör három egyenlő hosszúságú szakaszt metsz ki. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.

1620 Adott egy e egyenes, valamint egy k kör, továbbá az F_1 és F_2 pontok. Adjunk szerkesztési eljárást olyan ABC háromszög szerkesztésére, melynek A csúcsa az e egyenesre, B csúcsa a k körre illeszkedik, továbbá F_1 az AC, F_2 a BC oldal felezőpontja. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.

1621 Adott négy kör (k_1, k_2, k_3, k_4), amelyek közül semelyik kettő nem koncentrikus, valamint egy, a középpontok mindegyikétől különböző O pont. Adjunk szerkesztési eljárást olyan O középpontú paralelogramma szerkesztésére, amelynek csúcsai adott sorrendben a megfelelő körön fekszenek. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.

1622 Adott egy konvex szögtartomány, és belsejében egy pont. Adjunk szerkesztési eljárást olyan négyzet szerkesztésére, amelynek az adott pont a középpontja, két átellenes csúcsa pedig egy-egy szögszáron található. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.

1623 Adott egy konvex szögtartomány, és belsejében egy pont. Határozzuk meg azt az egyenest, amely az adott ponton áthalad, a szögtartományból pedig a lehető legkisebb területű háromszöget metszi le.

1624 Egy paralelogrammába másik paralelogrammát írunk úgy, hogy a beírt négyszög minden csúcsa illeszkedik a tartalmazó négyszög egy-egy oldalára. Bizonyítsuk be, hogy a két paralelogramma középpontja egybeesik.

1625 *a)* Szerkesszünk ötszöget, ha megfelelő sorrendben adottak az oldalfelező pontjai.

b) Általánosítsuk az *a)* feladatot n oldalú sokszögre, ha n páratlan szám.

c) Vizsgáljuk meg a feladat megoldhatóságát páros oldalszámú sokszög esetén.

1626 A Bergengóciában található Kerekerdő a nevéhez méltóan jól modellezhető egy 6 km sugarú kör alakú síkidommal. Az erdő középpontjától 10 km távolságra található falu lakói egyenes utat terveznek, amely a faluból indul, átvág az erdőn, és másik vége az erdő szélén van. Mivel a falu polgárai elég félősek és a Kerekerdőnek nincs túl jó híre, ezért a tervezett útnak pontosan a fele eshet csak az erdőbe.

a) Adjunk szerkesztési eljárást a falu lakói számára a kívánt út megépítésére.

b) Hány olyan út van, amely megfelel a feladat feltételeinek?

c) Egy másik falu az erdő középpontjától x km távolságra található. Vizsgáljuk meg, hogy x függvényében hány utat lehet építeni a faluból az erdőn keresztül, ha az útépítés feltételei változatlanok.



1627 Adott az ABC hegyesszögű háromszög, valamint belsejében egy P pont. Tükrözzük a P pontot a háromszög BC, AC, AB oldalának felezőpontjára, a tükörképeket jelölje rendre A', B' és C'.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ szakaszok hossza független a P pont választásától.

b) Bizonyítsuk be, hogy az AA', BB' és a CC' szakaszok egy pontban metszik egymást.

Háromszögek, négyszögek néhány nevezetes vonala (súlyvonal, magasságvonal, középvonal)

1628 Fejezzük ki a következő alakzatok középvonalainak hosszát az alakzat oldalainak segítségével:

a) háromszög; *b)* paralelogramma;

c) trapéz esetén a szárak felezőpontját összekötő középvonal.

1629 Peti egy kartonból kivágott háromszöget a középvonalai mentén feldarabolt, így négy kisebb háromszöget kapott. A négy háromszög kerületét megmérte, majd az eredményeket összeadta, így összegként 57 cm-t kapott. Mekkora az eredeti háromszög kerülete?

1630 A háromszög alakú Nagyerdő oldalai 3 km, 4 km, 6 km. Az erdő belseje egy vadászkunyhót rejt, amelyet az erdő minden csúcsával egyenes út köt össze. Minden út felezőpontjába egy-egy magasles épült, amelyek közül bármely kettőt szintén egyenes ösvénnyel kötöttek össze. A vadász minden reggel autóval elmegy az egyik magasleshez, majd gyalog végigjárja valamennyit. Sétája közben végig a kiépített ösvényen halad. Hány percig tart a vadásznak a magasleseket érintő séta, ha óránként 4 km-t tud megtenni?

1631 Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög alapú gesztenyetortát valamelyik súlyvonala mentén szétvágunk, akkor a kapott részek két testvér között igazságosan szétoszthatók, azaz egyik sem kap nagyobb alapterületű tortát, mint a másik.

1632 Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög alapú gesztenyetortát a csúcsoktól a súlypontig terjedő egyenes vágásokkal szétvágunk, akkor a kapott részek három testvér között igazságosan szétoszthatók, azaz mindegyik szelet alapterülete ugyanakkora.

1633 Hogyan lehet egy háromszög alapú gesztenyetortát négy testvér között egyenes vágásokkal felosztani, ha azt akarjuk, hogy a testvérek által kapott szeletek pontosan ugyanolyan méretűek legyenek? Válaszunkat indokoljuk.

1634 Milyen alakzaton találhatók azok a pontok egy háromszög belsejében, amelyeket a háromszög egy rögzített oldalának két végpontjával összekötve, a háromszög két egyenlő területű részre bomlik?

1635 Számítsuk ki, hogy a háromszög oldalai mekkora szögekben látszódnak a háromszög magasságpontjából, ha a háromszög két szöge

a) 60°, 60°; *b)* 60°, 80°; *c)* 60°, 20°.

1636 Egy hegyesszögű háromszög két magasságvonala 20°-os szögben metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögnek van 20°-os szöge.

1637 Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög bármely oldalának felezőpontja egyenlő távolságra van a másik két oldalhoz tartozó magasságvonal talppontjaitól.

1638 Az ABC háromszög A csúcsánál 60°-os szög van. Az A-ból induló szögfelező a B, illetve C csúcsokból induló magasságvonalakat rendre a D, illetve E pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy ha M a háromszög magasságpontját jelöli, akkor az EDM háromszög szabályos.



1639 Peti kartonból kivágott egy paralelogrammát, amelynek egyik oldala 12 cm, majd a paralelogrammát egyik középvonala mentén két részre vágta. A kapott két négyszög kerületének összege 74 cm. Mekkora lehet az eredeti paralelogramma másik oldala?

1640 Peti lemérte egy paralelogramma két középvonalát, majd a hosszukat összeadta, így eredményül 30 cm-t kapott. Számítsuk ki a paralelogramma kerületét.

1641 Hogyan lehet egy paralelogrammát minél kevesebb vágással két egyenlő területű részre bontani? Válaszunkat indokoljuk.

1642 Egy trapéz szárait összekötő középvonal hossza 15 cm. A trapéz két alapjának hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 2 : 3. Számítsuk ki a trapéz alapjainak hosszát.

1643 Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza 5 cm és 13 cm. A szárakat összekötő középvonal a trapézt két kisebb trapézra bontja. Számítsuk ki a keletkező trapézok szárakat összekötő középvonalainak hosszát.

1644 *a)* Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög egy csúcsánál hegyesszög van, akkor a csúcsból kiinduló súlyvonal nagyobb, mint a csúccsal szemközti oldal fele.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög egy csúcsánál tompaszög van, akkor a csúcsból kiinduló súlyvonal kisebb, mint a csúccsal szemközti oldal fele.

1645 Béla bácsi háromszög alakú kertjének két csúcsát egyenes út köti össze a szemközti oldal felezőpontjával. A telek körüli kerítés felújításakor Béla bácsi lemérte a két út hosszát. Eredményül 24 métert, illetve 30 métert kapott. Közben megállapította, hogy a két út derékszögben metszi egymást. A számításokat egy tizedesjegy pontossággal elvégezve válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

a) Mekkorák a telek oldalai?

b) Mennyi kerítés szükséges a telek körbekerítéséhez?

c) Lehetséges-e, hogy Béla bácsi a *b)* feladatban kiszámolt mennyiségű kerítéssel mégsem tudja körbekeríteni a telkét? Válaszunkat indokoljuk.

1646 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalaiból újabb háromszög szerkeszthető.

1647 Van-e a szabályos háromszögön kívül olyan háromszög, amelynek a három súlyvonala ugyanolyan hosszúságú? Válaszunkat indokoljuk.

1648 Van-e a szabályos háromszögön kívül olyan háromszög, amelynek három magassága ugyanolyan hosszúságú? Válaszunkat indokoljuk.

1649 Bizonyítsuk be, hogy ha egy hegyesszögű háromszög beírt körének középpontja és súlypontja egybeesik, akkor a háromszög szabályos.

1650 A hegyesszögű ABC háromszög M magasságpontját tükrözzük az AB oldal F felezőpontjára, így kapjuk az M' pontot.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $AM'BC$ négyszögben az A és B csúcsoknál 90°-os szög van.

b) Bizonyítsuk be, hogy M' illeszkedik az ABC háromszög köré írt körre.

1651 Bizonyítsuk be, hogy a trapéz átlóinak felezőpontját összekötő szakasz párhuzamos a trapéz alapjaival (amennyiben a két felezőpont nem esik egybe). Számítsuk ki az átlók felezőpontját összekötő szakasz hosszát, ha a trapéz alapjai a és b.

1652 *a)* Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex négyszög oldalfelező pontjai középpontosan szimmetrikus négyszöget határoznak meg. Igaz-e hasonló állítás konkáv négyszögekre?

b) Milyen arányban osztják egymást egy négyszög középvonalai?



1653 Egy konvex négyszög két szemközti oldalának hossza 8 cm és 10 cm.

a) Bizonyítsuk be, hogy a másik két oldal felezőpontjai, valamint az átlók felezőpontjai paralelogrammát alkotnak.

b) Mekkora a keletkező paralelogramma kerülete?

c) Bizonyítsuk be, hogy a négyszög középvonalainak metszéspontja egybeesik az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjával.

1654 Milyen szimmetriatulajdonságokkal rendelkezik egy szimmetrikus trapéz oldalfelező pontjai által meghatározott négyszög? Milyen feltételek mellett alkot e négy pont négyzetet?

1655 Egy háromszögben az ugyanazon csúcsból kiinduló magasságvonal és súlyvonal a csúcsnál lévő szöget három egyenlő részre osztja. Számoljuk ki a háromszög szögeit.

1656 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalainak négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegének háromnegyed részével.

1657 *a)* Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha s_a, s_b, s_c súlyvonalaira teljesül, hogy $s_a^2 + s_b^2 = 5 \cdot s_c^2$.

b) Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög A és B csúcsából induló súlyvonalai akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a, b, c oldalaira $a^2 + b^2 = 5 \cdot c^2$ teljesül.

1658 Adott az $ABCD$ konvex négyszög. Tükrözzük a négyszög BC oldalának Q felezőpontjára a négyszöget, valamint a Q pontot tartalmazó középvonalát. A tükrözés az A, D pontokat az A', D' pontokba viszi át.

a) Bizonyítsuk be, hogy a négyszög, valamint a tükörképének egyesítése által alkotott $ABD'A'CD$ hatszög szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők.

b) Bizonyítsuk be, hogy az $ABD'A'CD$ hatszög AD' és $A'D$ átlója is kétszer akkora, mint a négyszög PQ középvonala.

c) Bizonyítsuk be, hogy a négyszög középvonala legfeljebb a középvonal végpontjaira nem illeszkedő négyszögoldalak számtani közepe.

Forgatás

1659 Vegyünk fel egy egyenest, valamint egy rá illeszkedő pontot. Forgassuk el az egyenest a pont körül

a) 30°-kal; *b)* 60°-kal; *c)* −90°-kal; *d)* −180°-kal.

1660 Vegyünk fel egy egyenest, valamint egy rá nem illeszkedő pontot. Forgassuk el az egyenest a pont körül

a) 60°-kal; *b)* −60°-kal; *c)* 180°-kal; *d)* 300°-kal.

1661 Szerkesszünk szabályos háromszöget, majd forgassuk el egyik csúcsa körül

a) 60°-kal; *b)* −60°-kal.

Milyen alakzatot határoz meg az eredeti, valamint a tükörkép háromszög egyesítése?

1662 Forgassunk el egy négyzetet valamelyik csúcsa körül

a) −1980°-kal; *b)* 4410°-kal.

1663 Forgassuk el az $A(3; 1)$, $B(-2; 5)$, $C(-4; -2)$ pontok által meghatározott háromszöget az origó körül

a) 90°-kal; *b)* −90°-kal; *c)* 180°-kal; *d)* −180°-kal; *e)* 270°-kal; *f)* −270°-kal.

Írjuk fel a képháromszög csúcsainak koordinátáit.



1664 Vegyünk fel a síkon két pontot. Hány olyan pont található a síkban, amely körül az egyik pont a másikba forgatható? Milyen alakzatot határoz meg az ilyen tulajdonságú pontok halmaza?

1665 Vegyük fel a síkon az A és B pontokat, valamint az egyiket sem tartalmazó e egyenest. Forgassuk el a B pontot az A körül úgy, hogy képe illeszkedjen az e egyenesre. Hány olyan pontja lehet az e egyenesnek, amelybe a B pont az A körüli forgatással átvihető?

1666 Vegyünk fel két pontot a síkon (A és B), valamint egy e egyenest, amely a pontok egyikét sem tartalmazza. Forgassuk el az A pont körül az e egyenest úgy, hogy képe átmenjen a B ponton.

1667 Vegyünk fel a síkon két egyenlő hosszúságú, nem párhuzamos szakaszt. Szerkesszünk olyan pontot, amely körül az egyik szakasz a másikba forgatható.

1668 Vegyük fel az A és B pontokat. Szerkesszünk olyan pontot, amely körül az A pont 90°-os forgatással a B pontba vihető át.

1669 Melyek azok a forgatások, amelyek helyben hagynak egy szabályos

a) háromszöget; *b)* négyszöget; *c)* n szöget?

1670 Adott egy konvex szög, és belsejében egy pont. Adjunk szerkesztési eljárást olyan szabályos háromszög szerkesztésére, amelynek egyik csúcsa az adott pont, egy oldalának két végpontja pedig illeszkedik a szög egy-egy szárára.

1671 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) Van olyan háromszög, amelyik forgásszimmetrikus.

b) Ha egy háromszög forgásszimmetrikus, akkor egyenlő szárú.

c) Ha egy síkidom forgásszimmetrikus, akkor végtelen sok olyan szög adható meg, amellyel az alakzat önmagába forgatható.

d) Ha egy síkidom forgásszimmetrikus, akkor van olyan legkisebb pozitív szög, amellyel az alakzat a középpont körül elforgatva önmagába megy át.

e) Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor középpontosan szimmetrikus.

f) Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor forgásszimmetrikus is.

g) Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor szabályos.

h) Minden szabályos sokszög forgásszimmetrikus.

i) Van olyan szabályos sokszög, amely 20°-os forgatással önmagába vihető.

j) Ha egy síkidom 20°-os forgatással önmagába vihető, akkor 3000°-os forgatással is önmagába vihető.

k) Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor minden szöge egyenlő.

l) Van olyan konkáv négyszög, amely forgásszimmetrikus.

m) Van olyan konkáv sokszög, amely forgásszimmetrikus.

1672 Adjuk meg a következő, fokokban megadott szögek mértékét radiánban:

a) 15°; *b)* 30°; *c)* 45°; *d)* 60°; *e)* 90°; *f)* 180°;

g) 240°; *h)* 1250°; *i)* 7560°.

1673 Adjuk meg a következő radiánban megadott szögek mértékét fokban:

a) 1; *b)* 3; *c)* $\frac{\pi}{12}$; *d)* $\frac{\pi}{5}$; *e)* $\frac{\pi}{6}$; *f)* $\frac{3\pi}{2}$;

g) $\frac{4\pi}{3}$; *h)* 76π; *i)* $\frac{2000\pi}{3}$.

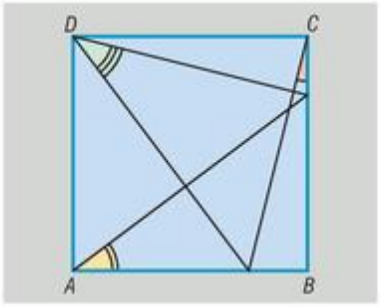
1674 Egy óra nagymutatója 2,5 cm hosszú. Mekkora utat tesz meg a végpontja, illetve mekkora területet súrol a mutató

a) 20 perc; *b)* fél óra; *c)* 35 perc; *d)* 45 perc alatt?

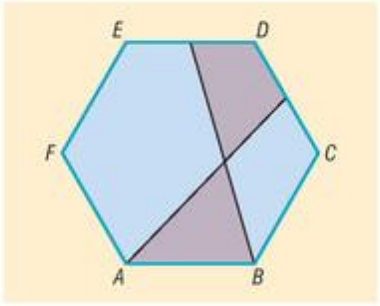
1675 Egy kör alakú park sugara 50 méter. A parkot egy egyenes sétány, melynek hossza szintén 50 méter, két részre vágja. Mekkora a két rész területe?

1676 Egy 8 cm átmérőjű körvonalat három pontja olyan részekre bontja, amelyekhez tartozó középponti szögek aránya 3 : 5 : 7. Milyen hosszú körívekre bontja a kört a három pont?

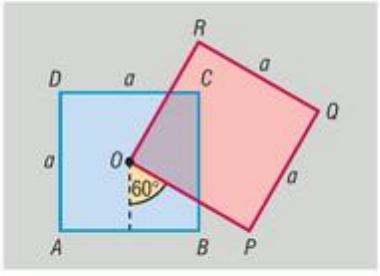
1677 Az alábbi ábrán egy négyzet csúcsait kötöttük össze a négyzet bizonyos oldalainak negyedelőpontjaival. Bizonyítsuk be, hogy a megjelölt szögek összege 90°.



1678 Az ábrán egy szabályos hatszög csúcsait kötöttük össze oldalfelező pontjaival. Bizonyítsuk be, hogy a sötétített síkidomok területe megegyezik.



1679 Az $ABCD$ négyzet O középpontja egy másik négyzet csúcsa, amelynek oldalai párhuzamosak az $ABCD$ négyzet oldalaival. Ezt a négyzetet az O középpont körül 60°-kal elforgatjuk, így kapjuk az $OPQR$ négyzetet. Mekkora az $ABCD$ és az $OPQR$ négyzetek közös részének területe, ha mindkét négyzet oldala a?



1680 Adott két párhuzamos egyenes, valamint egy pont. Adjunk szerkesztési eljárást szabályos háromszög szerkesztésére, amelynek egyik csúcsa az adott pont, másik két csúcsa illeszkedik egy-egy adott egyenesre. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.

1681 Vegyünk fel egy pontot, egy egyenest és egy kört. Adjunk szerkesztési eljárást szabályos háromszög szerkesztésére, amelynek egyik csúcsa az adott pont, egy-egy további csúcsa pedig illeszkedik az egyenesre, illetve a körre. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.

1682 Adott egy konvex szögtartomány, és belsejében egy pont. Adjunk szerkesztési eljárást olyan

a) szabályos háromszög; *b)* négyzet

szerkesztésére, amelynek középpontja az adott pont, egy oldalának két végpontja pedig illeszkedik a szög egy-egy szárára.



1683 Vegyünk fel egy pontot, valamint két kört. Adjunk szerkesztési eljárást négyzet szerkesztésére, amelynek középpontja az adott pont, valamint egy oldalának végpontjai illeszkednek egy-egy adott körre. Előfordulhat-e, hogy a feladat feltételeinek több négyzet is eleget tesz?

1684 *a)* Adott az ABC szabályos háromszög, valamint AB oldalának egy E belső pontja. Adjunk szerkesztési eljárást olyan szabályos háromszög szerkesztésére, amelynek egyik csúcsa E, másik két csúcsa pedig az eredeti háromszög AC, illetve BC oldalára illeszkedik. Hány ilyen szabályos háromszög szerkeszthető?

b) Szabályos háromszögbe újabb szabályos háromszöget írunk, amelynek minden csúcsa az eredeti háromszög egy-egy oldalára illeszkedik. Bizonyítsuk be, hogy a két háromszög középpontja egybeesik.

1685 Adott egy kör és belsejében egy pont. Adjunk szerkesztési eljárást a ponton átmenő egymásra merőleges egyenespár szerkesztésére, ha azoknak a körbe eső húrjai egyenlő hosszúak. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.

1686 Szerkesszünk szabályos ABC háromszöget, pozitív körüljárási iránnyal (azaz úgy, hogy a B pontot a C pontba A körüli $+60°$-os forgatással lehessen átvinni). Forgassuk el az A és B pontokat a BC oldal F felezőpontja körül $-120°$-kal. Mit tapasztalunk, hova kerülnek a képpontok? Tapasztalatainkat indokoljuk. Ezek alapján adjunk szerkesztési eljárást szabályos háromszög szerkesztésére, ha adott egyik oldalának felezőpontja, valamint egy-egy pont a másik két oldalegyenesen.

1687 Az ABC szabályos háromszög köré írt körén a C-t nem tartalmazó AB köríven felveszünk egy P pontot.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $APB\sphericalangle$ a P pont helyzetétől függetlenül $120°$-os.

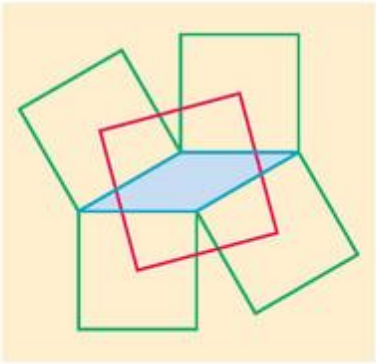
b) Bizonyítsuk be, hogy $PA + PB = PC$.

1688 Bizonyítsuk be, hogy egy hegyesszögű háromszög belsejében található olyan pont, amelynek a háromszög csúcsaitól mért távolságösszege minimális. Adjunk szerkesztési eljárást az ilyen tulajdonságú pont megszerkesztésére.

1689 Egy paralelogramma oldalai fölé kifelé négyzeteket szerkesztünk.

a) Bizonyítsuk be, hogy a kapott négyzetek középpontjai négyzetet határoznak meg.

b) Mekkora a középpontok által meghatározott négyzet kerülete, ha olyan rombuszból indulunk ki, amelynek oldala 10 cm, egyik szöge pedig 30°-os?



1690 Adott egy négyzet O középpontja, továbbá egy P pont, valamint egy a és egy b hosszúságú szakasz. Adjunk szerkesztési eljárást a négyzet szerkesztésére, ha tudjuk, hogy egy oldalának két végpontja a P ponttól a, illetve b távolságra van. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit.

1691 Béla bácsi egy jó közelítéssel szabályos háromszög alakú földterület birtokosa. Egyetlen örökösével nincs túl jó viszonyban, ugyanakkor az örökségből nem akarja teljesen kizárni. Végrendeletében úgy rendelkezett, hogy halála esetén az örökösére a lehető legkisebb területű, szintén szabályos háromszög alakú földet hagyja, amelynek csúcsai illeszkednek Béla bácsi birtokának egy-egy oldalára. Ugyanakkor kikötötte, hogy a teljes birtok nem szállhat az örökösre.

a) Béla bácsi birtokának hányadrészére jogosult az örököse?

b) Az örökös bíróságon kívánja megtámadni a végrendeletet, mivel szerinte Béla bácsi nem a legkisebb, hanem a legnagyobb területű földet kívánta örökül hagyni. Bizonyítsuk be, hogy a bíróságnak el kell utasítania az örökös keresetét.



Eltolás

1692 Szerkesszünk szabályos háromszöget. Toljuk el a háromszöget úgy, hogy egyik csúcsa a háromszög súlypontjába kerüljön.

1693 Vegyünk fel egy háromszöget, valamint annak egy külső pontját. Toljuk el a háromszöget úgy, hogy annak egyik csúcsa az adott pontba kerüljön.

1694 Vegyük fel az $ABCD$ négyszöget. Szerkesszük meg a négyszög $\overrightarrow{AC}$-ral eltolt $A'B'C'D'$ képét. Milyen négyszög az $ABB'C$ négyszög?

1695 Vegyünk fel egy konvex szöget, valamint egy szakaszt, amelynek végpontjai nem illeszkednek a szög száraira. Toljuk el a szakaszt úgy, hogy végpontjai egy-egy szögszárra essenek.

1696 Vegyünk fel egy kört, valamint egy szakaszt, amely nem metszi a kört. Szerkesszük meg a kör adott szakasszal párhuzamos, vele egyenlő hosszúságú húrját. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit.

1697 Vegyünk fel két kört, valamint egy szakaszt, melynek végpontjai nem illeszkednek a körökre. Toljuk el a szakaszt úgy, hogy végpontjai egy-egy körre essenek. Vizsgáljuk meg a lehetséges megoldások számát.

1698 Adjunk szerkesztési eljárást paralelogramma szerkesztésére, ha adott egyik oldalának két végpontja, valamint egy-egy kör, amely tartalmazza a paralelogramma további csúcsait.

1699 Toljuk el az $A(3; 1)$, $B(-2; 5)$, valamint a $C(-4; -2)$ pontok által meghatározott háromszöget az

a) $(1; 3)$ vektorral; *b)* $(-2; 5)$ vektorral; *c)* $(-4; -3)$ vektorral.

Írjuk fel a képháromszög csúcsainak koordinátáit.

1700 Az $A'(3; 1)$, $B'(-2; 5)$, valamint a $C'(-4; -2)$ pontok által meghatározott háromszöget az ABC háromszög eltolásával kaptuk. Írjuk fel az ABC háromszög csúcsainak koordinátáit, ha az eltolás vektora a

a) $(0; 3)$ vektor; *b)* $(-2; 7)$ vektor; *c)* $(-4; -3)$ vektor.

1701 Toljuk el az $A(-1; -3)$, $B(5; 2)$, valamint a $C(1; 7)$ pontok által meghatározott háromszöget a $(2; 4)$ vektorral. A kapott háromszöget azután toljuk el a $(-3; -2)$ vektorral; a képháromszög csúcsait jelölje A'', B'', valamint C''.

a) Írjuk fel a második eltolás után kapott háromszög csúcsainak koordinátáit.

b) Mutassuk meg, hogy ha az ABC háromszögre a két eltolást fordított sorrendben alkalmazzuk, akkor is az $A''B''C''$ háromszöget kapjuk eredményül.

c) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög egyetlen eltolással átvihető az $A''B''C''$ háromszögbe, valamint adjuk meg az eltolás vektorának koordinátáit.

1702 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) Van olyan eltolás, amelyiknek van fixpontja.

b) Ha az eltolásnak van fixpontja, akkor helybenhagyás.

c) Az eltolásnak nincsen invariáns egyenese.

d) Van olyan háromszög, amely a helybenhagyástól különböző eltolással önmagába vihető át.

e) Van olyan alakzat, amely a helybenhagyástól különböző eltolással önmagába vihető át.

f) Két tengelyes tükrözés egymás utáni elvégzése egyetlen eltolással helyettesíthető.

g) Megadható két olyan egyenes, amelyre vonatkozó tengelyes tükrözés egymás utáni elvégzése egyetlen eltolással helyettesíthető.



1703 Vegyük fel a nullvektortól és egymástól különböző $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat. Szerkesszük meg az alábbi vektorokat:

a) $\vec{a}+2\cdot\vec{b}$; *b)* $3\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; *c)* $-2\cdot\vec{a}+\vec{b}$; *d)* $-\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$.

1704 Vegyünk fel egy nullvektortól különböző $\vec{a}$ vektort, valamint egy négyszöget. Toljuk el a négyszöget a következő vektorokkal:

a) $2\cdot\vec{a}$; *b)* $\frac{1}{2}\cdot\vec{a}$; *c)* $3\cdot\vec{a}$; *d)* $-\frac{3}{2}\cdot\vec{a}$.

1705 A koordináta-rendszer $A(-3;\,8)$ pontjának helyvektora $\vec{a}$. Ábrázoljuk a következő vektorokat. Határozzuk meg a vektorok koordinátáit:

a) $\vec{a}$; *b)* $\frac{3}{2}\cdot\vec{a}$; *c)* $\frac{1}{4}\cdot\vec{a}$; *d)* $-\vec{a}$; *e)* $-\frac{1}{2}\cdot\vec{a}$.

1706 Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. A hatszög középpontja O. Írjunk fel a hatszög csúcsaival és középpontjával legalább két-két olyan vektort, amely egyenlő az alábbi vektorokkal:

a) $\vec{a}$; *b)* $\vec{b}$; *c)* $\vec{a}+\vec{b}$; *d)* $\vec{a}-\vec{b}$.

1707 Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. A hatszög középpontja O. Írjuk fel az alábbi vektorokat az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével.

a) $\overrightarrow{AO}$; *b)* $\overrightarrow{AD}$; *c)* $\overrightarrow{EO}$; *d)* $\overrightarrow{BE}$; *e)* $\overrightarrow{FD}$; *f)* $\overrightarrow{FC}$;
g) $\overrightarrow{FB}$; *h)* $\overrightarrow{EA}$.

1708 Az $ABCDEGFH$ szabályos nyolcszögben $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$. Írjuk fel az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorok segítségével az alábbi vektorokat.

a) $\overrightarrow{EF}$; *b)* $\overrightarrow{AC}$; *c)* $\overrightarrow{AD}$; *d)* $\overrightarrow{FG}$; *e)* $\overrightarrow{FH}$; *f)* $\overrightarrow{GE}$.

1709 Egyenlő szárú háromszög alapjának egy pontján át húzzunk a szárakkal párhuzamosokat. Bizonyítsuk be, hogy a párhuzamosokból a háromszög oldalai által kimetszett szakaszok hosszának összege nem függ a választott pont helyzetétől. Mekkora a kimetszett szakaszok hosszának összege?

1710 Egy település központjában két, egymást 45°-ban metsző egyenes út találkozik. A két utat a településen kívül haladó, 5 km hosszú, szintén egyenes útszakasszal szeretnék összekötni úgy, hogy a kialakuló két új kereszteződés a település központjától ugyanolyan távolságra legyen. Hogyan kell megépíteni az új útszakaszt?

1711 Adjunk szerkesztési eljárást trapéz szerkesztésére, ha adott sorrendben ismerjük négy oldalának hosszát, valamint ismert, hogy az oldalak közül melyek az alapok. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit.

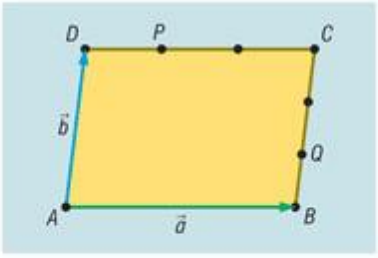
1712 Adjunk szerkesztési eljárást trapéz szerkesztésére, ha adott két alapjának, valamint két átlójának hossza. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit.

1713 Adjunk szerkesztési eljárást trapéz szerkesztésére, ha adott két átlójának, valamint rövidebb alapjának hossza, továbbá ismert az átlók által bezárt szög. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit.

1714 Adott két egyenes, és az egyenesekre nem illeszkedő két pont. Adjunk szerkesztési eljárást olyan paralelogramma szerkesztésére, amelynek a két pont két szomszédos csúcsa, másik két csúcsa pedig egy-egy egyenesre illeszkedik. Elképzelhető-e, hogy a feladatnak végtelen sok megoldása van?

1715 Adott két párhuzamos egyenes, egy d hosszúságú szakasz, valamint egy pont. Adjunk szerkesztési eljárást a ponton átmenő egyenes szerkesztésére, ha a két párhuzamos közé eső szakaszának hossza az adott d szakaszhosszal egyenlő. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.

1716 Az $ABCD$ paralelogrammában $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Az ábrán a paralelogramma két oldalának egy-egy harmadolópontját megjelöltük.



a) Fejezzük ki az $\overrightarrow{AP}$, illetve $\overrightarrow{AQ}$ vektorokat az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével.

b) Bizonyítsuk be, hogy a PQ szakasz párhuzamos a paralelogramma DB átlójával.

c) Számítsuk ki a $\dfrac{PQ}{DB}$ tört értékét.

d) Fejezzük ki az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével az A pontból a PQ szakasz felezőpontjába mutató vektort.

e) Bizonyítsuk be, hogy az A pont és a PQ szakasz felezőpontja közti szakasz párhuzamos a paralelogramma AC átlójával.

1717 Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorokra teljesül, hogy

a) $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$; *b)* $|\vec{a} - \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

1718 Adott két metsző helyzetű kör, valamint egy d szakasz. Adjunk szerkesztési eljárást a két kör egyik metszéspontján átmenő egyenes szerkesztésére, ha a körök közé eső szakaszának hossza az adott d szakasz hosszával egyenlő.

1719 Adjunk szerkesztési eljárást az $ABCD$ paralelogramma szerkesztésére, ha adott a C és D csúcsa, valamint az A és B csúcsoknak egy szintén adott P ponttól mért távolsága. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit.

1720 Adjunk szerkesztési eljárást az $ABCD$ négyszög szerkesztésére, ha adott sorrendben ismerjük annak oldalait, valamint ismert az AB és CD oldalegyenesek hajlásszöge.

1721 Fogalmazzunk meg szükséges és elegendő feltételt arra vonatkozóan, hogy az $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorokra teljesüljön a következő:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|.$$

1722 Milyen feltételek mellett teljesül az $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorokra, hogy

$$|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|?$$

Geometriai transzformációk

1723 Döntsük el, hogy két derékszögű háromszög egybevágó-e vagy sem, ha

a) valamelyik hegyesszögük egyenlő;

b) két-két oldaluk megegyezik;

c) befogóik páronként megegyeznek;

d) beírt körük és körülírt körük sugara is megegyezik.

1724 Döntsük el, hogy két téglalap egybevágó-e vagy sem, ha

a) egy-egy oldaluk, valamint átlóik megegyeznek;

b) átlójuk ugyanolyan hosszú, valamint az átlók ugyanakkora szöget zárnak be;

c) egy-egy oldaluk egyenlő, és mindkettőnek van beírt köre;

d) az átlók mindkettőben merőlegesek egymásra.



1725 Döntsük el, hogy két paralelogramma egybevágó-e, vagy sem, ha

a) megfelelő oldalaik egyenlő hosszúak;

b) két-két oldaluk egyenlő, valamint hegyesszögük megegyezik;

c) megegyeznek két-két szomszédos oldalukban, valamint az általuk közrefogott szögükben;

d) átlóik páronként megegyeznek, valamint az átlóik által bezárt szögek is egyenlők.

1726 Döntsük el, hogy két rombusz egybevágó-e vagy sem, ha

a) megfelelő oldalaik megegyeznek;

b) megfelelő átlóik megegyeznek;

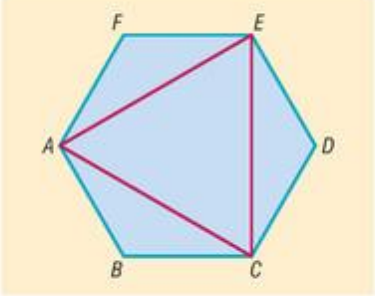
c) oldaluk egyenlő, valamint mindkettőben van derékszög;

d) egy-egy hegyesszögük egyenlő, valamint a szöggel szemközti átlóik egyenlő hosszúak.

1727 Egy szabályos hatszögben az ábra szerint behúztunk három átlót.

a) Bizonyítsuk be, hogy az átlók által meghatározott háromszög szabályos.

b) Határozzuk meg a háromszög, valamint a hatszög területének arányát.

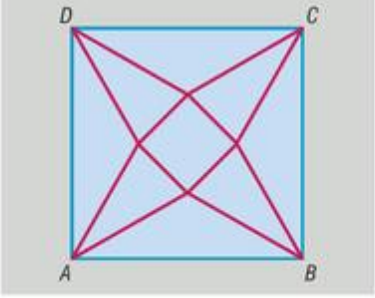


1728 Egy négyzet oldalaira befelé egybevágó, egyenlő szárú háromszögeket rajzoltunk, majd a csúcsokat az ábra szerint összekötöttük.

a) Bizonyítsuk be, hogy az ábrán szereplő háromszögek *mind* egyenlő szárúak, továbbá a „középső" négyszög négyzet.

b) Hány olyan egyenes van, amelyre vonatkozó tükrözésnek az ábra invariáns alakzata?

c) Mely forgatások képezik az ábrát önmagába?

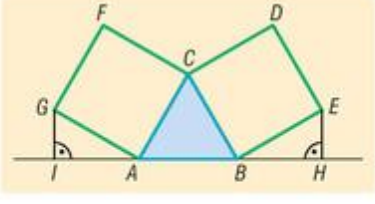


1729 Bizonyítsuk be, hogy a trapéz szárakat összekötő középvonalának hossza kisebb, mint két átlója hosszának számtani közepe.

1730 Az ABC szabályos háromszög minden oldalán megszerkesztjük a harmadolópontokat. Bizonyítsuk be, hogy az AB oldal A-hoz közelebbi, a BC oldal B-hez közelebbi, valamint a CA oldal C-hez közelebbi harmadolópontjai szintén szabályos háromszöget alkotnak.

1731 Az ABC szabályos háromszög BC és CA oldalaira kifelé az ábra szerinti $BCDE$, illetve $ACFG$ négyzeteket rajzoltuk. Ezután merőlegest állítottunk az E pontból, valamint a G pontból az AB egyenesre; a merőlegesek talppontjai H, illetve I.

a) Bizonyítsuk be, hogy a BH és az AI szakaszok hossza egyenlő az ABC háromszög AB oldalához tartozó magasságával.



b) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög köré írt körének középpontja illeszkedik a HI szakasz felezőmerőlegesére.

c) Bizonyítsuk be, hogy az *a)* és *b)* feladat állításai szabályos háromszög helyett hegyesszögű háromszögből kiindulva is érvényben maradnak.

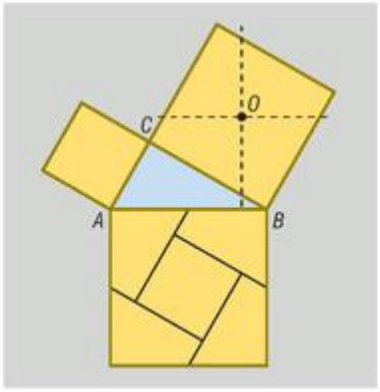
1732 Adott ABC háromszög BC és CA oldalaira kifelé szerkesszük meg a BCD, valamint a CAE szabályos háromszögeket. Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalának felezőpontja rendre F, G, H, továbbá a CD, valamint az EC oldalak felezőpontját jelölje I, valamint J.

a) Bizonyítsuk be, hogy az FGI háromszög egybevágó az FHJ háromszöggel.

b) Bizonyítsuk be, hogy az FIJ háromszög szabályos.

c) Számítsuk ki az FIJ háromszög területét, ha az ABC háromszög szabályos, és oldala a hosszúságú.

1733 Az ABC derékszögű háromszög AC és CB ($AC < CB$) befogóira, valamint AB átfogójára kifelé négyzeteket szerkesztettünk. A CB oldalra szerkesztett négyzetet az O középpontján átmenő, AB-vel párhuzamos, valamint arra merőleges egyenesekkel részekre vágtuk az ábra szerint.



a) Bizonyítsuk be, hogy az így keletkező négyszögek, valamint a rövidebb befogóra emelt négyzet felhasználásával az átfogóra emelt négyzet átfedés nélkül, hézagmentesen kitölthető.

b) Vizsgáljuk meg, hogy az átdarabolás működik-e egyenlő szárú derékszögű háromszögekben is.

Vegyes feladatok

1734 Számítsuk ki a deltoid ismeretlen szögeinek nagyságát, ha két szöge

a) 80°, 30°; *b)* 100°, 40°.

1735 Egy középpontosan szimmetrikus négyszög egyik szöge 30°. Számítsuk ki a négyszög többi szögének nagyságát.

1736 Egy szabályos sokszöget a középpontja körüli 24°-os forgatás önmagába visz át. Igaz-e, hogy a sokszöget a középpontja körüli 288°-os forgatás is helyben hagyja?

1737 Egy szabályos sokszöget a középpontja körüli 288°-os forgatás önmagába visz át. Lehet-e a sokszögnek

a) 5; *b)* 7; *c)* 15; *d)* 50; *e)* 125 oldala?

1738 Melyek azok a négyszögek, amelyek tengelyesen és középpontosan is szimmetrikusak?

1739 Van-e olyan nyolcszög, amelyik forgásszimmetrikus, mégsem szabályos? Válaszunkat indokoljuk.

1740 Van-e olyan konkáv

a) négyszög; *b)* hatszög,

amelyik középpontosan szimmetrikus? Válaszunkat indokoljuk.

1741 Adjunk szerkesztési eljárást a háromszög szerkesztésére, ha a szokásos jelölések mellett adott

a) a, b, s_c; *b)* b, s_a, α; *c)* b, m_b, s_c; *d)* b, m_a, s_c.

1742 Adjunk szerkesztési eljárást a trapéz szerkesztésére, ha adott a szárak felezőpontjait összekötő középvonala, valamint

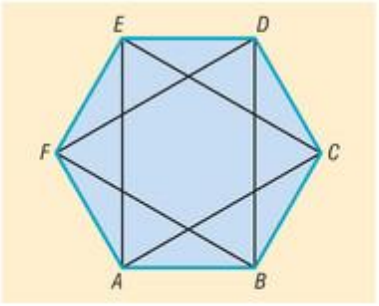
a) két szára és magassága;

b) az egyik alapon fekvő két szöge és magassága;

c) két átlója és egyik szára.



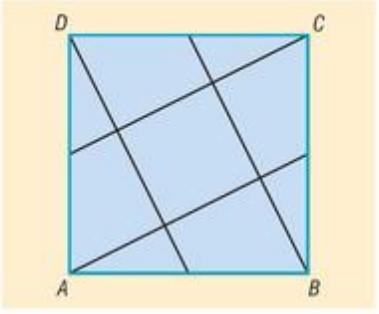
1743 Az alábbi ábrán egy szabályos hatszög néhány átlóját húztuk be. Ezzel a hatszöget háromszögekre és egy újabb hatszögre osztottuk. Bizonyítsuk be, hogy a keletkező „belső" hatszög szintén szabályos.



1744 Az alábbi ábrán egy négyzet csúcsait oldalfelező pontokkal kötöttük össze.

a) Bizonyítsuk be, hogy ezzel a négyzetet háromszögekre, trapézokra, valamint egy négyzetre osztottuk fel.

b) Számítsuk ki a „belső" négyzet, valamint az eredeti négyzet területének arányát.



1745 Egy derékszögű háromszög átfogója négyszerese a hozzá tartozó magasságnak. Számítsuk ki a háromszög hegyesszögeit.

1746 Egy egyenlő szárú háromszög alapjához írt körének középpontját az alap egyenesére tükrözve a háromszög köré írt kör középpontját kapjuk. Számítsuk ki a háromszög szögeit. (A háromszög egy oldalához írt kör alatt olyan kört értünk, amely kívülről érinti a háromszög adott oldalát, továbbá érinti a másik két oldal egyenesét is.)

1747 Szerkesszünk szabályos háromszöget, majd tükrözzük a köré írt kör középpontjára. Milyen alakzatot határoz meg a két háromszög közös része? Válaszunkat indokoljuk.

1748 Van-e olyan háromszög, amelyben a magasságok hossza 5 cm, 10 cm, 15 cm? Válaszunkat indokoljuk.

1749 Az $ABCD$ négyzet oldalaira befelé az ABK, BCL, CDM, DAN szabályos háromszögeket írjuk.

a) Bizonyítsuk be, hogy a $KLMN$ négyszög szintén négyzet.

b) Számítsuk ki a $KLMN$ négyzet oldalának hosszát, ha az $ABCD$ négyzet oldala 10 cm.

1750 Adjunk szerkesztési eljárást a háromszög szerkesztésére, ha a szokásos jelölések mellett adott

a) $a+b$, m_a, β; *b)* $a+b$; m_a, c; *c)* $a+b$, m_a, γ; *d)* $a+b$; β; γ.

1751 Egyenes nyomvonalú autópálya két oldalán egy-egy település található. A két település önkormányzata a településeket összekötő út megépítését tervezi. Szűkös anyagi forrásaikra tekintettel csak a lehető legrövidebb út megépítésére vállalkozhatnak. Adjunk szerkesztési eljárást az út megtervezésére, ha az autópálya fölött átívelő hídnak mindenképpen a pályára merőlegesnek kell lennie.

1752 Adott a p egyenes, a k kör, valamint egy AB szakasz. Adjunk szerkesztési eljárást olyan PK szakasz szerkesztésére, amely AB-vel párhuzamos, hossza megegyezik az AB szakasz hosszával, továbbá P illeszkedik a p egyenesre, K illeszkedik a k körre. Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit, valamint a megoldások számát.

1753 Van-e a szabályos háromszögön kívül olyan háromszög, amelyben a megadott nevezetes pontok egybeesnek:

a) beírt és köré írt körök középpontja; *b)* súlypont és magasságpont;

c) súlypont és köré írt kör középpontja.

Válaszunkat indokoljuk.

1754 Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszög tengelyesen szimmetrikus, akkor vagy szimmetrikus trapéz, vagy érintőnégyszög.

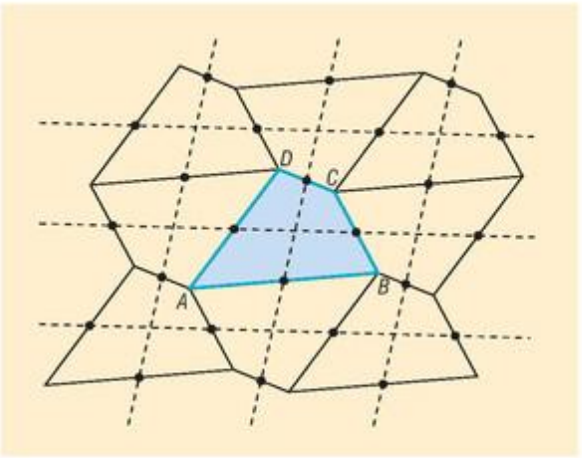
1755 Az $ABCD$ konvex négyszög tetszőleges P belső pontját tükrözzük a négyszög oldalfelező pontjaira. A kapott pontokat jelölje rendre P_1, P_2, P_3, valamint P_4.

a) Bizonyítsuk be, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög a P pont helyzetétől függetlenül paralelogramma.

b) Számítsuk ki a $P_1P_2P_3P_4$, valamint az $ABCD$ négyszögek területének arányát.

c) Igaz marad-e az *a)* részben megfogalmazott állítás, ha a P pont az $ABCD$ négyszög külső pontja?

1756 Vegyük fel az $ABCD$ konvex négyszöget, majd szerkesszük meg középvonalait. Tükrözzük a négyszöget középvonalaival együtt a négyszög oldalfelező pontjaira, majd ismételjük a tükrözéseket a tükörképként kapott négyszögekre is.



a) Bizonyítsuk be, hogy a fenti szerkesztéseket ismételve, a sík átfedés nélkül és hézagmentesen kitölthető az eredeti négyszöggel egybevágó négyszögekkel.

b) Bizonyítsuk be, hogy a „parkettázásban" szereplő négyszögek középvonalainak tartóegyenesei a sík egy paralelogrammarácsát alkotják.

c) Bizonyítsuk be, hogy a kiindulásul vett négyszöget középvonalai négy olyan részre osztják, amelyekből a paralelogrammarácsban szereplő paralelogramma átfedés nélkül, hézagmentesen kirakható.

1757 Adott az $ABCD$ négyzet O középpontja, valamint az AD oldalegyenes egy P, illetve a CD oldalegyenes egy Q pontja.

a) Adjunk szerkesztési eljárást az $ABCD$ négyzet csúcsainak szerkesztésére.

b) Vizsgáljuk meg a megoldások számát az O, P, Q pontok különböző elrendezése mellett.

c) Bizonyítsuk be, hogy ha az O körüli 90°-os vagy −90°-os forgatás a P pontot a Q pontba viszi át, akkor végtelen sok, a feladat feltételeinek megfelelő $ABCD$ négyzet szerkeszthető.

d) Milyen görbe mentén mozognak az előbbi esetben az $ABCD$ négyzet csúcspontjai?

1758 Sík terepen egy falu közelében két kiemelkedő tereptárgy található, egy rádióadó, valamint egy szélerőmű. Tervezzünk a falun keresztül olyan egyenes utat, amelyik elválasztja egymástól a két tereptárgyat, továbbá ha összeadjuk a szélerőmű, valamint a rádióadó úttól mért távolságát, akkor egy adott d hosszúságot kapunk eredményül. Vizsgáljuk meg az ilyen tulajdonságú út megépíthetőségének feltételeit.

1759 Egy nagyvárost hosszú, egyenes partszakasszal rendelkező folyó szel ketté. A városban a folyó ugyanazon oldalán két turistacsalogató látványosság is található. Egy turista olyan, az egyiktől a másikig vezető legrövidebb útvonal megtervezésén gondolkodik, amelyiknek pontosan d hosszúságú szakasza a folyó partján vezet. Adjunk szerkesztési eljárást az út megszerkesztésére.



9.7. STATISZTIKA

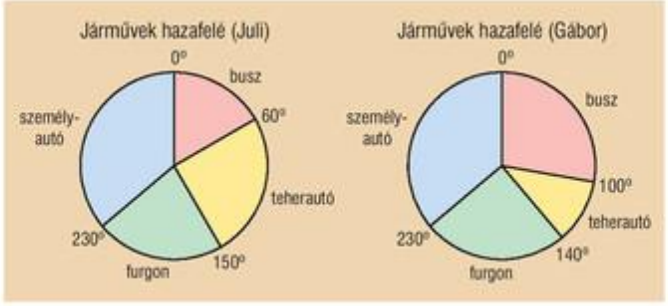
Az adatok ábrázolása

1760 Egy biciklis futár hétfőn 85, kedden 110, szerdán 60, csütörtökön 73, pénteken pedig 40 kilométert kerékpározott. Ábrázoljuk oszlopdiagramon a naponta megtett kilométereket, és adjunk címet a diagramnak.

1761 Egy almaszállítmány harmada starking, a maradék 25%-a jonatán, a többi idared. Ábrázoljuk oszlopdiagramon, melyikből hány kilogramm van, ha a starking 1 mázsát nyom.

1762 A 30 fős osztályban 12 tanulónak van egy testvére, 7-nek kettő, 3-nak három, a többieknek nincs testvére. Ábrázoljuk kördiagramon az osztályba járók családjaiban a gyermekek számát. A diagramba írjuk be a százalékos megoszlást is (egy tizedesre kerekítve). Adjunk címet a diagramnak.

1763 Juli hazafelé megszámolta, mennyi busz, teherautó, furgon és személyautó haladt el mellette. Ezekről készítette a bal oldali kördiagramot. Adjuk meg a Juli által látott járművek százalékos megoszlását.



1764 Gábor is megszámolta hazafelé a járműveket, és a jobb oldali kördiagramot készítette. Ám egy hét múlva csak arra emlékezett, hogy 20 darab buszt látott. Melyik fajtából mennyi járművet számolt meg Gábor? Készítsünk az adatokból táblázatot.

1765 Egy kereskedőnek év végén jelentést kellett adnia a cég központjában a negyedéves eladások alakulásáról. A következő ábrát viszonylag rövid ideig vetítette ki. Nekünk most több időnk van elemezni: mit veszünk észre rajta? Mit nem akar nagydobra verni a kereskedő?



1766 Az alábbi oszlopdiagramokon a 2003–2005 közötti, felderített gazdasági bűncselekmények számát látjuk az *A* és a *B* párt értelmezésében. Vajon mit szeretne megmagyarázni az *A* párt és mit a *B*?

A párt sajtótájékoztatója



B párt sajtótájékoztatója



(Az eredeti adatok: 2003: 8900, 2004: 9500 és 2005: 10500; forrás: stADAT.)

1767 A 15 fős, emelt szintre készülő csoport 50 pontos dolgozata az alábbiak szerint sikerült:

Pontszám	50	48	44	38	25	17	10
Dolgozat	1	2	5	3	2	1	1

Jegyek: 0–12 pont: elégtelen, 13–20: elégséges, 21–30: közepes, 31–40: jó, 41–50: jeles.

a) Foglaljuk gyakorisági táblázatba az osztályzatokat. Jelöljük meg a százalékos határokat is.

b) Készítsünk kördiagramot a jegyek megoszlásáról. Jelöljük meg a százalékos határokat is.

1768 Az alábbi oszlopdiagram egy osztály tanulóinak év végi jegyeit mutatja matematikából.

a) Készítsünk az adatokból gyakorisági táblázatot.

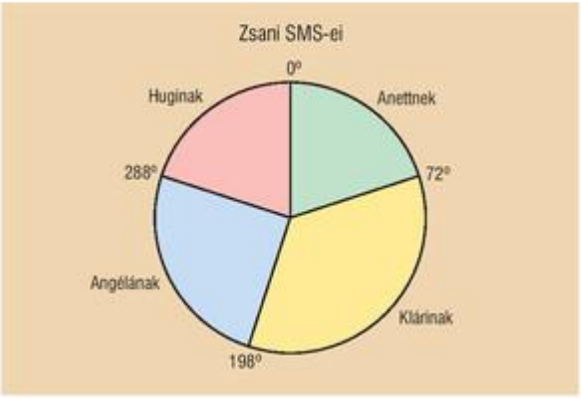
b) Készítsünk az adatokból kördiagramot.



1769 Zsaninak nagyon sok barátnője van, közülük néggyel tartja napi szinten a kapcsolatot. A kördiagramon a tegnap elküldött sms-einek megoszlását látjuk a címzettek szerint.

a) Számítsuk ki, az összes rövid szöveges üzenet hány százalékát küldte az egyes személyeknek.

b) Készítsünk az adatokról oszlopdiagramot, ha tudjuk, hogy Zsani összesen 7 sms-t küldött tegnap Klárinak.

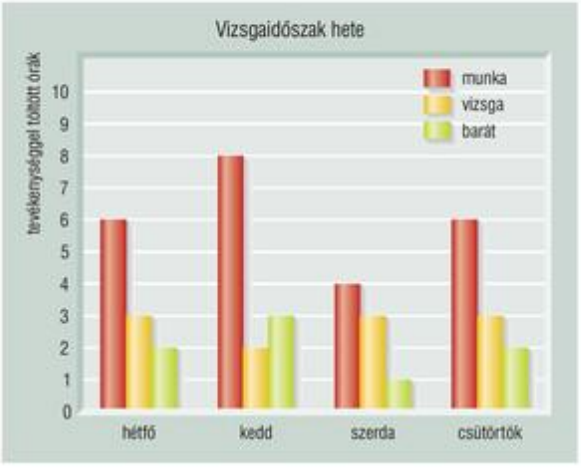


1770 Eszter munkája mellett főiskolára is jár. Az alábbi oszlopdiagram azt mutatja, hogy a hét melyik napján hány órát foglalkozott a munkájával, a vizsgáira való készüléssel és a barátjával. (Pénteken már vizsgázik, így azt a napot nem tekintjük.)

a) Készítsünk vonaldiagramot az egyes napokon munkával töltött órákról.

b) Készítsünk kördiagramot a barátjával töltött órák heti megoszlásáról.

c) Esztinek napi 8 óra alvásra van szüksége. Készítsünk gyakorisági táblázatot arról, hogy mennyi ideje maradt a fentieken kívüli egyéb teendőire a hét első négy napján.





1771 *a)* Számítsuk ki a táblázat hiányzó adatait. (Az első és utolsó oszlopot egy tizedesre kerekítve, a többit egészre kerekítve adjuk meg. Forrás: KSH.)

Régió	Lakónépesség (ezer fő)	Terület (km^2)	Népsűrűség (fő/km^2)	Települések száma	100 km^2-re jutó település
Közép-Magyarország	2897,3	6916	419	188	2,7
Közép-Dunántúl	1104,8	11116		401	3,6
Nyugat-Dunántúl	997,9	11328	88	655	
Dél-Dunántúl	960,1		68	655	4,6
Észak-Magyarország	1236,7	13433	92		4,5
Észak-Alföld		17729	85	389	2,2
Dél-Alföld			73		1,4
Ország összesen	**10045,4**				

Figyeljük meg az alábbi ábrákat, majd az előző példa adatait felhasználva válaszoljunk a kérdésekre. (Észak-Alföld népessége: 1507,0; Dél-Alföld népessége: 1341,6 ezer fő; forrás: KSH.)





b) Töltsük ki az alábbi táblázatot. (Egészre kerekített értékekkel számoljunk.)

Régió	Vállalkozások száma	Ebből egyéni vállalkozók	Ebből társas vállalkozók
Nyugat-Dunántúl			
Közép-Dunántúl			
Dél-Dunántúl			
Közép-Magyarország			
Észak-Magyarország			
Észak-Alföld			
Dél-Alföld			
Ország összesen			

c) Készítsünk oszlopdiagramot régiók szerint az ott található egyéni vállalkozásokról.

d) Készítsünk kördiagramot régiók szerint a társas vállalkozásokról. A diagramban százalékos értékeket szerepeltessünk.



Az adatok jellemzése

1772 Szeptember első hetében a következő hőmérsékleteket mutatta a hőmérő reggel 6^{30}-kor, hétfőtől péntekig:

13,1 °C; 14,4 °C; 16,8 °C; 20,7 °C; 20,7 °C.

Számítsuk ki a hőmérsékletek átlagát.

1773 Egy méréssorozat alkalmával leendő fizikusok a következő eltéréseket találták a megadott értéktől:

2, 1, 2, 0, −3.

Mennyi a hibák átlaga és terjedelme?

1774 Jani állítása szerint matematika jegyei eddig így alakultak:

3, 2, 2, 4, 5, 1, 4, 2, 5.

Otthon úgy számolta, hogy az utolsó dolgozattal feljavíthatja átlagát pont 3,15-re. Jól számolt-e Jani?

1775 *a)* Lehetséges-e egy 30 fős osztályban 3,15-ös osztályátlag? Ha nem, miért nem?

b) Hány fős az az osztály, amelynek átlaga 3,15 és létszáma a lehető legközelebb van a 30-hoz?

1776 Egy jégkorongcsapat 6 főből áll, átlagéletkoruk 20 év. Mennyivel változik a pályán maradók átlagéletkora, ha a meccs hevében kiállítanak közülük egy

a) 20 éves játékost; *b)* 25 éves játékost; *c)* 15 éves játékost?

1777 Öt kezdő szumóbirkózó össztömege 7 és fél mázsa. Ha közéjük áll veterán edzőjük is, akkor átlagos tömegük 25kg-mal növekszik. Hány kilogrammot nyom a veterán edző?

1778 Egy taxis ma 2, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 3, 4, 4, 3, 3, 1 utast szállított egy-egy fuvarral. Adjuk meg az egyszerre utazók számának mediánját.

1779 Józsi kiborította a szőnyegre az építőjáték elemeit, majd hosszuk szerint rendezte őket. Azt vette észre, hogy négyszer annyi 5 cm-es van, mint 3 cm-es és háromszor annyi 4 cm-es, mint 3 cm-es. Határozzuk meg az építőjáték-darabkák hosszúságainak mediánját.

1780 A pékségben az elmúlt 15 percben megfordult vásárlók 4, 4, 6, 2, 6, 5, 6, 2, 5 darab túrós táskát vásároltak. Adjuk meg a túrós táskák darabszámának móduszát és terjedelmét.

1781 *a)* Milyen típusú diagramról tudjuk könnyen leolvasni egy minta móduszát?

b) Hogyan tudjuk leolvasni kördiagramról a mediánt?

1782 Egy nem túl forgalmas helyen levő jegykiadó automatába egy óra alatt dobott érmék sorban:

10, 10, 5, 20, 20, 5, 10, 5, 20, 50, 10, 5, 50 eurócent.

a) Készítsünk táblázatot az érmék gyakoriságáról. Határozzuk meg a bedobott érmék mediánját, móduszát.

b) Időközben még egy kuncsaft érkezett az automatához, zsebe csak 50 eurócentesekkel volt tele. Hány darab érmét dobhatott be, ha a medián 20-ra változott?

1783 Záráskor a pénzváltó boltjában megszámolták a kasszában levő címleteket:

Címlet	5 €	10 €	20 €	50 €	100 €
Darab	33	62	56	19	25

a) Mi a címletek módusza?

b) A pénzváltónak eszébe jutott, hogy szüksége lesz hamarosan apróra, ezért beváltott a kasszából ugyanannyi 10-est és 20-ast nagyobb címletekre. Lehetséges-e, hogy a váltás után a kasszában maradó címletek módusza 5 lett?



1784 Kati kémiából eddig a 3, 4, 3, 5 jegyeket kapta. Még egy dolgozatot fog írni. Legalább hányast kell szereznie, ha év végén 4-est szeretne, és a tanár csak 6 tized felett adja meg a jobb jegyet?

1785 Tavaly enyhe tél volt karácsony hetében. A hétköznaponként mért egész átlaghőmérsékletek módusza –1 °C, mediánja 0 °C, átlaguk 0,2 °C. Adjunk meg ilyen hőmérsékleti adatokat.

1786 Egyik áprilisban 5 napon keresztül egész értéket kaptak a reggeli hőmérsékletre. A legkisebb érték 2 °C volt, a medián és a terjedelem pedig egyaránt 3 °C. Mennyi lett az öt nap átlaga és módusza, ha még azt is tudjuk, hogy az öt napi átlaghőmérsékletre is egész érték adódott?

1787 Egy építőjátékot gyártó cég kiegészítő termékében összesen 110 darab építőkocka van, 1×1-es, 1×2-es, 1×4-es és 2×3-as. Az első három fajtából rendre 20, 40, 35 darabot számoltunk meg.

a) Készítsünk táblázatot az egyes építőkövek darabszámáról.

b) Mi az építőkockákon található összekapcsoló bütykök számának mediánja, módusza?



1788 Az építőjátékot gyártó cég másik kiegészítő csomagjában 1×6-os, 1×8-as, 2×4-es és 2×8-as építőelemek vannak, rendre 50, 25, 40 és 20 darab.

a) Készítsünk oszlopdiagramot az elemekről.

b) Számítsuk ki, mennyi (egészre kerekített) bütyök jut átlagosan egy elemre.

1789 Az egyik osztály 20 fős, középszintű érettségire készülő csoportja a 40 pontos dolgozatot így írta meg:

Pontszám	38	33	26	20	18	15	7
Dolgozat	3	1	4	3	5	2	2

a) Határozzuk meg az összes dolgozat pontszámának átlagát. Tanáruk a következő szerint adja a jegyeket: 0–30%: elégtelen, 30–45%: elégséges, 45–60%: közepes, 60–80%: jó, 80% vagy afelett: jeles. (A felső határ már jobb jegyet ér.)

b) Ennek ismeretében határozzuk meg a jegyek móduszát és mediánját.

1790 Egy általános iskolai osztályban megkérdezték a tanulókat, hány éves testvéreik vannak. A következő eredmény született:

Életkor	0–3	4–7	8–11	12–15	16–19
Testvérek	1	4	6	3	4

a) Készítsünk a testvérek életkorainak megoszlásáról kördiagramot.

b) Számítsuk ki a testvérek átlagéletkorát egy tizedesjegyre kerekítve. Hogyan érdemes számolni? (Törekedjünk az arany középútra!)

1791 Két középiskolában összehasonlították a végzősök által az érettségin szerzett pontokat. Az egyikben 340 pont lett az átlag, a másikban 420. A két iskola összesített eredményeinek átlaga 360 pont volt. Hány tanuló érettségizett idén a két iskolában külön-külön, ha tudjuk, hogy az egyik iskolában 40-nel többen voltak, mint a másikban?

1792 Egy osztályban a következő eredmények születtek az irodalomdolgozaton: 6 jeles, 9 közepes, 4 elégséges és 3 elégtelen. A dolgozatot író Orsi a jó dolgozatok számára nem, csak arra emlékszik, hogy az átlag 3,32-nél határozottan nagyobb és 3,39-nél határozottan kisebb.

a) Meg tudjuk-e ebből mondani, hány jó dolgozatot írtak és hányan vannak az osztályba járók?

b) Segít-e pontosítani az adatokat, ha Orsinak eszébe jut, hogy a legalább közepest írók átlaga 3,87-nél kisebb?

1793 Egy cikkben az alábbi mondat szerepel: *„Míg 1950-ben a hazai földterület 12 százalékát borította erdő, jelenleg a 20 százalékát.”* (Hazánk területe közelítőleg: 93 000 km^2.)

a) Számítsuk ki, hány ezer négyzetkilométer erdő volt 1950-ben.

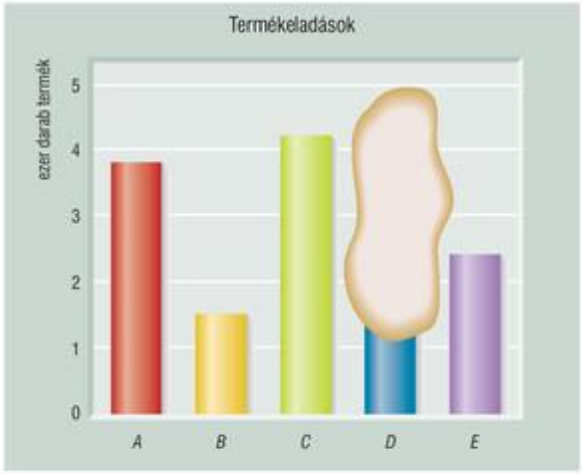
b) Mennyinek tekinthető a 10 évenkénti átlagos növekedés 1950 és 2010 („jelenleg”) között?

c) Ábrázoljuk vonaldiagramon 10 évenkénti beosztással a növekedést, ha feltételezzük, hogy az egyenletes ütemben történt.

1794 Zsolti talált egy érdekes diagramot az újságban, ám véletlenül leöntötte kávéval, és így az egyik oszlop eltűnt. Szerencsére a cikk szövegében szerepel néhány adat:

– az *A* termékből 3800 db-ot, a *C*-ből pedig 4200 db-ot adtak el idén;

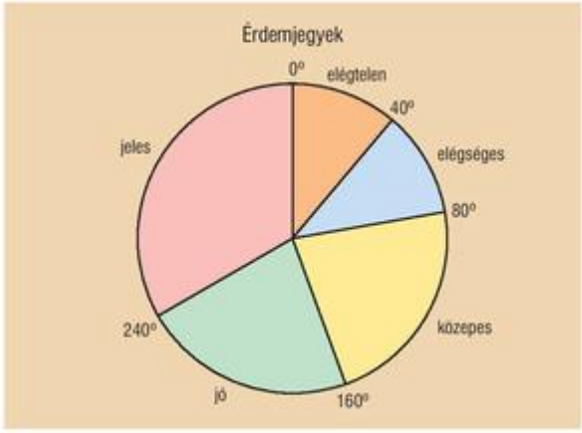
– a vezető termékek (3000 darab felett) eladásainak átlaga 3900.



a) Számítás alapján mondjuk meg, hány darabot adtak el a *D* termékből. Vezető terméknek minősül-e a *D* termék?

b) Rajzoljuk meg most már a helyes oszlopdiagramot.

1795 Egy dolgozatnál a tanulók nevük helyett az *A*, *B*, *C* betűkből alkotott hárombetűs kódokat írták fel a papírra véletlenszerűen, *AAA*-tól *CCC*-ig. Minden kódot kiosztottak és nem voltak azonos kódú tanulók.



a) Hány tanuló jár ebbe az osztályba?

b) Az oldalt látható kördiagram mutatja a dolgozaton elért érdemjegyek megoszlását. Ábrázoljuk oszlopdiagramon is az érdemjegyeket.

c) Mondjuk meg csak a kördiagram alapján, mi a jegyek módusza és mediánja.

1796 A Lola babagyártó cégnek két önálló részlege van: az egyik a babák testét készíti el, a másik a babaruhákat. A cég vezetése idén új mutatóval, a megtérülési rátával méri a hatékonyságot: az adott részleg fél év alatt legyártott ezer termékét osztják a dolgozók számával. Az első félévben mindkét részleg 40-40 ezer darabot készített el, a megtérülési ráták pedig 2,5 és 2 voltak.

a) Határozzuk meg, hányan dolgoztak az első félévben a két részlegben külön-külön.

b) Mennyi volt az egész cégre vonatkozó megtérülési ráta az első félévben?

c) Számítsuk ki, mennyi volt a cég féléves bevétele, ha tudjuk, hogy

– babáik felét saját ruhába öltöztették, a többi babát és a hozzájuk tartozó ruhákat külön-külön adták el;

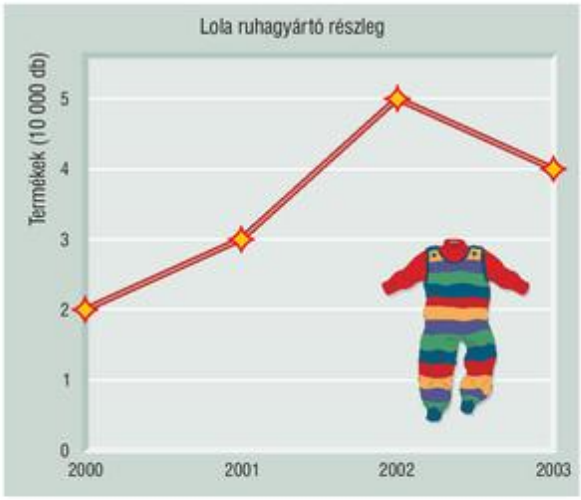
– egy önálló babaruha ára másfélszerese egy babatestnek;

– egy „üres” baba ára 1500 Ft;

– a felöltöztetett baba ára a babatest és a ruha együttes áránál annak 70%-ával több.



1797 A Lola babagyártó cég ruhakészítő részlegének termelését mutatja az alábbi grafikon, egy korábbi négyéves periódusban (tízezer darab termékben). Láthatjuk, hogy a termelés két évben növekedett, egyben pedig csökkent az előző évihez képest.



a) Számítsuk ki és adjuk meg százalékban a termelés előző évihez viszonyított változásait.

b) Számítsuk ki a változások százalékos mértékének átlagát, egész százalékra kerekítve.

c) Ha a következő évben ebben az átlagos mértékben növekedett a termelés, hány babaruhát gyártottak 2004-ben a Lola cégnél?

1798 Egy mobilszolgáltató felmérést készíttetett egy közvélemény-kutató céggel. A cég három kategóriába sorolta az ügyfeleket. Az A kategóriába az egy nap alatt keveset beszélők, a B kategóriába a közepesen sokat beszélők, a C kategóriába a sokat beszélők kerültek. Megállapították, hogy az A kategóriában átlag 10 percet, a B-ben átlag 25 percet, a C-ben átlag 30 percet beszéltek az ügyfelek. Az összes megkérdezett átlaga 20 percre jött ki. Tudjuk még, hogy

– az A és C kategóriában együtt 25-tel többen vannak, mint a B-ben, illetve

– a B és az A kategóriában levők különbsége fele a C kategóriába esőknek.

Hány fős mintát vett a közvélemény-kutató cég a mobilszolgáltató ügyfelei közül?

1799 Szilvi új munkahelyén recepciós, az érkező ügyfeleket fogadja. Pár hét alatt megfigyelte, hogy érdekes összefüggés van az érkező ügyfelek száma és a hét napjai között. Ha a hétköznapokat sorszámukkal jelöli, akkor az érkező vendégek számát a következő függvény írja le:

$$f\colon \{1; 2; 3; 4; 5\} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 4x + 10.$$

a) Melyik napon érkeznek a legtöbben?

b) Ábrázoljuk kördiagramon az egyes napokon érkező vendégek számát.

c) Számítsuk ki az ügyfelek számának napi átlagát, egész értékre kerekítve.

Vegyes feladatok

1800 Tibor krumplit hámoz az ebédhez. Ahogy egyre jobban belejön, percenként mindig eggyel több szem krumplit tud meghámozni.

a) Mennyi ideig tart a krumplihámozás Tibinek, ha összesen 30 szemet kell megpucolnia és az utolsó percben kétszer annyit hámoz meg, mint az elsőben?

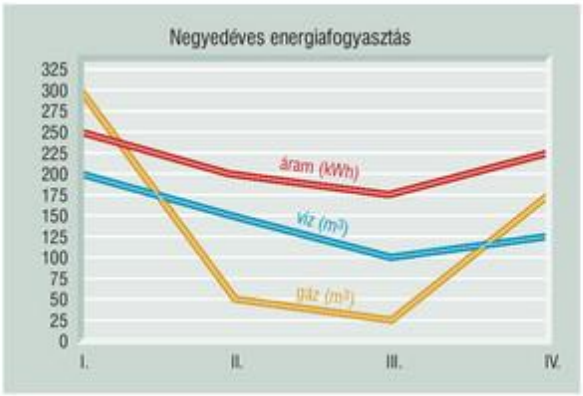
b) Ábrázoljuk oszlopdiagramon az egyes percekben meghámozott krumplik megoszlását.

1801 Hugi nemrég érkezett meg a boltból, ahol 30 eurót fizetett. Az összeg 40%-a élelmiszerre (kenyér, sajt, felvágott), 20%-a italokra (ásványvíz, rostos gyümölcslé), 30%-a tisztálkodószerre (fogkefe, fogkrém, tusfürdő) kellett, a maradékból rágcsálnivalót vett.

a) Hányszor többet költött Hugi az alapvető élelmiszerekre, mint a rágcsálnivalóra?

b) Ábrázoljuk kördiagramon az egyes termékcsoportokra költött összegeket.

1802 Egy 45 m^2 alapterületű lakás gáz-, víz- és áramfogyasztását egy évig követtük nyomon, januártól decemberig. A havi adatokat negyedévente összesítettük, így keletkeztek az alábbi vonaldiagramok. (A tényleges vízfogyasztást 25-tel szoroztuk, így az értékek egy ábrában megjeleníthetőek.)



a) Ábrázoljuk a negyedéves gázfogyasztást oszlopdiagramon.

b) Hány köbméter víz fogyott el egész évben?

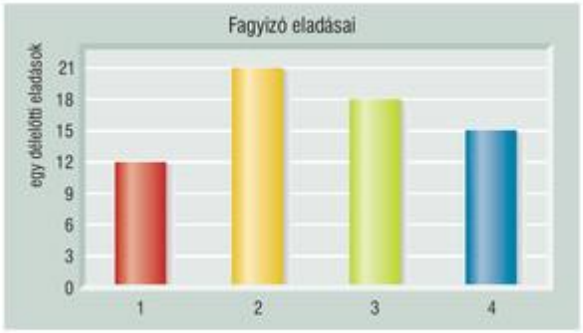
c) Ábrázoljuk a negyedéves áramfogyasztást kördiagramon.

1803 Kriszta zsebében 3 darab 2 €, 5 darab 1 €, 2 darab 10 € és 3 darab 5 € címletű fizetőeszköz van.

a) Mi a zsebében levő pénzek terjedelme, mediánja és módusza?

b) Melyik címlet esik a zsebében levő pénzek számtani átlagához a legközelebb?

1804 Az alábbi oszlopdiagramról leolvashatjuk, hogy egy nem túl forgalmas fagyizóban hány vevő kért 1, 2, 3, illetve 4 gombócos fagyit egy délelőtt.



a) Olvassuk le az egyszerre eladott gombócok számának terjedelmét és móduszát.

b) Határozzuk meg az adatok mediánját, és számítsuk ki számtani közepüket is.

1805 Nemrég autóval utaztunk vidékre, és út közben többször is láttunk őzeket különböző létszámú csoportokban. Az egy-egy csoportban látott állatok számáról készült a kördiagram.



a) Olvassuk le a diagramról, mi az őzek csoportlétszámainak mediánja és módusza.

b) Számítsuk ki a csoportlétszámok számtani átlagát is, ha tudjuk, a módusz gyakorisága nyolc. Készítsünk gyakorisági táblázatot.

1806 A 30 fős osztály legutóbbi dolgozatának átlaga 3,5 volt, ám csak 26-an írtak.

a) Ha a hiányzók is megérkeznek és megírják a dolgozatot, milyen határok között változhat az osztályátlag? Adjuk meg százalékban is az eredeti átlagtól lehetséges eltéréseket.

b) Milyen eredmények születhettek a hiányzók dolgozatain, ha a teljes osztály átlaga végül 3,6 lett?

1807 Egy bank lakossági ügyfelekkel foglalkozó ágazatának év végi kimutatásából látunk részletet.

Bankbetét nagysága (millió Ft)	0–1	1–2	2–3	3–4	4–
Bankbetét gyakorisága (db)	12	9	8	5	2

a) Becsüljük meg a bankbetétek átlagos nagyságát a táblázat alapján. Miért nem tudunk pontos értéket mondani?

b) Legfeljebb mennyivel lehet becslésünknél kisebb a tényleges átlagos betét nagysága?

c) Mennyivel lehet becslésünknél több a tényleges átlagos betét nagysága?

Megoldások



Kombinatorika, halmazok 100

Algebra és számelmélet 118

Függvények 128

Háromszögek, négyszögek, sokszögek 158

Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek 196

Geometriai transzformációk 220

Statisztika 285



9.1. KOMBINATORIKA, HALMAZOK

Számoljuk össze! – megoldások

1001 *a)* $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ *b)* 10, 6, 4, 2, 0, −2, −4, −8

1002 *a)* 4 *b)* 8, 4, 0, −4

1003 *a)* 6 *b)* 3, mégpedig a −2, −8 és 0.

1004 $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

1005 $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 96$

1006 $3 \cdot 3 = 9$

1007 *a)* $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$

1008 $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

1009 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$

1010 *b)* $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ *c)* 2

1011 *a)* A mozdonyokra $2 \cdot 1$, a kocsikra $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ lehetősége van egymástól függetlenül. Ez összesen $2 \cdot 120 = 240$.

b) Mozdonyt választani most is 2 lehetősége van, utána pedig az első kocsit 5, a másodikat 4 járműből választhatja ki. Így összesen $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$-féle szerelvényt állíthat össze.

1012 *a)* Mivel megkülönböztetjük a helyeket, az olyan, mintha egyszerű lineáris sorba kellene tennünk három személyt. Vagyis a megoldás $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

b) Ha a székeket nem különböztetjük meg egymástól, akkor úgy kell eljárnunk, mint a körberakásoknál általában. Válasszuk ki egyiküket, és vele kezdjük a sort. Az eredmény $2 \cdot 1 = 2$ lehetőség. (Nyilván, ha A már ül, akkor B és C legfeljebb helyet cserélhetnek.)

c) Mivel összesen hárman vannak, így mindig mindegyikük szomszédja a másik kettőnek. (Háromszögben minden csúcs szomszédos.) Az eredmény tehát 1.

1013 *a)* A halmazok elemeinek párosítását összesen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féleképpen végezhetjük el.

Az egyes hozzárendelések során a következő függvényeket nyerjük:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$i(x)$	$j(x)$	$k(x)$
1	2	2	4	4	6	6
2	4	6	2	6	4	2
3	6	4	6	2	2	4

b) A függvények közül $f(x)$ és $j(x)$ lineáris (ábrázolva a pontokat, ezeket tudjuk egyetlen folytonos egyenessel összekötni). A szabályaik:

$$f(x) = 2x \quad \text{és} \quad j(x) = -2x + 8.$$

1014 *a)* Legyen a két szín mondjuk piros (P) és fekete (F). A felső sor-alsó sor ekkor: PF-FP vagy FP-PF. Tehát két lehetőség van.

b) Legyen a három szín mondjuk piros (P), kék (K) és fekete (F). Ha a bal felső sarokba pl. P-t írunk, akkor mellé és alá 2-2 lehetőség van a sor és oszlop kitöltésére. Ha mondjuk a felső sor PFK, akkor bármit is írunk a második sor első négyzetébe, az utána levők már meghatározottak



(hiszen a harmadik színt nem írhatjuk saját maga alá, oda P-t kell írni). Az utolsó sor mindenképpen eleve meghatározott. Mivel a bal felső négyzetet háromféleképp tölthetjük ki, így összesen $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ lehetőségünk van a négyzet színezésére.

Megjegyzés: Ha elég türelmesek vagyunk, akár egyesével is összegyűjthetjük a megoldásokat. Érdemes jó stratégiát kitalálni, hogy ne hagyjunk ki színezést, illetve ne készítsük el kétszer ugyanazt!

1015 *a)* A hátsó két ajtót összesen 3 helyzetbe mozgathatjuk. Ugyanis vagy egymás mellett vannak a jobb oldalon, vagy egymás mellett vannak a bal oldalon, vagy a két szélen vannak.

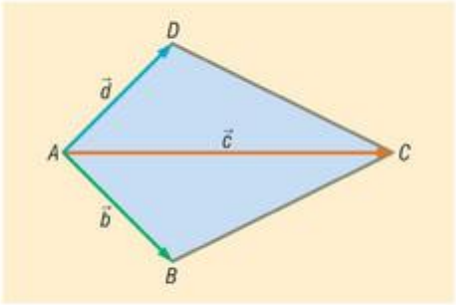
b) Az *a)* kérdésre adott választól függetlenül az első (tükrös) ajtó 3 helyzetben lehet: jobb oldalon, középen, bal oldalon. Így a válasz: $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$.

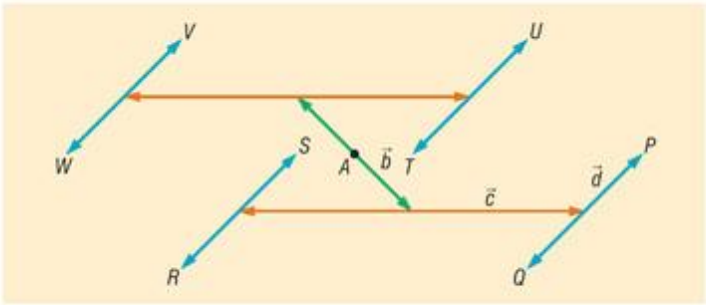
c) Az alsó részen a fentihez hasonlóan ismét 9 lehetőség van az ajtók beállítására. Mivel az alsó és a felső rész egymástól függetlenül állítható, ezért a keresett érték $(3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^4 = 81$.

1016 A feladatra két megoldást is mutatunk.

Rajzoljunk egy $ABCD$ deltoidot, és irányítsuk a kért szakaszokat mondjuk A-tól.

Legyen $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. A $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ vektorok összeadása tulajdonképpen egy útvonalat ad meg. Mindegyik vektort kétféle iránnyal tekinthetjük. Mivel a deltoid AB és AD oldala, illetve AC átlója nem lehetnek párhuzamosak, így a különféle irányításokkal összesen nyolc különböző pontba jutunk el (az eredeti irányítással például a P pontba jutunk A-ból).





A másik megoldáshoz jusson eszünkbe, hogy valamely $\vec{b}$ vektort ellentétesen irányítva $-\vec{b}$ vektort kapjuk! Ekkor a feladatot értelmezhetjük a következőképpen is: hányféleképpen oszthatjuk ki a + és – előjeleket az eredeti vektorösszegben: $(\blacksquare\,\vec{b}) + (\blacksquare\,\vec{c}) + (\blacksquare\,\vec{d})$? Mivel három helyre kell a kétféle jelből beírnunk egyet-egyet, ezért a megoldások száma $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Sajnos ennyivel még nem fejezhetjük be a megoldásokat, diszkutálnunk is kell a feladatot. Ha ugyanis a deltoid rombusz, akkor $\vec{b} + \vec{d} = \vec{c}$. Ekkor előfordul, hogy különböző előjelkiosztással ugyanabba a pontba jutunk: $(\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = -\vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{0};\ S = A = T)$, így csak 7 különböző megoldást kapunk.

Megjegyzés: A vektorok összeadása felcserélhető művelet, ezért $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ sorrendjét nem kell figyelembe vennünk a megoldás során!

Halmazok – megoldások

1017 *a)* Nem, mert nem egyértelmű.

b) Igen.

c) Igen.

d) Nem, mert nincs róla információnk.

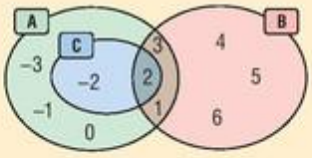
e) Igen.

1018 *a)* $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 6\}$, $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } 0 < x < 10\}$

b) C = {rövid magyar magánhangzók}, D = {a „Rákóczi FC” mássalhangzói}



1019 A Venn-diagram az ábrán látható. (➡)



1020 *a)* Igen. *b)* Nem.
c) Nem. *d)* Igen.

1021 *a)* Végtelen sok ilyen szám van.
b) $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$

1022 Jelölések: ász: á, király: k, felső: f, alsó: a. A kételemű részhalmazok:
{á; k}, {á; f}, {á; a}, {k; f}, {k; a}, {f, a}.

1023 *a)* ∅, {2}, {3}, {5}, {2; 3}, {2; 5}, {3; 5}, {2; 3; 5}.
b) {1; 4}, {1; 9}, {1; 16}, {4; 9}, {4; 16}, {9; 16}.

1024 *A*-ra végtelen sok megoldás adható, a legszűkebb: $A = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$.

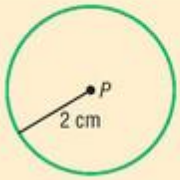
1025 *a)* {1}, {2}, {3}, {1; 2}, {1; 3}, {2; 3}, ∅.
b) Végtelen sok.

1026 *a)* Igaz, hamis, igaz, igaz.
b) Igen, az E halmaz. Nincs.
c) Igen, az A halmaz és a C halmaz.

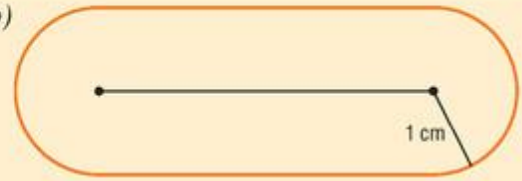
1027 *a)* $R \subset P$ igaz.
b) $P \subset T$ igaz.
c) Egyik sem igaz.
d) Igaz, igaz, hamis, hamis, hamis, hamis, igaz.

1028 *a)* Körvonal.
b) „Futópálya”.
c) Zárt sáv.
d) Lekerekített sarkú téglalap (t hozzátartozik).

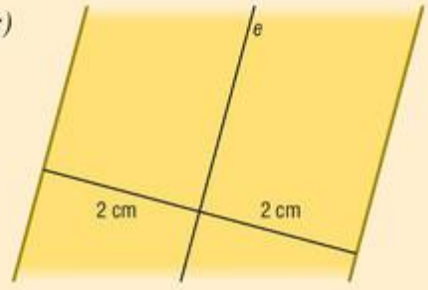
a)



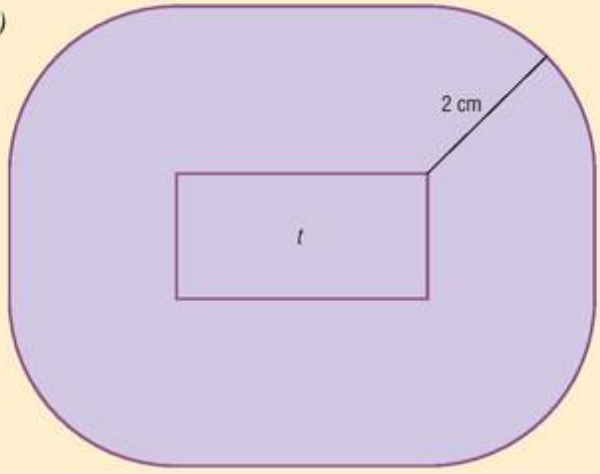
b)



c)



d)





1029 *a)* Ha B-nek van olyan eleme, amely nem eleme A-nak, ugyanakkor nincs olyan elem, amely mindkét halmazban benne van.

b) Ha B-nek nincs olyan eleme, amely nem eleme A-nak, ugyanakkor nincs olyan elem, amely mindkét halmazban benne van, azaz ha $B = \emptyset$.

c) A második halmaz részhalmaza a harmadiknak.

1030 *a)* Gömbfelület.

b) Nyitott gömbtest.

c) Az AB szakaszt felező, rá merőleges sík.

d) Hengerfelület, tengelye az e egyenes.

1031 $\{1;2;3\}$, $\{1;2;4\}$, $\{1;2;5\}$, $\{1;2;6\}$, $\{1;3;4\}$, $\{1;3;5\}$, $\{1;3;6\}$, $\{1;4;5\}$, $\{1;4;6\}$, $\{1;5;6\}$, $\{2;3;4\}$, $\{2;3;5\}$, $\{2;3;6\}$, $\{2;4;5\}$, $\{2;4;6\}$, $\{2;5;6\}$, $\{3;4;5\}$, $\{3;4;6\}$, $\{3;5;6\}$, $\{4;5;6\}$.

1032 *a)* A kitöltött táblázat:

	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c, d\}$
0 elemű részhalmaz	1	1	1	1
1 elemű részhalmaz	1	2	3	4
2 elemű részhalmaz	–	1	3	6
3 elemű részhalmaz	–	–	1	4
4 elemű részhalmaz	–	–	–	1

b) A számok a Pascal-háromszög soraiból valók. Ennek ötödik sora: 1; 5; 10; 10; 5; 1.

1033 *a)* „Mindenki költözzön öttel nagyobb sorszámú szobába!” Ekkor felszabadul az első öt szoba, így oda be lehet költöztetni a család mind az öt tagját.

b) Végtelen sokszor végtelen sok érkezőt kell elszállásolnunk. Először is keressünk jól beazonosítható végtelen láncokat a természetes számok között. Ilyenek például a különböző prímhatványok: $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$; $3^1, 3^2, 3^3, \ldots$; $5^1, 5^2, 5^3, \ldots$ stb. A természetes számok között végtelen sok prím van, és minden egyes prím hatványainak sorozatában is végtelen sok elem van. Tehát van hely a végtelen sokszor végtelen sok érkezőnek, csak fel kell szabadítanunk a szobákat. Ehhez küldjük minden n-edik prímhatvány szoba lakóját a $2n$-edik prím ugyanannyiadik hatványú szobába.

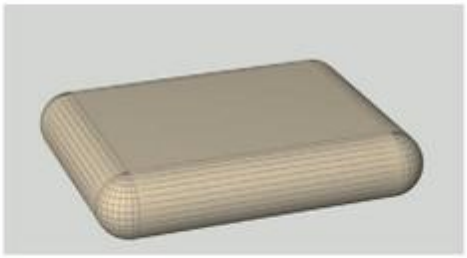
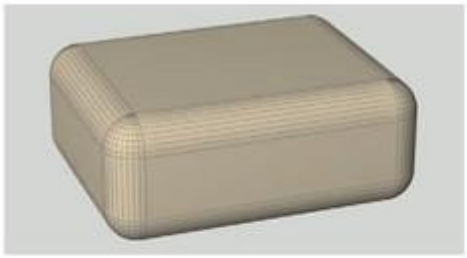
Példaként tekintsük az 5^7 sorszámú szoba lakóját. Ez a szobaszám a *harmadik* prím hetedik hatványa, ezért lakójának a *hatodik* prím hetedik hatványa sorszámú szobába kell költöznie, azaz új szobaszáma 13^7 lesz. És így tovább minden prímhatvány sorszámú szobára. Ekkor üresen maradnak az összes páratlanadik prímhatvány-láncolatban szereplő számú szobák, hiszen azokba nem költözik senki. Oda kell beköltöztetni az érkezőket, mégpedig a következőképpen:

A buszok ülésszáma (pl. s_5) jelentse a hatványkitevőt, a busz sorszáma pedig azt, hogy hányadik láncba kerül az utas a következő formula szerint: *az n-edik buszhoz tartozzon a (2n – 1)-edik prím.* Konkrét példán: keressük meg, melyik szobába kell mennie a B_4 jelű busz 13. székén helyet foglaló utasnak. Szobaszáma a $(2 \cdot 4 - 1) = 7$-edik prím hatványainak láncolatában a 13. láncszem, vagyis a 13. hatvány. Mivel a hetedik prím a 17, így a kedves vendég számára a 17^{13} sorszámú szoba lesz kiutalva.

1034 *a)* A szakasz mentén egy hengerpalást, a két végén pedig egy-egy félgömb. (Gyógyszeres kapszula.) Csak a felület tartozik a halmazhoz!

b) A téglalappal párhuzamosan egy-egy vele egybevágó téglalap (alatta és felette), oldalainál félhengerek, sarkainál pedig negyedgömbök. (Hasonlóan, mint amikor a légpárnás hajó felfújja a légpárnákat.) A megoldás az egész test, határoló felületével együtt.

c) Lekerekített szélű téglatest, ahol a lapok egybevágóak az eredeti lapjaival, oldalélei negyedhengerek, sarkai nyolcadgömbök. (Régi utazóbőrönd.) Csak a nyitott test tartozik a halmazhoz!

Megjegyzés: Érdemes meggondolni, mennyiben változnak a fenti alakzatok, ha kiindulásul nem zárt, hanem nyitott (vagy félig nyitott) szakaszt, téglalapot, téglatestet adunk meg!

Halmazműveletek – megoldások

1035 $A \cap B = \{7; 43; 61\}$

1036 *a)* Négy: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1; 3\}$. *b)* $\varnothing$, $\overline{A}$. Az is lehet, hogy a kettő egybeesik, ha $A = U$.

1037 $A \cap D = \varnothing$; $B \cap C = \varnothing$; $E \cap D = \varnothing$; $E \cap C = \varnothing$; $E \cap B = \varnothing$; $E \cap A = \varnothing$.

1038 *a)* $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$; $A \cap B = \{1; 3; 5\}$; $A \setminus B = \{2; 4; 6\}$; $B \setminus A = \{7; 9\}$.

b) Bármely C halmaz, melynek részhalmaza a $\{7; 9\}$.

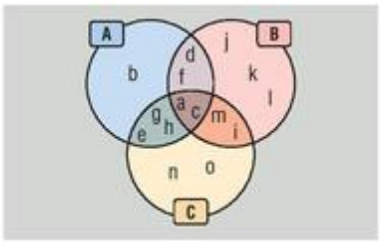
1039 *a)* Komplementerek.

b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ vagy $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $\overline{A \cup B} \cup (A \cap B)$ vagy $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.

1040 *a)* $A \setminus B = \{b; e; g; h\}$,
$B \setminus C = \{d; f; j; k; l\}$,
$A \cap C = \{a; c; e; g; h\}$,
$A \cup B = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; k; l; m\}$.

b) $A \setminus (B \cup C) = \{b\}$.

c) A Venn-diagram az ábrán látható.

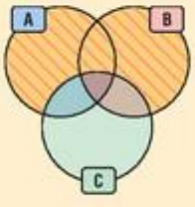


1041 *a)* A két halmaz megegyezik.

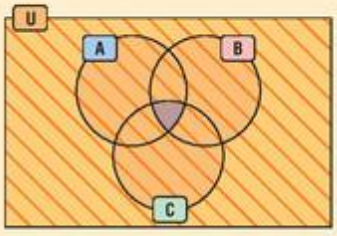
b) A két halmaz megegyezik.

c) Az első részhalmaza a másodiknak.

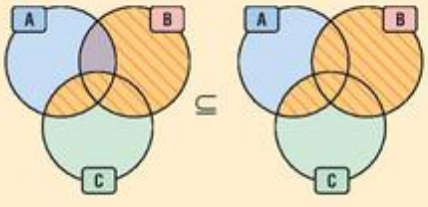
a)



b)



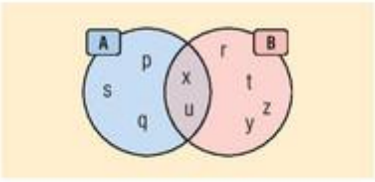
c)





1042 Készítsünk Venn-diagramot. Először írjuk be a metszetet (x; u), majd töltsük fel a B halmaz A-n kívül eső részét (r; t; y; z). Amit az unióból eddig nem írtunk sehova, az kerül az A halmaz B-n kívüli részébe. Így kapjuk:

$$A = \{p, q, s, u, x\}.$$



1043 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$

1044 *a)* $A \cup \{1; 2; 3; 4\} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$;

$A \cap \{-1; -2; -3; -4\} = \{-1; -2; -3\}$;

$A \setminus \{0; 2; 4\} = \{-3; -2; -1; 1\}$;

{egyjegyű pozitív prímek} $\setminus A = \{3; 5; 7\}$.

b) $U = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, ezért $\overline{A} = \{-5; -4; 3; 4\}$.

1045 *a)* Bármely kettő diszjunkt.

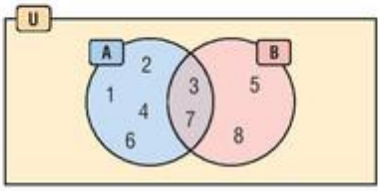
b) $[B \setminus (A \cup C)] \cup [(A \cap C) \setminus B]$;

$[C \setminus (A \setminus B)] \setminus (B \setminus A)$;

$\overline{A \cup B \cup C} \cup \big[\big((A \cup C) \cap B\big) \setminus (A \cap B \cap C)\big]$.

c) $A \setminus (B \cup C)$

1046 Az utolsó feltétel szerint A vagy B halmazon kívül nincsenek további elemek az univerzumban. Haladjunk a Venn-diagramban belülről kifelé. Így $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 7\}$.



1047 *a)* Elemeikkel megadva: $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;

$A = \{2; 3; 5; 7\}$;

$B = \{0; 4; 6; 8; 9\}$.

Ekkor $\overline{A \cup B} = \{1\}$.

b) Elemeikkel megadva: $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;

$A = \{2; 3; 5; 7\}$;

$B = \{6; 7; 8; 9\}$.

Ekkor $\overline{A \cup B} = \{0; 1; 4\}$.

1048 *a)* Elemeikkel megadva: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; \ldots; 96; 97; 98; 99; 100\}$;

$B = \{2; 3; 5; 7; 11; \ldots; 73; 79; 83; 89; 97\}$;

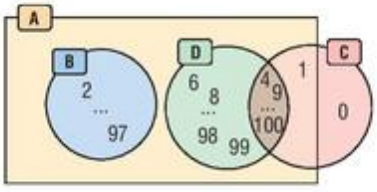
$C = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100\}$;

$D = \{4; 6; 8; 9; 10; \ldots; 94; 95; 96; 98; 99\}$.

Így $B, D \subseteq A$.

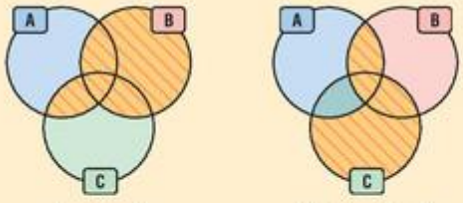
b) Igen, B és C diszjunkt, hiszen nem lehet egy szám egyszerre prím és négyzetszám. Hasonlóan nem lehet egyszerre prím és összetett is egy szám, ezért B és D is diszjunkt.

c) A Venn-diagram az ábrán látható.





1049 *a)* A Venn-diagramok az ábrán láthatók.



$B \cup (A \cap C)$ $\quad$ $(C \setminus A) \cup (A \cap B)$

b) Töltsük fel a Venn-diagram összes mezőjét egy-egy számmal, például: $A = \{1; 2; 4; 5\}$, $B = \{2; 3; 5; 6\}$, $C = \{4; 5; 6; 7\}$.

Ekkor

$$B \cup (A \cap C) = \{2; 3; 4; 5; 6\}$$

és

$$(C \setminus A) \cup (A \cap B) = \{2; 5; 6; 7\}.$$

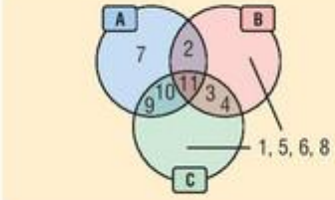
c) A másik halmazhoz nem tartozó részeket üressé kell tennünk:

$$B \cup (A \cap C) \subseteq (C \setminus A) \cup (A \cap B), \quad \text{ha} \quad (A \cap C) \setminus B = B \setminus (A \cup C) = \varnothing.$$

Fordítva,

$$(C \setminus A) \cup (A \cap B) \subseteq B \cup (A \cap C), \quad \text{ha} \quad C \setminus (A \cup B) = \varnothing.$$

1050 *a)* A 2 eleme A-nak és B-nek is, de nem eleme C-nek. Hasonlóan, 11 eleme mindhárom halmaznak. A 3 és 4 helye is rögzített. Ebből és az utolsó feltételből tudjuk, hogy az 1, 5, 6, 8 elemek valamilyen elosztásban a B vagy C halmaz mástól diszjunkt részébe kerülhetnek. A maradék 9 és 10 így csak az $(A \cap C) \setminus B$ részbe írhatók. Azaz $A = \{2; 7; 9; 10; 11\}$. A Venn-diagram az ábrán látható.



b) A B halmaz már most is tartalmaz két páratlan számot, így oda nem kerülhet 1 és 5, ezek csak C-be eshetnek. A 6 és 8 helye azonban továbbra is kérdéses. Mivel több információnk nincs, így négy megoldás lehetséges:

$6, 8 \in B$; vagy $(6 \in B$ és $8 \in C)$;

vagy $(6 \in C$ és $8 \in B)$; vagy $6, 8 \in C$.

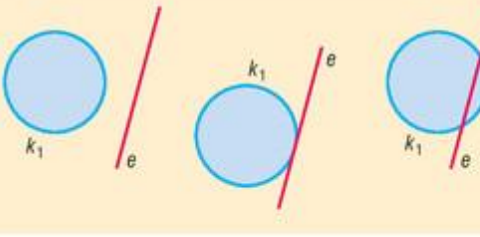
Megoldás	B	C
1.	{2; 3; 4; 11; **6; 8**}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11}
2.	{2; 3; 4; 11; **6**}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11; **8**}
3.	{2; 3; 4; 11; **8**}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11; **6**}
4.	{2; 3; 4; 11}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11; **6; 8**}

1051 *a)* A metszet lehet

– üres halmaz (ekkor e és k_1 *elkerülők*, $|e \cap k_1| = 0$);

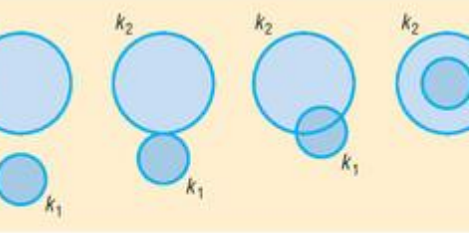
– egyetlen pont (ekkor e és k_1 *érintők*, $|e \cap k_1| = 1$);

– zárt szakasz (ekkor e és k_1 *metszők*, $|e \cap k_1| = \infty$).



(Utóbbi két pont lenne, ha körvonalról lenne szó, most viszont zárt körlapunk van.)

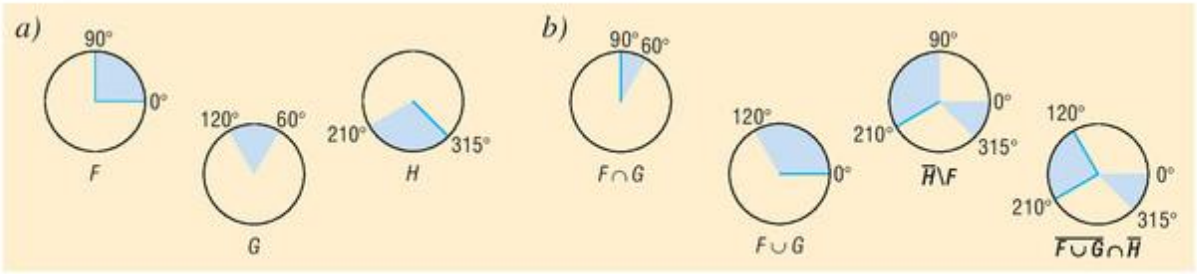
b) A metszeteket lásd az ábrákon. Két különböző sugarú körlap lehet *diszjunkt, érintő, metsző,* és *részhalmaza* egyik a másiknak. Koncentrikus körlapok esetén is ez utóbbi a helyzet.



c) Körgyűrű, a két kör közötti rész. A külső körvonal igen, a belső körvonal nem tartozik a halmazhoz!

Megjegyzés: Érdemes átgondolni, mi változik, ha zárt helyett nyitott körlapot, illetve a körvonalat adjuk meg!

