Sokszínű matematika

12

A kötet hátsó borítójának belsején egyedi kód található, melyet a ***www.mozaweb.hu*** *oldalon aktiválhatsz. Az aktiválás hozzáférést biztosít a kiadvány elektronikus változatához a honlapon található feltételekkel.*





Sokszínű matematika

Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

Matematika

tankönyv

12

A NAT2020 szerint átdolgozott változat, 1. kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2023

A könyvet írta: Kosztolányi József · *egyetemi docens*
Kovács István · *gimnáziumi tanár*
Pintér Klára · *főiskolai docens*
Urbán János † · *gimnáziumi tanár*
Vincze István · *gimnáziumi tanár*

Lektorálta: Dr. Németh József · *egyetemi docens*
Szigeti Józsefné · *középiskolai tanár*



Felelős szerkesztő: Tóth Katalin
Borítóterv, tipográfia: Reményfy Tamás
Illusztrációk: Ábrahám István

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, ill. rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más hordozó) nem sokszorosítható.

ISBN 978 963 697 905 8

Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2004, 2023



Logika, bizonyítási módszerek 1

Számsorozatok 2

Térgeometria 3

Valószínűség-számítás, statisztika 4

Rendszerező összefoglalás 5





Logika, bizonyítási módszerek

1. Logikai feladatok, kijelentések 10
2. Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció 15
3. Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia 23
4. Teljes indukció (emelt szintű tananyag) 28

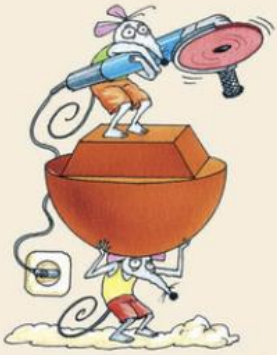
Számsorozatok

1. A sorozat fogalma, példák sorozatokra 36
2. Példák rekurzív sorozatokra (emelt szintű tananyag) 41
3. Számtani sorozatok 47
4. Mértani sorozatok 53
5. Kamat- és járadékszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása 60



Térgeometria

1. Térelemek 66
2. A sík és a tér felosztása (kiegészítő anyag) 72
3. Testek osztályozása, szabályos testek 76
4. A terület fogalma, a sokszögek területe 82
5. A kör és részeinek területe 87
6. A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata 92
7. A gúla és a kúp térfogata 98
8. A csonka gúla és a csonka kúp 103
9. A gömb térfogata és felszíne 108
10. Egymásba írt testek (kiegészítő anyag) 112
11. A térgeometria alkalmazásai 118



Valószínűségszámítás, statisztika

1. Geometriai valószínűség 122
2. Várható érték 128
3. Feltételes valószínűség, események függetlensége 134
4. Statisztika 141



Rendszerező összefoglalás



Gondolkodási módszerek

1. Halmazok, kijelentések, események 156
2. Kombinatorika, valószínűség, gráfok 162

Algebra és számelmélet

1. Számok és műveletek 175
2. Számelmélet, oszthatóság 178
3. Hatvány, gyök, logaritmus 181
4. Műveletek racionális kifejezésekkel 192
5. Egyenletek, egyenlőtlenségek 197
6. Egyenletrendszerek 227



Függvények

1. A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai 232
2. Műveletek függvényekkel (emelt szintű tananyag) 235
3. Függvénytulajdonságok 238

Geometria

1. Alapvető fogalmak 244
2. Geometriai transzformációk 252
   Egybevágósági transzformációk 252
   Hasonlósági transzformáció 257
3. Vektorok. Szögfüggvények 262
4. Nevezetes síkidomok tulajdonságai 271
5. Koordináta-geometria 284



Középszintű érettségi gyakorló feladatsorok

1. feladatsor 291
2. feladatsor 293
3. feladatsor 296
4. feladatsor 298
5. feladatsor 301



Útmutató a tankönyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában.

- A kidolgozott példák gondolatmenete mintát ad a módszerek, eljárások megértéséhez és a további feladatok megoldásához.
- A legfontosabb definíciókat és tételeket színes kiemelés jelzi.
- A tananyag apró betűvel szedett részei és a bordó színnel megjelölt kidolgozott mintapéldák a mélyebb megértést segítik. Ezek és a csillaggal jelölt definíciók, tételek az emelt szintű érettségire való felkészüléshez szükségesek.
- A margón ábrák, az adott lecke főbb vázlatpontjai, ismétlő, magyarázó részek, valamint matematikatörténeti érdekességek találhatók.

A mintapéldák és a kitűzött feladatok nehézségét három különböző színnel jelöltük:

Sárga: elemi szintű gyakorló feladatok, amelyek megoldása, begyakorlása nélkülözhetetlen a továbbhaladáshoz.
Kék: a középszintű érettséginek megfelelő színvonalú feladatok.
Bordó: az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, feladatok.

Ezek a színkódok megfelelnek a Mozaik Kiadó Sokszínű matematika feladatgyűjteményeiben alkalmazott jelöléseknek. A feladatgyűjtemény-sorozat több mint 3000, a gyakorláshoz, az órai munkához és az érettségi felkészüléshez is alkalmas feladatot tartalmaz.

◆ ◆ ◆

A matematika, a ráció, a logikus gondolkodás világunk megismerésének egyik talán leghatékonyabb eszköze, amely néha megmagyarázhatatlan jelenségekkel társul. Elválaszthatatlan a gondolkodó embertől, és teljessé teszi mindennapi tevékenységeit.

Néhány gondolat azoktól, akik mindezt megtapasztalták:

„A mi feladatunk átnyújtani a matematikai tudás fáklyáját a jövő mérnökeinek, tudósainak, tanárainak és nem utolsó sorban kutató matematikusainak. Segítenek ebben a feladatok? Nagyon is. Minden értelmes élet legnagyobb része problémák megoldásából áll, a mérnök, a természettudós munkájának nem kis része matematikai problémák megoldásából." (Paul R. Halmos)

„Minden embernek örökösen kérdezősködnie kellene e nagy kaland minden órájában, egészen addig a napig, mely után nem hagy többé árnyékot a Nap alatt. Mert ha úgy hal meg, hogy nincs több kérdés a szívében, milyen alapon számíthat folytatásra?" (Frank Moore Colby)

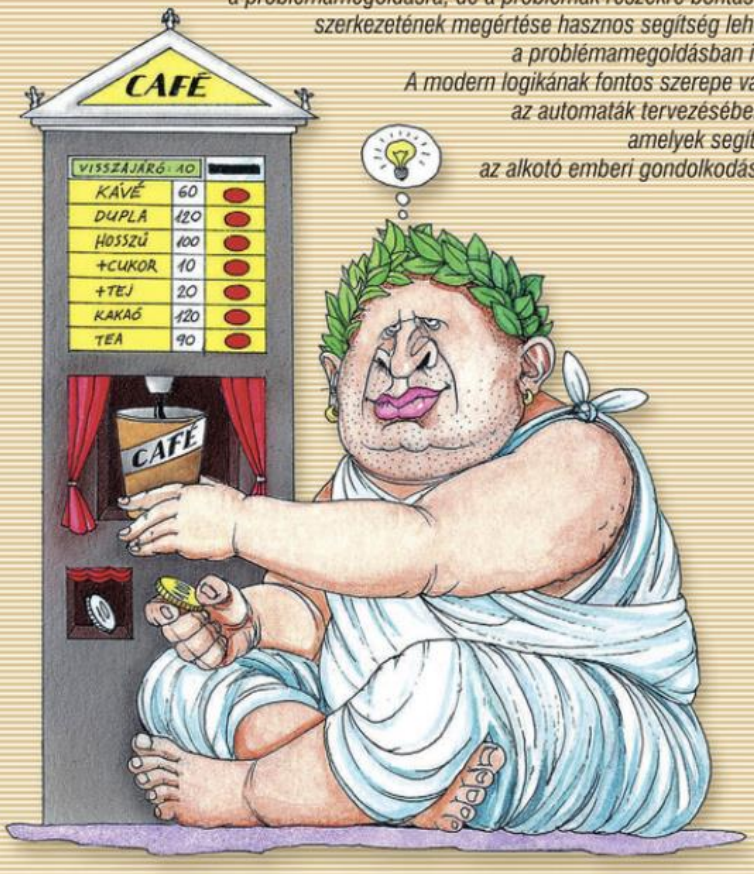
„Nem tudom, hogyan lát engem a világ; de nekem úgy tetszik, hogy csak tengerparton játszadozó kisfiú voltam, aki abban leli örömét, hogy olykor a szokottnál simább kavicsot vagy szebb kagylót talál, míg az igazság óceánja kikutatlanul terül el előtte." (Sir Isaac Newton)

„A matematikában talán nem is annyira az eredmény a fontos, hanem az út, ahogyan eljutunk hozzá." (Fried Ervin)

Eredményes munkát és tanulást kívánnak a Szerzők.

Logika, bizonyítási módszerek

A logika szó a görög „logosz" szóból származik, melynek jelentése: szó, gondolat, igazság. A görög „logiké" szó érvelést, következtetést jelent. Az ókorban a filozófia vetette fel azokat a kérdéseket, amelyek vizsgálata a logika kialakulásához vezetett. A következtetések helyességének vizsgálata, a gondolkodás eredményeinek kritikai elemzése a logika fő feladata. A logika segít a definíciók, állítások pontos, egyértelmű megfogalmazásában, így nélkülözhetetlen a tudományos kommunikációban. Bár a logika nem ad útmutatást a gondolkodás módszereire, a problémamegoldásra, de a problémák részekre bontása, szerkezetének megértése hasznos segítség lehet a problémamegoldásban is. A modern logikának fontos szerepe van az automaták tervezésében, amelyek segítik az alkotó emberi gondolkodást.





1. Logikai feladatok, kijelentések

Azokat a problémákat, rejtvényeket szokás logikai feladatoknak nevezni, melyekben előfordulnak igaz vagy hamis állítások, illetve bizonyos kijelentésekből, tényekből kell levonni következtetéseket. Ilyenekre mutatunk most néhány tipikus példát, megoldási módszert.

A következő néhány történet a Hazig-szigeten játszódik, ahol minden lakos vagy lovag, aki mindig igazat mond, vagy lókötő, aki mindig hazudik. Azonkívül elég szófukar emberek, egy idegennek rendszerint csak *igennel* vagy *nemmel* hajlandók válaszolni, és általában egynél több kérdésre nem felelnek.

1. példa

Az első nap az utazó találkozik egy emberrel a Hazig-szigeten, aki ezt vallja magáról: *„Lókötő vagyok."* Mit tudhatunk róla?

Megoldás

Ha az illető lovag lenne, igazat kellene mondania, viszont a *„Lókötő vagyok."* állítás rá nézve hazugság lenne, tehát nem lehet lovag.

Ha az illető lókötő lenne, hazudnia kellene, viszont a *„Lókötő vagyok."* állítás rá nézve igaz lenne, ezért nem lehet lókötő sem.

Tehát első ismerősünk nem lehet a Hazig-sziget lakója.

2. példa

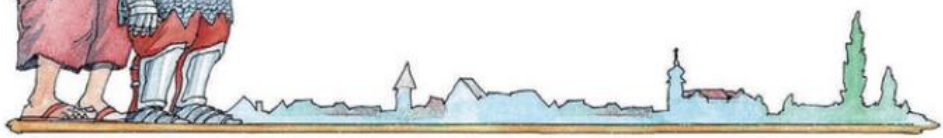
Másnap az utazó találkozik két szigetlakóval, egy magassal és egy alacsonnyal. Megkérdezi angolul a magastól: *„Te lovag vagy?"*, mire az motyog valamit, amit az utazó nem ért. Erre az alacsony közbeszól: *„Azt mondja, hogy lovag. De állandóan hazudik."* Ki lovag és ki lókötő?



Megoldás

Minden szigetlakó lovagnak mondja magát, ezért az alacsony ember állítása biztosan igaz, ami egyrészt azt jelenti, hogy ő lovag, másrészt azt mondja, hogy a magas ember lókötő.

Megjegyzés: Az utazó fenti magyarázata után a kísérője azt mondja: *„Más a helyzet, ha a magas ember nem a kérdésre válaszolt, esetleg nem értette azt, mert nem tud angolul. Ekkor az alacsony a lókötő, és mivel hazudik, amikor azt mondja, hogy a magas lókötő, ezért a magas lovag."* A feladatok szövegébe ezért a továbbiakban mindig beleértjük, hogy a megkérdezettek értik a kérdést, és arra válaszolnak.





3. példa

A Hazig-sziget egyik falujában a lakosok az *igen* és *nem* szavak helyett a *plink* és *plank* szavakat használják, de nem tudjuk, hogy melyik helyett melyiket. Az utazó egy kérdést tehet fel egy falubelinek, amire az *plinkkel* vagy *plankkal* válaszol. Mit kérdezzen, hogy megtudja, melyik szó jelenti az *igent*?



Megoldás

A *„Te lovag vagy?"* kérdésre mindenképpen *igen* a válasz, így amelyik szót válaszolja a falubeli, az jelenti azt, hogy *igen*.

4. példa

Az utazó a Hazig-szigeten két szigetlakóval találkozik. A magasabbik azt mondja magukról az utazónak: *„Legalább egyikünk lókötő."* Tudhatja-e az utazó ezután, mifélék a szigetlakók?

Megoldás

Ha a magasabbik lovag, akkor igaz az állítása, hogy *„legalább egyikünk lókötő"*, a lókötő pedig csak az alacsonyabbik ember lehet.

Ha a magasabbik lókötő, akkor ezzel teljesül, hogy egyikük lókötő, vagyis igaz az állítása, ezért nem lehet lókötő. Tehát a magasabbik lovag, az alacsonyabb lókötő.

5. példa

A Hazig-szigeten az utazó találkozik egy ikerpárral, akikről tudja, hogy egyiket Jánosnak hívják, a másikat nem, és egyikük lovag, a másik lókötő, de nem tudja, hogy melyik melyik. Mit kérdezzen, ha

a) egy legfeljebb három szóból álló kérdést tehet fel egyiküknek, hogy megtudja, melyikük János;

b) egy legfeljebb három szóból álló kérdést tehet fel egyiküknek, hogy megtudja, János lovag-e?

Megoldás

Természetes ötlet megkérdezni egyiküket: *„Te vagy János?"* Nézzük meg a lehetséges válaszokat attól függően, hogy János lovag vagy lókötő, és őt kérdeztük vagy a testvérét. Írjuk táblázatba a lehetőségeket:

	János lovag	János lókötő
Jánost kérdeztük	igen	nem
A testvérét kérdeztük	igen	nem

A *„Te vagy János?"* kérdésre János válasza *igen*, ha lovag és *nem*, ha lókötő. Ha a testvérét kérdeztük, és János lovag, akkor a testvére lókötő, és mivel hazudik, *igennel* válaszol. Ha János lókötő, akkor a testvére lovag, így az igazsághoz híven *nemmel* válaszol.

A táblázatból látható, hogy ha a *„Te vagy János?"* kérdésre *igen* a válasz, akkor János lovag, ha *nem*, akkor János lókötő, függetlenül attól, hogy kit kérdeztünk.



Miután tudjuk, hogy János vagy lovag, vagy lókötő, ahhoz, hogy kiderüljön, melyikük János, egy kérdéssel azt kell eldöntenünk, hogy beszélgetőtársunk lovag vagy lókötő. Ez lehetséges, ha valami nyilvánvalóan eldönthető dologra kérdezünk rá, például: *„Van rajtad szemüveg?”* Ha erre *igen* a válasz, akkor lovaggal, ha *nem*, akkor lókötővel beszélünk.

Érdekes, hogy ha nem tudjuk, melyikük lovag, egy kérdéssel akkor is megtudhatjuk, hogy melyikük János. Próbálkozzunk a *„János igazat mond?”* kérdéssel! Készítsünk megint táblázatot a lehetséges válaszokról:

	János lovag	János lókötő
Jánost kérdeztük	igen	igen
A testvérét kérdeztük	nem	nem

Ha Jánost kérdeztük, és ő a lovag, akkor a válasz *igen*, ha ő a lókötő, akkor azt hazudja, hogy *igen, igazat mond.* Ha a testvérét kérdeztük, és János a lovag, akkor a testvére a lókötő, tehát letagadja, hogy János igazat mond, ezért *nem* a válasz. Ha János a lókötő, akkor a testvére lovag, akkor mond igazat, ha azt állítja, hogy János hazudós, ezért *nem* a válasz.

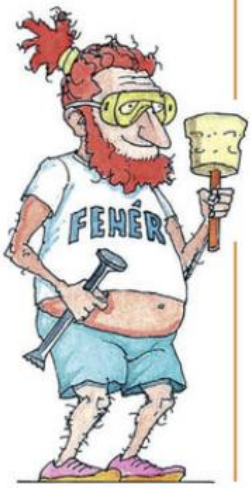
A táblázatból látható, hogy ha a *„János igazat mond?”* kérdésre *igen* választ kapunk, akkor Jánost kérdeztük, ha *nemet*, akkor a testvérét, tehát ebből megtudtuk, melyikük János.

◆ ◆ ◆

A táblázatba rendezés más problémák megoldására is hasznos módszer:

6. példa

Három barát, Fehér szobrász, Fekete hegedűs és Vörös színész találkozott a kávézóban. *„Érdekes, hogy az egyikünk haja fehér, a másiké fekete, a harmadiké vörös, de nincs senki, akinek az lenne a neve, amilyen a hajszíne”* – mondta a fekete hajú. *„Igazad van!”* – válaszolta a szobrász. Milyen színű a színész haja?



Megoldás

Először jelöljük a táblázatban „–” jellel, hogy senkinek nem lehet az a neve, amilyen a hajszíne.

hajszín \ név	Fehér szobrász	Fekete hegedűs	Vörös színész
fehér	–		
fekete		–	
vörös			–

Mivel a fekete hajúnak a szobrász válaszolt, a szobrász nem lehet fekete hajú, őt Fehérnek hívják, ezért fehér hajú sem lehet, tehát csak vörös hajú lehet.

hajszín \ név	Fehér szobrász	Fekete hegedűs	Vörös színész
fehér	–		
fekete	–	–	
vörös	+		–



Ezek után Fekete nem lehet vörös hajú, de fekete hajú sem, így fehér hajú.

hajszín \ név	Fehér szobrász	Fekete hegedűs	Vörös színész
fehér	–	+	
fekete	–	–	
vörös	+	–	–

Végül marad a Vörös nevű színésznek a fekete hajszín.

hajszín \ név	Fehér szobrász	Fekete hegedűs	Vörös színész
fehér	–	+	–
fekete	–	–	+
vörös	+	–	–

Tehát Fehér vörös hajú, Fekete fehér hajú, Vörös pedig fekete hajú.

◆ ◆ ◆

A fenti példákban lényeges szerepet játszott, hogy bizonyos állításokról eldöntsük, hogy igazak vagy hamisak.

kijelentés

DEFINÍCIÓ: **Logikai értelemben *kijelentésnek* nevezzük azt a kijelentő mondatot, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.**

Tehát egy kijelentés csak kétféle lehet, igaz vagy hamis, és egyszerre nem lehet mindkettő.

kijelentés → igaz, hamis

Például kijelentés az, hogy *„amikor megkérdezték, melyik a kedvenc tantárgyam, azt válaszoltam, hogy a matematika”*, de nem kijelentés az, hogy *„a matematika a legszebb tudomány”*, hiszen a „legszebb” jelentése nagyon bizonytalan.

A kijelentéseket is szokás betűkkel jelölni, például A, B, C, … vagy p, q, r, …

logikai érték

Az *igaz* és a *hamis* a kijelentés **logikai értéke.**

Ha az A kijelentés igaz, B hamis, úgy is mondhatjuk, hogy ***A* logikai értéke igaz, *B* logikai értéke hamis.**

Ugyanez jelekkel: $|A| = i$ és $|B| = h$.

$|A$ 0 páros szám$| = i$

$|$Nincs páros prímszám$| = h$

Ha nem okoz félreértést, ugyanezt rövidebben a függőleges vonalak nélkül is írhatjuk: $A = i$, $B = h$.

Vizsgáljuk meg a következő mondatot: *„Ez a mondat hamis.”* Ha igaz lenne az állítás, akkor az azt jelentené, hogy az állítás hamis. Ha viszont az állítás hamis lenne, az pontosan azt jelentené, hogy a mondat tagadása igaz, vagyis az állítás igaz. Mindenképpen ellentmondásra jutunk, ezt **paradoxonnak** nevezzük. Az ilyen típusú mondatokat sem tekintjük kijelentéseknek, nem hordoznak semmiféle információt, nem „megalapozottak”.



Feladatok

1. A Hazig-szigetre érkezett utazó találkozik három szigetlakóval, és megkérdezi őket: *„Hány lovag van köztetek?"* A legmagasabb érthetetlenül morog valamit. Az utazó a középsőhöz fordul: *„Mit mondott a társad?"* A középső válaszol: *„Azt mondta, hogy egy lovag van köztünk."* Ekkor közbeszól a harmadik: *„Ne higgyen neki! Hazudik."* Melyik szigetlakóról lehet eldönteni ezek után, hogy lovag vagy lókötő?

2. Omárt, a Hazig-sziget lakóját megvádolták, hogy ellopott egy elefántot. Omár a bíróság előtt egyetlen mondatot mondott, amiből kiderült, hogy nem ő volt a tettes. Mi lehetett ez a mondat?

3. A Hazig-szigeten öt szigetlakóval találkoztunk, akik a következőket mondták:

   Niki: *„Közülünk pontosan egy lókötő."* Tiki: *„Közülünk pontosan kettő lókötő."*
   Piki: *„Közülünk pontosan három lókötő."* Riki: *„Közülünk pontosan négy lókötő."*
   Viki: *„Mind az öten lókötők vagyunk."*

   Ki mond igazat az öt szigetlakó közül?

4. A Hazig-sziget egyik falujában, ahol lovagok és lókötők élnek, a lakosok az *igen* és *nem* szavak helyett a *plink* és *plank* szavakat használják, de nem tudjuk, hogy melyik helyett melyiket. Mit tudhatunk meg a következő kérdésre kapott válaszból: *„Arra a kérdésre, hogy »Te lovag vagy?« azt szoktad mondani, hogy plink?"*

5. Négy lány meglátogatta a névnapján ötödik barátnőjüket. A lányok vezetékneve: Kiss, Szabó, Nagy és Varga. Keresztnevük nem feltétlenül ebben a sorrendben Réka, Sára, Kata és Eszter. Elsőnek Varga, másodiknak Sára érkezett. Ezután jött Kiss, végül Réka. Mindegyik hozott ajándékot. Varga tollat, Kata csokoládét, Réka fotóalbumot, Nagy pedig könyvet. Mi a négy lány teljes neve?

6. Zoli, Pisti és Bálint egy osztályba járnak. Egyik biciklivel, a másik busszal, a harmadik villamossal jár iskolába. Egyik kosárlabdázik, a másik kézilabdázik, a harmadik úszik. Pisti és Bálint nem kosárlabdázik, Pisti nem jár biciklivel, az úszó nem jár villamossal, aki viszont biciklivel jár, az kézilabdázik. Ki mivel jár iskolába és mit sportol?

Rejtvény

Az alábbi rejtvényt Einstein írta. Szerinte az emberek 98%-a nem képes megoldani a feladatot. Vajon te a 2%-ba tartozol?

Tények:

1. Van egymás mellett 5 ház, mind az 5 különböző színű.
2. A házakban lakik egy-egy személy, mindegyik különböző nemzetiségű.
3. Mindegyik fogyaszt valamilyen italt, dohányárut és tart valamilyen állatot.
4. Egyikük sem fogyaszt ugyanolyan italt, szív ugyanolyan cigarettát, és tart ugyanolyan állatot.

Egyéb információk:

1. A brit piros házban lakik.
2. A svéd kutyákat tart.
3. A dán teát iszik.
4. A fehér ház balján a zöld ház van.
5. A zöld házban kávét fogyasztanak.
6. Az a személy, aki Pall Mallt szív, madarakat tart.
7. A sárga ház lakója Dunhillt szív.
8. A középső házban lakó tejet iszik.
9. A norvég az első házban lakik.
10. A Blendet szívó szomszédjában lakó macskát tart.
11. A Blue Mastert szívó ember sörözik.
12. A lovakat tartó szomszédjában lakó Dunhillt szív.
13. A német Princet szív.
14. A norvég a kék ház szomszédja.
15. A Blendet szívó szomszédságában vizet isznak.

Kérdés: Ki tart halakat?



2. Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció

A kijelentéseket különféleképpen összekapcsolhatjuk, így összetett kijelentéseket kapunk. Az összetett kijelentéseknek gyakran közös a szerkezete, amelyet a kijelentésekre vonatkozó logikai műveletekkel írhatunk le.

1. példa

A Hazig-szigeten az utazó találkozott három szigetlakóval, akik közül a legmagasabb ezt mondta: *„Mindhárman lókötők vagyunk."* Mire a társa: *„Pontosan egy lovag van köztünk."* Mifélék a szigetlakók?

Megoldás

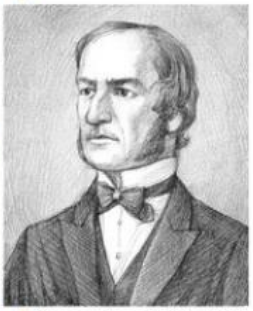
Ha a legmagasabb lovag lenne, igazat kellene mondania, így nem mondhatná, hogy mindhárman lókötők.

Így a legmagasabb lókötő, aki biztos hazudik, tehát hamis az a kijelentés, hogy *„mindhárman lókötők"*. Ez azt jelenti, hogy a *„nem mindhárman lókötők"* kijelentés igaz. Ezért 3 lókötő nem lehet, a lókötők száma: 0, 1 vagy 2.

0 nem lehet, mert a legmagasabbról már tudjuk, hogy lókötő.

Ha csak a legmagasabb lenne lókötő, akkor két lovag lenne, és lovag mondaná, hogy *„pontosan egy lovag van köztünk"*, ami nem lehet, mert ez a kijelentés hamis lenne.

Tehát 2 lókötő van köztük és 1 lovag. Ekkor igaz az a kijelentés, hogy *„pontosan egy lovag van köztünk"*, ezért aki ezt mondta, az a lovag, a másik kettő lókötő.



George Boole (1815–1864) angol matematikus vezette be a kijelentések szerkezetének szimbólumokkal és műveletekkel való leírását *A logika matematikai analízise* (1847) és *A gondolkodás törvényeinek vizsgálata* (1854) című munkáiban.

Definíció: Egy A kijelentés *negációja* vagy tagadása az a kijelentés, amely igaz, ha A hamis, és hamis, ha A igaz.

Jele: $\neg A$, kimondva: „nem A".

Ha A igaz, akkor nem A hamis, és ha A hamis, akkor nem A igaz.

negáció

nem A =
= nem igaz, hogy A =
= nem áll fenn A =
= nem teljesül A =
= hamis az, hogy A

Pl. a *„3 osztója 2004-nek"* kijelentés igaz, a *„3 nem osztója a 2004-nek"* kijelentés hamis. A *„$\sqrt{2}$ racionális"* kijelentés hamis, a *„$\sqrt{2}$ nem racionális"* kijelentés igaz. A *„Minden ember matematikus"* kijelentés tagadása: *„Van olyan ember, aki nem matematikus."* A *„Van olyan kutya, amelyik nyávog."* kijelentés tagadása: *„Minden kutyára igaz, hogy nem nyávog."*, azaz *„Egyik kutya sem nyávog."*

A	$\neg A$
i	h
h	i





Egy falu borbélya az a falubeli férfi, aki minden olyan falubeli férfit borotvál, aki nem maga borotválkozik. Ki borotválja a falu borbélyát?

a kettős tagadás törvénye

2. példa

Az utazó a Hazig-szigeten egy útelágazáshoz érkezett egy falunál. Az egyik út a sivatagba, a másik a következő oázisba vezet. Minden falubeli ismeri az utakat, de az utazónak csak egy kérdésére hajlandók válaszolni, arra is csak *igennel* vagy *nemmel*. Mit kérdezzen az utazó, hogy megtudja a helyes irányt?

Megoldás

Az utazó rámutat az egyik útra, és megkérdezi az egyik szigetlakót: *„Mit szoktál mondani akkor, amikor valaki megkérdezi, hogy ez az út vezet-e az oázisba?"*

Ha a megkérdezett szigetlakó lovag, akkor az igazat szokta válaszolni, és most is igazat mond, ezért *igent* mond, ha az út az oázisba vezet és *nemet*, ha a sivatagba vezet.

Ha a megkérdezett szigetlakó lókötő, akkor *nemet* szokott mondani az oázisba vezető útra, viszont most is hazudik, ezért *igent* mond. A sivatagba vezető útra *igent* szokott mondani, mivel most is hazudik, az utazó kérdésére *nemmel* válaszol.

Így akárkinek is teszi fel az utazó ezt a kérdést, a válasz igaz lesz.

Hasonlóan látható, hogy a következő kérdés is megfelelő: *„Ha most megkérdezném, hogy ez az út vezet-e az oázisba, azt felelnéd, hogy igen?"*

A megoldás azon múlik, hogy a válaszoló vagy igazat mond, vagy a hazugságát is meghazudtolja, azaz kétszer tagadja az igazságot, így végül ugyanazt mondja, mint az igazmondó. Ez tetszőleges kijelentésekre teljesül, ezt mondja ki a következő tétel:

TÉTEL: **Egy kijelentés tagadásának tagadása az eredeti kijelentés (a kettős tagadás törvénye):**

$$\neg(\neg A) \equiv A.$$

3. példa

A Hazig-szigeten egy szigetlakó ezt mondja: *„Én lókötő vagyok, de a bátyám nem az."* Mifélék?

Megoldás

A szigetlakó kijelentését átfogalmazva úgy is mondhatta volna, hogy *„Én lókötő vagyok, és a bátyám lovag."*

Ha a beszélő lovag, akkor a kijelentés igaz, ami azt jelenti, hogy igaz az is, hogy ő lókötő, és az is, hogy a bátyja lovag. Viszont ha a beszélő lovag, akkor nem igaz, hogy lókötő, ezért a beszélő nem lehet lovag.

Ha a beszélő lókötő, akkor a kijelentése hamis.



Ez háromféleképpen történhet:

(1) igaz az, hogy ő lókötő, viszont hamis, hogy a bátyja lovag;
(2) hamis, hogy ő lókötő, de igaz, hogy a bátyja lovag;
(3) hamis, hogy ő lókötő, és hamis, hogy a bátyja lovag.

Mivel a beszélő lókötő, a felsorolt esetekből csak az első állhat fenn, tehát a beszélő és a bátyja is lókötő.

DEFINÍCIÓ: Két kijelentés *konjunkciója* pontosan akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz, különben hamis.
Jele: $A \wedge B$, kimondva „A és B".

konjunkció

A és B = = A, de B = = A is, B is

Például az *„esik az eső, és süt a nap"* kijelentés csak akkor igaz, ha egyszerre esik is az eső, és süt is a nap. Viszont hamis, ha esik az eső, de nem süt a nap; vagy nem esik és süt a nap; vagy nem esik, és nem is süt a nap.

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A 3. példa megoldásában figyeljük meg, hogy alkalmaztuk a következőt: a beszélő nem lehet egyszerre lovag is és lókötő is, azaz egy kijelentés nem lehet egyszerre igaz is és hamis is. Ezt mondja ki tetszőleges kijelentésre a következő tétel:

TÉTEL: Az A és $\neg A$ nem lehet egyszerre igaz (az ellentmondás-mentesség elve).
$A \wedge \neg A = h$.

az ellentmondás-mentesség elve

A **konjunkció művelet tulajdonságai** tetszőleges A, B, C kijelentésekre:

(1) **kommutatív** (felcserélhető): $A \wedge B \equiv B \wedge A$;

(2) **asszociatív** (csoportosítható): $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$,
(azaz $A \wedge B \wedge C$ akkor és csak akkor igaz, ha mindhárom kijelentés igaz);

(3) $A \wedge A \equiv A$; $A \wedge i \equiv A$; $A \wedge h \equiv h$.

4. példa

A Hazig-szigeten egy szigetlakó ezt mondja: *„Én lókötő vagyok, vagy ez alatt a fa alatt kincs van elásva."* Érdemes-e a fa alatt kincset keresni?

Megoldás

Ha a beszélő lovag, akkor igaz az állítása. Ez háromféleképpen lehet:

(1) a beszélő lókötő, és a fa alatt kincs van;
(2) a beszélő lókötő, és a fa alatt nincs kincs;
(3) a beszélő nem lókötő, de a fa alatt kincs van.

Mivel feltételeztük, hogy a beszélő lovag, azaz nem lókötő, így csak a harmadik eset lehet, tehát a fa alatt kincs van.



Lókötő vagyok vagy $p \Rightarrow$ $\Rightarrow p$ igaz

Ha a beszélő lókötő, akkor hamis kell legyen az állítása, az pedig csak úgy lehet, hogy nem lókötő, és a fa alatt nincs kincs. Ez ellentmond annak, hogy ő lókötő.

Tehát a fa alatt van kincs, és a beszélő csak lovag lehet.

diszjunkció

A vagy B = akár A, akár B

DEFINÍCIÓ: Két kijelentés *diszjunkciója* pontosan akkor hamis, ha mindkét kijelentés hamis, különben igaz.

Jele: $A \vee B$, kimondva „A vagy B”.

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Például a *„kakaót iszom vagy kiflit eszem”* kijelentés akkor is igaz, ha kakaót iszom és kiflit eszem, vagy csak kakaót iszom, de nem eszem kiflit, vagy nem iszom kakaót, de kiflit eszem. Viszont hamis, ha se kakaót nem iszom, se kiflit nem eszem.

A 4. példa megoldásában figyeljük meg, hogy ha egy szigetlakó nem lovag, akkor biztosan lókötő, harmadik lehetőség nincsen. Ez tetszőleges kijelentésre teljesül: egy kijelentés vagy igaz vagy hamis, harmadik eset nem lehet az általunk tárgyalt logikában. Ezt mondja ki a következő tétel:

a harmadik kizárásának elve

A és $\neg A$ közül legalább egyik igaz

TÉTEL: Az A és $\neg A$ nem lehet egyszerre hamis (a harmadik kizárásának elve).

$A \vee \neg A \equiv i$.

A **diszjunkció művelet tulajdonságai** tetszőleges A, B, C kijelentésekre:

(1) **kommutatív** (felcserélhető): $A \vee B \equiv B \vee A$;

(2) **asszociatív** (csoportosítható): $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$,
(azaz $A \vee B \vee C$ akkor és csak akkor hamis, ha mindhárom hamis);

(3) $A \vee A \equiv A$; $A \vee i = i$; $A \vee h = A$.

5. példa

Írjuk fel a fenti logikai műveletekkel a következő kijelentéseket, ha
F = a futballbajnokságot idén a Falábúak nyerték,
K = a futballbajnokságot idén a Kurtalábúak nyerték:

a) Nem igaz, hogy a Falábúak vagy a Kurtalábúak nyertek.

b) Sem a Falábúak, sem a Kurtalábúak nem nyertek.

c) Nem lett holtversenyben első a Falábúak és a Kurtalábúak csapata.

d) A Falábúak és a Kurtalábúak közül az egyik biztos nem nyert.

Megoldás (a)

Nem igaz, hogy a Falábúak vagy a Kurtalábúak nyertek = nem igaz (Falábúak nyertek, vagy Kurtalábúak nyertek) = $\neg(F \vee K)$.





Megoldás (b)

Sem a Falábúak, sem a Kurtalábúak nem nyertek = a Falábúak nem nyertek, és a Kurtalábúak nem nyertek = $\neg F \wedge \neg K$.

A *„sem a Falábúak, sem a Kurtalábúak nem nyertek”* kijelentés ugyanazt mondja, mint a *„nem igaz, hogy a két csapat közül legalább az egyik nyert”*, azaz nem igaz, hogy a Falábúak vagy a Kurtalábúak nyertek. Tehát az első két pontbeli két kijelentés ugyanazt mondja, azaz $\neg(F \vee K) = \neg F \wedge \neg K$.

Megoldás (c)

Nem lett holtversenyben első a Falábúak és a Kurtalábúak csapata = = nem igaz, hogy nyertek a Falábúak, és nyertek a Kurtalábúak is = = $\neg(F \wedge K)$.

Megoldás (d)

A Falábúak és a Kurtalábúak közül az egyik biztos nem nyert = a Falábúak nem nyertek, vagy a Kurtalábúak nem nyertek = $\neg F \vee \neg K$.

A *„Falábúak és a Kurtalábúak közül az egyik biztos nem nyert”* kijelentés azt mondja, hogy nem nyerhetett egyszerre mindkét csapat, azaz nem lett holtversenyben első a Falábúak és a Kurtalábúak csapata. Tehát az utóbbi két pontbeli kijelentés ugyanazt mondja, azaz $\neg(F \wedge K) \equiv \neg F \vee \neg K$.

Ezek az azonosságok tetszőleges kijelentésekre teljesülnek a kijelentések tartalmától függetlenül. Ezt mondja ki a következő tétel:

TÉTEL: **Tetszőleges A és B kijelentésekre a „nem igaz, hogy A és B” kijelentés logikai értéke egyenlő a „nem A vagy nem B” logikai értékével, továbbá a „nem igaz, hogy A vagy B” kijelentés logikai értéke egyenlő a „nem A és nem B” logikai értékével (*De Morgan-azonosságok*).**

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B,$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B.$$

De Morgan-azonosságok

6. példa

András ezt mondja: *„Moziba megyek, és úszom vagy biciklizek.”* Béla pedig azt mondja: *„Moziba megyek és úszom, vagy biciklizek.”* Ugyanazt mondják-e?

Megoldás

András akkor és csak akkor mond igazat, ha moziba megy, és emellett az úszás és biciklizés közül legalább az egyiket csinálja. Másképp is mondhatta volna, például: *„Moziba megyek és úszom, vagy moziba megyek és biciklizek.”*



Béla állítása lehet igaz úgy is, hogy moziba megy és úszik, vagy csak biciklizik, vagy mindhármat csinálja.

András állítása nem teljesül, ha csak biciklizik, tehát kettejük kijelentése nem ugyanaz.

◆ ◆ ◆

Az összetett kijelentések pontos értelmét világosabban láthatjuk, ha felírjuk logikai műveletek segítségével. A kijelentéseket jelöljük betűkkel: M = moziba megyek, U = úszom, B = biciklizek. Így András kijelentése: $M \wedge (U \vee B)$. Béla kijelentése: $(M \wedge U) \vee B$.

Mit jelenthet a következő üzenet?

A királynőt megölni nem kell félnetek jó lesz ha ti akarjátok én nem ellenzem.

(Erkel Ferenc: Bánk bán opera)

Láthatjuk, hogy kettejük kijelentése a zárójelezésben különbözik, ami azt mutatja, hogy ha egy összetett kijelentésben megváltoztatjuk a zárójelek helyét, a kijelentés megváltozhat. A szövegben a zárójelek helyét vesszővel próbáltuk érzékeltetni.

András kijelentése másképp: $(M \wedge U) \vee (M \wedge B)$. Ebből azt sejthetjük, hogy igaz a következő azonosság:

$$M \wedge (U \vee B) \equiv (M \wedge U) \vee (M \wedge B).$$

Általánosan:

disztributivitás

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A valós számok körében a szorzás disztributív az összeadásra nézve: $a \cdot (b + c) = ab + ac$, de az összeadás nem disztributív a szorzásra nézve.

TÉTEL: **A *konjunkció disztributív a diszjunkcióra nézve,* azaz tetszőleges A, B, C kijelentésekre:**
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

A *diszjunkció disztributív a konjunkcióra nézve,* azaz tetszőleges A, B, C kijelentésekre:
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Kihasználtuk, hogy **a logikai műveletek eredménye csak a tagok logikai értékétől függ.** Akármilyen kijelentést írhatunk A és B helyébe, $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ teljesül az A, B kijelentések tartalmától függetlenül.

A $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ egyenlőség **A és B minden lehetséges logikai értékére fennáll,** tehát **azonosság.**

Feladatok

1. 2 fehér, 2 piros, 2 kék, 2 zöld és 2 sárga golyó összevissza van elhelyezve kettesével egy fehér, egy piros, egy kék, egy zöld és egy sárga dobozban. A következő állítások ismeretében találd ki, hogyan helyezkednek el a golyók!
   A = Egyik golyó sincs vele megegyező színű dobozban.
   B = A sárga dobozba zöld és kék színű golyó került.
   C = A kék dobozban van egy sárga golyó.
   D = A piros dobozban nincs kék golyó.
   E = Egy piros és egy zöld golyó együtt van a fehér vagy a sárga dobozban.
   F = Egyetlen olyan doboz van, amelyikben együtt van a fehér és a sárga golyó.



2. Fogalmazzuk meg a következő kijelentések tagadását (negációját)!
   p = A négyzet minden szöge derékszög.
   q = Minden háromszög derékszögű.
   r = A szabályos ötszögnek egyik szöge sem derékszög.
   s = Van olyan deltoid, amely rombusz.
   t = Van olyan trapéz, amelyik nem paralelogramma.
   u = Létezik homorúszögű háromszög.
   w = Bármely háromszög köré kör írható.
   A = A 3 kisebb, mint a π.
   B = A 4 nagyobb vagy egyenlő, mint az 5.
   C = Szabályos dobókockával legfeljebb 6-ost dobhatunk.
   D = A 9-nek legalább 3 osztója van.
   E = Van olyan másodfokú egyenlet, amelynek legalább 3 gyöke van.

3. Fogalmazzuk meg azokat a kijelentéseket, melyeknek negációja a következő:
   A = Van olyan falu, ahol nincs posta.
   B = Minden ember kékszemű.
   C = Minden póknak legfeljebb 8 szeme van.
   D = Van olyan év, amikor a február 30 napos.
   E = Minden szállodában minden szobában van telefon.
   F = Van olyan munkahely, ahol van olyan ember, aki dolgozik.

4. A Hazig-sziget egyik falujában a lakosok az *igen* és *nem* szavak helyett a *plink* és *plank* szavakat használják, de nem tudjuk, hogy melyik helyett melyiket. Tegyünk fel egy kérdést egy falubelinek, amelyre mindenképpen *plink* a válasz!

5. Niki igazmondó vagy hazug, hasonlóan Piki is és Tiki is igazmondó vagy hazug. Az igazmondó mindig igazat mond, a hazug mindig hazudik. Ki biztosan igazmondó közülük, ha a következőket mondják?
   a) Niki: *„Piki hazug."*
   Piki: *„Tiki hazug."*
   Tiki: *„Niki és Piki hazug."*
   b) Niki: *„Mindhárman hazugok vagyunk."*
   Piki: *„Pontosan egy hazug van közöttünk."*

6. Ha H = ma hétfő van, és F = fáradt vagyok, akkor írjuk fel logikai műveletek segítségével a következő kijelentéseket, majd írjuk fel a negációjukat:
   a) Ma nem hétfő van.
   b) Ma hétfő van, és fáradt vagyok.
   c) Ma hétfő van, de nem vagyok fáradt.
   d) Ma nincs hétfő, mégis fáradt vagyok.
   e) Ma nincs hétfő, és nem is vagyok fáradt.

7. Ha M = ma hétfő van, és T = tegnap vasárnap volt, akkor írjuk fel logikai műveletek segítségével a következő kijelentéseket, majd írjuk fel a negációjukat:
   a) Ma hétfő van, vagy tegnap vasárnap volt.
   b) Ma nem hétfő van, vagy tegnap nem vasárnap volt.
   c) Tegnap nem volt vasárnap, vagy ma hétfő van.
   d) Ma nincs hétfő, vagy tegnap nem volt vasárnap.
   Mely napokon igazak a fenti kijelentések?



8. Írjuk le szavakkal az alábbi kijelentéseket, ha P = én megyek, Q = te mégy, R = Ottó megy.
   a) $P \wedge (Q \vee R)$; *b)* $(Q \wedge P) \vee (R \wedge P)$; *c)* $\neg(P \wedge Q)$; *d)* $\neg Q \vee \neg P$.

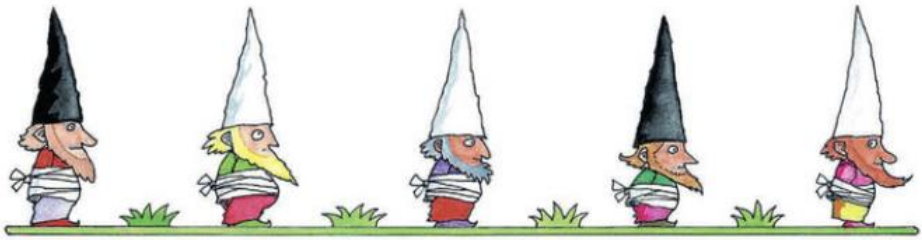
9. Legyen A = Kati szomorú, B = Kati mérges, C = Kati vidám. Írjuk fel logikai műveletekkel a következő kijelentéseket:
   a) Kati szomorú is, mérges is, semmiképpen sem vidám.
   b) Kati szomorú vagy mérges, de nem vidám.
   c) Kati nem szomorú, és nem is mérges, azért még nem vidám.
   d) Kati szomorú és mérges, vagy vidám.

10. A Cock Robin gyilkosságnak öt gyanúsítottja van. A kihallgatás során a következő állítások hangzanak el:
   A: C és D hazudik.
   B: A és E hazudik.
   C: B és D hazudik.
   D: C és E hazudik.
   E: A és B hazudik.
   Ki hazudik?

11. Az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD, DA oldalai rendre 1, 9, 8, 6. Tekintsük a következő öt kijelentést:
   p = Az $ABCD$ négyszög köré kör írható.
   q = Az $ABCD$ négyszög nem körbe írható.
   r = Az AC és BD átlók nem merőlegesek.
   s = Az $ADC\sphericalangle \geq 90°$.
   t = A BCD háromszög egyenlő szárú.
   Írjuk le a következő kijelentéseket, és válasszuk ki, melyik igaz!
   a) $p \wedge \neg q \wedge r$; *b)* $p \wedge \neg s \wedge t$; *c)* $r \wedge \neg s \wedge \neg t$; *d)* $\neg q \wedge \neg r \wedge s$.

Rejtvény

Egy gonosz varázsló elfog 100 törpét. A következő ajánlatot teszi nekik: Egy egyenes sorba állítja őket úgy, hogy mindenki az összes előtte levőt látja, de senkit nem lát maga mögött. Majd ezután mindegyiknek a fejére egy fekete vagy egy fehér sapkát ad. Ezután, kezdve a sor végén álló törpével minden törpének tippelni kell arra, hogy milyen színű sapkát visel. Ha eltalálja, akkor megszabadul, ha nem, meghal. Milyen stratégiát javasolsz a törpéknek, hogy minél több kiszabaduljon, feltéve, hogy a törpék hallják egymás válaszát, okosak, és előre megbeszélhetik a stratégiát?





3. Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia



A matematikában gyakran találkozunk olyan állításokkal, amelyek *ha …, akkor …* szerkezetűek, például: *„Ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal.”* Vizsgáljuk az ilyen típusú kijelentéseket logikai szempontból!

1. példa

Panni macskája minden reggel dorombol, ha aznap esni fog az eső. Ma reggel dorombol. Vigyen-e Panni esernyőt?

Megoldás

A macskának az a tulajdonsága, hogy ha esni fog az eső, akkor dorombol. Ez nem mond semmit arról az esetről, ha nem esik az eső, azaz ha nem fog esni az eső, akkor vagy dorombol, vagy nem. Tehát Panni macskája dorombolhat akkor is, ha nem esik az eső, vagyis nem feltétlenül szükséges Panninak esernyőt vinnie.

2. példa

A Hazig-szigeten két szigetlakóval találkozunk. A magasabbik azt mondta: *„Ha én lovag vagyok, akkor a társam is az.”* Meg lehet-e mondani, hogy mifélék?

Megoldás

Ha a magasabbik lovag, akkor igaz az állítása, így mivel ő lovag, a társa is az. Ha a magasabbik lókötő, akkor nem teljesül rá az állítás feltétele (hogy ő lovag), így akármiféle a társa, az állítás igaz. Márpedig lókötő nem mondhat igazat.

A *„ha lovag vagyok, akkor p”* kijelentésből következik, hogy *p* igaz.

Tehát csak az lehetséges, hogy mindketten lovagok.

3. példa

A Hazig-szigeten találkozunk két szigetlakóval, egy férfival és egy nővel. A nő azt mondja: *„Ha ez a férfi lovag, akkor én lókötő vagyok.”* Meg lehet-e mondani, mifélék?

Megoldás

Ha a férfi lovag, és a nő lókötő, akkor az állítás igaz, az viszont nem lehet, mert lókötő nem mondhat igazat.

Ha a férfi lovag, és a nő is lovag, akkor az állítás hamis, az viszont nem lehet, mert lovag nem hazudhat.

Ha a férfi lókötő, akkor nem teljesül az állítás feltétele, így a nő akármiféle lehet, az állítás igaz. Mivel az állítás igaz, a nő csak lovag lehet.

Tehát a nő lovag, a férfi lókötő.



implikáció

ha A, akkor B = B, ha A = B, feltéve, hogy A = A elégséges feltétele B-nek

DEFINÍCIÓ: **A „ha A, akkor B" kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet *implikációnak* nevezzük, amelynek A az *előtagja* és B az *utótagja*. Az implikáció logikai értéke pontosan akkor hamis, ha az előtagja igaz és az utótagja hamis, különben az implikáció igaz.**

Jele: $A \to B$, azaz „A implikálja B-t", azaz „ha A, akkor B".

A	B	$A \to B$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

4. példa

Igaz-e a következő implikáció:

Ha a Hold sajtból van, akkor ez matematikakönyv.

Megoldás

Mivel az implikáció előtagja, A = *A Hold sajtból van,* hamis, ezért az utótag, B = *Ez matematikakönyv,* logikai értékétől függetlenül az $A \to B$ implikáció igaz.

Ez persze nem jelenti azt, hogy a $B \to A$ is igaz, hiszen ez matematikakönyv, a Hold mégsincs sajtból.

◆ ◆ ◆

az implikáció nem kommutatív

A ruhatárba le nem adott tárgyakért felelősséget nem vállalunk.

Következik-e ebből, hogy a leadottakra vállalnak?

Az implikáció **nem kommutatív** művelet, azaz $A \to B$ állítás nem azonos $B \to A$ állítással, ami az $A \to B$ állítás **megfordítása.**

az implikáció nem asszociatív

Az implikáció **nem asszociatív** művelet, azaz $(A \to B) \to C$ nem azonos $A \to (B \to C)$.

állítás: $A \to B$ = A elégséges feltétele B-nek

állítás megfordítása: $B \to A$ = A szükséges feltétele B-nek

5. példa

Írjuk fel a logikai műveletekkel a következő kijelentéseket, ha F = A bajnokságot a Falábúak nyerik, K = Megeszem a kalapom.

a) Ha a bajnokságot a Falábúak nyerik, akkor megeszem a kalapom.

b) Nem nyernek a Falábúak, vagy megeszem a kalapom.

c) Ha nem eszem meg a kalapom, akkor nem nyernek a Falábúak.

d) Nem igaz, hogy nyernek a Falábúak és nem eszem meg a kalapom.

Megoldás

a) $F \to K$; *b)* $\neg F \vee K$; *c)* $\neg K \to \neg F$; *d)* $\neg(F \wedge \neg K)$.

Figyeljük meg, hogy mindegyik kijelentés abban az egy esetben lesz hamis, ha a Falábúak nyernek, és mégsem eszem meg a kalapom.

Általánosan is igaz a következő:

$A \to B \equiv \neg A \vee B$

TÉTEL: **Tetszőleges A, B kijelentésekre $A \to B \equiv \neg A \vee B$.**



Matematikában sokszor használtuk az *akkor és csak akkor* kifejezést, például: *„Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel."* Ez egyrészt azt jelenti, hogy ha a szám osztható 9-cel, akkor a számjegyeinek összege is osztható 9-cel, másrészt azt, hogy ha a szám számjegyeinek összege osztható 9-cel, akkor a szám is osztható 9-cel.

6. példa

A Hazig-szigeten az utazó találkozik egy szigetlakóval, és megkérdezi tőle, hogy van-e arany a szigeten, mire a következő választ kapja: *„Ha lovag vagyok, akkor és csak akkor van arany a szigeten."* Mit tud ebből az utazó?

Megoldás

A szigetlakó kijelentése másképpen úgy hangzik, hogy *„ha lovag vagyok, akkor van arany a szigeten, és ha van arany a szigeten, akkor lovag vagyok."*

Ha a szigetlakó lovag, akkor a kijelentése igaz, és mivel igaz az, hogy lovag, az is igaz lesz, hogy van arany a szigeten.

A *„ha lovag vagyok, akkor és csak akkor p"* kijelentésből következik, hogy *p* igaz.

Ha a szigetlakó lókötő, akkor hamis, hogy ő lovag. Ekkor a *„ha lovag vagyok, akkor van arany a szigeten"* kijelentés mindenképpen igaz.

Ha hamis lenne, hogy van arany a szigeten, akkor a *„ha van arany a szigeten, akkor lovag vagyok„* kijelentés is igaz lenne, így a lókötőnek a *„ha lovag vagyok, akkor és csak akkor van arany a szigeten"* kijelentése igaz lenne, ami nem lehetséges.

Tehát a szigetlakó lovag, és van arany a szigeten.

DEFINÍCIÓ: **Az „A akkor és csak akkor B" kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet *ekvivalenciának* nevezzük. Az ekvivalencia logikai értéke pontosan akkor igaz, ha A és B logikai értéke megegyezik, különben az ekvivalencia hamis.**

Jele: $A \leftrightarrow B$, azaz „A ekvivalens B-vel", azaz „A, akkor és csak akkor B".

ekvivalencia

ha A, akkor és csak akkor B = = A ekvivalens B-vel = = A szükséges és elégséges feltétele B-nek

Az értéktáblázat alapján könnyen igazolhatók az **ekvivalencia művelet tulajdonságai** tetszőleges A, B, C kijelentésekre:

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

(1) **kommutatív:** $A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$;

(2) **asszociatív:** $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$;

(3) $A \leftrightarrow A \equiv i$; $A \leftrightarrow i = A$; $A \leftrightarrow h = \neg A$.

Az A *akkor és csak akkor* B jelenti egyrészt azt, hogy *ha* A, *akkor* B, másrészt azt, hogy *ha* B, *akkor* A. Ezt fejezi ki a következő tétel:

TÉTEL: **Tetszőleges A, B kijelentésekre:**
$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.



7. példa

Írjuk fel a következő összetett kijelentések logikai szerkezetét:

a) Ha –2 nagyobb, mint nulla, akkor –2 nem negatív.

b) Ha –2 kisebb, mint nulla, akkor –2 negatív.

c) Ha –2 pozitív vagy nulla, akkor és csak akkor nem negatív.

d) A –2 nem nulla, akkor és csak akkor, ha pozitív vagy negatív.

Megoldás

Vezessük be a következő jelöléseket:

p = –2 nagyobb, mint nulla; q = –2 kisebb, mint nulla;
r = –2 negatív; s = –2 pozitív;
t = –2 nulla.

a) $p \rightarrow \neg q$; *b)* $q \rightarrow r$; *c)* $(s \vee t) \leftrightarrow \neg r$; *d)* $\neg t \leftrightarrow (r \vee s)$.

Figyeljük meg, hogy mindegyik kijelentés igaz!

Feladatok

1. Írjuk fel logikai műveletekkel a következő kijelentéseket, ha A = A jég legalább 20 cm a tavon, B = Megyek korcsolyázni a tóra.
   a) Ahhoz, hogy menjek korcsolyázni a tóra, legalább 20 cm jég kell legyen rajta.
   b) Ha nincs legalább 20 cm jég a tavon, nem megyek korcsolyázni a tóra.
   c) Megyek korcsolyázni a tóra, ha legalább 20 cm jég van rajta.
   d) Legalább 20 cm jég van a tavon, vagy nem megyek korcsolyázni.

2. Legyen A = Ma péntek van, és B = Holnap szombat lesz. Írjuk fel logikai műveletekkel a következő kijelentéseket:
   a) Ha ma péntek van, akkor holnap szombat lesz.
   b) Ha holnap nem szombat lesz, akkor ma nem péntek van.
   c) Ahhoz, hogy holnap szombat legyen, szükséges, hogy ma péntek legyen.
   d) Holnap szombat lesz, ez elégséges ahhoz, hogy ma péntek legyen.
   e) Holnap nem szombat lesz, ez elegendő ahhoz, hogy ma ne péntek legyen.
   f) Akkor és csak akkor lesz holnap szombat, ha ma péntek van.
   g) Ma péntek van, ez szükséges és elegendő ahhoz, hogy holnap szombat legyen.

3. Legyenek a következő kijelentések:
   A = Az n szám 12-vel osztható. B = Az n szám 36-ra végződik.
   C = Az n szám prím. D = Az n szám páros.
   E = Az n szám 4-gyel osztható. F = Az n szám 6-tal osztható.
   G = Az n szám számjegyeinek összege 3-mal osztható.
   Fogalmazzuk meg a következő kijelentéseket:
   a) $B \rightarrow E$; *b)* $E \rightarrow B$; *c)* $A \rightarrow \neg C$; *d)* $\neg C \rightarrow A$;
   e) $E \rightarrow (\neg C \wedge D)$; *f)* $(D \wedge G) \leftrightarrow F$; *g)* $A \leftrightarrow (E \wedge G)$; *h)* $(\neg D \wedge G) \rightarrow \neg F$.



4. Írjuk fel a következő kijelentések megfordítását!

a) Ha esik az eső, akkor vizes az úttest.

b) Ha vettél színházjegyet, akkor megnézed az előadást.

c) Ha 6-ost dobsz, akkor megnyered a játékot.

d) Ha egy állatnak négy lába van, akkor az az állat kutya.

5. Írjuk fel a következő állítások megfordítását! Mindegyik állításról és a megfordításáról is döntsük el, hogy igaz, vagy hamis!

a) Ha egy szám osztható 2-vel, akkor a szám osztható 4-gyel.

b) Ha egy szám számjegyeinek összege osztható 9-cel, akkor a szám osztható 9-cel.

c) Ha egy négyszög deltoid, akkor a négyszög négyzet.

d) Ha egy háromszögben az egyik oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével, akkor a háromszög derékszögű.

e) Ha egy esemény lehetetlen, akkor az esemény valószínűsége 0.

f) Ha egy állítás igaz, akkor a tagadása hamis.

g) Ha egy állítás igaz, akkor az állítás megfordítása igaz.

6. Írjuk fel a következő összetett kijelentések logikai szerkezetét:

a) Ha egy négyszög téglalap, és szomszédos oldalai egyenlők, akkor négyzet.

b) Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével.

c) Ha egy szám négyzete 4-nél nagyobb, akkor a szám 2-nél nagyobb vagy –2-nél kisebb.

d) Ha két egész szám szorzata páros, akkor nem lehet mindkét szám páratlan.

7. Egy pozitív egész számról 5 gyerek a következőket állítja:

Pista: A szám osztható 3-mal.

Jóska: A szám osztható 4-gyel.

Zoli: A szám osztható 6-tal.

Kati: A szám osztható 9-cel.

Erzsi: A szám osztható 12-vel.

Melyik gyerek állítása hamis, ha tudjuk, hogy az állítások közül pontosan egy hamis?

8. Ha Gabi fiú, akkor Gabi fiatalabb, mint Zsuzsi. Ha Gabi 18 éves, akkor Gabi lány. Ha Gabi nem 18 éves, akkor Gabi legalább olyan idős, mint Zsuzsi. Eldönthető-e ebből, hogy Gabi fiú-e vagy lány?

9. A Hazig-szigeten megkérdezünk egy szigetlakót: *„Ekvivalens az az állítás, hogy van arany ezen a szigeten azzal az állítással, hogy ön lovag?”* Mit tudhatunk meg abból, hogy a szigetlakó *igennel* válaszol? És ha *nemmel* válaszol?

Rejtvény

Az alábbi négy kártyát látjuk: 1 2 3 4.

Mindegyik kártya mindkét oldalán egy-egy számjegy áll az 1, 2, 3, 4 közül. Legkevesebb hány kártyát kell megfordítani, hogy eldöntsük: igaz-e mindegyik kártyára a következő állítás: *„Ha a kártya egyik oldalán 2-es áll, akkor a másik oldalán 4-es”?*



4. Teljes indukció (emelt szintű tananyag)

A problémák megoldásának hasznos módszere, az indukció, melynek során az egyes esetekre kapott eredményt általánosítjuk. Így egy sejtést kapunk, amelyet akkor fogadhatunk el igaznak, ha bebizonyítjuk helyességét.

1. példa

Hány részre osztja a síkot egy adott P ponton átmenő n darab, egy síkban levő egyenes?

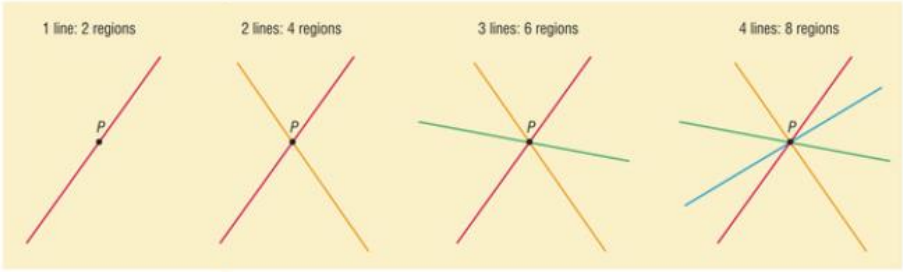
Megoldás

Próbálkozzunk először néhány egyenessel.

1 egyenes 2 részre osztja a síkot.

A 2. egyenest behúzva 4, a 3. egyenest behúzva 6 részt kapunk.

A 4. egyenes behúzásakor az egyenest a P pont két félegyenesre bontja, amelyek egy-egy szögtartományt két-két részre osztanak, így a síkrészek száma 2-vel nő, azaz 8 lesz. *(1. ábra)*



1. ábra

Az egyenesek egymás utáni behúzását tekintsük láncnak:

$$1 \text{ egyenes} \rightarrow 2 \text{ egyenes} \rightarrow 3 \text{ egyenes} \rightarrow \dots$$

Az első néhány esetben azt vesszük észre, hogy a kapott síkrészek száma 2-szerese az egyenesek számának. 3 egyenes 6 részre osztja a síkot, a 4. egyenes 2-vel növeli a síkrészek számát, így a síkrészek száma 8 lesz. Hasonlóképpen lehet továbblépni a lánc tetszőleges n-edik eleméről az $n + 1$-edikre. Tegyük fel, hogy n egyenes esetén a síkrészek száma $2n$, ekkor az $n + 1$-edik egyenes két síkrészt vág ketté, így 2-vel nő a síkrészek száma:

$$2n + 2 = 2 \cdot (n + 1).$$

Így belátható minden pozitív egész n-re, hogy n darab egy ponton átmenő egyenes $2n$ részre osztja a síkot.

◆ ◆ ◆



A bizonyítás módszere az volt, hogy egy lánc első néhány elemét meghatároztuk, és megmutattuk, hogyan lehet a lánc tetszőleges elemétől a következőre lépni, így a lánc végigjárható.

Ez a bizonyítási módszer jól alkalmazható olyan állítások igazolására, melyek n pozitív egész számtól függnek.

A TELJES INDUKCIÓ ELVE:

Adott egy n pozitív egész számtól függő állítás.

1. Bebizonyítjuk az állítást $n = 1$-re;

2. Feltesszük, hogy az állítás igaz n-re (indukciós feltevés), és bebizonyítjuk $n + 1$-re.

Ezzel az állítást minden n pozitív egész számra bebizonyítottuk.

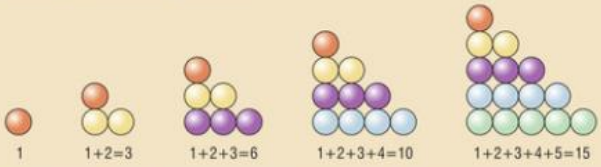
a teljes indukció elve

Leonard Euler találta az $n^2 + n + 41$ polinomot, amely 1-től 39-ig minden n-re prímszámot ad. Vajon igaz ez tovább is?

A teljes indukció elve szemléltethető például egy egymás után felállított, elvileg végtelen hosszú dominósorral. Ha az első dominót meglökjük, és mindegyik dominó ledönti az utána következőt, akkor az összes dominó ledől.

2. példa

Háromszögszámokat kapunk, ha kavicsokat háromszög alakban rendezünk el úgy, hogy mindegyik sorban 1-gyel több kavics van, mint a fölötte levőben. A háromszögszámok:



Mennyi a 100-adik háromszögszám? Mennyi az n-edik háromszögszám?

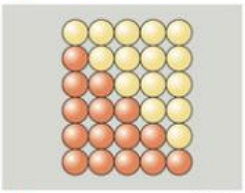
Püthagorasz és követői nagy jelentőséget tulajdonítottak a számoknak. Összefüggéseket fedeztek fel az alapján, hogy a számokat kavicsokkal különböző formában rakták ki. Különös jelentést tulajdonítottak a 10-nek, amely a világ gyökereinek tekintett 1, 2, 3, 4 számok összege, ezáltal a világ teljességét jelképezi. Háromszög alakban elrendezve a 10 a pitagoreusok titkos jelképe, a szent tetraktüsz.

Megoldás

A 100-adik háromszögszám kiszámítása $1+2+3+4+\ldots+98+99+100$ alakban elég időigényes, érdemes képletet keresni az összeg kiszámítására.

A háromszög alakban kirakott számból vegyünk kettőt, és tegyük egymás tetejére őket *(2. ábra)*. Így egy téglalapot kapunk, ami alapján azt sejtjük, hogy az n-edik háromszögszám:

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$



2. ábra

Bizonyítsuk be a sejtést teljes indukcióval:

$n = 1$-re: $1=\frac{1\cdot 2}{2}$, tehát az állítás igaz.

indukciós feltevés

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re, azaz

$$1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2},$$

és bizonyítsuk be $n+1$-re:

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$

Az $n+1$-edik háromszögszám: $1+2+\ldots+n+(n+1)$. Az első n tag összege helyébe az indukciós feltétel alapján beírjuk az $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$-t, így

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)=$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A képlet segítségével könnyen kiszámítható az első 100 pozitív egész szám összege:

$$\frac{100\cdot101}{2}=5050.$$

3. példa

Számítsuk ki az első 100 pozitív egész szám köbének összegét!

Megoldás

Próbálkozzunk kisebb számokkal:

$n=1$: $1^3=1$; $n=2$: $1^3+2^3=9$;

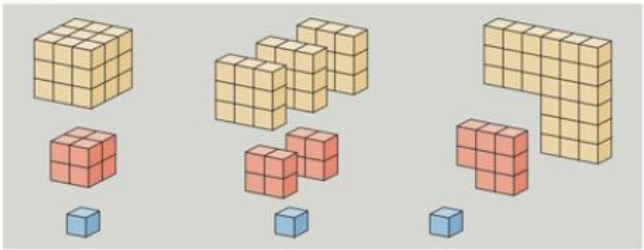
$n=3$: $1^3+2^3+3^3=36$; $n=4$: $1^3+2^3+3^3+4^3=100$.



A konkrét esetek alapján azt sejtjük, hogy a köbök összege négyzetszám lesz. Vajon mely számok négyzete jelenik meg itt?

Nézzük az alábbi ábrát! A köbszámokat kockákkal ábrázoltuk (az átláthatóság kedvéért csak az első hármat). A kockákat szétvágtuk egység vastagságú lapokra, a páros oldalszámúakat tovább daraboltuk, majd négyzetet raktunk össze.

3. ábra





$n = 3$ esetén a kapott négyzet oldala: $1 + 2 + 3$, azaz $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$, vagyis az a sejtésünk, hogy az első n pozitív egész szám köbének összege az n-edik háromszögszám négyzete. Felhasználva az n-edik háromszögszámra az előző példában kapott képletet, azt állítjuk, hogy:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (n\in\mathbb{N}^+).$$

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

$n = 1$-re: $1^3=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$, az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re (indukciós feltevés):

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2.$$

Bizonyítsuk be $n+1$-re, azaz bizonyítsuk be, hogy igaz a következő egyenlőség:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right]^2.$$

A bal oldalon az első n tag helyébe az indukciós feltevés alapján beírva a képletet, kapjuk:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=$$

$$=\frac{n^2\cdot(n+1)^2+4\cdot(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2\cdot(n^2+4n+4)}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{4}=\left[\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right]^2.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk minden n pozitív egész számra.

Láthatjuk, hogy a legnehezebb lépés a jó sejtés megtalálása volt.

A teljes indukció alkalmazható oszthatósági feladatok megoldására is.

4. példa

Bizonyítsuk be, hogy $4^n + 15n - 1$ osztható 9-cel minden $n\in\mathbb{N}^+$-ra.

Megoldás

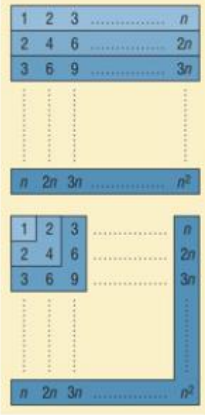
A bizonyítást teljes indukcióval végezzük:

$n = 1$-re az állítás: $4^1 + 15 - 1 = 18$, osztható 9-cel, ez igaz.

Tegyük fel, hogy $9 \mid 4^n + 15n - 1$, és bizonyítsuk be, hogy

$$9 \mid 4^{n+1} + 15\cdot(n+1) - 1.$$

A szorzótáblának megfelelő számtáblázatban levő számokat adjuk össze először soronként, majd ⌟ alakonként. Lépésenként egyre nagyobb négyzetekkel számolva fogalmazzunk meg sejtést!





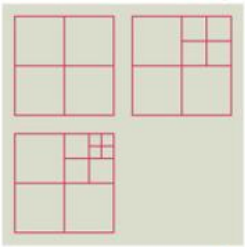
A $4^{n+1}+15\cdot(n+1)-1$ kifejezést úgy alakítjuk át, hogy szerepeljen benne a $4^n+15n-1$, ami az indukciós feltétel alapján osztható 9-cel.

$$4^{n+1}+15\cdot(n+1)-1 = 4\cdot4^n+15n+15-1 =$$
$$= 4\cdot(4^n+15n-1)-4\cdot15n+4+15n+14 =$$
$$= 4\cdot(4^n+15n-1)-45n+18 = 4\cdot(4^n+15n-1)-9\cdot(5n-2).$$

A különbség első tagja az indukciós feltevés alapján osztható 9-cel, a második tag egy egész szám 9-szerese, ezért osztható 9-cel, tehát a különbség is osztható 9-cel.

Tehát $4^n+15n-1$ osztható 9-cel minden $n\in\mathbb{N}^+$-ra.

◆ ◆ ◆

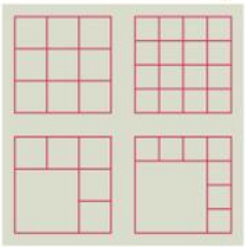


4. ábra

Vizsgáljuk meg, hogy ha egy négyzetet kisebb négyzetekre vágunk szét, hány darab négyzetet kaphatunk!

Egy négyzet négy darab négyzetre szétvágható, majd bármelyik darab újabb négy négyzetre vágható, így a négyzetek száma 3-mal növelhető, kaphatunk 4, 7, 10, … négyzetet *(4. ábra)*. A kapott négyzetek nem feltétlenül egybevágóak.

A négyzet oldalát egyenlő részekre osztva az osztópontokat a négyzet oldalaival párhuzamosan összekötve a négyzetet 9, 16, … négyzetre vágtuk szét, a kis négyzetek száma négyzetszám *(5. ábra)*.



5. ábra

Az előbbi két darabolásból néhány szakaszt kitörölve a négyzetet 6, 8 kisebb négyzetre vágtuk szét.

Egy négyzetet négy négyzetre vágva 8 négyzetből kaphatunk 11-et, 9-ből 12-t, 10-ből 13-at stb. Az a sejtésünk, hogy minden $n\geq 6$-ra igaz, hogy egy négyzet szétvágható n darab négyzetre.

5. példa

Bizonyítsuk be, hogy egy négyzet szétvágható n darab négyzetre minden $n\geq 6$ esetén!

Megoldás

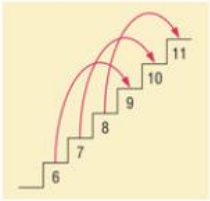
A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Mivel hármasával tudunk haladni a láncban, a bizonyítás három részből áll, $n=3k$, $n=3k+1$ és $n=3k+2$ alakú számokra.

$k=2$-re: egy négyzet szétvágható 6, 7 és 8 darab négyzetre *(4–5. ábra)*.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz k-ra: egy négyzet szétvágható $n=3k$, $n=3k+1$ és $n=3k+2$ darab négyzetre, bizonyítsuk be $k+1$-re: egy négyzet szétvágható $3\cdot(k+1)=3k+3$, $3\cdot(k+1)+1=3k+1+3$, $3\cdot(k+1)+2=3k+2+3$ darab négyzetre. Mivel ezek az előzőekből elérhetők úgy, hogy egy négyzetet négy darabra vágunk szét, és ezzel a négyzetek számát 3-mal növeljük, az állítást bebizonyítottuk.

A fenti példában látható, ha n-re nézzük a teljes indukciót, akkor nem egyesével lépkedtünk, hanem hármasával. Ekkor viszont a lánc elején három egymás utáni n-re kellett megmutatnunk, hogy az állítás igaz. A teljes indukció ilyen módon is alkalmazható.

Lépcső: 3 lépcsőfokról indulva hármasával haladunk, így végigjárjuk a lépcsőt.





Feladatok

1. Bizonyítsuk be tetszőleges n pozitív egész számra:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

2. Bizonyítsuk be tetszőleges n pozitív egész számra, hogy

a) 19 osztója az $5^{2n-1}\cdot 2^{n+1}+3^{n+1}\cdot 2^{2n-1}$-nek.

b) 11 osztója a $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$-nek.

c) 17 osztója a $2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}$-nek.

3. Igaz-e minden $n\geq 6$ természetes számra, hogy egy szabályos háromszög n darab szabályos háromszögre szétvágható?

4. A Bog bolygó pénze a dig. A bankban csak 3 és 5 dig értékű címletek vannak, azok viszont korlátlanul.

a) Ki tudnak-e fizetni 2002 diget?

b) Ki tudnak-e fizetni 2003 diget?

c) Igaz-e, hogy minden 5 dignél nagyobb pénzösszeget ki tudnak fizetni?

5. Van egy papírlap. Egy lépésben egy papírdarabot 3 részre tépünk szét. Pisti egyszer megszámolta az így kapott papírdarabokat, és azt mondta: *„Most éppen 2004 darab papír van."* Anna közölte vele, hogy tévedett. Ki tévedett?

6. Van egy papírdarab. Egy lépésben egy papírdarabot 4 vagy 6 részre tépünk szét.

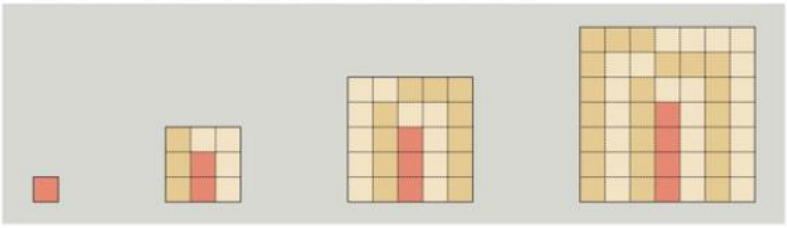
a) Lehetséges-e, hogy az így kapott papírdarabok száma 2002?

b) Lehetséges-e, hogy az így kapott papírdarabok száma 2003?

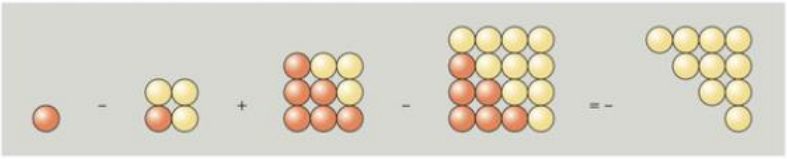
c) Igaz-e, hogy a papírdarabok száma tetszőleges pozitív egész szám lehet?

7. Milyen szabályosság figyelhető meg a következő összegekben, és hogyan lehet kiszámítani az összegeket? Sejtésünket igazoljuk!

a) $1,\ 2+3+4,\ 3+4+5+6+7,\ 4+5+6+7+8+9+10,\ \ldots$



b) $1^2,\ 1^2-2^2,\ 1^2-2^2+3^2,\ 1^2-2^2+3^2-4^2,\ \ldots$





8. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket bármely n pozitív egész számra:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$;

b) $2^n \geq 2n$.

9. Osszuk fel a síkot n ($n\in\mathbb{N}^+$) egyenessel a lehető legtöbb részre! Hány síkrészt kaptunk?

10. Legfeljebb hány részre osztja a síkot n kör? Kiszínezhetők-e ezek a részek két színnel úgy, hogy szomszédos részek (van közös határvonaluk) különböző színűek legyenek? Mi a helyzet n háromszög esetén?

11. Mutassuk meg, hogy minden $n\geq 4$ pozitív egész számra létezik olyan konvex n-szög, amelynek pontosan 3 hegyesszöge van! (Gondoljuk meg, hogy lehet-e 3-nál több?)

12. Adottak a következő egységű tömegek: $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$. Mutassuk meg, hogy ezekkel tetszőleges $2^{n+1}-1$-nél nem nagyobb egész tömegű testet meg tudunk mérni!

Rejtvény

A széttört váza.

Tegnap a szokásosnál korábban jöttem haza a szolgálatból. Éppen asztalhoz ültem és vacsorázni kezdtem, amikor a szomszéd szobában valami leesett. Átszaladtam megnézni, mi történt, és láttam, amint egy férfi éppen kiugrik az ablakon, a padlón pedig ott hevert cserepekre törve a feleségem kedvenc vázája. A férfi után eredtem, de amint az utcára értem, a szemüvegem bepárásodott. Tudja, mostanában hidegek az esték. Megbotlottam a gereblyében, elestem, és szem elől tévesztettem a betörőt. Nagyon kérem, vállalja el az ügyet, hiszen az illető bizonyára az egész lakást ki akarta fosztani. Ráadásul a feleségemnek – aki ma jön vissza a szüleitől – is meg kell magyaráznom, hogy hogyan tört össze a váza.

Nem értem **– mondta a felügyelő –** ***hogyan félhet annyira a feleségétől, hogy hamis nyomra akar vezetni egy nyomozót egy képzeletbeli betörőről költött mesével, mintsem hogy a feleségének megmondaná az igazat.***

Miért nem volt hajlandó Szemfüles felügyelő nyomozni ebben az ügyben?

Számsorozatok

Számsorozatokkal találkozunk már az ókori görög matematikában is. Talán a legismertebb példa a Kr. e. 500 körül élt Zénón egyik paradoxonja (apóriája). A történet szerint Akhilleusz utol akarja érni a teknőst, azonban bármilyen kicsi is a teknős előnye, Akhilleusznak először el kell jutnia oda, ahol most a teknős van. Amíg Akhilleusz odaér, addig a teknős újabb utat tesz meg. Akhilleusznak tehát ezt a távolságot is meg kell tennie, de ezalatt a teknős újra előrébb jut és így tovább a végtelenségig. A gyors lábú Akhilleusz tehát csak utak végtelen sorozatán keresztül érné utol a teknőst, ami lehetetlen.



1. A sorozat fogalma, példák sorozatokra

1. példa

Írjuk fel az 1., 2., 3., n-edik pozitív páratlan számot.

Megoldás

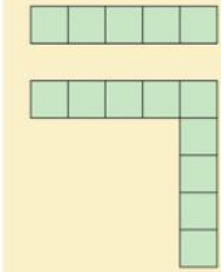
Az első páratlan szám az 1, a második a 3, a harmadik az 5, általában az n-edik $2n-1$. Ezzel magadtunk egy számsorozatot, minden pozitív egész számhoz hozzárendeltünk egy számot.

számsorozat

DEFINÍCIÓ: **A *számsorozat* olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete számhalmaz.**

Jelölése: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, vagy röviden (a_n). A sorozat n-edik tagja a_n.

Szokás néha a számsorozatot úgy is értelmezni, hogy az értelmezési tartomány a természetes számok halmaza, ilyenkor a 0-hoz is tartozik függvényérték. Hogy melyik értelmezést célszerű használni, az mindig az adott feladattól függ.



1. ábra

2. példa

Számítsuk ki az első n pozitív páratlan szám összegét.

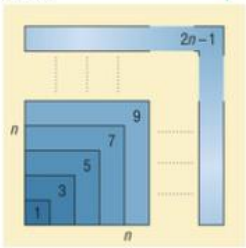
I. megoldás

Szemléltessük az egyes páratlan számokat a következő módon. Egybevágó négyzetekből álló n hosszúságú szalag szemléltesse az n-et. Például az 5-öt az 1. ábra felső részén látható szalag szemlélteti.

Ha két ilyen szalagot úgy helyezünk el, hogy egy négyzetük fedi egymást, és egymásra merőlegesek, akkor egy $2n-1$ kis négyzetből álló L betűt kapunk, pl.: a 9-et az 1. ábra alsó része szemlélteti.

Ha most az egyes páratlan számokat szemléltető L alakzatokat sorra egymáshoz illesztjük, akkor minden lépésben egy-egy négyzetet kapunk, méghozzá az n-edik lépésben éppen egy n oldalú négyzetet. *(2. ábra)*

2. ábra



Ez igazolja, hogy

$$1+3+5+\ldots+2n-1=n^2.$$

II. megoldás

Gyűjtsünk tapasztalatokat. Először határozzuk meg a keresett összeget $n=1$, 2, 3, 4, 5 esetére:

$$1=1;$$
$$1+3=4;$$
$$1+3+5=9;$$
$$1+3+5+7=16;$$
$$1+3+5+7+9=25.$$

Láthatóan az eredmények sorra a négyzetszámok. Ennek alapján azt sejtjük, hogy az első n pozitív páratlan szám összege n^2, azaz

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2.$$

Sejtésünk $n = 1$-re igaz.

Tegyük fel, hogy n-re is igaz, és mutassuk meg, hogy ebből következik, hogy az összefüggés $n + 1$-re is igaz:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Ezzel sejtésünket teljes indukcióval igazoltuk.

3. példa

A páratlan pozitív egészeket rendezzük el a következő táblázatban. (Az első sorban 1 szám van, minden következő sorban pedig 1-gyel több, mint az előzőben.)

				1				
			3		5			
		7		9		11		
	13		15		17		19	
21		23		25		27		29

A táblázattal kapcsolatban a következő kérdésekre keressük a választ:

a) Hány szám van az első n sorban összesen?

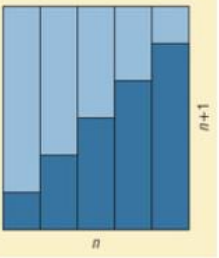
b) Melyik szám áll az n-edik sor utolsó helyén?

c) Mennyi az első n sorban álló számok összege?

d) Mennyi az n-edik sorban álló számok összege?

Megoldás (a)

Az első n sorban összesen $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ páratlan szám van. Az első n pozitív egész szám összegét már ismerjük korábbi tanulmányainkból. *(3. ábra)*



3. ábra

Megoldás (b)

Az n-edik sor utolsó helyén az $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$-edik pozitív páratlan szám áll, ez pedig az első példa szerint

$$2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1.$$

Megoldás (c)

A 2. példát alkalmazhatjuk itt, hiszen az első $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ pozitív páratlan szám összege:

$$\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2.$$

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Megoldás (d)

A (c) alkalmazásával könnyen célhoz érünk. Az első n sor összegéből levonva az első $n-1$ sor összegét, éppen az n-edik sorban álló számok összegét kapjuk:

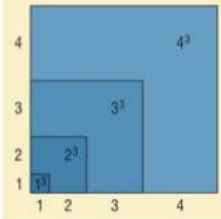
$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)^2=\frac{n^2\cdot\left((n+1)^2-(n-1)^2\right)}{4}=n^3.$$

Az n-edik sorban álló számok összege tehát az n-edik pozitív köbszám.

Érdemes ennek alapján a (c) feladat eredményét felhasználva megjegyezni, hogy az első n pozitív köbszám összege:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

A kapott összefüggést $n=4$ esetére szemléletesen mutatja a 4. ábra.



4. ábra

Eddig már igazoltuk, hogy a pozitív egész számok sorozatának első n tagját összeadva ezt kapjuk:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

A pozitív köbszámok sorozatának első n tagját összeadva ezt kapjuk:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2.$$

4. példa

Határozzuk meg a pozitív négyzetszámok sorozatából az első n tag összegét.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=s_n,\quad s_n=?$$

Megoldás

Itt egy új ötletet használunk az összeg meghatározásához. Adjuk össze a következő n egyenlőséget, amelyek nyilván igazak:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3-n^3&=3n^2+3n+1;\\
n^3-(n-1)^3&=3\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1;\\
&\vdots\\
3^2-2^2&=3\cdot2^2+3\cdot2+1;\\
2^2-1^2&=3\cdot1^2+3\cdot1+1;\\
\hline
(n+1)^3-1&=3\cdot s_n+3\cdot(1+2+\ldots+n)+n.
\end{aligned}$$

Átrendezve ezt kapjuk:

$$3\cdot s_n=(n+1)^3-(n+1)-3\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}=$$

$$=(n+1)\cdot\left(n^2+2n+1-1-\frac{3}{2}\cdot n\right)=n\cdot(n+1)\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

amiből $s_n=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

5. példa

Január 1-jén 1 Ft-ot beteszünk az Ideális Bankba évi 100%-os kamatra. Mennyi lesz év végén a betétünk értéke, ha

a) évente; *b)* havonta; *c)* naponta

tőkésítik a kamatot (azaz a kamatot is hozzáadják a tőkéhez, és onnan kezdve a megnövelt tőke kamatozik)?

Megoldás (a)

Az év végéig 1 Ft a kamat, tehát a betétünk értéke az év végén 1 + 1 = 2 Ft.

Megoldás (b)

A havonkénti tőkésítés azt jelenti, hogy minden hónap végén hozzáadják a tőkéhez a hónap elején kimutatott betét 1 havi kamatát, és a következő hónaptól már az így megnövelt betét kamatozik. Jelölje $t_1, t_2, \ldots, t_{12}$ az egyes hónapok végén a betét értékét. Ekkor

$$t_1 = 1 + \frac{1}{12},$$

$$t_2 = 1 + \frac{1}{12} + \left(1 + \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{1}{12} = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2,$$

$$t_3 = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^3,$$

$$\vdots$$

$$t_{12} = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61 \text{ Ft}.$$



Megoldás (c)

Számoljunk úgy, hogy egy évben 365 nap van. Ekkor a naponta történő tőkésítéskor mindig az éves kamat $\frac{1}{365}$-öd részét írják hozzá a tőkéhez. Ennek megfelelően év végére a betét értéke

$$\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}7145 \text{ Ft lesz.}$$

Az eddigiek alapján nyilvánvaló, hogy ha az évet n egyenlő részre osztjuk, akkor amennyiben a tőkésítést minden ilyen n-edrész eltelte után végzik, a betét értéke az év végére

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ Ft lesz.}$$

Mekkora lehet ez az érték, ha n elég nagy? Bizonyítható, hogy minden pozitív egész n-re

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \approx 2{,}71828\ldots,$$

ahol e az ún. Euler-féle szám.

Az e irracionális, sőt nem gyöke semmilyen egész együtthatós egyenletnek sem.

Ezek szerint a maximális hozam, amit az adott feltételek mellett folytonos tőkésítéssel 1 Ft betéttel el lehet érni, az 1,72 Ft nyereség.

Feladatok

1. Határozzuk meg a pozitív páros számok sorozatának n-edik tagját, és első n tagjának összegét.

2. A következő számháromszögben a pozitív egész számokat vettük sorra, mégpedig az első sorba az 1-et írtuk, és minden következő sorba két számmal többet írtunk, mint az előzőbe.

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	19	20	21	22	23	24	25

Válaszoljunk a következő kérdésekre!

a) Melyik szám áll az n-edik sor utolsó helyén?

b) Mennyi az első n sorban álló számok összege?

c) Mennyi az n-edik sorban álló számok összege?

3. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

a) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\ldots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$;

b) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}$;

c) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}$;

d) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right)$.

4. Adott két sorozat (a_n) és (b_n). Igazoljuk, hogy a két sorozat ugyanazokból a tagokból áll.

a) $a_n=(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n$,
$b_n=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2^n$;

b) $a_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}$,
$b_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$.

5. Figyeljük meg a következő egyenlőségeket. Fogalmazzuk meg általánosan a sejtést, és bizonyítsuk is be a talált összefüggést.

$$1+2=3$$
$$4+5+6=7+8$$
$$9+10+11+12=13+14+15$$
$$16+17+18+19+20=21+22+23+24$$

2. Példák rekurzív sorozatokra (emelt szintű tananyag)

A következő példákban a számsorozatok egy másik típusú definíciójára látunk lehetőséget.

1. példa

Egy n ($n \geq 1$, egész) lépcsőfokból álló lépcsőn úgy mehetünk fel, hogy egyszerre vagy egy vagy két lépcsőfokot lépünk. Hány különböző módon lehet így a lépcsőn felmenni?

Megoldás

Érdemes először 1, 2, 3, 4 lépcsőfokból álló lépcsőre átgondolni a megoldást.

Jelöljük l_n-nel az n lépcsőfok esetére adódó lehetőségek számát. A következő három eset nyilvánvaló:

$$l_1 = 1, \quad l_2 = 2, \quad l_3 = 3.$$

Az l_4 kiszámításához érdemes észrevenni, hogy a 4. lépcsőfokra vagy csak a 3. lépcsőfokról léphetek fel 1 lépéssel, vagy csak a 2. lépcsőfokról két lépéssel. Ez tehát azt jelenti, hogy

$$l_4 = l_3 + l_2 = 3 + 2 = 5.$$

Hasonló módon haladhatunk tovább:

$$l_5 = l_4 + l_3 = 5 + 3 = 8, \quad l_6 = l_5 + l_4 = 8 + 5 = 13,$$

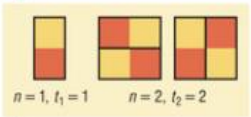
általánosan:

$$l_{n+2} = l_{n+1} + l_n.$$

Azt kapjuk tehát, hogy az l_n sorozat első két tagja 1 és 2, minden további tag az előző két tag összege.

