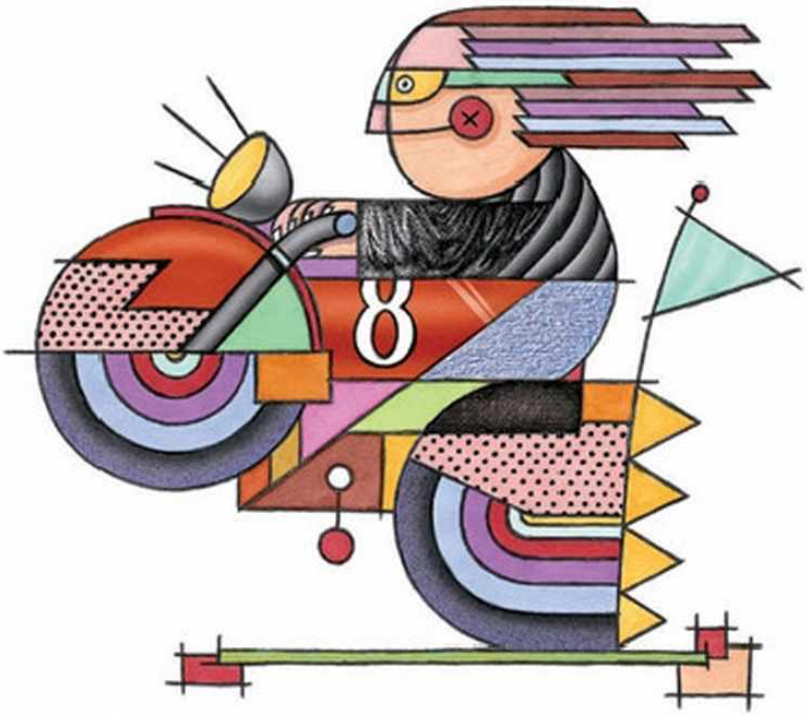
Sokszínű matematika

8

IX. Budapesti Könyvfesztivál Budai Könyvdíj
Szép Magyar Könyv 2001 Díj
Szép Magyar Könyv 2001 Különdíj
Hundidac 2003 Arany-díj
Szép Magyar Könyv 2003 Díj





Sokszínű matematika

Jakab Tamás
Kothencz Jánosné
Kozmáné Jakab Ágnes
Pintér Klára
Vincze István

Matematika

tankönyv

8

Harmadik kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2012

A könyvet írta: Jakab Tamás · *gimnáziumi tanár*
Kothencz Jánosné · *általános iskolai tanár*
Kozmáné Jakab Ágnes · *általános iskolai szakvezető tanár*
Pintér Klára · *főiskolai adjunktus*
Vincze István · *gimnáziumi tanár*

Lektorálta: Juhász Nándor · *általános iskolai tanár*
Pálfalvi Józsefné dr. · *tanszékvezető főiskolai docens*



Felelős szerkesztő: Tóth Katalin
Borítóterv, tipográfia: Reményfy Tamás
Műszaki szerkesztő: Vass Tibor
Illusztrációk: Ábrahám István, Gönczi Anikó
Anyanyelvi lektor: Matyelka Tímea, Varró Sándor
Fotók: Mozaik Archívum; Képügynökségek
Kirendelt szakértők: Dr. Ambrus András, Karácsony Orsolya, Katona István, Tariné Szentes Mária Katalin

Kerettanterv: Mozaik Kerettantervrendszer 17/2004 (V. 20.)
OM Kerettanterv 17/2004 (V. 20.) 3. számú melléklet

A Mozaik Archívum képeinek kizárólagos felhasználási joga a Mozaik Kiadó Kft. tulajdona.
Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában nem sokszorosítható.

Engedélyszám: KHF/688-29/2010
ISBN 978 963 697 615 6
Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2009

A tankönyv fejezetei

Algebra 1

Szöveges feladatok 2

Halmazok, kombinatorika 3

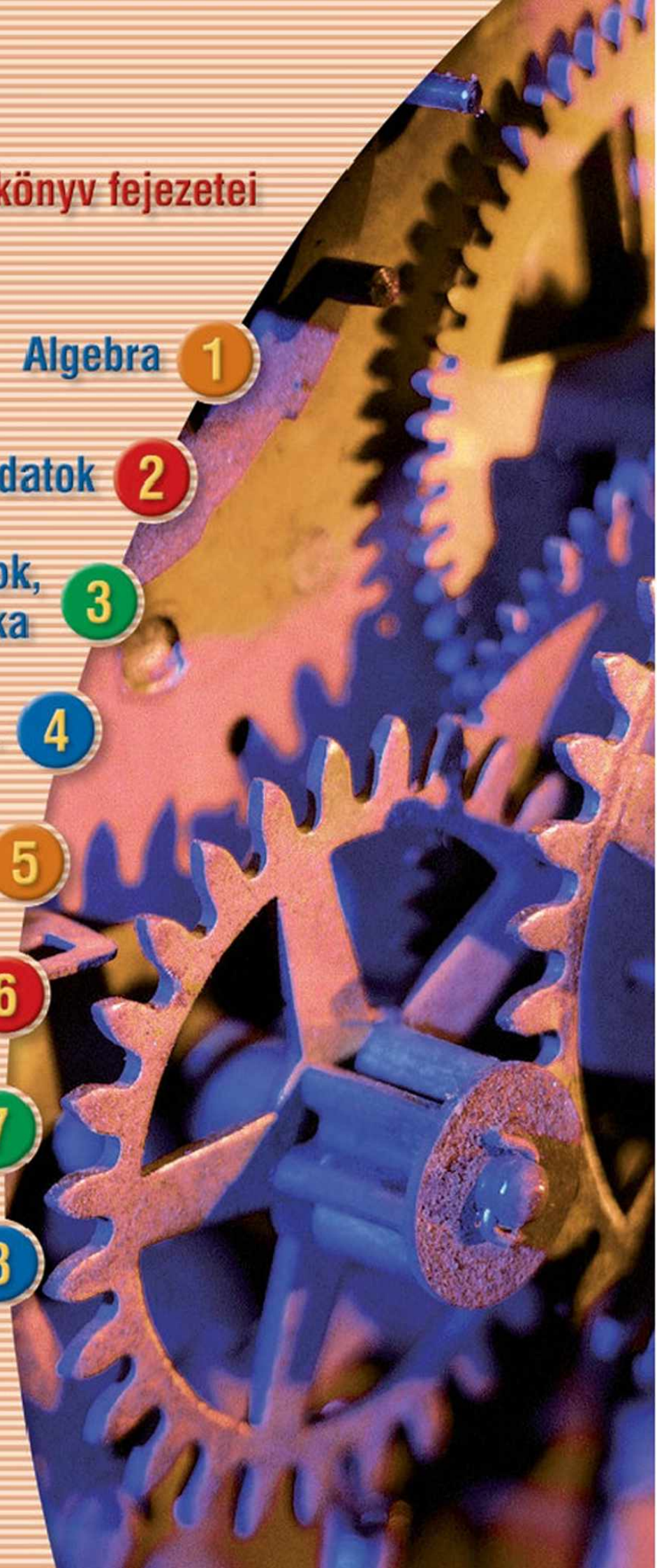
Geometria I. 4

Térgeometria 5

Statisztika, valószínűség 6

Geometria II. 7

Függvények, sorozatok 8



Tartalomjegyzék



Algebra

1. Algebrai kifejezések (emlékeztető) 10
2. Hogyan oldunk meg egyenleteket, egyenlőtlenségeket? 16
3. Többtagú algebrai kifejezések szorzása 22
4. Összeg, különbség négyzete (kiegészítő anyag) 27
5. Összeg és különbség szorzata (kiegészítő anyag) 33
6. Kiemelés, szorzattá alakítás 36
7. Algebrai törtek (kiegészítő anyag) 40
8. Egyenletek megoldása szorzattá alakítással 45
9. Vegyes feladatok 49



Szöveges feladatok

1. Egyenletek alkalmazása feladatmegoldásban (emlékeztető) 52
2. Hány éves a kapitány? 57
3. Gondoltam egy számra... 62
4. Fogócska matematikus szemmel 66
5. Méregkeverés – egyenletekkel 71
6. A fénymásolástól a fűnyírásig: együttes munkavégzés 74
7. Szögek, oldalak, átlók: geometriai számítások 78
8. Vegyes feladatok 83



Halmazok, kombinatorika

1. Halmazok 86
2. Beszéljünk helyesen a matematika nyelvén! 93
3. Hányféle útvonal lehet? Az összegzési módszer 98
4. Hányféleképpen választhatunk? 103
5. Válasszuk szét az eseteket! 110
6. Hány lehetőség van? 114
7. Vegyes feladatok 117



Geometria I.

1. A terület 120
2. A négyzetgyökvonás 126
3. Pitagorasz tétele 133
4. A Pitagorasz-tétel alkalmazásai 138
5. Vegyes feladatok 143

Térgeometria

1. A testek csoportosítása. Kúp, gúla ... 146
2. Nézzük több oldalról! ... 152
3. Csúcsok, élek, lapok ... 156
4. Testek hálója ... 161
5. Testek felszíne ... 166
6. A gúla felszíne (kiegészítő anyag) ... 172
7. Testek térfogata ... 176
8. A gúla térfogata (kiegészítő anyag) ... 181
9. Testek felszíne és térfogata ... 186
10. A kúp és a gömb felszíne, térfogata (kiegészítő anyag) ... 190
11. Vegyes feladatok ... 193



Statisztika, valószínűség

1. Adatok elemzése ... 196
2. Mennyi a valószínűsége? ... 205



Geometria II.

1. Az eltolás ... 216
2. A vektorok ... 222
3. A párhuzamos eltolás alkalmazása, szerkesztések ... 226
4. Egybevágósági transzformációk ... 231
5. A középpontos hasonlóság ... 239
6. Vegyes feladatok ... 245



Függvények, sorozatok

1. Függvények, lineáris függvények ... 248
2. Függvények tulajdonságai ... 255
3. Az abszolútérték-függvény ... 259
4. Másodfokú függvények ... 265
5. Egyéb függvények (kiegészítő anyag) ... 270
6. Sorozatok, számtani sorozat ... 276
7. Mértani sorozatok ... 281
8. Vegyes feladatok ... 287

Az új szakszavak jegyzéke ... 290





Útmutató a könyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában. A leckék általában kidolgozott példákkal kezdődnek. Ezek gondolatmenetét érdemes alaposan elemezni és megérteni, mert mintát nyújtanak a további feladatok megoldásához is.

A megtanulandó legfontosabb szabályokat és meghatározásokat a könyv zöld aláfestéssel és vastag betűs kiemeléssel jelzi.

A *-gal jelölt gyakorló feladatok megoldásához a tananyag mélyebb ismerete szükséges, az egyes leckék végén található rejtvények pedig sokszor egy-egy ügyes ötlettel, egyéni látásmóddal oldhatók meg.

A lapszélen olvasható apró betűs információk többféle szerepet is betölthetnek. Lehetnek például

- fontos kiegészítések, emlékeztetők, amelyek segítenek a mintapéldák megértéséhez szükséges ismereteket felidézni;
- érdekességek, amelyek bemutatják, hogyan alkalmazható a matematika az élet legkülönbözőbb területein;
- beszélgetésre, végiggondolásra, kutatásra érdemes kérdések is.

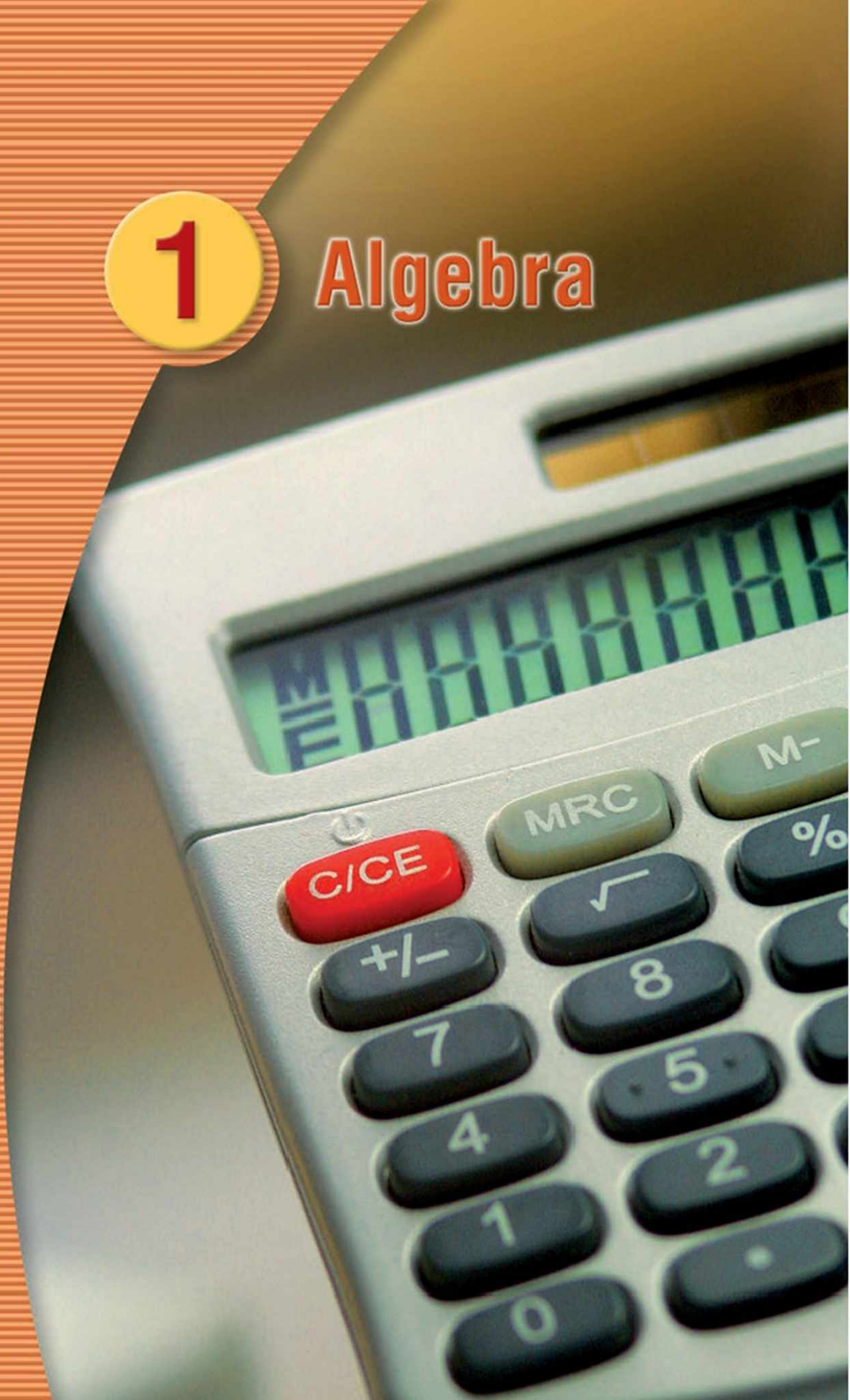
A tankönyv számos matematikai játék leírását tartalmazza. Ezek kipróbálását akár a tanórán, akár azon kívül mindenképpen ajánljuk, mert sok tanulsággal szolgálhatnak, és a matematikai gondolkodásmódot is fejlesztik.

A tankönyv mellett feltétlenül javasoljuk a hozzá kapcsolódó munkafüzet használatát. Ez főként azokból a feladatokból nyújt válogatást, amelyek megértését kifejezetten segíti és gyorsítja a részletesebb, lépésekre bontott feldolgozás.

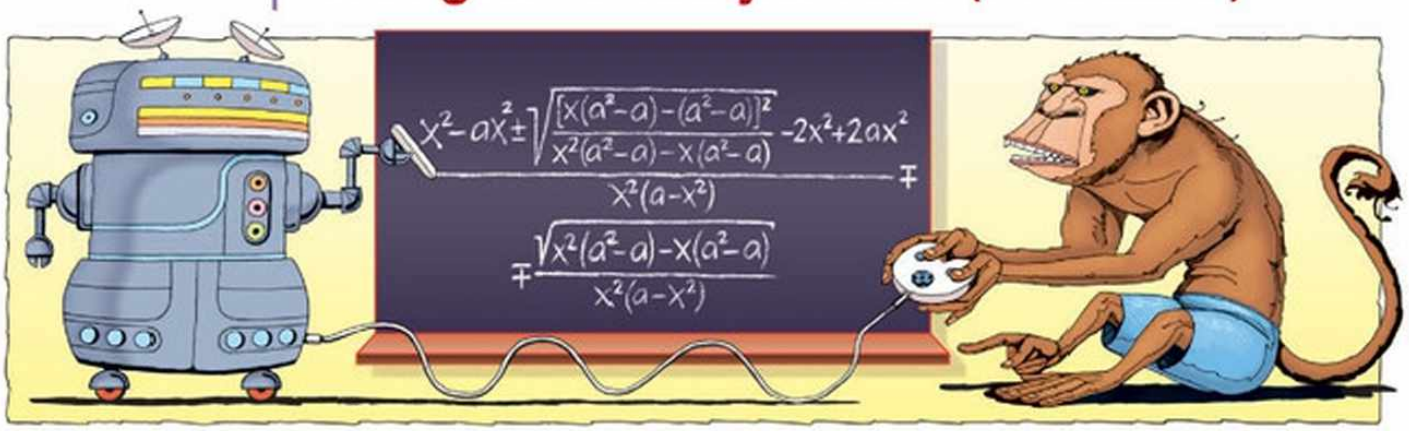
A könyv valamennyi felhasználójának őszintén kívánjuk, hogy a matematika felfedezése örömteli szellemi kalandot jelentsen a számára.

a Szerzők

1 Algebra



1. Algebrai kifejezések (emlékeztető)



Általános matematikai összefüggések felírásakor, számítógépes programok írásakor algebrai kifejezéseket alkotunk. Ezekben számokat és betűket műveleti jelekkel és zárójelekkel kapcsolunk össze. A betűk helyébe az adott alaphalmazba eső számokat helyettesíthetjük.

1. példa

Egy család, két felnőtt és két gyerek nyaralni indul, ezért 7 napra a TUTI biztosítónál utasbiztosítást kötnek. A biztosítás ára naponta fejenként 450 Ft.

a) Mennyibe kerül a család utasbiztosítása?

b) Peti számítógéppel számolja a különböző biztosítók ajánlatait. Táblázatba írja az adatokat, és megadja azt az algebrai kifejezést, amely alapján a program kiszámolja a biztosítást. Írjuk fel ezt az algebrai kifejezést, ha n napra utaznak, és a biztosítás egy főre napi b Ft!

c) A TUTI biztosító családi biztosítást is ajánl, amely 15% megtakarítást jelent. Számítsuk ki, és írjuk fel algebrai kifejezéssel a kedvezményes biztosítás árát!

d) Mennyibe kerülne a 4 fős család utasbiztosítása 7 napra a TÁJFUN biztosítónál, ha ott naponta egy főre 437 Ft a díj, és szintén 15%-os családi kedvezménnyel számolhatnak?

Megoldás

a) A biztosítás forintban 1 főre, 1 napra: 450;
1 főre, 7 napra: $7 \cdot 450$;
4 főre, 7 napra: $4 \cdot 7 \cdot 450 = 12\,600$.

Válasz: A család utasbiztosítása 7 napra 12 600 Ft-ba kerül.

b) A biztosítás forintban 1 főre, 1 napra: b;
1 főre, n napra: $n \cdot b$;
4 főre, n napra: $4 \cdot n \cdot b$.

Válasz: A család utasbiztosítása forintban a $4 \cdot n \cdot b$ algebrai kifejezéssel számolható.

A $4 \cdot n \cdot b$ algebrai kifejezés **egytagú,** mert a szorzás az utoljára elvégzendő művelet.

A $4 \cdot n \cdot b$ algebrai kifejezésben az $n \cdot b$ együtthatója 4.

c) Írjuk fel a családi biztosítást számokkal és algebrai kifejezéssel!

	számokkal	algebrai kifejezéssel
A biztosítás összege	12 600	$4nb$
A kedvezmény	$0{,}15 \cdot 12\,600 = 1890$	$0{,}15 \cdot 4nb = 0{,}6nb$
A fennmaradó összeg	$12\,600 - 1890 = 10\,710$	$4nb - 0{,}6nb = 3{,}4nb$

Válasz: A kedvezményes biztosítás ára 10 710 Ft, algebrai kifejezéssel: $3{,}4 \cdot n \cdot b$ Ft.

d) A TÁJFUN biztosító ajánlata csak a naponta fizetendő díjban tér el a TUTI biztosító ajánlatától, így az előbb kapott $3{,}4nb$ algebrai kifejezés alapján számolhatunk.

Itt $n = 7$ és $b = 437$, amit behelyettesítve:

$$3{,}4nb = 3{,}4 \cdot 7 \cdot 437 = 10\,400{,}6.$$

Válasz: A TÁJFUN biztosítónál 10 400 Ft-ot kell fizetnünk.