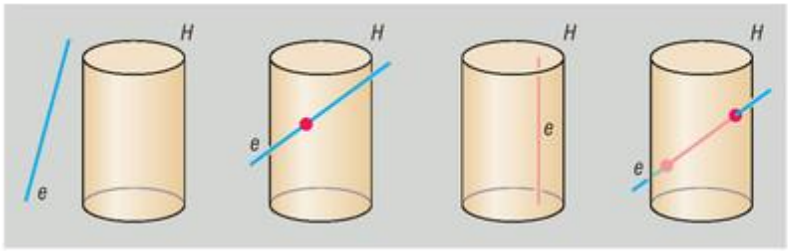
1052 A megoldás az ábrákról leolvasható.



1053 *a)* A metszet üres halmaz, ha elkerülik egymást.

Egyetlen pont, ha az egyenes érinti a hengert.

Egy egész egyenes, ha a henger részhalmazként tartalmazza az egész egyenest.

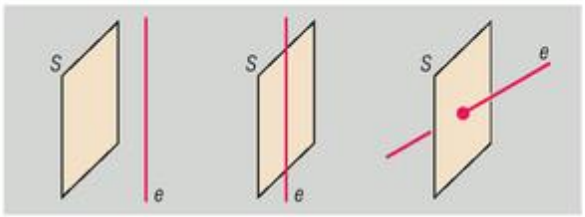


Végül bármilyen hosszú szakasz, ha az egyenes döfi a hengert. (Ne feledjük, zárt hengertestről van szó!)

b) Az egész sík, ha az egyenes párhuzamos a síkkal és nincs közös pontjuk.

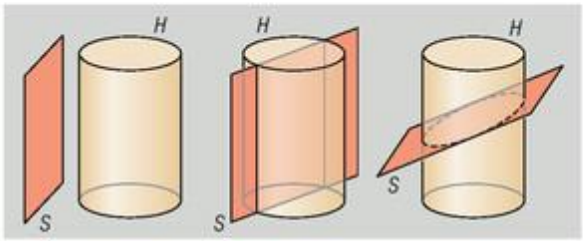
Két diszjunkt félsík, ha az egyenes a síkban futott.

Egy pontban kilyukasztott sík, ha az egyenes döfte a síkot.



c) Az egész sík, ha eredetileg diszjunktak voltak a hengerrel.

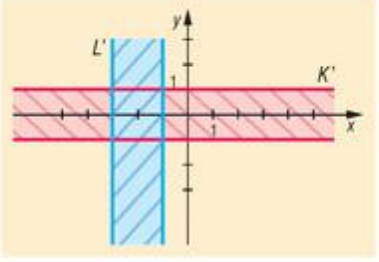
Két diszjunkt félsík, ha volt közös pontjuk és a henger tengelye párhuzamos a síkkal (a két félsík távolsága maximum a henger átmérője lehet). A metszet lehet egy lyukas sík, ahol a lyuk kör (ha a sík merőleges a henger tengelyére), vagy ellipszis (ha a sík derékszögnél kisebb pozitív szöget zár be a henger tengelyével).



Megjegyzés: Hogy a sík valóban ellipszisben metszi a hengert, bizonyítani nem tudjuk (középiskolai tanulmányaink során később sem foglalkozunk vele).

1054 *a)* $K = \{(x; y) \mid |x| \le 1 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$ vagy $K = \{(x; y) \mid -1 \le x \le 1 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$.
$L = \{(x; y) \mid |y - 2| \le 1 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$ vagy $L = \{(x; y) \mid 1 \le y \le 3 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$.

b) Jelölje K' a K, L' pedig az L elforgatásából kapott sávokat. $K' \setminus L'$ a csak \\\ ferdén satírozott; $L' \setminus K'$ a csak /// ferdén satírozott; $K' \cap L'$ pedig a rácsos rész.



Halmazként felírva őket (minden esetben $x, y \in \mathbb{R}$):

$K' \setminus L' = \{(x; y) \mid |y| \le 1 \text{ és } (x < -3 \text{ vagy } x > -1)\}$;

$L' \setminus K' = \{(x; y) \mid |x + 2| \le 1 \text{ és } (y < -1 \text{ vagy } y > 1)\}$;

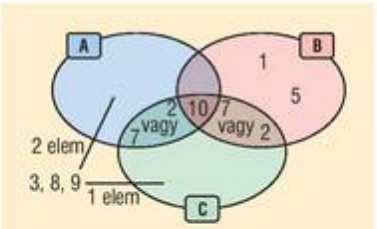
$K' \cap L' = \{(x; y) \mid |x| \le 1 \text{ és } |y - 2| \le 1\}$.



1055 *a)* Amit biztosan beírhatunk a halmazábrába, az a harmadik, illetve az utolsó feltételből adódik. A 10 a hármas metszetbe, az 1, valamint az 5 csak a B-be kerül. $(A \cap B) \setminus C$ üres. A második, illetve az utolsó előtti feltételből $(C \cap B) \setminus A$ részben egy elem van, ez vagy 2 vagy 7.

Ennél többet nem tudunk, ezek szerint

$$B = \{1; 5; 7; 10\} \quad \text{vagy} \quad B = \{1; 2; 5; 10\}.$$



b) A feladat feltételei megengedik, hogy a 7 az A-ba essen, de az is lehet, hogy $7 \notin A$. Nem tudjuk pontosan megmondani.

c) Folytatva az *a)* gondolatmenetét, C-ből egy, A-ból még két elem hiányzik. A szabad elemek a 3, a 8 és 9. Ezek közül kell kettőt csak A-ba, egyet csak C-be írni. Ez három lehetőség. B-re volt még kettő, így a feladatnak $2 \cdot 3 = 6$ olyan megoldása lehet, amely kielégíti a feltételeket. A táblázatban látható hat lehetőségből kellett felírni hármat.

Megoldás	A	B	C
1.	{7; 10; **8; 9**}	{1; 5; 10; 2}	{2; 7; 10; **3**}
2.	{7; 10; **3; 9**}	{1; 5; 10; 2}	{2; 7; 10; **8**}
3.	{7; 10; **3; 8**}	{1; 5; 10; 2}	{2; 7; 10; **9**}
4.	{2; 10; **8; 9**}	{1; 5; 10; 7}	{2; 7; 10; **3**}
5.	{2; 10; **3; 9**}	{1; 5; 10; 7}	{2; 7; 10; **8**}
6.	{2; 10; **3; 8**}	{1; 5; 10; 7}	{2; 7; 10; **9**}

Halmazok elemszáma, logikai szita – megoldások

1056 $|W| = 8$

1057 *a)* 6 elemű: {e, i, a, ó, í, ő}.

b) 4 elemű: $\{\varnothing; \{a\}; \{b\}; \{a, b\}\}$.

c) Végtelen sok eleme van: {szabályos 3-, 4-, 5-, 6-, 7-, …-szögek}.

d) 6 elemű: {2; 3; 5; 6; 10; 15}.

1058 $|T| = 123 + 45 + 87 = 255$

1059 $|A \cup B| = 20 + 32 - 14 = 38$

1060 Két megoldást is adunk.

I. Alkalmazzuk a logikai szitát:

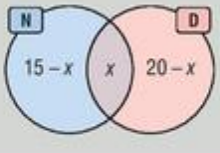
$$26 = |N \cup D| = |N| + |D| - |N \cap D| = 15 + 20 - |N \cap D|,$$

ahonnan a metszet elemszáma 9. Vagyis csak dánul $|D| - |N \cap D| = 11$ fő tanul.

II. Írjuk a Venn-diagramba az elemszámokat a metszettel (x) kezdve. x helyére olyan számot kell írni, hogy

$$15 - x + x + 20 - x = 26$$

legyen. Ez $x = 9$-re teljesül. Így csak dánul $20 - 9 = 11$ fő tanul.



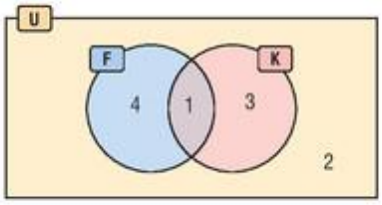
1061 Két megoldást is adunk.

I. Alkalmazzuk a logikai szitát:

$$10 = |U| = |F \cup K| + x = |F| + |K| - |F \cap K| + x = 5 + 4 - 1 + x,$$

ahonnan $x = 2$.

II. Jelölje U a baráti társaságot mint alaphalmazt, F a fociért, K a kosárlabdáért rajongók halmazát. Írjuk az elemszámokat a Venn-diagramba, kezdjük a metszettel. Utána töltsük fel F-t 5 és K-t 4 elemre, majd az egészet egészítsük ki 10-re. A megoldás 2.



1062 Jelölje T a tarka farkú, H a hosszú csőrű szarkák halmazát. A logikai szitát alkalmazva:

$$|T \cup H| = 200 \cdot 0{,}6 + 200 \cdot 0{,}7 - 200 \cdot 0{,}4 = 180,$$

így a rövid csőrű és egyszínű farktollú madarak száma 20. (Ez az összes madár 10%-a.)

1063 $0 \le |N \cap D| \le 4$. (A golyóstollak összes számára nem tudunk mit mondani, mert Magdinak lehetnek olyan tollai is, amelyek az említettektől különbözők.)

1064 Legyen J a jóképű, O az okos fiúk halmaza. A logikai szitát alkalmazva:

$$|J \cup O| = 7 + 5 - 3 = 9.$$

Rajtuk kívül vannak még nyolcan, akiket a lányok – papíron legalábbis – kikosaraztak. Így 17 fiú jár az osztályba. Evelinen és Lilin kívül pedig még 14 lány tanul ott, összesen 16-an. Az osztályba eggyel több fiú jár, mint lány.

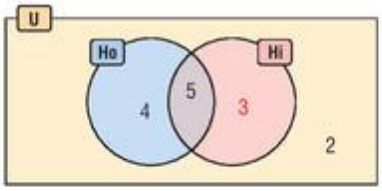
1065 Kétféle megoldást is adunk.

I. Logikai szitával: Jelölje Hi a hintázó, Ho a homokozó gyermekek halmazait. A kergetőzőket nem jelöljük külön, beleesnek az összes bölcsist tartalmazó U univerzumba.

$$14 = |U| = |Ho \cup Hi| + 2 = |Ho| + |Hi| - |Ho \cap Hi| + 2 = 9 + |Hi| - 5 + 2.$$

Innen $|Hi| = 8$, a csak hintázók száma pedig $8 - 5 = 3$.

II. Venn-diagrammal:



1066 Nem lehetséges. Minden szám vagy az egyik, vagy a másik halmazba esik. A két halmaz uniójának s-sel jelölt elemszáma:

$$\frac{2}{3} \cdot s + \frac{3}{4} \cdot s - \frac{1}{2} \cdot s = \frac{11}{12} \cdot s,$$

ami szerint az unión kívül is vannak még elemek. Ez viszont ellentmond az első feltételnek.

1067 Jelölje a tálban levő g darab gumicukrok közül A az állatos, S a többszínű cukrok halmazait. Ekkor

$$|U| = g = |A \cup S| + 0{,}1 \cdot g = |A| + |S| - |A \cap S| + 0{,}1 \cdot g =$$
$$= 0{,}4 \cdot g + 0{,}8 \cdot g - |A \cap S| + 0{,}1 \cdot g,$$

ahonnan $|A \cap S| = 0{,}3 \cdot g$. Mivel 10% pontosan $9 + 6 = 15$ cukrot jelent, így a tálban összesen 45 darab színes állatfigurás gumicukor volt. Azóta persze Eszter is evett belőle.

1068 *a)* Jelölje M a matematika, N a magyar nyelvtan házit készítők halmazát. Ekkor

$$|U| = |M \cup N| + 3 = |M| + |N| - |M \cap N| + 3 = 13 + 15 - 8 + 3 = 23.$$

A csoport 23 fős.

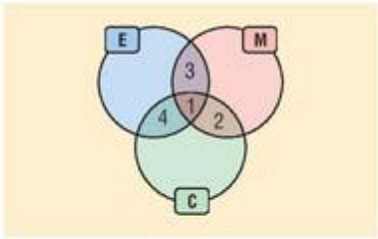
Megjegyzés: A másik lehetőség Venn-diagramba írni az elemszámokat.

b) Csak a matek házit $13 - 8 = 5$ fő készítette el, ez pedig a 23-nak $100 \cdot \frac{5}{23} \approx 21{,}74\%$-a.



1069 Jelölje az eperfagyit kedvelők halmazát E, a málnásokat M, a citromot szeretőket C. Rajzoljuk fel a Venn-diagramot, majd haladjunk belülről kifelé. Az ábrába került számokhoz még 13-t kell adnunk, így az osztálylétszám:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 13 = 23 \text{ fő.}$$



1070 Az első mondat alapján $U = V \cup P$, ahol V a verseket, P a prózát tartalmazó könyvek halmaza. Tudjuk még, hogy $|V| = 9$, $|P| = 7$ és $|V \cap P| \geq 1$. Mivel legalább egy olyan könyv van, amelyik csak prózát tartalmaz, ezért a metszetben legfeljebb 6 könyv lehet, így

$$6 \geq |V \cap P| \geq 1.$$

A logikai szitát felírva:

$$15 \geq |U| = 9 + 7 - |V \cap P| \geq 10.$$

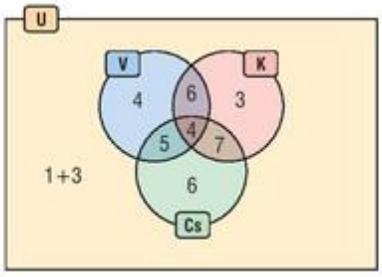
A polcon levő könyvek száma 10-től 15-ig terjedhet.

Megjegyzés: Másik lehetőségként felrajzolhatjuk a Venn-diagramot is.

1071 Kezdjük most logikai szitával. Jelölje U a helyszínen tartózkodók halmazát, V a védőt, K a középpályást és Cs a csatárt már játszott fiúk halmazait. Ne feledjük, Ede és a három kapus is ott volt a megbeszélésen, de nem jelentkezett! Ekkor

$$|U| = 1 + 3 + |V \cup K \cup Cs| = 4 + |V| + |K| + |Cs| -$$
$$- |V \cap K| - |V \cap Cs| - |K \cap Cs| + |V \cap K \cap Cs| =$$
$$= 4 + 19 + 20 + 22 - 10 - 9 - 11 + 4 = 39.$$

Ugyanez Venn-diagrammal az ábrán látható.



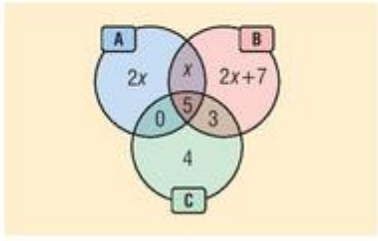
1072 Jelentse H, I, P azon fák halmazait, melyek mellett hóvirág, ibolya, pipacs terem. A szöveg szerint minden fa mellett nyílik valamilyen vadvirág, így a szita formula:

$$f = |H \cup I \cup P| = \frac{2}{3} \cdot f + \frac{7}{15} \cdot f + \frac{1}{3} \cdot f - \frac{1}{10} \cdot f - \frac{1}{5} \cdot f - \frac{7}{30} \cdot f + \overbrace{|H \cap I \cap P|}^{20}.$$

Innen adódik, hogy az összes fa $\frac{1}{15}$-e 20 darab, vagyis a kertben 300 fa található.

1073 *a)* Az (1) feltétel szerint $(A \cap C) \setminus B$-be nem esik egy elem sem, a hármas metszetbe viszont 5. Ez és a (6) feltétel szerint $(A \cap B) \setminus C$-ben 3 elem található. Így C számosságával végeztünk is, mert csak C-be 4 elem esik (hogy (3) alapján összesen 12-t kapjunk). Persze nem ez volt a kérdés.

A (4) feltétel szerint írhatjuk be x és $2x$ kifejezéseket. Mivel (2) miatt B-nek 10-zel több eleme van, mint A-nak, így csak B-be $2x + 7$ kerül. Az (5) feltétel szerint pedig $2 \cdot 2x = 2x + 7 + 3$, ahonnan $x = 5$. Tehát $|A| = 20$, $|B| = 30$.



b) Összeadva az egyes részekben levő számokat, az eredmény 44.

1074 *a)* Jelölje B, H, P a Bécsben, Helsinkiben, Prágában járt színjátszók halmazait. Mivel 55%-uk járt csak egy városban, így 45%-uk, vagyis 27 fő több helyen is. Tudjuk, hogy $(H \cap P) \setminus B$ üres halmaz, ezért

$$27 = 21 + 15 - |H \cap P \cap B|.$$

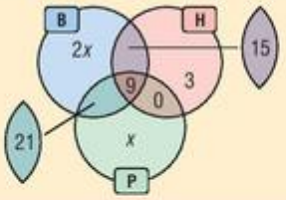
Innen a hármas metszet elemszámára 9 adódik.



b) Beírhatjuk csak H-ba a 3-at, csak P-be x-et és csak B-be $2x$-et. Mivel a 60 fős társulat tagjainak 55%-a csak egy városba jutott el, így

$$33 = 3x + 3,$$

ahonnan $x = 10$. Ez alapján Bécsben 47 fő, Helsinkiben 18, Prágában pedig 31 fő játszott.



1075 *a)* Érdemes először értelmeznünk a kijelentést. A „metszetük elemszáma": $|A \cap B \cap C|$, az „elemszámaik számtani közepe" pedig (mivel hárman vannak): $\frac{|A|+|B|+|C|}{3}$. A kijelentés szerint előbbi nem nagyobb, mint utóbbi, azaz kisebb vagy egyenlő:

$$|A \cap B \cap C| \le \frac{|A|+|B|+|C|}{3}.$$

Ezt kell igazolnunk.

Mit tudunk bármely metszet elemszámáról? Például azt, hogy kisebb vagy egyenlő az őt alkotó halmazok elemszámainál. Vagyis

$$|A \cap B \cap C| \le |A|, \quad |A \cap B \cap C| \le |B| \quad \text{és} \quad |A \cap B \cap C| \le |C|.$$

Összeadva a fenti három egyenlőtlenséget, majd hárommal elosztva, éppen a kérdezett összefüggést kapjuk.

Megjegyzés: Jól látszik, hogy a kijelentés általánosítható bármennyi véges halmazra.

b) A második részben

$$|A \cap B \cap C| = k \quad \text{és} \quad \frac{|A|+|B|+|C|}{3} = k+1.$$

Utóbbit megszorozva hárommal:

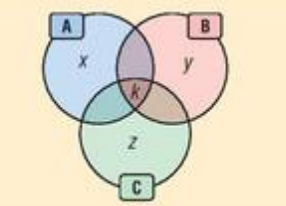
$$|A| + |B| + |C| = 3k + 3.$$

Rendezzük a következőképpen:

$$(|A| - k) + (|B| - k) + (|C| - k) = 3.$$

Most vessünk egy pillantást a Venn-diagramra. A feladat szövege szerint x, y, z egyike sem lehet 0. Utolsó egyenletünk ezen feltétel mellett csak úgy lehetséges, ha $x = y = z = 1$ és további elemet nem tartalmaznak a halmazok. Azaz uniójuk elemszámára:

$$|A \cup B \cup C| = k + 3.$$

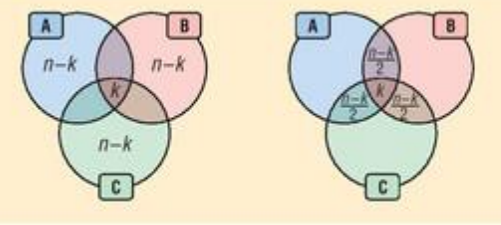


Megjegyzés: Kiderült, hogy a három halmaz elemszáma egyenlő.

c) Gondoljuk meg, hogy a feltételeknek megfelelő két véglet az alábbi két lehetséges helyzet az elemek számára.

Az első esetnél több eleme már nem lehet az uniónak.

A második esetnél pedig kevesebb eleme nem lehet az uniónak.



Az ábrából pedig leolvashatjuk a feladatra adott választ is:

$$1{,}5n - 0{,}5k = 3 \cdot \frac{n-k}{2} + k \le |A \cup B \cup C| \le 3 \cdot (n-k) + k = 3n - 2k.$$

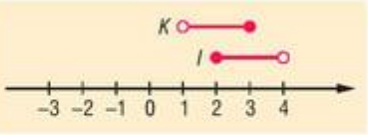


Számegyenesek, intervallumok – megoldások

1076 *a)* és *b)* intervalluma az ábrán látható.

c) $J = [-2; 1]$

d) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$



1077 *a)* Az I és K intervallumok félig nyitott, félig zárt, a J nyitott, az L pedig zárt intervallumok.

b) Igen, $J \subset K$ és $L \subset K$.

c) Egészítsük ki K-t a jobb végponttal. A megoldás: $K^* = [-2; 2]$.

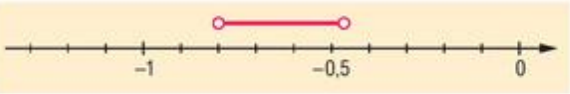
1078 *a)* K nyitott, J zárt, I balról zárt, jobbról nyitott, L pedig fordítva, jobbról zárt, balról nyitott.

b) $I = [0; 3[$; $J = [1; 6]$; $K =]-1; 4[$; $L =]4; 7]$; $I \setminus J = [0; 1[$; $K \setminus I =]-1; 0[\cup [3; 4[$; $J \setminus L = [1; 4]$; $I \cap J = [1; 3[$; $J \cap L =]4; 6]$; $J \cup L = [1; 7]$; $K \cup J =]-1; 6]$

c) I és L, illetve K és L diszjunkt intervallumok.

d) $\overline{L} = [-1; 4]$; $\overline{K} = \{-1\} \cup [4; 7]$

1079 *a)* $I = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{4}{5} < x < -\frac{7}{15}\right\}$, számegyenesen:

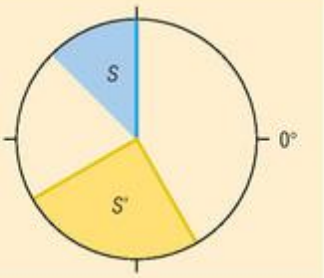


b) $-\frac{8}{15}, -\frac{9}{15}, -\frac{10}{15}, -\frac{11}{15}$

1080 *a)* A megadott intervallumok ábrázolása az egységkörben:

b) A zöld színnel ábrázolt szög: $[135°; 225°[$.

A piros színnel ábrázolt szög: $[270°; 360°[$ vagy $[-90°; 0°[$.

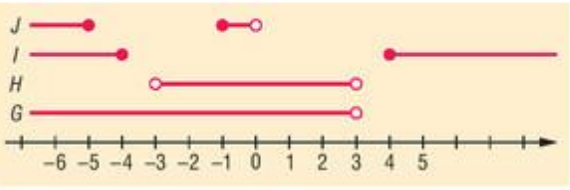


1081 *a)–d)* Ne feledjük, I és J két-két részből áll össze!

e) $\overline{H} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } |x| \geq 3\}$.

$G(\geq)$ és $I(<)$ esetében igen,

$\overline{J} =]-5; -1[\cup [0; \infty[$.



1082 *a)* Ott van a függvény zérushelye, ahol görbéje metszi az x tengelyt. Az adott függvénynek 3 zérushelye van, az $x = 0$, az $x = 5$, valamint az $x = 7$ helyen.

b) Ott vesz fel negatív értéket, ahol az x tengely alá megy: $[-1; 0[$ és $]5; 7[$ intervallumokon.

c) Növekedési intervallumok: $[-1; 1]$, $[2; 4]$, $[6; 8]$.



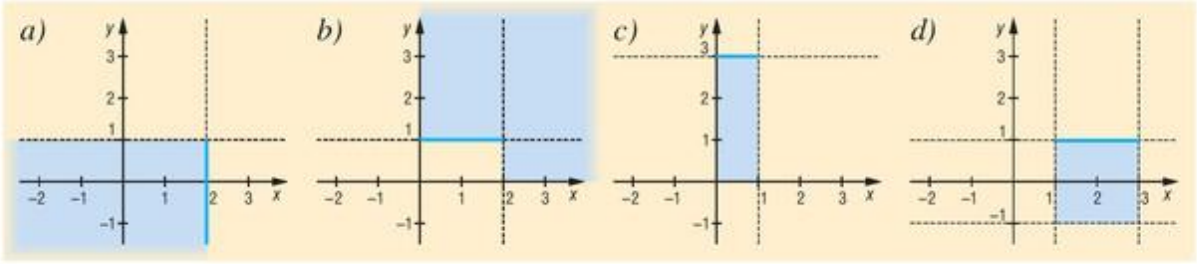


1083 *a)* Felül nyitott negyedsík.

b) Negyedsík, amelynek levágtuk a sarkát. A tengelyek felől nyitott, csak a rövid vízszintes határa tartozik hozzá.

c) Csak felül zárt téglalap.

d) Csak felül zárt négyzet.

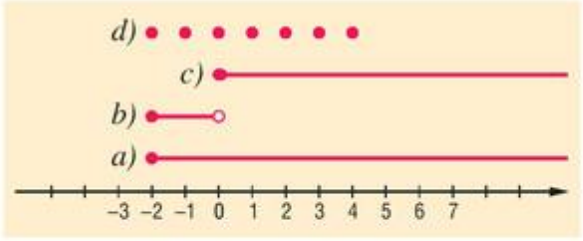


1084 *a)* $U = \mathbb{R}$, $\overline{H} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\} = [-2; \infty[$.

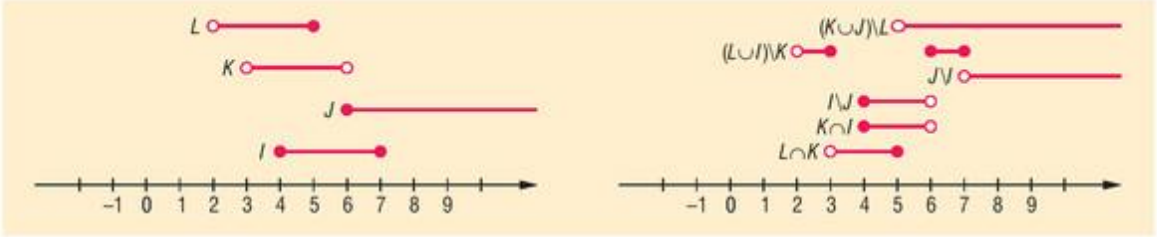
b) $U = \mathbb{R}^-$, $\overline{H} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 > x \geq -2\} = [-2; 0[$.

c) $U = \mathbb{R}_0^+$, $\overline{H} = U = [0; \infty[$.
(A H ebben az univerzumban üres halmaz.)

d) $U = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; -2; -3; -4; \ldots\}$,
$\overline{H} = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.



1085 *a)* Először érdemes az adott intervallumokat ábrázolni számegyenesen, majd segítségükkel a kérdéses intervallumokat meghatároznunk. A keresett intervallumok alulról felfelé, sorban találhatók.



$$L \cap K =]3; 5], \quad K \cap I = [4; 6[, \quad I \setminus J = [4; 6[, \quad J \setminus I =]7; \infty[,$$
$$(L \cup I) \setminus K =]2; 3] \cup [6; 7], \quad (K \cup J) \setminus L =]5; \infty[$$

b) Az alábbi intervallumokat nem ábrázoltuk számegyenesen, csak leolvastuk az eredményeket.

$$\overline{L} =]5; \infty[, \quad \overline{J} =]2; 6[, \quad \overline{I \cup J} =]2; 4[,$$
$$\overline{I \cup K} =]2; 3] \cup]7; \infty[, \quad \overline{J \cup L \cup K} = \varnothing.$$

1086 *a)* Mindkettőt külön-külön közös nevezőre hozva, majd azzal megszorozva és átrendezve kapjuk eredményül (közben negatív számmal nem osztottunk, szoroztunk):

$$x > -5 \quad \text{és} \quad x \leq 3.$$

b) $I =]-5; \infty[$, $J =]-\infty; 3]$.

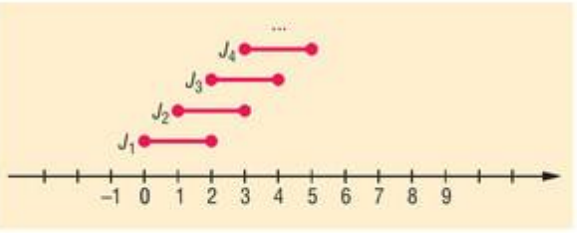
c) $I \cap J =]-5; 3]$, $I \setminus J =]3; \infty[$, $J \setminus I =]-\infty, -5]$.

d) $I \cup J = \mathbb{R}$, hiszen egyesítésük magát a számegyenest adja.



1087 *a)* Érdemes felrajzolni néhány intervallumot (az intervallumot n indexével jelöltük). Ebből már láthatjuk, hogy végtelen lépcsőről van szó. Így könnyen válaszolunk a kérdésekre:

$$J_1 \cap J_2 \cap J_3 = \{2\}.$$



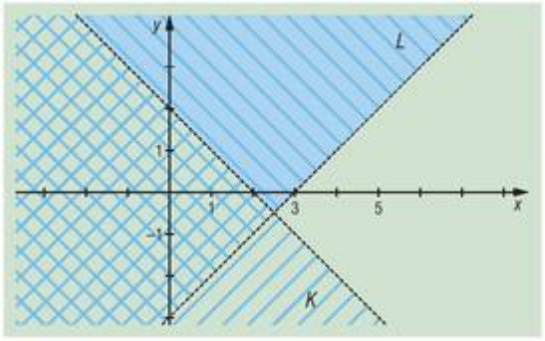
b) $(J_2 \cup J_4) \setminus J_3 = [1; 2[\cup]4; 5]$.

1088 A rajzolás előtt érdemes függvényként gondolni az összefüggésekre, *a)*-ban például $y = -x + 2$, illetve $y = x - 3$ alakban ábrázolni a lineáris függvényeket, majd utána színezni az egyenlőtlenségnek megfelelően! Azt se feledjük el, hogy meg kell mondanunk, hogy a kialakult alakzatokhoz mely határok tartoznak hozzá, és melyek nem.

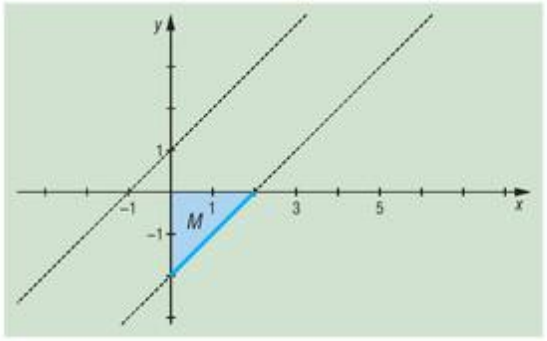
a) A K tartomány a /// irányban satírozott, L pedig \\\. Az $L \setminus K$ tartomány a csak \\\ irányban satírozott felső rész (negyed sík). Határai nem tartoznak hozzá.

b) A kérdéses ponthalmaz egy párhuzamos egyenesek közötti sáv egy darabkája lesz (a derékszögű háromszöghöz a befogók nem tartoznak hozzá, csak az átfogó). Az utolsó feltételek miatt végül az $x - y \geq -1$ feltétel mindig teljesül.

a)



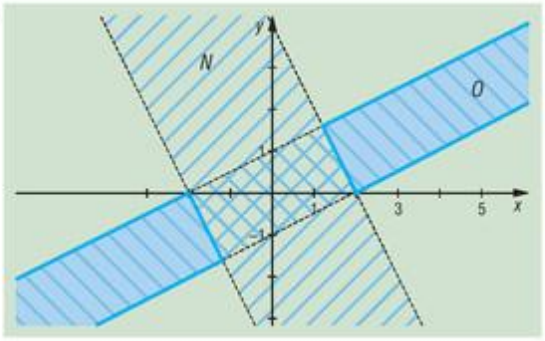
b)



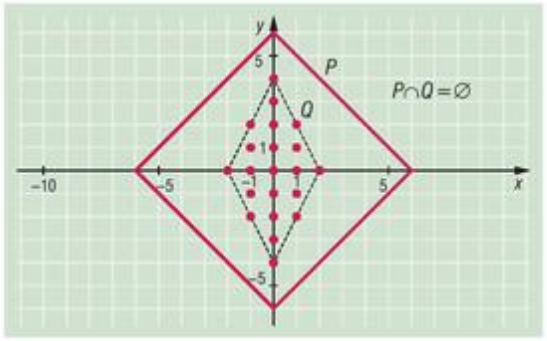
c) Az N és az O is egy-egy sávot határoz meg a síkon. Más irányba dőlnek, és szélességük sem ugyanaz. Ilyen ponthalmazokat úgy is megkereshetünk, ha kipróbálunk jó néhány pontot a síkon, és ellenőrizzük, igaz-e rájuk a feltétel. Elég sok pont után már látni fogjuk a szabályszerűséget. Az $O \setminus N$ eredménye két félsáv (a csak \\\ irányban satírozott részek). Határai hozzá tartoznak, hiszen N a határait nem tartalmazza, így nem is vettük el őket O-ból.

d) P nem egyenlőtlenséget tartalmaz, hanem egyenletet, ezért nem kell satíroznunk: egy négyzetet kapunk. Q-nál oda kell figyelni arra, hogy x és y is csak egész számok lehetnek! Tehát itt sem kell satíroznunk, csak egész koordinátájú pontokat bejelölni. A pontokat a fekete szaggatott vonallal jelölt rombusz szélén vagy azon belül kell keresni (négyzetrácsos füzetben hamar megy). A kérdéses $P \cap Q$ metszet üres halmaz, hiszen egyik gombóc sem esik a négyzet oldalaira.

c)



d)

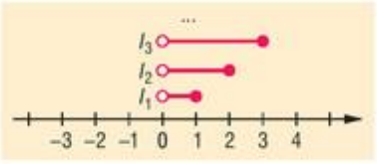




1089 *a)* Ábrázoljuk az intervallumokat. Bármely nagyobb indexű intervallumnak részhalmaza egy kisebb indexű:

$$I_p \subseteq I_q,$$

ahol $p < q$ pozitív egészek.

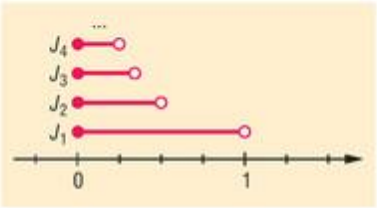


b) A tartalmazások miatt az összes intervallum metszete az első intervallum: $I_1 =]0; 1]$.

c) Egyesítésük a számegyenes pozitív fele, azaz $\mathbb{R}^+$.

Megjegyzés: A *c)* részfeladatra adott válasz pontos bizonyítását csak később adhatjuk meg. A gondolat lényege, hogy bármilyen (nagy) pozitív számot is választunk, előbb-utóbb belekerül valamelyik intervallumba. Például az 111111111 eleme lesz először az 111111111. intervallumnak, majd az utána jövő összes többinek, így uniójuknak is.

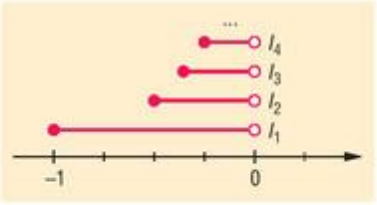
1090 *a)* Intervallumként: $J_n = \left[0; \frac{1}{n}\right[$.



b) A számegyenes egyetlen pontjára, a 0-ra igaz, hogy eleme az összes intervallumnak. Van-e rajta kívül másik ilyen érték? Nyilván negatív vagy 1-nél nagyobb szám nem lehet a metszetben, hiszen egyik intervallumnak sem eleme.

Mi a helyzet a 0-hoz nagyon közel levő pozitív számokra? Válasszunk egyet, például az $\frac{1}{1000000}$-t. Ez elég közel van a 0-hoz. Viszont az intervallumok jobb végpontjai ha lassan is, de egyre közelebb kerülnek a 0-hoz. Az 1000000. intervallum jobb végpontja például pont a kérdéses érték, vagyis annak már nem eleme az $\frac{1}{1000000}$. Az $n > 1000000$ intervallumokra biztosan nem, azaz az összes metszetébe sem kerülhet bele. A lényeg, hogy bármilyen pici pozitív számmal is próbálkozunk, mindig ezt kapjuk. Tehát a 0 az egyedüli szám, amely a metszetben megtalálható.

1091 *a)* Az ábra nagyon hasonlít az előző feladatban szereplőre, csak kicsit átrendeztük a szakaszokat.



b) A metszetük üres halmaz. Ha a 0 felől zárt intervallumok lennének, akkor a 0 eleme lenne mindegyiknek. Így viszont bármilyen kicsi negatív számot is választunk, pl. −0,001-et, előbb-utóbb a bal végpont átlépi ezt az értéket.

A konkrétan említett −0,001-et az 1001. intervallum már nem fogja tartalmazni, hiszen

$$-0{,}001 = -\frac{1}{1000} < -\frac{1}{1001}.$$

Természetesen az utána jövők sem, így nem lehet a metszetnek eleme.

c) Leolvashatjuk az ábráról, hogy

$$I_n \setminus I_{n+1} = \left[-\frac{1}{n}; -\frac{1}{n+1}\right[.$$

Megjegyzések: Előző és jelen feladat *b)* pontjában említett gondolatmenet vezet el minket később a *határérték* és a *torlódási pont* fogalmához. Megfigyelhetjük azt is, hogy mindkét esetben hasonlóan gondolkodtunk: egy értéket választva beláttuk, hogy az nem megoldása a feladatnak. Az ilyen gondolatmenetet *indirekt bizonyításnak* nevezzük.



Vegyes feladatok – megoldások

1092 *a)* $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ *b)* 4 *c)* 6

1093 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

1094 *a)* $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ *b)* $3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 72$

1095 *a)* $2 \cdot 2 = 4$ *b)* $\frac{5}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{16}, \frac{9}{20}$

1096 *a)* $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$ *b)* $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

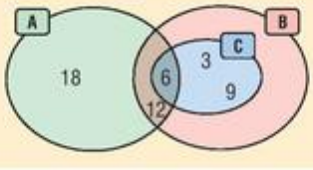
c) $20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \approx 2{,}43 \cdot 10^{18}$ *d)* $14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \approx 8{,}72 \cdot 10^{10}$

e) $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

1097 *a)* $\{10; 12; 15; 20; 30; 60\}$

b) A Venn-diagram az ábrán látható.

c) Igaz, igaz.



1098 *a)* {a}, {b}, {c}, {d}, {a; b}, {a; c}, {a; d}, {b; c}, {b; d}, {c; d}, {a; b; c}, {a; b; d}, {a; c, d}, {b; c; d}, $\varnothing$

b) {a; b}, {a; b; c}, {a; b; d}

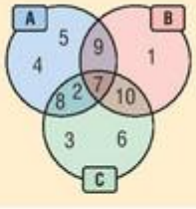
1099 *a)* $A \setminus B = \{0; 2; 4; 8; 10; 14\}$, $B \setminus A = \{3; 9; 15; 18\}$,
$A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 18\}$, $A \cap B = \{6; 12\}$

b) $\overline{A} = \{-1; 1; 3; 5; 7; 9\}$, $\overline{B} = \{-1; 0; 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10\}$,
$\overline{A} \cap \overline{B} = \{-1; 1; 5; 7\}$, $\overline{A \setminus B} = \{-1; 1; 3; 5; 6; 7; 9\}$

1100 *a)* A Venn-diagram az ábrán látható.

b) $B \setminus A = \{1; 10\}$, $C \setminus B = \{2; 3; 6; 8\}$,
$A \cap C = \{2; 7; 8\}$, $C \cup B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8; 9; 10\}$

c) $B \setminus (A \cup C) = \{1\}$, $\overline{A} \cap (B \cup C \cup \{11\}) = \{1; 3; 6; 10\}$,
$\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)} = \{1; 3; 4; 5; 6\}$



1101 $\overline{A \cup C} \setminus \overline{B} = \{ó; é; ú\}$

1102 $|A \cup B| = 82 = 56 + 93 - |A \cap B|$, innen $|A \cap B| = 67$.

1103 Jelölje G a gitáros számok halmazát, D a dobosokat.

$$|G \cup D| = |G| + |D| - |G \cap D| = 13 + 10 - 8 = 15.$$

A Vízilovaknak 15 saját számuk van.

1104 Kétféle megoldást is adunk.

I. Jelölje H a szuperhősöket, J a járműveket, M a mesehősöket tartalmazó képregények halmazát.

$$|H \cup J \cup M| = 30 = |H| + |J| + |M| - |H \cap J| - |H \cap M| - |J \cap M| + |H \cap J \cap M| =$$
$$= 14 + 9 + 20 - 3 - 5 - |H \cap M| + 1,$$

innen $|H \cap M| = 6$. Mivel a hármas metszet 1, ezért az együtt gyalog járó mese- és szuperhősöket felvonultató képregények száma 5.

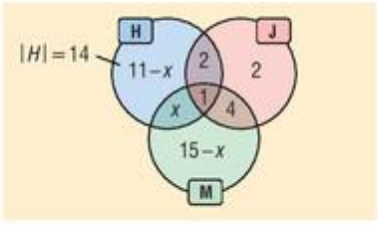


II. Venn-diagrammal:

Dávidnak 30 képregénye van, így

$$14 + 2 + 4 + 15 - x = 30,$$

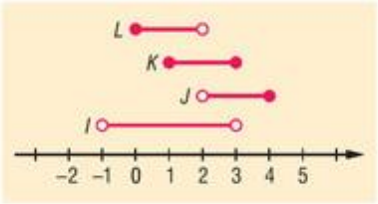
amiből $x = 5$.



1105 *a)* Az intervallumok ábrázolása:

b) $I \setminus K =]-1; 1[$, $J \cap K =]2; 3]$, $K \cup L = [0; 3]$

c) Igen, J és L. Igen, $L \subseteq I$.

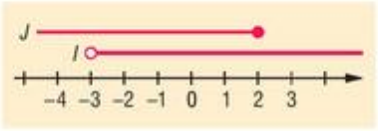


1106 *a)* A megoldások: $x > -3$ és $x \leq 2$. Ábrázolásuk:

b) $I \cap J =]-3; 2]$

c) $I \setminus J =]2; \infty[$

d) $J \setminus I =]-\infty; -3]$



9.2. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

Betűk használata a matematikában – megoldások

1107 *a)* $5n + 4$, $n \in \mathbb{N}$; *b)* $8n + 5$, $n \in \mathbb{N}$; *c)* $100n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
d) $100n + 17$, $n \in \mathbb{N}$; *e)* $\frac{7}{3n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$; *f)* $\frac{4n}{4n+3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

1108 *a)* A 9-cel osztható pozitív egész számokat.
b) Azokat a pozitív egész számokat, melyek 8-cal osztva 5-öt adnak maradékul.
c) A 23-ra végződő legalább háromjegyű pozitív egész számokat.
d) A 2-nél a-val kisebb egész számokat (az összes egész számot).
e) A négyzetszámoknál 1-gyel nagyobb természetes számokat.
f) A 3-mal osztva 2 maradékot adó természetes számok 10-ed részét.

1109 *a)* $-4{,}2xy$; $-4xz$; $-2{,}8xyz$; $3{,}6xyz$; $3{,}8xyz$. *b)* $-7ab^2$; $-6ab$; $-6ab$; $-4{,}4a^4b$; $-4{,}2a^2$.

1110 *a)* -3; *b)* 70; *c)* -2; *d)* 8; *e)* $\frac{4}{3}$; *f)* $\frac{3869}{300}$.

1111 *a)* $x \neq 0$; *b)* $x \neq -2$; *c)* $a \neq -\frac{3}{2}$; *d)* $x \neq 0$, $x \neq 1$;
e) $x \neq \frac{4}{5}$, $x \neq -\frac{1}{3}$; *f)* $a \neq -\frac{7}{2}$, $a \neq \frac{3}{8}$; *g)* $y \neq 3$, $y \neq -3$, $y \neq 2$, $y \neq -2$.

1112 Az oldalak: $2x - 2$, $2x$, $2x + 2$. A kerület: $6x$, $x \in \mathbb{N}$, $x > 1$.

1113 *a)* Mivel $a = 3n + 2$, attól függően, hogy n 4-gyel osztva milyen maradékot ad, a 12-es maradék lehet 2, 5, 8 vagy 11.
Mivel $b = 4k + 3$, attól függően, hogy k 3-mal osztva milyen maradékot ad, a 12-es maradék lehet 3, 7 vagy 11.
b) Az előző esetek alapján, mivel a maradékok összeadódnak, a lehetséges maradékok: 0-tól 11-ig minden egész szám.

Hatványozás, a számok normálalakja – megoldások

1114 *a)* $2^6 < 2^8$; *b)* $2^{16} > 2^{12}$; *c)* $3^6 < 3^9$; *d)* $2^{15} < 2^{16}$;
e) $2^3 \cdot 3^3 < 3^3 \cdot 2^4$; *f)* $3^{21} > 3^{20}$; *g)* $2^{15} \cdot 5^{15} > 2^{12} \cdot 5^{15}$; *h)* $4^{100} \cdot 10^{100} > 10^{100}$.

1115 *a)* 2; *b)* 12; *c)* 4; *d)* 9; *e)* 1; *f)* 18.

1116 *a)* a^{41}; *b)* x^{36}; *c)* x^{11}; *d)* b; *e)* x^{26}; *f)* $a^4 \cdot b^3$;
g) $a^6 \cdot b^3$; *h)* $\frac{c^8}{d^6}$.

1117 *a)* $\frac{1}{81}$; *b)* $-\frac{1}{125}$; *c)* 8; *d)* 49; *e)* $-\frac{27}{125}$; *f)* $\frac{25}{16}$;
g) $\frac{4}{9}$; *h)* $-\frac{2}{5}$; *i)* $\frac{4}{9}$; *j)* 7.

1118 A kitevők:

a) $-2,\ -4,\ -5,\ -8,\ -10,\ 30$; *b)* $-2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -11,\ 40$.

1119 *a)* a^3; *b)* x^{10}; *c)* $\frac{1}{8a}$; *d)* $a^6 \cdot b^8$; *e)* $\frac{5^{10}}{b^{12}}$; *f)* c^5;

g) $a^{30} \cdot b^3$; *h)* $\frac{d^{21}}{9}$; *i)* $\frac{2^{18} \cdot 3^4}{e^5}$.

1120 *a)* $\frac{1}{216} > \frac{1}{729}$; *b)* $\frac{1}{2^{12}} > \frac{1}{2^{16}}$; *c)* $\frac{1}{10^{10} \cdot 10^{10}} < \frac{1}{2^{10} \cdot 10^{10}}$;

d) $\frac{7^3}{4^3} > \frac{7^3}{5^3}$; *e)* $\frac{7^2}{5^3} < \frac{7^3}{5^3}$; *f)* $3^8 = 3^8$;

g) $\frac{8}{7} < 1{,}6$.

1121 *a)* $61\ \text{kg} = 6{,}1 \cdot 10^4\ \text{g} = 6{,}1 \cdot 10^{-2}\ \text{t}$; *b)* $3{,}77 \cdot 10^{14}\ \text{g} = 3{,}77 \cdot 10^8\ \text{t}$.

1122 *a)* $3{,}33 \cdot 10^{-12}\ \text{s}$; *b)* $8{,}1 \cdot 10^{11}\ \text{m}$.

1123 $4^4 = 2^8$, $8^8 = 2^{24}$, ezért $\left(4^4\right)^3 = 8^8$.

1124 A szorzat átalakítható: $2^{2007} \cdot 125^{345} \cdot 25^{200} = 2^{2007} \cdot 5^{1035} \cdot 5^{400} = 10^{1435} \cdot 2^{572}$. A szorzat tehát 1435 darab 0-ra végződik.

1125 *a)* Igaz. Egész és törtszámok esetén is teljesül.

b) Hamis. A negatív számoknak a páratlan kitevős hatványai negatívak.

c) Igaz. A páros kitevős hatványok pozitívak.

d) Hamis. Lehetnek törtek is.

e) Hamis. Az 1-nek minden hatványa 1.

1126 A tömeg: $\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 10^6\ \text{g} \approx 6{,}67 \cdot 10^3\ \text{kg} = 6{,}67\ \text{t}$.

1127 *a)* $3^5 = 243$. *b)* $3^4 = 81$-szeresére növekszik.

1128 *a)* $1{,}56 \cdot 10^{17}\ \text{m}$. *b)* $1{,}04 \cdot 10^6 = 1\,040\,000$-szerese.

1129 Csak a 2 és 3 hatványai jöhetnek szóba.

Ha a kihúzott számok a

$$2^0 = 1,\ \ 2^1 = 1,\ \ 2^2 = 4,\ \ 2^3 = 8,\ \ 2^4 = 16,\ \ 2^5 = 32,\ \ 2^6 = 64$$

közül kerülnek ki, akkor $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ eset lehetséges.

Ha a kihúzott számok a

$$3^0 = 1,\ \ 3^1 = 3,\ \ 3^2 = 9,\ \ 3^3 = 27,\ \ 3^4 = 81,$$

akkor 1 eset fordulhat elő.

Tehát összesen $21 + 1 = 22$ esetben lehetnek a kihúzott számok ugyanazon szám egész kitevős hatványai.

Egész kifejezések, nevezetes szorzatok, a szorzattá alakítás módszerei – megoldások

1130 *a)* $-6a^2 + a - 3$; *b)* $b^3 + 3b^2 - 3$; *c)* $-3cd^2 - 3c^2 + 5d + 3$;
d) $a^2 - 6a + 6$; *e)* 1; *f)* $a^2 - 8a - 23$;
g) $-3x^3 + 8x^2 - 14x + 4$; *h)* $8x + 8$; *i)* $-6a^2 - 7a + 7$;
j) $16x^2 - 21x - 4$; *k)* $x + 5$; *l)* $12x^2 - 30x - 26$.

1131 *a)* $-3b + 3 = 1$; *b)* $-a - 3 = -1$; *c)* $-2a + 1 = 5$;
d) $-3b - 15a - 6 = 22$; *e)* $9b + 14a = -22$; *f)* $a + 6b = 2$.

1132 *a)* $a^2 + 14a + 49$; *b)* $64 - 16b + b^2$; *c)* $49 - 14b + b^2$;
d) $9y^2 + 12xy + 4x^2$; *e)* $16x^2 - 24xy + 9y^2$; *f)* $100a^2 - 60ab + 9b^2$;
g) $x^4 + 6x^2z + 9z^2$; *h)* $4x^6 - 12x^3y^2 + 9y^4$; *i)* $64a^6 - 80a^3b^2 + 25b^4$;
j) $\frac{4}{9} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot xy + \frac{1}{16} y^2$; *k)* $\frac{25}{36} \cdot x^2 - \frac{35}{9} \cdot xy + \frac{49}{9} \cdot y^2$;
l) $z^2 + 4x^2 + y^2 + 4zx + 2zy + 4xy$;
m) $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$;
n) $16x^2 + \frac{4}{25} \cdot y^2 + \frac{1}{49} \cdot z^2 - \frac{16}{5} \cdot xy - \frac{8}{7} \cdot xz + \frac{4}{35} \cdot yz$.

1133 *a)* $(a + 4)^2 = (-a - 4)^2$; *b)* $(b - 5)^2 = (5 - b)^2$;
c) $(c + 7)^2 = (-c - 7)^2$; *d)* $(x - 20)^2 = (20 - x)^2$;
e) $\left(d^2 - 10\right)^2 = \left(10 - d^2\right)^2$; *f)* $\left(x^4 + 5\right)^2 = \left(-x^4 - 5\right)^2$;
g) $\left(x^3 + 3y^5\right)^2 = \left(-x^3 - 3y^5\right)^2$; *h)* $\left(0{,}5x - 6y^3\right)^2 = \left(6y^3 - 0{,}5x\right)^2$;
i) $\left(\frac{2}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{4} y\right)^2 = \left(-\frac{2}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot y\right)^2$.

1134 *a)* $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$; *b)* $8b^3 - 12b^2 + 6b - 1$;
c) $27c^6 + 108c^4 + 144c^2 + 64$; *d)* $64d^9 - 96d^6x^2 + 48d^3x^4 - 8x^6$;
e) $0{,}125x^6 + 1{,}5x^4y + 6x^2y^2 + 8y^3$; *f)* $\frac{8}{27} \cdot x^3 - \frac{16}{15} \cdot x^2y + \frac{32}{25} \cdot xy^2 - \frac{64}{125} \cdot y^3$.

1135 *a)* $9a^2 - 25$; *b)* $64x^2 - 49$; *c)* $16b^2 - 4x^2$; *d)* $36a^2 - 25b^2$;
e) $25c^2 - 9y^2$; *f)* $25a^6 - 1$; *g)* $9d^4 - 64$; *h)* $4y^2 - 81x^4$;
i) $49e^{10} - 100x^6$; *j)* $\frac{4}{49} \cdot x^{14} - \frac{1}{9} \cdot y^6$.

1136 *a)* $6a^2 - 2a + 14$; *b)* $8x^2 - 26x + 36$; *c)* $12x^2 + 64x + 9$;
d) $2x^2 + 50$; *e)* $-7b^2 - 32b + 48$; *f)* $-9x^2 + 24x - 31$;
g) $20c + 78$; *h)* $x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 24x^2 + 12y^2 - 12xy$;
i) $-2x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 23$; *j)* $\frac{19}{4} \cdot y^2 - x^2 - 2xy$.

1137 *a)* $a^3 - 1$; *b)* $b^3 + 125$; *c)* $27x^3 + 64$.

1138 *a)* $(x-1)^2 - 4$; *b)* $(a+2)^2 + 2$; *c)* $(a+3)^2 - 8$;
d) $(x-4)^2 + 4$; *e)* $(a-5)^2 - 23$; *f)* $(x+6)^2 + 14$;
g) $(x+7)^2 - 18$; *h)* $2\cdot(x-4)^2 - 6$; *i)* $-(x+3)^3 + 12$;
j) $-(x-6)^2 + 37$; *k)* $3\cdot(x+2)^2 - 10$; *l)* $-5\cdot(x+2)^2 + 13$.

1139 *a)* $a\cdot(3a^2 - 2a + 1)$; *b)* $2x\cdot(3x^2 - 5x + 1)$; *c)* $4b\cdot(b^3 + 2b^2 + 7b - 1)$;
d) $5x\cdot(7x^2 + 3x + 4)$; *e)* $3a^2\cdot(2a^2 - 3a + 1)$; *f)* $4x^3\cdot(x^2 - 6x + 3)$;
g) $5a^2b\cdot(ab - 3b^2 + 2)$; *h)* $17ab^4\cdot(a^2b + ab^2 - 2)$; *i)* $8a^2b^3\cdot(2a^2 + 3b - 5a^2b)$.

1140 *a)* $(a+3)\cdot(b-2)$; *b)* $(2a+b)\cdot(x+1)$;
c) $(a+5)\cdot(2x+y)$; *d)* $(a-2x)\cdot(b+4)$;
e) $(x+2)\cdot(3a-b)$; *f)* $(4x-1)\cdot(a-2b) = (2b-a)\cdot(1-4x)$;
g) $(3a+4b)\cdot(2x+5)$; *h)* $(a-4x^2)\cdot(1-5b) = (4x^2-a)\cdot(5b-1)$;
i) $(3a^2 - 4b^3)\cdot(3 - 2x^2) = (4b^3 - 3a^2)\cdot(2x^2 - 3)$.

1141 *a)* $(4x-5)\cdot(4x+5)$; *b)* $(7a+10b)\cdot(7a-10b)$;
c) $(8b+3x)\cdot(8b-3x)$; *d)* $(6x^2 - 11y^3)\cdot(6x^2 + 11y^3)$;
e) $(x-10)^2 = (10-x)^2$; *f)* $(6a-7)^2 = (7-6a)^2$;
g) $\left(\frac{2}{5}\cdot x + 5\right)^2$; *h)* $(4x^2-1)\cdot(4x^2+1) = (2x-1)\cdot(2x+1)\cdot(4x^2+1)$;
i) $(4 + 9x^2)\cdot(4 - 9x^2) = (4 + 9x^2)\cdot(2 + 3x)\cdot(2 - 3x)$;
j) $\left(2a^2 + 7b^3\right)^2$; *k)* $6\cdot(x+1)^2$;
l) $4x\cdot(x-3)^2$; *m)* $3x^2\cdot(x+2)^2$;
n) $5x^2\cdot(x^2-4)^2$;
o) $(1+x^6)\cdot(1-x^6) = (1+x^6)\cdot(1+x^3)\cdot(1-x^3) = (1+x^6)\cdot(1+x^3)\cdot(1-x)\cdot(1+x+x^2) =$
$= (1+x^2)\cdot(1-x^2+x^4)\cdot(1+x)\cdot(1-x+x^2)\cdot(1-x)\cdot(1+x+x^2)$;
p) $(x+5)\cdot(x+3)$; *q)* $(x-4)\cdot(x+3)$;
r) $(4x^2+3)\cdot(x^2-4) = (4x^2+3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$;
s) $(2x+1)^3$; *t)* $(3a-b)^3$;
u) $(2x+3y)^3$; *v)* $(a-3)\cdot(a^2+3a+9)$;
w) $(x+4)\cdot(x^2-4x+16)$; *x)* $(3a+5b)\cdot(9a^2-15ab+25b^2)$.

1142 *a)* $(10000-2)\cdot(10000+2) = 100000000 - 4 = 99999996$;

b) $$\frac{(526+74)\cdot(526-74)}{(726+274)\cdot(726-274)} = \frac{600\cdot 452}{1000\cdot 452} = 0{,}6;$$

c) Legyen $a = 54320$:

$$\frac{54321\cdot 54325 - 54323\cdot 54320}{54323\cdot 54322 - 54321^2} = \frac{(a+1)\cdot(a+5) - (a+3)\cdot a}{(a+3)\cdot(a+2) - (a+1)^2} = \frac{3a+5}{3a+5} = 1.$$

1143 Az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kifejezésből

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 23^2 - 2\cdot(-7) = 543.$$

1144 Egy polinomban az együtthatók összegét megkapjuk, ha a változó helyére 1-et helyettesítünk.

Az $(x^2 - 3x + 1)^{2007}$ kifejezés $x = 1$ esetén:

$$(-1)^{2007} = -1.$$

Tehát a keresett polinomban az együtthatók összege -1.

1145 Legyenek a téglalap oldalai a és b. Tudjuk, hogy

$$2 \cdot (a + b) = 74,$$
$$a + b = 37,$$

másrészt

$$2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 = 1642,$$
$$a^2 + b^2 = 821.$$

Az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kifejezésből

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 37^2 - 821 = 548.$$

Tehát a téglalap területe 274 cm^2.

1146 Végezzük el a következő átalakításokat:

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) =$$
$$= (a - b) \cdot [(a - b)^2 + 2ab + ab] = (a - b) \cdot [(a - b)^2 + 3ab].$$

Behelyettesítve:

$$a^3 - b^3 = 2 \cdot (2^2 + 3 \cdot 7) = 50.$$

Műveletek algebrai törtekkel – megoldások

1147 *a)* $\frac{9a^3}{4b}$; *b)* $\frac{x}{2}$; *c)* $-\frac{4}{3a}$; *d)* $2a$;

e) $-\frac{4}{5} \cdot a^2$; *f)* $2y$; *g)* $\frac{2x + 3}{x + 5}$; *h)* $\frac{1 - 2x}{1 + 2x}$;

i) $\frac{3x + 5}{4x}$; *j)* $\frac{2y + 1}{4x + 3}$; *k)* $\frac{x - 4}{x + 6}$; *l)* $\frac{2x - 4}{x + 2}$.

1148 *a)* $\frac{ab}{10xy}$; *b)* $\frac{3by^2}{8ax}$; *c)* $\frac{y}{x}$; *d)* a^2b;

e) $\frac{b - 2}{a \cdot (b - 3)}$; *f)* $\frac{3b + 1}{b}$; *g)* $\frac{1}{x + 4}$; *h)* $\frac{a - 1}{a}$.

1149 *a)* $\frac{4x^2 + 15}{10x}$; *b)* $\frac{3 - 18y}{4y^2}$; *c)* $\frac{a + 7}{a \cdot (a + 1)}$; *d)* $\frac{1}{3}$;

e) $\frac{21 - 12x}{10 \cdot (2x - 1)}$; *f)* $\frac{5a - 14}{12 \cdot (3a + 5)}$; *g)* $-\frac{1}{6}$; *h)* $\frac{8}{(x + 2) \cdot (x - 2)}$;

i) 1; *j)* $\frac{y^2 - 10y - 27}{3 \cdot (y + 5)^2}$; *k)* $\frac{4x^2 + 22x - 5}{(2x - 5) \cdot (2x + 5)^2}$; *l)* $\frac{y^2 - 4y - 7}{(y + 1)^3}$.

1150 *a)* A tört értelmezve van, ha $4ab^2 + 4abc \neq 0$, azaz $4ab \cdot (b + c) \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b + c \neq 0$.

A számlálóban két négyzet különbsége áll, tehát szorzattá alakítható:

$$\frac{(a^2 + b^2 - c^2 + a^2 - b^2 + c^2) \cdot (a^2 + b^2 - c^2 - a^2 + b^2 - c^2)}{4ab \cdot (b + c)} =$$

$$= \frac{2a^2 \cdot 2 \cdot (b^2 - c^2)}{4ab \cdot (b + c)} = \frac{a \cdot (b - c)}{b}.$$

b) A törtek nevezői nem lehetnek egyenlők 0-val: $a^2 - b^2 \neq 0$, illetve $(a + b)^2 \neq 0$, azaz $a + b \neq 0$. Mindhárom feltétel teljesül, ha $|a| \neq |b|$.

A számlálókat és a nevezőket is alakítsuk szorzattá, majd egyszerűsítsünk:

$$\frac{ab \cdot (a - b)}{(a - b) \cdot (a + b)} + \frac{a^2 \cdot (a + b)}{(a + b)^2} - \frac{a^2 - 2ab}{a + b} = \frac{ab}{a + b} + \frac{a^2}{a + b} - \frac{a^2 - 2ab}{a + b} = \frac{3ab}{a + b}.$$

c) A törtek nevezői nem lehetnek egyenlők 0-val:

$$a^3 - ab^2 \neq 0,$$
$$a \cdot (a^2 - b^2) \neq 0, \qquad a^2 + ab \neq 0, \qquad b^2 + ab \neq 0,$$
$$a \cdot (a - b) \cdot (a + b) \neq 0; \quad a + b \neq 0; \quad a \cdot (a + b) \neq 0; \quad b \cdot (a + b) \neq 0.$$

Minden feltétel teljesül, ha $a \neq 0$, $b \neq 0$, $|a| \neq |b|$.

A zárójeleken belül hozzunk közös nevezőre:

$$\left(\frac{b^2}{a \cdot (a - b) \cdot (a + b)} + \frac{a \cdot (a - b)}{a \cdot (a - b) \cdot (a + b)}\right) : \left(\frac{(a - b) \cdot b}{ab \cdot (a + b)} - \frac{a^2}{ab \cdot (a + b)}\right) =$$

$$= \frac{b^2 + a^2 - ab}{a \cdot (a - b) \cdot (a + b)} \cdot \frac{ab \cdot (a + b)}{ab - a^2 - b^2} = \frac{-1}{a - b} \cdot b = \frac{b}{b - a}.$$

1151 *a)* Alakítsuk át az egyenlőség bal oldalán álló kifejezéseket. Közös nevezőre hozás után egyszerűsítsünk, majd újra hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{6ab - a^2 - 9b^2}{3b} \cdot \frac{a - 6b}{a^2 - 6ab + 9b^2} + \frac{a}{3b} \cdot \frac{a - 3ab - 6b}{a} =$$

$$= \frac{-1}{3b} \cdot (a - 6b) + \frac{a - 3ab - 6b}{3b} = \frac{-a + 6b + a - 3ab - 6b}{3b} = \frac{-3ab}{3b} = -a.$$

b) A módszer ugyanaz, az első nevező szorzattá alakítása:

$$a^3 - a^2 - a + 1 = a^2 \cdot (a - 1) - (a - 1) = (a - 1) \cdot (a^2 - 1) = (a - 1)^2 \cdot (a + 1).$$

Ezt beírva egyszerűsíthetünk az első zárójelben:

$$\frac{4a^2 - 1}{(a - 1)^2 \cdot (a + 1)} \cdot \frac{(1 - a)^2}{a} = \frac{4a^2 - 1}{a \cdot (a + 1)} = \frac{(2a - 1) \cdot (2a + 1)}{a \cdot (a + 1)}. \quad (1)$$

A második zárójelben legyen a közös nevező $a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)$, ekkor

$$\frac{4a \cdot (a + 1) - 2 \cdot (a - 1) - 8a}{a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)} = \frac{4a^2 - 6a + 2}{a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)}. \quad (2)$$

A számlálót alakítsuk szorzattá:

$$4a^2 - 6a + 2 = 4a^2 - 4a - 2a + 2 = 4a \cdot (a-1) - 2 \cdot (a-1) =$$
$$= (a-1) \cdot (4a-2) = 2 \cdot (a-1) \cdot (2a-1).$$

Ezt (2)-be beírva egyszerűsíthetünk:

$$\frac{2 \cdot (a-1) \cdot (2a-1)}{a \cdot (a-1) \cdot (a+1)} = \frac{2 \cdot (2a-1)}{a \cdot (a+1)}.$$

(1) és (3) alapján az eredeti kifejezés:

$$\frac{(2a-1) \cdot (2a+1)}{a \cdot (a+1)} \cdot \frac{a \cdot (a+1)}{2 \cdot (2a-1)} = \frac{2a+1}{2}.$$

1152 Alakítsuk át a bal oldalt:

$$\left(a - \frac{ab}{a-b}\right) : \left(\frac{ab}{a-b} - b\right) - \frac{a^2}{2b^2} \cdot \left(2 - \frac{b}{a}\right) =$$
$$= \frac{a^2 - ab - ab}{a-b} \cdot \frac{a-b}{ab - ab + b^2} - \frac{a^2}{2b^2} \cdot \frac{2a-b}{a}.$$

Egyszerűsítések után:

$$\frac{a^2 - 2ab}{b^2} - \frac{2a^2 - ab}{2b^2} = \frac{-3ab}{2b^2} = -\frac{3a}{2b}.$$

A feltétel szerint: $-\frac{3a}{2b} = -6$, amiből $a = 4b$ következik.

Behelyettesítve a kiszámítandó törtbe:

$$\frac{3a - 2b}{a + b} = \frac{10b}{5b} = 2.$$

Oszthatóság, számrendszerek – megoldások

1153 *a)* 4-re végződik. *b)* 2-re végződik. *c)* 1-re vagy 6-ra végződik.

1154 *a)* Ha n osztható 4-gyel. *b)* Nincs ilyen n.
c) Ha $n = 4k + 2$ alakú természetes szám.

1155 *a)* $x = y = 0$. *b)* $x = 1; 4; 7$. *c)* Ha $y = 0$, $x = 0; 3; 6; 9$. Ha $y = 8$, $x = 1; 4; 7$.
d) Ha $y = 0$, $x = 7$. Ha $y = 5$, $x = 2$.

1156 $18a - 6b = 14a + 2 \cdot (2a - 3b)$.

1157 $8a - 3b = 2 \cdot (a + b) + (6a - 5b)$.

1158 *a)* Az utolsó jegyek összege: $6 + 4 = 10$. *b)* A hatványok összege 5-re végződik.
c) Mindegyik hatványalap osztható 3-mal.

1159 *a)* $p = 2$.
b) Csak páros lehetne p, de a 21 nem prím, tehát nincs ilyen prímszám.

1160 $p = 2$, $q = 5$, $r = 23$; vagy $p = 2$, $q = 11$, $r = 17$.

1161 $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $3750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$. A 360-nak 24, a 3750-nek 20 osztója van.

1162 12.

1163 *a)* $2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$; *b)* $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600$; *c)* $2^2 \cdot 3^4 = 324$;
d) $2^6 \cdot 7^2 = 3136$; *e)* $3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$; *f)* $2^5 \cdot 5^2 \cdot 17 = 13\,600$;
g) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 = 1584$; *h)* $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 = 1\,228\,500$.

1164 *a)* $\frac{2}{15}$. *b)* $\frac{2}{45}$. *c)* $\frac{13}{1764}$.

1165 1; 3; 7; 9; 11; 13; 17; 19.

1166 $[a; b] = a \cdot b$.

1167 $a = 5$; 10; 15; 45; 30; 90.

1168 *a)* 115; *b)* 581; *c)* 742; *d)* 95 285.

1169 *a)* 11110100100_2; *b)* 30311_5; *c)* 13020_6.

1170 $1001_2 = 9 < 102_3 = 11 < 23_5 = 13 < 22_7 = 16 < 101_4 = 17 < 31_6 = 19$.

1171 $10010110_2 = 410_6$.

1172 Az összeadás helyesen: $3124_5 + 10232_5 = 13411_5$.

1173 Mivel $21\,600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, és a négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden kitevő páros, ezért a megfelelő osztó: $2 \cdot 3 = 6$.

Így a hányados valóban négyzetszám:

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 60^2.$$

1174 A 40-re végződő szám osztható 10-zel. Ha egy szám négyzete lenne, az a szám is osztható lenne 10-zel. De akkor a négyzete 100-zal is osztható lenne, ami nem teljesül.

1175 Legyen a lépcsők száma n. Ez a szám a 2, 3, 4, 5, 6 többszöröseinél 1-gyel kisebb. A fenti számok legkisebb közös többszöröse 60, tehát $60 \mid n + 1$, azaz $n + 1 = 60k$, ahol $k \in \mathbb{N}^+$, másrészt $7 \mid n$. A legkisebb ilyen tulajdonságú számot keressük.

Legyen $k = 1$, ekkor $n = 59$, de a 7 nem osztója az 59-nek.

Ha $k = 2$, akkor $n = 119 = 17 \cdot 7$.

Tehát a legkisebb megfelelő szám a 119.

1176 Amikor Tibor n éves, édesanyja $28 + n$ éves. $n \mid 28 + n$, ezért $n \mid 28$. Tehát Tibor életkora akkor lesz osztója az édesanyjáénak, ha ő 1, 2, 4, 7, 14, 28 éves lesz.

1177 *a)* Hamis. Ha egyik szám osztója a másiknak, akkor a legnagyobb közös osztó a kisebb szám.

b) Igaz. A legkisebb közös többszörös legalább akkora, mint a nagyobb szám.

c) Hamis. A legnagyobb közös osztó csak a közös osztóknak többszöröse.

d) Igaz. Mivel a legnagyobb közös osztó mindkét számnak osztója, ezért a többszöröseiknek is.

e) Igaz. Ha a két számnak nincs közös prímtényezője, akkor a legkisebb közös többszörös a szorzatuk.

f) Hamis. Például $11 + 2 = 13$.

1178 A négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden kitevő páros, a harmadik hatványban a kitevők oszthatók 3-mal.

Mivel $2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 3 = 6$, a keresett legkisebb szám csak a 2, 3 és 5 prímtényezőket tartalmazza.

A szám prímtényezős felbontásában a 2 kitevője páratlan, és 3-mal osztva 2-t ad maradékul, a legkisebb ilyen szám az 5.

A 3 kitevője páros, és 3-mal osztva 2-t ad maradékul. A legkisebb ilyen szám a 2.

Az 5 kitevője páratlan, és 3-mal osztható. A legkisebb ilyen szám a 3.

Tehát a keresett szám:

$$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 36\,000.$$

Ennek a számnak $(5 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (3 + 1) = 72$ osztója van.

1179 Az összeget rendezzük négyes csoportokba:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{4n} =$$
$$= (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^4 \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + \ldots + 7^{4n-4} \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) =$$
$$= (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) \cdot (1 + 7^4 + 7^8 + \ldots + 7^{4n-4}).$$

Mivel

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 7 + 49 + 343 + 2401 = 2800,$$

ezért az összeg utolsó két számjegye 0.

1180 Számoljuk össze a számok osztóit:

$10^{40} = 2^{40} \cdot 5^{40}$, tehát $41 \cdot 41 = 1681$ osztója van,

$20^{30} = 2^{60} \cdot 5^{30}$, tehát $61 \cdot 31 = 1891$ osztója van.

Mindkét számnál figyelembe vettük a közös osztókat, ezeket el kell vennünk. A legnagyobb közös osztó $2^{40} \cdot 5^{30}$, amelynek $41 \cdot 31 = 1271$ osztója van. Tehát

$$1681 + 1891 - 1271 = 2301$$

olyan pozitív egész szám van, amely osztója a fenti számok valamelyikének.

1181 Képezzük a következő 1-es számjegyekből álló számokat:

$$A_1 = 1;\ A_2 = 11;\ A_3 = 111;\ \ldots;\ A_{2001} = 111\ldots111 \text{ (2001 jegy)}.$$

Ha van közöttük olyan szám, amely többszöröse a 2001-nek, akkor az állítást beláttuk.

Ha nincs megfelelő szám, akkor van közöttük két olyan (pl. A_i és Aj), amelynek 2001-gyel osztva a maradéka megegyezik. Képezzük A_i és A_j különbségét, ha $i > j$:

$$A_i - A_j = 111\ldots111000\ldots000 \ (i - j \text{ darab 1-es számjegy}).$$

Ez a különbség a megfelelő számjegyekből áll, és osztható 2001-gyel.

1182 A 7, 8 és 9 legkisebb közös többszöröse $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Ha a keresett 3 jegyű szám x, akkor

$$504 \mid 523\,000 + x.$$

Osszuk el maradékosan 523 000-t 504-gyel:

$$523\,000 = 504 \cdot 1037 + 352.$$

Tehát

$$x = 504 - 352 = 152 \quad \text{vagy} \quad x = 2 \cdot 504 - 352 = 656,$$

a következő megfelelő szám már 4 jegyű.

A megoldás:

$$523\,152 \quad \text{és} \quad 523\,656.$$

1183 Az összeadandók 3 jegyűek, az összeg pedig 4 jegyű, tehát $C = 1$.

I. Ha az utolsó tagok összeadásánál $A + 1 < 5$, akkor $B = A + 1$ (és $D = A + 2$).

– Ha $(D =)\ A + 2 \geq 5$, akkor $A = 3$ vagy $A = 4$, az utóbbi ellentmond az első feltételünknek. Ha $A = 3$, akkor $B = 4$, $D = 0$ és $E = 3$, ami nem lehet, mert különböző betűk különböző számokat jelölnek.

– Ha $D = A + 2 < 5$, akkor $A = 2$ vagy $A = 0$, az utóbbi esetben $B = 1 = C$, ami nem megfelelő. Ha $A = 2$, akkor $B = 3$, $D = 4$ és $E = 0$.

II. Ha az utolsó tagok összeadásánál $A + 1 \geq 5$, akkor $A = 4$, $B = 0$, $D = 2$, de $E = 4$, és ez ellentmondás.

Tehát az összeadás helyesen:

$$231_5 + 312_5 = 1043_5.$$

Vegyes feladatok – megoldások

1184 $A = 5 < B = 6$.

1185 *a)* $\dfrac{2a+3}{(a+1)\cdot(a+3)}$; *b)* $\dfrac{6x-1}{(3x-1)\cdot(3x+1)}$; *c)* $\dfrac{4}{x+5}$; *d)* 4.

1186 *a)* $\dfrac{3}{a-b}$; *b)* $\dfrac{x+y}{5}$; *c)* $\dfrac{a-b}{a+b}$; *d)* $\dfrac{x-y}{x+y}$.

1187 *a)* 2^{10240}; *b)* 2^{-160}; *c)* 2^{-1500}; *d)* 2^{896}.

1188 *a)* $11110_2 = 30 = 1010_3 < 111_5 = 31 = 133_4$;

b) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-2} = \dfrac{49}{25} = 1\dfrac{24}{25} < \left(\dfrac{39}{26}\right)^{2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2} = \dfrac{9}{4} = 2{,}25 < \left(\dfrac{4}{13}\right)^{-1} = \dfrac{13}{4} = 3{,}25 < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \dfrac{27}{8} = 3{,}375.$

1189 $96 = 2^5 \cdot 3$.

a) $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$; *b)* $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$;

c) $2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2400$; *d)* $2^5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 576 = 24^2$;

e) $2^5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2 = 1728 = 12^3$; *f)* $54 = 2 \cdot 3^3$, $[54; 96] = 3^3 \cdot 2^5 = 864$.

1190 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis, $x \cdot y = 5$. *d)* Igaz.
e) Hamis.

1191 A feladat az 1800 és 6000 legnagyobb közös osztójának megkeresése:

$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \quad \text{és} \quad 6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3,$$
$$(1800; 6000) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600.$$

1192 A fürdőszoba oldalai a 60 cm többszörösei.

Az 54 000 lehetséges osztópárjai közül csak a $60 \cdot 900$ és a $180 \cdot 300$ felel meg.

Az első nem lehet egy fürdőszoba mérete, tehát a fürdőszoba oldalai 1,8 m és 3 m.

1193 *a)* A 7300 m^2 területű futballpályán körülbelül $8{,}76 \cdot 10^8$ fűszál nő.

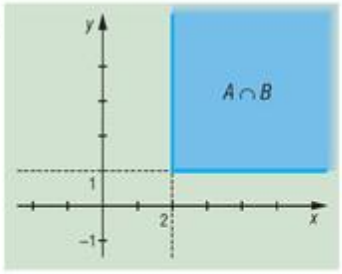
b) Európa területére $1{,}47 \cdot 10^9$ futballpálya férne el.

9.3. FÜGGVÉNYEK

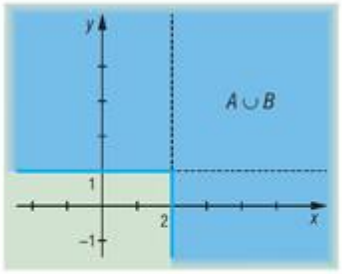
A derékszögű koordináta-rendszer, ponthalmazok – megoldások

1194 $f(-1) = 12$; $f(0) = 6$; $f(1) = 2$; $f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(4) = 2$.

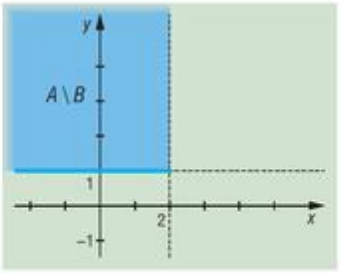
1195 *a)*



b)

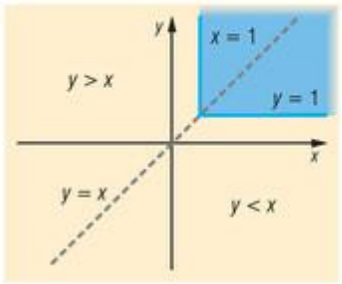


c)

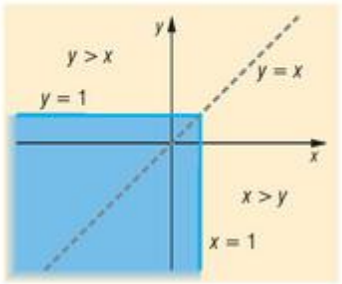


1196 $f(-1) = -24$; $f(0) = -6$; $f(1) = 0$; $f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(4) = 6$.

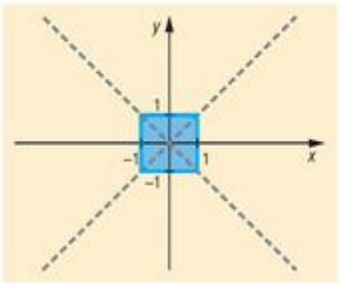
1197 *a)*



b)

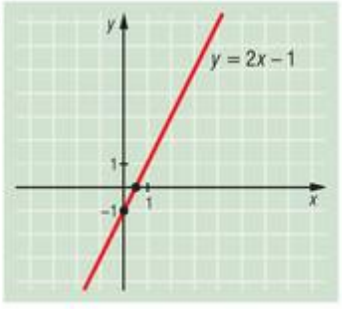


c)

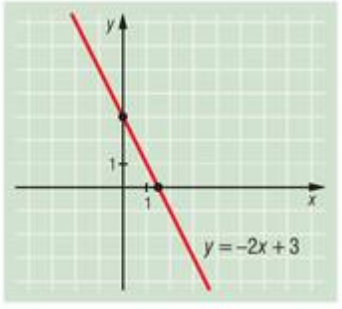


Lineáris függvények – megoldások

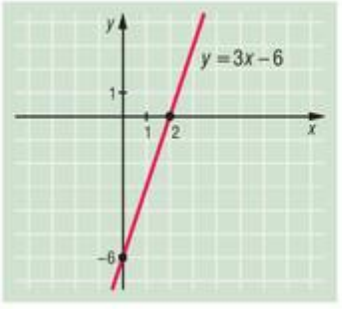
1198 *a)*



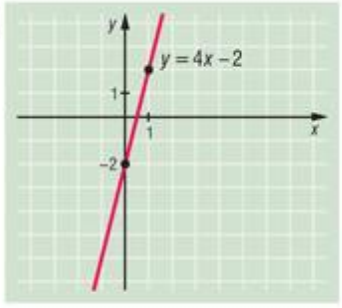
b)



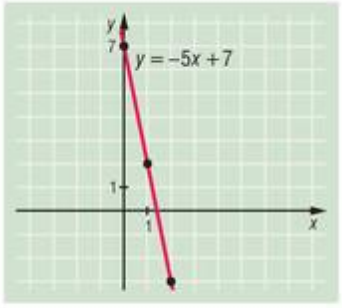
c)



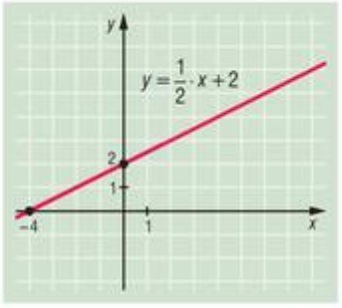
d)



e)

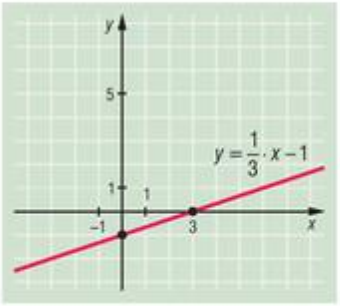


f)

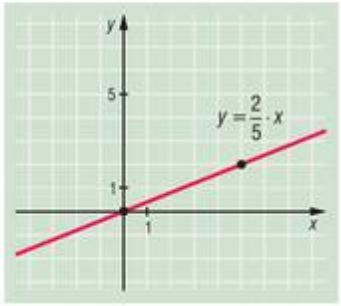




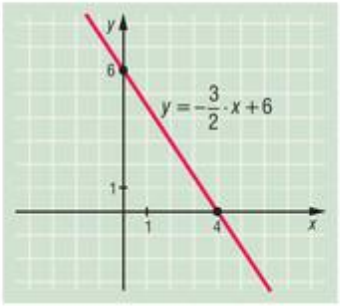
g)



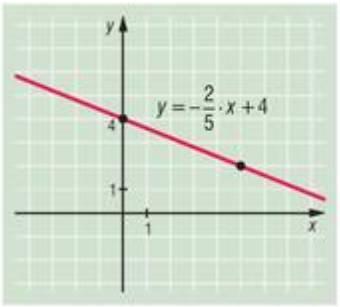
h)



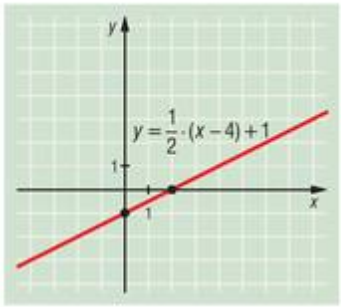
i)



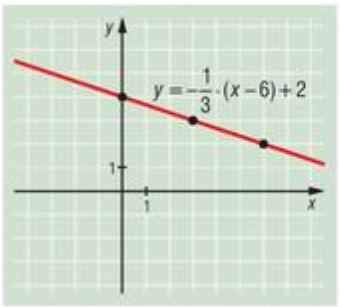
j)



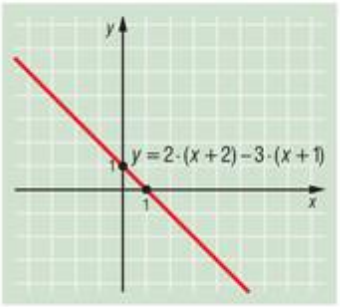
k)



l)



m)



1199 *a)* $x \mapsto x-4$; *b)* $x \mapsto -x+2$; *c)* $x \mapsto 2x-3$;
d) $x \mapsto 4x-4$; *e)* $x \mapsto -3x+5$; *f)* $x \mapsto \frac{1}{2}\cdot x-1$;
g) $x \mapsto 3$; *h)* $x \mapsto -\frac{2}{3}\cdot x+4$; *i)* $x \mapsto -\frac{5}{2}\cdot x+2$.

1200 *a)* P és R illeszkedik $f(x)$-re, Q nem. *b)* P és Q illeszkedik $g(x)$-re, R nem.
c) R illeszkedik $h(x)$-re, P és Q nem.

1201 Az $f(x)=ax+b$ egyenletbe helyettesítve a két pont koordinátáit, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned}3&=a\cdot 3+b\\0&=a\cdot 2+b\end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$3-3a=-2a \quad\Rightarrow\quad a=3 \quad\text{és}\quad b=-6.$$

A keresett hozzárendelési szabály: $x \mapsto 3x-6$, a meredekség: $a=3$.

Az x tengelyt $(x;0)$ pontban metszi, azaz

$$0=3x-6 \quad\Rightarrow\quad x=2.$$

Az y tengelyt $(0;y)$ pontban metszi, azaz

$$y=3\cdot 0-6 \quad\Rightarrow\quad y=-6.$$

A keresett metszéspontok tehát: $(2;0)$ és $(0;-6)$.

1202 Helyettesítsük be az adott függvényértékeket:

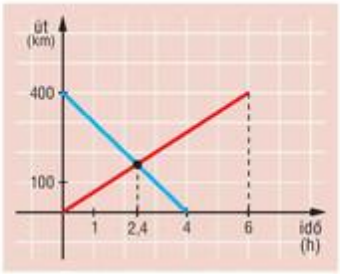
$$\left.\begin{aligned} f(-1)=2=a\cdot(-1)+b &\Rightarrow b=2+a \\ f(2)=3=a\cdot 2+b &\Rightarrow b=3-2a \end{aligned}\right\}.$$

Egyenletként megoldva:

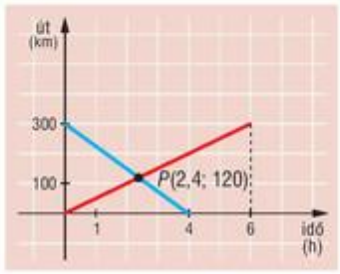
$$2+a=3-2a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{3} \text{ és } b=\frac{7}{3}.$$

Tehát az f függvény képlettel megadva: $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x+\frac{7}{3}$.

1203 A két autó 2,4 órával az indulásuk után találkozik.

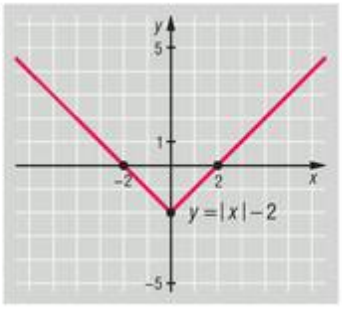


1204 A két jármű A-tól 120 km-re találkozik, indulásuk után 2,4 óra múlva.

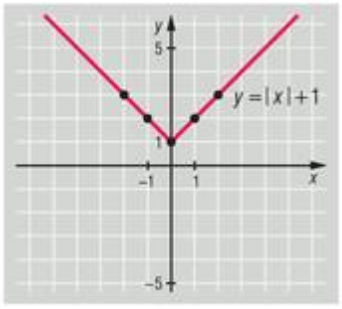


Az abszolútérték-függvény – megoldások

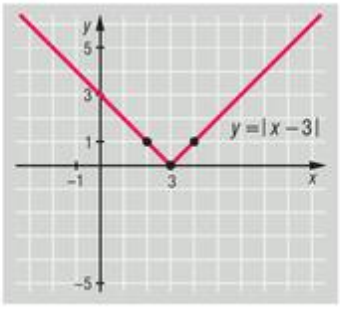
1205 *a)*



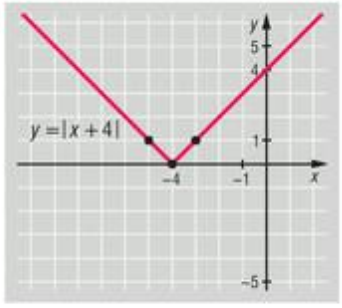
b)



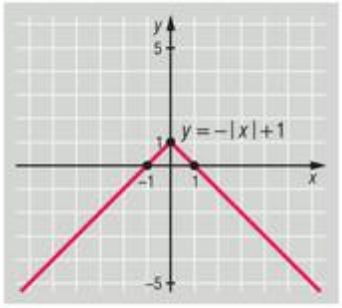
c)



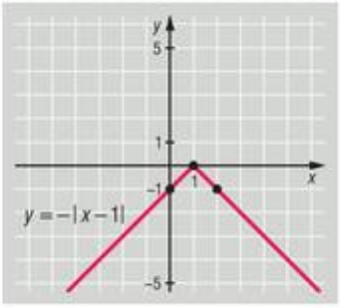
d)



e)

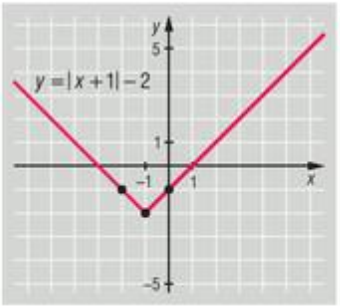


f)

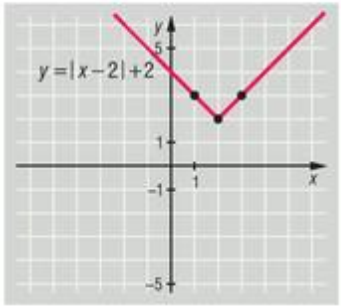




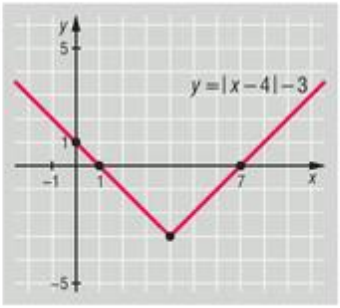
g)



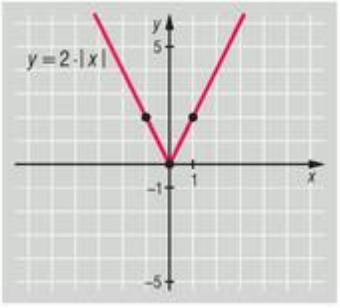
h)



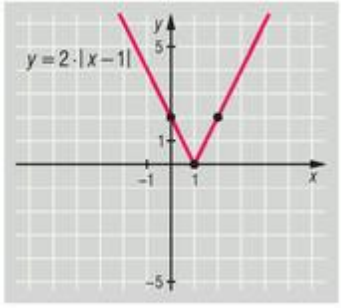
i)



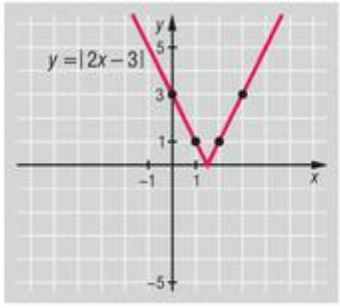
j)



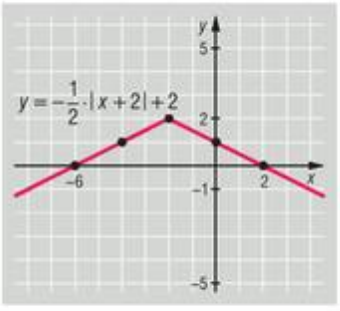
k)



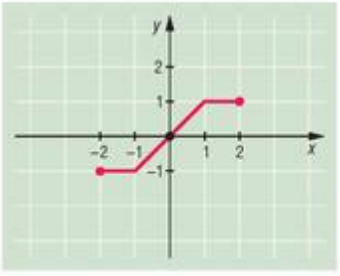
l)



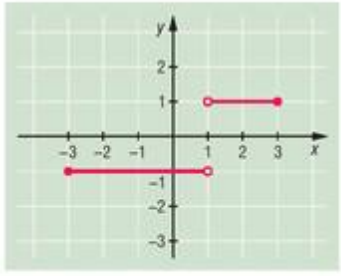
m)



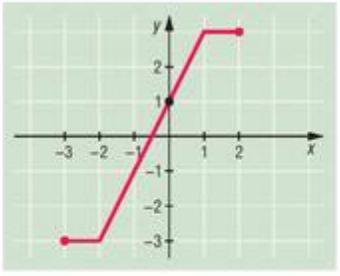
1206 *a)*



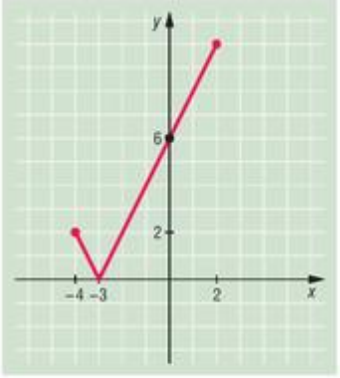
b)



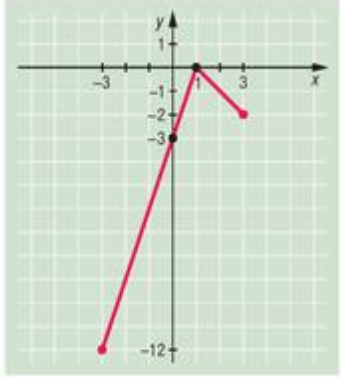
c)



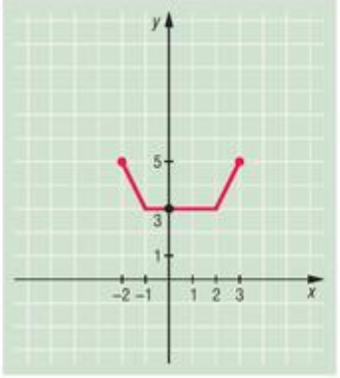
d)



e)



f)



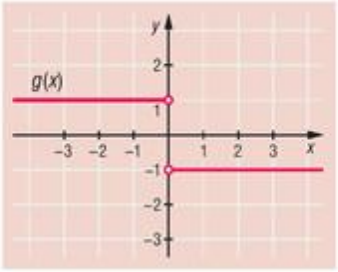
1207 *a)* $x \mapsto |x| - 1$; *b)* $x \mapsto -|x| - 1$; *c)* $x \mapsto |x - 2|$; *d)* $x \mapsto |x + 3|$;
e) $x \mapsto |x + 4| - 2$; *f)* $x \mapsto |x - 3| - 3$; *g)* $x \mapsto -|x + 2| + 4$; *h)* $x \mapsto -|x - 4| + 2$.

1208 Mivel

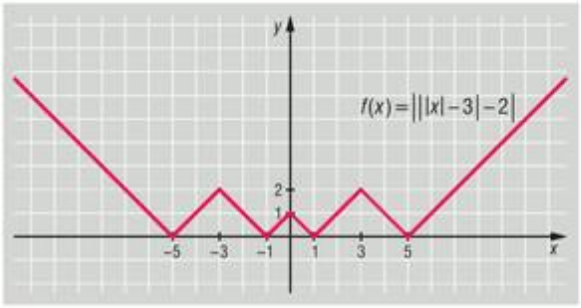
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

ezért

$$g(x) = \frac{-|x|}{x} = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad x > 0, \\ 1, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$



1209 A függvény grafikonja az ábrán látható.

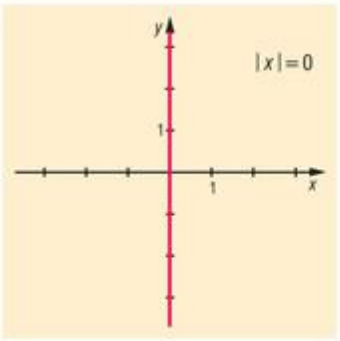


1210 Ha $x = 0$, akkor az egyenlőség igaz.

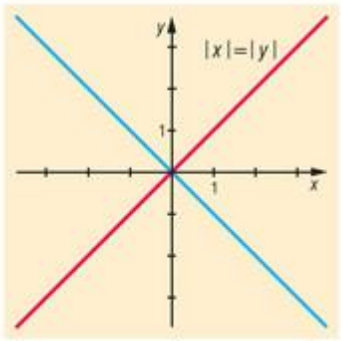
Ha $x > 0$, akkor $|x| = x$, így $\left(\frac{x + |x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2}\right)^2 = x^2 + 0 = x^2$, tehát az egyenlőség igaz.

Ha $x < 0$, $|x| = -x$, így $\left(\frac{x + |x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2}\right)^2 = 0 + x^2 = x^2$, tehát az egyenlőség igaz.

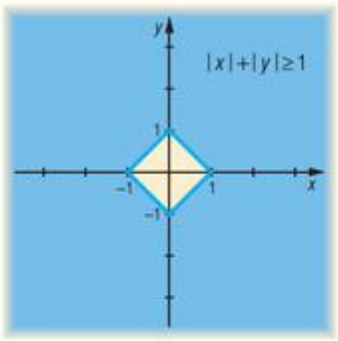
1211 *a)*



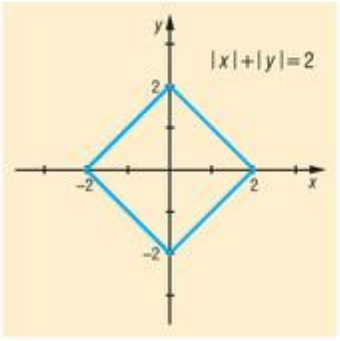
b)



c)

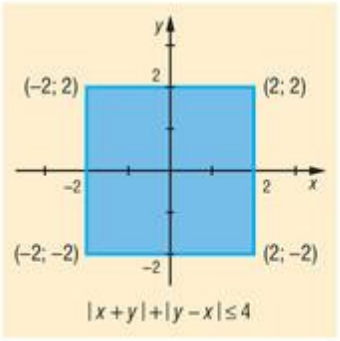


d)

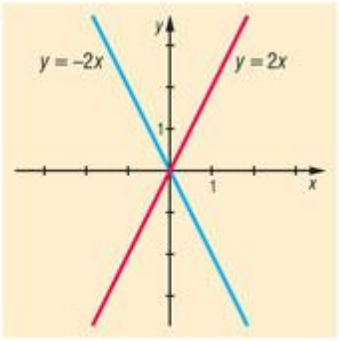




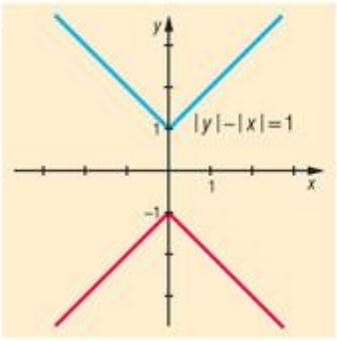
1212 *a)*



b)

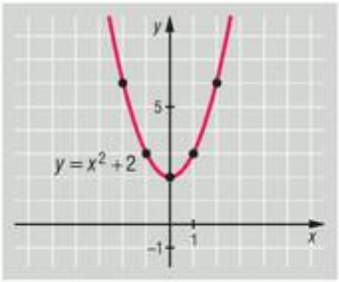


c)

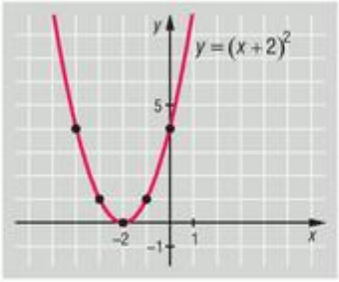


A másodfokú függvény – megoldások

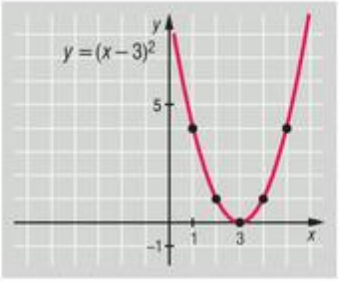
1213 *a)* Értékkészlete: $[2; \infty[$.
Zérushelye: nincs.
Menete: $]-\infty; 0]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[0; \infty[$-ban szigorúan monoton nő.
Szélsőértéke: minimuma van, helye: $x = 0$, értéke $y = 2$.
Paritása: páros függvény.



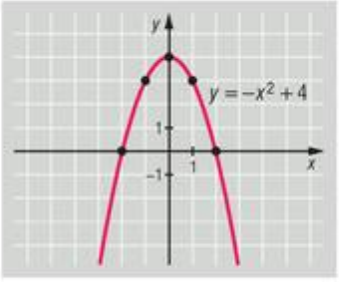
b) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



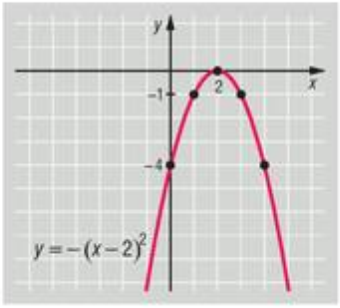
c) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



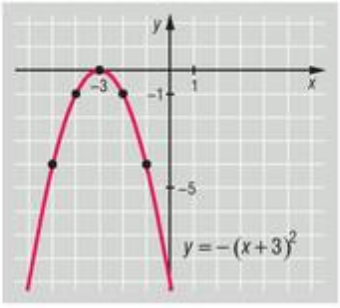
d) Értékkészlete: $]-\infty; 4]$.
Zérushelyei: $x = -2$ és $x = 2$.
Menete: $]-\infty; 0]$-ban szigorúan monoton nő;
$[0; \infty[$-ban szigorúan monoton csökken.
Szélsőértéke: maximuma van, helye: $x = 0$, értéke $y = 4$.
Paritása: páros függvény.



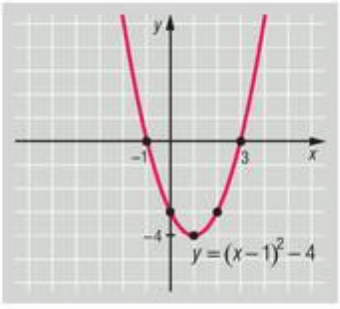
e) Jellemzése a *d)* feladathoz hasonlóan történik.



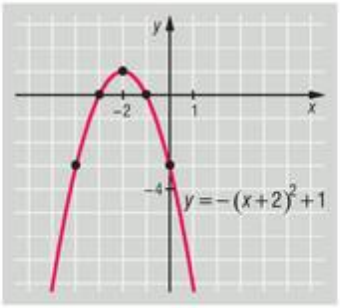
f) Jellemzése a *d)* feladathoz hasonlóan történik.



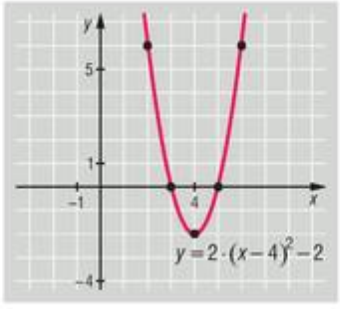
g) Értékkészlete: $[-4; \infty[$.
Zérushelyei: $x=-1$ és $x=3$.
Menete: $]-\infty; 1]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[1; \infty[$-ban szigorúan monoton nő.
Szélsőértéke: minimuma van, helye: $x=1$, értéke $y=-4$.
Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.



h) Értékkészlete: $]-\infty; 1]$.
Zérushelyei: $x=-3$ és $x=-1$.
Menete: $]-\infty; -2]$-ban szigorúan monoton nő;
$[-2; \infty[$-ban szigorúan monoton csökken.
Szélsőértéke: maximuma van, helye: $x=-2$, értéke $y=1$.
Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.

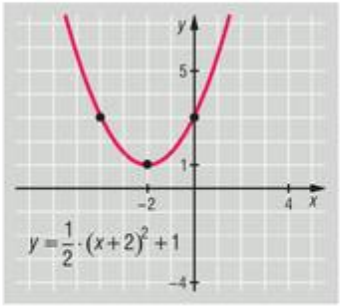


i) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.

