# Sokszínű matematika

# 10

*A kötet hátsó borítójának belsején egyedi kód található, melyet a* ***www.mozaweb.hu*** *oldalon aktiválhatsz. Az aktiválás hozzáférést biztosít a kiadvány elektronikus változatához a honlapon található feltételekkel.*






# Sokszínű matematika

Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

# Matematika

## tankönyv 10

Huszonegyedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2024

*A könyvet írta:* Dr. Kosztolányi József · *egyetemi docens*
Kovács István · *gimnáziumi tanár*
Pintér Klára · *főiskolai adjunktus*
Dr. Urbán János † · *gimnáziumi tanár*
Vincze István · *gimnáziumi tanár*

*Lektorálta:* Dr. Németh József · *egyetemi docens*
Szigeti Józsefné · *középiskolai tanár*

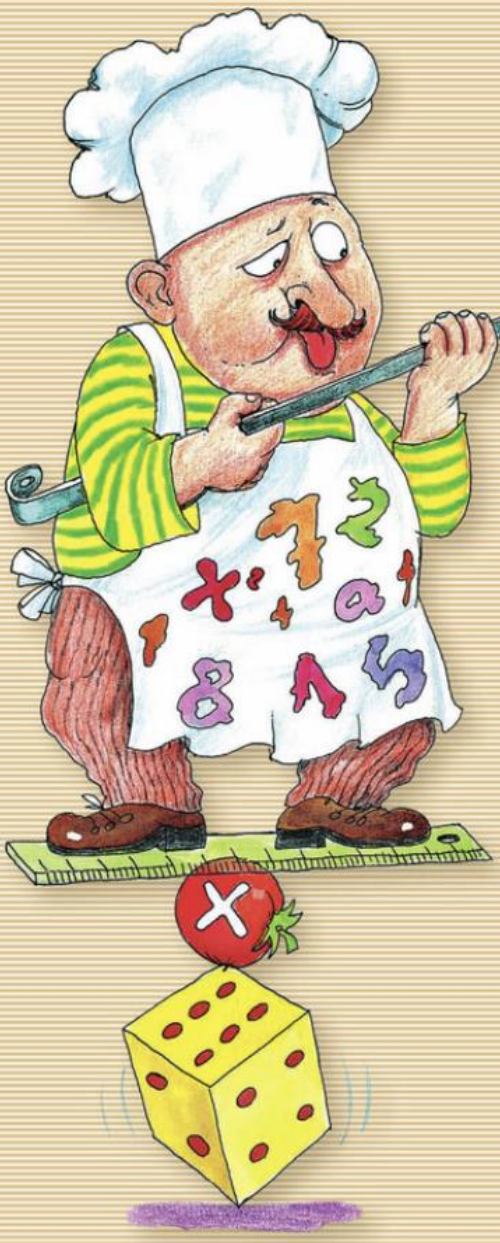


*Felelős szerkesztő:* Tóth Katalin
*Borítóterv, tipográfia:* Reményfy Tamás
*Illusztrációk:* Ábrahám István
*Fotók:* Mozaik Archívum – Dr. Hilbert Margit (3 db);
Nemzetközi képügynökségek (2 db)

KERETTANTERV:
EMMI kerettanterv 51/2012. (XII. 21.) EMMI rendelet 3. sz. melléklet (3.2.04),
6. sz. melléklet (6.2.03)

A Mozaik Archívum képeinek kizárólagos felhasználási joga a Mozaik Kiadó Kft. tulajdona.
Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, ill. rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más hordozó) nem sokszorosítható.

*ISBN* 978 963 697 371 1
*Copyright:* Mozaik Kiadó – Szeged, 2002, 2013




Gondolkodási módszerek 1

A gyökvonás 2

A másodfokú egyenlet 3

Geometria 4

Szögfüggvények 5

Valószínűség-számítás 6







## Gondolkodási módszerek


1. Mi következik ebből? ..... 10
2. A skatulyaelv ..... 21
3. Sorba rendezési problémák ..... 29
4. Kiválasztási problémák ..... 32


## A gyökvonás


1. Racionális számok, irracionális számok ..... 36
2. A négyzetgyökvonás azonosságai ..... 40
3. A négyzetgyökvonás azonosságainak alkalmazása ..... 44
4. Számok *n*-edik gyöke ..... 50
5. Az *n*-edik gyökvonás azonosságai ..... 53




## A másodfokú egyenlet


1. A másodfokú egyenlet és függvény ..... 60
2. A másodfokú egyenlet megoldóképlete ..... 64
3. A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés ..... 69
4. Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek ..... 74
5. Másodfokú egyenlőtlenségek ..... 80
6. Paraméteres másodfokú egyenletek (emelt szintű tananyag) ..... 84
7. Négyzetgyökös egyenletek ..... 90
8. Másodfokú egyenletrendszerek ..... 96
9. A számtani és mértani közép ..... 101
10. Szélsőérték-feladatok (emelt szintű tananyag) ..... 106
11. Másodfokú egyenletre vezető problémák ..... 110


## Geometria



**A körrel kapcsolatos ismeretek bővítése**


1. Emlékeztető ..... 116
2. A középponti és kerületi szögek tétele ..... 117
3. A kerületi szögek tétele; látószögkörív ..... 121
4. A húrnégyszögek tétele (emelt szintű tananyag) ..... 125


**A hasonlósági transzformáció és alkalmazásai**


1. Párhuzamos szelők és szelőszakaszok (emelt szintű tananyag) ..... 129
2. A szögfelezőtétel (emelt szintű tananyag) ..... 135
3. A középpontos hasonlósági transzformáció ..... 137



4. A hasonlósági transzformáció ..... 141
5. Alakzatok hasonlósága; a háromszögek hasonlóságának alapesetei ..... 143
6. A hasonlóság néhány alkalmazása ..... 147
7. Hasonló síkidomok területének aránya ..... 154
8. Hasonló testek térfogatának aránya ..... 158

**Hegyesszögek szögfüggvényei**

1. Távolságok meghatározása a hasonlóság segítségével ..... 161
2. Hegyesszögek szögfüggvényei ..... 164
3. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között ..... 168
4. Nevezetes szögek szögfüggvényei ..... 172
5. Háromszögek különböző adatainak meghatározása szögfüggvények segítségével ..... 175
6. Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével ..... 180

**Vektorok**

1. A vektor fogalma; vektorok összege, különbsége, szorzása számmal (emlékeztető) ..... 184
2. Vektorok felbontása különböző irányú összetevőkre ..... 188
3. Vektorok alkalmazása a síkban és a térben ..... 194
4. Vektorok a koordináta-rendszerben, vektor koordinátái, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal ..... 199



## Szögfüggvények

1. A szinusz- és koszinuszfüggvény definíciója, egyszerű tulajdonságai ..... 204
2. A szinuszfüggvény grafikonja ..... 209
3. A koszinuszfüggvény grafikonja, egyenletek, egyenlőtlenségek ..... 214
4. A tangens- és kotangensfüggvény ..... 221
5. Összetett feladatok és alkalmazások ..... 228
6. Geometriai alkalmazások ..... 232



## Valószínűség-számítás

1. Események ..... 238
2. Műveletek eseményekkel ..... 243
3. Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség ..... 248
4. A valószínűség klasszikus modellje ..... 251





## Útmutató a tankönyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában.

- A kidolgozott példák gondolatmenete mintát ad a módszerek, eljárások megértéséhez és a további feladatok megoldásához.
- A legfontosabb definíciókat és tételeket színes kiemelés jelzi.
- A tananyag apró betűvel szedett részei és a bordó színnel megjelölt kidolgozott mintapéldák a mélyebb megértést segítik. Ezek az ismeretek szükségesek az emelt szintű érettségihez.
- A margón ábrák, az adott lecke főbb vázlatpontjai, ismétlő, magyarázó részek, valamint matematikatörténeti érdekességek találhatók.

A mintapéldák és a kitűzött feladatok nehézségét három különböző színnel jelöltük:

**Sárga:** elemi szintű gyakorló feladatok, amelyek megoldása, begyakorlása nélkülözhetetlen a továbbhaladáshoz.
**Kék:** a középszintű érettséginek megfelelő színvonalú feladatok.
**Bordó:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, feladatok.

Ezek a színkódok megfelelnek a Mozaik Kiadó Sokszínű matematika feladatgyűjteményeiben alkalmazott jelöléseknek. A feladatgyűjtemény-sorozat több mint 3000, a gyakorláshoz, az órai munkához és az érettségi felkészüléshez is alkalmas feladatot tartalmaz.

A kitűzött feladatok végeredményei megtalálhatók a *www.mozaik.info.hu* honlapon.

A tankönyv feldolgozásához további segédanyagokat kínál a *www.mozaweb.hu* oldal.

◆ ◆ ◆

**A matematika, a ráció, a logikus gondolkodás világunk megismerésének egyik talán leghatékonyabb eszköze, amely néha megmagyarázhatatlan jelenségekkel társul. Elválaszthatatlan a gondolkodó embertől, és teljessé teszi mindennapi tevékenységeit.**

**Néhány gondolat azoktól, akik mindezt megtapasztalták:**



*„Mi hát a ráció, amiből az emberi ész a logikát kreálta? Nyilvánvaló, hogy 'benne van' a természetben, különben nem lehetne a természetet racionális eszközökkel megérteni. A ráció embert, állatot és természetet egyesít." (Kertész Imre, Nobel-díjas magyar író)*



*„Az évszázadok során a matematikusok kollektív tudata megalkotta saját univerzumát. Hogy ez hol van, nem tudom – s gondolom, a 'hol' szó itt értelmét is veszti –, de biztosíthatom az olvasót: ez a matematikai univerzum nagyon is reális annak a számára, aki benne él. Az emberiség éppen a matematika révén hatolt be legmélyebben környező világa rejtelmeibe." (Ian Stewart)*



*„A szigorú bizonyítás rendszerint az utolsó lépés! Előtte sok sejtést kell tenni, és ezeknél az esztétikai meggyőződés rendkívül fontos." (Roger Penrose)*



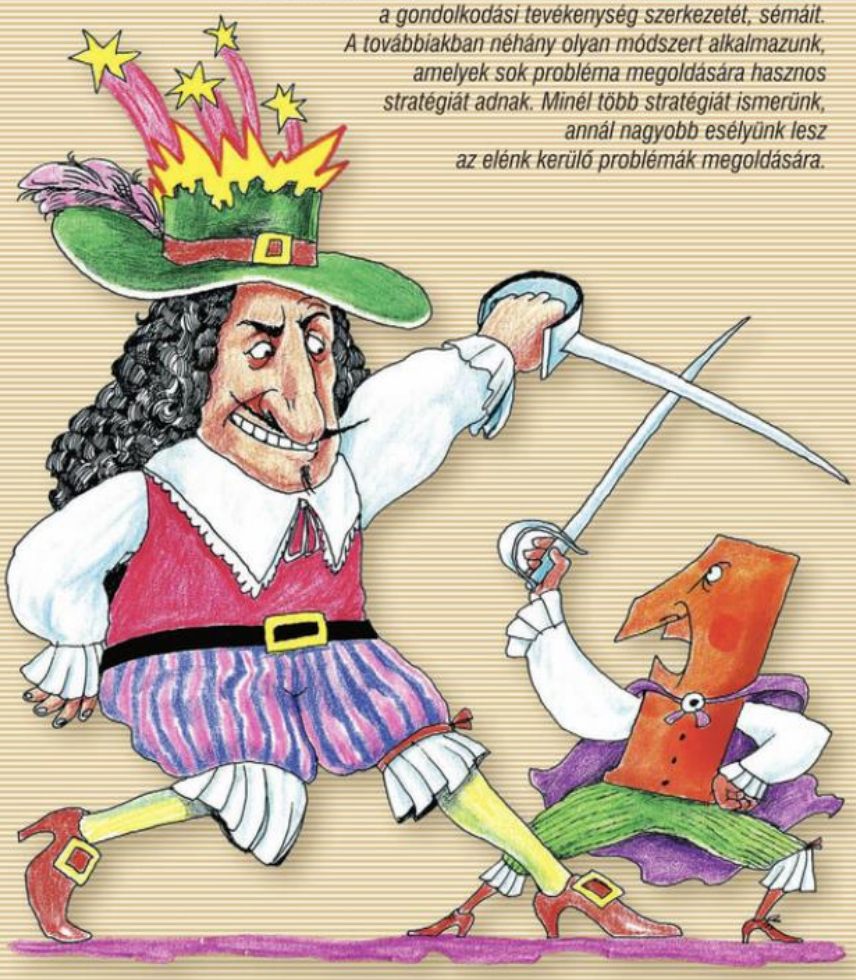
*„A matematikus – akárcsak a festő vagy a költő – a forma mestere. ... A matematikai formáknak – akárcsak a festő vagy a költő formáinak – szépeknek kell lennie..." (G. H. Hardy)*

**Eredményes munkát és tanulást kívánnak a Szerzők.**

# Gondolkodási módszerek

*Már René Descartes [dékárt] (1569–1650) a „Regulae ad directionem ingenii" (Szabályok a gondolkodás irányítására) című művében általános módszert keresett a problémák megoldására. Úgy gondolta, hogy először minden problémát matematikai problémára vezet vissza, másodszor minden matematikai problémát algebraira, végül ezeket egyenlet megoldására.*

*Gondolkodásunk fejlesztéséhez is szükséges, hogy megfigyeljük a gondolkodási tevékenység szerkezetét, sémáit. A továbbiakban néhány olyan módszert alkalmazunk, amelyek sok probléma megoldására hasznos stratégiát adnak. Minél több stratégiát ismerünk, annál nagyobb esélyünk lesz az elénk kerülő problémák megoldására.*







# 1. Mi következik ebből?

## Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel

**1. példa**

A Falábúak és a Kurtalábúak futballmérkőzést játszottak, melyen semmi különleges esemény nem történt (nem volt öngól, mindkét csapat ott volt, nem szakadt félbe stb.). Mit tudunk arról, hogy ki győzött, ha a közvetítés végén a riporter következő mondatát halljuk?

*a)* A Falábúak 1-gyel több gólt rúgtak, mint a Kurtalábúak.

*b)* A Falábúak szereztek gólt.

*c)* A Kurtalábúak egyik játékosát kiállították.

*d)* A Falábúak több gólt szereztek, mint a Kurtalábúak.

**Megoldás (a)**

**elégséges, de nem szükséges feltétel**

Ha a Falábúak 1-gyel több gólt rúgtak az ellenfél kapujába, mint a Kurtalábúak, akkor a Falábúak biztosan győztek. Így a Falábúak győzelmének **elégséges feltétele,** hogy 1-gyel több gólt rúgjanak, mint az ellenfél.




Ám a Falábúak nemcsak úgy győzhetnek, hogy 1-gyel több gólt rúgnak, azaz a Falábúak győzelmének **nem szükséges feltétele,** hogy 1-gyel több gólt rúgjanak, mint az ellenfél.

Összefoglalva: a Falábúak győzelmének **elégséges, de nem szükséges feltétele,** hogy 1-gyel több gólt rúgjanak, mint az ellenfél.

**Megoldás (b)**

**szükséges, de nem elégséges feltétel**

Ha a Falábúak szereztek gólt, azért még lehet, hogy kikaptak, ha az ellenfél többet szerzett. Így abból, hogy a Falábúak szereztek gólt, nem következik, hogy győztek. Tehát a Falábúak győzelmének **nem elégséges feltétele,** hogy szerezzenek gólt.




Viszont, ha a Falábúak győztek, akkor biztos, hogy szereztek gólt, hiszen anélkül nem győzhettek. Tehát a Falábúak győzelmének **szükséges feltétele,** hogy szerezzenek gólt.

Összefoglalva: a Falábúak győzelmének **szükséges, de nem elégséges feltétele,** hogy szerezzenek gólt.





**Megoldás (c)**

Abból, hogy a Kurtalábúak egyik játékosát kiállították, még nem következik, hogy a Falábúak győztek, így a Falábúak győzelmének **nem elégséges feltétele,** hogy az ellenfél egy játékosát kiállítják.

**nem szükséges és nem elégséges feltétel**

Abból, hogy a Falábúak győztek, nem következik, hogy a Kurtalábúak egy játékosát kiállították, így a Falábúak győzelmének **nem szükséges feltétele,** hogy az ellenfél egy játékosát kiállítják.

Összefoglalva: a Falábúak győzelmének **nem szükséges és nem elégséges feltétele,** hogy az ellenfél egy játékosát kiállítják.

**Megoldás (d)**

Ha a Falábúak több gólt szereztek, mint a Kurtalábúak, akkor biztosan győztek, vagyis abból, hogy a Falábúak több gólt szereztek, mint az ellenfél, következik, hogy győztek. Tehát a Falábúak győzelmének **elégséges feltétele,** hogy több gólt szerezzenek, mint az ellenfél.

**szükséges és elégséges feltétel**

Ha a Falábúak győztek, az csak úgy lehetett, hogy több gólt szereztek, mint a Kurtalábúak, azaz a Falábúak győzelméből következik, hogy több gólt szereztek, mint a Kurtalábúak. Tehát a Falábúak győzelmének **szükséges feltétele,** hogy több gólt szerezzenek, mint az ellenfél.

Összefoglalva: a Falábúak győzelmének **szükséges és elégséges feltétele,** hogy több gólt szerezzenek, mint az ellenfél.

*Megjegyzés:* Egy feltétel lehet szükséges vagy nem szükséges, elégséges vagy nem elégséges, ez összesen $2 \cdot 2 = 4$ lehetőség.

Jelöljünk $p$-vel egy kijelentést (pl. a Falábúak győztek) és $q$-val egy másik kijelentést (pl. a Falábúak több gólt rúgtak, mint az ellenfél)!

**ÁLLÍTÁS:** **Ha** *a Falábúak győztek,* **akkor** a Falábúak több gólt rúgtak, mint az ellenfél. (A Falábúak csak akkor győztek, ha a Falábúak több gólt rúgtak, mint az ellenfél.)

$p$-nek szükséges feltétele $q$
$p \Rightarrow q$

*A Falábúak győzelmének* **szükséges feltétele,** hogy több gólt rúgjanak, mint az ellenfél.

**Jelölés:** *Falábúak győztek* $\Rightarrow$ A Falábúak több gólt rúgtak, mint az ellenfél.

**AZ ÁLLÍTÁS MEGFORDÍTÁSA:** **Ha** a Falábúak több gólt rúgtak, mint az ellenfél, **akkor** *a Falábúak győztek.*

$p$-nek elégséges feltétele $q$
$q \Rightarrow p$

*A Falábúak győzelmének* **elégséges feltétele,** hogy több gólt rúgjanak, mint az ellenfél.

**Jelölés:** A Falábúak több gólt rúgtak, mint az ellenfél $\Rightarrow$ *a Falábúak győztek.*

**AZ ÁLLÍTÁS ÉS MEGFORDÍTÁSA:** *A Falábúak győztek,* **akkor és csak akkor,** ha a Falábúak több gólt rúgtak, mint az ellenfél.

$p$-nek szükséges és elégséges feltétele $q$
$p \Leftrightarrow q$
Állítás: $p \Rightarrow q$
Állítás megfordítása: $q \Rightarrow p$

*A Falábúak győzelmének* **szükséges és elégséges feltétele,** hogy a Falábúak több gólt rúgjanak, mint az ellenfél.

**Jelölés:** *A Falábúak győztek* $\Leftrightarrow$ a Falábúak több gólt rúgtak, mint az ellenfél.





**2. példa**

Hogyan dönthetjük el, hogy egy $n$ természetes szám osztható-e 24-gyel? Erre a kérdésre öt tanuló a következőképpen válaszolt:

**Anna:** Az $n$ természetes szám osztható kell legyen 4-gyel.

**Béla:** Az $n$ természetes szám osztható kell legyen 48-cal.

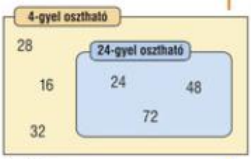
**Csaba:** Az $n$ természetes szám osztható kell legyen 5-tel.

**Dóra:** Az $n$ természetes szám osztható kell legyen 4-gyel és 6-tal.

**Endre:** Az $n$ természetes szám osztható 3-mal és 8-cal.

Vizsgáljuk meg ezeket a válaszokat!

### Megoldás (Anna)




*1. ábra*

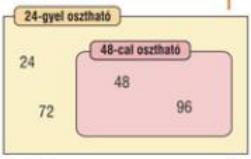
$$24 \mid n \Rightarrow 4 \mid n$$
$$4 \mid n \not\Rightarrow 24 \mid n$$
$$4 \nmid n \Rightarrow 24 \nmid n$$

Valóban, ha egy természetes szám osztható 24-gyel, akkor osztható 4-gyel is. Ez azt jelenti, hogy a 4-gyel való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóság **szükséges feltétele.**

Azonban van olyan 4-gyel osztható szám, például a 28, amelyik nem osztható 24-gyel. Tehát ha egy szám osztható 4-gyel, akkor nem biztos, hogy osztható 24-gyel, azaz a 4-gyel való oszthatóságból nem következik a 24-gyel való oszthatóság. Másképp: a 4-gyel való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **nem elégséges feltétele.**

Összefoglalva: a 4-gyel való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **szükséges, de nem elégséges feltétele.** *(1. ábra)*

### Megoldás (Béla)




*2. ábra*

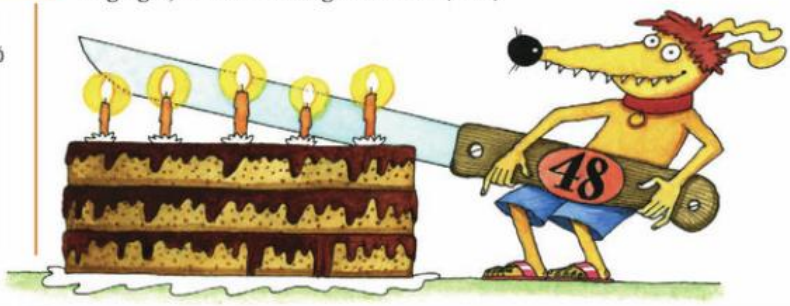
$$48 \mid n \Rightarrow 24 \mid n$$
$$24 \mid n \not\Rightarrow 48 \mid n$$

Van olyan 24-gyel osztható szám, például a 72, amelyik nem osztható 48-cal. Tehát ha egy szám osztható 24-gyel, akkor nem biztos, hogy osztható 48-cal, azaz a 24-gyel való oszthatóságból nem következik a 48-cal való oszthatóság. Másképp: a 48-cal való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **nem szükséges feltétele.**

Azonban, ha egy természetes szám osztható 48-cal, akkor osztható 24-gyel is. Ez azt jelenti, hogy a 48-cal való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **elégséges feltétele.**

Összefoglalva: a 48-cal való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **elégséges, de nem szükséges feltétele.** *(2. ábra)*

A 24-gyel való oszthatóság a 48-cal való oszthatóságnak szükséges, de nem elégséges feltétele.



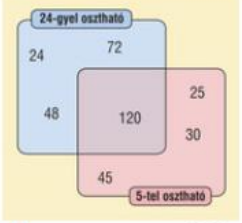


### Megoldás (Csaba)

Van olyan 24-gyel osztható természetes szám, például a 24, amelyik nem osztható 5-tel. Tehát ha egy szám osztható 24-gyel, akkor nem biztos, hogy osztható 5-tel, azaz a 24-gyel való oszthatóságból nem következik az 5-tel való oszthatóság. Ez azt jelenti, hogy az 5-tel való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **nem szükséges feltétele.**

Továbbá van olyan 5-tel osztható természetes szám, például a 25, amelyik nem osztható 24-gyel. Tehát ha egy szám osztható 5-tel, akkor nem biztos, hogy osztható 24-gyel, azaz az 5-tel való oszthatóságból nem következik a 24-gyel való oszthatóság. Másképp: az 5-tel való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **nem elégséges feltétele.**

Összefoglalva: az 5-tel való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **nem szükséges és nem elégséges feltétele.** *(3. ábra)*




*3. ábra*

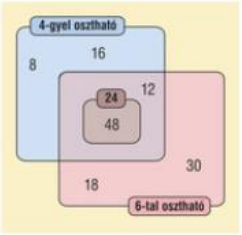
$5 \mid n \not\Rightarrow 24 \mid n$
$24 \mid n \not\Rightarrow 5 \mid n$

### Megoldás (Dóra)

Valóban, ha egy természetes szám osztható 24-gyel, akkor osztható 4-gyel és 6-tal is. Ez azt jelenti, hogy a 4-gyel és 6-tal való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **szükséges feltétele.**

Azonban van olyan 4-gyel és 6-tal osztható szám, például a 12, amelyik nem osztható 24-gyel. Tehát ha egy szám osztható 4-gyel és 6-tal, akkor nem biztos, hogy osztható 24-gyel, azaz a 4-gyel és 6-tal való oszthatóságból nem következik a 24-gyel való oszthatóság. Másképp: a 4-gyel és 6-tal való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **nem elégséges feltétele.**

Összefoglalva: a 4-gyel és 6-tal való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **szükséges, de nem elégséges feltétele.** *(4. ábra)*




*4. ábra*

$24 \mid n \Rightarrow 4 \mid n$ és $6 \mid n$
$4 \mid n$ és $6 \mid n \not\Rightarrow 24 \mid n$

*Megjegyzés:* Általában nem igaz, hogy ha $a$ és $b$ olyan természetes számok, melyekre $a$ is és $b$ is osztója $n$-nek, akkor $a \cdot b$ osztója $n$-nek.

### Megoldás (Endre)

Valóban, ha egy természetes szám osztható 24-gyel, akkor osztható 3-mal és 8-cal is. Ez azt jelenti, hogy a 3-mal és 8-cal való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **szükséges feltétele.**

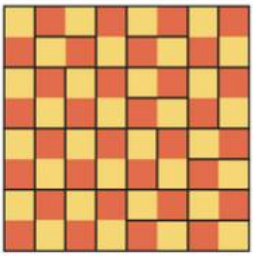
Ha egy természetes szám osztható 3-mal és 8-cal is, akkor osztható 24-gyel is. Ez azt jelenti, hogy a 3-mal és 8-cal való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **elégséges feltétele.**

$24 \mid n \Rightarrow 3 \mid n$ és $8 \mid n$
$3 \mid n$ és $8 \mid n \Rightarrow 24 \mid n$

Összefoglalva: tetszőleges $n$ természetes szám **akkor és csak akkor** osztható 24-gyel, ha osztható 3-mal és 8-cal. A 3-mal és 8-cal való oszthatóság a 24-gyel való oszthatóságnak **szükséges és elégséges feltétele.**

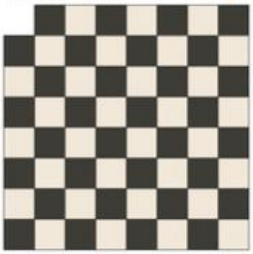
$24 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid n$ és $8 \mid n$

*Megjegyzés:* Minden $a$ és $b$ természetes számra, melyek relatív prímek, teljesül, hogy $a$ is és $b$ is osztója $n$-nek, akkor és csak akkor, ha $a \cdot b$ osztója $n$-nek.



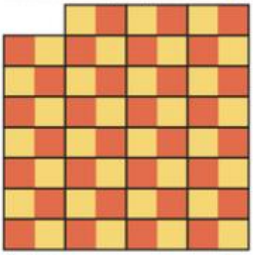
5. ábra

em fedhető le: bizonyítás következtetéssel.



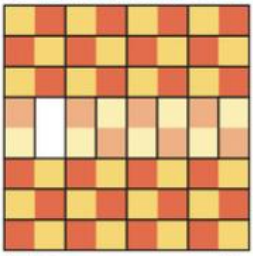
6. ábra

Lefedhető: bizonyítás példával.



7. ábra

Lefedhető: bizonyítás példával.



8. ábra

### 3. példa

A $8 \times 8$-as sakktábla sokféleképpen lefedhető $2 \times 1$-es dominókkal. Egy ilyen lefedés látható az 5. ábrán.

*a)* Ha a sakktábla egyik sarkából kivágunk egy mezőt ($1 \times 1$-es négyzetet), a maradék lefedhető-e dominókkal?

*b)* Ha a sakktábla bal felső sarkából kivágunk két szomszédos mezőt, a maradék lefedhető-e dominókkal?

*c)* Ha a sakktábla két tetszőleges, szomszédos mezőjét vágjuk ki, a maradék lefedhető-e dominókkal?

*d)* Ha a sakktábla két felső sarkában levő mezőt hagyjuk ki, a maradék lefedhető-e dominókkal?

*e)* Ha a sakktábla két átellenes sarkában levő mezőt hagyjuk ki, a maradék lefedhető-e dominókkal?

*f)* A sakktábla két tetszőleges, különböző színű mezőjét kihagyva, a maradék lefedhető-e dominókkal?

#### Megoldás (a)

Látható, hogy $2 \times 1$-es dominókkal csak páros számú mező fedhető le. A sakktábla egyik sarkának kivágása után $8 \cdot 8 - 1 = 63$ mező maradt, ami páratlan, tehát nem fedhető le dominókkal. Mivel eredetileg a mezők száma páros volt, ahhoz, hogy páros számú mező maradjon, páros számú mezőt kell kihagyni. ***(6. ábra)***

A fentiekből következő, alábbi megállapítások ugyanazt jelentik:

- Ha a sakktáblából páratlan számú mezőt hagytunk ki, a maradék nem fedhető le $2 \times 1$-es dominókkal.
- Ha a sakktábla kivágás után maradt része lefedhető dominókkal, akkor páros számú mező maradt.
- Annak, hogy a sakktábla kivágás után maradt része lefedhető legyen dominókkal, **szükséges feltétele,** hogy páros számú mező maradjon.

#### Megoldás (b)

A sakktábla bal felső sarkának két szomszédos mezőjének kivágása után a maradék lefedhető dominókkal például a 7. ábrán látható módon.

#### Megoldás (c)

Ha a sakktábla tetszőleges két szomszédos mezőjét vágtuk ki, akkor vegyünk a sakktáblán egy $2 \times 8$-as téglalapot a 8. ábra szerint (amelynek hosszabbik oldalára merőlegesen áll a kivágott két mező által alkotott téglalap hosszabbik oldala)! Ez a téglalap lefedhető dominókkal például úgy, hogy a dominók párhuzamosan állnak a kivágott téglalappal. A sakktábla megmaradt egész sorai vagy oszlopai lefedhetők dominókkal. Tehát ha a sakktáblából két szomszédos mezőt vágunk ki, a maradék lefedhető dominókkal.

A fentiekből következő, alábbi megállapítások ugyanazt jelentik:

- Ha a sakktáblából két szomszédos mezőt hagytunk ki, a maradék lefedhető dominókkal.
- Abból, hogy a sakktáblából két szomszédos mezőt hagytunk ki, következik, hogy a maradék lefedhető dominókkal.
- Annak, hogy a sakktábla kivágás után maradt része lefedhető legyen dominókkal, **elégséges feltétele,** hogy a sakktáblából két szomszédos mezőt vágunk ki.



### Megoldás (d)

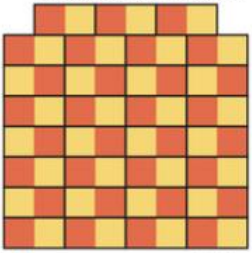
Ha a sakktábla két felső sarkát hagytuk ki, a maradék például a 9. ábra szerint lefedhető dominókkal.

A fentiekből következő, alábbi megállapítások ugyanazt jelentik:

- Nem igaz, hogy ha a sakktábla kivágás után maradt része lefedhető dominókkal, akkor biztos, hogy két szomszédos mezőt hagytunk ki.
- Abból, hogy a sakktábla kivágás után maradt része lefedhető dominókkal, nem következik, hogy két szomszédos mezőt hagytunk ki.
- Annak, hogy a sakktábla kivágás után maradt része lefedhető legyen dominókkal, nem szükséges feltétele, hogy két szomszédos mezőt vágjunk ki.

Tehát annak, hogy a sakktábla kivágás után maradt része lefedhető legyen dominókkal, **elégséges, de nem szükséges feltétele,** hogy két szomszédos mezőt hagyjunk ki.

Lefedhető: bizonyítás példával.



*9. ábra*

### Megoldás (e)

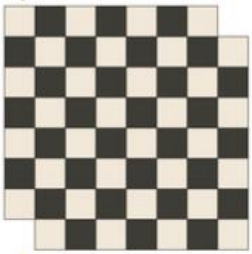
Próbálkozzunk a lefedéssel. Az a sejtésünk, hogy nem lehetséges, de ennek bizonyítása nehéznek tűnik, mert nagyon sokféleképpen helyezhetjük el a dominókat.

**Segít a következő ötlet:** egy dominó mindig egy világos és egy sötét mezőt fed le a sakktáblán, vagyis a lefedhető részen ugyanannyi világos mező kell legyen, mint sötét. Mivel a sakktábla két átellenes sarka azonos színű, a maradék mezők közt a 10. ábrán 30 sötét és 32 világos mező van, így nem fedhető le dominókkal.

A fentiekből következő, alábbi megállapítások ugyanazt jelentik:

- Ha a sakktáblából két egyforma színű mezőt hagytunk ki, a maradék nem fedhető le dominókkal.
- Ha a sakktábla kivágás után maradt része lefedhető dominókkal, akkor ugyanannyi sötét mező maradt, mint világos.
- Annak, hogy a sakktábla kivágás után maradt része lefedhető legyen dominókkal, **szükséges feltétele,** hogy ugyannyi sötét mező maradjon, mint világos.

Nem fedhető le: bizonyítás következtetéssel.



*10. ábra*

*Megjegyzések:*

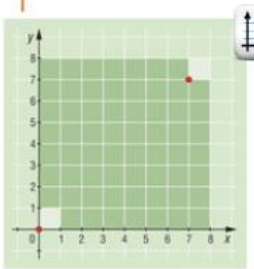
1. A fenti ötlet, melyben a mezők színezésével oldottuk meg a problémát, más feladatok megoldásánál is hasznos lehet.
2. Egy másik megközelítés, mely szintén sokszor használható:

   Helyezzük el a $8 \times 8$-as sakktáblát egy koordináta-rendszerben úgy, hogy a bal alsó sarka kerüljön a koordináta-rendszer (0; 0) pontjába! Egy négyzet koordinátája legyen a bal alsó sarok koordinátája! A sakktábla összes négyzetének koordinátáinak összege páros, hiszen az összegben mindegyik $x$ és mindegyik $y$ koordináta nyolcszor szerepel. ***(11. ábra)***

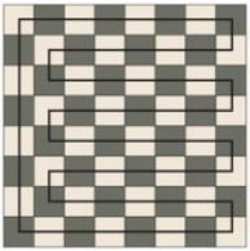
   Ha kivesszük a (0; 0) és a (7; 7) koordinátájú négyzetet, a maradék négyzetek koordinátáinak összege továbbra is páros marad.

   Egy dominó két négyzetének koordinátái vagy $(x; y)$ és $(x; y + 1)$, vagy $(x; y)$ és $(x + 1; y)$. Mindkét esetben a négy koordináta összege $2x + 2y + 1$, ami biztosan páratlan. A maradék 62 négyzetet 31 dominóval fedhetnénk le, mivel ezek száma páratlan, a 31 dominó koordinátáinak összege is páratlan.

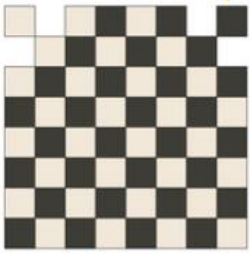
   A lefedés nem valósítható meg, mert a lefedendő négyzetek koordinátáinak összege páros, a dominók koordinátáinak összege pedig páratlan.




*11. ábra*



12. ábra



13. ábra

A feladatok indoklása során figyeljük meg, mikor végeztük a bizonyítást példával, ellenpéldával vagy következtetéssel!

**Megoldás (f)**

Többféleképpen kihagyva két különböző színű mezőt, próbálkozzunk a lefedéssel! Az a sejtésünk, hogy a lefedés mindig lehetséges, azonban a sok eset miatt ennek bizonyítása nehéznek tűnik.

A sakktábla mezőit a 12. ábra szerint láncra fűzve a lánc mentén a sakktábla lefedhető dominókkal. Ha két mezőt kihagyunk, a láncot két darabra vágtuk szét, és mivel a kihagyott mezők különböző színűek, ezek a darabok páros számú mezőből állnak. Ezért mindkét darab a lánc mentén lefedhető dominókkal.

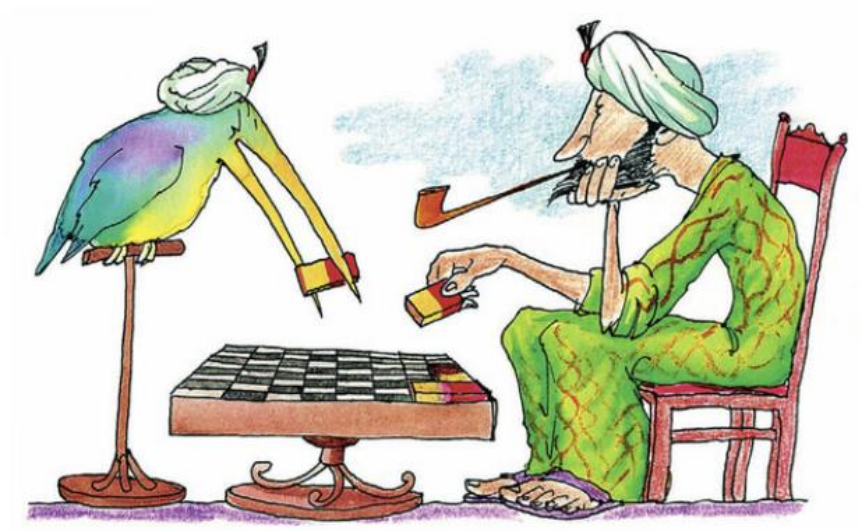
A fentiekből következő, alábbi megállapítások ugyanazt jelentik:

- Ha a sakktáblából egy sötét és egy világos mezőt hagytunk ki, a maradék lefedhető dominókkal.
- Abból, hogy a sakktáblából egy sötét és egy világos mezőt hagytunk ki, következik, hogy a maradék lefedhető dominókkal.
- Annak, hogy a sakktábla kivágás után maradt része lefedhető legyen dominókkal, **elégséges feltétele,** hogy a sakktáblából egy sötét és egy világos mezőt hagyjunk ki.

Az *e)* és *f)* pontok együtt a következőket jelentik:

- A sakktáblából két mezőt kihagyva a maradék rész akkor és csak akkor fedhető le dominókkal, ha egy sötét és egy világos mezőt hagytunk ki.
- Annak, hogy a sakktáblából két mezőt kihagyva a maradék lefedhető legyen dominókkal, **szükséges és elegendő feltétele,** hogy egy sötét és egy világos mezőt hagyjunk ki.

*Megjegyzés:* A 13. ábrán látható, hogy a sakktáblából két világos és két sötét mezőt ki lehet úgy hagyni, hogy a maradék nem fedhető le $2 \times 1$-es dominókkal.





## Bizonyítás példával, ellenpéldával, következtetéssel. Indirekt bizonyítás

**4. példa**

A biológia tankönyvben a következő kijelentés olvasható: *Minden zebra csíkos.* „Mi következik ebből?" – kérdezte a tanár. A kérdésre négy tanuló az alábbi válaszokat adta:

**Ádám:** Ha egy állat zebra, akkor csíkos.
**Bori:** Ha egy állat csíkos, akkor annak zebrának kell lennie.
**Csenge:** Ha egy állat csíkos, akkor az lehet, hogy zebra.
**Dorka:** Ha egy állat nem csíkos, akkor az nem lehet zebra.

Döntsük el, hogy kinek a válasza igaz, és miért!

Állítás:
*Ha egy állat zebra, akkor az csíkos.*

Állítás megfordítása:
*Ha egy állat csíkos, akkor az zebra.*

**Megoldás (Ádám)**

Ádám *„Ha egy állat zebra, akkor az csíkos."* állítása igaz, mert minden zebra csíkos.

Bizonyítás következtetéssel.

A tankönyv kijelentéséből **következik** Ádám kijelentése.

**Megoldás (Bori)**

Bori *„Ha egy állat csíkos, akkor annak zebrának kell lennie."* állítása hamis, mert van olyan állat, amelyik csíkos, de nem zebra, például a bohóchal.

Bizonyítás ellenpéldával.

Annak, hogy egy állat zebra legyen, *szükséges, de nem elégséges feltétele*, hogy csíkos legyen.

**Ellenpéldával** igazoltuk, hogy Bori állítása hamis.

**Megoldás (Csenge)**

Csenge *„Ha egy állat csíkos, akkor az lehet, hogy zebra."* állítása igaz, mert például a zebra csíkos, és tényleg zebra.

Bizonyítás egy példával.

**Egy példával** igazoltuk, hogy Csenge állítása igaz.

**Megoldás (Dorka)**

Dorka *„Ha egy állat nem csíkos, akkor az nem lehet zebra."* állítása igaz, ezt bizonyítjuk a következőképpen.

**Tegyük fel, hogy az állítás hamis!**

Azaz van olyan állat, amelyik nem csíkos, és mégis zebra, vagyis van olyan zebra, amelyik nem csíkos. Mivel minden zebra csíkos a biológia tankönyv szerint, így ez az állítás hamis.

**Ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti állítás igaz.**



*14. ábra*

◆ ◆ ◆

A példa utolsó állítását **indirekt bizonyítással** igazoltuk.

Az indirekt bizonyítás lépései:

1. Tegyük fel az állítás tagadását!
2. Következtessünk!
3. Ellentmondásra jutunk.
4. Tehát az eredeti állítás igaz.





Ismételjük át a 16. ábra segítségével a speciális négyszögek definícióját és tulajdonságait!

**5. példa**

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

*a)* Van olyan rombusz, amelyik téglalap.

*b)* Van olyan deltoid, amelyiknek minden szöge különböző.

*c)* Ha egy négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor az négyzet.

*d)* Ha egy négyszög átlói nem egyenlő hosszúak, akkor az nem téglalap.




*15. ábra*

**Megoldás (a)**

A *„Van olyan rombusz, amelyik téglalap."* állítás igaz. *(15. ábra)*

Ezt **egy példával** igazolhatjuk: a négyzet olyan rombusz, amelyik téglalap is egyben. A négyzet rombusz, mert minden oldala ugyanakkora hosszúságú, és téglalap is, mert minden szöge ugyanolyan nagyságú.

Annak, hogy egy négyszög deltoid legyen, szükséges feltétele, hogy legyen két egyenlő nagyságú szöge.

**Megoldás (b)**

A *„Van olyan deltoid, amelyiknek minden szöge különböző."* állítás hamis.

Ezt **következtetéssel** igazolhatjuk. A deltoid az egyik átlójának egyenesére tengelyesen szimmetrikus négyszög. Így van két szemközti szöge, amelyek egyenlő nagyságúak, tehát nem lehet minden szöge különböző.

Annak, hogy egy négyszög négyzet legyen, nem elégséges feltétele, hogy átlói merőlegesek legyenek egymásra.

**Megoldás (c)**

A *„Ha egy négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor az négyzet."* állítás hamis.

Ezt **ellenpéldával** igazolhatjuk. Például az a deltoid, amelynek nem egyenlő minden oldala, olyan négyszög, amelynek átlói merőlegesek egymásra, mégsem négyzet.

Annak, hogy egy négyszög téglalap legyen, szükséges feltétele, hogy átlói egyenlő hosszúságúak legyenek.

**Megoldás (d)**

A *„Ha egy négyszög átlói nem egyenlő hosszúak, akkor az nem téglalap."* állítás igaz.

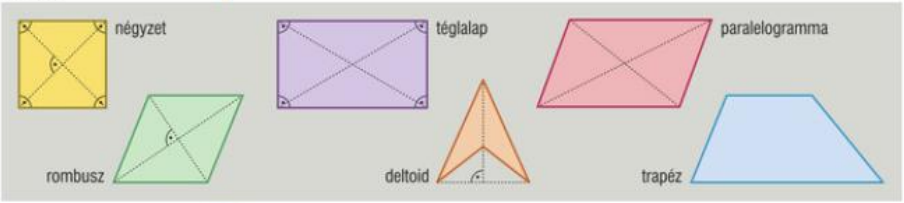
Ezt **indirekt bizonyítással** igazoljuk.

Vizsgáljuk meg, hogy a példában szereplő szükséges feltételek elégségesek-e, és a nem elégséges feltétel szükséges-e!

Tegyük fel az állítás tagadását! *Van olyan négyszög, amelynek átlói nem egyenlő hosszúak, mégis téglalap.* A téglalapról tudjuk, hogy átlói egyenlő hosszúak, így ez nem lehetséges.

Ellentmondásra jutottunk, tehát az állítás igaz.

*16. ábra*





## Feladatok

1. Írjuk fel a következő állítások megfordítását, és döntsük el, hogy igazak-e!
   *a)* Ha esik az eső a városban, akkor vizes az úttest.
   *b)* Ha elmegyek otthonról, akkor bezárom az ajtót.
   *c)* Ha ő Micimackó, akkor ő medve.
   *d)* Ha megnyerem az OKTV-t, akkor felvesznek az egyetemre.
   *e)* Ha van jegyem, bemehetek a színházi előadásra.

2. Írjuk fel a következő tételek megfordítását, és döntsük el, hogy igazak-e!
   *a)* Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel.
   *b)* Ha egy szám véges tizedes tört, akkor racionális szám.
   *c)* Ha egy háromszög derékszögű, akkor leghosszabb oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével.
   *d)* Ha két szám közül legalább az egyik 0, akkor a két szám szorzata 0.

3. Az $A$-nak milyen feltétele a $B$? (Szükséges, de nem elégséges; szükséges és elégséges; elégséges, de nem szükséges; nem szükséges és nem elégséges.)
   *a)* $A$: az emberi élet, $B$: levegő;
   *b)* $A$: pénzt vehetek ki a bankautomatából, $B$: van bankkártyám;
   *c)* $A$: dél van Szegeden, $B$: harangoznak a Fogadalmi templomban;
   *d)* $A$: felvesznek az egyetemre, $B$: sikeresen leérettségizek;
   *e)* $A$: Tomi megnyeri az olimpiát 100 m-es síkfutásban, $B$: Tomi világcsúcsot fut az olimpiai döntőben 100 m-en.

4. Az $A$-nak milyen feltétele a $B$? (Szükséges, de nem elégséges; szükséges és elégséges; elégséges, de nem szükséges; nem szükséges és nem elégséges.)
   *a)* $A$: két szám összege páros, $B$: mindkét szám páros;
   *b)* $A$: két szám különbsége osztható 3-mal, $B$: a két szám ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva;
   *c)* $A$: egy négyszög négyzet, $B$: egy négyszög minden oldala egyenlő;
   *d)* $A$: két szám szorzata páros, $B$: az egyik szám páros, a másik páratlan;
   *e)* $A$: egy négyszög paralelogramma, $B$: egy négyszög átlói merőlegesek egymásra.

5. Az $x$-et ezresekre kerekítve 4000-t kapunk. Ennek milyen feltételei a következők?
   *a)* $3400 < x \leq 4550$; *b)* $3890 \leq x < 4390$; *c)* $3500 \leq x < 4499$;
   *d)* $3500 \leq x < 4500$; *e)* $3999 < x < 4999$; *f)* $3501 \leq x \leq 4500$.

6. Egy vizsgán 10 feladatot kell megoldani, mindegyik 10 pontot ér. A vizsga sikertelen, ha valaki az összpontszám 40%-ánál kevesebbet szerez, különben sikeres. Fogalmazzunk meg szükséges, de nem elégséges; elégséges, de nem szükséges; szükséges és elégséges, nem szükséges és nem elégséges feltételeket arra, hogy a vizsga sikeres!

7. Keressünk szükséges, de nem elégséges; elégséges, de nem szükséges; szükséges és elégséges feltételt a következőkre!
   *a)* egy négyszög rombusz; *b)* egy szám osztható 6-tal;
   *c)* két szám szorzata osztható 4-gyel; *d)* két deltoid egybevágó.





8. Keressünk szükséges, de nem elégséges; elégséges, de nem szükséges; szükséges és elégséges feltételeket a mindennapi életben és a matematikában!

9. Egy 7×7-es sakktábla minden mezőjén egy csiga pihen. Adott jelre minden csiga átmászik egy szomszédos mezőre (a szomszédos mezőknek van közös oldaluk). Lehetséges-e, hogy ezután ismét minden mezőn pontosan egy csiga üljön?

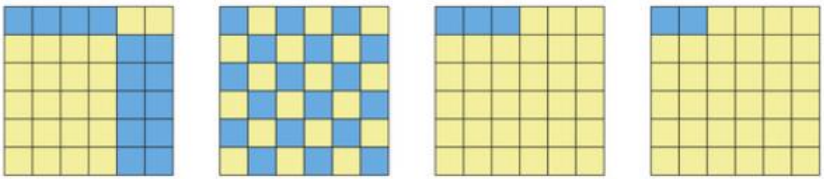
10. Egy 7×7-es négyzetet 3×1-es triminókkal akarunk lefedni (átfedés nélkül, hézagmentesen) úgy, hogy legfeljebb 2 négyzetet hagyhatunk ki. Keressünk a lefedhetőségnek szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltételét!

11. Az ábrán egy téglalap alakú erdő látható, minden pont egy fát jelöl. Az *A* fán egy harkály ül, a *B* fán egy rigó ül. Percenként mindkét madár a tőle észak-déli vagy kelet-nyugati irányban álló legközelebbi fára repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindketten ugyanazon a fán ülnek? Keressünk a találkozásnak szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltételét, mely a madarak kezdeti helyzetére vonatkozik!




12. Meg lehet-e számozni a kocka éleit az 1, 2, 3, 4, 5, …, 11, 12 számokkal úgy, hogy minden csúcsnál összeadva a belőle induló három élre írt számot, ugyanazokat az összegeket kapjuk? Keressünk a megfelelő számozás elvégezhetőségére szükséges feltételt, mely az élekre írt számokra vonatkozik! Vajon ez elégséges-e? Keressünk elégséges feltételt!

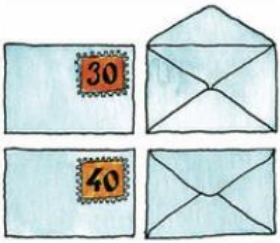
13. Egy 6×6-os négyzet 36 mezőjének mindegyikét sárgával vagy kékkel beszíneztük. Ezután jogunkban áll bármelyik sorban vagy oszlopban az összes mező színét egyidejűleg megváltoztatni (a sárgát kékre, a kéket sárgára). Ezt egymás után akárhányszor megtehetjük. Elérhető-e bármely kiindulási helyzetből, hogy mindegyik mező sárga színű legyen? Próbáljuk ki az ábrán látható kiindulásokat!



Keressünk a kiindulási helyzetre vonatkozó szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltételt, melynek teljesülése esetén megfelelő lépésekkel elérhető, hogy minden mező sárga legyen.

**Rejtvény**

**Az ábrán látható négy boríték mindegyikéről el akarjuk dönteni, hogy igaz-e rá a következő állítás: Ha egy boríték le van ragasztva, akkor 40 Ft-os bélyeg van rajta. Legkevesebb hány borítékot kell ehhez megfordítani? (Ha egy boríték elejét látjuk, még nem tudjuk, hogy le van-e ragasztva, ha a hátulját látjuk, és le van hajtva, akkor le is van ragasztva.)**





## 2. A skatulyaelv

**1. példa**

Egy bűvész cilinderében 2 nyúl és 3 galamb van. A cilinderből véletlenszerűen varázsolja elő az állatokat. Eddig kihúzott 3 állatot. A következő állítások közül melyik igaz biztosan a kihúzott állatokra?

*A*: Van közöttük két nyúl.

*B*: Van közöttük két galamb.

*C*: Van közöttük két egyforma fajta állat.

*D*: Van közöttük galamb.



A kihúzott három állat lehet:
2 nyúl és 1 galamb,
1 nyúl és 2 galamb,
3 galamb.

**Megoldás**

*A* és *B* lehet igaz és lehet hamis, tehát nem igaz biztosan.

*C* biztosan igaz, mert kétfajta állat van, így kettőt még ki lehet húzni úgy, hogy különböző fajtájúak legyenek, de a harmadik állat fajtája már biztosan megegyezik valamelyik korábbival.

*D* biztosan igaz, mert 2 nyúl van a cilinderben, tehát akárhogyan húzunk ki három állatot, kell legyen köztük galamb.

**2. példa**

Egy pénztárgépben 7 rekesz van a fémpénzek: 1, 2, 5, 10, 20, 50 és 100 eurocentesek számára. A pénztárgép kezdetben üres, a vevők sorban aprópénzzel fizetnek.

*a)* Legkevesebb hány érme kell legyen a pénztárban, hogy valamelyik rekeszben biztosan legyen legalább kettő?

*b)* Legkevesebb hány érme kell legyen a pénztárban, hogy valamelyik rekeszben biztosan legyen legalább 11?

**Megoldás (a)**

Ha a pénztárgépben 7 érme volna, akkor még lehetséges lenne, hogy mind a 7 rekeszben pontosan egy érme van. Ha viszont 8 érme van, akkor már biztosan van olyan rekesz, amelyikben legalább két érme van.

Tehát legkevesebb 8 érmének kell lenni, hogy biztosan legyen legalább egy rekesz, amelyben legalább két érme van.

◆ ◆ ◆

Ezt a meggondolást általánosan is megfogalmazzuk:

SKATULYAELV: **$n$ darab tárgyat $k$ darab skatulyában helyezünk el. Ha $n > k$, akkor biztosan lesz olyan skatulya, amelyikbe legalább két tárgy kerül.**

skatulyaelv

Az állítás nyilvánvalóan igaz, hiszen ha mind a $k$ darab skatulyában legfeljebb egy tárgy lenne, akkor összesen legfeljebb $k$ darab tárgy lehetne.







**Megoldás (b)**

Ha a pénztárgépben 70 érme volna, akkor még lehetséges lenne, hogy mind a 7 rekeszben pontosan 10 érme van.

Ha viszont 71 érme van, akkor már biztosan van olyan rekesz, amelyikben legalább 11 érme van. Hiszen ha mind a 7 rekeszben legfeljebb 10 érme lenne, akkor összesen legfeljebb 70 érme lehetne.

Tehát legkevesebb 71 érmének kell lenni, hogy biztosan legyen legalább egy rekesz, melyben legalább 11 érme van.

◆ ◆ ◆

Ennek alapján a skatulyaelvet általánosabban is megfogalmazhatjuk:

**$n$ darab tárgyat $k$ darab skatulyában helyezünk el. Ha $n > k \cdot p$, akkor biztosan lesz olyan skatulya, amelyikbe legalább $p + 1$ darab tárgy kerül.**

Az állítás nyilvánvalóan igaz, hiszen ha mind a $k$ darab skatulyában legfeljebb $p$ darab tárgy lenne, akkor összesen legfeljebb $k \cdot p$ darab tárgy lehetne.

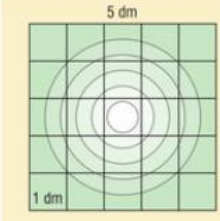
*Megjegyzés:* A skatulyaelv elnevezés egyben szemlélteti is a problémát. Angolul ezt „pigeonhole principle"-nek, azaz galambdúcelvnek nevezik, ami hasonlóképpen szemléletes.

**3. példa**

Egy 5 dm oldalú, négyzet alakú céltáblára 30 lövés érkezik. Mutassuk meg, hogy biztosan van két lövés, amelyek távolsága legfeljebb 1,5 dm!

**Megoldás**

Az 5 dm oldalú négyzetet osszuk fel az oldalakkal párhuzamos szakaszokkal 25 darab 1 dm oldalhosszúságú négyzetre! A 30 pont közül biztosan van két olyan, amely ugyanabba az 1 dm oldalhosszúságú négyzetbe esik. *(17. ábra)*




*17. ábra*

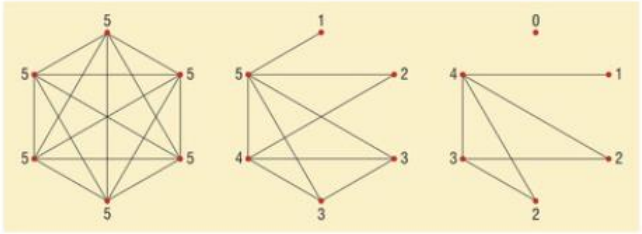
A kis négyzet átlója $\sqrt{2} < 1{,}5$, így a kis négyzetbe eső két pont távolsága is biztosan kisebb, mint 1,5 dm.

**4. példa**

Igaz-e, hogy bármely hattagú társaságban van két olyan ember, akiknek a társaságban ugyanannyi ismerőse van? (Minden ismeretség kölcsönös, az ember önmagának nem ismerőse.)

**Megoldás**

Rajzoljunk gráfot: az embereknek feleljenek meg a gráf pontjai, és két pontot kössünk össze éllel, ha a pontoknak megfelelő két ember ismeri egymást. Írjuk a pontok mellé az ismerősök számát, azaz a pontokból induló vonalak számát, ami a gráfban a pont fokszáma.




*18. ábra*

A 6 ember közti ismeretségekre azt tapasztaljuk, hogy mindig találunk két olyan embert, akiknek ugyanannyi ismerősük van. *(18. ábra)*



Észrevehetjük, hogy senkinek sincs 5-nél több ismerőse.

Az ismerősök száma 0, 1, 2, 3, 4, 5 lehet. Viszont ha valakinek 5 ismerőse van, akkor a társaságban mindenkit ismer, így nem lehet olyan ember, aki senkit sem ismer. Hasonlóképpen, ha valakinek nincs ismerőse, akkor nem lehet olyan ember, aki mindenkit ismer. Tehát a 0 és az 5 egyszerre nem fordulhat elő, vagyis az ismerősök számát illetően 5 lehetőség van. Mivel 6 ember van, biztosan van köztük két olyan, akinek ugyanannyi ismerőse van.

**5. példa**

Felírtunk öt pozitív egész számot. Igaz-e, hogy biztosan van köztük kettő, amelyek különbsége osztható 4-gyel?

**Megoldás**

A pozitív egész számokat 4-gyel osztva a lehetséges maradékok: 0, 1, 2 vagy 3. Öt számot tekintve biztosan van köztük kettő, amelyek ugyanazt a maradékot adják 4-gyel osztva. Ha két szám ugyanazt a maradékot adja 4-gyel osztva, akkor különbségük osztható 4-gyel. Tehát biztosan található az öt szám között kettő, amelyek különbsége osztható 4-gyel.

$$\begin{gathered} a = 4k + m \\ b = 4l + m \\ a - b = 4(k - l) \\ \Downarrow \\ 4 \mid a - b \end{gathered}$$

**6. példa**

Igaz-e, hogy tetszőleges négy pozitív egész szám közül mindig ki lehet választani néhányat (egyet, kettőt, hármat vagy négyet) úgy, hogy a kiválasztott számok összege osztható 4-gyel?

**Megoldás**

A négy felírt szám legyen: $a$, $b$, $c$, $d$.

Tekintsük a következő négy számot: $a$, $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d$.

Osszuk el őket 4-gyel, és vizsgáljuk a maradékokat, ezek 0, 1, 2 vagy 3 lehetnek. Ha van köztük 0 maradék, akkor készen vagyunk, mert ez a szám osztható 4-gyel, és mivel ez néhány eredetileg felírt szám összege, találtunk néhány számot, melyek összege osztható 4-gyel.

Ha nincs köztük 0 maradék, akkor 3-féle maradék és 4 szám van, ezért kell legyen két olyan szám, amelyek ugyanazt a maradékot adják 4-gyel osztva. Ezt a két számot kivonva egymásból, a különbség osztható 4-gyel, továbbá igaz rá, hogy néhány eredeti szám összege.

Tehát biztosan van néhány szám az eredetileg felírt számok között, amelyek összege osztható 4-gyel.

*Megjegyzés:*

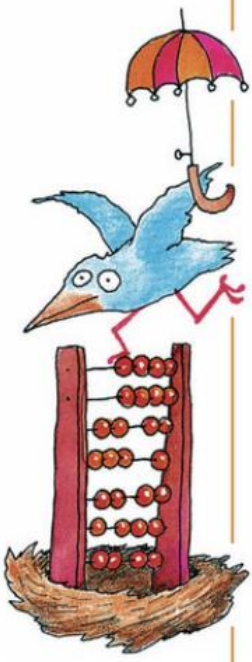
Két játékos felváltva ír pozitív egész számokat egy papírra. Az a játékos nyer, amelyik az ellenfél száma után talál a leírt számok közt néhányat, esetleg egyet, melyek összege osztható 4-gyel.

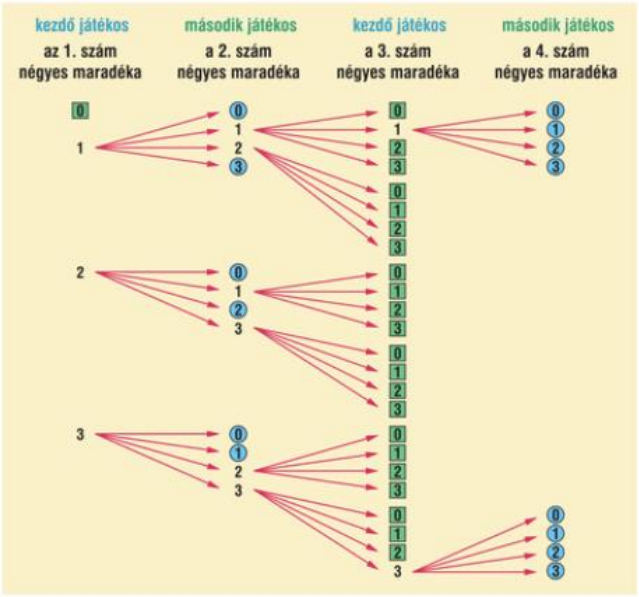
Játsszunk! Kinek van nyerő stratégiája, és legfeljebb hány lépésben ér véget a játék, ha a játékosok figyelmesek, és jól számolnak?

Megoldás: A számok helyett vizsgáljuk a 4-es osztási maradékokat.

A játék menetét ábrázoljuk irányított gráffal! Egy számot kék körrel jelölünk, ha azzal a kezdő játékos nyer, és zöld négyzettel, ha a második játékos nyer. *(19. ábra)*

Nyerő stratégiája van valakinek, ha tud úgy lépni, hogy nyerjen, bármit lép a másik játékos.






*19. ábra*

Ha az első játékos 0-t mond, a második azt választja, és rögtön nyer.

Ha az első játékos 1-t mond, a második erre 2-t, ekkor az első bármit mond, a második nyer.

Ha az első játékos 2-t mond, a második akár 1-t, akár 3-t mond, mindenképpen nyer.

Ha az első játékos 3-t mond, a második 2-t, így biztosan nyer.

A fentiekből az is látszik, hogy ha a két játékos biztosan észreveszi, hogy van néhány szám, amelyek összege osztható 4-gyel, akkor négy lépésben biztosan véget ér a játék. Ezzel a példa kérdésére is válaszoltunk.



**7. példa**

Az első 100 pozitív egész számot ráírtuk egy-egy cédulára, és beletettük egy kalapba. Bekötött szemmel, visszatevés nélkül kihúzunk 55 számot. Igaz-e, hogy a kihúzott számok között biztosan van két olyan szám, amelyek különbsége éppen 9?



**I. megoldás**

Soroljuk fel azokat a számokat, amelyek 9-cel osztva ugyanazt a maradékot adják!

0 maradék:
9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99 — ez 11 darab szám.

1 maradék:
1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100 — ez 12 darab szám.

2 maradék:
2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92 — ez 11 darab szám.

3 maradék:
3, 12, … , 93 — ez 11 darab szám.

4 maradék:
4, 13, … , 94 — ez 11 darab szám.

5 maradék:
5, 14, … , 95 — ez 11 darab szám.

6 maradék:
6, 15, … , 96 — ez 11 darab szám.

7 maradék:
7, 16, … , 97 — ez 11 darab szám.

8 maradék:
8, 17, … , 98 — ez 11 darab szám.

Mivel 55 számot húztunk, 9-féle maradék van, és $55 > 6 \cdot 9$, így a skatulyaelv értelmében kell legyen olyan maradék, hogy legalább 7 szám ugyanazt a maradékot adja 9-cel osztva. Ha ez a maradék az 1, akkor a 12 darab 1 maradékot adó számból húztunk 7-et. Ezt pedig csak úgy lehet, hogy van köztük két olyan, amelyek az alábbi felsorolásban szomszédosak, vagyis különbségük éppen 9:

**1**, 10, **19**, 28, **37**, 46, **55**, 64, **73**, 82, **91**, 100.

Ha másik maradékot ad 7 szám, akkor 11 darab ugyanolyan maradékot adó számból húztunk 7-t, hasonlóképpen igaz, hogy van köztük két olyan, amelyek a fenti felsorolásban szomszédosak, vagyis különbségük éppen 9.

Tehát a kihúzott számok között biztosan van kettő, amelyek különbsége éppen 9.

**II. megoldás**

Jelöljük a következőképpen a kihúzott számokat: $x_1, x_2, \ldots, x_{55}$.

Az $A$ halmaz tartalmazza a kihúzott számokat, a $B$ halmaz pedig az $A$ elemeinél 9-cel nagyobb számokat:

$$A\colon\ 1 \le x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{55} \le 100.$$

$$B\colon\ 10 \le x_1 + 9 < x_2 + 9 < \ldots < x_{55} + 9 \le 109.$$

$A \cup B$ elemei 1-nél nagyobb vagy egyenlők és 109-nél kisebb vagy egyenlők, emiatt legfeljebb 109-féle elem lehet. Az $A$ és a $B$ halmazokban együttvéve 110 elem van, az A $\cup$ B halmazban legfeljebb 109, ez azt jelenti, hogy kell legyen olyan eleme $A$-nak, amelyik $B$-ben is benne van: $x_i = x_j + 9$, ami azt jelenti, hogy a kihúzott számok között van kettő, amelyek különbsége 9.





## Feladatok

1. Egy bűvész cilinderében 3 nyúl és 5 galamb van. A cilinderből véletlenszerűen varázsolja elő az állatokat. Eddig kihúzott 5 állatot. A következő állítások közül melyik igaz biztosan a kihúzott állatokra?

   *A*: Van közöttük két nyúl.
   *B*: Van közöttük két galamb.
   *C*: Van közöttük két egyforma fajta állat.
   *D*: Van közöttük galamb.

   *a)* Mit mondhatunk a cilinderben maradt 3 állatról?
   *b)* Legkevesebb hány állatot kell kihúzni, hogy az *A* állítás biztosan igaz legyen?
   *c)* Legkevesebb hány állatot kell kihúzni, hogy a *B* állítás biztosan igaz legyen?
   *d)* Legkevesebb hány állatot kell kihúzni, hogy a *C* állítás biztosan igaz legyen?
   *e)* Legkevesebb hány állatot kell kihúzni, hogy a *D* állítás biztosan igaz legyen?
   *f)* Legkevesebb hány állatot kell kihúzni, hogy az *A* és *B* állítás biztosan igaz legyen?
   *g)* Legkevesebb hány állatot kell kihúzni, hogy az *A* vagy *D* állítás biztosan igaz legyen?

2. Az osztály 33 tanulója közül idegen nyelvként 15 angolt tanul, 13 németet, és 5 franciát. Melyik idegen nyelvi csoportról mondhatjuk el, hogy biztosan van a csoportban legalább két olyan tanuló, akik ugyanabban a hónapban születtek?

3. Egy osztály 33 tanulója megírta a magyardolgozatot, amelyet az 1–5 jegyekkel értékeltek. Mutassuk meg, hogy van köztük 7 olyan tanuló, akik ugyanolyan jegyet kaptak!

4. Egy iskolában van 52 tanár, illetve 745 diák, akik 20 osztályba járnak. A következő állítások közül melyik igaz rájuk?

   *A*: Biztosan van két olyan diák, akinek ugyanazon a napon van a születésnapja.
   *B*: Biztosan van olyan osztály, amelybe legalább 38 tanuló jár.
   *C*: Biztosan van olyan diák, amelyik ugyanazon a napon született, mint valamelyik tanár.
   *D*: Az év minden napján valamelyik diáknak születésnapja van.
   *E*: Biztosan van olyan hónapja az évnek, amikor legalább 5 tanárnak van születésnapja.

5. Egy dobozban háromféle golyó van: 14 piros, 17 kék és 21 zöld. Legkevesebb hány golyót kell visszatevés nélkül véletlenszerűen kihúzni, hogy a kihúzott golyók között legyen:

   *a)* legalább kettő azonos színű;
   *b)* mindhárom színből legalább egy;
   *c)* legalább két zöld;
   *d)* legalább két piros?



6. Egy dobozban háromféle golyó van: 4 piros, 7 kék és 11 zöld. Visszatevés nélkül, véletlenszerűen kivettünk 5 golyót. A következő állítások közül melyek igazak biztosan a dobozban maradt golyókra?
   A dobozban
   *A*: nem maradt piros golyó.
   *B*: mindhárom színből maradt.
   *C*: maradt kék golyó.
   *D*: legalább kétféle színű golyó maradt.



7. *a)* Gabi fiókjában nagy összevisszaságban 5 pár különböző kesztyű van (a balkezes kesztyű különbözik a jobbkezestől). Legkevesebb hány kesztyűt kell odafigyelés nélkül kirántania, hogy a kivett kesztyűk között biztosan legyen egy összeillő pár?

   *b)* Zsuzsi fiókjában nagy összevisszaságban 5 pár egyforma kesztyű van (a balkezes kesztyű különbözik a jobbkezestől). Legkevesebb hány kesztyűt kell odafigyelés nélkül kirántania, hogy a kivett kesztyűk között biztosan legyen egy összeillő pár?

8. Egy ládában négyfajta alma van, minden fajtából egyenlő mennyiségű, összesen 100 darab. Hány almát kell bekötött szemmel kivenni, hogy valamelyik fajtából legalább 10 alma biztosan legyen? Hány almát kell bekötött szemmel kivenni, hogy mindegyik fajtából legalább 1 alma biztosan legyen?

9. Egy sötét szobában egy fiókban 12 piros és 12 kék zokni van.

   *a)* Legkevesebb hány zoknit kell kivennem a fiókból ahhoz, hogy biztosan legyen legalább két azonos színű zokni köztük?

   *b)* Legkevesebb hány zoknit kell kivennem, hogy biztosan legyen köztük két piros zokni?



10. Tegyük fel, hogy valahány kék és valahány piros zokni van egy fiókban, és tudjuk, hogy legalább annyi zoknit kell kivennem ahhoz, hogy biztosan legyen egy pár egyforma színű zoknim, mint amennyit ahhoz kell minimálisan kivenni, hogy biztosan legyen két különböző színű zoknim. Hány zokni van a fiókban?

11. Egy lemezre írjunk „1”-t, két lemezre „2”-t, háromra „3”-t, és így tovább, harmincra „30”-at. Tegyük a lemezeket egy dobozba, és ebből húzzunk véletlenszerűen lemezeket anélkül, hogy visszatennénk. Legkevesebb hány lemezt kell kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen legalább 10 lemez, amelyre ugyanaz a szám van írva?

12. Egy bálon 100 ember vesz részt, mindegyikük vagy szőke, vagy barna hajú. Tetszőlegesen helyezkednek el négy teremben. Keressük azt a legnagyobb $n$-t, amelyre biztosan találunk olyan termet, amelyben van $n$ ember, akiknek egyforma a hajszíne.

13. Egy 6 dm oldalú, négyzet alakú céltáblára 10 lövés érkezik. Mutassuk meg, hogy biztosan van két lövés, amelyek távolsága legfeljebb 3 dm.

14. Egy 40 cm oldalú, szabályos hatszög alakú céltáblára 7 lövés érkezik. Mutassuk meg, hogy van közöttük legalább két olyan, amelyek egymástól mért távolsága nem nagyobb 40 cm-nél.

15. Az 1 egység oldalú négyzetbe helyezzünk el 30 pontot. Igaz-e, hogy mindig található a pontok között 4 olyan, hogy ezek egy 0,25 sugarú körlappal lefedhetők? (A körlap egy része kívül lehet a négyzeten.)

16. Adott a síkon 18 egyenes úgy, hogy nincs köztük két párhuzamos. Igaz-e, hogy mindig van köztük kettő, amelyek által bezárt szög legfeljebb 10°?

17. Egy téglalapot 13 egyenes metsz úgy, hogy mindegyik egyenes két olyan négyszögre bontja a téglalapot, amelyek területének aránya 1 : 5. Mutassuk meg, hogy ekkor van 4 olyan egyenes, amelyek egy pontban metszik egymást.

18. Egy 5 m × 6 m × 3 m-es teremben 100 légy röpköd. Igaz-e, hogy mindig van köztük kettő, melyek egymástól való távolsága 2 m-nél kisebb?





**19.** Egy 4 egység élhosszúságú kocka belsejében véletlenszerűen választunk 2001 pontot. Mutassuk meg, hogy ezek közül kiválaszthatunk 32 pontot úgy, hogy akármilyen sorrendben kötjük össze a 32 pontot zárt törött vonalat alkotva, a törött vonal hossza nem lehet nagyobb, mint $32 \cdot \sqrt{3}$!

**20.** Egy 10-tagú társaságban néhányan kezet fognak egymással. Ezután mindenkit megkérdeznek, hogy hány emberrel fogott kezet. Van-e mindig két olyan ember, akik ugyanannyi emberrel fogtak kezet a társaságban?

**21.** Egy bajnokságban 8 csapat játszik, mindenki mindenkivel egyszer. A bajnokság közben megszámolták, hogy kinek hány meccse volt addig, és megállapították, hogy mindegyik csapat különböző számú meccset játszott. Helyes volt-e ez a megállapítás?

**22.** Legkevesebb hány egész számot kell felírni, hogy biztosan legyen köztük kettő, amelyek különbsége osztható 8-cal?

**23.** *a)* Igaz-e, hogy ha felírtunk 15 egymás utáni egész számot, akkor biztosan van köztük kettő, amelyek összege osztható 15-tel?

*b)* Igaz-e, hogy ha felírunk 15 pozitív egész számot, akkor biztosan van köztük kettő, amelyek összege osztható 15-tel?

*c)* Legfeljebb hány egész számot írhatunk fel úgy, hogy semelyik kettő összege és semelyik kettő különbsége sem osztható 15-tel?

**24.** Az $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - \ldots - 2001$ kifejezésben zárójelpárok alkalmas elhelyezésével jelölhetjük ki a műveletek elvégzésének sorrendjét. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan zárójelezések, melyek ugyanazt az eredményt adják!

**25.** Igaz-e, hogy tetszőleges öt pozitív egész szám közül mindig ki lehet választani néhányat (egyet, kettőt, hármat, négyet vagy ötöt) úgy, hogy a kiválasztott számok összege osztható 5-tel? Milyen számot írhatunk az 5 helyett?

**26.** Két játékos felváltva ír pozitív egész számokat egy papírra. Az a játékos nyer, amelyik az ellenfél száma után talál a leírt számok közt néhányat, amelyek összege osztható 5-tel.

Játsszunk! Kinek van nyerő stratégiája, és legfeljebb hány lépésben ér véget a játék, ha a játékosok figyelmesek, és jól számolnak?

**27.** Van-e olyan 2001-gyel kezdődő természetes szám, amely osztható 17-tel?

**28.** Van-e olyan csupa 1 és 0 számjegyekből álló természetes szám, amely osztható 17-tel?

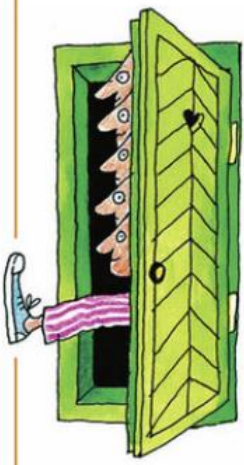
**29.** Az első 100 pozitív egész számot ráírtuk egy-egy cédulára, és beletettük egy kalapba. Bekötött szemmel, visszatevés nélkül kihúzunk 55 számot. Igaz-e, hogy a kihúzott számok között biztosan van két olyan szám, amelyek különbsége éppen 10? Vizsgáljuk a problémát 10 helyett 11-re, majd 12-re is!

**Rejtvény**

**Egy enciklopédia hét kötete a következő sorrendben áll a polcon: 1, 5, 6, 2, 4, 3, 7. Hogyan lehet őket növekvő sorrendbe rakni úgy, hogy egyszerre három kötetet foghatunk meg, és ezeket egyszerre, a sorrendjük változtatása nélkül áthelyezhetjük vagy a bal, vagy a jobb szélére, vagy két másik kötet közé? (Ezt a műveletet természetesen többször végrehajthatjuk.)**



# 3. Sorba rendezési problémák



## Különböző elemek sorba rendezése

**1. példa**

Vendégségbe érkezik András, Béla, Csaba, Dénes és Emil. Az ajtó előtt toporognak, hogy eldöntsék, milyen sorrendben lépjenek be. Hányféle sorrendben léphetnek be az ajtón, ha egyszerre egy ember tud belépni?

**Megoldás**

Az elsőnek belépő embert 5-féleképpen választhatjuk ki.

Mivel minden egyes első belépőhöz négy második belépő választható, ezért a másodikként belépő embert már csak a 4 kint maradt közül, 4-féleképpen választhatjuk, az első két helyen belépőt így $5 \cdot 4$-féleképpen választhatjuk ki.

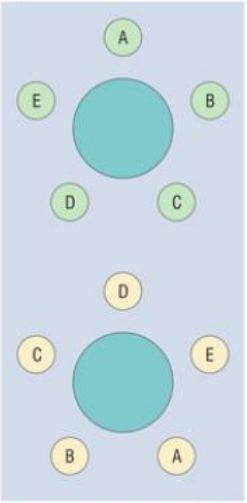
A harmadikként belépő embert már csak a 3 kint maradt közül, 3-féleképpen választhatjuk, az első három helyen belépőt így $5 \cdot 4 \cdot 3$-féleképpen választhatjuk ki.

A negyedikként belépő embert már csak a 2 kint maradt közül, 2-féleképpen választhatjuk, az első négy helyen belépőt így $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$-féleképpen választhatjuk ki.

Az ötödikként belépő ember már csak az 1 kint maradt lehet, így az öt ember összes lehetséges belépési sorrendje: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

**2. példa**

Vendégségben András, Béla, Csaba, Dénes és Emil leül egy kerek asztal köré. Csak azt figyeljük, hogy az embereknek ki a jobb és a bal szomszédja. Például a 20. ábrán látható elrendezéseket egynek tekintjük. Az asztalnál nincs kitüntetett hely, például asztalfő. Hányféleképpen ülhetnek le a vendégek?




20. ábra

**I. megoldás**

Andrást leültetjük. Ezzel meghatároztuk a „körbeforgatható" asztalnál a helyét (ezután az asztal már nem körbeforgatható, mintha egyenes asztal lenne). Így a többi 4 embert már $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$-féleképpen ültethetjük le. Tehát kerek asztal köré 5 ember $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féleképpen ülhet le.

**II. megoldás**

Ha úgy vesszük, hogy az első embert 5-féleképpen ültethetjük le, utána a többit $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$-féleképpen, összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ lehetőség lenne. Ezek közül azonban ugyanazt az ülésrendet adják azok, melyeket úgy kapunk, hogy mindenki átül a jobb oldali szomszédja helyére. Ezt 5-ször tehetik meg egymás után, mire mindenki visszajut a kiindulási helyére, vagyis minden ülésrend 5-ször szerepel az $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ lehetőség között.

Tehát a különböző ülésrendek száma: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.




Számoljuk össze gráfos ábrázolással is a lehetőségeket!

## A sorba rendezések száma, ha vannak egyforma elemek

**3. példa**

Hány ötbetűs „szó" alkotható az (a, a, a, b, b) betűkészletből?

**Megoldás**

Ha az azonos betűket különféleképpen írjuk, például (A, *a*, a, B, b), akkor 5 különböző jelnek keressük az összes lehetséges sorrendjét, ami az előbbiek alapján $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Mivel a háromféle „a" betű a szóban ugyanolyan betűnek számít, azok az esetek, amelyek a különböző „a" betűk sorrendjében térnek el, nem számítanak különböző esetnek. Az „a" betűket egymás között $3 \cdot 2 \cdot 1$-féleképpen lehet cserélgetni. Az „a" betűk elhelyezkedése szempontjából ez a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eset 1 esetnek számít, ha az „a" betűk egyformák. Így az eddig számolt eseteknek csak az $\frac{1}{6}$ része jelent különböző esetet az „a" betűk szempontjából. Ugyanígy a „b" betűk sorrendjében eltérő esetek sem különbözők, ezeket $2 \cdot 1$-féleképpen lehet cserélgetni. Tehát az eddig számolt eseteknek csak az $\frac{1}{2 \cdot 1}$-ed része jelent különböző esetet a „b" betűk szempontjából. Tehát az (a, a, a, b, b) betűkből alkotható ötbetűs szavak száma:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 10.$$

## Feladatok

1. 4 házaspár érkezik vendégségbe.
   *a)* Hányféle sorrendben léphetnek be az ajtón, ha egyszerre érkeznek?
   *b)* Hányféle sorrendben léphetnek be az ajtón, ha mindegyik férj közvetlenül a felesége után lép be?
   *c)* Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré?
   *d)* Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha mindegyik férj a felesége mellett ül?
2. Anna, Bea, Cili és Dóra együtt mennek moziba. Mozijegyük egymás mellé szól. Útközben Bea és Cili összevesznek. Hányféle sorrendben ülhetnek a helyükre a lányok, ha Bea és Cili nem ülnek egymás mellé?
3. Hányféleképpen lehet sorba rendezni a következő szavak betűit? (A dupla betű kettőnek számít.)
   *a)* SZOMBATHELY; *b)* SZEGED; *c)* MAGYARORSZÁG.
4. Hány különböző, 7 hangból álló dallamot tud előállítani az a számítógépes program, amely a C, C, G, G, G, A, A hangokat az összes lehetséges sorrendben lejátssza? (Mindegyik hang ugyanolyan hosszú.)
5. Melyik nagyobb: az (a, a, a, a, b, b, b) betűkészletből alkotható hétbetűs szavak száma, vagy az ugyanebből a betűkészletből alkotható hatbetűs szavak száma?



6. Egy lágytojástartó-készletben 3 zöld és 3 kék tartó van. Ezeket egy rúdra lehet felfűzni, mindegyiket vagy talpával lefele, vagy felfele. Hányféleképpen lehet felfűzni a rúdra a tartókat?

7. Egy 10 forintost 10-szer egymás után feldobtunk. Hányféleképpen lehetett ez, ha tudjuk, hogy 6 fejet és 4 írást dobtunk, és a dobások sorrendje is számít?

8. Egy körforgalomban 4 autó halad egymás után, egy Opel, egy Ford, egy Audi és egy Renault. Hányféle sorrendben haladhatnak?

9. Hányféleképpen lehet ráfűzni 5 különböző kulcsot egy kulcskarikára?

10. Egy magas szárú cipőt sokféleképpen befűzhetünk. Az ábrán látunk egy cipőt, azonban a fűző sokféleképpen mehet a cipő belsejében. Hányféleképpen?



11. Négy autó egy-egy rendszámtábláját leszerelik.
   *a)* Hányféleképpen lehet visszarakni a rendszámtáblákat?
   *b)* Hányféleképpen lehet úgy visszarakni mind a négyet, hogy pontosan egy tábla kerüljön a helyére?
   *c)* Hányféleképpen lehet úgy visszarakni mind a négyet, hogy pontosan három tábla legyen a helyén?

12. Egy titkárnő megírt 5 levelet, és megcímzett 5 borítékot azoknak, akiknek a levelek szóltak, csak nem volt ideje beletenni a leveleket a borítékokba. A hivatalsegéd véletlenszerűen belerakta a leveleket a borítékokba.
   *a)* Hányféleképpen tehette bele a leveleket a borítékokba?
   *b)* Hányféleképpen lehet úgy beletenni a leveleket a borítékokba, hogy pontosan egy levél kerüljön a helyére?
   *c)* Hányféleképpen lehet úgy beletenni a leveleket a borítékokba, hogy pontosan három levél legyen a helyén?

13. Hányféle nyakláncot fűzhetünk 3 fehér és 5 piros gyöngyből, ha az azonos színű gyöngyök egyformák?

*András megoldása:* Először eltervezzük a fehérek helyét, majd a fehér gyöngyök által meghatározott három ívre tesszük rá a pirosakat.

Erre 5 lehetőség van:

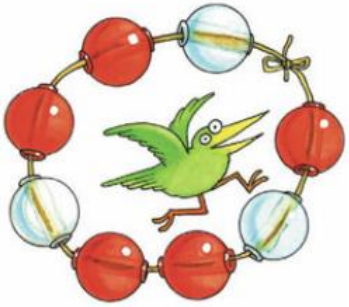
$0+0+5$; $0+1+4$; $0+2+3$; $1+1+3$; $1+2+2$.

Tehát 5-féle nyakláncot lehet fűzni.