A $4nb - 0{,}6nb$ algebrai kifejezés **többtagú,** mert a kivonás az utoljára elvégzendő művelet.

A $4nb$ és a $0{,}6nb$ algebrai kifejezések egyneműek, mert csak együtthatójukban különböznek, így különbségük együtthatója az együtthatók különbsége.

Ha az algebrai kifejezésben szereplő betűk helyébe az alaphalmazból számokat írunk, **behelyettesítést** végzünk.

3. példa

A 2009 prímtényezős felbontása: $2009 = 7^2 \cdot 41$, ami $p^2 \cdot q$ alakú, ahol p és q különböző prímszámok. Melyik a 2009 után következő első ilyen alakú évszám?

$p^2 = p \cdot p$

Megoldás

Írjuk fel a következő évszámok prímtényezős felbontását!

$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$;

2011 prímszám;

$2012 = 2^2 \cdot 503$, ahol 503 prímszám.

Tehát a 2009 utáni első megfelelő évszám a 2012.

Keressünk hasonló szabályosságot az aktuális évszámban, és találjuk meg a következő ugyanolyan tulajdonságú évszámot!

4. példa

Keressük meg a két oszlopban az egymással egyenlő algebrai kifejezéseket!

a)	$2x + 5x$	I.	$2x^3 + 4x^2$
b)	$3x^3y$	II.	$10a^3$
c)	$5a \cdot a \cdot 2a$	III.	$\frac{7}{2}a(a + b)$
d)	$3{,}5a^2 + 3{,}5ab$	IV.	$3xy \cdot x^2$
e)	$2x(x \cdot x + 2x)$	V.	$7x$

Megoldás

Először vizsgáljuk meg, hogy melyik kifejezés esetén tudunk valamilyen műveletet elvégezni.

a) A kéttagú összegben az egynemű kifejezéseket összevonhatjuk:

$2x + 5x = 7x$;

c) a szorzatot hatvány alakba írhatjuk:

$5a \cdot a \cdot 2a = 5 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a = 10a^3$;

$a \cdot a \cdot a = a^3$

IV. az azonos alapú hatványokat összeszorozhatjuk:

$3xy \cdot x^2 = 3x \cdot x^2 \cdot y = 3x^3 \cdot y$;

$x \cdot x^2 = x^1 \cdot x^2 = x^3$

III. és *e)* esetén elvégezhetjük a beszorzást:

$\frac{7}{2}a(a+b) = 3{,}5a(a+b) = 3{,}5a \cdot a + 3{,}5a \cdot b = 3{,}5a^2 + 3{,}5ab$;

$2x(x \cdot x + 2x) = 2x(x^2 + 2x) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 2x = 2x^3 + 4x^2$.

Összeg szorzásakor az összeg minden tagját szorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk.

Így az egyenlő algebrai kifejezések a következők:

a)	$2x + 5x$	I.	$2x^3 + 4x^2$
b)	$3x^3y$	II.	$10a^3$
c)	$5a \cdot a \cdot 2a$	III.	$\frac{7}{2}a(a+b)$
d)	$3{,}5a^2 + 3{,}5ab$	IV.	$3xy \cdot x^2$
e)	$2x(x \cdot x + 2x)$	V.	$7x$

5. példa

Végezzük el az osztásokat!

a) $\frac{10a \cdot 14a}{2}$; *b)* $\frac{9a \cdot 6b}{3}$; *c)* $\frac{10a + 14a}{2}$; *d)* $\frac{9a + 6b}{3}$.

Megoldás

Szorzat osztásakor csak az egyik tényezőt osztjuk az osztóval.

a) $\frac{\overset{5}{\cancel{10}}a \cdot 14a}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 70a^2$ vagy $\frac{10a \cdot \overset{7}{\cancel{14}}a}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 70a^2$.

b) $\frac{\overset{3}{\cancel{9}}a \cdot 6b}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 18ab$ vagy $\frac{9a \cdot \overset{2}{\cancel{6}}b}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 18ab$.

c) A tört számlálójában összevonhatjuk a tagokat:

$$\frac{10a + 14a}{2} = \frac{24a}{2} = 12a.$$

d) Az összeg minden tagját osztjuk a nevezővel, majd a hányadosokat összeadjuk:

$$\frac{9a + 6b}{3} = \frac{9}{3}a + \frac{6}{3}b = 3a + 2b.$$



6. példa

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő algebrai kifejezéseket!

a) $3 \cdot (2x - 1) + (3 - x) \cdot 5$; b) $y \cdot (y + 1) - y \cdot (y - 1)$;

c) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{5}$; d) $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3}$; e) $\frac{5a - b}{6} - \frac{a - 2b}{3}$.

Megoldás

a) Végezzük el a beszorzásokat, majd a lehetséges összevonásokat!

$$3 \cdot (2x - 1) + (3 - x) \cdot 5 = 3 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 5 - x \cdot 5 =$$
$$= 6x - 3 + 15 - 5x = 6x - 5x - 3 + 15 = x + 12.$$

A szorzat előjelét a tényezők előjele határozza meg.

$-y \cdot (-1) = +y$

b) $y \cdot (y + 1) - y \cdot (y - 1) = y \cdot y + y \cdot 1 - y \cdot y + y \cdot 1 =$
$= y^2 + y - y^2 + y = y^2 - y^2 + y + y = 2y.$

c) Hozzuk közös nevezőre a törteket!

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{20x}{60} + \frac{15x}{60} - \frac{12x}{60} = \frac{20x + 15x - 12x}{60} = \frac{23x}{60}.$$

d) Hozzuk közös nevezőre a törteket!

$$\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} = \frac{3x + 2 \cdot (x - 1)}{6} = \frac{3x + 2x - 2}{6} = \frac{5x - 2}{6}.$$

Közös nevezőre hozáskor a számlálóban levő összeget zárójelbe kell tenni!

e) Hozzuk közös nevezőre a törteket, majd végezzük el a lehetséges összevonásokat!

$$\frac{5a - b}{6} - \frac{a - 2b}{3} = \frac{5a - b}{6} - \frac{2 \cdot (a - 2b)}{2 \cdot 3} = \frac{5a - b - 2 \cdot (a - 2b)}{6} =$$

$$= \frac{5a - b - 2a + 4b}{6} = \frac{3a + 3b}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot (a + b)}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{a + b}{2}.$$

Feladatok

1. Írjuk fel algebrai kifejezéssel! A kapott kifejezések közül melyik lesz egytagú és melyik többtagú?

a) x és y összegének az 5-szöröse;
b) x és y ötszörösének a különbsége;
c) az x-nél 7-tel nagyobb számnak és y-nak a különbsége;
d) az x-nél 40%-kal kisebb és y-nál 40%-kal nagyobb számok szorzata;
e) az x és y összegénél 10%-kal nagyobb szám.

2. Egy repülőjegy ára a Ft, melyhez még b Ft repülőtéri illetéket kell fizetnünk.

a) Mennyit kell fizetnünk így n darab jegyért az illetékkel együtt?
b) Az üzemanyagárak változása miatt a jegy árát 10%-kal megemelték, az illeték árát viszont nem változtatták. Mennyibe kerül így n darab jegy?
c) Mennyivel kell többet fizetnünk n db jegyért, ha az eredeti árhoz képest a jegy árát és az illetéket is 10%-kal emelik?
d) Legalább 5 jegy vásárlása esetén $k < 5$ darab jegyre elengedik az illetéket. Mennyit kell fizetnünk így az n db jegyért, ha $n \geq 5$?

3. Végezzük el az osztásokat!

a) $\frac{6x \cdot 10x}{4}$; *b)* $\frac{6x + 10x}{4}$; *c)* $\frac{9xy + 21xy}{3}$; *d)* $\frac{9xy \cdot 21xy}{3}$.

4. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő algebrai kifejezéseket!

a) $4a + 6a - 12a + 7a$;
b) $-5b + 3b - 9b + 2b$;
c) $11c - 3c - 5c - 3c$;
d) $-9d + 10d - 5d + 6d$.

5. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő algebrai kifejezéseket!

a) $5x - 4 + 2x - 7 - 6x + 9$;
b) $4 - 5y - 5 + 2y + 2 - 6y$;
c) $6v + 2c - 3v - 1 - 7v + 7$;
d) $10 - 5z + 4 + 4z - 15 - 2z$.

6. Végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $5a + 3b - 4a - 4b + 2$;
b) $-3c + 2d + 3 - 5c + 2d - 9$;
c) $2e - 4f + 9 - 7e - 4f + 3$;
d) $-5g - 9h - 6 - 7g - 8 - 5h$.

7. Végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $3a + 2b + (3a - 2b)$;
b) $3a + 2b - (3a - 2b)$;
c) $3a - 2b - (3a - 2b)$;
d) $-3a - 2b - (3a + 2b)$.

8. Végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $(2x + 5y) + (4x - 3y) - (2x - 3y)$;
b) $2x + (5y - 4x) - (3y - 2x) - 3y$;
c) $-2x - (5y + 4x) - (3y - 2x + 3y)$;
d) $2x - (5y - 4x - 3y) + (2x + 3y)$.

9. Végezzük el a kijelölt szorzásokat!

a) $4(a + 5)$; *b)* $5(2b - 3)$; *c)* $2(3 - c)$; *d)* $4(2 - 3d)$;
e) $-2(2e + 3)$; *f)* $-5(3f - 2)$; *g)* $-6(3 - g)$; *h)* $-3(4 - 2h)$.

10. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd hozzuk a kifejezést egyszerűbb alakra!

a) $5(x + 1) + 3(x - 2)$;
b) $6(3 - 2y) + 2(1 - 4y)$;
c) $4(3v - 1) + (3 - 4v)$;
d) $2(3z - 2) + 3(3 - 2z)$.

11. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd hozzuk a kifejezést egyszerűbb alakra!

a) $3(4x + 1) - 2 \cdot (3x + 2)$;
b) $4(1 - 4y) - 3(1 + y)$;
c) $-2(3v + 1) + 3 \cdot (4 - v)$;
d) $-5(2z - 3) - 2(3 - 5z)$.

12. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd hozzuk a kifejezést egyszerűbb alakra!

a) $y(2x - 3) - y(x + 1)$;
b) $2a(2x + 3y) - a(3x - y)$;
c) $5x(x - y) - y(2x + y)$;
d) $-3b(4b - 3a) - 2(ab + 5b^2)$.

13. Mennyi a következő algebrai kifejezések helyettesítési értéke?

a) $[(x - y) - (y + x)] \cdot 2$, ha $x = 0{,}19$; $y = \frac{1}{4}$;
b) $a(a - b) - b(b - a)$, ha $a = 10$; $b = 0{,}7$;
c) $\frac{a - b}{2} + \frac{2b}{4}$, ha $a = 20$; $b = 0{,}19$;
d) $2(x^2 - y^2) - x(2x + 1) + x$, ha $x = \frac{2}{3}$; $y = -1$.



14. Pótoljuk a hiányzó tagokat úgy, hogy az egyenlőség két oldalán álló algebrai kifejezések egyenlőek legyenek!

a) $5x^2y + \square = 11x^2y$;
b) $5ab - \square + 3ab = 4ab$;
c) $3x^2 - y^2 + \square = x^2 - y^2$;
d) $2a - \square = 10a$;
e) $\frac{xy}{2} + \square = 3xy$;
f) $2x^2y - \frac{1}{2}yx^2 - \square = 5x^2y$.

15. Végezzük el a közös nevezőre hozást, és hozzuk egyszerűbb alakra a következő algebrai kifejezéseket!

a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4}$;
b) $\frac{y - 1}{4} + \frac{y}{2}$;
c) $\frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2}$;
d) $\frac{x + 1}{2} - \frac{x - 1}{2}$;
e) $\frac{2c + 1}{4} - \frac{2c - 1}{2}$;
f) $\frac{x - 2y}{3} - \frac{2x - y}{2}$.

16. Végezzük el a közös nevezőre hozást, és hozzuk egyszerűbb alakra a következő algebrai kifejezéseket!

a) $\frac{a}{3} + \frac{2a}{5}$;
b) $\frac{3b}{4} - \frac{2b}{3}$;
c) $\frac{c}{2} + \frac{2c + 3}{3}$;
d) $\frac{d + 1}{2} + \frac{2d}{5}$;
e) $e - \frac{2e - 1}{3}$;
f) $\frac{2f + 1}{5} - \frac{1 - f}{3}$;
g) $\frac{2g + 3}{4} - \frac{3g + 1}{2}$;
h) $\frac{3h + 2}{3} - \frac{5h + 4}{5}$.

Rejtvény

Nóri így adta meg postacímét új ismerősének: Budapesten lakom, a Gyík utcában. Az irányítószám, a házszám és az emelet száma is 2 hatványa, és összegük 1092. Hogyan címezze meg a borítékot?

2. Hogyan oldunk meg egyenleteket, egyenlőtlenségeket? (emlékeztető)

Egyenletet kapunk, ha két algebrai kifejezést az egyenlőség jelével kapcsolunk össze, és megadjuk az egyenlet alaphalmazát. Az egyenlet megoldása az alaphalmaznak az az eleme, amelyre az egyenlőség teljesül. Ha nem adunk meg alaphalmazt, akkor a legbővebb olyan halmazt tekintjük alaphalmaznak, amelyre az algebrai kifejezések értelmezhetők.

1. példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $8 - 4a + 10 = 3a + 2 + a$; *b)* $\frac{y}{2} + \frac{4}{5} = 1{,}2$.

Megoldás

a)

$8 - 4a + 10 = 3a + 2 + a$ elvégezzük az összevonást

Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadhatjuk, vagy mindkét oldalából kivonhatjuk ugyanazt a számot vagy az ismeretlen ugyanannyiszorosát.

$18 - 4a = 4a + 2 \quad / - 4a$

$18 - 8a = 2 \quad / - 18$

$-8a = -16 \quad / : (-8)$

$a = 2$ racionális szám

Ellenőrzés:

bal oldal: $8 - 4 \cdot 2 + 10 = 8 - 8 + 10 = 10$;

jobb oldal: $3 \cdot 2 + 2 + 2 = 6 + 2 + 2 = 10$.

Válasz: A megoldás $\underline{\underline{a = 2.}}$

b)

$\frac{y}{2} + \frac{4}{5} = 1{,}2 \quad / - \frac{4}{5}$

Az egyenlet mindkét oldalát megszorozhatjuk vagy eloszthatjuk ugyanazzal a 0-tól különböző számmal vagy kifejezéssel.

$\frac{y}{2} = 1{,}2 - 0{,}8$

$\frac{y}{2} = 0{,}4 \quad / \cdot 2$

$y = 0{,}8$ racionális szám

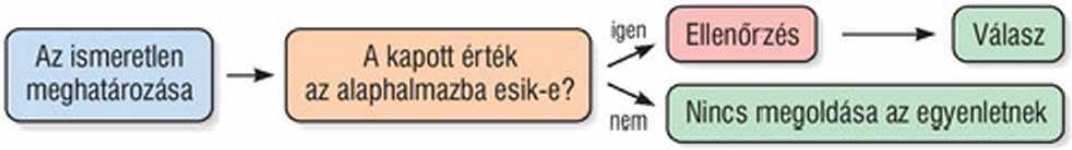
$\frac{4}{5} = 0{,}8$

Ellenőrzés: $\frac{0{,}8}{2} + \frac{4}{5} = 0{,}4 + 0{,}8 = 1{,}2$.

Válasz: A megoldás $\underline{\underline{y = 0{,}8.}}$

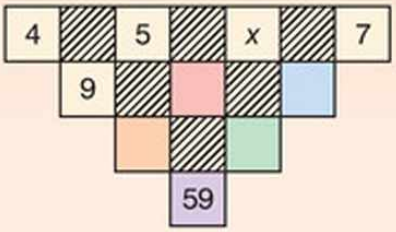
Az egyenletek megoldása során a **mérlegelvet** használtuk, azaz ugyanazokat a műveleteket hajtottuk végre az egyenlet mindkét oldalán.

Az egyenlet megoldásának megadása:



2. példa

Minden színes négyzetbe írjuk be a fölötte levő sorban ráccsal hozzá kapcsolódó két négyzetben levő szám összegét! Melyik szám kerül az x helyére?



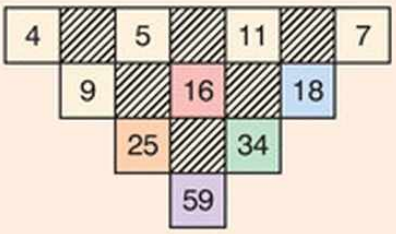
Megoldás

□ = 5 + x;
□ = x + 7;
□ = 9 + □ = 9 + (5 + x) = 9 + 5 + x = 14 + x;
□ = □ + □ = (5 + x) + (x + 7) = 5 + x + x + 7 = 2x + 12;
□ = □ + □ = (14 + x) + (2x + 12) = 14 + x + 2x + 12 = 3x + 26.

A lila négyzetben 59 áll, így

$$\begin{aligned} 3x + 26 &= 59 \quad / -26 \\ 3x &= 33 \quad / : 3 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Ellenőrzés:



Válasz: Az x helyére 11 kerül.



3. példa

Fellírtunk három számot egymás után egy papírra. Andor a második számot kivonta az elsőből, majd a harmadikat ebből a különbségből. Berta a második számból vonta ki a harmadikat, majd ezt a különbséget kivonta az elsőből. Így Berta 12-vel nagyobb számot kapott, mint Andor. Mi volt a harmadik szám a papíron?

Megoldás

Jelöljük a számokat betűkkel: 1. szám: a; 2. szám: b; 3. szám: c!

Andor az $(a - b) - c$, Berta az $a - (b - c)$ műveletsort végezte el.

Berta száma 12-vel nagyobb, mint Andoré, ezért a két kifejezés akkor lesz egyenlő, ha Andoréhoz hozzáadunk 12-t.

$$\begin{aligned} (a - b) - c + 12 &= a - (b - c) \quad \text{Bontsuk fel a zárójelet!} \\ a - b - c + 12 &= a - b + c \quad / - a \\ - b - c + 12 &= - b + c \quad / + b \\ - c + 12 &= c \quad / + c \\ 12 &= 2c \quad / : 2 \\ 6 &= c \end{aligned}$$

Ellenőrzés: Andor: $(a - b) - 6 = a - b - 6$;
Berta: $a - (b - 6) = a - b + 6$.

Berta száma 12-vel nagyobb, mint Andoré.
=
Ha Andor számához 12-t adunk, Bertáét kapjuk.
=
Berta és Andor számának különbsége 12.

$(a - b) = a - b$
$-(b - c) = -b + c$

Szöveges feladat ellenőrzését a szövegbe való behelyettesítéssel végezzük.

Játsszuk el a feladatot különböző számokkal!

Berta száma tényleg 12-vel nagyobb, mert:

$$a - b + 6 - (a - b - 6) = a - b + 6 - a + b + 6 = 12.$$

Válasz: Tehát a harmadik szám a 6.

A mérlegelv lépéseinek elvégzése előtt célszerű az egyenlet két oldalán felbontani a zárójeleket, és **összevonni az egynemű tagokat.**

4. példa

Melyik az a szám, amelyik egykettedének, egyharmadának és egynegyedének összege egytized?

Az x egykettede: $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2}$;
az x egyharmada: $\frac{1}{3} \cdot x = \frac{x}{3}$;
az x egynegyede: $\frac{1}{4} \cdot x = \frac{x}{4}$.

Megoldás

Jelöljük a számot x-szel! A szöveg alapján az egyenlet:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{1}{10}.$$

Vonjuk össze az x-es tagokat közös nevezőre hozással!

$$\frac{6x + 4x + 3x}{12} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{13x}{12} = \frac{1}{10} \qquad / \cdot 12$$

$$13x = \frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} \qquad / : 13$$

$$x = \frac{6}{5 \cdot 13}$$

$$x = \frac{6}{65}$$

Ellenőrzés: A $\frac{6}{65}$ egykettede $\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{65} = \frac{3}{65}$,

egyharmada $\frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{65} = \frac{2}{65}$,

egynegyede $\frac{1}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{65} = \frac{3}{130}$.

$$\frac{3}{65} + \frac{2}{65} + \frac{3}{130} = \frac{6 + 4 + 3}{130} = \frac{13}{130} = \frac{1}{10}.$$



Válasz: A keresett szám a $\frac{6}{65}$.

5. példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket az egész számok halmazán!

a) $\frac{x}{3} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$; *b)* $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2} = 3$.



Megoldás

a)

$$\frac{x}{3} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{x}{2} \qquad / -\frac{x}{3}$$

$$-\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x}{3} \qquad / -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{x}{2} - \frac{x}{3}$$

$$-\frac{4}{4} = \frac{3x - 2x}{6}$$

$$-1 = \frac{x}{6} \qquad / \cdot 6$$

$$-6 = x \qquad \text{egész szám}$$

Ellenőrzés: bal oldal: $\frac{-6}{3} - \frac{3}{4} = -2 - \frac{3}{4} = -\frac{11}{4}$;

jobb oldal: $\frac{1}{4} + \frac{-6}{2} = \frac{1}{4} - 3 = \frac{1-12}{4} = -\frac{11}{4}$.