2. példa

Hányféleképpen lehet egy $n \times 2$-es téglalapot 1×2-es dominókkal egyrétűen és hézagtalanul lefedni?



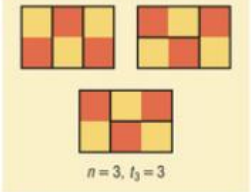
5. ábra

Megoldás

Jelöljük t_n-nel a lehetséges lefedések számát. Itt is érdemes először a t_1, t_2, t_3 értékeket meghatározni.

Nyilvánvaló, hogy $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ (5. ábra), $t_3 = 3$ (6. ábra).

6. ábra



Észrevehető, hogy ha egy 3×2-es téglalap egy lefedését egy „függőleges" dominóval jobbról meghosszabbítjuk, akkor a 4×2-es egy új lefedését kapjuk, ha pedig egy 2×2-es egy lefedését jobbról két „vízszintes" dominóval hosszabbítjuk meg, akkor is a 4×2-es egy új lefedését kapjuk.

1202-ben jelent meg a Pisában élő Leonardo Pisanónak, ismertebb nevén Fibonaccinak egy latin nyelvű könyve, amelyet rövidítve „Liber abbaci" címen szoktak emlegetni. Ebben szerepelt először az a nevezetes sorozat, amelyet ma Fibonacci-sorozatnak hívnak.
FIBONACCI, azaz LEONARDO PISANO (1175-1250) eredeti feladata:
„Hány pár nyúl származik egy évben egyetlen pártól, ha minden pár havonta egy új párt szül, és minden új pár kéthónapos korától kezdve válik tenyészképessé, és közben egyetlen nyúl sem pusztul el?"

Világos, hogy így minden lefedést megkapunk, hiszen egy lefedés jobbról vagy egy „függőleges", vagy két „vízszintes" dominóval zárul. Így tehát

$$t_4 = t_3 + t_2 = 3 + 2 = 5.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$t_5 = t_4 + t_3 = 5 + 3 = 8,$$

általában:

$$t_{n+2} = t_{n+1} + t_n.$$

A talált sorozat kissé kiegészítve és a mai jelölésekkel felírva:

$$f_1 = f_2 = 1,$$

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

A sorozat tehát két 1-sel kezdődik, és minden további tag az előző két tag összege.

A sorozat első néhány tagja:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5,\ f_6 = 8,$$

$$f_7 = 13,\ f_8 = 21,\ f_9 = 34,\ f_{10} = 55,\ f_{11} = 89,$$

$$f_{12} = 144,\ f_{13} = 233,\ f_{14} = 377,\ f_{15} = 610,\ \ldots$$

Ezzel a sorozattal, amelyet ma Fibonacci-sorozatnak neveznek, már találkoztunk a 11. osztályos könyv elején is.

A Fibonacci-sorozat tagjait gyakran Fibonacci-számoknak is nevezik.

3. példa

Adjuk össze az elejétől kezdve az n-edikig a Fibonacci-sorozat páratlan indexű tagjait. Mit mondhatunk az összegről?

Megoldás

Az első néhány n-re ezt kapjuk:

$$f_1 = 1,$$

$$f_1 + f_3 = 1 + 2 = 3,$$

$$f_1 + f_3 + f_5 = 3 + 5 = 8,$$

$$f_1 + f_3 + f_5 + f_7 = 8 + 13 = 21.$$

Feltűnő, hogy mindig Fibonacci-számot kapunk eredményül, méghozzá az utolsó összeadandó szám után következő Fibonacci-számot.

Valóban:

$$f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + \ldots + f_{2n-1} =$$

$$= f_2 + f_3 + f_5 + f_7 + \ldots + f_{2n-1} = f_4 + f_5 + f_7 + \ldots + f_{2n-1} =$$

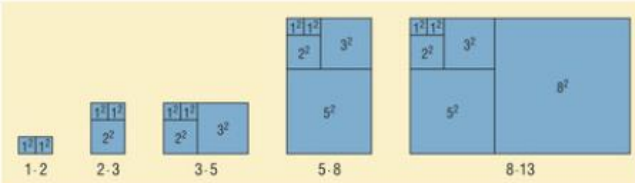
$$= f_6 + f_7 + \ldots + f_{2n-1} = \ldots = f_{2n-2} + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

4. példa

Adjuk össze a Fibonacci-sorozat tagjainak négyzetét az elejétől kezdve az n-edik tagig. Mi lesz az összeg?

I. megoldás

Szemléltessük az összeg egyes tagjait sorra egy-egy megfelelő oldalú négyzet területével, és ezeket a négyzeteket illesszük egymás mellé célszerű módon. *(7. ábra)*



7. ábra

Megfigyelhető, hogy így mindig egy téglalapot kapunk, ennek területe, azaz a négyzetek területének összege, két szomszédos Fibonacci-szám szorzata:

$$s_n = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

II. megoldás

Érdemes először az összeget néhány n értékre kiszámítani:

$$s_1 = 1^2 = 1 \cdot 1,\ s_2 = 1^2 + 1^2 = 2 = 1 \cdot 2,\ s_3 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \cdot 3,$$
$$s_4 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \cdot 5,\ s_5 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \cdot 8.$$

Ennek alapján az a sejtésünk alakul ki, hogy

$$s_n = f_n \cdot f_{n+1}.$$

A sejtés $n = 1$-re (és persze 2, 3, 4, 5-re is) igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz, és bizonyítsuk be, hogy $n + 1$-re is igaz.

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2 =$$
$$= f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} \cdot f_{n+2}.$$

Teljes indukcióval igazoltuk, hogy az állítás minden n-re igaz.



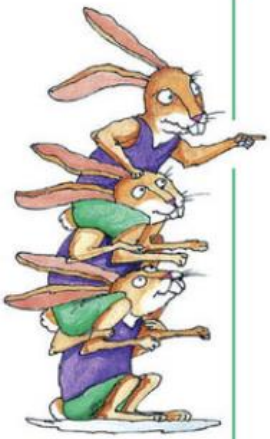
5. példa

Igazoljuk, hogy a Fibonacci-sorozat minden negyedik tagja osztható 3-mal.

Megoldás

Vizsgáljuk a sorozat tagjainak 3-mal való osztásakor adódó maradékokat. A maradékok sorozata a Fibonacci-sorozathoz hasonlóan képezhető, az első két tag 1, és minden további tag az előző két tag összegének hármas maradéka:

1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, …



A kapott maradéksorozat 4. és 8. tagja 0, azaz a Fibonacci-sorozat 4. és 8. tagja osztható 3-mal. A 8. tag után újra két szomszédos 1-es következik. Mivel két egymást követő tag egyértelműen meghatározza a sorozat további tagjait, a 9. tagtól kezdve a maradékok sorozata 8-as periódussal ismétlődik. Ebből következik, hogy a Fibonacci-sorozat minden 4. tagja osztható 3-mal.

Érdekesség, hogy a Fibonacci-sorozatról nem ismert, hogy a tagjai között végtelen sok prímszám van-e, vagy csak véges sok. Az első 10 tag között a prímek: $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, $f_7 = 13$.

6. példa

Az (a_n) sorozatot a következő módon lehet megadni:
$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, és minden $n \geq 1$ egészre $a_{n+2} = 3 \cdot a_{n+1} - 2 \cdot a_n$.
Fejezzük ki a_n-t n-nel.

I. megoldás

Számítsuk ki az első néhány n értékre a_n-t:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 8, \quad a_5 = 16, \quad a_6 = 32.$$

Az értékeket megfigyelve kialakulhat az a sejtésünk, hogy $a_n = 2^{n-1}$. Igazoljuk ezt teljes indukcióval!

A sejtés $n = 1$-re és 2-re igaz, mert

$$a_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1, \quad \text{és} \quad a_2 = 2^{2-1} = 2^1 = 2.$$

Tegyük fel, hogy n-re és $n+1$-re igaz a sejtés, mutassuk meg, hogy ebből következik, hogy $n+2$-re is igaz.

A definíció szerint

$$a_{n+2} = 3 \cdot a_{n+1} - 2 \cdot a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n - 2^n = 2^{n+1}.$$

A sejtés tehát igaz, a sorozat n-edik tagja $a_n = 2^{n-1}$.

II. megoldás

A következő ötlet segíthet. Alakítsuk át az a_{n+2}-t megadó egyenlőséget így:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2 \cdot (a_{n+1} - a_n).$$

Ebből újra, ismételten alkalmazva:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2 \cdot (a_{n+1} - a_n) =$$
$$= 2^2 \cdot (a_n - a_{n-1}) = \ldots = 2^n \cdot (a_2 - a_1) = 2^n.$$

Ezután írjuk fel a kapott egyenlőséget 2, …, n-re, és adjuk ezeket össze:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 2^{n-2}, \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= 2^{n-3}, \\ &\vdots \\ a_3 - a_2 &= 2, \\ a_2 - a_1 &= 1. \end{aligned}$$

$$a_n - a_1 = 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 = 2^{n-1} - 1, \text{ amiből}$$
$$a_n = 2^{n-1}.$$

$2^{n-1} - 1 =$
$= (2-1) \cdot (2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 1) =$
$= 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 1$

◆ ◆ ◆

Definíció: **Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *monoton növő (fogyó)*, ha minden $n \geq 1$ egészre**

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} \leq a_n).$$

monoton növő (fogyó) sorozat

Definíció: **Az (a_n) sorozatot *alulról (felülről) korlátosnak* nevezzük, ha van olyan K szám, hogy minden $n \geq 1$ egészre**

$$a_n \geq K \quad (a_n \leq K).$$

Ilyenkor a K számot a sorozat egy *alsó (felső) korlátjának* nevezzük.

alulról (felülről) korlátos sorozat

7. példa

Igazoljuk, hogy az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ sorozat monoton fogyó és alulról korlátos!

Megoldás

Annak igazolására, hogy a sorozat alulról korlátos, a következő ötlet segíthet. Az a_{n+1} definíciója alapján nyilvánvaló, hogy mivel $a_1 = 2 > 0$, a sorozat minden tagja pozitív. Az a_{n+1}-et tekintjük két pozitív szám számtani közepének, és alkalmazhatjuk erre a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

A $\sqrt{2}$ tehát alsó korlátja a sorozatnak a második tagtól kezdve. Mivel $2 > \sqrt{2}$, az első tagra is igaz, hogy $\sqrt{2}$-nél nagyobb.

A monoton fogyás igazolásához vizsgáljuk meg az $a_n - a_{n+1}$ különbség előjelét.

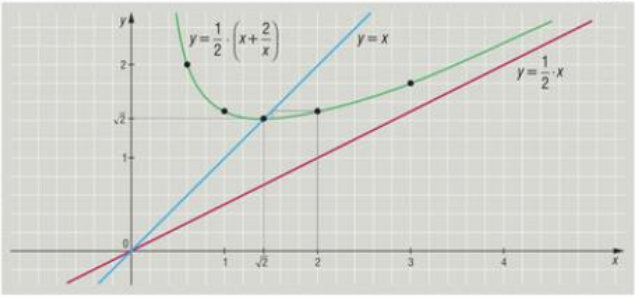
Megmutatható, hogy a sorozat n-edik tagja tetszőleges pontossággal megközelíti a $\sqrt{2}$-t, ha n elég nagy.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 2}{2 \cdot a_n} \geq 0,$$

mert igazoltuk, hogy minden $n \geq 1$ egészre $a_n \geq \sqrt{2}$ és $a_n > 0$.

A sorozat tehát valóban monoton fogyó.

8. ábra



A sorozat elemei szemléletesen ábrázolhatók az $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right)$, $x \neq 0$ függvény grafikonján. ***(8. ábra)***

Feladatok

1. Igazoljuk a Fibonacci-sorozat következő tulajdonságait:

   a) $f_2+f_4+f_6+\ldots+f_{2n}=f_{2n+1}-1$;

   b) $f_1\cdot f_2+f_2\cdot f_3+f_3\cdot f_4+\ldots+f_{2n-1}\cdot f_{2n}={f_{2n}}^2$;

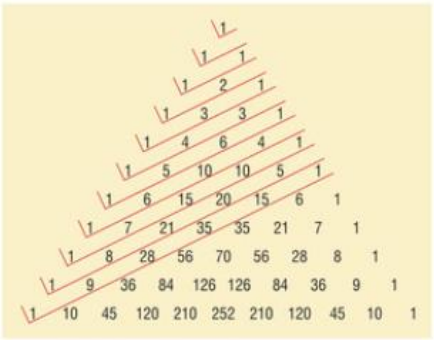
   c) $f_1\cdot f_2+f_2\cdot f_3+f_3\cdot f_4+\ldots+f_{2n}\cdot f_{2n+1}={f_{2n+1}}^2-1$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $n>1$, egész, akkor $f_{n-1}\cdot f_{n+1}-{f_n}^2=(-1)^n$. (Teljes indukcióval érdemes bizonyítani.)

3. A Pascal-háromszög első 10 sorát írtuk fel, és bejelöltünk ebbe néhány „ferde" vonalat.

   Mit mondhatunk a „ferde" vonalak mentén álló számok összegéről?

   Fogalmazzuk meg általánosan, és igazoljuk is az összefüggést. Használjuk fel a Pascal-háromszög alaptulajdonságát.



4. Igazoljuk, hogy a következő sorozat monoton növő és felülről korlátos:

$$a_1=\sqrt{2},$$
$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}.$$

Szemléltessük is a sorozatot az

$$f(x)=\sqrt{2+x},\quad x\geq 0$$

függvény grafikonja segítségével!

5. Igazoljuk, hogy a következő sorozat monoton növő és felülről korlátos:

$$a_1=\frac{1}{2},$$
$$a_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{{a_n}^2}{2}.$$

Szemléltessük a sorozatot az

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2},\quad x\in\mathbb{R}$$

függvény grafikonja segítségével.



3. Számtani sorozatok

A gyakorlatban gyakran fordulnak elő az olyan számsorozatok, amelyeket a következő módon jellemezhetünk: bármely két szomszédos tag különbsége állandó, azaz

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Az ilyen sorozatokat számtani sorozatoknak nevezzük.

számtani sorozat

DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *számtani sorozat*, ha van olyan a és d szám, amelyre teljesül, hogy $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, ha $n \geq 1$.

Például a pozitív páratlan számok sorozata számtani sorozat:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots, 2n-1, \ldots$$
$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2.$$

differencia (különbség)

Az $a_1 = a$, a sorozat első tagja, d pedig a számtani sorozat **differenciája** vagy **különbsége.**

Könnyű megadni a számtani sorozat n-edik tagját az első tag, az n és a differencia segítségével:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.}$$

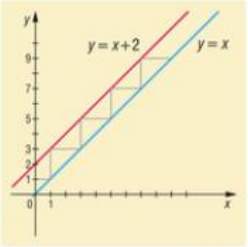
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

A képlet helyességét például teljes indukcióval igazolhatjuk. $n = 1$-re igaz, $a_1 = a_1$. Tegyük fel, hogy n-re igaz, ekkor

$$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)\cdot d + d = a_1 + n\cdot d.$$

Tehát a képlet $n+1$-re is igaz.

A számtani sorozat tagjait a rekurzív definíciónak megfelelően jól szemléltethetjük az $f(x) = x + d$, $x \in \mathbb{R}$ függvény grafikonjának segítségével. Például $d = 2$ és $a = 1$ esetén a sorozat első néhány tagját a 13. ábrán láthatjuk.



13. ábra

1. példa

Számítsuk ki a számtani sorozat első n tagjának összegét.

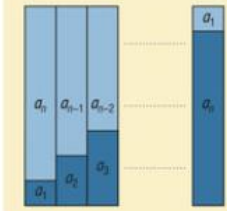
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = ?$$

Megoldás

Használjuk fel a következő egyszerű tényt:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_n + a_1,$$

hiszen minden lépésben, amikor az összeg első tagjának indexe eggyel nő, a második tagé eggyel csökken, tehát az összeg nem változik, hiszen az első tag d-vel „nő", a második tag d-vel „csökken".



14. ábra

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$s_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$

Ebből következik, hogy

$$2 \cdot s_n = n \cdot (a_1 + a_n),$$

$$\boxed{s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.}$$

Pozitív a és d esetén az s_n kiszámításához vezető utat a 14. ábrán szemléltettük.

Használjuk még fel az a_n-re kapott képletet is, és ezzel s_n értékét a_1-gyel, d-vel és n-nel tudjuk megadni:

$$\boxed{s_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n.}$$

2. példa

Számítsuk ki a kétjegyű, 3-mal osztható számok összegét.

Megoldás

Az első kétjegyű, 3-mal osztható szám 12, ezután minden harmadik szám osztható 3-mal, az utolsó tag a 99. A következő összeget kell tehát kiszámítani:

$$12 + 15 + 18 + \ldots + 96 + 99.$$

Egy számtani sorozatról van szó, $a_1 = 12$, $d = 3$, és a tagok n száma így számolható ki:

$$99 = 12 + (n-1) \cdot 3, \quad \text{tehát} \quad n = 30.$$

A keresett összeg tehát

$$\frac{12 + 99}{2} \cdot 30 = 111 \cdot 15 = 1665.$$

3. példa

Egy számtani sorozat ötödik tagja 11, nyolcadik tagja 17. Számítsuk ki a számtani sorozat első 10 tagjának összegét.

Megoldás

A feltétel szerint

$$a_5 = a + 4d = 11 \quad \text{és} \quad a_8 = a + 7d = 17.$$

Ebből $3d = 6$, tehát

$$d = 2, \quad \text{és így} \quad a = 3.$$

A számtani sorozat első tagja tehát 3 és differenciája 2. Az első 10 tag összege:

$$s_{10} = \frac{2 \cdot 3 + 9 \cdot 2}{2} \cdot 10 = 120.$$



4. példa

Egy számtani sorozatról a következőket tudjuk:

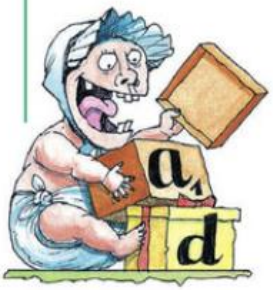
$$a_2 + a_4 + a_6 = 36;$$
$$a_2 \cdot a_3 = 54.$$

Számítsuk ki a sorozat első tagját és különbségét.

Megoldás

Az első egyenletből

$$3a + 9d = 36,$$
$$a + 3d = 12,$$
$$a = 12 - 3d.$$



A második egyenletből:

$$(a+d)\cdot(a+2d) = 54,$$

ebbe az egyenletbe helyettesítsük az a-ra kapott kifejezést:

$$(12-2d)\cdot(12-d) = 54.$$

Ebből rendezéssel ezt a másodfokú egyenletet kapjuk:

$$d^2 - 18d + 45 = 0.$$

A gyökök: $d_1 = 3$, $d_2 = 15$, a hozzájuk tartozó a értékek: 3 és -33.

A számtani sorozat első tagja és differenciája lehet

$$a_1 = 3 \quad \text{és} \quad d = 3,$$
$$\text{vagy} \quad a_1 = -33 \quad \text{és} \quad d = 15.$$

Mindkét sorozat kielégíti a feltételeket.

5. példa

Egy számtani sorozat minden tagja pozitív egész szám. Tudjuk, hogy a sorozat második tagja 12, és első kilenc tagjának összege nagyobb, mint 200, de kisebb, mint 220. Számítsuk ki a sorozat első tagját és differenciáját.

Megoldás

Jelölje az első tagot a, a differenciát d. Mivel a második tag 12, $a + d = 12$.

Az első kilenc tag összege:

$$\frac{2a+8d}{2}\cdot 9 = 9\cdot(a+4d) = 9\cdot(12+3d),$$

itt felhasználtuk, hogy $a + d = 12$.

Érdemes még 3-at kiemelni a zárójelből, így a feltétel szerint az összeg:

$$200 < 27\cdot(d+4) < 220.$$

Mivel $7 \cdot 27 = 189 < 200$ és $9 \cdot 27 = 243 > 220$:

$$7 < d + 4 < 9,$$
$$3 < d < 5.$$

Mivel a sorozat tagjai pozitív egészek, d is pozitív egész, tehát

$$d = 4 \quad \text{és} \quad a = 8.$$

A kapott sorozat kielégíti a feltételeket:

$$a_2 = a + d = 12 \quad \text{és} \quad s_9 = \frac{2a + 8d}{2} \cdot 9 = 216.$$

6. példa

Egy számtani sorozat három egymást követő elemének összege 3, a három egymást követő elem köbének összege 15. Számítsuk ki a számtani sorozat differenciáját!

Megoldás

Legyen a három szomszédos elem x, y, z. A feltétel szerint

$$x + y + z = 3,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 15,$$
$$y - x = z - y.$$

A harmadik egyenletből $x + z = 2y$, ezt az elsőbe helyettesítve $y = 1$ adódik. Így az első két egyenletből ezt kapjuk:

$$x + z = 2 \quad \text{és} \quad x^3 + z^3 = 14.$$

A kapott két egyenlet közül az elsőből z-t kifejezve, ezt a másodikba helyettesítve a rendezés után ezt kapjuk:

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Ebből

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Így a számtani sorozat differenciája lehet

$$d_1 = -\sqrt{2} \quad \text{és} \quad d_2 = \sqrt{2}.$$

Ellenőrizhető, hogy a kapott sorozatok kielégítik a feltételeket.

7. példa

Igazoljuk, hogy ha $0 < k < n$ egészek, és (a_n) számtani sorozat, akkor

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}.$$

Megoldás

Írjuk fel az ismert képlet segítségével az $n-k$-adik és az $n+k$-adik tagot:

$$a_{n-k} = a_1 + (n - k - 1) \cdot d,$$
$$a_{n+k} = a_1 + (n + k - 1) \cdot d.$$

A kettőt összeadva és 2-vel osztva kapjuk:

$$\frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} = a_1 + (n - 1) \cdot d = a_n.$$

Az eredményt röviden úgy is szokták fogalmazni, hogy a számtani sorozat bármely tagja számtani közepe két olyan sorozatelemnek, amelyek hozzá képest szimmetrikusan helyezkednek el a sorozatban. Érdemes még $k = 1$-re külön is megjegyezni az összefüggést:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad \text{ha } n > 1, \text{ egész.}$$

Ez azt jelenti, hogy a számtani sorozat három egymást követő eleme közül a középső számtani közepe a két „szélsőnek".

8. példa

A 2, 5, 11, 20, … sorozat szomszédos tagjainak különbsége számtani sorozatot alkot. Írjuk fel a sorozat n-edik tagját n segítségével!

Megoldás

Jelöljük a sorozat tagjait a megszokott módon:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 11, \quad a_4 = 20, \quad \ldots$$

A feltétel szerint

$$a_2 - a_1 = 3, \quad a_3 - a_2 = 6, \quad a_4 - a_3 = 9, \quad \ldots,$$

így a különbségsorozat n-edik tagja:

$$a_{n+1} - a_n = 3 + (n-1) \cdot 3, \text{ azaz}$$
$$a_{n+1} = a_n + 3 + (n-1) \cdot 3.$$

Írjuk fel most a kapott egyenlőséget $n = 1, 2, \ldots, n-1$-re, és adjuk össze a megfelelő oldalakat.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 3, \\ a_3 &= a_2 + 3 + 1 \cdot 3, \\ a_4 &= a_3 + 3 + 2 \cdot 3, \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 3 + (n-2) \cdot 3. \end{aligned}$$

Az összeadás és összevonás után a következőt kapjuk:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 3 + 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + n - 2) =$$
$$= 2 + 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + n - 1) = \frac{3}{2} \cdot n \cdot (n-1) + 2.$$



9. példa

Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy számtani sorozat három egymást követő eleme, akkor

$$a^2 + ab + b^2, \quad a^2 + ac + c^2, \quad b^2 + bc + c^2$$

is egy számtani sorozat három egymást követő eleme.

Megoldás

A feltétel szerint $b - a = c - b$. Megmutatjuk, hogy ugyanez a tulajdonság igaz a másik három számra is.

$$(a^2 + ac + c^2) - (a^2 + ab + b^2) = c^2 - b^2 + a \cdot (c - b) = (c - b) \cdot (a + b + c),$$
$$(b^2 + bc + c^2) - (a^2 + ac + c^2) = b^2 - a^2 + c \cdot (b - a) = (b - a) \cdot (a + b + c).$$

A feltételből következően a két különbség egyenlő, tehát az állítás igaz.

Feladatok

1. Számítsuk ki az 1000-nél nem nagyobb, 3-mal osztható pozitív egész számok összegét!

2. Egy számtani sorozat harmadik tagja 10, nyolcadik tagja 30. Melyik az a legkisebb $n > 0$ egész, amelyre teljesül, hogy a sorozat első n tagjának összege legalább 1000?

3. Az a^2, b^2, c^2 számok egy számtani sorozat egymást követő elemei. Igazoljuk, hogy akkor van olyan számtani sorozat, amelyben $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ is a sorozat három egymást követő eleme!

4. Az (a_n) számtani sorozatokról a következőket tudjuk:

   a) $a_2 + a_8 = 10$, $a_3 + a_{14} = 31$;

   b) $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34$, $a_2 \cdot a_3 = 28$;

   c) $a_3^2 + a_7^2 = 122$, $a_1 + a_7 = 4$.

   Számítsuk ki a sorozatok első tagját és különbségét!

5. Lehet-e 1, $\sqrt{3}$ és 3 egy számtani sorozat három (nem feltétlenül szomszédos) eleme?

6. Egy konvex négyszög oldalainak hossza a körüljárás sorrendjében a, b, c, d. Igazoljuk, hogy ha a, b, d és c ebben a sorrendben egy számtani sorozat szomszédos elemei, akkor a négyszög érintőnégyszög!

7. Számítsuk ki minél egyszerűbben a következő összeget!

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2.$$

8. Egy szabadon eső test az első másodpercben 4,9 m-t tesz meg, minden további másodpercben az előző másodpercben megtett útnál 9,8 m-rel többet. Hány másodperc alatt esik le a test 4410 m magasról?

9. Hányat üt egy toronyóra egy nap alatt (24 óra alatt), ha csak az egész órákat üti (és például 16 órakor, azaz délután 4 órakor 4-et üt)?

10. Hány olyan $P(x; y)$ pont van a koordinátasíkon, amelynek mindkét koordinátája egész szám, és eleget tesz a következő egyenlőtlenségnek:

$$|x| + |y| \leq 10?$$

4. Mértani sorozatok

Sokan ismerik azt a legendát, hogy a sakkjáték feltalálója milyen jutalmat kért az uralkodótól. Látszólag nem sokat, csak a sakktábla 64 mezője közül az elsőért 1 szem búzát, és minden következő mezőért 2-szer annyit. Így összesen a teljes tábláért

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}$$

szem búzát kért. Az összeget például könnyű kiszámítani úgy, hogy mindkét oldalt megszorozzuk 2-vel:

$$2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{64},$$

majd a kapott egyenlőség megfelelő oldalaiból kivonjuk az eredeti egyenlőség megfelelő oldalait:

$$s = 2^{64} - 1.$$

Az eredmény igen nagy szám, tízes számrendszerbeli alakja 19 számjegyből áll. Az egyes mezőkre kért jutalom egy *mértani sorozat* egy-egy tagja.

Definíció: Az (a_n) sorozatot *mértani sorozatnak* nevezzük, ha van olyan a és q szám, hogy $a_1 = a$ és $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

mértani sorozat

A q számot a mértani sorozat **kvóciensének** vagy **hányadosának** nevezzük. Az utóbbi elnevezést az indokolja, hogy ha $a_n \neq 0$, akkor az $a_{n+1} = a_n \cdot q$ egyenlőség így is írható:

kvóciens (hányados)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

amit röviden úgy jellemezhetünk, hogy a mértani sorozatban a két szomszédos tag hányadosa állandó.

Ha $a_1 = 0$, akkor a sorozat minden tagja 0, és q tetszőleges. Ezt a sorozatot néha nem szokták a mértani sorozatok közé sorolni.

Ha $q = 0$, akkor $a_n = 0$, ha $n > 1$ teljesül. Van olyan definíció is, amely ezt az esetet is kizárja a mértani sorozatok közül. A továbbiakban, ha mást nem mondunk, kössük ki, hogy $a_1 \neq 0$ és $q \neq 0$.

A bevezető példában szereplő mértani sorozatban $a_1 = 1$, és $q = 2$.

1. példa

Adjunk meg olyan képletet egy (a_n) mértani sorozat n-edik tagjára, amelyben a_1, n és q szerepel!

Megoldás

Néhány konkrét n értékre (pl. $n = 1, 2, 3, 4$ esetére) kiszámítva a_n-et, kialakul a sejtés:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

A képlet helyességét teljes indukcióval könnyű igazolni.

Az összefüggés $n = 1$-re igaz: $a_1 = a_1$.

Tegyük fel, hogy n-re igaz, és lássuk be, ebből következik, hogy $n + 1$-re is igaz:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n.$$

A sejtést tehát igazoltuk.

2. példa

Mely $q \neq 0$ értékre igaz, hogy az (a_n) mértani sorozat $(a_1 \neq 0)$ $n \geq 1$ esetén kielégíti az $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ egyenletet?

Megoldás

Írjuk be az egyenletbe a mértani sorozat tagjaira kapott kifejezést:

$$a_1 \cdot q^{n+1} = a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n.$$

A feltétel szerint $a_1 \neq 0$ és $q \neq 0$, egyszerűsíthetünk a_1-gyel és q^{n-1}-nel:

$$q^2 = 1 + q, \quad \text{azaz} \quad q^2 - q - 1 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenletből

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Mindkét értéket tetszőleges $a_1 \neq 0$-val kipróbálva azt kapjuk, hogy kielégíti a feladatban felírt egyenlőséget tetszőleges $n \geq 1$-re.

Érdemes észrevenni, hogy a feladatban felírt egyenlőség a Fibonacci-sorozatot jellemző rekurziós egyenlet.

3. példa

Adjunk képletet az (a_n) mértani sorozat első n tagjának összegére, azaz határozzuk meg s_n-t, ha

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \qquad (1)$$

Megoldás

A következő ötlet segíthet. Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát q-val.

$$q \cdot s_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n+1} \qquad (2)$$

a mértani sorozat definíciója alapján. Ezután a (2) egyenlet megfelelő oldalaiból vonjuk ki az (1) egyenlet megfelelő oldalait:

$$s_n \cdot (q-1) = a_{n+1} - a_1 = a_1 \cdot (q^n - 1).$$

Ha $q \neq 1$, akkor ebből ezt kapjuk:

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \ (q \neq 1).}$$

$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $(q \neq 1)$

Ha $q = 1$, akkor nyilván

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a,$$

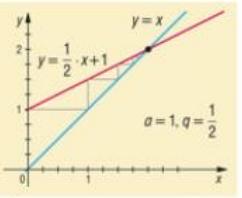
és így az (1) egyenlőség:

$$s_n = n \cdot a.$$

Vegyük észre, hogy s_n rekurzív definícióval is megadható:

$$s_1 = a, \quad \text{és} \quad s_{n+1} = q \cdot s_n + a.$$

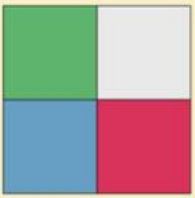
Ez utóbbi definíció alapján az (s_n) sorozat tagjai az $f(x) = qx + a$ függvény grafikonjának felhasználásával szemléltethetők. *(16. ábra)*



16. ábra

4. példa

Az egységoldalú négyzetet 4 egybevágó négyzetre bontjuk, majd 3 négyzetet befestünk rendre pirosra, kékre, zöldre *(17. ábra)*. A negyedik négyzetet újra 4 egybevágó négyzetre bontjuk, a kapott kisebb négyzetek közül 3 négyzetet ismét pirosra, kékre és zöldre festünk a 18. ábrán látható módon. Ezt az eljárást összesen n lépésben folytatjuk. Mennyi lesz a pirosra festett rész területe?

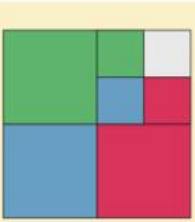


17. ábra

Megoldás

Az első lépésben pirosra színeztük a négyzet területének egynegyedét, azaz $\frac{1}{4}$ területet. Minden lépésben a fehéren maradt terület is ugyanannyi, mint a pirosra festett, és a következő lépésben ennek $\frac{1}{4}$ részét festjük pirosra. Így az n lépésben pirosra festett terület:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$



18. ábra

5. példa

Figyeljük meg a következő két egyenlőséget!

$$11 - 2 = 9 = 3^2, \quad 1111 - 22 = 1089 = 33^2.$$

Igaz-e tetszőleges $n > 0$ egészre, hogy

$$111\ldots1 - 222\ldots2 = 33\ldots3^2,$$

ahol az 1-esekből álló szám $2n$ jegyű, a 2-esekből és 3-asokból álló számok pedig n jegyűek?

Megoldás

A $2n$ jegyű, 1-es számjegyekből álló szám ennek az összegnek a rövid alakja:

$$1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2n-1} = \frac{10^{2n} - 1}{9}.$$

Hasonlóan az n jegyű, csupa 2-es számjegyből álló szám így írható:

$$2 \cdot (1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}) = 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = \frac{2 \cdot 10^n - 2}{9}.$$

A kettő különbsége:

$$\frac{10^{2n}-1}{9}-\frac{2\cdot 10^n-2}{9}=\frac{10^{2n}-2\cdot 10^n+1}{9}=\left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2.$$

Másrészt a csupa 3 számjegyből álló n jegyű szám így írható:

$$3\cdot(1+10+10^2+\ldots+10^{n-1})=3\cdot\frac{10^n-1}{9}=\frac{10^n-1}{3}.$$

Az állítás tehát minden pozitív egész n-re igaz.

6. példa

Egy mértani sorozatban az első három tag összege 31, az első és harmadik tag összege 26. Számítsuk ki a sorozat első tagját és hányadosát.

Megoldás

A feltételek:

$$a_1+a_2+a_3=31;$$
$$a_1+a_3=26.$$

Ezekből $a_2=a_1\cdot q=5$, a második egyenletből

$$a_1+a_1\cdot q^2=26.$$

Mivel $q\neq 0$, $a_1=\frac{5}{q}$, így a_1-et behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{5}{q}+5q=26,$$

$$5q^2-26q+5=0.$$

Ebből q lehetséges értékei 5 és $\frac{1}{5}$, a megfelelő a_1 érték 1 és 25.

Mindkét megoldás kielégíti a feltételeket, mert az első esetben a sorozat első három tagja: 1, 5, 25; a második esetben 25, 5, 1.

7. példa

Egy mértani sorozat négy egymást követő tagja közül a két szélső összege 112, a két középső összege 48. Mennyi a mértani sorozat hányadosa?

Megoldás

Jelölje a mértani sorozat hányadosát q és a négy tag közül az elsőt b. Ekkor a feltételek szerint:

$$b+b\cdot q^3=112 \quad \text{és} \quad b\cdot q+b\cdot q^2=48.$$

Alakítsuk szorzattá mindkét egyenlet bal oldalát:

$$b\cdot(1+q)\cdot(1-q+q^2)=112 \quad \text{és} \quad b\cdot q\cdot(1+q)=48.$$

Mivel $q\neq 0$, a második egyenletből $b\cdot(1+q)=\frac{48}{q}$.

Ezt az első egyenletbe helyettesítve ezt kapjuk:

$$\frac{48}{q}\cdot(1-q+q^2)=112.$$

Ebből rendezéssel a következő egyenlethet jutunk:

$$3q^2-10q+3=0.$$

A q lehetséges értékei 3 és $\frac{1}{3}$.

A kapott q értékek megfelelőek, mert a hozzájuk tartozó b értékek 4 és 108, így a két mértani sorozat:

$$4,\ 12,\ 36,\ 108,\ 324,\ \ldots$$

és

$$108,\ 36,\ 12,\ 4,\ \frac{4}{3},\ \ldots$$



8. példa

Három szám egy növekvő mértani sorozat három egymást követő tagja, összegük 7. Ha a legnagyobb számból 1-et kivonunk, akkor a kapott három szám egy számtani sorozat három egymást követő tagja. Melyek ezek a számok?

Megoldás

Jelölje a legkisebb számot a, a mértani sorozat hányadosát q. Ekkor a feltételek így írhatók:

$$a+aq+aq^2=7$$

és

$$2aq=a+aq^2-1.$$

A második egyenletből

$$a+aq^2=2aq+1,$$

ezt az elsőbe helyettesítve és rendezve ezt kapjuk:

$$3aq=6,$$
$$aq=2.$$

Az aq értékét újra az első egyenletbe helyettesítve és rendezve:

$$a+2q=5,$$
$$a=5-2q.$$

Az $aq=2$ egyenletből ezután azt kapjuk:

$$2q^2-5q+2=0.$$

Innen $q=2$ vagy $q=\frac{1}{2}$.

Mivel a keresett mértani sorozat növekvő, csak a $q=2$ megoldás jöhet szóba.

Az a-ra tehát 1 adódik, így a szóban forgó számok: 1, 2, 4.

Az 1, 2, 3 valóban egy számtani sorozat három egymást követő eleme, így a kapott megoldás kielégíti a feltételeket.

9. példa

Igazoljuk, hogy ha (a_n) egy mértani sorozat, $a_n > 0$ és $0 < k < n$ egész számok, akkor a_n az a_{n-k} és a_{n+k} számok mértani közepe, azaz

$$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}.$$

Megoldás

Írjuk fel az $n-k$-adik és $n+k$-adik tagot az ismert képlet segítségével, majd szorozzuk össze a kapott értékeket!

$$a_{n-k} = a \cdot q^{n-k-1},$$

$$a_{n+k} = a \cdot q^{n+k-1},$$

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a^2 \cdot q^{2n-2} = (a \cdot q^{n-1})^2 = a_n^2.$$

10. példa

Három egész szám, amelynek összege 60, egy számtani sorozat három egymást követő eleme. Ha ezekhez a számokhoz sorra 2,2-t, 4-et és 7-et adunk, akkor a kapott számok egy mértani sorozat egymást követő elemei. Melyek az eredeti egész számok?

Megoldás

Jelölje a középső számot x, a számtani sorozat különbségét pedig d.

Ekkor a három egész szám: $x-d,\ x,\ x+d$.

Mivel az összegük 60:

$$3x = 60,$$

$$x = 20.$$

Tehát a számok: $20-d,\ 20,\ 20+d$.

A mértani sorozat három egymást követő eleme $22{,}2-d,\ 24,\ 27+d$.

Tudjuk, hogy a középső tag négyzete a két szélső szorzata:

$$(22{,}2-d)\cdot(27+d) = 24^2.$$

A kapott egyenletből a műveletek elvégzése és rendezés után a következő egyenlethez jutunk:

$$d^2 + 4{,}8d - 23{,}4 = 0.$$

Az egyenlet két gyöke: $d_1 = 3, d_2 = -7{,}8$. Mivel egész számokról van szó, csak a $d = 3$ jó, így az eredeti három szám:

$$17,\quad 20,\quad 23.$$

Ezek kielégítik a feltételeket.

Feladatok

1. Az (a_n) mértani sorozatban $a_5 = 96,\ a_6 = 192$. Mennyi az első tag és a hányados?
2. Mutassuk meg, hogy a $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ számok tangensei egy mértani sorozat egymást követő elemei.
3. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 8-adrésze a következő három tag összegének. Mennyi a sorozat hányadosa?



4. Számítsuk ki a 2 első tíz nemnegatív egész kitevőjű hatványának összegét.

5. Az (a_n) mértani sorozatokról a következőt tudjuk:

   a) $a_4 - a_2 = 18$, $a_5 - a_3 = 36$;

   b) $a_7 - a_4 = -216$, $a_5 - a_4 = -72$;

   c) $a_1 - a_3 + a_5 = -65$, $a_1 + a_7 = -325$.

   Számítsuk ki a sorozatok első tagját és hányadosát.

6. Igazoljuk, hogy ha a, b és c egy mértani sorozat három egymást követő eleme, akkor
$$(a+b+c)\cdot(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

7. A következő táblázatba néhány számot beírtunk. Töltsük ki az üres mezőket úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban egy mértani sorozat egymást követő elemei álljanak.

27			
		36	
	6		
			8

8. Egy mértani sorozat első három elemének összege 42. Ugyanezek a számok egy növekvő számtani sorozat első, második és hatodik elemei. Melyek ezek a számok?

9. Egy növekvő számtani sorozat első három elemének összege 54. Ha az első elemet változatlanul hagyjuk, a másodikat 9-cel, a harmadikat 6-tal csökkentjük, akkor egy mértani sorozat három egymást követő elemét kapjuk. Határozzuk meg a számtani sorozat első tagját és különbségét.



5. Kamat- és járadékszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása

A mindennapi életben talán leggyakrabban előforduló matematikai feladatok a banki ügyletekhez kapcsolódó kamat- és járadékszámítások. Ha bizonyos összeget betétként helyezünk el a bankban valamilyen kamatra néhány hónapra vagy évre, természetesen fontos kérdés, hogy ennyi idő alatt mennyit gyarapodik majd a pénzünk. Ha valamilyen nagyobb értékű árucikket vásárolunk hitelre, tudnunk kell, hogy az adott futamidő alatt adott hitelkamatra felvett pénzt vajon milyen havi törlesztőrészletekben kell majd visszafizetnünk.

A következőkben ilyen típusú feladatokkal foglalkozunk.

1. példa

Év elején 100 ezer Ft-ot beteszünk a bankba évi 8%-os kamatra. Mennyit ér a tőkénk 4 év múlva, ha minden év végén tőkésítenek, azaz hozzáírják a kamatot a tőkéhez, és a következő évtől kezdve már a 8%-kal megnövelt tőke kamatozik?

Megoldás

Az év végi tőkésítés, azaz a 8%-os kamat hozzáadása azt jelenti, hogy a tőke 1,08-szorosára nő. Ezt négy éven keresztül megismétli, tehát a negyedik év végén az összeg $1{,}08^4$-szeresére nő, így értéke a következő lesz:

$$10^5 \cdot 1{,}08^4 \approx 136\,049 \text{ Ft.}$$

Itt egy olyan mértani sorozat ötödik tagjáról van szó, amelyben az első tag 10^5 és a hányados 1,08.

2. példa

Négy éven át minden év elején 100 ezer Ft-ot beteszünk a bankba évi 8%-os kamatra. A negyedik év végére mennyi lesz a betétünk értéke? (gyűjtőjáradék számítás)

Megoldás

Természetesen itt is feltételezzük, hogy év végén tőkésítik a kamatot, így az egyes években betett összegek minden év végére 1,08-szorosára nőnek.

A teljes összeg:

$$10^5 \cdot 1{,}08 + 10^5 \cdot 1{,}08^2 + 10^5 \cdot 1{,}08^3 + 10^5 \cdot 1{,}08^4 =$$

$$= 10^5 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}08^4 - 1}{1{,}08 - 1} \approx 486000 \text{ Ft.}$$

Itt felhasználtuk a mértani sorozat összegképletét.

3. példa

András 2010 elején 100 ezer Ft-ot tesz be a bankba 10%-os kamatra, és 2015 végén veszi csak ki a teljes összeget. Béla 2010 elején először, azután minden év elején egészen 2015-ig b Ft-ot tesz be a bankba ugyancsak 10%-os kamatra. 2015 végén ő is kiveszi teljes betétjét, ami ugyanannyi lett, mint András betétje. Számítsuk ki b értékét (ezer forintra kerekítve)!

Megoldás

Először számítsuk ki András 2015 végére kamatokkal felnövekedett tőkéjének értékét! Mivel minden év végén hozzáírják a tőkéhez a 10%-os kamatot, a következő évben már az is kamatozik.

Ez azt jelenti, hogy a tőke minden évben $1+\frac{10}{100}=1{,}1$-szeresére nő. Így 2015 végére 6 éven át

$$a = 10^5 \cdot 1{,}1^6 = 177\,156 \text{ Ft lesz.}$$

Béla b Ft-ja, amit 2005 elején tesz be a bankba, 6 évig kamatozik.

A következő évi b Ft már csak 5 évig, és így tovább, végül a 2015 elején betett b Ft csak 1 évig kamatozik. Így az ő betétének értéke 2015 végén

$$b \cdot 1{,}1^6 + b \cdot 1{,}1^5 + \ldots + b \cdot 1{,}1 = b \cdot 1{,}1 \cdot \frac{1{,}1^6 - 1}{1{,}1 - 1} =$$

$$= 11 \cdot b \cdot (1{,}1^6 - 1) = 8{,}487171 \cdot b \text{ Ft lesz.}$$

Mivel ez az összeg megegyezik a-val, ezért

$$b \approx 21\,000 \text{ Ft.}$$

4. példa

A Futó család új lakást akar vásárolni. Ehhez kölcsönt vesznek fel, méghozzá 10 millió Ft-ot 20 évre, évi 6%-os kedvezményes kamatra. Minden év végén törlesztik a kölcsönt és kamatait, méghozzá 20 éven át minden évben ugyanakkora összeget akarnak befizetni. Mekkora lesz az összeg? (törlesztőjáradék számítás)

Megoldás

Jelölje x az évenként fizetendő összeget forintban. Természetesen, miután ezt év végén fizetik, az első évben a teljes összeg kamatozik. A második évtől kezdve már sorra csak a csökkenő összeg kamatait meg a törlesztést kell fizetni, és a 20. év végére 0 lesz a maradék.

Az 1. év végén a maradék összeg:

$$10^7 \cdot 1{,}06 - x.$$

A 2. év végén a maradék összeg:

$$10^7 \cdot 1{,}06^2 - x \cdot 1{,}06 - x.$$

A 3. év végén a maradék összeg:

$$10^7 \cdot 1{,}06^3 - x \cdot 1{,}06^2 - x \cdot 1{,}06 - x,$$

és így tovább, végül a 20. év végén:

$$10^7 \cdot 1{,}06^{20} - x \cdot (1{,}06^{19} + 1{,}06^{18} + \ldots + 1{,}06 + 1) = 0.$$

Az x együtthatója egy mértani sorozat első 20 tagjának összege, így

$$10^7 \cdot 1{,}06^{20} - x \cdot \frac{1{,}06^{20} - 1}{1{,}06 - 1} = 0.$$

Ebből

$$x = 10^7 \cdot 1{,}06^{20} \cdot \frac{0{,}06}{1{,}06^{20} - 1} = 6 \cdot 10^5 \cdot \frac{1{,}06^{20}}{1{,}06^{20} - 1} \approx 872000,$$

tehát az évenként fizetendő összeg 872 ezer Ft.

5. példa

Valaki 40 éves korában életbiztosítást köt a következő feltételekkel. Minden év elején azonos összeget fizet be a biztosító társasághoz, és 70 éves korában (ha akkor még él) 5 millió forintot kap. A befizetett pénz 8%-kal kamatozik. Mekkora összeget kell befizetnie minden év elején?

Megoldás

Jelölje x Ft az évenként befizetett összeget. Minden év elején történik a befizetés, tehát a befizetett összeg már a szóban forgó évben kamatozik.

Az 1. év végén a tőke:

$$x \cdot 1{,}08 \text{ Ft},$$

a 2. év végén a tőke:

$$x \cdot 1{,}08^2 + x \cdot 1{,}08 \text{ Ft},$$

a 3. év végén a tőke:

$$x \cdot 1{,}08^3 + x \cdot 1{,}08^2 + x \cdot 1{,}08 = x \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}08^3 - 1}{1{,}08 - 1} \text{ Ft},$$

és így tovább, a 30. év végén a tőke:

$$x \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}08^{30} - 1}{1{,}08 - 1} \text{ Ft} = 5 \cdot 10^6 \text{ Ft}.$$

Ebből x értéke

$$x = \frac{400000}{1{,}08 \cdot (1{,}08^{30} - 1)} \approx 41000 \text{ Ft}.$$

A megadott cél eléréséhez tehát évente 41 ezer Ft-ot kell befizetni.



6. példa

Egy autó ára 1 900 000 Ft, és hitelbe is meg lehet vásárolni. A hitel futamideje 8 év, a törlesztés pedig havi 40 000 Ft, amit az átvételtől számított egy hónap múlva kell kezdeni fizetni. Számítsuk ki, hány százalékos kamatot kér a kereskedő a hitel után.



Megoldás

Jelölje a az autó jelenlegi árát, b a havi törlesztőrészletet. Legyen p százalékos a kamat, p értékét keressük.

Írjuk fel, hogyan változik az első néhány hónapban a törlesztendő összeg. Mivel a kamat évi $p\%$, a havi kamat ennek 12-ed része.

Vezessük még be a következő rövidítést:

$$x = 1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{12} = 1 + \frac{p}{1200}.$$

Az első hónap végén a törlesztendő összeg

$$a + a \cdot \frac{p}{1200} = a \cdot x.$$

A második hónap elején befizetjük b-t, és már csak a csökkent összeg kamatozik.

Így a második hónap végére a törlesztendő összeg:

$$(a \cdot x - b) \cdot x = a \cdot x^2 - b \cdot x.$$

Hasonlóan adódik, hogy a harmadik hónap végére a törlesztendő összeg:

$$(a \cdot x^2 - b \cdot x - b) \cdot x = a \cdot x^3 - b \cdot (x^2 + x).$$

Ugyanígy tovább számolva a 8. év végére, tehát a 96. hónap végére a törlesztendő összeg:

$$a \cdot x^{96} - b \cdot (x^{95} + x^{94} + \ldots + x) = b, \qquad (1)$$

hiszen ezzel a befizetéssel a következő hónap elején már törlesztettük teljes adósságunkat.

Az (1) egyenlőséget így írhatjuk:

$$a \cdot x^{96} = b \cdot (x^{95} + x^{94} + \ldots + x + 1).$$

A jobb oldalon zárójelben egy x hányadosú, 1 első tagú mértani sorozat első 96 tagjának összege áll, így

$$a \cdot x^{96} = b \cdot \frac{x^{96} - 1}{x - 1},$$

hiszen tudjuk, hogy $x > 1$.

Az egyenletet rendezve, ebből x-re egy 97-edfokú egyenletet kapunk, amelyet nem tudunk algebrai eszközökkel megoldani, ezért közelítő módszerekhez kell folyamodnunk (például intervallumfelezéssel célhoz érhetünk, lásd a 11. osztályos tankönyv *Függvények* című fejezetét). A részletes számolást most nem végezzük el.

Jó közelítéssel azt kapjuk, hogy

$$x = 1{,}0167,$$

amiből $p = 20$ adódik.

Tehát a hitel kamata 20%, ami elég magas.

Feladatok

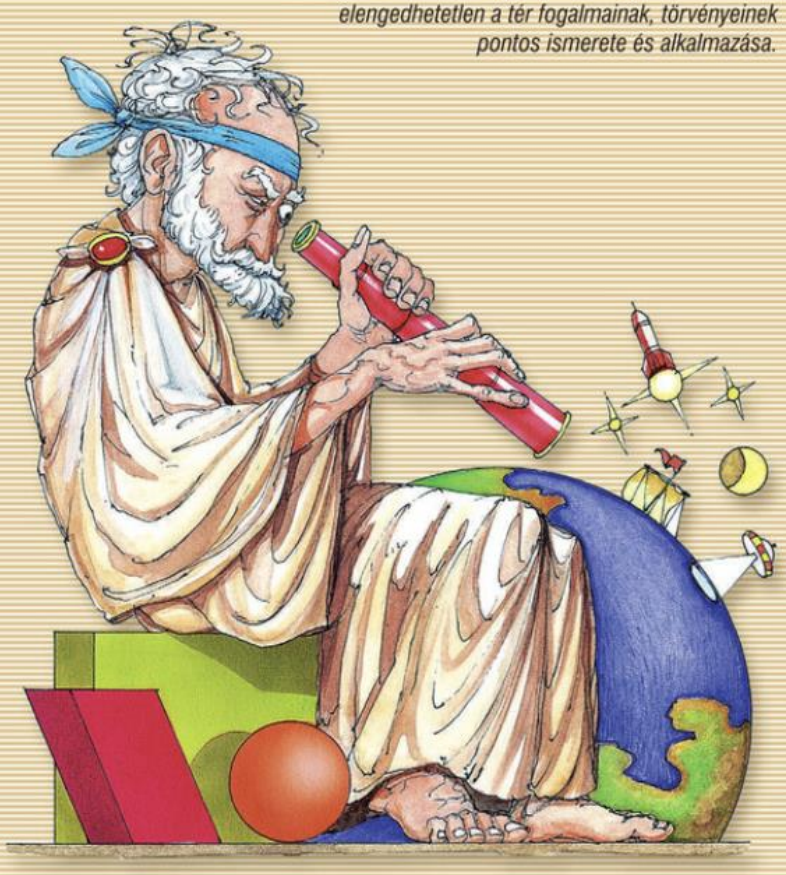
1. Aladár 500 ezer Ft-ot vesz fel kölcsönbe évi 12%-os kamatra. 2 év alatt kell visszafizetnie, havi egyenlő részletekben. Mennyi lesz a havi törlesztőrészlet?
2. Építkezni akarunk. Igénybe vesszük a 6%-os kedvezményes lakáshitelt, 10 millió Ft-ot veszünk fel 20 éves futamidejű kölcsönre. Kiszámoltuk, hogy legfeljebb havi 80 ezer Ft-ot tudunk arra szánni, hogy a hitelt és kamatait visszafizessük. Felvegyük-e a kölcsönt?
3. Béla nyugdíjas éveire gondolva előtakarékossági számlát nyit. Úgy tervezi, hogy 30 éven át minden év elején befizet a számlájára 250 000 Ft-ot. A bank évi 8% kamatot tud adni, amelyet mindig év végén írnak jóvá. Mekkora lesz Béla számláján a nyugdíjas évekre megtakarított összeg a 30. év végén? (Az inflációs hatásoktól eltekintünk.)
4. Anna úgy nyit nyugdíj-előtakarékossági számlát évi 9%-os kamatra, hogy 25 év múlva, nyugdíjas éveinek megkezdésekor, 40 millió forintnyi megtakarított összeget szeretne felvenni a banktól. Ehhez 25 éven keresztül minden év elején egy fix összeget kell befizetnie, és a bank minden év végén az akkor benn levő összegre írja jóvá a kamatot. Mekkora összeget kell Annának évente befizetnie? (Az inflációs hatásoktól eltekintünk.)

Térgeometria

A geometria a matematika egyik legősibb fejezete. Bár a tudomány fejlődésével a kutatás határai jelentősen kitágultak, a 21. században ugyanúgy tárjuk fel a teret, mint évezredekkel ezelőtt.

Arisztotelész számára még csak az tűnt különlegesnek, hogy a tengeren távolodó hajóknak a teste tűnik el előbb, majd legvégül az árboca. Ugyanakkor ma az űrhajók a Marsot ostromolják, az egyre nagyobb felbontású mikroszkópok pedig az anyag belső rejtelmeit tárják fel.

A világűr és a mikrovilág titkainak megismeréséhez is elengedhetetlen a tér fogalmainak, törvényeinek pontos ismerete és alkalmazása.

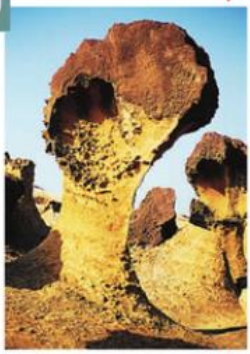


1. Térelemek



A bennünket körülvevő, érzékeinkre ható világ, az abban levő tárgyak és testek tulajdonságai alapján alakultak ki azok a fogalmak, melyek a tér matematikai leírását teszik lehetővé. Ezek az absztrakcióval létrehozott elemek ma már visszahatnak környezetünkre, benne ezernyi formát hozva létre.

Térelemek kölcsönös helyzete



A térgeometria legfontosabb alapfogalmai: a *pont,* az *egyenes* és a *sík.* Ezek annyira egyszerű objektumok, hogy a bennünk kialakult, hozzájuk kötődő képek miatt őket nem definiáljuk.

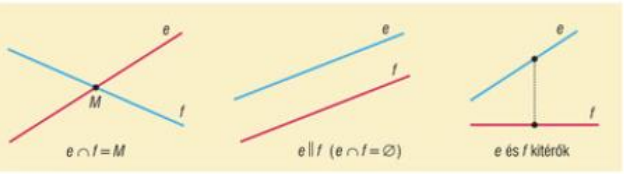
Elhelyezkedésük és egymáshoz való viszonyuk alapján különböző eseteket különböztethetünk meg.

Egyenesek esetén a következő helyzetek fordulhatnak elő *(1. ábra)*:

Két egyenes metsző, **ha pontosan egy közös pontjuk van.**

Két egyenes párhuzamos, **ha egy síkban vannak, és nem metszik egymást.**

Két egyenes kitérő, **ha nincsenek egy síkban.**



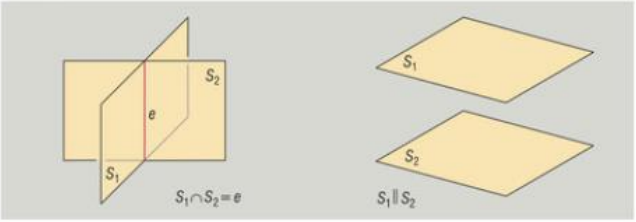
1. ábra

Hasonlóan vizsgálhatjuk meg két sík kölcsönös helyzetét *(2. ábra)*:

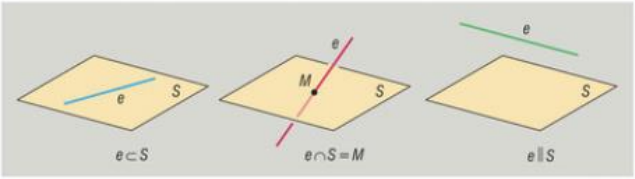
Két sík metsző, **ha pontosan egy közös egyenesük van.**

Két sík párhuzamos, **ha nem metszik egymást.**

2. ábra



Egy egyenes vagy illeszkedik a síkra, ekkor az egyenes minden pontja a síknak is pontja, vagy a síkot egy pontban metszi, vagy nincs a síkkal közös pontja, ekkor az egyenes és a sík párhuzamos. *(3. ábra)*



3. ábra

Egy síkkal egy külső ponton át egyetlen párhuzamos sík fektethető.

Egy síkot egyértelműen meghatározhat:

(1) három, nem egy egyenesbe eső pont;

(2) két metsző egyenes;

(3) két párhuzamos egyenes;

(4) egy egyenes és egy egyenesen kívüli pont.

A sík a teret két féltérre osztja, a síkot ilyenkor a féltér határoló síkjának nevezzük.

1. példa

Hány részre oszthatja a teret 3 sík?

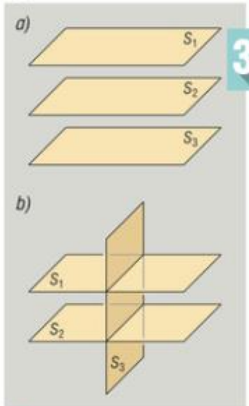
Megoldás

Három sík lehetséges elhelyezkedését kell megvizsgálnunk. A következő esetek fordulhatnak elő:

(1) Lehet mindhárom sík páronként párhuzamos egymással, ekkor négy térrész keletkezik. *(4/a. ábra)*

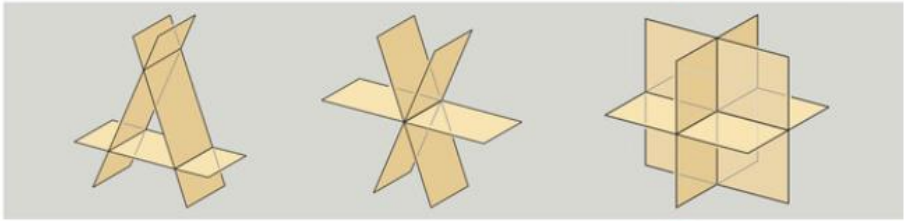
(2) Lehet kettő párhuzamos, és a harmadik ezeket metsző, ekkor hat térrész jön létre. *(4/b. ábra)*

(3) Ha nincs közöttük párhuzamos, akkor további három eset lehetséges. Az egyes esetekben keletkező térrészek száma hét, hat illetve nyolc lehet. *(5. ábra)*



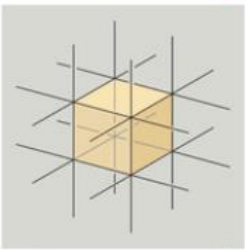
4. ábra

5. ábra



2. példa

A kocka lapsíkjai hány részre osztják a teret?



6. ábra

Megoldás

Rendszerezzük a térbeli tartományokat a kockához való viszonylagos helyzetük szerint. *(6. ábra)*

1 térrész keletkezik a kocka belsejében. 6 olyan térrész van, melyekben határoló lapként a kocka egyes lapjait találhatjuk meg. 12 térrész kapcsolódik a kocka éleihez. 8 olyan térrész lesz, amely a kocka csúcsaira illeszkedik.

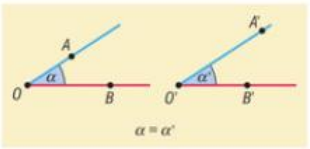
Így az összes térrészt megkaptuk, és ezek száma: $1 + 6 + 12 + 8 = 27$.

Térelemek hajlásszöge

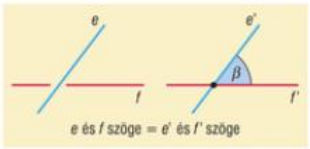
3D

Egy adott pontból kiinduló két félegyenes a síkot két részre bontja. Egy-egy ilyen síkrészt szögtartománynak, vagy röviden szögnek nevezünk.

A térben is ezt a meghatározást használjuk fel különböző szögek értelmezéséhez, felhasználva azt, hogy az egyállású szögekre vonatkozó állítás térben is érvényes marad. Azaz: ha az AOB és $A'O'B'$ szögek szárai párhuzamosak és egyirányúak, akkor a két szög egyenlő. *(7. ábra)*



7. ábra



8. ábra

két kitérő egyenes hajlásszöge

DEFINÍCIÓ: ***Két kitérő egyenes hajlásszögén*** **azt a szöget értjük, amelyet egy tetszőleges ponton átmenő, velük párhuzamos egyenesek alkotnak.** *(8. ábra)*

Az egyenes és sík hajlásszögének vizsgálata során érdemes külön figyelmet szentelnünk a merőleges elhelyezkedésnek.

az egyenes és sík merőlegessége

DEFINÍCIÓ: ***Egy egyenes és egy sík merőleges egymásra,*** **ha az egyenes merőleges a sík minden egyenesére.**

Ez a meghatározás nehezen ellenőrizhető, hiszen végtelen sok egyenespár vizsgálatát igényelné, bebizonyítható azonban a következő tétel:

TÉTEL: **Ha egy egyenes merőleges egy sík két metsző egyenesére, akkor a sík minden egyenesére merőleges, tehát merőleges a síkra.**

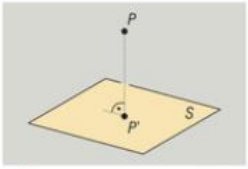
Egy pontnak adott síkon levő merőleges vetülete a pontból a síkra állított merőlegesnek a síkkal való metszéspontja *(9. ábra)*. A fentiek szerint leírt transzformációt merőleges vetítésnek nevezzük. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy:

(1) egyenes merőleges vetülete egyenes, ha az egyenes nem merőleges a síkra;

(2) párhuzamos egyenesek képe párhuzamos egyenespár (ezek esetleg egybe is eshetnek, illetve két pont is lehet a kép);

(3) a vetítés megtartja az egy egyenesbe eső szakaszok arányát;

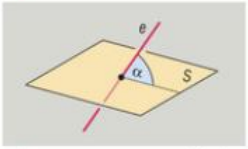
(4) a síkon levő pontoknak önmaga lesz a képe.



9. ábra

Definíció: **Ha egy egyenes metszi a síkot, de nem merőleges rá, akkor az *egyenes és sík hajlásszöge* az a szög, melyet az egyenes a síkon levő merőleges vetületével bezár** *(10. ábra)*.

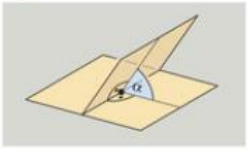
Egy síknak és vele párhuzamos egyenesének a hajlásszöge 0°.



10. ábra

Definíció: **Két metsző sík hajlásszögének keresésénél a két sík metszésvonalának egy tetszőleges pontjában a két sík mindegyikéből egy-egy merőlegest állítunk a metszésvonalra. A *két sík hajlásszöge* az a szög, amelyet az így nyert két egyenes bezár egymással** *(11. ábra)*.

Két párhuzamos sík hajlásszöge 0°.



11. ábra

12. ábra

Térelemek távolsága

Két ponthalmaz távolságának megállapítása általában a következő módon történik. A két ponthalmaz pontjait minden lehetséges módon összekötjük, így az összekötő szakaszok közül a legrövidebb (ha van ilyen) a két ponthalmaz távolsága.

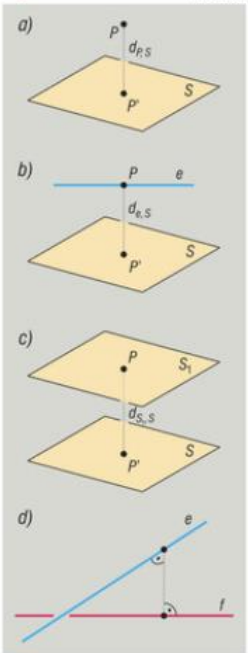
Ennek megfelelően kapjuk a következő definíciókat.

Definíció: ***Pont és sík távolságán*** **a pontnak és a síkon levő merőleges vetületének a távolságát értjük.** *(12/a. ábra)*

Definíció: ***Egy sík és a vele párhuzamos egyenes távolságán*** **az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól való távolságát értjük.** *(12/b. ábra)*

Definíció: ***Két párhuzamos sík távolsága*** **az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másiktól vett távolsága.** *(12/c. ábra)*

Definíció: ***Két kitérő egyenes távolsága*** **annak a szakasznak a hossza, amely a két kitérő egyenest metsző és mindkettőre merőleges egyenesen van a két kitérő egyenes között. Ezt az egyenest nevezzük a két kitérő egyenes *normál transzverzálisának.*** *(12/d. ábra)*



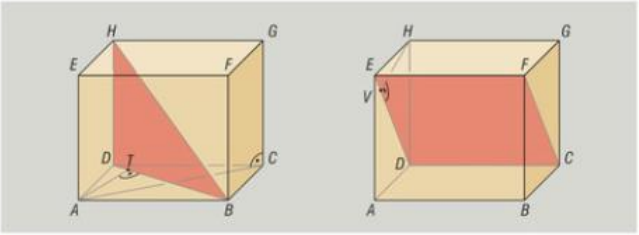
3. példa

Adott egy $ABCDEFGH$ téglatest, melynek élei $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm, $AE = 5$ cm hosszúak *(13. ábra)*. Határozzuk meg a következő távolságokat:

a) Az A csúcs és a GC él távolságát;

b) Az A csúcs és a BDH sík távolságát;

c) A HG egyenes és az EDC sík távolságát.



13. ábra

Janus Pannonius: A geometriai idomokról

Pont az, melynek már részét felfogni se tudnád, megnyújtod, s karcsú egyenes fut bármely irányban.
Sík felület születik, ha meg is duplázza futását: széltében terjed, nem nyílik meg soha mélye.
Két-két sík a szilárd testet jellemzi, kiadja hosszúságát és szélességét, meg a mélyét.
Kockának, köbnek hívják s négyzetlapú testnek, bárhogy esik, mindig jól látni a részeit ennek;
hat síkot foglal be magába, a szöglete épp nyolc.

(Kurcz Ágnes fordítása)

Megoldás (a)

A keresett távolság éppen az $ABCD$ téglalap átlója lesz, hiszen AC merőleges lesz a CG oldalélre. Így

$$AC = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7{,}21 \text{ cm}.$$

Megoldás (b)

Ha az A csúcsból merőlegest állítunk a BDH háromszög síkjára, akkor ez az egyenes egybeesik az ABD derékszögű háromszög BD átfogójához tartozó magasságával. Legyen ennek a magasságnak a talppontja T.

A háromszög területét kétféleképpen felírva AT szakasz hossza meghatározható:

$$\frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{13} \cdot AT}{2},$$

$$12 = \sqrt{13} \cdot AT,$$

$$AT = \frac{12}{\sqrt{13}} = \frac{12 \cdot \sqrt{13}}{13} \approx 3{,}33 \text{ cm}.$$

Megoldás (c)

Az EDC sík a téglatestből az $EDCF$ paralelogrammát metszi ki. A HG egyenes és a kijelölt sík párhuzamosak.

Távolságuk meghatározásához tekintsük például a H pontot, és ebből állítsunk merőlegest az EDC síkra. Ez a merőleges éppen az EDH derékszögű háromszög ED átfogójához tartozó magassága lesz.

Ennek a talppontját jelöljük V-vel. Így a területképlet segítségével HV meghatározható:

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{\sqrt{5^2 + 4^2} \cdot HV}{2},$$

$$20 = \sqrt{41} \cdot HV,$$

$$HV = \frac{20}{\sqrt{41}} = \frac{20 \cdot \sqrt{41}}{41} \approx 3{,}12 \text{ cm}.$$

Feladatok

1. Hány részre osztják a teret egy tetraéder lapsíkjai?
2. Hány részre oszthatja a teret 4 sík, ha
   a) közülük legalább 3 párhuzamos; *b)* közülük 2 párhuzamos?
3. Adott egy a oldalélű $ABCDEFGH$ kocka. Határozzuk meg az
   a) A csúcs és GC oldalél; *b)* A csúcs és BDH sík;
   c) BDE és CFH sík távolságát.
4. Milyen távol van egymástól egy a oldalélű szabályos tetraéder két kitérő éle? (A szabályos tetraéder négy szabályos háromszöglap által határolt test.)
5. Mekkora szöget zár be egymással egy kocka két kitérő lapátlója? (Több helyzet is lehetséges.)
6. Mekkora szöget zár be egymással egy kocka testátlója és lapátlója? (Több helyzet is lehetséges.)
7. Mekkora távolságra van egymástól egy kocka alakú a oldalélű doboz két átellenes sarka? Mekkora az a legrövidebb út, amelyen egy bogár a kocka falán eljuthat az egyik csúcsból a vele átellenes csúcsba? Mekkora szöget zár be ennek a legrövidebb útnak egy darabja valamelyik testátlóval, illetve lapátlóval?
8. Az α és β síkok merőlegesek egymásra; az A pont az α, a B pont a β sík egy-egy tetszőleges pontja. Jelöljük A'-vel, illetve B'-vel az A, illetve B pont merőleges vetületét a két sík metszésvonalán; legyen továbbá F az AB szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy $FA' = FB'$.
9. Az egységnyi élű kocka minden pontját kiszínezzük 3 szín valamelyikével. Igaz-e, hogy mindig van két egyszínű pont, melyek távolsága legalább 1,4?

Rejtvény

A tengeren négy hajó halad együtt, közel egymáshoz: bármely két hajó távolsága 3 km. A hajók között van teherszállító, olajszállító és utasszállító hajó. Milyen hajó a negyedik?

2. A sík és a tér felosztása (kiegészítő anyag)

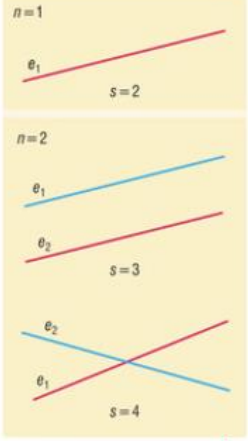
Ebben a leckében olyan kérdéseket vizsgálunk meg, amelyek az előzőekben meghatározott geometriai alapfogalmakkal és azok elhelyezkedésével kapcsolatosak. Az ehhez hasonló kérdéseket a kombinatorikus geometria tárgyalja. Jellemző ezekre a problémákra, hogy a geometria fogalmai mellé általában valamilyen összeszámlálási problémák kapcsolódnak.

Egyszerű, a szemlélet alapján azonnal adódó állítás a következő:

Az egyenest n pont $n+1$ részre osztja.

Ennek az állításnak a bizonyítását érdemes kissé részletezni, mert ennek gondolatmenete nagymértékben általánosítható.

Ha a pontok száma 0, akkor az egyenesnek 1 része van. Ha az egyenesen felveszünk egy pontot, akkor a részek száma 1-gyel növekszik, akkor is, ha már az egyenesen n pont volt. Ugyanis az egyik egyenes rész a felvett pont által két részre osztódik. Az n pont az eredeti 1 részt n-nel növelte, azaz $n+1$ rész keletkezett.



14. ábra

1. példa

Adott a síkban n egyenes. Legalább, illetve legfeljebb hány részre osztja a síkot az n egyenes?

Megoldás

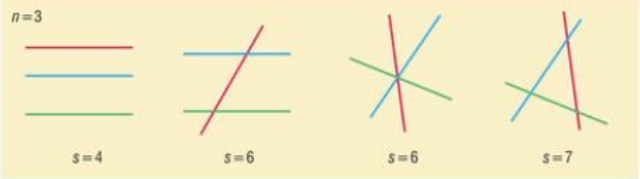
A problémával már a korábbi években is találkoztunk, most viszont egy olyan megoldással ismerkedünk meg, amely lehetőséget teremt a térbeli analóg feladat megoldásához.

Jelöljük az egyenesek által létrehozott részek számát s-sel, és tegyük fel, hogy az egyenesek között nincsenek olyanok, amelyek egybeesnek.

Nyilvánvaló, hogy $n = 1$ esetben a részek száma $s = 2$. *(14. ábra)* Ha $n = 2$, akkor már két eset lehetséges. Ha a két egyenes párhuzamos, akkor a részek száma $s = 3$, ha a két egyenes metsző, akkor a részek száma $s = 4$. *(14. ábra)*

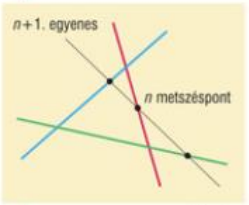
Ha $n = 3$, akkor a lehetséges esetek száma tovább nő. *(15. ábra)*

15. ábra



A konkrét esetek tanulmányozása során világos, hogy adott n esetén a részek száma pontosan akkor minimális, ha az egyenesek párhuzamosak. Ekkor a részek száma $s = n + 1$.

Az is világos, hogy a részek száma adott n esetén akkor maximális, ha az egyenesek között nincs két párhuzamos, és nincs közöttük három olyan, amely egy ponton megy át. (Az ilyen egyeneshalmazra azt mondjuk, hogy *független egyenesekből* áll.)



16. ábra

Jelölje $s(n)$ azoknak a síkrészeknek a számát, amelyre n független egyenes a síkot szétvágta. Ha n egyenest már elhelyeztünk, akkor a síkrészek száma $s(n)$. Húzzunk most egy újabb egyenest, ez metszi a már elhelyezett n egyenes mindegyikét, mégpedig n pontban *(16. ábra)*. Ezek az új egyenest $n + 1$ részre vágják, és minden rész kettévág a már meglévő tartományok közül egyet, tehát az $n + 1$-edik egyenes elhelyezésével a síkrészek száma $n + 1$-gyel nő, azaz:

$$s(n + 1) = s(n) + n + 1.$$

Ez az összefüggés lehetőséget teremt $s(n)$ közvetlen meghatározására is, írjuk fel ugyanis ezt $n = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ értékekre:

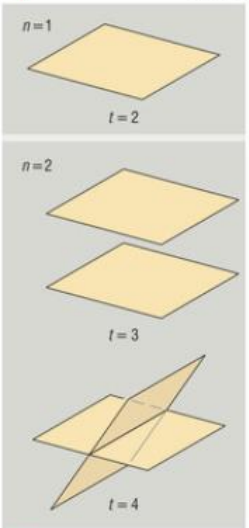
$$\begin{aligned} s(1) &= s(0) + 1, \\ s(2) &= s(1) + 2, \\ s(3) &= s(2) + 3, \\ &\vdots \\ s(n) &= s(n-1) + n. \end{aligned}$$

A fenti egyenletek megfelelő oldalait összeadva majd rendezve kapjuk, hogy

$$s(n) = s(0) + 1 + 2 + \ldots + n =$$

$$= 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n + 2).$$

Itt felhasználtuk azt az összefüggést, miszerint a természetes számok összege n-ig zárt alakban az $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ összefüggéssel adható meg.



17. ábra

2. példa

Adott a térben n sík. Legalább, illetve legfeljebb hány részre osztja a teret az n sík?

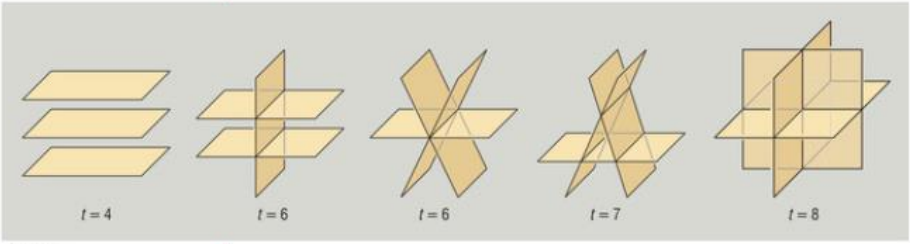
Megoldás

Jelöljük a síkok által létrehozott részek számát t-vel, és tegyük fel, hogy a síkok között nincsenek olyanok, amelyek egybeesnek.

Nyilvánvaló, hogy $n = 1$ esetben a részek száma $t = 2$. *(17. ábra)*

Ha $n = 2$, akkor már két eset lehetséges. Ha a két sík párhuzamos, akkor a térrészek száma $t = 3$, ha a síkok nem párhuzamosak, akkor $t = 4$. *(17. ábra)*

Ha $n = 3$, akkor a következő esetek lehetségesek. *(18. ábra)*



18. ábra

3D

(1) A síkok páronként párhuzamosak, a térrészek száma $t = 4$.

(2) Két sík párhuzamos, és a harmadik metszi őket. A térrészek száma $t = 6$.

(3) A három sík egy egyenesre illeszkedik. Ekkor a térrészek száma $t = 6$.

(4) Bármelyik két síknak van a harmadikkal párhuzamos, (de arra nem illeszkedő) metszésvonala. Ekkor $t = 7$.

(5) A három síknak egyetlen közös pontja van. Ekkor a térrészek száma $t = 8$.

Itt is világos, hogy adott n esetén a térrészek száma akkor minimális, ha a síkok párhuzamosak, ekkor $t = n + 1$.

A térrészek száma viszont akkor lesz maximális, ha a síkok között nincs két párhuzamos, bármelyik három nem illeszkedik egy egyenesre, és nincs négy olyan sík, amely egy ponton menne át. (Ebben az esetben a síkokat *függetleneknek* mondjuk.)

Jelöljük $t(n)$-nel az n független sík által létrehozott térrészek számát.

Tegyük fel, hogy az adott n síkhoz felveszünk még egy $n + 1$-edik síkot. Ez az új sík az eredeti síkokat n független egyenesben metszi, és rajta ezáltal $s(n)$ tartomány keletkezik. Ezek mindegyike kettéoszt egy már meglévő térbeli tartományt, tehát az új sík felvételével a tartományok száma $s(n)$-nel növekszik.

Ezért

$$t(n+1) = t(n) + s(n).$$

Írjuk most fel ezt az egyenletet az $n = 1, 2, \ldots, n-1$ értékekre, majd adjuk össze az egyenletek megfelelő oldalait:

$$t(1) = t(0) + s(0),$$
$$t(2) = t(1) + s(1),$$
$$\vdots$$
$$t(n) = t(n-1) + s(n-1).$$

Így:

$$t(n) = t(0) + s(0) + s(1) + \ldots + s(n-1).$$

Tudjuk, hogy $t(0)=1$, a többi tag összegét az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$s(0)+s(1)+\ldots+s(n-1)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(0^2+0+2)+\frac{1}{2}\cdot(1^2+1+2)+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\left[(n-1)^2+(n-1)+2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+1+2+\ldots+(n-1)+2n\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-1)}{6}+\frac{n\cdot(n-1)}{2}+2n\right]=\frac{n^3+5n}{6}.$$

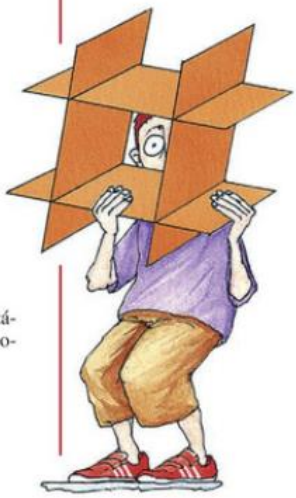
Ezért a keletkező térrészek száma:

$$t(n)=\frac{1}{6}\cdot(n^3+5n+6).$$

Megjegyzés: A fenti két feladatban meghatározott sík-, illetve térrészek számát egy könnyen megjegyezhető alakban is megadhatjuk, melyben a binomiális együtthatók szerepelnek. Így a következő két formula írható fel:

$$s(n)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2};$$

$$t(n)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}.$$



Feladatok

1. Határozzuk meg, hogy a síkon felvett n független egyenes hány véges és hány végtelen tartományt határoz meg.
2. Helyezzünk el 7 pontot és 6 egyenest a síkon úgy, hogy mindegyik egyenesen 3 pont legyen.
3. Egy konvex hétszög átlói legfeljebb hány metszéspontot határozhatnak meg?
4. Adott a síkon n pont úgy, hogy közülük semelyik három sincs egy egyenesen. Ezek a pontok hány egyenest határoznak meg?
5. Adott a síkon n független egyenes. Metszéspontjaik legfeljebb hány egyenest határoznak meg?
6. 5 párhuzamos egyenest 11 db egymással párhuzamos, az előzőkre merőleges egyenes metsz. Hány téglalapot határoznak meg az így kapott rács vonalai?
7. Adott a síkon n független pont. Megrajzoljuk bármely két pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegesét. Ezek legfeljebb hány metszéspontot határoznak meg?

3. Testek osztályozása, szabályos testek

Gondolkodásunk fejlődése során általában kialakul bennünk egy térszemlélet, mely alapján tájékozódni és mozogni tudunk a tér különböző alakzatai között. Ezeket az alakzatokat, *testeket* több szempontból is osztályozhatjuk.

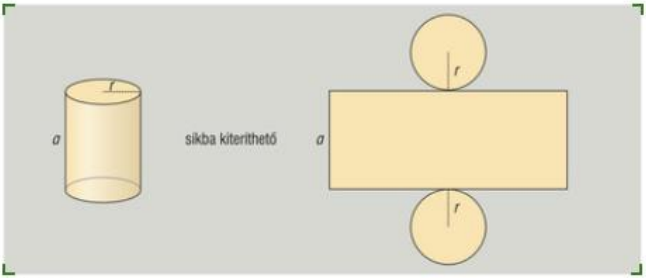
poliéder

Vannak testek, melyeket kizárólag sokszögek határolnak. Ezeket *poliédereknek* nevezzük. Ezeknél a testeknél hivatkozhatunk arra a szemléletes tulajdonságra, hogy ha a poliédert gumiból készítenénk, akkor azt belül üres gömbbé tudnánk felfújni. Ismert példák poliéderekre: a *kocka*, a *téglatest*.

konvex poliéder

Az olyan poliédereket, melyeknek bármely lapsíkját tekintve a poliéder minden pontja az adott sík által meghatározott egyik féltérben van, *konvex poliédereknek* nevezzük.

Léteznek olyan testek, melyeket *síkidomok és görbült felületek* határolnak. Ezek között vannak olyanok, amelyek felületét *síkba kiteríthetjük* (például a henger), és vannak olyanok, melyek görbült felülete *nem teríthető ki síkba* (például a gömb). **(19. ábra)**

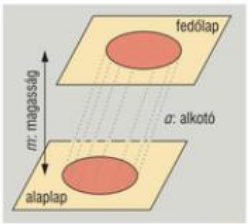


19. ábra

Ezen osztályozás alapján a testek felszínét az alábbiak szerint határozhatjuk meg.

Poliéderek esetén a test felszíne a határoló sokszögek területének az összege. Ha a test felülete *síkba kiteríthető*, akkor ennek a kiterített felületnek a területét kell meghatároznunk. Ha a felület *nem teríthető ki síkba*, akkor a felület területének meghatározása magasabb matematikai ismereteket igényel.

20. ábra



Egy másfajta osztályozás adható meg a testek származtatása szerint. Középiskolai tanulmányaink során három nagy csoportot célszerű megkülönböztetnünk.

I. Hengerszerű testeket úgy hozhatunk létre, hogy egy síkidom kerületén – önmagával párhuzamosan – körülvezetünk egy egyenest, amelynek a síkidom síkjával egyetlen közös pontja van. Az így kapott palástfelületet az eredeti síkidom síkjával és egy vele párhuzamos síkkal elmetsszük. **(20. ábra)**

A körülvezetett egyenesnek az alaplap és a fedőlap közötti szakaszát *alkotónak*, az alaplap és fedőlap közötti távolságot a test *magasságának* nevezzük.

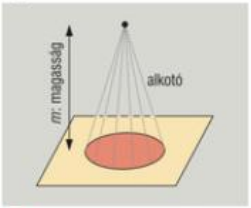
Ha a test alapja sokszög, akkor *hasábnak*, ha kör, akkor *hengernek* nevezzük.

Ha a körülvezetett egyenes merőleges az alaplap síkjára, akkor a testet *egyenes hengerszerű testnek* nevezzük, különben *ferde hengerszerű testről* beszélünk.

Azokat az egyenes hasábokat, melyeknek alapja szabályos sokszög, *szabályos hasáboknak* nevezzük.

A legkorábbi írásos emlékek a hengerszerű testekről Kr. e. 2000 körül keletkeztek. Ezek tanúsága szerint például Egyiptomban a henger alakú gabonatartályok térfogatát meg tudták határozni.

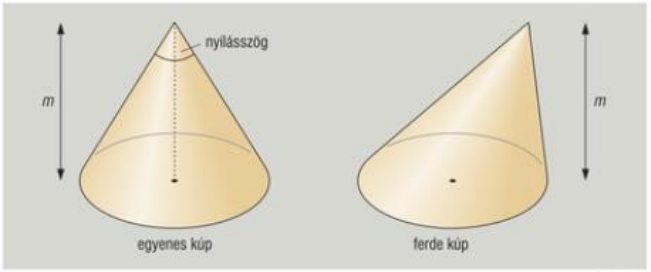
II. Kúpszerű testek keletkeznek akkor, ha egy síkidom kerületén úgy vezetünk körül egy egyenest, hogy az állandóan illeszkedjen egy adott, a síkidom síkján kívüli pontra *(csúcspontra).* **(21. ábra)**



21. ábra

A csúcspont és az alaplap kerületi pontjait összekötő szakaszokat *alkotóknak*, a csúcspontnak az alaplap síkjától vett távolságát a test *magasságának* nevezzük. Abban az esetben, ha a test alapja sokszög, akkor *gúlának*, ha kör, akkor *kúpnak* nevezzük.

Ha a kúp minden alkotója egyenlő hosszú, akkor *egyenes kúpról*, különben *ferde kúpról* beszélünk. Egyenes kúp esetén, ha vesszük a test tengelymetszetét, akkor a kimetszett két alkotó szögét a kúp *nyílásszögének* nevezzük. **(22. ábra)**

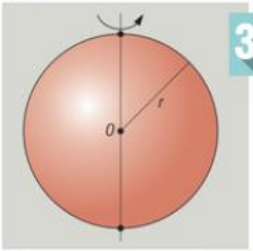


22. ábra

Azokat a gúlákat, melyeknek az alaplapja szabályos sokszög, és minden oldaléle egyenlő hosszúságú, *szabályos gúlának* nevezzük.

A tetraéder háromszög alapú gúla. Ezek közül azonban szabályos tetraédernek csak azokat nevezzük, melyek minden lapja (nem csak az alaplapja) szabályos háromszög.

III. A gömbfelület egy adott ponttól adott távolságban lévő pontok halmaza a térben. Gömböt hozunk létre, ha egy kört valamelyik átmérője mentén megforgatunk. **(23. ábra)**



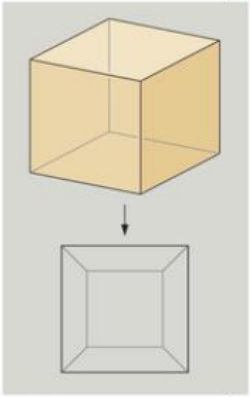
23. ábra

◆ ◆ ◆

A poliéderek az őket meghatározó lapok, élek és csúcsok szerint nagyon sokfélék lehetnek. Abban az esetben, ha feltesszük, hogy minden egyes lap a poliéderen olyan, hogy ha gumiból készülne, akkor szakítás nélkül körré

nyújtható, akkor *egyszerű poliéderről* beszélhetünk. Megvizsgálva az ilyen típusú poliéderek közül néhányat, a lapok, élek és csúcsok száma között jellemző összefüggés fedezhető fel. Néhány esetet tartalmaz a következő táblázat:

	Csúcsok száma (c)	Lapok száma (l)	Élek száma (e)
Tetraéder 	4	4	6
Kocka 	8	6	12
Hatoldalú gúla 	7	7	12



24. ábra

Egy egyszerű poliéderből kiindulva könnyen eljuthatunk egy olyan síkbeli ábrához, gráfhoz, melyet úgy kaphatunk, hogy a testet – a csúcsokat és éleket megtartva – az egyik lapjára állítva „belenyomjuk" a síkba. Ezeket a gráfokat a poliéderek *Schlegel-diagramjának* nevezzük. Ilyen eljárást mutat a kocka esetén a 24. ábra.

Ezeknek a síkgráfoknak a segítségével igazolható az egyszerű poliéderekre vonatkozó összefüggés, melyet *Euler-féle poliédertételnek* nevezünk:

$$c + l = e + 2.$$

A poliéderek között azokat, melyek lapjai egybevágó szabályos sokszögek, valamennyi lapszögük és élszögük egyenlő, *szabályos testeknek* nevezzük.

