Sokszínű matematika

Az analízis elemei

A kötet hátsó borítójának belsején egyedi kód található, melyet a **www.mozaweb.hu** *oldalon aktiválhatsz. Az aktiválás hozzáférést biztosít a kiadvány elektronikus változatához a honlapon található feltételekkel.*





Sokszínű matematika

Schlegl István
Trembeczki Csaba

Matematika

Az analízis elemei

TANKÖNYV

11–12

EMELT SZINT

Hetedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2024

A könyvet írta: Schlegl István - *középiskolai tanár*
Trembeczki Csaba - *középiskolai tanár*

Lektorálta: Kovácsné Németh Sarolta - *középiskolai tanár*
dr. Szalay István - *főiskolai tanár*



Felelős szerkesztő: Tóth Katalin
Borítóterv, tipográfia: Reményfy Tamás
Illusztrációk: Ábrahám István

KERETTANTERV:
OM Kerettanterv 17/2004 (V. 20.) OM rendelet 3. sz. melléklet

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, ill. rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más hordozó) nem sokszorosítható.

ISBN 978 963 697 682 8
Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2011

„Ami olykor világos … és olykor homályos … valami … az a matematika."
(Lakatos Imre, 1922–1974)

Tisztelt Olvasó!

Jelen tankönyv az emelt szinten tanuló diákoknak, illetve az őket oktató tanároknak kíván segítséget nyújtani. A *Sokszínű matematika 9–12.* tankönyvcsalád részeként igazodik az eddig megjelent könyvek felépítéséhez, filozófiájához. (Több helyen utalunk is arra, hogy az új anyag feldolgozásához szükséges előismeret melyik könyv hányadik oldalán található.)

Könyvünk – melynek feldolgozása a 11. évfolyamon kezdhető meg – sok kidolgozott példát tartalmaz, a leckék végén kitűzött feladatok megoldásával pedig az új ismereteket rögzíthetik a tanulók.

A könyvhöz feladatgyűjtemény is készült, amelyben kellő számú feladat (és azok megoldása) található az ismeretek begyakorlásához, elmélyítéséhez.

Könyvünk alapvetően az emelt szintű érettségin szükséges, és a korábbi tankönyvekben nem szereplő ismereteket: az *analízis* bevezető fejezeteit és a *valószínűség-számítás* egy-két témakörét próbálja meg összefoglalni, illetve felvillantani. Reményeink szerint az eddig megjelent számtalan kiváló könyvtől annyiban tér el, hogy – a későbbi analízistanulmányokat segítendő – jelentősebb mértékben tartalmaz a középiskolai követelményeket meghaladó tananyagot, s így átmenetet képez a tananyag középiskolai és felsőoktatásbeli tárgyalásmódja között.

Szent Ágoston parafrázisával élve: *Add meg Uram a matematika pontosságát és szakszerűségét, de most még ne egészen!*

Igyekeztünk a fogalmakat, tételeket logikai egységekben tárgyalni, így könyvünket nyugodt szívvel ajánljuk a speciális matematikai osztályokban való feldolgozásra is. A könnyebb tájékozódás érdekében a középiskolai és az azt meghaladó tananyagot színkóddal különböztetjük meg.

A definíciók és tételek jelölése

– **Zöld** alap emeli ki az emelt szinten **elsajátítandó tananyagot.** Ha a definíció vagy tétel sorszáma és neve **piros,** akkor az az érettségi követelmények között is szerepel; ha **fekete,** akkor tanórai feldolgozásra **javasoljuk.**
– **Lila** alapon szerepel minden olyan **kiegészítő** definíció és tétel, amelyek ismerete a felsőfokú tanulmányokat segíti és készíti elő.

Végül szeretnénk megköszönni mindazok munkáját, akik közreműködtek a könyv megjelenésében. Külön köszönettel tartozunk *Dr. Szalay Istvánnak,* aki sok segítő megjegyzésével hozzájárult a könyv végső formájának kialakulásához.

A könyv használóinak eredményes érettségi felkészülést és sikeres felsőfokú tanulmányokat kívánunk.

A szerzők





Emlékeztető, végtelen halmazok

1. Emlékeztető érdekességekkel I. Valós számok 10
2. Emlékeztető érdekességekkel II. Bizonyítási módszerek, állati ötletek 14
3. Végtelen halmazok számossága I. Megszámlálhatóan végtelen 18
4. Végtelen halmazok számossága II. Kontinuum végtelen 23

Sorozatok

1. A sorozat fogalma 28
2. A sorozatok tulajdonságai I. Korlátosság és monotonitás 30
3. A sorozatok tulajdonságai II. A határérték fogalma 35
4. A sorozatok tulajdonságai III. Konvergens sorozatok tulajdonságai 42
5. Nevezetes sorozatok határértékei I. 47
6. Nevezetes sorozatok határértékei II. Műveletek konvergens sorozatokkal 51
7. A Cauchy-féle konvergenciakritérium (kiegészítő anyag) 59
8. Végtelen sorok 61



Függvények tulajdonságai

1. Monoton, korlátos, periodikus függvény 69
2. Függvény határértéke I. Véges helyen vett határérték 73
3. Függvény határértéke II. Jobb és bal oldali, végtelenben vett határérték 77
4. Műveletek függvényekkel, összetett függvény 80
5. Függvény folytonossága 84
6. Függvény szélsőértéke. A folytonosság és a szélsőérték kapcsolata 87
7. Függvény konvexitása 89
8. Nevezetes határértékek, különböző típusú határérték-feladatok. A folytonosság vizsgálata 91



Differenciálszámítás

1. Bevezető példák 98
2. A derivált fogalma, kapcsolata a folytonossággal 102
3. A differenciálás műveleti szabályai 108
4. Bizonyos függvénytípusok deriváltjai 112
5. Kidolgozott deriválási feladatok 117



A differenciálszámítás alkalmazásai

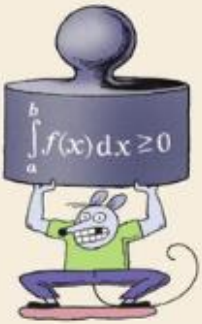
6. Középértéktételek (kiegészítő anyag) 124
7. Monotonitás, szélsőérték, példák 128
8. Magasabb rendű deriváltak, szélsőérték újra (kiegészítő anyag) 134
9. Konvexitás, inflexiós pont (kiegészítő anyag) 138
10. Teljes függvényvizsgálat (kiegészítő anyag) 140



Határozatlan integrál

1. A határozatlan integrál mint a deriválás inverz művelete 147
2. A határozatlan integrál tulajdonságai. Integrálási eljárások I. 151
3. Integrálási eljárások II.Parciális integrálás, racionális törtek (kiegészítő anyag) 157

Határozott integrál



1. A határozott integrál fogalmának előkészítése 162
2. Alsó és felső közelítő összegek viselkedése, a Riemann-integrál 166
3. Oszcillációs összegek (kiegészítő anyag) 171
4. A Riemann-integrál tulajdonságai 175
5. Az integrálszámítás középértéktételei (kiegészítő anyag) 180
6. A Newton–Leibniz-tétel 183
7. A határozott integrál alkalmazásai I. Területszámítás 188
8. A határozott integrál alkalmazásai II. Térfogat- és felszínszámítás (kiegészítő anyag) 194
9. Improprius integrál (kiegészítő anyag) 199

Valószínűség-számítás



1. Bevezetés – Ismétlés 203
2. A valószínűség-számítás új megközelítése: valószínűségi változó 205
3. A valószínűségi változó várható értéke 210
4. A valószínűségi változó szórása 213
5. A Csebisev-tétel és a Bernoulli-féle nagy számok gyenge törvénye 218
6. Feltételes valószínűség, Bayes tétele. Független események 223
7. Néhány nevezetes eloszlás és várható értéke, szórása 231



A könyvben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	az egész számok halmaza; a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a valós számok halmaza; a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$; $E \not\subset F$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak; E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset$, $\{\}$	üres halmaz
$\bar{A}$; $\lvert A \rvert$	az A halmaz komplementere; az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$; $]a; b[$	a, b zárt intervallum; a, b nyitott intervallum
$[a; b[$; $]a; b]$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum; a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$; $\{x\}$	az x szám egészrésze; az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$; $\sqrt[n]{x}$	az x szám négyzetgyöke; az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b); $[a, b]$	az a és b szám legnagyobb közös osztója; az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$; $\vec{a}$; $\vec{0}$	az A pontból B pontba mutató vektor; a vektor; nullvektor
$\sphericalangle$	szög

A könyvben szereplő, az emelt szintű érettségin szükséges új szakszavak

binomiális eloszlás (visszatevéses modell) **216**
differenciahányados **102**
differenciálhányados **102**
események függetlensége és függősége **229**
feltételes valószínűség **224**
függvény folytonossága **85**
függvény határértéke **75**
határozatlan integrál **148**
határozott integrál **168**
hipergeometriai eloszlás (visszatevés nélküli modell) **231**
integrálfüggvény **183**
kétoldali közelítés módszere **168**
primitív függvény **147**
sorozat határértéke **37**
sorozat konvergenciája **37**
sorozat korlátossága **30**
sorozat monotonitása **33**
szórás **213**
várható érték **210**



Emlékeztető, végtelen halmazok 1
Sorozatok 2
Függvények tulajdonságai 3
Differenciálszámítás 4
Határozatlan integrál 5
Határozott integrál 6
Valószínűségszámítás 7

EMLÉKEZTETŐ, VÉGTELEN HALMAZOK

1. Emlékeztető érdekességekkel I. Valós számok

Jelölések, megállapodások

A tanulmányaink során eddig bevezetett jelöléseket ismertnek tekintjük, és használjuk. $\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok halmazát, $\mathbb{Z}$ az egész, $\mathbb{Q}$ a racionális, $\mathbb{R}$ a valós számokat. Esetenként használunk további jeleket is, $\mathbb{Z}^-$ a negatív egészeket, $\mathbb{R}_0^+$ a nemnegatív valósak halmazát jelenti. Függvény jelölésére a bevett formulákat alkalmazzuk (f, g, h, …). Az értelmezési tartományt D (D_f, D_g, D_h, …), az értékkészletet R (R_f, R_g, R_h, …) jelöli.

Megjegyzés: $\mathbb{N}$ a *natural* (angolul természetes), $\mathbb{Z}$ a *die Zahlen* (németül számok), $\mathbb{Q}$ a *quotiens* (latinul hányados), $\mathbb{R}$ a *real* (angol, valódi) szó rövidítése. Angol kifejezések rövidítései az f: *function* (függvény), D: *domain* (birtok, tartomány), R: *range* (terjedelem).

A valós számokról

Művelet a halmazok elemein végzett eljárás, aminek révén a kapott eredmény is eleme a halmaznak.

A valós számokon értelmezünk két műveletet, az összeadást és a szorzást. Az összeadás eredetileg tárgyak leszámlálását jelentette, a szorzás ismételt összeadást. A számológépek legtöbbje a műveleteket ezekre vezeti vissza. A műveletek rendelkeznek az alábbi jól ismert, bár nem mindig hangsúlyozott műveleti tulajdonságokkal; nevezzük őket műveleti axiómáknak (a, b, c valós számok):

(1) **Kommutativitás:** $a + b = b + a$ és $a \cdot b = b \cdot a$.

(2) **Asszociativitás:** $a + (b + c) = (a + b) + c$ és $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Az $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ egyenlőség balról jobbra olvasva *zárójelfelbontás*, jobbról balra *kiemelés*.

(3) **Disztributivitás:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(4) Mindkét műveletnek létezik úgynevezett **neutrális eleme** a halmazban, ezeket 0-val és 1-gyel jelöljük. Rájuk teljesül, hogy $a + 0 = a$ és $a \cdot 1 = a$.

(5) Mindkét művelet esetén majdnem minden elemnek létezik úgynevezett **inverze:**

- összeadás esetén $a + (-a) = 0$; ekkor $(-a)$-t a ellentettjének nevezzük;
- szorzás esetén $a \cdot \frac{1}{a} = 1$; ekkor a inverzét a reciprokának nevezzük. A 0-nak nincs inverze a szorzás műveletre nézve.

Megjegyzés: Az összeadás és a szorzás műveleteket természetes számokon végezve természetes, egész számokon végezve egész, racionális számokon végezve racionális, valós számokon végezve valós számot kapunk eredményül. Ezt szebben úgy mondjuk, hogy erre a két műveletre az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ halmazok zártak. Ellenben pl. $\mathbb{N}$ nem zárt az osztás, $\mathbb{Z}^-$ nem zárt a szorzás és $\mathbb{R}$ nem zárt a páros gyökvonás műveletekre.

1. példa

Adjuk meg a 2 inverzét a szorzásra, a 7 inverzét az összeadásra nézve.

Megoldás

A szorzásra nézve 2 és 0,5 egymás inverzei (reciprokai): $2 \cdot 0{,}5 = 1$.

A 7 és a -7 egymás inverzei (ellentettek) az összeadásra nézve: $7 + (-7) = 0$.

2. példa

Adjuk meg a halmazokon értelmezett unió művelet neutrális elemét.

Megoldás

Olyan E halmazt keresünk, hogy minden A halmazra $A \cup E = A$. Mivel bármely halmazra, ezért $A = \emptyset$ halmazra is teljesülnie kell: $\emptyset \cup E = \emptyset$. Ebből adódik, hogy E-nek nem lehet egyetlen eleme sem, tehát az unióra nézve az egységelem az $E = \emptyset$ üres halmaz.

3. példa

Legyen $\circ$ művelet a következő: $x \circ y = 2xy$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

a) Kommutatív-e a művelet?

b) Van-e neutrális eleme a nem nulla valós számok között?

c) Van-e minden $x \neq 0$ számnak inverze?

Megoldás (a)

Igen, $x \circ y = y \circ x$. Ugyanis a „normális" szorzás kommutatív:

$$x \circ y = 2xy = 2yx = y \circ x.$$

Megoldás (b)

Jelölje a keresett számot e. Ha e neutrális, akkor $x \circ e = x$, azaz $2xe = x$. A feltétel szerint $x \neq 0$, ezért egyszerűsíthetünk: $e = 0{,}5$.

Tehát:

$$x \circ 0{,}5 = 0{,}5 \circ x = x.$$

Hasonlóan:

$$0{,}5 \circ y = 2 \cdot 0{,}5y = y.$$

Egy fogalmat akkor tekinthetünk magunkénak, ha példákkal tudjuk illusztrálni. Törekedjünk rá!

Megoldás (c)

$x \neq 0$ inverze a t szám, ha $x \circ t = e$ (vagy $t \circ x = e$). Az előző részből:

$$x \circ t = 2xt = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{4x}.$$

Tehát pl. $x = 0{,}1$ inverze $\circ$ műveletre a $t = 2{,}5$, ugyanis:

$$0{,}1 \circ 2{,}5 = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}5 = 0{,}5.$$

Magukra a számokra vonatkoznak a szintén nagyon egyszerű ún. rendezési axiómák:

(6) **Előjel-tulajdonság:** ha $a \neq 0$, akkor vagy a, vagy $-a$ pozitív.
(7) **Pozitivitás tartás:** ha a, b pozitív, akkor $a+b$ és $a \cdot b$ is pozitív.
(8) A 0 nem pozitív.

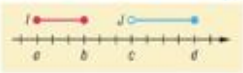
Gondoljunk bele, mi minden adódik a felsoroltakból! Például értelmet adhatunk a kisebb relációnak: $a < b$, ha $[(-a)+b]$ pozitív. Hasonlóan értelmezve a $>$, $=$ relációkat is, nagyság szerinti rendet teremthetünk a valós számok között. Igaz az is, hogy ezen három reláció közül pontosan az egyik teljesül (trichotómia). Bár az előbbi rendezést másképp is megfogalmazhatjuk, az ilyen típusú rendcsinálást *rendezési relációnak* nevezik.

A műveleti és rendezési axiómákon kívül van egy harmadik fontos tulajdonsága is a valós számoknak, ezt *teljességi axióma* néven említi a szakirodalom. Erről későbbi tanulmányai során hallhat majd az Olvasó.

Azért foglalkoztunk ilyen sokat a valós számokkal, mert a vizsgált függvényeknek ez lesz az értelmezési tartománya és az értékkészlete is. A valós számok halmaza tananyagunk küzdőtere. Most pedig lássuk a valós számok bizonyos részhalmazait!

Intervallumok

Az $a < b$ valós számok esetén $I = [a; b]$ zárt intervallumon értjük az $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ halmazt. Az intervallum hossza a $(b-a)$ különbség.



1. ábra

Nyitott, illetve félig nyitott-félig zárt intervallumot a megfelelő reláció szigorításával kapunk, pl. a $J = \{x \in \mathbb{R} \mid c < x \leq d\}$ halmaz jelölése $J =]c; d]$. Számegyenesen ábrázolva az 1. ábrán láthatók.



2. ábra

Érdekesebb a dolog, ha végtelen sok intervallumot tekintünk egyszerre. Például:

$$I_1 = \left[-1-\frac{1}{1}; 1+\frac{1}{1}\right], \quad I_2 = \left[-1-\frac{1}{2}; 1+\frac{1}{2}\right], \quad I_3 = \left[-1-\frac{1}{3}; 1+\frac{1}{3}\right],$$

$$\ldots, \quad I_n = \left[-1-\frac{1}{n}; 1+\frac{1}{n}\right], \quad \ldots$$

(ld. 2. ábra)



3. ábra

$$J_1 = \left]0; \frac{1}{1}\right], \quad J_2 = \left]0; \frac{1}{2}\right], \quad J_3 = \left]0; \frac{1}{3}\right], \quad \ldots, \quad J_n = \left]0; \frac{1}{n}\right], \quad \ldots$$

(ld. 3. ábra)

4. ábra



$$L_1 = [1; 2^1[, \quad L_2 = [2; 2^2[, \quad L_3 = [3; 2^3[, \quad \ldots, \quad L_n = [n; 2^n[, \quad \ldots$$

(ld. 4. ábra)

Az ábrákon szépen látszik, hogy

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots \quad \text{és} \quad J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots \supset J_n \supset \ldots$$

Mondhatjuk úgy is, hogy I_n és J_n intervallumok egymásba vannak „ágyazva": bal végpontjaik nem csökkennek, jobb végpontjaik nem nőnek, de minden bal végpont kisebb minden jobb végpontnál (L_n nem ilyen, mert pl. L_3 bal végpontja nagyobb L_1 jobb végpontjánál). Különbséget csak az jelent, hogy I_n zárt, J_n félig nyitott-félig zárt intervallumokból áll. A következő fejezetben megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek teljesülése esetén van egymásba skatulyázott zárt intervallumoknak pontosan egy közös pontja.

Figyeljük meg: minden I_n intervallum tartalmazza a $[-1; 1]$ intervallumot, míg J_n intervallumok közös része üres halmaz, hasonlóan L_n intervallumokhoz.

Feladatok

1. Van-e olyan szám, amely az összeadásra nézve önmagának inverze? Van-e olyan, amely a szorzásra nézve önmagának inverze?

2. Adjuk meg a halmazokon értelmezett metszet művelet neutrális elemét.

3. Legyen a Δ művelet ez: $a \Delta b = a + b + 2$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
   a) Kommutatív-e a Δ művelet?
   b) Van-e egységeleme a valós számok között?
   c) Mi a 7 inverze? Adjuk meg minden valós szám inverzét.

4. Tekintsük a következő intervallumokat ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Ábrázoljuk őket számegyenesen, majd állapítsuk meg, melyek egymásba skatulyázottak, és melyek nem.
   a) $I_1 = [0; 1]$, $I_2 = [0; 2]$, …, $I_n = [0; n]$, …
   b) $J_1 =]1{,}9; 3{,}1[$, $J_2 =]1{,}99; 3{,}01[$, …, $J_n =]2 - 10^{-n}; 3 + 10^{-n}[$, …
   c) $K_1 = [0; 4]$, $K_2 = [1{,}5; 2{,}5]$, …, $K_n = \left]1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}; 3 + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}\right[$, …
   d) $L_1 =]-1; 1]$, $L_2 =]-0{,}5; 0{,}5]$, …, $L_n = \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$, …

2. Emlékeztető érdekességekkel II. Bizonyítási módszerek, állati ötletek

Ebben a részben a könyvben legtöbbször alkalmazott bizonyítási módszereket és fogásokat gyűjtöttük össze. Ide bármikor visszalapozhat az Olvasó.

Teljes indukció

A természetes számokat szokták „számláló" számoknak is nevezni: amikor megszámoljuk a környezetünkben található dolgainkat, $\mathbb{N}$-beli számokat sorolunk fel. Ha például az ellenőrzőnkben nincs matekból 5-ös jegy, akkor azt mondjuk: 0 darab van belőle. Ha van, akkor rámutatunk az egyikre, és azt mondjuk: 1. Rámutatunk egy másikra, 2-t mondunk és így tovább, amíg el nem fogynak a matek ötösök. Azért tudjuk ezt megtenni, mert minden természetes számnak van *rákövetkezője* (nála 1-gyel nagyobb). A számoláshoz tehát két dolog kell:

(1) a 0 természetes szám és

(2) minden természetes számnál van eggyel nagyobb.

Igazából ez három formula:
(1) $0 \in \mathbb{N}$.
(2) Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$.
(3) Ekkor $(n+1) \in \mathbb{N}$.

Formulákkal:

(1) $0 \in \mathbb{N}$;

(2) ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $(n+1) \in \mathbb{N}$.

Ha egy állítást minden természetes számra be kell bizonyítanunk, akkor a fenti gondolatmenet alapján:

1. Igazoljuk, hogy $n = 0$-ra az állítás igaz. (Más t induló értéket megadva csak $n \geq t$ egészekre lesz igaz az állítás!)
2. Majd feltesszük, hogy valamilyen $n = k$ természetes számra az állítás teljesül (ezt *indukciós feltételnek* nevezzük).
3. Végül kihasználva az indukciós feltevést, igazoljuk az állítás igazságát $n = k + 1$ értékre.

Megjegyzés: A természetes számok (1) és (2) állítását érdemes a gyakorlati alkalmazásokban három részre bontani, hogy világosan elkülönítsük az indukciós feltevést, amire támaszkodunk.

1. példa

Bizonyítsuk be a következő tételt.

Bernoulli-egyenlőtlenség

1.1. Tétel: **Bernoulli-egyenlőtlenség: bármely $h > -1$, $n \in \mathbb{N}$ esetén $(1+h)^n \geq 1 + n \cdot h$.**

Bizonyítás

A bizonyítás teljes indukcióval történik.

1. $n = 0$-ra az állítás igaz: $(1+h)^0 = 1 + 0 \cdot h$.
2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén $(1+h)^k \geq 1 + k \cdot h$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén teljesül-e a feltétel:

$$(1 + h)^{k+1} \geq 1 + (k + 1) \cdot h?$$

Átalakításokkal:

$$(1 + h)^{k+1} = (1 + h)^k \cdot (1 + h) \geq (1 + k \cdot h) \cdot (1 + h) =$$
$$= 1 + k \cdot h + h + k \cdot h^2 = 1 + (k + 1) \cdot h + k \cdot h^2 \geq 1 + (k + 1) \cdot h.$$

Lapozzunk az 1. feladathoz!

Az első lépésben a hatványozás azonosságait, a második lépésben az indukciós feltevést használtuk fel. A harmadik lépésben felbontottuk a zárójelet, elhagytunk egy nemnegatív tagot (h lehet 0), és kiemeltünk. A sor elejét és végét összeolvasva, valóban:

$$(1 + h)^{k+1} \geq 1 + (k + 1) \cdot h.$$

Indirekt bizonyítás

Az indirekt módszer két logikai törvényen alapul. Az egyik, hogy minden állítás vagy igaz, vagy hamis. A másik, hogy egy igaz állítás tagadása hamis és fordítva, hamis állítás tagadása igaz.

Ezek a kétértékű (igaz-hamis) arisztotelészi logika alaptörvényei. Léteznek többértékű logikák is (pl. fuzzy logika). Érdemes utánanézni!

Ha egy állítás tagadásáról helyes logikai gondolatmenettel belátjuk, hogy hamis (ellentmondásra vezet), akkor az állítás tagadásának tagadása, azaz maga az állítás igaz. Indirekt módon akkor érdemes bizonyítanunk, ha az állítás tagadása könnyebben kezelhető, mint maga az állítás. Klasszikus példa erre a $\sqrt{2}$ nem racionális voltának bizonyítása (lásd 10.-es könyv 36. oldal). Azzal nem nagyon tudunk mit kezdeni, hogy egy szám *nem* racionális – a tagadásával viszont igen. Így a szám felírható két egész szám hányadosaként: alkalmazhatjuk a számelmélet összes fogalmát és tételét.

Így bizonyíthatjuk azt is, hogy végtelen sok prímszám van (lásd 9.-es tankönyv 66. oldal).

Az indirekt bizonyítást könyvünkben is többször alkalmazzuk majd.

2. példa

Igazoljuk, hogy a $[0; 1[$ intervallumba eső valós számok halmaza nem megszámlálható.

Megoldás

Tételezzük fel, hogy mégis megszámlálható halmazt alkotnak, azaz az *összes* $[0; 1[$-beli valós szám párba állítható egy természetes számmal (listába szedhető). Tegyük ezt meg, pl. így kezdve:

1. 0,1021657…
2. 0,2930566…
3. 0,0300000…

…

Most tekintsünk egy újabb számot: 0,537… Ezt úgy hozzuk létre, hogy 1. tizedesjegye ne legyen a lista 1. számának 1. tizedesjegye, 2. tizedesjegye ne egyezzen meg a lista 2. számának 2. tizedesjegyével, …,

A példára hamarosan visszatérünk. Az alkalmazott gondolatmenetet *átlós módszernek* is nevezzük.

n-edik tizedesjegye ne legyen az n-edik szám n-edik tizedesjegye stb. Így egy olyan számot írtunk fel, amely a $[0; 1[$ intervallumba esik, de nem szerepelt a listában (minden ott levő számtól legalább egy tizedesjegyben különbözik). Feltettük, hogy minden szám listába szedhető, ám ez nem igaz: ellentmondásra jutottunk, tehát állításunk igaz.

* * *

Szükségünk lehet még a *skatulyaelvre*, amely egyszerűen így fogalmazható meg: ha van n dobozunk és $n + 1$ golyónk, akkor csak úgy helyezhetjük el a golyókat a dobozokban, ha legalább egy dobozba legalább két golyót teszünk.

Néha nem is egyszerű megfogalmazni egy állítás tagadását!

Megjegyzés: A skatulyaelv tagadása a következő: *ha van n dobozunk és $n + 1$ golyónk, akkor el tudjuk helyezni az összes golyót a dobozokban úgy, hogy minden dobozba legfeljebb egy golyót teszünk.*

3. példa

Igazoljuk, hogy egy 37 fős osztályban van legalább 4 tanuló, akik azonos hónapban születtek.

Megoldás

Tekintsük a hónapokat dobozoknak, a tanulókat golyóknak. Ha a legegyenletesebben osztjuk el a golyókat – azaz minden dobozba 3 kerül –, akkor is csupán $12 \cdot 3 = 36$ golyót helyeztünk el. Az utolsó golyót csak olyan dobozba tehetjük, ahol már van legalább három (ha pedig nem egyenletesen osztjuk el őket, akkor már hamarabb lesz olyan doboz, ahol négy golyó van).

Állati fogások

A továbbiakban a lap oldalán egy oroszlán jelöli, ha az oroszlánfogás, illetve egy teve, ha a teve-módszert alkalmazzuk.

A matematika több állati ötletet is alkalmaz, a szó szoros és átvitt értelmében egyaránt. Ismer *oroszlánfogást* és *teve-módszert* is.

„Oroszlánt" fogunk, ha egy intervallumot addig darabolunk, amíg meg nem találunk egy nekünk megfelelő számot. Bizonyításainkban többször előfordul ez a módszer.

Az interneten a kérdésre további remek megoldásokat találhatunk.

4. példa

Nem vicc! Hogyan fog a fizikus és a matematikus oroszlánt a homoksivatagban?



Megoldás

A fizikus vesz egy nagyobb lyukú szitát és átszitálja a sivatagot. Ami lehullik, homok. Ami fent marad, oroszlán. A matematikus ezzel szemben vesz egy ketrecet, amiben elfér az oroszlán. Megfelezi a sivatagot és veszi azt a felét, amelyben benne van az oroszlán (ha a határon van, akkor valamelyiket). Ezt ismételgeti addig, míg a ketrecnek megfelelő méretű darabot nem kap. Ekkor ráteszi a ketrecet és hopp, benne van az oroszlán!

A teve a „teszünk-veszünk" rövidítése. Például amikor egy kifejezést úgy alakítunk át, hogy hozzá is adunk és el is veszünk belőle ugyanannyit. Az értéke nem változik, de jobban kezelhetővé válik (például ezt alkalmaztuk a másodfokú megoldóképlet igazolásakor). Ugyanez a helyzet, ha egy kifejezést meg is szorzunk és el is osztunk egy számmal (például nevező gyöktelenítése), vagy ugyanarra a hatvány- és gyökkitevőre emeljük stb.



5. példa

Ábrázoljuk $y = x^2$ transzformációinak segítségével az $f(x) = x^2 - 2x$ függvényt.

Megoldás

Alakítsuk teljes négyzetté 0 hozzáadásával:

$$f(x) = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1.$$

Ebből az alakból már leolvashatjuk a transzformációs lépéseket.

Feladatok

1. Melyik lépésben használjuk ki a Bernoulli-egyenlőtlenségben a $h > -1$ feltételt?
2. Keressünk olyan $p \in \mathbb{Q}$ számot, amelyre bármely $h > -1$, $h \neq 0$ esetén $(1+h)^p < 1 + ph$.
3. Bizonyítsuk be a teljes indukció segítségével, hogy minden n természetes számra
   a) $3 \mid n^3 + 2n$;
   b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;
   c) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
   d) $3^n + 4^n < 5^n$ $(n > 2)$.
4. Bizonyítsuk be indirekt úton, hogy a Pitagorasz-tétel megfordítása igaz.
5. Tekintsük $\mathbb{N}$ összes részhalmazaiból alkotott $P(\mathbb{N})$ halmazt ($\mathbb{N}$ *hatványhalmazát*). Igazoljuk indirekt úton, hogy $P(\mathbb{N})$ nem megszámlálható. (Merítsünk ötletet a $[0; 1[$ vizsgálatából.)
6. Válasszunk ki a $[0; 1]$ intervallumból végtelen sok irracionális számot, jelöljük meg ezeket pirossal. Vegyünk egy tetszőlegesen rövid szakaszt. Mutassuk meg oroszlánfogással, hogy el tudjuk helyezni a $[0; 1]$ intervallumon úgy a szakaszt, hogy végtelen sok piros pontot fedjen le.
7. A koordináta-geometriában a kör egyenlete $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ alakú, ahol $O(u; v)$ a kör középpontjának koordinátái, $r > 0$ pedig a sugara. Döntsük el teve-módszerrel, hogy az alábbiak közül melyik kör egyenlete. Amelyik igen, annak adjuk meg a középpontját és a sugarát.
   a) $x^2 + y^2 - 4x - 10 = 0$;
   b) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$;
   c) $x^2 + y^2 + 6x - 10y = 0$.

3. Végtelen halmazok számossága I. Megszámlálhatóan végtelen

Véges halmazok, elemszám

Lásd a 9.-es könyv 16. oldalától.

Halmazokkal már kilencedik évfolyamon foglalkoztunk, ezért a halmazokkal kapcsolatos alapfogalmakat, műveleteket nem ismételjük át itt.

Amire alapvetően koncentrálunk most, az a különböző halmazok elemszáma, vagy általánosabban fogalmazva *számossága*.

Hogyan számolhatjuk meg egy halmaz elemeit? Erre nem adtunk kilencedikben pontos utasítást, mert mindenki számára nyilvánvaló(nak tűnik). Tudjuk jól, hogy az egyjegyű prímek négyen vannak. De miért is? Elemezzük a mindenki számára nyilvánvalót: amikor az egyjegyű prímeket megszámoljuk, kimondjuk hangosan a „kettő", „három", „öt", „hét" szavakat, közben pedig kinyújtjuk a hüvelykujjunkat (egy), a mutatóujjunkat (kettő), a középső ujjunkat (három), majd a gyűrűsujjunkat (négy). Mivel az egyjegyű prímek elfogytak, a számolást befejeztük: az egyjegyű prímek halmazának négy eleme van.

A teljes indukciónál ugyanezt írtuk le.

Az elemszám meghatározásakor tehát párosítjuk a természetes számokat a halmaz elemeivel, és amely természetes számnál elfogytak a halmaz elemei, annyi a halmaz elemszáma. Világos, mint a Nap: elemeiket kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük. Ez összhangban van $|\varnothing| = 0$-val is.

Megjegyzés: A létszámok ismerete nélkül is eldönthetjük, hogy a 12/*A* vagy 12/*F* osztályba járnak-e többen, ha párosítunk. Egy terembe tereljük az osztály tanulóit, majd kettesével kiengedjük őket: minden párban egy *A*-st és egy *F*-est. Ha a játék után a terem üres, akkor $|A| = |F|$. Ha legalább egy *A*-s marad, akkor $|A| > |F|$. Ha legalább egy *F*-es, akkor $|A| < |F|$.

ekvivalens halmazok

A „párba állításnak" van szép matematikai neve: bijektív leképezésnek vagy bijekciónak hívják. (Van injekció is!)

1.1. Definíció: Két halmaz *ekvivalens* vagy számossága egyenlő, ha elemeik között létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

A „párba állítós" módszer egész jól működik, segítségével bármely *véges halmaz* elemszámát megadhatjuk.

n elemű halmaz

1.2. Definíció: Az *A* halmaz $n \in \mathbb{N}^+$ elemű, ha elemei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők az $\{1; \ldots; n\}$ sorban egymás után jövő, növekedő elemeivel. Az üres halmaz 0 elemű. Az $n \in \mathbb{N}$ elemű halmazok a véges halmazok.

A szita formulával azt is megtanultuk, hogyan lehet véges halmazok elemszámaival műveleteket végezni. A véges halmazokról már sokat tanultunk, foglalkozzunk inkább a végtelen halmazokkal. Próbáljuk ki párosítós módszerünket ott is!

Természetes számok halmaza

végtelen halmaz

1.3. Definíció: A nem véges számosságú halmazokat végtelen halmazoknak nevezzük. $\mathbb{N}$ végtelen halmaz, számosságának neve *megszámlálhatóan végtelen.*

Úgy tűnik, a „legkisebb" ismert végtelen halmaz a természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza. De biztos ez? Vegyük $\mathbb{N}$ „felét", töröljük a páratlan számokat! Vajon a nemnegatív páros számok $(\mathbb{N}_{2k})$ kevesebben vannak, mint a természetes számok? Próbáljuk őket párba állítani!

$\mathbb{N}_{2k}$: 0 2 4 6 8 10 12 14 …

$\mathbb{N}$: 0 1 2 3 4 5 6 7 …

Azt tapasztaljuk, hogy nem marad ki egyik halmaz egyik eleme sem a párosításból. (Megadhatunk függvényt is, az $\mathbb{N}$-beli n-hez rendeljük $\mathbb{N}_{2k}$-ból $2n$-t.) Rögzítsük:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_{2k}|.$$

Mivel minden páros számot egy páratlan követ, könnyű rájuk kiterjeszteni a párosítást:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_{2k}| = |\mathbb{N}_{2k+1}|.$$

Gondoljunk bele egy még érdekesebb dologba: ha csak minden 5., 13., vagy (10^{2345}). számot tartjuk meg a természetes számok közül, akkor is $\mathbb{N}$-nel megegyező számosságú halmazt kapunk! (Az $\mathbb{N}$-beli n elemhez az adott halmaz $5n$, $13n$, illetve $n \cdot 10^{2345}$ elemét rendeljük hozzá.) Egyre inkább megbizonyosodunk róla, hogy $\mathbb{N}$ számosságánál kisebb végtelen számosság nem létezik.

A végtelen számosságok közötti $<$, $>$, $=$ relációt az osztályok nagyságához hasonlóan döntjük el.

1.2. Tétel: A legkisebb végtelen számosság a természetes számok megszámlálható számossága.

1.2. tétel

A bizonyítás vázlata: Tegyük fel, hogy a nemüres A halmaz számosságára $|A| < |\mathbb{N}|$. Állítsuk párba A és $\mathbb{N}$ elemeit úgy, hogy $\mathbb{N}$ elemei növekvő 0, 1, 2, 3, … sorba kerüljenek. Mivel $|A| < |\mathbb{N}|$, a párba állítás után az $\mathbb{N}$ halmazból kimaradt legalább egy elem. Azonban ha az első kimaradó szám a $k+1$, akkor a sort onnantól nem folytatjuk, $k+2$, $k+3$, … is kimarad. Az A halmaz k elemű, tehát véges.

Szent Ágoston is szerephez jut a meggondolásban.

* * *

Az $\mathbb{N}$ halmaz mint „legkisebb" végtelen számosságát $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (alef-null) jelöli.

Az $\aleph$ a héber (fóniciai) ábécé első betűje.

Megjegyzés: A jelölést Georg Cantor vezette be. Gyakorlatilag minden ebben a fejezetben szereplő tétel (az átlós módszer is) Cantortól származik.

Georg Cantor (1845–1918), német matematikus, a modern halmazelmélet atyja.

Egész számok halmaza

Azt már látjuk, hogy $\aleph_0$-nál, $\mathbb{N}$ megszámlálható számosságánál kisebb végtelen nem létezik. Van-e nagyobb? Bővítsük $\mathbb{N}$ halmazt! Duplázzuk meg az elemeinek számát, legalábbis látszólag: tekintsük az egész számokat.

Az egészek $\mathbb{Z}$ halmazát úgy kapjuk, hogy minden pozitív szám mellé vesszük az ellentettjét. Vajon sikerül őket párba állítani?

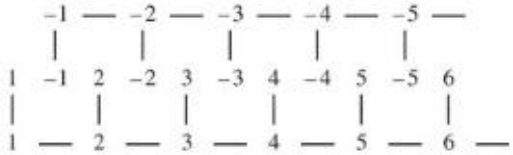
$\mathbb{Z}$:	0	1	−1	2	−2	3	−3	…
$\mathbb{N}$:	0	1	2	3	4	5	6	…

Igen, sikerül. A trükk az, hogy minden negatív számot beszúrunk a pozitív párja mellé, így:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0.$$

Az egész és a természetes számok halmazának számossága egyenlő.

A trükknek külön neve is van, *fésűs egyesítésnek* hívják. Az elemek úgy kapcsolódnak össze, mintha két végtelen fésű fogait illesztenénk egymáshoz:



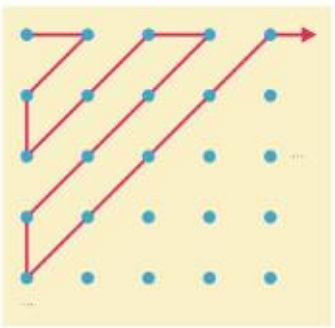
Racionális számok halmaza

A számfogalom felépítésekor bővítve az egészek halmazát, a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazát kapjuk. Mielőtt ennek számosságát vizsgálnánk, kicsit gondolkodjunk el azon, mennyire sokan vannak a racionális számok. Az egészek diszkréten követik egymást a számegyenesen: egyrészt bármely véges intervallumon véges sok egész szám van, másrészt minden egésznek van jobb és bal oldali szomszédja is. A racionális számokról ez nem mondható el! Ha $p, q \in \mathbb{Q}$, akkor $\frac{p+q}{2} \in \mathbb{Q}$, azaz bármely két $\mathbb{Q}$-beli szám között van újabb $\mathbb{Q}$-beli szám.

Racionális számok összege, hányadosa is racionális.

Ebből adódik, hogy bármely két racionális szám között végtelen sok racionális szám van. A számegyenes bármely piciny intervalluma végtelen sok racionális számot tartalmaz. Ebből persze következik az is, hogy egyik racionális számnak sincs szomszédja. Vajon ez azt jelenti, hogy $\mathbb{Q}$-ban több elem van, mint $\mathbb{Z}$-ben? Nem! Írjuk $\mathbb{Q}^+$ elemeit egy jó nagy táblázatba:

$$\begin{array}{lllll}
\frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{5}{1}, \ \dots \\
\frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{2}, & \frac{5}{2}, \ \dots \\
\frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{3}, \ \dots \\
\frac{1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{4}, & \frac{5}{4}, \ \dots \\
\frac{1}{5}, & \frac{2}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{4}{5}, & \frac{5}{5}, \ \dots \\
\dots &&&&
\end{array}$$



A táblázat 1. sorába az 1 nevezőjű, 2. sorába a 2 nevezőjű stb. törtek kerültek. Minden pozitív tört alak szerepel a táblázatban – sőt, minden érték végtelen sok helyen. Most a táblázatot írjuk át lineáris formába az oldalt látható láncot kialakítva a törtekből:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \dots$$

Hagyjuk el azokat, amelyek értéke egyszer már előfordult (biztosan végtelen sok marad):

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \dots$$

Ebben a listában az összes pozitív racionális szám szerepel. Végül nincs más dolgunk, mint 0-t írni az elejére, illetve minden tört után az ellentettjét:

$$\mathbb{Q}: 0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, 4, -4, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$$

Fel tudtuk sorolni (listába tudtuk szedni) $\mathbb{Q}$ elemeit, ezért azokból nincs több, mint az $\mathbb{N}$ elemeiből:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0.$$

Mivel $\mathbb{N}_{2k} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, az az érdekes helyzet áll elő, hogy találtunk olyan halmazokat, melyek számossága megegyezik egyes valódi részhalmazaik számosságával. Teljesen világos, hogy ez véges halmazoknál nem fordulhat elő.

1.3. TÉTEL: **Bármely végtelen halmaznak van olyan valódi részhalmaza, amely vele azonos számosságú.**

1.3. tétel

Bizonyítás

Legyen A végtelen halmaz.

1. Tegyük fel, hogy $|A| = \aleph_0$. Eszerint A elemeit párba tudtuk állítani $\mathbb{N}$ növekvő sorba rakott elemeivel. Hagyjunk most el A-ból egyetlen elemet, mondjuk azt, amelyiknek párja 5. Jelölje ezt az elemet d. Világos, hogy $A\backslash\{d\} = A' \subset A$. A d listabeli 5. helye megüresedett. Léptessük a d utáni összes elemet eggyel előrébb! Így A' elemeit párba állítottuk $\mathbb{N}$ elemeivel, azaz $|A'| = |\mathbb{N}| = \aleph_0 = |A|$.
2. Ha $|A| > \aleph_0$, akkor van olyan $B \subset A$, amely megszámlálhatóan végtelen számosságú. Alkalmazzuk erre az 1. pontot, majd egyesítsük újra $A\backslash B$-vel. A kapott halmaz egyetlen elemmel „szűkebb" A-nál, de számossága nem csökkent (sem a maradék, sem B számossága nem változott).

A teljes bizonyítás mélyebb matematikai gondolatokat igényel.

Megjegyzések:

1. Találkoztunk már $\aleph_0$-nál nagyobb számosságú halmazzal: ilyen volt az indirekt bizonyítással foglalkozó rész példájában szereplő $[0; 1[$ intervallum.
2. Említettük, hogy ha egy halmaznak van vele azonos számosságú valódi részhalmaza, akkor nem lehet véges. Ugyanakkor igazoltuk, hogy minden végtelen halmaznak van olyan valódi részhalmaza, amely vele azonos számosságú. A kettőt együtt akár felhasználhatnánk a végtelen halmaz alternatív definíciójaként is: *végtelen az a halmaz, amelynek van vele ekvivalens valódi részhalmaza.*

3. Eleai Zenon görög filozófusnak sok érdekes gondolata volt az ókorban, pl. tagadta a mozgás létezését (részletesebben szólunk róla a következő fejezetben). Tulajdonképpen Arisztotelész után a legtöbb gondolkodó jóindulatú lenézéssel beszélt Zenon paradoxonairól. Ám fényesen cáfolja őket a *fél idő = egész idő* probléma, amely ma a Cantor-féle halmazelmélet egyik legfontosabb alappillérének tekinthető. Ennek modern megfogalmazása a 2. pontban leírt definíció!

Feladatok

1. Adjunk meg olyan f függvényt, amely a p pozitív páratlan és az n természetes számokat egymáshoz rendeli kölcsönösen egyértelműen, $p = f(n)$ formában.

2. Adjunk zárt képletet a természetes számok egészekhez való rendelésére. (A formula adja meg, hogy $n \in \mathbb{N}$ számnak mi a $\mathbb{Z}$-beli z párja $z = f(n)$ formában.)

3. Egy telt házas, egyetlen folyosóból álló, végtelen sok szobával ($s = 1, 2, 3, \ldots$) rendelkező hotel végtelen parkolójába két autóbusz érkezik. Mindkét buszon végtelen sok férőhely van ($f = 1, 2, 3, \ldots$).
   a) Hozzunk létre elegendő szabad szobát az érkezőknek. Adjuk meg, melyik s-edik sorszámú szoba lakója melyik s'-edik szobába költözzön. Elküldeni senkit sem lehet, de nem kell mindenkit elköltöztetni.
   b) Ezek után határozzuk meg, hogy az első, illetve második autóbusz f-edik helyén ülő utas melyik s-edik üres szobába költözzön.

4. Egy teltházas, egyetlen folyosóból álló, végtelen sok szobával ($s = 1, 2, 3, \ldots$) rendelkező hotel végtelen parkolójába végtelen sok autóbusz érkezik ($a = 1, 2, 3, \ldots$). Minden buszon végtelen sok férőhely van ($f = 1, 2, 3, \ldots$). Recepcióként két feladatunk van.
   a) Hozzunk létre elegendő szabad szobát az érkezőknek úgy, hogy megmondjuk, melyik s-edik sorszámú szoba lakója melyik s'-edik szobába költözzön. Elküldeni a hotelből senkit sem lehet.
   b) Ezek után adjuk meg, hogy az a-adik autóbusz f-edik helyén ülő utas melyik s-edik üres szobába költözzön.

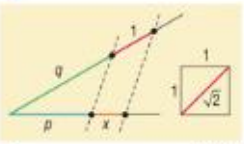
4. Végtelen halmazok számossága II. Kontinuum végtelen

Valós számok

A számfogalmat tovább bővítve jutottunk el a valós számokhoz. $\mathbb{R}$ számossága is megegyezik $\mathbb{N}$ számosságával? Azt láttuk, hogy $\mathbb{Q}$ pontjai a számegyenesen igencsak sűrűn helyezkednek el. Azonban biztosan nem elég sűrűn ahhoz, hogy folytonosan kitöltsék a számegyenest.

Megjegyzés: Ennek magyarázatát két geometriai tételben találjuk meg. Az egyik a párhuzamos szelők tétele. Ennek segítségével megszerkeszthetünk bármely $\frac{p}{q}$ hosszú szakaszt (ahol $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$). Az 5. ábra alapján $\frac{x}{1} = \frac{p}{q}$. Másrészt igazoltuk azt is, hogy pl. $\sqrt{2}$ nem racionális szám. Mérjük fel a számegyenesre a négyzetátlót a 0 pontból kiindulva! Végpontjába 0-ból nem mutathat a párhuzamos szelők tételével szerkeszthető racionális hosszú szakasz. A számegyenesen tehát marad még kitöltetlen hely a racionális pontok között. Igazolható, hogy az üres helyeket az irracionális számok hézagmentesen kitöltik. Az irracionális számok felfedezését – bár nem szerették őket – egy pitagoreusnak, Hippaszosznak köszönhetjük.

10.-es tankönyv 122. oldal.



5. ábra

Hippaszosz és a pitagoreusok történetének érdemes utánanézni.

Vajon a *lyukak* sokkal többen vannak, mint $\mathbb{Q}$ elemei? Ennek belátásához használjuk fel az indirekt bizonyításról szóló rész példájában szereplő $[0; 1[$ halmazt.

1.4. TÉTEL: **A $[0; 1[$ halmaz számossága nagyobb, mint a természetes számoké: $|[0; 1[| > \aleph_0$.**

megszámlálhatóan végtelennél nagyobb számosság

Bizonyítás

A bizonyítás nagy részét ott már leírtuk. Annyit teszünk itt hozzá, hogy mivel $[0; 1[$-nak van $\aleph_0$ számosságú valódi részhalmaza, számossága nem lehet kisebb $\aleph_0$-nál. Ha pedig nem ekvivalens vele és nem is kisebb, akkor csak nagyobb számosságú lehet.

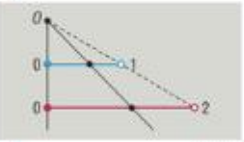
Ahhoz, hogy ezt általánosítsuk minden valós számra, a geometriát hívjuk segítségül három kis tételben.

1.5. TÉTEL: $|[0; 1[| = |[0; 2[|$.

1.5. tétel

Bizonyítás

Párosítsunk a következő módon: minden $x \in [0; 1[$-hoz rendeljük $2x \in [0; 2[$-ot. Hol van itt a geometria? Sokkal szemléletesebb, ha a 6. ábrát tekintjük.



6. ábra

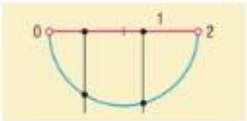
Korábbi 1.3-as tételünkre hivatkozva bátran kivehetünk egyetlen elemet, a számosság nem változik:

$$|[0; 1[| = |]0; 2[|.$$

A fenti megállapítások bármely $]0; n[$ $(n \in \mathbb{N})$, sőt, bármely $]a; b[$ $(a, b \in \mathbb{R})$ intervallumra kiterjeszthetők. A tétel gondolatmenetét megfordítva igazolhatjuk a $|[0; n[| = |[0; n]|$ állítást is egyetlen elem hozzáadásával.

Azt látjuk hát, hogy a valós számok bármely összefüggő részhalmazának számossága megegyezik a $[0; 1[$ intervallum számosságával.

1.6. tétel



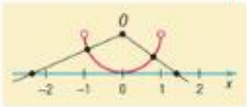
7. ábra

1.6. TÉTEL: **$|]0; 2[|$ megegyezik az $r = 1$ sugarú nyitott félkörvonal pontjainak számosságával.**

Bizonyítás

A 7. ábrához sem kell sok magyarázat, a párba állítás egyértelmű.

1.7. tétel



8. ábra

1.7. TÉTEL: **Az $r = 1$ sugarú nyitott félkörvonal pontjainak számossága megegyezik bármely egyenes, például a számegyenes pontjainak számosságával.**

Bizonyítás

Tekintsük a 8. ábra által kijelölt párosítást.

• • •

A három kis tételből adódik, hogy $|[0; 1[| = |\mathbb{R}|$. Találtunk végre olyan számhalmazt, amelynek számossága határozottan nagyobb, mint $\aleph_0$:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0 < |\mathbb{R}|.$$

A *folytonos* kitöltés és a *sűrű* kitöltés számossága alapvetően eltér. Mivel a valós számokra úgy tekintünk, mint a racionális és irracionális számok összességére, a többletet csak az irracionális számok okozhatják. A valós számok számosságára a c jelölést használjuk, $|\mathbb{R}| = c$. Tehát $\aleph_0 < c$.

A c a continuum kezdőbetűje, latinul folytonost jelent. $\mathbb{R}$ számossága *kontinuum* végtelen.

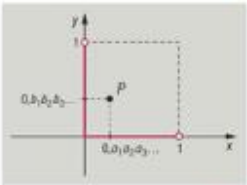
Bármely számosságnál van nagyobb számosság

Eddig két alapvetően különböző végtelen számosságot találtunk: $\aleph_0$-t és c-t. Láttuk, $\aleph_0$-nál nincs kisebb végtelen. Van-e c-nél nagyobb? Gondolkodhatnánk tovább a geometria segítségével, ám belátható, hogy sem egy négyzet, sem a sík, sem a tér (bármennyi dimenziós is) nem áll több pontból, mint a $[0; 1[$ szakasz. Ez a $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ egyenlőség után talán már nem is annyira meglepő…

Megjegyzések:

1. Azt, hogy a $H = [0; 1[\times [0; 1[$ félig zárt négyzetnek nincs több pontja, mint az $I = [0; 1[$ szakasznak, két gondolattal bizonyíthatjuk. Egyrészt nyilván $|I| \leq |H|$, hiszen a szakasz a négyzet egy oldala. Másrészt tekintsük H bármely $P(0{,}a_1a_2a_3\ldots; 0{,}b_1b_2b_3\ldots)$ alakú koordinátákkal (végtelen sok egymás utáni 9-est nem engedünk meg) rendelkező pontját, majd egyesítsük fésűsen a koordinátákat: $p = 0{,}a_1b_1a_2b_2\ldots$ Világos, hogy $p \in I$. Így különböző pontokhoz különböző számokat rendelünk, tehát $|H| \leq |I|$. Ha $|H| \leq |I|$ és $|I| \leq |H|$, akkor $|I| = |H|$. Innen csak pár lépés az egész sík vagy tér számosságáról belátni, hogy egyenlő c-vel. ***(9. ábra)***

9. ábra



2. Azt a kérdést is feltehetnénk, hogy vajon $\aleph_0$ és c *között* van újabb végtelen? Ez elég bonyolult kérdés, a tagadó választ kontinuum-hipotézisnek hívják. Érdemes utánaolvasni!

A véges halmazoknál 9. évfolyamon láttuk, hogy egy háromelemű halmaz összes részhalmazainak száma $8 = 2^3$. Számoljuk össze az összes részhalmazok számát nulla-, egy-, kételemű halmazokra!

A nullaelemű üres halmaznak csak önmaga a részhalmaza: $1 = 2^0$.

Egyelemű halmaz esetén $\varnothing$ és maga a halmaz a részhalmaza: $2 = 2^1$.

Kételemű halmaz esetén az $\varnothing$, az egyik, a másik elem és maga a halmaz a részhalmazok: $4 = 2^2$.

Nagyon úgy tűnik, hogy ez általában is igaz. Bizonyítsuk be!

1.4. Definíció: Az A halmaz összes részhalmazainak halmazát a halmaz *hatványhalmazának* nevezzük, és $P(A)$-val jelöljük.

hatványhalmaz

1.8. Tétel: Ha $|A| = n$, akkor $|P(A)| = 2^n$.

n elemű halmaz összes részhalmazainak száma 2^n.

Bizonyítás (I.)

Mivel az állítást minden természetes számra kell igazolni, érdemes próbálkoznunk teljes indukcióval.

1. Kezdő értékre már megvizsgáltuk: $|A| = 0$-ra az állítás teljesül:
$$|P(A)| = 2^0.$$
2. Tegyük fel, hogy $|A| = k$-ra az állítás igaz, azaz
$$|P(A)| = 2^k.$$
3. Bővítsük az A halmazt egyetlen w-vel jelölt elemmel, legyen $|A'| = k + 1$. Ekkor A' részhalmazait úgy kapjuk, hogy A minden részhalmazához egyszer hozzávesszük, egyszer pedig nem w elemet. Ezzel megkétszerezzük $P(A)$ elemeinek számát:
$$|P(A')| = 2 \cdot |P(A)| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Bizonyítás (II.)

Legyen $A = \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_{n-1}; a_n\}$. Jelöljük meg a részhalmazokat úgy, hogy minden elem alá 1-et írunk, ha benne van az adott részhalmazban, illetve 0-t, ha nincs. Például ha mindenhova 0-t írunk, az üres halmazt kapjuk. Két további példa:

$A = \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_{n-1}; a_n\}$	Részhalmaz, amit jelöl
1 1 0 0 0	$\{a_1; a_2\}$
0 0 0 1 0	$\{a_{n-1}\}$

Így n helyre írhatunk kétféle jelet, összesen 2^n-féle különböző módon. Tehát n elemű halmaz hatványhalmaza 2^n elemű.

Megjegyzés: Érdekes, hogy míg bármely halmaznak van hatványhalmaza, addig az összes halmazt elemként magába foglaló „szuperhalmaz" nincs. Ennek belátásához egy, a szuperhalmaz részhalmazának vélt halmaz lehetetlenségét mutatjuk meg.

Indirekt úton okoskodunk.

Gondoljuk meg: az általunk ismert halmazok nem tartalmazzák saját magukat elemként – persze ettől még elképzelhető, hogy van ilyen halmaz. Tételezzük fel, hogy T halmaz olyan halmazokból áll, melyek nem tartalmazzák saját magukat elemként. Pl. a definíció alapján $\mathbb{N}, \mathbb{R} \in T$, hiszen egyik sem tartalmazza saját magát. Vajon $T \in T$ vagy $T \notin T$?

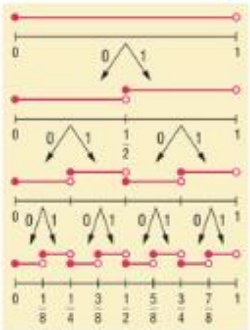
Ha $T \in T$, akkor teljesül rá T definíciója. Azonban T azokat a halmazokat tartalmazza, melyek nem tartalmazzák magukat elemként, tehát $T \notin T$. Ez ellentmondás.

Ha $T \notin T$, akkor T nem tartalmazza magát elemként, és így teljesül rá T meghatározása, azaz $T \in T$. Ez is ellentmondás.

Hopp, a logika szerint nincs más lehetőség! Csak az marad, hogy *ilyen T halmaz nem létezik.* Azonban ha már egyetlen olyan halmaz sem létezik, amely bizonyos tulajdonsággal rendelkező halmazokat foglal magában, akkor az ennél jóval bővebbnek gondolt *összes halmazok halmaza* sem létezhet.

1.9. tétel

1.9. TÉTEL: A csak 0 és 1 jegyekből álló (végtelen sok szomszédos egyest nem tartalmazó) végtelen sorozatok S halmazának számossága megegyezik a $[0; 1[$ számosságával.



10. ábra

Bizonyítás

Megmutatjuk, hogy a 0–1 sorozatok és az intervallum pontjai párba állíthatók. Ehhez vegyük a $[0; 1[$ intervallumot, és első lépésben vágjuk két diszjunkt részre:

$$[0;1[= \left[0;\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2};1\right[.$$

Második lépésben a kialakult részeket vágjuk két-két diszjunkt részre:

$$\left[0;\frac{1}{2}\right[= \left[0;\frac{1}{4}\right[\cup \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right[\quad \text{és} \quad \left[\frac{1}{2};1\right[= \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[\cup \left[\frac{3}{4};1\right[.$$

Az eljárást folytassuk a végtelenségig.

Most vegyünk egy $s \in S$ sorozatot, legyen pl. $s = 0, 1, 1, 0, 0, \ldots$ Minden 0-t értelmezzünk úgy, hogy a következő lépésben az adott intervallum bal oldali felét, minden 1-et pedig úgy, hogy a jobb oldali felét választjuk *(10. ábra)*. Tehát s szerint a

$$[0;1[\to \left[0;\frac{1}{2}\right[\to \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right[\to \left[\frac{3}{8};\frac{1}{2}\right[\to \ldots$$

utat kell bejárnunk. Az ilyen egymásba skatulyázott intervallumoknak pontosan egy közös pontja van, amit a sorozat kijelöl. Ha s-ben a nem jelölt számok mind 0-k, akkor ez a szám a $\frac{3}{8}$. Ugyanakkor mivel minden szám az adott felosztásban pontosan egy intervallumnak eleme, ezért egyetlen sorozat közelítheti csak meg. Tehát $|S| = |[0; n[|$.

Megjegyzések:

1. Azért van szükség a végtelen sok szomszédos 1-es kizárására, mert akkor képezhetnénk a konstans 1; 1; 1; … sorozatot, aminek nincs megfelelője a $[0; 1[$-on. Ugyanakkor a 0; 1; 1; 1; … sorozat a 0,5-et közelítené meg, amire ott van az 1; 0; 0; … csupa 0 végű sorozat is. Így viszont egy számhoz egy sorozat dukál!
2. Bár az intervallumok nem zártak, de igaz rájuk, hogy egy közös pontjuk van. Erről a következő fejezetben részletesebben szólunk.
3. Gyakorlatilag a sorozatokkal egy gráfot, méghozzá egy végtelen bináris fát járunk be.

$|S|$-t a végtelen sok szomszédos 1-es kizárása nem csökkenti.

Hány darab sorozat van S-ben? Egy sorozatban $\aleph_0$ „számú" hely van és minden helyre (elvileg) kétféle elem írható. Ezek szerint a véges esethez hasonlóan a sorozatok száma:

$$|S| = 2^{\aleph_0}.$$

Másrészt viszont

$$|[0; 1[| = |\mathbb{R}| = c, \quad \text{így adódik} \quad 2^{\aleph_0} = c.$$

Végül megemlítünk még egy tételt, ami azt mondja ki, hogy minden számosságnál van nagyobb számosság. Bizonyításával nem foglalkozunk (általánosított átlós módszerrel igazolható).

1.10. CANTOR TÉTELE: **Tetszőleges H halmazra $|H| < |P(H)|$.**

Cantor tétele

Feladatok

1. Adjuk meg a $[0; 1[$-nak olyan valódi részhalmazát, amelynek számossága $\aleph_0$.
2. Bizonyítsuk be kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések megadásával, hogy bármely félig nyitott szakasz pontjainak számossága megegyezik bármely zárt körvonal pontjainak számosságával.
3. Bizonyítsuk, hogy nyitott egységnégyzet pontjainak számossága egyenlő bármely nyitott körlap pontjainak számosságával.
4. Igazoljuk, hogy bármely nyitott körlap pontjainak számossága egyenlő egy vele egyező sugarú nyitott félgömbfelület számosságával.
5. Igazoljuk, hogy bármely nyitott félgömbfelület pontjainak számossága megegyezik a sík pontjainak számosságával.



SOROZATOK

1. A sorozat fogalma

számsorozat

2.1. DEFINÍCIÓ: A *számsorozat* egy, a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény. Röviden $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$.

A definícióból nem feltétlenül látja az ember elsőre, hogy sorozatról van szó.

Az értékkészlettől függően beszélhetünk különböző sorozatokról. Ha ez a valós számok egy részhalmaza, akkor számsorozatot kapunk. Vannak másfajta sorozatok is, pl. intervallumsorozatok, vektorsorozatok vagy függvénysorozatok. Mi behatóan csak számsorozatokkal foglalkozunk. Hangsúlyozzuk, minden sorozatnak végtelen sok eleme van, hiszen végtelen sok természetes szám van.

A sorozatot kapcsos zárójel, az $\{a_n\}$ sorozat első elemét a_1, a tizenötödiket a_{15}, általános tagját a_n jelöli. Sorozatot megadhatunk felsorolással: $\{a_n\} = 1, 3, 5, \ldots$, általános tagját megadó képlettel: $b_n = n!$, rekurzióval: $c_1 = 3$, $c_{n+1} = 3c_n - 5$. Szöveggel is megadhatjuk, pl. prímszámok sorozata.

Nem mindig vesz részt az összes pozitív egész a leképezésben.

Például $a_n = \dfrac{5}{n-6}$ esetén $D = \mathbb{N}^+ \setminus \{6\}$.

Ábrázolhatjuk őket, mint függvényeket, Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben. Mégis inkább csak egy számegyenest rajzolunk: a sorozat elemének értékéhez helyezünk egy pontot. (Még akkor is, ha a számegyenesen történő ábrázolás esetén az ábráról nem tudjuk visszakeresni, melyik pont hányadik eleme a sorozatnak.)

1. példa

Írjuk fel a sorozat első öt tagját, és ábrázoljuk őket számegyenesen:

a) $a_n = 2n - 5$; *b)* $b_n = -n^2 + 4n$;

c) $c_n = (-2)^n$; *d)* $d_n = 2 + \dfrac{1}{n}$;

e) $e_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$; *f)* $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

$\{f_n\}$-nek külön neve is van: Fibonacci-sorozat.

Megoldások

A megoldások az 1. ábrán láthatók.

1. ábra

a) $a_1 = -3$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$;

b) $b_1 = 3$, $b_2 = 4$, $b_3 = 3$, $b_4 = 0$, $b_5 = -5$;

c) $c_1 = -2$, $c_2 = 4$, $c_3 = -8$, $c_4 = 16$, $c_5 = -32$;

d) $d_1 = 3$, $d_2 = 2{,}5$, $d_3 = 2{,}\dot{3}$, $d_4 = 2{,}25$, $d_5 = 2{,}2$;

e) $e_1 = -0{,}5$, $e_2 = 0{,}5$, $e_3 = -0{,}5$, $e_4 = 0{,}5$, $e_5 = -0{,}5$;

f) $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$.





Mértani sorozatok

Vannak gyakran alkalmazott speciális számsorozatok, ilyen például a *mértani sorozat*. Jelentőségét például a kamatos kamatszámítás, illetve az exponenciális növekedés leírása adja.

2. példa

Ha ismert, hogy egy baktériumtenyészetet kezdetben 3 baktérium alkot és számuk 20 percenként megduplázódik, akkor mennyi idő múlva lesz legalább 3000 baktérium a tenyészetben?

Megoldás

A kiindulási állapothoz képest 20 perc elteltével $3 \cdot 2 = 6$, újabb 20 perc múlva $6 \cdot 2 = 12$, majd $12 \cdot 2 = 24$ darab baktérium lesz a Petri-csészében. 20 percenként újabb 2-es szorzót kell tennünk a szorzathoz, tehát $n \cdot 20$ perc múlva $3 \cdot 2^n$ darab baktérium boldog tulajdonosai vagyunk.

$$3 \cdot 2^n \geq 3000,$$
$$2^n \geq 1000,$$
$$n \geq \log_2 1000 = \frac{\lg 1000}{\lg 2} = \frac{3}{\lg 2} \approx 9{,}966.$$

Tehát ha $n \geq 10$, akkor $3 \cdot 2^n \geq 3000$. Megválaszolva a feladatot: 3 óra 20 perc elteltével már biztosan több mint 3000 baktérium tekinti szülőhazájának a Petri-csészét.

2.2. Definíció: Az $\{a_n\}$-t *mértani sorozatnak* nevezzük, ha adott az a_1 első tagja, a kvóciensnek nevezett q konstans, és minden $n > 1$ esetén $a_n = a_{n-1} \cdot q$.

mértani sorozat

Bizonyítható, hogy a mértani sorozat n-edik tagja felírható $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ formában. Fontos összefüggés, hogy a sorozat első n tagjának összege

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{ha} \quad q \neq 1.$$

($q = 1$ esetén a sorozat konstans, $S_n = n \cdot a_1$.)

A mértani sorozat részletes tárgyalását, az állítások bizonyításait megtaláljuk a 12.-es tankönyv 54–65. oldalán.

Feladatok

1. Adjuk meg a következő sorozatok első hat tagját, és ábrázoljuk őket számegyenesen.
   a) $a_n = 3n$; *b)* $b_n = n^2 - 6n + 9$; *c)* $c_n = |n^2 - 6n|$; *d)* $d_n = (-1)^n$;
   e) $e_n = 3 - \frac{1}{n}$; *f)* $f_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$; *g)* $g_1 = 3$, $g_2 = 0$, $g_{n+2} = 2g_n + g_{n+1}$.