Válasz: $\underline{\underline{x = -6}}$

Az egyenlet megoldását úgy ellenőrizzük, hogy az egyenlet bal és jobb oldalán álló algebrai kifejezés helyettesítési értékét külön-külön kiszámoljuk, és megnézzük, hogy egyenlők-e.

A tört számlálójában szereplő többtagú kifejezés a beszorzás után zárójelbe kerül!

b)

$$\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2} = 3 \qquad / \cdot 2$$

$$2 \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}\right) = 2 \cdot 3$$

$$\cancel{2} \cdot \frac{x}{\cancel{2}} - \cancel{2} \cdot \frac{x-3}{\cancel{2}} = 6$$

$$x - (x - 3) = 6$$

$$x - x + 3 = 6$$

$$3 = 6$$

$3 \neq 6$, tehát ennek az egyenletnek nincs megoldása.

A mérlegelvet alkalmazhatjuk a fizikai összefüggések átalakításakor is. Például egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén a sebesség a megtett út és az eltelt idő hányadosa: $v = \frac{s}{t}$.

Az egyenlet mindkét oldalát t-vel szorozzuk:

$t \cdot v = s$, vagyis az út a sebesség és az idő szorzata.

Az utóbbi egyenlet mindkét oldalát v-vel osztjuk:

$t = \frac{s}{v}$, vagyis az idő az út és a sebesség hányadosa.

$$v = \frac{s}{t} \qquad / \cdot t$$

$$v \cdot t = s \qquad / : v$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Egyenlőtlenséget kapunk, ha két algebrai kifejezést az egyenlőtlenség ($<$; $\leq$; $>$; $\geq$; $\neq$) jelével kapcsolunk össze, és megadjuk az alaphalmazt, amelyen a megoldást keressük.

6. példa

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $3x - 2 < 16$, a pozitív egész számok halmazán;

b) $7 - 2x \geq 11$, a racionális számok halmazán.

Megoldás

a)

$$\begin{aligned} 3x - 2 &< 16 \quad / + 2 \\ 3x &< 18 \quad / : 3 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség megoldása: x eleme a pozitív egész számok halmazának, és $x < 6$, azaz a megoldáshalmaz $\{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Az egyenlőtlenség megoldását számegyenesen ábrázoljuk:



$-2 < 3 \quad / \cdot (-1)$
$2 > -3$

Negatív számmal szorzáskor az egyenlőtlenség iránya megfordul.

b)

$$\begin{aligned} 7 - 2x &\leq 11 \quad / - 7 \\ -2x &\leq 4 \quad / : (-2) \\ x &\geq -2 \end{aligned}$$

$-x \leq 2 \quad / \cdot (-1)$
$x \geq -2$

Végtelen sok ilyen szám van.

Az egyenlőtlenség megoldása: x racionális szám, és $x \geq -2$.

Az egyenlőtlenség megoldásai a számegyenes pirossal jelölt részén található racionális számok:



Az egyenlőtlenséget csak akkor tudjuk behelyettesítéssel ellenőrizni, ha véges számú megoldása van.

Az egyenlőtlenségek megoldása során is alkalmazhatjuk a mérlegelv lépéseit. Figyeljünk, hogy **ha negatív számmal szorzunk vagy osztunk, az egyenlőtlenség iránya megfordul!**

Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket az egész számok halmazán!

a) $5x - 7 = 18$;

b) $3 = 7 - 2x$;

c) $4 - 3x = x + 16$;

d) $11 - 4x = 11 + 3x$;

e) $8x + 41 = 11x + 16$;

f) $x + 1 + 2x + 2 + 3x + 3 = 4x + 4$;

g) $3x + 7 - 4x + 9 = 5x + 13 - 8x - 1$;

h) $\frac{x}{5} + 2 = 12 - x$;

i) $2x + \frac{5}{3} = \frac{x}{6}$;

j) $\frac{x}{4} + \frac{3}{5} = \frac{5x}{20} + 1$.

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $\frac{x}{4} - 1 = \frac{37}{5} - 5x$;

b) $\frac{3}{2}x + 3 = 5x + 1 - x$;

c) $2(x + 2) - 1 = 4$;

d) $4x + 2(x + 3) = 6$;

e) $3(x - 3) + 4(x + 1) = 2(x + 9)$;

f) $5 - 2(x + 4) = x + 6$;

g) $5(x + 4) - 3(x - 2) = 20$;

h) $2 - \frac{x + 2}{6} = 1$;

i) $\frac{x + 1}{3} + \frac{x - 1}{2} = x - 1$;

j) $\frac{x}{3} + \frac{x - 2}{4} - \frac{x + 2}{5} = \frac{x}{6} + 3$.

3. Kössük össze az egyenleteket a megoldásukkal!

$x + 7 = 5x - 3$	-2
$(x - 1)x - 1 = x^2 + 2x + 5$	0
$\frac{x}{2} - \frac{x - 2}{12} = \frac{x + 7}{3}$	$2{,}5$
$3(x + 2) - 5(x + 3) = 9(x - 1)$	26



4. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a természetes számok halmazán!

a) $3x - 1 < 8$;

b) $2x - 5 \leq x + 4$;

c) $4 - 2x > x - 11$;

d) $5 - 3x \geq 5$;

e) $6x + 6 - 4x < 8x - 18$;

f) $3(x - 1) + 4x > 3(2x - 5)$.

5. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán! A megoldást ábrázoljuk számegyenesen!

a) $6x - 7 \geq 5$;

b) $3 + 3x < x + 17$;

c) $18 - 6x \geq 5x + 7$;

d) $2(3 - x) + 5(x - 1) \leq x + 8$;

e) $\frac{x}{3} - 4 < \frac{x}{6}$;

f) $\frac{2 - 3x}{5} + \frac{x - 1}{3} + 1 > 0$.

6. Mely fizikai mennyiségek ismerhetők fel a következő egyenletekben? Határozzuk meg őket az egyenletek átalakításával!

a) $\rho = \frac{m}{V}$;

b) $p = \frac{F_{ny}}{A}$;

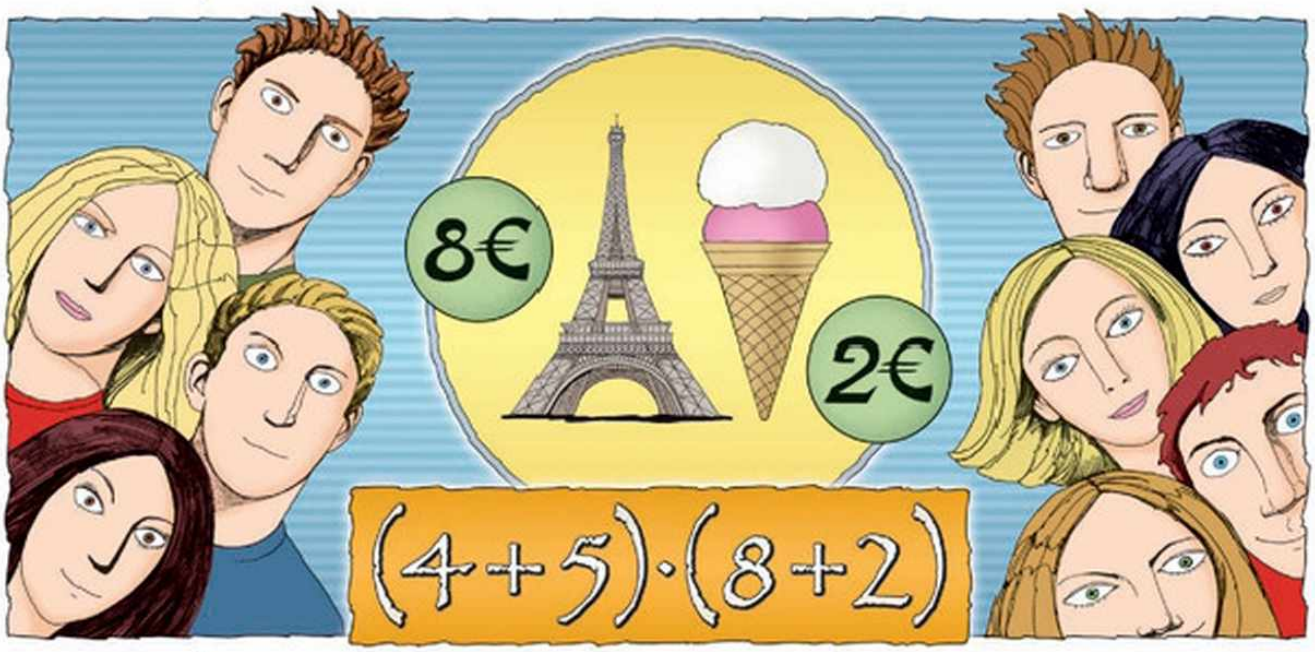
c) $W = F \cdot s$

d) $Q = c \cdot m \cdot \Delta t$.

Rejtvény

Oldjuk meg az $x + 1 + 2x + 2 + 3x + 3 + \ldots + 99x + 99 = 100x + 100$ egyenletet!

3. Többtagú algebrai kifejezések szorzása



Kéttagú algebrai kifejezés szorzása többtagúval

1. példa

A francia tagozatosok Párizsba mentek csereutazásra a tavaszi szünetben. Az Eiffel-torony meglátogatása után a magyar és a francia gyerekek együtt fagyiztak. Összesen mennyit fizettek a belépőre és a fagylaltra, ha

a) 4 magyar és 5 francia gyerek ment együtt, és egy belépő 8 euróba, egy fagylalt 2 euróba került;

b) a magyar és b francia gyerek ment együtt, és egy belépő c euróba, egy fagylalt d euróba került?

Megoldás

Kétféleképpen számolunk. Az 1. módszer szerint először megnézzük, hogy hány gyerek van összesen, és ezek fejenként összesen mennyit költöttek, majd a gyerekek számát szorozzuk a fejenkénti költséggel. A 2. módszer szerint külön-külön kiszámoljuk, hogy mennyit költöttek a magyarok fagyira, mennyit belépőre; mennyit költöttek a franciák fagyira, és mennyit belépőre, majd ezeket összeadjuk.

a) *1. módszer:* összesen $4 + 5$ gyerek van, akik fejenként $8 + 2$ eurót költöttek, így a teljes költség: $(4 + 5) \cdot (8 + 2) = 9 \cdot 10 = 90$ euró.

2. módszer: a magyarok belépőre $4 \cdot 8$, fagyira $4 \cdot 2$ eurót költöttek, a franciák belépőre $5 \cdot 8$ és fagyira $5 \cdot 2$ eurót költöttek, összesen: $4 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 8 + 5 \cdot 2 = 32 + 8 + 40 + 10 = 90$ euró.

A két módszerrel kapott eredmények egyenlők:

$$(4 + 5) \cdot (8 + 2) = 4 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 8 + 5 \cdot 2.$$

b) Készítsünk táblázatot!

		költség: $c + d$	
		belépő: c	fagyi: d
gyerekek: $a + b$	magyar: a	ac	ad
	francia: b	bc	bd

1. módszer: összesen $a + b$ gyerek van, akik fejenként $c + d$ eurót költöttek, így a teljes költség: $(a + b) \cdot (c + d)$ euró.

2. módszer: a magyarok belépőre $a \cdot c$, fagyira $a \cdot d$ eurót költöttek, a franciák belépőre $b \cdot c$ és fagyira $b \cdot d$ eurót költöttek, ami összesen: $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$ euró.

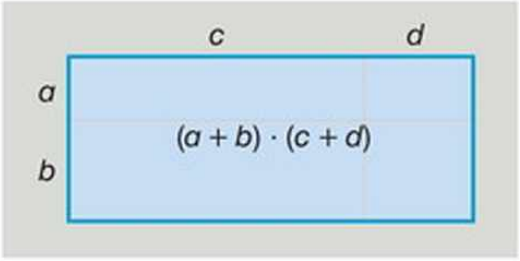
A két módszerrel kapott eredmények egyenlők:

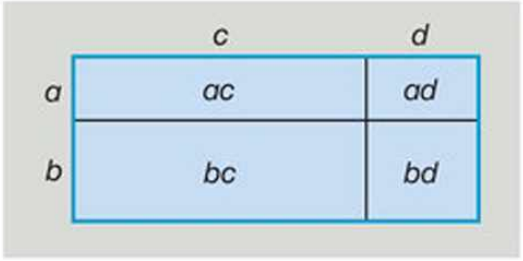
$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$



Kéttagú kifejezések szorzásakor az első tényező mindkét tagjával szorozzuk a második tényező minden tagját, majd a szorzatokat összeadjuk.

A kéttagú kifejezések szorzását szemléltethetjük téglalapokkal.





A nagy téglalap egyik oldala $a + b$ hosszúságú, a másik oldala $c + d$ hosszúságú, így a téglalap területe: $(a + b) \cdot (c + d)$.

A nagy téglalap négy kisebb téglalapból áll, melyek területeinek összege: $ac + ad + bc + bd$, ez szintén a nagy téglalap területe.

Tehát:

$$\boldsymbol{(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.}$$

A különbségek szorzása hasonlóan történik:

$$(a - b) \cdot (c + d) = (a + (-b)) \cdot (c + d) =$$
$$= ac + ad + (-b) \cdot c + (-b) \cdot d = ac + ad - bc - bd \quad \text{és}$$

$$(a - b) \cdot (c - d) = (a + (-b)) \cdot (c + (-d)) =$$
$$= a \cdot c + a \cdot (-d) + (-b) \cdot c + (-b) \cdot (-d) = ac - ad - bc + bd$$

$(a - b) = a + (-b)$
$(-b) \cdot c = -bc$
$a \cdot (-d) = -ad$
$(-b) \cdot (-d) = bd$

	x	2
a	$x \cdot a$	$2 \cdot a$
b	$x \cdot b$	$2 \cdot b$
3	$x \cdot 3$	$2 \cdot 3$

$T = (x+2)(a+b+3)$
$T = xa + xb + 3x +$
$+ 2a + 2b + 6$

Egy kéttagú és egy háromtagú kifejezést szoroztunk össze, ezért $2 \cdot 3 = 6$ tag keletkezett.

2. példa

Végezzük el a következő algebrai kifejezések szorzását!

$$(x + 2) \cdot (a + b + 3)$$

Megoldás

Ebben az esetben is az első tényező mindegyik tagjával szorozzuk a második tényező mindegyik tagját.

$$(x + 2) \cdot (a + b + 3) =$$

$$= xa + xb + 3x + 2a + 2b + 2 \cdot 3 =$$

$$= xa + xb + 3x + 2a + 2b + 6$$

3. példa

Két természetes szám közül 6-tal osztva az egyik 1-et, a másik 2-t ad maradékul. Mennyi lesz a maradék, ha 6-tal osztjuk a két szám

a) összegét; *b)* szorzatát?

Megoldás

A 6-tal osztva 1 maradékot adó természetes számok általános alakja $6a + 1$, ahol a természetes szám; a 2 maradékot adó természetes számok általános alakja $6b + 2$, ahol b természetes szám.

6-tal osztva 1 maradékot adnak:

$a = 0 \quad 6a + 1 = 1$
$a = 1 \quad 6a + 1 = 7$
$a = 2 \quad 6a + 1 = 13$
$\vdots$

6-tal osztva 2 maradékot adnak:

$b = 0 \quad 6b + 2 = 2$
$b = 1 \quad 6b + 2 = 8$
$b = 2 \quad 6b + 2 = 14$
$\vdots$

a) A két szám összege:

$$6a + 1 + 6b + 2 = \overbrace{6a + 6b}^{\text{6-tal osztható}} + 3 = 6 \cdot (a + b) + 3$$

A kapott algebrai kifejezésből leolvasható, hogy az összeg 6-tal osztva 3-at ad maradékul.

összeg maradéka a maradékok összege

b) A két szám szorzata:

$$(6a + 1)(6b + 2) = 6a \cdot 6b + 6a \cdot 2 + 1 \cdot 6b + 1 \cdot 2 =$$

$$36ab + 12a + 6b + 2 = 6 \cdot (6ab + 2a + b) + 2$$

Ebből látszik, hogy a két szám szorzata 6-tal osztva 2-t ad maradékul.

szorzat maradéka a maradékok szorzata

Megjegyzés: Általában igaz, hogy ha többtagú kifejezéseket összeszorzunk, akkor a keletkező tagok száma az összeszorzott algebrai kifejezések tagszámának a szorzata:

$$\underbrace{(x + y)}_{2\text{ tag}}\underbrace{(a + b)}_{2\text{ tag}} = \underbrace{xa + xb + ya + yb}_{4\text{ tag}} \qquad 2 \cdot 2 = 4$$

$$\underbrace{(x + y)}_{2\text{ tag}}\underbrace{(a + b + c)}_{3\text{ tag}} = \underbrace{xa + xb + xc + ya + yb + yc}_{6\text{ tag}} \qquad 2 \cdot 3 = 6$$

Ha a keletkezett tagok között vannak egyneműek, akkor azokat össze lehet vonni.

4. példa

Oldjuk meg az $(x - 1) \cdot (x + 2) = x^2 + 8$ egyenletet a racionális számok halmazán!

Megoldás

$$(x - 1) \cdot (x + 2) = x^2 + 8$$

Végezzük el a szorzást!

$(-1) \cdot x = -x$

$$x \cdot x + x \cdot 2 + (-1) \cdot x + (-1) \cdot 2 = x^2 + 8$$
$$x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + 8$$
$$x^2 + x - 2 = x^2 + 8 \qquad / - x^2$$
$$x - 2 = 8 \qquad / + 2$$
$$x = 10 \qquad \text{racionális szám}$$



Ellenőrzés:

bal oldal: $(10 - 1) \cdot (10 + 2) = 9 \cdot 12 = 108$;

jobb oldal: $10^2 + 8 = 100 + 8 = 108$.

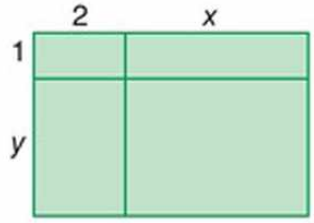
Válasz: Az egyenlet megoldása $x = 10$.

A példában x^2 is szerepelt az egyenletben, de az egyenlet rendezése során kiesett.

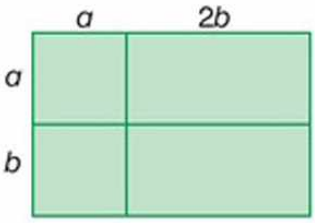
Feladatok

1. Írjunk minél többféle algebrai kifejezést az alábbi téglalapok területéről!

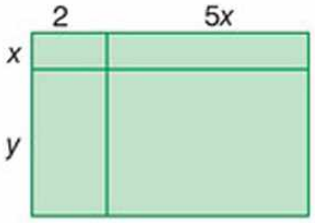
a)



b)



c)



2. Rajzoljunk az előző feladatban szereplőkhöz hasonló téglalapokat, és írjuk fel többféleképpen a területüket!

3. Végezzük el az alábbi algebrai kifejezések szorzását! Ha lehetséges, végezzünk összevonást!

a) $(x + 1)(x + 2)$; *b)* $(x - 1)(x + 3)$; *c)* $(2x + 1)(x + 1)$;

d) $(2x - 1)(x + 2)$; *e)* $(a + b)(x + 2a)$; *f)* $(a - b)(2a + 1)$;

g) $(y - 1)(y + 1)$; *h)* $(a + b)(a + b)$; *i)* $(3a - 2b)(2a - 3b)$;

j) $(2k - 1)(2k + 1)$; *k)* $(a - 1)(a^2 + 1)$; *l)* $(x^2y - 1)(y^2 + x)$;

m) $(x^2 + y)(y^2 - x)$; *n)* $(2a^2 + b^2)(2a - b)$; *o)* $(5xa - b^2)(2xa + b)$.

4. Végezzük el az alábbi többtagú kifejezések szorzását! Ha lehetséges, végezzünk összevonást!

a) $(x + 2)(2x + y + 1)$; *b)* $(a + b)(a + b + 1)$; *c)* $(x + y)(2x + 2y + z)$;
d) $(5x - 1)(6x + y + 2)$; *e)* $(x^2 - 1)(x + y - 2)$; *f)* $(z - y)(a + y + z)$.

5. A gyümölcsös joghurtot kétféle csomagolásban készítik. Az egyikbe a, a másikba b darabot csomagolnak. Az egyik bolt csak az a darabosból rendel napi x, a másik csak a b darabosból napi y adagot. Hány joghurtot szállítanak naponta a két üzletbe?

6. A Balaton-átúszáskor az összesen n induló közül k volt külföldi. A nevezési díj személyenként x forint, melyből y forintot a szervezők kapnak, a többit pedig a résztvevőket visszaszállító kompjáratért fizetnek ki. Mennyit fizetnek összesen a kompért a magyar indulók?