Azt, hogy milyen típusú szabályos testek léteznek, az Euler-féle poliédertétel segítségével dönthetjük el. Legyen a határoló lap mindegyike n-oldalú szabályos sokszög. Mivel két-két oldal kapcsolódik egy-egy élhez, ezért:

$$l \cdot n = 2 \cdot e.$$

Ha minden csúcsba k él fut be, akkor (mivel minden él két vége csúcsban van):

$$k \cdot c = 2 \cdot e.$$

Ezeket az összefüggéseket felhasználva:

$$l = \frac{2e}{n}; \quad c = \frac{2e}{k}.$$

Euler tétele alapján:

$$\frac{2e}{n} + \frac{2e}{k} = e + 2.$$

Mindkét oldalt e-vel osztva:

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{e}.$$

Ez az összefüggés azt jelenti, hogy

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{k} > 1.$$

Ebből az egyenlőtlenségből azonos átalakításokkal juthatunk a vele ekvivalens állításhoz, miszerint:

$$2k + 2n > kn,$$

$$(n-2)\cdot(k-2) < 4.$$

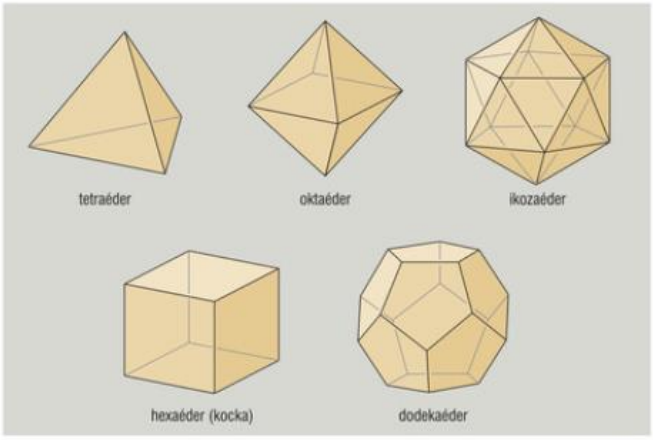
Nyilvánvaló, hogy n és k értéke 3-nál nem kisebb, ezért a fenti szorzatban $n-2$ és $k-2$ tényezők pozitív egészek. Ezek lehetséges értékei 1, 2 vagy 3. Így n lehetséges értékei 3, 4 vagy 5. Ez azt jelenti, hogy egy szabályos testnek csak három-, négy- vagy ötszöglapjai lehetségesek. Az élek számát a fenti egyenlőségekből fejezhetjük ki:

$$e = \frac{2kn}{2k + 2n - kn}.$$

Ezek alapján a lehetséges eseteket a következő táblázat foglalja össze:

	tetraéder	oktaéder	ikozaéder	hexaéder	dodekaéder
n	3	3	3	4	5
k	3	4	5	3	3
e	6	12	30	12	30
c	4	6	12	8	20
l	4	8	20	6	12

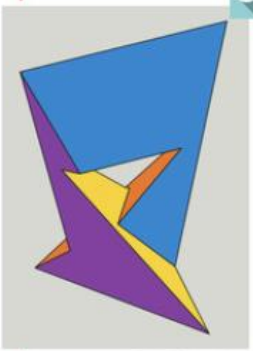
Ezekkel a jellemző adatokkal rendelkező szabályos testek valóban léteznek. Ez azt jelenti, hogy mindösszesen ötféle szabályos test létezik. Elnevezésüket a görög számnevek alapján származtatták, így például a négy lappal rendelkező testet tetraédernek nevezzük. ***(25. ábra)***



25. ábra

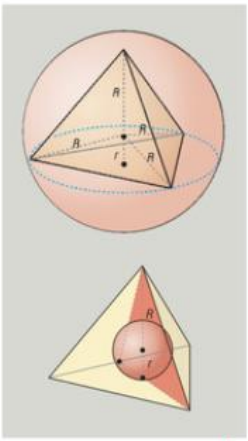
Szabályos testekkel nemcsak az építészetben, a technikában, hanem a természetben is találkozhatunk. Ezek figyelhetők meg különböző kristályszerkezetekben.

Megemlíthetjük még, hogy minden szabályos test gömbbe írható, és létezik olyan gömb is, amely valamennyi lapjukat érinti.

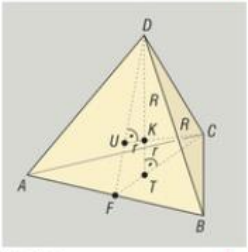


A poliéderekkel kapcsolatos érdekesség, hogy Szilassi Lajos szegedi matematikus készített egy olyan testet, melynek hét lapja van, és bármely két lapja szomszédos. A Szilassi-féle poliéder rozsdamentes acélból készített változatát 2002-ben Fermat francia matematikus szülőházában, születésének 400-adik évfordulóján avatták fel.

Császár Ákos 1949-ben készített egy tetraédertől különböző testet, melynek a tetraéderhez hasonlóan bármely két csúcsa szomszédos. Ez a Császár-poliéder – melynek 7 csúcsa, 14 háromszöglapja és 21 éle van – nem tartozik az egyszerű poliéderek közé.



26. ábra



27. ábra

1. példa

Mekkora sugarú gömb írható egy a oldalú szabályos tetraéderbe és a tetraéder köré?

Megoldás

Általában azoknál a feladatoknál, melyek beírható és köré írható gömbökre vonatkoznak, célszerű a megfelelő metszeteket elkészíteni.

Ebben az esetben a szabályos tetraéder szimmetriájából több dolgot is rögzíthetünk. ***(26. ábra)***

(1) A beírható és köré írható gömbök középpontjai egybeesnek.

(2) A beírható gömb a tetraéder lapjait azok súlypontjaiban érinti.

(3) $m = r + R$, ahol m a tetraéder magassága, r a beírható, R a köré írható gömb sugara.

Metsszük el a tetraédert egy olyan síkkal, mely tartalmazza egyik élét, valamint a keresett gömbök középpontját. Így a 27. ábrának megfelelő CDF egyenlő szárú háromszöget kapjuk, melynek két szára az oldallapok súlyvonalával egyezik meg.

Itt az egyik szárhoz tartozó magasság a tetraéder magasságával egyezik meg. A magasság talppontja a szabályos háromszög súlypontjában van, így a T pont az FC szakasz harmadoló pontja:

$$TC = \frac{2}{3} \cdot FC = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a.$$

A DTC derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$a^2 = m^2 + TC^2,$$

amiből

$$m = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a.$$

Most tekintsük az ábrán levő DUK, valamint a DTF háromszögeket.

Ezek hasonlóak, hiszen két szögükben megegyeznek.

A megfelelő oldalak aránya lapján:

$$\frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a}{\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a},$$

Az egyenletet rendezve és egyszerűsítve:

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a.$$

Felhasználva a magasság és a sugarak közötti kapcsolatot:

$$R = m - r = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a - \frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot a.$$

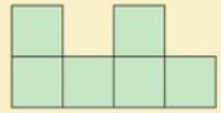
A kapott eredmények alapján leolvasható, hogy $\frac{R}{r} = 3$, ami azt jelenti, hogy a gömbök középpontja a magasság negyedelőpontjába esik.



Feladatok

1. Lehet-e olyan, a kockától különböző testet készíteni, melynek mindegyik oldallapja négyzet?

2. Az asztalra letettünk néhány egyforma méretű kockát. Ha ezeket elölről, ill. oldalról nézzük, akkor a következők láthatók:



oldalnézet



elölnézet

Legkevesebb, illetve legfeljebb hány kocka lehet az asztalon?

3. Rajzoljuk meg az öt szabályos test Schlegel-diagramját.

4. Mekkora az a oldalú kockába és a kocka köré írható gömb sugara? Mekkora annak a gömbnek a sugara, amelyik érinti a kocka éleinek egyenesét?

5. Egy szabályos tetraéder köré írt gömb sugara 10 cm-rel nagyobb, mint a tetraéderbe írt gömb sugara. Mekkora a tetraéder éleinek hossza?

6. Egy 10 cm sugarú gömbbe négyzetes hasábot írunk, ahol az alapél hossza fele az oldalél hosszának. Határozzuk meg a hasáb éleit.

7. Egy a élhosszúságú kocka egyik élén felveszünk egy, a csúcsoktól különböző P pontot. Határozzuk meg azt a legrövidebb útvonalat, amely P-ből indul, áthalad a kocka minden lapján, és P-be érkezik vissza. Milyen hosszú ez a minimális út?

8. Mekkora sugarú gömb írható abba a szabályos tetraéderbe, melyet egy a oldalélű kocka azon négy csúcsa határoz meg, melyek közül semelyik kettő sem esik a kocka ugyanazon élére?

9. Igazoljuk, hogy minden konvex poliédernek van legfeljebb ötoldalú lapja.

Rejtvény

Létezhet-e olyan test, melynek oldal- elöl- és felülnézetét az ábra szerint látjuk?



oldalnézet



elölnézet



felülnézet

4. A terület fogalma, a sokszögek területe

Gyakran adódik, hogy különböző típusú alakzatok, síkidomok területét kell meghatároznunk. Például egy telek nagysága meghatározhatja annak értékét, egy falfelület a hozzá szükséges burkoló anyagok mennyiségét. Ezek a síkidomok legtöbbször sokszögek, de később látni fogjuk, hogy lehetnek tetszőleges vonallal határolt síkidomok is.

Néhány területmérték m^2-ben kifejezett nagysága:
1 ár = 100 m^2,
1 hektár = 100 ár = = 10000 m^2,
1 négyszögöl = 3,596 m^2,
1 katasztrális hold = = $5{,}75462 \cdot 10^3$ m^2 = = 1600 négyszögöl.

A sokszögek esetén a terület nagyságának meghatározása az egységnyi területtel való összevetés alapján adódik. Az egységet célszerű egy könnyen jellemezhető, egyszerű alakzattal megjeleníteni. Ezt a szerepet az 1 oldalú, ún. *egységnégyzet* kapta. (Az oldal hossza és a terület nagysága minden esetben az aktuális egységekben értendő. Így például a négyzet oldala lehet 1 m, és akkor a területe 1 m^2 lesz. Ha a tárgyalt problémák során ennek nincs szerepe, akkor ezeket elhagyjuk.)

Pontosabban fogalmazva a területet úgy foghatjuk fel, mint egy függvényt, ahol minden síkidomhoz hozzárendelünk egy pozitív számot a következők teljesülése mellett:

(1) Az egységnégyzet területe 1.

(2) Az egybevágó sokszögek területe egyenlő.

(3) Ha egy sokszöget részsokszögekre vágunk szét, akkor a részek területének összege a sokszög területével egyenlő.

Igazolható, hogy ez a hozzárendelés minden sokszöghöz egyértelműen hozzárendel egy pozitív számot, azaz minden sokszögnek van területe.

A definíció általánosítható abban az értelemben, hogy a síkidom nem szükségszerűen egyenesek által határolt, hanem tetszőleges görbék is közrezárhatják. Mi ezek közül a kör és részeinek területét vizsgáljuk meg.

A terület fogalmát felhasználva lehetőségünk lesz a testek felszínéről beszélni, hiszen ha a felület síkba kiteríthető, akkor a felszín megegyezik a terület nagyságával.

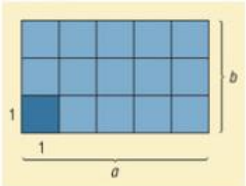
A téglalap területe

A sokszögek területének meghatározásánál a téglalap területe szolgál kiindulási alapul. Ezért fontos eredményt rögzít a következő tétel.

a téglalap területe

TÉTEL: **Az a és b oldalú *téglalap területe*: $t = a \cdot b$.**

28. ábra



Bizonyítás

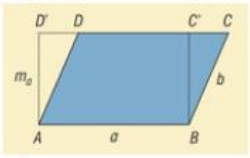
A tétel állítása nyilvánvaló, ha a téglalapot egységnégyzetekre lehet felvágni, azaz ha az oldalélek hossza egész szám. *(28. ábra)*

Abban az esetben, ha nem ez a helyzet, akkor a bizonyítás elvégzéséhez finomabb eszközökre van szükség, de az igazolás ekkor is az állítás helyességét mutatja.

Téglalapok esetében megemlíthetjük, hogy bármelyik oldalához tartozó magassága a téglalap másik oldalával egyenlő. Így az a megfogalmazás is helyes, ha azt mondjuk, hogy a téglalap területe megegyezik egy oldalának és a hozzá tartozó magasságának szorzatával.

A paralelogrammák területe

A paralelogrammák területének meghatározásakor felhasználhatjuk a téglalapokra kapott eredményt. Bármely paralelogramma könnyen átdarabolható vele egyenlő területű téglalappá a 29. ábrának megfelelő módon.



29. ábra

Az ábrán keletkező két háromszögre teljesül, hogy egybevágóak, így területük egyenlő. Emiatt az $ABCD$ paralelogramma területe megegyezik az $ABC'D'$ téglalap területével, vagyis a téglalap két oldalának a szorzatával. Az AD' szakasz hossza viszont éppen a paralelogramma AB oldalához tartozó magassága, így ebben az esetben is teljesül a következő:

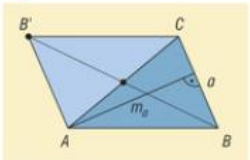
TÉTEL: **A *paralelogramma területe* egyenlő bármelyik oldalának és a hozzá tartozó magasságnak a szorzatával:**

$t = a \cdot m_a$.

a paralelogrammma területe

A háromszögek területe

A háromszögek területét a paralelogrammák területére vezetjük vissza. Ugyanis ha az ábrának megfelelően az ABC háromszöget tükrözzük az AC oldal felezőpontjára, akkor egy $ABCB'$ paralelogrammát kapunk. *(30. ábra)*



30. ábra

Ennek a területe nyilván kétszerese a háromszög területének. Mivel a paralelogramma a oldalához tartozó magassága a háromszög m_a magasságával egyenlő, ezért az ABC háromszög területére igaz a következő:

TÉTEL: **A *háromszög területe* egyenlő egy oldalának és a hozzá tartozó magasság szorzatának a felével:**

$$t = \frac{a \cdot m_a}{2}.$$

a háromszög területe

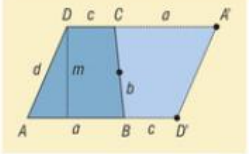
Érdemes megemlítenünk, hogy korábbi tanulmányaink során számos olyan összefüggéssel találkoztunk, melyek a háromszög területét más jellemző adatokkal hozzák kapcsolatba. Bizonyítás nélkül ezek közül sorolunk fel néhányat:

$t = \rho \cdot s$, ahol ρ a háromszögbe írt kör sugara, s pedig a félkerület nagysága;

$t = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, Heron képlete;

$t = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$, ahol α a b és c oldalak által bezárt szöget jelenti;

$t = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, ahol R a háromszög köré írható kör sugarával egyenlő.



31. ábra

A trapézok területe

A trapézok területének meghatározásában szintén a paralelogrammák területképletét használhatjuk fel. Ha ugyanis az $ABCD$ trapézt tükrözzük például a BC oldalának a felezőpontjára, akkor egy paralelogrammát kapunk. *(31. ábra)*

A trapéz területe a paralelogramma területének a fele. Azaz:

a trapéz területe

TÉTEL: **A *trapéz területe* a két alap számtani közepének és a magasságnak a szorzatával egyenlő:**

$$t = \frac{a+c}{2} \cdot m.$$

A sokszögek területe

Mivel minden sokszöget feldarabolhatunk háromszögekre, ezért területük meghatározása a háromszögek területének összegzésével elvégezhető. Vannak azonban olyan speciális esetek, amelyekben gyorsabban is meghatározhatjuk a terület nagyságát.

Könnyen adódik a következő tétel:

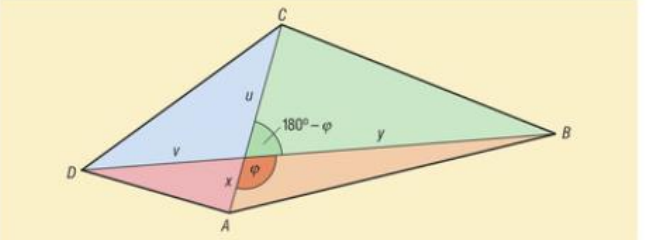
a konvex négyszög területe

TÉTEL: ***Tetszőleges konvex négyszög terület*e egyenlő az átlók és a közbezárt szög szinusza szorzatának a felével:**

$$t = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin\varphi.$$

Bizonyítás

Tekintsük a 32. ábrát, és használjuk annak jelöléseit.



32. ábra

Nyilvánvaló, hogy a négyszög területe a keletkező négy háromszög területének az összege, ezért:

$$t = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} \cdot y \cdot u \cdot \sin(180° - \varphi) +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot u \cdot v \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} \cdot v \cdot x \cdot \sin(180° - \varphi).$$

Felhasználva, hogy $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$, a kifejezés kiemelésekkel átalakítható:

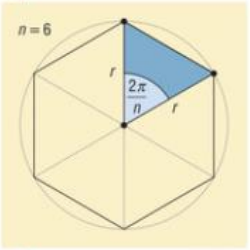
$$t = \frac{1}{2}\cdot[y\cdot\sin\varphi\cdot(x+u)+v\cdot\sin\varphi\cdot(x+u)] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(x+u)\cdot(y+v)\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot e\cdot f\cdot\sin\varphi.$$

Az eredményből adódik, hogy ha egy konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra (ilyen négyszög például a deltoid), akkor területe az átlók szorzatának a felével egyenlő:

$$t = \frac{e\cdot f}{2}.$$

Szabályos sokszögek esetén célszerű a sokszöget olyan egyenlő szárú háromszögekre bontani, melyek akkor jönnek létre, ha a sokszög csúcsait a középpontjával összekötjük. Az így keletkező egybevágó háromszögek területének összege határozza meg a sokszög területét. *(33. ábra)*



33. ábra

Egy n oldalú szabályos sokszög esetén a terület nagysága:

$$t = n\cdot\frac{r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{2},$$

ahol r a sokszög köré írható kör sugarának hosszát jelöli.

Korábbi tanulmányaink során már igazoltuk, hogy addig, amíg az egybevágóság a sokszögek területét nem változtatja meg, egy k arányú hasonlóság esetén ez már nem teljesül.

A változás mértékét elegendő háromszögekre megvizsgálnunk. A hasonlóság egy a oldalú, m_a magasságú háromszög méreteit k-szorosára változtatja meg. Ezért a háromszög területe:

$$t = \frac{k\cdot a\cdot k\cdot m_a}{2} = k^2\cdot\frac{a\cdot m_a}{2}.$$

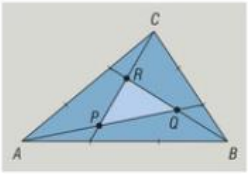
Ebből következik, hogy a k arányú hasonlóság a sokszögek területét k^2-szeresére változtatja.

Feladatok

1. Mekkora a területe az a oldalú szabályos háromszögnek?
2. Egy paralelogramma egyik oldala 7 cm, a hozzá tartozó magassága 6 cm, a másik oldalhoz tartozó magasság 3 cm. Határozzuk meg a másik oldal hosszát és a paralelogramma szögeit.
3. Határozzuk meg a paralelogramma átlóinak hosszát és a bezárt szög nagyságát, ha az oldalainak nagysága 6 cm és 10 cm, a területe pedig 40 cm^2.

4. Egy ABC háromszög mindegyik oldalát a hosszával meghosszabbítottuk, AB-t B-n, BC-t C-n, CA-t A-n túl. Így a PQR háromszöget kaptuk. Hányszorosa a PQR háromszög területe az ABC háromszög területének?

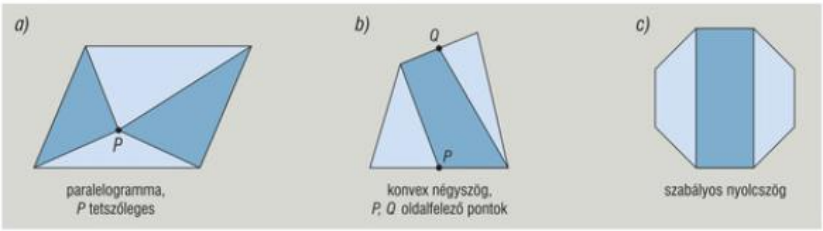
5. Egy háromszög oldalainak harmadolópontjait a csúcsokkal kötöttük össze az ábra szerint. Hányadrésze a keletkező PQR háromszög az eredeti ABC háromszögnek?



6. Adott ABC háromszöget osszunk két egyenlő területű részre az egyik csúcsán áthaladó egyenessel.

7. Egy szabályos ötszög oldala 10 cm. Mekkora a területe?

8. Igazoljuk, hogy a következő ábrákon látható sötétebb színű részek területösszege egyenlő a világosabb színű részek területének összegével.



9. Egy rombusz két átlója 2 és 4 egység hosszúságú. A rombuszt a középpontja körül 90°-kal elforgatjuk. Számítsuk ki az eredeti és az elforgatott rombusz közös részének a területét.

10. Létezik-e olyan egész oldalú téglalap, melynek kerülete és területének mérőszáma megegyezik?

11. Egy szabályos sokszög köré írható kör középpontját tükrözzük rendre a sokszög oldalaira. Legyen a sokszög területe T, a tükörképek által meghatározott sokszög területe T'.

a) Bizonyítsuk be, hogy $1 \leq \frac{T'}{T} < 4$.

b) Mely sokszög esetén lesz $\frac{T'}{T}$ egész szám?

5. A kör és részeinek területe

A kör területének meghatározásakor azt tartjuk szem előtt, hogy a terület fogalmának megfelelő számot rendeljünk hozzá. Ehhez már a matematika egyik ágának, az analízisnek a módszereire van szükség. Az állítások bizonyítása túlmutat a középiskolában tárgyalt anyagrészeken, ezért ezek részletezésétől eltekintünk.

Nyilvánvaló, hogy ha egy körbe sokszögeket írunk, akkor a létező csúcspontokhoz egy újat felvéve a sokszög kerülete egyre közelebb kerül a kör kerületéhez. Ezzel a közelítéssel juthatunk el a kör kerületére vonatkozó ismert összefüggéshez, miszerint egy r sugarú kör esetén:

$$k = 2r\pi.$$

A π jelölés a periféria (kerület) görög szó kezdőbetűjéből származik. A kör kerülete és átmérője közötti arányt jelenti, ugyanis $k = 2r\pi$. Használatát először Euler javasolta 1739-ben. Számos fontos tulajdonsága mellett ma már bizonyított, hogy irracionális szám, és nem lehet gyöke egyetlen racionális együtthatókkal rendelkező algebrai egyenletnek sem (azaz transzcendens szám).

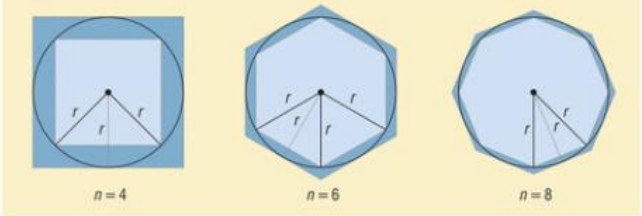
Minden idők egyik legjobb magyar nyelvű pi-versét Szász Pál matematikus írta 1952-ben:

3 1 4 1 5 9
Nem a régi s durva közelítés,
2 6 5 3 5
Mi szótól szóig így kijön
8 9
Betűiket számlálva.
7 9 3
Ludolph eredménye már,
2 3 8 4 6
Ha itt végezzük húsz jegyen.
2 6 4 3 3 8
De rendre kijő még tíz pontosan,
3 2 7 9
Azt is bizvást igérhetem.

A kör területe

Abban az esetben, ha egy körbe és köré szabályos sokszögeket írunk, akkor megállapíthatjuk, hogy a beírt sokszögek területe kisebb, a köré írt sokszögek területe pedig nagyobb a kör területénél. Ha a sokszögek oldalszámát növeljük, akkor a beírtak területe nő, míg a köré írtak területe csökken. Bebizonyítható, hogy az oldalszám növelésével a kétfajta sokszög területe egyetlen számot fog közre, másképpen fogalmazva egy konkrét számhoz közelítenek. Ez a szám a kör területe.

Ha az oldalak számát n-nel jelöljük, akkor a következő táblázatban néhány esetben meghatározott területet tüntettünk fel, ahol a kör sugarát $r = 1$ -nek választottuk. *(34. ábra)*



34. ábra

Oldalak száma (n)	Beírt terület		Köré írt terület
4	2	< a kör területe <	4
6	2,59807…	< a kör területe <	3,46410…
8	2,82842…	< a kör területe <	3,31370…

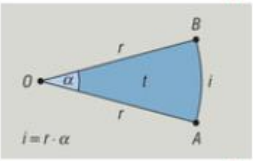
Azt a számot, melyet ezekkel a közelítésekkel kijelölhetünk, nevezzük a kör területének. Az egységsugarú kör esetén ez éppen a kerület során bevezetett π értékét adta.

Mivel az egységsugarú kört egy r arányú hasonlósággal transzformálhatjuk egy r sugarú körré, ezért az r sugarú kör területére a következő összefüggés adódik:

a kör területe

$$t = r^2 \cdot \pi.$$

A körcikk területe



35. ábra

Körcikknek a kör két sugara és a közöttük levő körív által határolt síkidomot nevezzük. A körcikk területe arányos a hozzá tartozó α nagyságú középponti szöggel. *(35. ábra)*

Ha t-vel jelöljük az α szöghöz tartozó körcikk területét, akkor figyelembe véve, hogy a teljes körhöz tartozó középponti szög 2π, felírható a következő arány:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{t}{r^2 \cdot \pi}.$$

Ebből a körcikk területére a következő összefüggést nyerhetjük:

a körcikk területe

$$t = \frac{r^2 \cdot \alpha}{2},$$

ahol α a középponti szög nagyságát jelöli ívmértékben megadva.



Ha figyelembe vesszük a szögek ívmértékére vonatkozó definíciót, miszerint $\alpha = \frac{i}{r}$, ahol i az α középponti szöghöz tartozó ív hossza, akkor a területképlet egy másik alakját kaphatjuk meg:

$$t = \frac{r^2 \cdot \alpha}{2} = \frac{r \cdot r \cdot \alpha}{2}, \text{ amiből}$$

$$t = \frac{r \cdot i}{2}.$$

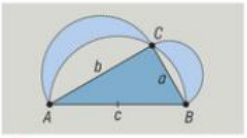
Ha a szögeket fokokban mérjük, akkor a következő alakú összefüggés nyerhető:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{t}{r^2 \cdot \pi}, \text{ amiből}$$

$$t = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ}.$$

1. példa

Rajzoljunk egy derékszögű háromszög oldalai fölé a 36. ábrának megfelelően félköröket. Igazoljuk, hogy a világosabb színű területek összege a derékszögű háromszög területével egyenlő. (Hippokratész holdacskái)



36. ábra

Megoldás

Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon a, b és c-vel, így a megfelelő oldalak fölé rajzolt félkörök sugarai $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ és $\frac{c}{2}$, ezért ezek területei rendre $\frac{a^2 \cdot \pi}{8}$, $\frac{b^2 \cdot \pi}{8}$ és $\frac{c^2 \cdot \pi}{8}$.

A holdacskák területét megkapjuk, ha a háromszög t területének és a befogók fölé rajzolt félkörök területének összegéből kivonjuk az átfogó fölé rajzolt félkör területét:

$$t + \frac{a^2 \cdot \pi}{8} + \frac{b^2 \cdot \pi}{8} - \frac{c^2 \cdot \pi}{8} = t + \frac{\pi}{8} \cdot (a^2 + b^2 - c^2) = t,$$

hiszen Pitagorasz tételéből következik, hogy a zárójelben található kifejezés $a^2 + b^2 - c^2 = 0$. Tehát a holdacskák területének összege valóban a háromszög területével egyenlő.

HIPPOKRATÉSZ (Kr. e. 450 körül) görög matematikus. Jó száz évvel megelőzve EUKLEIDÉSZT (Kr. e. 300 körül), egy rendszerező matematikai művet írt, melyben jelentős teret biztosított különböző egyenesek és körívek által meghatározott területek kiszámításának.

A körszelet területe

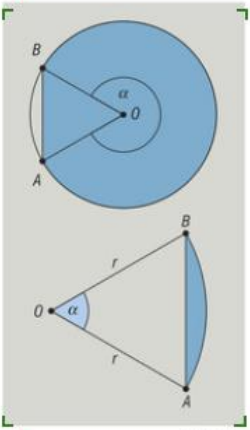
A körszelet területét a körcikk és a háromszög területének ismeretében határozhatjuk meg. Nyilvánvaló, hogy ez a terület nem más, mint a körcikk és a megfelelő háromszög területének különbsége, illetve összege. *(37. ábra)*

Egy r sugarú kör esetén, α középponti szög mellett a körszelet t területe:

$$t = \frac{r^2 \cdot \alpha}{2} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2}, \text{ amiből}$$

$$t = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha).$$

a körszelet területe



37. ábra

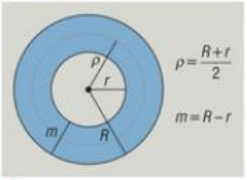
A körgyűrű területe

Két közös középpontú R és r sugarú kör körgyűrűt fog közre. Ennek területét megkapjuk, ha a nagyobb sugarú kör területéből kivonjuk a kisebb sugarú kör területét. *(38. ábra)*

$$t = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi = \pi \cdot (R - r) \cdot (R + r), \text{ amiből}$$

$$t = 2 \cdot \frac{R + r}{2} \cdot (R - r) \cdot \pi.$$

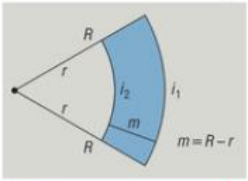
a körgyűrű területe



38. ábra

Középkörnek nevezzük azt a kört, amely a körgyűrűben mindkét határoló körtől egyenlő távolságra halad.

Ennek sugara éppen $\rho = \frac{R+r}{2}$, a körgyűrű szélessége pedig $m = R - r$.



39. ábra

Így a körgyűrű területét ezekkel az adatokkal is felírhatjuk:

$$t = 2 \cdot \rho \cdot m \cdot \pi.$$

Körgyűrűcikknek nevezzük a körgyűrű két sugár közötti részét. Jelöljük a határoló ívek hosszát i_1 és i_2-vel, a szélességét pedig m-mel. *(39. ábra)*

Mivel mindkét ívhez ugyanaz a középponti szög tartozik, ezért:

$$\frac{i_1}{R} = \frac{i_2}{r}, \text{ azaz } i_1 \cdot r = i_2 \cdot R.$$

A körgyűrűcikk területe két körcikk területének különbségeként áll elő:

$$t = \frac{i_1 \cdot R}{2} - \frac{i_2 \cdot r}{2}, \text{ amiből}$$

a körgyűrűcikk területe

$$t = \frac{1}{2} \cdot (i_1 \cdot R - i_2 \cdot r).$$

Mivel a középponti szög alapján megállapított összefüggés alapján $i_2 \cdot R - i_1 \cdot r = 0$, ezért ezzel a kifejezéssel a kapott eredményünket tovább alakíthatjuk:

$$t = \frac{1}{2} \cdot (i_1 \cdot R - i_2 \cdot r + i_2 \cdot R - i_1 \cdot r) = \frac{1}{2} \cdot (i_1 + i_2) \cdot (R - r), \text{ amiből}$$

$$t = \frac{i_1 + i_2}{2} \cdot m.$$

Megjegyzés: Érdemes megfigyelnünk, hogy a körcikk területképlete a háromszög területképletére, a körgyűrűcikk területképlete pedig a trapéz területképletére emlékeztet.

Feladatok

1. Egy kör sugarát háromszorosára növeljük. Hányszorosára nő a kerülete és a területe?
2. Egy kör területét megkétszereztük. Hányszorosára nőtt a kerülete?
3. Egy kör alakú pizza ára 500 Ft. Érdemes-e egy kétszer akkora átmérőjű pizzáért 1500 Ft-ot fizetni?
4. A Földet tökéletesen gömb alakúnak képzelve az Egyenlítő hosszát 40 000 km-nek tekinthetjük. Hány km-rel hosszabb vezetékre lenne szükségünk, ha a felszíntől 1 km magasságra az Egyenlítő mentén körbe ölelnénk vele a Földet?

5. Határozzuk meg annak a körcikknek a területét, melynek a következő adatait ismerjük (r a kör sugara, i a körcikkhez tartozó körív hossza, α a körcikkhez tartozó középponti szög):

a) $r = 2$ cm, $\alpha = 60°$; *b)* $r = 2$ cm, $i = 3$ cm; *c)* $i = 2$ cm, $\alpha = 60°$.

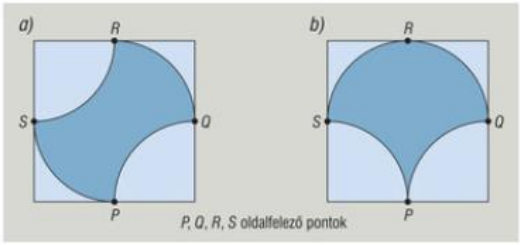
6. Mekkora annak a körszeletnek a területe, melyhez tartozó középponti szög 70°, a kör sugara pedig 2 m?

7. Mekkora annak a körgyűrűcikknek a területe, melynek adatai a következők:

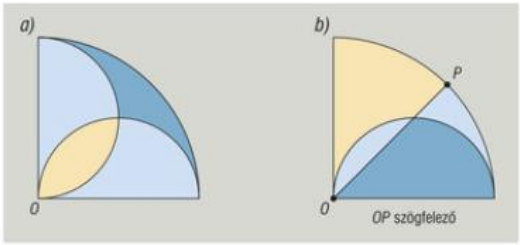
a) $r = 2$ cm, $R = 5$ cm, $\alpha = 30°$; *b)* $i_1 = 5$ cm, $i_2 = 3$ cm, $\alpha = 30°$;

c) $r = 2$ cm, $\rho = 5$ cm, $\alpha = 30°$; *d)* $r = 2$ cm, $\rho = 5$ cm, $i_1 = 3$ cm?

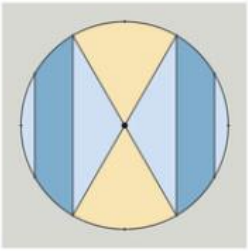
8. Határozzuk meg, hogy az ábrákon bejelölt terület hányad része a négyzet területének.



9. Igazoljuk, hogy a következő ábrákon a sárga és a sötétkék területek nagysága egyenlő.



10. Az ábrán látható körön megjelöltük a szabályos tizenkétszög csúcsait. Melyik terület a nagyobb a háromféleképpen jelölt terület közül?



11. Két $r = 10$ cm sugarú kör egymást úgy metszi, hogy a középpontjaik távolsága 15 cm-re van egymástól. Mekkora a két kör közös részének a területe?

12. Egy szabályos tizenkétszög területe 100 cm^2. Mekkora annak a körgyűrűnek a területe, melyet a tizenkétszögbe és a tizenkétszög köré írható körök határoznak meg?

13. Három különböző sugarú pénzdarabot, melyeknek sugarai $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm és $r_3 = 5$ cm úgy teszünk egymás mellé, hogy mindegyik érintse a másik kettőt. Mekkora a pénzdarabok köré írható háromszög területe?

6. A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata



A területhez hasonlóan, mely a síkbeli alakzatokhoz rendel hozzá egy mértéket, a térben is szükségünk lehet arra, hogy a testeket valamiféle méretükre jellemző adattal lássuk el. Ez befolyásolhatja értéküket, esztétikai szerepüket és felhasználási módjukat. Egy gyémánt vagy egy igazgyöngy nagyon fontos tulajdonsága, hogy mekkora méretű. Egy munkahely létrehozásánál a légtér, a belső tér mérete függ attól, hogy hányan szeretnék azt használni.

A testek térfogatát a sokszögek területéhez hasonló módon értelmezhetjük. A definíciót először a poliéderek térfogatára fogalmazzuk meg.

A poliéder *térfogata* a poliéderre jellemző pozitív szám, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(1) Az egységkocka térfogata 1.

(2) Az egybevágó poliéderek térfogata egyenlő.

(3) Ha egy poliédert részpoliéderekre vágunk szét, akkor a részek térfogatának összege egyenlő az egész poliéder térfogatával.

Igazolható, hogy minden poliéderhez egyértelműen rendelhető hozzá a feltételeknek megfelelő pozitív szám, ezért minden poliédernek van egyértelműen meghatározott térfogata.

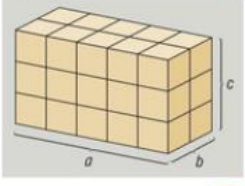
Egy görbült felületekkel határolt test esetén is bizonyítható, hogy ez a hozzárendelés egyértelműen létezik. Így hengerszerű testek, valamint kúpok esetén is beszélhetünk térfogatról. Ennek bizonyítása meglehetősen nehéz (felsőbb matematikai eszközöket igényel), ezért ezt az állítást bizonyítás nélkül fogadjuk el.

A téglatest térfogata

A poliéderek térfogatának meghatározását felfoghatjuk szemléletesen úgy, hogy az nem más, mint az egységkockával való összehasonlítás. Kiindulásként a téglatest térfogatát határozzuk meg.

a téglatest térfogata

40. ábra



TÉTEL: **A *téglatest térfogata* az egy csúcsból kiinduló élek hosszainak szorzata:**

$$t = a \cdot b \cdot c.$$

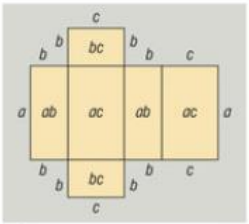
Bizonyítás

A tétel állítása nyilvánvaló, ha a téglatestet egységkockákra lehet felvágni, azaz ha az oldalélek hossza egész szám. *(40. ábra)*

Abban az esetben, ha nem ez a helyzet, akkor a bizonyítás elvégzéséhez finomabb eszközökre van szükség, de az állítás ekkor is igaz.

A téglatest felszínét a határoló téglalapok területének összege adja meg *(41. ábra)*. Ez a téglatest hálójának alapján:

$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc).$$



41. ábra

Kocka esetén az élek egyenlők: $a = b = c$, ekkor a térfogat:

$$V = a^3.$$

A felszín nagysága:

$$A = 6 \cdot a^2.$$

1. példa

30 darab egybevágó kockából téglatestet építünk. Hogyan tegyük ezt, ha azt szeretnénk, hogy a megépült téglatestet a lehető legkevesebb anyaggal tudjuk beburkolni?

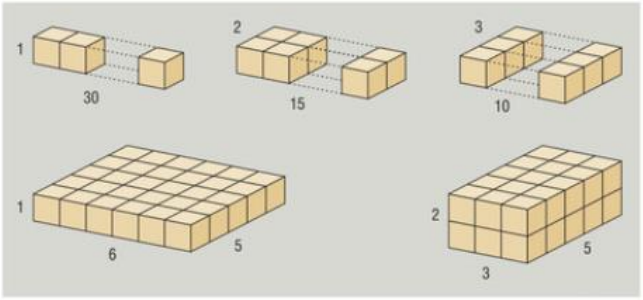
Megoldás

A feltétel szerint arra kell törekednünk, hogy a 30 darab kockából megépített téglatest felszíne minimális legyen. Tekintsük a kockákat egységnyinek, így a téglatest térfogata 30 lesz.

Vizsgáljuk meg hányféleképpen tudjuk a 30-at felbontani három egész szám szorzatára,

$$30 = 1 \cdot 1 \cdot 30 = 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 3 \cdot 10 = 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

A lehetőségeket a 42. ábra mutatja.



42. ábra

Az $A = 2 \cdot (ab + ac + bc)$ felszínképlet szerint a megépített téglatestek felszínei a következők lesznek:

$A_1 = 2 \cdot (1 + 30 + 30) = 122$; $A_2 = 2 \cdot (2 + 15 + 30) = 94$;

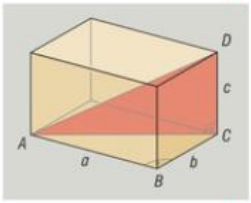
$A_3 = 2 \cdot (3 + 10 + 30) = 86$; $A_4 = 2 \cdot (5 + 6 + 30) = 82$;

$A_5 = 2 \cdot (6 + 10 + 15) = 62$.

Ez alapján megállapítható, hogy az $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ élhossz esetén lesz minimális a felszín nagysága.

2. példa

Egy téglatest egy csúcsból induló éleinek aránya 4:5:20. Testátlójának hossza 42. Mekkora a térfogata és a felszíne?



43. ábra

Megoldás

Jelöljük a téglatest éleinek hosszát a, b és c-vel. *(43. ábra)*

Az alaplap AC átlójára Pitagorasz tételéből adódik, hogy

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2.$$

Az AD testátló viszont az ACD derékszögű háromszögből adódik:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Ez azt jelenti, hogy a téglatest testátlójának a négyzete az egy csúcsból induló élek négyzetének összege. Az arányok alapján jelöljük az élek hosszát rendre a következő módon: $4x$, $5x$, $20x$. A testátlóra adódott összefüggésbe helyettesítve:

$$42^2 = (4x)^2 + (5x)^2 + (20x)^2,$$

$$1764 = 441x^2,$$

$$x^2 = 4.$$

Innen a feladat feltételeinek az $x = 2$ arány felel meg, mely alapján meghatározhatók a téglatest élei: $a = 8$, $b = 10$, $c = 40$.

Így a térfogat:

$$V = a \cdot b \cdot c = 3\,200.$$

A felszín:

$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 1600.$$

A hasáb térfogata

Ha a téglatest alapjának az a és b oldalú téglalapot tekintjük, akkor a magassága c lesz. Ekkor a térfogat képlete úgy is felfogható, hogy az alap ab területét szorozzuk a magasság hosszával, c-vel. Ez az összefüggés minden hasábra igaz lesz.

a hasáb térfogata

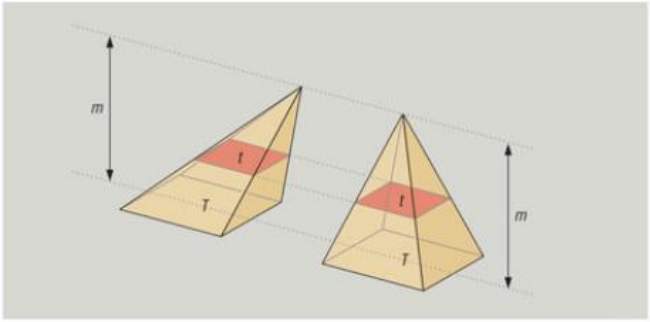
TÉTEL: **A *hasáb térfogata* az alapterület és a hozzá tartozó magasság szorzatával egyenlő:**

$$V = t_{\text{alapterület}} \cdot m.$$

Ez az állítás teljesül az egyenes hasábokra, a ferde hasábokra és minden hengerszerű testre is. Az állítás igazolása nem könnyű feladat, a benne felhasznált ismeretek túlmutatnak e könyv keretein. A felhasznált ismeretek között azonban megemlítünk egyet, mely a későbbiek során is hasznosnak bizonyul.

A XVII. század elején Cavalieri itáliai matematikus fogalmazott meg egy állítást különböző alakú testekre vonatkozóan, mely a testek térfogatára vonatkozott. Ezt az elvet azóta Cavalieri-elvnek nevezzük.

CAVALIERI-ELV: Ha két testhez van olyan sík, hogy valamennyi vele párhuzamos sík belőlük páronként azonos területű síkmetszeteket vág ki, akkor a két test egyenlő térfogatú. *(44. ábra)*



44. ábra

Itt meg kell jegyeznünk, hogy az elv teljesen általános megfogalmazása kiegészítésekre szorul, de az általunk vizsgált testek térfogatának meghatározása esetén ebben a formában is elegendő.



FRANCESCO BONAVENTURA CAVALIERI (1598–1647) itáliai matematikus, Galilei tanítványaként a mester fizikában elért eredményeit segített matematikai formákban megfogalmazni. Úgy képzelte, hogy a testek eggyel kisebb dimenziójú elemekből tevődnek össze, ez vezetett a róla elnevezett elv megfogalmazásához.

3. példa

Egy szabályos háromszög alapú és egy szabályos négyszög alapú hasáb térfogata és alapélének hossza megegyezik. Hogyan aránylanak egymáshoz a magasságaik?

Megoldás

Jelöljük az alapélek hosszát a-val, a háromszög alapú hasáb magasságát m_1-gyel, a négyzet alapúét pedig m_2-vel.

A két test térfogatának értéke rendre:

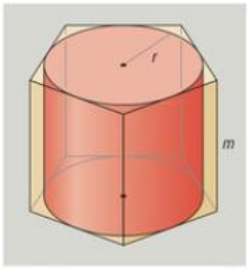
$$V_1 = t_1 \cdot m_1 = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m_1, \quad V_2 = t_2 \cdot m_2 = a^2 \cdot m_2.$$

Mivel a térfogatok megegyeznek, ezért:

$$\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m_1 = a^2 \cdot m_2.$$

Ebből a két magasság arányát kifejezhetjük:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a^2}{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}.$$



45. ábra

a henger térfogata és felülete

A henger térfogata

A hengerek térfogatát a hasábok térfogatának ismeretében határozhatjuk meg. Teljesül ugyanis, hogy minden henger tetszőleges pontossággal közelíthető meg megfelelően méretezett hasábok segítségével. Ezért egy r sugarú, m magasságú henger térfogata ***(45. ábra)***:

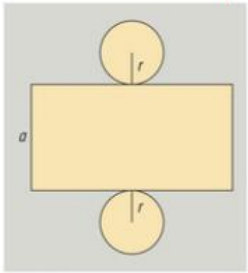
$$V = t_{\text{alapterület}} \cdot m, \text{ azaz}$$

$$\boxed{V = r^2 \cdot \pi \cdot m.}$$

A felszín meghatározásakor vegyük észre, hogy a palást olyan téglalap lesz, melynek egyik oldala az alapkör kerülete, a másik pedig a magasság ***(46. ábra)***, amely a henger a alkotója is egyben:

$$A = 2 \cdot t_{\text{alapkör}} + t_{\text{palást}} = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot a, \text{ amiből}$$

$$\boxed{A = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + a).}$$



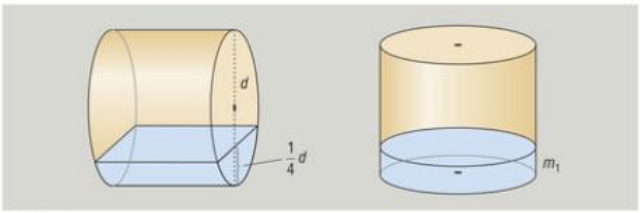
46. ábra

4. példa

Egy 2 m magas henger alakú edény alapkörének sugara 1 m. A hengerben fekvő helyzetben függőleges átmérőjének $\frac{1}{4}$ részéig víz áll. Milyen magas lesz a vízszint, ha a hengert felállítjuk?

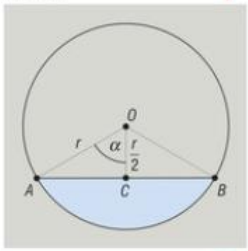
Megoldás

A fekvő hengerben levő víz térfogata megegyezik egy 2 m magasságú, körszelet alapú hasábszerű test térfogatával. ***(47. ábra)***



47. ábra

48. ábra



A körszelet területe, és így az alapterület egy körcikk és egy háromszög területének a különbsége ***(48. ábra)***. A körcikkhez tartozó középponti szög az OAC háromszög alapján: $\cos\alpha = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$, így $\alpha = 60°$, a középponti szög $2\alpha = 120°$. A körcikk területe tehát a teljes kör területének harmadrésze. Az OAB háromszög területe éppen egy r oldalú szabályos háromszög területével egyezik meg, ezért:

$$t_{\text{körszelet}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{3} - \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 0{,}61 \text{ m}^3.$$



Ezért a hengerben levő víz térfogata:

$$V = t \cdot m \approx 0{,}61 \cdot 2 = 1{,}22 \text{ m}^3.$$

A henger álló helyzetében az alapterület már egy r sugarú kör területe lesz. Legyen ekkor a víz magassága m_1. A kapott térfogat ismeretében:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m_1,$$

$$m_1 = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} \approx \frac{1{,}22}{\pi} \approx 0{,}39 \text{ m}.$$

A vízszint 0,39 m magasságban lesz.

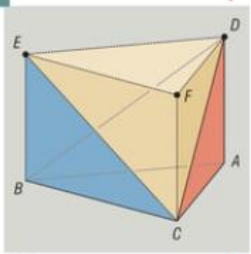
Feladatok

1. 36 darab egységkockából téglatestet építünk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? Melyiknek lesz a legnagyobb és melyiknek a legkisebb a felszíne?
2. Egy téglatest éleinek aránya 3 : 4 : 5, testátlója 20. Mekkorák az élei? Mekkora a térfogata és a felszíne? Mekkora szöget zár be a testátló a téglatest leghosszabb és legrövidebb élével?
3. Egy téglatest egy csúcsból induló éleinek aránya 2 : 3 : 4, a térfogata 192 cm^3. Mekkorák az élei és mekkora a felszíne?
4. Egy 1300 cm^2 felszínű téglatest három élének aránya 2 : 3 : 4. Mekkorák az élek és a téglatest térfogata?
5. Egy egyenes hasáb alapéle 10 cm, magassága 20 cm. Mekkora a felszíne és térfogata, ha alapja
   a) szabályos háromszög; *b)* szabályos ötszög;
   c) szabályos hatszög; *d)* szabályos tízszög.
6. Mekkora annak a forgáshengernek a térfogata és a felszíne, melynek adatai a következők:
   a) $r = 5$ cm, $m = 10$ cm; *b)* $r = 10$ cm, $t_{\text{palást}} = 2000 \text{ cm}^2$;
   c) $m = 10$ cm, $t_{\text{palást}} = 1500 \text{ cm}^2$?
7. Egy 10 cm élű kockából egy hengert vágunk ki. Legalább hány százalék a veszteség?
8. Egy gömbbe és a gömb köré kockát írunk. A két kocka élének különbsége 10 cm. Mekkora a két kocka térfogata és felszíne?
9. Egy $a = 5$ cm és $b = 8$ cm oldalú téglalapot először a rövidebb, majd a hosszabb oldala körül megforgatunk. Mekkora lesz a keletkező testek térfogata és felszíne?
10. Egy 10 cm élű kocka egyik alapélén át fektessünk olyan síkot, amely az alaplappal 30°-os szöget zár be. Mekkora térfogatú részekre vágja szét a sík ezt a kockát? Mekkora lesz a keletkező testek felszíne?
11. Egy téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek összege 14, négyzetük összege 84. Az egyik él mértani közepe a másik kettőnek. Mekkora a téglatest felszíne és térfogata?
12. Egy négyzetes oszlop oldalélének és alapélének aránya egész szám. Alaplapjának és fedőlapjának élfelezőpontjai egy másik négyzetes oszlop csúcsai. E másik oszlop felszínének és az eredeti oszlop alaplapja hatszoros területének aránya 0,5 és 2 között van. Hány ilyen négyzetes oszlop létezik, ha az egymáshoz hasonló négyzetes oszlopokat azonosaknak tekintjük?

7. A gúla és a kúp térfogata

A gúlaszerű testek térfogatát célszerű a legegyszerűbbel, a háromszög alapú gúla térfogatának meghatározásával kezdeni. Ezeket a testeket a korábbiak alapján tetraédereknek nevezzük.

A tetraéder térfogata



49. ábra

Könnyű belátni, hogy minden tetraéder alkalmasan megválasztott élek és síkok segítségével hasábbá egészíthető ki. Egy ilyen kiegészítést mutat az $ABCD$ tetraéder esetén a 49. ábra.

Az így keletkezett test térfogatát meg tudjuk határozni, hiszen egy ABC háromszög alapú hasábról van szó. Így a térfogat az alapterület és a magasság szorzatával egyenlő.

Ennek a testnek része a kiindulásként felvett tetraéder. A kiegészítés során felvett testek szintén tetraéderek lesznek. Ezeket jelölik ki a $DEFC$, valamint a $BCDE$ pontok.

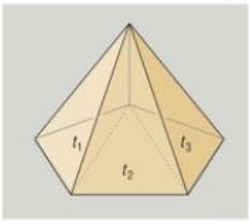
Itt nem részletezett okok miatt ezekre a testekre teljesül a korábban megfogalmazott *Cavalieri-elv*. Ez azt jelenti, hogy e három tetraéder térfogata megegyezik egymással. Mivel összegük éppen a hasáb térfogatát adja, így megállapíthatjuk, hogy az $ABCD$ tetraéder térfogatát megkaphatjuk a következő képlet szerint:

a tetraéder térfogata

$$V_{\text{tetraéder}} = \frac{T \cdot m}{3}.$$

Itt T a tetraéder alapterületét, m a magasságának hosszát jelöli.

A gúla térfogata



50. ábra

Abban az esetben, ha az alap tetszőleges sokszög, már gúláról beszélhetünk. Mivel minden sokszög felbontható háromszögekre, ezért a gúlák is felbonthatók háromszög alapú gúlákra, azaz tetraéderekre.

Ha a keletkező háromszögek területeit rendre $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jelöli, akkor ezek összege a T alapterületet határozza meg *(50. ábra)*. Így bármely gúla térfogata:

$$V = \frac{t_1 \cdot m}{3} + \frac{t_2 \cdot m}{3} + \ldots + \frac{t_n \cdot m}{3} = (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \cdot \frac{m}{3}, \text{ amiből}$$

a gúla térfogata

$$V = \frac{T \cdot m}{3}.$$

Akár a tetraédert, akár a sokszög alapú gúlákat tekintjük, a felszín meghatározása nem más, mint sokszögek, illetve háromszögek területeinek összegzése. Az oldallapokat meghatározó háromszögek együttesen alkotják a gúla palástját.

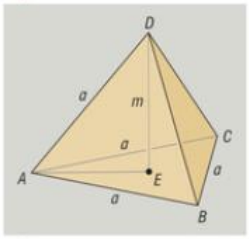
1. példa

Határozzuk meg egy szabályos tetraéder térfogatát és felszínét.

Megoldás

Jelöljük az élek hosszát a-val. Mivel a szabályos tetraéder minden lapja szabályos háromszög, és ezekből összesen négy alkotja a felszínt, ezért a teljes felszín nagysága:

$$A = 4 \cdot T = 4 \cdot \frac{a \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \sqrt{3}.$$



51. ábra

A térfogat meghatározásához először meg kell adnunk a test magasságának hosszát. Ezt az 51. ábrán látható AED derékszögű háromszögben felírható Pitagorasz-tétel alapján adhatjuk meg.

A testmagasság talppontja az ABC szabályos háromszög E súlypontjába esik, ezért:

$$AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{3}.$$

Ebből a magasság meghatározható:

$$m^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{3} \cdot a}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot a^2, \text{ amiből } m = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a.$$

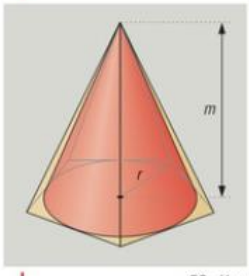
Ezt felhasználva a szabályos tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot a}{3}}{3} = \frac{\sqrt{18} \cdot a^3}{36} = \frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{12}.$$

A kúp térfogata és felszíne

Mint ahogyan a hasáb térfogata alapján el lehet jutni a henger térfogatához, így a kúp térfogata is származtatható a gúlák térfogatából.

Nyilvánvaló, hogy amint nő a sokszög alapú gúla oldalainak száma, a gúla egyre jobban hasonlít majd egy kúphoz *(52. ábra)*. Az sejthető, hogy a gúlákra vonatkozó térfogatképlet érvényes lesz majd a kúpokra is.



52. ábra

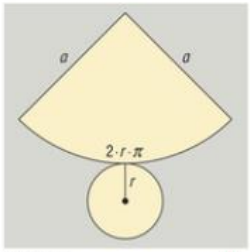
Ha tekintünk egy T alapterületű, m magasságú kúpot, akkor bebizonyítható, hogy a térfogatát a következő képlet határozza meg:

$$V = \frac{T \cdot m}{3}, \text{ amiből}$$

$$\boxed{V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3}.}$$

a kúp térfogata

Ez az összefüggés magasabb szintű matematikai eszközökkel tetszőleges kúpszerű testek esetén is igazolható.



53. ábra

Itt jegyezzük meg, hogy a korábban megadott hasábokra és kúpokra vonatkozó térfogatképletek abban az esetben is igazak lesznek, ha ferde hasáb, illetve ferde kúp térfogatát kell meghatároznunk.

A felszín meghatározása további problémákat vet fel. Itt elsősorban azt kell elfogadnunk, hogy a kúpok esetén az alapkör mellett a palást szintén síkban kiteríthető, és egy körcikket határoz meg. Ez annak köszönhető, hogy a forgáskúp minden alkotója egyenlő. ***(53. ábra)***

a kúp felszíne

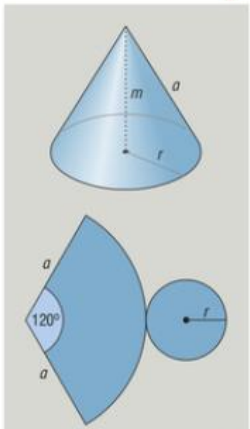
Ez az alkotó határozza meg a körcikk sugarát, melynek íve az alapkör $2 \cdot r \cdot \pi$ kerületével egyezik meg. Így ennek területe:

$$A_{\text{palást}} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot a}{2} = r \cdot \pi \cdot a.$$

Így egy forgáskúp teljes felszíne:

$$A = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot a, \text{ amiből}$$

$$\boxed{A = r \cdot \pi \cdot (r + a).}$$



54. ábra

2. példa

Mekkora a felszíne és a térfogata annak az egyenes körkúpnak, melynek palástja kiteritve egy 9 cm sugarú harmadkör?

Megoldás

Jelöljük a kúp alkotóját a-val, alapkörének sugarát r-rel, magasságát pedig m-mel. ***(54. ábra)***

A palást területe a körcikk területképlete alapján meghatározható:

$$T_{\text{palást}} = \frac{a^2 \cdot \pi}{3} \approx 84{,}82 \text{ cm}^2.$$

Mivel az alapkör kerülete megegyezik a palást által kijelölt körcikk ívének hosszával, ezért a kúp sugara ez alapján meghatározható:

$$2 \cdot r \cdot \pi = \frac{2 \cdot a \cdot \pi}{3}, \text{ amiből } r = \frac{a}{3} = 3 \text{ cm}.$$

A kúp felszíne tehát:

$$A = r^2 \cdot \pi + T_{\text{palást}} \approx$$

$$\approx 28{,}27 \text{ cm}^2 + 84{,}82 \text{ cm}^2 = 113{,}09 \text{ cm}^2.$$

A térfogat megállapításához meg kell határoznunk a kúp magasságát. Ezt a Pitagorasz-tétel felírásával tehetjük meg:

$$m = \sqrt{a^2 - r^2} \approx 8{,}49 \text{ cm}.$$

Így a test térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} \approx 80 \text{ cm}^3.$$

3. példa

Az egyenlő felszínű egyenes körkúpok közül melyiknek a térfogata a legnagyobb?

Megoldás

Jelöljük a kúp alkotóját a-val, alapkörének sugarát r-rel, magasságát pedig m-mel. A kúp felszíne: $A = r \cdot \pi \cdot (r + a)$. Ebből kifejezhető az alkotó hossza:

$$a = \frac{A}{r \cdot \pi} - r.$$

Tudjuk, hogy a test magasságára teljesül a Pitagorasz-tétel:

$$m^2 = a^2 - r^2.$$

Vizsgáljuk most meg a test térfogatát:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3}.$$

Ennek maximális értéke az $r^2 \cdot m$ szorzat maximális értékétől függ. A kapott összefüggések miatt célszerűbb e szorzat négyzetét vizsgálni, hiszen ennek ugyanakkor lesz maximuma. Ezt felírva és a megfelelő helyettesítéseket végrehajtva:

$$f(r) = r^4 \cdot m^2 = r^4 \cdot (a^2 - r^2) = r^4 \cdot \left[\left(\frac{A}{r \cdot \pi} - r \right)^2 - r^2 \right] =$$

$$= r^4 \cdot \left(\frac{A^2}{r^2 \cdot \pi^2} - \frac{2 \cdot A}{\pi} \right) = -\frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot r^4 + \frac{A^2}{\pi^2} \cdot r^2.$$

Ez a kifejezés már csak az r értékétől függ. Ezt teljes négyzetté alakíthatjuk:

$$f(r) = -\frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot \left(r^4 - \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot r^2 \right) = -\frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot \left[\left(r^2 - \frac{A}{4 \cdot \pi} \right)^2 - \frac{A^2}{16 \cdot \pi^2} \right] =$$

$$= -\frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot \left(r^2 - \frac{A}{4 \cdot \pi} \right)^2 + \frac{A^3}{8 \cdot \pi^3}.$$

Ez a kifejezés akkor lesz maximális, ha a négyzetes tag nulla, azaz:

$$r^2 = \frac{A}{4 \cdot \pi}.$$

Használjuk most fel a kúp térfogatképletét. Így az alapkör sugara és az alkotó között a következő összefüggés adódik:

$$r^2 = \frac{r \cdot \pi \cdot (r + a)}{4 \cdot \pi},$$

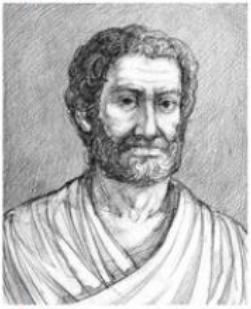
$$4r = r + a,$$

$$3r = a.$$

Ez azt jelenti, hogy az állandó felszínű forgáskúpok közül annak a térfogata a legnagyobb, melynek az alkotója háromszorosa az alapkör sugarának. Ekkor a test térfogatára a fentiek alapján, a felszín függvényében a következő adódik:

$$V = \sqrt{\frac{A^3}{72 \cdot \pi}}.$$

Történetileg kideríthetetlen, ki fedezte fel a téglatest, a hasáb és a henger térfogatára vonatkozó összefüggést, de az bizonyos, hogy az egyiptomiak már ismerték és használták. Szigorú bizonyítást nem adtak rá, de tudtak róla és alkalmazták őket. A kúp térfogatáról azonban többet tudunk. Ezt Démokritosz fedezte fel, bár ő sem adott rá egzakt bizonyítást, az összefüggést egyszerűen kitalálta. Ezt később Platón egyik tanítványa, Eudoxosz igazolta.



DÉMOKRITOSZ (kb. Kr. e. 460–370) görög filozófus és matematikus, akinek nevét elsősorban az atomelmélet megalkotójaként tartjuk számon. Elmélete szerint az anyag egyre kisebb darabokra osztható, mígnem eljutunk az atomok szintjéig, melyek már oszthatatlanok.

Feladatok

1. Mekkora annak a szabályos gúlának a térfogata és felszíne, melynek az alapéle 10 cm, az oldalélei 20 cm hosszúak, az alapja pedig
   a) háromszög; *b)* négyszög;
   c) ötszög; *d)* hatszög?

2. Egy egyenes körkúp adatai a következők:
   a) $r = 5$ cm, $m = 6$ cm; *b)* $r = 6$ cm, $a = 10$ cm;
   c) $a = 10$ cm, $m = 8$ cm.
   Mekkora a kúp térfogata és felszíne?

3. Egy szabályos gúla felszíne 100 cm^2, az alaplapja 5 cm oldalélű négyzet. Mekkora a térfogata?

4. Egy szabályos gúla térfogata 1000 cm^3, az alaplapja 6 cm oldalú szabályos hatszög. Mekkora a gúla felszíne?

5. Egy forgáskúp térfogata 1000 cm^3, az alapkör sugara 10 cm. Mekkora a felszíne?

6. Egy forgáskúp felszíne 100 cm^2, az alkotója 10 cm. Mekkora a térfogata?

7. Egy 10 cm élű kockába egy gúlát írunk úgy, hogy az egyik lapjának középpontját összekötjük a szemközti lap csúcsaival. Határozzuk meg az így keletkezett gúla felszínét és térfogatát.

8. Határozzuk meg a 10 cm élű kocka lapközéppontjai által meghatározott test térfogatát és felszínét.

9. Egy háromszög oldalainak hossza 3 cm, 4 cm és 5 cm. Ha megforgatjuk a hosszabb oldala körül, akkor mekkora a keletkező test térfogata és felszíne?

10. Egy szimmetrikus trapéz alapjai 14 cm és 8 cm, szárai 5 cm hosszúak. Forgassuk meg a trapézt
    a) a hosszabbik; *b)* a rövidebb alapja körül.
    Határozzuk meg a keletkező test térfogatát és felszínét.

11. Forgassunk el egy a élű szabályos tetraédert az egyik magassága körül 60°-kal. Határozzuk meg az eredeti és az elforgatott tetraéder közös részének felszínét és térfogatát.

12. Az egyenlő térfogatú egyenes körkúpok között melyiknek a felszíne a legkisebb?

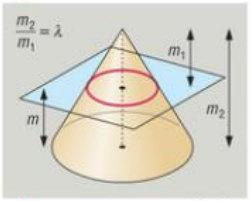
Rejtvény

Körülbelül hány tonna követ használhattak fel a Kheopsz piramis építői? (A mészkő sűrűsége 2,7 tonna köbméterenként.) Kheopsz fáraó ismereteink szerint 23 évig uralkodott. Hány köbméter követ kellett megmozgatniuk naponta, ha feltételezzük, hogy a piramis 23 évig épült?

8. A csonka gúla és a csonka kúp

Ha gúlaszerű testeket, illetve kúpokat az alaplappal párhuzamos síkkal elmetszünk, akkor csonka gúlát *(56. ábra)*, illetve csonka kúpot *(55. ábra)* kapunk.

Az ábrák alapján könnyen megállapíthatjuk, hogy a keletkező síkmetszetek és az alaplap által meghatározott alakzatok hasonlóak lesznek. Ugyanis a test csúcsából mint középpontból nagyítva a síkmetszet az alaplapra képeződik le. Ez a tulajdonság fontos szerephez jut a csonka gúla térfogatának meghatározásában.



55. ábra

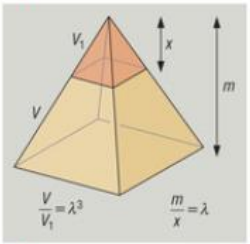
Ez egyben azt is jelenti, hogy a lemetszett kiegészítő gúla és az eredeti gúla is hasonlók lesznek egymáshoz. A két testet ugyanaz a középpontos nagyítás képezi le egymásra, amely a síkmetszetek leképezésénél használható.

1. példa

Hol metsszünk el egy négyzet alapú egyenes gúlát az alaplappal párhuzamos síkkal, hogy a térfogatát megfelezzük?

Megoldás

Legyen a metsző sík távolsága a gúla csúcsától x, a gúla magasságát pedig jelölje m. A célunk az, hogy meghatározzuk az $\frac{x}{m}$ hányados értékét. Ez a hányados nem más, mint annak a hasonlóságnak az aránya, mely az eredeti gúlát a lemetszett kiegészítő gúlába transzformálja. *(56. ábra)*



56. ábra

Jelöljük az eredeti gúla térfogatát V-vel, a lemetszett gúla térfogatát V_1-gyel. Ezek aránya a feltételek szerint:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2}.$$

Korábbi ismereteink alapján tudjuk, hogy a hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbével egyenlő, azaz

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{x}{m}\right)^3.$$

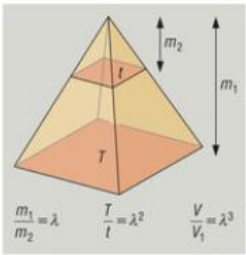
Ez alapján a kérdéses arány meghatározható:

$$\frac{x}{m} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha a térfogatot szeretnénk megfelezni, akkor a test magasságát a $\sqrt[3]{2}$ -ed részénél kell elmetszenünk az alaplappal párhuzamos síkkal.

Ha két test hasonló és a hasonlóság aránya λ, akkor ez egyben bármely lineáris méretének aránya is. Az egymásnak megfelelő határoló lapok területének aránya λ^2, míg a térfogatuk aránya λ^3 lesz.

A csonka gúla térfogata



57. ábra

A csonka gúla térfogatának meghatározásakor abból indulunk ki, hogy az előáll az eredeti gúla és a lemetszett gúla térfogatának különbségeként. Használjuk az 57. ábra jelöléseit.

Az eredeti test térfogata:

$$V_1 = \frac{T \cdot m_1}{3}.$$

A levágott test térfogata:

$$V_2 = \frac{t \cdot m_2}{3}.$$

Így a csonka gúla térfogata: $V = V_1 - V_2$, magassága: $m = m_1 - m_2$.

Jelöljük a két gúla hasonlóságának arányát λ-val.

Felhasználva a hasonló testekre érvényes összefüggéseket:

$$\lambda = \frac{m_1}{m_2}, \quad \lambda^2 = \frac{T}{t}, \quad \lambda^3 = \frac{V_1}{V_2}.$$

A térfogatok különbsége:

$$V = V_1 - V_2 = \lambda^3 \cdot V_2 - V_2 = V_2 \cdot (\lambda^3 - 1) =$$
$$= \frac{t \cdot m_2}{3} \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + \lambda + 1).$$

Az első zárójeles kifejezést m_2-vel, a másodikat pedig t-vel beszorozva:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\lambda \cdot m_2 - m_2) \cdot (\lambda^2 \cdot t + \lambda \cdot t + t).$$

A hasonlóság alapján felírt összefüggéseket felhasználva:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (m_1 - m_2) \cdot \left(T + \sqrt{\frac{T}{t}} \cdot t + t \right).$$

Így a csonka gúla térfogatára a következő összefüggés adódik:

a csonka gúla térfogata

$$V = \frac{m}{3} \cdot (T + \sqrt{T \cdot t} + t).$$

A gúla felszínének meghatározásához a határoló lapok területének összegét kell kiszámolnunk. Ez a csonka gúla esetén három fő részre tagolható, az alap és fedőlap területére, valamint a palást területére:

a csonka gúla felszíne

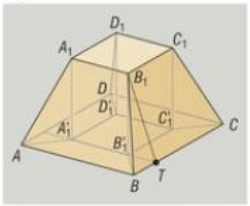
$$A = T + t + P.$$

2. példa

Egy szabályos négyoldalú csonka gúla alapélének hossza 32 cm, fedőlapjáé 20 cm, az oldaléle pedig 14 cm hosszú. Mekkora a felszíne és térfogata?

Megoldás

Legyen a csonka gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, a fedőlapja pedig az $A_1B_1C_1D_1$ négyzet. Jelölje a fedőlap merőleges vetületét az alaplapra $A_1'B_1'C_1'D_1'$. Mivel a csonka gúla szabályos, ezért ez a vetület az alaplap középpontjára szimmetrikusan helyezkedik el. Az oldalai az alapnégyzet oldalaival párhuzamosak lesznek. *(58. ábra)*



58. ábra

Az $A_1'B_1'$ egyenes a T pontban merőlegesen metszi a BC oldalt, ezért:

$$BT = \frac{1}{2}\cdot(32-20) = 6 \text{ cm}.$$

A BTB_1 derékszögű háromszögből:

$$B_1T = \sqrt{14^2 - 6^2} = \sqrt{160} = 4\cdot\sqrt{10} \text{ cm},$$

ez éppen az oldaltrapéz magassága, így ennek a területe:

$$\frac{32+20}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{10} = 104\cdot\sqrt{10} \text{ cm}.$$

Ennélfogva a csonka gúla felszíne:

$$A = 32^2 + 20^2 + 4\cdot 104\cdot\sqrt{10} = 1424 + 416\cdot\sqrt{10} \approx 2739{,}5 \text{ cm}^2.$$

A térfogat meghatározásához szükség van a magasság hosszára. Ezt meghatározhatjuk a B_1TB_1' derékszögű háromszög felhasználásával.

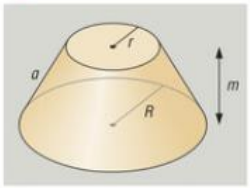
$$m = B_1B_1' = \sqrt{B_1T^2 - B_1'T^2} = \sqrt{160 - 6^2} = \sqrt{124} = 2\cdot\sqrt{31} \text{ cm}.$$

A csonka gúla térfogatképletét felhasználva a test térfogata:

$$V = \frac{2\cdot\sqrt{31}}{3}\cdot(32^2 + \sqrt{32^2\cdot 20^2} + 20^2) = 1376\cdot\sqrt{31} \approx 7661{,}2 \text{ cm}^3.$$

A csonka kúp térfogata

A csonka gúlák esetén megfogalmazott térfogatképlet abban az esetben is érvényes marad, ha ezeket csonka kúpokra alkalmazzuk. Megjegyezzük, hogy ha egy csonka kúpban az alapkör és fedőlap körének középpontját összekötő szakasz merőleges az alaplap síkjára, akkor *egyenes csonka kúpról*, ha ez nem teljesül, akkor *ferde csonka kúpról* beszélünk.



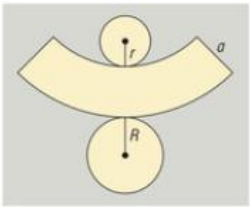
59. ábra

Ha a csonka kúp alapkörének sugara R, fedőlapjáé r, a magassága pedig m *(59. ábra)*, akkor az igazolt térfogatképlet alapján:

$$V = \frac{m}{3}\cdot(R^2\cdot\pi + \sqrt{R^2\cdot\pi\cdot r^2\cdot\pi} + r^2\cdot\pi), \quad \text{amiből}$$

$$\boxed{V = \frac{m\cdot\pi}{3}\cdot(R^2 + R\cdot r + r^2).}$$

a csonka kúp térfogata



60. ábra

Az egyenes csonka kúp felszínének meghatározásakor azt kell figyelembe vennünk, hogy az alaplap és fedőlap mellett a palást is síkban kiteríthető, és a palást egy körgyűrűcikket határoz meg. *(60. ábra)*

A keletkezett körgyűrűcikk középvonala a két kör kerületének a számtani közepe:

$$\frac{2\cdot R\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi}{2}=(R+r)\cdot\pi,$$

a szélessége a csonka kúp a alkotója. Ezért a palást területe:

$$P=(R+r)\cdot\pi\cdot a.$$

Ezt felhasználva a csonka kúp felszíne:

$$A=R^2\cdot\pi+r^2\cdot\pi+(R+r)\cdot\pi\cdot a, \text{ amiből}$$

a csonka kúp felszíne

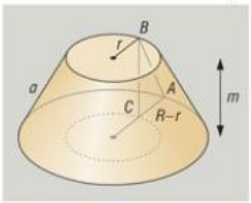
$$\boxed{A=\pi\cdot(R^2+r^2+(R+r)\cdot a).}$$

Észrevehetjük, hogy elfajuló csonka kúp esetén ($r=0$) mind a felszín-, mind a térfogatképlet a kúp térfogatát és felszínét adja meg.

3. példa

Adott egy egyenes csonka kúp $m=10$ cm magassága, $a=15$ cm alkotója és $V=1000\cdot\pi$ cm^3 térfogata. Mekkora az alaplap és fedőlap sugara?

Megoldás



61. ábra

Jelölje az alap- és fedőlap sugarát rendre R és r. Tekintsük a test tengelymetszetét, és ott jelöljük ki a 61. ábrának megfelelő ABC derékszögű háromszöget.

Az AC szakasz hossza nyilván $R-r$, és így a Pitagorasz-tétel alapján:

$$a^2-m^2=(R-r)^2,$$

$$125=R^2-2\cdot R\cdot r+r^2.$$

Másrészt a csonka kúp térfogatképlete alapján:

$$V=\frac{m\cdot\pi}{3}\cdot(R^2+R\cdot r+r^2),$$

$$300=R^2+R\cdot r+r^2.$$

A kapott két egyenletet kivonva egymásból:

$$175=3\cdot R\cdot r,$$

$$R=\frac{175}{3\cdot r}.$$

A kapott eredményt helyettesítsük vissza a térfogatra felírt összefüggésbe:

$$\left(\frac{175}{3\cdot r}\right)^2+\frac{175}{3\cdot r}\cdot r+r^2=300.$$

Átrendezve egy másodfokúra redukálható negyedfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{30625}{9\cdot r^2}+\frac{175}{3}+r^2=300,$$

$$9\cdot r^4-2175\cdot r^2+30625=0.$$

Ebből előbb r^2 -re, majd r-re két lehetséges megoldás adódik:

$$r_1=3{,}87\text{ cm},\quad r_2=15{,}05\text{ cm}.$$

Ezek alapján R is meghatározható (a két gyök ugyanazt a testet határozza meg):

$$R_1=15{,}05\text{ cm},\quad R_2=3{,}87\text{ cm}.$$

Feladatok

1. Egy szabályos négyoldalú csonka gúla alapéle 1 dm, fedőlapjának éle 5 cm, oldalélének hossza 20 cm.
   a) Mekkora a magassága? *b)* Mekkora a térfogata és a felszíne?
   c) Mekkora szöget zárnak be a lapjai az alaplappal?
2. Mekkora a négyoldalú szabályos csonka gúla térfogata és felszíne, ha
   a) az alapéle 10 cm, az oldaléle 5 cm, a magassága 4 cm;
   b) az alapéle 10 cm, az oldaléle 6 cm, a fedőlapjának éle 5 cm?
3. Mekkora a csonka kúp térfogata és felszíne, ha
   a) az alaplap sugara 22 cm, a fedőlapé 14 cm, a magassága 3,4 cm;
   b) az alaplap sugara 113 cm, a fedőlapé 87 cm, az alkotója 140 cm;
   c) az alaplap sugara 45 cm, a magassága 28 cm, az alkotója 35 cm.
4. Egy szimmetrikus trapézt megforgatunk a szimmetriatengelye körül. Mekkora a keletkező test térfogata és felszíne, ha a trapéz alapjai 6 cm és 4 cm, a szárai pedig 5 cm hosszúak?
5. Egy négyzet alapú gúla alapéle 10 cm hosszú, magassága 8 cm. A testet a magasság felezőpontján átmenő, az alaplappal párhuzamos síkkal elmetsszük. Mekkora a két keletkező test térfogata és felszíne?
6. Egy szabályos négyoldalú gúlát magasságának a felezőpontján átmenő és az alaplapjával párhuzamos síkkal kettévágunk. A keletkezett csonka gúla térfogata 336 cm^3, magassága az eredeti gúla alapélének harmada. Mekkora a csonka gúla felszíne? Mekkora szöget zárnak be a csonka gúla oldallapjai az alaplap síkjával?
7. Egy csonka kúp magassága 1 dm. Tudjuk, hogy a csonka kúpba gömb írható, és alapkörének sugara kétszerese a fedőlap köre sugarának. Mekkora a test térfogata és felszíne?
8. Egy egyenes csonka kúp palástja 2000 cm^2, az alkotók az alappal 60°-os szöget zárnak be, a fedőlap sugara harmadrésze az alap sugarának.
   a) Mekkora az alap- és fedőlap sugara? *b)* Mekkora a test magassága és térfogata?
9. Egy egyenes csonka kúp felszíne 500 dm^2, palástja 300 dm^2, alkotója 10 dm. Mekkora a térfogata?
10. Csonka kúp palástja kiterítve olyan körgyűrűcikk, melynek területe 200 cm^2, a középponti szöge 120°, és a külső sugár a belsőnek kétszerese. Mekkora a csonka kúp térfogata?

9. A gömb térfogata és felszíne



A térbeli idomok tanulmányozása során egy olyan test vizsgálatához érkeztünk el, amely több szempontból is különleges szerepet tölt be a testek között. Ez az alakzat nem más, mint a sokak szemében a legtökéletesebb formát öltő *gömb*.

A természet is megkülönböztetett figyelmet szentel ennek az alakzatnak, hiszen gömb alakúaknak látjuk az égitesteket, ilyen alakú egy olvadó jégcsapról lecseppenő vízcsepp.

A mindennapi szóhasználat szerint gömbnek nevezzük magát a testet, de gömbnek hívjuk a testet határoló gömbfelületet is. Általában a mondat értelméből kitűnik, hogy a két alapvetően különböző fogalom közül melyiket kell használnunk.

A *gömbfelület* azoknak a pontoknak a halmaza, melyek egy adott ponttól, a gömb középpontjától egyenlő távolságra vannak. Ezt az alakzatot határozza meg az egyik átmérője körül megforgatott körvonal is.

A *gömbtest* azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek egy adott ponttól, a gömb középpontjától egy adott r távolságnál nem nagyobb távolságra vannak.

Egy gömb mindegyik síkmetszete kör lesz. Ha ez a síkmetszet tartalmazza a gömb középpontját, akkor a keletkező kört a gömb *főkörének* nevezzük.

Olyan alakzatról van szó, melyet már nem síklapok határolnak, a felszíne síkban nem teríthető ki, így a felszín és térfogat meghatározása jóval összetettebb problémákat vet fel, mint azt a korábbi testeknél tapasztaltuk.

A gömb térfogata

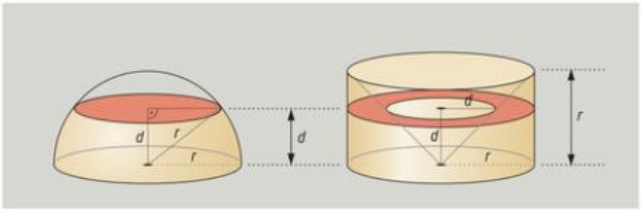
Arkhimédész *A gömbről és hengerről* című művében a gömb felszínét és térfogatát is meghatározta. Megállapította, hogy a gömb felszíne a főkör területének négyszerese, a térfogata pedig a köré írható henger térfogatának kétharmad része.

A gömb térfogatának meghatározásában jelentős segítséget nyújt a korábban megfogalmazott Cavalieri-elv. Enélkül csak felsőbb matematikai eszközök alkalmazásával juthatnánk célba.

Először az r sugarú gömböt két félgömbre vágjuk, és ennek térfogatát határozzuk meg.

Ezt a félgömböt a síkmetszetével egy síkra helyezzük. Ha megvizsgáljuk az ezzel a síkkal párhuzamos síkmetszeteit, akkor egy d magasságban található síkmetszet területét kell meghatároznunk. *(62. ábra)*

62. ábra



3D

A síkmetszet egy olyan kör, melynek sugara: $\sqrt{r^2-d^2}$, így a területe:

$$t=\left(\sqrt{r^2-d^2}\right)^2\cdot\pi=(r^2-d^2)\cdot\pi=r^2\cdot\pi-d^2\cdot\pi.$$

Most tekintsünk egy olyan hengert, melynek szintén r a sugara és a magassága is legyen r. Ha ebből a hengerből elveszünk egy olyan, az alapjával felfelé fordított kúpot, melynek a sugara és a magassága is r, akkor egy olyan test keletkezik, melyre teljesülnek a Cavalieri-elv feltételei. Megmutatjuk, hogy az így keletkezett testnek és a félgömbnek a párhuzamos síkmetszetei mindig azonos területűek lesznek.

Ez a henger esetében egy körgyűrű területének felel meg, azaz:

$$t=r^2\cdot\pi-d^2\cdot\pi.$$

Így kimondhatjuk, hogy a két test térfogata egyenlő.

$$V_{\text{félgömb}}=V_{\text{henger}}-V_{\text{kúp}}=r^2\cdot\pi\cdot r-\frac{r^2\cdot\pi\cdot r}{3}=\frac{2\cdot r^3\cdot\pi}{3}.$$

Ez alapján a teljes gömb térfogata:

$$V=\frac{4\cdot r^3\cdot\pi}{3}.$$

a gömb térfogata

3D

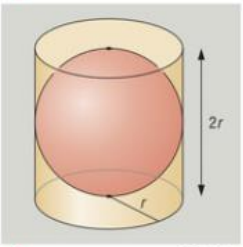
Arkhimédész ezt az állítását egyik legnagyszerűbb eredményének tartotta. Ezt az is bizonyítja, hogy azt kérte, hogy halála után a sírját egy hengerbe írt gömbbel jelöljék meg.

1. példa

Igazoljuk az Arkhimédész által megfogalmazott állítást, miszerint a gömb térfogata a köré írható henger térfogatának a kétharmad része.

Megoldás

Legyen a gömb sugara r. Könnyen látható, hogy a köré írható henger alapköre szintén r sugarú lesz, és a magassága pedig $2\cdot r$. Az ilyen hengereket szokás egyenlő oldalú hengereknek nevezni. ***(63. ábra)***



63. ábra

Írjuk fel a henger térfogatát:

$$V_{\text{h}}=r^2\cdot\pi\cdot 2\cdot r=2\cdot r^3\cdot\pi.$$

Ha vesszük ennek a kétharmad részét, akkor azonnal egy r sugarú gömb térfogatát kapjuk:

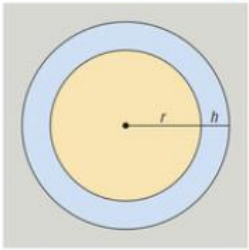
$$\frac{2}{3}\cdot V_{\text{h}}=\frac{2}{3}\cdot 2\cdot r^3\cdot\pi=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi.$$

Tehát Arkhimédész állítását igazoltuk.

A gömb felszíne

A felszín meghatározása még nehezebb problémának bizonyul, hiszen most nem áll rendelkezésünkre a Cavalieri-elvhez hasonló segítség. Szemléletesen csak annyit mondhatunk, hogy a felszín közelíthető alkalmasan felvett csonka kúpok palástjának területösszegeként. Ezek összegzése viszont meghaladja matematikai ismereteinket.

Ezek hiányában egy olyan lehetőséget mutatunk meg, mely nem tekinthető szigorú értelemben véve bizonyításnak, a gondolatmenet mégis a helyes felszínképletre vezet.



64. ábra

Tekintsünk egy olyan gömbhéjat, melynek belső sugara legyen r, a héj vastagságát pedig jelölje h. *(64. ábra)*

Könnyen adódik a gömb térfogat képletének ismeretében, hogy ennek a gömbhéjnak a térfogata a külső és a belső gömbök térfogatának a különbsége:

$$V=\frac{4\cdot(r+h)^3\cdot\pi}{3}-\frac{4\cdot r^3\cdot\pi}{3}=$$

$$=\frac{4\cdot\pi}{3}\cdot(r^3+3\cdot r^2\cdot h+3\cdot r\cdot h^2+h^3-r^3)=\frac{4\cdot\pi}{3}\cdot(3\cdot r^2\cdot h+3\cdot r\cdot h^2+h^3).$$

Másrészt ha a h értéke nagyon kicsi, akkor tekinthetjük a térfogatot úgy is, mint egy r sugarú gömbfelszínnek megfelelő alapterületű és h magasságú test térfogatát:

$$V\approx A_{\text{gömb}}\cdot h.$$

Így a gömb felülete:

$$A_{\text{gömb}}\approx\frac{V}{h}=\frac{4\cdot\pi\cdot(3\cdot r^2\cdot h+3\cdot r\cdot h^2+h^3)}{3\cdot h}=4\cdot\pi\cdot\left(r^2+r\cdot h+\frac{h^2}{3}\right).$$

Bebizonyítható, hogy ez az összefüggés akkor adja meg pontosan a gömb felszínét, ha a h magasságát egyre kisebbnek, nullához közelítő értéknek vesszük. Ebben az esetben a zárójelben szereplő utolsó két tag is nullához közelít. Így a gömb felszínére a következő összefüggés adódik:

a gömb felszíne

$$A_{\text{gömb}}=4\cdot r^2\cdot\pi.$$

A kapott eredmény azt mutatja, hogy Arkhimédész másik állítása is teljesül, miszerint a gömb felszíne valóban egyenlő lesz egy főköre területének négyszeresével.

3D

2. példa

Mekkora üreg van abban a 10 cm sugarú vasgolyóban, melyet ha vízbe dobunk, akkor abban lebegni látjuk?

Megoldás

A folyadékokba merülő testekre Arkhimédész törvénye szerint felhajtóerő hat, melynek nagysága megegyezik a test által kiszorított folyadék súlyával. Az r sugarú golyó által kiszorított folyadék térfogata:

$$V=\frac{4\cdot r^3\cdot\pi}{3}\approx 4188{,}8\ \text{cm}^3.$$

A felhajtóerő nagysága ($\rho_{víz} = 1\,\frac{kg}{dm^3}$, $g \approx 10\,\frac{m}{s^2}$ nehézségi gyorsulás):

$$F = \rho \cdot V \cdot g \approx 41{,}88 \text{ N}.$$

Ha a golyót lebegni látjuk, akkor annak súlya éppen ezzel a felhajtóerővel egyezik meg. Ez alapján a vas térfogata kifejezhető:

$$V_{vas} = \frac{F}{\rho_{vas} \cdot g} \approx 537 \text{ cm}^3 \quad \left(\rho_{vas} = 7{,}8\,\frac{kg}{dm^3}\right).$$

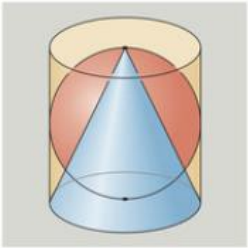
Ebből adódik, hogy a gömbben található üreg térfogata:

$$V_{üreg} = V - V_{vas} = 3651{,}8 \text{ cm}^3.$$

Ez a golyó térfogatának 87,2%-a.

Feladatok

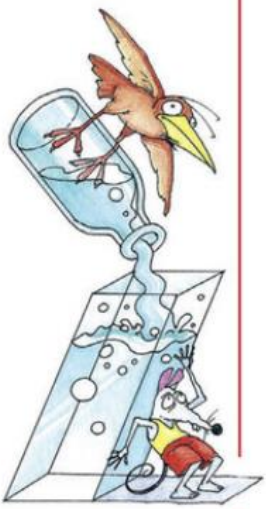
1. Mekkora annak a gömbnek a térfogata és a felszíne, melynek
   a) sugara 110 cm; *b)* átmérője 40 cm?
2. Egy gömb felszíne 1000 m^2. Mekkora a térfogata?
3. Egy gömb térfogata 100 cm^3. Mekkora a felszíne?
4. Mekkora a területe annak a körnek, melyet egy r sugarú gömbből metsz ki egy a gömb középpontjától $\frac{r}{2}$ távolságra lévő sík? Hányadrésze ez a terület a gömb felszínének?
5. Milyen távolságra kell az r sugarú gömb középpontjától felvennünk azt a síkmetszetet, melynek területe a gömb felszínének a tizedrésze?
6. Igazoljuk, hogy az ábrán látható testek térfogatainak arányára teljesül a következő:
   $$V_{henger} : V_{gömb} : V_{kúp} = 3 : 2 : 1.$$
7. Mekkora a súlya egy 12 cm átmérőjű tekegolyónak, ha sűrűsége 3 kg/dm^3?