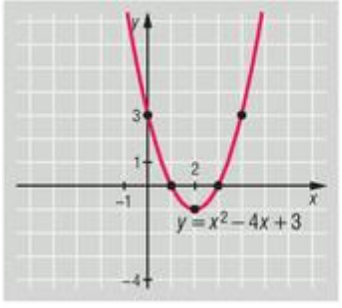




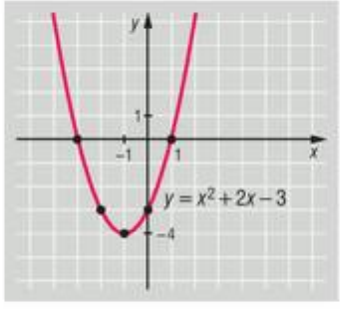
j) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.



k) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.



l) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.



1214 *a)* Értékkészlete: $[-4; 5]$.

Zérushelyei: $x=-2$ és $x=2$.

Menete: $[-3; 0]$-ban szigorúan monoton csökken;

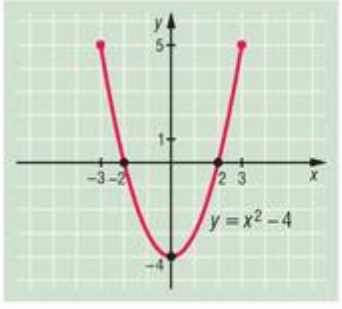
$[0; 3]$-ban szigorúan monoton nő.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x=0$, értéke: $y=-4$;

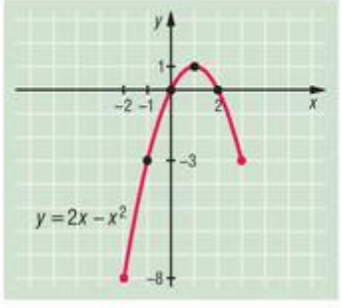
maximumai: $x_1=-3$ helyen értéke: $y_1=5$;

$x_2=3$ helyen értéke: $y_2=5$.

Paritása: páros függvény.



b) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



c) Értékkészlete: $[0; 12]$.

Zérushelye: $x = 0$.

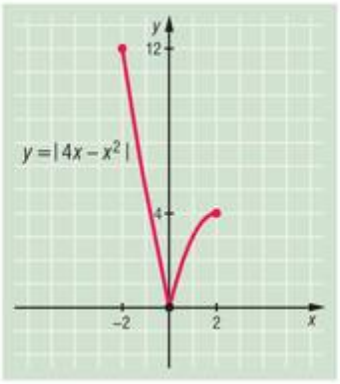
Menete: $[-2; 0]$-ban szigorúan monoton csökken;

$[0; 2]$-ban szigorúan monoton nő.

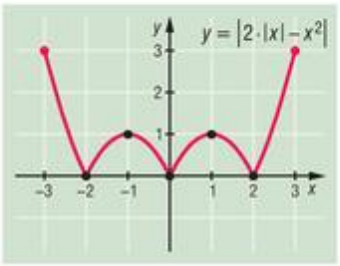
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 0$, értéke: $y = 0$;

maximumának helye: $x = -2$, értéke: $y = 12$.

Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.



d) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



e) Értékkészlete: $[0; 7]$.

Zérushelyei: $x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Menete: $\left[-1; 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$-ban szigorúan monoton csökken;

$\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right[$-ban szigorúan monoton nő;

$\left[1; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right[$-ban szigorúan monoton csökken;

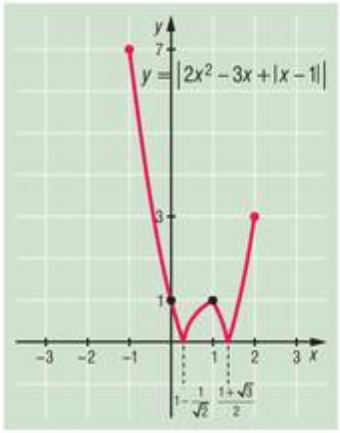
$\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}; 2\right[$-ban szigorúan monoton nő.

Szélsőértékei: minimumai: $x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ helyen értéke: $y_1 = 0$;

$x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ helyen értéke $y_2 = 0$;

maximumának helye: $x = -1$, értéke $y = 7$.

Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.



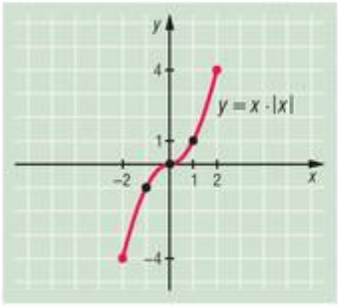


f) Mivel

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

ezért

$$x \mapsto x \cdot |x| = \begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ -x^2, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$



Értékkészlete: $[-4; 4]$.

Zérushelye: $x = 0$.

Menete: $[-2; 2]$-ban szigorúan monoton nő.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -2$, értéke: $y = -4$;
maximumának helye: $x = 2$, értéke: $y = 4$.

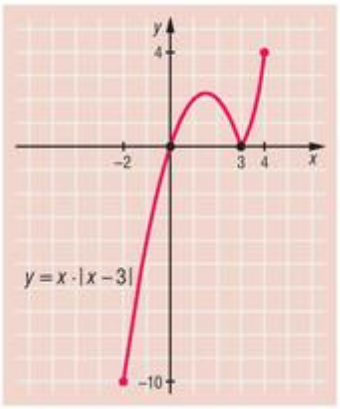
Paritása: páratlan függvény.

1215 *a)* $x \mapsto x^2 - 1$; *b)* $x \mapsto -x^2 + 5$; *c)* $x \mapsto (x-4)^2$;

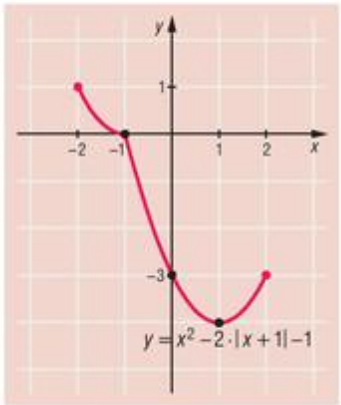
d) $x \mapsto -(x+2)^2$; *e)* $x \mapsto (x+1)^2 - 2$; *f)* $x \mapsto -(x-5)^2 + 3$;

g) $x \mapsto 2 \cdot (x+1)^2 - 5$; *h)* $x \mapsto \frac{1}{3} \cdot (x+2)^2 - 4$; *i)* $x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 + 2$.

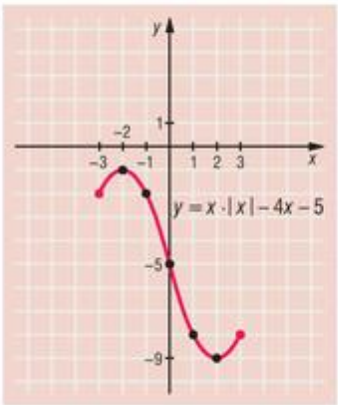
1216 *a)*



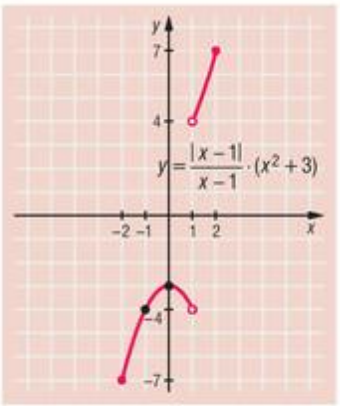
b)



c)



d)



1217 *a)* $x = 3$ és $x = 4$; *b)* $2 < x < 7$; *c)* $-4 < x < -1$ vagy $1 < x < 4$;

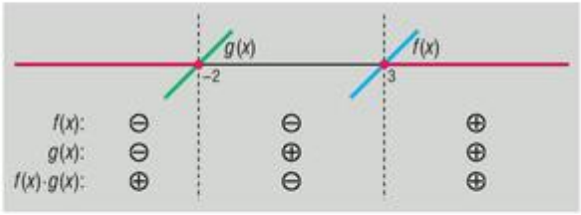
d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$; *e)* $-1 \leq x \leq 1$ vagy $x \leq -\frac{3}{2}$ vagy $x \geq \frac{3}{2}$.



1218 *a)* Az egyenlőtlenség: $(x-3)\cdot(x+2)\geq 0$.

Legyen $f(x)=x-3$ és $g(x)=x+2$. Az $f(x)$ zérushelye $x=3$, a $g(x)$ zérushelye pedig $x=-2$ helyen van. Mindkét függvény szigorúan monoton nő.

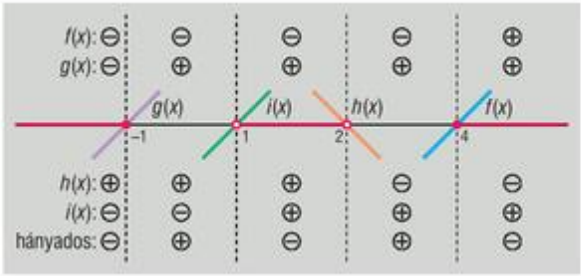
A keresett megoldás: $x\leq -2$ vagy $x\geq 3$.



b) Az $\dfrac{(x-4)\cdot(x+1)}{(2-x)\cdot(x-1)}\leq 0$ egyenlőtlenségnek akkor van értelme, ha $x\neq 1$ és $x\neq 2$.

Legyen $f(x)=x-4$ és $g(x)=x+1$. Az $f(x)$ zérushelye $x=4$, a $g(x)$ zérushelye pedig $x=-1$ helyen van. Mindkét függvény szigorúan monoton nő.

Legyen $h(x)=2-x$ és $i(x)=x-1$. A $h(x)$ zérushelye $x=2$, az $i(x)$ zérushelye pedig $x=1$ helyen van. $h(x)$ szigorúan monoton csökken, $i(x)$ szigorúan monoton nő.

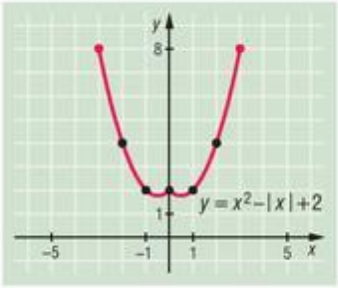


A keresett megoldás: $x\leq 1$ vagy $1<x<2$ vagy $x\geq 4$.

1219 Az f függvény páros, így grafikonja szimmetrikus az y tengelyre. Ha $x\geq 0$, akkor

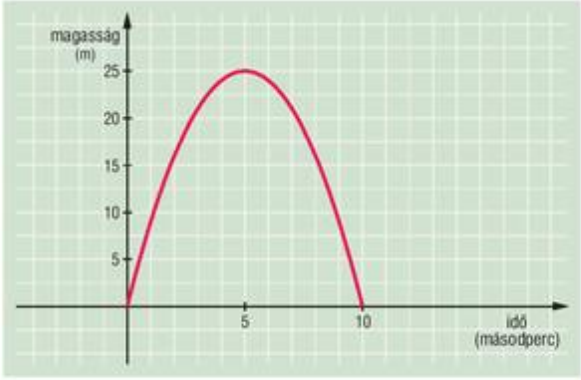
$$f(x)=x^2-x+2=(x-0{,}5)^2+\frac{7}{4},$$

$f(x)\geq 0$ minden $-3\leq x\leq 3$ esetén teljesül.



1220 Ha $f(x)=ax^2+bx+c$ alakú, akkor a feltételekből $c=1$, $a+b+c=0$, $9a+3b+c=10$. Innen $a=2$, $b=-3$, $c=1$, tehát $f(x)=2x^2-3x+1$.

1221 A labda 10 másodperc múlva esik le, és 5 másodperc múlva jut a legmagasabbra, 25 méterre.



1222 Az ábra jelöléseit felhasználva:

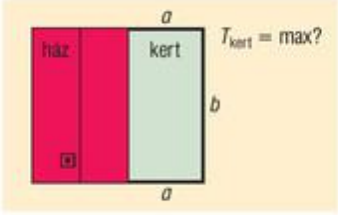
$$48=a+a+b \quad\Rightarrow\quad b=48-2a.$$

A kert területe:

$$T=a\cdot b=a\cdot(48-2a)=48a-2a^2.$$

Ennek keressük a maximumát. Teljes négyzetté alakítás után kapjuk:

$$-2\cdot(a-12)^2+288.$$





Ez akkor maximális, ha csak 288 az értéke, tehát ha $a = 12$, amiből $b = 24$. Ekkor:

$$T_{max} = 12 \cdot 24 = 288 \text{ m}^2.$$

Tehát ahhoz, hogy a kert maximális területű legyen, a téglalap oldalainak $a = 12$ m és $b = 24$ m-nek kell lennie.

1223 *a)* Jelöljük az egyik részt x-szel. Ekkor az $x \cdot (40 - x)$ szorzat maximumát keressük. Alakítsunk teljes négyzetté:

$$x \cdot (40 - x) = -x^2 + 40x = -(x - 20)^2 + 400.$$

Ez akkor maximális, ha csak 400-zal egyenlő, azaz $x = 20$. Ekkor a két rész egyenlő.

b) Jelöljük a számot y-nal, az egyik részt x-szel, ahol $y > x$ és $x, y > 0$. Ekkor az $x \cdot (y - x)$ szorzat maximumát keressük. Alakítsunk teljes négyzetté:

$$x \cdot (y - x) = -x^2 + x \cdot y = -\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}.$$

Ez akkor maximális, ha a kifejezés értéke $\frac{y^2}{4}$, vagyis ha $x = \frac{y}{2}$. Ezzel beláttuk a fenti állítást.

1224 Mivel a másodfokú függvénynek maximuma van, $p < 0$. Ekkor a másodfokú függvény képe egy lefelé nyíló parabola, és a csúcspontja, ahol a függvénynek maximuma van, a következő helyen van:

$$-\frac{p^2 - 40{,}5}{2p} = \frac{9}{4}.$$

Ebből $2p^2 + 9p - 81 = 0$, tehát $p_1 = 4{,}5$, vagy $p_2 = -9$. Csak az utóbbi jöhet számításba, ekkor a függvény:

$$f(x) = -9x^2 + 40{,}5x - 12, \quad f\left(\frac{9}{4}\right) = 33{,}5625.$$

1225 Mivel

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10,$$

ezért

$$f(-x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 10.$$

Így

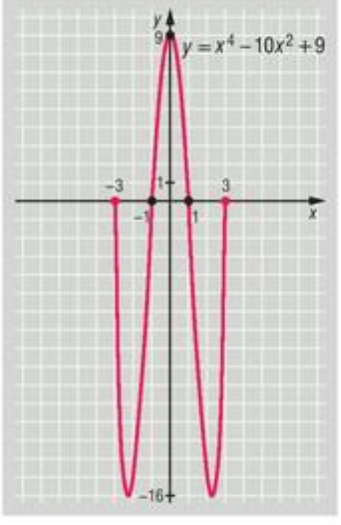
$$g(x) = 2x^4 - 5x^2 - 10 \quad \text{és} \quad h(x) = -3x^3 + 6x.$$

1226 A függvény grafikonja az ábrán látható.

A függvény páros, mert $f(-x) = f(x)$ az értelmezési tartomány minden elemére. $f(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $|x| = 1$ és $|x| = 3$.

Mivel $f(x) = (x^2 - 5)^2 - 16 \geq -16$, $f(x)$-nek az $|x| = \sqrt{5}$-nél van minimuma, itt $f(\sqrt{5}) = f(-\sqrt{5}) = -16$.

Maximuma: $f(0) = 9$.



1227 Az $f(x)$-et értelmező kifejezést alakítsuk teljes négyzetté:

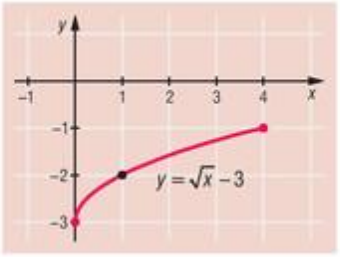
$$f(x) = (x^2 - 4)^2 - 25.$$

Mivel egy szám négyzete mindig nemnegatív, $f(x) \geq -25$ és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x^2 - 4 = 0$, és így $x^2 = 4$-ből $x = 2$, mivel a feladat feltétele szerint $x \geq 0$. Az f függvény a legkisebb értékét tehát a 2 helyen veszi fel, és itt az értéke -25.

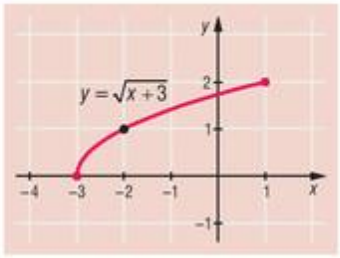
A legnagyobb értékét a 3 helyen éri el az f, és $f(3) = 0$.

A négyzetgyökfüggvény – megoldások

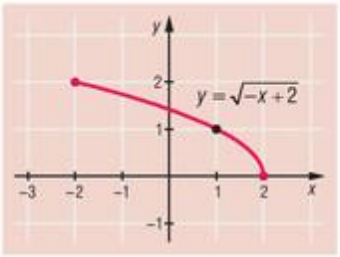
1228 *a)* Értékkészlete: $[-3; -1]$.
Zérushelye: nincs.
Menete: $[0; 4]$-ban szigorúan monoton nő.
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 0$, értéke: $y = -3$;
maximumának helye: $x = 4$, értéke: $y = -1$.



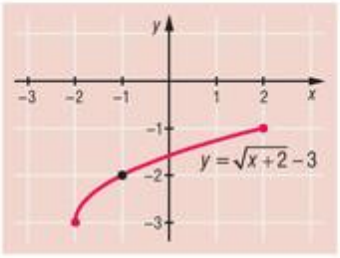
b) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



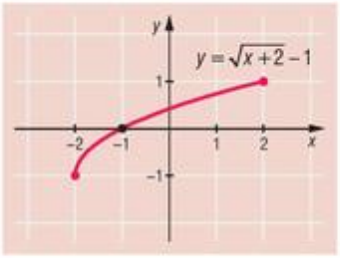
c) Értékkészlete: $[0; 2]$.
Zérushelye: $x = 2$.
Menete: $[-2; 2]$-ban szigorúan monoton csökken.
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 2$, értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = -2$, értéke: $y = 2$.



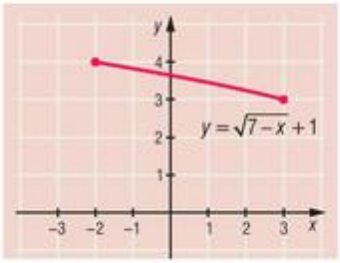
d) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



e) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.

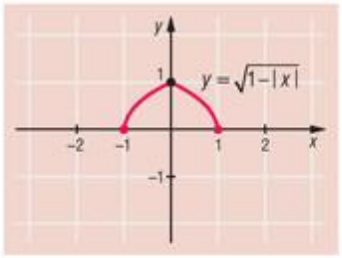


f) Értékkészlete: $[3; 4]$.
Zérushelye: nincs.
Menete: $[-2; 3]$-ban szigorúan monoton csökken.
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 3$, értéke: $y = 3$;
maximumának helye: $x = -2$, értéke: $y = 4$.





g) Értékkészlete: $[0; 1]$.



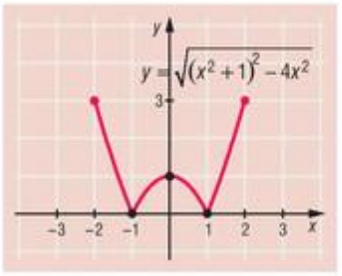
Zérushelyei: $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$.

Menete: $[-1; 0]$-ban szigorúan monoton nő;
$[0; 1]$-ban szigorúan monoton csökken.

Szélsőértékei: minimumai: $x_1 = -1$ helyen értéke: $y_1 = 0$;
$x_2 = 1$ helyen értéke: $y_2 = 0$;
maximumának helye: $x = 0$, értéke: $y = 1$.

Paritása: páros függvény.

h) Az eredeti hozzárendelési szabály átalakítható: $x \mapsto |x^2 - 1|$.



Értékkészlete: $[0; 3]$.

Zérushelyei: $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$.

Menete: $[-2; -1]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[-1; 0]$-ban szigorúan monoton nő;
$[0; 1]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[1; 2]$-ban szigorúan monoton nő.

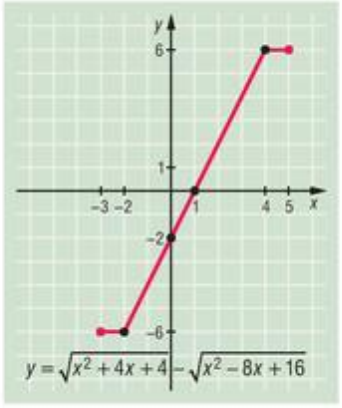
Szélsőértékei: minimumai: $x_1 = -1$ helyen értéke: $y_1 = 0$; $x_2 = 1$ helyen értéke: $y_2 = 0$;
maximumai: $x_1 = -2$ helyen értéke: $y_1 = 3$; $x_2 = 2$ helyen értéke: $y_2 = 3$;
helyi maximuma van az $x = 0$ helyen, értéke $y = 1$.

Paritása: páros függvény.

1229 *a)* $x = 2$; *b)* $x = 4$; *c)* $x = 3$;
d) $x = 3$; *e)* $x = 8$.

1230 A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

$$y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 8x + 16} =$$
$$= \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(x-4)^2} = |x+2| - |x-4|.$$



Értékkészlete: $[-6; 6]$.

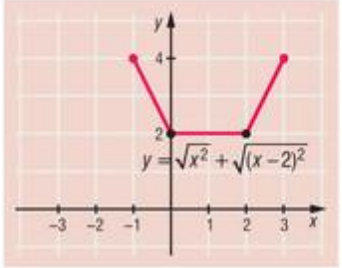
Zérushelye: $x = 1$.

Menete: $[-3; -2]$-ban konstans;
$[-2; 4]$-ban szigorúan monoton nő;
$[4; 5]$-ban konstans.

Szélsőértékei: $[-3; -2]$-ban minimuma, értéke: $y = -6$;
$[4; 5]$-ban maximuma, értéke: $y = 6$.

1231 A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

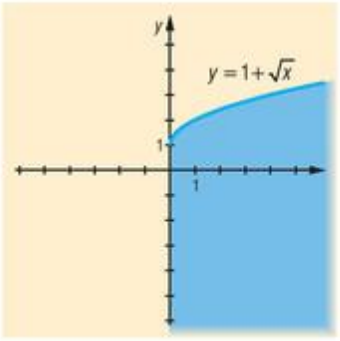
$$y = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} = |x| + |x-2|.$$



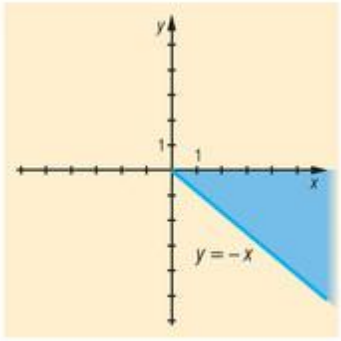
A legkisebb érték a 2, amit a $[0; 2]$-ban vesz fel.

A legnagyobb érték a 4, amit a -1 és a 3 helyen vesz fel.

1232 *a)*



b)



1233 *a)* $x+1\geq 0$, azaz $x\geq -1$;

b) $x-x^2\geq 0$, azaz $0\leq x\leq 1$;

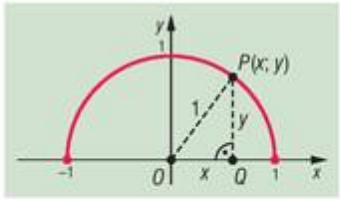
c) $2+x-x^2\geq 0$, azaz $-1\leq x\leq 2$;

d) $-x\geq 0$, azaz $x\leq 0$, és $2+x>0$, azaz $x>-2$, tehát $-2<x\leq 0$.

1234 Pitagorasz tétele alapján az OPQ háromszögből $x^2+y^2=1$, innen (figyelembe véve, hogy $y\geq 0$):

$$y=\sqrt{1-x^2}.$$

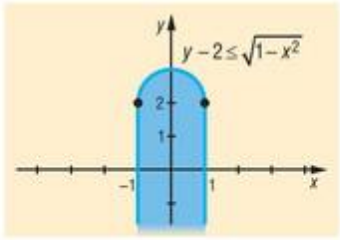
A függvény grafikonja tehát egy 0 középpontú 1 sugarú félkör, ahol a félkör pontjai az $y\geq 0$ félsíkban vannak.



1235 A feltételt írjuk át így:

$$y\leq \sqrt{1-x^2}+2.$$

Az 1234. feladat megoldása alapján $-1\leq x\leq 1$, és így a keresett pontok halmaza az ábrán látható.

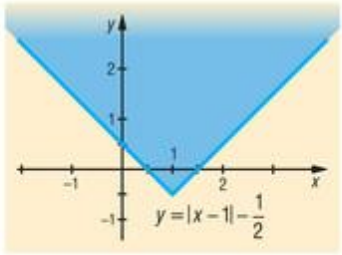


1236 Az adott feltételt így írhatjuk át ekvivalens átalakítással:

$$y+\frac{1}{2}>|x-1|,$$

$$y>|x-1|-\frac{1}{2}.$$

A megfelelő pontok halmaza az ábrán látható.

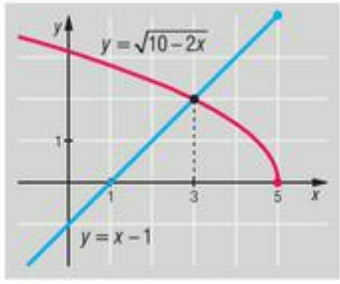


1237 Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

$$x\mapsto \sqrt{10-2x},\ x\leq 5 \quad (1)$$

$$x\mapsto x-1, \qquad x\leq 5 \quad (2)$$

Vegyük észre, hogy mivel a bal oldal csak nemnegatív lehet, ezért a jobb oldal is! Így szükséges még megjegyezni, hogy $x-1\geq 0$, azaz $x\geq 1$. Mivel az (1) csökken, a (2) nő, legfeljebb egy gyök van. Az ábráról leolvasható és könnyen ellenőrizhető, hogy $x=3$ jó gyök.

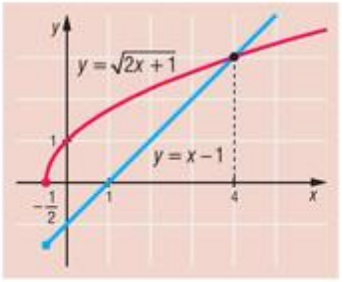




1238 A következő függvényeket ábrázoljuk:

$$x \mapsto \sqrt{2x+1},\ x \geq -\frac{1}{2};$$

$$x \mapsto x-1, \quad x \geq -\frac{1}{2}.$$



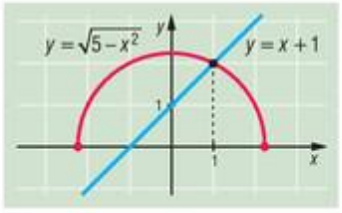
A bal oldal csak nemnegatív lehet, ezért a jobb oldal is: $x \geq 1$.

A függvények tulajdonságai miatt csak $x = 4$ jó gyök.

1239 Az alábbi függvényeket ábrázoljuk:

$$x \mapsto \sqrt{5-x^2},\ x^2 \leq 5;$$

$$x \mapsto x+1.$$



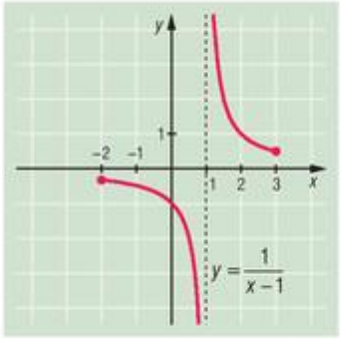
A bal oldal csak nemnegatív lehet, ezért a jobb oldal is: $x \geq -1$.

A függvények tulajdonságai miatt csak $x = 1$ az egyetlen jó gyök.

Lineáris törtfüggvények – megoldások

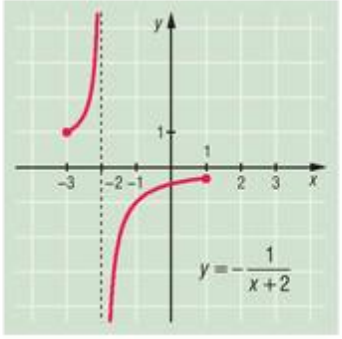
1240 *a)* A $[-2; 1[$-ban és az $]1; 3]$-ban is csökken, nincs sem legnagyobb, sem legkisebb értéke.

Zérushelye nincs.



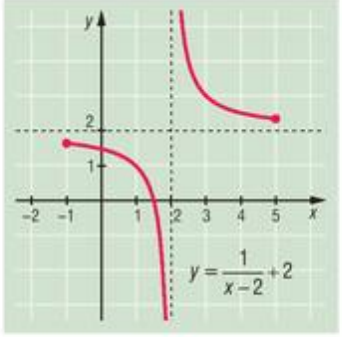
b) A $[-3; -2[$-ban és a $]-2; 1]$-ban is nő, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye nincs.



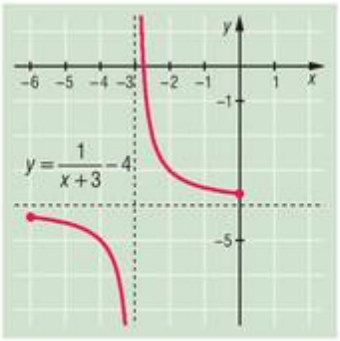
c) A $[-1; 2[$-ban és a $]2; 5]$-ban is csökken, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye: $x = \frac{3}{2}$.



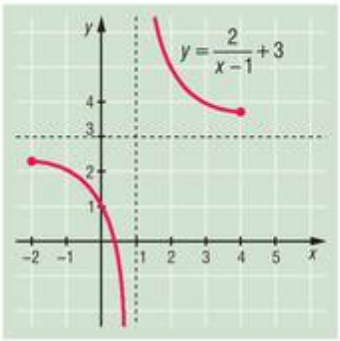
d) A $[-6; -3[$-ban és a $]-3; 0]$-ban is csökken, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye: $x = -\frac{11}{4}$.



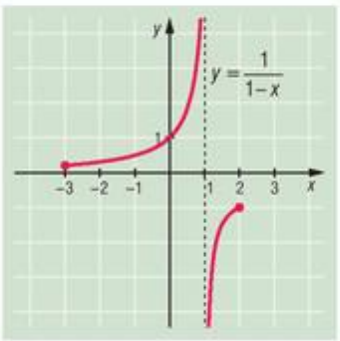
e) A $[-2; 1[$-ban és az $]1; 4]$-ban is csökken, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye: $x = \frac{1}{3}$.



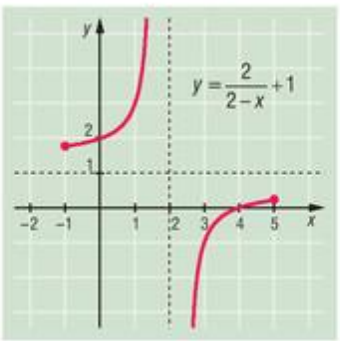
f) A $[-3; 1[$-ban és az $]1; 2]$-ban is nő, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye nincs.



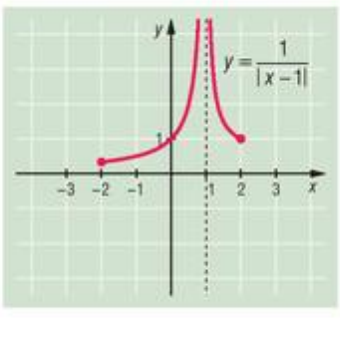
g) A $[-1; 2[$-ban és a $]2; 5]$-ban is nő, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye: $x = 4$.



h) A $[-2; 1[$-ban nő, az $]1; 2]$-ban csökken, legnagyobb értéke nincs, legkisebb értéke -2-nél van, és ez $\frac{1}{3}$.

Zérushelye nincs.



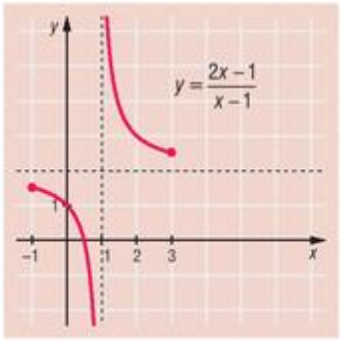


1241 *a)* A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

$$y=\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}.$$

A $[-1;1[$-ban és az $]1;3]$-ban csökken, nincs legnagyobb és legkisebb értéke sem.

Zérushelye: $x=\frac{1}{2}$.

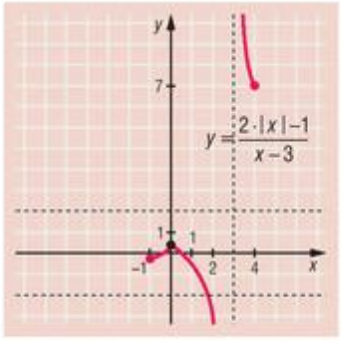


b) A függvény átalakítható:

$$\frac{2\cdot|x|-1}{x-3}=\begin{cases}2+\dfrac{5}{x-3}, & \text{ha} \quad x\geq 0,\\ -2-\dfrac{7}{x-3}, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$

A $[-1;0]$-ban nő, a $[0;3[$-ban és a $]3;4]$-ban csökken, nincs legnagyobb és legkisebb értéke.

Zérushelyei: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$.

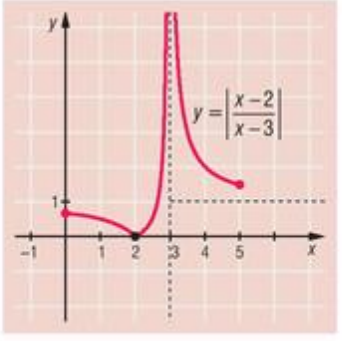


c) A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

$$y=\left|\frac{x-2}{x-3}\right|=\left|1+\frac{1}{x-3}\right|.$$

A $[0;2]$-ban és a $]3;5]$-ban csökken, a $[2;3[$-ban nő, legkisebb értéke 0, ezt a 2 helyen veszi fel, legnagyobb értéke nincs.

Zérushelye: $x=2$.

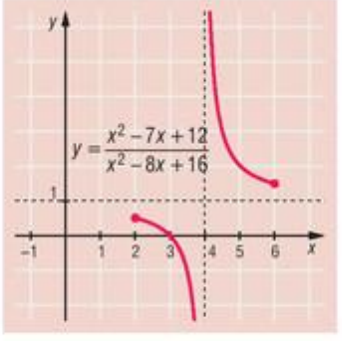


d) A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

$$y=\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+16}=1+\frac{1}{x-4}.$$

A $[2;4[$-ban és a $]4;6]$-ban csökken, nincs legnagyobb és legkisebb értéke.

Zérushelye: $x=3$.



1242 *a)* $x>3$ és $-\frac{9}{2}<x<-2$;

b) $x_1=-5$, $x_2=5$;

c) $2<x<6$;

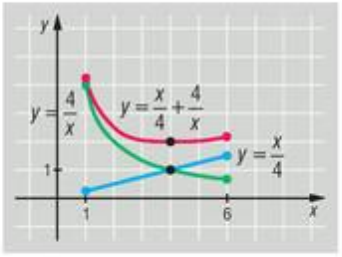
d) $x>-1$.

1243 $f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$, $x\neq 1$;

$f(f(f(x)))=x$, $x\neq 0$, $x\neq 1$.

1244 Alakítsuk át így a függvényt értelmező kifejezést:

$$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{4}{x},\ 1\le x\le 6.$$

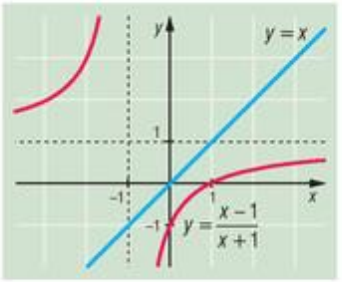


Az $x\mapsto\frac{x}{4}$ és $x\mapsto\frac{4}{x}$ függvények grafikonja segítségével könnyen vázolhatjuk f grafikonját.

Látható, hogy $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\ge 2$, mert $4x>0$-val szorozva és rendezve ezt kapjuk: $x^2-8x+16\ge 0$, azaz $(x-4)^2\ge 0$, ami igaz és a lépések megfordíthatók.

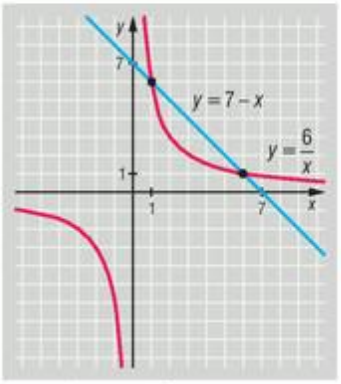
1245 Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

$$x\mapsto\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1},\ x\ne -1$$
$$x\mapsto x.$$



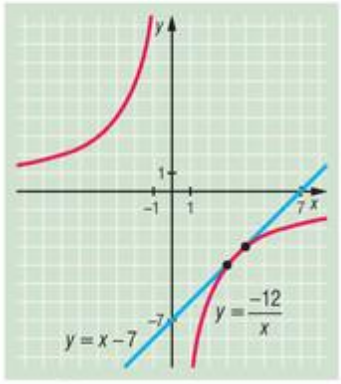
A grafikon alapján világos, hogy $x>-1$ esetén igaz az egyenlőtlenség.

1246 *a)*



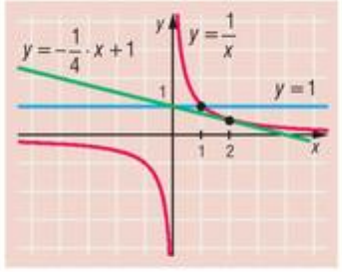
$x_1=1,\ y_1=6;$
$x_2=6,\ y_2=1;$

b)



$x_1=3,\ y_1=-4;$
$x_2=4,\ y_2=-3.$

1247 Két p érték jó: $p=0$ és $p=-\frac{1}{4}$.



1248 Vezessük be a következő jelölést:

$$z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},\ \text{ekkor}\ \ z^2=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2.$$

Ezzel a kifejezés így írható le:

$$4\cdot(z^2-2)-12z+17=4z^2-12z+9=(2z-3)^2\ge 0.$$

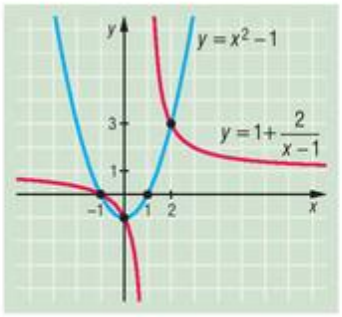


1249 Az $f(x) = x^2 - 1$ és a $g(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$ átalakításokkal könnyű a megfelelő grafikonokat ábrázolni:

a) $f(x) = g(x)$, ha $x = -1, 0, 2$;

b) $f(x) < g(x)$, ha $-1 < x < 0$, vagy $1 < x < 2$;

c) $f(x) > g(x)$, ha $x < -1$, vagy $0 < x < 1$, vagy $x > 2$.



1250 Az egyenletet így is írhatjuk:

$$2 \cdot (x^2 - y^2)^2 + (2xy - 1)^2 = 0.$$

Mivel $(x^2 - y^2)^2 \geq 0$ és $(2xy - 1)^2 \geq 0$, az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha

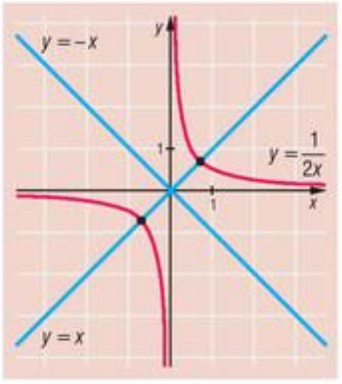
$$x^2 = y^2; \quad (1)$$

$$xy = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Ábrázoljuk a síkon azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik (1)-et és (2)-t.

A megoldások:

$$x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad x_2 = y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



1251 Adjuk össze a két egyenletet:

$$x^2 + y^2 + 9 - 2xy - 6x + 6y = 0,$$

$$(x - y - 3)^2 = 0,$$

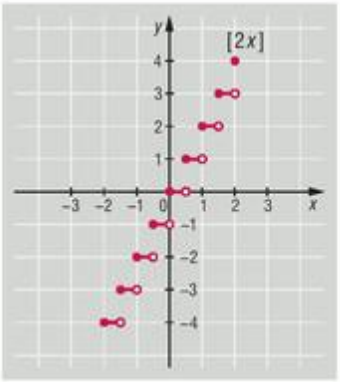
$$y = x - 3.$$

Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk: $x^2 = 18$, azaz

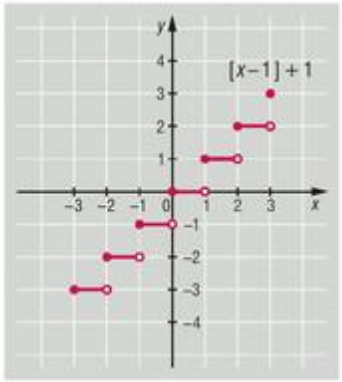
$$x = \pm 3 \cdot \sqrt{2} \quad \text{és} \quad y = \pm 3 \cdot \sqrt{2} - 3.$$

Az egészrész-, a törtrész- és az előjelfüggvény – megoldások

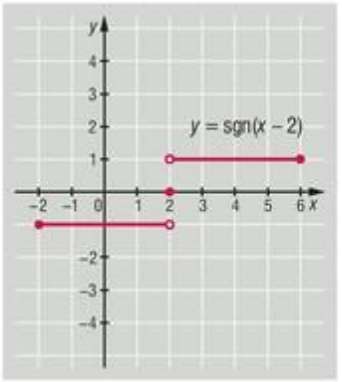
1252 *a)*



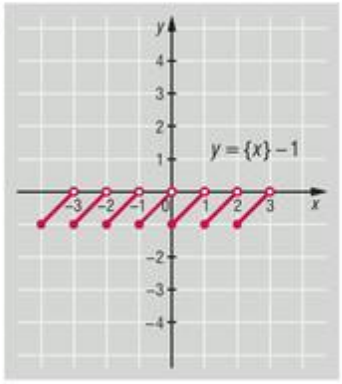
b)



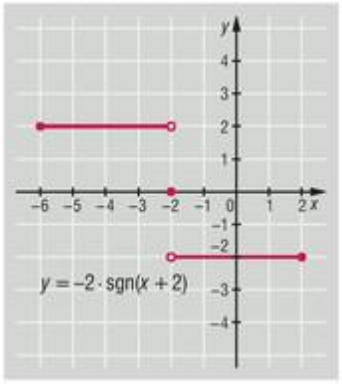
c)



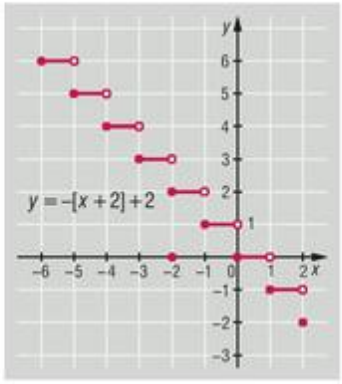
d)



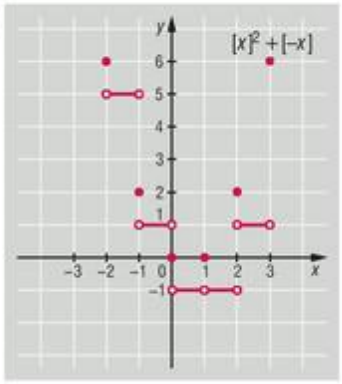
e)



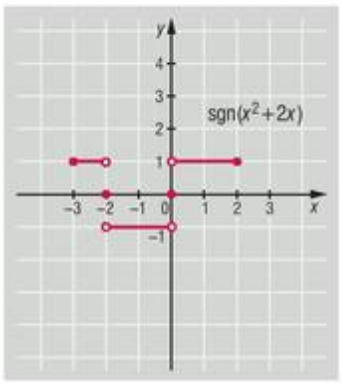
f)



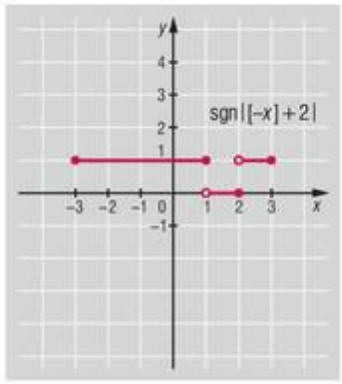
g)



h)



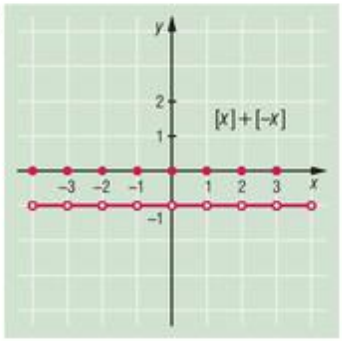
i)



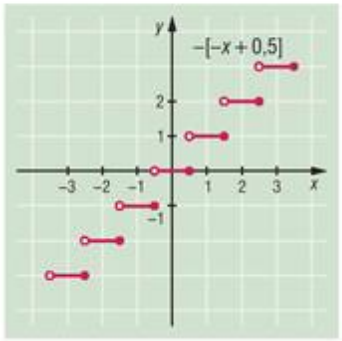
1253 *a)* $n \le x < n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; *b)* $x \in \mathbb{R}$;

c) $n + \frac{1}{2} \le x < n + 1$, ha $n \in \mathbb{Z}$; *d)* $x \in \mathbb{R}$.

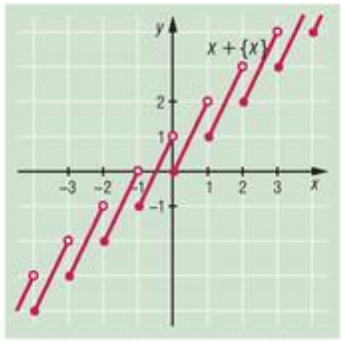
1254 *a)*



b)



c)



Vegyes feladatok – megoldások

1255 *a)* A függvény a $[-3; 3]$-ban nő; a -3 helyen minimuma van, minimum értéke -4; a 3 helyen maximuma van, maximum értéke 2; zérushelye: $x = -1$.

b) A függvény a $[-3; 0]$-ban csökken, a $[0; 3]$-ban nő; a -3 helyen maximuma van, maximum értéke 3; a 0 helyen minimuma van, minimum értéke 0; zérushelye: $x = 0$.

c) A függvény a $[-3; 1]$-ban nő, az $[1; 3]$-ban csökken; a -3 helyen minimuma van, minimum értéke -2; az 1 helyen maximuma van, maximum értéke 2; zérushelyei: $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$.



d) A függvény a $[-3; -2]$ és $[1; 3]$-ban csökken, a $[-2; 1]$-ban nő; minimuma van a -2 és 3 helyeken, a minimum értéke 0; maximuma van az 1 helyen, maximum értéke 2; zérushelyei: $x_1 = -2$ és $x_2 = 3$.

e) A függvény a $[-3; 1]$ és $[1; 3]$-ban nő, a $[-1; 1]$-ban csökken; az 1 helyen minimuma van, minimum értéke -2; a -1 helyen maximuma van, maximum értéke 4; zérushelyei: $x_1 = -2$ és $x_2 = 0$.

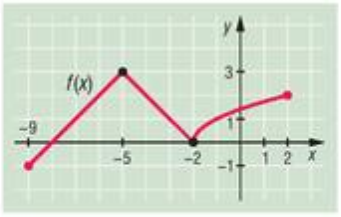
f) A függvény a $[-3; -1]$ és $[0; 1]$-ban nő, a $[-1; 0]$ és $[1; 3]$-ban csökken; a -3 és 3 helyeken minimuma van, minimum értéke -1; a -1 helyen maximuma van, maximum értéke 3; zérushelyei: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 2$.

g) A függvény a $[-3; -2]$ és $[0; 2]$-ban nő, a $[-2; 0]$ és $[2; 3]$-ban csökken; a 0 helyen minimuma van, minimum értéke -1; a 2 helyen maximuma van, maximum értéke 2; zérushelyei: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ és $x_4 = 3$.

h) A függvény a $[-3; -2]$, $[-1; 1]$ és $[2; 3]$-ban csökken, a $[-2; -1]$ és $[1; 2]$-ban nő; az 1 és 3 helyeken minimuma van, minimum értéke -1; a -3 és -1 helyeken maximuma van, maximum értéke 1; zérushelyei: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 2$.

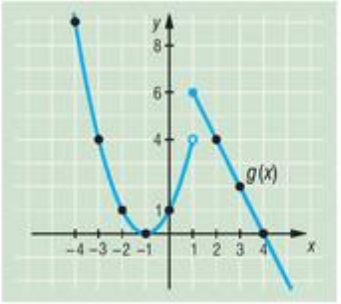
1256 *a)* Az f függvény grafikonja az ábrán látható:

$$f\colon [-9; 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -|x+5|+3, & \text{ha} \quad x < -2, \\ \sqrt{x+2}, & \text{ha} \quad x \geq -2. \end{cases}$$



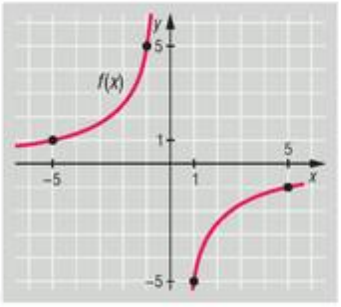
b) A g függvény grafikonja az ábrán látható:

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 2 \cdot (4-x), & \text{ha} \quad x \geq 1, \\ (x+1)^2, & \text{ha} \quad x < 1. \end{cases}$$



1257 *a)* $f\colon x \mapsto \dfrac{-5}{x}$

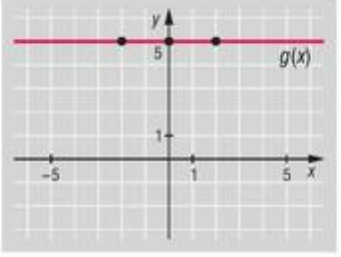
Nincs a koordináta-tengelyekre illeszkedő pontja.



b) $g\colon x \mapsto 5$

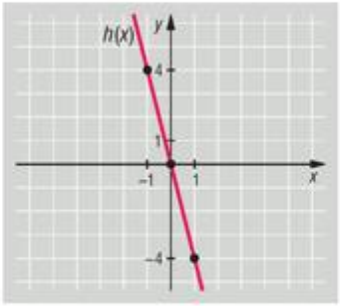
Nincs az x tengelyre illeszkedő pontja. (Mert konstans függvény, és párhuzamos az x tengellyel.)

Az y tengelyre illeszkedő pontja: $(0; 5)$.



c) $h\colon x \mapsto -4x$

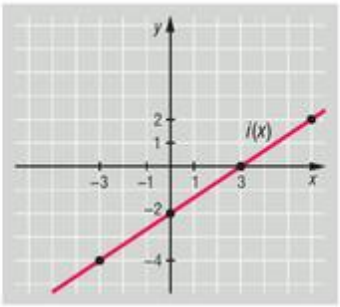
A koordináta-tengelyeket a (0; 0) pontban metszi. Így az x és y tengelyekre illeszkedő pontja: (0; 0).



d) $i\colon x \mapsto \dfrac{2x-6}{3} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{2}{3}\cdot x - 2$

Az x tengelyre illeszkedő pontja: (3; 0).

Az y tengelyre illeszkedő pontja: (0; –2).



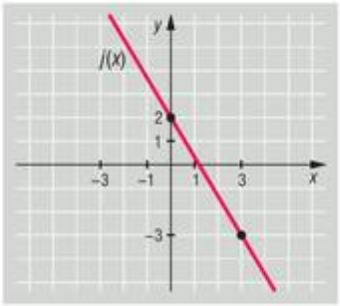
e) $j\colon x \mapsto 2 - \dfrac{5}{3}\cdot x \Rightarrow x \mapsto -\dfrac{5}{3}\cdot x + 2$

Az y tengelyre illeszkedő pontja: (0; 2).

Az x tengelyre illeszkedő pontját számolással határozhatjuk meg. Az $y = 0$ helyen x értéke:

$$y = -\frac{5}{3}\cdot x + 2 \Rightarrow 0 = -\frac{5}{3}\cdot x + 2 \Rightarrow x = \frac{6}{5}.$$

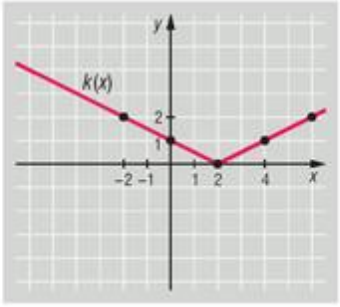
Az x tengelyre illeszkedő pontja: $\left(\dfrac{6}{5}; 0\right)$.



f) $k\colon x \mapsto \dfrac{1}{2}\cdot|x-2|$

Az x tengelyre illeszkedő pontja: (2; 0).

Az y tengelyre illeszkedő pontja: (0; 1).



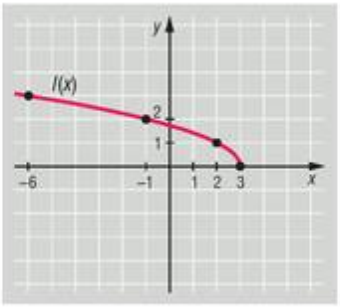
g) $l\colon x \mapsto \sqrt{3-x} \Rightarrow x \mapsto \sqrt{-(x-3)} \quad x \le 3$

Az x tengelyre illeszkedő pontja: (3; 0).

Az y tengelyre illeszkedő pontját számolással határozhatjuk meg. Az $x = 0$ helyen a függvényérték:

$$y = \sqrt{3-x} \Rightarrow y = \sqrt{3}.$$

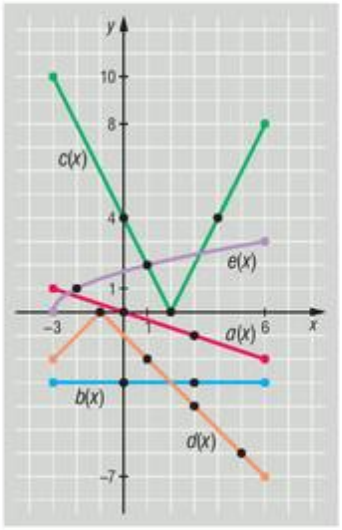
Az y tengelyre illeszkedő pontja: $\left(0; \sqrt{3}\right)$.





1258 *a)* $f_1(x)$; *b)* $f_5(x)$; *c)* $f_2(x)$;
d) $f_3(x)$; *e)* $f_4(x)$; *f)* $f_4(x)$;
g) $f_2(x)$, $f_4(x)$; *h)* $f_3(x)$-nek, $(-3; -1)$ pont; *i)* $x = 5$ helyen;
j) $m = 0$, mert konstans; *k)* $f_1(1) = 3$; *l)* igaz.

1259 Az adott intervallumon ábrázolva a függvényeket:



a) $a(x)$ minimumának helye: $x = 6$, értéke: $y = -2$;
maximumának helye: $x = -3$, értéke: $y = 1$.
$a(x) > 0$: $x \in [-3; 0[$-on.

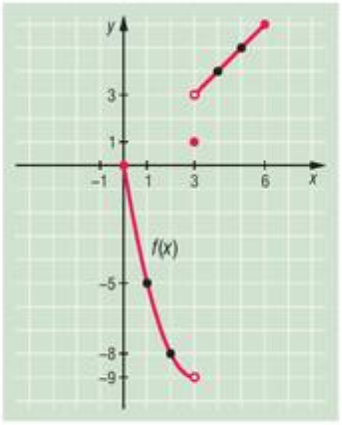
b) $b(x)$-nek nincs szélsőértéke.
$b(x) > 0$: nincs megoldás.

c) $c(x)$ minimumának helye: $x = 2$, értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = -3$, értéke: $y = 10$.
$c(x) > 0$: $x \in [-3; 6] \setminus \{2\}$.

d) $d(x)$ minimumának helye: $x = 6$, értéke: $y = -7$;
maximumának helye: $x = -1$, értéke: $y = 0$.
$d(x) > 0$: nincs megoldás.

e) $e(x)$ minimumának helye: $x = -3$, értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = 6$, értéke: $y = 3$.
$e(x) > 0$: $x \in]-3; 6]$-on.

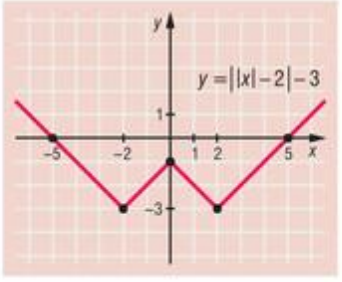
1260 A függvény grafikonja az ábrán látható.



$$f\colon [0; 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x, & \text{ha } x < 3, \\ 1, & \text{ha } x = 3, \\ x, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

a) A függvény zérushelye: $x = 0$.
b) A függvény negatív, vagyis $f(x) < 0$ a $]0; 3[$-on.
c) A függvény nő a $]3; 6]$-on.

1261 Az ábráról leolvashatók az értékek:

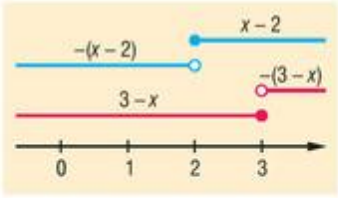


$f(x) = -3$ $x = -2$ és $x = 2$;
$f(x) = -2$ $x = -3$ és $x = -1$ és $x = 1$ és $x = 3$;
$f(x) = -1$ $x = 0$;
$f(x) = 0$ $x = -5$ és $x = 5$;
$f(x) = 1$ $x = -6$ és $x = 6$;
A függvény páros.

1262 Bontsuk fel az $f(x) = |x-2| - |3-x|$ függvényünket két függvényre:

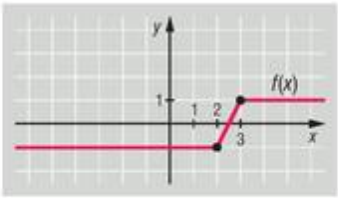
$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{ha} \quad x \geq 2, \\ -(x-2), & \text{ha} \quad x < 2; \end{cases}$$

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{ha} \quad x \leq 3, \\ -(3-x), & \text{ha} \quad x > 3. \end{cases}$$



Az ábrázolt intervallumok segítségével f átalakítható:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad x < 2, \\ 2x-5, & \text{ha} \quad 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{ha} \quad x \geq 3. \end{cases}$$



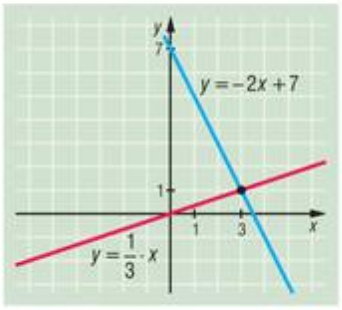
Ezután a kérdések könnyen megválaszolhatók.

a) $f(4) = 1$, $f(2) = -1$, $f(0) = -1$.

b) Az 1 értéket a $[3; \infty[$-ban veszi fel.

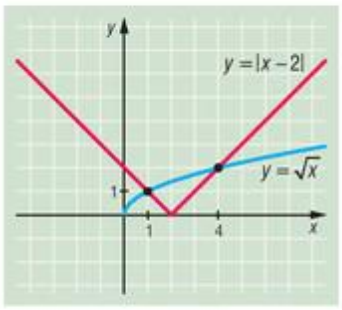
c) Csak a $2x - 5 = 0$ egyenletet kell megoldanunk: $x = \frac{5}{2}$.

1263 *a)*



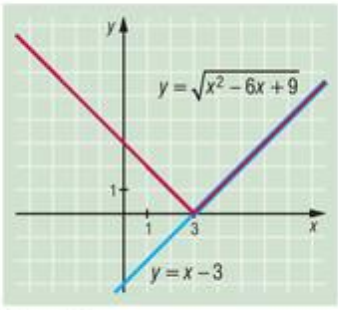
$x = 3$;

b)



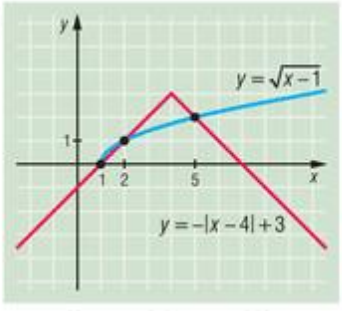
$x_1 = 1$, $x_2 = 4$;

c)



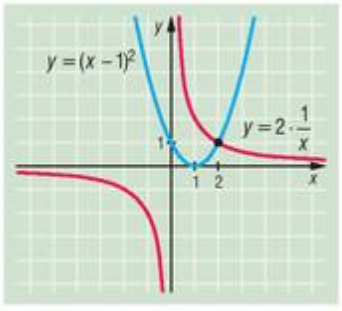
$[3; \infty]$;

d)



$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$;

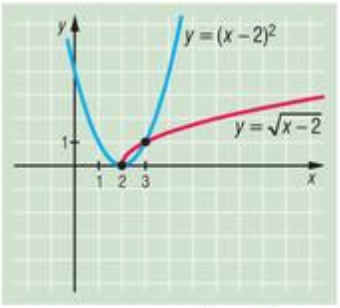
e)



$x = 2$.

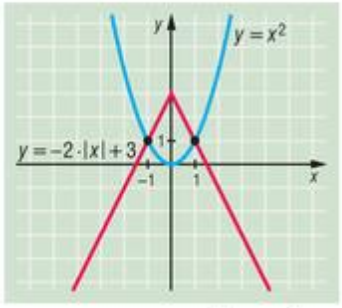


1264 *a)*



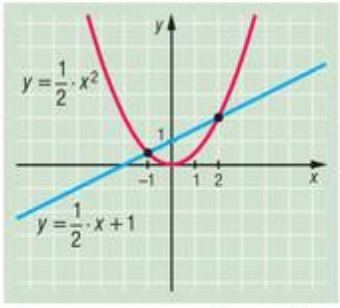
$2 < x < 3$, azaz $]2; 3[$;

b)



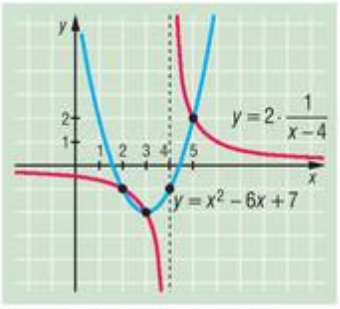
$-1 \le x \le 1$, azaz $[-1; 1]$;

c)



$-1 \le x \le 2$, azaz $[-1; 2]$;

d)



$2 < x < 3$ és $4 < x < 5$,
azaz $]2; 3[\cup]4; 5[$.

1265 Jelöljük x-szel a bontás után keletkező egyik részt, ahol $x \in \mathbb{Z}^+$. Így az $x^2 + (30 - x)^2$ kifejezés minimumát keressük. Végezzük el a négyzetre emelést, és alakítsuk át a kifejezést:

$$x^2 + (30 - x)^2 = x^2 + 900 - 60x + x^2 = 2x^2 - 60x + 900 = 2 \cdot (x - 15)^2 + 450.$$

Ez akkor minimális, ha $x = 15$. Tehát a 30-at két egyenlő részre kell osztani.

1266 A két függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = x + 1 \quad \text{és} \quad g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 4.$$

A háromszög magasságát a C pont koordinátáinak segítségével kapjuk meg. C a két függvény metszéspontja:

$$x + 1 = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Mivel $f(2) = 2 + 1 = 3$, ezért C koordinája $(2; 3)$, amiből a háromszög magassága 3 egység.

A háromszög alapjához meg kell határoznunk az $f(x)$ és a $g(x)$ zérushelyét:

$$f(x) = 0, \quad 0 = x + 1 \qquad \Rightarrow \quad x = -1,$$

$$g(x) = 0, \quad 0 = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 8.$$

A háromszög alapja tehát $1 + 8$ egység hosszú.

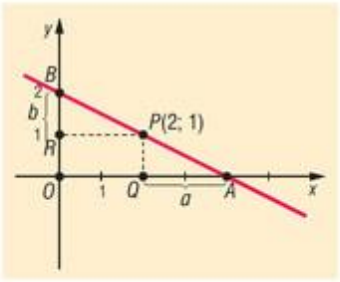
A háromszög területe:

$$T = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5 \text{ egység}.$$

1267 $x + x^2 = (x + 0{,}5)^2 - 0{,}25 \ge -0{,}25, \quad x = -0{,}5.$

1268 Az OAB háromszög területére felírható:

$$T_{OAB\triangle}=\frac{OA\cdot OB}{2}=\frac{(2+a)\cdot(1+b)}{2}.$$



Mivel $QAP\triangle \sim RPB\triangle$, ezért:

$$\frac{QA}{PQ}=\frac{RP}{RB}\ \Rightarrow\ \frac{a}{1}=\frac{2}{b}\ \Rightarrow\ a=\frac{2}{b}.$$

Visszahelyettesítve a területre kapott kifejezésbe:

$$T_{OAB\triangle}=\frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{2}{b}\right)\cdot(1+b)=\frac{1}{2}\cdot\left(2+2b+\frac{2}{b}+2\right)=1+b+\frac{1}{b}+1=2+b+\frac{1}{b}.$$

Ekkor keressük a $2+b+\frac{1}{b}$ minimumát, ahol $b>0$. Mivel $b+\frac{1}{b}\geq 2$, ennek legkisebb értéke 2.

Így a $2+b+\frac{1}{b}$ akkor minimális, ha $b=1$ és $a=2$. Ekkor a terület:

$$T_{OAB\triangle}=\frac{OA\cdot OB}{2}=\frac{4\cdot 2}{2}=4.$$

A és B koordinátája: $A(4;\,0)$ és $B(0;\,2)$, a megfelelő egyenes egyenlete: $y=-\frac{1}{2}\cdot x+2$.

1269 $f(x-1)=x^2$, $f(x+1)=f\big((x+2)-1\big)=(x+2)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

1270 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

1271 *a)* $f(x)=(x-1)^2-3\cdot(x-1)+2=x^2-5x+6$;

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$;

c) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$, $f(x)=x^2-2$.

1272 *a)* $f^{-1}(x)=\dfrac{x-3}{2}$, $x\in\mathbb{R}$;

b) $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$;

c) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$, $x\geq 0$;

d) $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\neq -1$;

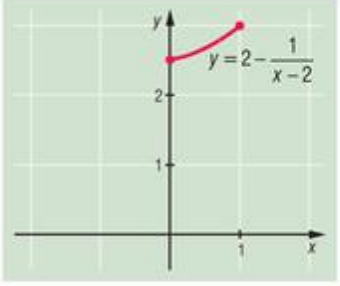
e) $f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0;\,1]$;

f) $f^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0;\,1]$.

1273 *a)* A függvénynek legnagyobb értéke nincs, legkisebb értéke 2, ezt az $[1;\,3]$ intervallumban veszi fel.

b) Ábrázoljuk a függvényt:

$$x\mapsto\frac{2x-5}{x-2}=2-\frac{1}{x-2},\ 0\leq x\leq 1.$$



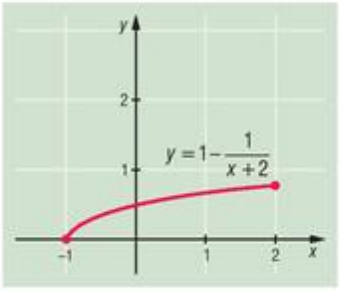
A függvény nő. Minimuma a 0 helyen 2,5, maximuma pedig az 1 helyen van, értéke 3.



c) Ábrázoljuk a függvényt:

$$x \mapsto \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2},\ -1 \le x \le 2.$$

A függvény nő, minimuma a -1 helyen 0, maximuma pedig a 2 helyen van, értéke 0,75.



1274 Gyöktelenítsük a számlálót és egyszerűsítsük:

$$\frac{2x}{1+\sqrt{1-4x^2}} \le 1.$$

Ha $-\frac{1}{2} \le x < 0$, akkor a bal oldal negatív, tehát az egyenlőtlenség igaz.

Ha $0 < x \le \frac{1}{2}$, a számláló a bal oldalon nem nagyobb 1-nél, a nevező nagyobb vagy egyenlő, mint 1, így az egyenlőtlenség igaz.

1275 Már igazoltuk, hogy mivel $x^2 > 0$, $x \neq 0$, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \ge 2$, és csak akkor igaz az egyenlőség, ha $x^2 = 1$, azaz $x = 1$, vagy $x = -1$. Innen

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 1 \ge 4 + 1 = 5,$$

és csak $x = 1$, vagy $x = -1$ esetén lesz igaz az egyenlőség.

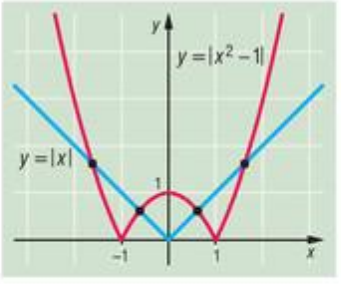
Mivel $y^2 \ge 0$, $1 + y^2 \ge 1$, így $\frac{5}{1+y^2} \le 5$, és az egyenlőség csak akkor igaz, ha $y = 0$.

Tehát az egyenlet megoldásai az $x = 1$, $y = 0$, és az $x = -1$, $y = 0$ számpárok.

1276 Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket:

$$x \mapsto |x^2 - 1| \quad \text{és} \quad x \mapsto |x|.$$

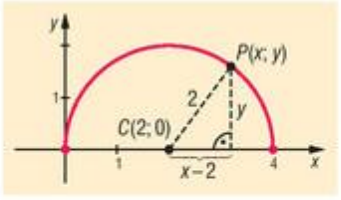
A függvények tulajdonságai alapján látható, hogy az egyenletnek 4 gyöke van.



1277 *a)* Pitagorasz tétele alapján a grafikon tetszőleges $P(x; y)$ pontjának távolsága a $C(2; 0)$ ponttól:

$$PC = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + 4 + x^2 - 4x} = 2,$$

mert $y \ge 0$ és $x^2 - 4x = -y^2$.

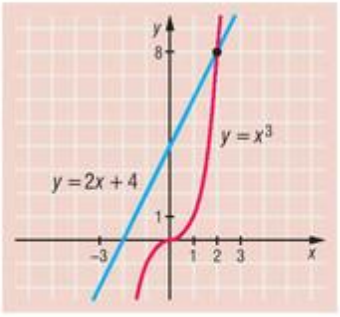


b) Az *a)* feladat eredménye szerint az

$$x \mapsto \sqrt{x \cdot (4-x)} = \sqrt{4x - x^2},\ 0 \le x \le 4$$

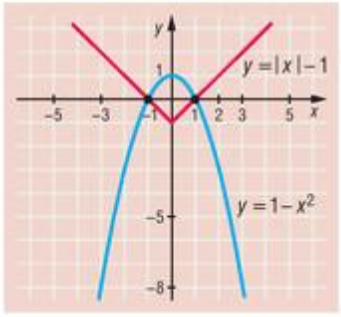
függvény grafikonja az $y \ge 0$, felső félsíkba eső 2 sugarú (2; 0) középpontú félkör. Ennek az x tengelytől legtávolabb lévő pontja a (2; 2) pont. Az x tengelyen a félkör két végpontja van: (0; 0) és (4; 0). Tehát a függvény legnagyobb értéke 2, legkisebb értéke 0.

1278 *a)*



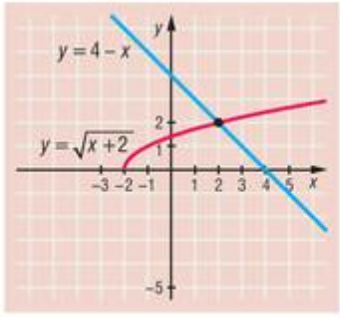
megoldás: $x = 2$;

b)



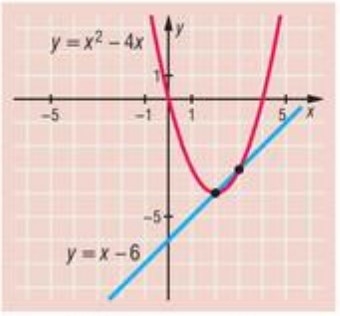
megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;

c)



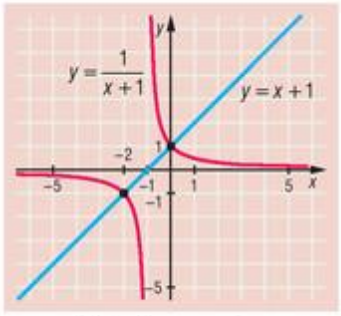
megoldás: $x = 2$;

d)



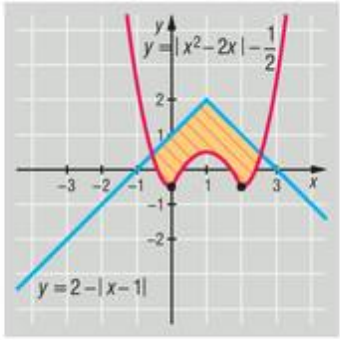
megoldások: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$;

e)



megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$;
(elég az $\frac{1}{x+1} = x + 1$ egyenletet vizsgálni).

1279 Az ábrán vonalazással jelöltük azt a tartományt, amelyben lévő pontok koordinátáira mindkét egyenlőség teljesül. (A határvonal nem tartozik hozzá.)



1280 *a)* $f(-x) = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2} = -f(x)$, tehát f páratlan függvény.

b) $f(-x) = \sqrt[3]{(1 - x)^2} + \sqrt[3]{(1 + x)^2} = f(x)$, tehát f páros függvény.

c) $f(-x) = f(x)$, tehát f páros függvény.

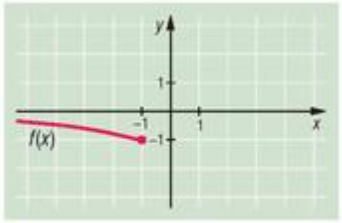
d) f se nem páros, se nem páratlan.

e) f páratlan függvény.

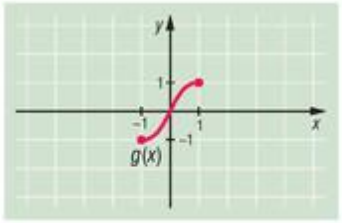


1281 A megadott függvények grafikonja:

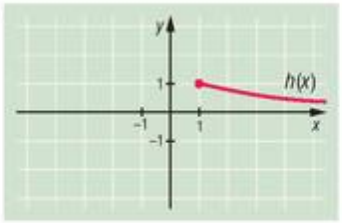
a)



b)



c)



A megfelelő inverz függvények:

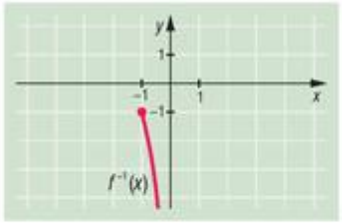
$f^{-1}(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x \in [-1; 0[$;

$g^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, $x \in [-1; 1]$;

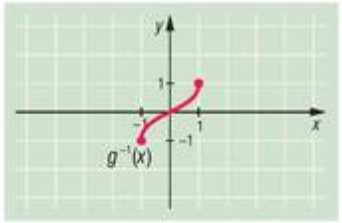
$h^{-1}(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x \in]0; 1[$.

Az inverz függvények grafikonja:

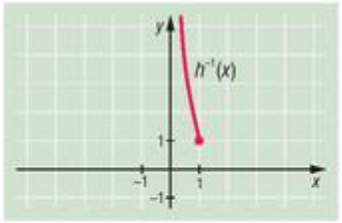
a)



b)



c)



1282 Az f páros függvény, mivel $f(-x) = f(x)$. Elég megmutatni, hogy $[0; +\infty[$-ban korlátos a függvény. Ha $x \geq 1$, akkor $x^2 \leq x^4$, ezért

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} \leq 1.$$

Ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $x^2 \leq 1$, és mivel $1 + x^4 \geq 1$, így

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} \leq 1 + x^2 \leq 2.$$

Tehát f az egész számegyenesen korlátos.



9.4. HÁROMSZÖGEK, NÉGYSZÖGEK, SOKSZÖGEK

Néhány alapvető geometriai fogalom (pont, egyenes, sík, távolság, szög) – megoldások

1283 *a)* Egy egyenes 4 különböző pontja 5 részre osztja az egyenest.
b) Egy egyenes 4 különböző pontja 6 szakaszt határoz meg az egyenesen.

1284 *a)* A síkon egy szabályos ötszög csúcsai 10 egyenest határoznak meg.
b) A síkon egy szabályos hatszög csúcsai 15 egyenest határoznak meg.

1285 *a)* A síkot egy szabályos ötszög oldalegyenesei 16 részre osztják.
b) A síkot egy szabályos hatszög oldalegyenesei 19 részre osztják.

1286 *a)* Párhuzamosak: AB és CD egyenesei.
b) Kitérők: AB és EG, AB és CG, CG és BD; DC és EG, valamint EG és BD egyenesei.

1287 Két megoldás lehetséges: $1200 + 800 = 2000$ m vagy $1200 - 800 = 400$ m.

1288 *a)* A távolság: 7,5 cm. *b)* A távolság: 2,5 cm.

1289 *a)* A távolság: $\frac{a+b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$. *b)* A távolság: $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ $(a > b)$.

1290 A szakaszok: $AP = 18$ cm és $PB = 12$ cm.

1291 A szakaszok: $AP = a \cdot \frac{p}{p+q}$ és $PB = a \cdot \frac{q}{p+q}$.

1292 *a)* 19,4°; *b)* 42,55°; *c)* 92,755°.

1293 *a)* 32°30'; *b)* 123°9'; *c)* 9°25'12".

1294 A szögek nagysága: 32°, 52°, 72°, 92°, 112°.

1295 A szög 40°.

1296 A két szög: 120° és 60°.

1297 A derékszögű háromszög minden hegyesszögéhez találhatunk merőleges szárú szögpárt.

1298 A $CBD\sphericalangle = 24°$.

1299 A merőlegesek az eredeti szögtartomány szögfelezőjével 106°25'30", illetve 73°34'30" nagyságú szöget zárnak be.

1320 A kismutató óránként 30°-ot fordul pozitív irányban, vagyis percenként 0,5°-ot. A nagymutató óránként 360°-ot fordul pozitív irányban, vagyis percenként 6°-ot. Az óramutatók
a) $40 \cdot 6° - 220 \cdot 0{,}5° = 130°$; *b)* $625 \cdot 0{,}5° - 25 \cdot 6° = 162{,}5° = 162°30'$;
c) $372 \cdot 0{,}5° - 12 \cdot 6° = 114°$
nagyságú szöget zárnak be.



1301 Tegyük fel, hogy x perc múlva a két mutató elfordulása 12 órához képest egyenlő. Az 1300. feladat alapján a $(240 + x) \cdot 0{,}5 = x \cdot 6$ egyenletet kell megoldanunk. Ebből:

$$x = \frac{240}{11} \approx 21{,}82.$$

Tehát $\frac{240}{11}$ perccel 4 után fedik egymást a mutatók.

1302 A 9 pont $3 \cdot 6 + 2 = 20$ egyenest határoz meg.

1303 *a)* Metszéspontok száma: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

b) Az 5 páronként nem párhuzamos egyenes egymással $\frac{5 \cdot 4}{2}$ metszéspontot hoz létre, illetve az 5 egyenes mindegyike minden párhuzamos egyenest metsz. Így a metszéspontok száma: $\frac{5 \cdot 4}{2} + 5 \cdot 3 = 25$.

c) Metszéspontok száma: $\frac{4 \cdot 3}{2} + 4 \cdot 4 = 22$.

d) Metszéspontok száma: $\frac{3 \cdot 2}{2} + 3 \cdot 5 = 18$.

1304 *a)* Páronként párhuzamosak az egyenesek.

b) Egy ponton haladnak át az egyenesek, vagy kettő párhuzamos egyenes metsz egy harmadikat.

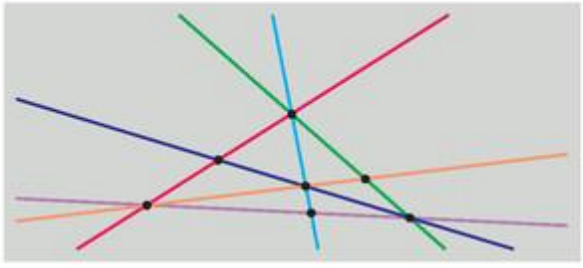
c) A három egyenes három különböző pontban metszi egymást.

1305 Hét óra után először x perc múlva zárjon be a két mutató ugyanakkora szöget a vízszintessel. Ekkor a kismutató vízszintessel bezárt szöge $60° - x \cdot 0{,}5°$, a nagymutató vízszintessel bezárt szöge pedig $90° - x \cdot 6°$. A két szög egyenlőségéből:

$$60 - x \cdot 0{,}5 = 90 - x \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11} \approx 5{,}45.$$

Kati 7 óra után $5\frac{5}{11}$ perccel indul az iskolába.

1306 Az ábrán látható 6 egyenes és metszéspontjaik megfelelnek a feladat feltételeinek.



1307 Legyen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Az egyenlőség bal oldala:

$$OM \cdot AB + ON \cdot BC = \frac{a+b}{2} \cdot (b-a) + \frac{b+c}{2} \cdot (c-b) = \frac{c^2 - a^2}{2}.$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$OP \cdot AC = \frac{c+a}{2} \cdot (c-a) = \frac{c^2 - a^2}{2}.$$

A egyenlőség jobb és bal oldala egyenlő, tehát az egyenlőség igaz.

1308 Tekintsük az egyenest egy számegyenesnek, a szakaszok végpontjait a számegyenesen egy-egy valós számnak. Az intervallumok bal végpontjainak megfelelő valós számok közül a legnagyobb legyen a, jobb végpontjainak megfelelő valós számok közül a legkisebb pedig b. (Véges sok intervallum van, tehát a és b létezik.) Mivel bármely két intervallumnak van közös pontja, teljesül, hogy $a \leq b$. Ha $a = b$, akkor a közös pont a, egyébként minden a és b közötti pont közös pont.

Háromszögek oldalai, szögei – megoldások

1309 A helyesen kitöltött táblázat:

α	β	γ	α'	β'	γ'
20°	40°	120°	160°	140°	60°
70°	80°	30°	110°	100°	150°
30°	60°	90°	150°	120°	90°

1320 A háromszög hiányzó szögei: 82°33' és 55°2'.

1311 *a)* Derékszögű a háromszög. *b)* Hegyesszögű a háromszög.

c) Tompaszögű a háromszög.

1312 A háromszög szögei lehetnek: 78°, 78°, 24°; vagy 78°, 51°, 51°.

1313 Az ABE szabályos háromszög EBA szöge 60°.

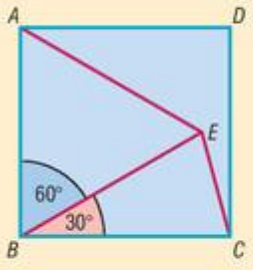
Ha az E pont a háromszögön belül van, akkor az EBC egyenlő szárú háromszög B-nél lévő szöge $90° - 60° = 30°$, így a

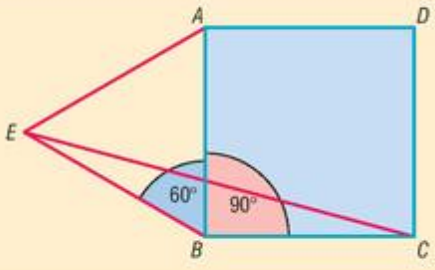
$$BEC\sphericalangle = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

Ha az E pont a háromszögön kívül van, akkor a BEC egyenlő szárú háromszög B-nél lévő szöge $90° + 60° = 150°$, így a

$$BEC\sphericalangle = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

A BEC szög tehát lehet 75° vagy 15°.





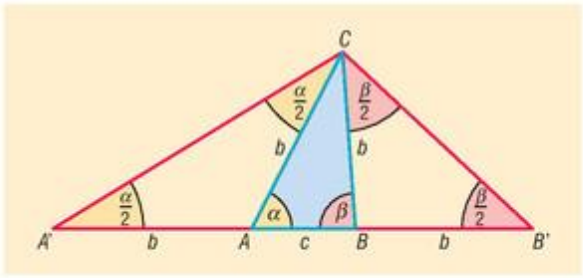
1314 *a)* Az $AA'C$ háromszög egyenlő szárú, így az A'-nél lévő belső szög az A-nál lévő külső szög fele, vagyis $AA'C\sphericalangle = 20°$. Ugyanígy $BB'C\sphericalangle = 35°$.

A háromszög szögei: 20°, 35°, és 125°.

b) Az *a)* részben levezetettek alapján az $AA'C$ háromszögben az A'-nél lévő belső szög az A-nál lévő külső szög fele, tehát $AA'C\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

Ugyanígy $BB'C\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$.

A háromszög szögei: $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$.

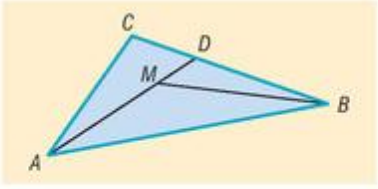


1315 Az AM egyenese a BC oldalt D pontban metszi. Ismert, hogy egy háromszög külső szöge mindig nagyobb, mint a nem mellette lévő valamelyik belső szög.

Az ADC háromszög külső szöge $MDB\sphericalangle$, tehát $ACB\sphericalangle < MDB\sphericalangle$.

Az MBD háromszög külső szöge $AMB\sphericalangle$, tehát $MDB\sphericalangle < AMB\sphericalangle$.

Összevetve: $ACB\sphericalangle < MDB\sphericalangle < AMB\sphericalangle$, vagyis igaz a feladat állítása.



1316 A háromszög-egyenlőtlenség alapján:

a) létezik ilyen háromszög;

b) nem létezik ilyen háromszög;

c) nem létezik ilyen háromszög.

1317 A harmadik oldal 10 vagy 4 cm. Ha a harmadik oldal 4 cm lenne, akkor nem teljesülne a háromszög-egyenlőtlenség. A harmadik oldal 10 cm. (Ilyen háromszög létezik.)

1318 A háromszög-egyenlőtlenségek alapján a harmadik oldal nagyobb, mint $10 - 6 = 4$ cm, és kisebb, mint $10 + 6 = 16$ cm. A harmadik oldal tehát lehet 5, 6, …, 15 cm. Tehát 11 ilyen háromszög van.

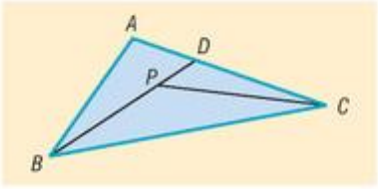
1319 A feltétel szerint: $2a = a + a \geq b + c$. A háromszög-egyenlőtlenség nem teljesül a $2a$, b, és c hosszúságú szakaszokra, így nem létezik ilyen háromszög.

1320 A BP egyenese az AC oldalt egy belső D pontban metszi. Az ABD háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség:

$$AB + AD > BD = BP + PD.$$

A PDC háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség:

$$PD + DC > PC.$$



A két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk, hogy:

$$(AB + AD) + (PD + DC) > (BP + PD) + PC.$$

Mivel

$$AD + DC = AC \Rightarrow AB + PD + AC > BP + PD + PC.$$

Innen már adódik az állítás:

$$AB + AC > PB + PC.$$

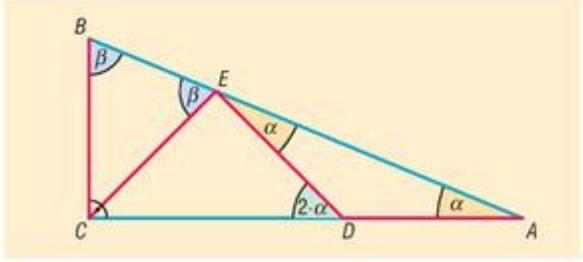
1321 Legyen az ábra szerinti ABC derékszögű háromszög A csúcsánál lévő szöge α, B csúcsánál levő pedig β.

Az ADE háromszög egyenlő szárú, tehát

$$DEA\sphericalangle = \alpha.$$

A BCE háromszög egyenlő szárú, tehát

$$BEC\sphericalangle = \beta.$$



Mivel $\alpha + \beta = 90°$, az E pontnál csak akkor lehet egyenes szög, ha $CED\sphericalangle = 90°$. Tehát a CED háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, és $CDE\sphericalangle = 45°$.

A CDE szög viszont EDA háromszög külső szöge, ami egyenlő a nem mellette lévő két belső szög összegével:

$$CDE\sphericalangle = 2 \cdot \alpha \;\Rightarrow\; \alpha = 22{,}5°.$$

A háromszög hegyesszögei: 22,5° és 67,5°.

1322 *a)* Az AOC egyenlő szárú háromszögben AOC szög $180° \cdot \frac{3}{5}$ része:

$$AOC\sphericalangle = \frac{3}{5} \cdot 180° = 108° \quad \text{és} \quad CAO\sphericalangle = ACO\sphericalangle = \frac{180° - 108°}{2} = 36°.$$

A DOC egyenlő szárú háromszögben DOC szög $180° \cdot \frac{1}{5}$ része:

$$DOC\sphericalangle = \frac{1}{5} \cdot 180° = 36° \quad \text{és} \quad DCO\sphericalangle = ODC\sphericalangle = \frac{180° - 36°}{2} = 72°.$$

A DMC háromszögben

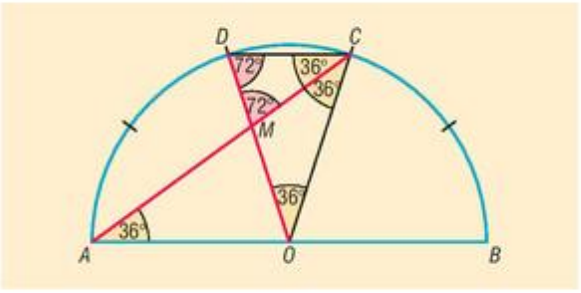
$$DCM\sphericalangle = 72° - 36° = 36° \quad \text{és} \quad DMC\sphericalangle = 180° - 72° - 36° = 72°.$$

b) Az előbbiek alapján DMC háromszög egyenlő szárú, mert szögei 72°, 72° és 36°. A háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, tehát $MC = DC = 10$ cm.

Az OMC háromszög is egyenlő szárú, mert $MOC\sphericalangle = MCO\sphericalangle = 36°$, ezért

$$OM = MC = 10 \text{ cm}.$$

Tehát $OM = 10$ cm.



1323 Nem. A háromszög-egyenlőtlenség alapján az egyik e átlóra teljesülnie kell:

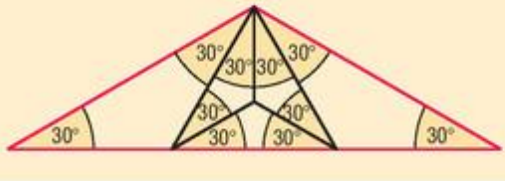
$$e < 7 + 8 = 15 \quad \text{és} \quad e < 11 + 9 = 20.$$

Tehát az egyik átlónak 15 cm-nél kisebbnek kell lennie. A másik f átlóra szintén teljesülnie kell, hogy

$$f < 8 + 11 = 19 \quad \text{és} \quad f < 9 + 7 = 16.$$

Tehát a másik átlónak 16 cm-nél kisebbnek kell lennie.

1324 Az ábrán látható felosztás megfelel a feladat feltételeinek.



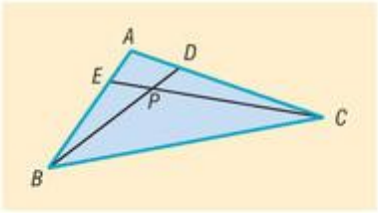
1325 Az $ABCD$ négyszögben az átlók metszéspontja legyen M. Az ABM, illetve CDM háromszögben a háromszög-egyenlőtlenségek:

$$AM + BM > AB, \quad \text{illetve} \quad CM + DM > CD.$$

Innen az állítás közvetlen adódik, hiszen $AM + BM + CM + DM$ éppen az átlók összege.



1326 Az ABD háromszögben az A-nál levő szög nem hegyesszög, tehát BD a háromszög legnagyobb oldala: $BD > BA$. Hasonlóan az AEC háromszög legnagyobb oldala CE, tehát $CE > AC$.



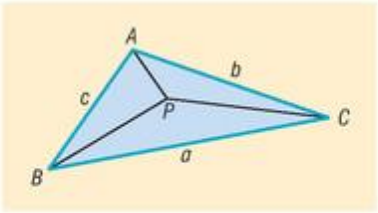
A két egyenlőtlenségből adódik:

$$BD + CE > BA + AC = (BE + EA) + (AD + DC) = \\ = BE + DC + (EA + AD).$$

Az AED háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség: $EA + AD > ED$. Tehát

$$BD + CE > BE + DC + ED.$$

1327 Az ábrán látható ABC háromszögben az oldalak a szokásos jelöléssel a, b és c.



Az APB, APC, illetve BPC háromszögekben a háromszög-egyenlőtlenség:

$$PA + PB > c, \quad PC + PB > a \quad \text{és} \quad PA + PC > b.$$

Ezekből következik, hogy:

$$2PA + 2PB + 2PC > a + b + c,$$

$$PA + PB + PC > \frac{a + b + c}{2}.$$

A P pontnak a csúcsoktól vett távolságösszege a háromszög félkerületénél nagyobb. Mivel P pont a háromszög egy belső pontja, az 1320. feladat alapján teljesül, hogy

$$PA + PB < a + b, \quad PC + PB < c + b \quad \text{és} \quad PA + PC < a + c.$$

Ezekből következik, hogy:

$$2PA + 2PB + 2PC < 2a + 2b + 2c,$$

$$PA + PB + PC < a + b + c.$$

A P pontnak a csúcsoktól vett távolságösszege a háromszög kerületénél kisebb.

Pitagorasz-tétel – megoldások

1328 A megadott adatokból a következő táblázatot kapjuk (➡):

Egyik befogó	Másik befogó	Átfogó
12 cm	5 cm	13 cm
65 cm	7,2 dm	970 mm
$\sqrt{3} \cdot a$	a	$2a$
b	b	$\sqrt{2} \cdot b$

1329 *a)* Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

b) Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

c) Nem lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

d) Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

1330 A Pitagorasz-tétel alapján nem lehet, mert a két páratlan befogó négyzetösszege páros, ami nem lehet a páratlan átfogó négyzete.

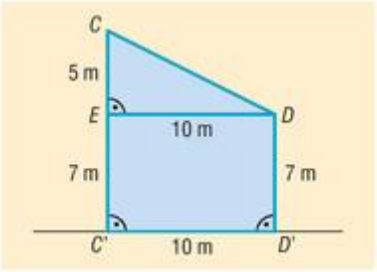
1331 A két ferde rúd hossza együtt $2 \cdot \sqrt{150^2 + 100^2} \approx 360{,}56$ cm.

1332 Az alaphoz tartozó magasság 6 cm.

1333 Az ellensúly a tartóoszlop lábától 41 méterre, a darugém vége a tartóoszlop lábától 44 méterre van.

1334 A monitor képátmérője 17".

1335 Az ábrán a két fát jelölje CC' és DD' szakasz. A CDE derékszögű háromszögben DC szakasz hosszát kell kiszámítani.



$$DC = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5 \cdot \sqrt{5} \approx 11{,}18,$$

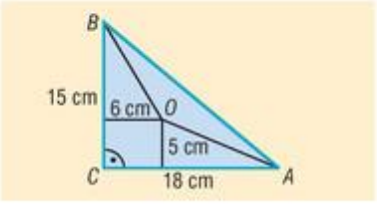
tehát a két fa csúcsa megközelítőleg 11,18 m távol van egymástól.

1336 *a)* Az OBC háromszög területe az ABC derékszögű háromszög területének harmadrésze. Mivel a két háromszög BC oldala közös, az OBC háromszög BC oldalhoz tartozó magassága az AC befogó harmada, vagyis $\frac{18}{3} = 6$ cm.

Hasonlóan az OAC háromszög területe az ABC derékszögű háromszög területének harmadrésze, így az OAC háromszög AC oldalhoz tartozó magassága a BC befogó harmada, vagyis $\frac{15}{3} = 5$ cm.

Az O pontnak a befogóktól vett távolsága tehát 6 és 5 cm.

b) Az előzőek alapján OC egy 6 és 5 cm oldalú téglalap átlója. Pitagorasz tétele alapján

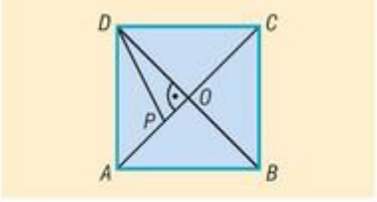


$$OC = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} \approx 7{,}81 \text{ cm}.$$

1337 A háromszög területe egy b oldalú szabályos háromszög területével egyenlő:

$$T = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

1338 A küzdőtér legyen egy 8 m oldalú $ABCD$ négyzet. Tegyük fel, hogy a sportoló az AC átló A-hoz közelebbi P harmadolópontjában tartózkodik.



A P pontnak az A csúcstól vett távolsága az átló harmada:

$$AP = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \approx 3{,}77 \text{ m}.$$

A P pontnak a C csúcstól vett távolsága az átló kétharmada:

$$CP = \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \approx 7{,}54 \text{ m}.$$

A négyzet átlóinak metszéspontja legyen O. Mivel a négyzet átlói merőlegesen felezik egymást, a DOP háromszög derékszögű, és a DO szakasz a négyzet átlójának a fele:

$$DO = 4 \cdot \sqrt{2}.$$

A PO szakasz a négyzet átlójának a hatoda:

$$PO = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}.$$



A DOP háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt adódik, hogy

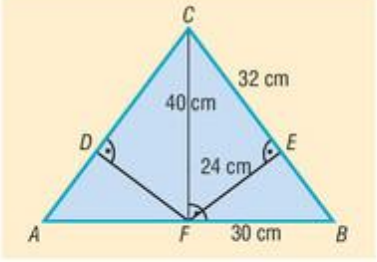
$$PD = \sqrt{PO^2 + OD^2} = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{5} \approx 5{,}96 \text{ m}.$$

Hasonlóan:

$$PB = 5{,}96 \text{ m}.$$

A sportoló a küzdőtér négy sarkától 3,77, 5,96, 7,54 és 5,96 m távolságra van.

1339 A CFB derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétellel számítható BC oldal: $BC = 50$ cm.



A CFB háromszögben FE a CB oldalhoz tartozó magasság, így a háromszög területét kétféleképpen felírva FE-re adódik:

$$\frac{50 \cdot FE}{2} = \frac{40 \cdot 30}{2},$$

$$FE = 24 \text{ cm}.$$

A CFE derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$CE = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32 \text{ cm}.$$

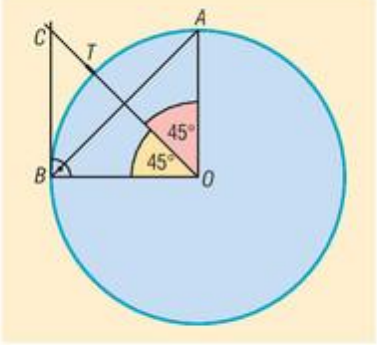
A $CEFD$ négyszög kerülete FE és CE szakaszok összegének a kétszerese:

$$2 \cdot (24 + 32) = 112 \text{ cm}.$$

A $CEFD$ négyszög területe az EFC derékszögű háromszög területének kétszerese:

$$2 \cdot \frac{24 \cdot 32}{2} = 768 \text{ cm}^2.$$

1340 Legyen az indulási pont A, az érkezési pont B, a gömb középpontja O.



a) A bolygó felszínén megtett út a főkör kerületének a negyed része:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} = \pi \approx 3{,}14 \text{ km}.$$

b) Az alagút hossza az AOB egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója. Mivel a háromszög befogója 2 km, Pitagorasz-tétel alapján:

$$AB = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}82 \text{ km}.$$

Az alagút hossza tehát 2,82 km.

c) A B érkezési pontból akkor nem láthatjuk a tornyot, ha a torony T ponttal jelölt teteje a főkörhöz B-ben húzott érintő egyenesének arra az oldalára esik, amelyik oldalon a kör van.

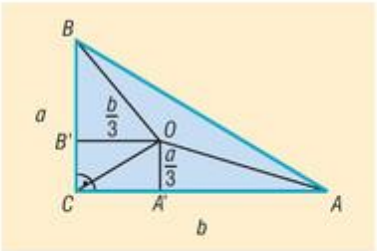
A T pont az AOB szög szögfelezőjén O-tól $2 + 0{,}1 = 2{,}1$ km-re van.

A szögfelező és az érintő metszéspontja legyen C. Az OBC egyenlő szárú derékszögű háromszögben a befogó 2 km, így

$$OC = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}82 \text{ km}.$$

Mivel $OC > OT$, a tornyot a kis herceg nem láthatja.

1341 Legyen $AC = b$ és $BC = a$. Az O pont AC-re, illetve BC-re eső merőleges vetülete legyen A', illetve B'.



Az 1336. feladat gondolatmenete alapján a területekből következik, hogy

$$OA' = \frac{a}{3} \quad \text{és} \quad OB' = \frac{b}{3}.$$

Az $OB'CA'$ téglalap átlójára felírva Pitagorasz tételét:

$$OC^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{9}.$$

Mivel $AA' = \frac{2b}{3}$, az AOA' derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele:

$$OA^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2.$$

Mivel $BB' = \frac{2a}{3}$, a BOB' derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele:

$$OB^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2.$$

Az előbbieket felhasználva:

$$OA^2 + OB^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{9}\right) = 5 \cdot OC^2.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

1342 Ha a derékszögű háromszög másik befogója b, és az átfogója c, akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$225 + b^2 = c^2,$$
$$c^2 - b^2 = 225,$$
$$(c - b) \cdot (c + b) = 225.$$

Mivel $c - b$ kisebb, mint $c + b$, 225 lehetséges szorzattá alakításai a tényezők sorrendjét is figyelembe véve: $1 \cdot 225 = 3 \cdot 75 = 5 \cdot 45 = 9 \cdot 25$.

Ha $a - b = 1$ és $a + b = 225$, akkor $a = 113$ és $b = 112$.
Ha $a - b = 3$ és $a + b = 75$, akkor $a = 39$ és $b = 36$.
Ha $a - b = 5$ és $a + b = 45$, akkor $a = 25$ és $b = 20$.
Ha $a - b = 9$ és $a + b = 25$, akkor $a = 17$ és $b = 8$.

Tehát négy ilyen háromszög van.

Négyszögek – megoldások

1343 A konvex négyszögnek lehet, hogy:

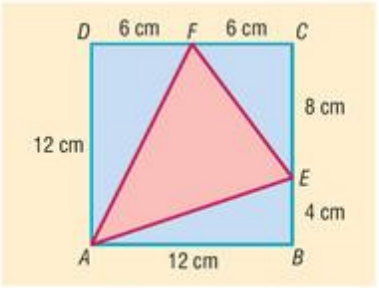
- nincs hegyesszöge, például téglalap;
- egy hegyesszöge van, például egy deltoid, melynek szögei 60°, 90°, 120°, 90°;
- két hegyesszöge van, például egy trapéz, melynek szögei 60°, 120°, 60°, 120°;
- három hegyesszöge van, például egy deltoid, melynek szögei 60°, 80°, 60°, 160°.

Négy hegyesszöge nem lehet, mert ekkor nem teljesülne, hogy a belső szögek összege 360°.



1344 Hamisak: *a)*, *b)*, *c)*, *e)*, *f)*, *g)*. Igazak: *d)*, *h)*.

1345 A háromszög oldalait Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:



$$AE = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4 \cdot \sqrt{10} \approx 12{,}65,$$

$$EF = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

$$AF = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6 \cdot \sqrt{5} \approx 13{,}42.$$

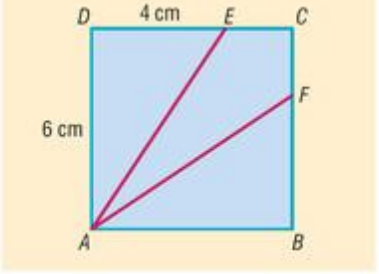
Az AEF háromszög kerülete:

$$AE + EF + AF = 36{,}07 \text{ cm}.$$

Az AEF háromszög területét megkaphatjuk úgy, hogy a négyzet területéből kivonjuk az ABE, EFC és AFD háromszögek területét:

$$12^2 - \frac{12 \cdot 4}{2} - \frac{8 \cdot 6}{2} - \frac{12 \cdot 6}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$

1346 Legyen $ABCD$ a 6 cm oldalú négyzet. Az A csúcson áthaladó, a területet harmadoló egyenesek közül az egyik a DC oldalt E-ben, a másik a BC oldalt F-ben metszi.