*Béla megoldása:* 8 különböző gyöngyöt kerek nyakláncra $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$-féleképpen lehet felfűzni. Most 5 piros egyforma és 3 fehér egyforma gyöngy van, ezért ezt osztani kell $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$-gyel és $3 \cdot 2 \cdot 1$-gyel is, így az eredmény 7 lehetőség.

Tehát 7-féle nyakláncot lehet fűzni.

Kinek a megoldása helyes?



14. Hányféle sorrendben vonulhat be a pályára a galagonyafalvi kosárlabdacsapat 5 különböző magasságú játékosa, ha egy sorban mennek, és semelyikük sem kerülhet két magasabb játékos közé?





# 4. Kiválasztási problémák

A következőkben több elem közül kell néhányat kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendje is lényeges.

## Különböző elemek közül választunk ki néhányat

**1. példa**

Egy sorsoláson Anna, Bori, Cili és Dóra vesznek részt. Egy könyvet és egy tollat sorsolnak ki úgy, hogy mindenki legfeljebb egy ajándékot nyerhet. Beleteszik a nevüket egy kalapba, és kihúznak egyet, aki a könyvet nyeri. Utána a kalapban maradt nevek közül kihúznak még egyet, aki a tollat nyeri.

Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak?

**Megoldás**

Elsőre 4-féleképpen húzhatnak nevet, vagyis a könyvet 4 ember nyerheti.

Mivel az első nyertes nevét **nem teszik vissza** a kalapba, másodikra már csak 3-féleképpen húzhatnak nevet, vagyis a tollat 3 ember nyerheti.

Mivel a 4 lehetséges első nyertes mindegyikéhez 3 lehetséges második nyertes tartozik, összesen $4 \cdot 3 = 12$ lehetőség van.



Számoljuk össze gráfos ábrázolással is a lehetőségeket!

## Különböző fajta elemek (mindegyik fajtából több elem van) közül választunk néhány elemet

**2. példa**

Egy sorsoláson András, Béla, Csaba és Dénes vesznek részt. Egy könyvet és egy tollat sorsolnak ki úgy, hogy mindenki több ajándékot is nyerhet. Beleteszik a nevüket egy kalapba, és kihúznak egyet, aki a könyvet nyeri. Utána visszateszik a nyertes nevét, és újra kihúznak egy nevet, aki a tollat nyeri.

Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak?

**Megoldás**

Elsőre 4-féleképpen húzhatnak nevet, vagyis a könyvet 4 ember nyerheti.

Mivel az első nyertes nevét **visszateszik** a kalapba, másodikra is 4-féleképpen húzhatnak nevet, vagyis a tollat 4 ember nyerheti.

Mivel a 4 lehetséges első nyertes mindegyikéhez 4 lehetséges második nyertes tartozik, összesen $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ lehetőség van.



## Feladatok

1. Hányféle, a magyar zászlóhoz hasonló háromszínű zászlót lehet készíteni öt különböző színből, ha minden szín legfeljebb egyszer fordulhat elő?

2. Hányféle, a magyar zászlóhoz hasonló három sávos zászlót lehet készíteni öt színből, ha a színek többször is előfordulhatnak, de azonos színek nem lehetnek szomszédosak?

3. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyeket felírtuk egy-egy kártyára, és betettük egy kalapba.
   *a)* Hányféleképpen húzhatunk ki a kalapból egymás után 5 cédulát úgy, hogy a húzás után nem tesszük vissza a cédulákat?
   *b)* Hányféleképpen húzhatunk ki a kalapból egymás után 5 cédulát úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a cédulákat?

4. Egy dobókockát négyszer egymás után feldobunk.
   *a)* Hány olyan eset lehet, amikor a dobott számok között nincs két egyenlő?
   *b)* Hányszor kell feldobni a dobókockát, hogy biztosan legyen a dobott számok között két egyenlő?

5. András, Béla, Csaba, Dezső, Emil és Ferenc között kisorsolnak három ajándékot, egy könyvet, egy tollat és egy labdát. Hányféleképpen lehetséges ez, ha
   *a)* egy gyerek csak egy ajándékot kaphat;
   *b)* egy gyerek több ajándékot is kaphat?

6. Az 1, 2, 3, 4 számjegyekkel négyjegyű számokat írunk fel úgy, hogy minden számjegyet többször is felhasználhatunk.
   *a)* Hány különböző számot tudunk felírni?
   *b)* Köztük hány olyan van, amelynek az első és az utolsó számjegye megegyezik?
   *c)* Hány olyan van, amelyben az utolsó számjegy nem nagyobb az elsőnél?
   *d)* Hány olyan van, amely 2000-nél nagyobb?
   *e)* Hány olyan van, amely 4-gyel osztható?

7. Dobókockával egymás után háromszor dobunk, a dobott számok egy háromjegyű szám számjegyei a dobás sorrendjében.
   *a)* Hányféle háromjegyű számot lehet dobni?
   *b)* Hányféle háromjegyű páros számot lehet dobni?
   *c)* Hányféle háromjegyű 25-tel osztható számot lehet dobni?

8. Az egyhasábos totószelvény 13 + 1 helyére 1, 2 vagy X kerülhet. Hányféleképpen lehet kitölteni ezt a totószelvényt?

9. Egy TOPIC nevű vállalat ki akarja színezni a nevét úgy, hogy egy betű egyszínű legyen. Legkevesebb hány színre van szükség, ha azt akarjuk, hogy az év minden napján különböző színű legyen a név?




10. Csak a 3-as és a 8-as számjegyekkel hány olyan nyolcjegyű szám írható fel, amelyikben mindkét számjegy előfordul?





11. Hányféle autórendszám lehet Magyarországon, ha csupán annyi a kikötés, hogy minden rendszám három ékezet nélküli betűből és három számjegyből álljon?

12. Hány olyan legfeljebb 6-jegyű pozitív egész szám van, melyben előfordul az 1 számjegy?

13. Mennyivel lehet egyenlő a következő tört?

*a)* $\cfrac{2}{\cfrac{2}{2}}$ *b)* $\cfrac{2}{\cfrac{2}{\cfrac{2}{2}}}$

14. A morzeábécé betűi · és – jelekből állnak. A magyar ábécé betűinek leírásához lehetne-e legfeljebb három morzejelből álló jelsorozatokat használni?

15. Hány olyan szám van $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{8}$ között, amelyet egy 8-jegyű számológép kijelzőjére kiírathatunk? (A tizedespont előtti 0-t nem kell kiírni, csak a tizedespontot.)

16. Hány négyjegyű természetes szám lehet
*a)* a 2-es számrendszerben;
*b)* az 5-ös számrendszerben;
*c)* a 12-es számrendszerben?

17. Az 1940-es években a Bell Telefontársaság tízjegyű telefonszámokat tervezett úgy, hogy az első három számjegy a terület kódja. Az első számjegy 2 és 9 között lehet, a második 0 vagy 1, a harmadik 0 kivételével bármi lehet. Hány különböző területi kód lehetséges?

**Rejtvény**

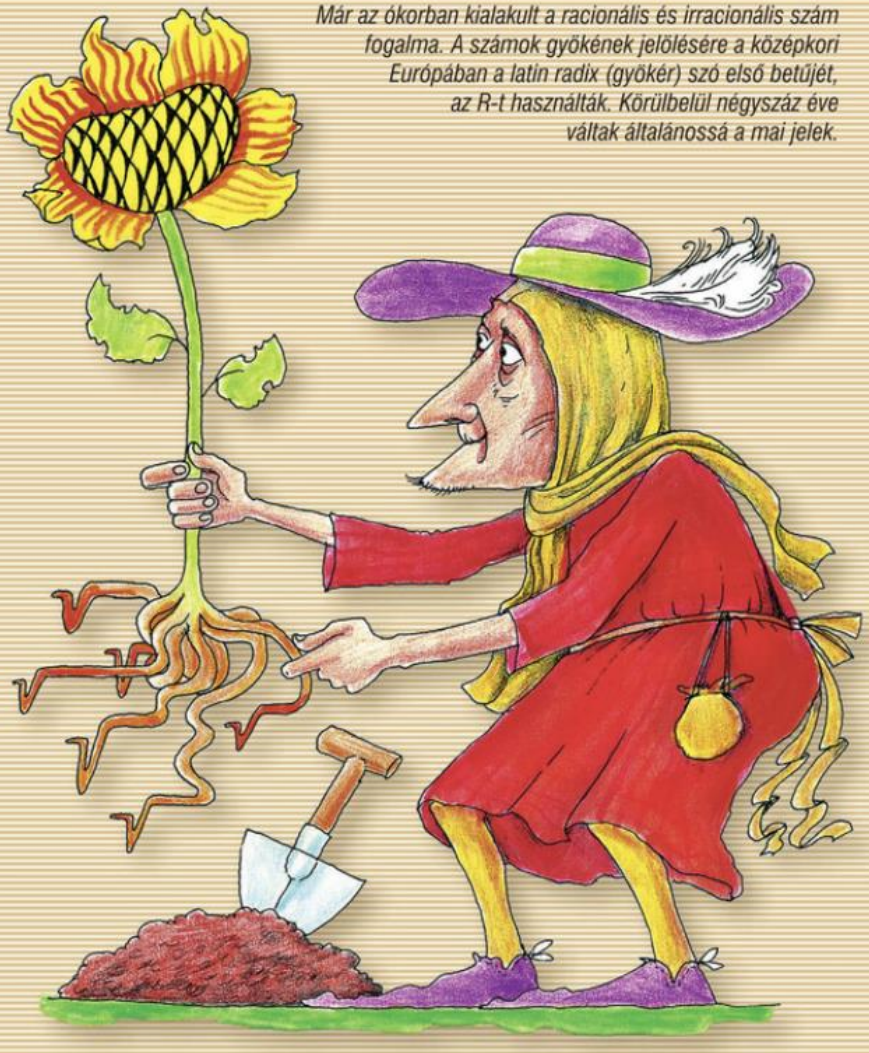
**Az asztalon sorban egymás mellett 8 pohár áll. Az első négy üres, az utolsó négyben narancslé van. Hogyan érhetnénk el, hogy az üres és teli poharak váltakozva kövessék egymást, ha csak két pohárhoz szabad nyúlni?**



# A gyökvonás

*Az ókortól napjainkig a mindennapi élet egyre bonyolultabb problémákat vetett fel a számításokkal foglalkozó emberek számára. A „matematikusok" a felvetődő feladatok során új módszereket, fogalmakat találtak ki.*

*Már az ókorban kialakult a racionális és irracionális szám fogalma. A számok gyökének jelölésére a középkori Európában a latin radix (gyökér) szó első betűjét, az R-t használták. Körülbelül négyszáz éve váltak általánossá a mai jelek.*



# 1. Racionális számok, irracionális számok

racionális szám

**Definíció: A két egész szám hányadosaként felírható számokat *racionális számoknak* nevezzük.**

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0\}$$

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots$

Mivel egyszerűsítés és bővítés során a törtszám nem változik, ezért minden racionális számnak végtelen sok alakja van.



A tizedes törtek mai alakjukban 1616-ban jelentek meg John Napier [néjpjer] művében, amelyben a szerző az egész és törtrészeket ponttal választotta el. Később Napier a tizedespont helyett ajánlotta a tizedesvessző használatát is. Angliában a pont, de a legtöbb európai országban a vessző használata terjedt el.

**1. példa**

Írjuk fel a következő racionális számok tizedes tört alakját!

*a)* $\frac{5}{8}$; *b)* $\frac{13}{9}$; *c)* $\frac{5}{6}$; *d)* $\frac{157}{333}$.

**Megoldás**

| *a)* | *b)* | *c)* | *d)* |
|---|---|---|---|
| 5 : 8 = 0,625 | 13 : 9 = 1,44… | 5 : 6 = 0,833… | 157 : 333 = 0,471… |
| 50 | 40 | 50 | 1570 |
| 20 | 40 | 20 | 2380 |
| 40 | 4 | 20 | 490 |
| 0 | … | 2 | 157 |
| | | … | … |

*a)* $\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0{,}625$ véges tizedes tört.

*b)* $\frac{13}{9} = 13 : 9 = 1{,}444\ldots = 1{,}\dot{4}$ végtelen szakaszos tizedes tört.

*c)* $\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}8333\ldots = 0{,}8\dot{3}$ végtelen szakaszos tizedes tört.

*d)* $\frac{157}{333} = 157 : 333 = 0{,}4714714\ldots = 0{,}\dot{4}7\dot{1}$ végtelen szakaszos tizedes tört.

Általánosítva: Ha $p$ és $q$ pozitív egész számok, a $\frac{p}{q}$ racionális szám tizedes tört alakja véges, ha a maradékos osztás elvégzése során maradékként a 0 lép fel. Ha a 0 nem fordul elő a maradékok között, akkor a lehetséges maradékok 1, 2, … , $q - 1$. Így legfeljebb $q$ osztás után – a skatulyaelv miatt – olyan maradékot kapunk, amely már szerepelt. Ettől kezdve a maradékok ismétlődnek, tehát a tizedes tört végtelen szakaszos lesz.

**2. példa**

Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő számokat!

*a)* 3,82; *b)* 1,215; *c)* $1,\dot{3}8\dot{7}$

**Megoldás**

*a)* $3{,}82 = \frac{382}{100} = \frac{191}{50}$; *b)* $1{,}215 = \frac{1215}{1000} = \frac{243}{200}$;

*c)* Jelöljük a számot egy betűvel: $1,\dot{3}8\dot{7} = x$! Mivel három jegy ismétlődik, írjuk fel a szám 1000-szeresét: $1000x = 1387,\dot{3}8\dot{7}$, ebből kivonva az eredeti számot: $999x = 1386$, tehát: $x = \frac{1386}{999} = \frac{154}{111}$.

Ez a módszer $n$ jegyből álló szakasz esetén úgy alkalmazható, hogy $10^n$-nel szorzunk.

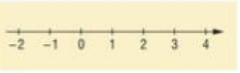
átírás tört alakba

◆ ◆ ◆

**DEFINÍCIÓ:** ***Irracionális számnak*** **nevezzük azokat a számokat, melyek tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos.**

irracionális szám

Pl. belátható, hogy irracionális lesz a következő módon képzett szám: 1,23233233323333…, ahol mindig eggyel növeljük a hármasok számát, vagy 5,6789101112…, ahol a pozitív egész számokat írjuk egymás után.

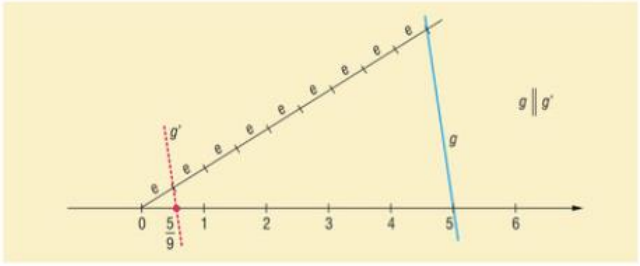


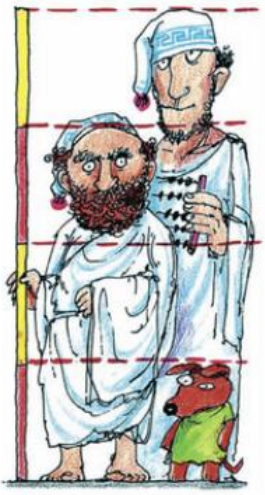

1. ábra

A számegyenesen az egység ismeretében az egész számok helye könnyen megadható. *(1. ábra)*

A racionális számok helye hasonlóság alkalmazásával szintén megszerkeszthető. Az $\frac{5}{9}$ helye a 2. ábrán látható módon szerkeszthető.

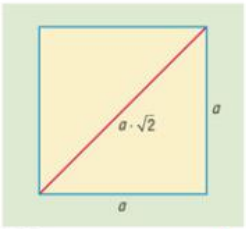
2. ábra



*Megjegyzés:* Az ókori matematikusok **„összemérhetőnek"** neveztek két szakaszt, ha azokhoz megadható egy olyan egység, melynek mindkét szakasz többszöröse.

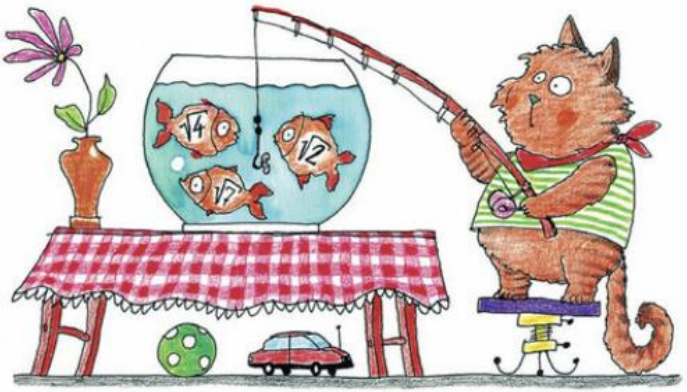
Például az $\frac{5}{9}$ és $\frac{3}{4}$ hosszúságú szakaszok többszörösei az $\frac{1}{36}$ hosszúságú szakasznak (az első 20-szorosa, a második 27-szerese). Tehát azt mondhatjuk, hogy a fenti két szakasz összemérhető.




3. ábra

Két, racionális számmal megadott szakasz mindig összemérhető. Egységnek megfelel az a tört, melynek számlálója 1, nevezője pedig a nevezők legkisebb közös többszöröse.

Sokáig kérdéses volt, hogy minden szakasz összemérhető-e. Körülbelül a Kr. e. 5. században görög matematikusok bebizonyították, hogy a négyzet oldala és átlója nem összemérhető. ***(3. ábra)***




A 9. osztályban definiált négyzetgyökvonás segítségével is előállíthatunk irracionális számokat.

**a $\sqrt{2}$ irracionális szám**

**TÉTEL:** **A $\sqrt{2}$ irracionális szám.**

**Bizonyítás**

indirekt bizonyítás

Végezzük a bizonyítást indirekt úton.

Tegyük fel, hogy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ahol $p, q \in \mathbb{Z}^+$ és relatív prímek: $(p; q) = 1$.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

$$2q^2 = p^2.$$

$$\Downarrow$$

$$2 | p^2 \Rightarrow 2 | p \Rightarrow 4 | p^2,$$

$$\text{ha } 4 | p^2 \Rightarrow 2 | q^2 \Rightarrow 2 | q.$$

Azt kaptuk, hogy $p$ és $q$ is páros. Ez ellentmond annak, hogy relatív prímek, tehát az állítás igaz.

*Megjegyzés:* A fenti módszerekkel belátható, hogy minden olyan pozitív $a$ egész szám esetén, mely nem négyzetszám, a $\sqrt{a}$ irracionális szám.

$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237309\ldots$

Kr. e. 2300-ban Mezopotámiában a $\sqrt{2}$ közelítésére az

$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx$
$\approx 1{,}4142122$

értéket ismerték.



**Definíció: A racionális számok halmazának és az irracionális számok halmazának uniója a *valós számok halmaza*.**

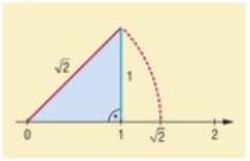
a valós számok halmaza

A valós számok halmazának jele $\mathbb{R}$, az irracionális számok halmazát pedig szokás $\mathbb{Q}^*$-gal jelölni. Ezekkel a jelölésekkel: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$.

A számegyenesen bizonyos irracionális számok helye is megszerkeszthető.

Például a $\sqrt{2}$ a Pitagorasz-tétel felhasználásával a 4. ábrán vázolt módon szerkeszthető meg.

Ugyanakkor vannak olyan irracionális számok, például a $\pi$, amelyek nem szerkeszthetők meg.




4. ábra

## Feladatok

1. Írjuk fel a következő számok tizedes tört alakját!

   *a)* $\frac{5}{12}$; *b)* $\frac{13}{7}$; *c)* $\frac{11}{17}$; *d)* $\frac{10}{17}$.

2. Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő számokat!

   *a)* 3,142; *b)* $3,1\dot{4}\dot{2}$; *c)* $3,14\dot{2}$; *d)* $3,14\dot{2}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak!

   *a)* $\sqrt{7}$; *b)* $\sqrt{2}+1$; *c)* $\sqrt{3}-1$; *d)* $\sqrt{2}+\sqrt{7}$.

4. Az egység ismeretében szerkesszük meg a

   *a)* $\sqrt{7}$; *b)* $\sqrt{10}$; *c)* $\sqrt{17}$; *d)* $\sqrt{1956}$

   hosszúságú szakaszokat!

5. Írjunk fel olyan irracionális számot, amely nagyobb 0,99-nál, de kisebb 1-nél!

**Rejtvény**

**Melyik két egész szám hányadosa lehet az $1,\dot{9}$ végtelen szakaszos tizedes tört?**



## 2. A négyzetgyökvonás azonosságai

9. osztályban a függvények kapcsán már definiáltuk a nemnegatív számok négyzetgyökét.

**négyzetgyök**

$(\sqrt{a})^2 = a$, ha $a \geq 0$

**DEFINÍCIÓ: Ha $a \geq 0$, akkor $\sqrt{a}$ jelöli azt a nemnegatív számot, amelynek a négyzete $a$.**

A hatványozáshoz hasonlóan a négyzetgyökvonás esetén is érvényesek bizonyos számítási szabályok, **azonosságok.**

**I. azonosság**

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
$a \geq 0;\ b \geq 0$

**TÉTEL: Szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával.**

**$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$.**

### Bizonyítás

Mivel a **nemnegatív számok** körében a négyzetre emelés és a négyzetgyökvonás kölcsönösen egyértelmű, ezért megtehetjük, hogy az egyenlőség két oldalán álló kifejezések négyzetét hasonlítjuk össze.

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 \overset{\text{definíció}}{=} a \cdot b; \qquad (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 \overset{\text{hatványozás, III. azonosság}}{=} (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 \overset{\text{definíció}}{=} a \cdot b.$$

Mivel a két kifejezés négyzete egyenlő, ezért az eredeti kifejezések is egyenlőek.

NICOLAS CHUQUET [süké] francia orvos 1484-ben megjelent „A számok tudománya három részben" című művében a $\sqrt{14}$-et így írja: R²14.

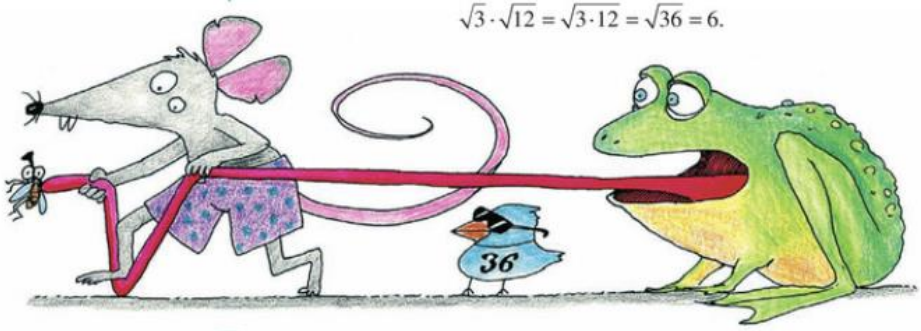
**1. példa**

Számítsuk ki a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ szorzat értékét!

### Megoldás

Írjuk fel a szorzatot egy gyökjellel az I. azonosság alapján:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6.$$



**TÉTEL:** **Tört négyzetgyöke megegyezik a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával.**

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ ha } a \geq 0 \text{ és } b > 0.$$

II. azonosság

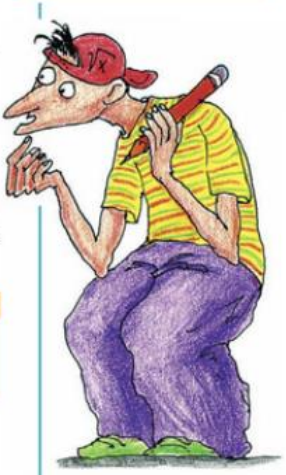
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$
$$a \geq 0;\ b > 0$$

**Bizonyítás**

Hasonlítsuk össze az egyenlőség két oldalán álló nemnegatív kifejezések négyzeteit!

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 \overset{\text{definíció}}{=} \frac{a}{b}; \qquad \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \overset{\text{hatványozás IV. azonosság}}{=} \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} \overset{\text{definíció}}{=} \frac{a}{b}.$$

Mivel mindkét kifejezés **nemnegatív** és négyzeteik egyenlőek, ezért a kifejezések is egyenlőek.



**2. példa**

Számítsuk ki a $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ hányadost!

**Megoldás**

A II. azonosság alapján a kifejezés átírható: $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2.$

**TÉTEL:** **A négyzetgyökvonás és a hatványozás művelete felcserélhető.**

$$(\sqrt{a})^k = \sqrt{a^k}, \text{ ahol } a > 0 \text{ és } k \in \mathbb{Z}.$$

III. azonosság

$$(\sqrt{a})^k = \sqrt{a^k}$$
$$a > 0;\ k \in \mathbb{Z}$$

**Bizonyítás**

Ebben az esetben is érdemes az egyenlőség két oldalán álló pozitív kifejezések négyzetét összehasonlítani.

$$\left[(\sqrt{a})^k\right]^2 \overset{\text{hatványozás V. azonosság}}{=} (\sqrt{a})^{2k} \overset{\text{hatványozás V. azonosság}}{=} \left[(\sqrt{a})^2\right]^k \overset{\text{definíció}}{=} a^k; \qquad \left(\sqrt{a^k}\right)^2 \overset{\text{definíció}}{=} a^k.$$

Mindkét oldal **pozitív** és a négyzeteik megegyeznek, ezért a kifejezések is egyenlőek.

**3. példa**

Melyik nagyobb: a $(\sqrt{3})^5$ vagy a $(\sqrt{5})^3$?

**Megoldás**

Mivel $(\sqrt{3})^5 = \sqrt{3^5} = \sqrt{243}$ és $(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$, és a $\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ függvény szigorúan növekvő, ezért a $(\sqrt{3})^5$ a nagyobb.

**4. példa**

Végezzük el a következő műveleteket!

*a)* $(\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$;

*b)* $(\sqrt{7}+4)^2$;

*c)* $(\sqrt{11}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{11}+\sqrt{6})$.

**Megoldás**

*a)* Az első összeg mindegyik tagját szorozzuk a második tagjaival, és alkalmazzuk az I. azonosságot:

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot(2\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}-(\sqrt{5})^2 =$$
$$= 2\cdot 3-\sqrt{15}+2\sqrt{15}-5 = 1+\sqrt{15}.$$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

3D

*b)* Alkalmazzuk a kéttagú összeg négyzetére vonatkozó azonosságot:

$$(\sqrt{7}+4)^2 = (\sqrt{7})^2+2\cdot\sqrt{7}\cdot 4+4^2 = 7+8\cdot\sqrt{7}+16 = 23+8\sqrt{7}.$$

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$

*c)* Mivel $(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$, ezért

$$(\sqrt{11}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{11}+\sqrt{6}) = (\sqrt{11})^2-(\sqrt{6})^2 = 11-6 = 5.$$



**5. példa**

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

*a)* $\sqrt{\sqrt{13}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{13}+2}$; *b)* $\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}-\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2$.

**Megoldás**

*a)* Végezzük el a szorzást egy gyökjel alatt az I. azonosság alapján:

$$\sqrt{\sqrt{13}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{13}+2} = \sqrt{(\sqrt{13}-2)\cdot(\sqrt{13}+2)} =$$
$$= \sqrt{(\sqrt{13})^2-2^2} = \sqrt{13-4} = \sqrt{9} = 3.$$

*b)* Végezzük el a négyzetre emelést, majd a kétszeres szorzatot írjuk egy gyökjel alá:

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$$\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}-\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2 =$$
$$= 8+\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{8+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{8-\sqrt{15}}+8-\sqrt{15} =$$
$$= 16-2\cdot\sqrt{(8+\sqrt{15})\cdot(8-\sqrt{15})} = 16-2\cdot\sqrt{8^2-(\sqrt{15})^2} =$$
$$= 16-2\cdot\sqrt{64-15} = 16-14 = 2.$$

## Feladatok

1. Végezzük el a következő műveleteket!

   *a)* $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; *b)* $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}$; *c)* $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; *d)* $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt{5}$;

   *e)* $\frac{\sqrt{5^3}}{\sqrt{5}}$; *f)* $(\sqrt{7})^3\cdot\sqrt{7}$; *g)* $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{32}-\sqrt{8})$; *h)* $\frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{24})}{\sqrt{2}}$.

2. Melyik szám a nagyobb:

   *a)* $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ vagy $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{2}}$; *b)* $(\sqrt{3})^3$ vagy $\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}$;

   *c)* $\frac{\sqrt{2^5}}{\sqrt{8}}$ vagy $\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$; *d)* $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}}\cdot\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}}$ vagy $\frac{(\sqrt{2})^3}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$?

3. Végezzük el a következő műveleteket!

   *a)* $(2\cdot\sqrt{3}+1)\cdot(3-4\cdot\sqrt{3})$; *b)* $(\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}-1)\cdot(3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3})$;

   *c)* $(2\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2})^2$; *d)* $(3\cdot\sqrt{7}+\sqrt{5})^2$;

   *e)* $(3\cdot\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{3})\cdot(3\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{3})$; *f)* $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$.

4. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

   *a)* $\sqrt{\sqrt{13}+3}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-3}$;

   *b)* $\sqrt{\sqrt{61}-5}\cdot\sqrt{\sqrt{61}+5}$;

   *c)* $\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2$;

   *d)* $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$;

   *e)* $\left(\sqrt{10-\sqrt{19}}+\sqrt{10+\sqrt{19}}\right)^2$;

   *f)* $\left(\sqrt{\sqrt{30}+\sqrt{14}}-\sqrt{\sqrt{30}-\sqrt{14}}\right)^2$.



**Rejtvény**

**Melyik szám a nagyobb: $\sqrt{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$ vagy $\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}$ ?**

# 3. A négyzetgyökvonás azonosságainak alkalmazása

## Bevitel a gyökjel alá

**1. példa**

Melyik szám a nagyobb: *a)* $3\cdot\sqrt{5}$ vagy $5\cdot\sqrt{2}$; *b)* $\frac{\sqrt{6}}{3}$ vagy $\frac{\sqrt{10}}{4}$?




**Megoldás (a)**

Mindegyik kifejezést alakítsuk át!

A bal oldali szám:

$$3\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{45},$$

a jobb oldali szám:

$$5\cdot\sqrt{2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{50}.$$

A második esetben nagyobb szám áll a gyökjel alatt. Mivel a $\sqrt{x}$ függvény szigorúan növekvő, ezért ez a kifejezés a nagyobb.

**Megoldás (b)**

Mindegyik kifejezést alakítsuk át!

A bal oldali szám:

$$\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

a jobb oldali:

$$\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{16}}=\sqrt{\frac{10}{16}}=\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Mivel $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$ és $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$, ezért a bal oldali szám a nagyobb.

**2. példa**

A négyzetgyökjel alá vitellel írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket!

*a)* $a\cdot\sqrt{a}$, $a\geq 0$; *b)* $\frac{b}{a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$, $a,b>0$; *c)* $(1-\sqrt{10})\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}}$.

**Megoldás**

*a)* $a\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^2\cdot a}=\sqrt{a^3}$.

*b)* $\frac{b}{a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{b^2\cdot a}{a^2\cdot b}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

*c)* Mivel $1-\sqrt{10}<0$:

$$(1-\sqrt{10})\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}} = -(\sqrt{10}-1)\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}} =$$

$$= -\sqrt{(\sqrt{10}-1)^2}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}} = -\sqrt{\frac{(\sqrt{10}-1)^2\cdot(\sqrt{10}+1)}{\sqrt{10}-1}} =$$

$$= -\sqrt{(\sqrt{10}-1)\cdot(\sqrt{10}+1)} = -\sqrt{10-1} = -\sqrt{9} = -3.$$

$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

## Kiemelés a négyzetgyökjel alól

Ha a négyzetgyökjel alatt egy szám négyzete áll, akkor egyszerű a művelet elvégzése, hiszen a definícióból adódóan $\sqrt{a^2}=|a|$.

$\sqrt{a^2}=|a|$

Ha szorzattá alakítva a négyzetgyökjel alatti szám egyik tényezője négyzetszám, akkor ezt érdemes kiemelni a gyökjel alól.

**3. példa**

Végezzük el a következő műveleteket: $\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$!

**Megoldás**

Alakítsuk a számokat szorzattá úgy, hogy az egyik tényező négyzetszám legyen, majd alkalmazzuk az I. azonosságot!

$$\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{50}=\sqrt{9\cdot2}+\sqrt{4\cdot2}-\sqrt{25\cdot2}=3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{2}=0.$$

**4. példa**

Számítsuk ki a következő szorzatot:

$$(\sqrt{80}+\sqrt{50}-\sqrt{20}-\sqrt{8})\cdot(\sqrt{125}-\sqrt{45}-\sqrt{18})!$$

**Megoldás**

Keressünk négyzetszámokat a gyök alatt!

$$(\sqrt{80}+\sqrt{50}-\sqrt{20}-\sqrt{8})\cdot(\sqrt{125}-\sqrt{45}-\sqrt{18})=$$
$$=(\sqrt{16\cdot5}+\sqrt{25\cdot2}-\sqrt{4\cdot5}-\sqrt{4\cdot2})\cdot(\sqrt{25\cdot5}-\sqrt{9\cdot5}-\sqrt{9\cdot2}).$$

| | |
|---|---|
| 80 | 2 |
| 40 | 2 |
| 20 | 2 |
| 10 | 2 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

$80=2^4\cdot5=(2^2)^2\cdot5$

A szorzat négyzetgyökére vonatkozó azonosságot és a definíciót alkalmazva kapjuk, hogy

$$(4\cdot\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{2})\cdot(5\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}) =$$
$$=(2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{2})\cdot(2\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2})=(2\cdot\sqrt{5})^2-(3\cdot\sqrt{2})^2=$$
$$=4\cdot5-9\cdot2=20-18=2.$$

$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$




**5. példa**

Végezzük el az összevonást!

$$\sqrt{a^3}+\sqrt{4a^3}+\sqrt{9a^3}.$$

**Megoldás**

A kifejezésnek csak akkor van értelme, ha $a \geq 0$.

Alakítsunk szorzattá a gyökjelek alatt:

$$\sqrt{a^3}+\sqrt{4a^3}+\sqrt{9a^3}=\sqrt{a^2\cdot a}+\sqrt{(2a)^2\cdot a}+\sqrt{(3a)^2\cdot a}=$$
$$=|a|\cdot\sqrt{a}+|2a|\cdot\sqrt{a}+|3a|\cdot\sqrt{a}.$$

Mivel $a \geq 0$, ezért $|a| = a$, ezért az összevonás után a kifejezés:

$$a\cdot\sqrt{a}+2a\cdot\sqrt{a}+3a\cdot\sqrt{a}=6a\cdot\sqrt{a}.$$

## Tört nevezőjének gyöktelenítése

**6. példa**

Bővítsük a következő törteket úgy, hogy a nevezőben ne legyen négyzetgyökjel!

*a)* $\frac{3}{\sqrt{7}}$; *b)* $\frac{7}{3\cdot\sqrt{5}}$; *c)* $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$; *d)* $\frac{34}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{5}}$.

**Megoldás**

*a)* Megfelelő, ha a törtet $\sqrt{7}$-tel bővítjük: $\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{3\cdot\sqrt{7}}{7}$.

*b)* Ebben az esetben a $\sqrt{5}$-tel történő bővítés eredményes:

$$\frac{7}{3\cdot\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{7\cdot\sqrt{5}}{3\cdot 5}=\frac{7\cdot\sqrt{5}}{15}.$$

*c)* Ennél a törtnél már nem eredményes a $\sqrt{2}$-vel való bővítés.

Mivel a nevezőben összeg van, ezért az $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ azonosságra gondolva, bővítsünk $(3-\sqrt{2})$-vel:

$$\frac{2}{3+\sqrt{2}}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{2\cdot(3-\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2}=$$
$$=\frac{2\cdot(3-\sqrt{2})}{9-2}=\frac{2\cdot(3-\sqrt{2})}{7}.$$

*d)* Az előzőhöz hasonlóan $(\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5})$-tel bővítve, az eredmény:

$$\frac{34}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}=\frac{34\cdot(\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2-(2\cdot\sqrt{5})^2}=\frac{34\cdot(\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5})}{3-4\cdot5}=$$

$$=\frac{34\cdot(\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5})}{-17}=-2\cdot(\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}).$$

A nevező gyöktelenítése után a törtet egyszerűsíteni lehetett.

Ne csodálkozzunk, hogy az eredmény negatív, hiszen az eredeti nevezőben $\sqrt{3}<2\cdot\sqrt{5}=\sqrt{20}$.

**7. példa**

Melyik szám a nagyobb: $\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ vagy $\frac{8}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$?

**Megoldás**

Gyöktelenítsük mindkét tört nevezőjét:

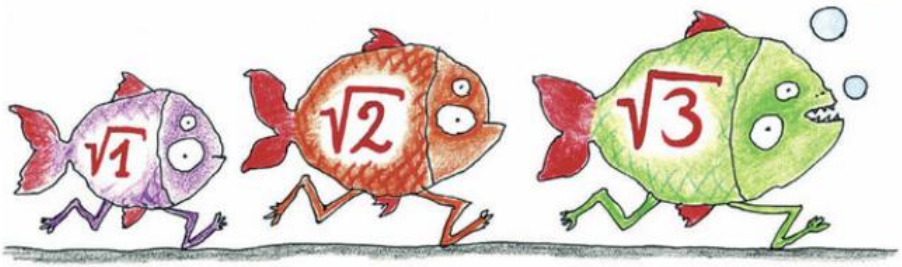
$$\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{5\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{5\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{7-2}=\frac{5\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}=\sqrt{7}-\sqrt{2}.$$

$$\frac{8}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}=\frac{8\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{8\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{10-2}=\frac{8\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{8}=\sqrt{10}-\sqrt{2}.$$

Mivel a négyzetgyökfüggvény a nemnegatív valós számok halmazán szigorúan növekvő, ezért $\sqrt{10}>\sqrt{7}$, és így a második tört a nagyobb.



**8. példa**

Végezzük el a következő összeadást!

$$\frac{3}{\sqrt{a}-1}+\frac{1}{\sqrt{a}+1}.$$

**Megoldás**

$(\sqrt{a}-1)\cdot(\sqrt{a}+1)=a-1$

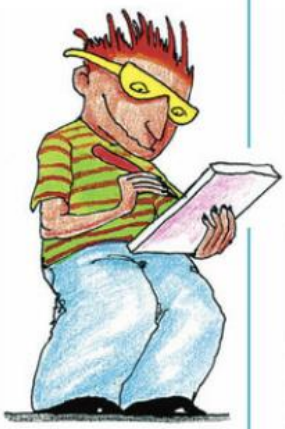
A kifejezésnek csak akkor van értelme, ha $a \geq 0$ és $a \neq 1$.

Gyöktelenítsük a nevezőket:

$$\frac{3}{\sqrt{a}-1}\cdot\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}=\frac{3\cdot\sqrt{a}+3}{a-1},$$

illetve

$$\frac{1}{\sqrt{a}+1}\cdot\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}.$$



Elvégezve az összeadást:

$$\frac{3\cdot\sqrt{a}+3}{a-1}+\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}=\frac{4\cdot\sqrt{a}+2}{a-1}.$$

**9. példa**

Számítsuk ki a $\frac{4\cdot\sqrt{a}-6}{2\cdot\sqrt{a}+1}+\frac{16\cdot\sqrt{a}}{2\cdot\sqrt{a}-1}$ kifejezés értékét, ha $a=\frac{3}{4}$!

**Megoldás**

A behelyettesítés előtt a nevezők gyöktelenítésével hozzuk a kifejezést egyszerűbb alakra:

$$\frac{4\cdot\sqrt{a}-6}{2\cdot\sqrt{a}+1}+\frac{16\cdot\sqrt{a}}{2\cdot\sqrt{a}-1}=$$

$(2\cdot\sqrt{a}+1)\cdot(2\cdot\sqrt{a}-1)=4a-1$

$$=\frac{4\cdot\sqrt{a}-6}{2\cdot\sqrt{a}+1}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{a}-1}{2\cdot\sqrt{a}-1}+\frac{16\cdot\sqrt{a}}{2\cdot\sqrt{a}-1}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{a}+1}{2\cdot\sqrt{a}+1}=$$

$$=\frac{(4\cdot\sqrt{a}-6)\cdot(2\cdot\sqrt{a}-1)}{4a-1}+\frac{16\cdot\sqrt{a}\cdot(2\cdot\sqrt{a}+1)}{4a-1}=$$

$$=\frac{8a-4\cdot\sqrt{a}-12\cdot\sqrt{a}+6+32a+16\cdot\sqrt{a}}{4a-1}=\frac{40a+6}{4a-1}.$$

Ebbe behelyettesítve:

$$\frac{40a+6}{4a-1}=\frac{40\cdot\frac{3}{4}+6}{4\cdot\frac{3}{4}-1}=\frac{30+6}{3-1}=18.$$



## Feladatok

1. Melyik szám a nagyobb:

   *a)* $6\cdot\sqrt{2}$ vagy $3\cdot\sqrt{8}$; *b)* $4\cdot\sqrt{3}$ vagy $5\cdot\sqrt{2}$; *c)* $2\cdot\sqrt{7}$ vagy $3\cdot\sqrt{3}$;

   *d)* $5\cdot\sqrt{5}$ vagy $8\cdot\sqrt{2}$; *e)* $\frac{\sqrt{21}}{7}$ vagy $\frac{\sqrt{15}}{5}$; *f)* $\frac{3\cdot\sqrt{5}}{4}$ vagy $\frac{7\cdot\sqrt{2}}{6}$?

2. A négyzetgyökjel alá vitellel írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket!

   *a)* $\frac{1}{a}\cdot\sqrt{a}$, ahol $a>0$; *b)* $\frac{a^2}{b}\cdot\sqrt{\frac{b}{a^3}}$, ahol $a, b>0$; *c)* $(a+b)\cdot\sqrt{\frac{1}{a+b}}$, ahol $a+b>0$;

   *d)* $(1-\sqrt{2})\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$; *e)* $(1-\sqrt{5})\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}$.

3. Végezzük el a következő műveleteket!

   *a)* $\sqrt{192}+\sqrt{12}-\sqrt{75}$; *b)* $\sqrt{32}+\sqrt{18}-\sqrt{50}-\sqrt{2}$; *c)* $\sqrt{252}-\sqrt{28}+\sqrt{63}-\sqrt{7}$;

   *d)* $(\sqrt{108}-\sqrt{12}+\sqrt{32}-\sqrt{8})\cdot(\sqrt{147}-\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{18})$;

   *e)* $(\sqrt{25a}+\sqrt{4b}-\sqrt{4a}-\sqrt{16b})\cdot(\sqrt{36a}+\sqrt{25b}-\sqrt{9a}-\sqrt{9b})$, ahol $a\geq 0, b\geq 0$.

4. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét!

   *a)* $\frac{2}{\sqrt{7}}$; *b)* $\frac{5}{3\cdot\sqrt{2}}$; *c)* $\frac{14}{\sqrt{2}-3}$; *d)* $\frac{33}{3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{7}}$;

   *e)* $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{3}}$; *f)* $\frac{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; *g)* $\frac{\sqrt{a}-3}{2\cdot\sqrt{a}+4}$.

5. Hasonlítsuk össze a következő törteket, melyik a nagyobb!

   *a)* $\frac{6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}$; *b)* $\frac{6}{2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}}, \frac{8}{\sqrt{14}-\sqrt{6}}$; *c)* $\frac{4}{2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}, \frac{6}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}$.

6. Végezzük el a következő műveleteket!

   *a)* $\frac{4\cdot\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}-\frac{2\cdot\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}}$; *b)* $\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}+\frac{6\cdot\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$; *c)* $\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-2}+\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+1}-\frac{3}{\sqrt{7}-1}$;

   *d)* $\frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}+2}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2}+\frac{2\cdot\sqrt{a}+15}{a-4}$, ahol $a\geq 0, a\neq 4$;

   *e)* $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$, ahol $x\geq 0, x\neq 1, x\neq 9$.

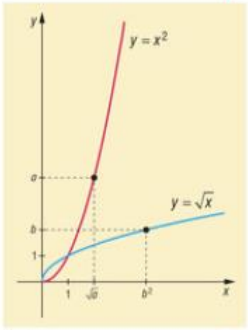
7. Számítsuk ki a kifejezések helyettesítési értékét, ha $y=\frac{1}{7}$!

   *a)* $\frac{1}{\sqrt{y}+2}+\frac{1}{2-\sqrt{y}}$; *b)* $\frac{\sqrt{y}+2}{3\cdot\sqrt{y}+1}+\frac{\sqrt{y}-2}{3\cdot\sqrt{y}-1}$.

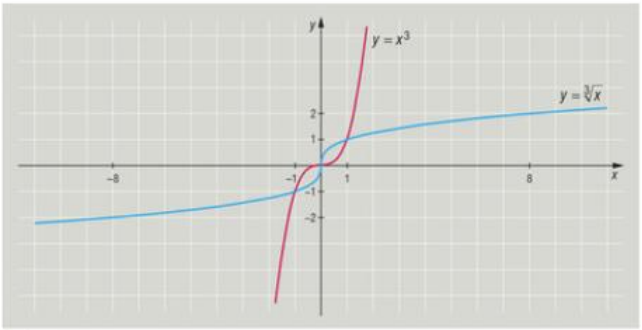
# 4. Számok *n*-edik gyöke

A nemnegatív számok négyzetgyökét azért tudtuk definiálni, mert minden nemnegatív szám előállítható egy másik nemnegatív szám négyzeteként. *(5. ábra)*

Vizsgáljuk meg az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ függvényt. Ez a függvény a valós számok halmazán értelmezett szigorúan növekvő, páratlan függvény. Értékkészlete a valós számok halmaza. *(6. ábra)*




5. ábra




6. ábra

Ha ennek a függvénynek a grafikonját tükrözzük az $y = x$ egyenesre, akkor az $f(x) = x^3$ függvény **inverzének** grafikonját kapjuk meg.

Az így kapott függvény minden $a$ valós számhoz hozzárendeli azt a valós számot, amelynek a harmadik hatványa (köbe) $a$.

A négyzetgyök mintájára ezt a számot az $a$ szám harmadik gyökének (köbgyökének) nevezzük, és $\sqrt[3]{a}$-val jelöljük.

**DEFINÍCIÓ: Az $a$ valós szám *köbgyöke* az a valós szám, amelynek harmadik hatványa $a$.**

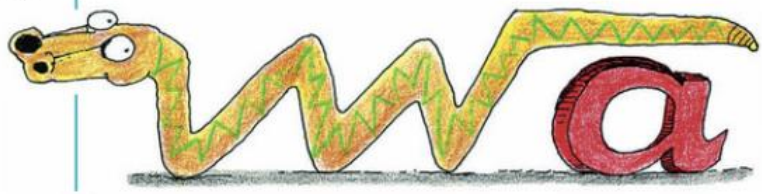
$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a,\ a \in \mathbb{R}.$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

$2^3 = 8$,
ezért $\sqrt[3]{8} = 2$.

$(-3)^3 = -27$,
ezért $\sqrt[3]{-27} = -3$.

A fentiek alapján definiálhatjuk a gyökvonást általános formában is, de meg kell különböztetnünk a páros és páratlan eseteket. Páros gyökvonás esetén a definíció hasonló a négyzetgyök definíciójához.





**Definíció:** **Egy nemnegatív $a$ szám $2k$-adik gyökén ($k \in \mathbb{N}^+$) azt a nemnegatív számot értjük, amelynek $2k$-adik hatványa $a$.**
**$\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$, ha $a \geq 0$.**

Például $\sqrt[4]{16} = 2$, mert $2^4 = 16$; $\sqrt[6]{729} = 3$, mert $3^6 = 729$.

**Definíció:** **Egy $a$ valós szám $(2k+1)$-edik gyökén ($k \in \mathbb{N}^+$) azt a valós számot értjük, amelynek $(2k+1)$-edik hatványa $a$.**
**$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$.**

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
$a \geq 0$

Például: $\sqrt[3]{8} = 2$, mert $2^3 = 8$; $\sqrt[5]{-243} = -3$, mert $(-3)^5 = -243$.

Általában $\sqrt[n]{a}$ esetén az $n$-t gyökkitevőnek nevezzük.

A négyzetgyök esetén nem szokás kiírni a gyökkitevőt.

A páros és páratlan gyökkitevőre vonatkozó definíciók közötti különbség azt eredményezi, hogy $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$ és $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$.

Például:

$$\sqrt[8]{(-3)^8} = 3, \text{ de } \sqrt[7]{(-3)^7} = -3;$$

vagy

$$\sqrt[20]{(-5)^{20}} = 5, \text{ de } \sqrt[41]{(-5)^{41}} = -5.$$

Christoff Rudolff cseh származású bécsi matematikus 1525-ben megjelent művében használta először a négyzetgyökre a $\surd$, a köbgyökre a $\surd\surd$, a negyedik gyökre a $\surd\surd\surd$ jeleket.

**1. példa**

Számítsuk ki a következő gyökvonások eredményét!

*a)* $\sqrt[9]{1}$; *b)* $\sqrt[3]{-8}$; *c)* $\sqrt[3]{125}$; *d)* $\sqrt[7]{128}$; *e)* $\sqrt[5]{-100000}$; *f)* $\sqrt[7]{0}$; *g)* $\sqrt[8]{-1}$.

**Megoldás**

*a)* $1 = 1^9$, ezért $\sqrt[9]{1} = 1$;

*b)* $-8 = (-2)^3$, ezért $\sqrt[3]{-8} = -2$;

*c)* $125 = 5^3$, ezért $\sqrt[3]{125} = 5$;

*d)* $128 = 2^7$, ezért $\sqrt[7]{128} = 2$;

*e)* $-100000 = (-10)^5$, ezért $\sqrt[5]{-100000} = -10$;

*f)* $0 = 0^7$, ezért $\sqrt[7]{0} = 0$;

*g)* a $-1$ negatív szám, ezért a $\sqrt[8]{-1}$-nek nincs értelme.

A 13. század kínai matematikusai az $x^n = a$ egyenlet megoldása útján tetszőleges számból tudtak gyököt vonni.



**2. példa**

Végezzük el a gyökvonásokat!

*a)* $\sqrt[4]{a^4}$; *b)* $\sqrt[5]{a^5}$; *c)* $\sqrt[6]{a^{12}}$; *d)* $\sqrt[10]{a^{30}}$; *e)* $\sqrt[38]{a^{19}}$; *f)* $\sqrt[4]{-a^4}$.

**Megoldás**

*a)* $\sqrt[4]{a^4}$ minden valós számra értelmezett, $\sqrt[4]{a^4} = |a|$.

*b)* $\sqrt[5]{a^5}$ szintén minden valós számra értelmezett, $\sqrt[5]{a^5} = a$.

*c)* $\sqrt[6]{a^{12}}$ szintén minden valós számra értelmezett. Mivel $a^{12} = (a^2)^6$, ezért $\sqrt[6]{a^{12}} = |a^2| = a^2$.

*d)* $\sqrt[10]{a^{30}}$ minden valós számra értelmezett. Mivel $a^{30} = (a^3)^{10}$, ezért $\sqrt[10]{a^{30}} = |a^3|$.

*e)* $\sqrt[38]{a^{19}}$ értelmezett, ha $a \geq 0$. Mivel $a^{19} = \left(\sqrt{a}\right)^{38}$, ezért $\sqrt[38]{a^{19}} = \sqrt{a}$.

*f)* $\sqrt[4]{-a^4}$ értelmezett, ha $-a^4 \geq 0$, ez pedig csak akkor igaz, ha $a = 0$, ekkor $\sqrt[4]{0} = 0$.

## Feladatok

1. Számítsuk ki a következő gyökvonások eredményét!

*a)* $\sqrt[5]{32}$; *b)* $\sqrt[3]{64}$; *c)* $\sqrt[6]{64}$; *d)* $\sqrt[3]{-27}$;

*e)* $\sqrt[3]{-125}$; *f)* $\sqrt[9]{512}$; *g)* $\sqrt[9]{-512}$; *h)* $\sqrt[3]{1000}$;

*i)* $\sqrt[3]{-216}$.

2. Végezzük el a következő gyökvonásokat!

*a)* $\sqrt[10]{a^{10}}$; *b)* $\sqrt[31]{b^{31}}$; *c)* $\sqrt[5]{(-c)^5}$; *d)* $\sqrt[6]{(-d)^6}$;

*e)* $\sqrt[7]{e^{21}}$; *f)* $\sqrt[8]{f^{16}}$; *g)* $\sqrt[8]{g^{24}}$; *h)* $\sqrt[40]{h^{200}}$;

*i)* $\sqrt[6]{\sqrt[7]{x^{42}}}$.

**Rejtvény**

**Írjuk fel a következő számokat négy darab 4-es számjegy és műveleti jelek segítségével!**

**10; 14; 18; 22; 32.**



## 5. Az *n*-edik gyökvonás azonosságai

A következő fontos tételek (azonosságok) bizonyítása során felhasználjuk, hogy az $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$ és $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ függvényekhez hasonlóan az $x \mapsto x^n$ és $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ függvények is szigorúan monoton növekvőek a **nemnegatív számok halmazán** *(7. ábra)*.

**I. azonosság**

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
$$a, b \geq 0;\ n \in \mathbb{N};\ n \geq 2$$

**TÉTEL:** **Szorzat *n*-edik gyöke megegyezik a tényezők *n*-edik gyökének szorzatával.**

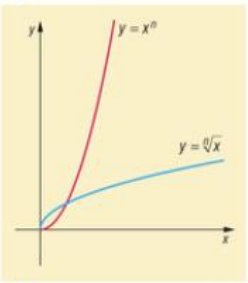
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, **ahol** $a, b \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$.

**Bizonyítás**

A már említett függvények szigorú monotonitása miatt megtehetjük, hogy az egyenlőség két oldalán álló kifejezések *n*-edik hatványát hasonlítjuk össze.

$$\left(\sqrt[n]{a \cdot b}\right)^n \overset{\text{definíció}}{=} a \cdot b; \qquad \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n \overset{\text{hatványozás III. azonosság}}{=} \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \overset{\text{definíció}}{=} a \cdot b.$$

Mivel a két hatvány egyenlő, ezért az eredetiek is megegyeznek.




*7. ábra*

**1. példa**

Számítsuk ki az $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$ szorzat értékét!

**Megoldás**

Az I. azonosság alapján: $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8 \cdot 4} = \sqrt[5]{32} = 2$.

**II. azonosság**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$a \geq 0;\ b > 0;\ n \in \mathbb{N};\ n \geq 2$$

**TÉTEL:** **Tört *n*-edik gyöke egyenlő a számláló és a nevező *n*-edik gyökének hányadosával.**

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, **ahol** $a \geq 0$; $b > 0$; $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$.

**Bizonyítás**

Ismét emeljük mindkét oldalt *n*-edik hatványra!

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n \overset{\text{definíció}}{=} \frac{a}{b}; \qquad \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n \overset{\text{hatványozás IV. azonosság}}{=} \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} \overset{\text{definíció}}{=} \frac{a}{b}.$$

Mivel a két hatvány egyenlő, ezért az állítás igaz.



**2. példa**

Számítsuk ki a $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$ tört értékét!

**Megoldás**

A II. azonosság alapján: $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = 2$.





III. azonosság

$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$
$a > 0;\ k \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N};\ n \geq 2$

**TÉTEL:** **A gyökvonás és a hatványozás felcserélhető műveletek.**

$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$, **ahol** $k \in \mathbb{Z}$; $a > 0$; $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$.

**Bizonyítás**

Emeljük újra mindkét oldalt $n$-edik hatványra!

$$\left(\sqrt[n]{a^k}\right)^{n \text{ (definíció)}} = a^k; \quad \left[(\sqrt[n]{a})^k\right]^{n \text{ (hatványozás V. azonosság)}} = (\sqrt[n]{a})^{k \cdot n} = (\sqrt[n]{a})^{n \cdot k} = \left[(\sqrt[n]{a})^n\right]^{k \text{ (hatványozás V. azonosság, definíció)}} = a^k.$$

$(x^m)^n = x^{n \cdot m}$

Mivel a két hatvány egyenlő, ezért az eredeti kifejezések is megegyeznek.

**3. példa**

Számítsuk ki az $(\sqrt[5]{3})^{10}$ hatvány értékét!

**Megoldás**

Alkalmazzuk a III. azonosságunkat: $(\sqrt[5]{3})^{10} = \sqrt[5]{3^{10}} = 3^2 = 9$.

**4. példa**

Számítsuk ki a $\sqrt[4]{6-\sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6+\sqrt{20}}$ szorzat pontos értékét!

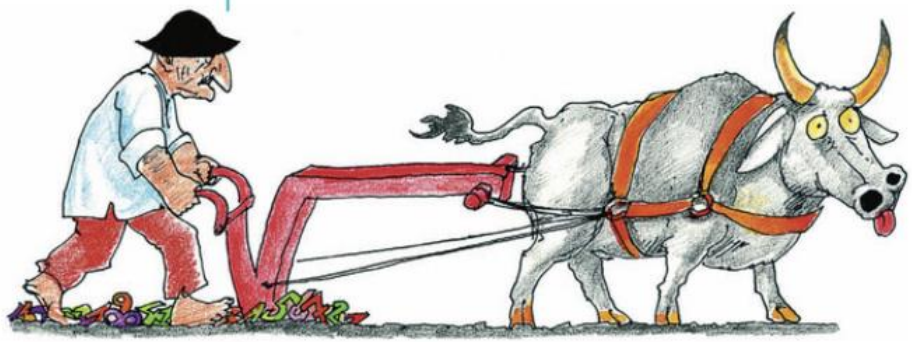
**Megoldás**

Vigyük a szorzatot egy gyökjel alá, a kialakuló nevezetes szorzatot írjuk át:

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$

$$\sqrt[4]{6-\sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6+\sqrt{20}} = \sqrt[4]{(6-\sqrt{20})\cdot(6+\sqrt{20})} =$$

$$= \sqrt[4]{6^2 - (\sqrt{20})^2} = \sqrt[4]{36-20} = \sqrt[4]{16} = 2.$$





## Bevitel a gyökjel alá

bevitel a gyökjel alá

$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$

$a, b \geq 0; n \in \mathbb{N}; n \geq 2$

A ***gyökjel alá bevitel*** hasonlóan végezhető el, mint azt a négyzetgyökös kifejezéseknél láttuk.

**5. példa**

Melyik a nagyobb: $3 \cdot \sqrt[3]{5}$ vagy $2 \cdot \sqrt[3]{17}$ ?

**Megoldás**

Harmadik hatványra emelve a gyök előtti szorzókat, vigyük be őket a gyökjel alá:

$$3 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{135},$$

a másik számnál

$$2 \cdot \sqrt[3]{17} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{17} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 17} = \sqrt[3]{136}.$$

Tehát a második szám a nagyobb.



## Kiemelés a gyökjel alól

kiemelés a gyökjel alól

A ***gyökjel alól való kiemelés*** is az ismert módon végezhető el.

**6. példa**

A következő kifejezésekben hozzunk ki a gyökjel alól, amit tudunk!

*a)* $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162}$; *b)* $\sqrt[5]{32a^6} - \sqrt[5]{a^{11}}$; *c)* $\sqrt[6]{a^8b^7} - \sqrt[4]{a^6b^7} + \sqrt[5]{a^7b^{19}}$.

**Megoldás**

*a)* A gyökjelek alatt alakítsunk ki negyedik hatványokat, azokból vonjunk gyököt:

$16 = 2^4$

$81 = 3^4$

$$\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{16 \cdot 2} + \sqrt[4]{81 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt[4]{2} + 3 \cdot \sqrt[4]{2} = 5 \cdot \sqrt[4]{2}.$$

*b)* Az ötödik gyök miatt a kifejezés minden valós $a$ esetén értelmezve van. A gyökjelek alatt alakítsunk ki ötödik hatványokat:

$$\sqrt[5]{32a^6} - \sqrt[5]{a^{11}} = \sqrt[5]{2^5a^5a} - \sqrt[5]{a^{10}a} =$$
$$= 2a \cdot \sqrt[5]{a} - a^2 \cdot \sqrt[5]{a}.$$

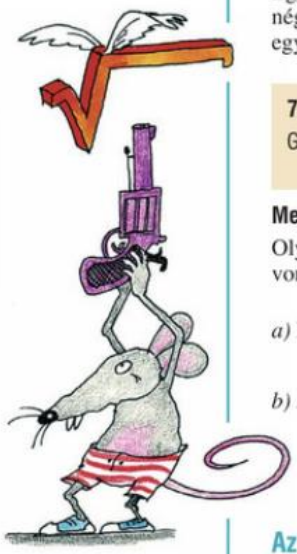
Összevonni nem tudunk, legfeljebb kiemelni:

$$2a \cdot \sqrt[5]{a} - a^2 \cdot \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a} \cdot (2a - a^2) = a \cdot \sqrt[5]{a} \cdot (2 - a).$$

*c)* A kifejezés minden valós $a$ és $b \geq 0$ esetén értelmezve van. Hozzuk létre a gyökök alatt a megfelelő hatványokat:

$$\sqrt[6]{a^8b^7} - \sqrt[4]{a^6b^7} + \sqrt[5]{a^7b^{19}} =$$
$$= \sqrt[6]{a^6b^6a^2b} - \sqrt[4]{a^4b^4a^2b^3} + \sqrt[5]{a^5b^{15}a^2b^4} =$$
$$= |a| \cdot b \cdot \sqrt[6]{a^2b} - |a| \cdot b \cdot \sqrt[4]{a^2b^3} + ab^3 \cdot \sqrt[5]{a^2b^4}.$$

a nevező gyöktelenítése



## A nevező gyöktelenítése

Egy tört ***nevezőjének gyöktelenítése*** is hasonlóan hajtható végre, mint négyzetgyökvonás esetén. A probléma összetettsége miatt csak az egytagú nevezők esetét vizsgáljuk.

**7. példa**

Gyöktelenítsük a törtek nevezőit: *a)* $\frac{12}{\sqrt[3]{3}}$; *b)* $\frac{23}{2\cdot\sqrt[5]{a^2}}$!

**Megoldás**

Olyan bővítéseket kell végrehajtanunk, hogy a nevezőkben a gyökvonás könnyen elvégezhető legyen.

*a)* Bővítsünk $\sqrt[3]{3^2}$-nel: $\frac{12}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{12\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{12\cdot\sqrt[3]{9}}{3}=4\cdot\sqrt[3]{9}$.

*b)* A kifejezés értelmezve van, ha $a\neq 0$. Bővítsük a törtet $\sqrt[5]{a^3}$-nal:

$$\frac{23}{2\cdot\sqrt[5]{a^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^3}}=\frac{23\cdot\sqrt[5]{a^3}}{2\cdot\sqrt[5]{a^5}}=\frac{23\cdot\sqrt[5]{a^3}}{2a}.$$

## Az *n*-edik gyökvonás további azonosságai

IV. azonosság

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$
$a\geq 0; m,n\in\mathbb{N}; m,n\geq 2$

**TÉTEL:** **Gyöknek a gyökét felírhatjuk úgy is, hogy a gyökjelek alatti kifejezésből olyan kitevővel vonunk gyököt, amely az eredeti gyökkitevők szorzata.**

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$, **ahol** $a\geq 0$; $m,n\in\mathbb{N}$; $m,n\geq 2$.

**Bizonyítás**

Emeljük mindkét oldalt $m\cdot n$-edik hatványra!

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{m\cdot n}\overset{\text{hatványozás V. azonosság}}{=}\left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{n}\right]^{m}\overset{\text{definíció}}{=}\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m}\overset{\text{definíció}}{=}a;\qquad \left(\sqrt[n\cdot m]{a}\right)^{n\cdot m}\overset{\text{definíció}}{=}a.$$

Mivel eredményeink egyenlők, ezért az eredeti kifejezések is azonosak.

$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{8}=2$
$\sqrt[6]{64}=2$

**8. példa**

Írjuk fel a $\sqrt[7]{3\cdot\sqrt[5]{3}}$ számot egy gyökjellel!

**Megoldás**

Vigyük be a 3-at az ötödikgyök alá, majd alkalmazzuk az előző azonosságot: $\sqrt[7]{3\cdot\sqrt[5]{3}}=\sqrt[7]{\sqrt[5]{3^5}\cdot\sqrt[5]{3}}=\sqrt[7]{\sqrt[5]{3^5\cdot 3}}=\sqrt[35]{3^6}$.

**TÉTEL:** **A gyök és a hatványkitevő egyszerűsíthető, illetve bővíthető.**

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$, **ahol** $a>0$; $n,k\in\mathbb{N}$; $n,k\geq 2$; $m\in\mathbb{Z}$.

V. azonosság

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$

$a>0; n,k\in\mathbb{N}; n,k\geq 2; m\in\mathbb{Z}$

**Bizonyítás**

Emeljük mindkét oldalt $n\cdot k$-adik hatványra!

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n\cdot k} \overset{\text{hatványozás V. azonosság}}{=} \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^k \overset{\text{definíció}}{=} \left(a^m\right)^k \overset{\text{hatványozás V. azonosság}}{=} a^{m\cdot k}; \quad \left(\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}\right)^{n\cdot k} \overset{\text{definíció}}{=} a^{m\cdot k}.$$

A két oldal hatványai azonosak, így az eredeti kifejezések is egyenlők.

**9. példa**

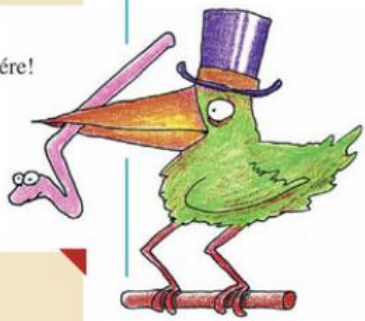
Végezzük el a műveleteket: *a)* $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[6]{3^5}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{b}}$, $b>0$.

**Megoldás**

*a)* Bővítsük a gyököket a 4 és 6 legkisebb közös többszörösére!

$$\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[6]{3^5} = \sqrt[12]{3^3}\cdot\sqrt[12]{3^{10}} = \sqrt[12]{3^{13}} = 3\cdot\sqrt[12]{3}.$$

*b)* Az előző módszerrel: $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{\sqrt[6]{b^3}}{\sqrt[6]{b^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{b^3}{b^2}} = \sqrt[6]{b}$.



**10. példa**

Gyöktelenítsük a törtek nevezőit! *a)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$; *b)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}$.

**Megoldás (a)**

A gyöktelenítést az $(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ azonosság felhasználásával végezhetjük el.

Bővítsünk a $\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}$ számmal!

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}{5+3} = \frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}{8}.$$

$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$

**Megoldás (b)**

Alkalmazzuk az $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ azonosságot!

Bővítsünk a $\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}$ számmal!

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{7-2} = \frac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}}{5}.$$

$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

## Feladatok

1. Adjuk meg az alábbi szorzatok pontos értékét!

   *a)* $\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$;  *b)* $\sqrt[3]{12+\sqrt{19}}\cdot\sqrt[3]{12-\sqrt{19}}$;

   *c)* $\sqrt[3]{\sqrt{57}-11}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{57}+11}$;  *d)* $\sqrt[19]{4\cdot\sqrt{3}+7}\cdot\sqrt[19]{4\cdot\sqrt{3}-7}$;

   *e)* $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$;  *f)* $\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}$.

2. Melyik szám a nagyobb:

   *a)* $2\cdot\sqrt[4]{26}$ vagy $3\cdot\sqrt[4]{5}$;  *b)* $5\cdot\sqrt[3]{7}$ vagy $6\cdot\sqrt[3]{4}$;

   *c)* $3\cdot\sqrt[5]{5}$ vagy $2\cdot\sqrt[5]{37}$?

3. Írjuk fel egyetlen gyökjellel a következő kifejezéseket! Adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát!

   *a)* $\sqrt[5]{2\cdot\sqrt[4]{2}}$;  *b)* $\sqrt[6]{5\cdot\sqrt[3]{5}}$;  *c)* $\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[5]{a}}$;  *d)* $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{a}}}$;

   *e)* $\sqrt[5]{a^2\cdot\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{a}}}$;  *f)* $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt{a}$;  *g)* $\dfrac{\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt{b}}$;  *h)* $\dfrac{\sqrt[8]{a^7}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$.

4. A gyökjelek alól való kiemelés után hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

   *a)* $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{375}$;  *b)* $\sqrt[4]{16a^5}-\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{81a^5}$;

   *c)* $\sqrt[5]{a^7b}+\sqrt[5]{a^{12}b^6}-\sqrt[5]{a^2b^6}$;  *d)* $\sqrt[4]{625a^6}-\sqrt[4]{81a^{10}}-\sqrt[4]{a^{14}}$;

   *e)* $\sqrt[8]{a^{18}b^{23}}+\sqrt[8]{a^{10}b^{13}}-\sqrt[8]{a^{14}b^9}$;  *f)* $\sqrt[n]{a^{n+3}}+\sqrt[n]{a^{2n+1}}-\sqrt[n]{a^{3n}}$.

5. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőit!

   *a)* $\dfrac{1}{\sqrt[4]{7}}$;  *b)* $\dfrac{16}{5\cdot\sqrt[3]{4}}$;  *c)* $\dfrac{16}{3\cdot\sqrt[5]{2}}$;  *d)* $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$;  *e)* $\dfrac{3a}{5\cdot\sqrt[6]{a}}$.

**Rejtvény**

**Adjuk meg a $\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[8]{2}$; $\sqrt[16]{2}$; … számsorozat legnagyobb olyan tagját, amely kisebb, mint 1,001!**

# A másodfokú egyenlet

*A matematikatörténet egyenletekkel foglalkozó fejezete tele van regénybe illő pillanatokkal. A merész és előremutató gondolatok nem minden esetben nyerték el a kortársak elismerését.*

*A görög Hippaszoszt tengerbe vetették újszerű gondolataiért.*

*A 16. század matematikusai versenyre hívták ki egymást. Ezek dicsőséget vagy szégyent hoztak a vetélkedőknek, de mindenképpen a tudomány fejlődését szolgálták.*

*1832. május 30. hajnalán Évariste Galois, a 20 éves francia forradalmár, egy hölgy becsületéért vívott párbajban haslövést kapott. Előző éjszaka vetette papírra azon gondolatait, melyek a magasabb fokú egyenletek megoldhatóságának kérdéseiben új fejezetet nyitottak a matematikában.*

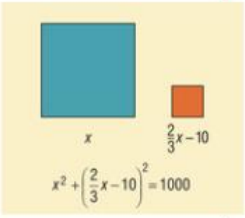




# 1. A másodfokú egyenlet és függvény

Egyenletek alkalmazásával számos feladat és gyakorlati probléma könnyen megoldható. Sokszor előfordul azonban, hogy a felállított egyenletben az ismeretlent jelölő betűk magasabb fokszámon szerepelnek. Ebben a fejezetben olyan eljárásokat keresünk, amelyekkel ezeknek az egyenleteknek a megoldását is meg tudjuk határozni.

A Mezopotámiában Kr. e. 2000 táján kiégetett ékírásos agyagtáblák alapján megállapítható, hogy abban az időben már nagy biztonsággal oldották meg ezeket a feladattípusokat. Ebből az időből származik a következő feladat:




*Két négyzet területösszege 1000 területegység. Az egyik négyzet oldala a másik oldalának 2/3-ánál tízzel kisebb. Mekkorák a négyzet oldalai?*

A feladatban szereplő négyzetoldalt $x$-szel jelölve, a következő egyenletet kapjuk eredményül:

$$x^2+\left(\frac{2}{3}x-10\right)^2=1000,$$

$$x^2+\frac{4}{9}x^2-\frac{40}{3}x+100=1000,$$

$$9x^2+4x^2-120x+900=9000,$$

$$13x^2-120x-8100=0.$$

◆ ◆ ◆

A görög aranykor egyik híres matematikai feladatának keletkezését *Plutarkhosz* görög történetírótól ismerjük. Délosz szigetén pestis dühöngött, ezért a délosziak a delphoi jósdához fordultak tanácsért. Azt a választ kapták, hogy ha a pestistől meg akarnak szabadulni, akkor cseréljék ki Apollón templomának kocka alakú oltárkövét kétszer akkorára. Innét származik a *déloszi probléma* néven híressé vált feladat:

*Megszerkesztendő annak a kockának az éle, melynek térfogata kétszerese egy adott kocka térfogatának.*

A feladatot nem tudták megoldani. Az összemérhetetlen arányok felfedezését METAPONTUMI HIPPASZOSZNAK tulajdonítják. A pitagoreusok, akik azt hirdették, hogy az univerzum minden jelensége egész számokra vagy azok arányaira vezethető vissza, Hippaszoszt büntetésül a tengerbe vetették.

Ha az eredeti oltárkő térfogatát egységnyinek választjuk, akkor a keresett kocka $x$ élére fennáll a következő:

$$x^3=2.$$

◆ ◆ ◆

A világegyetemből felénk áradó információáradatból hatalmas antennarendszerekkel próbálják kiszűrni azokat a jeleket, amelyek a földön kívüli élet és civilizáció létezését igazolnák. Ugyanakkor a Földről is információ tömege sugárzódik szét a tér minden irányába. Az eszköz, amelyet ezen adatok küldésére és fogadására építenek, a *parabola-antenna*. Ugyanilyen felületet formál meg a forgó pohárban a folyadék felszíne.



A másodfokú függvények tulajdonságait korábban már tanulmányoztuk. Az alábbi feladatban felelevenítjük az akkor elhangzottakat.

**1. példa**

Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényt: $f(x) = 2x^2 + 12x + 16$.

**Megoldás**

A grafikon elkészítése előtt a megadott hozzárendelési utasítást olyan alakra hozzuk, hogy a transzformációkat könnyen le tudjuk olvasni belőle. Ezt az eljárást nevezzük **teljes négyzetté alakításnak.**

$$f(x) = 2x^2 + 12x + 16 = 2(x^2 + 6x) + 16 = 2(x^2 + 6x + 9 - 9) + 16 =$$
$$= 2[(x+3)^2 - 9] + 16 = 2(x+3)^2 - 18 + 16 = 2(x+3)^2 - 2.$$

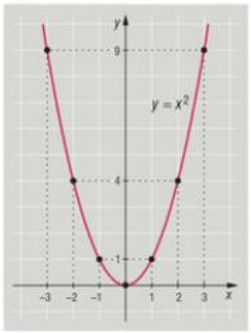
Az $f_1(x) = x^2$ másodfokú függvényről a következő tulajdonságokat állapítottuk meg *(1. ábra)*:

(1) Páros függvény.

(2) Zérushelye $x = 0$.

(3) Ha $x \le 0$, akkor a függvény szigorúan monoton csökken, ha $x \ge 0$, akkor pedig szigorúan monoton nő.

(4) $x = 0$-nál a függvénynek minimuma van, és ennek az értéke $f_1(0) = 0$.



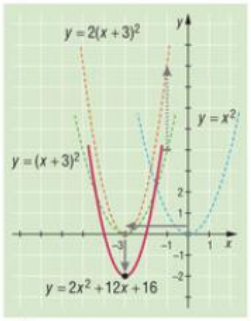

*1. ábra*

Az általunk vizsgált $f$ függvény grafikonját úgy nyerhetjük az $f_1(x) = x^2$ függvény grafikonjának normál parabolájából, hogy azt a teljes négyzetté alakítás során kapott hozzárendelési szabály alapján transzformáljuk. Ennek lépései a következők:

$f_2(x) = (x+3)^2$: az $x$ tengely mentén negatív irányban való eltolás, a parabola csúcspontja a $P(-3; 0)$.

$f_3(x) = 2(x+3)^2$: a függvényértékeket megkétszerezzük. Egy megnyújtott parabolát kapunk eredményül, melynek minden pontja kétszer akkora távolságra kerül az $x$ tengelytől. (Ezt a transzformációt a geometriában merőleges affinitásnak nevezzük.)

$f(x) = 2(x+3)^2 - 2$: az $y$ tengely irányában való eltolás 2 egységgel negatív irányban, így a csúcspont a $C(-3; -2)$ pontba kerül *(2. ábra)*.




*2. ábra*

A függvény néhány **tulajdonsága:**

(1) Két zérushelye van: $x_1 = -4$ és $x_2 = -2$.

(2) Ha $x \le -3$, akkor a függvény szigorúan monoton csökken, ha $x \ge -3$, akkor pedig szigorúan monoton nő.

(3) $x = -3$-nál minimuma van, és ennek az értéke $f(-3) = -2$.

Az előzőek alapján általában megállapíthatjuk a következőket:

**A másodfokú függvény hozzárendelési szabálya általános esetben:**

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ ahol } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ b, c \in \mathbb{R}.$$

Ha $a > 0$, akkor a grafikon felfelé nyitott, ha $a < 0$, akkor lefelé nyitott parabola.




3. ábra

**Célszerű a másodfokú függvények hozzárendelési szabályát a következő *teljes négyzet* alakra hozni:**

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a(x - u)^2 + v, \text{ ahol } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ u, v \in \mathbb{R}.$$

**A normál parabolát ekkor $a$-szorosára nyújtjuk, és a $\vec{v}(u; v)$ vektorral eltoljuk úgy, hogy a parabola csúcspontja a $C(u; v)$ pontba kerül.**

**Azt az $x$ valós számot, ahol $f(x) = 0$, a függvény *zérushelyének* nevezzük.**

**Egy másodfokú függvénynek 0, 1 vagy 2 zérushelye létezhet, hiszen a parabola – elhelyezkedésétől függően – legfeljebb két pontban metszheti az $x$ tengelyt.** *(3. ábra)*

**2. példa**

Határozzuk meg a következő függvényben a $q$ értékét úgy, hogy a függvény helyettesítési értéke minden $x$ valós számra pozitív legyen!

$$f(x) = x^2 + 2qx + q^2 + 2q - 4.$$

**Megoldás**

Mivel $x^2$ együtthatója pozitív, ezért a parabola felfelé nyitott, így lehetséges, hogy minden valós szám esetén pozitív értéket vesz fel.

Első lépésben alakítsuk a függvény hozzárendelési szabályát teljes négyzetté:

$$f(x) = x^2 + 2qx + q^2 + 2q - 4 = (x + q)^2 + 2q - 4.$$

Mivel ennek a kifejezésnek az első tagja másodfokú, és ez minden esetben nemnegatív, ezért a függvény helyettesítési értéke akkor lesz minden esetben pozitív, ha teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$2q - 4 > 0,$$
$$q > 2.$$

Tehát így kell megválasztanunk a $q$ értékét a megadott feltételek miatt. Ekkor a függvény grafikonja az $y$ tengely mentén pozitív irányban tolódik el.

## Feladatok

1. Alakítsuk teljes négyzetté a következő kifejezéseket!

   *a)* $x^2 - 4x + 4$; *b)* $x^2 - 6x + 8$; *c)* $x^2 + 8x - 2$;

   *d)* $2x^2 + 8x - 5$; *e)* $-x^2 + 8x - 2$; *f)* $-3x^2 + 6x + 1$.

2. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

   *a)* $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$, $f_3(x) = 2(x-1)^2$, $f_4(x) = 2(x-1)^2 + 1$;

   *b)* $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$, $f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^2$, $f_4(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^2 - 2$;

   *c)* $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -3x^2$, $f_3(x) = -3(x-1)^2$, $f_4(x) = -3(x-1)^2 - 1$.

3. Ábrázoljuk és jellemezzük a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

   *a)* $f(x) = x^2 - 4x + 3$; *b)* $f(x) = -x^2 - 4x + 3$; *c)* $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

   Határozzuk meg a függvények zérushelyeit, illetve amennyiben létezik, a maximum ill. minimum helyeit és értékeit!

4. A következő, a valós számok halmazán értelmezett függvényekben határozzuk meg a $q$ értékét úgy, hogy a függvénynek 0 zérushelye; 1 zérushelye; 2 zérushelye legyen!

   *a)* $f(x) = x^2 - 4x + q$; *b)* $f(x) = -x^2 - 4x + q$; *c)* $f(x) = 2x^2 - 4x + q$.

5. Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + px + q$ függvényben határozzuk meg a $p$ és $q$ értékét úgy, hogy a függvény

   *a)* a minimumát az $x = 1$ helyen vegye fel, és annak értéke 2 legyen;

   *b)* a minimumát az $x = -1$ helyen vegye fel, és annak értéke $-2$ legyen;

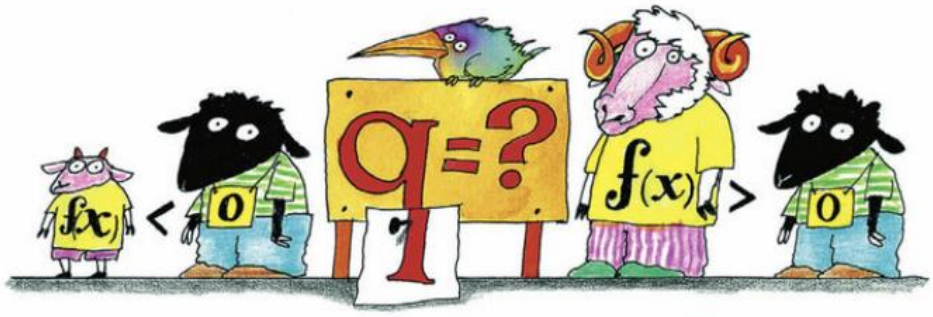
   *c)* a minimumát az $x = 4$ helyen vegye fel, és annak értéke $-3$ legyen!

6. Hogyan kell a $q$ értékét megválasztani, hogy a következő függvények minden értéke pozitív legyen a valós számok halmazán?

   *a)* $f(x) = x^2 + 6x + q$; *b)* $f(x) = x^2 - 4x + q$; *c)* $f(x) = 2x^2 + 8x + q$.

7. Hogyan kell a $q$ értékét megválasztani, hogy a következő függvények minden értéke negatív legyen a valós számok halmazán?

   *a)* $f(x) = -x^2 - 4x + q$; *b)* $f(x) = -x^2 + 2x + q$; *c)* $f(x) = -2x^2 - 4x + q$.



A másodfokú egyenleteket már az ókor matematikusai is meg tudták oldani. A harmad- és negyedfokú egyenletek megoldásainak keresése fontos szerepet töltött be az egyenletek tulajdonságainak megismerésében. Különösen az olasz matematikusok, N. F. TARTAGLIA, G. CARDANO és L. FERRARI (1522–1565) eredményei voltak jelentősek ezen a téren.



N. F. TARTAGLIA [tartalja] (1500–1557)

$$x^2 = a^2,$$
$$|x| = |a|,$$
$$x_1 = a \text{ vagy } x_2 = -a$$



G. CARDANO (1501–1576)

# 2. A másodfokú egyenlet megoldóképlete

## Bevezető példák

A 15–16. században a kereskedelem, a hajózás, a földmérés és a csillagászat fejlődése jótékonyan hatott a matematika fejlesztésére is. Szokássá vált, hogy a matematikával foglalkozó számolómesterek tudományos párbajra hívták ki egymást. Ezekben a párbajokban jelentős előnyre tehetett szert az, aki bizonyos egyenlettípusok gyökeinek megkereséséhez valamilyen képletet tudott használni. A győzelem iránti vágy sok versenyzőt ösztönzött arra, hogy olyan megoldóképleteket dolgozzon ki, amelyek az egyenletek gyökeit azonnal meghatározhatóvá teszik.

**Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakja:**

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

**ahol az $a, b, c$ adott valós számok, és $a \neq 0$.**

A másodfokú függvények zérushelyének megkeresésekor a másodfokú kifejezést teljes négyzetté alakítottuk. Ez a módszer az egyenlet gyökeinek megkeresésekor is hasznos segédeszköz lehet.

**1. példa**

Oldjuk meg a(z) $x^2 = 144$ egyenletet!

**Megoldás**

Ebben az esetben azokat a számokat keressük, amelyeknek a négyzete 144. Két ilyen valós szám is létezik.

Mivel $\sqrt{x^2} = \sqrt{144}$, ezért $|x| = 12$, ahonnan $x_1 = 12$ és $x_2 = -12$.

◆ ◆ ◆

Általában az $ax^2 + c = 0$ egyenletet hasonlóan oldhatjuk meg. Először egy átrendezés után a következő adódik:

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Mivel az egyenlet bal oldala biztosan nemnegatív szám, a valós számok körében csak akkor kaphatunk megoldást, ha a jobb oldalra is teljesül a $-\frac{c}{a} \geq 0$ egyenlőtlenség. Ekkor az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad \text{illetve} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Ha $-\frac{c}{a} > 0$, akkor az egyenletnek két megoldása van. Ha $-\frac{c}{a} = 0$, akkor egy megoldás van, $x = 0$. Nincs megoldás, ha $-\frac{c}{a} < 0$.

**2. példa**

Oldjuk meg az $(x-5)^2 = 121$ egyenletet!