8. Mekkora egy 5 kg/dm^3 sűrűségű, 8 kg tömegű golyó térfogata és felszíne?
9. Egy r sugarú gömbből lemetszünk egy h magasságú gömbszeletet. Határozzuk meg a keletkezett test térfogatát. (Használjuk a Cavalieri-elvet.)
10. Egy asztalon három egyenlő R sugarú gömböt úgy helyeztünk el, hogy azok páronként érintik egymást. Mekkora annak a kis gömbnek a térfogata, melyet a három gömb közé illeszthetünk az asztalra úgy, hogy mindhárom nagy gömböt érintse?
11. Egy téglatest összes élhosszainak összege 400 cm, a felszíne 3 600 cm^2. Mekkora a köré írható gömb térfogata és felszíne?

10. Egymásba írt testek (kiegészítő anyag)

A paralelepipedon és a tetraéder



a paralelepipedon térfogata

A paralelogramma alapú hasábot *paralelepipedonnak* nevezzük. Ez a test középpontosan szimmetrikus, párhuzamos élei egyenlők, és mindegyik oldala paralelogramma. Speciálisan ebbe a kategóriába sorolandó a téglatest és a kocka.

Tekintsünk egy a, b, c élű paralelepipedont, ahol az a és b élek által bezárt szög legyen α, a c élnek az $ABCD$ alaplappal bezárt szöge pedig legyen β. ***(65. ábra)***

A test térfogata a hasábokra vonatkozó térfogatképletnek megfelelően:

$$V = T \cdot m.$$

A test alapterülete egy paralelogramma területével egyezik meg:

$$T = a \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

A magasság meghatározható a 65. ábrán látható AEP derékszögű háromszögben felírható összefüggés alapján:

$$m = c \cdot \sin\beta.$$

Így a megadott paralelepipedon térfogata:

$$V = a \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

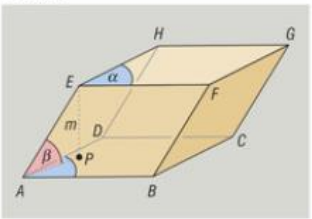
A paralelepipedon felszínének nagyságát a háromfajta paralelogramma területének a kétszeres összege adja meg.

Nagyon hasznos összefüggés fedezhető fel a paralelepipedon és a tetraéder között.

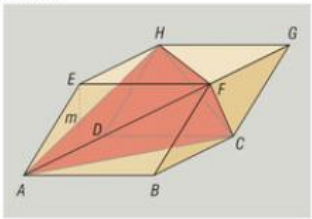
Tekintsük egy paralelepipedon két párhuzamos lapján az egymással nem párhuzamos átlók végpontjait. Ez a négy pont legyen egy tetraéder négy csúcsa. Könnyen látható, hogy ennek a tetraédernek az élei a paralelepipedon határoló lapjainak az átlóival egyeznek meg. ***(66. ábra)***

Minden paralelepipedonhoz hozzárendelhetünk egy tetraédert, és minden tetraéderhez hozzá tudunk rendelni egy ilyen paralelepipedont. Ezt a testet nevezzük a tetraéder *bennfoglaló paralelepipedonjának.*

65. ábra



66. ábra



1. példa

Igazoljuk, hogy a tetraéder térfogata a bennfoglaló paralelepipedon térfogatának a harmadrésze!

Megoldás

Legyen az $ABCD$ paralelogramma területe T, a paralelepipedon magassága m. Így a térfogata:

$$V_p = T \cdot m.$$

A tetraéder térfogatát megkaphatjuk, ha a paralelepipedon térfogatából kivonjuk a lemetszett tetraéderek térfogatát. Összesen négy lemetszett tetraéder keletkezik, de mindegyik ugyanakkora térfogatú, hiszen az alapterületük (az $ABCD$ paralelogramma területének a fele) és a magasságuk (a paralelepipedon m magassága) is megegyezik.

A négy lemetszett tetraéder térfogata:

$$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{T}{2} \cdot m = \frac{2 \cdot T \cdot m}{3}.$$

Ezek szerint a tetraéder térfogata:

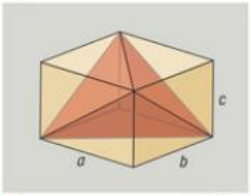
$$V_t = T \cdot m - \frac{2 \cdot T \cdot m}{3} = \frac{T \cdot m}{3}.$$

2. példa

Egy tetraéder kitérő élpárjainak hossza 5 cm, $\sqrt{34}$ cm és $\sqrt{41}$ cm. Mekkora a test térfogata?

Megoldás

Az adatok alapján nyilvánvaló, hogy a tetraéder oldallapjai egybevágó háromszögek. Vizsgáljuk meg a test bennfoglaló paralelepipedonját *(67. ábra)*. Mivel a kitérő élek egyenlők, ez azt jelenti, hogy a bennfoglaló paralelepipedont határoló paralelogrammák átlói egyenlők. Ebből következik, hogy ezek a paralelogrammák téglalapok lesznek, azaz a bennfoglaló paralelepipedon téglatest. Ez minden olyan tetraéder esetében teljesül, melynek oldallapjai egybevágó háromszögek.



67. ábra

Jelölje a téglatest éleinek hosszát a, b és c. Pitagorasz tétele szerint:

$$a^2 + b^2 = 25, \quad a^2 + c^2 = 34, \quad b^2 + c^2 = 41.$$

A három egyenletet összeadva:

$$2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 100,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 50.$$

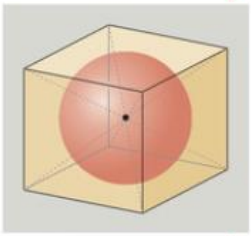
Mivel $b^2 + c^2 = 41$, ezért $a^2 = 9$ adódik, melyből $a = 3$ cm. A fenti egyenletekbe visszahelyettesítve nyerhetjük a téglatest többi élének a hosszát:

$$b = 4 \text{ cm} \quad \text{és} \quad c = 5 \text{ cm}.$$

Tudjuk, hogy a tetraéder térfogata a téglatest térfogatának harmada, ezért:

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot c = 20 \text{ cm}^3.$$

A beírható gömb



68. ábra

Léteznek olyan testek, melyekbe írható a test mindegyik lapját érintő gömb. Ezt a gömböt a test *beírható gömbjének* nevezzük.

Megjegyzés: Természetesen nem minden testnek van beírható gömbje. Elegendő egy olyan téglatestre gondolni, melynek van legalább két különböző hosszúságú éle.

Tekintsünk egy olyan poliédert, melynek létezik beírható gömbje. Kössük össze a gömb középpontját a poliéder csúcsaival. ***(68. ábra)***

Így a poliédert olyan gúlákra daraboltuk, melyeknek az alaplapjai a poliéder oldallapjaival egyeznek meg, és mindegyik gúlának a magassága a beírható gömb sugarával egyenlő.

a beírható gömb térfogata

Így a test térfogata a keletkező gúlák térfogatának az összege:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot r + \ldots + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot r = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \cdot r.$$



Bolyai Farkas (1775–1856) az egyik legnagyobb magyar matematikusnak tartott Bolyai János (1802–1860) édesapja. Széles látókörű, nagy tudású alakja a magyar tudománynak. Tanulmányai elvégzése után, melyet a kor egyik szellemi fellegvárában, Göttingenben végzett, szoros kapcsolatban maradt a matematika fejedelmének tartott Carl Friedrich Gauss-szal.

Mivel az oldallapok területének összege nem más, mint a test felszíne, ezért a test térfogata:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot r.$$

Bizonyítható, hogy a kapott összefüggés abban az esetben is igaz, amikor a testet határoló oldallapok nem sokszögek, hanem esetleg görbe vonalak által határolt síkidomok.

A képlet igazolása során a testeket feldaraboltuk, és a térfogatot ezek összegeként határoztuk meg. A poliéderek *átdarabolásának* számos kérdését vetette fel és vizsgálta Bolyai Farkas. Többek között ő vetette fel azt a problémát, hogy egy tetszőleges tetraéder átdarabolható-e hasábba. A kérdésre a XX. század első felében született válasz azt igazolta, hogy ez általában nem lehetséges.

3. példa

Egy tetraéderbe írt gömb sugara r, magasságai m_1, m_2, m_3 és m_4. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}.$$

Megoldás

A tetraéder felszíne nem más, mint az oldallapok területének összege:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Írjuk fel a test térfogatát a beírható gömb sugarának, illetve a magasságok felhasználásával:

$$V=\frac{1}{3}\cdot A\cdot r,\quad V=\frac{1}{3}\cdot A_1\cdot m_1,\quad V=\frac{1}{3}\cdot A_2\cdot m_2,$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot A_3\cdot m_3,\quad V=\frac{1}{3}\cdot A_4\cdot m_4.$$

Ezekből az összefüggésekből a test felszínét és az oldallapok területét kifejezve:

$$A=\frac{3\cdot V}{r},\quad A_1=\frac{3\cdot V}{m_1},\quad A_2=\frac{3\cdot V}{m_2},$$

$$A_3=\frac{3\cdot V}{m_3},\quad A_4=\frac{3\cdot V}{m_4}.$$

A kapott összefüggéseket a felszín és az oldallapok kapcsolatára kapott egyenlőségbe helyettesítve, majd $3\cdot V$-vel egyszerűsítve a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$\frac{3\cdot V}{r}=\frac{3\cdot V}{m_1}+\frac{3\cdot V}{m_2}+\frac{3\cdot V}{m_3}+\frac{3\cdot V}{m_4},$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_4}.$$

A köré írható gömb

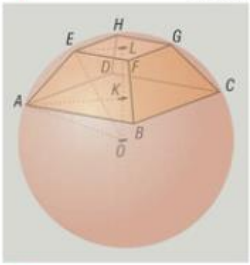
Vannak olyan poliéderek, testek, melyek köré írható gömb – a test *köré írható gömbje* –, azaz létezik olyan gömb, mely átmegy a poliéder minden csúcsán. Így például minden tetraédernek és téglatestnek létezik köré írható gömbje.

Megjegyzés: Természetesen nem minden test rendelkezik köré írható gömbbel. Például általában nem lehet gömböt írni egy paralelepipedon köré.

4. példa

Egy $r=15$ cm sugarú gömbből két egybevágó, a gömbbe írható csonka gúlát csiszolnak ki, melyek alapéle $a=10$ cm, fedőlapjának éle pedig $b=5$ cm nagyságú. Hány százalékos az anyagveszteség?

69. ábra



Megoldás

Nyilvánvaló, hogy két egybevágó csonka gúla csak úgy készíthető a gömbből, ha a csonka gúlák közül egyik sem tartalmazza a gömb középpontját. Először határozzuk meg az egyik létrehozható csonka gúla térfogatát.

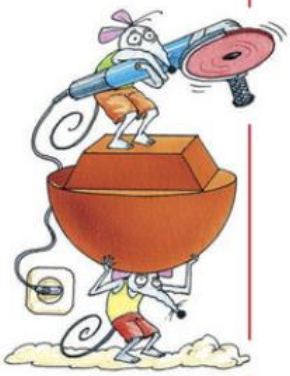
Tekintsük az $ABCDEFGH$ csonka gúlát. Állítsunk a gömb O középpontjából merőlegest az alap- és fedőlapra. Ezeknek a talppontjai legyenek K és L. Ezek a talppontok a négyzetek középpontjaiba esnek, ezért a négyzet átlóit felezik. *(69. ábra)*

Ezért

$$AK = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}, \quad EL = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

A KL szakasz hossza a test magasságát határozza meg. Ezt megkaphatjuk, ha az AOK és EOL derékszögű háromszögekből meghatározzuk az OK és OL szakaszok hosszát, hiszen $KL = OL - OK$.

Pitagorasz tétele alapján:



$$OK = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 13{,}23 \text{ cm},$$

$$OL = \sqrt{r^2 - \left(\frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 14{,}58 \text{ cm}.$$

A csonka gúla magassága tehát $m = 14{,}58 \text{ cm} - 13{,}23 \text{ cm} = 1{,}35 \text{ cm}$.

Így a csonka gúla térfogata meghatározható:

$$V = \frac{m}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2) = 78{,}75 \text{ cm}^3.$$

A gömb térfogata:

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \approx 14137{,}17 \text{ cm}^3.$$

Az anyagveszteség százalékos arányát, mivel két csonka gúlát is készítünk, a következő képlet alapján adhatjuk meg:

$$\frac{V_{\text{gömb}} - 2 \cdot V}{V_{\text{gömb}}} \approx 0{,}989 = 98{,}9\%.$$

Feladatok

1. Mekkora a paralelepipedon térfogata, ha két éle 12 cm és 24 cm, a közbezárt szögük 30°, és a magassága pedig 10 cm?
2. Egy paralelepipedon éleinek hossza 3 cm, 4 cm és 5 cm. A két rövidebb éle 60°-os szöget zár be egymással, a leghosszabb éle pedig, 45°-os szöget zár be a másik kettő által meghatározott síkkal. Mekkora a test térfogata?
3. Egy téglatest éleinek hossza 6 cm, 8 cm és 10 cm.
   a) Határozzuk meg annak a tetraédernek az éleit, melynek a téglatest a bennfoglaló paralelepipedonja.
   b) Mekkora a keletkező tetraéder térfogata és felszíne?



4. Egy téglatest felszíne 468 cm^2, éleinek aránya 2 : 3 : 4. Mekkora annak a tetraédernek a térfogata, melynek a téglatest a bennfoglaló paralelepipedonja?

5. Egy tetraéder oldallapjai olyan egybevágó háromszögek, amelyek élei 3 cm, 4 cm és 5 cm hosszúak. Mekkora a test térfogata? (Az eredmény meglepő!)

6. Egy 10 cm élű szabályos tetraéderbe gömböt írunk. Hány százaléka a gömb térfogata a tetraéder térfogatának?

7. Egy forgáskúp alapkörének sugara $r = 5$ cm, a magassága $m = 5$ cm. Mekkora a beírható gömb sugara és a kúp felszíne? Igaz-e ebben az esetben a térfogatra megállapított $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot r$ összefüggés?

8. Mekkora a szabályos négyoldalú gúla térfogata és felszíne, ha az alapéle $a = 32$ cm, a beírható gömb sugara pedig $r = 12$ cm?

9. Egy négyoldalú szabályos gúla minden éle egyenlő. Hány százaléka a gúlába beírható gömb érintési pontjai által meghatározott test térfogata a gúla térfogatának?

10. Írjunk egy r sugarú gömb köré és a gömbbe egyenlő oldalú kúpot. Határozzuk meg a két kúp felszínének és térfogatának arányát. (Egyenlő oldalúnak nevezzük a kúpot, ha alapkörének átmérője megegyezik az alkotójával: $a = 2r$.)

11. Egy henger alakú pohárban, melynek alapsugara $R = 5$ cm, bizonyos magasságig víz van. Mennyivel fog ez emelkedni, ha egy $r = 4$ cm sugarú gömböt teszünk bele, amelyik egészen alámerül?

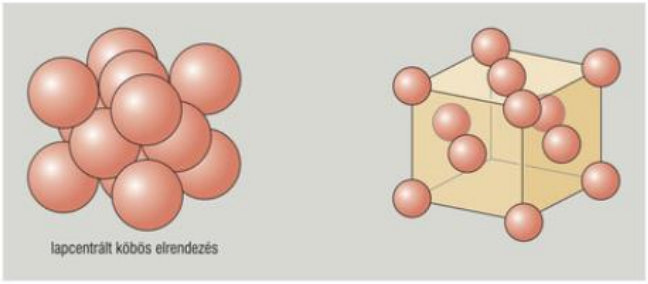
12. Egy egyenlő oldalú kúp alakú edényt csúcsával lefelé tartva legfeljebb milyen magasan tölthetünk meg vízzel, ha azt akarjuk, hogy a víz akkor se folyjék ki belőle, ha a beírható gömbbel megegyező méretű gyöngyöt teszünk bele?

11. A térgeometria alkalmazásai

Ebben a leckében a térgeometriával és annak összefüggéseivel kapcsolatos alkalmazásokra mutatunk néhány példát. Ezek reményeink szerint igazolják, hogy térgeometriai ismereteink nem öncélúak, a világ, amelyben élünk, számos területen felhasználja azokat. Találhatunk példát tudatos alkalmazásokra is, de talán még érdekesebb felfedezni és megérteni, hogy a geometria hogyan jelenik meg a természet törvényeiben.

A tér kitöltése

A térgeometria egyik legrégibb problémáját Kepler vetette fel 1611-ben. Azt állította, hogy azonos méretű gömbök lapcentrált köbös elrendezésben *(70. ábra)* töltik ki legteljesebben a teret. Állítását azonban nem tudta bizonyítani.



70. ábra



Lapcentrált köbös elrendezésben vannak gúlába rakva a piacon a narancsok, a görögdinnyék, vagy a múzeumokban a régi ágyúgolyók. Számítások szerint így 74,05 százalékát töltik ki a térnek. Az ezzel a kérdéssel foglakozók sokáig csak addig a megállapításig jutottak, hogy sok matematikus hiszi, és minden fizikus tudja, hogy ez a lehető legszorosabb térkitöltés.

Ennek az optimális térkitöltésnek az eredménye az is, hogy nedves homokra lépve azt vesszük észre, hogy a talajnak az a része, amely közvetlenül a lábunk alatt van, néhány pillanatra szárazzá válik. Amikor viszont felemeljük a lábunkat, akkor a talpunk helyén a homok egy ideig nedves lesz. A jelenség magyarázata az, hogy a deformáló erők hatására a homokszemcsék optimális térkitöltése megbomlik, és a keletkező hézagokon keresztül a víz elszökik. A deformáló hatás megszűnése után a homokszemcsék újra rendeződnek, optimálisan töltik ki a teret, és a vízfelesleg a felszínre kerül.

Ebből az ideális térkitöltésből következik az is, hogy ha úgy keverünk össze szappant és benzint, hogy a keverékben a szappan aránya nagyobb, mint 75%, akkor biztosak lehetünk abban, hogy a benzin nem hoz létre gyúlékony elegyet, vagyis a háztartásban nyugodtan

használható. Ekkor ugyanis nem a szappan lebeg a benzinben, hanem a benzin a szappanban.

Kepler megállapítása és a tétel bizonyítása között 387 év telt el. A problémát az amerikai Thomas Hales, a Michigani Egyetem matematikusa oldotta meg.

A bizonyítás során százezernyi programozási feladatot kell végrehajtani, 100–200 változóval és 1000–2000 feltétellel. Az óriási mennyiségű számítást elvégezve meggyőző a bizonyítás, a számítás során nem volt ok feltételezni, hogy Kepler sejtése nem volt helyes. Ezt az eredményt azonban a matematikusok csak kiindulópontnak tekintik. Az egyik következő feladat lehet például a háromnál több dimenziójú terekben meghatározni az azonos méretű gömbök legsűrűbb elrendezését. Az eredményekből a magasabb dimenziókra lehet matematikai következtetéseket levonni.

A méhek matematikája

A méhek munkaidejében a méztartók készítése egybeesik a mézgyűjtéssel. Világos, hogy minél tovább tart az előbbi munka, annál kevesebb idő jut a mézgyűjtésre; a méz pedig számukra téli élelem. Tehát azt a problémát kell megoldaniuk, hogy milyen formájú edények készülnek a lehető legkevesebb anyagból, legkevesebb munkával, viszont minél több méz elraktározására.



A poszméh egyedül él, ezért számára legalkalmasabb a gömb alakú edény. Ebben az esetben kell a legkevesebb anyagot felhasználnia a felszín megépítéséhez egy adott térfogat eléréséhez.

A méhek ezzel szemben közösségben építkeznek. Arra kell törekedniük, hogy a télire készített méztartó edények egymás mellé illeszthetők legyenek. Ezért kizárható például a henger és az ötoldalú hasáb felhasználása. A három- és négyszögletű hasábok már egymás mellé illeszthetők, viszont adott térfogat és magasság esetén előnyösebb, ha a lapok számát növeljük meg. Így tehát a méh az összes test közül a legelőnyösebbet választotta ki, a hatszög alapú hasábot.

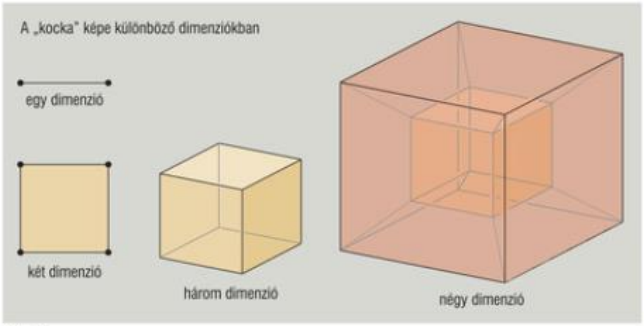
Érdekes, hogy a természet ehhez hasonló alakzatokat több helyen is megmintáz. Ilyen típusú bazalt oszlopokat láthatunk például vulkáni működések során megszilárdult kiömlési kőzetek esetén. Ennek elsősorban a hőcsere közben történő anyagáramlás az oka.

Nem véletlen, hogy az atomreaktorok belsejében használt üzemanyagkazetta is hatszög alapú hasáb, amely magába zárja az uránpasztillákat tartalmazó csövecskéket.

Térfogat- és valószínűségszámítás

A térfogatszámítás a matematika klasszikus területei közé tartozik. Az ókor matematikusai nagyon sok ismerettel rendelkeztek ezen a területen. A tudomány fejlődése azonban olyan kérdéseket is felvetett, melyek megválaszolása többdimenziós testekhez hozzárendelhető

térfogat meghatározását igényelte. Ez a feladat a dimenziószám növelésével a mai számítástechnikai háttér mellett is reménytelennek látszó feladat. A mai matematikusok közül többen keresnek olyan algoritmusokat, melyekkel a feladat elvégezhetővé válhat. *(71. ábra)*



71. ábra

Az egyik legjobb módszer kidolgozásában magyar matematikusok is részt vettek (Lovász László, Simonovits Miklós). Mivel a gömb térfogatának meghatározása több dimenzió esetén sem nehéz feladat, eljárásuk lényege az, hogy a keresett térfogatú konvex testet egy gömbbe foglalják, majd ebben a gömbben egyenletes eloszlással véletlenszerűen választanak ki pontokat. Ezután megvizsgálják, hogy ezek a pontok mekkora számban lesznek benne a vizsgált testben. Ha a felvett pontok száma kellően nagy, akkor a testben található és az összes pont aránya megegyezik a test térfogatának és a gömb térfogatának arányával. Ez alapján az ismeretlen, keresett térfogat tetszőleges közelítéssel megadható.

Valószínűségszámítás, statisztika

A geometriai valószínűség fogalmát elsőnek Georges Buffon (1707–1788) vezette be 1777-ben a nevezetes „tűproblémával".
Azt vizsgálta, hogy ha egy vízszintesen elhelyezett táblára egymástól d távolságra párhuzamos egyeneseket rajzol és a táblára véletlenszerűen l hosszúságú tűt ejt ($l < d$), mekkora annak a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest.

Erre elméleti értékként $p = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}$ *-t kapott.*

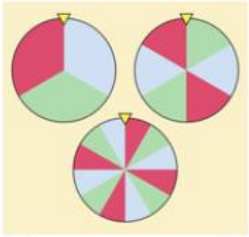
Mivel ez a valószínűség függ a π *értékétől, kellően nagy számú dobást elvégezve* π *értéke kísérletileg meghatározható.*

1850-ben a zürichi Wolf professzor 5000 dobásból számolt relatív gyakoriságot, amiből π *értékére 3,1596 adódott.*





1. Geometriai valószínűség



1. ábra

A következőkben olyan valószínűségi kísérletekről lesz szó, amelyeknél az események valószínűségét geometriai módszerekkel határozzuk meg.

Vegyünk például egy pörgettyűt, megpörgetjük, amikor leáll, a nyíl a kerület egy pontjára mutat véletlenszerűen.

Ha az 1. ábrán látható pörgettyűk mindegyikének harmadrészét pirosra, harmadrészét kékre, harmadrészét zöldre festettük, akkor bármelyik elrendezést is vesszük, azt várjuk, hogy mindegyik színt $\frac{1}{3}$ eséllyel fogja mutatni a nyíl, amikor leáll a pörgettyű. Vagyis az egyes színek valószínűsége nem függ a körcikkek elrendezésétől, csak attól, hogy a pörgettyű kerületén mekkora ívhossz, vagy a körlapon mekkora középponti szög, illetve mekkora területű körcikk tartozik hozzá.



2. ábra

Természetesnek tűnik, hogy a 2. ábrán látható pörgettyűvel $\frac{1}{3}$ eséllyel lehet pirosat, $\frac{1}{6}$ eséllyel lehet zöldet, $\frac{1}{2}$ eséllyel lehet kéket pörgetni.

0 a valószínűsége, hogy eltaláljuk a céltábla középpontját, de nem lehetetlen.

Tekintsünk egy céltáblát, amelyre véletlenszerűen lövés érkezik. Ha a céltábla egy pontját eltaláljuk, az egy elemi esemény, a céltábla pontjai alkotják az eseményteret. A korábbi kísérletekkel ellentétben ez az eseménytér végtelen. A lövés 1 valószínűséggel érkezik a céltáblára, viszont 0 a valószínűsége, hogy eltalálunk egy adott pontot, például a céltábla középpontját. Ez egy olyan esemény, melynek 0 a valószínűsége, mégsem lehetetlen.

Az, hogy a lövés véletlenszerűen vagy egyenletesen érkezik a céltáblára, azt jelenti, hogy annak valószínűsége, hogy a céltábla egy adott részébe esik a lövés, arányos a rész területével:

$$P(A) = c \cdot T(A),$$

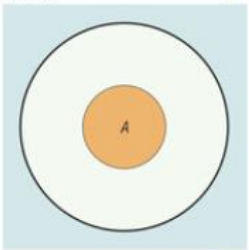
ahol c az arányossági tényező. Ha H jelöli a biztos eseményt, ami megfelel az egész céltáblának, akkor

$$1 = P(H) = c \cdot T(H),$$

amiből

$$c = \frac{1}{T(H)}.$$

3. ábra



Ezt felhasználva tetszőleges A eseményre:

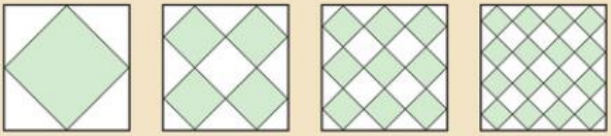
$$P(A) = \frac{T(A)}{T(H)}.$$

Egy A esemény valószínűsége az A-nak megfelelő terület és a teljes terület aránya *(3. ábra)*. A kísérlettől függően terület helyett hosszúság vagy szög is alkalmazható.



1. példa

Az alábbi céltáblákra véletlenszerűen érkező lövés mekkora eséllyel esik valamelyik színes négyzetbe?



Megoldás

Az első céltábla területének fele a színes négyzet területe, így annak valószínűsége, hogy a lövés a színes négyzetbe esik: $\frac{1}{2}$.

A második céltáblában 4 színes négyzet van, melyek területe egyenként a nagy négyzet területének $\frac{1}{8}$ része, így összesen a színes rész területe a négyzet területének fele. Annak valószínűsége, hogy a céltáblára véletlenszerűen érkező lövés a színes részbe esik: $\frac{1}{2}$.

Ha a nagy négyzet oldalát k egyenlő részre osztottuk, akkor k^2 darab színes négyzet van, melyek területe egyenként $\frac{1}{2k^2}$-szerese a nagy négyzet területének, összesen pedig az $\frac{1}{2}$ része.

Tehát a színes terület aránya mindegyik négyzet esetén ugyanannyi, ami nem meglepő, hiszen a nagy négyzet felosztható kis négyzetekre, amelyek területének fele a színes négyzet területe. Érdekességként érdemes megvizsgálni, hogy amíg az egymás utáni céltáblákon a színes négyzetek területének összege nem változik, kerületük összege minden határon túl nő.

Ha a fenti céltáblákra véletlenszerűen lövéseket adunk le, és nézzük a színes részbe esés relatív gyakoriságát, az körülbelül azonos lesz az összes céltábla esetén. Ez igazolja azt a hipotézisünket, hogy a vizsgált részbe esés valószínűsége csak a rész területétől függ, az elhelyezkedésétől nem.

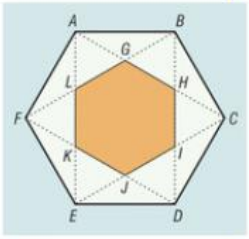
Tehát mindegyik céltábla esetén a véletlenszerűen a céltáblára érkező lövés $\frac{1}{2}$ valószínűséggel esik színes négyzetbe.



2. példa

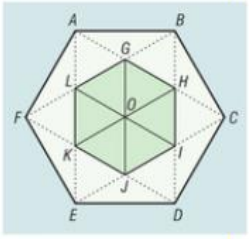
Legyen P egy szabályos hatszög belső pontja. Mi a valószínűsége, hogy P olyan pont, hogy a P-ből az oldalegyenesekre bocsátott valamennyi merőleges talppontja az oldalak belső pontja lesz?

Megoldás



4. ábra

Vizsgáljuk először azt, hogy melyek azok a pontok a hatszögben, melyekből merőlegest bocsátva az AB és ED oldalak oldalegyenesére, a merőlegesek talppontja az oldalak belső pontja lesz. Mivel az $ABDE$ négyszög téglalap, éppen ennek a téglalapnak a pontjai felelnek meg a fenti feltételnek. Hasonlóképpen a $BCEF$ téglalap pontjaiból a BC és az EF oldalak oldalegyeneseire bocsátott merőlegesek talppontjai a megfelelő oldalak belső pontjai lesznek, valamint az $FACD$ téglalap pontjaiból az FA és a CD oldalak oldalegyeneseire bocsátott merőlegesek talppontjai a megfelelő oldalak belső pontjai lesznek. Azok a pontok, amelyek esetén a hatszög minden oldalára teljesül a fenti feltétel, a három téglalap metszetében vannak. Ez a metszet a hatszög forgásszimmetriája miatt szintén egy szabályos hatszög. ***(4. ábra)***



5. ábra

A keresett valószínűség meghatározásához azt kell tudnunk, hogy ennek a belső hatszögnek a területe hányadrésze az eredeti hatszög területének. A kis hatszögbe az 5. ábrán jelölt vonalakat behúzva látható, hogy a BGH és a GHO egybevágó szabályos háromszögek, ugyanígy minden csúcsnál levő háromszögnek megvan a kis hatszögben levő párja. A szögek és oldalak alapján látható, hogy a BHC háromszög területe egyenlő a BGH háromszög területével. Összeszámolva: a nagy hatszög területe a BGH háromszög területének 18-szorosa, míg a kis hatszög a 6-szorosa. Tehát a keresett valószínűség $\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$.

3. példa

Zsuzsi minden reggel fél 9 és 9 óra között véletlenszerűen érkezik a buszmegállóba. Neki két busz is megfelel, az egyik 15, a másik 20 percenként indul 5 órától kezdve. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kell 5 percnél többet várnia?

Megoldás

A geometriai valószínűséget itt szakaszok hosszának arányával számoltuk, így lényegtelen, hogy a szakaszok végpontja a szakaszhoz tartozik vagy nem.

Feleljen meg egy szakasz a fél 9 és 9 közötti időtartamnak, és ezen jelöljük be a buszok érkezési időpontját. Ezen a szakaszon bejelölve azokat a részeket, amikor érkezve nem kell 5 percnél többet várni, látható, hogy ezek összesen 15 percet tesznek ki az összes 30 percből, így a keresett valószínűség: $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$. ***(6. ábra)***

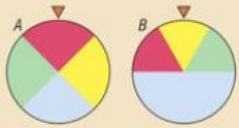
6. ábra





4. példa

A játék a következő: kétszer pörgetünk, mindkét alkalommal választhatunk, hogy az A vagy a B pörgettyűvel. Akkor nyerünk, ha a nyilak által kijelölt színeket összekeverve lilát kapunk. Melyik pörgettyűt válasszuk az egyes pörgetésekhez, hogy a legnagyobb esélyünk legyen a nyerésre?



Megoldás

Nézzük meg először, hogy elsőre az A, másodikra a B pörgettyűt választva mekkora eséllyel nyerünk. Vegyünk egy 1 oldalú négyzetet, és az egyik oldalával párhuzamosan osszuk fel az A pörgettyűnek megfelelően, majd a másik oldalával párhuzamosan a B pörgettyűnek megfelelően a 7. ábra szerint.

Az ábráról leolvasható, hogy a kék + piros = lila pörgetésének esélye a geometriai valószínűség alapján:

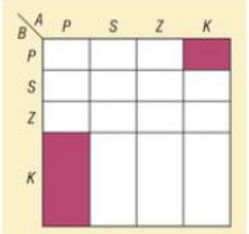
$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}.$$

Az ábráról az is leolvasható, hogy ha az A és B pörgettyűt választjuk, lényegtelen, hogy milyen sorrendben pörgetjük őket.

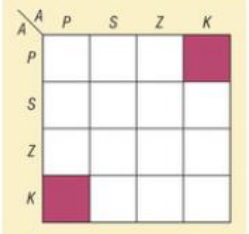
Hasonlóan látható, hogy kétszer egymás után az A pörgettyűt választva a lila pörgetésének esélye $\frac{1}{8}$ *(8. ábra)*, míg ha kétszer a B pörgettyűt választjuk, akkor $\frac{1}{6}$ *(9. ábra)*.

Tehát vagy két különböző pörgettyűt érdemes választani, vagy mindkét pörgetésre a B-t.

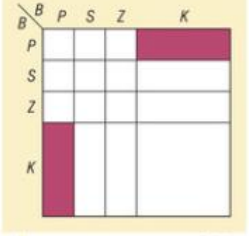
Megjegyzés: Vizsgáljuk meg, mit érdemes választani, ha a második pörgettyűt az első pörgetés eredményének ismeretében választhatjuk.



7. ábra



8. ábra



9. ábra

5. példa

Zsófi és Ági megbeszélik, hogy délután 6 és 7 óra között találkoznak a cukrászdában. Mindketten véletlenszerűen érkeznek a megadott órában, és 10 perc várakozás után elmennek. Mennyi a valószínűsége, hogy találkoznak?

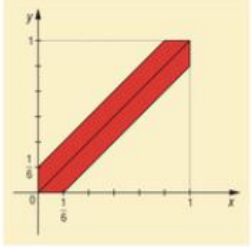
Megoldás

Zsófi x órával, Ági y órával 6 óra után érkezik. Az eseménytér $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$ alapján a koordináta-rendszerben egy O csúcsú egységnégyzet. Ez azt jelenti, hogy az egységnégyzet minden pontjához tartozik két időpont, amikor Zsófi és Ági megérkezik, és fordítva, minden időpont párhoz tartozik egy pont az egységnégyzetben.

Ha Zsófi érkezik hamarabb, azaz $x \le y$, akkor a találkozás feltétele:

$$x+\frac{1}{6}\ge y.$$





10. ábra

Ha Ági érkezik hamarabb, azaz $y \le x$, akkor a találkozás feltétele:

$$y + \frac{1}{6} \ge x.$$

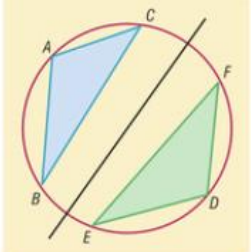
Az egységnégyzetben színezzük pirosra a találkozás feltételének megfelelő pontokat. Az egyik részt az $x \le y$ és $x + \frac{1}{6} \ge y$ egyenlőtlenségrendszernek megfelelő pontok, a másik részt pedig az $y \le x$ és $y \ge x - \frac{1}{6}$ egyenlőtlenségrendszernek megfelelő pontok alkotják. ***(10. ábra)***

Az egységnégyzetben pirosra színezett területek összege:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36},$$

mivel a négyzet területe 1, a találkozás valószínűsége $\frac{11}{36}$.

A fenti példa mutatja, hogy folytonosan változó mennyiségeket koordinátarendszerben ábrázolva visszavezethetjük a problémát geometriai valószínűség számítására.



11. ábra

6. példa

Egy adott körön véletlenszerűen választjuk az A, B, C, D, E, F pontokat. Mennyi a valószínűsége, hogy az ABC háromszög és a DEF háromszög idegenek? ***(11. ábra)***

Megoldás

Vegyük észre, hogy a feladat szempontjából csak a pontok sorrendje számít, nem a konkrét helyük a körvonalon. Így összesen a 6 pontot a körön 5!-féleképpen lehet elhelyezni.

Az ABC és a DEF háromszögek idegenek, ha az A, B, C pontok egy egyenessel elválaszthatók a D, E, F pontoktól. Az egyenes két oldalán a pontok sorrendje nem számít, azaz az A, B, C pontok sorrendje és a D, E, F pontok sorrendje lényegtelen, így ez $3! \cdot 3!$ lehetőség. Tehát a keresett valószínűség

$$\frac{3! \cdot 3!}{5!} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

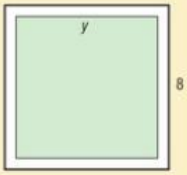
A példa kezdetben geometriai valószínűségszámítási feladatnak tűnt, ám kiderült, hogy ennek ellenére tisztán kombinatorikai probléma volt.

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy egy meteor véletlenszerűen érkezhet a Föld bármely helyére, és becsapódik. Mi a valószínűsége, hogy szárazföldre esik, ha a Föld felszínen a szárazföldek területe 148,6 millió km^2, míg a vizek területe 361,5 millió km^2?
2. Egy kör alakú céltáblára véletlenszerűen lövés érkezik. Mi a valószínűsége, hogy a lövés helye közelebb lesz a kör középpontjához, mint a határvonalához?

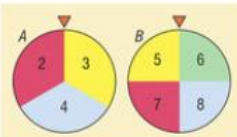


3. A 8 egység oldalú négyzet alakú céltáblára érkező lövés 75% valószínűséggel esik az y oldalú négyzet alakú színes részbe. Melyik egész számhoz van legközelebb az y?



4. Egy pálcát véletlenszerűen kettétörünk. Mi a valószínűsége, hogy a törőspont közelebb lesz a pálca valamelyik végéhez, mint a középpontjához?

5. Az ábrán látható két pörgettyűt megpörgetjük, majd a nyilak által kijelölt számokat összeszorozzuk. Mennyi a valószínűsége, hogy a szorzat páros?



6. A *Sárkányok erdeje* társasjátékban a dobókockák nem szabályosak. Mindegyik lapjukra ugyanakkora valószínűséggel esnek, de minden kocka olyan, hogy egy lapján 1-es, két lapján 2-es, két lapján 3-as, és egy lapján 4-es áll. Guszti két ilyen kockával dob, és összeadja a dobott számokat.
   a) Melyik a legvalószínűbb összeg?
   b) Mi a valószínűsége, hogy az összeg legalább 6?
   c) Mi a valószínűsége, hogy az összeg legfeljebb 4?
   Ábrázoljuk a valószínűséget 1 oldalú négyzetben!

7. Villő egy 1-6-ig számozott lapú szabályos dobókockával és egy 1-től 8-ig számozott szabályos oktaéderrel egyszerre dob, és a dobott számokat összeszorozza.
   Mi a valószínűsége, hogy a szorzat
   a) páros; *b)* prímszám; *c)* összetett szám?
   d) Mi a valószínűsége, hogy a kockával nagyobb számot dob, mint az oktaéderrel?
   Ábrázoljuk a valószínűséget 1 oldalú négyzetben!

8. A koordináta-rendszerben egy pontot véletlenszerűen választunk abból a téglalapból, amelynek csúcsai (0; 0), (2; 0), (2; 3) és (0; 3). Mi a valószínűsége, hogy a pont x koordinátája kisebb, mint az y koordinátája?

9. Véletlenszerűen választunk két 0 és 1 közé eső számot. Mi a valószínűsége, hogy összegük legfeljebb 1?

10. Az $x^2 + bx + 1 = 0$ egyenletben b-t véletlenszerűen választjuk a $(-5; 5)$ intervallumról. Mi a valószínűsége, hogy az egyenletnek van valós gyöke?

11. Egy 1 egység hosszúságú pálcát véletlenszerűen három darabra törünk. Mennyi a valószínűsége, hogy a darabokból háromszög állítható össze?

Rejtvény

Egy gömb felületén véletlenszerűen választunk három pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pontok egy félgömbön lesznek?



2. Várható érték

Gondolkodjunk el azon, vajon miért érdemes szerencsejáték automatákat, kaszinókat üzemeltetni, mi alapján állapítják meg a fogadásoknál a tétekre járó nyereményeket, a biztosítók a biztosítási díjakat. Kézenfekvő, hogy minél kisebb esélye van például egy lóversenyen egy lónak a nyerésre, annál nagyobb a nyeremény, ha mégis győz. Minél kockázatosabb dologra kötünk biztosítást, annál többet kell fizetnünk érte.



1. példa

Kati és Pali egy szabályos dobókockával játszanak. Kati a görbe számokat szereti, így akkor nyer, ha 2-est, 3-ast, 5-öst vagy 6-ost dobnak, Pali pedig az egyeneseket, így akkor nyer, ha 1-est vagy 4-est dobnak. Ha Kati nyer, akkor Pali „fizet neki" 3 zsetont, ha Pali nyer, akkor Kati „fizet neki" 4 zsetont. Kinek előnyösebb a játék?

Megoldás

A 6 dobható szám közül Katinak négy nyerőszáma van, Palinak pedig kettő. Így ha nagyon sokszor játszanak, akkor az esetek $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ részében Kati nyer, $\frac{1}{3}$ részében pedig Pali, hiszen a relatív gyakoriság elég sok dobás esetén jól közelíti a valószínűséget. Ez azt jelenti, hogy n dobás esetén Kati kb. $\frac{2}{3}\cdot n$-szer, Pali kb. $\frac{1}{3}\cdot n$-szer nyer, ezzel Kati $\frac{2}{3}\cdot n\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot n\cdot 4=\frac{2}{3}\cdot n$ zsetont nyer Palitól, tehát neki előnyösebb a játék. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy sok játék esetén Kati átlagosan $\frac{2}{3}$ zsetont nyer játékonként.

3D

Azt az értéket, amely körül a nyeremény átlaga ingadozik, a nyeremény **várható értékének** nevezzük. (A várható érték pontos matematikai definíciójához más fogalmak is szükségesek, amelyekre itt nem tudunk kitérni.)

A nyeremény várható értékét megkapjuk, ha a nyeremény lehetséges értékeit megszorozzuk azzal a valószínűséggel, amivel azt megnyeri, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk.

Tehát Kati nyereményének várható értéke:

$$3\cdot\frac{2}{3}+(-4)\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

ugyanígy számolva Pali nyereményének várható értéke:

$$4\cdot\frac{1}{3}+(-3)\cdot\frac{2}{3}=-\frac{2}{3},$$

negatív, ami valójában veszteséget jelent. Tehát hiába kap Pali több zsetont, amikor nyer, mivel Kati nagyobb eséllyel nyer, neki előnyösebb a játék.



2. példa

A rulettben 37 számra lehet tippelni 0–36-ig. Ha eltaláltuk a számot, a tét 36-szorosát kapjuk. Nyerünk vagy veszítünk, ha sokáig játszunk?

Megoldás

Számoljunk úgy, hogy a tét 1 Ft. $\frac{1}{37}$ valószínűséggel eltaláljuk a számot, kapunk 36 forintot, miközben az 1 forintunkat besöprik, ekkor a nyereményünk 35 Ft. $\frac{36}{37}$ valószínűséggel nem találjuk el a számot, ekkor elveszítjük az 1 Ft tétet, azaz a nyereményünk –1 Ft.

Tehát a nyereményünk várható értéke:

$$35 \cdot \frac{1}{37} + (-1) \cdot \frac{36}{37} = -\frac{1}{37} = -0{,}027,$$

ami azt jelenti, hogy ha sokáig játszunk, akkor játékonként átlagosan a tét 2,7%-át veszítjük el, tehát nem érdemes rulettezni.

3. példa

Albert és Béla egy szabályos dobókockával játszanak. Albert minden dobás után annyi zsetont „fizet" Bélának, amennyit dobtak, Béla pedig minden dobáskor 3 zsetont „fizet" Albertnek. Kinek előnyösebb a játék?

3D

Megoldás

Számoljuk ki Albert nyereményének lehetséges értékeit és ezek valószínűségeit:

1-es dobás esetén a nyeremény: $3-1=2$ zs, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel,

2-es dobás esetén a nyeremény: $3-2=1$ zs, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel,

3-as dobás esetén a nyeremény: $3-3=0$ zs, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel,

4-es dobás esetén a nyeremény: $3-4=-1$ zs, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel,

5-ös dobás esetén a nyeremény: $3-5=-2$ zs, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel,

6-os dobás esetén a nyeremény: $3-6=-3$ zs, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel,



így Albert nyereményének várható értéke:

$$2 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{1}{6} + (-2) \cdot \frac{1}{6} + (-3) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Tehát Béla számára előnyösebb a játék.



A játék akkor **igazságos,** ha minden játékos nyereményének várható értéke 0.

Számítsuk ki, mennyit kellene „fizetnie" Bélának minden dobásra, hogy a játék igazságos legyen.

Az Albert által dobásonként „fizetett" zseton várható értéke:

$$1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5.$$

Ez azt jelenti, hogy ha Béla minden dobásnál 3,5 zsetont ad Albertnek, akkor igazságos a játék, mindkettőjük nyereményének várható értéke 0 lesz.

Megjegyezzük, hogy ez a 3,5 egyben a kockadobás eredményének várható értéke, ami mutatja, hogy a várható érték nem a legvalószínűbb érték, hanem sok dobás esetén az eredmények átlaga.



12. ábra

4. példa

A 12. ábrán látható pörgettyű megpörgetése előtt lehet fogadni a nyíl által kijelölt színre 50 forintért. Akkor nyerünk, ha a nyíl arra a színre mutat, amelyikre fogadtunk. Ha nyertünk úgy, hogy a pirosra fogadtunk, akkor kapunk 90 forintot, ha a kékre, akkor 300 forintot, ha a zöldre, akkor 165 forintot.

a) Melyik színre érdemes fogadni leginkább?

b) Tíz egymás utáni játékban a kékre fogadtunk. Mi a valószínűsége, hogy

(i) nyerünk legalább 2000 forintot?

(ii) nem nyerünk és nem is veszítünk?

(iii) veszítünk?

Megoldás (a)

Ha a pirosra fogadunk, akkor $\frac{6}{12}$ valószínűséggel nyerünk, és kapunk 90 Ft-ot. Mivel a tét 50 Ft volt, a nyereségünk $90-50=40$ Ft.

Ugyancsak $\frac{6}{12}$ valószínűséggel nem pirosat pörgetünk, ekkor a „nyereségünk" -50 Ft.

Tehát a nyereségünk várható értéke:

$$40\cdot\frac{6}{12}+(-50)\cdot\frac{6}{12}=-5\text{ Ft}.$$

Ha a kékre fogadunk, akkor $\frac{2}{12}$ valószínűséggel nyerünk, a nyereségünk pedig 250 Ft. $\frac{10}{12}$ valószínűséggel nem nyerünk, ekkor a „nyereségünk" -50 Ft.

Ha a kékre fogadunk, akkor a nyereségünk várható értéke:

$$250\cdot\frac{2}{12}+(-50)\cdot\frac{10}{12}=0.$$



Ha a zöldre fogadunk, akkor $\frac{4}{12}$ valószínűséggel nyerünk, a nyereségünk pedig 120 Ft. $\frac{8}{12}$ valószínűséggel nem nyerünk, ekkor a „nyereségünk” -50 Ft.

Ha a zöldre fogadunk, akkor a nyereségünk várható értéke:

$$115 \cdot \frac{4}{12} + (-50) \cdot \frac{8}{12} = 5 \text{ Ft.}$$

Tehát a nyereségünk várható értéke akkor a legnagyobb, ha a zöldre fogadunk.

Megoldás (b/i)

Ha a kékre fogadunk, akkor egy játékban vagy nyerünk 250 Ft-ot, vagy veszítünk 50 Ft-ot. Ahhoz, hogy nyerjünk 2000 Ft-ot, legalább 8-szor kell nyerni.

Ha 8 nyerés mellett 2-szer veszítünk, akkor csak 1900 forintunk lesz, így legalább 2000 Ft-ot úgy tudunk nyerni, ha vagy mind a 10-szer nyerünk, vagy 9-szer nyerünk és 1-szer veszítünk.

Ha a kékre fogadtunk, akkor egy játékot $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ valószínűséggel nyerünk meg, 10 játékot pedig $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ valószínűséggel.

visszatevéses mintavétel

Annak valószínűsége, hogy 9-szer nyerünk és egyszer veszítünk:

$$\binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1,$$

mert az 1 vesztes játékot $\binom{10}{1} = 10$ -féleképpen lehet kiválasztani a 10 játék közül.

Tehát annak valószínűsége, hogy legalább 2000 Ft-ot nyerünk:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{10} + 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \frac{5}{6} = 0{,}000000843.$$

Megoldás (b/ii)

Egy nyerést (250 Ft) 5 vesztés ellensúlyoz (50 Ft). Ha a 10 játék között 1 nyerő van, akkor a veszteségünk lesz a nagyobb, ha 2 nyerő van, akkor a 8 vesztes játszmában nem tudjuk elveszíteni az 500 Ft nyereményt, így a nyereségünk lesz nagyobb, tehát nem lehet, hogy ugyanannyit nyerjünk, mint veszítsünk.

Megoldás (b/iii)

Ebből az is látszik, hogy a 10 játék közül ha már 2-t megnyerünk, akkor többet nyertünk, mint veszítettünk.

Így csak akkor leszünk veszteségesek, ha vagy mind a 10 játékot elveszítjük, vagy 1-et nyerünk és a többit elveszítjük. Ennek valószínűsége:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}32.$$





5. példa

Gabi fiókjában 3 kék sál mellett 1 sárga, 1 szürke és 2 zöld sál van. Kék sálat keres, de sietségében véletlenszerűen húzgálja ki a fiókból a sálakat, amíg kéket nem talál. Ha nem kéket húzott, szétdobálja. Mennyi a szükséges húzások számának várható értéke?

Megoldás

Lehet, hogy 1 húzásra kéket talál, ennek valószínűsége $\frac{3}{7}$.

Ha az első húzás nem kék, akkor a második húzás lehet kék, ekkor 2 húzás szükséges, ennek valószínűsége:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{2}{7}.$$

Ha a második húzás sem kék, akkor a harmadik húzás lehet kék, ekkor 3 húzás szükséges, ennek valószínűsége:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{35}.$$

Ha a harmadik húzás sem kék, akkor a negyedik húzás lehet kék, ekkor 4 húzás szükséges, ennek valószínűsége:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{35}.$$

Ha a negyedik húzás sem kék, akkor az ötödik húzás már biztosan kék, ekkor 5 húzás szükséges, ennek valószínűsége:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{35}.$$

Így a húzások számának várható értéke:

$$1\cdot\frac{3}{7}+2\cdot\frac{2}{7}+3\cdot\frac{6}{35}+4\cdot\frac{3}{35}+5\cdot\frac{1}{35}=\frac{15+20+18+12+5}{35}=2.$$

Figyeljük meg, hogy annak a valószínűsége, hogy az első húzásra talál kék sálat, nagyobb, mint bármelyik másik húzásszámnak a valószínűsége, mégis ha Gabi sokszor végzi a kék sál keresését így, akkor átlagosan a 2. húzásra fog kéket találni.

Feladatok

1. Beni és Lujzi egy szabályos dobókockával játszanak. Lujzi azt javasolja Beninek, hogy ha 6-ost dobnak, akkor Beni fizessen neki 600 Ft-ot, ha nem 6-ost dobnak, akkor ő fizet Beninek 100 Ft-ot. Igazságos-e ez a játék? Ha igen, miért, ha nem, akkor hogy lehet igazságossá tenni?

2. Az ábrán látható pörgettyűn egy pörgetésért 2 eurót kell fizetni, és a nyíl mutatja a nyert eurók számát. Kinek jó üzlet ez a játék? Mennyi a pörgető játékos nyereményének várható értéke?

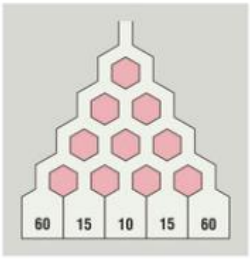




3. Egy lóversenyen három ló győzelmére lehet fogadni. Tornádó győzelme esetén a tét másfélszeresét fizeti a fogadóiroda, Villám győzelme esetén a tízszeresét, Szélvész győzelme esetén a háromszorosát. Titkos belső információ szerint Tornádó 60% eséllyel nyer, Villám 10% eséllyel, Szélvész pedig 30% eséllyel. Melyik lóra érdemes fogadni, és mennyi lesz a nyereség várható értéke?

4. Egy biztosító öt napos síelésre speciális biztosítást ajánl, melyet 3500 Ft-ért lehet megkötni. A biztosító halálesetre 1,5 millió forintot, 100%-os maradandó egészségkárosodásra szintén 1,5 milliót fizet. Sérülés esetén az orvosi költségre átlagosan 200 ezer forintot számítanak, a poggyászban esett kárra pedig 100 ezer forintot. A biztosító szakemberei szerint a haláleset valószínűsége 0,005%, a 100%-os maradandó egészségkárosodásé 0,01%, az orvosi ellátás szükségességének valószínűsége 1%, a poggyászban esett kár valószínűsége pedig 0,5%. Mennyi a biztosító nyereségének várható értéke egy biztosításon?

5. Az ábrán látható játékautomata pályáján egy golyó gurul lefelé. Minden akadálynál ugyanakkora valószínűséggel megy jobbra vagy balra, ezért minden út egyformán valószínű. A pályán 4 szinten vannak akadályok, és a végén 5 rekeszbe érkezhet a golyó. Egy golyó elindításáért 20 Ft-ot kell fizetni, és minden rekeszhez odaírtuk, hogy a játékos mennyit nyer, ha odaér a golyó. Mennyi a játékos nyereségének várható értéke?



6. Mennyi az 5-ös lottón a lottótalálatok számának várható értéke?

7. Egy kalapba betettük az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat. Egyet véletlenszerűen kihúzunk. 10 forintért lehet fogadni arra, hogy a kihúzott szám páros, 3-mal osztható vagy 5-tel osztható. Ha párosra tippelünk és eltaláltuk, akkor 18 Ft-ot nyerünk, ha 3-mal oszthatóra tippeltünk és eltaláltuk, akkor 40 Ft-ot nyerünk, ha 5-tel oszthatóra tippeltünk és eltaláltuk, akkor 50 Ft-ot nyerünk. Mire érdemes tippelni?

8. Egy játékautomatának három tárcsája, és mindegyik tárcsának 5 állása van. A tárcsákat megpörgetjük, és mindegyik véletlenszerűen áll meg az 5 állás valamelyikében. Az első tárcsának két állásában narancs, kettőben alma és egyben körte látszik, a másodikon egy narancs, egy alma és három körte, a harmadikon megint két narancs, két alma és egy körte. 50 Ft-ért lehet egyet játszani, és a játékos akkor nyer, ha mind a három tárcsán ugyanaz a gyümölcs látszik. Mennyi a játékos nyereségének várható értéke, ha egy nyert játék esetén 500 Ft-ot kap a géptől?

9. Anna és Blanka feldob két szabályos dobókockát. Anna arra tippel, hogy a dobott számok szorzata páros lesz, Blanka arra, hogy páratlan. Ha Anna veszít, fizet Blankának 1200 Ft-ot. Mennyit fizessen Blanka Annának, ha Anna nyer, hogy igazságos legyen a játék?

10. A jótékonysági bálon tombolajegyeket árulnak. A tombolajegyek 1%-a 2000 Ft-os ajándékutalványt nyer, a jegyek 2%-a pedig 1000 Ft-os ajándékutalványt. Egy tombolajegy vásárlásával mennyi a nyereményünk várható értéke, ha egy jegy 500 Ft-ba kerül?



3. Feltételes valószínűség, események függetlensége

Ha egy kártyajátékban a játékosok egymás után húznak lapot, akkor a korábban sorra kerülő játékosok kihúzhatják előlünk azt a lapot, amit várunk, azaz a korábbi húzások befolyásolják a későbbieket. Ám ha dobókockával többször dobunk egymás után, akkor az első dobás eredménye nincs hatással a továbbiakra.

A következőben események kapcsolatát, egymásra gyakorolt hatását vizsgáljuk.

1. példa

Zsófi dob egy szabályos dobókockával, Dorka pedig tippel, hogy a dobott szám páros vagy páratlan.

a) Mi a valószínűsége, hogy Dorka jól tippel?

b) Zsuzsi segíteni akar Dorkának, ezért meglesi a dobott számot, és felfelé mutat, ha a dobott szám fenti szám, azaz 4, 5 vagy 6, és lefelé mutat, ha Zsófi dobása lenti szám, azaz 1, 2 vagy 3. Mire tippeljen Dorka, és mekkora valószínűséggel talál?

Kinek a segítsége hatékonyabb, ha Dorkának a dobott számot kell eltalálnia?

c) Dávid még többet szeretne segíteni Dorkának, ezért felfelé mutat, ha Zsófi dobása 5 vagy 6, középre mutat, ha a dobás 3 vagy 4, és lefelé, ha a dobás 1 vagy 2. Mire tippeljen Dorka, és mekkora valószínűséggel talál?

Megoldás (a)

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok közül 3 páros, 3 páratlan, így akár párosra, akár páratlanra tippel, Dorka $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ valószínűséggel talál.

Megoldás (b)

Ha Zsuzsi felfelé mutat, akkor a dobott szám fenti szám, azaz 4, 5 vagy 6, ezért Dorkának párosra érdemes tippelni, és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel talál. Ha Zsuzsi lefelé mutat, akkor a dobott szám lenti szám, azaz 1, 2 vagy 3, ezért Dorkának páratlanra érdemes tippelni, és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel talál. Tehát Zsuzsi segítségével nagyobb valószínűséggel találja el a dobott számot.

Megoldás (c)

Dávid segítségével Dorka két számra tudja leszűkíteni a lehetőségeket, de ezek közül az egyik mindig páros, a másik páratlan, így akármire tippel Dorka, csak $\frac{1}{2}$ valószínűséggel talál. Így a Dávid által mutatott jelek nem segítenek Dorkának.



A példában a 3 fenti szám közül 2 páros, így annak a valószínűsége, hogy *a dobott szám páros, feltéve, hogy a dobott szám fenti szám,* az $\frac{2}{3}$.

Ez a páros és fenti számok számának és a fenti számok számának a hányadosa.

Annak a valószínűsége, hogy egy dobott szám *fenti,* az $\frac{3}{6}$. Annak a valószínűsége pedig, hogy egy dobott szám *páros és fenti,* az $\frac{2}{6}$.

Mindkét esemény valószínűségének számolásakor az összes eset száma 6. Így annak a valószínűsége, hogy a dobott szám páros, feltéve, hogy a dobott szám fenti szám, az úgy is számolható, hogy a páros és fenti szám dobásának valószínűségét elosztjuk a fenti szám dobásának valószínűségével:

$$P(\text{a dobott szám páros feltéve, hogy fenti}) =$$

$$= \frac{\text{páros és fenti számok száma}}{\text{fenti számok száma}} = \frac{P(\text{a dobott szám páros és fenti})}{P(\text{a dobott szám fenti})},$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}.$$

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a dobott szám páros, B-vel azt, hogy a dobott szám fenti.

Ekkor

$$P(A, \text{ feltéve, hogy } B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Írjuk fel az 1. példában szereplő feltételes valószínűségeket!

°**Definíció:** **Az A esemény B-re vonatkozó *feltételes valószínűségének* nevezzük a $\frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ hányadost, ha $P(B) \neq 0$.**

Ha $P(B) = 0$, akkor nem beszélünk B-re vonatkozó feltételes valószínűségről.

Jele: $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

2. példa

Egy szabályos dobókockát 6-szor egymás után feldobunk. Mi a valószínűsége, hogy a 6. dobás 1-es, ha tudjuk, hogy előtte ötször 1-est dobtunk?

Megoldás

A esemény: *A 6. dobás 1-es.* B esemény: *Az első 5 dobás 1-es.*

Minden dobás 6-féle lehet, 5 dobás 6^5-féle.

Így

$$P(B) = \frac{1}{6^5} \quad \text{és} \quad P(A \cdot B) = P(\text{az első 6 dobás 1-es}) = \frac{1}{6^6}.$$



Annak a valószínűsége, hogy a 6. dobás 1-es, feltéve, hogy előtte öt 1-es volt:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6^6}}{\frac{1}{6^5}}=\frac{6^5}{6^6}=\frac{1}{6}.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy hatszor egymás után 1-est dobunk, az $\frac{1}{6^6}$, azaz nagyon kicsi, viszont öt 1-es dobása után ugyanúgy $\frac{1}{6}$ az 1-es dobás valószínűsége, mintha előtte egyáltalán nem dobtunk volna: $P(A|B)=P(A)$. Ez azt jelenti, hogy az egymás utáni kockadobások függetlenek egymástól, a kockának nincs „memóriája".

Ekkor

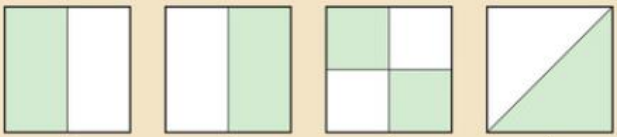
$$P(A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}, \quad \text{azaz} \quad P(A)\cdot P(B)=P(A\cdot B).$$

független események

DEFINÍCIÓ: Az A és B eseményeket *függetleneknek* nevezzük, ha $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

3. példa

Jelentse A, B, C és D azt az eseményt, hogy a megfelelő betűvel jelölt céltábla színes részébe esik a céltáblára véletlenszerűen érkező, azt eltaláló lövés. Keressünk független eseményeket!



Megoldás

Mivel

$$P(A)=P(B)=P(C)=P(D)=\frac{1}{2},$$

így bármelyik párra az események valószínűségének szorzata:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Az A és B események kizárják egymást, ha $P(A\cdot B)=0$.



$P(A\cdot B)=0$, az A és B események nem függetlenek. Az A és B események kizárják egymást.



$P(A\cdot C)=\frac{1}{4}$, az A és C események függetlenek.



$P(A\cdot D)=\frac{1}{8}$, az A és D események nem függetlenek.





$P(B \cdot C) = \frac{1}{4}$, a B és C események függetlenek.



$P(B \cdot D) = \frac{3}{8}$, a B és C események nem függetlenek.



$P(C \cdot D) = \frac{1}{4}$, a C és D események függetlenek.

Az A, B és C események páronként függetlenek. A három esemény nem független, mert $P(A \cdot B \cdot C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

4. példa

A 32 lapos magyar kártya pakliból kihúzunk két lapot.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindkét lap 7-es, ha az első húzás után visszatesszük a kihúzott lapot?

b) Mi a valószínűsége, hogy mindkét lap 7-es, ha nem tesszük vissza az elsőre kihúzott lapot?

c) Mi a valószínűsége, hogy a második lap 7-es, ha tudjuk, hogy az első lap 7-es volt?

d) Mi a valószínűsége, hogy a harmadikként húzott lap 7-es, ha tudjuk, hogy az első két lap 7-es volt?

e) Mi a valószínűsége, hogy az első három kihúzott lap 7-es?

Megoldás (a)

$P(\text{az első húzás 7-es}) = \frac{4}{32}$.

Mivel a második húzás előtt visszatesszük az elsőre húzott lapot, a két húzás kimenetele független egymástól, így

$$P(\text{mindkét lap 7-es}) = \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{32} = \frac{1}{64}.$$

Ha egy kísérletet ugyanolyan körülmények között többször megismétlünk, a kísérletek kimenetele független egymástól.

Megoldás (b)

Két lapot egymás után $32 \cdot 31$-féleképpen húzhatunk, ez az összes eset. Két 7-est egymás után $4 \cdot 3$-féleképpen húzhatunk, ez a kedvező esetek száma. Így

$$P(\text{mindkét lap 7-es}) = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{3}{248}.$$

Megoldás (c)

Ha az első lap 7-es volt, akkor másodikra 31 lap közül húzunk egyet, és 3-féleképpen húzhatunk 7-est.

$$P(\text{2. lap 7-es} \mid \text{1. lap 7-es}) = \frac{3}{31}.$$

Látható, hogy $P(\text{mindkét lap 7-es}) = P(\text{1. lap 7-es}) \cdot P(\text{2. lap 7-es})$.

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(A|B)$

Megoldás (d)

Ha az első két lap 7-es volt, akkor harmadikra kétféleképpen húzhatunk 7-est a 30 lap közül.

$$P(\text{3. lap 7-es} \mid \text{első két lap 7-es}) = \frac{2}{30}.$$



Megoldás (e)

$$P(\text{első három lap 7-es}) = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{32\cdot 31\cdot 30} = \frac{4}{32}\cdot\frac{3}{31}\cdot\frac{2}{30}, \quad \text{azaz}$$

$$P(\text{első három lap 7-es}) =$$

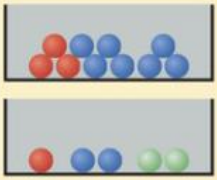
$$= P(\text{1. lap 7-es})\cdot P(\text{2. lap 7-es}\,|\,\text{1. lap 7-es})\cdot P(\text{3. lap 7-es}\,|\,\text{első két lap 7-es}).$$

Események szorzatának valószínűségét számíthatjuk a **szorzási szabállyal:**

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B|A),$$

$$P(A\cdot B\cdot C) = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cdot B).$$

Az összefüggések a feltételes valószínűség definíciójából átrendezéssel adódnak.



5. példa

Két dobozban színes golyók vannak, az egyikben 3 piros és 7 kék, a másikban 1 piros, 2 kék és 2 zöld golyó. Véletlenszerűen választunk a két doboz közül, és a véletlenszerűen választott dobozból véletlenszerűen húzunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy piros golyót húzunk?

Megoldás

A szorzási szabály alapján:

$$P(\text{az 1. dobozt választjuk és pirosat húzunk}) =$$

$$= P(\text{az 1. dobozt választjuk})\cdot P(\text{pirosat húzunk}\,|\,\text{az 1. dobozt választjuk}) =$$

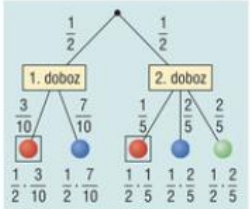
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}.$$

$$P(\text{a 2. dobozt választjuk és pirosat húzunk}) =$$

$$= P(\text{a 2. dobozt választjuk})\cdot P(\text{pirosat húzunk}\,|\,\text{a 2. dobozt választjuk}) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}.$$

$$P(\text{pirosat húzunk}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{4}.$$



13. ábra

A húzást ábrázolhatjuk fagráffal. Az élekre írjuk rá annak a valószínűségét, hogy az él kezdőpontjából ezen él végpontjába jutunk. A fagráf leveleihez írjuk a levélhez jutás valószínűségét, amit úgy kapunk, hogy a fa gyökerétől a levélhez vezető úton összeszorozzuk az élekre írt valószínűségeket. ***(13. ábra)***

Leolvasható, hogy:

$$P(\text{pirosat húzunk}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{4},$$

$$P(\text{kéket húzunk}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{11}{20},$$

$$P(\text{zöldet húzunk}) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy az első dobozt választjuk, B_2 azt az eseményt, hogy a második dobozt választjuk, és A azt az eseményt, hogy piros golyót húzunk.

B_1 és B_2 kizárják egymást, és összegük a biztos esemény.

Ekkor az előbbi összefüggés a következő alakban írható:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2).$$

Ez a **teljes valószínűség tétele.**

Feladatok

1. Egy szabályos dobódodekaéder lapjaira 1-12-ig vannak írva a számok. A dodekaéderrel egyszer dobunk.



Legyenek A, B, C, D a következő események:

A: a dobott szám legfeljebb 5;

B: a dobott szám páros;

C: a dobott szám prím;

D: a dobott szám a 3.

Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

a) $P(A \cdot B)$; *b)* $P(A|B)$; *c)* $P(B|A)$; *d)* $P(C|B)$;

e) $P(D|C)$; *f)* $P(D|B)$; *g)* $P(C|A)$.

2. Egy szabályos dobóoktaéder lapjaira 1-8-ig vannak írva a számok. Az oktaéderrel egyszer dobunk. Legyenek A, B, C, D a következő események:

A: a dobott szám 1, 2, 3 vagy 4;

B: a dobott szám 3, 4, 7 vagy 8;

C: a dobott szám 4, 5, 6 vagy 7;

D: a dobott szám 1, 2, 5 vagy 8.

Keressünk független eseménypárokat!

3. Egy zsákban 3 piros, 4 kék és 5 zöld golyó van. Egymás után három golyót húzunk visszatevés nélkül.

a) Mi a valószínűsége, hogy az első két golyó piros?

b) Mi a valószínűsége, hogy az első golyó piros, a második és a harmadik zöld?

c) Mi a valószínűsége, hogy a három golyó között nincs piros?

4. Egy kártyajátékban hatféle színű lap van, mindegyik színből 12 db, amelyek 1-12-ig számozottak. A pakliból öt lapot húzunk egymás után, visszatevés nélkül.

a) Mi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok száma sorban 1, 2, 3, 4 és 5?

b) Mi a valószínűsége, hogy 5 egyszínű lapot húzunk?

c) Mi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok száma valamilyen sorrendben 1, 2, 3, 4 és 5?



5. Három dobozban sütemények vannak. Az 1. dobozban egy kakaós csiga, a 2. dobozban 2 kakaós csiga és 1 túrós táska, a 3. dobozban 3 kakaós csiga és 1 túrós táska.

Kockadobással döntjük el, hogy melyik dobozból húzunk véletlenszerűen egy süteményt. 1-es dobás esetén az 1. dobozból, 2-es és 3-as dobás esetén a 2. dobozból 4-es, 5-ös és 6-os dobás esetén a 3. dobozból húzunk.

a) Mi a valószínűsége, hogy kakaós csigát húzunk?

b) Gellért nagyon szereti a kakaós csigát, ezért megengedték neki, hogy a kockadobás előtt belenézve a dobozokba egy süteményt áttegyen egy másik dobozba. Melyik süteményt hova tegye, hogy nagyobb eséllyel húzzon kakaós csigát, mint az eredeti elrendezés esetén?

6. Két pénztárcában pénzek vannak. A piros pénztárcában három 10 dolláros és két 1 dolláros, a kék pénztárcában két 10 dolláros és két 1 dolláros bankjegy van. A piros pénztárcából véletlenszerűen kihúzunk egy bankjegyet és áttesszük a kékbe, majd a kékből véletlenszerűen húzunk egyet.

a) Mi a valószínűsége, hogy 10 dollárost húzunk?

b) Mennyi a kihúzott bankjegy értékének várható értéke?

Rejtvény

Jancsit és Juliskát elkapta a gonosz boszorkány, aki épp engedékeny hangulatban van, ezért esélyt ad a gyerekeknek, hogy kiszabaduljanak. Elővesz két teljesen egyforma ládikót, és mindkettőbe beletesz 25 piros és 25 fehér golyót. Ezután azt mondja Jancsinak, hogy véletlenszerűen rámutathat az egyik ládikóra, amelyikből Juliska húzhat egy golyót. Ha a golyó fehér, akkor kiszabadulnak, ha piros, akkor nem. Virágos jókedvében a boszorkány még azt is megengedi nekik, hogy tetszésük szerint átrakjanak valamennyi golyót egyik ládikóból a másikba. (Utána persze a boszorkány többször úgy megkeveri egymással a két ládikót, hogy a végén már ő se tudja, hogy melyik melyik.)

Hogyan rendezzék át a gyerekek a golyókat a ládikókban, hogy a legnagyobb esélyük legyen kiszabadulni?



4. Statisztika

A gyakorlatban számtalan alkalommal találkozunk közvélemény-kutatások eredményeivel, méréseket végzünk vásárláskor, munkánk értékelésekor, természettudományos kísérletek elvégzésekor. A mérési eredmények gyűjtése, ábrázolása, értékelése szigorúan kidolgozott módszerek alapján történik, hiszen az ezektől való eltérés hamis következtetésekhez vezethet. Ezeket a módszereket adja a statisztika tudománya.

Már 9. osztályban foglalkoztunk az adatok különböző ábrázolási módjaival, az adatsokaság középértékeivel, számtani átlaggal, módusszal, mediánnal, a szóródás jellemzői közül a minta terjedelmével. Ezek átismétlése mellett most példát mutatunk az adatok osztályba sorolására, a kvartilisekre, a dobozdiagramra vagy sodrófa-diagramra, a kiugró adatokra, valamint a szóródás mérőszámait bővítjük az átlagos eltérés, a félterjedelem és a szórás fogalmával.

Grafikonok

A grafikonok közül a görbék vagy vonaldiagramok akkor hasznosak, ha az adatok változását vagy egymáshoz való viszonyát szeretnénk ábrázolni, a kördiagramok pedig akkor, ha az adatoknak az egészhez viszonyított arányát vizsgáljuk.

1. példa

Az alábbi táblázat a nemzetközi turistaérkezések számát mutatja 1990-ben és 2001-ben.

	1990		2001	
	turistaérkezések (millió fő)	bevétel (milliárd euró)	turistaérkezések (millió fő)	bevétel (milliárd euró)
Európa	282,7	112,5	411,0	257,0
Kelet-Ázsia és Óceánia	54,6	30,8	124,7	91,0
Amerika	92,9	54,3	120,2	136,7
Afrika	15,0	4,2	28,7	13,1
Dél-Ázsia	3,2	1,6	5,9	5,2
Közel-Kelet	9,0	3,5	24,1	12,6

a) Ábrázoljuk az adatokat oszlopdiagramon és kördiagramon. Milyen változások történtek a földrészek sorrendjében?

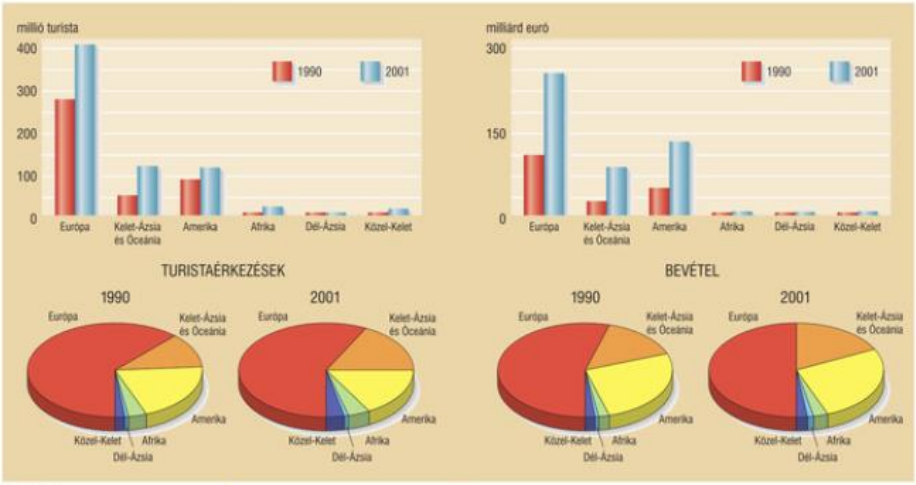
b) Ábrázoljuk az egy főre jutó költést földrészenként, illetve ezek változását.

c) Európában a turistaérkezések száma 45%-kal nőtt 11 év alatt. Mondhatjuk-e, hogy a növekedés átlagosan évi 45% : 11 = 4,1%-os?

Megoldás (a)

Az adatokból készült diagramok a 14. ábrán láthatók.

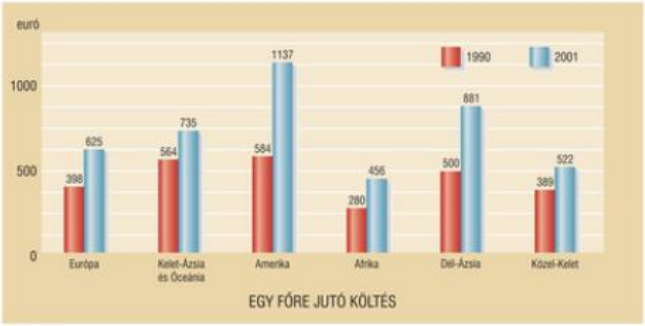
Kelet-Ázsia és Óceánia a turistaérkezések számát tekintve megelőzte Amerikát, de ez a bevételekre nem igaz, ugyanis az egy főre jutó költés nem nőtt olyan mértékben, mint Amerika esetén.



14. ábra

Megoldás (b)

Az egy főre jutó költés földrészenként a 15. ábrán látható.



15. ábra

Látható, hogy az egy főre jutó költés sorrendje eltér mind a turistaérkezések, mind a bevételek sorrendjétől, az európai fölény helyett Amerika vezet. Ráadásul Amerikában a vizsgált időszakban az egy főre jutó költés majdnem duplájára nőtt. Dél-Ázsia az előző két mutatót tekintve az utolsó helyen állt, az egy főre jutó költést tekintve viszont a harmadik helyről a másodikra lépett elő.



Megoldás (c)

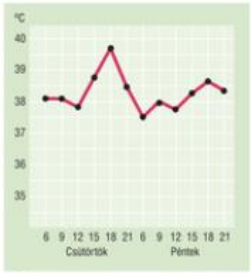
Az évi 4,1%-os növekedés azt jelentené, hogy minden évben az előző évi 1,041-szeresére nő a turistaérkezések száma, ezzel 11 év alatt a $1{,}041^{11} = 1{,}55$-szörösére változna, azaz 55%-kal nőne. A növekedés viszont $11 \cdot 4{,}1\% = 45\%$-os. A számtani átlag számításával azt kapjuk meg, hogy mennyivel nő a turista érkezések száma évente, ha minden évben ugyanannyival nő. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy évente hány százalékkal nő a turista érkezések száma, ha minden évben ugyanannyiszorosára nő, akkor az $(1 + x)^{11} = 1{,}45$ egyenletet kell megoldani, amiből $x = 0{,}034$, azaz évi 3,4%-os növekedéssel nő 11 év alatt 45%-kal.

2. példa

Peti influenzával kórházba került. Az első két napon a lázát a 16. ábra görbéje mutatja: 3 óránként mérték a lázát, az értékeket bejelölték, majd összekötötték a pontokat.

a) Mit mondhatunk, mennyi volt a láza csütörtökön este 7 órakor?

b) Mit mondhatunk, mennyi lesz a láza szombaton reggel 9 órakor?



16. ábra

Megoldás (a)

Mivel csütörtökön este 6 órától 9-ig a láza 39,7 °C-ról 38,5 °C-ra csökkent, a pontokat összekötő szakasz alapján – egyenletes csökkenést feltételezve – mondhatnánk, hogy kb. 39,3 °C volt a láza este 7 órakor. Ám elképzelhető, hogy 6 órakor kapott lázcsillapítót, ami levitte a lázát 7 órára 38 °C alá, és a hatás elmúltával 9-re újra felment 38,5 °C-ra. A mért értékek összekötése ebben az esetben nem jelenti a közbülső értékek pontos becslését, inkább a mérési eredmények változásainak irányát mutatja jobban.

Megoldás (b)

A szombat reggeli lázról nem tudunk mit mondani, lehet, hogy a kezelés hatására a pénteki javulás folytatódik, akkor akár láztalan is lehet, de felléphet szövődmény, ami miatt a láza újra felmehet vagy tartósan megmarad.

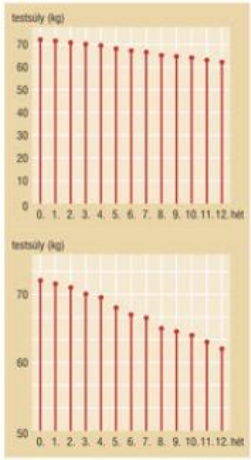
3. példa

Kati fogyókúrázik. Hetente méri a súlyát, és bejelöli a mért értéket a 17. ábrán látható grafikonokon. Melyik grafikonon tűnik hatásosabbnak a fogyókúra?

Megoldás

A második grafikon azért mutat meredekebb csökkenést, mert 10 kg különbségnek hosszabb szakasz felel meg.

Ha a grafikon skáláját úgy választjuk, hogy ugyanakkora változásnak hosszabb szakasz feleljen meg, akkor azzal jobban kiemeljük, míg rövidebb szakasz esetén enyhítjük a változás nagyságát. Ezért figyelnünk kell a skálákra is, mielőtt egy grafikon menete alapján véleményt formálunk.



17. ábra



osztály

Sokszor előfordul, hogy nagy mennyiségű adat esetén az adatokat nem soroljuk fel egyenként, hanem **osztályokba soroljuk** őket, így jobban áttekinthetők, jellemezhetők, bár bizonyos részletek elvesznek. Egy adat két osztályban nem jelenhet meg, de mindegyik adat megjelenik valamelyik osztályban.

osztályköz

Egy **osztályköz hossza** az osztály felső és alsó határának különbsége.

osztályközép

Osztályközépnek nevezzük az osztály alsó és felső határának számtani átlagát. Úgy tekintjük, mintha minden, az osztályba tartozó adat értéke az osztályközép lenne.

kumulált gyakoriság

Az egyes osztályokba tartozó adatok száma az osztály **kumulált gyakorisága.**

4. példa

A Zsonglőrök kosárlabda csapatának 20 igazolt játékosa van, akiknek testmagassága centiméterben mérve a következő:

185; 187; 193; 194; 196; 197; 198; 198; 200; 201; 201; 203; 204; 205; 205; 207; 209; 210; 212; 215.

a) Soroljuk osztályokba az adatokat, és ábrázoljuk az osztályok kumulált gyakoriságát.

b) A diagramról olvassuk le, hány játékos magassága legalább 2 méter.

c) Mennyi a csapat átlagos testmagassága, és mennyi, ha az osztályközepekkel számolunk?

d) Mennyi a testmagasságok mediánja?



18. ábra

Megoldás (a)

Célszerű 5 centiméterenként osztályba sorolni az adatokat, az így készült diagram a 18. ábrán látható.

Megoldás (b)

2 méter vagy annál több $5 + 4 + 2 + 1 = 12$ játékos magassága.

Megoldás (c)

A csapattagok magasságának átlaga:

$$(185 + 187 + 193 + 194 + 196 + 197 + 198 + 198 + 200 + 201 + 201 + 203 + 204 + 205 + 205 + 207 + 209 + 210 + 212 + 215) : 20 = 4020 : 20 = 201 \text{ (cm)}.$$

Az első osztályköz az első osztály alsó határától a második osztály alsó határáig terjed, az osztályközép ezen határok számtani közepe, azaz 187,5 cm. Ugyanígy a többi osztályközép sorban: 192,5; 197,5; 202,5; 207,5; 212,5; 217,5. Ezekkel számolva az átlagot:

$$\frac{2 \cdot 187{,}5 + 2 \cdot 192{,}5 + 4 \cdot 197{,}5 + 5 \cdot 202{,}5 + 4 \cdot 207{,}5 + 2 \cdot 212{,}5 + 1 \cdot 217{,}5}{20} = \frac{4035}{20} = 201{,}75.$$



Eltér a pontosan számolt átlagtól, de nem jelentősen. Az eltérés oka az, hogy mindegyik adatot az osztályközepével közelítettünk. Nagyon sok adat esetén csak ez az utóbbi átlagszámítási módszer működik, hiszen általában nem állnak rendelkezésünkre egyenkénti adatok.

Megoldás (d)

A 20 adatot nagyság szerint növekvő sorrendbe rakva a két középső a 10. és a 11., ezek mindegyike 201 cm, így a magasságok mediánja 201 cm. Ha az osztályba sorolás után nézzük a magasságok mediánját, a 10. és a 11. adat a 200–204 osztályba esik, amelyet a 202,5 osztályközép jellemez. Így a magasságok mediánjára a 202,5 cm adódik.

A kosárlabdacsapat játékosainak magasságát a medián is jól jellemzi.

5. példa

Az Amerikai Egyesült Államokban épült lakások számát mutatja az alábbi táblázat építési évük szerint osztályokba sorolva.

a) Ábrázoljuk az adatokat!

b) A lakások hány százaléka épült a II. világháború előtt, és mennyi a lakások építési évének mediánja?

Lakások építési éve	Lakások száma (ezer)	Lakások aránya (%)
1919 előtt	10 252	9,6
1920–1929	5 677	5,3
1930–1939	6 747	6,3
1940–1949	8 529	8,0
1950–1959	13 633	12,8
1960–1969	16 070	15,1
1970–1974	11 559	10,8
1975–1979	11 915	11,2
1980–1984	8 143	7,6
1985–1989	8 959	8,4
1990–1994	5 134	4,8

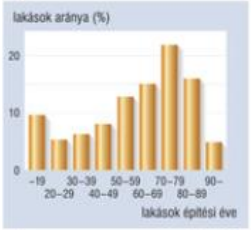
Megoldás (a)

Gyakorisági diagram rajzolásakor a téglalapok magassága akkor szemlélteti jól az osztályba eső adatok számát, ha az osztályközök egyenlőek. Ezért célszerű ilyen osztályokat meghatározni *(19. ábra)*. A diagramon az első és az utolsó oszlop nem 10 éves periódusokat jelent, így ezek magassága az összehasonlításnál nem mérvadó.

Megoldás (b)

Vegyük közelítőleg az 1940. előtt épült lakásokat, ezek a lakások $9{,}6 + 5{,}3 + 6{,}3 = 21{,}2\%$-át adják. Tehát a lakásoknak kb. 20%-a a II. világháború előtt épült.

A lakások építési évének mediánja az építési éveket nagyság szerint sorba rakva a középső, azaz ugyanannyi lakás épült a medián előtt, mint után. Tehát amelyik osztályban eléri a lakások aránya az 50%-ot, annak az osztályközepét tekinthetjük az adatok mediánjának. Ez az 1960–1969 osztályban következik be, így a lakások építési évének mediánja az 1965.



19. ábra

• • •

Az adatsokaságot jellemző középértékek:

módusz

Módusz: az adatsokaságban a leggyakoribb adat (lehet több is).

Előnye: – könnyen meghatározható;
– jó eséllyel lehet tippelni az adatokra.

Hátránya: – egy adatot kiemel, a többiről nem mond semmit;
– nem használható, ha az adatok előfordulási száma nem jellemző.



számtani közép

Számtani közép vagy átlag: az adatok összegének és az adatok számának hányadosa.

Előnye: – a nála nagyobb adatoktól való eltéréseinek összege ugyanannyi, mint a nála kisebb adatoktól való eltéréseinek összege.

Hátránya: – egy-egy kiugró adat nagyon eltorzíthatja.

medián

Medián: az adatokat nagyság szerint sorba rendezve a középső adat. Páratlan ($2n + 1$ db) adat esetén a középső (az $n+1$-edik), páros ($2n$ db) adat esetén a két középső (az n-edik és az $n + 1$-edik) adat átlaga.

Előnye: – ugyanannyi adat kisebb a mediánnál, mint amennyi nagyobb;
– a mediánnak az adatoktól mért távolságainak összege minimális.

9. osztályban láttunk példát, hogy egy cégnél a fizetések átlagát eltorzíthatja a vezetők magasabb bére, így a fizetések középértékét a medián jobban jellemzi.

kvartilisek

Kvartilisek (angolul quartile): azok a helyzetmutatók, amelyek a nagyság szerint növekvő sorba rendezett adatokat négy, lehetőleg egyenlő nagyságú részre osztják.

Alsó kvartilis: az a szám, amelynél az adatok (kb.) 25%-a kisebb. Jele: Q_1.

Felső kvartilis: az a szám, amelynél az adatok (kb.) 75%-a kisebb. Jele: Q_3.

Az alsó kvartilist úgy számoljuk, hogy a mediánnal kettéosztott adatok alsó részének vesszük a mediánját.

A felső kvartilist úgy számoljuk, hogy a mediánnal kettéosztott adatok felső részének vesszük a mediánját.

A számolási mód nem egységes abban, hogy a páratlan számú adat esetén elhegyjuk a mediánt (GeoGebra – mi ezt fogjuk követni), vagy mindkét részhez hozzávesszük (néha Excel).

a minta terjedelme

Az adatok szóródását jellemzi a **minta terjedelme:** az előforduló legnagyobb és legkisebb adat különbsége.

Minél kisebb a minta terjedelme, annál jobban jellemzi az adatsokaság középértéke a mintát.

Az adatok osztályba sorolásánál a minta terjedelmének megfelelő szakaszt osztottuk kisebb szakaszokra.

Előnye: – szemléletes és egyszerűen számítható.

Hátránya: – egy-két szélsőséges adat vagy mérési hiba elronthatja.

A minta szóródását jellemzi a következő mutató is, amelyet kevésbé torzítanak a kiugró adatok, mint a minta terjedelmét.

Félterjedelem (más néven interkvartilis terjedelem): a felső és alsó kvartilis különbsége.

Az adatok középső 50%-ának elhelyezkedését mutatja meg.



Kiugró adatok (outlier): azok az adatok, amelyek jelentősen eltérnek a többi adattól.

A „jelentős eltérésre" nincs átalánosan elfogadott definíció.

A következő, gyakran alkalmazott meghatározást fogjuk használni:

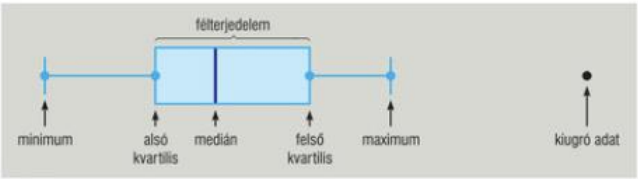
a kiugró adat olyan adat, amely a felső (alsó) kvartilistől a félterjedelem 1,5-szeresével eltér „felfelé" („lefelé").

A kiugró adatok rendszerint torzítják a mintát jellemző mutatókat, ezért ezeket sokszor kihagyjuk a számoláskor. Így **az adatok minimumát és maximumát** is a kiugró adatok elhagyása után megmaradt adatokból állapítjuk meg.