Az ADE háromszög területe a négyzet területének harmada, tehát 12 cm^2.

$$\frac{6 \cdot DE}{2} = 12 \quad \Rightarrow \quad DE = 4 \text{ cm}.$$

Pitagorasz-tételt használva az ADE háromszögben:

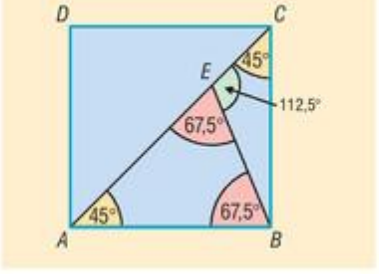
$$AE = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7{,}21 \text{ cm}.$$

Ugyanígy:

$$AF = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7{,}21 \text{ cm}.$$

Tehát a két egyenesnek a négyzet belsejébe eső szakasza 7,21 cm.

1347 Tekintsük az $ABCD$ négyzetet. Az AC átlójára mérjük fel a négyzet oldalának a hosszát A-ból kiindulva, így az E pontot kapjuk.



Mivel a négyzet átlói az oldalakkal 45°-os szöget zárnak be, az ABE egyenlő szárú háromszög szárszöge 45°, az alapon lévő szögei:

$$\frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°.$$

Ennek a szögnek a külső szöge 112,5°.

Az EBC háromszög EC oldalán fekvő szögek: 112,5° és 45°.

Ezek alapján a szerkesztést az EBC háromszöggel kezdjük, mert adott az EC oldala, és ismerjük a rajta fekvő két szöget. Az EBC háromszögnek a BC oldala a négyzet oldala, aminek ismeretében a négyzet már szerkeszthető.

A feladatnak mindig van megoldása.

1348 A téglalap átlói az oldalakkal:

a) 35° és 55°; *b)* $\frac{\varphi}{2}$ és $90° - \frac{\varphi}{2}$ nagyságú szöget zárnak be.



1349 A rombusz szögei 48° és 132°.

1350 A rombusz szögei 30° és 150°.

1351 Három eset lehetséges:

a) 102°, 109°, 40° és 109°; *b)* 40°, 102°, 116° és 102°; *c)* 102°, 40°, 178° és 40°.

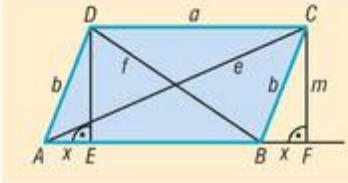
1352 A hosszabbik átló a 10 cm-es átlót két egyenlő részre osztja. A hosszabbik átló szeletei az arányból adódóan 15 cm és 9 cm. Pitagorasz tétele alapján az oldalak:

$$a = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106} \approx 10{,}30 \text{ cm} \quad \text{és} \quad b = \sqrt{5^2 + 15^2} = 5 \cdot \sqrt{10} \approx 15{,}81 \text{ cm}.$$

1353 A paralelogramma belső szögei 80°, 100°.

1354 A paralelogramma belső szögei 108° és 72°.

1355 Az $ABCD$ paralelogrammának az A csúcsánál levő szöge legyen hegyesszög. A paralelogramma oldalai $AB = a$ és $BC = b$, átlói $AC = e$ és $BD = f$, az AB oldalhoz tartozó magassága m.



Húzzunk merőlegest a C és a D csúcsokból az AB oldal egyenesére. A merőlegesek talppontjai legyenek F és E. Az F pont az AB oldalon kívül, az E pont az oldalon van.

Jelölje az AE és a BF egyenlő szakaszok hosszúságait x.

A BFC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$b^2 = m^2 + x^2.$$

Az AFC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$e^2 = m^2 + (a + x)^2.$$

A BED derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$f^2 = m^2 + (a - x)^2.$$

Ezeket felhasználva az átlók négyzetösszege:

$$e^2 + f^2 = 2m^2 + (a + x)^2 + (a - x)^2 = 2m^2 + 2x^2 + 2a^2 =$$
$$= 2 \cdot (m^2 + x^2) + 2a^2 = 2b^2 + 2a^2.$$

Ha a paralelogrammának az A csúcsánál levő szöge tompaszög, a bizonyítás hasonló módon történik.

Ha a paralelogramma téglalap, akkor is az átlók négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő.

1356 Mivel a paralelogramma köré kör írható, átlói egyenlő hosszúak, tehát téglalap.

A téglalap átlójának hossza Pitagorasz-tétellel számítható:

$$\sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}.$$

A téglalap köré írható kör sugara az átló fele, vagyis 6,5 cm.

1357 Nincs konkáv trapéz, mert a trapéz egy száron nyugvó belső szögeinek összege 180°.

1358 Mivel a két adott szög összege nem 180°, ezért ezek a szögek nem lehetnek egy száron nyugvó szögek. A trapéz másik két szöge: $180° - 38° = 142°$ és $180° - 102° = 78°$.

1359 Két megoldás lehetséges, amelyek a következő táblázatból olvashatók ki. Felhasználtuk az oldalhosszak kiszámításánál, hogy ha egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója a, akkor az átfogója $a \cdot \sqrt{2}$.

Derékszögű szár	Másik szár	Rövidebb alap	Hosszabb alap
6 cm	$6 \cdot \sqrt{2}$ cm	10 cm	16 cm
6 cm	$6 \cdot \sqrt{2}$ cm	16 cm	22 cm



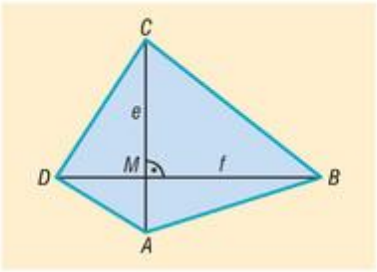
1360 Az $ABCD$ konvex négyszögben az átlók metszéspontja legyen M. A négyszöget az átlói négy derékszögű háromszögre bontják.

A négyszög területét a négy derékszögű háromszög területének összegeként számíthatjuk:

$$T = \frac{AM \cdot BM}{2} + \frac{BM \cdot CM}{2} + \frac{CM \cdot DM}{2} + \frac{DM \cdot AM}{2} =$$

$$= \frac{BM}{2} \cdot (AM + CM) + \frac{DM}{2} \cdot (CM + AM) =$$

$$= \frac{(AM + CM) \cdot (BM + DM)}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2}.$$



Tehát a négyszög területe $\frac{e \cdot f}{2}$.

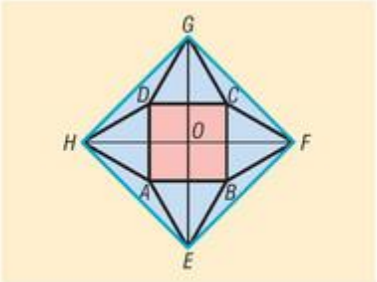
A feladat állítása akkor is igaz, ha a négyszög nem konvex.

1361 Tekintsük az ábrán látható jelöléseket.

Az $EFGH$ négyszög négyzet, mert átlói egyenlő hosszúak, illetve merőlegesek egymásra.

Az $EFGH$ négyzetben a HF átló az $ABCD$ négyzet oldalának és két 18 cm oldalú szabályos háromszög magasságának az összege:

$$HF = 18 + 2 \cdot \frac{18 \cdot \sqrt{3}}{2} = 18 \cdot (1 + \sqrt{3}).$$



Az $EFGH$ négyzet területe az átlók szorzatának a fele:

$$T_{EFGH\ \text{négyzet}} = \frac{HF^2}{2} \approx 1209{,}18\ \text{cm}^2.$$

Az $EFGH$ négyzet EF oldala az EOF egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója. Ennek a háromszögnek a befogója:

$$OF = \frac{HF}{2} = 9 \cdot (1 + \sqrt{3}).$$

Az EOF egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója a befogó $\sqrt{2}$-szerese,

$$EF = OF \cdot \sqrt{2} \approx 34{,}77\ \text{cm}.$$

Az $EFGH$ négyzet kerülete:

$$K_{EFGH\ \text{négyzet}} = 4 \cdot EF \approx 4 \cdot 34{,}77 = 139{,}08\ \text{cm}.$$

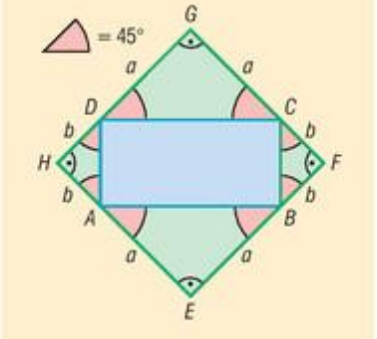
1362 Az ábrán látható $ABCD$ téglalap oldalaira rajzolt egyenlő szárú derékszögű háromszögek csúcsai E, F, G és H.

Mivel az egyenlő szárú derékszögű háromszög alapon fekvő szögei 45°-osak, F, C és G pontok egy egyenesbe esnek. Hasonlóan igaz ez a többi ponthármas esetében is.

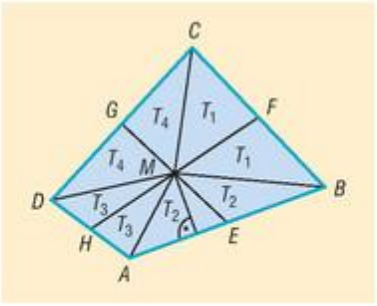
A téglalap és a háromszögek négyszöget határoznak meg.

Ennek az $EFGH$ négyszögnek minden szöge derékszög, tehát téglalap.

Az ábra jelöléseit használva az $EFGH$ téglalap minden oldala $a + b$ hosszúságú, tehát négyzet.



1363 Az $ABCD$ négyszög oldalainak felezőpontjai az ábra jelöléseit használva E, F, G és H. A szemben levő oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok metszéspontja M.



Az AME és a BME háromszögek területe egyenlő, mivel AE, illetve BE oldalai egyenlő hosszúak, valamint ezen oldalakhoz tartozó magasságok megegyeznek.

A többi háromszög esetében is ezt végiggondolva adódik, hogy:

$$t_{MEBF\text{ négyszög}} + t_{MGDH\text{ négyszög}} = t_{MFCG\text{ négyszög}} + t_{MHAE\text{ négyszög}}.$$

A feladatban három négyszög területét adták meg, így a hiányzó negyedik négyszög területére a következő összefüggések valamelyike érvényes:

$$15 + 20 = 25 + x \quad \Rightarrow \quad x = 10 \quad \Rightarrow \quad t_{ABCD\text{ négyszög}} = 70\ \text{cm}^2,$$
$$15 + 25 = 20 + y \quad \Rightarrow \quad y = 20 \quad \Rightarrow \quad t_{ABCD\text{ négyszög}} = 80\ \text{cm}^2,$$
$$25 + 20 = 15 + z \quad \Rightarrow \quad z = 30 \quad \Rightarrow \quad t_{ABCD\text{ négyszög}} = 90\ \text{cm}^2.$$

A négyszög területe lehet 70, 80 vagy 90 cm^2.

1364 Az átlók metszéspontja a megfelelő pont.

A négyszög csúcsai legyenek A, B, C és D. A sík egy P pontjára igaz, hogy $PA + PC \geq AC$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P pont rajta van az AC átlón;

Hasonlóan $PB + PD \geq BD$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P pont rajta van a BD átlón.

Ebből következik, hogy

$$PA + PC + PB + PD \geq AC + BD.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P rajta van az AC, illetve a BD átlók mindegyikén, vagyis P pont éppen az átlók metszéspontja.

Sokszögek – megoldások

1365 A helyesen kitöltött táblázat:

A sokszög oldalainak száma	A sokszög egyik csúcsából kiinduló átlóinak a száma	A sokszög belső szögeinek összege
10	7	1440°
18	15	2880°
24	21	3960°
n	$n-3$	$(n-2)\cdot 180°$
$a+3$	a	$(a+1)\cdot 180°$
$\frac{\varphi}{180°}+2$	$\frac{\varphi}{180°}-1$	φ

1366 Egy n oldalú konvex sokszög egy külső szöge mindig kisebb, mint 180°, és a belső szögeinek összege 180° egész számú többszöröse: $(n-2)\cdot 180°$.

Mivel $2283° = 12\cdot 180° + 123° = (14-2)\cdot 180° + 123°$, a külső szög csak 123° lehet, és a sokszög 14 oldalú.

1367 Az *a)* és *c)* igaz, a *b)* és *d)* hamis.



1368 A helyesen kitöltött táblázat:

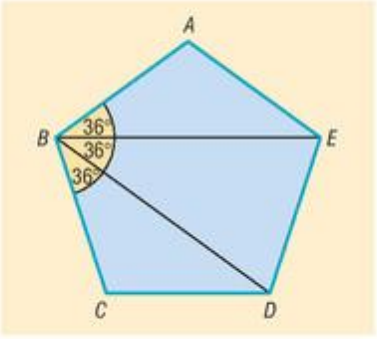
A szabályos sokszög oldalainak száma	A szabályos sokszög egy belső szöge	A szabályos sokszög egy külső szöge
20	162°	18°
10	144°	36°
9	140°	40°
n	$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$	$\frac{360°}{n}$
$\frac{360°}{180°-\alpha}$	α	$180°-\alpha$
$\frac{360°}{\beta}$	$180°-\beta$	β

1369 Egy konvex hatszög átlóinak legfeljebb 15 darab csúcsoktól különböző metszéspontja lehet.

1370 Egy szabályos hatszög átlóinak pontosan 13 darab csúcsoktól különböző metszéspontja van.

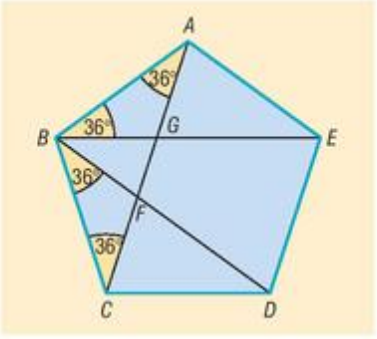
1371 A legrövidebb átló és a szabályos hatszög két oldala olyan egyenlő szárú háromszöget határoz meg, amelynek szárszöge 120°. Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.

1372 A szabályos ötszög egy csúcsából kiinduló átlói 36°-os szöget zárnak be.



1373 Az 1372. feladat alapján $ABG\sphericalangle = GAB\sphericalangle = 36°$. A $BGF\sphericalangle$ a BGA háromszög külső szöge, tehát $36° + 36° = 72°$. Ugyanígy megmutatható, hogy $GFB\sphericalangle = 72°$.

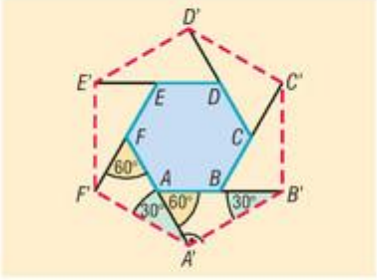
Tehát a BGF háromszög szögei: 72°, 72°, 36°.



1374 *a)* Az $ABCDEF$ szabályos hatszög egy külső szöge $F'FA'\sphericalangle = 60°$ és $FA' = 2FF'$. Ebből következik, hogy az $F'FA'$ háromszög fél szabályos háromszög, amelynek az A'-nél lévő szöge 30°.

Ugyanígy az $A'AB'$ háromszög is fél szabályos háromszög, és az A'-nél lévő szöge 90°. Ez azt jelenti, hogy az $A'B'C'D'E'F'$ hatszögnek az A'-nél lévő szöge $30° + 90° = 120°$-os.

A hatszög többi szögéről hasonló módon belátható, hogy szintén 120°-os.



b) A keletkezett hatszög minden oldala egy 24 cm oldalú szabályos háromszög magassága, vagyis

$$24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Az $A'B'C'D'E'F'$ hatszög minden szöge és minden oldala egyenlő, tehát szabályos. Így a kerület:

$$K_{A'B'C'D'E'F' \text{ hatszög}} = 6 \cdot 12 \cdot \sqrt{3} \approx 124{,}71 \text{ cm}.$$

c) Az $A'B'C'D'E'F'$ hatszög területe 6 darab $12 \cdot \sqrt{3}$ cm oldalú szabályos háromszög területének az összege:

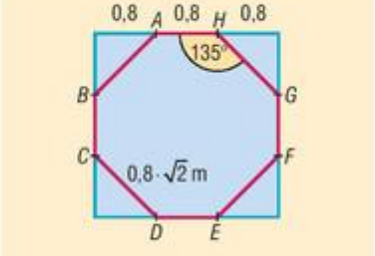
$$T_{A'B'C'D'E'F' \text{ hatszög}} = 6 \cdot \frac{\left(12 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 648 \cdot \sqrt{3} \approx 1122{,}37 \text{ cm}^2.$$

1375 *a)* A nyolcszög minden szöge 135°.

b) Nem szabályos a nyolcszög, mert oldalai nem egyenlő hosszúak. Ugyanis BC a négyzet oldalának harmadrésze, AB pedig a harmadrész $\sqrt{2}$-szöröse.

c) A kerület:

$$K_{\text{nyolcszög}} = 4 \cdot 0{,}8 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 7{,}73 \text{ m}.$$



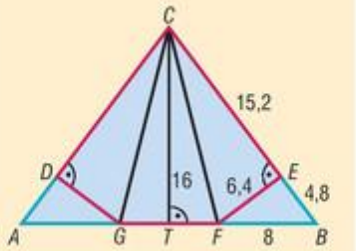
d) A nyolcszög területét megkapjuk úgy, hogy az eredeti négyzet területéből kivonjuk két 0,8 m oldalú négyzet területét.

$$T_{\text{nyolcszög}} = 2{,}4^2 - 2 \cdot 0{,}8^2 = 4{,}48 \text{ m}^2.$$

1376 Legyen T az AB alap felezéspontja. A Pitagorasz-tétel alapján a BCT derékszögű háromszögből $BC = 20$ cm.

Az FBC háromszög FB oldala 8 cm, a hozzá tartozó CT magasság 16 cm. Az FBC háromszög BC oldala 20 cm, a hozzá tartozó magassága FE. Ennek a háromszögnek a területe kétféleképpen számolható:

$$\frac{8 \cdot 16}{2} = \frac{FE \cdot 20}{2} \quad \Rightarrow \quad FE = 6{,}4 \text{ cm}.$$



A BEF derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$EB = \sqrt{8^2 - 6{,}4^2} = 4{,}8 \quad \Rightarrow \quad CE = 15{,}2 \text{ cm}.$$

Hasonlóan $DG = 6{,}4$ cm és $DC = 15{,}2$ cm.

A $CEFGD$ ötszög területe a GDC, FEC és FGC háromszögek területének összege:

$$T_{CEFGD \text{ ötszög}} = \frac{8 \cdot 16}{2} + 2 \cdot \frac{6{,}4 \cdot 15{,}2}{2} = 161{,}28 \text{ cm}^2.$$

A $CEFGD$ ötszög kerülete:

$$K_{CEFGD \text{ ötszög}} = GF + 2 \cdot (FE + CE) = 51{,}2 \text{ cm}.$$

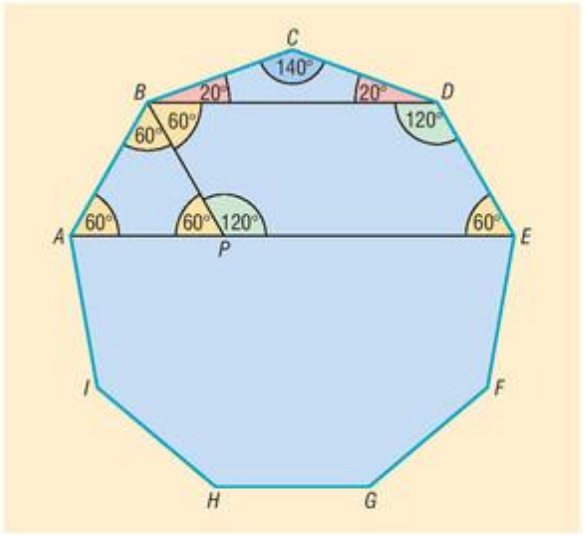
1377 A 25 háromszög belső szögeinek összege $25 \cdot 180°$. Az ötszög belsejében lévő egy háromszög-csúcsnál a szögek összege 360°. Ha n csúcs esik az ötszögön belül, akkor a háromszög belső szögeinek összegét úgy is számolhatjuk, hogy 360° n-szereséhez hozzáadjuk az ötszög belső szögeinek összegét. Így n-re a következő egyenlethez jutunk:

$$25 \cdot 180° = n \cdot 360° + 540° \quad \Rightarrow \quad n = 11.$$

Az ötszög belsejébe 11 háromszög-csúcs esik.



1378 Az ábrán látható *ABCDEFGHI* szabályos kilencszög egy belső szöge 140°. Egyik legrövidebb átlója *BD*, egyik leghosszabb átlója pedig *AE*.



A *BCD* egyenlő szárú háromszög szárszöge egyúttal a szabályos kilencszög egyik belső szöge is, tehát 140°. Továbbá: $BDC\sphericalangle = CBD\sphericalangle = 20°$, valamint $BDE\sphericalangle = DBA\sphericalangle = 140° - 20° = 120°$.

A szabályos kilencszög *C* csúcsán áthaladó szimmetriatengelyére merőleges a sokszög *BD* és *AE* átlója, tehát az *ABDE* négyszög olyan húrtrapéz, amelynek belső szögei 60°, illetve 120°.

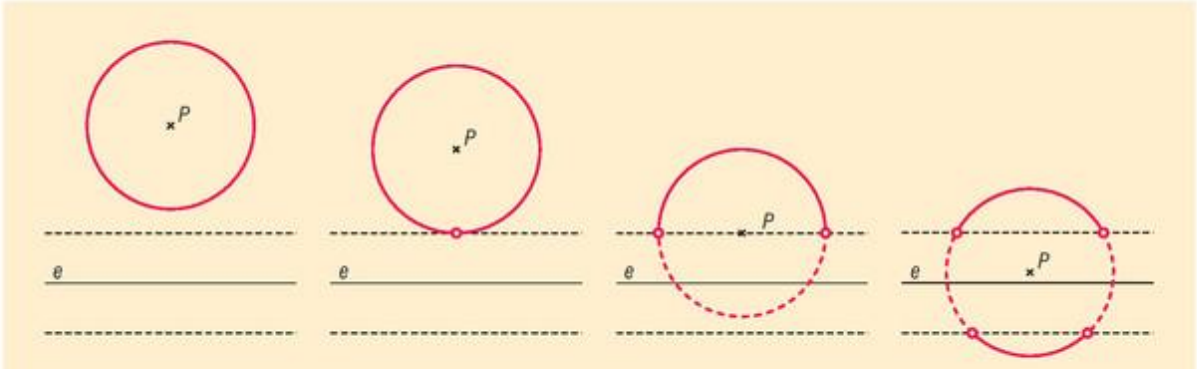
Legyen az *AE* leghosszabb átlónak *P* egy olyan belső pontja, amelyre igaz, hogy a *BDEP* négyszög paralelogramma. A szögekből adódóan az *APB* háromszög szabályos, és az oldala éppen a kilencszög egy oldala.

Mivel a paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak, *EP* a legrövidebb átlóval egyenlő hosszú, és a szabályos háromszögből adódóan *PA* a szabályos kilencszög oldala.

Mivel $AE = AP + PE$, az állításunk igaz.

Nevezetes ponthalmazok – megoldások

1379 Legyen az adott pont *P*, az adott egyenes *e*.



Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm-nél nagyobb, akkor az adott tulajdonságú pontok a *P* körül írt 5 cm sugarú körvonal pontjai.

Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a *P* körül írt 5 cm sugarú körvonal pontjai, kivéve a kör *e*-hez legközelebbi pontját.

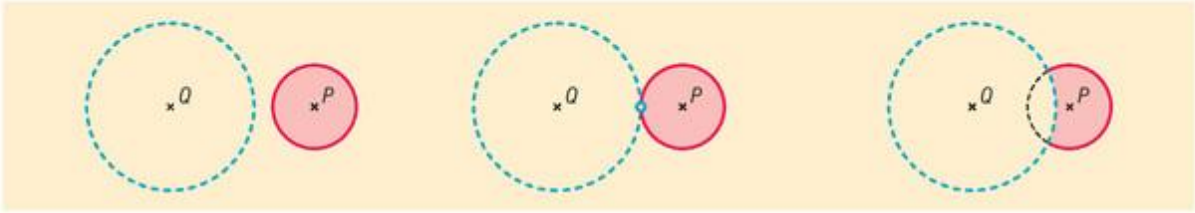
Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm-nél kisebb, de 2 cm-nél nem kisebb, akkor az adott tulajdonságú pontok a *P* körül írt 5 cm sugarú körvonal egy nyílt ívének pontjai.

Ha a pont és egyenes távolsága 2 cm-nél kisebb, akkor az adott tulajdonságú pontok a *P* körül írt 5 cm sugarú körvonal két nyílt ívének pontjai.

1380 A pontok halmaza az a körvonal, amelynek középpontja a két koncentrikus kör közös középpontja, sugara a két kör sugarának számtani közepe.

1381 Ha P és Q távolsága nagyobb, mint 10 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 4 cm sugarú zárt körlap pontjai.

Ha P és Q távolsága 10 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 4 cm sugarú zárt körlap pontjai, kivéve a körlap Q-hoz legközelebb eső pontját.



Ha P és Q távolsága kisebb, mint 10 cm, de nagyobb, mint 2 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 4 cm sugarú zárt körlapnak az ábrán látható pontjai.

Ha P és Q távolsága 2 cm-nél kisebb vagy egyenlő, nincs ilyen pont.

1382 Egy szakasz mint alap fölé emelt egyenlő szárú háromszög harmadik csúcsa, egyenlő távol van az alap két végpontjától, így a harmadik csúcs az alap felezőmerőlegesén van.

Ha a két szakasz nem párhuzamos, akkor a két szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja az egyenlő szárú háromszögek közös pontja.

Ha a két szakasz párhuzamos, és felezőmerőlegeseik egybeesnek, akkor a közös felezőmerőleges minden pontja megfelel a közös csúcsnak, kivéve a két szakasz felezőpontja.

Ha a két szakasz párhuzamos, és felezőmerőlegeseik párhuzamosak, de nem esnek egybe, akkor nem lehet ilyen háromszögeket szerkeszteni.

1383 Egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, így a szerkesztendő kör középpontja rajta van az egyenesre E-ben állított merőlegesen.

Ismert, hogy egy kör húrjának felezőmerőlegese tartalmazza a kör középpontját, így a PE szakasz felezőmerőlegese tartalmazza a szerkesztendő kör középpontját.

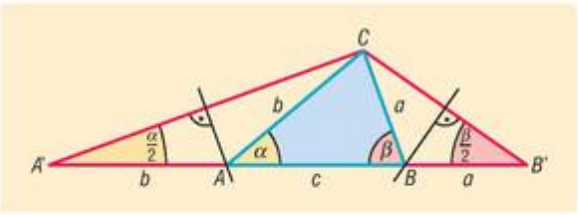
Ezek alapján a szerkesztés menete:

1. az adott egyenesre E-ben merőlegest állítunk;
2. megszerkesztjük a PE szakasz felezőmerőlegesét;
3. a két egyenes metszéspontja lesz a kör középpontja, sugara a középpont és E távolsága;
4. ez alapján a körvonal megrajzolható.

A feladatnak mindig egy megoldása van.

1384 Az 1314. feladat alapján történhet a szerkesztés.

Mivel az $A'AC$ háromszög egyenlő szárú, így az A csúcs rajta van az $A'C$ szakasz felezőmerőlegesén. Hasonlóan a B csúcs rajta van a $B'C$ szakasz felezőmerőlegesén.



A szerkesztés menete:

1. Szerkesszük meg azt az $A'B'C$ háromszöget, amelynek az $A'B'$ oldala a kerülettel egyenlő hosszú, és az A'-nél lévő szöge $\frac{\alpha}{2}$, a B'-nél lévő szöge $\frac{\beta}{2}$.
2. Az $A'C$ szakasz felezőmerőlegesének az $A'B'$-vel való metszéspontja adja A pontot.
3. A $B'C$ szakasz felezőmerőlegesének az $A'B'$-vel való metszéspontja adja B pontot.

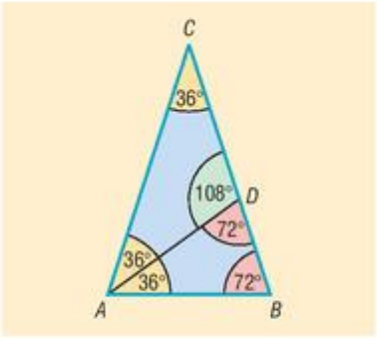
A feladatnak mindig van megoldása, ha a két megadott szög összege 180°-nál kisebb.



1385 Kettő olyan pont van, amelyik mind a három egyenestől egyenlő távol van.

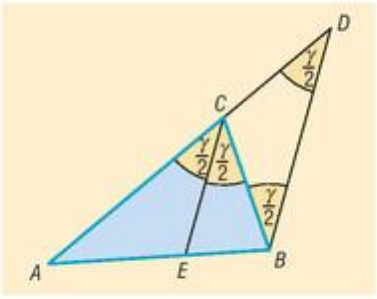
1386 Az AD átfogójú fél szabályos háromszögből adódóan $AD = 10$ cm.

1387 Ha a szárszög 36°, akkor az alapon fekvő szögek 72°-osak. Az alapon lévő egyik szög szögfelezője az ábrán látható módon két egyenlő szárú háromszögre bontja az eredeti háromszöget.



1388 Mivel CE párhuzamos BD-vel, párhuzamos szárú szögek keletkeznek. A CBD szög és a CDB szög is a C csúcsnál lévő szög fele, vagyis a BCD háromszög egyenlő szárú. (➡)

Egy háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, tehát $DC = BC$.



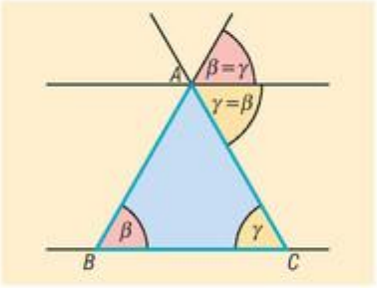
1389 A négyzet átfogóra eső csúcsa egyenlő távol van a két befogótól, így rajta van a derékszögű csúcs szögfelezőjén. Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.

1390 A félkör középpontja, amely a háromszög egyik oldalára esik, egyenlő távol van a másik két oldaltól, így a félkör középpontja rajta van a másik két oldal által bezárt belső szög szögfelezőjén. Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.

1391 Tekintsük az ábra jelöléseit. (➡)

A párhuzamosságból következik, hogy az A-nál lévő külső szög éppen a B-nél, illetve a C-nél lévő belső szögeknek is kétszerese. Ebből adódik, hogy a B-nél és C-nél levő belső szögek egyenlők.

Az ABC háromszög egyenlő szárú és $AB = AC$.



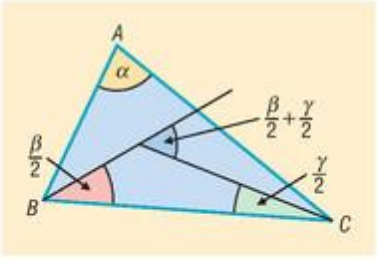
1392 A szögfelezők által bezárt szög 57°.

1393 *a)* A másik két belső szög szögfelezőinek hajlásszöge 66°.

b) Az ABC háromszög szögei a szokásos jelölésekkel legyen α, β és γ. A β és γ szögek szögfelezőinek metszéspontját jelölje O.

Az OBC háromszög B-nél és C-nél lévő belső szöge $\frac{\beta}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$.

Ennek a háromszögnek az O csúcsnál levő külső szöge $\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}$, ami éppen a két szögfelező hajlásszöge.



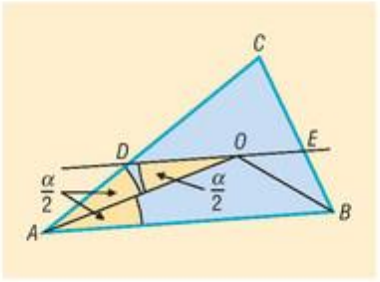
Mivel az ABC háromszög belső szögeinek összege 180°, a két szögfelező hajlásszöge:

$$\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{180^\circ-\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}.$$

1394 A külső szögek rendre 132°, 106°, illetve 122°. A külső szögfelezők által meghatározott háromszög belső szögei ezek felének páronként vett összegét egészítik ki 180°-ra. Így a szögek:

$$180° - \frac{132° + 106°}{2} = 61°, \quad 180° - \frac{132° + 122°}{2} = 53°, \quad 180° - \frac{122° + 106°}{2} = 66°.$$

1395 Az ABC háromszög A és B csúcsnál lévő belső szögfelezők metszéspontja legyen O. Mivel DE párhuzamos AB-vel, a DOA és az OAB szögek váltószögek:

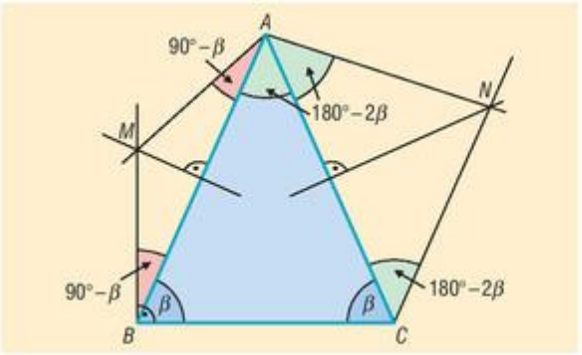


$$DOA\sphericalangle = OAB\sphericalangle = DAO\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy az ADO háromszög egyenlő szárú. Egy háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, ezért $DO = DA = 5$ cm. Ugyanígy adódik, hogy $OE = EB = 4$ cm.

Tehát a DE szakasz hossza 9 cm.

1396 Ha az ábrán látható ABC háromszögben az $ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \beta$, akkor a $BAC\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \beta$.



Mivel az MB merőleges a háromszög BC oldalára, $ABM\sphericalangle = 90° - \beta$.

Az M pont rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén, tehát az AMB háromszög egyenlő szárú: $MBA\sphericalangle = BAM\sphericalangle = 90° - \beta$.

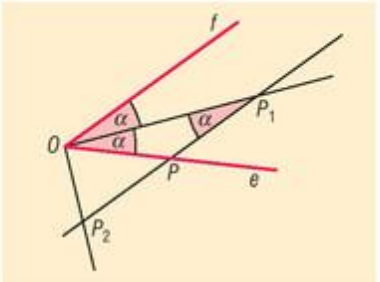
Az NC párhuzamos AB-vel, tehát az ACN és a BAC szögek váltószögek: $BAC\sphericalangle = ACN\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \beta$.

Az N pont rajta van az AC szakasz felezőmerőlegesén, tehát az ACN háromszög is egyenlő szárú: $ACN\sphericalangle = CAN\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \beta$.

Az A csúcsnál lévő szögek összege $2 \cdot (180° - 2 \cdot \beta) + 90° - \beta = 450° - 5 \cdot \beta$, ami éppen 120° a feladat feltétele szerint. Ebből $\beta = 66°$.

A háromszög szögei: 66°, 66°, 48°.

1397 A szög csúcsa legyen O, a szögszárak pedig e, illetve f félegyenesek. A P pont az e szögszár egy tetszőleges pontja.



Legyen P_1 a szögtartományban az a pont, amelyre PP_1 párhuzamos az f szögszárral és $PP_1 = OP$.

Az OPP_1 háromszög egyenlő szárú, és az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak: $PP_1O\sphericalangle = P_1OP\sphericalangle = \alpha$.

A párhuzamosság miatt az f szögszár az OP_1 egyenesével, szintén α nagyságú szöget zár be, tehát P_1 pont rajta van a szögfelezőn.

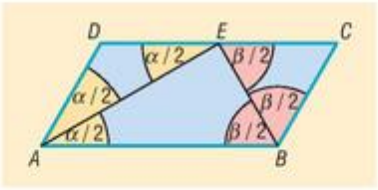
Tekintsük a szögfelező egy tetszőleges Q pontját. Húzzunk párhuzamost Q-n keresztül az f szögszárral, és vegyük a párhuzamos és e egyenes metszéspontját. A metszéspontból kiindulva, a feladat utasításait követve éppen a Q ponthoz jutunk. Tehát a szögfelező minden pontja hozzá tartozik az adott tulajdonságú pontok halmazához.

Legyen P_2 a szögtartományon kívül az a pont, amelyre PP_2 párhuzamos az f szögszárral és $PP_2 = OP$. Belátható, hogy a P_2 pontok halmaza az adott szög mellékszögének szögfelezője.

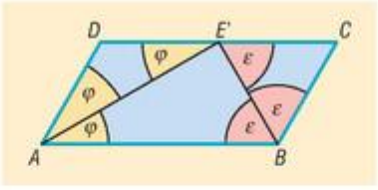
A feladatban szereplő pontok halmaza a szögtartomány szögfelezője és a mellékszögének szögfelezője. (A szög és mellékszög közös szögszára tartalmazza P-t.)



1398 Ha a szögfelezők a DC oldal E felezőpontjában metszik egymást, akkor a szögfelezés miatt $BAE\sphericalangle = EAD\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. Mivel a paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak, a BAE és a DEA szögek váltószögek, tehát $BAE\sphericalangle = DEA\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. Ez azt jelenti, hogy az AED háromszög egyenlő szárú, vagyis $DE = AD$. Ugyanígy $BC = CE$, tehát $DC = 2BC$.



Ha $DC = 2BC$, és E' pont a DC felezőpontja, akkor $AD = DE'$, vagyis az ADE' háromszög egyenlő szárú. A háromszögben az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak, tehát $DAE'\sphericalangle = DE'A\sphericalangle = \varphi$. Mivel AB párhuzamos DC-vel, $DE'A$ és $E'AB$ szögek váltószögek, tehát $DE'A\sphericalangle = E'AB\sphericalangle = \varphi$. Hasonlóan $ABE'\sphericalangle = E'BC\sphericalangle = \varepsilon$.



Tehát AE' a BAD, és BE' az ABC szög szögfelezője, vagyis az ABC és BAD szögek szögfelezői DC felezőpontjában, E'-ben metszik egymást.

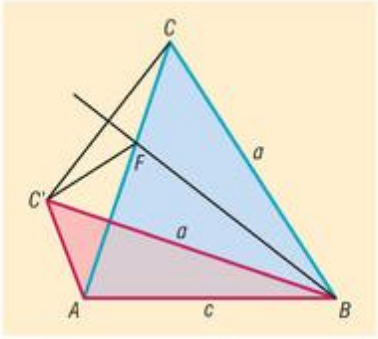
1399 Az ABC, illetve az ABC' háromszögekben $BC = BC'$. A két háromszög közül az elsőben legyen nagyobb a B-nél lévő szög, mint a másodikban. Bizonyítandó, hogy $AC' < AC$.

A CBC' szög felezője az ABC' háromszögön kívül halad, és messe az AC oldalt egy F pontban. Ekkor igaz, hogy $CF = C'F$.

Az $AC'F$ háromszögben felírva a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$AC' < AF + FC' = AF + FC = AC.$$

Ezzel bizonyítottuk a feladat állítását.

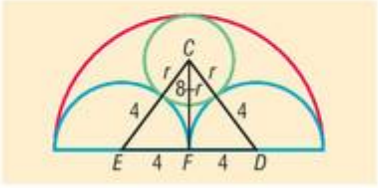


1400 Használjuk a következő ábra jelöléseit.

A kis kör sugara legyen r.

A kisebbik félkörök sugara 4 cm, tehát $FE = FD = 4$ cm.

A kis kör belülről érinti a nagy félkört, ezért középpontjaik távolsága: $CF = 8 - r$.



A kis kör kívülről érinti a kisebbik félköröket, ezért középpontjaik távolsága: $CE = CD = 4 + r$.

A CFE derékszögű háromszögben felírva Pitagorasz tételét:

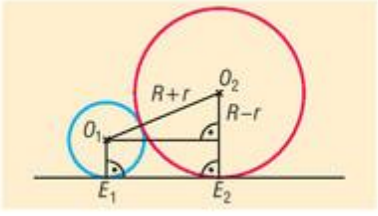
$$(4 + r)^2 = (8 - r)^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{8}{3}.$$

A legkisebb kör sugara $\frac{8}{3}$ cm.

1401 *a)* Az $r = 4$ cm sugarú kör középpontja O_1, az egyenessel vett érintési pontja E_1.

Az $R = 9$ cm sugarú kör középpontja O_2, az egyenessel vett érintési pontja E_2.

Az $O_1O_2E_2E_1$ négyszög derékszögű trapéz, alapjai r és R. A nem derékszögű szár hossza $r + R$.



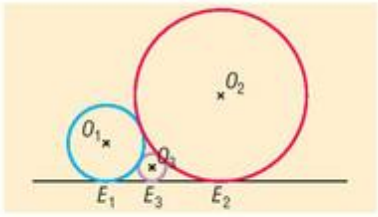
A derékszögű szárat az ábra alapján Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

$$E_1E_2 = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = \sqrt{4 \cdot R \cdot r} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} \quad \Rightarrow \quad E_1E_2 = 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 9} = 12 \text{ cm}.$$

Az érintési pontok távolsága 12 cm.

b) Ha két r és R sugarú kör érint egy egyenest és érintik egymást is, akkor az előző gondolatmenet alapján az érintési pontok távolsága:

$$E_1E_2 = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}.$$



Ha a keresett kör x sugara kisebb mind a két kör sugaránál, és az egyenessel vett érintési pontja E_3, akkor az előzőek alapján:

$$E_1E_3 = 2 \cdot \sqrt{4x} = 4 \cdot \sqrt{x}, \quad E_3E_2 = 2 \cdot \sqrt{9x} = 6 \cdot \sqrt{x}, \quad E_1E_2 = 12.$$

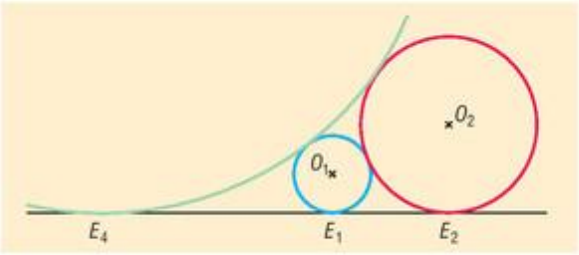
Így:

$$E_1E_3 + E_3E_2 = E_1E_2 \Rightarrow 4 \cdot \sqrt{x} + 6 \cdot \sqrt{x} = 12 \Rightarrow x = 1{,}44 \text{ cm}.$$

A kisebb keresett kör sugara 1,44 cm.

Ha a keresett kör y sugara nagyobb mind a két kör sugaránál, és az egyenessel vett érintési pontja E_4, akkor az előzőek alapján:

$$E_4E_1 = 2 \cdot \sqrt{4y} = 4 \cdot \sqrt{y},$$
$$E_4E_2 = 2 \cdot \sqrt{9y} = 6 \cdot \sqrt{y},$$
$$E_1E_2 = 12.$$



Így:

$$E_4E_2 - E_4E_1 = E_1E_2 \Rightarrow 6 \cdot \sqrt{y} - 4 \cdot \sqrt{y} = 12 \Rightarrow y = 36 \text{ cm}.$$

A nagyobb keresett kör sugara 36 cm.

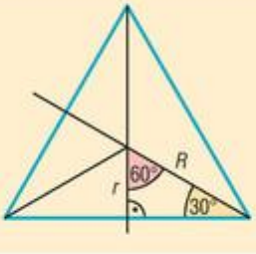
Háromszög beírt és köré írt köre – megoldások

1402 A beírt kör középpontját a belső szögfelezők metszéspontja, a körülírt kör középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontja adja.

1403 *a)* A szerkesztés elvégezhető, ha figyelembe vesszük, hogy ha a körülírt kör középpontját összekötjük a csúcsokkal, akkor ezek a sugarak 120°-os szöget zárnak be egymással.

b) A szerkesztés elvégezhető, ha figyelembe vesszük, hogy ha a beírt kör középpontját összekötjük az oldalakkal vett érintési pontokkal, akkor ezek a sugarak 120°-os szöget zárnak be egymással.

1404 A szabályos háromszög oldalfelező merőlegesei és belső szögfelezői egybeesnek, így a háromszög beírt és köré írt körének középpontja is ugyanaz a pont. Ez a pont a háromszög két csúcsával egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek szárszöge 120°. Ezt a háromszöget az alaphoz tartozó magassága két fél szabályos háromszögre bontja, amelyről tudjuk, hogy a rövidebb befogója fele az átfogónak.



Mivel az átfogó éppen a körülírt kör sugara, a befogó a beírt kör sugara, a feladat állítása igaz.

1405 Az 1404. feladatból következik, hogy az a oldalú szabályos háromszög magassága éppen a beírt és körülírt kör sugarának összege, és hosszuk aránya 1 : 2.

Tehát a beírt kör sugara: $\frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$, a körülírt kör sugara: $\frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$.



1406 Ha egy háromszög köré írt körének sugara R, középpontja O, egy oldala a, akkor az O pontnak az a oldaltól vett d távolságát Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk:

$$d = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Mivel egy adott háromszög esetén R állandó, a gyök alatti mennyiség akkor a legkisebb, ha a a legnagyobb.

Tehát bebizonyítottuk, hogy egy háromszög köré írt körének középpontja a legnagyobb oldalhoz van a legközelebb.

1407 A helyesen kitöltött táblázat:

Háromszög kerülete	Háromszög területe	Beírt kör sugara
60 cm	125 cm^2	$\frac{25}{6}$ cm
30 cm	30 cm^2	2 cm
k	$\frac{k \cdot r}{2}$	r

1408 A befogók legyenek $a = 30$ cm, $b = 40$ cm, és a Pitagorasz-tételből az átfogó $c = 50$ cm.

a) A beírt kör sugarára ismert a következő összefüggés:

$$r = \frac{a + b - c}{2} = 10 \text{ cm}.$$

b) Az átfogóhoz írt kör sugara:

$$r_c = \frac{a + b + c}{2} = 60 \text{ cm}.$$

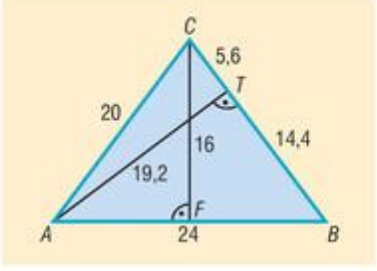
c) A befogókhoz írt körök sugara:

$$r_a = \frac{a - b + c}{2} = 20 \text{ cm} \quad \text{és} \quad r_b = \frac{b - a + c}{2} = 30 \text{ cm}.$$

1409 Az ABC egyenlő szárú háromszögben az ábrának megfelelően AB az alap, F az alap felezőpontja.

a) A CFB háromszögben a Pitagorasz-tételt használva:

$$AB = 2 \cdot FB = 2 \cdot \sqrt{20^2 - 16^2} = 24 \text{ cm}.$$



b) Legyen a szárhoz tartozó magasság m. Az ABC háromszög területére igaz:

$$\frac{24 \cdot 16}{2} = \frac{20 \cdot m}{2}.$$

Innen a szárhoz tartozó magasság 19,2 cm.

c) A BC szárhoz tartozó magasság talppontja legyen T. Az ABT háromszögben Pitagorasz tétele:

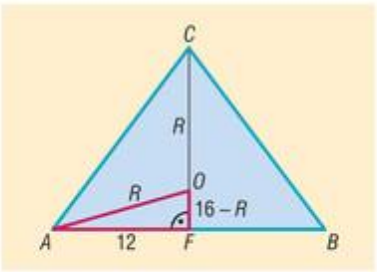
$$TB^2 + 19{,}2^2 = 24^2 \Rightarrow TB = 14{,}4 \Rightarrow TC = 20 - 14{,}4 = 5{,}6.$$

A szárhoz tartozó magasság a szárat 14,4 és 5,6 cm-re osztja.

d) Ha a beírt kör sugara r, a háromszög területét kétféleképpen felírhatjuk:

$$\frac{24 \cdot 16}{2} = r \cdot \left(\frac{20 + 20 + 24}{2}\right) \Rightarrow r = 6 \text{ cm}.$$

e) Legyen a háromszög köré írható körének sugara R, a kör középpontja O. Az O pont rajta van az alaphoz tartozó magasságon.



Az AFO derékszögű háromszögben $OF = 16 - R$, $AO = R$ és $AF = 12$.

Pitagorasz tétele az AFO háromszögre:

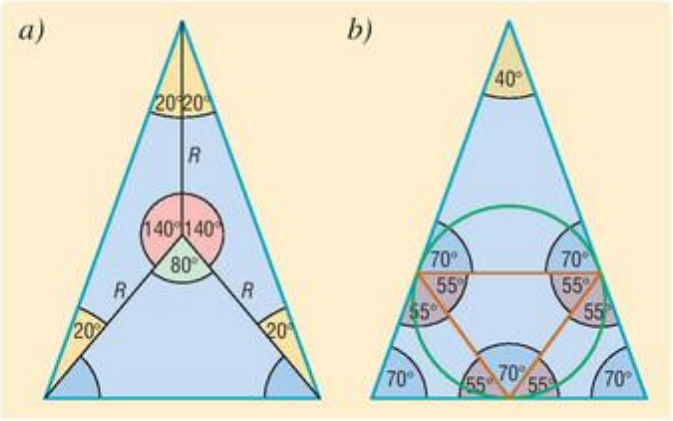
$$R^2 = 12^2 + (16 - R)^2.$$

Az egyenletet megoldva: $R = 12{,}5$ cm.

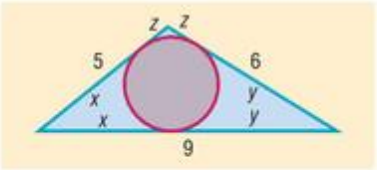
1410 A háromszög egyenlő szárú, mert szögeinek nagysága 70°, 70° és 40°.

a) A bal oldali ábráról leolvasható, hogy az egyenlő szárú háromszög oldalai 140°, 140° és 80°-os szögben látszanak a körülírható kör középpontjából.

b) Külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlőségéből az egyenlő szárú háromszögekben adódnak a jobb oldali ábrán látható szögek. Annak a háromszögnek a szögei, amelyet a beírt körnek az oldalakkal vett érintési pontjai határoznak meg: 70°, 55° és 55°.



1411 Az ábra alapján a háromszög csúcsaiból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlősége alapján:

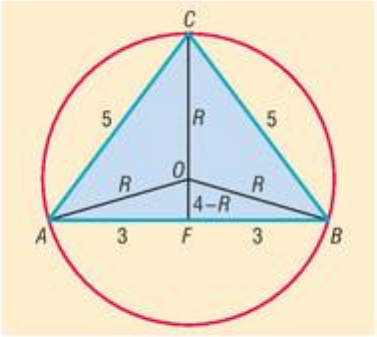


$$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ y + z &= 6 \\ x + z &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $x = 4$, $y = 5$, $z = 1$.

Tehát az érintési pontok az 5 cm-es oldalt 4 és 1 cm-es szakaszokra, a 6 cm-es oldalt 6 és 1 cm-es szakaszokra, a 9 cm-es oldalt 4 és 5 cm-es szakaszokra osztják.

1412 *a)* A háromszöget lefedő legkisebb sugarú kör éppen a háromszög köré írt kör.



Az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = AC = 5$ cm.

Ha az alap felezőpontja F, akkor $AF = 3$ cm. Az AFC háromszögben Pitagorasz tétele alapján $CF = 4$ cm.

Legyen az ABC háromszög köré írt körének sugara R, a kör középpontja O. Az O pont rajta van az ABC háromszög alapjához tartozó magasságán.

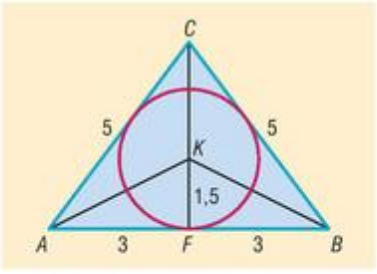
Az AFO derékszögű háromszögben $OF = 4 - R$, $AO = R$, valamint $AF = 3$. Pitagorasz tétele erre a háromszögre:

$$R^2 = 3^2 + (4 - R)^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{25}{8} = 3{,}125.$$

A háromszöget lefedő körlap sugara legalább 3,125 cm.



b) A beírt kör K középpontja az ABC háromszög alaphoz tartozó magasságán van.



Ha a beírt kör sugara r, a háromszög területét kétféleképpen írhatjuk fel:

$$\frac{4\cdot 6}{2} = r\cdot\left(\frac{5+5+6}{2}\right) \Rightarrow r = 1{,}5.$$

Így $CK = 4 - 1{,}5 = 2{,}5$ cm.

Az AKF derékszögű háromszögben $AF = 3$ cm, $KF = r = 1{,}5$ cm.

Az AKF derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$AK = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2} \approx 3{,}35 \text{ cm}.$$

Hasonlóan adódik: $BK = 3{,}35$ cm.

A beírt kör középpontja a csúcsoktól 2,5, 3,35 és 3,35 cm-re van.

1413 *a)* A doboz alapélének hosszát annak a szabályos háromszögnek az oldala adja, amelybe 13 cm sugarú kör írható. Az 1405. feladat alapján:

$$13 = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = \frac{78}{\sqrt{3}} \approx 45{,}03 \text{ cm}.$$

A háromszög alapú doboz alapéle 45,03 cm.

b) A doboz alapélének hosszát annak a négyzetnek az oldala adja, amelybe 13 cm sugarú kör írható. A négyzet alapú doboz alapéle $2\cdot 13 = 26$ cm.

c) Az első esetben az alaplap területe:

$$\frac{\left(\frac{78}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{78^2\cdot\sqrt{3}}{12} \approx 878{,}15 \text{ cm},$$

míg a kerülete:

$$3\cdot\frac{78}{\sqrt{3}} \approx 135{,}1 \text{ cm}.$$

A második esetben az alaplap területe:

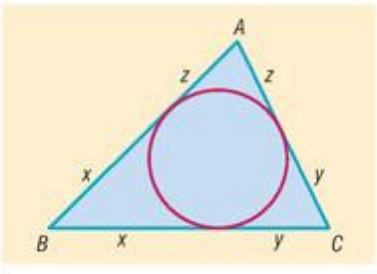
$$26^2 = 676 \text{ cm}^2,$$

a kerülete pedig:

$$4\cdot 26 = 104 \text{ cm}.$$

Mivel a dobozok magassága egyenlő, a második csomagolási módot érdemes választani.

1414 Az ábra segítségével a háromszög csúcsaiból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlősége alapján a következő egyenletrendszert kapjuk:



$$\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ y + z &= b \\ x + z &= c \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai (s a háromszög félkerülete):

$$x = \frac{a+c-b}{2} = s - b, \quad y = \frac{a+b-c}{2} = s - c, \quad z = \frac{b+c-a}{2} = s - a.$$

Tehát az érintési pontok az oldalakat a következő hosszúságú szakaszokra osztják:

a oldalt $s-b$ és $s-c$; b oldalt $s-a$ és $s-c$; c oldalt $s-a$ és $s-b$.

1415 Ha a háromszög befogói a, b és az átfogója c, akkor a Pitagorasz-tétel alapján $a^2 + b^2 = c^2$.

Ha a két befogó mindegyike páratlan, akkor az átfogó páros. Ha a két befogó mindegyike páros, akkor az átfogó páros. Ha a két befogó különböző paritású, akkor az átfogó páratlan. Tehát mindegyik esetben $a + b - c$ páros.

A derékszögű háromszög beírt körének sugarára ismert a következő összefüggés:

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

Mivel a tört számlálója páros, r egész.

1416 Az ábrán látható ABC egyenlő szárú háromszögben:

$$BAC\sphericalangle = BCA\sphericalangle = 50°.$$

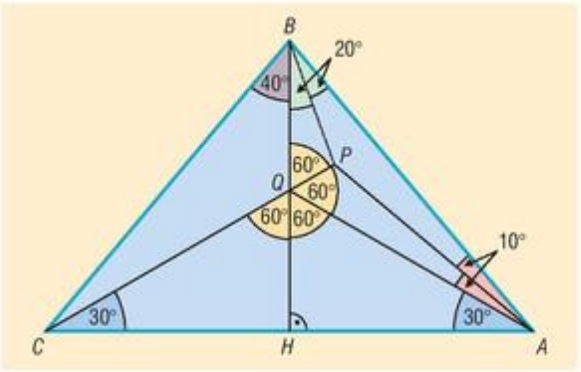
Rajzoljuk meg az alaphoz tartozó BH magasságot, ennek CP-vel való metszéspontja legyen Q.

Az ACQ egyenlő szárú háromszögben:

$$QAC\sphericalangle = QCA\sphericalangle = 30° \quad \text{és} \quad AQC\sphericalangle = 120°.$$

A QAB háromszögben:

$$BAQ\sphericalangle = 50° - 30° = 20°,$$
$$QBA\sphericalangle = 40° \quad \text{és} \quad BQA\sphericalangle = 120°.$$



Vizsgáljuk meg a QAB háromszögben PQ, illetve PA mekkora részekre osztja a Q-nál, illetve az A-nál lévő szögeket.

Mivel $PAC\sphericalangle = 40°$, $QAP\sphericalangle = 40° - 30° = 10°$, a PA egyenese felezi az A-nál lévő szöget. Az ACQ háromszög Q-nál lévő külső szöge $PQA\sphericalangle = 60°$, vagyis PQ egyenese felezi a Q-nál levő szöget.

Megvizsgálva QAB háromszögben, P pont a háromszög két belső szögfelezőjének metszéspontja, amelyen áthalad a harmadik szögfelező is. Tehát:

$$PBQ\sphericalangle = PBA\sphericalangle = \frac{40°}{2} = 20°.$$

A PCB háromszögben tehát ismert két szög:

$$PBC\sphericalangle = 20° + 40° = 60° \quad \text{és} \quad PCB\sphericalangle = 50° - 30° = 20°.$$

Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180°, a harmadik BPC szög 100°.

Thalész tétele – megoldások

1417 A háromszög köré írt körének sugara:

a) $4 \cdot \sqrt{10}$ cm;

b) $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

1418 A szerkesztés Thalész tétele segítségével történhet. Az érintőszakasz hossza 6 cm.

1419 Legyen P egy olyan pont, amelyből r hosszúságú érintő húzható az O középpontú körhöz.

A körön lévő egyik érintési pont, a kör középpontja és P olyan derékszögű háromszöget határoznak meg, amely befogóinak hossza r, ezért Pitagorasz tétele alapján P pont $r \cdot \sqrt{2}$ távolságra van a kör középpontjától. A P rajta van az O középpontú $r \cdot \sqrt{2}$ sugarú körön.

Ez utóbbi kör minden pontja rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy abból r hosszúságú érintő húzható az O középpontú r sugarú körhöz.

Az adott pontok halmaza tehát O középpontú $r \cdot \sqrt{2}$ sugarú kör.



1420 Egy egyenlő szárú háromszög AB alapjának felezőmerőlegese tartalmazza a háromszög C csúcsát.

Ismert, hogy egy tetszőleges háromszög bármely csúcsából kiinduló két oldal egyenese, a beírt kör egy-egy érintője.

Ez alapján a szerkesztés menete:

1. Vegyük fel az egyenlő szárú háromszög AB alapját, és szerkesszük meg a szakasz felezőmerőlegesét.
2. Szerkesszük meg azt a kört, amely az alapot az alap felezőpontjában érinti, és sugara a beírt kör sugarával egyenlő.
3. Thalész-kör segítségével az alap A pontján áthaladó, a beírt kört érintő másik egyenest szerkesszük meg.
4. Ez utóbbi érintő és az AB felezőmerőlegesének metszéspontja adja a háromszög C csúcsát.

1421 A deltoid két szemben levő szöge 90°.

1422 Az átfogó két végpontja mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-kör és az egyenes metszéspontja szolgáltatja a háromszög derékszögű csúcsát.

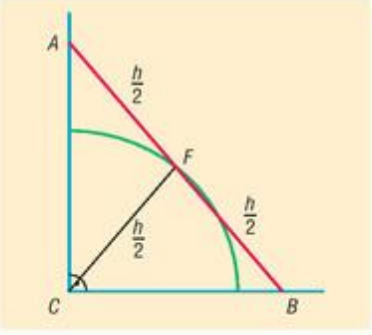
Ha az adott egyenesre nem illeszkedik az átfogó egyik végpontja sem, akkor:

- ha az adott egyenesnek az átfogó felezőpontjától vett távolsága kisebb, mint az átfogó fele, akkor két háromszöget kapunk megoldásként;
- ha az adott egyenesnek az átfogó felezőpontjától vett távolsága éppen az átfogó fele, akkor egy ilyen háromszöghöz jutunk;
- egyébként a feladatnak nincs megoldása.

Ha az adott egyenes csak az átfogó egyik végpontjára illeszkedik, és nem merőleges a két adott pont által meghatározott egyenesre, akkor egy háromszöget tudunk szerkeszteni, ha merőleges, akkor nincs megoldása a feladatnak.

Ha az adott egyenes az átfogó mindkét végpontját tartalmazza, szintén nincs megoldás.

1423 Legyen a derékszög csúcsa C, a szakasz végpontjai A és B, a szakasz felezőpontja F.

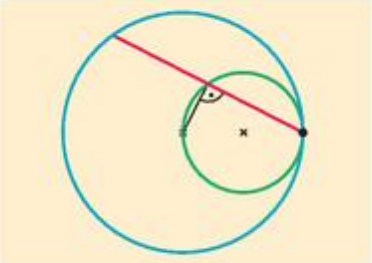


Thalész tételének megfordítása alapján F pont az ABC derékszögű háromszög köré írható körének középpontja. Az FC távolság a kör sugara, ami éppen az adott h hosszúságú szakasz hosszának fele. Tehát F pont rajta van a C középpontú $\frac{h}{2}$ sugarú körön.

A körnek minden olyan pontja, amely a derékszögű szögtartományba esik, előáll valamely h hosszúságú szakasz felezőpontjaként.

Az adott tulajdonságú pontok halmaza a derékszögű szögtartományba eső C középpontú $\frac{h}{2}$ sugarú negyed körív. (Az ív határoló pontjai is hozzá tartoznak a halmazhoz.)

1424 Tudjuk, hogy egy kör tetszőleges húrjának felezőmerőlegese áthalad a kör középpontján. Tehát a húr felezőpontja, a kör középpontja és a húr egyik végpontja derékszögű háromszöget határoznak meg.



A kör adott pontján áthaladó húrok felezőpontjai Thalész tételének megfordítása alapján rajta vannak az adott pont és a kör középpontja fölé mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-körön. A Thalész-kör minden, az adott ponttól különböző pontja előáll valamely húr felezőpontjaként.



1425 Thalész tételének megfordítása alapján a talppontok rajta vannak a PC szakasz mint átmérő fölé írt Thalész-körön.

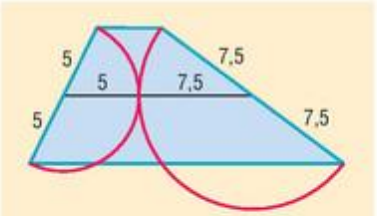
A talppontok, valamint P és C pontok egy körön helyezkednek el.

1426 Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű. A derékszögű háromszög köré írt körének sugara az átfogó hosszának a fele, tehát 6,5 cm.

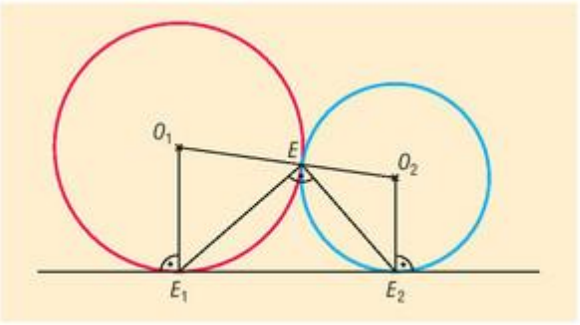
1427 Adott átfogójú derékszögű háromszög derékszögű csúcsa rajta van az átfogó mint átmérő fölé írt Thalész-körön.

Egy háromszögnek a területét számolhatjuk az $\frac{a \cdot m_a}{2}$ képlettel. Mivel az átfogó adott, annak a háromszögnek a legnagyobb a területe, amelyiknek az átfogóhoz tartozó magassága a legnagyobb, vagyis amelyiknek a derékszögű csúcsa legtávolabb van az átfogótól. Ez akkor teljesül, amikor a derékszögű csúcs rajta van az átfogó felezőmerőlegesén, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

1428 A két Thalész-kör sugara egy-egy szár hosszának a fele: 5 és 7,5 cm. A két Thalész-kör kívülről érinti egymást, tehát középpontjaikat összekötő szakasz hossza, ami a szárak felezőpontjait összekötő szakasz hossza is, éppen a két kör sugarának összege. A szárak felezőpontjait összekötő szakasz hossza tehát 12,5 cm.



1429 Az egyik kör középpontja legyen O_1, a másik kör középpontja O_2, és az egyenessel vett érintési pontjaik rendre E_1 és E_2. A két kör az E pontban érintse egymást.



Az $O_1E_1E_2O_2$ négyszög derékszögű trapéz, amelynek az O_1O_2 szárán E egy olyan pont, amelyre igaz, hogy

$$O_1E = O_1E_1, \quad \text{illetve} \quad O_2E = O_2E_2.$$

Az O_1EE_1 egyenlő szárú háromszögben az

$$O_1EE_1\sphericalangle = \frac{180° - E_1O_1E\sphericalangle}{2}.$$

Az O_2EE_2 egyenlő szárú háromszögben az

$$O_2EE_2\sphericalangle = \frac{180° - E_2O_2E\sphericalangle}{2}.$$

Mivel egy trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180°, ez utóbbi két szög összege:

$$\frac{180° - E_2O_2E\sphericalangle}{2} + \frac{180° - E_1O_1E\sphericalangle}{2} = 180° - \frac{E_2O_2E\sphericalangle + E_1O_1E\sphericalangle}{2} = 90°.$$

Ez azt jelenti, hogy az E_2EE_1 háromszög derékszögű háromszög. Thalész tételének megfordítása alapján az E_2E_1 átfogó felezőpontja a derékszögű csúcstól fele olyan távolságra van, mint E_2E_1 hossza.

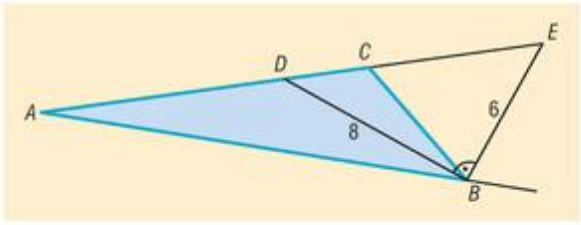
Az érintési pontok által meghatározott E_1E_2 szakasz felezőpontjának az E ponttól vett távolsága tehát 10 cm.



1430 *a)* $DBE\sphericalangle = 90°$, mivel egy szögnek és a mellékszögének felezői egymásra merőlegesek.

A BDE háromszögben Pitagorasz tétele alapján a DE átfogó 10 cm.

Thalész tételének megfordítása alapján a BDE háromszög köré írt körének sugara az átfogó fele: 5 cm.



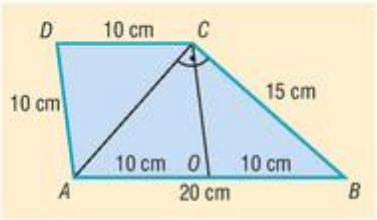
b) A háromszög területét kétféleképpen számolva:

$$\frac{6\cdot 8}{2}=\frac{(6+8+10)\cdot r}{2}.$$

Ebből a beírt kör sugara 2 cm.

1431 Az $ABCD$ trapéz AB alapjának felezőpontja legyen O. Az $AOCD$ négyszög 10 cm oldalhosszúságú rombusz. Az O pontnak A-tól, B-től és C-től vett távolsága egyaránt 10 cm. Thalész tétele értelmében az ABC háromszög derékszögű, és C csúcsnál van a derékszög. Pitagorasz tételét felírva:

$$AC=\sqrt{20^2-15^2}=\sqrt{175}\approx 13{,}23\text{ cm}.$$

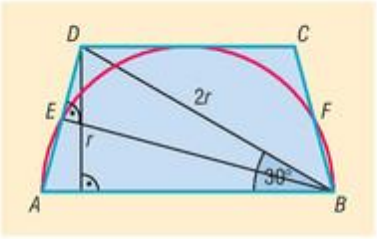


1432 A trapéz BC és AD szárainak felezőpontjai legyenek rendre F és E, valamint az AB alap fölé mint átmérő fölé írt kör sugara r.

Thalész tétele alapján AEB szög 90°, és mivel E felezéspont, az ABD háromszög egyenlő szárú: $AB = BD = 2r$.

A trapéz DC alapját érinti a félkör, tehát a trapéz magassága r.

A trapéz r magassága a $2r$ hosszú BD átlóval egy fél szabályos háromszöget határoz meg. Ennek a háromszögnek a kisebbik hegyesszöge $DBA\sphericalangle = 30°$.



Az ABD egyenlő szárú háromszögből:

$$BAD\sphericalangle=\frac{180°-30°}{2}=75°.$$

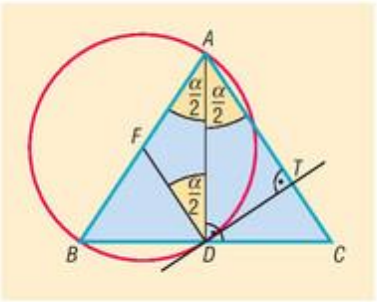
Hasonlóan az $ABC\sphericalangle = 75°$.

A trapéz szögei: 75°, 105°, 105°, 75°.

1433 Az ABC háromszög A csúcsánál lévő szöge α, D-ből AC-re állított merőleges talppontja legyen T.

A háromszög egyenlő szárú, tehát $DAB\sphericalangle = DAC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

Az ABD háromszög derékszögű, így körülírható köre az AB mint átmérő fölé írt Thalész kör. A kör középpontja az AB átmérő F felezőpontja, és az FA, illetve az FD szakaszok a kör sugarával egyenlő hosszúságúak. Ez alapján FAD háromszög egyenlő szárú, tehát $FAD\sphericalangle = FDA\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

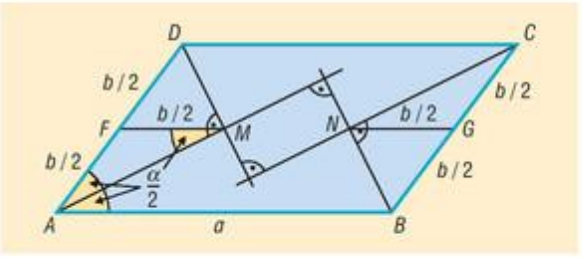


Tehát a DAC és az FDA szögek egyenlők, vagyis FD párhuzamos AC-vel.

Mivel DT merőleges AC-re, merőleges a vele párhuzamos FD-re is.

Az ABD háromszög körülírható körének sugara FD, és láttuk, hogy merőleges DT egyenesére, tehát a DT egyenes érinti az ABD háromszög körülírható körét.

1434 Mivel a paralelogramma oldalai nem egyenlő hosszúak, két-két szögfelező metszéspontja különböző, tehát a belső szögfelezők metszéspontjai négyszöget határoznak meg.



Két szomszédos belső szög szögfelezői olyan szögeket feleznek, amelyeknek összege 180°, tehát ezek derékszögben metszik egymást, vagyis a négy metszéspont olyan négyszöget határoz meg, amelynek szögei 90°-osak, tehát téglalap.

Legyen $AD = b$ és az AD oldal felezéspontja F, valamint az A és a D csúcsnál lévő belső szögfelezők metszéspontja M.

Az előbbiek alapján az AMD háromszög derékszögű. Thalész tételének megfordításából következik, hogy $FM = FA = \frac{AD}{2} = \frac{b}{2}$. Az AFM háromszög egyenlő szárú, tehát az $FAM\sphericalangle = AMF\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

Az AMF és az MAB szögek egyenlők, vagyis FM párhuzamos AB-vel.

Ugyanígy belátható a B, illetve a C csúcsnál lévő belső szögfelezőknek N metszéspontjára, hogy az N pont a BD oldal G felezéspontjától $\frac{b}{2}$ távolságra van, és hogy GN párhuzamos AB-vel.

Ha a paralelogramma hosszabbik oldala a, akkor $FG = a$ és FG párhuzamos a paralelogramma a hosszúságú oldalával.

Tehát az M és az N pontok FG szakaszra esnek, valamint

$$MN = FG - FM - GN = a - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = a - b.$$

Tehát a téglalap átlója $a - b$ hosszúságú.

Érintőnégyszög, érintősokszög – megoldások

1435 A rombusz érintőnégyszög, beírható körének középpontja az átlók metszéspontja. Ebből közvetlenül adódik az állítás.

1436 A rombusz oldala $24 \cdot \sqrt{2}$ cm.

1437 A rombusz szemben lévő oldalai párhuzamosak, tehát a szemben lévő érintési pontokat összekötő szakasz felezőpontja a beírt kör középpontja.

A rombusz magassága mindkét párhuzamos oldalpár esetén ugyanolyan hosszú, tehát a szemben lévő érintési pontokat összekötő szakaszok egyenlő hosszúak.

Tehát a beírt kör érintési pontjai által meghatározott négyszög átlói egyenlők és felezik egymást, vagyis téglalap.

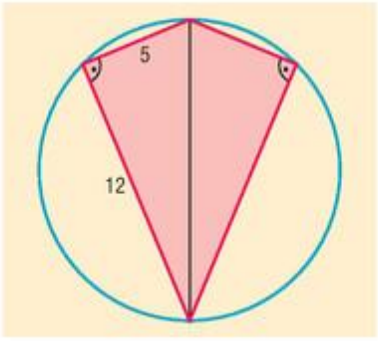
A beírt kör érintési pontjai által meghatározott négyszög átlói ugyanakkora szöget zárnak be, mint a rombusz hegyesszöge, tehát 60°-ot.

1438 Kössük össze az a, b, c, d oldalú érintőnégyszög csúcsait a beírt kör középpontjával. Az így kapott háromszögek mindegyikének magassága a beírt kör sugara. A négy háromszög területének összegeként írjuk fel a négyszög területét:

$$t_{\text{négyszög}} = \frac{a}{2} \cdot r + \frac{b}{2} \cdot r + \frac{c}{2} \cdot r + \frac{d}{2} \cdot r = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r = \frac{k}{2} \cdot r.$$



1439 Mivel a deltoid köré kör írható, ennek a körnek a középpontja rajta van a szimmetriaátlón. Thalész tételének alapján a deltoid két szomszédos, különböző hosszúságú oldala merőleges egymásra.



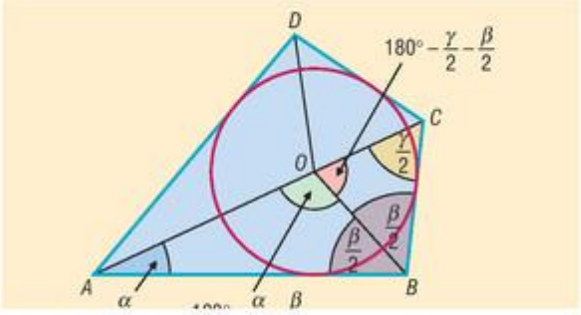
Legyen a beírható kör sugara r. A deltoid területét kétféleképpen számolva:

$$\frac{12\cdot 5}{2}\cdot 2 = r\cdot\frac{2\cdot 12+2\cdot 5}{2} \quad\Rightarrow\quad r=\frac{60}{17}\approx 3{,}53\text{ cm}.$$

A beírható kör sugara 3,53 cm.

1440 *a)* Vegyük fel a két szomszédos oldal által közbezárt szöget, és szerkesszük meg a szög szárait érintő, a beírt kör sugarával egyenlő sugarú kört.

A szög száraira mérjük fel a két adott oldal hosszúságát, majd a végpontokból szerkesszünk a körhöz érintőket. Az adott szög száraitól különböző érintők metszéspontja adja a négyszög negyedik csúcsát.



b) Az $ABCD$ érintőnégyszög szögfelezőinek metszéspontja O pont. Az A, B és C csúcsoknál lévő szögek rendre α, β és γ. Az AOB és BOC szögek nagysága:

$$AOB\sphericalangle = 180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}, \quad\text{illetve}\quad BOC\sphericalangle = 180°-\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}.$$

Ez alapján, ha adott α, β és γ, valamint a beírt kör sugara, a szerkesztést így hajthatjuk végre:

1. Vegyük fel a B csúcsú β szöget, és szerkesszük meg a szög szárait érintő, a beírt kör sugarával egyenlő sugarú kört.
2. A kör O középpontjában mérjük fel OB félegyenesre $180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$ szöget, így az A csúcsot kapjuk.
3. A kör O középpontjában mérjük fel OB félegyenesre a másik oldalra $180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$ szöget, így a C csúcsot kapjuk.
4. A negyedik csúcsot az A és a C pontokból a körhöz húzott érintők szerkesztésével kapjuk.

1441 A harmadik oldal lehet 6 cm, 18 cm vagy 22 cm.

1442 Mivel kör írható a hatszögbe:

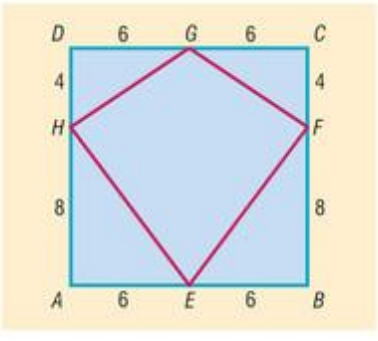
$$AB+CD+EF=BC+ED+FA.$$

Behelyettesítve:

$$6+8+10=8+7+FA \quad\Rightarrow\quad FA=9\text{ cm}.$$

1443 *a)* Mivel $HG=FG$ és $HE=FE$, a négyszög deltoid.

b) A deltoid területét kétféleképpen számolhatjuk. Egyrészt a négyzet területének a fele: $T=72\text{ cm}^2$.



Másrészt, mivel a deltoid érintőnégyszög, a beírt kör r sugarával számolva, a terület:

$$T=r\cdot\frac{k}{2}=r\cdot\frac{2\cdot(HG+HE)}{2}=$$

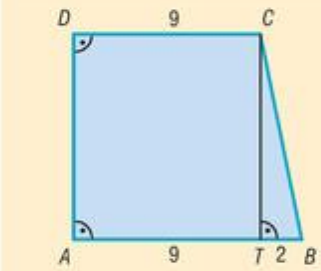
$$=r\cdot\left(\sqrt{6^2+4^2}+\sqrt{6^2+8^2}\right)=r\cdot\left(\sqrt{52}+10\right).$$

A két érték megegyezik, ezért:

$$r\cdot\left(\sqrt{52}+10\right)=72 \;\Rightarrow\; r=\frac{72}{\sqrt{52}+10}\approx 4{,}18\text{ cm}.$$

A négyszög beírt körének sugara 4,18 cm.

1444 Használjuk az ábra jelöléseit. Az $ABCD$ derékszögű trapéz derékszögű szára AD, alapjai pedig $AB = 11$ cm és $CD = 9$ cm. Az érintőnégyszögek tétele alapján:



$$AD + BC = 9 + 11 = 20\text{ cm} \;\Rightarrow\; BC = 20 - AD.$$

A CTB háromszög egyik befogója CT, a másik befogója pedig $TB = 11 - 9 = 2$ cm. Mivel $AD = CT$, a BC átfogó $20 - CT$. A háromszögben felírva Pitagorasz tételét:

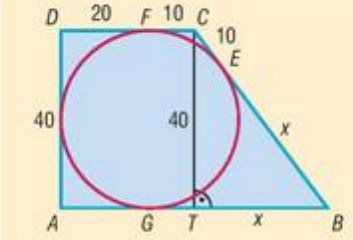
$$CT^2 + TB^2 = CB^2.$$

Behelyettesítve és rendezve az egyenletet:

$$CT^2 + 2^2 = (20 - CT)^2 \;\Rightarrow\; CT = \frac{396}{40} = 9{,}9\text{ cm}.$$

A trapéz magassága 9,9 cm.

1445 A derékszögű szár 40 cm, a másik szár ennél nagyobb, így csak a rövidebbik alap lehet 30 cm. Az ábra jelöléseit használva, a C pontból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségéből:



$$CE = CF = 30 - 20 = 10\text{ cm}.$$

Legyen a B pontból húzott érintőszakasz hossza x. $BE = BG = x$.

A TCB háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$(10 + x)^2 = 40^2 + (x - 10)^2.$$

Az egyenletet rendezve $x = 40$.

A trapéz alapjainak hossza tehát 30 cm és 60 cm, magassága 40 cm.

A trapéz területe:

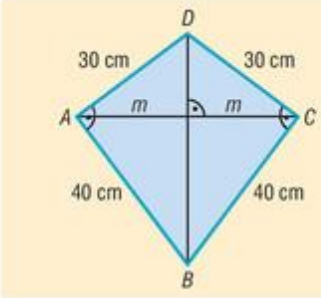
$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(30 + 60)\cdot 40}{2} = 1800\text{ cm}^2.$$

A beírt kör sugara $\frac{40}{2}$ cm, területe:

$$T_{\text{kör}} = 20^2\cdot\pi = 400\pi\text{ cm}^2.$$

Tehát a trapéz területének $\frac{1800 - 400\pi}{1800}\cdot 100 = 30{,}19\%$ -a esik a körön kívül.

1446 Mivel a négyszögnek két-két oldala egyenlő, de két szemben lévő szöge nem egyenlő, a négyszög deltoid.



Egy négyszög belső szögeinek összege 360°. A deltoid két szemben levő, nem egyenlő szögének az összege 180°, tehát a két egyenlő nagyságú szöge 90°.

A deltoid két olyan derékszögű háromszögből áll, amelynek befogói 30 és 40 cm hosszúak.

Tekintsük az ábra jelöléseit.



a) A hurkapálcák hosszának meghatározásához szükségünk van a BCD derékszögű háromszög átfogójának, illetve az átfogóhoz tartozó m magasságának a hosszára.

A Pitagorasz-tételből az átfogó hossza 50 cm, ami a deltoid egyik átlójának a hossza.

A derékszögű háromszög területét kétféleképpen számíthatjuk:

$$\frac{30 \cdot 40}{2} = \frac{50 \cdot m}{2} \quad \Rightarrow \quad m = 24.$$

Mivel a deltoid átlói merőlegesek egymásra, a másik átló hossza $2m = 48$ cm.

A merevítéshez egy 50 cm és egy 48 cm hosszú hurkapálcára van szükségünk.

b) A deltoid területe a két derékszögű háromszög területének az összegeként számítható:

$$2 \cdot \frac{30 \cdot 40}{2} = 1200 \text{ cm}^2.$$

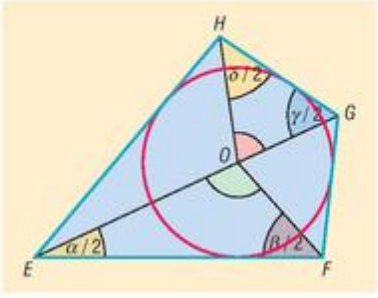
A sárkány elkészítéséhez felhasznált papírmennyiség:

$$\frac{1200}{80} \cdot 100 = 1500 \text{ cm}^2 = 15 \text{ dm}^2.$$

c) A deltoid belső szögfelezőinek metszéspontja lesz a kör középpontja, sugara ennek a pontnak valamely oldaltól vett távolsága.

d) Az AOB és a COD szögek nagyságának összege 180°.

e) Az $EFGH$ érintőnégyszög E, F, G és H csúcsnál levő szögei legyenek rendre α, β, γ és δ. Mivel a beírt kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja, ezért:



$$EOF\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{és} \quad GOH\sphericalangle = 180° - \frac{\gamma + \delta}{2}.$$

Az $EFGH$ négyszög belső szögeinek összege 360°, tehát:

$$EOF\sphericalangle + GOH\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} + 180° - \frac{\gamma + \delta}{2} = 360° - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 180°.$$

Az $ABCD$ érintőnégyszögben az AOB és a COD szögek nagyságának összege 180°.

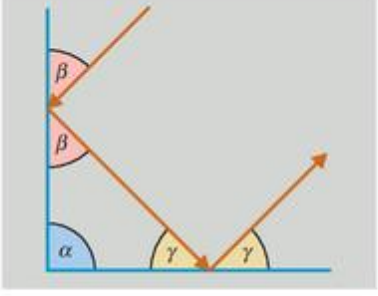
Vegyes feladatok – megoldások

1447 Két 60°-os és két 120°-os szöge van a trapéznak.

1448 A harmadik csúcshoz tartozó magasság és szögfelező 11°-os szöget zár be egymással.

1449 A háromszög harmadik csúcsánál lévő belső szöge 84°.

1450 Az ábra jelöléseit használva, tegyük fel, hogy a beeső fénysugár β szöget zár be az első tükörrel, és a visszaverődő fénysugár γ szöget zár be a második tükörrel.

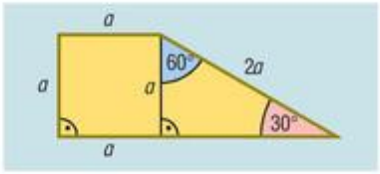


Ha ez a két fénysugár párhuzamos, akkor $180° - 2\beta$ és $180° - 2\gamma$ 180°-ra egészítik ki egymást:

$$180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad \beta + \gamma = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90°.$$

A két síktükör merőleges egymásra.

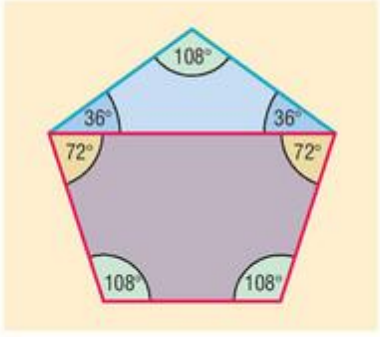
1451 A derékszögű trapéz felbontható egy a oldalú négyzetre és egy $2a$ oldalú fél szabályos háromszögre.



a) A trapéz negyedik oldala $a + a \cdot \sqrt{3}$.

b) A trapéz szögei: 90°, 90°, 150° és 30°.

1452 A négyszög két szöge egyenlő a szabályos ötszög egy belső szögével, azaz 108°-osak. A fennmaradó két szög nagyságát megkapjuk úgy, hogy 108°-ból kivonjuk annak az egyenlő szárú háromszögnek az alapon fekvő szögét, amelynek szárszöge 108°. (➡)



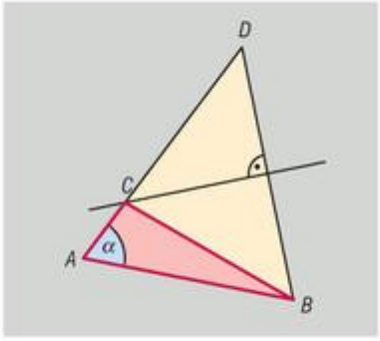
A másik két szög nagysága:

$$108° - 36° = 72°.$$

1453 A háromszög harmadik csúcsa egyenlő távol van az alap két végpontjától, így az alap felezőmerőlegesének és a szárnak a metszéspontja szolgáltatja a háromszög harmadik csúcsát.

A szerkesztés akkor végezhető el, ha a szár egyenese áthalad a megadott pontok valamelyikén, illetve nem merőleges az alap egyenesére.

1454 Induljunk ki a kész ábrából. Mérjük fel az ABC háromszög BC oldalának hosszát CA oldal egyenesére C-n túl. Így D ponthoz jutunk. Mivel BCD háromszög egyenlő szárú, a C csúcs rajta van DB szakasz felezőmerőlegesén.



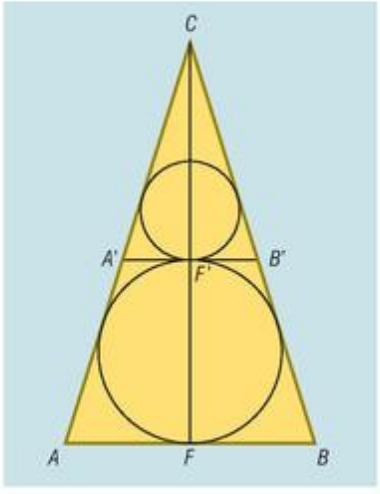
Ez alapján a szerkesztés az ABD háromszög szerkesztésével kezdődik. (Ez végrehajtható, mivel adott két oldalának hossza, valamint a közbezárt szög nagysága.) A háromszög C csúcsát a BD szakasz felezőmerőlegesének és az AD szakasznak a közös pontja szolgáltatja.

1455 *a)* Két szemközti csúcsának távolsága a köré írt kör sugarának kétszerese, azaz 36 cm.

b) Két szemközti oldalának távolsága egy 18 cm oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese:

$$2 \cdot \frac{18 \cdot \sqrt{3}}{2} = 18 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

1456 Induljunk ki a kész ábrából. Az F és F' pontok az ABC egyenlő szárú háromszög beírt körének és a háromszög alaphoz tartozó magasságának metszéspontjai.



A háromszög beírt körét a szerkesztendő kör az F' pontban érinti.

Ez alapján a szerkesztés lépései a következők:

1. Szerkesszük meg az adott ABC háromszög beírt körét.
2. A beírt körhöz F' pontban szerkesszünk érintőt, ennek a szárakkal való metszéspontjai legyenek A' és B'.
3. Az $A'B'C$ háromszög beírt körét szerkesszük meg.

A szerkesztés mindig végrehajtható.

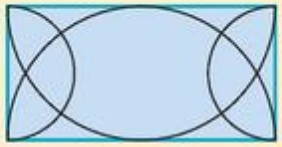


1457 A kör középpontja a szakasztól 5 cm távolságra van.

1458 A C végpontú átmérők másik végpontjait összekötő szakasz áthalad a két kör másik metszéspontján, tehát A és B nem különböző pontok.

1459 A téglalap oldalai fölé rajzolt Thalész-köröknek a téglalap csúcsaitól különböző metszéspontjait kell összeszámlálnunk.

Hat olyan pont van a téglalap belsejében, amelyből valamelyik két oldal derékszög alatt látszik.



1460 A paralelogrammák közül érintőnégyszög csak a rombusz lehet. A rombusz magassága a beírt körének az átmérője, 20 cm.

Mivel a rombusz egyik szöge 45°, az oldala $20 \cdot \sqrt{2}$ cm hosszú.

A rombusz kerülete $80 \cdot \sqrt{2} \approx 113{,}14$ cm.

A rombusz területe $20 \cdot 20 \cdot \sqrt{2} = 400 \cdot \sqrt{2} \approx 565{,}69$ cm^2.

1461 Legyen a két hiányzó oldal hossza a és $a + 4$. Az érintőnégyszögek tétel szerint:

$$10 + 12 = a + a + 4 \quad \Rightarrow \quad a = 9.$$

A négyszög két hiányzó oldalának hossza 9 és 13 cm hosszú.

1462 Ha n oldalú a sokszög, akkor

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 20 \quad \Rightarrow \quad n \cdot (n-3) = 40.$$

Figyelembe véve, hogy n pozitív egész és nagyobb, mint $n - 3$, 40 lehetséges szorzatalakjai:

$$40 \cdot 1 = 20 \cdot 2 = 10 \cdot 4 = 8 \cdot 5.$$

Mivel a két tényező különbségének 3-nak kell lennie, a $8 \cdot 5$ a megfelelő szorzatalak.

A szabályos sokszög 8 oldalú és egy belső szöge 135°.

1463 Ha a kép szélessége $16x$, magassága $9x$, akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$(16x)^2 + (9x)^2 = 81^2 \quad \Rightarrow \quad x \approx 4{,}41.$$

A televízió méretei megközelítőleg:

szélesség: $16 \cdot 4{,}41 + 2 \cdot 10 = 90{,}56$ cm, magasság: $9 \cdot 4{,}41 + 10 + 18 = 67{,}69$ cm.

Nem fér be a készülék a szekrényünkbe, mivel a magassága 65 cm-nél nagyobb.

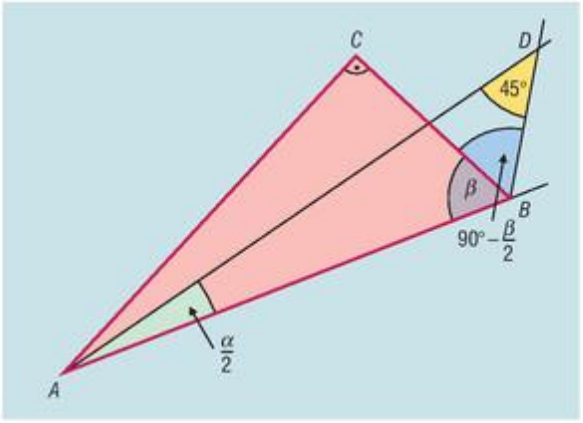
1464 Messe az A csúcsból kiinduló belső szögfelező a B csúcsból kiinduló külső szögfelezőt egy D pontban.

Az ABD háromszög belső szögeinek összege:

$$\frac{\alpha}{2} + \left(\beta + 90° - \frac{\beta}{2}\right) + 45° = 180°,$$

amiből $\alpha + \beta = 90°$.

Tehát az ABC háromszög C csúcsánál lévő belső szöge 90°. Thalész tételének megfordítása alapján a háromszög köré írt körének sugara az AB átfogó hosszának a fele, vagyis 10 cm.



1465 A váza távolságát a terítő széleitől a rombusz beírható körének r sugara adja meg, amelyet a következő összefüggés segítségével határozhatunk meg:

$$t_{\text{rombusz}} = r \cdot \frac{k_{\text{rombusz}}}{2}.$$

A rombusz oldalának hosszát Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

$$a = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ cm} \Rightarrow k_{\text{rombusz}} = 200 \text{ cm}.$$

A rombusz területét az átlók szorzatának fele adja meg:

$$t_{\text{rombusz}} = \frac{60 \cdot 80}{2} = 2400 \text{ cm}^2,$$

$$2400 = r \cdot \frac{200}{2} \Rightarrow r = 24.$$

A váza a terítő széleitől 24 cm távolságra van.

1466 Számoljuk össze a háromszögeket aszerint, hogy oldalai a szabályos nyolcszög oldalai közül hány oldalt fognak közre.

Ezek szerint a közrefogott oldalak száma lehet:

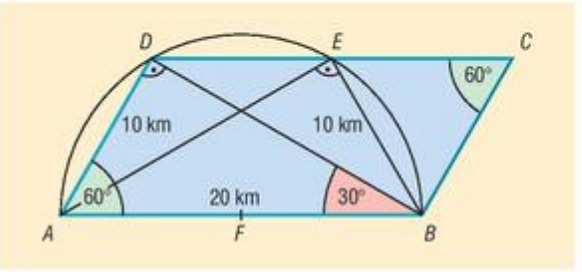
1, 1 és 6; 1, 2 és 5; 1, 3 és 4; 2, 2 és 4; 2, 3 és 3.

Tehát 5 különböző háromszöget alkothatnak a szabályos nyolcszög csúcsai.

Egy háromszög akkor derékszögű, ha egyik oldala a köré írt körének az átmérője. Mivel a szabályos nyolcszög köré írható kör, azok a háromszögek lesznek derékszögűek, amelyeknek egyik oldala a nyolcszög négy oldalát fogja közre.

E szerint két derékszögű háromszög van.

1467 Legyen az $ABCD$ paralelogramma két hosszabbik oldala AB és CD, valamint BAC szög 60°.



Keressük a paralelogramma kerületén azokat a pontokat, amelyekből az AB oldal 90°-os szög alatt látszik.

Az ABD háromszögben az A csúcsánál levő szöge 60° és $AB = 2 \cdot AD \Rightarrow$ fél szabályos háromszög $\Rightarrow$ D-nél derékszög van $\Rightarrow$ D csúcs rajta van AB Thalész körén.

Legyen a DC oldal felezéspontja E.

A BCE háromszög szabályos háromszög ($BC = CE$ és a BCE szög 60°).

Az AEB háromszög is egy fél szabályos háromszög, mivel a B csúcsánál levő szöge $120° - 60° = 60°$ és $AB = 2 \cdot EB \Rightarrow E$ csúcs is rajta van AB Thalész körén.

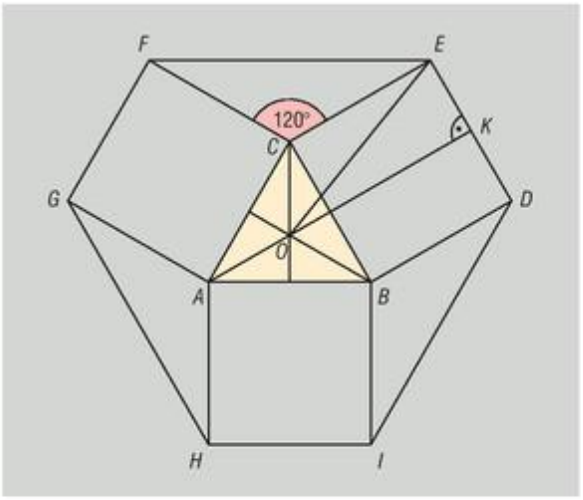
Mivel egy egyenesnek és egy körnek legfeljebb két metszéspontja lehet, a paralelogramma kerületén csak az E és D pontokból látszik az AB oldal 90°-os szögben.

Hasonlóan adódik, hogy DC oldal az AB oldal B végpontjából és F felezéspontjából látszik derékszög alatt.

A kincs a paralelogramma kerületén négy helyen lehet: a két tompaszögű csúcsban, vagy a hosszabbik oldalak felezéspontjaiban.

1468 Legyen az ABC szabályos háromszög beírható körének középpontja O. Ismert, hogy a szabályos háromszög beírt köre sugarának hossza:

$$\frac{a \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{6} = 4 \cdot \sqrt{3}.$$



Az ábra jelöléseit használva ED oldal K felezőpontjának O-tól vett távolsága $24 + 4 \cdot \sqrt{3}$.

A KOE derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$OE^2 = \left(24 + 4 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 12^2 = 768 + 192 \cdot \sqrt{3},$$

amiből

$$OE = \sqrt{768 + 192 \cdot \sqrt{3}} \approx 33{,}17 \text{ cm}.$$

Hasonlóan számítható:

$$OD = OF = OG = OH = OI \approx 33{,}17 \text{ cm}.$$

a) Mivel a hatszög csúcsainak O ponttól vett távolsága ugyanakkora, ezért a hatszög köré írható kör.

b) A hatszög köré írható kör sugara megközelítőleg 33,17 cm.

c) A hatszög oldalai közül $DE = FG = HI = 24$ cm hosszú.

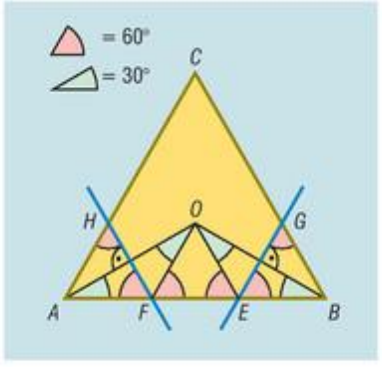
A hatszög FE oldala egy olyan egyenlő szárú háromszögnek az alapja, amelynek a szárszöge 120°, és a szárai 24 cm hosszúak. Tehát az FE oldal egy 24 cm oldalú szabályos háromszög magasságának a kétszerese, vagyis

$$\frac{24 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 24 \cdot \sqrt{3} \approx 41{,}57 \text{ cm}.$$

A hatszög EF, GH és ID oldalainak hossza:

$$24 \cdot \sqrt{3} \approx 41{,}57 \text{ cm}.$$

1469 Az OA, illetve OB szakaszok felezőmerőlegesei az AB oldalt F és E, a BC oldalt G, az AC oldalt H pontban metszik. Az ábrán látható szabályos, illetve egyenlő szárú háromszögeket figyelembe véve AF, FO, FE, OE, EB, AH és BG szakaszok hossza egyaránt 6 cm.



a) Az F és E pontok három 6 cm-es részre, a H és G pontok egy 6 és egy 12 cm-es részre osztják a háromszög oldalait.

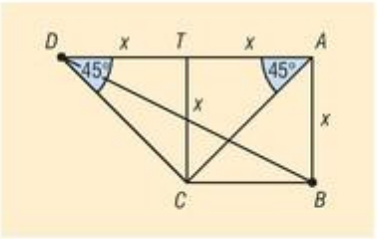
b) Az AFH és BGE háromszögek területe egyenlő:

$$\frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9 \cdot \sqrt{3} \approx 15{,}59 \text{ cm}^2.$$

Az $EGCHF$ ötszög területe:

$$\frac{18^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 2 \cdot 9 \cdot \sqrt{3} = 81 \cdot \sqrt{3} - 18 \cdot \sqrt{3} = 63 \cdot \sqrt{3} \approx 109{,}12 \text{ cm}^2.$$

1470 A hajó induljon az A pontból, a világítótornyok helyzetét jelezze B és D pont, a hajó két óra múlva legyen a C pontban. A feladat szövege szerint $DB = 50$ km.



Az ACD háromszögben két 45°-os szög van, és $CT = DT = TA = x$.

DBA háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$x^2 + 4x^2 = 50^2 \quad \Rightarrow \quad x = 10 \cdot \sqrt{5} \approx 22{,}36 \text{ km}.$$

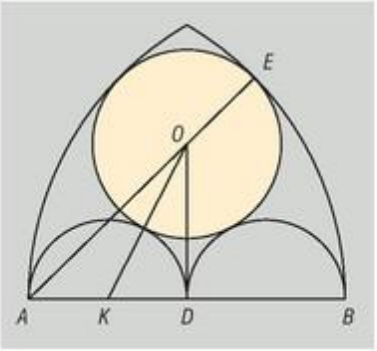
A CTA háromszögből:

$$CA = 10 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{10} \approx 31{,}62 \text{ km}.$$

A hajó átlagsebessége:

$$\frac{10 \cdot \sqrt{10}}{2} = 5 \cdot \sqrt{10} \approx 15{,}81 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

1471 Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen a keresett kör sugarának hossza r, a középpontja O.



Ez a kör belülről érinti az A középpontú 80 cm sugarú kört, ezért

$$AO = 80 - r.$$

A kérdéses kör kívülről érinti a K középpontú 20 cm sugarú félkört, ezért

$$KO = 20 + r.$$

Az AOD derékszögű háromszögben:

$$OD^2 = AO^2 - AD^2 = (80 - r)^2 - 40^2 = 4800 - 160r + r^2.$$

A KOD derékszögű háromszögben:

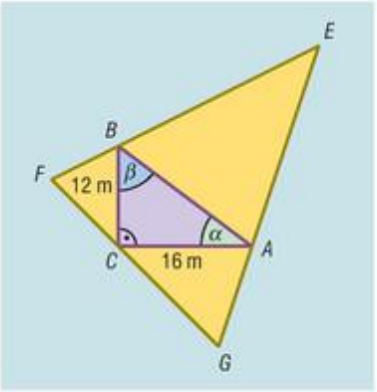
$$OD^2 = KO^2 - KD^2 = (20 + r)^2 - 20^2 = 40r + r^2.$$

Ezek alapján a keresett kör sugara a következő egyenletből számolható:

$$4800 - 160r + r^2 = 40r + r^2 \quad \Rightarrow \quad r = 24.$$

A keresett kör sugara 24 cm.

1472 Az ábrán látható jelöléseket használva legyen a telek az EFG háromszög, a rá épített ház az ABC háromszög.



A feladat feltételei szerint az $FEG\sphericalangle = 45°$, illetve $BC = 12$ m és $AC = 16$ m.

Az ABC háromszög A és B csúcsánál lévő külső szögek nagysága $180° - \alpha$, illetve $180° - \beta$. Ezen külső szögek szögfelezői által bezárt szög:

$$180° - \frac{(180° - \alpha)}{2} - \frac{(180° - \beta)}{2} =$$

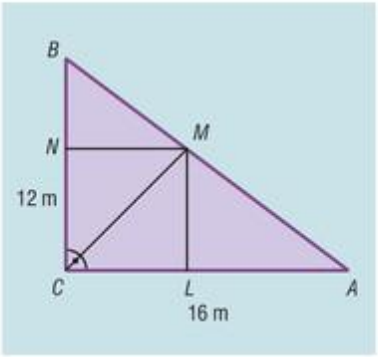
$$= \frac{\alpha + \beta}{2} = 45° \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90°.$$

Tehát az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van.

a) A háznak a telek 45°-os szögével szemközti oldala a Pitagorasz-tétel alapján:

$$AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ m}.$$

b) Ha a négyszög alakú szobának minden fala a ház 12 vagy 16 méteres oldalával párhuzamos, és minden oldala egyenlő hosszú, akkor annak az $LMNC$ négyzetnek a területét kell meghatároznunk, amelynek N és L csúcsa az ABC háromszög befogóira, M csúcs pedig az átfogóra illeszkedik.