7. A galápagosi óriásteknősökből x darab él a szabadban és y található az állatkertekben (az egyik alfajnak egyetlen képviselője él, akit Magányos George-nak hívnak). Egy teknős évente átlagosan a kg füvet és b kg levelet fogyaszt el. Hány kilogramm növényt fogyasztanak el évente ezek a teknősök?

8. Keressük meg az *A* sorban található algebrai kifejezések párját a *B* sorban!

A	$x(x^2 - 5)$	$(x - 2)(x + 3)$	$(x - 2)(x + 2)$	$(2x + 2)(x - 3)$	$(x + 7)(2x - 1)$
B	$2x^2 + 13x - 7$	$x^3 - 5x$	$2x^2 - 4x - 6$	$x^2 - 4$	$x^2 + x - 6$

9. Illesszük a megfelelő kártyákat az alábbi algebrai kifejezésekbe úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen minden racionális számra, és írjuk le helyesen az egyenlőségeket!

$2a^2$; a^2; 2; $4a$; a; $13a$; $2a$.

A) $(a + 1)(a - 1) = \square - 1$; *B)* $(a + 3)(a - 2) = a^2 + \square - 6$;
C) $(2a + 3)(3a + 2) = 6a^2 + \square + 6$; *D)* $(2a + 1)(a - 3) = \square - 5a - 3$;
E) $(1 + 3a)(2 - a) = -3a^2 + 5a + \square$; *F)* $(a + 2)(a + 2) = 4 + \square + a^2$.

10. Két szám közül 7-tel osztva az egyik 5-öt, a másik 6-ot ad maradékul. Mennyi lesz a maradék, ha 7-tel osztjuk a két szám

a) összegét; *b)* különbségét; *c)* szorzatát?

11. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $(x - 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1$; *b)* $(2x - 3)(x - 1) = (x + 2)(2x - 1)$;
**c)* $(x + 2)(x - 3) = (x - 2)(x + 3) + 2x$; *d)* $(2x + 2)(1 - 2x) = (3 + x)(1 - 4x)$.

Rejtvény

Ha a 60/306 jelölés február 29-ét jelenti, akkor melyik dátumot jelenti a 306/60 jelölés?

4. Összeg, különbség négyzete (kiegészítő anyag)



Néhány szorzat összeg alakja szabályosságot követ, melyet érdemes megjegyezni és alkalmazni, így gyorsabban számolhatunk.

1. példa

Játsszuk el a következő bűvészmutatványt!

1. Gondolj egy számra!
2. Adj hozzá 5-öt!
3. A kapott számnak vedd a négyzetét!
4. Vond ki belőle a gondolt szám 10-szeresét!
5. Adj hozzá 5-öt!
6. Vond ki belőle a gondolt szám négyzetét!

Megmondom, mit kaptál!
Hogyan találom ki?

Megoldás

Lépésenként követjük az utasításokat úgy, hogy a gondolt számot x-szel jelöljük.

1. x;
2. $x + 5$;
3. $(x + 5)^2$;
4. $(x + 5)^2 - 10x$;
5. $(x + 5)^2 - 10x + 5$;
6. $(x + 5)^2 - 10x + 5 - x^2 = (x + 5)(x + 5) - 10x + 5 - x^2 = x^2 + 5x + 5x + 25 - 10x + 5 - x^2 = 10x - 10x + 25 + 5 = 30.$

Válasz: Tehát a gondolt számtól függetlenül 30-at kaptál!

2. példa

Írjuk fel a következő algebrai kifejezéseket összeg alakban, és keressünk szabályosságot!

a) $(a+1)^2$; *b)* $(a+2)^2$; *c)* $(a+3)^2$; *d)* $(a+4)^2$; *e)* $(a+6)^2$.

Megoldás

$a + a = 2 \cdot a$
$2a + 2a = 2 \cdot 2a$
$3a + 3a = 2 \cdot 3a$
$4a + 4a = 2 \cdot 4a$

a) $(a+1)^2 = (a+1)\cdot(a+1) = a^2 + a + a + 1 = a^2 + 2a + 1$;

b) $(a+2)^2 = (a+2)\cdot(a+2) = a^2 + 2a + 2a + 4 = a^2 + 4a + 4$;

c) $(a+3)^2 = (a+3)\cdot(a+3) = a^2 + 3a + 3a + 9 = a^2 + 6a + 9$;

d) $(a+4)^2 = (a+4)\cdot(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$;

e) Sejtés: $(a+6)^2 = a^2 + 2\cdot 6a + 6^2 = a^2 + 12a + 36$.

Beszorzással ellenőrizzük:

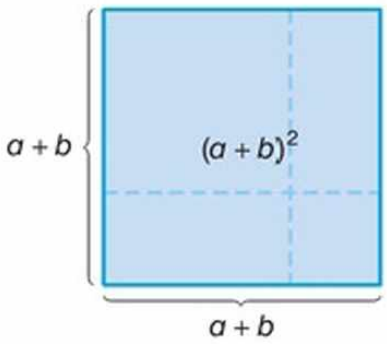
$(a+6)^2 = (a+6)\cdot(a+6) = a^2 + 6a + 6a + 6\cdot 6 = a^2 + 2\cdot 6a + 6^2$.

Két tag összegének **négyzete**:

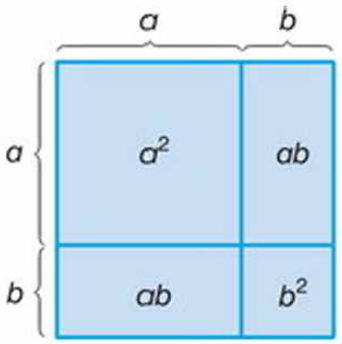
$ab = ba$
$ab + ab = 2 \cdot ab$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Két tag összegének négyzetét szemléltethetjük egy $a+b$ oldalú négyzettel, amelynek területét kétféleképpen írjuk fel:



$T = (a+b)^2$



$T = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

A két terület egyenlő:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$
$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
$\vdots$

Két tag összegének négyzete egyenlő az első tag négyzetének, az első és második tag kétszeres szorzatának és a második tag négyzetének összegével (a és b tetszőleges racionális számok).

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Azonosságnak nevezünk egy egyenletet, ha az egyenlőség a benne szereplő ismeretlen(ek) minden, az alaphalmazba eső értékére igaz.

Például azonosság:

$2x + 3x = 5x$; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $a(b + c) = ab + ac$.

Nem azonosság:

$3x = 6$, hiszen ez csak az $x = 2$ értékre igaz.
(alaphalmaz a racionális számok halmaza)

3. példa

Végezzük el a négyzetre emelést az azonosság alapján!

a) $(a + 10)^2$; *b)* $(2b + 1)^2$; *c)* $\left(c + \frac{1}{2}\right)^2$; *d)* $(4d + 3e)^2$.

Megoldás

a) $(a + 10)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 10 + 10^2 = a^2 + 20a + 100$;

b) $(2b + 1)^2 = (2b)^2 + 2 \cdot 2b \cdot 1 + 1^2 = 4b^2 + 4b + 1$;

c) $\left(c + \frac{1}{2}\right)^2 = c^2 + 2 \cdot c \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = c^2 + c + \frac{1}{4}$;

d) $(4d + 3e)^2 = (4d)^2 + 2 \cdot 4d \cdot 3e + (3e)^2 = 16d^2 + 24de + 9e^2$.

Hasonlóan írhatjuk fel két tag különbségének négyzetét:

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$(a - b)^2 = (b - a)^2$

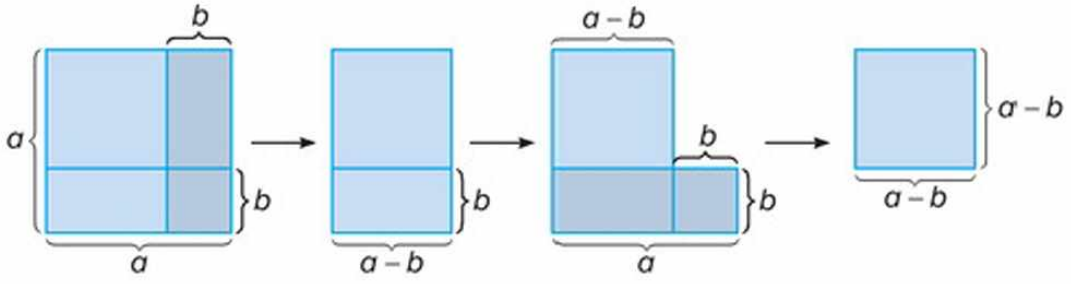
Két tag különbségének négyzetét megkapjuk, ha az első tag négyzetéből kivonjuk az első és második tag kétszeres szorzatát, majd hozzáadjuk a második tag négyzetét (*a* és *b* tetszőleges racionális számok).

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$
$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$
$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
⋮

Az azonosságot szemléltethetjük: egy a oldalú négyzet minden oldalát b-vel csökkentjük, és megvizsgáljuk, hogyan változik a területe.

Ha az a oldalú négyzetből levágunk egy ab területű téglalapot, visszarakunk ebből egy b^2 területű négyzetet, majd újra levágunk egy ab területű téglalapot, akkor az $(a - b)^2$ területű négyzetet kapjuk.



$a^2 - ab + b^2 - ab = (a - b)^2$

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

4. példa

Számoljuk ki számológép nélkül minél gyorsabban a következő négyzetszámokat!

a) 101^2; *b)* 29^2; *c)* 199^2.

Megoldás

a) $101^2 = (100 + 1)^2 =$
$= 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$;

b) $29^2 = (30 - 1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841$;

c) $199^2 = (200 - 1)^2 =$
$= 200^2 - 2 \cdot 200 \cdot 1 + 1^2 = 40\,000 - 400 + 1 = 39\,601$.

Két szám négyzetének összege: $a^2 + b^2$.
Két szám összegének négyzete: $(a + b)^2$.

*5. példa

Két szám szorzata 56, négyzeteik összege pedig 113. Mennyi a két szám összegének négyzete?

Megoldás

A két szám: a; b.
Szorzatuk: $a \cdot b = 56$.
Négyzeteik összege: $a^2 + b^2 = 113$.
Kérdés: összegük négyzete: $(a + b)^2$.

A két szám összegének négyzetére vonatkozó azonosság alapján:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + (a^2 + b^2) = 2 \cdot 56 + 113 = 225$.

Válasz: Tehát a két szám összegének négyzete 225.

Az algebrai átalakítások segítségével a számok ismerete nélkül is válaszolhatunk bizonyos kérdésekre.

*6. példa

Van-e két olyan egymás után következő természetes szám, melyek négyzetének különbsége *a)* 87; *b)* 90?

Megoldás

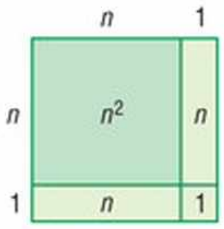
Jelöljük a kisebb természetes számot n-nel, négyzete n^2.
Az n után következő természetes szám: $n + 1$, négyzete $(n + 1)^2$.
Négyzeteik különbsége: $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.

a) A két egymás utáni négyzetszám különbsége 87.

$$\begin{aligned} 2n + 1 &= 87 \quad / - 1 \\ 2n &= 86 \quad / : 2 \\ n &= 43 \end{aligned}$$

Ellenőrzés: $44^2 - 43^2 = 1936 - 1849 = 87$.

Válasz: Van két megfelelő természetes szám: a 43 és a 44.

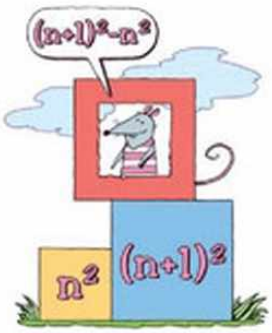


$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$

b) A két négyzetszám különbsége 90.

$$2n + 1 = 90 \quad / -1$$
$$2n = 89 \quad / : 2$$
$$n = 44{,}5 \quad \text{nem természetes szám}$$

Válasz: Nincsen két olyan egymás utáni természetes szám, melyek négyzetének különbsége 90.



Két egymás utáni természetes szám négyzetének különbsége nem lehet páros, hiszen $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$ minden n természetes számra páratlan számot ad.

Feladatok

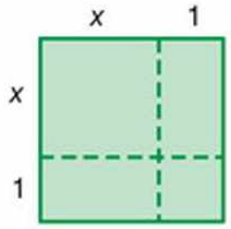
1. Végezzük el a négyzetre emeléseket!

a) $(a + 10)^2$; *b)* $(b + 8)^2$; *c)* $(x + y)^2$; *d)* $(1 + 2x)^2$;

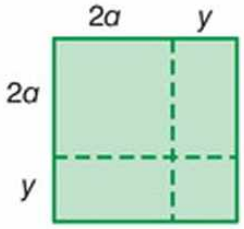
e) $\left(2y + \frac{1}{2}\right)^2$; *f)* $(a + 2b)^2$; *g)* $(3x + 2y)^2$; *h)* $(10a + 10b)^2$.

2. Írjuk fel az alábbi ábrán látható négyzetek területét többféleképpen!

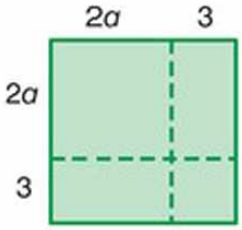
a)



b)



c)



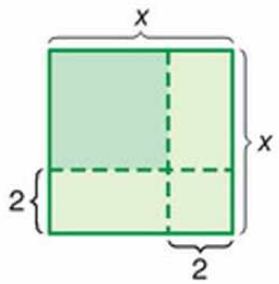
3. Végezzük el a négyzetre emeléseket!

a) $(a - 1)^2$; *b)* $(x - 4)^2$; *c)* $(x - y)^2$; *d)* $(1 - z)^2$;

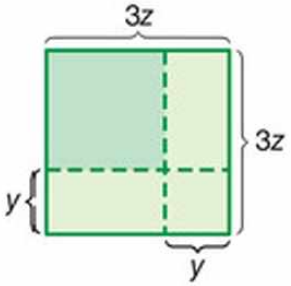
e) $(2x - 1)^2$; *f)* $(a - 2b)^2$; *g)* $(4a - 3b)^2$; *h)* $(5x - 5y)^2$.

4. Írjuk fel az ábrán sötétzölddel jelölt négyzet területét többféleképpen!

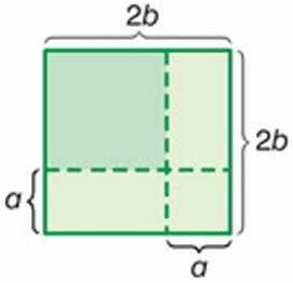
a)



b)



c)



5. A nevezetes azonosságok alkalmazásával írjuk fel az alábbi kifejezéseket!

a) $(a + 1)^2$; *b)* $(y - 2)^2$; *c)* $(2a - 1)^2$;
d) $(x + 2y)^2$; *e)* $(x^2 - 1)^2$; *f)* $(a^2 + b^2)^2$.

6. Pótoljuk a hiányzó tagokat úgy, hogy az alábbi egyenlőségek igazak legyenek minden racionális számra!

a) $(x + 2)^2 = \square + 4x + 4$; *b)* $(x - 3)^2 = x^2 - \square + 9$;
c) $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + \square$; *d)* $(a^2 + 2b)^2 = a^4 + \square + 4b^2$.

7. Két szám négyzetének összege 125, ugyanazon két szám különbsége 5. Mennyi a két szám szorzata?

8. Két szám összege 7, szorzata 12. Mennyi a két szám négyzetének összege?

9. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $(x + 3)^2 - x^2 = 6$; *b)* $(x - 2)^2 = x^2 - 4$;
c) $x^2 = (x + 3)^2 - (x + 2)$; *d)* $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 18$.

10. Mennyi a szám négyzetének 3-as maradéka, ha a szám 3-mal osztva maradékul

a) 0-t; *b)* 1-t; *c)* 2-t ad?

11. Vizsgáljuk meg, hogy milyen maradékot adnak a négyzetszámok 4-gyel osztva!

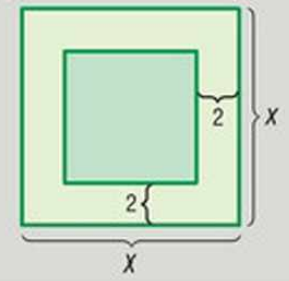
12. Egy négyzet minden oldalát 2 cm-rel megnöveljük. Ezáltal a területe 8 cm^2-rel megnövekedett. Mekkora volt eredetileg a négyzet oldalának hossza?

13. Két szám különbsége 3, négyzeteik különbsége 15. Melyek ezek a számok?

14. Az ábrán látható négyzet alakú virágágyást 2 m széles út veszi körül. A virágágyás területe 64 m^2-rel kisebb, mint a teljes terület. Mekkora a teljes terület nagysága? (➡)

15. Melyik az a szám, amelynél 3-mal nagyobb szám négyzete 36-tal nagyobb a szám négyzeténél?

14.



Rejtvény

Egy hitelkártya azonosítója 16 jegyű szám, melynek számjegyei balról jobbra: a_1; a_2; a_3 ... a_{16}. Az azonosító számjegyeire teljesül, hogy a

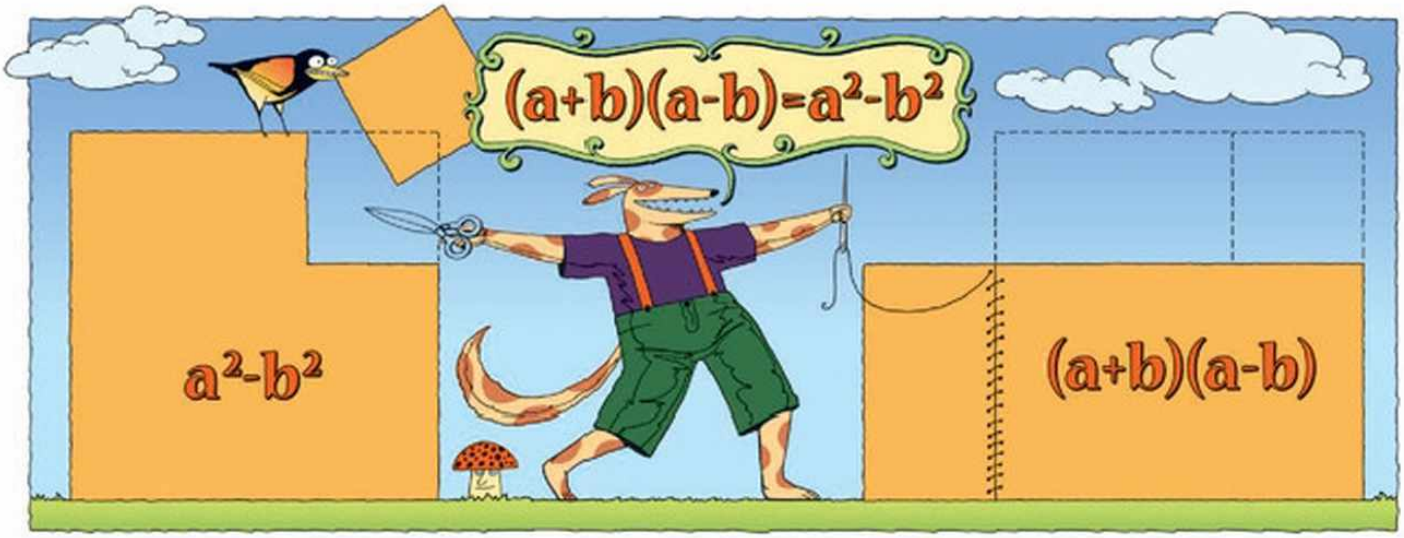
$$2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 + 2a_5 + a_6 + 2a_7 + a_8 + \ldots + 2a_{15} + a_{16}$$ **szám osztható 10-zel.**

A hitelkártyáról két számjegy hiányzik:

$$8543 - 09x6 - 1174 - 6y38.$$

Hányféle lehet x, y értéke?

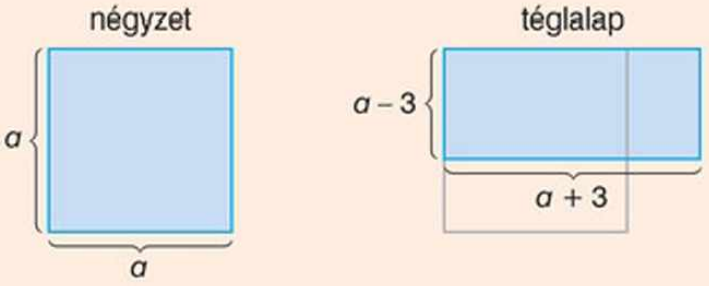
5. Összeg és különbség szorzata (kiegészítő anyag)



1. példa

Egy négyzet egyik szemközti oldalpárját 3 cm-rel növeljük, másik szemközti oldalpárját 3 cm-rel csökkentjük, így téglalapot kapunk. Melyiknek nagyobb a területe, az eredeti négyzetnek, vagy a kapott téglalapnak? Mennyivel? (A négyzet oldala 3 cm-nél nagyobb.)