A mintát jellemző szám-ötös (five-number summary): minimum, alsó kvartilis, medián, felső kvartilis, maximum.

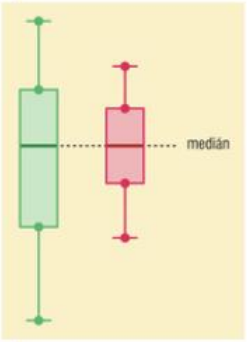
Dobozdiagram vagy sodrófa-diagram (box-plot): a mintát jellemző szám-ötöst ábrázolja. A minimum és az alsó kvartilis között szakasz, az alsó kvartilis és a felső kvartilis között egy téglalap (doboz), benne jelölve a medián, a felső kvartilis és a maximum között pedig megint egy szakasz. A kiugró adatokat különálló pontok jelölik. *(20. ábra)*

A diagram lehet fekvő és álló is.



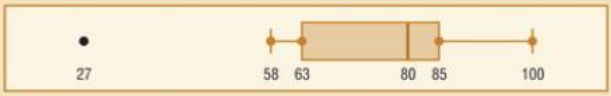
20. ábra

Ez a dobozdiagram kétféle alma méretére vonatkozik. Melyiket érdemes termelni? Vitassuk meg!



6. példa

A diagram egy matematikacsoport próbaérettségi eredményeit mutatja.



a) Mit lehet leolvasni a diagramról?

b) Írjunk egy 15 elemű mintát, amelyet ez a diagram jellemez!

Megoldás (a)

Kiugró adat 27.

A minimum 58: a kiugró adattól eltekintve a legrosszabb dolgozat pontszáma.

Az alsó kvartilis 63: a diákok kb. negyede legfeljebb 63 pontot ért el.

A medián 80: a diákok kb. fele legalább 80 pontot ért el.



A felső kvartilis 85: a diákok kb. negyede legalább 85 pontot ért el.

A maximum 100: a legjobb dolgozat 100 pontos.

A minta félterjedelme: $85 - 63 = 22$.

A félterjedelem 1,5-szerese: $22 \cdot 1{,}5 = 33$. $27 < 63 - 33$, ezért a 27 valóban kiugró adat.

Megoldás (b)

A 15 adat közül a középső a 80, ennél 7 adat kisebb vagy egyenlő és 7 adat nagyobb vagy egyenlő. Az alsó 7 adat közül a középső 63, kiugró adat a 27, ezután a legkisebb az 58, és van még egy adat 58 és 63 között. Így folytatva egy lehetséges minta:

kiugró szám	min.		Q_1				Q_2				Q_3			max.
27	58	59	63	72	76	80	80	80	82	85	85	95	100	100

7. példa

A minta az 1928 és 1989 között Oscar-díjat nyert színésznők életkora:

21; 22; 24; 24; 24; 24; 24; 25; 26; 26; 26; 26; 26; 26; 26; 27; 27; 27; 28; 28; 29; 29; 30; 30; 30; 30; 31; 31; 32; 33; 33; 33; 34; 34; 34; 34; 34; 34; 35; 35; 36; 37; 37; 38; 38; 38; 40; 41; 41; 41; 41; 41; 42; 45; 48; 49; 60; 61; 61; 62; 74; 80.

Készítsük el a minta dobozdiagramját!

Megoldás

A medián a 62 adatból a két középső átlaga: 33.

Az alsó kvartilis az alsó 31 adat mediánja, vagyis a 16. adat, ami a 27.

A felső kvartilis a felső 31 adat mediánja, ami felülről a 16. adat, ez a 40.

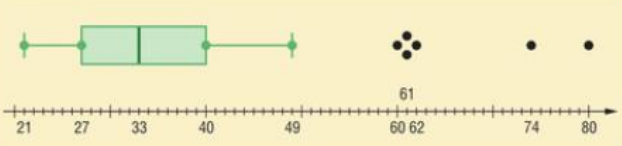
A félterjedelem: $40 - 27 = 13$.

$13 \cdot 1{,}5 = 19{,}5$; így a $27 - 19{,}5 = 7{,}5$-nél kisebb és a $40 + 19{,}5 = 59{,}5$-nél nagyobb adatokat tekintjük kiugró adatoknak.

Kiugró adatok: 60; 61; 61; 62; 74; 80.

A dobozdiagram a 21. ábrán látható.

21. ábra





8. példa

Az A: 4; 7; 15; 1; 9; 18 és a B: 1; 6; 7; 18; 7; 6 minták esetén számoljuk ki a következőket:

a) átlag és medián;

b) átlagtól való eltérések átlaga;

c) mediántól való eltérések átlaga;

d) átlagtól való eltérések négyzetének átlaga.

Megoldás (a)

Sorba rendezve a minta elemeit:

$$A\text{: } 1; 4; 7; 9; 15; 18 \quad \text{és} \quad B\text{: } 1, 6; 6; 7; 7; 18.$$

A mediánok:

$$A_{\text{medián}} = 8, \quad B_{\text{medián}} = 6{,}5.$$

Az átlagok:

$$A_{\text{átlag}} = \frac{1+4+7+9+15+18}{6} = 9, \quad B_{\text{átlag}} = \frac{1+6+6+7+7+18}{6} = 7{,}5.$$

A B mintán látszik, hogy a kiugró adatok miatt a medián jobban jellemzi a minta közepét, mint az átlag.

Megoldás (b)

Mindkét minta terjedelme $18 - 1 = 17$, így nem tesz különbséget a két minta között az adatok szóródása szempontjából.

Az átlagtól való eltérések átlaga:

$$A\text{: } \frac{|1-9|+|4-9|+|7-9|+|9-9|+|15-9|+|18-9|}{6} = \frac{30}{6} = 5;$$

$$B\text{: } \frac{|1-7{,}5|+|6-7{,}5|+|6-7{,}5|+|7-7{,}5|+|7-7{,}5|+|18-7{,}5|}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5.$$

Az átlagtól való eltérések átlaga jellemzi az adatok szóródását, a második minta esetén kisebb.

Megoldás (c)

Számoljuk ki a mediántól való eltérések átlagát:

$$A\text{: } \frac{|1-8|+|4-8|+|7-8|+|9-8|+|15-8|+|18-8|}{6} = \frac{30}{6} = 5;$$

$$B\text{: } \frac{|1-6{,}5|+|6-6{,}5|+|6-6{,}5|+|7-6{,}5|+|7-6{,}5|+|18-6{,}5|}{6} = \frac{19}{6} = 3{,}17.$$

Belátható, hogy ha a medián helyett más számtól való eltérések átlagát vesszük, akkor ez nem lehet kisebb, mint a medián esetén.

A minta elemeinek szóródását jellemezhetjük az átlagtól vagy a mediántól való eltérések átlagával.



Megoldás (d)

Az átlagtól való eltérések négyzetének átlaga:

$$A: \frac{(1-9)^2+(4-9)^2+(7-9)^2+(9-9)^2+(15-9)^2+(18-9)^2}{6}=35;$$

$$B: \frac{(1-7{,}5)^2+(6-7{,}5)^2+(6-7{,}5)^2+(7-7{,}5)^2+(7-7{,}5)^2+(18-7{,}5)^2}{6}=26{,}25.$$

szórásnégyzet, szórás

DEFINÍCIÓ: Minta *szórásnégyzete* az átlagtól való eltérések négyzetének átlaga.

Minta *szórása* a szórásnégyzetből vont négyzetgyök.

Az előbbi példában szereplő minták szórása: A: 5,92 és B: 5,12.

A szórást jobban növeli a szélsőséges adat, mint az átlagos eltérést.

Belátható, hogy ha az átlag helyett más számtól való eltérések négyzetének átlagát vesszük, akkor ez nem lehet kisebb, mint az átlag esetén.

9. példa

Peti matematika dolgozata 92 pontos lett, az osztályátlag 78 pont, a pontok szórása pedig 14 pont. Pali, a testvére 89 pontos dolgozatot írt, miközben az osztályátlag szintén 78 pont volt, a szórás pedig 10 pont. Ki mivel indokolja, hogy jobb dolgozatot írt, mint a testvére?

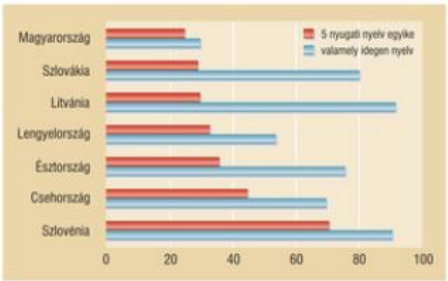
Megoldás

Peti azt mondja, hogy ő az átlagnál 14 ponttal szerzett többet, Pali pedig csak 11 ponttal.

Pali azzal érvel, hogy Peti az átlagnál a szórás $\frac{14}{14}=1$-szeresével szerzett többet, ő pedig a szórás $\frac{11}{10}=1{,}1$-szeresével. Tehát az ő dolgozata a szórással mérve jobban eltér az átlagtól.

Feladatok

1. A mellékelt grafikon néhány, az Európai Unióhoz 2004-ben csatlakozott ország idegennyelv-tudását mutatja a lakosság százalékában.
   Mit mondhatunk a grafikon alapján?





2. Néhány Magyarországra jellemző adat 2003. január 1-jén:

– Népesség (ezer fő): 10 142.

– Népsűrűség (fő/km^2): 109.

– Nemek szerinti megoszlás:
  férfi: 47,5%;
  nő: 52,5%.

– Kor szerinti megoszlás:
  0–14 éves: 16,1%;
  15–59 éves: 63,1%;
  60 év feletti: 20,8%.

– Települések szerinti megoszlás:
  1 000 főnél kisebb település: 7,6%;
  kis település (1 000–10 000 fő): 33,5%;
  közepes népességű település (10 000–100 000 fő): 30,3%;
  nagy település (100 000 felett): 28,6%.

– Nappali tagozatos oktatásban részt vevők száma (1 000 fő):
  óvodás gyermek: 331,3;
  általános iskolai tanuló: 930,3;
  szakiskolai tanuló: 130,5;
  középiskolai tanuló: 426,4;
  egyetemi, főiskolai tanuló: 193,2.

Készítsünk az adatokat bemutató jellemző grafikonokat.

3. A kereskedelmi szálláshelyeket igénybe vevő vendégek számát és a vendégéjszakák számát mutatják a következő adatok.

Vendégek száma összesen kereskedelmi szálláshelyeken (ezer fő):

– 1990-ben: 3 394;

– 2002-ben: 2 949.

Ebből Budapest és a Balaton százalékos részesedését a bal oldali táblázat, a vendégéjszakák százalékos megoszlását a kereskedelmi szálláshelyek típusa szerint országosan pedig a jobb oldali táblázat mutatja:

	1990		2002	
	vendégek (%)	éjszakák (%)	vendégek (%)	éjszakák (%)
Budapest	41,8	36,2	56,6	42,9
Balaton	13,4	28,2	17,5	30,6

	1990	2002
szálloda	59,2	73,5
panzió	3,7	6,2
kemping	30,8	15,1
nyaralóház	4,6	2,8

a) Ábrázoljuk különböző diagramokon az adatokat.

b) Ábrázoljuk a vendégek és a vendégéjszakák számának változását.

c) Mit mondhatunk az egy főre jutó vendégéjszakák számának változásáról?

d) Milyen típusú szálláshelyet érdemes építeni?

4. Felmérést végeztek főiskolai hallgatók körében az internet használatról. Az eredményt az alábbi grafikonok mutatják:



a) Mit mutat a sávdiagram?

b) Lehet-e kördiagramon ábrázolni a főiskolai hallgatók internettel való megismerkedési helyének arányát?

c) Milyen problémákat mutatnak a diagramok a kérdésfeltevés egyértelműségét illetően?

5. Egy állítható hosszúságú inga lengésidejét mérték a hosszúság függvényében, és a táblázatban szereplő adatokat kapták.

Hossz (m)	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Lengésidő (h)	0,9	1,26	1,55	1,79	2,0	2,2	2,37	2,53	2,69	2,83

a) Ábrázoljuk a lengésidőt a hosszúság függvényében!

b) A grafikon alapján becsüljük meg a 0,7 m hosszúságú inga lengésidejét!

6. A Bog bolygón négyévenként van választás, hol a Zöld Párt, hol a Kék Párt kerül kormányra.

9568–9571-ig az utóbbi 4 év százalékos gazdasági növekedését a két párt két grafikonon ábrázolta. Melyik párt volt kormányon ebben az időszakban?



7. Két testvér utóbbi nyolc félévi osztályzatainak átlagát a táblázat mutatja.

Melyiküknek milyen skálán érdemes ábrázolnia eredményeit? Készítsük el a grafikonokat!

Péter	4,2	4,1	4,3	4,4	4,6	4,8	5,0	4,9
Petra	4,9	5,0	4,8	4,6	4,4	4,3	4,1	4,2



8. Egy térség könyvesboltjait a hasznuk alapján osztályokba sorolták. Az eredményt az alábbi táblázatok mutatják.

Haszon (ezer forint)	veszteség	0–99	100–249	250–499	500–999
Könyvesboltok (%)	0,6	1,8	5,9	10,5	12,7

Haszon (ezer forint)	1000–1499	1500–1999	2000–2499	2500–2999	3000 felett
Könyvesboltok (%)	13,0	18,7	10,2	15,8	10,8

a) Ábrázoljuk az adatokat!

b) A könyvesboltok hány százalékának van 1 millió forintnál kisebb haszna?

c) Hány százaléknak van 2 milliónál több haszna?

d) Mennyi a haszon mediánja?

9. Néhány európai ország egy főre jutó éves húsfogyasztását mutatja a következő táblázat 1990–2001-ig.

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Ausztria	104	106	108	100	97	97	97	96	98	99	103	98
Franciaország	110	111	112	109	107	108	109	108	110	111	106	107
Nagy-Britannia	76	76	77	74	76	78	76	77	78	80	81	83
Németország	100	95	94	95	93	92	91	90	93	94	91	88
Olaszország	87	90	90	90	89	89	88	88	90	91	91	91
Spanyolország	101	106	106	106	113	115	115	119	128	131	127	130
Svédország	59	59	61	62	64	65	68	69	70	73	74	73
Magyarország	76	74	75	70	69	65	62	61	64	63	73	70

a) Számítsuk ki az országonkénti átlagot és mediánt!

b) Számítsuk ki országonként a szórást!

c) Készítsünk országonként dobozdiagramot, és ez alapján hasonlítsuk össze Ausztria és Franciaország, valamint Nagy-Britannia és Magyarország egy főre jutó húsfogyasztását!

10. Egy sorozat első két tagja $a_1 = 19$ és $a_2 = 99$. Mennyi az a_{2004}, ha az első két tag után minden tag

a) az összes őt megelőző tag átlaga?

b) az őt megelőző két tag átlaga?

11. Hogyan változik az átlag és a szórás, ha a 4; 2; 0; 1; 6; 8 minta minden eleméhez

a) hozzáadunk 3-at?

b) megszorozzuk 5-tel?

12. Nyolc egész szám átlaga, mediánja, módusza, minta terjedelme egyaránt 8. Melyik az a legnagyobb egész szám, amely szerepelhet a mintában?



13. Egy iskolai osztályról felmérést készítettek. Az adatokat a táblázat mutatja.

a) Készítsünk diagramokat az adatokról osztályokba sorolással!

b) Jellemezzük az adatok középértékeit és szóródását!

c) Melyik adatsor középértékét jellemzi a módusz?

d) Vizsgáljuk külön a fiúk és lányok adatait!

e) Dobozdiagram segítségével vizsgáljuk a fiúk és a lányok tanulmányi eredményét és testmagasságát!

Sorszám	Név	Anya iskolai végzettsége	Testvérek száma	Tanulmányi átlag	Testmagasság (cm)	Tömeg(kg)
1.	Zsófi	egyetem	4	4,8	161	51
2.	Vera	8 osztály	2	3,6	170	61
3.	Béla	érettségi	0	4,0	180	70
4.	Anna	érettségi	1	5,0	164	49
5.	László	egyetem	1	3,5	182	76
6.	Tamara	egyetem	0	5,0	160	60
7.	Margit	8 osztály	1	4,2	165	69
8.	Péter	érettségi	1	3,0	175	74
9.	Tamás	egyetem	0	4,7	170	76
10.	Soma	egyetem	0	3,5	175	72
11.	János	egyetem	2	2,9	182	79
12.	Gabriella	egyetem	1	2,5	167	57
13.	Tekla	érettségi	3	4,6	169	51
14.	Barnabás	érettségi	1	3,9	179	67
15.	Kata	8 osztály	2	4,9	167	57
16.	Ádám	érettségi	1	3,0	170	70
17.	Ákos	egyetem	0	4,0	181	78
18.	Máté	érettségi	3	4,2	183	71
19.	Andrea	8 osztály	2	4,0	172	68
20.	Flóra	egyetem	0	3,5	170	72
21.	Dorka	egyetem	1	3,2	169	71
22.	Zsuzsanna	egyetem	1	2,5	167	54
23.	István	érettségi	1	3,9	180	70
24.	Sándor	8 osztály	2	4,5	182	80
25.	Petra	egyetem	0	4,1	164	48

Rendszerező összefoglalás

A rendszerező összefoglalás fő célja az, hogy a 12. osztály végén segítse az érettségire való felkészülést. Az öt fejezet áttekinti a négyéves tananyag nagy részét, néhány helyen további kiegészítéseket, általánosításokat is tartalmaz.

Az egyes fejezetek némileg eltérő jellegűek. Az algebra és számelmélet fejezetben sok a kidolgozott példa, hiszen a tanult fogalmakat, tételeket, módszereket így lehet jól áttekinteni. A függvények és a geometria fejezetekben elsősorban a tanult fogalmak, tételek, eljárások összegyűjtésére, rendszerezésére törekedtünk. Ezekben a fejezetekben a példák főleg illusztráló jellegűek.

A rendszerező összefoglalásban is apró betű, illetve a példa, feladat sorszáma melletti csillag jelzi, hogy a törzsanyagon túlmenő, kiegészítő anyagról van szó. Ezek az ismeretek a középszintű matematika érettségin nem szerepelnek, csak az emelt szintűn.



GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

1. Halmazok, kijelentések, események

Halmazokkal és halmazműveletekkel 9. osztályban, véletlen eseményekkel és a velük végezhető műveletekkel 10. osztályban, kijelentésekkel és logikai műveletekkel 12. osztályban foglalkoztunk. Most összefoglalásként kapcsolatot keresünk a fogalmak között, megfigyeljük a műveletek és azonosságaik hasonló szerkezetét.

A „halmaz", illetve a „halmaz eleme" alapfogalom. Minden dologról el lehet dönteni, hogy a halmazhoz tartozik vagy nem. A halmazban minden elem csak egyszer szerepelhet.

két halmaz egyenlősége

DEFINÍCIÓ: ***Két halmaz egyenlő,*** **ha ugyanazok az elemeik.** ($A = B \leftrightarrow$ **minden** $x \in A$**-ra** $x \in B$ **és minden** $x \in B$**-re** $x \in A$**.)**

üres halmaz

DEFINÍCIÓ: ***Üres halmaz*** **az, amelynek nincs eleme, jele:** $\emptyset$**.**

részhalmaz

DEFINÍCIÓ: **Az** A **halmaz** ***részhalmaza*** B **halmaznak, ha** A **minden eleme** B**-nek is eleme (**$A \subseteq B \leftrightarrow$ **minden** $x \in A$**-ra** $x \in B$**). Az** A **halmaz valódi részhalmaza** B**-nek (**$A \subset B$**), ha** $A \subseteq B$ **és** B**-nek van olyan eleme, amely nem eleme** A**-nak.**

Minden halmaz részhalmaza önmagának: $A \subseteq A$.

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza: $\emptyset \subseteq A$.

alaphalmaz

DEFINÍCIÓ: **Az** ***alaphalmaz*** **vagy** ***univerzum*** **az a halmaz, melynek minden vizsgált halmaz részhalmaza, jele:** U**.**

◆ ◆ ◆

Ha véletlen jelenségeket megfigyelünk, kísérletet végzünk. A **kísérlet** elvben akárhányszor ugyanolyan körülmények között végrehajtható. Pontosan meg kell mondanunk, mit tekintünk a kísérlet kimenetelének. A kísérlet minden kimeneteléhez tartozik egy **elemi esemény.**

eseménytér

DEFINÍCIÓ: **Az elemi események halmaza az** ***eseménytér.***

esemény

DEFINÍCIÓ: **Az eseménytér részhalmazait** ***eseményeknek*** **nevezzük. Minden eseményről eldönthető, hogy bekövetkezik vagy nem – a kísérlet eredményéhez tartozó elemi esemény az eseménytérnek abba a részhalmazába tartozik vagy nem, amely az eseménynek megfelel.**

biztos esemény

DEFINÍCIÓ: ***Biztos esemény*** **az, amelyik mindenképpen bekövetkezik, jele:** H**.**

lehetetlen esemény

DEFINÍCIÓ: ***Lehetetlen esemény*** **az, amelyik semmiképpen sem következhet be, jele:** $\emptyset$**.**

1. példa

Néhány gyerek egy szabályos dobókockával játszik, ehhez a következő szerencsekártyákat készítik:

Anna: A dobott szám páros.
Béla: A dobott szám páratlan.
Csaba: A dobott szám prím.
Dóra: A dobott szám páros és prím.
Edit: A dobott szám páros vagy prím.
Flóra: A dobott szám páros vagy páratlan.
Gábor: A dobott szám páros és páratlan.

Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van a gyerekek kártyáin szereplő kijelentések között, a kijelentések által meghatározott számhalmazok között, és a megfelelő véletlen események között.

Megoldás

A szabályos dobókockával dobható számok halmaza:

$$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

A kockadobás során megfigyeljük a dobott számot, ekkor kísérletet végzünk, az eseménytér:

$$H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Anna kártyáján levő kijelentést jelöljük p_A-val, a kártyának megfelelő számok halmazát A-val, $A = \{2; 4; 6\}$, a kártyának megfelelő eseményt E_A-val.

Ugyanilyen jelöléseket alkalmazunk a többi kártyával kapcsolatban is.

Béla kijelentése, Anna kijelentésének tagadása: $p_B = \neg p_A$. — tagadás

A Béla kártyájának megfelelő számok halmaza: $B = \{1; 3; 5\}$ éppen az A halmaz komplementere: $B = \overline{A}$.

A Béla kártyájának megfelelő esemény akkor következik be, ha az Anna kártyájának megfelelő esemény nem következik be, vagyis az E_B esemény az E_A komplementere: $E_B = \overline{E_A}$. — komplementer

A Csaba kártyájának megfelelő kijelentést, halmazt, eseményt az előbbiekhez hasonlóan jelöljük: p_C, $C = \{2; 3; 5\}$, E_C.

Írjuk fel a Dóra kártyájának megfelelő kijelentést, halmazt, eseményt!

A Dóra kártyáján levő kijelentés pontosan akkor igaz, ha Annáé és Csabáé is igaz: $p_D = p_A \wedge p_C$. — konjunkció

Dóra kártyájának pontosan az a szám felel meg, amelyek Annáénak és Csabáénak is megfelel: $D = \{2\}$, azaz a D halmaz az A és C halmazok metszete: $D = A \cap C$. — metszet

A Dóra kártyájának megfelelő esemény pontosan akkor következik be, ha az Annáénak és a Csabáénak megfelelő esemény is bekövetkezik, azaz E_D az E_A és E_C események szorzata: $E_D = E_A \cdot E_C$. — szorzás

diszjunkció

Az Edit kártyáján levő kijelentés pontosan akkor igaz, ha Annáé és Csabáé közül legalább az egyik igaz: $p_E = p_A \vee p_C$.

egyesítés

Edit kártyájának pontosan azok a számok felelnek meg, amelyek az Annáénak és a Csabáénak megfelelő halmazok közül legalább az egyikben benne vannak: $E = \{2; 3; 4; 5; 6\}$, azaz az E halmaz az A és C halmazok egyesítése: $E = A \cup C$.

összeg

Az Edit kártyájának megfelelő esemény pontosan akkor következik be, ha az Annáénak és a Csabáénak megfelelő események közül legalább az egyik bekövetkezik, azaz E_D az E_A és E_C események összege: $E_D = E_A + E_C$.

$p \vee \neg p = i$

A Flóra kártyájának megfelelő kijelentés minden dobott számra igaz: $p_F = p_A \vee p_B = i$, ahol i jelöli azt a kijelentést, amely mindig igaz. Mivel $p_A = \neg p_B$, ezért $p_A \vee \neg p_A = i$.

$A \cup \overline{A} = U$

A Flóra kártyájának megfelelő halmaz az összes dobható számot tartalmazza: $F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $F = A \cup B = U$, ahol U az alaphalmaz. Mivel $B = \overline{A}$, ezért $A \cup \overline{A} = U$.

$E + \overline{E} = H$

A Flóra kártyájának megfelelő esemény minden lehetséges dobás esetén bekövetkezik: $E_F = E_A + E_B = H$, ahol H a biztos esemény. Mivel $E_B = \overline{E_A}$, ezért $E_A + \overline{E_A} = H$.

$p \wedge \neg p = h$

A Gábor kártyájának megfelelő kijelentés egyetlen dobott számra sem igaz: $p_G = p_A \wedge p_B = h$, ahol h jelöli azt a kijelentést, amely mindig hamis. Mivel $p_A = \neg p_B$, ezért $p_A \wedge \neg p_A = h$.

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

A Gábor kártyájának megfelelő halmaz egyetlen elemet sem tartalmaz: $G = A \cap B = \varnothing$, ahol $\varnothing$ az üres halmaz. Mivel $B = \overline{A}$, ezért $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

$E \cdot \overline{E} = \varnothing$

A Gábor kártyájának megfelelő esemény egyetlen lehetséges dobás esetén sem következik be: $E_G = E_A \cdot E_B = \varnothing$, ahol $\varnothing$ a lehetetlen esemény. Mivel $E_B = \overline{E_A}$, ezért $E_A \cdot \overline{E_A} = \varnothing$.

◆ ◆ ◆

Foglaljuk össze a fenti példában használt logikai, halmazok közötti és események közötti műveleteket!

tagadás	konjunkció	diszjunkció
Egy kijelentés **tagadása** (negációja) az a kijelentés, amely igaz, ha az eredeti kijelentés hamis, és hamis, ha az eredeti kijelentés igaz.	Két kijelentés **konjunkciója** akkor és csak akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz, különben hamis.	Két kijelentés **diszjunkciója** akkor és csak akkor igaz, ha legalább az egyik kijelentés igaz, különben hamis.

A	$\neg A$
i	h
h	i

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Egy A halmaz *komplementer halmazának* nevezzük az alaphalmaz azon elemeinek halmazát, amelyek az A halmaznak nem elemei. *(1. ábra)*

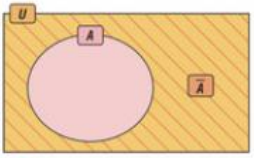
Két halmaz *egyesítése* (uniója) mindazon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei. *(2. ábra)*

Két halmaz *metszete* mindazon elemek halmaza, amelyek mindkét halmaznak elemei. *(3. ábra)*

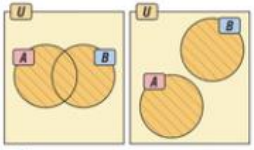
Egy A esemény *komplementere* az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor A nem következik be.

Két esemény *szorzata* az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor mindkét esemény bekövetkezik.

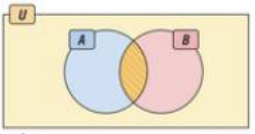
Két esemény *összege* az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor legalább az egyik esemény bekövetkezik.



1. ábra



2. ábra



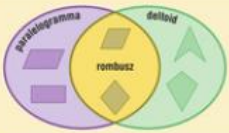
3. ábra

A fentiekből látható, hogy sok hasonlóság van a kijelentések, a halmazok és az események, valamint a velük végezhető műveletek között. A logikai kijelentések, az alaphalmaz részhalmazai, az események egymásnak megfelelő fogalmak. A tagadás a komplementerképzésnek felel meg, a konjunkció a metszetképzésnek és az események szorzásának, a diszjunkció az egyesítésnek és az események összeadásának.

Vizsgáljuk párhuzamosan a logikai, a halmazok közötti és az események közötti műveletekre vonatkozó azonosságokat:

	Kijelentések	Halmazok	Események
Kommutativitás	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	$A \cdot B = B \cdot A$ $A + B = B + A$
Asszociativitás	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ $A + (B + C) = (A + B) + C$
Elemet változatlanul hagyó elem	$A \wedge i = A$ $A \vee h = A$	$A \cap U = A$ $A \cup \varnothing = A$	$A \cdot H = A$ $A + \varnothing = A$
Komplementerre vonatkozó azonosságok	$A \wedge \neg A = h$ $A \vee \neg A = i$	$A \cap \bar{A} = \varnothing$ $A \cup \bar{A} = U$	$A \cdot \bar{A} = \varnothing$ $A + \bar{A} = H$
Disztributivitás	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Elnyelési azonosság	$A \wedge A = A$ $A \vee A = A$	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	$A \cdot A = A$ $A + A = A$
További azonosságok	$A \wedge h = h$ $A \vee i = i$ $\neg(\neg A) = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$ $\bar{\bar{A}} = A$	$A \cdot \varnothing = \varnothing$ $A + H = H$ $\bar{\bar{A}} = A$
A De Morgan-azonosságok	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Láthatjuk, hogy a logikai kijelentések a tagadás, konjunkció, diszjunkció műveletével, a halmazok a komplementerképzés, metszetképzés, egyesítés műveletével, valamint az események a komplementerképzés, szorzás, összeadás műveletével hasonló struktúrát alkotnak. Az ilyen típusú struktúrát **Boole-algebrának** nevezzük. Előnye, hogy bármely bebizonyított azonosság megfelelője igaz lesz kijelentésekre, halmazokra, eseményekre egyaránt.



4. ábra

2. példa

A paralelogrammák és a deltoidok halmazábrája *(4. ábra)* alapján döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

a) Nem minden rombusz deltoid.

b) Nincs olyan paralelogramma, amelyik deltoid.

c) Van olyan rombusz, amelyik nem paralelogramma.

d) Minden deltoid paralelogramma.

Megoldás (a)

Az állítás hamis, mert a rombuszra teljesül, hogy két-két szomszédos oldala egyenlő, tehát deltoid.

A rombuszok halmaza részhalmaza a deltoidok halmazának, vagyis a *„minden rombusz deltoid”* állítás igaz.

Megoldás (b)

Az állítás hamis, mert a paralelogrammák halmazának és a deltoidok halmazának metszete nem üres, azaz van olyan paralelogramma, amelyik deltoid, hiszen minden rombusz ilyen.

Megoldás (c)

Nem igaz, hogy van olyan = minden

Az állítás tagadása: *„**Nem igaz,** hogy **van olyan** rombusz, amelyik nem paralelogramma”*, azaz *„**Minden** rombuszra **hamis** az, hogy nem paralelogramma, tehát minden rombusz paralelogramma”.*

Ez az állítás igaz, hiszen minden rombuszra teljesül, hogy szemközti oldalai párhuzamosak, a rombuszok halmaza részhalmaza a paralelogrammák halmazának. Az eredeti állítás tagadása igaz, tehát az eredeti állítás hamis.

Megoldás (d)

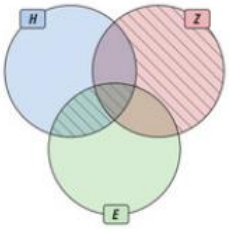
Nem igaz, hogy minden = van olyan

Az állítás tagadása: *„**Nem igaz,** hogy **minden** deltoid paralelogramma”*, azaz *„**Van olyan** deltoid, **amelyik nem** paralelogramma”.*

Ez az állítás igaz, mert van olyan deltoid, amelynek szemközti oldalai nem párhuzamosak, a deltoidok halmaza nem részhalmaza a paralelogrammák halmazának. Az eredeti állítás tagadása igaz, tehát az eredeti állítás hamis.

Feladatok

1. Bori meghívta néhány osztálytársát. Előtte megkérdezte, ki szereti a halat, ki nem, ki szereti a zöldségféléket, ki szereti az édességeket. Megállapította, hogy az alábbi halmazábra vonalkázott részébe eső minden osztálytársát meghívta, mást viszont nem (H a halat szeretők halmaza, Z a zöldségféléket szeretők halmaza, E az édességeket szeretők halmaza).



Határozzuk meg a vendégek halmazát halmazműveletekkel (H, Z, E halmazokkal).

Jellemezzük a vendégek ízlését logikai műveletekkel (p_H, p_Z, p_E kijelentésekkel).

Bori véletlenszerűen választ vendégeket az osztálytársai közül. Írjuk le azt az eseményt, hogy valaki vendégségbe megy Borihoz az E_H, E_Z, E_E eseményekkel műveletek segítségével.

Ezek alapján állítsunk össze menüt a vendégek számára, hogy biztosan mindenki tudjon enni valami kedvére valót.

2. Az alábbi következtetések közül melyik igaz, melyik nem? Indokoljuk halmazábrával.

a) Minden súlyemelő erős.
Van olyan focista, aki erős.
Tehát létezik focista, aki súlyemelő.

b) Minden érme értékes.
Létezik régi érme.
Tehát minden régi dolog értékes.

c) Minden horgász türelmes.
Akad hazudós horgász.
Tehát létezik hazudós, aki nem horgász.

d) Minden matematikus okos.
Néhány történész okos.
Tehát néhány matematikus történész.

3. Egy szeszélyes időjárású áprilisban minden napról lejegyezték, hogy esős vagy nem esős, szeles vagy nem szeles, napos vagy nem napos. Összesítve a napok számát a következőt kapták:

	napos és esős	napos és nem esős	nem napos és esős	nem napos és nem esős
szeles	5	3	4	1
nem szeles	4	3	3	

Sajnálatos módon a táblázat alsó sarkában levő szám elmosódott. Mi volt a szám?

Ha E az esős napok halmaza, S a szeles napok halmaza és N a napos napok halmaza, akkor írjuk le, mi jellemző a következő halmazokba tartozó napokra, és hány ilyen nap volt áprilisban.

a) N; *b)* $\overline{E}$; *c)* $\overline{E} \cap \overline{S} \cap \overline{N}$;
d) $S \cup E$; *e)* $\overline{E} \cap \overline{S}$; *f)* $N \cap (S \cup E)$.

4. Készítsünk halmazábrát a következőkkel, és írjunk igaz és hamis állításokat róluk:

a) 2-vel osztható természetes számok, 10-zel osztható természetes számok, 3-mal osztható természetes számok, 5-tel osztható természetes számok;

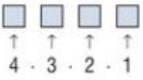
b) egyenlő szárú háromszögek, derékszögű háromszögek, pontosan egy 60°-os szöggel rendelkező háromszögek.

2. Kombinatorika, valószínűség, gráfok

Minden évben foglalkoztunk olyan feladatokkal, melyekben esetek összeszámlálását kellett végezni. Az ilyen problémák fő típusait 11. osztályban rendszereztük, most ezt fogjuk feleleveníteni. Hangsúlyozzuk, hogy a felmerülő problémák nagyon ritkán felelnek meg pontosan egy típusnak, ezért sokkal inkább a modellekre vonatkozó megoldási módszereket érdemes megfigyelni, mint a végeredményként adódó képleteket.

Vegyünk négy kártyát az 1, 2, 3, 4 számokkal, ezekkel mutatjuk be a tanult kombinatorika feladatok főbb típusait.

Az ismétlés nélküli permutáció



Hányféle négyjegyű számot rakhatunk ki a négy kártyával?

Az első helyre 4-féle kártyát választhatunk, a másodikra 3-félét, a harmadikra 2-félét, a negyedikre 1-félét, így a négy kártyát $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$-féleképpen rakhatjuk sorba, ennyiféle négyjegyű szám rakható ki a kártyákkal.

ismétlés nélküli permutáció

DEFINÍCIÓ: Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy *ismétlés nélküli permutációján* az n különböző elem egy sorba rendezését értjük. Az elemeket sorba rendezzük, ha kijelöljük az első, második, … és így tovább, az n-edik elemet. Két sorba rendezés egyenlő, ha a megfelelő helyeken ugyanazok az elemek állnak.

TÉTEL: Egy adott n elemű halmaz permutációinak száma $n!$

Az ismétléses permutáció

Az 1, 2, 2, 4 kártyákból hányféle négyjegyű szám rakható ki?

Különböztessük meg a két egyforma számjegyet, ekkor $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$-féle különböző sorrend lehetséges. A két darab különböző 2-est kétféle sorrendben írhattuk le ugyanarra a két helyre. A továbbiakban a két 2-es egyforma, így ez a két eset ugyanannak számít, vagyis az eddigi esetek számát osztani kell 2-vel.

ismétléses permutáció

DEFINÍCIÓ: Ha az elemek között van(nak) olyan(ok), amelyik többször is előfordul, az elemek egy sorba rendezését *ismétléses permutációnak* nevezzük.

TÉTEL: Ha n elem között $p_1; p_2; \ldots; p_k$ darab megegyező van, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = n$, akkor ezeket az elemeket

$$\frac{n!}{p_1! \cdot p_2! \cdot \ldots \cdot p_k!}$$

különböző módon lehet sorba rendezni.

Az ismétléses variáció

Az 1, 2, 3, 4 kártyák közül kettőt húzunk egymás után úgy, hogy a kihúzott kártyát minden húzás után visszatesszük. Hányféleképpen lehetséges ez?

□ □
↑ ↑
4 · 4

Mindkét helyre 4-féleképpen húzhatunk kártyát, így a lehetőségek száma 4^2.

ismétléses variáció

DEFINÍCIÓ: Ha n-féle elemből a sorrend figyelembevételével kiválasztunk k darabot (egyféle elemből többet is választhatunk), az n-féle elemnek egy k tagú *ismétléses variációját* kapjuk.

TÉTEL: n-féle elem k tagú ismétléses variációinak száma n^k.

Az ismétlés nélküli variáció

Az 1, 2, 3, 4 kártyák közül kettőt húzunk egymás után úgy, hogy a kihúzott kártyát a húzás után nem tesszük vissza. Hányféleképpen lehetséges ez?

□ □
↑ ↑
4 · 3

Az első helyre 4, a másodikra 3-féleképpen húzhatunk kártyát, így a lehetőségek száma:

$$4 \cdot 3 = \frac{4!}{2!}.$$

ismétlés nélküli variáció

DEFINÍCIÓ: Ha n különböző elemből a sorrend figyelembevételével kiválasztunk k darabot, az n különböző elemnek egy k tagú ($0 \le k \le n$ egészek) *ismétlés nélküli variációját* kapjuk.

TÉTEL: n különböző elem k tagú ismétlés nélküli variációinak száma:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$



Az ismétlés nélküli kombináció

Az 1, 2, 3, 4 kártyák közül egyszerre kettőt kihúzunk úgy, hogy a kihúzott lapok sorrendje nem számít. Hányféleképpen lehetséges ez?

Az első lapot 4, a másodikat 3-féleképpen húzhatjuk, mivel a kihúzott lapok sorrendje nem számít, ezt osztani kell a kihúzott lapok összes lehetséges sorrendjének számával, így a lehetőségek száma:

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \binom{4}{2}.$$

ismétlés nélküli kombináció

DEFINÍCIÓ: **Ha n különböző elemből a sorrend figyelembevétele nélkül kiválasztunk k darabot, az n különböző elem k tagú ($0 \le k \le n$ egészek) *ismétlés nélküli kombinációját* kapjuk.**

TÉTEL: **n különböző elem k tagú ($0 \le k \le n$ egészek) ismétlés nélküli kombinációinak száma: $\binom{n}{k}$.**

Gráfok

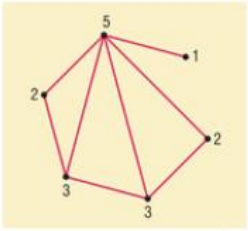
1. példa

Egy hattagú társaságban néhányan kezet fogtak egymással. Ezután mindenkit megkérdeztek, hogy hány emberrel fogott kezet.

a) Hány kézfogás történt, ha a következő számokat mondták: 1; 2; 2; 3; 3; 5?

b) Igaz-e, hogy valaki tévedett, ha a következő számokat mondták: 1; 2; 3; 3; 3; 5?

c) Igaz-e, hogy mindig van két ember, akik ugyanannyi emberrel fogtak kezet?



5. ábra

Megoldás (a)

Ábrázoljuk gráffal a kézfogásokat! A pontok az embereknek felelnek meg. Két pont össze van kötve éllel, ha a két pontnak megfelelő emberek kezet fogtak egymással. *(5. ábra)*

Aki 5 emberrel fogott kezet, az mindenki mással kezet fogott, ezért ebből az ötből az egyik lesz az egyetlen kézfogása annak, aki 1-et mondott.

Minden kézfogást mindkét résztvevőnél számoljuk, így a kézfogások száma:

$$(1+2+2+3+3+5) : 2 = 8.$$

A gráf éleinek száma = a kézfogások száma.

Megoldás (b)

$1+2+3+3+3+5 = 17$ páratlan, ami nem lehet. Ezért a bemondott számok nem jók.

Megoldás (c)

A hattagú társaságban ha valaki 0 emberrel fog kezet, akkor nem lehet olyan, aki 5 emberrel fog kezet, és ha valaki 5 emberrel fog kezet, akkor vele mindenki kezet fogott, nem lehet 0. Így a bemondott kézfogásszámok 5-félék lehetnek, de 6 ember van, így a skatulyaelv miatt kell legyen két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel fogott kezet.

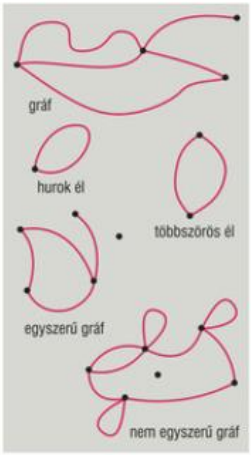
Definíció: ***Gráfnak*** **nevezzük a pontokból és – az ezekből alkotható pontpárok közül néhányat (lehet, hogy mindet, lehet, hogy egyet sem) összekötő – vonalakból álló alakzatot. A pontok a gráf *pontjai* vagy *csúcsai*, a vonalak a gráf *élei*.** *(6. ábra)*

Jelölések:

A G gráf pontjainak halmazát $V(G)$-vel jelöljük.

A G gráf éleinek halmazát $E(G)$-vel jelöljük.

Definíció: ***Huroknak*** **nevezzük az olyan élt, amelynek két végpontja ugyanaz.** ***Többszörös élt*** **kapunk, ha két pont között egynél több élt húzunk. Egy gráfot *egyszerű gráfnak* nevezünk, ha pontjainak és éleinek halmaza véges, és a gráfban nincs se hurok, se többszörös él.** *(6. ábra)*

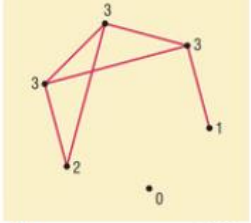


6. ábra

Definíció: **Egy gráf egy pontjának *fokszáma* (foka) a pontban találkozó élek száma.** *(7. ábra)*

Tétel: **Minden gráfban a pontok fokszámának összege az élek számának kétszerese.**

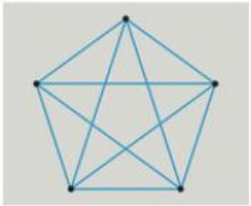
Tétel: **Minden egyszerű gráfban van két azonos fokszámú pont.**



7. ábra

Definíció: **Egy egyszerű gráfot *teljes gráfnak* nevezünk, ha bármely két pontja össze van kötve éllel.** *(8. ábra)*

Tétel: **Az n pontú teljes gráf éleinek száma:** $\frac{n\cdot(n-1)}{2}=\binom{n}{2}$.



8. ábra

A következő feladatok megoldásában segítenek a fenti típusok, bár a problémák mindig összetettek, nem elegendő csupán a képletek alkalmazása.

2. példa

A SAROK szó betűit összes lehetséges módon sorba rendeztük, és a kapott „szavakat" ábécé sorrendben leírtuk egymás után. Mi az utolsó betűje a lista 27. szavának? Mi lesz az utolsó betű, ha a SOROK szóval tesszük ugyanezt?

Megoldás

A SAROK szó 5 betűjét $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$-féleképpen lehet sorba rendezni, tehát 120 „szót" írtak le egymás után. Ugyanazzal a betűvel

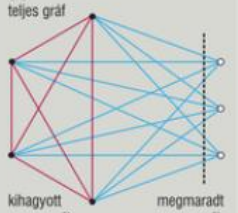
permutáció

$4! = 24$ szó kezdődik, így a 27. szó az ábécében a 2. betűvel, azaz K-val kezdődik. A 25. szó a KAORS, a 26. a KAOSR, a 27. pedig a KAROS, tehát a lista 27. szavának utolsó betűje S.

ismétléses permutáció

Mivel a SOROK szóban két egyforma O betű van az 5 betű között, így feleannyi különböző sorrendje van a betűknek, mint a SAROK szó esetén, azaz 60. K betűvel kezdődő szó $\frac{4!}{2!} = 12$ darab van az utána következő két O betű miatt, viszont O-val kezdődő szó $4! = 24$ van. Tehát a 27. szó az O betűvel kezdődő szavak közül a 15. OK-val $3! = 6$ szó kezdődik, majd OO-val szintén, így a 27. szó az OR betűkkel kezdődő szavak közül a 3. Az OR-rel kezdődő szavak sorban: ORKOS, ORKSO, OROKS, … tehát a lista 27. szava az OROKS, melynek utolsó betűje S.

7 versenyző körmérkőzése:
$\binom{7}{2}$ mérkőzés
teljes gráf



9. ábra

3. példa

Egy körmérkőzéses (mindenki mindenkivel egyszer játszik) asztaliteniszversenyen a mérkőzések számát 50-nel kívánták csökkenteni, ezért 4 versenyzővel kevesebbet hívtak meg. Hányan vettek részt a versenyen?

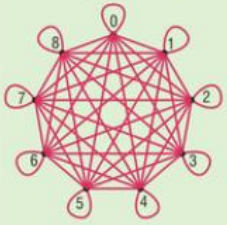
Megoldás

A 4 versenyző egymással $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ mérkőzést játszott volna.

ismétlés nélküli kombináció, szorzási elv

A 4 versenyző a többiekkel $50 - 6 = 44$ meccset játszott volna, ami fejenként 11 mérkőzés. Mivel az összes többi versenyzővel játszottak volna, ezért végül 11 versenyző maradt a versenyen. ***(9. ábra)***

A dominókészlet gráfja:
élek = dominók;
pontok = a pöttyök száma.
Egy él két végpontja a dominó két felén levő pöttyök száma.



Körbe lehet-e rakni a készlet összes dominóját a dominózás szabályai szerint? (Euler-vonal)

4. példa

A dominókészletben minden olyan dominó szerepel pontosan egyszer, amelynek két oldalán a pöttyök száma 0–8-ig valamelyik egész szám. A dominó két oldalát felcserélve ugyanazt a dominót kapjuk, viszont egy dominó két oldalán lehet ugyanannyi pötty.

a) Hány dominóból áll egy teljes készlet?

b) A teljes készletből két dominót véletlenszerűen kiválasztva mi a valószínűsége, hogy azok egymás mellé illeszthetők (azaz a két dominónak van egyforma oldala).

Megoldás (a)

9 darab olyan dominó van a készletben, amelynek mindkét oldalán ugyanannyi pötty van (00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88). Ha a dominó két oldalán különböző a pöttyök száma, akkor az egyik oldalra 9-féleképpen, a másikra 8-féleképpen választhatunk számot. Mivel a két oldal sorrendje nem számít, a két különböző oldalú dominók száma:

$$\frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

Tehát összesen $36 + 9 = 45$ dominó van a készletben.

Megoldás (b)

A 45 dominó közül 2-t $\binom{45}{2} = \frac{45 \cdot 44}{2} = 990$ -féleképpen választhatunk, ennyi az összes lehetséges eset. A kedvező esetek száma annyi, ahányféleképpen két összeillő dominót választhatunk a készletből. Ha az egyik dominó olyan, hogy a két oldalán ugyanannyi pötty van, ezt 9-féleképpen választhattuk, hozzáillő dominó pedig 8-féle lehet ez $9 \cdot 8 = 72$ lehetőség. Ha egyik dominón sem szerepel duplán ugyanaz a szám, akkor például az 56 dominó 5-ös oldalához 7 dominó illeszkedhet, hiszen a másik oldal nem lehet sem 5, sem 6. Ugyanígy a 6-os oldalához is 7 dominó illeszkedhet, tehát a 36 darab különböző oldalú dominóhoz párt választva $36 \cdot 14 = 504$ lehetőség adódik, melyekben azonban minden párt kétszer számoltunk, ezért osztani kell 2-vel, így 252-t kapunk. Tehát az összeillő dominópárok száma $72 + 252 = 324$. Így a keresett valószínűség:

$$\frac{324}{990} \approx 0{,}3273.$$



• • •

Már 10. osztályban beszéltünk események valószínűségéről, amely olyan 0 és 1 közé eső szám, amely a relatív gyakoriság körül ingadozik. A valószínűség klasszikus modellje akkor alkalmazható, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van, és ezek valószínűsége egyenlő. Ilyenkor egy esemény valószínűsége a kedvező elemi események számának és az összes elemi esemény számának hányadosa. A kedvező és az összes esetek összeszámlálásához gyakran alkalmazunk kombinatorikai módszereket.

Klasszikus valószínűségi modellben:

valószínűség = $= \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$.

5. példa

Tíz papírlapra felírtuk a számokat 1–10-ig, és beraktuk egy kalapba. Három számot véletlenszerűen kihúztunk, egyiket a másik után. Mi a valószínűsége, hogy a három számot nagyság szerint növekvő sorrendben húztuk ki?

Megoldás

A 10 szám közül 3-at a sorrend figyelembevételével $10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!}$-féleképpen húzhatunk ki, ennyi az összes eset. Mivel 3 kihúzott számnak csak egy nagyság szerint növekvő sorrendje lehet, így a kedvező esetek száma annyi, ahányféleképpen 3 számot a sorrend figyelembevétele nélkül kihúzhatunk, azaz $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!}$. Így a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{10}{3}}{\frac{10!}{7!}} = \frac{\frac{10!}{3! \cdot 7!}}{\frac{10!}{7!}} \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

ismétlés nélküli variáció, ismétlés nélküli kombináció

A végeredmény egyszerűsége arra sarkall, hogy egyszerűbb megoldást keressünk. Mivel ugyanazt a három számot $3! = 6$-féle sorrendben húzhattuk, és ezek között csak egy olyan sorrend van, amely nagyság szerint növekvő, a keresett valószínűség $\frac{1}{6}$.

A példa jól mutatja az ismétlés nélküli variáció és kombináció közti összefüggést.

6. példa

Egy rágógumi-automatában háromféle színű golyórágó látható, 15 sárga, 18 kék és 20 zöld. Kati ikerfiai feltétlenül egyforma színű rágógumit szeretnének. Mi a valószínűsége, hogy ehhez elegendő

a) kettő; *b)* három; *c)* négy rágógumit megvennie?

Megoldás (a)

Összesen $15 + 18 + 20 = 53$ rágógumi közül kettőt a sorrend figyelembevétele nélkül $\binom{53}{2}$-féleképpen vehetünk ki.

Két egyforma színű rágót akkor kapunk, ha vagy a 15 sárga, vagy a 18 kék, vagy a 20 zöld közül választottunk kettőt, ez összesen $\binom{15}{2} + \binom{18}{2} + \binom{20}{2}$ lehetőség. Tehát a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{15}{2} + \binom{18}{2} + \binom{20}{2}}{\binom{53}{2}}.$$

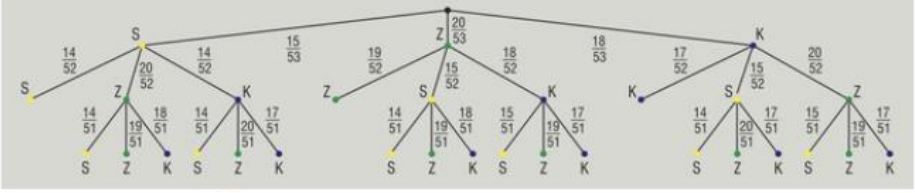
Megoldás (b)

Három húzás elegendő ahhoz, hogy legyen két egyforma, ha nem húzunk három különbözőt, így ennek valószínűsége: $1 - \frac{15 \cdot 18 \cdot 20}{\binom{53}{3}}$.

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$, komplementer esemény valószínűségére áttérés

Ha arra vagyunk kíváncsiak, mekkora valószínűséggel kell pontosan 3 húzás, a legfeljebb három húzás valószínűségéből kivonjuk a két húzás valószínűségét. A pontosan három húzás szükségességének valószínűsége közvetlenül is kiszámolható, legegyszerűbben úgy, hogy az alábbi fagráfon ábrázoljuk a lehetséges húzásokat, és leolvassuk a megfelelő valószínűséget. *(6. ábra)*

6. ábra



Megoldás (c)

Az előbbi fagráfon látható, hogy a negyedik húzásra kapott rágógumi színe biztosan megegyezik valamelyik korábbi rágó színével, így legfeljebb négy húzással 1 valószínűséggel kapunk két azonos színű rágót.

skatulyaelv, biztos esemény valószínűsége 1

Ugyanerre a következtetésre juthatunk a skatulyaelv alapján: ha 3-féle szín van, és 4 darabot veszünk, akkor biztosan van olyan szín, amelyikből legalább 2 darabot vettünk.

7. példa

Egy szabályos dobókockát négyszer egymás után feldobunk. Mi a valószínűsége, hogy az 5 vagy a 6 legalább egyszer előfordul?

Megoldás

Egy dobókockát négyszer egymás után feldobva a lehetséges esetek száma 6^4, mert mind a négy dobás 6-féle lehet.

ismétléses variáció, komplementer esemény, De Morgan-azonosság: $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Ha a kedvező esetek összeszámlálását úgy végeznénk, hogy megnézzük, hogy az 5 vagy a 6 hányféleképpen fordulhat elő egyszer, kétszer, háromszor, négyszer, akkor nagyon sok esetet kellene vizsgálni. Ehelyett az esemény komplementerét nézzük, azaz azt, hogy a dobott számok között sem az 5, sem a 6 nem fordul elő. Ezek szerint csak 4-féle számot dobhatunk, azaz a kedvező esetek száma 4^4, így a keresett valószínűség:

$$1-\frac{4^4}{6^4}.$$

8. példa

Egy különlegesen durva jégkorongmérkőzésen a játékosok 85%-a elvesztette legalább egy fogát, és 70%-a eltörte az ujját.

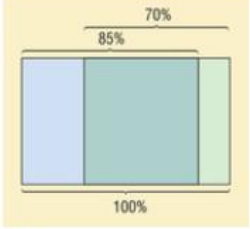
a) Egy játékost véletlenszerűen kiválasztva legalább mekkora az esélye annak, hogy a fogát is elvesztette és az ujját is eltörte?

b) Ha emellett a játékosok 75%-ának kificamodott a bokája, akkor legalább mekkora az esélye annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott játékos mind a három sérülést elszenvedte?

Megoldás (a)

Akkor lesz minimális a mindkét sérülést elszenvedett játékosok száma, ha nincs olyan, aki épen maradt volna, azaz a legalább egy sérülést elszenvedettek aránya 100%. *(7. ábra)*

7. ábra



Ekkor a mindkét sérülést elszenvedett játékosok aránya:

$$85\% + 70\% - 100\% = 55\%.$$

Tehát egy játékost véletlenszerűen kiválasztva legalább 0,55 a valószínűsége annak, hogy őt mindkét sérülés elérte.

A logikai szita formulája:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|.$$

A valószínűségekre:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \Rightarrow P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A+B).$$

Mivel $P(A+B) \leq 1$, így $P(A \cdot B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

Megoldás (b)

Az előző megoldást folytatva: a játékosok legalább 55%-a elvesztette a fogát és eltörte az ujját, 75%-a pedig kificamította a bokáját. Így a játékosoknak legalább az $55\% + 75\% - 100\% = 30\%$-a mindhárom sérülést elszenvedte.

9. példa

Egy dobozban 2 fehér és 2 fekete golyó van.

a) Zsuzsi kivesz egy golyót a dobozból, látja, hogy fehér. Anélkül, hogy visszatenné az első golyót, kivesz egy másodikat. Minek nagyobb a valószínűsége, hogy ez a második golyó fehér, vagy hogy fekete?

b) Gabi a 2 fehér és 2 fekete golyó közül kivesz egyet, ám félreteszi anélkül, hogy megnézné, milyen színű. Másodszorra kivesz egy fehéret. Minek nagyobb az esélye, hogy az első fehér volt, vagy hogy fekete?

Megoldás (a)

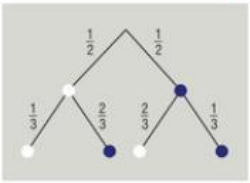
Ha Zsuzsi kivesz egy fehér golyót, utána marad egy fehér és két fekete a dobozban, nyilvánvalóan nagyobb eséllyel húz másodikra feketét, mint fehéret. A fehér golyó húzásának valószínűsége $\frac{1}{3}$, míg a fekete golyó húzásának valószínűsége $\frac{2}{3}$.

Megoldás (b)

Gabi másodikra húzhatott fehéret $\frac{2}{3}$ eséllyel, ha az első fekete volt, és $\frac{1}{3}$ eséllyel, ha az első fehér volt. Így az esetek $\frac{1}{3}$-ában az első húzás fehér volt, $\frac{2}{3}$-ában viszont fekete, tehát annak nagyobb az esélye, hogy elsőre feketét húzott.

A két eset közös tulajdonsága, hogy kihúztunk két golyót, és közülük az egyikről tudjuk, hogy fehér, és kerestük annak a valószínűségét, hogy a másik is fehér.

A két egymás utáni húzást jól szemléltethetjük fagráffal, amiről a kérdéses valószínűségek leolvashatók. ***(8. ábra)***



8. ábra

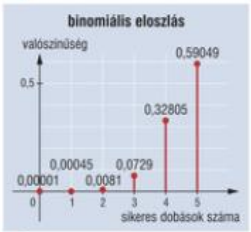
10. példa

Az NBA 2022/23-as szezonjában Stephen Curry 0,9 valószínűséggel értékesítette a büntetődobásait.

a) Egy meccsen Stephen Curry 5 büntetőt dobott. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3-at dobott be?

b) Mennyi az 5 dobásból értékesített büntetők számának várható értéke?

visszatevéses mintavétel



9. ábra

Megoldás (a)

3 büntetőt bedobott $0{,}9^3$ valószínűséggel, 2 büntetőt kihagyott $0{,}1^2$ valószínűséggel, és $\binom{5}{3}$-féleképpen választható ki, hogy az 5 dobás közül melyik 3-at dobta be *(9. ábra)*:

$$P(\text{3-at bedobott 5-ből}) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0729.$$

Megoldás (b)

A várható értékek kiszámításához az értékesített büntetők számát szorozzuk annak a valószínűségével, hogy éppen annyi büntetőt dobott be, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk:

$$P(\text{0 dobás sikerült 5-ből}) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^5 = 0{,}000\,01;$$

$$P(\text{1 dobás sikerült 5-ből}) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^4 = 0{,}000\,45;$$

$$P(\text{2 dobás sikerült 5-ből}) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}008\,1;$$

$$P(\text{3 dobás sikerült 5-ből}) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}072\,9;$$

$$P(\text{4 dobás sikerült 5-ből}) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}328\,5;$$

$$P(\text{5 dobás sikerült 5-ből}) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}590\,49.$$

A sikeres dobások száma 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5, ezért a valószínűségek összege 1 kell legyen.

Valóban:

$$0{,}000\,01 + 0{,}000\,45 + 0{,}008\,1 + 0{,}072\,9 + 0{,}328\,5 + 0{,}590\,49 = 1.$$

A sikeres dobások számának várható értéke:

$$0 \cdot 0{,}000\,01 + 1 \cdot 0{,}000\,45 + 2 \cdot 0{,}008\,1 + 3 \cdot 0{,}072\,9 + \\ + 4 \cdot 0{,}328\,5 + 5 \cdot 0{,}590\,49 = 4{,}5.$$

◆ ◆ ◆

Ha n-szer függetlenül ismételünk egy kísérletet, és figyeljük egy p valószínűséggel bekövetkező A esemény előfordulásainak számát, ez **binomiális eloszlást** követ:

$$P(\text{az } A \text{ esemény } k\text{-szor következett be}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

11. példa

Egy kosárban 10 alma van, amelyek közül 4 kukacos. Balázs belenyúl a kosárba, és kivesz egyszerre 3 almát véletlenszerűen.

Mi a valószínűsége, hogy Balázs

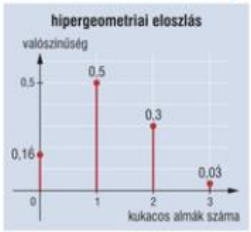
a) 3; *b)* 2; *c)* 1; *d)* 0

kukacos almát vett ki?

Megoldás

visszatevés nélküli mintavétel

Az összes eset: Balázs 10 almából 3-at visszatevés nélkül és a sorrend figyelembe vétele nélkül $\binom{10}{3} = 120$-féleképpen tud kivenni.



10. ábra

A kedvező esetek számolásakor figyelembe vesszük, hogy a kukacos almákat a 4 kukacos közül, a nem kukacosakat a $10 - 4 = 6$ nem kukacos közül veszi ki.

$$a)\ P(3 \text{ kukacos}) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30} = 0{,}0\dot{3}$$

$$b)\ P(2 \text{ kukacos}) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = 0{,}3$$

$$c)\ P(1 \text{ kukacos}) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = 0{,}5$$

$$d)\ P(0 \text{ kukacos}) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = 0{,}1\dot{6}$$

A példában a kukacos almák száma **hipergeometriai eloszlást** követ. *(10. ábra)*

Feladatok

1. Egy óceánkutató expedíció kutatócsoportjába keresnek 1 fő vezetőt, 1 orvost, 4 biológust, 2 vegyészt és 1 műszerészt. 4-en jelentkeztek vezetőnek, 5-en orvosnak, 20-an biológusnak, 8-an vegyésznek, 3-an műszerésznek, egy ember több posztra nem jelentkezhetett. Hányféleképpen választhatják ki a kutatócsoport tagjait, ha több résztvevő nincsen?

2. Találtak egy ismeretlen jelekkel teleírt levelet. A titkosírás 26 különböző jelet tartalmaz, melyek mindegyike egy-egy betűt jelöl.

a) Hányféle dekódolása létezhet a titkosírásnak? (Dekódolás: az angol ábécé betűinek a titkosírás jeleihez való kölcsönösen egyértelmű hozzárendelése.)

b) Ha a betűk egymás utáni elhelyezkedése alapján 5 jelről megállapították, hogy magánhangzó, a többi 21 pedig mássalhangzó, akkor hányféle dekódolás létezik?

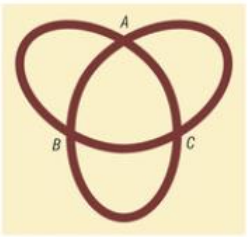
c) Ha a betűk gyakorisága alapján az 5 magánhangzó közül 2-t pontosan megfejtettek, a mássalhangzók közül 4-et, akkor hányféle dekódolás létezik?

3. Egy vetélkedő egy fordulójában 12-en vesznek részt. Hányféle eredmény lehetséges az alábbiakat figyelembe véve?

a) Hárman jutnak tovább a zsűri véleménye alapján, egy versenyzőt pedig kijelölnek, akit a közönség szavazatai még bejuttathatnak a döntőbe. A továbbjutók és a kiesők sorrendje is lényegtelen.

b) Egy fordulóban 5-en esnek ki. Eredményhirdetéskor az első, második, harmadik legjobbat, valamint az 5 kiesőt mondják be, az utóbbiakat névsor szerint.

4. Az ábra szerinti kötélcsomón nem látjuk, hogy a kereszteződésekben (az A, B, C pontoknál) melyik kötél van fölül, és melyik alul. Tegyük fel, hogy mindegyik lehetőség egyformán valószínű, akkor mi a valószínűsége, hogy a kötélen csomó lesz?



5. Három szabályos dobókockát feldobunk, és a dobott számokat összeadjuk. Minek nagyobb a valószínűsége, hogy az összeg páros vagy páratlan?

6. Az egész számokat 1–400-ig berakták egy kalapba. Mi a valószínűsége, hogy az első véletlenszerűen kiválasztott szám többszöröse 4-nek vagy 17-nek?

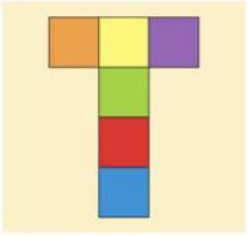
7. Ötven darab pingponglabdát megszámoztunk 1–50-ig. 15 gyerek egymás után kihúz egy labdát, megnézi, visszateszi, ezután húz a következő. Mi a valószínűsége, hogy legalább két gyerek ugyanazt a labdát húzta?

8. A gimnázium udvarán álló szobor szelleme igazat mond, ha válaszol egy kérdésre, de annak a valószínűsége, hogy válaszol egy adott kérdésre, csupán $\frac{1}{3}$. Egy diák azt tervezi, hogy háromszor megkérdezi a szellemet az érettségije eredményéről. Mi a valószínűsége, hogy a szellem válaszol?

9. Dorka kocka alakú karácsonyfadíszt készít az ábra szerinti kockahálóból. Közben egy katicabogár rászállt a T alak egy négyzetére, majd véletlenszerűen átment egy szomszédos négyzetre.

a) Mi a valószínűsége, hogy a katicabogár piros négyzetre jutott?

b) Hogyan változik ez a valószínűség, ha a katicabogár a felakasztott karácsonyfadísz egyik lapjára szállt, majd véletlenszerűen átment egy szomszédos lapra?



10. Két kalap mindegyikében 12 golyó van, 6 fehér és 6 fekete az első kalapban, és 12 fekete a másik kalapban. Az első kalapból véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót, és átrakjuk a másodikba. Ezután a másodikból véletlenszerűen kiveszünk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy a második kalapból választott golyó fekete?

11. A vidámparkban Villámkezű Joe 60% eséllyel lövi ki a célt az első lövésre. Az egymás utáni lövéseknél mindig feleakkora valószínűséggel talál ellenkezőképpen, mint ahogyan az előző lövésben. Vagyis ha az első lövés sikerült, akkor (mivel abban 40% valószínűséggel hibázott volna) a második lövést 20% valószínűséggel rontja el. Mi a valószínűsége, hogy három lövésből legalább kétszer talált?

12. Egy játékosnak két érme van a zsebében, egy szabályos (egyik oldala fej, a másik írás, és egyenlő eséllyel esik a két oldalára), és egy olyan, amelyiknek mindkét oldalán fej van. Egy érmét véletlenszerűen kiválaszt, és feldobja kétszer. Ha két fejet kapott, akkor mi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét választotta?

13. Az iskolai menzán az ebédhez kikészített üvegpoharak 25%-a csorba. Az ebédnél véletlenszerűen veszünk le egy poharat magunknak. (Minden hétköznap a menzán ebédelünk.)

a) Mi a valószínűsége, hogy a héten minden nap hibátlan poharat kapunk?

b) Mi a valószínűsége, hogy a héten legalább 4-szer csorba poharat kapunk?

14. Egy dobozban csokigolyók vannak vegyesen, 6 étcsokis és 10 tejcsokis. Gabi kimarkol a dobozból 4 csokigolyót.

a) Mi a valószínűsége, hogy kivett legalább egy tejcsokisat?

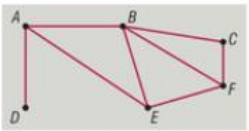
b) Mi a valószínűsége, hogy 2 étcsokis és 2 tejcsokis csokigolyót vett ki?

15. Egy pénztárcában 3 darab 50 forintos és 5 darab 200 forintos pénzérme van.

a) Visszatevés nélkül kiveszünk 2 érmét. Mi a valószínűsége, hogy van köztük 50 forintos?

b) Visszatevéssel kiveszünk 3 érmét. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 2 db 200 forintos érmét vettünk ki, ha tudjuk, hogy a kivettek között van 200 forintos?

16. Az ábrán látható gráf pontjai városokat, az élei a városok közötti közvetlen repülőjáratokat jelentik.



a) Sorold fel a városok betűjelével azokat az útvonalakat, amelyeken legfeljebb két átszállással el lehet jutni A-ból F-be!

b) A járatokat működtető légitársaság gazdasági okokra hivatkozva tervet készíttet arra az esetre, ha csökkentenie kellene a járatainak a számát. Legtöbb hány járatot, és melyeket lehet elhagyni úgy, hogy a megmaradt járatokkal még minden városból minden városba el lehessen jutni repülővel?

c) Végül a légitársaság számára jól alakultak a dolgok, így a nyári turistaszezonban minden járatot sikerült gazdaságosan működtetni. Sőt, a D városba tervezett rockfesztivál idejére még újabb járat(ok) indítását is tervezik. Legkevesebb hány járatot, és mely(ek)et kell elindítani, hogy D-ből bármely más városba legfeljebb egy átszállással el lehessen jutni?

d) Egy bohókás világutazó a véletlenre bízza az utazását. Ha megérkezik egy városba, miután azt megnézte, egyenlő valószínűséggel választ az onnan induló repülőjáratok közül, és azzal megy tovább a következő városba (az is előfordulhat, hogy véletlenül visszatér oda, ahonnan érkezett). Mi a valószínűsége, hogy B-ből legfeljebb egy átszállással F-be érkezik?

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

1. Számok és műveletek

1. példa

Az 1; 2; 3; 4; 5 számjegyek közé, ezek sorrendjének megtartásával helyezzünk el alapműveleti jeleket, esetleg zárójeleket úgy, hogy eredményül
a) a 0; *b)* az 1 természetes számot kapjuk.

A természetes számok halmaza:
$\mathbb{N} = (0; 1; 2; 3; \ldots)$

Megoldás (a)

Néhány lehetséges megoldás:

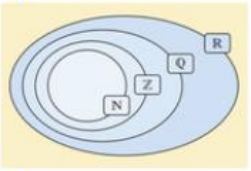
$$(1+2)\cdot 3-4-5=0;$$
$$(1+2-3)\cdot 4\cdot 5=0;$$
$$(1+2-3)\cdot(4+5)=0.$$

Megoldás (b)

Néhány lehetséges megoldás:

$$1-2+3+4-5=1;$$
$$1+2-3-4+5=1;$$
$$1\cdot(2-3)\cdot 4+5=1.$$

Keressünk további megoldásokat!



1. ábra

2. példa

Adjunk meg olyan a, b pozitív egész számokat, amelyekre $a+b$, $a\cdot b$, $\frac{a}{b}$, valamint a és b mértani közepe is egész szám.

A pozitív egész számok halmaza:
$\mathbb{N}^+ = (1; 2; 3; 4; \ldots)$

Megoldás

Mivel bármely két egész szám összege és szorzata is egész szám, ezért az első két feltétel minden a, b pozitív egész számra teljesül.

$\frac{a}{b}$ egész, ha a többszöröse b-nek. Legyen $a = k\cdot b$, ahol k szintén pozitív egész szám. A mértani közepük

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{k\cdot b^2}$$

létezik, hiszen k pozitív,

$$\sqrt{k\cdot b^2}=|b|\cdot\sqrt{k}=b\cdot\sqrt{k},$$

mert b pozitív. Ez utóbbi kifejezés értéke akkor egész szám, ha k négyzetszám.

Tehát minden olyan a, b pozitív egész számpár megoldás, amelyre a és b hányadosa négyzetszám.

A mértani közép:
$\sqrt{a\cdot b}$; $a, b \geq 0$

a	b
8	2
12	3
27	3
48	3

3. példa

Milyen számjegy áll a $\frac{3}{7}$ tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni 2004. helyen?

Megoldás

Végezzük el a maradékos osztást:

$$\begin{array}{l} 3:7=0{,}4285714\ldots \\ 30 \\ \quad 20 \\ \quad\quad 60 \\ \quad\quad\quad 40 \\ \quad\quad\quad\quad 50 \\ \quad\quad\quad\quad\quad 10 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 30 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \ldots \end{array}$$

$\frac{3}{7}=0{,}\dot{4}28571\dot{}$, ami azt jelenti, hogy 6 számjegy ismétlődik a végtelen szakaszos tizedes törtben.

Mivel a 6 osztója 2004-nek, ezért a keresett számjegy az ismétlődő szakasz utolsó jegye: 1.

A két egész szám hányadosaként felírható számokat racionális számoknak nevezzük:

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbb{Z};\ q\neq 0\right\}$.

4. példa

a) Lehet-e két racionális szám számtani közepe irracionális szám?
b) Lehet-e két irracionális szám számtani közepe racionális szám?
c) Lehet-e két racionális szám mértani közepe irracionális szám?
d) Lehet-e két irracionális szám mértani közepe racionális szám?

A racionális számok tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos.

Irracionális számoknak nevezzük azokat a számokat, melyek tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos.

A számtani közép:
$\frac{a+b}{2}$

A mértani közép:
$\sqrt{a\cdot b};\ a,b\geq 0$

Megoldás (a)

Minden racionális szám felírható két egész szám hányadosaként. Két tört összege is tört, és 2-vel osztva újra törtet kapunk. Tehát két racionális szám hányadosa nem lehet irracionális szám.

Megoldás (b)

Lehet: például a $\sqrt{2}$ és az $1-\sqrt{2}$ irracionális számok, a számtani közepük pedig $\frac{1}{2}$.

Megoldás (c)

Lehet: például az 1 és 2 mértani közepe $\sqrt{2}$.

Megoldás (d)

Keressünk például olyan irracionális számokat, amelyek egymás reciprokai. Megfelel pl. a $2-\sqrt{3}$ és $2+\sqrt{3}$, hiszen ezek szorzata:

$$(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})=4-(\sqrt{3})^2=4-3=1.$$

Tehát két irracionális szám mértani közepe lehet racionális szám.

5. példa

Egy vállalat két üzemet működtet. Az elsőben 2400, a másodikban pedig 1500 darab terméket állítanak elő naponta. Hány százalékkal nő a vállalat termelése, ha az első üzem 15%-kal, a második pedig 10%-kal növeli a napi termelését?



Megoldás

Számítsuk ki, hogy az egyes üzemek mennyivel növelik a napi termelést. Az első üzem $2400 \cdot \frac{15}{100} = 360$ darabbal, a második üzem pedig $1500 \cdot \frac{10}{100} = 150$ darabbal gyárt többet naponta.

A vállalat termelése naponta $360 + 150 = 510$ darab termékkel növekszik. Ez az eredeti termelésnek $\frac{510}{3900} = 0{,}1308$-ed része. Tehát a vállalat termelése körülbelül 13%-kal nő.

Feladatok

1. Milyen számjegy áll a $\frac{8}{17}$ tizedes tört alakjában a tizedes vessző utáni 1960. helyen?
2. Igaz-e, hogy a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irracionális szám? Indokoljuk a választ.
3. Állítsunk elő olyan irracionális számokat, amelyek csak a 2 és a 3 számjegyeket tartalmazzák.
4. A turistatérképen a következő olvasható: 1 : 40 000. Mennyit kell még gyalogolnunk, ha a térképen 5 cm távolságra vagyunk a céltól?
5. Egy kabát árát év elején 20%-kal felemelik, majd szezon végi kiárusításkor 20%-kal csökkentik. Az eredeti ár hány %-át kell ekkor fizetni a kabátért?
6. Egy kereskedő 30%-os haszonra tesz szert, ha 10 920 Ft-ért elad egy árut. Mivel az áru nem fogyott, 10%-ot engedett az árból. Hány %-os haszonnal adta el ekkor az árut?
7. Egy élelmiszer csomagolásán az alábbi adatok olvashatók: bruttó tömeg 4 850 g, nettó tömeg 3 750 g. Hány százaléka a bruttó tömegnek a nettó? Hány százaléka a nettó tömegnek a csomagolás?
8. Egy osztályban a tanév során három kirándulást szerveztek. Az első kiránduláson az osztály 70%-a, a másodikon a 80%-a, a harmadikon a 90%-a vett részt. 12 tanuló mindhárom kiránduláson ott volt, a többiek pedig kétszer kirándultak. Hányan járnak az osztályba?

2. Számelmélet, oszthatóság

osztó

DEFINÍCIÓ: Az a és b egész számok esetén akkor mondjuk, hogy az a szám osztója b-nek, ha van olyan c egész szám, amelyre $a \cdot c = b$. Jele: $a \mid b$.

prímszám

DEFINÍCIÓ: Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek pontosan két pozitív osztója van, *prímszámoknak* nevezzük.

összetett szám

DEFINÍCIÓ: Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek kettőnél több pozitív osztója van, *összetett számoknak* nevezzük.

legnagyobb közös osztó

DEFINÍCIÓ: Két pozitív egész szám esetén a közös osztók közül a legnagyobbat a két szám *legnagyobb közös osztójának* nevezzük. Az a és b legnagyobb közös osztójának jele: $(a; b)$.

legkisebb közös többszörös

DEFINÍCIÓ: Két pozitív egész szám esetén a közös pozitív többszörösök közül a legkisebb számot a két szám *legkisebb közös többszörösének* nevezzük. Az a és b legkisebb közös többszörösének jele: $[a; b]$.

TÉTEL: Végtelen sok prímszám van.

a számelmélet alaptétele

A SZÁMELMÉLET ALAPTÉTELE: Bármely összetett szám felbontható prímszámok szorzatára, a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű módon.

1. példa

Igaz-e, hogy $10^{2004} + 8$ osztható 9-cel?

Megoldás

Egy szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel.

A 10 minden hatványa az 1 számjeggyel kezdődik, és a kitevőnek megfelelő számú 0-t tartalmaz. A 10^{2004} hatvány 1-gyel kezdődik, és 2004 darab 0-ra végződik, ehhez 8-at adva a szám alakja: 100…008 lesz.

Tehát a számjegyek összege 9, ami azt jelenti, hogy az összeg osztható 9-cel.

2. példa

Mutassuk meg, hogy $5^{2004} + 7$ nem prímszám.

Megoldás

Az 5 minden hatványa 5-re végződik, tehát az 5^{2004} is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Egy ilyen számhoz 7-et adva az összeg 2-re fog végződni, tehát páros szám lesz.

Mivel az egyetlen páros prímszám a 2, és $5^{2004} + 7 > 2$, ezért biztosan összetett szám.

3. példa

Határozzuk meg azt a b pozitív egész számot, amelyre:

$$(a; b) = 12,\ [a; b] = 720 \text{ és } a = 36.$$

(a, b): a és b legnagyobb közös osztója

$[a; b]$: a és b legkisebb közös többszöröse

Megoldás

Készítsük el az adott számok prímtényezős felbontását:

$$12 = 2^2 \cdot 3;\quad 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5;\quad 36 = 2^2 \cdot 3^2.$$

12	2
6	2
3	3
1	

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

A b számot keressük prímtényezős alakban: prímtényezői a 2, 3 és 5.

A legnagyobb közös osztó a két szám közös prímtényezőit tartalmazza az előforduló kisebb hatványon.

A legkisebb közös többszörös pedig azokat a prímtényezőket tartalmazza, amelyek legalább az egyik szám prímtényezős felbontásában előfordulnak, az előforduló nagyobb hatványon.

A fentiek miatt a b szám prímtényezős felbontásában a 2-nek a 4-edik hatványon, a 3-nak az első hatványon, az 5-nek szintén az első hatványon kell szerepelnie. Tehát $b = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$.

4. példa

Milyen n természetes számok esetén lesz az $\frac{n+13}{n-5}$ tört értéke természetes szám?

Megoldás

Alakítsuk át a törtet úgy, hogy a nevezőt megjelenítjük a számlálóban, és a kapott összeget tagonként osztjuk:

$$\frac{n+13}{n-5} = \frac{n-5+5+13}{n-5} = \frac{(n-5)+18}{n-5} = 1+\frac{18}{n-5}.$$

A kapott tört akkor lesz természetes szám, ha az $n-5$ osztója a 18-nak.

Az $n-5$ lehetséges értékei:

$$1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 9;\ 18.$$

18 pozitív osztói:
1; 2; 3; 6; 9; 18

Ebből a megfelelő n értékek:

$$6;\ 7;\ 8;\ 11;\ 14;\ 23.$$

Ezekben az esetekben a tört:

$$19;\ 10;\ 7;\ 4;\ 3;\ 2.$$

5. példa

Írjuk át tízes számrendszerbe az 1233 négyes számrendszerbeli számot.

Megoldás

$$1233_4 = 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 = 111.$$

6. példa

Írjuk át nyolcas számrendszerbe az 1988 tízes számrendszerbeli számot.

Megoldás

Végezzük el a maradékos osztásokat:

$$1988 : 8 = 248, \text{ a maradék } 4;$$
$$248 : 8 = 31, \text{ a maradék } 0;$$
$$31 : 8 = 3, \text{ a maradék } 7;$$
$$3 : 8 = 0, \text{ a maradék } 3.$$

Tehát $1988 = 3704_8$.

Feladatok

1. Írjuk fel prímszámok hatványának szorzataként a következő számot: $35^7 \cdot 80^4 \cdot 28^3$.
2. Lehet-e prímszám a $10^{2004} + 11$?
3. Van-e olyan prímszám, amely után pontosan 10 összetett szám következik a természetes számsorban?
4. Igaz-e, hogy 25 egymást követő szám szorzata mindig osztható 2004-gyel? A választ indokoljuk!
5. Írjuk át a születési évünknek megfelelő tízes számrendszerbeli számot
   a) kettes; *b)* hatos számrendszerbe.
6. Tibi szerint az 1526 kisebb 1000-nél. Milyen számrendszerben lehet felírva az 1526, ha az 1000 tízes számrendszerben felírt szám?
7. Határozzuk meg azokat az $\overline{abcd}$ négyjegyű számokat, amelyekre
$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 2004.$$
8. Melyek azok az n egész számok, amelyekre $2n^2 - n - 36$ egy prímszám négyzetével egyenlő?

3. Hatvány, gyök, logaritmus

Hatványozás egész kitevőre

Definíciók:

$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ m tényezős szorzat; $a \in \mathbb{R}$; $m > 1$; $m \in \mathbb{N}^+$.

Ha $m = 1$, akkor definíció szerint $a^1 = a$.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a \neq 0$; $a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^+$.

$a^0 = 1$; $a \neq 0$; $a \in \mathbb{R}$.

hatványozás egész kitevőre

Azonosságok:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a \in \mathbb{R}$; $m, n \in \mathbb{Z}$.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; $m, n \in \mathbb{Z}$.

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; $b \neq 0$; $n \in \mathbb{Z}$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; $b \neq 0$; $n \in \mathbb{Z}$.

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$; $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

a hatványozás azonosságai

1. példa

Az x-nek hányadik hatványa

a) $\frac{(x^2)^4 \cdot (x^3)^3}{(x^4)^3 \cdot x}$ $(x \neq 0)$; b) $\frac{(x^{-3})^4 \cdot (x^{-4})^{-5}}{(x^3)^2 \cdot (x^4)^{-2}}$ $(x \neq 0)$?



Megoldás (a)

Bontsuk fel a zárójeleket, majd alkalmazzuk az azonosságokat:

$$\frac{(x^2)^4 \cdot (x^3)^3}{(x^4)^3 \cdot x} = \frac{x^8 \cdot x^9}{x^{12} \cdot x} = \frac{x^{17}}{x^{13}} = x^4.$$

Tehát a kifejezés x-nek negyedik hatványa.

Megoldás (b)

Alkalmazzuk az előző módszert:

$$\frac{(x^{-3})^4 \cdot (x^{-4})^{-5}}{(x^3)^2 \cdot (x^4)^{-2}} = \frac{x^{-12} \cdot x^{20}}{x^6 \cdot x^{-8}} = \frac{x^8}{x^{-2}} = x^{10}.$$

Tehát a kifejezés x-nek tizedik hatványa.

2. példa

Írjuk fel tovább nem egyszerűsíthető alakban a $\dfrac{20^4 \cdot 21^3 \cdot 75}{2 \cdot 10^4 \cdot 14^3 \cdot 15^3}$ törtet.

Megoldás

20	2	21	3	75	3
10	2	7	7	25	5
5	5	1		5	5
1				1	

Az alapokat írjuk fel prímszámok szorzataként, és alkalmazzuk a hatványozás azonosságait:

$$\frac{20^4 \cdot 21^3 \cdot 75}{2 \cdot 10^4 \cdot 14^3 \cdot 15^3} = \frac{(2^2 \cdot 5)^4 \cdot (3 \cdot 7)^3 \cdot (3 \cdot 5^2)}{2 \cdot (2 \cdot 5)^4 \cdot (2 \cdot 7)^3 \cdot (3 \cdot 5)^3} =$$

$$= \frac{2^8 \cdot 5^4 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot 3 \cdot 5^2}{2 \cdot 2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 7^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = \frac{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^3}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 7^3} = \frac{3}{5}.$$

3. példa

Számítsuk ki a gravitációs vonzóerőt a Föld és a Hold között, ha az erőtörvény: $F = \gamma \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, ahol $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$, m_1 és m_2 a két test tömege, r pedig a távolságuk. (A Föld tömege: $m_F = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg, a Hold tömege: $m_H = 7{,}347 \cdot 10^{22}$ kg, a Föld–Hold közepes távolság: 384 404 km.)

Megoldás

A távolságot adjuk meg méterben, és minden adatot normál alakban írva helyettesítsünk be az összefüggésbe.

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}947 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 7{,}347 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(3{,}844 \cdot 10^8\ \text{m})^2} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 5{,}974 \cdot 7{,}347 \cdot 10^{35}}{3{,}844^2 \cdot 10^{16}}\ \text{N} = 19{,}81 \cdot 10^{19}\ \text{N} = 1{,}981 \cdot 10^{20}\ \text{N}.$$

Egy 0-tól különböző valós szám esetén az $a \cdot 10^k$ alakot a szám normál alakjának nevezzük, ha $1 \le |a| < 10$ és $k \in \mathbb{Z}$.

Gyökvonás, hatványozás törtkitevőre

Definíció: **Egy nemnegatív a szám $2k$-adik *gyökén* ($k \in \mathbb{N}^+$) azt a nemnegatív számot értjük, amelynek $2k$-adik hatványa a.**

$$\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a, \text{ ha } a \ge 0.$$

gyökvonás

Definíció: **Egy a valós szám $2k+1$-edik *gyökén* ($k \in \mathbb{N}^+$) azt a valós számot értjük, amelynek $2k+1$-edik hatványa a.**

$$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a.$$

Azonosságok:

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\quad a,b\geq 0;\ n\in\mathbb{N};\ n\geq 2.$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\quad a\geq 0;b>0;\ n\in\mathbb{N};\ n\geq 2.$$

$$\sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k;\quad a>0;\ k\in\mathbb{Z};\ n\in\mathbb{N};\ n\geq 2.$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a};\quad a\geq 0;\ m,n\in\mathbb{N};\ m,n\geq 2.$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}};\quad a>0;\ m\in\mathbb{Z};\ n,k\in\mathbb{N};\ n,k\geq 2.$$

a gyökvonás azonosságai

Definíció: Az a pozitív szám $\frac{m}{n}$-edik *hatványa* az a alap m-edik hatványának n-edik gyöke:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ \text{ahol } a>0;\ m\in\mathbb{Z};\ n\in\mathbb{N}\ \text{és}\ n\geq 2.$$

törtkitevős hatvány

4. példa

Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3})$; *b)* $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$;

c) $(4\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{6})\cdot(4\cdot\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{6})$; *d)* $\left(\sqrt{8-2\cdot\sqrt{7}}+\sqrt{8+2\cdot\sqrt{7}}\right)^2$.

Megoldás (a)

Bontsuk fel a zárójeleket, és használjuk fel a négyzetgyök definícióját:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3})=3\cdot\sqrt{6}-3-3\cdot 2+\sqrt{6}=$$
$$=4\cdot\sqrt{6}-9.$$

Megoldás (b)

Alkalmazzuk a kéttagú különbség négyzetére vonatkozó azonosságot:

$$(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{7})^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=$$
$$=7-2\cdot\sqrt{21}+3=10-2\cdot\sqrt{21}.$$

Megoldás (c)

Alkalmazzuk az összeg és különbség szorzatára vonatkozó azonosságot:

$$(4\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{6})\cdot(4\cdot\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{6})=(4\cdot\sqrt{5})^2-(2\cdot\sqrt{6})^2=$$
$$=16\cdot 5-4\cdot 6=80-24=56.$$

Megoldás (d)

Az összeg négyzetre emelése után a kétszeres szorzatot vigyük egy gyökjel alá:

$$\left(\sqrt{8-2\cdot\sqrt{7}}+\sqrt{8+2\cdot\sqrt{7}}\right)^2 =$$

$$= 8-2\cdot\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{8-2\cdot\sqrt{7}}\cdot\sqrt{8+2\cdot\sqrt{7}}+8+2\cdot\sqrt{7} =$$

$$= 16+2\cdot\sqrt{(8-2\cdot\sqrt{7})\cdot(8+2\cdot\sqrt{7})} = 16+2\cdot\sqrt{8^2-(2\cdot\sqrt{7})^2} =$$

$$= 16+2\cdot\sqrt{64-28} = 16+2\cdot\sqrt{36} = 16+12 = 28.$$

5. példa

Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőit:

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; *b)* $\frac{7}{2-\sqrt{3}}$; *c)* $\frac{10}{\sqrt[4]{5}}$; *d)* $\frac{12}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}$.

Megoldás (a)

Bővítsük a törtet $\sqrt{6}$-tal:

$$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\cdot\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Megoldás (b)

Bővítsük a törtet $2+\sqrt{3}$-mal:

$$\frac{7}{2-\sqrt{3}} = \frac{7}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{7\cdot(2+\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{7\cdot(2+\sqrt{3})}{4-3} = 7\cdot(2+\sqrt{3}).$$

Megoldás (c)

Bővítsük a törtet $\sqrt[4]{5^3}$-nal:

$$\frac{10}{\sqrt[4]{5}} = \frac{10}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{10\cdot\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{10\cdot\sqrt[4]{125}}{5} = 2\cdot\sqrt[4]{125}.$$

Megoldás (d)

$(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

A gyöktelenítést az $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ azonosság felhasználásával, $\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{3^2}$-tel bővítve hajtjuk végre:

$$\frac{12}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}} = \frac{12}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{3^2}} =$$

$$= \frac{12\cdot\left(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{7-3} = 3\cdot\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}\right).$$

6. példa

Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\dfrac{x+5\cdot\sqrt{x}}{7\cdot\sqrt{x}+35}$; *b)* $\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x-9}$.