**Megoldás**

Az előző feladat gondolatmenetét követve vonjunk gyököt az egyenlet két oldalából:

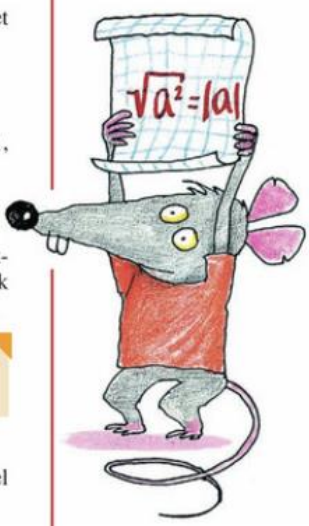
$$\sqrt{(x-5)^2} = \sqrt{121},$$
$$|x-5| = 11.$$

Itt felhasználtuk azt, hogy $\sqrt{a^2} = |a|$. Két lehetőség adódik: $x-5=11$, vagy $x-5=-11$. Ebből a feltételeknek is megfelelő megoldások:

$$x_1 = 16 \quad \text{és} \quad x_2 = -6.$$

◆ ◆ ◆

Általában a másodfokú egyenletek nem ilyen könnyen kezelhető alakban állnak a rendelkezésünkre. A megoldásban viszont törekedhetünk rá, hogy úgy rendezzük át, hogy a fenti típus adódjék.




**3. példa**

Oldjuk meg az $x^2 - 3x = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

**Megoldás**

Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldalán álló kifejezés kiemeléssel szorzattá alakítható:

$$x(x-3) = 0.$$

A szorzat akkor lesz 0, ha valamelyik tényezője 0, így az egyenletnek két megoldása lesz:

$$x_1 = 0, \text{ illetve } x_2 = 3.$$

**4. példa**

Oldjuk meg a $2x^2 - 8x = 10$ egyenletet a valós számok halmazán!

**Megoldás**

Az egyenlet egyik oldalát 0-ra redukálva, majd a bal oldalt teljes négyzetté alakítva:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x - 10 &= 0, \\ 2(x^2 - 4x) - 10 &= 0, \\ 2(x^2 - 4x + 4 - 4) - 10 &= 0, \\ 2\left[(x-2)^2 - 4\right] - 10 &= 0, \\ 2(x-2)^2 - 8 - 10 &= 0, \\ 2(x-2)^2 &= 18, \\ (x-2)^2 &= 9. \end{aligned}$$

Innen az előző feladatokban alkalmazott módszerrel:

$$\sqrt{(x-2)^2} = 3, \quad \text{amiből} \quad |x-2| = 3,$$

ahonnan $x-2=3$, vagy $x-2=-3$, vagyis $x_1 = 5$, illetve $x_2 = -1$.

Helyettesítéssel történő ellenőrzéssel láthatjuk, hogy mindkét gyök megoldása az eredeti egyenletnek.





## A másodfokú egyenlet megoldóképlete

A megoldott példák alapján adódhat az ötlet, hogy az általános alakban megadott másodfokú egyenletet is át tudjuk alakítani a fenti módszerrel, és megkereshetjük a megoldások általános alakját. Ez lesz a másodfokú egyenletek **megoldóképlete.**

Induljunk ki az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

egyenletből, ahol $a \neq 0$.

A bal oldalt alakítsuk teljes négyzetté! Ezt megkönnyíti, ha mindkét oldalt beszorozzuk $4a$-val:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Ha mindkét oldalhoz hozzáadunk $b^2$-et, akkor az egyenlet bal oldalán kialakíthatjuk a $2ax + b$ négyzetét:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Mivel az egyenletünk bal oldalán teljes négyzet áll, amely nem lehet negatív, ezért megoldást csak abban az esetben kaphatunk, ha a jobb oldalra is teljesül ez a feltétel. Az egyenletnek ezt az oldalát megvizsgálva a következő három eset fordulhat elő:

1. Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor az egyenletnek **nincs valós gyöke.**
2. Ha $b^2 - 4ac = 0$, akkor az egyenletünk:

$$(2ax + b)^2 = 0,$$

$$2ax + b = 0,$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Ekkor **egy valós megoldást** kaptunk, melyet a másodfokú egyenlet két egybeeső gyökének is szokás nevezni, azaz:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

3. Ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor mindkét oldalból négyzetgyököt vonva megoldjuk az egyenletet:

$$\sqrt{(2ax + b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Látható, hogy ekkor egyenletünknek **két valós megoldása** van.

Teljes négyzetté alakítással:

$$ax^2 + bx + c =$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x\right) + c =$$
$$= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Az 1. pontban említett feltételt mellőzve jutottak el a merészebb gondolatok megfogalmazói (így többek között G. CARDANO) 1545-ben olyan számok felírásához, amelyekben a négyzetgyökjel alatt negatív szám állt. Ezzel mutattak irányt a később megvalósuló, új számok (komplex számok) képzése felé. A komplex számok halmaza tartalmazza a valós számok halmazát, de bővebb annál.

Megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



A kapott eredményt szokás a másodfokú egyenlet **megoldóképletének** vagy **gyökképletének** nevezni.

A megoldás során vizsgált $b^2 - 4ac$ kifejezést az egyenlet **diszkriminánsának** nevezzük, és általában $D$-vel jelöljük. Látható, hogy ettől függ, hogy a másodfokú egyenletnek hány megoldása van a valós számok körében.

**diszkrimináns**

Ez alapján kimondható a következő tétel:

**TÉTEL:** **Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenletnek**

- **két valós gyöke van:** $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, **ha** $D = b^2 - 4ac > 0$;
- **egy valós gyöke van:** $x = -\dfrac{b}{2a}$, **ha** $D = b^2 - 4ac = 0$;
- **nincs valós gyöke, ha** $D = b^2 - 4ac < 0$.

diszkrimináns = latin eredetű szó, jelentése: meghatározó, döntő tényező

$D = b^2 - 4ac$

A valós gyök létezésének szükséges és elégséges feltétele: $D \geq 0$.

Ha $a = 1$, akkor a másodfokú egyenlet alakja így is felírható:

$x^2 + px + q = 0$, ahol $p$ és $q$ tetszőleges valós szám.

Ekkor a megoldóképlet a következő alakot ölti:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

**5. példa**

Oldjuk meg a $4x^2 = 3 - x$ egyenletet!

Az egyenletet a megoldóképlet használata előtt mindig 0-ra redukáljuk és a változó fokszáma szerint rendezzük.

**Megoldás**

Az egyenletet rendezzük úgy, hogy a jobb oldalon 0 álljon, és az ismeretlen kitevője szerint írjuk csökkenő sorrendbe a tagokat a bal oldalon:

$$4x^2 + x - 3 = 0.$$

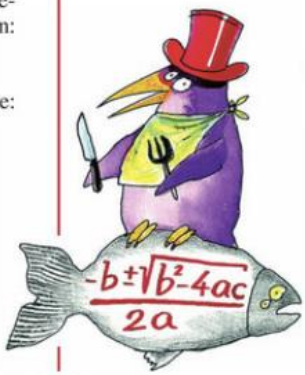
A megoldóképletbe az $a = 4$, $b = 1$, $c = -3$ értékeket behelyettesítve:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 48}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8} = \begin{cases} \frac{3}{4}, \\ -1 \end{cases}$$

azaz $x_1 = \dfrac{3}{4}$, $x_2 = -1$.

Ellenőrzés visszahelyettesítéssel:

$$4 \cdot \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 3 = 0 \quad \text{és} \quad 4 \cdot 1 - 1 - 3 = 0.$$



## Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket!
   *a)* $x^2 = 121$; *b)* $3x^2 = 27$;
   *c)* $x^2 - 256 = 0$; *d)* $2x^2 + 50 = 0$.

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket!
   *a)* $(x + 1)^2 = 4$; *b)* $(2x + 1)^2 = 25$;
   *c)* $(3x - 1)^2 - 16 = 9$; *d)* $(1 - x)^2 + 25 = 16$.

3. Oldjuk meg szorzattá alakítással a következő egyenleteket!
   *a)* $x^2 + 7x = 0$; *b)* $3x^2 - 8x = 0$;
   *c)* $2x^2 + 6x = x^2 - 8x$; *d)* $(x - 3)^2 - 2(x - 3) = 0$.

4. Alakítsuk teljes négyzetté, és oldjuk meg a következő egyenleteket!
   *a)* $x^2 - 3 = 2x$; *b)* $x^2 + 4x = 5$;
   *c)* $2x^2 = 4x + 23$; *d)* $-2x - 3 = x^2$.

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket, használjuk a megoldóképletet!
   *a)* $x^2 = -2x + 3$; *b)* $x^2 = 4x - 3$;
   *c)* $-x^2 + 10 = 3x$; *d)* $2x^2 = -8 + 8x$.

6. Rendezzük, majd oldjuk meg a következő egyenleteket!
   *a)* $(2x - 4)\cdot(x - 2) = 12x + 8$; *b)* $47 - y(3y + 4) = 2(17 - 2y) - 62$;
   *c)* $(v + 2)\cdot(v - 3) + (v + 3)\cdot(v - 2) = 20$; *d)* $(u - 3)^2 + (u + 4)^2 - (u - 5)^2 = 17u + 24$.

7. Az $ax^2 + 2x + 3 = 0$ egyenletben állapítsuk meg az $a$ paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek
   *a)* két különböző valós gyöke legyen; *b)* egy valós gyöke legyen;
   *c)* ne legyen megoldása a valós számok körében!

8. Az $x^2 + bx + 2 = 0$ egyenletben állapítsuk meg a $b$ paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek
   *a)* két különböző valós gyöke legyen; *b)* egy valós gyöke legyen;
   *c)* ne legyen megoldása a valós számok körében!

9. Az $x^2 - 4x + c = 0$ egyenletben állapítsuk meg a $c$ paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek
   *a)* két különböző valós gyöke legyen;
   *b)* egy valós gyöke legyen;
   *c)* ne legyen megoldása a valós számok körében!



# 3. A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés

A másodfokú egyenlet megoldóképletének megismerése jelentős mértékben meggyorsította az ilyen típusú egyenletre vezető feladatok megoldását. Vannak azonban olyan alakjai is ezeknek az egyenleteknek, amelyek megoldását egyszerűbben is megkaphatjuk.



**1. példa**

Oldjuk meg a $2(x-3)\cdot(x+1)=0$ egyenletet!

**Megoldás**

Ha a műveleteket elvégeznénk, akkor a $2x^2-4x-6=0$ másodfokú egyenletet nyerhetjük, amelyre alkalmazva a megoldóképletet, megoldásként az $x_1=3$ és az $x_2=-1$ adódik.

Ez a két megoldás azonnal látszik az egyenlet eredeti alakjából is, hiszen a bal oldal akkor és csak akkor lesz nullával egyenlő, ha az abban szereplő tényezők közül valamelyik nulla:

$$x-3=0 \quad \text{vagy} \quad x+1=0.$$

Ezekből az egyenletekből tehát a két gyök könnyen leolvasható.

A gondolatmenetből adódik a válasz az alábbi kérdésre:

**2. példa**

Alakítsuk szorzattá a $2x^2-3x-2$ polinomot!

**Megoldás**

A megoldás az előző feladat alapján úgy végezhető el, ha első lépésben megkeressük a $2x^2-3x-2=0$ másodfokú egyenlet gyökeit. Ezek a megoldóképlet alapján: $x_1=-\frac{1}{2}$ és $x_2=2$. A gyökök ismeretében felírhatunk egy olyan szorzatot, amely szintén ezeknél az értékeknél veszi fel a nulla értékét. Arra kell még ügyelnünk, hogy a szorzás elvégzése után minden együtthatónak meg kell egyeznie a feladatban szereplő együtthatókkal, ezért szükséges az egyenletet 2-vel megszorozni.

$\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)=x^2-\frac{3}{2}x-1$

Így az egyenlet:

$$2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)=0,$$

amelyet $(2x+1)(x-2)=0$ alakban is írhatunk. A bal oldalon szereplő szorzat a keresett kifejezés:

$$2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2).$$

Ennek helyességéről a szorzás elvégzésével meggyőződhetünk.

Általában igaz, hogy ha egy másodfokú polinomnak van valós gyöke, akkor szorzattá tudjuk alakítani:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\cdot(x - x_2).$$

gyöktényezős alak

**DEFINÍCIÓ: Az $a(x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0$ alakot a másodfokú egyenlet *gyöktényezős alakjának* nevezzük.**

◆ ◆ ◆

A megoldóképlet vizsgálata további egyszerű kapcsolatokra mutat rá. Ha a másodfokú egyenletnek léteznek valós megoldásai, akkor ezek:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A két gyök összegére és szorzatára a következő kifejezések adódnak:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

**Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között fennállnak a következő összefüggések:**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{és} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

**Ezeket az összefüggéseket Viète-féle formuláknak is nevezzük.**

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Viète-féle formulák



A Viète-féle formulák ismeretében igazolhatjuk a gyöktényezős alakra vonatkozó $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ állításunkat. Ha a másodfokú egyenlet általános alakjából $a$-t kiemelünk, és a $\frac{b}{a}$, valamint a $\frac{c}{a}$ helyére a formulákban szereplő kifejezéseket helyettesítjük, akkor a következő átalakítások végezhetők el:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1\cdot x_2] =$$

$$= a(x^2 - x_1\cdot x - x_2\cdot x + x_1\cdot x_2) = a(x - x_1)\cdot(x - x_2).$$

*Megjegyzés:* Az $a = 1$ esetén a fenti egyenlet $x^2 + bx + c = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1\cdot x_2$ alakú, azaz $-b = x_1 + x_2$ és $c = x_1\cdot x_2$, vagyis a két gyök összege egyenlő az elsőfokú tag együtthatójának ellentettjével, a két gyök szorzata pedig egyenlő a konstans taggal. Ha a másodfokú egyenlet megoldásait az egész számok halmazán keressük, akkor ezen összefüggéseket felhasználva a gyököket próbálgatással is könnyen megkaphatjuk.

Pl. az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet esetén $x_1 + x_2 = 5$, $x_1\cdot x_2 = 6$, amiből azonnal adódik, hogy $x_1 = 2$ és $x_2 = 3$.

A módszer alkalmazása segítségünkre lehet az ellenőrzésnél, illetve a függvények ábrázolásánál is.



François Viète [viet] (1540–1603) francia matematikus. Foglalkozására nézve jogász volt, aki III. Henrik, majd IV. Henrik ügyésze és tanácsosa lett. Ő alkalmazott először betűt az együtthatók jelölésére, és így a gyökök és együtthatók közötti összefüggést a fentiekhez hasonló alakban tudta megadni.

**3. példa**

A valós számok halmazán adott az $x^2 + x - 6 = 0$ egyenlet. Határozzuk meg a gyökeinek a négyzetösszegét!

**Megoldás**

Az egyenletnek két különböző valós gyöke van, hiszen a diszkriminánsa: $D = 1 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 25 > 0$. A gyökök négyzetösszegét felírhatjuk a következő módon:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1\cdot x_2.$$

A gyökök és együtthatók közötti összefüggést felhasználva:

$x_1 + x_2 = -1;$
$x_1\cdot x_2 = -6.$

$$x_1^2 + x_2^2 = (-1)^2 - 2\cdot(-6) = 13.$$

A kérdésre úgy is válaszolhattunk volna, hogy kiszámítjuk az egyenlet gyökeit, és képezzük a négyzetösszegüket.

**4. példa**

Milyen valós számot kell írnunk a $c$ paraméter helyére ahhoz, hogy a $2x^2 - 4x + c = 0$ másodfokú egyenletnek két pozitív gyöke legyen?

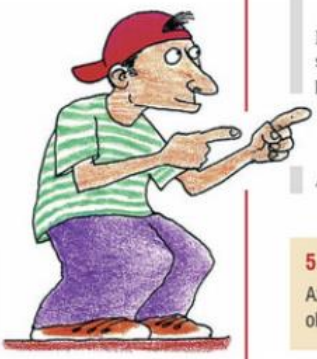
**Megoldás**

Először azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen feltétel szükséges ahhoz, hogy létezzék valós gyöke az egyenletnek. Ez akkor teljesül, ha:

$$D = 16 - 8c \geq 0,$$
$$c \leq 2.$$

Másrészt használjuk fel a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket:

$$x_1 + x_2 = 2; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{2}.$$



Mindkét gyök akkor és csak akkor lesz pozitív, ha a gyökök összege és szorzata is pozitív. A felírt összefüggések szerint az összeg pozitív, a szorzat pedig akkor lesz pozitív, ha:

$$\frac{c}{2} > 0, \text{ azaz } c > 0.$$

Az egyenletnek akkor lesz mindkét gyöke pozitív, ha $0 < c \leq 2$.

**5. példa**

Az $x^2 - 2x - 15 = 0$ egyenlet gyökei $x_1$ és $x_2$. A gyökök kiszámítása nélkül írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei az $x_1 + 3$ és az $x_2 + 3$ lesznek!

**Megoldás**

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés szerint:

$$x_1 + x_2 = 2;$$
$$x_1 \cdot x_2 = -15.$$

A keresett egyenlet másodfokú tagjának együtthatóját választhatjuk 1-nek. Így az egyenletet $x^2 + px + q = 0$ alakban kereshetjük. Vizsgáljuk meg erre az egyenletre is a Viète-féle formulákat:

$$x^2 + px + q = 0;$$
$$x_1 + x_2 = -p;$$
$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

$$x_1 + 3 + x_2 + 3 = -p;$$
$$(x_1 + 3) \cdot (x_2 + 3) = q.$$

A bal oldalon elvégezve a kijelölt műveleteket, illetve behelyettesítve a fentebb kapott értékeket:

$$x_1 + x_2 + 6 = -p;$$
$$x_1 \cdot x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 9 = q.$$
$$2 + 6 = -p;$$
$$-15 + 3 \cdot 2 + 9 = q.$$

Innen a keresett két paraméterre $p = -8$ és $q = 0$ adódik. Így egy megfelelő másodfokú egyenlet:

$$x^2 - 8x = 0.$$

Gondolatmenetünk helyességét a gyökök meghatározása is igazolhatja.

Az eredeti egyenlet két gyöke: $x_1 = -3$ és $x_2 = 5$.

Az $x^2 - 8x = 0$ másodfokú egyenlet gyökei pedig: $x_1 = 0$ és $x_2 = 8$.

## Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!
   *a)* $(x-2)\cdot(x+2)=0$; *b)* $(3x-2)\cdot(4x+2)=0$;
   *c)* $2(-x-2)\cdot(4-x)=0$; *d)* $-2(2x+2)\cdot(x-4)=0$.

2. Írjunk fel olyan másodfokú egyenleteket, amelyeknek gyökei az alábbi számpárok!
   *a)* 2 és 4; *b)* –3 és 5; *c)* $\frac{2}{3}$ és $-\frac{3}{4}$; *d)* $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$;
   *e)* $a+b$ és $a-b$.

3. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!
   *a)* $x^2-8x+15$; *b)* $2x^2-14x+20$; *c)* $-2x^2-7x+15$; *d)* $-2x^2-7x-3$.

4. Egyszerűsítsük a következő törteket!
   *a)* $\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$; *b)* $\frac{x^2+2x-3}{-x^2+4x-3}$; *c)* $\frac{3x^2+3x-6}{2x^2+3x-2}$; *d)* $\frac{6x^2+x-2}{-2x^2+5x-2}$.

5. Határozzuk meg a $-2x^2+6x-4=0$ egyenletre nézve
   *a)* a gyökök négyzetösszegét; *b)* az $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ összeget;
   *c)* az $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ összeget; *d)* a gyökök négyzetének a különbségét!

6. Az $x^2+px+q=0$ egyenletben fejezzük ki $p$-vel és $q$-val
   *a)* az egyenlet gyökeinek összegét;
   *b)* az egyenlet gyökeinek a különbségét;
   *c)* a gyökök szorzatát;
   *d)* a gyökök négyzetének összegét;
   *e)* a gyökök négyzetének a különbségét!

7. A $-x^2+2x+c=0$ egyenletben határozzuk meg a $c$ értékét úgy, hogy
   *a)* az egyenletnek két egyenlő gyöke legyen;
   *b)* az egyenletnek két pozitív gyöke legyen;
   *c)* az egyenletnek két negatív gyöke legyen;
   *d)* az egyenletnek az egyik gyöke 0 legyen;
   *e)* az egyenletnek az egyik gyöke pozitív, a másik pedig negatív legyen;
   *f)* az egyenletnek ne legyenek valós gyökei!

8. Az $x^2-(4k-8)x+k^2-2k+2=0$ egyenletben határozzuk meg $k$ értékét úgy, hogy az egyenlet gyökei csak előjelben térjenek el egymástól!

9. Melyik az a másodfokú egyenlet, amelynek gyökei az $x^2-5x+6=0$ egyenlet gyökeitől csak előjelben térnek el?

10. Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei a $15x^2-19x+6=0$ egyenlet gyökeinél 2-vel nagyobbak!

# 4. Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek

A különböző típusú egyenletek megoldásainak keresése minden kor matematikusa számára izgalmas kérdésnek bizonyult. A másodfokú egyenletekkel már az ókor gondolkodói is sikerrel megbirkóztak, a 16. században a harmad- és negyedfokú egyenletek esetén is találtak megoldóképletet (CARDANO és FERRARI), az ennél magasabb fokszámú egyenletekkel azonban sokáig nem sikerült előrébb lépni. Sokáig azt gondolták, hogy bármely egyenlethez található lesz majd egy olyan megoldóképlet, amely meghatározza az egyenlet gyökeit az alapműveletek és az együtthatók segítségével. Ezt a téves elképzelést sikerült a tragikusan rövid életű Évariste Galois-nak megcáfolnia.



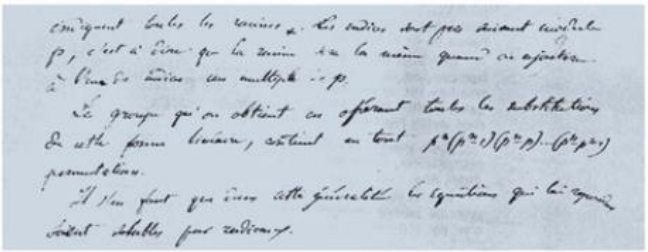
ÉVARISTE GALOIS [gáloá]

ÉVARISTE GALOIS (1811–1832) francia matematikust tartják a modern algebra megalapítójának. Forradalmi idők utáni korszak forradalmi lelkületű zsenije volt. A kor gyors történelmi változásai azonban nem kedveztek azoknak, akik újszerű gondolatokkal álltak elő. Több jelentős dolgozatát értetlenséggel fogadták, és ez a meg nem értés gyakran kedvét szegte. Politikai szerepvállalása miatt börtönbe is került.

Keressünk történeteket Galois életéből!

Egy alkalommal valaki sértő megjegyzést tett a szerelmére, emiatt párbajra hívta ki. A párbaj előtti utolsó éjszakáján a matematikát fanatikusan szerető ifjú az addig elért legfontosabb eredményeit néhány oldalon összefoglalta, és elküldte egyik barátjának. Másnap, mindössze 20 évesen, halálos sebet kapott.

részlet Galois dolgozatából



A dolgozatot jóval halála után, 1846-ban tették közzé. Ennek egyik részében megmutatta, hogy melyek azok az egyenlettípusok, amelyek algebrailag, tehát csupán a négy alapművelettel és gyökvonással megoldhatók.



NIELS HENRIK ABEL

Ezzel pontosította a NIELS HENRIK ABEL (1802–1829), norvég matematikus által bizonyított tételt, mely szerint az ötödfokú, vagy annál magasabb fokszámú egyenletekre általában nem létezik megoldóképlet.

Vannak azonban olyan speciális magasabb fokszámú egyenletek is, melyeket meg tudunk oldani. A megoldás elve mindegyik esetben az, hogy az átalakítások, helyettesítések során **az egyenlet fokszámát csökkentjük,** és így az ismert képletek segítségével a gyököket már meghatározhatjuk.



**1. példa**

Oldjuk meg az $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

**Megoldás**

Vegyük észre, hogy $(x^2)^2 = x^4$, ezért célszerű egy új ismeretlent bevezetni: $y = x^2$.

$y = x^2$

Ekkor az egyenletünk

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

alakú lesz. A megoldóképlettel megoldva az alábbi megoldások adódnak:

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \begin{cases} y_1 = 4, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

$y_1 = 4 = x^2$-ből $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; $y_2 = 1 = x^2$-ből $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

A negyedfokú egyenletnek tehát négy megoldása lesz, s ezek helyességéről az ellenőrzés során meggyőződhetünk.

◆ ◆ ◆

Érdemes megjegyeznünk azt az általában is igaz állítást, miszerint **egy *n*-edfokú egyenletnek legfeljebb *n* valós megoldása létezhet.**

Egy *n*-edfokú egyenletnek legfeljebb *n* valós megoldása létezhet.

Könnyű olyan példát találni, amikor egyetlen valós megoldás sem létezik. Ilyen például az $x^2 = -1$ egyenlet.

**2. példa**

Oldjuk meg a $8(x-1)^6 - 215(x-1)^3 - 27 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

**Megoldás**

A kijelölt hatványműveletek elvégzése helyett ismét célszerű új ismeretlen bevezetésével kezdeni. Ha az $y = (x-1)^3$-t bevezetjük, akkor az $\left[(x-1)^3\right]^2 = (x-1)^6$ miatt a

$y = (x-1)^3$

$$8y^2 - 215y - 27 = 0$$

másodfokú egyenletet nyerjük. Ezt megoldva:

$$y_{1,2} = \frac{215 \pm \sqrt{(-215)^2 + 4 \cdot 8 \cdot 27}}{2 \cdot 8} = \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{8}, \\ y_2 = 27. \end{cases}$$

Tehát $(x-1)^3 = -\frac{1}{8}$, $x - 1 = -\frac{1}{2}$ adódik, így az egyik gyök: $x_1 = \frac{1}{2}$.

A másik esetben pedig $(x-1)^3 = 27$, $x - 1 = 3$, amely az $x_2 = 4$ gyököt adja. Ezek helyességéről az ellenőrzés során meggyőződhetünk.

**3. példa**

Oldjuk meg az $(x^2 + x + 3)\cdot(x^2 + x + 1) - 15 = 0$ egyenletet!

**Megoldás**

A kijelölt műveletek elvégzése után az $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$ negyedfokú egyenletet kapnánk eredményül, de ezt az eddig használt módszerekkel nem tudjuk megoldani.

$y = x^2 + x + 3$

Célszerű ismét új ismeretlent bevezetni. Legyen $y = x^2 + x + 3$, így a másik tényező $y - 2$. Egyenletünk így a következő:

$$y(y - 2) - 15 = 0,$$
$$y^2 - 2y - 15 = 0.$$

Ennek megoldásai:

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4\cdot 1\cdot 15}}{2} = \begin{cases} y_1 = -3, \\ y_2 = 5. \end{cases}$$

A kapott értékeket visszahelyettesítve, ha $y_1 = -3$, akkor:

$$x^2 + x + 3 = -3,$$
$$x^2 + x + 6 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a diszkriminánsa: $D = 1 - 24 = -23$, ezért nem léteznek valós megoldásai.

A másik esetben, ha $y_2 = 5$, akkor a megoldandó egyenlet:

$$x^2 + x + 3 = 5,$$
$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Ebből azt kapjuk, hogy:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2. \end{cases}$$

Ellenőrizzünk az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel:

$$(1 + 1 + 3)\cdot(1 + 1 + 1) - 15 = 0,$$
$$(4 - 2 + 3)\cdot(4 - 2 + 1) - 15 = 0.$$

Vagyis mindkét gyök az eredeti egyenletnek is megoldása.

◆ ◆ ◆

A feladat kapcsán érdemes megjegyeznünk, hogy ha az egyenletnek létezik az egész számok körében egy $x = a$ megoldása, akkor ezt az egyenletbe helyettesítve:

$$a^4 + 2a^3 + 5a^2 + 4a - 12 = 0,$$
$$a^4 + 2a^3 + 5a^2 + 4a = 12,$$
$$a(a^3 + 2a^2 + 5a + 4) = 12$$

alakú egyenlőség hozható ki.

Mivel az egyenlet bal oldalán két egész szám szorzata szerepel, ezért igaz, hogy ha van az egyenletnek az egész számok körében megoldása, akkor az csak a 12 osztói közül kerülhet ki.

Ez a mi esetünkben is teljesült, hiszen a két megoldás 1 és –2, osztói lesznek a 12-nek.

Az egész együtthatókkal rendelkező egyenleteknek ezt a tulajdonságát kihasználhatjuk a gyökök keresésénél, hiszen a konstans tag osztóinak száma véges sok lehetőség kipróbálását igényli.

**4. példa**

Keressük meg az alábbi egyenlet valós megoldásait!

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$$

**Megoldás**

Az előző feladatnál tett megállapításokat felhasználva, vizsgáljuk meg, hogy az egyenletnek van-e az egész számok körében megoldása.

Ezek az egész számok a 6 osztói közül kerülhetnek ki.

A 6 osztói: ±1; ±2; ±3; ±6. Ezt a nyolc lehetőséget kell megvizsgálnunk.

Azonnal adódik, hogy az egyenletnek a –1 és az 1 is megoldása lesz, hiszen:

$$(-1)^4 + (-1)^3 - 7(-1)^2 - (-1) + 6 = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0;$$
$$1^4 + 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0.$$

Ez egyben azt is jelenti – az egyenletek gyöktényezős alakjára gondolva –, hogy a megoldandó egyenletben alkalmas átalakítással kialakítható a bal oldalon egy szorzat, melynek tényezői között az

$$(x-1)\cdot(x+1) = x^2 - 1$$

szerepel. Ezt figyelembe véve alkalmazzuk az egyenletben a következő csoportosítást:

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = x^4 - x^2 + x^3 - x - 6x^2 + 6 =$$
$$= x^2(x^2-1) + x(x^2-1) - 6(x^2-1) = (x^2-1)\cdot(x^2+x-6).$$

Így az egyenlet a következő alakú lett:

$$(x^2-1)\cdot(x^2+x-6) = 0.$$

Ez a szorzat akkor lesz 0, ha valamelyik tényezője 0. Az első tényező adja a korábban megtalált $x_{1,2} = \pm 1$ gyököket, ezért, ha létezik még további megoldás, akkor azt az

$$x^2 + x - 6 = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei adják.

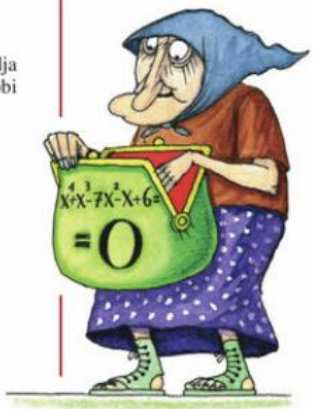
Ezek:

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} x_3 = 2, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

Tehát egyenletünknek négy valós, és egyben egész megoldása lesz:

$$x \in \{-3; -1; 1; 2\},$$

melyek helyességéről az ellenőrzés során meggyőződhetünk.



Létezik a magasabb fokszámú egyenleteknek egy olyan csoportja is, amelynél további módszerek is sikeresek lehetnek. Ezekre ad példát a következő feladat.

**szimmetrikus egyenlet**

**5. példa**

Keressük meg a $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$ egyenlet megoldásait!

**Megoldás**

Vegyük észre, hogy ebben az egyenletben a középső tagtól jobbra-balra szimmetrikusan elhelyezkedő együtthatók egyenlők. Ilyenkor célszerű elosztani az egyenlet mindkét oldalát $x^2$-tel. Az $x = 0$ nyilván nem elégíti ki az egyenletet, tehát oszthatunk vele. Ezután csoportosítsuk az egyenlő együtthatójú tagokat!

$$2x^2 - 3x - 1 - 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Vezessünk be új ismeretlent: $y = x + \frac{1}{x}$. Ekkor $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, tehát $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Ezeket az egyenletünkbe visszahelyettesítve:

$$2(y^2 - 2) - 3y - 1 = 0,$$

$$2y^2 - 3y - 5 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenletet megoldva:

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} y_1 = -1, \\ y_2 = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Az $y$ ismeretében már az $x$ is meghatározható.

Erre az eredményre juthatunk akkor is, ha felidézzük a függvényeknél korábban már igazolt állítást, miszerint:

$\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$, ha $x \neq 0$.

Ha $y_1 = -1$, akkor $x + \frac{1}{x} = -1$, azaz $x^2 + x + 1 = 0$. Ebben az esetben nem kapunk valós megoldást, mert az egyenlet diszkriminánsa negatív szám lesz: $D = 1 - 4 = -3$.

Ha $y_2 = \frac{5}{2}$, akkor $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, azaz $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Ennek gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

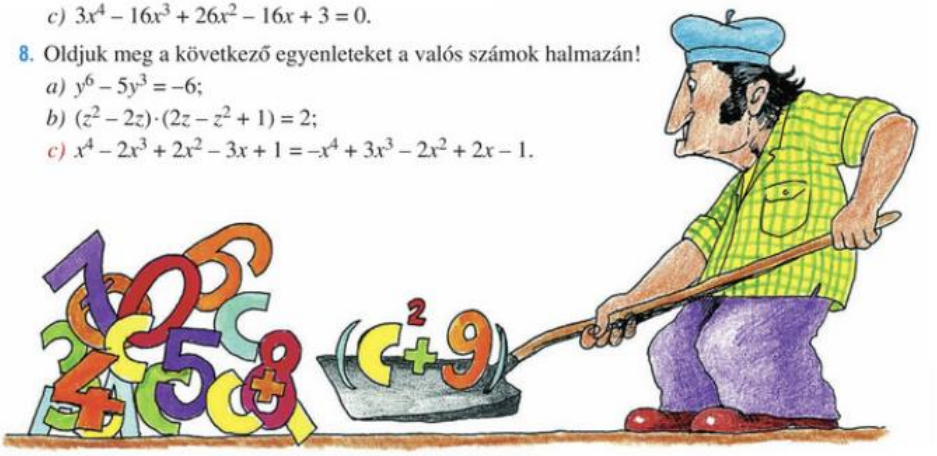
Ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy ezek az eredeti egyenletnek is megoldásai.

◆ ◆ ◆

A megoldott egyenlet bal oldalán álló polinomot az együtthatók szimmetriája miatt **szimmetrikus polinomnak** nevezzük. Megmutatható, hogy az ilyen típusú egyenletek megoldásaira igaz, hogy ha egy szám megoldás, akkor annak a számnak a reciproka is kielégíti az egyenletet.

## Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket!
   *a)* $x^4 - 16 = 0$; *b)* $x^3 + 27 = 0$; *c)* $x^6 - 64 = 0$.
2. Keressük meg a következő egyenletek gyökeit!
   *a)* $x^4 - x^2 - 1 = 0$; *b)* $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$; *c)* $2x^8 - 7x^4 - 4 = 0$.
3. Mely valós számokra igazak a következő egyenletek?
   *a)* $(x + 1)^4 - (x + 1)^2 - 1 = 0$;
   *b)* $2(x - 2)^6 - 3(x - 2)^3 - 2 = 0$;
   *c)* $2(2x - 1)^8 - (2x - 1)^4 - 1 = 0$.
4. Oldjuk meg a következő egyenleteket!
   *a)* $(x^2 + x)\cdot(x^2 + x + 1) - 2 = 0$;
   *b)* $(x^2 + 2x)\cdot(x^2 + 2x - 1) = 6$;
   *c)* $(x^2 - x + 1)\cdot(x^2 - x - 1) - 3 = 0$.
5. Írjunk fel olyan egyenleteket és rendezzük az ismeretleneket csökkenő hatványok szerint, melyeknek a megoldásai a következők!
   *a)* $\{1; 2; 3\}$; *b)* $\{-1; -2; -3; -4\}$; *c)* $\{-1; 1; -3; 4\}$.
6. Oldjuk meg a következő egyenleteket! Először keressünk megoldást az egész számok körében!
   *a)* $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$;
   *b)* $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$;
   *c)* $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.
7. Oldjuk meg a következő szimmetrikus egyenleteket!
   *a)* $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$;
   *b)* $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$;
   *c)* $3x^4 - 16x^3 + 26x^2 - 16x + 3 = 0$.
8. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!
   *a)* $y^6 - 5y^3 = -6$;
   *b)* $(z^2 - 2z)\cdot(2z - z^2 + 1) = 2$;
   *c)* $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = -x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.



# 5. Másodfokú egyenlőtlenségek

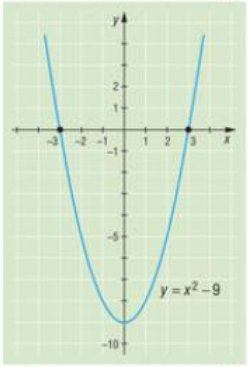
Bármely valós $a$ és $b$ számról el tudjuk dönteni, hogy milyen relációban állnak egymással. Három eset lehetséges:

$$a < b, \text{ vagy } a = b, \text{ vagy } a > b.$$

**másodfokú egyenlőtlenség**

Ha kifejezéseket kapcsolunk össze a $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ jelekkel, akkor egyenlőtlenségeket kapunk. Ha ezek a kifejezések másodfokúak, akkor **másodfokú egyenlőtlenségekről** beszélünk.

A másodfokú egyenlőtlenségek megoldásában lényeges szerepet játszik az, hogy ezeknek a kifejezéseknek a grafikonja a koordináta-rendszerben parabolát határoz meg. A grafikonok megrajzolása minden esetben sokat segíthet a keresett megoldáshalmaz megkeresésében és szemléltetésében.




*4. ábra*

**1. példa**

Oldjuk meg az $x^2 - 9 < 0$ egyenlőtlenséget!

**I. megoldás**

Készítsük el a bal oldali kifejezés által meghatározott függvény grafikonját! ***(4. ábra)***

Azokat az $x$ valós számokat keressük, amelyekre a függvény által felvett értékek negatívok.

A függvény zérushelyei:

$$x_1 = -3;\ x_2 = 3,$$

ezért a megfelelő valós számok a $]-3; 3[$ nyitott intervallum elemei.

**II. megoldás**

Megoldás **algebrai úton,** négyzetgyökvonás alkalmazásával:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$x^2 < 9,$$
$$\sqrt{x^2} < \sqrt{9},$$
$$|x| < 3,$$
$$-3 < x < 3.$$

**III. megoldás**

Megoldás **szorzattá alakítással:**

$$x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3) < 0.$$

A szorzat akkor lesz negatív, ha a tényezői különböző előjelűek:

$$x - 3 < 0 \text{ és } x + 3 > 0, \quad \text{vagy} \quad x - 3 > 0 \text{ és } x + 3 < 0,$$
$$x < 3 \text{ és } x > -3. \qquad\qquad x > 3 \text{ és } x < -3.$$

Mivel a második esetnek nincs megoldása a valós számok halmazán, a megoldás:

$$-3 < x < 3.$$

**2. példa**

Mely valós számokra igaz, hogy $-x^2 + 4x - 5 < 0$?

**Megoldás**

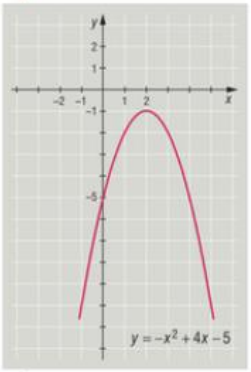
Oldjuk meg első lépésben a $-x^2 + 4x - 5 = 0$ egyenletet! Mivel a diszkrimináns értéke $D = 16 - 20 = -4$, vagyis negatív szám, ezért ennek nem létezik valós megoldása.

Ha ábrázoljuk a bal oldal függvényét, akkor egy olyan lefelé nyíló parabolát kapunk, amelyik nem metszi az $x$ tengelyt, hiszen a másodfokú tag együtthatója negatív szám, és a diszkrimináns negatív.

A grafikon ábrázolásához alakítsuk a $-x^2 + 4x - 5$ másodfokú kifejezést teljes négyzetté:

$$-x^2 + 4x - 5 = -(x^2 - 4x) - 5 = -[(x-2)^2 - 4] - 5 = -(x-2)^2 - 1.$$

A függvény grafikonja az 5. ábrán látható. Ebből látható, hogy az egyenlőtlenség megoldása az értelmezési tartománnyal egyezik meg, azaz a valós számok halmaza.




5. ábra

◆ ◆ ◆

Az olyan egyenlőtlenségeket, melyek megoldásainak halmaza megegyezik az értelmezési tartománnyal, **azonos egyenlőtlenségeknek** nevezzük.

**azonos egyenlőtlenség**

**3. példa**

Mely egész számokra igaz, hogy $(x-2)^2 \le 7 - 2x$?

**Megoldás**

Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd rendezzük az egyenlőtlenséget úgy, hogy az egyik oldalon nulla álljon!

$$x^2 - 4x + 4 \le 7 - 2x,$$

$$x^2 - 2x - 3 \le 0.$$

Határozzuk meg a bal oldalon álló másodfokú kifejezés zérushelyeit:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

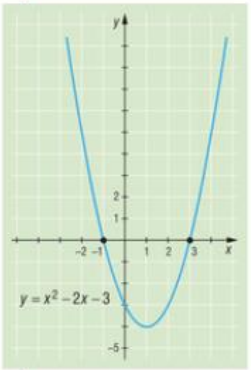
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Mivel az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ függvény grafikonja felfelé nyíló parabola *(6. ábra)*, ezért az egyenlőtlenségünk megoldása a két zérushely közötti tartomány lesz. Tehát

$$-1 \le x \le 3.$$

A megoldásokat az egész számok halmazán keressük, ezért a feladat megoldása a következő számokból áll:

$$x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$$

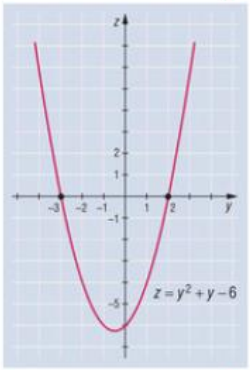



6. ábra

**4. példa**

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$x^4 + x^2 - 6 > 0!$$




7. ábra

**Megoldás**

Vezessünk be új ismeretlent: $y = x^2$.

Így a következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$y^2 + y - 6 > 0.$$

Megkeresve az $y^2 + y - 6 = 0$ egyenlet gyökeit:

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \begin{cases} y_1 = -3, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Figyelembe véve, hogy a bal oldal függvénye által meghatározott grafikon felfelé nyíló parabola *(7. ábra)*, így az egyenlőtlenség megoldása:

$$y < -3 \text{ vagy } y > 2.$$

Az $x$ változót visszahelyettesítve két egyenlőtlenség megoldásait kell megkeresnünk.

Az $x^2 < -3$ feltételnek egyik valós szám sem tesz eleget, hiszen a valós számok négyzete mindig nemnegatív.

Az $x^2 > 2$ egyenlőtlenséget megoldva:

$$\sqrt{x^2} > \sqrt{2},$$

$$|x| > \sqrt{2}.$$

Tehát az egyenlőtlenség megoldása a valós számkörben:

$$x < -\sqrt{2} \text{ vagy } x > \sqrt{2}.$$



A másodfokú egyenlőtlenségek megoldásánál érvényben maradnak azok a szabályok, melyeket korábbi tanulmányaink során az elsőfokú egyenlőtlenségeknél megtaláltunk, vagyis:

(1) Az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadhatjuk, illetve mindkét oldalból kivonhatjuk ugyanazt a valós számot, szorozhatjuk, illetve oszthatjuk ugyanazzal a pozitív valós számmal, a reláció továbbra is igaz marad.

(2) A negatív számmal való szorzás és osztás megváltoztatja a reláció irányát.

(3) Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát 0-val szorozzuk, akkor megváltozhat a megoldások halmaza.

(4) Négyzetre emeléskor, illetve reciprokképzéskor meg kell vizsgálnunk, hogy az eredeti kifejezések milyen előjelűek, és csak ezek után állíthatunk valamit arról, hogy hogyan változik a reláció iránya.

Ha $a > b$, akkor:

$a + c > b + c$,

$a - c > b - c$,

$a \cdot d > b \cdot d$,

$\frac{a}{d} > \frac{b}{d}$,

ahol $c \in \mathbb{R}$ és $d \in \mathbb{R}^+$.

## Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!
   *a)* $x^2 - 16 < 0$; *b)* $x^2 - 25 > 0$; *c)* $x^2 - 64 \le 0$.

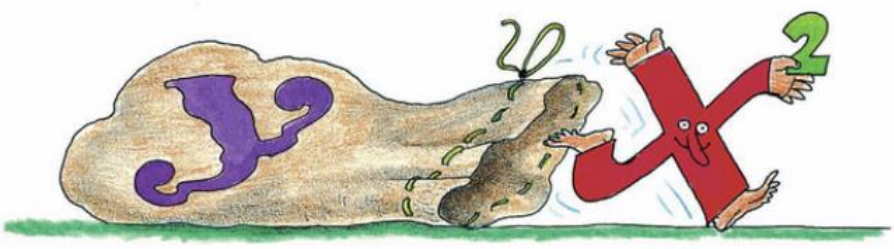
2. Keressük meg a következő egyenlőtlenségek megoldásait!
   *a)* $x^2 - x - 1 > 0$; *b)* $x^2 - 2x - 3 \le 0$; *c)* $2x^2 - 7x - 4 < 0$.

3. Mely egész számokra igazak a következő egyenlőtlenségek?
   *a)* $x^2 - 4x - 4 > -3x - 3$; *b)* $2x^2 - 4x - 3 \le x^2 - 2x$; *c)* $2x(1 - 7x) - 4 < 0$.

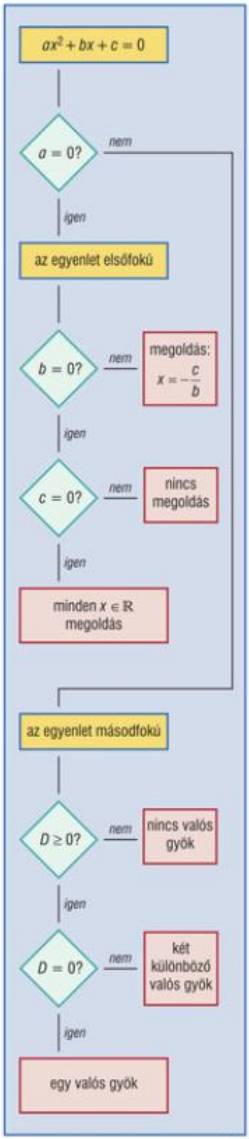
4. Oldjuk meg és ábrázoljuk számegyenesen a következő egyenlőtlenségek megoldásait!
   *a)* $x^4 - 1 > 0$; *b)* $x^4 - 2x^2 - 3 \le 0$; *c)* $2x^6 - 7x^3 - 4 < 0$.

5. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!
   *a)* $\frac{1}{x} - 1 > x$; *b)* $x + \frac{1}{x} - 2 \le 0$; *c)* $\frac{1}{x-1} < 3 + \frac{2}{x-3}$.

6. Az $m$ paraméter milyen értékei mellett elégíti ki az $x$ bármely értéke a következő egyenlőtlenségeket?
   *a)* $x^2 + 2x + m > 0$; *b)* $x^2 + mx + 4 \le 0$; *c)* $(4 - m)x^2 - 3x + m + 4 > 0$.



# 6. Paraméteres másodfokú egyenletek (emelt szintű tananyag)




Így működik a másodfokú egyenletet megoldó számítógépes program.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletről az együtthatók ismeretében a következőt állíthatjuk:

(1) Ha mindegyik együttható nulla, azaz $a = b = c = 0$, akkor az egyenlőség bármely valós szám esetén teljesül, hiszen a bal oldal $x$-től függetlenül mindig nulla.

(2) Ha $a = b = 0$ és $c \neq 0$, akkor nincs megoldása, hiszen a bal oldal $x$-től függetlenül mindig nullától különböző valós szám.

(3) Ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor az egyenlet elsőfokú, amelynek egy megoldása van, mégpedig az $x = -\frac{c}{b}$.

(4) Ha $a \neq 0$, akkor másodfokú egyenletet kapunk, melynek megoldásai a $D = b^2 - 4ac$ diszkrimináns értékétől függenek. Ha $D > 0$, akkor két különböző valós gyök létezik, ha $D = 0$, akkor egy valós gyöke van az egyenletnek, ha $D < 0$, akkor pedig nincs megoldása az egyenletnek a valós számok körében.

Ha a megoldandó egyenletben az együtthatók konkrét értékét nem ismerjük, hanem betűvel jelöljük, *paraméteres egyenletről* beszélünk.

A paraméteres egyenletek megoldásánál minden esetre kiterjedő vizsgálatokat kell végeznünk, a fentebb említett feltételek szerint.

**1. példa**

Az $x^2 + 4ax + 2a^2 + 3a - 1 = 0$ egyenlet gyökei az $a$ paraméter mely értékénél lesznek egyenlők?

**Megoldás**

A feladat feltételét a diszkrimináns vizsgálatával dönthetjük el, hiszen akkor kapunk egyenlő gyököket, ha a diszkrimináns értéke 0.

Mivel a diszkrimináns:

$$D = (4a)^2 - 4(2a^2 + 3a - 1) = 8a^2 - 12a + 4,$$

ezért a $8a^2 - 12a + 4 = 0$ másodfokú egyenletet megoldva, $a$-ra a következő két érték adódik:

$$a_1 = 1 \text{ és } a_2 = \frac{1}{2}.$$

Azaz $a_1 = 1$ és $a_2 = \frac{1}{2}$ esetén lesznek a gyökök egyenlők. Megfigyelhetjük, hogy ezekben az esetekben az egyenlet bal oldala teljes négyzet lesz, a parabola érinti az $x$ tengelyt:

$$a_1 = 1 \text{ esetén } \quad x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2;$$
$$a_2 = \frac{1}{2} \text{ esetén } \quad x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

**2. példa**

Oldjuk meg a következő egyenletet ($a$ valós paraméter)!

$$ax^2 + (2a + 1)x + a + 2 = 0.$$

**Megoldás**

Először is vizsgáljuk meg, milyen esetek fordulhatnak elő!

**Ha $a = 0$,** akkor az egyenletünk elsőfokú lesz, melyet megoldva:

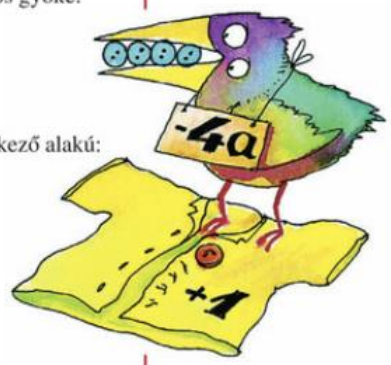
$$x + 2 = 0,$$
$$x = -2.$$

**Ha $a \neq 0$,** akkor az egyenlet másodfokú, és a gyökök száma a diszkriminánstól függ:

$$D = (2a + 1)^2 - 4a(a + 2) = -4a + 1.$$

- Ha $-4a + 1 > 0$, azaz $a < \frac{1}{4}$, akkor az egyenlet két valós gyöke:

$$x_{1,2} = \frac{-2a - 1 \pm \sqrt{-4a + 1}}{2a}.$$




- Ha $-4a + 1 = 0$, azaz $a = \frac{1}{4}$, akkor az egyenlet a következő alakú:

$$\frac{1}{4} \cdot x^2 + \left(2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right)x + \frac{1}{4} + 2 = 0,$$
$$\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4} = 0,$$
$$\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

Azaz ebben az esetben az egyenlet bal oldala teljes négyzetté alakítható, és csak egy megoldása létezik, mégpedig az $x = -3$.

- Ha $-4a + 1 < 0$, azaz $a > \frac{1}{4}$, akkor az egyenletnek a valós számok körében nem lesz megoldása.

Észrevehetjük, hogy a Viète-féle formulák nem adnak arról információt, hogy a valós gyökök egyáltalán léteznek-e vagy sem, hiszen:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a + 1}{a} \quad \text{és} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{a + 2}{a}$$

értékeit mindig ki tudjuk számítani, ha az $a \neq 0$ feltétel teljesül, akkor is, amikor az egyenletnek nincsenek valós gyökei.

Ez azt jelenti, hogy **a paraméteres egyenletek megoldásánál mindig meg kell győződnünk az egyenlet diszkriminánsa alapján arról, hogy egyáltalán van-e valós gyöke az egyenletnek.**

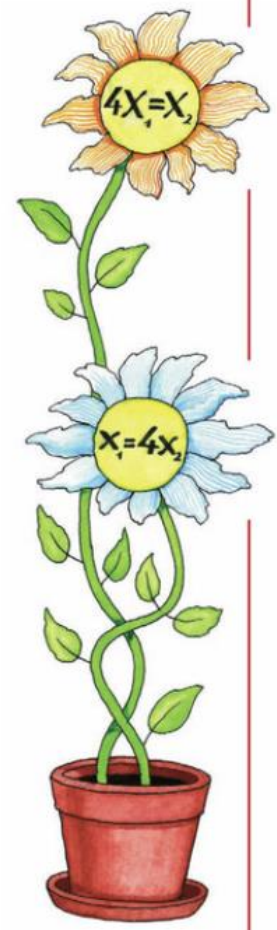
**3. példa**

A $p, q$ milyen egyjegyű pozitív egész értékeire lesz az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet egyik gyöke a másik gyök négyszerese?

**Megoldás**

Az egyenlet gyökei:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$




A gyökökre vonatkozó feltételek alapján felírhatjuk, hogy:

$$4\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Ezt átrendezve, és egyszerűbb alakra hozva:

$$-4p - 4 \cdot \sqrt{p^2 - 4q} = -p + \sqrt{p^2 - 4q},$$
$$-3p = 5 \cdot \sqrt{p^2 - 4q}.$$

A kapott egyenletben a bal oldal mindig negatív, a jobb oldal viszont nemnegatív szám, így nem lesznek olyan pozitív $p$ és $q$ paraméterek, amelyek eleget tennének ennek az egyenletnek.

A gyökökre vonatkozó feltételek azonban másként is teljesülhetnek:

$$4\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Ezt átrendezve, majd egyszerűbb alakra hozva:

$$-4p + 4 \cdot \sqrt{p^2 - 4q} = -p - \sqrt{p^2 - 4q},$$
$$3p = 5 \cdot \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$9p^2 = 25p^2 - 100q,$$
$$100q = 16p^2,$$
$$p^2 = \frac{25}{4}q.$$

Mivel a megoldásokat a pozitív egyjegyű egész számok körében keressük, ezért $q$ csak 4-gyel osztható lehet. Azaz $q = 4$ vagy $q = 8$.

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy csak az első esetben, $q = 4$-nél kaphatunk egész megoldást $p$-re, ekkor $p = 5$.

A feladat feltételeinek megfelelő egyenlet tehát az $x^2 + 5x + 4 = 0$. Az egyenletet megoldva, a két gyök:

$$x_1 = -1 \quad \text{és} \quad x_2 = -4.$$

Az egyik gyök valóban a másik 4-szerese lesz.

**4. példa**

Határozzuk meg az $m$ paraméter értékét úgy, hogy a következő másodfokú kifejezés értéke bármely $x$ esetén negatív legyen!

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1.$$

**Megoldás**

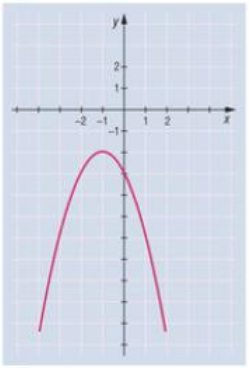
A feladat feltételét a következőképpen fogalmazhatjuk át. Az $m$ paraméter értékét úgy kell megadnunk, hogy a felírt kifejezés

(1) másodfokú maradjon,

(2) a parabola lefelé nyíló legyen,

(3) az általa meghatározott $mx^2 + (m-1)x + m - 1 = 0$ másodfokú egyenletnek ne legyen megoldása.

Ezek a feltételek azt jelentik, hogy a kifejezés által meghatározott függvény grafikonja egy olyan lefelé nyíló parabola, mely nem metszi a koordináta-rendszer $x$ tengelyét. ***(8. ábra)***




*8. ábra*

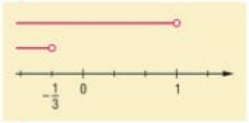
Az (1) és (2) feltételt az $m < 0$ biztosítja.

A (3) akkor teljesül, ha az egyenlet diszkriminánsa negatív lesz, azaz:

$$(m-1)^2 - 4m(m-1) < 0,$$
$$(m-1)\cdot(m-1-4m) < 0,$$
$$(m-1)\cdot(-3m-1) < 0.$$

A szorzat akkor negatív, ha a két tényező ellentétes előjelű. Azaz:

$$m - 1 < 0 \text{ és } -3m - 1 > 0, \text{ vagy}$$
$$m - 1 > 0 \text{ és } -3m - 1 < 0.$$



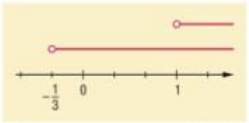

*9. ábra*

Az első esetben

$$m < 1 \text{ és } m < -\frac{1}{3}, \text{ azaz } m < -\frac{1}{3}, \quad \textit{(9. ábra)}$$

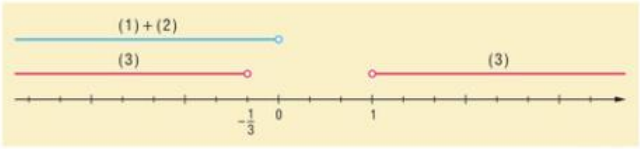
a második esetben

$$m > 1 \text{ és } m > -\frac{1}{3}, \text{ azaz } m > 1. \quad \textit{(10. ábra)}$$




*10. ábra*

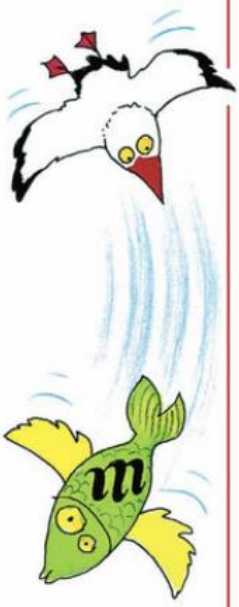
Az (1), (2) és (3) feltételt ábrázolva:




*11. ábra*

A mindhárom feltételt egyszerre kielégítő $m$ paraméterek halmaza:

$$\left\{ m \mid m \in \mathbb{R} \text{ és } m < -\frac{1}{3} \right\}.$$




**5. példa**

Adjuk meg az $m$ paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenlőtlenségnek ne legyen megoldása!

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 < 0.$$

**Megoldás**

Fogalmazzuk át a feltételt! Ha a felírt egyenlőtlenségnek nincs megoldása, az azt jelenti, hogy az

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0$$

egyenlőtlenség minden valós $x$-re teljesül. Vizsgáljuk meg, hogy ez milyen feltételek esetén igaz!

Mivel $m+1=0$ esetén a bal oldal függvénye az $x \mapsto 4x-6$ lineáris függvény lesz, amely nem lesz minden $x$-re pozitív, ezért $m$-re teljesülnie kell, hogy $m \neq -1$.

Ekkor a bal oldal egy másodfokú függvény lesz, amely abban az esetben lesz minden $x$-re nemnegatív, ha a függvény képe felfelé nyíló parabola, melynek legfeljebb egy közös pontja lehet az $x$ tengellyel.

Azaz $m+1>0$, vagyis $m>-1$.

Másrészt legfeljebb egy valós gyöke létezhet, melyet a diszkrimináns értéke határoz meg. Erre teljesülnie kell, hogy

$$D = [2(m-1)]^2 - 4(m+1)\cdot(3m-3) \leq 0.$$

Ez $m$-re nézve egy másodfokú egyenlőtlenséget határoz meg.

A kijelölt műveleteket elvégezve, és rendezve:

$$4m^2 - 8m + 4 - 12m^2 - 12m + 12m + 12 \leq 0,$$

$$-8m^2 - 8m + 16 \leq 0.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát $-8$-cal osztva:

$$m^2 + m - 2 \geq 0.$$

Határozzuk meg az $m^2 + m - 2 = 0$ egyenlet zérushelyeit!

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \begin{cases} m_1 = -2, \\ m_2 = 1. \end{cases}$$

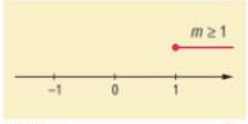
Mivel az $m^2 + m - 2 \geq 0$ egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés grafikonja felfelé nyíló parabola, ezért az egyenlőtlenség megoldása:

$$m \leq -2 \text{ vagy } 1 \leq m.$$

Figyelembe véve még a korábban kapott $m>-1$ feltételt, a feladatban szereplő másodfokú egyenlőtlenségnek akkor nem lesz megoldása, ha

$$m \in [1; \infty[.$$

A megoldás számegyenesen szemléltetve a 12. ábrán látható.




12. ábra

## Feladatok

1. Határozzuk meg a következő egyenletekben az $a$ paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek kétszeres gyökei legyenek!
   a) $x^2 - ax + 4 = 0$;
   b) $x^2 - 3x + a = 0$;
   c) $x^2 - ax + a = 0$;
   d) $x^2 - ax + a + 1 = 0$.

2. Oldjuk meg, és diszkutáljuk (elemezzük) a következő egyenleteket!
   a) $x^2 - ax + 4 = 0$;
   b) $x^2 - bx + a = 0$;
   c) $ax^2 - bx + 5 = 0$;
   d) $ax^2 - bx + a + 1 = 0$.

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket!
   a) $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x} = 2$;
   b) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = 2$;
   c) $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} = \frac{1}{x}$.

4. Határozzuk meg az $a$ paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenleteknek ne legyen valós megoldása!
   a) $x^2 - ax + 4a = 0$;
   b) $x^2 - ax + a - 4 = 0$;
   c) $ax^2 - (a-1)x + 5 = 0$.

5. Határozzuk meg az $m$ paraméter értékét úgy, hogy az $mx^2 + (m-1)x + 1$ kifejezés értéke bármely $x$ esetén negatív legyen!

6. Határozzuk meg az $m$ paraméter értékét úgy, hogy az $mx^2 + mx - 5$ kifejezés értéke bármely $x$ esetén pozitív legyen!

7. Határozzuk meg az $m$ paraméter értékét úgy, hogy az $-mx^2 + (m-1)x + m + 2$ kifejezés értéke bármely $x$ esetén negatív legyen!



# 7. Négyzetgyökös egyenletek

Azokat az egyenleteket, amelyekben az ismeretlen négyzetgyök alatt szerepel, **négyzetgyökös egyenletnek** nevezzük.

$(\sqrt{a})^2 = a$, ahol $a \geq 0$ és $\sqrt{a} \geq 0$

A négyzetgyökös egyenletek megoldása során arra törekszünk, hogy az egyenletből a négyzetgyökös kifejezéseket kiküszöböljük. Ez általában négyzetre emeléssel történik.

Ennél a műveletnél gyakran adódhatnak olyan problémák, amelyek a gyökök ellenőrzését különösen fontossá teszik. A négyzetre emelés ugyanis eredetileg nem teljesülő egyenlőségeket is egyenlővé tehet. Például: $-2 \neq 2$, de ha mindkét oldalt négyzetre emeljük, akkor $(-2)^2 = 2^2 = 4$.

Emiatt ezt a műveletet nem soroljuk az ekvivalens átalakítások közé, és alkalmazásakor körültekintően kell eljárnunk.

**1. példa**

Oldjuk meg a $\sqrt{x-2} - 2 = 0$ egyenletet.

**Megoldás**

Első lépésben megadjuk a valós számok legbővebb részhalmazát, amelyen a megoldást kereshetjük, azaz meghatározzuk az egyenlet értelmezési tartományát.

értelmezési tartomány: $x \geq 2$

Mivel a négyzetgyökjel alatt nem állhat negatív szám, ezért $x - 2 \geq 0$, azaz $x \geq 2$.

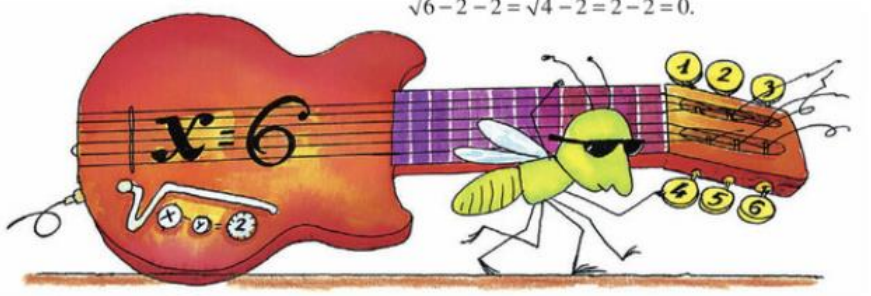
Az egyenletet átrendezve: $\sqrt{x-2} = 2$.

Ekkor mindkét oldal nemnegatív, ilyen esetekben a négyzetre emelés elvégzése ekvivalens átalakítás lesz. Ezt elvégezve:

$$x - 2 = 4,$$
$$x = 6.$$

A kapott gyök valóban megoldás, mert egyrészt eleme az értelmezési tartománynak, másrészt kielégíti az egyenletet:

$$\sqrt{6-2} - 2 = \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0.$$



**2. példa**

Mely valós számokra igaz, hogy $x-\sqrt{2x+1}=1$?

**Megoldás**

Megállapíthatjuk, hogy az egyenletnek csak olyan számokra van értelme, melyekre $2x+1\geq 0$, azaz $x\geq -\frac{1}{2}$.

értelmezési tartomány:

$$x\geq -\frac{1}{2}$$

Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy az egyik oldalon csak a négyzetgyökös kifejezés maradjon!

$$-\sqrt{2x+1}=1-x;$$
$$\sqrt{2x+1}=x-1.$$

Az átrendezés után mindkét oldalt megszoroztuk –1-gyel, így a bal oldal biztosan csak nemnegatív értékeket vesz fel, és ha van megoldása az egyenletnek, arra a jobb oldalnak is nemnegatív értéket kell felvennie.

Tehát a megoldásra az is igaz, hogy:

$$x-1\geq 0,$$
$$x\geq 1.$$

Ilyen feltételek mellett a négyzetre emelés is ekvivalens átalakításnak számít.

$$2x+1=x^2-2x+1,$$
$$x^2-4x=0,$$
$$x(x-4)=0.$$

Ennek az egyenletnek két gyöke van, az $x_1=0$ és az $x_2=4$.

A megadott feltételeknek az $x_2=4$ gyök tesz csak eleget, és ez az érték valóban megoldása az egyenletnek:

$$4-\sqrt{2\cdot 4+1}=4-\sqrt{9}=4-3=1.$$

Az $x_1=0$ esetén:

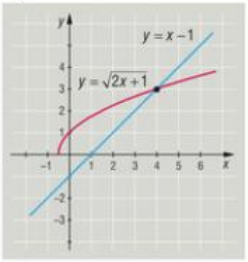
$$0-\sqrt{2\cdot 0+1}=0-1=-1\neq 1.$$

Látható, hogy ebben az esetben éppen a négyzetre emelés művelete során válna igazzá a kezdetben hamis állítás.

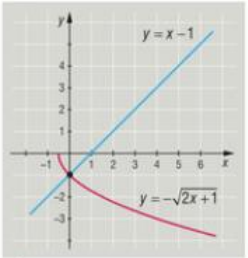
Az egyenlet átalakítása során szerepelt az $\sqrt{2x+1}=x-1$ egyenlet.

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $x\mapsto\sqrt{2x+1}$ és az $x\mapsto x-1$ függvényeket. *(13. ábra)*

A megoldás során keletkezett hamis gyök a $-\sqrt{2x+1}=x-1$ egyenlet megoldása lenne. Ezek grafikonjai közös koordináta-rendszerben ábrázolva a 14. ábrán láthatóak.




*13. ábra*




*14. ábra*

**3. példa**

Oldjuk meg a $\sqrt{x+9}-\sqrt{x}=1$ egyenletet!

**Megoldás**

Az egyenlet értelmezési tartománya:

$$\left.\begin{array}{l} x+9\geq 0, \text{ azaz } x\geq -9 \\ x\geq 0 \end{array}\right\} x\geq 0.$$

Ebben a feladatban egyetlen négyzetre emelés végrehajtásával nem tudjuk elérni, hogy az egyenletben ne szerepeljen négyzetgyök.

Ha az egyenletet átrendezzük $\sqrt{x+9}=\sqrt{x}+1$ alakra, akkor ezzel elérjük, hogy mindkét oldalon nemnegatív szám áll. Ekkor négyzetre emelve:

$$x+9=x+2\sqrt{x}+1.$$

Átrendezve úgy, hogy az egyik oldalon csak a négyzetgyökös kifejezés maradjon:

$$\sqrt{x}=4.$$

Innen mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk, hogy: $x = 16$.

Ez valóban megoldás lesz, hiszen:

$$\sqrt{16+9}-\sqrt{16}=5-4=1.$$

**4. példa**

Oldjuk meg a $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-5x}=-2$ egyenletet!

**Megoldás**

Azonnal rájöhetünk, hogy ennek az egyenletnek nem lehet gyöke, hiszen ha lenne, akkor a négyzetgyök definíciója miatt az egyenlet bal oldalán biztosan nemnegatív szám állna, a jobb oldal pedig negatív, ezért az egyenlőség semmilyen valós számra sem állhat fenn.



**5. példa**

Mely valós számokra igaz a következő egyenlet:

$$\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}=6?$$

**Megoldás**

Vegyük észre, hogy a négyzetgyökök alatt kéttagú kifejezések négyzete áll. Ez egyben azt is jelenti, hogy az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Alkalmazzuk a $\sqrt{a^2}=|a|$ azonosságot:

$\sqrt{a^2}=|a|$

$$\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=6,$$
$$|x+3|+|x-2|=6.$$

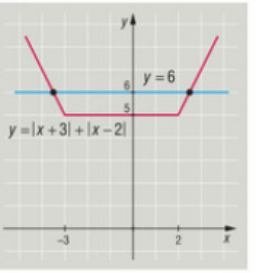
Az abszolút érték definíciója miatt:

$$|x+3|=\begin{cases} x+3, \text{ ha } x\geq -3,\\ -x-3, \text{ ha } x<-3.\end{cases}$$

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, \text{ ha } x\geq 2,\\ -x+2, \text{ ha } x<2.\end{cases}$$

A feltételek miatt három esetet kell megvizsgálnunk: *(15. ábra)*

$$x<-3; \quad -3\leq x<2; \quad 2\leq x.$$




15. ábra

**1.** Ha $x<-3$, akkor:

$$-x-3-x+2=6,$$
$$x=-\frac{7}{2}.$$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk, hogy ez valóban megoldása lesz az egyenletnek.

**2.** Ha $-3\leq x<2$, akkor:

$$x+3-x+2=6,$$
$$5=6.$$

Ekkor ellentmondásra jutottunk, tehát ebben az esetben nem lesz megoldása az egyenletnek.

**3.** Ha $2\leq x$, akkor:

$$x+3+x-2=6,$$
$$x=\frac{5}{2}.$$

Az egyenletbe való behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy ez is megoldás.

Tehát az egyenletünknek két megoldása van:

$$x_1=-\frac{7}{2} \quad \text{és} \quad x_2=\frac{5}{2}.$$

**6. példa**

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30.$$

**Megoldás**

Az $x\mapsto 2x^2+3x+9$ függvény grafikonja olyan felfelé nyíló parabola, amelynek diszkriminánsa negatív szám: $D=9-4\cdot 2\cdot 9=-63<0$, ezért a függvénynek nem létezik zérushelye.

Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza, ugyanis a négyzetgyök alatt szereplő másodfokú kifejezés értéke bármely $x$ esetén a pozitív valós számok halmazába esik.

Ha egyenletünket az előzőekhez hasonlóan négyzetre emelnénk, akkor negyedfokú egyenlethez jutnánk. Célszerű ebben az esetben új ismeretlen behelyettesítésével próbálkoznunk.



Legyen $y=2x^2+3x-3$, ekkor az egyenlet a következő alakba írható:

$$y+\sqrt{y+12}=30,$$
$$\sqrt{y+12}=30-y.$$

A négyzetre emelés akkor lesz ekvivalens átalakítás, ha $30-y\geq 0$, azaz $y\leq 30$. Mindkét oldalt négyzetre emelve és rendezve:

$$y+12=900-60y+y^2,$$
$$y^2-61y+888=0.$$

$$y_{1,2}=\frac{61\pm\sqrt{(61)^2-4\cdot 1\cdot 888}}{2}=\begin{cases}y_1=24,\\ y_2=37.\end{cases}$$

Az $y_2=37>30$ nem lesz megoldása az $y+\sqrt{y+12}=30$ egyenletnek.

Az $y_1=24$ viszont megoldás lesz. Ezt visszahelyettesítve, $x$-re a következő egyenlet adódik:

$$2x^2+3x-3=24,$$
$$2x^2+3x-27=0.$$

Ennek a gyökei:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-27)}}{4}=\begin{cases}x_1=-\frac{9}{2},\\ x_2=3.\end{cases}$$

Helyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ezek valóban megoldásai az egyenletünknek.

*Megjegyzés:* Az egyenlet más helyettesítéssel is megoldható. A $z=2x^2+3x+9$ helyettesítést alkalmazva, a $z-12+\sqrt{z}=30$ egyenlethez jutunk. Ezt az előbbihez hasonló módon oldhatjuk meg.

## Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

   *a)* $\sqrt{x}-6=0$; *b)* $\sqrt{x-25}=0$;

   *c)* $\sqrt{x}+64=0$.

2. Keressük meg a következő egyenletek megoldásait!

   *a)* $\sqrt{5-x}+3=x$; *b)* $\sqrt{x+2}+1=2x$;

   *c)* $\sqrt{5-x}-\frac{x}{2}=-3$.

3. Mely valós számokra igazak a következő egyenletek?

   *a)* $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=0$; *b)* $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=0$;

   *c)* $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+1=0$.

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

   *a)* $\sqrt{x+8}-\sqrt{x-1}=1$; *b)* $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}=4$;

   *c)* $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-7}$.

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

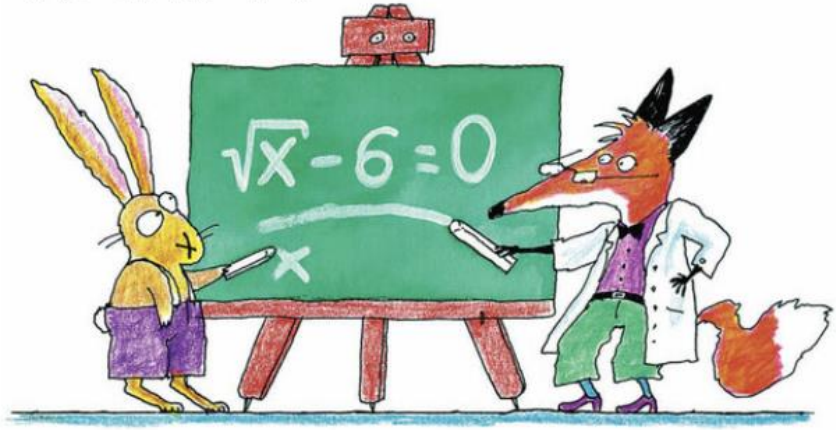
   *a)* $\sqrt{x^2+6x+9}-x=1$; *b)* $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{25-10x+x^2}=4$;

   *c)* $\sqrt{x^2+8x+16}-\sqrt{x^2-2x+1}=1$.

6. Új ismeretlen bevezetésével oldjuk meg a következő egyenleteket!

   *a)* $x^2+\sqrt{x^2-9}=21$; *b)* $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x+9}=27$;

   *c)* $\sqrt{x^2-4x+4}+x^2-4x=4$.



# 8. Másodfokú egyenletrendszerek

Azokat az egyenletrendszereket, melyekben másodfokú algebrai kifejezések találhatók, **másodfokú egyenletrendszereknek** nevezzük.

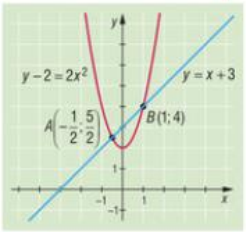
Ezek esetén leggyakrabban a **grafikus,** ill. az **algebrai** megoldási módszert alkalmazzuk. Általában megjegyezhetjük, hogy olyan módszer, amely bármely típusú másodfokú egyenletrendszernél alkalmazható lenne, nem létezik. A megoldások keresésénél mindig mérlegelni kell a használható módszerek előnyeit és hátrányait.

## A grafikus módszer

**1. példa**

Oldjuk meg az egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán:

*a)* $\left.\begin{aligned} y &= x+3 \\ y-2 &= 2x^2 \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ \sqrt{x} &= y \end{aligned}\right\}$.




16. ábra

A grafikus módszer alkalmazásához az egyenletrendszerben szereplő egyenleteket a valós számok halmazán értelmezett függvényként ábrázoljuk koordináta-rendszerben. Az ábrák alapján a megfelelő megoldások leolvashatók. Ezek helyességét visszahelyettesítéssel ellenőriznünk kell!

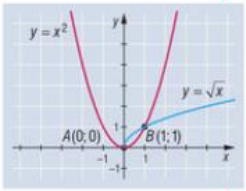
**Megoldás (a)**

A 16. ábráról leolvashatók az egyenletrendszer megoldásai:

$$(x; y)_1 = (1; 4), \quad (x; y)_2 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

A megoldásokat ellenőrizve:

$$4 = 1+3; \quad 4-2 = 2\cdot 1^2; \quad \text{illetve} \quad \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}+3; \quad \frac{5}{2}-2 = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2.$$




17. ábra

**Megoldás (b)**

A 17. ábráról leolvashatók az egyenletrendszer megoldásai:

$$(x; y)_1 = (1; 1), \quad (x; y)_2 = (0; 0).$$

A megoldásokat ellenőrizve: $1 = 1^2$; $\sqrt{1} = 1$; illetve $0 = 0^2$; $\sqrt{0} = 0$.

## A behelyettesítéses módszer

**2. példa**

Oldjuk meg az 1. példa egyenletrendszereit algebrai módszerrel!

**Megoldás (a)**

A behelyettesítő módszert alkalmazva az első egyenletből kifejezzük $y$-t, amelyet a második egyenletbe helyettesítve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x+3-2 = 2x^2,$$
$$2x^2 - x - 1 = 0.$$

A megoldóképletet alkalmazva:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Így az egyenletrendszer megoldásai:

$$(x; y)_1 = (1; 4), \quad (x; y)_2 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Ellenőrzés: lásd grafikus megoldás.

**Megoldás (b)**

Az első egyenletből kifejezzük $y$-t, amelyet a második egyenletbe helyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$$x = (x^2)^2,$$
$$x = x^4.$$

A kapott egyenletet 0-ra redukálva, majd az algebrai kifejezést szorzattá alakítva:

$$x - x^4 = 0,$$
$$x(1 - x^3) = 0.$$

Mivel egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = 0$$

vagy

$$1 - x^3 = 0,$$
$$x^3 = 1,$$
$$x_2 = 1.$$

Így az egyenletrendszer megoldásai:

$$(x; y)_1 = (1; 1), \quad (x; y)_2 = (0; 0).$$

Ellenőrzés: lásd grafikus megoldás.

**3. példa**

Melyik az a két szám, melynek összege 15, szorzata pedig 56?

**Megoldás**

Jelölje a keresett két számot $x$ és $y$.

A feltételek szerint a következő másodfokú egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 15 \\ x \cdot y &= 56 \end{aligned}\right\}.$$

A behelyettesítő módszert alkalmazva, az első egyenletből $y$-t kifejezve és azt a második egyenletbe helyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$$x(15 - x) = 56.$$

Az egyenletrendszer megoldásaként mindig az összetartozó értékpárokat kell megadni. Amennyiben az egyenletrendszer az ismeretlenek cseréjére nézve nem változik, akkor a megoldások is szimmetrikusak lesznek.

Az egyenletet rendezve, majd a megoldóképletet használva:

$$-x^2+15x-56=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{15^2-4\cdot(-1)\cdot(-56)}}{2\cdot(-1)}=\begin{cases}x_1=7,\\x_2=8.\end{cases}$$

Az $y$ értékét visszahelyettesítve kapjuk meg: $y_1=8$, illetve $y_2=7$.

A keresett számpárok tehát a következők lesznek:

$$(x;y)_1=(7;8),\quad (x;y)_2=(8;7).$$

Valóban: $7+8=15$ és $7\cdot 8=56$.

## A következményegyenlet vizsgálata

Ha az egyenletrendszerből körülményes kifejezni bármelyik ismeretlent, érdemes megvizsgálni a két egyenlet következményét. Lehetséges, hogy azok valamelyikéből egyszerűbb kifejezni valamelyik ismeretlent.

**4. példa**

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}x+3xy-y&=5\\2x-xy+2y&=4\end{aligned}\right\}.$$

### Megoldás

Bármelyik egyenletből is fejezzük ki az ismeretlenek bármelyikét, mindegyik esetben törtkifejezést kapunk. Viszont ha az első egyenlethez hozzáadjuk a második 3-szorosát, akkor egy egyszerűbb következményegyenletet kapunk, melyből könnyebb a választott ismeretlen kifejezése.

$$\left.\begin{aligned}x+3xy-y&=5\\6x-3xy+6y&=12\end{aligned}\right\}+$$

$$7x+5y=17,$$

$$y=\frac{17-7x}{5}.$$

Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve, és azt rendezve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x+3x\cdot\frac{17-7x}{5}-\frac{17-7x}{5}=5,$$

$$21x^2-63x-42=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-63)\pm\sqrt{(-63)^2-4\cdot21\cdot42}}{2\cdot21}=\begin{cases}x_1=1,\\x_2=2.\end{cases}$$

Visszahelyettesítéssel megkapjuk az egyenletrendszer megoldásait is:

$$(x;y)_1=(1;2),\quad (x;y)_2=\left(2;\frac{3}{5}\right).$$

Ellenőrzés:

$$1+3\cdot1\cdot2-2=5;\qquad 2\cdot1-1\cdot2+2\cdot2=4;$$

$$2+3\cdot2\cdot\frac{3}{5}-\frac{3}{5}=5;\qquad 2\cdot2-2\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{3}{5}=4.$$

## Új ismeretlen bevezetése

Léteznek olyan egyenletrendszerek, melyekben alkalmasan kiválasztott kifejezéseket új ismeretlenekkel helyettesítve, az egyenletrendszer lényegesen egyszerűbbé válik.

**5. példa**

Oldjuk meg a pozitív valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 2(x+y) &= 3xy \\ x^2+y^2 &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

**Megoldás**

A második egyenletet a nevezetes azonosságok ismeretében alakítsuk át a következőképen:

$$\left.\begin{aligned} 2(x+y) &= 3xy \\ (x+y)^2-2xy &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Ezek után célszerű a következő új ismeretleneket bevezetni: $a = x + y$, $b = xy$. Így az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 2a &= 3b \\ a^2-2b &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből: $b = \frac{2a}{3}$. Ennek alapján a második egyenletből a következő másodfokú egyenlethez jutunk, melyet megoldva $a$ és $b$ értéke kifejezhető:

$$a^2-2\cdot\frac{2a}{3}-5=0,$$

$$3a^2-4a-15=0,$$

$$a_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot3\cdot(-5)}}{2\cdot3}=\begin{cases} a_1=3, \\ a_2=-\frac{5}{3}. \end{cases}$$

Így:

$$(a;b)_1=(3;2), \qquad (a;b)_2=\left(-\frac{5}{3};-\frac{10}{9}\right).$$

Ennek megfelelően két egyenletrendszer adódik, melyeket már egyszerűen megoldhatunk.

Az első esetben:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 3 \\ xy &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből: $y = 3 - x$, ezt a másodikba helyettesítve:

$$x(3-x)=2,$$

$$-x^2+3x-2=0.$$

Ennek megoldása:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)} = \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Így ebben az esetben az egyenletrendszer megoldásai:

$$(x; y)_1 = (2; 1), \quad (x; y)_2 = (1; 2).$$

A második esetben:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= -\frac{5}{3} \\ xy &= -\frac{10}{9} \end{aligned}\right\}.$$

Mivel az egyenletrendszert a pozitív valós számpárok halmazán kell megoldanunk, ezért ebben az esetben újabb megoldások nem állnak elő.

Ellenőrizve: $2 \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 2 \cdot 1$ és $1^2 + 2^2 = 5$.

## Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

   *a)* $\left.\begin{aligned} x + y &= 12 \\ xy &= 35 \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} x + y &= 7 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} xy &= 24 \\ x^2 + y^2 &= 52 \end{aligned}\right\}$.

2. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletrendszereket! A megoldásokat keressük meg algebrai úton is!

   *a)* $\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ y &= x^2 \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x^2 - y &= 0 \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} y - 4x &= x^2 + 4 \\ y - 2 &= x \end{aligned}\right\}$.

3. A következményegyenletek felhasználásával oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

   *a)* $\left.\begin{aligned} x + y + xy &= 5 \\ xy + 1 &= x + y \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} x + 2y + 3xy &= 11 \\ 2x - y + 2xy &= 4 \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} 4(x + y) &= 5xy - 10 \\ x(y - 2) &= y(x - 1) - 1 \end{aligned}\right\}$.