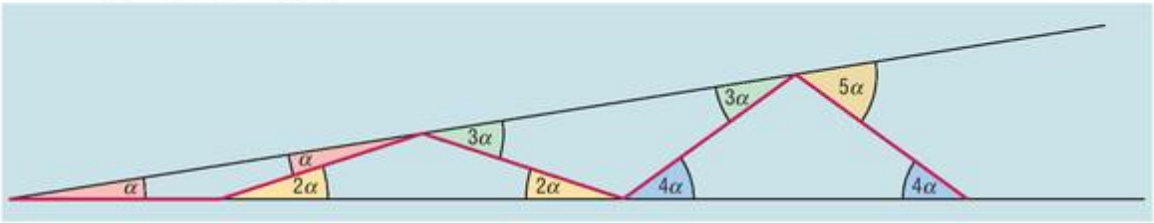
Legyen a négyzet oldalának hossza a. Az ABC derékszögű háromszög területe előáll a BCM és ACM háromszögek területének összegeként:

$$\frac{12\cdot 16}{2}=\frac{12a}{2}+\frac{16a}{2} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{48}{7}.$$

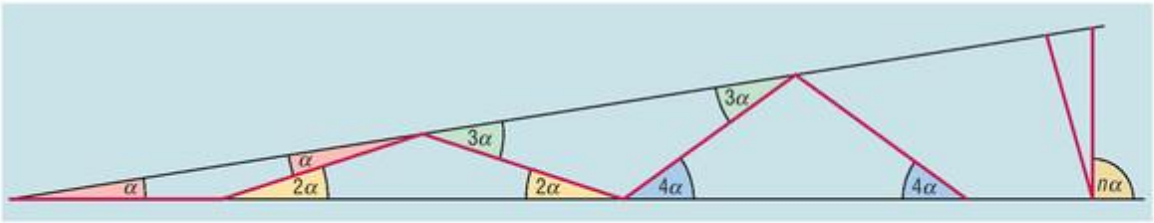
Legfeljebb $\left(\frac{48}{7}\right)^2 \approx 47\ \text{m}^2$ lehet annak a négyszög alakú szobának az alapterülete, amelynek minden fala a ház 12 vagy 16 méteres oldalával párhuzamos.

1473 *a)* A β szög nagysága 36°.

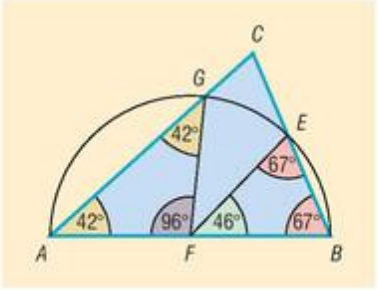
b) Az ábrán látható egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei számíthatók: α, $2\cdot\alpha$, $3\cdot\alpha$, … A kilencedik szakaszt még meg kell tudnunk rajzolni, így $9\cdot\alpha$ legfeljebb 90° lehet. Tehát az α szög nagysága legfeljebb 10°.



c) Az előzőek alapján az n-edik szakasz után már nem tudunk újabb szakaszt berajzolni, ha az ábrán jelölt szög 90°-nál nagyobb. Tehát α szög nagysága legfeljebb $\frac{90°}{n}$.



1474 A derékszögű ABE és ABG háromszögek E és G csúcsai Thalész tételének megfordítása alapján rajta vannak az AB mint átmérő fölé írt körön.



Az FA, FG, FE és FB szakaszok a Thalész-kör sugarai, tehát egyenlő hosszúak.

Az AFG egyenlő szárú háromszög alapon levő szögei 42°-osak, tehát az $AFG\sphericalangle = 180° - 2\cdot 42° = 96°$.

Az EBF egyenlő szárú háromszög alapon levő szögei 67°-osak, tehát az $EFB\sphericalangle = 180° - 2\cdot 67° = 46°$.

Ezek alapján az EFG egyenlő szárú háromszög szárszöge $180° - 46° - 96° = 38°$.

Az EFG háromszög szögei 38°, 71° és 71°.

9.5. EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK, EGYENLETRENDSZEREK

Az egyenlet, azonosság fogalma – megoldások

1475 Állítások:

b) igaz; *d)* igaz; *e)* hamis; *g)* hamis.

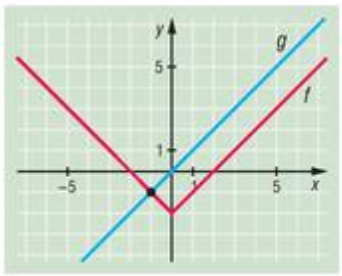
1476 *a)* A konvex négyszögek halmaza.
b) {97}
c) A bolygók halmaza.
d) Nincs megoldás.
e) Nincs megoldás.
f) {másodfokú; abszolút érték}.
g) {Duna; Tisza}

1477 *a)* A … 5-nél kisebb pozitív egész szám.
b) A … prímszám.
c) A … legfeljebb 19.
d) A … minimum 2 és maximum 7.
e) A … nagyobb –3-nál és kisebb 5-nél.
f) A … a legnagyobb egész szám.
g) A … természetes szám.

1478 *a)* $x = 3x - 6$ $(x = 3)$.
b) $x = 2x + 8$ $(x = -8)$.
c) $3x + 4 = 25$ $(x = 7)$.
d) $3x - 2x = x$ $(x \in \mathbb{R})$.
e) $5x - 8 = 3x + 10$ $(x = 9)$.

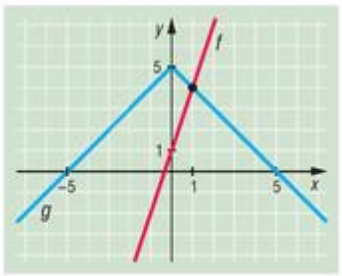
Az egyenlet megoldásának grafikus módszere – megoldások

1479 *a)*



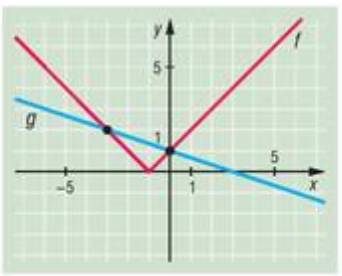
$x = -1$.

b)



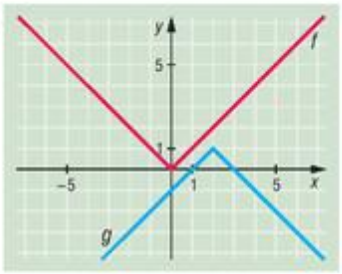
$x = 1$.

c)



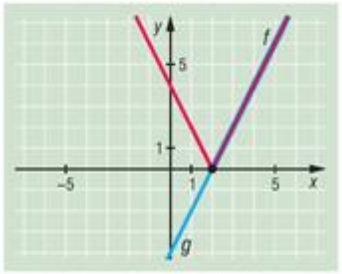
$x_1 = -3$, $x_2 = 0$.

d)



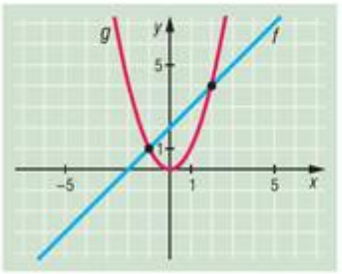
Nincs megoldás.

e)

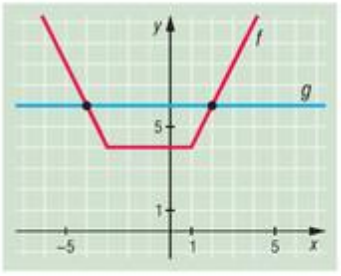


$x \geq 2$.

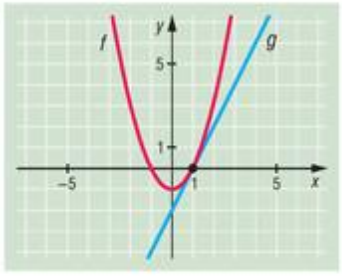
f)



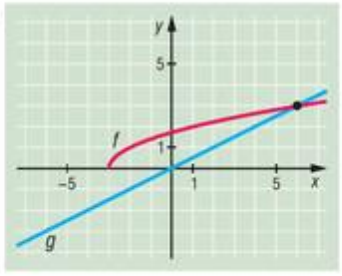
$x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

g) 

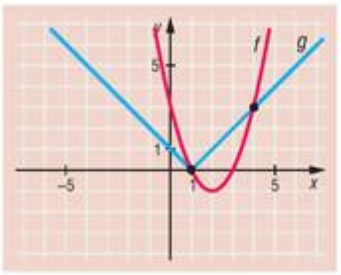
$x_1 = -4,\ x_2 = 2.$

h) 

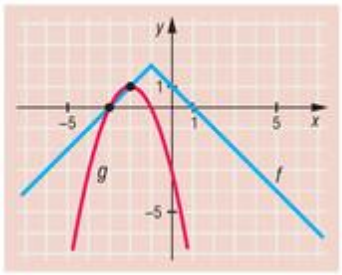
$x = 1.$

i) 

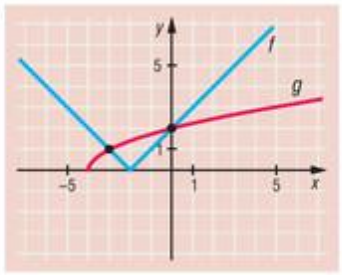
$x = 6.$

1480 *a)* 

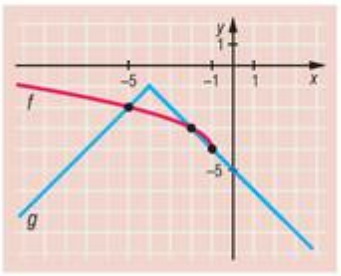
$x_1 = 1,\ x_2 = 4.$

b) 

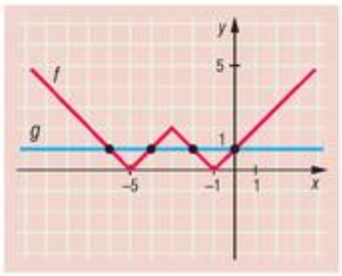
$x_1 = -3,\ x_2 = -2.$

c) 

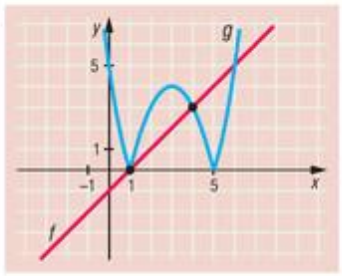
$x_1 = -3,\ x_2 = 0.$

d) 

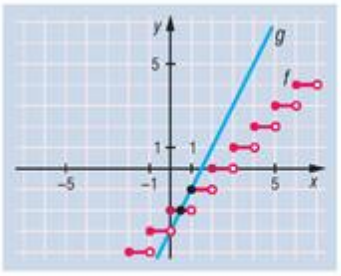
$x_1 = -5,\ x_2 = -2,\ x_3 = -1.$

e) 

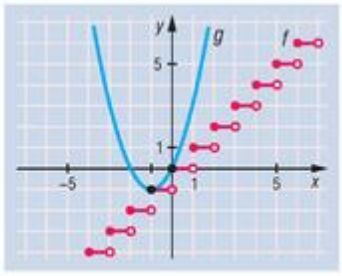
$x_1 = -6,\ x_2 = -4,$
$x_3 = -2,\ x_4 = 0.$

f) 

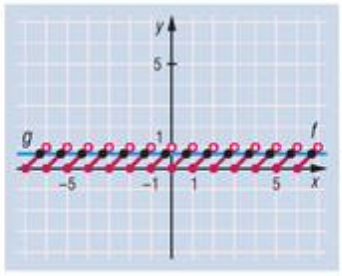
$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6.$

1481 *a)* 

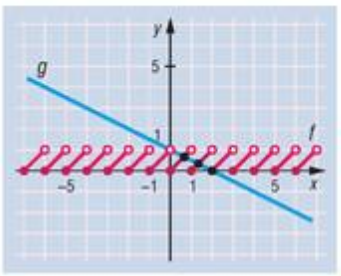
$x_1 = 0{,}5,\ x_2 = 1.$

b) 

$x_1 = -1,\ x_2 = 0.$

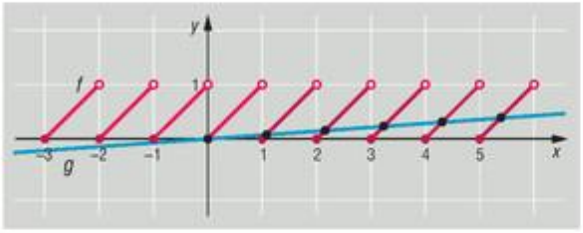
c) 

$x = k + 0{,}7;\ k \in \mathbb{Z}.$

d) 

$x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{4}{3},\ x_3 = 2.$

1482 Megoldás a 0, valamint 1-től 2008-ig minden egész szám és a nála nagyobb egész szám között van egy megoldás. Összesen tehát 2009 megoldás van.



Az egyenlet értelmezési tartományának és értékkészletének vizsgálata – megoldások

1483 *a)* $x = 4$. *b)* $x = \frac{3}{2}$. *c)* $x = \frac{1}{4}$.

d) $x = \frac{5}{8}$. *e)* Nincs megoldás. *f)* $x = \frac{7}{3}$.

g) Nincs megoldás. *h)* Nincs megoldás. *i)* Nincs megoldás.

1484 *a)* Mindkét gyök alatti kifejezés nemnegatív: $x \geq \frac{5}{3}$ és $x \leq 2p$, akkor nem lesz megoldás, ha $2p < \frac{5}{3}$, azaz $p < \frac{5}{6}$.

b) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < -\frac{3}{2}$.

c) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < \frac{9}{4}$.

d) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < -\frac{5}{28}$.

e) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p > 0$.

f) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < \frac{5}{6}$.

1485 *a)* Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. Nincs megoldás.

b) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = 2$, $y = 1$.

c) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = -6$, $y = -24$.

d) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{13}{3}$.

e) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = -\frac{17}{21}$, $y = -\frac{5}{7}$.

f) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = 3$, $y = -8$.

1486 *a)* Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindhárom tagja 0. $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

b) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindhárom tagja 0. $x = \frac{1}{3}$, $y = 1$, $z = 9$.

c) Alakítsunk teljes négyzetté: $(x + y)^2 + (x + 1)^2 = 0$. Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = -1$, $y = 1$.

d) Teljes négyzeteket kialakítva: $(x - 2z)^2 + (2y - z)^2 + (y - 1)^2 = 0$. Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindhárom tagja 0. $x = 4$, $y = 1$, $z = 2$.

Egyenlet megoldása szorzattá alakítással – megoldások

1487 *a)* $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$, $x_4 = -3$.

b) $x_1 = 3$, $x_2 = 11$, $x_3 = 2$, $x_4 = -8$.

c) A nevező nem lehet 0. A megoldások: $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = 7$, $x_3 = -\frac{1}{3}$.

d) A nevező nem lehet 0. A megoldások: $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{5}{3}$.

e) Kiemelés után: $(x + 1) \cdot (5x - 5) = 0$, a megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

f) Kiemelés után: $(x - 4) \cdot (5x - 4) = 0$, a megoldások: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4}{5}$.

g) Kiemelés után: $(2x + 1) \cdot 2x = 0$, a megoldások: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$.

h) Kiemelés után: $(5x - 3) \cdot (6x + 6) = 0$, a megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{5}$.

i) Kiemelés után: $(8x + 5) \cdot (4x - 10) = 0$, a megoldások: $x_1 = -\frac{5}{8}$, $x_2 = \frac{5}{2}$.

j) Kiemelés után: $(4 - 2x) \cdot 6 = 0$, a megoldás: $x = 2$.

1488 Az öt egymást követő szám szorzata:

$$x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 4) = 0.$$

Ha $x = 0$, a számok 0; 1; 2; 3; 4; összegük 10.

Ha $x + 1 = 0$, a számok -1; 0; 1; 2; 3; összegük 5.

Ha $x + 2 = 0$, a számok -2; -1; 0; 1; 2; összegük 0.

Ha $x + 3 = 0$, a számok -3; -2; -1; 0; 1; összegük -5.

Ha $x + 4 = 0$, a számok -4; -3; -2; -1; 0; összegük -10.

1489 *a)* Átrendezés és kiemelés után: $(3x - 1) \cdot (6 - x) = 0$, a megoldások: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 6$.

b) Két tényező kiemelése után: $x \cdot (x + 1) \cdot (-x - 6) = 0$, a megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = -6$.

c) Az $x - 1$ kiemelhető: $(x - 1) \cdot (3x + 7 + 2x + 6 - 6x - 6) = 0$, a megoldások: $x_1 = 1$, $x_2 = 7$.

1490 Legyenek a téglalap oldalai a és b egész számok, $a < b$.

A terület és kerület közötti összefüggés alapján:

a) $a \cdot b = 2 \cdot (2a + 2b)$ egyenlet írható fel.

Rendezzük a bal oldalra és alakítsunk ki szorzatot:

$$ab - 4a - 4b = 0,$$
$$a \cdot (b - 4) - 4 \cdot (b - 4) - 16 = 0,$$
$$(a - 4) \cdot (b - 4) = 16.$$

Mivel a és b pozitív egészek, elég megkeresnünk a 16 osztópárjait: $16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$, ezekből adódnak a megoldások.

Mivel $a < b$, a lehetséges esetek:

$$a_1 = 5,\ b_1 = 20; \quad a_2 = 6,\ b_2 = 12; \quad a_3 = 8,\ b_3 = 8.$$

b) $a \cdot b = 3 \cdot (2a + 2b)$ egyenletből rendezve és szorzattá alakítva:

$$ab - 6a - 6b = 0,$$
$$a \cdot (b - 6) - 6 \cdot (b - 6) - 36 = 0,$$
$$(a - 6) \cdot (b - 6) = 36.$$

A 36 osztópárjaiból kapjuk a megoldásokat: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$.

Mivel $a < b$, a lehetséges esetek:

$a_1 = 7,\ b_1 = 42;\quad a_2 = 8,\ b_2 = 24;\quad a_3 = 9,\ b_3 = 18;\quad a_4 = 10,\ b_4 = 15;\quad a_5 = 12,\ b_5 = 12.$

1491 *a)* Két lépésben alakítsunk szorzattá:

$$2x \cdot (2y + 3) - 3 \cdot (2y + 3) + 9 = 10,$$
$$(2y + 3) \cdot (2x - 3) = 1.$$

Az 1 kétféleképpen írható fel egész számok szorzataként: $1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$.

Ha $\left.\begin{matrix} 2y + 3 = 1 \\ 2x - 3 = 1 \end{matrix}\right\}$, akkor $x_1 = 2,\ y_1 = -1$; ha $\left.\begin{matrix} 2y + 3 = -1 \\ 2x - 3 = -1 \end{matrix}\right\}$, akkor $x_2 = 1,\ y_2 = -2$.

b) Két lépésben alakítsunk szorzattá:

$$3x \cdot (2y + 5) - 2 \cdot (2y + 5) + 10 = 21,$$
$$(3x - 2) \cdot (2y + 5) = 11.$$

A 11-et szorzattá alakíthatjuk: $11 = 1 \cdot 11 = 11 \cdot 1 = (-1) \cdot (-11) = (-11) \cdot (-1)$.

Ha $\left.\begin{matrix} 3x - 2 = 1 \\ 2y + 5 = 11 \end{matrix}\right\}$, akkor $x_1 = 1,\ y_1 = 3$.

Ha $\left.\begin{matrix} 3x - 2 = 11 \\ 2y + 5 = 1 \end{matrix}\right\}$, akkor $x = \frac{13}{3},\ y = -2$, nem megoldás, mert x nem egész szám.

Ha $\left.\begin{matrix} 3x - 2 = -1 \\ 2y + 5 = -11 \end{matrix}\right\}$, akkor $x = \frac{1}{3},\ y = -8$, nem megoldás, mert x nem egész szám.

Ha $\left.\begin{matrix} 3x - 2 = -11 \\ 2y + 5 = -1 \end{matrix}\right\}$, akkor $x_2 = -3,\ y_2 = -3$.

Az első és negyedik esetből kapott számpárok a megoldások.

Egyenletek megoldása lebontogatással, mérlegelvvel – megoldások

1492 *a)* $x = 4$; *b)* $x = -2{,}4$; *c)* $x = 0$; *d)* $x = 1$;
e) $x = 0$; *f)* $x = 2$; *g)* $x = 3$; *h)* $x = -3$;
i) $x = 1$; *j)* $x = 23$; *k)* $x = \frac{47}{11}$; *l)* $x = \frac{21}{68}$;
m) $x = -4$; *n)* $x = -3$; *o)* $x = -1$; *p)* $x = 6$;
q) $x \in \mathbb{R},\ x \neq 2$; *r)* $x = -5$.

1493 Ha a harmadik napra 4000 Ft maradt, ez az első napról maradt pénz kétharmad része. Az első nap után 6000 Ft maradt, ez a teljes összeg kétharmad része, tehát 9000 Ft-tal indult el a kirándulásra. Az első napon elköltött 3000 Ft-ot, a másodikon 2000 Ft-ot, a harmadikra 4000 Ft maradt.

1494 Ha egy füzet ára x forint, akkor 8 füzet $8x$ forintba kerül, ennyiért most 13 füzetet vehetek, tehát egy füzetért $\frac{8x}{13} = 0{,}6154x$ forintot kell fizetnem, ami $1 - 0{,}6154 = 0{,}3846$ rész csökkenést, vagyis 38,46%-os leértékelést jelent.

1495 *a)* A közös nevező 100, beszorzás után $x = -\frac{13}{6}$.

b) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x \neq -2$, a közös nevező $2 \cdot (x + 2)$, ezzel beszorozva kapjuk: $x = -1$.

c) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x \neq 4$ és $x \neq -3$, a közös nevező $(x - 4) \cdot (x + 3)$, ezzel beszorozva adódik: $x = 1$.

1496 *a)* A törtek miatt az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq 3$.

Mivel $6 - 2x = 2 \cdot (3 - x)$, ezzel szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$1 - 2x - 2 \cdot (3x - 4) = 4 \cdot (6 - 2x),$$
$$1 - 2x - 6x + 8 = 24 - 8x,$$
$$9 = 24.$$

Az egyenletnek nincs megoldása.

b) A törtek miatt az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq -2$ és $x \neq 5$.

Mivel $(x + 2) \cdot (x - 5) = x^2 - 3x - 10$, ez a szorzat legyen a közös nevező, amivel beszorozva:

$$5 \cdot (x - 5) + 4 \cdot (x + 2) = 28,$$
$$7x = 35,$$
$$x = 5.$$

Ami az értelmezés miatt nem megoldás.

c) Érdemes a nevezőket szorzattá alakítani:

$$2 - 2x^2 = 2 \cdot (1 - x^2) = 2 \cdot (1 - x) \cdot (1 + x);$$
$$x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1);$$
$$2 - 2x = 2 \cdot (1 - x).$$

Egyrészt kiolvashatjuk, hogy az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq 1$ és $x \neq -1$.

Másrészt látható, hogy a $2 \cdot (1 - x) \cdot (1 + x)$ szorzatot érdemes közös nevezőnek választani. Ezzel beszorozva:

$$x + 1 - (-2) \cdot (2x - 1) + 6 \cdot 2 \cdot (1 - x) + 1 + x = 0,$$
$$x + 1 + 4x - 2 + 12 - 12x + 1 + x = 0,$$
$$x = 2.$$

Ellenőrzés után kiderül, hogy a megoldás valóban $x = 2$.

d) Alakítsuk szorzattá a nevezőket:

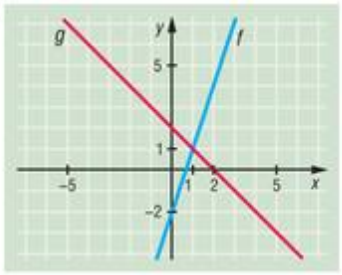
$$2x^2 - 4x + 2 = 2 \cdot (x - 1)^2;$$
$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2;$$
$$3 - 3x = 3 \cdot (1 - x).$$

Az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq 1$. Közös nevezőnek a $6 \cdot (x - 1)^2$ szorzatot érdemes választani, ezzel beszorozva az egyenlet mindkét oldalát:

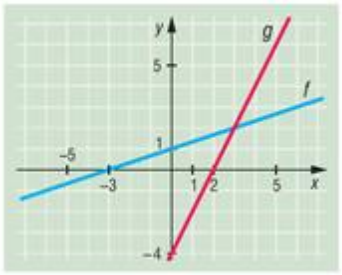
$$3 \cdot (2x - 7) + 6 \cdot (x + 1) - (-2) \cdot (x - 1) = 2 \cdot 6 \cdot (x - 1),$$
$$6x - 21 + 6x + 6 + 2x - 2 = 12x - 12,$$
$$x = 2{,}5.$$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy az egyenlet megoldása $x = 2{,}5$.

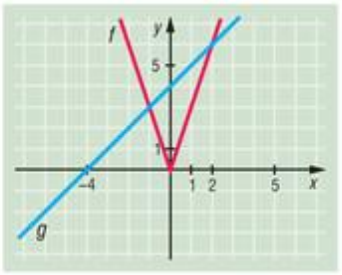
Egyenlőtlenségek – megoldások

1497 *a)* 

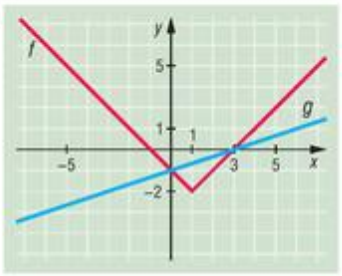
$x \le 1$.

b) 

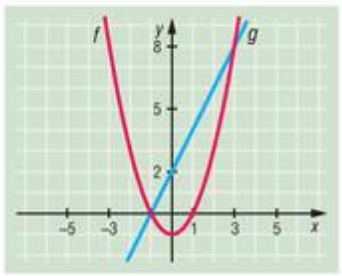
$x \le 3$.

c) 

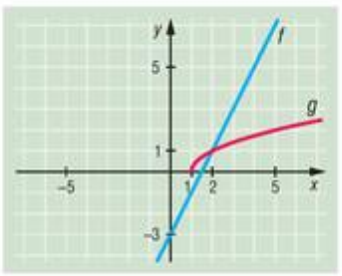
$-1 < x < 2$.

d) 

$x \le 0$ vagy $x \ge 3$.

e) 

$x < -1$ vagy $x > 3$.

f) 

$x \ge 2$.

1498 *a)* $x \ge \frac{1}{3}$;

b) $x < -\frac{7}{5}$;

c) $x > \frac{11}{6}$;

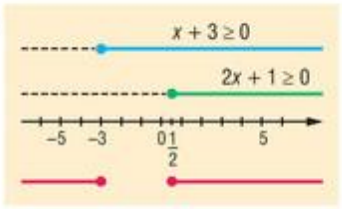
d) $x \in \mathbb{R}$;

e) $x < -2{,}5$;

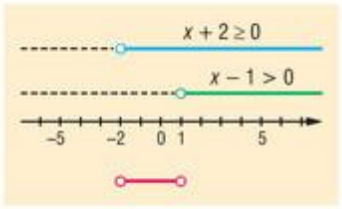
f) $x \le 4{,}5$;

g) Nincs megoldás;

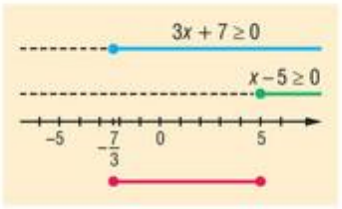
h) $x \le -\frac{15}{2}$.

1499 *a)* 

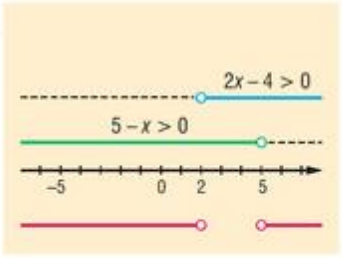
$x \le -3$ vagy $x \ge \frac{1}{2}$;

b) 

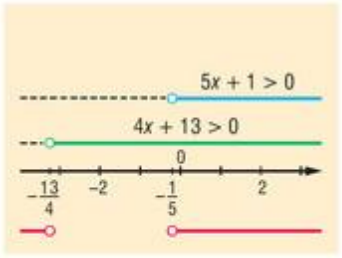
$-2 < x < 1$;

c) 

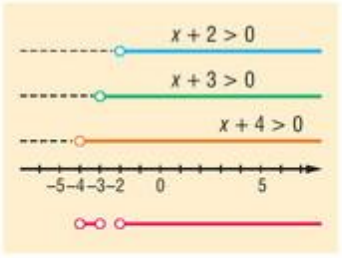
$-\frac{7}{3} \le x \le 5$;

d) 

$x < 2$ vagy $x > 5$;

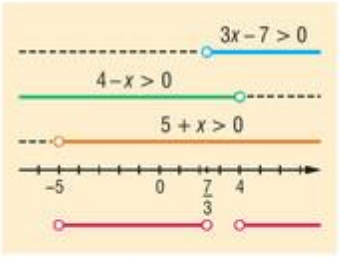
e) 

$x < -\frac{13}{4}$ vagy $x > -\frac{1}{5}$;

f) 

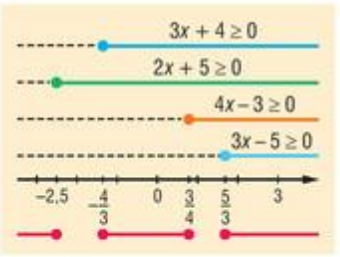
$-4 < x < -3$ vagy $-2 < x$;

g)



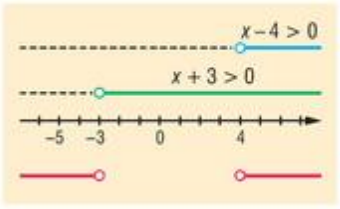
$-5 < x < \frac{7}{3}$ vagy $4 < x$;

h)



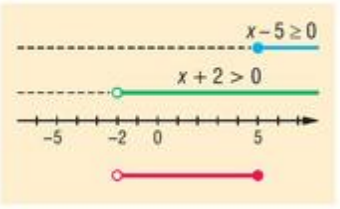
$x \le -\frac{5}{2}$ vagy $-\frac{4}{3} \le x \le \frac{3}{4}$ vagy $\frac{5}{3} \le x$.

1500 *a)*



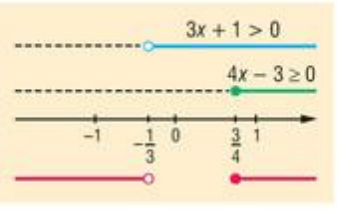
$x < -3$ vagy $4 < x$;

b)



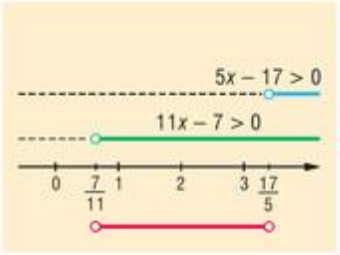
$-2 < x \le 5$;

c)



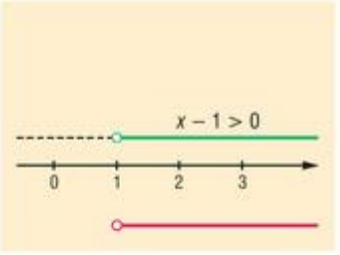
$x < -\frac{1}{3}$ vagy $\frac{3}{4} \le x$;

d)



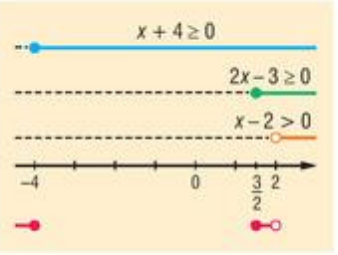
$\frac{7}{11} < x < \frac{17}{5}$;

e)



$x > 1$;

f)



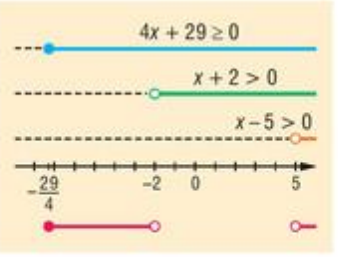
$x \le -4$ vagy $\frac{3}{2} \le x < 2$.

1501 *a)* A jobb oldalra rendezve:

$$0 \le \frac{4x + 29}{(x + 2) \cdot (x - 5)}.$$

Ennek megoldása:

$$-\frac{29}{4} \le x < -2 \quad \text{vagy} \quad 5 < x.$$

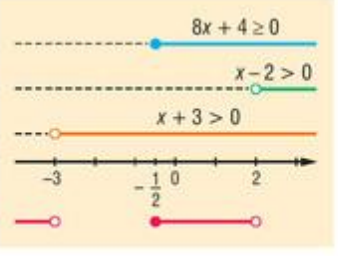


b) A bal oldalra rendezve:

$$\frac{8x + 4}{(x - 2) \cdot (x + 3)} \le 0.$$

A megoldás:

$$x < -3 \quad \text{vagy} \quad -\frac{1}{2} \le x < 2.$$

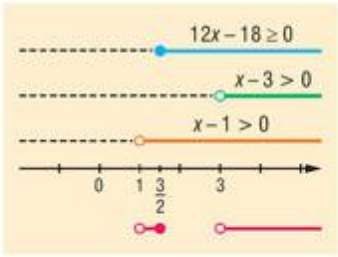


c) A bal oldalra rendezve:

$$\frac{12x-18}{(x-3)\cdot(x-1)} \geq 0.$$

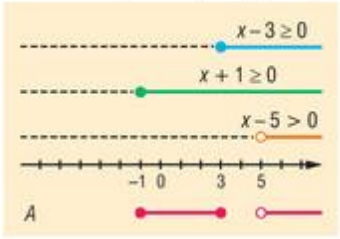
A megoldás:

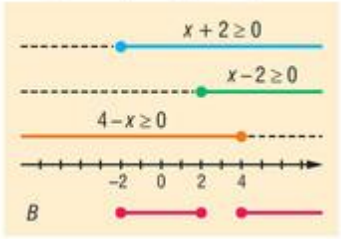
$$1 < x \leq \frac{3}{2} \quad \text{vagy} \quad 3 < x.$$

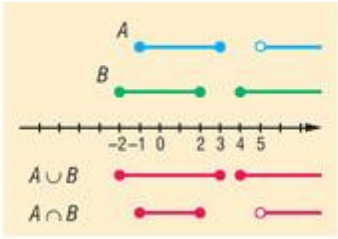


1502 A két halmaz: $A = [-1; 3] \cup]5; \infty[$ és $B = [-2; 2] \cup [4; \infty[$.

a) $A \cup B = [-2; 3] \cup [4; \infty[$, $A \cap B = [-1; 2] \cup]5; \infty[$.







b) Mivel az 5 nincs benne az A halmazban, ezért nem igaz, hogy $P \subset A$.

c) Azokat a számjegyeket keressük, amelyek nem elemei B-nek. A keresett halmaz: $\{3\}$.

1503 Írjunk y helyére $(1 - x)$-et, és alakítsuk a bizonyítandó állítást:

$$\frac{1+x}{x} \cdot \frac{2-x}{1-x} \geq 9.$$

Mivel $x > 0$ és $y = 1 - x > 0$ átszorzás után:

$$(1+x)\cdot(2-x) \geq 9x\cdot(1-x),$$
$$2 - x + 2x - x^2 \geq 9x - 9x^2,$$
$$8x^2 - 8x + 2 \geq 0,$$
$$4x^2 - 4x + 1 \geq 0,$$
$$(2x-1)^2 \geq 0.$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így az állítás minden valós x-re igaz.

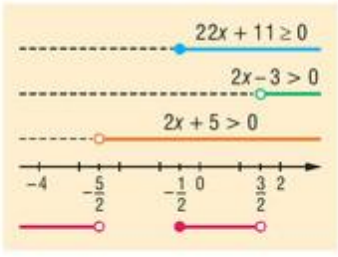
Egyenlőség $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ esetén áll fenn.

1504 A bal oldalra rendezve:

$$\frac{22x+11}{(2x-3)\cdot(2x+5)} \leq 0.$$

Megoldása:

$$H = \left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[.$$



a) A H halmaznak sem legnagyobb, sem legkisebb eleme nincs, mert a $\frac{3}{2}$ nem eleme a halmaznak.

b) A természetes számok közül csak a 0 és az 1 eleme a H halmaznak.

c) Egy lehetséges megoldás:

$$A = \left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[\quad \text{és} \quad B = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[.$$

Abszolút értéket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek – megoldások

1505 *a)* $x=4,\ x=-4$; *b)* $x=4,\ x=-12$; *c)* $x\le -4$ vagy $x\ge 4$; *d)* $x\le -12$ vagy $x\ge 4$;

e) $x=\frac{7}{2},\ x=-\frac{7}{2}$; *f)* $x=2,\ x=-8$; *g)* $-\frac{13}{2}\le x\le \frac{7}{2}$; *h)* $x\in\mathbb{R}$.

1506 *a)* $x=\frac{2}{3}$, ha $x\le 0$ nincs megoldás. *b)* $x=-3$, ha $x\ge 0$ nincs megoldás.

c) $x=3{,}5,\ x=-\frac{7}{4}$. *d)* $x=\frac{10}{7},\ x=-\frac{30}{19}$.

e) $x=-\frac{2}{3}$, ha $x\ge 3$ nincs megoldás. *f)* Nincs megoldás.

g) $x=2,\ x=4$. *h)* $x=\frac{3}{5}$, ha $x>\frac{7}{2}$ nincs megoldás.

1507 *a)* Ha $x\ge 0$, nincs megoldás, ha $x<0$, a megoldás $x<-\frac{1}{2}$.

b) Ha $x\ge 0$, akkor $x>-\frac{1}{3}$ adódik, ami azt jelenti, hogy $x\ge 0$ a megoldás.

Ha $x<0$, akkor $x>-\frac{1}{7}$ adódik, tehát a megoldás: $-\frac{1}{7}<x<0$.

A végeredmény: $-\frac{1}{7}<x$.

c) Ha $x\ge 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $x<0$, akkor $x<-\frac{4}{7}$ adódik.

A megoldás: $x<-\frac{4}{7}$.

d) Ha $x\ge -3$, akkor $x\le 4$ adódik, azaz $-3\le x\le 4$ a megoldás.

Ha $x<-3$, akkor $x\ge -\frac{16}{3}$ adódik, azaz $-\frac{16}{3}\le x<-3$ a megoldás.

A végeredmény: $-\frac{16}{3}\le x\le 4$.

e) Ha $x\ge 1$, akkor $x\ge 11$ a megoldás.

Ha $x<1$, akkor $x\le -1$ adódik, azaz $x\le -1$ a megoldás.

A végeredmény: $x\le -1$ vagy $x\ge 11$.

f) Ha $x\ge\frac{4}{5}$, akkor $x<\frac{5}{2}$ adódik, azaz $\frac{4}{5}\le x<\frac{5}{2}$ a megoldás.

Ha $x<\frac{4}{5}$, akkor $\frac{3}{8}<x$ adódik, azaz $\frac{3}{8}<x<\frac{4}{5}$ a megoldás.

A végeredmény: $\frac{3}{8}<x<\frac{5}{2}$.

1508 *a)* Ha $x \geq 2$, akkor $x = 5$.

Ha $-3 \leq x < 2$, akkor nincs megoldás.

Ha $x \leq -3$, akkor $x = -6$.

b) Ha $x \geq 1$, akkor minden szám megoldás.

Ha $-4 \leq x < 1$, akkor nincs megoldás.

Ha $x < -4$, akkor nincs megoldás.

A végeredmény: $x \geq 1$.

c) Ha $|x + 2| - 3 = 2$, akkor $x = 3$ vagy $x = -7$.

Ha $|x + 2| - 3 = -2$, akkor $x = -1$ vagy $x = -3$.

d) Ha $|x - 4| - 4 = 4$, akkor $x = 12$ vagy $x = -4$.

Ha $|x - 4| - 4 = -4$, akkor $x = 4$.

1509 *a)* Ha $x \geq 0$, akkor $x \geq 1$ adódik.

Ha $-5 \leq x < 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $x < -5$, akkor $x \leq -6$.

A végeredmény: $x \leq -6$ vagy $x \geq 1$.

b) Ha $x \geq 3$, akkor $-5 \leq 5$ adódik, azaz minden szám megoldás.

Ha $-2 \leq x < 3$, akkor $-2 \leq x$.

Ha $x < -2$, akkor $5 \leq 5$, azaz minden szám megoldás.

Végeredmény: $x \in \mathbb{R}$.

c) Ha $x \leq \frac{3}{2}$, akkor $x \geq 2$ adódik, ami megoldás.

Ha $-6 \leq x < \frac{3}{2}$, akkor $x \leq 0$-t kapunk, azaz $-6 \leq x \leq 0$.

Ha $x < -6$, akkor $x \leq -4$ adódik, azaz $x < -6$.

A végeredmény: $x \leq 0$ vagy $x \geq 2$.

d) Ha $x \geq \frac{5}{4}$, akkor $x \leq \frac{11}{9}$, mivel $\frac{11}{9} = \frac{44}{36} < \frac{45}{36} = \frac{5}{4}$ nincs megoldás.

Ha $\frac{4}{5} \leq x < \frac{5}{4}$, akkor $x \leq 1$, azaz $\frac{4}{5} \leq x \leq 1$.

Ha $x < \frac{4}{5}$, akkor $x \geq \frac{7}{9}$, mivel $\frac{7}{9} = \frac{35}{45} < \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$, a megoldás: $\frac{7}{9} \leq x < \frac{4}{5}$.

A végeredmény: $\frac{7}{9} \leq x \leq 1$.

1510 *a)* Ha $x \geq 2$, akkor $x \geq -\frac{13}{3}$, tehát $x \geq 2$.

Ha $-4 \leq x < 2$, akkor $x \geq -\frac{9}{5}$, tehát $-\frac{9}{5} \leq x < 2$.

Ha $x < -4$, akkor $x \leq -15$, tehát $x \leq -15$.

A végeredmény: $x \leq -15$ vagy $-\frac{9}{5} \leq x$.

b) Ha $x \geq 4$, akkor $x \leq 2{,}5$ adódik, azaz nincs megoldás.
Ha $1 \leq x < 4$, akkor $x \leq 3$, tehát $1 \leq x \leq 3$.
Ha $-2 \leq x < 1$, akkor $x \leq 7$, a megoldás $-2 \leq x < 1$.
Ha $x < -2$, akkor $-6{,}5 \leq x$, a megoldás $-6{,}5 \leq x < -2$.
A feladat megoldása: $-6{,}5 \leq x \leq 3$.

Paraméteres egyenletek – megoldások

1511 *a)* $x = 3$, ha $a \neq 0$. Ha $a = 0$, minden valós szám megoldás.

b) $x = \dfrac{3-b}{b}$, ha $b \neq 0$. Ha $b = 0$, nincs megoldás.

c) $x = \dfrac{4}{2-c}$, ha $c \neq 2$. Ha $c = 2$, nincs megoldás.

d) $x = \dfrac{7a-4}{a+4}$, ha $a \neq -4$. Ha $a = -4$, nincs megoldás.

e) $x = 1$, ha $d \neq -1$. Ha $d = -1$, minden valós szám megoldás.

f) $x = a + 3$, ha $a \neq 3$. Ha $a = 3$, minden valós szám megoldás.

g) $x = b - 2$, ha $b \neq 2$. Ha $b = 2$, minden valós szám megoldás.

h) $x = c - 4$, ha $c \neq -4$. Ha $c = -4$, minden valós szám megoldás.

i) $x = \dfrac{d+1}{d}$, ha $d \neq 0$ és $d \neq -1$. Ha $d = 0$, nincs megoldás. Ha $d = -1$, minden valós szám megoldás.

1512 *a)* $x = a - 3$, ha $a \neq 3$. Ha $a = 3$, minden valós szám megoldás.

b) $x = 2a + 4$, ha $a \neq 2$. Ha $a = 2$, minden valós szám megoldás.

c) $x = \dfrac{a+2}{3}$, ha $a \neq 2$. Ha $a = 2$, minden valós szám megoldás.

d) $x = \dfrac{3a-12}{4a-3}$, ha $a \neq \dfrac{3}{4}$. Ha $a = \dfrac{3}{4}$, akkor nincs megoldás.

1513 A találkozásig eltelt idő legyen t, a két futó együtt megteszi a 200 métert.
A következő egyenlet írható fel:

$$v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = 200.$$

A megoldás:

$$t = \frac{200}{v_1 + v_2}.$$

1514 Legyen x az idő, ahány óra múlva utoléri a gyorsabb kerékpáros a társát. A távolságot írjuk át km-be.
A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$38x = 32x + \frac{s}{1000}.$$

A megoldás:

$$x = \frac{s}{6000} \text{ óra} = \frac{s}{100} \text{ perc},$$

ennyi idő múlva éri utol az egyik kerékpáros a másikat.

1515 *a)* A zárójelek felbontása után rendezve, elvégezve a szorzattá alakításokat:

$$(a+b)\cdot(a-b)\cdot x=(a+b)^2,$$

ahonnan:

$$x=\frac{a+b}{a-b},\quad \text{ha } |a|\neq|b|.$$

Ha $a=b$, nincs megoldás, csak ha $a=b=0$, ekkor minden valós szám megoldás.

Ha $a=-b$, minden valós szám megoldás.

b) A zárójelek felbontása után rendezve, elvégezve a szorzattá alakításokat:

$$(2a-3b)\cdot x=(2a-3b)^2,$$

amiből:

$$x=2a-3b,\quad \text{ha } 2a\neq 3b\Rightarrow a\neq\frac{3}{2}\cdot b.$$

Ha $a=\frac{3}{2}\cdot b$, minden valós szám megoldás.

c) Rendezve az egyenletet:

$$x\cdot a\cdot(7-a)=4\cdot(7-a),$$

amiből:

$$x=\frac{4}{a},\quad \text{ha } a\neq 0 \text{ és } a\neq 7.$$

Ha $a=7$, minden valós szám megoldás.

Ha $a=0$, nincs megoldás.

d) A törtek miatt $x\neq 3a$ és $x\neq b$.

Beszorzás után:

$$ab-ax=6a-2x,$$
$$(a-2)\cdot x=a\cdot(b-6).$$

I. Ha $a=2$ és $b=6$, minden valós szám megoldás, kivéve a 6.

Ha $a=2$ és $b\neq 6$, nincs megoldás.

II. Ha $a\neq 2$, leosztás után: $x=\frac{a\cdot(b-6)}{a-2}$.

Az értelmezés miatt $x\neq 3a$ és $x\neq b$, a fenti tört csak akkor megoldás, ha $\frac{a\cdot(b-6)}{a-2}\neq 3a$ és $\frac{a\cdot(b-6)}{a-2}\neq b$, vagyis $a\neq 0$ és $b\neq 3a$.

Ha $a=0$, nincs megoldás.

Ha $b=3a$, nincs megoldás.

e) A törtek miatt az egyenletnek csak $x\neq a$ és $x\neq -a$ esetén van értelme.

Legyen a közös nevező az $(x+a)\cdot(x-a)=x^2-a^2$ szorzat, ezzel beszorozva az egyenlet mindkét oldalát:

$$x\cdot(x-a)-(a+x)^2=-1\cdot(x-a+4a^2).$$

Rendezés és kiemelés után:

$$x\cdot(1-3a)=a\cdot(1-3a).$$

Ha $a=\frac{1}{3}$, mindkét oldal 0, tehát minden valós szám megoldás, kivéve: $x=\frac{1}{3}$ és $x=-\frac{1}{3}$.

Ha $a\neq\frac{1}{3}$, leosztás után $x=a$, ami az értelmezés miatt nem megoldás.

f) A törtek miatt $x \neq 2$ és $x \neq 3$. Beszorozva:

$$(x-a)\cdot(x-3)+(x-b)\cdot(x-2)=2\cdot(x-2)\cdot(x-3),$$
$$x\cdot(5-a-b)=12-3a-2b.$$

I. Ha $a+b=5$, és $a=2$, $b=3$, akkor $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, $x \neq 3$.

Ha $a+b=5$, és $a \neq 2$, akkor nincs megoldás.

II. Ha $a+b \neq 5$, akkor $x=\dfrac{12-3a-2b}{5-a-b}$.

A fenti tört csak akkor megoldás, ha $\dfrac{12-3a-2b}{5-a-b} \neq 2$ és $\dfrac{12-3a-2b}{5-a-b} \neq 3$, vagyis $a \neq 2$ és $b \neq 3$.

Ha $a+b \neq 5$ és $a=2$ vagy $b=3$, nincs megoldás.

g) A törtek miatt $a \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq -1$. Mivel $(x+1)\cdot(x+2)=x^2+3x+2$, közös nevezőnek érdemes az $(a-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$ szorzatot választani, ezzel beszorozva:

$$(2a-5)\cdot(x+1)-3\cdot(a-1)\cdot(x+2)=(3x+4)\cdot(a-1),$$
$$x\cdot(4a-1)=5-8a.$$

Ha $a=\dfrac{1}{4}$, nincs megoldás.

Ha $a \neq \dfrac{1}{4}$, $x=\dfrac{5-8a}{4a-1}$.

Az értelmezés miatt: $\dfrac{5-8a}{4a-1} \neq -2$ és $\dfrac{5-8a}{4a-1} \neq -1$. Az első minden a-ra igaz, a másodikból $a \neq 1$, amit az értelmezésnél már kizártunk.

Tehát a tört minden $a \neq \dfrac{1}{4}$ és $a \neq 1$ esetén megoldás.

1516 Legyen x százalékos az oldat. Az oldott anyag mennyiségére felírható egyenlet:

$$a\cdot\frac{p}{100}+b\cdot\frac{q}{100}=(a+b)\cdot\frac{x}{100}.$$

Mivel $a+b \neq 0$, beszorzás után rendezve:

$$x=\frac{ap+bq}{a+b}.$$

1517 A törtek miatt $a \neq 0$. Beszorozva és rendezve:

$$x\cdot(2-a)=3a+7.$$

Ha $a=2$, nincs megoldás.

Ha $a \neq 2$, $x=\dfrac{3a+7}{2-a}$.

Keressük azon a paraméter értékeket, amelyekre:

$$\frac{3a+7}{2-a}<-5,$$
$$\frac{3a+7}{2-a}+\frac{5\cdot(2-a)}{2-a}<0,$$
$$\frac{17-2a}{2-a}<0.$$

A számláló és nevező akkor lesz különböző előjelű, ha $2<a<8{,}5$, ilyen paraméter értékek esetén lesz a megoldás (-5)-nél kisebb.

1518 A törtnek akkor van értelme, ha $x \neq m$. Rendezzünk egy oldalra, és hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{mx-1-x+m}{x-m}>0,$$

$$\frac{m\cdot(x+1)-1\cdot(x+1)}{x-m}>0,$$

$$\frac{(m-1)\cdot(x+1)}{x-m}>0.$$

Vizsgáljuk a tényezők előjelét.

Ha $m-1>0$, azaz $m>1$, akkor a másik két tényező azonos előjelű kell hogy legyen, mivel a hányadosnak pozitívnak kell lennie. Ez akkor teljesül, ha $x<-1$ és $m<x$.

Ha $m=1$, nincs megoldás.

Ha $m-1<0$, azaz $m<1$, akkor a másik két tényező ellentétes előjelű kell hogy legyen, hiszen $m-1$ negatív. Attól függően, hogy m (-1)-nél nagyobb vagy kisebb adódnak a megoldások:

ha $x+1>0$ és $x-m<0$, $\quad$ ha $x+1<0$ és $x-m>0$,

$x>-1$ és $x<m$, $\quad$ $x<-1$ és $x>m$,

$-1<x<m$; $\quad$ $m<x<-1$.

Kérdés lehet még, hogy x-re kaphatunk-e (-1)-et. Nem, mivel $(x+1)$ értéke 0 lenne, de az nem megoldása az egyenlőtlenségnek (ezzel az $m \neq -1$ esetet nem kell vizsgálni, mert $x \neq m$).

Egyenletekkel megoldható feladatok – megoldások

1519 A háromszög szögei: 70°, 90°, 20°.

1520 A kétjegyű szám: 84.

1521 A keresett kétjegyű szám: 52.

1522 A keresett szám a 165.

1523 Az eredeti ár 18 000 Ft volt.

1524 A táska ára eredetileg 4 000 Ft volt.

1525 *a)* 3 kg 40%-os és 1 kg 80%-os oldatot. *b)* $\frac{4}{3}$ kg *c)* 12 kg *d)* 62,2%

1526 *a)* 15 km, $6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ *b)* $8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ *c)* 15 órakor, 48 km

1527 *a)* 62,5 másodperc múlva találkoznak.

b) A leköröz̈ésig 1000 másodperc = 16 perc 40 másodperc telik el.

1528 437,5 méter előny esetén érnek egyszerre célba.

1529 Az anya 48 éves, fia 19 éves.

1530 *a)* 19 óra 48 perckor *b)* 20 óra 36 perckor *c)* 22 óra 30 perckor

1531 *a)* Együtt $\frac{48}{7}=6\frac{6}{7}\approx 6{,}86$ óra alatt vágják fel a tűzifát.

b) Ebben az esetben $\frac{52}{7}=7\frac{4}{7}\approx 7{,}43$ óra alatt végeznek a munkával.

c) A munka, a kezdéstől, 9 órát vesz igénybe.

1532 Oldjuk meg a feladatot következtetéssel:

9 kályhában 1 m^3 fa $\frac{5,5}{12}$ nap alatt ég el.

1 kályhában 1 m^3 fa $\frac{5,5}{12} \cdot 9$ nap alatt ég el.

12 kályhában 1 m^3 fa $\frac{\frac{5,5}{12} \cdot 9}{12} = \frac{5,5 \cdot 9}{12^2}$ nap alatt ég el.

12 kályhában 9 m^3 fa $\frac{\frac{5,5}{12} \cdot 9}{12} \cdot 9 = \frac{5,5 \cdot 9}{12^2} \cdot 9 = \frac{5,5 \cdot 9^2}{12^2} \approx 3,09$ nap alatt ég el.

1533 **I. megoldás.** Ha a nevezett versenyzők száma n, akkor eredetileg $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ mérkőzés lett volna. $n-1$ versenyzővel $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$ mérkőzésre kerül sor, 2-t lejátszott a kieső versenyző, 15 mérkőzés pedig elmaradt. Így a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} + 2 + 15.$$

Megoldás: $n = 18$.

II. megoldás. A kiesett versenyző 2-t játszott és 15 mérkőzése elmaradt, összesen 17 mérkőzést játszott volna, ami azt jelenti, hogy 18 versenyző indult eredetileg a versenyen.

1534 Legyen a termelés kezdetben t; ekkor az első üzem termelése $0,3 \cdot t$, a másodiké $0,7 \cdot t$.
A növekedés után a termelés:

$$0,3 \cdot t \cdot 1,21 + 0,7 \cdot t \cdot 1,2 = 1,203 \cdot t.$$

Tehát 20,3%-kal növekedett a termelés.

1535 *a)* Az osztályban 20 lány van.

b) Legyen az osztálylétszám x. A következő egyenlet írható fel:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{2} + 12 = x,$$

$$x = 36.$$

Az osztályban 36 tanuló van, tehát a fiúk száma 16.

1536 *a)* Legyen a híd hossza x, a következő egyenlet írható fel:

$$x = \left(\frac{x}{3} - 20\right) + \left(\frac{x}{4} - 5\right) + \left(\frac{x}{2} - 30\right).$$

Ebből a híd hossza 660 méter.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

b) A kamion annyi idő alatt ér át, amíg megtesz 678 métert:

$$t = \frac{0,678 \text{ km}}{30 \frac{\text{km}}{\text{óra}}} = 0,0226 \text{ óra} = 1,356 \text{ perc}.$$

1537 *a)* A 25 000 Ft-os szemüvegkeret ára $25\,000 \cdot 0{,}83 = 20\,750$ Ft lesz.

$\frac{80\,750}{85\,000} = 0{,}95$, tehát 5%-kal lesz olcsóbb a szemüveg.

b) A teljes árat $85\,000 \cdot 0{,}17 = 14\,450$ Ft-tal szeretnénk csökkenteni.

A kedvezmény mértéke $\frac{14\,450}{25\,000} = 0{,}578$, tehát ezt egy 58 éves ember teheti meg.

c) Legyen a keresett keret ára x. A következő egyenlet írható fel:

$$60\,000 + x \cdot 0{,}83 = (60\,000 + x) \cdot 0{,}9,$$
$$x = 85\,714.$$

Tehát egy 85 714 Ft-os keret esetén csökkenthetné az árat 10%-kal a 17 éves vásárló.

1538 A sebességek: gyalog 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, kerékpárral 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jelölje a találkozásig eltelt időt, órában mérve, x.

a) A megfelelő egyenlet:

$$6x + 18x = 6,$$
$$x = \frac{1}{4}.$$

Tehát 6 óra 15 perckor találkoztak.

b) Az egyenlet:

$$6x + 18 \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right) = 6,$$
$$x = \frac{3}{8}.$$

Tehát 7 óra után 22,5 perccel találkoztak.

c) Tímea $5 + 5 + 5 = 15$ perccel indul később. A megfelelő egyenlet:

$$6x + 18 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) = 6,$$
$$x = \frac{7}{16}.$$

Tehát 8 óra után 26,25 perccel találkoztak.

1539 *a)* Ha a feltöltés ideje x, akkor $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1$, megoldása: $x = 2$. Tehát a nyitás előtt 2 órával, azaz legkésőbb 6 órakor meg kell nyitni a csapokat.

b) A második csap 2 órán keresztül tölti a medencét, az együttes munka idejét jelölje x. Egyenletünk: $\frac{2}{6} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1$, megoldása: $x = \frac{4}{3}$. Tehát a második csap bekapcsolása után 3 óra 20 perccel telik meg a medence.

c) A lefolyó fél óráig engedte ki a vizet, a megfelelő egyenlet: $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{0{,}5}{4} = 1$. A megoldás $x = \frac{9}{4}$, tehát ebben az esetben a csapoknak 2 óra 15 percre van szükségük a feltöltéshez.

1540 A tízes számrendszerbeli alakokat átírva:

$$1111a + 111b + 11c + d = 2010.$$

Az a értéke csak 1 lehet, ebből

$$111b + 11c + d = 899.$$

Mivel $0 \le 11c + d \le 108$, csak $b = 8$ lehet: $11c + d = 11$. Ennek egyetlen megoldása van: $c = 1$ és $d = 0$.

A keresett négyjegyű szám: 1810.

1541 Legyen a bankban elhelyezett két összeg x és $6 \cdot 10^6 - x$.

A kisebb fiú pénze 7 évi kamatozás után: $x \cdot 1{,}12^7$.

A másik fiú pénze: $(6 \cdot 10^6 - x) \cdot 1{,}12^5$.

A feltétel szerint:

$$x \cdot 1{,}12^7 = (6 \cdot 10^6 - x) \cdot 1{,}12^5,$$
$$1{,}12^2 \cdot x = 6 \cdot 10^6 - x,$$
$$x = 2661462.$$

Tehát a 11 éves fiú nevére 2 661 462 Ft, a 13 éves fiú nevére 3 338 538 Ft összegeket kell a bankban elhelyezni.

1542 *a)* Az előadott dalok számára vonatkozóan felírható egyenlet: $\frac{x}{4} + \frac{x}{10} + \frac{3x}{5} + 1 = x$. Megoldása: $x = 20$, tehát összesen 20 dalt adtak elő.

b) Szilvia énekelt $5 + 12 + 1 = 18$ dal előadásában, ez $\frac{18}{20} = 0{,}9$, azaz 90%.

c) Szilvia gitározott $2 + 12 = 14$ dal előadásában, Tünde gitározott $5 + 12 = 17$ esetben. A kapott összeget $\frac{14}{17}$ arányban kell elosztani. $62\,000 : 31 = 2000$.

Tehát Szilvia 28 000, Tünde pedig 34 000 Ft-ot kap.

1543 Mivel a születési év számjegyeinek összege nem lehet több 28-nál, a születési év első két jegye lehet 19. Az utolsó két jegy legyen x, y. Ha a születési év $\overline{19xy}$, akkor a következő egyenlet írható fel:

$$\overline{19xy} + 1 + 9 + x + y = 2010,$$
$$1900 + 10x + y + 10 + x + y = 2010,$$
$$11x + 2y = 100,$$
$$11x = 2 \cdot (50 - y).$$

Az egyenlőség úgy teljesülhet, ha x páros számjegy, de nem lehet kisebb 8-nál, mert akkor y kétjegyű lenne. Így $x = 8$, $y = 6$, tehát a születési év 1986. A feladat kérdésére a válasz a mindenkori évszámtól függ.

1544 Az út 11 órát vett igénybe. Legyen x annak az útszakasznak a hossza, amit oda és vissza is vízszintes úton tesznek meg, y annak az útnak a hossza, amelyet oda úton felfelé, vissza pedig lejtőn lefelé haladva tesznek meg, z pedig az a szakasz, amelyet oda úton lefelé, vissza pedig felfelé tesznek meg. A következő egyenlet írható fel:

$$\left(\frac{x}{20} + \frac{y}{15} + \frac{z}{30}\right) + \left(\frac{x}{20} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15}\right) = 11.$$

Beszorzás és összevonás után:

$$3x + 4y + 2z + 3x + 2y + 4z = 660,$$
$$6 \cdot (x + y + z) = 660,$$
$$x + y + z = 110.$$

A kapott összeg az egyik irányban megtett út. Tehát ezen a napon a kerékpárosok összesen 220 km-t tettek meg.

1545 Azért fognak el 41 nappal előbb a történetek, mert bizonyos napokon 3-mal, máskor 4-gyel több került elolvasásra a tervezettnél. Legyen x azoknak a napoknak a száma, amikor 4 történetet olvasott el, y pedig azoké, amikor 5-öt. A következő egyenlet írható fel:

$$3x + 4y = 41.$$

Ennek az egyenletnek keressük a pozitív egész megoldásait.

Mivel x és y pozitív számok, nem lehetnek tetszőlegesen nagyok:

$$0 < x \leq 18 \quad \text{és} \quad 0 < y \leq 10.$$

Az egyenletből:

$$x = \frac{41 - 4y}{3}.$$

A 41-et 3-mal osztva 2-t kapunk maradékul, tehát $4y$-nak 3-mal osztva szintén 2-t kell adnia maradékként. $4y$-ra a lehetséges számok:

$$4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32,\ 36,\ 40.$$

Ezekből a számokból a 8, a 20 és a 32 adnak 3-mal osztva 2-t maradékul. Így a megoldások:

$$4y = 8 \Rightarrow y_1 = 2,\ x_1 = 11;$$
$$4y = 20 \Rightarrow y_2 = 5,\ x_2 = 7;$$
$$4y = 32 \Rightarrow y_3 = 8,\ x_3 = 3.$$

Tehát a fenti három esetben fordulhatott elő, hogy 4, illetve 5 történetet olvasott el az illető.

1546 Az 5 t teherbírású teherautó x, a másik y menetet hajtson végre:

$$5x + 7y = 99,$$
$$x = \frac{99 - 7y}{5}, \quad x \in \mathbb{Z}^+.$$

Tehát első lépésben keressük azokat a 7-tel osztható, 99-nél nem nagyobb pozitív egész számokat, amelyek majd $7y$ értékét adják.

A 99-et kizárjuk, mert nem osztható 7-tel, és ekkor x amúgy is 0 lenne. $7y$ értékei lehetnek:

$$7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49,\ 56,\ 63,\ 70,\ 77,\ 84,\ 91,\ 98.$$

Mivel $(99 - 7y)$-nál a 99-et 5-tel osztva 4 maradékot kapunk, így a fenti számok közül olyat kell kiválasztani, amelyik 5-tel osztva szintén 4 maradékot ad. (Mert így a $99 - 7y$ nem ad 5-tel osztva maradékot.)

Ezek a „nyertes számok" $7y$ értékére a 14, a 49 és a 84. A megoldások:

$$7y = 14 \Rightarrow y_1 = 2,\ x_1 = 17;$$
$$7y = 49 \Rightarrow y_2 = 7,\ x_2 = 10;$$
$$7y = 84 \Rightarrow y_3 = 12,\ x_3 = 3.$$

Az egyes teherautók által megtett menetek száma a fenti három eset valamelyike kell, hogy legyen.



Egyenletrendszerek – megoldások

1547 *a)* $x=3,\ y=1$; *b)* $x=0,\ y=-1$; *c)* $x=-2,\ y=1$; *d)* $x=2,\ y=1$.

1548 *a)* $x=1,\ y=-2$; *b)* $x=1,\ y=7$; *c)* $x=\frac{1}{3},\ y=5$; *d)* $x=-3,\ y=\frac{5}{2}$;
e) $x=9,\ y=-6$; *f)* nincs megoldás; *g)* $x=9,\ y=1$; *h)* $x=20,\ y=30$.

1549 *a)* $x=-2,\ y=1$; *b)* $x=4,\ y=2$; *c)* $x=-1,\ y=3$; *d)* $x=4,\ y=5$;
e) $x=8,\ y=\frac{7}{5}$; *f)* $x=\frac{2}{3},\ y=-6$; *g)* végtelen sok megoldás van; *h)* nincs megoldás.

1550 Legyen a muskátli palánták ára x, a petúnia palántáké y.

$$\left.\begin{aligned}12x+25y&=9840\\21x+14y&=10080\end{aligned}\right\}.$$

A megoldások: $x=320$ és $y=240$.

Tehát a muskátli palánták 320 Ft-ba, a petúnia palánták 240 Ft-ba kerülnek.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

1551 Legyen a motorcsónak sebessége állóvízben x, a folyó sebessége y.

A folyón felfelé megtett út 9 órát vett igénybe:

$$9\cdot(x-y)=72.$$

Lefelé a folyón 6 óra volt az út:

$$6\cdot(x+y)=72.$$

Az $\left.\begin{aligned}x-y&=8\\x+y&=12\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldásai: $x=10,\ y=2$.

Tehát a motorcsónak állóvízben $10\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességre képes, a folyó pedig $2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel folyik.

1552 Az első sóoldat legyen x százalékos, a második y százalékos.

A feltételek szerint:

$$4\cdot\frac{x}{100}+12\cdot\frac{y}{100}=16\cdot\frac{50}{100},\quad\text{illetve}\quad 12\cdot\frac{x}{100}+4\cdot\frac{y}{100}=16\cdot\frac{30}{100}.$$

Ha 100-zal beszorzunk a $\left.\begin{aligned}4x+12y&=800\\12x+4y&=480\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk.

Osszunk 4-gyel, majd megoldva: $x=20,\ y=60$.

Tehát az első sóoldat 20%-os, a második 60%-os.

1553 Legyen a szám első jegye x, a második y $(y<x)$.

A feladatban megadott, a maradékos osztásra vonatkozó feltételek szerint:

$$\frac{10x+y-6}{x+y}=7\quad\text{és}\quad\frac{10x+y-3}{x-y}=16.$$

Beszorozva és rendezve az $\left.\begin{aligned}x-2y&=2\\-6x+17y&=3\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk.

Megoldva: $x=8,\ y=3$.

A keresett kétjegyű szám a 83, a megoldás helyességéről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.

1554 Mivel a kacsák és nyulak számának aránya 3 : 2, legyen a kacsák száma $3x$, a nyulak száma $2x$, a tyúkok száma pedig y.

A fejek száma:

$$y + 2x + 3x = 38.$$

A lábak száma:

$$2y + 4 \cdot 2x + 2 \cdot 3x = 92.$$

Az $\left.\begin{matrix} y + 5x = 38 \\ 2y + 14x = 92 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk.

A második egyenlet 2-vel való osztása után az egyenlő együtthatók módszerével megoldva:

$$x = 4 \quad \text{és} \quad y = 18.$$

Tehát a baromfiudvarban 18 tyúk, 12 kacsa és 8 nyúl van.

Az ellenőrzés azt mutatja, hogy a megoldás helyes.

1555 Az első gép x, a második y, a harmadik z nap alatt végezné el a munkát.

A feltételek alapján a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\left.\begin{matrix} \frac{7{,}2}{x} + \frac{7{,}2}{y} = 1 \\ \frac{9}{x} + \frac{9}{z} = 1 \\ \frac{12}{y} + \frac{12}{z} = 1 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} \text{számlálókkal osztva} \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12} \end{matrix}\right\}.$$

Az első két egyenlet különbségéből: $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{36}$, majd ehhez hozzáadva a harmadik egyenletet: $\frac{2}{y} = \frac{4}{36}$, amiből $y = 18$.

Visszahelyettesítve: $z = 36$, $x = 12$.

Tehát külön-külön a gépek 12 nap, 18 nap, illetve 36 nap alatt végeznék el a munkát.

1556 Legyen a háromjegyű szám: $\overline{xyz}$.

A feltételek szerint:

$$x + y + z = 20. \quad (1)$$

Tudjuk továbbá, hogy

$$\overline{xyz} - 16 = 2 \cdot \overline{zyx},$$
$$100x + 10y + z - 16 = 200z + 20y + 2x,$$
$$98x - 16 = 199z + 10y.$$

(1)-ből $y = 20 - x - z$ behelyettesíthető:

$$98x - 16 = 199z + 200 - 10x - 10z$$
$$108x - 216 = 189z,$$
$$108 \cdot (x - 2) = 189z,$$

Mivel a bal oldal osztható 4-gyel, ezért a jobb oldal is. A z lehetséges értékei 0, 4, 8.

Ha $z = 0$, (2)-ből $x = 2$; (1)-ből $y = 18$, nem megoldás.

Ha $z = 4$, (2)-ből $x = 9$; (1)-ből $y = 7$.

Ha $z = 8$, (2)-ből $x = 16$, nem megoldás.

A feladat feltételeinek a 974 felel meg, az ellenőrzés igazolja, hogy valóban jó a megoldás.

1557 *a)* A grafikus megoldásra gondolva rendezzük az egyenleteket:

$$y = 2x - 3, \quad \text{illetve} \quad y = -\frac{1}{b} \cdot x + \frac{b-2}{b}.$$

Akkor nincs megoldás, ha a két egyenes párhuzamos, ami teljesül, ha $-\frac{1}{b} = 2$ és $\frac{b-2}{b} \neq -3$.

Az elsőből $b = -\frac{1}{2}$, a másodikból $b \neq \frac{1}{2}$.

Tehát ha $b = -\frac{1}{2}$, akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek.

b) A behelyettesítő módszerrel megoldva az egyenletrendszert:

$$x = \frac{4b-2}{2b+1}, \quad y = \frac{2b-7}{2b+1}.$$

$x = \frac{4b-2}{2b+1} > 0$, ha $b < -\frac{1}{2}$ vagy $b > \frac{1}{2}$.

$y = \frac{2b-7}{2b+1} > 0$, ha $b < -\frac{1}{2}$ vagy $b > \frac{7}{2}$.

Mindkét megoldás pozitív, ha $b < -\frac{1}{2}$ vagy $b > \frac{7}{2}$.

1558 Az első egyenletből

$$x = 12 - 3y. \quad (1)$$

Ha $x \geq 0$, akkor $y \leq 4$ kell lennie, tehát

$$0 \leq y \leq 4. \quad (2)$$

(1)-et a második egyenletbe helyettesítve: $252 - y = m$.

A (2) feltétel alapján $248 < m < 252$, tehát m lehetséges egész értékei: 248, 249, 250, 251, 252.

1559 Alakítsuk szorzattá a bal oldali kifejezést:

$$(x - 2y) \cdot (x + 2y) = 116.$$

Akkor van megoldás, ha $x - 2y$ és $x + 2y$ a 116 osztópárjai.

A 116 prímtényezős felbontása: $116 = 2^2 \cdot 29$. Két eset lehet: $4 \cdot 29$ vagy $2 \cdot 58$.

A $4 \cdot 29$-es felbontás esetében:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ x + 2y &= 29 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x = 33;$$ mivel $x \notin \mathbb{Z}^+$, ezért ez nem lehet megoldás.

A $2 \cdot 58$-es felbontás esetében:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ x + 2y &= 58 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x = 60,$$ amiből $x = 30$ és $y = 14$; $x, y \in \mathbb{Z}^+$, ezért ez megoldás.

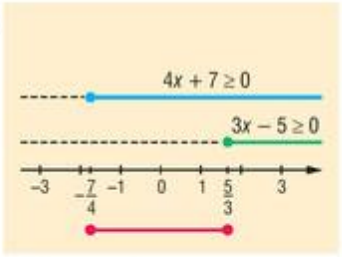
Az ellenőrzésből kiderül, hogy ez a számpár valóban megoldás.

Vegyes feladatok – megoldások

1560 *a)* $x = 6$; *b)* $x = \frac{40}{141}$; *c)* $x = \frac{1}{2}$; *d)* $x = 0$.

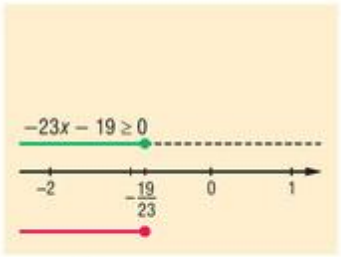
1561 *a)* $x_1 = -\frac{13}{6}$, $x_2 = \frac{13}{2}$; *b)* $x_1 = \frac{17}{5}$, $x_2 = 7$; *c)* $x = \frac{45}{17}$, ha $x < -3$, nincs megoldás.

1562 *a)*



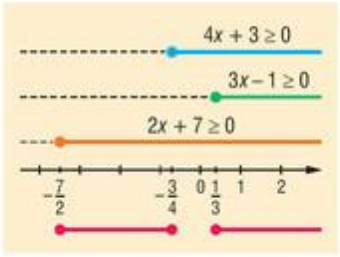
$-\frac{7}{4} \le x \le \frac{5}{3}$;

b)



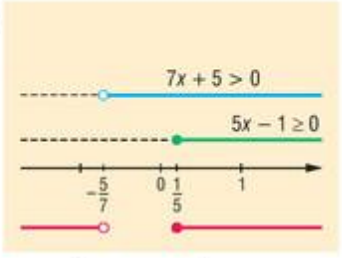
$x \le -\frac{19}{23}$;

c)



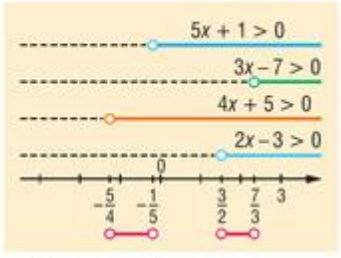
$-\frac{7}{2} \le x \le -\frac{3}{4}$ vagy $\frac{1}{3} \le x$;

d)



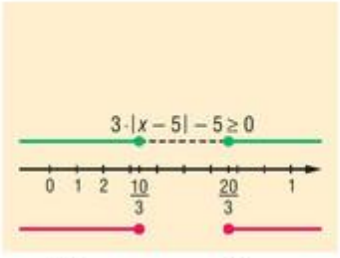
$x < -\frac{5}{7}$ vagy $\frac{1}{5} \le x$;

e)



$-\frac{5}{4} < x < -\frac{1}{5}$ vagy $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}$;

f)



$x \le \frac{10}{3}$ vagy $x \ge \frac{20}{3}$.

1563 *a)* $x = \frac{5p-3}{p-4}$, ha $p \neq 4$. Ha $p = 4$, nincs megoldás.

b) $x = 2$, ha $p \neq \frac{1}{3}$. Ha $p = \frac{1}{3}$, minden valós szám megoldás.

c) $x = p - 5$, ha $p \neq -5$. Ha $p = -5$, minden valós szám megoldás.

1564 *a)* Az egyik kerékpáros 8 óra, illetve 6 óra alatt teszi meg az utat.

b) A falu és a város távolsága 144 km.

1565 A tengervízből 2 literre van szükség.

1566 Ha a harmadik jegy x, akkor a következő egyenletet kell megoldani:

$$1900 + 10x + x + 1 - 1761 = 190 + x.$$

A születési év 1956, 2010-ben 54 éves.

1567 Ha a legidősebb testvér mai életkora x, akkor az egyenletünk:

$$x + (x - 3) + \left(\frac{x-1}{2} + 1\right) = 35.$$

Az egyenlet megoldásából a testvérek életkora 15, 12 és 8 év.

1568 Ha az utasok száma $5x$ és $4x$, akkor az alábbi egyenletet kell megoldani:

$$\frac{5x - 10}{4x + 10} = \frac{5}{7}.$$

A kirándulók száma összesen 72.



1569 Ha a fiúk száma x, a lányoké pedig y, akkor az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=9\\ 4000x+5000y&=39000\end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldása után: Juliska mamának 3 lány és 6 fiú unokája van.

1570 Legyen eredetileg x darab piros és y darab kék golyó a dobozban. Egyenletrendszerünk:

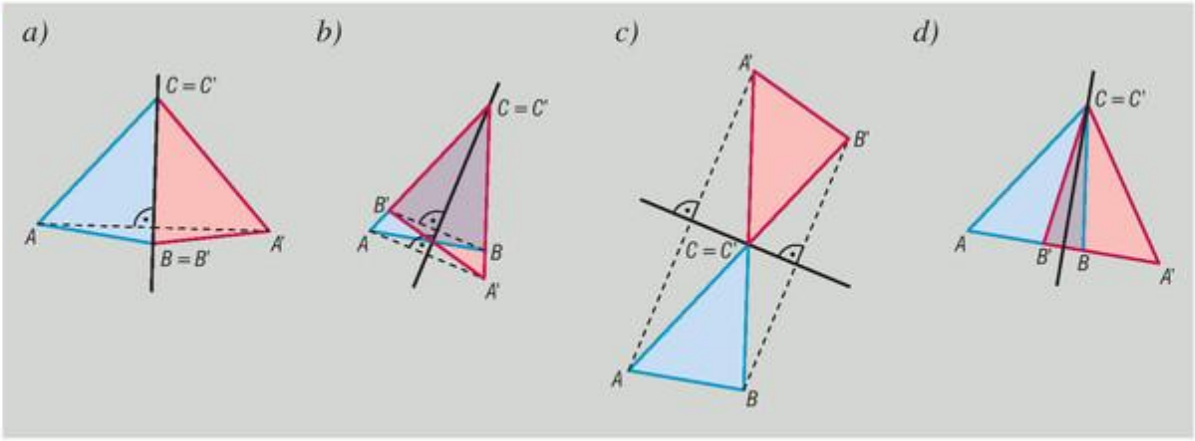
$$\left.\begin{aligned} x+y&=200\\ y+27&=x+53\end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldásából azt kapjuk, hogy 87 piros és 113 kék golyó volt eredetileg a dobozban.

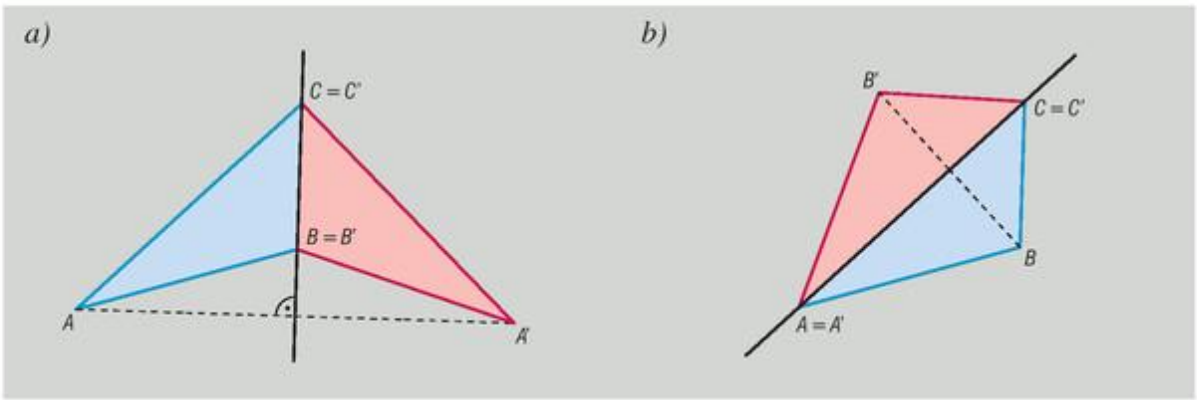
9.6. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Tengelyes tükrözés – megoldások

1571



1572 Az *a)* feladatban konkáv, a *b)* feladatban konvex deltoidot kapunk eredményül.

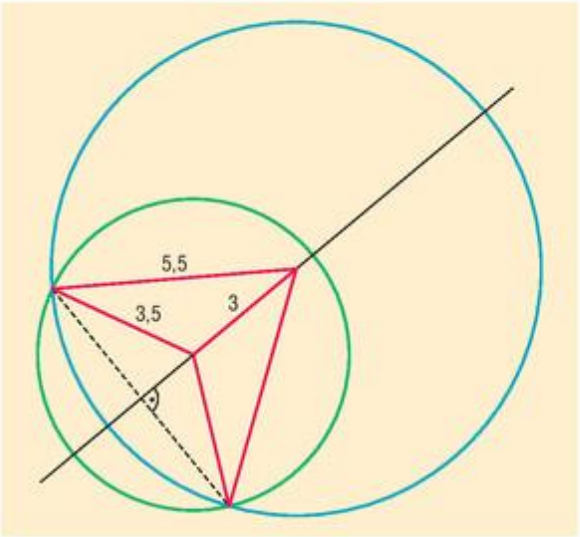


1573 A megoldás az ábrán látható. (➡)

1574 *a)* $A'(3; -1)$, $B'(-2; -5)$, $C'(-4; 2)$.
b) $A'(-3; 1)$, $B'(2; 5)$, $C'(4; -2)$.

1575 Az x tengelyre vonatkozó tükrözés után $A'(x; -y)$, majd az y tengelyre vonatkozó tükrözés után $A''(-x; -y)$. A két tengelyre vonatkozó tükrözés az origóra vonatkozó középpontos tükrözéssel helyettesíthető.

Általában is érvényes, hogy két merőleges egyenesre vonatkozó tükrözés egymás utáni elvégzése, a tengelyek metszéspontjára vonatkozó középpontos tükrözéssel egyenértékű transzformáció.





1576 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz.
e) Hamis. *f)* Igaz. *g)* Igaz. *h)* Igaz.
i) Hamis. *j)* Hamis. *k)* Igaz. *l)* Hamis.
m) Hamis. *n)* Hamis. *o)* Igaz. *p)* Hamis.
q) Hamis. *r)* Hamis.

1577 A szerkesztés lépései:

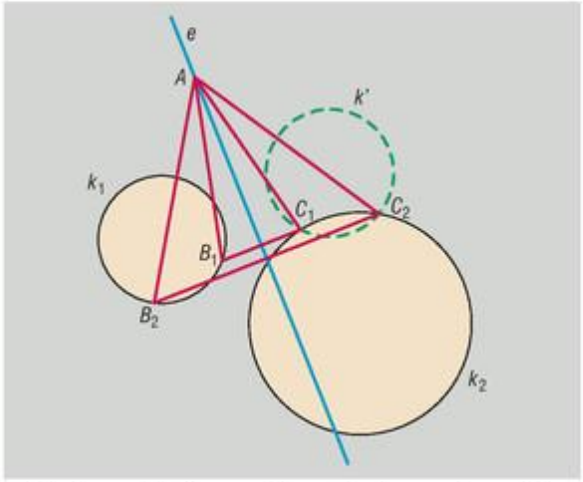
1. Tükrözzük az f egyenest az e egyenesre, a tükörképet jelöljük f_1-gyel, így kapjuk az f_1 és a g egyenesek B metszéspontját.
2. A B pontot tükrözzük az e egyenesre, így kapjuk az A pontot, amely f-re illeszkedik.
3. A szabályos ABC háromszög C csúcsát az A középpontú, B ponton átmenő kör metszi ki az e egyenesből (C_1; C_2).

A szerkeszthetőség feltétele: a g egyenes metssze az f egyenes e egyenesre vonatkozó f_1 tükörképét.

A megoldások száma attól függ, hogy van-e az f_1 és a g egyeneseknek metszéspontja. Ha a két egyenes nem metszi egymást, akkor nincs megoldása a feladatnak. Ha az f_1 és g egyenesek egybeesnek, akkor a B pont helyzete nem egyértelmű, így végtelen sok megoldása van a feladatnak. Ha az f_1 és a g egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor a feladatnak két megoldása van, amelyek az AB egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözéssel egymásba vihetők.

1578 A szerkesztés lépései:

1. A k_1 kört tükrözzük az e egyenesre; a tükörkép k'. A k' és a k_2 körök metszéspontjai az ábrán C_1 és C_2.
2. A C_1 és C_2 pontok tükrözése az e egyenesre; a tükörképek B_1 és B_2, melyek illeszkednek k_1-re.
3. Az e egyenesen egy tetszőleges A pont szerkesztése.



A szerkesztés eredménye az AB_1C_1 és az AB_2C_2 háromszög.

A szerkeszthetőség feltétele: a k' és a k_2 körök metszéspontjainak vagy érintési pontjának létezése. A megoldások száma lehet 0, ha a két körnek nincs közös pontja, minden más esetben a feladatnak végtelen sok megoldása van, mivel az A pont az e egyenes tetszőleges pontja lehet.

1579 A szerkesztés lépései:

1. A szimmetriatengelyre illeszkedő két csúcson (A és C) átmenő t egyenes szerkesztése.
2. Az egyik kör t egyenesre vonatkozó tükörképének szerkesztése.
3. A tükörképként kapott kör, valamint a másik kör metszéspontjainak megjelölése; a metszéspontok egyikét jelölje B.
4. A B pont t egyenesre vonatkozó tükörképének szerkesztése; a kapott pont D.

A szerkesztés eredménye az $ABCD$ deltoid.

A szerkeszthetőség feltétele: a harmadik lépésben vett két körnek legyen legalább 1 közös pontja. A megoldások száma attól függ, hogy a két körnek hány közös pontja van. Ezek alapján a feladatnak lehet 0, 1, 2, esetleg végtelen sok megoldása.

1580 *a)* A szerkesztés lépései:

1. A szimmetriatengelyre illeszkedő két csúcson átmenő t egyenes szerkesztése.
2. Az adott szög megfelezése.
3. A megfelezett szög másolása a t egyenesre, a deltoid megfelelő csúcsához.
4. A deltoid adott oldalát körzőnyílásba vesszük, majd kört szerkesztünk, melynek középpontja a deltoid megfelelő csúcsa. A kör az átmásolt szög szárából kimetszi a deltoid harmadik csúcsát.
5. A kapott csúcs t egyenesre vonatkozó tükörképe a deltoid negyedik csúcsa.

b) A szerkesztés lépései:

1. A szimmetriatengelyre illeszkedő két csúcson átmenő t egyenes szerkesztése.
2. Az adott szög megfelezése.
3. A megfelezett szög másolása a t egyenesre, a deltoid megfelelő csúcsához, és a szögszár meghosszabbítása.
4. A deltoid adott oldalát körzőnyílásba vesszük, majd kört szerkesztünk, melynek középpontja a deltoid szintén adott, de a szóban forgó oldalegyenesre nem illeszkedő csúcsa.
5. A szerkesztett kör metszi ki a 3. pontban szerkesztett szögszárból a deltoid harmadik csúcsát.
6. A kapott csúcs t egyenesre vonatkozó tükörképe a deltoid negyedik csúcsa.

1581 A szerkesztés lépései:

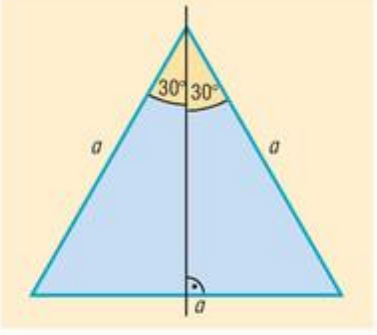
1. Az adott átló két végpontját összekötő szakasz, majd a szakasz felezőmerőlegesének szerkesztése.
2. Az adott szög megfelezése.
3. A megfelezett szög átmásolása az átlóra annak valamelyik végpontjában.
4. A szögszár kimetszi az átló felezőmerőlegeséből a rombusz harmadik csúcsát.
5. A kapott csúcs átlóra vonatkozó tükörképe a rombusz negyedik csúcsa.

1582 A szerkesztés lépései:

1. Az egyik kör adott egyenesre vonatkozó tükörképének szerkesztése.
2. A tükörkép kör másik körrel való metszéspontjainak szerkesztése; a kapott pontokat összekötő szakasz a trapéz egyik szára.
3. A szerkesztett metszéspontok tükrözése az adott szimmetriatengelyre; a kapott pontok a trapéz másik szárának végpontjai.

A megoldások száma attól függ, hogy az 1. pontban szerkesztett kör a másik körrel milyen helyzetű. Ha a két körnek nincs közös pontja, vagy érintő helyzetűek, akkor a feladatnak nincs megoldása. Ha a metszéspontok száma 2, akkor a feladatnak 1 megoldása van. Ha két kör egybeesik, akkor végtelen sok megoldás van.

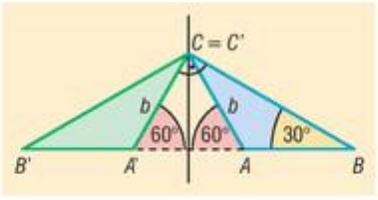
1583 Tükrözzük a háromszöget a 30°-os szög melletti befogó egyenesére. A két háromszög egyesítése olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárszöge 60°, így a háromszög szabályos, oldalai a derékszögű háromszög a átfogójával egyenlőek. Mivel a tükörtengelyre merőleges oldalt a tengely felezi, ezért a derékszögű háromszög 30°-os szögével szemben valóban $\frac{a}{2}$ hosszúságú oldal van. (➡)



1584 Mindhárom szakasz hossza 6 cm.



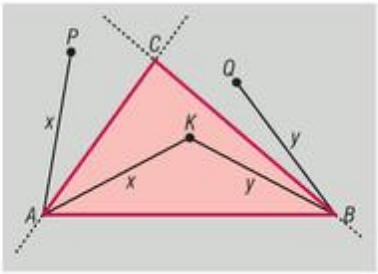
1585 A feltételek szerint $CA'A\sphericalangle = 60°$, továbbá a tükrözés tulajdonságai alapján $CA = CA'$. Ebből adódóan az $AA'C$ háromszög szabályos, és így $A'AC\sphericalangle = 60°$. Mivel $A'AC\sphericalangle$ az ABC háromszög külső szöge, így a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, amiből azonnal adódik, hogy $BCA\sphericalangle = 30°$. Ekkor az ABC háromszög két szöge egyenlő, ezért valóban egyenlő szárú háromszög.



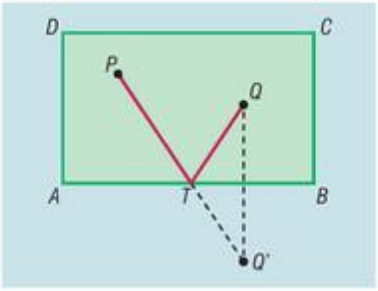
1586 A két téglalap közös része rombuszt alkot.

1587 Tegyük fel, hogy $AP = BQ$. A tükrözés távolságtartó tulajdonsága alapján $AP = AK = x$, továbbá $BK = BQ = y$. A feltételek szerint azonban $x = y$, ami azt is jelenti, hogy a K pont az A és B pontoktól ugyanolyan távol található. Ebből adódóan K valóban illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére.

Tegyük fel, hogy K illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére, azaz $AK = BK$. Ekkor tükörképeik, azaz AP és BQ is egyenlő hosszúak. Ezzel az állítást igazoltuk.



1588 A megfelelő T pontot a PQ' szakasz metszi ki az AB falból, ahol Q' a Q pont AB egyenesre vonatkozó tükörképe.



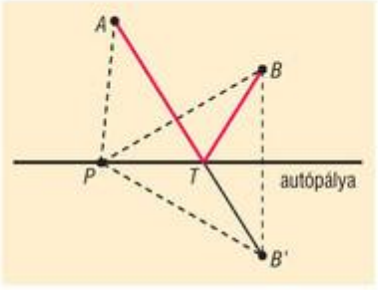
1589 A bevásárlóközpont T helyét az AB' egyenes metszi ki az autópályából, ahol B' a B pont tükörképe az autópálya egyenesére vonatkozóan. Valóban:

$$AT + TB = AT + TB' = AB',$$

továbbá ha P az autópálya mellett egy T-től különböző pont, akkor

$$AP + PB = AP + PB' > AB'.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség a háromszög-egyenlőtlenség közvetlen következménye az $AB'P$ háromszögben.



1590 Vegyük fel az A csúcshoz tartozó külső szögfelezőn (f) az A-tól különböző P pontot, majd tükrözzük f-re a C pontot, így kapjuk C'-t. Mivel a szögfelezőre vonatkozó tükrözés során a szögszárak egymásba mennek át, ezért a C' pont illeszkedik a BA félegyenesre, továbbá $AC' = AC = b$, illetve $PC' = PC$.

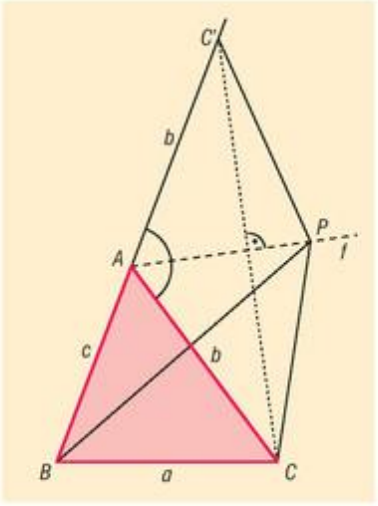
Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget a $BC'P$ háromszög BC' oldalára:

$$BC' < PC' + PB,$$
$$c + b < PC + PB.$$

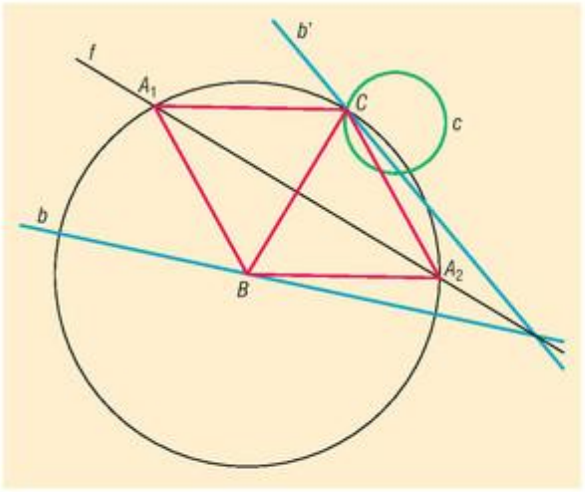
Mindkét oldalhoz az ABC háromszög $a = BC$ oldalát hozzáadva azt kapjuk, hogy

$$a + c + b < BC + PC + PB,$$

ami mutatja, hogy a PBC háromszög kerülete valóban nagyobb, mint az ABC háromszög kerülete.

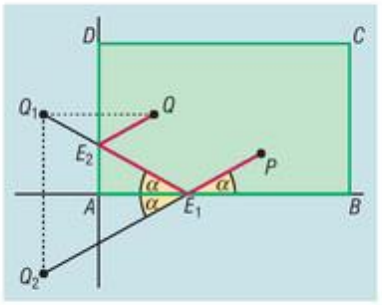


1591 Adottak az A csúcshoz tartozó belső szögfelező (f), továbbá a B csúcsot tartalmazó b egyenes és a C csúcsot tartalmazó c kör. A szerkesztendő háromszög tengelyesen szimmetrikus az f egyenesre vonatkozóan, ezért a B csúcs tükörképe illeszkedik a c körre. Ezt az észrevételt felhasználva, a szerkesztés lépései a következők:



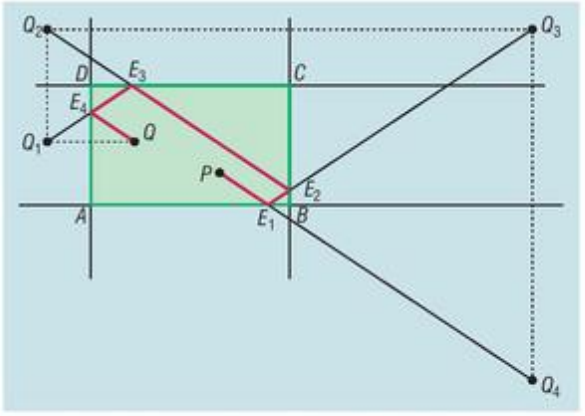
1. A b egyenest tükrözzük az f egyenesre, a tükörkép b'.
2. A b' egyenes és a c kör metszéspontjának (metszéspontjainak) szerkesztése, a metszéspont C. Az ábrán a jobb áttekinthetőség érdekében csak egy metszéspontot rajzoltunk be.
3. A C pont tükrözése az f egyenesre, a tükörkép B.
4. A B középpontú, C-t tartalmazó kör szerkesztése.
5. A kör és az f egyenes metszéspontjainak szerkesztése, a metszéspontok A_1 és A_2. Az A_1BC, A_2BC háromszögek szabályosak, és a feladat feltételeinek megfelelnek.

1592 *a)* Feltételezzük, hogy a falról visszapattanó golyó ugyanakkora szögben pattan vissza, mint amekkora szögben a falhoz érkezik, vagyis az ábrán azonos módon jelölt szögek megegyeznek. Ezt másként úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha a visszapattanó golyó útját a falra tükrözzük, akkor az egy egyenesbe esik a visszapattanás előtti útjával. Ezek alapján a golyó útját a következőképpen szerkeszthetjük meg. Tükrözzük a Q pontot az AD falra, a tükörképet jelöljük Q_1-gyel. A Q_1 pontot tovább tükrözzük, ezúttal az AB fal egyenesére, a tükörképet jelöljük Q_2-vel. A PQ_2 szakasz kimetszi a falból a keresett út első érintési pontját, amit az ábrán E_1-gyel jelöltünk. Az AD fallal való E_2 metszéspontot az E_1Q_1 szakasz metszi ki az AD falból.



b) Az *a)* feladatban felhasznált módszert fejlesztjük tovább. Tükrözzük a Q pontot a DA egyenesre, a tükörképet Q_1-gyel jelöljük. Ezt a Q_1 pontot a CD egyenesre tükrözzük, így kapjuk a Q_2 pontot, amelynek BC egyenesre vonatkozó tükörképe Q_3. Végül a Q_3 pont AB egyenesre vonatkozó tükörképe Q_4.

A golyót a PQ_4 szakasz mentén kell ellökni; a szakasz kimetszi az AB falból az első érintési pontot, E_1-et. Az E_1Q_3 szakasz kimetszi a BC falból a második érintési pontot, E_2-t. Az E_2Q_2 szakasz CD fallal való metszéspontja a harmadik érintési pont (E_3), végül E_4-et az E_3Q_1 szakasz és a DA oldal metszéspontjaként kapjuk meg.

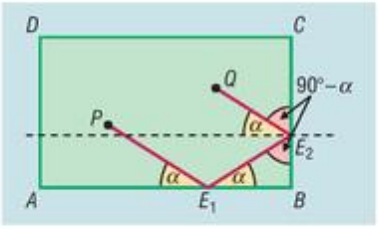


1593 Ha a golyó az AB falat az E_1, a BC falat az E_2 pontban érinti, és az ábra jelöléseinek megfelelően $PE_1A\sphericalangle = \alpha$, akkor a golyó az AB fallal az első visszapattanás után is α szöget bezáró úton halad tovább, azaz $E_2E_1B\sphericalangle = \alpha$. Az E_1E_2B derékszögű háromszög mutatja, hogy a golyó

$90° - \alpha$ szögben érkezik a BC falhoz, és ezért onnan ugyanakkora szögben verődik vissza, azaz

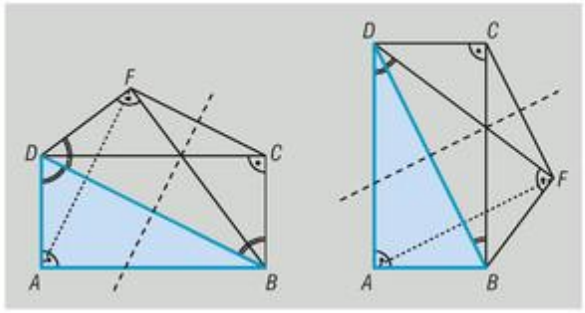
$$QE_2C\sphericalangle = 90° - \alpha.$$

Ha párhuzamost húzunk az E_2 ponton át az AB oldallal, akkor könnyen látható, hogy az E_2Q szakasz a párhuzamossal α szöget zár be, ami igazolja, hogy PE_1 és E_2Q párhuzamos egymással.



1594 *a)* A BDA háromszög BD egyenesre vonatkozó tükörképe a BDF háromszög. A tengelyes tükrözés megtartja a szögeket, ezért $DFB\sphericalangle = DAB\sphericalangle = 90°$, így DF és BF valóban merőlegesek egymásra.

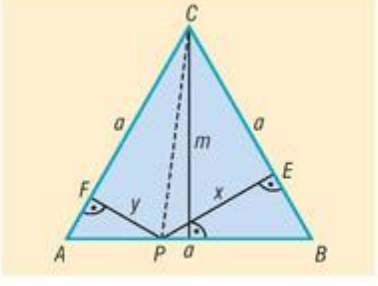
b) A B, F, C és D pontok az $ABCD$ téglalap oldalainak hosszától függően kétféle sorrendben alkothatnak szimmetrikus trapézt. A két esetet az ábrák szemléltetik. A bizonyítást az első ábra alapján végezzük el, a másik esetben értelemszerű módosításokkal juthatunk célhoz.



Vegyük észre, hogy az ábra azonos módon jelölt szögei megegyeznek! Ez részint abból következik, hogy az $ADB\sphericalangle$ BD egyenesre vonatkozó tükörképe az $FDB\sphericalangle$, részint pedig abból, hogy az $ADB\sphericalangle$ és a $CBD\sphericalangle$ váltószögpárt alkotnak. Ekkor viszont a BD szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tengelyes tükrözés során a D pont képe a B pont, míg $DF = BC$ miatt az F pont a C pontba megy át, vagyis a $BCFD$ négyszög szimmetrikus trapéz.

1595 **I. megoldás.** Jelöljük az ABC háromszög oldalának hosszát a-val, a P pont BC, valamint CA oldalalakra eső merőleges vetületét E-vel, valamint F-fel. Legyen továbbá $PE = x$, $PF = y$. Ekkor az ACP és BCP háromszögek területének összege megegyezik az ABC háromszög területével, azaz ha az ABC háromszög magasságát m-mel jelöljük, akkor

$$\frac{a \cdot y}{2} + \frac{a \cdot x}{2} = \frac{a \cdot m}{2}.$$

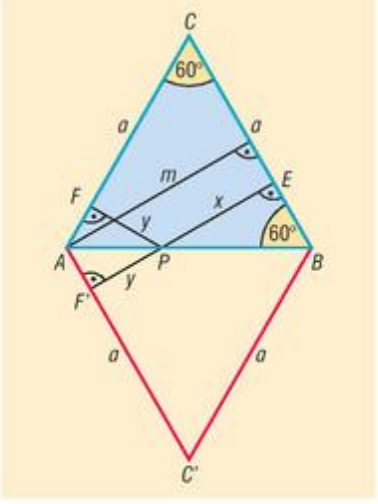


A lehetséges egyszerűsítések elvégzése után azt kapjuk, hogy $y + x = m$. Ez azt jelenti, hogy a P pontnak az AC és BC oldalaktól mért távolságösszege a P pont helyzetétől függetlenül megegyezik az ABC háromszög magasságával.