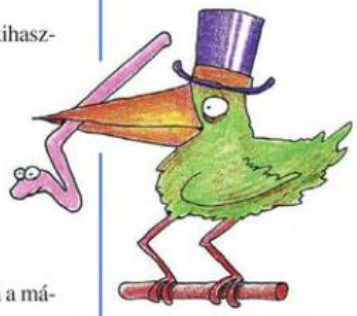
Megoldás (a)

A négyzetgyökös kifejezésnek csak akkor van értelme, ha $x \geq 0$.

A tört minden nemnegatív x esetén értelmezhető, hiszen $\sqrt{x}$ szintén nemnegatív.

Kiemeléssel alakítsunk szorzattá a számlálóban és a nevezőben, kihasználva, hogy ha $x \geq 0$, akkor $x=(\sqrt{x})^2$:

$$\frac{x+5\cdot\sqrt{x}}{7\cdot\sqrt{x}+35}=\frac{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+5)}{7\cdot(\sqrt{x}+5)}=\frac{\sqrt{x}}{7}.$$



Megoldás (b)

A kifejezés értelmezhető, ha $x \geq 0$ és $x \neq 9$.

A számláló $\sqrt{x}$ -re nézve másodfokú kifejezés, alakítsuk szorzattá a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakjának felhasználásával.

Az $y^2+y-6=0$ másodfokú egyenlet gyökei $y_1=2$ és $y_2=-3$. A bal oldal szorzat alakja:

$$(y-2)\cdot(y+3)=0.$$

A nevezőben a két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosság segítségével alakítsunk szorzattá:

$$\frac{x+\sqrt{x}-6}{x-9}=\frac{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)\cdot(\sqrt{x}+3)}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}.$$

7. példa

Számítsuk ki a $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ kifejezés értékét, ha $x=\dfrac{2}{3}$.

Megoldás

Világos, hogy $x \geq 0$ és $x \neq 4$. Először közös nevezőre hozzuk:

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=\frac{(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+2)}=$$

$$=\frac{x+2\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x}+2+x-2\cdot\sqrt{x}-\sqrt{x}+2}{x-4}=\frac{2x+4}{x-4}.$$

Ebbe a kifejezésbe helyettesítsünk:

$$\frac{2\cdot\frac{2}{3}+4}{\frac{2}{3}-4}=\frac{\frac{16}{3}}{-\frac{10}{3}}=-\frac{16}{10}=-1{,}6.$$

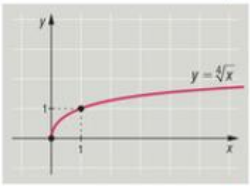
Ne lepődjünk meg, hogy a helyettesítési érték negatív, mert ha $0\le x<1$, akkor mindkét tört negatív értékű.

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$;
$a>0$; $n,k\ge 2$;
$n,k\in\mathbb{N}$; $m\in\mathbb{Z}$

8. példa

Melyik a nagyobb:

a) $2\cdot\sqrt[4]{10}$ vagy $3\cdot\sqrt[4]{2}$; *b)* $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$ vagy $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$?



2. ábra

Megoldás (a)

Vigyünk be mindkét kifejezésnél a gyökjel alá:

$$2\cdot\sqrt[4]{10}=\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{10}=\sqrt[4]{2^4\cdot 10}=\sqrt[4]{160};$$

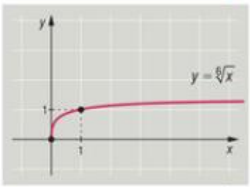
$$3\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{3^4\cdot 2}=\sqrt[4]{162}.$$

Mivel a negyedikgyök-függvény szigorúan növekvő ***(2. ábra)***, ezért

$$\sqrt[4]{162}>\sqrt[4]{160},$$

így

$$2\cdot\sqrt[4]{10}<3\cdot\sqrt[4]{2}.$$



3. ábra

Megoldás (b)

Írjuk fel mindkét kifejezést egy gyökjellel.

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{5^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{500};$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 5^2}=\sqrt[6]{200}.$$

Mivel a hatodikgyök-függvény szigorúan növekvő ***(3. ábra)***, ezért

$$\sqrt[6]{500}>\sqrt[6]{200},$$

így

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}>\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}.$$

9. példa

Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(\sqrt[5]{2}+3\cdot\sqrt[5]{8})\cdot(\sqrt[5]{16}-\sqrt[5]{4})$; *b)* $(\sqrt[3]{4}-2\cdot\sqrt[4]{8})\cdot(2\cdot\sqrt[4]{2}+\sqrt[6]{2})$.

Megoldás (a)

Bontsuk fel a zárójeleket, és hozzunk ki a gyökjel elé, ahol lehet:

$$(\sqrt[5]{2}+3\cdot\sqrt[5]{8})\cdot(\sqrt[5]{16}-\sqrt[5]{4})=$$

$$=\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{16}-\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{4}+3\cdot\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{16}-3\cdot\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}=$$

$$=\sqrt[5]{32}-\sqrt[5]{8}+3\cdot\sqrt[5]{128}-3\cdot\sqrt[5]{32}=$$

$$=2-\sqrt[5]{8}+3\cdot\sqrt[5]{32\cdot 4}-3\cdot 2=-4-\sqrt[5]{8}+6\cdot\sqrt[5]{4}.$$

Megoldás (b)

A zárójelfelbontás után alakítsunk ki azonos gyökkitevőket, ahol szükséges:

$$(\sqrt[3]{4}-2\cdot\sqrt[4]{8})\cdot(2\cdot\sqrt[4]{2}+\sqrt[6]{2})=$$

$$=2\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2}-2\cdot\sqrt[4]{8}\cdot2\cdot\sqrt[4]{2}-2\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[6]{2}=$$

$$=2\cdot\sqrt[12]{4^4\cdot2^3}+\sqrt[6]{4^2\cdot2}-4\cdot\sqrt[4]{16}-2\cdot\sqrt[12]{8^3\cdot2^2}=$$

$$=2\cdot\sqrt[12]{2^{11}}+\sqrt[6]{2^5}-4\cdot2-2\cdot\sqrt[12]{2^{11}}=\sqrt[6]{2^5}-8.$$

10. példa

Hányadik hatványa a 3-nak

a) $\dfrac{3^{\frac{2}{5}}\cdot9^{\frac{3}{5}}\cdot27^{-\frac{1}{5}}}{81^{\frac{1}{5}}}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{27^{-1}}}{\sqrt[3]{81}}$; c) $\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[5]{3^{-1}}}}$?

Megoldás (a)

$$\frac{3^{\frac{2}{5}}\cdot9^{\frac{3}{5}}\cdot27^{-\frac{1}{5}}}{81^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{\frac{2}{5}}\cdot(3^2)^{\frac{3}{5}}\cdot(3^3)^{-\frac{1}{5}}}{(3^4)^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{\frac{2}{5}}\cdot3^{\frac{6}{5}}\cdot3^{-\frac{3}{5}}}{3^{\frac{4}{5}}}=\frac{3^{\frac{2}{5}+\frac{6}{5}-\frac{3}{5}}}{3^{\frac{4}{5}}}=\frac{3^{\frac{5}{5}}}{3^{\frac{4}{5}}}=3^{\frac{1}{5}}.$$

Tehát a kifejezés 3-nak az $\frac{1}{5}$-dik hatványa.

Megoldás (b)

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{27^{-1}}}{\sqrt[3]{81}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot9^{\frac{1}{3}}\cdot(27^{-1})^{\frac{1}{2}}}{81^{\frac{1}{3}}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{2}{3}}\cdot3^{-\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{3}}}=$$

$$=\frac{3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{3}}}=\frac{3^{-\frac{1}{3}}}{3^{\frac{4}{3}}}=3^{-\frac{5}{3}}.$$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

$a>0;\ m\in\mathbb{Z};\ n\in\mathbb{N};\ n\geq2$

Tehát a kifejezés 3-nak a $-\frac{5}{3}$-dik hatványa.

Megoldás (c)

Írjuk fel a kifejezést egy gyökjellel, majd térjünk át a hatvány alakra:

$$\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[5]{3^{-1}}}}=\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{\sqrt[5]{3^5\cdot3^{-1}}}}=\sqrt{3\cdot\sqrt[15]{3^4}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt[15]{3^{15}\cdot3^4}}=\sqrt[30]{3^{19}}=3^{\frac{19}{30}}.$$

Tehát a kifejezés 3-nak a $\frac{19}{30}$-dik hatványa.

A logaritmus

logaritmus

$a^{\log_a b} = b$

DEFINÍCIÓ: A b szám a *alapú logaritmusa* az a kitevő, amelyre a-t emelve b-t kapunk, ahol $a > 0; a \neq 1$ és $b > 0$.
Jele: $\log_a b$.

A 10-es alapú logaritmus jele **lg**.

Az e alapú logaritmus jele **ln**.

a logaritmus azonosságai

TÉTEL: **A szorzat logaritmusa megegyezik a tényezők logaritmusának összegével.**

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,$$

ahol $x, y > 0;\ a > 0;\ a \neq 1$.

TÉTEL: **A tört logaritmusa a számláló és a nevező logaritmusának különbsége.**

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

ahol $x, y > 0;\ a > 0;\ a \neq 1$.

TÉTEL: **A hatvány logaritmusa az alap logaritmusának és a kitevőnek a szorzata.**

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x,$$

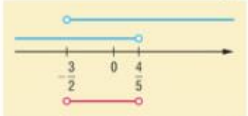
ahol $x > 0;\ a > 0;\ a \neq 1;\ k \in \mathbb{R}$.

TÉTEL: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, **ahol** $a, b, c > 0;\ a \neq 1;\ c \neq 1$.

11. példa

Határozzuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők:

a) $\log_5(4-5x) - \log_5(2x+3)$; *b)* $\lg(|x-1|-2) + 2 \cdot \lg(4x-3)$.



4. ábra

Megoldás (a)

A kifejezésnek akkor van értelme, ha $4-5x > 0$ és $2x+3 > 0$. *(4. ábra)*

Ezek megoldásai: $x < \dfrac{4}{5}$, illetve $x > -\dfrac{3}{2}$.

A közös megoldás: $-\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{4}{5}$.

Megoldás (b)

A kifejezésnek akkor van értelme, ha $|x-1|-2>0$ és $4x-3>0$.

Az első megoldása: $|x-1|>2$.

Ha $x \geq 1$:

$$\left.\begin{array}{r} x-1>2 \\ x>3 \end{array}\right\} \text{ a közös megoldás: } x>3.$$

Ha $x<1$:

$$\left.\begin{array}{r} -x+1>2 \\ x<-1 \end{array}\right\} \text{ a közös megoldás: } x<-1.$$

A második egyenlőtlenség megoldása: $x>\frac{3}{4}$.

A kifejezésnek akkor van értelme, ha mindkét feltétel teljesül, tehát ha $x>3$. *(5. ábra)*



5. ábra

12. példa

Számítsuk ki a következő hatványok értékét:

a) $10^{2-\lg 8}$; *b)* $8^{\log_8 5-1}$; *c)* $0{,}25^{\log_2 5}$; *d)* $3^{3-\log_9 49}$.

Megoldás (a)

Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait és a logaritmus definícióját:

$$10^{2-\lg 8}=\frac{10^2}{10^{\lg 8}}=\frac{100}{8}=12{,}5.$$

Megoldás (b)

Az előző módszerrel:

$$8^{\log_8 5-1}=\frac{8^{\log_8 5}}{8}=\frac{5}{8}.$$

Megoldás (c)

Az alapot írjuk fel 2 hatványaként, és alkalmazzuk az előbbi módszereket:

$$0{,}25^{\log_2 5}=\left(2^{-2}\right)^{\log_2 5}=\left(2^{\log_2 5}\right)^{-2}=5^{-2}=\frac{1}{25}.$$

Megoldás (d)

A definíció alkalmazásához a hatványalapot írjuk fel a logaritmus alapjának hatványaként:

$$3^{3-\log_9 49}=\frac{3^3}{3^{\log_9 49}}=\frac{27}{\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 49}}=\frac{27}{\left(9^{\log_9 49}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{27}{49^{\frac{1}{2}}}=\frac{27}{7}.$$



13. példa

Számítsuk ki a kifejezések értékét:

a) $\log_2 \dfrac{4\cdot 2^3\cdot 16}{64^2}$; *b)* $\ln \dfrac{e^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{e}\cdot\sqrt[3]{e^2}\cdot e^2}{\sqrt[6]{e^5}\cdot e^{-1}}$.

Megoldás (a)

I. megoldás

Írjuk fel a számokat 2 hatványaként, és végezzük el a hatványműveleteket:

$$\log_2 \frac{4\cdot 2^3\cdot 16}{64^2} = \log_2 \frac{2^2\cdot 2^3\cdot 2^4}{(2^6)^2} = \log_2 \frac{2^9}{2^{12}} = \log_2 2^{-3} = -3.$$

II. megoldás

Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\log_2 \frac{4\cdot 2^3\cdot 16}{64^2} = \log_2 4 + \log_2 2^3 + \log_2 16 - \log_2 64^2 =$$
$$= 2+3+4-2\cdot 6 = -3.$$

Megoldás (b)

A változókat írjuk fel e hatványaként:

$$\ln \frac{e^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{e}\cdot\sqrt[3]{e^2}\cdot e^2}{\sqrt[6]{e^5}\cdot e^{-1}} = \ln \frac{e^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+2}}{e^{\frac{5}{6}-1}} = \ln \frac{e^{\frac{17}{6}}}{e^{-\frac{1}{6}}} = \ln e^3 = 3.$$

Feladatok

1. 3-nak melyik az a legnagyobb hatványa, amellyel a $15^4\cdot 27^5\cdot 45^3$ osztható?
2. Hány nullára végződik a $125^5\cdot 144^3\cdot 96^2$ szorzat?
3. Egy felnőtt ember szíve egy szívdobbanás alatt körülbelül annyi munkát végez, amennyi elég lenne egy 1 kg tömegű test 20 cm magasra való felemeléséhez. Szívünk percenként körülbelül 70-et ver.
   a) Eddigi életünk során a szívünk által végzett összes munkával hány méter magasra emelhetnénk fel a testünket?
   b) Ennyi munkával mekkora tömegű testet lehetne felemelni 1 m magasra?
4. Számítsuk ki a következő törtek értékét:

   a) $\dfrac{16^{-3}\cdot 64^4\cdot 2^{-3}}{32^2\cdot 8^{-2}}$; *b)* $\dfrac{36^{-4}\cdot 54^{-2}}{108^{-3}}$; *c)* $\dfrac{16^{-\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{3}{2}}\cdot 32^{-\frac{1}{5}}}$.

5. Bizonyítsuk be, hogy

   a) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2$; *b)* $\sqrt{16-6\cdot\sqrt{7}} = 3-\sqrt{7}$.

6. Melyik a nagyobb:

a) $\dfrac{15}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ vagy $\dfrac{1}{\sqrt{19}-3\cdot\sqrt{2}}$; *b)* $\dfrac{16}{\sqrt{15}+\sqrt{7}}$ vagy $\dfrac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{13}}$?

7. Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők. Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

a) $\dfrac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{5a+25}}\cdot\dfrac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{2a-6}}$; *b)* $\dfrac{3\cdot\sqrt{b}-12}{2\cdot\sqrt{b}-2}:\dfrac{\sqrt{b}-4}{4\cdot\sqrt{b}-4}$.

8. Bizonyítsuk be, hogy a következő kifejezés értéke bármely pozitív egész n esetén osztható 4-gyel:

$$\sqrt{\frac{2n+\sqrt{4n^2-1}}{2n-\sqrt{4n^2-1}}}+\sqrt{\frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{2n+\sqrt{4n^2-1}}}.$$

9. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}\right)$; *b)* $\left(\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{6}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{60}+\sqrt[3]{36}\right)$;

c) $\left(\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{5}\right)\cdot\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{11}+\sqrt[4]{5}\right)$.

10. Állítsuk növekvő sorrendbe a következő számokat:

a) $27^{\frac{1}{3}}$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$, $9^{\frac{3}{2}}$, $\left(\dfrac{81}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$, $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-1}$;

b) $7^{\log_7 5-1}$, $7^{1-\log_{49}25}$, $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\log_7 3}$, $7^{\log_{\frac{1}{7}}5}$, $49^{\log_7 2}$, $7^{\log_{13}1}$;

c) $\log_3\dfrac{1}{27}$, $\log_{25}5$, $\log_{\sqrt{2}}8$, $\log_{27}\dfrac{1}{3}$, $\log_2 0{,}125$.

11. Számítsuk ki x értékét, ha

a) $\lg x=\lg 20-\lg 15+\lg 30-\lg 4$; *b)* $\lg x=2\cdot\lg 5-3\cdot\lg 2$;

c) $\lg x=\dfrac{1}{2}\cdot\lg 16-\dfrac{1}{3}\cdot\lg 37-2\cdot\lg 2+\dfrac{1}{4}\cdot\lg 81$.

4. Műveletek racionális kifejezésekkel

Egész kifejezések (polinomok)

3D

nevezetes szorzatok

NEVEZETES SZORZATOK:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2.$$

szorzattá alakítás

A SZORZATTÁ ALAKÍTÁS MÓDSZEREI:

- **kiemelés;**
- **kiemelés csoportosítással;**
- **nevezetes azonosságok alkalmazása;**
- **másodfokú egyenlet gyöktényezős alakjának felhasználása.**

1. példa

Bontsuk fel a zárójeleket, és végezzük el a lehetséges összevonásokat:

a) $(2a-3)\cdot(4a+1)-(3a-5)$;

b) $(4b+3)\cdot(4b-3)-(3b-2)\cdot(3b+2)$.

Megoldás (a)

A zárójel felbontása és az összevonás után:

$$(2a-3)\cdot(4a+1)-(3a-5) = 8a^2+2a-12a-3-3a+5 =$$
$$= 8a^2-13a+2.$$

Megoldás (b)

Alkalmazzuk az összeg és különbség szorzására vonatkozó azonosságot:

$$(4b+3)\cdot(4b-3)-(3b-2)\cdot(3b+2) =$$
$$= 16b^2-9-9b^2+4 = 7b^2-5.$$

2. példa

Végezzük el a műveleteket, és a kapott polinomot rendezzük x csökkenő hatványai szerint:

a) $(3x+2)^2-(2x-3)^2$; *b)* $(2x-1)^3-(x+4)^3$; *c)* $(2x+y-3)^2$.

Megoldás

a) $(3x+2)^2-(2x-3)^2 = 9x^2+12x+4-(4x^2-12x+9) =$
$= 9x^2+12x+4-4x^2+12x-9 = 5x^2+24x-5$;

b) $(2x-1)^3-(x+4)^3=8x^3-12x^2+6x-1-(x^3+12x^2+48x+64)=$
$=8x^3-12x^2+6x-1-x^3-12x^2-48x-64=7x^3-24x^2-42x-65;$

c) $(2x+y-3)^2=4x^2+y^2+9+4xy-12x-6y=$
$=4x^2+4xy-12x+y^2-6y+9.$

3. példa

Melyik kéttagú kifejezés négyzete lehet:

a) $25x^2+10x+1$; *b)* x^6-14x^3+49; *c)* $x^4-8x^2y+16y^2$?

Megoldás

a) $25x^2+10x+1=(5x+1)^2=(-5x-1)^2$;

b) $x^6-14x^3+49=(x^3-7)^2=(7-x^3)^2$;

c) $x^4-8x^2y+16y^2=(x^2-4y)^2=(4y-x^2)^2$.

4. példa

Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

a) $6x^2-4x^3+8x^2$; *b)* $2x^2+4x+xy+2y$; *c)* $9x^2-25y^2$;
d) $3x^2-12x+12$; *e)* $x^2+2x-15$.

Megoldás (a)

Emeljük ki a $2x^2$-et mindegyik tagból:

$$6x^4-4x^3+8x^2=2x^2\cdot(3x^2-2x+4).$$

A $3x^2-2x+4=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D=4-48=$
$=-44$, ezért az egyenletnek nincs megoldása, tehát a $3x^2-2x+4$ másodfokú polinom nem alakítható szorzattá.

Megoldás (b)

Emeljünk ki az első két tagból $2x$-et, az utolsó kettőből pedig y-t, majd az újabb kiemelés után:

$$2x^2+4x+xy+2y=2x\cdot(x+2)+y\cdot(x+2)=$$
$$=(x+2)\cdot(2x+y).$$

Megoldás (c)

Vegyük észre a nevezetes szorzatot:

$$9x^2-25y^2=(3x+5y)\cdot(3x-5y).$$

Megoldás (d)

A 3 kiemelése után egy kéttagú kifejezés négyzete marad a zárójelben:

$$3x^2-12x+12x+12=3\cdot(x^2-4x+4)=3\cdot(x-2)^2.$$

Megoldás (e)

I. megoldás

Alakítsunk teljes négyzetté, majd alkalmazzuk a nevezetes szorzatokat:

$$x^2+2x-15=x^2+2x+1-1-15=(x+1)^2-16=$$

$$=(x+1)^2-4^2=(x+1+4)\cdot(x+1-4)=(x+5)\cdot(x-3).$$

II. megoldás

A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakját használjuk fel.

Az $ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja, ha $D\geq 0$:
$a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$,
ahol x_1 és x_2 a másodfokú egyenlet gyökei.

Oldjuk meg az $x^2+2x-15=0$ egyenletet:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\begin{cases}x_1=3,\\x_2=-5.\end{cases}$$

A gyöktényezős alaknak megfelelően:

$$x^2+2x-15=(x-3)\cdot(x+5).$$

Az algebrai törtek

5. példa

Egyszerűsítsük az alábbi törteket:

a) $\dfrac{a^2+4a+4}{3a+6}$; *b)* $\dfrac{2b^3-12b^2+18b}{b^3-9b}$.

Megoldás (a)

Az első lépés a tört értelmezése: $3a+6\neq 0$, tehát $a\neq -2$.

A számlálót és a nevezőt is alakítsuk szorzattá, majd az azonos tényezőkkel egyszerűsítsünk:

$$\frac{a^2+4a+4}{3a+6}=\frac{(a+2)^2}{3\cdot(a+2)}=\frac{a+2}{3}.$$



Megoldás (b)

A nevező nem lehet nulla: $b^3-9b\neq 0$.

Szorzattá alakítással:

$$b^3-9b=b\cdot(b^2-9)=b\cdot(b+3)\cdot(b-3).$$

Tehát $b\neq 0$, $b\neq -3$, $b\neq 3$.

Kiemeléssel a számláló is szorzattá alakítható:

$$\frac{2b^3-12b^2\cdot 318b}{b^3-9b}=\frac{2b\cdot(b^2-6b+9)}{b\cdot(b-3)\cdot(b+3)}=$$

$$=\frac{2b\cdot(b-3)^2}{b\cdot(b-3)\cdot(b+3)}=\frac{2\cdot(b-3)}{b+3}.$$

6. példa

Hozzuk a legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\frac{2a+1}{a-3}-\frac{a-1}{a+3}-\frac{11a+9}{a^2-9}.$$

Megoldás

A törteknek csak akkor van értelmük, ha a nevezőjük nem nulla: $a \neq 3$ és $a \neq -3$.

Mivel $a^2-9=(a-3)\cdot(a+3)$, ezért ez a szorzat legyen a közös nevező:

$$\frac{2a+1}{a-3}-\frac{a-1}{a+3}-\frac{11a+9}{a^2-9}=$$

$$=\frac{(2a+1)\cdot(a+3)}{(a-3)\cdot(a+3)}-\frac{(a-1)\cdot(a-3)}{(a-3)\cdot(a+3)}-\frac{11a+9}{(a-3)\cdot(a+3)}=$$

$$=\frac{2a^2+6a+a+3-a^2+3a-3-11a-9}{(a-3)\cdot(a+3)}=\frac{a^2-9}{(a-3)\cdot(a+3)}=1.$$

7. példa

Számítsuk ki a $\frac{3b-1}{b^2-b}-\frac{4}{b+1}+\frac{2b-6}{b^2-1}$ kifejezés értékét, ha $b=\frac{1}{23}$.

Megoldás

A nevezőket alakítsuk szorzattá:

$$b^2-b=b\cdot(b-1);$$

$$b^2-1=(b-1)\cdot(b+1).$$

A szorzatalakokból kiolvasható, hogy a törteknek akkor van értelmük, ha $b \neq 0$; $b \neq 1$; $b \neq -1$. Az adott b érték behelyettesíthető, ezt megelőzően hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezést.

A közös nevező $b\cdot(b-1)\cdot(b+1)$.

$$\frac{3b-1}{b^2-b}-\frac{4}{b+1}+\frac{2b-6}{b^2-1}=$$

$$=\frac{(3b-1)\cdot(b+1)}{b\cdot(b-1)\cdot(b+1)}-\frac{4\cdot b\cdot(b-1)}{b\cdot(b-1)\cdot(b+1)}+\frac{(2b-6)}{b\cdot(b-1)\cdot(b+1)}=$$

$$=\frac{3b^2+3b-b-1-4b^2+4b+2b^2-6b}{b\cdot(b-1)\cdot(b+1)}=$$

$$=\frac{b^2-1}{b\cdot(b-1)\cdot(b+1)}=\frac{1}{b}.$$

Ha $b=\frac{1}{23}$, akkor a kifejezés helyettesítési értéke 23.

Feladatok

1. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:
   a) $8a^2-6a$; *b)* $25b^4-b^2$; *c)* $28c^2+84c+63$.

2. Legyenek a, b, c, d egymást növekvő sorrendben követő szomszédos természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy $a+b^2+c^3$ osztható d^2-tel.

3. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét, ha $x = 2004$:
   a) $\dfrac{2x^2-16x+32}{4x-16}$; *b)* $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+10x+25}+\dfrac{x+9}{x+5}$.

4. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:
   a) $\dfrac{2x-1}{2x-6}+\dfrac{x-1}{x+3}-\dfrac{2x^2+1}{x^2-9}$; *b)* $\dfrac{3}{b^2+b}-\dfrac{5}{b^2-b}+\dfrac{8}{b^3-b}$;
   c) $\left(\dfrac{8}{x^2-4}-\dfrac{2}{3x-6}+\dfrac{2}{x+2}\right)\cdot\dfrac{x-2}{x-4}$.

5. Egyenletek, egyenlőtlenségek

Elsőfokú egyenletekre, egyenlőtlenségekre vezető feladatok

a szöveges feladatok megoldásának menete

1. **A szövegben logikai összefüggéseket keresünk, és megválasztjuk az ismeretlent. (Az ismeretlent leggyakrabban a kérdés alapján célszerű megválasztani.)**
2. **Felírjuk az egyenletet.**
3. **Megoldjuk.**
4. **Ellenőrizzük a megoldást a szöveg alapján.**
5. **Megfogalmazzuk a választ.**

1. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$7\cdot(x+3)-5\cdot(x-1)=3\cdot(x+4)+6x.$$

Megoldás

Először végezzük el mindkét oldalon a zárójelek felbontását, majd vonjuk össze az egynemű tagokat:

zárójelfelbontás

$$7x+21-5x+5=3x+12+6x,$$
$$2x+26=9x+12.$$

Mindkét oldalról elvéve 12-t, illetve $2x$-et:

mérlegelv

$$14=7x,$$
$$2=x.$$

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe, mindkét oldalon 30 lesz az érték, tehát az egyenlet megoldása az $x=2$.

ellenőrzés

2. példa

A mazsolaszőlőnek 85 százaléka, a boltban kapható szárított mazsolának 18 százaléka víz. Mennyi mazsolaszőlőből készül 500 g mazsola?

Megoldás

Jelöljük a megfelelő tömeget kg-ban mérve x-szel. A víz egy része a szárítás során elvész, ezért számítsuk ki mindkét esetben a gyümölcsben lévő „szárazanyag" mennyiségét. A friss szőlőben: $x\cdot 0{,}15$ kg, a boltban kapható 500 g mazsolában: $0{,}5\cdot 0{,}82$.

szövegértelmezés, az egyenlet felírása

A „szárazanyag" mennyisége a két esetben azonos: $x\cdot 0{,}15=0{,}5\cdot 0{,}82$, amiből

$$x=\frac{0{,}5\cdot 0{,}82}{0{,}15},$$
$$x=2{,}733.$$

Az eredmény helyessége visszahelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető. Tehát 2,73 kg mazsolaszőlőből készül 500 g mazsola.

3. példa

Van-e megoldása az egész számok halmazán a következő egyenletnek?

$$\frac{x+5}{x+3}-\frac{x-4}{x-3}=\frac{5x-2}{x^2-9}.$$

Megoldás

az alaphalmaz, az értelmezési tartomány vizsgálata

Az alaphalmaz: $\mathbb{Z}$. A nevezők miatt $x+3\neq 0$, és $x^2-9\neq 0$. Mindhárom feltétel teljesül, ha $x\neq -3$ és $x\neq 3$.

Mindkét oldalt szorozzuk meg a törtek közös nevezőjével, x^2-9-cel, bontsuk fel a zárójeleket, és vonjuk össze az egynemű tagokat:

$$(x+5)\cdot(x-3)-(x-4)\cdot(x+3)=5x-2,$$

mérlegelv

$$x^2-3x+5x-15-x^2-3x+4x+12=5x-2,$$

$$3x-3=5x-2.$$

Mindkét oldalról vegyünk el $3x$-et, és adjunk hozzá 2-t, majd mindkét oldalt 2-vel osztva:

$$-1=2x,$$

$$x=-\frac{1}{2}.$$

A kapott eredmény nem eleme az alaphalmaznak. Tehát az egyenletnek nincs megoldása az egész számok halmazán.

4. példa

Szegedről a 224 km-re lévő Debrecen felé indul reggel 8 órakor egy motoros 50 km/h sebességgel. Debrecenből 8 óra 40 perckor elindul egy másik motoros 60 km/h sebességgel Szeged felé. Mikor találkoznak? Melyik motoros tesz meg több utat a találkozásig?

Megoldás

a szöveg értelmezése, táblázat készítése

Jelöljük x-szel a Szegedről induló motoros menetidejét a találkozásig. A Debrecenből induló másik motoros menetideje 40 perccel, azaz $\frac{2}{3}$ órával kevesebb.

Foglaljuk táblázatba az adatokat:

	Szegedről induló motoros	Debrecenből induló motoros
Sebesség (km/h)	50	60
Idő (h)	x	$x-\frac{2}{3}$
Út (km)	$50x$	$60\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$

A találkozásig a motorosok által megtett utak összege a két város távolsága, ezért a következő egyenlet írható fel:

az egyenlet felírása

$$50x + 60 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) = 224,$$

az egyenlet megoldása

$$50x + 60x - 40 = 224,$$
$$110x - 40 = 224,$$
$$110x = 264,$$
$$x = 2{,}4.$$

A találkozásig 2,4 óra, azaz 2 óra 24 perc telik el.

ellenőrzés

Ellenőrizzük az eredményt: a Szegedről induló motoros 2,4 óra alatt 120 km-t tesz meg, a másik motoros 1 óra 44 perc alatt 104 km-t motorozik, a két út összege valóban 224 km.

A motorosok 10 óra 24 perckor találkoznak, és a találkozásig a Szegedről induló tesz meg több utat.

5. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$|2x - 3| - 4 = |x + 5|.$$

$|x| = \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0, \\ -x, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$

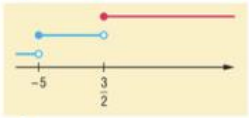
Megoldás

Értelmezzük az egyenletben előforduló abszolút értékes kifejezéseket:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, \text{ ha } x \geq \frac{3}{2}, \\ -2x + 3, \text{ ha } x < \frac{3}{2}, \end{cases}$$

és

$$|x + 5| = \begin{cases} x + 5, \text{ ha } x \geq -5, \\ -x - 5, \text{ ha } x < -5. \end{cases}$$



6. ábra

A kapott értelmezési tartományok alapján a 6. ábrának megfelelően a számegyenest három tartományra osztjuk.

I. eset: Ha $x < -5$, akkor az egyenlet:

$$-2x + 3 - 4 = -x - 5,$$
$$-2x - 1 = -x - 5,$$
$$4 = x.$$

Az $x = 4$ nem eleme az alaphalmaznak, tehát nem megoldás.

II. eset: Ha $-5 \leq x < \frac{3}{2}$, akkor az egyenlet:

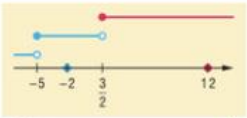
$$-2x + 3 - 4 = x + 5,$$
$$-2x - 1 = x + 5,$$
$$-6 = 3x,$$
$$-2 = x.$$

Az $x = -2$ eleme az alaphalmaznak, és ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy valóban megoldás.

III. eset: Ha $\frac{3}{2} \leq x$, akkor az egyenlet:

$$2x - 3 - 4 = x + 5,$$
$$2x - 7 = x + 5,$$
$$x = 12.$$

A kapott gyök eleget tesz a III. feltételnek, és az ellenőrzés igazolja, hogy valóban megoldás.

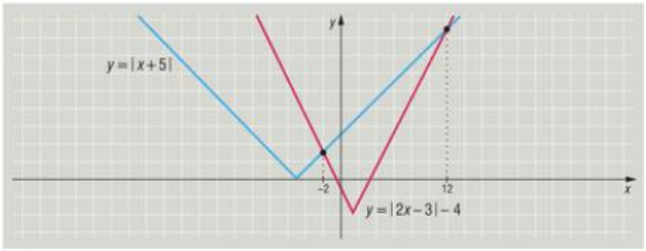


7. ábra

Az egyenlet megoldásai tehát *(7. ábra)*:

$$x_1 = -2 \quad \text{és} \quad x_2 = 12.$$

Megjegyzés: Az egyenlet megoldható grafikus úton is. Ekkor a két oldal segítségével értelmezett függvények metszéspontját kell megkeresni. *(8. ábra)*



8. ábra

A négyzetgyökös egyenletek megoldása során gyakran elkerülhetetlen a négyzetre emelés. Ha a két oldal azonos előjelű, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.
A megoldásokat feltétlenül ellenőrizzük!

6. példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{3x+1} = 4$; *b)* $\sqrt{4x+3} + \sqrt{-1-x} = 2$.

Megoldás (a)

Első lépésként határozzuk meg az egyenlet értelmezési tartományát. Mivel a négyzetgyökjel alatt nem állhat negatív szám, ezért $3x+1 \geq 0$, azaz $x \geq -\frac{1}{3}$. *(9. ábra)*



9. ábra

Mindkét oldal nemnegatív, ilyen esetekben a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

Ezt elvégezve:

$$3x + 1 = 16,$$
$$3x = 15,$$
$$x = 5.$$



10. ábra

A kapott gyök valóban megoldás, mert egyrészt eleme az értelmezési tartománynak, másrészt az ellenőrzés: $\sqrt{3 \cdot 5 + 1} = \sqrt{16} = 4$ is ezt mutatja. *(10. ábra)*

11. ábra



Megoldás (b)

Az értelmezési tartomány vizsgálata: $4x+3 \geq 0$ és $-1-x \geq 0$.

Megoldásuk:

$$x \geq -\frac{3}{4} \quad \text{és} \quad x \leq -1.$$

A két egyenlőtlenség megoldáshalmazának nincs közös eleme.

Mivel az egyenlet értelmezési tartománya az üres halmaz, ezért az egyenletnek nincs megoldása. *(11. ábra)*

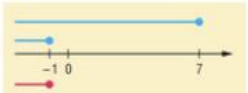
7. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{7-x}-\sqrt{-1-x}=2.$$

Megoldás

Az értelmezési tartomány vizsgálata *(12. ábra)*: $7-x\geq 0$ és $-1-x\geq 0$. Az egyenlőtlenségek megoldásai: $7\geq x$ és $-1\geq x$. A két halmaz metszete: $-1\geq x$.



12. ábra

Rendezzük úgy az egyenletet, hogy mindkét oldal nemnegatív legyen:

$$\sqrt{7-x}=2+\sqrt{-1-x}.$$

Négyzetre emelve:

$$7-x=4+4\cdot\sqrt{-1-x}-1-x.$$

Átrendezve:

$$4=4\cdot\sqrt{-1-x}.$$

4-gyel osztva és újra négyzetre emelve:

$$1=\sqrt{-1-x},$$
$$1=-1-x,$$
$$x=-2.$$

A kapott eredmény eleme az értelmezési tartománynak.

Ellenőrizzük a bal oldal értékét:

$$\sqrt{7-(-2)}-\sqrt{-1-(-2)}=\sqrt{9}-\sqrt{1}=2.$$

Tehát az egyenlet megoldása $x=-2$.

8. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$3\cdot(x-7)-5\cdot(2x-3)>7\cdot(3x-4).$$

Megoldás

A zárójelek felbontása után vonjuk össze az egynemű tagokat:

$$3x-21-10x+15>21x-28,$$
$$-7x-6>21x-28.$$

Rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$-28x>-22,$$

Negatív számmal való osztás!

$$x<\frac{22}{28}.$$

A végeredmény 2-vel egyszerűsítve:

$$x<\frac{11}{14}.$$

9. példa

Mely természetes számokra igaz a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{3}{2}\cdot x-1-\frac{1}{5}\cdot(5x-4)<\frac{x+11}{10}.$$

Megoldás

A közös nevezőre hozás után szorozzuk mindkét oldalt:

$$\frac{15x}{10}-1-\frac{2\cdot(5x-4)}{10}<\frac{x+11}{10},$$

$$15x-10-2\cdot(5x-4)<x+11.$$

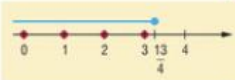
A zárójel felbontása után vonjunk össze, majd rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$15x-10-10x+8<x+11,$$

$$5x-2<x+11,$$

$$4x<13,$$

$$x<\frac{13}{4}.$$



13. ábra

Az eredményt vessük össze a kiindulási halmazzal *(13. ábra)*.

Tehát az egyenlőtlenségnek megfelelő természetes számok:

$$\{0;\,1;\,2;\,3\}.$$



10. példa

A p paraméter mely értékeire lesz a következő egyenlet megoldása 1-nél nagyobb?

$$3\cdot(x-2)=p\cdot(x+2)-1.$$

Megoldás

A zárójelek felbontása után oldjuk meg az egyenletet:

$$3\cdot(x-2)=p\cdot(x+2)-1,$$

$$3x-6=px+2p-1,$$

$$3x-px=2p+5,$$

$$x\cdot(3-p)=2p+5.$$

Ha $p=3$, az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $p\neq 3$, a megoldás:

$$x=\frac{2p+5}{3-p}.$$

Azokat a p értékeket keressük, amelyekre:

$$\frac{2p+5}{3-p}>1.$$

Egy oldalra rendezve és közös nevezőre hozva:

$$\frac{2p+5}{3-p}-1>0,$$

$$\frac{2p+5-3+p}{3-p}>0,$$

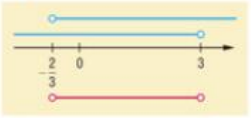
$$\frac{3p+2}{3-p}>0.$$

Egy tört akkor pozitív, ha számlálója és nevezője azonos előjelű. Két eset lehetséges.

I. eset:

$$3p+2>0, \quad \text{és} \quad 3-p>0,$$
$$p>-\frac{2}{3}, \qquad 3>p.$$

Számegyenesen ábrázolva a 14. ábrán.



14. ábra

A közös halmaz:

$$-\frac{2}{3}<p<3.$$

II. eset:

$$3p+2<0, \quad \text{és} \quad 3-p<0,$$
$$p<-\frac{2}{3}, \qquad 3<p.$$

Számegyenesen ábrázolva a 15. ábrán.



15. ábra

A két halmaznak nincs közös eleme.

Tehát a fenti egyenlet megoldása akkor nagyobb 1-nél, ha

$$-\frac{2}{3}<p<3.$$

11. példa

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\sqrt{2x-3}<2.$$

Megoldás

Az egyenlőtlenségnek akkor van értelme, ha $2x-3\geq 0$, azaz $x\geq\frac{3}{2}$.

Mivel mindkét oldal nemnegatív, négyzetre emelve az egyenlőtlenség iránya nem változik meg:

$$2x-3<4,$$

ennek megoldása:

$$x<\frac{7}{2}.$$

Az értelmezési tartománnyal egybevetve a megoldás *(16. ábra)*:

$$\frac{3}{2}\leq x<\frac{7}{2}.$$



16. ábra

Másodfokú egyenletekre, egyenlőtlenségekre vezető feladatok

a másodfokú egyenlet megoldásai

TÉTEL: Az $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ másodfokú egyenletnek

– **két** valós gyöke van:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

ha $D=b^2-4ac>0$;

– **egy** valós gyöke van: $x=-\frac{b}{2a}$, ha $D=b^2-4ac=0$;

– **nincs** valós gyöke, ha $D=b^2-4ac<0$.

gyöktényezős alak

DEFINÍCIÓ: Az $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$, $D\geq 0$ alakot a másodfokú egyenlet *gyöktényezős alakjának* nevezzük.

Viète-féle formulák

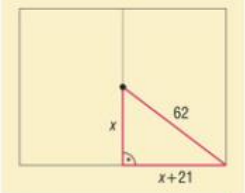
Az $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között fennállnak a következő összefüggések:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad\text{és}\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Ezeket az összefüggéseket Viète-féle formuláknak is nevezzük.

12. példa

Egy futballpálya hossza 42 méterrel több, mint a szélessége. A középpont 62 méterre van a szögletzászlótól. Adjuk meg a pálya méreteit.



17. ábra

Megoldás

Készítsünk ábrát. A téglalap középpontját kössük össze az egyik csúccsal és a hosszabb oldal felezőpontjával. Legyen x ez utóbbi szakasz hossza. A kialakuló derékszögű háromszög másik befogója a szöveg szerint $x+21$, az átfogó 62 m. *(17. ábra)*

Felírva a Pitagorasz-tételt:

$$x^2+(x+21)^2=62^2.$$

Elvégezve a műveleteket és rendezve:

$$2x^2+42x-3403=0.$$

Alkalmazzuk a megoldóképletet:

$$x_{1,2}=\frac{-42\pm\sqrt{42^2+4\cdot 2\cdot 3403}}{4}.$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A számítás eredménye:

$$x_1 = 32{,}065 \quad \text{és} \quad x_2 = -53{,}065.$$

Természetesen csak a pozitív megoldás felel meg, a keresett érték kerekítve 32 m.

Tehát a pálya körülbelül 64 méter széles és 106 méter hosszú.

13. példa

Egy puzzle kirakása az anyának egyedül 2 órával több ideig tartana, mint a fiának. Ketten együtt 2 óra 24 perc alatt tudják kirakni. Mennyi idő alatt rakná ki a fiú egyedül?

Megoldás

Jelöljük x-szel azt az időt, amely alatt a fiú egyedül kirakná a puzzle-t, ekkor az anyának erre $x+2$ órára lenne szüksége.

$2 \text{ óra } 24 \text{ perc} = 2\frac{24}{60} \text{ óra} = 2\frac{2}{5} \text{ óra} = \frac{12}{5} \text{ óra}$

A fiú egy óra alatt a munka $\frac{1}{x}$ részét, az anya $\frac{1}{x+2}$ részét végzi el.

Amikor együtt dolgoznak, teljesítményük összeadódik, így egy óra alatt a munka

$$\frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

részét végzik el.

Felírható a következő egyenlet:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}.$$

Beszorzás után:

$$12 \cdot (x+2) + 12x = 5x \cdot (x+2),$$
$$12x + 24 + 12x = 5x^2 + 10x.$$

Rendezve:

$$0 = 5x^2 - 14x - 24.$$

A megoldóképlettel megoldva:

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 + 4 \cdot 5 \cdot 24}}{10},$$

amiből

$$x_1 = 4 \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{6}{5}.$$

A puzzle kirakására csak a pozitív megoldás jöhet szóba, az ellenőrzés azt mutatja, hogy ez jó is.

Tehát a fiú egyedül 4 óra alatt, az anya pedig 6 óra alatt tudja kirakni a puzzle-t.

14. példa

Adott az alábbi paraméteres másodfokú egyenlet:

$$3x^2-5x+c=0.$$

a) A c paraméter mely értékei esetén van az egyenletnek valós megoldása?

b) Mely c értékek esetén van az egyenletnek két negatív megoldása?

c) Mely c érték esetén lesz a gyökök négyzetösszege 3?

d) Milyen c értékek esetén egyszerűsíthető a következő tört?

$$\frac{3x^2-5x+c}{x^2+x-12}.$$

Az $ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet diszkriminása: $D=b^2-4ac$.
Ha $D>0$, akkor 2 valós megoldás van.
Ha $D=0$, akkor 1 valós megoldás (2 egybeeső) van.
Ha $D<0$, akkor nincs valós megoldás.

Viète-féle formulák:

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

Megoldás (a)

A másodfokú egyenletnek akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív:

$$(-5)^2-4\cdot 3\cdot c\geq 0,$$
$$25-12c\geq 0,$$
$$c\leq\frac{25}{12}.$$

Tehát akkor lesz az egyenletnek valós megoldása, ha $c\leq\frac{25}{12}$.

Megoldás (b)

A Viète-féle formulák szerint:

$$x_1+x_2=\frac{5}{3},$$
$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{3}.$$

Mivel az egyenlet gyökeinek összege pozitív szám, ezért nem lehet mindkettő negatív.

Tehát nincs olyan c paraméterérték, melynél mindkét gyök negatív lenne.

Megoldás (c)

A gyökök négyzetösszegét írjuk fel az összegük és a szorzatuk felhasználásával:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2\cdot x_1\cdot x_2.$$

Behelyettesítve az előző részben felírt értékeket:

$$3=\frac{25}{9}-\frac{2c}{3},$$
$$c=-\frac{1}{3}.$$

Mivel $-\frac{1}{3}<\frac{25}{12}$, a kapott értéknél valóban két megoldása lesz az egyenletnek.

Tehát $c=-\frac{1}{3}$ esetén lesz az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 3.

Megoldás (d)

A törtnek akkor van értelme, ha

$$x^2+x-12\neq 0.$$

Ezt megoldva:

$$x\neq -4 \quad \text{és} \quad x\neq 3.$$

A gyöktényezős alak felhasználásával a nevező szorzattá alakítható:

$$x^2+x-12=(x+4)\cdot(x-3).$$

A gyöktényezős alak:
$a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$

A tört akkor egyszerűsíthető, ha a számláló is szorzattá alakítható úgy, hogy a tényezők között $x+4$ vagy $x-3$ szerepel.

Ez úgy lehetséges, ha a $3x^2-5x+c=0$ egyenletnek megoldása a -4 vagy a 3.

Ha $x=-4$:

$$3\cdot 16-5\cdot(-4)+c=0,$$
$$c=-68.$$

Az egyenlet és megoldásai:

$$3x^2-5x-68=0,$$
$$x_1=-4 \quad \text{és} \quad x_2=\frac{17}{3}.$$



Ebben az esetben a tört valóban egyszerűsíthető:

$$\frac{3x^2-5x-68}{x^2+x-12}=\frac{3\cdot(x+4)\cdot\left(x-\frac{17}{3}\right)}{(x+4)\cdot(x-3)}=$$
$$=\frac{3x-17}{x-3}.$$

Ha $x=3$:

$$3\cdot 9-5\cdot 3+c=0,$$
$$27-15+c=0,$$
$$c=-12.$$

Az egyenlet és megoldásai:

$$3x^2-5x-12=0,$$
$$x_1=3 \quad \text{és} \quad x_2=-\frac{4}{3}.$$

Ebben az esetben is egyszerűsíthető a tört:

$$\frac{3x^2-5x-12}{x^2+x-12}=\frac{3\cdot(x-3)\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)}{(x+4)\cdot(x-3)}=$$
$$=\frac{3x+4}{x+4}.$$

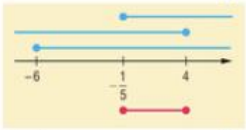
Tehát az adott tört egyszerűsíthető, ha

$$c=-68 \quad \text{vagy} \quad c=-12.$$

15. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{6+x}+\sqrt{4-x}=\sqrt{5x+1}.$$



18. ábra

Megoldás

Az egyenletnek akkor van értelme, ha teljesül a következő három egyenlőtlenség *(18. ábra)*:

$$6+x\geq 0, \quad 4-x\geq 0, \quad 5x+1\geq 0,$$
$$\text{és} \qquad \text{és}$$
$$x\geq -6, \quad x\leq 4, \quad x\geq -\frac{1}{5}.$$

A három halmaz közös része:

$$-\frac{1}{5}\leq x\leq 4.$$

Emeljük az egyenlet mindkét oldalát négyzetre:

$$6+x+2\cdot\sqrt{(6+x)\cdot(4-x)}+4-x=5x+1.$$

Összevonva és rendezve:

$$2\cdot\sqrt{(6+x)\cdot(4-x)}=5x-9.$$

Újabb négyzetre emelés után:

$$4\cdot(-x^2-2x+24)=25x^2-90x+81.$$

0-ra redukálva:

$$0=29x^2-82x-15.$$

A megoldóképlet alapján a megoldások:

$$x_1=3 \quad \text{és} \quad x_2=-\frac{5}{29}.$$

Mindkét szám eleme az értelmezési tartománynak.

Az x_2-t visszahelyettesítve a második négyzetre emelés előtti egyenletbe, a jobb oldal negatív lesz, ezért x_2 nem megoldás.

Az x_1 visszahelyettesítéssel látható, hogy valóban megoldás.

16. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$|2x^2-11x+5|=x+5.$$

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ ha } a\geq 0,\\ -a, \text{ ha } a<0. \end{cases}$$

Megoldás

Vizsgáljuk az abszolút értékben lévő kifejezés előjelét.

A $2x^2-11x+5=0$ másodfokú egyenlet megoldásai:

$$x_1=5 \quad \text{és} \quad x_2=\frac{1}{2}.$$

Ennek megfelelően:

$$|2x^2-11x+5|=\begin{cases}2x^2-11x+5, & \text{ha } x\le\frac{1}{2} \text{ vagy } x\ge 5,\\ -2x^2+11x-5, & \text{ha } \frac{1}{2}<x<5.\end{cases}$$

I. eset:

Ha $x\le\frac{1}{2}$ vagy $x\ge 5$, az egyenlet:

$$2x^2-11x+5=x+5,$$
$$2x^2-12x=0.$$

Szorzattá alakítással a gyökök:

$$x_1=0 \quad \text{és} \quad x_2=6.$$

Mindkettő eleme a kijelölt halmaznak, tehát valóban megoldások.

II. eset:

Ha $\frac{1}{2}<x<5$, az egyenlet:

$$-2x^2+11x-5=x+5,$$
$$2x^2-10x+10=0.$$

A megoldóképlettel megoldva:

$$x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad x_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

Ezek a számok is elemei a kijelölt halmaznak, tehát megoldások.

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1=0; \qquad x_2=6;$$
$$x_3=\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \quad x_4=\frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

17. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^2+3x-10}{2x^2-5x-3}<2.$$

Megoldás

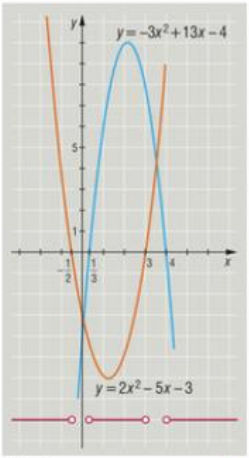
A törtnek akkor van értelme, ha a nevezője nem nulla: $2x^2-5x-3\neq 0$.

Megoldóképlettel megoldva:

$$x\neq 3 \quad \text{és} \quad x\neq -\frac{1}{2}.$$

Egy oldalra rendezve:

$$\frac{x^2+3x-10}{2x^2-5x-3}-2<0.$$



19. ábra

Közös nevezőre hozva:

$$\frac{x^2+3x-10-4x^2+10x+6}{2x^2-5x-3}<0,$$

$$\frac{-3x^2+13x-4}{2x^2-5x-3}<0.$$

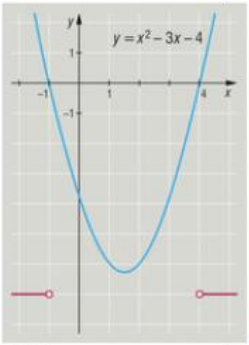
Keressük meg a számláló zérushelyeit is. A $-3x^2+13x-4=0$ egyenlet megoldásai:

$$x_1=4 \quad \text{és} \quad x_2=\frac{1}{3}.$$

A számláló és a nevező zérushelyeinek ismeretében felvázolható az a két másodfokú függvény, melyeknek hozzárendelési szabálya a számlálónak, illetve a nevezőnek megfelelő másodfokú kifejezés. ***(19. ábra)***

A tört akkor lesz negatív, ha számlálója és nevezője ellentétes előjelű. A keresett intervallumok az ábráról leolvashatók. A megoldás:

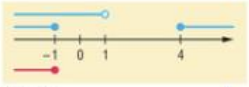
$$x<-\frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{3}<x<3 \quad \text{vagy} \quad x>4.$$



20. ábra



21. ábra



22. ábra

18. példa

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x^2-3x-4}\geq x-1.$$

Megoldás

Az egyenlőtlenségnek akkor van értelme, ha $x^2-3x-4\geq 0$.

A másodfokú kifejezés zérushelyei: $x_1=4$ és $x_2=-1$.

Tehát a feltétel megoldása ***(20. ábra)***:

$$x\leq -1 \quad \text{vagy} \quad x\geq 4.$$

Az egyenlőtlenség bal oldala nemnegatív.

I. ESET:

Ha a jobb oldal is nemnegatív, $x-1\geq 0$, azaz $x\geq 1$, négyzetre emelve az egyenlőtlenség iránya nem változik meg:

$$x^2-3x-4\geq x^2-2x+1.$$

Ennek megoldása: $-5\geq x$.

Összevetve az $x\geq 1$ feltétellel, kiderül, hogy ezen a halmazon nincs megoldás. ***(21. ábra)***

II. ESET:

Ha a jobb oldal negatív, $x-1<0$, azaz $x<1$, akkor az egyenlőtlenség minden olyan x-re teljesül, amely eleme az értelmezési tartománynak. ***(22. ábra)***

Az értelmezési tartomány és a kapott feltétel együtt akkor teljesül, ha $x\leq -1$.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása: $x\leq -1$.

Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek

19. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\sqrt[3]{49} = \sqrt{7^x}$; *b)* $8 \cdot 4^x = \sqrt[5]{16}$.

Megoldás (a)

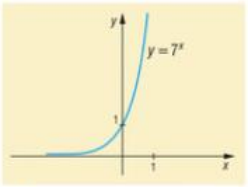
Mivel $49 = 7^2$, ezért mindkét oldal felírható 7 hatványaként:

$$7^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{x}{2}}.$$

A 7 alapú exponenciális függvény szigorúan növekvő *(23. ábra)*, ezért

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{2}, \text{ amelyből } x = \frac{4}{3}.$$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.



23. ábra

Megoldás (b)

Írjuk fel mindkét oldalt a 2 hatványaként:

$$2^3 \cdot (2^2)^x = (2^4)^{\frac{1}{5}}.$$

A műveletek elvégzése után:

$$2^{3+2x} = 2^{\frac{4}{5}}.$$

A 2 alapú exponenciális függvény szigorúan növekvő, ezért

$$3 + 2x = \frac{4}{5}, \text{ amelyből } x = -\frac{11}{10}.$$

Számolással ellenőrizhető a megoldás.

20. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $3 \cdot 5^{x+1} - 4 \cdot 5^x = 55$; *b)* $4^{\frac{x}{2}+1} - 16^{\frac{x}{4}-1} = 2^{x+1} + 31$.

Megoldás (a)

Kihasználva, hogy $5^{x+1} = 5 \cdot 5^x$, az egyenlet:

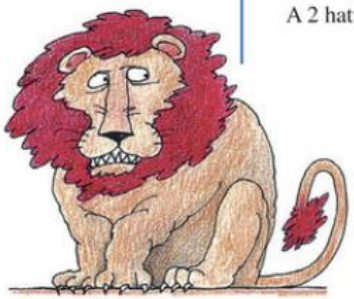
$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 \cdot 5^x - 4 \cdot 5^x &= 55, \\ 15 \cdot 5^x - 4 \cdot 5^x &= 55, \\ 11 \cdot 5^x &= 55, \\ 5^x &= 5, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Behelyettesítve a bal oldal értéke is 55. Tehát az egyenlet megoldása $x = 1$.

Megoldás (b)

Írjuk fel minden hatvány alapját a 2 hatványaként: $4 = 2^2$, $16 = 2^4$.

$$(2^2)^{\frac{x}{2}+1} - (2^4)^{\frac{x}{4}-1} = 2^{x+1} + 31,$$
$$2^{x+2} - 2^{x-4} = 2^{x+1} + 31.$$



A 2 hatványait egy oldalra rendezve és a kitevőket átalakítva:

$$2^x \cdot 2^2 - \frac{2^x}{2^4} - 2^x \cdot 2 = 31,$$
$$2^x \cdot \left(4 - \frac{1}{16} - 2\right) = 31,$$
$$2^x \cdot \frac{31}{16} = 31,$$
$$2^x = 16,$$
$$x = 4.$$

Behelyettesítve mindkét oldal értéke 63.

Tehát az egyenlet megoldása: $x = 4$.

21. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $9^{x+\frac{1}{2}} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$; *b)* $4^{x+3} - 2^{x+4} - 8 = 0$.

Megoldás (a)

Alakítsuk át a bal oldal első tagját:

$$9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0,$$
$$3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Mivel $9^x = (3^x)^2$, ezért érdemes új változót bevezetni: $y = 3^x$.

Az egyenlet az új változóval:

$$3y^2 - 28y + 9 = 0.$$

A megoldóképlettel megoldva:

$$y_1 = 9 \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{1}{3}.$$

Visszahelyettesítve:

$$3^x = 9, \quad \text{illetve} \quad 3^x = \frac{1}{3}.$$

Megoldásaik:

$$x = 2 \quad \text{és} \quad x = -1.$$

Az eredeti egyenletbe helyettesítve látható, hogy mindkettő megoldás.

Megoldás (b)

Mivel

$$4^{x+3}=(2^2)^{x+3}=(2^{x+3})^2,$$

a második tagot is ennek megfelelően írjuk át:

$$2^{x+4}=2\cdot 2^{x+3}.$$

Az egyenlet:

$$(2^{x+3})^2-2\cdot 2^{x+3}-8=0.$$

Az $y=2^{x+3}$ új ismeretlent bevezetve az egyenlet:

$$y^2-2y-8=0.$$

Megoldóképlettel megoldva:

$$y_1=4 \quad \text{és} \quad y_2=-2.$$

Mivel a 2 hatványa nem lehet negatív, a második nem ad megoldást.

Az elsőt visszahelyettesítve:

$$2^{x+3}=4,$$
$$x+3=2,$$
$$x=-1.$$

Az eredeti egyenletbe helyettesítve kiderül, hogy valóban megoldása az egyenletnek.

22. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $25^{\frac{3}{2}}>5^{|x|-1}$; *b)* $9^x-6\cdot 3^x-27>0$.

Megoldás (a)

Alakítsuk át a bal oldalt:

$$5^3>5^{|x|-1}.$$

Az 5 alapú exponenciális függvény szigorúan növekvő, ezért

$$3>|x|-1,$$
$$4>|x|.$$

Ennek megoldása: $-4<x<4$.

Megoldás (b)

Új változót bevezetve: $y=3^x$. Ezzel az egyenlőtlenség:

$$y^2-6y-27>0.$$

Megoldóképlettel megoldva az $y^2-6y-27=0$ másodfokú egyenletet:

$$y_1=9 \quad \text{és} \quad y_2=-3.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $y<-3$ vagy $y>9$.

A 3 hatványai nem lehetnek negatívok, ezért nincs az első egyenlőtlenségnek megfelelő x.

A másodikból: $3^x>9$. A 3 alapú exponenciális függvény szigorúan növekvő, ezért $x>2$.

23. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\log_3(4x-3)^2 = 2\cdot\log_3(4x-3)$;

b) $\lg(3x-5)-\lg(5x-3)-\lg(3-5x)=\lg(3x+5)$;

c) $\log_5|2x-7| = \log_5(-2-5x)$.

$\log_a x^k = k\cdot\log_a x$
$x>0;\ a>0;\ a\neq 1;\ k\in\mathbb{R}$

Megoldás (a)

Az egyenletnek csak akkor van értelme, ha

$$(4x-3)^2>0 \quad \text{és} \quad 4x-3>0.$$

Ha $x>\frac{3}{4}$, akkor mindkét feltétel teljesül.

A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság miatt minden esetben, amikor a kifejezés értelmezhető:

$$\log_3(4x-3)^2 = 2\cdot\log_3(4x-3).$$

Tehát az egyenlet megoldása: $x>\frac{3}{4}$.

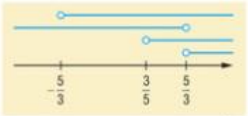
Megoldás (b)

Az egyenlet értelmezési tartományának vizsgálata a következő egyenlőtlenségek megoldását jelenti:

$$3x-5>0 \quad \text{és} \quad 5x-3>0$$
$$\text{és} \quad 3-5x>0 \quad \text{és} \quad 3x+5>0.$$

Ezek megoldásai ***(24. ábra)***:

$$x>\frac{5}{3} \ \text{és}\ x>\frac{3}{5} \ \text{és}\ x<\frac{5}{3} \ \text{és}\ x>-\frac{5}{3}.$$



24. ábra

A négy egyenlőtlenségnek nincs közös megoldása, az egyenlet értelmezési tartománya az üres halmaz.

Tehát az egyenletnek nincs megoldása.

Megoldás (c)

Az egyenletnek akkor van értelme, ha

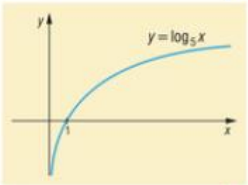
$$|2x-7|>0 \quad \text{és} \quad -2-5x>0.$$

Az első feltétel teljesül, ha $x\neq\frac{7}{2}$, a második, ha $x<-\frac{2}{5}$.

Mindkét feltétel igaz, ha $x<-\frac{2}{5}$.

$$\log_5|2x-7| = \log_5(-2-5x).$$

Mivel az 5 alapú logaritmus függvény szigorúan növekvő ***(25. ábra)***, két kifejezés logaritmusa akkor és csak akkor egyenlő, ha a kifejezések is egyenlők.



25. ábra

Jelen esetben:

$$|2x-7| = -2-5x.$$

Az abszolút érték miatt két esetet különböztetünk meg.

I. eset: Ha $x > \frac{7}{2}$:	**II. eset:** Ha $x < \frac{7}{2}$:
$2x - 7 = -2 - 5x,$	$-2x + 7 = -2 - 5x,$
$7x = 5,$	$3x = -9,$
$x = \frac{5}{7}.$	$x = -3.$
A feltételnek nem felel meg, nem megoldás.	Megfelel a feltételnek, és az értelmezési tartománynak is eleme. Behelyettesítve mindkét oldal értéke $\log_5 13$.

Az egyenlet megoldása $x = -3$.

24. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\lg(x+3) - \lg(x-4) = \lg 2 + \lg(x-1)$;

b) $\lg 3 + \lg\sqrt{6x-5} = \lg(8x-6)$;

c) $\lg x + \lg(x^2-14) = 3 \cdot \lg(x-2)$.

Megoldás (a)

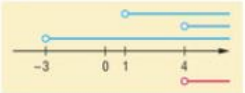
Az egyenletnek akkor van értelme, ha:

$$x+3>0 \quad \text{és} \quad x-4>0 \quad \text{és} \quad x-1>0.$$

Ezek megoldásai:

$$x>-3 \quad \text{és} \quad x>4 \quad \text{és} \quad x>1.$$

A közös megoldás ***(26. ábra)***: $x > 4$.



26. ábra

A logaritmusok összegére és különbségére vonatkozó azonosságok alapján mindkét oldal átírható:

$$\lg\frac{x+3}{x-4} = \lg(2x-2).$$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
$x, y > 0;\ a > 0;\ a \neq 1$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
$x, y > 0;\ a > 0;\ a \neq 1$

Mivel a logaritmusfüggvény szigorúan növekvő:

$$\frac{x+3}{x-4} = 2x-2,$$
$$x+3 = (x-4)\cdot(2x-2),$$
$$x+3 = 2x^2-10x+8,$$
$$0 = 2x^2-11x+5.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$x_1 = 5 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Az egyenlet értelmezési tartományának csak az első megoldás eleme.

Behelyettesítve mindkét oldalon $\lg 8$ adódik, tehát a megoldás: $x = 5$.

Megoldás (b)

Az egyenletnek akkor van értelme, ha

$$6x-5>0 \quad \text{és} \quad 8x-6>0.$$

Megoldásaik:

$$x>\frac{5}{6} \quad \text{és} \quad x>\frac{3}{4}.$$

Mindkét egyenlőtlenség igaz, ha $x>\frac{5}{6}$.

A bal oldal a logaritmus azonossága alapján átírható:

$$\lg\left(3\cdot\sqrt{6x-5}\right)=\lg(8x-6).$$

Mivel a logaritmusfüggvény szigorúan növekvő:

$$3\cdot\sqrt{6x-5}=8x-6.$$



Mindkét oldal négyzetre emelése után rendezzük:

$$9\cdot(6x-5)=(8x-6)^2,$$

$$54x-45=64x^2-96x+36,$$

$$0=64x^2-150x+81.$$

A megoldóképlettel megoldva:

$$x_1=\frac{3}{2} \quad \text{és} \quad x_2=\frac{27}{32}.$$

Mindkét eredmény nagyobb, mint $\frac{5}{6}$.

Behelyettesítve x_1 esetén mindkét oldal értéke $\lg 6$, x_2 esetén mindkét oldal értéke $\lg\frac{3}{4}$ lesz.

Az egyenlet megoldásai tehát:

$$x_1=\frac{3}{2} \quad \text{és} \quad x_2=\frac{27}{32}.$$

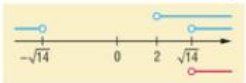
Megoldás (c)

Az egyenletnek akkor van értelme, ha

$$x^2-14>0 \quad \text{és} \quad x-2>0.$$

Megoldásaik:

$$|x|>\sqrt{14} \quad \text{és} \quad x>2.$$



27. ábra

Mivel $\sqrt{14}>2$, az egyenlet értelmezési tartománya *(27. ábra)*: $x>\sqrt{14}$.

A logaritmus azonosságai alapján mindkét oldalt átalakítva:

$$\lg\left[x\cdot(x^2-14)\right]=\lg(x-2)^3.$$

A logaritmusfüggvény szigorú növekedése miatt:

$$x\cdot(x^2-14)=(x-2)^3.$$

Felbontva a zárójeleket, majd rendezve:

$$x^3 - 14x = x^3 - 6x^2 + 12x - 8,$$

$$6x^2 - 26x + 8 = 0.$$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2-vel elosztva:

$$3x^2 - 13x + 4 = 0.$$

A megoldóképlettel megkapjuk a megoldásokat:

$$x_1 = 4 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Csak x_1 eleme az értelmezési tartománynak.

Behelyettesítve mindkét oldal értéke lg 8 lesz, tehát az egyenlet megoldása: $x = 4$.

25. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\log_4(3x-1) - \log_4(x+2) < \log_4 2$;

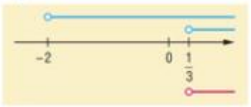
b) $\log_{0,7} 5 + \log_{0,7}(2x-1) > \log_{0,7}(3x+9)$.

Megoldás (a)

Az egyenlőtlenségnek csak akkor van értelme, ha

$$3x - 1 > 0 \quad \text{és} \quad x + 2 > 0.$$

Megoldva $x > \frac{1}{3}$ és $x > -2$ adódik. A közös megoldás ***(28. ábra)***: $x > \frac{1}{3}$.



28. ábra

A bal oldalt átalakítva a logaritmus azonossága alapján:

$$\log_4 \frac{3x-1}{x+2} < \log_4 2.$$

Mivel a 4 alapú logaritmusfüggvény szigorúan növekszik:

$$\frac{3x-1}{x+2} < 2.$$

Egy oldalra rendezve:

$$\frac{3x-1}{x+2} - 2 < 0.$$

Közös nevezőre hozás után:

$$\frac{3x-1}{x+2} - \frac{2x+4}{x+2} < 0,$$

$$\frac{x-5}{x+2} < 0.$$

Az értelmezési tartománynak megfelelően $x+2>0$, tehát a tört akkor lesz negatív, ha $x-5<0$, azaz $x<5$. ***(29. ábra)***



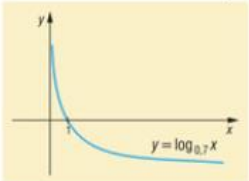
29. ábra

Összevetve az értelmezési tartománnyal, az egyenlőtlenség megoldása:

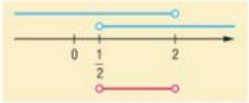
$$\frac{1}{3} < x < 5.$$



30. ábra



31. ábra



32. ábra

Megoldás (b)

Az egyenlőtlenségnek csak akkor van értelme, ha

$$2x-1>0 \quad \text{és} \quad 3x+9>0.$$

Megoldva: $x>\frac{1}{2}$ és $x>-3$. A közös megoldás *(30. ábra)*: $x>\frac{1}{2}$.

Az egyenlőtlenség bal oldala a logaritmus azonossága alapján átírható:

$$\log_{0,7}[5\cdot(2x-1)]>\log_{0,7}(3x+9).$$

Mivel $0,7<1$, ezért a 0,7 alapú logaritmusfüggvény szigorúan csökkenő *(31. ábra)*:

$$5\cdot(2x-1)<3x+9.$$

Beszorzás után megoldva:

$$10x-5<3x+9,$$
$$7x<14,$$
$$x<2.$$

Az értelmezési tartománynak megfelelően az egyenlőtlenség megoldása *(32. ábra)*:

$$\frac{1}{2}<x<2.$$

Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek (emelt szintű tananyag)

a nevezetes szögek szögfüggvényei

	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

26. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\cos^2 x=\frac{3}{4}.$$

Megoldás

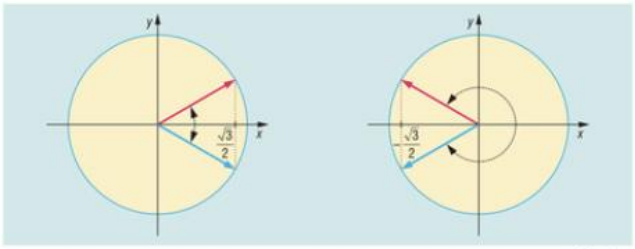
Mindkét oldal négyzetgyökét véve a $|\cos x|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlet adódik.

$\sqrt{a^2}=|a|$

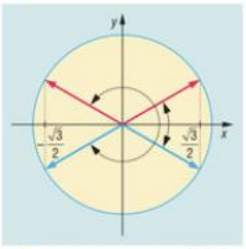
Az abszolút értéknek megfelelően a következő két egyenletet kell megoldanunk:

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{vagy} \quad \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mindkét esetről készítsünk ábrát *(33. ábra)*.



33. ábra



34. ábra

Ezek alapján a megoldások leolvashatók:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \qquad x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2\pi,$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + m \cdot 2\pi, \quad x_4 = -\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi,$$

ahol k, l, m és n egész számok.

A két ábrát összevonva az egyenlet megoldásai is összevonhatóvá válnak. *(34. ábra)*

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Ezek helyességéről az ellenőrzés során meggyőződhetünk.

27. példa

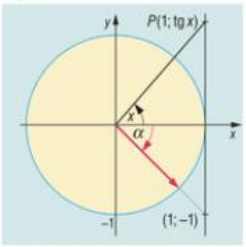
Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\operatorname{tg}(2x - \pi) = -1.$$

Megoldás

A tangens definíciója alapján $\operatorname{tg}\alpha = -1$, ha *(35. ábra)*

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi, \ (l \in \mathbb{Z}).$$



35. ábra

Tehát

$$2x - \pi = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi,$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + l \cdot \pi,$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{2}, \ (l \in \mathbb{Z}).$$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha = \beta + k\cdot 2\pi,$
vagy $\alpha = -\beta + l\cdot 2\pi$
$(k, l \in \mathbb{Z})$

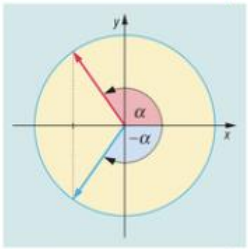
28. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + \pi).$$

I. megoldás

Két szög koszinusza egyenlő, ha a szögek a periódustól eltekintve megegyeznek vagy egymás ellentettjei *(36. ábra)*.



36. ábra

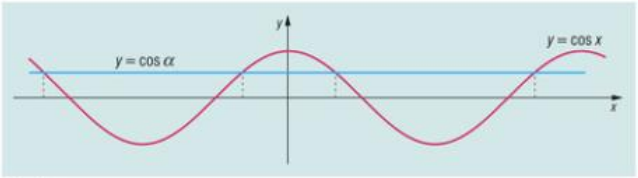
I. ESET:	II. ESET:
$3x - \frac{\pi}{2} = x + \pi + k\cdot 2\pi,$	$3x - \frac{\pi}{2} = -x - \pi + l\cdot 2\pi,$
$2x = \frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi,$	$4x = -\frac{\pi}{2} + l\cdot 2\pi,$
$x = \frac{3\pi}{4} + k\cdot\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$	$x = -\frac{\pi}{8} + l\cdot\frac{\pi}{2} \quad (l\in\mathbb{Z}).$

A megoldások helyességéről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.

II. megoldás

A $\cos\alpha = \cos\beta$ egyenlet megoldásai leolvashatók az $f(x) = \cos x$ függvény grafikonjáról is *(37. ábra)*:

$$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\cdot 2\pi \quad \text{vagy} \quad \alpha = -\beta + l\cdot 2\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$



37. ábra

Ezután a megoldás az I. megoldás szerint folytatható.

III. megoldás

Egy oldalra rendezés után a különbség szorzattá alakítható:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ezt felhasználva az eredeti egyenletünk átalakítható:

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(x + \pi) = 0,$$

amiből

$$-2\cdot\sin\frac{3x - \frac{\pi}{2} + x + \pi}{2}\cdot\sin\frac{3x - \frac{\pi}{2} - x - \pi}{2} = 0.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$-2\cdot\sin\frac{4x+\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\sin\frac{2x-\frac{3\pi}{2}}{2}=0,$$

$$-2\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=0.$$

Ez két esetben lehetséges:

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, vagy $\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=0$,

$2x+\frac{\pi}{4}=k\pi$, $x-\frac{3\pi}{4}=l\pi$,

$x=-\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$, $x=\frac{3\pi}{4}+l\pi\ (l\in\mathbb{Z})$.

29. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\cos 2x+3\cdot\sin x=2.$$

Megoldás

A bal oldalon írjuk be a $\cos 2x$-re vonatkozó összefüggést:

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$
$=2\cdot\cos^2\alpha-1=1-2\cdot\sin^2\alpha$

$$1-2\cdot\sin^2 x+3\cdot\sin x=2.$$

$\sin x$-re nézve másodfokú egyenletet kaptunk:

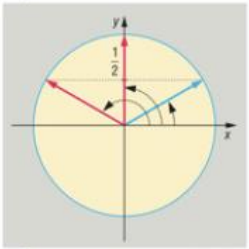
$$2\cdot\sin^2 x-3\cdot\sin x+1=0.$$

A megoldóképlettel megoldva:

$$\sin x=1\ \text{ vagy }\ \sin x=\frac{1}{2}.$$

Készítsünk ábrát *(38. ábra)*, és olvassuk le a megoldásokat:

$$x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\quad x_2=\frac{\pi}{6}+l\cdot 2\pi,\quad x_3=\frac{5\pi}{6}+m\cdot 2\pi\quad (k,l,m\in\mathbb{Z}).$$



38. ábra

Ellenőrzéssel megmutatható, hogy minden megoldás helyes.

30. példa

Mely valós számokra igaz, hogy $\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$?

Megoldás

Alkalmazzuk a $\operatorname{tg}2\alpha$-ra vonatkozó összefüggést, és használjuk fel, hogy $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$.

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Ebből az alakból jól látszik, hogy az egyenletnek akkor van értelme, ha $|\operatorname{tg}\alpha|\neq 1$ és $\operatorname{tg}\alpha\neq 0$, azaz $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{4}+k\pi;\ \alpha\neq l\pi;\ (k,l\in\mathbb{Z})$.

Beszorzás után:

$$2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha,$$
$$3 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = 1,$$
$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{3}, \quad \text{amiből} \quad |\operatorname{tg} \alpha| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ez két esetben lehetséges:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \text{vagy} \qquad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\alpha = \frac{\pi}{6} + m\pi \ (m \in \mathbb{Z}), \qquad \alpha = -\frac{\pi}{6} + n\pi \ (n \in \mathbb{Z}).$$

31. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 1.$$

Megoldás

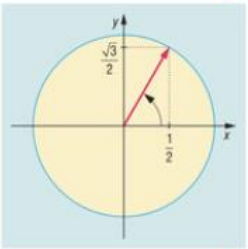
Ha mindkét oldalt elosztjuk 2-vel:

$$\frac{1}{2} \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x = \frac{1}{2},$$

az együtthatók négyzetösszege:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1.$$

Tehát az együtthatók tekinthetők egy szög két szögfüggvényének.



39. ábra

Legyen $\frac{1}{2} = \cos \alpha$ és $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \alpha$, ekkor $\alpha = \frac{\pi}{3}$ megfelelő szög. *(39. ábra)*

Az egyenlet:

$$\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x = \frac{1}{2}.$$

A bal oldalon található kifejezés az addíciós tétel felhasználásával átírható:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2}.$$

A megoldások:

$$\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \qquad \text{vagy} \qquad \frac{\pi}{3} + x = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi,$$
$$x = k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \qquad x = -\frac{2\pi}{3} + l \cdot 2\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

Mivel az átalakítások során mindig ekvivalens egyenletek adódtak, így a kapott eredmények valóban megoldások lesznek.

Megjegyzés: Az egyenlet megoldható a két oldal négyzetre emelésével is, ekkor azonban a végeredményből ki kell szűrni a hamis gyököket.

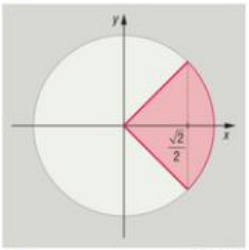
32. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\cos 3x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

I. megoldás

Ábrázoljuk az egységsugarú körben a $3x$-re adódó lehetséges értékeket.



40. ábra

A 40. ábráról leolvasható, hogy az egyenlőség $3x = \frac{\pi}{4}$ és $3x = -\frac{\pi}{4}$ esetén teljesül.

Az egyenlőtlenség megoldása:

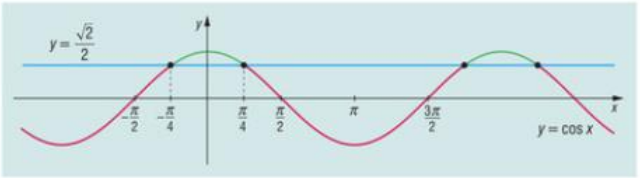
$$-\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leq 3x \leq \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi.$$

Tehát az eredmény

$$-\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

II. megoldás

Ábrázoljuk az $f(x) = \cos x$ függvényt és a $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ függvényt közös koordináta-rendszerben. ***(41. ábra)***



41. ábra

Az egyenlőtlenség megoldása leolvasható a 41. ábrán látható grafikonról:

$$-\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leq 3x \leq \frac{\pi}{4} + k \cdot 2,$$

$$-\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

33. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\sin 2x > \sqrt{3} \cdot \cos x$ egyenlőtlenséget.

Megoldás

A bal oldalon helyettesítsük be a $\sin 2x$-et.

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sqrt{3} \cdot \cos x.$$

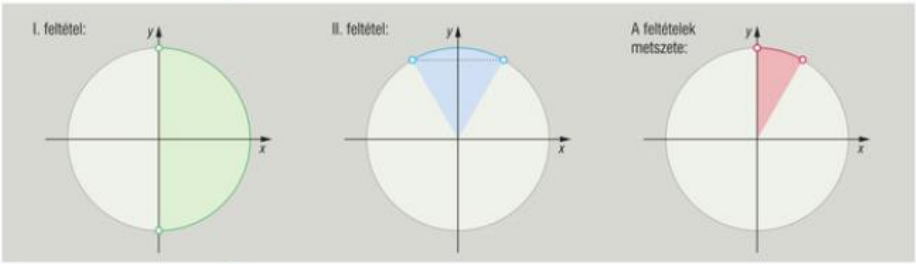
Egy oldalra rendezve és kiemelve:

$$\cos x \cdot (2 \cdot \sin x - \sqrt{3}) > 0.$$

Egy szorzat kétféleképpen lehet pozitív: ha a szorzat mindkét tényezője pozitív (I. eset), vagy mindkét tényező negatív (II. eset).

I. ESET: $\cos x > 0$ és $2 \cdot \sin x - \sqrt{3} > 0$, vagyis $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ábrázoljuk egységkörön a feltételeket.



42. ábra

Ezek megoldásai *(42. ábra)*:

I. feltétel: $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$,

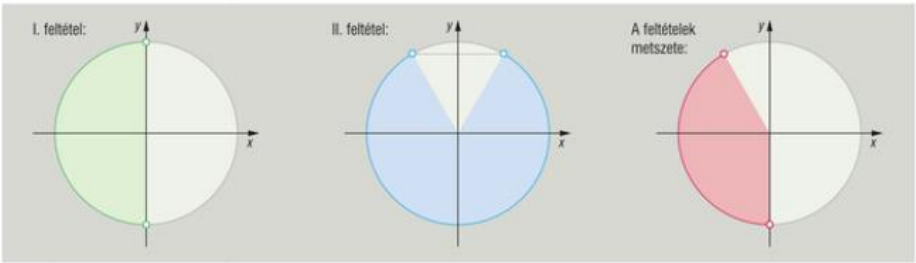
II. feltétel: $\frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + l \cdot 2\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z})$.

A két intervallum metszete *(42. ábra)*:

$$\frac{\pi}{3} + m \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

II. ESET: $\cos x < 0$ és $2 \cdot \sin x - \sqrt{3} < 0$, vagyis $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ábrázoljuk ismét egységkörön.



43. ábra

A két egyenlőtlenség megoldása *(43. ábra)*:

I. feltétel: $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$,

II. feltétel: $\frac{2\pi}{3} + l \cdot 2\pi < x < \frac{7\pi}{3} + l \cdot 2\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z})$.

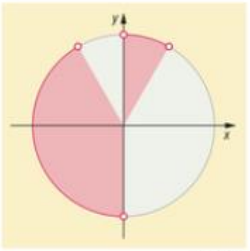
Az intervallumok metszete *(43. ábra)*:

$$\frac{2\pi}{3}+m\cdot 2\pi<x<\frac{3\pi}{2}+m\cdot 2\pi \quad (m\in\mathbb{Z}).$$

Összefoglalva a két esetet az egyenlőtlenség megoldása *(44. ábra)*:

$$\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\pi<x<\frac{\pi}{2}+m\cdot 2\pi$$

vagy $\quad \frac{2\pi}{3}+m\cdot 2\pi<x<\frac{3\pi}{2}+m\cdot 2\pi \quad (m\in\mathbb{Z}).$



44. ábra

Feladatok

1. Mennyit keverjünk össze a 40%-os és 80%-os oldatokból ahhoz, hogy 10 liter 50%-os oldatot kapjunk?
2. Egy háromjegyű szám utolsó jegye 3. Ha ezt a számjegyet a végéről az elejére írjuk 162-vel kisebb számot kapunk. Melyik ez a háromjegyű szám?
3. Egy kerékpártúra egyik napján délig megtettük az adott napra tervezett út $\frac{2}{5}$ részét. A déli pihenő után 5 óráig megtettük az út harmadát és még hátra volt 24 km. Hány kilométert kerékpároztunk ezen a napon?
4. Tibi elolvasta a kötelező olvasmány 40%-át. A következő napon elolvasott 135 oldalt, így már csak a könyv 30%-a volt hátra. Hány oldalas a kötelező olvasmány?
5. Szegedről Budapestre személyautóval 2,5 óra alatt lehet eljutni. Egy teherautóval, amely óránként 12 km-rel kevesebbet tesz meg, 3 óra volt az út. Hány km a két város távolsága?
6. Az uszoda medencéjét két csappal lehet feltölteni. Ha csak a nagyobb teljesítményű csap van nyitva, akkor 3 óra alatt, ha csak a kisebb teljesítményű csapot nyitják ki, akkor 6 óra alatt telik meg a medence. Legkésőbb hány órakor nyissák ki mindkét csapot ahhoz, hogy reggel 6 órára megteljen a medence?
7. Vizsgáljuk a $\frac{8}{n-7}$ törtet. Milyen n természetes számok esetén lesz a tört értéke
   a) természetes szám; *b)* negatív valós szám; *c)* nagyobb mint $\frac{1}{2}$?
8. A mórahalmi városi fürdő úszómedencéje 12 méterrel hosszabb, mint amilyen széles. A vízmélység 2 m. Mekkorák a medence méretei, ha egy feltöltéskor 1386 m^3 vízre van szükség?
9. Két munkásnak 400-400 darab egyforma alkatrészt kell elkészítenie. Egyikük egy óra alatt 5 darabbal többet készít el, mint a másik. Hány órát dolgoztak, és hány alkatrészt készítettek el külön-külön egy óra alatt, ha összesen 36 órát dolgoztak?
10. Egy francia kereskedő 39 euróért adott el egy árut. Mennyiért vette, ha annyi százalékkal drágábban adta, mint ahány euróért vette az árut?
11. Milyen p valós paraméter esetén van pontosan egy megoldása a valós számok halmazán a következő egyenletnek:
$$(2+\log_2 p)\cdot x^2+(6\cdot\log_2 p)\cdot x+4\cdot\log_2 p+1=0?$$

12. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenletnek legyen valós megoldása:

$$\sqrt{x^2-8x-65}+\sqrt{x^2-169}+\sqrt{x^2+(p+14)\cdot x+5p+19}=0.$$

13. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $125^{x-3}=\sqrt[5]{25^x}$;

b) $4^{|2x+6|-|x-9|}=8$;

c) $9^{x+\sqrt{x^2+2}}-4\cdot 3^{x-1+\sqrt{x^2+2}}=69$.

14. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\lg(2x-3)-\lg(x+1)=\lg\frac{1}{2}$;

b) $\log_5(2x+5)+\log_5 x=\log_5(15-2x)$;

c) $\lg 2+\lg(4^x+9)=1+\lg(2^x+1)$.

15. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_2 3+\log_{2^2} 3^2+\ldots+\log_{2^n} 3^n=\log_2 81.$$

16. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{3x-2}{2x-3}<2$;

b) $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$;

c) $(x+1)\cdot\sqrt{4-x^2}\le 0$;

d) $\sqrt{13^x-5}\le\sqrt{2\cdot(13^x+12)}-\sqrt{13^x+5}$.

17. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $2\cdot\sin^2 x=1$;

b) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{x}{2}$;

c) $\sin 2x-3\cdot\cos x=0$;

d) $\sin x+\cos x=1$.

18. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\sin(x-\pi)\ge-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cos 2x+\cos x\le 0$.

6. Egyenletrendszerek

AZ ELSŐFOKÚ KÉTISMERETLENES EGYENLETRENDSZEREK ALGEBRAI MEGOLDÁSI MÓDJAI:

- **Behelyettesítő módszer;**
- **Egyenlő együtthatók módszere.**

1. példa

A szalagavató bál szervezőinek 470 vendéget kell leültetni 4 és 6 személyes asztalokhoz. Mennyi asztalra van szükség az egyes típusokból, ha összesen 100 asztal helyezhető el a teremben?

Megoldás

Legyen a 4 személyes asztalok száma x, a 6 személyes asztalok száma y. Az összes asztalra vonatkozó feltétel szerint: $x+y=100$. A vendégek számára vonatkozó feltétel szerint: $4x+6y=470$.

Megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=100\\ 4x+6y&=470 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenlet 4-szeresét vegyük el a másodikból:

$$\left.\begin{aligned} 4x+6y&=470\\ 4x+4y&=400 \end{aligned}\right\},$$

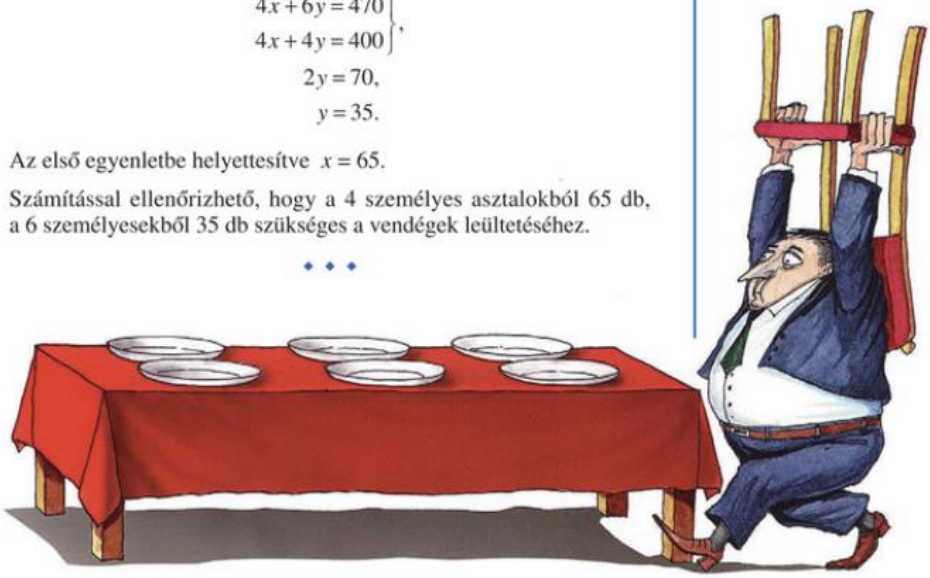
$$2y=70,$$

$$y=35.$$

Az első egyenletbe helyettesítve $x=65$.