Megoldás

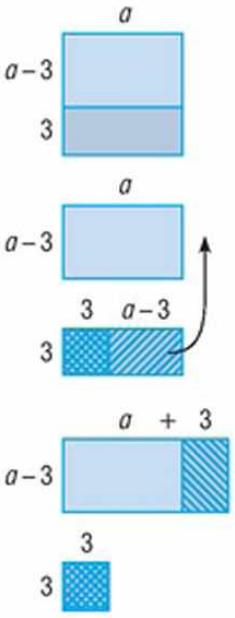


Oldalaik:	a	$a+3;\ a-3$
Területük:	a^2	$(a+3)\cdot(a-3)=$ $a^2+3a-3a-9=a^2-9$

$$a^2 > a^2 - 9$$

Válasz: Az eredeti négyzet területe 9 cm^2-rel nagyobb a kapott téglalap területénél.

Az a oldalú négyzetből indulunk:



Lett egy $a+3$ és $a-3$ oldalú téglalap, és kimaradt egy 3 oldalú négyzet.

2. példa

Végezzük el a beszorzást, majd a lehetséges összevonásokat, és keressünk szabályosságot!

a) $(a-1)\cdot(a+1)$; *b)* $(a-2)\cdot(a+2)$; *c)* $(a-4)\cdot(a+4)$.



Megoldás

a) $(a-1)\cdot(a+1) = a^2 + a - a - 1 = a^2 - 1$;

b) $(a-2)\cdot(a+2) = a^2 + 2a - 2a - 4 = a^2 - 2\cdot 2 = a^2 - 4$.

A középső tagok kiestek.

c) Sejtés: $(a-4)\cdot(a+4) = a^2 - 4\cdot 4 = a^2 - 16$.

Beszorzással ellenőrizzük:

$$(a-4)\cdot(a+4) = a^2 + 4a - 4a - 16 = a^2 - 16.$$

Felírhatjuk két szám összegének és különbségének szorzatát:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

$(b+a)\cdot(b-a) = b^2 - a^2$

Két szám összegének és különbségének szorzata egyenlő a számok négyzetének különbségével (*a* és *b* tetszőleges racionális számok).

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

3. példa

Írjuk fel a szorzatokat összeg alakban!

a) $(n-1)\cdot(n+1)$; *b)* $(2+x)\cdot(2-x)$;

c) $(3y+1)\cdot(3y-1)$; *d)* $(2b+3a)\cdot(3a-2b)$.

Megoldás

$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$
$(x-2)(x+2) = x^2 - 4$
$(x-3)(x+3) = x^2 - 9$
$(x-4)(x+4) = x^2 - 16$

a) $(n-1)\cdot(n+1) = n^2 - 1$;

b) $(2+x)\cdot(2-x) = 2^2 - x^2 = 4 - x^2$;

c) $(3y+1)\cdot(3y-1) = (3y)^2 - 1 = 9y^2 - 1$;

d) $(2b+3a)\cdot(3a-2b) = (3a+2b)\cdot(3a-2b) =$
$= (3a)^2 - (2b)^2 = 9a^2 - 4b^2$.

4. példa

Számológép használata nélkül mondjuk meg, hogy

a) melyik szám nagyobb: 1000^2 vagy $999\cdot 1001$;

b) mennyi $202\cdot 198$;

c) mennyi $495\cdot 505$!

Megoldás

Vegyük észre, hogy

a) $999\cdot 1001 = (1000-1)\cdot(1000+1) = 1000^2 - 1^2 = 1000^2 - 1$.

Vagyis az 1000^2 éppen 1-gyel nagyobb szám, mint a $999\cdot 1001$.

b) $202\cdot 198 = (200+2)\cdot(200-2) = 200^2 - 2^2 = 40\,000 - 4 = 39\,996$.

c) $495\cdot 505 = (500-5)\cdot(500+5) = 500^2 - 5^2 = 24\,975$.

Feladatok

1. Végezzük el a műveleteket, és vonjunk össze!

a) $(x + 9) \cdot (x - 9)$; *b)* $(1 + c) \cdot (1 - c)$; *c)* $(4 + z) \cdot (z - 4)$.

2. Írjuk fel a szorzatokat összeg alakban az azonosság alapján!

a) $(y - 1) \cdot (y + 1)$; *b)* $(z + 2) \cdot (z - 2)$; *c)* $(2a - 1) \cdot (2a + 1)$;

d) $\left(b + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(b - \frac{1}{2}\right)$; *e)* $(x + y) \cdot (x - y)$; *f)* $(3 - x) \cdot (x + 3)$.

3. Válasszuk ki, és kössük össze az összetartozókat! Melyik kártya marad ki?

Két szám összegének négyzete.	$a^2 + b^2$	$a^2 - b^2$
Két szám négyzetének összege.	$a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2$
Két szám négyzetének különbsége.	$(a - b)^2$	$a^2 + ab + b^2$
Két szám különbségének négyzete.	$(a - b)(a + b)$	$(a + b)^2$

4. Számoljuk ki ügyesen a következő szorzatok értékét!

a) 299 · 301; *b)* 305 · 295; *c)* 2002 · 1998; *d)* 507 · 493.

5. A számok kiszámítása nélkül válaszoljunk a kérdésekre!

a) Két szám összege 128, különbségük 48. Mennyi a négyzeteik különbsége?

b) Két szám összege 69, négyzeteik különbsége 1449. Mennyi a különbségük?

c) Két szám különbsége 41, négyzeteik különbsége 2009. Mennyi az összegük?

6. Oldjuk meg az egyenleteket!

a) $(x - 2) \cdot (x + 2) - x^2 = 2x - 10$; *b)* $x^2 + 9x = (x - 3) \cdot (x + 3)$;

c) $(x - 1) \cdot (x + 1) = (x + 2)^2$; *d)* $(x - 2)^2 = (x - 2) \cdot (x + 2)$.

7. *a)* Írjuk fel három egymás utáni természetes szám szorzatát többféleképpen, ha a középső szám n!

b) Írjuk fel öt egymás utáni természetes szám szorzatát, ha a középső szám n!

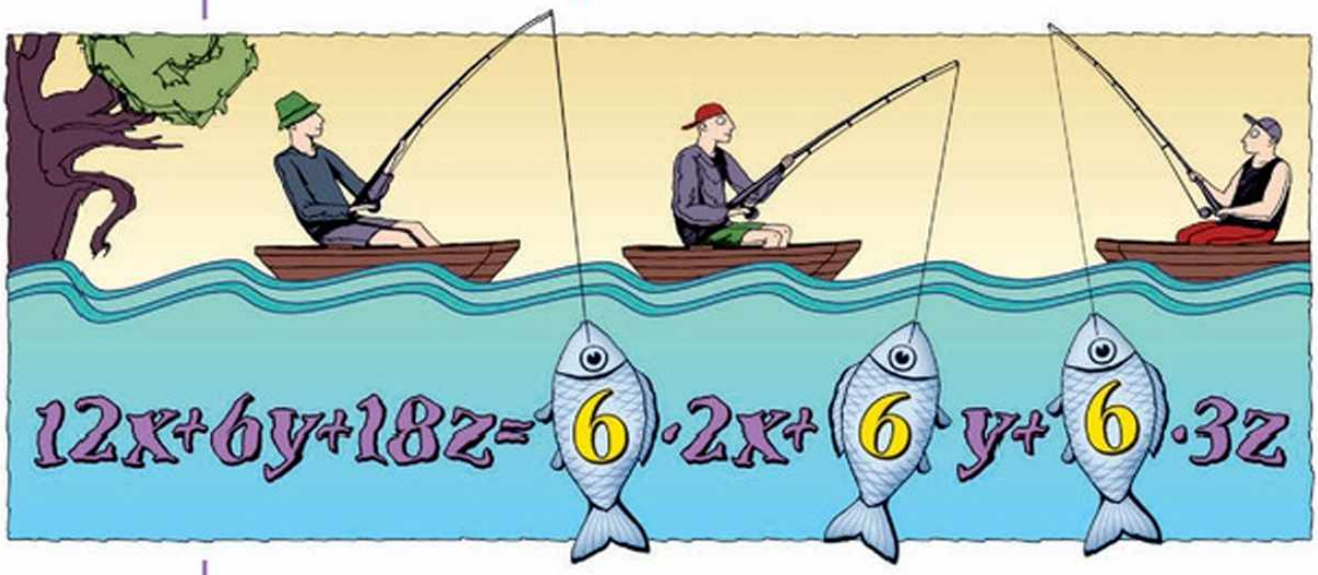
***8.** Számítsuk ki a következő összeget! (A pontok helyén a tagok a szabályosságnak megfelelően folytatódnak.)

$$(100 + 95) \cdot (100 - 95) + (95 + 90) \cdot (95 - 90) + (90 + 85) \cdot (90 - 85) + \ldots$$
$$\ldots + (15 + 10) \cdot (15 - 10) + (10 + 5) \cdot (10 - 5).$$

Rejtvény

Mennyi a –9-nél nem kisebb és 10-nél nem nagyobb egész számok köbeinek összege?

6. Kiemelés, szorzattá alakítás



1. példa

Tamás és barátai kirándulnak. Tamás bevásárolt az egész társaságnak. Vett 12 kiflit, 6 joghurtot és 18 nápolyit. A pénztárgép szerint 2500 Ft-ot kellett volna fizetnie. Tamás nem emlékezett rá, hogy mennyibe kerül egy kifli, egy joghurt és egy nápolyi, mégis tudta, hogy a pénztáros valamit rosszul ütött be. Honnan tudhatta?

Megoldás

Jelöljük egy kifli árát x-szel, egy joghurt árát y-nal és egy nápolyi árát z-vel!

Ekkor a 12 kifli ára $12x$, a 6 joghurté $6y$, a 18 nápolyié pedig $18z$.

A pénztárgép által mutatott összegnek $12x + 6y + 18z$-nek kell lenni.

A tagok legnagyobb közös osztóját kiemelhetjük.

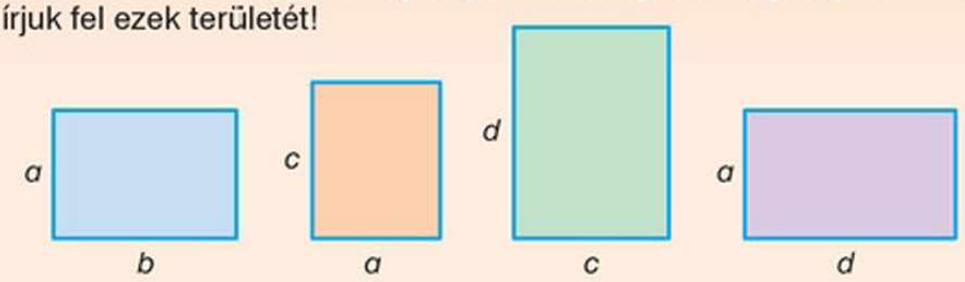
A 6 mindegyik tagnak osztója:

$$12x + 6y + 18z = 6 \cdot 2x + 6y + 6 \cdot 3z = 6 \cdot (2x + y + 3z).$$

Így a fizetendő összegnek is oszthatónak kell lennie 6-tal. Viszont a 6 nem osztója a 2500-nak, ezért tudhatta Tamás biztosan, hogy tévedés történt.

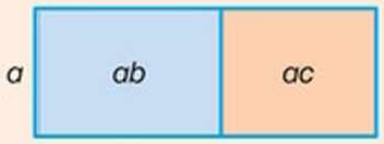
2. példa

Állítsunk össze nagyobb téglalapokat a megadott téglalapokból, és írjuk fel ezek területét!

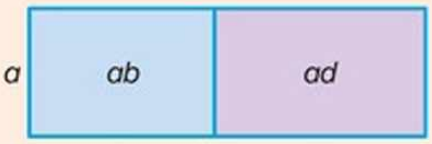


Megoldás

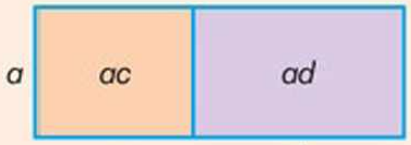
A megadott téglalapokból összesen hatféle nagyobbat tudunk építeni. Ezek területét kétféleképpen is felírhatjuk.



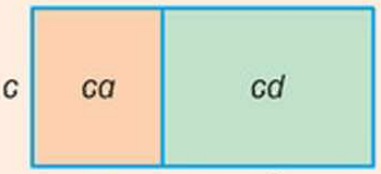
$ab + ac = a(b + c)$



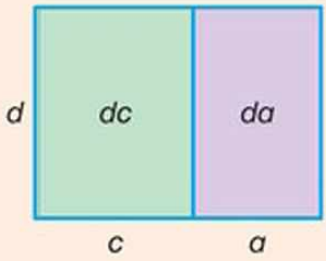
$ab + ad = a(b + d)$



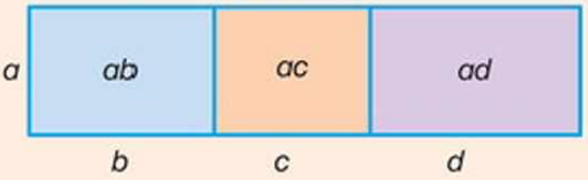
$ac + ad = a(c + d)$



$ca + cd = c(a + d)$



$dc + da = d(c + a)$



$ab + ac + ad = a(b + c + d)$

3 téglalapnak van a oldala, ezekből 2 téglalapot 3-féleképpen választhatunk
↓
3 nagyobb téglalap

2 téglalapnak van c oldala
↓
1 nagyobb téglalap

2 téglalapnak van d oldala
↓
1 nagyobb téglalap

3 darab a oldalú téglalap együtt
↓
1 nagyobb téglalap

Összesen 6 nagyobb téglalap építhető.

A felírt egyenlőségek alapján láthatjuk, hogy ha egy összeg tagjaiban találunk közös tényezőt, akkor azt kiemelhetjük, így az összeget szorzattá alakíthatjuk.

$$\underset{\text{összeg}}{ab + ac} = \underset{\text{szorzat}}{a(b + c)}$$



3. példa

Alakítsuk szorzattá a következő algebrai kifejezéseket!

a) $3x + 6y$; *b)* $a - a^2$; *c)* $2xy - y$;

d) $12xy + 3xz$; *e)* $2ab - 8a^2b$.

Megoldás

Keressünk a kifejezésekben azonos tényezőket!

a) $3x + 6y = 3x + 2 \cdot 3 \cdot y = 3 \cdot (x + 2y)$;

b) $a - a^2 = a \cdot 1 - a \cdot a = a(1 - a)$;

c) $2xy - y = 2x \cdot y - 1 \cdot y = y(2x - 1)$;

d) $12xy + 3xz = 4 \cdot 3xy + 3xz = 3x \cdot (4y + z)$;

e) $2ab - 8a^2b = 2ab - 2 \cdot 4 \cdot a \cdot ab = 2ab(1 - 4a)$.

Játsszuk el!

4. példa

Anna gondolt egy kétjegyű számra, amelynek számjegyei balról jobbra csökkennek. A gondolt számból kivonta a számjegyei felcserélésével kapott számot, és megmondta Bendegúznak a különbség tízes helyi értékén álló számjegyet. Ebből Bendegúz kitalálta az egyes helyi értéken álló számjegyet. Hogyan gondolkodott Bendegúz?

Megoldás

Vizsgáljuk meg, hogy milyen különbségeket kaphatott Anna!

Például: $84 - 48 = 36$; $72 - 27 = 45$; $63 - 36 = 27$; $32 - 23 = 9$...

A példákon azt látjuk, hogy a különbség számjegyeinek összege minden esetben 9. Ezt általánosan is igazolhatjuk.

Jelöljük az Anna által gondolt szám tízes helyi értékén álló számjegyet a-val, az egyes helyi értékén álló számjegyet b-vel ($a > b$)!

A számjegyeivel adott számot felülvonással jelöljük: $\overline{ab} = 10a + b$.

A szám: $\overline{ab} = 10a + b$.

A számjegyek felcserélésével kapott szám: $\overline{ba} = 10b + a$.

Különbségük: $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) =$
$= 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9 \cdot (a - b)$.

A kapott különbség osztható 9-cel, így számjegyei összege is osztható 9-cel. A 99 nem lehet két kétjegyű szám különbsége, így a különbség számjegyeinek összege csak 9 lehet. Bendegúz a különbség ismert számjegyét 9-ből kivonva megkapta a másik számjegyet.

5. példa

Végezzünk kiemelést!

a) $2 \cdot (a + 2) + a \cdot (a + 2)$; *b)* $y \cdot (x - 1) - (x - 1)$.

Megoldás

Keressünk a kifejezésekben azonos tényezőket!

Összeget, különbséget is kiemelhetünk.

a) $2 \cdot (a + 2) + a \cdot (a + 2) = (a + 2) \cdot (2 + a) = (a + 2)^2$;

b) $y \cdot (x - 1) - (x - 1) = (x - 1) \cdot (y - 1)$.

Nevezetes azonosságok:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Algebrai kifejezéseket a nevezetes azonosságok alkalmazásával is szorzattá alakíthatunk.

6. példa

Írjuk fel szorzat alakban!

a) $a^2 - 9$; *b)* $x^2 + 4x + 4$; *c)* $y^2 - 2y + 1$.

Megoldás

a) $a^2 - 9 = a^2 - 3^2 = (a - 3) \cdot (a - 3)$;

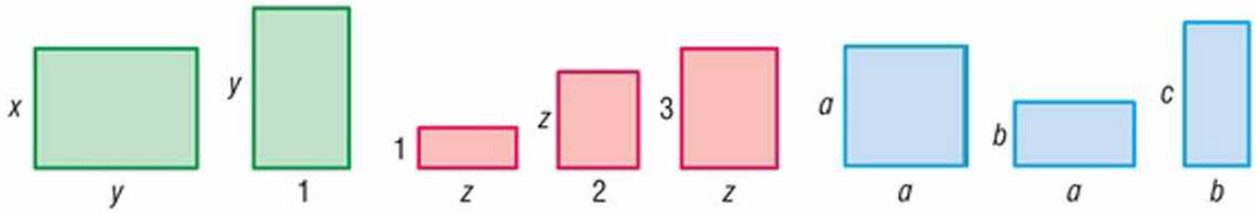
b) $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$;

c) $y^2 - 2y + 1 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 = (y - 1)^2$.

Feladatok

1. Állítsunk össze nagyobb téglalapokat az azonos színű téglalapokból, és írjuk fel ezek területét! Ha lehetséges, keressünk több megoldást!

a) *b)* *c)*



2. Alakítsuk szorzattá a következő algebrai kifejezéseket!

a) $2x + 6$; *b)* $8a + 12$; *c)* $5a + 10b$;

d) $12a^2 + 6b$; *e)* $a^2b + a^2c$; *f)* $5ab + 6bc$;

g) $10xyz + 15yzv$; *h)* $36a^2b + 45ab^2$; *i)* $6ab + 9ac + 12ad$.

3. Alakítsuk szorzattá a következő algebrai kifejezéseket!

a) $2(a + b) + x(a + b)$; *b)* $a(x - y) + b(x - y)$; *c)* $a^2(x + y) - b(x + y)$.

4. Pótoljuk a hiányzó számokat vagy betűket úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen minden x, y számra!

a) $\square x + 4 = 2(x + 2)$; *b)* $ax + \square = a(x + 5)$; *c)* $xy + y^2 = \square(x + y)$;

d) $3x^2 + \square = x^2(3 + y)$.

5. Igaz-e, hogy ha egy 14-gyel osztható számhoz egy 21-gyel osztható számot adunk, akkor egy 7-tel osztható számot kapunk?

6. Egy ládában található almák száma 15-tel osztható. Egy másikban találhatók száma 20-szal osztható. Tudunk-e úgy ezekből 5-ös csomagokat összeállítani, hogy minden almát felhasználjunk?

7. Alakítsuk szorzattá a következő algebrai kifejezéseket!

a) $2x + 2y + 3x + 3y$; *b)* $5a - 7b + 3a - b$; *d)* $ax + ay + bx + by$.

8. A nevezetes azonosságok alkalmazásával alakítsuk szorzattá a következő algebrai kifejezéseket!

a) $x^2 + 2x + 1$; *b)* $x^2 + 6x + 9$; *c)* $4 + 4a + a^2$; *d)* $a^2 - 2a + 1$;

e) $x^2 - 4x + 4$; *f)* $9 - 6y + y^2$; *g)* $n^2 - 1$; *h)* $x^2 - 16$.

9. Hány olyan négyzetszám van, amelynél az 1-gyel kisebb szám prímszám?

Rejtvény

Keressünk szabályt, és az alapján folytassuk a következő sorozatot! 1; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15 ...

7. Algebrai törtek (kiegészítő anyag)



Az algebrai kifejezések között vannak olyanok, amelyekben tört szerepel, és a tört nevezőjében betűk állnak.

1. példa

Mi a betűk sorrendje, ha nagyság szerint növekvő sorrendbe állítjuk a következő algebrai kifejezések helyettesítési értékét az

a) $x = 7$; a *b)* $x = 3$ és a *c)* $x = -1$ esetekben?