II. megoldás. Mivel $APF\sphericalangle = BPE\sphericalangle = 30°$, ezért ha a PF szakaszt tükrözzük az AB egyenesre, akkor E, P, valamint az F pont F' tükörképe egy egyenesre illeszkednek. Ha nemcsak a PF szakaszt, hanem az ABC háromszöget is tükrözzük, akkor az eredeti és a képháromszög egyesítése rombusz, melyben az EF' szakasz a magasság. A rombusz és az ABC háromszög magassága természetesen megegyezik, ezért

$$x + y = EP + PF = EP + PF' = EF' = m,$$

ami a P helyzetétől függetlenül valóban állandó.

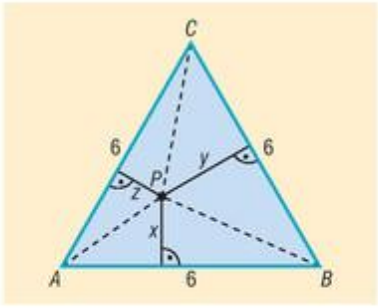


1596 **I. megoldás.** Ha P pontnak a háromszög oldalaitól mért távolságát x, y, z jelöli, akkor az ABP, BCP és CAP háromszögek területének összege megegyezik az ABC háromszög területével, így

$$\frac{6\cdot x}{2}+\frac{6\cdot y}{2}+\frac{6\cdot z}{2}=\frac{6\cdot M}{2},$$

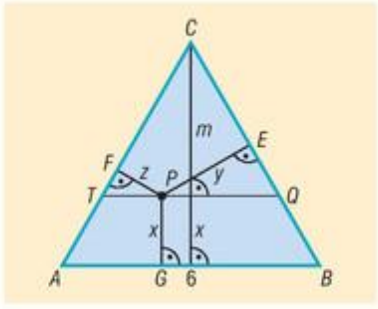
ahol M az ABC háromszög magassága. Az egyszerűsítések elvégzése után $x+y+z=M$ adódik.

A szabályos háromszög magassága az oldalának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese, így $x+y+z=3\cdot\sqrt{3}\approx 5{,}2$ cm.

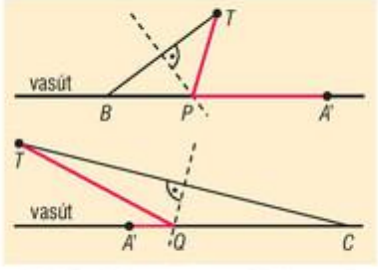


II. megoldás. Húzzunk a P ponton át párhuzamost az AB szakasszal; a párhuzamos az ábra jelöléseinek megfelelően a T és Q pontokban metssze az AC és BC oldalakat. A TQC háromszög minden szöge 60°-os, ezért a háromszög szabályos. A P pont a TQ oldal egy belső pontja, ezért az 1595. feladat eredményét alkalmazhatjuk a P pontra, valamint a TQC háromszögre. Így kapjuk, hogy $y+z=m$, ahol m a háromszög magassága.

Ekkor $x+y+z=x+m=M$, ahol M immár az ABC háromszög magassága (ld. ábra).



1597 Mérjünk fel a megépítendő út teljes 8 km-es hosszával megegyező távolságot a vasút mentén, az A' állomástól kiindulva. Az út végpontját jelöljük B-vel a bal oldali ábrának megfelelően. Mivel a BT szakasz szimmetriatengelyén lévő pontok ugyanolyan távolságra vannak a T településtől, mint a B ponttól. Ha P jelöli a szimmetriatengely és vasút metszéspontját, akkor $TP=BP$ miatt $TP+PA'=BP+PA'=8$ km, ezért a P pont megfelel az EU-s pályázatban foglalt feltételeknek.

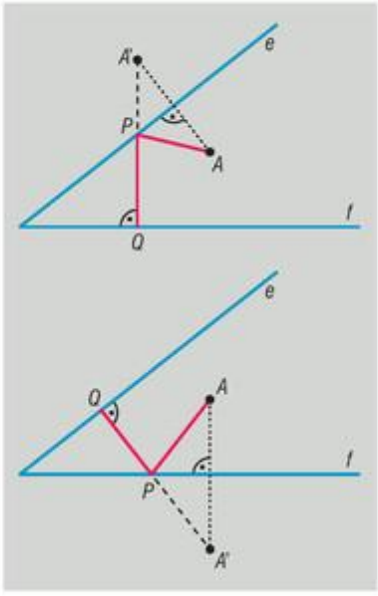


Ha a jobb oldali ábrának megfelelően a 8 km-es utat az állomástól kiindulva a másik irányba mérjük fel, akkor az így kapott C ponttal megismételhetjük a szerkesztést, és egy további, a feladat feltételeinek szintén megfelelő Q pontot kapunk eredményül.

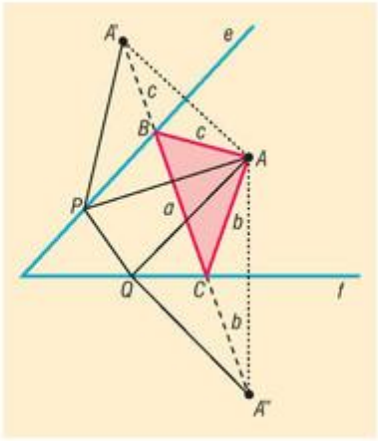
1598 A feladat nem rendelkezik arról, hogy a szerkesztendő APQ törött vonal milyen sorrendben érintse az adott szög szárait, ezért két lehetséges sorrendet is vizsgálnunk kell.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a P pont az e szögszárra illeszkedik. Tükrözzük az A pontot az e szögszárra, a tükörképet jelöljük A'-vel. Mivel a tengelyes tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért $AP=A'P$, így $AP+PQ=A'P+PQ$. A feladat tehát arra redukálódik, hogy szerkesszünk az A' pontból olyan utat az f szögszárig, amely metszi az e szögszárat, és hossza a lehető legrövidebb. Az ilyen út szerkesztéséhez elegendő az A' pontból merőlegest állítanunk az f szögszárra. A merőleges kimetszi az e szögszárból a megfelelő P pontot.

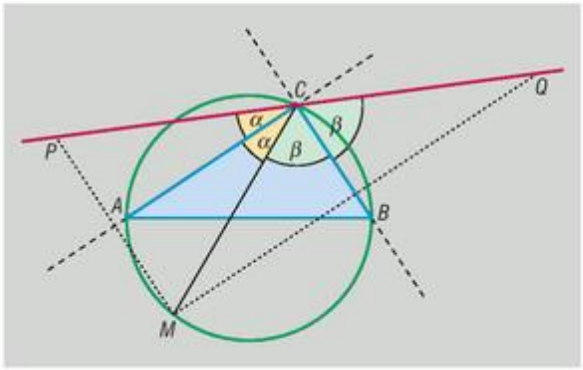
Ha a szerkesztendő törött vonal előbb az f szögszárat érinti, akkor az A pontot értelemszerűen az f-re kell tükrözni. A szerkesztés eredményét ebben az esetben az alsó ábra mutatja.



1599 Legyen P az e, Q az f szögszár egy-egy pontja, az A pont e-re, valamint f-re vonatkozó tükörképe A', valamint A''. A tükrözés távolságtartó tulajdonsága alapján az APQ háromszög kerületére teljesül, hogy $AP + PQ + QA = A'P + PQ + QA''$. Mivel A' és A'' a P és Q pontok helyzetétől függetlenül állandó, ezért feladatunk úgy is megfogalmazható, hogy szerkesszünk olyan $A'BCA''$ törött vonalat, amelynek B és C pontjai egy-egy szögszárra illeszkednek, továbbá a törött vonal hossza a lehető legrövidebb. Mivel a törött vonal hossza pontosan akkor lesz a legrövidebb, ha belső pontjai illeszkednek az $A'A''$ szakaszra, ezért a minimális hosszúságú vonal B és C pontjait az $A'A''$ szakasz metszi ki a szögszárakból. Az ABC háromszög kerülete megegyezik az $A'A''$ szakasz hosszával.



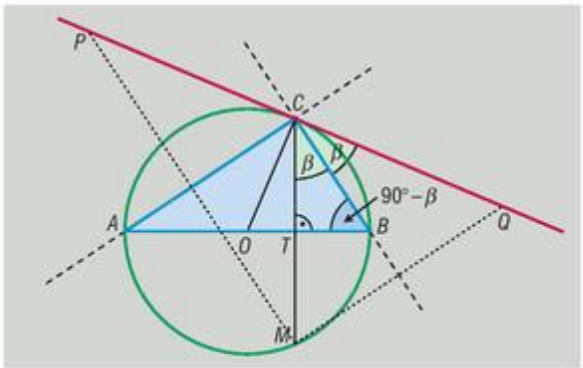
1600 *a)* Ha nemcsak az M pontot, hanem az MC szakaszt is tükrözzük, akkor a következő megállapításokat tehetjük. A C pont mindkét tükrözés után helyben marad, továbbá a szögtartó tulajdonság alapján $MCA\sphericalangle = PCA\sphericalangle = \alpha$, valamint $MCB\sphericalangle = QCB\sphericalangle = \beta$. Ekkor persze $PCQ\sphericalangle = 2\cdot\alpha + 2\cdot\beta = 2\cdot(\alpha+\beta) = 180°$, mivel az ABC háromszög derékszögű. A C csúcsnál kialakuló egyenesszög mutatja, hogy a P, C, Q pontok az M pont helyzetétől függetlenül egy egyenesre illeszkednek.



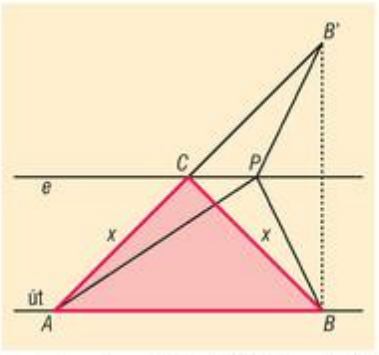
b) A tengelyes tükrözés távolságtartó tulajdonságából következik, hogy $MC = PC$, illetve $MC = QC$, aminek egyszerű következményeként $PQ = PC + QC = 2\cdot MC$ adódik. Ez azt is jelenti, hogy a PQ szakasz akkor a lehető legrövidebb, amikor az MC szakasz is ilyen tulajdonságú, ez pedig pontosan akkor következik be, amikor az M pont egybeesik az ABC háromszög rövidebb befogójának C-től különböző végpontjával (a fenti ábrán ez éppen a B pont). A minimális hosszúságú PQ szakasz kétszer olyan hosszú, mint az ABC háromszög rövidebb befogója. Megjegyezzük, hogy ha az ABC háromszög egyenlő szárú, akkor az átfogó mindkét végpontjára minimálisnak adódik a PQ szakasz hossza.

Előző gondolatmenetünk egy másik következménye, hogy a PQ szakasz akkor a lehető leghosszabb, amikor M az ABC háromszög köré írt kör C-vel átellenes pontja. Ekkor a PQ szakasz hossza az AB átfogó hosszának kétszerese.

c) Ha az M pont egybeesik a C pont AB egyenesre vonatkozó tükörképével, akkor a CM szakasz éppen az ABC háromszög átfogóhoz tartozó magasságának T talppontjában metszi az átfogót. Ha $MCB\sphericalangle = \beta$, akkor egyrészt a tükrözés miatt $BCQ\sphericalangle = \beta$, másrészt a CTB derékszögű háromszögből $CBT\sphericalangle = 90 - \beta$. Ha O az ABC háromszög köré írt kör középpontja, akkor a BCO háromszög egyenlő szárú, így BC alapján fekvő szögei megegyeznek, azaz $OCB\sphericalangle = CBO\sphericalangle = CBT\sphericalangle = 90° - \beta$. Végül egyszerű szögszámolással láthatjuk, hogy $OCQ\sphericalangle = OCB\sphericalangle + BCQ\sphericalangle = (90° - \beta) + \beta = 90°$, vagyis OC és CQ merőlegesek egymásra. Ez csak úgy lehetséges, ha a CQ egyenes az ABC háromszög köré írt kör érintője.



1601 *a)* Jelöljük a birtok bekötőúttal határos szakaszának végpontjait A-val és B-vel. A feladat szerint olyan C pontot kell keresnünk, amelyre az ABC háromszög kerülete a lehető legkisebb.

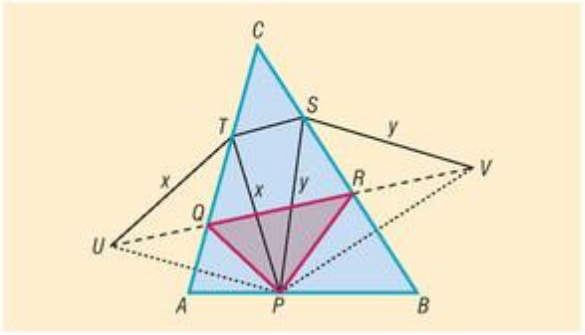


A szöveg alapján $AB = 200$ méter, továbbá a háromszög területe 1 hektár = 10 000 m^2. Az adatokból kiszámolható, hogy a háromszög AB oldalhoz tartozó magassága 100 méter, így a C pont az AB-vel párhuzamos, attól 100 méter távolságra haladó e egyenesen található.

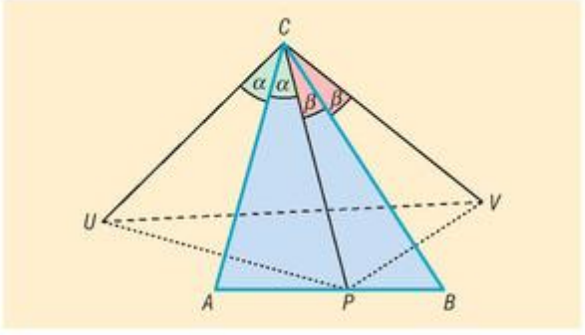
Tekintsük az e egyenes egy tetszőleges P pontját, majd tükrözzük a PB szakaszt az e egyenesre. A tükrözés során a P pont helyben marad, a B pont képe B', a távolságtartó tulajdonság miatt $PB = PB'$. Az ABP háromszög kerülete $200 + AP + PB = 200 + AP + PB'$. Mivel a B' pont helyzete független a P pont helyétől, ezért a kerület láthatóan akkor a lehető legkisebb, amikor az APB' törött vonal hossza minimális, ami akkor következik be, ha az A, P, B' pontok egy egyenesre illeszkednek. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a legkisebb kerületű háromszög C csúcsát az AB' szakasz metszi ki az e egyenesből.

b) Mivel $AB = BB' = 200$ méter, ezért az ABB' háromszög egyenlő szárú és derékszögű. A tükrözés tulajdonságai miatt a $BB'C$ háromszög is egyenlő szárú, melynek BB' alapján ezek szerint 45°-os szögei vannak. Ekkor viszont az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van, amiből következik, hogy az ABC háromszög is derékszögű és egyenlő szárú. Ha $AC = BC = x$, akkor Pitagorasz tétele alapján $x^2 + x^2 = 200^2$, amiből $x = 100 \cdot \sqrt{2}$ méter. Az ABC háromszög kerülete $200 + 200 \cdot \sqrt{2}$, így Géza bácsinak legalább $1{,}05 \cdot (200 + 200 \cdot \sqrt{2}) \approx 507$ méter kerítést kell vásárolnia.

1602 *a)* Legyen az AC oldal egy pontja T, a BC oldal egy pontja pedig S. Tükrözzük a PT szakaszt az AC, a PS szakaszt pedig a BC oldal egyenesére, a P pont tükörképeit pedig jelölje rendre U, V (ld. ábra). A tükrözés tulajdonságai miatt $PT = UT = x$ és $PS = VS = y$, amiből következik, hogy a PTS háromszög kerülete megegyezik az $UTSV$ törött vonal hosszával. Mivel az U és V pontok helyzete független a T és S pontok választásától, ezért a törött vonal hossza akkor lesz a legkisebb, amikor T és S illeszkedik az UV szakaszra. Az eddigi gondolatmenetünk alapján könnyen szerkeszthető a minimális kerületű beírt PQR háromszög, hiszen annak Q és R csúcsait az U és V pontokat összekötő szakasz metszi ki a háromszög megfelelő oldalaiból. A PQR háromszög kerülete természetesen megegyezik az UV szakasz hosszával.



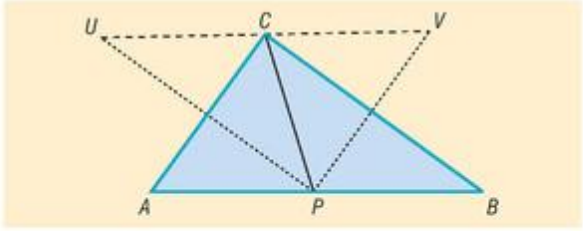
b) A feladat kérdése arra vonatkozik, hogy miként kell az AB oldal P pontját megválasztani, ha azt akarjuk, hogy a kapott PQR háromszög kerülete, azaz az UV szakasz hossza a lehető legkisebb legyen. Mivel a tükrözés megtartja a szögek nagyságát, ezért az ábrán azonos módon jelölt szögek egyenlők. Mivel a tükrözés a távolságot is megtartja, ezért $CU = CV = CP$. Eszerint az UVC háromszög a P pont tetszőleges



választása mellett egyenlő szárú háromszög, amelyben a szárak által bezárt szög $2\cdot(\alpha+\beta)$, ahol $\alpha+\beta$ az ABC háromszög C csúcsnál lévő szögét jelöli.

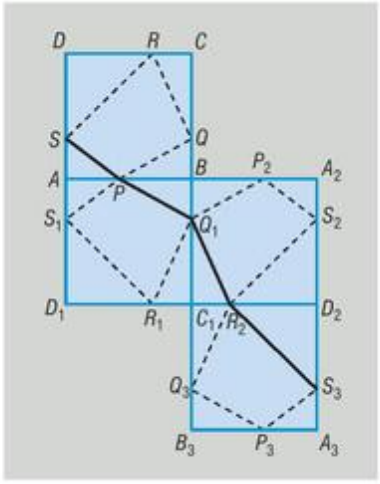
Az ilyen háromszögek UV alapja pontosan akkor minimális, amikor a háromszög szára, vagyis a CU szakasz, a lehető legkisebb. A $CU = CP$ szakasz pedig akkor a legkisebb, amikor P az ABC háromszög C csúcsból induló magasságvonalának talppontja. Gondolatmenetünk egy nem túl bonyolult következménye, hogy egy hegyesszögű háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a lehető legkisebb.

c) Ha az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög van, akkor $UCV\sphericalangle = 180°$, ami azt jelenti, hogy a C pont illeszkedik az UV szakaszra. Ebben az esetben tehát UV nem belső pontokban metszi a háromszög AC és BC oldalait, így nem létezik minimális kerületű beírt háromszög sem.



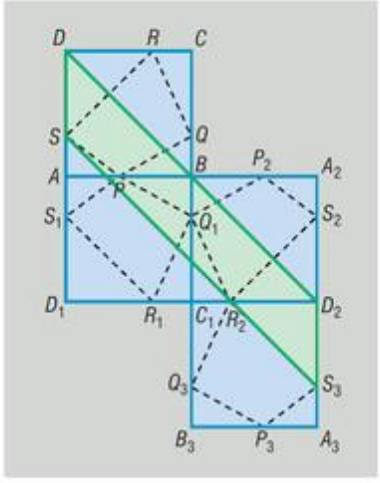
Hasonló a helyzet tompaszögű háromszög esetén is; ekkor az UV szakasz egyáltalán nem metszi a háromszög oldalait.

1603 *a)* Az $ABCD$ téglalapba az alábbi ábra szerint beírtuk a $PQRS$ négyszöget. Feladatunk a legkisebb kerületű négyszög szerkesztése. A továbbiakban „kiterítjük" a beírt négyszög oldalait egy törött vonalba. Tükrözzük a téglalapot a beírt sokszöggel együtt az AB egyenesre, az így kapott tükörképeket 1 indexszel láttuk el. További két tükrözéssel (az ábrán a k-adik tükrözés után kapott pontok k indexet kaptak) sikerül kiteríteni a $PQRS$ négyszög oldalait; a négyszög kerülete megegyezik az $SPQ_1R_2S_3$ törött vonal hosszával. Ennek hossza akkor minimális, amikor szakasszá fajul, ami azt jelenti, hogy a minimális kerületű beírt négyszög kerülete egyenlő az SS_3 szakasz hosszával.



Az SS_3 szakasz hossza látszólag függ az S pont választásától. A tükrözés távolságtartó voltából fakadóan azonban könnyen végiggondolhatjuk, hogy $SD = S_1D_1 = S_2D_2 = S_3D_2$, továbbá SD és S_3D_2 párhuzamosak, amiből következik, hogy a DSS_3D_2 négyszög paralelogramma, így az SS_3 szakasz hossza megegyezik a DD_2 szakasz hosszával, ami viszont épp az eredeti téglalap átlójának kétszerese.

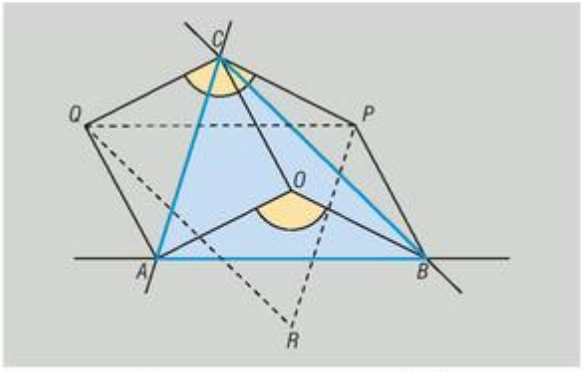
Ezzel igazoltuk, hogy a P pontot csúcsként tartalmazó, a téglalapba beírt négyszögek kerületének minimuma épp a téglalap átlójának kétszerese, ami valóban független a P pont helyzetétől.



b) A téglalap oldalainak ismeretében Pitagorasz tételével az átlóra 35 m adódik, ezért a telek elkerítéséhez 70 m kerítés szükséges.

c) Az előzőek alapján már nem túlságosan nehéz a minimális kerületű beírt négyszög szerkesztése. Húzzunk a DD_2 szakasszal párhuzamost a P ponton át. Ez a D_2A_3 szakaszból kimetszi a minimális kerületű beírt $PQRS$ négyszög S pontjának S_3 harmadik tükörképét, a C_1D_2 szakaszból kimetszi az R pont R_2 második tükörképét, míg a BC_1 szakaszból kimetszi a Q pont Q_1 első tükörképét. Ezáltal a $PQRS$ négyszög szerkeszthető.

1604 *a)* Ha az ABC háromszög köré írt kör középpontját O jelöli, akkor $AO = BO = CO$, hiszen mindhárom szakasz a körülírt kör sugara. A tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért az említett szakaszok tükörképei is, így például az ábrán szereplő AQ, CQ, CP, BP szakaszok mindegyike a körülírt kör sugarával egyenlő hosszú. Ekkor viszont az $AOCQ$ és $BOCP$ négyszögek rombuszok, ezért szemközti oldalaik párhuzamosak egymással, azaz CQ párhuzamos OA-val, CP párhuzamos OB-vel, amiből következik, hogy $QCP\sphericalangle = AOB\sphericalangle$. Eddigi eredményeink alapján a QPC és ABO háromszögek egybevágók (két oldal + közbezárt szög), ezért $QP = AB$. Hasonló gondolatmenettel láthatjuk be, hogy a PQR háromszög minden oldala egyenlő az ABC háromszög egy-egy oldalával, ezért a két háromszög valóban egybevágó egymással.



b) Az *a)* feladatban láttuk, hogy a QPC és ABO háromszögek egybevágóak, továbbá két-két oldaluk párhuzamos, amiből következik, hogy harmadik oldalaik, azaz QP és AB is párhuzamos egymással. Ugyanígy; PR és CA, valamint QR és CB is párhuzamos egymással. Mivel a QO egyenes merőleges az AC egyenesre, így merőleges a PR egyenesre is, így a QO egyenes a PRQ háromszög magasságvonala, O pedig a magasságpontja. Észrevételünket felhasználva az ABC háromszög szerkesztésének a lépései a következők lehetnek. Megszerkesztjük a PQR háromszög O magasságpontját. Ezután megszerkesztjük az OQ, OR, OP szakaszok felezőmerőlegeseit. A megszerkesztett egyenesek egyben az ABC háromszög oldalegyenesei is, ezért az ABC háromszög csúcsai már könnyen szerkeszthetők.

Középpontos tükrözés – megoldások

1605 A tükörképek az egyes esetekben:

a) $A'(-3; -1)$, $B'(2; -5)$, $C'(4; 2)$;

b) $A'(-3; 7)$, $B'(2; 3)$, $C'(4; 10)$;

c) $A'(-1; 1)$, $B'(4; -3)$, $C'(6; 4)$;

d) $A'(1; -3)$, $B'(6; -7)$, $C'(8; 0)$;

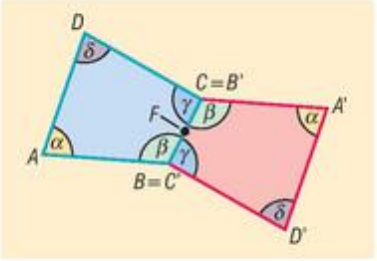
e) $A'(-5; -5)$, $B'(0; -9)$, $C'(2; -2)$;

f) $A'(-5; 13)$, $B'(0; 9)$, $C'(2; 16)$.

1606 A két háromszög egyesítése paralelogrammát határoz meg, mert a kapott négyszög középpontosan szimmetrikus.

1607 A két trapéz egyesítése paralelogrammát határoz meg, mert a kapott négyszög középpontosan szimmetrikus.

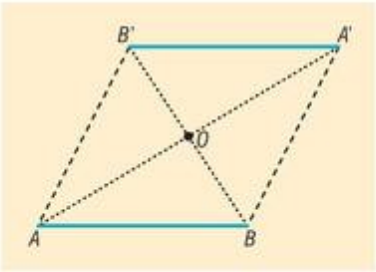
1608 Ha az $ABCD$ négyszög BC oldalának F felezőpontjára tükrözünk, akkor a szokásos jelölések mellett az $ABDA'CD$ hatszög szögei α, $\beta + \gamma$, δ, α, $\beta + \gamma$, δ. A középpontos tükrözés során a szakasz és tükörképe párhuzamos egymással, ezért a kapott hatszög szemközti oldalai valóban párhuzamosak.



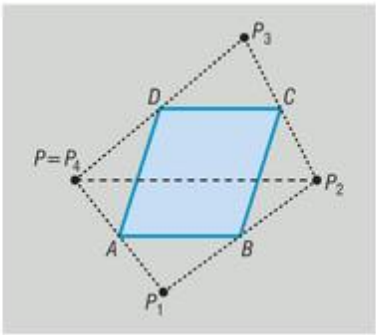


1609 Ha a két szakasz nem esik egy egyenesbe, akkor végpontjaik egy paralelogramma csúcsait alkotják. Ebben a paralelogrammában az átlók metszéspontjára vonatkozó tükrözés a szakaszokat egymásba viszi át.

Ha a két szakasz (AB és tükörképe $A'B'$) végpontjai egy egyenesre illeszkednek, akkor nem feszítenek ki paralelogrammát, de a tükrözés középpontja ebben az esetben is az AA' és a BB' szakaszok közös felezőpontja.

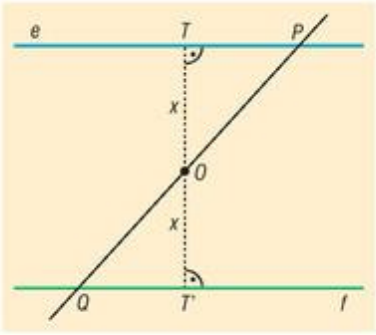


1610 A negyedik tükrözés után visszajutunk a kiindulásul vett pontba. Ha a P pontból indulunk ki, és a tükrözések eredményét rendre P_1, P_2, P_3 és P_4 jelöli, akkor ugyanis AB középvonal a PP_2P_1 háromszögben, amiből következik, hogy PP_2 párhuzamos AB-vel és hossza az AB hosszának kétszerese. Ugyanígy DC középvonal a $P_4P_2P_3$ háromszögben, amiből adódik, hogy P_4P_2 párhuzamos DC-vel és hossza a DC hosszának kétszerese. Mivel $ABCD$ paralelogramma, ezért AB és DC párhuzamosak, illetve egyenlő hosszúak, így ugyanez érvényes PP_2-re és P_4P_2-re is. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha $P = P_4$.



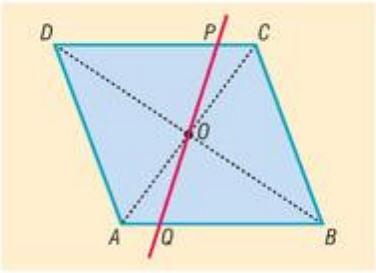
1611 A játékban Barnabásnak van nyerő stratégiája. Ehhez a következő szabály szerint érdemes játszania: az első pénzérmét úgy kell elhelyeznie, hogy középpontja egybeessen az asztal középpontjával. Ezek után nincs más dolga, csak ha András rakott, akkor a saját érméjét úgy helyezze el, hogy az asztal középpontjára vonatkozó tükörképe egybeessen az András által legutoljára elhelyezett pénzérmével. Ekkor a siker garantált, ha ugyanis András tud még rakni, akkor ez Barnabásnak is biztosan sikerülni fog.

1612 Az O pont e-re, illetve f-re vonatkozó merőleges vetületét az ábrán T-vel, illetve T'-vel jelöltük. A feltételek szerint $OT = OT' = x$. Vizsgáljuk az O pontra vonatkozó középpontos tükrözés tulajdonságait. A T pont képe T', továbbá az e egyenes képe olyan egyenes, amely átmegy a T' ponton és párhuzamos e-vel. Ez az egyenes csakis az f egyenes lehet. Mivel a tükrözés O középpontja illeszkedik a PQ egyenesre, ezért a P pont képe illeszkedik a PQ egyenesre, továbbá illeszkedik az e egyenes f képére is, ezért csakis a két egyenes Q metszéspontja lehet. Pont és képe ugyanolyan távolságra van a tükrözés középpontjától, ezért $OP = OQ$.

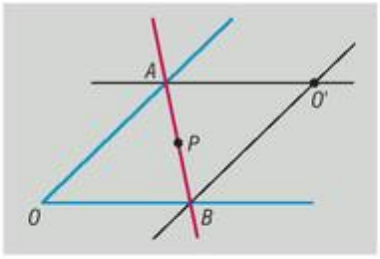


1613 Mindhárom négyszög tengelyesen szimmetrikus a négyszög egyik átlójának egyenesére, ezért mindhárom négyszög deltoid. A középen keletkező négyszög a négyzet középpontjára vonatkozó középpontos tükrözés során invariáns marad (képe önmaga), ezért paralelogramma. Mivel átlói illeszkednek a négyzet átlóira, ezért merőlegesek egymásra, így a középen keletkező négyszög rombusz.

1614 Az O pontra vonatkozó középpontos tükrözés során az A pont képe C, a D pont képe pedig B. Az 1612. feladat eredménye alapján $OP = OQ$, ezért a P és Q pontok egymás tükörképei.

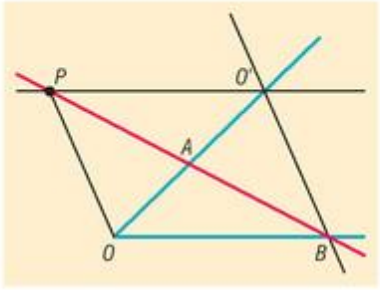


1615 A szerkesztés lépései:



1. Az adott szög O csúcsát tükrözzük az adott P pontra; a tükörképet O'-vel jelöltük.
2. Az O' ponton át párhuzamosokat szerkesztünk a szög száraival.
3. A párhuzamosok és a megfelelő szögszárak A és B metszéspontjainak szerkesztése.
4. Az AB egyenes szerkesztése. Az egyenes a kívánt tulajdonságokkal rendelkezik, hiszen az $OBO'A$ négyszög paralelogramma, ezért átlói felezik egymást, így $PA = PB$.

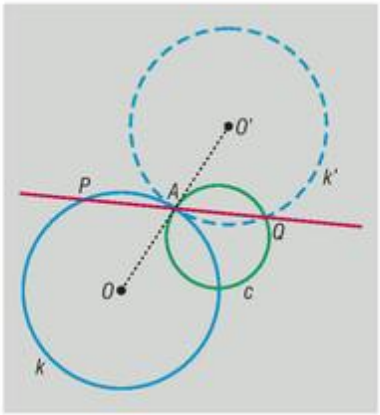
1616 A szerkesztés lépései:



1. Az adott P ponton át a megfelelő szögszárral (amelyiket a szerkesztendő egyenes a P-től mérve távolabb metsz) párhuzamost szerkesztünk.
2. A párhuzamos és a másik szögszár O' metszéspontjának szerkesztése.
3. Az O' ponton keresztül párhuzamost szerkesztünk a PO szakasszal.
4. A szerkesztett párhuzamos másik szögszárral való B metszéspontjának szerkesztése.
5. A PB egyenes szerkesztése. Az egyenes a kívánt tulajdonságú lesz, hiszen a szerkesztés menete alapján az $OBO'P$ négyszög paralelogramma, amelyben az átlók felezik egymást.

1617 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis.
d) Hamis. *e)* Hamis. *f)* Igaz.
g) Igaz. *h)* Igaz. *i)* Igaz.
j) Hamis. *k)* Hamis. *l)* Igaz.
m) Hamis. *n)* Hamis. *o)* Igaz.

1618 Jelöljük a két kört k-val és c-vel, és tegyük fel, hogy az egyik metszéspontjukon (A) átmenő egyenes az A-tól különböző P és Q pontokban metszi a két kört (ld. ábra), valamint $AP = AQ$.



Ekkor az A pontra vonatkozó középpontos tükrözés a P pontot a Q pontba, az AP szakaszt pedig az AQ szakaszba viszi át. Ez a megállapítás lehetőséget ad a Q pont egyszerű szerkesztésére; a Q pontot a k kör A pontra vonatkozó k' tükörképe metszi ki a c körből. A P pontot megkaphatjuk, ha a Q pontot tükrözzük az A pontra.

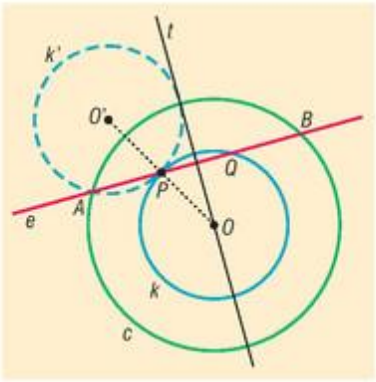
Mivel az így kapott AQ és AP szakaszok egy egyenesbe esnek, és a tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt hosszuk megegyezik, ezért a PQ egyenes megfelel a feladat minden feltételének.

A feltételekből következik, hogy a k' kör két pontban metszi a c kört, amelyek közül az egyik természetesen az A pont. Ebből adódóan a Q pont és így a P pont is egyértelműen szerkeszthető.

Újabb megoldást kapunk, ha a két kör másik metszéspontjára tükrözünk.

Vegyük végül észre, hogy a két metszésponton átmenő szelő nyilvánvalóan megfelel a feltételeknek, ezért a feladatnak három megoldása van!

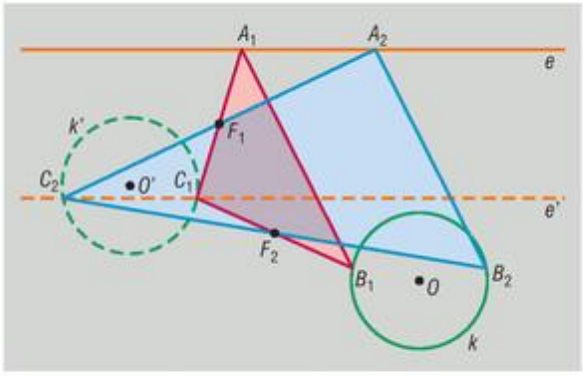
1619 A koncentrikus körök közül a belsőt k-val, a külsőt c-vel, a kisebb kör rögzített pontját P-vel jelöltük az ábrán. Tegyük fel, hogy az e egyenes a c kört A-ban és B-ben, a k kört P-ben és Q-ban metszi az ábrának megfelelően, továbbá $AP = PQ = QB$.



Ekkor a P pontra vonatkozó középpontos tükrözés során a Q pont az A pontba kerül, így a k kör képe olyan k' kör, amelynek a c körrel való egyik metszéspontja éppen A. Megállapításunk egyben eljárást ad az A pont szerkesztésére is. Az A és P pontok ismeretében az e egyenes már szerkeszthető. Nem kell aggódnunk amiatt sem, hogy esetleg QB nem lenne egyenlő AP-vel. Ugyanis ha $AP = PQ$, akkor $AP = QB$ is teljesül, amihez elegendő végiggondolnunk, hogy a PQ szakasz felezőmerőlegesére (az ábrán t jelöli) vonatkozó tengelyes tükrözés során a P pont képe Q, az A pont képe B, ezért $AP = QB$ valóban fennáll.

A szerkeszthetőség feltétele, hogy a k' kör és a c kör metssze egymást. Attól függően, hogy a két körnek hány metszéspontja van, a megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet. A két kör nem metszi egymást, ha a c kör sugara nagyobb, mint a k kör sugarának háromszorosa, egy metszéspont és így egy megoldás adódik, ha c kör sugara egyenlő a k kör sugarának háromszorosával, míg más esetekben két megoldást kapunk.

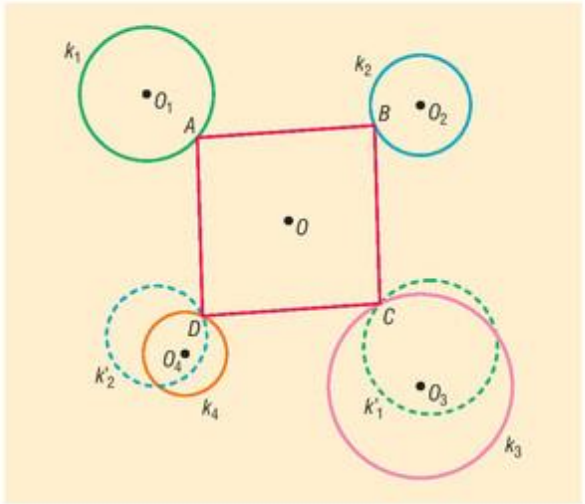
1620 A feltételek szerint az ABC háromszög A csúcsa illeszkedik az e egyenesre, továbbá F_1 az AC oldal felezőpontja, így a C csúcs illeszkedik az e egyenes F_1 pontra vonatkozó e' tükörképére. Hasonlóan; mivel a B csúcs illeszkedik a k körre, valamint F_2 a BC oldal felezőpontja, így a C csúcs illeszkedik a k kör F_2 pontra vonatkozó k' tükörképére. A tükrözött alakzatok metszéspontja eszerint épp a háromszög C csúcsával azonos. A hiányzó A, illetve B csúcsot megkapjuk, ha a C pontot tükrözzük az F_1, illetve F_2 pontra. A fent vázolt szerkesztés eredményét, valamint a megoldásul kapott $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögeket az ábrán láthatjuk.



A szerkeszthetőség feltétele, hogy az e' egyenes metssze a k' kört. A metszéspontok számától függően a feladatnak 0, 1 vagy 2 megoldása lehet.

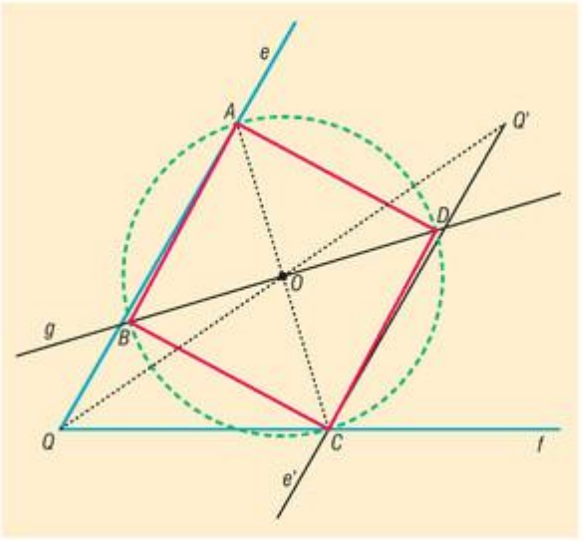
1621 Feladatunk olyan $ABCD$ paralelogramma szerkesztése, amelynek középpontja O, továbbá $A \in k_1$, $B \in k_2$, $C \in k_3$ és $D \in k_4$.

A szerkesztendő paralelogramma szimmetrikus az O pontra nézve, ezért középpontosan tükrözzük a k_1 kört az O pontra; a tükörképet jelölje k_1'. Világos, hogy a paralelogramma C csúcsa illeszkedik k_1'-re és k_3-ra, vagyis a C pont e két kör metszéspontjaként szerkeszthető. Az A pontot megkapjuk, ha a C pontot középpontosan tükrözzük az O pontra. A paralelogramma B és D csúcsainak szerkesztése ezzel analóg módon történhet, csak a k_2 és k_4 körökkel kell dolgoznunk.



A szerkeszthetőség feltételei, hogy a k_1' és a k_3, valamint a k_2' és a k_4 körök egyaránt metsszék egymást. Ha az említett körök közül valamelyik kettőnek nincs metszéspontja, akkor a feladatnak 0 megoldása van. A további estekben a megoldások száma a metszéspontok számától függ. Ennek értelmében a feladatnak lehet 1, 2, 4, esetleg végtelen sok megoldása. Ez utóbbi eset akkor következik be, ha k_1' kör a k_3 körrel, vagy a k_2' kör a k_4 körrel esik egybe.

1622 Jelöljük a szög szárait e-vel és f-fel, az adott pontot O-val. Ha az $ABCD$ négyzet A csúcsa illeszkedik az e szögszárra, valamint C csúcsa illeszkedik az f szögszárra (ld. ábra), akkor az A pont O pontra vonatkozó tükörképe, mely épp a C pont, illeszkedik az e szögszár O pontra vonatkozó tükörképére.

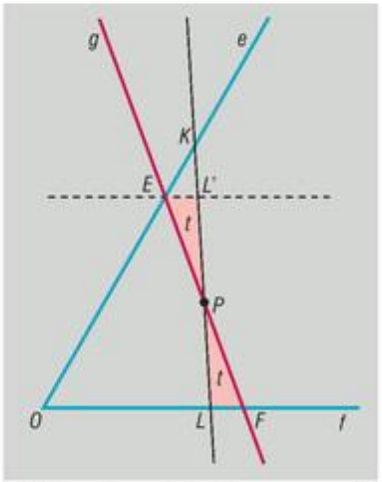


Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

1. Középpontosan tükrözzük az e szögszárat az O pontra; így kapjuk e'-t.
2. Az e' félegyenes és az f szögszár metszéspontjának szerkesztése; a metszéspont C.
3. A C pont O pontra vonatkozó tükrözése; a tükörkép A.
4. Az AC szakaszfelező merőlegesének szerkesztése; a kapott egyenes g.
5. Az O középponttal, OC sugárral rajzolt kör szerkesztése.
6. A g egyenes és a szerkesztett kör metszéspontjainak szerkesztése; a keletkező metszéspontok B és D.

A feladatnak konvex szög esetén minden esetben egyetlen megoldása van.

1623 A szögszárakból lemetszett háromszög területe akkor a legkisebb, ha az adott pont felezi a metsző egyenesnek a szög szárai közé eső szakaszát. Jelöljük a szögszárakat e-vel és f-fel, az adott pontot P-vel, továbbá g-vel azt az egyenest, amely átmegy a P ponton és a szögszárak közé eső szakaszát a P pont megfelezi. Ha a g egyenes az e szögszárat E-ben, az f szögszárat F-ben metszi, akkor $PE = PF$ (ld. ábra). Megmutatjuk, hogy ha egy g-től különböző egyenes átmegy a P ponton, továbbá a szögszárakat K-ban és L-ben metszi, akkor az OKL háromszög területe nagyobb, mint az OEF háromszög területe. Mivel PK és PL semmiképpen nem egyenlő, ezért feltehetjük, hogy $PK > PL$.



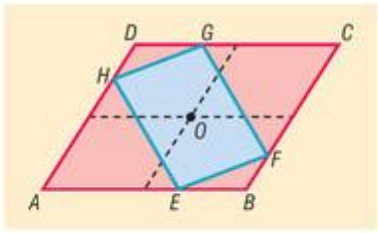
Tükrözzük a PLF háromszöget a P pontra. A tükrözés során a P pont helyben marad, az F pont képe E, mivel $PF = PE$, az L pont képe pedig a PK szakasz egy belső L' pontja. Az EL' és FL szakaszok párhuzamosak a középpontos tükrözés tulajdonságai alapján. Jelöljük a PLF és $PL'E$ háromszögek közös területét t-vel. Ekkor

$$T_{OEF} = T_{OEPL} + t < T_{OEPL} + t + T_{EL'K} = T_{OKL}$$

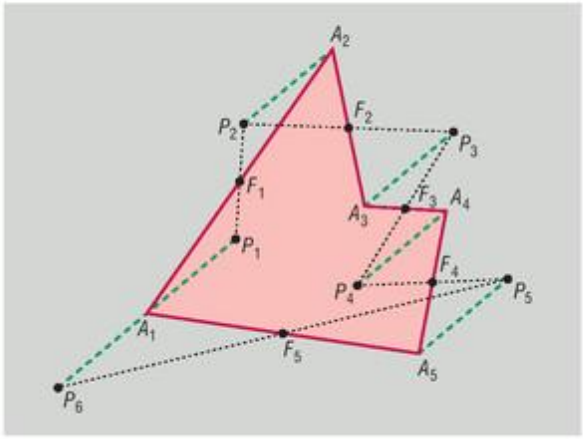
amit éppen bizonyítani akartunk. Az E és F pontok, valamint a g egyenes az 1622. feladatban ismertetett módon szerkeszthetők. Az ott alkalmazott jelölésekkel az EF szakasz egybeesik az $ABCD$ négyzet AC átlójával.



1624 Jelölje O az $ABCD$ paralelogrammába írt $EFGH$ paralelogramma középpontját (ld. ábra). Ekkor az O pontra vonatkozó tükrözés az E pontot a G pontba, az AB szakaszt vele párhuzamos szakaszba viszi át, hiszen a szakasz és tükör képe párhuzamos egymással. Mivel azonban a G pont illeszkedik CD szakaszra, így az O pontra vonatkozó középpontos tükrözés az AB szakaszt csakis a CD egyenesre képezheti. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha az O pont egyenlő távolságra van az $ABCD$ paralelogramma AB és CD oldalaitól, amiből következik, hogy O illeszkedik az AB és a CD egyenesek középpárhuzamosára. Hasonlóan igazolhatjuk, hogy O az AD és a BC egyenesek középpárhuzamosára is illeszkedik, így O valóban megegyezik az $ABCD$ paralelogramma középpontjával.



1625 *a)* Tekintsük az ábrán látható $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszöget, melynek oldalfelező pontjai F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, valamint a sík egy tetszőleges P_1 pontját. Tükrözzük a P_1A_1 szakaszt előbb az F_1, majd a kapott tükörképet az F_2 pontra, és így tovább. Az i-edik tükrözés után így a $P_{i+1}A_{i+1}$ szakaszhoz jutunk ($A_1 = A_6$). A tükrözés tulajdonságai alapján bármely (i, j) számpárra $(1 \le i, j \le 6)$ a P_iA_i és P_jA_j szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak, továbbá minden i-re P_iA_i és $P_{i+1}A_{i+1}$ $(1 \le i \le 5)$ ellentétes irányúak, hiszen a középpontos tükrözés megváltoztatja a körüljárási irányt. Az elmondottakból következik, hogy a P_1P_6 szakasznak A_1 a felezőpontja.

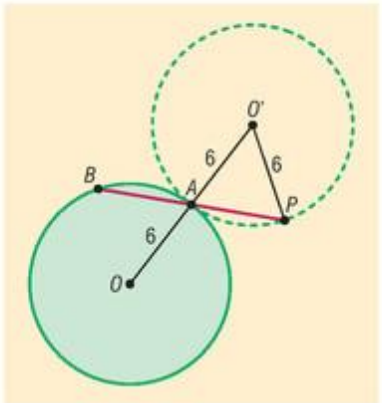


A fenti észrevételek alapján az ötszög könnyen szerkeszthető. Tükrözzük a sík egy tetszőleges P_1 pontját rendre az F_1, …, F_5 pontokra; így kapjuk a P_6 pontot. A P_1P_6 szakasz A_1 felezőpontját tükrözzük az F_1 pontra, így kapjuk A_2-t. Tükrözzük A_2-t az F_2 pontra; így kapjuk az A_3 pontot, és így tovább.

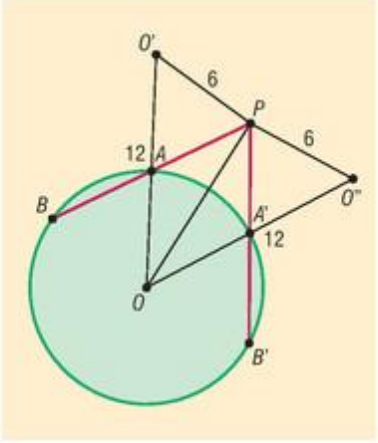
A feladatnak minden esetben egyértelmű megoldása van, bár előfordulhat, hogy a kapott ötszög hurkolt vagy elfajuló. A feladat fent vázolt megoldása minden páratlan n-re általánosítható.

b) Ha n páros, úgy a P_1A_1 és $P_{n+1}A_1$ szakaszok továbbra is párhuzamosak és egyenlők, csak ezúttal megegyező irányúak. Ebből következően a P_1 és P_{n+1} pontok egybeesnek, így ebben az esetben a feladat határozatlan.

1626 *a)* Jelöljük az erdő középpontját O-val, a falut P-vel. Olyan szelőt kell szerkesztenünk a P ponton át, amelynek a körrel való első metszéspontja (az ábrán A) felezi a hosszabb szelőszakaszt, azaz PB-t. Természetesen ekkor az A pontra vonatkozó középpontos tükrözés a P pontot a B pontba viszi át, csak kisebb kellemetlenséget okoz, hogy az A pont helyét nem ismerjük. Ha viszont egy pillanatra feltételezzük, hogy az A pont ismert, és a Kerekerdőt tükrözzük az A pontra, akkor eredményül olyan O' középpontú kört kapunk, amelynek sugara 6 km, továbbá átmegy a P ponton, és az A pontban érinti a Kerekerdőt modellező kört. Az O' pont ezek szerint a P ponttól 6, az O ponttól 12 km távolságra található, így a P és O pontok ismeretében megszerkeszthető. Az OO'szakasz kimetszi Kerekerdőből a keresett szelő A pontját, majd a P pont A-ra vonatkozó tükörképe megadja a B pont helyét.

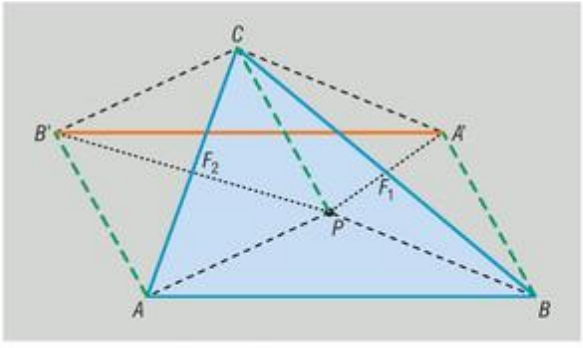


b) A feladat megoldása az OPO' háromszög szerkeszthetőségén alapul. Mivel a háromszög oldalai $OP = 10$ km, $OO' = 12$ km, $O'P = 6$ km, és $OO' + O'P > OP$, ezért az O középpontú 12 km sugarú, valamint a P középpontú 6 km sugarú kör két pontban metszi egymást (az ábrán O' és O''), így a feladatnak két megoldása van. A két út egymás tükörképe az OP egyenesre vonatkozóan.



c) A feladatnak $x \leq 6$ esetén nincs megoldása, hiszen ebben az esetben a falu a Kerekerdő belsejében vagy határán helyezkedik el. Ha $6 < x < 18$, akkor a feladatnak két megoldása, $x = 18$ esetén egy megoldása van. Utóbbi esetben O' és O'' megegyezik, valamint illeszkedik az OP szakaszra. A feladatnak $x > 18$ esetén nem adódik megoldása.

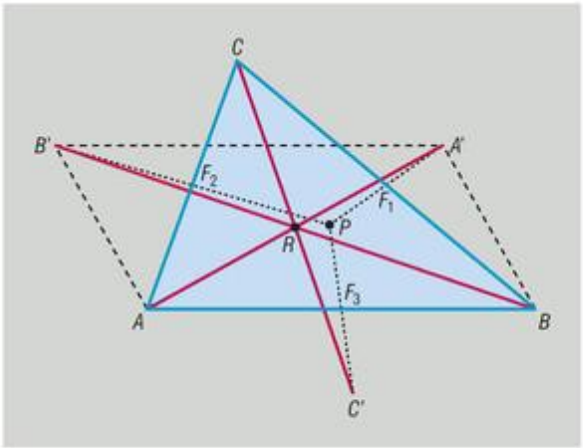
1627 *a)* Megmutatjuk, hogy a $B'A'$ szakasz hossza a P pont helyzetétől függetlenül megegyezik az AB oldal hosszával.



A tükrözésből következően az $APCB'$ négyszög paralelogramma (középpontosan szimmetrikus az AC oldal F_2 felezőpontjára vonatkozóan), ezért AB' párhuzamos PC-vel, továbbá $AB' = PC$. Ugyanilyen megfontolásból paralelogramma a $CPBA'$ négyszög is, ezért BA' párhuzamos PC-vel, továbbá $BA' = PC$. Azt kapjuk tehát, hogy AB' és BA' ugyanazzal a PC szakasszal párhuzamos, ezért a két szakasz egymással is párhuzamos. Természetesen $AB' = BA' = PC$ is teljesül. Ekkor viszont az $ABA'B'$ négyszögben két szemközti oldal párhuzamos és ugyanolyan hosszúságú, így $ABA'B'$ paralelogramma, amiből azonnal következik, hogy $B'A' = AB$, amit bizonyítani kívántunk.

Hasonlóan igazolható, hogy $A'C'$ az ABC háromszög CA, és $B'C'$ a CB oldalával egyenlő hosszúságú.

b) Az *a)* feladatban igazoltuk, hogy az $ABA'B'$ négyszög paralelogramma. Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért ha az AA' és BB' szakaszok egymást az R pontban metszik, akkor az R pont egybeesik mindkét szakasz felezőpontjával.



Természetesen ugyanígy paralelogramma az $AC'A'C$ négyszög is, ezért AA' és CC' is felezik egymást. Ezt másként is megfogalmazhatjuk: a CC' szakasz az AA' szakaszt annak R felezőpontjában metszi. Ezzel igazoltuk, hogy az AA', BB' és CC' szakaszok valóban egy pontban, a közös felezőpontjukban metszik egymást.



Háromszögek, négyszögek néhány nevezetes vonala (súlyvonal, magasságvonal, középvonal) – megoldások

1628 *a)* A háromszög középvonalának hossza a végpontjait nem tartalmazó oldal hosszának felével egyenlő.

b) A paralelogramma középvonalának hossza a végpontjait nem tartalmazó oldal hosszával egyenlő.

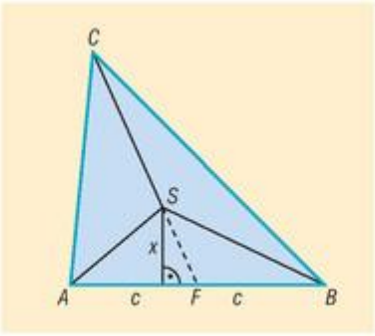
c) A trapéz szárainak felezőpontjait összekötő középvonalának hossza az alapok hosszának számtani közepével egyenlő.

1629 Az eredeti háromszög kerülete 28,5 cm.

1630 A vadásznak összesen 97,5 perc szükséges az út megtételéhez.

1631 A háromszög súlyvonala a háromszöget két olyan háromszögre bontja, amelyeknek egy-egy oldala megegyezik, valamint az ezekhez tartozó magasságuk is egyenlő. Ebből adódóan a két háromszög területe is egyenlő.

1632 Az ABC háromszög súlypontját S-sel, az AB oldal felezőpontját F-fel, az $AF = FB$ szakasz hosszát c-vel jelöltük. Az előző feladat eredménye alapján $T_{AFC} = T_{FBC}$. Ugyanakkor az AFS és FBS háromszögekben egy-egy oldal egyenlő ($AF = FB = c$), a hozzájuk tartozó magasság pedig közös (x), ezért területük is megegyezik, így $T_{AFS} = T_{FBS}$. Ha egyenlő területű síkidomokból egyenlő területűeket veszünk el, akkor a visszamaradó síkidomok területe is megegyezik, azaz $T_{AFC} - T_{AFS} = T_{FBC} - T_{FBS}$, amiből azt kapjuk, hogy $T_{ASC} = T_{SBC}$. Hasonló gondolatmenettel láthatjuk, hogy $T_{SBC} = T_{ASB}$ is teljesül, amivel a feladat állítását igazoltuk.



1633 Megoldás lehet, ha a tortát a középvonalak mentén vágjuk fel. Mivel a keletkező négy tortaszeletben az oldalak páronként megegyeznek, ezért a területük is egyenlő.

Szintén igazságos daraboláshoz jutunk, ha a háromszög egyik oldalát négy egyenlő részre osztjuk, majd az osztópontokat az oldallal szemközti csúcsokkal összekötjük. A négy keletkező háromszög egy-egy oldala egyenlő hosszúságú, az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságok pedig közösek, így a háromszögek területe valóban egyenlő.

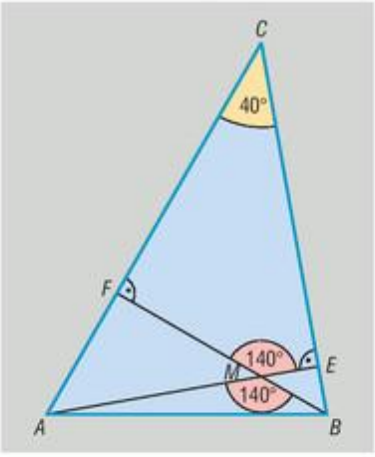
1634 Az ilyen tulajdonságú pontok a rögzített oldallal párhuzamos középvonalon találhatók. A középvonal minden pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

1635 *a)* A háromszög szabályos, így minden oldala 120°-os szögben látszik a magasságpontból.

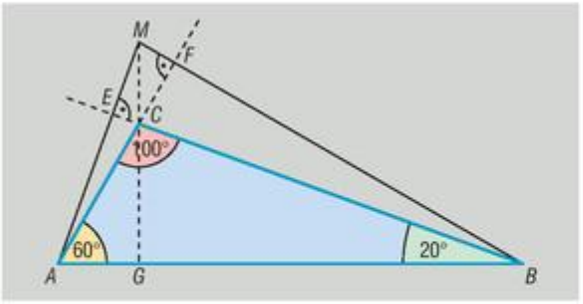
b) Az ábra jelöléseivel $CAB\sphericalangle = 60°$, $CBA\sphericalangle = 80°$ így $ACB\sphericalangle = 40°$. A $CFME$ négyszögben ismert három szög nagysága, valamint az E és F csúcsoknál derékszögek vannak, ezért:

$$FME\sphericalangle = 180° - 40° = 140°.$$

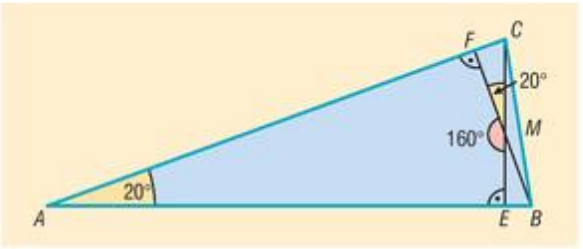
Mivel az $AMB\sphericalangle$ és $FME\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért egyenlők, így $AMB\sphericalangle = 140°$, és az AB oldal a magasságpontból 140°-os szög alatt látszik. Ugyanilyen gondolatmenettel számolható, hogy a BC oldal a magasságpontból 120°-os, míg az AC oldal 100°-os szög alatt látszik.



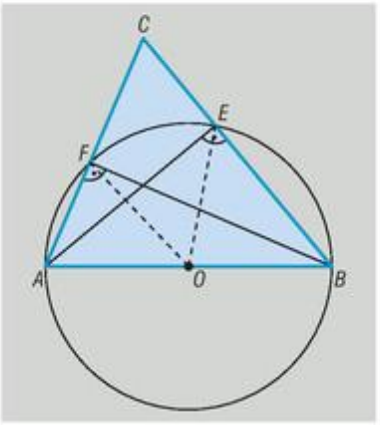
c) A háromszög ebben az esetben tompaszögű, ezért magasságpontja a háromszögön kívül található. Az $ECFM$ négyszögben a C csúcsnál 100°-os, az E és F csúcsoknál 90°-os szögek vannak, ezért $EMF\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 80°$, azaz az AB oldal a magasságpontból 80°-os szög alatt látszik. Az $AMG\sphericalangle$, valamint az $EBA\sphericalangle$ merőleges szárú szögpárt alkot, és mivel mindkettő hegyesszög, ezért megegyeznek, tehát az AC oldal a magasságpontból 20°-os szög alatt látszik. A BC oldal 60°-os szögben látható az M magasságpontból.



1636 Ha a BF és CE magasságvonalak 20°-os szögben metszik egymást, és M a háromszög magasságpontja, akkor az $AEMF$ négyszögben az E, valamint F csúcsoknál 90°-os, az M csúcsnál 160°-os szögek vannak. Ebből adódóan az ABC háromszög A csúcsánál lévő szög 20°-os.

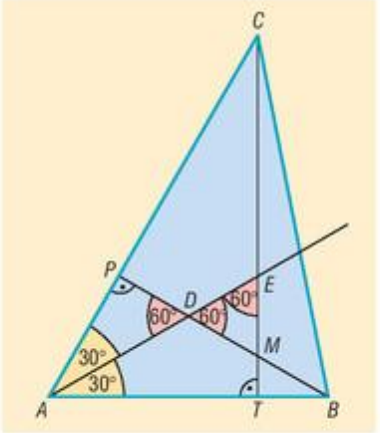


1637 Az ABC háromszög BF és CE magasságai két derékszögű háromszöget is kialakítanak a háromszögben; az ABF és ABE háromszögekben az átfogó közös, éppen az AB oldallal egyezik meg. Thalész tételének megfordítása alapján a derékszögű csúcsok, azaz F és E illeszkednek az AB átmérőjű körre. A kör középpontja egybeesik az AB oldal O felezőpontjával. Ekkor viszont OF és OE egy-egy sugár a körben, ezért hosszuk megegyezik.



1638 Ha a B-ből induló magasságvonal talppontját P, a C-ből indulóét T jelöli, akkor az ADP derékszögű háromszögben az A csúcsnál 30°-os, így a D csúcsnál 60°-os szög van. Az EDM háromszög D csúcsánál lévő szög szintén 60°-os, hiszen az előbbi szög csúcsszöge. Az AET derékszögű háromszögben az A csúcsnál 30°-os, ezért az E csúcsnál 60°-os szög van. Ezzel beláttuk, hogy az EDM háromszög két szöge is 60°-os, és így a háromszög valóban szabályos.

Megjegyezzük, hogy amennyiben az ABC háromszög szabályos, úgy az E, D, M pontok egybeesnek, ezért az EDM háromszög nem jön létre. Ha az ABC háromszög tompaszögű, akkor a bizonyítás a hegyesszögű esethez hasonlóan végezhető el.



1639 A feladatnak két megoldása van. Ha Peti a paralelogrammát a 12 cm-es oldallal párhuzamos középvonala mentén vágta szét, akkor a másik oldal hossza 13 cm. Ha szétvágás nem a 12 cm-es oldallal párhuzamos középvonal mentén történt, akkor a paralelogramma másik oldalának hossza 12,5 cm.

1640 A paralelogramma kerülete 60 cm.



1641 A paralelogrammát bármely középvonala, illetve bármely átlója két egyenlő területű részre vágja szét. Az 1614. feladat eredménye alapján bármely olyan egyenes, amely átmegy a paralelogramma középpontján, szintén egyenlő területű részekre bontja a paralelogrammát.

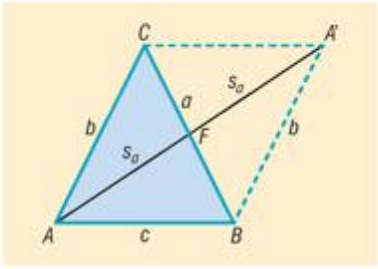
1642 A trapéz alapjait $2 \cdot x$, illetve $3 \cdot x$ alakban kereshetjük. A feltételek alapján

$$\frac{2 \cdot x + 3 \cdot x}{2} = 15 \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

A trapéz alapjai tehát 12 cm, illetve 18 cm hosszúak.

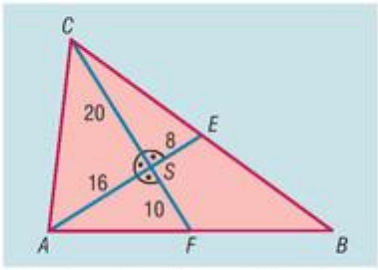
1643 A szárakat összekötő középvonal 9 cm hosszúságú. A keletkező két trapéz középvonalainak hossza 7 cm, illetve 11 cm.

1644 *a)* Tegyük fel, hogy az ABC háromszög A csúcsánál hegyesszög van. Tükrözzük középpontosan a háromszöget az a oldal F felezőpontjára. Eredményül az $ABA'C$ paralelogrammát kapjuk (ld. ábra). A paralelogramma egyik átlója az ABC háromszög a oldalával, másik átlója, vagyis az AA' szakasz pedig az a oldalhoz tartozó súlyvonalának kétszeresével egyenlő hosszúságú. A feltételek szerint az ABC háromszögben az A csúcsnál hegyesszög van, amiből következik, hogy az $AA'B$ háromszögben a B csúcsnál tompaszög van. Ennek belátásához elegendő emlékeznünk arra, hogy a paralelogramma egy oldalán fekvő szögeinek összege 180°. Az említett két háromszögben két-két oldal egyenlő, hiszen az AB oldal közös bennük, továbbá $AC = BA'$ a tükrözés tulajdonságai alapján. A két háromszög harmadik oldalai közül nyilvánvalóan az a nagyobb, amelyik a tompaszöggel szemközt van, azaz $2 \cdot s_a > a$, ami egyenértékű a bizonyítandó állítással.



b) A feladat állítása az *a)* feladatban bemutatott bizonyítás értelemszerű változtatásával igazolható.

1645 *a)* Legyenek a telek csúcsai A, B és C, a BC oldal felezőpontja E, az AB oldalé F. Tegyük fel továbbá, hogy $AE = 24$ méter, $CF = 30$ méter. Ha a két súlyvonal metszéspontja S, akkor lévén a súlypont 2 : 1 arányban osztja fel a súlyvonalakat, azt kapjuk, hogy $AS = 16$, illetve $SE = 8$ méter, továbbá $CS = 20$, illetve $SF = 10$ méter. A feltételek alapján az ACS, ECS és AFS háromszögek mind derékszögűek, így azokban rendre alkalmazva Pitagorasz tételét az átfogókat kiszámolhatjuk. Nem túl bonyolult számolásokkal a megfelelő kerekítések után $AC = 25{,}6$ méter, $EC = 21{,}5$ méter, végül $AF = 18{,}9$ méter. A telek oldalai tehát 25,6 méter, 43 méter, 37,8 méter.



b) A telek körbekerítéséhez $25{,}6 + 43 + 37{,}8 = 106{,}4$ méter kerítést kell Béla bácsinak vennie.

c) Sajnos Béla bácsit váratlan meglepetések érhetik, ha a *b)* feladatban kiszámolt hosszúságú kerítéssel próbálja körbekeríteni a telkét. Ha ugyanis a számolásokat nem egy tizedes pontossággal végezzük, akkor láthatjuk, hogy

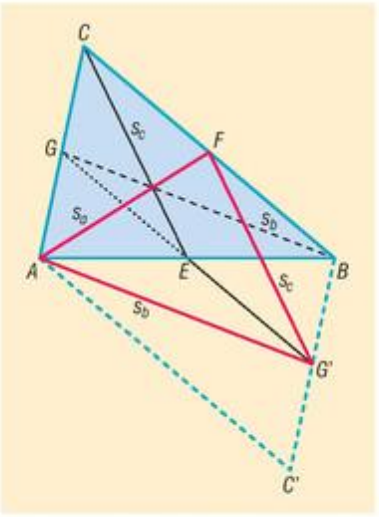
$$AC = \sqrt{656} > 25{,}61 \text{ m}; \quad EC = \sqrt{464} > 21{,}54 \text{ m}; \quad AF = \sqrt{356} > 18{,}86 \text{ m}.$$

A kapott egyenlőtlenségek felhasználásával a telek kerületére egy alsó becslést kaphatunk:

$$K_{ABC} > 25{,}61 + 2 \cdot 21{,}54 + 2 \cdot 18{,}86 = 106{,}41 \text{ méter},$$

ami mutatja, hogy a *b)* feladatban kapott 106,4 méter hosszú kerítés nem elegendő a körbekerítéshez. Béla bácsi szerencsésebben járt volna, ha a számításoknál ezúttal nem a kerekítés szabályait követte volna, hanem minden lépésben felfelé kerekít. Így elkerülhető az a rendkívül bosszantó helyzet, hogy a vásárolt kerítés pár centiméterrel rövidebb, mint a telek kerülete.

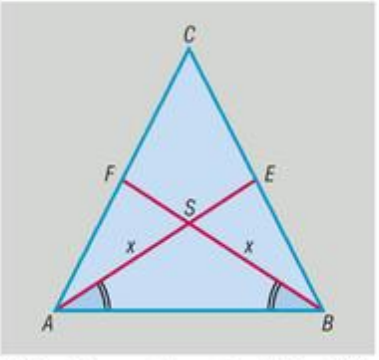
1646 Jelölje az ABC háromszög oldalainak felezőpontját E, F, G, súlyvonalait s_a, s_b, s_c az ábrának megfelelően. Tükrözzük az ABC háromszöget, valamint a G pontot az E pontra. A tükrözés során a B és A pontok „helyet cserélnek”, a C pont képe C', továbbá a G pont képe a BC' szakasz G' felezőpontja. Az elmondottakból adódóan a $BG = s_b$ súlyvonal az AG' szakaszba megy át.



A továbbiakban megmutatjuk, hogy a $CEG'F$ négyszög paralelogramma. A középpontos tükrözés megtartja a szakaszok hosszát, ezért $EG = EG'$, továbbá természetesen E, G, G' egy egyenesre illeszkednek. Mivel EG az ABC háromszög egyik középvonala, ezért párhuzamos a megfelelő oldallal, azaz BC-vel, továbbá EG hossza BC hosszának fele, azaz $EG = CF$. Ezek szerint EG' és CF is megegyezik EG-vel, amiből persze azonnal következik, hogy $EG' = CF$. Természetesen CF nemcsak EG-vel, hanem a tartalmazó egyenesével is, így EG'-vel is párhuzamos. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $CEG'F$ négyszögben két szemközti oldal egyenlő, valamint párhuzamos, ezért valóban paralelogramma. De ha négyszögünk paralelogramma, akkor a másik két oldala is párhuzamos és egyenlő, így $G'F = CE = s_c$.

Tekintsük végül az $AG'F$ háromszöget. A háromszög oldalai: $AG' = s_b$, $G'F = s_c$, $FA = s_a$, ami szépen mutatja, hogy a háromszög súlyvonalaiból valóban lehet háromszöget szerkeszteni.

1647 Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben az AE és BF súlyvonalakra $AE = BF = x$. Ha S a háromszög súlypontja, akkor S mindkét súlyvonalat 2 : 1 arányban osztja fel, ezért:

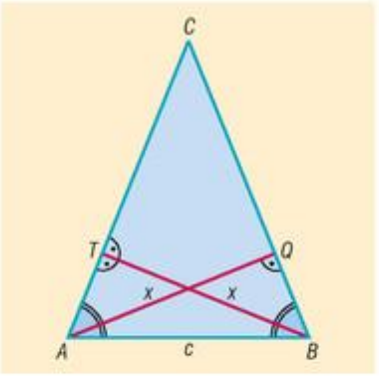


$$AS = BS = \frac{2}{3} \cdot x,$$

amiből azt kapjuk, hogy az ABS háromszög egyenlő szárú. Az egyenlő szárú háromszögekben az alapon fekvő szögek megegyeznek, így $SAB\sphericalangle = SBA\sphericalangle$. Ekkor az ABE és BAF háromszögekben két-két oldal, valamint az általuk bezárt szög megegyezik, ezért a két háromszög egybevágó, amiből persze következik, hogy $AF = BE$. Vegyük figyelembe, hogy E és F oldalfelező pontok, ezért $AC = BC$, azaz az ABC háromszög is egyenlő szárú. Azt kaptuk tehát, hogy ha egy háromszögben két súlyvonal egyenlő hosszúságú, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Az iménti megállapításból azonnal következik, hogy ha egy háromszög mindhárom súlyvonala ugyanakkora, akkor a háromszög bármely két oldala megegyezik, azaz a háromszög valóban szabályos. Tehát csak a szabályos háromszögben egyezik meg a három súlyvonal hossza.

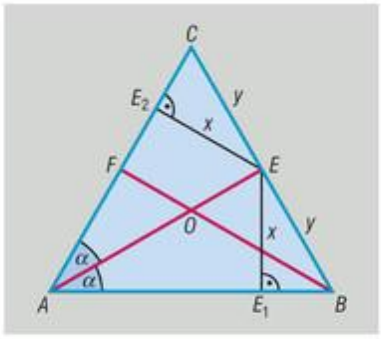
1648 Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben az AQ és BT magasságokra $AQ = BT = x$. Ekkor az ABQ és BAT háromszögek derékszögűek, így bennük két-két oldal, valamint a nagyobbal szemközti szög megegyezik. A két háromszög tehát egybevágó, ezért a megfelelő befogóikkal szemközti hegyesszögeik is egyenlők, azaz $TAB\sphericalangle = QBA\sphericalangle$.



Megállapításunkból azonnal adódik, hogy az ABC háromszög AB oldalán fekvő szögei egyenlők, ezért az ABC háromszög egyenlő szárú és $AC = BC$. Azt kaptuk tehát, hogy ha egy háromszögben két magasság ugyanolyan hosszúságú, akkor azok az oldalak is megegyeznek, amelyekhez a magasságok tartoznak.

Ebből persze az is következik, hogy ha mindhárom magasság egyenlő, akkor mindhárom oldal is megegyezik, azaz a háromszög szabályos. Tehát csak a szabályos háromszögekben egyezik meg a három magasság hossza.

1649 Ha az ABC háromszögben a beírt kör O középpontja egyben súlypont is, akkor az AO szögfelező a BC oldalt az E felezőpontban metszi (ld. ábra), azaz $BE = CE$. Állítsunk merőlegest az E pontból az AB és az AC oldalakra, a talppontokat jelöljük E_1-gyel, illetve E_2-vel. Mivel az E pont az A csúcsból induló szögfelező egy pontja, ezért a szögszáraktól egyenlő távolságra van, azaz $EE_1 = EE_2$. Ekkor viszont az EE_1B és EE_2C derékszögű háromszögekben két-két oldal megegyezik, ezért pl. Pitagorasz tételének alkalmazásával belátható, hogy a harmadik oldalak is megegyeznek, azaz $BE_1 = CE_2$.

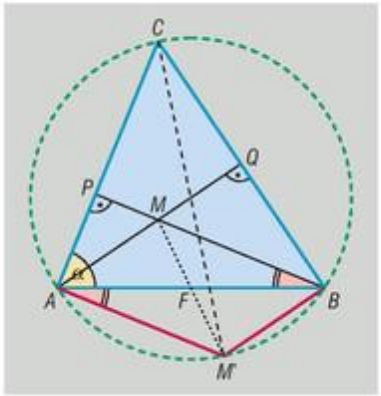


Ugyanezzel a gondolatmenettel belátható, hogy $AE_1 = AE_2$ is teljesül. Eredményeinket összefoglalva azt kapjuk, hogy $AB = AE_1 + BE_1 = AE_2 + CE_2 = AC$, azaz az ABC háromszög egyenlő szárú. Ha most abból indulnánk ki, hogy az O pont a B csúcsból induló szögfelezőnek is pontja, akkor azt kapnánk, hogy $AB = BC$, ami előző eredménnyel együtt mutatja, hogy az ABC háromszög szabályos.

1650 *a)* Jelöljük a B és A csúcsokhoz tartozó magasságvonalak talppontjait P-vel és Q-val. Mivel az F pontra vonatkozó tükrözés során az $MBA\sphericalangle$ képe az $M'AB\sphericalangle$, ezért $MBA\sphericalangle = M'AB\sphericalangle$. Az $AM'BC$ négyszög A csúcsánál lévő szög

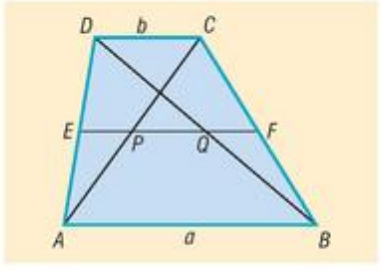
$$M'AC\sphericalangle = \alpha + M'AB\sphericalangle = \alpha + MBA\sphericalangle = 90°,$$

hiszen az utolsó egyenlőség bal oldalán álló szögek az ABP derékszögű háromszög hegyesszögei. Hasonló gondolatmenettel mutatható meg, hogy a B csúcsnál lévő szög szintén derékszög.



b) Az *a)* feladat eredményét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a CM' szakasz mind az A, mind a B pontból 90°-os szög alatt látszik. Thalész tételének megfordítása alapján ezért A és B rajta van a CM' szakaszon, mint átmérő fölé emelt körön. Ebből azonnal következik, hogy az M' pont az ABC háromszög köré írt körön található.

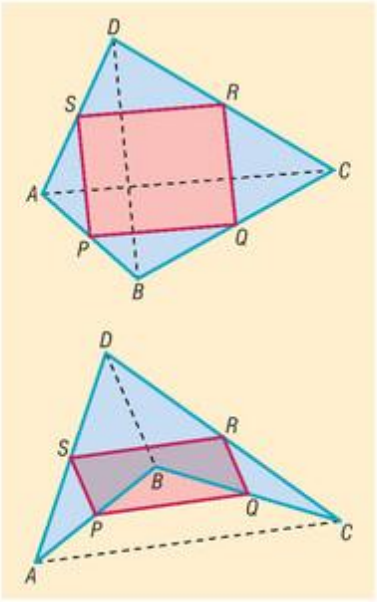
1651 Húzzuk meg az $ABCD$ trapéz szárainak felezőpontját összekötő EF középvonalát az ábrának megfelelően. Tegyük fel, hogy a középvonal az átlókat a P és Q pontokban metszi. A trapéz szárakat összekötő középvonala párhuzamos az alapokkal, ezért elegendő igazolnunk, hogy P az AC, Q a BD átló felezőpontja. Mivel azonban EP párhuzamos a DC alappal és E az AD oldal felezőpontja, ezért EP szükségképpen a CDA háromszög CD-vel párhuzamos középvonala, így P az AC szakasz felezőpontja. Hasonlóan igazolható, hogy Q a BD átló felezőpontja.



Kiszámítjuk a PQ szakasz hosszát. A trapéz megfelelő középvonalára $EF = \frac{a+b}{2}$, továbbá a CDA és CDB háromszögek EP és QF középvonalaira $EP = QF = \frac{b}{2}$. Innen PQ hossza már könnyen számolható, hiszen

$$PQ = EF - (EP + QF) = \frac{a+b}{2} - 2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2} \quad (a > b).$$

1652 *a)* Az $ABCD$ konvex négyszög oldalfelező pontjai az ábra jelöléseinek megfelelően legyenek P, Q, R, S.

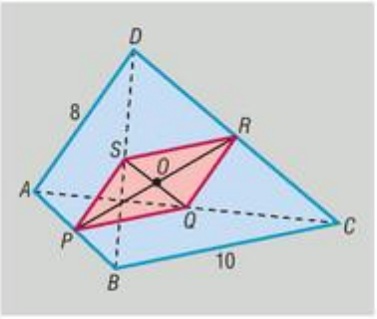


Az SR szakasz középvonala az ACD háromszögnek, ezért SR párhuzamos AC-vel, és hossza AC hosszának fele. Hasonlóan; a PQ szakasz középvonal az ACB háromszögben, ezért PQ is párhuzamos AC-vel, és PQ hossza is AC hosszának fele. Mivel SR és PQ ugyanazzal a szakasszal párhuzamosak, ezért SR és PQ párhuzamosak, és nyilván hosszuk is megegyezik. Azt kaptuk tehát, hogy a $PQRS$ négyszögben a szemközti oldalak párhuzamosak és egyenlők, ezért a négyszög paralelogramma, vagyis valóban középpontosan szimmetrikus.

Hasonló állítás érvényes konkáv négyszögekben is. A bizonyítás ugyanúgy végezhető, mint a konvex esetben.

b) Az $ABCD$ négyszög középvonalai a $PQRS$ paralelogramma átlói, amelyekről közismert, hogy felezik egymást. Ezért a négyszög középvonalai is felezik egymást.

1653 *a)* A PS szakasz középvonal az ADB háromszögben, illetve a QR szakasz középvonal az ADC háromszögben, ezért mind PS, mind QR párhuzamos az AD oldallal, hosszuk pedig az AD oldal hosszának fele, azaz 4 cm. Hasonlóan láthatjuk be, hogy PQ és SR párhuzamos a BC oldallal, hosszuk a BC oldal hosszának fele, azaz 5 cm.

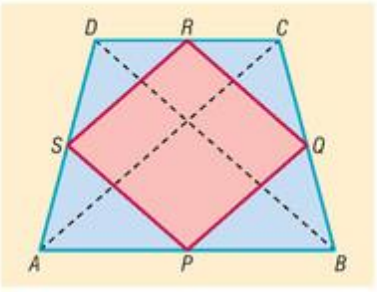


Az elmondottakból következik, hogy a $PQRS$ négyszög paralelogramma.

b) A $PQRS$ négyszög kerülete 18 cm.

c) Az 1652. feladat eredményei alapján tudjuk, hogy a négyszög középvonalai felezik egymást, ezért az $ABCD$ négyszög középvonalainak metszéspontja éppen a PR középvonal O felezőpontja. Másrészt a $PQRS$ paralelogramma átlói is felezik egymást, ezért az O pont egyben e paralelogramma átlóinak a metszéspontja is.

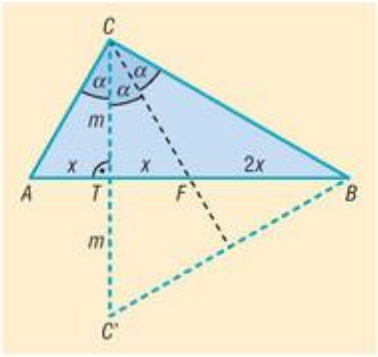
1654 Az 1652. feladat alapján a $PQRS$ négyszög paralelogramma, amelynek oldalai feleakkorák, mint az $ABCD$ négyszög megfelelő átlói. Mivel a szimmetrikus trapézban az átlók egyenlő hosszúak, ezért a $PQRS$ paralelogramma oldalai is egyenlők, azaz $PQRS$ rombusz. A négy pont akkor alkot négyzetet, ha az $ABCD$ trapéz átlói merőlegesek egymásra.



1655 Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben a C csúcsból induló CT magasság, valamint a CF súlyvonal a C csúcsnál lévő szöget három egyenlő részre osztja. A CT szakasz az AFC háromszögben is magasság, ráadásul megfelezi az $ACF\sphericalangle$-et, ezért a háromszög egyenlő szárú, így az AF alaphoz tartozó magassága megfelezi az alapot is, azaz $AT = TF = x$. Mivel F az AB szakasz felezőpontja, ezért $FB = 2 \cdot x$.

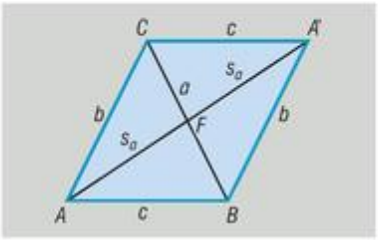
Tükrözzük a TBC háromszöget a TB egyenesre; a C pont képét jelöljük C'-vel. A $C'CB$ háromszög nyilvánvalóan egyenlő szárú ($CB = C'B$), így BT a háromszög egy súlyvonala és szögfelezője is

egyben. Vegyük észre, hogy az F pont a BT súlyvonalat éppen 2 : 1 arányban osztja (a csúcstól számítva), amiből következik, hogy F a $C'CB$ háromszög súlypontja! Mivel a CF súlyvonal a C csúcsnál lévő szöget megfelezi, ezért CF szintén szögfelezője a háromszögnek.



Összefoglalva; a $C'CB$ háromszögben F súlypont és a szögfelezők metszéspontja, azaz a beírt kör középpontja is egyben. Az 1649. feladat állítása alapján a $C'CB$ háromszög szabályos, amiből $2 \cdot \alpha = 60°$, $\alpha = 30°$ adódik. Az ABC háromszög szögei már könnyen számolhatók: 60°, 90°, 30°.

1656 Tükrözzük az ABC háromszöget a BC oldal F felezőpontjára. A kapott háromszög az eredetivel együtt az $ABA'C$ paralelogrammát alkotja, amelynek oldalai b és c, átlói $AA' = 2 \cdot s_a$, $BC = a$ (ld. ábra).



A *Háromszögek, négyszögek, sokszögek* című fejezet 1355. feladatában igazoltuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő oldalainak négyzetösszegével.

Alkalmazva ezt a tételt az $ABA'C$ paralelogrammára, azt kapjuk, hogy

$$a^2 + (2 \cdot s_a)^2 = 2 \cdot (b^2 + c^2),$$

amiből az a oldalhoz tartozó súlyvonal négyzetét kifejezve adódik, hogy

$$s_a^2 = \frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Ehhez hasonlóan a háromszög másik két oldalának súlyvonalára felírhatjuk, hogy

$$s_b^2 = \frac{2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2}{4} \quad \text{és} \quad s_c^2 = \frac{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

A kapott egyenlőségek megfelelő oldalait összeadva, majd jobb oldalon a kijelölt műveleteket, illetve lehetséges összevonásokat elvégezve

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}{4},$$

amit éppen bizonyítani kellett.

1657 *a)* Az 1656. feladatban kifejeztük a háromszög súlyvonalait az oldalak segítségével. Az ott bebizonyított összefüggéseket felhasználva:

$$s_a^2 + s_b^2 = 5 \cdot s_c^2,$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2}{4} = 5 \cdot \frac{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

Mindkét oldalt 4-gyel megszorozva, majd a műveleteket elvégezve azt kapjuk, hogy

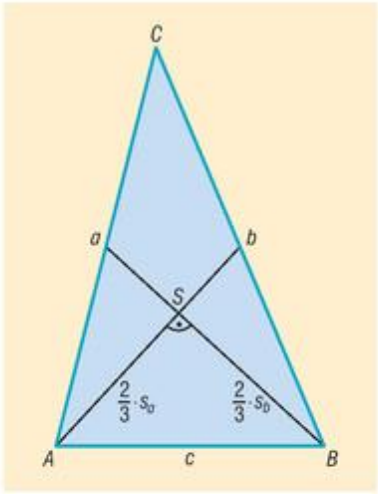
$$a^2 + b^2 + 4 \cdot c^2 = 10 \cdot a^2 + 10 \cdot b^2 - 5 \cdot c^2,$$

$$9 \cdot c^2 = 9 \cdot a^2 + 9 \cdot b^2,$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Átalakításaink ekvivalensek voltak, így Pitagorasz tétele alapján a súlyvonalakra vonatkozó feltétel valóban akkor és csak akkor teljesül, ha a háromszög derékszögű.

b) Az ABC háromszög s_a és s_b súlyvonalai pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha az ASB derékszögű háromszög oldalai eleget tesznek a Pitagorasz-tétel feltételének, azaz



$$\left(\frac{2}{3}\cdot s_a\right)^2+\left(\frac{2}{3}\cdot s_b\right)^2=c^2.$$

Mindkét oldalt 9-cel megszorozva, majd a súlyvonalak négyzete helyett az 1656. feladatban bizonyított összefüggéseket beírva azt kapjuk, hogy

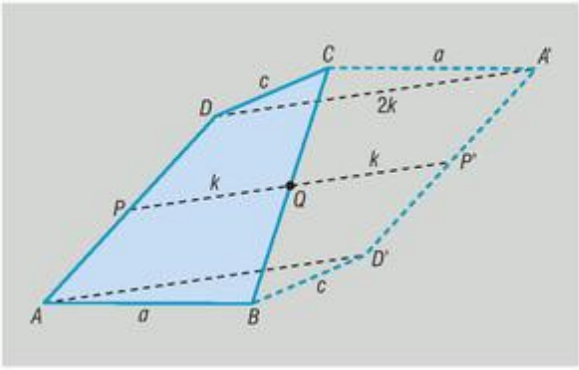
$$2\cdot(b^2+c^2)-a^2+2\cdot(a^2+c^2)-b^2=9\cdot c^2.$$

Az egynemű tagok összevonása után adódik, hogy

$$a^2+b^2=5\cdot c^2.$$

Átalakításaink ekvivalensek voltak, így a feladat állítását igazoltuk.

1658 *a)* A Q pontot tartalmazó középvonal másik végpontját P, a Q pontra vonatkozó tükörképét P', a PQ középvonal hosszát k jelöli az ábrán. A keletkező $ABD'A'CD$ hatszög származtatásából eredően középpontosan szimmetrikus és középpontja a Q pont. A középpontos tükrözés a szakaszt önmagával párhuzamos szakaszba visz át, ezért a hatszög szemközti oldalai párhuzamosak, a távolságtartó tulajdonság miatt pedig egymással egyenlő hosszúak.

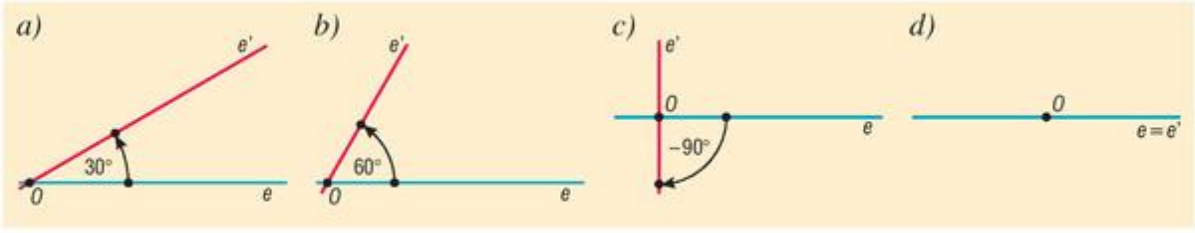


b) Tekintsük a $PP'A'D$ négyszöget. A négyszög PD és $P'A'$ oldalai párhuzamosak, és mindkettő feleakkora, mint az $ABCD$ négyszög AD oldala. Az elmondottakból adódóan a $PP'A'D'$ négyszög paralelogramma, ezért PP' és DA' is párhuzamos, valamint ugyanakkora hosszúságú. Mivel a középpontos tükrözésnél pont, annak képe, valamint a tükrözés középpontja egy egyenesre illeszkednek, ezért a PP' egyenes tartalmazza a Q pontot, amiből következik, hogy $PP'=2\cdot PQ=2\cdot k$, így végül $DA'=2\cdot k$ is teljesül. Ugyanilyen gondolatmenettel bebizonyítható, hogy $AD'=2\cdot k$. Eszerint az $ABD'A'CD$ hatszög AD' és DA' átlója is kétszer olyan hosszú, mint a PQ középvonal. Megjegyezzük, hogy többet mutattunk meg a feladat állításánál; a két átló nemcsak kétszer olyan hosszú, mint PQ, hanem párhuzamos is a középvonallal.

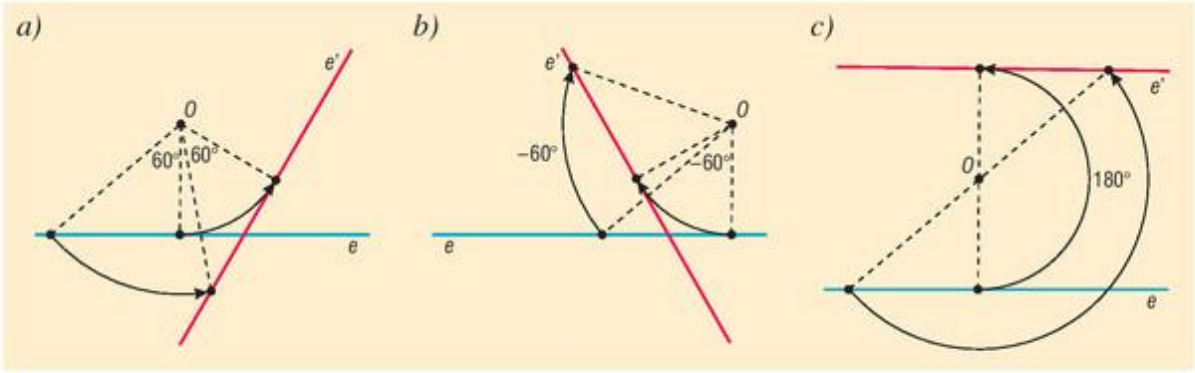
c) Ha alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget a $DA'C$ háromszögben, akkor azt kapjuk, hogy $2\cdot k\le a+c$, ahol a és c az $ABCD$ négyszög PQ középvonalának végpontjait nem tartalmazó oldalainak a hosszát jelöli. A felírt egyenlőtlenség mutatja, hogy a PQ középvonal hossza valóban nem lehet nagyobb a megfelelő oldalak számtani közepénél. Megjegyezzük, hogy egyenlőség esetében a $DA'C$ háromszög egy szakasszá fajul. Ez akkor fordul elő, ha AB, illetve CD párhuzamosak, azaz az $ABCD$ négyszög trapéz.

Forgatás – megoldások

1659

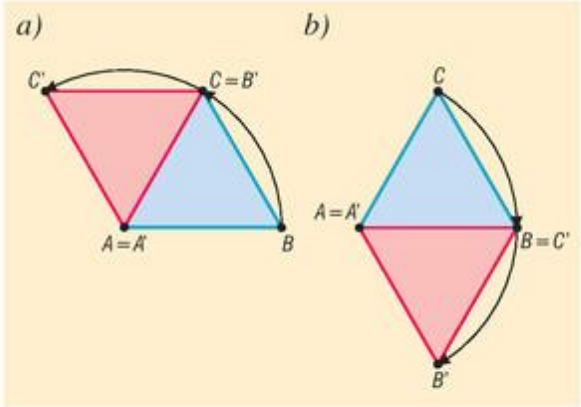


1660

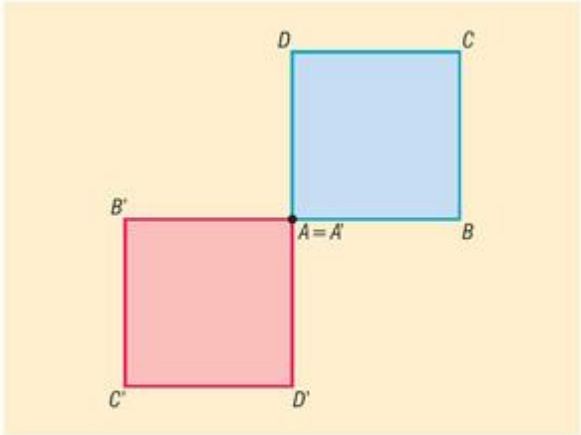


d) Mivel $300° = 360° - 60°$, és a 360°-os forgatás a helybenhagyással egyenértékű transzformáció, ezért a forgatás szöge $-60°$, így a feladat megoldása megegyezik a *b)* feladatéval.

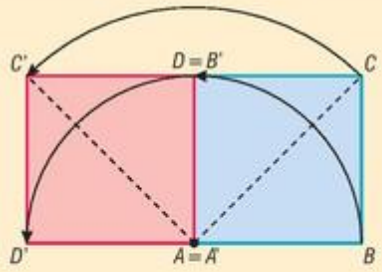
1661 A két háromszög egyesítése mindkét esetben rombuszt alkot, amelynek hegyesszöge 60°-os, tompaszöge 120°-os. Az ábrák az A csúcs körüli forgatások eredményét szemléltetik.



1662 *a)* $-1980° = 5 \cdot (-360°) - 180°$, ezért a forgatás szöge $-180°$-kal helyettesíthető. A szög mértéke mutatja, hogy gyakorlatilag az A csúcsra vonatkozó középpontos tükrözésről van szó.



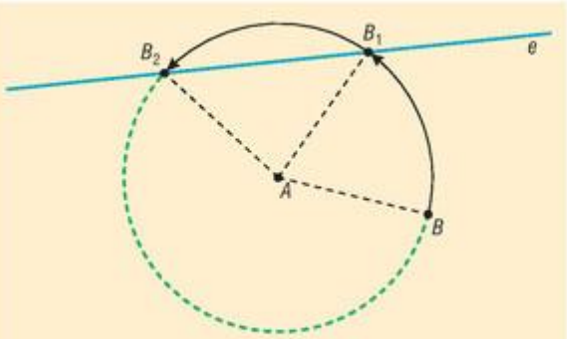
b) $4410° = 12 \cdot 360° + 90°$, ezért a forgatás szöge 90°-kal helyettesíthető. Az ábra az A csúcs körüli forgatás eredményét mutatja.



1663 *a)* $A'(-1; 3)$, $B'(-5; -2)$, $C'(2; -4)$;
b) $A'(1; -3)$, $B'(5; 2)$, $C'(-2; 4)$;
c) $A'(-3; -1)$, $B'(2; -5)$, $C'(4; 2)$;
d) $A'(-3; -1)$, $B'(2; -5)$, $C'(4; 2)$;
e) $A'(1; -3)$, $B'(5; 2)$, $C'(-2; 4)$;
f) $A'(-1; 3)$, $B'(-5; -2)$, $C'(2; -4)$.

1664 A sík végtelen sok pontja tesz eleget a feltételeknek. A megfelelő pontok a két adott pont közti szakasz felezőmerőlegesének pontjai.

1665 A B pont képét az A középpontú, B ponton átmenő kör metszi ki az e egyenesből. Attól függően, hogy a kör és az egyenes milyen helyzetűek, 2, 1 vagy 0 olyan pont létezik az egyenesen, amelybe a B pont forgatással átvihető (ezeket az ábrán B_1 és B_2 jelöli). (➡)



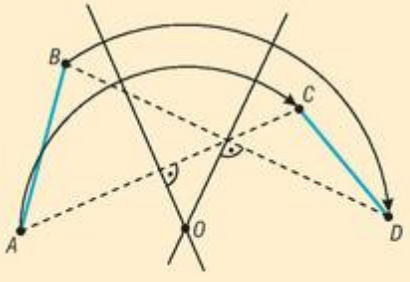
1666 Az A középpontú, B ponton átmenő kör kimetszi az e egyenesből azokat a pontokat, amelyek forgatással átvihetők a B pontba. A pontok ismeretében a forgatás szöge meghatározható.

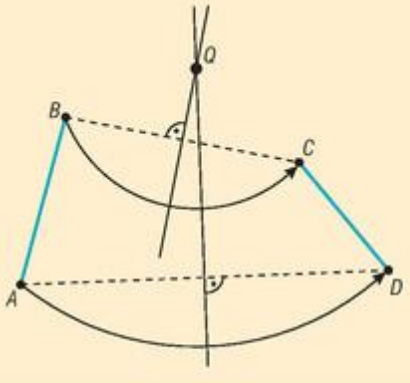
Megjegyzés: A feladat nem hajtható végre, ha B közelebb van A-hoz, mint e.

1667 A két egyenlő hosszúságú szakaszt jelöljük AB-vel és CD-vel. A megfelelő forgatás középpontja egyenlő távolságra van az egymásnak megfelelő pontoktól, ezért pl. az AC és a BD szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontjaként kaphatjuk (a felső ábrán O-val jelöltük).

Szintén egy megfelelő forgatás középpontja a BC és az AD szakaszok felezőmerőlegesének Q metszéspontja (alsó ábra).

Az ismertetett szerkesztési eljárások nem adnak helyes megoldást, ha pl. a BC és AD szakaszok párhuzamosak egymással, hiszen ebben az esetben felezőmerőlegeseik egybeesnek. Ez akkor fordul elő, ha az $ABCD$ négyszög húrtrapéz. Ebben az esetben az egyik forgatás középpontja a négyszög köré írható kör középpontja, a másik forgatás középpontja pedig a keletkező húrtrapéz szárait tartalmazó egyenesek metszéspontja.







1668 Az ilyen forgatás középpontja az A és B pontoktól egyenlő távolságra van, ezért illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére. Ugyanakkor a forgatás középpontjából az AB szakasz 90°-os szög alatt látszik, ezért illeszkedik az AB szakasz fölé emelt Thalész-körre is. A forgatás középpontját tehát a Thalész-kör és a szakaszfelező merőleges metszéspontjaként szerkeszthetjük. Látható, hogy a feladat feltételeinek két pont is eleget tesz.

1669 *a)* A szabályos háromszöget a körülírt körének középpontja körüli, $k \cdot 120°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatások hagyják helyben.

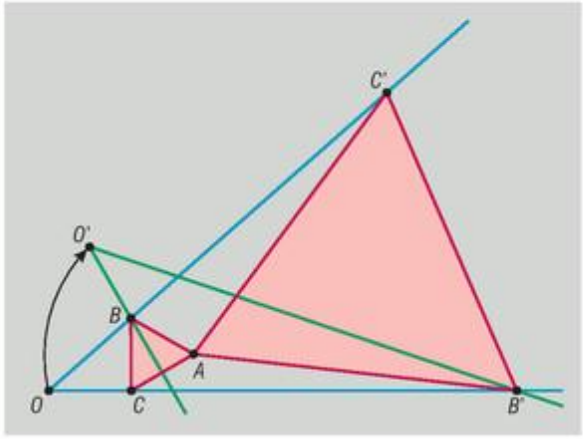
b) A négyzetet a középpontja körüli $k \cdot 90°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatások hagyják helyben.

c) A szabályos n szöget a középpontja körüli $k \cdot \frac{360°}{n}$ szögű forgatások hagyják helyben, ahol k egész számot jelöl.

1670 A szerkesztés lépései:

1. Az O csúcsú szöget az A pont körül elforgatjuk $-60°$-kal (vagy akár 60°-kal).
2. A szög elforgatott képe kimetszi az eredeti szög megfelelő száraiból a B és B' pontokat.
3. A B és B' pontokat az A pont körül 60°-kal ($-60°$-kal) elforgatjuk. A képpontok C és C'. Ekkor az ABC és $AB'C'$ háromszögek szabályosak.

Megjegyzés: A szerkeszthetőség feltétele, hogy az elforgatott szög valamely szára metssze az eredeti szög másik szárát.



1671 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Igaz. *d)* Hamis. *e)* Hamis. *f)* Igaz.
g) Hamis. *h)* Igaz. *i)* Igaz. *j)* Igaz. *k)* Hamis. *l)* Hamis.
m) Igaz.

1672 *a)* $\frac{\pi}{12}$; *b)* $\frac{\pi}{6}$; *c)* $\frac{\pi}{4}$; *d)* $\frac{\pi}{3}$; *e)* $\frac{\pi}{2}$; *f)* π;
g) $\frac{4 \cdot \pi}{3}$; *h)* $\frac{125 \cdot \pi}{18}$; *i)* $42 \cdot \pi$.

1673 *a)* $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$; *b)* $3 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 171{,}9°$; *c)* 15°;
d) 36°; *e)* 30°; *f)* 270°;
g) 240°; *h)* 13 680°; *i)* 120 000°.

1674 *a)* Az óra nagymutatójának végpontja 20 perc alatt $\frac{5 \cdot \pi}{3} \approx 5{,}24$ cm utat tesz meg. Ezalatt a mutató körülbelül 6,54 cm^2 területet súrol.

b) Fél óra alatt a nagymutató végpontja $\frac{5 \cdot \pi}{2} \approx 7{,}85$ cm utat tesz meg, és a mutató által súrolt terület körülbelül 9,82 cm^2.