2. Határozzuk meg a mértani sorozatok első három tagját, illetve a nyolcadikat és S_{10}-et.
   a) $a_1 = 1$, $q = 2$; *b)* $b_1 = 256$, $q = -0{,}5$; *c)* $c_1 = -2$, $q = 3$;
   d) $d_2 = 6$, $q = -3$; *e)* $e_3 = 9$, $e_4 = 13{,}5$.



2. A sorozatok tulajdonságai I. Korlátosság és monotonitás

Korlátosság

A sorozatok két fontos tulajdonsága a korlátosság és a monotonitás.

alulról korlátos sorozat

2.3/A. Definíció: **Az $\{a_n\}$ sorozat *alulról korlátos*, ha megadható olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy minden n-re $a_n \geq k$.**

felülről korlátos sorozat

2.3/B. Definíció: **Az $\{a_n\}$ sorozat *felülről korlátos*, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden n-re $a_n \leq K$.**

korlátos sorozat

2.4. Definíció: **Egy sorozat akkor *korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.**

A számegyenes egy egydimenziós mező, ahol a sorozat tagjai mint tehenek legelésznek, a korlátok a villanypásztor botjai. Korlátos a sorozat, ha a tehenek a két villanypásztor között legelnek.

Lássunk néhány példát, hogyan kell a korlátosságot megvizsgálni!

1. példa

Korlátosak-e; csak alulról, illetve csak felülről korlátosak-e a következő sorozatok?

a) $a_n = n^2 + 1$; *b)* $b_n = 10 - n$; *c)* $c_n = (-1)^n$.

Megoldás (a)

$\{a_n\}$ minden tagja pozitív, így $k = 0$ alsó korlát. $\{a_n\}$ tehát alulról korlátos. Felső korlátja nincs, a sorozat tagjai minden határon túl növekednek.

Megoldás (b)

A tagok minden határon túl csökkennek. Felülről viszont pl. $K = b_1 = 9$ korlátozza.

Megoldás (c)

A sorozat tagjai (-1), 1, (-1), 1 stb., tehát pl. $K = 5$ és $k = (-10)$. A sorozat korlátos.

• • •

Bizonyos sorozatokról nehéz lehet eldönteni, hogy korlátosak-e vagy sem. Érdekes módon ilyenkor a korlátosságnál egy jóval mélyebb matematikai fogalmat, a később tárgyalt határértéket hívjuk segítségül.

Úgy sejtjük, hogy ha a sorozatnak van felső korlátja, akkor végtelen sok ilyen korlátja van. Pl. az $a_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ sorozatnak $K = 2{,}5$ $(= a_2)$ felső korlátja. De $K = 1222$ is felső korlátja, vagy bármely 2,5-nél nagyobb valós szám.

Érdekes kérdés, hogy ha egy sorozatnak van felső korlátja, akkor a felső korlátok között van-e mindig legkisebb? Úgy tűnik, a fenti példában $K = 2{,}5$ ilyen! Próbálgatással valamennyire meg is győződhetünk róla, azonban ez nem tekinthető bizonyításnak.



2.5. Definíció: A felülről korlátos sorozatok legkisebb felső korlátját a sorozat *felső határának*, az alulról korlátos sorozat legnagyobb alsó korlátját a sorozat *alsó határának* nevezzük.

felső határ, alsó határ

Megjegyzés: A sorozat felső határát szokták *szuprémumnak*, az alsót *infimumnak* nevezni. Jelölésük: $h = \sup(a_n)$, $H = \inf(a_n)$.

2.1. Tétel: Felülről korlátos sorozatnak van felső határa. Alulról korlátos sorozatnak van alsó határa.

2.1. tétel

Megjegyzés: A számegyenesen kék színnel jelöljük az $\{a_n\}$ sorozat felső korlátait, a többi pont piros. Nem keveredhetnek: piros pont előtt nem lehet kék, kék pont után nem állhat piros. A két szín találkozási pontját jelölje P. Ha P piros, akkor van nála nagyobb a_n^* tag a sorozatban, így $]P; a_n^*[$ is piros színű. Ez ellentmond P elhelyezkedésének. P tehát csak kék lehet: alsó határa a sorozatnak. **(2. ábra)**

Az itt közölt bizonyítás nem teljes.



2. ábra

2. példa

Igazoljuk, hogy az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat korlátos, és adjuk meg az alsó és felső határát.

Megoldás

Nyilvánvaló, hogy a sorozat minden eleme pozitív, tehát $k = 0$. Biztos az is, hogy 1-nél nincs nagyobb tagja, tehát $K = 1$. Igazoljuk, hogy $h = k = 0$ és $H = K = 1$. Bármilyen kis pozitív számot tekintve, a sorozat elemei annál kisebbé válnak, tehát nem lehet alsó határ. Marad $\inf(a_n) = 0$. A sorozat tagjai n növekedésével pedig egyre csökkennek, első eleme a legnagyobb: $\sup(a_n) = 1$.

* * *

Az alsó/felső határ fogalma már lehetővé teszi, hogy a bevezetőben említett, egymásba ágyazott zárt intervallumok sorozatáról szót ejtsünk.

2.2. Tétel: Végtelen sok egymásba skatulyázott, zárt intervallumnak van közös pontja. Amennyiben az intervallumok hossza minden pozitív számnál kisebbé válik, akkor pontosan egy közös pont van.

egymásba skatulyázott intervallumok közös pontja

A tétel két mondata két állítást tartalmaz, mindkettő igazolásában alkalmazzuk az indirekt módszert.

Az első állítás bizonyítása

Jelölje

$$I_1 = [a_1; b_1],\ I_2 = [a_2; b_2],\ I_3 = [a_3; b_3],\ \ldots,\ I_n = [a_n; b_n],\ \ldots$$

az intervallumsorozatot, melyre

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

Ekkor igaz, hogy

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots; \quad b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \ldots \ge b_n \ge \ldots$$

és bármely i, j természetes számokra $a_i < b_j$. Utóbbi miatt $\{a_n\}$ sorozat felülről, $\{b_n\}$ sorozat pedig alulról korlátos. Előző tételünk szerint $\{a_n\}$-nek van felső, $\{b_n\}$-nek van alsó határa, jelölje ezeket A és B.

Bebizonyítjuk, hogy $A \le B$. Ugyanis tegyük fel ezzel ellentétben, hogy $B < A$. Ekkor van olyan C valós szám, amire $B < C < A$. C nem határa egyik sorozatnak sem, ezért előbb-utóbb valamely i, j indexekre $b_j < C < a_i$. Ez nem lehetséges, mert minden bal végpont kisebb minden jobb végpontnál! Ha pedig $A \le B$, akkor bármely $A \le C \le B$ esetén C közös pontja minden $[a_n; b_n]$ intervallumnak.

A második állítás bizonyítása

Tételezzük fel, hogy $P < Q$ két közös pontja az összes intervallumnak. Így minden n-re $[P; Q] \subset I_n$, ám ekkor $[P; Q]$ állandó hosszára $Q - P < b_n - a_n$. A feltétel szerint viszont I_n hossza minden pozitív számnál, így $(Q - P)$-nél is előbb-utóbb kisebbé válik. Ellentmondásra jutottunk.

Megjegyzések:

1. Az egymásba skatulyázottság önmagában nem biztosítja a közös pont létezését. Pl. $I_n = \left]0; \frac{1}{n}\right[$.
2. A zártság feltétele enyhíthető. Pl. $I_n = \left[0; \frac{1}{n}\right[$ -nak van közös pontja.
3. Az egymásba skatulyázottság is enyhíthető, hiszen $I_n = \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}; 2\right]$ közös része $[1; 2]$ intervallum.
4. A bizonyításban szereplő „előbb-utóbb" kitételt pontosabban is meg lehet fogalmazni, későbbi összefüggéseinkben meg is tesszük.
5. Ez a tétel szépen mutatja a matematika „működését": először bizonyítottuk valami létezését *(egzisztenciáját)*, majd utána – bár erősebb feltételek mellett – az egyedüliségét *(unicitását)*.

3. példa

Van közös része az egyes egymásba skatulyázott intervallumoknak? Adjuk meg, ha igen.

a) $I_n = \left[0; \frac{1}{n^2}\right]$;

b) $J_n = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 1\right[$;

c) $K_n = [3; 3 + 2^{-n}[$;

d) $L_n = \left]2 - \frac{1}{n}; 3\right[$.

Megoldás

a) Igen, a 0 minden I_n intervallumnak eleme.

b) Nincs.

c) Igen, a 3.

d) A $[2; 3[$ minden pontja ilyen.



Monotonitás

2.6. Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozat *monoton növekvő**, ha minden n-re igaz, hogy $a_{n+1} \geq a_n$, és *szigorúan monoton növekvő*, ha minden n-re $a_{n+1} > a_n$.

2.7. Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozat *monoton csökkenő**, ha minden n-re igaz, hogy $a_{n+1} \leq a_n$, és *szigorúan monoton csökkenő*, ha minden n-re $a_{n+1} < a_n$.

monoton, szigorúan monoton

A „minden n-re …" kitétel azt jelenti, hogy a sorozat bármelyik tagjáról egyet előrébb lépve a következő tag csak nagyobb vagy egyenlő lehet.

Hogyan dönthetjük el egy sorozatról, hogy monoton-e? A matematikai vizsgálódások során érdemes a *próbálgatás* módszerével kísérletezni.

4. példa

Monoton-e az $a_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ sorozat?

Megoldás

Soroljuk fel a sorozat néhány tagját:

$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -1,\ a_4 = 0,\ a_5 = 1,\ a_6 = 0,\ a_7 = -1,\ a_8 = 0, \ldots$

A tagok periodikusan ismétlődnek, a sorozat tehát nem monoton.

5. példa

Monoton-e az $a_n = n^2 - 9n + 2$ sorozat?

Megoldás

Az első néhány tagot megvizsgálva:

$$a_1 = -6,\ a_2 = -12,\ a_3 = -16,\ a_4 = -18.$$

Úgy tűnik, a sorozat monoton csökkenő. De nem, tovább számolva $a_5 = -18$, $a_6 = -16$! Tehát a sorozat nem monoton.

◆ ◆ ◆

Sajnos nem tudjuk előre megmondani, meddig kell próbálkozni ahhoz, hogy lássuk, a sorozat visszafordul-e vagy sem. A monotonitás vizsgálatakor ezen buktatók elkerülése érdekében néha célszerű az $a_{n+1} - a_n$ különbséget képezni. Ha a különbség minden n-re pozitív, akkor a sorozat biztosan monoton nő. Ha $a_{n+1} - a_n < 0$, a sorozat szigorúan monoton csökken.

Vizsgálhatjuk a monotonságot az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányados segítségével is. Ha minden n-re $a_n > 0$ és $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor a sorozat szigorúan monoton növő, ha pedig $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Ha bármelyik esetben a reláció mellett az egyenlőség is teljesül, az a szigorúság rovására megy. Ha csak az egyenlőség teljesül minden n-re, akkor a sorozatunk konstans.

Részben szimpátia, részben a feladat típusa dönti el, hogy különbséget vagy hányadost képezünk. Magasabb kitevőjű, illetve faktoriálist tartalmazó összefüggések esetén célszerű utóbbit használni. Ha az egyik nem megy, érdemes megpróbálkozni a másikkal.

6. példa

Döntsük el a következő sorozatokról, hogy monoton növők vagy csökkenők:

a) $a_n = n^2 + 4n - 20$; *b)* $b_n = (n-5)^2$; *c)* $c_n = \frac{2^n}{n!}$.

Megoldás (a)

A különbségképzést alkalmazva $\{a_n\}$ szigorúan monoton növő, ugyanis minden n-re

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + 4(n+1) - 20 - (n^2 + 4n - 20) = 2n + 5 > 0.$$

Megoldás (b)

A különbségképzést alkalmazva:

$$b_{n+1} - b_n = (n+1-5)^2 - (n-5)^2 = 2n - 9 > 0, \quad \text{ha} \quad n \geq 5.$$

A sorozat nem monoton, de az első négy tagot elhagyva már szigorúan monoton növővé tehető.

Megoldás (c)

A $\{c_n\}$ minden tagja pozitív, megadása csak szorzás és osztás műveletet tartalmaz, ezért használjuk a hányadosképzést! Látni fogjuk, a sorozat monoton csökken, de nem szigorúan ($n = 1$-re egyenlő):

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1.$$

Feladatok

1. Állapítsuk meg a sorozatokról, hogy korlátosak-e. Ha igen, adjunk meg több korlátot is. ($[x]$ az x egészrészét jelenti.)

   a) $a_n = 3n + 6$; *b)* $b_n = 5 - n^2$; *c)* $c_n = (-3)^n - 30$ *d)* $d_n = [5\sin(n)]$.

2. Létezik-e közös része az egyes intervallumsorozatoknak? Ha igen, adjuk meg.

   a) $I_n = \left[2 - \frac{1}{n}; 2 + \frac{1}{n}\right]$; *b)* $J_n = [1; 2 + 10^{-n}[$;

   c) $K_n =]0; 2^{-n}]$; *d)* $L_n = \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n}; 1\right]$.

   e) Változik-e a közös rész, ha változtatjuk az intervallumsorozatok bal vagy jobb oldali zártságát?

3. Döntsük el a következő sorozatokról, hogy monoton növők vagy csökkenők. Ha nem az első tagtól teszik ezt, akkor adjuk meg azt is, hány tag elhagyásával kapunk monoton sorozatot.

   a) $a_n = 3n + 2$; *b)* $b_n = (n-5)^2$; *c)* $c_n = 0{,}5n^3 - 2n^2$; *d)* $d_n = \frac{(n+3)!}{3^n}$;

   e) $e_n = \frac{n^2}{2^n}$.

3. A sorozatok tulajdonságai II. A határérték fogalma

A határérték fogalmának bevezetéséhez először vizsgáljuk meg az $a_n = 5 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ sorozatot! Határozzuk meg néhány elemét:

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 5\frac{1}{2}, \quad a_3 = 4\frac{2}{3}, \quad a_4 = 5\frac{1}{4}, \quad a_5 = 4\frac{4}{5},$$

$$\ldots, \quad a_{10} = 5\frac{1}{10}, \quad \ldots, \quad a_{100} = 5\frac{1}{100}, \quad \ldots$$

Úgy tűnik, a sorozat tagjai minden határon túl megközelítik az $A = 5$ értéket.

A határérték pontos definíciójának kimondásához szükségünk van további fogalmakra. Hogy ezekkel megismerkedjünk, készítünk egy már ismerős dolgokra építő modellt. Tekintsünk a számegyenesre úgy, mintha egy utca, benne az 5 egy családi ház lenne, a sorozat tagjai pedig pontszerű emberkék. A családi házhoz tartozik egy udvar (a ház *környezete*). Az udvaron belül tartózkodók valamikor átlépték az udvar *küszöbét*. Legyen most a fél porta szélessége, vagyis a háztól a kerítésig terjedő szakasz hossza 0,1 (a *környezet sugara*). Könnyen kiszámíthatjuk, hogy a sorozat első tíz tagja nem tartózkodik az udvaron belül – a 10. tag ráadásul pont a kerítésen ül (*kívül esnek a környezeten*, még másképp: *nem lépték át a küszöböt*). Tovább szűkítve az udvar fél szélességét pl. 0,01-ra, akkor a sorozat első 100 tagja marad az udvaron kívül. Figyeljük meg: ha az udvaron kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van, akkor belül végtelen sok tag tartózkodik!

A modell a valóságban nem létezik, de segít a megértésben. Ilyen modellalkotás a kezdetektől jellemző a matematikára, gondoljunk az egyenes fogalmára.

Ha végtelen sokból véges sokat elveszünk, végtelen sok marad.

Azt tapasztaljuk, hogy bármennyire is leszűkítjük az udvarunkat, a kerítésen belül végtelen sok, rajta és azon kívül véges sok tagot találunk a sorozatból. *Az 5 bármely környezetén kívül mindig csak véges sok tagját, azon belül viszont végtelen sok tagját találjuk a sorozatnak.*

Másképp is megközelíthetjük a kérdést: ha valahol felállítottuk a kerítést (meghatároztuk a *környezet sugarát*), akkor a sorozat tagjait sorba véve, előbb-utóbb csak olyan tagokat találunk, akik az udvaron belül tartózkodnak. Azaz *minden környezethez meghatározható egy olyan küszöb, hogy az utána következő összes tag már az 5 adott környezetén belül legyen* (0,1 esetén ez 10 volt, 0,01 esetében pedig 100). Természetesen a küszöb értéke függ az udvar szélességétől: nagyobb udvarra hamarabb, kisebb udvarra viszont később „jut be" a sorozat.

Mindkét megfogalmazás lehetőséget ad a határérték fogalmának pontos meghatározására.

A távolság és a környezet fogalma

A fenti előkészület után rendelkezünk a határérték szemléletes fogalmával. Most matematikai precizitással tisztázzuk, mit értünk környezeten (a ház udvarán). Ehhez szükségünk van a távolság fogalmára.



Az alábbi fogalmat a számegyenes „egydimenziós terében" értelmezzük, de minden további nélkül kiterjeszthető síkra, térre vagy akár többdimenziós terekre is.

távolság

A *d* az angol *distance* (távolság) kezdőbetűje.

2.8. Definíció: A számegyenes A és B pontjának $d(A, B)$-vel jelölt *távolságán* a $d(A, B) = |A - B|$ valós számot értjük. Más jelöléssel az a, b valós számok távolsága $|a - b|$.

A távolságra az abszolút érték tulajdonságai miatt teljesülnek a következők (A, B, C a számegyenes tetszőleges pontjai):

(1) $d(A, B) \geq 0$ **és** $d(A, B) = 0$ **pontosan akkor, ha** $A = B$**;**

(2) $d(A, B) = d(B, A)$**;**

(3) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$**.** (Gondoljunk a háromszög oldalai közötti egyenlőtlenségre.)

Vegyük észre: a távolságot mint kétváltozós függvényt értelmeztük!

A tulajdonságok a szemlélettel tökéletes összhangban vannak:

(1) a távolság 0, ha a két pont egybeesik;

(2) a távolságnak mindegy, hogy melyik pontból mérjük;

(3) a háromszög-egyenlőtlenségben – bármely két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál – elfajuló háromszöget is megengedünk, melyben a három csúcs egy egyenesre esik.

ε sugarú környezet

2.9. Definíció: Egy A valós szám $\varepsilon > 0$ (epszilon) *sugarú környezetén* értjük azokat a valós számokat, melyeknek A-tól vett távolsága kisebb, mint ε.

Megjegyzés: Nem csak valós számokra értelmezhető a fenti környezetfogalom.

A definíció szerint ha az előző példában a kerítés háztól mért távolsága 10 méter, akkor mindenki, aki 10 méternél kisebb távolságra van a háztól, a ház udvarán tartózkodik, annak környezetében van.

1. példa

Adjuk meg az $A = 7$ szám $\varepsilon = 4$ sugarú környezetébe eső természetes és valós számokat.

Megoldás



3. ábra

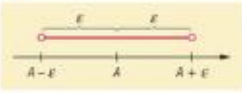
A kérdezett környezetbe a természetes számok közül a 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 tartozik. Vigyázzunk, a 3 és a 11 már nem! A valós számokat vizsgálva, R-nek olyan részhalmaza a környezet, amelynek x elemeire fennáll, hogy $3 < x < 11$. Intervallumként felírva: $x \in]3; 11[$. *(3. ábra)*

Általánosítsuk a példában említett környezet sugarát! Az $A = 7$ tetszőleges ε sugarú környezetébe azon valós x-ek esnek, melyekre $7 - \varepsilon < x < 7 + \varepsilon$ teljesül. Más formában felírva $x \in]7 - \varepsilon; 7 + \varepsilon[$.

Ha az abszolút értékes távolságfogalmat használjuk, akkor az $A = 7$ szám $\varepsilon = 4$ sugarú környezetének a $|7 - x| = |x - 7| < 4$ felírás felel meg.

A fentiek szerint tetszőleges A szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezetébe azon valós x-ek kerülnek, melyekre *(4. ábra)*

$$A - \varepsilon < x < A + \varepsilon \quad \text{vagy} \quad x \in]A - \varepsilon; A + \varepsilon[\quad \text{vagy} \quad |x - A| < \varepsilon.$$



4. ábra

Megjegyzések: A valós számokon bevezetve a fenti távolságot, ún. *metrikus teret* kapunk. Sokszor kimondatlanul használjuk a metrikus tér (távolság) tulajdonságait. Nem csak a valós számok hoznak létre metrikus teret: a racionális számok is metrikus teret alkotnak. Sőt, az egészek is. Az igazán érdekes kérdések annak vizsgálatával kezdődnek, hogyan viselkedik a határérték és más egyéb fogalom olyan terekben, ahol *nem* értelmezzük a távolság fogalmát.

Mindhárom alakot használjuk a későbbiekben.

Ennyi bevezetés után felkészültünk rá, hogy meghatározzuk a határérték fogalmát két módon is.

határérték

2.10/A. Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozat *határértéke A szám, ha az A bármely környezetébe a sorozat végtelen sok tagja esik bele és csak véges sok tagja marad ki a környezetből.**

A „véges sok tag kivételével végtelen sok tagra teljesül"-t így is fogalmazhatjuk: „majdnem minden tagra". A „majdnem mind" azt jelenti: „véges sok kivételével mind".

2.10/B. Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozat *határértéke* A szám, ha az A bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetéhez megadható olyan ε-tól függő N küszöbszám, amelyre valahányszor N-nél nagyobb indexű tagot választunk, mindannyiszor ez a tag az A szám ε sugarú környezetébe esik.

Röviden: az $\{a_n\}$ *határértéke* A, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N(\varepsilon)$, melyre ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

Megjegyzések:

1. Mivel arra vagyunk kíváncsiak, hogy a sorozat *minden határon túl* megközelíti-e a határértékét, ε-t igen kicsinek választjuk.
2. A sorozat határértéke nem feltétlenül eleme a sorozatnak, lásd a bevezető példát.
3. A 2.10/*B.* definíciót Cauchy-féle definíciónak is nevezik.
4. A küszöbszám függ a környezet sugarától: minél szűkebb a környezet (minél kisebb ε), annál későbbi taggal lép a sorozat a környezetbe (N annál nagyobb).

A klasszikus analízisben sok minden fűződik Cauchy (ejtsd: kósi) nevéhez.

A definíció alapján úgy véljük, nem minden sorozatnak van határértéke. A határértékkel rendelkező sorozatokat *konvergensnek** (összetartónak) nevezzük. Ha egy sorozatnak nincs határértéke, akkor az *divergens* (széttartó).

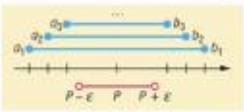
Azt, hogy A szám határértéke az $\{a_n\}$ sorozatnak, így jelöljük: $a_n \to A$, vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Szokták úgy is mondani, hogy az $\{a_n\}$ sorozat tart vagy konvergál A számhoz.

A lim rövidítés a latin limesz (határ) szóból származik.

2. példa

Legyen $I_n = [a_n; b_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumok sorozata, melyek hossza bármely pozitív számnál kisebbé válik. Korábban igazoltuk, hogy az I_n intervallumoknak egyetlen közös pontja van, jelölje ezt P. Igazoljuk, hogy $a_n \to P$ és $b_n \to P$.

Megoldás



5. ábra

Válasszuk P-nek valamely tetszőleges $\varepsilon > 0$ sugarú környezetét. Mivel az intervallumok hossza bármely pozitív számnál kisebbé válik, ezért van olyan N, hogy $I_N = [a_N; b_N]$ hossza már kisebb, mint ε. Ekkor mind az intervallum bal végpontja, mind a jobb végpontja beleesik P ε sugarú környezetébe. Az egymásba skatulyázottság miatt a későbbi végpontok már mind a környezet elemei. Mivel ε-t tetszőlegesnek választottuk, így bármely környezetbe majdnem minden végpont beleesik: a 2.10/*A*. definíció teljesül a két végpontsorozatra. *(5. ábra)*

3. példa

Irracionális számnak neveztük a végtelen és nem szakaszos tizedestörteket. Például $\sqrt{5}$ első néhány tizedesjegye 2,23606797749978… Adjunk meg olyan racionális számokból álló sorozatot, amelynek $\sqrt{5}$ a határértéke, és igazoljuk is a konvergenciát.

Megoldás

Legyen a sorozat első tagja $a_1 = 2{,}2$, azaz $\sqrt{5}$ az első tizedesjegyig. Legyen második tagja $a_2 = 2{,}23$, azaz $\sqrt{5}$ az első két tizedesjegyig. Ezt követően legyen $a_3 = 2{,}236$; $a_4 = 2{,}2360$ stb. Így a_1 kevesebbel tér el $\sqrt{5}$-től, mint 0,1; a_2 kevesebbel tér el $\sqrt{5}$-től, mint 0,01; a_3 kevesebbel tér el $\sqrt{5}$-től, mint 0,001; …; a sorozat n-edik tagjára pedig

$$\left|a_n - \sqrt{5}\right| < 10^{-n}.$$

A belépési küszöbre például $N = [-\lg\varepsilon] + 1$.

Bárhogy is adunk meg egy kicsi $\varepsilon > 0$-t, biztos van olyan N természetes szám, amelyre $10^{-N} < \varepsilon$. Ha pedig $n > N$, akkor

$$\left|a_n - \sqrt{5}\right| < 10^{-n} < 10^{-N} < \varepsilon.$$

Teljesül a 2.10/*B*. definíció, ráadásul $\{a_n\}$ minden tagja véges tizedestört, tehát racionális szám.

Megjegyzés: A fenti meggondolás alapján minden „irracionális" szám határértéke egy racionális számokból álló sorozatnak. Természetesen ez igaz a racionális számokra is: pl. 3,5 határértéke az $a_n = 3{,}5$ konstans sorozatnak. Így egy érdekes definíciót adhatunk a valós számokra: *r valós szám, ha megadható hozzá olyan racionális számokból álló sorozat, amelynek r a határértéke.*

A $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}$ feladat arra kéri, biztatja vagy utasítja az Olvasót, határozza meg az $a_n = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}$ általános tagú sorozat határértékét.

Az ilyen feladatokat hamarosan meg is tudjuk majd oldani.

2.3. TÉTEL: **Az $\{a_n\}$ sorozat konvergenciájára adott két definíció ekvivalens (egyenértékű).**

a konvergencia két definíciója egyenértékű

Bizonyítás

A tételt két lépésben igazoljuk: először az egyik, majd a másik definícióból kiindulva.

Először megmutatjuk, hogy a 2.10/*A*. definícióból következik a 2.10/*B*. definíció. Jelölje a 2.10/*A*-ban szereplő környezet sugarát ε (>0). Eszerint az $]A-\varepsilon; A+\varepsilon[$ környezetből a sorozatnak csak véges sok tagja marad ki. A kimaradt véges sok elem közül válasszuk ki a legnagyobb indexűt, ez az index megfelel az N küszöbszámnak. Ugyanis teljesül rá, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

Másodszor a 2.10/*B*. definícióból indulunk ki: bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik N, melyre ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$. Utóbbi egyenlőtlenséget átalakítva:

$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

Amennyiben $m \le N$, akkor az a_m tagot a környezeten kívül találjuk. Mivel N természetes szám, a sorozatnak éppen ennyi, azaz véges sok tagja marad ki a környezetből és végtelen sok tagja esik bele. Majdnem minden tag beleesik az A bármely környezetébe: teljesül a 2.10/*A*. definíció.

* * *

Adott sorozat és adott környezet esetén hogyan számíthatjuk ki a küszöbszámot? Erre mutatunk most példát a 2.10/*B*. definíció segítségével.

A 2.10/*A*. definíciónak inkább elméleti meggondolásokban vesszük használ.

4. példa

Határozzuk meg az $\varepsilon = 0{,}03$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy az $a_n = \dfrac{3n+2}{2n-10}$ sorozat határértéke $A = 1{,}5$.

A sorozatnak nincs 5. eleme.

Megoldás

Helyettesítsünk be a definíció végén szereplő kifejezésbe:

$$\left|\frac{3n+2}{2n-10} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon.$$

Hozzunk közös nevezőre az abszolút értékben:

$$\left|\frac{3n+2-3(n-5)}{2n-10}\right| = \left|\frac{17}{2n-10}\right| < \varepsilon.$$

Ha $n > 5$, akkor a kifejezés pozitív, így egyenlő az abszolút értékével:

$$\frac{17}{2n-10} < \varepsilon.$$

A sorozat konvergenciáját sohasem befolyásolja véges sok tag elhagyása.

Ha $n > 5$, akkor a pozitív $(2n - 10)$-zel szorozva mindkét oldalt, a relációjel nem változik:

$$17 < (2n - 10) \cdot \varepsilon.$$

Fejezzük ki n-t:

$$\frac{17 + 10\varepsilon}{2\varepsilon} < n.$$

Helyettesítsük be a megadott $\varepsilon = 0{,}03$-ot:

$$288{,}\dot{3} < n.$$

Készen vagyunk, $N = 288$.

Visszaolvasva az egyenlőtlenségeket:

A küszöbindex a kapott érték egészrésze.

$$\text{ha} \quad n > 288, \quad \text{akkor} \quad \left| \frac{3n + 2}{2n - 10} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon,$$

tehát a 289. tagtól kezdve a sorozat minden eleme az $]1{,}47;\ 1{,}53[$-ba esik.

Megjegyzés: Figyelembe kell vennünk, hogy a megoldás során n-re már kaptunk egy éles alsó korlátot ($n > 5$). Amennyiben ez lenne a nagyobb, úgy ezt az értéket kellene küszöbindexnek tekintenünk. Szerencsére nem mindig van szükség megoldás közben kikötésre.

5. példa

Sejtsük meg a $b_n = \sqrt[n]{2}$ sorozat B határértékét. Adjuk meg, hányadik tagtól kerülnek a sorozat tagjai közelebb B-hez, mint $\varepsilon = 0{,}02$.

Megoldás

Az első néhány tagot kiszámítva

$$b_1 = 2; \quad b_2 \approx 1{,}4142; \quad b_5 \approx 1{,}1487; \quad b_{10} \approx 1{,}0718$$

úgy sejtjük, hogy a sorozat 1-hez tart (*8. ábra*). Lássuk először általánosan, tetszőleges kicsiny $\varepsilon > 0$-ra (bármely n-re $\sqrt[n]{2} > 1$):



6. ábra

$$\begin{aligned} |\sqrt[n]{2} - 1| &< \varepsilon, \\ \sqrt[n]{2} &< 1 + \varepsilon, \\ 2 &< (1 + \varepsilon)^n, \\ \log_{1+\varepsilon} 2 &< n. \end{aligned}$$

$$\log_{1+\varepsilon} 2 = \frac{\lg 2}{\lg(1+\varepsilon)}$$

Innen a keresett küszöbszám $N = [\log_{1+\varepsilon} 2]$, a definíció teljesül.

Konkrétan $\varepsilon = 0{,}02$ esetén $N = 35$.

6. példa

Igaz-e, hogy a $c_n = 0{,}2^n$ sorozat határértéke 13?

Megoldás

Most ne adjunk meg konkrét $\varepsilon > 0$ számot, csak jelöljük. Ha igaz, akkor a 2.10/*B*. szerint

$$\begin{aligned} |0{,}2^n - 13| = 13 - 0{,}2^n &< \varepsilon, \\ 13 - \varepsilon &< 0{,}2^n. \end{aligned}$$

Vegyük mindkét oldal 0,2-es alapú logaritmusát. A relációjel megfordul, mert az alap 1-nél kisebb:

$$\log_{0,2}(13-\varepsilon) > n.$$

Hopp! Nem $N < n$-t kaptunk, hanem éppen fordítva, $n < N$. A sorozat elemei nem a környezetbe tartanak, inkább próbálnak minél távolabb kerülni tőle. A $\{c_n\}$ sorozat nem tart 13-hoz.

Feladatok

1. Írjuk fel a következő P számok ε sugarú környezetébe eső egész számokat. Határozzunk meg kettő, az adott ε sugarú környezetbe eső $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$-beli számot is. Adjuk meg intervallumként a környezetet.
   a) $P=1$, $\varepsilon=2$; *b)* $P=3{,}4$, $\varepsilon=0{,}5$;
   c) $P=2{,}46$, $\varepsilon=0{,}2$; *d)* $P=1+\sqrt{2}$, $\varepsilon=\sqrt{2}-1$.
2. Határozzuk meg a megadott intervallumok mint környezetek P középpontját és ε sugarát.
   a) $I=]0{,}2;\,1{,}4[$; *b)* $J=]-3;\,1[$;
   c) $K=\{x\in\mathbb{R}\mid 1{,}3<x<1{,}8\}$; *d)* $L=]-2{,}4;\,-1[$.
3. Adjunk ε-hoz küszöbszámot a 2.10/*B*. definíció alapján, ha tudjuk, hogy $\{a_n\}\to A$:
   a) $a_n=\dfrac{2n+3}{n}$, $A=2$, $\varepsilon=0{,}01$; *b)* $a_n=\sqrt[n]{5}$, $A=1$, $\varepsilon=0{,}1$;
   c) $a_n=\dfrac{3n+2}{n-100}$, $A=3$, $\varepsilon=2\cdot10^{-4}$.
4. Igazoljuk, hogy a $b_n=\lg\left(10+\dfrac{1}{n}\right)$ sorozatnak nem 2 a határértéke.
5. Sejtsük meg a következő sorozatok határértékét, és igazoljuk is a 2.10/*B*. definícióval.
   a) $a_n=3+\dfrac{4}{n^2}$; *b)* $b_n=0{,}3^n$; *c)* $c_n=\sqrt[n]{3}$; *d)* $d_n=\dfrac{5n^3+7}{n^3}$.



4. A sorozatok tulajdonságai III. Konvergens sorozatok tulajdonságai

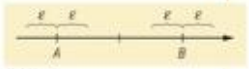
Sajnos feladatok megoldására a sorozatok konvergenciájára vonatkozó két definíció csak akkor alkalmazható, ha (pl. próbálgatással) megsejtjük a határértéket. Ekkor igazolhatjuk vagy cáfolhatjuk sejtésünket. A későbbi tételek egy része segít abban, hogy a határérték ismerete nélkül eldönthessük egy sorozatról, konvergens-e vagy sem.

határérték egyértelműsége (unicitása)

2.4. TÉTEL: **Konvergens sorozatnak csak egy határértéke lehet. Formálisan: ha $\{a_n\} \to A$ és $\{a_n\} \to B$, akkor $A = B$.**

Bizonyítás

Mivel csak két eset lehetséges, melyek ráadásul kizárják egymást ($A = B$ vagy $A \neq B$), bizonyíthatunk indirekt úton. Tegyük fel a kívánt állítással ellentétben, hogy $\{a_n\} \to A$, $\{a_n\} \to B$ és $A \neq B$. A 2.10/*A.* definícióban szereplő környezetet vegyük úgy fel A és B körül, hogy ezeknek ne legyen közös pontjuk, a két nyílt intervallum metszete legyen üres halmaz. Például mindkét szám körül tekintsük az $\varepsilon = \frac{|A-B|}{4}$ sugarú környezetet. *(7. ábra)*



7. ábra

Az A szám környezetéből a definíció miatt véges sok elem maradt ki. Ám mivel nincs közös része B környezetével, B környezetébe csak véges sok elem eshet, B nem lehet a sorozat határértéke. Ebből következik, hogy feltevésünk hamis, és ha $\{a_n\} \to A$ és $\{a_n\} \to B$ teljesül, akkor csak $A = B$ lehetséges.

• • •

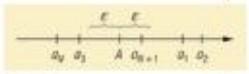
Vajon a konvergencia milyen kapcsolatban van a másik két tulajdonsággal, a korlátossággal és a monotonitással? Alábbi tételünk után könnyebben tudjuk vizsgálni a sorozatok korlátosságát is.

konvergens sorozat korlátossága

2.5. TÉTEL: **A konvergens sorozat korlátos. Formálisan: ha $\{a_n\} \to A$, akkor van olyan $k, K \in \mathbb{R}$ szám, hogy $k \leq a_n \leq K$ minden n-re.**

Bizonyítás

Igazoljuk, hogy a sorozat felülről korlátos. Ha a sorozat konvergens, akkor a 2.10/*A.* definíció miatt az A határérték bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetéből legfeljebb N tagja marad ki (N létezését a 2.10/*B.* definíció biztosítja). Véve egy konkrét $]A-\varepsilon; A+\varepsilon[$ környezetet, a belőle kimaradó véges sok, $A+\varepsilon$-nál nagyobb tag közül a legnagyobb felső korlátja a sorozatnak. Ha pedig nincs $A+\varepsilon$-nál nagyobb kimaradó tag, akkor felső korlátnak megfelel maga $A+\varepsilon$. Tehát a sorozat így is, úgy is felülről korlátos. Sőt, $K = \max(A+\varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_N)$. *(8. ábra)*



8. ábra

Megjegyzés: Hasonlóan bizonyítható az alulról való korlátosság is.



Vegyük észre, hogy a tétel nem megfordítható, nem „akkor és csak akkor" típusú tétel. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos – ám ha korlátos, akkor még nem biztos, hogy konvergens. A korlátos sorozatok halmazának valódi részhalmaza a konvergens sorozatok halmaza.

A tétel nem megfordítható.

1. példa

Vizsgáljuk meg korlátosság és konvergencia szempontjából az $a_n = (-1)^n$ sorozatot.

Megoldás

A sorozat korlátos: $k = -1$ és $K = 1$. Azonban $A = 1$-et vagy $A = -1$-et feltételezve határértéknek, az $\varepsilon = 0{,}5$ sugarú környezetükből mindkét esetben végtelen sok elem marad ki. Vagyis a sorozat nem konvergens.

2. példa

Vizsgáljuk meg korlátosság, monotonitás, konvergencia szempontjából a $b_n = \dfrac{4n+5}{2n-1}$ sorozatot. Adjuk meg a sorozat határait.

Megoldás

Mivel a konvergencia maga után vonja a korlátosságot, érdemes előbb azt vizsgálni. Ha pedig ismerjük a sorozat monotonitását, akkor az abszolút értéket hagyhatjuk el könnyen. Kezdjük hát ez utóbbival! Az első néhány tag után a sorozat csökkenőnek tűnik, azaz $b_{n+1} < b_n$:

$$\frac{4(n+1)+5}{2(n+1)-1} = \frac{4n+9}{2n+1} < \frac{4n+5}{2n-1},$$

$$8n^2 + 14n - 9 < 8n^2 + 14n + 5,$$

$$-9 < 5.$$

A sorozat tényleg szigorúan monoton csökken. A konvergenciával kapcsolatos sejtésünk: a sorozat 2-höz konvergál.

A sejtés alapja: nagy n-re, pl. $n = 1000$-re $b_{1000} = \dfrac{4005}{1999} \approx 2{,}003$.

$$\left|\frac{4n+5}{2n-1} - 2\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{7}{2n-1}\right| < \varepsilon,$$

$$\frac{7}{\varepsilon} < 2n - 1,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{\varepsilon} + 1\right) = \frac{7+\varepsilon}{2\varepsilon} < n \quad \Rightarrow \quad N = \left[\frac{7+\varepsilon}{2\varepsilon}\right].$$

A sorozat valóban konvergál 2-höz. Ebből következik, hogy korlátos. Mivel monoton csökkenve közelíti 2-t, ezért határai $k = \inf(b_n) = 2$ és $K = \sup(b_n) = b_1 = 9$.



A korlátosság a határérték szükséges, de nem elégséges feltétele. Mi történik, ha hozzávesszük a monotonságot? Ha a sorozat monoton nő, de nem lép át egy felső korlátot, akkor valahol a sorozat tagjainak sűrűsödnie, torlódnia kell. A monotonitás és a korlátosság együtt már maga után vonja a határérték létezését, így elégséges feltételt kapunk a konvergenciára.

monoton, korlátos sorozat konvergenciája

2.6. TÉTEL: **Ha az $\{a_n\}$ sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens. Határértéke monoton növő sorozat esetén a felső, csökkenő sorozat esetén a sorozat alsó határa.**

Megjegyzések: Monoton növő sorozat esetén elegendő a felső korlátot, csökkenőnél pedig az alsó korlátot feltételnek venni. A feltételen enyhíthetünk úgy is, ha a monotonitást csak majdnem minden n-re követeljük meg, majd a „rosszul viselkedő" tagokat egyszerűen elhagyjuk.

Bizonyítás

Érdekes megfigyelése a szerzőknek, hogy a jobbkezesek bizonyításnál általában a monoton növekedést választják, a balkezesek pedig inkább a monoton csökkenő sorozatot. Ez nem véletlen. Mivel az emberek 93%-a jobbkezes, ezért választottuk ezt a bizonyítást.

Legyen a sorozatunk monoton növő és korlátos. Ekkor felülről is korlátos, tehát 2.1-es tételünkből következően létezik felső határa. Jelöljük ezt $H = \sup(a_n)$-nel.

Mivel H felső korlátja a sorozatnak, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra $(H - \varepsilon)$ már nem az. A sorozatnak tehát van olyan a_{n^*} tagja, amelyre igaz, hogy $a_{n^*} > H - \varepsilon$. Mivel sorozatunk a feltevés szerint monoton növekvő, az n^* indexet konkrét ε-ra mindig meg tudjuk határozni, ez az adott ε sugarú környezethez tartozó küszöbindex. Ha $n > n^*$, akkor a sorozat monoton növekedése miatt

$$H - \varepsilon < a_{n^*} \le a_n \le H,$$

hiszen H felső határ. Ez pedig azt jelenti, hogy H bármely

$$]H - \varepsilon; H[\subset]H - \varepsilon; H + \varepsilon[$$

(fél-) környezetébe a sorozat majdnem minden tagja beleesik, tehát 2.10/*A*. miatt H a sorozat határértéke.

• • •

Láttuk, hogy a korlátosság önmagában szükséges feltétele a határértéknek, a monotonsággal együtt pedig már fennáll a konvergencia. Sajnos ez a tétel csak a határérték létezését biztosítja, a pontos értéket sok esetben nem adja meg. Az ilyen típusú tételeket *egzisztenciatételeknek* nevezzük.

A korábbi $a_n = n^2 - 9n + 2$ sorozatból elhagyva az első négy tagot, szigorúan növekedővé vált. Azt is említettük, hogy bármely sorozat tagjaiból véges sokat elhagyva még mindig végtelen sok marad. Sőt, egy sorozatból akár végtelen sok tagot is elhagyhatunk ügyesen (például minden másodikat), még akkor is végtelen sok tagja marad. A megmaradt sorozatot az eredeti sorozat *részsorozatának* nevezzük. Gondoljuk meg, a változtatás nem befolyásolja a már meglévő alaptulajdonságokat: monoton növő/csökkenő sorozat monoton növő/csökkenő marad, korlátos sorozat korlátos marad (bár határai változhatnak), konvergens sorozat konvergens marad és határértéke sem változik.



2.11. Definíció: **Ha egy $\{a_n\}$ sorozat végtelen sok tagját kiválasztjuk és az eredeti sorrendbe rendezzük, akkor az $\{a_n\}$ sorozat egy $\{a_n^*\}$ *részsorozatát* kapjuk.**

részsorozat

Az említett $\{a_n^*\} = n^2 - 9n + 2$ részsorozat első eleme az eredeti sorozat ötödik eleme és így tovább (az első négy tagot hagytuk el). Bizonyos esetekben a határérték meghatározásánál segít a részsorozatokra vonatkozó következő tétel.

2.7. Tétel: **Konvergens $\{a_n\}$ sorozat bármely $\{a_n^*\}$ részsorozata is konvergens és határértéke egyenlő az eredeti sorozat határértékével.**

részsorozat konvergenciája

Bizonyítás

Használjuk fel a 2.10/*A*. definíciót! Ha $\{a_n\} \to A$, akkor A bármely környezetéből a sorozat véges sok tagja marad ki. Ám akkor az $\{a_n^*\}$ részsorozatnak is legfeljebb ugyanannyi tagja maradhat ki, hiszen az eredeti sorozat tagjainak elhagyásával kapjuk. Így A bármely környezetébe $\{a_n^*\}$ majdnem minden tagja beleesik, azaz $\{a_n^*\} \to A$.

♦ ♦ ♦

A tételnek az a jelentősége, hogy ha tudjuk például $a_n = \frac{1}{n}$ határértékét, akkor a $b_n = \frac{1}{2n}$, $c_n = \frac{1}{n^2}$ stb. sorozatok határértékét is ismerjük, mivel ezek az $\{a_n\}$ részsorozatai, például $\{b_n\}$-t az $\{a_n\}$ minden második tagja alkotja.



A következő tételt *rendőrelvnek* vagy *közrefogási szabálynak* szokták nevezni. Az elnevezés azt a sajátos matematikai humort takarja, hogy ha két rendőr közrefog egy őrizetest, akkor kénytelen a rendőrökkel tartani.

2.8. Tétel: **Ha $\{a_n\} \to A$, $\{b_n\} \to A$ és majdnem minden n-re $a_n \le c_n \le b_n$, akkor $\{c_n\} \to A$.**

rendőrelv

Bizonyítás (I.)

A feltételek miatt A-nak bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetéből $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatnak is véges sok tagja marad ki. Ám ekkor $\{c_n\}$ sorozatnak is véges sok tagja marad ki, mivel $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ közrefogja $\{c_n\}$ tagjait. Teljesül tehát a 2.10/*A*. definíció, igaz a tétel állítása.

Bizonyítás (II.)

Lássuk be tételünket a 2.10/*B*. definícióval is! Igazoljuk, hogy bármely ε-hoz megadható olyan N küszöbszám, amelyre ha $n > N$, akkor $|c_n - A| < \varepsilon$.

A feltételek miatt megadhatók olyan N_1, N_2, N_3 küszöbszámok, melyekre teljesülnek a következők:

(1) Minden $n > N_1$ esetén $a_n \le c_n \le b_n$.

(2) $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz létezik N_2, melyre ha $n > N_2$, akkor $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$.

(3) $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz létezik N_3, melyre ha $n > N_3$, akkor $|b_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$.

A három állítás magyarázata: (1) igaz, mert csak véges sok tagra nem teljesül az egyenlőtlenség, őket elhagyjuk; (2) és (3) a konvergencia definíciójából jön: ha bármely ε-hoz, akkor $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz is létezik megfelelő küszöbszám.

N_1, N_2, N_3 közül a legnagyobb legyen $N = \max(N_1, N_2, N_3)$. Így ha $n > N$, akkor:

$$|c_n - A| \overset{(i)}{=} |c_n - b_n + b_n - A| \overset{(ii)}{\le} |c_n - b_n| + |b_n - A| \overset{(iii)}{\le}$$

$$\overset{(iii)}{\le} |a_n - b_n| + |b_n - A| \overset{(iv)}{\le} |a_n - A| + |b_n - A| + |b_n - A| \overset{(v)}{<} 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

$$\text{azaz} \quad |c_n - A| < \varepsilon.$$

Az egyes lépések magyarázata: (*i*) teve-módszer b_n-nel; (*ii*) háromszög-egyenlőtlenség; (*iii*) itt használjuk ki (1)-et: $a_n \le c_n \le b_n$ minden $n > N_1$-re; (*iv*) teve-módszer A-val és háromszög-egyenlőtlenség; (*v*) itt használjuk ki (2)-t és (3)-at.

Megjegyzés: Az első bizonyítás jóval egyszerűbb a másodiknál. Hogy utóbbi mégis szerepel, annak oka a benne rejlő ötlet: felbontjuk az abszolút értéket olyan részekre, melyekre már alkalmazhatjuk a tétel feltételeit. Ehhez szükségünk van az (1), (2), (3) megjegyzésekre. Ezt a fogást még többször használjuk. A második bizonyítás egyúttal utat mutat a küszöbszám meghatározásához is.

Feladatok

1. Fejezzük be a 2.5-ös tétel bizonyítását. (Igazoljuk, hogy konvergens sorozat alulról is korlátos, vagyis korlátos.)

2. Vizsgáljuk meg a sorozatokat korlátosság, monotonitás, konvergencia szempontjából. Adjuk meg határaikat.

   a) $a_n = \frac{3n+1}{n}$; *b)* $b_n = \frac{n+2}{2n-10}$; *c)* $c_n = \sqrt[n]{0{,}5}$; *d)* $d_n = 0{,}1^n$.

3. Fejezzük be a 2.6-os tétel bizonyítását. (Igazoljuk, hogy monoton csökkenő, alulról korlátos sorozat határértéke a sorozat alsó határa.)



5. Nevezetes sorozatok határértékei I.

Az eddig kimondott definíciók és tételek segítségével már több nevezetes sorozat határértékét meghatározhatjuk.

1. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ határértéket.

I. megoldás

A sorozat korlátos, hiszen $0 < a_n \le 1$ minden n-re. A sorozat monoton csökkenő, mivel $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ minden n-re. Korábbi 2.6. tételünk miatt a sorozat határértéke a sorozat alsó határa:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

II. megoldás

A határértéket megsejtve, a 2.10/*B*. definíció segítségével bizonyíthatjuk azt. Számítsuk ki a sorozat pár tagját:

$$a_1=1;\quad a_5=\frac{1}{5}=0{,}2;\quad a_{100}=\frac{1}{100}=0{,}01;\quad a_{1000}=\frac{1}{1000}=0{,}001.$$

A sorozat határértékét 0-nak sejtjük. Tekintsük a definícióban szereplő kifejezést; legyen ε tetszőleges kicsiny, de pozitív szám:

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

Nem adunk meg konkrét értéket ε-ra, hiszen általában kell teljesülnie a definíció feltételének.

Mivel n pozitív egész, ezért az abszolút érték elhagyható:

$$\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Mivel n és ε is pozitív, így a relációjel iránya szorzás és osztás közben nem módosul:

$$\frac{1}{\varepsilon}<n.$$

Megtaláltuk azt az ε-tól függő $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ küszöbszámot, amelyre

$$\text{ha}\quad n>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right],\quad \text{akkor}\quad \left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

Megjegyzés: Mivel az $\frac{1}{n}$ sorozatnak $\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n+1}$ mind részsorozatai, így ezek is konvergensek. A részsorozatokra vonatkozó tétel szerint határértékük is megegyezik $\frac{1}{n}$ határértékével:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$



2. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ (q valós szám) határértéket.

A sorozat neve *mértani* vagy *geometriai* sorozat, q-t *kvóciensnek* hívjuk. Célszerű kiszámolni a sorozat néhány elemét különböző kvóciensek esetén.

- Ha $q=\frac{1}{2}$, akkor $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{4}$, $a_{10}=\frac{1}{1024}$, ... Azt sejtjük, hogy a sorozat 0-hoz tart minden $0<q<1$ esetén.
- Ha $q=-\frac{1}{2}$, akkor $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{4}$, $a_5=-\frac{1}{32}$, ... Sejtésünk az, hogy 0-hoz tart minden $0>q>-1$ esetén.
- Ha $q=1$, akkor $a_1=a_2=\ldots=1$. A sorozat konstans, 1-hez tart.
- Ha $q=0$, akkor $a_1=a_2=\ldots=0$. A konstans sorozat 0-hoz tart.

Oszcilláló a sorozat, ha az egymást követő tagok előjele váltakozik.

- Ha $q=-1$, akkor $a_1=a_3=a_5=\ldots=-1$, $a_2=a_4=a_6=\ldots=1$. A sorozat két értéken oszcillál, nincs határértéke.
- Ha $q=3$, akkor $a_1=3$, $a_3=27$, $a_5=243$ stb. Úgy sejtjük, hogy a sorozat $q>1$-re bármilyen nagy értéknél nagyobb értéket is felvehet.

Megoldás

Lássuk, sejtéseinket tudjuk-e igazolni!

- A $0<q<1$ esetben alkalmazzuk a határérték 2.10/*B*. definícióját. Legyen $\varepsilon>0$ szám. Vizsgáljuk meg az abszolút értékes kifejezést:

$$|q^n-0|<\varepsilon,$$
$$|q^n|<\varepsilon,$$
$$q^n<\varepsilon.$$

  Mindkét oldal q alapú logaritmusát tekintve az egyenlőtlenség megfordul, hiszen $0<q<1$:

$$n>\log_q\varepsilon, \quad \text{így} \quad N=\lceil\log_q\varepsilon\rceil.$$

  A definíció teljesül, megtaláltuk az ε-tól függő küszöbszámot.

Ez a gondolkodás jellemző a matematikára. A matematikusok szeretik a feladatok megoldását egy korábban megoldott feladatra visszavezetni, ha lehetséges. (Talán lusták...)

- Ha $-1<q<0$, akkor $q^n=(-1)^n\cdot|q|^n$. Így

$$|(-1)^n\cdot q^n-0|=|(-1)^n|\cdot|q^n|=|q^n|=|q|^n,$$

  a feladatot visszavezetjük az előző feladatra.
- A $q=\pm1$, $q=0$ eseteket már megválaszoltuk.
- Ha $q>1$, akkor sejtésünk szerint a sorozat minden határon túl nő, divergens. Az ilyen típusú sorozatokat *tágabb értelemben konvergens* vagy *valódi divergens* sorozatoknak nevezzük. Új fogalmakra van szükség.
- $q<-1$-re a sorozat elemei még oszcillálnak is.



végtelenbe divergáló sorozat
mínusz végtelenbe divergáló sorozat

2.12. Definíció: **Az $\{a_n\}$ sorozat *végtelenbe divergál*, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ esetén megadható olyan K-tól függő N küszöbszám, hogy valahányszor $n > N$, mindannyiszor $a_n > K$. Az $\{a_n\}$ sorozat *mínusz végtelenbe divergál*, ha bármely $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan k-tól függő N küszöbszám, hogy valahányszor $n > N$, mindannyiszor $a_n < k$.**
Jelölésük: $a_n \to \infty$, $a_n \to -\infty$.

Meg kell jegyeznünk, hogy a végtelen fogalmát nem definiáltuk, csak azt, hogy egy sorozat végtelenbe divergál.

A híres argentin író, Borges, a végtelent a gonosszal hozza összefüggésbe.

Alkalmazzuk a fenti definíciót $q > 1$ geometriai sorozatra:

$$q^n > K, \quad \text{amiből} \quad n > \log_q K,$$

így

$$N = \left[\log_q K\right].$$

Amennyiben $n > N$, akkor $a_n > K$: a definíció szerint $q > 1$-re a mértani sorozat valódi divergens.

Az $\{a_n\} = q^n$ mértani sorozatot minden kvóciens esetén megvizsgáltuk. Ha $0 \le |q| < 1$, a sorozat konvergál 0-hoz. Ha $q = 1$, a sorozat konvergál 1-hez. Ha $q > 1$, a sorozat valódi divergens. Minden más esetben a sorozat divergens.

Következő sorozatunk nagyon híres.

3. példa
Határozzuk meg az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértékét.

Megoldás

Ennek a sorozatnak elég nehéz megsejteni a határértékét.

Számítsuk ki az 1., 10., 100., 1000. stb. tagokat! A sorozat konvergensnek tűnik, de vajon tényleg az?

Ha „csak" annyit akarunk igazolni, hogy a sorozat konvergens, akkor a 2.4. tételt használhatjuk: monoton és korlátos sorozat konvergens. Ekkor bizonyítanunk kell külön-külön a monoton növekedést és a korlátosságot, tetszés szerinti sorrendben. Először a monoton növekedést szokták bizonyítani, mert akkor a sorozat első tagja egyben alsó korlát (alsó határ) is. A bizonyításoknál alapvetően háromféle módszert szoktak alkalmazni.

1. A számtani-mértani egyenlőtlenséggel igazolhatjuk mindkét tulajdonságot.
2. A Newton-féle binomiális tétellel egy jobb korlátot igazolhatunk.
3. A Bernoulli-féle egyenlőtlenséggel ismét mindkét tulajdonság belátható.

A binomiális tétel és bizonyítása a 11.-es tankönyv 28–29. oldalán található.

Megjegyzés: Mivel ismereteink még hiányosak a binomiális tétellel való bizonyítás megértéséhez, később térünk vissza rá. A Bernoulli-féle egyenlőtlenséget alkalmazó igazolás megtalálható a szakkönyvekben.

Bizonyítás a számtani-mértani közép alkalmazásával

A szigorú monoton növekedéshez igazolnunk kell, hogy minden n-re

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Induljunk ki az $n+1$ tagra alkalmazott mértani-számtani közepek közötti egyenlőtlenségből:

A trükk amilyen egyszerűnek tűnik, legalább annyira nehéz, érdemes jól megfigyelni. A korlátosságnál is alkalmazzuk.

$$\sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{ tényező}}\cdot 1} < \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Ha most a sor elejét és végét $(n+1)$-edik hatványra emeljük, akkor éppen a keresett egyenlőtlenséget kapjuk.

Megjegyzés: A közepek közti egyenlőség azért nem áll fenn, mert a tagok biztosan nem egyenlőek.

A sorozat korlátosságát ugyanazzal az egyenlőtlenséggel és hasonló trükkel bizonyíthatjuk, de most vegyünk $n+2$ tagot:

$$\sqrt[n+2]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{ tényező}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} < \frac{2\cdot\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2} = 1.$$

Emeljük a sor elejét és végét $(n+2)$-edik hatványra, majd szorozzuk meg 4-gyel mindkettőt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

A sorozat minden tagja kisebb 4-nél, amiről belátható, hogy nem felső határ (tehát nem is határérték). Annyit azonban elértünk a gondolatmenettel, hogy igazoltuk: a sorozat korlátos és monoton, tehát konvergens. Sőt: azt is tudjuk, hogy a határérték 2 és 4 közé esik.

Transzcendens az a szám, amely nem írható fel egész együtthatós egyenlet gyökeként.

Sajnos a sorozat pontos határértékét a bizonyítás nem adja meg. Be lehet bizonyítani, hogy ez a szám irracionális, sőt, hasonlóan a π-hez, transzcendens is.

Magát a sorozatot a nagy matematikus tiszteletére Euler-féle sorozatnak, határértékét pedig Euler-féle számnak is nevezzük, és e-vel jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459045235360287471352 7\ldots$$

Megjegyzés: A számológépeken általában két különböző logaritmust tudunk számolni: lg vagy log a 10-es alapú logaritmust jelenti, az ln pedig az imént látott Euler-féle számalapú logaritmust.



6. Nevezetes sorozatok határértékei II. Műveletek konvergens sorozatokkal

Az eddigiekből jól látszik, hogy sok esetben nem könnyű belátni egy sorozatról, hogy konvergens. A határértéket pedig néha pontosan meg sem tudjuk határozni. Felmerül a kérdés, ha már nagy nehezen meghatároztuk két sorozat határértékét, akkor mi lesz a két sorozat összegének, szorzatának a határértéke, egyáltalán van-e az így kapott új sorozatnak határértéke? Persze először azon kell gondolkodnunk, hogy egyáltalán mit értünk két sorozat összegén, szorzatán stb.

Célszerűnek tűnik két sorozat összegén azt a sorozatot érteni, amelynek tagjai a kiindulásul vett sorozatok ugyanazon helyen álló tagjainak összege. A $\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$ sorozat első tagja $c_1 = a_1 + b_1$, második tagja $c_2 = a_2 + b_2$, …, $c_i = a_i + b_i$. Ugyanez áll a $\{c_n\} = \{a_n\} \cdot \{b_n\}$ sorozatra is: $c_i = a_i \cdot b_i$. Két sorozat hányadosánál vigyázni kell, az új sorozatból a nullanevezőjű tagok kimaradnak!

műveletek konvergens sorozatokkal

2.9. Tétel: **Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor**

(1) $a_n \pm b_n$ is konvergens és határértéke $A \pm B$;

(2) $a_n \cdot b_n$ is konvergens és határértéke $A \cdot B$;

(3) $\frac{a_n}{b_n}$ is konvergens és határértéke $\frac{A}{B}$.

(Csak ha $B \neq 0$, ami miatt majdnem minden n-re $b_n \neq 0$.)

Bizonyítás (1)

Bizonyítjuk, hogy

$$\text{ha} \quad a_n \to A \text{ és } b_n \to B, \quad \text{akkor} \quad a_n + b_n \to A + B.$$

Ha $a_n \to A$, akkor van egy olyan N_1 küszöbszám, hogy

$$\text{ha} \quad n > N_1, \quad \text{akkor} \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha $b_n \to B$, akkor van egy olyan N_2 küszöbszám, hogy

$$\text{ha} \quad n > N_2, \quad \text{akkor} \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $N = \max(N_1, N_2)$. Így ha $n > N$, akkor teljesül

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ám ekkor

$$|a_n + b_n - (A + B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq$$

$$\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Az első lépésben a háromszög-egyenlőtlenséget, a távolság egyik tulajdonságát használtuk ki.

Tehát két sorozat összegének határértéke az egyes sorozatok határértékeinek összege.



Bizonyítás (2)

Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n \cdot b_n \to AB$. Alakítsuk át az ominózus abszolút értéket:

$$|a_n \cdot b_n - A \cdot B| = |a_n \cdot b_n - a_n \cdot B + a_n \cdot B - A \cdot B| \le$$
$$\le |a_n \cdot b_n - a_n \cdot B| + |a_n \cdot B - A \cdot B| = |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A|.$$

Mivel $\{a_n\}$ konvergens, ezért korlátos: létezik $K > 0$, hogy minden n-re $|a_n| < K$. Mivel mindkét sorozat konvergens, ezért tetszőleges pozitív ε-hoz megadható olyan N_1 és N_2 küszöbszám, amelyre

$$\text{ha} \quad n > N_1, \quad \text{akkor} \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$$

és

$$\text{ha} \quad n > N_2, \quad \text{akkor} \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(K+1)}.$$

A nevezőben levő $|B| + 1$, illetve $K + 1$ azért szükséges, hogy a nevező akkor se legyen 0, ha esetleg $B = 0$ vagy $K = 0$.

Legyen most $N = \max(N_1, N_2)$. Akkor ha $n > N$, akkor

$$|a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| <$$
$$< K \cdot \frac{\varepsilon}{2(K+1)} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Mivel bármely pozitív ε-hoz találtunk N küszöbindexet, ezért a feltételek mellett $a_n \cdot b_n \to A \cdot B$. Két konvergens sorozat szorzatának határértéke az egyes sorozatok határértékeinek szorzata.

• • •

Tételünk következményei:

A konstansszorzó kiemelhető a limesz elé!

(1) Konvergens sorozat konstansszorosa is konvergens és határértéke a határérték konstansszorosa. Ha $a_n \to A$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot A.$$

(2) Bármely k egész kitevőre ha $a_n \to A$ $(\neq 0)$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = A^k.$$

(3) tovább is általánosítható

(3) Bármely k egészre ha $a_n \to A$, akkor $A > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}.$$

Megjegyzések: (2) bizonyítása teljes indukcióval könnyen elvégezhető. (3) a (2) következménye.

Az előbbi tételek felhasználásával lássuk, hogyan oldunk meg egyszerűbb feladatokat!

Azaz két végtelen párbajozik egymással, ki győz?

A most következő kérdéseket törtes feladatoknak nevezzük. Itt az a probléma, hogy a számláló és a nevező is egy-egy végtelenbe tartó sorozat. Azt ugyan tudjuk, hogy végtelenhez végtelent adva az eredmény is végtelen lesz, illetve ha végtelent végtelennel szorzunk, akkor is végtelent kapunk eredményül. Ám mihez tart két minden határon túl növekedő sorozat hányadosa?

1. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n}{5n^2-8n+6}$ határértéket.

Megoldás

Írjuk fel a sorozat néhány tagját:

$$a_1=\frac{5}{3};\quad a_{10}=\frac{230}{426};\quad a_{1000}=\frac{2003000}{4992006}.$$

Azt sejtjük, $A=\dfrac{2}{5}$.





Az ilyen típusú sorozatok esetén érdemes a tört számlálóját és nevezőjét is a nevezőben lévő n-ek közül a legmagasabb kitevőjű tagjával végigosztani:

$$\frac{2n^2+3n}{5n^2-8n+6}=\frac{2+\dfrac{3}{n}}{5-\dfrac{8}{n}+\dfrac{6}{n^2}}.$$

A számláló és a nevező is konvergens sorozatok összege, különbsége és hányadosa. Alkalmazzuk a 2.9-es tételt és következményeit!

$$\frac{2+\dfrac{3}{n}}{5-\dfrac{8}{n}+\dfrac{6}{n^2}}\to\frac{2+0}{5-0+0}=\frac{2}{5}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$

2. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+4n+10}{n^5-1000n^4+n}$ határértéket.

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+4n+10}{n^5-1000n^4+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{4}{n^4}+\dfrac{10}{n^5}}{1-\dfrac{1000}{n}+\dfrac{1}{n^4}}=\frac{0+0+0}{1-0+0}=0.$$

3. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-6n}{n+1000}$ határértéket.

Megoldás

$$\frac{n^2-6n}{n+1000}=\frac{n-6}{1+\dfrac{1000}{n}}>\frac{n-6}{2}\to\infty,\quad \text{ha}\quad n>1000.$$

Így az eredeti sorozat is minden határon túl nő.

Három különböző típusú feladatot láttunk eddig:

- Ha a nevezőben levő legmagasabb kitevőjű n kitevője ugyanannyi, mint a számlálóban levő legmagasabb kitevőjű n kitevője, akkor az ilyen típusú sorozatok határértéke e két tag együtthatójának a hányadosa (1. példa).
- Ha a nevezőben levő legmagasabb kitevőjű n kitevője nagyobb, mint a számlálóban levő legmagasabb kitevőjű n kitevője, akkor a sorozat a 0-hoz tart (2. példa).
- Ha a nevezőben levő legmagasabb kitevőjű n kitevője kisebb, mint a számlálóban levő legmagasabb kitevőjű n kitevője, akkor a sorozat plusz vagy mínusz végtelenhez tart, azaz divergens lesz (3. példa).

Az előbbi feladattípusnál „végtelent osztottunk végtelennel". Lássunk most olyan sorozatokat, ahol „végtelenből vonunk ki végtelent"! Az ilyen feladatok nagy részénél az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ nevezetes szorzat segítségével jutunk eredményre.

4. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$ határértéket.

Megoldás

$$0 < \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$$

$$= \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} < \frac{2}{2\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \to 0.$$

A rendőrelv miatt a kérdezett határérték 0.

• • •

Az előbb „két végtelen különbsége" 0 lett. De nem mindig!

5. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2-5n+1}\right)$ határértéket.

Megoldás

$$\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2-5n+1} = \frac{10n}{\sqrt{n^2+5n+1}+\sqrt{n^2-5n+1}}.$$

A feladatot visszavezettük törtes határérték meghatározására. Vigyázzunk, a nevező nagyságrendje nem n^2, hanem n!

$$\frac{10n}{\sqrt{n^2+5n+1}+\sqrt{n^2-5n+1}} = \frac{10}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}} \to$$

$$\to \frac{10}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0+0}} = 5.$$

A következő feladatcsoport az $\{a_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozatra visszavezethető sorozatokat tartalmaz. A konkrét feladatok megoldása a következő általános tételen alapul:

bármely $a_n \to \infty$ esetén $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$.

6. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ határértéket, ha $i > 0$, $i \in \mathbb{R}$.

Hasonlóan belátható $i < 0$-ra is.

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^{\frac{n}{i}\cdot i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^{\frac{n}{i}}\right]^i = e^i.$$

7. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ határértéket.

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = e^2.$$

8. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^n$ határértéket.

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n}\right)^n = e^{-3} = \frac{1}{e^3}.$$

◆ ◆ ◆

Nézzünk meg egy, az eddigieknél több – elsősorban technikai – lépést igénylő feladatot.

9. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^n$ határértéket.

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5-2}{2n+5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^n.$$

Első lépésben kialakítjuk az $\left(1+\frac{i}{a_n}\right)^n$ kifejezést:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^{\frac{2n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^{\frac{2n+5-5}{2}}.$$

Ne aggódjunk, ennyire részletesen nem kell mindig leírni.

Most a kitevőben alakítjuk ki a nevezőt a hatványozás azonosságai segítségével:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^{\frac{2n+5-5}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^{2n+5}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^{-\frac{5}{2}}.$$

Végül a limeszt szétbontjuk a konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel alapján:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^{2n+5}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+5}\right)^{-\frac{5}{2}}.$$

A második tényező határértéke $(1+0)^{-2,5}=1$. Az első a 6. példa előtt említett összefüggés alapján:

$$\left(e^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

• • •

Következő feladatunk inkább elméleti jellegű.

10. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ határértéket.

Megoldás

Soroljuk fel a sorozat néhány tagját:

$a_1=1$; $a_2=\sqrt{2}\approx 1{,}4142$; $a_3=\sqrt[3]{3}\approx 1{,}4422$;
$a_4=\sqrt[4]{4}\approx 1{,}4142$; $a_5=\sqrt[5]{5}\approx 1{,}3797$;
$a_{10}=\sqrt[10]{10}\approx 1{,}2589$; $a_{100}=\sqrt[100]{100}\approx 1{,}0471$; stb.

A monotonitás igazolását a 6. feladatban tűzzük ki.

Úgy tűnik, a sorozat a harmadik tagtól csökken. Alulról biztosan korlátos, hiszen 1-nél nagyobb számok bármely pozitív gyöke csak 1-nél nagyobb lehet. Ha a sorozat korlátos és monoton, akkor konvergens. Mivel 1-nél nem tudunk jobb (nagyobb) alsó korlátot mondani, sejtésünk: $\sqrt[n]{n}\to 1$.

Legyen $\varepsilon>0$ tetszőlegesen kicsi. Vajon létezik N, amire

$$\text{ha}\quad n>N,\quad \text{akkor}\quad \left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon?$$

Átalakítva:

$$\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon,$$

amiből

$$n<(1+\varepsilon)^n.$$



Tekintsük csak minden második tagját a sorozatnak, azaz az $n = 2t$, $t \in \mathbb{N}$ páros indexű tagokat! (Ha rájuk igazoljuk a konvergenciát, akkor a páros tagok már „magukkal viszik" a közöttük levő páratlan tagokat is a szigorú monotonitás miatt.) A második lépésben Bernoulli-egyenlőtlenséget alkalmazunk:

$$(1+\varepsilon)^n = (1+\varepsilon)^{2t} = \left[(1+\varepsilon)^t\right]^2 \geq (1+t\varepsilon)^2 =$$

$$= 1 + 2t\varepsilon + t^2\varepsilon^2 > 2t = n.$$

Alakítsuk át az utolsó t-t tartalmazó egyenlőtlenséget, és oldjuk meg t-re:

$$1 + 2t(\varepsilon - 1) + t^2\varepsilon^2 > 0,$$

amiből

$$t_{1,2} = \frac{1-\varepsilon \pm \sqrt{1-2\varepsilon}}{\varepsilon^2} \in \mathbb{R}^+.$$

A kifejezés egy felfelé nyíló parabola, ezért ha

$$t > \left[\frac{1-\varepsilon+\sqrt{1-2\varepsilon}}{\varepsilon^2}\right] = N,$$

akkor az egyenlőtlenségsorozat teljesül. Ekkor $n < (1+\varepsilon)^n$, vagyis $\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon$. A sorozat határértéke tehát 1.

Gondoljuk meg, hogy miért nem az $(1+\varepsilon)^n$ alakra alkalmaztuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget!

Megjegyzés: Mivel ε kicsi érték, feltehetjük, hogy $\varepsilon < 0{,}5$.

11. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{n!}$ határértéket.

Megoldás

A sorozat az 5. tagig nő, aztán csökken (onnan kezdve mindig 1-nél kisebb számmal szorozzuk meg a korábbi tagot):

$$a_5 = 5 \cdot \frac{5^5}{5!}; \quad a_6 = 5 \cdot \frac{5^5}{5!} \cdot \frac{5}{6} = a_5 \cdot \frac{5}{6}; \quad a_7 = a_5 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{7};$$

$$\ldots \quad a_{10} = a_5 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{10}; \quad \ldots$$

Biztos, hogy korlátos, tehát van határértéke. Sőt, ha minden $n > 5$ esetén kicseréljük a törtes tényezőket az első törtre, akkor az aktuális értéknél nagyobbat kapunk:

Kisebb nevező, nagyobb érték.

$$a_n \leq a_5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}.$$

Így találunk a sorozatnál nagyobb, 0-hoz tartó mértani sorozatot ($|q| < 1$, a konstans szorzó kiemelhető):

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{n!} < \lim_{n\to\infty} 5 \cdot \frac{5^5}{5!} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 0.$$

Alkalmazva a rendőrelvet:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{n!} = 0.$$



Feladatok

1. Igazoljuk a 2.9. tétel 1. pontja alapján, hogy

ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n - b_n \to A - B$.

2. A 2.9-es tétel 2. része bizonyításának mintájára igazoljuk a 3. állítást:

ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ és minden megtartott tagra $b_n \neq 0$).

3. Határozzuk meg az alábbi (akár tágabb értelemben vett) határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5 + 6n - 10^{10}}{2n^5 + 9n^3 + 5}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 4n}{n^3 - 100n^2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4 + 19}{n^2 - 5n^3}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n^2}{n^2 - 5n}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{n+2} + 2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 5^{n+1} + 4n}$.

4. Határozzuk meg a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-5}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2} - n\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n+1} - \sqrt{n-5}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4+2n^2+5} - \sqrt{n^4-4n^2-1}\right)$.

5. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{10}{n}\right)^{n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+6}{n}\right)^{2n}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{1+3n}\right)^{n}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy $n > 2$ esetén $\sqrt[n]{n}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő. (Hívjuk segítségül az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nevezetes sorozatot.)

7. Lássuk be, hogy bármely $c > 0$-ra $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$.

8. Határozzuk meg $\sqrt[n]{a}$ sorozat határértékét. ($a > 0$, válasszuk szét az $a < 1$ és $1 < a$ eseteket.)



7. A Cauchy-féle konvergenciakritérium (kiegészítő anyag)

Mind a 2.10/*A*., mind a 2.10/*B*. definíció esetén probléma, hogy meg kell sejtenünk a határértéket annak későbbi igazolásához. A következő sorozattulajdonság segítségével a határérték kitalálása nélkül is eldönthetjük, hogy a sorozat konvergens-e vagy sem (hasonlóan a monoton, korlátos sorozatok konvergenciájáról szóló tételhez). Vegyük észre, hogy ha egy sorozat konvergens, akkor tagjai nemcsak a határértékhez kerülnek minden határon túl közelebb, hanem egymáshoz is!

2.13. Definíció: **Az $\{a_n\}$ sorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük, ha bármely pozitív ε-hoz megadható olyan ε-tól függő N küszöbszám, hogy bármely $n, m > N$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$.**

Cauchy-sorozat

Megjegyzés: A fenti tulajdonságot nevezzük Cauchy-tulajdonságnak is.

A definíció természetesen nem teljesül az $a_n = (-1)^n$ sorozatra, hiszen amennyiben n és m paritása különbözik, akkor $|1 - (-1)| = 2$, viszont így ha $\varepsilon < 2$, akkor $|a_n - a_m| > \varepsilon$. A Cauchy-tulajdonság szükséges és elégséges feltétele a sorozat konvergenciájának.

2.10. Tétel: **Egy sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.**

Cauchy-féle konvergenciakritérium

A bizonyítás I. része (szükségesség)

Állítjuk, hogy ha egy sorozat konvergens, akkor Cauchy-sorozat. Másképp: *minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat* vagy *a Cauchy-tulajdonság szükséges a konvergenciához.*

Általában a szükségesség bizonyítása könnyebb, de nem mindig. A „pontosan akkor" kitétel azt jelenti: „akkor és csak akkor".

A feltétel szerint $a_n \to A$. Így bármely ε-hoz, akár $\frac{\varepsilon}{2}$-höz is megadható olyan N, amelyre $n, m > N$ esetén

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \le |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Kihasználtuk a távolság harmadik tulajdonságát.



A bizonyítás II. része (elegendőség)

Azt állítjuk, hogy ha egy sorozat Cauchy-sorozat, akkor konvergens. A korlátosság a konvergencia szükséges feltétele. Első lépésben lássuk be, hogy a sorozat korlátos.

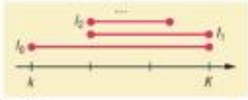
Mivel bármely $\varepsilon > 0$-hoz, ezért $\varepsilon = 1$-hez is létezik olyan N_1, amire ha $n, m > N_1$, akkor $|a_n - a_m| < \varepsilon = 1$.

Válasszunk egy rögzített m^* indexet, amelyre $m^* > N_1$. Ha még $n > N_1$ is teljesül, akkor $|a_n - a_{m^*}| < 1$. Írjuk fel ezt más formában, a környezet fogalmára támaszkodva:

$$a_{m^*} - 1 < a_n < a_{m^*} + 1.$$

Ne feledjük, hogy a_{m^*} egy rögzített érték! Ám ez azt jelenti, hogy ha $n > N_1$, akkor a sorozat majdnem minden tagja a két korlát közé esik. Ha a véges sok kívül eső tag közt nem találunk megfelelő korlátokat, akkor vegyük az $a_{m^*} - 1$, illetve az $a_{m^*} + 1$ értékeket. Így $k = \min(a_1, \ldots, a_{m^*} - 1)$ alsó, $K = \max(a_1, \ldots, a_{m^*} + 1)$ felső korlát lesz.

Megjegyzés: Az $a_{m^*} - 1$ akkor szükséges, ha a_{m^*}-nál nincs kisebb tag. Az $a_{m^*} + 1$ pedig, ha ennél nincs nagyobb. A gondolat megegyezik a 2.5-ös tételben látottal.



9. ábra

Így a sorozat minden tagja egy $I_0 = [k; K]$ közé esik. Harmadoljuk az I_0 intervallumot (9. ábra)! A két szélső intervallum közül csak az egyikben lehet a sorozatnak végtelen sok eleme, mert ha mindkettőben lenne, akkor az $\varepsilon = \frac{K-k}{3}$-t választva a sorozat a feltétellel ellentétben nem Cauchy-sorozat. Azt a szélső intervallumot, amelybe véges sok elem esik, elhagyjuk.



A tételt általában az úgynevezett Bolzano–Weierstrass-tétellel bizonyítják.

A maradék két szomszédos intervallum uniójával ismételjük meg az előbbi harmadolást! Kapjuk I_1-et. Tovább folytatva kapjuk I_2-t, I_3-t stb. Egymásba skatulyázott, zárt I_n intervallumokból álló sorozatot kapunk, egyetlen közös pontjuk van, mert a harmadolás miatt hosszuk 0-hoz tart. Legyen ez A. Mivel minden I_n intervallum tartalmazza a sorozat majdnem minden tagját, ezért az A pont a sorozat határértéke.

Megjegyzések:

1. A két konvergenciadefiníció utáni példában láttuk: minden q irracionális számhoz létezik olyan, csak racionális számokból álló $\{a_n\}$ sorozat, amelyre $a_n \to q$. Nyilvánvaló, hogy a racionális számok között az $\{a_n\}$ sorozatnak nincs határértéke. Azonban a Cauchy-féle konvergenciakritérium teljesül erre a sorozatra, hiszen bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N küszöbszám, hogy valahányszor $n, m > N$, mindannyiszor $|a_n - a_m| < 10^{-N} < \varepsilon$. Tehát játékterünket leszűkítve a valósakról a racionális számokra, azt kell mondanunk: az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat, ám nincs határértéke.

   A helyzet komoly: *a 2.10-es tételben megfogalmazott Cauchy-féle konvergenciakritérium nem minden általunk ismert metrikus térben igaz.* Hiszen az előbb igazoltuk! Hogy lehetséges ez? Úgy, hogy a racionális számok halmaza nem teljes, de a valós számoké igen.

Teljes a távolságfogalommal rendelkező halmaz (metrikus tér), ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.

2. A határérték fogalmát általánosíthatjuk. Például az $a_n = (-1)^n$ sorozat bármely páros tagú részsorozata +1-hez, páratlan tagú részsorozata –1-hez konvergál, maga a sorozat azonban nem konvergens. Nem teljesül rá a 2.10/A definíció, hiszen mindkét érték bármely $\varepsilon < 0{,}5$ sugarú környezetét tekintve, a környezeteken kívül is végtelen sok tagot találunk. Úgy oldhatjuk fel a problémát, hogy a definícióból egyszerűen elhagyjuk a „véges sok tag esik a környezeten kívül" kitételt. Természetesen az így kapott fogalom már nem határérték, más nevet kell kitalálnunk: torlódási pontnak hívjuk. Tehát az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja T valós szám, ha T bármely környezetébe beleesik a sorozat végtelen sok tagja. Természetesen minden határérték egyben torlódási pont is.

A Bolzano–Weierstrass-tétel igazolásában jut szerephez pl. az oroszlánfogás módszere.

3. Két tételt érdemes megemlíteni a torlódási pontokkal kapcsolatban.

2.11. Bolzano–Weierstrass-tétel: Korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Bolzano–Weierstrass-tétel

2.12. Tétel: Ha egy korlátos sorozatnak csupán egy torlódási pontja van, akkor az egyben a sorozat határértéke is.

korlátos sorozat torlódási pontja



8. Végtelen sorok

Eddig a sorozatok olyan tulajdonságaival foglalkoztunk, melyek a tagok egymás közötti viszonyaira épülnek. (Monoton növő, ha az egymás után következő tagok egyre nagyobbak, konvergens, ha bizonyos tagok különbsége elég kicsi stb.) Eddigi vizsgálataink során egyszer sem vettük egyszerre figyelembe a sorozat összes tagját. Tegyük most meg: próbáljuk őket összeadni!

végtelen valós számsor

2.14. Definíció: **Az $\{a_n\}$ sorozat tagjaiból képezett $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ végtelen sok tagot tartalmazó „formális" összeget *végtelen valós számsornak* nevezzük.**

Jelölése: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Megjegyzések: A fenti összeget röviden végtelen sornak is szokás nevezni. Nem kell mindig az első tagtól összegezni az elemeket, sőt akár egy részsorozatnak is képezhetjük az összegét.

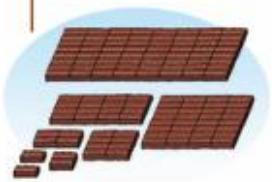
Vizsgáljunk meg egy konkrét sorozatot: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Kezdjük el összeadogatni a tagjait, S_i-vel jelölve az aktuális részösszeget:

$$S_1 = a_1 = 1; \quad S_2 = a_1 + a_2 = 1{,}5; \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1{,}75.$$

Úgy tűnik, az összeg egyre nagyobb lesz. Tekintsünk nagyobb n-eket:

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} \approx 1{,}998; \quad S_{15} \approx 1{,}999.$$

S_{100}-ra a számológép 2-t ír ki, innentől kezdve mindig 2 lesz az eredmény. Úgy tűnik, hogy akár végtelen sok tagot is összeadva, az ebből nyert sor összege nem lesz nagyobb 2-nél.



A mértani sorozat első n tagjának összegképletébe helyettesítve:

$$S_n = 1 \cdot \frac{0{,}5^n - 1}{0{,}5 - 1} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Ha $n \to \infty$, akkor a tört tart 0-hoz, azaz $S_n \to 2$ alulról. Egyre több tagot összeadva, az összeg minden határon túl megközelíti a 2-t. Jogosnak tűnik, ha azt mondjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2.$$

Hogyan döntsük el egy tetszőleges sorról, hogy – hasonlóan a fenti példához – van-e olyan valós szám, amit az „összegének" nevezhetnénk? Példánkból kiindulva általában is képezhetjük az

$$S_1 = a_1; \quad S_2 = a_1 + a_2; \quad \ldots; \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n; \quad \ldots$$

részletösszegeket, így tulajdonképpen egy $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ sorozatot rendelünk minden egyes sorhoz. Ez fordítva is igaz, minden egyes sorozathoz tudunk sort rendelni a tagjait megadva ($a_1 = S_1$ és $a_n = S_n - S_{n-1}$, ha $n \geq 2$).



konvergens végtelen valós számsor

2.15. Definíció: **Egy valós $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor *konvergens*, ha a részletösszegeiből képezett S_n sorozat konvergens. A sor összegén a részletösszeg-sorozat határértékét értjük.**

Jelölése: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$

1. példa

Számítsuk ki a $b_n = 1$ sorozatból képezett sor összegét.

Megoldás

A $b_n = 1$ sorozatból képezett sornak nincs összege, hiszen ekkor $S_n = n \to \infty$.

2. példa

Számítsuk ki a $c_n = (-1)^n$ sorozatból képezett sor összegét.

Megoldás

A $c_n = (-1)^n$ sornak sincs összege:

$$S_1 = S_3 = \ldots = S_{2k+1} = \ldots = -1; \quad S_2 = S_4 = \ldots = S_{2k} = \ldots = 0.$$

◆ ◆ ◆

A definíció előtti példából úgy sejtjük, hogy mértani sornak akkor lehet összege, ha $0 < |q| < 1$. (Ha $q > 1$, akkor biztosan nincs.)

konvergens mértani sor

2.13. Tétel: **A $\sum_{i=0}^{\infty} a_1 \cdot q^i$ sor pontosan akkor konvergens, ha $0 < |q| < 1$. Ekkor összege $S = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$.**

Bizonyítás

Vegyük a részletösszeg-sorozatokat:

$$S_1 = a_1; \quad S_2 = a_1 + a_1 \cdot q; \quad \ldots; \quad S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad \ldots$$

A tételben kihasználtuk a mértani sorozat első n tagjának összegét, illetve a konvergens sorozatokra vonatkozó fogásokat és összefüggéseket.

Keressük definíció szerint S_n sorozat határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \cdot \left[\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right] = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}.$$

Először kiemeltük az n-t nem tartalmazó tényezőket, majd kettéválasztottuk a határértékeket. A második limesz 0, mivel $0 < |q| < 1$, így az első tag adja meg a sor összegét.

3. példa

Határozzuk meg a mértani sor összegét, ha

a) $a_1 = 8,\ q = 0{,}5$; *b)* $c_1 = 2,\ c_2 = 1{,}5$;

c) $d_5 = 1,\ q = -\frac{1}{2}$; *d)* $e_4 = 8,\ e_5 = 12$.

Megoldás (a)

$$S = 8 \cdot \frac{1}{1 - 0{,}5} = 16.$$

Megoldás (b)

$$q = \frac{c_2}{c_1} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad S = 2 \cdot \frac{1}{0{,}25} = 8.$$

Megoldás (c)

$$1 = d_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4, \quad \text{azaz} \quad d_1 = 16 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{16}{1 + 0{,}5} = \frac{32}{3}.$$

Megoldás (d)

Mivel

$$q = \frac{e_5}{e_4} = \frac{12}{8} > 1,$$

ezért a sor nem konvergens.

4. példa

Mennyi a mértani sor hányadosa, ha $a_1 = 6$ és a sorösszeg $S = 600$?

Megoldás

$$600 = 6 \cdot \frac{1}{1 - q}, \quad \text{innen} \quad q = 0{,}99.$$

Sorokhoz kapcsolódó érdekességek

Racionális számok tört alakja

A 2.13. tétellel igazolhatjuk, hogy minden racionális szám felírható két egész szám hányadosaként.

5. példa

Határozzuk meg a $0{,}\dot{1}3\dot{2}$ végtelen szakaszos tizedestört tört alakját.

Megoldás

A tizedestört másképp felírva:

$$0{,}\dot{1}3\dot{2} = 132 \cdot 10^{-3} + 132 \cdot 10^{-6} + 132 \cdot 10^{-9} + \ldots$$

Ekkor $a_1 = 132 \cdot 10^{-3}$, $q = 10^{-3}$. Az összeg:

$$S = \frac{132}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{132}{999} = \frac{44}{333}.$$

Megjegyzés: Az eljárást bármely végtelen, szakaszos tizedestört esetén elvégezhetjük.

Filozófiai problémák



Legutóbbi tételünk segítségével pontot tehetünk egy sokáig húzódó vita végére is.

6. példa

Az eleai Zenon (Kr. e. 490 – Kr. e. 430) azt állította, hogy a mitológiából ismert gyors lábú Akhilleusz sohasem éri utol a 100 méter előnyt kapott teknősbékát, hiába fut 10-szer gyorsabban nála. Szerinte, amíg Akhilleusz 100 métert tesz meg, addig a teknős 10-et, amíg Akhilleusz ezt a 10 métert megteszi, addig a teknős 1 métert tesz meg és így tovább. Mindig marad közöttük egy kis távolság a teknős javára, legalábbis Zenon szerint.

Megoldás

A feladat a $100 + 10 + 1 + 0{,}1 + \ldots$ mértani sor összegének meghatározását kívánja. Ha a sornak van összege, akkor az ennek megfelelő méter után fogja utolérni Akhilleusz a teknőst. A mértani sor hányadosa:

$$q = \frac{v_{\text{teknős}}}{v_{\text{Akhilleusz}}} = 0{,}1 \qquad (0 < q < 1),$$

első tagja $a_1 = 100$, az összeg:

$$S = 100 \cdot \frac{1}{1 - 0{,}1} = \frac{1000}{9}.$$

Akhilleusz 111,2 méternél már meg is előzte a teknőst.

Megjegyzés: A feladatot a mai fizikai fogalmakkal sokkal egyszerűbben is meg tudjuk oldani. Jelölje x azt az utat, amelyet a teknős megtesz, míg Akhilleusz utoléri. Ha $v_{\text{teknős}} = 1$ és $v_{\text{Akhilleusz}} = 10$, akkor a találkozásukig eltelő idő azonos (egyszerre indultak): $t = \frac{x}{1} = \frac{100 + x}{10}$.

• • •

Zenon számos ilyen szellemes paradoxont leírt, velük akár egy egész könyvet is megtölthetnénk. Az ő nevéhez fűződik az itt megbújó indirekt bizonyítás. Mindenki azt teszi fel, hogy Akhilleusz utoléri a teknőst, ő pedig ennek az ellenkezőjét bizonyítja. Bizonyos antinómiáival a mozdulatlanságot, az állandóságot kívánja bizonyítani. Felteszi például a kérdést: hol a mozgást végző test? Ott mozog, ahol van, vagy ott mozog, ahol nincs? Ahol van, ott nem mozoghat, mert akkor nem lenne ott. Ahol nincs, ott meg végképp nem mozoghat. Ebből arra következtet, hogy nincs mozgás.



A középiskolai tananyag nem teszi lehetővé, hogy a sorok elméletét mélyebben megvizsgáljuk. Egy szükséges feltételt azonban mindenképpen illik megemlíteni.

konvergens sor
általános tagja
0-hoz tart

2.14. Tétel: **Ha egy végtelen valós számsornak van véges összege, akkor általános tagja 0-hoz tart.**

Jelekkel: Ha $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$, **akkor** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bizonyítás

Mivel $a_1 = S_1$ és $n \geq 2$-re $a_n = S_n - S_{n-1}$, így $S_{n-1} = S_n - a_n$, ha $n \geq 2$. Ekkor $S_n \to S$ és $S_{n-1} \to S$, ugyanis S_{n-1} az S_n részsorozata. Azonban így a 2.9-es tétel miatt:

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$$

Láttuk, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i$ sornak nincs összege. Ez a tételből azonnal következik, mivel általános tagja nem tart a 0-hoz. A tételben „elégségesség" sajnos nem áll fenn, mert pl. a $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$ sornak nincs összege, bár általános tagja 0-hoz tart. Ennek bizonyításához képezzük a részletösszeg-sorozatok egy részsorozatát:

$$S_{1^0} = S_{2^0} = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_{2^0} = S_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_{3^0} = S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 4 \cdot \frac{1}{2}; \quad \ldots$$

Elégséges feltételt könnyen tudunk adni azonos előjelű sorozatoknál, ha megköveteljük, hogy a részletösszeg-sorozatok legyenek korlátosak.

Igazolható, hogy

$$S_{k^0} = S_{2^k} \geq (k+2) \cdot \frac{1}{2} \to \infty.$$

Ebben az esetben $S_{n^0} \to \infty$, így a részletösszeg-sorozatoknak nincs határértéke.

7. példa

Igazoljuk binomiális tétellel, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat felső korlátja a $K = 3$.

Megoldás

A bizonyításhoz szükségünk van három egyszerű megállapításra.

(1) A binomiális együtthatót növeljük, ha a számlálóban minden tényezőt n-re cserélünk:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

(2) Az biztos, hogy $1! = 2^0$ és $2! = 2^1$. Tekintsük a következő egyszerű egyenlőtlenségeket: $2 \geq 2$; $3 \geq 2$; $4 \geq 2$; …; $k \geq 2$. A bal és jobb oldalak szorzatából kapjuk, hogy $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k \geq 2^{k-1}$. A fentiek alapján általában kimondhatjuk, hogy bármely $k \in \mathbb{N}$-re: $k! \geq 2^{k-1}$.

(3) Az (1) összefüggésre alkalmazva (2)-t, tovább árnyalhatjuk a binomiális együtthatót:

$$\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}.$$

Fejtsük ki binomiális tétellel a sorozatban szereplő zárójelet (az 1 hatványait elhagytuk):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n <$$

$$< 1 + \frac{n^1}{2^0}\cdot\frac{1}{n^1} + \frac{n^2}{2^1}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n^3}{2^2}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n^n}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ha $n \to \infty$, akkor a törtek 2 összegű mértani sort alkotnak (korábban láttuk). Azaz:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3.$$

Geometriai alkalmazások

8. példa

Tekintsünk egy szabályos háromszöget, majd harmadoljuk minden oldalát. A középső harmadokra írjunk kifelé újabb szabályos háromszögeket. Az előbbi lépést ismételjük meg most már ezen alakzat oldalaival: harmadoljuk mindet, majd írjunk a középső harmadokra kifelé szabályos háromszögeket. Most képzeletben folytassuk ezt a tevékenységet a végtelenségig. Vajon mekkora a kialakuló alakzat területe és kerülete?

A végső formát Koch-féle hópehelynek nevezik. Niels Fabian Helge von Koch svéd matematikus 1904-ben írta le az alakzatot.

Megoldás

A 10. ábrán az első, második, harmadik lépésben kapott alakzatot látjuk. Érezzük, hogy a forma területe nem növekszik a lépésszámmal együtt minden határon túl. De mi a helyzet a kerülettel?

10. ábra



Legyen a kiinduló háromszög oldala a. Az első állapotban a kerület: $K_1 = 3a$. A második formában minden szakasz harmada az előzőnek, azonban minden régi szakaszon négy új keletkezik: $K_2 = 3a \cdot \frac{4}{3}$. A következő lépésben, majd utána mindig ugyanez történik:

$$K_3 = 3a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2, \quad K_4 = 3a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3, \quad \ldots,$$

$$K_n = 3a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}, \quad \ldots$$

Tehát $\{K_n\}$ egy $q = \frac{4}{3} > 1$ kvóciensű mértani sorozat, ami tágabb értelemben konvergens, $K_n \to \infty$.

Lássuk a területet! A kiinduló háromszög területe legyen $T_1 = t$. Az első lépésben a ráírt kis háromszögek területe kilencede t-nek, viszont rögtön három darab van: $T_2 = t + 3 \cdot \frac{t}{9}$ (minden oldal „növeszt" magának egy újabb háromszöget). A második lépésben ismét minden szakasz növeszt egy újabb kis háromszöget: $T_3 = t + 3 \cdot \frac{t}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{t}{9^2}$. Így tovább, újra meg újra. Alakítsuk át az n-edik tagot:

$$T_n = t + 3 \cdot \frac{t}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{t}{9^2} + 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{t}{9^3} + \ldots + 3 \cdot 4^{n-2} \cdot \frac{t}{9^{n-1}} =$$

$$= t \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \ldots + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right].$$

A végső alakzatra vagyunk kíváncsiak, így

$$T = \lim_{n \to \infty} T_n = \lim_{n \to \infty} t \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \ldots + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= t + t \cdot \frac{3}{4} \cdot \lim_{n \to \infty} t \cdot \left[\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right].$$

A zárójelben álló végtelen sor $q = a_1 = \frac{4}{9} < 1$ kvóciensű, konvergens mértani sor. Összegére

$$T = t + t \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = t + t \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{5} t.$$

Megjegyzések: A Koch-féle hópihét határoló görbe nem elég, hogy végtelen hosszú és mégis véges területet határol, ráadásul minden pontjában meg is törik. Sőt, bármilyen kis részletet is tekintünk belőle, az hasonló az egészhez: *önhasonló alakzatot*, más néven egy elég speciális *fraktált* kaptunk. Fraktálokkal nem tisztünk foglalkozni e könyv lapjain, de mindenkinek ajánljuk az interneten való kutakodást. Érdemes!

Feladatok

1. Határozzuk meg a következő mértani sorok összegét, ha létezik és véges.

   a) $a_1 = 100,\ q = 0{,}2;$ *b)* $b_1 = -8,\ q = \frac{3}{4};$

   c) $c_1 = 8,\ c_3 = 2;$ *d)* $d_1 = -60,\ q = -\frac{1}{3}.$

2. Mennyi a mértani sor összege, ha ismerünk két részletösszeget: $S_2 = 6,\ S_3 = 7$?

3. Írjuk fel egészek hányadosaként a $0{,}\dot{5}432\dot{1}$ és a $13{,}12\dot{3}\dot{4}$ tizedes törteket.

4. Bizonyítsuk be teljes indukcióval a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ sor vizsgálatánál megfogalmazott sejtést.

5. Vegyünk egy szabályos háromszöget $(\triangle_1)$, majd távolítsuk el a középvonalai által alkotott háromszög belsejét $(\triangle_2)$. Tegyük ezt meg újra a fennmaradó három háromszöggel $(\triangle_3)$, majd ezt ismételjük a végtelenségig. A keletkezett alakzat neve Sierpinski-háromszög (1915-ben konstruálta Waclaw Franciszek Sierpinski lengyel matematikus). Mekkora az eltávolított részek területe? Mekkora az összes berajzolt középvonalak hossza?



FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

1. Monoton, korlátos, periodikus függvény

Az előző fejezetben számsorozatokkal, speciális függvényekkel foglalkoztunk. Jelen fejezetben azt vizsgáljuk, hogy ha a sorozatok értelmezési tartományát bővítjük – azaz nem szűkítjük le a pozitív egészek halmazára, hanem megengedjük, hogy az értelmezési tartomány akár a valós számok, akár annak bármely részhalmaza lehessen –, akkor megmaradnak-e a sorozatoknál vizsgált tulajdonságok, illetve hogyan kell őket módosítani.

Azon függvényeket, melyek értelmezési tartománya és értékkészlete is $\mathbb{R}$ (vagy valamely részhalmaza), *valós függvényeknek* nevezzük.

A függvényekkel kapcsolatos alapfogalmakra és a függvénytranszformációkra külön nem térünk ki, megtalálhatók a 9.-es könyv 80. oldalától.

Nagyon figyeljünk rá, hogy függvényt csak az értelmezési tartományán vizsgálhatunk! Abban a pillanatban, amikor leírjuk az $f(x)$ jelsort, tudnunk kell, hogy $x \in D_f$. Ugyanis ha ez nem teljesül, akkor nincs értelmezve az $f(x)$ kifejezés. Figyeljük meg, hogy tételeinket, definícióinkat mindig ennek megfelelően fogalmazzuk meg. (A sorozatoknál erre nem kellett odafigyelnünk.)



Monotonitás

Már az általános iskolában érzékeltetik, mit jelent a monoton növekedés és a monoton csökkenés.

3.1. Definíció: **Az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának I részhalmazán *szigorúan monoton növő*, ha minden $x_1 < x_2 \in I$ esetén fennáll, hogy $f(x_1) < f(x_2)$.**

A függvény *monoton növő* $I \subseteq D_f$-en, ha minden $x_1 < x_2 \in I$-re $f(x_1) \leq f(x_2)$.

szigorúan monoton növő függvény

monoton növő függvény

Megjegyzés: Az I részhalmaz általában intervallum. Hasonlítsuk össze ezt a sorozatok megfelelő, 2.6-os definíciójával! A sorozatoknál nem tettük fel, hogy $n < (n+1)$ és azt sem, hogy az n-edik és $(n+1)$-edik helyen van a sorozatnak eleme. A 3.1. definíció a sorozatoknál használtnál általánosabb, ezért ezeket a kikötéseket meg kell tenni. Hasonlóan kimondható a monoton csökkenő és szigorúan monoton csökkenő függvény definíciója.

1. példa

Vizsgáljuk meg az $f(x) = ax + b$ függvény monotonitási viszonyait.

Megoldás

A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, $D_f = \mathbb{R}$.

Az $f(x)$ szigorúan monoton növő, ha $a > 0$. Ugyanis legyen tetszőleges $x_1 < x_2$. Szorozva $a > 0$-val mindkét oldalt: $ax_1 < ax_2$, majd b hozzáadásával: $f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$.

Hasonlóan: $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő, ha $a < 0$. Az $a = 0$ esetben teljesíti mind a monoton növekedés, mind a monoton csökkenés definícióját, hiszen $f(x_1) = 0 \cdot x_1 + b = 0 \cdot x_2 + b = f(x_2)$.

2. példa

Vizsgáljuk meg a $g(x) = \frac{1}{x}$ függvény monotonitási viszonyait.

Megoldás

A függvény értelmezési tartománya $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

A $]-\infty; 0[$-on $g(x)$ szigorúan monoton csökken, hiszen $x_1 < x_2 < 0$ esetén kétszer osztva negatív számmal, az egyenlőtlenség visszafordul: $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$. Hasonló a helyzet $0 < x_1 < x_2$ esetén, ekkor a jel egyszer sem fordul: $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$. Mind $]-\infty; 0[$-on, mind $]0; \infty[$-on szigorúan monoton csökken a függvény.

Megjegyzés: Az $x_1 < 0 < x_2$ értékekre bár $\frac{1}{x_2} > \frac{1}{x_1}$, ám nincs olyan intervallum, amelynek bármely két pontjára igaz lenne az összefüggés.

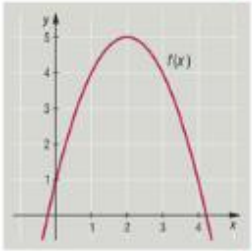
Korlátosság

Bizonyos függvények nem nőnek valamely érték fölé, vagy nem csökkennek alá.

felülről korlátos függvény

3.2. DEFINÍCIÓ: Az $f(x)$ függvény *felülről korlátos*, ha megadható $K \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq K$.

Hasonlóan definiálható az alulról korlátos függvény fogalma. A korlátosság fogalma pedig pontosan megegyezik a sorozatoknál említettel. Függvényeknél a sorozatokhoz hasonlóan értelmezhetjük a határ fogalmát: függvény alsó határa a legnagyobb alsó korlátja, illetve függvény felső határa a legkisebb felső korlátja.



1. ábra

3. példa

Igazoljuk, hogy az $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ függvény felülről korlátos. Adjuk meg a felső határát.

Megoldás

$D_f = \mathbb{R}$. A függvény ún. lefelé nyíló parabola (*1. ábra*), felülről tehát korlátos.

Felső határának megkereséséhez alakítsuk teljes négyzetté tevemódszerrel:

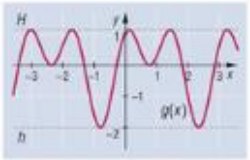
$$f(x) = -x^2 + 4x - 4 + 4 + 1 = -(x-2)^2 + 5.$$

A zárójeles kifejezés nemnegatív, tehát a felső határra $H = 5$ adódik.



4. példa

Igazoljuk, hogy a $g(x) = \sin(2x) + \cos(4x)$ függvényre $H = 1{,}125$ és $h = -2$. *(2. ábra)*



2. ábra

Megoldás

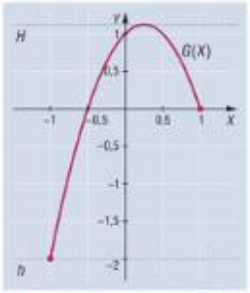
$D_g = \mathbb{R}$. Alakítsuk át addíciós tételekkel:

$$g(x) = \sin(2x) + \cos(2 \cdot 2x) = \sin(2x) + \cos^2(2x) - \sin^2(2x) =$$
$$= \sin(2x) + 1 - \sin^2(2x) - \sin^2(2x) = -2\sin^2(2x) + \sin(2x) + 1.$$

Vezessük be az $X = \sin(2x)$ jelölést, így a

$$G(X) = -2X^2 + X + 1$$

kifejezést kapjuk. Ennek maximuma a zérushelyek között félúton, $X = 0{,}25$-nál van. Értéke $H = G(0{,}25) = 1{,}125$. Mivel $-1 \le \sin(2x) \le 1$, ezért $G(X)$ értelmezési tartománya $[-1; 1]$. Ezen minimumát $X = -1$-nél veszi fel, $G(-1) = -2 = h$. *(3. ábra)*



3. ábra

Megjegyzés: Nem kérdeztük, hogy $g(x)$ hol veszi fel határait. Ha a szélsőérték helyét is meg akarjuk határozni, meg kell oldanunk a $\sin(2x) = 0{,}25$, illetve $\sin(2x) = -1$ egyenleteket.

Periodikusság

Vannak függvények, melyek ismétlik önmagukat. Már kilencedik osztályban találkoztunk ilyen függvénnyel.

3.3. Definíció: Az $f(x)$ függvényt *periodikusnak* nevezzük, ha létezik úgy $p \in \mathbb{R}^+$, hogy bármely $x \in D_f$ esetén $(x \pm p) \in D_f$ és $f(x) = f(x \pm p)$. Ha van legkisebb ilyen p szám, akkor azt (alap)periódusnak nevezzük.

periodikus függvény

5. példa

Periodikus-e az $f(x) = \{x\}$ függvény?

Megoldás

Az $f(x) = \{x\}$ törtrészfüggvény periodikus, alapperiódusa $p = 1$.

6. példa

Mi a periódusa a trigonometrikus függvényeknek?

Megoldás

A trigonometrikus függvények periodikusak: a szinusz és koszinusz $p = 2\pi$, míg a tangens- és kotangensfüggvények $p = \pi$ alapperiódussal:

$$\sin x = \sin(x \pm 2\pi), \quad \cos x = \cos(x \pm 2\pi),$$
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x \pm \pi), \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x \pm \pi).$$

Definíciójuk a forgómozgásra épül.



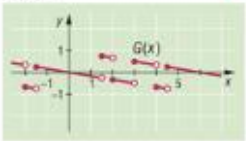
7. példa

Periodikus-e az $f(x) = c$ függvény?

Megoldás

Bármely $f(x) = c$ konstans függvény periodikus. Azonban nincs alapperiódusa, hisz bármely kicsi pozitív p számot a változóhoz adva fennáll $f(x \pm p) = c = f(x)$.

4. ábra



Megjegyzés: Hamarosan foglalkozunk függvényekkel végzett műveletekkel. Addig is említsük meg, hogy ha f és g két eltérő, p_f és p_g alapperiódusú függvény, melyekre $\frac{p_f}{p_g}$ racionális, akkor összegük, különbségük is periodikus.

Például $F(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$ periódusa $p = 2\pi$, $G(x) = \left\{\frac{1}{2}x\right\} - \left\{\frac{2}{3}x\right\}$ periódusa pedig $p = 6$. ***(4. ábra)***

Feladatok

1. Mondjuk ki az $I \subseteq D_f$ halmazon monoton csökkenő és szigorúan monoton csökkenő $f(x)$ függvény definícióját.
2. Igazoljuk, hogy az $f(x) = |x| - |x - 1|$ monoton növő.
3. Vizsgáljuk meg az $f(x) = a(x + b)^3 + c$ monotonitási viszonyait a paraméterek függvényében.
4. Mondjuk ki pontosan az alulról korlátos, illetve korlátos függvény fogalmát.
5. Korlátos-e alulról vagy felülről a $g(x) = 4x^2 + 2x - 1$ függvény? Adjuk meg a határait.
6. Korlátos-e az $f(x) = |2x + 1| - |2x + 4|$ függvény? Adjuk meg a határait.
7. Határozzuk meg az $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$ függvény periódusát.
8. Legyen f és g két periodikus függvény és f-nek p, g-nek q az alapperiódusa ($p, q \in \mathbb{Q}^+$). Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f(x) \pm g(x)$ is periodikus, mégpedig periódusa a két periódus legkisebb közös többszöröse.



2. Függvény határértéke I. Véges helyen vett határérték

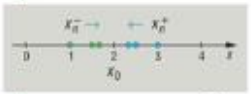
A monotonitást és a korlátosságot eddigi tanulmányaink során már megismertük. Vajon a sorozatoknál megismert határérték fogalma kiterjeszthető-e a sorozatnál általánosabb valós függvényekre? Első lépésként lássunk három egyszerű példát.

1. példa

Legyen $f(x) = 2x - 1$. Határozzuk meg az $x_0 = 2$ $(\in D_f)$ helyen a függvény „határértékét".

Megoldás

$D_f = \mathbb{R}$. Tekintsünk az értelmezési tartomány pontjaiból álló olyan x_n^+ sorozatot, amelynek 2 a határértéke. Ilyet viszonylag könnyen készíthetünk, pl. $x_n^+ = 2 + \frac{1}{n}$. Tudjuk, hogy $n \to \infty$ esetén $\frac{1}{n} \to 0$. Válasszunk egy másik, x_n^--szal jelölt sorozatot, legyen pl. $x_n^- = 2 - \frac{1}{n}$.



5. ábra

Bármilyen x_0-hoz végtelen sok, hozzá konvergáló sorozat készíthető. Bevett eljárás, hogy először az $x_0 \pm \frac{1}{n}$ sorozattal próbálkozunk.

Szokták x_n^+-t jobb oldali, x_n^--t bal oldali közelítő sorozatnak nevezni, mivel $x_n^+ > x_0$ és $x_n^- < x_0$ minden n-re. **(5. ábra)**

A sorozatok tehát tartanak 2-höz. Vajon a megfelelő tagokhoz tartozó függvényértékekkel mi a helyzet? Azaz: $f(x_n^+)$ és $f(x_n^-)$ tart-e valahova?

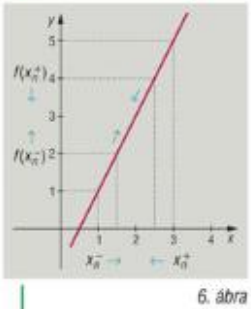
A függvény az x_n^+ sorozat értelmezési tartományba eső pontjaiban (ahol $x_n^+ \in D_f$ – azaz mindenhol) $f(x_n^+) = 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) - 1$ értékeket veszi fel.

Vizsgáljuk meg ezen újabb sorozat határértékét:

$$\text{ha} \quad x_n^+ \to 2, \quad \text{akkor} \quad f(x_n^+) \to \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

Ezt egyszerűen, a sorozatoknál tárgyalt módon meghatározva 3 adódik. Tehát ha $x_n^+ \to 2$, akkor $f(x_n^+) \to 3$. Ezt kapjuk x_n^- sorozatra is:

$$\text{ha} \quad x_n^- \to 2, \quad \text{akkor} \quad f(x_n^-) \to \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) - 1 = 3.$$



6. ábra

Azt tapasztaljuk, hogy a jobb oldali és a bal oldali függvényértékek sorozata ugyanahhoz az értékhez tart. Ráadásul ez a függvény $x_0 = 2$ pontban felvett helyettesítési értékével egyenlő, hiszen $f(2) = 3$. **(6. ábra)**

A példában egy sorozattal tartottunk az adott ponthoz, közben pedig figyeltük a függvényértékek sorozatát. A példabeli függvény értelmezve volt mindenütt, így a kérdéses pontban is. Következő példánkban a függvény határértékét olyan helyen keressük, ahol nincs értelmezve. Mivel most is szeretnénk képezni a függvényértékek sorozatát, szükséges, hogy ez a hely ne szerepeljen a közelítő sorozat elemei között sem. (A feltétel az 1. példában is teljesült, csak nem volt *fontos*.)

2. példa

Hogyan viselkedik a $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ függvény az $x_0=1$ pont közvetlen környezetében?

Megoldás

$D_g=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Figyelembe véve az előző bekezdésben megfogalmazott feltételt, tekintsük felső és alsó közelítő sorozatnak az

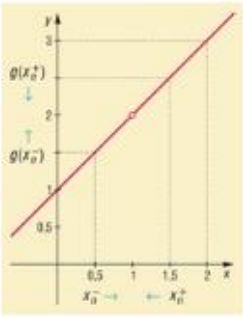
$$x_n^+=1+\frac{1}{n} \quad \text{és} \quad x_n^-=1-\frac{1}{n}$$

sorozatokat. Ekkor természetesen teljesül, hogy minden n-re $x_n^+, x_n^- \neq 1$ és $x_n^+, x_n^- \in D_g$. Vizsgáljuk meg, hogy a hozzájuk tartozó függvényértékek sorozata tart-e valamilyen értékhez:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n^+)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2;$$

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n^-)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2-1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2.$$

Azt tapasztaljuk, hogy bár a függvény az $x_0=1$ helyen nincs értelmezve, mégis a függvényértékek sorozata az $A=2$ értékhez tart. *(7. ábra)*



7. ábra

A $g(x)$ függvény megegyezik a $h(x)=x+1$ függvénnyel, kivéve az $x_0=1$ helyet.

3. példa

Hogyan viselkedik a $h(x)=\dfrac{1}{x}$ függvény az $x_0=0$ pont környezetében?

Megoldás

Függvényünk csak az $x_0=0$ pontban nincs értelmezve. Legyen a felső és alsó közelítő sorozat

$$x_n^+=\frac{1}{n} \quad \text{és} \quad x_n^-=-\frac{1}{n}.$$

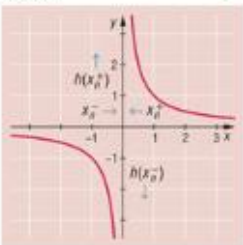
A függvényértékek sorozataira:

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n^+)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} n=\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n^-)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty.$$

A függvényértékekből álló sorozatoknak nem egyenlő, sőt nem is véges a határértéke. *(8. ábra)*

8. ábra





4. példa

Írjuk le $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ függvény viselkedését az $x_0 = 0$ pont környezetében.

Szignum-, magyarul előjelfüggvény.

Megoldás

$D_{\text{sgn}} = \mathbb{R}$, $R_{\text{sgn}} = \{-1; 0; 1\}$. $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

Legyen a felső és alsó közelítő sorozat

$$x_n^+ = \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad x_n^- = -\frac{1}{n}.$$

Ekkor $x_n^+ \to 0$ és $x_n^- \to 0$. Minden n-re $\operatorname{sgn}(x_n^+) = 1$ és $\operatorname{sgn}(x_n^-) = -1$, ezért $\operatorname{sgn}(x_n^+) \to 1$ és $\operatorname{sgn}(x_n^-) \to -1$. Az értékek sorozatainak véges, de nem egyenlő a határértéke – sőt, tőlük különbözik a felvett függvényérték is.

* * *

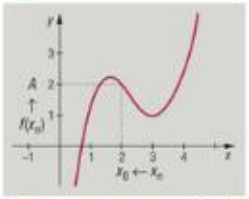
A példák mindegyikében a függvények határértékének keresésekor tartottunk egy valós számhoz kettő, az értelmezési tartomány elemeiből választott sorozattal. Megállapíthatjuk a következőket:

- A vizsgált hely nem feltétlenül az értelmezési tartomány eleme.
- A függvényérték-sorozatok tarthatnak ugyanazon véges értékhez, vagy nem.
- Ez az érték lehet akár a függvény helyettesítési értéke is.
- A függvényérték-sorozatok tarthatnak ∞-hez vagy $-\infty$-hez is.

Fogalmazzuk meg általánosan a példákban előkerülő fogalmakat!

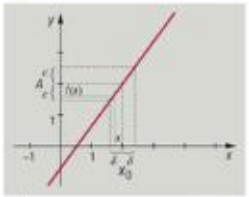
véges helyen vett határérték

3.4/A. Heine-féle definíció: Legyen $f(x)$ értelmezve x_0 valamely környezetében (kivéve esetleg az x_0 pontot). Az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett *határértéke A, ha minden olyan $x_n \to x_0$ sorozatra, melynek összes elemére $x_n\ (\neq x_0) \in D_f$, $f(x_n) \to A$.**



9. ábra

3.4/B. Cauchy-féle definíció: Legyen $f(x)$ értelmezve x_0 valamely környezetében (kivéve esetleg az x_0 pontot). Az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett *határértéke* A, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan ε-tól függő $\delta > 0$, hogy minden $x \in D_f$-re ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.



10. ábra

Annak jelölése, hogy A az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 pontban:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$



Figyeljük meg a definíciókat! Mindkettőben biztosítjuk, hogy a függvény értelmezve legyen ott, ahol a vizsgálatot végezzük. Mindkét definícióban kikötjük, hogy az x_0-t közelítő x-ek különböznek x_0-tól: Heine-féle definícióban $x_n\ (\neq x_0)$ formában, Cauchy-féle definícióban $0 < |x - x_0|$ formában.

A példákban láttuk, hogy A lehet $\pm\infty$ is, azonban ekkor a Cauchy-féle definíciót módosítanunk kell. Sőt, akár x_0-t is kicserélhetjük $\pm\infty$-re. Később visszatérünk mindkét módosításra.

Az első definíció előnye, hogy visszavezeti a függvény határérték-fogalmát a sorozat határértékére, és az ott megismert tételek kis módosítással érvényben maradnak. Hátránya, hogy az összes x_0-hoz tartozó sorozatot meg kellene vizsgálnunk. Mivel ezt nyilván nem tudjuk megtenni, ezért nem egy adott sorozatra végezzük el a vizsgálatot, hanem egy általános, semmilyen feltételt nem tartalmazó, viszont a definíció kikötésének eleget tevő x_n sorozatot választunk. A Cauchy-féle ε-t, δ-t tartalmazó meghatározás nehezebb, ám a mérnökképzésben utóbbit használják inkább.

Végül mondjuk ki tételként, hogy a két definíció egyenértékű. A bizonyítás menete hasonló a sorozat konvergenciadefiníciók egyenértékűségének bizonyításához, nem részletezzük.

definíciók ekvivalenciája

3.1. TÉTEL: A függvény adott pontbeli határértékének Heine- és Cauchy-féle definíciói ekvivalensek.

Feladatok

1. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények hogyan viselkednek az $x_0 = 3$ pont környezetében.

   a) $f(x) = x^2 - 4$;

   b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$;

   c) $h(x) = \dfrac{2}{x - 3}$;

   d) $i(x) = [x]$.



3. Függvény határértéke II. Jobb és bal oldali, végtelenben vett határérték

Korábbi példáinkban mindig az $x_n^+ = x_0 + \frac{1}{n}$ és $x_n^- = x_0 - \frac{1}{n}$ sorozatokat vizsgáltuk. Rájuk mindig $x_n^+ > x_0$ és $x_n^- < x_0$ teljesül. Miért ne vizsgálhatnánk külön-külön is az x_n^+ és x_n^- sorozatokhoz tartozó függvényérték-sorozatokat?

jobb oldali határérték

3.5/A. Definíció: **Az $f(x)$ függvénynek valós x_0 pontban *jobb oldali határértéke* A, ha f értelmezve van x_0 valamely I jobb oldali környezetében, és bármely $x_n^+ \in I$, $x_n^+ \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n^+) \to A$.**

bal oldali határérték

3.5/B. Definíció: **Az $f(x)$ függvénynek valós x_0 pontban *bal oldali határértéke* A, ha f értelmezve van x_0 valamely I bal oldali környezetében, és bármely $x_n^- \in I$, $x_n^- \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n^-) \to A$.**

Megjegyzés: Mindkét definíció biztosítja, hogy sem x_n^+, sem x_n^- egyetlen eleme sem lehet x_0. Az A határérték most is lehet $\pm\infty$.

Azért, hogy lássuk, nem öncélú fogalmakról van szó, tekintsük az alábbi két példát! Ezekben csupán féloldali határértéket vizsgálhatunk, ugyanis a függvény a kérdéses pontnak csak egyik oldalán létezik.

1. példa

Vizsgáljuk meg az $f(x) = \sqrt{x-2}$ függvény viselkedését az $x_0 = 2$ pont környezetében.

Megoldás

A függvény értelmezési tartománya $D_f = [2; \infty[$, tehát a kérdéses pontnak csak jobb oldali környezetében vizsgálható a függvény.

Ha $x_n^+ \to 2$, akkor $f(x_n^+) = \sqrt{x_n^+ - 2} \to 0$.

A jobb oldali határérték $A = 0$.

2. példa

Mit mondhatunk az $f(x) = \sqrt{3-x} + 1$ függvényről az $x_0 = 3$ pontban?

Megoldás

Mivel $D_g =]-\infty; 3]$, a kérdéses pontban csak bal oldali határérték van.

Ha pedig $x_n^- \to 3$, akkor $g(x_n^-) = \sqrt{3 - x_n^-} + 1 \to 1$.

A függvény bal oldali határértéke $A = 1$.



A féloldali határértékek és a korábban megismert határérték kapcsolatát mutatja be a következő tétel.

féloldali határértékek kapcsolata a határértékkel

3.2. TÉTEL: **Egy $f(x)$ függvénynek akkor és csak akkor van egy adott helyen határértéke, ha ott a jobb és bal oldali határérték is létezik, és azok egyenlők.**

Bizonyítás

A Heine-féle definíció miatt bármely függvénysorozatnak ugyanahhoz az értékhez kell tartania, így minden bal és minden jobb oldali sorozatnak is.

Ha pedig minden jobb és bal oldali sorozat egy A számhoz tart, akkor a „vegyes" sorozatok is, hiszen mind szétválasztható féloldali részsorozatokra. Tehát A határérték.

* * *

Vizsgáljuk meg újra jobb és bal oldali határértékek szempontjából bevezető példáinkat!

A 4. és 3. példánál a jobb és a bal oldali határérték nem volt egyenlő, így a függvénynek nincs határértéke.

A 2. példában a bal és jobb oldali határérték egyenlő volt, bár a függvény nem volt értelmezve a megadott pontban.

Az 1. példa bal és jobb oldali határértéke egyenlő volt, ráadásul megegyezett a függvény helyettesítési értékével. Ez utóbbi speciális eset, külön elnevezést is használunk majd rá.

A fejezet elején ígértük, hogy a sorozat tulajdonságait általánosítjuk valós-valós függvényekre. A sorozat, mint speciális függvény, határértékénél láttuk, hogy az $\mathbb{N}^+$ értelmezési tartományon választunk ki olyan végtelenhez tartó sorozatot, amelyhez tartozó $f(x_n) = a_n$ függvényértékek (a sorozat elemeinek) viselkedését vizsgáljuk.

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 1, & x_2 = 2 & x_3 = 3, & \ldots, & x_n = n & \to \infty \\ f(1) = a_1, & f(2) = a_2, & f(3) = a_3, & \ldots, & f(n) = a_n & \to ? \end{array}$$

Függvények esetén tetszőleges $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \to \infty$ sorozatot tekintünk, ahol $x_n \in D_f$. Kérdés, hogy a hozzájuk tartozó $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ függvényértékek tartanak-e valamilyen értékhez?

végtelenben vett határérték

A végtelenben vett függvényhatárérték fogalmát is kiterjeszthetjük tágabb értelemben konvergensre.

3.6. DEFINÍCIÓ: **Legyen $K \in \mathbb{R}$ olyan, amelyre minden $x > K$ esetén $f(x)$ értelmezve van. Az $f(x)$ függvénynek a ∞-ben ($-\infty$-ben) vett *határértéke* A, ha valahányszor $x_n \to \infty$ ($x_n \to -\infty$) és $x_n \in D_f$ minden n-re, mindannyiszor $f(x_n)$ függvényérték-sorozat tart A-hoz.**

Jelekkel: $\lim\limits_{x_n \to \infty} f(x_n) = A \quad \left(\lim\limits_{x_n \to -\infty} f(x_n) = A \right)$.



3. példa

Igazoljuk, hogy az $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+3$ függvény határértéke mind ∞-ben, mind $-\infty$-ben $A=3$.

Megoldás

Ha $x_n \to \pm\infty$, akkor $x_n - 2 \to \pm\infty$. Mindkét esetben $\dfrac{1}{x_n-2} \to 0$, vagyis $f(x_n) \to 3$.

4. példa

Igazoljuk, hogy a $g(x) = \sin x$ függvénynek $\pm\infty$-ben nincs határértéke.

Megoldás

Tegyük fel, hogy létezik egyetlen A érték, amihez a függvényértékek tartanak, ha $x_n \to \infty$.

Vizsgáljuk meg pl. az $x_n = 2n\pi$ esetet. Ekkor $g(x_n) = \sin(2n\pi) = 0 \to 0$.

Ezek szerint $A = 0$. Azonban ha $x_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, akkor $g(x_n) = 1 \to 1$!

Így nem tudunk egyetlen A értéket mondani, amihez *bármely* $x_n \to \infty$ esetén tartanak a függvényértékek, tehát a függvénynek nincs ∞-ben határértéke.

Ugyanígy látható be az állítás $-\infty$ esetén, ha az $x_n = -2n\pi$, illetve az $x_n = \dfrac{\pi}{2} - 2n\pi$ sorozatokat vizsgáljuk.

Megjegyzés: A $\sin x$ függvény $[-1; 1]$ értékkészletének bármely A eleméhez megadhatunk olyan $x_n \to \infty$ sorozatot, amire $g(x_n) \to A$.

Feladatok

1. Határozzuk meg
   a) az $f(x) = \lg x$ függvény $x_0 = 0$ pontban vett jobb oldali;
   b) a $g(x) = \sqrt{\cos x}$ függvény $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$-ben vett bal oldali határértékét.

2. Fogalmazzuk meg a 3.6-os definíció Cauchy-féle formáját.

3. Igazoljuk, hogy az $f(x) = \dfrac{\operatorname{sgn} x}{x}$ függvény határértéke mind ∞-ben, mind $-\infty$-ben $A = 0$.



4. Műveletek függvényekkel, összetett függvény

Ha összeadtunk, kivontunk stb. konvergens számsorozatokat, akkor azok összege, különbsége stb. a határértékek összegéhez, különbségéhez stb. konvergált. Mit tudunk mondani a függvényekről? Ahhoz, hogy a megismert függvényhatárértékekkel műveleteket tudjunk végezni, előbb értelmeznünk kell, mit értünk két függvény összegén, különbségén stb.

alapműveletek függvényekkel

3.7. DEFINÍCIÓ: Az f és g függvények *összegén, különbségén, szorzatán, hányadosán* értjük azt az $F(x)$ függvényt, amely minden $x_0 \in D_f \cap D_g$ esetén

- $F(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$,
- $F(x_0) = f(x_0) - g(x_0)$,
- $F(x_0) = f(x_0) \cdot g(x_0)$,
- $F(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$

(D_g-t le kell szűkítenünk $g(x_0) \neq 0$ helyekre).

$F(x)$ csak ott van értelmezve, ahol mindkét függvény egyszerre értelmezve van.

A szokványos műveletek mellett függvényekkel egy új műveletet is elvégezhetünk: több ismert függvény egymás utáni ismételt alkalmazását.

1. példa

Határozzuk meg az $f(x) = \lg(\sin x)$ függvény $x = \dfrac{\pi}{2}$ helyen felvett értékét. Vizsgáljuk és adjuk meg értelmezési tartományát.

Megoldás

A képlet szerint először a belső függvény (szinusz) értékét kell meghatároznunk: $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$. Ezek szerint a zárójelben álló érték 1, aminek vennünk kell a 10-es alapú logaritmusát: $\lg(1) = 0$. Tehát a függvény értéke a megadott helyen:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lg\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = \lg(1) = 0.$$

Nézzük általánosan! Milyen számokat írhatunk x helyére? Bármit biztosan nem, hiszen pl. $x = \dfrac{3\pi}{2}$ esetén $\sin x = -1$, de $\lg(-1)$ nincs értelmezve.

A belső szinuszfüggvény mindenhol értelmezve van, értékkészlete a $[-1; 1]$-ba eső számokat tartalmazza.

A külső logaritmusfüggvény csak a pozitív számokon van értelmezve.

Tehát a belső függvény értelmezési tartományának csak azon részét vehetjük a közös $f(x)$ értelmezési tartományának, ahol $\sin x$ értékei a $]0; 1]$ intervallum elemei. Vagyis

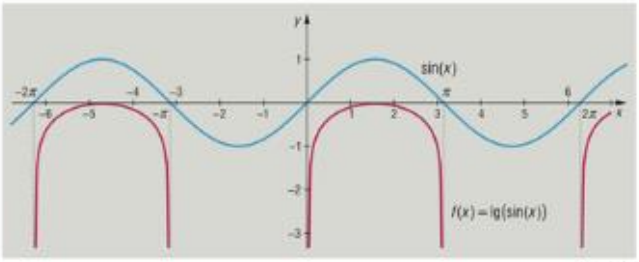
$$D_f =]0 + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi[.$$

Megjegyzés: A függvény értékkészletét nem kérdeztük, de a 3.4/A. definíció segítségével már meg is határozhatjuk. Ugyanis ha $x_n \to 0$, $x_n > 0$, akkor

$$\sin x_n \to 0 \quad \text{és} \quad f(x) = \lg(\sin x_n) \to -\infty.$$

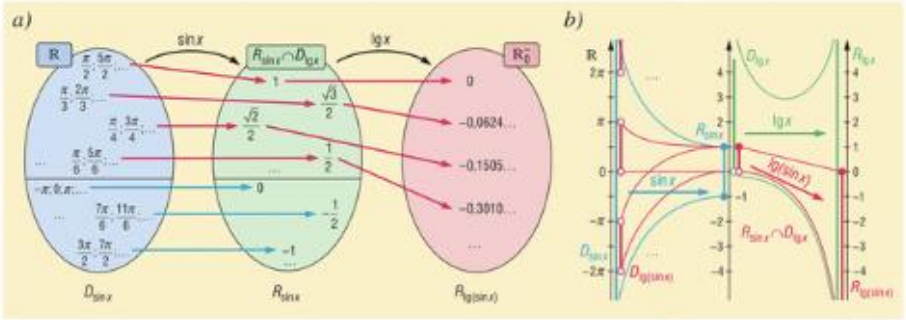
Tehát $R_f = \mathbb{R}_0^-$.

Ábrázoljuk egy rendszerben a belső függvényt és az összetett függvényt! ***(11. ábra)***



11. ábra

Emlékezzünk vissza, 9. évfolyamon Venn-diagrammal is ábrázoltuk a függvényeket. Az összetett $f(x)$ függvény-hozzárendelésben csak a pirossal jelölt kapcsolatok vesznek részt. ***(12/a. ábra)***



12. ábra

Most lássuk ugyanezt számegyeneseken! Kékkel jelöltük az $y = \sin x$ belső, zölddel az $y = \lg x$ külső függvényt. Piros szín jelzi egy szám útját, míg „feldolgozza" az $y = \lg(\sin x)$ összetett függvény ***(12/b. ábra)***. Vessük össze ezt az ábrát a függvény ábrájával!

A példával közelebb kerültünk az összetett függvény meghatározásához.



összetett függvény

3.8. Definíció: **Az $f(x)$ és $g(x)$ függvényből képezett $F(x)=f(g(x))$ *összetett függvényen* azt a függvényt értjük, amelynek**

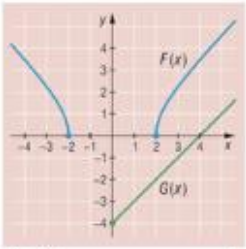
- **értelmezési tartománya $g(x)$ értelmezési tartományának azon részhalmaza, melynek elemein $g(x)$ olyan értékeket vesz fel, amelyekre $f(x)$ értelmezve van: $D_F=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}\subseteq D_g$;**
- **hozzárendelési szabálya: $x_0\in D_F$ pontban azt az értéket veszi fel, amelyet $f(x)$ a $g(x_0)$ pontban.**

Kívül-belül függvény!

Megjegyzések: Szokták az összetett függvényt $f\circ g(x)$-szel (olvasd: f karika g x) is jelölni. A fenti $f(x)$ függvényt külső, a $g(x)$-et belső függvénynek nevezzük.

2. példa

Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x}$ és $g(x)=x^2-4$ függvényekből képezett $F(x)=f(g(x))$ és $G(x)=g(f(x))$ összetett függvények értelmezési tartományát és értékkészletét. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát is.



13. ábra

Megoldás

Első lépésben foglalkozzunk $F(x)$-szel. $D_g=\mathbb{R}$, $R_g=[-4;\infty[$. Mivel $D_f=[0;\infty[$, ezért $R_g\cap D_f=[0;\infty[$. Ezen az intervallumon a számok négyzetgyöke nemnegatív, így $R_F=[0;\infty[$. F értelmezési tartományához azt kell kitalálnunk, milyen számokra teljesül, hogy $g(x)\geq 0$:

$$x^2-4\geq 0,\quad x^2\geq 4,\quad |x|\geq 2.$$

Vagyis $D_F=\mathbb{R}\setminus]-2;2[$. A hozzárendelési szabály: $F(x)=\sqrt{x^2-4}$.

$G(x)$ esetén $f(x)$ a belső függvény, $D_f=R_f=[0;\infty[$. Mivel $D_g=\mathbb{R}$, ezért $R_f\cap D_g=[0;\infty[$. Az intervallum elemeit $f(x)$ a teljes értelmezési tartományán felveszi, tehát $D_G=[0;\infty[$. Mivel $D_g=\mathbb{R}$, g páros és $R_g=[-4;\infty[$, ezért $R_G=[-4;\infty[$. Így a szabály: $G(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2-4$.

$G(x)=x-4$, ha kikötjük, hogy $D_G=[0;\infty[$.

• • •

Ismerve a függvényműveleteket, mondjuk ki a határértékekkel végzett műveletekre vonatkozó (a sorozatoknál látotthoz nagyon hasonló) tételt.

műveletek függvény-határértékekkel

3.3. Tétel: **Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek az x_0 pontban van határértéke, akkor a két függvény összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának is van határértéke ebben a pontban, és ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ $(x\neq x_0)$, akkor**

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B$,

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$,

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, ahol $B\neq 0$.