O $\frac{6}{x}$ D $\frac{6}{x+1}$ R $\frac{6}{x-1}$ A $\frac{x+1}{6}$ K $\frac{x}{6}$

Megoldás

a) Az $x = 7$ helyen

$O = \frac{6}{x} = \frac{6}{7}$; $D = \frac{6}{x+1} = \frac{6}{8}$; $R = \frac{6}{x-1} = \frac{6}{6} = 1$; $A = \frac{8}{6}$; $K = \frac{7}{6}$.

Igaz-e, hogy ha $x \geq 6$, akkor mindig ugyanaz a betűk sorrendje?

Mivel $\frac{6}{8} < \frac{6}{7} < \frac{6}{6} < \frac{7}{6} < \frac{8}{6}$,

a betűk sorrendje: $D < O < R < K < A$.

b) Az $x = 3$ helyen

$O = \frac{6}{3} = 2$; $D = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $R = \frac{6}{2} = 3$; $A = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $K = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Igaz-e, hogy ha $1 < x < 6$, akkor mindig ugyanaz a betűk sorrendje?

Mivel $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{2} < 2 < 3$,

a betűk sorrendje: $K < A < D < O < R$.

c) Az $x = -1$ helyen

$O = \frac{6}{-1} = -6$; $D = \frac{6}{-1+1}$ a nevező 0, a törtnek nincs értelme;

$R = \frac{6}{-2} = -3$; $A = \frac{-1+1}{6} = 0$; $K = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$.

Pozitív törtek esetén az azonos nevezőjű törtek közül a nagyobb számlálójú a nagyobb, az azonos számlálójú törtek közül a kisebb nevezőjű a nagyobb.

Mivel $-6 < -3 < -\frac{1}{6} < 0$,

a betűk sorrendje: $O < R < K < A$.

Algebrai egész kifejezésnek nevezzük azt az algebrai kifejezést, amelyben nincs tört, vagy az előforduló tört nevezőjében nincs betű.

Például: $6x$; $\frac{x}{6}$.

Algebrai törtkifejezésnek nevezzük azt az algebrai kifejezést, amelyben szereplő tört nevezőjében van betű.

Például: $\frac{6}{x}$; $\frac{6}{x+1}$.

Az algebrai törtkifejezések nem értelmezhetők a változó(k) azon értékeire, amelyekre a nevező 0.

Pl. a $\frac{6}{x+1}$ törtkifejezés nincs értelmezve, ha $x + 1 = 0$, azaz $x = -1$;

a $\frac{6}{x}$ törtkifejezés nincs értelmezve, ha $x = 0$;

a $\frac{6}{x-1}$ törtkifejezés nincs értelmezve, ha $x - 1 = 0$, azaz $x = 1$.

Az algebrai törtkifejezések alaphalmazából mindig ki kell zárnunk azokat a számokat, amelyekre a nevező 0 lenne.

2. példa

Egy kör területe T cm^2, a kerülete pedig K cm. Ha $\frac{T}{K} = 20$, akkor hány centiméter a kör sugara?

Megoldás

Ha a kör sugara r, akkor területe: $T = r^2\pi$, kerülete: $K = 2r\pi$.

Ekkor $\frac{T}{K} = \frac{r^2\pi}{2r\pi}$. Ezt a törtkifejezést egyszerűsíthetjük r-rel és π-vel:

Létezik a kör, ezért $r \neq 0$ és $K \neq 0$.

$$\frac{T}{K} = \frac{r \cdot \overset{1}{\cancel{r}}\ \overset{1}{\cancel{\pi}}}{2\underset{1}{\cancel{r}}\ \underset{1}{\cancel{\pi}}} = \frac{r}{2}.$$

Mivel $\frac{T}{K} = 20$, ezért $\frac{r}{2} = 20 \quad / \cdot 2$

$$r = 40$$

A π jelet a 3,14... szám helyett használtuk, nem algebrai kifejezés változója!

Ellenőrzés: $T = 40 \cdot 40\pi = 1600\pi$; $K = 2 \cdot 40\pi = 80\pi$;

$$\frac{T}{K} = \frac{1600\pi}{80\pi} = 20.$$

Válasz: A kör sugara 40 cm.

Algebrai törtkifejezést úgy egyszerűsíthetünk, hogy a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a kifejezéssel osztjuk.

egyszerűsítés:

$$\frac{6}{8} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

3. példa

Egyszerűsítsük a következő törteket!

a) $\frac{6x}{12xy}$; $(x \neq 0;\ y \neq 0)$ b) $\frac{(x+2)x}{2x^2}$; $(x \neq 0)$

c) $\frac{x^2+x}{3x}$; $(x \neq 0)$ d) $\frac{x+3}{x^2+3x}$. $(x \neq 0;\ x \neq -3)$

Megoldás

a) $\frac{6x}{12xy} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}} \cdot \overset{1}{\cancel{x}}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{6}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}} \cdot y} = \frac{1}{2y}$;



b) $\frac{(x+2)x}{2x^2} = \frac{(x+2) \cdot \overset{1}{\cancel{x}}}{2 \cdot x \cdot \underset{1}{\cancel{x}}} = \frac{x+2}{2x}$.

c) Az $\frac{x^2+x}{3x}$ tört számlálójából x kiemelhető, ezután egyszerűsíthetünk x-szel:

$$\frac{x^2+x}{3x} = \frac{\overset{1}{\cancel{x}} \cdot (x+1)}{3\underset{1}{\cancel{x}}} = \frac{x+1}{3};$$

d) $\frac{x+3}{x^2+3x} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}}{x \cdot \underset{1}{\cancel{(x+3)}}} = \frac{1}{x}$.

Egyszerűsítés előtt a többtagú algebrai kifejezéseket szorzattá kell alakítani.

4. példa

Végezzük el a következő összevonásokat, ha k, m, n pozitív egész számok!

a) $\frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$; b) $\frac{1}{m} + \frac{1}{m(2m-1)}$; c) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Megoldás

a) $\frac{1}{2k} + \frac{1}{6k} = \frac{3}{3 \cdot 2k} + \frac{1}{6k} = \frac{3+1}{6k} = \frac{4}{6k} = \frac{2}{3k}$;

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}= \\ =\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

b) $\frac{1}{m} + \frac{1}{m(2m-1)} = \frac{2m-1+1}{m(2m-1)} = \frac{2\overset{1}{\cancel{m}}}{\underset{1}{\cancel{m}}(2m-1)} = \frac{2}{2m-1}$;

c) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.

Algebrai törtek összevonásához a törteket közös nevezőre kell hozni.

Érdekesség: Az egyiptomiak (Kr. e. 2000 körül) a törteket 1 számlálójú törtek összegeként írták fel úgy, hogy a törtek nevezője különböző volt. Ehhez olyan táblázatot használtak, amelyben 2-es számlálójú törtek felbontását jegyezték fel. Ezekhez a felbontásokhoz adnak segítséget a példában kapott azonosságok: $\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$; $\frac{2}{2m-1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m(2m-1)}$.

Az előző példából adódó $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ azonosság mutatja, hogy az 1 számlálójú törtek tovább bonthatók ilyen törtek összegére, így elérhető, hogy a nevezők különbözőek legyenek.

Keressük meg a következő törtek „egyiptomi" felbontását:
$\frac{2}{5}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{9}$!

5. példa

Ha két szám összege 8, szorzata 10, akkor mennyi a reciprokaik összege?

x reciproka $\frac{1}{x}$
$x \neq 0$

Megoldás

Jelöljük az egyik számot a-val, a másikat b-vel! $(a \neq 0;\ b \neq 0)$

Ekkor: $a + b = 8$; $a \cdot b = 10$.

Kérdés: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = ?$

$b + a = 8$
$ab = 10$ ↓

Hozzunk közös nevezőre: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$

Válasz: Tehát a számok reciprokának összege: $\frac{4}{5}$.

6. példa

Mennyi az x, ha a $\frac{3}{10}$ reciproka $\frac{1}{x} + 1$? $(x \neq 0)$

Megoldás

A $\frac{3}{10}$ reciproka $\frac{10}{3}$, így

$$\frac{1}{x} + 1 = \frac{10}{3} \quad / -1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{7}{3} \quad / \cdot x$$

$$1 = \frac{7}{3}x \quad / : \frac{7}{3}$$

$$\frac{3}{7} = x.$$

Ellenőrzés: $\frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{\frac{3}{7}} + 1 = \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$ valóban a $\frac{3}{10}$ reciproka.

Válasz: $x = \frac{3}{7}$.

Feladatok

1. Írjuk fel a következő algebrai kifejezéseket!

a) az x-nél 2-vel nagyobb szám reciproka;
b) az x reciprokának és a 2 reciprokának összege;
c) az x-nél 1-gyel kisebb számnak és az x-nél 1-gyel nagyobb számnak a hányadosa;
d) az x reciprokánál 1-gyel nagyobb szám reciproka.

2. Mennyi a helyettesítési értéke az

$A = \frac{x+1}{x+5}$; $B = \frac{x+1}{x-8}$; $C = \frac{x-3}{x+5}$; $D = \frac{x-3}{x-8}$

algebrai kifejezéseknek, ha

a) $x = 3$; *b)* $x = -3$; *c)* $x = -5$; *d)* $x = 8$?

3. A változók mely értékeire nem értelmezhetők a következő algebrai kifejezések?

a) $\frac{x+4}{2x}$; *b)* $\frac{y}{2x-6}$; *c)* $\frac{3a^2}{2b+b}$; *d)* $\frac{a-1}{4+5a}$.

4. Mennyi a különbség $\frac{p}{q}$ legnagyobb és legkisebb értéke között, ha $3 \le p \le 10$ és $12 \le q \le 21$?

5. Egyszerűsítsük a következő törteket!

a) $\frac{2x}{3x^2}$; *b)* $\frac{5y^2}{10y^3}$; *c)* $\frac{3a}{6a^5}$; *d)* $\frac{4xy}{8x^2y^3}$.

6. Végezzük el a lehetséges szorzattá alakításokat, majd egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\frac{2x+4}{4x+8}$; *b)* $\frac{3x-42y}{x-14y}$; *c)* $\frac{5x+10}{ax+2a}$;

d) $\frac{x^2+2x}{x}$; **e)* $\frac{ax+bx}{2ax+2bx}$; *f)* $\frac{5x}{2x^2-2x}$.

7. Az alábbi törteket bővítettük. Pótoljuk a hiányzó adatokat úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen!

a) $\frac{5x}{12xy} = \frac{\square}{36x^2y}$; *b)* $\frac{a-1}{a+1} = \frac{a^2-a}{\square}$; *c)* $\frac{\square}{xz} = \frac{12x^2y}{4xyz}$.

8. Azonosságok segítségével alakítsunk szorzattá, majd egyszerűsítsünk!

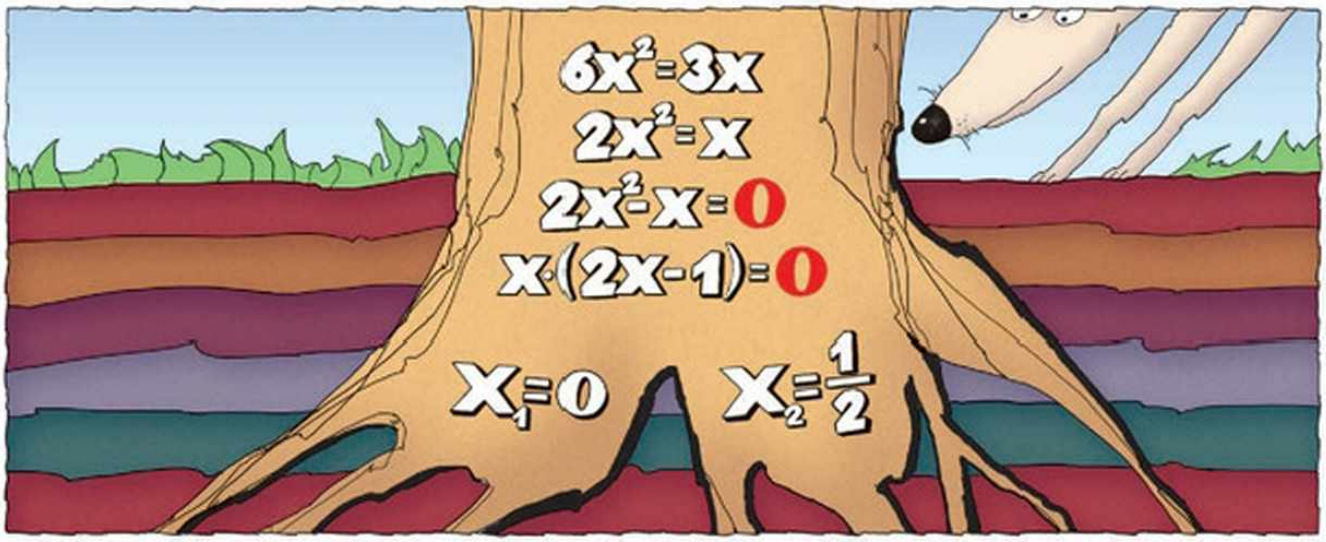
a) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; *b)* $\frac{x-y}{x^2-y^2}$; *c)* $\frac{x+1}{x^2+2x+1}$; *d)* $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$.

9. Két szám reciprokának összege $\frac{5}{6}$, a számok összege 5. Mennyi a számok szorzata?

Rejtvény

Igaz-e, hogy 9 osztója a NINE számnak, ha FOUR + FIVE = NINE, és az azonos betűk azonos, a különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek?

8. Egyenletek megoldása szorzattá alakítással



Dobjunk egy szabályos dobókockával, a dobott számot jelöljük n-nel!

Számoljuk ki az $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ szorzatot!

Ha egy szorzat valamelyik tényezője 0, akkor a szorzat is 0. Fordítva is igaz: ha egy szorzat 0, akkor valamelyik tényezője 0.

1. példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $x(6x-3)=0$; *b)* $x^2+2x=0$.

Megoldás

a) Az egyenlet bal oldalán egy szorzat áll. Ennek az értéke akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

$$x\cdot(6x-3)=0$$

$$x=0 \quad \text{vagy} \quad 6x-3=0$$

$$6x=3$$

$$x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Ellenőrzés: Ha $x=0$, $0\cdot(6\cdot 0-3)=0$;

ha $x=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\cdot\left(6\cdot\frac{1}{2}-3\right)=\frac{1}{2}\cdot(3-3)=0$.

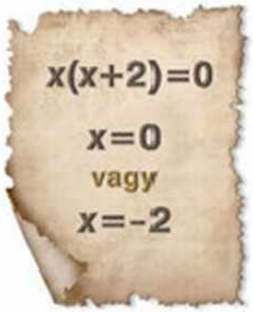
Válasz: Az egyenletnek két megoldása van, ezeket a következőképpen jelöljük:

$$x_1=0 \qquad x_2=\frac{1}{2}.$$

b) Az egyenlet másodfokú, mert a változó a második hatványon szerepel benne. A bal oldalt alakítsuk szorzattá!

$$x^2 + 2x = 0$$
$$x\,(x + 2) = 0$$

$x = 0$ vagy $x + 2 = 0$, $x = -2$



Ellenőrzés: $x = 0$ $\quad 0^2 + 2 \cdot 0 = 0;$

$x = -2$ $\quad (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0.$

Válasz: Két megoldást kaptunk: $x_1 = 0;\ x_2 = -2.$

2. példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $x^2 + 2x + 1 = 0;$ $\quad$ *b)* $x^2 = 4.$

Megoldás

Most is szorzattá alakítunk, de a nevezetes azonosságok segítségével.

a) A bal oldalt átalakíthatjuk:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x + 1)^2 = 0$$
$$(x + 1)(x + 1) = 0$$
$$x + 1 = 0$$
$$x = -1.$$

Ellenőrzés: $(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$

Válasz: Ennek az egyenletnek csak egy megoldása van: $x = -1.$

b) Úgy rendezzük az egyenletet, hogy az egyik oldalon 0 álljon:

Az $x^2 - 4$ két négyzetszám különbsége.

$$x^2 = 4$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 - 2^2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$x - 2 = 0$, $x = 2$ vagy $x + 2 = 0$, $x = -2$

$(-2)^2 = 2^2 = 4$

Ellenőrzés: $x = 2$ $\quad 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0;$

$x = -2$ $\quad (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0.$

Válasz: Két megoldást kaptunk: $x_1 = 2;\ x_2 = -2.$

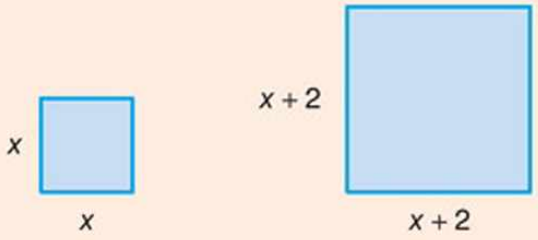
3. példa*

Egy négyzet minden oldalát 2 cm-rel megnöveltük. Így a területe az eredeti négyzet területének kétszeresénél 8 cm^2-rel nagyobb lett. Mekkora volt az eredeti négyzet oldalának hossza?

Megoldás

Jelöljük az eredeti négyzet oldalának hosszát x-szel!

Eredeti négyzet: Megnövelt négyzet:



$T = x^2$ $T = (x + 2)^2$

Az eredeti négyzet területének kétszeresénél 8 cm^2-rel nagyobb terület $2x^2 + 8$. Ez egyenlő a megnövelt négyzet területével.

$$2x^2 + 8 = (x + 2)^2$$
$$2x^2 + 8 = x^2 + 4x + 4$$

Célszerű az egyenletet úgy rendezni, hogy az egyik oldalon csak nulla legyen.

$$2x^2 + 8 = x^2 + 4x + 4 \quad / - x^2 - 4x - 4$$
$$2x^2 + 8 - x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \text{összevonás}$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \text{nevezetes azonosság}$$
$$(x - 2)^2 = 0$$
$$(x - 2)(x - 2) = 0$$
$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

Ellenőrzés: Az eredeti négyzet területe $2^2 = 4$ (cm^2).
A megnövelt négyzet területe $(2 + 2)^2 = 4^2 = 16$ (cm^2).
Az eredeti terület kétszeresénél 8 cm^2-rel nagyobb terület $2 \cdot 4 + 8 = 16$ (cm^2).

Válasz: Az eredeti négyzet oldalának hossza 2 cm.



A fenti példák megoldása során az egyenleteket úgy rendeztük át, hogy az egyik oldalon 0 álljon. Ezután a másik oldalt szorzattá alakítottuk.

Mivel egy szorzat értéke csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért megkerestük az ismeretlen azon értékeit, amelyekre valamelyik tényező 0.

Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $2x(x + 5) = 0$; *b)* $y(y - 7) = 0$;

c) $(x + 3)(x - 5) = 0$; *d)* $(y - 6)(y + 1) = 0$.

2. Alakítsuk szorzattá, majd oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $x^2 + 7x = 0$; *b)* $2x + 8x^2 = 0$;

c) $3x^2 + 6x = 0$; *d)* $25x^2 + 5x = 0$.

3. Keressük meg a nevezetes azonosságokat, majd oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $x^2 - 9 = 0$; *b)* $4 - x^2 = 0$;

c) $x^2 + 4x + 4 = 0$; *d)* $x^2 - 6x + 9 = 0$.

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $(x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 1) = 0$; *b)* $(y - 1) \cdot y \cdot (y + 2) = 0$.

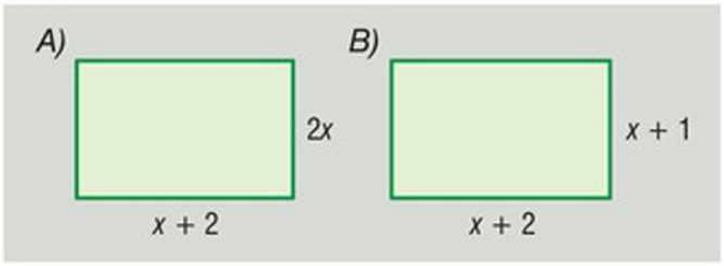
5. Rendezzük a következő egyenleteket úgy, hogy az egyik oldalon 0 álljon, majd oldjuk meg az így kapott egyenleteket!

a) $2x^2 = -4x$; *b)* $x^2 = 2x^2 + 5x$; *c)* $x^2 + 1 = 2x$; *d)* $x^2 + 5 = 6$.

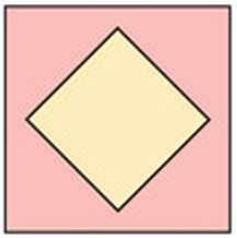
6. Mely számokra igaz, hogy ha a négyzetükhöz hozzáadjuk a tízszeresüket, akkor nullát kapunk eredményül?