4. Új ismeretlen bevezetésével oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

   *a)* $\left.\begin{aligned} x + y + xy &= 23 \\ \frac{126}{xy} &= x + y \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} x + y + \sqrt{x + y} &= 12 \\ x^2 + y^2 &= 53 \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} 24(x + y) &= 7xy \\ x^2 + y^2 &= 100 \end{aligned}\right\}$.

5. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

   *a)* $\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2(x + y) \\ x^2 + y^2 &= 10(x - y) \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} x^2 y + xy^2 &= 20 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{4} \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} \frac{7}{\sqrt{x - 7}} - \frac{4}{\sqrt{y + 6}} &= \frac{5}{3} \\ \frac{5}{\sqrt{x - 7}} + \frac{3}{\sqrt{y + 6}} &= \frac{13}{6} \end{aligned}\right\}$.

# 9. A számtani és mértani közép

Különböző mennyiségek vizsgálata során gyakran találkozhatunk az *átlag, középérték* kifejezésekkel. Ezek többnyire a *számtani közép* fogalmához kapcsolódnak, ahol a rendelkezésünkre álló számokat össze kell adni, és el kell osztani a tagok számával.

A *középérték* fogalma ennél jóval általánosabb lehet.

Két szám esetén *középértéken* olyan harmadik számot értünk, amely valamilyen szabály szerint a két szám közé esik, ha a két szám különböző. Ugyanazon két szám középértéke pedig az adott számmal egyenlő.

A hozzárendelés szabálya eltérő lehet, ezért a középértékek is különböző értékeket adhatnak.

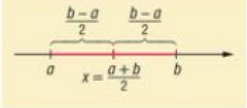
**1. példa**

Adott két szám, $a$ és $b$. Keressünk olyan számot, amelyik az egyiknél annyival nagyobb, mint amennyivel kisebb a másiknál!

**Megoldás**

Legyen a keresett szám $x$, ezért *(18. ábra)*:

$$x - a = b - x,$$
$$2x = a + b,$$
$$x = \frac{a+b}{2}.$$




18. ábra

Az így kapott számot nevezzük az $a$ és $b$ szám **számtani** (aritmetikai) **közepének,** és $A(a, b)$-vel jelöljük. A statisztikában, a mindennapi életben erre a fogalomra szokás használni az **átlag** kifejezést.

Mivel a későbbiek során fontos lesz majd, hogy a megadott számtani közepet össze tudjuk hasonlítani más közepekkel, ezért a definíciót nemnegatív számokra adjuk meg.

DEFINÍCIÓ: **Két nemnegatív szám *számtani közepén* a két szám összegének a felét értjük:**

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}.$$

**számtani közép**

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

A fogalom több szám esetén is megadható. Az $a_1; a_2; \ldots ; a_n$ nemnegatív számok számtani közepe:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

**2. példa**

Adott két pozitív szám, $a$ és $b$. Keressünk olyan számot, amelyik az egyiknek annyiszorosa, mint ahányad része a másiknak!

**Megoldás**

Legyen a keresett szám $x$, így a feltételek szerint:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x},$$

$$x^2 = ab,$$

$$x = \sqrt{ab}.$$

A kapott számot a két szám mértani (geometriai) közepének nevezzük.

mértani közép

$G(a,b) = \sqrt{ab}$

DEFINÍCIÓ: **Két nemnegatív szám *mértani közepén* a két szám szorzatának négyzetgyökét értjük:**

$$G(a, b) = \sqrt{ab}.$$

Általában az $a_1; a_2; \ldots ; a_n$ nemnegatív számok mértani közepe:

$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

**3. példa**

Legyen $a = 3$ és $b = 12$. Határozzuk meg a két szám számtani és mértani közepét! Az eredményeket szemléltessük számegyenesen!

**Megoldás**

A megadott két szám számtani és mértani közepe:

$$A(3, 12) = \frac{3+12}{2} = 7{,}5; \qquad G(3, 12) = \sqrt{3 \cdot 12} = 6.$$

A számokat számegyenesen ábrázolva:




*19. ábra*

Az ábrázolás alapján megállapíthatjuk, hogy a megadott konkrét számok esetén telesül, hogy:

$$3 < G(3, 12) < A(3, 12) < 12.$$

◆ ◆ ◆

Felmerülhet a kérdés, hogy igaz-e hasonló összefüggés tetszőleges $a$ és $b$ nemnegatív valós számok esetében. Előző sejtésünk egy nevezetes egyenlőtlenséghez vezet, melyet ***a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségnek*** nevezünk.

**számtani és mértani közép egyenlőtlensége**

**TÉTEL:** **Két nemnegatív $a$ és $b$ valós szám esetén**

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

### Bizonyítás

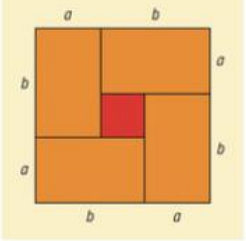
Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért a négyzetre emelés az eredetivel ekvivalens állítást fogalmaz meg.

$$ab \le \frac{a^2+2ab+b^2}{4},$$
$$4ab \le a^2+2ab+b^2,$$
$$0 \le a^2-2ab+b^2,$$
$$0 \le (a-b)^2.$$

Az utolsó egyenlőtlenség nyilvánvalóan igaz, így az eredeti is az.

Az eredmény alapján megállapítható, hogy a két közép akkor és csak akkor lesz egymással egyenlő, ha $a = b$. Ebben az esetben igaz, hogy:

$$a = \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} = b.$$




$0 < a < b$

$$(a+b)^2-(b-a)^2 = 4ab,$$
$$(a+b)^2 \ge 4ab,$$
$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}.$$

20. ábra

*Megjegyzés:* A két közép közötti egyenlőtlenség általában is igaz, azaz nemnegatív számok mértani közepe legfeljebb a számtani közepükkel egyenlő:

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = A.$$

Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

**4. példa**

Vizsgáljuk meg, hogy milyen értékeket vehet fel egy pozitív számnak és reciprokának az összege!

### Megoldás

Jelöljük a vizsgált pozitív számot $a$-val. Néhány konkrét érték kiszámítása után megfogalmazhatunk egy **sejtést,** miszerint: $a + \frac{1}{a} \ge 2$.

| $a$ | $a+\frac{1}{a}$ |
|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ |
| 1 | 2 |
| 2 | $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ |
| 3 | $3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$ |

Mivel $a$ és $\frac{1}{a}$ pozitív számok, ezért érvényes rájuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség, azaz:

$$\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} \le \frac{a+\frac{1}{a}}{2}.$$

Ezt átrendezve:

$$\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}} \le \frac{a+\frac{1}{a}}{2},$$

$$1 \le \frac{a+\frac{1}{a}}{2},$$

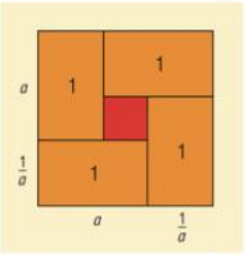
$$2 \le a+\frac{1}{a}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a=\frac{1}{a}$, amiből $a=1$ adódik a pozitív valós számok halmazán.

Ezzel bizonyítottuk a következő tételt:

**TÉTEL: Tetszőleges $a>0$ pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2.**

Az állítás szemléletesen bizonyítható a 21. ábra segítségével.




21. ábra

Az ábrán szereplő négy téglalap területe egyenként $a\cdot\frac{1}{a}=1$ területegység. Ezek összege legfeljebb a nagy négyzet területét teszi ki, azaz:

$$4 \le \left(a+\frac{1}{a}\right)^2.$$

Innen négyzetgyökvonás alkalmazásával a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$a+\frac{1}{a} \ge 2.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmas lehet különböző mennyiségek minimumának, illetve maximumának meghatározására is.

Erre az eredményre juthatunk akkor is, ha felidézzük a függvényeknél korábban már igazolt állítást, miszerint:

$\left|x+\frac{1}{x}\right| \ge 2$, ha $x \ne 0$.

$a<0$ esetén $a+\frac{1}{a} \le -2$

szintén belátható, ugyanis (–1)-gyel való szorzás után

$-a+\frac{1}{-a} \ge 2$.

Mivel $-a>0$, ez az egyenlőtlenség teljesül.

Összefoglalva:

$\left|a+\frac{1}{a}\right| \ge 2 \quad (a \ne 0)$.

**5. példa**

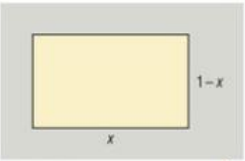
Egy 2 m hosszú fonál segítségével képezzünk egy téglalapot! Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalait, hogy a terület maximális legyen?

**Megoldás**

Jelöljük a téglalap szomszédos oldalainak hosszát $x$-szel és $1-x$-szel *(22. ábra)*. A téglalap területe: $t=x(1-x)$. A kétténytezős szorzat mindkét tényezője nemnegatív, hiszen a téglalap oldalainak hosszáról van szó. Írjuk fel erre a két tényezőre a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$G=\sqrt{x(1-x)} \le \frac{x+1-x}{2}=\frac{1}{2}=A.$$

Azt kaptuk, hogy e két számnak a számtani közepe állandó.




22. ábra

A 23. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy állandó számtani közép esetén a mértani közép akkor veszi fel a legnagyobb értékét, ha a két közép egymással egyenlő. Ekkor: $x = 1 - x$, azaz $x = \frac{1}{2}$.



23. ábra

**adott kerületű téglalapok közül a négyzet területe a legnagyobb**

Mivel a téglalap területe éppen a mértani közép négyzete, ezért a terület is ekkor lesz maximális. Azaz akkor kapunk legnagyobb területet, ha a 2 m hosszúságú fonálból $x = \frac{1}{2}$ m oldalú négyzetet alakítunk ki.

Vagyis az adott kerületű, maximális területű téglalap a négyzet.

◆ ◆ ◆

A megoldásban lényeges szerepet kapott az, hogy a két szám számtani közepe **állandó** volt. Csak ebben az esetben alkalmazható a mértani közép maximumának meghatározására a nevezetes egyenlőtlenség. Ha mindkét közép változik, akkor ez a módszer már nem eredményes.

A példa kapcsolatba hozható a matematika egy híres feladatával, melyet *izoperimetrikus problémának* ismerünk. A monda szerint a menekülni kényszerülő Dido, Afrika partjaira vetődvén, az uralkodótól akkora földdarabot kért, amekkorát egy marhabőrrel körül tud keríteni. Az uralkodó mosolyogva beleegyezett a kérésbe, de az okos Dido keskeny csíkokra vágta szét a marhabőrt, és azokat hosszú kötélként csomózta össze. Az elkerített földdarabon alapította meg Karthágó városát, melynek később ő lett a királynője.

A kérdés az volt, hogy milyen alakzatot kell formázni a kötél segítségével, hogy annak területe adott kerület mellett a lehető legnagyobb legyen. A problémát csak a 19. században oldották meg, ekkor igazolták, hogy ez az alakzat a kör.



## Feladatok

1. Határozzuk meg a következő számok számtani közepét és mértani közepét!

   *a)* 7 és 8; *b)* 27 és $\frac{1}{3}$; *c)* 125 és 5.

2. Két szám közül az egyik 25. Határozzuk meg a másik számot, ha

   *a)* számtani közepük 30; *b)* mértani közepük 10!

3. Ákos 10 dobásból átlagosan 3 alkalommal talál a kosárba, míg Zsombor 10-ből 7 alkalommal betalál. Mennyi találatra számíthatunk, ha felváltva dobnak 10-et?

4. Egy üzem a termelését az első évben 5%-kal növelte, a rákövetkező évben 6%-os volt a növekedés. E két év során évente átlagosan mennyivel növekedett a termelés?

5. Egy autós két város között haladva az út első felét 50 km/h, a második felét pedig 60 km/h sebességgel tette meg. Mekkora átlagsebességgel tette meg a teljes utat?

6. A 100 $cm^2$ területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

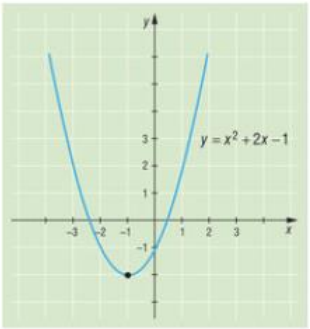
7. Van-e megoldása a pozitív valós számok körében az $x + \frac{2}{x} = 2$ egyenletnek?

8. Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza $a + \frac{1}{a}$, az egyik befogó pedig $a - \frac{1}{a}$, ahol $a \in \mathbb{R}^+$. Mekkora a másik befogó hossza? Mit mondhatunk ez alapján $a + \frac{1}{a}$-ról?

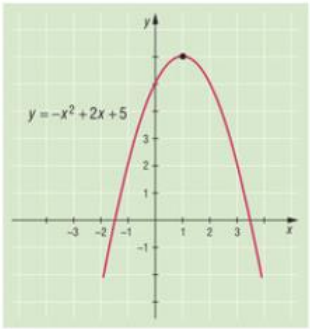
# 10. Szélsőérték-feladatok (emelt szintű tananyag)

Emlékeztető:
Az $f$ függvénynek az $x = a$ helyen minimuma / maximuma van, ha az értelmezési tartomány minden elemére $f(x) \geq f(a)$ / $f(x) \leq f(a)$.

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú másodfokú függvények grafikonjai parabolák. Ha $a > 0$, akkor a parabola **felfelé** nyílik *(24. ábra)*, **minimuma** van. Ha $a < 0$, akkor a parabola **lefelé** nyílik *(25. ábra)*, **maximuma** van.




*24. ábra*




*25. ábra*

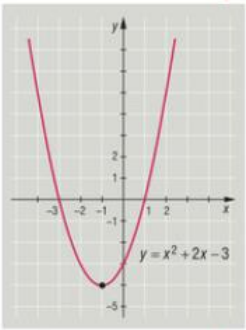
A függvény minimuma, maximuma a függvény ***szélsőértéke.***

**1. példa**

Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 2x - 3$ függvény szélsőértékeit akkor, ha

*a)* $x \in \mathbb{R}$; *b)* $x \in [0; 2]$; *c)* $x \in [-3; -2]$.

**Megoldás**




*26. ábra*

A függvényt alakítsuk teljes négyzetté! Ez a lépés a későbbiekben is hatékonynak bizonyul majd akkor, ha másodfokú kifejezések szélsőértékeit keressük.

$$f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4.$$

A függvény grafikonja a 26. ábrán látható.

*a)* A függvény ott veszi fel a legkisebb értékét, ahol a négyzetes kifejezés a legkisebb, azaz 0. Ez $x = -1$ esetén teljesül. Ekkor a függvény minimális értéke: $f(-1) = -4$.

*b)* A $[0; 2]$ intervallumon a grafikon szigorúan monoton növekvő. A minimumát az $x = 0$-nál veszi fel, és ennek az értéke $f(0) = -3$. A maximuma $x = 2$-nél lesz, mégpedig $f(2) = 5$.

*c)* A $[-3; -2]$ intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő, így a maximumát az intervallum bal oldali végpontjában, míg a minimumát a jobb oldali végpontban veszi fel. A maximum hely $x = -3$, értéke $f(-3) = 0$. A minimum hely $x = -2$, értéke $f(-2) = -3$.

**2. példa**

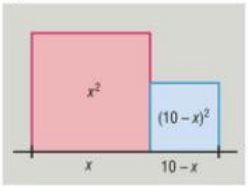
Egy 10 cm nagyságú szakaszt két részre osztunk, és a részek fölé négyzeteket rajzolunk. Mikor lesz a két négyzet területének az összege a legkisebb?

**Megoldás**

Jelöljük a 27. ábrának megfelelően az egyik négyzet oldalának a hosszát $x$-szel, ekkor a másik oldal hossza $10 - x$ lesz. Ekkor a négyzetek területének összege:

$$t(x) = x^2 + (10 - x)^2,$$

amely $x$-re nézve egy másodfokú függvényt határoz meg a $[0; 10]$ intervallumon. Ennek a minimumát keressük. Első lépésben alakítsunk teljes négyzetté:



27. ábra

$$t(x) = x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2(x^2 - 10x + 50) =$$
$$= 2[(x - 5)^2 + 25] = 2(x - 5)^2 + 50.$$

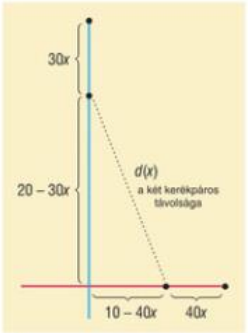
Ez a függvény az $x = 5$ helyen veszi fel a legkisebb értékét, azaz a 10 cm hosszú szakaszt éppen meg kell feleznünk, és két egyenlő nagyságú, egyenként 25 cm$^2$ területű négyzetet kell rajzolnunk rá.

**3. példa**

Két, egymásra merőleges úton a kereszteződés felé egyenletes sebességgel halad két kerékpáros. Egyszerre indultak, az egyik 30 km/h sebességgel 20 km távolságból, a másik 40 km/h sebességgel 10 km távolságból. Mikor és hol lesznek egymáshoz a legközelebb?

**Megoldás**

Legyen a keresett idő órában mérve $x$. Ekkor az egyik úton haladó kerékpáros $30x$ km-t tett meg, míg a másik kerékpáros által megtett út hossza $40x$ km lesz. *(28. ábra)*



28. ábra

A két kerékpáros aktuális távolságát Pitagorasz tételének alkalmazásával számolhatjuk:

$$d(x) = \sqrt{(20 - 30x)^2 + (10 - 40x)^2}.$$

Ez a függvény a minimumát akkor veszi fel, amikor a következő függvény:

$$d^2(x) = (20 - 30x)^2 + (10 - 40x)^2.$$

Jelöljük ezt a függvényt $f(x)$-szel, és a négyzetre emelések után alakítsuk teljes négyzetté!

$$f(x) = 400 - 1200x + 900x^2 + 100 - 800x + 1600x^2 =$$
$$= 2500x^2 - 2000x + 500 = 2500\left(x^2 - \frac{4}{5} \cdot x + \frac{1}{5}\right) =$$
$$= 2500\left[\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}\right] = 2500\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + 100.$$

A függvénynek $x = \frac{2}{5}$-nél lesz minimuma, azaz a két kerékpáros $\frac{2}{5}$ óra $= 24$ perc múlva lesz legközelebb egymáshoz.

Ez a minimális távolság $\sqrt{100} = 10$ km lesz. Ekkor a 40 km/h sebességgel haladó kerékpáros már áthaladt a kereszteződésen.

**4. példa**

A drágakövek ára egyenesen arányos a tömegük négyzetével. Egy 1 gramm tömegű követ, melynek az ára 100 euró, kettévágunk. Mennyire csökkenhet le így a drágakő értéke?

**Megoldás**

Legyen a keletkezett két kő tömege grammban mérve $x$, illetve $1 - x$. Az adatok alapján megállapítható, hogy a két darab együttes értéke:

$$y(x) = 100x^2 + 100(1 - x)^2.$$

Ennek a kifejezésnek a minimumát keressük.

A műveleteket elvégezve, majd teljes négyzetté alakítva a következő másodfokú függvény adódik:

$$y(x) = 100x^2 + 100(1-x)^2 =$$

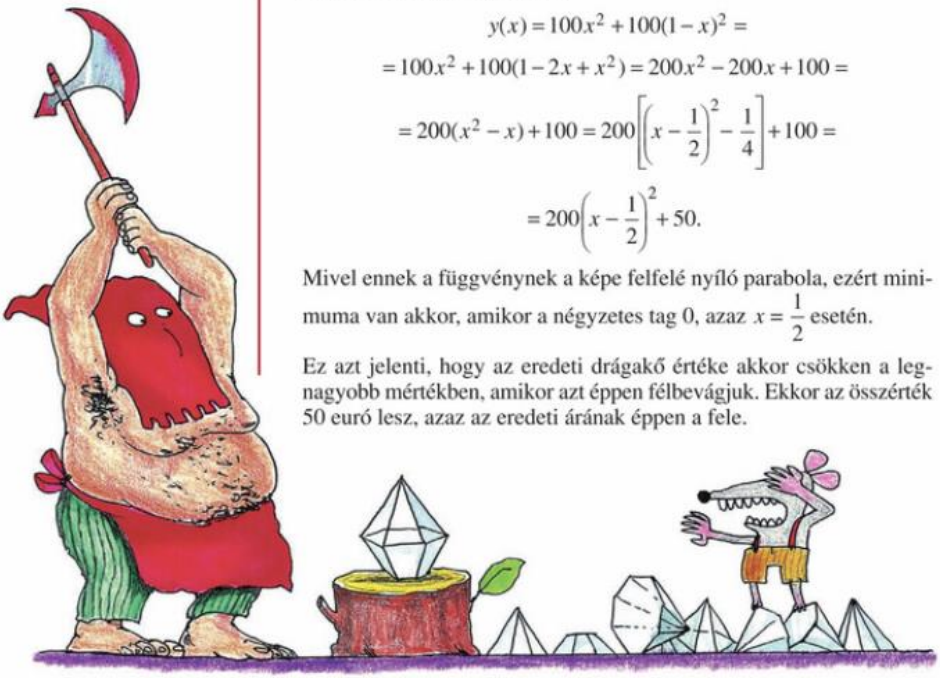
$$= 100x^2 + 100(1 - 2x + x^2) = 200x^2 - 200x + 100 =$$

$$= 200(x^2 - x) + 100 = 200\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 100 =$$

$$= 200\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 50.$$

Mivel ennek a függvénynek a képe felfelé nyíló parabola, ezért minimuma van akkor, amikor a négyzetes tag 0, azaz $x = \frac{1}{2}$ esetén.

Ez azt jelenti, hogy az eredeti drágakő értéke akkor csökken a legnagyobb mértékben, amikor azt éppen félbevágjuk. Ekkor az összérték 50 euró lesz, azaz az eredeti árának éppen a fele.



*Összefoglalva:* **A másodfokú kifejezések szélsőértékeinek meghatározásakor első lépésként teljes négyzetté alakítunk:**

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c.$$

**Ez a függvény az $x = -\frac{b}{2a}$ helyen veszi fel a szélsőértékét, s ennek értéke $-\frac{b^2}{4a} + c$ lesz.**

**Ez a szélsőérték minimum, ha $a > 0$, és maximum, ha $a < 0$.**

## Feladatok

1. Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit!
   *a)* $f(x) = x^2 - 4$; *b)* $g(x) = -x^2 + 2$; *c)* $h(x) = 2(x-1)^2 + 2$.

2. Állapítsuk meg a következő függvények szélsőértékeit a valós számok halmazán!
   *a)* $f(x) = -x^2 - 2x - 4$; *b)* $g(x) = -2x^2 + 6x + 2$; *c)* $h(x) = 3x^2 - 2x + 2$.

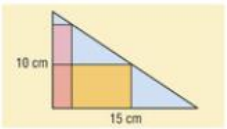
3. Határozzuk meg az $x \mapsto 2x^2 + 4x - 6$ függvény szélsőértékeit, ha
   *a)* $x \in \mathbb{R}$; *b)* $x \in [-3; -2]$; *c)* $x \in [-2; 1]$!

4. Adjunk meg olyan másodfokú függvényeket, amelyeknek minimuma van az
   *a)* $A(1; 0)$; *b)* $B(-2; 2)$; *c)* $C(3; -5)$ pontban!

5. Adjunk meg olyan másodfokú függvényeket, amelyeknek maximuma van az
   *a)* $A(0; -10)$; *b)* $B(2; -2)$; *c)* $C(4; -3)$ pontban!

6. Bontsuk fel a 30-at két szám összegére úgy, hogy a tagok négyzetösszege a lehető legkisebb legyen!

7. Egy 10 cm és 15 cm befogójú derékszögű háromszögbe az ábrának megfelelően téglalapokat írunk. Mekkorák lesznek az így beírt maximális területű téglalap oldalai?

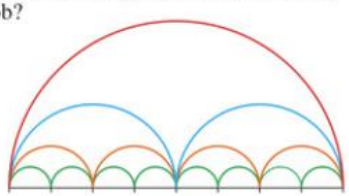



8. Egy 20 cm hosszú szakaszt két részre osztunk, majd az egyes részek mint átmérők fölé félköröket rajzolunk. Legalább mekkora lesz a két félkör területének az összege?

9. A koordináta-rendszer két különböző tengelyén egy-egy bogár mozog az origó irányába. Az egyik az $A(40; 0)$ pontból indul és másodpercenként 4 egységet tesz meg. A másik a $B(0; 30)$ pontból és másodpercenként 2 egységet halad. Ha egyszerre indulnak, hány másodperc múlva lesznek egymáshoz a legközelebb?

**Rejtvény**

**Hogyan változik a különböző színű vonalak hossza, ha a szakaszokat mindig felezzük, és félköröket rajzolunk rájuk?**

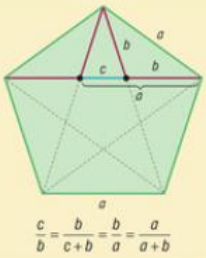


# 11. Másodfokú egyenletre vezető problémák



Leonardo:
Szt. Anna harmadmagával

Arányok
a szabályos ötszögben




$$\frac{c}{b}=\frac{b}{c+b}=\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b}$$

29. ábra

Joggal feltételezhető, hogy a pitagoreusok ezt a szerkesztést már ismerték, hiszen ennek az arányszámnak egyik tipikus hordozója a szabályos ötszög, melyet megkülönböztető jelvényként is használtak.

Készítsünk kiselőadást az aranymetszésről!

A képzőművészet történetének vannak olyan szakaszai, melyekben igen jelentős mértékben jelen van az akkori kor matematikai eredményeinek egy része. Ez különösen jellemző az ókori görög társadalomra és annak művészeti alkotásaira.

**Püthagorasz** a görög matematika jelentős alakja volt. *Szamosz* szigetén született Kr. e. 580 táján. Életéről nem sokat tud a történelem, gondolatairól, illetve az általa létrehozott iskoláról és követőiről (pitagoreusok) már többet. A természetben a harmóniát keresve számos jelentős, bár helyenként általuk misztikus tulajdonságokkal felruházott matematikai tételt bizonyítottak be. Alaptételként kezelték azt, hogy a dolgok természete, lényege: a szám.

Ezek között különösen nagy tisztelettel tekintettek arra az arányokkal megadott értékre, mely a történelem fogalmai közé az *aranymetszés* elnevezéssel került be. Talán nem meglepő, de ez az érték felbukkan a természet számos alakzatában, a levelek mintázatában, a zenei hangok sorozatában, képzőművészeti alkotásokban.

Olyan arányról van szó, amely sokak szerint a legszebb, legharmonikusabb viszonyt tükrözi az egész és annak része között.

Egy ehhez kapcsolódó ókori feladat a következő:

**1. példa**

Adott egy 1 m nagyságú szakasz. Ezt osszuk fel két részre úgy, hogy a kisebbik résznek a nagyobbikhoz való aránya megegyezzék a nagyobb résznek az eredeti szakaszhoz való arányával!

**Megoldás**

Jelöljük a keresett hosszabbik szakasz hosszát $x$-szel!

A feladat feltételei szerint:

$$\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x}.$$

Az egyenletet átrendezve egy másodfokú egyenletet kapunk.

$$x^2=1-x,$$

$$x^2+x-1=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$$

Mivel egy szakasz hosszáról van szó, ezért a feladat szempontjából az egyetlen megoldás:

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

**2. példa**

Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 7-tel több átlója van, mint ahány oldala?

**Megoldás**

Jelöljük a sokszög oldalainak számát $n$-nel!

A sokszög átlóinak a száma: $\frac{n(n-3)}{2}$, hiszen bármely csúcsból $n-3$ átló húzható, és az $n$ csúcson körbehaladva minden egyes átlót pontosan kétszer veszünk figyelembe.

A feladat feltételei szerint:

$$n+7=\frac{n(n-3)}{2},$$

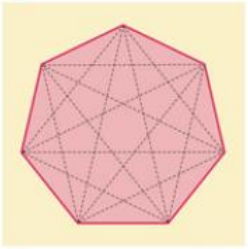
$$2n+14=n^2-3n,$$

$$n^2-5n-14=0.$$

Az egyenletet rendezve és megoldva:

$$n_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+4\cdot 14}}{2}=\begin{cases} n_1=-2, \\ n_2=7. \end{cases}$$

A kapott két gyök közül csak a 7 felelhet meg a feladat feltételeinek. Ekkor az oldalak száma 7, az átlók száma pedig 14 lesz. *(30. ábra)*



*30. ábra*

**3. példa**

Egy szám és egy másik kétszeresének összege 36, négyzeteik különbsége 75. Határozzuk meg ezeket a számokat!

**Megoldás**

Jelölje a két számot $x$ és $y$! A feltételek szerint:

$$x+2y=36;$$

$$x^2-y^2=75.$$

A két egyenlet együtt egy **másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszert** határoz meg. Ennek egy lehetséges megoldása a már korábban megismert behelyettesítéses módszer, melynek lényege az, hogy az egyik egyenletből kifejezzük az egyik változót, és azt a másikba behelyettesítjük.

Ebben az esetben célszerű ezt az első egyenlettel megtennünk. Ebből:

$$x=36-2y.$$

Ezt a második egyenletbe írva egy másodfokú egyenletet kapunk, amelyet az ismert módon megoldunk:

$$(36-2y)^2-y^2=75,$$

$$1296-144y+4y^2-y^2=75,$$

$$3y^2-144y+1221=0.$$

A megoldóképlet szerint:

$$y_{1,2} = \frac{144 \pm \sqrt{144^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1221}}{6} = \begin{cases} y_1 = 11, \\ y_2 = 37. \end{cases}$$

Az $x$ értékét ezek után meghatározhatjuk:

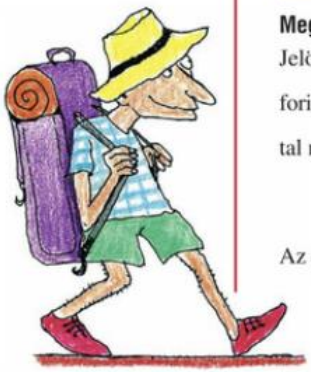
$$x_1 = 36 - 22 = 14, \text{ illetve } x_2 = 36 - 74 = -38.$$

A feladatnak tehát két számpár is eleget tesz:

$$x_1 = 14,\ y_1 = 11, \text{ és az } x_2 = -38,\ y_2 = 37.$$

**4. példa**

Egy kirándulásra, a busz bérlésére 72 000 Ft-ot gyűjtött az osztály. Később kiderült, hogy ketten nem tudnak elmenni, így ők visszakapták a befizetett pénzüket, de a többieknek még 400 Ft-ot be kellett fizetniük. Hányan voltak az osztályban? (A buszköltség nem csökken, ha kevesebben mennek.)



**Megoldás**

Jelöljük $x$-szel az osztályban tanulók számát! Így mindenki $\frac{72\,000}{x}$ forintot fizetett. Később mindenkire $\frac{72\,000}{x-2}$ forint jutott, és ez 400 Ft-tal nagyobb az előzőnél, tehát:

$$\frac{72\,000}{x-2} - \frac{72\,000}{x} = 400.$$

Az egyenlet mindkét oldalát 400-zal osztva, és $x(x-2)$-vel szorozva:

$$180x - 180(x-2) = x(x-2),$$
$$180x - 180x + 360 = x^2 - 2x,$$
$$x^2 - 2x - 360 = 0.$$

A megoldóképlet szerint:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 1440}}{2} = \begin{cases} x_1 = 20, \\ x_2 = -18. \end{cases}$$

Mivel csak a pozitív megoldásnak van értelme, ezért az osztály létszáma 20, és ez valóban megfelel a feltételeknek.

◆ ◆ ◆

***Összefoglalva:*** **Elmondhatjuk, hogy a felmerülő kérdésekre a másodfokú egyenletek segítségével adtunk választ. Első lépésben mindig eldöntöttük, hogy a szövegben található összefüggés mely kiszámítható mennyiségét választjuk ismeretlennek, és az milyen kapcsolatban áll a többi mennyiséggel. Ezek alapján írtuk fel az egyenletet. A kiszámított érték helyességét a feladat összefüggései alapján kell ellenőrizni.**

## Feladatok

1. Melyik az a szám, amelyet ha megszorzunk a nála 1-gyel nagyobb számmal, a szorzat 25-tel lesz nagyobb, mint az eredeti szám?

2. Egy folyó partján 800 $m^2$ területű, téglalap alakú telket kerítenek el 100 m kerítés felhasználásával. Mekkorák a telek oldalai? (A folyó felől nincs kerítés.)

3. Egy derékszögű háromszög területe 55 $cm^2$, az átfogója $\sqrt{221}$. Mekkorák a befogói?

4. Mennyi ideje van a gyakorlata végrehajtására a vízbeérés előtt annak a műugrónak, aki 10 méter magas toronyból ugrik a vízbe? A megtett út és a közben eltelt idő között összefüggés egy szabadon eső test esetén a Földön az $s = 5t^2$ összefüggés alapján számolható, ahol az $s$ a megtett út méterben, a $t$ idő pedig másodpercben értendő.

5. Egy téglalap két részre osztható úgy, hogy az egyik rész négyzet, a másik pedig az eredetihez hasonló téglalap. Határozzuk meg az eredeti téglalap oldalainak arányát!

6. Egy téglalap alaprajzú szoba egyik oldala 1,5 méterrel hosszabb a másiknál. A szoba területe 22 $m^2$. Hány méter szegő szükséges a parkettához, ha a 90 cm széles ajtóhoz nem teszünk szegőt?

7. Egy 40 méter széles és 60 méter hosszú téglalap alakú virágágyás köré egy sétautat tervezünk. Mekkora legyen ennek az útnak a szélessége, ha azt szeretnénk, hogy az így létrejött kertnek a virágágyás a 80%-át alkossa?

8. Melyik az a sokszög, amelyben az átlók száma annyival nagyobb az oldalak számánál, ahányszor a belső szögek összege nagyobb 90°-nál?

9. Két konvex sokszög összes átlóinak száma 158, belső szögeik összege 4320°. Hány oldalúak a sokszögek?

10. Nyelvvizsgára készülve minden nap ugyanannyi tesztet oldottam meg egy 720 tesztet tartalmazó könyvből. Ha naponta 20 teszttel többet oldottam volna meg, akkor 3 nappal hamarabb lettem volna készen vele. Hány napig tartott a tesztek megoldása?

11. Egy rendezvényszervező cég egy alkalommal az eladott jegyekből 384 000 Ft bevételt ért el. Egy másik alkalommal, amikor a jegyeket 3000 Ft-tal drágábban árulta, ugyan 4 db jeggyel kevesebbet adott el, de a bevétele így 420 000 Ft volt. Mennyi jegyet adtak el az egyes alkalmakkor, és milyen egységáron?



12. Egy autó 540 km utat tett meg. Ha ugyanezt az utat 10 km/h-val kisebb átlagsebességgel tenné meg, akkor menetideje egy órával hosszabb lenne. Mekkora az átlagsebessége?

13. Az egymástól 300 km távolságra levő $A$ és $B$ városból egyszerre indul egymással szembe egy-egy vonat. Az a vonat, amelyik $A$-ból indult, a két vonat találkozása után 3 órával ér $B$-be, a másik pedig a találkozás után 1 óra 20 perccel ér $A$-ba. Mekkora a vonatok sebessége?

14. Egy 4 m széles, 3 m magas kamion szeretne áthajtani az alagúton, az autóút közepén haladva. Az alagút keresztmetszete követi az $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4$ másodfokú függvény grafikonját, ahol az egység mindkét koordináta-tengelyen 1-1 méter. Át tud-e menni a kamion az alagúton?

15. Egy szakadék mélységét meghatározhatjuk, ha lemérjük, hogy egy beleejtett kő koppanását az elengedés után mennyivel később halljuk meg. Milyen mély a szakadék, ha azt tapasztaljuk, hogy ez az időkülönbség 10 s? (A gravitációs gyorsulás értéke $g = 9{,}81$ m/s$^2$, a hang terjedési sebessége 340 m/s.)

16. Egy téglalap alakú halastó oldalai 120 m és 160 m hosszúságúak. A téglalap egyik átlója mentén ott vernek le egy cölöpöt, ahonnan a kisebbik oldal két vége derékszög alatt látszik. Milyen messze van a cölöp a halastó oldalaitól?

17. Egy télalap alakú füves park területe 4000 m$^2$. A parkban az oldalakkal párhuzamosan két betonút keresztezi egymást. Az egyik út területe 400 m$^2$, a másiké 250 m$^2$. A park területének hány százalékát borítja fű?

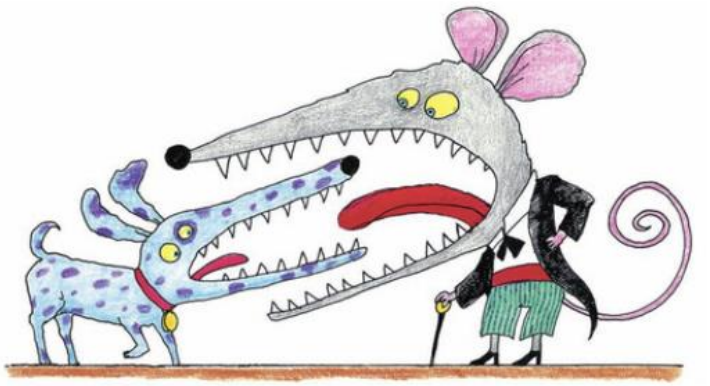
18. A 3 000 000 Ft-os összeg egyik része egy év alatt 70 000 Ft-ot, a másik része 180 000 Ft-ot kamatozott. Ez utóbbi kamatlába 2%-kal volt több mint az elsőé. Hány %-os kamatra és mekkora összeget kötöttünk le?

19. Egy iskolák közötti kerékpárversenyen 4 fős csapatok indultak. Egy iskola csak egy csapattal nevezhetett. A verseny kezdetén a résztvevők bemutatkoztak egymásnak, minden diák minden olyan diákkal kezett fogott, aki nem iskolatársa, így összesen 336 kézfogásra került sor. A versenyt követő búcsúesten minden diák minden diákkal koccintott egy pohár üdítővel. Hány koccintásra került sor?

20. Két iskola sakkversenyt rendezett. Az első forduló az egyes iskolákon belül zajlott, ekkor összesen 36 játszmára került sor. A második fordulóban, amikor a két iskola egymással mérkőzött meg, 42 partit játszottak le. A két fordulóban végül mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Hány sakkozója van a két iskolának külön-külön?

**Rejtvény**

**Lehetséges-e, hogy egy kisebb szám úgy aránylik egy nagyobbhoz, mint a nagyobb a kisebbhez?**



# Geometria

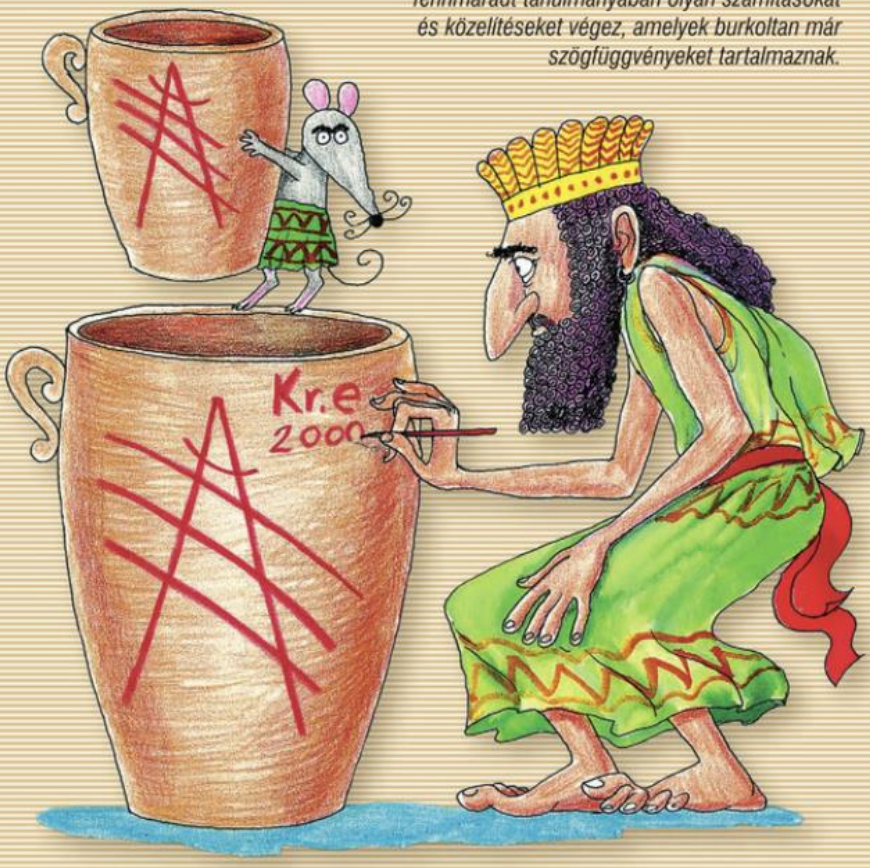
*1936-ban, a mai Irán területén található Szúza környéki ásatások során előkerült agyagcserepek alapján úgy tűnik, hogy kb. 4000 évvel ezelőtt a babilóniaiak már alkalmazták a párhuzamos szelők tételét és a hasonlóság fogalmát.*

*A Kr. e. 5. században a khioszi Hippokratész bizonyításai során felhasználta a kör kerületi és középponti szögének kapcsolatát, a hasonlóságot, és meg tudta szerkeszteni két szakasz mértani közepét.*

*A szamoszi Arisztarkhosz a Kr. e. 3. században „A Nap és a Hold méreteiről és távolságáról" című egyetlen fennmaradt tanulmányában olyan számításokat és közelítéseket végez, amelyek burkoltan már szögfüggvényeket tartalmaznak.*



3D
3D
3D



# A KÖRREL KAPCSOLATOS ISMERETEK BŐVÍTÉSE

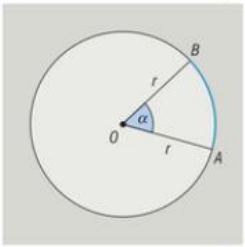
## 1. Emlékeztető

Korábbi tanulmányaink során a körrel kapcsolatban sok fontos fogalmat, tényt ismertünk meg. Most ezeket foglaljuk össze.

**DEFINÍCIÓ:** **A *kör* (körvonal) azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott pontjától adott távolságra vannak.**

**DEFINÍCIÓ:** **A kör *érintője* a kör síkjának olyan egyenese, amelynek pontosan egy közös pontja van a körrel.**

**TÉTEL:** **A kör minden egyes pontjába pontosan egy érintő húzható, és az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.**



1. ábra

**DEFINÍCIÓ:** **Ha egy szög csúcsa egy adott kör középpontja, akkor a szöget a kör *középponti szögének* nevezzük.** (Az 1. ábrán $\alpha$ az $AB$ ívhez tartozó középponti szög.)

**TÉTEL:** **Ha egy körben $i_\alpha$ és $i_\beta$ az $\alpha$ és $\beta$ középponti szögekhez tartozó ívek hossza, akkor** $\frac{i_\alpha}{i_\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

**TÉTEL:** **Ha egy körben $t_\alpha$ és $t_\beta$ az $\alpha$ és $\beta$ középponti szögekhez tartozó körcikkek területe, akkor** $\frac{t_\alpha}{t_\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

**Az $r$ sugarú kör $\alpha$ (rad) középponti szögéhez tartozó körív hossza és körcikk területe:**

$$i_\alpha = r \cdot \alpha, \qquad t_\alpha = \frac{i_\alpha \cdot r}{2} = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}.$$

**THALÉSZ TÉTELE:** **Ha egy kör valamely átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor olyan derékszögű háromszöget kapunk, amelynek átfogója a kör átmérője.**

**THALÉSZ TÉTELÉNEK MEGFORDÍTÁSA:** **Derékszögű háromszög körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja.**

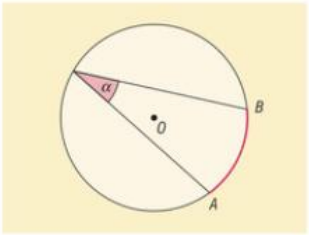
**THALÉSZ TÉTELE ÉS MEGFORDÍTÁSA ÖSSZEVONVA:** **Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha körülírt körének középpontja az egyik oldal felezőpontja.**



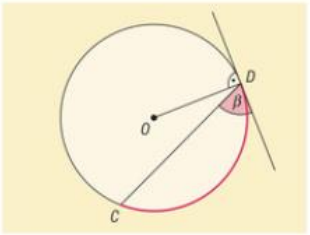
## 2. A középponti és kerületi szögek tétele

**Definíció:** **Ha egy konvex szög csúcsa egy adott körvonal pontja, szárai pedig vagy a kör két húrjára, vagy egy húrra és egy érintőre illeszkednek, akkor a szöget a kör *kerületi szögének* nevezzük.** *(2. ábra, 3. ábra)*

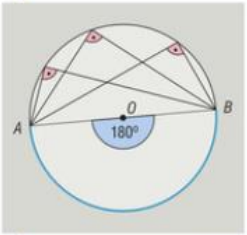
kerületi szög




2. ábra




3. ábra



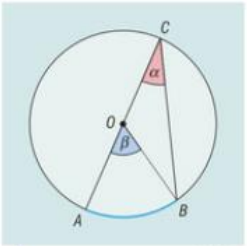

4. ábra

A körvonalnak a szögtartományba eső része az adott kerületi szöghöz tartozó ív. Szokás adott ívhez tartozó vagy adott íven nyugvó kerületi szögről beszélni. A 2. ábrán $\alpha$ az $AB$ ívhez tartozó kerületi szög, a 3. ábrán $\beta$ a $CD$ ívhez tartozó *érintő szárú kerületi szög*.

Érdekes megfigyelést tehetünk, ha felidézzük Thalész tételét *(4. ábra)*. Az $AB$ ívhez (ami jelen esetben egy félkör) tartozó középponti szög 180°-os, az ugyanehhez az ívhez tartozó kerületi szögek pedig 90°-osak, azaz a középponti szög felével egyenlő nagyságúak.

A következőkben azt fogjuk bebizonyítani, hogy ez általánosan is igaz, azaz érvényes a következő tétel:

**Tétel:** **Adott körben adott ívhez tartozó bármely kerületi szög nagysága fele az ugyanazon ívhez tartozó középponti szög nagyságának.**




5. ábra

### Bizonyítás

Adott körben adott ívhez egy középponti szög és végtelen sok kerületi szög tartozik, ezért a bizonyításnál figyelembe kell vennünk a kerületi szög és a középponti szög különböző kölcsönös helyzeteit. Ezen helyzeteknek megfelelően több lépésben bizonyítunk.

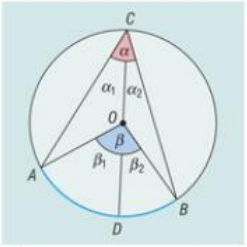
**(1)** A kör középpontja illeszkedik a kerületi szög egyik szárára. *(5. ábra)*

A $COB$ egyenlő szárú háromszögnek az $AOB$ szög külső szöge, ezért

$$\beta = AOB\sphericalangle = OBC\sphericalangle + BCO\sphericalangle = 2\alpha.$$

**(2)** A kör középpontja a kerületi szög szögtartományának belső pontja. *(6. ábra)*

Húzzuk be a kör $C$ pontra illeszkedő átmérőjét, és legyen ennek a $C$-vel átellenes végpontja $D$! Az $AD$ és a $DB$ íveken nyugvó




6. ábra

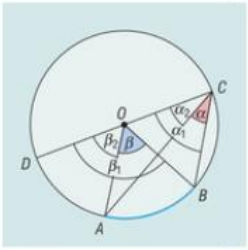
kerületi és középponti szögek elhelyezkedése az előző esetnek megfelelő, így

$$\beta_1 = AOD\sphericalangle = 2 \cdot ACD\sphericalangle = 2\alpha_1,$$

$$\beta_2 = DOB\sphericalangle = 2 \cdot DCB\sphericalangle = 2\alpha_2,$$

ahonnan

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha.$$



7. ábra

**(3)** A kör középpontja a kerületi szög szögtartományán kívül van. *(7. ábra)*

Most is rajzoljuk be a $CD$ átmérőt! A $DA$ és $DB$ ívekhez tartozó kerületi és középponti szögek itt is az (1) esetnek megfelelő helyzetben vannak, ezért

$$\beta_1 = DOB\sphericalangle = 2 \cdot DCB\sphericalangle = 2\alpha_1,$$

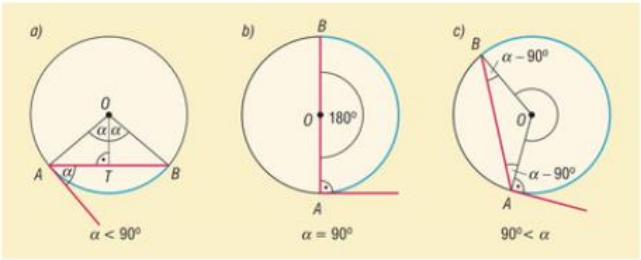
$$\beta_2 = DOA\sphericalangle = 2 \cdot DCA\sphericalangle = 2\alpha_2,$$

így

$$\beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha.$$

Az első három lépésben a tételt beláttuk minden olyan kerületi szög esetére, amelynek mindkét szára a kör egy-egy húrjára illeszkedik. A következő lépésben az érintő szárú kerületi szögek esetére bizonyítunk.

**(4)** Jelölje $\alpha$ az $AB$ íven nyugvó érintő szárú kerületi szöget! *(8. ábra)*



8. ábra



*a)* Ha $\alpha < 90°$, és $OT$ az $AOB$ egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága, akkor az $A$ csúcsú kerületi szög és az $AOT$ szög merőleges szárú szögek, így $AOT\sphericalangle = \alpha$. Mivel $OT$ felezi az $AOB$ szöget, ezért $AOB\sphericalangle = 2\alpha$.

*b)* Ha $\alpha$ derékszög, akkor az állítás közvetlen következménye annak a ténynek, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.

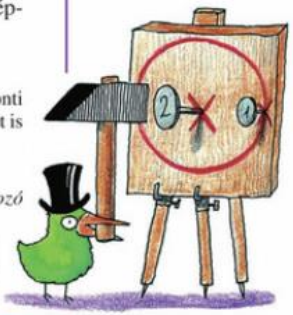
*c)* Ha $\alpha$ tompaszög, akkor az $AOB$ egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeinek nagysága $\alpha - 90°$, így a szárak által bezárt szögre

$$AOB\sphericalangle = 180° - 2(\alpha - 90°) = 360° - 2\alpha,$$

amiből adódik, hogy a kijelölt $AB$ ívhez tartozó középponti szög nagysága $2\alpha$.



Ezzel befejeztük a bizonyítást, minden egyes esetre beláttuk a középponti és kerületi szögek tételét.



*Megjegyzések:*

1. A most bizonyított tételnek Thalész tétele speciális esete (a középponti szög 180°), ezért ezen általánosabb tétel bizonyításával Thalész tételét is bizonyítottuk.
2. Tételünk a következő általánosabb formában is megfogalmazható:
   *Egyenlő sugarú körökben az azonos hosszúságú ívekhez tartozó középponti szög és kerületi szög nagyságának aránya 2 : 1.*
   A megfelelő ívek egybevágósági transzformációk segítségével egymásba vihetők, így ennek az általánosabb állításnak a bizonyítása visszavezethető az eredeti tétel bizonyítására.

**1. példa**

Egy körvonalat három pontja három olyan ívre oszt, amely ívek hosszának aránya 5 : 6 : 7. Számítsuk ki az egyes ívekhez tartozó középponti és kerületi szögek nagyságát!

**Megoldás**

Adott körben a középponti szög és a hozzá tartozó körív egyenesen arányosak, így ha $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ jelöli a megfelelő középponti szögeket, akkor $\alpha : \beta : \gamma = 5 : 6 : 7$. Ebből $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ alapján:

$$\alpha = \frac{5}{18} \cdot 360° = 100°, \quad \beta = \frac{6}{18} \cdot 360° = 120°, \quad \gamma = \frac{7}{18} \cdot 360° = 140°.$$

A középponti és kerületi szögek tétele alapján a megfelelő kerületi szögek nagysága:

$$\frac{\alpha}{2} = 50°, \quad \frac{\beta}{2} = 60°, \quad \frac{\gamma}{2} = 70°.$$

Észrevehető, hogy a kerületi szögek nagysága is egyenesen arányos a megfelelő ívhosszakkal.

**2. példa**

Vegyünk fel egy háromszöget, szerkesszük meg a köré írt kört, az egyik csúcsából induló belső szögfelezőt és a szemközti oldal felező merőlegesét! Mit tapasztalunk? Igazoljuk észrevételünket! (Tegyük fel, hogy a belső szögfelezőre illeszkedő csúcsban két különböző hosszúságú oldal találkozik!)

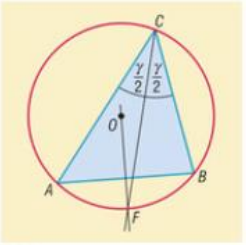
**Megoldás**

Ha a szerkesztésünk eléggé pontos, akkor azt tapasztaljuk, hogy a tekintett szögfelező és oldalfelező merőleges a körülírt körön metszi egymást. *(9. ábra)*

Az ábra alapján azt a sejtést is megfogalmazhatjuk, hogy a metszéspont az $AB$ ív felezőpontja.

Be fogjuk látni, hogy mind a szögfelező, mind az oldalfelező merőleges illeszkedik az $AB$ ív $F$ felezőpontjára.

*9. ábra*










Mivel a kerületi szög nagysága és a hozzá tartozó ív hossza egyenesen arányosak, ezért az $ACB$ szöget két egyenlő részre osztó szögfelező az $AB$ ívet is két egyenlő részre osztja, azaz illeszkedik az ív felezőpontjára.

Az $AB$ oldal felező merőlegesének minden pontja egyenlő távol van az $A$ és $B$ pontoktól, így az $AB$ ívvel vett metszéspontja csak az ív felezőpontja lehet.

Ezzel észrevételünket igazoltuk.

## Feladatok

1. Egy adott körben mekkora kerületi szög tartozik azon ívekhez, amelyek középponti szögének nagysága

   *a)* $60°$; *b)* $138°$; *c)* $\frac{2\pi}{3}$; *d)* $\frac{5\pi}{4}$; *e)* $336°$; *f)* $\beta$?

2. Egy adott körben mekkora középponti szög tartozik azon ívekhez, amelyeken nyugvó kerületi szögek nagysága

   *a)* $15°$; *b)* $84°$; *c)* $\frac{3\pi}{4}$; *d)* $\frac{5\pi}{12}$; *e)* $216°$; *f)* $\alpha$?

3. Egy kör adott ívén nyugvó kerületi és középponti szög nagyságának összege

   *a)* $180°$; *b)* $210°$; *c)* $\frac{5\pi}{2}$; *d)* $\frac{7\pi}{5}$; *e)* $411°$; *f)* $\omega$.

   Számítsuk ki a kerületi és a középponti szög nagyságát az egyes esetekben!

4. Mekkora kerületi szög tartozik a kör azon ívéhez, amelynek hossza a kör kerületének

   *a)* harmada; *b)* $\frac{7}{12}$ része; *c)* 60%-a; *d)* $\frac{11}{18}$ része; *e)* $\frac{m}{n}$-szerese?

5. Egy háromszög csúcsai a köré írt kört három olyan ívre osztják, amelyek hosszának aránya

   *a)* $1:2:3$; *b)* $3:4:5$; *c)* $3:5:10$; *d)* $7:9:20$; *e)* $p:q:r$.

   Számítsuk ki a háromszög belső szögeinek nagyságát az egyes esetekben!

6. Számítsuk ki egy 10 cm sugarú körben a középpont és a $120°$-os középponti szöghöz tartozó ív két végpontját összekötő húr távolságát!

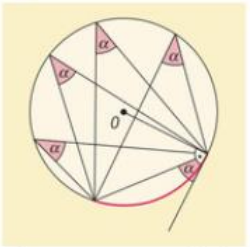
7. Egy 10 cm sugarú körben az $AB$ húr és az $AC$ átmérő $30°$-os szöget zár be. Számítsuk ki a $BC$ szakasz hosszát!

8. Mekkora az a kerületi szög, amelynek egyik szára illeszkedik a kör átmérőjére, másik pedig illeszkedik egy olyan húrra, amelynek hossza egyenlő a kör sugarával?



## 3. A kerületi szögek tétele; látószögkörív

Az előző leckében bebizonyítottuk, hogy adott körben adott ívhez tartozó középponti szög kétszerese az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögnek. Adott ívhez egyetlen középponti szög és végtelen sok kerületi szög tartozik, így a középponti és kerületi szögek tételének közvetlen következménye a következő tétel:

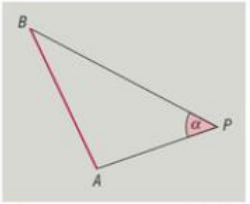



10. ábra

**KERÜLETI SZÖGEK TÉTELE: Adott kör adott ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.** *(10. ábra)*

Természetesen a középponti és kerületi szögek tételéhez hasonlóan ezt a tételt is megfogalmazhatjuk általánosabban:

**TÉTEL: Egyenlő sugarú körökben az azonos hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.**



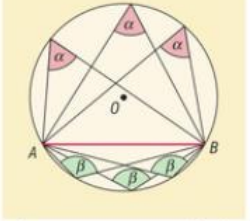

11. ábra

A kerületi szögek tétele a ***látószög*** fogalmának bevezetésével is megfogalmazható. Tekintsünk a síkon egy $AB$ szakaszt és egy $P$ pontot! Legyen $APB\sphericalangle = \alpha$! Ekkor azt mondjuk, hogy **a $P$ pontból az $AB$ szakasz $\alpha$ szög alatt látszik.** *(11. ábra)*

**látószög**

A kerületi szögek tétele a látószög fogalmával:

**TÉTEL: Egy adott kör adott $AB$ húrja az $AB$ ív (belső) pontjaiból ugyanakkora szög alatt látszik.** *(12. ábra)*




12. ábra

Ez a megfogalmazás természetesen úgy értendő, hogy csak az egyik $AB$ ívet tekintjük. Az állítás mindkét ívre igaz külön-külön, a megfelelő látószögek viszont általában nem egyeznek meg. Speciálisan, ha a tekintett húr a kör átmérője, akkor mindkét ívre ugyanaz a látószög, nevezetesen 90°. Ez alapján Thalész tétele látószöggel megfogalmazva:

**TÉTEL: Az $AB$ átmérőjű kör $A$-tól és $B$-től különböző pontjaiból az $AB$ átmérő derékszög alatt látszik.**

Mivel Thalész tételének igaz a megfordítása is, ezért bármely olyan pont, amelyből az $AB$ szakasz 90°-os szög alatt látszik, illeszkedik az $AB$ átmérőjű körre. Ez tehát azt jelenti, hogy az $AB$ átmérőjű kör pontjain kívül nincs más olyan pont, amelyből az $AB$ szakasz derékszögben látszana.

Ezek alapján Thalész tételét és a megfordítását összevonva a korábbiakhoz képest másként is megfogalmazhatjuk:

**Thalész tétele és megfordítása**

**TÉTEL: Azon pontok halmaza a síkon, amelyekből a sík egy $AB$ szakasza derékszögben látszik, az $AB$ átmérőjű kör, kivéve az $A$ és a $B$ pontot.**





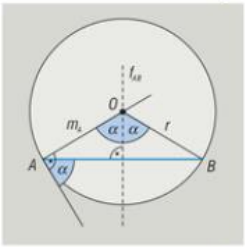
Ezek után természetesen vetődik fel a kérdés, hogy adott $AB$ szakasz és konvex $\alpha$ szög esetén mi lesz azon pontok halmaza az $AB$ szakaszt tartalmazó síkban, amelyekből a szakasz $\alpha$ szög alatt látszik.

**1. példa**

Legyen adott az $AB$ szakasz és egy $\alpha$ szög ($\alpha < 180^\circ$)! Szerkesszünk olyan kört, amelynek az adott szakasz húrja, és a kör valamelyik $AB$ ívének pontjaiból az $AB$ szakasz $\alpha$ szög alatt látszik!

**Megoldás**

A középponti és kerületi szögek tétele alapján a cél olyan kör szerkesztése, amelynek az $AB$ szakasz húrja, és az $AB$ húrhoz tartozó középponti szög $2\alpha$. Ezen kör egyik $AB$ ívének belső pontjai megfelelnek a feladat feltételének. A keresett kör középpontja illeszkedni fog egyrészt az $AB$ szakasz felező merőlegesére, másrészt a kerületi szögek tétele alapján az $A$ csúcsú, $\alpha$ nagyságú érintőszárú kerületi szög érintő szárára $A$-ban emelt merőleges egyenesre, az érintési pontba húzott sugár egyenesére. *(13. ábra)*



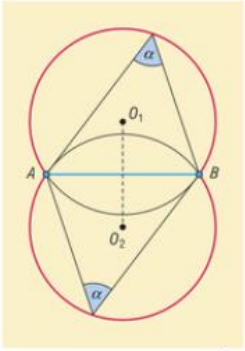

*13. ábra*

**látószögkörív**

A szerkesztés menete:

1. Az $AB$ szakaszra egyik végpontjában (mondjuk $A$-ban) felvesszük az $\alpha$ szöget.
2. A kapott szögszárra $A$-ban merőlegest állítunk $\rightarrow m_A$.
3. Megszerkesztjük az $AB$ szakasz felező merőlegesét $\rightarrow f_{AB}$.
4. $m_A \cap f_{AB} = O$ a keresett kör középpontja.

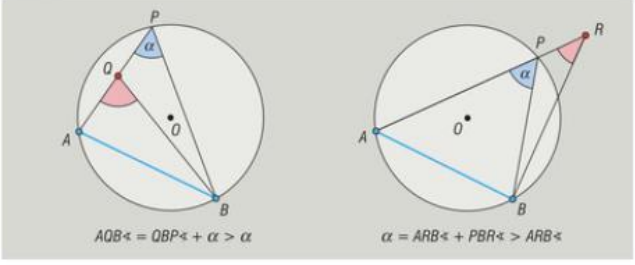
Mivel az $A$ csúcsú, $\alpha$ nagyságú érintő szárú kerületi szöget az $AB$ egyenes mindkét oldalára felmérhetjük, ezért két megfelelő körívet kapunk, amelyek az $AB$ egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el *(14. ábra)*. A kapott nyílt (a végpontokat nem tartalmazó) körívek az $AB$ szakasz $\alpha$ szögű két ***látószögkörívei (látókörívei).***




*14. ábra*

Az 1. példa megoldása után meg kell vizsgálnunk, hogy a látószögkörívek pontjain kívül van-e még más síkbeli pont, ahonnan az $AB$ szakasz $\alpha$ szög alatt látszik. A 15. ábra alapján látható, hogy a látószög a köríven belüli pontokból nagyobb, míg a köríven kívüli pontokból kisebb, mint $\alpha$.

*15. ábra*



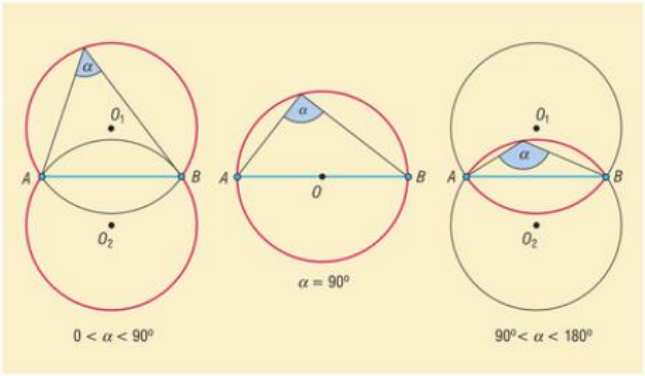


A kerületi szögek tételének következményeként bebizonyítottuk a következő tételt:

**TÉTEL:** **Azon pontok halmaza a síkon, amelyekből a sík egy adott $AB$ szakasza adott $\alpha$ ($0° < \alpha < 180°$) szög alatt látszik: két, az $AB$ egyenesre szimmetrikusan elhelyezkedő nyílt körív.**



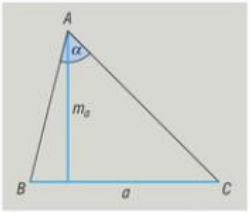
A 16. ábrán a látószögkörívek alakja látható $\alpha$ nagyságától függően.




16. ábra

**2. példa**

Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a vele szemközti szög és az adott oldalhoz tartozó magasság!




17. ábra

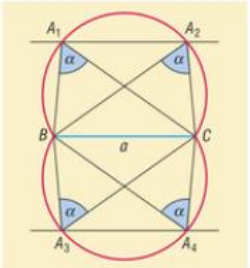
**Megoldás**

Adott a $BC = a$ oldal, az $\alpha$ szög és $m_a$. *(17. ábra)*

A $BC$ oldal $A$-ból adott $\alpha$ szög alatt látszik, ezért $A$ illeszkedik a $BC$ szakasz $\alpha$ szögű látószögköríveinek valamelyikére.

$A$ a $BC$ egyenestől $m_a$ távolságra van, ezért illeszkednie kell a $BC$ egyenessel párhuzamos, tőle $m_a$ távolságra felvett két egyenes egyikére is.

A háromszög harmadik csúcsának megfelelő pontokat tehát a szerkeszthető látószögkörívek és a szintén szerkeszthető, $BC$-től $m_a$ távolságra haladó párhuzamos egyenesek metszéspontjaiként kapjuk. *(18. ábra)*




18. ábra

$A$-ra adódhat 4, 2 vagy 0 megoldás, attól függően, hogy a párhuzamos egyeneseknek és a köríveknek hány közös pontjuk van.

A kapott háromszög viszont – egybevágóság erejéig – egyértelműen meghatározott.

## Feladatok

1. Vegyünk fel egy szakaszt! Szerkesszük meg azon pontok halmazát, amelyekből a szakasz
   *a)* 45°-os; *b)* 60°-os; *c)* 90°-os; *d)* 120°-os; *e)* $\alpha$ szög alatt látszik!
2. Egy háromszög szögeinek nagysága
   *a)* 30°, 60°, 90°; *b)* 40°, 60°, 80°; *c)* 36°, 58°, 86°; *d)* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.
   Mekkora szöget zárnak be az oldalegyenesekkel a háromszög körülírt körének a csúcsokba húzott érintői? Számítsuk ki az érintők által meghatározott háromszög szögeit!
3. Helyezzünk el egy körben egy olyan húrt, amelynek hossza megegyezik a kör sugarával! Mekkora szögben látszik ez a húr a körvonal pontjaiból?
4. Egy pontból a körhöz húzott két érintő 76°-os szöget zár be. Mekkora szögben látszik a körvonal pontjaiból az érintési pontokat összekötő húr?
5. Vegyünk fel egy egyenest, rajta kívül két pontot és egy konvex szöget! Szerkesszünk az egyenesen olyan pontot, amelyből az adott pontok által meghatározott szakasz $\alpha$ szög alatt látszik!
6. Szerkesszünk egy derékszögű háromszög belsejében olyan pontot, amelyből a két befogó mindegyike 120°-os szög alatt látszik! Mekkora szögben látszik ebből a pontból az átfogó?
7. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldalának és a hozzá tartozó súlyvonalnak a hossza, valamint az adott oldallal szemközti szögének nagysága!
8. Az ábrán egy színház nézőtere látható felülnézetből. A nézőtér hosszabbik oldalán földszinti oldalpáholyok találhatók. Keressük meg azt az oldalpáholyt (a nézőtér hosszabb oldalának azon pontját), ahonnan a színpad a legnagyobb szög alatt látszik!





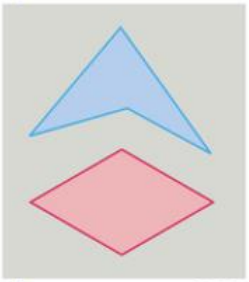

**Rejtvény**

**Adott egy 4 cm sugarú kör a középpontja nélkül, és egy olyan egyenlő szárú derékszög alakú vonalzó, amelynek a befogója 20 cm hosszú. Keressük meg az adott vonalzó és ceruza segítségével az adott kör középpontját. (A vonalzón és ceruzán kívül más nem használható.)**



# 4. A húrnégyszögek tétele (emelt szintű tananyag)

Láttuk korábban, hogy minden háromszög köré lehet kört írni. Négyszögek esetében ez nincs így, hiszen például egyetlen konkáv négyszöghöz sincs olyan kör, amely mind a négy csúcsra illeszkedne. A konvex négyszögek körében is vannak olyanok – például azok a rombuszok, amelyek nem négyzetek –, amelyeknek nincs körülírt körük. *(19. ábra)*



19. ábra

A továbbiakban azokat a négyszögeket vizsgáljuk, amelyek köré kör írható.

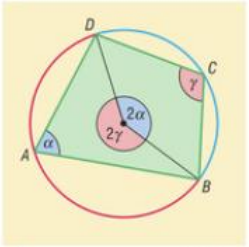
**húrnégyszög**

DEFINÍCIÓ: **Azokat a négyszögeket, amelyeknek van körülírt körük, *húrnégyszögeknek* nevezzük.**

Ezzel ekvivalens a következő:

**Azokat a négyszögeket, amelyeknek oldalai egy kör húrjai, *húrnégyszögeknek* nevezzük.**

Tekintsünk egy húrnégyszöget és rajzoljuk meg a körülírt körét! *(20. ábra)*




20. ábra

Vizsgáljuk az $ABCD$ húrnégyszög két szemközti szögét, $\alpha$-t és $\gamma$-t! $\alpha$ a $C$ csúcsot tartalmazó $BD$ ívhez, $\gamma$ az $A$ csúcsot tartalmazó $BD$ ívhez tartozó kerületi szög, így a középponti és kerületi szögek tételéből adódóan a megfelelő középponti szögek $2\alpha$ és $2\gamma$. Ezek összege viszont a teljesszög, azaz

$$2\alpha + 2\gamma = 360°,$$

ahonnan

$$\alpha + \gamma = 180°.$$

Mivel a négyszög belső szögeinek összege 360°, ezért a másik két szemközti szög összege is 180°.

**húrnégyszögek tétele**

HÚRNÉGYSZÖGEK TÉTELE: **Bármely húrnégyszög két szemközti szögének összege 180°.**

Be lehet bizonyítani, hogy igaz a tétel **megfordítása** is, azaz

TÉTEL: **Ha egy négyszög két szemközti szögének összege 180°, akkor a négyszög húrnégyszög.**

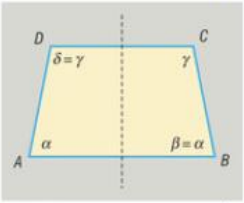
Annak tehát, hogy egy négyszög húrnégyszög legyen, *szükséges és elegendő* feltétele, hogy két szemközti szögének összege 180°.

A tétel és a tétel megfordítása összevonva:

TÉTEL: **Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°.**

**1. példa**

Bizonyítsuk be, hogy egy trapéznak akkor és csak akkor van olyan szimmetriatengelye, amelyik nem illeszkedik egyik csúcsra sem, ha húrnégyszög.




21. ábra

**Megoldás**

Tegyük fel, hogy a trapéznak van nem csúcsra illeszkedő szimmetriatengelye! A szimmetriából adódóan a trapéz egy-egy alapján fekvő szögek egyenlőek, azaz $\alpha = \beta$ és $\gamma = \delta$ *(21. ábra)*. Így

$$2\alpha + 2\gamma = 360°,$$

ezért

$$\alpha + \gamma = 180°.$$

A húrnégyszögek tételének megfordításából adódik az állítás egyik fele.

A másik irány bizonyítása végett tegyük fel, hogy a trapéz húrnégyszög! Ekkor

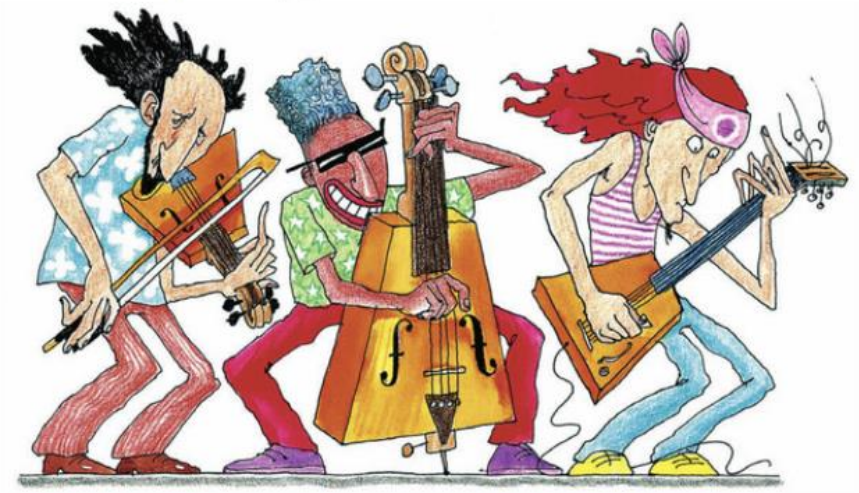
$$\alpha + \gamma = 180° \text{ és } \beta + \delta = 180°.$$

Másrészt az is igaz, hogy a trapéz szárain fekvő szögek összege 180°, azaz

$$\alpha + \delta = 180° \text{ és } \beta + \gamma = 180°.$$

A megfelelő szögösszegek összevetéséből kapjuk, hogy $\alpha = \beta$ és $\gamma = \delta$, amiből következik, hogy a trapéz tengelyesen szimmetrikus az alapok közös felező merőlegesére nézve.

Most kaptunk választ arra, hogy a csúcsra nem illeszkedő szimmetriatengellyel rendelkező trapézt az általános iskolában miért neveztük *húrtrapéznak*.



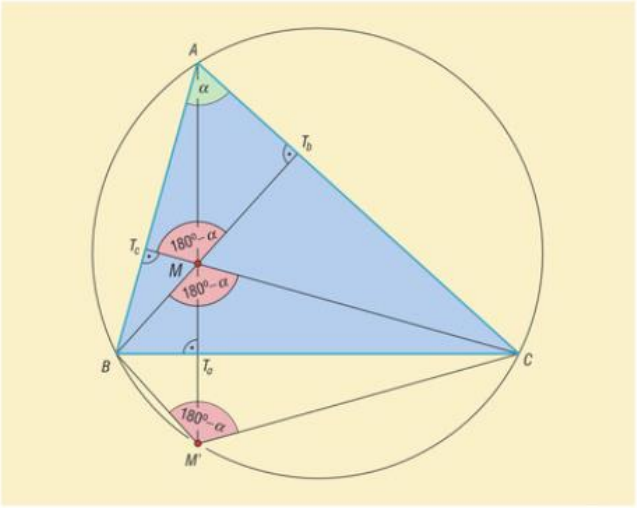


**2. példa**

Mutassuk meg, hogy a háromszög magasságpontjának az oldalegyenesekre vonatkozó tükörképei illeszkednek a háromszög köré írt körre!

**Megoldás**

Az állítást hegyesszögű háromszögre bizonyítjuk *(22. ábra)*, derékszögű és tompaszögű háromszög esetén a bizonyítás hasonló módon elvégezhető.




*22. ábra*

Elegendő az egyik oldalegyenesre vonatkozó tükörképet vizsgálnunk, a többire hasonló okoskodás érvényes.

Jelölje a 22. ábrának megfelelően $M$ az $ABC$ háromszög magasságpontját, $T_a$, $T_b$, $T_c$ a megfelelő magasságok talppontjait, $M'$ pedig $M$-nek a $BC$ egyenesre vonatkozó tükörképét! Az $AT_cMT_b$ négyszög húrnégyszög, ugyanis két szemközti szöge derékszög, így

$$T_cMT_b\sphericalangle = 180° - \alpha.$$

A $T_cMT_b$ és $CMB$ szögek csúcsszögek, ezért

$$CMB\sphericalangle = 180° - \alpha.$$

A tükrözés miatt

$$CM'B\sphericalangle = 180° - \alpha.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az $ABM'C$ négyszög két szemközti szögének összege 180°, ezért a húrnégyszögek tételének megfordítása alapján húrnégyszög. Mivel az $A$, $B$ és $C$ pontok egyetlen kört határoznak meg, a háromszög köréírt körét, ezért $M'$ illeszkedik erre a körre.



## Feladatok

1. Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis!
   *a)* Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor konvex.
   *b)* Van olyan deltoid, amelyik húrnégyszög.
   *c)* Minden rombusz húrnégyszög.
   *d)* Van olyan paralelogramma, amelyik húrnégyszög.
   *e)* Ha egy négyszögnek van két derékszöge, akkor húrnégyszög.
   *f)* Ha egy négyszög két szemközti szöge derékszög, akkor húrnégyszög.
   *g)* Van olyan tengelyesen szimmetrikus húrnégyszög, amelyik nem trapéz.

2. Számítsuk ki a húrnégyszög ismeretlen szögeit, ha két szomszédos szöge
   *a)* 30°, 110°; *b)* 120°, 60°; *c)* 78°, 142°;
   *d)* 182°, 36°; *e)* $\alpha$, $\beta$!

3. Egy hegyesszögű háromszög tetszőleges belső pontjából állítsunk merőlegeseket az oldalakra! A kapott három szakasz három négyszögre bontja a háromszöget. Mit mondhatunk ezekről a négyszögekről? Állításunkat indokoljuk!

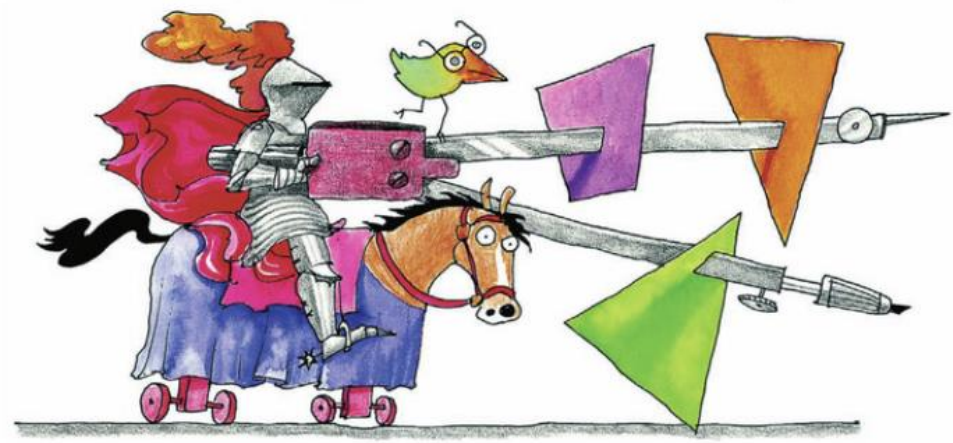
4. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha egyik külső szöge egyenlő a szemközti belső szöggel!

5. Az $ABC$ háromszög köré írt kör $A$ pontbeli érintőjével párhuzamos egyenes messe az $AB$ oldalt a $D$, az $AC$ oldalt az $E$ pontban! Mutassuk meg, hogy a $BCED$ négyszög húrnégyszög!

6. Hány hegyesszöge lehet egy húrnégyszögnek?

7. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontjának az egyik oldal felezőpontjára vonatkozó tükörképe illeszkedik a háromszög köré írt körre!

8. Igazoljuk, hogy ha egy konvex négyszög belső szögfelezői négyszöget fognak közre, akkor ez a szögfelezők által meghatározott négyszög húrnégyszög!

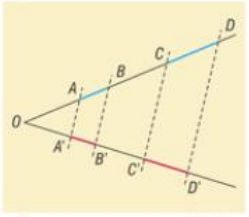


# A HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓ ÉS ALKALMAZÁSAI

## 1. Párhuzamos szelők és szelőszakaszok (emelt szintű tananyag)

### A párhuzamos szelők tétele

Tekintsünk egy hegyesszöget, és messük el a szárait párhuzamos egyenesekkel *(23. ábra)*! Ezek az egyenesek mindkét szögszárból kimetszenek szakaszokat. A következőkben azt fogjuk vizsgálni, hogy az egyik szögszáron keletkezett szakaszok (pl. $AB$ és $CD$) és a másik szögszáron keletkezett megfelelő szakaszok ($A'B'$ és $C'D'$) között mi a kapcsolat.

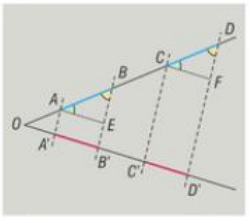



*23. ábra*

**I. ESET:** Induljunk ki a legegyszerűbb esetből, amikor **az egyik szögszáron keletkezett két szakasz egyenlő hosszú, azaz:**

$$AB = CD.$$

Húzzunk $A$-n és $C$-n keresztül egy-egy párhuzamost a másik szögszárral *(24. ábra)*! A keletkezett $AEB$ és $CFD$ háromszögek egybevágók, ugyanis $AB = CD$, valamint $BAE\sphericalangle = DCF\sphericalangle$ és $EBA\sphericalangle = FDC\sphericalangle$ (egyállású szögpárokat alkotnak). Ebből viszont következik, hogy $AE = CF$.




*24. ábra*

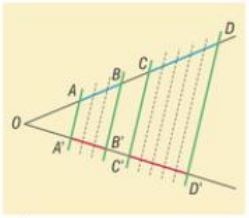
Az $AA'B'E$ és $CC'D'F$ négyszögek paralelogrammák, ugyanis szemközti oldalaik párhuzamosak. A paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak, ezért $A'B' = AE$ és $C'D' = CF$. Viszont $AE = CF$, így $A'B' = C'D'$ is teljesül.

Kaptuk tehát, hogy ha a párhuzamosok által az egyik szögszárból kimetszett szakaszok egyenlő hosszúak, akkor a másik szögszárból kimetszett megfelelő szakaszok is egyenlő hosszúak.

**II. ESET:** Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor **az egyik szögszáron keletkezett szakaszok aránya racionális szám, azaz**

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ és } q \text{ pozitív egészek}).$$

A könnyebb érthetőség kedvéért nézzünk egy konkrét esetet, legyen $p = 3$ és $q = 5$! Osszuk fel az $AB$ szakaszt 3, a $CD$ szakaszt 5 egyenlő részre *(25. ábra)*, és az osztáspontokon keresztül húzzunk párhuzamosokat az eredeti párhuzamos egyenesekkel!




*25. ábra*

Mivel most $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$, ezért $\frac{AB}{3} = \frac{CD}{5}$, azaz a felosztással létrejövő kis szakaszok az egyik szögszáron egyenlő hosszúak. Ebből az I. esetben bizonyítottak alapján adódik, hogy a megfelelő kis szakaszok a másik száron is egyenlő hosszúak, azaz $\frac{A'B'}{3} = \frac{C'D'}{5}$, ahonnan $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{3}{5} = \frac{AB}{CD}$.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Ugyanígy bizonyítható az általános esetben is, hogy ha az arány racionális, akkor az egyik szögszáron keletkezett szakaszok hosszának aránya megegyezik a másik szögszáron keletkezett megfelelő szakaszok hosszának arányával.

**III. ESET:** Az $\frac{AB}{CD}$ arány irracionális szám.

Ennek az esetnek a vizsgálata meghaladja tankönyvünk kereteit, ezért mellőzzük. Bizonyítható, hogy az egyik száron keletkezett szakaszok hosszának aránya ebben az esetben is megegyezik a másik száron keletkezett megfelelő szakaszok hosszának arányával.

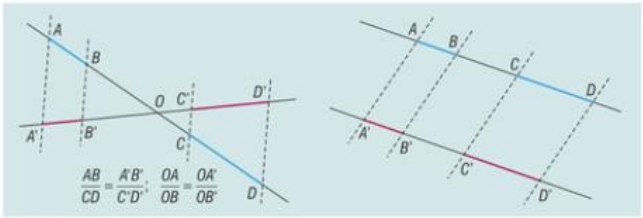
Ezek után kimondhatjuk a **párhuzamos szelők tételét:**

párhuzamos szelők tétele

**TÉTEL:** **Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok hosszának aránya egyenlő a másik száron keletkező megfelelő szakaszok hosszának arányával.**

Bár a tétel megfogalmazása előtt az $AB$, $CD$, illetve $A'B'$, $C'D'$ szakaszok arányát vizsgáltuk, hasonló módon igazolható az $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$ egyenlőség teljesülése is.

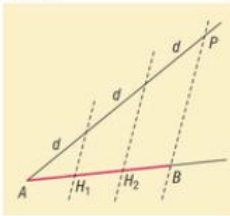
*Megjegyzés:* Vizsgálatainkban a felvett szög tulajdonságait nem vettük figyelembe, ezért tételünk érvényes akkor is, ha nem egy szög szárait, hanem a sík két tetszőleges egyenesét metsszük párhuzamosokkal. ***(26. ábra)***




*26. ábra*



*27. ábra*




**1. példa**

Osszunk fel egy adott szakaszt három egyenlő részre!

**Megoldás**

Vegyük fel a harmadolandó $AB$ szakaszt egy hegyesszög egyik szárára a csúcsból kiindulva, majd a másik szárra a szög csúcsából mérjük fel háromszor ugyanazt a tetszőleges hosszúságú szakaszt ***(27. ábra)***! Az így kapott $3d$ hosszúságú szakasz $P$ végpontját kössük össze $B$-vel! A párhuzamos szelők tételéből következik, hogy a $BP$-vel párhuzamos $AP$-t harmadoló egyenesek $AB$-t a $H_1$ és $H_2$ harmadolópontokban metszik.