Bizonyítás (2)

Példaként a szorzatot igazoljuk, a bizonyításhoz a Heine-féle definíciót használjuk. Ha $x_n \to x_0$ és $x_n \to x_0$ minden n-re, a 3.4/A. definíció és a tétel feltételei miatt $f(x_n)$ és $g(x_n)$ függvénysorozat A-hoz, illetve B-hez tart. Így a konvergens sorozatokra vonatkozó 2.9-es tétel értelmében pl. $f(x_n) \cdot g(x_n) \to A \cdot B$. A Heine-féle értelmezés miatt ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \to x_0} f \cdot g = A \cdot B.$$

A tétel többi állítását ugyanígy bizonyíthatjuk.

Megjegyzés: A tétel kimondásánál nem bajlódtunk azzal, hogy a függvények értelmezve legyenek x_0 pont valamely környezetében (kivéve esetleg a pontot magát), ugyanis a feltétel szerint ott *van határértékük, és a határérték definíciója ezt biztosítja.*

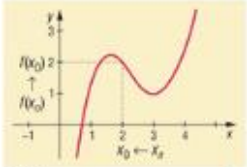
Feladatok

1. Készítsük el a függvényekből az összes lehetséges $F(x) = f(g(x))$ összetett függvényt. Adjuk meg mind a hat összetett függvény értelmezési tartományát, értékkészletét. A függvények:

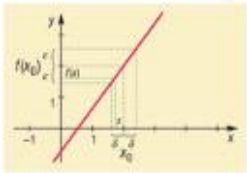
$$y = \cos x, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = x - \pi.$$

2. Igazoljuk a 3.3-as tétel összegre, különbségre és hányadosra vonatkozó részét.

5. Függvény folytonossága



14. ábra



15. ábra

pontban folytonos függvény

Vegyük észre, a folytonosságnál megköveteljük $x_0 \in D_f$-et, míg a határérték esetén nem!

A folytonosság fogalma bár nagyon szemléletes, azonban legalább ennyire nehéz fogalom. Precíz megragadásához komoly apparátus szükséges.

Folytonos függvényre biztosan mindenki tud példákat mondani: a lineáris, a másodfokú, sőt az n-ed fokú hatványfüggvény is folytonos, hasonlóan az exponenciális, a logaritmus- vagy a szinusz- és a koszinuszfüggvényekhez.

Az is biztos, hogy nem folytonos függvényekre is van példánk, csak olyan függvényt kell keresni, amely „elszakad". Például az előjelfüggvény, az egészrész- vagy a törtrészfüggvény.

Mi az eltérés a „szakadt" és a folytonos függvények között?

Abból indulunk ki, hogy a függvénygörbe akkor nem „szakad" az x_0 pontban, ha a függvényértékek minden határon túl megközelítik $f(x_0)$-t, míg a változó minden határon túl megközelíti x_0-t. Ezt legegyszerűbben a határérték segítségével adhatjuk meg.

3.9. DEFINÍCIÓ: Legyen $f(x)$ értelmezve x_0-ban és valamely környezetében. Az $f(x)$ függvény *folytonos* az $x_0 \in D_f$ pontban, ha x_0-ban van véges határértéke és ez egyenlő a függvény x_0-ban felvett értékével.

Jelöléssel: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Megjegyzések: Definíciónk *a pontban való folytonosság definíciója.* Például az $f(x) = 2x - 1$ függvény a definíció szerint $x_0 = 2$ pontban folytonos.

A meghatározás megadható a határérték Heine- és Cauchy-féle definícióihoz hasonló módon is, ha megköveteljük, hogy a függvény az x_0 helyen értelmezve legyen. ***(14. és 15. ábra)***

1. példa

Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = \dfrac{8+x}{x-3}$ függvény folytonos az $x_0 = 4$ pontban.

Megoldás

Legyen minden n-re $x_n \in D_f$ úgy, hogy $x_n \to 4$. Ekkor

$$\lim_{x_n \to 4} \frac{8+x_n}{x_n - 3} = \frac{8+4}{4-3} = 12 = f(4).$$

* * *

Beszélhetünk a határértékhez hasonlóan jobb és bal oldali folytonosságról. Pl. egy függvény x_0-ban balról folytonos, ha az x_0 pontbeli bal oldali határértéke egyenlő a függvény x_0-beli értékével. Egyes esetekben szükség is van erre, pl. $f(x) = \sqrt{x}$ függvény az $x_0 = 0$ pontban csak jobbról folytonos.



Megjegyzések: Ha a 2. lecke 1. feladatában szereplő függvényt vizsgáljuk, akkor $f(x) = 2x - 1$ függvénynek $x_0 = 2$ pontban nem volt szakadása, viszont például a $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$ előjelfüggvénynek $x_0 = 0$ pontban igen. Vagyis $f(x)$ függvény folytonos, míg $g(x)$ nem. A definíció pontos értelme tulajdonképpen az, hogy ha x elég közel kerül x_0-hoz, akkor $f(x)$ is elég közel van $f(x_0)$-hoz.

folytonos függvények összege, szorzata is folytonos

3.4. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az x_0 pontban folytonosak, akkor az x_0 pontban folytonos lesz az összegük, a különbségük, a szorzatuk és a hányadosuk is (amennyiben a nevező nem 0).**

Bizonyítás

A bizonyítást lásd a 3.3-as tételnél: A és B szerepét $f(x_0)$ és $g(x_0)$ veszi át.

összetett függvény folytonossága

3.5. TÉTEL: **Ha a $g(x)$ függvény folytonos az $x_0 \in D_g$ értelmezési tartománybeli pontban, és az $f(x)$ függvény folytonos a $g(x_0) \in D_f$ értelmezési tartománybeli pontban, akkor a $F(x_0) = f(g(x_0))$ összetett függvény is folytonos az $x_0 \in D_F$ értelmezési tartománybeli pontban.**

Bizonyítás

Mivel g folytonos, ezért bármely $x_n \to x_0$ sorozatra teljesül, hogy

$$\lim_{x_n \to x_0} g(x_n) = g(x_0).$$

Mivel f folytonos, ezért $g(x_n) \to g(x_0)$ sorozatra teljesül, hogy

$$\lim_{g(x_n) \to g(x_0)} f(g(x_n)) = f(g(x_0)).$$

Így

$$\lim_{x_n \to x_0} F(x_n) = \lim_{x_n \to x_0} f(g(x_n)) = f(g(x_0)) = F(x_0).$$

Megjegyzés: A 3.4. és 3.5. tételekben nem mondjuk ki feltételként, hogy a függvények értelmezve legyenek a kérdéses pontban és valamely környezetében, ugyanis feltételezzük, hogy *folytonosak ott, és a folytonosság definíciója ezt biztosítja.*

Régebben – az általános iskolában, a középiskola első osztályában – beszéltünk a függvények tulajdonságairól. Ott esetleg annyit tudtunk mondani, hogy folytonos a függvény, ha „lerajzolása közben nem kell felemelni a ceruzát". Immár precízen is meg tudjuk fogalmazni: „jó" tulajdonságú az a függvény, amely az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

mindenütt folytonos függvény

3.10. DEFINÍCIÓ: **Azokat a függvényeket, melyek az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak, *folytonos függvényeknek** nevezzük.**



2. példa

Igazoljuk, hogy az $f(x) = 2x^2 + 3$ függvény folytonos.

Megoldás

Ismert, hogy $D_f = \mathbb{R}$. Legyen $x_0 \in D_f$ tetszőleges, és $x_n \to x_0$. Így

$$\lim_{x_n \to x_0} 2x_n^2 + 3 = 2x_0^2 + 3 = f(x_0).$$

Mivel bármely x_0-ra teljesül a definíció, $f(x)$ folytonos függvény.

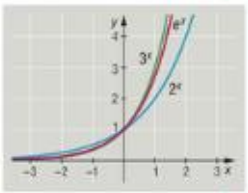
* * *

Sokszor előfordul, hogy egy függvény nem érdekes számunkra az értelmezési tartománya minden pontjában, csak egy bizonyos intervallumon. Ekkor jöhet jól a következő meghatározás.

zárt intervallumon folytonos függvény

3.11. DEFINÍCIÓ: **Az $f(x)$ függvény a zárt $[a; b]$ intervallumon *folytonos*, ha $[a; b] \subseteq D_f$ és a függvény az intervallum minden belső pontjában folytonos, továbbá bal oldali végpontjában jobbról, jobb oldali végpontjában balról folytonos.**

Megjegyzés: Amennyiben nyitott intervallumon vizsgálunk egy függvényt, elegendő csak a belső pontokkal foglalkozni.

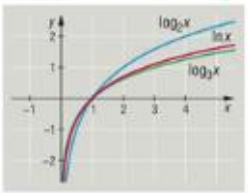


16. ábra

Végül megemlítünk két folytonos függvényt, melyek kapcsolódnak a sorozatoknál bevezetett Euler-féle $e \approx 2{,}71828\ldots$ számhoz.

Első közülük az $f(x) = e^x$ függvény. A függvény az exponenciális függvények családjába tartozik, alapszáma e. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, értékkészlete $\mathbb{R}^+$. Mivel alapszáma 1-nél nagyobb, a függvény szigorúan monoton növekvő. Igazolható, hogy értelmezési tartománya minden pontjában folytonos. Alulról korlátos függvény, $h = 0$. Zérushelye nincs. *(16. ábra)*

17. ábra



Második a $g(x) = \ln x$ függvény. Az ln jelölés az *e alapú logaritmus* szokásos jelölése. A függvény logaritmusfüggvény, értelmezési tartománya $\mathbb{R}^+$, értékkészlete $\mathbb{R}$. Mivel $e > 1$, szigorúan monoton növekvő függvény. A függvény folytonos, az $x_0 = 1$ helyen zérushelye van. *(17. ábra)*

Feladatok

1. Adjuk meg az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli folytonosságának definícióját további két módon, a határérték 3.5/*A*. és 3.5/*B*. definícióira építve.

2. Ábrázoljuk függvénytranszformációk segítségével az alábbi függvényeket, majd jellemezzük őket:

   a) $f(x) = e^x - 1$; *b)* $g(x) = e^{x+2}$; *c)* $h(x) = -2e^x$;

   d) $i(x) = -2 \cdot |e^{x-1} - e|$; *e)* $j(x) = \ln x + 2$; *f)* $k(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x + 1)$;

   g) $l(x) = \ln|x|$; *h)* $m(x) = |\ln(x - 1) - 1|$.



6. Függvény szélsőértéke. A folytonosság és a szélsőérték kapcsolata

Kilencedik évfolyamon már megismertünk függvényeket, melyeknek van maximuma. Pl. az $f(x) = -|x| + 1$ függvénynek az $x = 0$ helyen $y = 1$ a maximuma. Ábrázoltunk olyan függvényt is, melynek minimuma van, pl. a $g(x) = (x - 3)^2$ függvénynek az $x = 3$ helyen $y = 0$ a minimuma. Voltak olyan függvénytípusok is, melyeknek nem volt szélsőértékük. Ilyen volt például a $h(x) = 2x + 1$ lineáris vagy az $i(x) = \frac{1}{x+1}$ törtfüggvény.

totális szélsőérték

3.12. Definíció: **Az $f(x)$ függvénynek $x_0 \in D_f$ pontban *maximuma* (illetve *minimuma*) van, ha minden $x \in D_f$-re $f(x) \leq f(x_0)$ (illetve $f(x) \geq f(x_0)$). Ezeket közösen a függvény *szélsőértékeinek* nevezzük.**



A szélsőértékhez még egy jelzőt szoktak illeszteni: a definíció *totális*, *globális* vagy *abszolút* szélsőérték, mivel a függvény egész értelmezési tartományára teljesül. Sok esetben azonban nem ilyen szélsőértékre lenne szükség. Gondoljunk csak egy függvényre, amely egy részvény tőzsdei árfolyamváltozásait adja meg: ha két óra intervallum áll rendelkezésünkre a tranzakció lebonyolításához, akkor ezen belül akarjuk megállapítani a függvény minimumát (ha van), hiszen ezen az árfolyamon érdemes vásárolnunk és az ezt követő maximumon eladni.

helyi maximum, helyi minimum

3.13. Definíció: **Az $f(x)$ függvénynek $x_0 \in D_f$ *pontban helyi maximuma* (illetve *helyi minimuma*) van, ha x_0-nak van olyan I környezete, hogy minden $x \in I \cap D_f$-re $f(x) \leq f(x_0)$ (illetve $f(x) \geq f(x_0)$).**

Az ilyen x_0 pontot szokás *lokális szélsőértékhelynek* nevezni.

Érdekes kapcsolat van a függvény folytonossága, korlátossága és helyi szélsőértéke között.

zárt intervallumon folytonos függvény korlátossága

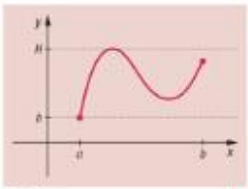
3.6. Tétel: **Zárt intervallumon folytonos függvény korlátos ezen az intervallumon (azaz van olyan $k, K \in \mathbb{R}$, hogy $k \leq f(x) \leq K$ minden $x \in [a; b]$-re).**

A bizonyítás vázlata

A bizonyítás első részét részletesebben is bemutatjuk.

A tétel feltételei szerint $f(x)$ folytonos $[a; b]$-on. Egy függvény akkor korlátos, ha felülről és alulról is korlátos, így a két tulajdonságot szokás szerint külön kellene vizsgálnunk.

Indirekt bizonyítással látjuk be, hogy a függvény felülről korlátos.



18. ábra

Tegyük fel, hogy az $[a; b]$-on folytonos $f(x)$ függvény $[a; b]$-on felülről nem korlátos. Ez azt jelenti, hogy bármilyen K_n végtelenbe tartó valós számsorozat minden tagjához van olyan x_n hely az $[a; b]$-ban, ahol a felvett függvényérték nagyobb a sorozat tagjánál: $f(x_n) > K_n$. Mivel az x_n sorozat minden tagja eleme $[a; b]$-nak, ezért a sorozat korlátos. A 2.11-es Bolzano–Weierstrass-tétel alapján kiválasztható x_n sorozatból egy konvergens részsorozat, legyen ez x_n^*. Így $x_n^* \to x_0$, ahol $x_0 \in [a; b]$. (Itt használjuk ki az intervallum zártságát. Nyitott intervallum esetén nem biztos, hogy $x_0 \in [a; b]$ teljesül.) *(18. ábra)*

A bizonyítás második részét nem részletezzük. Legyen elég az, hogy egyrészt $f(x_n)$ tart a végtelenbe, másrészt viszont a függvény folytonossága miatt $f(x_n^*) \to f(x_0)$. Ez pedig ellentmondás.

Az alulról való korlátosságot az előzőekhez hasonlóan kell igazolni.

A tétel szemléletesen azt jelenti, hogy folytonos függvénynek az $[a; b]$-on felvett értéke nem távolodhat el végtelen messze az x tengelytől.

Weierstrass-tétel

3.7. WEIERSTRASS-TÉTEL: Zárt intervallumon folytonos függvény az intervallumon felveszi szélsőértékeit.

Bolzano-tétel

3.8. BOLZANO-TÉTEL: Ha egy zárt intervallumon folytonos függvény az intervallumon pozitív és negatív értéket is felvesz, akkor van zérushelye az intervallumon.

Utóbbi tétel egyik következménye az alábbi tétel.

3.9. tétel

3.9. TÉTEL: Zárt intervallumon folytonos függvény szélsőértékei között bármely értéket felvesz.

A fenti tételek bizonyításában sokszor kellene Szent Ágostonra hivatkoznunk, ezért a bizonyításokat nem részletezzük.

Megjegyzés: A folytonossághoz kapcsolódó 3.6., 3.7., 3.8., 3.9. tételeinkben ismét nem foglalkozunk külön a függvények értelmezésével, hiszen *a feltételezett folytonosság garantálja ezt.*



7. Függvény konvexitása

A fogalom egyik meghatározását megtalálhatjuk a 11.-es könyv 168. oldalán.

Az $f(x)$ függvény az $I \subseteq D_f$ intervallumon konvex (konkáv), ha az I bármely két $a < b$ pontjában felvett függvényértékeket összekötő szakasz a függvény grafikonja felett (alatt) van.

Megjegyzés: Szemléletesen a „konvex" azt jelenti, hogy ha egy ilyen függvényt kiteszünk az esőre, akkor megáll benne a víz. Konkáv a függvény, ha esőben lefolyik róla a víz.

Vizsgáljuk meg, mit is jelent ez még pontosabban. Formalizáljuk a fent leírtakat! Koncentráljunk pl. a konvexitásra.

Szükségünk lesz az egyenes iránytangenses egyenletére. Készítsünk egy szép ábrát! ***(19. ábra)***

Álljon fenn az x, x_1, x_2 pontokra, hogy $a \le x_1 < x < x_2 \le b$, és legyenek a hozzájuk tartozó függvényértékek $f(x_1)$, $f(x)$, $f(x_2)$. Ekkor az $(x_1; f(x_1))$ és $(x_2; f(x_2))$ pontokon áthaladó egyenes egyenletének meredeksége:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Legyen az egyenes fix pontja $(x_1; f(x_1))$, így az egyenes iránytangenses egyenlete:

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1).$$

Ha függvényünk ezen az intervallumon konvex, akkor x pontbeli $f(x)$ függvényértékére:

$$f(x) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1).$$

3.14. Definíció: **Az $[a; b]$-on értelmezett $f(x)$ függvény *konvex*, ha minden $a \le x_1 < x < x_2 \le b$ esetén**

$$f(x) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1).$$

***Konkáv* a függvény, ha a relációjel fordítva teljesül.**

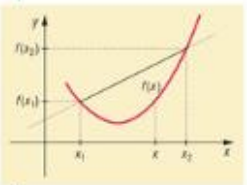
Megjegyzés: Ha a definícióban nem engedjük meg az egyenlőséget, akkor *szigorúan konvex* vagy *szigorúan konkáv* függvényről beszélünk.

Vannak olyan függvények, amelyek egy intervallumon konvexek, egy másikon pedig konkávak. Ilyen pl. az $f(x) = x^3 - 2x^2$ függvény. Mivel ez a függvény folytonos is, lennie kell egy olyan pontnak a $[0; 2]$-on, ahol a két tulajdonság elválik egymástól. ***(20. ábra)***

A „váltó" pont megérdemli, hogy külön nevet kapjon.

Szokás az ilyen függvényt alulról konvexnek (konkávnak) nevezni – ha felülről nézzük, pont fordítva lesz.





19. ábra

11.-es könyv 215. oldal

konvex függvény

konkáv függvény

20. ábra





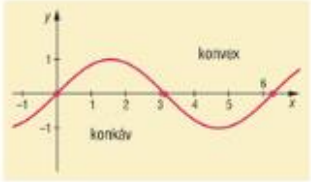
inflexiós pont

Az inflexió magyarul elhajlást, irányváltozást jelent.

3.15. DEFINÍCIÓ: **Az $f(x)$ függvénynek $x_0 \in D_f$-ben *inflexiós pontja* van, ha x_0-nak van olyan jobb, illetve bal oldali környezete, hogy az egyikben a függvény konvex, a másikban konkáv.** *(21. ábra)*



21. ábra



22. ábra

Emlékezzünk vissza arra, hogy pl. a szinuszfüggvény rendes köpönyegforgató módjára váltogatja a konvex-konkáv tulajdonságot. Végtelen sok olyan pontnak kell lennie ($x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), amelyek a két tulajdonságot elválasztják egymástól. *(22. ábra)*



8. Nevezetes határértékek, különböző típusú határérték-feladatok. A folytonosság vizsgálata

A későbbiekben szükségünk lesz a következő három nevezetes függvény-határértékre.

1. példa

Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Megoldás

Bármely $x_n>1$-re teljesül, hogy $[x_n]\le x_n<[x_n]+1$. Jelölje $m=[x_n]$-t, így reciprokaikra: $\frac{1}{m+1}<\frac{1}{x_n}\le\frac{1}{m}$. Mivel $x_n\to\infty$, ebből adódóan $m\to\infty$ és $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}=0$. A rendőrelvet alkalmazva:

Ha $x_n\to\infty$, akkor valamely n-től biztosan $x_n>1$.

$$0=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}<\lim_{x_n\to\infty}\frac{1}{x_n}\le\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}=0.$$

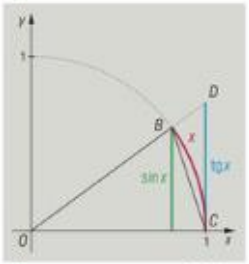
Mivel x_n tetszőleges végtelenbe tartó sorozat, ezért $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

2. példa

Számoljuk ki a következő határértéket: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

Megoldás

Mivel a szinusz páratlan függvény, ezért $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}$ miatt elegendő pozitív tagokból álló x_n sorozatokat vizsgálnunk (a jobb oldali határértékkel egyenlő a bal oldali). Ábrázoljuk egy rendszerben x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ értékeit, ha $0<x<\frac{\pi}{2}$. *(23. ábra)*



23. ábra

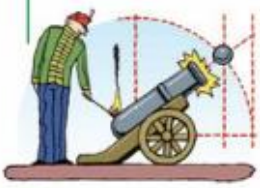
Megjegyzés: A felsőbb matematikában a szöget általában nem fokban, hanem radiánban mérjük. A radián két ívhossz hányadosa, ezért mértékegység nélküli szám. Ez a szögfüggvényfajta a tűzérség nyelvéből került át a matematikai szóhasználatba (az ágyú csövét egy körív mentén állítgatták).

Határozzuk meg az ábrán látható síkidomok területét. Mivel az $OC=1$ oldalhoz tartozó magasság $\sin x$:

$$T_{OCB}=\frac{1\cdot\sin x}{2}.$$

A körcikk területe az ív és a sugár szorzatának fele:

$$T_{OCB<}=\frac{1\cdot x}{2}.$$



Hasonlóan T_{OCB}-hez:

$$T_{OCD} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}.$$

A területek között nyilvánvalóan a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$T_{OCB} < T_{OCB\ll} < T_{OCD}.$$

Ebből adódik, hogy:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Bármely hegyesszög szinusza pozitív, ezért, ha vele végigosztunk, a relációs jel nem változik. A reciprokukat véve viszont igen:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Ha most $x_n \to 0$, akkor $1 \to 1$ és $\cos x_n \to 1$, mivel $\cos x$ folytonos. A rendőrelv alapján ebből következik, hogy

$$\lim_{x_n^+ \to 0} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

Megjegyzés: A $\frac{\sin x}{x}$ függvény $x = 0$ pontbeli határértékének meghatározásánál egy $\frac{0}{0}$ alakú kifejezésnek adunk valami módon értéket (korábban láttunk hasonlót sorozatoknál).

3. példa

Igazoljuk, hogy $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Megoldás

Legyen $x_n \geq 1$ és $x_n \to \infty$. Ha $[x_n] = m_n$, akkor

$$m_n \leq x_n < m_n + 1.$$

A hatványozás tulajdonságai miatt:

$$\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n + 1}.$$

Mivel $x_n \to \infty$, ezért $m_n \to \infty$, és

$$\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n + 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{1}.$$

A matematikában is nagy szükség van a rendőrségre.

A konstans kitevőjű m_n-t tartalmazó tényezők 1-hez tartanak, míg az m_n-t tartalmazó kitevőjűek e-hez tartanak. A rendőrelv értelmében így bármely $x_n > 1$, $x_n \to \infty$ sorozatra:

$$\lim_{x_n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Megjegyzés: Ha $x_n \to -\infty$, a bizonyítás hasonló, és a függvény határértéke újra e.



Nézzünk most néhány fogást, amelyeket különböző függvények határértékének meghatározásánál alkalmazhatunk. Ezekben felhasználjuk a fenti három példa eredményét. A feladatok megoldása során a problémát folytonos függvényekre próbáljuk visszavezetni: ha sikerül, akkor a határérték egyenlő a függvény helyettesítési értékével. Kihasználjuk azt, hogy az általunk ismert elemi függvények az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak (az egészrész, a törtrész, a szignum és az abszolút érték nem elemi függvény).

A következő feladatokat törtes feladatoknak nevezzük. Más fogást kell bevetnünk, ha véges helyen, illetve ha végtelen helyen kell a függvény határértékét vizsgálni. Az első feladatcsokor véges helyen vett határértékek meghatározásával foglalkozik.

4. példa

Számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$; *d)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$.

Megoldás (a)

Az ilyen típusú feladatoknál először azt nézzük meg, hogy azon a helyen, ahol a függvényhatárértéket vizsgáljuk, értelmezve van-e a függvény. Ha igen, akkor a függvény ezen a helyen folytonos, és a függvény határértéke egyenlő a függvény helyettesítési értékével. Mivel az $x = 0$ helyen $x^2 - 5x + 6 \neq 0$, ezért a határérték a függvényérték lesz. Így

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Megoldás (b)

A függvény $x = 1$ pontban nincs értelmezve, mivel nevezője 0. Ilyen esetben érdemes megpróbálkozni azzal, hogy szorzattá alakítjuk a nevezőt és a számlálót. Ha a szorzattá alakítás után sikerül egyszerűsíteni, akkor újra vizsgálnunk kell, hogy a maradék folytonos-e az adott pontban. Ha igen (mint esetünkben), akkor a határértéket behelyettesítéssel meg tudjuk határozni:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

Vigyázzunk, $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ csak akkor egyenlő $y = x + 1$ függvénnyel, ha $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$!

Megoldás (c)

A nevező $x = 2$ esetén 0. Alakítsuk a nevezőt szorzattá! Ha ránézésre nem megy, használjuk a gyöktényezős alakot:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}\quad\Rightarrow\quad x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$



Így a határértékre kapjuk:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-3}=-1.$$

$|x|=\begin{cases} x, & \text{ha } x\geq 0,\\ -x, & \text{ha } x<0.\end{cases}$

Megoldás (d)

Használjuk ki az abszolút érték fogalmát.

Ha pozitív x_n számokon át tartunk 0-hoz, akkor $|x_n|=x_n$, így a jobb oldali határérték:

$$\lim_{x_n^+\to 0}\frac{|x_n|}{x_n}=\lim_{x_n^+\to 0}\frac{x_n}{x_n}=1.$$

Ha negatív x_n sorozattal tesszük meg ugyanezt, akkor $|x_n|=-x_n$, így a bal oldali határérték:

$$\lim_{x_n^-\to 0}\frac{|x_n|}{x_n}=\lim_{x_n^-\to 0}\frac{-x_n}{x_n}=-1.$$

Mivel a bal oldali és a jobb oldali határérték nem egyenlő, ezért a függvénynek a 0 pontban nincs határértéke.

Megjegyzés: Ha az átalakítások során nem sikerül olyan függvénnyé alakítanunk a feladatot, amely a vizsgálandó pontban folytonos, akkor a bal és jobb oldali határértékek összehasonlításával próbálkozhatunk.

A törtes határértékek közé tartoznak a $\frac{\sin x}{x}$ feladatra visszavezethető határérték-problémák.

5. példa

Számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{5x}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$; *c)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{5x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}$; *e)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$; *f)* $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg} x$;

g) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{\sin x}{x-2\pi}$.

A konstans szorzó a limesz elé vihető (sorozatok), illetve $\frac{\sin 7x_n}{7x_n}$ a $\frac{\sin x_n}{x_n}$ részsorozata.

Megoldás (a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{5}.$$

Megoldás (b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\lim_{x\to 0}7\cdot\frac{\sin 7x}{7x}=7\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7.$$

Általában azok a nehezebb feladatok, melyekben több egyszerű fogást kell egymás után alkalmazni.

Megoldás (c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{7}{5}\cdot\frac{\sin 7x}{7x}=\frac{7}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=\frac{7}{5}.$$



Megoldás (d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{7}{5}\cdot\frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{7}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{7}{5}.$$



Megoldás (e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=1.$$

Megoldás (f)

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} x=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

Megjegyzés: Az $x=0$ helyen $\cos x$ folytonos, és értéke 1.

Megoldás (g)

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin x}{x-2\pi}=\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin[(x-2\pi)+2\pi]}{x-2\pi}=\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin(x-2\pi)}{x-2\pi}\cdot\cos 2\pi=1.$$

$\sin(\alpha+\beta)=$
$=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

A problémát azon átalakítások megtalálása jelenti, melyek segítségével nevezetes határértékre tudjuk visszavezetni az eredeti feladatot.

• • •

Következő feladataink végtelenben vett határértékek meghatározását kérik. Az ilyen típusú példákat lényegében a sorozatoknál megismert fogásokkal lehet megoldani, „csak" arra kell vigyázni, hogy a végtelennek előjele is van.

6. példa

Számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^3-12x+1}{13x^3+100x^2+5}$; *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-7x^2}{x^3+3x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x-7}-2x\right)$; *d)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x-3}\right)^{-x-7}$.

Megoldás (a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-12x+1}{13x^3+100x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{13+\frac{100}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{7}{13}.$$



Megoldás (b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-7x^2}{x^3+3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{7}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}=-\infty.$$



Megoldás (c)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x-7}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+5x-7}-2x\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2+5x-7}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+5x-7}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x-7-4x^2}{\sqrt{4x^2+5x-7}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{7}{x}}{\sqrt{4+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}+2}=\frac{5}{4}.$$

Megoldás (d)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x-3}\right)^{-x-7}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-3}\right)^{-x-7}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1{,}5}\right)^{-x-7}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1{,}5}\right)^{-(x-1{,}5)-8{,}5}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1{,}5}\right)^{x-1{,}5}\right]^{-1}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1{,}5}\right)^{-8{,}5}=e^{-1}.$$

A következő két feladatban azt vizsgáljuk, hogy folytonos-e a függvény az adott értelmezési tartománybeli pontban – vagy folytonossá tehető-e ott.

7. példa

Hol folytonos a következő függvény?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-49}{x^2+7x}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{-7;0\},\\ 2, & \text{ha } x=-7,\\ 5, & \text{ha } x=0.\end{cases}$$

Megoldás

A függvény minden olyan pontban, ahol a tört értelmezve van, folytonos. A tört $x_1=-7$ és $x_2=0$ pontban nincs értelmezve, de megadtuk, hogy itt milyen értékeket vegyen fel $f(x)$. Ha a függvénynek van határértéke $x_1=-7$ pontban, és az egyenlő $f(-7)$-tel, akkor a függvény folytonos:

$$\lim_{x\to-7}\frac{x^2-49}{x^2+7x}=\lim_{x\to-7}\frac{x-7}{x}=2.$$

Mivel a határérték nem véges, ezért nem is tudunk megadni olyan értéket az 5 helyett, amelyre a függvény folytonossá válna.

Mivel az adott pontbeli határérték és függvényérték megegyezik, ezért $f(x)$ folytonos $x_1=-7$-ben. Lássuk most $x_2=0$-t! Ugyanígy:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-49}{x^2+7x}=\lim_{x\to0}\frac{x-7}{x}=1-7\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{x}.$$

Az $f(x)$ függvény csak az $x_2=0$ pontban nem folytonos.



8. példa

Folytonos-e az $x = 0$ pontban az alábbi függvény? Ha nem, akkor megadható olyan érték a 3 helyett, amelyre már az?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}, & \text{ha} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 3, & \text{ha} \quad x=0.\end{cases}$$

Megoldás

Az előző példához hasonlóan:

$$\lim_{x\to 0} 9\cdot\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}=\lim_{x\to 0} 9\cdot\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2=9.$$

Mivel $x=0$-beli $f(0)$ függvényérték nem egyenlő a határértékkel, ezért a függvény ebben a pontban nem folytonos. De ha kicseréljük a megadásban szereplő 3-at 9-re, akkor a függvény folytonossá válik.

Feladatok

1. Számoljuk ki a következő határértékeket:

   a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x}{x-4}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-9x+20}$; *c)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-4}{x^2-9x+20}$.

2. Számoljuk ki a következő határértékeket:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-5x)}{x}$; *c)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

3. Számoljuk ki a következő határértékeket:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2}{x^2-9x+20}$; *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-9x+20}$; *c)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$.

4. Állapítsuk meg úgy p paraméter értékét, hogy az alábbi függvény minden $x\in\mathbb{R}$ helyen folytonos legyen:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x+2, & \text{ha} \quad x\le 0,\\ -x^2+p, & \text{ha} \quad x>0.\end{cases}$$

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

1. Bevezető példák

Bevezető a fejezet elé

Jelen fejezetben a differenciálszámítás elemeit vezetjük be a korábban megismert definíciók és tételek segítségével. A differenciálszámítás a „klasszikus analízis" egyik legfontosabb fogalma. Más tudományágak felfedezéseiben, illetve jelenségeik megértésében fontos szerepet játszott és játszik a mai napig. Létrejöttét is egy másik tudomány segítette elő: különböző fizikai problémák vizsgálata közben dolgozták ki alapjait.

A függvények többé-kevésbé jól használhatók a valóságot leíró modellként, gondoljunk csak gazdasági folyamatokra (pl. valuta- vagy részvényárfolyamok), hőmérsékletet leíró grafikonokra. A függvénymodell azért alkalmazható sikeresen a különböző tudományágakban, mert segítségével jelenségek pillanatnyi megváltozásait is képesek vagyunk megvizsgálni. Ennek hathatós eszköze a differenciálszámítás és apparátusa.

Az *Acta Euditorum* az első tudományos folyóirat, először 1682-ben adták ki.

A ma használt fogalom előfutára 1684-ben az *Acta Euditorum* című folyóiratban jelent meg. A cikk a görbék érintőjének meghatározására kidolgozott eljárást írta le. Szerzője Gottfried Wilhelm Leibniz, aki már jóval előbb (1673 körül) felfedezte módszerét. (Ezt korabeli levelei, jegyzetei igazolják.)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), német polihisztor.



Sir Isaac Newton (1643–1727), angol tudós.

Leibniztől függetlenül, bizonyos mozgási problémák kapcsán 1665-1666 táján Newton is hasonló eredményre jutott, ám ő ezt csak 1704-ben publikálta. Newton későbbi közlése a két tudós és táboraik között egy elsőbbségi vitához vezetett, ami a szigetország sok évtizedes teljes matematikai elszigetelődését eredményezte. Meg kell jegyeznünk, Newton gondolatai a differenciálszámítás mai terminológiájához közelebb állnak.

Ha már félig-meddig tudománytörténettel foglalkozunk, említsük meg a XX. századi magyar matematika két nagy alakjának lebilincselően olvasmányos, mindenkinek ajánlott könyvét. Az egyik Péter Rózsa (1905–1977) *Játék a végtelennel*, a másik Kalmár László (1905–1976) *Integrállevél* című műve. Utóbbi majd a könyvünk ötödik fejezetéhez kapcsolódik. Mindkettőjük műve egy-egy „laikus" baráttal folytatott levelezésből származik, melyben jelen témáinkat (is) próbálják elmagyarázni.

* * *

Álljon itt kedvcsinálónak egy idézet Kalmár művéből:

„Olyat ismerek egy csomót, aki azt mondja, hogy érti, de engem az győz meg, aki úgy mondja el, hogy én is értsem."



1. példa

Bothitharma kilenc éven át meditált a Shongszan hegyen lévő barlangjában, annak falára meredve. A hagyomány szerint tekintete erejével lyukat fúrt a barlang falán. A lyukon keresztül nézte, ahogy kedvenc tanítványa, Hui-Ku tart lefelé a hegygerincen. Hui-Ku vállán mindig ott ült kedvenc sólyma. A sólyom, amikor gazdája elindult, felszállt a válláról és nyílegyenesen repült vízszintesen előre. Ha Hui-Ku megpihent, a sólyom a rá jellemző függőleges zuhanórepülésben visszaszállt a vállára. Min töprenghetett Bothitharma Hui-Ku solymát látva?

Bothitharma egy shaolin kolostor apátja volt, nevéhez fűződik (Kr. u. 600 körül) a zen buddhizmus megalapítása. Ő találta ki a kungfu alapmozdulatait a meditáció közben elsorvadt izmok karbantartására.

Megoldás

Bothitharma barlangja a hegy lábától függőlegesen 3200 m-re, vízszintesen pedig 1200 m-re van *(1. ábra)*. Azon elmélkedik, hogy Hui-Ku különböző pihenőhelyeire milyen meredek út visz a barlangból. Hui-Ku első pihenőhelye a hegy lábától 950 m-re található vízszintesen és 2400 m-re függőlegesen. Bothitharma arra gondol, hogy amíg Hui-Ku ereszkedik a hegygerincen lefelé, addig a madár az első pihenőhelyig vízszintesen 1200 – 950 m, függőlegesen 3200 – 2400 m utat tesz meg. A függőlegesen és vízszintesen megtett utak aránya $\frac{3200-2400}{1200-950}$.



1. ábra

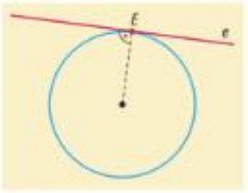
A különbségek hányadosa a barlangot és az első pihenőhelyet összekötő szakasz meredeksége. A második pihenőhelyig a sólyom a barlangtól összesen 1200 – 800 m-t tesz meg vízszintesen és 3200 – 1900 m-t függőlegesen, a különbségek hányadosa $\frac{3200-1900}{1200-800}$. Ennyi a második pihenőhely és a barlang saját összekötő szakasz meredeksége. A további pihenőhelyek pontos helyét nem ismerő Bothitharma így gondolkodik: „Ha az n-edik pihenőhely a hegy lábától x_n távolságra van vízszintesen, és y_n távolságra függőlegesen, akkor vízszintesen $1200 - x_n$, függőlegesen $3200 - y_n$ távolságot tesz meg a sólyom. Így $\frac{3200-y_n}{1200-x_n}$ Hui-Ku útjának meredeksége."

Megjegyzés: A barlang bejáratát $(x_0; y_0)$-lal jelölve az utak meredeksége $\frac{y_0-y_n}{x_0-x_n}$.

2. példa

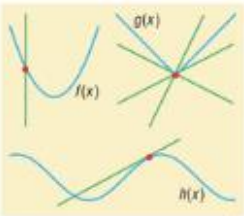
Leibniz problémája: Határozzuk meg egy parabola egyik pontjában, esetünkben az $f(x) = x^2$ valós függvény (2; 4) pontjában húzott érintő egyenletét.

2. ábra

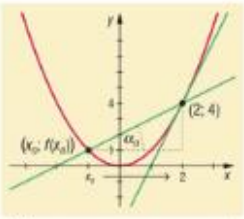


Megjegyzés: Igen ám, de mit értünk *érintő* alatt? Általános iskolában a kör esetén úgy határoztuk meg, hogy az érintő olyan egyenes, amelynek pontosan egy közös pontja van a körrel *(2. ábra)*. Mi a helyzet a parabolával, vagy speciálisan az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjával?

A görbének minden y tengellyel – a függvény szimmetriatengelye – párhuzamos egyenessel egy közös pontja van. Sőt, $g(x) = |x|$ függvény „csúcsában" nemcsak a szimmetriatengellyel párhuzamos egyeneseivel van egy közös pontja, hanem



3. ábra



4. ábra

az origón átmenő összes olyan egyenessel, amelynek irányszöge nem 45° vagy 135°. Az is lehet, hogy az egyenes szelő (döfi a görbét) és érintő egyben, pl. $h(x) = \sin x$ függvénynél **(3. ábra)**. Mivel a pontos meghatározás nem is olyan egyszerű, maradjunk egyelőre az érintő *szemléletes* fogalmánál.

Térjünk vissza $f(x) = x^2$-hez, és próbáljuk felírni a (2; 4) pontjában húzott érintő egyenletét! Tudjuk, hogy az érintőnek át kell haladnia a görbe (2; 4) pontján, csak meredekségét nem ismerjük. Tehát egyenlete $y = m(x - 2) + 4$.

Vegyük a (2; 4) ponton átmenő szelők egy olyan sorozatát, amelyek áthaladnak az $(x_n; x_n^2)$ parabolaponton. Közelítsük ezt a pontot a (2; 4) ponthoz. A szelők iránytangensei ekkor $\operatorname{tg}(\alpha_n) = \dfrac{x_n^2 - 2^2}{x_n - 2}$ sorozatot alkotnak. Mi lehet a $\operatorname{tg}(\alpha_n)$ sorozat határértéke? **(4. ábra)**

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}(\alpha_n) = \lim_{x_n\to 2} \frac{x_n^2 - 2^2}{x_n - 2} = \lim_{x_n\to 2} \frac{(x_n - 2)(x_n + 2)}{x_n - 2} =$$

$$= \lim_{x_n\to 2} (x_n + 2) = 4.$$

A szelők meredekségének van véges határértéke, így az érintő egyenlete:

$$y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4.$$

Megjegyzés: Az érintő egyenletét kiszámíthattuk volna másképp is. Mivel az érintőnek egy közös pontja van a görbével, ezért a következő egyenletrendszernek egy megoldást kell adnia:

$$\left.\begin{aligned} y &= m(x - 2) + 4 \\ y &= x^2 \end{aligned}\right\}.$$

Ez pont akkor teljesül, ha az $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0:

$$D = m^2 - 8m + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 4.$$

(Azért nincs két megoldás, mert a függőleges egyenesnek nincs meredeksége.)

Az eljárás bármely adott $(x_0; f(x_0))$ pontban elvégezhető. Tekintsük általában az $(x_n; f(x_n))$, $(x_0; f(x_0))$ pontok által meghatározott szelők hányadosaiból képezett sorozat határértékét, vagyis a

$$\lim_{x_n\to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{x_n\to x_0} \operatorname{tg}(\alpha_n)$$

határérték-feladatot. Ha ez a határérték létezik és véges, akkor ezt tekinthetjük az $f(x)$ függvény $(x_0; f(x_0))$ pontjába húzott érintő meredekségének. Ha a határérték nem létezik vagy végtelen, akkor a görbének a pontban nincs érintője. Úgy is meg szokták fogalmazni, hogy *az érintő a szelők határhelyzete.*

Ezt már tekinthetjük az érintő szemléletes definíciójának is.

* * *



Sebesség jellegű fogalmakkal nemcsak a fizikában, hanem az élet minden területén találkozunk. A hírekben hallható például: „a lakosság fogyásának sebessége olyan aggasztó, hogy a gyerekek után járó kedvezmények rendszerét át kell gondolni", „a gazdaság növekedési üteme jövőre várhatóan 3%", „a legújabb influenza kétszer gyorsabban képes fertőzni" stb. A fizikánál maradva, a sofőrök jó része állandóan a sebességmérő órát és az út szélén álló traffipaxokat lesi.

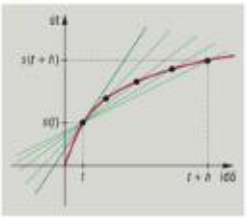
3. példa

A szokásos jelöléseket használva, az autó t idő alatt $s(t)$ utat tesz meg. A megtett út az időtől függ, *a sebesség pedig az egységnyi időtartam alatt megtett út.* Mit értsünk azonban pillanatnyi sebesség alatt? Hogyan határozzuk meg autónk sebességét t időpontban?

Emlékezzünk vissza: Zenon biztos nem állna neki ezzel bajlódni…

Megoldás

Végezzünk egy gondolatkísérletet! Menjünk előre az időben valamennyit, és állapítsuk meg, hogy ez alatt mekkora utat tettünk meg. A $h>0$ idő alatt, t-től $(t+h)$-ig megtett út $s(t+h)-s(t)$. Mivel a sebesség az egységnyi idő alatt megtett út, ezért az $\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}$ hányados pontosan ezt a sebességet adja meg (*5. ábra*). A hányados azonban függ h-tól! A t időpontbeli sebességet akkor kapjuk meg, ha h a lehető legkisebb, azaz $h \to 0$. Így a pillanatnyi sebesség pontosan $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}$ határérték, amennyiben az létezik és véges.



5. ábra

* * *

Foglaljuk össze tapasztalatainkat!

Az első két példában különbségek hányadosait $\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ formában vizsgáltuk. Azt kerestük, hogy ezen sorozatoknak van-e határértéke adott x_0 pontban. Gyakorlatilag $F(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ függvény x_0-beli határértékét számoljuk, ha $x \to x_0$ $(x \neq x_0)$.

Harmadik példánkban $t=x_0$, $x_n-x_0=h$ jelölésekkel

$$x_n=x_0+h \quad \text{és} \quad \frac{s(t+h)-s(t)}{h}=\frac{s(x_n)-s(x_0)}{x_n-x_0}.$$

(Újra $F(x)$-nek megfelelő formáról van szó.) Itt $h \to 0$ jelenti azt, hogy $x_n \to x_0$.

Minden példában ugyanazt a „forró kását" kerülgetjük.

Feladatok

1. Adjuk meg a következő függvények adott x_0 pontbeli érintőjének egyenletét:
   a) $f(x)=x^2$, $x_0=5$;
   b) $g(x)=x^2$, $x_0=-3$;
   c) $h(x)=x^3$, $x_0=1$;
   d) $i(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$.

2. A derivált fogalma, kapcsolata a folytonossággal

differenciahányados

Mint említettük, ezt a hányadost szokták *különbségi hányadosnak* is nevezni a latin szó lefordításából.

4.1. Definíció: **Ha $f(x)$ függvény értelmezve van x és x_0 $(x \neq x_0)$ helyeken, akkor a $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvényt az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli *differenciahányadosának** nevezzük.**

A differenciahányados tehát egy függvény, amelynek értelmezési tartományára $D_g = D_f \setminus \{x_0\}$.

differenciálhányados

Newton $\dot{f}(x)$-et, Lagrange $f'(x)$-et, Leibniz a $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ jelölést használta. Mi általában az $f'(x_0)$ jelölést használjuk.

4.2. Definíció: **Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 pontban és annak valamely I környezetében értelmezve. Ha létezik és véges a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határérték $(x \in I, x \neq x_0)$, akkor ezt a határértéket $f(x)$ függvény x_0 pontbeli *differenciálhányadosának** hívjuk, $f(x)$-et pedig x_0-ban *differenciálhatónak (deriválhatónak)* nevezzük.**

Jelölése:

$$f'(x_0), \quad \dot{f}(x_0), \quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|_{x=x_0}.$$

A fentiek alapján ha $x = x_0 + h$ és $h \neq 0$, akkor

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Megjegyzések:

1. A differenciálhatóság tehát a függvény helyi (adott x_0 pontbeli) tulajdonsága. Ugyanakkor, mivel egy különbségi hányados függvényhatárértéke, ezért a definíciót Heine-, illetve Cauchy-alakban is megfogalmazhattuk volna.
2. Vannak olyan elméletek, ahol $f'(x_0)$ lehet végtelen. Az egyszerűség kedvéért ezt kizárjuk (a bevezető analíziskönyvek így tesznek).



A 2. bevezető példában $f(x) = x^2$ függvény differenciálhányadosa az $x_0 = 2$ pontban 4. Példánk megadja a differenciálhányados geometriai jelentését is: a függvény grafikonjának $(x_0; f(x_0))$ pontjában húzott érintőjének meredeksége.

Az 1. példára gondolva tételezzük fel, hogy Hui-Ku éppen felfelé halad a hegyen és egyre sűrűbb pihenőket tart Bothitharma barlangjához közeledve. A differenciálhányados itt azt mutatja meg, hogy mekkora a hegy meredeksége a barlangnál. Mivel azonban Hui-Ku sohasem megy a barlang fölé, így ebből csak Bothitharma lefelé néző tekintetének meredekségéről szerezhetünk információt.

A 3. példában a függvény pillanatnyi megváltozásának, a változás „sebességének" mértékét mutatja meg a differenciálhányados. Ezt használja ki a fizika a sebesség vagy a gyorsulás meghatározásánál. A differenciahányados felfogható a függvényérték-megváltozás átlagaként, ha x-ről az x_0-ra térünk át, ezért egy átlagsebesség-szerű mennyiség. A differenciálhányados pedig a pillanatnyi sebességnek tekinthető.

Megjegyzés: Ha a 4.2-es definíciót átrendezzük, akkor a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

egyenletet kapjuk. Ha bevezetjük az alábbi függvényt:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0),$$

akkor ez már csak x függvénye (attól függ, x milyen messze van x_0-tól). Mindkét oldalt $(x - x_0)$-lal szorozva $(x \neq x_0)$, és rendezve:

$$\varepsilon(x) \cdot (x - x_0) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) \cdot f'(x_0),$$
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0).$$

Az $\varepsilon(x)$ függvényt szokták $\omega(x)$-szel is jelölni.

Ez a formula a differenciálhányados törtmentes alakja. Kifejezi, hogy ha x közeledik x_0-hoz az értelmezési tartományon, akkor hogyan változik a hozzájuk tartozó függvényértékek különbsége.

A törtmentes alak jelentősége akkor mutatkozik meg igazán, ha a függvény vektorhalmazon van értelmezve. Ekkor a változók különbsége is vektor, $\vec{x} - \vec{x}_0$. Ám mivel vektorral nem tudunk osztani, ezért a definíciót csak törtmentes formájában tudjuk általánosítani.

differenciálhatóság törtmentes alakja

4.3. Definíció: **Legyen az $f(x)$ függvény értelmezve az x_0 pontban és valamely I környezetében. Az $f(x)$ függvény *differenciálható* az x_0 pontban, ha megadható hozzá egy $f'(x_0)$-lal jelölt valós szám, amelyre**

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0),$$

ahol $\varepsilon(x) \to 0$, ha $x \to x_0$.

Az átalakításokból látható, hogy a 4.2. és 4.3. definíció ekvivalens.

Az $f(x)$ függvény x_0-beli differenciálhányadosa a különbségihányados-függvény *határértéke*. Mint ilyen, bizonyos esetekben vizsgálhatjuk a bal oldali, illetve a jobb oldali differenciálhányadost is. Mi jelen esetben csak az utóbbit mondjuk ki.

jobbról differenciálható függvény

4.4. Definíció: **Az $f(x)$ függvény az $x_0 \in D_f$ pontban *jobbról differenciálható*, ha minden $x^+ \in D_f$ $(x^+ > x_0)$ esetén**

$$\lim_{x^+ \to x_0} \frac{f(x^+) - f(x_0)}{x^+ - x_0}$$

határérték létezik és véges.

A bal oldali differenciálhányadoshoz $x^- < x_0$-ra van szükség.

1. példa

Differenciálható-e az $f(x) = c$ függvény?

Megoldás

Az $f(x) = c$ konstansfüggvény minden x_0 helyen differenciálható, ugyanis egy tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R} = D_f$ pontra differenciálhányadosa:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

2. példa

Differenciálható-e a $g(x) = x$ függvény?

Megoldás

A $g(x) = x$ függvény bármely $x_0 \in \mathbb{R} = D_g$ pontra differenciálható, ugyanis differenciálhányadosa:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

3. példa

Differenciálható-e a $h(x) = x^2$ függvény?

Megoldás

A bevezetőben vizsgált $h(x) = x^2$ függvény bármely $x_0 \in \mathbb{R} = D_h$ pontban differenciálható, ugyanis

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Megjegyzés: Korábban már elemeztük az $y = x^2$ függvényt. A fenti eredménybe helyettesítve $x_0 = 2$-t, természetesen most is $2 \cdot 2 = 4$ a differenciálhányados.

Maradva utolsó példánknál, képzeljük el, hogy a $h(x) = x^2$ függvény differenciálhányadosát minden valós x_0 helyen meghatároztuk, és mindenhol $2x_0$-t kaptunk eredményül. Így létrejött egy újabb függvény, amelynek hozzárendelési szabálya $x_0 \to 2x_0$, értelmezési tartománya D_h azon részhalmaza, ahol $h(x)$ differenciálható, vagyis $\mathbb{R}$. Ez a függvény persze szoros kapcsolatban van $h(x)$-szel.

deriváltfüggvény

4.5. DEFINÍCIÓ: Legyen az $f(x)$ egy függvény és $D' \subseteq D_f$ azon pontok halmaza, ahol $f(x)$ differenciálható. Az $f(x)$ *differenciálhányados-függvényének, deriváltfüggvényének* vagy *deriváltjának* nevezzük, és $f'(x)$-szel jelöljük azt a függvényt, amely D' pontjaiban az $f(x)$ függvény differenciálhányados-értékeit veszi fel.

$f(x) = c$ függvény differenciálhányados-függvénye $f'(x) = 0$, $g(x) = x$ függvény deriváltja $g'(x) = 1$ és $h(x) = x^2$ deriváltfüggvénye $h'(x) = 2x$.

Ha egy függvény valamely I intervallumon való differenciálhatóságát vizsgáljuk, ügyelnünk kell arra, hogy I nyílt vagy zárt. Ha nyitott (minden pont belső pont), akkor bármely pontnak van olyan környezete, amelyben vizsgálható a függvény. Zárt intervallum esetén azonban a bal végpontban jobbról, a jobb végpontban balról is meg kell vizsgálni a differenciálhatóságot.

Nézzük meg, hogy egy függvény valamely pontbeli differenciálhatóságának milyen kapcsolata van más függvénytulajdonságokkal!

deriváltfüggvény

4.1. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ függvény x_0-ban differenciálható, akkor ott folytonos.**

Bizonyítás

Emlékezzünk vissza a folytonosság 3.9-es definíciójára: $f(x)$ folytonos x_0-ban, ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Rendezzük az egyenlőséget! Közben kihasználjuk, hogy konstans sorozat határértéke maga a konstans, azaz

$$\lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0).$$

Így $f(x)$ pontosan akkor folytonos, ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0.$$

A tétel feltételei mellett a folytonosságnak ezt a formáját már beláthatjuk:

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) =$$

A tényezőkre bontást a 3.4-es tétel alapján végezzük el.

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0).$$

Ezután kihasználjuk, hogy a függvény x_0-ban differenciálható:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$



Itt használjuk ki először (!), hogy a differenciálhányados véges valós szám:

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$$

$$= f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Tehát a függvény x_0 pontban folytonos.

Megjegyzés: Ha $f'(x_0)$ végtelen értéket is felvehet, akkor egy „$\infty \cdot 0$" típusú határérték-problémával állunk szemben. Korábban láttuk, hogy az ilyen szorzat eredménye bizonytalan. Így a folytonosság állandó vizsgálatra szorulna az x_0 pontban, és a függvény hol folytonos lenne, hol nem.

Ha $f(x)$ függvény folytonos egy pontban, sajnos nem biztos, hogy differenciálható is. Ennek belátásához elegendő egy ellenpéldát mutatnunk.

4. példa

Az $f(x) = |x|$ függvény az $x_0 = 0$ pontban folytonos. Differenciálható is?

Megoldás

Írjuk fel a differenciálhányadost a kérdéses pontban:

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}.$$

Mint azt az előző fejezet 8. leckéjének 4/*d*. példájában láttuk, a jobb és bal oldali határérték nem egyezik meg. A bal és jobb oldali differenciálhányados nem egyenlő, így $f(x)$ függvény x_0 pontban bár folytonos, ám mégsem differenciálható ($y = |x|$ minden egyéb pontban folytonos és deriválható).

Következő példánk függvénye egyetlen pontban folytonos, ott deriválható is.

5. példa

Deriválható-e a következő, $\mathbb{R}$-en értelmezett függvény az $x_0 = 0$ helyen?

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad x\in\mathbb{Q},\\ -x^2, & \text{ha} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Megoldás

Mivel

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\pm x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\pm x=0,$$

így deriválható. A differenciahányados az alábbi függvény:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\begin{cases} x, & \text{ha} \quad x\in\mathbb{Q},\\ -x, & \text{ha} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Ez az $x_0 = 0$ pontban folytonos (minden más pontban az eredeti $f(x)$ függvény nem folytonos, ezért deriváltja sincs).

* * *

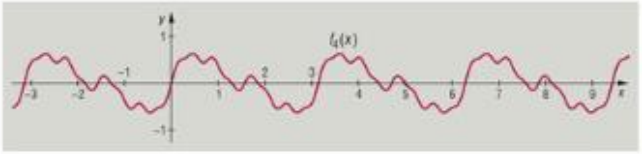
Tételünk szerint a függvény folytonossága a differenciálhatóság szükséges, de nem elégséges feltétele. A differenciálható függvények halmaza a folytonos függvények részhalmaza.

Sokáig úgy gondolták, hogy nem létezik olyan függvény, amely mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható. Először a publikálástól eltiltott Bolzano 1830 körül, majd Weierstrass 1872-ben konstruált mindenütt folytonos, ám sehol sem differenciálható függvényt. Ez Hermitet annyira bosszantotta, hogy Stieltjesnek írt levelében ezt írta: *„Rémülettel és irtózattal fordulok el ettől a siralmas fekélytől: függvények, amelyeknek sehol sincs deriváltjuk".*

Bernard Bolzano (1781–1848) szudétanémet, Karl Weierstrass (1815–1897) német, Charles Hermite (1822–1901) francia, Thomas Jan Stieltjes (1856–1894) holland matematikus.

Ezek a függvények nem olyan egyszerűek, mint amilyeneket eddig megismertünk. Ilyen például a következő függvény (6. ábra):

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \ldots + \frac{1}{2^n}\sin(2^n \cdot x)\right).$$



6. ábra



Az $y = |x|$ viselkedéséből kiindulva, a fűrészfog alakú függvények sem differenciálhatók azon pontokban, ahol hirtelen irányt váltanak. Ha ismernénk olyan függvényt, amelynek mindenhol „fűrészfoga" van, akkor az sehol sem lenne differenciálható. Legyen

$$g(x) = |x|, \text{ ha } -1 < x \le 1 \text{ és } g(x) = g(x \pm 2),\ D_g = \mathbb{R}.$$

A $g(x)$ függvény tehát $p = 2$ szerint periodikus. Ebből származtatjuk az alábbi függvényt:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(g(x) + \frac{3}{4}g(4x) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot g\left(4^2 \cdot x\right) + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot g\left(4^n \cdot x\right)\right).$$

A lecke végén megemlítünk egy további kapcsolatot a folytonosság és a deriválhatóság között:

Az $f(x)$ függvényt *folytonosan deriválhatónak* nevezzük x_0-ban, ha $f(x)$ deriváltja az x_0 pontban folytonos.

Feladatok

1. A 4.4. definíció alapján fogalmazzuk meg a bal oldali differenciálhányados fogalmát.
2. Adjunk példát valamely pontban csak balról, illetve csak jobbról deriválható függvényre.
3. Határozzuk meg a következő függvények tetszőleges x_0 pontbeli differenciálhányadosát és deriváltfüggvényét:
   a) $f(x) = 3x$; *b)* $g(x) = 0{,}1x^2$.

3. A differenciálás műveleti szabályai

Az előző leckében meghatároztuk az $f(x) = c$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$ függvények deriváltfüggvényeit. Korábban láttuk a sorozatoknál és a függvények határértékeinél is, hogy ha új fogalmat alakítunk ki, mint amilyen volt a sorozat, illetve függvény határértéke, célszerű vizsgálni a műveleti szabályokat (2.9. és 3.3. tételek).

Mielőtt további függvények differenciáljait vizsgálnánk, lássuk, milyen műveleti szabályokat alkalmazhatunk a deriválás során!

Összeg, szorzat, hányados deriváltja

összeg, szorzat, hányados deriváltja

4.2. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ és $g(x)$ az $x_0 \in D_f \cap D_g$ pontban differenciálható, akkor $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, és ha $g(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{f(x)}{g(x)}$ is differenciálható ebben a pontban. Deriváltjaik pedig rendre:**

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0),$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),$$

ha $g(x_0) \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Bizonyítás

Mindhárom esetben kihasználjuk a függvényekkel kapcsolatos műveleti szabályokat (3.7-es definíció), majd a keletkező kifejezéseket visszavezetjük $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ és $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ differenciahányadosokra, illetve azok feltételezett $f'(x_0)$ és $g'(x_0)$ határértékeire.

Összeg deriválása:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\big(f(x) \pm g(x)\big) - \big(f(x_0) \pm g(x_0)\big)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big) \pm \big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

Megjegyzések: Felhasználtuk a 3.3-as függvények határértékeivel végzett műveletekre vonatkozó tétel eredményeit. Az előbb és a következőkben is feltételezzük, hogy $x \neq x_0$.

Szorzat deriválása:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)\cdot\big(f(x)-f(x_0)\big)+f(x_0)\cdot\big(g(x)-g(x_0)\big)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}g(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=g(x_0)\cdot f'(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

A tétel feltételei miatt $g(x)$ függvény x_0-ban differenciálható, tehát folytonos: $\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$. Konstans függvényre $\lim_{x\to x_0}f(x_0)=f(x_0)$.

Megjegyzés: Ha a differenciálhányados fogalmánál megengedtünk volna végtelen „értéket", akkor a fenti bizonyítás helytelen lenne (nem biztos, hogy a függvény folytonos).

Következmény: Ha az f és g függvények közül valamelyik konstans, pl. $f(x)=c$, akkor

$$[c\cdot g(x_0)]'=c'\cdot g(x_0)+c\cdot g'(x_0)=0\cdot g(x_0)+c\cdot g'(x_0)=c\cdot g'(x_0).$$

(Az 1. példánál láttuk, hogy konstans deriváltja 0.)

Konstans tényező kiemelhető a derivált elé.

Hányados deriváltja:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x)}{x-x_0}.$$

Koncentráljunk csak a második tényezőre:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}g(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=g(x_0)\cdot f'(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Mivel az első tényező $g^2(x_0)$ reciproka, az eredmény:

$$\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

A 4.1-es tétel és $g(x_0)\neq 0$ volta miatt.

A határértékekkel végzett műveleteket leíró 3.3-as tételre támaszkodunk a műveletek elvégzésénél.

Összetett függvény deriváltja

összetett függvény deriváltja

Konyhanyelven:
„a külső függvény deriváltja a belső függvény helyén szorozva a belső függvény deriváltjával".

4.3. TÉTEL: **Ha a $g(x)$ függvény $x_0 \in D_g$ pontban és az $f(x)$ függvény $g(x_0) \in D_f$ pontban differenciálhatók, akkor $f(g(x))$ is differenciálható x_0 pontban, és**

$$(f(g))'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Bizonyítás I.

Lássunk először egy tanulságos, de **rossz** bizonyítást! Ha $x \to x_0$ és $x \neq x_0$, akkor egyszerű fogásnak tűnik, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}$ kifejezést bővítjük $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$-lal. Így

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor a differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata miatt $g(x) \to g(x_0)$, így

$$\lim_{g(x) \to g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

A tétel feltételei között nem szerepel, hogy $g(x) \neq g(x_0)$.

Készen vagyunk, gondolhatnánk. (Sajnos sok könyvben így is tesznek.) Azonban az egyenlőség csak akkor teljesül, ha x_0 környezetében $g(x)$ sehol sem egyenlő $g(x_0)$-lal, ellenkező esetben 0-val osztanánk!

Bizonyítás II.

Hogy ezen problémát elkerüljük, érdemes a differenciálhatóság fogalmának 4.3-as törtmentes definícióját használni. Alkalmazzuk ezt az összetett függvényre:

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0)) \cdot (g(x) - g(x_0)) + \varepsilon(g(x)) \cdot (g(x) - g(x_0)),$$

ahol $\varepsilon(g(x)) \to 0$, ha $g(x) \to g(x_0)$. Újra kihasználjuk, hogy a deriválhatóságból adódik a folytonosság: ha $x \to x_0$, akkor $g(x) \to g(x_0)$. Így $(x - x_0)$-lal végigosztva a fenti sort $(x \neq x_0)$:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= f'(g(x_0)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \varepsilon(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to$$

$$\to f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0),$$

ugyanis $\varepsilon(g(x)) \to 0$, ha $x \to x_0$ és $g'(x_0)$ véges érték.

Inverz függvény deriváltja

A tükrözés miatt az inverzek párban járnak. Ha f inverze g, akkor g inverze f.

Inverz függvénypárokat már régóta ismerünk, például $2x$ és $0{,}5x$, x^2 „jobb oldala” és $\sqrt{x}$, $\lg x$ és 10^x. f-fel és g-vel jelölve őket $D_f = R_g$ és $D_g = R_f$. Igaz rájuk az is, hogy $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ a megfelelő értelmezési tartományokon. Megfigyelhetjük, hogy ha $f\colon x_0 \to y_0$, akkor $g\colon y_0 \to x_0$, f és g grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenesre. Látjuk, ha egy folytonos függvénynek van inverze, akkor inverze is folytonos.

Mely függvényeknek lehet inverze? Pontosan azoknak van, melyek minden értéket csak egy helyen vesznek fel.

Megjegyzés: Ha $y = f(x)$-nek van inverze, akkor a fentiek alapján cseréljük fel x és y szerepét, majd oldjuk meg az $x = f(y)$ egyenletet y-ra. Ha $f(x) = y = 2x + 3$:

$$x = f(y) = 2y + 3 \;\Rightarrow\; x - 3 = 2y, \;\Rightarrow\; \frac{x-3}{2} = y = g(x).$$

Az értelmezési tartományokat is egyeztetnünk kell, itt $D_f = R_g$ és $D_g = R_f = \mathbb{R}$.

Az $f(x)$ inverzét $f^{-1}(x)$ jelöli. A következő tétel $f^{-1}(x)$ deriválhatóságáról szól.

Ne tévesszük össze a (-1)-edik hatvánnyal!

4.4. Tétel: **Ha az $f(x)$ függvénynek létezik inverze az $]a; b[$ nyitott intervallumon, és $f(x)$ differenciálható az $f^{-1}(x_0)$ helyen, továbbá $f'\left(f^{-1}(x_0)\right) \neq 0$, akkor az $f^{-1}(x)$ differenciálható $x_0 \in]a; b[$ pontban, és**

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)}.$$

inverz függvény deriváltja

Bizonyítás

Az inverz fogalma miatt $f(f^{-1}(x)) = x$. Ha $x \to x_0$ $(x \neq x_0)$, akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{f\left(f^{-1}(x)\right) - f\left(f^{-1}(x_0)\right)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f\left(f^{-1}(x)\right) - f\left(f^{-1}(x_0)\right)}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)}.$$

A bizonyításban kihasználtuk, hogy csak a kölcsönösen egyértelmű függvényeknek van inverze. Így ha $x \neq x_0$, akkor $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(x_0)$ és $f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) \neq 0$. Mivel $f(x)$ függvény differenciálható az $f^{-1}(x_0)$ helyen, ezért folytonos is, ekkor az $f^{-1}(x)$ is folytonos az x_0 helyen: $x \to x_0$ esetén $f^{-1}(x) \to f^{-1}(x_0)$.

Feladatok

1. Mely tulajdonsággal rendelkező függvényeknek létezik biztosan inverze?
2. Melyik tulajdonság zárja ki inverz létezését? Hogyan kerülhetjük meg ezt a problémát?

4. Bizonyos függvénytípusok deriváltjai

Miután megismerkedtünk a differenciálási szabályokkal, határozzuk meg néhány ismert függvénytípus deriváltját.

Hatványfüggvények

A bevezető 3. példában láttuk, hogy az $f(x) = x^2$ függvény deriváltja $f'(x) = 2x$. Vizsgáljuk most meg általában, hogy $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ hatványfüggvényekre milyen szabály vonatkozik!

hatványfüggvény deriváltja

4.5. TÉTEL: **Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor az $f(x) = x^n$ függvény D_f minden pontjában differenciálható, és**

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Bizonyítás I.