Számítással ellenőrizhető, hogy a 4 személyes asztalokból 65 db, a 6 személyesekből 35 db szükséges a vendégek leültetéséhez.

• • •



2. példa

Egy kétjegyű szám 36-tal kisebb a jegyei felcserélésével kapott kétjegyű számnál. Ha a számot elosztjuk a számjegyei összegével, hányadosként az eredeti szám első jegyét, maradékként 7-et kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

Megoldás

Legyen a szám első jegye x, a második y. Az $\overline{xy}$ kétjegyű szám értéke $10x + y$. A felcserélés után: $10y + x = 10x + y + 36$. A maradékos osztásra vonatkozó feltétel szerint: $10x + y = x \cdot (x + y) + 7$.

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 10y + x &= 10x + y + 36 \\ 10x + y &= x \cdot (x + y) + 7 \end{aligned}\right\}.$$

Rendezzük az első egyenletet: $9y = 9x + 36$. Ebből: $y = x + 4$.

A másodikba helyettesítve:

$$10x + x + 4 = x \cdot (2x + 4) + 7.$$

A zárójel felbontása és rendezés után:

$$11x + 4 = 2x^2 + 4x + 7,$$

$$0 = 2x^2 - 7x + 3.$$

Megoldóképlettel megoldva:

$$x_1 = 3 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Számjegyként csak az $x_1 = 3$ jöhet szóba. Visszahelyettesítve $y = 7$.

A keresett szám a 37. Valóban 36-tal kisebb a 73-nál, és 10-zel osztva a hányados 3, a maradék 7.

3. példa

Két szám összege 1. Ha az egyik szám reciprokának kétszeresét hozzáadjuk a másik reciprokának háromszorosához, 12-t kapunk. Melyik ez a két szám?

Megoldás

Legyen a két szám x és y.

A két feltétel a következő egyenletrendszert adja:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= 12 \end{aligned}\right\}.$$

Az elsőből fejezzük ki y-t ($y = 1 - x$), és helyettesítsük a másodikba:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{1 - x} = 12.$$

Beszorozva és rendezve:

$$2\cdot(1-x)+3=12x\cdot(1-x),$$
$$2-2x+3x=12x-12x^2,$$
$$12x^2-11x+2=0.$$

A megoldóképlettel megoldva:

$$x_1=\frac{2}{3} \quad \text{és} \quad x_2=\frac{1}{4}.$$

A megfelelő y értékek:

$$x_1=\frac{1}{3} \quad \text{és} \quad y_2=\frac{3}{4}.$$

Számítással ellenőrizhető, hogy mindkét számpár megoldása a feladatnak.

4. példa

Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x-y+5}&=3\\ \sqrt{x+y-5}&=-2x+11\end{aligned}\right\}.$$

Megoldás

Az egyenletrendszernek csak akkor van értelme, ha $x-y+5\geq 0$ és $x+y-5\geq 0$.

Emeljük mindkét egyenlet mindkét oldalát négyzetre:

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad x-y+5=9\\ &(2)\quad x+y-5=4x^2-44x+121\end{aligned}\right\}.$$

Összeadva a két egyenletet, az y kiejthető:

$$2x=4x^2-44x+130.$$

Kettővel osztva és rendezve:

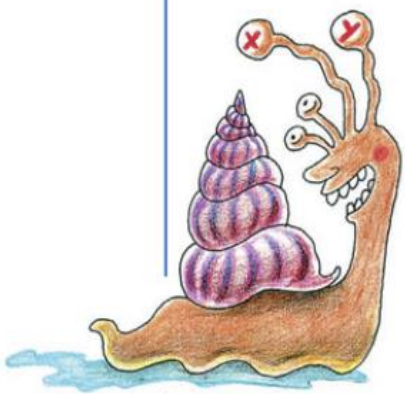
$$0=2x^2-23x+65.$$

A megoldóképlettel megoldva:

$$x_1=6{,}5 \quad \text{és} \quad x_2=5.$$

Az (1) egyenletbe helyettesítve:

$$y_1=2{,}5 \quad \text{és} \quad y_2=1.$$



Az értelmezési tartomány feltételeinek mindkét számpár eleget tesz, de az eredeti egyenletekbe visszahelyettesítve csak a második számpár lesz megoldás.

Tehát az egyenletrendszer megoldása az (5; 1) számpár.

◆ ◆ ◆

5. példa

Oldjuk meg és vizsgáljuk a következő egyenletrendszert, ha p valós paraméter:

$$\left.\begin{aligned} px + 3y &= 12 \\ 12x + py &= 24 \end{aligned}\right\}.$$

Megoldás

Ha az első egyenletet p-vel, a másodikat pedig 3-mal szorozzuk, kivonás után az y kiejthető:

$$\left.\begin{aligned} p^2x + 3py &= 12p \\ 36x + 3py &= 72 \end{aligned}\right\}.$$

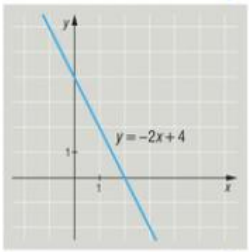
Vegyük el az első egyenletből a másodikat:

$$x \cdot (p^2 - 36) = 12p - 72,$$

$$x \cdot (p-6) \cdot (p+6) = 12 \cdot (p-6). \qquad (*)$$

Ha $p = 6$, az egyenlet x-től függetlenül igaz. Az eredeti két egyenlet ekkor megegyezik: $6x + 3y = 12$.

Tehát ebben az esetben minden olyan $(x; y)$ számpár megoldása az egyenletrendszernek, amelyre a $6x + 3y = 12$ egyenlőség igaz. (Derékszögű koordinátarendszerben ábrázolva egy egyenes pontjai.) ***(45. ábra)***



45. ábra

Ha $p = -6$, a $(*)$ egyenlet bal oldalán 0 áll, a jobb oldalon pedig nem. Tehát ekkor nincs megoldás.

Ha $p \neq 6$ és $p \neq -6$, akkor $(*)$-ból:

$$x = \frac{12}{p+6},$$

visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$y = \frac{24}{p+6}.$$

Feladatok

1. Egy áruházban a félliteres üdítő ára 139 Ft. Ugyanebből az üdítőből a kétliteres 237 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül 1 liter üdítő, ha feltételezzük, hogy
   a) mindegyik flakon azonos árú;
   b) a kétliteres flakon értéke kétszerese a félliteresnek.
   Magyarázzuk meg az eredményeket.
2. Egy dobozban piros és kék golyók vannak. Ha a dobozban egy piros golyóval kevesebb lenne, a golyók hetedrésze lenne piros. Ha viszont két kék golyót pirosra cserélnénk, akkor a golyók ötödrésze lenne piros. Hány piros és kék golyó van a dobozban?
3. Apa átrendezi a könyvszekrényt. Eddig minden polcon 12 db könyv volt, de 4 könyvnek nem volt helye. Az átrendezés után minden polcon 13 könyv lesz, kivéve a legfelsőt, mert arra csak 8 könyv jut. Hány polca van a könyvszekrénynek, és hány könyv lesz benne az átrendezés után?

4. Egy arany-ezüst ötvözet 75%-a arany. Ez az ötvözet 190%-kal értékesebb, mint a fordított összetételű (25% arany, 75% ezüst) ötvözet.

a) Hányszorosa az arany egységára az ezüst egységárának?

b) Hány %-kal kisebb az ezüst egységára az aranyénál?

5. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán:

a) $\left.\begin{aligned} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{xy} \\ x^2+y^2&=1 \end{aligned}\right\}$;

b) $\left.\begin{aligned} \frac{3}{x}-2y&=1 \\ -2x+\frac{3}{y}&=3 \end{aligned}\right\}$;

c) $\left.\begin{aligned} x^2+xy&=210 \\ y^2+xy&=231 \end{aligned}\right\}$.

6. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{aligned} 2\cdot\sqrt{\frac{5x}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{5x}}&=3 \\ (y+4x)\cdot(x-y+20)&=0 \end{aligned}\right\}$;

b) $\left.\begin{aligned} 3\cdot 4^{x+y}-5\cdot 2^{x-y}&=\frac{91}{4} \\ 5\cdot 4^{x+y}-4\cdot 2^{x-y}&=39 \end{aligned}\right\}$;

c) $\left.\begin{aligned} x^4+y^4&=641 \\ \lg x^2+\lg y^2&=2 \end{aligned}\right\}$.

FÜGGVÉNYEK

1. A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai

A függvény a matematika egyik központi, egységesítő fogalma. A geometriai transzformációktól a hosszúság, terület, térfogat fogalmáig, a kombinatorikától a valószínűségszámításig találkozunk a függvényekkel.

függvény

DEFINÍCIÓ: Ha A és B nem üres halmazok, és adott egy hozzárendelés, amely A minden eleméhez B valamelyik elemét rendeli hozzá, akkor függvényről beszélünk. Ezt a három dolgot: A-t, B-t és a hozzárendelést együtt *függvénynek* nevezzük, és egy betűvel, pl. f-fel jelöljük.

értelmezési tartomány, értékkészlet

Az A halmaz az f függvény *értelmezési tartománya*, a B az f függvény egy képhalmaza. Az A halmaz elemeihez rendelt B halmazbeli elemek halmazát gyakran röviden így jelöljük: $f(A)$, ez a halmaz f *értékkészlete*.

Ha $x \in A$, akkor az x-hez rendelt B-beli értéket így jelöljük: $f(x)$, és az x-hez rendelt, vagy másképpen az x helyen felvett függvényértéknek nevezzük. Szokásos jelölések még: $A = D_f$, $f(A) = R_f$. Az f függvényt röviden így is jelölik: $f: A \to B$.

Példák függvényekre

1. Legyen az A halmaz a sík négyzeteinek halmaza, B a valós számok halmaza, és rendeljük hozzá minden négyzethez a területét. Ezzel egy függvényt adtunk meg.
2. Legyen A is és B is a sík pontjainak halmaza, $\vec{v}$ pedig egy adott vektor a síkban. Rendeljük hozzá minden $P \in A$-hoz azt a $Q \in B$-t, amely P-ből a $\vec{v}$-vel való eltolással keletkezik.
3. Legyen $A = \{1, 2, \ldots, n\} = B$, és legyen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja. Rendeljük hozzá k-hoz i_k-t ($k = 1, 2, \ldots, n$). Az adott permutáció tehát egy olyan függvénnyel jellemezhető (azonosítható), amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is A, és a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű. Tudjuk már előző tanulmányainkból, hogy az ilyen tulajdonságú függvények száma $n!$.
4. Legyen az A egy szabályos dobókocka dobásakor adódó lehetséges eredmények halmaza, B pedig a $[0; 1]$ zárt intervallumbeli valós számok halmaza. Az A minden elemének feleltessük meg az $\frac{1}{6}$ számot (az illető esemény valószínűségét). Az így értelmezett függvényt a valószínűségszámításban **valószínűségi változónak** nevezik.

5. Legyen A és B is a valós számok halmaza. Rendeljük hozzá minden valós számhoz az egészrészét, azaz a számnál nem nagyobb legnagyobb egész számot. A kapott függvényt jelöljük f-fel.

   $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$.

   f értékkészlete az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza.

6. Legyen $A = [0, 1]$, $B = \mathbb{R}$, és jelölje g a következő függvényt:

   $g: A \to \mathbb{R}$, $g(x) = [x]$.

   g értékkészlete a $\{0; 1\}$ kételemű halmaz.

Az 5. és 6. példában szereplő f és g függvények különbözők, bár szoros kapcsolat van közöttük.

a függvény kiterjesztése és leszűkítése

***Definíció: Ha $f: A_1 \to B$ és $g: A_2 \to B$ két függvény, továbbá $A_2 \subseteq A_1$ és minden $x \in A_2$-re $f(x_2) = g(x_2)$, akkor azt mondjuk, hogy f *kiterjesztése* g-nek, illetve g *leszűkítése* f-nek.**

◆ ◆ ◆

Érdemes még megemlíteni a függvények következő speciális típusait, amelyek gyakran fontos szerepet játszanak.

Ha az $f: A \to B$ függvényre teljesül, hogy minden $b \in B$-hez van olyan $a \in A$, hogy $f(a) = b$, akkor f **szürjektív.**

Ha az $f: A \to B$ függvényre teljesül, hogy minden $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor f **injektív.**

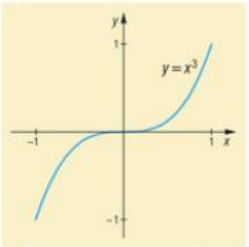
Ha egy f függvény injektív is és szürjektív is, akkor a függvényt **bijektívnek** nevezzük. Egy bijektív függvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést jelent az A és B halmaz elemei között. Ha $A = B$, akkor egy bijektív leképezést szokás az A egy permutációjának is nevezni.

Például az

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ függvény szürjektív, (de nem injektív);
2. $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ függvény injektív (de nem szürjektív);
3. $h: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $h(x) = x^2$ függvény bijektív.

◆ ◆ ◆

A következőkben – hacsak kivételesen mást nem mondunk – olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek a valós számok egy részhalmazából képeznek a valós számok egy részhalmazába, azaz olyan $f: A \to B$ függvényekkel, amelyekre $A, B \subseteq \mathbb{R}$.



1. ábra

a függvény grafikonja

Definíció: Ha adott az $f: A \to B$ függvény, akkor az

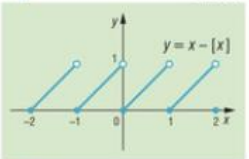
$$\{(x; f(x)) \mid x \in A\}$$

ponthalmazt a *függvény grafikonjának* nevezzük.

Például az $f: [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ függvény grafikonját az 1. ábrán rajzoltuk meg.

A $g: [-2; 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - [x]$ függvény grafikonját a 2. ábrán rajzoltuk meg.

2. ábra



Feladatok

1. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1;$

b) $g: [-3; 5] \to \mathbb{R},\ g(x) = -3x + 2;$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = (x-1)^2 - 4;$

d) $i: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i(x) = 2x^2 - 12x + 16;$

e) $j: (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \to \mathbb{R},\ j(x) = 2\sqrt{x};$

f) $k: [2; \infty[\to \mathbb{R},\ k(x) = \sqrt{x-2};$

g) $l: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ l(x) = \frac{3}{x};$

h) $m: (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \to \mathbb{R},\ m(x) = \frac{2}{x-1};$

i) $n: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ n(x) = 2^x + 1;$

j) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}.$

2. Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonjait:

a) $f: [-2\pi; 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x;$

b) $g: [0{,}1; 10] \to \mathbb{R},\ g(x) = \lg x;$

c) $h: \mathbb{R} \setminus]-1; 1[\to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{1}{x};$

d) $j: [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R},\ j(x) = \operatorname{tg} x;$

e) $k: [1; 9] \to \mathbb{R},\ k(x) = \sqrt{x};$

f) $l: [-1; 1] \to \mathbb{R},\ l(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x \text{ racionális,} \\ 0, \text{ ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

3. Döntsük el, hogy a következő függvények közül melyek szürjektívek, injektívek, illetve bijektívek, és melyek nem tartoznak egyik típusba sem!

a) $f: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x;$

b) $g: [-3; 3] \to \mathbb{R},\ g(x) = |x|;$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2x}{1+x^2};$

d) $j: \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ j(x) = [x];$

e) $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k(x) = -2x + 1;$

f) $l: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R},\ l(x) = x.$

2. Műveletek függvényekkel (emelt szintű tananyag)

A függvények összegét a következőképpen értelmezzük.

két függvény összege

Definíció: Ha adottak az $f: A_1 \to B$, $g: A_2 \to B$ függvények, akkor a *két függvény összegén* azt a h függvényt értjük, amely az $A_1 \cap A_2$ halmazból képez a B halmazba, és tetszőleges $x \in A_1 \cap A_2$ helyen:

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

A h függvényt szokás így is jelölni: $h = f + g$.

Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ és $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ függvények összege: $h = f + g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x + \frac{1}{x}$.

A függvények szorzatát hasonlóképpen definiáljuk.

két függvény szorzata

Definíció: Ha adottak az $f: A_1 \to B$, $g: A_2 \to B$ függvények, akkor a *két függvény szorzatán* azt a h függvényt értjük, amely az $A_1 \cap A_2$ halmazból képez a B halmazba, és tetszőleges $x \in A_1 \cap A_2$ helyen:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x).$$

A h függvényt szokás így is jelölni: $h = f \cdot g$.

Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ és $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvények szorzata: $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Két függvény különbségét már nem szükséges külön definiálnunk, megállapodhatunk abban, hogy az $f - g$ függvény nem más, mint az f és a $(-1) \cdot g$ függvény összege, ahol röviden –1-gyel jelöltük a $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -1$ konstans függvényt.

Két függvény hányadosát is célszerű úgy értelmezni, mint az osztandó és az osztó reciprokának a szorzatát. Elég tehát egy függvény reciprokát definiálni.

a függvény reciproka

Definíció: Az $f: A \to B$ *függvény reciproka* az a $g: A_1 \to B$ függvény, amelyre teljesül, hogy $x \in A_1$ akkor és csak akkor, ha $x \in A$ és $f(x) \neq 0$, továbbá tetszőleges $x \in A_1$-re

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Az f függvény reciprokát szokás így is jelölni: $\frac{1}{f}$.

Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény reciproka a $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény.

◆ ◆ ◆

Az eddig tárgyalt műveletek valójában leképezték a függvényértékek, vagyis a valós számok körében megismert alapműveleteket.

A függvényösszetétel vagy közvetett függvényképzés azonban már csak a függvényekre jellemző művelet. Az ebben a definícióban szereplő halmazok nemcsak szám-, hanem bármilyen nem üres halmazok lehetnek.

közvetett (összetett) függvény

DEFINÍCIÓ: Legyen adott az $f: A \to B$ és $g: C \to D$ függvény, és tegyük fel, hogy $D \subseteq A$. Ekkor azt a $h: C \to B$ függvényt, amelyre tetszőleges $x \in C$ esetén $h(x) = f(g(x))$, az f és g (ebben a sorrendben vett) *közvetett (vagy összetett) függvényének* nevezzük, és gyakran így jelöljük:

$$h = f \circ g.$$



Megjegyezzük, hogy a $g \circ f$ függvény létezéséhez azt kell feltenni, hogy $B \subseteq C$, és akkor ezt így értelmezzük: $g \circ f: A \to D$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Például ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ és $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x + 1$, akkor mivel $R_g \subseteq D_f$ és $R_f \subseteq D_g$, $f \circ g$ és $g \circ f$ is létezik, és

$$f \circ g = \sin(x^2 - x + 1),$$
$$g \circ f = (\sin x)^2 - \sin x + 1.$$

A függvények körében a $\circ$ művelet tehát nem kommutatív, általában

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Bebizonyítható azonban, hogy a $\circ$ művelet asszociatív, azaz ha a megfelelő halmazok teljesítik a feltételeket, akkor

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

◆ ◆ ◆

A függvények definíciójában a hozzárendelés (megfeleltetés) egyirányú kapcsolat. A függvények egy meghatározott körében ennek a hozzárendelésnek az iránya megfordítható, így jutunk a függvény inverzének fogalmához. Most is tetszőleges (nem csak szám-szám) függvényekről van szó.

inverz függvény

DEFINÍCIÓ: Tegyük fel, hogy az $f: A \to B$ függvény értékkészlete B és a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, azaz ha $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$ (bijekció).

Ekkor azt a g függvényt, amelyet így értelmezünk: $g: B \to A$ és $b \in B$ esetén $g(b) = a$ akkor és csak akkor, ha $f(a) = b$,

az f *inverz függvényének* nevezzük, és így jelöljük: $g = f^{-1}$.

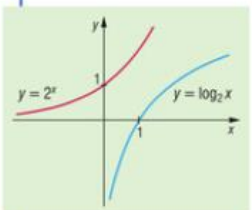
Példák inverz függvényekre

1. Legyen S a sík pontjainak halmaza, és vegyünk fel a síkon egy e egyenest. f legyen az a függvény, amely S-et S-re képezi le a következő utasítással: minden $P \in S$-re $f(P)$ legyen P-nek az e-re vonatkozó tengelyes tükörképe. Miután a tengelyes tükrözés a síkon kölcsönösen egyértelmű, f-nek van inverze, és $f^{-1} = f$, hiszen a tükörkép tükörképe az eredeti pont. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy $f \circ f$ az azonos leképezés, azaz minden ponthoz önmagát rendeli.

2. Ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$, akkor mivel tudjuk, hogy f szigorúan monoton növő, ezért a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű.

   Ennek inverz függvénye *(3. ábra)*:

   $$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \log_2 x.$$



3. ábra

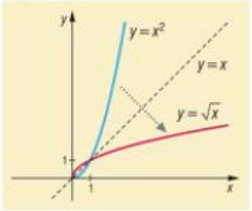
3. Ha $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$, akkor f szigorúan monoton növő, tehát kölcsönösen egyértelmű.

   Az f inverze:

   $$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

   Az inverz függvény definíciójából következik, hogy ha f szám-szám függvény, abban az esetben az $(x; f(x))$ koordinátájú pont akkor és csak akkor van rajta f grafikonján, ha az $(f(x); x)$ koordinátájú pont rajta van az f^{-1} inverz függvény grafikonján. Mivel e két pont egymás tükörképe az $y = x$ egyenletű egyenesre, az f^{-1} inverz függvény grafikonját úgy kapjuk f grafikonjából, hogy tükrözzük az $y = x$ egyenletű egyenesre. *(4. ábra)*

4. ábra



Feladatok

1. Adott a következő két függvény: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ és $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2^x$. Határozzuk meg a következő függvényeket:

   a) $f \circ f$; *b)* $f \circ g$; *c)* $g \circ f$; *d)* $g \circ g$.

2. Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ függvény. Adjuk meg az $f \circ f$, $f \circ f \circ f$ függvényeket!

3. Határozzuk meg a következő függvények inverzét:

   a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$; *b)* $g: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$;

   c) $h: [0; 1] \to [0; 1]$, $h(x) = \sqrt{1-x^2}$; *d)* $k: [-1; 0] \to [0; 1]$, $k(x) = \sqrt{1-x^2}$.

3. Függvénytulajdonságok

A következőkben kizárólag olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek a valós számok egy részhalmazából képeznek a valós számok halmazába. Az ilyen függvények grafikonját a sík pontjaiból álló halmazzal, egy görbével szemléltetjük. Szoros kapcsolat van a függvények egyszerű tulajdonságai és a görbe szemléletes jellemzői között.

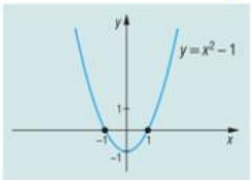
zérushely

DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $f: A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in A$ *zérushelye*, ha $f(a) = 0$.

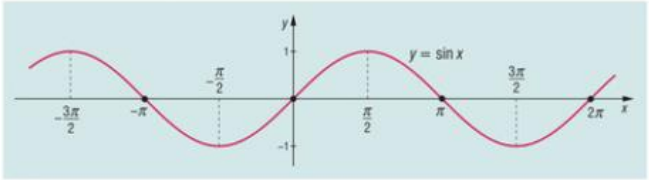
Az f függvény grafikonja az x tengelyt a függvény zérushelyein metszi.

Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ függvény zérushelyei -1 és 1, a függvény grafikonja ezen a két helyen metszi az x tengelyt. ***(5. ábra)***

A $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$ függvény zérushelyei az $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ értékek, tehát végtelen sok zérushelye van. A függvény grafikonja ezeken a helyeken metszi az x tengelyt. ***(6. ábra)***



5. ábra



6. ábra

Az egyenletek megoldása mindig visszavezethető arra a kérdésre, hogy egy függvénynek hol vannak a zérushelyei. Például az $x^3 - 1 = 4x^2 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$ egyenlet megoldása azt jelenti, hogy az

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

függvény zérushelyeit határozzuk meg.

A $\cos^2 x + \cos x \cdot \sin x = 1$, $x \in \mathbb{R}$ egyenlet megoldása visszavezethető arra a kérdésre, hogy a

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \cos^2 x + \cos x \cdot \sin x - 1$$

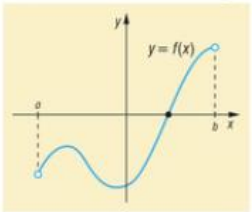
függvény zérushelyeit keressük.

◆ ◆ ◆

A matematika függvényekkel foglalkozó fejezetében a folytonos függvényeknek fontos helyük van. A folytonosság pontos definíciója csak mélyebb matematikai eszközökkel adható meg. Szemléletesen: ha egy f függvény az a helyen folytonos, akkor az a értékét kicsit megváltoztatva az $f(a)$ függvényérték is kicsit változik. A folytonos függvény görbéje folytonos vonallal rajzolható meg.

A folytonos függvények egyik fontos alaptulajdonságát fejezi ki az a tény, hogy ha f az $[a; b]$ intervallumban folytonos és $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelű számok, akkor f-nek az $]a; b[$-ben van zérushelye. ***(7. ábra)***

7. ábra



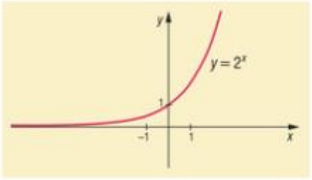
növekvő (csökkenő) függvény

DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $f: A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ függvény az $[a; b] \subseteq A$ intervallumban *növekszik (csökken)*, ha tetszőleges $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in [a; b]$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

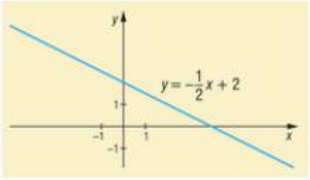
Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ függvény a teljes értelmezési tartományán növekszik. *(8. ábra)*

A $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ függvény a teljes értelmezési tartományán csökken. *(9. ábra)*

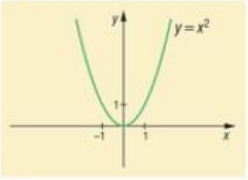
A $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$ függvény a $]-\infty; 0]$-ban csökken, a $[0; +\infty[$-ban pedig nő. *(10. ábra)*



8. ábra



9. ábra



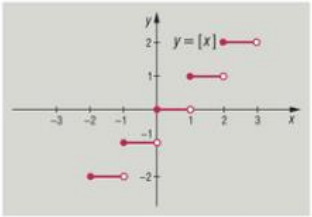
10. ábra

nem növekvő (nem csökkenő) függvény

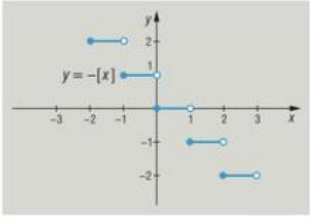
DEFINÍCIÓ: Ha az előző definícióban $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény *nem csökken (nem nő)* a megfelelő intervallumban.

Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ függvény a teljes értelmezési tartományban nem csökken. *(11. ábra)*

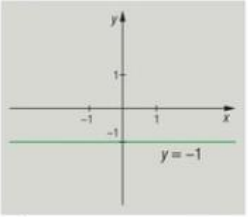
A $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -[x]$ függvény a teljes értelmezési tartományban nem nő. *(12. ábra)*



11. ábra



12. ábra



13. ábra

Érdemes megjegyezni, hogy például a $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -1$ konstans függvényről azt is elmondhatjuk, hogy az értelmezési tartományban nem csökken, de azt is, hogy nem nő. *(13. ábra)*

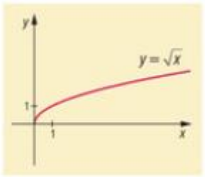
felülről (alulról) korlátos függvény

***Definíció:** **Azt mondjuk, hogy az $f: A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ függvény *felülről (alulról) korlátos* a $H \subseteq A$ halmazon, ha van olyan K (k) szám, amelyre teljesül, hogy minden $x \in H$-ra $f(x) \leq K$ ($f(x) \geq k$). Ekkor K (k) egy felső (alsó) korlátja f-nek a H halmazon.**

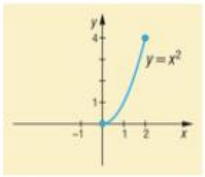
Az f függvény *korlátos* a H halmazon, ha alulról is és felülről is korlátos H-n.

Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ függvény alulról korlátos a teljes értelmezési tartományán, azaz a $[0; +\infty[$ intervallumban, mert itt minden x-re $0 \leq \sqrt{x}$. Nyilván $-2 \leq \sqrt{x}$ is igaz a $[0; +\infty[$-on, tehát -2 is egy alsó korlátja a függvénynek. ***(14. ábra)***

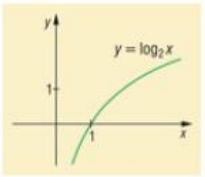
A $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény korlátos a $[0; 2]$ intervallumban, mert itt minden x-re $0 \leq x^2 \leq 4$. Nyilván $-1 \leq x^2 \leq 10$ is igaz $[0; 2]$-on, tehát -1 is egy alsó és 10 is egy felső korlátja ezen az intervallumon a függvénynek. ***(15. ábra)***



14. ábra



15. ábra



16. ábra

A $h:]0; +\infty[\to \mathbb{R}$, $h(x) = \log_2 x$ függvény nem korlátos az értelmezési tartományában se alulról, se felülről ***(16. ábra)***. Ha bármilyen kis negatív számot adunk meg, van olyan kis pozitív szám, amelynél kisebb pozitív értékekre a függvény értéke kisebb a megadott számnál.

Például $\log_2 x < -1000$, ha $0 < x < 2^{-1000} = \frac{1}{2^{1000}}$.

Hasonlóan $\log_2 x > 1000$, ha $x > 2^{1000}$.

Nyilvánvaló, hogy ha K felső korlát, akkor minden K-nál nagyobb szám is felső korlát. Ugyanígy igaz, hogy ha k alsó korlát, akkor minden k-nál kisebb szám is alsó korlát.

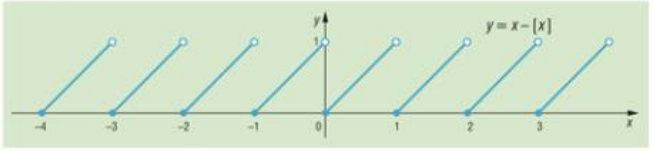
felső határ, alsó határ

Nevezetes tény, hogy a felső korlátok között mindig van legkisebb, ezt **felső határnak** nevezik, az alsó korlátok közt mindig van legnagyobb, ezt **alsó határnak** hívják.

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény a teljes számegyenesen korlátos, felső határa 1, alsó határa -1. ***(6. ábra)***

Érdekes példát mutat a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - [x]$ függvény, más néven a törtrészfüggvény. ***(17. ábra)***

17. ábra



Ez a függvény is korlátos a teljes számegyenesen.

Alsó határa 0, ezt minden egész helyen fel is veszi függvényértékként.

Felső határa 1, de ezt az értéket sehol sem veszi fel a függvény.

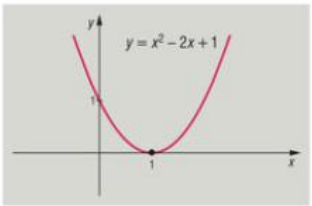
Végiggondolható, hogy bármely 1-nél kisebb nemnegatív értéket felvesz a függvény, így 1-nél kisebb felső korlátja nem lehet.

Definíció: **Az $f: A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in A$ helyen *maximuma (minimuma)* van az A halmazon, ha minden $x \in A$-ra $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.**

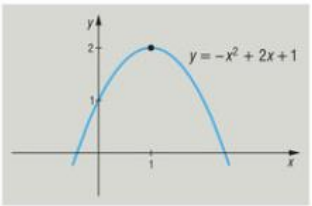
Az a helyet *maximum- (minimum)helynek*, $f(a)$-t a *maximum- (minimum)értéknek* is nevezzük. Közös néven a maximum- és minimumhelyet szokás *szélsőértékhelynek*, a maximum- és minimumértéket *szélsőértéknek* is nevezni.

Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ függvénynek az $x = 1$ helyen minimuma van, és a minimumértéke 0. *(18. ábra)*

A $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ függvénynek az $x = 1$ helyen maximuma van, és a maximumértéke 2. *(19. ábra)*

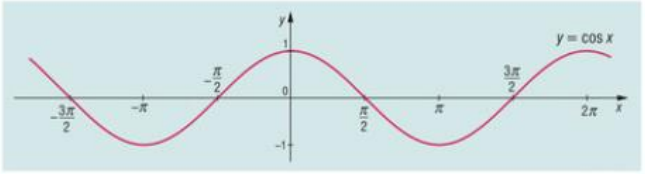


18. ábra



19. ábra

A $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$ függvénynek az $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken maximuma van, a maximumértéke 1, az $x = (2n + 1) \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$ helyeken pedig minimuma van, a minimumértéke -1. *(20. ábra)*



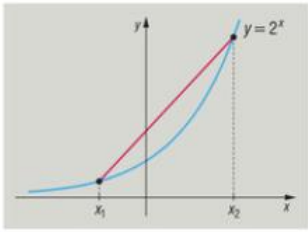
20. ábra

Érdemes megfigyelni, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$ függvénynek nincs maximuma, hiszen bármilyen 1-nél kisebb nemnegatív értéket felvesz, de az 1-et nem veszi fel. *(17. ábra)*

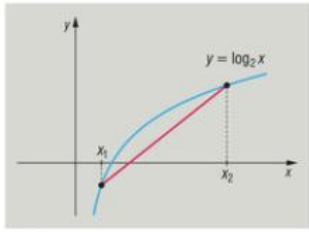
konvex (konkáv) függvény

***DEFINÍCIÓ: Az f függvényről azt mondjuk, hogy az I (véges vagy végtelen) intervallumban *konvex (konkáv)*, ha tetszőleges $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontok között az f grafikonja a két pontot összekötő húr alatt (fölött) halad.**

Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ függvény a teljes számegyenesen konvex ***(21. ábra)***, a $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_2 x$ függvény a $]0; \infty[$ intervallumban pedig konkáv ***(22. ábra)***.



21. ábra



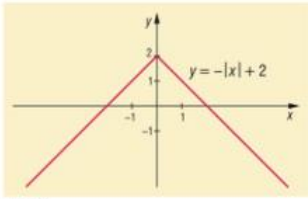
22. ábra

páros (páratlan) függvény

***DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $f: A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ függvény *páros (páratlan)*, ha minden $x \in A$-val együtt $-x \in A$ is teljesül, és $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.**

Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x| + 2$ függvény páros ***(23. ábra)***, a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ függvény páratlan ***(24. ábra)***.

Páros függvény grafikonja az y tengelyre szimmetrikus, páratlan függvény grafikonja az origóra centrálszimmetrikus.



23. ábra



24. ábra

periodikus függvény

***DEFINÍCIÓ: Az $f: A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ függvény *periodikus*, ha van olyan p pozitív szám, hogy minden $x \in A$ esetén $x + p \in A$ is teljesül, és $f(x) = f(x + p)$. A legkisebb ilyen p számot a függvény periódusának nevezzük.**

Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ függvény periodikus, és legkisebb pozitív periódusa 2π. ***(20. ábra)***

A tangens függvény is periodikus, legkisebb pozitív periódusa π.

Feladatok

1. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben, és jellemezzük (értékkészlet, zérushely, monotonitás, szélsőérték) a következő függvényeket:

   a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{x}{2} + 3$;

   b) $g\colon [-5; 8[\to \mathbb{R},\ g(x) = |x| - 2$;

   c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = (x+2)^2 - 4$;

   d) $i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i(x) = -|x+2| + 4$;

   e) $j\colon (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \to \mathbb{R},\ j(x) = \sqrt{x} - 1$;

   f) $k\colon [-2; \infty[\to \mathbb{R},\ k(x) = -\sqrt{x+2}$;

   g) $l\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ l(x) = -\frac{2}{x} + 1$;

   h) $m\colon (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \to \mathbb{R},\ m(x) = \frac{1}{x+1} - 2$;

   i) $n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ n(x) = -3^x + 1$;

   j) $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$.

2. Ábrázoljuk a következő függvényeket:

   a) $x \mapsto |x-1| + x,\ x \in [-2; 2]$;

   b) $x \mapsto |x^2 - x|,\ x \in [-1; 2]$;

   c) $x \mapsto (x+1)^3 - (x-1)^3,\ x \in [-1; 1]$.

3. Vázoljuk a következő függvények grafikonját, és határozzuk meg zérushelyeiket:

   a) $x \mapsto \frac{x+3}{x-1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

   b) $x \mapsto \sqrt{x-3} - 2,\ x \in [3; +\infty]$;

   c) $x \mapsto \sqrt[3]{x+2},\ x \in \mathbb{R}$.

4. Ábrázoljuk a következő függvényeket, és határozzuk meg szélsőértékhelyeiket és szélsőértékeiket:

   a) $x \mapsto 2^{|x|} + 1,\ x \in [-2; 2]$;

   b) $x \mapsto \log_2 |x-1| - 1 + x,\ x \in [2; 5]$;

   c) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} |1-x|,\ x \in [3; +\infty]$;

   d) $x \mapsto \sin |2x|,\ x \in [-\pi; \pi]$;

   e) $x \mapsto \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Határozzuk meg az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ függvény zérushelyeit és szélsőértékhelyeit!

6. Oldjuk meg a függvénytulajdonságok felhasználásával a következő egyenleteket:

   a) $3^x + 4^x = 5^x$;

   b) $\log_3 (1 + \sqrt{x}) = 5 - x,\ x \geq 0$;

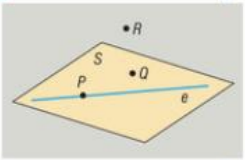
   c) $\log_{|x|} (|x| + 2) = 2,\ x \neq 0,\ |x| \neq 1$.

3D

GEOMETRIA

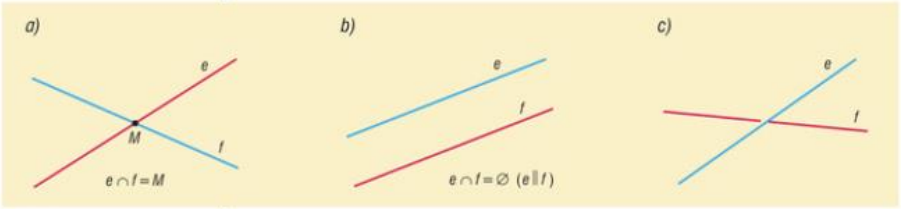
1. Alapvető fogalmak

A térelemek és kölcsönös helyzetük



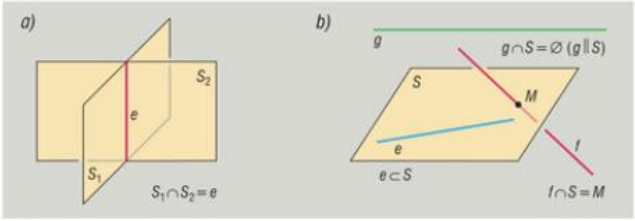
1. ábra

– A **pont,** az **egyenes,** a **sík** és az **illeszkedés** ***alapfogalmak,*** ezeket nem definiáljuk. *(1. ábra)*
– Két különböző egyenes **metsző,** ha van közös pontjuk. *(2/a. ábra)*
– Két egyenes **párhuzamos,** ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk, emellett minden egyenes párhuzamos önmagával. *(2/b. ábra)*
– Két egyenes **kitérő,** ha nincsenek egy síkban. *(2/c. ábra)*



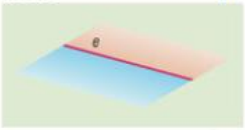
2. ábra

– Két különböző sík **metsző,** ha pontosan egy közös egyenesük van. *(3/a. ábra)*
– Két sík **párhuzamos,** ha nincs közös pontjuk, emellett minden sík párhuzamos önmagával.
– Egy egyenes **illeszkedik** egy síkra, ha az egyenes minden pontja a síknak is pontja. *(3/b. ábra)*
– Egy egyenes **metsz** egy síkot, ha pontosan egy közös pontjuk van.
– Egy egyenes és egy sík **párhuzamos,** ha nincs közös pontjuk.



3. ábra

4. ábra



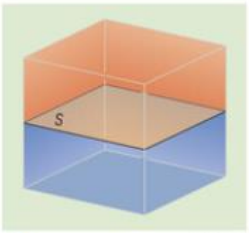
Félegyenes, szakasz, félsík, féltér, szög

– Egy egyenest egy pontja két **félegyenesre** bontja.
– Egy egyenes két pontja meghatároz egy **szakaszt.**
– A síkot egy egyenese két **félsíkra** osztja. *(4. ábra)*

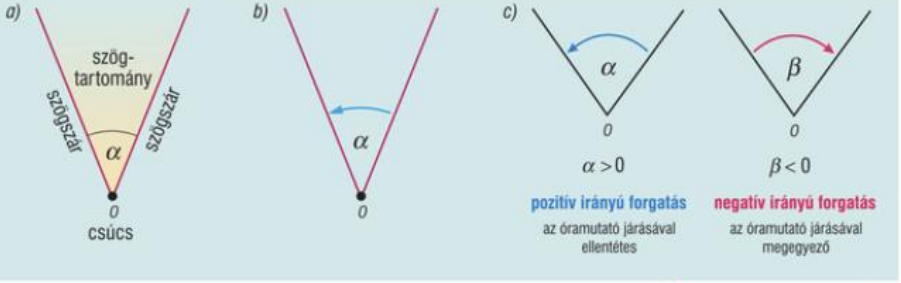
– A teret egy sík két **féltérre** bontja. *(5. ábra)*

– Egy adott pontból kiinduló két félegyenes a síkot két részre bontja. Egy-egy ilyen síkrész neve **szögtartomány,** vagy röviden **szög.** *(6/a. ábra)*

– **Forgásszöget** kapunk, ha egy félegyenest a kezdőpontja körül valamilyen irányban elforgatunk *(6/b. ábra)*.
A forgásszög **pozitív,** ha az óramutató járásával **ellentétes; negatív,** ha az óramutató járásával **megegyező** irányban forgatunk *(6/c. ábra)*.

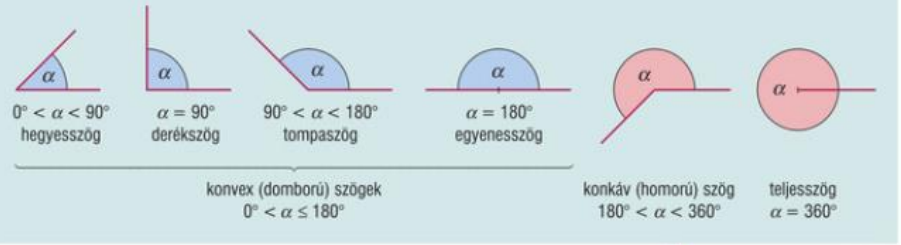


5. ábra



6. ábra

Szögfajták *(7. ábra)*



7. ábra

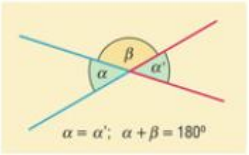
Nevezetes szögpárok

– Ha két szög csúcsa közös, és száraik páronként egymás meghosszabbításai, akkor **csúcsszögeknek** nevezzük őket. **A csúcsszögek egyenlő nagyságúak.** *(8. ábra)*

– Ha két szög egy-egy szára közös, a másik kettő pedig egy egyenes közös kezdőpontú két félegyenese, akkor **mellékszögeknek** nevezzük őket. **A mellékszögek összege 180°.** *(8. ábra)*

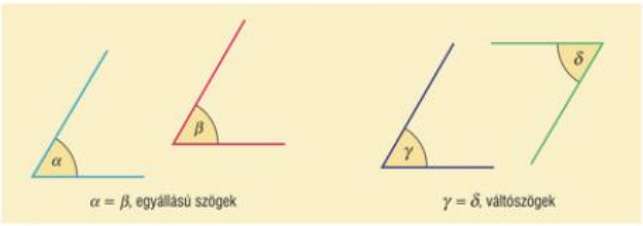
– Ha két szög összege 180°, akkor **kiegészítő szögeknek** nevezzük őket.

– Ha két szög összege 90°, akkor **pótszögeknek** nevezzük őket.



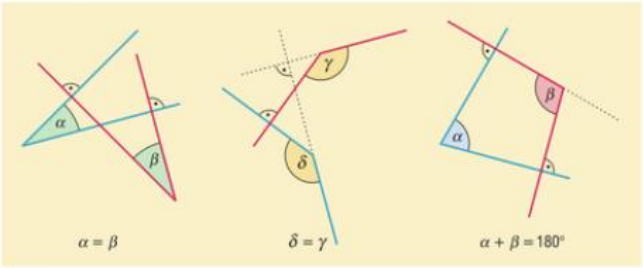
8. ábra

– Ha két konvex vagy két konkáv szög szárai páronként egyező irányúak, akkor **egyállású szögeknek,** ha páronként ellentétes irányúak, akkor **váltószögeknek** nevezzük őket. **Az egyállású szögek és a váltószögek egyenlő nagyságúak.** *(9. ábra)*



9. ábra

– Ha két szög szárai páronként merőlegesek, akkor **merőleges szárú szögeknek** nevezzük őket. *(10. ábra)*



10. ábra

A térelemek távolsága

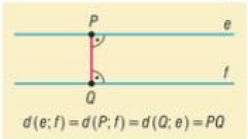
– **Két pont távolsága** a pontokat összekötő szakasz hossza.

– **Pont és egyenes távolsága** a pontból az egyenesre állított merőleges talppontjának és a tekintett pontnak a távolsága. Ha a pont illeszkedik az egyenesre, akkor távolságuk 0.

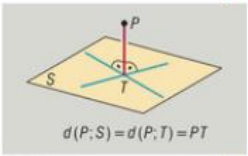
– **Két párhuzamos egyenes távolsága** az egyik egyenes egy tetszőleges pontjának a másik egyenestől vett távolsága. *(11. ábra)*

– **Két metsző egyenes távolsága 0.**

– **Pont és sík távolsága** a pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hossza. *(12. ábra)*



11. ábra



12. ábra

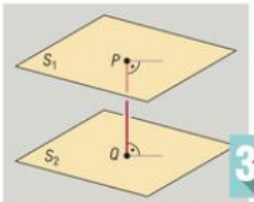
DEFINÍCIÓ: **Egy egyenes merőleges egy síkra, ha a sík minden egyenesére merőleges.**

TÉTEL: **Ha egy egyenes merőleges a síkkal vett metszéspontjára illeszkedő két különböző síkbeli egyenesre, akkor az egyenes merőleges a síkra.**

– **Két párhuzamos sík távolsága** az egyik sík tetszőleges pontjának a másik síktól vett távolsága. *(13. ábra)*

– **Két metsző sík távolsága 0.**

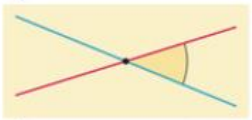
– **Két kitérő egyenes távolsága** az egyes egyenesekre illeszkedő, egymással párhuzamos síkok távolsága. (Bizonyítható, hogy adott egyenespár esetén ezek a síkok egyértelműen meghatározottak.)



13. ábra

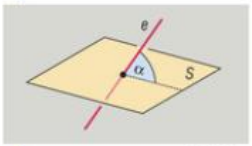
A térelemek szöge

– Két síkbeli metsző egyenes négy szögtartományt hoz létre, amelyek közül a két-két szemközti szög egybevágó (csúcsszögek). A létrejövő két szomszédos szög közül a kisebbik (nem nagyobbik) a **két egyenes hajlásszöge** *(14. ábra)*. Párhuzamos egyenesek hajlásszöge 0°-os.



14. ábra

– Ha egy egyenes nem merőleges egy síkra, akkor az **egyenes és a sík hajlásszöge** az egyenesnek és az egyenes síkra eső merőleges vetületének a hajlásszöge. *(15. ábra)*

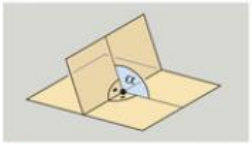


15. ábra

***Definíció:** **Egy pontnak egy síkra eső merőleges vetülete a pontból a síkra állított merőleges talppontja. Egy alakzatnak egy síkra eső merőleges vetülete az alakzat pontjai merőleges vetületeinek a halmaza.**

***Tétel:** **Ha egy egyenes nem merőleges egy síkra, akkor a síkra eső merőleges vetülete egyenes.**

– Vegyük két metsző sík metszésvonalának egy tetszőleges pontját. Állítsunk merőlegest a metszésvonalra ebben a pontban mindkét síkban. A **két metsző sík hajlásszöge** ezen merőleges egyenesek hajlásszöge. *(16. ábra)*

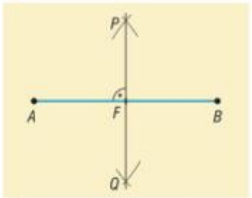


16. ábra

Nevezetes ponthalmazok

I. A szakaszfelező merőleges

Definíció: **A síkon egy *szakasz felező merőlegese* a szakasz felezőpontjára illeszkedő, a szakaszra merőleges egyenes.**

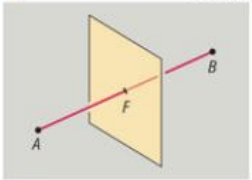


17. ábra

Tétel: **A sík A és B pontjától egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkon az AB szakasz *felező merőlegese*.** *(17. ábra)*

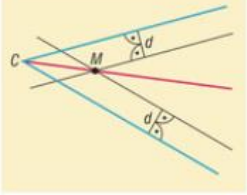
18. ábra

***Tétel:** **A térben az adott A és B pontoktól egyenlő távol levő pontok halmaza az AB szakaszra merőleges, annak felezőpontjára illeszkedő sík, a *szakasz felező merőleges síkja*.** *(18. ábra)*



II. A szögfelező

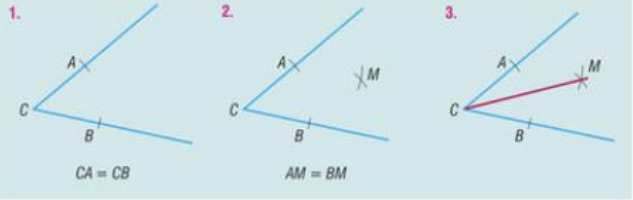
DEFINÍCIÓ: **Egy konvex szög *szögfelezője* a szög csúcsából kiinduló, a szögtartományban haladó azon félegyenes, amely a szöget két egybevágó (egyenlő nagyságú) szögre bontja.**



19. ábra

TÉTEL: **Egy konvex szögtartományban a száraktól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a tekintett szög *szögfelezője*.** *(19. ábra)*

Egy adott konvex szög szögfelezőjének szerkesztése a 20. ábráról leolvasható.



20. ábra

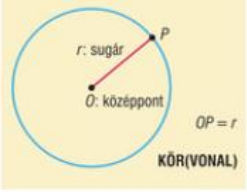
III. A kör

DEFINÍCIÓ: **Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *O* pontjától adott *r* távolságra vannak, egy *kör* (körvonal).** *(21. ábra)*

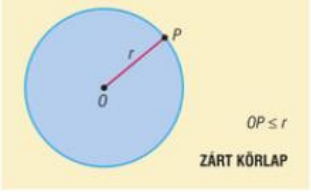
***DEFINÍCIÓ:** **Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *O* pontjától adott *r* távolságnál nem nagyobb távolságra vannak, az *O* középpontú, *r* sugarú *zárt körlap*.** *(22. ábra)*

***DEFINÍCIÓ:** **Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott *O* pontjától adott *r* távolságnál kisebb távolságra vannak, az *O* középpontú, *r* sugarú *nyílt körlap*.** *(23. ábra)*

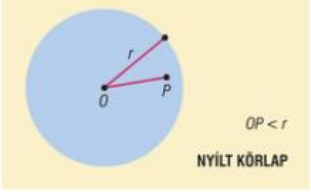
21. ábra



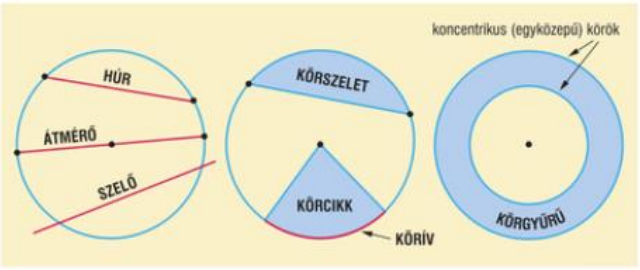
22. ábra



23. ábra

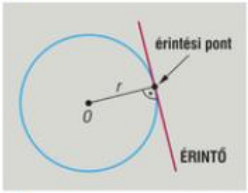


A körrel és részeivel kapcsolatos elnevezések a 24. ábrán láthatók.



24. ábra

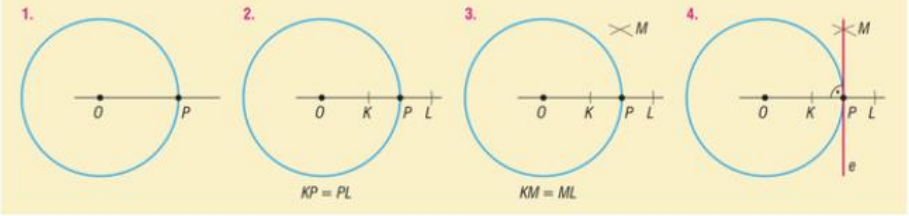
DEFINÍCIÓ: A *kör érintője* a kör síkjának olyan egyenese, amelynek pontosan egy közös pontja van a körrel. *(25. ábra)*



25. ábra

TÉTEL: A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

Egy adott kör adott P pontjába a 26. ábrán látható módon szerkeszthető érintő.



26. ábra

IV. A gömb

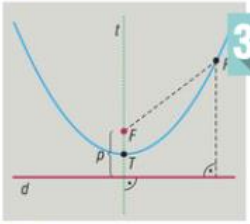
DEFINÍCIÓ: Azon pontok halmaza a térben, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak, egy *gömb* (gömbfelület).

27. ábra

V. A kúpszeletek

A PARABOLA

***DEFINÍCIÓ: A *parabola* azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík egy d egyenesétől és egy d-re nem illeszkedő F pontjától vett távolsága egyenlő.** *(27. ábra)*

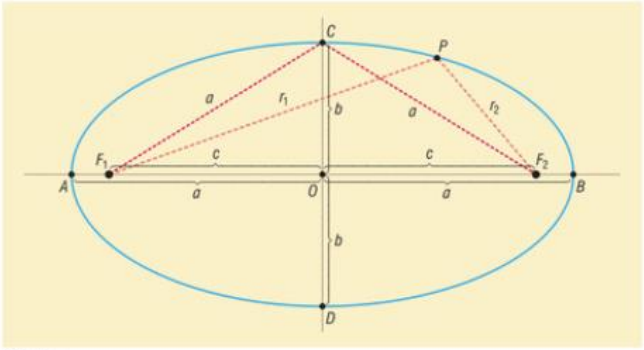


F a parabola *fókuszpontja*, d a parabola *vezéregyenese (direktrixe)*.

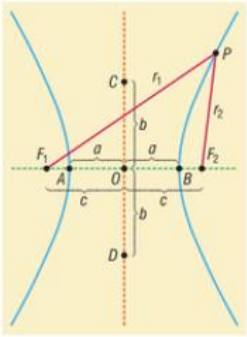
AZ ELLIPSZIS

DEFINÍCIÓ: **Az *ellipszis* azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík két adott pontjától vett távolságösszege a két adott pont távolságánál nagyobb állandó.** *(28. ábra)*

A két adott pont az ellipszis két *fókuszpontja*.



28. ábra



29. ábra

A HIPERBOLA

DEFINÍCIÓ: **A *hiperbola* azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík két adott pontjától vett távolságkülönbsége abszolút értékben a két adott pont távolságánál kisebb állandó.** *(29. ábra)*

A két adott pont a hiperbola két *fókuszpontja*.

Feladatok

1. Az A és B pontok távolsága 4 cm. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis. Ha a sík egy P pontjára
   a) $PA < 2$ cm, akkor $PB < 5$ cm; *b)* $PA < 1$ cm, akkor $PB > 2$ cm.
2. Mekkora legyen az A és B pontok távolsága, hogy igazak legyenek az alábbi állítások? Ha a sík egy P pontjára
   a) $PA < 3$ cm, akkor $PB < 7$ cm; *b)* $PA < 3$ cm, akkor $PB > 7$ cm.
3. Öt szög együtt teljesszöget alkot. Tudjuk továbbá, hogy mindegyik szög az előzőnél 15°-kal nagyobb. Mekkorák a szögek?
4. Egy hajó a kikötőből északi irányban indul el. Két napi út után $-45°$-kal, majd újabb két napi út után $+150°$-kal elfordul. Az eredeti (északi) irányhoz képest milyen irányban halad ekkor?

5. Egy park alakja olyan téglalap, amelyik nem négyzet. A park sarkaiból, a belső szögfelezők mentén olyan sétálóösvények indulnak ki, amelyek a park határán végződnek. Milyen alakú területet fog közre a négy ösvény a park belsejében?

6. Vegyünk fel a síkon két metsző egyenest és egy kört. Szerkesszük meg a körnek azokat a pontjait, amelyek egyenlő távolságra vannak a két egyenestől. Hány pontot kaphatunk így? Van-e mindig megfelelő pont?

7. Hány metszéspontot határoz meg tíz olyan síkbeli egyenes, amelyek közül pontosan három párhuzamos egymással, és pontosan három illeszkedik egy pontra?

8. Legfeljebb hány részre osztja a teret

a) három sík; *b)* négy sík;

c) egy gömb és három sík; *d)* egy gömb és négy sík?

2. Geometriai transzformációk

DEFINÍCIÓ: **A *geometriai transzformációk* olyan kölcsönösen egyértelmű függvények, amelyek értelmezési tartománya a sík vagy a tér pontjainak halmaza, és értékkészletük megegyezik az értelmezési tartományukkal.**

EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK

DEFINÍCIÓ: ***Egybevágósági (távolságtartó) transzformációk* azok a geometriai transzformációk, amelyeknél bármely szakasz képe az eredetivel egyenlő hosszúságú szakasz.**

A síkbeli egybevágósági transzformációk

I. A tengelyes tükrözés

DEFINÍCIÓ: **Adott a sík egy t egyenese. A sík minden egyes P pontjához rendeljünk hozzá egy P' pontot a következőképpen:**

– ha $P \in t$, akkor $P' = P$;

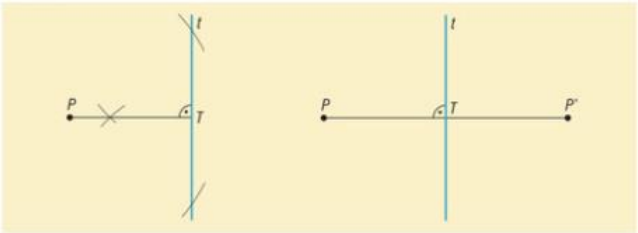
– ha $P \notin t$, akkor P' a sík azon pontja, amelyre teljesül, hogy a PP' szakasz felező merőlegese a t egyenes.

A t egyenes a tükrözés *tengelye*.

A tengelyes tükrözést egyértelműen meghatározza a t tengely, vagy egy P pont és annak P' képe, ha $P' \neq P$.

Egy P pontnak a t tengelyre vonatkozó tükörképe a 30. ábrán látható módon szerkeszthető.

30. ábra



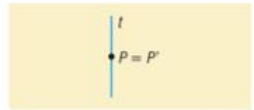
A TENGELYES TÜKRÖZÉS TULAJDONSÁGAI

(1) A tengely pontjai **fixpontok,** más fixpont nincs. *(31. ábra)*

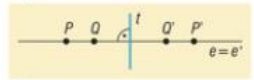
(2) A tengelyre merőleges egyenesek **invariáns egyenesek.** *(32. ábra)*

(3) A tengelyt nem merőlegesen metsző egyenes képe az eredeti egyenest a tengelyen metszi, és ugyanakkora szöget zár be a tengellyel, mint az eredeti egyenes. *(33. ábra)*

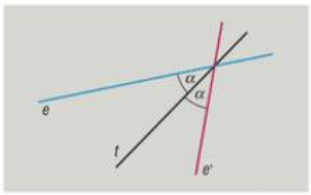
(4) A tengellyel párhuzamos egyenesnek a képe is párhuzamos a tengellyel, és a tengely felezi az eredeti és a képegyenes által meghatározott sávot. *(34. ábra)*



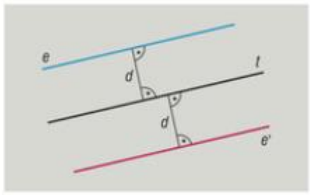
31. ábra



32. ábra



33. ábra

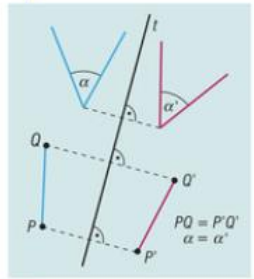


34. ábra

(5) A tengelyes tükrözés **távolságtartó** és **szögtartó** transzformáció, azaz bármely szakasz és a képe egyenlő hosszúságú, valamint bármely szög és a képe egyenlő nagyságú. *(35. ábra)*

(6) Ha ugyanazon tengelyre kétszer egymás után tükrözünk, akkor e két tükrözés egymás utáni végrehajtásával kapott transzformáció az *identikus transzformáció* (a sík minden pontjához önmagát rendeli).

(7) A tengelyes tükrözés **irányítástfordító** geometriai transzformáció.



35. ábra

A TENGELYESEN SZIMMETRIKUS ALAKZATOK

DEFINÍCIÓ: **Egy síkbeli alakzat *tengelyesen szimmetrikus,* ha van a síknak olyan egyenese, amelyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat invariáns.**

II. A középpontos tükrözés

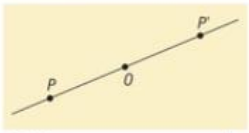
DEFINÍCIÓ: **Adott a sík egy O pontja. A sík minden egyes P pontjához rendeljünk hozzá egy P' pontot a következőképpen:**

– O-hoz önmagát rendeljük, azaz $O' = O$;

– ha $P \neq O$, akkor P' a sík azon pontja, amelyre teljesül, hogy a PP' szakasz felezőpontja O.

Az O pont a *tükrözés középpontja (centruma).*

A középpontos tükrözést egyértelműen meghatározza az O pont, vagy egy O-tól különböző P pont és annak P' képe.



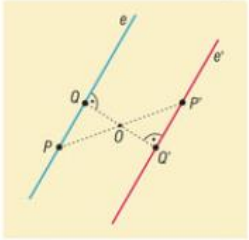
36. ábra

A KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS TULAJDONSÁGAI

(1) A transzformáció egyetlen **fixpontja** a tükrözés O középpontja.

(2) A tükrözés O középpontjára illeszkedő egyenesek, és csak ezek, **invariáns egyenesek.** *(36. ábra)*

(3) A tükrözés O középpontjára nem illeszkedő egyenes képe az eredetivel párhuzamos, O-ra nem illeszkedő egyenes. *(37. ábra)*



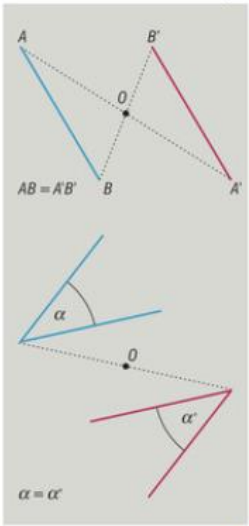
37. ábra

(4) A középpontos tükrözés **távolságtartó** és **szögtartó** transzformáció. *(38. ábra)*

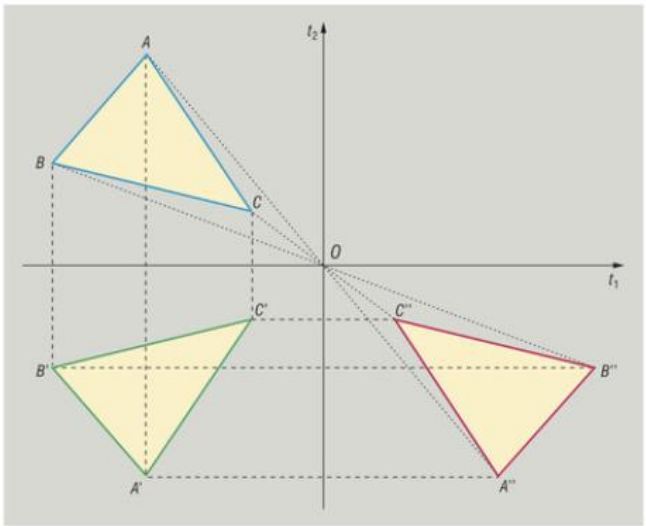
(5) Ha egy középpontos tükrözésnél a P pont képe P', akkor ugyanennél a középpontos tükrözésnél a P' pont képe P, azaz ugyanazon középpontra történő két tükrözés egymás utáni végrehajtása az *identikus transzformáció.*

(6) A középpontos tükrözés **irányítástartó** geometriai transzformáció.

*(7) A középpontos tükrözés előáll két egymásra merőleges tengelyre vonatkozó tükrözés egymás utáni végrehajtásával. A tükrözés középpontja a két tengely metszéspontja. *(39. ábra)*



38. ábra



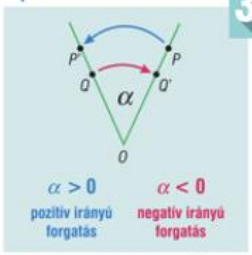
39. ábra

A KÖZÉPPONTOSAN SZIMMETRIKUS ALAKZATOK

DEFINÍCIÓ: Egy síkbeli (vagy térbeli) alakzat *középpontosan (centrálisan) szimmetrikus,* ha van a síknak (térnek) olyan pontja, amelyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat invariáns.

III. A pont körüli forgatás

Definíció: **Adott a sík egy O pontja és egy α irányított szög. A sík minden egyes P pontjához rendeljünk hozzá egy P' pontot a következőképpen:**
– O-hoz önmagát rendeljük, azaz $O' = O$;
– ha $P \neq O$, akkor P' a sík azon pontja, amelyre $OP = OP'$, és az OP félegyenes α irányított forgásszögű elforgatottja az OP' félegyenes.
Az O pont a *forgatás középpontja (centruma).* *(40. ábra)*



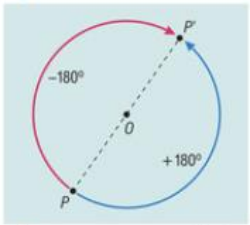
40. ábra

A pont körüli forgatást egyértelműen meghatározza az O pont és az α irányított szög, vagy az O pont, egy O-tól különböző P pont és annak P' képe.

A PONT KÖRÜLI FORGATÁS TULAJDONSÁGAI

(1) Ha $\alpha \neq k \cdot 360°$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor a *transzformáció* egyetlen **fixpontja** a forgatás O középpontja. Ha $\alpha = k \cdot 360°$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor a sík minden pontja fixpont (identikus transzformáció).

(2) Ha $\alpha = \pm 180°$, akkor az O körüli elforgatás az O-ra vonatkozó tükrözéssel egyezik meg. *(41. ábra)*

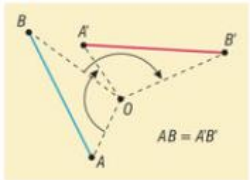


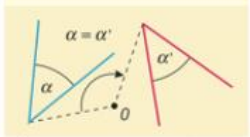
41. ábra

(3) A pont körüli elforgatás **távolságtartó** és **szögtartó** transzformáció. *(42. ábra)*

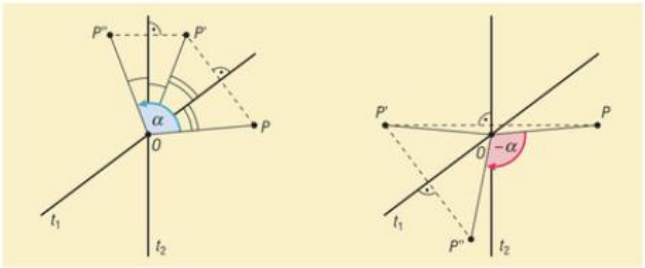
(4) A pont körüli forgatás **irányítástartó** geometriai transzformáció.

*(5) Az O pont körüli α irányított szögű forgatás előáll két olyan tengelyes tükrözés egymás utáni végrehajtásával, ahol a tengelyek metszéspontja O és a tengelyek által bezárt szög nagysága $\frac{|\alpha|}{2}$. *(43. ábra)*





42. ábra



43. ábra

A FORGÁSSZIMMETRIKUS ALAKZATOK

Definíció: **Egy síkbeli alakzat *forgásszimmetrikus,* ha van a síknak olyan O pontja és van olyan α pozitív irányítású szög ($0 < \alpha < 360°$), hogy az O körüli α szögű forgatásnak az alakzat invariáns alakzata.**

3D

IV. A párhuzamos eltolás

DEFINÍCIÓ: Adott a sík egy $\vec{v}$ vektora. A sík minden egyes P pontjához rendeljük hozzá azt a P' pontot, amelyre $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$. $\vec{v}$ a *párhuzamos eltolás vektora.*

A párhuzamos eltolást egyértelműen meghatározza $\vec{v}$, vagy egy P pont és annak P' képe.

A PÁRHUZAMOS ELTOLÁS TULAJDONSÁGAI

(1) A párhuzamos eltolásnak **nincs fixpontja,** ha $\vec{v} \neq \vec{0}$; és **minden pont fix,** ha $\vec{v} = \vec{0}$.

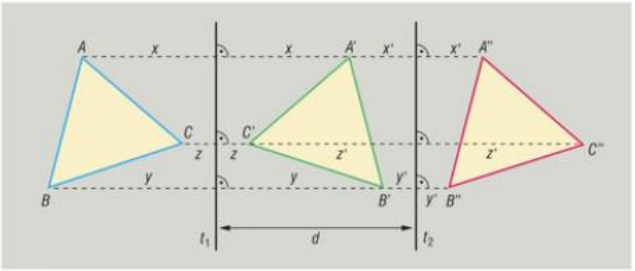
(2) Az eltolás irányával párhuzamos egyenesek – és csak azok – **invariáns egyenesek.**

(3) Egy egyenes párhuzamos az eltolt képével.

(4) A párhuzamos eltolás **távolságtartó** és **szögtartó** transzformáció.

(5) A párhuzamos eltolás **irányítástartó** transzformáció.

*(6) A párhuzamos eltolás előáll két párhuzamos tengelyű tengelyes tükrözés egymás utáni végrehajtásával, ahol a tengelyek távolsága az eltolásvektor hosszának fele, irányuk pedig merőleges az eltolás irányára. ***(44. ábra)***



44. ábra

◆ ◆ ◆

A térbeli egybevágósági transzformációkkal középiskolai tanulmányaink során nem foglalkoztunk, de természetesen ezek is vizsgálhatók a síkbeliekhez hasonlóan. Speciális térbeli egybevágósági transzformációk:

- a síkra vonatkozó tükrözés;
- a tengelyes tükrözés (egyenesre vonatkozó tükrözés a térben);
- a középpontos tükrözés;
- a tengely körüli forgatás;
- a párhuzamos eltolás.

Ezeket itt nem definiáljuk, de megjegyezzük, hogy a középpontos tükrözés és a párhuzamos eltolás térbeli definíciója megegyezik a síkbelivel.

Az alakzatok egybevágósága

Definíció: Két alakzat *egybevágó*, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. (Az egybevágóság jele: $\cong$.)

I. A háromszögek egybevágóságának alapesetei

Tétel: Két *háromszög* akkor és csak akkor *egybevágó*, ha a következő feltételek egyike teljesül:

(1) megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő;
(2) két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és az ezek által bezárt szögek egyenlők;
(3) egy-egy oldaluk hossza és a rajtuk fekvő két szögük páronként egyenlő;
(4) két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és a két-két oldal közül a hosszabbal szemközti szögek egyenlők.

II. A sokszögek egybevágósága

*Tétel: Két sokszög akkor és csak akkor egybevágó, ha rájuk a következő feltételek egyike teljesül:

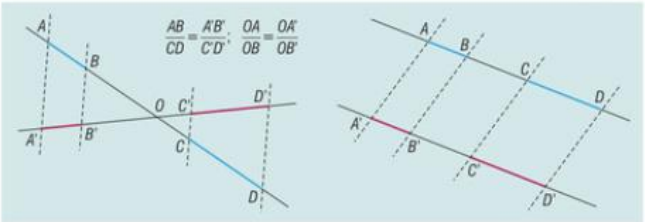
(1) megfelelő oldalaik hossza és megfelelő átlóik hossza páronként egyenlő;
(2) megfelelő oldalaik hossza és megfelelő szögeik nagysága páronként egyenlő.

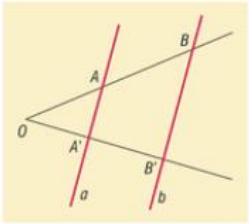
A HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓ

A párhuzamos szelők és szelőszakaszok (emelt szintű tananyag)

*Tétel: Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok hosszának aránya egyenlő a másik száron keletkező megfelelő szakaszok hosszának arányával. (Párhuzamos szelők tétele.) *(45. ábra)*

45. ábra



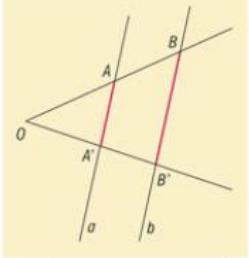


46. ábra

TÉTEL: **Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyek hosszának aránya mindkét szögszáron ugyanaz, akkor a két egyenes párhuzamos. (A párhuzamos szelők tételének megfordítása.)**

A 46. ábra jelöléseit használva a két tétel együtt:

$$a \text{ és } b \text{ párhuzamosak} \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$



47. ábra

TÉTEL: **Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyenesekből a szárak által kimetszett szakaszok hosszának aránya megegyezik az egyenesek által a szögszárakból kimetszett szakaszok hosszának arányával, azaz** *(47. ábra)*:

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

(Párhuzamos szelőszakaszok tétele.)

A középpontos hasonlósági transzformáció

DEFINÍCIÓ: **Adott egy O pont és egy λ ($\lambda \neq 0$) valós szám. A tér minden egyes P pontjához rendeljünk hozzá egy P' pontot a következőképpen:**

- **ha $P = O$, akkor $P' = P$.**
- **ha $P \neq O$, akkor P' az OP egyenes azon pontja, amelyre $OP' = |\lambda| \cdot OP$, és ha $\lambda > 0$, akkor P' az OP félegyenes pontja, ha $\lambda < 0$, akkor P-t és P'-t O elválasztja egymástól.** *(48. ábra)*



48. ábra

Az O pont a transzformáció **középpontja** vagy **centruma,** λ a középpontos hasonlóság **aránya.**

Ha $|\lambda| < 1$, akkor **középpontos kicsinyítésről,** ha $|\lambda| > 1$, akkor **középpontos nagyításról** beszélünk.

A középpontos hasonlóságot egyértelműen meghatározza az O középpont és λ, vagy O és egy O-tól különböző pont a képével.

A KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓ TULAJDONSÁGAI

(1) Ha $\lambda \neq 1$, akkor a transzformáció egyetlen **fixpontja** az O középpont. Ha $\lambda = 1$, akkor a tér minden pontja fixpont, azaz a transzformáció az *identikus transzformáció.*

(2) Az O középpontra illeszkedő egyenesek a transzformáció **invariáns egyenesei.** Ha $\lambda \neq 1$, akkor más invariáns egyenes nincs.

(3) Bármely, az O középpontra nem illeszkedő egyenes képe az eredetivel **párhuzamos,** O-ra nem illeszkedő egyenes.

(4) A középpontos hasonlóság **szögtartó** transzformáció.

(5) A λ arányú középpontos hasonlóságnál bármely szakasz képének hossza az eredeti szakasz hosszának $|\lambda|$-szerese, azaz bármely A és B pontok esetén $A'B' = |\lambda| \cdot AB$.

(6) A középpontos hasonlóság akkor és csak akkor egybevágóság, ha $|\lambda| = 1$. Ha $\lambda = 1$, akkor identitás, ha $\lambda = -1$, akkor középpontos tükrözés.

(7) A síkbeli középpontos hasonlóság **irányítástartó** transzformáció.

A hasonlósági transzformáció (emelt szintű tananyag)

DEFINÍCIÓ: A középpontos hasonlósági transzformáció és egybevágósági transzformáció egymás utáni végrehajtásával kapott transzformációkat *hasonlósági transzformációknak* nevezzük.

A HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓ TULAJDONSÁGAI

(1) A hasonlósági transzformáció **egyenest egyenesbe transzformál.**

(2) A hasonlósági transzformáció **szögtartó** transzformáció.

(3) A λ arányú hasonlósági transzformáció esetén bármely A, B pontokra és A', B' képeikre teljesül, hogy $\frac{A'B'}{AB} = |\lambda|$.

(4) Ha $|\lambda| = 1$, akkor a hasonlósági transzformáció egybevágósági transzformáció.



Az alakzatok hasonlósága

DEFINÍCIÓ: **Két alakzat *hasonló*, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. (A hasonlóság jele: ~.)**

I. A háromszögek hasonlóságának alapesetei

TÉTEL: ***Két háromszög*** **akkor és csak akkor *hasonló*, ha a következő feltételek egyike teljesül:**

(1) **megfelelő oldalaik hosszának aránya páronként egyenlő;**

(2) **két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és az ezek által közrefogott szögek egyenlők;**

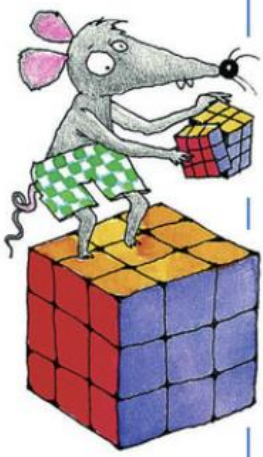
(3) **két-két szögük páronként egyenlő;**

(4) **két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és e két-két oldal közül a nagyobbikkal szemközt levő szögek egyenlők.**

II. A sokszögek hasonlósága

***TÉTEL:** **Két sokszög** **akkor és csak akkor *hasonló*, ha megfelelő oldalhosszaik aránya páronként egyenlő, és megfelelő szögeik páronként egyenlők.**

III. A hasonló síkidomok területének, a hasonló testek térfogatának aránya



DEFINÍCIÓ: **Két hasonló alakzat *hasonlóságának aránya* az egymásnak megfelelő szakaszok hosszának aránya.**

TÉTEL: **A *hasonló síkidomok területének aránya* a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő:**

$$\frac{T'}{T} = \lambda^2.$$

TÉTEL: **A *hasonló testek térfogatának aránya* a hasonlóság arányának köbével egyenlő:**

$$\frac{V'}{V} = \lambda^3.$$

Feladatok

1. Adott két egymást metsző egyenes és a síkjukban egy olyan pont, amelyik egyik egyenesre sem illeszkedik. Szerkesszünk háromszöget, amelynek az adott pont az egyik csúcsa, a két egyenes pedig az adott pontban találkozó két oldal felezőmerőlegese.

2. Rajzoljunk a derékszögű koordináta-rendszerben olyan négyzetet, amely mindkét tengelyre nézve szimmetrikus, és teljesül rá, hogy a négy csúcspont koordinátáinak abszolút értékét összeadva 64-et kapunk. Hány megoldása van a feladatnak?

3. Szerkesszünk szabályos háromszöget, ha adott a magasságpontja és az egyik csúcsa.

4. Vegyünk fel egy 4 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget, és toljuk el egyik magasságvonalának irányában a magasság $\frac{2}{3}$ részével. Milyen síkidomot határoz meg az eredeti és a képként kapott háromszög

   a) közös része; *b)* egyesítése?

   Határozzuk meg mindkét esetben a keletkezett síkidom kerületét és területét.

5. Igazoljuk, hogy egy szög szögfelezőjére emelt merőleges a szögszárakból egyenlő hosszúságú szakaszokat vág le.

6. Osszunk fel egy adott szakaszt 7 egyenlő részre.

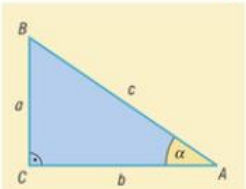
7. A koordináta-rendszerben egy háromszög csúcsai: $A(-2; 5)$, $B(1; -3)$, $C(8; 2)$. Nagyítsuk a háromszöget

   a) az origóból; *b)* az $O(6; -2)$ pontból

   kétszeresére. Határozzuk meg mindkét esetben a képháromszög csúcsait.

8. Egy 18×25 mm-es téglalap alakú diaképről a diavetítő a vetítővásznon 2,88 m^2-es torzítatlan, éles képet állít elő. Mekkora a nagyítás? Milyen távol van a diakép a vásznon látható képtől, ha a diakép távolsága a pontszerűnek tekinthető izzótól 5 cm, az izzó a diakép középpontjában a képre állított képzeletbeli merőlegesre illeszkedik, és a pontszerű izzót tekintve középpontnak a kivetítés középpontos nagyításnak tekinthető?

3. Vektorok. Szögfüggvények



49. ábra

A hegyesszögek szögfüggvényei

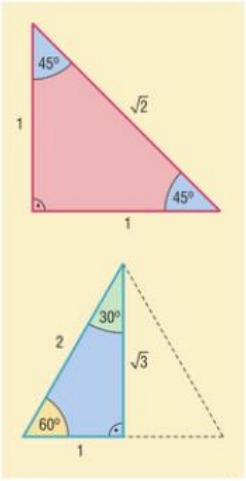
Két derékszögű háromszög hasonló, ha egy-egy hegyesszögük egyenlő, ezért egy derékszögű háromszög oldalainak arányát egyértelműen meghatározza valamelyik hegyesszögének nagysága. A hegyesszögek szögfüggvényei ilyen, kizárólag a szögtől függő arányok.

A definícióban a 49. ábra jelöléseit használjuk.

Definíció: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

A definíciók alapján könnyen adódnak a következő **azonosságok:**

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};$$
$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha);\quad \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha);$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha);\quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$$



50. ábra

Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk az ún. **pitagoraszi azonosságot:**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Néhány nevezetes hegyesszög szögfüggvényértékeit, amelyeket az 50. ábra alapján határoztunk meg, az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

A szögfüggvényfogalom kiterjesztése derékszögre, tompaszögre és egyenesszögre

A hegyesszögekre értelmezett szögfüggvények fogalmát kiterjeszthetjük derékszögre, tompaszögre és egyenesszögre is. A kiterjesztést úgy szeretnénk megvalósítani, hogy bizonyos, a hegyesszögekre érvényes összefüggések érvényben maradjanak a kiterjesztés után is.

Legyen érvényes a kiterjesztés után:

(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (pitagoraszi azonosság) $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$ esetén is;

(2) a háromszög $T=\dfrac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$ területképlete $90^\circ\le\gamma\le180^\circ$ esetén is;

(3) a koszinusztétel $c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$ alakja $90^\circ\le\gamma\le180^\circ$ esetén is;

(4) a tangens és a kotangens definíciójára a $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\cos\alpha\neq0)$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\sin\alpha\neq0)$.

Bizonyítható, hogy ezek alapján egyértelmű a kiterjesztés, és

(1) $\sin90^\circ=1$, $\cos90^\circ=0$, $\operatorname{tg}90^\circ$ nincs értelmezve, $\operatorname{ctg}90^\circ=0$;

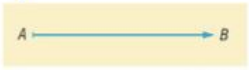
(2) ha $90^\circ<\alpha<180^\circ$, akkor
$\sin\alpha=\sin(180^\circ-\alpha)$, $\cos\alpha=-\cos(180^\circ-\alpha)$,
$\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)$;

(3) $\sin180^\circ=0$, $\cos180^\circ=-1$, $\operatorname{tg}180^\circ=0$, $\operatorname{ctg}180^\circ$ nincs értelmezve.

Vektorok

I. A vektor fogalma

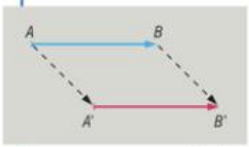
Definíció: Ha egy szakasz két végpontját megkülönböztetjük egymástól oly módon, hogy az egyik pont a *kezdőpont*, a másik pont a *végpont*, akkor *irányított szakaszt* kapunk. *(51. ábra)*



51. ábra

Definíció: Egy irányított szakasz egyértelműen meghatároz egy vektort. (Jelölés: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$, **v**.)

Az A-ból B-be és az A'-ből B'-be mutató irányított szakaszok **ugyanazt a vektort határozzák meg,** ha van olyan párhuzamos eltolás, amelyik egyidejűleg A-t A'-be és B-t B'-be viszi. *(52. ábra)*



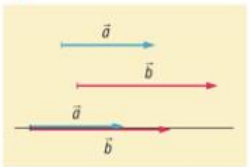
52. ábra

Definíció: A vektort meghatározó irányított szakasz hossza a *vektor abszolút értéke.* (Jelölés: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$, $|\boldsymbol{a}|$.)

Definíció: Azt a vektort, amelynek abszolút értéke 0, *nullvektornak* nevezzük. (Jelölés: $\vec{0}$ vagy **0**.)

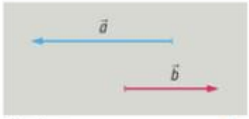
Definíció: Két vektor *párhuzamos,* ha az őket meghatározó irányított szakaszok egyenesei párhuzamosak.

Definíció: Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok *egyirányúak,* ha párhuzamosak, és ugyanabba az irányba mutatnak, azaz közös kezdőpontból felvéve egy $\vec{a}$-t és egy $\vec{b}$-t reprezentáló irányított szakaszt, azok egy egyenesbe esnek, és végpontjaik a közös kezdőpont által meghatározott ugyanazon félegyenesre illeszkednek. *(53. ábra)*

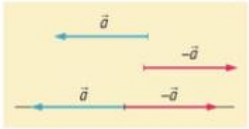


53. ábra

Megállapodás szerint a $\vec{0}$ iránya tetszőleges, azaz bármely vektorral egyirányú.



54. ábra



55. ábra

Definíció: **Két vektor *ellentétes irányú*, ha párhuzamosak, de nem egyirányúak.** *(54. ábra)*

Definíció: **Ha két vektor egyenlő abszolút értékű és ellentétes irányú, akkor a két vektor egymás *ellentettje*.** (Jelölés: az $\vec{a}$ ellentettje $-\vec{a}$.) *(55. ábra)*

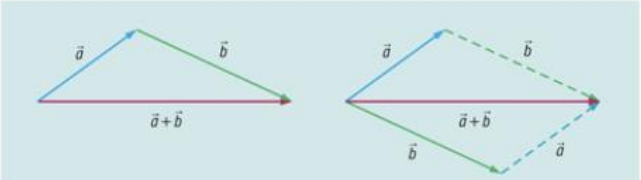
Definíció: **Két vektor *egyenlő*, ha egyirányúak és abszolút értékük egyenlő.**

II. Műveletek vektorokkal

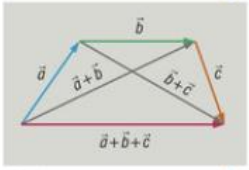
A VEKTOROK ÖSSZEGE

Definíció: **Az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok *összege* azon párhuzamos eltolás vektora, amellyel az $\vec{a}$-ral és a $\vec{b}$-ral meghatározott párhuzamos eltolások egymásutánja helyettesíthető.** (Jelölés: $\vec{a}+\vec{b}$.)

Rajzban két vektort a háromszögszabály vagy a paralelogrammaszabály alapján összegezhetünk. *(56. ábra)*



56. ábra



57. ábra

A vektorok összeadása

(1) **kommutatív** művelet, azaz

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

(2) **asszociatív** művelet *(57. ábra)*, azaz

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

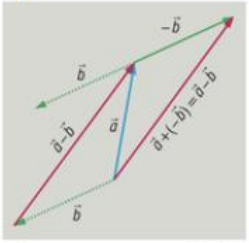
A VEKTOR SZORZÁSA SZÁMMAL

Definíció: **1. Ha $\vec{a}\neq\vec{0}$ és α tetszőleges valós szám, akkor $\alpha\cdot\vec{a}$ olyan vektor, amelynek abszolút értéke $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, és $\alpha>0$ esetén $\vec{a}$-ral egyirányú, $\alpha<0$ esetén $\vec{a}$-ral ellentétes irányú.**

2. Ha $\vec{a}=\vec{0}$, akkor $\alpha\cdot\vec{a}=\vec{0}$ bármely α valós szám esetén.

A vektorok valós számmal (skalárral) való szorzására teljesülnek az alábbi **azonosságok:**

(1) $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a} = (\alpha + \beta) \cdot \vec{a}$;
(2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$;
(3) $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$.

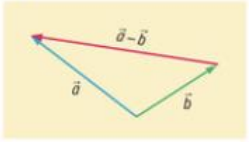


58. ábra

A VEKTOROK KÜLÖNBSÉGE

Definíció: **Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbsége az $\vec{a} + (-\vec{b})$ vektor.** (Jelölés: $\vec{a} - \vec{b}$.) *(58. ábra)*

Rajzban két vektor különbsége az 59. ábrán látható módon szerkeszthető.



59. ábra

KÉT VEKTOR SKALÁRIS SZORZATA

*Definíció: **Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzata**
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$,
ahol α a vektorok közös kezdőpontú reprezentánsai által bezárt szög nagysága ($0° \le \alpha \le 180°$).

A skaláris szorzat **tulajdonságai:**

(1) **kommutatív,** azaz $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

(2) tetszőleges λ valós szám esetén $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$;

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ **(disztributivitás);**

(4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, így $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

*Tétel: **Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a vektorok merőlegesek egymásra.**

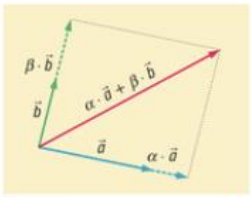
III. A vektorok felbontása különböző irányú összetevőkre

*Tétel: **Ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nullvektortól különböző párhuzamos vektorok, akkor pontosan egy olyan 0-tól különböző α valós szám létezik, hogy $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$.**

Ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egyirányúak: $\alpha = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} > 0$,

ha ellentétes irányúak: $\alpha = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} < 0$.