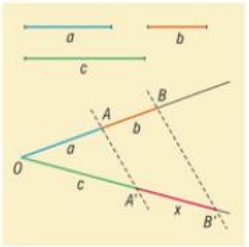


**2. példa**

Adott egy $a$, egy $b$ és egy $c$ hosszúságú szakasz. Szerkesszük meg az $x$ hosszúságú szakaszt, úgy, hogy $a : b = c : x$!

**Megoldás**

Vegyük fel egy szög egyik szárára az $a$ hosszúságú $OA$ és a $b$ hosszúságú $AB$ szakaszt, a másik szárra pedig a $c$ hosszúságú $OA'$ szakaszt *(28. ábra)*! A párhuzamos szelők tételének következtében az $AA'$-vel párhuzamos, $B$-re illeszkedő egyenes metszi ki az $A'$-t tartalmazó szögszárból azt a $B'$ pontot, amelyre $A'B' = x$.




28. ábra

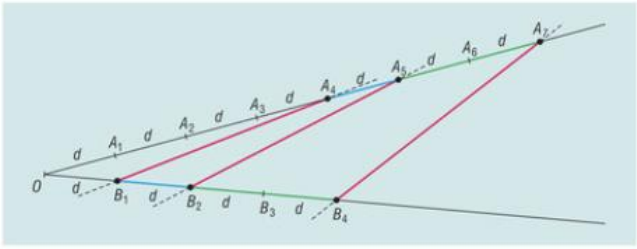
Ezt a szerkesztési eljárást *negyedik arányos szerkesztésnek* nevezik.

## A párhuzamos szelők tételének megfordítása

Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy vajon megfordítható-e a párhuzamos szelők tétele. Teljesül-e, hogy ha egy szög szárait úgy metsszük egyenesekkel, hogy az egyik száron keletkezett $AB$ és $CD$ szakaszok hosszának aránya megegyezik a másik száron keletkezett megfelelő $A'B'$ és $C'D'$ szakaszok hosszának arányával, akkor a metsző egyenesek párhuzamosak?

A tétel megfordításának pontos megfogalmazása előtt tekintsünk egy példát.

Vegyünk fel egy hegyesszöget, és mindkét szárára a csúcstól indulva mérjünk fel egymás után adott $d$ hosszúságú szakaszokat! Az osztáspontok az egyik száron $A_1, A_2, \ldots$, a másik száron $B_1, B_2, \ldots$ *(29. ábra)*. Tekintsük az $A_4B_1$, $A_5B_2$ és $A_7B_4$ egyeneseket.




29. ábra

Látható az ábráról, hogy a tekintett egyenesek nem párhuzamosak, annak ellenére, hogy

$$\frac{A_4A_5}{A_5A_7} = \frac{B_1B_2}{B_2B_4} = \frac{1}{2}.$$

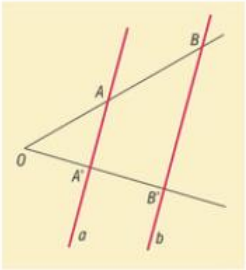
Be lehet bizonyítani, hogy ha az egyenesek által az egyik szögszárból kimetszett **összes** szakasz hosszának adott sorrendben vett aránya megegyezik a másik szögszárból kimetszett **összes** megfelelő szakasz azonos sorrendben vett arányával, akkor a szelőegyenesek párhuzamosak.



szükséges, de nem elégséges feltétel








30. ábra

*a* és *b* párhuzamosak

$$\Updownarrow$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

A **párhuzamos szelők tételének** speciális esete tehát **megfordítható:**

**TÉTEL:** **Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyek – csúcstól mért – hosszának aránya mind a két száron ugyanaz, akkor a két egyenes párhuzamos.**

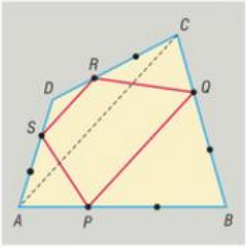
Tételünk a 30. ábra jelöléseivel:

Ha $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$, akkor az $a$ és $b$ egyenesek párhuzamosak.

*Megjegyzés:* Hasonló eredményre vezet az $\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$ feltétel is.

**3. példa**

Harmadoljuk meg az *ABCD* konvex négyszög mindegyik oldalát, és bizonyos harmadoló pontokat kössünk össze a 31. ábrán látható módon! Bizonyítsuk be, hogy a kapott *PQRS* négyszög trapéz!




31. ábra

**Megoldás**

Az ábrán berajzoltuk az *AC* átlót is, ami nagyon fontos az állítás bizonyításához. Az *ADC* szöget az *AC* és *SR* egyenesek úgy metszik, hogy

$$\frac{DR}{DC} = \frac{DS}{DA} = \frac{1}{3},$$

amiből a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján következik, hogy az *SR* szakasz párhuzamos az *AC* szakasszal.

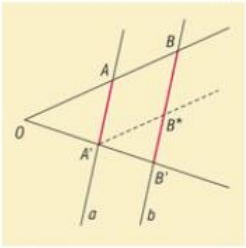
Hasonló a helyzet az *ABC* szög esetében is, ott

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BA} = \frac{2}{3},$$

ahonnan adódik, hogy a *PQ* szakasz párhuzamos az *AC* szakasszal. Mivel *PQ* is és *SR* is párhuzamos *AC*-vel, ezért egymással is párhuzamosak, ami a példa állítását bizonyítja.

## Párhuzamos szelőszakaszok tétele

A párhuzamos szelők tétele egy szög száraiból párhuzamos egyenesekkel kimetszett megfelelő szakaszok arányára vonatkozik. A következőkben a szelőegyeneseknek a szögtartományba eső szakaszait, az úgynevezett *szelőszakaszokat* vizsgáljuk.




32. ábra

A 32. ábra *O* csúcsú szögének szárait az $a$ és $b$ párhuzamos egyenesek metszik, a metszéspontok *A*, *A'*, illetve *B*, *B'*. A párhuzamos szelők tétele alapján:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

Húzzunk párhuzamost az *OB* szögszárral *A'*-n keresztül, messe ez a párhuzamos a *BB'* szakaszt *B**-ban! Az *AA'B*B* négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, ezért paralelogramma. Így *AA'* = *BB**.



Az $OB'B$ szög szárait metsző $OB$ és $A'B^*$ egyenesek párhuzamosak, így a párhuzamos szelők tétele alapján

$$\frac{BB^*}{BB'} = \frac{OA'}{OB'}.$$

Mivel $AA' = BB^*$, ezért kaptuk, hogy

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}.$$

Ezzel bebizonyítottuk a **párhuzamos szelőszakaszok tételét.**

párhuzamos szelőszakaszok tétele

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}$$

**TÉTEL:** **Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyenesekből a szárak által kimetszett szakaszok hosszának aránya megegyezik az egyenesek által a szögszárakból kimetszett, a csúcstól mért szakaszok hosszának arányával.**

**4. példa**

Számítsuk ki a 3. példában szereplő $PQRS$ trapézban az alapok hosszának arányát!



**Megoldás**

A 31. ábra jelöléseivel a párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján

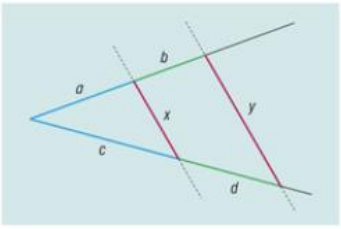
$$\frac{SR}{AC} = \frac{DS}{DA} = \frac{1}{3} \text{ és } \frac{PQ}{AC} = \frac{BP}{BA} = \frac{2}{3}.$$

Ezek összevetéséből

$$\frac{SR}{PQ} = \frac{1}{2}.$$

## Feladatok

1. Egy szög szárait az ábrán látható módon párhuzamos egyenesekkel metszettük. Töltsük ki az alábbi táblázat üresen hagyott rovatait! (Az adatok ugyanabban a hosszúság-egységben értendők.)



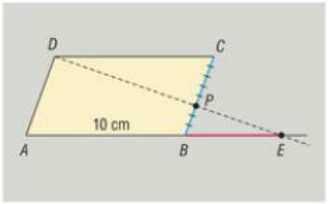

| a | b | c | d | x | y |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 9 | | 6 | |
| 10 | | 11 | 6 | 8 | |
| | | | 4 | 7 | 10 |
| 10 | | 11 | 3 | | 9 |
| | 7 | | 9 | 8 | 13 |

2. Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 20 cm, szára 10 cm hosszú. A trapézt háromszöggé kiegészítő egyenlő szárú háromszög szárának hossza 8 cm. Milyen hosszú a trapéz rövidebbik alapja?

3. Szerkesszünk egy adott szakaszon olyan pontot, amely a szakaszt
*a)* 1 : 2; *b)* 2 : 3; *c)* 2 : 5; *d)* 3 : 4; *e)* 3 : 7; *f)* 5 : 6
arányban osztja két részre!

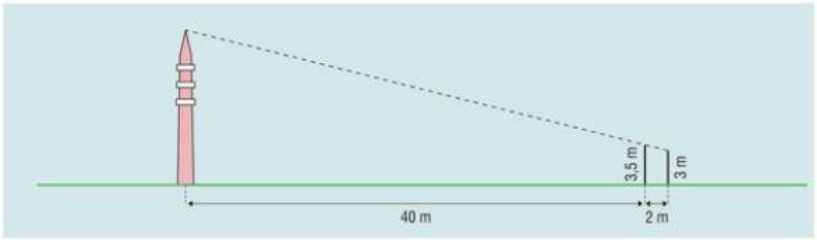
4. Adott az egységszakasz, valamint az $a$ és $b$ hosszúságú szakaszok. Szerkesszünk olyan szakaszt, amelynek a hossza
*a)* $\frac{1}{a}$; *b)* $a^2$; *c)* $ab$; *d)* $\frac{a}{b}$!

5. Az ábrán látható $ABCD$ paralelogramma $BC$ oldalának $P$ pontjára nézve $BP : PC = 3 : 5$. Számítsuk ki a $BE$ szakasz hosszát, ha $AB = 10$ cm!

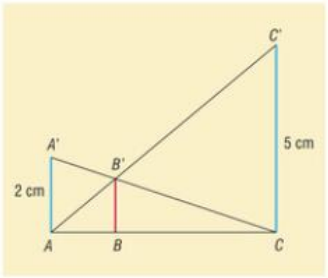



6. Egy trapéz alapjai 10 cm és 4 cm hosszúak. Kössük össze a száraknak a hosszabbik alaphoz közelebbi harmadolópontjait! Bizonyítsuk be, hogy a kapott szakasz párhuzamos az alapokkal, és számítsuk ki a hosszát!

7. Egy torony magasságát akarjuk meghatározni úgy, hogy a toronytól ugyanazon irányban két karót szúrunk a földbe oly módon, hogy a torony csúcsa és a karók végpontjai egy egyenesbe essenek. Az ábra adatai alapján határozzuk meg a torony magasságát!




8. Milyen arányban osztja az ábrán a $B$ pont az $AC$ szakaszt, és milyen hosszú a $BB'$ szakasz, ha az $AA'$, $BB'$ és $CC'$ szakaszok párhuzamosak, és $AA' = 2$ cm, $CC' = 5$ cm?




9. Húzzunk egy trapéz átlóinak metszéspontján át párhuzamost az alapokkal. Bizonyítsuk be, hogy ennek a párhuzamosnak a trapézba eső szakaszát az átlók metszéspontja felezi!

10. Igazoljuk, hogy egy konvex négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg!



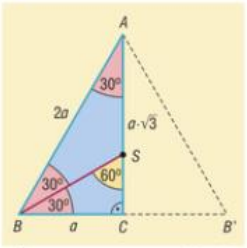
## 2. A szögfelezőtétel (emelt szintű tananyag)

**1. példa**

Egy derékszögű háromszög hegyesszögeinek nagysága 30° és 60°. A 60°-os szög csúcsából induló belső szögfelező milyen arányban osztja a hosszabbik befogót?

**Megoldás**

A vizsgált háromszög egy speciális derékszögű háromszög, ugyanis ha hosszabbik befogójának egyenesére tükrözzük, akkor az eredeti és a képháromszög egyesítése szabályos háromszög *(33. ábra)*.




33. ábra

Így ha $BC = a$, akkor $AB = 2a$, és Pitagorasz tételéből adódóan

$$AC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a \cdot \sqrt{3}.$$

Messe a $B$ csúcsból induló belső szögfelező az $AC$ oldalt az $S$ pontban. Mivel $SAB\sphericalangle = ABS\sphericalangle = 30°$, ezért $AS = SB$. $SBC\sphericalangle = 30°$, így a $BCS$ derékszögű háromszög is egy szabályos háromszög „fele", amiből adódóan $SB = 2 \cdot SC$. Ezek alapján

$$\frac{AS}{SC} = \frac{SB}{SC} = 2.$$

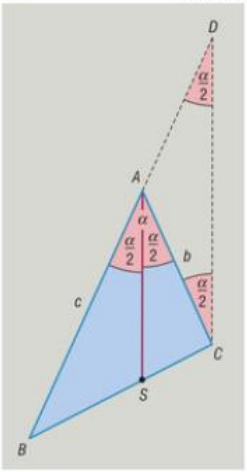
A tekintett szögfelező tehát harmadolja az $AC$ oldalt.

• • •

Az előző példa kapcsán megfigyelhető, hogy a $B$ csúcsba befutó oldalak hosszának aránya is 2. A $B$-ből induló belső szögfelező tehát a szemközti oldalt a szomszédos oldalak hosszának arányában osztotta két részre. Hasonló igaz például az egyenlő szárú háromszögek alappal szemközti csúcsából induló belső szögfelezőre is, hiszen az felezi az alapot.

A továbbiakban a párhuzamos szelők tételének segítségével általánosan vizsgáljuk meg, hogy a háromszög belső szögfelezője milyen arányban osztja a szemközti oldalt.

34. ábra




A 34. ábrán az $ABC$ háromszög $A$ csúcsából induló belső szögfelező a $BC$ oldalt az $S$ pontban metszi. A $C$-re illeszkedő, $AS$-sel párhuzamos egyenes és az $AB$ egyenes metszéspontja legyen $D$!

Mivel $CAS\sphericalangle = ACD\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$ (váltószögek) és $SAB\sphericalangle = CDA\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$ (egyállású szögek), ezért az $ACD$ háromszög egyenlő szárú, $AC = AD = b$. Az $AS$ és $CD$ párhuzamos szelőkre a $DBC$ szögben

$$\frac{CS}{SB} \overset{\text{párhuzamos szelők tétele}}{=} \frac{DA}{AB} \overset{AC = AD}{=} \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$





Ezzel bebizonyítottuk, hogy az 1. példa speciális háromszöge kapcsán tett észrevételünk általánosan is igaz.

szögfelezőtétel

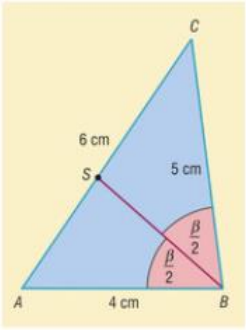
**TÉTEL: A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak hosszának arányában osztja két részre.**

Ez a tétel a háromszög belső szögfelezőjére vonatkozó **szögfelezőtétel.**

**2. példa**

Az $ABC$ háromszögben $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 6$ cm. Számítsuk ki, hogy a $B$ csúcsból induló belső szögfelező mekkora részekre osztja a szemközti oldalt!

35. ábra




**Megoldás**

Messe a tekintett szögfelező a $CA$ oldalt $S$-ben! *(35. ábra)*

A szögfelezőtétel alapján

$$\frac{AS}{SC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5},$$

így

$$AS = 4 \cdot \frac{6}{9}\ \text{cm} = \frac{8}{3}\ \text{cm} \text{ és } SC = 5 \cdot \frac{6}{9}\ \text{cm} = \frac{10}{3}\ \text{cm}.$$

## Feladatok

1. Egy háromszög oldalainak hossza
   *a)* 3 cm, 4 cm, 5 cm; *b)* 10 cm, 12, cm, 15 cm; *c)* $a$, $b$, $c$.
   A belső szögfelezők milyen hosszúságú szakaszokra osztják a szemközti oldalakat?
2. Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának felezőpontja $F$. Messe az $AFC$ szög szögfelezője az $AC$ oldalt $D$-ben, a $CFB$ szög szögfelezője a $BC$ oldalt $E$-ben! Bizonyítsuk be, hogy a $DE$ egyenes párhuzamos $AB$-vel!
3. Az $ABC$ háromszögben $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 6$ cm. Számítsuk ki azon szakaszok hosszát, amelyekre az $A$ csúcsból induló belső szögfelező osztja a $B$ csúcsból induló belső szögfelező háromszögbe eső szakaszát!
4. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának és az adott oldalak közös csúcsából induló belső szögfelező háromszögbe eső szakaszának hossza! Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételeit!
5. Az $ABC$ háromszög $A$ csúcsából induló külső szögfelező a $BC$ oldal egyenesét a $D$ pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$!



# 3. A középpontos hasonlósági transzformáció



Az előző tanévben részletesen foglalkoztunk a síkbeli egybevágósági transzformációkkal. Megadtuk a transzformációk hozzárendelési utasítását, megvizsgáltuk tulajdonságaikat, és példákat mutattunk arra, hogyan alkalmazhatók számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatok, problémák megoldása során. A most tárgyalandó geometriai transzformációval, a *középpontos hasonlósági transzformációval,* vagy rövidebben a *középpontos hasonlósággal* is foglalkoztunk már korábbi tanulmányaink során. Alkalmazhatjuk a mindennapi életben is, például diavetítéskor, filmvetítéskor, és alapját képezi az ábrák, fényképek számítógépes kicsinyítésének, nagyításának is.

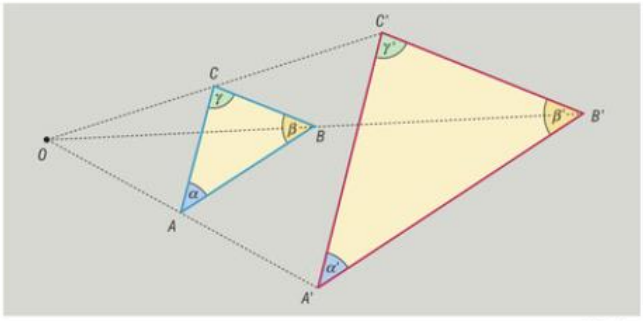
Előbb egy konkrét példa segítségével mutatjuk be a transzformációt, majd általánosan definiáljuk, és megállapítjuk a tulajdonságait.

**1. példa**

Vegyünk fel egy $ABC$ háromszöget, és rajta kívül egy $O$ pontot! Az $OA$, $OB$ és $OC$ félegyeneseken szerkesszük meg rendre az $A'$, $B'$ és $C'$ pontokat úgy, hogy $OA' = 2 \cdot OA$, $OB' = 2 \cdot OB$ és $OC' = 2 \cdot OC$ teljesüljön! Mit mondhatunk az $A'B'C'$ háromszögről?

**Megoldás**

A 36. ábrán a megszerkesztett $A'B'C'$ háromszög látható.




*36. ábra*

**Észrevételek:**

(1) Mivel $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = 2$, ezért a párhuzamos szelők tételének megfordítása következtében az $ABC$ és $A'B'C'$ háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak.

(2) A megfelelő oldalak párhuzamosságából adódik, hogy a megfelelő szögek egyállású szögek, ezért egyenlő nagyságúak, azaz $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ és $\gamma = \gamma'$.



(3) A párhuzamos szelőszakaszok tételéből adódóan $A'B' = 2 \cdot AB$, $B'C' = 2 \cdot BC$ és $C'A' = 2 \cdot CA$, azaz a megfelelő oldalak hosszának aránya egyenlő, jelen esetben 2.

(4) Az $A'B'C'$ háromszög körüljárási iránya ugyanaz, mint az $ABC$ háromszög körüljárási iránya.

A fenti észrevételek figyelembe vételével mondhatjuk, hogy az $A'B'C'$ háromszög az $ABC$ háromszög *O középpontú kétszeres nagyítású képe.*

Ezek után megadjuk a tér pontjainak halmazán értelmezett **középpontos hasonlósági transzformáció** definícióját.

középpontos hasonlósági transzformáció

**DEFINÍCIÓ: Adott egy $O$ pont és egy $\lambda$ ($\neq 0$) valós szám. A tér minden egyes $P$ pontjához rendeljünk hozzá egy $P'$ pontot a következőképpen:**

- **ha $P = O$, akkor $P = P'$.**
- **ha $P \neq O$, akkor $P'$ az $OP$ egyenes azon pontja, amelyre $OP' = |\lambda| \cdot OP$, és ha $\lambda > 0$, akkor $P'$ az $OP$ félegyenes pontja, ha $\lambda < 0$, akkor $P$-t és $P'$-t $O$ elválasztja egymástól.** *(37. ábra)*




*37. ábra*

Az $O$ pont a transzformáció ***középpontja*** vagy ***centruma,*** $\lambda$ a középpontos hasonlóság ***aránya.*** Ha $|\lambda| < 1$, akkor ***középpontos kicsinyítésről,*** ha $|\lambda| > 1$, akkor ***középpontos nagyításról*** beszélünk.

A középpontos hasonlóságot egyértelműen meghatározza az $O$ középpont és $\lambda$, vagy $O$ és egy $O$-tól különböző pont a képével.

*Megjegyzés:* A középpontos hasonlósági transzformáció egy olyan ponthoz pontot rendelő kölcsönösen egyértelmű függvény, amelynek értelmezési tartománya is és értékkészlete is a tér (vagy sík) pontjainak halmaza.





## A középpontos hasonlósági transzformáció tulajdonságai

(1) **Ha $\lambda \neq 1$, akkor a transzformáció egyetlen fixpontja az $O$ középpont. Ha $\lambda = 1$, akkor a tér minden pontja fixpont,** azaz a transzformáció az identikus transzformáció.

(2) **Az $O$ középpontra illeszkedő egyenesek a transzformáció invariáns egyenesei.** Ha $\lambda \neq 1$, akkor más invariáns egyenes nincs.

(3) **Bármely, az $O$ középpontra nem illeszkedő egyenes képe az eredetivel párhuzamos, $O$-ra nem illeszkedő egyenes.**

(4) A fenti tulajdonságok alapján a középpontos hasonlóság **szögtartó transzformáció,** azaz bármely szög és a képe egyenlő nagyságúak.

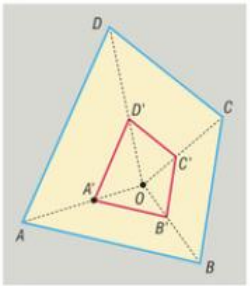
(5) A $\lambda$ arányú középpontos hasonlóságnál bármely szakasz képének hossza az eredeti szakasz hosszának $|\lambda|$-szerese, azaz **bármely $A$ és $B$ pontok esetén $A'B' = |\lambda| \cdot AB$.**

(6) **A középpontos hasonlóság akkor és csak akkor egybevágóság, ha $|\lambda| = 1$.** Ha $\lambda = 1$, akkor identitás, ha $\lambda = -1$, akkor középpontos tükrözés.

(7) A síkbeli középpontos hasonlóság nem változtatja meg az alakzatok körüljárási irányát, azaz **irányítástartó.**

### 2. példa

Vegyük fel az $ABCD$ konvex négyszöget, a belsejében egy $O$ pontot és az $OA$ szakaszon egy $A'$ pontot! Kicsinyítsük az $ABCD$ négyszöget $O$-ból úgy, hogy az $A$ pont képe $A'$ legyen!



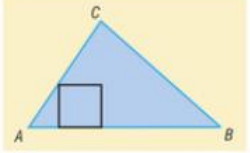
38. ábra

**Megoldás**

A definíció és a 3. tulajdonság alapján a szerkesztendő négyszög $B'$ csúcsa illeszkedik az $OB$ szakaszra, és az $AB$ egyenes párhuzamos az $A'B'$ egyenessel. Így $B'$-t az $A'$-re illeszkedő, $AB$-vel párhuzamos egyenes metszi ki az $OB$ szakaszból. Az $A'$ és $B'$ pontokból kiindulva hasonlóan szerkeszthető a képnégyszög $C'$ és $D'$ csúcsa is. ***(38. ábra)***

### 3. példa

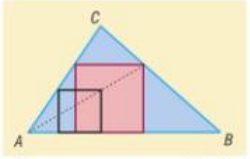
Vegyünk fel egy háromszöget 4 cm, 5 cm és 6 cm hosszú oldalakkal! Szerkesszünk a háromszögbe négyzetet úgy, hogy egyik oldala a háromszög leghosszabb oldalára, másik két csúcsa pedig külön-külön a másik két oldalra illeszkedjen!



39. ábra

**Megoldás**

Legyen a 39. ábrán látható háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 4$ cm! Vegyünk fel a háromszögben egy olyan négyzetet, amelynek egyik oldala illeszkedik a háromszög $AB$ oldalára, a másik két csúcsa közül pedig az egyik az $AC$ oldalon, a másik a háromszög belsejében van! Nagyítsuk ezt a négyzetet $A$-ból úgy, hogy a háromszögön belül levő csúcs képe a $BC$ oldalon legyen! Ez a képnégyzet teljesíti a feladat feltételeit. ***(40. ábra)***



40. ábra

## Feladatok

1. Vegyünk fel egy $ABC$ háromszöget! Hajtsuk végre azokat a középpontos hasonlósági transzformációkat, amelyeknek középpontja az $A$ csúcs, aránya pedig

   *a)* 3; *b)* $\frac{1}{2}$; *c)* –2; *d)* $\frac{2}{3}$; *e)* –1,5; *f)* $-\frac{3}{4}$!

   Melyek kicsinyítések, melyek nagyítások?

2. Vegyünk fel egy háromszöget, és mindegyik csúcsából kicsinyítsük felére ($\lambda = 0{,}5$)! Mit állíthatunk az eredeti háromszögből a képháromszögek levágásával kapott síkidomról? Állításainkat indokoljuk!

3. Vegyünk fel egy háromszöget, és szerkesszük meg a súlypontját! Hajtsuk végre azt a középpontos hasonlóságot, amelynek középpontja a súlypont, aránya pedig $-\frac{1}{2}$! Mit mondhatunk a képháromszögről? Állításainkat indokoljuk!

4. Vegyünk fel egy háromszöget és egy akkora szakaszt, amekkorára a háromszög egy kiszemelt oldalát nagyítani vagy kicsinyíteni akarjuk! Jelöljük ki a középpontos hasonlóság centrumát, és végezzük el a transzformációt!

5. Vegyünk fel egy téglalapot, és rajta kívül, egyik oldalával párhuzamosan egy szakaszt! Szerkesszünk olyan pontot, amelyből a téglalapot középpontos hasonlósággal transzformálva egyik oldala az adott szakaszba megy át! Hány megoldása van a feladatnak?

6. Vegyünk fel egy 3 és egy 4 cm sugarú kört úgy, hogy ne legyen közös pontjuk! Szerkesszük meg azt a pontot, amelyre vonatkozóan a kisebb kör nagyított képe a nagyobb kör! Hány ilyen pont van?

7. Vegyünk fel egy háromszöget 5 cm, 6 cm és 7 cm hosszú oldalakkal! Szerkesszünk a háromszögbe olyan téglalapot, amelyben a szomszédos oldalak aránya 1 : 2, hosszabbik oldala a háromszög 7 cm hosszú oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalára illeszkedik!

8. Egy 60°-os szögtartományban adott egy $P$ pont. Szerkesszünk a szögtartományba kört, amely érinti a szögszárakat és illeszkedik a $P$ pontra! Hány megoldása van a feladatnak?

9. A derékszögű koordináta-rendszerben egy háromszög origóra vonatkozó középpontos hasonlóságánál a képháromszög csúcsai: $A'(-4; 5)$, $B'(8; 6)$, $C'(5; 2)$. Határozzuk meg az eredeti $ABC$ háromszög csúcsainak koordinátáit, ha a középpontos hasonlóság aránya

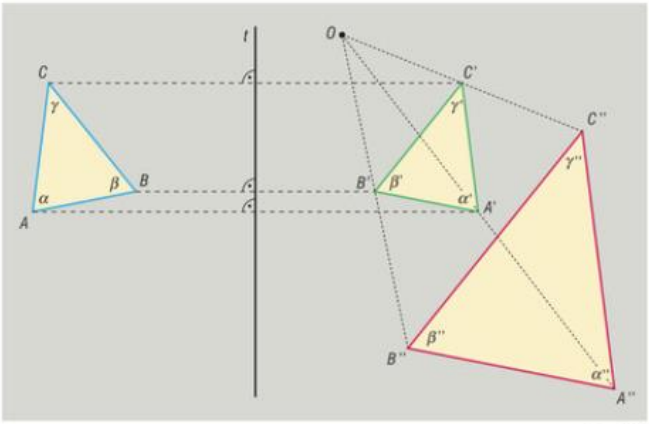
   *a)* –1; *b)* 2; *c)* –3; *d)* $\frac{4}{5}$; *e)* $-\frac{1}{4}$!



# 4. A hasonlósági transzformáció

**1. példa**

Tekintsünk egy háromszöget, egy $t$ egyenest és az egyenesen kívül egy $O$ pontot! Tükrözzük a háromszöget a $t$ egyenesre, majd az így kapott képet nagyítsuk $O$-ból kétszeresére ($\lambda = 2$)! Mit mondhatunk a második képként kapott háromszögről? *(41. ábra)*




*41. ábra*



Jan van Eyck *Az Arnolfini házaspár* című képének részlete





**Megoldás**

Észrevételek:

(1) Mivel a tengelyes tükrözés az oldalak hosszát változatlanul hagyja, az $O$ centrumú középpontos hasonlóság pedig kétszeresére növeli, ezért

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA} = 2.$$

(2) A tengelyes tükrözés és a középpontos hasonlóság is szögtartó, ezért

$$\alpha = \alpha'', \ \beta = \beta'', \ \gamma = \gamma''.$$

(3) Mivel a tengelyes tükrözés irányításfordító, ezért az $A''B''C''$ háromszög körüljárási iránya ellentétes az $ABC$ háromszög körüljárási irányával.

◆ ◆ ◆

A fenti példa egy tengelyes tükrözés és egy középpontos hasonlóság egymás utáni végrehajtásával adódó transzformációt határoz meg. Ez a transzformáció nem középpontos hasonlóság, ugyanis nem teljesül rá, hogy bármely egyenes és a képe párhuzamos egymással. Őrzi viszont a középpontos hasonlóságnak a szögtartó tulajdonságát, valamint teljesül az is, hogy bármely két pont távolsága a transzformáció során ugyanannyiszorosára változik.





hasonlósági transzformáció

**DEFINÍCIÓ: Egy (vagy több) középpontos hasonlósági transzformáció és egy (vagy több) egybevágósági transzformáció egymás utáni végrehajtásával kapott transzformációkat *hasonlósági transzformációknak* nevezzük.**

Ha a hasonlósági transzformáció egy $\lambda$ arányú középpontos hasonlóság és egy egybevágóság egymásutánja, akkor $\lambda$ **arányú hasonlósági transzformációról** beszélünk.

A középpontos hasonlóság és az egybevágóságok tulajdonságaiból adódnak a **hasonlósági transzformáció** következő **tulajdonságai:**

egyenestartó, szögtartó, aránytartó

(1) A hasonlósági transzformáció **egyenest egyenesbe transzformál.**

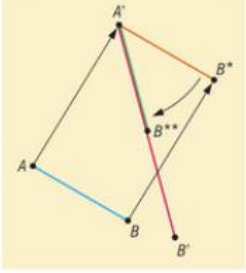
(2) A hasonlósági transzformáció **szögtartó,** azaz bármely szög és a képe egyenlő nagyságú.

(3) A $\lambda$ arányú hasonlósági transzformáció esetén bármely $A$, $B$ pontokra és $A'$, $B'$ képeikre teljesül, hogy $\frac{A'B'}{AB} = |\lambda|$.

*Megjegyzések:*

1. Az egybevágósági transzformációk olyan hasonlósági transzformációk, amelyekre $|\lambda| = 1$.
2. Be lehet bizonyítani, hogy ha egy síkbeli hasonlósági transzformáció nem egybevágóság, akkor pontosan egy fixpontja van.

*42. ábra*




**2. példa**

Adott egy $AB$ és egy $A'B'$ szakasz úgy, hogy nem párhuzamosak és $A'B' = 2 \cdot AB$. Adjunk meg olyan hasonlósági transzformációt, amelyik $AB$-t $A'B'$-be viszi!

**Megoldás**

Tekintsük először az $\overrightarrow{AA'}$ vektorral történő párhuzamos eltolást, ez $A$-t $A'$-be, $B$-t $B^*$-ba viszi (*42. ábra*)! Az $A'B^*$ szakaszt forgassuk el $A'$ körül úgy, hogy $B^*$ képe ($B^{**}$) az $A'B'$ szakaszra kerüljön! Ezután tekintsük az $A'$ centrumú kétszeres nagyítást, ez $B^{**}$-ot $B'$-be viszi.

## Feladatok

1. Adott egy 3 és egy 4 cm sugarú kör, és mindegyikben egy-egy átmérő úgy, hogy nem párhuzamosak. Adjunk meg egy olyan hasonlósági transzformációt, amelynél a kisebb kör képe a nagyobb kör úgy, hogy a kisebb körben felvett átmérő képe a nagyobb körben felvett átmérő!

2. Tükrözzünk egy háromszöget egy $t$ tengelyre, majd a tükörképet kicsinyítsük felére $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ a tengely egy $O$ pontjából! Igaz-e, hogy a transzformációk fordított sorrendben történő elvégzésével is ugyanazt a képet kapnánk? Válaszunkat indokoljuk!

# 5. Alakzatok hasonlósága; a háromszögek hasonlóságának alapesetei

**Definíció: Két alakzat *hasonló*, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi.**

Azt, hogy egy $A$ alakzat **hasonló** egy $B$ alakzathoz, a következőképpen jelöljük: $A \sim B$.

A hasonlóság a korábban tárgyalt egybevágósághoz hasonlóan egy reláció, és két alakzat akkor van hasonlósági relációban egymással (akkor hasonló), ha van közöttük megfelelő hasonlósági transzformáció. A definícióból közvetlenül adódnak a hasonlósági reláció következő tulajdonságai:

(1) **Minden alakzat hasonló önmagához, azaz $A \sim A$.**

(2) **Ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$.**

(3) **Ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$.**

Ezek a tulajdonságok érvényesek az egybevágósági relációra is.

Ha két alakzat hasonlóságát a definíció alapján akarjuk bizonyítani, akkor keresnünk kell olyan megfelelő hasonlósági transzformációt, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. Ez számos konkrét esetben nem könnyű, ezért az alakzatokat jellemző adatok (bizonyos szakaszok hosszának aránya, szögek nagysága) segítségével próbálunk olyan szükséges és elegendő feltételeket keresni, amelyek biztosítják a tekintett alakzatok hasonlóságát.

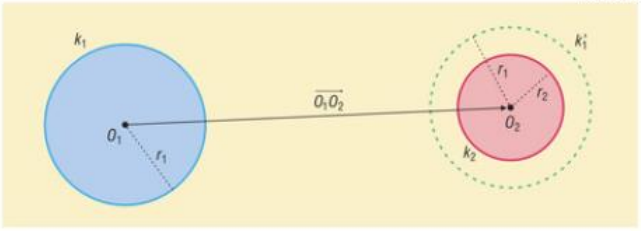
**1. példa**

Bizonyítsuk be, hogy bármely két kör hasonló!

**Megoldás**

Jelölje $O_1$ az $r_1$ sugarú $k_1$, és $O_2$ az $r_2$ sugarú $k_2$ kör középpontját. Az $\overrightarrow{O_1O_2}$ vektorral történő eltolás és az $O_2$ centrumú, $\frac{r_2}{r_1}$ arányú középpontos hasonlóság egymásutánja $k_1$-et $k_2$-be viszi. *(43. ábra)*

*43. ábra*

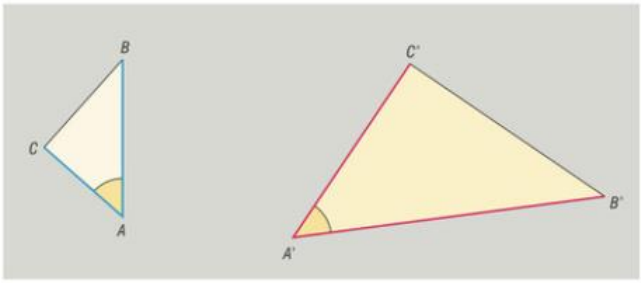





## A háromszögek hasonlóságának alapesetei

A 44. ábrán látható $ABC$ és $A'B'C'$ háromszögekről tudjuk, hogy

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \text{ és } CAB\sphericalangle = C'A'B'\sphericalangle.$$




*44. ábra*



Kb. 4000 éves írásos emlékek szerint a babilóniaiak már ismerték a háromszögek hasonlóságának fogalmát.

3D

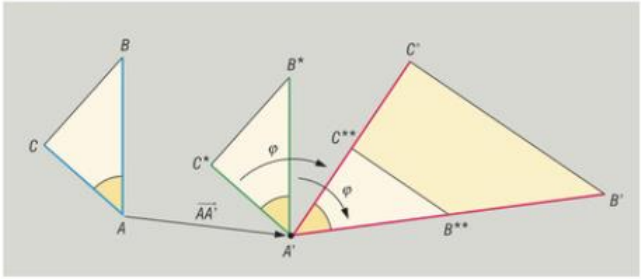
Vajon ezen adatok egyenlősége elegendő-e ahhoz, hogy a két háromszög hasonló legyen?

A 45. ábrán látható, hogy az $\overrightarrow{AA'}$ vektorral történő eltolás, egy alkalmas $\varphi$ szögű $A'$ körüli elforgatás és egy $A'$ centrumú $\frac{A'B'}{AB}$ arányú középpontos hasonlóság egymás utáni végrehajtásával nyert hasonlósági transzformáció az $ABC$ háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe viszi, így a definíció alapján a két háromszög hasonló.

*Megjegyzés:* A feladatban a két háromszög körüljárási iránya megegyezett. Ha a körüljárási irányok különböztek volna egymástól, akkor az egyik háromszöget a sík egy tetszőleges egyenesére tükrözve a háromszögek irányítását egyezővé tehettük volna.

Az imént a háromszögek hasonlóságának egyik alapesetéhez kerestünk megfelelő transzformációt. A többi alapesethez is hasonló módon kereshetünk megfelelő transzformációkat.

*45. ábra*





**TÉTEL:** **Két háromszög akkor és csak akkor hasonló, ha a következő feltételek egyike teljesül:**

**(1) megfelelő oldalaik hosszának aránya páronként egyenlő;**

**(2) két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és az ezek által közrefogott szögek nagysága egyenlő;**

**(3) két-két szögük páronként egyenlő nagyságú;**

**(4) két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és e két-két oldal közül a nagyobbikkal szemközt levő szögek nagysága egyenlő.**

A fenti négy feltétel a **háromszögek hasonlóságának alapesetei**.

**háromszögek hasonlóságának alapesetei**

**2. példa**

Mutassuk meg, hogy két derékszögű háromszög hasonló, ha a befogók hosszának aránya mindkét háromszög esetén ugyanaz.

**Megoldás**

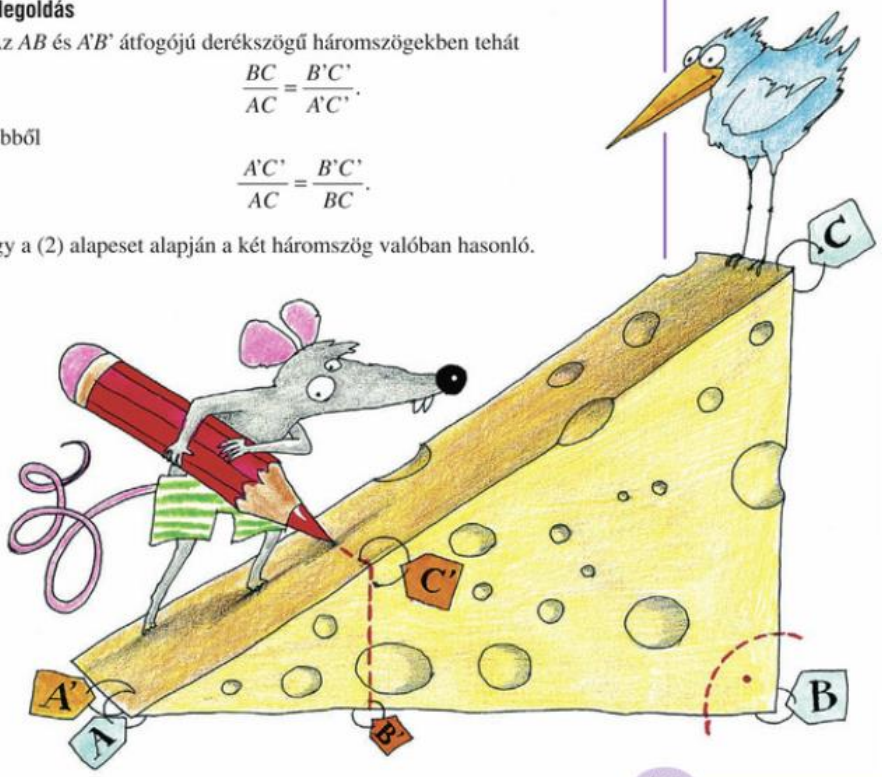
Az $AB$ és $A'B'$ átfogójú derékszögű háromszögekben tehát

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}.$$

Ebből

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

így a (2) alapeset alapján a két háromszög valóban hasonló.



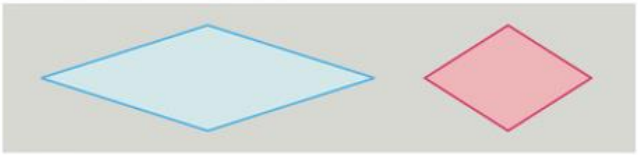






## Négyszögek, sokszögek hasonlósága

Háromszögek esetében a megfelelő oldalhosszak arányának páronkénti egyenlősége elegendő volt a hasonlósághoz. Négyszögek esetén könnyen látható, hogy ez nem elegendő, ugyanis ellenkező esetben bármely két rombusz hasonló lenne egymáshoz *(46. ábra)*. Négyszögek hasonlóságához az sem elegendő, ha megfelelő szögeik páronként egyenlő nagyságúak, gondoljunk csak a négyzetre és azokra a téglalapokra, amelyek nem négyzetek.



*46. ábra*

Általában sokszögek hasonlóságára nézve a következő érvényes:

**TÉTEL:** **Két sokszög akkor és csak akkor hasonló, ha megfelelő oldalhosszaik aránya páronként egyenlő, és megfelelő szögeik páronként egyenlő nagyságúak.**

# Feladatok

1. A következő állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis!
   *a)* Két háromszög hasonló, ha megfelelő szögeik nagysága páronként egyenlő.
   *b)* Két négyszög hasonló, ha megfelelő szögeik nagysága páronként egyenlő.
   *c)* Két háromszög hasonló, ha két-két oldalhosszuk aránya páronként egyenlő, és egy-egy szögük nagysága egyenlő.
   *d)* Ha két síkidom egybevágó, akkor hasonló is.
   *e)* Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha egy-egy szögük egyenlő nagyságú.
   *f)* Két rombusz hasonló, ha megegyeznek egy-egy szögükben.
   *g)* Bármely két szabályos sokszög hasonló.
   *h)* Bármely két azonos oldalszámú szabályos sokszög hasonló.
   *i)* Két húrtrapéz hasonló, ha szögeik páronként egyenlők.
2. Bizonyítsuk be, hogy bármely két szabályos háromszög hasonló.
3. Bizonyítsuk be, hogy két derékszögű háromszög hasonló, ha megegyeznek egy hegyesszögükben.
4. Bizonyítsuk be, hogy két téglalap hasonló, ha szomszédos oldalaik aránya egyenlő.
5. Egy világítótorony árnyéka 10 m hosszú, ugyanekkor ugyanott egy 2 m hosszú, függőleges bot árnyéka 120 cm. Milyen magas a világítótorony?
6. Egy háromszög oldalai 12 cm, 16 cm és 20 cm hosszúak. Egy hozzá hasonló háromszög legnagyobb oldala 8 cm hosszú. Számítsuk ki ez utóbbi háromszög másik két oldalának hosszát.



# 6. A hasonlóság néhány alkalmazása

A következőkben néhány fontos tételt bizonyítunk be a hasonlóság alkalmazásával.

## A háromszög súlypontja

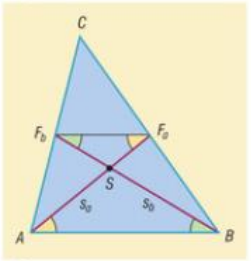
9. osztályban a háromszög középvonalára vonatkozó tétel és a paralelogramma tulajdonságai alapján bebizonyítottuk a következőt:

**TÉTEL:** **A háromszög bármely két súlyvonala úgy metszi egymást, hogy a metszéspont mindkét súlyvonalat 1 : 2 arányban osztja két részre, a nagyobbik rész másik végpontja a háromszög megfelelő csúcsa.**

Most egy újabb bizonyítást adunk erre a tételre a háromszögek hasonlóságának egyik alapesetét felhasználva.

### Bizonyítás

Jelölje az $ABC$ háromszög $s_a$ és $s_b$ súlyvonalának metszéspontját $S$! *(47. ábra)*




47. ábra

Az $F_aF_b$ szakasz a háromszög egyik középvonala, ezért párhuzamos $AB$-vel, és

$$F_aF_b = \frac{AB}{2}.$$

A 47. ábrán azonosan jelölt szögek váltószögek, ezért egyenlő nagyságúak. Az $ABS$ és $SF_aF_b$ háromszögekre teljesül, hogy két-két szögük egyenlő nagyságú, amiből adódik, hogy hasonlók. Ebből viszont adódik, hogy a megfelelő oldalak hosszának aránya egyenlő, így

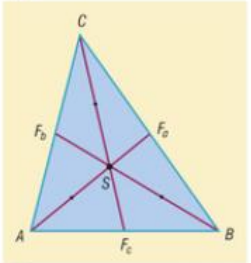
$$\frac{AS}{SF_a} = \frac{BS}{SF_b} = \frac{AB}{F_aF_b} = 2,$$

ahonnan $AS = 2 \cdot SF_a$ és $BS = 2 \cdot SF_b$, és ezt akartuk bizonyítani.

A fenti tétel következménye, mint ahogy azt már korábban is láttuk, hogy az egyik súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontjára a másik két súlyvonal mindegyike illeszkedik, azaz

**TÉTEL:** **A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont mindhárom súlyvonalnak a háromszög megfelelő csúcsától távolabbi harmadolópontja.** *(48. ábra)*

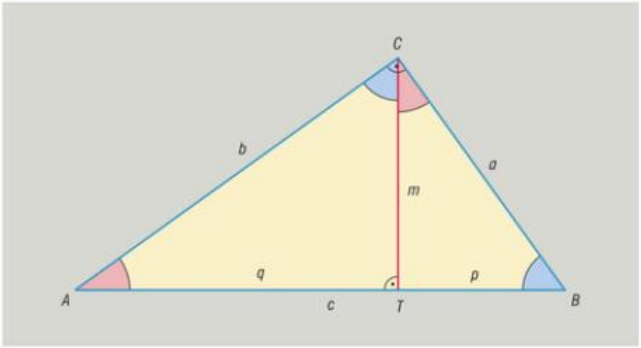
**A súlyvonalak metszéspontja a háromszög *súlypontja*.**




48. ábra

## Arányossági tételek a derékszögű háromszögben

Vegyünk fel egy $ABC$ derékszögű háromszöget, és húzzuk be az átfogóhoz tartozó $CT$ magasságot! *(49. ábra)*




*49. ábra*



*a* és *b* mértani közepe:
$\sqrt{ab}$ $(a \geq 0;\ b \geq 0)$

**magasságtétel**

Az ábrán azonosan jelölt szögek egyenlők, amiből következik, hogy az átfogóhoz tartozó magasság a derékszögű háromszöget két olyan derékszögű háromszögre bontja, amelyek egymáshoz is és az eredeti háromszöghöz is hasonlók, azaz

$$ATC_{\triangle} \sim CTB_{\triangle} \sim ACB_{\triangle}.$$

**1. Vizsgáljuk először a két részháromszög hasonlóságát!**

Mivel $ATC_{\triangle} \sim CTB_{\triangle}$, ezért a megfelelő oldalak hosszának aránya egyenlő. A két háromszög megfelelő befogóinak arányára nézve

$$\frac{CT}{AT} = \frac{TB}{CT},$$

ahonnan

$$CT^2 = TB \cdot AT.$$

Ha bevezetjük az egyszerűbb $CT = m$, $AT = q$, $TB = p$ jelöléseket, akkor a kapott összefüggés:

$$m^2 = pq \quad \text{vagy} \quad m = \sqrt{pq}.$$

A kapott összefüggés a derékszögű háromszögekre vonatkozó **magasságtétel.**

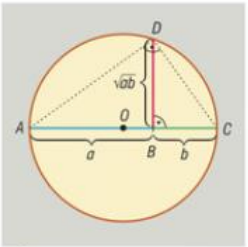
Mielőtt szavakkal is megfogalmaznánk a magasságtételt, emlékeztetünk arra, hogy korábban két nemnegatív szám szorzatának négyzetgyökét a két szám mértani közepének neveztük.

**MAGASSÁGTÉTEL: Derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság az átfogót osztja.**



**1. példa**

Adott egy $a$ és egy $b$ hosszúságú szakasz. Szerkesszünk $\sqrt{ab}$ hosszúságú szakaszt!




50. ábra

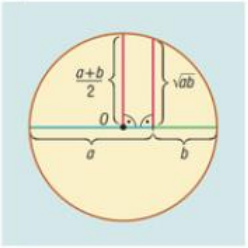
**Megoldás**

Thalész tétele és a magasságtétel alapján a szerkesztés menete a következő *(50. ábra)*:

1. Az $a + b$ hosszúságú $AC$ szakasz mint átmérő fölé kör szerkesztése.
2. $B$-ben merőleges szerkesztése $AC$-re, ez a kört $D$-ben metszi.
3. $BD = \sqrt{ab}$.

**2. példa**

Bizonyítsuk be geometriai eszközökkel, hogy két pozitív szám számtani közepe mindig nagyobb vagy egyenlő, mint ugyanezen számok mértani közepe, azaz ha $a$ és $b$ pozitív számok, akkor $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$! Mikor teljesül az egyenlőség?




51. ábra

**Megoldás**

A magasságtétel és az első példa alapján a bizonyítás a 51. ábráról leolvasható.

Az ábrán látható az is, hogy egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a = b$.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

◆ ◆ ◆

**2. Tekintsük most az egyik részháromszög és az eredeti derékszögű háromszög hasonlóságát!**

Mivel $CTB_{\triangle} \sim ACB_{\triangle}$, ezért

$$\frac{CB}{AB} = \frac{TB}{CB},$$

ahonnan

$$CB^2 = AB \cdot TB.$$

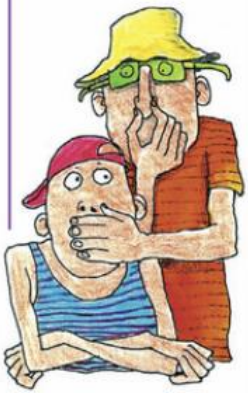
A 49. ábra jelöléseivel:

$$a^2 = cp \quad \text{vagy} \quad a = \sqrt{cp}.$$

Ha az $ATC_{\triangle} \sim ACB_{\triangle}$ hasonlóságból indulunk ki, akkor kapjuk, hogy

$$b^2 = cq \quad \text{vagy} \quad b = \sqrt{cq}.$$

A derékszögű háromszög befogójára kapott összefüggés a **befogótétel.**



befogótétel

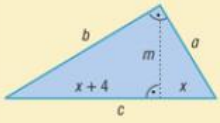
**BEFOGÓTÉTEL: Derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogónak az átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.**

A befogótétel segítségével egy újabb bizonyítást adhatunk Pitagorasz tételére, mely szerint ha egy derékszögű háromszög befogóinak hossza $a$ és $b$, az átfogó hossza $c$, akkor

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

A 49. ábra jelöléseit használva

$$a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q) = c^2.$$




52. ábra

**3. példa**

Egy derékszögű háromszögben a befogók hosszának aránya 5 : 3. Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két olyan szakaszra osztja, amelyek közül az egyik 4 cm-rel hosszabb, mint a másik. Számítsuk ki az átfogó és az átfogóhoz tartozó magasság hosszát!

**Megoldás**

Jelölje $a$ és $b$ a befogók, $c$ az átfogó, $x$ pedig az átfogó rövidebb szeletének centiméterben mért hosszát. *(52. ábra)*

A befogótétel alapján $a^2 = cx$ és $b^2 = c(x + 4)$.

Mivel $a : b = 3 : 5$, ezért

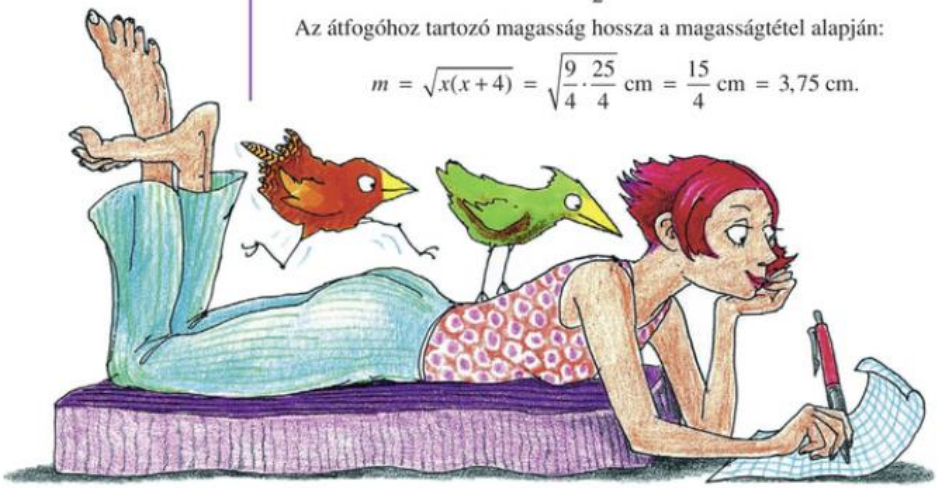
$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{cx}{c(x+4)} = \frac{x}{x+4} = \frac{9}{25},$$

ahonnan $x = \frac{9}{4}$ cm = 2,25 cm.

Az átfogó hossza: $c = 2x + 4 = \frac{17}{2}$ cm = 8,5 cm.

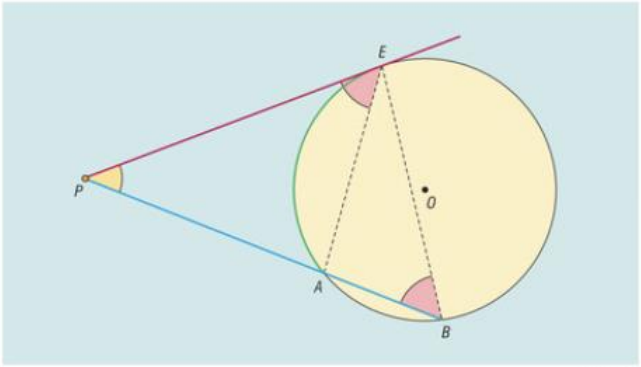
Az átfogóhoz tartozó magasság hossza a magasságtétel alapján:

$$m = \sqrt{x(x+4)} = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{25}{4}} \text{ cm} = \frac{15}{4} \text{ cm} = 3{,}75 \text{ cm}.$$



## A körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele (emelt szintű tananyag)

Vegyünk fel egy kört és a körön kívül egy $P$ pontot! Húzzunk a körhöz $P$-ből egy érintőt és egy szelőt, az érintési pont legyen $E$, a szelő körrel vett metszéspontjai $A$ és $B$! *(53. ábra)*




*53. ábra*

Célunk az, hogy a *PE érintőszakasz*, valamint a *PA* és *PB szelőszakaszok* között kapcsolatot találjunk.

A kerületi szögek tétele alapján

$$ABE\sphericalangle = PEA\sphericalangle,$$

ugyanis mindketten a kör megfelelő $AE$ ívéhez tartoznak. Ebből következik, hogy az $EA$ szakasz két olyan háromszögre bontja a $PBE$ háromszöget, amelyek közül az egyiknek, nevezetesen a $PEA$ háromszögnek két szöge ugyanakkora, mint az eredeti háromszög két szöge. (Az $EPA$ szög mindkét háromszögnek belső szöge.) Ebből következik, hogy

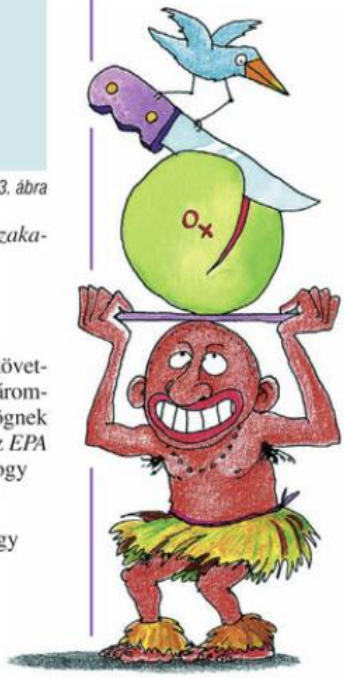
$$PBE_{\triangle} \sim PEA_{\triangle},$$

így a megfelelő oldalhosszak aránya egyenlő. Teljesül tehát, hogy

$$\frac{PE}{PB} = \frac{PA}{PE},$$

ahonnan

$$PE^2 = PA \cdot PB \text{ vagy } PE = \sqrt{PA \cdot PB}.$$



Ezzel bebizonyítottuk a **körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételét:**

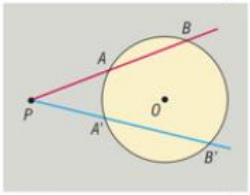
**TÉTEL:** **Adott körhöz adott külső pontból húzott érintőszakasz hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyek az adott pontra illeszkedő szelőn a ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjednek.**

körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele

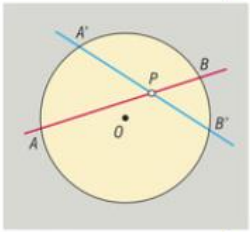




**körhöz külső pontból húzott szelőszakaszok tétele**




54. ábra




55. ábra

**körhöz belső pontból húzott szelőszakaszok tétele**




56. ábra

A 4. példában szereplő felosztás arányának már ókorban nagy jelentőséget tulajdonítottak, szépség, a harmónia arányának tekintették. Külön nevet is kapott, ***aranymetszésnek*** nevezték el. Az aranymetszés megjelenik az építészetben, képzőművészetben, irodalomban, zenében is. Mi is találkoztunk már ebben a tanévben ezzel az aránnyal, kiszámoltuk az értékét:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62.$$

Mivel adott körhöz adott külső pontból húzott érintőszakasz hossza egyértelműen meghatározott, ezért akármelyik szelőn keletkezett két szelőszakaszt is tekintjük, azok szorzata állandó lesz, csak a körtől és a külső ponttól függ. Az előző tétel következményeként érvényes tehát a következő:

**TÉTEL:** **Adott körhöz adott külső pontból húzott szelőszakaszok hosszának szorzata állandó, csak a körtől és az adott ponttól függ.**

Az 54. ábra jelöléseivel tehát bármely két szelő esetén

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$

Ez a tétel a **körhöz külső pontból húzott szelőszakaszok tétele.**

*Megjegyzések:*

1. A körhöz külső pontból húzott szelőszakaszok tétele ugyanolyan módon következik az érintő- és szelőszakaszok tételéből, mint a kerületi szögek tétele a kerületi és középponti szögek tételéből.
2. A kerületi szögek tétele és a háromszögek hasonlóságának alapesetei alapján bizonyítható a körhöz belső pontból húzott szelőszakaszok tétele is. ***(55. ábra)***

**TÉTEL:** **Ha egy adott kör adott *P* belső pontjára illeszkedő két húr végpontjai *A*, *B*, illetve *A'*, *B'*, akkor**

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$

**4. példa**

Egy adott szakaszt osszunk fel két részre úgy, hogy a nagyobbik rész hosszának és az adott szakasz hosszának az aránya megegyezzen a kisebbik rész hosszának és a nagyobbik rész hosszának arányával!

**Megoldás**

Jelölje az adott szakasz hosszát $a$, a nagyobb rész hosszát $x$ ***(56. ábra)***. Célunk egy $x$ hosszúságú szakasz szerkesztése. A feltétel szerint

$$\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}.$$

Átalakítva:

$$x^2 = a(a-x) = a^2 - ax,$$

ahonnan

$$a^2 = x(x+a).$$

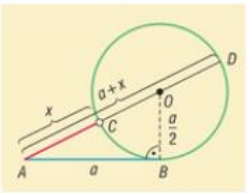
Ez utóbbi formula nagyon emlékeztet a körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételére. Ha egy $\frac{a}{2}$ sugarú körhöz tekintünk egy $a$ hosszúságú érintőszakaszt, és egy a kör középpontjára illeszkedő szelőt, akkor a rövidebbik szelőszakasz a tétel értelmében éppen $x$ hosszúságú lesz. ***(57. ábra)***



Ezek alapján a szerkesztés menete:

1. Az adott $AB$ szakasz $B$ végpontjába merőlegest állítunk, majd erre felmérjük az $AB$ szakasz felét. A kapott végpontot jelöljük $O$-val.
2. $O$ körül $\frac{a}{2}$ sugárral kört rajzolunk.
3. Ha az $AO$ szakasz a kört $C$-ben metszi, akkor $AC = x$.

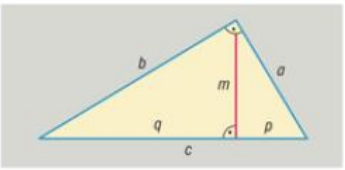
*Megjegyzés:* Vegyük észre, hogy a szerkesztés során kapott $AD$ szelőre is teljesül az aranymetszés aránya: $\frac{x}{a} = \frac{a}{x+a}$.




57. ábra

## Feladatok

1. Határozzuk meg az ábrán látható derékszögű háromszög ismeretlen adatait, ha tudjuk, hogy
   *a)* $a = 5$ és $b = 12$; *b)* $b = 4$ és $c = 5$;
   *c)* $c = 13$ és $p = \frac{25}{13}$; *d)* $p = 3{,}6$ és $q = 6{,}4$;
   *e)* $a = 20$ és $m = 16$; *f)* $q = 24$ és $m = 10$.




2. Adott egy egységnyi és egy $a$ hosszúságú szakasz. Szerkesszünk $\sqrt{a}$ hosszúságú szakaszt!
3. Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza 16 cm. Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót 1 : 3 arányban osztja két részre. Számítsuk ki a befogók hosszát!
4. Bizonyítsuk be, hogy bármely derékszögű háromszögben a befogók hosszának négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az átfogóra eső merőleges vetületeik hossza!
5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű trapéz átlói merőlegesek egymásra, akkor a merőleges szár hossza az alapok hosszának mértani közepe! Igaz-e az állítás megfordítása?
6. Egy adott körhöz egy külső $P$ pontból húzott szelőnek a körrel vett metszéspontjai $P$-től 5 cm, illetve 20 cm távolságra vannak. Milyen hosszú érintőszakasz húzható $P$-ből a körhöz?
7. Egy körhöz egy $P$ külső pontból húzott szelő a kört olyan pontokban metszi, hogy a $P$-hez közelebbi metszéspont 10 cm-rel kisebb, a távolabbi 10 cm-rel nagyobb távolságra van $P$-től, mint $P$-t a kör középpontjával összekötő szakasz hossza. Számítsuk ki a kör sugarát!
8. Egy hagyományos, a képet filmre rögzítő fényképezőgéppel készült papírképen, amelyen Béla áll egy szobor előtt, Béla 4 cm, a szobor pedig 7 cm magas.
   *a)* Milyen magas a szobor a valóságban, ha a kép készítésekor a 175 cm magas Béla a gép lencséjétől 8 méterre állt, a szobor pedig 2 m-rel volt mögötte?
   *b)* Milyen arányban kicsinyíti le a kép a valóságot?
9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrtrapéz érintőnégyszög, akkor a beírt kör átmérőjének hossza mértani közepe az alapok hosszának!
10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő szárú háromszög alappal szemközti szöge 36°-os, akkor az alap a szár nagyobbik aranymetszete!
11. Mutassuk meg, hogy a szabályos ötszög oldala átlójának nagyobbik aranymetszete! (Segít a 110/29. ábra!)
12. Szerkesszünk adott sugarú körbe szabályos tízszöget!
13. Adott egy téglalap. Szerkesszünk vele egyenlő területű négyzetet!





# 7. Hasonló síkidomok területének aránya

Ebben a részben azt vizsgáljuk meg, hogy a hasonlósági transzformáció hogyan változtatja meg a síkidomok területét, azaz két hasonló síkidom területei hogyan aránylanak egymáshoz.

**DEFINÍCIÓ: Két hasonló alakzat *hasonlóságának aránya* az egymásnak megfelelő szakaszok hosszának aránya.**

A hasonlóság aránya pozitív szám, értéke megegyezik az egyik alakzatot a másikba vivő hasonlósági transzformáció arányának abszolút értékével.

**1. példa**

Két négyzet közül az egyik oldalának hossza 4 cm-rel nagyobb a másikénál, területeik különbsége pedig 56 cm$^2$. Számítsuk ki az oldalhosszak arányát! Hogyan aránylanak egymáshoz a területek?

**Megoldás**

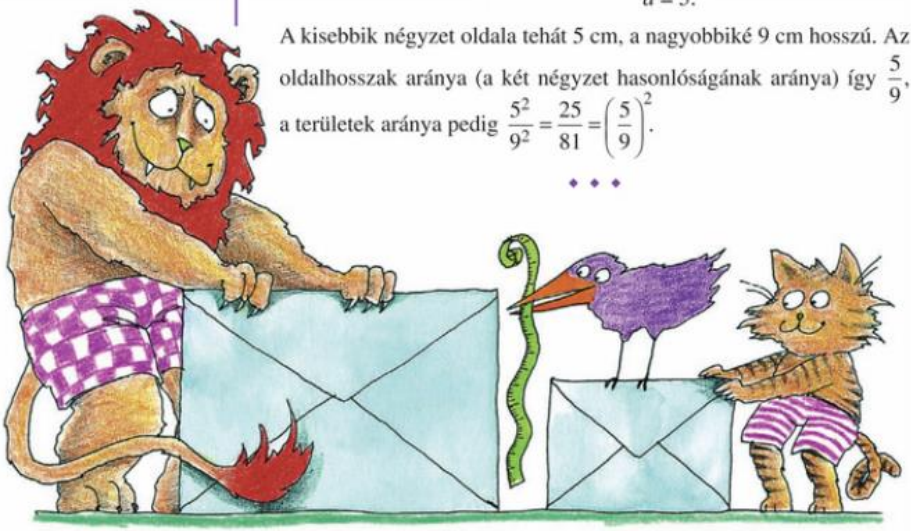
Tudjuk, hogy bármely két négyzet hasonló egymáshoz.

Jelölje a kisebbik négyzet oldalát $a$! A területekre vonatkozó feltétel alapján:

$$(a+4)^2 - a^2 = 56,$$
$$a^2 + 8a + 16 - a^2 = 56,$$
$$8a + 16 = 56,$$
$$a = 5.$$

A kisebbik négyzet oldala tehát 5 cm, a nagyobbiké 9 cm hosszú. Az oldalhosszak aránya (a két négyzet hasonlóságának aránya) így $\frac{5}{9}$, a területek aránya pedig $\frac{5^2}{9^2} = \frac{25}{81} = \left(\frac{5}{9}\right)^2$.

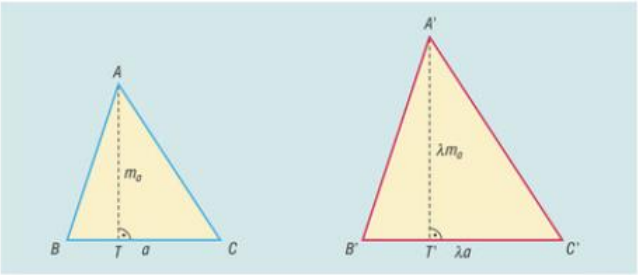
◆ ◆ ◆



Négyzet esetében könnyen adódik, hogy a területek aránya az oldalhosszak arányának négyzete.

Vajon általánosan is érvényes-e, hogy hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete? Ezt előbb háromszögekre, majd sokszögekre vizsgáljuk.

**1.** Tekintsük az $ABC$ és $A'B'C'$ hasonló háromszögeket, legyen a hasonlóság aránya $\lambda$! *(58. ábra)*




*58. ábra*

Ha $a$ és $m_a$ az $ABC$ háromszög egyik oldalának és a hozzá tartozó magasságnak a hossza, akkor a hasonlóságból adódóan az $A'B'C'$ háromszög megfelelő oldalának hossza $\lambda a$, a hozzá tartozó magasság hossza pedig $\lambda m_a$, mivel $ABT_{\triangle} \sim A'B'T'_{\triangle}$. Így a területek aránya

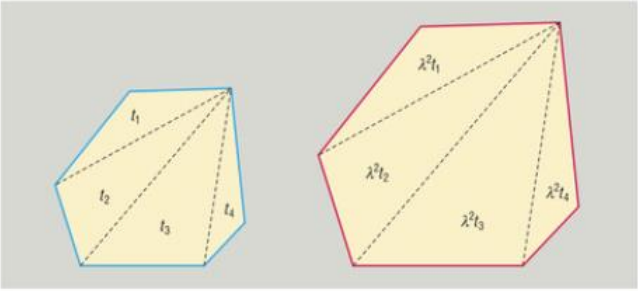
$$\frac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}} = \frac{\frac{(\lambda a)\cdot(\lambda m_a)}{2}}{\frac{a\cdot m_a}{2}} = \frac{\lambda^2 \cdot a \cdot m_a}{a \cdot m_a} = \lambda^2,$$

azaz a hasonlóság arányának négyzete.



**2.** Tekintsünk a továbbiakban két hasonló sokszöget, a hasonlóság aránya legyen $\lambda$, a területeket pedig jelölje $T$, illetve $T'$! Mindkét sokszög háromszögekre bontható (az 59. ábrán két hasonló hatszög látható), így ezt az esetet vissza tudjuk vezetni a háromszögek esetére, mivel a megfelelő háromszögek is hasonlók és a hasonlóság aránya $\lambda$.

*59. ábra*



Legyen az egyes sokszögekben a felbontással kapott háromszögek száma $k$!

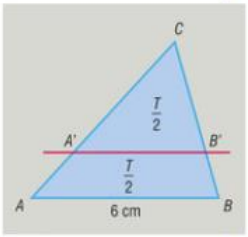
A megfelelő háromszögek területének aránya $\lambda^2$, ezért

$$\frac{T'}{T} = \frac{\lambda^2 t_1 + \lambda^2 t_2 + \ldots + \lambda^2 t_k}{t_1 + t_2 + \ldots + t_k} = \frac{\lambda^2 \cdot (t_1 + t_2 + \ldots + t_k)}{t_1 + t_2 + \ldots + t_k} = \lambda^2.$$

Bebizonyítható, hogy görbe vonalakkal határolt síkidomok esetén is érvényes a sokszögek területének arányára kapott összefüggés.

$$\frac{T'}{T} = \lambda^2$$

**TÉTEL:** **Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő.**




60. ábra

**2. példa**

Az $ABC$ háromszög területét megfelezzük egy, a háromszög $AB$ oldalával párhuzamos egyenessel. Milyen hosszú a területet felező egyenesnek a háromszögbe eső szakasza, ha $AB = 6$ cm? *(60. ábra)*

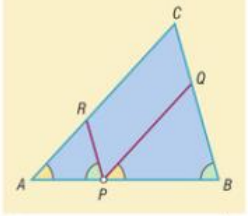
**Megoldás**

Mivel a levágott háromszög és az eredeti háromszög hasonló, és területük aránya 2, ezért a megfelelő oldalak aránya $\sqrt{2}$. Így a kérdéses szakasz hossza:

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \text{ cm} = 3\sqrt{2} \text{ cm} \approx 4{,}24 \text{ cm}.$$

**3. példa**

Egy háromszög egyik oldalát 3 : 5 arányban kettéosztottuk. Az osztópontból párhuzamost húztunk a háromszög másik két oldalával. Hogyan aránylik az így kapott paralelogramma területe az eredeti háromszög területéhez?




61. ábra

**Megoldás**

Ha $P$ jelöli az $AB$ oldal megfelelő osztópontját, $Q$ és $R$ pedig a $P$-re illeszkedő párhuzamosoknak a $BC$, illetve $AC$ oldallal vett metszéspontját *(61. ábra)*, akkor a megfelelő szögek egyenlősége miatt:

$$ABC_\triangle \sim APR_\triangle \sim PBQ_\triangle.$$

Az $APR$ és $ABC$ háromszögek hasonlóságának aránya 3 : 8, így az $APR$ háromszög területe $\frac{9}{64}$ része az $ABC$ háromszög területének. Hasonlóan adódik, hogy a $PBQ$ háromszög területe $\frac{25}{64}$ része az $ABC$ háromszög területének. Így a $PQCR$ paralelogramma területe

$$1 - \frac{9}{64} - \frac{25}{64} = 1 - \frac{34}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

része az eredeti háromszög területének.

## Feladatok

1. Két szabályos háromszög egy-egy oldalhosszának összege 20 cm. Számítsuk ki a háromszögek oldalainak hosszát, ha területeik aránya
   *a)* 1 : 4; *b)* 1 : 16; *c)* 4 : 9; *d)* 9 : 25; *e)* 2 : 3; *f)* $p : q$!

2. Az $ABCD$ trapézban az alapok hossza: $AB = 18$ cm, $CD = 24$ cm. A szárak meghosszabbításainak metszéspontja $E$. Hogyan aránylik a trapéz területéhez
   *a)* az $ABE$ háromszög; *b)* a $DCE$ háromszög területe?

3. Egy háromszög oldalait öt egyenlő részre osztottuk, és a szomszédos oldalaknak a közös csúcshoz legközelebbi osztópontjait összekötöttük. Hogyan aránylik a háromszög csúcsainál keletkező kis háromszögek levágásával kapott hatszög területe az eredeti háromszög területéhez?

4. Egy téglalap szomszédos oldalainak hossza $a$ és $b$. A téglalapból egy egyenessel vágjunk le egy, az eredetihez hasonló téglalapot! Hányad része a levágott téglalap területe az eredeti téglalap területének?

5. Egy derékszögű háromszög befogói: 5 cm és 12 cm. Az átfogóhoz tartozó magasság a háromszöget két háromszögre bontja. Mennyi ezen két háromszög területének aránya?

6. Az $ABC$ háromszöget két, az $AB$ oldallal párhuzamos egyenessel három egyenlő területű részre osztottuk. Milyen távol vannak ezek az egyenesek az $AB$ oldaltól, ha a háromszögnek az $AB$ oldalhoz tartozó magassága 10 cm hosszú?

7. Adott két kör, a sugarak hosszának összege 20 cm. Tekintsünk mindkét körben egy-egy ugyanakkora középponti szöghöz tartozó körcikket. Ezek területének aránya 16 : 25. Számítsuk ki a sugarak hosszát.




**Rejtvény**

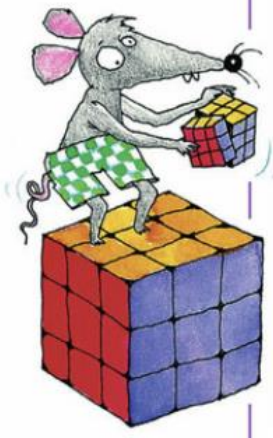
**Van-e olyan négyszög, melyet egy egyenes vágással három egyenlő területű háromszögre lehet bontani?**





3D

# 8. Hasonló testek térfogatának aránya



Bármely két kocka hasonló egymáshoz.

Ebben a részben azt fogjuk vizsgálni, hogy hasonló testek térfogatának aránya milyen kapcsolatban van a hasonlóság arányával.

**1. példa**

Két kocka élhosszának különbsége 3 dm, térfogataik különbsége 37 dm$^3$. Számítsuk ki a két kocka hasonlóságának arányát! Hogyan aránylanak egymáshoz a térfogatok?

**Megoldás**

Ha $a$ jelöli a kisebbik kocka élének hosszát, akkor a térfogatok különbsége:

$$(a+3)^3 - a^3 = 37.$$

A bal oldalon a köbre emelés elvégzése, majd rendezés után $a$-ra a következő másodfokú egyenlet adódik: $9a^2 + 27a - 10 = 0$. A megoldóképletet alkalmazva

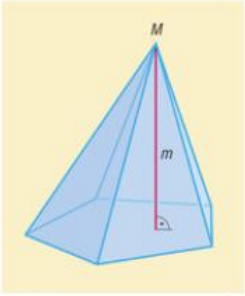
$$a_{1,2} = \frac{-27 \pm \sqrt{1089}}{18}, \text{ amiből } a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = -\frac{10}{3}.$$

Nekünk most természetesen csak a pozitív gyök felel meg, így a két kocka élhossza: $\frac{1}{3}$ dm és $\frac{10}{3}$ dm. A hasonlóság aránya 10.

A térfogatok aránya:

$$\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = 10^3 = 1000.$$

◆ ◆ ◆




62. ábra

**n oldalú gúla**

Kockák esetén könnyen adódik, hogy térfogataik aránya az oldalhosszak arányának köbével egyenlő. A következőkben két hasonló gúlánál számítjuk ki a térfogatok arányát.

## Emlékeztető

Ha egy $n$ oldalú sokszögvonal minden pontját összekötjük egy, a sokszög síkján kívüli $M$ ponttal, akkor ***n* oldalú gúlát kapunk** *(62. ábra)*. Egy $n$ oldalú gúlát tehát egy $n$ oldalú sokszög és $n$ darab háromszög határol.

Az $n$ oldalú sokszög a **gúla alaplapja.** A háromszöglapok a gúla **oldallapjai,** ezek alkotják a **gúla palástját.**

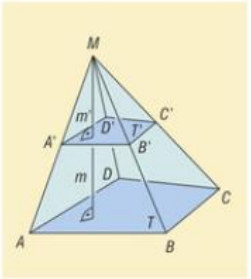
A **gúla magassága** $M$-ből az alaplapra állított merőleges szakasz.

Ha a gúla magasságának hossza $m$, alaplapjának területe $T$, akkor a gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3}.$$



A továbbiakban az egyszerűség kedvéért két hasonló négyoldalú gúlát tekintünk, és feltételezzük azt is, hogy ezek középpontosan hasonlók a közös $M$ csúcsra nézve. ***(63. ábra)***




63. ábra

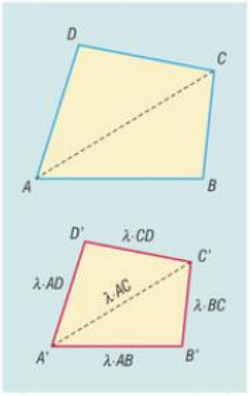
Ez utóbbi feltételezés nem jelent megszorítást, mert térbeli egybevágósági transzformációkkal a két gúla a megfelelő középpontosan hasonló helyzetbe hozható, és az egybevágósági transzformációk nem változtatják meg a testek térfogatát.

Legyen az $ABCDM$ gúla alaplapjának területe $T$, magassága $m$, az $A'B'C'D'M$ gúla alaplapjának területe $T'$, magassága $m'$, a középpontos hasonlóság aránya pedig $\lambda$. Belátjuk, hogy az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyszögek hasonlók.

A középpontos hasonlóság miatt világos, hogy a két négyszög megfelelő oldalainak aránya megegyezik, azaz

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = \lambda.$$

Bontsuk fel az $AC$, illetve az $A'C'$ átlókkal a négyszögeket háromszögekre! ***(64. ábra)***




64. ábra

Mivel

$$\frac{A'C'}{AC} = \lambda,$$

ezért $ABC_{\triangle} \sim A'B'C'_{\triangle}$ és $ACD_{\triangle} \sim A'C'D'_{\triangle}$. Ebből viszont következik, hogy a megfelelő szögek is egyenlők, így az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyszögek megfelelő szögei is egyenlők. Teljesül tehát a sokszögek hasonlóságának szükséges és elegendő feltétele, azaz a két négyszög valóban hasonló. Ebből viszont a hasonló síkidomok területének arányára kimondott tétel szerint adódik, hogy

$$\frac{T'}{T} = \lambda^2.$$

A középpontos hasonlóságból adódóan teljesül az is, hogy

$$\frac{m'}{m} = \lambda.$$

Ezek alapján a két gúla térfogatának aránya:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{T'm'}{3}}{\frac{Tm}{3}} = \frac{T'm'}{Tm} = \frac{T'}{T} \cdot \frac{m'}{m} = \lambda^2 \cdot \lambda = \lambda^3.$$

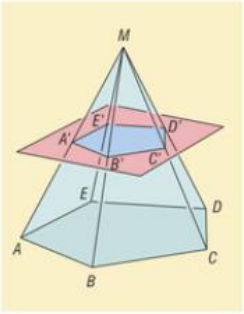
Bizonyítható, hogy a gúlákra kapott fenti eredményünk bármely két hasonló test esetén érvényes.

**TÉTEL:** **Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő.**

$$\frac{V'}{V} = \lambda^3$$








65. ábra

**2. példa**

Egy gúlából levágunk egy kisebb gúlát egy, az alaplappal párhuzamos síkkal úgy, hogy az a gúla magasságát a gúla csúcsától számítva 3 : 2 arányban osztja két részre. Számítsuk ki, hogy a levágott gúla elvétele után kapott csonkagúla térfogata hányad része az eredeti gúla térfogatának!

**Megoldás**

A sík a gúlát egy olyan sokszögben metszi, amelynek oldalai rendre párhuzamosak az alapsokszög oldalaival *(65. ábra)*.

A párhuzamos szelők és a párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva a gúla minden egyes oldallapján, kapjuk, hogy az alapsokszög és a metszetsokszög megfelelő oldalainak aránya egyenlő. A megfelelő oldalak párhuzamosságából következik az is, hogy az alapsokszög és a metszetsokszög megfelelő szögei is egyenlők. Ez viszont azt jelenti, hogy a metszetsokszög az alaplapnak a gúla csúcsára vonatkozó $\lambda = \frac{3}{5}$ arányú középpontos hasonlósággal kapott képe.

Így ha $V$ az eredeti, $V'$ pedig a levágott gúla térfogata, akkor a megmaradt csonkagúla és az eredeti gúla térfogatának aránya

$$\frac{V-V'}{V} = 1-\frac{V'}{V} = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^3 = 1-\frac{27}{125} = \frac{98}{125}.$$

## Feladatok

1. Két hasonló téglatest megfelelő oldalhosszainak aránya
   *a)* 1 : 3; *b)* 2 : 5; *c)* 3 : 7; *d)* $\sqrt{2}$ : 2; *e)* $p : q$.
   Számítsuk ki a téglatestek felszínének, illetve térfogatának arányát!
2. Két hasonló test térfogatának aránya
   *a)* 1 : 8; *b)* 1 : 27; *c)* 8 : 64; *d)* 27 : 125; *e)* $p : q$.
   Adjuk meg a hasonlóság arányát, és számítsuk ki az egyes testek felszínének arányát!
3. A Föld közepes átmérője közelítőleg $\frac{11}{3}$-szorosa a Hold átmérőjének. (Az egyszerűség kedvéért mindkét égitestet tekintsük gömbnek!) Hogyan aránylik egymáshoz a két égitest felszíne és térfogata?
4. Egy gúlát úgy vágtunk ketté egy, az alaplappal párhuzamos síkkal, hogy a síkmetszet területe fele az alaplap területének. Számítsuk ki a keletkezett két test térfogatának arányát.
5. Egy gúla alaplapjának területe 16 dm$^2$. A gúla magasságát négy egyenlő részre osztjuk, és az osztópontokra az alaplappal párhuzamos síkokat fektetünk. Számítsuk ki a síkmetszetek területét!
6. Egy négyoldalú gúla magassága 20 cm hosszú, alaplapja 8 cm oldalhosszúságú négyzet. Mekkora annak a csonkagúlának a térfogata, amelyet a magasság harmadolópontjaira illeszkedő, az alaplappal párhuzamos síkok metszenek ki a gúlából? (A két metsző sík közötti csonkagúla térfogata a kérdés.)