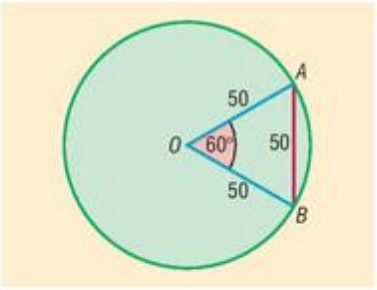
c) A mutató végpontja $\frac{35 \cdot \pi}{12} \approx 9{,}16$ cm utat tesz meg. A súrolt terület 11,45 cm^2.

d) A mutató végpontja $\frac{15 \cdot \pi}{4} \approx 11{,}78$ cm utat tesz meg. A súrolt terület 14,73 cm^2.

1675 Az ábra jelölései szerint az ABO háromszög szabályos, oldala 50 méter, ezért területe 1082,53 m^2. A rövidebb AB körívhez tartozó körcikk középponti szöge 60°-os, ezért területe a kör területének hatodrésze, azaz 1309 m^2. A kisebb körszelet területe ebből kifolyólag:

$$1309 - 1082{,}53 = 226{,}47 \text{ m}^2.$$

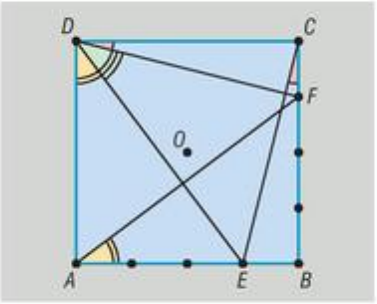
A nagyobb rész területe 7627,51 m^2.



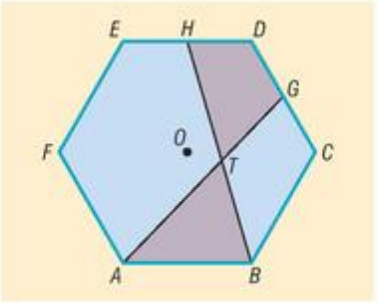
1676 A kör kerülete $8 \cdot \pi$ cm.

A körívek hossza $\frac{8 \cdot \pi}{5} \approx 5{,}03$ cm, $\frac{8 \cdot \pi}{3} \approx 8{,}38$ cm, illetve $\frac{56 \cdot \pi}{15} \approx 11{,}73$ cm.

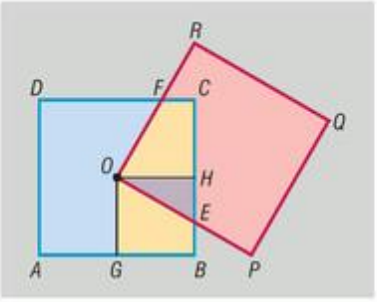
1677 A négyzet O középpontja körüli 90°-os forgatása CEB háromszöget a DFC háromszögbe viszi át, így $ECB\sphericalangle = FDC\sphericalangle$. Az O középpont körüli –90°-os forgatás az FAB háromszöget EDA háromszögbe viszi át, ezért $FAB\sphericalangle = EDA\sphericalangle$. A két forgatás után a három megjelölt szög összege éppen a négyzet egyik szögét adja, ami igazolja, hogy a szögek összege 90°.



1678 A hatszög O középpontja körüli 60°-os forgatás az $ABCG$ négyszöget a $BCDH$ négyszögbe viszi át, ezért a két négyszög területe megegyezik, azaz $T_{ABCG} = T_{BCDH}$. Ha a két négyszögből a közös részüket, vagyis a $BCGT$ négyszöget elvesszük, akkor a visszamaradó síkidomok területe is nyilvánvaló módon megegyezik, azaz $T_{ABT} = T_{GDHT}$.



1679 Jelöljük az OP és BC szakaszok metszéspontját E-vel, OR és CD metszéspontját F-fel, továbbá G-vel, illetve H-val az AB, illetve BC oldalak felezőpontját. Ezután forgassuk el az $OFCH$ négyszöget az O pont körül –90°-kal. A forgatás után a négyszög képe az $OEBG$ négyszög, melynek területe így megegyezik az $OFCH$ négyszög területével. Azt kaptuk tehát, hogy az $ABCD$ és $OPQR$ négyzetek közös részének, vagyis az $OECF$ négyszögnek a területe ugyanakkora, mint az $OEBG$ és az OEH síkidomok területének összege. Az ábráról azonnal leolvasható, hogy a területösszeg az $ABCD$ négyzet területének negyede: $\frac{a^2}{4}$.



1680 Az adott pontot A-val, a párhuzamos egyeneseket e-vel, illetve f-fel jelölve, a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

1. Forgassuk el az e egyenest az A pont körül 60°-kal, az elforgatott egyenest jelöljük e'-vel.
2. Szerkesszük meg az e' és az f egyenes B metszéspontját.
3. Forgassuk el a B pontot az A pont körül –60°-kal; a keletkezett pontot jelöljük C-vel.



Az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek. Ha az 1. és 3. lépésben a forgatások szögének nagyságát nem, de irányát megváltoztatjuk, akkor egy újabb megoldást kapunk. Az ABC háromszög az adatok tetszőleges felvétele esetén szerkeszthető. Minden esetben két háromszöget kapunk eredményül.

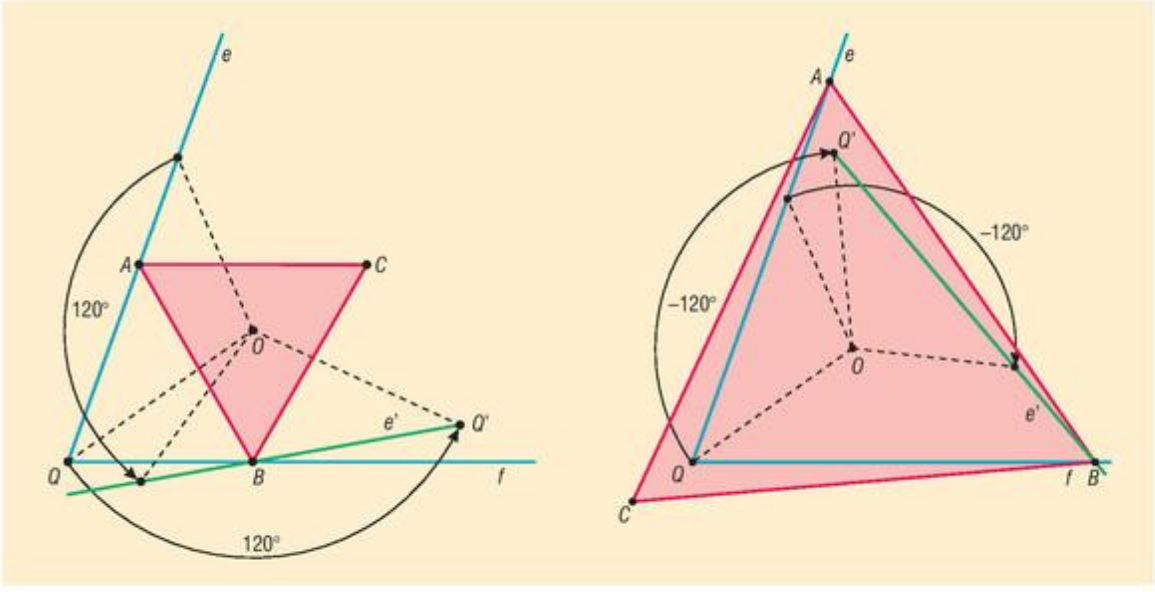
1681 Az adott pontot A-val, az egyenest e-vel, a kört k-val jelöljük. Ha a szabályos ABC háromszög B csúcsa illeszkedik a k körre, akkor a C csúcs illeszkedik a k kör A pont körüli 60°-kal (megfelelő irányban történő) elforgatott képére. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

1. Forgassuk el az A pont körül 60°-kal a k kört; az eredmény a k' kör.
2. Szerkesszük meg a k' kör és az e egyenes metszéspontját vagy metszéspontjait. A metszéspontok egyikét jelöljük C-vel.
3. Forgassuk el a C pontot az A pont körül $-60°$-kal; a kapott pont B.

Az ABC háromszög megfelel a feladat minden feltételének. További megoldásokat kaphatunk, ha az 1. és 3. lépésben a forgatás irányát megváltoztatjuk. A szerkeszthetőség feltétele, hogy a k kör 60°-kal vagy $-60°$-kal elforgatott képének legalább egy közös pontja legyen az e egyenessel. A feladatnak 0, 1, 2, 3, 4 megoldása lehet.

1682 *a)* A szabályos háromszöget a középpontja körüli 120°-os forgatás önmagába viszi át, ezért ugyanez a forgatás az adott szög megfelelő szögszárát olyan félegyenesbe viszi, amelyik a háromszög egyik csúcsában fogja metszeni a másik szögszárat. A szögszárakat e-vel, f-fel, az adott pontot O-val jelölve, a szerkesztés lépései ezek alapján a következők lehetnek (bal oldali ábra):

1. Forgassuk el az e szögszárat az O pont körül 120°-kal, a kapott félegyenest jelöljük e'-vel.
2. Szerkesszük meg az e' és f félegyenesek B metszéspontját.
3. Forgassuk el a B pontot az O pont körül $-120°$-kal, a kapott pont A.
4. Forgassuk el a B pontot az O pont körül 120°-kal, a kapott pont C.



Az ABC háromszög a feladat feltételeinek megfelel.

Ha a forgatások szögének nagyságát nem, de irányát megváltoztatjuk, akkor egy újabb megoldást kapunk. Ezt a megoldást a jobb oldali ábra szemlélteti. Megjegyezzük, hogy a szerkeszthetőség feltétele, hogy az e' félegyenes metssze az f szögszárat.

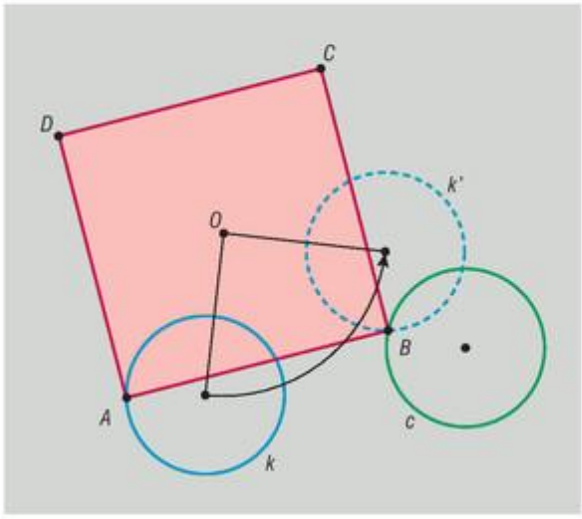
b) A szerkesztés lépései:

1. Forgassuk el az e szögszárat az O pont körül 90°-kal, az így kapott félegyenest jelöljük e'-vel.
2. Szerkesszük meg az e' és f félegyenesek B metszéspontját.
3. Forgassuk el a B pontot az O pont körül $-90°$-kal, a kapott pont A.
4. Tükrözzük a B pontot az O pontra, a tükörkép legyen D.
5. Tükrözzük az A pontot az O pontra, a tükörkép legyen C.

Az $ABCD$ négyszög négyzet, amely a feladat minden feltételének eleget tesz.

Az *a)* ponthoz hasonlóan itt is újabb megoldást kaphatunk, ha a forgatások irányát megváltoztatjuk.

1683 Az adott pontot O-val, a köröket k-val, illetve c-vel jelöljük. Ha az $ABCD$ négyzet középpontja O, továbbá az A csúcs a k kör, B a c kör egy pontja, akkor a szerkesztés lehetséges lépései a következők.



1. Forgassuk el a k kört az O pont körül 90°-kal, a kapott kör legyen k'.
2. Szerkesszük meg a k' és c körök egyik metszéspontját, B-t.
3. Forgassuk el a B pontot az O pont körül $-90°$-kal, így kapjuk az A csúcsot.
4. Tükrözzük a B pontot az O pontra, az eredmény D.
5. Tükrözzük az A pontot az O pontra, így kapjuk a C pontot.

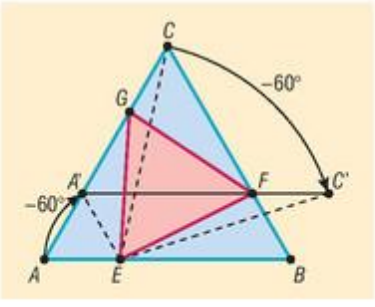
Az $ABCD$ négyzet a feltételek mindegyikének eleget tesz.

Előfordulhat, hogy a feladatnak több megoldása is van, hiszen a k' és a c körök eleve két metszésponttal is rendelkezhetnek.

A feladat további megoldásait kaphatjuk, ha a forgatások irányát megváltoztatjuk.

Kialakítható ugyanakkor egy elég speciális adatfelvétel, amikor a feladatnak végtelen sok négyzet is eleget tesz. Ez úgy lehetséges, ha a k kör elforgatott képe egybeesik a c körrel, ekkor ugyanis a B pont a c kör tetszőleges pontja lehet.

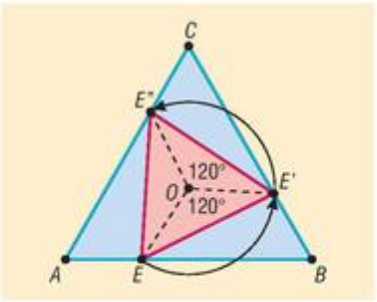
1684 *a)* Tegyük fel, hogy az ABC háromszög pozitív körüljárási iránnyal rendelkezik, azaz a B pontot az A pont körüli $+60°$-os forgatással lehet a C pontba átvinni. Forgassuk el az E pont körül az AC szakaszt $-60°$-kal. A szerkesztendő szabályos háromszög megfelelő csúcsa (F) illeszkedik a kapott $A'C'$ szakaszra, valamint a BC oldalra is, ezért a két szakasz metszéspontjaként szerkeszthető. A háromszög hiányzó G csúcsa az F pont E pont körüli 60°-os elforgatásával szerkeszthető.



A feladat megoldásainak száma attól függ, hogy az $A'C'$ milyen helyzetű a BC szakaszhoz viszonyítva. Mivel a két szakasznak pontosan egy metszéspontja van, ezért bármely E pontból indulunk is ki, minden esetben egy megoldást kapunk.

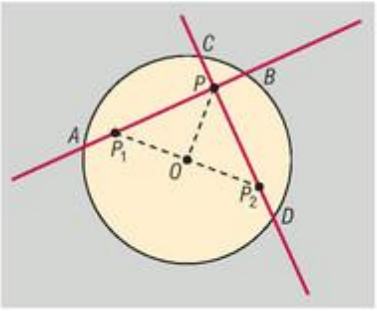


b) Tegyük fel, hogy az EFG szabályos háromszög E csúcsa az ABC szabályos háromszög AB, F csúcsa a BC, G csúcsa a CA oldalra illeszkedik. Jelölje O az ABC háromszög középpontját. Forgassuk el az E pontot az O pont körül 120°-kal. Eredményül olyan E' pontot kapunk, amely a háromszög BC oldalára illeszkedik. Ha a kapott E' pontot tovább forgatjuk az O pont körül 120°-kal, akkor a CA oldal egy E'' pontjához jutunk. A pontok származtatásából azonnal következik, hogy az $EE'E''$ háromszög szabályos, amelynek természetesen az O pont a középpontja.



Az *a)* feladatban megmutattuk, hogy az E ponthoz egyetlen olyan szabályos háromszög tartozik, amelynek további csúcsai is az ABC háromszög oldalaira illeszkednek, ezért $E' = F$, $E'' = G$. Ezzel megmutattuk, hogy az O pont az EFG háromszög középpontja is egyben.

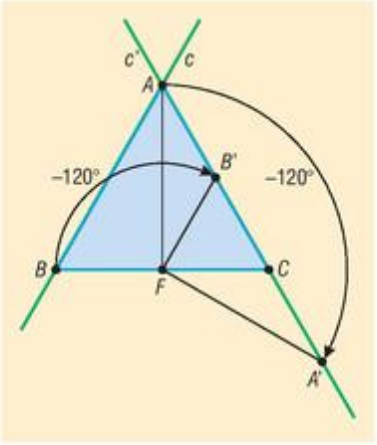
1685 A feladat megoldásához felhasználhatjuk, hogy ha a körben két húr egyenlő hosszúságú, akkor a kör középpontjától ugyanolyan távolságra haladnak, amiből pedig következik, hogy a kör középpontja körüli forgatással egymásba vihetők. Ha a két húr ráadásul merőleges egymásra, akkor a forgatás szöge 90°. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek.



1. Forgassuk el az adott P pontot a kör O középpontja körül 90°-kal mindkét irányba. A forgatások eredményeként az ábrán P_1-gyel és P_2-vel jelölt pontokat kapjuk.
2. Szerkesszük meg a P_1P, illetve a P_2P egyeneseket.
3. Szerkesszük meg a P_1P és a P_2P egyenesek körrel való metszéspontjait. A kapott metszéspontok megadják a keresett húrok végpontjait (ld. ábra).

A kívánt tulajdonságú húrok minden esetben szerkeszthetők. Ha a P pont és a kör O középpontja egybeesik, akkor végtelen sok megoldás van, mivel bármely két, egymásra merőleges átmérő megfelel a feltételeknek. Más esetekben a feladatnak egy megoldása van.

1686 A szerkesztések elvégzése után láthatjuk, hogy az F pont körüli $-120°$-os forgatás az A és B pontokat olyan A', illetve B' pontokba viszi át, amelyek illeszkednek az AC egyenesre (ld. ábra). Az ábra alaposabb elemzése után észrevehetjük, hogy a B' pont egybeesik az AC oldal felezőpontjával, valamint az A' pont egybeesik a B' pont C-re vonatkozó tükörképével. A fenti sejtések könnyen igazolhatók. Valóban, ha B' jelöli az AC szakasz felezőpontját, akkor az $FB'C$ háromszög szabályos, és ezért $FB' = FC = FB$, továbbá $BFB' \sphericalangle = 120°$, ami igazolja, hogy a B' pont egybeesik a B pont F pont körüli $-120°$-kal elforgatott képével.



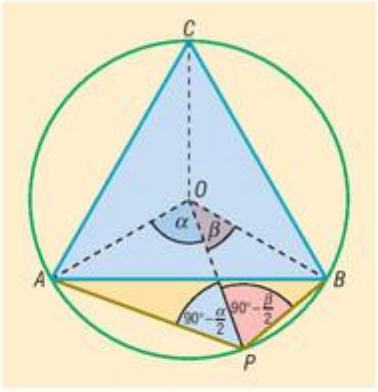
Megmutatjuk, hogy ha A' jelöli a B' pont C-re vonatkozó tükörképét, akkor A' egybeesik az A pont F körüli $-120°$-kal elforgatott képével. Valóban, hiszen B' a B pont elforgatott képe, továbbá $B'A' = BA$, valamint $FB'A' \sphericalangle = FBA \sphericalangle = 60°$, ezért a BA szakaszt a forgatás csakis a $B'A'$ szakaszba viheti át, így az A pont képe A'.

Fenti eredményeinket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az ABC szabályos háromszögben a BC oldal felezőpontja körüli $-120°$-os forgatás során az AB oldalegyenes az AC oldalegyenesbe megy át. E megállapítás alapján a szerkesztési feladat megoldása már nem túlságosan nehéz.

Ha adott az F felezőpont, továbbá a P és Q pontok, melyek közül P az AB, míg Q a BC oldalegyenesre illeszkedik, akkor az ABC háromszög szerkesztése a következőképpen végezhető el.

1. Forgassuk el a P pontot az F pont körül $-120°$-kal.
2. Fektessünk egyenest a P_1 képponton, valamint a Q ponton át. A kapott egyenes éppen az AC egyenessel egyezik meg.
3. Az ABC háromszög A csúcsát ezután az AC egyenes „visszaforgatott" (az F pont körül 120°-kal elforgatott) képe metszi ki az AC egyenesből.
4. A hiányzó háromszögcsúcsokat az AF szakaszra F-ben emelt merőleges egyenes metszi ki az oldalegyenesekből.

1687 *a)* Ha az ABC háromszög köré írt kör középpontját O jelöli, akkor az APO és BPO háromszögek egyenlő szárúak (AO, PO, BO a kör egy-egy sugara), ezért ha $AOP\sphericalangle = \alpha$, illetve $POB\sphericalangle = \beta$, akkor



$$APO\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}, \quad \text{illetve} \quad OPB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2},$$

így

$$APB\sphericalangle = APO\sphericalangle + OPB\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

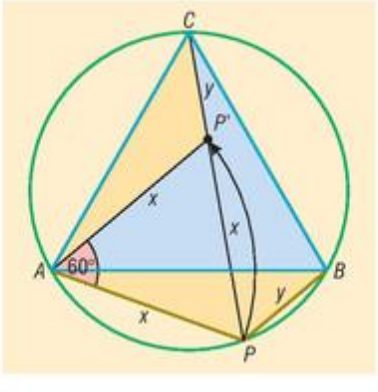
Az ABC háromszög szabályos, ezért az O pont nemcsak a körülírt kör középpontja, hanem egyben a belső szögfelezők metszéspontja is, ezért az ACO, illetve BCO egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei 30°-osak. Ebből azonnal következik, hogy $AOC\sphericalangle = BOC\sphericalangle = 120°$, majd

$$\alpha + \beta = 360° - 240° = 120°,$$

amit az $APB\sphericalangle$-re kapott összefüggésbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$APB\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 120°.$$

b) Forgassuk el az APB háromszöget az A pont körül 60°-kal. A forgatás során az A pont helyben marad, a B pont képe a C pont, a P pont képe P'.



Vizsgáljuk meg a keletkező APP' háromszöget. A forgatás távolságtartó tulajdonsága miatt $AP = AP' = x$, ezért a háromszög egyenlő szárú. Mivel a forgatás szöge 60°, ezért $P'AP\sphericalangle = 60°$, így az APP' háromszög egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelyben a szárak egymással 60°-os szöget zárnak be. Egy ilyen háromszögben az alapon fekvő szögek összege 120°, ezért a háromszög szükségképpen szabályos is, így $P'P = x$, továbbá $AP'P\sphericalangle = 60°$.

A forgatás szögtartó tulajdonsága miatt $CP'A\sphericalangle = BPA\sphericalangle = 120°$, amint azt az *a)* feladatban megmutattuk. Ekkor viszont egyszerű szögszámolás mutatja, hogy

$$CP'P\sphericalangle = CP'A\sphericalangle + AP'P\sphericalangle = 120° + 60° = 180°,$$

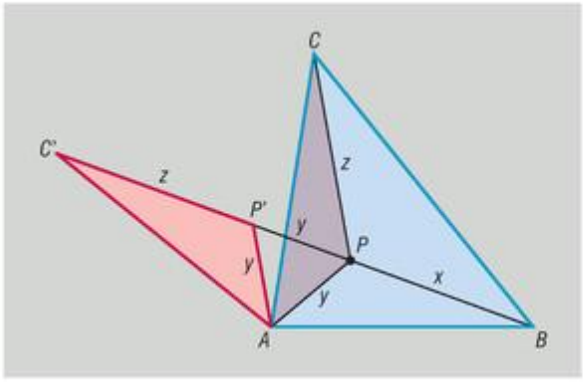
amiből azonnal következik, hogy a C, P', P pontok egy egyenesre illeszkednek. Ismét a forgatás távolságtartó tulajdonsága miatt $CP' = BP = y$, ezért

$$PA + PB = x + y = PP' + P'C = PC,$$

amit éppen bizonyítani kívántunk.



1688 Vegyünk fel az ABC hegyesszögű háromszög belsejében egy P pontot, melyre $PA = y$, $PB = x$, $PC = z$ az ábra szerint. Feladatunk az $x + y + z$ összeg minimalizálása.

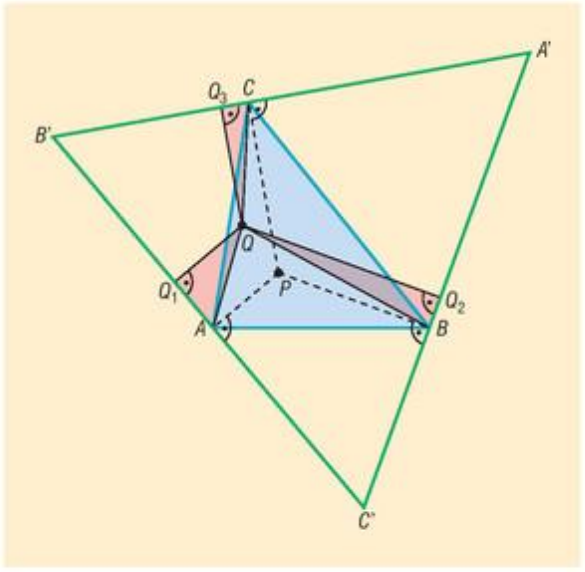


Az ilyenkor szokásos eljárást követjük; megpróbáljuk „kiteríteni" a három szakaszt egymás mellé. Ennek érdekében forgassuk el az ACP háromszöget az A pont körül 60°-kal. Az A pont helyben marad, a C pont képét C', a P pont képét P' jelöli az ábrán. A forgatás tulajdonságai miatt $AP' = AP = y$, továbbá $P'AP\sphericalangle = 60°$, ezért az APP' háromszög egyenlő szárú, melyben a szárak egymással 60°-os szöget zárnak be, így a háromszög szükségképpen szabályos is, amiből azt kapjuk, hogy $PP' = y$. A forgatás eredményeként tehát a $BPP'C'$ törött vonal hossza éppen a minimalizálni kívánt $x + y + z$ összeggel egyenlő. Mivel a C' pont helyzete a P pont választásától független, ezért a törött vonal hossza akkor a lehető legkisebb, ha a P' és P pontok illeszkednek a BC' szakaszra. Ez akkor következik be, ha a $CPA\sphericalangle = C'P'A\sphericalangle = 120°$, valamint a $BPA\sphericalangle = 120°$ összefüggések teljesülnek. Másként fogalmazva; a P pontnak a háromszög csúcsaitól mért távolságösszege akkor a lehető legkisebb, ha a P pontból a háromszög mindhárom oldala 120°-os szögben látszik. (A szóban forgó P pontot a háromszög izogonális pontjának nevezik.)

A keresett pont szerkesztésére a következő eljárást adhatjuk.

1. Forgassuk el a C pontot az A pont körül 60°-kal; így kapjuk a C' pontot.
2. Forgassuk el a B pontot a C pont körül szintén 60°-kal; így a B' ponthoz jutunk.
3. Szerkesszük meg a BC' szakaszt.
4. Szerkesszük meg az AB' szakaszt.
5. A BC' és az AB' szakaszok metszéspontja a háromszög keresett pontja.

Bemutatunk egy másik bizonyítást is arra vonatkozóan, hogy a $PA + PB + PC$ összeg valóban arra a P pontra minimális, amelyből az ABC háromszög oldalai 120°-os szögben látszanak.



Ehhez állítsunk az A csúcsban merőlegest a PA szakaszra, a B csúcsban a PB szakaszra, végül a C csúcsban a PC szakaszra. Ha a kapott egyenesek metszéspontjai az $A'B'C'$ háromszöget alkotják az ábra szerint, akkor egyszerű szögszámolás mutatja, hogy az $A'B'C'$ háromszög szabályos. Valóban, hiszen például az $APBC'$ négyszögben a P csúcsnál 120°-os, az A és B csúcsoknál pedig 90°-os szögek vannak, ezért

$$AC'B\sphericalangle = 360° - (120° + 90° + 90°) = 60°.$$

Hasonlóan igazolhatjuk, hogy a háromszög másik két szöge is 60°-os.

Az 1596. feladat eredménye alapján az $A'B'C'$ háromszög belsejében választott tetszőleges pontnak a háromszög oldalaitól mért távolságösszege ugyanakkora, éppen a háromszög magasságával egyenlő. Ezek szerint a $PA + PB + PC$ összeg megegyezik az $A'B'C'$ háromszög magasságának hosszával.

Válasszunk ezután az ABC háromszög belsejében egy P-től különböző Q pontot. Megmutatjuk, hogy

$$QA + QB + QC > PA + PB + PC.$$

Ha a Q pontnak az $A'B'C'$ háromszög oldalaira eső merőleges vetületeit Q_1, Q_2, Q_3 jelöli az ábrának megfelelően, akkor

$$QQ_1 < QA, \quad QQ_2 < QB \quad \text{és} \quad QQ_3 < QC.$$

Ennek igazolásához elegendő az ábrán satírozással megjelölt háromszögekre hivatkoznunk; például QQ_1 befogó, QA átfogó az AQQ_1 háromszögben, ami mutatja, hogy $QQ_1 < QA$ valóban teljesül. A felírt egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

$$QA + QB + QC > QQ_1 + QQ_2 + QQ_3.$$

Vegyük észre, hogy a QQ_1, QQ_2, QQ_3 szakaszok hossza éppen a Q pontnak az $A'B'C'$ háromszög oldalaitól mért távolságaival egyenlők, ezért korábbi megjegyezésünk alapján összegük éppúgy a háromszög magasságával egyenlő, mint a $PA + PB + PC$ összeg, vagyis

$$QQ_1 + QQ_2 + QQ_3 = PA + PB + PC.$$

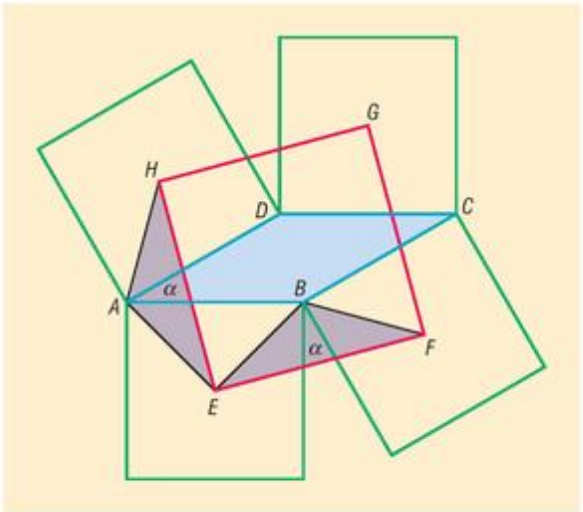
Ekkor viszont

$$QA + QB + QC > PA + PB + PC.$$

Ezzel igazoltuk, hogy bárhogyan is választjuk meg az ABC háromszög belsejében a P-től különböző Q pontot, annak a csúcsoktól mért távolságösszege nagyobb, mint a P pontnak a csúcsoktól mért távolságösszege.

Megjegyzés: Igaz a feladat állítása olyan tompaszögű háromszögben is, amelynek nincs 120°-nál nagyobb szöge.

1689 *a)* Tegyük fel, hogy az $ABCD$ paralelogramma oldalaira kifelé rajzolt négyzetek középpontjai az ábra szerint az $EFGH$ négyszöget alkotják. Feladatunk annak igazolása, hogy az $EFGH$ négyszög négyzet.

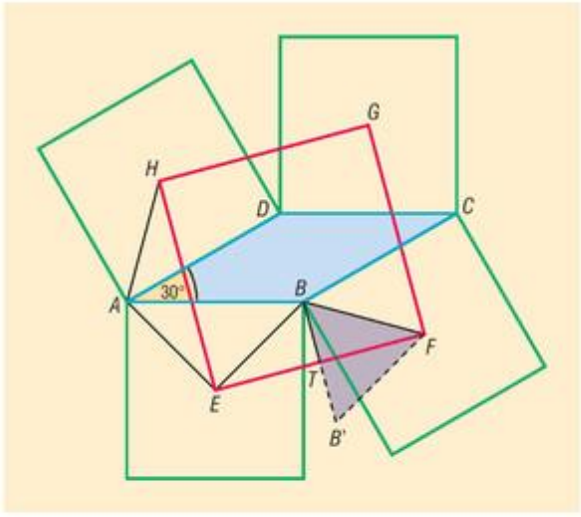


Ennek érdekében forgassuk el az AEH háromszöget az E pont körül $-90°$-kal. A forgatás során az E pont természetesen helyben marad, az A pont képe pedig a B pont, mivel az AB oldalra rajzolt négyzetben $AE = BE$, és a két szakasz merőleges egymásra. Ezután megmutatjuk, hogy a H pont az F pontba kerül át. Először is gondoljuk végig, hogy az ábrán α-val jelölt szögek merőleges szárú szögpárt alkotnak, hiszen a B csúcsnál találkozó szögszárak közül az egyik merőleges AB-re, a másik pedig BC-re, így a vele párhuzamos AD-re is. A merőleges szárú szögek vagy megegyeznek, vagy egymást 180°-ra egészítik ki, de mivel mindkét szóban forgó szög szemlátomást hegyesszög, ezért csakis egyenlők lehetnek. Vegyük végül észre, hogy $\sphericalangle EAH = \sphericalangle EBF$, mert a négyzet átlója minden esetben 45°-os szöget zár be a négyzet oldalával, így mindkét szög nagysága $90° + \alpha$. A szögek egyenlősége mellett $AH = BF$ is teljesül, hiszen mindkét szakasz egy-egy ugyanakkora oldalú négyzetben az átló felével egyenlő. Eddigi eredményeink mutatják, hogy a forgatás a H pontot valóban az F pontba viszi át.

Ekkor viszont az EH szakaszt az E pont körüli $-90°$-os forgatással az EF szakaszba lehet átvinni, ezért $EH = EF$, továbbá a két szakasz egymásra merőleges. Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy az $EFGH$ négyszög bármely két szomszédos oldala egyenlő hosszú és 90°-os szöget zár be egymással, ezért a négyszög valóban négyzet.



b) Amennyiben az $ABCD$ rombusz, és az A csúcsnál 30°-os szög van, akkor az *a)* feladat eredményei alapján az EFB egyenlő szárú háromszögben a szárak által bezárt szög 120°. Ha T jelöli az EF alap felezőpontját, akkor a BTF derékszögű háromszögben a B csúcsnál lévő szög 60°-os, így egy „félszabályos" háromszögről van szó.



Az ilyenkor szokásos módszer szerint, ha tükrözzük a B pontot az EF egyenesre, akkor a kapott $BB'F$ háromszög szabályos, amelyben FT a magasság. Ezek után már könnyen számolhatjuk az EF oldal hosszát. Mivel a rombusz oldala a feltételek szerint 10 cm, ezért a BC oldalra rajzolt négyzet átlója $10 \cdot \sqrt{2}$ cm, így $BF = 5 \cdot \sqrt{2}$ cm.

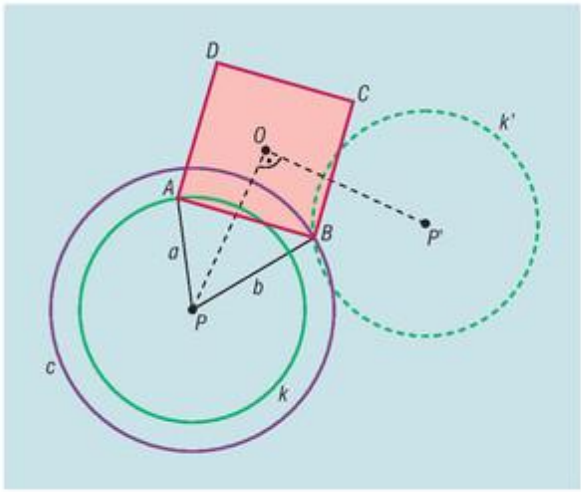
A $BB'F$ szabályos háromszög magasságára adódik:

$$FT = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{2} \text{ cm}.$$

Végül az $EFGH$ négyzet kerülete:

$$K = 8 \cdot FT = 20 \cdot \sqrt{6} \approx 48{,}99 \text{ cm}.$$

1690 Tegyük fel, hogy az $ABCD$ négyzet csúcsaira $PA = a$, $PB = b$ teljesül. Ekkor az A csúcs illeszkedik a P középpontú, a sugarú k körre, míg a B csúcs illeszkedik a szintén P középpontú, b sugarú c körre (ld. ábra). Másrészt az O középpontú 90°-os forgatás az A pontot a B pontba viszi át, ezért ha a k kört is forgatjuk, akkor eredményül olyan k' kört kapunk, amely tartalmazza a B pontot. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő lehet.



1. Megszerkesztjük a P középpontú, a sugarú k kört.
2. Megszerkesztjük a P középpontú, b sugarú c kört.
3. Elforgatjuk 90°-kal az O pont körül a k kört, így a k' kört kapjuk.
4. A négyzet B csúcsát a k' és a c körök metszéspontjaként szerkeszthetjük.
5. A B pontot az O pont körül $-90°$-kal elforgatva az A pontot kapjuk.
6. A B pontot az O pont körül 90°-kal elforgatva a C pontot kapjuk.
7. A D pontot a C pont O körüli 90°-kal történő elforgatásával kaphatjuk.

A megoldások száma a k' és c körök egymáshoz viszonyított helyzetétől függ. Megjegyezzük, hogy ha a k kört ellentétes irányba forgatjuk, majd az összes további forgatás irányát is megváltoztatjuk, akkor további megoldásokat is kapunk. Ha az OP távolságot x ($x > 0$) jelöli, akkor $PP' = x \cdot \sqrt{2}$, így a megoldások száma a következőképpen alakul ($b \geq a$ esetén).

Ha $x \cdot \sqrt{2} > a + b$, akkor k' és c köröknek nincs közös pontjuk, ezért nincs megoldás.

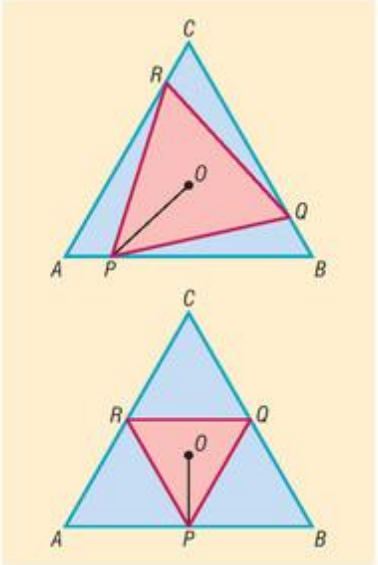
Ha $x \cdot \sqrt{2} = a + b$, akkor k' és c érintik egymást, ezért összesen 2 megoldást kapunk.

Ha $a + b > x \cdot \sqrt{2} > b - a$, akkor összesen 4 megoldást kapunk.

Ha $x \cdot \sqrt{2} = b - a$, akkor ismét 2 megoldás adódik, más esetekben nincs megoldás.

Ha az O és P pontok egybeesnek, akkor $a = b$ esetén végtelen sok megoldást kapunk, ha a és b különbözőek, akkor pedig nem adódik megoldás.

1691 *a)* Ha az ABC szabályos háromszögbe a PQR szintén szabályos háromszöget írjuk, akkor az 1684. feladat eredményei alapján a két háromszög középpontja egybeesik; a közös középpontot az ábrán O-val jelöltük. A szabályos háromszög középpontja egyben magasság- és súlypont is, ezért a PO szakasz $\frac{2}{3}$-szorosa a PQR háromszög magasságának (felső ábra).



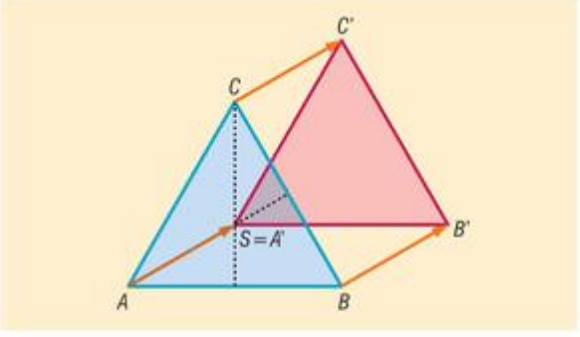
Béla bácsi végrendelete szerint a minimális területű PQR háromszöget keressük. Mivel a szabályos háromszög oldala és magassága egymással egyenesen arányos, ezért területe akkor a lehető legkisebb, ha magassága minimális, ami pontosan akkor következik be, ha a PO szakasz a lehető legrövidebb. A PO szakasz pedig akkor minimális, ha PO merőleges az AB szakaszra, azaz amikor P az AB szakasz felezőpontja. Ebben az esetben Q és R is felezőpontok a megfelelő oldalakon (alsó ábra). A minimális területű beírt szabályos háromszög oldalai tehát az ABC háromszög középvonalai egyben. Mivel a középvonalak négy egybevágó háromszögre bontják az ABC háromszöget, ezért a legkisebb területű beírt szabályos háromszög területe negyedrésze az ABC háromszög területének.

b) Az *a)* feladat eredményei alapján a PQR háromszög területe akkor a lehető legnagyobb, ha a PO szakasz hossza maximális. Az AB oldal belső pontjai között azonban nincsen olyan, amely legtávolabb lenne az O ponttól, azért valóban nem létezik maximális területű beírt szabályos háromszög, így minden valamirevaló bíróságnak el kell utasítania az örökös keresetét.

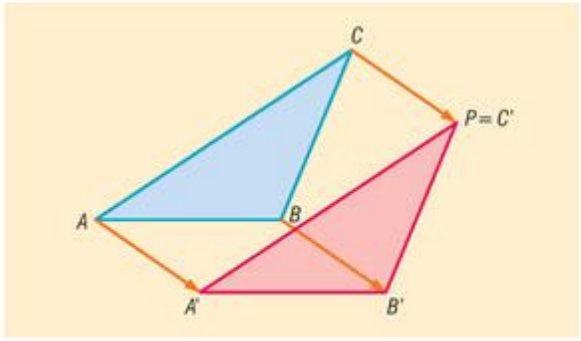
Megjegyezzük, hogy a beírt háromszög területe a $\left[\frac{T}{4}; T\right[$ intervallumban változik, ahol T az ABC háromszög területét jelöli.

Eltolás – megoldások

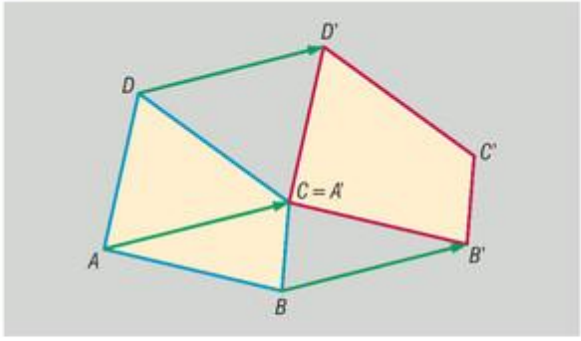
1692 A megfelelő eltolás az ábrán látható.



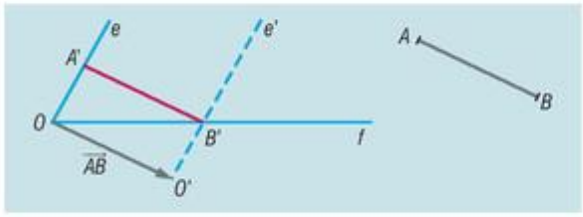
1693 A megfelelő eltolás az ábrán látható.



1694 Az $ABB'C$ négyszög paralelogramma.

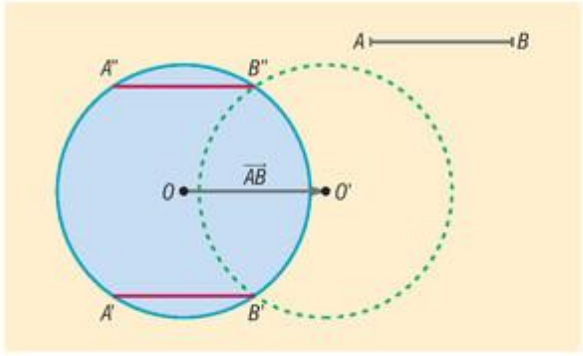


1695 Toljuk el az adott szög egyik (az ábrán e-vel jelölt) szárát az adott $\overrightarrow{AB}$-ral. Az eltolt e' félegyenes a szög másik (f-fel jelölt) szárából kimetszi a B' pontot. A B' pontot $\overrightarrow{BA}$-ral eltolva az e félegyenesen olyan A' pontot kapunk, amellyel az $A'B'$ szakasz megfelel a feltételeknek.



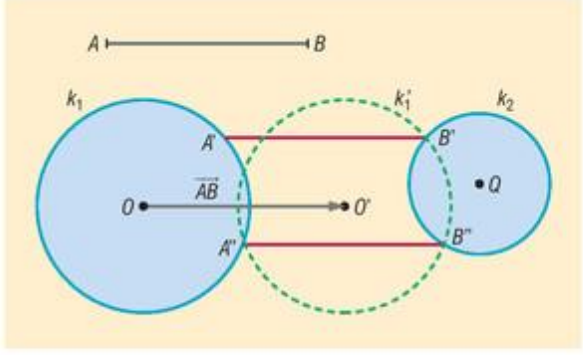
1696 Az adott kört toljuk el az adott $\overrightarrow{AB}$-ral. A kör eltolt képe kimetszi az eredeti körből a B' és B'' pontokat. A B' és B'' pontokat $\overrightarrow{BA}$-ral eltolva megkapjuk a feltételeknek megfelelő $A'B'$ és $A''B''$ szakaszok másik végpontját.

Ha az AB szakasz hossza kisebb, mint a kör átmérője, akkor a feladatnak két megoldása van. Ha az AB szakasz hossza éppen a kör átmérőjével egyenlő, akkor csak egy megoldás van, más esetekben a feladatnak nincsen megoldása.



1697 Toljuk el az adott k_1 kört az adott $\overrightarrow{AB}$-ral. A kör eltolt képe (k_1') a szintén adott k_2 körből kimetszi a B' és B'' pontokat, amelyeket a $\overrightarrow{BA}$-ral eltolva a k_1 kör olyan A' és A'' pontjait kapjuk, amelyekre az $A'B'$ és $A''B''$ szakaszok a feladat feltételeinek megfelelnek.

A feladatnak attól függően 0, 1, 2 vagy végtelen sok megoldása lehet, hogy a k_1 kör eltolt képe milyen helyzetű a k_2 körrel. Az utóbbi esetben az eltolt kör egybeesik a k_2 körrel.



1698 A feladat az 1697. feladat egy átfogalmazása. Az ott használt jelölésekkel az $AA'B'B$ és az $AA''B''B$ négyszögek paralelogrammák.

1699 *a)* $A'(4; 4)$, $B'(-1; 8)$, $C'(-3; 1)$;

b) $A'(1; 6)$, $B'(-4; 10)$, $C'(-6; 3)$;

c) $A'(-1; -2)$, $B'(-6; 2)$, $C'(-8; -5)$.

1700 *a)* $A(3; -2)$, $B(-2; 2)$, $C(-4; -5)$;

b) $A(5; -6)$, $B(0; -2)$, $C(-2; -9)$;

c) $A(7; 4)$, $B(2; 8)$, $C(0; 1)$.

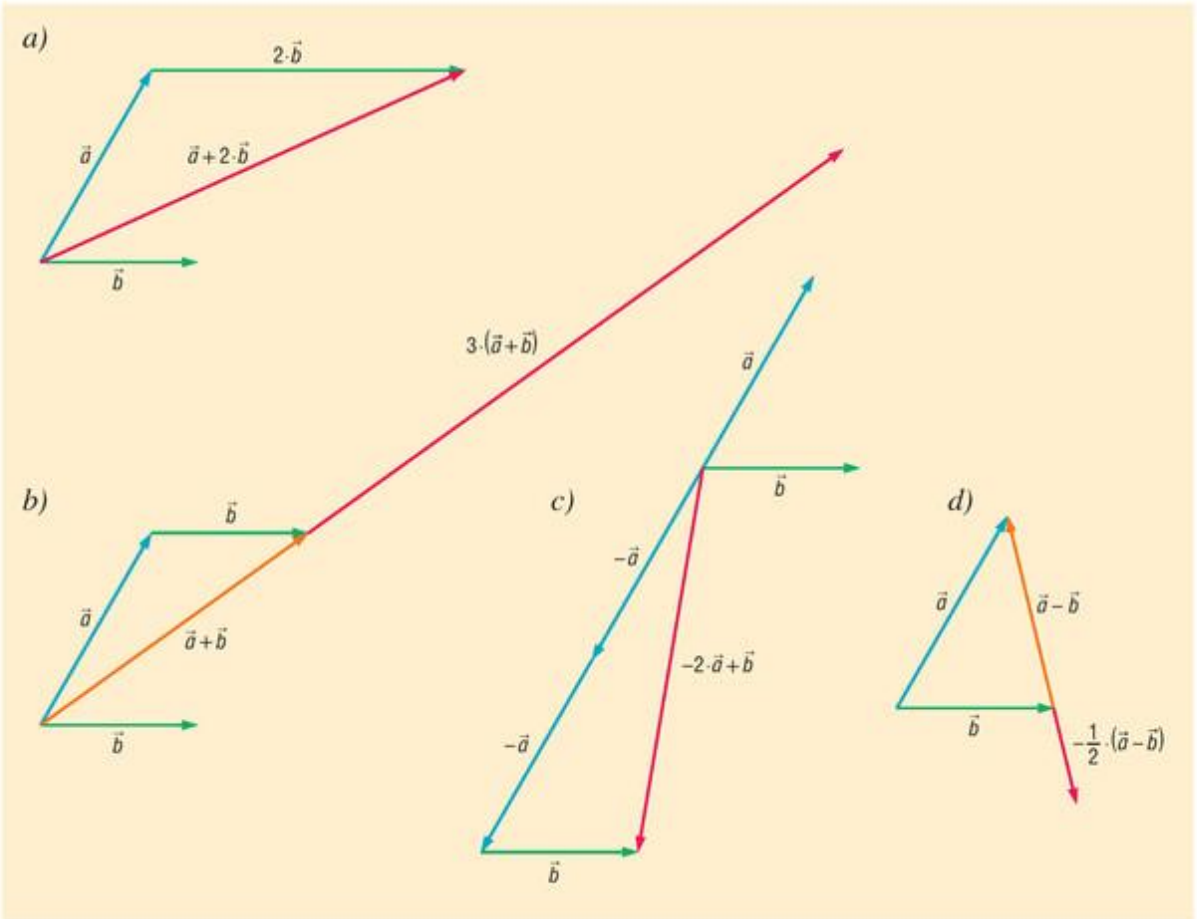
1701 *a)* $A''(-2; -1)$, $B''(4; 4)$, $C''(0; 9)$.

b) Ha az eltolásokat fordított sorrendben alkalmazzuk, akkor az első eltolás után a következő pontokhoz jutunk: $(-4; -5)$, $(2; 0)$, $(-2; 5)$. Ha a kapott pontokra alkalmazzuk a $(2; 4)$ koordinátájú vektorral történő eltolást, akkor a $(-2; -1)$, $(4; 4)$, $(0; 9)$ koordinátájú pontokhoz jutunk. Ugyanazokat a pontokat kaptuk, mint az *a)* feladatban, ami igazolja a két eltolás sorrendjének felcserélhetőségét.

c) A két eltolás egymás utáni elvégzése a $(-1; 2)$ koordinátájú vektorral történő eltolással helyettesíthető.

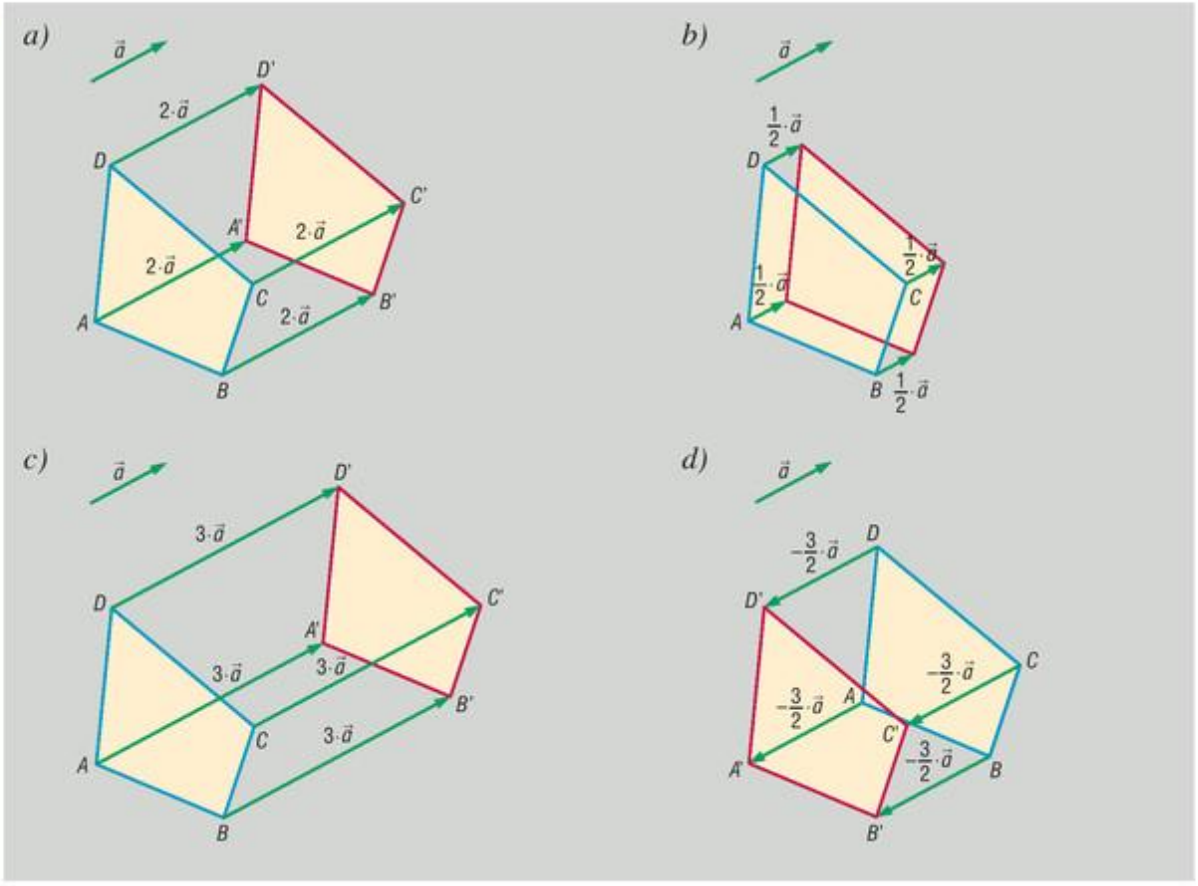
1702 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis.
e) Igaz. *f)* Hamis. *g)* Igaz.

1703





1704



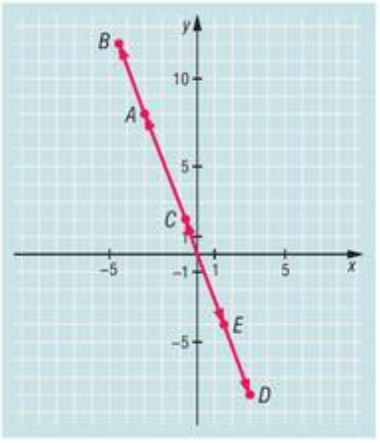
1705 *a)* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}(-3;8)$;

b) $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\cdot\vec{a}\left(-\frac{9}{2};12\right)$;

c) $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\cdot\vec{a}\left(-\frac{3}{4};2\right)$;

d) $\overrightarrow{OD} = -\vec{a}(3;-8)$;

e) $\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2}\cdot\vec{a}\left(\frac{3}{2};-4\right)$.



1706 *a)* $\vec{a} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC}$;
b) $\vec{b} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO}$;
c) $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$;
d) $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FA}$.

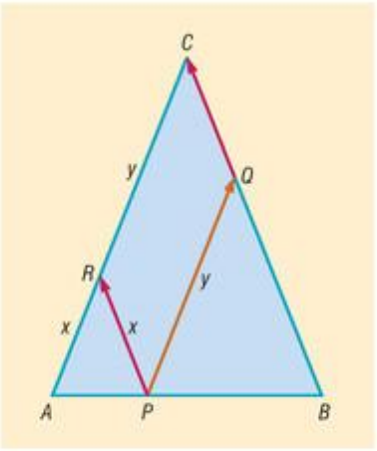
1707 *a)* $\overrightarrow{AO} = \vec{b}$;
b) $\overrightarrow{AD} = 2\cdot\vec{b}$;
c) $\overrightarrow{EO} = \vec{a} - \vec{b}$;
d) $\overrightarrow{BE} = 2\cdot(\vec{b} - \vec{a})$;
e) $\overrightarrow{FD} = \vec{a} + \vec{b}$;
f) $\overrightarrow{FC} = 2\cdot\vec{a}$;
g) $\overrightarrow{FB} = 2\cdot\vec{a} - \vec{b}$;
h) $\overrightarrow{EA} = \vec{a} - 2\cdot\vec{b}$.

1708 *a)* $\overrightarrow{EF} = -\vec{a}$;
b) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$;
c) $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;
d) $\overrightarrow{FG} = -\vec{b}$;
e) $\overrightarrow{FH} = -(\vec{b} + \vec{c})$;
f) $\overrightarrow{GE} = \vec{b} + \vec{a}$.

1709 **I. megoldás.** Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának egy tetszőleges pontját P-vel jelöltük. Ha a megfelelő párhuzamosok a háromszög szárait az ábrának megfelelően Q-ban, illetve R-ben metszik, akkor az APR háromszög szintén egyenlő szárú, ezért $AR = PR = x$. A PQ szakaszt a $\overrightarrow{PR}$ mentén történő eltolással az RC szakaszba lehet átvinni, ezért $PQ = RC = y$. A párhuzamosokból a háromszög oldalai által kimetszett szakaszok összege ezek szerint:

$$PR + PQ = x + y = AC,$$

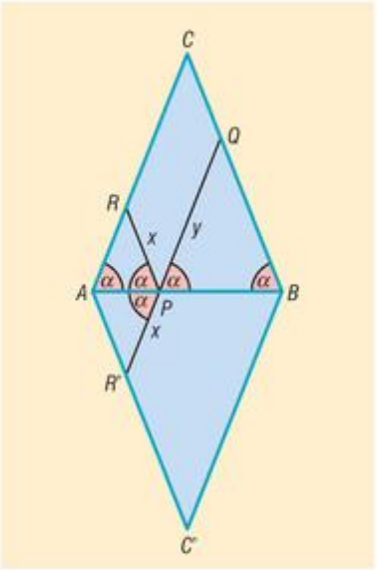
a P pont választásától függetlenül a háromszög szárával egyezik meg. Megjegyezzük, hogy az eltolás helyett elegendő lett volna arra hivatkoznunk, hogy a $PQCR$ négyszög paralelogramma.



II. megoldás. Tükrözzük az ABC háromszöget, valamint a PR szakaszt az AB egyenesre. A tükrözés után az $AC'BC$ rombuszt, valamint a PR' szakaszt kapjuk. Az ábrán azonos módon megjelölt szögek egyenlőségéből következik, hogy a Q, P, R' pontok egy egyenesre illeszkednek, ami mutatja, hogy

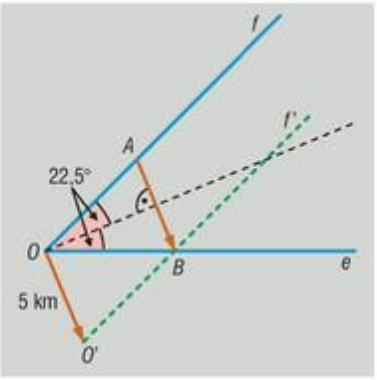
$$PR + PQ = PR' + PQ = R'Q,$$

ami a P pont helyzetétől függetlenül párhuzamos az $AC'BC$ rombusz AC oldalával, ezért hosszuk is megegyezik.

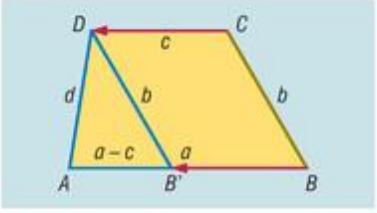


1710 A település központját O-val, a megépítendő útszakaszon kialakuló két új kereszteződést A-val és B-vel jelöltük. A feltételek szerint az ABO háromszög egyenlő szárú, ezért az AB alap merőleges az O csúcsból kiinduló szögfelezőre.

A fenti észrevétel alapján az AB út szerkesztése a következőképpen történhet. Először megszerkesztjük a már meglévő két út szögfelezőjét, majd az egyik utat (az ábrán az f-fel jelöltet) eltoljuk a szögfelezőre merőleges, 5 km hosszú vektorral. Az út eltolt képe (f') kimetszi a másik útból (e) a szerkesztendő B útkereszteződést. A B ponton át a szögfelezőre emelt merőleges kimetszi az f útból az A kereszteződést.



1711 Tekintsük az $ABCD$ trapézt, melynek alapjai a és c ($a > c$), szárai b és d. Toljuk el a BC szárat a $\overrightarrow{CD}$-ral. Ekkor a C pont átmegy a D pontba, a B pont átmegy az AB alap egy belső B' pontjába. Mivel a $B'BCD$ négyszög paralelogramma, ezért $B'B = c$, amiből következik, hogy $AB' = a - c$, és így az $AB'D$ háromszög oldalai: $a - c$, b, illetve d.



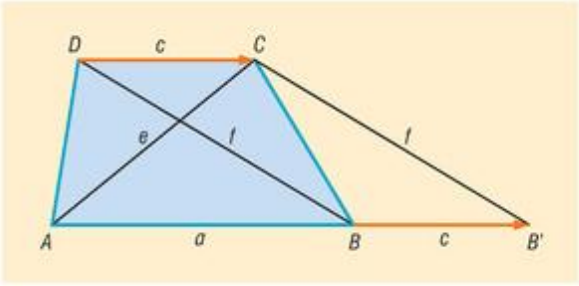


Látható, hogy a háromszög a trapéz oldalainak ismeretében szerkeszthető. Ezek alapján a szerkesztés lehetséges lépései:

1. Megszerkesztjük az $AB'D$ háromszöget, amelynek mindhárom oldala ismert.
2. Megszerkesztjük a $\overrightarrow{DC}$-t, amely párhuzamos az AB' oldallal, egyállású az $\overrightarrow{AB'}$-ral, nagysága a trapéz rövidebb alapjának hosszával egyenlő.
3. Eltoljuk a $B'D$ szakaszt a $\overrightarrow{DC}$-ral, az eltolt szakasz végpontjaiként kapjuk a B és C pontokat.

A szerkeszthetőség feltétele, hogy az $AB'D$ háromszög szerkeszthető legyen. A háromszög pontosan akkor szerkeszthető, ha oldalaira a háromszög-egyenlőtlenség teljesül, vagyis ha az $a - c$, b, d szakaszok közül bármely kettő hosszának összege nagyobb a harmadik hosszánál. Ha a háromszög szerkeszthető, akkor a feladatnak – egybevágóságtól eltekintve – egy megoldása van, más esetekben a trapéz nem szerkeszthető.

1712 Ha az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = a$, $CD = c$, átlói pedig e és f (ld. ábra), akkor toljuk el a BD átlót a $\overrightarrow{DC}$-ral. Az eltolás után a D végpont átmegy a C pontba, a B pont képe az AB alap B-n túli meghosszabbításán található B' pont, amelyre $BB' = c$ teljesül. Ekkor az $AB'C$ háromszög oldalai $a + c$, e, f, azaz a háromszög szerkeszthető.

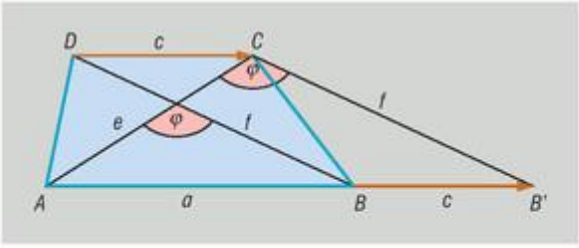


A trapéz szerkesztésének lépései ennek megfelelően a következők lehetnek:

1. Megszerkesztjük az $AB'C$ háromszöget, amelynek mindhárom oldala ismert.
2. Megszerkesztjük a B pontot, amelyet az AB' oldalból a B' középpontú, c sugarú kör metsz ki.
3. A trapéz hiányzó D csúcsát úgy kapjuk, hogy a C pontot eltoljuk a $\overrightarrow{B'B}$-ral.

A szerkesztés pontosan akkor végezhető el, ha az $a + c$, e, f oldalakból háromszög szerkeszthető, vagyis a három szakasz kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Ebben az esetben a feladatnak (egybevágóságtól eltekintve) egyetlen megoldása van, más esetekben a trapéz nem szerkeszthető.

1713 Toljuk el az $ABCD$ trapéz (az alapok AB és CD, $CD < AB$) BD átlóját a $\overrightarrow{DC}$-ral. Ekkor a D pont a C pontba kerül, a B pont B' képe az AB alap B-n túli meghosszabbításán található, továbbá $BB' = CD = c$. Mivel az eltolás a szakaszt önmagával párhuzamos szakaszba visz át, ezért $B'C$ párhuzamos BD-vel, így az ábrán azonos módon jelölt szögek egyenlők egymással (φ az átlók által bezárt szög kiegészítő szöge). Az $AB'C$ háromszögben ezért két oldal ($AC = e$, $B'C = f$), valamint az általuk bezárt szög ismert, amiből a háromszög már könnyen szerkeszthető.

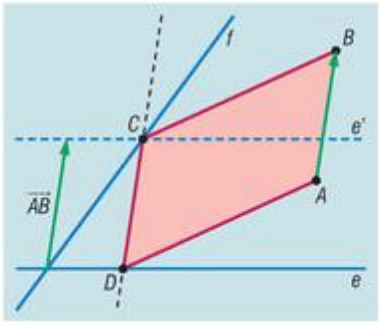


A trapéz szerkesztésének lépései a következők:

1. Megszerkesztjük az $AB'C$ háromszöget két oldalából, valamint az általuk bezárt szögből.
2. Az AB' oldalon megszerkesztjük a B pontot, amelyet a B' középpontú, c sugarú kör metsz ki az AB' szakaszból.
3. A trapéz hiányzó D csúcsát úgy kapjuk, hogy a C pontot eltoljuk a $\overrightarrow{B'B}$-ral.

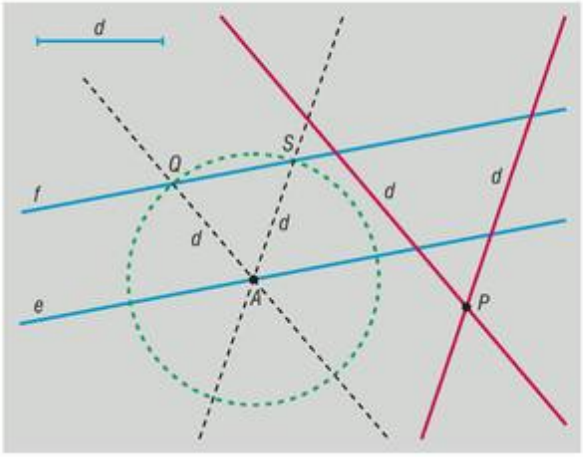
A szerkeszthetőség feltétele, hogy az $AB'C$ háromszög AB' oldala hosszabb legyen a trapéz rövidebb alapjának kétszeresénél.

1714 Ha az $ABCD$ paralelogramma C csúcsa az f, D csúcsa az e egyenesre illeszkedik, akkor az e egyenes $\overrightarrow{AB}$-ral eltolt e' képe tartalmazza a paralelogramma C csúcsát, így az szerkeszthető az f és e' egyenesek metszéspontjaként. A paralelogramma C csúcsának ismeretében a D csúcs is szerkeszthető, például azáltal, hogy a C ponton át párhuzamost szerkesztünk az $\overrightarrow{AB}$-ral, majd a párhuzamos kimetszi az e egyenesből a keresett D csúcsot (ld. ábra). Ehhez hasonló szerkesztéssel kaphatjuk meg azt a paralelogrammát, amelyben a C csúcs az e, míg a D csúcs az f egyenesre illeszkedik; ebben az esetben az e egyenest a $\overrightarrow{BA}$-ral kell eltolni, és előbb a D pont szerkesztése történik.



A feladatnak általában két megoldása van, ezek közül esetleg egyik elfajulhat szakasszá. Ha a két adott egyenes párhuzamos, és pl. az $\overrightarrow{AB}$-ral való eltolás az e egyenest átviszi az f egyenesbe, akkor a C pont helyzete nem egyértelmű, így a feladatnak végtelen sok megoldása is lehet. Megjegyezzük, hogy ha a két egyenes párhuzamos, akkor akár az is elképzelhető, hogy nincsen a feltételeknek eleget tevő paralelogramma. Ez akkor következik be, ha az e egyenes egyik eltolt képe sem esik egybe az f egyenessel.

1715 A két párhuzamost az ábrán e és f, az adott pontot P jelöli. A feladat megoldása előtt érdemes észrevenni, hogy a szerkesztendő egyenessel akárhogyan is húzunk párhuzamost, annak a párhuzamosok közé eső szakasza szintén d hosszúságú lesz. Ezt könnyen beláthatjuk, ha arra gondolunk, hogy a két párhuzamos az e és f egyenesekből egy paralelogrammát metsz ki, amelynek szemközti oldalai valóban megegyeznek.



Észrevételünk alapján a szerkesztési feladat megoldása a következő:

1. Az e egyenes egy tetszőleges A pontja, mint középpont körül d sugarú kört szerkesztünk.
2. Megjelöljük a kör és az f egyenes metszéspontjait (az ábrán Q és S).
3. Meghúzzuk az AQ, illetve AS egyeneseket.
4. Az AQ, illetve AS egyeneseket eltoljuk úgy, hogy azok a P ponton átmenjenek (AQ-val és AS-sel párhuzamosokat szerkesztünk a P ponton át). A szerkesztett egyenesek a feladat minden feltételének megfelelnek.

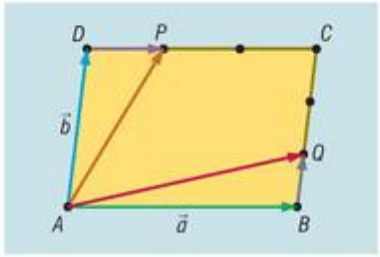
A szerkeszthetőség attól függ, hogy az A középpontú kör és az f egyenes milyen helyzetűek, vagyis az e és f egyenesek távolsága ne legyen nagyobb, mint d. Ha a két párhuzamos távolsága éppen d, akkor 1, ha d-nél kisebb, akkor 2 megoldást kapunk. Más esetben a feladatnak nincsen megoldása.

1716 *a)* Felhasználva, hogy P és Q harmadolópontok, azt kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{a},$$

illetve

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b}.$$

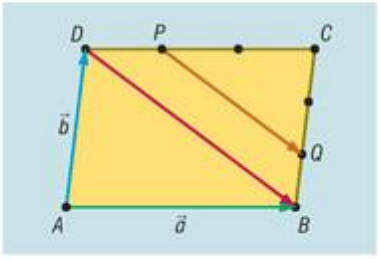




b) Az *a)* feladat eredménye alapján

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \left(\vec{a} + \frac{1}{3}\cdot\vec{b}\right) - \left(\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\vec{a}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\vec{a} - \vec{b}\right).$$

Mivel $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$, ezért $\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{DB}$, ami mutatja, hogy a két vektor párhuzamos.



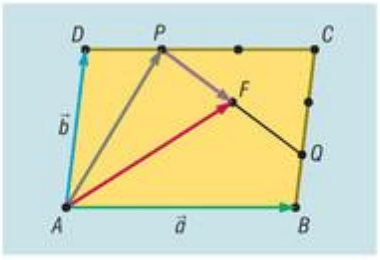
c) A *b)* feladat alapján: $\frac{PQ}{DB} = \frac{2}{3}$.

d) Jelöljük a PQ szakasz felezőpontját F-fel, majd bontsuk fel az $\overrightarrow{AF}$-t a következőképpen: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PF}$. Az $\overrightarrow{AP}$-t az *a)*, a $\overrightarrow{PQ}$-t a *b)* feladatban már kiszámoltuk, ezek alapján

$$\overrightarrow{PF} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a} - \vec{b}\right),$$

és

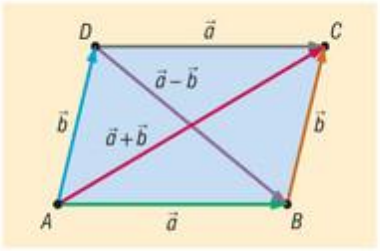
$$\overrightarrow{AF} = \left(\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\vec{a}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$



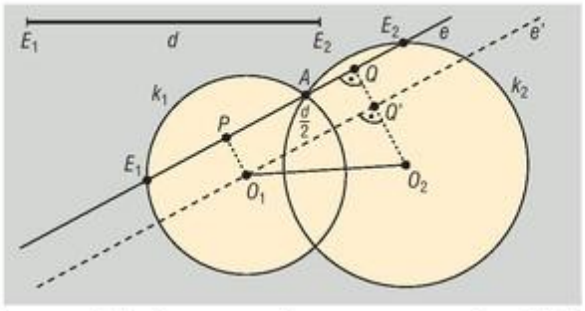
e) Az $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$, ami mutatja, hogy AF és AC valóban párhuzamos egymással.

1717 Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok párhuzamosak, akkor mindkét állítás egyszerűen következik a vektorműveletek értelmezéséből. Amennyiben a két vektor ráadásul egyirányú is, akkor az *a)*, míg ellentétes irányú vektorok esetén a *b)* feladat állításában teljesül egyenlőség.

Ha a két vektor nem párhuzamos egymással, akkor indítsuk azokat közös kezdőpontból, majd szerkesszük meg az $\vec{a} + \vec{b}$ és $\vec{a} - \vec{b}$ vektorokat. A két vektor az $ABCD$ paralelogramma egy-egy átlóvektora (ld. ábra), azaz $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ és $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. Ha alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az ABC, illetve az ABD háromszögekben, akkor éppen az *a)*, illetve a *b)* feladatok állítását kapjuk. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben egyik egyenlőtlenségben sem teljesülhet egyenlőség.

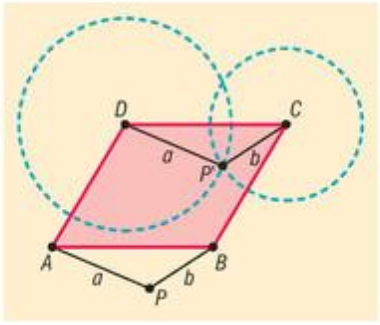


1718 Ha a k_1 és k_2 körök egyik metszéspontja A, továbbá az A ponton áthaladó e egyenes olyan E_1E_2 szakaszt metsz ki a körökből, amelynek hossza megegyezik az adott szakasz d hosszával, akkor az E_1A, ill. az AE_2 szakaszok P és Q felezőpontja közötti szakasz hossza $\frac{d}{2}$ (ld. ábra).



Tegyük fel, hogy a feladatot már megoldottuk, majd toljuk el az e egyenest úgy, hogy eltolt e' képe átmenjen a k_1 kör O_1 középpontján. Megmutatjuk, hogy az e' egyenes az adatokból megszerkeszthető. Ha az eltolás a Q pontot a Q' pontba viszi, akkor a $PO_1Q'Q$ négyszög paralelogramma, sőt téglalap, és így $PQ = O_1Q' = \frac{d}{2}$. Másrészt, az O_2Q szakasz merőleges az e és e' egyenesekre, amiből következik, hogy a Q' pont illeszkedik az O_1O_2 szakasz Thalész körére. A Q' pontot ezek alapján az O_1 középpontú $\frac{d}{2}$ sugarú kör metszi ki az említett Thalész-körből. Az e' egyenest ezután már könnyen szerkeszthetjük, hiszen két pontja már ismert. Az e' egyenes ismeretében az e egyenest úgy kaphatjuk, hogy az A ponton át párhuzamost szerkesztünk e'-vel.

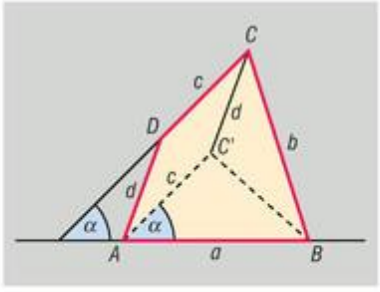
1719 Tegyük fel, hogy a feladatot sikerült megoldani, majd toljuk el az APB háromszöget az $ABCD$ paralelogramma $\overrightarrow{AD}$ oldalvektora mentén. Ekkor az A csúcs a D csúcsba, a B csúcs a C csúcsba, míg a P pont a P' pontba kerül át. Mivel az $APP'D$ és a $PBCP'$ négyszögek paralelogrammák, ezért $PA = P'D$ és $PB = P'C$. Minthogy a $PA = a$ és $PB = b$ szakaszok hossza adott, csakúgy mint a C és D pontok, ezért a $DP'C$ háromszög szerkeszthető; a P' pont a D középpontú a sugarú, és a C középpontú b sugarú körök metszéspontja (ld. ábra). Az $ABCD$ paralelogramma hiányzó A és B csúcsait a D és C pontok $\overrightarrow{P'P}$ vektorral eltolt képe adja meg.



A szerkesztés diszkussziója elég nehéznek bizonyul. A megoldások száma a két kör egymáshoz viszonyított helyzetétől, valamint a P és P' pontok kölcsönös helyzetétől függ. Ha ugyanis a két kör valamelyik metszéspontja ugyanolyan távolságra van a DC egyenestől, mint a P pont, akkor a megfelelő $\overrightarrow{P'P}$ párhuzamos a DC oldallal, így a D és C pontok eltolt képe illeszkedik a DC egyenesre, ami azt jelenti, hogy az egyik megoldásul kapott paralelogramma szakasszá fajul el.

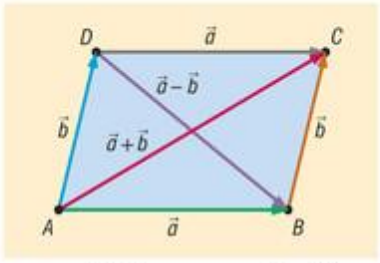
Amennyiben a P pont és a körök érintési pontja vagy metszéspontjai különböző távolságra van(nak) a CD egyenestől, úgy a metszéspontok száma a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésétől függően a következőképpen alakul. Ha $a > b$ és $DC > a + b$, akkor 0, ha $DC = a + b$, akkor 1, ha $a - b < DC < a + b$, akkor 2, ha $DC = a - b$, akkor megint 1, végül ha $DC < a - b$, akkor ismét 0 megoldás adódik.

1720 Az ábrán a szerkesztendő $ABCD$ négyszög oldalait adott sorrendben $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ és $DA = d$, az AB és CD egyenesek hajlásszögét α jelöli. Tegyük fel, hogy a feladatot sikerült megoldani, és elemezzük a kész ábrát. Toljuk el a négyszög CD oldalát úgy, hogy a D pont az A pontba kerüljön. Ha a C pont képét C' jelöli, akkor az $AC'CD$ négyszög paralelogramma, ezért $AC' = DC = c$, továbbá az AC' szakasz és a DC egyenes párhuzamossága miatt $C'AB\sphericalangle = \alpha$. Észrevételünk lehetőséget ad a C' pont szerkesztésére, hiszen az ABC' háromszögben két oldal, valamint az általuk bezárt szög adott. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő lehet. Felvesszük az AB szakaszt, majd az A csúcshoz átmásoljuk az adott α szöget. A szerkesztett szögszárra rámérve a szintén adott c távolságot, megkapjuk a C' pontot. A következő lépésben a C pontot szerkeszthetjük, hiszen egyrészt $C'C = d$ miatt C illeszkedik a C' középpontú, d sugarú körre, másrészt $BC = b$ miatt C illeszkedik a B középpontú b sugarú körre, így a két kör metszéspontjaként a C pont valóban szerkeszthető. A négyszög hiányzó D csúcsa az A pont $\overrightarrow{C'C}$-ral történő eltolásával szerkeszthető. Megjegyezzük, hogy a feladatnak – egybevágóságtól eltekintve – legfeljebb két megoldása lehet. Az adatok felvételétől függően előfordulhat, hogy a kapott $ABCD$ négyszög konkáv, esetleg hurkolt.



1721 Ha a két vektor közül valamelyik a nullvektorral egyenlő, akkor az $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ egyenlőség nyilvánvalóan teljesül. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok merőlegesek egymásra, hiszen a nullvektort bármely vektorra merőlegesnek tekintjük.

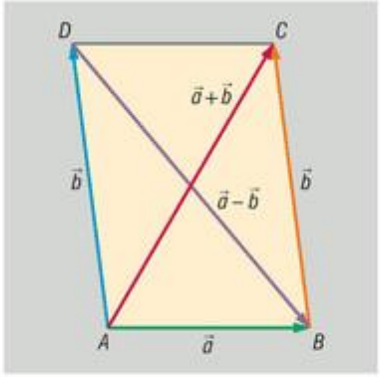
Ha a két vektor párhuzamos egymással és egyik sem a nullvektor, akkor egyirányú vektorok esetén $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$, ellentétes irányú vektorok esetén pedig $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$, ezért egyenlőség nem teljesülhet.





Más esetekben az $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}-\vec{b}$ vektorok az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma egy-egy átlóvektorai (ld. ábra), ezért a hosszuk akkor és csak akkor egyezik meg, ha az $ABCD$ paralelogramma átlói ugyanolyan hosszúak. Mivel az ABC és ABD háromszögekben két-két oldal megegyezik, ezért harmadik oldalaik akkor és csak akkor egyenlők, ha a két háromszög egybevágó. A két háromszög egybevágóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy a paralelogramma A és B csúcsánál lévő belső szögei megegyezzenek. Mivel a két szög összege 180°, ezért csak úgy lehetnek egyenlők, ha mindkettő 90°-os, azaz a paralelogramma téglalap. Azt kaptuk tehát, hogy $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ teljesülésének szükséges és elegendő feltétele, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egymásra merőlegesek legyenek.

1722 Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok valamelyike nullvektor, akkor természetesen $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$. Ha a két vektor egyirányú, akkor $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$, ha viszont ellentétes irányúak a vektorok, akkor $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$.



Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok nem párhuzamosak és közös kezdőpontból indítva az $ABCD$ paralelogrammát feszítik ki (ld. ábra), akkor $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, valamint $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$. Az ABC és ABD háromszögekben két-két oldal megegyezik, mivel $BC=AD$, valamint az AB oldal közös. A harmadik oldalak közül az a rövidebb, amellyel szemben kisebb szög van, ezért $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$ pontosan akkor teljesül, ha $ABC\sphericalangle<BAD\sphericalangle$. Mivel a két szög az $ABCD$ paralelogramma AB oldalán nyugszik, ezért összegük 180°, ezért $ABC\sphericalangle<BAD\sphericalangle$ akkor és csak akkor teljesül, ha az $ABC\sphericalangle$ hegyesszög és $BAD\sphericalangle$ tompaszög.

Eredményeinket összefoglalva azt kapjuk, hogy az $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$ összefüggés akkor és csak akkor teljesül, ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok tompaszöget vagy egyenesszöget zárnak be egymással.

Geometriai transzformációk – megoldások

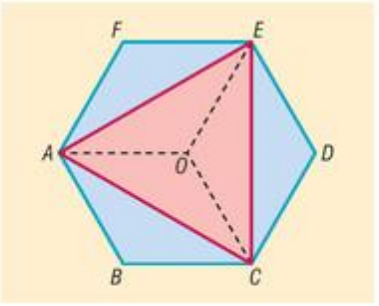
1723 *a)* A két háromszög nem feltétlenül egybevágó.
b) A két háromszög nem feltétlenül egybevágó.
c) A két háromszög egybevágó.
d) A két háromszög egybevágó.

1724 *a)* A két téglalap egybevágó.
b) A két téglalap egybevágó.
c) A két téglalap egybevágó.
d) A két téglalap nem feltétlenül egybevágó.

1725 *a)* A két paralelogramma nem feltétlenül egybevágó.
b) A két paralelogramma nem feltétlenül egybevágó.
c) A két paralelogramma egybevágó.
d) A két paralelogramma egybevágó.

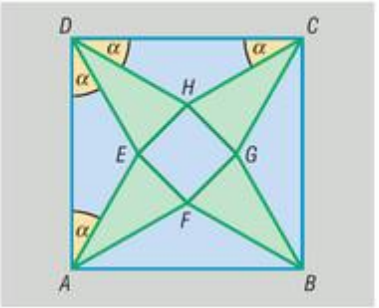
1726 *a)* A két rombusz nem feltétlenül egybevágó.
b) A két rombusz egybevágó.
c) A két rombusz egybevágó.
d) A két rombusz egybevágó.

1727 *a)* Az AEF, ECD, CAB háromszögek egybevágók egymással (az O középpont körüli forgatással vihetők egymásba). Ebből adódóan $AE = EC = AC$, azaz az AEC háromszög szabályos.



b) Az AEC háromszög, valamint az $ABCDEF$ hatszög területének aránya $1 : 2$. Ez azonnal belátható, ha behúzzuk az OA, OC, OE szakaszokat. Ezzel a hatszöget három egybevágó rombuszra osztottuk. Az AEC háromszög oldalai átlók egy-egy ilyen rombuszban, így megfelezik a rombuszok területét.

1728 *a)* Mivel az ADE, DCH, CBG, BAF háromszögek egybevágók és egyenlő szárúak, ezért száraik megegyeznek, ami igazolja, hogy a kialakuló EHD, GHC, FGB, EFA háromszögek szintén egyenlő szárúak. Mivel az utóbbi háromszögekben a szárszög $90° - 2 \cdot \alpha$, ezért e háromszögek páronként egybevágók.

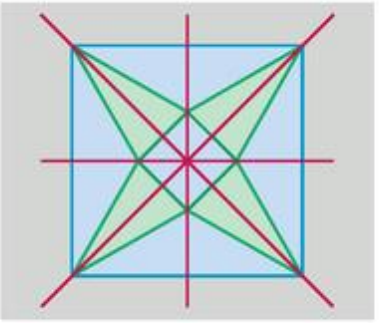


Megmutatjuk, hogy az $EHGF$ négyszög négyzet. Az eddigiekből már következik, hogy a négyszög oldalai megegyeznek. Jelöljük az $ABCD$ négyzet oldalaira emelt egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögeit α-val. Ekkor egyszerű szögszámolás mutatja, hogy az egyenlő szárú EHD háromszögben $EDH\sphericalangle = 90° - 2 \cdot \alpha$ és $DEH\sphericalangle = 45° + \alpha$. Ugyanígy láthatjuk be, hogy $AEF\sphericalangle = 45° + \alpha$ szintén teljesül. Végül az ADE egyenlő szárú háromszögben $DEA\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \alpha$. Számoljuk ki az $EHGF$ négyszög E csúcsánál kialakuló szöget:

$$HEF\sphericalangle = 360° - 2 \cdot (45° + \alpha) - (180° - 2 \cdot \alpha) = 90°.$$

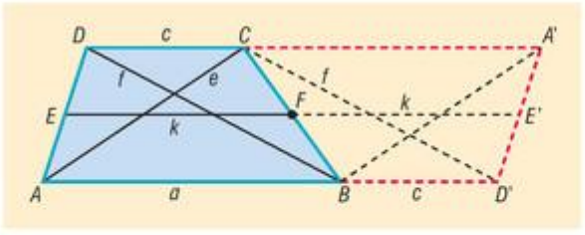
Természetesen ugyanilyen módszerrel megmutatható, hogy a négyszög többi szöge is 90°-os, ezért az $EHGF$ négyszög valóban négyzet.

b) Az ábrán bejelölt egyenesek az ábra tükörtengelyei, így összesen 4 ilyen egyenes van.



c) Az ábrán szereplő két négyzet közös középpontja körüli $k \cdot 90°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatások az ábrán szereplő alakzatot önmagába viszik át.

1729 Tükrözzük az $ABCD$ trapézt BC szárának F felezőpontjára. A tükrözés során a B és C csúcsok „helyet cserélnek”, a BD átló átmegy a CD' szakaszba. Az ábra jelöléseit használva láthatjuk, hogy az $AD'C$ háromszög oldalaira $AD' = a + c$, $AC = e$ (a trapéz egyik átlója), $D'C = f$ (a trapéz másik átlója).

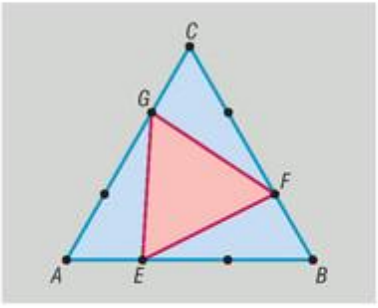


A háromszögben bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal, ezért $AC + D'C > AD'$, azaz $e + f > a + c$. Tekintettel arra, hogy a trapéz középvonalának hossza az alapok hosszának számtani közepével egyenlő, adódik, hogy $e + f > 2 \cdot k$, amiből valóban azt kapjuk, hogy

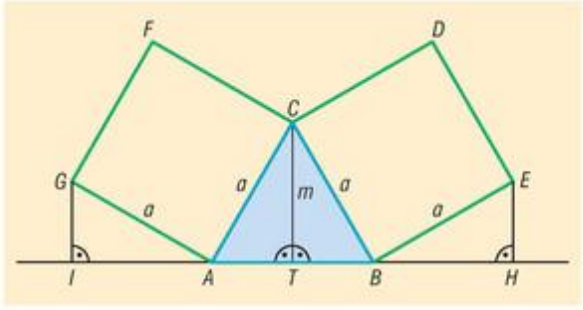
$$k < \frac{e + f}{2}.$$



1730 Az ábra jelöléseit használva beláthatjuk, hogy az AEG, BFE, CGF háromszögek egybevágók egymással. Ehhez csak annyit kell észrevennünk, hogy a háromszögekben két-két oldal (pl. $AE = BF$, $AG = BE$), valamint az általuk bezárt szög megegyezik (ez utóbbi mindhárom esetben 60°). Az egybevágóságból következik, hogy a háromszögek harmadik oldala is megegyezik, ami igazolja, hogy az EFG háromszög szabályos.



1731 *a)* Az ABC háromszög CT magassága két egybevágó, derékszögű háromszögre bontja a háromszöget. Megmutatjuk, hogy az AGI és BEH háromszögek egybevágóak a következő háromszögekkel.



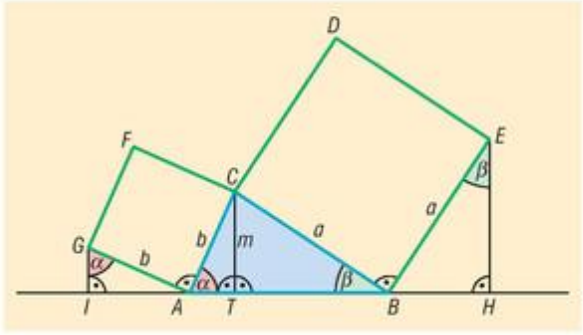
Az ACT háromszög átfogója egyenlő az ABC háromszög a oldalával, továbbá hegyesszögei 60°, illetve 30°-osak. Az AGI és BEH háromszögek átfogója szintén a hosszúságú, továbbá az A, illetve a B csúcsoknál lévő hegyesszögeik $180° - 90° - 60° = 30°$-osak, ezért a két háromszög valóban egybevágó az ACT háromszöggel.

Az egybevágóságból következik, hogy a további megfelelő oldalaik is megegyeznek, azaz

$$AI = CT = m, \quad \text{illetve} \quad BH = CT = m.$$

b) Az ABC háromszög köré írt kör középpontja illeszkedik az AB oldal felezőmerőlegesére. Mivel $TH = TB + BH = TB + m$, valamint $TI = TA + AI = TA + m$, továbbá $TB = TA$, ezért a T pont nemcsak az AB, hanem a HI szakasz felezőpontja is egyben. Ekkor azonban az AB szakasz, valamint a HI szakasz felezőmerőlegese egybeesik, így az ABC háromszög köré írt kör középpontja valóban illeszkedik a HI szakasz felezőmerőlegesére.

c) Ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor az AIG háromszög egybevágó a CTA háromszöggel, továbbá a BEH háromszög egybevágó a CBT háromszöggel. Ennek igazolásához vegyük észre, hogy $AG = CA$, mindkét háromszög derékszögű, $IGA\sphericalangle = TAC\sphericalangle = \alpha$, mivel a szögek szárai páronként merőlegesek egymásra, és mindkettő hegyesszög (merőleges szárú szögpár). Összefoglalva azt kaptuk, hogy az AIG és a CTA háromszögekben két-két szög egyenlő, továbbá a nagyobbal szemközti oldalak is megegyeznek, tehát a két háromszög valóban egybevágó egymással.



Ekkor viszont a további megfelelő oldalaik is megegyeznek, azaz $AI = CT = m$, és éppen ezt kellett bizonyítani. Értelemszerű módosításokkal igazolható, hogy $BH = CT = m$ szintén teljesül.

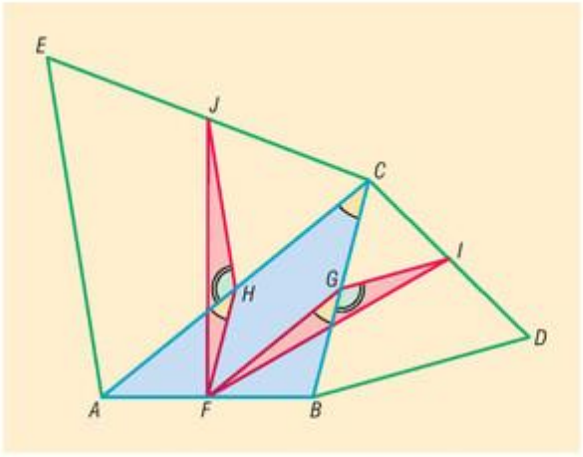
A *b)* feladat állításának igazolásához elegendő arra hivatkoznunk, hogy az AB szakasz felezőpontja ugyanolyan távolságra van az I ponttól, mint a H ponttól, mivel $AI = BH$. Ebből következik, hogy az AB szakasz és az IH szakasz felezőmerőlegese ezúttal is egybeesik, és így az ABC háromszög köré írható kör középpontja illeszkedik az IH szakasz felezőmerőlegesére is.

1732 *a)* Az FH szakasz középvonal a BCA háromszögben, ezért

$$FH = \frac{BC}{2}.$$

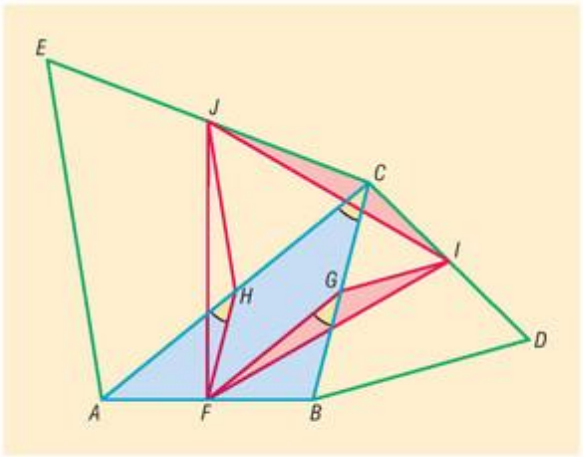
A GI szakasz középvonal a BDC háromszögben, így

$$GI = \frac{BD}{2}.$$



A BDC háromszög szabályos, ezért $BD = BC$, amiből következik, hogy $FH = GI$. Hasonlóan látható be, hogy $JH = GF$. Láthatjuk, hogy az FHJ és FGI háromszögekben két-két oldal megegyezik. Megmutatjuk, hogy az egyenlő oldalak által közrefogott szögek is megegyeznek, amiből azonnal következik, hogy a két háromszög egybevágó. Használjuk fel, hogy az ABC háromszög HF középvonala párhuzamos a BC oldallal, amiből következik, hogy $AHF\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \gamma$ (egyállású szögpár). Hasonló mondható a háromszög GF középvonaláról és AC oldaláról, ezért $FGB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \gamma$ is teljesül. Vegyük észre, hogy az $AHJE$ és a $BDIG$ négyszögek trapézok, hiszen JH és GI középvonalak a megfelelő szabályos háromszögekben. A trapéz szárán fekvő szögei 180°-ra egészítik ki egymást, és mivel mindkét trapézban a hosszabb alapon fekvő szögek 60°-osak, ezért $AHJ\sphericalangle = BGI\sphericalangle = 120°$. Ekkor $JHF\sphericalangle = 120° + \gamma = FGI\sphericalangle$, amit bizonyítani akartunk. Megjegyezzük, hogy ha $\gamma = 60°$, akkor $JHF\sphericalangle = FGI\sphericalangle = 180°$, ami mutatja, hogy ebben az esetben mindkét háromszög szakasszá fajul.

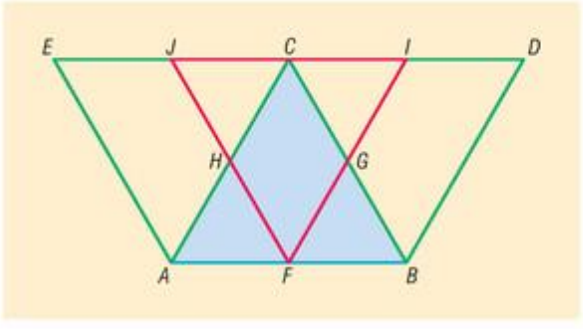
b) Az *a)* feladatban bizonyítottak alapján az FHJ és FGI háromszögek egybevágók, amiből azonnal következik, hogy az FIJ háromszög egyenlő szárú, és $FJ = FI$. Tekintsük a CJI háromszöget. Mivel J az EC oldal felezőpontja, ezért $JC = HC = GF$, és hasonlóan $CI = GI$. Egyszerű szögszámolás mutatja, hogy



$$JCI\sphericalangle = 60° + \gamma + 60° = 120° + \gamma.$$

Korábbi eredményünk alapján $JCI\sphericalangle = FGI\sphericalangle$, ezért a JCI és az FGI háromszögekben két-két oldal, valamint az általuk közrezárt szögek megegyeznek, és ebből adódóan a két háromszög egybevágó egymással. A háromszögekben ekkor a harmadik oldalak is megegyeznek, azaz $JI = FI = FJ$, tehát az FIJ háromszög valóban szabályos.

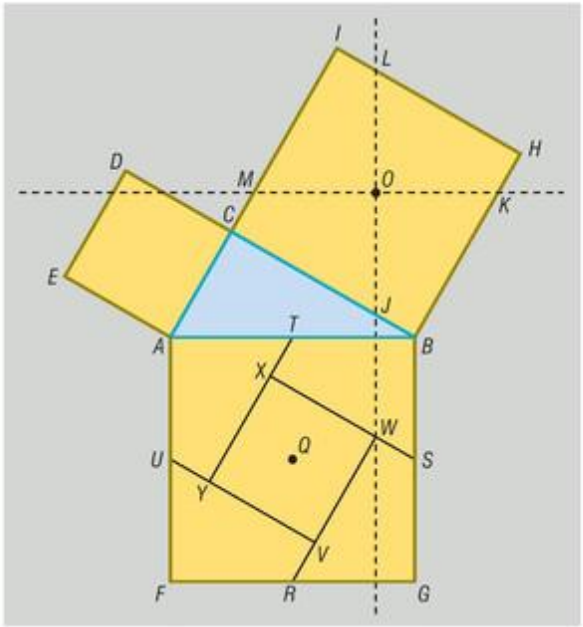
c) Amennyiben az ABC háromszög szabályos, úgy az FIJ háromszög egybevágó az ABC háromszöggel, amint azt az ábra is mutatja. Ebben az esetben az FI oldal is a hosszúságú, így például Pitagorasz tételével kiszámolható az FIJ háromszög magassága, majd a magasságból a területe:



$$m = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}, \quad T = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$



1733 *a)* A feladat Pitagorasz tételének egy kevésbé gyakori, geometriai transzformációkkal dolgozó bizonyítását kéri. Az ábra jelöléseit használva megmutatjuk, hogy a befogókra rajzolt négyzetek részeiből átfedés nélkül, hézagmentesen kitölthető az átfogóra rajzolt négyzet.



Az átfedéshez eltolásokat használunk fel; az *IMOL* négyszöget a *WRGS* négyszögbe, az *MCJO* négyszöget a *TXSB* négyszögbe, az *OJBK* négyszöget az *AUYT* négyszögbe, az *LOKH* négyszöget az *UFRV* négyszögbe, és végül az *EACD* négyzetet az *YVWX* négyzetbe visszük át.

Vizsgáljuk először a *BC* befogóra rajzolt négyzetet. Az *O* pont körüli 90°-os forgatás a négyzetet önmagába viszi át, az *O*-n átmenő két merőleges egyenest pedig egymásba. Ebből következik, hogy a két egymásra merőleges „vágás" négy egybevágó részre bontja a négyzetet.

Ezután toljuk el az *IMOL* négyszöget a *WRGS* négyszögbe. Mivel *MO* és *OL* merőlegesek egymásra, ezért az eltolás megvalósítható; az *R* pont az *FG*, az *S* pont a *GB* oldalra illeszkedik. Toljuk most az *LOKH* négyszöget az *UFRV* négyszögbe. Ez pontosan akkor tehető meg, ha $MO + OK = AB$. Ez azonban teljesül, hiszen az *ABKM* négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, így ez a négyszög paralelogramma. Ebből következően $MO + OK = AB$, vagyis a két szakasz hosszának összege valóban kiadja a háromszög átfogójának hosszát. Mivel *IM* és *HK* párhuzamosak, ezért eltolt képeik is párhuzamosak, ami igazolja, hogy a *V* pont illeszkedik az *RW* szakaszra, azaz az *R* pontnál sem hézag, sem átfedés nem alakul ki.

Ezután toljuk az *MCJO* négyszöget a *TXSB* négyszögbe. Ahhoz, hogy ez megtehető, meg kell mutatnunk, hogy $LJ = LO + OJ = AB$. Említettük, hogy az *O* körüli 90°-os forgatás az *O*-n átmenő merőlegeseket egymásba viszi át, amiből azonban az is következik, hogy *LJ* elforgatott képe *MK*, ezért $LJ = MK$. Már láttuk, hogy $MK = AB$, így $LJ = AB$ is teljesül. Megjegyezzük, hogy az *S* pontnál ugyanúgy nem alakul ki sem átfedés, sem hézag, mint ahogy azt már az *R* pontnál láttuk.

Az eddigiekből már az is következik, hogy az *OJBK* négyszöget az *AUYT* négyszögbe tudjuk tolni úgy, hogy az *ABGF* négyszög oldalai mentén sehol nem alakul ki átfedés és hézag.

Azt kell még megmutatnunk, hogy az *EACD* négyzetet az *YVWX* négyszögbe lehet tolni. Láttuk, hogy az *ABKM* négyszög paralelogramma, és így $BK = AM$, amiből egyszerűen adódik, hogy

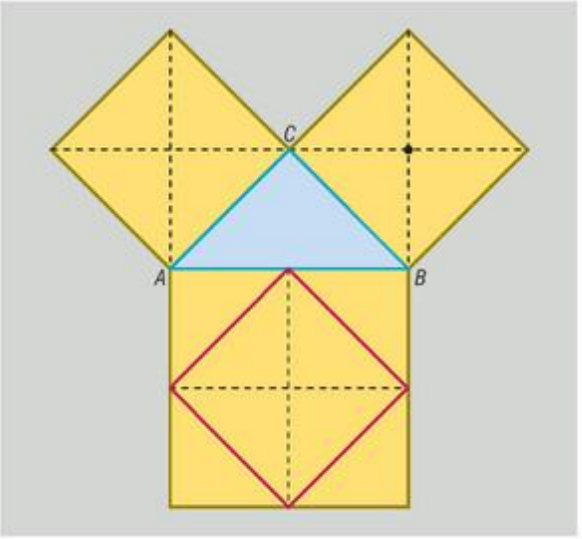
$$BK - MC = AM - MC = AC.$$

Mivel a már ismertetett eltolások a *BK* szakaszt az *YT* szakaszba, az *MC* szakaszt pedig az *XT* szakaszba viszik át, ezért

$$YX = YT - XT = BK - MC = AC.$$

Hasonlóan látható, hogy az *XYVW* négyszög többi oldala is *AC*-vel egyenlő, ezért rombusz. Másrészt az eltolás minden szakaszt önmagával párhuzamos szakaszba visz át, így az *YT* és az *UV* szakaszok hajlásszöge megegyezik a *BK* és *LH* szakaszok hajlásszögével. Ez utóbbi kettő szakasz viszont a *BC* oldalú négyzet két szomszédos oldalára illeszkedik, így merőlegesek egymásra. Ez bizonyítja, hogy az *XYVW* rombusz négyzet, amely egybevágó az *EACD* négyzettel.

b) Jóval egyszerűbb az egyenlő szárú derékszögű háromszög esete. Ekkor a BC befogóra rajzolt négyzet nem négyszögekre, hanem egyenlő szárú derékszögű háromszögekre esik szét. Az átdarabolás természetesen ebben az esetben is működik, amit az alábbi ábrán megjelenített segédvonalak szépen szemléltetnek.