Teljes indukciót használunk, mivel a kitevőben pozitív egész értékek vannak.

Ha $x = 0$, akkor jelen esetben legyen $0^0 = 1$.

1. Vizsgáljunk meg néhány kezdeti értéket. Az $f(x) = x$-re:
$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1.$$
A példában láttuk, hogy
$$(x^2)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x.$$
2. Tételezzük fel, hogy $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.
3. Végül vizsgáljuk meg az x^{n+1} hatványfüggvényt:
$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' =$$
$$= x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n.$$

Használtuk a szorzatra vonatkozó differenciálási szabályt:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \quad \text{ahol} \quad f(x) = x \text{ és } g(x) = x^n.$$

Bizonyítás II.

Tekintsük a következő nevezetes szorzatot:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^1 b^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

A zárójelben levő hatványfüggvények folytonossága miatt:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}\right)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}\right) = n \cdot x_0^{n-1}.$$

* * *

Következmény: Ha $p, q \in \mathbb{Z}$ és $q \neq 0$, akkor bármely $x > 0$-ra $F(x) = x^{\frac{p}{q}}$ függvény deriváltja:

$$F'(x) = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Bizonyítás

A hatványozás azonosságai miatt $F(x) = x^{p\cdot\frac{1}{q}}$ összetett függvény, ahol a belső függvény $g(x) = x^p$ és a külső függvény $f(x) = x^{\frac{1}{q}}$. A külső függvény x^q hatványfüggvény inverze. A differenciálásnál az inverzre és az összetett függvényre vonatkozó ismereteket alkalmazzuk:

$$\left(\frac{p}{x^q}\right)' = \left(\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{q\cdot\left(\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1}}\cdot px^{p-1} = \frac{1}{q\cdot x^{\frac{p}{q}(q-1)}}\cdot px^{p-1} =$$

$$= \frac{p}{q}\cdot x^{p-1-\frac{p}{q}(q-1)} = \frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Ha q páratlan, akkor x negatív szám is lehet.

Trigonometrikus függvények

4.6. Tétel: **A szinusz- és koszinuszfüggvények $\mathbb{R}$ értelmezési tartományuk minden pontjában differenciálhatók, és**

$$\sin'(x) = \cos x, \quad \cos'(x) = -\sin x.$$

szinusz- és koszinuszfüggvény deriváltja

Bizonyítás

A bizonyítás során felhasználjuk a harmadik fejezetben megismert $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ nevezetes határérték következő formáját:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = 1.$$

Szükségünk lesz a következő azonosságra:

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}.$$

Így ha $x \to x_0$ és $x \neq x_0$, akkor mivel a koszinuszfüggvény mindenütt folytonos:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2} = 1\cdot\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2} =$$

$$= \cos\frac{2x_0}{2} = \cos x_0.$$

11. tankönyv 186. oldal.

arkusz szinusz deriváltja

Lássuk a szinuszfüggvény inverzét!

4.7. TÉTEL: **Az $f(x) = \arcsin x$ függvény $D_f = [-1; 1]$ minden belső pontjában differenciálható, és**

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Bizonyítás

Az inverz függvény differenciálási szabálya miatt

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)},$$

mivel az eredeti függvény a $\sin x$ függvény.

A gyök elé azért nem kell mínuszjel, mert az $\arcsin x$ értékkészletén $\cos x$ nem negatív.

Tulajdonképpen készen is lennénk, de $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Így:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

tangensfüggvény deriváltja

4.8. TÉTEL: **A tangensfüggvény $D_{\mathrm{tg}\,x} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható, és**

$$\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x.$$

Bizonyítás I.

A $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságokat, a két függvény hányadosára vonatkozó deriválási szabályt és $\sin x$, $\cos x$ deriváltját felhasználva:

$$\mathrm{tg}'x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x.$$

Bizonyítás II.

A differenciálhányados definíciója alapján:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin x_0}{\cos x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \cdot \frac{\sin x \cdot \cos x_0 - \sin x_0 \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\cos x \cdot \cos x_0} = 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

Kihasználtuk a $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$ addíciós összefüggést (11.-es könyv 148. oldal), és a koszinuszfüggvény folytonosságát.

4.9. Tétel: **Az $f(x)=\operatorname{arctg}x$ függvény értelmezési tartománya $D_f=\mathbb{R}$ minden pontjában differenciálható, és**

$$\operatorname{arctg}'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

arkusz tangens deriváltja

11.-es tankönyv 188. oldal.

Bizonyítás

Felhasználjuk az inverz függvény differenciálási szabályát, és hogy a tangensfüggvény a $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, valamint a 4.8-as tételt:

$$\operatorname{arctg}'x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}x)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Logaritmus és exponenciális függvények

4.10. Tétel: **Az $f(x)=\ln x$ függvény értelmezési tartománya $D_f=\mathbb{R}^+$ minden pontjában differenciálható, és**

$$\ln'x=\frac{1}{x}.$$

e alapú logaritmusfüggvény deriváltja

$\ln x$ az e alapú logaritmusfüggvény.

Bizonyítás

Hogy a logaritmus értelmezési tartományán belül maradjunk, célszerű minden $x_0\in\mathbb{R}^+$ esetén a

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

alakot használni, ahol h-t mindig úgy választjuk, hogy $x_0+h>0$. Ezt figyelembe véve:

$$\lim_{h\to0}\frac{\ln(x_0+h)-\ln x_0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\ln\frac{x_0+h}{x_0}=$$

$$=\lim_{h\to0}\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to0}\ln\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\cdot\ln\lim_{h\to0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right].$$

A bizonyítás során ebben a sorrendben használtuk a logaritmus két azonosságát: $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$ és $c\cdot\ln a=\ln(a^c)$, továbbá a logaritmusfüggvény folytonosságát.

Mivel $h \to 0$, $\frac{x_0}{h}$ tart a végtelenhez. Utolsó kifejezésünk tovább írható:

$$\frac{1}{x_0} \cdot \ln \lim_{h \to 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{h}} \right)^{\frac{x_0}{h}} \right] = \frac{1}{x_0} \cdot \ln e = \frac{1}{x_0}.$$

Következmény: $f(x) = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}^+)$ deriváltját megkapjuk, ha átírjuk e alapúra:

$\ln a$ konstans, így kiemelhető a deriváltból.

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln' x = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

exponenciális függvény deriváltja

4.11. TÉTEL: **Az $f(x) = a^x$ függvény minden $x \in \mathbb{R} = D_f$ esetén differenciálható, és**

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Bizonyítás

A *triviális* szó „*magától értetődő*"-t jelent.

$a = 1$ esetén az állítás triviális.

Minden más esetben a^x függvény $\log_a x$ inverze, és $a^x \neq 0$, ezért az inverz függvény differenciálási szabálya miatt:

$$(a^x)' = \frac{1}{\log_a'(a^x)} = \frac{1}{\frac{1}{a^x \cdot \ln a}} = a^x \cdot \ln a.$$

Nagyon kedves folyománya tételünknek, hogy létezik függvény, amelynek deriváltja önmaga!

Következmény: Az $f(x) = e^x$ minden $D_f = \mathbb{R}$-beli pontban differenciálható, és

$$(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x.$$

Feladatok

1. Fejezzük be a 4.6-os tételt: azaz igazoljuk, hogy minden valós számra $(\cos x)' = -\sin x$.

   Segítség: $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

2. A szinuszfüggvényhez hasonlóan határozzuk meg a koszinuszfüggvény inverzét.
3. Határozzuk meg a koszinuszfüggvény $f(x) = \arccos x$ inverzének deriváltfüggvényét.
4. Határozzuk meg az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény deriváltfüggvényét.

5. Kidolgozott deriválási feladatok

A feladatmegoldás elősegítése érdekében álljon itt néhány elemi függvény deriváltfüggvénye. Az értelmezési tartományt csak azon esetekben adjuk meg, ha $D_{f'} \neq D_f$.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x

Deriválási szabályok	
I.	$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$
II.	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
III.	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
IV.	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
V.	$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
VI.	$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Tulajdonképpen a differenciálszámítás egy függvényeken végzett művelet. A következő példákban bemutatjuk, hogyan kell ezt a műveletet végrehajtani.

Kezdő feladatmegoldóknak ajánljuk, hogy legyen előttük az előző táblázat (érdemes kiírni ezt egy lapra). Először döntsük el, mely szabály(oka)t alkalmazzuk. Írjuk fel minden alkalommal, így hamar megtanuljuk mind! (Hasonlóan a másodfokú egyenlet megoldóképletéhez.)

1. példa

Határozzuk meg az $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8x + 4$ polinomfüggvény deriváltfüggvényét.

Megoldás

Alkalmazzuk ebben a sorrendben az $(f \pm g)'$ (II.), $(c \cdot f)'$ (I.) deriválási szabályokat, illetve a konstans- és a hatványfüggvény deriváltját. Ennyire részletesen később nem szükséges kiírni:

$$f'(x) = (3x^3 - 5x^2 + 8x + 4)' =$$
$$= (3x^3)' - (5x^2)' + (8x)' + (4)' = 3(x^3)' - 5(x^2)' + 8(x)' + 4' =$$
$$= 3(3x^2) - 5(2x) + 8(1) + 0 = 9x^2 - 10x + 8.$$

Tehát a keresett deriváltfüggvény: $f'(x) = 9x^2 - 10x + 8$.

2. példa

Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[100]{x^7}$ és a $g(x) = \frac{5}{x^4}$ differenciálhányados függvényét.

Megoldás

Mindkét esetben ajánlott a törtkitevőjű alak, majd a hatványfüggvény deriválása:

$$f'(x) = \left(x^{\frac{7}{100}}\right)' = \frac{7}{100} x^{\frac{7}{100}-1} = \frac{7}{100} x^{-\frac{93}{100}} = \frac{7}{100} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{x^{93}}};$$
$$g'(x) = \left(5x^{-4}\right)' = 5\left(x^{-4}\right)' = 5\left(-4x^{-5}\right) = -20x^{-5}.$$

3. példa

Deriváljuk a $h(x) = (3x + 1)(2x^3 - 5x^2)$ függvényt.

Megoldás I.

Fejtsük ki a szorzatot, és az 1. példához hasonlóan járjunk el:

$$h'(x) = \left[(3x + 1)(2x^3 - 5x^2)\right]' = \left[6x^4 - 13x^3 - 5x^2\right]' =$$
$$= (6x^4)' - (13x^3)' - (5x^2)' = 6(x^4)' - 13(x^3)' - 5(x^2)' =$$
$$= 6(4x^3) - 13(3x^2) - 5(2x) = 24x^3 - 39x^2 - 10x.$$

Megoldás II.

Kezeljük szorzatként a függvényt, legyen $f(x) = 3x + 1$ és $g(x) = 2x^3 - 5x^2$, így $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. III. szerint:

$$h'(x) = \overset{f'(x)}{(3x+1)'} \cdot \overset{g(x)}{(2x^3 - 5x^2)} + \overset{f(x)}{(3x+1)} \cdot \overset{g'(x)}{(2x^3 - 5x^2)'} =$$
$$= 3(2x^3 - 5x^2) + (3x+1)(6x^2 - 10x) =$$
$$= 6x^3 - 15x^2 + 18x^3 - 24x^2 - 10x = 24x^3 - 39x^2 - 10x.$$

4. példa

Határozzuk meg a $h(x) = \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x$ deriváltfüggvényét.

Megoldás

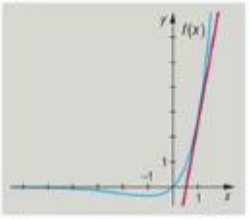
Hasonlóan az előző példához:

$$h'(x) = \big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) =$$
$$= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot \operatorname{tg} x + x^{\frac{1}{2}} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tg} x + x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}.$$

III. szabály, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ és $g(x) = \operatorname{tg} x$.

5. példa

Írjuk fel az $f(x) = x \cdot e^x$ függvény görbéjének $x_0 = 1$ pontjában húzható érintőjének egyenletét. *(7. ábra)*



7. ábra

Megoldás

Az $f(x)$ függvény görbéjéhez $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontban húzott érintő meredeksége $f'(x_0)$, ahogyan azt korábban láttuk (Leibniz példája). Az egyenes iránytangenses egyenlete $y - y_0 = m(x - x_0)$, így az érintő egyenlete:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Az érintő egyenletét tételként is megtanulhatjuk!

Mivel

$$f'(x) = \big(x \cdot e^x\big)' = e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x),$$

III. szabály

ezért $f'(1) = 2e$. Ugyanakkor $f(1) = e$, tehát az érintő egyenlete:

$$y = 2e \cdot (x - 1) + e = 2ex - e.$$

6. példa

Deriváljuk a $h(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + \cos x}$ függvényt.

Megoldás

$$h'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} =$$
$$= \frac{(2x - 5) \cdot (x^3 + \cos x) - (x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^2 - \sin x)}{(x^3 + \cos x)^2}.$$

IV. szabály, $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^3 + \cos x$.

Nem fejtettük ki a számlálót, mert most csak a deriválást gyakoroljuk.

7. példa

Deriváljuk a $h(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ függvényt.

Megoldás

IV. szabály, $f(x) = 1$, $g(x) = \sin x$.

$$h'(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=$$

$$=\frac{1'\cdot\sin x-1\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}.$$

8. példa

Deriváljuk a $h(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ függvényt.

Megoldás

$f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$

$$h'(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=$$

$$=\frac{\left(e^x\right)'\cdot x^2-e^x\cdot\left(x^2\right)'}{x^4}=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{e^x}{x^3}\cdot(x-2).$$

* * *

A legnehezebbek az összetett függvény differenciálási szabályára vezető feladatok. Ilyen esetben első lépésünk mindig az, hogy megpróbáljuk eldönteni, melyik a külső, illetve melyik a belső függvény.

A döntést nagyban elősegíti, ha egyrészt tisztában vagyunk a műveletek természetes sorrendjével (összeadás és kivonás, szorzás és osztás, hatványozás és logaritmus), másrészt kiigazodunk a zárójelek között.

Ha valamiért mégis gondot okoz a beazonosítás, akkor segíthet az is, ha elképzeljük magunk előtt, amint egy régebbi típusú számológépen lépésről lépésre kiszámolunk egy helyettesítési értéket. Amit elsőnek kell kiszámítani, az jó eséllyel a belső függvény, amit utána, az a külső függvény lesz.

9. példa

Deriváljuk a $h(x) = \sin^3 x$ függvényt.

Megoldás

Azonosítsuk a külső, belső függvényeket: $f(X) = X^3$ (külső függvény), $g(x) = \sin x$ (belső függvény).

Ekkor:

$$h'(x)=\left[f\left(g(x)\right)\right]'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)=$$

$$=(3\sin^2 x)\cdot(\cos x)=3\sin^2 x\cdot\cos x.$$

10. példa

Deriváljuk a $h(x) = \sin x^3$ függvényt.

Megoldás

Az előbbi feladathoz képest megfordul a külső, belső függvény. Most $f(X) = \sin X$ (külső függvény), $g(x) = x^3$ (belső függvény):

$$h'(x) = \left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) =$$

$$= \left(\cos x^3\right) \cdot \left(3x^2\right) = 3x^2 \cdot \cos x^3.$$

11. példa

Határozzuk meg a $h(x) = e^{\sin x}$ függvény deriváltfüggvényét.

Megoldás

A külső $f(X) = e^X$, a belső pedig $g(x) = \sin x$ függvény:

$$h'(x) = \left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x.$$

12. példa

Határozzuk meg a $h(x) = (2x + 1)^3$ függvény deriváltját.

Megoldás I.

A külső függvény $f(X) = X^3$, a belső pedig $g(x) = 2x + 1$:

$$h'(x) = \left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2.$$ V. szabály

Megoldás II.

Fejtsük ki ezt a nevezetes szorzatot az

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

azonosság alapján:

$$h'(x) = (8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)' = 24x^2 + 24x + 6.$$ I., II. szabály

13. példa

Differenciáljuk a $h(x) = \arcsin \sqrt{x}$ függvényt.

Megoldás

Ez is kétszeresen összetett függvény, $f(X) = \arcsin X$ és $g(x) = \sqrt{x}$:

$$h'(x) = \left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1 - x)}},$$

ahol $0 < x < 1$.

A többszörösen összetett függvények deriváltját az ún. láncszabállyal fejtjük ki.

Találkozhatunk többszörösen összetett függvények deriválásával is, pl.:

$k(x) = f\big(g\big(h(x)\big)\big)$ esetén $k'(x) = f'\big(g\big(h(x)\big)\big) \cdot g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$.

14. példa

Végül deriváljunk egy többszörösen összetett függvényt: $k(x) = \ln\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

Megoldás

A legkülső függvény $f(X) = \ln X$, a középső $g(X) = \sqrt{X}$, a belső pedig $h(x) = \operatorname{tg} x$. Alkalmazzuk a láncszabályt, illetve a kétszeres szögek szinuszára vonatkozó addíciós összefüggést:

$$h'(x) = \Big[f\big(g\big(h(x)\big)\big)\Big]' = f'\big(g\big(h(x)\big)\big) \cdot g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin 2x},$$

ahol $k\pi < x < (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

* * *

Az alábbi feladatot eddigi tanulmányaink alapján nem tudjuk besorolni sem az exponenciális, sem a hatvány típusú differenciálási szabályok közé – a változó megtalálható az alapban és a kitevőben is. A függvényt a logaritmus definíciójának segítségével át kell alakítanunk, majd a szorzat és összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva ki tudjuk fejezni a deriváltat.

15. példa

Differenciáljuk a $h(x) = (\sin 2x)^{\cos x}$ függvényt.

Megoldás

Ekkor

$$\ln\big(h(x)\big) = \ln(\sin 2x)^{\cos x} = \cos x \cdot \ln(\sin 2x).$$

Ügyeljünk rá, hogy $\ln(\sin 2x)$ magában is többszörösen összetett függvény. Egyrészt:

$$\Big[\ln\big(h(x)\big)\Big]' = \big[\cos x \cdot \ln(\sin 2x)\big]' =$$

$$= \cos' x \cdot \ln(\sin 2x) + \cos x \cdot \ln'(\sin 2x) =$$

$$= -\sin x \cdot \ln(\sin 2x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 =$$

$$= -\sin x \cdot \ln(\sin 2x) + 2\cos x \cdot \operatorname{ctg} 2x,$$

másrészt:

$$\Big[\ln\big(h(x)\big)\Big]' = \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{h'(x)}{(\sin 2x)^{\cos x}}.$$

Innen adódik, hogy

$$h'(x) = (\sin 2x)^{\cos x} \cdot [2\cos x \cdot \operatorname{ctg} 2x - \sin x \cdot \ln(\sin 2x)].$$

Feladatok

1. Deriváljuk a következő hatványfüggvényeket:
   a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x + 60$;
   b) $g(x) = (x+3)^2 - 5$;
   c) $h(x) = \sqrt{x}$;
   d) $i(x) = \sqrt[3]{x^5} + \sqrt[5]{x^3}$;
   e) $j(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{12}{x} + \frac{1}{60}$.

2. Deriváljuk az alábbi szorzatfüggvényeket:
   a) $f(x) = 10\sin x \cdot \operatorname{tg} x$;
   b) $g(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$;
   c) $h(x) = 16^x \cdot x^{16}$.

3. Deriváljuk a következő hányadosfüggvényeket:
   a) $f(x) = \frac{x^3 - 6x + 10}{x^4 + 5x^2}$;
   b) $g(x) = 12\operatorname{ctg} x$;
   c) $h(x) = \frac{\ln x}{2x}$.

4. Deriváljuk az alábbi összetett függvényeket:
   a) $f(x) = e^{(3x)}$;
   b) $g(x) = e^{(x^3)}$;
   c) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 5}$;
   d) $i(x) = \ln(x^2 + x)^5$.

5. Deriváljuk a következő többszörösen összetett függvényeket:
   a) $f(x) = \sin\left[\cos\left(x^2\right)\right]$;
   b) $g(x) = \operatorname{tg}^3 \sqrt{\ln x}$.

6. Deriváljuk az alábbi függvényeket:
   a) $f(x) = x^x$;
   b) $g(x) = (\cos x)^{\sin x}$.

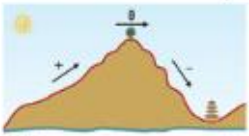
7. Adjuk meg a következő függvények adott pontbeli érintőjének egyenletét:
   a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}$;
   b) $g(x) = \sin(2x)$, $x = 3$;
   c) $h(x) = x^{2x}$, $x = 1$;
   d) $i(x) = \sin x \cdot \cos x$, $x = \frac{\pi}{4}$.

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

6. Középértéktételek (kiegészítő anyag)

Az előzőekben megismertünk egy új matematikai műveletet, a deriválást. Lényegüljünk át ismét Bothitharmává, és kezdjünk el elmélkedni, mire használható ez az új ismeret.

„Ha felfelé megyek a hegyen és szemem sugarát a hegy csúcsára vetem, akkor tekintetem egyenese mindig emelkedik. Ha lefelé megyek a hegyen és lenézek a völgyben lévő pagoda csúcsára, akkor tekintetem egyenese mindig ereszkedik. Ha a csúcson állva a látóhatárt fürkészem, akkor tekintetem egyenese párhuzamosan mutatja a végtelent a patakkal."



8. ábra

Matematikai konyhanyelvre lefordítva ez azt jelenti, hogy a növekvő függvény érintőjének meredeksége pozitív, a csökkenő függvény érintőjének meredeksége negatív, illetve ha megállunk a „hegy csúcsán", azaz a függvény helyi maximumánál, akkor az érintő meredeksége éppen zérus (*8. ábra*). A függvények menetét jellemezhetjük az érintő meredekségével, amit viszont a derivált ad meg. A pontos megfogalmazáshoz szükségünk van további tételekre.

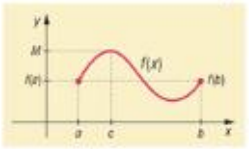
Először vizsgáljuk a hegy csúcsán húzott érintőt.

Rolle tétele

MICHEL ROLLE (1652–1719), francia matematikus.

4.12. ROLLE TÉTELE: Legyen az $f(x)$ folytonos az $[a; b]$ zárt intervallumon, differenciálható az $]a; b[$ nyitott intervallumon, továbbá $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $c \in]a; b[$ pont, amelyre $f'(c) = 0$.

Megjegyzések: Azzal, hogy zárt intervallumon követeljük meg a folytonosságot, biztosítjuk, hogy $f(a)$ és $f(b)$ véges valós értékek legyenek.



9. ábra

Bizonyítás

A 3.7-es Weierstrass-tétel miatt zárt intervallumon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit. Jelölje M az $f(x)$ maximumát és m a minimumát.

Ha $M \neq m$, akkor ezek közül legalább az egyik különbözik $f(a) = f(b)$-től, ezt az értéket $f(x)$ az $]a; b[$ nyitott intervallum belsejében veszi fel. Tegyük fel, hogy $M \neq f(a) = f(b)$ és $a < c < b$ olyan pont, amire $f(c) = M$. (*9. ábra*)

Írjuk fel c-ben a bal és jobb oldali differenciálhányadosokat! Közelítse (de ne érje el) x^- alulról, x^+ felülről c-t úgy, hogy $x^-, x^+ \in]a; b[$. Mivel a számláló és a nevező is negatív, minden bal oldali differenciahányadosra $\dfrac{f(x^-) - f(c)}{x^- - c} \geq 0$. A jobb oldali differenciahányadosok számlálója negatív, nevezője pozitív, ezért mindre $\dfrac{f(x^+) - f(c)}{x^+ - c} \leq 0$.

Ebből következik határértékeikre, hogy a bal oldali differenciálhányados nemnegatív, a jobb oldali pedig nem pozitív. Ám a feltétel szerint mindenhol, így $c \in]a; b[$ pontban is létezik a függvény differenciálhányadosa! Ez csak úgy teljesülhet, ha $f'(c^-) = f'(c^+) = 0$.

Ha $M = m$, akkor $f(x)$ konstans $[a; b]$-on. Mivel konstans függvény deriváltja 0, ezért minden $c \in]a; b[$-re $f'(c) = 0$.

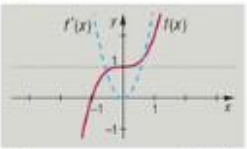
* * *

A következő tétel bizonyítását Rolle tételének igazolásából kiolvashatjuk.

4.13. Fermat tétele: Legyen az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban helyi szélsőértéke, és legyen $f(x)$ differenciálható x_0-ban. Ekkor $f'(x_0) = 0$.

Pierre de Fermat (1601–1665), francia jogász (!), harmadfokú függvények vizsgálatakor jött rá erre az eredményre.

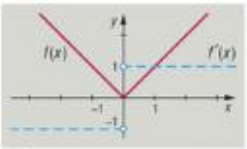
Fermat tétele



10. ábra

Megjegyzések:

1. Az értelmezési tartomány azon pontjait, ahol $f(x)$ differenciálható és differenciálhányadosa 0, *stacionárius* pontoknak nevezzük.
2. A tétel csak szükséges feltétele az x_0-beli szélsőértéknek. Pl. az $f(x) = x^3 + 1$ függvény $x_0 = 0$ pontbeli $f'(x) = 3x^2$ első differenciálhányadosa 0, ám a függvénynek ebben a pontban nincs szélsőértéke. ***(10. ábra)***
3. Az $f(x) = |x|$ függvény az $x = 0$ hely kivételével minden pontban differenciálható, de éppen ebben a pontban van a függvénynek minimuma. *Attól, hogy egy függvény valahol nem differenciálható, még lehet szélsőértéke.* ***(11. ábra)***



11. ábra

Általánosítsuk Rolle tételét!

4.14. Cauchy tétele: Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények folytonosak $[a; b]$-on, differenciálhatóak $]a; b[$-on és bármely $x \in]a; b[$-re $g'(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $c \in]a; b[$, amelyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Cauchy tétele

Augustin Louis Cauchy (1789–1857), francia matematikus.

Bizonyítás

Rolle tételéből következik, hogy $g(a) \neq g(b)$, vagyis $g(x)$ az a és b pontokban más értéket vesz fel. (Mert ha $g(a) = g(b)$, akkor lenne olyan $c \in]a; b[$, hogy $g'(c) = 0$, de ezt kizártuk.) A tételt visszavezetjük Rolle tételére: előállítunk egy olyan $h(x)$ függvényt, amelyre teljesülnek a Rolle-tétel feltételei.

Legyen $h(x) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$, ahol λ egy meghatározandó konstans. (Nyilván a tétel feltételeiben adott intervallumokon a $h(x)$ függvény folytonos és differenciálható, hiszen két ilyen típusú függvény összege és konstansszorosa is az.) A konstanst úgy adjuk meg, hogy teljesüljenek a 4.12-es tétel feltételei: követeljük meg, hogy

$$h(a) = f(a) + \lambda \cdot g(a), \quad h(b) = f(b) + \lambda \cdot g(b) \quad \text{és} \quad h(a) = h(b).$$

Ekkor utóbbit felírva és átalakítva kifejezhető a keresett konstans:

$$f(a) + \lambda \cdot g(a) = f(b) + \lambda \cdot g(b),$$

$$f(a) - f(b) = \lambda \cdot g(b) - \lambda \cdot g(a),$$

$$-\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \lambda.$$

A λ konstanst Lagrange-féle multiplikátornak (szorzótényezőnek) szokták nevezni.

Így a következő függvényre teljesül Rolle tétele:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x).$$

Ez kimondja, hogy van olyan $c \in]a; b[$, hogy $h'(c) = 0$. Induljunk ki most ez utóbbiból:

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c).$$

Rendezve kapjuk a tétel állítását.

Ha most Cauchy tételében $g(x) = x$-et helyettesítünk, akkor $g'(x) = 1$, $g(a) = a$ és $g(b) = b$. Így előző tételünk egy híres, sokat használt következményét vezettük le.

Lagrange tétele

JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813), olasz születésű francia matematikus.

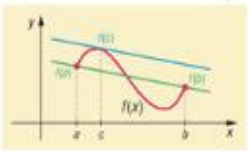
4.15. LAGRANGE TÉTELE: Ha az $f(x)$ folytonos $[a; b]$ intervallumon és differenciálható $]a; b[$-on, akkor létezik olyan $c \in]a; b[$, amelyre

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Megjegyzések:

1. Ha a Lagrange-tétel feltételei mellett $f(a) = f(b)$, akkor $f'(c) = 0$, tehát a Rolle-tétel a Lagrange-tétel egy speciális esete. A Lagrange-tétel a Cauchy-tétel egy speciális esete. Viszont Cauchy tételét a Rolle-tétel segítségével bizonyítottuk. Úgy *tűnik*, hogy a cica megfogja a saját farkát.
2. Hogy még csavarjunk egyet a dolgon: a Lagrange-tétel segítségével is igazolható Cauchy tétele. (Gyakorlatilag bármelyikből kiindulva igazolhatjuk láncszerűen a többit.)
3. A Lagrange-tétel geometriai jelentése: az $]a; b[$ intervallumban van olyan c pont, amelyre a $(c; f(c))$ pontban húzott érintő párhuzamos az $(a; f(a))$, $(b; f(b))$ pontokon átmenő szelővel. *(12. ábra)*
4. Rolle, Cauchy és Lagrange tétele „csak" *egzisztenciatétel*. Egy adott tulajdonságokkal rendelkező pont létezését állítják, azonban sem a pontok számáról, sem helyéről nem adnak felvilágosítást.

A megoldás: tételeinket önállóan is, a másik nélkül igazolhatjuk.



12. ábra

A Lagrange-tétel alábbi folyományát később, az ötödik fejezetben (integrálszámítás) használjuk ki.

4.16. tétel

4.16. TÉTEL: Ha az $f(x)$ függvény folytonos $[a; b]$-on, differenciálható $]a; b[$-on és utóbbi pontokban $f'(x) = 0$, akkor az $f(x)$ függvény konstans az $[a; b]$-on.

Bizonyítás

A feltételek mellett a Lagrange-tétel bármely $[a; x]$-ra teljesül, ahol $x \in]a; b[$. Így

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Mivel $f'(c) = 0$, ezért a számlálóban levő $f(x) - f(a) = 0$, tehát $f(x) = f(a)$.

* * *

Tételünkből következik az *integrálszámítás alaptétele* (később világossá válik, miért hívjuk így):

az integrálszámítás alaptétele

4.17. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvény folytonos $[a; b]$-on, differenciálható $]a; b[$-on és $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in]a; b[$-ra, akkor van olyan c konstans, hogy $g(x) = f(x) + c$ minden $x \in [a; b]$-ra.**

Bizonyítás

Mivel $f'(x) = g'(x)$, így $g'(x) - f'(x) = 0$. A különbség differenciálási szabálya miatt $[g(x) - f(x)]' = 0$, így a 4.16-os tétel alapján $g(x) - f(x) = c$, ezért $g(x) = f(x) + c$.

7. Monotonitás, szélsőérték, példák

Láttuk, hogy a Rolle-tétel gyümölcseként – ha csak szükséges feltételként is, de – komoly lehetőséget kaptunk arra, hogy vizsgálni tudjuk, hol lehet egy differenciálható függvény szélsőértéke. A Lagrange-tétel segítségével a függvények egy másik tulajdonságát, a monotonság és a differenciálhatóság közötti kapcsolatot is vizsgálhatjuk.

a monotonság és a differenciálhatóság kapcsolata

4.18. TÉTEL: **Legyen az $f(x)$ függvény $[a; b]$-on folytonos és $]a; b[$-on differenciálható.**

a) **Az $f(x)$ függvény pontosan akkor *monoton***
- ***növő*** **$[a; b]$-on, ha minden $x \in]a; b[$-ra $f'(x) \geq 0$;**
- ***csökkenő*** **$[a; b]$-on, ha minden $x \in]a; b[$-ra $f'(x) \leq 0$.**

b) **Ha $f'(x) > 0$ minden $x \in]a; b[$-ra, akkor $f(x)$ *szigorúan monoton növő;* ha $f'(x) < 0$ minden $x \in]a; b[$-ra, akkor $f(x)$ *szigorúan monoton csökkenő.***

Bizonyítás (a)

Szükségesség bizonyítása: $f(x)$ monoton növekedéséből bizonyítjuk, hogy $f'(x) \geq 0$.

Legyen tehát $f(x)$ monoton növekvő függvény az $[a; b]$-on és $c \in]a; b[$. Ekkor ha $x \in [a; b]$ és $x < c$, $f(x) - f(c) \leq 0$ és $x - c < 0$. Ha $x \in [a; b]$ és $x > c$, akkor $f(x) - f(c) \geq 0$ és $x - c > 0$. A különbségi hányadosokra $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ minden $x \in [a; b]$ $(\neq c)$ esetén, így

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq 0,$$

mert nemnegatív különbségi hányadosoknak nem lehet negatív határértéke. Mivel c tetszőleges érték volt, ezért $]a; b[$ minden pontjára ugyanez teljesül. Ezzel a szükségesség részt igazoltuk.

Az elégségesség bizonyítása: ha $f'(x) \geq 0$, akkor a függvény $[a; b]$-on monoton növekvő.

Legyen $f'(x) \geq 0$ minden $x \in]a; b[$-re, és legyenek $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ tetszőleges értékek. Alkalmazzuk Lagrange 4.15-ös tételét $[x_1; x_2]$ és $]x_1; x_2[$ intervallumokra: létezik $c \in]x_1; x_2[$, hogy

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Mivel a tétel feltételei mellett $f'(c) \geq 0$, továbbá biztosan $x_2 - x_1 > 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ kell, hogy legyen, azaz $f(x_2) \geq f(x_1)$. Tehát a függvény monoton növekedő.

Bizonyítás (b)

Mivel $f'(x) > 0$ minden $x \in]a; b[$-ra, az *a)* rész második felében használt jelölések mellett

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

Ekkor $f(x_2) - f(x_1) > 0$, így $f(x_2) > f(x_1)$: $f(x)$ szigorú monoton.

Megjegyzések:

1. A tétel *b)* állítása nem fordítható meg. Például $f(x) = x^5$ függvény grafikonján látható, hogy bár mindenhol szigorúan monoton növekvő, viszont $f'(x) = 5x^4 = 0$ az $x = 0$ pontban.
2. A tétel nyílt és végtelen intervallumokra is igaz. Ekkor a bizonyításoknál nem követeljük meg a folytonosságot.

1. példa

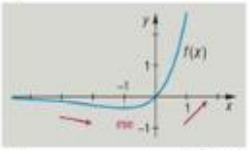
Vizsgáljuk meg az $f(x) = x \cdot e^x$ függvényt ($D_f = \mathbb{R}$) monotonitás és szélsőértékek szempontjából.

Megoldás

A 4.18-as tétel szerint képeznünk kell az $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$ deriváltfüggvényt (a III. szabály alapján). A függvény értelmezési tartományának azon intervallumait keressük, ahol $f(x)$ növő vagy csökkenő. A tétel miatt ezek azon intervallumok, ahol $f'(x) = e^x \cdot (x + 1)$ negatív vagy nempozitív, illetve ahol pozitív vagy nemnegatív. Mivel e^x minden x-re pozitív, ezért $f'(x)$ előjelét csak az $(x + 1)$ tényező határozza meg:

- $x + 1 < 0$, $x < -1$ esetén a függvény szigorúan monoton csökkenő,
- $x + 1 > 0$, $x > -1$ esetén a függvény szigorúan monoton növekvő.

Vegyük észre, hogy $f(x) = x \cdot e^x$ függvénynek $x = -1$ pontbeli differenciálhányadosa 0. Fermat tétele miatt itt *lehet* szélsőértéke. Előző két gondolatunk szerint a függvény másként viselkedik $x = -1$ előtt (csökken) és után (nő), ezért ebben a pontban a függvénynek minimuma *van.* (13. ábra)



13. ábra

* * *

Legutolsó észrevételünk alapján elégséges feltételt adhatunk a szélsőérték létezésére.

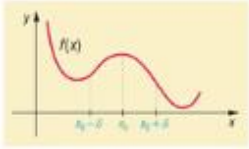
4.19. TÉTEL: **Legyen az $f(x)$ differenciálható x_0 pontban és valamely δ sugarú környezetében. Ekkor, ha $f'(x_0) = 0$, valamint $f'(x) \geq 0$, ha $x_0 - \delta < x < x_0$ és $f'(x) \leq 0$, ha $x_0 < x < x_0 + \delta$, akkor $f(x)$-nek az x_0 pontban helyi maximuma van.**

helyi maximum elégséges feltétele

Ott van szélsőérték, ahol a derivált „előjelet vált".

Bizonyítás

A feltétel szerint $f(x)$ függvény differenciálhányadosa $]x_0 - \delta; x_0]$-on nemnegatív, ezért a 4.18-as tétel szerint a függvény monoton növekvő ezen az intervallumon. Ezért $f(x_0)$ a legnagyobb itt felvett érték.



14. ábra

Az $[x_0; x_0 + \delta[$-on $f(x)$ monoton csökkenő, emiatt szintén $f(x_0)$ a legnagyobb érték, amit felvesz. Ebből következik, hogy az x_0 δ sugarú környezetében $f(x_0)$ a legnagyobb érték, azaz itt van a függvény helyi maximuma *(14. ábra)*. Hasonlóan adódik a helyi minimum is.

Megjegyzés: Az $f(x)$ függvény $f'(x)$ deriváltfüggvényének x_0 pontbeli előjelváltása elégséges, de nem szükséges feltétele annak, hogy az x_0 pontban lokális szélsőértéke legyen egy függvénynek. Tekintsünk egy olyan függvényt, amelynek értékkészletére $x^2 \le f(x) \le 4x^2$ teljesül minden $x \in D_f$ pontra. Ekkor az $x = 0$ pontban az $f(x)$-nek nyilván minimuma van, de lehet, hogy csak a 0 az egyetlen olyan hely, ahol a függvény differenciálható. Ilyen pl. a következő Dirichlet-féle függvény:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 4x^2, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ez egy hiphop függvény: elég sokat ugrál 0 környezetében…

Lássunk néhány példát szélsőérték meghatározására!

2. példa

Határozzuk meg az $f(x) = x \cdot e^x$ függvény szélsőértékeit.

Megoldás

Mint láttuk, a függvénynek $x_0 = -1$ pontban minimuma van, és a minimum értéke $-\frac{1}{e}$. Más szélsőértéket az $f'(x) = e^x \cdot (1 + x)$ derivált nem enged meg.

3. példa

Egy hosszú betonfal melletti mezőből szeretnénk elkeríteni a lehető legnagyobb téglalap alakú területet. Ehhez vásároltunk 220 m hosszú drótkerítést. Mekkorák legyenek a terület oldalai, ha a kerítést teljes egészében felhasználjuk?

Megoldás

A betonfal melletti mindkét oldal legyen x-x méter hosszú, így a vele párhuzamos oldal $(220 - 2x)$ méter. A keresett terület nagyságát x függvényében a következő függvény írja le:

$$T(x) = x(220 - 2x) = -2x^2 + 220x.$$

Bár nem tudjuk, mihez kell a lekerített rész, mérete egy FIFA-szabvány szerinti focipálya méretének felel meg…

Ennek maximumát keressük. A lehetséges szélsőérték:

$$T'(x) = -4x + 220 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 55.$$

Itt valóban van szélsőérték, ugyanis a lineáris $T'(x)$ előjelet vált a zérushelyén, pozitívból negatívba. Tehát $x_{max} = 55$ méter. A keresett téglalap oldalai 110 m, 55m, 55m, a téglalap területe 5500 m^2.

Megjegyzés: A feladat során szépen követhető a modellalkotás folyamata:

1. A gyakorlati probléma átültetése a matematika nyelvére (a feladat szövege alapján $T(x) = x(220 - 2x)$ függvény maximumát keressük).
2. A probléma megoldása (a maximumot megkapjuk a derivált segítségével, hiszen a lineáris $T'(x) = -4x + 220$ előjelet vált $x = 55$ helyen).
3. Az eredmény interpretálása (a téglalap oldalainak megadása).

4. példa

Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés teljes havi x mennyisége 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára $(36 - 0{,}03x)$ euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő összes havi kiadást (költséget) a

$$0{,}0001x^3 - 30{,}12x + 13\,000$$

összefüggés adja meg euróban.

a) Számítsuk ki, hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb. Mekkora a legnagyobb havi bevétel?

b) Adjuk meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget. Hány kg krém eladása esetén valósul ez meg? *(nyereség = bevétel – kiadás)*

2010. októberi emelt szintű érettségi 7. feladat. Az *a)* kérdésre 6, a *b)*-re 10 pontot lehetett kapni.

Több függvénnyel is dolgoznunk kell. Mindegyikre jellemző, hogy az előállított x mennyiségtől (kg) teszi függővé értékeit. Értelmezési tartományukra így $D = [100; 700]$.

- Bevételfüggvény. Azt mutatja meg, mennyit fizet a kereskedő a krémért egy hónapban, ha x kg krémet gyártottak. Mivel az eladási ár $(36 - 0{,}03x)$ €/kg, ezért

$$B(x) = x \cdot (36 - 0{,}03x) = -0{,}03x^2 + 36x.$$

- Kiadásfüggvény. Ezt a feladat megadta:

$$K(x) = 0{,}0001x^3 - 30{,}12x + 13\,000.$$

- Nyereségfüggvény. A zárójeles megjegyzésből tudjuk:

$$Ny(x) = B(x) - K(x) =$$
$$= -0{,}03x^2 + 36x - (0{,}0001x^3 - 30{,}12x + 13\,000) =$$
$$= -0{,}0001x^3 - 0{,}03x^2 + 66{,}12x - 13\,000.$$

Megoldás (a)

A válaszhoz keressük $B(x)$ maximumát:

$$B'(x) = -0{,}06x + 36 = 0, \quad \text{ha} \quad x = 600.$$

Itt valóban maximum van, hiszen $x < 600$-ra $B'(x) > 0$, $x > 600$-ra pedig $B'(x) < 0$. Ekkor

$$B(600) = -0{,}03 \cdot 600^2 + 36 \cdot 600 = 10\,800.$$

600 kg krém előállítása esetén a legnagyobb a bevétel: 10 800 €.

Megoldás (b)

$Ny(x)$ maximumát keressük:

$$Ny'(x) = -0{,}0003x^2 - 0{,}06x + 66{,}12 = 0,$$

amiből

$$x_{1,2} = \frac{0{,}06 \pm \sqrt{0{,}06^2 + 4 \cdot 0{,}0003 \cdot 66{,}12}}{-2 \cdot 0{,}0003} = \frac{0{,}06 \pm 0{,}288}{-0{,}0006}.$$

Hazánkban még nem nagyon terjedt el a kapitalista szemlélet: ha egy termékből többet adunk el, akkor egységárát csökkentjük.

Innen $x_1 = -580$, $x_2 = 380$. Mivel $x_1 \notin D$, vele nem foglalkozunk.

A parabola helyzetéből adódik, hogy ha $-580 < x < 380$, akkor $Ny'(x) > 0$, és ha $x > 380$, akkor $Ny'(x) < 0$. Tehát $x = 380$ helyen $Ny(x)$-nek maximuma van. A maximum értéke:

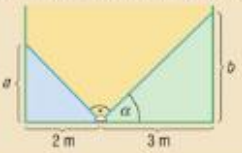
$$Ny(380) = 2306{,}4.$$

A legnagyobb nyereség 380 kg krém előállításakor realizálódik, mégpedig 2306,4 €.

Megjegyzés: A fenti bevétel, illetve kiadás kiszámítására szolgáló képletek tapasztalaton alapulnak, közelítő jellegűek. A valóságot modellezik egy többé-kevésbé pontos matematikai modellel.

5. példa

Egy szoba 5 méter széles fala néz az utcára. Az ablakok és az erkélyajtó miatt csak az egyik faltól 2 méterre helyezhetjük el a mozgásérzékelőt. Azt szeretnénk, hogy $(a + b)$ a lehető legkisebb legyen.



Mekkora α szögben állítsuk be a szenzort, ha az érzékelő derékszögű térrészt képes figyelni?

Megoldás

Az ábra alapján:

$$\frac{a}{2} = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \quad \text{és} \quad \frac{b}{3} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Jelölje $(a + b)$ α-tól függő hosszát $L(\alpha)$. Így

$$L(\alpha) = a + b = 2\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) + 3\operatorname{tg}\alpha.$$

Figyelembe véve a tangens- és a kotangensfüggvény közötti összefüggéseket is:

$$L(\alpha) = 2\operatorname{ctg}\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha.$$



(Az ábra alapján $D_L = [0^\circ; 90^\circ]$.) Keressük L szélsőértékét:

$$L'(\alpha) = -2 \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} + 3 \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{3\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = 0.$$

A tört zérushelyét csak a számláló határozhatja meg, amit átalakítva:

$$3\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{2}{3}.$$

Ennek az értelmezési tartományba eső megoldása:

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 39{,}23^\circ.$$

Itt valóban minimum van:

$$\alpha_0 < \alpha \quad \text{esetén} \quad \operatorname{tg}^2\alpha > \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 3\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha > 0,$$

az $L(\alpha)$ függvény növekedő, ugyanakkor ha

$$\alpha_0 > \alpha, \quad \text{akkor} \quad \operatorname{tg}^2\alpha < \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 3\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha < 0,$$

az $L(\alpha)$ függvény csökkenő.

Ekkor a két oldalon $a \approx 2{,}45$ m és $b \approx 2{,}45$ m hosszú falszakasz marad „őrizetlenül".

Feladatok

1. Vizsgáljuk meg a függvényeket monotonitás és szélsőértékek szempontjából:
   a) $f(x) = x^3 - x^2$; *b)* $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$; *c)* $h(x) = x^4 - 2x^3$.
2. Határozzuk meg az $f(x) = \ln(\cos x)$ függvény értelmezési tartományát, majd vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőértékek szempontjából.
3. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a 4.19-es tételt minimumra.
4. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 4 cm, magassága 8 cm. Mekkora a területe annak a legnagyobb téglalapnak, amelynek egyik oldala a háromszög alapján van, másik két csúcsa pedig a háromszög szárain?
5. Egy kúp alakú betonépítmény 4 méter széles és 8 méter magas. Legfeljebb mekkora henger formájú, maximális térfogatú lakótér alakítható ki benne? (A lakótér és a kúp alapja egy síkba esik.)

8. Magasabb rendű deriváltak, szélsőérték újra (kiegészítő anyag)

Ha a függvény további alaki tulajdonságai és a differenciálás kapcsolatát akarjuk vizsgálni, akkor be kell vezetnünk a magasabb rendű derivált fogalmát. Ha $f(x) = x^5$ függvényt deriváljuk, akkor $f'(x) = 5x^4$. Az újabb hatványfüggvényt tovább differenciálhatjuk, így a derivált deriváltja $(f'(x))' = 20x^3$. Jelöljük az egyszerűség kedvéért $f''(x)$-szel, ez az eredeti $f(x)$ függvény második deriváltja.

második differenciálhányados

4.6. Definíció: Legyen az $f(x)$ függvény differenciálható x_0 pont valamely környezetében. Ha $f'(x)$ függvény deriválható x_0-ban és differenciálhányadosa véges, akkor ezt $f(x)$ függvény x_0-beli *második differenciálhányadosának* nevezzük, jelölése: $f''(x_0)$.

A differenciálhányados definíciója szerint

$$f''(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0},$$

ha utóbbi létezik és véges.

magasabb rendű deriváltfüggvény

4.7. Definíció: Ha az $f(x)$ függvény bármely $A \subseteq D_f$ halmazon differenciálható és ezen halmaz minden pontjában $f'(x)$ is differenciálható, akkor az $f'(x)$ differenciálhányados függvényét $f(x)$ második deriváltjának nevezzük, és $f''(x)$-szel jelöljük. Ha az eljárást folytatjuk akár n-szer egymás után (amennyiben lehet), akkor az $f(x)$ függvény *magasabb vagy n-ed rendű deriváltfüggvényét* kapjuk.

Az n-edik deriváltat $f^{(n)}(x)$-szel jelöljük. Tehát

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(1)}(x) = f'(x), \quad f^{(2)}(x) = f''(x).$$

A 3-nál nagyobb rendű deriváltakat számmal írjuk ki, így $f^{(7)}(x)$ az $f(x)$ hetedik deriváltja. Ha n bármely pozitív egész szám lehet, akkor $f^{(n)}(x)$ azt jelenti, hogy a függvény akárhányszor differenciálható.

1. példa

Deriváljuk ahányszor csak lehet a következő függvényt:

$$f(x) = 15x^3 - 2x^2 + 1 \quad (D_f = \mathbb{R}).$$

Megoldás

$$f'(x) = 45x^2 - 4x, \quad f''(x) = 90x - 4, \quad f'''(x) = 90.$$

Innen kezdve minden $n > 3 \in \mathbb{N}$-re $f^{(n)}(x) = 0$.

2. példa

Deriváljuk ahányszor csak lehet az alábbi függvényt:

$$f(x) = e^x \quad (D_f = \mathbb{R}).$$

Megoldás

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \text{minden} \quad n \in \mathbb{N}^+\text{-ra}.$$

3. példa

Deriváljuk ahányszor csak lehet a következő függvényt:

$$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^+,\ D_f = \mathbb{R}).$$

Megoldás

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}, \quad f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2},$$
$$f'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = n!$$

Azonban $f^{(m)}(x) = 0$ minden $m > n$ egészre.

4. példa

Deriváljuk ahányszor csak lehet az alábbi függvényt:

$$f(x) = \sin x \quad (D_f = \mathbb{R}).$$

Megoldás

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x,$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x = f(x).$$

Látható, hogy a függvény magasabb rendű deriváltjai periodikusan ismétlődnek.

Megjegyzések: Alkalmazzuk a 4. példát egy ún. függvényegyenletre! Melyik függvény lehet megoldása az $f''(x) + f(x) = 0$ egyenletnek? A feladat különlegességét az adja, hogy egyrészt az ismeretlen egy függvény, másrészt szerepel az egyenletben annak második deriváltja. Az ilyen típusú függvényegyenleteket *differenciálegyenletnek* nevezzük. A feladatnak biztosan megoldása pl. $f(x) = \sin x$, mivel $-\sin x + \sin x = 0$.

Eddigi példáinkból úgy tűnhet, hogy a magasabb rendű deriváltak egyre egyszerűbbek. Például tört deriválva ez általában sajnos nem így van.

A magasabb rendű deriváltaknak is vannak műveleti szabályai. Így pl.:

$$(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}.$$

A másodrendű derivált segítségével egy újabb elégséges feltételt adhatunk a lokális szélsőérték meghatározására.

a másodrendű derivált és a lokális szélsőérték kapcsolata

4.20. Tétel: **Legyen az $f(x)$ függvény x_0 pontban kétszer deriválható. Ha $f'(x_0) = 0$, valamint $f''(x_0) < 0$ (vagy > 0), akkor az $f(x)$ függvénynek x_0-ban lokális maximuma (vagy minimuma) van.**

5. példa

A második derivált segítségével igazoljuk, hogy az $f(x) = x \cdot e^x$ függvénynek $x_0 = -1$ helyen helyi minimuma van.

Megoldás

Korábban láttuk, hogy

$$f'(x) = e^x \cdot (x + 1), \quad \text{így} \quad f'(-1) = 0.$$

A második derivált:

$$f''(x) = e^x \cdot (1 + x) + e^x = e^x \cdot (2 + x).$$

Az $x_0 = -1$ pontban

$$f''(-1) = \frac{1}{e^1} > 0,$$

tehát ebben a pontban a függvénynek valóban helyi minimuma van.

6. példa

Határozzuk meg az $f(x) = \ln(\sin x)$ függvény szélsőértékeit.

Megoldás

Ez egy összetett függvény, ezért az erre vonatkozó szabállyal deriváljuk. Az ilyen típusú függvények deriválása előtt célszerű megállapítani a függvény értelmezési tartományát. Esetünkben:

$$D_f =]2k\pi;\ 2(k + 1)\pi[, \quad \text{ahol} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Deriváljunk:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x = 0, \quad \text{ha} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Fermat tétele szerint itt lehet a függvénynek szélsőértéke. Viszont az eredeti függvény értelmezési tartománya miatt csak $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ eseteket kell vizsgálnunk, máshol a függvény nincs értelmezve. Deriváljunk másodszor:

$$f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Mivel

$$f''\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1 < 0,$$

ezért a függvénynek ezeken a helyeken helyi maximuma van.

A maximum értéke:

$$\ln\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \ln 1 = 0.$$

Megjegyzés: Gondoljuk meg: a belső függvénynek a kapott helyeken van helyi maximuma, amelyen a szigorúan monoton logaritmusfüggvény nem változtat.

Bármely tétel „működőképességét" célszerű ismert példákon megvizsgálni.

Feladatok

1. Deriváljuk ötször a következő függvényeket:
   a) $f(x) = 3x^3 - 6$; *b)* $g(x) = 2x^4 + 4x - 10$;
   c) $h(x) = 6x^5 + 4x^2$; *d)* $i(x) = 2x^8 - 3x^6 + x^4$.
2. Deriváljuk néhányszor az $f(x) = \cos 8x$ függvényt $(D_f = \mathbb{R})$.
3. Deriváljuk négyszer az $f(x) = x \cdot e^x$ függvényt. Adjunk formulát az n-edik deriváltra.
4. Deriváljuk párszor az $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ függvényt. Tudnánk formulát adni az n-edik deriváltra?
5. Megoldása az $f''(x) + f(x) = 0$ differenciálegyenletnek az $f(x) = \cos x$ függvény?
6. Bizonyítsuk teljes indukcióval, hogy az n-edik deriváltakra $(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$.
7. Vizsgáljuk meg a második derivált segítségével, mely pontokban van lokális szélsőértéke a következő függvényeknek:
   a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$; *b)* $g(x) = x^4 - 2x^3$;
   c) $h(x) = x^2 \cdot e^x$.

9. Konvexitás, inflexiós pont (kiegészítő anyag)

A függvény további alaki tulajdonságainak vizsgálatánál is jó szolgálatot tesz a második derivált.

konvex, konkáv függvény

4.21. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ függvény a nyitott $]a; b[$-on kétszer differenciálható, akkor**

a) **az $f(x)$ függvény pontosan akkor**

- ***konvex*** **$]a; b[$-on, ha minden $x \in]a; b[$-ra $f''(x) \geq 0$;**
- ***konkáv*** **$]a; b[$-on, ha minden $x \in]a; b[$-ra $f''(x) \leq 0$.**

b) **Ha $f''(x) > 0$ minden $x \in]a; b[$ pontban, akkor a függvény *szigorúan konvex;* ha $f''(x) < 0$ minden $x \in]a; b[$ pontban, akkor a függvény *szigorúan konkáv.***

A tételnek csak maga az *a)* része négy külön tétel. Bizonyítani kellene konvexségre, konkávságra, illetve a szükséges és elégséges részt is be kell látni.

* * *

Arra gondolhatunk, hogy ha $f''(x)$ nem pozitív x_0 előtt és nem negatív x_0 után, akkor a függvény konkávból konvexre változik, x_0-ban pedig inflexiós pontja van, és nyilván $f''(x_0) = 0$. Nézzünk meg pontosan egy ilyen összefüggést!

az inflexiós pont és a másodrendű derivált kapcsolata

4.22. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ függvénynek x_0-ban inflexiós pontja van, és x_0 valamely környezetében kétszer differenciálható, akkor $f''(x_0) = 0$.**

Bizonyítás

Fermat tételét alkalmaztuk $f'(x)$ függvényre.

Ha x_0 inflexiós pont, és $f(x)$ konvexből konkávra változik, akkor $]x_0 - \delta; x_0]$-on az $f(x)$ függvény konvex $(f''(x) \geq 0)$, így $f'(x)$ ezen az intervallumon monoton növekvő. Nyilván ekkor $[x_0; x_0 + \delta[$-on konkáv $(f''(x) \leq 0)$, így $f'(x)$ ezen az intervallumon monoton csökkenő. Az $f'(x)$ függvénynek helyi maximuma van x_0 pontban, azaz $f''(x_0) = 0$. Ha a függvény konkávból változik konvexre, a bizonyítás hasonló.

* * *

A 4.22-es tétel csak szükséges feltétel, mivel pl. az $f(x) = x^4$ függvény második deriváltja $f''(x) = 12x^2$, melynek $x = 0$ zérushelye. Am itt az eredeti függvénynek nem inflexiós pontja van, hanem minimuma. A következő tételben már egy elégséges feltételt adunk az inflexiós pont létezésére.

4.23. Tétel: **Ha az $f(x)$ függvény az x_0 pont egy környezetében háromszor differenciálható és $f''(x_0) = 0$, de $f'''(x_0) \neq 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek x_0 helyen inflexiós pontja van.**

az inflexiós pont és a harmadrendű derivált kapcsolata

Fermat tétele és a szélsőérték elégséges feltételei lokális szélsőértékek meghatározására szolgálnak. Érdekes összefüggés van a függvény konvexsége, konkávsága és a globális szélsőérték között.

4.24. Tétel: **Ha az $f(x)$ függvény x_0 valamely I környezetében differenciálható, konvex és $f'(x_0) = 0$, akkor x_0 globális minimum I-n (konkáv esetben globális maximum).**

globális minimum és maximum

Természetesen I akár lehet az $\mathbb{R}$ is.

1. példa

Határozzuk meg az $f(x) = x \cdot e^x$ függvény inflexiós pontját (pontjait).

Megoldás I.

Mivel

$$f''(x) = e^x \cdot (2 + x) = 0, \quad \text{ha} \quad x = -2,$$

itt lehetséges inflexiós pont. Ha $x < -2$, akkor $f''(x) < 0$, ezért a függvény a $]-\infty; -2[$-on szigorúan konkáv. Ha $x > -2$, akkor $f''(x) > 0$, ezért $]-2; \infty[$-on konvex. Ebből következik, hogy az $x_0 = -2$ helyen a függvénynek inflexiós pontja van.

Megoldás II.

Az előző megoldás alapján lehetséges inflexiós pont van $x = -2$-ben. A harmadik derivált segítségével:

$$f'''(x) = e^x \cdot (3 + x).$$

Mivel $f'''(-2) = \frac{1}{e^2} \neq 0$, tehát $x = -2$ valóban inflexiós pont.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be a lecke első tételének *a)* részét konvexségre.
2. Adjunk példát olyan f és g függvényre, amelyekre valamely x_0 pontban teljesül, hogy bár mindkettő
$$f''(x_0) = f'''(x_0) = g''(x_0) = g'''(x_0) = 0,$$
mégis csak az egyiknek van inflexiós pontja x_0-ban.
3. Bizonyítsuk be a 4.24. tételt.
4. Vizsgáljuk meg a harmadik deriváltak segítségével, hol lehet inflexiós pontja az alábbi függvényeknek:
a) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$; *b)* $g(x) = x^4 - 4x^2 + x$; *c)* $h(x) = x^2 \cdot e^x$.

10. Teljes függvényvizsgálat (kiegészítő anyag)

Foglaljuk össze, hogy az eddig megismert fogalmak, tételek segítségével hogyan térképezhetünk fel egy ismeretlen $f(x)$ függvényt!

Melyek a függvény vizsgálatának legfontosabb lépései?

1. Megállapítjuk a függvény D_f értelmezési tartományát.
2. Megállapítjuk a függvény $f(x) = 0$ zérushelyeit.

Ezt a hármat a függvény szimmetriatulajdonságainak is nevezik.

3. Megállapítjuk, hogy a függvény páros, páratlan vagy egyik sem, illetve hogy periodikus-e.
4. Vizsgáljuk, hogy folytonos-e a függvény. Ha valahol nem, akkor a szakadási helyeken meghatározzuk a határértékét, illetve a $\pm\infty$-ben vett határértékeket, amennyiben léteznek.
5. Képezzük $f'(x)$ deriváltat, ha lehet. Segítségével lehetséges szélsőértékeket, illetve monotonitási intervallumokat határozunk meg. A szélsőérték fajtáját el is dönthetjük az első deriválttal.

Ezeket formai vagy alaki tulajdonságoknak nevezik.

6. Képezzük $f''(x)$-et, ha létezik. Segítségével szélsőértéket, konvexségi viszonyokat, illetve inflexiós pontot határozunk meg. Az inflexiós ponthoz használhatjuk $f'''(x)$ harmadik deriváltat is.
7. Meghatározzuk a függvény R_f értékkészletét, megállapítjuk korlátosságát.
8. Ha nem túl bonyolult a függvény, ábrázoljuk grafikonját.

Az 5. és 6. pontok nagy vonalakban összefoglalhatók egy táblázatban. (A táblázattal való bajlódás esetenként elterelheti a lényegről a figyelmet.)

$f(x)$	↗	↘	Szélsőértéke van		Konvex	Konkáv	Inflexiós pont
			maximum	minimum			
$f'(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$= 0$, és előjelet vált e: $\oplus$, u: $\ominus$	e: $\ominus$, u: $\oplus$	↗	↘	szélsőértéke van
$f''(x)$			$\neq 0$		$\oplus$	$\ominus$	$= 0$, és előjelet vált
$f'''(x)$							$\neq 0$

Nézzünk a függvényvizsgálatra néhány példát!

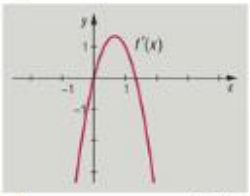
1. példa

Végezzünk részletes függvényvizsgálatot az $f(x) = 2x^2 - x^3$ függvényen.

Megoldás

A vizsgálatot lépésről lépésre leírjuk.

1. $D_f = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 2x^2 - x^3 = x^2 \cdot (2 - x) = 0$, ha $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.
3. $f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^3 = 2x^2 + x^3 \neq f(x)$ és hasonlóan $f(-x) \neq -f(x)$, tehát a függvény nem páros és nem páratlan. A függvény nem periodikus. A függvénynek semmilyen szimmetriatulajdonsága nincs.
4. A hatványfüggvények folytonosak, ezért határértéket csak $\pm\infty$-ben kell vizsgálni:
$$\lim_{x \to \infty} 2x^2 - x^3 = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to -\infty} 2x^2 - x^3 = \infty.$$
5. $f'(x) = 4x - 3x^2 = 0$, ha $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$. Ezekben a pontokban lehet a függvénynek szélsőértéke. Célszerű $f'(x)$-et sematikusan ábrázolni, mivel az ábráról azonnal leolvasható a monotonitás, illetve a szélsőérték típusa. *(15. ábra)*



15. ábra

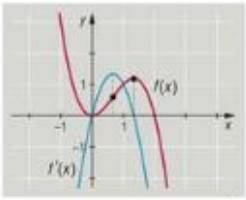
Mivel $f'(x)$ negatív $x < 0$-ra, ezért $f(x)$ függvény $]-\infty; 0[$-on szigorúan monoton csökkenő. Az f' $\left]0; \frac{4}{3}\right[$-ban pozitív, tehát itt $f(x)$ szigorúan monoton növő.

Ha $x > \frac{4}{3}$, akkor $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő. $f(x) = 2x^2 - x^3$ függvénynek $x_0 = 0$ helyen helyi minimuma van, értéke $f(0) = 0$. Az $x = \frac{4}{3}$ helyen helyi maximuma van, értéke $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{27}$.

6. $f''(x) = 4 - 6x = 0$, ha $x = \frac{2}{3}$, itt lehet inflexiós pont. Mivel $f'''\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0$, ezért ez valóban inflexiós pont is. Ha $x < \frac{2}{3}$, akkor a függvény konvex, ha $x > \frac{2}{3}$, akkor a függvény konkáv.

A polinomfüggvények esetén (mindenhol akárhányszor deriválhatók) jó szolgálatot tehet az említett táblázat. Először bontsuk fel $D_f = \mathbb{R}$-t a kapott három pontnál négy részre, majd jelöljük, hogyan viselkedik az adott intervallumokon és pontokban az első, második, harmadik derivált. Ebből leolvashatjuk (a tételek alapján) a kérdezett függvény viselkedését.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{2}{3}$	$x = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$	$x = \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < x$
$f'(x)$	$\ominus$	$= 0$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$= 0$	$\ominus$
$f''(x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$= 0$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$
$f'''(x)$				$\neq 0$			
$f(x)$	$\searrow$, konvex	helyi min.	$\nearrow$, konvex	inflexiós pont	$\nearrow$, konkáv	helyi max.	$\searrow$, konkáv



16. ábra

7. Folytonosságát és $\pm\infty$-ben vett határértékeit figyelembe véve $R_f = \mathbb{R}$.
8. A kiszámított értékeket a koordináta-rendszerben feltüntetve, vázolhatjuk a görbét. *(16. ábra)*

2. példa

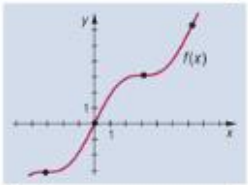
Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x + \sin x$ függvényen.

Megoldás

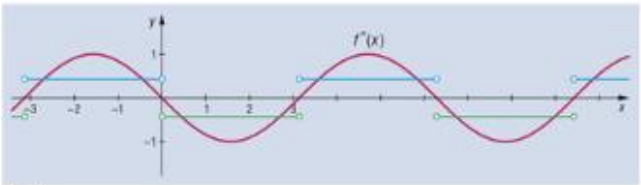
1. $D_f = \mathbb{R}$, ugyanis mindenhol értelmezett függvények összege.
2. Zérushelye $x = 0$. (Az $x + \sin x = 0$ egyenletet például grafikus úton oldhatjuk meg.)
3. $f(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin x = -(x + \sin x) = -f(x)$, tehát a függvény páratlan. Ezért elegendő az $x > 0$ értelmezési tartománybeli pontokban vizsgálni.

   Mivel a szinusz periodikus, megvizsgálhatjuk, hogy $f(x)$ periodikus-e. Azonban az $x + p + \sin(x + p) = x + \sin x$ egyenlet csak $p = 0$ esetben azonosság, tehát nem periodikus.

   Vigyázzunk, két páratlan egész összege páros, de két páratlan függvény összege páratlan! Ez a paritás nem a számfogalomnál megismertek általánosítása.
4. Mivel $f(x)$ két folytonos függvény összege, ezért D_f minden pontjában folytonos, határértékét „csak” $\pm\infty$-ben kell vizsgálni. Mivel $\sin x$ korlátos:
$$\lim_{x \to \pm\infty} x + \sin x = \pm\infty.$$
5. $f'(x) = 1 + \cos x$. Mivel $f'(x) \geq 0$ mindig, a 4.18-as tétel szerint a függvény monoton növő, ezért a függvénynek sehol nincs szélsőértéke (nem vált előjelet az első derivált). Az $f(x)$ függvény monoton növekvő a $]-\infty; \infty[$-on.
6. $f''(x) = -\sin x = 0$, ha $x = 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Itt lehet inflexiós pontja a függvénynek. A konvexséget, konkávságot $f''(x)$ ábrázolásával könnyen megvizsgálhatjuk. *(18. ábra)*



17. ábra



18. ábra

Az $f(x)$ függvény a $]0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi[$ intervallumokon konkáv, $]\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi[$ intervallumokon konvex. Ezért az $x = k\pi$ helyeken a függvénynek inflexiós pontja van.