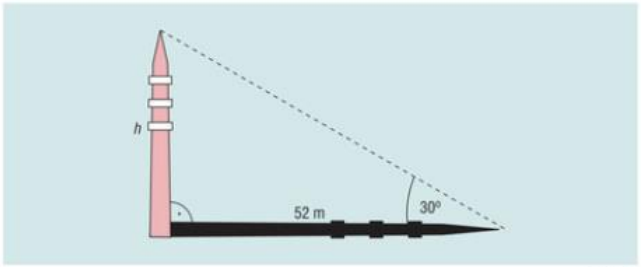
# HEGYESSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

## 1. Távolságok meghatározása a hasonlóság segítségével

A Thalészről szóló ókori példa is jól mutatja, hogy a hasonlóság alkalmazásával olyan távolságokat is meg lehet határozni, amelyek nem mérhetők le közvetlenül.

**1. példa**

Egy torony tetejét árnyékának végpontjával összekötő szakasz a vízszintes talajjal 30°-os szöget zár be *(66. ábra)*. Az árnyék hossza 52 m. Milyen magas a torony?




*66. ábra*

**Megoldás**

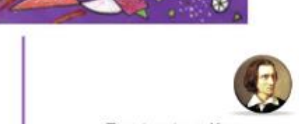
A torony és az árnyéka egy olyan derékszögű háromszögnek a befogói, amelynek egyik szöge 30°-os. Ilyen háromszöggel már találkoztunk korábban. Emlékeztetünk rá, hogy ha ezt a derékszögű háromszöget hosszabbik befogójának egyenesére tükrözzük, akkor az eredeti és a képháromszög egyesítése szabályos háromszög. *(67. ábra)*

Így ha az eredeti háromszög átfogója $a$ hosszúságú, akkor a rövidebb befogó hossza $\frac{a}{2}$, a hosszabb befogó hossza pedig a Pitagorasz-tétel szerint $\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$. Innen a rövidebb és a hosszabb befogó aránya $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Visszatérve az eredeti kérdésre, ha $h$ jelöli a torony méterben mért magasságát, akkor

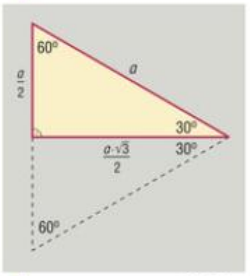
$$\frac{h}{52} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$h = \frac{52}{\sqrt{3}} \text{ m} \approx 30 \text{ m}.$$



THALÉSZRÓL, a Kr. e. 6. században élt görög filozófusról és matematikusról jegyezte fel PLUTARKHOSZ, hogy egyiptomi útja során azzal ejtette ámulatba a fáraót és a tudós főpapokat, hogy egy földbe szúrt bot segítségével határozta meg a piramis magasságát. Nagyon egyszerű mérési eljárásának lényege az volt, hogy amikor a bot és az árnyéka egyenlő hosszú, akkor a piramis árnyéka is egyenlő hosszú a magasságával, így elegendő az árnyék csúcsának a piramis középpontjától való távolságát meghatározni.




*67. ábra*

Határozzuk meg egy torony vagy egy fa magasságát az 1. példában ismertetett módszerrel!

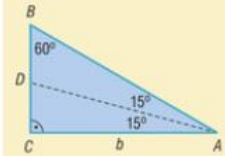




**2. példa**

Egy díszlettervező olyan színpadi lépcsőt tervezett, amely a színpaddal 15°-os emelkedési szöget zár be, és egy 2 m magas dobogóra visz. A dobogó szélétől számítva mekkora távolságra kell a lépcsőnek indulnia?

**Megoldás**




68. ábra

Most egy olyan derékszögű háromszög hosszabb befogóját kell kiszámítani, amelynek egyik hegyesszöge 15°-os, rövidebb befogója pedig 2 m hosszú. Ez a háromszög is kapcsolatba hozható az előző példa derékszögű háromszögével, ugyanis egy ilyen derékszögű háromszögből a 30°-os szög szögfelezője éppen a feladatbelihez hasonló derékszögű háromszöget vág le. *(68. ábra)*

Ha $D$ jelöli a szögfelező $BC$ oldallal vett metszéspontját, akkor $CD = 2$ m, és meghatározandó az $AC = b$ távolság. Az előző példa alapján

$$b = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} \quad \text{és} \quad BC = \frac{AB}{2},$$

ahonnan

$$AB = \frac{2b}{\sqrt{3}} \quad \text{és} \quad BC = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

A szögfelezőtétel értelmében

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}.$$

Ha a fenti egyenlőségben mindegyik szakasz hosszát $b$-vel fejezzük ki (mindent méterben mérünk), akkor

$$\frac{\frac{2b}{\sqrt{3}}}{b} = \frac{\frac{b}{\sqrt{3}} - 2}{2},$$

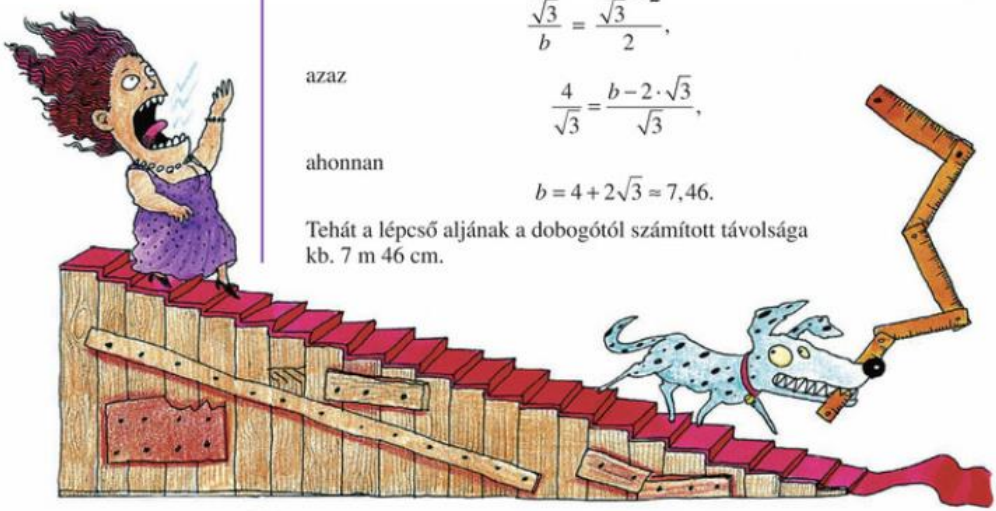
azaz

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{b - 2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

ahonnan

$$b = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}46.$$

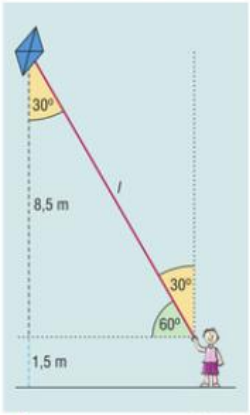
Tehát a lépcső aljának a dobogótól számított távolsága kb. 7 m 46 cm.





**3. példa**

Máté papírsárkányt röptet. Jó szél van, a papírsárkány zsinórja teljesen feszes, és a függőlegessel 30°-os szöget zár be. Milyen hosszú a sárkány zsinórja, ha ebben a helyzetében éppen egy 10 m magas ház tetejével egy magasságban lebeg, és Máté a zsinór végét a földtől számítva 150 cm magasságban tartja?



69. ábra

**Megoldás**

A 69. ábrán feltüntettük az adatokat is.

Egy olyan derékszögű háromszög átfogójának hosszát kell meghatároznunk, amelynek egyik befogója 8,5 m hosszú, a vele szemközti szög pedig 60°-os. Ehhez a háromszöghöz hasonló háromszögekkel találkoztunk az előző példák során is, így az ott leírtak alapján

$$\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} = 8{,}5 \text{ m},$$

$$l = \frac{2 \cdot 8{,}5}{\sqrt{3}} \text{ m} \approx 9{,}81 \text{ m}.$$

## Feladatok

1. Az $ABC$ derékszögű háromszögben az $AB$ átfogón nyugvó, a $BC$ oldallal szemközti hegyesszög

   *a)* 45°; *b)* 30°; *c)* 60°; *d)* 15°.

   Számítsuk ki az $\frac{AC}{AB}$, $\frac{BC}{AB}$ és $\frac{BC}{AC}$ arányokat az egyes esetekben!

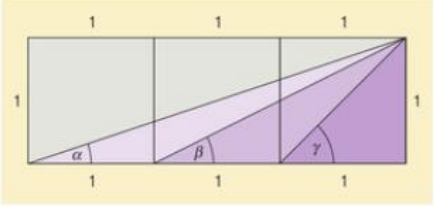
2. Egy torony árnyéka a vízszintes talajon 50 m hosszú. Milyen magas a torony, ha a napsugarak a vízszintes talajtól számítva 60°-os szögben esnek a földre?

3. Egy egyenes útszakasz emelkedése 1000 m-en 80 m. Méréssel határozzuk meg az útszakasz vízszintestől számított emelkedési szögét!

4. Egy hegyre két egyenes ösvény vezet, amelyek azonos szintről, ellentétes oldalról, egymástól 500 m távolságról indulnak. Az egyes ösvények vízszintestől számított emelkedési szöge 30° illetve 45°. Milyen magas a hegy?

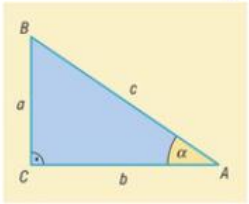
**Rejtvény**

**Számítsuk ki az alábbi ábrán látható $\alpha$, $\beta$ és $\gamma$ szögek nagyságának összegét!**



# 2. Hegyesszögek szögfüggvényei

Az előző lecke példáiban úgy határoztunk meg távolságokat, hogy bizonyos speciális derékszögű háromszögekben az oldalak arányát határoztuk meg, és felhasználtuk, hogy hasonló háromszögek esetén ezek az arányok megegyeznek. Mivel két derékszögű háromszög pontosan akkor hasonló, ha egy-egy hegyesszögük egyenlő, ezért egy derékszögű háromszög oldalainak arányát egyértelműen meghatározza valamelyik hegyesszög nagysága. Célszerű az ezen szögtől függő arányokra külön elnevezéseket bevezetni. Így kapjuk a **hegyesszögek szögfüggvényeit.** A definíciók megadásánál a 70. ábra jelöléseit használjuk.




70. ábra

**hegyesszög szinusza**

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

**DEFINÍCIÓ:** **Az $\alpha$ hegyesszög *szinusza* az $\alpha$-t tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben a szöggel szemközti befogó hosszának és az átfogó hosszának hányadosa. Jelölés: $\sin\alpha$.**

$$\sin\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}} = \frac{a}{c}.$$

**hegyesszög koszinusza**

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

**DEFINÍCIÓ:** **Az $\alpha$ hegyesszög *koszinusza* az $\alpha$-t tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben a szög melletti befogó hosszának és az átfogó hosszának a hányadosa. Jelölés: $\cos\alpha$.**

$$\cos\alpha = \frac{\text{szög melletti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}} = \frac{b}{c}.$$

**hegyesszög tangense**

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

**DEFINÍCIÓ:** **Az $\alpha$ hegyesszög *tangense* az $\alpha$-t tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben a szöggel szemközti befogó hosszának és a szög melletti befogó hosszának a hányadosa. Jelölés: $\operatorname{tg}\alpha$.**

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó hossza}}{\text{szög melletti befogó hossza}} = \frac{a}{b}.$$

**hegyesszög kotangense**

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

**DEFINÍCIÓ:** **Az $\alpha$ hegyesszög *kotangense* az $\alpha$-t tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben a szög melletti befogó hosszának és a szöggel szemközti befogó hosszának a hányadosa. Jelölés: $\operatorname{ctg}\alpha$.**

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{szög melletti befogó hossza}}{\text{szöggel szemközti befogó hossza}} = \frac{b}{a}.$$

A tangens és a kotangens definíciójából látszik, hogy egymás reciprokai, azaz

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$



A megfelelő definíciókból adódik, hogy bármely hegyesszög szinusza és koszinusza 1-nél kisebb pozitív valós szám, míg a tangens és kotangens értékek akármekkora pozitív valós számok lehetnek. A definíciókból következik az is, hogy hegyesszögekre

$$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta, \quad \cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Hegyesszögek szögfüggvényértékeinek a meghatározására manapság a legtöbb forgalomban levő zsebszámológép alkalmas, de a *Négyjegyű függvénytáblázatok. Matematikai, fizikai, kémiai összefüggések* című könyv segítségével is meg tudjuk adni négy tizedesjegy pontossággal a megfelelő szögfüggvény értékét.

**1. példa**

Határozzuk meg a megfelelő szögfüggvénytáblázat segítségével négy tizedesjegy pontossággal a következő szögfüggvényértékeket!

*a)* $\sin 16°14'$; *b)* $\cos 79°31'$; *c)* $\operatorname{tg} 80°41'$; *d)* $\operatorname{ctg} 73°3'$.

**Megoldás (a)**

A 71. ábrán a szinusz-koszinusz táblázat egy része látható.

$$\sin 16°10' = 0{,}2784 \rightarrow \sin 16°14' = 0{,}2784 + 0{,}0011 = 0{,}2795.$$

**Megoldás (b)**

A 71. ábra táblázata alapján:

$$\cos 79°30' = 0{,}1822 \rightarrow \cos 79°31' = 0{,}1822 - 0{,}0003 = 0{,}1819.$$

A szögfüggvényeket tartalmazó első írásos emlék PTOLEMAIOSZNAK a 2. században élt alexandriai tudósnak *Almagest* (Nagy gyűjtemény) című könyve. Valószínű azonban, hogy már Mezopotámiában is használták a szögfüggvényeket csillagászati számításokban. Az egyes szögfüggvények értékének meghatározására a középkorban egyre pontosabb táblázatokat állítottak össze. Ezek közül az egyik leghíresebb REGIOMONTANUSNAK, a Mátyás király udvarában is megfordult nagy humanista tudósnak *Öt könyv a háromszögekről* című műve.

*71. ábra*

**Szögek szinusza és koszinusza**

| | 0' | 10' | 20' | 30' | 40' | 50' | 60' | | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' | 7' | 8' | 9' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000 | 0,0029 | 0,0058 | 0,0087 | 0,0116 | 0,0145 | 0,0175 | 89° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 1° | 0175 | 0204 | 0233 | 0262 | 0291 | 0320 | 0349 | 88° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 2° | 0349 | 0378 | 0407 | 0436 | 0465 | 0494 | 0523 | 87° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 3° | 0523 | 0552 | 0581 | 0610 | 0640 | 0669 | 0698 | 86° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 4° | 0698 | 0727 | 0756 | 0785 | 0814 | 0843 | 0872 | 85° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 5° | 0,0872 | 0,0901 | 0,0929 | 0,0958 | 0,0987 | 0,1016 | 0,1045 | 84° | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 6° | 1045 | 1074 | 1103 | 1132 | 1161 | 1190 | 1219 | 83° | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 7° | 1219 | 1248 | 1276 | 1305 | 1334 | 1363 | 1392 | 82° | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 8° | 1392 | 1421 | 1449 | 1478 | 1507 | 1536 | 1564 | 81° | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 9° | 1564 | 1593 | 1622 | 1650 | 1679 | 1708 | 1736 | 80° | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 10° | 0,1736 | 0,1765 | 0,1794 | 0,1822 | 0,1851 | 0,1880 | 0,1908 | 79° | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 11° | 1908 | 1937 | 1965 | 1994 | 2022 | 2051 | 2079 | 78° | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 12° | 2079 | 2108 | 2136 | 2164 | 2193 | 2221 | 2250 | 77° | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 13° | 2250 | 2278 | 2306 | 2334 | 2363 | 2391 | 2419 | 76° | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 25 |
| 14° | 2419 | 2447 | 2476 | 2504 | 2532 | 2560 | 2588 | 75° | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 25 |
| 15° | 0,2588 | 0,2616 | 0,2644 | 0,2672 | 0,2700 | 0,2728 | 0,2756 | 74° | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 16° | 2756 | 2784 | 2812 | 2840 | 2868 | 2896 | 2924 | 73° | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 17° | 2924 | 2952 | 2979 | 3007 | 3035 | 3062 | 3090 | 72° | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 19 | 22 | 25 |
| 18° | 3090 | 3118 | 3145 | 3173 | 3201 | 3228 | 3256 | 71° | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 19 | 22 | 25 |
| 19° | 3256 | 3283 | 3311 | 3338 | 3365 | 3393 | 3420 | 70° | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 | 16 | 19 | 22 | 25 |
| | 60' | 50' | 40' | 30' | 20' | 10' | 0' | | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' | 7' | 8' | 9' |

$\sin 16°14'$
0,2784
+0,0011
0,2795

$\cos 79°31'$
0,1822
−0,0003
0,1819





### Megoldás (c)

A 72. ábra tangens-kotangens táblázata alapján:

tg 80°41' = 6,096.

72. ábra

**Szögek tangense és kotangense**

| | 0' | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' | 7' | 8' | 9' | 10' | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 79°0' | 5,145 | 5,153 | 5,161 | 5,169 | 5,177 | 5,185 | 5,193 | 5,201 | 5,209 | 5,217 | 5,226 | 10°50' |
| 79°10' | 5,226 | 5,234 | 5,242 | 5,250 | 5,259 | 5,267 | 5,276 | 5,284 | 5,292 | 5,301 | 5,309 | 10°40' |
| 79°20' | 5,309 | 5,318 | 5,326 | 5,335 | 5,343 | 5,352 | 5,361 | 5,369 | 5,378 | 5,387 | 5,396 | 10°30' |
| 79°30' | 5,396 | 5,404 | 5,413 | 5,422 | 5,431 | 5,440 | 5,449 | 5,458 | 5,466 | 5,475 | 5,485 | 10°20' |
| 79°40' | 5,485 | 5,494 | 5,503 | 5,512 | 5,521 | 5,530 | 5,539 | 5,549 | 5,558 | 5,567 | 5,576 | 10°10' |
| 79°50' | 5,576 | 5,586 | 5,595 | 5,605 | 5,614 | 5,623 | 5,633 | 5,642 | 5,652 | 5,662 | 5,671 | 10°0' |
| 80°0' | 5,671 | 5,681 | 5,691 | 5,700 | 5,710 | 5,720 | 5,730 | 5,740 | 5,749 | 5,759 | 5,769 | 9°50' |
| 80°10' | 5,769 | 5,779 | 5,789 | 5,799 | 5,810 | 5,820 | 5,830 | 5,840 | 5,850 | 5,861 | 5,871 | 9°40' |
| 80°20' | 5,871 | 5,881 | 5,892 | 5,902 | 5,912 | 5,923 | 5,933 | 5,944 | 5,954 | 5,965 | 5,976 | 9°30' |
| 80°30' | 5,976 | 5,986 | 5,997 | 6,008 | 6,019 | 6,030 | 6,041 | 6,051 | 6,062 | 6,073 | 6,084 | 9°20' |
| • 80°40' | 6,084 | 6,096 | 6,107 | 6,118 | 6,129 | 6,140 | 6,152 | 6,163 | 6,174 | 6,186 | 6,197 | 9°10' |
| 80°50' | 6,197 | 6,209 | 6,220 | 6,232 | 6,243 | 6,255 | 6,267 | 6,278 | 6,290 | 6,302 | 6,314 | 9°0' |
| 81°0' | 6,314 | 6,326 | 6,338 | 6,350 | 6,362 | 6,374 | 6,386 | 6,398 | 6,410 | 6,423 | 6,435 | 8°50' |
| 81°10' | 6,435 | 6,447 | 6,460 | 6,472 | 6,485 | 6,497 | b,510 | 6,522 | 6,535 | 6,548 | 6,561 | 8°40' |
| 81°20' | 6,561 | 6,573 | 6,586 | 6,599 | 6,612 | 6,625 | 6,638 | 6,651 | 6,665 | 6,678 | 6,691 | 8°30' |
| 81°30' | 6,691 | 6,704 | 6,718 | 6,731 | 6,745 | 6,758 | 6,772 | 6,786 | 6,799 | 6,813 | 6,827 | 8°20' |
| 81°40' | 6,827 | 6,841 | 6,855 | 6,869 | 6,883 | 6,897 | 6,911 | 6,925 | 6,940 | 6,954 | 6,968 | 8°10' |
| 81°50' | 6,968 | 6,983 | 6,997 | 7,012 | 7,026 | 7,041 | 7,056 | 7,071 | 7,085 | 7,100 | 7,115 | 8°0' |
| | 10' | 9' | 8' | 7' | 6' | 5' | 4' | 3' | 2' | 1' | 0' | |

### Megoldás (d)

Az 73. ábrán az előző táblázat egy másik része látható. Ez alapján:

ctg 73° = 0,3057 → ctg 73°3' = 0,3057 – 0,0009 = 0,3048.

73. ábra

**Szögek tangense és kotangense**

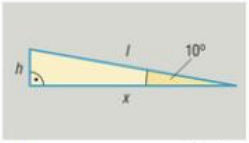
| | 0' | 10' | 20' | 30' | 40' | 50' | 60' | | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' | 7' | 8' | 9' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000 | 0,0029 | 0,0058 | 0,0087 | 0,0116 | 0,0145 | 0,0175 | 89° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 1° | 0175 | 0204 | 0233 | 0262 | 0291 | 0320 | 0349 | 88° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 2° | 0349 | 0378 | 0407 | 0437 | 0466 | 0495 | 0524 | 87° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 20 | 23 | 26 |
| 3° | 0524 | 0553 | 0582 | 0612 | 0641 | 0670 | 0699 | 86° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 20 | 23 | 26 |
| 4° | 0699 | 0729 | 0758 | 0787 | 0816 | 0846 | 0875 | 85° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 23 | 26 |
| 5° | 0,0875 | 0,0904 | 0,0934 | 0,0963 | 0,0992 | 0,1022 | 0,1051 | 84° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 26 |
| 6° | 1051 | 1080 | 1110 | 1139 | 1169 | 1198 | 1228 | 83° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 7° | 1228 | 1257 | 1287 | 1317 | 1346 | 1376 | 1405 | 82° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 8° | 1405 | 1435 | 1465 | 1495 | 1524 | 1554 | 1584 | 81° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 9° | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1733 | 1763 | 80° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 10° | 0,1763 | 0,1793 | 0,1823 | 0,1853 | 0,1883 | 0,1914 | 0,1944 | 79° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 11° | 1944 | 1974 | 2004 | 2035 | 2065 | 2095 | 2126 | 78° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 12° | 2126 | 2156 | 2186 | 2217 | 2247 | 2278 | 2309 | 77° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 13° | 2309 | 2339 | 2370 | 2401 | 2432 | 2462 | 2493 | 76° | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 25 | 28 |
| 14° | 2493 | 2524 | 2555 | 2586 | 2617 | 2648 | 2679 | 75° | 3 | 6 | 9 | 12 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 |
| 15° | 0,2679 | 0,2711 | 0,2742 | 0,2773 | 0,2805 | 0,2836 | 0,2867 | 74° | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 |
| • 16° | 2867 | 2899 | 2931 | 2962 | 2994 | 3026 | 3057 | 73° | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 29 |
| 17° | 3057 | 3089 | 3121 | 3153 | 3185 | 3217 | 3249 | 72° | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 26 | 29 |
| 18° | 3249 | 3281 | 3314 | 3346 | 3378 | 3411 | 3443 | 71° | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| 19° | 3443 | 3476 | 3508 | 3541 | 3574 | 3607 | 3640 | 70° | 3 | 7 | 10 | 13 | 16 | 20 | 23 | 26 | 30 |
| | 60' | 50' | 40' | 30' | 20' | 10' | 0' | | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' | 7' | 8' | 9' |

ctg 73°3'
0,3057
−0,0009
0,3048



**2. példa**

Milyen hosszú az az egyenes lejtő, amelyik az elejétől a végéig 18 m-t emelkedik, és a vízszintessel bezárt emelkedési szöge 10°? Vízszintesen mérve milyen távol van a lejtő kezdete a végétől?




74. ábra

**Megoldás**

A 74. ábra alapján

$$\frac{h}{l} = \sin 10^\circ,$$

ahonnan a lejtő hossza

$$l = \frac{h}{\sin 10^\circ} \approx \frac{18}{0{,}1736} \text{ m} \approx 103{,}69 \text{ m}.$$

Ha $x$ jelöli a vízszintes távolságot, akkor

$$\frac{x}{l} = \cos 10^\circ,$$

ahonnan

$$x = l \cdot \cos 10^\circ \approx 103{,}69 \cdot 0{,}9848 \text{ m} \approx 102{,}12 \text{ m}.$$



## Feladatok

1. Egy derékszögű háromszögben $a$ és $b$ a befogók hosszát, $c$ az átfogó hosszát jelöli, $\alpha$ pedig az $a$ hosszúságú befogóval szemközti szög. Számítsuk ki az $\alpha$ szinuszát, koszinuszát, tangensét, kotangensét, ha

   *a)* $a = 3,\ b = 4;$ *b)* $a = 5,\ c = 13;$ *c)* $a = 1,\ c = \sqrt{2};$ *d)* $b = \frac{\sqrt{3}}{2},\ c = 2!$

2. Határozzuk meg négy tizedesjegy pontossággal a következő szögek szinuszát, koszinuszát, tangensét, kotangensét!

   *a)* 36°; *b)* 52°40'; *c)* 11°32'; *d)* 89,2°; *e)* $\frac{\pi}{6}$; *f)* $\frac{2\pi}{7}$; *g)* $\frac{\pi}{12}$.

3. Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, amelynek tangense

   *a)* 1; *b)* 0,75; *c)* 1,5; *d)* 4; *e)* $\frac{12}{5}$; *f)* $\sqrt{2}$; *g)* $\sqrt{3}!$

4. Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, amelynek szinusza

   *a)* 0,6; *b)* 0,5; *c)* $\frac{12}{13}$; *d)* $\frac{3}{7}$; *e)* $\frac{1}{4}$; *f)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *g)* $\frac{\sqrt{3}}{2}!$

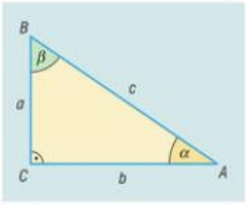
5. Mekkora szöget zár be a vízszintessel az az egyenes út, amely 2 km hosszú, és egy 180 m magas dombra vezet?

6. Egy derékszögű háromszög $\alpha$ hegyesszögére $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$. A háromszög területe 24 cm$^2$. Számítsuk ki a háromszög szögeit és befogóinak hosszát!

# 3. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között

Az előzőekben definiált szögfüggvények nem függetlenek egymástól. Láttuk például, hogy adott hegyesszög tangense és kotangense egymás reciprokai. Ebben a leckében a hegyesszögek szögfüggvényei közötti alapvető összefüggésekkel ismerkedünk meg.

## Pótszögek szögfüggvényei




75. ábra

A 75. ábra jelöléseivel

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta,$$

és mivel $\alpha + \beta = 90°$, ezért

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha).$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha).$$

Ugyanilyen módon, mivel

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta,$$

ezért

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha) \text{ és } \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha).$$

A kapott azonosságok szavakkal megfogalmazva:

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha)$
$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$

**TÉTEL:** **Hegyesszög szinusza megegyezik pótszögének koszinuszával.**

**Hegyesszög tangense megegyezik pótszögének kotangensével.**

## Pitagoraszi azonosság

Tudjuk, hogy bármely derékszögű háromszögre érvényes Pitagorasz tétele, miszerint (a 75. ábra jelöléseivel)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ha az egyenlet mindkét oldalát osztjuk $c^2$-tel, akkor kapjuk, hogy

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

vagy másképpen

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Viszont $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ és $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, így a behelyettesítés után

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$



*Megjegyzés:* Itt alkalmaztuk a tankönyvekben és feladatgyűjteményekben szokásos $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$ és $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$ jelölést. Hasonlóan fogunk eljárni a tangens és a kotangens esetében is.

Szavakkal megfogalmazva a most bizonyított azonosság:

**TÉTEL:** **Adott hegyesszög szinuszának és koszinuszának négyzetösszege 1-gyel egyenlő.**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

## A tangens és a kotangens kifejezése szinusszal és koszinusszal

Most is a 75. ábra jelöléseit használjuk.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

azaz

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

**1. példa**

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges hegyesszög szinuszára és tangensére érvényes a következő azonosság!

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

**I. megoldás**

A már bizonyított azonosságok alapján:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

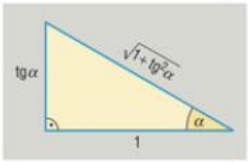
Emeljünk négyzetre (a kifejezések mindegyike pozitív, így ez ekvivalens átalakítás):

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}.$$

Ebből az $1 - \sin^2\alpha$ nevezővel történő beszorzás és rendezés után kapjuk, hogy

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

ahonnan, figyelembe véve, hogy $\sin\alpha$ és $\operatorname{tg}\alpha$ pozitív, gyökvonással adódik a bizonyítandó azonosság.



76. ábra

**II. megoldás**

Tekintsünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója egységnyi hosszú, az erre illeszkedő hegyesszöge pedig $\alpha$. *(76. ábra)*

Az $\alpha$-val szemközti befogó a tangens definíciójából adódóan $\operatorname{tg}\alpha$ hosszúságú, az átfogó hossza pedig Pitagorasz tétele alapján $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Így az $\alpha$ szög szinusza a definíció alapján

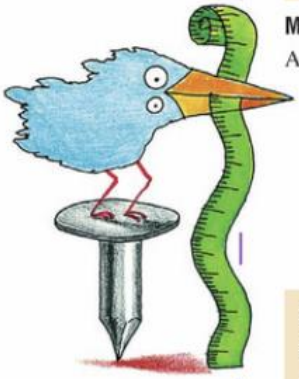
$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

A 76. ábráról leolvasható az is, hogy

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

**2. példa**

Az $\alpha$ hegyesszögre $\sin\alpha = 0{,}2$. Számítsuk ki négy tizedesjegy pontossággal $\alpha$ többi szögfüggvényének értékét az $\alpha$ meghatározása nélkül!



**Megoldás**

A tárgyalt azonosságok alapján:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}2^2} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}9798;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \approx \frac{0{,}2}{0{,}9798} \approx 0{,}2041;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{1}{0{,}2041} \approx 4{,}8990.$$

**3. példa**

Számítsuk ki az $\alpha$ hegyesszög nagyságát, ha

*a)* $\sin(\alpha+5^\circ) = \cos(\alpha+41^\circ)$; *b)* $\operatorname{tg}(\alpha-12^\circ) = \operatorname{ctg}(\alpha+48^\circ)$!

**Megoldás (a)**

Mivel

$$\sin(\alpha+5^\circ) = \cos\big(90^\circ-(\alpha+5^\circ)\big),$$

ezért

$$\cos\big(90^\circ-(\alpha+5^\circ)\big) = \cos(\alpha+41^\circ).$$

Ebből

$$\alpha+41^\circ = 90^\circ-(\alpha+5^\circ),$$
$$2\alpha = 44^\circ,$$
$$\alpha = 22^\circ.$$



**Megoldás (b)**

Mivel

$$\operatorname{tg}(\alpha - 12°) = \operatorname{ctg}\big(90° - (\alpha - 12°)\big),$$

ezért

$$\operatorname{ctg}(\alpha + 48°) = \operatorname{ctg}\big(90° - (\alpha - 12°)\big).$$

Ebből

$$\begin{aligned} \alpha + 48° &= 90° - (\alpha - 12°), \\ 2\alpha &= 54°, \\ \alpha &= 27°. \end{aligned}$$



## Feladatok

1. Számítsuk ki az $\alpha$ hegyesszög többi szögfüggvényének értékét $\alpha$ meghatározása nélkül, ha

   *a)* $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; *b)* $\cos\alpha = 0{,}5$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{3}$;

   *d)* $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}7$; *e)* $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$, $(a > 0)$!

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\alpha$ hegyesszög esetén érvényesek a következő azonosságok:

   *a)* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$; *b)* $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$; *c)* $\cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$;

   *d)* $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$; *e)* $\frac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2} = (1+\sin\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)$;

   *f)* $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$; *g)* $\frac{\operatorname{tg}^3\alpha+1}{\operatorname{tg}^3\alpha-1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$ $(\alpha \neq 45°)$.

3. Határozzuk meg az $\alpha$ hegyesszög nagyságát, ha

   *a)* $\cos(\alpha - 7°) = \sin(\alpha - 11°)$; *b)* $\operatorname{ctg}(\alpha + 28°) = \operatorname{tg}(\alpha - 36°)$;

   *c)* $\sin 3\alpha = \cos(\alpha + 30°)$; *d)* $\operatorname{tg} 5\alpha = \operatorname{ctg}(2\alpha + 15°)$!

4. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának hossza 1, az egyik hegyesszög $\alpha$. Fejezzük ki a háromszög oldalainak és az átfogó két szeletének hosszát $\alpha$ szögfüggvényeinek segítségével!

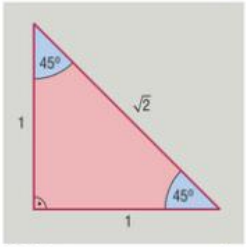






# 4. Nevezetes szögek szögfüggvényei

A hegyesszögek szögfüggvényeinek előírt pontossággal történő meghatározása tankönyvünk kereteit jelentősen meghaladó, felsőbb matematikai eszközökkel történik. Ezen eszközök segítségével állítják össze a megfelelő táblázatokat, és a zsebszámológépek memóriájában tárolt értékeket is így számítják. Néhány speciális szög szögfüggvényértékeinek meghatározása azonban eddigi ismereteink alapján is lehetséges.




77. ábra

## A 45°-os szög szögfüggvényei

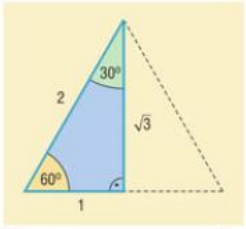
Az egységnyi befogójú derékszögű háromszög hegyesszögei 45°-osak, átfogójának hossza Pitagorasz tételéből adódóan $\sqrt{2}$ *(77. ábra)*. Így

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

## A 30°-os és a 60°-os szögek szögfüggvényei

Olyan derékszögű háromszögekkel, amelyek hegyesszögeinek nagysága 30° és 60°, már sokszor találkoztunk eddigi tanulmányaink során. Legyen most egy ilyen háromszög átfogója 2 egység hosszú! *(78. ábra)*




78. ábra

Ennek a háromszögnek és a hosszabbik befogó egyenesére vonatkozó tükörképének az egyesítése szabályos háromszög, így a rövidebb befogó hossza 1, a hosszabb befogó hossza pedig Pitagorasz tételéből adódóan $\sqrt{3}$. Így a definíciók alapján:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2};\ \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

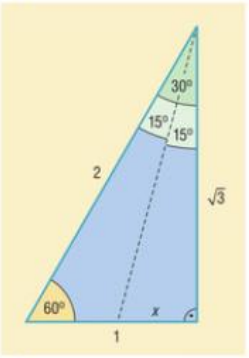
Eredményeinket az alábbi táblázatban foglaltuk össze.

| | sin | cos | tg | ctg |
|---|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

Amint erről a következő példa is tanúskodik, nem csak az előző szögek esetében tudjuk a szögfüggvények értékét egyszerű geometriai megfontolások alapján kiszámolni.

**1. példa**

Számítsuk ki tg 15° és sin 15° értékét!




79. ábra

**Megoldás**

Most is érdemes a 2 egység átfogójú, 30°-os hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszögből kiindulni. *(79. ábra)*

A 30°-os szög felezője olyan derékszögű háromszöget vág le az eredeti háromszögből, amelynek egyik hegyesszöge 15°-os, és ezen szög melletti befogója $\sqrt{3}$ hosszúságú.

tg 15° meghatározásához ki kell számolnunk a szöggel szemközti, $x$-szel jelölt befogót.

A szögfelezőtétel alapján

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{1-x},$$

$$\sqrt{3} - x \cdot \sqrt{3} = 2x,$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

Így

$$\operatorname{tg} 15° = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \approx 0{,}2679.$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

Láttuk korábban, hogy

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Behelyettesítve

$$\sin 15° = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{8-4\cdot\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \approx 0{,}2588.$$

*Megjegyzés:* A 15°-os hegyesszögű derékszögű háromszög már előkerült egy korábbi feladat kapcsán. Akkor szögfüggvények nélkül végeztük a számításokat.

**2. példa**

Határozzuk meg zsebszámológép és függvénytáblázat használata nélkül a következő kifejezés értékét:

$$\sin 30^\circ - 2 \cdot \sin 60^\circ + 3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \cos 60^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ.$$

**Megoldás**

Mivel $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ és $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$, ezért

$$\sin 30^\circ - 2 \cdot \sin 60^\circ + 3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \cos 60^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} - 1 = 0.$$

## Feladatok

1. Számítsuk ki zsebszámológép és függvénytáblázat használata nélkül a következő kifejezések értékét!

   *a)* $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$;

   *b)* $2 \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$;

   *c)* $3 \cdot \sin 45^\circ - 4 \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ$;

   *d)* $\dfrac{\operatorname{tg} 30^\circ - 2 \cdot \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ + 3 \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ}$.

2. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 30°-os. Számítsuk ki a háromszög befogóinak és átfogóhoz tartozó magasságának hosszát, ha az átfogó hossza

   *a)* 2 cm; *b)* 5 m; *c)* 38 mm; *d)* $\sqrt{5}$ cm;

   *e)* 2,13 dm; *f)* $c$!

3. Egy egységnyi befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik hegyesszögét két félegyenessel három egyenlő részre osztottuk. Mekkora részekre bontják az osztóvonalak a szöggel szemközti befogót?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha a derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 15°-os, akkor átfogóhoz tartozó magasságának hossza negyede az átfogó hosszának!

5. Határozzuk meg zsebszámológép és függvénytáblázat használata nélkül a 75° szinuszát, koszinuszát, tangensét és kotangensét!



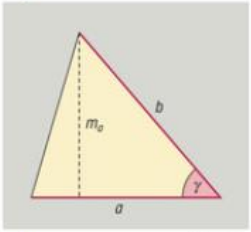


# 5. Háromszögek különböző adatainak meghatározása szögfüggvények segítségével

## A háromszög területe

Adott egy hegyesszögű háromszög két oldalának hossza és a két oldal által közbezárt szög nagysága. Célunk az, hogy ezen adatok ismeretében meghatározzuk a háromszög területét.

Az adott oldalak hosszát jelölje $a$ és $b$, a közbezárt szög nagysága legyen $\gamma$. *(80. ábra)*




80. ábra

A háromszög területe meghatározható az ismert képlet alapján:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}.$$

Most viszont $m_a$-t nem ismerjük, ezért ki kellene valahogyan fejezni az ismert adatok segítségével. Észrevehető, hogy

$$\frac{m_a}{b} = \sin\gamma,$$

$$m_a = b \cdot \sin\gamma.$$

Behelyettesítve a terület kifejezésébe:

$$T = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}.$$

**A hegyesszögű háromszög területe két oldal és a közbezárt szög ismeretében:**

$$T = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}.$$

A háromszög területe:

$$T = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} \quad (\gamma < 90^\circ)$$

$$T = \frac{ab \cdot \sin(180^\circ - \gamma)}{2} \quad (\gamma > 90^\circ)$$

$$T = \frac{ab}{2} \quad (\gamma = 90^\circ)$$

Természetesen a kapott területképlet derékszögű és tompaszögű háromszög esetén is érvényes, ha az adott szög a háromszög valamelyik hegyesszöge. Vizsgáljuk most meg azt az esetet, amikor a háromszög nem hegyesszögű, és az adott szög a háromszög legnagyobb szöge!

Derékszögű háromszög esetére tudjuk, hogy ha a két befogó hossza adott, akkor a terület:

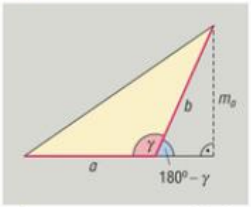
$$T = \frac{ab}{2}.$$

Tompaszögű háromszög esetére tekintsük a 81. ábrát! Az $m_a$ most az adott $\gamma$ tompaszög külső szögének segítségével fejezhető ki:

$$m_a = b \cdot \sin(180^\circ - \gamma),$$

ami alapján

$$T = \frac{ab \cdot \sin(180^\circ - \gamma)}{2}.$$



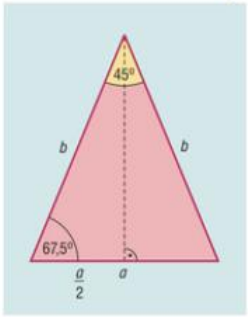

81. ábra





**1. példa**

Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 30 cm, a szárak által bezárt szög 45°-os. Számítsuk ki a háromszög oldalainak hosszát és területét!




82. ábra

**Megoldás**

Jelölje $a$ az alap, $b$ a szárak hosszát! *(82. ábra)*

Az alaphoz tartozó magasság felezi a szárak által bezárt szöget, és merőlegesen felezi az alapot. Így

$$\frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b} = \cos 67{,}5°,$$

$$a = 2b \cdot \cos 67{,}5°.$$

A háromszög kerülete:

$$K = 2b + a = 2b + 2b \cdot \cos 67{,}5° = 2b \cdot (1 + \cos 67{,}5°).$$

Mivel a kerület adott, ezért $b$ a fenti kifejezésből kiszámolható:

$$b = \frac{K}{2 \cdot (1 + \cos 67{,}5°)} \approx \frac{30 \text{ cm}}{2 \cdot 1{,}3827} \approx 10{,}85 \text{ cm}.$$

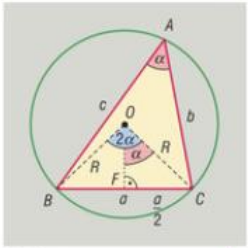
A $b$ oldal és a kerület ismeretében $a$ is számolható:

$$a = K - 2b \approx 30 \text{ cm} - 2 \cdot 10{,}85 \text{ cm} = 8{,}3 \text{ cm}.$$

A szárak hossza és a szárak által bezárt szög ismert, így a háromszög területe:

$$T = \frac{b^2 \cdot \sin 45°}{2} = \frac{b^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{b^2 \cdot \sqrt{2}}{4} \approx 41{,}62 \text{ cm}^2.$$

## Összefüggés a háromszög oldala, az oldallal szemközti szög és a háromszög köré írt kör sugara között




83. ábra

Legyen az $ABC$ hegyesszögű háromszög köré írt kör sugara $R$, $BC$ oldalának hossza $a$, a $BC$ oldallal szemközti szög pedig $\alpha$. Célunk annak megmutatása, hogy $a$, $\alpha$ és $R$ nem függetlenek egymástól, bármelyik kettő ismeretében egyértelműen meghatározható a harmadik.

Ha $O$ jelöli a háromszög köré írt kör középpontját, akkor a középponti és kerületi szögek tétele értelmében $\sphericalangle COB = 2\alpha$. *(83. ábra)*

Az $OBC$ egyenlő szárú háromszögben a $COB$ szög felezője merőlegesen felezi $BC$-t, így ha $F$ a $BC$ oldal felezőpontja, akkor

$$\sin\alpha = \frac{FC}{OC} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R},$$

$$a = 2R \cdot \sin\alpha.$$

$a = 2R \cdot \sin\alpha$
$(\alpha < 90°)$

Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy ha a háromszög másik két oldalának hossza $b$ és $c$, a megfelelő szemközti szögek $\beta$ és $\gamma$, akkor

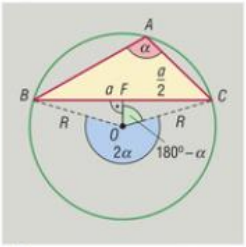
$$b = 2R \cdot \sin\beta \text{ és } c = 2R \cdot \sin\gamma.$$

Megfontolásaink alapján könnyen látható, hogy a kapott összefüggés derékszögű és tompaszögű háromszögek esetén is érvényes, ha $\alpha$ a háromszög egyik hegyesszöge.

Derékszögű háromszög esetén a 90°-os szöggel szemközti átfogó hossza Thalész tételének értelmében a körülírt kör sugarának kétszerese.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy milyen összefüggés érvényes tompaszögű háromszögben a legnagyobb oldal hossza, a szemközti szög és a körülírt kör sugara között.

A 84. ábrán az $ABC$ tompaszögű háromszögben a leghosszabb oldal $BC = a$, a vele szemközti szög $\alpha$.




84. ábra

A középponti és kerületi szögek tételéből adódóan

$$BOC\sphericalangle = 360° - 2\alpha.$$

Ha $F$ a $BC$ oldal felezőpontja, $O$ a körülírt kör középpontja, akkor $OF$ felezi a $BOC$ szöget, azaz $FOC\sphericalangle = 180° - \alpha$. Így

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{a}{2R},$$

$$a = 2R \cdot \sin(180° - \alpha).$$

$a = 2R \cdot \sin(180° - \alpha)$
$(90° < \alpha)$

Azt kaptuk, hogy tompaszögű háromszög leghosszabb oldalára is hasonló összefüggés érvényes, csak ekkor a tompaszög mellékszögének a szinuszát kell vennünk.

**2. példa**

Egy hegyesszögű háromszögben az egyik oldal hossza a háromszög köré írt kör sugarának fele. Mekkora ebben a háromszögben a tekintett oldallal szemközti belső szög?

**Megoldás**

Ha $R$ jelöli a körülírt kör sugarát, $a$ pedig a kiszemelt oldal hosszát, akkor a feltétel értelmében $a = \frac{R}{2}$. A most bizonyított összefüggést az $a$ hosszúságú oldallal szemközti $\alpha$ szögre felírva:

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{\frac{R}{2}}{2R} = \frac{R}{4R} = \frac{1}{4},$$

$$\alpha \approx 14°28' \approx 14{,}5°.$$





**3. példa**

Adott egy hegyesszögű háromszög három belső szöge és körülírt körének sugara. Határozzuk meg a háromszög területét és kerületét!

**Megoldás**

Jelölje a háromszög szögeit a szokásos módon $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, és legyen a köré írt kör sugara $R$! Az előzőekben bizonyított összefüggések felhasználásával adódik, hogy

$a = 2R \cdot \sin\alpha$

$b = 2R \cdot \sin\beta$

$c = 2R \cdot \sin\gamma$

$$T = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{(2R \cdot \sin\alpha) \cdot (2R \cdot \sin\beta) \cdot \sin\gamma}{2} =$$

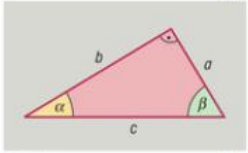
$$= \frac{4R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

A hegyesszögű háromszög területe tehát szögeinek és a köré írt kör sugarának ismeretében is meghatározható:

$$T = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

A kerület:

$$K = a + b + c = 2R \cdot \sin\alpha + 2R \cdot \sin\beta + 2R \cdot \sin\gamma =$$
$$= 2R \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$



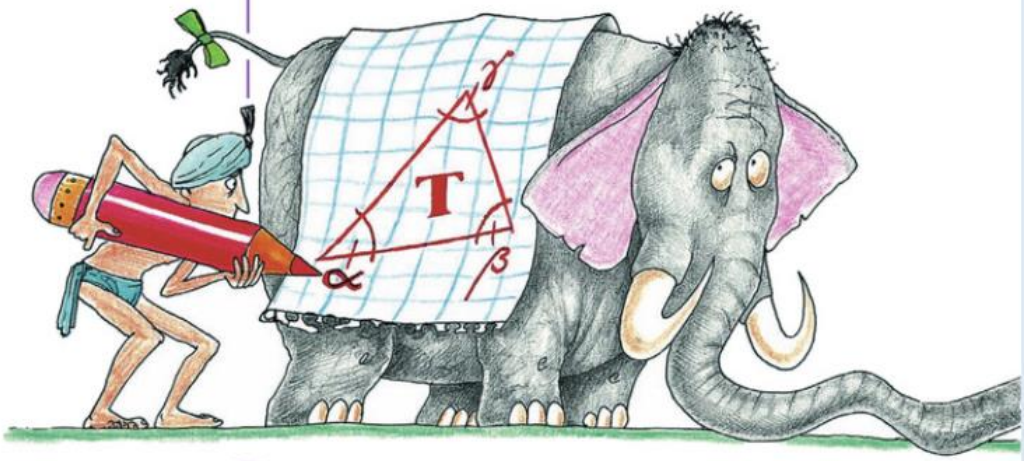

85. ábra

*Megjegyzések:*

1. A fenti összefüggések érvényesek tompaszögű háromszögre is, csak ott a tompaszög mellékszögének szinuszát kell vennünk.
2. Derékszögű háromszögre, ha $a$ és $b$ a befogók, $c$ az átfogó hossza **(85. ábra)**, akkor $c = 2R$, és

$$T = \frac{ab}{2} = \frac{(c \cdot \sin\alpha) \cdot (c \cdot \sin\beta)}{2} = \frac{(2R \cdot \sin\alpha) \cdot (2R \cdot \sin\beta)}{2} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$K = 2R \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + 1).$$





## Feladatok

1. Egy háromszög két oldalának hossza $a$ és $b$, az általuk közbezárt szög $\gamma$. Számítsuk ki a háromszög területét, ha
   *a)* $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 30°$; *b)* $a = 9{,}5$ m, $b = 11{,}2$ m, $\gamma = 60°$;
   *c)* $a = 13{,}4$ dm, $b = 8{,}1$ dm, $\gamma = 45°$; *d)* $a = 3{,}62$ cm, $b = 4{,}87$ cm, $\gamma = 150°$!

2. Egy háromszög területe 17,2 cm$^2$, két oldalának hossza pedig 6 cm és 8 cm. Számítsuk ki a két adott oldal által közbezárt szög nagyságát! Hány megoldása van a feladatnak?

3. Egy paralelogramma két szomszédos oldalának hossza 8 cm és 12 cm, az általuk bezárt szög 60°-os. Számítsuk ki a paralelogramma területét!

4. Számítsuk ki az egységnyi sugarú körbe írt szabályos
   *a)* hatszög; *b)* tízszög; *c)* nyolcszög; *d)* ötszög területét!

5. Jelölje $a$ a háromszög egyik oldalának hosszát, $\alpha$ az oldallal szemközti szöget! Mekkora a háromszög köré írt kör sugara, ha
   *a)* $a = 3$ cm, $\alpha = 30°$; *b)* $a = 4{,}68$ m, $\alpha = 60°$; *c)* $a = 2$ m, $\alpha = 135°$?

6. Mekkora az egységnyi sugarú körben a $h$ hosszúságú húrhoz tartozó kisebbik kerületi szög nagysága, ha
   *a)* $h = 2$; *b)* $h = 1$; *c)* $h = 1{,}4$; *d)* $h = 0{,}7$; *e)* $h = \sqrt{3}$?

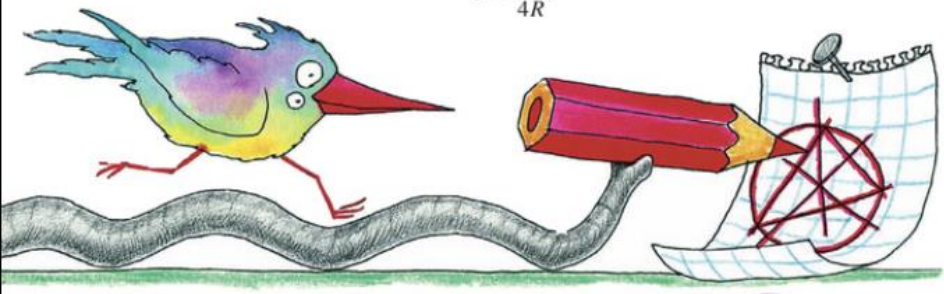
7. Egy kör húrjának hossza a sugár hosszának harmada. Mekkora a húrhoz tartozó kisebbik középponti szög nagysága?

8. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának hossza 8 cm, a rajta fekvő szögek 75°-osak. Számítsuk ki a háromszög köré írt kör sugarát, a szárak hosszát és a háromszög területét!

9. A Balaton partján álló szállodának a víz szintjéhez képest 30 m magasságban lévő tetejéről egy motorcsónak 30°-os depressziószögben (a vízszintes iránytól való lehajlás szöge) látszik.
   *a)* Milyen messze van a csónak a szálloda tóra néző bejáratától?
   *b)* Mekkora depressziószögben látszik a szálloda tetejéről egy, a szálloda tóra néző bejáratától a csónakhoz képest kétszer olyan távol lévő sétahajó?

10. Egy egységnyi sugarú körbe írt háromszög két szögének nagysága 75° és 45°. Számítsuk ki a háromszög területét és kerületét!

11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög oldalainak hossza $a$, $b$, $c$, a köré írt kör sugara $R$, területe pedig $T$, akkor
$$T = \frac{abc}{4R}!$$





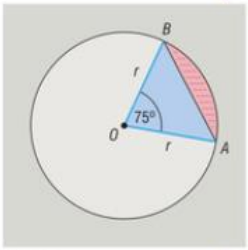


# 6. Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével

Alábbiakban a szögfüggvények alkalmazására mutatunk néhány további példát.

**1. példa**

Számítsuk ki a 2 cm sugarú körben a 75°-os középponti szöghöz tartozó körszelet területét!




86. ábra

**Megoldás**

A 86. ábráról leolvasható, hogy a körszelet területe a megfelelő körcikk és középponti háromszög területének különbsége. Emlékeztetünk rá, hogy ha az $r$ sugarú körben $\alpha$ a körcikk középponti szögének radiánban megadott nagysága, akkor a körcikk területe

$$t_{kc} = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}.$$

Mivel $75° = 2\pi \cdot \frac{75°}{360°}\ \text{rad} = \frac{5\pi}{12}\ \text{rad}$, ezért

$$t_{kc} = \frac{\frac{5\pi}{12} \cdot 4}{2}\ \text{cm}^2 = \frac{5\pi}{6}\ \text{cm}^2.$$

Az $ABO$ háromszög területe:

$$t_{ABO} = \frac{r^2 \cdot \sin 75°}{2} = 2 \cdot \sin 75°\ \text{cm}^2.$$

A körszelet területe:

$$t = t_{kc} - t_{ABO} = \frac{5\pi}{6}\ \text{cm}^2 - 2 \cdot \sin 75°\ \text{cm}^2 \approx 0{,}686\ \text{cm}^2.$$

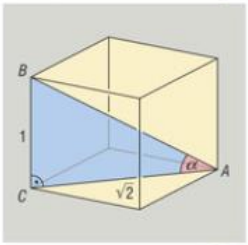
*Megjegyzés:* A fenti gondolatmenethez hasonló módon bizonyítható, hogy az $r$ sugarú kör radiánban mérve $\alpha$ nagyságú $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ középponti szögéhez tartozó körszelet területe:

$$t = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha).$$

87. ábra

**2. példa**

Mekkora szöget zár be a kocka testátlója a végpontjából induló lapátlókkal?




**Megoldás**

Az egyszerűbb számolás végett legyen a kocka éle egységnyi hosszú. Ekkor Pitagorasz tételéből adódóan a lapátlók hossza $\sqrt{2}$. A 87. ábrán látható $ABC$ derékszögű háromszög $\alpha$ hegyesszögére vagyunk kíváncsiak.



Mivel ebben a derékszögű háromszögben a két befogó ismert, ezért

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071,$$

$$\alpha \approx 35°16' \approx 35{,}27°.$$



szabályos tetraéder

**3. példa**

Mekkora szöget zárnak be egymással egy szabályos tetraéder lapsíkjai?

**Megoldás**

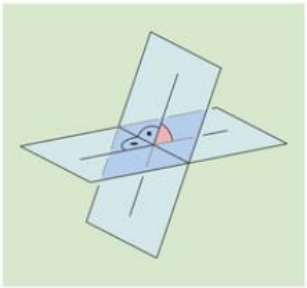
A kérdés megválaszolása előtt emlékeztetünk a **szabályos tetraéder** fogalmára, és definiáljuk, hogy mit értünk **két sík hajlásszögén.**

DEFINÍCIÓ: **A *szabályos tetraéder* olyan háromszög alapú gúla, amelynek lapjai egybevágó szabályos háromszögek.**

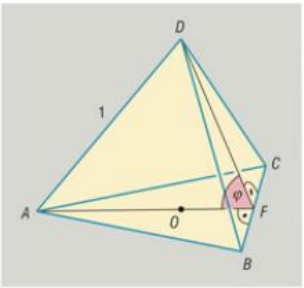
3D

két sík hajlásszöge

DEFINÍCIÓ: **Tekintsük a két sík metszésvonalának egy pontját! Állítsunk merőlegest a metszésvonalra ebben a pontban mindkét síkban! A *két sík hajlásszöge* ezen merőlegesek által bezárt szög.** *(88. ábra)*



88. ábra



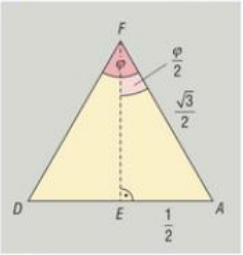

89. ábra

3D

90. ábra

Az egyszerűbb számolás érdekében legyenek az $ABCD$ szabályos tetraéder élei egységnyi hosszúak. *(89. ábra)*

Ha $F$ a $BC$ él felezőpontja, akkor $AF$, illetve $DF$ az $ABC$, illetve $DBC$ szabályos háromszögek magasságai, ezért merőlegesek $BC$-re, és $AF = DF$. Így a fenti definíció értelmében az $AFD$ egyenlő szárú háromszögben a szárak által bezárt $\varphi$ szög nagyságára vagyunk kíváncsiak. Érdemes ezt a háromszöget külön is megrajzolnunk. *(90. ábra)*




Pitagorasz tételét az $ABF$ derékszögű háromszögre alkalmazva

$$AF = DF = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$





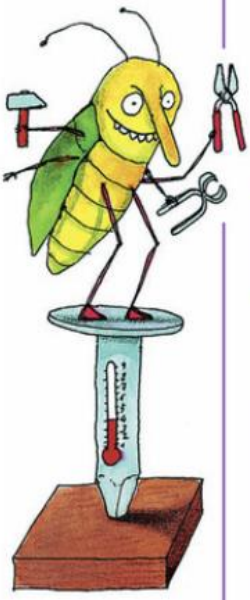
Az $AFD$ háromszögben az alaphoz tartozó magasság felezi $\varphi$-t és $AD$-t, így ha $E$ az $AD$ él felezőpontja, akkor

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774,$$

$$\frac{\varphi}{2} \approx 35°16',$$

$$\varphi \approx 70°32' \approx 70{,}53°.$$

Mivel a tetraéder szabályos, ezért bármely két lapsíkja 70,53°-os szöget zár be egymással.

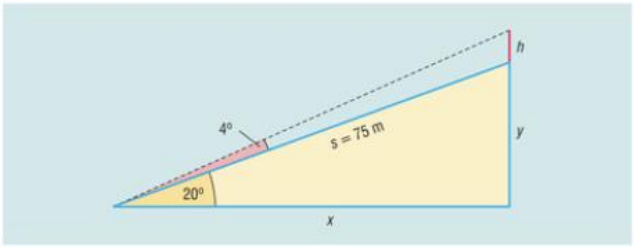


**4. példa**

Egy 75 m hosszú egyenes lejtős út aljáról az út felső végén levő emlékmű 4°-os szög alatt látszik. Milyen magas az emlékmű, ha a lejtő hajlásszöge 20°?

**Megoldás**

A 91. ábrán feltüntettük az adatokat is.




*91. ábra*

Először a lejtő méterben mért $y$ emelkedését határozzuk meg.

$$\sin 20° = \frac{y}{75},$$

$$y = 75 \cdot \sin 20° \approx 75 \cdot 0{,}342 = 25{,}65 \text{ (m)}.$$

Hasonlóan adódik, hogy a lejtő aljának az emlékműtől vett $x$ „vízszintes távolsága”:

$$x = 75 \cdot \cos 20° \approx 75 \cdot 0{,}9397 \approx 70{,}48 \text{ (m)}.$$

Így az emlékmű $h$ magasságára nézve

$$\operatorname{tg} 24° = \frac{y+h}{x},$$

$$h = x \cdot \operatorname{tg} 24° - y \approx 70{,}48 \cdot 0{,}4452 \text{ m} - 25{,}65 \text{ m} \approx 5{,}73 \text{ m}.$$

Tehát az emlékmű közelítően 5 méter 73 centiméter magasságú.



## Feladatok

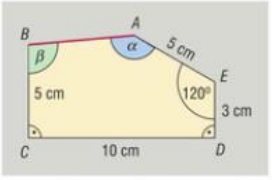
1. Egy körlapból kivágjuk a lehető legnagyobb szabályos
   *a)* hatszöget; *b)* nyolcszöget; *c)* tízszöget; *d)* tizenkétszöget.
   Hány százaléka a hulladék területe a körlap területének az egyes esetekben?

2. Egy szabályos négyoldalú gúla (alaplapja négyzet, oldallapjai egyenlő szárú háromszögek) alapéle 1 cm, oldaléle 2 cm hosszú. Számítsuk ki
   *a)* a szomszédos odalélek; *b)* a szemközti oldalélek
   szögének nagyságát!

3. Egy szabályos hatoldalú gúla (alaplapja szabályos hatszög, oldallapjai egyenlő szárú háromszögek) alapéle 4 cm, oldaléle 6 cm hosszú. Mekkora
   *a)* az alaplap és egy oldallap; *b)* két szomszédos oldallap
   által bezárt szög?

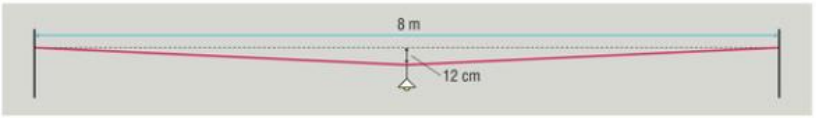
4. Számítsuk ki az ábrán látható ötszög $AB$ oldalának hosszát és ismeretlen belső szögeinek nagyságát!

5. Mekkora szögben esnek a Nap sugarai a földre, ha egy villanyoszlop árnyéka
   *a)* kétszer; *b)* háromszor; *c)* ötször
   akkora, mint az oszlop?




6. Egy hegy $C$ csúcsát a hegy lábánál levő $A$ pontból a vízszinteshez képest 60°-os szög alatt látjuk. Ha az $A$ pontból a vízszintessel 30°-os szöget bezáró egyenes úton 1 km-t megyünk, akkor olyan $B$ pontba jutunk, amelyre $CBA\sphericalangle = 135°$. Milyen magas a hegy?

7. Egy utcai lámpa két felfüggesztési pontjának távolsága 8 m. A lámpa a távolság felezőpontjában függ, belógása 12 cm. Milyen hosszú a huzal, és mekkora a vízszintessel bezárt szöge?




8. Milyen hosszúak a hegyesszögek belső szögfelezőinek háromszögbe eső szakaszai abban a derékszögű háromszögben, amelynek átfogója 4 cm hosszú, és az egyik hegyesszög nagysága
   *a)* 45°; *b)* 60°; *c)* 75°; *d)* 40°; *e)* 27°30'; *f)* $\alpha$?







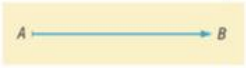
# VEKTOROK

## 1. Vektor fogalma; vektorok összege, különbsége, vektor szorzása számmal (emlékeztető)

### A vektor fogalma

A vektor fogalmát, vektorok összegének, különbségének, valós számmal történő szorzásának definícióját 9. osztályban, az eltolás kapcsán ismertük meg. Most ezeket az ismereteket elevenítjük fel, néhol más megvilágításban.

**DEFINÍCIÓ: Ha egy szakasz két végpontját megkülönböztetjük egymástól oly módon, hogy az egyik pont a *kezdőpont*, a másik pont a *végpont*, akkor *irányított szakaszt* kapunk.**




92. ábra

A 92. ábrán az $A$ kezdőpontú, $B$ végpontú, $A$-ból $B$-be mutató irányított szakasz látható.

**DEFINÍCIÓ: Egy irányított szakasz egyértelműen meghatároz egy *vektort*.**

(1) és (2) és (3) $\Leftrightarrow$ (4)

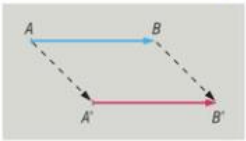
Ha az $A$-ból $B$-be mutató és $A'$-ből $B'$-be mutató irányított szakaszokra teljesül *(93. ábra)*, hogy

(1) $AB = A'B'$, (2) az $AB$ és $A'B'$ egyenesek párhuzamosak és (3) az $AA'$ és $BB'$ szakaszoknak nincs közös belső pontjuk;

vagy

(4) van olyan párhuzamos eltolás, amely egyidejűleg $A$-t $A'$-be és $B$-t $B'$-be viszi,

akkor a két irányított szakasz **ugyanazt a vektort határozza meg.**




93. ábra

Egy adott vektorhoz tehát végtelen sok olyan irányított szakasz van, amely őt meghatározza. Ezek bármelyike kiválasztható a vektor szemléltetésére, reprezentálására. A vektorokat rajzban irányított szakasszal szemléltetjük.

Az $A$-ból $B$-be mutató irányított szakasz által meghatározott vektor jelölése: $\overrightarrow{AB}$.

A vektorokat szokás még egyetlen kisbetűvel (pl. $\vec{a}$, $\vec{b}$), illetve nyomtatott szövegben „félkövéren" szedett kisbetűvel (pl. **a**, **b**) jelölni.

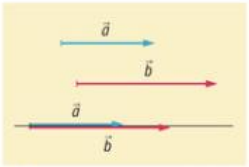
**DEFINÍCIÓ: A vektort meghatározó irányított szakasz hossza a *vektor abszolút értéke.***

Jelölés: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$, $|\mathbf{a}|$.



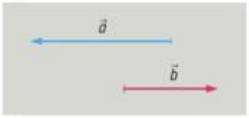
**Definíció:** ***Két vektor párhuzamos,*** **ha az őket meghatározó irányított szakaszok egyenesei párhuzamosak.**

**Definíció:** **Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ *vektorok egyirányúak,* ha párhuzamosak, és ugyanabba az irányba mutatnak, azaz közös kezdőpontból felvéve egy $\vec{a}$-t és egy $\vec{b}$-t reprezentáló irányított szakaszt, azok egy egyenesbe esnek, és végpontjaik a közös kezdőpont által meghatározott ugyanazon félegyenesre illeszkednek.** *(94. ábra)*




94. ábra

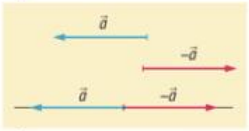
**Definíció:** ***Két vektor ellentétes irányú,*** **ha párhuzamosak, de nem egyirányúak.** *(95. ábra)*




95. ábra

**Definíció:** **Ha két vektor egyenlő abszolút értékű és ellentétes irányú, akkor a *két vektor egymás ellentettje.*** *(96. ábra)*

Jelölés: az $\vec{a}$ ellentettje $-\vec{a}$.




96. ábra

**Definíció:** ***Két vektor egyenlő,*** **ha egyirányúak és abszolút értékük egyenlő.**

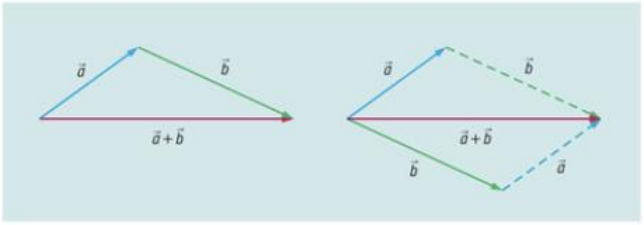
## Vektorok összege

Vektorok összegét a párhuzamos eltolás segítségével definiáltuk.

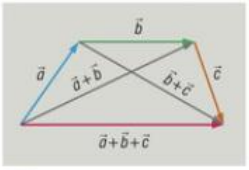
**Definíció:** **Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összege (jelölés: $\vec{a}+\vec{b}$) azon párhuzamos eltolás vektora, amellyel az $\vec{a}$-ral és a $\vec{b}$-ral meghatározott párhuzamos eltolások egymásutánja helyettesíthető.**

Rajzban két vektort a **háromszögszabály**, vagy a **paralelogramma-szabály** alapján összegezhetünk. *(97. ábra)*

97. ábra




98. ábra




A vektorok összeadása:

(1) **kommutatív** művelet, azaz

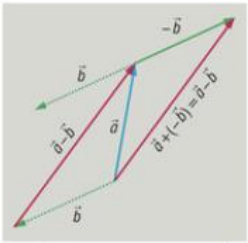
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

(2) **asszociatív** művelet *(98. ábra)*, azaz

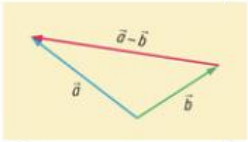
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$








99. ábra




100. ábra

## Vektorok különbsége

DEFINÍCIÓ: **Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ *vektorok különbsége* (jelölés: $\vec{a}-\vec{b}$) az $\vec{a}+(-\vec{b})$ vektor.** *(99. ábra)*

Rajzban két vektor különbségét a 100. ábrán látható módon szerkesztjük.

Eddigi definícióink alapján az $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{a}-\vec{a}$ művelet eredménye rajzban egy pont, azaz egy olyan vektor (irányított szakasz), amelynek kezdő- és végpontja egybeesik.

DEFINÍCIÓ: **Azt a vektort, amelynek abszolút értéke 0, *nullvektornak* nevezzük. (Jelölés: $\vec{0}$ vagy 0.)**

Megállapodás szerint a $\vec{0}$ iránya tetszőleges, azaz bármely vektorral egyirányú.

## Vektor szorzása számmal

DEFINÍCIÓ: **1. Ha $\vec{a}\neq\vec{0}$ és $\alpha$ tetszőleges valós szám, akkor $\alpha\cdot\vec{a}$ olyan vektor, amelynek abszolút értéke $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, és $\alpha>0$ esetén $\vec{a}$-ral egyirányú, $\alpha<0$ esetén $\vec{a}$-ral ellentétes irányú.**

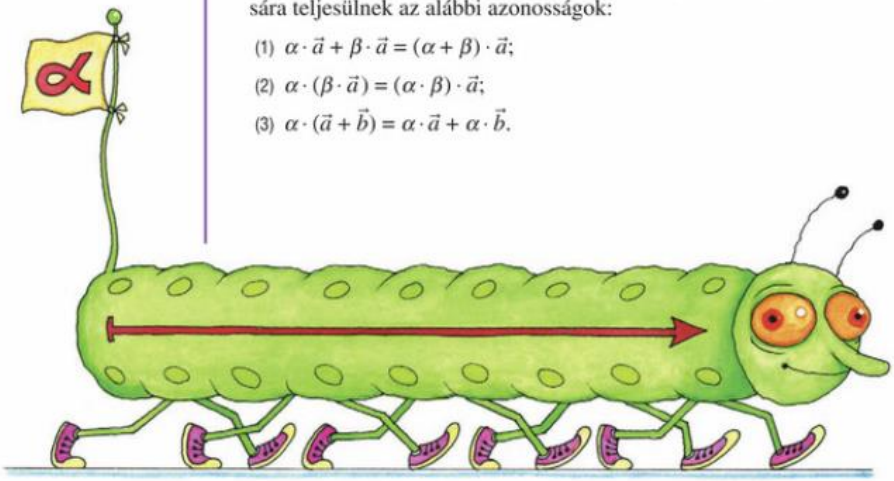
**2. Ha $\vec{a}=\vec{0}$, akkor $\alpha\cdot\vec{a}=\vec{0}$ bármely $\alpha$ valós szám esetén.**

Bizonyítható, hogy a vektorok valós számmal (skalárral) való szorzására teljesülnek az alábbi azonosságok:

(1) $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}=(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}$;

(2) $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}$;

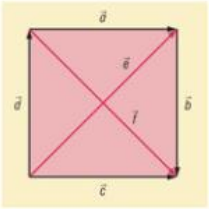
(3) $\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$.





## Feladatok

1. Az ábrán egy négyzet négy csúcsa által meghatározott hat vektor látható. Válasszuk ki közülük az




   *a)* egyenlőket; *b)* párhuzamosakat; *c)* ellentetteket!

2. Az előző feladat vektorait alapul véve határozzuk meg a következő vektorokat!

   *a)* $\vec{a}+\vec{b}$; *b)* $\vec{c}-\vec{d}$; *c)* $\vec{b}+\vec{d}$;

   *d)* $\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$; *e)* $\vec{b}+\vec{e}$; *f)* $\vec{d}-\vec{e}$;

   *g)* $\vec{c}+\vec{d}$; *h)* $\vec{e}+\vec{f}$; *i)* $(\vec{e}-\vec{c})+\vec{a}$; *j)* $(\vec{e}-\vec{f})+(\vec{a}-\vec{b})$.

3. Vegyünk fel egy $\vec{0}$-tól különböző $\vec{a}$-t és szerkesszük meg a következő vektorokat!

   *a)* $2\cdot\vec{a}$; *b)* $-3\cdot\vec{a}$; *c)* $-\frac{3}{4}\cdot\vec{a}$; *d)* $\sqrt{2}\cdot\vec{a}$;

   *e)* $\frac{1}{2}\cdot(3\cdot\vec{a})$; *f)* $-\sqrt{2}\cdot(\sqrt{8}\cdot\vec{a})$.

4. Vegyük fel a nem párhuzamos, nullvektortól különböző $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat! Szerkesszük meg a következő vektorokat!

   *a)* $\vec{a}+\vec{b}$; *b)* $\vec{a}-\vec{b}$; *c)* $2\cdot\vec{a}+\vec{b}$; *d)* $\vec{a}-\frac{\vec{b}}{2}$;

   *e)* $-(\vec{a}+\vec{b})$; *f)* $2\cdot\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{3}\right)$.

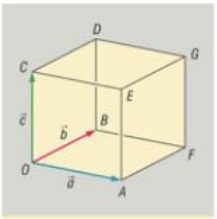
5. Írjuk egyszerűbb alakban a következő vektorokat!

   *a)* $2\cdot(\vec{a}+\vec{b})+(3\cdot\vec{a}-\vec{b})$; *b)* $\frac{1}{2}\cdot(\vec{b}-2\cdot\vec{a})-3\cdot\left(\vec{a}+\frac{\vec{b}}{3}\right)$;

   *c)* $-4\cdot(\vec{b}+3\cdot\vec{a})-\sqrt{2}\cdot(-\vec{a}-4\cdot\vec{b})$.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektorokra teljesül, hogy $\frac{\vec{a}+\vec{c}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\vec{b}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\vec{d}$, akkor $\vec{b}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{d}$!

7. Az ábrán látható kocka $O$ csúcsából induló élvektorok $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Fejezzük ki a következő vektorokat ezen három vektor segítségével!




   *a)* $\overrightarrow{OF}$; *b)* $\overrightarrow{OD}$; *c)* $\overrightarrow{OG}$;

   *d)* $\overrightarrow{GB}$; *e)* $\overrightarrow{DE}$; *f)* $\overrightarrow{FD}$;

   *g)* $\overrightarrow{DA}$; *h)* $\overrightarrow{CF}$.





# 2. Vektorok felbontása különböző irányú összetevőkre

## Kapcsolat párhuzamos vektorok között

Legyenek $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamos, nullvektortól különböző vektorok!

Az $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ és $\frac{1}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b}$ párhuzamos, egységnyi hosszúságú vektorok.

$\vec{a}_e = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}\ \ (\vec{a}\neq\vec{0})$

$|\vec{a}_e| = 1$

$\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\vec{a}_e$

**DEFINÍCIÓ: Ha $\vec{a}\neq\vec{0}$, akkor $\vec{a}_e = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ az $\vec{a}$ irányába mutató *egységvektor.***

Ha $\vec{a}_e$ és $\vec{b}_e$ egyirányúak, akkor a vektorok egyenlőségére adott definíció értelmében egyenlők, azaz

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a} = \vec{a}_e = \vec{b}_e = \frac{1}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b},$$

ahonnan

$$\vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b} \text{ és } \vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}.$$

Ha $\vec{a}_e$ és $\vec{b}_e$ ellentétes irányúak, akkor egymás ellentettjei, amiből adódik, hogy

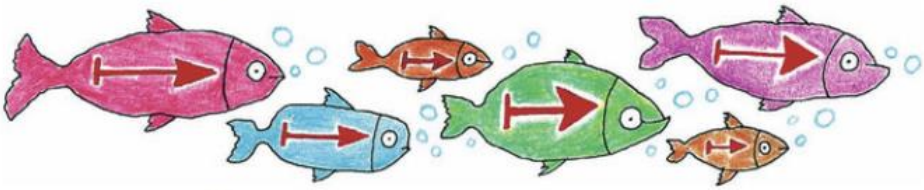
$$\vec{a} = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b} \text{ és } \vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}.$$

A fenti egyszerű gondolatmenettel bebizonyítottuk a következő tételt:

**TÉTEL: Ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nullvektortól különböző párhuzamos vektorok, akkor pontosan egy olyan 0-tól különböző $\alpha$ valós szám létezik, hogy $\vec{b} = \alpha\cdot\vec{a}$.**

**Ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egyirányúak: $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} > 0$, ha ellentétes irányúak: $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} < 0$.**

A tételből azonnal adódik, hogy egy $\vec{a}$-ral $(\vec{a}\neq\vec{0})$ párhuzamos összes vektor előállítható $\vec{a}$ számszorosaként.





**1. példa**

$\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamos, ellentétes irányú vektorok. $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$. Fejezzük ki az $\vec{a}$-t a $\vec{b}$-ral!

**Megoldás**

$\vec{a}_e = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \vec{a}$, $\vec{b}_e = \frac{1}{5} \cdot \vec{b}$. A feltétel szerint $\vec{a}_e$ és $\vec{b}_e$ ellentett vektorok, azaz

$$\vec{a}_e = -\vec{b}_e.$$

Behelyettesítés után

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{5} \cdot \vec{b},$$

ahonnan

$$\vec{a} = -\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \vec{b}.$$



## Síkbeli vektorok felbontása két különböző irányú összetevőre

**2. példa**

Az *ABC* háromszög *AB* oldalának felezőpontja *F*. Írjuk fel a $\overrightarrow{CF}$-t a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorokkal párhuzamos vektorok összegeként!

**Megoldás**

Az egyszerűbb jelölés végett legyen

$$\overrightarrow{CA} = \vec{a},\ \overrightarrow{CB} = \vec{b} \text{ és } \overrightarrow{CF} = \vec{f}.$$

A vektorok összegzésének paralelogrammaszabályára gondolva húzzuk be a háromszög *F*-re illeszkedő két középvonalát.

Az *AC* oldal felezőpontja legyen *D*, a *BC* oldalé *E*. *(101. ábra)*

A háromszög középvonalairól tudjuk, hogy párhuzamosak a megfelelő oldallal, és hosszuk a tekintett oldal hosszának fele. A *CDFE* négyszög tehát paralelogramma.

Ezért

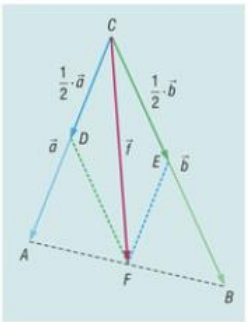
$$\vec{f} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}.$$

Viszont mivel *D* és *E* felezőpontok, ezért

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \text{ és } \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2} \cdot \vec{b}.$$

Így tehát

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}.$$

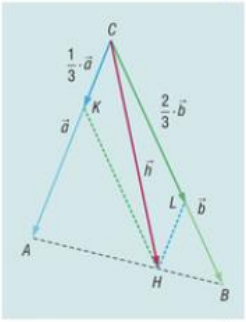



*101. ábra*

$$\vec{f} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

### 3. példa

Legyen a 2. példa háromszögében az $AB$ oldal $B$-hez közelebbi harmadolópontja $H$, a $C$-ből $H$-ba mutató vektor $\vec{h}$. Írjuk fel $\vec{h}$-t az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal párhuzamos vektorok összegeként!




102. ábra

**Megoldás**

Húzzunk most is $H$-n keresztül párhuzamost a háromszög $AC$ és $BC$ oldalával, a kapott metszéspontok $K$ és $L$. *(102. ábra)*

A párhuzamos szelők tétele alapján:

$$\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\cdot\vec{a} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\cdot\vec{b}.$$

Így

$$\vec{h}=\frac{1}{3}\cdot\vec{a}+\frac{2}{3}\cdot\vec{b}.$$

Az $AB$ szakasz másik harmadolópontjába mutató vektor:

$$\frac{2\cdot\vec{a}+\vec{b}}{3}.$$

$$\vec{h}=\frac{\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{3}$$

### 4. példa

Az $ABC$ derékszögű háromszög $AB$ átfogójának felezőpontja $F$. Legyen $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CF}=\vec{f}$ és $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$! Bontsuk fel $\vec{b}$-t az $\vec{a}$-ral és az $\vec{f}$-ral párhuzamos összetevőkre! *(103. ábra)*

**Megoldás**

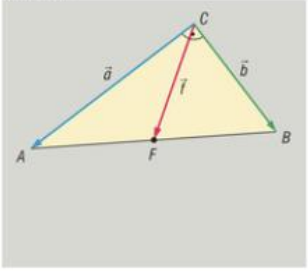
A 2. példa alapján adódik, hogy

$$\vec{f}=\frac{1}{2}\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b},$$

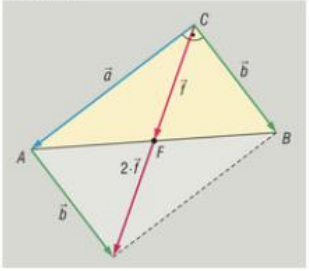
$$\vec{b}=2\cdot\vec{f}-\vec{a}.$$

Ez az algebrai természetű megoldás geometriailag is szemléltethető, ha a háromszöget tükrözzük az $F$ pontra. *(104. ábra)*

103. ábra




104. ábra

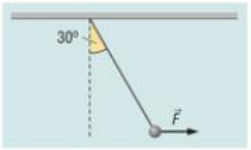




**5. példa**

Nyújthatatlan kötélen függő, 2 kg tömegű golyót a vízszintes $\vec{F}$ erővel tartjuk a 105. ábrán látható egyensúlyi helyzetben ($g = 10\ \text{m/s}^2$).

*a)* Mekkora az $\vec{F}$ erő? *b)* Mekkora erő feszíti a kötelet?

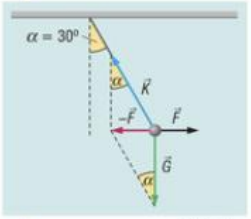



105. ábra

**Megoldás (a)**

A golyó egyensúlyban van, ezért a kötélben támadó $\vec{K}$ erőnek és a golyó $\vec{G}$ súlyának eredője (vektori összege) $\vec{F}$ ellentettjével, azaz a $-\vec{F}$ erővel egyezik meg *(106. ábra)*. Mivel $|\vec{G}| = m \cdot g = 20$ N és $|-\vec{F}| = |\vec{F}|$, ezért a 106. ábra alapján:

$$|\vec{F}| = m \cdot g \cdot \operatorname{tg} 30° = 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 11{,}55 \text{ N}.$$




106. ábra

**Megoldás (b)**

A fentiek és az ábra alapján:

$$|\vec{K}| = \frac{|\vec{F}|}{\sin 30°} = 2 \cdot |\vec{F}| \approx 23{,}1 \text{ N}.$$

◆ ◆ ◆

Az előző példák egy nagyon fontos tétel speciális esetei voltak.

**TÉTEL:** **Ha adottak az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nullvektortól különböző, nem párhuzamos vektorok, akkor az általuk meghatározott sík minden egyes $\vec{v}$ vektora előáll**

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$$

**alakban, ahol $\alpha$ és $\beta$ csak $\vec{v}$-tól függő, adott $\vec{v}$ esetén egyértelműen meghatározott valós számok.**

107. ábra

**Bizonyítás**

**I. eset:** $\vec{v}$ párhuzamos valamelyik vektorral.

Ha $\vec{v}$ párhuzamos az $\vec{a}$-ral, akkor a már bizonyított tétel értelmében létezik egy és csak egy olyan valós szám, hogy $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a}$. Ekkor

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b}.$$

Hasonlóan adódik az állítás akkor is, ha $\vec{v}$ a $\vec{b}$-ral párhuzamos:

$$\vec{v} = 0 \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}.$$

Ha $\vec{v} = \vec{0}$, akkor $\alpha = \beta = 0$.

**II. eset:** $\vec{v}$ nem párhuzamos sem az $\vec{a}$-ral, sem a $\vec{b}$-ral.

Vegyük fel közös kezdőpontból az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{v}$ vektorokat! Ekkor $\vec{v}$ az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egyenesei által meghatározott négy szögtartomány valamelyikébe esik, azaz a 107. ábrán látható négy eset közül pontosan az egyik valósul meg.

Az ábrán látható az is, hogy ha a $\vec{v}$ végpontján keresztül párhuzamosokat húzunk a két adott vektor egyenesével, akkor mindegyik esetben olyan parallelogrammát kapunk, amelynek átlóvektora a $\vec{v}$. Ez pedig azt jelenti, hogy a $\vec{v}$ az adott $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal párhuzamos vektorok összegeként áll elő, azaz

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}.$$

A párhuzamos vektorokra bizonyított tétel alapján világos, hogy adott $\vec{v}$ esetén $\alpha$ és $\beta$ egyértelműen meghatározott. Ezzel a bizonyítást befejeztük.





vektorok lineáris kombinációja

**DEFINÍCIÓ:** **Ha a sík $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{v}$ vektoraira $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, ahol $\alpha$ és $\beta$ valós számok, akkor a $\vec{v}$ az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok *lineáris kombinációja.***

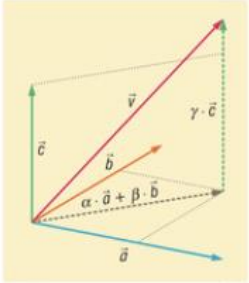
Ezzel az új fogalommal tételünk más módon is megfogalmazható:

**TÉTEL:** **Ha adottak az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nullvektortól különböző, nem párhuzamos vektorok, akkor az általuk meghatározott sík minden egyes $\vec{v}$ vektora egyértelműen áll elő az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként.**

Síkban: 2 bázisvektor.