Vegyes feladatok – megoldások

1734 *a)* Szögeinek nagysága szerint három ilyen deltoid létezik. A szögek az egyes esetekben:

I. megoldás: 80°, 80°, 30°, 170°;

II. megoldás: 30°, 30°, 80°, 220°;

III. megoldás: 125°, 125°, 80°, 30°.

b) Szögeinek nagysága szerint két ilyen deltoid létezik. A szögek az egyes esetekben:

I. megoldás: 100°, 100°, 40°, 120°;

II. megoldás: 110°, 110°, 100°, 40°.

Ha a szimmetriatengely két oldalán 40°-os szögek vannak, akkor nem kapunk deltoidot, mivel a negyedik szögre 180° adódna.

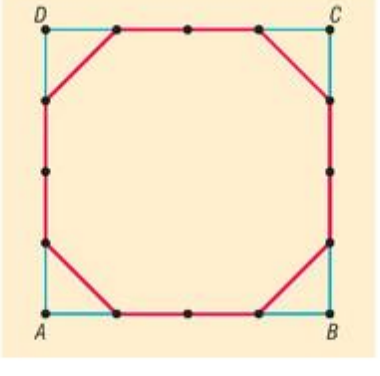
1735 A négyszög szögei: 30°, 30°, 150°, illetve 150°.

1736 Mivel $288° = 12 \cdot 24°$, ezért az állítás igaz.

1737 *a)* igen; *b)* nem; *c)* igen;
d) igen; *e)* igen.

1738 A téglalapok, illetve a rombuszok.

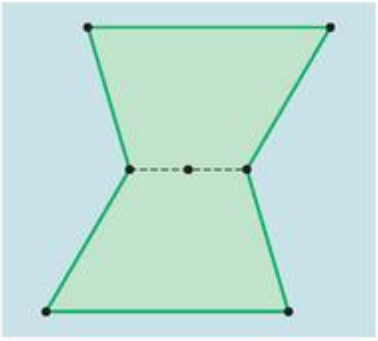
1739 Van ilyen nyolcszög. Az ábrán egy négyzet oldalainak negyedelőpontjait kötöttük össze. A kapott nyolcszög természetesen nem szabályos, ugyanakkor a négyzet középpontja körüli 90°-os forgatás önmagába viszi át.



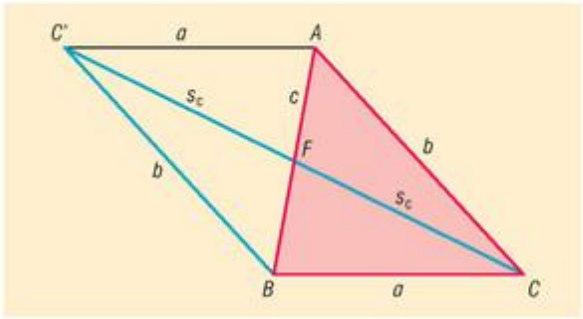


1740 *a)* Középpontosan szimmetrikus konkáv négyszög nem létezik, mivel egy ilyen négyszögnek szükségképpen két konkáv szöge is lenne, így a belső szögeinek összege nem lehetne 360°.

b) Középpontosan szimmetrikus konkáv hatszög létezik. Ilyet kapunk például, ha az ábrán is látható módon egy trapézt középpontosan tükrözünk rövidebb alapjának felezőpontjára.

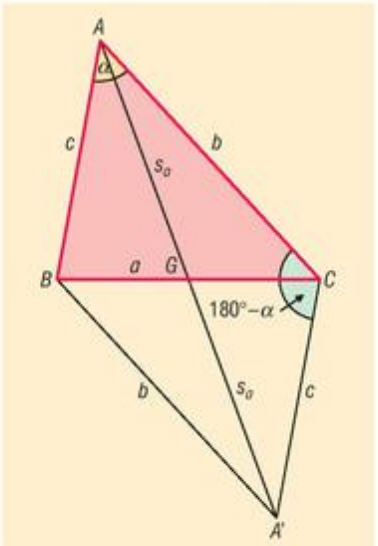


1741 *a)* Ha az ABC háromszöget tükrözzük AB oldalának F felezőpontjára, akkor a kapott $BCAC'$ paralelogramma oldalai a és b, egyik átlója $2 \cdot s_c$ hosszúságú. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők:



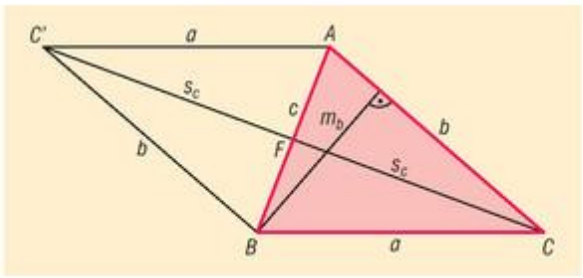
1. Megszerkesztjük a BCC' háromszöget, melynek oldalai ismertek: a, b és $2 \cdot s_c$.
2. Megszerkesztjük a CC' szakasz F felezőpontját.
3. Tükrözzük a B pontot az F pontra, így kapjuk az ABC háromszög hiányzó A csúcsát.

b) Ha tükrözzük az A pontot a BC oldal G felezőpontjára, akkor az $AA'C$ háromszög két oldala és egy szöge ismert, hiszen az $ABA'C$ négyszög paralelogramma, amiből következik, hogy $ACA' \sphericalangle = 180° - \alpha$. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő.



1. Az adott $AC = b$ szakasz C végpontjához felmérjük a $180° - \alpha$ nagyságú szöget.
2. Az A pont – mint középpont körül – $2 \cdot s_a$ sugarú kört szerkesztünk.
3. A kör az 1. lépésben szerkesztett szögszárból kimetszi az A' pontot.
4. Megszerkesztjük az AA' szakasz G felezőpontját.
5. Az ABC háromszög hiányzó B csúcsát a C pont G-re vonatkozó tükrözésével kapjuk.

c) Az adott m_b szakasz nemcsak az ABC háromszögnek, hanem az $AC'BC$ paralelogrammának is magassága, ahol C' a C pontnak az AB szakasz F felezőpontjára vonatkozó tükörképe. A szerkesztés menete ezek alapján:

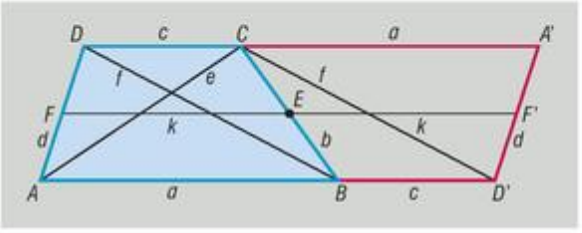


1. Az adott $AC = b$ szakasszal, attól m_b távolságra, párhuzamost szerkesztünk. A párhuzamos tartalmazza a B és C' pontokat.
2. A C' pontot a C középpontú, $2s_c$ sugarú kör metszi ki az 1. pontban szerkesztett párhuzamosból.
3. Megszerkesztjük a CC' szakasz F felezőpontját.
4. A B pontot úgy kapjuk, hogy az A pontot tükrözzük az F pontra.

d) A *c)* feladat ábrájának jelöléseit használva a szerkesztés lépései a következők:

1. Felvesszük a BC egyenest, majd kijelölünk rajta egy tetszőleges B pontot.
2. A BC egyenessel, attól m_a távolságra, párhuzamost szerkesztünk (e), amely tartalmazza az A és C' pontokat.
3. Megszerkesztjük a B középpontú, b sugarú k kört.
4. Az e egyenes és a k kör metszéspontjaként megjelöljük a C' pontot.
5. Megszerkesztjük a C' középpontú, $2 \cdot s_c$ sugarú c kört.
6. Megjelöljük a c kör és a BC egyenes C metszéspontját.
7. Megszerkesztjük a CC' szakasz F felezőpontját.
8. A hiányzó A csúcsot úgy kapjuk, hogy a B pontot tükrözzük az F pontra.

1742 Ha az $ABCD$ trapézt BC szárának E felezőpontjára tükrözzük, akkor az ábra szerinti $AD'A'D$ paralelogrammát kapjuk, amelynek AD' oldala az adott középvonal hosszának kétszerese. Ezt az észrevételt felhasználva a szerkesztés könnyen elvégezhető. A szerkesztési lépések leírása során az ábra jelöléseit használjuk.



a) 1. Megszerkesztjük az $AD' = 2 \cdot k$ hosszúságú szakaszt.

2. Párhuzamost szerkesztünk az AD' szakasszal, attól az adott magassággal egyenlő távolságra.
3. A trapéz D csúcsát az A középpontú, d sugarú kör metszi ki a 2. lépésben szerkesztett párhuzamosból.
4. Megszerkesztjük a DD' szakasz E felezőpontját.
5. A trapéz B csúcsát az E középpontú $\frac{b}{2}$ sugarú kör metszi ki az AD' szakaszból.
6. A trapéz hiányzó C csúcsát a BE egyenes, valamint a 2. lépésben szerkesztett párhuzamos metszéspontjaként szerkeszthetjük meg.

b) 1. Megszerkesztjük az $AD' = 2 \cdot k$ hosszúságú szakaszt.

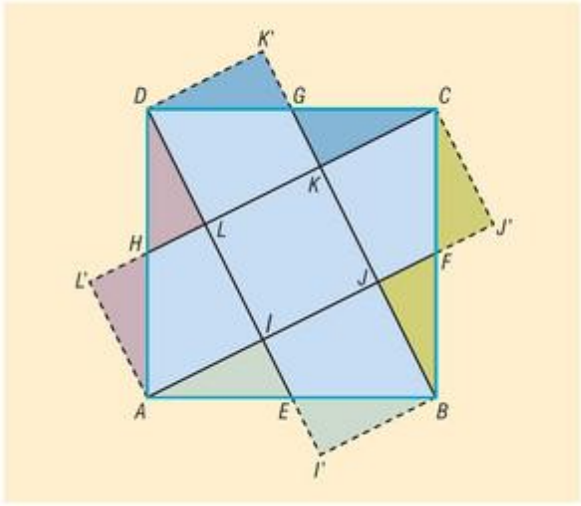
2. Párhuzamost szerkesztünk az AD' szakasszal, attól az adott magassággal egyenlő távolságra.
3. Az AD' szakasz A végpontjában felmérjük az AD és AB oldalak által bezárt szöget.
4. A 3. lépésben szerkesztett szögszár kimetszi az AD' egyenessel párhuzamos egyenesből a D pontot.
5. Megszerkesztjük a DD' szakasz E felezőpontját.
6. Az E ponton át olyan egyenest szerkesztünk, amely a BC és BA oldalak ismert szögét zárja be a BA oldallal.
7. A 6. lépésben szerkesztett egyenes kimetszi az AD' szakaszból a B csúcsot, az AD'-vel párhuzamos egyenesből a C csúcsot.

c) 1. Megszerkesztjük az $AD'C$ háromszöget, melynek oldalai ismertek: AD' a középvonal kétszerese, másik két oldala az $ABCD$ trapéz egy-egy átlója.

2. A B csúcsot a C középpontú, b sugarú kör metszi ki az AD' szakaszból.
3. Megszerkesztjük a BC szakasz E felezőpontját.
4. A D csúcsot a D' pont E középpontra való tükrözésével kapjuk.

1743 Az ábra, és így a „belső” hatszög is forgásszimmetrikus az eredeti hatszög középpontja körüli $k \cdot 60°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatásokra nézve, ezért a kialakuló „belső” hatszög is szabályos.

1744 *a)* Az ábra, és így a középen kialakuló négyszög is forgásszimmetriát mutat a négyzet középpontja körüli $k \cdot 90°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatásokra nézve, ami csak úgy lehetséges, hogy a „belső” négyszög is négyzet. Mivel szakasz és elforgatott képe egymással a forgatás szögét zárják be, ezért például DE merőleges CH-ra, továbbá CH merőleges GB-re, amiből az is következik, hogy DE és GB párhuzamosak. Ekkor viszont a $DLKG$ négyszögben DL és GK párhuzamosak, ezért a négyszög trapéz, amelyben az LK szár merőleges az alapokra. Hasonlóan látható be, hogy a $CKJF$, $BJIE$, $AILH$ négyszögek is ugyanilyen tulajdonságúak.

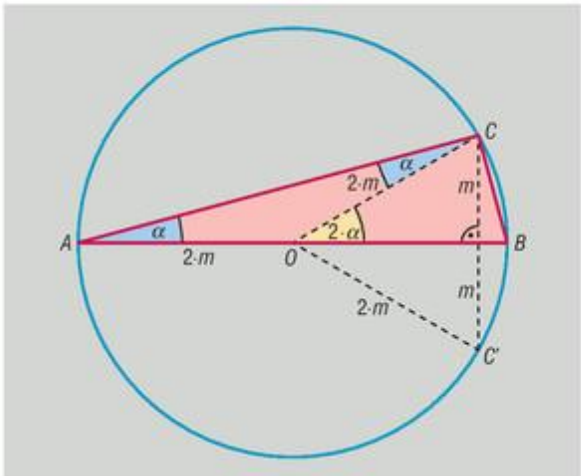


b) Forgassuk el a H pont körül a DHL derékszögű háromszöget 180°-kal; ekkor a H pont helyben marad, D képe A, L képe L' (ld. ábra). Megmutatjuk, hogy az $L'LIA$ négyszög négyzet.

Ehhez először is vegyük észre, hogy a HL szakasz párhuzamos az AI szakasszal, továbbá H a DA oldal felezőpontja, ezért HL egyben az AID háromszög középvonala is, így HL hossza az AI hosszának fele. Az elmondottakból következik továbbá, hogy $L'L = AI$, valamint $L'A = LD = LI$, ezért az $L'LIA$ négyszög szemközti oldalai egyenlő hosszúak, így $L'LIA$ paralelogramma. Másrészt a négyszög L' csúcsánál 90°-os szög van, így természetesen téglalap is egyben.

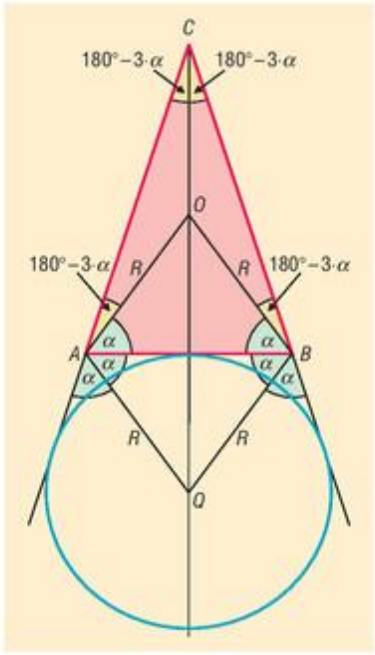
Végül vegyük észre, hogy az $ABCD$ négyzet középpontja körüli 90°-os forgatás a DL szakaszt az AI szakaszba viszi át, ezért $DL = AI$, másrészt $DL = L'A$, amiből $L'A = AI$ következik. Ez azt mutatja, hogy az $L'LIA$ téglalap két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú, ezért valóban négyzet. Ha ehhez hasonlóan az AEI, BFJ, CGK háromszögeket is 180°-kal elforgatjuk a megfelelő oldalfelező pontok körül, akkor ezzel az $ABCD$ négyzetet öt egybevágó négyzetté daraboljuk át. Ez viszont azt jelenti, hogy az $IJKL$ és az $ABCD$ négyzetek területének aránya 1 : 5.

1745 Thalész tételének megfordítása alapján az ABC derékszögű háromszög C csúcsa az AB átfogó fölé rajzolt körön található, amiből az következik, hogy az AOC háromszög egyenlő szárú ($OA = OC$, mindkettő a Thalész-kör sugara). Az egyenlő szárú háromszög alapján ugyanakkora nagyságú szögek találhatók, emiatt $CAO\sphericalangle = ACO\sphericalangle = \alpha$, ebből következően az AOC háromszög külső szögére $COB\sphericalangle = 2 \cdot \alpha$ teljesül. Ha az ABC háromszög AB átfogójához tartozó magasságát m jelöli, akkor $AB = 4 \cdot m$ miatt $AO = CO = 2 \cdot m$.



Tükrözzük a C pontot az AB egyenesre. A kapott $CC'O$ háromszög minden oldala $2 \cdot m$ hosszúságú, ezért a háromszög szabályos. A CO és a $C'O$ oldalak a tükrözés AB tengelyével ugyanakkora szöget zárnak be, ezért $2 \cdot \alpha = 30°$, amiből az ABC háromszög hegyesszögei már könnyen számolhatók: 15°, illetve 75°.

1746 A háromszög alapjához írt kör középpontja (Q) a háromszög csúcsából induló belső szögfelezőre, továbbá a másik két külső szögének szögfelezőire is illeszkedik. Ha a Q pontnak az alap egyenesére vonatkozó tükörképe egybeesik a háromszög köré írt kör O középpontjával, akkor az AQ, BQ, AO, BO szakaszok mindegyike a háromszög köré írt kör sugarával egyenlő hosszúságú, így az $AQBO$ négyszög rombusz. A rombusz szögeit az átlók megfelezik, ezért $OAB\sphericalangle = BAQ\sphericalangle = \alpha$. Mivel a Q pont az ABC háromszög A csúcsánál lévő külső szög felezőjének egy pontja, ezért a külső szög nagysága $2\cdot\alpha$, így az ABC háromszög alapon fekvő szögei $180° - 2\cdot\alpha$ nagyságúak. Egyszerű szögszámolás mutatja, hogy a háromszög szárszögére:



$$ACB\sphericalangle = 180° - 2\cdot(180° - 2\cdot\alpha) = 4\cdot\alpha - 180°.$$

Vegyük észre ugyanakkor, hogy $CAO\sphericalangle = 180° - 3\cdot\alpha$, és mivel az ACO háromszög is egyenlő szárú, ezért

$$ACO\sphericalangle = CAO\sphericalangle = 180° - 3\cdot\alpha.$$

Ebből a háromszög szárszögét kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$ACB\sphericalangle = 2\cdot(180° - 3\cdot\alpha) = 360° - 6\cdot\alpha.$$

Az ABC háromszög szárszögére kapott két eredmény összehasonlításából adódik:

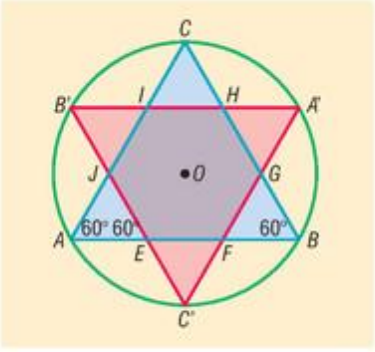
$$4\cdot\alpha - 180° = 360° - 6\cdot\alpha,$$

$$\alpha = 54°.$$

A háromszög szögei ennek megfelelően:

$$CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 72° \quad \text{és} \quad ACB\sphericalangle = 36°.$$

1747 A két háromszög közös része szabályos hatszög. Ehhez előbb megmutatjuk, hogy szögei megegyeznek, majd utána hogy oldalai is egyenlők.



Mivel a tükrözés során szakasz és képe párhuzamos egymással, ezért $B'C'$ és BC egyaránt 60°-os szöget zár be az ABC szabályos háromszög AB oldalával (ld. ábra). Ebből következően a keletkező $EFGHIJ$ hatszög E csúcsnál lévő belső szöge 120°-os. Hasonlóan belátható, hogy a hatszög minden szöge 120°-os.

Az $EFGHIJ$ hatszög nyilvánvalóan középpontosan szimmetrikus, középpontja az ABC háromszög köré írt kör O középpontja. A szimmetriából következik, hogy szemközti oldalai megegyeznek, azaz $EJ = HG$, $EF = IH$, $FG = IJ$. Ugyanakkor a CC' egyenes közös szimmetriatengelye a hatszögnek, továbbá az ABC és $A'B'C'$ háromszögeknek. A tengelyes szimmetria következményeként $EJ = FG$. A BB' egyenes is szimmetriatengely, így $EJ = HI$. Eredményeinket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a hatszög oldalai is megegyeznek. Ebből adódóan a hatszög szabályos.

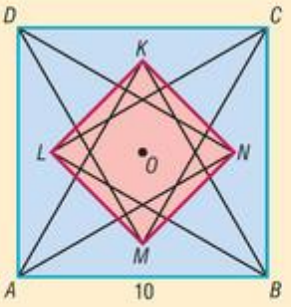
1748 Ha a háromszög magasságai $m_a = 5$ cm, $m_b = 10$ cm, $m_c = 15$ cm, akkor a háromszög területét háromféleképpen kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$\frac{a\cdot 5}{2} = \frac{b\cdot 10}{2} = \frac{c\cdot 15}{2} \quad \text{és} \quad a = 2\cdot b = 3\cdot c.$$

Ekkor $b + c = \frac{1}{2}\cdot a + \frac{1}{3}\cdot a = \frac{5}{6}\cdot a < a$, így nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, ezért ilyen háromszög nem létezik.



1749 *a)* Az $ABCD$ négyzet O középpontja körüli 90°-os forgatás az ABK háromszöget a BCL háromszögbe, a BCL háromszöget a CDM háromszögbe, a CDM háromszöget a DAN háromszögbe, míg a DAN háromszöget az ABK háromszögbe viszi át. Ebből következik, hogy a $KLMN$ négyszög forgásszimmetrikus az O pont körüli 90°-os forgatásra nézve. Egyetlen ilyen tulajdonságú négyszög van, a négyzet.



b) Jelöljük x-szel a $KLMN$ négyzet oldalának hosszát. Ekkor a négyzet átlójára

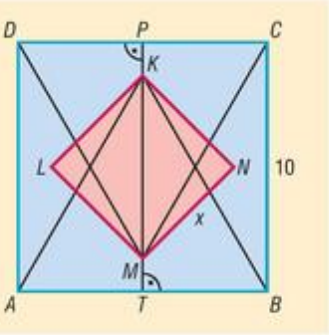
$$KM = x \cdot \sqrt{2}.$$

Ha a KM egyenes az $ABCD$ négyzet AB és CD oldalát a T és P pontokban metszi (ld. ábra), akkor a KT szakasz az ABK szabályos háromszög magassága, ezért

$$KT = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3},$$

amiből

$$PK = 10 - KT = 10 - 5 \cdot \sqrt{3}.$$



A PT szakasz ugyanolyan hosszú, mint az $ABCD$ négyzet oldala, továbbá

$$PT = PK + KM + MT = 2 \cdot PK + x \cdot \sqrt{2}.$$

Felhasználva, hogy az imént PK-t már kiszámoltuk, valamint hogy az $ABCD$ négyzet oldala 10 cm, azt kapjuk, hogy

$$2 \cdot (10 - 5 \cdot \sqrt{3}) + x \cdot \sqrt{2} = 10,$$

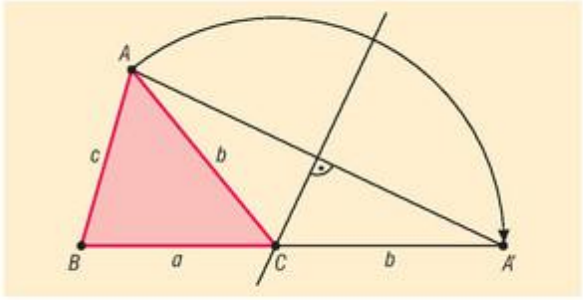
$$x \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{3} - 10,$$

$$x = \frac{10 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}$$

$$x = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 5{,}18.$$

A $KLMN$ négyzet oldala tehát körülbelül 5,18 cm hosszúságú.

1750 A feladatok megoldásához hasznosak lehetnek a következő észrevételek. Ha az ABC háromszög A csúcsát a C pont körül elforgatjuk úgy, hogy a kapott A' pont illeszkedjen a BC oldal C-n túli meghosszabbítására, akkor a kapott $BA'A$ háromszögben $BA' = a + b$, továbbá az $AA'C$ háromszög egyenlő szárú, amelynek ebből kifolyólag C csúcsa illeszkedik az AA' szakasz felezőmerőlegesére.

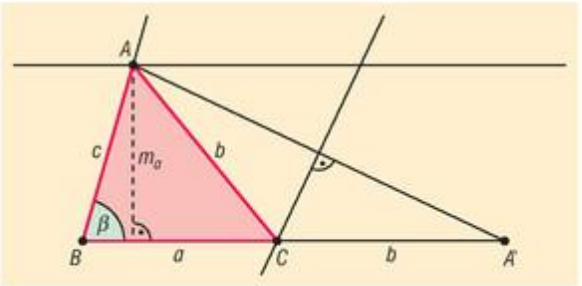


Vegyük még észre, hogy az $AA'C$ egyenlő szárú háromszögben a C csúcsnál lévő külső szög a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, amiből következik, hogy

$$AA'C\sphericalangle = A'AC\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}.$$

A megoldás minden esetben a $BA'A$ háromszög szerkeszthetőségén alapul.

a) A szerkesztés lépései:



1. Az adott $a + b$ hosszúságú BA' szakasztól m_a távolságra párhuzamost szerkesztünk.
2. A B csúcsban a BA' szakaszra átmásoljuk az adott β szöget.
3. A kapott szögszár a BA'-vel párhuzamos egyenesből kimetszi a szerkesztendő háromszög A csúcsát.
4. Az AA' szakasz felezőmerőlegese kimetszi a BA' szakaszból a hiányzó C csúcsot.

A kapott ABC háromszög a feladat feltételeinek megfelel. A feladatnak minden esetben egy megoldása van.

Ezzel egybevágó megoldást kapunk, ha a párhuzamost, valamint a β szöget a BA' szakasz másik partján is megszerkesztjük. A két háromszög a BA' egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözéssel vihető át egymásba.

b) A szerkesztés lépései:

1. Az adott $a + b$ hosszúságú BA' szakasztól m_a távolságra párhuzamost szerkesztünk.
2. B középponttal, c sugárral kört szerkesztünk.
3. A kör kimetszi a BA'-vel párhuzamos egyenesből a háromszög A csúcsát.
4. Az AA' szakasz felezőmerőlegese kimetszi a BA' szakaszból a hiányzó C csúcsot.

A feladatnak 0, 1, 2 megoldása lehet, attól függően, hogy a B középpontú kör milyen helyzetű a BA'-vel párhuzamos egyenessel.

További megoldások adódnak, ha a metszéspontokat a BA' szakasz másik oldalán is megszerkesztjük. Az így adódó megoldások a korábban megkapott megoldások BA' egyenesre vonatkozó tükörképei.

c) A szerkesztés lépései:

1. Az adott $a + b$ hosszúságú BA' szakasztól m_a távolságra párhuzamost szerkesztünk.
2. Az A' csúcsban a BA' szakasszal $\frac{\gamma}{2}$ nagyságú szöget bezáró félegyenest szerkesztünk.
3. A kapott félegyenes kimetszi a BA'-vel párhuzamos egyenesből az A csúcsot.
4. A háromszög hiányzó C csúcsát az AA' szakasz felezőmerőlegese metszi ki a BA' szakaszból.

A feladatnak minden esetben 1 megoldása van.

A kapott megoldás BA' egyenesre vonatkozó tükörképét megkaphatjuk, ha a párhuzamost, valamint a szöget a BA' szakasz másik oldalán is megszerkesztjük.

d) A szerkesztés lépései:

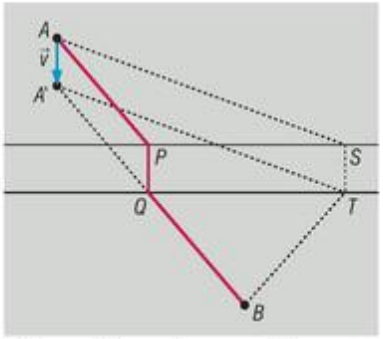
1. Az adott $a + b$ hosszúságú BA' szakasz B csúcsához átmásoljuk a β nagyságú szöget.
2. Az A' csúcsban a BA' szakasszal $\frac{\gamma}{2}$ nagyságú szöget bezáró félegyenest szerkesztünk.
3. A két szerkesztett szögszár metszéspontjaként megkapjuk a háromszög A csúcsát.
4. A háromszög hiányzó C csúcsát az AA' szakasz felezőmerőlegese metszi ki a BA' szakaszból.

A feladatnak 1 megoldása van.

A megoldás BA' egyenesre vonatkozó tükörképét megkaphatjuk, ha a szögszárakat a BA' szakasz másik oldalán szerkesztjük meg.



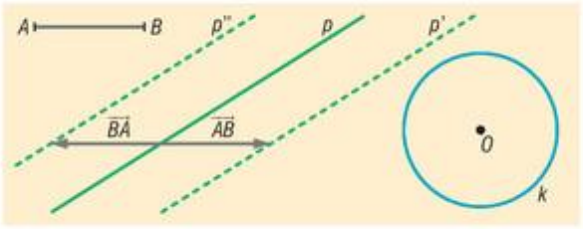
1751 Jelöljük a két települést A-val és B-vel, továbbá legyen $ASTB$ egy olyan út a két település között, amelynek ST darabja az autópályára merőleges (ld. ábra). Toljuk el az A pontot az $\overrightarrow{ST} = \vec{v}$ vektorral. Ha az eltolt pont A', akkor az $AA'TS$ négyszög paralelogramma, ezért az $ASTB$ törött vonal hossza megegyezik az $AA'TB$ törött vonal hosszával, így a feltételek szerint ennek hosszát kell a lehető legrövidebbnek választanunk. Mivel a szóban forgó törött vonalban az AA' szakasz az S pont helyzetétől függetlenül mindig ugyanakkora, ezért elegendő az $A'TB$ törött vonal hosszát minimalizálnunk, ahol a T pont az autópálya B-hez közelebbi határvonalán változik. Tegyük fel, hogy a határvonalból az $A'B$ szakasz a Q pontot metszi ki. Ekkor $A'Q + QB = A'B < A'T + TB$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt, ami mutatja, hogy az $A'QB$ „törött vonal" hossza soha nem lehet nagyobb, mint az $A'TB$ törött vonal hossza, akárhol is vesszük fel a T pontot (Q és T persze különbözőek). Utóbbi észrevételünk lehetőséget ad a szerkesztés elvégzésére.



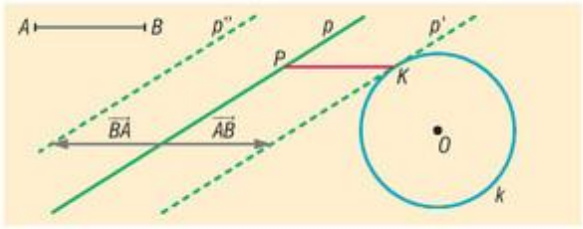
1. Toljuk el az A pontot a $\vec{v}$ vektorral, jelöljük az eltolt pontot A'-vel.
2. Jelöljük meg az $A'B$ szakasz és az autópálya B-hez közelebbi határvonalának Q metszéspontját.
3. Állítsunk merőlegest a Q ponton át az autópálya határvonalaira.
4. Az iménti merőleges kimetszi az A-hoz közelebbi autópálya határvonalából a P pontot.
5. Az $APQB$ törött vonal megfelel a feladat feltételeinek.

1752 A megoldáshoz toljuk el a p egyenest az $\overrightarrow{AB}$-ral, majd a megfelelő K pontot vagy pontokat a kapott p' egyenes és a k kör metszéspontja(i)ként szerkeszthetjük. A K pont(ok) ismeretében a PK szakasz másik végpontja a K pont $\overrightarrow{BA}$-ral történő eltolásával szerkeszthető. További megoldást vagy megoldásokat kaphatunk, ha a p egyenest nemcsak az $\overrightarrow{AB}$, hanem a $\overrightarrow{BA}$ vektor mentén is eltoljuk. Az így kapott egyenest az ábrákon p'' jelöli.

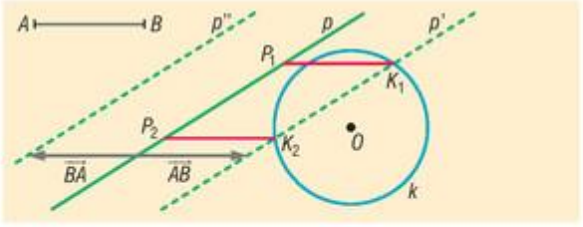
Ezúttal a megoldások számának elemzése okozza a legtöbb nehézséget.



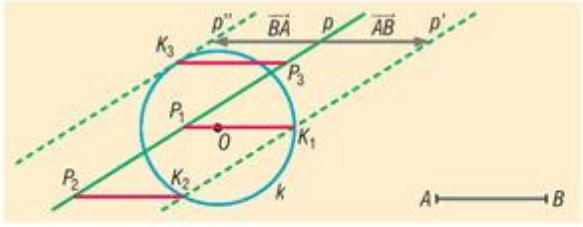
Ha az eltolt egyenesek egyike sem metszi a k kört, akkor a feladatnak nincsen megoldása.



Ha az egyik eltolt egyenes érinti a k kört, a másik elkerüli, akkor 1 megoldást kapunk.



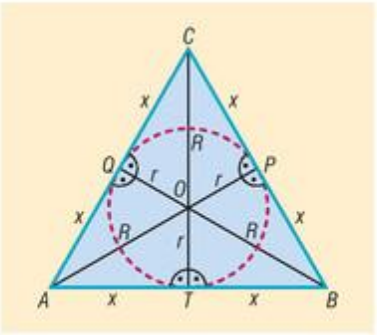
Ha az egyik eltolt egyenes két pontban metszi a k kört, a másik elkerüli, akkor két megoldást kapunk. Szintén 2 megoldás adódik, ha mindkét eltolt egyenes érinti a k kört.



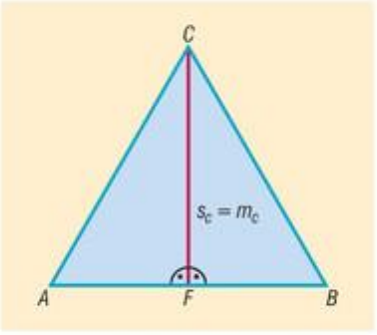
Ha az egyik eltolt egyenes 2 pontban metszi, a másik érinti a k kört, akkor három megoldás adódik.

Végül négy megoldást kapunk, ha mindkét eltolt egyenes 2 pontban metszi a kört.

1753 *a)* A beírt és körülírt körök középpontja csak a szabályos háromszögben esik egybe. Jelöljük az ABC háromszög beírt és körülírt körének közös középpontját O-val, beírt körének sugarát r-rel, körülírt körének sugarát R-rel. Ha a beírt kör a háromszög oldalait az ábra szerint a T, P, Q pontokban érinti, akkor az AOT, BOT, BOP, COP, COQ háromszögek mind egybevágóak egymással, hiszen mindegyik derékszögű, átfogójuk hossza R, egyik befogójuk hossza r. Ezek alapján az ABC háromszög oldalaira eső befogóik is megegyeznek; ennek hosszát az ábrán x-szel jelöltük. Láthatjuk, hogy az ABC háromszög minden oldala egyenlő hosszúságú, így a háromszög valóban szabályos.



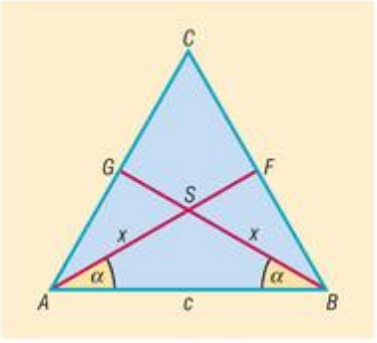
b) A súlypont és a magasságpont csak a szabályos háromszögben esik egybe. Ha ugyanis a háromszög súlypontja és magasságpontja azonos, akkor a súlyvonalak egyben a megfelelő oldalhoz tartozó magasságvonalak is, amiből következik, hogy bármely magasságvonal megfelezi a háromszög megfelelő oldalát. Ha viszont az ABC háromszög CF magasságvonala megfelezi az AB oldalt, akkor az AFC és BFC derékszögű háromszögekben a befogók megegyeznek, így a két háromszög egybevágó, amiből azonnal adódik, hogy $AC = BC$, vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú. Mivel bármely magasságvonalat kiválasztva azt kapjuk, hogy a magasságvonalat közrefogó oldalak megegyeznek, ezért a háromszög valóban szabályos.



c) Ha az ABC háromszögben a súlypont egybeesik a körülírt kör középpontjával, akkor a háromszög szabályos. Ugyanis ha S súlypont és a körülírt kör középpontja is egyben, akkor $AS = BS$, hiszen mindkettő a körülírt kör sugarával egyenlő. Az ABS háromszögben így két oldal egyenlő, tehát a háromszög egyenlő szárú, amiből $SAB\sphericalangle = SBA\sphericalangle = \alpha$.

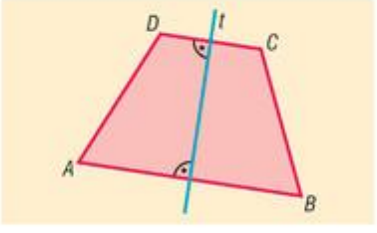
Az $AS = BS$ egyenlőségnek egy további következményeként az AF és BG súlyvonalak is megegyeznek, hiszen a súlypont a súlyvonalat $2:1$ arányban osztja, ezért mindkét szakasz másfélszerese a körülírt kör sugarának. Ekkor a BFA és AGB háromszögekben két-két oldal megegyezik ($AF = BG$ és AB közös oldal), továbbá az egyenlő oldalak által bezárt szög is egyenlő, ezért a két háromszög egybevágó egymással. Ez azt is jelenti, hogy $AG = BF$, amiből $AC = BC$ következik, azaz az ABC háromszög egyenlő szárú.

Mivel háromszögünkben bármely két súlyvonal egyenlő hosszúságú, ezért ugyanez érvényes az oldalakra is, amiből tényleg következik, hogy a háromszög szabályos.



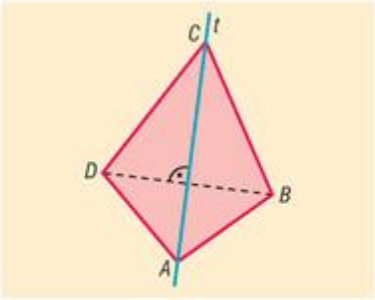
1754 Tegyük fel, hogy az $ABCD$ konvex négyszög tengelyesen szimmetrikus. Mivel a tengelyre vonatkozó tükrözés során a négyszög minden csúcsa a négyszög valamely csúcsába megy át, ezért két eset lehetséges; a tengely a négyszögnek 0 vagy 2 csúcsát tartalmazza.

Ha a négyszög egyetlen csúcsa sem illeszkedik a t tengelyre, akkor a t mindkét partján a négyszög két-két csúcsa helyezkedik el. Ekkor a t egyenesre vonatkozó tükrözés az A csúcsot a B, a D csúcsot a C pontba viszi át. A tükrözés tulajdonságai alapján pont és képe közti szakasz merőleges a tükörtengelyre, ezért DC és AB egyaránt merőleges a t egyenesre, és így egymással párhuzamosak. Az $ABCD$ négyszög tehát szimmetrikus trapéz.

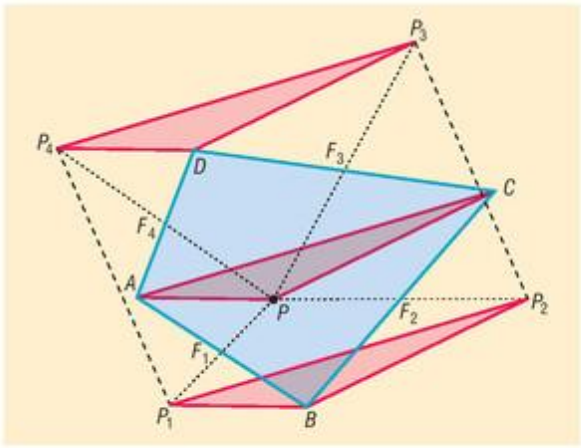




Ha a t tengely a négyszög két csúcsát, A-t és C-t tartalmazza, akkor a tengely szükségképpen szétválasztja a négyszög másik két csúcsát, B-t és D-t. A t egyenesre vonatkozó tükrözés során az AB szakasz képe AD, a CB szakasz képe CD, ezért a távolságtartó tulajdonság alapján $AB = AD$, továbbá $CB = CD$. Az $ABCD$ négyszögben $AB + CD = AD + CB$, azaz a szemközti oldalak összege megegyezik. Mivel a feltételek alapján az $ABCD$ négyszög konvex, ezért az érintőnégyszögek tételének megfordításából következik, hogy az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.



1755 *a)* Az ábra jelöléseit használva megmutatjuk, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszögben P_1P_2 és P_4P_3 párhuzamosak és egyenlő hosszúak, így a négyszög valóban paralelogramma.

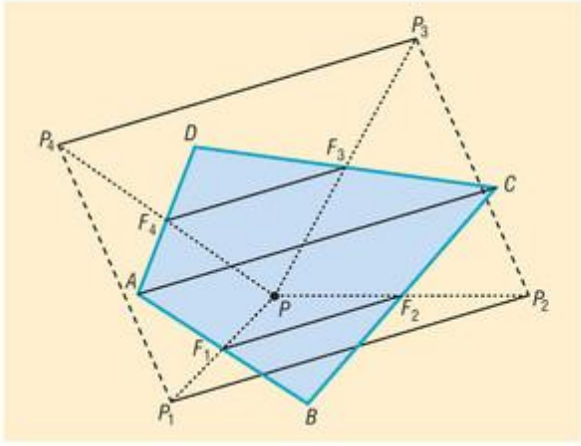


Az AP szakasznak az F_1 felezőpontra vonatkozó tükörképe P_1B, így AP és P_1B párhuzamos egymással, továbbá hosszuk megegyezik. Ehhez hasonlóan a PC szakasznak az F_2 felezőpontra vonatkozó tükörképe P_2B, így PC és P_2B párhuzamos egymással, és ugyanolyan hosszúak. Tekintsük ezután az APC és P_1BP_2 háromszögeket. Láttuk, hogy a két háromszögben két-két oldal párhuzamos egymással, amiből következik, hogy $APC\sphericalangle = P_1BP_2\sphericalangle$ (egyállású szögpár). Mivel a két háromszögben a két-két párhuzamos oldal hossza is egyenlő, ezért a két háromszög egybevágó egymással. Az egybevágóság következményeként $AC = P_1P_2$, és e két oldal is párhuzamos egymással.

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel azt is beláthatjuk, hogy az APC és P_4DP_3 háromszögek is egybevágók, csak ezúttal az F_4, illetve F_3 pontokra vonatkozó középpontos tükrözés tulajdonságait kell felhasználni. Az egybevágóságból adódik, hogy $AC = P_4P_3$, továbbá a két szakasz párhuzamos is egymással.

Eredményeinket összefoglalva elmondhatjuk, hogy a P_1P_2 és P_4P_3 szakaszok párhuzamosak az $ABCD$ négyszög AC átlójával, továbbá $P_1P_2 = P_4P_3 = AC$. Ezzel beláttuk, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög paralelogramma, amelynek két-két oldala az $ABCD$ négyszög egy-egy átlójával egyenlő, és azzal párhuzamos.

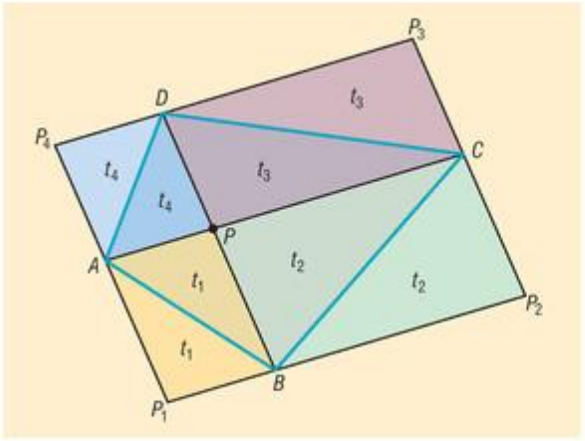
A háromszög középvonalára vonatkozó ismeretekkel a P_1P_2 és P_4P_3 szakaszok párhuzamossága, valamint egyenlősége a következő módszerrel igazolható. Az F_1F_2 szakasz középvonal a P_1P_2P és az ACB háromszögekben, ezért P_1P_2 és AC is párhuzamos F_1F_2-vel, amiből adódóan a két szakasz persze egymással is párhuzamos. Mivel a háromszög oldala kétszer olyan hosszú, mint a párhuzamos középvonala, ezért $AC = P_1P_2 = 2 \cdot F_1F_2$.



Hasonlóan; F_4F_3 középvonal az ACD és a P_4P_3P háromszögekben is, ezért $P_4P_3 = AC$, és a két szakasz párhuzamos is egymással.

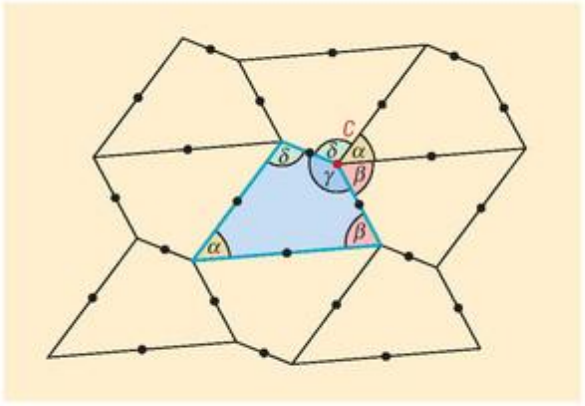
Az eredményeket összefoglalva azt kapjuk, hogy $P_4P_3 = P_1P_2$, továbbá mindkettő párhuzamos AC-vel, ami bizonyítja, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög paralelogramma.

b) Láttuk, hogy a P pont helyzetétől függetlenül a $P_1P_2P_3P_4$ paralelogramma két-két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő az $ABCD$ négyszög átlóival. Ebből adódóan a $P_1P_2P_3P_4$ paralelogramma területe független a P ponttól. Érdemes ezért egy olyan P pontot választani, amelyből kiindulva a kapott $P_1P_2P_3P_4$ paralelogramma területe könnyen kifejezhető az $ABCD$ négyszög területével. Ilyen pontnak tűnik az átlók metszéspontja (ld. ábra). Ebben az esetben a $P_1P_2P_3P_4$ paralelogrammát az AC és BD átlók négy kisebb paralelogrammára bontják, melyekben az $ABCD$ négyszög oldalai egy-egy átlót alkotnak. Az átló a paralelogramma területét megfelezi, ezért az ábrán azonos módon megjelölt területrészek egyenlők. Ebből következően a $P_1P_2P_3P_4$, valamint az $ABCD$ négyszögek területaránya 2.



c) A bizonyítás során sehol nem használtuk fel, hogy a P az $ABCD$ négyszög belső pontja, ezért következtetéseink külső pontra is érvényesek.

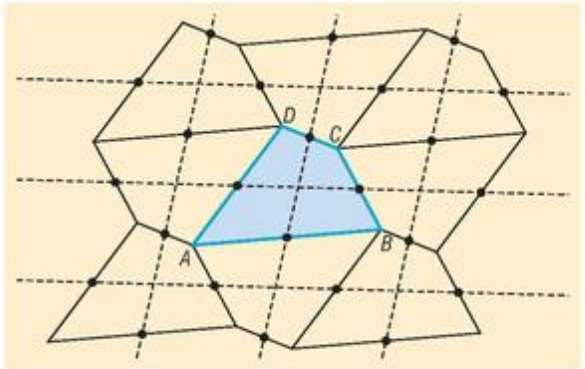
1756 *a)* A hézagmentes, átfedés nélküli parkettázáshoz be kell látnunk, hogy például a C csúcsnál keletkező szögek összegben pontosan 360°-ot tesznek ki. Ez azonban könnyen igazolható, hiszen a tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt, a keletkező szögek megegyeznek az eredeti négyszög belső szögeivel, amelyeknek összege valóban 360°. Az ábrán az eredeti négyszög szögeit, valamint a C csúcsnál kialakuló szögeket tüntettük fel, ugyanakkor az áttekinthetőség érdekében a pontok címkéjét már nem jelenítettük meg.



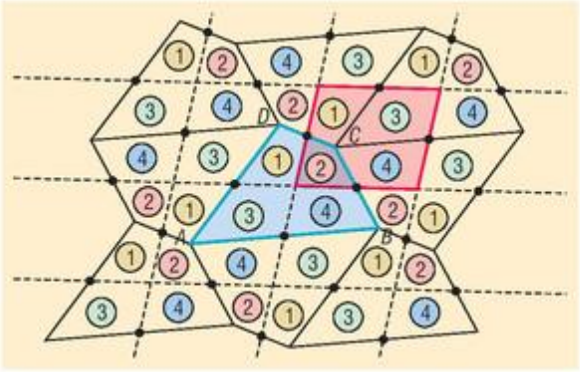
Szintén szükséges, hogy a négyszögrácsban szomszédos négyszögek érintkező oldalai ugyanakkorák legyenek. Ez is teljesül, mivel az érintkező négyszögoldalak minden esetben egymás tükörképei, és a tükrözés a szakaszok hosszát megtartja. Megjegyezzük, hogy gondolatmenetünk konkáv négyszögre is érvényes, így a sík azokkal is kiparkettázható.

A bizonyításon túl érdemes megvizsgálni, hogy milyen transzformációval vihetők egymásba a négyszögrács különböző elemei! Például a közös oldallal rendelkező négyszögeket középpontos tükrözéssel, a csúccsal érintkezőket eltolással tudjuk egymásba vinni. Az ábráról leolvasható, hogy két középpontos tükrözés egymás utáni elvégzése egy eltolással helyettesíthető.

b) Ha egy négyszög középvonalát valamelyik végpontjára tükrözzük, akkor a tükörkép, valamint a kiindulásul vett középvonal természetesen egy egyenesre illeszkednek. Ha a középvonalat a nem illeszkedő oldalak felezőpontjára tükrözzük, akkor a tükörkép és a középvonal a tükrözés tulajdonságai miatt párhuzamos egyenesekre illeszkednek. Ebből következik, hogy a középvonalak tartóegyenesei paralelogrammarácsot alkotnak (az ábrán szaggatott vonallal jelölve).



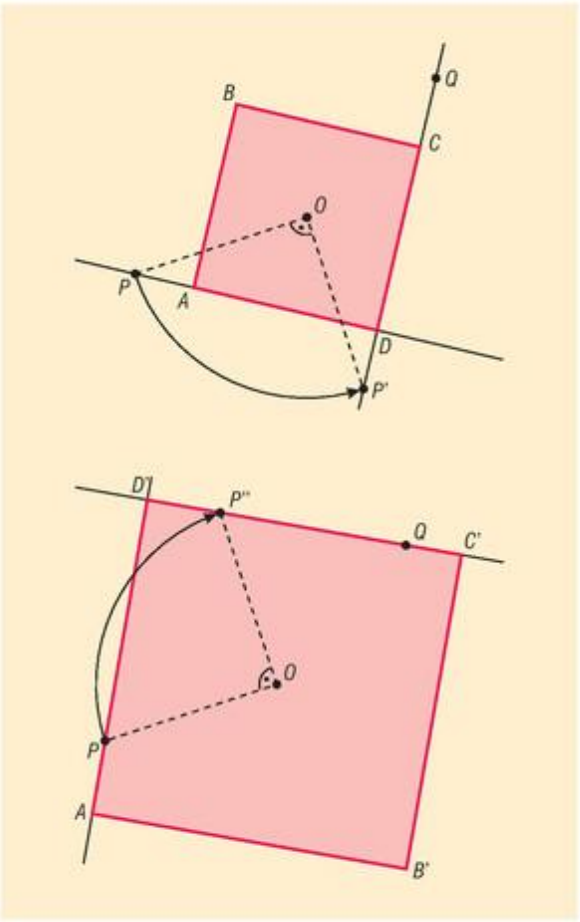
c) A középvonalakra illeszkedő egyenesek a parkettázásban szereplő minden négyszöget négy részre vágnak szét. Az ábrán nyomon követhető, hogy az $ABCD$ négyszög egyes részei a tükrözések során mely négyszögekbe mennek át; az azonos számmal jelölt négyszögek egymással egybevágók. Láthatjuk, hogy az $ABCD$ négyszög részeiből valóban átfedés nélkül, hézagmentesen kirakható a paralelogrammarács paralelogrammája (az ábrán piros színnel jelölve).



1757 *a)* A négyzet O középpontja körüli 90°-os (vagy –90°-os) forgatás az AD oldalegyenest a CD oldalegyenesbe viszi át, ezért ha a P pontot az O pont körül 90°-kal (vagy –90°-kal) elforgatjuk, akkor a keletkező P' pont illeszkedik a CD egyenesre. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

1. Elforgatjuk a P pontot az O pont körül 90°-kal, így kapjuk a P' pontot.
2. Megszerkesztjük a QP' egyenest.
3. A P ponton át merőlegest állítunk a QP' egyenesre.
4. A merőleges és a QP' egyenes metszéspontja a szerkesztendő négyzet D csúcsa.
5. A D pontot az O pont körül 90°-kal elforgatva megkapjuk a négyzet C csúcsát.
6. A C pontot az O pont körül 90°-kal elforgatva megkapjuk a négyzet B csúcsát.
7. A B pontot az O pont körül 90°-kal elforgatva megkapjuk a négyzet A csúcsát.

Ha a P pontot az 1. lépésben –90°-kal forgatjuk, és a többi forgatás irányát is megváltoztatjuk, akkor egy újabb, a feltételeknek szintén megfelelő négyzetet kapunk eredményül (alsó ábra).



b) Mint az *a)* feladatban láttuk, általában két megoldást kapunk. Ez alól a következő esetek jelentenek kivételt.

Ha a P vagy a Q pont valamelyike egybeesik az O ponttal, akkor értelemszerűen a feladatnak nincs megoldása.

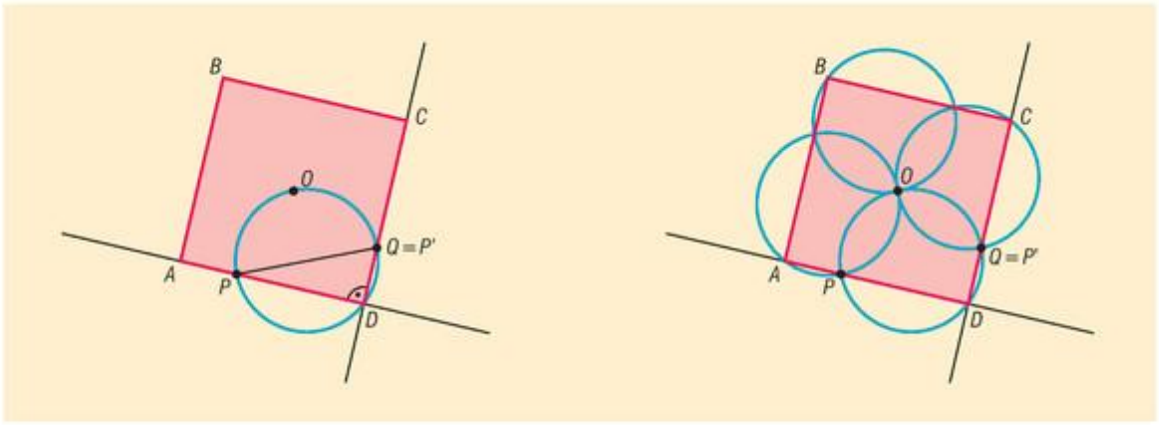
A két ellentétes irányú forgatás ugyanahhoz a négyzethez vezet azokban az esetekben, ha a P és a Q pontok egybeesnek, vagy ha a PQ szakasz felezőpontja az O pont. Az előbbi esetben a P pont megegyezik a négyzet D csúcsával. Az utóbbi esetben $P = A$ és $Q = C$. Ezekben az esetekben tehát a feladatnak csak 1 megoldása van.

A feladat határozatlan, ha a 2. lépésben megadott QP' egyenes nem szerkeszthető. Ez akkor következik be, ha az O pont körüli 90°-os vagy –90°-os forgatás a P pontot a Q pontba viszi át. Ezt az esetet a *c)* feladatban tárgyaljuk.

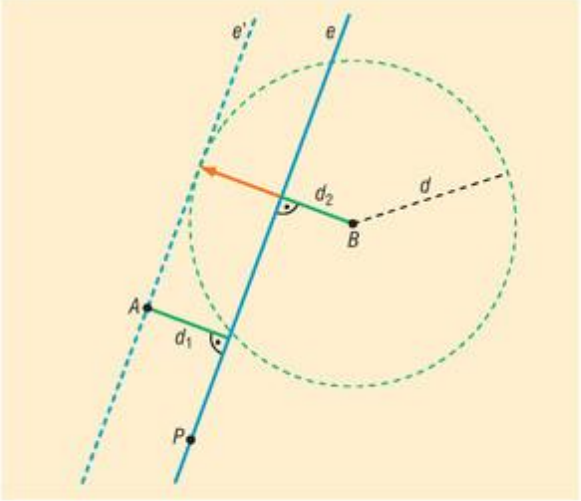
c) Tegyük fel, hogy az O pont körüli 90°-os forgatás a P pontot a Q pontba viszi át. Ekkor a QP' egyenes nem szerkeszthető egyértelműen, hiszen $P' = Q$. Ha felveszünk a Q ponton át egy tetszőleges egyenest (kivéve OQ-t), akkor a szerkesztés további lépései minden gond nélkül végrehajthatóak, és eredményül egy, a feltételeknek megfelelő négyzetet kapunk. Az elmondottakból következik, hogy a Q ponton átmenő minden egyes egyeneshez (kivéve természetesen az OQ egyenest) egy megoldás tartozik, azaz a feladat feltételeinek végtelen sok négyzet tesz eleget.

d) A PQD háromszögben a P és Q pontok rögzítettek, továbbá P az AD, Q a CD oldalegyenes egy-egy pontja, ezért $PDQ\sphericalangle = 90°$. Thalész tételének megfordítása alapján a D pont tehát illeszkedik a PQ szakaszra mint átmérő fölé emelt körre (ld. bal oldali ábra). E kör minden O-tól különböző pontja egy alkalmas négyzet D csúcsával egyezik meg.

A négyzet további csúcsai is egy-egy megfelelő Thalész-körre illeszkednek (ld. jobb oldali ábra). Ezeket a köröket úgy kapjuk, hogy a PQ szakasz fölé írt kört az O pont körül 90°-kal, 180°-kal, illetve 270°-kal elforgatjuk. Megjegyezzük, hogy például a B pont a P és Q pontok O középpontra vonatkozó tükörképei fölé emelt körre illeszkedik. A Thalész-körök közös O metszéspontja egyetlen négyzetnek sem lehet csúcspontja.



1758 Jelöljük a két tereptárgyat A-val, illetve B-vel, a falut P-vel. A feladat szerint a P ponton át olyan, az A és B pontokat szétválasztó e egyenest kell szerkesztenünk, amelynek az A és B pontoktól mért távolságösszege éppen az adott d hosszúsággal egyenlő (az ábrán $d_1 + d_2 = d$). Vegyük észre, hogy ha az e egyenest önmagával párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy az eltolt e' kép átmenjen az A ponton, akkor a B pont e' egyenestől mért távolsága éppen d, így lehetőségünk nyílik e' egyenes szerkesztésére; az e' egyenes ugyanis érinti a B középpontú d sugarú kört. Az e' egyenes ismeretében az e egyenes szerkesztése már nem okoz nehézséget, csak annyi dolgunk marad, hogy párhuzamost húzzunk a P ponton át az e' egyenessel.

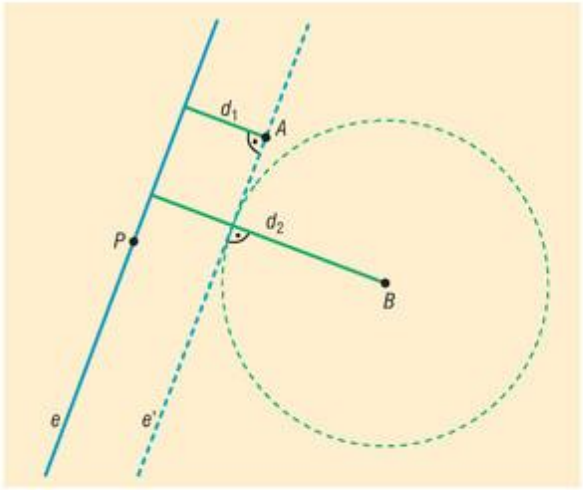


Az út megépíthetőségének vizsgálata jóval nehezebb feladat, mint a tervezése. Ha az A pont a B középpontú d sugarú körnek belső pontja, akkor természetesen sem az e' egyenes, sem pedig a feltételeknek megfelelő út nem szerkeszthető.



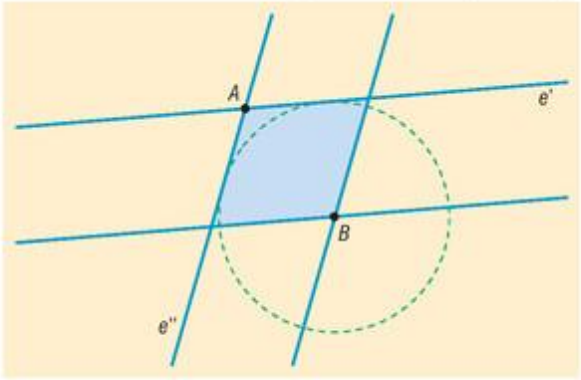
Ha az A pont a körnek külső pontja, akkor az A ponton keresztül két érintő is szerkeszthető a körhöz. A két érintő mindegyikéből elvileg egy-egy megfelelő utat is kapunk, amelyekből azonban nem feltétlenül mindegyik, sőt esetleg egyik sem tesz eleget a feladat feltételeinek.

Ha ugyanis például az e' érintő szétválasztja a B és P pontokat (az ábra egy ilyen esetet mutat), akkor a megfelelő e egyenesnek éppen a B és az A pontoktól mért távolságkülönbsége lesz egyenlő d-vel ($d_2 - d_1 = d$).

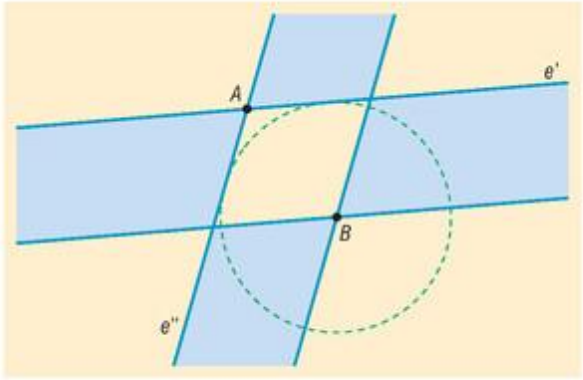


Hasonló helyzet áll elő akkor is, ha a B ponton keresztül e'-vel párhuzamosan húzott egyenes választja szét az A és P pontokat, csak akkor az A és B pontoktól mért távolságok különbsége egyenlő d-vel, azaz $d_1 - d_2 = d$.

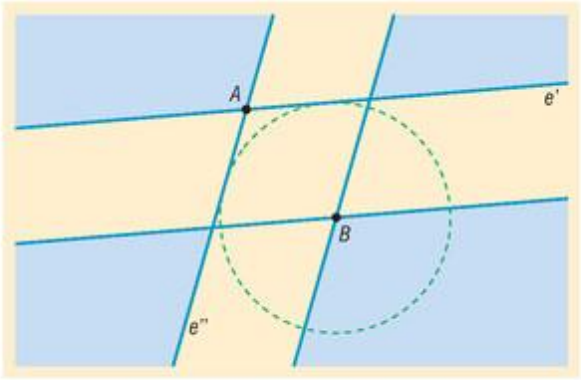
Fenti észrevételeink alapján a lehetséges megoldások:



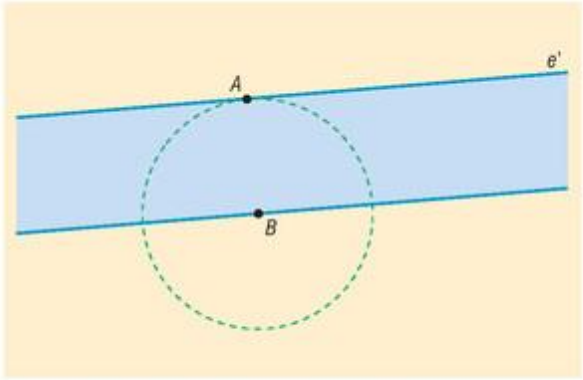
Az ábrán azt a tartományt jelöltük meg, amelyből kikerülő P pontokra mindkét út megfelel a feladat feltételeinek.



Az ábrán megjelölt tartomány pontjaira a feladatnak egy megoldása van.

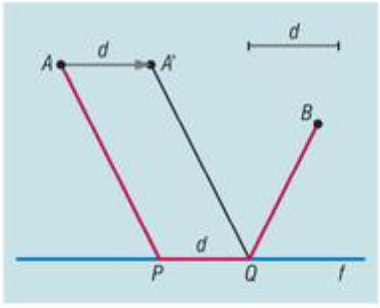


Az ábrán megjelölt pontok esetén egyetlen megoldást sem kapunk.



Az A pont illeszkedik a B középpontú d sugarú körre. Ekkor az A ponton át egyetlen érintő szerkeszthető a körhöz. Ha a P pont az ábrán megjelölt sávba esik, akkor a feladatnak egy megoldása van, más esetben a feladatnak nincs megoldása.

1759 A folyót f-fel, a két turistacsalogató látványosságot A-val és B-vel jelöltük az ábrán. Feladatunk az f egyenesen olyan P és Q pontok szerkesztése, amelyre az $APQB$ törött vonal hossza a lehető legkisebb, továbbá $PQ = d$, az előre adott távolság. Toljuk el az A pontot az f egyenessel párhuzamosan a B pont „irányába" d hosszúságú vektorral (ld. ábra). Ha a kapott pontot A' jelöli, akkor az $APQA'$ paralelogrammában $AP = A'Q$, $AA' = PQ$. Ekkor az $APQB$ törött vonal hosszára teljesül, hogy:



$$AP + PQ + QB = A'Q + AA' + QB = d + A'Q + QB,$$

amelyben a d hosszúságú rész a P és Q pontok helyzetétől függetlenül szerepel, ezért elegendő az $A'QB$ törött vonal hosszát minimalizálni. Ezzel a feladatot visszavezettük a következő, jól ismert problémára: adottak az f egyenes ugyanazon partján az A' és a B pontok. Szerkesszük meg az f egyenesen azt a Q pontot, amelyre az $A'Q$ és a QB szakaszok hosszának összege a lehető legkisebb.

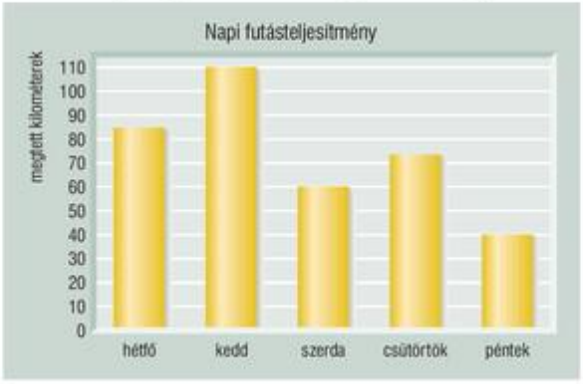
Az átfogalmazott problémát az 1589. feladatban már megoldottuk. A megoldáshoz tükrözzük a B pontot az f egyenesre, majd a kapott B' pontot kössük össze A' ponttal. Az $A'B'$ szakasz az f egyenesből kimetszi a keresett Q pontot. Visszatérve az eredeti feladathoz, a Q pont ismeretében a P pont már könnyen szerkeszthető; nincs más dolgunk, csak a Q pontot el kell tolnunk az $\overrightarrow{A'A}$-ral.

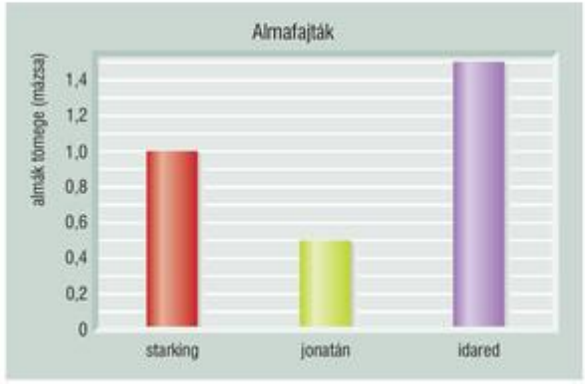


9.7. STATISZTIKA

Az adatok ábrázolása – megoldások

1760 Az oszlopdiagram kinézhet például úgy, mint a bal oldali ábra.





1761 Összes: 3 mázsa, jonatán: 0,5 mázsa, idared: 1,5 mázsa. A diagram a jobb oldalon látható.

1762 Egykék száma: 8, egy tanulóra 12° középponti szög jut. Készítsünk táblázatot:

Gyermekek száma	Tanuló	Középponti szög
1	8	$12° \cdot 8 = 96°$
2	12	$12° \cdot 12 = 144°$
3	7	$12° \cdot 7 = 84°$
4	3	$12° \cdot 3 = 36°$
összesen	**30**	**360°**



1763 Egy százalékra 3,6° középponti szög jut.

Kategória	busz	teherautó	furgon	személyautó	összesen
Középponti szög	60° – 0° = 60°	150° – 60° = 90°	230° – 150° = 80°	360° – 230° = 130°	360°
Százalékban	60° : 3,6° = 16,67%	90° : 3,6° = 25%	80° : 3,6° = 22,22%	130° : 3,6° = 36,11%	100%

1764 Minden járműre 5° középponti szög jut.

Kategória	busz	teherautó	furgon	személyautó	összesen
Középponti szög	100°	40°	90°	130°	360°
Darabszám	20	40° : 5° = 8	90° : 5° = 18	130° : 5° = 26	72

1765 A kereskedő megszakított értéktengellyel próbálta eltitkolni a csökkenés mértékét.

Megjegyzés: Azzal leginkább a pszichológia foglalkozik, hogy első ránézésre miért nem tűnik fel a három pont.

1766 *A* párt: nem javult nagymértékben a bűncselekmények felderítése. *B* párt: nagymértékben nőtt a hatékonyság.

Megjegyzés: Mindkét diagram sántít, hiszen nem a felderített bűncselekmények száma az érdekes, hanem azoknak az összes bűncselekményhez viszonyított aránya. (Nagyon nem mindegy, hogy 5%-os a felderítés aránya vagy 95%-os!)

1767 *a)* Kezdjük a táblázattal.

Érdemjegy	1	2	3	4	5
Fő	1	1	2	3	8

Százalékos határok (a felső határ már jobb jegyet ér):

0–26%: elégtelen, 26–42%: elégséges, 42–62%: közepes, 62–82%: jó, 82%-tól: jeles.

b) Mivel 15 tanulónk van, az egy tanulóra jutó középponti szög:

$$\frac{360°}{15} = 24°.$$

Az első két kategóriára jutó középponti szög így 24°, a közepesre 48°, a jóra 72°, a jelesre pedig 192°. A diagram az ábrán látható.



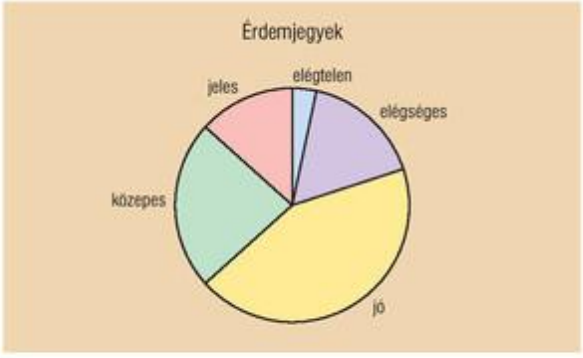
1768 *a)* A gyakorisági táblázat adatait az oszlopdiagramról olvashatjuk le:

Érdemjegy	1	2	3	4	5
Gyakoriság	1	5	13	7	4

b) Az egy tanulóra jutó középponti szög:

$$\frac{360°}{30} = 12°.$$

Így a jeles tanulókra 48°, a jókra 84°, a közepesekre 156°, az elégségesekre 60°, az elégtelenekre 12° jut.



1769 *a)* Anettnek ment az sms-ek

$$\frac{72°}{360°} \cdot 100\% = 20\%\text{-a},$$

Klárinak pedig a 35%-a. Hugi ugyanannyi sms-t kapott, mint Anett, így Angélának marad az üzenetek 25%-a.

b) Ha Zsani 7 sms-t küldött Klárinak, akkor egy üzenetre

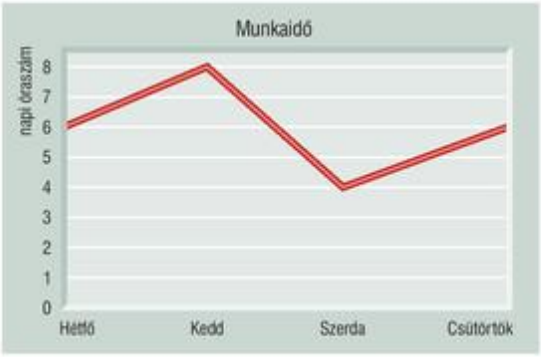
$$\frac{126°}{7} = 18°\text{-os}$$

középponti szög jut. Ugyanígy Anett és Hugi egyaránt 4-4 üzenetet kapott, Angéla pedig 5 darabot.





1770 *a)* A keresett vonaldiagram:



b) Az egyes szögek rendre 90°, 135°, 45°, 90°.



c) Össze kell adnunk az egyes napok oszlopait, hozzáadni az értékhez még nyolcat, és kivonni a kapott számot 24-ből.

Hét napjai	hétfő	kedd	szerda	csüt.
Maradó idő (óra)	5	3	8	5

1771 *a)* Első lépésben határozzuk meg, milyen összefüggések vannak a különböző oszlopok között. Ehhez jelöljük a lakónépességet A, a területet B, a népsűrűséget C, a települések számát D, a 100 km^2-re jutó települések számát E-vel.

A lakosság számát $1000 \cdot A$ adja meg. A népsűrűséghez a lakosság számát (fő) kell osztani a területtel (km^2). A 100 km^2-re jutó településszám mértékegysége $\frac{\text{település}}{100\ \text{km}^2}$. Így a megfelelő képletek:

$$C = \frac{1000 \cdot A}{B} \quad \text{és} \quad E = \frac{D}{\frac{B}{100}}.$$

A táblázat első sora teljes, így ott le is ellenőrizhetjük a képleteket.

$$\frac{2897300}{6916} = 418{,}9 \approx 419 \quad \text{és} \quad \frac{188}{69{,}16} = 2{,}718 \approx 2{,}7.$$

Nincs más dolgunk, mint behelyettesíteni a kitalált összefüggésekbe.

Az első öt kérdezett adat soronként lefelé haladva, figyelve a kért kerekítésekre:

$$C = \frac{1104800}{11116} = 99{,}3 \approx 99; \qquad E = \frac{655}{113{,}28} = 5{,}78 \approx 5{,}8;$$

$$B = \frac{960100}{68} = 14119{,}1 \approx 14119; \qquad D = 4{,}5 \cdot 134{,}33 = 604{,}4 \approx 604;$$

$$A = \frac{85 \cdot 17729}{1000} = 1506{,}96 \approx 1507.$$

A dél-alföldi régió sorában azzal szembesülünk, hogy egyszerre három adat is hiányzik (A, B, D) és csak kettő ismert (C, E). Ezekből nem tudjuk megállapítani az ismeretleneket. Ha a sor nem segít, keressünk olyan oszlopot, amelyben már elég információ áll rendelkezésünkre! Ilyen oszlop az első:

$$A = 10045{,}4 - (2897{,}3 + 1104{,}8 + 997{,}9 + 960{,}1 + 1236{,}7 + 1507{,}0) = 1341{,}6.$$

Így A és C-ből már a területet és a települések számát is kiszámíthatjuk a Dél-Alföld sorában:

$$B = \frac{1341600}{73} = 18378{,}08 \approx 18378; \quad D = 1{,}4 \cdot 183{,}78 = 257{,}2 \approx 257.$$

Az utolsó sor hiányzó B és D adatait egyszerű összegzéssel kapjuk meg:

$$B = 6916 + 11116 + 11328 + 14119 + 13433 + 17729 + 18378 = 93019;$$

$$D = 188 + 401 + 655 + 655 + 604 + 389 + 257 = 3149.$$

A C és E oszlopot pedig a képletekből kapjuk:

$$C = \frac{10045400}{93019} = 107{,}9 \approx 108; \quad E = \frac{3149}{930{,}19} = 3{,}38 \approx 3{,}4.$$

Megjegyzések: A képleteket az első sor megadott adataiból is kikövetkeztethetjük. Az eredeti, interneten is elérhető statisztika adatai nem pontosan illeszkednek a kiszámított értékekhez. Ez betudható a kerekítési hibáknak.

b) A térképről az 1000 lakosra jutó vállalkozások számát olvashatjuk le. Az előző feladatban éppen a lakosság száma (1000 fő) szerepelt az első oszlopban, így egyszerű szorzással megállapíthatjuk a vállalkozások számát. Például Nyugat-Dunántúlon:

$$119 \cdot 997{,}9 = 118\,750{,}1 \approx 118\,750.$$

Foglaljuk ezt, illetve a diagramról leolvasott százalékokat táblázatba.

Régió	Vállalkozások száma	Ebből egyéni vállalkozók	Ebből társas vállalkozók
Nyugat-Dunántúl	118750	78375 (66%)	40375 (34%)
Közép-Dunántúl	121528	77778 (64%)	43750 (36%)
Dél-Dunántúl	108491	72689 (67%)	35802 (33%)
Közép-Magyarország	495438	217993 (44%)	277445 (56%)
Észak-Magyarország	102646	65693 (64%)	36953 (36%)
Észak-Alföld	135630	88160 (65%)	47470 (35%)
Dél-Alföld	150259	105181 (70%)	45078 (30%)
Ország összesen	**1232742**	**705869 (57%)**	**526873 (43%)**

Mivel a százalékok a társas vállalkozások számát mutatják, először őket számítjuk ki, majd kivonással megkapjuk az egyéni vállalkozások számát. Az oszlopok összegzése adja az utolsó sort.

Megjegyzés: A százalékok minél pontosabb leolvasásához érdemes egy vonalzót illeszteni az oszlopok mellé.





c) Az oszlopdiagramban (bal oldali ábrán) a vállalkozások darabszámát szerepeltetjük az előző táblázatból.



d) A kördiagramhoz (jobb oldali ábrán) először is ki kell számolnunk az egyes régiókban levő társas vállalkozások százalékos arányát az összes társas vállalkozáshoz mérve. Az összes társas vállalkozások száma 526 873.

Így például a Nyugat-Dunántúlon működik az összes ilyen vállalkozás

$$\frac{40375}{526873} = 0{,}0766 \approx 0{,}077, \text{ azaz } 7{,}7\%\text{-a.}$$

Nyugat-Dunántúl kördiagramhoz szükséges középponti szöge:

$$\frac{40375}{526873} \cdot 360° \approx 27{,}6°.$$

Hasonlóan a többi érték:

Régió	Ny-D	K-D	D-D	K-M	É-M	É-A	D-A
Társas vállalkozás	7,7%; 27,6°	8,3%; 29,9°	6,8%; 24,5°	52,6%; 189,6°	7,0%; 25,2°	9,0%; 32,4°	8,6%; 30,8°

Megjegyzés: A megadott diagramról leolvasott értékek miatti kis eltérés nem róható fel hibának.

Az adatok jellemzése – megoldások

1772 A hőmérsékletek átlaga: 17,14 °C.

1773 A hibák átlaga: 0,4. A hibák terjedelme: 5.

1774 Nem.

1775 *a)* Nem, mert $30 \cdot 3{,}15 = 94{,}5$ nem egész.

b) 20 vagy 40.

1776 *a)* Nem változik.

b) 1-gyel csökken.

c) 1-gyel növekszik.

1777 300 kg

1778 Az egyszerre utazók számának mediánja: 2.

1779 Az építőjáték-darabkák hosszúságainak mediánja: 4,5.

1780 A túrós táskák darabszámának módusza: 6, terjedelme: 4.

1781 *a)* Oszlopdiagram vagy hisztogram.

b) A 180°-nál lévő kategóriaelem vagy ha éppen határ, akkor a két oldalon álló elemek számtani közepe.

1782 *a)* A bedobott érmék mediánja: 10. Módusz_1: 5, módusz_2: 10.

b) Az illetőnek legalább 4 darab, legfeljebb 8 darab 50-es érmét szabad a jegykiadó automatába dobnia.

1783 *a)* A módusz a 10 eurós.

b) Ha 30 db 10 eurós és 30 db 20 eurós címletet kivett és helyettük 6 db 50 eurós és 6 db 100 eurós címletet tett a kasszába, akkor az 5 eurósból lesz a legtöbb.



1784 Jelöljük J-vel az utolsó jegyet. Így a szöveg szerint:

$$\frac{3+4+3+5+J}{5} > 3{,}6, \text{ ahonnan } J > 3.$$

Így Katinak csak a 4-es vagy 5-ös jegy a megfelelő.

Megjegyzés: Mivel nagyon kevés a lehetőség, egyszerű próbálkozással is hamar célt érhetünk.

1785 Összesen 5 darab értéket kell megadnunk, amelyeknek mediánja 0 és módusza –1. Ebből adódóan a rangsorban a középső elemnek 0-nak, előtte viszont móduszként két –1-nek kell lenni. A medián utáni két elemet nem tudjuk meghatározni, csak annyi információnk van, hogy pozitív egész értékek és különbözőek. Illetve ismerjük az átlagukat:

$$\frac{-1+(-1)+0+x+y}{5} = 0{,}2, \text{ ahonnan } x+y=3.$$

A feltételek szerint ilyen érték csak az 1 °C és 2 °C. Tehát a heti hőmérsékletek rangsorban:

$$-1\ °C,\ -1\ °C,\ 0\ °C,\ 1\ °C,\ 2\ °C.$$

1786 Kezdjük el felírni a rangsort. Tudjuk, hogy a legkisebb érték 2 °C, a legnagyobb 5 °C, a medián pedig 3 °C, így a rangsor:

$$2\ °C,\ X\ °C,\ 3\ °C,\ Y\ °C,\ 5\ °C.$$

Mivel nem kell a $\frac{2+X+3+Y+5}{5}$ átlagot kerekíteni, $X+Y$-nak 5 többszörösének kell lennie.

Ráadásul a rangsorba is illeszkedniük kell, ezt pedig csak $X=2$ °C és $Y=3$ °C teszi lehetővé. Összegezve: az átlag 3 °C, a móduszok pedig 2 °C és 3 °C.

1787 *a)* Az utolsó fajtából

$$110-(20+40+35)=15$$

darab van a készletben. A táblázat:

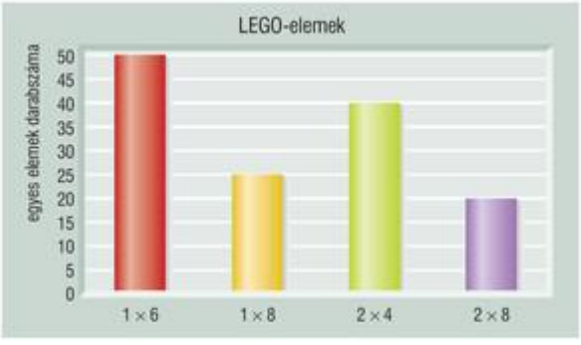
Építőelem	1×1	1×2	1×4	2×3	összesen
Darab	20	40	35	15	110

b) A módusz és a medián is az 1×2-es építőelem (a rangsort például az elemen levő bütykök száma alapján állíthatjuk fel).

1788 *a)* Készítsünk egy táblázatot az adatokról.

Építőelem	1×6	1×8	2×4	2×8	összesen
Darab	50	25	40	20	135

Az oszlopdiagram:



b) A bütykök átlagát kell számolnunk:

$$\frac{50\cdot 6+25\cdot 8+40\cdot 8+20\cdot 16}{135} = 8{,}44.$$

Mivel egészre kell kerekítenünk, a megoldás 8.

1789 *a)* A pontszámok átlaga:

$$\frac{3\cdot 38+1\cdot 33+4\cdot 26+3\cdot 20+5\cdot 18+2\cdot 15+2\cdot 7}{20} = 22{,}25.$$



b) A százalékok pontszámra fordítva:

$$40 \cdot 0{,}3 = 12;\quad 40 \cdot 0{,}45 = 18;$$
$$40 \cdot 0{,}6 = 24;\quad 40 \cdot 0{,}8 = 32.$$

Érdemjegy	1	2	3	4	5
Fő	2	2	8	4	4

Figyelembe véve, hogy a felső határ már jobb jegyet ér, a táblázat kitölthető.

Innen a jegyek módusza közepes, mediánja pedig a 10. és 11. elem átlaga:

$$\frac{3+3}{2} = 3.$$

1790 *a)* A feladat csak a táblázatban jelzetteket kérdezi, azaz nem kell hozzászámolnunk magukat a megkérdezett tanulókat. Összesen 18 főről van szó, így az egy főre jutó középponti szög:

$$\frac{360°}{18} = 20°.$$

Az egyes kategóriákra jutó szögek:

0–3: 20°, 4–7: 80°, 8–11: 120°,
12–15: 60°, 16–19: 80°.



b) Mivel nem ismert, hogy egy-egy kategórián belül mi az életkorok megoszlása, a legkisebbet akkor hibázzuk, ha a kategóriahatárok számtani közepével számolunk:

$$\frac{1 \cdot 1{,}5 + 4 \cdot 5{,}5 + 6 \cdot 9{,}5 + 3 \cdot 13{,}5 + 4 \cdot 17{,}5}{18} = 10{,}6\dot{1}.$$

A testvérek átlagéletkora 10,6 év.

1791 Az egyik iskolának legyen N, a másiknak $N + 40$ végzős tanulója. Mivel az összesített átlag (360) közelebb esik a 340-hez, ennek az iskolának nagyobb súllyal kell az átlagban szerepelnie, itt van több diák ($N + 40$). A két iskolában szerzett pontok száma $340 \cdot (N + 40)$, illetve $420 \cdot N$. Az átlagból egy egyenletet írhatunk fel:

$$\frac{340 \cdot (N + 40) + 420 \cdot N}{2 \cdot N + 40} = 360,$$

innen átrendezések után $N = 20$. Azaz a 420 pontos átlagot produkáló intézményben 20 fő érettségizett, a 340 pontot produkálóban pedig 60.

Megjegyzés: Ha nem jut eszünkbe a feladat elején leírt „okoskodás", az sem baj. Álljunk neki megvizsgálni a fordított esetet! Ekkor az egyenletből N-re negatív érték adódik, így ezt az esetet kizárhatjuk.

1792 *a)* Ha csak ennyit tudunk, akkor az átlag

$$3{,}32 < \frac{6 \cdot 5 + n \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{22 + n} < 3{,}39.$$

Innen akár próbálgatással, akár az alábbi számításokkal:

$$73{,}04 + 3{,}32n = 3{,}32 \cdot (22 + n) < 6 \cdot 5 + n \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 <$$
$$< 3{,}39 \cdot (22 + n) = 74{,}58 + 3{,}39n.$$

Már külön kezelve a két oldalt:

$$73{,}04 + 3{,}32n < 68 + 4n \quad \text{és} \quad 68 + 4n < 74{,}58 + 3{,}39n.$$

Rendezve:

$$5{,}04 < 0{,}68n \quad \text{és} \quad 0{,}61n < 6{,}58 \quad \Rightarrow \quad 7{,}4 < n < 10{,}8.$$

Ennyi információ tehát nem elég, n lehet 8, 9 vagy 10. Az osztály létszáma pedig lehet 30, 31 vagy 32 fő.

b) Legalább közepest írt $15 + n$ fő. Átlaguk

$$\frac{6 \cdot 5 + n \cdot 4 + 9 \cdot 3}{15 + n} < 3{,}87.$$

Innen

$$0{,}13n < 1{,}05, \quad \text{vagyis} \quad n < 8{,}07.$$

Ez már elég a pontos érték meghatározásához, $n = 8$. Az osztály pedig 30 fős.

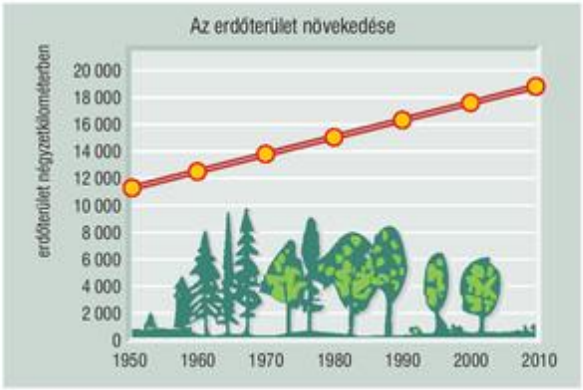
1793 *a)* $93\,000\ \text{km}^2 \cdot 0{,}12 = 11\,160\ \text{km}^2$.

b) $93\,000\ \text{km}^2 \cdot 0{,}2 = 18\,600\ \text{km}^2$ a jelenlegi erdőterület. 1950 és 2010 között 6 darab tízéves periódus van. A közben lett erdőterületet kell osztanunk 6-tal:

$$\frac{18600 - 11160}{6} = 1240.$$

A tízévenkénti átlagos növekedés $1240\ \text{km}^2$.

c) A vonaldiagramon összesen 7 értéket kell jelölnünk (az első periódus elejét és az utolsó végét is).



1794 *a)* Ha csak az A és C termék minősül vezetőnek, akkor kettejük átlaga:

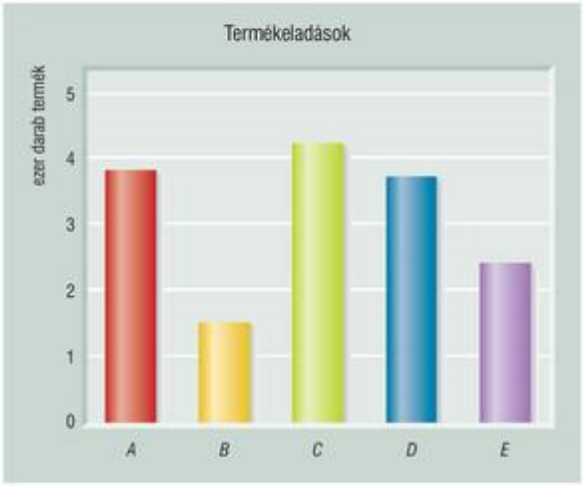
$$\frac{3800 + 4200}{2} = 4000.$$

A megadott átlag azonban 3900, amiből az következik, hogy a D terméknek is vezető terméknek kell lennie. Az átlagból már meg tudjuk mondani D darabszámát is:

$$\frac{3800 + 4200 + D}{3} = 3900,$$

ahonnan $D = 3700$.

b) A helyes oszlopdiagram az ábrán látható.



1795 *a)* Hárombetűs kódokat az A, B, C jegyekből $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$-féleképpen készíthetünk.

b) Ha 27-en járnak az osztályba, akkor egy főre

$$\frac{360^\circ}{27} = 13\frac{1}{3}^\circ$$

középponti szög jut. Így a táblázatunk:

Érdemjegy	1	2	3	4	5	összesen
Szög	40°	40°	80°	80°	120°	360°
Fő	3	3	6	6	9	27

A kitöltött táblázat alapján könnyen készíthetünk oszlopdiagramot.



c) A kördiagramon sorban jönnek egymás után a jegyek (rangsor), így a mediánt az egyenesszögnél találjuk (jó), a módusz pedig a legnagyobb területű rész (jeles).



1796 *a)* Jelöljük a megtérülési rátát M-mel, a dolgozók száma legyen D, a gyártott termékek ezres darabszáma T. A szövegből tudjuk, hogy $M = \frac{T}{D}$. Legyen mondjuk a babagyártó részleg rátája $M_b = 2{,}5$, a ruhagyártóé $M_r = 2$. Ismerve a képletet és azt, hogy mindkét részlegben $T = 40$, meg tudjuk adni a dolgozók számát is: $D_b = \frac{40}{2{,}5} = 16$ és $D_r = \frac{40}{2} = 20$.

b) A megtérülési ráta maga is egy átlag: azt mutatja meg, átlagosan hány ezer terméket gyártott le egyetlen dolgozó fél év alatt. A legegyszerűbben úgy kapjuk meg az egész gyárra vonatkozó értéket, ha vesszük az összes legyártott terméket és elosztjuk az összes dolgozók számával. Ez pedig két tizedesre kerekítve $M = \frac{80}{36} = 2{,}22$.

Megjegyzés: Számoljunk utána, hogy ez nem a két ráta számtani átlaga. Annak értéke ugyanis $\frac{2{,}5+2}{2} = 2{,}25$. Ha mindenképpen átlagolni akarunk, ún. harmonikus átlagot kell számolnunk:

$$\frac{2}{\frac{1}{2{,}5}+\frac{1}{2}} = 2{,}22.$$

c) Érdemes a számolást a harmadik sorral kezdeni, onnan tudjuk, hogy egy csupasz baba ára 1500 Ft. Az üres babaruha ennek másfélszerese, azaz 2250 Ft. Mivel babáik felét öltöztették csak saját ruhába, az üres babák és ruháik eladásából $20000 \cdot 1500 + 20000 \cdot 2250 = 75$ millió Ft bevételhez jutott a cég. A felöltöztetett babák viszont a babatest és a ruha együttes áránál annak 70%-val többért keltek el, vagyis $(1500 + 2250) \cdot 1{,}7 = 6375$ Ft-ért. Ebből is tudtak gyártani 20000 darabot, 127 500 000 Ft-os bevételt értek el így. A cég összes bevétele a kettő összege, 202,5 millió Ft.

1797 *a)* A változás mértékének kiszámításánál az adott év termelését az előzőhöz viszonyítjuk: egyszerűen elosztjuk vele, és az eredményt kifejezzük százalékban. Ezek az arányok az évek során rendre

$$\frac{3}{2} = 1{,}5; \quad \frac{5}{3} = 1{,}666\dot{}; \quad \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Százalékban megfogalmazva mondhatjuk ezt: a termelés az előző évinek 150%-a, 166,67%-a és 80%-a. Vagy mondhatjuk így is: az éves termelés először 50%-kal, majd 66,67%-kal növekedett, végül 20%-kal csökkent.

b) A változás átlagos mértéke az az egyetlen érték, amivel ha mindhárom évben növekszik (vagy csökken) a termelés, akkor ugyanott tart, mint a valóságban. Tudjuk, hogy a termelés 20000 darab volt 2000-ben. Vagyis olyan számot keresünk, amire igaz:

$$20000 \cdot 1{,}50 \cdot 1{,}6667 \cdot 0{,}8 = 20000 \cdot q \cdot q \cdot q.$$

20000-rel lehet egyszerűsíteni:

$$2 = q^3.$$

Innen – akár próbálgatással is – kapjuk:

$$q \approx 1{,}26.$$

Vagyis az átlagos évenkénti növekedés 26%, illetve az előző évinek mindig 126%-a.

Megjegyzés: Ez az átlag sem számtani átlag, hiszen az 1,322 lett volna. Ún. mértani vagy geometriai átlagot számoltunk, harmadik gyököt vontunk három szám szorzatából:

$$\sqrt[3]{1{,}5 \cdot 1{,}6666\dot{} \cdot 0{,}8} = 1{,}26.$$

c) Ha ebben a mértékben növekszik a termelés, akkor 2004-ben a 2003. évi darabszám 1,26-szorosát fogják termelni. Szám szerint $40000 \cdot 1{,}26 = 50400$ darabot.

1798 Jelölje az A kategóriába eső ügyfelek számát x, a B-be esőkét y, a C-be tartozókat pedig z (ne feledjük, hogy pozitív egész megoldásokat keresünk). Ekkor a szöveg szerint felírhatunk egy három egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x+z &= y+25 \\ 2\cdot(y-x) &= z \\ \frac{10x+25y+30z}{x+y+z} &= 20 \end{aligned}\right\}.$$

Ha az első egyenlet kétszereséhez hozzáadjuk a másodikat, akkor x és y kiesik, csak z ismeretlen marad. Innen $z = 50$. Ezt behelyettesítve mondjuk a második és a harmadik egyenletekbe, már csak kétismeretlenes rendszerünk van:

$$\left.\begin{aligned} y-x &= 25 \\ \frac{10x+25y+1500}{x+y+50} &= 20 \end{aligned}\right\}.$$

Az első sorból kifejezve y-t és behelyettesítve a másodikba, ott egy egyismeretlenes egyenletet kapunk. Átrendezve

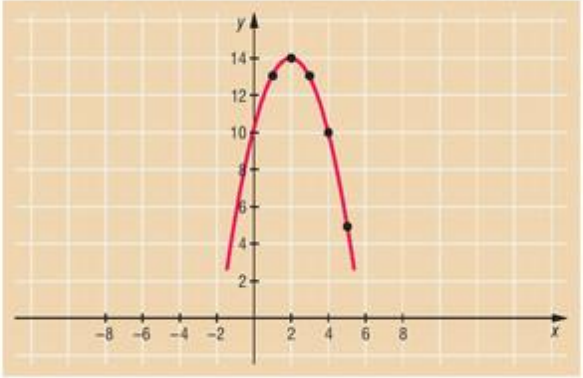
$$35x + 2125 = 40x + 1500$$

alakú, ahonnan

$$x = 125 \quad \text{és} \quad y = 150.$$

A kérdésre a válasz tehát $125 + 150 + 50 = 325$ főt kérdezett meg a közvélemény-kutató cég a mobilszolgáltató megbízásából.

1799 Bár a megadott függvény diszkrét pontokból áll, azért fel kell ismernünk a képletében a fordított állású parabolát: $f(x) = -(x-2)^2 + 14$. Akár függvénytranszformációs lépésekkel, akár egyszerű behelyettesítéssel felrajzolhatjuk a függvényt. Az ábra tulajdonképpen egy oszlopdiagram (ha a pontokból merőlegeseket bocsátanánk az x tengelyre). A függvény értékei adják az ügyfelek számát, így a rajzról leolvashatjuk a megoldásokat.





a) A függvény $x = 2$ helyen veszi fel maximumát, így a kérdezett nap a kedd.

b) Az egyes napokon rendre 13, 14, 13, 10 és 5 vendég érkezik, összesen 55 fő. Az egy főhöz tartozó középponti szög:

$$\frac{360^\circ}{55} = 6{,}\dot{5}\dot{4}^\circ,$$

így az egyes napokon érkezőkhöz kb. 85,1°; 91,6°; 85,1°; 65,4° és 32,8° szög tartozik (a kördiagram a jobb oldali ábrán látható).

c) A napi átlag egyszerű számtani átlaggal kapható meg:

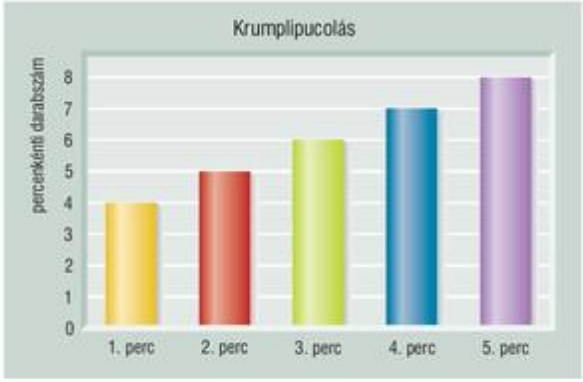
$$\frac{13+14+13+10+5}{5} = 11.$$



Vegyes feladatok – megoldások

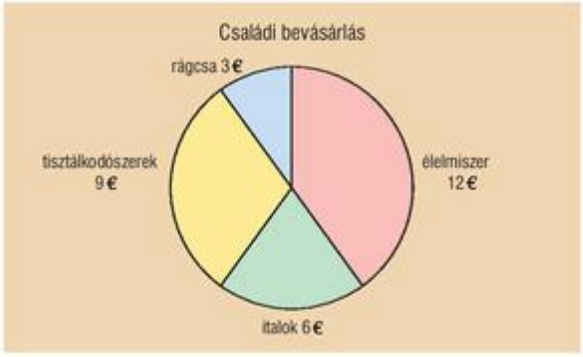
1800 *a)* Próbálgatással vagy az $1{,}5 \cdot n \cdot (n+1) = 30$ képletből: 5 perc, és ezalatt 4, 5, 6, 7, 8 szem krumpli.

b) Az oszlopdiagram az ábrán látható.



1801 *a)* Mivel rágcsálnivalókra a pénzének csak 10%-át költötte, élelmiszerre pedig 40%-ot, a helyes válasz a négyszeres szorzó.

b) A kördiagram (élelmiszer 12 €, italok 6 €, tisztálkodószer 9 € és rágcsa 3 €) az ábrán látható.



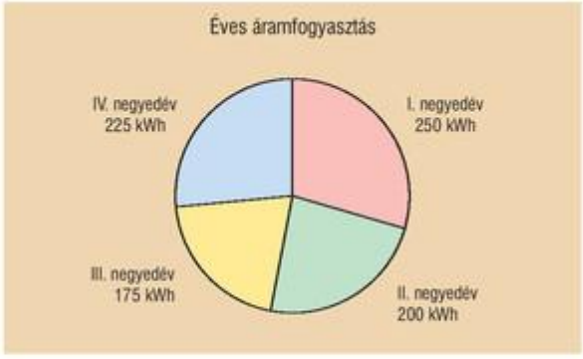
1802 *a)* Az oszlopdiagram a bal oldali ábrán látható.

b) Adjuk össze az egyes értékeket, de ne feledjük a 25-ös szorzót:

$$\frac{200+150+100+125}{25} = 23 \text{ m}^3.$$

c) A kördiagram a jobb oldali ábrán látható.





1803 *a)* A pénzek terjedelme: 9, mediánja: 2, módusza: 1.

b) Mivel a számtani átlag ≈ 3,54, így ez a címlet az 5 eurós.

1804 *a)* Az egyszerre eladott gombócok számának terjedelme: 3, módusza: 2.

b) A medián: 2,5. A számtani közép: $2{,}5\dot{4}$.



1805 *a)* Medián = Módusz = 5.

b) A számtani átlag: 7,5.

1806 *a)* $3,1\dot{6}$ és 3,7 között változhat, ez körülbelül 9,5%-os visszaesést illetve 5,7%-os növekedést jelenthet.

b) A négy hiányzó írhatott 5, 5, 5, 2 vagy 5, 5, 4, 3 vagy 5, 4, 4, 4 érdemjegyű dolgozatot.

1807 *a)* Ha a kategóriaközepekkel számolunk (végül pedig 4,5-tel), akkor a becsült átlag: $1,8\dot{3}$. Két ok miatt lehet az átlag problémás: egyáltalán nem biztos, hogy a kategóriákon belül egyenletes a betétek megoszlása (pedig a középpel ezt tételezzük fel), illetve az utolsó kategória nincs lezárva, ott gyakorlatilag bármekkorák lehetnek a betétek.

b) Ha mindig az alsó határral számolunk, akkor az átlag = $1,\dot{3}$. Az eltérés így 0,5.

c) A pontos felső érték bármekkora lehet, hiszen az utolsó kategória felülről nincs lezárva.



Kiadja a Mozaik Kiadó, 6723 Szeged, Debreceni u. 3/B. Telefon: (62) 470-101, 554-664
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Kovács János
Terjedelem: 26,46 (A/5) ív • 2009. december • Tömeg: 525 g • Raktári szám: MS-2321