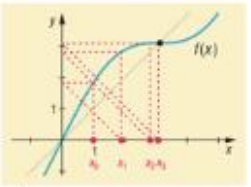
7. $R_f = \mathbb{R}$, nem korlátos a függvény.
8. Az „érdekes” pontok az $x = k\pi$ helyek. Itt a függvényérték is $f(x) = k\pi$, hiszen $\sin(k\pi) = 0$. *(17. ábra)*

Megjegyzés: Az $x \in D_f$ pontot $f(x)$ függvény fixpontjának nevezzük, ha $f(x) = x$. Látható, hogy előbbi függvényünknek az $x = k\pi$ helyek a fixpontjai. Ez akkor válik érdekessé, ha közelítünk úgy, hogy valamely x pontra kiszámítjuk $f(x)$-et, majd erre $f(f(x))$-et, $f(f(f(x)))$-et stb. Kiindulva $x_0 = 1$-ből:

$$x_1 = f(x_0) = 1 + \sin 1 = 1{,}841471; \quad x_2 = f(x_1) = 2{,}805062;$$
$$x_3 = f(x_2) = 3{,}135276; \quad x4 = f(x_3) = 3{,}141592.$$

Utóbbi már minden itt leírt tizedesjegyében megegyezik π-vel! Tovább folytatva, a közelítés egyre pontosabbá válik. ***(19. ábra)***

A közelítést felhasználhatjuk numerikus számításokhoz.



19. ábra

Az ábrán a piros kígyó feltekeredik az $y = x$ egyenesre, de nem lépi át soha $x = \pi$-t.

3. példa

Vizsgáljuk meg az $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ függvény tulajdonságait.

Megoldás

1. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
2. Nincs zérushelye. Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása csak $x = 0$ lehetne, ám $0 \notin D_f$.
3. A függvény nem periodikus.

   $$f(-x) = -x \cdot e^{\frac{1}{x}} \neq f(x), \quad \text{illetve} \quad f(-x) \neq -f(x),$$

   azaz a függvény nem rendelkezik semmilyen paritással.
4. Az $f(x)$ függvény az $x = 0$ hely kivételével mindenütt folytonos. A kifejezést nem tudjuk egyszerű átalakításokkal egyszerűbb alakra hozni, ezért jobb és bal oldali határértékeket kell vizsgálnunk.

   Legyen minden n-re $x_n^+ > 0$ és $x_n^+ \to 0$, ha $n \to \infty$. Ekkor:

   $$\lim_{x_n^+ \to 0} x_n^+ \cdot e^{-\frac{1}{x_n^+}} = \lim_{x_n^+ \to 0} x_n^+ \cdot \lim_{x_n^+ \to 0} e^{-\frac{1}{x_n^+}} = 0 \cdot 0 = 0.$$

   A jobb oldali határérték tehát 0.

   Vizsgáljuk meg a bal oldali határértéket. Legyen minden n-re $x_n^- < 0$ és $x_n^- \to 0$, ha $n \to \infty$. Felhasználva az $y_n = |x_n^-|$ jelölést adódik:

   $$\lim_{x_n^- \to 0} x_n^- \cdot e^{-\frac{1}{x_n^-}} = -\lim_{y_n \to 0} y_n \cdot e^{\frac{1}{y_n}} = -\lim_{y_n \to 0} \frac{e^{\frac{1}{y_n}}}{\frac{1}{y_n}}.$$

Az utolsó formulában mind a számláló, mind a nevező tart végtelenhez. Sok mindent tanultunk már $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték-feladatokról, ám az eddigiek alapján az eredményt nehéz meghatározni.

Az ilyen típusú feladatok megoldását könnyíti meg az ún. L'Hospital-szabály, amely a számláló és nevező deriváltjait használja. Egészen pontosan:

GUILLAUME DE L'HÔSPITAL (1661–1704), francia matematikus.

L'Hospital-szabály

A tételt általánosabban is ki lehet mondani, nem kell feltenni, hogy $g'(x_0) \neq 0$.

4.25. L'Hospital-szabály: **Legyen az $f(x)$ és a $g(x)$ két olyan függvény, amely x_0 valamely I környezetében értelmezve van és ott deriválható. Legyen $g'(x) \neq 0$ minden I-beli pontra, valamint**

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ **és** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ **vagy**
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ **és** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Ekkor amennyiben létezik $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, abban az esetben

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Megjegyzés: A tétel féloldali határérték-vizsgálata esetén is igaz és akkor is legalább olyan egyszerűen használható, mint amilyen nehéznek tűnik.

Bizonyítás

Az első állítást igazoljuk. A feltétel mellett ha $x_0 < x \in I$, akkor $[x_0; x]$-ra teljesül a Cauchy-féle középértéktétel minden feltétele. Van olyan $c \in [x_0; x]$, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ha $x \to x_0$, akkor $c \to x_0$, $c \in [x_0; x]$. A feltétel szerint $f(x_0) = g(x_0) = 0$, ezért:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Megjegyzés: Ha létezik $a \in \mathbb{R}$, és bármely $x_0 \in]a; \infty[$-ra fennállnak a tétel feltételei, akkor x_0 lehet végtelen is. (Hasonlóan $-\infty$ is.)

Így már folytathatjuk a példát:

A sorozat a függvény $\mathbb{N}$-re való leszűkítése.

$$-\lim_{y_n \to 0} \frac{e^{\frac{1}{y_n}}}{\frac{1}{y_n}} = -\lim_{y_n \to 0} \frac{e^{\frac{1}{y_n}} \cdot \left(-\frac{1}{y_n^2}\right)}{-\frac{1}{y_n^2}} = -\lim_{y_n \to 0} e^{\frac{1}{y_n}} = -\infty,$$

Az $x = 0$ pontban a bal oldali határérték $-\infty$. A jobb és bal oldali határérték nem esik egybe, ezért $x = 0$ helyen nincs határértéke $f(x)$-nek.

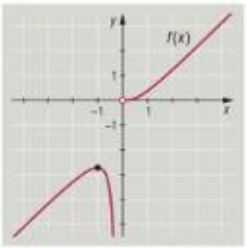
Adósak vagyunk még a függvény $\pm\infty$-ben vett határértékeivel:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \pm\infty \cdot e^0 = \pm\infty,$$

Sorban használtuk a III., V. és IV. szabályokat.

5. $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$, amiből $x = -1$. Itt lehet a függvénynek szélsőértéke. Az első derivált pozitív $x < -1$-re, ezért $f(x)$ szigorúan monoton növő $]-\infty; -1[$-on. Ha $0 > x > -1$, akkor $f'(x) < 0$, tehát $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő. Tehát $x = -1$ pontban

a függvénynek maximuma van, a maximum értéke $f(-1) = -e$. Tovább vizsgálva x lehetséges értékeit, minden $0 < x$-re $f'(x) > 0$. Végül $f(x)$ újra szigorúan monoton növekedő a $]0; \infty[$-on.



20. ábra

6. $f''(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} \neq 0$, így $f(x)$-nek nincs inflexiós pontja. Minden $x > 0$-ra $f''(x) > 0$, tehát $f(x)$ konvex $]0; \infty[$-on. A $]-\infty; 0[$-on mindenhol $f''(x) < 0$, tehát itt $f(x)$ konkáv (mindkétszer szigorúan).

7. $\mathbb{R}_f =]-\infty; -e] \cup]0; \infty[$.

8. Az egyetlen „érdekes" a $(-1; -e)$ maximumpont. A 0-nál a jobb oldali határérték is 0. ***(20. ábra)***

4. példa

Vizsgáljuk meg, hogy az 1, $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, … stb. számok közül melyik a legnagyobb.

Megoldás

Mivel a gyökkitevő mindig megegyezik a gyök alá írt értékkel, ezért logikusnak tűnik az $f(x) = \sqrt[x]{x}$ függvény ($1.\ D_f = \mathbb{R}^+$) szélsőértékeinek vizsgálata. A nem létező zérushelyek (2.) és az értelmezési tartományból adódóan a szimmetriatulajdonságok (3.) sem érdekelnek minket. Képezzük az első deriváltat (5.) az 5. lecke 15. példája alapján:

$$\left[\ln\left(f(x)\right)\right]' = \left(\ln x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x}\ln x\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot (\ln x)' = \qquad \text{III., IV. szabály}$$

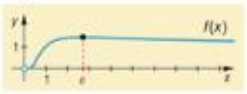
$$= -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2};$$

$$\left[\ln\left(f(x)\right)\right]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt[x]{x}}. \qquad \text{V. szabály}$$

A kettőt összevetve kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2} \cdot (1 - \ln x).$$

Ennek zérushelyét csak a zárójeles tényező adhatja: $x = e$. Sőt, az előjelét is: ha $0 < x < e$, akkor $1 > \ln x$, $f'(x) > 0$, tehát $f(x)$ szigorúan monoton növő. Ha $x > e$, akkor $1 < \ln x$, $f'(x) < 0$, tehát $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő. Az f függvénynek így lokális maximuma van az $x = e$ helyen. Mivel $2 < e \approx 2{,}718281\ldots < 3$, ezért a feladat kérdésére szóba jöhető két érték a $\sqrt[2]{2}$ és a $\sqrt[3]{3}$. Közülük $\sqrt[3]{3}$ a nagyobb, tehát ez a felsorolt számok között is a legnagyobb. ***(21. ábra)***



21. ábra

Megjegyzések:

1. A deriváltat egy másik, hasonló egysoros trükkel is megkaphatjuk. Itt a tevemódszert (hatvány-logaritmus) és az V., III., IV. szabályokat alkalmazzuk:

$$f'(x) = \left(e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left[\left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln x + \frac{1}{x}(\ln x)'\right] = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

2. Természetesen gondolhattunk volna a sorozatokra is. Vizsgáljuk az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat viselkedését. Az első néhány tagot kiszámítva látjuk, hogy $a_1 = 1$; $a_2 = 1{,}4142$; $a_3 = 1{,}4422$; $a_4 = 1{,}4142$; $a_5 = 1{,}3797$ stb. „Csak" azt kell igazolnunk, hogy a sorozat $n \geq 3$ esetén szigorúan monoton csökkenő. Amennyiben megoldottuk a 2. fejezet 6. leckéjéhez tartozó feladatokat, készen is vagyunk…
3. A 2. fejezet 6. leckéjének $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozatával kapcsolatos példájánál maradva, most már kétféle megoldást is adhatunk a feladatra. Ha igazoltuk, hogy $f(x) = \sqrt[x]{x}$ függvény szigorúan monoton csökkenő az $[e; \infty[$-on, azzal egyben bizonyítottuk azt is, hogy a sorozat szigorúan monoton csökken $n > 2$ esetén (a sorozat tagjai a függvény egész helyeken felvett értékei). Tanulság: a függvényeknél tanultakat ügyesen alkalmazhatjuk a sorozatok vizsgálatára is! Ezt tettük a L'Hospital-szabály esetén is a 3. példában.

Feladatok

1. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeknél:

   a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$; *b)* $g(x) = \dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{6}$.

2. Lehet periodikus és nem periodikus függvény összege periodikus? Ha igen, adjunk példát.

3. Végezzünk teljes vizsgálatot az $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ függvényre.

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

1. A határozatlan integrál mint a deriválás inverz művelete

Kezdjük a fejezetet egy egyszerű feladattal!

1. példa

Egy téglalap alakú telek területe 510 m^2. Az utcával párhuzamos oldal hossza 17 méter. Mekkora a telek másik oldalának hossza?

Megoldás

Tudjuk, hogy a terület a két oldalhossz szorzata, és ismerjük a szorzat eredményét: $17 \cdot x = 510$. Az ismeretlen tényezőre próbálunk visszakövetkeztetni. Gondolkodásunk elvezet bennünket a szorzás fordított, inverz műveletéhez, az osztáshoz $(x = 510 : 17)$. Az eredmény 30 m.

* * *

A legtöbb matematikai művelettel kapcsolatban felvetődik a fenti probléma. Vissza *lehet-e* következtetni a művelet eredményéből valamelyik (akár több) mennyiségre, amellyel a műveletet elvégeztük? Ha igen, *hogyan?* Ez nem csak a matematikában fontos! Fizikai, szociológiai stb. mérések eredményéből is megpróbálunk visszakövetkeztetni a mérés szereplőire.

A differenciálás esetében hangsúlyoztuk, hogy új matematikai műveletet ismertünk meg. Tegyük fel a kérdést: melyik függvényt deriváltuk, ha ismerjük a függvény deriváltját, például $f'(x) = \frac{1}{x}$ pozitív x-re? A deriválás inverz műveletét kell végrehajtanunk.

Összeadásnak a kivonás, szorzásnak az osztás, hatványozásnak a gyökvonás a fordított művelete.

Korábbi feladatból tudjuk, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Van-e másik ilyen függvény? Az összeg deriváltjára vonatkozó szabály miatt $(\ln x + c)' = \frac{1}{x}$ is teljesül.

Lásd 4.16. és 4.17. tételek

A keresett függvény így $f(x) = \ln x + c$ $(c \in \mathbb{R})$, azaz csak konstans pontosságával határozhatjuk meg $f(x)$ függvényt. Az $\ln x + 5$ ugyanúgy megoldás, mint $\ln x - \pi$.

Ha tetszőleges $f(x)$ valós függvényről beszélünk, akkor olyan $F(x)$-szel jelölt függvényt keresünk, amely differenciálható $f(x)$ értelmezési tartományán (vagy annak egy részén), és ott $F'(x) = f(x)$.

5.1. Definíció: Ha a $F(x)$ függvény differenciálható minden $x \in]a; b[$-on és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in]a; b[$-re, akkor a $F(x)$ függvényt a $f(x)$ függvény *primitív függvényének vagy *antideriváltjának* nevezzük.**

primitív függvény

Megjegyzés: A második elnevezés arra utal, hogy a differenciálás inverz műveletéről van szó. Az intervallum lehet zárt vagy végtelen is.

az integrálszámítás alaptétele

5.1. Az integrálszámítás alaptétele: Ha $F(x)$ primitív függvénye $f(x)$-nek, akkor $f(x)$ összes primitív függvénye $F(x)+c$ alakú, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Bizonyítását lásd a 4.17-es tételnél.

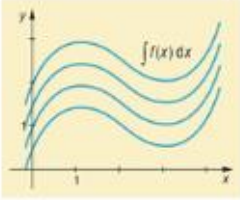
Ha egy függvénynek van primitív függvénye, akkor végtelen sok primitív függvénye van és ezek csak konstansban térnek el egymástól.

határozatlan integrál

Olvasd: „integrál ef iksz dé iksz".

5.2. Definíció: Az $f(x)$ függvény összes primitív függvényeinek halmazát az $f(x)$ függvény *határozatlan integrálj*ának* nevezzük, és $\int f(x)\,\mathrm{d}x$-szel jelöljük.

Ha az integrálási változót nem írjuk ki, akkor a rövidebb $\int f$ jelölést használjuk. Az integráljel utáni függvényt *integrandusnak*, az x változót *integrációs változónak* nevezzük (x helyén állhat t, u stb. jelölés is).



1. ábra

Megjegyzések:

1. A fenti jelsorozat arra kér bennünket, hogy határozzuk meg azt az ismeretlen függvényt, amelynek az integrandus a deriváltja.
2. Az elnyújtott S betű a szumma szóra utal, és Leibniztől származik.
3. A „határozatlan" jelző arra utal, hogy a keresett függvényt csak c konstans határozatlansággal tudjuk megadni.
4. A tétel értelmében $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+c$ $(c \in \mathbb{R})$ alakú.
5. Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek görbéit (ha léteznek) *integrálgörbéknek* nevezzük, ezek grafikonjai egymás függőleges eltoltjai. *(1. ábra)*
6. A definícióból és az inverz műveletek sajátosságaiból következik, hogy

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x), \quad \text{illetve} \quad \int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+c.$$

Sajnos integrálni jóval nehezebb, mint deriválni. Nem ismerünk általánosan alkalmazható szabályokat. Sőt, annak megállapítása sem egyszerű, hogy egy függvénynek egyáltalán van-e primitív függvénye. Az alábbi függvényeknek nincs elemi primitív függvénye:

$$e^{-x^2}, \quad \sqrt{x^3+5}, \quad \sqrt{\cos x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad x\cdot\sqrt{1-x^5},$$

A feladatokban csak olyan függvények szerepelnek, melyeknek létezik határozatlan integrálja. Aki nem találja, keresse tovább lelkesen!

tehát nem oldható meg a $F'(x)=e^{-x^2}$ stb. függvényegyenlet. Később látjuk, hogy az integrandus folytonossága elégséges feltétele a primitív függvény létezésének. Azonban a folytonosság nem szükséges feltétel: bár az e^{-x^2} függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban folytonos, mégsem tudjuk elemi függvények segítségével integrálni.

A következő példában mutatunk egy olyan függvényt, melynek bizonyítottan nincs primitív függvénye.

2. példa

Igazoljuk, hogy az alábbi függvénynek nincs primitív függvénye:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<0,\\ 1, & \text{ha } x\geq 0.\end{cases}$$

Megoldás

Indirekt úton bizonyítjuk, hogy a függvénynek nincs primitív függvénye.

Tételezzük fel, hogy mégis van ilyen $F(x)$ függvény.

Ekkor $x < 0$ esetén $F'(x) = 0$, ezért $F(x) = c \in \mathbb{R}$ (4.16-os tétel).

Ha $x \geq 0$, akkor $F'(x) = 1$. Így $F(x) = x + d$, $d \in \mathbb{R}$.

Ha $d = c$-t választjuk, akkor $F(x)$ függvény a 0 pontban folytonossá válik.

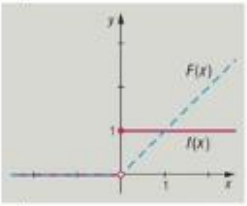
Ám mivel

$$\lim_{x^- \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x^- \to 0} \frac{c - c}{x} = 0$$

és

$$\lim_{x^+ \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x^+ \to 0} \frac{(x + c) - c}{x} = 1,$$

ezért F nem differenciálható az $x = 0$ pontban, vagyis $f(x)$-nek nincs primitív függvénye. ***(2. ábra)***



2. ábra

Megjegyzés: Hasonlóan viselkedik a következő függvény is:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in [0;1], \\ -1, & \text{ha} \quad x \in [-1;0[. \end{cases}$$

Ilyen szerkezetű függvényeket könnyűszerrel készíthetünk, és bármelyik esetén alkalmazható a fenti gondolatmenet. Minden lépcsős függvénnyel gond van, de ezek nem is elemi függvények.

Az 5.1. és 5.2. definíciókat figyelembe véve azt gondolhatnánk, hogy a differenciálási szabályokat ellenkező irányban használva integrálási szabályokat kapunk. Sajnos ez nem így van. Ha például $f(x) = x$ és $g(x) = 5$, akkor $(f + g)'(x) = 1$. Ám ha csak azt tudjuk, hogy $f(x) = x$ és $(f + g)'(x) = 1$, akkor $g(x)$ bármilyen konstans lehet.

Olyan, mintha autópályán elutaznánk a Balatonra, és utána vissza akarnánk tolatni Budapestre.

Ahogy a 4. fejezetben a deriváltakat megadtuk, a következő oldalon a teljesség igénye nélkül megadjuk néhány elemi függvény határozatlan integrálját. Deriválással meggyőződhetünk az eredmények helyességéről. (A deriváltnak egyezni kell az integrandussal.) Ahol külön nem tüntetjük fel, a függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

Megjegyzés: A 3. pontban az abszolút érték nem elhagyható, $x < 0$ esetén:

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

tehát $x < 0$-ra az $\ln(-x)$ deriváltja a reciprok függvény bal oldali ága.

Viszont $\ln x$ $(x > 0)$ deriváltja ugyanezen reciprok függvény jobb oldali ága. Az integrandus értelmezve van mindkét oldalon, tehát amikor „visszaszámolunk", az eredmény:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln(-x) + c, & \text{ha} \quad x < 0, \\ \ln x + c, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases} = \ln|x| + c.$$

	Alapintegrálok ($c \in \mathbb{R}$)	Ellenőrzése deriválással
1.	$\int k\,dx = kx + c \quad (x \in \mathbb{R})$	$(kx + c)' = k \cdot 1 + 0 = k$
2.	$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1,\ \alpha \in \mathbb{R})$	$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right)' = \frac{(\alpha+1)\cdot x^\alpha}{\alpha+1} = x^\alpha$
3.	$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c \quad (x \neq 0)$	$(\ln\lvert x\rvert + c)' = \frac{1}{x}$
4.	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$(-\cos x + c)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$
5.	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$(\sin x + c)' = \cos x$
6.	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$	$(\operatorname{tg} x + c)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7.	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$	$(-\operatorname{ctg} x + c)' = -\operatorname{ctg}' x = -\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x}$
8.	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0,\ a \neq 1)$	$\left(\frac{a^x}{\ln a} + c\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(a^x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x \cdot \ln a = a^x$
9.	$\int e^x\,dx = e^x + c$	$(e^x + c)' = e^x$
10.	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c'$	$(\operatorname{arctg} x + c)' = \frac{1}{1+x^2}$
11.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \quad (-1 < x < 1)$	$(\arcsin x + c)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. A határozatlan integrál tulajdonságai. Integrálási eljárások I.

Ahogy az eddig megismert összes függvénynek, a határozatlan integrálásnak is megvannak a sajátos tulajdonságai. Először lássunk két műveleti tulajdonságot.

primitív függvény konstansszorosa, összege

5.2. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ és a $g(x)$ függvényeknek létezik primitív függvénye valamely I intervallumon, akkor $[f(x)+g(x)]$ és $k\cdot f(x)$ $(k\neq 0\in\mathbb{R})$ valós függvényeknek is van primitív függvénye I-n, és**

(1) $$\int k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x;$$

(2) $$\int\big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás (1)

Ha $F'(x)=f(x)$, akkor

$$\big[k\cdot F(x)\big]' = k\cdot F'(x) = k\cdot f(x).$$

Így egyrészt

$$\int k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot F(x)+c_1,$$

másrészt

$$k\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot\big[F(x)+c_2\big].$$

Vigyázzunk! Ha $k=0$, akkor $\int 0\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (vagy bármi más valós szám), de $0\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Mivel c_1 és $k\cdot c_2$ tetszőleges valósak, ezért

$$\int k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás (2)

Ha $F'(x)=f(x)$ és $G'(x)=g(x)$, akkor

$$\big[F(x)+G(x)\big]' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x).$$

Tehát egyrészt

$$\int\big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)+G(x)\big]+c,$$

másrészt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+c_1 \quad\text{és}\quad \int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x)+c_2.$$

Ezért

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+G(x)+\underbrace{c_1+c_2}_{c} =$$

$$= F(x)+G(x)+c = \int\big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Megjegyzések:

1. A tétel feltételei mellett:

$$\int\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ugyanis az $f(x)-g(x)=f(x)+(-1)\cdot g(x)$ formulára kihasználhatjuk a tétel mindkét részét.

2. Teljes indukcióval kettőnél több függvényre is bizonyítható a *b)* állítás. Például három függvényre röviden:

$$\int (f+g+h)=\int f+\int g+\int h.$$

3. Minden hatványfüggvénynek létezik primitív függvénye, mivel az előző megjegyzés alapján

$$\int \left(a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_0\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\int a_n\cdot x^n\,\mathrm{d}x+\int a_{n-1}\cdot x^{n-1}\,\mathrm{d}x+\ldots+\int a_0\,\mathrm{d}x.$$

Lássunk az 5.2. tétel alkalmazására néhány példát!

1. példa

Határozzuk meg az $\int (3x^7+5x^4+e^x+2)\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Megoldás

$$\int (3x^7+5x^4+e^x+2)\mathrm{d}x=\int 3x^7\,\mathrm{d}x+\int 5x^4\,\mathrm{d}x+\int e^x\,\mathrm{d}x+\int 2\,\mathrm{d}x=$$
$$=3\cdot\frac{x^8}{8}+x^5+e^x+2x+c.$$

2. példa

Határozzuk meg az $\int \frac{1}{\sqrt[7]{t^3}}\,\mathrm{d}t$ határozatlan integrált.

Megoldás

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{t^3}}\,\mathrm{d}t=\int t^{-\frac{3}{7}}\,\mathrm{d}t=\frac{t^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}}+c=\frac{7}{4}t^{\frac{4}{7}}+c.$$

3. példa

Határozzuk meg az $\int \frac{2x^2-\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Megoldás

$$\int \frac{2x^2-\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int\left(2x^{\frac{3}{2}}-1+5x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=$$
$$=2\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x+5\cdot\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}+c=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}-x+10x^{\frac{1}{2}}+c.$$

• • •

A következőkben néhány egyszerűbb integrálási szabályt sorolunk fel, ezek azonban jól alkalmazhatók különböző feladatoknál. Például törtes integrandus esetén mindig érdemes megpróbálkozni az alábbi fogással.

I. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

Magyarázata, hogy összetett függvényként deriválva:

$$\left[\ln|f(x)|\right]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x).$$

Példák:



a) $\int \frac{2}{3x+1}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \int \frac{3}{3x+1}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \ln|3x+1| + c;$

b) $\int \frac{3x+2}{x-2}\,dx = \int \frac{3(x-2)+8}{x-2}\,dx = \int 3\,dx + 8 \cdot \int \frac{1}{x-2}\,dx =$

$= 3x + 8\ln|x-2| + c;$

c) $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c.$

II. $\int f'(x) \cdot f^{\alpha}(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$

Magyarázata, hogy

$$\left[\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c\right]' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot f^{\alpha}(x) \cdot f'(x) = f^{\alpha}(x) \cdot f'(x).$$

Példák:



a) $\int (2+5z)^3\,dz = \frac{1}{5} \cdot \int 5(2+5z)^3\,dz = \frac{1}{5} \cdot \frac{(2+5z)^4}{4} + c =$

$= \frac{(2+5z)^4}{20} + c;$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2(2x-3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$

$= (2x-3)^{\frac{1}{2}} + c;$

c) $\int \sin 2x\,dx = \int 2\sin x \cdot \cos x\,dx = 2 \cdot \int \cos x \cdot \sin^1 x\,dx =$

$= 2 \cdot \frac{\sin^2 x}{2} + c = \sin^2 x + c.$

Ha $F'(x) = f(x)$ egy intervallumon, akkor

III. $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + c$

Előbbi példáink némelyike ezzel a módszerrel is megoldható, és „új" eredményeink természetesen megegyeznek a korábbiakkal.

Példák:

a) $\int (5z+2)^3 \mathrm{d}z = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5z+2)^4}{4} + c = \frac{(2+5z)^4}{20} + c$

$(a=5,\ b=2,\ f(X)=X^3)$;

b) $\int \sin 2x \,\mathrm{d}x = \int \sin(2x+0)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x+0) + c = -\frac{\cos 2x}{2} + c$

$(a=2,\ b=0,\ f(X)=\sin X)$;

c) $\int \frac{2}{3x+1}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \ln|3x+1| + c$

$\left(a=3,\ b=1,\ f(X)=\frac{1}{X}\right)$.

IV. $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}[f(x)] + c$

Ez azért van így, mert

$$\left[\operatorname{arctg}[f(x)] + c\right]' = \frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x).$$

Példák:

a) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(\sin x) + c$;



b) $\int \frac{1}{1+5x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \int \frac{\sqrt{5}}{1+(\sqrt{5}x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\sqrt{5}x) + c.$

Ha $g(x)$ deriválható I-n és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in g(I)$-re, akkor

V. $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c$

Ugyanis

$$\left[F(g(x))\right]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$



Példák:

a) $\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int (-1) \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + c$;

b) $\int (3x^2+4) \cdot e^{x^3+4x}\,\mathrm{d}x = e^{x^3+4x} + c.$

Megjegyzés: Előbbi formuláink általánosítása az ún. *helyettesítéses integrálás:* a változó helyére egy függvényt helyettesítve jutunk egyszerűbb feladathoz. Határozatlan integráláskor ez a legerősebb és – sajnos – a legnehezebb apparátus. Nehéz megtalálni a megfelelő függvényt, amit a változó helyére beírhatunk.

Legyen $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{vagy} \quad \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Ha x helyére új változót, a differenciálható $g(t)$ függvényt helyettesítjük és ezt t szerint, mint összetett függvényt, deriváljuk, akkor

$$\left[F(g(t))\right]' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t).$$

Így $F(x)$ függvény egy új változó függvénye. Ha F primitív függvény, akkor $F(g(t))$ is primitív függvény lesz, ezért:

$$F(g(t)) + c = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Feltéve, hogy $f(g(t))$ értelmezve van.

Foglaljuk össze a módszer három lépését!

1. Az $f(x)$ integrandus függvény x változója helyére egy t változójú tetszőleges, de invertálható $g(t)$ függvényt helyettesítünk.
2. Ekkor $\mathrm{d}x$ helyére $g'(t)\,\mathrm{d}t$ kerül. A kapott egyszerűbb integrált kiszámoljuk.
3. Az eredménybe visszahelyettesítjük $g(t)$ függvény inverzét.

4. példa

Határozzuk meg az $\int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Megoldás

Beugratós a feladat. A IV. szabály nem alkalmazható, mert

$$\left(1 + e^{2x}\right)' = 2e^{2x} \neq 2e^x.$$

Próbáljuk az $e^x = t$ helyettesítést! A t folytonos, szigorúan monoton függvénynek van inverze. Ha $e^x = t$, akkor $x = \ln t$ és $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Így:

$$\int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2e^x}{1+\left(e^x\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2 \cdot \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\operatorname{arctg}(t) + c = 2\operatorname{arctg}\left(e^x\right) + c.$$

5. példa

Határozzuk meg az $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Megoldás

A kifejezés emlékeztethet minket egy trigonometrikus átalakításra: $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$. Legyen hát $x = \sin t$, ekkor $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$. Így:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Alkalmazzuk az ún. *linearizáló formulát!* Ismert, hogy

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \text{és} \quad \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t.$$

Azért „linearizáló”, mert másodfokú kifejezést elsőfokúvá alakít.

Összeadva, illetve kivonva a két sort adódik:

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \quad \text{és} \quad \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}.$$

A III. szabályt alkalmazva:

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \int \frac{\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} + c.$$

Mivel $t = \arcsin x$, így visszahelyettesítés után:

$$\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} = \frac{1}{2}t + \frac{2\sin t \cdot \cos t}{4} = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x \cdot \cos\arcsin x}{2} + c =$$

$$= \frac{x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c.$$

Feladatok

1. Az 5.2-es tétel segítségével határozzuk meg a következő függvények határozatlan integrálját:

   a) $\int\left(x^3-3x^2+5-x^{-1}+4x^{-2}\right)\mathrm{d}x$; *b)* $\int\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{2}{7}}-x^{-\frac{5}{4}}\right)\mathrm{d}x$;

   c) $\int\dfrac{3x^2+\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

2. Integráljuk az I. szabály szerint:

   a) $\int\operatorname{ctg}x\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int\dfrac{1}{x\cdot\ln x}\,\mathrm{d}x$; *c)* $\int\dfrac{x^2}{4x^3+6}\,\mathrm{d}x$.

3. Integráljuk a II. szabály szerint:

   a) $\int\cos x\cdot\sin^5 x\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int(4x+1)\cdot\sqrt{2x^2+x}\,\mathrm{d}x$; *c)* $\int\dfrac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

4. Bizonyítsuk be a III. integrálási szabályt:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)+c,\quad \text{ha}\quad F'(x)=f(x).$$

5. *a)* Igazoljuk a következő egyenlőséget:

$$(\sin^2 x+p)'=\left(-\frac{\cos 2x}{2}+q\right)'\qquad (p,q\in\mathbb{R}).$$

   b) Mi a kapcsolat p és q között, ha

$$\sin^2 x+p=-\frac{\cos 2x}{2}+q?$$

6. Integráljuk a III. szabály szerint:

   a) $\int\cos(4x-\pi)\mathrm{d}x$; *b)* $\int\sqrt{10x-3}\,\mathrm{d}x$; *c)* $\int e^{-6x+8}\mathrm{d}x$.

7. Integráljuk a IV. szabály szerint:

   a) $\int\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int\dfrac{x}{2+8x^4}\,\mathrm{d}x$.

8. Integráljuk az V. szabály szerint:

   a) $\int x\cdot e^{(x^2)}\mathrm{d}x$; *b)* $\int e^{x^4+4x}\cdot(x^3+1)\mathrm{d}x$.

9. Bizonyítsuk be, hogy

$$\cos\arcsin x=\sin\arccos x=\sqrt{1-x^2}.$$

3. Integrálási eljárások II. Parciális integrálás, racionális törtek (kiegészítő anyag)

Parciális integrálás

Ha az integrandus két függvény $\int f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$ szorzata, akkor – ellentétben a differenciálásnál látottakkal – ennek megoldására nem tudunk általános szabályt adni. Azonban egyes esetekben visszavezethetjük egyszerűbb integrálra, amit már képesek vagyunk elvégezni. Az eljárás a *parciális integrálás*. Feltételezzük, hogy mind a két tényezőnek, mind a szorzatnak van deriváltja, valamint a vegyes szorzatoknak van primitív függvénye. Írjuk fel a 4.2. szorzatra vonatkozó deriválás tételét, és integráljuk mindkét oldalt:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)]'\,\mathrm{d}x = \int \big(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\big)\,\mathrm{d}x,$$

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Rendezve, röviden felírva:

$$\text{VI.}\quad \int f' \cdot g\,\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f \cdot g'\,\mathrm{d}x.$$

Hm... Első ránézésre rosszabbnak tűnik, mint az eredeti...

Egy szorzat integrálját egy másik, reményeink szerint egyszerűbb szorzatintegrálra vezettük vissza. Hogyan alkalmazzuk? Az integrandust két függvény szorzataként kezeljük, amelyből az egyiket f'-nek, a másikat g-nek tekintjük. Természetesen f'-t egyből kell tudnunk integrálni. Ha a formulából kapott új integrál nem egyszerűbb az eredetinél, akkor próbáljuk meg f és g szerepét felcserélni! (Sajnos ez sem vezet mindig eredményre.)

Szinte minden analíziskönyvben ez az első példa a parciális integrálásra.

1. példa

Határozzuk meg az $\int x \cdot e^x\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Megoldás

Itt célszerű az $f'(x) = e^x$, $g(x) = x$ választás, mivel $f = e^x$, $g' = 1$. Az új szorzat egyszerűbb:

$$\int \overset{f'}{e^x} \cdot \overset{g}{x}\,\mathrm{d}x = \overset{f}{e^x} \cdot \overset{g}{x} - \int \overset{f}{e^x} \cdot \overset{g'}{1}\,\mathrm{d}x = x \cdot e^x - e^x + c = e^x \cdot (x-1) + c.$$

* * *

A parciális integrálás módszerét kétszer (vagy n-szer) is alkalmazhatjuk.

2. példa

Határozzuk meg az $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$ határozatlan integrált.

Megoldás

Legyen $f' = \sin x$, $g = x^2$. Így g' egyszerűbbé válik a kitevő csökkenésével ($g' = 2x$):

$$\int \overset{f'}{\sin x} \cdot \overset{g}{x^2} \, dx = \overset{f}{-\cos x} \cdot \overset{g}{x^2} - \int \overset{f}{-\cos x} \cdot \overset{g'}{2x} \, dx =$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot \int \cos x \cdot x \, dx.$$

Már „csak" az utóbbi integrállal kell foglalkoznunk. Ekkor legyen $f' = \cos x$, $g = x$:

$$\int \overset{f'}{\cos x} \cdot \overset{g}{x} \, dx = \overset{f}{\sin x} \cdot \overset{g}{x} - \int \overset{f}{\sin x} \cdot \overset{g'}{1} \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + c.$$

Az eredményt a második integrál eredményének visszahelyettesítéséből kapjuk meg:

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2(x \cdot \sin x + \cos x + c).$$

• • •

Láttuk, hogy az alapintegrálok között nem szerepel a logaritmusfüggvény integrálja. Nem véletlenül! A logaritmust parciálisan lehet a legegyszerűbben integrálni.

3. példa

Határozzuk meg az $\int \ln x \, dx$ határozatlan integrált.

Megoldás

A fogás roppant érdekes, ugyanis nem csinálunk semmit. De azt milyen ügyesen!

$$\int \overset{f'}{1} \cdot \overset{g}{\ln x} \, dx = \overset{f}{x} \cdot \overset{g}{\ln x} - \int \overset{f}{x} \cdot \overset{g'}{\frac{1}{x}} \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx =$$

$$= x \cdot \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$$

4. példa

Határozzuk meg az $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ határozatlan integrált.

Megoldás

Újra a logaritmusnál nagyszerűen bevált fogást alkalmazzuk:

$$\int \overset{f'}{1} \cdot \overset{g}{\operatorname{arctg} x} \, dx = \overset{f}{x} \cdot \overset{g}{\operatorname{arctg} x} - \int \overset{f}{x} \cdot \overset{g'}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx.$$

A kapott $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$-et már korábbi módszereinkkel megadhatjuk:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|+c.$$

Eredeti feladatunk megoldása így:

$$\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|+c.$$

5. példa

Határozzuk meg az $\int e^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Megoldás

Ennél a feladatnál tetszőlegesen választhatunk, hogy melyik függvény legyen f és melyik g. Bármelyikből is indulunk ki, két és fél lépésben célhoz érünk:

$$\int e^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = e^x\cdot\cos x + \int e^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int e^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = e^x\cdot\sin x - \int e^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Visszahelyettesítve:

$$\int e^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = e^x\cdot\cos x + e^x\cdot\sin x - \int e^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Visszakaptuk az eredeti integrált, de a másik oldalon és ellenkező előjellel! Folytassuk úgy, mintha egyenletet oldanánk meg, amelyben ismeretlen a keresett integrál (ez az utolsó fél lépés):

$$A = e^x\cdot\cos x + e^x\cdot\sin x - A,$$

$$2A = e^x\cdot\cos x + e^x\cdot\sin x,$$

$$A = \frac{e^x\cdot\cos x + e^x\cdot\sin x}{2}.$$

Tehát az eredeti feladatunk megoldása:

$$\int e^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = e^x\cdot\frac{\cos x+\sin x}{2}+c.$$

Racionális törtfüggvények

A két polinom hányadosaként felírt integrandusok integrálásának külön elmélete van. Láttunk már rájuk példát:

VII. $\int \frac{p}{qx+r}\,\mathrm{d}x = \frac{p}{q}\cdot\ln|qx+r|+c,$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c.$$

E két típusra nagyon sok racionális törtfüggvény integrálját visszavezethetjük. Anélkül, hogy elméletben foglalkoznánk a feladattípussal, két példán keresztül mutatjuk be a használt fogásokat.

I. eset: A számláló fokszáma nagyobb, mint a nevező fokszáma. Ekkor a racionális tört átalakítható két olyan integrálfeladatot tartalmazó példává, ahol az egyik egy polinomfüggvény, a másik egy olyan racionális törtfüggvény, amelyben a számláló legmagasabb fokszáma kisebb a nevező legmagasabb fokszámánál. Utóbbit valamelyik korábban látott módszerrel próbáljuk megoldani.

6. példa

Határozzuk meg az $\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$ határozatlan integrált.

Megoldás

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x+x^3-x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x(1+x^2)-x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \int x\,dx - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c.$$

II. eset: Ha a nevező fokszáma nagyobb, akkor megpróbáljuk szorzattá alakítani, majd elemi törtek összegeként felírni, és ezeket integrálva megoldani a feladatot.

7. példa

Határozzuk meg az $\int \frac{7x+10}{x^2-5x+6}\,dx$ határozatlan integrált.

Megoldás

A nevező zérushelyei $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, ezért

$$\frac{7x+10}{x^2-5x+6} = \frac{7x+10}{(x-2)(x-3)}.$$

Jól emlékszünk a törtekkel végzett műveletekre? Ha itt két tört összegét látjuk, akkor $(x-2)(x-3)$ a közös nevező, azaz a nevezők szorzata.

Próbáljuk az integrandust $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ alakban előállítani!

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{(A+B)x-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)} = \frac{7x+10}{(x-2)(x-3)}.$$

A nevezők egyenlők. A két tört értéke egyenlő, ha a számlálók is egyenlők. Összevetve a számlálókat, ez pontosan a következő egyenletrendszer megoldásaira teljesül:

$$\left.\begin{aligned} A+B &= 7 \\ 3A+2B &= -10 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldások pedig $A = -24$, $B = 31$. Így

$$\frac{7x+10}{(x-2)(x-3)} = \frac{-24}{x-2} + \frac{31}{x-3}$$

és

$$\int \frac{7x+10}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{-24}{x-2} + \frac{31}{x-3}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= -24 \cdot \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + 31 \cdot \int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x = -24\ln|x-2| + 31\ln|x-3| + c.$$

A fenti eljárás a *parciális törtekre bontás.*

Feladatok

1. Határozzuk meg parciális integrálással a következőket:

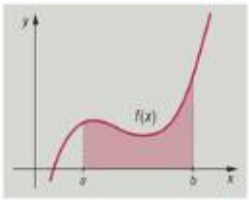
   a) $\int x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int x^{100} \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$; *c)* $\int x^3 \cdot e^{3x}\,\mathrm{d}x$; *d)* $\int 2x^3 \cdot \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

2. Integráljuk az ismert módokon a törtes integrandust:

   a) $\int \frac{5x^2}{2+x}\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int \frac{3x-5}{x^2-3x-4}\,\mathrm{d}x$.

HATÁROZOTT INTEGRÁL

1. A határozott integrál fogalmának előkészítése



1. ábra

Jelen fejezetben az ún. határozott integrállal foglalkozunk. Általában minden bevezető jellegű analíziskönyv ezt egy $f(x)$ korlátos vagy folytonos függvény, az $x = a$, $x = b$ egyenesek és az x tengely által határolt síkidom területének meghatározásával kezdi. Elegendő feltenni az $f(x)$ függvény $[a; b]$-on való korlátosságát. A folytonosság zárt intervallumon szigorúbb, mint a korlátosság, mivel a 3.6. tétel miatt bármely zárt intervallumon folytonos függvény korlátos. Az ilyen területmeghatározást az $f(x)$ függvénygörbe alatti terület meghatározásának is szokták nevezni. *(1. ábra)*

Arkhimédész „kimerítésnek" nevezte eljárását.

A könyvek zöme előhozakodik azzal a vitathatatlan ténnyel, hogy „már a régi görögök is" foglalkoztak nem egyenes szakaszokkal határolt síkidomok területének meghatározásával (elsősorban Eudoxoszt és Arkhimédészt szokták említeni). Arkhimédész eljárása a következő volt: az ismeretlen területű síkidomot lefedte téglalapokkal (körülírt téglalapok), és az idom belsejébe is téglalapokat rajzolt (beírt téglalapok). Ha az egyre kisebb oldalhosszúságú beírt és körülírt téglalapok összegei – külön összegezte a körülírt és a beírt téglalapok területeit – ugyanahhoz a számhoz tartottak, akkor ezt a számot nevezte a síkidom területének.



Tudománytörténeti „kitérő": A közelmúlt matematikusai előszeretettel merítettek – mai szóhasználattal élve *loptak* – ötleteket az ókori matematikusok műveiből. Igazi „arcátlanságként" még meg is magyarázták azzal, hogy Eudoxoszék ráértek az agórán a porba rajzolgatni, hiszen ez idő alatt dolgoztak helyettük a rabszolgák. Egyes tudománykutatók a matematika XX. századi robbanásszerű fejlődését a mosogatógép és a porszívó megjelenésével magyarázzák. Ezek segítségével a szegény papucsférj matematikusok által legalább a házimunkák elvégzésére fordított idő rövidült.

12.-es könyv 82. oldal

Mi ugyan támaszkodunk a fenti módszer előnyeire, de nem így járunk el – két ok miatt. Egyrészt a határozott integrál jóval több területek meghatározásánál, ez csak egy speciális esete. Másrészt kérdés, hogy létezik-e egyáltalán az $f(x)$ görbe alatti terület? Megmaradnak-e a terület sokszögeknél vizsgált tulajdonságai? Ezek közül a tulajdonságok közül a területes bevezetési mód kihasználja, hogy ha A és B két egymást nem fedő halmaz $(A \cap B = \emptyset)$ és területeik T_A és T_B, akkor $A \cup B$ területére fennáll, hogy $T_{A \cup B} = T_A + T_B$. Az additív tulajdonság nagyon fontos a területes bevezetési módnál használt bizonyításokban. A probléma bonyolultságát jelzi, hogy csak a XX. század közepén sikerült igazolni az additív tulajdonságot Stefan Banachnak. Pontosabban azt, hogy a sokszögekre használt területfogalom általánosítható úgy, hogy a sík minden halmazának legyen területe és érvényben maradjon például a fenti tulajdonság is. Ugyanez a térben már nem igaz (Hausdorff igazolta 1914-ben). Nem létezik a térfogat fogalmának olyan kiterjesztése, hogy minden háromdimenziós halmaznak

Felix Hausdorff (1868–1942) német, Stefan Banach (1892–1945) lengyel matematikus.

legyen térfogata és érvényben maradjon az additív tulajdonság ($V_{A\cup B} \neq V_A + V_B$ sok esetben). Például egy egységgömböt szét lehet vágni véges sok darabra úgy, hogy ezeket külön-külön elmozgatva a térben, két egységgömböt kapjunk (Banach–Tarski-paradoxon, 1924).

Alfred Tarski (1901–1983), lengyel matematikus.

A következőkben a határozott integrálok közül mi a legegyszerűbbet vezetjük be. Ebben az esetben mindig olyan $f(x)$ függvényre kell gondolnunk, amely egy $[a; b]$ minden pontjában értelmezve van és korlátos. Jelekkel:

$$|f(x)| \leq K \in \mathbb{R} \quad \text{minden } x \in [a; b]\text{-ra.}$$

Komolyabb elméletek a korlátosságot sem követelik meg, ezt a határozott integrál szükséges feltételeként bizonyítják.

6.1. Definíció: **Az $[a; b]$-ot n részintervallumra osztjuk olyan $(n + 1)$ elemet tartalmazó $F_n = \{x_0; x_1; \ldots; x_n\}$ ponthalmazzal, amelynek elemeire fennáll, hogy $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Ekkor F_n-t az $[a; b]$ *felosztásának*, $[x_{i-1}; x_i]$-ot i-edik *részintervallumnak*, az x_i pontot pedig i-edik *osztáspontnak* ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) nevezzük.** *(2. ábra)*

felosztás, részintervallum, osztáspont



2. ábra

Vegyük észre, hogy egy intervallumot három ponttal két részre osztunk (a végpontokat is beleértve). A továbbiakban az i index mindig az 1, 2, 3, …, n egész számokon fut végig. Ha nem, azt külön jelöljük.

6.2. Definíció: **Az F_n felosztás maximális hosszúságú részintervallumának hosszát a felosztás *finomságának* nevezzük. Jelekkel ($1 \leq i \leq n$):**

$$\max\left[d(x_{i-1}; x_i)\right] = \max\left(x_i - x_{i-1}\right) = \Delta.$$

a felosztás finomsága

Az $[a; b]$ intervallum egy F_n felosztása finomabb F'_m felosztásánál, ha $\Delta < \Delta'$.

6.3. Definíció: **Egy intervallum felosztásainak $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ sorozatát *minden határon túl finomodónak* mondjuk, ha a hozzájuk tartozó $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ finomságok sorozata 0-hoz tart:**

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0.$$

minden határon túl finomodó felosztás

A 6.3-as definíció azt jelenti, hogy a leghosszabb részintervallum hossza is nullához tart. Gondoljuk meg: ez attól még nem következik be, ha az osztópontok száma végtelenhez tart, hiszen lehet, hogy az osztópontok az intervallum egyik felében torlódnak. Egy *felosztás finomításán* általában azt értjük, hogy az adott felosztás meglévő osztáspontjaihoz új osztópontokat veszünk.

A korlátosság azt jelenti, hogy minden $[x_{i-1}; x_i]$ részintervallumban létezik a függvényértékeknek alsó és felső határa.

alsó összeg, felső összeg

6.4. Definíció: **Legyen az $f(x)$ az $[a; b]$-on értelmezett korlátos függvény és $m_i = \inf[f(x)]$ az alsó, $M_i = \sup[f(x)]$ a felső határa, ha $x \in [x_{i-1}; x_i]$. Az $[a; b]$ intervallum F_n felosztásához tartozó**

$$s_n = m_1 \cdot (x_1 - x_0) + \ldots + m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + \ldots + m_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget *alsó összegnek*, a

$$S_n = M_1 \cdot (x_1 - x_0) + \ldots + M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + \ldots + M_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget *felső összegnek* nevezzük.

Jean Gaston Darboux (1842–1917), francia matematikus.

Megjegyzés: A szakirodalomban ezeket Darboux-féle alsó és felső közelítő összegnek is nevezik.

Riemann-összeg

6.5. Definíció: **Ha az $f(x)$ függvény az $[a; b]$-on mindenhol értelmezve van és az F_n felosztás minden $[x_{i-1}; x_i]$ részintervallumából kiválasztunk egy tetszőleges c_i pontot, akkor az**

$$I_n = f(c_1) \cdot (x_1 - x_0) + \ldots + f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \ldots + f(c_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget az F_n felosztáshoz és c_i pontokhoz tartozó *Riemann-összegnek* nevezzük.

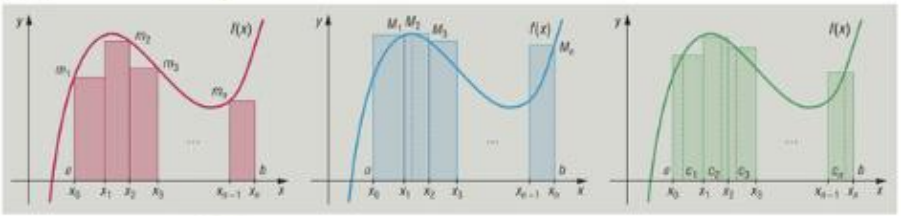
Bernhard Riemann (1826–1966), német matematikus.

Megjegyzés: Még komolyabb elméletek azt sem követelik meg, hogy az $f(x)$ függvény az $[a; b]$ minden pontjában értelmezve legyen. Pontosabban megengedik, hogy véges sok pontban ne legyen a függvény értelmezve. Ha valamelyik c_i pontban a függvény nincs értelmezve, akkor $f(c_i)$-nek egy tetszőleges valós számot nevezünk meg.

Az előbb bevezetett összegeknek szemléletes geometriai jelentése van. A 3. ábrán az $[a; b]$ intervallum ugyanazon felosztását látjuk:

$$F_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}.$$

3. ábra



Az ábra bal oldalán a függvény menetéből adódóan:

$[x_0; x_1]$-on $\quad m_1 = f(x_0)$,
$[x_1; x_2]$-on $\quad m_2 = f(x_2)$,
$[x_2; x_3]$-on $\quad m_3 = f(x_3)$,
....
$[x_{n-1}; x_n]$-on $\quad m_n = f(x_{n-1})$.

Az s_n alsó összeg nem más, mint a jelzett és beírt piros téglalapok területeinek összege.

Az ábra középső részén a függvény menetéből adódóan:

$[x_0; x_1]$-on $\quad M_1 = f(x_1)$,
$[x_1; x_2]$-on $\quad M_2 = f(x^*)$, ahol $x_1 < x^* < x_2$,
$[x_2; x_3]$-on $\quad M_3 = f(x_2)$,
....
$[x_{n-1}; x_n]$-on $\quad M_n = f(x_n)$.

Az S_n felső összeg nem más, mint a körülírt kék téglalapok területeinek összege.

Az ábra jobb oldalán a részintervallumokon tetszőlegesen választott

$c_1 \in [x_0; x_1]$-ra $\quad f(c_1)$,
$c_2 \in [x_1; x_2]$-ra $\quad f(c_2)$,
$c_3 \in [x_2; x_3]$-ra $\quad f(c_3)$,
....
$c_n \in [x_{n-1}; x_n]$-ra $\quad f(c_n)$

magas zöld téglalapokat kapunk. Az I_n Riemann-összeg a zöld téglalapok területeinek összege.

Megjegyzés: Ábráinkon picit csaltunk, a vizsgált függvény folytonos. A definíciókban azonban csak a korlátosságot követeljük meg. (Gondoljunk a bevezetőre.)

2. Alsó és felső közelítő összegek viselkedése, a Riemann-integrál

Felmerül a kérdés: hogyan változnak az alsó és felső összegek az $[a; b]$ egyre finomodó felosztása esetén?

az alsó, felső összegsorozatok monotonitása

6.1. Tétel: **Az $[a; b]$ bármely felosztásának finomításával az $f(x)$ ezen intervallumon értelmezett korlátos függvény alsó összegei nem csökkennek, felső összegei nem növekednek.**

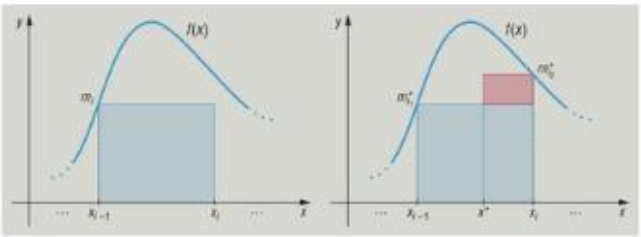
Bizonyítás

Elegendő a tételt az alsó összegekre belátni, felső összegekre a gondolatmenet ugyanez. Sőt, elég csak egy adott felosztásnak egy új osztópontját venni, mert ha erre belátjuk az állítást, akkor ezt akárhányszor megismételhetjük. Tekintsük tehát $[a; b]$ intervallum F_n felosztásának i-edik részintervallumát, essen ezen részintervallumba az x^* osztópont, $x_{i-1} < x^* < x_i$. Az i-edik intervallum szétesik az $[x_{i-1}; x^*]$ és $[x^*; x_i]$ részintervallumokra. $f(x)$ függvény alsó határa egyik részintervallumon sem lehet kisebb az i-edik részintervallum m_i alsó határánál. Ha $m_{i_1}^*$ és $m_{i_2}^*$ jelöli $f(x)$ alsó határát $[x_{i-1}; x^*]$ és $[x^*; x_i]$ részintervallumon, akkor $m_{i_1}^* \geq m_i$ és $m_{i_2}^* \geq m_i$, így:

$$m_{i_1}^* \cdot (x^* - x_{i-1}) + m_{i_2}^* \cdot (x_i - x^*) \geq m_i \cdot (x^* - x_{i-1}) + m_i \cdot (x_i - x^*) =$$
$$= m_i \cdot (x_i - x^* + x^* - x_{i-1}) = m_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

A kapott egyenlőtlenség minden új osztópontra igaz, ezért az új felosztáshoz tartozó alsó összeg legalább akkora, mint az eredeti felosztáshoz tartozó alsó összeg.

Megjegyzés: Ha a terület szemléletes fogalmára támaszkodunk (az egyszerűség kedvéért pozitív és folytonos $f(x)$ függvényt vizsgálunk az $[x_{i-1}; x_i]$-on), akkor az új osztópont bevezetésekor a piros résszel nő az összeg. **(4. ábra)**



4. ábra

A tétel szerint az alsó összegek a felosztás finomításával monoton nőnek, a felső összegek monoton csökkennek. Ha be tudnánk látni, hogy ezen összegek tagjaiból képezett sorozatok korlátosak is, akkor a 2.6-os tétel alapján konvergensek. Ehhez egész egyszerűen összehasonlítunk egy alsó és egy felső összeget.

6.2. TÉTEL: **Az $[a; b]$-on értelmezett korlátos $f(x)$ függvény $[a; b]$ bármely felosztásához tartozó minden alsó összege nem nagyobb bármely – akár másik felosztáshoz tartozó – felső összegnél.**

egyik alsó összeg sem nagyobb semelyik felső összegnél

Bizonyítás

Az ugyanazon felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső összegekre az állítás az összegek definíciójából következik.

Legyen most az $[a; b]$ intervallum két felosztássorozata különböző. Az egyikhez tartozó alsó összeget jelölje s_1, a másikhoz tartozó felső összeget pedig S_2. Ha a két felosztás osztópontjainak a halmazát egyesítjük, az így keletkező felosztás mindkét felosztásnak finomítása (a különböző felosztások miatt legalább egy új osztópontot egyik felosztásnál a már meglévők közé iktatunk). Ha az egyesített felosztáshoz tartozó alsó összeget s-sel, a felső összeget S-sel jelöljük, akkor a 6.1-es tétel miatt $s_1 \le s \le S \le S_2$.

Mondhatnánk, hogy triviális, ám szép emlékű elődeinkre tekintettel nem tesszük.

Megjegyzés: Ha az összegek által meghatározott területekre támaszkodunk, akkor a 6.2-es tétel állítása pozitív $f(x)$ esetén szemléletesen nyilvánvaló: a függvénygörbe alá írt területek összege kisebb, mint a függvényt elfedő, köré írt téglalapok összege.

A 6.1-es és 6.2-es tételek nagyon fontos következménye, hogy egy minden határon túl finomodó felosztássorozathoz tartozó alsó (felső) összegek sorozatai konvergensek. Vajon a különböző felosztássorozatokhoz tartozó minden alsó (felső) összeg ugyanoda tart?

A 2.6-os tétel miatt monoton és korlátos sorozat konvergens.

6.3. TÉTEL: **Legyen az $f(x)$ az $[a; b]$-on értelmezett korlátos függvény. Az alsó (felső) összegek sorozatának határértéke független az intervallum F_n felosztássorozatának megválasztásától.**

az alsó (felső) összegek konvergálnak

Bizonyítás

Szokás szerint a tételt az alsó és felső összegek közül csak az egyikre bizonyítjuk. Legyen $\{F_m\}$ és $\{F_{m'}\}$ $[a; b]$-nak minden határon túl finomodó felosztásai, $\{s_m\}$ és $\{s_{m'}\}$ a hozzájuk tartozó alsó összegek sorozatai, és tételezzük fel, hogy $s_m \to s$. Ha a két felosztást mint ponthalmazt egyesítjük, akkor a kapott ponthalmaz mint felosztás is minden határon túl finomodik, tehát a hozzá tartozó s_n is konvergens. Mivel konvergens sorozatnak csak egy határértéke lehet, ezért $s_n \to s$. Ám akkor $s_{m'} \to s$ szintén, hiszen részsorozata s_n-nek.

A bizonyításnál a 6.1-es, 6.2-es és 2.7-es tételeket használtuk fel.

* * *

A 6.3-as tétel alapján minden korlátos függvény esetén léteznek a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ határértékek – bár, mint látni fogjuk, nem mindig egyenlők.

Riemann szerinti integrálás, határozott integrál, alsó és felső határ

6.6. Definíció: **Ha az $[a; b]$-on értelmezett korlátos $f(x)$ függvénynek bármely, minden határon túl finomodó felosztássorozatához tartozó alsó és felső összegei sorozatának* közös határértéke van, röviden:**

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

akkor az $f(x)$ az $[a; b]$-on *Riemann szerint integrálható*. Ezt a közös határértéket az $f(x)$ függvény $[a; b]$-on vett *határozott integráljának nevezzük.**

Jelölése: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hangosan kiolvasva: „integrál atól béig ef iksz dé iksz".

A Riemann-integrált röviden R-integrálnak nevezzük.

A jelölésekben a határozatlan és a határozott integrál között a határok megjelenése tesz különbséget. Fogalmilag a határozatlan integrál a differenciálás inverz művelete, a határozott integrál pedig a függvény alsó és felső összegei közös határértékének a meghatározása (ha van). Ismét megemlítjük, hogy amíg a határozatlan integrál egy függvényhalmaz, addig a határozott integrál egy konkrét szám, innen a „határozott" elnevezés.

1. példa

Határozzuk meg az $f(x) = 1$ függvény alsó és felső összegeit tetszőleges $[a; b]$ intervallumra.

Megoldás

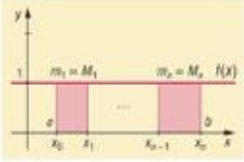
Tetszőleges $F_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ felosztásra ($m_i = M_i = 1$ minden i-re):

$$s_n = 1\cdot(x_1 - a) + 1\cdot(x_2 - x_1) + \ldots + 1\cdot(b - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot(x_i - x_{i-1}) = b - a,$$

$$S_n = 1\cdot(x_1 - a) + 1\cdot(x_2 - x_1) + \ldots + 1\cdot(b - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot(x_i - x_{i-1}) = b - a.$$

Így bármely, minden határon túl finomodó felosztásra:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = b - a.$$



5. ábra

Ez egybeesik a szemlélettel: az 1 és $(b - a)$ oldalú téglalap területét kapjuk. *(5. ábra)*

2. példa

Határozzuk meg $f(x) = x$ határozott R-integrálját tetszőleges $[a; b]$-on.

Megoldás

A szemléletre támaszkodva úgy látjuk, egy trapéz területét kell meghatároznunk. Eddigi tapasztalataink szerint létezik ez a terület, és

$$T = (b - a)\cdot\frac{b + a}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Tetszőleges $F_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ felosztás esetén a függvény szigorúan monoton növekvő, ezért az i-edik részintervallumon $m_i = x_{i-1}$, $M_i = x_i$.

$$s_n = a\cdot(x_1 - a) + x_1\cdot(x_2 - x_1) + \ldots + x_{n-1}\cdot(b - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\cdot(x_i - x_{i-1}),$$

$$S_n = x_1\cdot(x_1 - a) + x_2\cdot(x_2 - x_1) + \ldots + b\cdot(b - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Mivel a terület létezik, így $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ egyenlőségnek teljesülni kell. A 6.3-as tétel miatt elegendő egy speciális F_n felosztássorozatot választanunk: $[a; b]$-ot n egyenlő részre osztjuk. Ekkor

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

bármely részintervallumra, és az i. osztópont:

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\cdot i.$$

Ha így írjuk fel a megfelelő alsó és felső összegeket, akkor

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

ugyanis

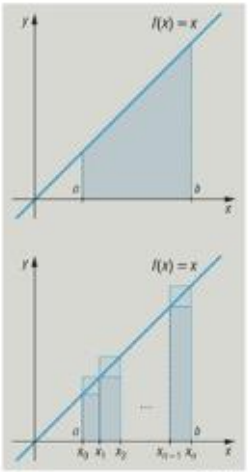
$$S_n = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot i\right) = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} a + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \;\to\; (b-a)\cdot\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = \frac{(b-a)(b+a)}{2}$$

és

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 = n\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \;\to\; 0.$$

Megjegyzés: Ha összeadjuk a feladatban szereplő eredeti s_n és S_n összegeket, akkor az teleszkopikus lesz, és $\frac{s_n + S_n}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$. Ez azonban nem garantálja azt, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.



6. ábra

3. példa

Vizsgáljuk meg az alábbi Dirichlet-féle függvény határozott integrálját:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases} \qquad x \in [0; 1].$$

Megoldás

Bármely $F_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ felosztássorozat mellett az $f(x)$ függvény minden részintervallumon felveszi az 1 és 2 értékeket, mivel a számegyenes tetszőleges kicsiny részén is van racionális és irracionális szám.

Így $m_i = 1$, $M_i = 2$ minden i-re. Ezért

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 2.$$

Mivel s_n és S_n értéke a felosztástól független, ezért az $f(x)$ függvénynek a $[0; 1]$-on nincs Riemann-integrálja:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 \neq 2 = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Megjegyzések:

Henri Léon Lebesgue (1875–1941), francia matematikus.

1. A példa mutatja, hogy a függvény korlátossága nem elégséges feltétel a Riemann-integrál létezéséhez egy adott intervallumon. A feladatot megoldhatjuk az ún. *Lebesgue-integrál* segítségével. Lebesgue az egyes halmazokhoz az ún. Lebesgue-mértéket rendelte (pl. $\mathbb{Q}$ halmaz 0 mértékű).

   Ezzel a módszerrel a fenti integrál 0 lesz. Minden Riemann szerint integrálható függvény Lebesgue szerint is integrálható, és az integrálok értéke megegyezik. A kiterjesztéskor, hasonlóan a szám, illetve a hatvány fogalmának kiterjesztéséhez, a *permanencia-elvet* tartjuk szem előtt.

2. A Riemann-integrál általánosítása az ún. Riemann–Stieltjes-integrál. Itt nemcsak az $[a; b]$-ot osztjuk fel részintervallumokra, hanem egy $\varphi(x)$ monoton növekvő függvény értékkészletét is. $\varphi(a)$ és $\varphi(b)$ véges, mivel φ korlátos $[a; b]$-on a monotonság miatt. Az alsó és felső összegek (m_i és M_i a R-integrálnak megfelelő jelölések):

   $$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta_i^{\varphi}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta_i^{\varphi}.$$

   Ha bármely, minden határon túl finomodó felosztássorozat esetén

   $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

   akkor ezt a határértéket $f(x)$ függvény $\varphi(x)$ menti Riemann–Stieltjes-integráljának nevezzük. Jelölése:

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x).$$

   Ha $\varphi(x) = x$, akkor a Riemann-integrált kapjuk vissza.

Feladatok

1. Vizsgáljuk meg az alábbi függvények alsó és felső közelítő összegeinek határértékét az $[a; b]$ intervallumon:

   a) $f(x) = 3$; *b)* $f(x) = c$ (c valós)

2. Határozzuk meg, ha létezik:

   a) $\int_0^1 [x]\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int_0^1 \{x\}\,\mathrm{d}x$.

3. Oszcillációs összegek (kiegészítő anyag)

Mi a Riemann-integrál fogalmát a Darboux-összegek segítségével mondtuk ki. Riemann, akiről az integrálási eljárást elnevezték, még másként tette ezt meg. 1854-ben a göttingeni egyetemen tartott híres habilitációs előadásán a 6.5-ös definícióban megadott Riemann-összegekkel vezette be a határozott integrál fogalmát.

Riemann-integrál Riemann-összeggel

6.7. Definíció: Ha az $f(x)$ függvény az $[a; b]$ minden határon túl finomodó bármely F_n felosztássorozathoz és c_i pontokhoz tartozó Riemann-összegeinek $\{I_n\}$ sorozata konvergens, akkor az $\{I_n\}$ határértékét az $f(x)$ függvény $[a; b]$-on vett *Riemann-integráljának* nevezzük.

Ugyanúgy, mint a 6.6-os definíciónál, beláthatjuk, hogy a minden határon túl finomodó felosztássorozatokhoz tartozó Riemann-összegek sorozatának határértéke nem függ $\{F_n\}$-től, és attól sem, hogyan választjuk meg az egyes részintervallumokban a c_i pontokat.

Megjegyzés: Ha egy fogalmat többféleképpen definiálunk, akkor illik bizonyítani, hogy a két definíció egyenértékű. Ez igaz a Riemann-integrálra is.