Ebben az esetben szokás az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat **bázisvektoroknak** (alapvektoroknak) nevezni.

A fenti bizonyítás gondolatmenetéhez hasonló gondolatmenettel belátható, hogy síkbeli tételünk térbeli megfelelője is érvényes.

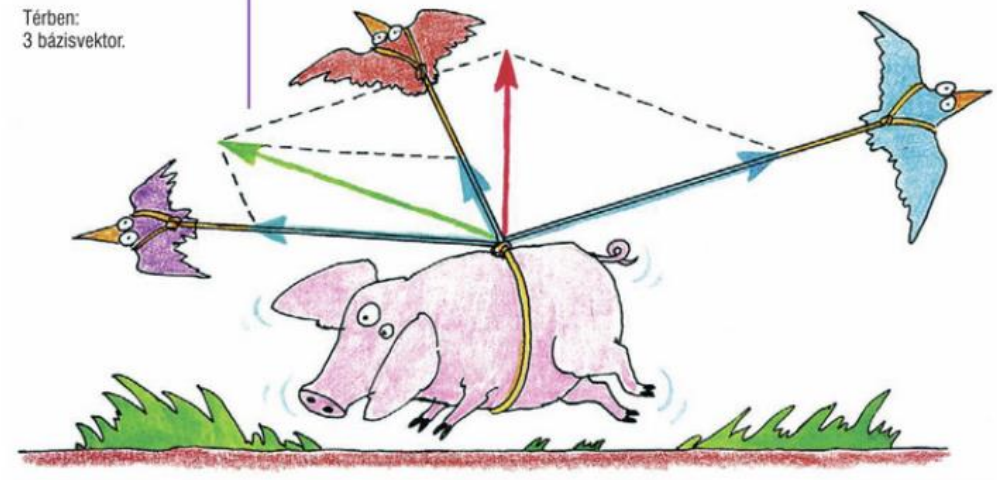



*108. ábra*

**TÉTEL:** **Ha az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ olyan nullvektortól különböző, páronként nem párhuzamos vektorok, amelyekre teljesül, hogy egyik sem illeszkedik a másik kettő által meghatározott síkra, akkor bármely $\vec{v}$ vektor egyértelműen áll elő az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz bármely $\vec{v}$ esetén pontosan egy olyan $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ valós számhármas létezik, amelyre**

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}.$$ *(108. ábra)*

Térben: 3 bázisvektor.



## Feladatok

1. $\vec{e}$ és $\vec{a}$ párhuzamos vektorok, és $|\vec{e}| = 1$. Mennyi az $|\vec{a}|$, ha

   *a)* $\vec{a} = 2 \cdot \vec{e}$; *b)* $\vec{a} = -3 \cdot \vec{e}$; *c)* $\vec{e} = \sqrt{3} \cdot \vec{a}$; *d)* $\vec{e} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{a}$;

   *e)* $-\frac{2}{3} \cdot \vec{a} = 4 \cdot \vec{e}$?

2. Az $ABC$ szabályos háromszög $A$ csúcsából az $M$ magasságpontba mutató vektor $\vec{m}$, a $BC$ oldal $F$ felezőpontjába mutató vektor $\vec{f}$. Bizonyítsuk be, hogy $\vec{m}$ és $\vec{f}$ párhuzamos vektorok! Ha $\vec{m} = \alpha \cdot \vec{f}$, akkor mekkora az $\alpha$?

3. Legyenek $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ a sík tetszőleges pontjai! Határozzuk meg az $\alpha$ valós szám értékét, ha $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \alpha \cdot (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA})$!

4. Az $ABCD$ paralelogrammában legyen $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ és $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$! Fejezzük ki $\vec{b}$ és $\vec{c}$ segítségével (tehát $\vec{b}$ és $\vec{c}$ lineáris kombinációjaként) az $A$ csúcsból a $BC$ oldal felezőpontjába mutató vektort!

5. Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának $A$-hoz közelebbi negyedelőpontja $N$, $B$-hez közelebbi negyedelőpontja $M$. Fejezzük ki a $\overrightarrow{CM}$-t és $\overrightarrow{CN}$-t $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ segítségével (tehát $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ lineáris kombinációjaként)!

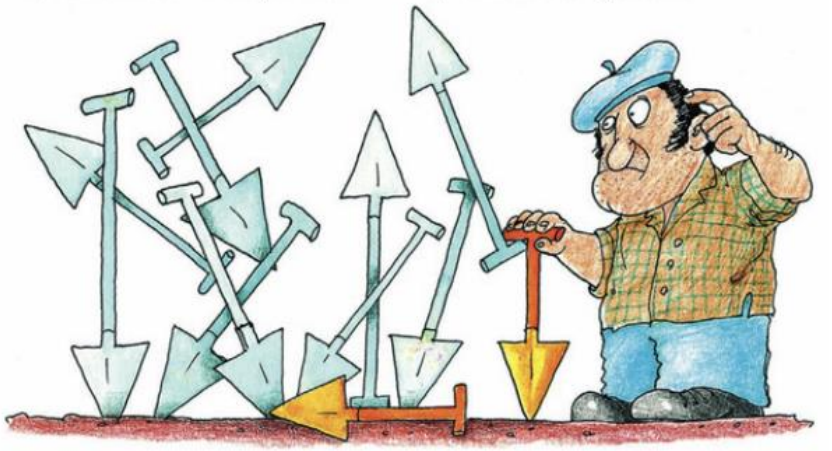
6. Az $ABC$ háromszögben $AB = 4$, $BC = 5$, $CA = 6$. Az $A$ csúcsból induló belső szögfelező messe a $BC$ oldalt $P$-ben! Határozzuk meg $\alpha$ és $\beta$ értékét, ha

   $$\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}!$$

7. Az $ABC$ háromszög $BC$ oldalának $C$-n túli meghosszabbításán úgy vettük fel a $P$ pontot, hogy $BP : CP = 9 : 5$. Bontsuk fel az $\overrightarrow{AP}$-t $\overrightarrow{AB}$-ral és $\overrightarrow{AC}$-ral párhuzamos összetevőkre!

8. Egy 30°-os hajlásszögű lejtőn súrlódásmentesen csúszik le egy 2 kg tömegű test. Bontsuk fel a testre ható súlyerőt lejtőre merőleges és lejtővel párhuzamos irányú komponensekre.

   *a)* Mekkorák ezek a komponensek? *b)* Mekkora a test gyorsulása?

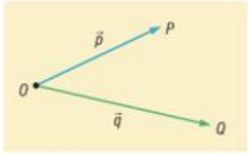






# 3. Vektorok alkalmazása a síkban és a térben

A vektorok segítségével számos geometriai feladat, probléma „elegánsan", röviden és szemléletesen megoldható. A vektorok alkalmazása lehetővé teszi a síkbeli és térbeli problémák egységes módon történő kezelését is. A következőkben erre látunk néhány példát. Előbb azonban egy fontos, és a feladatok megoldása szempontjából igen hasznos fogalmat vezetünk be.




109. ábra

Legyen egy vonatkoztatási rendszer origója az $O$ pont! A sík (tér) minden egyes $P$ pontjához rendeljük hozzá az $\overrightarrow{OP}$-t! *(109. ábra)*

Ezáltal a sík (tér) pontjai és vektorai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk, ugyanis

(1) bármely $P$ ponthoz pontosan egy $O$-ból $P$-be mutató irányított szakasz létezik, és ez egyértelműen meghatározza az $\overrightarrow{OP}$-t;

(2) a sík (tér) bármely vektorának egyetlen $O$ kezdőpontú reprezentánsa van, ennek végpontja egyértelműen meghatározott.

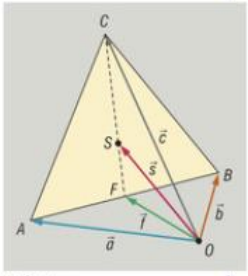
**vonatkoztatási pont, helyvektor**

A vonatkoztatási rendszer origóját $O$ **vonatkoztatási pontnak,** az $\overrightarrow{OP}$-t a $P$ pont **helyvektorának** nevezzük. Az $O$ pont helyvektora a nullvektor.

A $P$ pont helyvektorának szokásos jelölése: $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$.

**1. példa**

Bizonyítsuk be vektorok alkalmazásával, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást!




110. ábra

**Megoldás**

Ezt az állítást korábban már kétféleképpen is bebizonyítottuk. Most a vektorok segítségével egy harmadik bizonyítást mutatunk.

Egy tetszőleges, de rögzített $O$ vonatkoztatási pontból az $ABC$ háromszög csúcsaiba mutató helyvektorok legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, az $AB$ oldal $F$ felezőpontjának helyvektora legyen $\vec{f}$, a $CF$ súlyvonal $F$-hez közelebbi $S$ harmadolópontjának helyvektora pedig legyen $\vec{s}$! *(110. ábra)*

Célunk $\vec{s}$ kifejezése $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ segítségével.

A 189. oldal 2. példája alapján

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}. \qquad (1)$$

A 190. oldal 3. példája alapján

$$\vec{s} = \frac{2}{3} \cdot \vec{f} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c}. \qquad (2)$$



Írjuk be az (1)-et (2)-be, majd a vektorműveletekre vonatkozó azonosságok alkalmazásával alakítsuk a kapott kifejezést!

$$\vec{s} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}\right)+\frac{1}{3}\cdot\vec{c} = \frac{1}{3}\cdot\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\vec{c} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

Kaptuk, hogy

$$\vec{s} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

Egy másik súlyvonal oldalhoz közelebbi harmadolópontjának helyvektorát úgy kaphatjuk meg, hogy az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorok szerepét megfelelően felcseréljük. Ez a csere viszont az $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ összeget nem változtatja meg, így eredményünk ugyanaz marad.

Ez pedig azt jelenti, hogy akármelyik súlyvonal oldalhoz közelebbi harmadolópontját is tekintjük, mindegyiknek a helyvektora $\vec{s}$, azaz a súlyvonalakat ugyanaz a pont harmadolja.

A vektorok segítségével tehát egyidejűleg bizonyítottuk azt, hogy a súlyvonalak egy pontban metszik egymást, és azt is, hogy ez a pont a súlyvonalak oldalhoz közelebbi harmadolópontja.

◆ ◆ ◆

**Definíció: A tetraéder (háromszög alapú gúla) egy csúcsát a szemközti lap súlypontjával összekötő szakasz a *tetraéder súlyvonala.***

tetraéder súlyvonala

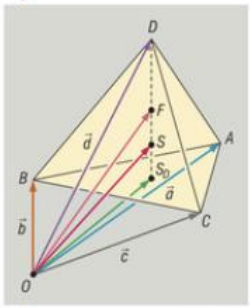
A tetraédernek négy súlyvonala van.

**2. példa**

Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlyvonalai egy pontban, a súlyvonalak laphoz közelebbi negyedelőpontjában metszik egymást!

**Megoldás**

Egy rögzített $O$ vonatkoztatási pontra nézve az $ABCD$ tetraéder csúcsainak helyvektorai rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, az $ABC$ háromszög $S_D$ súlypontjának helyvektora $\vec{s}_D$, a $DS_D$ súlyvonal $S_D$-hez közelebbi $S$ negyedelőpontjának helyvektora pedig $\vec{s}$. *(111. ábra)*




111. ábra

Az 1. példa alapján

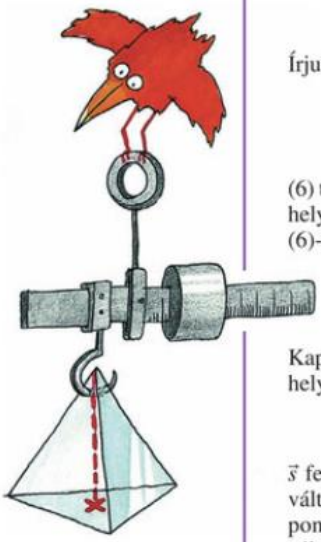
$$\vec{s}_D = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}. \qquad (3)$$

Ha a $DS_D$ súlyvonal $F$ felezőpontjának helyvektora $\vec{f}$, akkor

$$\vec{f} = \frac{\vec{s}_D+\vec{d}}{2}. \qquad (4)$$







Mivel $S$ felezi az $FS_D$ szakaszt, ezért

$$\vec{s} = \frac{\vec{s}_D + \vec{f}}{2}. \qquad (5)$$

Írjuk be előbb (4)-et (5)-be!

$$\vec{s} = \frac{\vec{s}_D + \frac{\vec{s}_D + \vec{d}}{2}}{2} = \frac{3\vec{s}_D + \vec{d}}{4}. \qquad (6)$$

(6) tulajdonképpen a tekintett súlyvonal megfelelő negyedelőpontjának helyvektorát adja meg a végpontok helyvektoraival. Írjuk be (3)-at (6)-ba!

$$\vec{s} = \frac{3 \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} + \vec{d}}{4} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}.$$

Kaptuk, hogy a $DS_D$ súlyvonal laphoz közelebbi negyedelőpontjának helyvektora

$$\vec{s} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}.$$

$\vec{s}$ fenti kifejezése a csúcsok helyvektorai szerepének cseréjére nézve változatlan, ezért akármelyik súlyvonal laphoz közelebbi negyedelőpontjának helyvektora $\vec{s}$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a tetraéder súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

• • •

tetraéder súlypontja

**DEFINÍCIÓ: A tetraéder súlyvonalainak metszéspontja a *tetraéder súlypontja.***

**3. példa**

Bizonyítsuk be, hogy bármely négyszög középvonalai felezve metszik egymást!

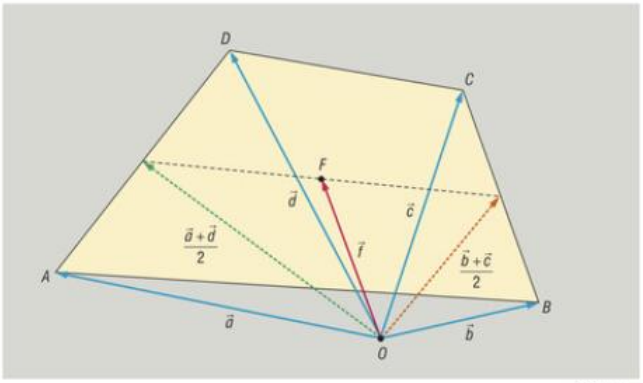
**Megoldás**

Emlékeztetünk rá, hogy egy négyszögben a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő szakaszokat nevezzük a négyszög középvonalainak.

Legyenek az $ABCD$ négyszög csúcsainak egy rögzített $O$ vonatkoztatási pontra vonatkozó helyvektorai rendre $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$! *(112. ábra)*

Az $AD$ oldal felezőpontjának helyvektora $\frac{\vec{a} + \vec{d}}{2}$, a $BC$ oldal felezőpontjának helyvektora $\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$. Az ezeket összekötő középvonal $F$ felezőpontjának helyvektora

$$\vec{f} = \frac{\frac{\vec{a} + \vec{d}}{2} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}.$$



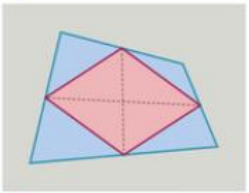

112. ábra

$$\vec{f} = \frac{\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2} + \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{2} = \frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}}{2}$$

Az $AB$ és $CD$ oldalak felezőpontját összekötő középvonal felezőpontját ugyanígy tudjuk megadni, csak a csúcsok helyvektorai cserélődnek fel a megfelelő módon. Viszont az $\vec{f}$ kifejezése a csúcsok helyvektorai szerepének cseréjére nézve változatlan, így mindkét középvonal felezőpontjának ugyanaz a helyvektora, nevezetesen $\vec{f}$.

Ezzel az állítást beláttuk.

Fontos következménye a most bizonyított állításnak, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg *(113. ábra)*. Ez könnyen látható, ha figyelembe vesszük, hogy a felezőpontok által meghatározott négyszög átlói az eredeti négyszög középvonalai, amelyekről most bizonyítottuk, hogy felezik egymást.



113. ábra

**4. példa**

Tekintsünk egy $AB$ szakaszt, és rögzítsünk egy $O$ vonatkoztatási pontot! Legyen $R$ az $AB$ szakasz azon pontja, amelyre $AR : RB = p : q$!
Adjuk meg az $A$ és $B$ pontok helyvektorainak segítségével az $R$ pont helyvektorát!

**Megoldás**

A 114. ábra jelöléseivel:

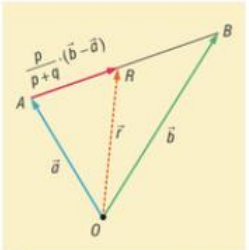
$$\vec{r} = \vec{a} + \overrightarrow{AR}.$$

Az $\overrightarrow{AR}$ egyirányú az $\overrightarrow{AB}$-ral, és a feltételből adódóan

$$\overrightarrow{AR} = \frac{p}{p+q} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Mivel $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, ezért

$$\overrightarrow{AR} = \frac{p}{p+q} \cdot (\vec{b} - \vec{a}).$$




114. ábra





$\vec{r} = \frac{q}{p+q} \cdot \vec{a} + \frac{p}{p+q} \cdot \vec{b}$

Felezőpont:
$p = q = 1.$

Harmadolópontok:
$p = 1, q = 2$
vagy
$p = 2, q = 1.$

Írjuk ezt be $\vec{r}$ fenti kifejezésébe!

$$\vec{r} = \vec{a} + \frac{p}{p+q} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{(p+q) \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b} - p \cdot \vec{a}}{p+q} = \frac{q \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b}}{p+q}.$$

Kaptuk tehát, hogy

$$\vec{r} = \frac{q \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b}}{p+q} = \frac{q}{p+q} \cdot \vec{a} + \frac{p}{p+q} \cdot \vec{b}.$$

## Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög súlypontjából a csúcsokba mutató vektorok összege a $\vec{0}$! Fogalmazzunk meg hasonló állítást tetraéderre! Bizonyítsuk be azt is!
2. Jelölje egy $O$ vonatkoztatási pontra nézve az $A$, $B$ és $P$ pontok helyvektorait rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{p}$! Határozzuk meg az $\frac{AP}{PB}$ hányados értékét, ha

   *a)* $\vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$; *b)* $\vec{p} = \frac{\vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{3}$; *c)* $\vec{p} = \frac{3 \cdot \vec{a} + \vec{b}}{4}$; *d)* $\vec{p} = \frac{2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}}{5}$!
3. Egy kocka egyik csúcsából mint vonatkoztatási pontból a szomszédos csúcsokba mutató vektorok legyenek $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$! Adjuk meg a lapközéppontok helyvektorait $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ segítségével!
4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges konvex négyszög középvonalainak metszéspontja az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontja!
5. Az $A$ pont valamely $O$ vonatkoztatási pontra vonatkozó helyvektora $\vec{a}$, a $P$ ponté $\vec{p}$. Adjuk meg az $A$ pont $P$-re vonatkozó tükörképének helyvektorát!





# 4. Vektorok a koordináta-rendszerben, vektor koordinátái, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal



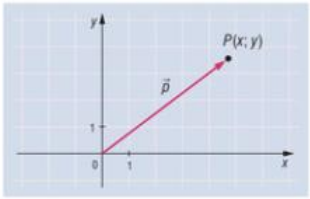
9. osztályban már foglalkoztunk a sík vektorainak koordináta-rendszerben történő megadásával, jellemzésével. Ebben a leckében feleleventjük és kiegészítjük az ott tárgyalt ismereteket.

## Emlékeztető

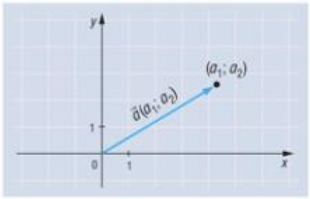
**DEFINÍCIÓ: A derékszögű koordináta-rendszerben a $P(x; y)$ pont *helyvektora* az origóból a pontba mutató vektor.** *(115. ábra)*

helyvektor

A sík minden vektorához pontosan egy olyan őt meghatározó irányított szakasz van, amelynek a kezdőpontja az origó, ezért célszerű a vektorokat origó kezdőpontú reprezentánsuk végpontjával megadni.




*115. ábra*




*116. ábra*

**DEFINÍCIÓ: A derékszögű koordináta-rendszerben egy *vektor koordinátái* megegyeznek origó kezdőpontú reprezentánsa végpontjának koordinátáival. Jelölés: $\vec{a}(a_1; a_2)$.**

vektor koordinátái

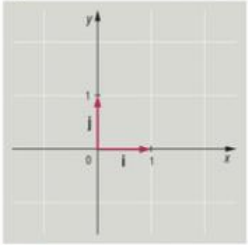
A fenti két definícióból következik, hogy a koordinátasík bármely pontjának és a pont helyvektorának koordinátái megegyeznek.

## Bázisvektorok a koordináta-rendszerben

bázisvektorok

Láttuk, hogy a sík bármely vektora egyértelműen bontható fel a sík két, nullvektortól különböző, nem párhuzamos vektorával párhuzamos összetevőre, azaz egyértelműen áll elő a két vektor (bázisvektorok) lineáris kombinációjaként.

*117. ábra*




Természetesnek tűnik, hogy a koordináta-rendszerben úgy válasszunk bázisvektorokat, hogy azok párhuzamosak legyenek a koordinátatengelyekkel, és abszolút értékük legyen 1.

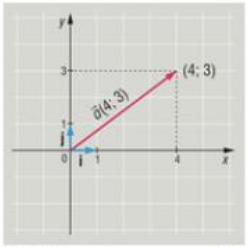
Tekintsük az (1; 0) és a (0; 1) pontok helyvektorait, jelölje ezeket rendre **i** és **j** *(117. ábra)*! Az **i**(1; 0) és **j**(0; 1) egységvektorokat választjuk a koordináta-rendszerben **bázisvektoroknak.**





**1. példa**

Írjuk fel az $\vec{a}(4; 3)$ vektort az **i** és **j** bázisvektorok lineáris kombinációjaként!




118. ábra

**Megoldás**

A 118. ábrán látható $\vec{a}$ előáll az **i** négyszeresének és a **j** háromszorosának összegeként, azaz

$$\vec{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

◆ ◆ ◆

Az 1. példa kapcsán azt tapasztaltuk, hogy az $\vec{a}$ **i** és **j** lineáris kombinációjaként történő előállításában az együtthatók éppen az $\vec{a}$ korábban definiált megfelelő koordinátái. A szemlélet alapján könnyen látható, hogy ez általában is így van. Ez lehetővé teszi, hogy egy vektor koordinátáit más módon is definiáljuk.

**DEFINÍCIÓ:** **Ha a derékszögű koordináta-rendszerben**

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j},$$

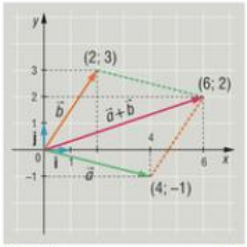
**akkor az $\vec{a}$ első koordinátája $a_1$, második koordinátája $a_2$.**

A vektor koordinátáira adott két definíció ekvivalens, azaz bármelyiket tekintjük alapdefiníciónak, belőle a másik definíció mint tulajdonság következik.

## Vektorok összegének koordinátái

**2. példa**

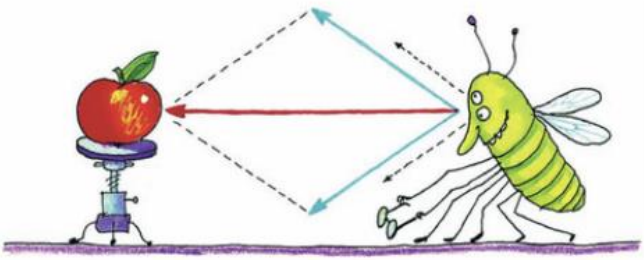
Határozzuk meg az $\vec{a}(4; -1)$ és $\vec{b}(2; 3)$ vektorok összegvektorának koordinátáit!




119. ábra

**Megoldás**

Rajzban az adott vektorokat a paralelogrammaszabály alapján összeadva kapjuk az $\vec{a} + \vec{b}$ összegvektort. *(119. ábra)*



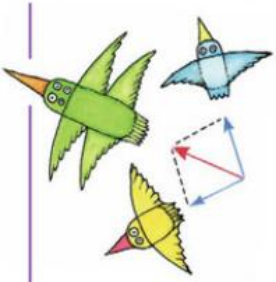


A feltételek szerint $\vec{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ és $\vec{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, így a vektorok összeadására és valós számmal történő szorzására vonatkozó azonosságok alapján

$$\vec{a} + \vec{b} = (4\mathbf{i} - \mathbf{j}) + (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) =$$
$$= (4 + 2)\mathbf{i} + (-1 + 3)\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

◆ ◆ ◆

A fenti példa alapján általánosíthatunk.



**Ha adottak az $\vec{a}(a_1; a_2)$ és $\vec{b}(b_1; b_2)$ vektorok, akkor**

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}) + (b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j}) = (a_1 + b_1) \cdot \vec{i} + (a_2 + b_2) \cdot \vec{j},$$

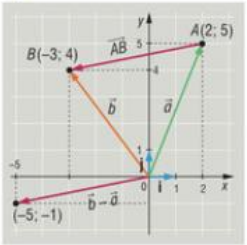
**azaz az összegvektor első koordinátája az összeadandó vektorok első koordinátájának, második koordinátája az összeadandó vektorok második koordinátájának összege.**

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$$

## Vektorok különbségének koordinátái

**3. példa**

Legyenek adottak az $A(2; 5)$ és $B(-3; 4)$ pontok! Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$ koordinátáit!




120. ábra

**Megoldás**

Az $A$ pont helyvektora $\vec{a}(2; 5)$, a $B$ pont helyvektora $\vec{b}(-3; 4)$, és $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ *(120. ábra)*. Így

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) - (2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) =$$
$$= (-3 - 2)\mathbf{i} + (4 - 5)\mathbf{j} = -5\mathbf{i} - \mathbf{j},$$

azaz az $\overrightarrow{AB}$ első koordinátája $-5$, második koordinátája $-1$.

◆ ◆ ◆

A példa alapján most is könnyen általánosíthatunk.

**Ha adottak az $\vec{a}(a_1; a_2)$ és $\vec{b}(b_1; b_2)$ vektorok, akkor**

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}) - (b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j}) = (a_1 - b_1) \cdot \vec{i} + (a_2 - b_2) \cdot \vec{j},$$

**azaz a különségvektor első koordinátája a megfelelő első koordináták különbsége, második koordinátája a megfelelő második koordináták különbsége.**

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$$





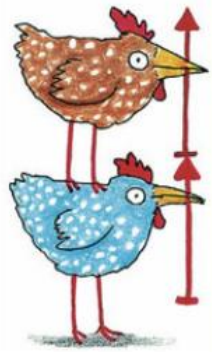
## Vektor számszorosának koordinátái

$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_1)\mathbf{i} + (\lambda \cdot a_2)\mathbf{j}$

**Adott az $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektor és a $\lambda$ valós szám.**

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}) = (\lambda \cdot a_1) \cdot \vec{i} + (\lambda \cdot a_2) \cdot \vec{j},$$

**azaz egy vektor $\lambda$-szorosának koordinátái a koordináták $\lambda$-szorosai.**



**4. példa**

Határozzuk meg a $-3 \cdot \vec{a} + 7 \cdot \vec{b}$ vektor koordinátáit, ha $\vec{a}$ az $A(-1; 2)$, $\vec{b}$ pedig a $B(4; 1)$ pont helyvektora!

**Megoldás**

A koordinátákra vonatkozó számolási szabályok alapján

$$-3 \cdot \vec{a} + 7 \cdot \vec{b} = -3 \cdot (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + 7 \cdot (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) =$$
$$= (3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) + (28\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) = 31\mathbf{i} + \mathbf{j},$$

a kérdéses vektor koordinátái tehát (31; 1).

# Feladatok

1. Az $A(2; -5)$ pont helyvektora $\vec{a}$. Adjuk meg a következő vektorok koordinátáit!

   *a)* $2 \cdot \vec{a}$; *b)* $-\vec{a}$; *c)* $\frac{\vec{a}}{3}$; *d)* $-\frac{1}{2} \cdot \vec{a}$; *e)* $-\frac{3 \cdot \vec{a}}{8}$;

   *f)* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} + 1 - \sqrt{2}\right) \cdot \vec{a}$.

2. Az $A(1; 4)$ pont helyvektora $\vec{a}$, a $B(-1; 3)$ pont helyvektora $\vec{b}$. Adjuk meg a következő vektorok koordinátáit!

   *a)* $\vec{a} + \vec{b}$; *b)* $\vec{a} - \vec{b}$; *c)* $\vec{b} - \vec{a}$; *d)* $2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$; *e)* $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$; *f)* $\frac{-3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{5}$.

3. Az $ABC$ háromszög csúcsai $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; -3)$. Az $ABC$ háromszöget az origó középpontú, $\lambda$ arányú középpontos hasonlósági transzformáció az $A'B'C'$ háromszögbe viszi. Adjuk meg a képháromszög csúcsainak koordinátáit, ha $\lambda$ értéke

   *a)* $-1$; *b)* $2$; *c)* $\frac{1}{3}$; *d)* $-3$; *e)* $-\frac{2}{3}$; *f)* $\frac{1}{\sqrt{2}}$!

4. Az $ABCD$ paralelogramma csúcsai pozitív körüljárási irány szerint vannak betűzve, és három csúcs koordinátái adottak: $A(1; 5)$, $B(-2; 3)$, $C(-3; -5)$. Számítsuk ki a $D$ csúcs koordinátáit!

5. Határozzuk meg az $A(2; -4)$ és $B(1; 7)$ pontok által meghatározott szakasz

   *a)* felezőpontjának; *b)* harmadolópontjainak

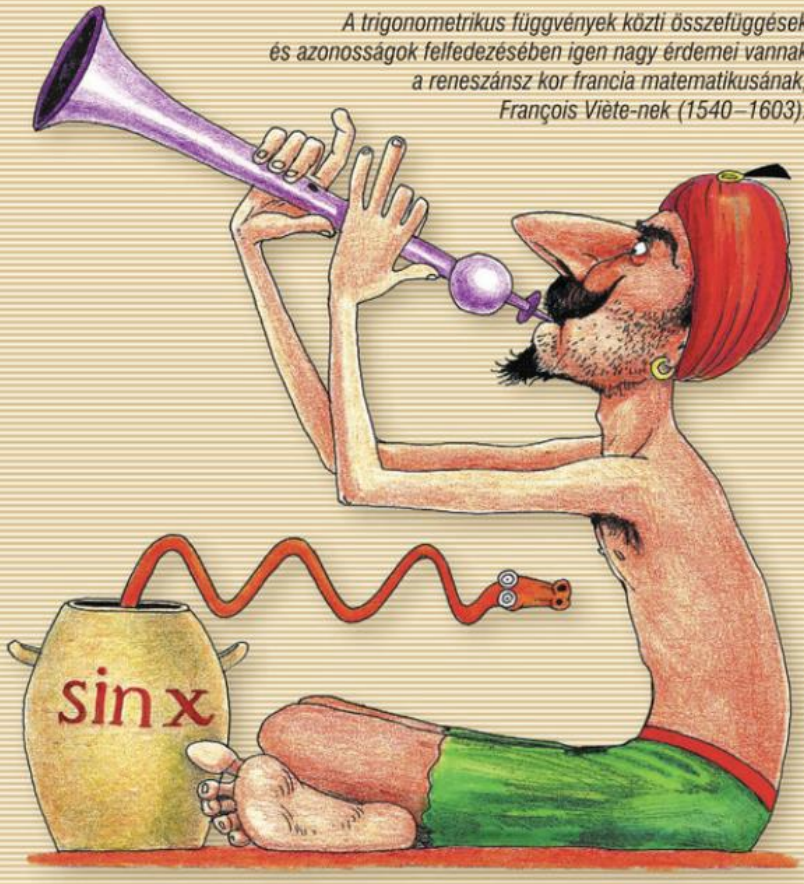
   koordinátáit!

# Szögfüggvények

*A csillagászat, a hajózás és más gyakorlati igények hívták életre az első „húrtáblázatokat", a trigonometrikus függvények elődeit. A hellenisztikus kor nagy tudósa, Ptolemaiosz (Kr. u. 2. sz.) már 0-tól 180 fokig 30 percenkénti beosztással készített ilyen táblázatot.*

*Mai értelemben vett szinusz- és koszinusztáblázatokat az indiai matematika hagyott ránk. A tangens- és kotangensfüggvényeket az arab tudósok vezették be a középkorban. Ptolemaiosz könyve is arab fordításban, „Almagest" címmel maradt ránk. Ez a könyv majd ezer évig a csillagászok fontos segédeszköze volt.*

*A trigonometrikus függvények közti összefüggések és azonosságok felfedezésében igen nagy érdemei vannak a reneszánsz kor francia matematikusának, François Viète-nek (1540–1603).*



# 1. A szinusz- és koszinuszfüggvény definíciója, egyszerű tulajdonságai

A geometriában megismerkedtünk a hegyesszögek szögfüggvényeivel. Most ezeket a definíciókat **tetszőleges forgásszögre** terjesztjük ki, természetesen ügyelve arra, hogy hegyesszögekre a régi definíció érvényben maradjon.

Az a célunk, hogy tetszőleges valós szám szinuszáról és koszinuszáról lehessen beszélni, így a következő utat választjuk.

A forgásszögeket valós számokkal tudjuk mérni, ez az **ívmérték. A szög szinusza és koszinusza egyben jelentse a szögek ívmértékéül szolgáló valós számok szinuszát és koszinuszát is.**

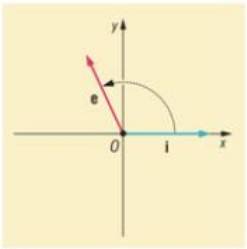
$2\pi$ (rad) $= 360^\circ$

$\frac{\pi}{2}$ (rad) $= 90^\circ$

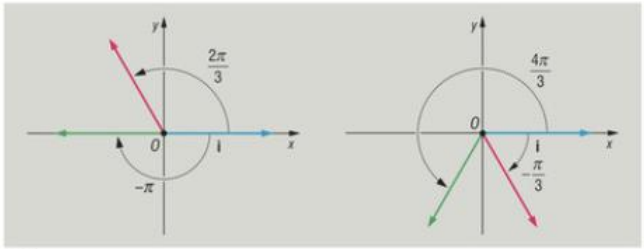
$\frac{\pi}{3}$ (rad) $= 60^\circ$

Idézzük fel az ívmértékről tanultakat! Helyezzük el most a forgásszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy csúcsa az origóban legyen, egyik szára essen egybe az $x$ tengely pozitív felével (ezt szokták néha a forgásszög elnevezéséhez kapcsolva „nyugvó" szárnak is nevezni, ennek megfelelően a szög másik szára „mozgó" szár).

Az $x$ tengely pozitív irányába mutató **i** egységvektorból úgy származtatható a szög másik szárának irányába mutató **e** egységvektor, hogy az **i**-t az origó körül az adott szöggel a megfelelő (pozitív vagy negatív) irányban elforgatjuk. *(1. ábra)*



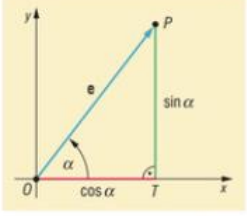

1. ábra




2. ábra

A szög mértékéül annak a körívnek az előjeles hosszát választjuk, amelyet a forgatás során az egységvektor végpontja befut. Például a $-\pi$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$ ívmértékű szögek a 2. ábrán láthatók.

3. ábra



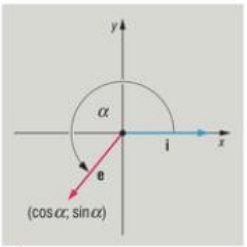

Legyen most $\alpha$ egy hegyesszög, azaz $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, és jelölje **e** az **i** alapvektor origó körül történő $\alpha$ szöggel való elforgatottját! *(3. ábra)*

Állítsunk merőlegest az **e** egységvektor $P$ végpontjából az $x$ tengelyre, ennek talppontja legyen $T$! Az $OPT$ derékszögű háromszög $OP$ átfogójának hossza 1, ezért $PT = \sin\alpha$ és $OT = \cos\alpha$. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az **e** egységvektor első koordinátája $\cos\alpha$, második koordinátája $\sin\alpha$.




Ennek megfelelően állapodunk meg az általános esetben is, így a következő definíciót adjuk:

**Definíció:** **Ha $\alpha$ egy tetszőleges valós szám, akkor $\cos\alpha$ egyenlő az $\vec{e}$ vektor első koordinátájával, $\sin\alpha$ pedig a második koordinátájával, ahol $\vec{e}$-t az $\vec{i}$ egységvektor origó körüli $\alpha$ ívmértékű szöggel történő elforgatásával kapjuk.** *(4. ábra)*




4. ábra

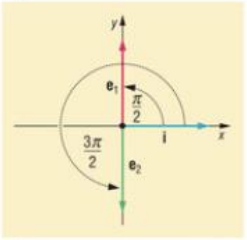
**1. példa**

Határozzuk meg a $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$ számok szinuszát és koszinuszát!

**Megoldás**

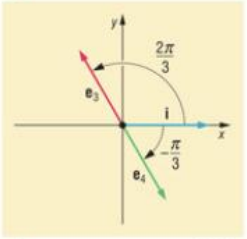
Az $e_1$ vektor az **i** pozitív irányú $\frac{\pi}{2}$-vel való elforgatásával, $e_2$ pedig a $\frac{3\pi}{2}$-vel való elforgatásával keletkezik *(5. ábra)*. Így

$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \cos\frac{3\pi}{2}=0,\ \sin\frac{3\pi}{2}=-1.$$




5. ábra

Az $e_3$ vektor és **i** szöge $\frac{2\pi}{3}$, $e_4$ és **i** szöge $-\frac{\pi}{3}$. *(6. ábra)*




6. ábra

Felhasználva a hegyesszögek szinuszának és koszinuszának már ismert értékeit, ezt kapjuk:

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## A szinusz- és a koszinuszfüggvény tulajdonságai

A definíció ismeretében érdemes összegyűjteni **a szinusz- és koszinuszfüggvények legfontosabb tulajdonságait.**

(1) Láttuk korábban, hogy ha $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, akkor $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

A szinusz- és a koszinuszfüggvény definíciója és Pitagorasz tétele alapján könnyen bizonyítható, hogy **tetszőleges $\alpha$ valós szám esetén teljesül a Pitagoraszi azonosság, azaz**

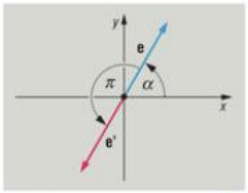
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

(2) Ha egy **e** vektor $\alpha$ szöget zár be **i**-vel, akkor $O$ körül pozitív irányban forgatva egy teljes körülfordulás után újra ugyanezt az **e** vektort kapjuk, tehát

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha,\quad \cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha.$$

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$$

Ezt a tulajdonságot úgy szokás megfogalmazni, hogy **a szinusz- és koszinuszfüggvények $2\pi$ szerint periodikusak.** Általában ha $\alpha$-hoz $2\pi$ egész számú többszörösét hozzáadjuk vagy kivonjuk, a szinusz és koszinusz értéke nem változik.




7. ábra

(3) Ha az **e** vektor az **i** vektorból $\alpha$ szöggel való elforgatással keletkezik, és **e**-t ezután $\pi$-vel, tehát egy fél fordulattal még tovább forgatjuk, akkor a kapott **e'** vektor **e**-nek az origóra vonatkozó tükörképe, ellentettje *(7. ábra)*. Ezért

$$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha,\quad \cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha.$$

$$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$$

(4) Ha az $\alpha$ szögű $\mathbf{e}(e_1, e_2)$ egységvektort $\frac{\pi}{2}$-vel forgatjuk tovább, akkor a kapott **e'** vektor koordinátái $(-e_2, e_1)$ *(8. ábra)*. Ezért

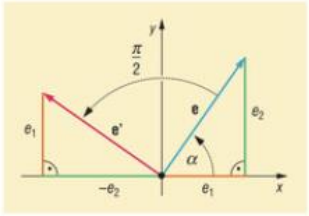
$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha.$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$$
$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$$

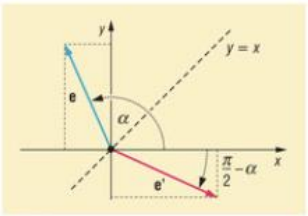
(5) Fontos és érdekes kapcsolat van az $\alpha$ szögű **e** és a $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ szögű **e'** vektorok koordinátái között. Könnyű észrevenni, hogy a két vektor egymásnak az $y=x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképe. Ennek megfelelően a koordinátáik felcserélődnek *(9. ábra)*, tehát

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$




8. ábra




9. ábra

(6) Ha az $\alpha$ szögű **e** vektor koordinátái $(e_1, e_2)$, akkor a $-\alpha$ szögű **e'** vektor koordinátái $(e_1, -e_2)$ *(10. ábra)*. Így

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

Az **e'** vektor és **e** egymás tükörképei az $x$ tengelyre vonatkozóan.

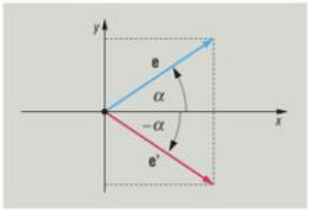
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

(7) Tükrözzük az $\alpha$ szögű $\mathbf{e}(e_1, e_2)$ vektort az $y$ tengelyre, ekkor koordinátái $(-e_1, e_2)$ *(11. ábra)*. Így a következő azonosságok olvashatók le:

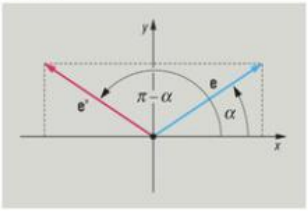
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

10. ábra




11. ábra



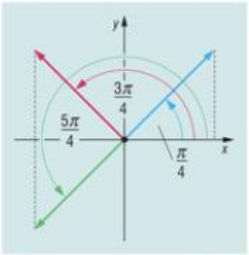
**2. példa**

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

*a)* $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$; *b)* $\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}$; *c)* $\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}$.

**Megoldás**

A definíció alapján érdemes számolni *(12. ábra)*:



12. ábra

*a)* $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$;

*b)* $\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}=1+0=1$;

*c)* $\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

◆ ◆ ◆

Természetesen szokás beszélni például 200°, 300°, 156° szinuszáról és koszinuszáról is. Ezek az **i** vektornak a megfelelő fokokban mért szöggel való elforgatásával kapott egységvektor koordinátáit jelentik.

**3. példa**

Számítsuk ki a következő értékeket!

*a)* $\sin 120°$; *b)* $\cos 120°$; *c)* $\sin(-60°)$; *d)* $\cos 150°$.

**Megoldás**

*a)* $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$;

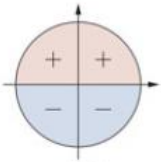
*c)* $\sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; *d)* $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

◆ ◆ ◆

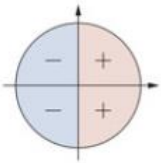
Az eddigiekben olyan szinusz- és koszinuszértékeket számoltunk ki, amelyek közvetlenül a definícióból, vagy a definíció alapján és a 30°, 45°, 60° hegyesszögek már ismert szinusz- és koszinuszértékeinek felhasználásával kiszámíthatók. Az egyéb esetekben a szögfüggvényértékek kiszámításához szükségünk van zsebszámológépre vagy táblázatra.




A táblázatok a hegyesszögek szögfüggvényértékeit tartalmazzák. A megismert tulajdonságok, azonosságok segítségével bármely szög szinuszának és koszinuszának kiszámítása visszavezethető hegyesszögekre.




$\sin\alpha$




$\cos\alpha$

**4. példa**

Táblázat használatával számítsuk ki a következő szögfüggvényértékeket!

*a)* $\sin 190°$; *b)* $\cos 200°$; *c)* $\sin 313°$; *d)* $\cos(-71°)$.

**Megoldás**

*a)* $\sin 190° = \sin(10° + 180°) = -\sin 10° = -0{,}1736$;

*b)* $\cos 200° = \cos(20° + 180°) = -\cos 20° = -0{,}9397$;

*c)* $\sin 313° = \sin(313° - 360°) = \sin(-47°) = -\sin 47° = -0{,}7314$;

*d)* $\cos(-71°) = \cos 71° = 0{,}3256$.

◆ ◆ ◆

Érdemes egy táblázatban összefoglalni a szinusz- és koszinuszfüggvény előjelét a $[0; 2\pi[$ intervallumban:

| | $0$ | $]0; \frac{\pi}{2}[$ | $\frac{\pi}{2}$ | $]\frac{\pi}{2}; \pi[$ | $\pi$ | $]\pi; \frac{3\pi}{2}[$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | + | 1 | + | 0 | – | –1 | – |
| cos | 1 | + | 0 | – | –1 | – | 0 | + |

## Feladatok

1. Számítsuk ki a következő értékeket!

   *a)* $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}$;

   *b)* $\sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{2}$;

   *c)* $\cos 11° + \cos 22° + \cos 33°$.

2. Igazoljuk a következő azonosságokat!

   *a)* $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$; *b)* $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$.

3. Melyik nagyobb:

   *a)* cos 1 vagy sin 1; *b)* cos 3 vagy sin 3?

4. Táblázat és zsebszámológép használata nélkül állapítsuk meg a következő különbségek előjelét!

   *a)* $\sin 123° - \sin 132°$; *b)* $\sin 58° - \cos 58°$; *c)* $\cos 35° - \cos 40°$.



## 2. A szinuszfüggvény grafikonja

Megismertük a szinuszfüggvény definícióját tetszőleges valós számra, más szavakkal definiáltuk az

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$$

függvényt, és megvizsgáltuk alaptulajdonságait. Most ábrázolni fogjuk a függvény grafikonját. Ezt érdemes fokozatosan, lépésről lépésre elvégezni, mert így pontosabb képet kapunk, és közben felhasználhatjuk a szinuszfüggvény alaptulajdonságait.

$\sin 0 = 0;$

$\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5;$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7;$

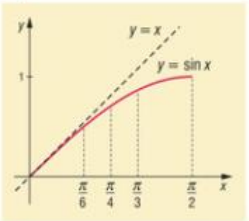
$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866;$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1.$

**I.** Először rajzoljuk fel a függvény grafikonját $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$-re!

Foglaljuk táblázatba az ismert függvényértékeket!

Függvényábrázolat vagy zsebszámológép felhasználásával még további 4–6 értéket is kiszámolva kialakul a grafikon. ***(13. ábra)***




*13. ábra*

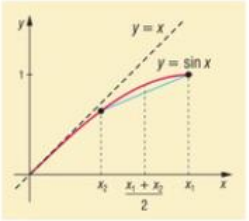
A definíció alapján elfogadjuk, hogy a szinuszfüggvény értéke a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban szigorúan nő, azaz nagyobb számhoz nagyobb függvényérték tartozik. Ahogy az **i** vektortól indulva egy **e** egységvektor fordul az $y$ tengely irányába mutató **j** egységvektorig ($x$ nő 0-tól $\frac{\pi}{2}$-ig), úgy a vektor második koordinátája fokozatosan nő 0-tól 1-ig.

Még két fontos tulajdonságot érdemes rögzíteni.

(1) Ha $0 < x \le \frac{\pi}{2}$, akkor $\sin x < x$, azaz a görbe az $y = x$ egyenletű egyenes egyenes alatt van;

(2) A $\sin x$ függvény $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon konkáv, azaz

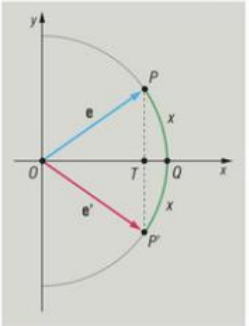
$$\text{ha}\quad 0 \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2},\quad \text{akkor}\quad \sin\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}.$$




*14. ábra*

A konkávitás szemléletesen azt jelenti, hogy $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon a szinuszfüggvény görbéje a grafikon két pontját összekötő húr felett van a két pont között. ***(14. ábra)***

*15. ábra*



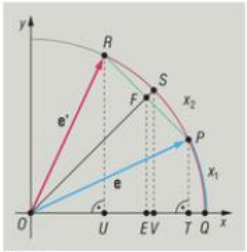

A két tulajdonságot be is lehet bizonyítani.

Az (1) tulajdonságot, azaz hogy $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ esetén $\sin x < x$, leolvashatjuk a 15. ábráról.

A forgó **e** egységvektor végpontja 0 és $\frac{\pi}{2}$ között egy negyed körívet ír le.

Tükrözzük ezt és vele együtt a $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ helyzetben álló **e**-t az $x$ tengelyre!

Mivel az $O$ középpontú, $OQ = 1$ sugarú körben a $PQ$ ív hossza $x$, ezért a $PQP'$ ív hossza $2x$. A $PT = \sin x$ alapján $PP' = 2 \cdot \sin x$, és nyilván igaz, hogy $PP'$ kisebb, mint a $PQP'$ ív hossza, tehát $2 \cdot \sin x < 2x$, amiből $\sin x < x$ következik.



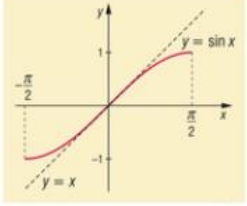

16. ábra

A (2) tulajdonság bizonyításához ugyancsak érdemes ábrát rajzolni. ***(16. ábra)***

Legyen az $O$ középpontú, $OQ = 1$ sugarú körben a $PQ$ ív hossza $x_1$, az $RQ$ ív hossza $x_2$ ($x_1 < x_2$), és $S$ legyen a $PR$ ív felezőpontja, akkor az $SQ$ ív hossza $\frac{x_1 + x_2}{2}$. A szinuszfüggvény definíciója alapján $PT = \sin x_1$, $RU = \sin x_2$, valamint $SV = \sin\frac{x_1 + x_2}{2}$! Az $UTPR$ trapéz $FE$ középvonalának hossza $\frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}$, és mivel $F$ az $O$-hoz közelebb van, mint $S$, ezért $FE < SV$, és éppen ezt akartuk igazolni.

◆ ◆ ◆

**II.** A következő lépésben $-\frac{\pi}{2} \le x \le 0$-ra rajzoljuk meg a szinuszfüggvény grafikonját. Használjuk fel az előző lecke (6) azonosságát.




17. ábra

Ha most $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, akkor $-\frac{\pi}{2} \le -x \le 0$ és $\sin(-x) = -\sin x$, ami azt jelenti, hogy a grafikon szimmetrikus az origóra.

A tükrözésből következik, hogy a $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ intervallumban a szinuszfüggvény konvex, azaz a grafikonja két pont között a pontokat összekötő húr alatt van. ***(17. ábra)***

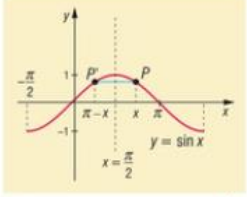
◆ ◆ ◆

**III.** Folytassuk most a szinuszfüggvény grafikonjának megrajzolását a $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ intervallumban.

Ehhez használjuk fel az előző lecke (7) azonosságát.

Ha $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$, akkor $\frac{\pi}{2} \ge \pi - x \ge -\frac{\pi}{2}$ és $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Az azonosság geometriai nyelvre fordítva azt jelenti, hogy a szinuszfüggvény grafikonja szimmetrikus az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenlettel jellemezhető, $y$ tengellyel párhuzamos egyenesre. Ez abból látható, hogy $x$ és $\pi - x$ egyenlő távolságra van a $\frac{\pi}{2}$ két oldalán, és az azonosság szerint ezeken a helyeken a függvényértékek egyenlők. ***(18. ábra)***



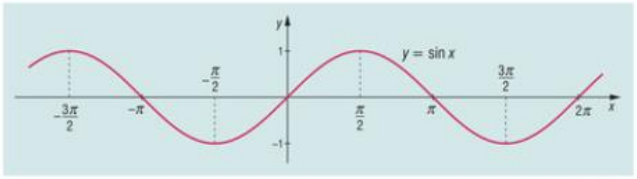

18. ábra

Ebből az is következik, hogy a szinuszfüggvény a $[0; \pi]$ intervallumban konkáv.

◆ ◆ ◆

Az előző lecke (2) azonossága szerint a szinuszfüggvény $2\pi$ szerint periodikus, tehát $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

Ez azt jelenti, hogy a függvény $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$-ben megrajzolt grafikonját $2\pi$-vel, illetve $2\pi$ egész számú többszöröseivel eltolva az egész számegyenesen megkaphatjuk a szinuszfüggvény görbéjét. ***(19. ábra)***

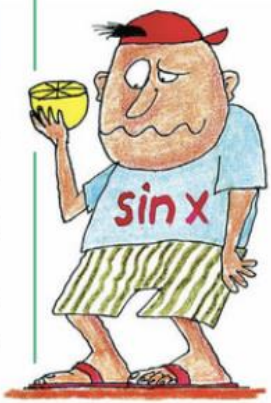



19. ábra

**1. példa**

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

*a)* $\sin x = 0$; *b)* $\sin x = 1$; *c)* $\sin x = -1$.




**Megoldás**

*a)* A szinuszfüggvény ábrázolásakor láttuk, hogy egy perióduson belül, például a $-\frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2}$ intervallumban két helyen 0 az értéke, az $x_1 = 0$ és $x_2 = \pi$ helyen. A $2\pi$ szerinti periodikusságból következik, hogy az *a)* egyenlet összes megoldása, tehát a függvény összes zérushelye $x = k\pi$ alakú, ahol $k$ tetszőleges egész szám, röviden $k \in \mathbb{Z}$.

*b)* A $\sin x = 1$ egyenletnek a legkisebb pozitív megoldása $x = \frac{\pi}{2}$, és egy periódusban csak egy megoldása van. Ebből következik, hogy az egyenlet összes megoldása: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

A *c)* egyenletnek teljesen hasonló módon adódnak a megoldásai:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

◆ ◆ ◆



Összefoglalva az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ függvény **legfontosabb tulajdonságait:**

(1) minden valós számra értelmezve van, értékkészlete a $[-1; 1]$ zárt intervallum (ezt itt a szemlélet alapján elfogadjuk, a bizonyításához mélyebb eszközök kellenek);

(2) $2\pi$ szerint periodikus;

(3) a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon szigorúan nő;

(4) a $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ intervallumon szigorúan csökken;

(5) páratlan függvény, azaz $\sin(-x) = -\sin x$ bármely valós $x$-re, és így grafikonja szimmetrikus az origóra;

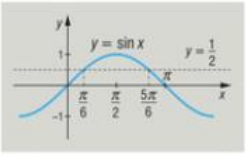
(6) maximuma van a $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ helyeken, a maximum értéke 1;

(7) minimuma van a $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ helyeken, a minimum értéke $-1$;

(8) zérushelye van az $m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ helyeken.

**2. példa**

Oldjuk meg a $\sin x = \frac{1}{2}$ egyenletet a valós számok körében!




20. ábra

**Megoldás**

Itt is érdemes először egy perióduson belül keresni a megoldást. Szemléletesen az egyenletet úgy is fogalmazhatjuk, hogy azt, illetve azokat a helyeket keressük, ahol a szinuszfüggvény görbéje metszi az $y = \frac{1}{2}$ magasságban az $x$ tengellyel párhuzamosan húzott egyenest. *(20. ábra)*

Tudjuk, hogy $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$-ban a szinuszfüggvény szigorúan nő, és $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, itt tehát a $\frac{\pi}{6}$ az egyetlen megoldás. A $\frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2}$-ben is kapunk egyetlen megoldást: $x = \frac{5\pi}{6}$, itt a szinuszfüggvény szigorúan fogy.

A $2\pi$ szerinti periodikusság miatt az egyenlet összes megoldása:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ és } x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z}).$$




**3. példa**

Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját!

*a)* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; *b)* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = \sin 2x$.

**Megoldás (a)**

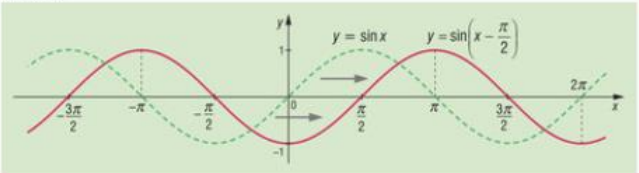
A 9. osztályban már megismert módszer szerint úgy érdemes gondolkodni, hogy az $f$ függvény minden értéket $\frac{\pi}{2}$-vel nagyobb helyen vesz fel, mint a szinuszfüggvény. Például:

$$x = \frac{\pi}{2}, \ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 0 = 0; \qquad x = \pi, \ f(\pi) = \sin\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$x = 2\pi, \ f(2\pi) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\sin x$ grafikonját $\frac{\pi}{2}$-vel el kell tolni pozitív irányban az $x$ tengely mentén. Így kapjuk az $f$ függvény grafikonját. *(21. ábra)*

*21. ábra*



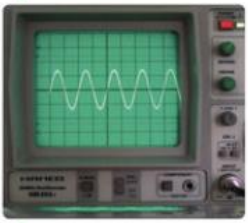



**Megoldás (b)**

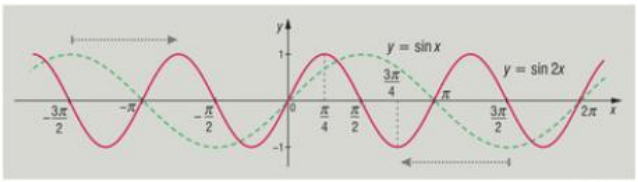
A *b)* feladat esetében is hasonló megoldás vezet célhoz. Itt a $g$ függvény feleakkora helyen veszi fel ugyanazt az értéket, mint a szinuszfüggvény. Például:

$$x=\frac{\pi}{4},\ g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;\qquad x=\frac{3\pi}{4},\ g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1;$$

$$x=\frac{\pi}{2},\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi=0;\qquad x=-\frac{\pi}{4},\ g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$



Ez a grafikonon azt jelenti, hogy az $y$ tengelyre merőlegesen az $x$ tengely mentén felére zsugorítjuk a szinuszfüggvény grafikonját, így kapjuk meg a $g$ függvény grafikonját. ***(22. ábra)***




22. ábra

## Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

   *a)* $\sin x=-\frac{1}{2}$; *b)* $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $|\sin x|=\frac{1}{2}$.

2. Ábrázoljuk a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

   *a)* $f(x)=\sin x-1$; *b)* $g(x)=2\sin x$; *c)* $h(x)=\frac{1}{2}\sin x+1$;

   *d)* $k(x)=|\sin x|$.

3. Ábrázoljuk a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

   *a)* $f(x)=\sin(x-\pi)$; *b)* $g(x)=\sin(-x)$; *c)* $h(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$;

   *d)* $k(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$; *e)* $l(x)=\sin|x|$.

4. Igazoljuk, hogy ha $0\le x_1\le x_2\le x_3\le\pi$, akkor

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3}{3}\le\sin\frac{x_1+x_2+x_3}{3}!$$

5. Az előző feladat felhasználásával igazoljuk, hogy ha $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ egy háromszög szögei, akkor

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}!$$

# 3. A koszinuszfüggvény grafikonja, egyenletek, egyenlőtlenségek

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

A koszinuszfüggvény grafikonjának ábrázolásához használjuk fel az 1. részben igazolt, minden $x$ valós számra érvényes

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

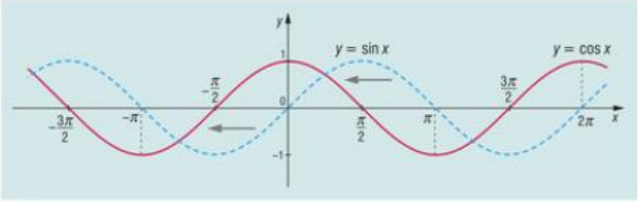
azonosságot! Ennek alapján az

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$$

függvény grafikonja azonos a

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

függvény grafikonjával. Ez utóbbi úgy keletkezik a szinuszfüggvény grafikonjából, hogy $\frac{\pi}{2}$-vel eltoljuk negatív irányban az $x$ tengely mentén. *(23. ábra)*




*23. ábra*

Az előző lecke 3/*a* példájához hasonlóan csak annyit kell végiggondolni, hogy a $g$ függvény minden értéket $\frac{\pi}{2}$-vel „hamarabb" (kisebb helyen) vesz fel, mint a szinuszfüggvény.

**1. példa**

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

*a)* $\cos x = 0$; *b)* $\cos x = 1$; *c)* $\cos x = -1$.

**Megoldás (a)**

Az *a)* egyenlet megoldásai egy perióduson belül, például $-\pi \le x \le \pi$-ben $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$, ezek különbsége $\pi$. Felhasználva, hogy a koszinuszfüggvény $2\pi$ szerint periodikus, az összes megoldás:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezek a függvény **zérushelyei.**

**Megoldás (b)**

A *b)* egyenlet megoldása a $[-\pi; \pi]$ intervallumban: $x = 0$. A periodikusság alapján az egyenlet összes megoldása:

$$x = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Érdemes megjegyezni, hogy ezek az $x$ értékek a koszinuszfüggvény **maximumhelyei.**

**Megoldás (c)**

A *c)* egyenlet megoldása a $[-\pi; \pi]$ intervallumban éppen az intervallum két végpontja: $-\pi$, és $\pi$. A $2\pi$ szerinti periodicitás miatt az egyenlet összes megoldása:

$$x = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezek az $x$ értékek a koszinuszfüggvény **minimumhelyei.**

◆ ◆ ◆

**A koszinuszfüggvény legfontosabb tulajdonságai:**



(1) értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a $[-1; 1]$ intervallum;

(2) $2\pi$ szerint periodikus;

(3) a $[0; \pi]$ intervallumon szigorúan csökken;

(4) a $[-\pi; 0]$ intervallumon szigorúan nő;

(5) páros függvény, azaz $\cos(-x) = \cos x$ bármely valós $x$-re, és így grafikonja szimmetrikus az $y$ tengelyre;

(6) maximuma van a $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ helyeken, a maximum értéke 1;

(7) minimuma van a $\pi + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ helyeken, a minimum értéke $-1$;

(8) zérushelye van a $\frac{\pi}{2} + m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ helyeken.

**2. példa**

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

*a)* $\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}$;

*b)* $\cos 100^\circ + \cos 160^\circ + \cos 300^\circ$;

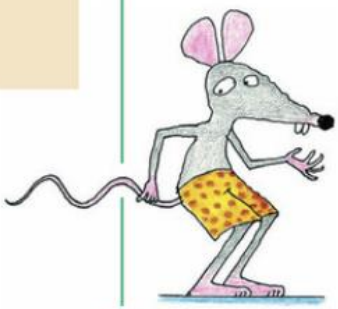
*c)* $\cos 2002^\circ + \sin 2002^\circ$.

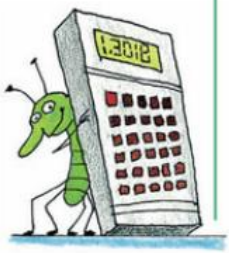
**Megoldás (a)**

Az *a)* esetben így járhatunk el:

$$\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$





**Megoldás (b)**

A *b)* esetben az ismert azonosságok mellett a függvénytáblázatra vagy zsebszámológépre is szükség van.

$$\cos 100^\circ + \cos 160^\circ + \cos 300^\circ = -\cos 80^\circ - \cos 20^\circ + \cos 60^\circ \approx$$

$$\approx -0{,}1736 - 0{,}9397 + 0{,}5 = -0{,}6133.$$

**Megoldás (c)**

A *c)* esetben először a 2002°-ot írjuk fel így:

$$2002^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 202^\circ.$$

A $2\pi$, azaz a 360°-os periodicitás miatt:

$$\cos 2002^\circ + \sin 2002^\circ = \cos 202^\circ + \sin 202^\circ =$$

$$= -\cos 22^\circ - \sin 22^\circ \approx -0{,}9272 - 0{,}3746 = -1{,}3018.$$

**3. példa**

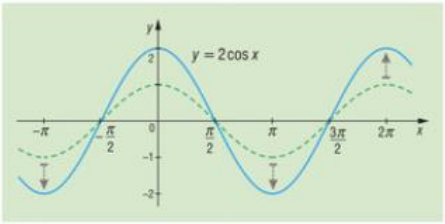
Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját!

*a)* $f(x) = 2\cos x$; *b)* $g(x) = |\cos x|$; **c)* $h(x) = \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$.

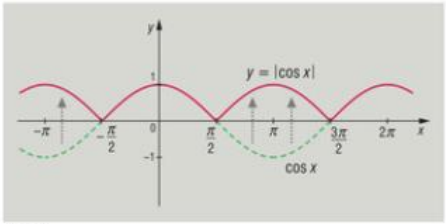
**Megoldás (a)**

Az $f$ függvény minden $x$ helyen 2-szer akkora értéket vesz fel, mint a koszinuszfüggvény, grafikonját tehát a koszinusz grafikonjának az $y$ tengely irányában történő 2-szeres nyújtásával kapjuk.

Az $f$ függvény grafikonját a 24. ábrán láthatjuk.




24. ábra




25. ábra

**Megoldás (b)**

A $g$ függvény definícióját az abszolút érték ismeretében így is írhatjuk:

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } \cos x \geq 0, \\ -\cos x, & \text{ha } \cos x < 0. \end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy a koszinuszfüggvény grafikonjának az $x$ tengely alatti darabjait tükrözni kell az $x$ tengelyre, a többi darab változatlanul marad.

A $g$ függvény grafikonja a 25. ábrán látható.

**Megoldás (c)**

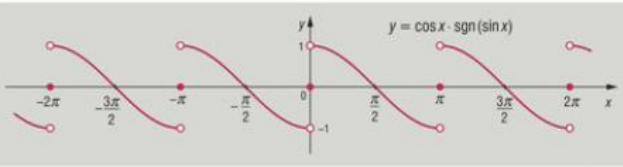
A $h$ függvény grafikonjához szükségünk lesz először az $\operatorname{sgn}(\sin x)$ kifejezés vizsgálatára, ez a szinuszfüggvény „előjele". Érdemes megrajzolni az $x \mapsto \operatorname{sgn}(\sin x)$ függvény képét. ***(26. ábra)***




*26. ábra*




A koszinusz értékeit tehát a $\pi$ egész számú többszöröseinek helyén 0-val, a kimaradó $\pi$ hosszúságú, egymást követő nyílt intervallumokon felváltva 1-gyel, illetve –1-gyel kell szorozni. ***(27. ábra)***




*27. ábra*

**4. példa**

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok körében!

*a)* $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$; *b)* $2 \cdot \cos^2 x - 1 = 0$.

**Megoldás (a)**

Vigyázat! Az *a)* egyenletnek a valós számok körében végtelen sok megoldása van, nem csak az $x = \frac{\pi}{3}$!

A koszinuszfüggvény $2\pi$ szerint periodikus, ezért először egy periódusban belül, például a $[-\pi; \pi]$ intervallumban keressük meg a megoldást vagy megoldásokat.

Világos, hogy itt a $\frac{\pi}{3}$ mellett a $-\frac{\pi}{3}$ is jó megoldás, és más megoldás nincs, hiszen a $[-\pi; 0]$ intervallumban szigorúan nő a függvény, legfeljebb egy megoldás van, ez a $-\frac{\pi}{3}$.

A $[0; \pi]$ intervallumban szigorúan csökken a függvény, itt is legfeljebb egy megoldás van, ez a $\frac{\pi}{3}$. Az összes megoldás tehát:

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ és } x_2 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z}).$$




### Megoldás (b)

A *b)* egyenletet először rendezzük. Mivel $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, ezért

$$|\cos x| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A kapott egyenletnek egy perióduson belül a $[-\pi; \pi]$ intervallumban négy megoldása van:

$$\frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}.$$

A szomszédos gyökök különbsége $\frac{\pi}{2}$, így az összes megoldást könnyű így összefoglalni:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**5. példa**

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

*a)* $\cos x < \frac{1}{2}$; *b)* $2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} > 0$; **c)* $\sin(\cos x) < 0$.

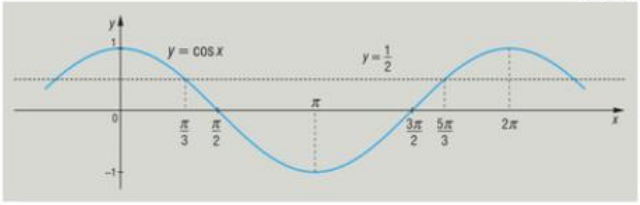
### Megoldás (a)

Az *a)* esetben könnyű leolvasni a 28. ábráról a megoldást, ha megrajzoljuk a koszinuszfüggvény grafikonját egy periódusban, például $[0; 2\pi]$-ban, és meghúzzuk az $x$ tengellyel párhuzamos $y = \frac{1}{2}$ egyenest. Az egyenes a $\frac{\pi}{3}$-nál és $\frac{5\pi}{3}$-nál metszi a grafikont, így a $[0; 2\pi]$-ban a függvény tulajdonságai miatt $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ esetén igaz az egyenlőtlenség. Figyelembe véve, hogy a koszinuszfüggvény $2\pi$ szerint periodikus, az összes megoldás:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a koszinusz definíciója alapján azt vizsgáljuk, mekkora $x$ esetén lesz az $\alpha$ nagyságú szöggel elforgatott **i** vektor első koordinátája $\frac{1}{2}$-nél kisebb.

*28. ábra*



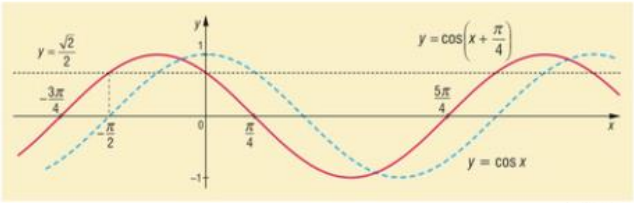
**Megoldás (b)**

Először rendezzük az egyenlőtlenséget a következő alakra:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Itt most az $x\mapsto \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ függvény grafikonjának a megrajzolása segíthet. A koszinuszfüggvény grafikonját $\frac{\pi}{4}$-gyel toljuk el negatív irányban az $x$ tengely mentén. Válasszuk most egy periódusnak a $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumot, és ezt figyelembe véve a negatív irányú eltolás után a $\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ intervallumon kapjuk a $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ függvény megfelelő periódusának grafikonját.

Rajzoljuk meg az $x$ tengellyel párhuzamos, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlettel jellemezhető egyenest! *(29. ábra)*

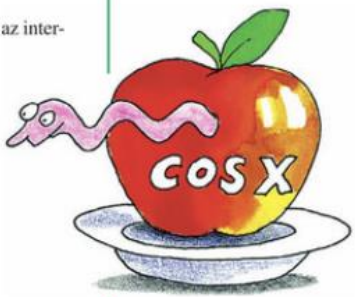



*29. ábra*

Az egyenes a $-\frac{\pi}{2}$ és 0 helyeken metszi a függvény grafikonját ebben az intervallumban, az összes megoldás tehát:

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Itt már figyelembe vettük a $2\pi$ szerinti periodikusságot.




**Megoldás (c)**

Először azt célszerű észrevenni, hogy bármely $x$ valós számra:

$$-\frac{\pi}{2}<-1\le\cos x\le 1<\frac{\pi}{2}.$$

Így tehát a szinuszfüggvénynek csak a $[-1;1]$ intervallumban felvett értékeinek előjele érdekel bennünket, pontosabban azt kérdezzük, hogy ebben az intervallumban mikor negatív.

Erre könnyű a válasz: ha $\cos x<0$. Ezt az egyenlőtlenséget már egyszerű megoldani, az összes megoldás:

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

A fenti példák jó mutatják, hogy szögfüggvényeket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásához nagyon fontos a megfelelő trigonometrikus függvények tulajdonságainak ismerete.

**6. példa**

Tegyük fel, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$! Melyik nagyobb: $\cos(\sin x)$, vagy $\sin(\cos x)$?

**Megoldás**

Tudjuk, hogy ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin x < x.$$

Mivel $0 < \cos x < 1 < \frac{\pi}{2}$, ezért

$$\sin(\cos x) < \cos x.$$

A koszinuszfüggvény $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallumban szigorúan csökken, ezért

$$\cos(\sin x) > \cos x.$$

Ezekből következik, hogy

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x).$$

## Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!
   *a)* $\sin x = \cos x$; *b)* $\sin x = \sin(x + \pi)$; *c)* $\sin^2 x - 1 = 0$.
2. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!
   *a)* $\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$; *b)* $\cos 2x < 0$; **c)* $\cos(\sin x) > 0$.
3. Ábrázoljuk a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!
   *a)* $f(x) = \cos x + 1$; *b)* $g(x) = 3\cos x$; *c)* $h(x) = 1 - 2\cos x$;
   *d)* $k(x) = |\cos x|$.
4. Ábrázoljuk a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!
   *a)* $f(x) = \cos(x + \pi)$; *b)* $g(x) = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|$; *c)* $h(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$;
   **d)* $k(x) = \cos(x - \pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$.

***5.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!
*a)* $x^2 + 1 = \sin x$; *b)* $x + \frac{1}{x} \leq 2 \cdot |\sin x|$; *c)* $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \leq 2 \cdot \sin x$.

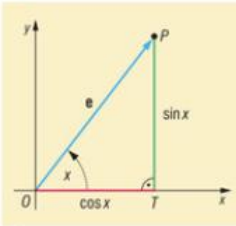





## 4. A tangens- és kotangensfüggvény

A következőkben a tangens- és kotangensfüggvény értelmezését kiterjesztjük minden olyan valós számra, amelyre ez – a hegyesszögek esetére megismert definícióval összhangban – lehetséges.

Legyen először $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tehát $x$ egy hegyesszög ívmértéke. Jelölje **e** az $x$ ívmértékű szöggel elforgatott **i** egységvektort! *(31. ábra)*




*31. ábra*

Az $OTP$ derékszögű háromszögben a $POT$ szög tangense és kotangense a hegyesszögekre ismert definíció alapján:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ezeket a definíciókat fogadjuk el az általános esetben is minden olyan $x \in \mathbb{R}$-re, amelyre értelmük van, azaz amelyre a nevező nem 0!

Azt már tudjuk, hogy

$\cos x = 0$ az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ helyeken teljesül;

$\sin x = 0$ az $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ helyeken teljesül.

**tangens, kotangens**

**DEFINÍCIÓ: Ha az $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, akkor**

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

**és ha $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, akkor**

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

**1. példa**

Számítsuk ki a következő tangens és kotangens értékeket!

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}; \quad \operatorname{tg}\pi; \quad \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}; \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}.$$

**Megoldás**

A definíció alapján:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\sqrt{3}; \quad \operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1; \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

## A tangens- és a kotangensfüggvény tulajdonságai

Vegyük sorra a tangens- és kotangensfüggvény legfontosabb tulajdonságait.

(1) Ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$,

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$

azaz a tangensfüggvény $\pi$ **szerint periodikus.**

Hasonlóan adódik, hogy

$$\operatorname{ctg}(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$

ha $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, a kotangensfüggvény is $\pi$ **szerint periodikus.**

(2) Ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$,

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x,$$

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

a tangensfüggvény **páratlan függvény.**

Hasonlóan adódik, hogy

$$\operatorname{ctg}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{ctg} x,$$

$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

ha $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, a kotangensfüggvény is **páratlan függvény.**

(3) Ha $x \neq k\pi$, és $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, akkor mind a tangens, mind a kotangens értelmezve van, és $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$. Ez közvetlenül a definícióból látható. Mivel ebben az esetben $\operatorname{ctg} x \neq 0$, az összefüggést így is írhatjuk:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$

(4) A következő azonosság még egy érdekes és hasznos kapcsolatra mutat rá a tangens- és kotangensfüggvény között. Tegyük fel, hogy $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, akkor a tangens értelmezve van az $x + \frac{\pi}{2}$ helyen, a kotangens pedig az $x$ helyen. Ekkor:

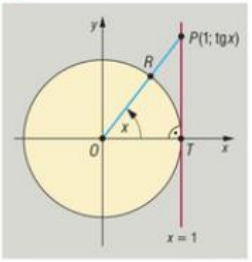
$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{ctg} x.$$

$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x$

## A tangensfüggvény ábrázolása

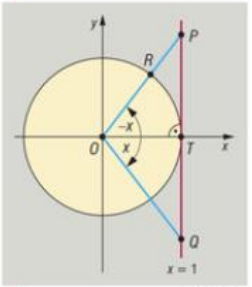
A tangensfüggvény értékei szemléletessé tehetők a következő módon. Válasszuk ki a $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $\pi$ hosszúságú intervallumot (a többi helyen, ahol a tangens értelmezve van, a $\pi$ periódus miatt nem kapunk új értéket).

Vegyük fel a derékszögű koordináta-rendszerben az origó középpontú egységsugarú kört, és húzzuk meg a kör (1; 0) pontjában az érintőt! ***(32. ábra)***



32. ábra

Ez az egyenes az $x = 1$ egyenlettel jellemezhető. Az $x$ számot először válasszuk úgy, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ teljesüljön, és rajzoljuk meg az $O$-n áthaladó, az $x$ tengely pozitív felével $x$ ívmértékű szöget bezáró félegyenest! Legyen ennek a félegyenesnek és az $x = 1$ egyenletű egyenesnek a metszéspontja $P$. Mivel $OPT$ derékszögű háromszög, amelynek $OT$ befogója 1 hosszúságú, tudjuk, hogy $\operatorname{tg} x = PT$. Másképpen ezt úgy is mondhatjuk, hogy a $P$ pont koordinátái $(1; \operatorname{tg} x)$.



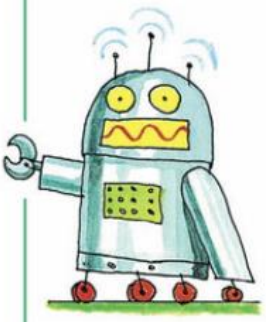
33. ábra

Mivel az értelmezés szerint $\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0$, ez a szemléltetés $x = 0$ esetén is jó, hiszen ekkor $P$ szerepét $T$ veszi át, és ennek koordinátái valóban $x = 1$ és $y = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Ha $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, akkor $\frac{\pi}{2} > -x > 0$ és $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, ez pedig a 33. ábrán a $P$ pont $y$ koordinátája.

Ha $P$-t tükrözzük az $x$ tengelyre, és a $Q$ tükörképét $O$-val összekötjük, akkor az $OQ$ félegyenes az $x$ tengely pozitív felével éppen $x$ ívmértékű szöget zár be, és a $Q$ pont $y$ koordinátája a tükrözés miatt $\operatorname{tg} x$. Ez azt jelenti, hogy ekkor is jó a szemléltetés.

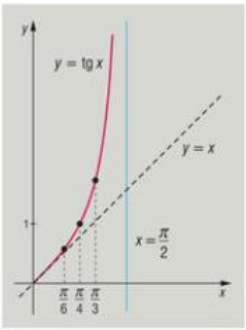
A tangensfüggvénynek egy fontos tulajdonságát láthatjuk be a most megismert szemléltetés alapján.



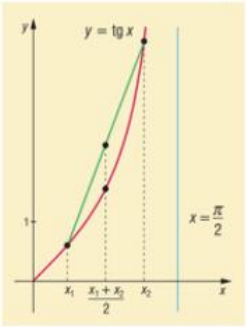
Ha $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, akkor $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, azaz a tangensfüggvény szigorúan nő a $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ nyílt intervallumban.

A 32. ábráról azt is leolvashatjuk, hogy ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor $x < \operatorname{tg} x$, mert az $OTP$ derékszögű háromszög területe $\frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x$, míg az $OTR$ körcikk területe $\frac{1}{2} \cdot x$ (a kör sugara 1), és az utóbbi nyilván kisebb a háromszög területénél.

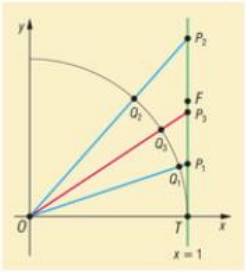
A $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumban a tangensfüggvény bármilyen nagy pozitív értéket felvesz. Ezt úgy láthatjuk be, hogy a $TP$ félegyenesre a $T$-ből




34. ábra




35. ábra




36. ábra

indulva bármilyen hosszú szakaszt is mérünk fel, a kapott $S$ pontot $O$-val összekötve megkapjuk azt az $SOT$ szöget, amelynek tangense éppen az adott hosszúság mértékszámával egyenlő.

◆ ◆ ◆

**Ábrázoljuk** most már az

$$x \mapsto \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**függvény grafikonját!**

Először $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$-ben rajzoljuk meg a grafikont. A függvény néhány értékének megfelelő pont:

$$\operatorname{tg} 0 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Ezeket ábrázoljuk. Figyelembe vesszük, hogy ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor $\operatorname{tg} x > x$, tehát a grafikon az $y = x$ egyenletű egyenes felett halad. Az $x = \frac{\pi}{2}$ helynél húzzunk egy $y$ tengellyel párhuzamos egyenest, mert itt a tangens nincs értelmezve, de ha $\frac{\pi}{2}$-hez közeledünk, akkor értéke tetszőlegesen nagy lehet, a grafikon az egyeneshez simul. ***(34. ábra)***

◆ ◆ ◆

Érdemes végiggondolni azt, hogy a tangensfüggvény a $0 < x < \frac{\pi}{2}$ intervallumban konvex ***(35. ábra)***, azaz ha $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2} > \operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Ennek igazolásához a tangens szemléltetésénél alkalmazott gondolat segíthet. ***(36. ábra)***

Az egységsugarú $O$ középpontú körben a $TQ_1$ ív hossza $x_1$, a $TQ_2$ ív hossza $x_2$, és ha $Q_3$ a $Q_1Q_2$ ív felezőpontja, akkor a $TQ_3$ ív hossza:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Ebből következően $\operatorname{tg} x_1 = P_1T$, $\operatorname{tg} x_2 = P_2T$, $\operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2}{2} = P_3T$.

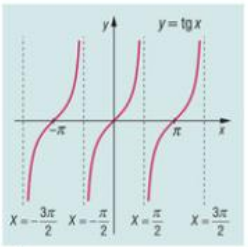
Ha $F$ jelöli a $P_1P_2$ szakasz felezőpontját, akkor $FT = \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2}$. Mivel az $OP_1P_2$ háromszögben $OP_3$ szögfelező, a közrefogó oldalak arányában osztja a $P_1P_2$ oldalt. Mivel $P_1O < P_2O$, $P_1P_3 < P_2P_3$, tehát $P_3T < FT$, és ezt akartuk igazolni.

◆ ◆ ◆

A tangensfüggvény páratlan, így ha $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, akkor a grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az előző, $0 < x < \frac{\pi}{2}$-re megrajzolt görbét

tükrözzük az origóra. Felhasználva még, hogy a tangens $\pi$ szerint periodikus, a teljes függvény grafikonját elkészítjük. *(37. ábra)*

Érdemes hangsúlyozni, hogy a tangensfüggvény a $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ nyílt intervallumban szigorúan nő, és minden valós számot értékként (pontosan egyszer) felvesz, azaz értékkészlete az $\mathbb{R}$ halmaz.



37. ábra

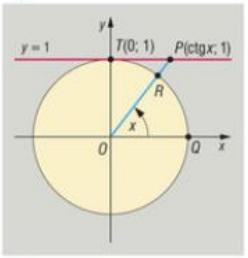
## A kotangensfüggvény ábrázolása

**2. példa**

Az origó középpontú, egységsugarú kör (0; 1) pontjához húzott, $x$ tengellyel párhuzamos érintő segítségével szemléltessük a kotangensfüggvény értékeit, ha $0 < x < \pi$!

**Megoldás**

Húzzuk meg az érintőt, és vegyünk fel a körön egy $R$ pontot úgy, hogy az $ROQ$ szög ívmértéke $x$ legyen $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$! *(38. ábra)*



38. ábra

Az $OPT$ szög ívmértéke szintén $x$, hiszen váltószöge az $ROQ$ szögnek. Az $OTP$ derékszögű háromszögben az $OT$ befogó 1, tehát $PT = \operatorname{ctg} x$.

Ha $x = \frac{\pi}{2}$, $P$ és $T$ egybeesik, így $PT = 0$ és $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$. Ha $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, akkor is jó ez a szemléltetés, a ctg $x$ előjele negatív lesz.

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy ha $0 < x < \pi$, akkor a $P$ pont első koordinátája ctg $x$.