7. Ha egy számot megszorzunk egy nála öttel nagyobb számmal, kaphatunk-e nullát eredményül?

8. Az ábrán látható két téglalap területe megegyezik. Mekkorák az oldalaik? (➡)



9. Az osztály focicsapatának zászlót készítünk úgy, hogy egy négyzet alakú sárga anyagot egy négyzet alakú piros anyagra rávarrunk. Tudjuk, hogy a piros négyzet oldala 3 dm-rel nagyobb, mint a sárgáé, a zászló területe pedig 18 dm^2-rel nagyobb, mint a sárga négyzet területének kétszerese. Mekkora a sárga négyzet oldala? (➡)



Rejtvény

Ha *a* tyúk *a* nap alatt *a* tojást tojik, akkor hány nap alatt tojik *b* tojást *b* tyúk?

9. Vegyes feladatok

1. Végezzük el az alábbi műveleteket, majd vonjuk össze az egynemű tagokat!

a) $(3a - 2)(2a - 3)$; *b)* $(-1 + a)(a - 1)$; *c)* $(5x + 3y)(x - y)$;

d) $(x^2 + x)(x - x^2)$; *e)* $2x(x^2 - x - 1)$; *f)* $(x - 1)(x^2 + x + 1)$.

2. Alkalmazzuk a nevezetes azonosságokat!

a) $(x - 5)^2$; *b)* $(3 + y)^2$; *c)* $(2a - b)(2a + b)$;

d) $(1 + y)(y - 1)$; *e)* $1002 \cdot 998$; *f)* $10001 \cdot 9999$.

3. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $2x + 10y$; *b)* $x^2 + 2x$; *c)* $3xy - 6y^2$;

d) $5x^2 + 15x$; **e)* $9 - x^2$; **f)* $4 - (x + 1)^2$.

4. Pótoljuk a hiányzó részeket úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen!

a) $(x + 2)(y - 3) = 2y - \square x + \square - 6$;

b) $x^2(2x + 3) = 2\square + \square$;

c) $(\square - y)(2x - y^2) = 6x^2 - 3xy^2 - \square xy + \square$;

d) $(x - \square) \cdot (-2xy) = 6xy - \square$.

5. A következő átalakítások közé olyanok is kerültek, melyek nem helyesek. Keressük meg ezeket!

A) $\dfrac{3x \cdot 6y}{3} = x \cdot 2y$; *B)* $\dfrac{(12 + 4b) \cdot a}{2} = (6 + 4b)$;

C) $\dfrac{a^2 + 2a}{2a} = a + a = 2a$; $(a \neq 0)$ *D)* $\dfrac{2x^2 + xy}{x} = 2x + y$; $(x \neq 0)$

E) $2x \cdot (5x \cdot 3y) = 10x^2 \cdot 6xy$; *F)* $2x(x + y) = 2x^2 + 2xy$;

G) $\dfrac{3x - 6y}{3} = x - 2y$; *H)* $2x(5x + 3y) = 10x^2 + 6xy$.

6. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán!

a) $2(x - 3) + 5 = 7x - 4$; *b)* $6x + 4 - 3(x + 1) = 1$;

c) $\dfrac{4x}{3} + \dfrac{5}{2} = x - 2$; *d)* $\dfrac{2x - 3}{4} - 1 = \dfrac{x + 1}{8}$;

e) $2x + 3 - 5x \geq 9$; *f)* $5(x - 4) + 2(3 + x) < 0$.

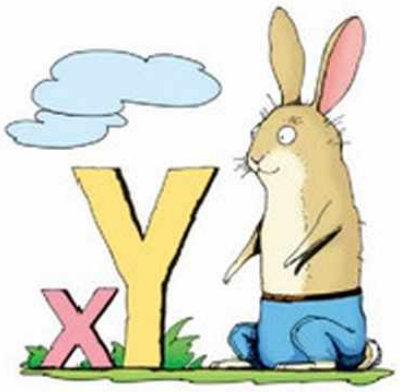
***7.** Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $2x^2 + x = 0$; *b)* $5x^2 + 10x = 0$; *c)* $3x^2 = 6x$;

d) $2(x + 1) - x(x + 1) = 0$; *e)* $3x(x - 2) - x + 2 = 0$; *f)* $4x(2x + 1) - 2x - 1 = 0$.

8. Írjuk fel az összefüggéseket egyenlőség formájában!

a) az x 3-mal nagyobb az y-nál;
b) az x-nél 3-mal nagyobb az y;
c) az x 3-szorosa az y;
d) az y harmada az x;
e) az y az x negyedénél 2-vel kevesebb;
f) az y négyszeresénél 2-vel több az x.



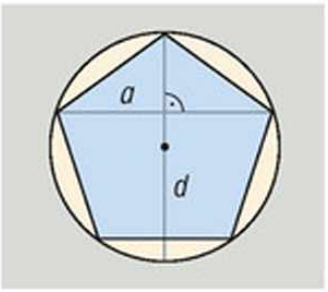
9. *a)* Ha $2x + 1 = 8$, akkor mennyi a $4x + 1$?
b) Ha $3a - 2 = 63$, akkor mennyi a $12a - 2$?

10. Ha x, y és z átlaga x, akkor mennyi az y és z átlaga?

11. Piero della Francesca (1416–1492) festő és matematikus azt találta, hogy a szabályos ötszög területe az átló és a szabályos ötszög köré írt kör átmérője szorzatának ötnyolcad része.

Később úgy számoltak, hogy a szabályos ötszög területét megkapjuk, ha az ötszög köré írt kör átmérőjének háromnegyedét megszorozzuk az átló öthatodával. (➡)

Melyik módszer helyes, és miért?



12. Egy téglalap oldalai x és z. A téglalap területének mérőszáma olyan kétjegyű szám, amelynek mindkét számjegye z. Az x számjegyeinek összege z értékének harmada. Mekkora a téglalap területe?

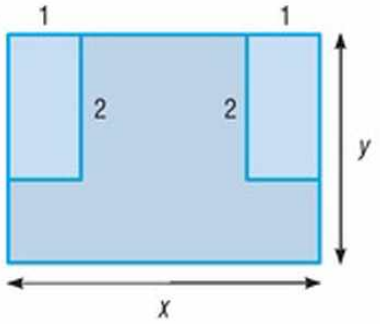
13. Egy sorozat első n tagjának szorzata mindig n. (A sorozat első tagja 1.)

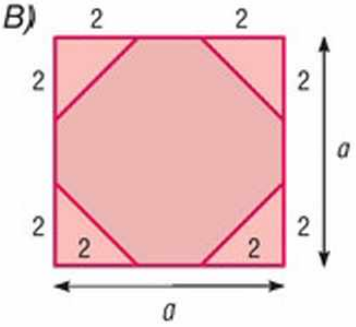
a) Írjuk fel a sorozat első öt tagját!
b) Mennyi a sorozat 2010. tagja?
c) Írjuk fel a sorozat n-edik tagját!

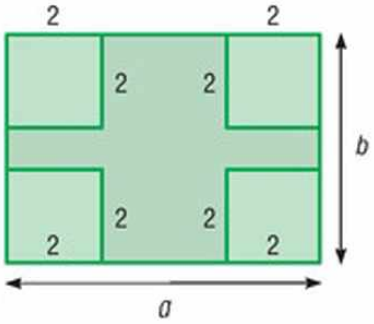
14. Adjuk meg a válaszokat algebrai kifejezésekkel!

a) Egy kertben minden 1 m^2 nagyságú területen y tő virágot találunk. Hány tő virág található azon a téglalap alakú területen, melynek oldalai $a + 1$ és $2a - 1$ méter hosszúak?
b) Ha minden héten x dkg-ot hízunk, akkor hány nap alatt hízunk 1 kg-ot?

15. Mekkorák a sötétebb területek?

A)


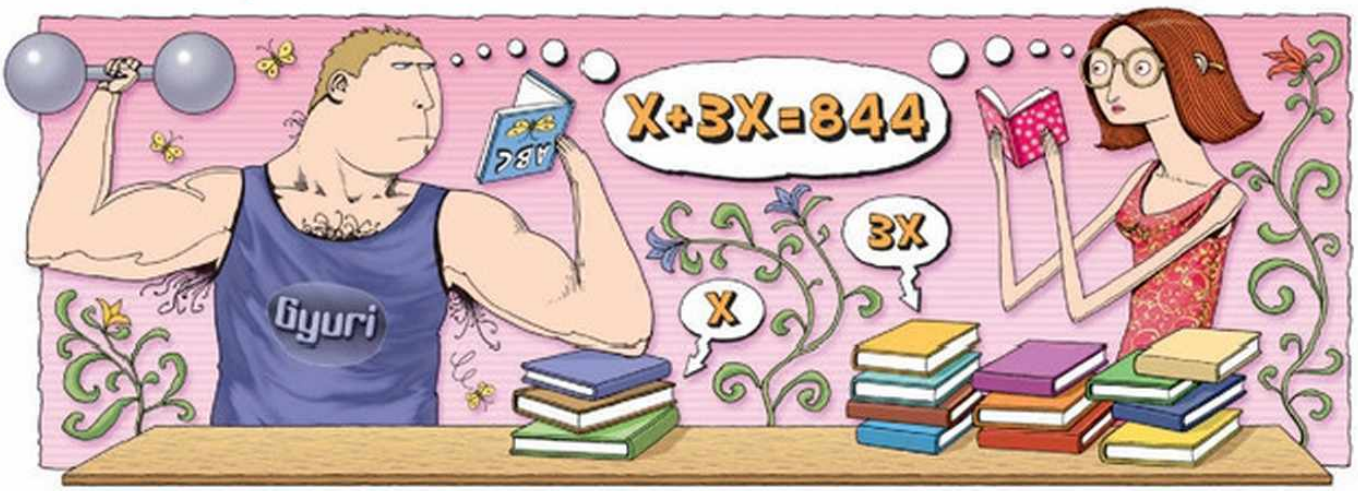
B)


C)


2 Szöveges feladatok



1. Egyenletek alkalmazása feladatmegoldásban (emlékeztető)



1. példa

Andinak háromszor annyi könyve van, mint Gyurinak. Kettejüknek összesen 844 könyvük van. Hány könyve van Gyurinak és Andinak?

1. megoldás

Rajzoljunk!



Látjuk, hogy a 844 könyv éppen Gyuri könyveinek 4-szerese. Így Gyurinak $\frac{844}{4} = 211$ könyve, Andinak pedig $3 \cdot 211 = 633$ könyve van.

Ellenőrzés: $211 + 633$ valóban 844.

2. megoldás

Írjunk fel egyenletet!

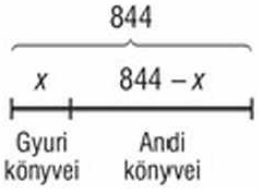
Legyen Gyuri könyveinek száma x;
Andi könyveinek száma $3x$.

Gyuri és Andi könyveinek száma 844, ezért

$$x + 3x = 844$$
$$4x = 844 \qquad / : 4$$
$$x = 211$$

Válasz:

Gyurinak 211, Andinak pedig $3 \cdot 211 = 633$ könyve van.



Andi könyveinek számát $844 - x$ alakban is írhattuk volna. Ekkor az egyenlet felírásához azt az információt használjuk fel, hogy 3-szor annyi könyve van, mint Gyurinak: $3x = 844 - x$.

2. példa

A büfében az alábbi hirdetményt láttuk:



Mennyibe kerül a süti, a pizzaszelet és az üdítő külön-külön?

A hirdetményben szereplő három összeg a feladat megoldása szempontjából három feltételnek tekinthető.

1. megoldás

Legyen az üdítő ára x forint.

Az 1. feltételből: a süti ára $470 - x$ forint;
a 2. feltételből: a pizzaszelet ára $530 - x$ forint;
a 3. feltételből: a kettő ára együtt $470 - x + 530 - x = 560$.

Az egyenlet felírásakor minden feltételt figyelembe kell venni.

$$\begin{aligned} 470 - x + 530 - x &= 560 \\ 1000 - 2x &= 560 \qquad / - 1000 \\ -2x &= -440 \qquad / : (-2) \\ x &= 220 \end{aligned}$$

Ellenőrzés: Az üdítő ára 220 Ft.

Az 1. feltételből: a süti ára $470 - 220 = 250$ (Ft);
a 2. feltételből: a pizzaszelet ára $530 - 220 = 310$ (Ft);
a 3. feltételből: a süti és a pizza ára összesen 560 (Ft).

Szöveges feladatok megoldásakor a szöveg alapján kell az ellenőrzést végezni.

Válasz:

Egy süti ára 250 Ft, egy pizzaszelet 310 Ft, egy üdítő pedig 220 Ft.

2. megoldás

Legyen a süti ára s. Ekkor az üdítő és a pizzaszelet árának összege:

$$\begin{aligned} (470 - s) + (560 - s) &= 530 \\ 1030 - 2s &= 530 \qquad / - 1030 \\ -2s &= -500 \qquad / : (-2) \\ s &= 250 \end{aligned}$$

Így a süti ára 250 Ft. Egy üdítő $470 - 250 = 220$ Ft-ba, a pizzaszelet pedig $560 - 250 = 310$ Ft-ba kerül.

A 2. példában az egyik áru árát jelöltük ismeretlennel. Ennek segítségével a feladatban szereplő feltételek alapján egyenletet írtunk fel, amelyből az ismeretlent meghatároztuk. Ezt felhasználva a feladat többi kérdésére is válaszoltunk. Bármelyik áru árát tekinthettük volna ismeretlennek, mindhárom választás ugyanahhoz az eredményhez vezetett volna.

3. példa

Egy kosárlabda-egyesületbe 20-szal több lány jár, mint fiú. Ha csak feleennyi lány járna, a fiúk 5-tel többen lennének. Hány sportoló van összesen az egyesületben? Hány fiú és hány lány jár az egyesületbe?



1. megoldás

Rajzoljunk!



A rajzról leolvasható, hogy a lányok számának fele 25. Vagyis a lányok száma 50, a fiúk száma $50 - 20 = 30$.

Ellenőrzés:

A lányok számának fele 25, ez valóban 5-tel kevesebb a fiúk számánál.

Válasz:

Így az egyesületbe 50 lány és 30 fiú, összesen 80 sportoló jár.

Egy feladat megoldásához többféle úton is eljuthatunk.

2. megoldás

Írjunk fel egyenletet!
Legyen a fiúk száma f. Ekkor a lányok száma $f + 20$.

Ha feleennyi lány lenne, akkor $\frac{f+20}{2}$-en lennének.

A fiúk száma ennél 5-tel több.

Az egyenletet kétféleképpen is felírhatjuk:

$$\frac{f+20}{2} + 5 = f \qquad / \cdot 2$$
$$f + 20 + 10 = 2f$$
$$f + 30 = 2f \qquad / - f$$
$$\underline{\underline{30 = f}}$$

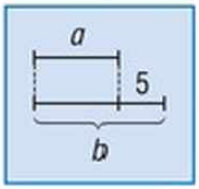
$$\frac{f+20}{2} = f - 5$$
$$\frac{f}{2} + 10 = f - 5 \qquad / + 5$$
$$\frac{f}{2} + 15 = f \qquad / - \frac{f}{2}$$
$$15 = \frac{f}{2} \qquad / + 10$$
$$\underline{\underline{30 = f}}$$



Ellenőrzés: a másik megoldással.

Válasz: A fiúk száma tehát 30, a lányoké $f + 20 = 30 + 20 = 50$.
Összesen $30 + 50 = 80$ sportoló jár az egyesületbe.

Két mennyiség kapcsolatát általában többféleképpen is felírhatjuk.



$\longleftrightarrow$

a-nál 5-tel nagyobb a b
a 5-tel kevesebb, mint a b
b és a különbsége 5

$\longleftrightarrow$

$a + 5 = b$
$a = b - 5$
$b - a = 5$

4. példa

Egy településen a számítógép-tulajdonosok 30%-a az AlfaNet, egynegyed része a BétaNet, a számítógép-tulajdonosok 20%-ánál 1600-zal kevesebben a GammaNet szolgáltatótól rendeltek internetet. 4800 számítógép-tulajdonos még nem rendelkezik internet-előfizetéssel. Hány számítógép-tulajdonos van ezen a településen?

Megoldás

Legyen a számítógép-tulajdonosok száma x.

Az AlfaNetnél rendelt internetszolgáltatást:	$0{,}3x$
A BétaNetnél rendelt internetszolgáltatást:	$\frac{1}{4}x$
A GammaNetnél rendelt internetszolgáltatást:	$0{,}2x - 1600$
Nem rendelkezik internet-előfizetéssel:	4800

} x

A számítógép-tulajdonosok számát kétféleképpen is felírhatjuk:

$$0{,}3x + \frac{1}{4}x + 0{,}2x - 1600 + 4800 = x$$

$$\frac{3}{4}x + 3200 = x \qquad / -\frac{3}{4}x$$

$$3200 = \frac{1}{4}x \qquad / \cdot 4$$

$$12\,800 = x$$

Ellenőrzés:

AlfaNetnél:	$0{,}3 \cdot 12\,800 = 3840$
BétaNetnél:	$\frac{1}{4} \cdot 12\,800 = 3200$
GammaNetnél:	$0{,}2 \cdot 12\,800 - 1600 = 960$
Nem előfizető:	4800
A számítógép-tulajdonosok száma:	$12\,800$

Válasz: Ezen a településen 12 800 számítógép-tulajdonos van.





Szöveges feladatokat többféle módszerrel is meg lehet oldani, pl. ábra készítésével, következtetéssel vagy egyenletek megoldásával. Nem mindig az egyenletek felírásával történő megoldás a legrövidebb. Hogy mikor melyik módszert használjuk, azt feladatonként eldönthetjük.

Feladatok

1. Ádám és Brigi zsebében összesen 3700 Ft van. Brigi zsebében 100 Ft-tal több van, mint az Ádám zsebében lévő pénz ötszöröse. Melyikük zsebében mennyi pénz van?

2. Gergő és Ágoston kitűzőket gyűjtenek. Ágostonnak háromszor annyi kitűzője volt, mint Gergőnek. Ágoston elvesztett 5-öt, Gergő pedig kapott még 25-öt, így most ugyanannyi kitűzőjük van. Melyiküknek hány volt eredetileg?

3. Négy rabló osztozik a zsákmányolt 520 aranyon. A főrabló négyszer annyi aranyat kap, mint a másik három összesen. A második számú rabló háromszor annyit kap, mint a 3. és 4. összesen. A 3. rabló kétszer annyi aranyat kap, mint a 4. rabló. Mennyit kaptak az egyes rablók, ha tudjuk, hogy négyen összesen 100 aranyat jótékony célra fordítanak?

4. Eszti szülinapi tortájának $\frac{2}{5}$-ét az ünnepelt, $\frac{1}{3}$-át pedig testvére, Dávid ette meg. A család többi tagja a maradék 200 grammon osztozott. Mekkora volt a torta? Hány gramm tortát evett Eszti és Dávid külön-külön?

5. Gondoltam egy számra. Hozzáadtam 3-at, majd az eredményt elosztottam 5-tel. A kapott számhoz hozzáadtam a gondolt szám felét. Így a gondolt számnál 9-cel kisebb számot kaptam. Melyik számra gondoltam?

6. Három nyuszi megevett egy halom káposztát. A legkisebb megette az összes felét. A középső a káposzták harmadánál 2-vel kevesebbet evett meg, míg a legnagyobb a káposzták hetedénél 4-gyel többet. Hány káposztát ettek meg együtt és külön-külön?

7. Egy koncertre a jegyek 35%-át az interneten keresztül, egyharmadát a jegyirodákban, 2300 darab jegyet pedig a helyszínen értékesítettek. A jegyek 10%-ánál 300-zal több jegyet nem sikerült eladni. Hány jegy volt összesen, és ebből hányat adtak el?



8. Apa és Peti együtt 51 évesek. Anya és Peti együtt 49 évesek. Apa és Anya együtt 74 évesek. Melyikük hány éves?

9. Alsókukutyin, Nagykukutyin és Kukutyin három szomszédos falu, amelyeknek összesen 4200 lakosa van. Alsókukutyinban 100-zal többen laknak, mint Kukutyin lélekszámának fele, Nagykukutyinban viszont 100-zal kevesebben, mint Kukutyin lélekszámának kétszerese. Melyik falunak hány lakosa van?

10. Öt egymást követő páros szám összege 210. Melyek ezek a számok?

Rejtvény

6 tirp 4 plikket és 6 plokkot ér, 12 tirp viszont 9 plikket és 7 plokkot. Hány plokkot ér egy plikk?

2. Hány éves a kapitány?



1. példa

A 60 éves hajóskapitány első tisztje 36 éves. Hány évvel ezelőtt volt a kapitány kétszer annyi idős, mint az első tisztje?

Megoldás

Jelöljük a keresett évek számát x-szel!
Két időpontban van információnk a kapitány és az első tiszt életkoráról: most és x évvel ezelőtt. Ezeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

	most	x évvel ezelőtt
Hajóskapitány	60	$60 - x$
Első tiszt	36	$36 - x$

x évvel ezelőtt a kapitány életkora az első tiszt életkorának kétszerese volt. Az egyenlőség felírásához vagy a kisebb kifejezést szorozzuk 2-vel, vagy a nagyobbat osztjuk 2-vel.