Ha $f(x)$ integrálható az $[a; b]$-on a 6.6-os definíció szerint, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, akkor bármely $[x_{i-1}; x_i]$-on $m_i \le f(c_i) \le M_i$, ezért $s_n \le I_n \le S_n$ minden n-re. Így az 1.8-as rendőrelv miatt:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

A fordított út belátásakor először $f(x)$ korlátosságát kellene igazolnunk $[a; b]$ felett. (Vegyük észre, hogy a 6.7-es definícióban nem mondtuk ki, hogy $f(x)$ függvény korlátos legyen.) A bizonyítás eléggé terjedelmes (a komoly, legalább 450 oldalas könyvekben megtalálható), ezért nem részletezzük.

Korábbi példánkban láttuk, hogy nem minden korlátos függvénynek van Riemann-integrálja. A következőkben néhány feltételt ismertetünk, melyek teljesülése esetén a függvénynek biztosan lesz határozott integrálja.

oszcilláció, oszcillációs összeg

6.8. Definíció: Legyen az $f(x)$ az $[a; b]$-on értelmezett korlátos függvény, az F_n az $[a; b]$ egy felosztása, M_i és m_i a korábban bevezetett jelölések. Az

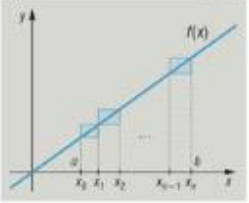
$$O_i = M_i - m_i \ge 0$$

különbséget az $f(x)$ függvény i-edik részintervallumhoz tartozó *oszcillációjának* nevezzük. Az

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} O_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget az $f(x)$ függvény $[a; b]$-hoz tartozó F_n felosztás melletti *oszcillációs összegének* nevezzük. Jelölése: $O_{f(x),\,F_n}$.

7. ábra



az oszcillációs összegek és a Riemann-integrál kapcsolata

6.4. TÉTEL: **Az $[a; b]$-on korlátos $f(x)$ függvény ezen az intervallumon pontosan akkor Riemann-integrálható, ha az $[a; b]$-hoz tartozó oszcillációs összegek sorozata minden határon túl finomodó felosztás mellett 0-hoz tart.**

Bizonyítás

1. Ha $f(x)$ R-integrálható az $[a; b]$-on, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Különbségükre ezért:

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} O_n = 0.$$

2. Ha $O_n \to 0$, akkor:

$$0 = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} s_n,$$

így

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Ezt a tételt sokszor a következő módosított formában szoktuk alkalmazni.

korlátos függvény integrálhatósága

6.5. TÉTEL: **Az $[a; b]$-on korlátos $f(x)$ függvény akkor és csak akkor R-integrálható, ha bármely pozitív ε-hoz megadható olyan felosztás, amelyhez tartozó oszcillációs összeg kisebb ε-nál: $O_{f(x), F_n} < \varepsilon$.**

Megjegyzések:

1. Az előző tételhez képest itt az a „könnyítés", hogy tetszőleges ε-hoz elég egyetlen felosztást találni, amelyhez tartozó oszcillációs összeg kisebb, mint ε, és ez már biztosítja az R-integrálhatóságot. A 6.4-es tételben az összes O_n összegről nyilatkozni kell(ene).
2. Újra felhívjuk a figyelmet arra, hogy a „szükséges és elégséges", „pontosan akkor", illetve az „akkor és csak akkor" típusú tételszerkezetek logikailag azonosak.

Következmény: A fentiek fontos hozadéka, hogy amennyiben $f(x)$ az $[a; b]$-on korlátos és R-integrálható, akkor $[a; b]$ bármely zárt részintervallumán is R-integrálható. (Ha az oszcillációs összeg kisebb ε-nál, akkor ez $[a; b]$ részintervallumán is kisebb, mint ε.)

zárt intervallumon monoton függvény integrálható

6.6. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ függvény monoton az $[a; b]$-on, akkor R-integrálható is $[a; b]$-on.**

Bizonyítás

Tételünk a korlátosságot nem tartalmazza, mivel az a monotonitásból adódik.

A bizonyítást el kellene végeznünk a növekedő és csökkenő függvényekre egyaránt, szokás szerint mi csak a monoton növekvő függvényekre igazoljuk a tételt.

Legyen $F_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ tetszőleges felosztás, ennek finomsága pedig Δ_n. A hozzá tartozó oszcillációs összeg:

$$O_{f(x),F_n} = \sum_{i=1}^{n} O_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} O_i \cdot \Delta_n = \Delta_n \cdot \sum_{i=1}^{n} O_i =$$

$$= \Delta_n \cdot \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i).$$

A függvény monoton növekedése miatt tetszőleges i-edik részintervallumra $f(x_i) = M_i$, $f(x_{i-1}) = m_i$. Így

$$\Delta_n \cdot \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) = \Delta_n \cdot \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big).$$

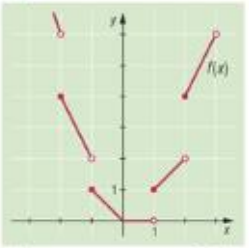
Az utolsó szumma jel után $f(x_0) = f(a)$ és $f(x_n) = f(b)$ kivételével minden tag kiesik. Így

$$0 \le O_{f(x),F_n} \le \Delta_n \cdot \big(f(b) - f(a)\big).$$

Mivel $f(b) - f(a)$ konstans, így ha $\Delta n \to 0$, akkor $O_{f(x),F_n} \to 0$. A 6.4-es tétel miatt igaz az állítás.

1. példa

Vizsgáljuk meg a 6.6-os tétel segítségével az $f(x) = x \cdot [x]$ függvény tetszőleges $[a; b]$-on való R-integrálhatóságát. ($[x]$ az x egészrészét jelenti.)



8. ábra

Megoldás

Ha $0 \le a < b$, akkor a függvény monoton növekvő, az előbbi tétel miatt R-integrálható. Ha $a < b < 1$, akkor a függvény monoton csökkenő, azaz R-integrálható. Ha viszont $a < 0$ és $1 < b$, akkor célszerű olyan részekre bontani $[a; b]$-ot, amelyeken már monoton a függvény és úgy megvizsgálni az egyes részeket.

* * *

A 4.1-es tételben láttuk, hogy a folytonosság a differenciálhatóság szükséges, de nem elégséges feltétele. Vizsgáljuk meg a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság kapcsolatát!

az $[a; b]$-on majdnem mindenhol folytonos függvény integrálható

6.7. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ függvény az $[a; b]$-on folytonos, vagy korlátos és véges számú pont kivételével folytonos, akkor R-integrálható ezen az intervallumon.**

A tétel igazságát a zárt intervallumon folytonos függvény egy speciális tulajdonságával, az ún. *egyenletes folytonosság* felhasználásával bizonyíthatnánk: erre, illetve a rá vonatkozó tételre alkalmazzuk a 6.5-ös tételt. A bizonyítás a fentiek miatt hosszabb előkészületet igényelne, ami könyvünk kereteit meghaladja. Mind a monotonság, mind a folytonosság elégséges, de nem szükséges feltétele annak, hogy $f(x)$ $[a; b]$-on R-integrálható legyen. Van olyan függvény, amely nem folytonos $[a; b]$-on, de integrálható – ilyen pl. $f(x) = x \cdot [x]$ vagy $f(x) = [x]$ az $[1; 6{,}2]$ felett.

Megjegyzés: Még egy technikai jellegű tételt említünk meg.

6.8. tétel

6.8. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ függvény R-integrálható az $[a; b]$-on, akkor a belőle származtatható $g(x)$ is integrálható ugyanott, amennyiben $g(x)$ függvény az $f(x)$-ből úgy keletkezik, hogy az $[a; b]$-on $f(x)$ értékeit véges sok helyen megváltoztatjuk. Ekkor**

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Következmény: Ha az $f(x)$ függvény véges sok helyen nincs értelmezve az $[a; b]$-on, de D_f kibővíthető úgy, hogy az így keletkező $g(x)$ függvény az $[a; b]$-on R-integrálható legyen, akkor $f(x)$ is R-integrálható, és integrálja megegyezik $g(x)$ R-integráljával.

4. A Riemann-integrál tulajdonságai

határozott integrál konstansszorosa

6.9. Tétel: **Ha az $f(x)$ $[a;b]$-on R-integrálható és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám, akkor $c \cdot f(x)$ is R-integrálható $[a;b]$-on, és**

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás

F_n legyen az $[a;b]$ egy felosztása. Ekkor $c \cdot f(x)$ Riemann-összege:

$$\hat{I}_n = \sum_{i=1}^{n} c \cdot f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Tehát $c \cdot f(x)$ Riemann-összege $f(x)$ megfelelő Riemann-összegének c-szerese. Mivel $f(x)$ Riemann-integrálható, ezért az $\{I_n\}$ sorozatnak van határértéke, és

$$\lim_{n\to\infty} \hat{I}_n = \lim_{n\to\infty} c \cdot I_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} I_n.$$

„Konyhai" szóhasználattal: a konstansszorzó kiemelhető az integráljel elé.

Így a határérték konstansszorosára vonatkozó tétel miatt $c \cdot f(x)$ integrálható, illetve integrálja a tételben kimondott formula.

1. példa

Határozzuk meg az $\int_a^b c\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrált.

Megoldás

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b 1\,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a).$$

2. példa

Határozzuk meg az $\int_a^b 5x\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrált.

Megoldás

$$\int_a^b 5x\,\mathrm{d}x = 5 \cdot \int_a^b x\,\mathrm{d}x = 5 \cdot \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

összeg határozott integrálja

6.10. Tétel: **Ha az $f(x)$ és a $g(x)$ R-integrálhatók $[a;b]$-on, akkor $f(x) + g(x)$ is R-integrálható $[a;b]$-on, és**

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás

Az $[a; b]$ egy F_n felosztásához tartozó $f(x) + g(x)$ függvény Riemann-összege:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \big(f(c_i) + g(c_i)\big) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \big(f(c_1) + g(c_1)\big) \cdot (x_1 - x_0) + \big(f(c_2) + g(c_2)\big) \cdot (x_2 - x_1) + \ldots +$$

$$+ \big(f(c_{n-1}) + g(c_{n-1})\big) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + \big(f(c_n) + g(c_n)\big) \cdot (x_n - x_{n-1}) =$$

$$= f(c_1) \cdot (x_1 - x_0) + \ldots + f(c_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) +$$

$$+ g(c_1) \cdot (x_1 - x_0) + \ldots + g(c_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} g(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Tehát $f(x) + g(x)$ tetszőleges Riemann-összege f és g függvények Riemann-összegeiként áll elő. A határértékek összegére vonatkozó tétel felhasználásával kapjuk az állítást.

* * *

A tétel szerint összeget tagonként integrálhatunk, ha az összegben szereplő függvények külön-külön mind R-integrálhatók $[a; b]$-on.

Következmények:

1. Ha f és g R-integrálhatók $[a; b]$-on, akkor $f(x) - g(x)$ is R-integrálható itt, és

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Ha $f_i(x)$ függvények az $[a; b]$-on R-integrálhatók és $c_i \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, akkor a $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i(x)$ is R-integrálható $[a; b]$-on, és

A bizonyítást teljes indukcióval végezhetjük.

$$\int_a^b \big(c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \ldots + c_n \cdot f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b c_1 \cdot f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b c_2 \cdot f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_a^b c_n \cdot f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. példa

Határozzuk meg az $\int_a^b (x - 1)\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrált.

Megoldás

$$\int_a^b (x - 1)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x\,\mathrm{d}x - \int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2} + a - b.$$

Az alábbi két tétel technikai jellegű, bizonyításaikkal nem foglalkozunk.

Integrációs intervallum felosztása

6.11. Tétel: **Ha az $f(x)$ függvény R-integrálható az $[a; b]$-on és $a < c < b$, akkor**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrációs intervallumok egyesítése

6.12. Tétel: **Ha $a < c < b$ és az $f(x)$ függvény integrálható az $[a; c]$ és a $[c; b]$ intervallumokon, akkor az $f(x)$ az $[a; b]$-on is integrálható, és**

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. példa

Határozzuk meg az $\int_{-1}^{3} |x|\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrált.

Megoldás

$$\int_{-1}^{3} |x|\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} x\,\mathrm{d}x = -\frac{0^2-(-1)^2}{2} + \frac{3^2-0^2}{2} = 5.$$

Következmények:

1. A tétel ismételt alkalmazásával $a < c_1 < \ldots < c_n < b$ esetén, ha léteznek az alábbi integrálok, akkor teljesül, hogy

$$\int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Ha $f(x)$ függvény R-integrálható az $[a; b]$-on, akkor

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{és} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. A 6.12-es tétel akkor is érvényes, ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok. Ha például $a < b < c$, akkor

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ugyanakkor

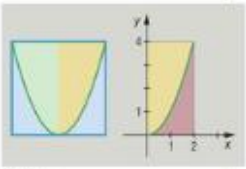
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A határozott integrál tárgyalása során már 8 definícióig és 12 tételig jutottunk. Azonban Riemann-integrált összesen 2,5 darab feladatban határoztunk meg. Ennek okára a következő feladat ad magyarázatot.

5. példa

Számítsuk ki a 4 cm oldalú négyzetbe írt parabola által bekerített, az ábrán világoszölddel jelölt területet.





9. ábra

Az ún. parabolikus háromszög területét már Arkhimédész is meghatározta.

Megoldás

Tekintsük a 9. ábrát. Mivel a parabola szimmetrikus és szimmetriatengelye a négyzet középvonala, ezért elegendő a fél négyzetbe eső területet meghatározni. A könnyebb kezelhetőség kedvéért helyezzük el utóbbit koordináta-rendszerben!

Ha a parabolaív alatti piros terület kétszeresét kivonjuk a négyzet területéből, megkapjuk a feladat megoldását. Az ív alatti területet R-integrál adja meg.

Függvényünk tehát $f(x) = x^2$, a zárt intervallum pedig a $[0; 2]$. Mivel $f(x)$ itt szigorúan monoton, ráadásul folytonos, ezért van Riemann-integrálja.

Osszuk fel $[0; 2]$-ot n egyenlő részre. Így az i-edik rész hossza:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n}, \quad F_n = \left\{x_0 = 0; x_1 = \frac{2}{n}; \ldots; x_i = i \cdot \frac{2}{n}; \ldots; x_n = 2\right\}.$$

A függvény szigorúan monoton növekvő, így

$$m_i = \left((i-1) \cdot \frac{2}{n}\right)^2.$$

Az alsó összegben $\frac{2}{n}$ szélességű, $\left((i-1) \cdot \frac{2}{n}\right)^2$ magas téglalapok területének összegét határozzuk meg:

$$s_n = \frac{2}{n} \cdot 0 + \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{2}{n} \cdot (i-1)^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{2}{n} \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \left[0 + 1 + \ldots + (n-1)^2\right] = \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2.$$

A teljes indukciónál már beláttuk, hogy:

$$\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Alkalmazva $k = n - 1$ esetre:

$$s_n = \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Ha az F_n sorozat minden határon túl finomodik, akkor finomsága:

$$\frac{2}{n} = \Delta n \to 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}.$$

Így

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{8}{3}.$$

Teljesen hasonlóan a felső összegek felírásakor $M_i = \left(i\cdot\frac{2}{n}\right)^2$ és

Mivel tudjuk, hogy létezik az integrál, ezért a felső összeget csak a gyakorlás kedvéért határozzuk meg.

$$S_n = \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{2}{n}\cdot i^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{2}{n}\cdot n^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^3\cdot\left(1+\ldots+n^2\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n} = \frac{4}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Így

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{8}{3} = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Tehát $f(x) = x^2$ $[0; 2]$-on vett R-integrálja:

$$\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.$$

Az eredeti feladat megoldása így

$$16 - 2\cdot\frac{8}{3} = \frac{32}{3}.$$

Feladatok

1. Számítsuk ki a következő R-integrálok értékét:

   a) $\int_1^5 2\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int_5^2 3\,\mathrm{d}x$; *c)* $\int_2^4 3x\,\mathrm{d}x$; *d)* $\int_{-3}^0 2x\,\mathrm{d}x$.

2. Bizonyítsuk be precízen, hogy amennyiben f és g R-integrálhatók $[a; b]$-on, akkor $f(x) - g(x)$ is R-integrálható $[a; b]$-on, és

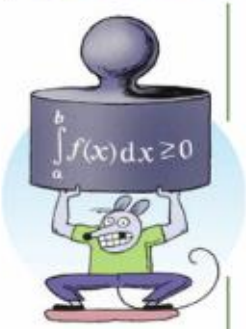
$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Számítsuk ki az alábbi R-integrálok értékét:

   a) $\int_2^7 (2x-3)\,\mathrm{d}x$; *b)* $\int_0^3 (4-2x)\,\mathrm{d}x$.

4. Számítsuk ki a következő R-integrál értékét:

$$\int_0^3 (5x+1)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 (1+5x)\,\mathrm{d}x - 5\cdot\int_6^4 \left(x+\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x.$$



5. Az integrálszámítás középértéktételei (kiegészítő anyag)

Az előző lecke utolsó példája jól mutatja, hogy még egyszerű függvény R-integráljának meghatározása is elég nehézkes alsó és felső összegek segítségével (esetleg el sem végezhető).

A probléma kezelése érdekében az ilyen feladatok megoldásához más eljárást kerestek. Ezen eljáráshoz azonban – mint azt már megszokhattuk – további erőfeszítésekre lesz szükségünk. Az alábbi néhány tételt az integrálszámítás középértéktételeiként emlegetik a szakirodalomban.

6.13. tétel

6.13. Tétel: **Ha az $f(x)$ függvény az $[a; b]$-on R-integrálható és $f(x) \geq 0$ minden $x \in [a; b]$-ra, akkor**

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Bizonyítás

Ezt használtuk ki $f(x) \geq 0$ függvények alatti terület vizsgálatakor is.

Mivel a felosztásokhoz tartozó Riemann-összegek a feltételek szerint nemnegatívok, így a minden határon túl finomodó felosztássorozathoz tartozó Riemann-összegek sem azok.

6.14. tétel

6.14. Tétel: **Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek létezik R-integrálja az $[a; b]$-on és $f(x) \geq g(x)$, akkor**

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Bizonyítás

Mivel $f(x) \geq g(x)$, ezért $f(x) - g(x) \geq 0$, így az előző és a 6.10-es tétel miatt

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0,$$

vagyis a tétel állítása teljesül.

A következő tételt az integrálszámítás első középértéktételének szokás nevezni.

az integrálszámítás első középértéktétele

6.15. Tétel: **Ha az $f(x)$ függvény Riemann-integrálható az $[a; b]$-on és alsó határa $m = \inf[f(x)]$, felső határa $M = \sup[f(x)]$ minden $x \in [a; b]$ esetén, akkor**

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b - a).$$

Bizonyítás

M-et és m-et tekinthetjük úgy, mint konstans függvényeket az $[a; b]$-on. Mivel $m \le f(x) \le M$ minden $[a; b]$-beli x-re, így a 6.14-es tétel kétszeres alkalmazásával:

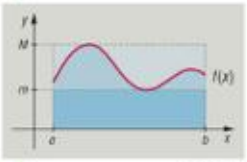
$$\int_a^b m \,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b M \,\mathrm{d}x.$$

A 6.9-es tétel utáni első példa alapján:

$$\int_a^b m \,\mathrm{d}x = m \cdot (b-a), \qquad \int_a^b M \,\mathrm{d}x = M \cdot (b-a).$$

Ezekből adódik a tétel állítása.

Megjegyzés: Az állítás nyilván $f(x)$ függvény $[a; b]$-on vett tetszőleges alsó (k) és felső (K) korlátjaira is igaz (ekkor nem középértéktételnek hívjuk, mert nem „szorosan" fogja közre az R-integrált). Ha például az $f(x)$ függvény folytonos $[a; b]$-on, akkor a tétel szemléletes jelentését a 10. ábra mutatja (az egyre világosodó területek takarják egymást).



10. ábra

A 6.15-ös tétel az R-integrál becslésére is szolgál. Például $\int_3^7 x^3 \mathrm{d}x$-re a következő becslést kapjuk:

$$108 = 4 \cdot 3^3 \le \int_3^7 x^3 \mathrm{d}x \le 4 \cdot 7^3 = 1372.$$

Persze ez a becslés elég durva, hiszen a pontos érték 580. Az integrál becsléséhez használhatjuk a következő állítást is:

Ha $f(x)$ R-integrálható az $[a; b]$-on, akkor $|f(x)|$ is az $[a; b]$-on, és

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Igazolását az abszolút értékre és a 6.14-es tételre építhetjük.

A feltételt folytonosságra szűkítve a tétel tovább élesíthető.

az első középértéktétel következménye

6.16. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a; b]$-on, akkor van olyan $c \in [a; b]$, amelyre**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás

A 6.7-es tétel miatt $[a; b]$-on folytonos függvény R-integrálható. A 3.7-es Weierstrass-tétel szerint zárt intervallumon folytonos függvény felveszi M maximumát és m minimumát. Így a 6.15-ös tétel miatt:

$$m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M \cdot (b-a) \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \le M.$$

A 3.8. Bolzano-tétel miatt a zárt intervallumon folytonos függvény a szélsőértékei között minden értéket felvesz, ezért van olyan $c \in [a; b]$, hogy

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = f(c) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a).$$



Megjegyzések:

1. A tétel bizonyításában jól látható a matematikai bizonyítások egymásra épülése. A bizonyítás során a 3.7-es, 3.8-as, 6.7-es, 6.15-ös tételek eredményét használtuk közvetlenül. De például a 6.15-ös tételt a 6.14-essel, a 6.14-est a 6.13-as segítségével láttuk be stb. Ebben a nyúlfarknyi tételben a felsorolt fogalmakon kívül legalább hat, általunk is ismert tétel eredménye található meg. Többek között ez a matematikai bizonyítások nehézsége: az előzmények ismerete nélkül ilyen típusú tételeket nem lehet bizonyítani.
2. Miért hívják az integrálás középértéktételének? A számtani, mértani stb. közepeknél szoktuk emlegetni, hogy ezek azért középértékek (közepek), mert rájuk kicserélve a tagokat, tényezőket stb., a megfelelő átlag nem változik. Pl.

   $$\frac{3+7}{2}=5, \text{ mert } \frac{5+5}{2}=5 \quad \text{és} \quad \sqrt{2\cdot 8}=4, \text{ mert } \sqrt{4\cdot 4}=4.$$

   Ha $[a; b]$-on mindenütt $f(c)$ lenne a függvényérték, akkor a tétel szerint ezen konstans függvény $f(c)\cdot(b-a)$ R-integrálja ugyanakkora lenne, mint az eredeti R-integrál. Az elnevezést ezen analógia indokolja.
3. A folytonosság feltétele nélkül a 6.16-os tétel nem igaz. Például a szignum függvényre meghatározva a megfelelő s_n és S_n összegek határértékeit:

   $$\int_a^b \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = b+a, \quad \text{ha} \quad a<0<b.$$

   Ha most $a=-1$, $b=2$, akkor

   $$\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = 1.$$

   Azonban

   $$1=(2-(-1))\cdot f(c), \quad \text{amiből} \quad f(c)=\frac{1}{3}.$$

   Csakhogy a függvény nem tartalmazza ezt az értéket! Ezért nem igaz rá a fenti tétel.

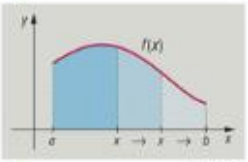
   (A szignumfüggvény általában arra szokott példa lenni, hogy nem kell a függvénynek folytonosnak lenni ahhoz, hogy létezzen R-integrálja.)

6. A Newton–Leibniz-tétel

Az eddigi néhány példából láttuk, hogy az R-integrál meghatározása még viszonylag egyszerű feladatoknál sem könnyű – lásd pl. $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ függvényeket. Sok gondot okoz az alsó, felső, esetleg Riemann-összegek meghatározása, nem is beszélve az ezt követő határérték-számolásokról. Más eljárást kell keresnünk.

A 6.5-ös tétel következménye miatt, ha az $f(x)$ függvény az $[a; b]$-on R-integrálható, akkor ennek bármely részintervallumán is R-integrálható. Legyen $x \in [a; b]$ tetszőleges valós szám. Az előbbiek szerint $f(x)$ függvény R-integrálható $[a; x]$-on ($a \le x \le b$). Mivel az integrál felső határa x, az integrandusban más betűt kell írnunk, például t-t:

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$



11. ábra

Így egy új függvényt hozunk létre: minden $x \in [a; b]$-hoz egy valós számot, f függvény $[a; x]$-on vett R-integrálját rendeljük. Ez a függvény az $[a; b]$-on van értelmezve. Azt is rögzítsük, hogy új függvényünk az integrálási változók közül a felső határ függvénye. Hasonlóan lehetne az alsó határ függvénye is.

integrálfüggvény

6.9. Definíció: Ha az $f(x)$ függvény R-integrálható az $[a; b]$-on, akkor a $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$-t *integrálfüggvénynek nevezzük ($x \in [a; b]$).**

Megjegyzés: Angol nyelvterületen területmérő függvénynek is nevezik $F(x)$-et, mivel x változásával az $[a; x]$ felett vett terület mértékszáma is megváltozik. *(11. ábra)*

$F(x)$ integrálfüggvény szoros kapcsolatot teremt a differenciálszámítás és az R-integrál, valamint a határozatlan integrál között, ezzel utat nyitva a határozott integrál könnyebb kiszámítása felé.

az integrálfüggvény folytonossága

6.17. Tétel: Ha az $f(x)$ függvény R-integrálható az $[a; b]$-on, akkor a $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ integrálfüggvény $[a; b]$ minden pontjában folytonos (a-ban jobbról, b-ben pedig balról). Továbbá minden olyan $x \in [a; b]$ pontban, ahol $f(x)$ folytonos, ott $F(x)$ integrálfüggvény differenciálható, és $F'(x) = f(x)$.

Bizonyítás

Először a folytonosságot igazoljuk. Az R-integrálhatóság szükséges feltétele a korlátosság, ezért $f(x)$ $[a; b]$-on korlátos: van olyan $0 < K \in \mathbb{R}$, hogy $|f(t)| < K$ minden $t \in [a; b]$-ra.

A 6.12-es tétel 2. következményét, a 6.12-es tételt és a 6.15-ös tétel utáni becslést használtuk fel.

Bármely $x_0 \neq x \in [a; b]$-ra:

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^a f(t)\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t < \int_{x_0}^x K\,\mathrm{d}t = K \cdot (x - x_0).$$

Innen tetszőleges $x_0 \in [a; b]$ pontbeli folytonosság azonnal adódik, mert ha $x \to x_0$, akkor:

$$\lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| < \lim_{x \to x_0} K \cdot |x - x_0| = 0,$$

így

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$

Ez pedig a függvény x_0 pontbeli folytonosságának a definíciója.

Annak bizonyítására, hogy $F(x)$ a tétel feltételei mellett differenciálható egy tetszőleges $x \in]a; b[$ pontban, írjuk fel a differenciálhányadost a következő alakban (felhasználjuk a 6.16-os tételt):

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(c) = f(c).$$

Ha most $h \to 0$, akkor $c \to x$, mivel c az x és $x + h$ között van. Így $f(c) \to f(x)$, mivel $f(x)$ függvény x pontban folytonos. Tehát $F(x)$ x-beli deriváltja $f(x)$.

Az a és b pontbeli féloldali differenciálhatóság az $x = a$ és $x = b$ választás mellett analóg módon látható be.

Úgy is megfogalmazhatnánk, hogy ha $f(x)$ függvény folytonos $[a; b]$-on, akkor $F(x)$ integrálfüggvény primitív függvénye $f(x)$-nek az $[a; b]$-on, hiszen $F'(x) = f(x)$. Ezek alapján a határozatlan integrálra is tehetünk egy fontos megállapítást: ha $f(x)$ $[a; b]$-on folytonos függvény, akkor ezen az intervallumon van primitív függvénye.

A tétel segítségével $f(x)$ határozott integrálja sokkal egyszerűbben kiszámítható, mint eddig láttuk – csak az szükséges, hogy létezzen primitív függvénye.

Newton–Leibniz-formula

5.18. NEWTON–LEIBNIZ-FORMULA: Ha az $f(x)$ Riemann-integrálható az $[a; b]$-on és f-nek létezik F primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás

Legyen $[a; b]$ egy tetszőleges felosztása $F_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Abból a tényből, hogy $F(x)$ primitív függvénye $f(x)$-nek $(F'(x) = f(x))$ következik, hogy $F(x)$ folytonos $[a; b]$-on, illetve ennek tetszőleges részintervallumain. Írjuk fel az F_n felosztáshoz tartozó Riemann-összegeket úgy, hogy $[x_{i-1}; x_i]$-on azt a c_i értéket választjuk közbülső értéknek, amelyre igaz a 4.15-ös Lagrange-féle differenciálszámítási középértéktétel feltétele, tehát:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ezért az alábbi Riemann-összeg:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

A Riemann-összeg tetszőleges minden határon túl finomodó F_n felosztássorozatra elkészíthető úgy, hogy eredménye $F(b) - F(a)$. Az $f(x)$ függvény $[a; b]$-on vett R-integrálja a c_i helyektől függetlenül is csak $F(b) - F(a)$ lehet (feltettük, hogy R-integrálható!).

Szokásos jelölések:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; [F(x)]_a^b \;=\; F(x)\Big|_a^b.$$

Megjegyzések:

1. A fenti tételt a R-integrál tulajdonságaira hivatkozva kissé egyszerűbben, de mindenképpen nagyvonalúbban szokták (az alábbiak szerint) bizonyítani. Ha $f(x)$-nek $G(x)$ primitív függvénye, akkor mivel ezek csak konstansban különböznek egymástól, $G(x) = F(x) + c$. Így az integrálfüggvény értelmezése miatt

   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b) = F(b) + c,$$

   és korábbi megállapításunk miatt

   $$0 = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = G(a) = F(a) + c, \quad \text{így} \quad c = -F(a).$$

   Következésképpen

   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b) = F(b) - F(a).$$

2. A negyedik fejezet elején említettük a Newton és Leibniz közötti elsőbbségi vitát. Ennek különös adaléka, hogy egyikük sem volt az első. A határozatlan integrálszámítással 1630-tól sok tudós foglalkozott, pl. Fermat (1630), Cavalieri (1635), Gregory (1667), Barrow (1668).

Pierre de Fermat (1601–1665), francia jogász, Bonaventura Cavalieri (1598–1647) olasz, James Gregory (1638–1675) skót, Isaac Barrow (1630–1677) angol matematikus.

A Newton–Leibniz-tétel szerint ha ismerjük $f(x)$ primitív függvényét, akkor az $f(x)$ függvény $[a; b]$-on vett Riemann-integrálja már könnyen meghatározható.

1. példa
Határozzuk meg az $\int_2^5 c\,dx$ Riemann-integrált.

Megoldás

$$\int_2^5 c\,dx = [c \cdot x]_2^5 = 5c - 2c = 3c.$$

2. példa
Határozzuk meg az $\int_1^2 x\,dx$ Riemann-integrált.

Megoldás

$$\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

3. példa
Határozzuk meg az $\int_0^2 x^2\,dx$ Riemann-integrált.

Megoldás

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

4. példa
Határozzuk meg az $\int_0^\pi \sin x\,dx$ Riemann-integrált.

Megoldás

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos\pi]_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2.$$

5. példa
Határozzuk meg az $\int_1^e \ln x\,dx$ Riemann-integrált.

Megoldás

$$\int_1^e \ln x\,dx = [x \cdot (\ln x - 1)]_1^e = e \cdot (\ln e - 1) - 1 \cdot (\ln 1 - 1) = 1.$$

6. példa

Határozzuk meg az $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\,dx$ Riemann-integrált.

Megoldás

Először a helyettesítéses integrálás és parciális törtre bontás módszereivel határozzuk meg a primitív függvényt:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt = \int\frac{1}{t}\,dt - \int\frac{1}{1+t}\,dt =$$

$$= \ln|t| - \ln|1+t| + c = \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + c,$$

majd a kapott primitív függvénnyel írjuk fel a Newton–Leibniz-tételt:

$$\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}\,dx = \left[\ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right|\right]_0^{\ln 2} = \left[\ln\left|\frac{e^{\ln 2}}{1+e^{\ln 2}}\right|\right] - \left[\ln\left|\frac{e^0}{1+e^0}\right|\right] = \ln\frac{4}{3}.$$

Megjegyzés: A 2. lecke végén megadtuk a Riemann–Stieltjes integrál fogalmát. A következő összefüggés segítségével visszavezethetjük az RS-integrál meghatározását R-integrálra, illetve a Newton–Leibniz-szabályra. Tegyük fel, hogy $\varphi(x)$ monoton növekvő, $\varphi'(x)$ R-integrálható és $f(x)$ korlátos függvény $[a; b]$-on. Ekkor $f(x)$ akkor és csak akkor Riemann–Stieltjes integrálható $[a; b]$-on, ha $f(x)\cdot\varphi'(x)$ R-integrálható $[a; b]$-on. Ekkor:

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx.$$

A bizonyítás nem része sem az emelt szintű, sem a speciális tantervű csoportok anyagának, bár elég egyszerű. Ha tehát $f(x)\cdot\varphi'(x)$ primitív függvényét akár parciális integrálással meghatározzuk, akkor alkalmazható rá a Newton–Leibniz-szabály.

Feladatok

1. Mennyivel mond többet a 6.17-es tétel annál, mintha a folytonosságra a differenciálhatóságból következtetnénk?
2. Határozzuk meg a Newton–Leibniz-tétel segítségével a következő határozott integrálokat:

   a) $\int_1^7 (3x^2 - 2x + 4)\,dx$;

   b) $\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^5}\,dx$;

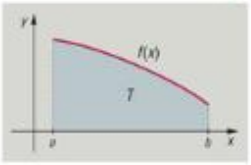
   c) $\int_0^{\pi} (\sin 2x + \cos x)\,dx$;

   d) $\int_2^3 e^{5x}\,dx$.

7. A határozott integrál alkalmazásai I. Területszámítás

Területszámítás

Először a Riemann-integrál és a síkidomok területének meghatározása közötti kapcsolatra mutatunk néhány példát. Az eddigi szemléletes geometriai utalásokból látható (mint a fejezet elején írtuk), hogy ha $f(x)$ R-integrálható $[a; b]$-on és $f(x) \geq 0$ itt, akkor $\int_a^b f(x)\,dx$ azon síkidom területének mérőszámát jelenti, amelyet $f(x)$ grafikonja, $x = a$ és $x = b$ egyenesek, valamint az x tengely határolnak. Utaltunk rá, hogy szokták ezt az $f(x)$ függvénygörbe alatti területnek, az így kapott síkidomot pedig *görbe vonalú trapéznak* is nevezni. *(12. ábra)*



12. ábra

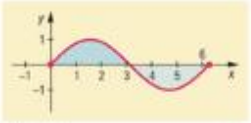
1. példa

Határozzuk meg az $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ értékét.

Megoldás

Mivel mindkét határon 0 a függvényérték, a kérdezett érték az előbbiek szerint a $\sin x$ függvény grafikonja és az x tengely $[0; 2\pi]$ intervalluma által határolt terület. A feladat láttán a gyanútlan kezdők nagyon megörülnek. Hohó, a szinuszfüggvénynek ismerem a primitív függvényét! Ez $(-\cos x)$. Már csak a Newton–Leibniz-szabályt kell alkalmazni. Tehát

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0.$$



13. ábra

A határozott integrál a tengely alatti terület ellentettjét adja meg.

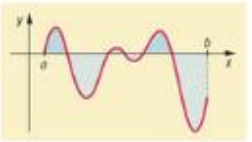
A gyanútlan kezdő ekkor kérdőn néz szét: nem létezik, hogy nincs terület! Akkor veszi csak észre, hogy a függvény az adott intervallumon negatív értékeket is felvesz és $[\pi; 2\pi]$ intervallumon a Riemann-összeg nem nagyobb nullánál, amikor felrajzolja a feladatnak megfelelő ábrát. *(13. ábra)*

Így rájön arra – és remélhetőleg egy életre meg is jegyzi –, hogy $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$ abban az esetben, ha $f(x)$ függvény $[a; b]$-on nempozitív értékeket vesz fel. Ezért ilyenkor, hogy a terület fogalmának megfeleljünk, az R-integrál eredményét -1-gyel kell szoroznunk:

$$T = -\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Ha tehát $f(x)$ függvény R-integrálható $[a; b]$-on és vegyesen vesz itt fel negatív és pozitív értékeket, akkor $[a; b]$-ot olyan részintervallumokra

kell osztanunk, ahol $f(x)$ tartja az előjelét *(14. ábra)*. Ezen részintervallumokon kiszámítjuk az R-integrálok értékét, majd összegezzük őket úgy, hogy a negatív részeken az integrál -1-szeresét vesszük. A részintervallumokat az $f(x)=0$ egyenlet megoldásaiként kapjuk. A primitív függvényt elég csak egyszer meghatároznunk.



14. ábra

Fenti példánk esetében a terület tehát:

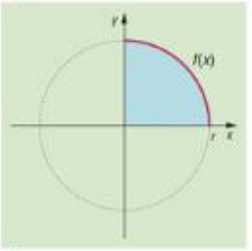
$$T=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=2+2=4.$$

2. példa

Számítsuk ki az r sugarú kör területét.

Megoldás

Előbbi tapasztalatainkból kiindulva célszerű rögtön az elején ábrát készíteni. Mivel az origó középpontú kör egyenlete (11.-es könyv) a koordináta-rendszerben $x^2+y^2=r^2$ (bármely más középpontú, r sugarú kör az origóba tolható), elegendő a jelölt negyedkörlap területét meghatározni. *(15. ábra)*



15. ábra

Kifejezve $y=\sqrt{r^2-x^2}$-et és feltéve, hogy $x\in[0;r]$, $f(x)=y$ függvényt kapunk. A terület:

$$T_{\text{negyedkörlap}}=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=r\cdot\int_0^r\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Maga a kör nem függvény. Ha $-r<x<r$, akkor x-hez két különböző y érték tartozik: $\pm\sqrt{r^2-x^2}$.

Ennek primitív függvényét az előző fejezetben tárgyaltak alapján az $\frac{x}{r}=\sin t$ helyettesítéssel határozhatjuk meg. Formálisan számolva:

$$x=r\cdot\sin t,\quad \mathrm{d}x=r\cdot\cos t\,\mathrm{d}t,\quad t=\arcsin\frac{x}{r}.$$

Így a határozatlan integrál:

$$\int\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot r\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=r\cdot\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t=$$

$$=r\cdot\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{r}{2}\cdot\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+c.$$

Az apró betűs helyettesítéses integrált használjuk!

ami után már a határozottat is megadhatjuk:

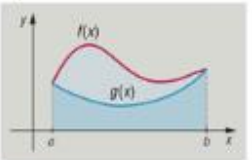
$$T_{\text{negyedkörlap}}=r\cdot\int_0^r\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{r^2}{2}\cdot\left[\arcsin\frac{x}{r}+\frac{x}{r}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]_0^r=$$

$$=\frac{r^2}{2}\cdot(\arcsin 1+1\cdot 0-(\arcsin 0+0))=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

A negyedkör területének négyszerese a teljes kör területe, azaz $T=r^2\cdot\pi$.

* * *

A következő példa előtt állapítsunk meg egy egyszerű tényt. Ha $f(x)$ és $g(x)$ függvény is folytonos $[a;b]$-on, $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$ és $f(x)>g(x)$ $]a;b[$-on, akkor a két függvény grafikonja által határolt síkidom területe *(16. ábra)*:



16. ábra

$$T=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)\mathrm{d}x.$$

3. példa

Számítsuk ki az $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ függvények által közrefogott területet.

Megoldás

Határozzuk meg a két függvény metszéspontját:

$$f(x) = g(x); \quad x^2 = \sqrt{x}; \quad \sqrt{x} \cdot (x\sqrt{x} - 1) = 0; \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

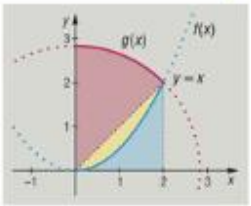
A függvények a (0; 0) és (1; 1) pontokban metszik egymást. Mivel $\sqrt{x}$ az adott intervallumon nagyobb, mint x^2, így a keresett terület:

$$T = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} - 0 + 0 = \frac{1}{3}.$$

4. példa

2010 októberében volt emelt szintű érettségi feladat 16 pontért.

Az $x^2 = 2y$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 \le 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Ne használjuk π közelítő értékét!



17. ábra

Megoldás

A körcikk területét fel tudjuk írni, ha ismerjük a sugarat és a középponti szöget. Húzzunk hát a (2; 2) pontba egy sugarat! Így $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$. A keresett félterület a kis körcikk területének, valamint az $y = x$ egyenletű sugáregyenes és a parabolaív által határolt terület összege *(17. ábra)*:

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{1}{8} T_{\text{kör}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{8} = \pi.$$

Most az előbbi megoldáshoz hasonlóan

$$g(x) = x \quad \text{és} \quad f(x) = \frac{x^2}{2}, \quad g(x) > f(x), \quad D_f = D_g = [0; 2].$$

Így a paraboladarab területe:

$$T_{\text{paraboladarab}} = \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{6} - 0 + 0 = \frac{2}{3}.$$

A keresett terület:

$$T = 2 \cdot (T_{\text{körcikk}} + T_{\text{paraboladarab}}) = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Megjegyzések:

1. $\int_0^2 x \,\mathrm{d}x$ helyett kiszámíthatjuk a kis háromszög területét is, így elég $\int_0^2 \frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}x$ integrált meghatározni.
2. Ha tudunk helyettesítéssel integrálni (az előző fejezet 2. leckéjének vége), akkor az alábbi módon is eljárhatunk.

A körlapot határoló körvonal áthalad a $(\pm 2; \pm 2)$ pontokon. Ezek közül a $(-2; 2)$ és $(2; 2)$ pontokon a parabola is átmegy *(18. ábra)*. Az ábra szimmetrikus az y tengelyre, elég csupán az I. síknegyedbe eső részt kiszámítani. $]0; 2[$-on a körvonal a parabolaív „felett" fut:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} < g(x) = \sqrt{8 - x^2}, \quad \text{ahol} \quad D_f = D_g = [0; 2].$$

A keresett félterület:

$$T_{\text{félterület}} = \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{8 - x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x.$$

A második integrál könnyen kiszámítható:

$$\int_0^2 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{2^3}{6} - 0 = \frac{4}{3}.$$

Az első integrál a 2. példában látott módon számítható ki, $r = 2\sqrt{2}$.

$$\int_0^2 \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = r \cdot \int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{r^2}{2} \cdot \left[\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]_0^2 =$$

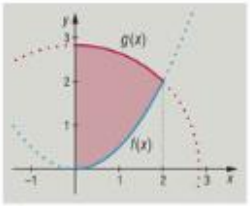
$$= 4 \cdot \left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \pi + 2.$$

Így a félterületre adódik:

$$T_{\text{félterület}} = \pi + 2 - \frac{4}{3} = \pi + \frac{2}{3},$$

amiből a keresett terület:

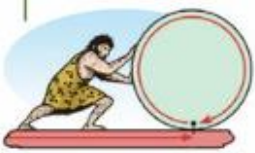
$$T = 2\pi + \frac{4}{3}.$$



18. ábra

Ívhossz-számítás (kiegészítő anyag)

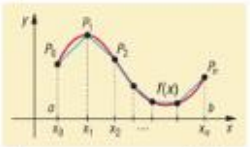
Már az általános iskola 6. osztályában megismerkedtünk a kör kerületével, de a kérdés azóta is fennáll: hogyan határozzuk meg ezt pontosan? Ha a síkidom sokszög, akkor a kerület a határoló oldalak hosszainak összege. A kört azonban nem egyenes szakaszok határolják. Persze ezt is lehet mérni, ha pl. egy vékony cérnaszálat rátekerünk a körvonalra, és lemérjük a cérnaszál hosszát. Ez volt eleinte a követett eljárás.



Mit értünk egy olyan síkgörbe hosszán, amelyet nem csak egyenes szakaszok alkotnak? Legyen az egyszerűség kedvéért a síkgörbe olyan, amely megegyezik valamely $[a; b]$-on folytonos függvény grafikonjával. (Ha nem ilyen, akkor általában felbontható ilyen típusú részekre.)

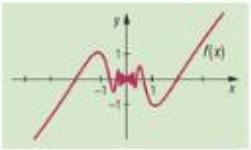
Legyen $F_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ ezen intervallum egy felosztása, jelölje $P_i\big(x_i; f(x_i)\big)$ a grafikonon levő pontokat. A P_0P_1, P_1P_2, …, $P_{n-1}P_n$ szakaszok együtt egy, a 19. ábrán is látható töröttvonalat alkotnak. Ezt a függvénygörbébe (síkgörbébe) beírt töröttvonalnak nevezzük. A töröttvonal hosszát a P_0, P_1, …, P_n pontokat összekötő szakaszok hosszának összege határozza meg:

$$\ddot{O}_n = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}P_i).$$



19. ábra

Minél több az osztópont, annál jobban „simul" a beírt töröttvonal $f(x)$ függvény $[a; b]$ feletti grafikonjához. Ha az F_n felosztássorozatot minden határon túl finomítjuk, és a hozzá tartozó $\ddot{O}_n$ összegsorozat egy véges határértékhez tart, akkor ezt a határértéket tekintjük az $[a; b]$ feletti $f(x)$ függvénygörbe ívhosszának.



20. ábra

függvénygörbe ívhossza

Ha $f'(x)$ folytonos, akkor $f(x)$-et *simának* nevezzük.

Megjegyzés: Nem minden folytonos függvénynek van ívhossza egy adott intervallumon. Minden valós pontban folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{ha} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0, \end{cases}$$

de $f(x)$-nek a $[0; 1]$-on nincs ívhossza. ***(20. ábra)***

6.19. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ függvény az $[a; b]$-on differenciálható és $f'(x)$ folytonos ezen az intervallumon, akkor az $f(x)$ függvény $[a; b]$-hoz tartozó grafikonjának ívhossza:**

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Bizonyítás

Legyen $F_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ az $[a; b]$ egy felosztása. Ekkor a feltételek szerint a felosztáshoz tartozó töröttvonal hosszát jelölje

$$\ddot{O}_n = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}P_i),$$

ahol

$$d(P_{i-1}P_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}.$$

Így

$$\ddot{O}_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}.$$

A 6.15-ös Lagrange-féle differenciálszámítási középértéktétel alkalmazható a fenti összeg második tagjaira, mivel teljesülnek rá a tétel feltételei. Ezért van olyan $c_i \in]x_{i-1}; x_i[$, hogy

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

így kiemelve $(x_i - x_{i-1})^2$-et:

$$d(P_{i-1}P_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2 \cdot \left(f'(c_i)\right)^2} =$$

$$= (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2},$$

amiből

$$\ddot{O}_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}.$$

Mivel $f'(x)$ folytonos $[a; b]$-on, $\sqrt{1+(f'(c_i))^2}$ függvény is az. A 6.7-es tétel szerint a folytonos függvény R-integrálható. Viszont fenti $\ddot{O}_n$ éppen $\sqrt{1+(f'(c_i))^2}$ Riemann-összege: az $\ddot{O}_n$-nek bármely, minden határon túl finomodó felosztássorozat mellett egy véges határértéke van, és ez

$$s=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ennyi előkészület után nekiláthatunk az r sugarú körkerület meghatározásának. Nyilván a kerület meghatározásánál látottakhoz hasonlóan az origó középpontú, r sugarú kör kerületét célszerű vizsgálnunk.

5. példa

Határozzuk meg az r sugarú kör kerületét.

Megoldás

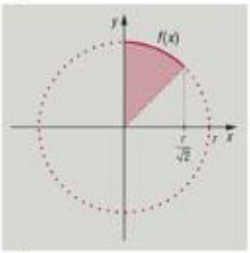
Korábbi megállapításaink alapján $y=\sqrt{r^2-x^2}$, ahol y folytonos függvénye x-nek. Bevezetve az $y=f(x)$ jelölést:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad \text{és} \quad (f'(x))^2=\frac{x^2}{r^2-x^2}.$$

Az ívhossz:

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=r\cdot\left[\arcsin\frac{x}{r}\right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}=r\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=r\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Az egész kör kerülete ennek nyolcszorosa: $K=2r\pi$.

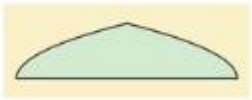


21. ábra

Feladatok

1. Határozzuk meg gyakorlásképpen integrálással a 3 és 4 befogójú derékszögű háromszög területét és átfogójának hosszát. (Helyezzük a háromszöget alkalmas koordináta-rendszerbe.)

2. A szekrény tetején található szimmetrikus díszt elvitték restaurálni. A dísz szélessége 80 cm, magassága 20 cm, gyakorlatilag kettő fél paraboladarabból van összeállítva. Hány cm^2-re kell festéket vásárolni, ha mindkét oldalát lefestjük? (A szélén pánt fut, azt nem kell lefestenünk.)

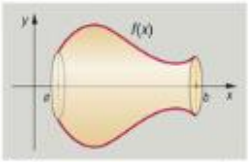


3. Lássuk be, hogy a következő függvénynek $[0; 1]$-on nincs ívhossza:

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & \text{ha} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x=0. \end{cases}$$

8. A határozott integrál alkalmazásai II. Térfogat- és felszínszámítás (kiegészítő anyag)

Forgástest térfogata



22. ábra

Az emelt szintű könyvben csak az ún. forgástestek térfogatának kiszámításával foglalkozunk.

Mit értünk forgástesten? Ha egy, az $[a; b]$-on folytonos $f(x) \geq 0$ függvény grafikonját megforgatjuk a koordináta-rendszer – általában – x tengelye körül, akkor forgástestet kapunk. Például a 22. ábrán látható $f(x)$ függvényt megforgatva az $[a; b]$ fölött, egy klasszikus görög vázához jutunk.

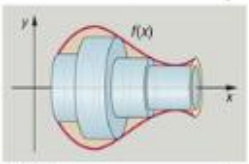
A térfogatot is a Riemann-integrál segítségével határozzuk meg.

forgástest térfogata

6.20. TÉTEL: **Ha az $f(x)$ függvény az $[a; b]$-on folytonos és $f(x) \geq 0$, akkor az $f(x)$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogata:**

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás



23. ábra

Legyen $F_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ az $[a; b]$ egy felosztása, és $x \in [x_{i-1}; x_i]$. Mivel $f(x)$ folytonos az $[x_{i-1}; x_i]$-on, ezért a 3.7-es Weierstrass-tétel szerint itt felveszi minimumát és maximumát. Ha $x \in [x_{i-1}; x_i]$, akkor $m_i = \min[f(x)]$, $M_i = \max[f(x)]$.

A felosztás során keletkező beírt és körülírt téglalapokat a függvénnyel együtt megforgatjuk az x tengely körül. A keletkező belső és külső hengerek térfogatai közrefogják az $f(x)$ grafikonja által létrehozott forgástest térfogatát (23. ábra). A hengerek térfogata:

$$m_i^2 \cdot \pi \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{és} \quad M_i^2 \cdot \pi \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

ezért

$$V_{\text{belső}} = \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \cdot \pi \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{és} \quad V_{\text{külső}} = \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \cdot \pi \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ezek a forgástest belsejében levő és az abból kilógó „elemi" térfogatösszegek. Mivel a fenti összegek a $\pi \cdot f^2(x)$ folytonos függvénynek $[a; b]$-on vett alsó és felső összegei, így a folytonosság miatt ezen az intervallumon $\pi \cdot f^2(x)$-nek létezik R-integrálja, ez pedig

$$\pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Így F_n minden határon túl finomodó felosztássorozat mellett:

$$\lim_{n \to \infty} V_{\text{belső}} = \lim_{n \to \infty} V_{\text{külső}} = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = V.$$

1. példa

Határozzuk meg az r sugarú gömb térfogatát.

Megoldás

Az $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ függvény $[0;r]$-on folytonos. Ha megforgatjuk az x tengely körül, egy félgömböt kapunk, melynek az előbbiek szerint térfogata:

$$V_{\text{félgömb}}=\pi\cdot\int_0^r\left(r^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\cdot\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\pi\cdot\frac{2r^3}{3},$$

így a gömb térfogata ennek a duplája:

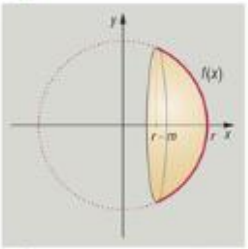
$$V_{\text{gömb}}=\frac{4}{3}r^3\pi.$$

2. példa

Számítsuk ki az r sugarú gömbből levágott $m<r$ magasságú gömbszelet térfogatát.

Megoldás

Tekintsük úgy az r sugarú gömb m magasságú szeletét, hogy tengelye az x tengelyen fekszik (*24. ábra*). Ekkor az integrációs intervallum és D_f is $[r-m;r]$, ahol $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$:



24. ábra

$$V=\pi\cdot\int_{r-m}^r\left(r^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\cdot\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r-m}^r=\pi\cdot\left[x\cdot\frac{3r^2-x^2}{3}\right]_{r-m}^r=$$

$$=\pi\cdot\left(r\cdot\frac{3r^2-r^2}{3}-(r-m)\cdot\frac{3r^2-(r-m)^2}{3}\right)=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{2}{3}r^3+(m-r)\cdot\frac{2r^2+2rm-m^2}{3}\right)=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{2r^3+2r^2m+2rm^2-m^3-2r^3-2r^2m+rm^2}{3}\right)=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{3rm^2-m^3}{3}\right)=\frac{m^2\pi}{3}\cdot(3r-m).$$

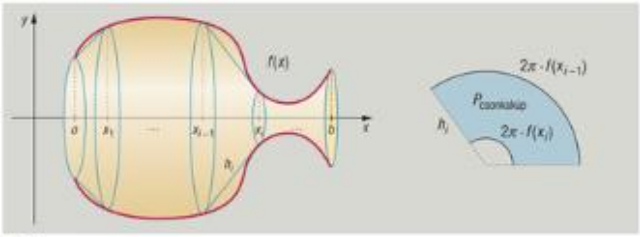
Forgástest felszíne

Ha nem síklapokkal határolt testről van szó, akkor a felszín fogalmának meghatározása igen nehéz. Zárt poliéder felszínéhez a határoló síklapok területeit összegezzük. Henger és kúp, valamint csonkakúp felszínét úgy határozzuk meg, hogy gondolatban felvágjuk őket, és az asztalra kiterített „szabásminta" darabjait összegezzük (palást, alaplap, fedőlap). Mi a helyzet a gömbhöz hasonló testek esetén, melyeket akárhogy is darabolunk fel, nem tudjuk kiteríteni a síkon? Konvex testeknél úgy

járunk el, hogy a testbe olyan konvex poliédereket írunk, amelyeknek csúcsai a konvex test felszínét határoló felületen vannak. Az ilyen típusú konvex poliéderek csúcsainak számát növeljük úgy, hogy felszínük egyre jobban illeszkedjen a konvex test felszínéhez. Ezzel poliéderek egy sorozatát, ún. beírt poliédereket kapunk. A korlátos konvex testbe beírt poliéderek felszínsorozatának felső határát a konvex test felszínének nevezzük.

Ez egy nagyon pontatlan és elnagyolt kísérlet a felszín fogalmára, nem is definíciónak szántuk.

Ez hasonlít az R-integrál alsó összegeinek sorozatához, de beszélhetünk a felső összegsorozathoz hasonló, ún. körülírt poliéderek felszínéről is. Úgy vélhetjük, hogy az R-integrál segíthet testek felszínének meghatározásában. Forgástest palástjának felszínét az összegzett csonkakúppalástok határértékeként határozhatjuk meg.



25. ábra

Ha megforgatjuk a 25. ábrán látható $f(x)$ $[a;b]$-on értelmezett folytonos függvényt, egy forgástestet kapunk. Az ábra jobb oldali része az $[a;b]$ $F_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ felosztáshoz tartozó $[x_{i-1}; x_i]$ körül keletkező csonkakúp kiterített palástját szemlélteti.

A palást területét megkapjuk az ismert képlet alapján:

$$P = h_i \cdot \pi \cdot \left(f(x_i) + f(x_{i-1})\right).$$

12.-es könyv 106. oldal

Ha $f(x)$ „elég jó" függvény $[a;b]$-on, akkor a h_i szakasz hosszának meghatározásához lehet alkalmazni a 4.15-ös Lagrange-féle középértéktételt.

f(*x*) „elég jó", ha folytonosan differenciálható (deriváltja folytonos).

Jelölje h_i nemcsak a szakaszt, hanem a hosszát is, akkor a 6.19-es tételnél látottak alapján:

$$h_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2} =$$

$$= (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}.$$

Így a beírt közelítő csonkakúpok felszínének összege F_n felosztássorozat esetén:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \pi \cdot \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}.$$

Mivel $f(x)$ minden $[x_{i-1}; x_i]$-on folytonos, a 3.8-as Bolzano-tétel miatt van olyan $\tau_i \in [x_{i-1}; x_i]$, hogy

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\tau_i).$$

Ezt kihasználva:

$$A_n = 2\pi \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}.$$

Mivel az előbb feltettük, hogy $f(x)$ „elég jó" függvény, ezért

$$f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}$$

folytonos függvény az $[a; b]$-on, így létezik R-integrálja. Ha F_n minden határon túl finomodó felosztássorozat, akkor A_n összegsorozat határértéke a forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ha a forgástest teljes felszínét akarjuk meghatározni, akkor a kapott palásthoz hozzá kell adnunk az alaplap és a fedőlap területét is.

Zárt intervallumon folytonos függvény a szélsőértékei között minden értéket felvesz.

Levezetésünk nem bizonyítás, ugyanis közben hagyatkoztunk Szent Ágostonra (nem pontosan a Riemann-összeget adtuk meg, hanem egy oda tartót).

3. példa

Határozzuk meg a 15 cm magas egyenes csonkagúla alakú, alulról nyitott lámpabura külső felszínét, ha fedőköre 5 cm, alapköre 10 cm sugarú.

Megoldás

A fenti test forgástest, palástjára alkalmazhatjuk új apparátusunkat. Helyezzük el megfelelő koordináta-rendszerben („fektessük" el, legyen 5 cm egy egység). Ekkor az alkotó egyenlete:

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 1, \quad f'(x) = \frac{1}{3}, \quad 1 + \left(f'(x)\right)^2 = \frac{10}{9}.$$

Helyettesítsünk be:

$$P = 2\pi \cdot \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x + 1\right) \cdot \sqrt{\frac{10}{9}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\sqrt{10}}{3} \cdot \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x + 1\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{10}}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{6} + x\right]_0^3 = \frac{2\pi\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{9}{2} = 3\pi\sqrt{10}.$$

A területegység 25 cm^2, ezért a palást $75\pi\sqrt{10}$ cm^2. A megoldáshoz adjuk hozzá a fedőkört:

$$A = P + 25\pi = 75\pi\sqrt{10} + 25\pi \text{ cm}^2.$$

Megjegyzés: A bura felszínét a szokásos módszerünkkel is meghatározhatjuk, ha kiszámítjuk az alkotóját:

$$A = \pi\left[r^2 + (R + r)a\right] = \pi\left[5^2 + (10 + 5) \cdot \sqrt{15^2 + 5^2}\right] =$$

$$= 25\pi + 75\pi\sqrt{10} \text{ cm}^2.$$

Feladatok

1. Gyakorlásképp számítsuk ki határozott integrállal a 20 cm átmérőjű, 15 cm magas forgáskúp térfogatát és felszínét.
2. Az $y = \frac{x^2}{9}$ parabola $[0; 3]$ feletti részének y tengely körüli forgatásából kaptunk egy forgásparaboloidot. Mennyi esővizet képes összegyűjteni, ha kitesszük az esőre? Mekkora a vízzel érintkező felület felszíne?
3. A forgástest felszínének képletében szerepel a görbe ívhosszánál látott kifejezés. Mi ennek a magyarázata?

9. Improprius integrál (kiegészítő anyag)

A leckét kezdjük egy viszonylag egyszerű R-integrállal.

1. példa

Határozzuk meg az $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ értékét.

Megoldás

Mivel x^{-2} primitív függvénye $-x^{-1}+c$, a feladatot könnyen elvégezhetjük:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}-(-1) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Változtassuk most az integrál felső határát 10-re, 1000-re, 100-nál nagyobb tetszőleges b értékre.

2. példa

Határozzuk meg a következő határozott integrálok értékét:

a) $\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx$; *b)* $\int_1^{100} \frac{1}{x^2}\,dx$; *c)* $\int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Megoldás

a) $\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^{10} = -\frac{1}{10}-(-1) = 1-\frac{1}{10}$;

b) $\int_1^{100} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^{100} = -\frac{1}{100}-(-1) = 1-\frac{1}{100}$;

c) $\int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^{b} = -\frac{1}{b}-(-1) = 1-\frac{1}{b}$.

Úgy tűnik, hogy ha az integrál felső határát egyre nagyobbra választjuk, akkor az eredmény egyre közelebb kerül 1-hez:

$$\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1.$$

Ugyanezen a módon az R-integrálnak adhatunk egy konkrét értéket:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1.$$

Így olyan integrálási feladatot oldottunk meg, amelynek integrációs intervalluma az eddigiekkel szemben nem véges, hanem végtelen érték.

3. példa

Határozzuk meg az $\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ értékét.

Megoldás

Mivel az integrandus primitív függvénye $2\sqrt{x}+c$, ezért:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{4}}^{1} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1.$$

Legyen ezután az integrálási változó alsó értéke $\frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{a} < \frac{1}{64}$ tetszőleges pozitív valós érték.

4. példa

Határozzuk meg a következő határozott integrálok értékét:

a) $\int_{\frac{1}{16}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; *b)* $\int_{\frac{1}{64}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; *c)* $\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Megoldás

a) $\int_{\frac{1}{16}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{16}}^{1} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{3}{2}$;

b) $\int_{\frac{1}{64}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{64}}^{1} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{64}}$;

c) $\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{a}}^{1} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{a}}$.

A határértékről ismert, hogy

$$\lim_{a\to\infty}\left(2 - 2\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = 2.$$

Vegyük észre, hogy az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény nem korlátos a $]0; 1]$-on, sőt a 0 pontban nem is értelmezett! Kézenfekvőnek tűnik mégis az eredeti intervallumon nem R-integrálható függvény integráljának értéket adni:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left(2 - 2\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = 2.$$

Kihasználtuk közben azt a tényt, hogy a két függvény bármely konkrét részintervallumon R-integrálható.

A fenti két típusba tartozó integrálokat *improprius integráloknak* nevezzük (van egy harmadik típus is). Ez az R-integrál legegyszerűbb kiterjesztése olyan esetekre, amelyekben a függvény nem korlátos, vagy az integrációs tartomány nem véges.

Fogalmazzuk meg általánosságban is a fent leírtakat! Ha az $f(x)$ függvény az $[a; \infty[$ minden $[a; b]$ részintervallumán R-integrálható és létezik a véges $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor ezt az $f(x)$ függvény $[a; \infty[$-on vett improprius integráljának nevezzük. Ugyanígy fogalmazhatjuk meg

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

improprius integrálokat, ahol a határok $\pm\infty$-be tartanak.

A másik típus a végpontjaiban nem korlátos függvényre való általánosítás. Akkor használjuk, ha $f(x)$ függvény az $[a; b]$ végpontjainak valamely környezetében nem korlátos, de minden $[t; b]$ $(a < t < b)$ intervallumban R-integrálható és létezik a $\lim\limits_{t\to a}\int\limits_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ véges határérték. Utóbbi határértéket a függvény $[a; b]$-on vett improprius integráljának nevezzük. Nyilván a fogalom felső határra ugyanígy kimondható.

Az *improprius* latin szó. Magyarul *„nem tulajdonképpeni"*-t, *„nem eredeti értelemben vett"*-et jelent. Jelen esetben az eredeti Riemann szerinti értelmezésnek mondunk ellent. Sajnos sokan, sok helyen még az internetes enciklopédiákban is félreforditják ennek jelentését.

improprius integrál

5. példa

Határozzuk meg az $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\,\mathrm{d}x$ értékét.

Megoldás

Felhasználjuk, hogy e^x függvény 0-hoz tart, ha $x \to -\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 e^x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) = e^0 = 1.$$

6. példa

Határozzuk meg az $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ értékét.

Megoldás

Felhasználjuk, hogy az $\operatorname{arctg} x$ függvény ∞-ben vett határértéke $\frac{\pi}{2}$, $-\infty$-ben vett határértéke pedig $-\frac{\pi}{2}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int\limits_a^b\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left[\operatorname{arctg} x\right]_a^b =$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

7. példa

Határozzuk meg az $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ értékét.

Megoldás

Az improprius integrál nem létezik, ugyanis a keresett határérték nem véges ($\ln x \to -\infty$, ha $x \to 0$):

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0}\left[\ln x\right]_a^1 = \lim_{a\to 0}(\ln 1 - \ln a) = 0 - (-\infty) = \infty.$$

8. példa

Határozzuk meg az $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ értékét.

Megoldás

Itt is az előző problémával találkozunk ($\ln x \to \infty$, ha $x \to \infty$):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty - 0 = \infty.$$

A két utolsó példából látható, hogy sok függvénynek nincs improprius integrálja.

Megjegyzés: Az improprius integrált az egyetemi tankönyvek a valószínűségszámításban használják leginkább.

Feladatok

1. Számítsuk ki a következő improprius integrálokat, amennyiben léteznek:

   a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$; *b)* $\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx$ $(n>3,\ n\in\mathbb{N})$.

2. Határozzuk meg az alábbi improprius integrálokat, amennyiben léteznek:

   a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; *b)* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx$ $(n>3,\ n\in\mathbb{N})$.

3. Számítsuk ki a következő improprius integrált, amennyiben létezik:

$$\int_{-\infty}^0 e^x \cdot \cos x\,dx.$$



VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

1. Bevezetés – Ismétlés

„A falak mögött istenek játszanak olyan számjátékot, amelyből az egész univerzum kirakható."

Le Corbusier

Az utolsó fejezet azért kerül az alapvetően analízissel foglalkozó könyvünk végére, hogy kiegészítse a valószínűség-számítás 10.–12.-es tankönyvekben szereplő anyagát.

10. évfolyamon megismertük az elemi esemény, eseménytér, esemény fogalmát. Összeadtunk, szoroztunk eseményeket, vettük események komplementerét. Meghatároztuk az egymást kizáró események fogalmát. Megadtuk egy esemény relatív gyakoriságának és valószínűségének fogalmát, illetve a Kolmogorov-féle axiómarendszert. Felírtuk a „klasszikus" képletet. 10.-es könyvben 230. oldaltól.

Megjegyzés: Legyen H eseménytérben tetszőleges $A \subseteq H$ esemény. Kolmogorov axiómái a következők:

I. $P(A) \geq 0$;

II. $P(H) = 1$;

III. Ha $A \cdot B = \emptyset$, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

11. évfolyamon kiszámítottuk komplementer esemény valószínűségét, illetve általában két esemény összegének valószínűségét. Áttekintettük a visszatevéses és a visszatevés nélküli mintavételeket. 11.-es könyvben 266. oldaltól.