◆ ◆ ◆

**Ábrázoljuk az**

$$x \mapsto \operatorname{ctg} x, \quad x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

**függvény grafikonját!**

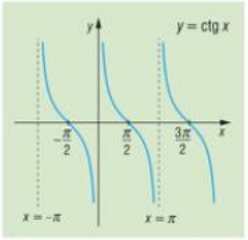
Ehhez csak azt kell meggondolni, hogy a (4) tulajdonság szerint

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x,$$

tehát ha $x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$:

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

A kotangensfüggvény grafikonját tehát úgy kapjuk a tangens grafikonjából, hogy $\frac{\pi}{2}$-vel negatív irányba toljuk az $x$ tengely mentén, és a kapott görbét tükrözzük az $x$ tengelyre. *(39. ábra)*



39. ábra

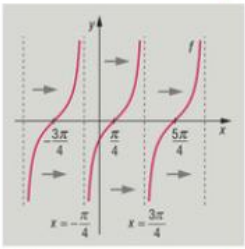
A kotangensfüggvény a $0 < x < \pi$ intervallumban szigorúan fogyó, minden valós számot értékként (pontosan egyszer) felvesz, azaz értékkészlete az $\mathbb{R}$ halmaz.

**3. példa**

Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját, ahol $k \in \mathbb{Z}$!

*a)* $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$; *b)* $g(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \neq (2k+1)\pi$;

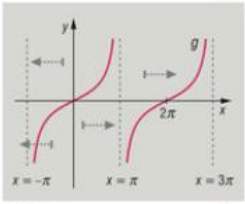
*c)* $h(x) = |\operatorname{ctg} x|$, $x \neq k\pi$.




40. ábra

**Megoldás (a)**

Az $f$ függvény grafikonját úgy kapjuk a tangens grafikonjából, hogy az $x$ tengely mentén $\frac{\pi}{4}$-gyel pozitív irányban eltoljuk, hiszen az $f$ a tangens megfelelő értékeit $\frac{\pi}{4}$-gyel nagyobb helyen veszi fel. *(40. ábra)*



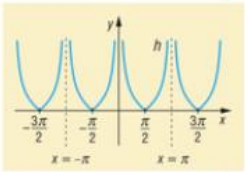

41. ábra

**Megoldás (b)**

A $g$ függvény a tangens megfelelő értékeit kétszer akkora helyen veszi fel. Például

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1, \quad g(2\pi) = \operatorname{tg}\pi = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a tangens grafikonját az $x$ tengely irányában, azaz az $y$ tengelyre merőlegesen kétszeresére kell nyújtani. *(41. ábra)*




42. ábra

**Megoldás (c)**

A $h$ függvény grafikonja a kotangensfüggvény grafikonjából úgy kapható, hogy ahol a függvény értéke negatív, azt a grafikonágat tükrözzük az $x$ tengelyre, a többi részt változatlanul hagyjuk. *(42. ábra)*

**4. példa**

Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenlőtlenségeket!

*a)* $|\operatorname{tg} x| \leq 1$; *b)* $\operatorname{ctg} x < -1$; *c)* $3 \cdot \operatorname{tg}^2 x \geq 1$.

**Megoldás (a)**

Az *a)* egyenlőtlenség így is írható az abszolút érték definíciója alapján:

$$-1 \leq \operatorname{tg} x \leq 1.$$

A $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$-ban ez akkor és csak akkor teljesül, ha $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, tehát az összes megoldás:

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Megoldás (b)**

A *b)* egyenlőtlenség esetében először a $0 < x < \pi$ intervallumban érdemes a megoldást keresni. A függvény grafikonjáról leolvasható, hogy itt $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ esetén teljesül az egyenlőtlenség. Az összes megoldás tehát

$$\frac{3\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Megoldás (c)**

A *c)* egyenlőtlenséget először rendezzük:

$$\operatorname{tg}^2 x \geq \frac{1}{3},$$

ez akkor és csak akkor igaz, ha $|\operatorname{tg} x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, azaz $\operatorname{tg} x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$, vagy $\operatorname{tg} x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

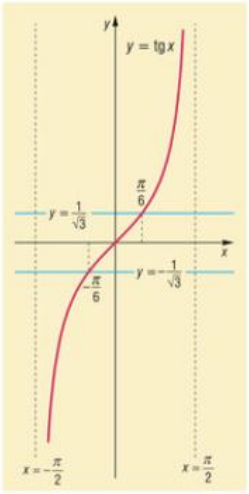
Érdemes itt is a $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ intervallumban a tangens grafikonjáról leolvasni a megoldást (*43. ábra*):

$$-\frac{\pi}{2} < x \leq -\frac{\pi}{6} \text{ vagy } \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

Az összes megoldás tehát:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi,$$

$$\text{vagy } \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$




*43. ábra*

## Feladatok

1. Számítsuk ki zsebszámológép vagy táblázat használatával!
   *a)* $\operatorname{tg} 100^\circ + \operatorname{ctg} 80^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ - \operatorname{ctg} 20^\circ$; *b)* $\operatorname{tg} 1234^\circ + \operatorname{ctg} 4321^\circ$.

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!
   *a)* $3 \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0$; *b)* $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$;
   *c)* $\operatorname{tg}^2 x - 6 \cdot \operatorname{tg} x + 5 = 0$. *d)* $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x > -2$;
   **e)* $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < 1$; **f)* $\operatorname{ctg}|x| > \sqrt{3}$.

3. Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját!
   *a)* $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$; *b)* $g(x) = 2\operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;
   *c)* $h(x) = 1 - 2\operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$; *d)* $k(x) = |\operatorname{tg} x|$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;
   *e)* $l(x) = 3\operatorname{ctg} x + 2$, $x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$; **f)* $m(x) = |\operatorname{ctg} x - 1|$, $x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

4. Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját!
   *a)* $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$; *b)* $g(x) = \operatorname{ctg} 2x$, $x \neq k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$;
   *c)* $h(x) = \operatorname{tg}(\pi - 2x)$, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$;
   **d)* $k(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} x)$, $x \neq k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

# 5. Összetett feladatok és alkalmazások

**1. példa**

Hány megoldása van a valós számok körében a következő egyenleteknek?

*a)* $x = \sin x$; *b)* $x = \cos x$; *c)* $x = \operatorname{tg} x$, $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right)$.

**Megoldás (a)**

Az *a)* egyenlet egy megoldása $x = 0$, hiszen $\sin 0 = 0$. Tudjuk, hogy ha $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, akkor $\sin x < x$, ha viszont $x > \frac{\pi}{2} > 1$, akkor biztosan nincs megoldás, hiszen $\sin x \leq 1$. A pozitív számok körében tehát nincs megoldása az egyenletnek. Mivel $x \mapsto x$ és az $x \mapsto \sin x$ is páratlan függvény, a negatív számok körében sincs megoldás. Az egyenlet egyetlen megoldása tehát a 0.




**Megoldás (b)**

A *b)* egyenlet esetében is érdemes először a $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumot vizsgálni. Ebben az $x \mapsto x$ függvény szigorúan nő, a koszinuszfüggvény szigorúan csökken, az egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet. Mivel $\cos 0 = 1 > 0$ és $\cos \frac{\pi}{2} = 0 < \frac{\pi}{2}$, a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban van is megoldás.

Ha $x > \frac{\pi}{2} > 1$, akkor $\cos x \leq 1$, itt már nincs megoldás. Ha $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, akkor $\cos x > 0$, így itt sincs megoldás, és $x < -\frac{\pi}{2} < -1$ esetén sincs, hiszen ekkor $\cos x \geq -1$.

Azt kaptuk tehát, hogy az egyenletnek csak a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban van egy gyöke. A gyök pontos értékét elemi módszerrel nem tudjuk megadni, közelítő értéke: $x \approx 0{,}74$.

**Megoldás (c)**

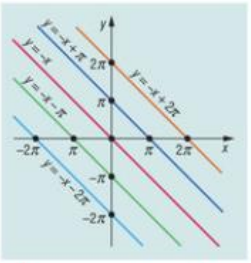
A *c)* egyenletet is érdemes először a $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ intervallumban nézni, itt az egyetlen megoldás $x = 0$, hiszen $\operatorname{tg} 0 = 0$, és ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor $\operatorname{tg} x > x$, ha pedig $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, akkor $\operatorname{tg} x < x$.

Mivel a tangensfüggvény minden $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ alakú intervallumban szigorúan nő, és minden valós értéket fel is vesz ebben az intervallumban, ugyanitt az $x \mapsto x$ függvény is növekszik, minden ilyen intervallumban van (legalább egy) gyöke az egyenletnek (mélyebb módszerekkel igazolható, hogy minden ilyen intervallumban pontosan egy gyök van). A $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$-beli gyök közelítően: $x \approx 4{,}49$. A $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ intervallumban tehát az egyenletnek két gyöke van.

**2. példa**

Szemléltessük a koordinátasíkon azokat az $(x; y)$ pontokat, amelyeknek koordinátáira teljesül a következő állítás:

*a)* $\sin(x + y) = 0$; *b)* $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$!



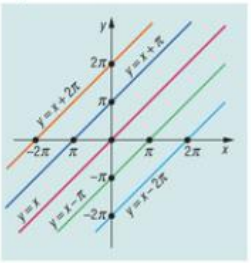

44. ábra

**Megoldás (a)**

Az *a)* egyenlet akkor és csak akkor teljesül, ha $x + y = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, amit így is írhatunk:

$$y = -x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

A kapott egyenletek minden $k$-ra egy-egy egyenes pontjait jellemzik. Ha $k = 0$, akkor az $y = -x$ egyenletű egyenest kapjuk, az $y = -x + \pi$, $y = -x + 2\pi$, $y = -x - \pi$, $y = -x - 2\pi$ alakú egyenletek ezzel párhuzamos egyeneseket jellemeznek. ***(44. ábra)***




45. ábra

**Megoldás (b)**

A *b)* egyenlet akkor és csak akkor teljesül, ha

$$y = x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezek az egyenletek az $y = x$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyeneseket jellemeznek. ***(45. ábra)***

**3. példa**

Hol vannak a koordinátasíkon azok az $(x; y)$ pontok, amelyeknek koordinátáira teljesül, hogy: $x^2 + 1 \le 2x \cdot \sin(x + y)$?

**Megoldás**

Az egyenlőtlenséget először célszerű átalakítani. Ha $x = 0$, akkor a bal oldal 1, a jobb oldal 0, tehát nem teljesül az egyenlőtlenség.

Vizsgáljuk meg az $x > 0$ esetet! Ekkor eloszthatjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát $x$-szel:

$$x + \frac{1}{x} \le 2 \cdot \sin(x + y).$$

A bal oldalról, mivel $x$ pozitív, tudjuk, hogy $x + \frac{1}{x} \ge 2$ és csak $x = 1$ esetén teljesül az egyenlőség. A jobb oldalon pedig a szinuszérték legfeljebb 1, így

$$2 \cdot \sin(x + y) \le 2.$$

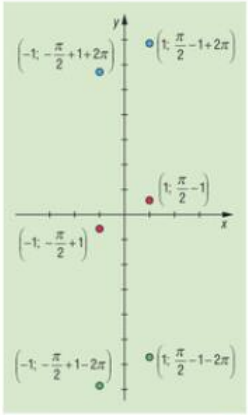
Az egyenlőtlenség tehát csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldal 2, azaz $x = 1$, és

$$\sin(1 + y) = 1,$$

ami akkor és csak akkor igaz, ha

$$1 + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ azaz}$$

$$y = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$




46. ábra

Az $x$ pozitív esetben tehát az egyenlőtlenséget kielégítő pontok koordinátái:

$$\left(1;\frac{\pi}{2}-1+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

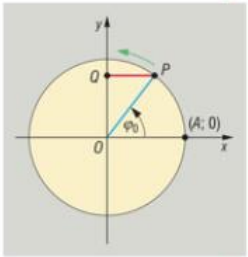
Hasonló módon adódik, hogy $x<0$ esetén a következő pontok adják a megoldást *(46. ábra)*:

$$\left(-1;-\frac{\pi}{2}+1+2k\pi\right)\ k\in\mathbb{Z}.$$

### 4. példa

Tegyük fel, hogy egy $P$ pont egyenletes szögsebességgel mozog egy $A$ sugarú kör kerületén. A kört helyezzük el a koordináta-rendszerben úgy, hogy középpontja az origóban legyen, és jelöljük a szögsebességet $\omega$-val. Ez azt jelenti, hogy időegység (például 1 másodperc) alatt a pont $\omega$ ívmértékű szöggel fordul el. Azt is feltesszük, hogy a pont pozitív irányban mozog a kör kerületén.

Vizsgáljuk meg a $P$ pont $y$ tengelyre való merőleges vetületének, $Q$-nak a mozgását! *(47. ábra)*

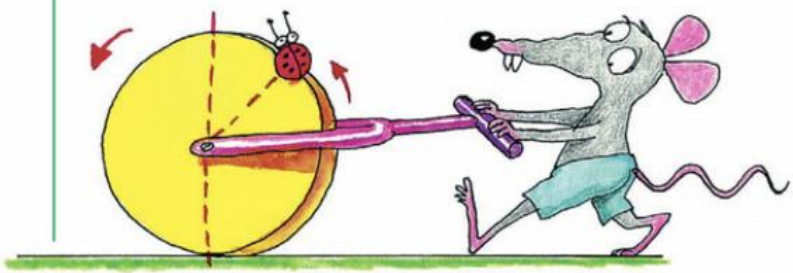



47. ábra

### Megoldás

Jelöljük $\varphi_0$-lal a $P$ kezdő helyzetében az $OP$ sugárnak az $x$ tengely pozitív felével bezárt szögét! Ekkor $t$ másodperc elteltével az $OP$ félegyenes az $x$ tengely pozitív felével $\omega\cdot t+\varphi_0$ szöget zár be. A $Q$ vetületi pont helyzetét éppen a $P$ pont $y$ koordinátája adja meg. Az $OP$ vektor $y$ koordinátája $A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_0)$. Ez írja le $Q$ pillanatnyi helyzetét. Az ilyen mozgásra mondjuk, hogy a $Q$ pont **harmonikus rezgőmozgást** végez az $O$ körül. A $Q$ pont maximális kitérése $O$-tól $A$, ez a rezgőmozgás amplitúdója. Egy teljes periódust ír le a $Q$, miközben a $P$ egy teljes körülfordulást ír le, azaz amíg $\omega\cdot t=2\pi$ lesz, tehát a rezgőmozgás periódusa (rezgésideje) $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Például az $y=2\cdot\sin\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)$ egyenlettel jellemezhető harmonikus rezgőmozgás $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$-tól indul, amplitúdója 2, és periódusa $T=\frac{2\pi}{3}$.



## Feladatok

1. Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját!

   *a)* $f(x) = \cos x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

   *b)* $g(x) = |\sin 2\pi x|$;

   *c)* $h(x) = [x] \cdot |\sin \pi x|$.

2. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenleteket!

   *a)* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) = 0$;

   *b)* $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

   *c)* $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$;

   *d)* $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) = 2$;

   *e)* $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

   *a)* $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 1$;

   *b)* $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x > 2$;

   *c)* $\sin \pi x - \cos \pi x > 0$;

   *d)* $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$.

4. Adjuk meg a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezéseknek értelme van!

   *a)* $\frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 3x}$;

   *b)* $\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 3x}$;

   *c)* $\sqrt{\operatorname{tg} 3x}$;

   *d)* $\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}}$.

5. Igazoljuk, hogy ha $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ egy háromszög szögei, akkor

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}!$$



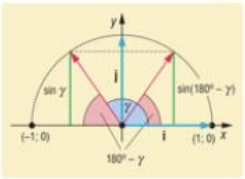
# 6. Geometriai alkalmazások

A hegyesszögek szögfüggvényeinek segítségével korábban bebizonyítottunk néhány háromszögekre vonatkozó összefüggést. Akkor a hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögek esetét külön kellett vizsgálnunk. Az egyes szögfüggvények kiterjesztése a valós számok halmazára lehetővé teszi, hogy az összefüggéseket, képleteket az összes háromszögre nézve egységes formában adjuk meg.

## A háromszög területe

Bebizonyítottuk, hogy ha $a$ és $b$ a háromszög két oldalának hossza, $\gamma$ a két oldal által közbezárt szög nagysága, $T$ pedig a háromszög területe, akkor

$$T = \begin{cases} \dfrac{ab \cdot \sin\gamma}{2}, & \text{ha } \gamma < 90^\circ, \\ \dfrac{ab}{2}, & \text{ha } \gamma = 90^\circ, \\ \dfrac{ab \cdot \sin(180^\circ - \gamma)}{2}, & \text{ha } \gamma > 90^\circ. \end{cases}$$




48. ábra

Mivel $\sin 90^\circ = 1$, és $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$ *(48. ábra)*, ezért bármely $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ esetén érvényes a háromszög területére a következő képlet:

$$T = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}. \qquad (1)$$

$$T = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}$$

## Összefüggés a háromszög oldala, az oldallal szemközti szög és a körülírt kör sugara között

Beláttuk azt is, hogy ha egy háromszög egyik oldalának hossza $a$, az oldallal szemközti belső szög nagysága $\alpha$, a köré írt kör sugarának hossza pedig $R$, akkor

$$a = \begin{cases} 2R \cdot \sin\alpha, & \text{ha } \alpha < 90^\circ, \\ 2R, & \text{ha } \alpha = 90^\circ, \\ 2R \cdot \sin(180^\circ - \alpha), & \text{ha } \alpha > 90^\circ. \end{cases}$$

A fentiek alapján most is teljesül, hogy tetszőleges $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ esetén a háromszög oldala, szemközti belső szöge és a köré írható kör sugara közötti összefüggés:

$$a = 2R \cdot \sin\alpha. \qquad (2)$$

$$a = 2R \cdot \sin\alpha$$

Természetesen hasonló összefüggés érvényes a háromszög másik két oldalára is.

* * *

A fenti, tetszőleges háromszögre érvényes összefüggések közvetlen következményeként a háromszög területére más képletek is adódnak. Ezek közül mindig azt érdemes használni, amelyből konkrét adataink behelyettesítésével a legkönnyebben és leggyorsabban tudjuk kiszámítani a területet. A továbbiakban három képletet bizonyítunk.

Jelölje egy háromszög területét $T$, oldalainak hosszát $a$, $b$, $c$, a szemközti belső szögek nagyságát rendre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, a köré írt kör sugarának hosszát pedig $R$. Ezekkel a jelölésekkel

I. $T = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$

II. $T = \dfrac{abc}{4R}$

III. $T = \dfrac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha}$

a háromszög területe

**Bizonyítás**

I. Mivel $a = 2R \cdot \sin\alpha$ és $b = 2R \cdot \sin\beta$, ezért

$$T = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{(2R \cdot \sin\alpha) \cdot (2R \cdot \sin\beta) \cdot \sin\gamma}{2} =$$
$$= 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

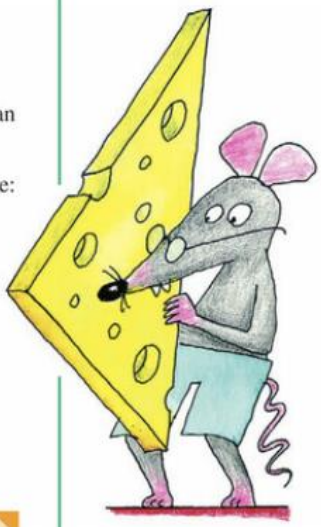
(Ezt egy példa kapcsán hegyesszögű háromszögre már korábban is bebizonyítottuk.)

II. Mivel $c = 2R \cdot \sin\gamma$, ezért $\sin\gamma = \dfrac{c}{2R}$. Ezt behelyettesítve (1)-be:

$$T = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{ab \cdot \dfrac{c}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}.$$

III. Induljunk ki I-ből, és használjuk fel (2)-t:

$$T = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = \frac{4R^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha} =$$
$$= \frac{(2R \cdot \sin\alpha)^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha}.$$



**1. példa**

Számítsuk ki a háromszög területét, ha egyik oldalának hossza 4 cm, két szöge pedig 30°-os, illetve 45°-os!

**Megoldás**

A háromszög harmadik szöge 105°-os. Ismerjük a háromszög egy oldalának hosszát és szögeinek nagyságát, így alkalmazható az imént bizonyított III. területképlet. A feladat nem rögzítette, hogy melyik szög van az adott oldallal szemben, ezért három lehetőségünk van.

(1) Az adott oldallal szemben a 30°-os szög van. Ekkor a háromszög területe (a számításoknál felhasználható, hogy $\sin 105° = \sin 75°$):

$$T_1 = \frac{4^2 \cdot \sin 45° \cdot \sin 105°}{2 \cdot \sin 30°}\ \text{cm}^2 \approx \frac{16 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}9659}{2 \cdot \dfrac{1}{2}}\ \text{cm}^2 =$$
$$= 8 \cdot \sqrt{2} \cdot 0{,}9659\ \text{cm}^2 \approx 10{,}93\ \text{cm}^2.$$

(2) Az adott oldallal szemben a 45°-os szög van. Ekkor

$$T_2 = \frac{4^2 \cdot \sin 30° \cdot \sin 105°}{2 \cdot \sin 45°}\ \text{cm}^2 \approx \frac{16 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}9659}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}\ \text{cm}^2 =$$

$$= \frac{8 \cdot 0{,}9659}{\sqrt{2}}\ \text{cm}^2 \approx 5{,}46\ \text{cm}^2.$$

(3) Az adott oldallal szemben a 105°-os szög van. Ekkor

$$T_3 = \frac{4^2 \cdot \sin 30° \cdot \sin 45°}{2 \cdot \sin 105°}\ \text{cm}^2 \approx \frac{16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \cdot 0{,}9659}\ \text{cm}^2 =$$

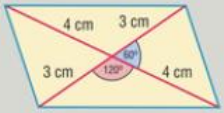
$$= \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{1{,}9318}\ \text{cm}^2 \approx 2{,}93\ \text{cm}^2.$$

**2. példa**

Egy paralelogramma átlóinak hossza 8 cm és 6 cm, az átlók által bezárt kisebbik szög 60°-os. Számítsuk ki a paralelogramma területét!

**Megoldás**

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, és $\sin 60° = \sin 120°$, ezért a háromszög területére vonatkozó I. képlet alapján az átlók a paralelogrammát négy egyenlő területű háromszögre bontják. *(49. ábra)*



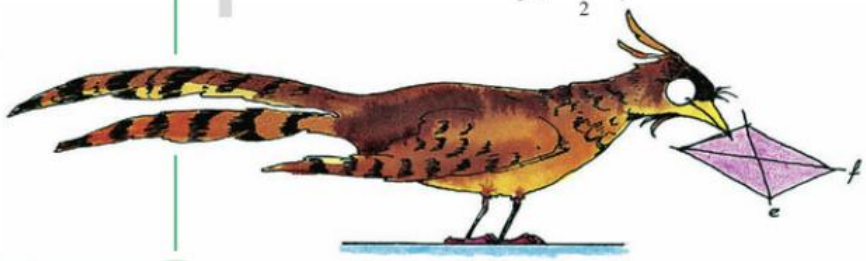

*49. ábra*

Így a terület

$$T = 4 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot \sin 60°}{2}\ \text{cm}^2 = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 \approx 20{,}78\ \text{cm}^2.$$

*Megjegyzések:*

1. A fenti módon belátható, hogy ha $e$ és $f$ a paralelogramma két átlójának hossza, az átlók által bezárt szög pedig $\varphi$, akkor területe
$$T = \frac{ef \cdot \sin\varphi}{2}.$$
2. Általánosan is igaz, hogy ha egy konvex négyszög átlóinak hossza $e$ és $f$, az átlók által bezárt szög $\varphi$, akkor a négyszög területe
$$T = \frac{ef \cdot \sin\varphi}{2}.$$



**3. példa**

Jelölje egy háromszög oldalainak hosszát $a$, $b$, $c$, és legyen a beírt kör sugarának hossza $r$, a köré írt kör sugarának hossza $R$! Bizonyítsuk be, hogy

$$r \cdot R = \frac{abc}{2 \cdot (a+b+c)}!$$

**Megoldás**

Sokszor hasznos, ha háromszögekkel kapcsolatos számolási vagy bizonyítási feladatoknál a háromszög területének kétféle felírását hasonlítjuk össze. Most is ezt tesszük.

9. osztályban bebizonyítottuk egy példa kapcsán, hogy a háromszög $T$ területére nézve érvényes a $T = s \cdot r$ összefüggés, ahol $s$ a háromszög félkerülete, azaz $s = \frac{a+b+c}{2}$, $r$ pedig a beírt kör sugara. Ezt a képletet a most bizonyított II. területképlettel összehasonlítva kapjuk, hogy

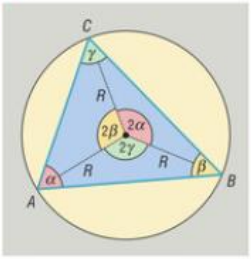
$$\frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{abc}{4R},$$

ahonnan

$$r \cdot R = \frac{abc}{2 \cdot (a+b+c)}.$$

**4. példa**

Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög belső szögei $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, körülírt körének sugara $R$, területe pedig $T$, akkor $T = \frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$!




50. ábra

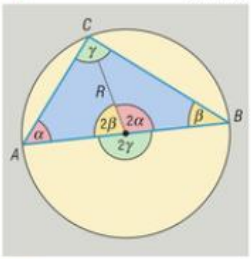
**Megoldás**

Az állítást külön bizonyítjuk hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszög esetére.

(1) Ha a háromszög hegyesszögű, akkor a köré írt kör középpontja a háromszög belsejében van. ***(50. ábra)***

A körülírt kör középpontját a csúcsokkal összekötő szakaszok három egyenlő szárú háromszögre bontják az eredeti háromszöget. Ezen részháromszögek szárai $R$ hosszúságúak, a szárak által közbezárt szögek pedig a kerületi és középponti szögek tételéből adódóan rendre $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ nagyságúak. Az eredeti háromszög területe a részháromszögek területének összege, így

51. ábra



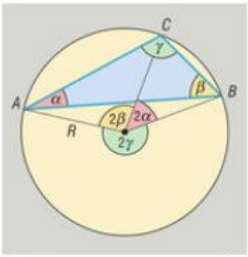

$$T_{ABC} = T_{ABO} + T_{BCO} + T_{CAO} = \frac{R^2 \cdot \sin 2\gamma}{2} + \frac{R^2 \cdot \sin 2\alpha}{2} + \frac{R^2 \cdot \sin 2\beta}{2} =$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

(2) Derékszögű háromszög esetén ***(51. ábra)*** a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, ezért ebben az esetben speciálisan

$$T_{ABC} = \frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta).$$

Ez viszont összhangban van a bizonyítandó képlettel, hiszen ekkor $\gamma = 90°$, $2\gamma = 180°$, és $\sin 2\gamma = \sin 180° = 0$.




52. ábra

(3) Tompaszögű háromszög esetén ($\gamma > 90°$) a körülírt kör középpontja a háromszögön kívül van *(52. ábra)*, ezért

$$T_{ABC} = T_{BCO} + T_{CAO} - T_{AOB} =$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin(2\alpha + 2\beta)).$$

Viszont $2\alpha + 2\beta = 360° - 2\gamma$, és a szinuszfüggvény periodicitása és páratlan volta miatt

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(360° - 2\gamma) = \sin(-2\gamma) = -\sin 2\gamma.$$

Ezt behelyettesítve a terület fenti kifejezésébe, kapjuk, hogy a bizonyítandó területképlet tompaszögű háromszög esetén is érvényes.

## Feladatok

1. Egy háromszög két oldalának hossza $a$ és $b$, az általuk közbezárt szög nagysága $\gamma$. Számítsuk ki a háromszög területét, ha
   *a)* $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 120°$; *b)* $a = 7$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $\gamma = 150°$;
   *c)* $a = 7{,}8$ cm, $b = 10$ cm, $\gamma = 135°$; *d)* $a = 7{,}8$ dm, $b = 109$ mm, $\gamma = 112°$.

2. Egy háromszög két belső szögének nagysága 115° és 39°. Mekkora a háromszög területe, ha a köré írt kör sugarának hossza
   *a)* 5 cm; *b)* 12 dm; *c)* 78 mm; *d)* 0,24 m; *e)* $R$?

3. Mekkora a 4 cm sugarú körben a $h$ hosszúságú húrhoz tartozó kerületi szög nagysága, ha
   *a)* $h = 4$ cm; *b)* $h = 6$ cm; *c)* $h = 2{,}5$ cm; *d)* $h = \sqrt{3}$ cm?
   Hány megoldása van a feladatnak az egyes esetekben?

4. Egy háromszög 5 egység hosszúságú oldalán fekvő két belső szög $\alpha$ és $\beta$. Mekkora a háromszög területe, ha
   *a)* $\alpha = 120°$, $\beta = 15°$; *b)* $\alpha = 100°$, $\beta = 45°$;
   *c)* $\alpha = 150°$, $\beta = 10°$; *d)* $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$?

5. Egy paralelogramma átlóinak hossza $e$ és $f$, az átlók által bezárt egyik szög $\varphi$. Számítsuk ki a paralelogramma területét, ha
   *a)* $e = 5$ cm, $f = 7$ cm, $\varphi = 120°$; *b)* $e = 2$ dm, $f = 30$ cm, $\varphi = 175°$;
   *c)* $e = 5$ m, $f = 8{,}8$ m, $\varphi = 130°$.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszög átlóinak hossza $e$ és $f$, az átlók szöge $\varphi$, akkor a négyszög területe

$$T = \frac{ef \cdot \sin\varphi}{2}.$$

# Valószínűség-számítás

*A valószínűség fogalma már az antik görög filozófiában is szerepet játszott. Az a gondolat, hogy a természetben tapasztalható törvényszerűségek a véletlenek tömegén keresztül érvényesülnek, az ókori görög materialistáknál szerepelt először.*

*Később a valószínűség-számítás kialakulásában nagy szerepet játszottak a szerencsejátékokra, elsősorban a kockajátékokra vonatkozó feladatok, sőt alkalmazták biztosításokkal, életjáradékokkal kapcsolatos problémák megoldására is.*

*Mára a modern tudomány felfedezte, hogy az ún. valószínűségi szemléletmód magyarázza meg helyesen a bennünket körülvevő világegyetem alapvető jelenségeit, és az élővilágban lezajló folyamatok nagy részét is ez írja le jól.*







# 1. Események

Életünk során – tudatosan vagy ösztönösen – sokszor becsüljük meg valamilyen esemény valószínűségét. Aki lottót vesz vagy a tippmixen fogad, bízik a nagy nyeremény esélyében. A szenvedélyes játékosok vagyonokat költenek szerencsejátékokra, a legtöbbször mégis szegények maradnak. A repülőn szorongunk, de a biciklire nyugodtan felülünk. Van, aki tiltakozik az atomerőművek ellen, de naponta elszív egy doboz cigarettát. Pedig egy repülőgép- vagy atomerőmű-szerencsétlenség valószínűsége sokkal kisebb, mint hogy valaki biciklivel szenved balesetet, vagy a dohányzás miatt hal meg…

A véletlenszerű események leírására és kezelésére a matematika is alkalmas. Ehhez először tekintsünk néhány definíciót:

| Definíció | Példa |
|---|---|
| **Véletlen jelenségek** azok a jelenségek, melyeket az ismert feltételek nem határoznak meg egyértelműen. A jelenségnek ettől még van „oka”, csak nem tudjuk teljes egészében feltárni. | Ha egy pénzérmét feldobunk, nem tudjuk előre, hogy melyik oldalára esik. |
| **Kísérletet** végzünk, ha egy véletlen jelenséget megfigyelünk. A kísérletet akárhányszor ugyanolyan körülmények között végrehajthatjuk. | A pénzérme feldobásakor lehet, hogy fejet, lehet, hogy írást kapunk. Sőt még az is előfordulhat, hogy az érme az élére esik. |
| Pontosan meg kell mondanunk, hogy mit tekintünk a **kísérlet kimenetelének.** A kísérlet minden eredményéhez kell tartozzon egy egyértelműen meghatározható kimenetel. | Mivel annak az esélye, hogy az érme az élére esik elhanyagolható, ezért csak azt figyeljük, hogy az érmével fejet vagy írást dobtunk, ezeket tekintjük a kísérlet kimenetelének. |
| **Elemi eseménynek** nevezzük a véletlen jelenségre vonatkozó kísérlet kimenetelét. A kísérlet minden kimeneteléhez tartozik egy-egy elemi esemény. | Elemi események: **F** (fejet dobtunk), **I** (írást dobtunk). |
| **Eseménytérnek** nevezzük az elemi események halmazát. Jele: $H$. | $H = \{\mathbf{F}, \mathbf{I}\}$ |

**1. példa**

Feldobunk egy dobókockát, és figyeljük a kocka tetején levő számot. Soroljuk fel az elemi eseményeket, és írjuk fel az eseményteret!

**Megoldás**

Elemi események: 1-est dobtunk, 2-est dobtunk, 3-ast dobtunk, 4-est dobtunk, 5-öst dobtunk, 6-ost dobtunk.

Az eseménytér: $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



**2. példa**

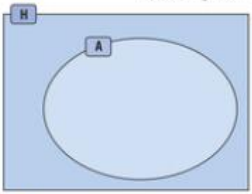
Feldobunk egy 5 forintos és egy 10 forintos pénzérmét. Írjuk le az elemi eseményeket és az eseményteret!

**Megoldás**

Elemi események: az 5 forintossal fejet, a 10 forintossal fejet dobunk,
az 5 forintossal fejet, a 10 forintossal írást dobunk,
az 5 forintossal írást, a 10 forintossal fejet dobunk,
az 5 forintossal írást, a 10 forintossal írást dobunk.

Előre írva az 5 forintossal való dobás, utána a 10 forintossal való dobás eredményét, az eseménytér: $H = \{FF, FI, IF, II\}$.

Dobjunk fel egy kockát addig, amíg hatost nem dobunk! Figyeljük meg, hogy hányadik dobásra kapunk hatost! Pl. az 1; 2; 2; 5; 2; 4; 6 dobássorozathoz tartozó elemi esemény a 7. Elemi események: 1; 2; 3; …; azaz a pozitív egész számok. Akár az is előfordulhat, hogy sose dobunk hatost. Végtelen sok elemi esemény van.




*1. ábra*

DEFINÍCIÓ: ***Eseményeknek* nevezzük az eseménytér részhalmazait. Egy esemény bekövetkezik, ha a kísérlet kimenetele az eseménynek megfelelő részhalmazba tartozó elemi esemény.** *(1. ábra)*

**esemény**

Az eseményeket általában nagybetűvel jelöljük.

Minden elemi esemény esemény.

DEFINÍCIÓ: ***Biztos esemény* a $H$ halmazhoz tartozó esemény, amely mindenképpen bekövetkezik.**
**Jele: $H$.**

**biztos esemény**

DEFINÍCIÓ: ***Lehetetlen esemény* az üres halmazhoz tartozó esemény, amely semmiképpen sem következhet be.**
**Jele: $\varnothing$.**

**lehetetlen esemény**

**3. példa**

A kísérlet legyen a kockadobás, és figyeljük a dobott számot! Soroljunk fel eseményeket, és írjuk fel, mely elemi események alkotják őket!

**Megoldás**

Páros számot dobtunk: $A = \{2, 4, 6\}$.
Páratlan számot dobtunk: $B = \{1, 3, 5\}$.
Prímszámot dobtunk: $C = \{2, 3, 5\}$.
Legalább 3-ast dobtunk: $D = \{3, 4, 5, 6\}$.
Legfeljebb 2-est dobtunk: $E = \{1, 2\}$.
6-ost dobtunk: $F = \{6\}$.
Legfeljebb 6-ost dobtunk: $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A $G$ eseményben mindegyik elemi esemény előfordul, így ez biztosan bekövetkezik.

◆ ◆ ◆



**4. példa**

Egy fagylaltozóban zárás előtt már csak háromféle fagyi van: csokoládé, vanília és málna (ezekből még sok). Egy vevő 4 gombócos fagyit kér, de rábízza a fagylaltárusra, hogy véletlenszerűen válassza ki, hogy milyen fagylaltot ad neki. (A gombócok sorrendje nem számít.) A következő események közül válasszuk ki a biztos és a lehetetlen eseményeket!

*A*: Mindegyik fajtából kapott.

*B*: Valamelyik fajtából legalább két gombócot kapott.

*C*: Mindegyik gombóc különböző.

*D*: Két gombóc csokoládét kapott.

**Megoldás**

*A*: Lehetséges, ha például 2 gombóc csokoládét, 1 gombóc vaníliát és 1 gombóc málnát kapott; de nem biztos, mert lehet, hogy mind a 4 gombóc csokoládé.

*B*: Háromfajta fagyiból a skatulyaelv értelmében csak úgy kaphat 4 gombócot, ha legalább egyik fajtából legalább 2 gombócot kapott, ezért ez **biztos esemény.**

*C*: 4 gombóc fagylalt nem lehet mind különböző, ha csak háromfajta van, ez **lehetetlen esemény.**

*D*: Lehetséges, ha például 2 gombóc csokoládét és 2 gombóc málnát kapott; de nem biztos, mert lehet, hogy mind a 4 gombóc vanília.

◆ ◆ ◆

Lehetséges, hogy az elemi események halmaza nem véges: például ha a kísérlet során egy céltáblára lövünk, és nézzük a lövés helyét, akkor egy elemi esemény a céltábla egy pontjának eltalálását jelenti. A céltáblának végtelen sok pontja van, így végtelen sok elemi esemény van.



A céltáblára véletlenszerűen lövünk, ami azt jelenti, hogy annak az esélye, hogy a céltábla valamely részébe esik a lövés, csak ennek a résznek a területétől függ.



**5. példa**

Egy kör alakú céltáblára egyszer lövünk véletlenszerűen, és figyeljük a lövés helyét. Színezzük be a céltáblán a következő eseményeknek megfelelő ponthalmazokat!

*A*: Tízest lőttünk.

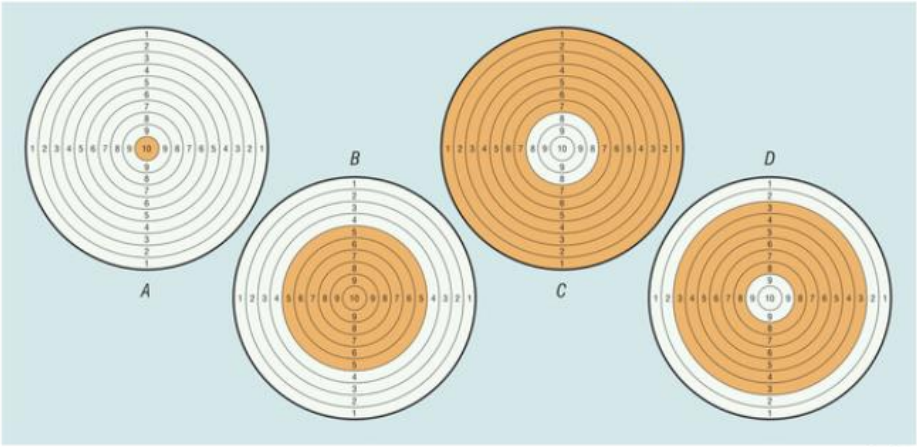
*B*: Legalább ötöst lőttünk.

*C*: Legfeljebb hetest lőttünk.

*D*: Legalább hármast és legfeljebb nyolcast lőttünk.

**Megoldás**

A megoldás a 2. ábráról olvasható le.




*2. ábra*

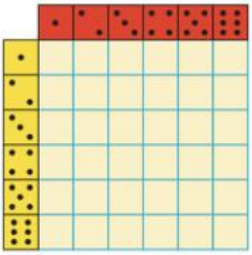
## Feladatok

1. A következő kísérletekben határozzuk meg az eseményteret alkotó elemi eseményeket!
   *a)* Feldobunk három különböző pénzérmét, és figyeljük mindegyik érmén, hogy fejet vagy írást dobtunk.
   *b)* Egy érmét négyszer egymás után feldobunk, és figyeljük, hogy fejet vagy írást dobtunk.
   *c)* Feldobunk egy fekete és egy fehér dobókockát, és figyeljük a dobott számokat.
   *d)* Egy kockát kétszer egymás után feldobunk, és figyeljük a dobott számokat.
   *e)* Egy dobozban 3 piros és 2 kék golyó van. A dobozból véletlenszerűen, egymás után (azaz lényeges a húzás sorrendje) kihúzunk 3 golyót úgy, hogy a kihúzott golyót nem rakjuk vissza.
   *f)* András, Béla, Csaba és Dezső között kisorsolunk egy könyvet és egy tollat úgy, hogy egy ember csak egy ajándékot nyerhet.
   *g)* András, Béla, Csaba és Dezső között kisorsolunk egy könyvet és egy tollat úgy, hogy egy ember több ajándékot is nyerhet.
   *h)* Egy kockát addig dobálunk, amíg 6-ost nem dobunk.

2. Feldobunk két különböző pénzérmét, és mindkettőnél figyeljük, hogy fejet vagy írást dobtunk. Írjuk fel a következő eseményeket alkotó elemi eseményeket!
   *A*: Pontosan egy fejet dobtunk.
   *B*: Legalább egy fejet dobtunk.
   *C*: Legfeljebb egy fejet dobtunk.

3D

3. Feldobunk egy piros és egy sárga dobókockát, és figyeljük a kockákkal dobott számokat. Írjuk fel a következő eseményeket alkotó elemi eseményeket!
   *A*: A piros kockával 6-ost dobtunk.
   *B*: A két kockával dobott számok egyenlők.
   *C*: A piros kockával dobott szám kétszerese a sárga kockával dobott számnak.
   *D*: A piros kockával dobott szám nagyobb, mint a sárga kockával dobott szám.



4. Egy 5 cm oldalhosszúságú, négyzet alakú céltáblára lövünk, és figyeljük a találat helyét. Színezzük be a céltáblán a következő eseményeknek megfelelő ponthalmazokat!
   *A*: A találat távolsága a négyzet egy kijelölt oldalától legfeljebb 2 cm.
   *B*: A találat távolsága a négyzet egy kijelölt csúcsától legfeljebb 3 cm.
   *C*: A találat távolsága a négyzet hozzá legközelebbi oldalától legalább 4 cm.
   *D*: A találat távolsága a négyzet középpontjától legfeljebb 1 cm.

5. Három különböző pénzérmét feldobunk. A következő események közül válasszuk ki a biztos eseményeket és a lehetetlen eseményeket!
   *A*: A fejek száma több, mint az írások száma.
   *B*: Vagy legalább két fejet dobtunk, vagy legalább két írást dobtunk.
   *C*: A fejek száma ugyanannyi, mint az írások száma.
   *D*: Legalább egy fejet dobtunk.
   *E*: A fejek száma nem egyenlő az írások számával.

**JÁTÉK**

**Két játékos egy pénzérmével játszik. Addig dobálják az érmét, amíg az FFF vagy az FIF sorozatok valamelyike meg nem jelenik. Ha FFF jelenik meg előbb, akkor az első játékos nyer, ha az FIF, akkor a második.**

**A játékot úgy is lehet játszani, hogy mindenki választ magának egy hármas sorozatot, amelyre ő nyer.**

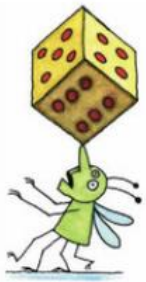




## 2. Műveletek eseményekkel

egyenlő események

**DEFINÍCIÓ:** ***Két esemény egyenlő,*** **ha a kísérlet bármely kimenetele esetén vagy mindkettő bekövetkezik, vagy egyik sem.**



**1. példa**

Egy kockával dobunk, és nézzük a következő eseményeket:

*A*: legfeljebb 3-ast dobtunk;
*B*: legalább 3-ast dobtunk;
*C*: a dobott szám kisebb, mint 3;
*D*: a dobott szám nem nagyobb, mint 3.

Válasszuk ki azokat, amelyek egyenlők!

**Megoldás**

Ha *C* bekövetkezik, akkor *A* is bekövetkezik, mert ha a dobott szám kisebb, mint 3, akkor igaz, hogy legfeljebb 3-ast dobtunk. Viszont fordítva nem igaz, mert lehet, hogy *A* bekövetkezik, de *C* nem, ha éppen 3-ast dobtunk. Tehát *A* nem egyenlő *C*-vel.

Legfeljebb 3-ast ugyanakkor dobhatunk, ha a dobott szám nem nagyobb 3-nál, így $A = D$.

A halmazok között nincs több olyan pár, amelyek egyenlők.

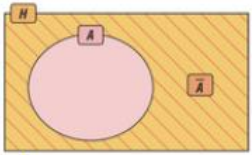
Ezt úgy is eldönthetjük, hogy felsoroljuk az eseményeket alkotó elemi eseményeket:

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5, 6\}, C = \{1, 2\}, D = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A = D.$

• • •

**DEFINÍCIÓ:** **Az *A* esemény komplementere az az esemény, amelyik pontosan akkor következik be, amikor *A* nem következik be.** *(3. ábra)*

**Jele: $\overline{A}$.**




*3. ábra*

komplementer esemény

Az *A* esemény komplementerét az eseménytér azon elemi eseményei alkotják, amelyek *A*-ban nincsenek benne.

**Bármely esemény komplementerének komplementere az eredeti esemény: $\overline{\overline{A}} = A$.**

**A biztos esemény komplementere a lehetetlen esemény.**

**A lehetetlen esemény komplementere a biztos esemény.**

$\overline{\overline{A}} = A$
$\overline{H} = \varnothing$
$\overline{\varnothing} = H$





**2. példa**

Egy kockával dobunk, és keressük a következő események komplementerét:

$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

*A*: legfeljebb 3-ast dobtunk;
*B*: legalább 3-ast dobtunk;
*C*: a dobott szám kisebb, mint 3.

**Megoldás**

*A*: legfeljebb 3-ast dobtunk, $A = \{1, 2, 3\}$, akkor

$\overline{A}$: a dobott szám nagyobb, mint 3, $\overline{A} = \{4, 5, 6\}$.

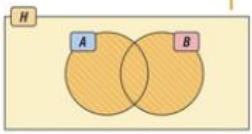
*B*: legalább 3-ast dobtunk, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, akkor

$\overline{B}$: a dobott szám kisebb, mint 3, $\overline{B} = \{1, 2\} = C$.

*C*: a dobott szám kisebb, mint 3, $C = \{1, 2\}$, akkor

$\overline{C}$: a dobott szám legalább 3, $\overline{C} = \{3, 4, 5, 6\} = B$.

◆ ◆ ◆




4. ábra $A + B$

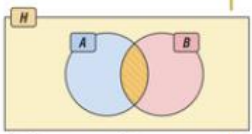
**DEFINÍCIÓ: Tetszőleges *A* és *B* események *összege* az az esemény, amelyik pontosan akkor következik be, amikor *A* vagy *B* bekövetkezik.** *(4. ábra)*

**Jele: $A + B$.**

**TÉTEL: Minden esemény előáll elemi események összegeként.**

Például kockadobásnál:

$\{2\} + \{4, 6\} = \{2, 4, 6\} = \{\text{páros számot dobunk}\} = \{2\} + \{4\} + \{6\}$.



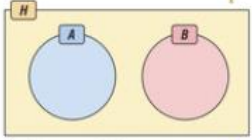

5. ábra $A \cdot B$

**DEFINÍCIÓ: Tetszőleges *A* és *B* események *szorzata* az az esemény, amelyik pontosan akkor következik be, amikor *A* és *B* bekövetkezik.** *(5. ábra)*

**Jele: $A \cdot B$.**

Például kockadobásnál:

$\{\text{legfeljebb 3-ast dobunk és legalább 3-ast dobunk}\} =$
$= \{1, 2, 3\} \cdot \{3, 4, 5, 6\} = \{3\}$.




6. ábra $A \cdot B = \varnothing$

**DEFINÍCIÓ: Tetszőleges *A* és *B* események *egymást kizárják*, ha egyszerre nem következhetnek be, azaz $A \cdot B = \varnothing$.** *(6. ábra)*

Például kockadobásnál:

*A*: legfeljebb 2-est dobunk, *B*: legalább 4-est dobunk;
$A \cdot B = \{1, 2\} \cdot \{4, 5, 6\} = \varnothing$.



**Azonosságok** az eseményekkel kapcsolatos műveletekre, melyek a halmazokra ismert azonosságok következtében igazak:

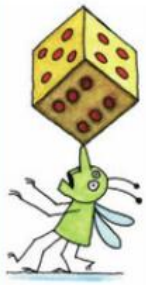
| | Összeadás | Szorzás |
|---|---|---|
| **Kommutativitás** | $A+B=B+A$ | $A\cdot B=B\cdot A$ |
| **Asszociativitás** | $(A+B)+C=A+(B+C)$ | $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ |
| **Disztributivitás** | $A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C)$<br>$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$ | |
| **Elnyelési azonosság** | $A+A=A$ | $A\cdot A=A$ |
| **Lehetetlen esemény** | $A+\varnothing=A$ | $A\cdot\varnothing=\varnothing$ |
| **Biztos esemény** | $A+H=H$ | $A\cdot H=A$ |
| **Komplementer eseménnyel kapcsolatos azonosságok** | $A+\overline{A}=H$ | $A\cdot\overline{A}=\varnothing$ |
| **De Morgan azonosságok** | $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ | $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ |

**3. példa**

Feldobunk egy kockát. Legyenek $A$, $B$, $C$, $D$ a következő események: $A$: páros számot dobtunk; $B$: legfeljebb 3-ast dobtunk; $C$: legalább 3-ast dobtunk; $D$: páratlan számot dobtunk!

Határozzuk meg a következő eseményeket!

*a)* $A+B$; *b)* $B+C$; *c)* $A+D$; *d)* $A\cdot B$; *e)* $B\cdot C$; *f)* $A\cdot D$.



3D

**Megoldás**

*a)* $A+B=$ {páros számot dobtunk vagy legfeljebb 3-ast} = {2, 4, 6, 1, 3-ast dobhatunk} = {nem dobtunk 5-öst}.

$$A+B=\{2,4,6\}\cup\{1,2,3\}=\{1,2,3,4,6\}.$$

*b)* $B+C=$ {legfeljebb 3-ast dobtunk vagy legalább 3-ast dobtunk} = = {bármelyik számot dobhattuk}, ez a biztos esemény.

$$B+C=\{1,2,3\}\cup\{3,4,5,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}=H.$$

*c)* $A+D=$ {páros számot dobtunk vagy páratlan számot dobtunk}, ez a biztos esemény.

$$A+D=\{2,4,6\}\cup\{1,3,5\}=\{1,2,3,4,5,6\}=H.$$

*d)* $A\cdot B=$ {páros számot dobtunk és legfeljebb 3-ast dobtunk} = {2-est dobtunk}.

$$A\cdot B=\{2,4,6\}\cap\{1,2,3\}=\{2\}.$$

*e)* $B\cdot C=$ {legfeljebb 3-ast dobtunk és legalább 3-ast dobtunk} = {3-ast dobtunk}.

$$B\cdot C=\{1,2,3\}\cap\{3,4,5,6\}=\{3\}.$$

*f)* $A\cdot D=$ {páros számot dobtunk és páratlan számot dobtunk}, ez a lehetetlen esemény.

$$A\cdot D=\{2,4,6\}\cap\{1,3,5\}=\varnothing.$$

**4. példa**

Egy négyzet alakú céltáblára véletlenszerűen lövés érkezik. Jelentse $A$, $B$, $C$ azt az eseményt, hogy a lövés a négyzet pirosra színezett részébe esik!

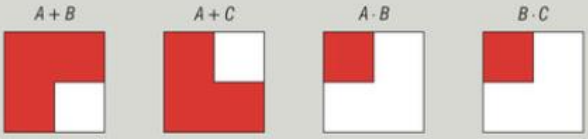



Rajzoljuk le a következő eseményeket:

$$A+B;\ \ A+C;\ \ A\cdot B;\ \ B\cdot C!$$

**Megoldás**

A megoldás a 7. ábrán látható.




*7. ábra*

**5. példa**

Egy szobában három különböző lámpa van. Jelentse $A$ azt az eseményt, hogy a mennyezeti lámpa kiég, $B$ azt, hogy az állólámpa kiég, és $C$ azt, hogy az olvasólámpa kiég. Írjuk fel az $A$, $B$, $C$ eseményekkel és a műveletekkel a következőket!

*a)* Mindegyik lámpa kiég.
*b)* Egyik lámpa sem ég ki.
*c)* Egy lámpa kiég.
*d)* Pontosan egy lámpa ég ki.
*e)* Van olyan lámpa, amelyik világít.



**Megoldás**

*a)* {mindegyik lámpa kiég} $= A\cdot B\cdot C$.

*b)* {egyik lámpa sem ég ki} $= \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$.

*c)* {egy lámpa kiég} = {a mennyezeti lámpa kiég vagy az állólámpa kiég vagy az olvasólámpa kiég} = {nem igaz, hogy egyik lámpa sem ég ki} $= A+B+C=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}$.

*d)* {pontosan egy lámpa ég ki} = {a mennyezeti lámpa kiég, de a többi nem, vagy az állólámpa kiég, de a többi nem, vagy az olvasólámpa kiég, de a többi nem} $= A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$.

*e)* {van olyan lámpa, amelyik világít} = {vagy a mennyezeti lámpa nem ég ki, vagy az állólámpa nem ég ki, vagy az olvasólámpa nem ég ki} = {nem igaz, hogy mindegyik kiég} $= \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{A\cdot B\cdot C}$.



## Feladatok

1. Adjuk meg a következő események komplementerét. Írjuk le az eseményhez és a komplementeréhez tartozó elemi események halmazát!

   $A$: Egy kockát feldobva legalább 4-est dobtunk.

   $B$: Egy kockát feldobva a dobott szám nem nagyobb 2-nél.

   $C$: Két kockát feldobva, a dobások között van 6-os.

   $D$: Három pénzérmét feldobva nincs köztük írás.

   $E$: Három pénzérmét feldobva minden dobás egyforma.

2. Egy dobókockát feldobva jelöljük $A$, $B$, $C$, $D$-vel a következő eseményeket: $A$: a dobott szám prím; $B$: a dobott szám páros; $C$: a dobott szám kisebb, mint 4; $D$: a dobott szám legalább 4! Írjuk le a következő eseményeket!

   $A \cdot B$; $A+B$; $C+D$; $C \cdot D$; $\overline{B} \cdot C$; $\overline{C}+\overline{D}$; $\overline{C} \cdot \overline{D}$.

3. Egy dobókockát négyszer egymás után feldobunk, a dobások eredményét sorban egymás mellé írva egy négyjegyű számot kapunk. Jelöljük $A$, $B$, $C$, $D$-vel a következő eseményeket: $A$: a négyjegyű szám páros; $B$: a négyjegyű szám osztható 3-mal; $C$: mind a négy dobás 6-os; $D$: a negyedik dobás 6-os! Írjuk le a következő eseményeket!

   $A \cdot B$; $A \cdot C$; $A \cdot D$; $C \cdot D$; $C+D$; $A+C$; $\overline{B} \cdot C$; $B \cdot \overline{C}$.

4. Egy osztályból véletlenszerűen kiválasztunk egy tanulót. Jelöljük $A$, $B$, $C$-vel a következő eseményeket: $A$: a kiválasztott tanuló lány; $B$: a kiválasztott tanuló angolt tanul; $C$: a kiválasztott tanuló énekkaros!

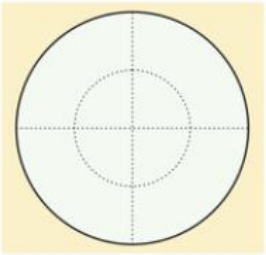
   *a)* Írjuk le a következő eseményeket: $A \cdot (B+C)$; $\overline{A} \cdot B \cdot C$!

   *b)* Milyen feltételek mellett igaz, hogy $A \cdot B \cdot C = A$, illetve $\overline{A} = C$?

5. Egy kör alakú céltáblára véletlenszerűen lövünk. Jelöljük $A$, $B$, $C$, $D$-vel a következő eseményeket: $A$: a céltábla bal felébe esik a lövés; $B$: a céltábla alsó felébe esik a lövés; $C$: a céltábla bal alsó negyedébe esik a lövés; $D$: a céltáblával koncentrikus, felényi sugarú körbe esik a lövés! Színezzük be a rajzon a következő eseményeknek megfelelő részeket!

   $A \cdot B$; $A+B$; $A+C$; $A \cdot C$; $A+D$;

   $B \cdot D$; $B \cdot \overline{C}$; $\overline{A}+C$; $\overline{B \cdot D}$; $\overline{A+D}$.



6. Egy körforgalomba a Cinke, a Pinty és a Rigó utca felől lehet behajtani. Jelöljük $A$, $B$, $C$-vel a következő eseményeket: $A$: a Cinke utcából érkezik egy autó; $B$: a Pinty utcából érkezik egy autó; $C$: a Rigó utcából érkezik egy autó! Írjuk fel az $A$, $B$, $C$ eseményekkel és a műveletekkel a következőket!

   *a)* Pontosan egy utcából érkezik autó a körforgalomhoz.

   *b)* Mindegyik utcából érkezik egy autó a körforgalomhoz.

   *c)* A Cinke utcából érkezik egy autó a körforgalomhoz.

   *d)* Pontosan két utcából érkezik autó a körforgalomhoz.

   *e)* Van olyan utca, ahonnan nem érkezik autó a körforgalomhoz.

   *f)* Mindegyik utcából érkezik autó a körforgalomhoz.

   *g)* A Rigó utcából nem érkezik autó a körforgalomhoz.





# 3. Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség

Legyen egy kísérlet az, hogy feldobunk egy dobókockát, és figyeljük a dobott számot! Legyen az $A$ esemény az, hogy 6-ost dobtunk! Megismételtük 100-szor a kísérletet, és összeszámoltuk, hogy az $A$ esemény 15-ször következett be, azaz az $A$ esemény *gyakorisága* 15. A kísérletek számának $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ részében következett be az $A$ esemény, azaz az $A$ esemény *relatív gyakorisága* $\frac{15}{100}$.

gyakoriság, relatív gyakoriság

**DEFINÍCIÓ: Ha $n$ kísérletből az $A$ esemény $k$-szor következett be ($k \le n$), akkor $k$-t az $A$ esemény *gyakoriságának*, $\frac{k}{n}$-et pedig az $A$ esemény *relatív gyakoriságának* nevezzük.**

3D

**1. példa**

Egy kockát dobjunk fel 100-szor! Határozzuk meg a következő események gyakoriságát és relatív gyakoriságát!

$A$: Páros prímszámot dobtunk.

$B$: Páratlan prímszámot dobtunk.

$C$: A dobott szám prím.

$D$: A dobott szám legfeljebb 6.

**Megoldás**




Egy dobássorozat alapján a megfelelő események gyakorisága és relatív gyakorisága:

$A = \{2\}$ esemény gyakorisága: 17, relatív gyakorisága: $\frac{17}{100}$.

$B = \{3, 5\}$ esemény gyakorisága: 34, relatív gyakorisága: $\frac{34}{100}$.

$C = \{2, 3, 5\}$ esemény gyakorisága: 51, relatív gyakorisága: $\frac{51}{100}$.

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a biztos esemény gyakorisága 100, relatív gyakorisága: 1

Figyeljük meg, hogy az $A$ és $B$ események kizárják egymást: $A \cdot B = \varnothing$!

Az $A + B = C$ esemény gyakorisága az $A$ és $B$ események gyakoriságának összege, $A + B$ összeg relatív gyakorisága a tagok relatív gyakoriságának összege.

◆ ◆ ◆



- **A relatív gyakoriság nem lehet negatív: mivel $0 \le k \le n$ és $n > 0$, ezért $0 \le \frac{k}{n} \le 1$.**
- **A biztos esemény relatív gyakorisága 1, mert a biztos esemény minden kísérletnél bekövetkezik, így $k = n$.**
- **Egymást kizáró események összegének relatív gyakorisága a tagok relatív gyakoriságának összege.**

Sok hasonló kísérletsorozatot elvégezve megfigyelhetjük, hogy adott esemény relatív gyakorisága egy szám körül ingadozik. Minél több kísérletet végzünk, az ingadozás általában annál kisebb.

**Adott $A$ esemény *valószínűségének* azt a számot tekintjük, amely körül a relatív gyakoriság ingadozik.**
**Az $A$ esemény valószínűségének jele: $P(A)$.**

*Megjegyzés:* A valószínűséget nem definiáljuk, hanem axiómákkal határozzuk meg, melyek a relatív gyakoriság tulajdonságai alapján a tapasztalatnak megfelelően adódnak.

I. axióma: Ha $A$ tetszőleges esemény, akkor $P(A) \ge 0$.

II. axióma: $P(H) = 1$.

III. axióma: Ha $A$ és $B$ tetszőleges események, melyekre $A \cdot B = \emptyset$, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Galileo Galilei (1564–1642) hagyatékában találták meg *Considerazione sopra il Sinoco dei Dadi* (Vizsgálatok a kockajátékokról) című művét, melyben ilyen problémákkal foglalkozott.

**valószínűség**

Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987) orosz matematikus, a valószínűség-számítás modern matematikai megalapozója. *A valószínűség-számítás alapfogalmai* című műve először 1933-ban németül, majd 1936-ban oroszul jelent meg. Ebben írta le a valószínűségre vonatkozó axiómákat.

### 2. példa

A három kocka problémája: Toscana hercege levelet írt Galileo Galileinek, melyben a következő problémát vetette fel, és várta a tudós válaszát. Abban az időben sokat kockáztak, feldobtak egyszerre három dobókockát, és nézték a három kockán dobott számok összegét. Összeszámolták, hogy az összeg hatféleképpen lehet 9, és hatféleképpen lehet 10 is, ugyanis:

$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$

$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4.$

Mégis, játék közben azt tapasztalták, hogy az összeg gyakrabban lesz 10, mint 9. Vajon miért mond ellent a számolás a tapasztalatnak?

| 9-es összeg | |
|---|---|
| 1+2+6 | 6 elemi esemény |
| 1+3+5 | 6 elemi esemény |
| 1+4+4 | 3 elemi esemény |
| 2+2+5 | 3 elemi esemény |
| 2+3+4 | 6 elemi esemény |
| 3+3+3 | 1 elemi esemény |
| összesen: **25** elemi esemény | |

| 10-es összeg | |
|---|---|
| 1+3+6 | 6 elemi esemény |
| 1+4+5 | 6 elemi esemény |
| 2+2+6 | 3 elemi esemény |
| 2+3+5 | 6 elemi esemény |
| 2+4+4 | 3 elemi esemény |
| 3+3+4 | 3 elemi esemény |
| összesen: **27** elemi esemény | |

#### Megoldás

Színezzük a kockákat pirosra, kékre és zöldre! A számolásnál egy esetnek tekintettük azt, amikor a három kockával 1, 2, 6-ost dobtunk. Mivel a kockák színesek, látható, hogy nem mindegy, hogy a piros kockával dobtunk 1-est vagy a kékkel. Számoljuk össze, hány eset adódik a színek figyelembe vételével. Ha három különböző számot dobtunk, azt $3 \cdot 2 \cdot 1$ féleképpen tehetjük meg, mert a piros kockán 3-féle, a kéken ezután 2-féle, végül a zöldön 1-féle szám lehet. Ha a dobott számok között két egyforma van, például 1+ 4 + 4-et dobtunk, akkor az 1-est háromféle színű kockával dobhattuk, így ez 3 esetet jelent a színes





kockákkal. Ha mindhárom dobott szám azonos, az természetesen 1 eset színes kockákkal is. Így figyelembe véve a színeket, 25-féleképpen lehet 9 az összeg, és 27-féleképpen lehet 10. A tapasztalat azt mutatta, hogy többször dobtak 10-et, mint 9-et, ami azt támasztja alá, hogy a kockákat különbözőnek kell tekinteni.

**A valóságban két kocka mindig különböző, még ha szemmel nem is tudjuk megkülönböztetni őket.**

## Feladatok

1. Végezzünk 100 kísérletet két különböző színű (fekete, fehér) kockával, és vizsgáljuk a következő események gyakoriságát, relatív gyakoriságát!

   *A*: A két kockával dobott szám egyenlő.

   *B*: A fekete kockával nagyobb számot dobtunk, mint a fehérrel.

   *C*: A fehér kockával nagyobb számot dobtunk, mint a feketével.

2. Végezzünk kísérletet két érmével! Dobjuk fel a két érmét 100-szor egymás után, és figyeljük meg a következő események gyakoriságát és relatív gyakoriságát: a két érmén levő fejek száma 0, 1, 2!

3. Egy kalapba tegyünk 4 cédulát, melyeken rendre az 1, 2, 3, 4 számok vannak. A kísérlet legyen az, hogy a kalapból háromszor egymás után véletlenszerűen kihúzunk egy cédulát, felírjuk a húzott számot, ezután a cédulát visszatesszük! Így egy háromjegyű számot kapunk. A kísérletet 30-szor elvégezve vizsgáljuk a következő események gyakoriságát és relatív gyakoriságát!

   *A*: A háromjegyű szám páros.

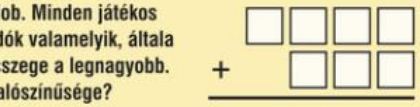
   *B*: A háromjegyű szám osztható 3-mal.

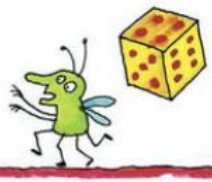
   Mit tapasztalunk, ha a kísérletet 60-szor, 90-szer végezzük el?

4. Három különböző kockával dobva, ha a dobott számok összege 10-nél nagyobb, akkor nyerünk, különben veszítünk. Hányféleképpen nyerhetünk?

**JÁTÉK**

**A játékvezető egy dobókockával sorban 7 számot dob. Minden játékos a dobás után rögtön beírja a számot az összeadandók valamelyik, általa választott számjegye helyére. Az nyer, akinek az összege a legnagyobb. Mi a lehetséges legnagyobb összeg? Mi ennek a valószínűsége?**







# 4. A valószínűség klasszikus modellje

Azokban a példákban, ahol az elemi események egyformán valószínűek, látható, hogy egy esemény relatív gyakorisága annál nagyobb, minél több elemi eseményből áll egy esemény, így az esemény valószínűsége is annál nagyobb lesz, minél több elemi eseményből áll az esemény.

**A valószínűség klasszikus modellje** akkor alkalmazható, ha egy kísérletnek **véges sok kimenetele van, és ezek valószínűsége egyenlő.**

Ekkor egy esemény valószínűsége egyenesen arányos az eseményt alkotó elemi események számával:

$$\text{Esemény valószínűsége} = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi események száma}}.$$

*Megjegyzés:* A fenti képlet a valószínűség axiómáiból levezethető, hiszen $n$ darab $p$ valószínűségű elemi esemény esetén $P(H) = 1$ alapján, mivel az elemi események egymást páronként kizárják, és $H$ az elemi események összege, a III. axióma miatt $n \cdot p = 1$, így $p = \frac{1}{n}$. Ha egy $A$ esemény $k$ darab egymást kizáró elemi esemény összege, akkor a III. axióma miatt $P(A) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$.

A gyakorlatban a klasszikus modell feltételei sokszor nem teljesülnek, ezt mindig statisztikai vizsgálatokkal kell ellenőrizni.

Pierre-Simon Laplace [laplasz] (1749–1827) francia matematikus, csillagász, fizikus. 1812-ben jelent meg a „Théorie analitique des probalitités" (A valószínűség analitikai elmélete) című műve, amely a valószínűségszámítást mint a matematika önálló ágát tárgyalja.

„Ha egy esemény valószínűségét akarjuk meghatározni, akkor meg kell keresnünk az összes olyan esetet, amelyek ezt az eseményt eredményezik. Ezek a kedvező esetek. A valószínűséget a kedvező esetek és az összes esetek számának hányadosa adja meg." (*Laplace*)

**1. példa**

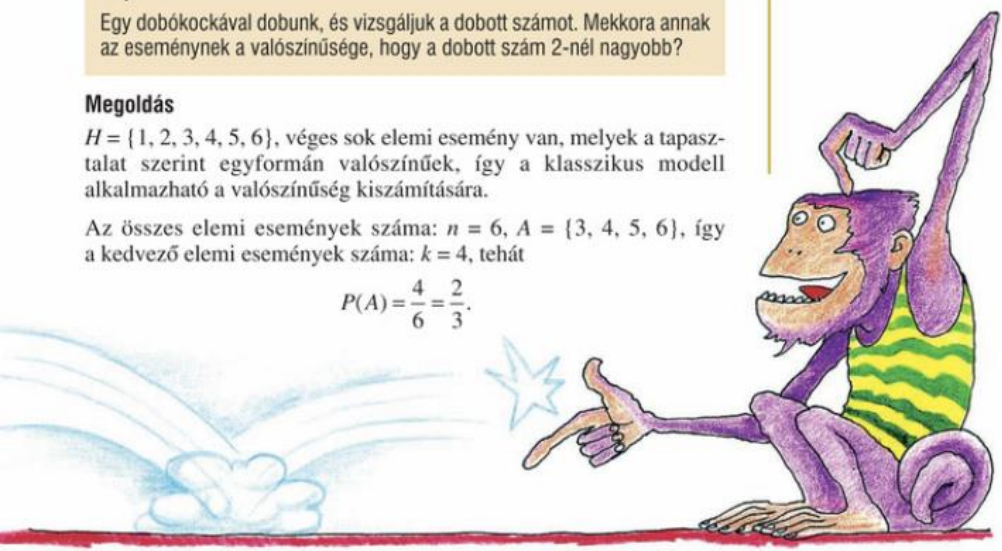
Egy dobókockával dobunk, és vizsgáljuk a dobott számot. Mekkora annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a dobott szám 2-nél nagyobb?

**Megoldás**

$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, véges sok elemi esemény van, melyek a tapasztalat szerint egyformán valószínűek, így a klasszikus modell alkalmazható a valószínűség kiszámítására.

Az összes elemi események száma: $n = 6$, $A = \{3, 4, 5, 6\}$, így a kedvező elemi események száma: $k = 4$, tehát

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$







**2. példa**

Egy pénzérmét háromszor egymás után feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három dobás közül legalább egy fej?

**Megoldás**

Az elemi események például: FFF, FFI, FIF stb. A klasszikus modell alkalmazható, az elemi események száma $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, és ezek egyformán valószínűek.

A kedvező esetek: FFF, FFI, FIF, IFF, FII, IFI, IIF, ezek száma 7, így:

$$P(\text{legalább egy fej}) = \frac{7}{8}.$$

$A$ = legalább egy fej

$\overline{A}$ = mindhárom írás

A kedvező elemi eseményeket könnyebben összeszámolhatjuk a következőképpen: összesen 8 eset van, ebből csak akkor **nem** következik be a „legalább egy fej" esemény, ha mindhárom érmével írást dobunk, vagyis 1-szer. Így a kedvező esetek száma: $8 - 1 = 7$.

* * *

A kedvező esetek összeszámlálása könnyebb volt, ha az esemény helyett annak komplementerét vizsgáltuk, ez több feladatnál hasznos lehet:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n}$$

*Megjegyzés:* $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ nemcsak klasszikus valószínűségi mezőben érvényes, hiszen tetszőleges $A$ eseményre $A + \overline{A} = H$ és $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ miatt a II. és a III. axióma alapján: $1 = P(H) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.

**3. példa**

Egy sárga és egy piros dobókockát feldobunk, és a dobott számokat összeadjuk. Mi a valószínűsége, hogy az összeg 7?

**Megoldás**

A két különböző kockával való dobás lehetséges eredményeit szemléltessük egy négyzettel, amelyet vízszintesen és függőlegesen is hat egyenlő részre osztunk. Az oszlopok jelentsék sorban azt, hogy a sárga kockával 1, 2, 3, 4, 5, 6-ost dobunk, az egymás alatti sorok pedig azt, hogy a piros kockával 1, 2, 3, 4, 5, 6-ost dobunk. Így a két kockával összesen 36-féle számpárt dobhatunk, az összes elemi események száma: 36.

| | ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ⚁ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ⚂ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ⚃ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ⚄ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| ⚅ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

*8. ábra*

A 8. ábrán a kis négyzetekbe beírtuk a dobott számok összegét, így látható, hogy az összeg 6-féleképpen lehet 7. Tehát annak a valószínűsége, hogy a két kockával dobott számok összege 7:

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Az összes többi összeg dobásának valószínűsége ennél kisebb:

$$P(2) = P(12) = \frac{1}{36}; \quad P(3) = P(11) = \frac{2}{36}; \quad P(4) = P(10) = \frac{3}{36};$$
$$P(5) = P(9) = \frac{4}{36}; \quad P(6) = P(8) = \frac{5}{36}.$$

Észrevehetjük, hogy a 7-es összeg dobásának valószínűsége ugyanannyi, mint az, hogy 1 és 6 között egy meghatározott számot dobunk.

Mi lehet ennek az oka?

Az első kockával bármit dobhatunk, a másodikkal egyféleképpen lehet úgy dobni, hogy a dobott számok összege 7 legyen:

$$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1 = 7.$$

Annak a valószínűsége, hogy a második kockával ezt az egy megfelelő számot dobjuk: $\frac{1}{6}$.



**4. példa**

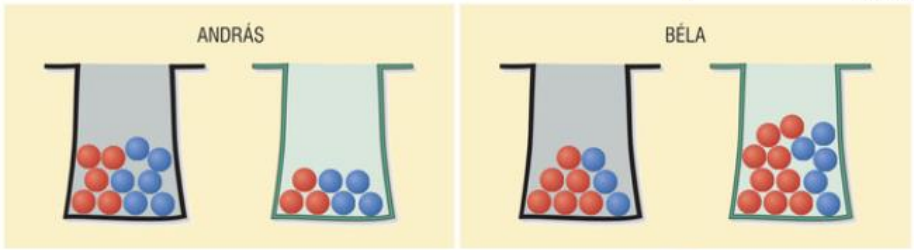
Andrásnak van egy fekete és egy zöld kalapja. A fekete kalapba 5 piros és 6 kék golyót tett, a zöldbe 3 pirosat és 4 kéket. Bélának is van egy fekete és egy zöld kalapja, a fekete kalapba 6 piros és 3 kék, a zöldbe 9 piros és 5 kék golyót tett. Mindketten megállapították, hogy a piros golyó húzásának valószínűsége nagyobb a fekete kalap esetén. Mi a helyzet, ha összeöntik a két fekete kalap tartalmát és a két zöldét is?

**Megoldás**

András a fekete kalapjából $\frac{5}{11}$, a zöldből $\frac{3}{7}$ valószínűséggel húz piros golyót, $\frac{5}{11} > \frac{3}{7}$, valóban a fekete kalapból nagyobb valószínűséggel húzhat piros golyót, mint a zöldből. *(9. ábra)*

Béla a fekete kalapjából $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, a zöldből $\frac{9}{14}$ valószínűséggel húz piros golyót, $\frac{2}{3} > \frac{9}{14}$, valóban a fekete kalapból nagyobb valószínűséggel húzhat piros golyót, mint a zöldből.

*9. ábra*







Ha összeöntik a golyókat, akkor a fekete kalapban összesen $11 + 9 = 20$ golyó lesz, ebből piros: $5 + 6 = 11$, így a piros golyó húzásának valószínűsége $\frac{11}{20}$.

A zöld kalapban összesen $7 + 14 = 21$ golyó lesz, ebből $3 + 9 = 12$ piros, így a piros golyó húzásának valószínűsége $\frac{12}{21}$.

Mivel $\frac{11}{20} < \frac{12}{21}$, így az összeöntés után a zöld kalapból nagyobb valószínűséggel lehet piros golyót húzni, mint a feketéből.

Ezt a furcsaságot, hogy bár külön-külön tekintve a fekete kalapokból lehetett nagyobb valószínűséggel piros golyót húzni, összeöntve a golyókat viszont a zöldből, *Simpson-féle paradoxonnak* nevezik.

Lehet, hogy:

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ és $\frac{x}{y} > \frac{v}{z}$,

de $\frac{a+x}{b+y} < \frac{c+v}{d+z}$.

## Feladatok

1. Egy dobókockát egyszer feldobunk. Határozzuk meg a következő események valószínűségét!

   *A*: Páros prímszámot dobtunk. *C*: A dobott szám prím.

   *B*: Páratlan prímszámot dobtunk. *D*: A dobott szám legfeljebb 6.

2. Dobjunk fel két pénzérmét, és keressük a következő események valószínűségét: a két érmén levő fejek száma 0, 1, 2!

3. Egy kalapba tegyünk 4 cédulát, melyeken az 1, 2, 3, 4 számok vannak! A kísérlet legyen az, hogy a kalapból háromszor egymás után véletlenszerűen kihúzunk egy cédulát, felírjuk a húzott számot, ezután a cédulát visszatesszük. Így egy háromjegyű számot kapunk. Mennyi a következő események valószínűsége?

   *A*: A háromjegyű szám páros.

   *B*: A háromjegyű szám osztható 3-mal.

4. Melyik valószínűbb, hogy két kockával legalább egy 1-est dobunk, vagy hogy négy kockával legalább két 2-est dobunk?

5. A 32 lapos magyar kártyából véletlenszerűen húzunk egy lapot. Jelöljük *A*, *B*, *C*, *D*-vel a következő eseményeket: *A*: a kihúzott lap piros; *B*: a kihúzott lap hetes; *C*: a kihúzott lap király vagy ász; *D*: a kihúzott lap makk, vagy zöld, vagy tök! Mennyi az egyes események valószínűsége? Írjuk le a következő eseményeket, és állapítsuk meg, mennyi a valószínűségük!

   $A \cdot B$; $A + B$; $A \cdot C$; $A \cdot D$; $C \cdot D$; $C + D$; $A + C$; $\overline{B} \cdot C$; $B \cdot \overline{C}$.

6. Egy autóparkolóban 8 szomszédos hely van. Minden nap 8 órára 4 autó áll a parkolóban egy-egy helyen. Egy buszsofőr kirándulókat hoz, és csak akkor tud leparkolni, ha van négy szabad hely egymás mellett. Mi a valószínűsége, hogy tud parkolni, ha az autók egyenlő valószínűséggel választottak az egyes parkolóhelyek közül?

7. Egy osztályban van 15 pletykás fiú. Az egyik elmesél egy pletykát egy másiknak, az továbbadja egy harmadiknak, aki nem tudja, hogy a második kitől hallotta, és ő továbbadja egy fiúnak. Mindenki egyenlő valószínűséggel választ a pletykás fiú osztálytársai közül,

hogy kinek adja tovább a pletykát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 10-szer továbbadják a pletykát anélkül, hogy akár egyetlen fiú is többször hallaná?

8. Egy játékban az a cél, hogy 6-ost dobjunk. Választhatunk, hogy egy szabályos dobókockával dobunk, és a dobott szám az eredményünk, vagy két kockával dobunk, és a dobott számok összege az eredmény. Melyiket válasszuk, hogy nagyobb esélyünk legyen a 6-osra?

9. Két szabályos dobókocka közül az egyiknek lefestjük az 1-es lapját, a másiknak a 4-est. Ekkor mi annak a valószínűsége, hogy a két kockát egyszerre feldobva az összeg 7 lesz?

10. Mi a valószínűsége, hogy két kockát legalább 4-szer kell feldobni, hogy a két kockán levő pontok összege először 7 legyen?

11. Mi a legvalószínűbb összeg két szabályos (1–8-ig számozott) „dobó-oktaéder" feldobásakor? (Az egyes számok dobásának valószínűsége mindkét oktaéder esetén egyenlő.)

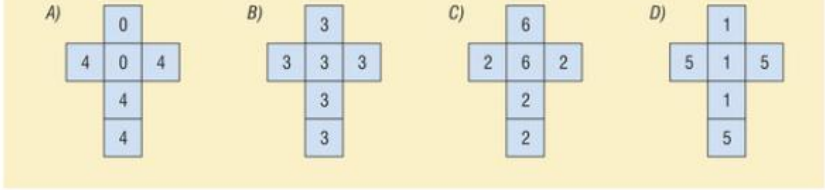


12. Egy dobozban 7 db golyó van, 1–7-ig számozottak. Visszatevés nélkül sorban kihúztuk a 7 golyót. Mi a valószínűsége, hogy a páratlan számokat húztuk ki először?

13. Egy bögrében 10 darab 1–10-ig számozott golyó van. Jancsi odamegy a bögréhez, és véletlenszerűen kivesz egy golyót. Utána jön Juliska, és kivesz egy, az előzőtől különböző golyót. Mi a valószínűsége, hogy a két golyón levő számok szorzata páros?

14. Tomi két számot választott véletlenszerűen a {8, 9, 10} halmazból, és összeadta őket. Karcsi két számot választott véletlenszerűen a {3, 5, 6} halmazból, és összeszorozta őket. Mi a valószínűsége, hogy Tomi eredménye nagyobb, mint Karcsié?

15. Az ábrán négy kocka hálója látható, a kockák minden lapján egy-egy számmal. A kockákat összeállítjuk, aztán te választasz egy kockát, utána én. Feldobjuk a kockáinkat, és az nyer, aki nagyobbat dob. Melyik kockát érdemes választani?




16. Induljunk ki a legrégebbi, az ábrán is látható bűvös négyzetből! Tegyük fel, hogy 9 sakkjátékos rangsorban, növekvő tudás szerint: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 három csapatba van osztva a bűvös négyzet sorai szerint. Melyik a legjobb csapat?
Két csapat úgy játszik egymással, hogy mindegyik játékos az egyik csapatból játszik a másik csapat minden játékosával.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

17. Három dobókockát feldobunk. Az *A* játékos nyer, ha a három kockával dobott számok mind különbözők, a *B* játékos nyer, ha a dobott számok mind egyformák. Melyik játékos szerepét válasszuk, ha nagyobb eséllyel akarunk nyerni?

18. Csaba a következő játékot javasolja neked: Feldobtok két szabályos dobókockát. Ha a dobott két szám szorzata páratlan vagy 5-tel osztható, akkor te nyersz, különben Csaba nyer. Kinek előnyösebb a játék, és mekkora a te nyerési esélyed?

# Tárgymutató

* középszintű érettségin szükséges fogalmak
** emelt szintű érettségin szükséges fogalmak
*dőlt betű*: új szakszavak


*aranymetszés* **110**
azonos egyenlőtlenség* **81**
bázisvektorok* **199**
*befogótétel** **149**
*bevitel a gyökjel alá** **44**
biztos esemény* **239**
*diszkriminánsa** **67**
*egymást kizáró események** **244**
*egységvektor* **188**
*elégséges, de nem szükséges feltétel* **10**
*elégséges feltétel** **10**
*elemi esemény** **238**
esemény* **239**
*esemény komplementere** **243**
események gyakorisága* **248**
*események összege** **244**
események relatív gyakorisága* **248**
*események szorzata** **244**
események valószínűsége* **251**
*eseménytér** **238**
gúla* **158**
*gyöktényezős alak** **70**
háromszög területe* **233**
háromszögek hasonlóságának alapesetei* **145**
hasonlósági transzformáció* **142**
*hegyesszög*
*szinusza** **164**
*koszinusza** **164**
*tangense** **164**
*kotangense** **164**
helyvektor* **199**
húrnégyszög** **125**
*húrnégyszögek tétele*** **125**
irányítástartó transzformáció* **139**
irracionális szám* **37**
*kerületi szög** **117**
két sík hajlásszöge* **181**
*koszinuszfüggvény** **204**
*kotangensfüggvény** **221**
*körhöz belső pontból húzott szelőszakaszok tétele*** **152**
*körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele*** **151**
*körhöz külső pontból húzott szelőszakaszok tétele*** **152**
*középponti szög* **116**
középpontos hasonlósági transzformáció* **138**
*látószög** **121**
*látószögkörív (látókörív)*** **122**
lehetetlen esemény* **239**
*magasságtétel** **148**
*másodfokú egyenlet megoldóképlete* **66**
másodfokú egyenlőtlenség* **80**
*mértani (geometriai) közép** **102**
*n-edik gyök* **51**
négyzetgyök* **40**
*nem szükséges és nem elégséges feltétel** **11**
*nevező gyöktelenítése** **46**
*párhuzamos szelő, szelőszakasz** **129**
*párhuzamos szelők tétele*** **130**
*párhuzamos szelőszakaszok tétele*** **133**
racionális szám* **36**
skatulyaelv** **21**
szabályos tetraéder* **181**
*számtani és mértani közép egyenlőtlensége** **103**
számtani közép* **101**
*szimmetrikus egyenlet*** **78**
*szinuszfüggvény** **204**
*szögfelezőtétel*** **136**
*szükséges és elégséges feltétel** **11**
*szükséges feltétel** **10**
*szükséges, de nem elégséges feltétel** **10**
*tangensfüggvény** **221**
*tetraéder súlypontja*** **196**
*tetraéder súlyvonala*** **195**
*Thalész tétele és megfordítása** **121**
valós számok halmaza* **39**
valószínűség* **249**
*vektor koordinátái** **199**
*vektorok lineáris kombinációja*** **192**
*Viète-féle formulák*** **70**
vonatkoztatási pont, helyvektor* **194**





Kiadja a Mozaik Kiadó, Szeged • Telefon: (62) 470-101, (62) 554-660
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Aggod István
Terjedelem: 22,88 A/5 nyomdai ív • 2024. április • Tömeg: 450 g • Raktári szám: MS-2310U