*Definíció: **Ha a sík $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{v}$ vektoraira $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, ahol α és β valós számok, akkor a $\vec{v}$ az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok *lineáris kombinációja.***



60. ábra

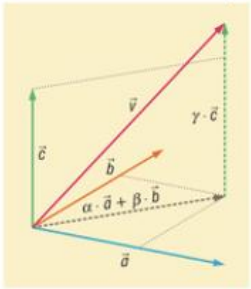
***TÉTEL:** **Ha adottak az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nullvektortól különböző nem párhuzamos vektorok, akkor az általuk meghatározott sík minden egyes $\vec{v}$ vektora egyértelműen áll elő az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz**

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b},$$

ahol α és β csak $\vec{v}$-től függő, egyértelműen meghatározott valós számok. *(60. ábra)*

Az utóbbi tételben szereplő $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat szokás **bázisvektoroknak** nevezni.

A fenti síkbeli tétel térbeli megfelelője is érvényes.

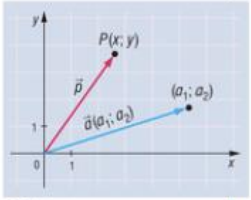


61. ábra

***TÉTEL:** **Ha az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ olyan nullvektortól különböző, páronként nem párhuzamos vektorok, amelyekre teljesül, hogy egyik sem illeszkedik a másik kettő által meghatározott síkra, akkor bármely $\vec{v}$ vektor egyértelműen áll elő az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz bármely $\vec{v}$ esetén pontosan egy olyan α, β, γ valós számhármas létezik, amelyre**

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}.$$ *(61. ábra)*

IV. Vektorok a koordináta-rendszerben



62. ábra

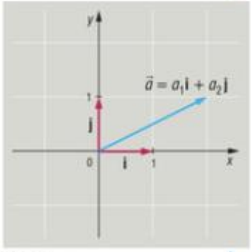
DEFINÍCIÓ: **A derékszögű koordináta-rendszerben a $P(x; y)$ pont *helyvektora* az origóból a pontba mutató vektor.** *(62. ábra)*

DEFINÍCIÓ: **A derékszögű koordináta-rendszerben egy *vektor koordinátái* megegyeznek origó kezdőpontú reprezentánsa végpontjának koordinátáival.** *(62. ábra)*

Jelölés: $\vec{a}(a_1; a_2)$.

A fenti két definícióból következik, hogy a koordinátasík bármely pontjának és a pont helyvektorának koordinátái megegyeznek.

A derékszögű koordináta-rendszer **bázisvektorai** az egységnyi abszolút értékű **i**(1; 0) és **j**(0; 1) vektorok. *(63. ábra)*



63. ábra

Az **i** és **j** bázisvektorok segítségével egy vektor koordinátáit más módon is tudjuk definiálni.

***DEFINÍCIÓ:** **Ha a derékszögű koordináta-rendszerben**

$$\vec{a} = a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j},$$

akkor az $\vec{a}$ első koordinátája a_1, második koordinátája pedig a_2.

A vektor koordinátáira adott két definíció ekvivalens, azaz bármelyiket tekintjük alapdefiníciónak, belőle a másik definíció mint tulajdonság következik.

A VEKTOROK ÖSSZEGÉNEK KOORDINÁTÁI

Ha adottak az $\vec{a}(a_1; a_2)$ és $\vec{b}(b_1; b_2)$ vektorok, akkor

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j})+(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}) = (a_1+b_1)\cdot\mathbf{i}+(a_2+b_2)\cdot\mathbf{j},$$

azaz az **összegvektor első koordinátája az összeadandó vektorok első koordinátájának, második koordinátája az összeadandó vektorok második koordinátájának összege.**

A VEKTOROK KÜLÖNBSÉGÉNEK KOORDINÁTÁI

Ha adottak $\vec{a}(a_1; a_2)$ és $\vec{b}(b_1; b_2)$ vektorok, akkor

$$\vec{a}-\vec{b} = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j})-(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}) = (a_1-b_1)\cdot\mathbf{i}+(a_2-b_2)\cdot\mathbf{j},$$

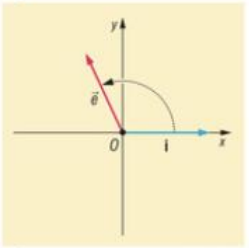
azaz a **különségvektor első koordinátája a megfelelő első koordináták különbsége, második koordinátája a megfelelő második koordináták különbsége.**

VEKTOR SZÁMSZOROSÁNAK KOORDINÁTÁI

Adott az $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektor és a λ valós szám.

$$\lambda\cdot\vec{a} = \lambda\cdot(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}) = (\lambda\cdot a_1)\cdot\mathbf{i}+(\lambda\cdot a_2)\cdot\mathbf{j},$$

azaz **vektor λ-szorosának koordinátái a koordináták λ-szorosai.**



64. ábra

KÉT VEKTOR SKALÁRIS SZORZATA KOORDINÁTÁIKKAL KIFEJEZVE

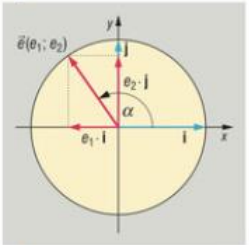
Az $\vec{a}(a_1; a_2)$ és $\vec{b}(b_1; b_2)$ vektorok **skaláris szorzata**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2.$$

Megjegyzés: Ez az összefüggés könnyen adódik, ha felhasználjuk a skaláris szorzat disztributivitását, valamint figyelembe vesszük, hogy $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}^2 = 1$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}^2 = 1$ és $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$.

A skaláris szorzat fenti kifejezését felhasználva kapjuk, hogy az $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektor abszolút értéke

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$



65. ábra

66. ábra

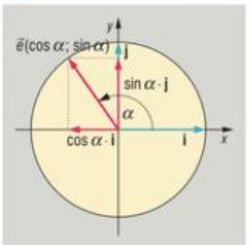
A szögfüggvények definíciójának kiterjesztése (emelt szintű tananyag)

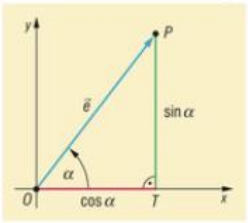
I. Definíciók, alapvető tulajdonságok

DEFINÍCIÓ: A koordináta-rendszerben az $\vec{e}$ egységvektor *irányszöge* annak az origó körüli forgatásnak az előjeles szöge, amely az i bázisvektort $\vec{e}$-be viszi. *(64. ábra)*

Legyenek az α irányszögű $\vec{e}$ egységvektor koordinátái e_1 és e_2, azaz $\vec{e} = e_1\cdot\mathbf{i}+e_2\cdot\mathbf{j}$. *(65. ábra)*

DEFINÍCIÓ: $e_1 = \cos\alpha$ és $e_2 = \sin\alpha$, azaz az α irányszög *koszinusza* az α irányszögű $\vec{e}$ egységvektor első koordinátája, *szinusza* pedig ugyanezen vektor második koordinátája. *(66. ábra)*





67. ábra

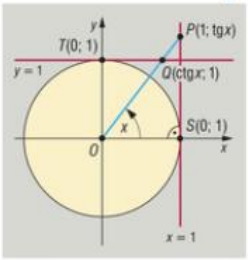
Megjegyzések:

1. A 67. ábrán látható, hogy a fenti általános definíció hegyesszögekre megegyezik a korábban adott definícióval.
2. Az irányszög mérhető fokokban és ívmértékben (radiánban) is. A valós számoknak megfelelő szögmérték a radián, így a fenti definíció megadja tetszőleges valós szám koszinuszát és szinuszát, azaz a koszinusz- és szinuszfüggvény definíciója is egyben.
3. Az irányszög definíciójából adódik, hogy
$$\sin\alpha = \sin(\alpha + k\cdot 2\pi) \quad \text{és} \quad \cos\alpha = \cos(\alpha + k\cdot 2\pi)$$
tetszőleges k egész szám esetén. (Mind a szinusz-, mind a koszinuszfüggvény 2π szerint periodikus.)

DEFINÍCIÓ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (\alpha \neq k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}).$$



68. ábra

Megjegyzések:

1. A tangens és a kotangens szögfüggvények általános definíciója is összhangban van a hegyesszögekre adott definícióval.
2. Az α valós szám tangense, illetve kotangense jól szemléltethető a koordináta-rendszer origó középpontú egységkörének (1; 0), illetve (0; 1) pontjába húzott érintők segítségével. ***(68. ábra)***
3. A definíciókból adódik, hogy
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k\cdot\pi) \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k\cdot\pi)$$
tetszőleges k egész szám esetén minden olyan α valós számra, amelyre a szögfüggvények értelmezve vannak. (Mind a tangens-, mind a kotangensfüggvény π szerint periodikus.)

II. Azonosságok

SZINUSZ- ÉS KOSZINUSZFÜGGVÉNYRE

α tetszőleges valós szám (irányszög radiánban mérve):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha, \qquad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

TANGENS- ÉS KOTANGENSFÜGGVÉNYRE

$\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

ÖSSZEGZÉSI KÉPLETEK

Tetszőleges α és β valós számok esetén érvényesek a szinusz- és koszinuszfüggvényre a következő **összegzési képletek (addíciós tételek):**

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Teljesülnek a következő szorzattá alakítási formulák:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$



Minden olyan α és β valós szám esetén, amelyekre a következő kifejezések értelmezve vannak, teljesülnek a tangensfüggvényre vonatkozó **összegzési képletek:**

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Feladatok

1. A pisai ferde torony a vízszintes talajjal kb. 85°-os szöget zár be. Milyen magasról ejtettük le azt a testet, amely a torony lábától 3 m távolságban ér földet?

2. Egy, a vízszintes színpaddal 10°-os szöget bezáró színpadi lépcső egy 1,5 m magas dobogó tetejére visz. A dobogó szélétől számítva mekkora távolságban kell a lépcsőnek indulnia?

3. Egy sífelvonó 1200 m hosszú és 510 m magasra visz. Számítsuk ki a felvonó emelkedési szögét.

4. Számítsuk ki az α hegyesszög többi szögfüggvényének értékét α meghatározása nélkül, ha tudjuk, hogy

   a) $\cos\alpha = 0{,}8$; *b)* $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}1$.

5. Az ABC háromszög BC oldalát osszuk hat egyenlő részre, és legyen $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Írjuk fel az A csúcsból az osztópontokba mutató vektorokat $\vec{b}$ és $\vec{c}$ lineáris kombinációjaként.

6. Adott az $OABC$ szabályos tetraéder. Legyen $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ és $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Állítsuk elő az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként az O-ból

   a) az ABC háromszög oldalfelező pontjaiba;

   b) az ABC háromszög súlypontjába mutató vektort.

7. Egy konvex négyszög csúcsainak helyvektorai a négyszög síkjának valamely O vonatkoztatási pontjára nézve pozitív körüljárási irányban $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Adjuk meg ezen vektorok segítségével

   a) a középvonalak metszéspontjának helyvektorát;

   b) az átlók felezőpontjának helyvektorait;

   c) az átlók felezőpontjai által meghatározott szakasz felezőpontjának helyvektorát.

   Mit tapasztalunk?

8. Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$, helyvektoraik legyenek rendre $\vec{a}$ és $\vec{b}$. Az AB szakasz tetszőleges $P(x; y)$ pontjának helyvektora legyen $\vec{p}$. Bizonyítsuk be, hogy ha $\vec{p} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b}$, akkor

   a) $\alpha \geq 0$ és $\beta \geq 0$; *b)* $\alpha + \beta = 1$.

9. Számítsuk ki az y értékét, ha tudjuk, hogy a $\vec{p}(3; 4)$ és $\vec{q}(8; y)$ vektorok merőlegesek egymásra.

10. Igazoljuk, hogy az x változó tetszőleges megengedett valós értéke esetén érvényesek a következő azonosságok:

    a) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = \cos 2x + 2\cdot\sin^2 x$;

    b) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} - \cos x = \sin x$.

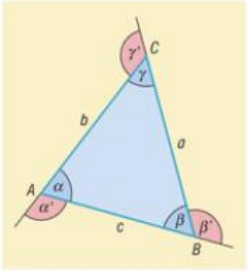
11. Legyenek α, β, γ egy háromszög szögei. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = \sin\gamma.$$

4. Nevezetes síkidomok tulajdonságai

A háromszögek

A háromszögekkel kapcsolatos szokásos jelölések a 69. ábrán láthatók. A következő tételek kimondásakor ezeket a jelöléseket használjuk.



69. ábra

I. A háromszögek szögeire és oldalaira vonatkozó tételek

TÉTEL: **A háromszög belső szögeinek összege 180°, azaz**

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

TÉTEL: **A háromszög bármelyik külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos két belső szög összegével, azaz**

$$\alpha' = \beta + \gamma; \quad \beta' = \gamma + \alpha; \quad \gamma' = \alpha + \beta.$$

Háromszög-egyenlőtlenség: A háromszög oldalainak hosszára nézve teljesül, hogy bármely két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál, azaz

$$a + b > c; \qquad b + c > a; \qquad c + a > b,$$

vagy másképpen

$$a > |b - c|; \qquad b > |c - a|; \qquad c > |a - b|.$$

TÉTEL: **A háromszögben két oldal akkor és csak akkor egyenlő hosszú, ha a tekintett oldalakkal szemközti szögek egyenlő nagyságúak. Röviden:**

$$a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

TÉTEL: **A háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, és fordítva, nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van. Röviden:**

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta.$$

SZINUSZTÉTEL: **A háromszögben az oldalak hosszának aránya egyenlő a megfelelő szemközti szögek szinuszainak arányával, azaz**

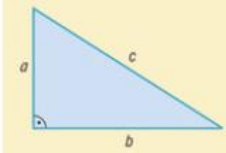
$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Az arányokat párosával felírva:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

KOSZINUSZTÉTEL: **Bármely háromszögre teljesül, hogy**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$



70. ábra

Ha a és b jelöli egy derékszögű háromszög befogóinak, c pedig átfogójának hosszát *(70. ábra)*, akkor a koszinusztételt c-re felírva kapjuk, hogy

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 90^\circ = a^2 + b^2.$$

A koszinusztétel speciális eseteként kaptuk a Pitagorasz-tételt.

PITAGORASZ-TÉTEL: A derékszögű háromszögben a befogók hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével, azaz

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Mivel $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ és ezen az intervallumon $\cos\gamma = 0$ akkor és csak akkor, ha $\gamma = 90^\circ$, ezért ha egy háromszögre $c^2 = a^2 + b^2$, akkor a c oldallal szemközti γ szög derékszög. Érvényes tehát Pitagorasz tételének megfordítása is.

TÉTEL: Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

A Pitagorasz-tétel és megfordítása összevonva:

TÉTEL: Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével.

A koszinusztétel következménye, hogy tompaszögű háromszögre ($\gamma > 90^\circ$) $c^2 > a^2 + b^2$, hegyesszögű háromszögre pedig ($\gamma < 90^\circ$) $c^2 < a^2 + b^2$.

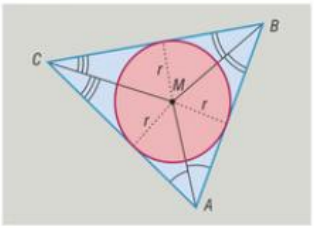
II. A háromszögek nevezetes vonalai és pontjai

A HÁROMSZÖG BELSŐ SZÖGFELEZŐI

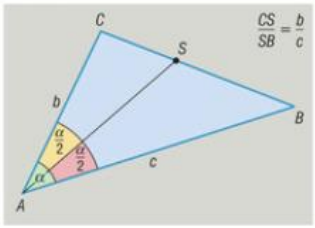
TÉTEL: A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög *beírt körének* középpontja. *(71. ábra)*

***SZÖGFELEZŐTÉTEL: A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.** *(72. ábra)*

71. ábra

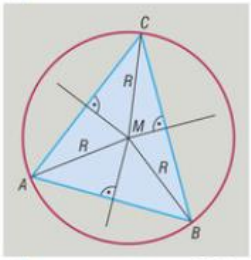


72. ábra



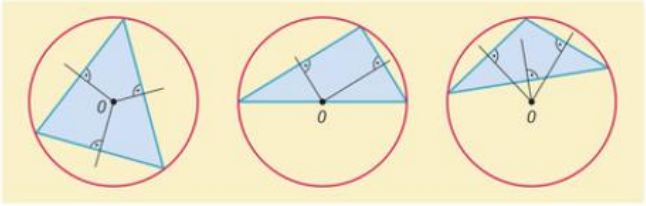
A HÁROMSZÖG OLDALFELEZŐ MERŐLEGESEI

TÉTEL: **A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Az oldalfelező merőlegesek közös pontja a háromszög *köré írható kör* középpontja.** *(73. ábra)*



73. ábra

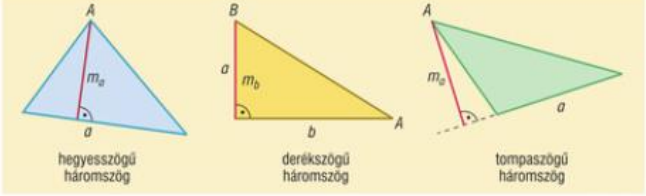
A háromszög köré írható kör középpontja hegyesszögű háromszög esetén a háromszög belsejében, derékszögű háromszög esetén az átfogó felezőpontjában (Thalész tétele), tompaszögű háromszög esetén a háromszögön kívül van. *(74. ábra)*



74. ábra

A HÁROMSZÖG MAGASSÁGVONALAI

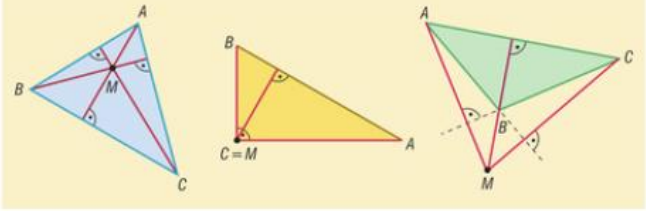
DEFINÍCIÓ: **A háromszög *magassága* a csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges szakasz** *(75. ábra)*. **A háromszög magasságának egyenese a háromszög *magasságvonala*.**

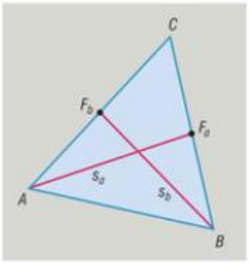


75. ábra

TÉTEL: **A háromszög magasságvonalai egy pontban, a háromszög *magasságpontjában* metszik egymást.** *(76. ábra)*

76. ábra





77. ábra

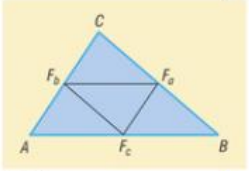
A HÁROMSZÖG SÚLYVONALAI

DEFINÍCIÓ: **A háromszög *súlyvonala* a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.**

TÉTEL: **A háromszög bármely két súlyvonala úgy metszi egymást, hogy a metszéspont mindkét súlyvonalat 1 : 2 arányban osztja két részre, a nagyobbik rész másik végpontja a háromszög megfelelő csúcsa.** *(77. ábra)*

Az előző tétel következménye:

TÉTEL: **A háromszög súlyvonalai egy pontban, a háromszög *súlypontjában* metszik egymást. Ez a pont mindhárom súlyvonalnak a háromszög megfelelő csúcsától távolabbi harmadolópontja.**

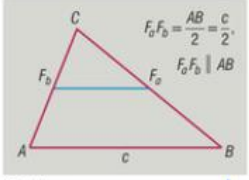


78. ábra

A HÁROMSZÖG KÖZÉPVONALAI

DEFINÍCIÓ: **A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakasz a *háromszög középvonala.*** *(78. ábra)*

TÉTEL: **A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakasz (a háromszög középvonala) párhuzamos a harmadik oldallal, és hossza a harmadik oldal hosszának fele.** *(79. ábra)*

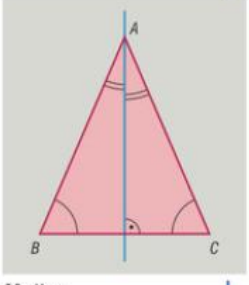


79. ábra

III. Speciális háromszögek

AZ EGYENLŐ SZÁRÚ HÁROMSZÖG

DEFINÍCIÓ: **Egy háromszög *egyenlő szárú,* ha van két egyenlő hosszúságú oldala (szárak).**



80. ábra

Könnyen bizonyítható, hogy a következő három tulajdonság bármelyike ekvivalens a definícióban megfogalmazott tulajdonsággal. *(80. ábra)*

(1) Tengelyesen szimmetrikus.

(2) Van két egyenlő nagyságú szöge.

(3) Az egyik oldal (alap) felező merőlegese illeszkedik a szemközti csúcsra.

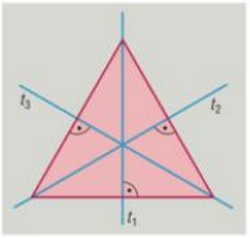
AZ EGYENLŐ OLDALÚ (SZABÁLYOS) HÁROMSZÖG

DEFINÍCIÓ: **Egy háromszög *szabályos,* ha oldalai egyenlő hosszúak.**

A definícióból egy korábbi tétel alapján következik, hogy a szabályos háromszög szögei is egyenlő nagyságúak, mindegyik 60°-os.

A szabályos háromszögnek három szimmetriatengelye van. *(81. ábra)*

Az a oldalhosszúságú szabályos háromszög **magasságának hossza:** $\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$, **területe:** $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. *(82. ábra)*



81. ábra

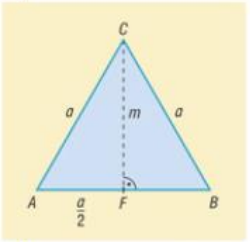
A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög *derékszögű*, ha van 90°-os szöge. *(83. ábra)*

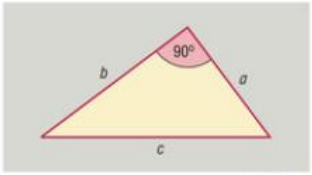
A Thalész- és a Pitagorasz-tétel a megfordításukkal együtt két *szükséges és elegendő feltételt* adnak arra, hogy egy háromszög derékszögű legyen.

THALÉSZ TÉTELE ÉS MEGFORDÍTÁSA: Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha körülírt körének középpontja egyik oldalának felezőpontja.

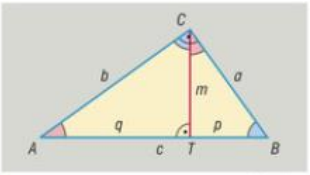
PITAGORASZ TÉTELE ÉS MEGFORDÍTÁSA: Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével.



82. ábra



83. ábra



84. ábra

A 84. ábrán látható *ATC*, *CTB* és *ACB* derékszögű háromszögek hasonlóságát felhasználva kapjuk a derékszögű háromszögek két nevezetes arányossági tételét.

***MAGASSÁGTÉTEL: Bármely derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság az átfogót osztja, azaz**

$$m = \sqrt{p \cdot q}.$$

***BEFOGÓTÉTEL: Bármely derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogónak az átfogóra eső merőleges vetülete hosszának, azaz**

$$a = \sqrt{c \cdot p} \quad \text{és} \quad b = \sqrt{c \cdot q}.$$

IV. A háromszög területének meghatározása különböző adataiból

Jelölje a háromszög oldalainak hosszát a, b, c, a megfelelő belső szögek nagyságát α, β, γ, a magasságok hosszát m_a, m_b, m_c. Legyen továbbá a háromszög félkerülete s $\left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$, beírt körének sugara r, körülírt körének sugara R. A háromszög T területe kiszámítható a következő képletek alkalmazásával:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2};$$

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin\beta}{2};$$

$$T = s \cdot r.$$

*

$$T = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R};$$

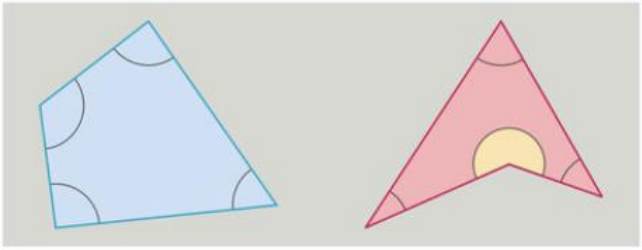
$$T = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha};$$

$$T = 2 \cdot R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma;$$

$$T = \frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

Négyszögek

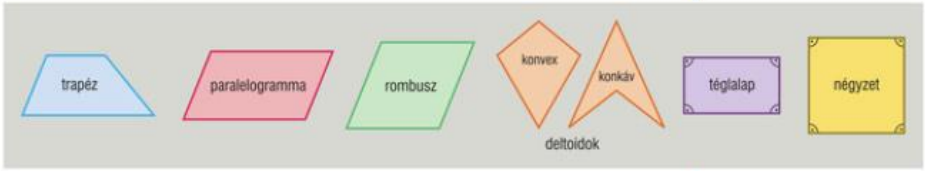
DEFINÍCIÓ: Egy négyszög *konvex*, ha minden szöge konvex, *konkáv*, ha van konkáv szöge. *(85. ábra)*



85. ábra

TÉTEL: Bármely négyszög belső szögeinek összege 360°.

I. Speciális négyszögek *(86. ábra)*



86. ábra

A **trapéz** olyan négyszög, amelynek van párhuzamos oldalpárja.

A **paralelogramma** olyan négyszög, amelynek szemközti oldalai párhuzamosak.

Be lehet bizonyítani, hogy a paralelogrammára vonatkozóan a következő állítások ekvivalensek, így bármelyik állításban megfogalmazott tulajdonság önmagában alkalmas a paralelogramma definiálására.

(1) A paralelogramma középpontosan szimmetrikus négyszög.
(2) A paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak.
(3) A paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak.
(4) A paralelogramma szemközti szögei egyenlő nagyságúak.
(5) A paralelogramma bármely két szomszédos szögének összege 180°.
(6) A paralelogramma átlói felezik egymást.
(7) A paralelogramma két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszú.

A **rombusz** olyan négyszög, amelynek oldalai egyenlő hosszúak.

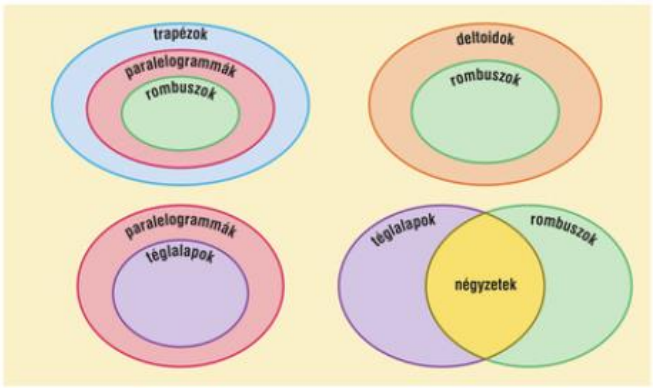
A **deltoid** olyan négyszög, amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú. (A deltoid tengelyesen szimmetrikus négyszög.)

A **téglalap** olyan négyszög, amelynek minden szöge derékszög.

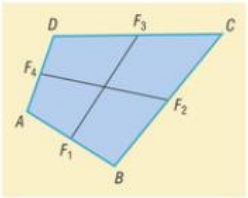
A **négyzet** olyan négyszög, amelynek oldalai és szögei egyenlő nagyságúak.

A 87. ábra halmazábrái a fenti négyszögek közötti kapcsolatokat szemléltetik.

87. ábra



*II. A négyszögek középvonalai



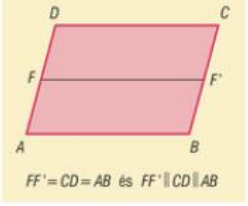
88. ábra

*DEFINÍCIÓ: **Egy négyszög két szemközti oldalának felezőpontját összekötő szakasz a *négyszög középvonala.*** *(88. ábra)*

*TÉTEL: **Bármely négyszög két középvonala felezve metszi egymást.**

A paralelogrammák és a trapézok középvonalai speciális tulajdonságokkal rendelkeznek.

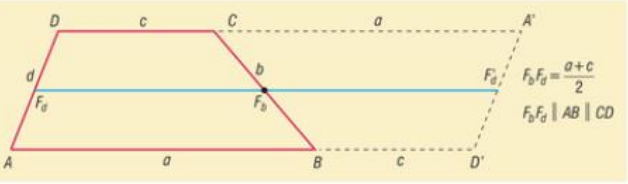
*TÉTEL: **A paralelogramma középvonala párhuzamos és egyenlő hosszú a paralelogramma két oldalával.** *(89. ábra)*



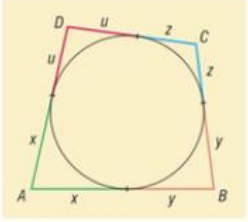
89. ábra

A középpontos tükrözés tulajdonságai és a paralelogramma középvonalára vonatkozó tétel felhasználásával bizonyítható a következő tétel:

*TÉTEL: **A trapéz szárainak felezőpontját összekötő középvonal párhuzamos a trapéz alapjaival, és hossza az alapok hosszának számtani közepe.** *(90. ábra)*



90. ábra



91. ábra

92. ábra

*III. Érintőnégyszögek, húrnégyszögek

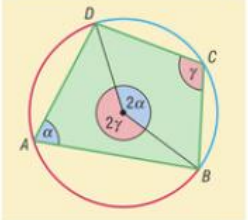
*DEFINÍCIÓ: ***Érintőnégyszögek* azok a négyszögek, amelyeknek van beírt körük.** *(91. ábra)*

A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőségének felhasználásával bizonyítható a következő tétel:

*TÉTEL: **Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha két-két szemközti oldalának összege egyenlő.**

A tétel alapján például minden konvex deltoid érintőnégyszög.

*DEFINÍCIÓ: ***Húrnégyszögek* azok a négyszögek, amelyeknek van körülírt körük.** *(92. ábra)*

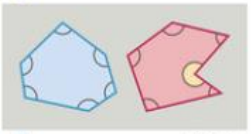


A kerületi és középponti szögek tételét alkalmazva bizonyítható a következő tétel:

***TÉTEL:** **Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°. A tengelyesen szimmetrikus trapézok (húrtrapézok) húrnégyszögek.**

A sokszögek

DEFINÍCIÓ: **Egy sokszög *konvex*, ha minden szöge konvex, *konkáv*, ha van konkáv szöge.** *(93. ábra)*

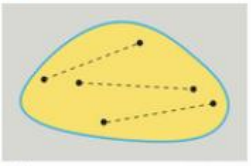


93. ábra

A konvexség, illetve konkávság általánosan is definiálható tetszőleges síkbeli vagy térbeli alakzatra.

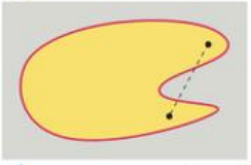
***DEFINÍCIÓ:** **Egy alakzat *konvex*, ha bármely két pontjával együtt a két pontot összekötő szakasz pontjai is az alakzathoz tartoznak.** *(94. ábra)*

***DEFINÍCIÓ:** **Egy alakzat *konkáv*, ha nem konvex, azaz van olyan, az alakzat két pontját összekötő szakasz, amelyik nem tartozik teljes egészében az alakzathoz.** *(95. ábra)*



94. ábra

Mivel egy n oldalú konvex sokszög bármelyik csúcsából $n-3$ átló húzható, ezért érvényes a következő tétel:



95. ábra

TÉTEL: **Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma:**

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}.$$

Konvex sokszögekre könnyen bizonyítható, de tetszőleges sokszögre érvényes a következő:

TÉTEL: **Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege:**

$$(n-2)\cdot 180.$$

A fenti tétel közvetlen következménye, hogy bármely konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.

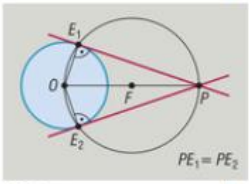
DEFINÍCIÓ: **Egy sokszög *szabályos*, ha minden oldala egyenlő hosszú, és minden szöge egyenlő nagyságú.**

TÉTEL: **Az n oldalú szabályos sokszög egy belső szögének nagysága:**

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}.$$

A kör

A körre mint nevezetes ponthalmazra vonatkozó ismeretek egy részét korábban már felelevenítettük. Most további ismereteket foglalunk össze.



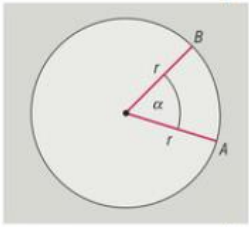
96. ábra

I. A kör érintői

Egy adott körhöz adott külső ponton keresztül két érintő húzható.

TÉTEL: **A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak.** *(96. ábra)*

II. A középponti szög, a körív, a körcikk; a szögek ívmértéke



97. ábra

DEFINÍCIÓ: **Ha egy szög csúcsa egy adott kör középpontja, akkor a szög a kör *középponti szöge*.** *(97. ábra)*

TÉTEL: **Egy körben, ha α és β két középponti szög, i_α és i_β a hozzájuk tartozó ívek, akkor $\frac{i_\alpha}{i_\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, azaz az ív hossza és a középponti szög nagysága egyenesen arányosak.**

TÉTEL: **Egy körben, ha α és β két középponti szög, t_α és t_β a hozzájuk tartozó körcikkek területe, akkor $\frac{t_\alpha}{t_\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, azaz a körcikk területe és a középponti szög nagysága egyenesen arányosak.**

A szögek **ívmértékének** definíciója:

*DEFINÍCIÓ: **1 *radián* nagyságú az r sugarú kör azon középponti szöge, amelyhez tartozó ív hossza r.**

Következmények:

(1) Felhasználva, hogy az r sugarú kör kerülete $2r\pi$, a teljes szög nagysága 2π radián.

(2) Az r sugarú kör radiánban mért α nagyságú középponti szögéhez tartozó ív hossza:

$$i_\alpha = r \cdot \alpha \text{ (rad)}.$$

(3) Felhasználva, hogy az r sugarú kör területe $r^2\pi$, az r sugarú kör radiánban mért α nagyságú középponti szögéhez tartozó körcikk területe:

$$t_\alpha = \frac{\alpha \cdot r^2}{2} = \frac{i_\alpha \cdot r}{2}.$$

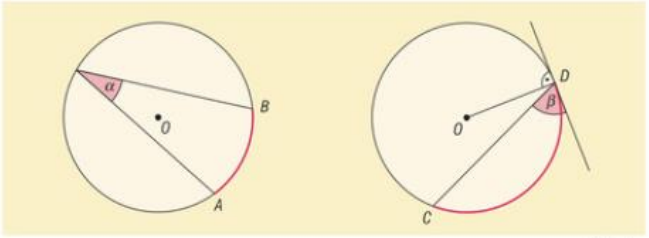
A szögek radiánban és fokokban mért értéke közötti átváltást a következő képletek adják meg:

$$\alpha^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi\,(\text{rad})} \cdot \alpha\,(\text{rad}) = \frac{180^\circ}{\pi\,(\text{rad})} \cdot \alpha\,(\text{rad}),$$

$$\alpha\,(\text{rad}) = \frac{2\pi\,(\text{rad})}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ = \frac{\pi\,(\text{rad})}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ.$$

*III. A kerületi és középponti szögek; a látószög

*DEFINÍCIÓ: **Ha egy szög csúcsa egy adott körvonal pontja, szárai pedig vagy a kör két húrjára, vagy egy húrra és egy érintőre illeszkednek, akkor a szöget a kör *kerületi szögének* nevezzük.** *(98. ábra)*



98. ábra

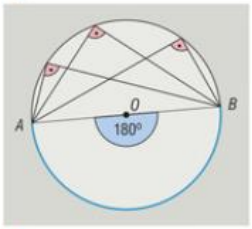
*TÉTEL: **Adott körben az adott ívhez tartozó kerületi szög nagysága fele az ugyanazon ívhez tartozó középponti szög nagyságának. *(Középponti és kerületi szögek tétele.)***

Általánosabban:

*TÉTEL: **Egyenlő sugarú körökben az azonos hosszúságú ívekhez tartozó középponti és kerületi szög nagyságának aránya 2 : 1.**

A középponti és kerületi szögek tételének speciális esete Thalész tétele. Ekkor a középponti szög nagysága 180°, a kerületi szögé pedig 90°. *(99. ábra)*

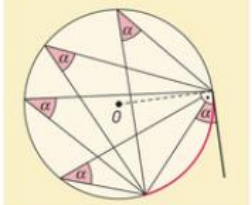
Adott körben adott ívhez egyetlen középponti szög és végtelen sok kerületi szög tartozik, így a fenti tételből közvetlenül adódik a következő tétel:



99. ábra

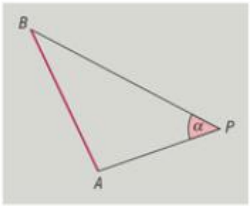
100. ábra

*TÉTEL: **Adott kör adott ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak. *(Kerületi szögek tétele.)*** *(100. ábra)*



Általánosabban:

*TÉTEL: **Egyenlő sugarú körökben az azonos hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.**



101. ábra

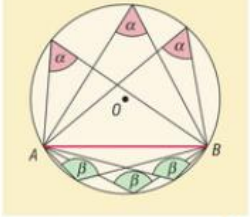
DEFINÍCIÓ: **A P pontból az AB szakasz α szög alatt látszik, ha $APB\sphericalangle = \alpha$.** *(101. ábra)*

A kerületi szögek tétele a **látószög** fogalmával:

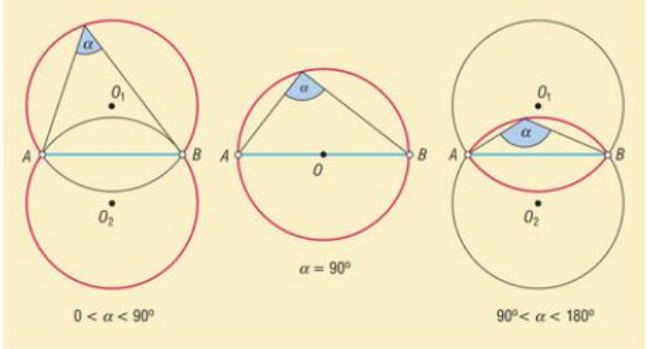
TÉTEL: **Egy adott kör adott AB húrja az AB ív (belső) pontjaiból ugyanakkora szög alatt látszik.** *(102. ábra)*

A kerületi szögek tétele alapján bizonyítható a következő tétel:

TÉTEL: **Azon pontok halmaza a síkon, amelyekből a sík egy adott AB szakasza adott α ($0° < \alpha < 180°$) szög alatt látszik: két, az AB egyenesre szimmetrikusan elhelyezkedő körív.** ***(Látószögkörív tétele.)*** *(103. ábra)*



102. ábra



103. ábra

Feladatok

1. Az ABC háromszögben a szokásos jelöléseket használva az oldalhosszak a, b, c, a megfelelő belső szögek nagysága pedig rendre α, β, γ. Számítsuk ki a háromszög hiányzó oldalainak hosszát és hiányzó belső szögeinek nagyságát, ha
   a) $a = 5$ cm, $\beta = 75°$, $\gamma = 65°$;
   b) $b = 7{,}5$ cm, $c = 5{,}2$ cm, $\beta = 95°$;
   c) $a = 11$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $\gamma = 45°$;
   d) $a = 8{,}1$ cm, $b = 9{,}3$ cm, $c = 6$ cm.

2. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egyik oldalának és a másik két oldalhoz tartozó két magasságnak a hossza (a, m_b, m_c). Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit.

3. Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza 20 cm. Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót 1 : 5 arányban osztja két részre. Számítsuk ki a befogók hosszát, a hegyesszögek nagyságát és a háromszög területét.

4. Egy sportegyesületnek egy háromszög alakú telket ajánlanak fel megvásárlásra. A háromszög oldalhosszai: $AB = 238{,}9$ m; $BC = 249$ m; $AC = 151{,}8$ m.

   a) Számítsuk ki a telek A csúcsánál levő α szöget és a telek területét.

   b) A háromszög alakú telken maximális területű, téglalap alakú játékteret akarnak kialakítani úgy, hogy a téglalap egyik oldala a háromszög AB oldalára illeszkedjen. Számítsuk ki a téglalap alakú játéktér oldalainak hosszát és területét.

5. Egy háromszög 2 cm sugarú körülírt körét a csúcsok három olyan ívre osztják, amelyek hosszának aránya $5 : 6 : 7$. Számítsuk ki

   a) a háromszög belső szögeinek nagyságát;

   b) a háromszög oldalainak hosszát és területét;

   c) a körlapból a háromszög által levágott körszeletek területét.

6. Egy konvex négyszög belső szögfelezői egy kisebb négyszöget határoznak meg az eredeti négyszög belsejében. Számítsuk ki a kisebb négyszög belső szögeinek nagyságát, ha a kiinduló négyszög három belső szögének nagysága: 105°, 80°, 125°. Mit állíthatunk a szögfelezők által meghatározott négyszögről? Általánosítsuk az észrevételünket.

7. Mit állíthatunk arról a négyszögről, amelynek középvonalai

   a) egyenlő hosszúak; *b)* merőlegesek egymásra?

8. Hány oldalú lehet az a sokszög, amelyben a belső szögek összege

   a) kisebb 1300°-nál, de nagyobb 1100°-nál;

   b) kisebb 3000°-nál, de nagyobb 2000°-nál?

9. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek k-szor (k pozitív egész) annyi átlója van, mint ahány oldala?

10. Egy tízszög belső szögei fokokban mérve egy olyan számtani sorozat egymást követő elemei, amelynek differenciája 6°. Mekkora a tízszög legkisebb és legnagyobb szöge?

11. Egy trapéz húrnégyszög is és érintőnégyszög is. Bizonyítsuk be, hogy a beírt kör átmérőjének hossza az alapok hosszának mértani közepe.

5. Koordináta-geometria

Két pont távolsága

A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ **pontok távolsága** (az egyik pontból a másikba mutató vektor hossza):

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

A térbeli derékszögű koordináta-rendszerben adott $A(a_1; a_2; a_3)$ és $B(b_1; b_2; b_3)$ pontok távolsága:

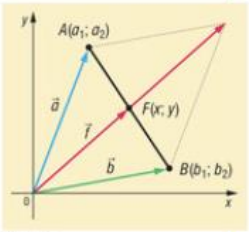
$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

A szakasz osztópontjának, a háromszög súlypontjának koordinátái

I. A szakasz felezőpontja

A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ pontok helyvektorai rendre $\vec{a}$ és $\vec{b}$, az AB szakasz $F(x; y)$ felezőpontjának helyvektora pedig $\vec{f}$ ***(104. ábra)***. A szakasz felezőpontjának helyvektora a végpontok helyvektoraival kifejezve:

$$\vec{f} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.$$



104. ábra

A helyvektorokra vonatkozó összefüggésből adódik, hogy a felezőpont koordinátái:

$$x = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad \text{és} \quad y = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

II. A szakasz harmadolópontja

Az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ pontok által meghatározott szakasz harmadolópontjai $H_1(x_1; y_1)$ és $H_2(x_2; y_2)$, a megfelelő helyvektorok rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{h}_1$ és $\vec{h}_2$. ***(105. ábra)***

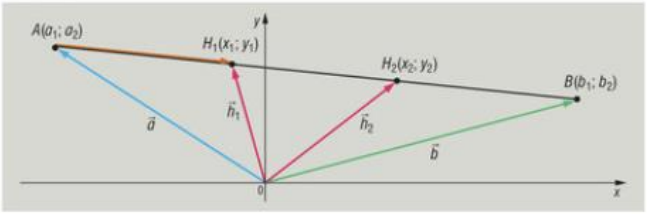
A harmadolópontok helyvektorai a végpontok helyvektoraival kifejezve

$$\vec{h}_1 = \frac{2 \cdot \vec{a} + \vec{b}}{3} \quad \text{és} \quad \vec{h}_2 = \frac{\vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{3},$$

a harmadolópontok koordinátáira nézve pedig

$$H_1\left(\frac{2 \cdot a_1 + b_1}{3}; \frac{2 \cdot a_2 + b_2}{3}\right) \quad \text{és} \quad H_2\left(\frac{a_1 + 2 \cdot b_1}{3}; \frac{a_2 + 2 \cdot b_2}{3}\right).$$

105. ábra



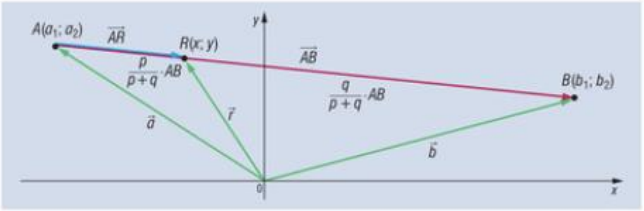
III. A szakaszt $p:q$ arányban osztó pont koordinátái

Az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ pontok által meghatározott szakaszt $p:q$ arányban osztó $R(x; y)$ pont helyvektora ***(106. ábra)***:

$$\vec{r} = \frac{q \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b}}{p+q},$$

amiből a koordinátákra adódik, hogy

$$R\left(\frac{q \cdot a_1 + p \cdot b_1}{p+q}; \frac{q \cdot a_2 + p \cdot b_2}{p+q}\right).$$



106. ábra

IV. A háromszög súlypontja

Az $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$ pontok által meghatározott háromszög $S(x; y)$ súlypontjának $\vec{s}$ helyvektora a csúcsokba mutató $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ helyvektorokkal kifejezve

$$\vec{s} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3},$$

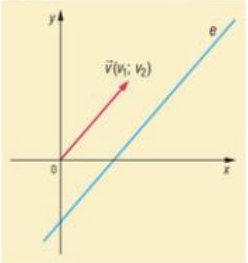
a súlypont koordinátái pedig:

$$S\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).$$

Görbék (vonalak) egyenletei a koordináta-rendszerben

***Definíció: A síkbeli koordináta-rendszerben elhelyezkedő *görbe (vonal) egyenlete* olyan kétismeretlenes egyenlet, amelyet a görbe $P(x; y)$ pontjainak koordinátái kielégítenek, más pontok koordinátái viszont nem elégítenek ki.**

107. ábra

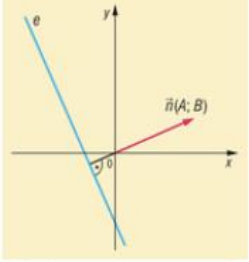


I. Az egyenes egyenlete

AZ EGYENES IRÁNYÁT MEGHATÁROZÓ ADATOK

Definíció: Egy egyenes *irányvektora* bármely, az egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző vektor. *(107. ábra)
Jele: $\vec{v}(v_1; v_2)$.

A definícióból következik, hogy ha $\vec{v}$ az e egyenesnek irányvektora, akkor bármely $\lambda \neq 0$ valós szám esetén $\lambda \cdot \vec{v}$ is irányvektora e-nek.



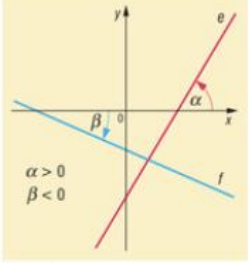
108. ábra

DEFINÍCIÓ: A síkban egy egyenes *normálvektora* bármely, az egyenesre merőleges, nullvektortól különböző vektor. ***(108. ábra)***

Jele: $\vec{n}(A; B)$.

A definícióból most is következik, hogy ha $\vec{n}$ normálvektora az e egyenesnek, akkor bármely $\lambda \neq 0$ valós szám esetén $\lambda \cdot \vec{n}$ is normálvektora e-nek.

DEFINÍCIÓ: A síkbeli koordináta-rendszerben egy egyenes *irányszöge* az egyenes és az x tengely pozitív félegyenese (pozitív iránya) által bezárt előjeles szög. ***(109. ábra)***



109. ábra

Az α irányszögre nézve $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, és α pozitív, illetve negatív aszerint, hogy az x tengelyt pozitív, illetve negatív irányban kell elforgatnunk az origó körül a megengedett intervallumba eső szöggel ahhoz, hogy elforgatott képe az egyenessel párhuzamos legyen.

DEFINÍCIÓ: Egy egyenes irányszögének tangensét (ha létezik) az egyenes *iránytangensének* vagy *meredekségének* nevezzük.

Az α irányszögű egyenes iránytangense: $m = \operatorname{tg}\alpha$.

Mivel az y tengely irányszöge $\frac{\pi}{2}$, ezért az y tengellyel párhuzamos egyeneseknek nem létezik iránytangense.

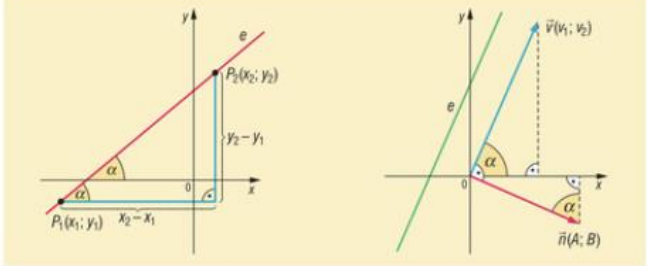
ÖSSZEFÜGGÉSEK AZ EGYENES IRÁNYÁT MEGHATÁROZÓ ADATOK KÖZÖTT

Az y tengellyel nem párhuzamos e egyenes egy irányvektora legyen $\vec{v}(v_1; v_2)$, egy normálvektora $\vec{n}(A; B)$, iránytangense m, két pontja pedig $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$.

Érvényesek a következő összefüggések ***(110. ábra)***:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{A}{B}.$$

110. ábra



KÉT EGYENES PÁRHUZAMOSSÁGÁNAK, ILLETVE MERŐLEGESSÉGÉNEK FELTÉTELEI

Az y tengellyel nem párhuzamos e_1, illetve e_2 egyenesek meredeksége m_1, illetve m_2. A két egyenes pontosan akkor párhuzamos, ha $m_1 = m_2$, és pontosan akkor merőleges, ha $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Az y tengellyel nem párhuzamos e_1, illetve e_2 egyenesek irányát a meredekségen kívül meghatározóadatok legyenek α_1, $\vec{v}_1$, $\vec{n}_1$, illetve α_2, $\vec{v}_2$, $\vec{n}_2$. ***(111. ábra)***

A következő feltételek közül bármelyik önmagában szükséges és elegendő az e_1 és e_2 egyenesek **párhuzamosságához:**

(1) $\alpha_1 = \alpha_2$;

(2) van olyan 0-tól különböző λ valós szám, hogy $\vec{v}_1 = \lambda \cdot \vec{v}_2$;

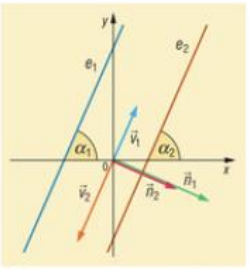
(3) van olyan 0-tól különböző μ valós szám, hogy $\vec{n}_1 = \mu \cdot \vec{n}_2$.

A 112. ábrán látható, a koordinátatengelyekkel nem párhuzamos egyenesek meredekségén kívüli irányjellemzőit most is jelölje α_1, $\vec{v}_1$, $\vec{n}_1$, illetve α_2, $\vec{v}_2$, $\vec{n}_2$.

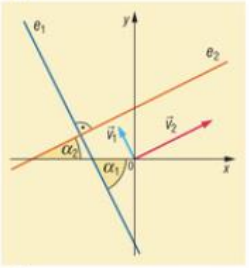
A következő feltételek közül bármelyik önmagában szükséges és elegendő az e_1 és e_2 egyenesek **merőlegességéhez:**

(1) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$;

(2) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.



111. ábra



112. ábra

AZ EGYENES EGYENLETÉNEK KÜLÖNBÖZŐ ALAKJAI

A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az **egyenes egyenlete** olyan

$$Ax + By + C = 0$$

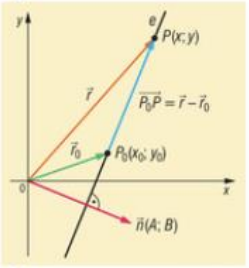
alakú kétismeretlenes lineáris egyenlet, amelyben A és B közül legalább az egyik 0-tól különböző ($A^2 + B^2 > 0$).

Normálvektoros alak:
Ha az e egyenes $P_0(x_0; y_0)$ pontjával és $\vec{n}(A; B)$ normálvektorával adott ***(113. ábra)***, akkor az egyenlete

$$Ax + By = Ax_0 + By_0.$$

Irányvektoros alak:
Ha az e egyenes $P_0(x_0; y_0)$ pontjával és $\vec{v}(v_1; v_2)$ irányvektorával adott ***(114. ábra)***, akkor az egyenlete

$$v_2 x - v_1 y = v_2 x_0 - v_1 y_0.$$



113. ábra

114. ábra

Iránytényezős alak:
Ha az y tengellyel nem párhuzamos e egyenes $P_0(x_0; y_0)$ pontjával és m iránytangensével adott, akkor az egyenlete

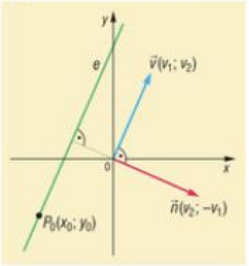
$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0).$$

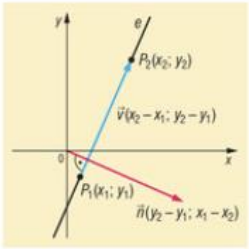
Ha az e egyenes az y tengelyt a $P_0(0; b)$ pontban metszi, és iránytangense m, akkor az előző alakból adódik, hogy az egyenlete

$$y = mx + b.$$

Ha e párhuzamos az y tengellyel, akkor az egyenlete

$$x = x_0.$$





115. ábra

Az egyenes két pontjával meghatározott alak:
Ha az e egyenes $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; x_2)$ pontjaival adott *(115. ábra)*, akkor az egyenlete

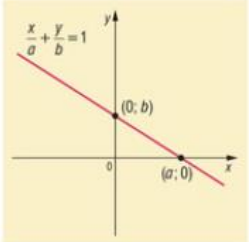
$$(y_2-y_1)\cdot(x-x_1)=(x_2-x_1)\cdot(y-y_1).$$

Ha az e egyenes egyik koordinátatengellyel sem párhuzamos, és az x tengelyt az $A(a; 0)$, az y tengelyt a $B(0; b)$ pontban metszi *(116. ábra)*, akkor az egyenlete

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Ez az egyenes egyenletének **tengelymetszetes alakja.**

Két síkbeli metsző egyenes metszéspontjának koordinátái a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásai.



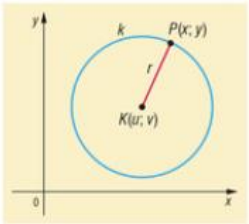
116. ábra

II. A kör egyenlete

A $K(u; v)$ középpontú, r sugarú *(117. ábra)* kör egyenlete

$$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2.$$

Általánosan igaz a következő tétel:



117. ábra

*TÉTEL: **Egy kétismeretlenes másodfokú egyenlet akkor és csak akkor egyenlete egy körnek a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben, ha**

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

alakra hozható, ahol A, B, C olyan valós számok, amelyekre teljesül az $A^2+B^2-4C>0$ egyenlőtlenség.

Az ezzel az egyenlettel előállított kör középpontja:

$$K\left(-\frac{A}{2}; -\frac{B}{2}\right),$$

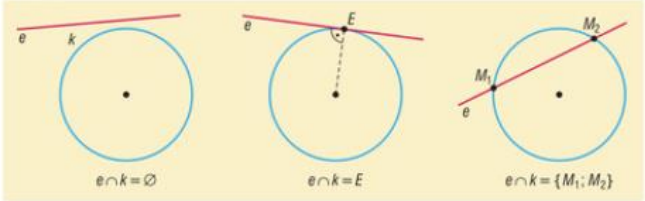
sugara:

$$r=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}.$$

III. A kör és az egyenes kölcsönös helyzete

A síkon egy kör és egy egyenes egymáshoz viszonyítva háromféleképpen helyezkedhet el, amint az a 118. ábrán látható.

118. ábra



A kör és az egyenes egyenletének ismeretében algebrai eszközökkel el tudjuk dönteni, hogy hány közös pontjuk van, és meg tudjuk határozni a közös pontok koordinátáit.

Az $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ egyenletű kör és az $y=mx+b$ egyenes közös pontjainak koordinátái az

$$\left.\begin{aligned}(x-u)^2+(y-v)^2&=r^2\\ y&=mx+b\end{aligned}\right\}$$

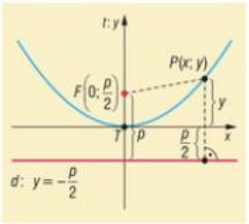
egyenletrendszer megoldásai.

A második egyenletnek az elsőbe történő helyettesítése (az egyik ismeretlen kiküszöbölése) után kapott egyismeretlenes másodfokú egyenlet diszkriminánsa határozza meg a közös pontok számát:

- ha a diszkrimináns pozitív, akkor az egyenes két pontban metszi a kört;
- ha a diszkrimináns 0, az egyenes érinti a kört;
- ha a diszkrimináns negatív, akkor az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja.

IV. A parabola egyenlete

Definíció: A *parabola* azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík egy d egyenesétől és egy d-re nem illeszkedő F pontjától vett távolsága egyenlő. ***(119. ábra)***

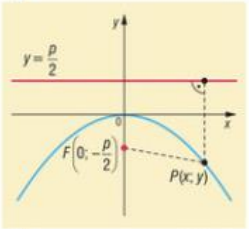


119. ábra

F a parabola **fókuszpontja** (gyújtópontja), d a parabola **vezéregyenese** (direktrixe).

Az F-re illeszkedő, d-re merőleges t egyenesre a parabola tengelyesen szimmetrikus. t a parabola **tengelye.**

A tengely F és d közötti szakaszának T felezőpontja illeszkedik a parabolára. T a parabola **tengelypontja.** F és d távolsága a parabola **paramétere,** jele p $(p>0)$.



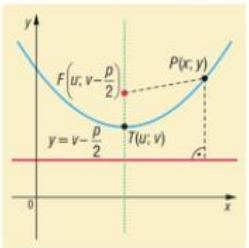
120. ábra

Ha a p paraméterű parabola tengelypontja az origó, fókuszpontja pedig az $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ pont ***(119. ábra)***, akkor egyenlete

$$y=\frac{1}{2p}\cdot x^2.$$

Ez a parabola **tengelyponti egyenlete.**

121. ábra



A p paraméterű, $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$ fókuszpontú parabola egyenlete ***(120. ábra)***

$$y=-\frac{1}{2p}\cdot x^2.$$

A p paraméterű, $T(u;v)$ tengelypontú, y tengellyel párhuzamos tengelyű, „fölfelé nyíló" parabola egyenlete ***(121. ábra)***

$$y-v=\frac{1}{2p}\cdot(x-u)^2.$$

Feladatok

1. Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben $A(2; 5)$, $B(4; -2)$, $C(-3; 1)$. Nagyítsuk ezt a háromszöget az origóból kétszeresére. Határozzuk meg a képháromszög
   a) csúcsainak koordinátáit; *b)* súlypontjának koordinátáit;
   c) körülírt körének egyenletét; *d)* kerületét;
   e) területét.

2. Egy pontszerű test az $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ egyenletű körvonalon a kör középpontjába mutató eredő erő hatására egyenletesen mozog. A pálya $(5; -7)$ pontjában az erőhatás megszűnik. Írjuk fel a test további pályájának egyenletét. (A test érintő mentén mozog tovább.)

3. Számítsuk ki a koordinátatengelyek és a $3x-4y=12$ egyenletű egyenes által közrezárt háromszög csúcsainak koordinátáit, valamint területét.

4. Adott az $x^2+y^2=9$ egyenletű kör, valamint az $A(-2; -3)$ és $B(-5; -9)$ pont. Írjuk fel az AB szakasz harmadolópontjaiból az adott körhöz húzható érintők egyenletét.

5. Az ABC háromszög két csúcsa $A(5; 1)$, $B(-3; 4)$, a C csúcs pedig az $y=2x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Adjuk meg az összes ilyen háromszög súlypontjainak halmazát.

6. Az a valós paraméter mely értékei esetén lesznek az f és g egyenesek
   a) párhuzamosak; *b)* merőlegesek,
   ha f egyenlete $(a+2)\cdot x+3y=3$, g egyenlete pedig $x+ay=1$?

7. Adott egy négyzet két oldalegyenesének egyenlete: $2x-3y=1$, $2x-3y=12$. Számítsuk ki a négyzet területét.

8. Mekkora szöget zárnak be egymással az $y=\frac{x^2}{2}+4$ egyenletű parabola origóra illeszkedő érintői?

9. Az $y=x^2-4x+5$ egyenletű parabolát egy, a parabola szimmetriatengelyére merőleges egyenes olyan pontokban metszi, amely pontok a parabola tengelypontjával együtt szabályos háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a szabályos háromszög oldalának hosszát és területét.

10. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátái kielégítik a következő feltételt:
    a) $|x| \geq |y|$; *b)* $|x|+|y-1|=3$;
    c) $(2x+y-3)\cdot(x^2-y+1)=0$.

KÖZÉPSZINTŰ ÉRETTSÉGI GYAKORLÓ FELADATSOROK

1. Feladatsor I. rész

1. Számítsuk ki a $\left(\frac{9}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$ értékét!

2. Milyen hosszú a 6 cm élhosszúságú kocka lapátlója és testátlója?

3. Melyik hamis az alábbi öt állítás közül?
   A = Ha egy deltoid téglalap, akkor négyzet.
   B = Ha egy négyszögnek van két derékszöge, akkor húrnégyszög.
   C = Van olyan paralelogramma, amelyik érintőnégyszög.
   D = Ha egy paralelogrammának van derékszöge, akkor téglalap.
   E = Van olyan téglalap, amelyik rombusz.

4. Minden valós x esetén teljesül, hogy
   $$(x+2)\cdot(x+b)=x^2+cx+6.$$
   Számítsuk ki a b és a c értékét!

5. Az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög van, az A csúcsnál levő szög nagysága $20°$. Mekkora a BDC szög, ha BD a B csúcsból induló belső szögfelezőnek a háromszögbe eső szakasza?

6. Egy apa években mért életkora jelenleg háromszor annyi, mint két gyermeke években mért életkorának összege. Négy év múlva az apa életkora kétszerese lesz két gyermeke életkora összegének. Hány éves most az apa?

7. Az a paraméter mely valós értéke esetén
   a) párhuzamosak *b)* merőlegesek
   az $y=-\frac{a}{10}x+7$ és $y=\frac{x}{8}-5$ egyenletű egyenesek?

8. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $3^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x=2$ egyenletet.

9. Hány ötjegyű szám képezhető az 1, 1, 2, 3, 5 számjegyekből?

10. Alakítsuk szorzattá az $(x^2-y^2)-(x-y)$ kifejezést.

11. Három szabályos pénzérmét egyszerre feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan két fejet kapunk?

12. Oldjuk meg az $|x-5|\le 8$ egyenlőtlenséget!

1. Feladatsor II. rész/A

13. Egy személygépkocsi két város között útjának harmadát 60 km/h átlagsebességgel 48 perc alatt tette meg. Az út hátralevő részén a kocsi átlagsebessége 64 km/h volt. A gépkocsivezető teli üzemanyagtartállyal indult, és megérkezéskor újra teletöltötte a kocsit benzinnel. A számlán 6221 Ft szerepelt. 1 liter benzin 600 Ft-ba került.
   a) Mekkora a két város távolsága?
   b) Mekkora volt a személygépkocsi teljes útra vonatkozó átlagsebessége?
   c) Hány liter volt a kocsi átlagos üzemanyag-fogyasztása a két város közötti úton 100 km-re vonatkoztatva?

14. Egy 10 cm élhosszúságú kocka négy csúcsa meghatároz egy szabályos tetraédert. Számítsuk ki ennek a tetraédernek a felszínét és térfogatát.

15. Egy matematika szakos egyetemi hallgatónak több tesztet kell kitöltenie egy félév során, és azok pontszámának átlaga alapján kapja az osztályzatot. A félév végén kiderült, hogy ha az utolsó tesztet 97 pontosra írja, akkor a tesztekre kapott pontok átlaga 90 pont lesz, ha 73 pontosra írja, akkor az átlag 87 pont lesz. Hány tesztet töltött ki a hallgató a félév során?

1. Feladatsor II. rész/B

16. Egy kisváros egyik utazási irodája számítógép segítségével készít részletes térképet a városról. Egy téglalap alakú parkról tudjuk, hogy a képernyőn felvett koordinátarendszerben a parknak megfelelő $ABCD$ téglalap átlóinak metszéspontja $M(12; 6)$, az AB oldalegyenes egyenlete $y = 3x$, az AC átló pedig párhuzamos az x tengellyel.
   a) Számítsuk ki a téglalap csúcsainak koordinátáit.
   b) Mekkora a képernyőn megjelenő térkép kicsinyítése, ha a park hosszabbik oldala a valóságban 180 m hosszú és a térkép koordináta-rendszerén az egység 1 cm nagyságú?

17. Egy sportklubban 80-an úsznak, 95-en atlétizálnak, 125-en tornáznak. Az úszók 45%-a, az atlétizálók közül 20%, a tornászoknál 68% lány. Egy közvélemény-kutatás alkalmával tetszőlegesen kiválasztott 3 klubtagot megkérnek arra, hogy töltsenek ki egy kérdőívet.
   a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott sportolók mindegyike lány?
   b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott sportolók mindegyike atlétizál?
   c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott sportolók mindegyike atlétizáló lány?
   d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott sportolók ugyanazt a sportágat űzik?

18. Egy vállalat januárban 60 alkalmazottal 300 millió Ft forgalmat bonyolított le. Februárban ez a forgalom 15,5%-kal emelkedett, mégpedig úgy, hogy az 1 főre eső forgalom kétszer annyi százalékkal nőtt, mint ahány százalékkal a vállalat létszáma emelkedett.
   a) Mekkora forgalmat bonyolított le a vállalat februárban?
   b) Hány százalékkal nőtt az egy főre eső forgalom februárban a januárihoz képest?
   c) Hányan dolgoztak a vállalatnál ferbruárban?

2. Feladatsor I. rész

1. Dani bruttó fizetése 820 000 Ft. A nettó fizetése (amit kézhez kap) 598 600 Ft. A bruttó fizetésének hány %-át vonják le különböző jogcímeken?
2. Az alábbiak közül melyik állítás a tagadása a *„Van, aki szereti a matematikát”*?
   A = Mindenki szereti a matematikát.
   B = Van, aki nem szereti a matematikát.
   C = Nincs olyan, aki szereti a matematikát.
   D = Nincs olyan, aki nem szereti a matematikát.
3. Egy megbeszélésre öt ember érkezik, közülük mindenki két másik embert ismer. Szemléltessük gráffal az ismeretségeket.
4. Lehet-e két prímszám összege 2021? Válaszát indokolja.
5. Adottak a $[-3; 4[$ és $[1; 6]$ intervallumok. Adjuk meg a két intervallum metszetét.
6. Az asztalifoci-automata egy érme bedobása után 10 labdát ad a játékhoz. Hányféle eredménye lehet a két csapat játékának , ha addig játszanak, amíg minden labda egyszer a kapuba nem jut?
7. Ábrázoljuk a $[-2; 7[$ intervallumon az $f(x) = \sqrt{x+2}$ $(x \geq -2)$ függvényt.
8. Mely x természetes számokra igaz, hogy $\frac{7}{7-x} > 0$?
9. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 10 cm hosszú, az adott befogóval szemközti szög 30°. Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?
10. Adja meg az n értékét, ha $\sqrt{10^2 - 8^2} = 3 \cdot \sqrt[n]{32}$.
11. Írjunk fel olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai $x_1 = \frac{2}{3}$ és $x_2 = -5$.
12. Egy egyenes forgáskúp alapkörének átmérője 11 cm, a magassága 17 cm. Mekkora a kúp nyílásszöge?

2. Feladatsor II. rész/A

13. Egy történész professzor sok időt tölt az egyetemi könyvtárban. Az előző évben havi bontásban feljegyezte a könyvtárban töltött órák számát. Az eredményt a következő táblázat mutatja.

Hónap	jan.	febr.	márc.	ápr.	máj.	jún.	júl.	aug.	szept.	okt.	nov.	dec.
Óra	55	57	35	49	42	22	49	19	31	36	64	45

   a) Mennyi a havonta könyvtárban töltött órák átlaga? Mennyi a szórás?
   b) Adjuk meg az adatok móduszát és mediánját.
   c) Ha kördiagramon ábrázolnánk az adatokat, mekkora középponti szög tartozna a november hónaphoz?

14. Egy autó 100 km úton városban átlagosan 9,4 liter, országúton 7,2 liter benzint fogyaszt. Mekkora út megtételéhez elegendő 40 liter benzin
   a) ha csak lakott területen autózunk?
   b) ha a megtett út 20%-át lakott területen, a többit országúton tesszük meg?

15. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben a $P(3; 1)$ pont és az $y = -\frac{x}{2} + 5$ egyenletű e egyenes.
   a) Tükrözzük e-t a P pontra. Írjuk fel a tükörkép egyenes egyenletét.
   b) Tükrözzük P-t az e egyenesre, Adjuk meg a tükörkép koordinátáit.

2. Feladatsor II. rész/*B*

16. A legismertebb antibiotikum a penicillin, amelyet különböző sérülések után a fertőzések elkerülésére használnak.

   A gyógyszerek hatása ugyan kis mértékben eltér az egyes embereknél, de általában egy adag penicillin úgy szívódik fel a vérben, hogy az injekció beadása után egy órával a befecskendezett mennyiség 60%-a marad aktív. Ez a folyamat a továbbiakban is folytatódik, tehát minden óra elteltével már csak az előző órában aktív penicillin 60%-a marad aktív.

   Egy betegnek a kórházban reggel 8 órakor 200 mg penicillint adnak be.
   a) Mennyi penicillin lesz a beteg vérében 11 órakor?

   Az előző beteg szervezete addig védett a fertőzéstől, amíg a vérében a penicillin mennyisége 10 mg felett van.
   b) Legkésőbb hány órakor kell megkapnia a betegnek a következő adag penicillint?
   c) Mekkora adag penicillint kellene beadni egy betegnek, hogy 8 órán keresztül védve legyen, tehát legalább 10 mg penicillin legyen a vérében?
   d) Óránként hány százalék marad meg abból a gyógyszerből a beteg vérében, amelyből reggel 8 órakor 50 mg-ot beadva déli 12 órakor már csak 12 mg lesz aktív a beteg vérében?

17. Egy dobozban piros és kék golyók vannak. Véletlenszerűen kihúzva egy golyót, 0,4 annak a valószínűsége, hogy az piros. Ha még 10 kék golyót beteszünk a dobozba, a piros húzásának valószínűsége $\frac{1}{3}$ lesz.
   a) Melyik színből hány golyó van a dobozban?
   b) Az eredeti dobozból egymás után kihúzunk négy golyót úgy, hogy nem tesszük vissza azokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mind a négy golyó kék lesz?
   c) Az eredeti dobozból egymás után kihúzunk négy golyót úgy, hogy minden húzás után megnézzük és visszatesszük a kihúzott golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy mind a négy golyó kék színű?

18. A kilencedik kerület egy forgalmas kereszteződésében körforgalmat építettek. A kialakult 14 m átmérőjű kört parkosítják, ezért a körben a lehető legnagyobb *ABCDEFGHI* szabályos kilencszöget ültetik be virágokkal.

a) Mennyi tulipánpalántára lesz szükség a 9 oldalú sokszög teleültetéséhez, ha egy 1 m^2-es területre 25 palánta számítható?

A kilencszöget az *A* csúcsból induló átlókkal háromszögekre bontják, a kialakult háromszögekbe háromféle – piros, sárga és rózsaszín – tulipánt ültetnek úgy, hogy ha két háromszögnek van közös oldala, akkor azokban nem lehet azonos színű virág.

b) A színek szerint hányféleképpen ültethetik be a tulipánokat?

c) Sorsolással döntik el, hogy melyik háromszögbe milyen színű virág kerüljön. Mennyi a valószínűsége, hogy csak 2 szín kerül felhasználásra?

A kilencszög és a háromszögek oldalait különböző színű árvácskákkal ültetik végig.

d) Hány darab árvácska palántát vásároljanak, ha méterenként 5-öt szeretnének ültetni?

3. Feladatsor I. rész

1. Melyik a legnagyobb 6-tal osztható hatjegyű szám?
2. Adjuk meg a 7-tel osztható pozitív egészek növekvő sorozatának 3000. tagját!
3. A tízes számrendszerben felírt 2022 számot írjuk át kettes számrendszerbe. Hány darab 0 számjegyet tartalmaz a kapott szám?
4. Mely valós x értékekre teljesül, hogy 2^{30} 25%-a 4^x?
5. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=3\\ y-2&=0\end{aligned}\right\}.$$

6. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek két gyöke $\frac{1}{2}$ és $-\frac{1}{3}$.
7. Egy négyzetet az egyik oldalával párhuzamos két egyenessel három téglalapra bontottunk. Mekkora a négyzet területe, ha mindhárom téglalap kerülete 8 cm?
8. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$10^{1-x}=0{,}001.$$

9. Egy trapéz belső szögeinek mértéke pozitív körüljárás szerint haladva egy számtani sorozat négy egymást követő eleme. Mekkora a trapéz legnagyobb szöge, ha a legkisebb 75°?
10. A derékszögű koordináta-rendszerben az origó középpontú egységsugarú körbe írt szabályos nyolcszög egyik csúcsának koordinátái (1; 0). Határozzuk meg a többi csúcs koordinátáit!
11. Egyszerűsítsük a következő törtet:

$$\frac{x^2-2x-35}{x^2-12x+35}.$$

12. Egy téglalap átlói d cm hosszúak, az átlók által bezárt hegyesszög φ fok. Fejezzük ki a téglalap kerületét és területét d-vel és φ-vel!

3. Feladatsor II. rész/A

13. Apa és két fia a lakást takarítják. Az apa egyedül 5 óra alatt végezne a munkával, fiai – akik egyforma tempóban dolgoznak – együtt 4 óra alatt végzik el a munkát. Mennyi idő alatt végzik el a takarítást, ha hárman együtt kezdik, és az egyik fiú 40 perc után elmegy a barátjához, a másik pedig a testvére távozásakor 10 percig telefonon beszélget?

14. Két középiskola, A és B tanulói együtt vesznek részt egy számítógép-felhasználói képesítést adó vizsgán. A következő táblázat a tanulók által elért pontszámok átlagait tartalmazza a következő bontásban: a fiúk, a lányok, a fiúk és a lányok együtt, továbbá az A középiskola, a B középiskola és az A és B középiskola együtt.

	A iskola	B iskola	A és B iskola együtt
Fiúk	71	81	79
Lányok	76	90	?
Fiúk és lányok együtt	74	84	

Határozzuk meg ezekből az adatokból azt, hogy az A és B iskolák összes lány tanulójának mennyi a pontátlaga.

15. Az ABC háromszög AB oldalának hossza 1 cm. Az A, illetve a B csúcsnál található belső szögek nagysága 45°, illetve 120°. Forgassuk meg a háromszöget az AB oldal egyenese körül, és határozzuk meg az így kapott forgástest térfogatát.

3. Feladatsor II. rész/B

16. Öt barát, Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő közösen vásárol egy fénymásológépet. Úgy döntenek, hogy a gép Aladárnál vagy Bélánál lesz elhelyezve, és szavazással döntik el, hogy végül ki viszi haza. Mind az öten szavaznak, és a két fiú közül valamelyiknek a nevét írják a cédulára. A különböző válaszok egyforma valószínűséggel fordulhatnak elő. (A választási eredményeket aszerint is megkülönböztetjük, hogy melyik fiú kire szavazott.)

a) Hány különböző szavazási eredményt kaphatunk, ha lényeges, hogy ki kire szavazott?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a gép végül Aladárnál lesz elhelyezve?

Tegyük fel, hogy néhány évvel később Csaba is teremtett helyet otthonában a gép számára. Ekkor a korábbiakkal azonos feltételek mellett újra szavaznak a fiúk, csak most Aladár és Béla mellett Csaba is kaphat szavazatot.

c) Ekkor hány különböző szavazási eredmény jöhet létre?

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan négyen szavaznak Csabára?

17. Legyen A a valós számok halmazának azon részhalmaza, amelyre teljesül az $x^2 - 2x - 8 < 0$ egyenlőtlenség, B pedig a valós számok halmazának azon részhalmaza, amelyre teljesül a $3^x \geq 2 + 3^{1-x}$ egyenlőtlenség.

a) Adjuk meg az A és B halmazokat.

b) Adjuk meg az $A \cup B$ és $A \cap B$ halmazokat.

c) Mely pozitív egész számok elemei a $B \setminus A$ halmaznak?

18. Ismert, hogy a radioaktív bomlás során az m_0 kezdeti tömegű, T felezési idejű (a felezési idő az az időtartam, amely alatt a kezdeti tömeg a felére csökken) radioaktív anyagból t idő múlva megmaradó tömeg: $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

a) Egy bizonyos radioaktív anyagról tudjuk, hogy a kezdeti 8 mg tömeg 6 perc alatt 2 mg-ra csökken. Mennyi az anyag felezési ideje?

b) Egy másik radioaktív anyagról tudjuk, hogy a felezési ideje 15 év. Ismert, hogy a kezdeti tömeg 30 év alatt 3 g-ra csökken. Mennyi volt a kezdeti tömeg?

c) Kétféle radioaktív anyagról a következőket tudjuk. Az első felezési ideje T_1, kezdeti tömege M_1. A második anyag tömege a megfigyelés kezdetén M_2, de nem ismerjük a T_2 felezési időt. Azt tudjuk még, hogy t idő alatt a két anyag úgy bomlik el, hogy a megmaradó tömegük egyenlő lesz. Fejezzük ki a T_2-t t, M_1, M_2 és T_1 segítségével.

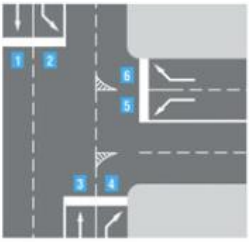
4. Feladatsor I. rész

1. Mi a 2023. számjegy a tizedesvessző után az $\frac{1}{7}$ tizedestört alakjában?

2. Milyen magas az a torony, amelynek árnyéka 15 m hosszú, amikor egy függőlegesen álló 1 m-es sétapálca árnyéka 75 cm?

3. Adjuk meg a * helyére írható számok halmazát: $\frac{2}{*} - \frac{*}{5} = \frac{1}{15}$.

4. Az útkereszteződésben az egyes sávok jobb oldalán levő jelzőlámpák irányítják a forgalmat, a sávokban a haladási irányt a nyilak jelzik. Milyen színt mutat a többi lámpa akkor amikor az 1. lámpa pirosat mutat? (Mindegyik lámpa piros vagy zöld, és a lehető legtöbb sávnak mutat zöldet a lámpa, de két egymást keresztező sávnak egyszerre nem lehet zöld.)

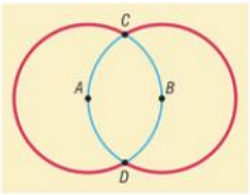


5. Ha az a^b hatványban az alapot és a kitevőt is megduplázzuk, akkor z-t kapunk. Ha z egyenlő az a^b és x^b szorzatával, akkor mi lehet x?

6. Öt szám átlaga 12. Ha mindegyik számhoz 10-et adunk, a kapott számokat megszorozzuk 4-gyel, majd mindegyikből levonunk 10-et, akkor öt újabb számhoz jutunk. Mennyi lesz az öt újabb szám átlaga?

7. Egy autó üzemanyagtartálya az $\frac{1}{4}$ részéig van tele, amikor 18 liter benzint tankolnak, és így a 0,7 részéig lesz töltve. Hány literes az autó üzemanyagtartálya?

8. Milyen hosszú a vastag vonallal jelzett út, ha az A és B pontok a körök középpontjai, és $AB = 12$ cm?



9. Hat iskola versenyez 3 fős csapatokkal terepfutásban. Mindegyik futó ugyanakkora valószínűséggel lesz 1. (2. vagy 3.). Mi a valószínűsége, hogy a verseny első három helyezettje ugyanabból az iskolából jött?

10. Ahhoz, hogy egy úszó 3 km-t ússzon, vagy az uszoda hosszát kell 90-szer megtennie, vagy a kerületét 25-ször. Mekkora a víztükör felszíne (az uszoda területe m^2-ben)?

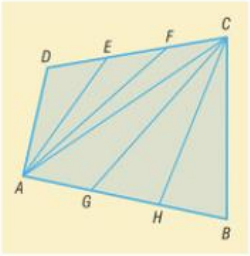
11. Mennyi a számjegyek összege a $\left(10^{4n^2+8}+1\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$ szám tízes számrendszerbeli alakjában?

12. Véletlenszerűen választunk egy háromjegyű pozitív egész számot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám 2-nek pozitív egész kitevőjű hatványa?

4. Feladatsor II. rész/A

13. Egy kereskedő 900 forintért vesz egy árucikket.
   a) Hány forintos árat írjon rá, hogy a kiírt árból 10%-ot engedve még mindig legyen 20% haszna az üzleten?
   b) Hány forintba kerül ez az árucikk, ha egymásután háromszor 10-10%-os árcsökkentést hajtanak végre?

14. Az ábrán látható négyszög alakú földterületet három testvér örökli. A területen az AE, AF, AC, CG és CH utak vezetnek keresztül, ahol E, F, G, H a megfelelő oldalak harmadolópontjai.



   a) Osztozhatnak-e a testvérek igazságosan a területen úgy, hogy a meglevő utak határolják a földjeiket, és az azonos tulajdonoshoz tartozó földdaraboknak nem kell feltétlenül szomszédosnak lenni, de területük egyenlő kell legyen?
   b) Hányféleképpen lehetséges az igazságos osztozkodás, ha ezeken az utakon kívül más határok nem lehetnek?

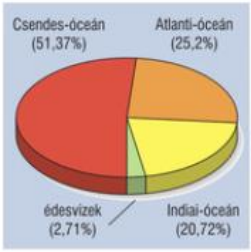
15. *a)* Egy számtani sorozat első 50 tagjának összege 200, következő 50 tagjának összege 2700. Mi az első tag?
   b) Egy préselőgép első nyomásra a répában levő lé negyedrészét, majd minden további nyomásra a megmaradt lé negyedrészét nyomja ki. Hány nyomás szükséges ahhoz, hogy a répában levő lének legalább $\frac{2}{3}$ részét kinyomja a gép?

4. Feladatsor II. rész/*B*

16. *a)* Egy tesztben az osztály átlaga 80 pont. A lányok átlaga 83 pont, a fiúké 71 pont. Az osztály tanulóinak hány százaléka lány?

b) A 25 kérdésből álló tesztben a válaszadó minden jó válaszra 5 pontot, a rossz válaszra 0 pontot, ha nem válaszol, 1 pontot kap. Néhány gyereket megkérdeztünk, hogy hány pontot értek el. A következő válaszokat kaptuk: András: 127 pont, Bence: 124 pont, Csaba: 121 pont, Dénes: 118 pont, Endre: 115 pont. Ki mondhatott igazat, és ki az, aki biztosan tévedett?

17. Mekkora a Földön levő víz tömege, ha annak térfogata $1{,}3875 \cdot 10^{15}$ m^3, a tengervíz sűrűsége 1035 kg/m^3, az édesvíz sűrűsége 1000 kg/m^3, a vizek százalékos megoszlását pedig a kördiagram mutatja? (A sűrűség a tömeg és a térfogat hányadosa).



18. A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság férfi döntőjébe hat fiú, András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri jutott be. Akik az elődöntők során már játszottak egymással, azok a döntőbe vitték a mérkőzés eredményét, ott már nem kellett egymás ellen játszaniuk. András már játszott Bélával, Danival és Ferivel, Béla játszott már Edével és Andrással, Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andrással és Ferivel. Ede és Feri egyaránt két meccs eredményét hozta a döntőbe.

a) Szemléltessük gráffal a lejátszott mérkőzéseket!

b) Hány mérkőzés lesz a döntőben, ha a végső sorrend kialakításához bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással?

c) Hányféle sorrend alakulhat ki a döntőben, ha holtverseny nem lehet, ugyanis azonos győzelemszám esetén az egymás elleni eredmény dönt?

d) Hány olyan sorrend lehetséges, ahol Dani az első két hely valamelyikén végez?

5. Feladatsor I. rész

1. Egy 42 000 Ft-os kerékpárt 20%-kal leértékeltek. Mennyibe kerül most?
2. Hány olyan egész szám létezik, melyre teljesül, hogy
   a) $-2 < x$ és $x \leq 4$; *b)* $-2 < x$ vagy $x \leq 4$?
3. Hány 20 000-nél nagyobb, de 30 000-nél kisebb természetes szám képezhető a 0, 1, 1, 2, 3 számjegyekből?
4. *a)* Írjuk fel 3 hatványaként a $27^2 \cdot 9^{-3}$ számot.
   b) Írjuk fel 2 hatványaként az $\sqrt[5]{8}$-at.
5. Egy 3 dl-es pohár 10 cm magas. Legalább mekkora kör alakú alátétet kell aláraknunk, ha azt szeretnénk, hogy az a pohár alól minden irányból kilátszódjék?
6. Oldjuk meg az $|2x-4| < 6$ egyenlőtlenséget.
7. Egy 10 cm élhosszúságú kockából a lehető legnagyobb gömböt faragtuk ki. Hány köbcentiméter lesz a gömb térfogata?
8. Hol metszi a koordinátatengelyeket az $(x-8)^2+(y-6)^2 = 100$ egyenletű kör?
9. Egy osztályban 15 fiú és 10 lány tanul. Mekkora eséllyel lesz a véletlenszerűen kiválasztott felelő fiú?
10. Határozzuk meg az $x \mapsto \sqrt{x^2-4}$ függvény lehető legbővebb értelmezési tartományát és értékkészletét.
11. Egy színház nézőterén az első sorban 15 szék található. Minden rákövetkező sorban 3-mal több. Hányadik sorban lesz kétszer annyi, mint az elsőben?
12. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két szabályos játékkockát feldobva a dobott számok szorzata páratlan lesz?

5. Feladatsor II. rész/*A*

13. Az olimpián egy versenyszámban 25-en indultak el.
   a) A selejtezők után hányféleképpen alakulhat ki a 8-as döntő összetétele?
   b) Az összes indulót figyelembe véve hányféleképpen állhat fel az első három a dobogóra?
14. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:
   a) $2^x \cdot 8 = 4^{x+2}$; *b)* $\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{x-2}$.
15. Egy félgömb alakú 21 cm sugarú edény teljes tartalmát egy 50 cm sugarú, függőleges tengelyű henger alakú edénybe öntjük át. Milyen magasságú lesz ebben a folyadék?

5. Feladatsor II. rész/B

16. Egy bank kétféle befektetést kínál. Az első: a betett összeg 1 millió forintig 5%-ot, az 1 és 2 millió forint közötti része 6,5%-ot, a 2 millió forint feletti része pedig 7%-ot kamatozik, évenkénti jóváírással. A második háromhavi 1,7%-os kamatot ígér, negyedévi jóváírással. Melyik befektetési formát célszerű választani 2 millió forint összeg esetén, ha 3 éves futamidőt választunk? (Feltételezzük, hogy közben a bankok nem változtatnak a betéti kondíciókon.)

17. A következő táblázat Magyarország 15 évnél fiatalabb népességszámát tartalmazza a megadott években rögzített adatok alapján.

Év	1997	1998	1999	2000
0–14 éves népesség összesen	1 797 606	1 767 223	1 736 811	1 706 370

a) Az 1997-es adatot alapul véve fejezzük ki a rá következő évek adatait ennek százalékában. A változást szemléltessük oszlopdiagramon.

b) Mekkora átlagos csökkenéssel számolhatunk a négy év adatait figyelembe véve?

c) Ha 2000 után a számított átlagos csökkenés bizonyulna állandó értéknek, akkor mekkora népességszámmal kalkulálhatnánk 2030-ra?

18. Egy csonka gúla alakú lámpabura tengelymetszete olyan szimmetrikus trapéz, melynek területe 1400 cm^2, párhuzamos oldalai $a = 60$ cm, $b = 10$ cm.

a) Mekkora a lámpabura magassága?

b) Mekkora a bura térfogata?

c) Mekkora nagyságú szövetet kell kiszabnunk a bura palástjának beburkolásához, ha az illesztések elkészítése miatt 10%-kal nagyobb méretet számolunk fel?



Az új szakszavak jegyzéke

Középszint

alkotó **77**
Cavalieri-elv **95**
csonka gúla **103**
csonka kúp **103**
diszjunkció **18**
dobozdiagram **147**
egyenes és sík hajlásszöge **69**
egyenes henger **77**
egyenes kúp **77**
ekvivalencia **25**
félterjedelem **146**
ferde henger **77**
ferde kúp **77**
független események **136**
függvény szélsőértékei **241**
geometriai valószínűség **122**
gömbfelület **77, 108**
gömbtest **108**
implikáció **24**
két sík hajlásszöge **69**
kijelentés **13**
kijelentés logikai értéke **13**
kitérő egyenesek távolsága, hajlásszöge **68, 69**
konjunkció **17**
körcikk területe **88**
körgyűrű területe **89**
körszelet területe **89**
kúp nyílásszöge **77**
kvartilisek (alsó, felső) **146**
medián **146**
mértani sorozat **53**
mértani sorozat hányadosa (kvóciens) **53**
módusz **145**
monoton növő (fogyó) sorozat **45**
negáció **15**
osztály **144**
osztályköz **144**
osztályközép **144**
paradoxon **13**
poliéder **76**
rekurzív sorozat **41**
sodrófa-diagram **147**
szabályos gúla **77**
szabályos hasáb **77**
számsorozat **36**
számtani közép **146**
számtani sorozat **47**
számtani sorozat különbsége (differencia) **47**
szórás **150**
szórásnégyzet **150**
térelemek távolsága **69**
terjedelem **146**
testbe írható gömb **114**
test köré írható gömb **115**

Emelt szint

alulról (felülről) korlátos függvény **240**
alulról (felülről) korlátos sorozat **45**
bennfoglaló paralelepipedon **112**
binomiális eloszlás **171**
De Morgan azonosságok **19**
egyszerű poliéder **78**
feltételes valószínűség **135**
független egyenesek **73**
független síkok **74**
függvény leszűkítése, kiterjesztése **233**
hipergeometriai eloszlás **172**
normál transzverzális **69**
szabályos testek: tetraéder, oktaéder, ikozaéder, hexaéder, dodekaéder **79**
teljes indukció **29**
várható érték **128**



Kiadja a Mozaik Kiadó, 6701 Szeged, Pf. 301; Telefon: (62) 470-101
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Aggod István
Terjedelem: 27,74 A/5 nyomdai ív • 2023. július • Tömeg: 560 g • Raktári szám: MS-2312U