12. évfolyamon számoltunk geometriai valószínűséget és várható értéket. 12.-es könyvben 122. oldaltól.

Eddigre tehát megismerkedtünk a valószínűségnek nevezett véletlen tömegjelenségekhez rendelt mértékkel. A H eseménytér bizonyos $A \subseteq H$ részhalmazain bevezettünk egy $P(A)$-val jelölt függvényt. A függvény értéke minden A esetén $0 \leq P(A) \leq 1$ volt, mivel a valószínűséget a relatív gyakoriságok vizsgálatára vezettük vissza. Azt mondtuk, hogy *a relatív gyakoriságok egy érték körül ingadoznak, és ezt nevezzük az esemény valószínűségének.*

Megjegyzés: Tömegjelenségen olyan jelenséget értünk, amelyhez tartozó kísérletsorozatokat – elméletileg – ugyanolyan körülmények között, végtelen sokszor meg tudunk ismételni. Például egy kockát vagy pénzdarabot elvileg akárhányszor feldobhatunk, vagy egy alkatrészhalmazból elvileg akárhányszor vehetünk ki egy darabot, ha minden egyes húzás után visszatesszük a kivett alkatrészt. Akkor véletlen a kísérlet, ha kimenetelét nem tudjuk előre pontosan meghatározni.

A fentieket végiggondolva furcsa érzésünk lehet, ugyanis ellentmondás van az axiómák precizitása és a relatív gyakoriságok „ingadozása" közt. A kísérletekből hogyan következtessünk a pontos valószínűségre? Mégis, ez a manapság „divatos" bevezetése a valószínűség-számítás ún. objektív elméletének. Például feldobtunk 1200-szor egy hagyományos kockát, majd ezt a kísérletsorozatot megismételtük még négyszer egymás után.



Azt tapasztaltuk, hogy az 5-ös szám dobásának relatív gyakoriságai $\frac{217}{1200}$, $\frac{194}{1200}$, $\frac{240}{1200}$ és $\frac{209}{1200}$. A megismert elméletből arra következtetünk, hogy a relatív gyakoriság a $\frac{200}{1200} = \frac{1}{6}$ érték körül ingadozik, és ezt tekintjük az 5-ös dobások valószínűségének.

Rengeteg kérdés merül fel ezzel kapcsolatban.

Miért nem a kapott értékek átlagát, $\frac{215}{1200}$-at tekintjük a valószínűségnek?

Egyáltalán van-e olyan $[0; 1]$-on belüli érték, amely *körül* a relatív gyakoriság ingadozik? Van-e szabályos kocka?

A klasszikus

$$\text{esemény valószínűsége} = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi események száma}}$$

képlet csak akkor érvényes még véges eseménytérben is, ha az elemi események valószínűsége egyenlő. Van egyáltalán a gyakorlatban ilyen eseménytér? Mekkorát tévedünk a valószínűségek meghatározásakor, ha a klasszikus modellt nem teljesen szabályos kocka esetén alkalmazzuk? Mi van az egyszeri, azonos körülmények között meg nem ismételhető jelenségekkel? A köznyelv ilyenkor is azt kérdezi: *mennyi a valószínűsége?*



2. A valószínűség-számítás új megközelítése: valószínűségi változó

1. példa

A lóversenyen három ló indul: Álmos (A), Botlábú (B) és Cumi (C). Az egyik fogadó az előzetes eredmények alapján úgy véli, hogy A-nak és B-nek ugyanolyan esélye van a győzelemre, de A vagy B kétszer olyan esélyes, mint C, hogy megnyerje a futamot. Mekkora az egyes lovak esélye a győzelemre?



Megoldás

Nyilván itt az eseményterünket azon események alkotják, hogy melyik ló nyeri a futamot: $H = \{A; B; C\}$ ($A = Álmos\ győz$ stb.) Rendeljünk mértéket A-hoz, B-hez, C-hez. Ha C mértéke $x \in [0; 1]$, akkor a fogadó szerint:

$$2x + 2x + x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{5}.$$

Innen Álmos, Botlábú és Cumi nyerési esélye:

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{2}{5}, \quad P(C) = \frac{1}{5}.$$



Annak a valószínűsége, hogy Álmos vagy Cumi győz:

$$P(\text{Álmos vagy Cumi győz}) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Az ilyen számításokat, melyek eredménye az egyéntől (szubjektumtól) erősen függ (hogyan állapítja meg az egyes lovak nyerési esélyeit), a *szubjektív valószínűség-számítás* témaköréhez soroljuk. Részletesen nem foglalkozunk az ilyen feladatok megoldásához kapcsolódó elmélettel. Ám mivel erről viszonylag keveset olvashatunk, általánosítjuk kicsit az előbbi feladatot.



Tegyük fel, hogy egy ló $0 < p < 1$ valószínűséggel nyeri meg a futamát, és hogy ezt az esélyt helyesen állapították meg (pl. a „Turf Magazin" alapján). Erre a lóra fogad valaki. Ha veszít, R eurót fizet ki (a lóra tett tétet), ha pedig nyer, S euró a nyereménye. Határozzuk meg általában a p feltétel mellett, milyen R és S értékek mellett igazságos a fogadás!

Megjegyzés: Az igazságosság fogalmát többféleképpen értelmezhetjük. Általában azt jelenti, hogy *a játékosok átlagos nyeremény 0.*

Ha a lovat elég sokszor (n-szer) futtatják a versenyen, akkor körülbelül $n \cdot p$ esetben nyer és $n \cdot (1 - p)$ esetben veszít. Az egy fogadásra eső átlagos nyeremény:

$$\frac{n \cdot p \cdot S - n \cdot (1 - p) \cdot R}{n} = p \cdot S - (1 - p) \cdot R.$$



A fogadás akkor igazságos mindkét fél részéről, ha az átlagos nyeremény 0. Képletünkből:

$$p \cdot S = (1-p) \cdot R, \quad \text{azaz} \quad \frac{R}{S} = \frac{p}{1-p}.$$

Nyilván ez a fogadási tétek arányát (odds) adja meg, ezekkel számolnak a fogadóirodákban (no és persze a költségeikkel és hasznukkal). A feladatbeli Álmos odds-a:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{5} \quad \text{vagy} \quad 2:3.$$

A következőkben csak az *objektív valószínűség-számítással* és a relatív gyakoriságok egy adott szám körüli ingadozásának problémájával foglalkozunk. Ahhoz, hogy a hozzá kapcsolódó valószínűség-definíciót igazolhassuk, be kell vezetnünk néhány fogalmat.

Egy szokásos hétköznapi kockával dobunk. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy az egyes értékek milyen valószínűséggel fordulnak elő, akkor eseményterünk $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ hatelemű halmaz. Itt és gyakorlatilag minden eddig vizsgált esetben H halmaz véges. Azonban az eseményteret nemcsak véges sok elemi esemény alkothatja, hanem megszámlálhatóan végtelen sok is!

2. példa

A spanyol armada egyik hajóját Dark kapitány ágyúja lövi. Mi NATO megfigyelőként arra koncentrálunk, hogy a kalóz hányadik lövésre találja el a spanyol hajót.

a) Adjuk meg a kísérletet leíró eseményteret.

b) Ha $0 < p < 1$ valószínűséggel talál minden lövése, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a k-adik lövése találja el először a gályát?

Megoldás (a)

Eseményterünk megszámlálhatóan végtelen számosságú lesz:

$$H = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}.$$

(Az is előfordulhat, hogy Dark sohasem találja el a gályát – tételezzük fel, hogy végtelen sok golyója van.)

Megoldás (b)

Az 1., 2., …, $(k-1)$. lövés nem talál $(1-p)^{k-1}$ valószínűséggel, de a k-adik már talál p valószínűséggel:

$$P(\text{Dark } k\text{-adikra talál}) = (1-p)^{k-1} \cdot p.$$

* * *

Az eseménytér számossága még ennél is nagyobb lehet. Ha H eseménytér az április elsején történő hőmérséklet-ingadozást írja le, akkor 2010-ben $H = [3°; 17°]$. Nyilván 5 °C-ról 10 °C-ra nem ugrik át a hőmérő, a változás folytonosan megy végbe. Ekkor H kontinuum végtelen.



Térjünk vissza a kockadobásra. Legyen az eseménytér a következő halmaz: $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, ennek elemei pozitív egész számok. Ha viszont csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy páros vagy páratlan számot dobunk-e, az eseménytér nem számokból áll: $H' = \{\text{páros; páratlan}\}$. Hasonlóan, ha pénzérmét dobunk fel és azt kérdezzük, milyen valószínűséggel esik az érme egyik vagy másik oldalára, akkor itt sem számok alkotják az eseményteret: $H'' = \{\text{írás; fej}\}$.

A nem „szám típusú" kísérletekben a megismert matematikai apparátust nem tudjuk alkalmazni. A probléma elkerülése érdekében az egyes eseményekhez számokat rendelünk. A paritás figyelése esetén rendeljünk 0-t a „páros" és 1-et a „páratlan" eseményekhez (de bármely tetszőleges értéket rendelhetünk hozzájuk, akár –1-et is). (Pl. ha páros dobás esetén az egyik játékos 1 egységet kap, páratlan dobás esetén pedig 1 egységet fizet, akkor ez lehet a célravezető hozzárendelés.) Hogy milyen számot érdemes rendelnünk a vizsgált eseményhez, az mindig a jelenségtől függ. A számra azon esemény valószínűségét veszi fel a P függvény, amelyhez a számot rendeltük. Ha x a kockavetés eredménye és a „páratlan számhoz" az 1-et rendeltük, akkor $P(x = 1) = 0{,}5$.

Általánosítsuk az eddig leírtakat!

valószínűségi változó

7.1. Definíció: Egy kísérlethez tartozó H eseménytéren értelmezünk egy valós értékű ξ függvényt úgy, hogy minden $A \subseteq H$ eseményhez hozzárendelünk egy $\xi(A)$ valós számot. Ezt a függvényt *valószínűségi változónak* nevezzük.

A ξ (khszi) a görög ábécé 14. betűje.

Megjegyzések:

1. A ξ-vel jelölt függvényt általában szöveges utasítással adjuk meg: kockával dobva ξ jelentse a dobott számok négyzetét. Ekkor valószínűségi változónk értékkészlete $\{1; 4; \ldots; 36\}$.
2. A valószínűségi változó – mint függvény – nem biztos, hogy kölcsönösen egyértelmű: két kockával dobva ξ jelentse a dobott számértékek összegét. Ekkor a (2; 4), (1; 5) és (3; 3) eseményekre ξ értéke egyformán 6.
3. Hangsúlyozzuk, hogy ξ értéke a véletlentől függ, ezért nevezzük valószínűségi változónak.
4. Eddigi példáinkkal szemléletesen jellemezhetjük az egyváltozós valószínűségi változók típusait:

   véges: kocka, pénz;

   megszámlálhatóan végtelen: ágyú;

   kontinuum végtelen: hőmérséklet.
5. Ha két (vagy több) kockával dobunk, akkor a valószínűségi változó – mint függvény – nem egy-, hanem két- vagy többváltozós. Ezek azonban nem témái könyvünknek.

A véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok értékű valószínűségi változókat *diszkrét valószínűségi változóknak* nevezzük. Így különböztetjük meg őket a *folytonos valószínűségi változóktól*. Mi a továbbiakban csak diszkrét változókkal foglalkozunk.

valószínűségi változó eloszlása

Sok nyelven a „valószínűség" kezdőbetűje P. Latinul: probabilitas, angolul: probability, franciául: probabilite, spanyolul: probabilidad, olaszul: probabilita stb.

7.2. DEFINÍCIÓ: **Legyenek egy valószínűségi kísérlethez rendelt ξ valószínűségi változó értékei $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Ha $P(\xi = x_i)$ azon valószínűség $(i = 1, 2, \ldots)$, amellyel a valószínűségi változó az x_i értéket felveszi, és**

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\xi = x_i) = 1,$$

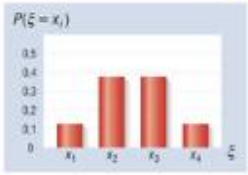
akkor a $P(\xi = x_i)$ számokat a ξ valószínűségi változó *eloszlásának* nevezzük.

Megjegyzések:

1. Az eloszlás azt mutatja meg, hogy a valószínűségek miként oszlanak meg a valószínűségi változó értékei között.
2. Ha az eseménytér véges, akkor a valószínűségi változó is véges sok értéket vesz fel.
3. Az eddigiek miatt természetesen teljesül, hogy $0 \le P(\xi = x_i) \le 1$ minden $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$-re.

3. példa

Tekintsük a következő kísérletet: három különböző érmét feldobva azt figyeljük, hány fejet dobtunk. Ábrázoljuk oszlopdiagramon a kísérlet valószínűség-eloszlását.



1. ábra

Megoldás

ξ jelentse a fej dobások számát:

$$\xi = \{x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3\}.$$

Ekkor

$$P(\xi = 0) = \frac{1}{8}, \quad P(\xi = 1) = \frac{3}{8}, \quad P(\xi = 2) = \frac{3}{8}, \quad P(\xi = 3) = \frac{1}{8}.$$

Összegük 1, vagy tömören írva:

$$\sum_{i=1}^{4} P(\xi = x_i) = 1.$$

4. példa

A 2. példánál ξ valószínűségi változó jelentse azt, hogy hányadik lövésre találjuk el először a spanyol gályát ($x_k = k, k = 1, 2, 3, \ldots$). Vajon ξ valószínűségi eloszlást határoz meg?

Megoldás

Korábban láttuk, hogy $P(\xi = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$, ahol $k = 1, 2, \ldots$ Hogy ezen számok valóban valószínűségi eloszlást adjanak, két dolognak kell teljesülni.

Egyrészt minden k-ra $0 \le P(\xi = k) \le 1$. Ez teljesül, hiszen $0 < p < 1$, amiből adódik $0 < 1 - p < 1$ is.



Másodszor lássuk az összeget:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k.$$

A végtelen mértani sornak a 2.14-es tétel miatt összege:

$$p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

A 4. példa valószínűségi eloszlását *Pascal-eloszlásnak* nevezzük. (A *geometriai eloszlás* elnevezés is használatos, hiszen a fenti sor geometriai sor.) A p szám az eloszlás paramétere.

Feladatok

1. Az autóversenyen 0,2 annak a valószínűsége, hogy Speeder nyer. Valaki 300 dollárt tesz Speeder győzelmére. Mennyi pénzt fizessen ki a fogadóiroda a fogadó győzelme esetén, hogy igazságos legyen a fogadás?
2. Két kockával dobunk, és figyeljük a dobott számokat. Legyen $A = \{\text{legalább egy prím}\}$, $B = \{\text{mindkettő összetett}\}$, $C = \{\text{minden más esemény}\}$.
   a) Hány elemű az eseménytér?
   b) Adjuk meg A, B, C események valószínűségeit.
   c) Készítsünk az A, B, illetve C eseményeken értelmezett ξ_A, ξ_B, ξ_C valószínűségi változókat.
3. *a)* Adjuk meg a valószínűségét annak, hogy egy kockát többször elvetve, negyedikre dobunk először hatost.
   b) Ábrázoljuk oszlopdiagramon az előbbi esemény valószínűségeit, ha először k-adik dobásra dobunk hatost ($k = 1, 2, 3, 4, 5$).



3. A valószínűségi változó várható értéke

12.-es tankönyv
128. oldal.

A következő példában a várható érték már megismert fogalmát elevenítjük fel, melyre aztán pontos definíciót is adunk.

1. példa

Egy olyan társasjátékot játszunk, amelynél mindig annyit lépünk előre a táblán, amennyit egy hagyományos kockával dobunk. Ha n-szer dobjuk fel a kockát, dobásonként átlagosan hány lépést haladunk előre?

Megoldás

Jelölje $x_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ a dobott értéket. Ha n_1-szer dobunk 1-est, n_2-ször 2-est, …, n_6-szor 6-ost és $n_1 + n_2 + \ldots + n_6 = n$, akkor az átlag lépésszám:

$$\frac{1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \ldots + 6 \cdot n_6}{n} = 1 \cdot \frac{n_1}{n} + 2 \cdot \frac{n_2}{n} + \ldots + 6 \cdot \frac{n_6}{n},$$

ahol $\frac{n_1}{n}$ az 1-es, $\frac{n_2}{n}$ a 2-es stb. dobások relatív gyakoriságai. Ha n elég nagy és a kísérletsorozatot (játékot) többször játsszuk, akkor ezek a relatív gyakoriságok az illető valószínűség körül ingadoznak. A bevezetett valószínűség-fogalom miatt $\frac{n_i}{n}$ helyett $(i = 1, \ldots, 6)$ a $P(\xi = x_i) = \frac{1}{6}$ valószínűségeket írhatjuk. A tört értéke az

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

érték körül ingadozik. Ennyi hát az egy dobásra jutó átlagos elméleti előrehaladás.

várható érték

7.3. DEFINÍCIÓ: Legyenek a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ megszámlálhatóan végtelen sok (vagy véges sok) érték, amelyeket rendre a $P(\xi = x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ valószínűségekkel vesz fel. A ξ valószínűségi változó *várható értékén az**

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(\xi = x_i)$$

végtelen sort (azaz véges összeget) értjük, ha a $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot P(\xi = x_i)$ végtelen sor konvergens.

A ξ várható értékét $E(\xi)$-vel is jelölik.

Megjegyzések:

1. Ha ξ véges valószínűségi változó, azaz $\xi = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, akkor a véges $M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(\xi = x_i)$ összeg mindig létezik. Véges eseménytérben a várható érték a súlyozott átlag.



2. A várható értékre mind az E, mind az M jelölést használják. E az *expected value* (magyarul „elvárt érték"), M a *mean* (átlag, közép) angol szavak kezdőbetűje, illetve M a *medium* latin szó (közép) kezdőbetűje is.
3. A várható érték sok esetben azt önti számszerű formába, hogy mit „várunk" eredménynek a kísérlet elvégzése előtt. Az, hogy ez mennyire „értelmes", függ a kísérletben feltett kérdéstől.

Az 1. példában gyakorlatilag meghatároztuk a kockadobás várható értékét, ami 3,5-nek adódott. Természetesen ezt az értéket senki sem várja a kocka eldobásakor. A társasjáték nyelvén jobban hangzik: sok játékot játszva az előrehaladás mértéke dobásonként 3,5 mező.

Nem baj, ha hiányérzetünk van.

2. példa

Határozzuk meg az előző lecke 3. példájában vizsgált eloszlás várható értékét.

Megoldás

$$M(\xi) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5.$$

3. példa

Egy irodaház januári átadásakor az összes izzó új volt. Az izzókra a gyártó cég a következő hivatalos adatokat adta meg: egy izzó az 1. év során 0,05; a 2. év során 0,2; a 3. év során 0,6; a 4. év során 0,15 valószínűséggel megy tönkre (az izzók élettartama 4 év). Mikorra ütemezze az épület üzemeltetője az izzók cseréjét?

Megoldás

Legyen a ξ valószínűségi változó az, hogy melyik évben megy tönkre egy izzó. Ekkor $\xi = \{x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4\}$. A hozzájuk tartozó valószínűségek:

$$p_1 = P(\xi = 1) = 0{,}05; \quad p_2 = P(\xi = 2) = 0{,}2;$$
$$p_3 = P(\xi = 3) = 0{,}6; \quad p_4 = P(\xi = 4) = 0{,}15.$$

Ezek valóban eloszlást alkotnak: $0{,}05 + 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}15 = 1$. A kérdéses időpontot ξ várható értéke adja meg:

$$M(\xi) = 1 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}15 = 2{,}85.$$

Tehát valamivel a harmadik év októbere *előtt* érdemes az izzókat cserélni.

4. példa

Határozzuk meg az előző lecke 4. példájában megismert p paraméterű Pascal-eloszlás várható értékét.

Megoldás

ξ lehetséges értékei $\{1; 2; \ldots; n; \ldots\}$. Jelöljük az $(1 - p)$ valószínűséget q-val:

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = p \cdot (1 + 2q + 3q^2 + \ldots).$$



Feltesszük, hogy $0 < q < 1$, ezért a 2.13-as tétel alapján:

$$1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Bevezetve az $S = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots$ jelölést, azt kapjuk, hogy:

$$S - \frac{1}{1-q} = (1 + 2q + 3q^2 + \ldots) - (1 + q + q^2 + \ldots) =$$

$$= q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots = q \cdot (1 + 2q + 3q^2 + \ldots) = S \cdot q.$$

Vegyük az előző sor elejét és végét, majd rendezzük át, emeljünk ki, és osszunk:

$$S - S \cdot q = \frac{1}{1-q} \quad \Rightarrow \quad S \cdot (1-q) = \frac{1}{1-q} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Így a keresett várható érték:

$$M(\xi) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Minden Pascal-eloszlásra vezető valószínűségi változó várható értéke p reciproka.

Feladatok

1. Adjuk meg a pénzfeldobás várható értékét, ha a fejhez 3, az íráshoz –1 értéket rendeljük. (Nem cinkelt érmével játszunk.)

2. Egy különleges hatoldalú dobókockán az egyes dobások valószínűsége külön-külön állítható (természetesen a valószínűségek összege mindig 1). Jelenleg az 1-es, 2-es, 3-as, 4-es dobás valószínűsége egyaránt 0,1-re van állítva. Mire állítsuk az 5-ös dobás valószínűségét, ha azt akarjuk, hogy ezzel a kockával a dobás várható értéke 4,2 legyen?

3. Fél euróba kerülő sorsjegyet vásároltunk, amelynek a hátára a következőt írták:

   500 sorsjegyből 1 nyer 1 eurót
   1000 sorsjegyből 1 nyer 10 eurót
   10 000 sorsjegyből 1 nyer 100 eurót
   50 000 sorsjegyből 1 nyer 1000 eurót

   Az is kiderült, hogy 50 000 sorsjegyet nyomtattak. Hány eurós „hasznot" várhatunk a sorsjegyből?



4. A valószínűségi változó szórása

A várható érték nem jellemzi teljesen pontosan a valószínűségi változót. Például nem nagyon tudunk mit kezdeni a kockadobás 3,5 várható értékével (2. lecke 1. példa). Vagy a 2. lecke 3. példájában szereplő irodaházban nyilván nem egy csapásra, pontosan a harmadik év októberében fognak tönkremenni az izzók. Sokkal valószínűbb, hogy vannak határok, melyek között nagy számban mennek tönkre, viszont előtte és utána ritkábban. (Gondoljunk a mikrohullámú sütőben pattogatott kukoricára: a beállított idő elején és végén csak ritkán hallunk pattogást. Van egy jól behatárolható tól-ig időintervallum, amikor viszont nagy ropogás hallatszik a mikrohullámú sütőből.) Most egy olyan fogalmat vezetünk be, amely azt mutatja meg, hogy ξ értékei milyen „szorosan" vagy „lazán" tömörülnek a várható érték körül.

szórás

7.4. Definíció: A ξ valószínűségi változó *szórásán a $\xi - M(\xi)$ valószínűségi változó négyzetének várható értékéből vont négyzetgyököt értjük:**

$$D(\xi) = \sqrt{M\left[(\xi - M(\xi))^2\right]},$$

amennyiben ξ-nek és $(\xi - M(\xi))^2$-nek van várható értéke.

A valószínűségi változó várható értéktől való négyzetes eltérésének várható értékével számolunk.

Megjegyzések:

1. A D betű a latin diszperzió (angolul „dispersion") kezdőbetűje.
2. $D^2(\xi)$-t *varianciának* is nevezik. Diszkrét valószínűségi változó varianciája: Magyarul szórásnégyzet.

$$D^2(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[x_i - M(\xi)\right]^2 \cdot P(x_i).$$

3. Kézenfekvőnek tűnne a valószínűségi változó és várható értéke különbségének várható értékét venni az ingadozás mértékének. Ez azonban a várható érték 1. és 3. tulajdonsága miatt 0, hiszen

$$M(\xi - M(\xi)) = M(\xi) - M(M(\xi)) = M(\xi) - M(\xi) = 0.$$

Az átlagtól lefelé, illetve felfelé való eltérések kioltják egymást.

4. Másik ötlet az átlagtól való eltérésre az $M|\xi - M(\xi)|$ kifejezés lehetne. Ezt nem használjuk: az abszolút érték matematikailag nehezen kezelhető.

A 7.4-es definícióhoz az ún. *centrális határeloszlás-tételek* kapcsolódnak. Az alábbi tétel egyszerűsíti a szórás és a variancia kiszámítását.

a várható érték és a szórás kapcsolata

7.1. Tétel: Ha a ξ valószínűségi változónak létezik várható értéke és szórása, akkor

$$D^2(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi).$$

Bizonyítás

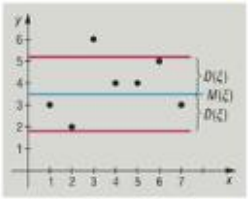
Egyszerű számítással, illetve a várható érték tulajdonságaiból adódik:

$$D^2(\xi) = M\left[(\xi - M(\xi))^2\right] = M\left[\xi^2 - 2 \cdot \xi \cdot M(\xi) + M^2(\xi)\right] =$$
$$= M\left(\xi^2\right) - 2M(\xi) \cdot M(\xi) + M^2(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi).$$



1. példa

Számítsuk ki a kockadobás szórását.



2. ábra

Megoldás

A szóráshoz szükséges:

$$M(\xi^2)=\frac{1}{6}\cdot(1+4+9+16+25+36)=\frac{91}{6}$$

és

$$M^2(\xi)=3{,}5^2.$$

Ekkor

$$D^2(\xi)=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}\approx 2{,}9167;$$

amiből

$$D(\xi)\approx 1{,}7078.$$

2. példa

Számítsuk ki a 3. lecke 3. példájának irodaházában található izzók élettartamának szórását.

Megoldás

A szóráshoz szükséges:

$$M(\xi^2)=1^2\cdot 0{,}05+2^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}6+4^2\cdot 0{,}15=8{,}65;$$

$$M^2(\xi)=2{,}85^2=8{,}1225.$$

Így

$$D^2(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=8{,}65-8{,}1225=0{,}5275;$$

ahonnan a szórásra

$$D(\xi)=0{,}7263.$$

* * *

11.-es tankönyv 275. oldal.

Vizsgáljuk meg új fogalmaink segítségével a 11.-es tankönyvben szereplő ún. visszatevéses mintavételt.

Oldjunk meg konkrét számok nélkül, általánosan egy feladatot.

A 3. és 4. példa azért érdekes a vállalatnak, mert így egy kisebb minta ellenőrzésével eldöntheti, hogy a gyártósor normálisan működik-e: ha a kapott értékektől nagyon eltér a vizsgálat eredménye, akkor hívni kell a szervizt.

3. példa

Egy számítógép-alkatrészt gyártó cég N darab kétmagos processzort készít hetente. Hosszas statisztikai vizsgálatok után megállapították, hogy közülük S darab processzor selejtes (nem, vagy rosszul működik). Ha hetente n darabos mintát veszünk visszatevéssel, akkor mi a valószínűsége annak, hogy k darab selejtes processzor van a heti mintában?

Megoldás

A feladat szövege feltételezi, hogy $k\le n$, $S\le N$. A visszatevés azt jelenti, hogy kiveszünk egy processzort, megvizsgáljuk, majd a többi közé tesszük.



A ξ valószínűségi változót a következő szöveges utasítással adhatjuk meg: ξ jelentse a mintában előforduló selejtes alkatrészek számát, lehetséges értékei $\{0; 1; \ldots; n\}$.

Kimondatlanul használjuk, hogy minden húzáskor az N alkatrész közül ugyanolyan valószínűséggel választunk ki egyet – csak ez a feltétel biztosítja a „klasszikus" képlet használhatóságát.

Mivel minden húzáskor N processzorból választhatunk, így ha n-szer húzunk, akkor összesen N^n lehetőségünk van.

A kedvező esetek meghatározásához vegyük azt az egyszerű esetet, hogy az első k húzáskor rossz, a maradék $(n-k)$ esetben pedig jó processzort veszünk ki az alkatrészhalmazból. Jelölje a rossz alkatrészeket r, a jókat j. Így

$$\underbrace{\text{r r r} \ldots \text{r}}_{k \text{ db}} \underbrace{\text{j j j} \ldots \text{j}}_{(n-k) \text{ db}}.$$

Egy ilyen húzást

$$S^k \cdot (N-S)^{n-k}$$

különböző módon bonyolíthatunk le (ismétléses variáció). Ám a selejteseket tetszőleges sorrendben kihúzhatjuk. Mégpedig annyiféleképpen, ahányféleképpen k darab r betűt és $(n-k)$ darab j betűt sorrendbe tudunk állítani. Akár ismétléses permutációra, akár ismétlés nélküli kombinációra gondolunk, számuk:

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Kedvező eseteink száma így

$$\binom{n}{k} \cdot S^k \cdot (N-S)^{n-k}.$$

Az n elemű mintában levő k darab selejtes processzor valószínűsége:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{n}{k} \cdot S^k \cdot (N-S)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{N-S}{N}\right)^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{S}{N}\right)^{n-k}.$$

Vezessük be az egy húzás esetén jelentkező selejt valószínűségét jelölő $\frac{S}{N} = p$ jelölést. Így $1 - \frac{S}{N} = 1 - p = q$ a jó alkatrész húzásának a valószínűsége, $p + q = 1$. Ezekkel felírva:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots n).$$



A fenti feladat egy valószínűségi eloszlást eredményez, hiszen a binomiális tétel miatt:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}=(p+q)^n=1.$$

Ezt az eloszlást *binomiális eloszlásnak** nevezik.

binomiális eloszlás

Az $(1-p)$ értéket legtöbbször q-val jelölik.

7.5. Definíció: A ξ valószínűségi változót *binomiális eloszlásúnak* nevezzük, ha ξ lehetséges értékei $\{0; 1; \ldots; n\}$ és

$$P(\xi=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k},$$

ahol $k=0, 1, \ldots, n$; $0<p<1$.

A p szám az eloszlás paramétere.

4. példa

Határozzuk meg a p paraméterű binomiális eloszlás várható értékét.

Megoldás

$$M(\xi)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P(\xi=k)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}.$$

(Az összeg $k=0$ értékhez tartozó tagja 0).

Használjuk ki a binomiális együtthatók azon tulajdonságát, hogy

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}.$$

Így

$$M(\xi)=\sum_{k=1}^{n}n\cdot\binom{n-1}{k-1}\cdot p^k\cdot q^{n-k}=$$

$$=np\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\cdot p^{k-1}\cdot q^{n-1-(k-1)}.$$

A binomiális tételből adódik, hogy a szumma jel mögötti összeg $(p+q)^{n-1}=1$, így

$$M(\xi)=np.$$

Megjegyzés: Kimutatható, hogy a binomiális eloszlás szórása

$$D(\xi)=\sqrt{npq}.$$

* * *

Binomiális eloszlásra vezet az ún. Bernoulli-kísérletsorozat is (a binomiális eloszlást *Bernoulli-eloszlásnak* is nevezi a nyugati szakirodalom).



5. példa

Bernoulli-kísérlet. Végezzünk egy valószínűség-számítási kísérletet, és legyen $A \subset H$ egy esemény. A kísérlet során csak az érdekel bennünket, hogy A bekövetkezik-e, vagy sem. Számunkra két esemény létezik: A és $\overline{A}$. Jelölje valószínűségeiket $P(A) = p$, illetve $P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Ismételjük meg n-szer a kísérletet!

Mi a valószínűsége annak, hogy a kísérletek közül k esetben fordul elő A esemény ($k = 0, \ldots, n$)? Mennyi a várható értéke, szórása?

Megoldás

A 4. példa terminológiájával élve A esemény a selejtes processzor, $\overline{A}$ pedig az összes többi. Természetesen a Bernoulli-kísérletben is

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

$$M(\xi) = np,$$

$$D(\xi) = \sqrt{npq}.$$

Feladatok

1. Egy szabályos érmét egyszer feldobunk, a valószínűségi változó a fejhez 0, az íráshoz 1 értéket rendel. Adjuk meg a változó várható értékét és szórását.

2. Egy diszkrét valószínűségi változó egy hatoldalú dobókockával dobott számhoz mint eseményhez annak négyzetét rendeli. Határozzuk meg a valószínűségi változó várható értékét és szórását.

3. Egy szerepjátékhoz használt 12 oldalú dobókocka oldalai 1-től 12-ig vannak számozva. A „kocka" szabályos, minden oldala egyenlő valószínűséggel kerül felülre. A kockával egy játék során 136-szor dobtak. Adjuk meg az $A = \{\text{prím dobás}\}$ esemény előfordulásának várható értékét és szórását.

4. A Gyere György Gyufagyár győri gyakorlótelepén gyártott napi 10 000 gyufaszál közül 231 darab általában elreped (ez normális, a hibásak átkerülnek a Füge Ferenc Fogvájó-faragó Fércműbe). Visszatevéssel kiválasztunk egy 1000 darabos mintát. Adjuk meg a repedt gyufák mintabeli darabszámának várható értékét és szórását! Mit javaslunk, ilyen mintavétel esetén hány repedt gyufa megtalálásakor gyanakodjunk a gyufagyár gyártósorának hibás működésére?



5. A Csebisev-tétel és a Bernoulli-féle nagy számok gyenge törvénye

Persze a „kicsiség" relatív.

A szórás a valószínűségi változó várható érték körüli ingadozásáról ad felvilágosítást. Általában az igaz, hogy a szóráshoz viszonyított nagymértékű ingadozásoknak kicsi a valószínűsége.

Csebisev tétele

Pafnutyu Lvovics Csebisev (1821–1894), orosz matematikus. A σ (szigma) a görög ábécé 18. betűje.

7.2. Csebisev tétele: Létezzen a ξ valószínűségi változó $M(\xi) = m$ várható értéke és $D(\xi) = \sigma$ szórása. Ekkor annak a valószínűsége, hogy ξ valószínűségi változó az m várható értéktől legalább annyira eltér, mint a σ szórás λ-szorosa, nem lehet nagyobb, mint $\frac{1}{\lambda^2}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$).

Jelekkel: $P(|\xi - m| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$.

Bizonyítás

A bizonyítást diszkrét esetre végezzük.

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó, $\xi = \{x_1; \ldots; x_n; \ldots\}$ és a hozzájuk tartozó valószínűségek $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ (ξ az x_i értéket p_i valószínűséggel veszi fel.) A szórásnégyzet a szórás definíciója miatt:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - m)^2 \cdot p_i \geq \sum_{|x_i - m| \geq \lambda\sigma}^{\infty}(x_i - m)^2 \cdot p_i \geq$$

$$\geq \sum_{|x_i - m| \geq \lambda\sigma}^{\infty} \lambda^2 \cdot \sigma^2 \cdot p_i = \lambda^2 \cdot \sigma^2 \cdot \sum_{|x_i - m| \geq \lambda\sigma}^{\infty} p_i.$$

Az összeget jobbról balra haladva fokozatosan csökkentjük. Először az összegzést ξ valószínűségi változó nem minden értékére végezzük el, hanem csak azokra, amelyekre ξ várható értéktől való eltérése nagyobb, mint a szórás λ-szorosa, vagyis melyekre $|x_i - m| \geq \lambda\sigma$. A következő lépésben $(x_i - m)^2$ helyett a nála nem nagyobb $\lambda^2\sigma^2$-et írtuk. Figyeljük meg, hogy a sor végén álló $\sum_{|x_i - m| \geq \lambda\sigma}^{\infty} p_i$ azon eseményekhez tartozó valószínűségek összege, amelyekre $|\xi - m| \geq \lambda\sigma$. Tekintsük most a sor elejét és végét, majd osszuk le a pozitív $\lambda^2\sigma^2$-tel:

$$\sigma^2 \geq \lambda^2 \cdot \sigma^2 \cdot \sum_{|x_i - m| \geq \lambda\sigma}^{\infty} p_i,$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \geq \sum_{|x_i - m| \geq \lambda\sigma}^{\infty} p_i = P(|\xi - m| \geq \lambda\sigma).$$

Megjegyzések:

Azért ez a becslés elég durva.

1. A tétel jelentősége többek között abban van, hogy a várható értéktől való eltérés valószínűségét a valószínűség-eloszlás ismerete nélkül, csupán a szórás birtokában becsülni tudjuk.

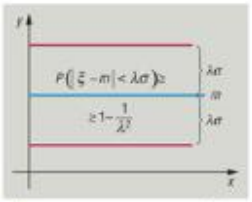


2. Legtöbbször arra vagyunk kíváncsiak, hogy a ξ valószínűségi változó mekkora valószínűségekkel esik egy adott intervallumba. Így a fenti egyenlőtlenség „komplementer" alakját használjuk:

$$P(|\xi - m| < \lambda\sigma) = P(m - \lambda\sigma < x < m + \lambda\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ez szemléletesen annak a valószínűsége, hogy ξ értékei legalább $1 - \frac{1}{\lambda^2}$ valószínűséggel esnek a 3. ábrán látható intervallumba.

3. Ha $0 < \lambda < 1$, akkor a tétel igaz, de semmitmondó: $\frac{1}{\lambda^2} > 1$, ami mindig teljesül.



3. ábra

1. példa

Tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változónak valahonnan (például megfigyelésből) tudjuk a várható értékét és a szórását: $M(\xi) = m = 3{,}2$ és $D(\xi) = \sigma = 1{,}6$. Adjunk becslést a $P(0{,}8 < \xi < 5{,}6)$ valószínűségre.

Megoldás

Először határozzuk meg λ-t:

$$0{,}8 = 3{,}2 - \lambda \cdot 1{,}6 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1{,}5.$$

Ugyanezt kaptuk volna, ha a felső határból indulunk ki:

$$5{,}6 = 3{,}2 + \lambda \cdot 1{,}6 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1{,}5.$$

Csebisev tételét alkalmazva:

$$P(3{,}2 - 1{,}5 \cdot 1{,}6 < \xi < 3{,}2 + 1{,}5 \cdot 1{,}6) \geq 1 - \frac{1}{1{,}5^2} \approx 0{,}56.$$

Ez azt jelenti, hogy 100 megfigyelésből átlagosan 56 eredménye esik a $]0{,}8;\ 5{,}6[$ intervallumba.

* * *

Vannak erős törvények is.

„Csupán" ez a néhány dolog szükséges ahhoz, hogy igazoljuk a nagy számok gyenge törvényét. A gyenge törvény biztosítja, hogy egy kísérletet egyre többször elvégezve a megfigyelt esemény relatív gyakorisága növekvő valószínűséggel vagy nagyobb pontossággal megközelíti az „elméleti", klasszikus képlettel kiszámolt valószínűséget. Ez pedig azt jelenti, hogy helyes a valószínűség korábban kimondott klasszikus definíciója!

Például dobjunk fel egy szabályos pénzérmét n-szer, és jelölje k a fej dobások számát. A dobásszám növelésével (n elvileg végtelenhez is tarthat) a fej dobások $\frac{k}{n}$ relatív gyakorisága egyre nagyobb valószínűséggel egyre pontosabban megközelíti a fej dobások 0,5 valószínűségét.

A gyenge törvény az „Ars Conjectandi" (*A találgatás művészete*) című könyvben jelent meg 1713-ban, a szerző halála után nyolc évvel. A könyv a valószínűség-számításban alapvető műnek számít. Jacob Bernoulli írta, a számos Bernoulli egyike.

JACOB BERNOULLI (1654–1705), svájci matematikus.

Megjegyzés: A Bernoulli család sok tagja foglalkozott magas szinten matematikával. Pl. Jacob testvére, Johann is, továbbá Johannak három, Jacobnak egy fia. Később Johann unokája, sőt déd- és ükunokája is.



Bernoulli-féle nagy számok gyenge törvénye

6.3. A BERNOULLI-FÉLE NAGY SZÁMOK GYENGE TÖRVÉNYE:

Legyen egy kísérlethez tartozó H eseménytér A eseményének valószínűsége $P(A) = p$.

Végezzük el a kísérletet n-szer egymástól függetlenül, és következzen be az A esemény ξ alkalommal, így $\frac{\xi}{n}$ az esemény relatív gyakorisága.

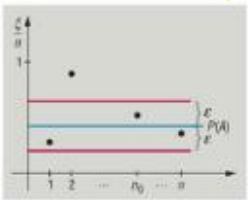
A $\frac{\xi}{n}$ relatív gyakoriság eltérése a p valószínűségtől bármely kicsi pozitív értéknél kisebbre csökkenthető 1-hez tetszőlegesen közeli valószínűséggel, ha n-t elegendő nagyra növeljük.

Formalizálva:

Bármely pozitív kicsi ε és δ valós számokhoz megadható olyan n_0 küszöbindex, amelyre ha $n > n_0$, akkor

$$P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \delta.$$

A tétel jóval rövidebben is kimondható, az érthetőség reményében váltunk szószátyárrá.



4. ábra

Bizonyítás

Mivel a kísérletek során csak arra figyelünk, hogy n esetből az A esemény hányszor fordul elő – azaz csak az érdekel minket, hogy A bekövetkezik vagy sem –, ezért Bernoulli-féle kísérletsorozatról van szó. Ez azonban, mint azt az előző lecke 5. példájában láttuk, binomiális eloszlás az ott kiszámított $M(\xi) = np$ várható értékkel és $D(\xi) = \sqrt{npq}$ szórással.

A fontos észrevétel után használjuk a 6.2-es Csebisev-egyenlőtlenséget ξ valószínűségi változóra.

Megjegyzés: Csebisev jó 150 évvel később fedezte fel egyenlőtlenségét, azt Bernoulli nem használhatta. Mi a bizonyítás egyszerűsítése miatt folyamodunk ehhez a tételhez.

A tételben kimondott egyenlőtlenség $P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$ komplementerére a 7.2-es Csebisev-tétel miatt:

$$P\left(|\xi - np| \geq \lambda\sqrt{npq}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2} \quad (\lambda > 0).$$

Ha a zárójelben levő abszolút értékes $|\xi - np| \geq \lambda\sqrt{npq}$ egyenlőtlenséget n-nel osztjuk, akkor a következő vele ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\left|\frac{\xi}{n} - p\right| \geq \lambda\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Írjuk ezt be a Csebisev-egyenlőtlenségbe:

$$P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| \geq \lambda\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$



Ha $\varepsilon = \lambda\sqrt{\frac{pq}{n}}$, akkor $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$, így

$$P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq \delta.$$

Utóbbi tört 0-hoz tart, ha elég nagy n-t választunk, mert $\lim_{n\to\infty} \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0$.

Így a jobb oldali kifejezés tetszőlegesen kicsi $\delta > 0$ számnál is kisebb lesz, ami a tétel állítása. Ugyanis a zárójelben $\geq$-t kicserélve $<$-re, az eddig szereplő esemény komplementerét kapjuk, melynek valószínűsége $(1 - \delta)$-nál nagyobb. A keresett küszöb pedig $n_0 = \frac{pq}{\delta\varepsilon^2}$.

Megjegyzések:

1. Az egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő p és q valószínűségeket általában nem ismerjük. Ezért a $pq = p(1-p) = p - p^2$ egy $f(p)$ függvénynek tekinthető, amelynek az értelmezési tartománya $[0; 1]$. Deriváltja $f'(p) = 1 - 2p$, f-nek a $p = 0{,}5$ helyen van maximuma. A maximum értéke $f(0{,}5) = 0{,}25$.

   Ezért a $\frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$, azaz

   $$P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \quad \text{és} \quad P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

2. Itt szeretnénk figyelmeztetni a leendő szerencsejátékos-ipari tanulókat, hogy ne hivatkozzanak az előbbi törvényre felelőtlenül, pl. így: „… ha már sokszor esett az érme az írás oldalára, akkor törvényszerű, hogy nagyobb lesz a fej dobások valószínűsége. Ha sokszor feldobjuk az érmét, csak így lehet körülbelül egyenlő a fej és írás dobások száma."

   Aztán átkozzák szegény Bernoullit – ha egyáltalán tudják, hogy milyen törvényre hivatkoztak.

   Ez rossz gondolat, mivel minden ellenkező híresztelés ellenére a pénzérme nem emlékszik arra, hogy mikor melyik oldalára esik, így a fej és írás valószínűsége ugyanaz: 0,5. Hol hibáznak ezek a szerencsejátékos-szakipari tanulók, amikor helytelenül használják a 7.3-as tételt? A probléma az, hogy a nagyjából egyenlő fej és írások számából arra következtetnek, hogy ezek számának különbsége igen kicsi. Ám Bernoulli törvénye nem a fej és írás dobások száma közti különbségről, hanem a fej dobások összes dobásokhoz viszonyított arányáról szól, ez közelít $\frac{1}{2}$-hez. Nem a fej-írás darabszámok különbsége, hanem logaritmusaik különbsége tart 0-hoz! Két nagy magyar matematikus, Erdős Pál és Rényi Alfréd általánosan is bebizonyították, hogy nagyszámú dobás esetén nagy valószínűséggel elő kell fordulnia $\log_2 n$ hosszúságú csak fejet, illetve csak írást tartalmazó dobássorozatoknak (n a dobások száma).

   Erdős Pál (1913–1996), Rényi Alfréd (1921–1970).

3. Ezért ismét hangsúlyozzuk, hogy a 7.3-as tétel „csak" azt állítja, hogy az A esemény $P(A)$ valószínűsége és az A esemény relatív gyakoriságának egymástól való nagy eltérése nagyon valószínűtlen.

4. A fenti tételnek számos általánosítása létezik, az egyik legismertebb a Kolmogorov-tétel. Ez a tétel tette lehetővé a valószínűség-számítás egzakt tudományos megalapozását. Az ő nevéhez fűződik az Önök által részben ismert valószínűség-számítási axiómarendszer is 1933-ból. Kolmogorov axiómarendszerét az imént említett Rényi Alfréd általánosította 1947-ben.

   Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987), orosz matematikus.

Bár Bernoulli törvénye elméleti jellegű, feladatok megoldásánál is jól használható.



2. példa

Fekete Szakáll 200 lövést ad le az aranyat szállító spanyol gályára. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Milyen határok közé esik legalább 90%-os valószínűséggel a találatok száma?



I. megoldás

Alkalmazzuk a 7.3-as tételt, ebben az esetben $n = 200$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$. Így

$$P\left(0{,}4 - \varepsilon < \frac{\xi}{n} < 0{,}4 + \varepsilon\right) > 0{,}9 = 1 - \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{200\varepsilon^2}.$$

A jobb oldalból $\varepsilon \approx 0{,}11$, ezért

$$0{,}29 \le \frac{\xi}{200} \le 0{,}51, \quad \text{így} \quad 58 \le \xi \le 102.$$

Tehát legalább 59-szer, legfeljebb 101-szer talál a kalóz 90%-os valószínűséggel.

II. megoldás

Két esetünk van: vagy talál Fekete Szakáll, vagy nem. ξ jelentse a találatok számát, $\xi = \{0; 1; \ldots; 200\}$. Ez így Bernoulli-kísérlet, vagyis binomiális eloszlás. Mint ilyen, a várható értéke (a találatok száma):

$$M(\xi) = 200 \cdot 0{,}4 = 80,$$

szórása:

$$D(\xi) = \sqrt{200 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} \approx 6{,}93.$$

A módosított Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$P(80 - \lambda \cdot 6{,}93 < \xi < 80 + \lambda \cdot 6{,}93) \ge 0{,}9 = 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Innen $\lambda = \sqrt{10}$ és $80 - \lambda \cdot 6{,}93 = 58{,}08$, valamint $80 + \lambda \cdot 6{,}93 \approx 101{,}91$. A megoldás ugyanaz.

Feladatok

1. Egy valószínűségi változó várható értéke 14, és szórása 5. Csebisev tételével becsüljük meg, hogy mekkora valószínűséggel tér el ξ a várható értéktől
   a) jobban, mint 8; *b)* kevésbé, mint 7.
2. 0,02 annak a valószínűsége, hogy egy telefonhívás téves. 1100 darab hívás közül milyen határok közé esik legalább 80%-os valószínűséggel a félrement hívások száma? (Alkalmazzuk a nagy számok gyenge törvényét.)



6. Feltételes valószínűség, Bayes tétele. Független események

„Igen figyelemre méltó, hogy egy tudomány, amely a szerencsejátékok tanulmányozásával kezdődött, az emberi tudás legfontosabb alkatrészévé vált."

Laplace: *A valószínűségek analitikai elmélete*, 1812

Pierre-Simon de Laplace (1749–1827), francia matematikus.

A Bernoulli-féle tétel alátámasztja az Önök által eddig használt objektív valószínűség-számítás elméletének helyességét. Azaz, ha egy valószínűség-számítási kísérlet lehetséges kimeneteleit a H eseménytér írja le és $A \subseteq H$, valamint erre az eseménytérre igaz a Kolmogorov-féle axiómarendszer, akkor $P(A)$ elvileg meghatározható. Sok esetben felmerül a kérdés, hogy amennyiben B esemény is eleme az eseménytérnek és kémeink jelentik, hogy B esemény a kísérlet során bekövetkezett, akkor ez az információ mennyiben befolyásolja A esemény valószínűségét? Az ilyen jellegű kérdésekben az eredeti eseményteret leszűkítjük azon események halmazára, melyekben a B esemény bekövetkezik.

Tételezzük fel tehát, hogy B esemény bekövetkezett. Ekkor A-nak csak azon eseteit vesszük számításba, amelyek B-vel együtt következnek be: $A \cap B$-t, vagy a 10. osztályos jelölés mellett $A \cdot B$ eseményeket tekintjük. Az ilyen típusú eseményeket az eddigi jelöléstől megkülönböztetve $A|B$-vel fogjuk jelölni (kiolvasva: *A, feltéve ha B* vagy *A vonás B*), valószínűségüket pedig $P(A|B)$ jelöli, és *A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűségének* nevezzük.

Az eseményeket mint halmazokat tekintjük. $A \cup B$-t a valószínűségszámításban $A + B$ jelöli.

Első példánk reményeink szerint elég egyszerű ahhoz, hogy megértsük a feltételes valószínűséget és megtanuljuk kiszámítani.

1. példa

A budapesti fesztiválzenekarnak 87 tagja van, 52 férfi és 35 nő. Közülük a vonós szekciót 42 művész alkotja, soraikban 15 hölggyel. A szunyókálásból felriadó portás csak a hangszer tokját látva megállapítja, az épületbe bejött művész vonós. Mi ekkor a valószínűsége, hogy az illető nő?

Megoldás

Jelentse A, hogy művésznőről, B pedig, hogy vonósról van szó. Akkor az eddig alkalmazott klasszikus képlet szerint:

$$P(A) = \frac{35}{87}, \quad P(B) = \frac{42}{87}, \quad P(A \cdot B) = \frac{15}{87}.$$

Mint a feladat szövegéből kitűnik, kérdésünkben a $P(A|B)$ valószínűségre vagyunk kíváncsiak. Az eseményterünk leszűkül a 42 vonósra (elemi események). A számunkra kedvező esetek száma 15, ennyien vannak a hölgyek. Így

$$P(A|B) = \frac{15}{42}.$$



Az érdekes az, hogy ezt a valószínűséget az eredeti eseménytérben is meg tudjuk határozni, mivel

$$P(A|B)=\frac{15}{42}=\frac{\frac{15}{87}}{\frac{42}{87}}=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

Gyakorlatilag nem szükséges új eseményteret bevezetni (így új kísérletsorozatot sem elvégezni) ahhoz, hogy a feltételes valószínűséget meg tudjuk határozni.

A példa végén szereplő gondolat lehetőséget ad arra, hogy a feltételes valószínűséget definiáljuk, és egyben általános módszert adjunk a kiszámítására.

feltételes valószínűség

7.6. DEFINÍCIÓ: Legyenek A és B a H eseménytér eseményei, $P(B)\neq 0$. Ekkor a

$$P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$$

hányadost az A esemény B-re vonatkozó *feltételes valószínűségének nevezzük.**

Megjegyzés: A feltételes valószínűségről megemlítünk egy technikai jellegű tételt:

7.4. tétel

7.4. TÉTEL: A Kolmogorov-féle axiómarendszer érvényben marad feltételes valószínűségekre is.

2. példa

Sajnos sokan azt hiszik erről a két feladatról, hogy ugyanaz.

a) Egy kétgyerekes családról tudjuk, hogy az egyik gyerek fiú. Mi a valószínűsége, hogy a másik is fiú?

b) Egy kétgyerekes családról tudjuk, hogy az idősebb gyerek fiú. Mi a valószínűsége, hogy a másik is fiú?

Az eseményteret alkotó elemi események (f, f), (f, l), (l, f), (l, l), ahol f a fiút, l a lányt jelöli a születési sorrendben (nem szigorú az egyenlőség, ikrek születését is megengedjük). A sorrend ikrek esetén is értelmezhető.

Megoldás (a)

Az A esemény jelentse, hogy az egyik gyerek fiú, B pedig, hogy a másik is az. Ekkor

$$P(B|A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Megjegyzés: Sokan azt mondják a feladat megoldására, hogy az eredmény 0,5. Tanulság, hogy a matematikában nagyon óvatosan kell véleményt nyilvánítani.



Megoldás (b)

Legyen A esemény, hogy a két gyerek közül az idősebb fiú, B pedig, hogy a fiatalabb fiú. Ekkor

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

* * *

Vannak olyan esetek, amikor a feltételes valószínűség ismeretében az A és B események metszetét határozzuk meg. A 7.6-os definíció átrendezésével:

$$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B),$$

és a szimmetria miatt:

$$P(B \cdot A) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Ha összehasonlítjuk a két egyenletet, az ún. *szorzási szabályt* kapjuk: **szorzási szabály**

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Jelentse B_1 azt az eseményt, hogy az 1-től 6-ig számozott szabályos kockával páros számot dobunk, B_2 pedig azt, hogy ugyanezzel a kockával páratlan számot dobunk. Egyrészt $B_1 \cdot B_2$ üres, azaz a két esemény kizárja egymást, és $B_1 + B_2 = H$. A Kolmogorov-féle axiómákból következik, hogy

$$1 = P(H) = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2).$$

Az ilyen típusú események halmazát teljes eseményrendszernek nevezzük (hozzátéve, hogy egyik esemény sem lehet lehetetlen).

7.7. Definíció: A $\{B_1; B_2; \ldots; B_n\}$ halmazt *teljes eseményrendszernek* nevezzük, ha $(i, j = 1, \ldots, n)$: **teljes eseményrendszer**

(1) minden $B_i \subseteq H$, $B_i \neq \emptyset$ és

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n = H;$$

(2) minden $i \neq j$-re

$$B_i \cdot B_j = \emptyset.$$

A teljes eseményrendszer eseményei páronként kizárják egymást és lefedik az eseményteret.

Az előbbi definíció és a szorzási szabály alkalmazásával kapjuk a következő tételt.

7.5. Tétel: Legyen a $\{B_1; B_2; \ldots; B_n\}$ halmaz teljes eseményrendszer. Tegyük fel, hogy ismerjük a $P(B_i)$ és valamely $A \subseteq H$ eseményre $P(A|B_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ feltételes valószínűségeket. Akkor **teljes valószínűség tétele**

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots +$$

$$+ P(A|B_n) \cdot P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

Bizonyítás

A tétel feltételei miatt $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = H$. Vegyük mindkét oldal metszetét A-val:

$$A \cdot (B_1 + B_2 + \ldots + B_n) = A \cdot H.$$

A disztributív tulajdonság miatt:

$$(A \cdot B_1) + (A \cdot B_2) + \ldots + (A \cdot B_n) = A.$$

Mivel $\{B_1; B_2; \ldots; B_n\}$ teljes eseményrendszer, így tagjai páronként kizárják egymást. Ebből következik, hogy szintén minden $i \neq j$-re:

$$(A \cdot B_i) \cdot (A \cdot B_j) = \varnothing.$$

Mindkét oldal valószínűségét véve és alkalmazva az axiómarendszer 3. pontját:

$$P\big((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)\big) =$$

$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n) = P(A).$$

Végül a szorzási szabály felhasználásával:

$$P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n) = P(A).$$

* * *

Az alábbi feladatban leírt matematikai modell csak nagyon durva közelítéssel követi a valóság folyamatait, mégis rámutat a matematikai modellalkotás jelentőségére.

3. példa

A B_1 esemény jelentse azt, hogy elromlik az autó motorja (pl. nem működik az egyik henger, vagy benzinmotor esetén nem működik a gyertya). A B_2 esemény jelentse, hogy elromlik az autó akkumulátora (lemerül vagy zárlatos lesz). A B_3 jelentse, hogy elromlik a hűtő (pl. kilyukad). Tudjuk, hogy

$$B_1 + B_2 + B_3 = H, \quad B_i \cdot B_j = \varnothing \ (i \neq j).$$

Tudjuk, hogy

$$P(B_1) = 0{,}1, \quad P(B_2) = 0{,}7 \quad \text{és} \quad P(B_3) = 0{,}2.$$

Az A esemény jelentse, hogy az autó működésképtelen (nem mozdul). Tudjuk azt is, hogy

$$P(A|B_1) = 0{,}8, \quad P(A|B_2) = 0{,}15 \quad \text{és} \quad P(A|B_3) = 0{,}3.$$

Ezek a feltételes valószínűségek azt jelentik, hogy egyes hibák előfordulása esetén milyen valószínűséggel lesz működésképtelen az autó.

Mekkora annak a valószínűsége, hogy működésképtelenné válik az autó, vagyis az A esemény bekövetkezik?



Megjegyzés: Feltettük, hogy a jelzett események egyszerre nem következhetnek be és teljes eseményrendszert alkotnak. Ez a matematikai modellalkotás lényege, hiszen egy autóban számos más dolog is történhet.

Megoldás

A 7.5-ös tétel egyszerű alkalmazásából:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) =$$

$$= 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}15 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}245.$$



A következő tétel a szorzási szabályt és a teljes valószínűség tételét használja fel. (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy még eme rövid feltételes valószínűséggel foglalkozó részben is nyomon követhető a fogalmak és tételek egymásra épülése.) Jelen összefüggésünket 1750 környékén fogalmazta meg Bayes angol pap. Műve *Kísérlet egy valószínűség-számítási probléma megoldására* címen íródott és a szerző halála után, 1763-ban jelent meg. (Teljesen véletlenül, egy íróasztal fiókjában bukkantak rá.) Bayes titokzatos élete és a tétel körül kialakult heves viták „nagyon gyanússá" tették magát a tételt. Vannak matematikusok, akik az alkalmazását el is vetik, pedig mint látni fogjuk, a tétel és bizonyítása teljesen korrekt. Hangsúlyozzuk: nem a tételt, hanem annak alkalmazási módjait vitatják! A formula azt mutatja meg, hogy hogyan kell *egy kísérlet előtti véleményünket* (hipotézisünket) a mintavétel után, annak eredménye ismeretében *elfogadni* vagy *módosítani*.

A Bayes-tétel a matematikai statisztika egyik alaptétele.

7.6. Bayes tétele: **Legyen a $\{B_1; B_2; \ldots; B_n\}$ teljes eseményrendszer és tegyük fel, hogy ismerjük a $P(B_i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, valamint $P(A|B_i)$ feltételes valószínűségeket, ahol $A \subseteq H$ és $P(A) > 0$. Ekkor**

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Bayes tétele

Bizonyítás

Induljunk ki a szorzási szabályból:

$$P(B_k|A) \cdot P(A) = P(A|B_k) \cdot P(B_k),$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}.$$

A 7.5-ös teljes valószínűség tételét a nevezőre alkalmazva kapjuk az állítást.

* * *

Fogalmazzuk meg a 3. példa fordítottját!

4. példa

Egy parkolóban egy véletlenszerűen kiválasztott autó rossz. Mi a valószínűsége, hogy ennek oka az akkumulátor meghibásodása?

Bayes tétele *„autószerelő képlet"*: segítségével a leggyakrabban előforduló hibákat lehet megkeresni.

Megoldás

A 7.6-os tétel miatt:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}7}{0{,}245} = 0{,}4286.$$



A lecke végén oldjunk meg közösen még egy példát!

5. példa

Egy szabályos, 1-től 6-ig számozott kockát kétszer feldobunk.

a) Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

b) Ha tudjuk, hogy az első dobás eredménye páratlan, mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege ilyen feltétel mellett is 7 lesz?

Megoldás (a)

Jelentse A az eseménytér azon eseményét, hogy a dobott számok összege 7. A feladatot a feltételek miatt a klasszikus valószínűség alkalmazásával könnyen megoldhatjuk. Az összes esetek száma 36, a kedvező eseteket rendezett páronként (elöl áll az első, utána a második dobás) fel is sorolhatjuk: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1).

Így a keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Megoldás (b)

Jelentse B az eseménytér azon eseményét, hogy páratlan számot dobunk elsőre. Így

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Az $A \cdot B$ eseménynek összesen három eleme van: (1, 6), (5, 2), (3, 4):

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Ezért

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{1}{6}.$$

Figyeljük meg, hogy $P(A|B) = P(A)$: az A esemény valószínűségét B nem befolyásolja.

* * *

Ha a feltételes valószínűség 7.6-os definícióját formálisan alkalmazzuk, akkor az előbbi példában szereplő összefüggés csak úgy lehetséges, hogy

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A),$$

azaz (természetesen $P(B) \neq 0$):

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ugyanakkor $P(B|A) = P(B)$ feltéve, hogy $P(A) \neq 0$. Ugyanis

$$\frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(B) = P(B|A).$$

A fenti „tulajdonság" szimmetrikus.



Ha két eseményre fennáll a fenti tulajdonság, akkor az ilyen eseményeket megkülönböztetjük az eseménytér többi eseményétől.

7.8. Definíció: Ha $A, B \subseteq H$ és $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, akkor *A és B egymástól független események.**

egymástól független események

Megjegyzés: Az előző példa *b)* részéhez hasonló feladatok esetén *sztochasztikus függetlenségről* beszélünk. Vegyük észre, hogy ez nem csak a hétköznapi értelemben való függetlenséget foglalja magában! Például, ha egymás után kétszer feldobunk egy kockát, a dobások eredménye hétköznapi értelmében is független egymástól.

A sztochasztikus görög eredetű szó, angolul véletlenszerűt, rendszertelent jelent (stochastic).

Ne keverjük össze az *egymást kizáró* és az *egymástól független* eseményeket! Ha két esemény kizárja egymást, akkor pontosan nem függetlenek, hiszen az egyik bekövetkezése hatással van a másikra. A függetlenség azt jelenti, hogy az egyik esemény bekövetkezése nem függ a másiktól.

6. példa

Tekintsünk egy, népességpolitikai szempontból optimális, háromgyerekes családot. Az A esemény jelentse azt, hogy fiú- és lánygyermek is van a családban, a B esemény pedig azt, hogy legfeljebb egy lány van a családban. Vizsgáljuk meg az A és a B esemény függetlenségét.

Megoldás

Az eseménytér elemeit felírhatjuk rendezett hármasokkal: (l, f, f) például azt jelenti, hogy időrendben az elsőszülött gyermek leány, majd őt két fiúgyermek követi. Így az eseménytér:

$H = \{(f, f, f); (f, f, l); (f, l, f); (l, f, f); (f, l, l); (l, f, l); (l, l, f); (l, l, l)\}$.

A klasszikus képlet alkalmazásából (azaz abból, hogy az egyes esetek valószínűségeit egyenlőnek tekintjük) adódik, hogy:

$$P(A) = \frac{6}{8}, \quad P(B) = \frac{4}{8}, \quad P(A \cdot B) = \frac{3}{8}.$$

Így

$$P(A \cdot B) = \frac{3}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{4}{8} = P(A) \cdot P(B),$$

tehát a két esemény sztochasztikusan független egymástól.

* * *

Könyvünknek keretes szerkezetet adva, fejezzük be az utolsó részt egy Szent Ágoston-parafrázissal Pascal átiratában (Pensées, 72. szakasz):

„Modus quo corporibus adhaerent spiritus comprehendi ab hominibus non potest, et hoc tamen homo est."

De civitate Dei
XXI. 10.



Feladatok

1. Egy osztályban rajzórán Joan Miro- és Wassily Kandinsky-képeket nézegettek. Az óra végén a tanár megkérdezte a jelen levő 9 lányt, hogy melyik kép tetszett nekik jobban: 3 fő szavazott Miróra, a többiek Kandinskyra. Ugyanakkor a 18 fiú közül 8-nak tetszett inkább Kandinsky, a többinek Miro. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
   a) kiválasztva egy Kandinsky-rajongót, az illető leány?
   b) kiválasztva egy fiút, Miro képeiért lelkesedik?

2. Egy gyógyszerkísérlet során a kísérletben részt vevő betegek 30%-ának az A, 50%-ának a B, a többieknek a C gyógyszert adták be. Az A gyógyszert szedők 70%-a; a B-t szedők 60%-a; a C-t kapók 85%-a gyógyult meg.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy, a kísérletben részt vevő, találomra kiválasztott beteg meggyógyult?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy ha a felépült betegek közül választunk egy főt, az a B készítményt kapta?

3. Adott egy (népességpolitikai szempontból roppant optimális) négygyerekes család. Legyen két esemény az

$$A = \text{fiú- és lánygyermek is van a családban;}$$

$$B = \text{legfeljebb egy leány van a családban.}$$

   Vajon függetlenek a megadott események?



7. Néhány nevezetes eloszlás és várható értéke, szórása

A nevezetes eloszlások várható értékét és szórását vagy szórásnégyzetét elméleti úton meghatározták. (Ezt tettük mi is a tárgyalt eloszlásokkal.) Jelentőségük abban áll, hogy a gyakorlati életet modellezve, sok esetben alkalmazhatók. Így elegendő „csak" beazonosítani, hogy melyik eloszlással van dolgunk, majd – mondjuk tapasztalati úton – megállapítani a paraméter(eke)t.

DISZKRÉT ELOSZLÁSOK

Eloszlás neve (paramétere)	ξ értékei	$P(\xi = k)$	$M(\xi)$	$D^2(\xi)$
binomiális eloszlás $(0 < p < 1)$ *(visszatevéses mintavétel)*	$0, 1, \ldots, n$	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
hipergeometrikus eloszlás $(N, M, n \in \mathbb{N}^+)$ *(visszatevés nélküli mintavétel)*	$0, 1, \ldots, n$ $(k \le n,\ M \le N)$	$\dfrac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n \cdot \dfrac{M}{N}$	$n \cdot \dfrac{M}{N} \cdot \left(1 - \dfrac{M}{N}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{n-1}{N-1}\right)$
Pascal-eloszlás $(0 < p < 1)$	$1, 2, \ldots$	$(1-p)^{k-1} \cdot p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Poisson-eloszlás $(\lambda \in \mathbb{R}^+)$	$0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$	λ	λ



Kiadja a Mozaik Kiadó, Szeged • Telefon: (62) 470-101, (62) 554-660
Felelős kiadó: Török Zoltán • Honlap: www.mozaik.info.hu • Műszaki szerkesztő: Horváth Péter
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Aggod István
Terjedelem: 20,74 A/5 nyomdai ív • 2024. január • Tömeg: 450 g • Raktári szám: MS-2313