Így az egyenletet kétféle módon is felírhatjuk.

$$60 - x = 2 \cdot (36 - x)$$
$$60 - x = 72 - 2x \quad / + 2x$$
$$60 + x = 72 \quad / - 60$$
$$x = 12$$

$$\frac{60 - x}{2} = 36 - x \quad / \cdot 2$$
$$60 - x = 72 - 2x \quad / + 2x$$
$$60 + x = 72 \quad / - 60$$
$$x = 12$$

A két felírási mód ugyanarra az egyenletre vezetett.

Ellenőrzés: 12 évvel ezelőtt a kapitány $60 - 12 = 48$ éves; az első tiszt $36 - 12 = 24$ éves volt. $2 \cdot 24$ valóban 48.

Válasz: A hajóskapitány 12 évvel ezelőtt volt kétszer annyi idős, mint az első tisztje.

Az adatok és a köztük lévő kapcsolatok lejegyzéséhez gyakran használunk táblázatot, mert az a különböző mennyiségek változását átláthatóvá teszi.

2. példa

Luca édesapja 3 évvel idősebb, mint az édesanyja. Amikor Luca 9 éves lesz, akkor hárman együtt éppen 100 évesek lesznek. Hány éves volt Luca édesanyja, amikor Luca született?

1. megoldás

Jelöljük x-szel az édesanyának azt az életkorát, amikor Luca született! Foglaljuk táblázatba az életkorokat!

	Luca születésekor	9 év múlva
Édesanya	x	$x + 9$
Édesapa	$x + 3$	$x + 3 + 9$
Luca	0	$0 + 9$

A feltételek szerint:

$$(x + 9) + (x + 12) + 9 = 100$$
$$2x + 30 = 100 \qquad / - 30$$
$$2x = 70 \qquad / : 2$$
$$x = 35$$

Válasz: Luca édesanyja 35 éves volt Luca születésekor.

2. megoldás

Egyenlet felírása nélkül is gondolkodhatunk.

Luca születése után 9 évvel mindhárom családtag 9 évvel lesz idősebb. Ha a 100 évből elvesszük a $3 \cdot 9 = 27$ évet, akkor az édesapa és az édesanya életkorának összegét kapjuk Luca születésekor. Luca édesapja 3 évvel idősebb az édesanyjánál, ezért ha 3-at elveszünk a 73-ból, akkor az édesanya életkorának kétszeresét kapjuk.

$100 - 3 \cdot 9 = 100 - 27 = 73$

$73 - 3 = 70$

$70 = 2 \cdot 35$

Az édesanya életkora Luca születésekor: $70 : 2 = 35$ év.

Ellenőrzés: A táblázat kitöltésével:

	Luca születésekor	9 év múlva
Édesanya	35	44
Édesapa	38	47
Luca	0	9

Az életkoruk összege valóban $44 + 47 + 9 = 100$ év.

Válasz: Az édesanya 35 éves volt, amikor Luca született.

Gyakran előfordul, hogy a táblázat kitöltésekor vagy az egyenlet felírásakor olyan összefüggéseket is használni kell, amelyek a szövegben nincsenek benne, de tudjuk, hogy teljesülnek. Ilyen volt itt az, hogy két ember életkorának különbsége az életük során mindig ugyanannyi.

3. példa

Egy matektanár 10 évvel ezelőtt éppen háromszor annyi idős volt, mint a tanítványai most. (A tanítványok azonos életkorúak.) Amikor a tanítványai megszülettek, a tanár 32 éves volt. Hány éves most? Hány évesek a tanítványok?

Megoldás

Legyen x a tanítványok jelenlegi életkora, és készítsünk táblázatot!

	most	10 évvel ezelőtt
A tanítványok kora	x	$x - 10$
A tanár életkora	$x + 32$	$x + 22$

A korkülönbség állandó. Ha a tanítványok születésekor a tanár 32 éves volt, akkor most is 32 évvel idősebb náluk.

A matektanár 10 évvel ezelőtt éppen háromszor annyi idős volt, mint a tanítványai most. Ez alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\begin{aligned} x + 22 &= 3x \quad / - x \\ 2x &= 22 \quad / : 2 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Ellenőrzés: A tanár tanítványai most 11 évesek.
10 évvel ezelőtt a tanár 33 éves volt, tehát most 43 éves.
A tanítványok születésekor a tanár $43 - 11 = 32$ éves volt.

Válasz: A tanár 43 éves, a diákok 11 évesek.

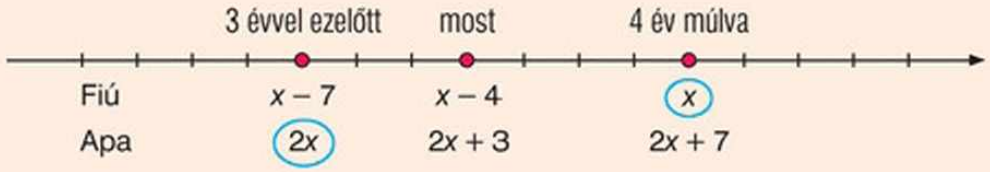


4. példa

Egy apa 3 évvel ezelőtt kétszer annyi idős volt, mint a fia lesz 4 év múlva. Az apa 4 év múlva ötször annyi idős lesz, mint a fia volt 3 évvel ezelőtt. Melyikük hány éves most?

Megoldás

Írjuk az apa és a fiú életkorát az első feltétel alapján egy időtengelyre! Jelölje x a fiú korát 4 év múlva!



Írjuk fel a második feltétel alapján az egyenletet!

$$\begin{aligned} 5 \cdot (x - 7) &= 2x + 7 \\ 5x - 35 &= 2x + 7 \quad / - 2x \\ 3x - 35 &= 7 \quad / + 35 \\ 3x &= 42 \quad / : 3 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Ellenőrzés:



Valóban teljesülnek a feltételek.

Válasz: Az apa most 31, a fia 10 éves.

5. példa

Egy anya ezt mondja: Két gyermekem életkora, továbbá életkoruk összege is prímszám. Életkoruk szorzata éppen az én életkorom fele. Már elmúltam 25, de még nem vagyok 50 éves.
Hány éves vagyok? Milyen korúak a gyermekeim?

Megoldás

Az egyenletek használata nem mindig célravezető, így más módszert kell alkalmaznunk.

Két pozitív prímszám összege csak úgy lehet prímszám, ha az egyik szám a 2. (Mivel a 2 az egyetlen páros prímszám, minden más esetben mindkét prímszám páratlan, ezért az összegük páros lenne, vagyis nem lehetne prím.)

Az egyik gyerek tehát 2 éves.

Készítsünk táblázatot, amelybe beírjuk a szóba jöhető összes olyan prímet, amelyre igaz, hogy a nála 2-vel nagyobb szám is prím.

Ha két prímszám különbsége 2, ezeket ikerprímeknek nevezzük. Az, hogy van-e ezek között legnagyobb, nyitott matematikai probléma.

kisebb gyerek életkora	nagyobb gyerek életkora	gyerekek korának összege	gyerekek korának szorzata	anya életkora
2	3	5	6	12
2	5	7	10	20
2	7	9 – nem prím		
2	11	13	22	44
2	13	15 – nem prím		
2	17	19	34	68

Mivel az anya 25 éves elmúlt, és 50 évnél fiatalabb csak egyetlen lehetséges megoldás van: az anya 44, a gyerekek pedig 2 és 11 évesek.

Ellenőrzés: 2 és 2 + 11 = 13 is prím. 2 · 11 valóban a 44 fele.

Válasz: Az anya 44, a gyerekek pedig 2 és 11 évesek.

Készítsetek hasonló feladatot családtagjaitok életkoráról!

Fontos odafigyelni a szövegben lévő nyilvánvaló és „rejtett” összefüggéseken kívül arra is, hogy az eredmény valóságszerű legyen.

Feladatok

1. Egy apa 45 éves, a lánya 19. Hány éves volt a lány, amikor az apja éppen háromszor annyi idős volt, mint ő?

2. Egy 29 éves anyának 5 éves a fia. Hány év múlva lesz az anya éppen kétszer annyi idős, mint a fiú?

3. Ádám 4 évvel idősebb, mint az öccse, Barnus. 3 év múlva Ádám éppen másfélszer annyi idős lesz, mint Barnus. Melyikük hány éves?

4. Mi a foglalkozása annak, aki 11 év múlva 5-ször annyi éves lesz, mint amennyi 9 évvel ezelőtt volt?

5. Egy apa 1 évvel idősebb, mint fia életkorának kétszerese. 12 évvel ezelőtt éppen 3-szor annyi éves volt, mint a fia. Melyikük hány éves most?

6. Egy anya 51 éves, lányai 18 és 24 évesek. Hány évvel ezelőtt volt az anya életkora éppen kétszer annyi, mint a lányok életkora együtt?

7. Egy 50 évesnél fiatalabb apa 5 évvel idősebb, mint a legidősebb fia életkorának 7-szerese. Az apa és a fiú életkorának összege osztható 5-tel. Hány évesek?

8. „Bátyám 6-szor annyi idős, mint én. 4 év múlva már csak kétszer annyi idős lesz. Hány éves vagyok?" Mi a baj ezzel a feladattal?

9. Hány éves most János, ha 5 év múlva háromszor olyan idős lesz, mint 15 évvel ezelőtt volt?

*10. Balázs 4-szer annyi éves, mint a kutyája, Rex volt akkor, amikor Balázs 3 évvel volt idősebb, mint Rex most. Kettejük életkorának összege most 18 év. Melyikük hány éves? Melyik fotó ábrázolhatja őket?



Rejtvény

A hajóskapitány és a fia életkorának, továbbá a kapitány hajója (méterekben mért) hosszának szorzata 172 159. Hány éves a kapitány?

3. Gondoltam egy számra...



1. példa

Egy kétjegyű pozitív egész szám első számjegye öttel nagyobb, mint a második számjegy. Ha a számjegyeket felcseréljük, akkor az eredeti és a kapott szám összege 99 lesz. Melyik kétjegyű számra igaz ez?

1. megoldás

Mivel nincs sok olyan kétjegyű szám, amelyre igaz, hogy az első számjegye 5-tel nagyobb, megtehetjük, hogy minden lehetőséget felírunk.

Írjuk fel a lehetséges számokat!

a kétjegyű szám	50	61	72	83	94
a felcserélés utáni szám	05	16	27	38	49
összegük	55	77	99	121	143

csak itt teljesül a feltétel

Válasz: A keresett szám a 72.

2. megoldás

Készítsünk táblázatot a helyi értékek segítségével!
Legyen az eredeti számban az egyesek helyén álló számjegy x!

Ha egy feladatot próbálgatással oldunk meg, akkor mindig meg kell győződnünk arról, hogy minden megoldást megtaláltunk.

Készítsünk táblázatot!

	tízes	egyes	a szám
a kétjegyű szám	$x + 5$	x	$10 \cdot (x + 5) + x = 11x + 50$
a jegyek felcserélésével kapott szám	x	$x + 5$	$10x + (x + 5) = 11x + 5$

$$(11x + 50) + (11x + 5) = 99$$
$$22x + 55 = 99 \quad / - 55$$
$$22x = 44 \quad / : 22$$
$$x = 2$$

Ellenőrzés: Az eredeti szám $10 \cdot (2 + 5) + 2 = 10 \cdot 7 + 2 = 72$.

A számjegyek felcserélése utáni szám: 27.

$72 + 27 = 99$.

Válasz: Az eredeti kétjegyű szám a 72.

Ha egy egész szám számjegyeiről van információnk, akkor a helyi értékek segítségével rendszerint fel tudjuk írni a számot.

A kétjegyű számok felírása a tízes számrendszerben:

$$72 = 10 \cdot 7 + 2;$$
$$16 = 10 \cdot 1 + 6;$$
$$50 = 10 \cdot 5 + 0.$$

Általánosan: $\overline{ab} = 10a + b$, ahol $a = 1; 2 \ldots 9;\ b = 0; 1 \ldots 9$.

Figyelem!
Az $\overline{ab}$ egy kétjegyű számot, az ab pedig az $a \cdot b$ szorzatot jelenti.

$9 \cdot 10 = 90$ kétjegyű szám van.

Az $\overline{abc}$ háromjegyű számok felírása tízes számrendszerben:
$\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

2. példa

Gondoltam egy kétjegyű pozitív egész számra, jegyeinek összege 10. Ha számjegyeit felcseréljük, a kapott szám 1-gyel kisebb, mint az eredeti szám kétszerese. Melyik számra gondoltam?

Megoldás

Jelöljük a keresett szám első számjegyét x-szel!
Mivel a számjegyek összege 10, a második számjegy $10 - x$.
Készítsünk táblázatot!

	tízes	egyes	a szám
az eredeti szám	x	$10 - x$	$10 \cdot x + 10 - x = 9x + 10$
a jegyek felcserélésével kapott szám	$10 - x$	x	$10(10 - x) + x = 100 - 10x + x = 100 - 9x$

Mivel tudjuk, hogy a második szám az eredeti kétszeresénél 1-gyel kisebb, a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} 2(9x + 10) - 1 &= 100 - 9x \\ 18x + 20 - 1 &= 100 - 9x \\ 18x + 19 &= 100 - 9x \quad / + 9x \\ 27x + 19 &= 100 \quad / - 19 \\ 27x &= 81 \quad / : 27 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Ellenőrzés: Az első számjegy a 3, a második $10 - 3 = 7$.

A számjegyeket felcserélve: $73 = 37 \cdot 2 - 1 = 74 - 1$.

Válasz: A keresett szám a 37.

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a második számjegyet jelöljük x-szel!

3. példa

Egy kétjegyű szám egyik számjegye a másik kétszerese. Ha a számhoz hozzáadjuk a jegyei felcserélésével kapott számot, majd az eredményt elosztjuk 3-mal, akkor az eredeti számnál 30-cal kisebb számot kapunk. Melyik ez a szám?

Megoldás

Most nem tudjuk, hogy a két számjegy közül melyik a másik kétszerese. Éppen ezért két esetet kell megvizsgálnunk.

1. Ha a második számjegy az első kétszerese.
Jelölje az első számjegyet x!

	tízes	egyes	a szám
az eredeti szám	x	$2x$	$10x + 2x = 12x$
a kapott szám	$2x$	x	$10 \cdot 2x + x = 21x$

Az eredeti és a felcserélt szám összegének harmada $\frac{12x + 21x}{3}$, amely 30-cal kisebb, mint az eredeti szám.

Így az egyenlet:
$$\frac{12x + 21x}{3} = 12x - 30$$
$$\frac{33x}{3} = 12x - 30$$
$$11x = 12x - 30 \quad / + 30$$
$$11x + 30 = 12x \quad / - 11x$$
$$30 = x$$

x-szel egy számjegyet jelöltünk, ezért ez nem lehet megoldás.



2. Ha az első számjegy a második kétszerese.
Jelölje a második számjegyet x!

	tízes	egyes	a szám
az eredeti szám	$2x$	x	$10 \cdot 2x + x = 21x$
a kapott szám	x	$2x$	$10x + 2x = 12x$

Az egyenlet:
$$\frac{21x + 12x}{3} = 21x - 30$$
$$\frac{33x}{3} = 21x - 30$$
$$11x = 21x - 30 \quad / - 21x$$
$$-10x = -30 \quad / : (-10)$$
$$x = 3$$

Ha a második számjegy 3, az első $2 \cdot 3 = 6$, a keresett szám a 63.

Ellenőrzés: $\frac{63 + 36}{3} = \frac{99}{3} = 33$, amely valóban 30-cal kisebb, mint a 63.

Válasz: A keresett szám a 63.

Feladatok

1. Egy kétjegyű szám egyik számjegye a másik háromszorosa. Soroljuk fel az összes ilyen számot!

2. Egy kétjegyű szám egyik számjegye a másik háromszorosa. Ha a számhoz hozzáadjuk a számjegyei felcserélésével kapott számot, 88-at kapunk.
   a) Melyik lehet ez a szám?
   b) Módosítsuk úgy a feladat szövegét, hogy csak egy megoldása legyen!

3. Egy kétjegyű szám első számjegye 2-vel kisebb, mint a második. A számjegyei felcserélésével kapott számot az eredetihez adva 88-at kapunk eredményül. Melyik ez a szám?

4. Egy kétjegyű szám első számjegye 3-mal kisebb a 2. számjegynél. Ha a jegyeket felcseréljük, akkor az eredeti szám kétszeresénél 2-vel nagyobb számot kapunk. Melyik a felcseréléssel kapott szám?

5. Egy kétjegyű szám első és második számjegyének aránya 2 : 3. Ha a számjegyeket felcseréljük, 18-cal nagyobb számot kapunk. Milyen számjegy áll az eredeti számban az egyesek helyén?

6. Egy kétjegyű szám első számjegye 3-mal kisebb, mint a második. A számjegyek felcserélésével kapott szám kétszeresét a számhoz adva az eredmény 129. Melyik ez a szám?

7. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 8. A számot a számjegyei felcserélésével kapott számból kivonva az eredmény 36. Melyik ez a szám?

8. Egy kétjegyű pozitív egész számra gondoltam. Számjegyeinek összege 9. Ha a jegyeket felcseréljük, akkor az eredeti szám négyszeresénél annyival kapunk többet, mint a számjegyek összege. Melyik számra gondoltam?

9. Egy kétjegyű szám második számjegye 1. A szám jegyeinek különbségét a szám jegyeinek felcserélésével kapott számhoz adva az eredmény 15. Melyik ez a szám?

10. Egy kétjegyű szám első számjegye 2-vel nagyobb, mint a második. A számot megszorozva a számjegyei felcserélésével kapott számmal az eredmény 1855. Melyik ez a szám?

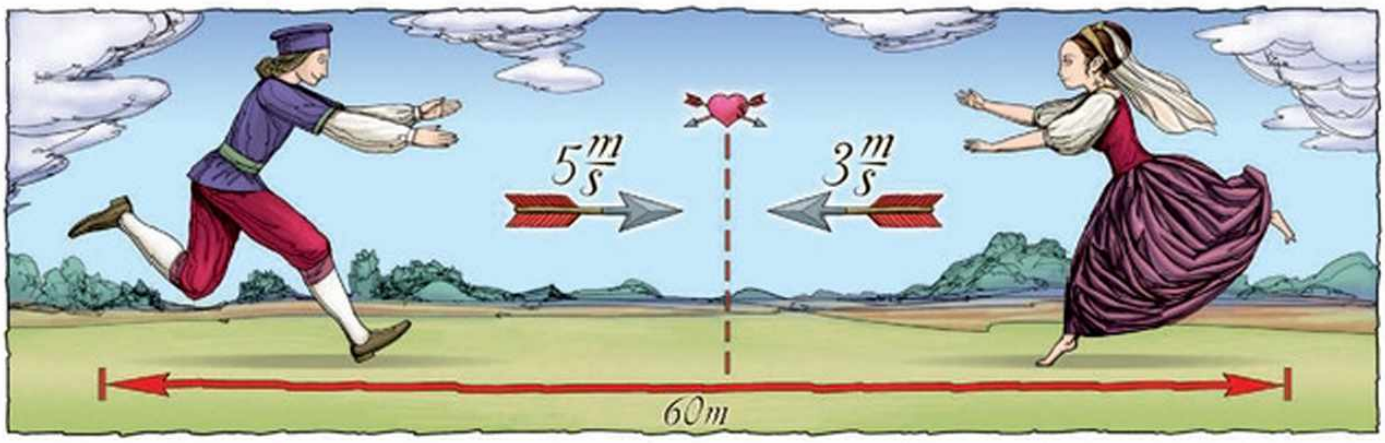
*11. Tibi számkódos kulcstartóját egy olyan háromjegyű szám nyitja, amelynek első számjegye a harmadik számjegy háromszorosa. A második számjegy 2-vel kisebb, mint az első. Ha az első és a harmadik számjegyét felcseréljük, majd az így kapott számot az eredetihez adjuk, az összeg 888. Melyik háromjegyű szám nyitja a kulcstartót?



Rejtvény

Van-e olyan háromjegyű szám, amelynek első és utolsó számjegyét felcserélve éppen a szám kétszeresét kapjuk?

4. Fogócska matematikus szemmel

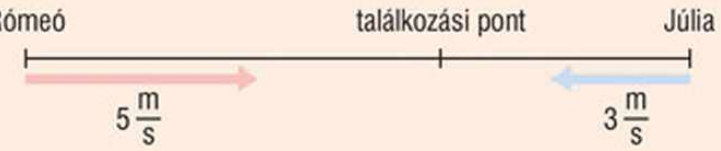


Ha a feladatban külön nem írjuk ki, akkor a sebességen átlagsebességet értünk.

1. példa

Rómeó és Júlia találkoznak. Amikor megpillantják egymást, távolságuk 60 méter. Természetesen azonnal elkezdenek egymás felé szaladni: Rómeó $5\frac{m}{s}$ sebességgel, Júlia $3\frac{m}{s}$ sebességgel. Hány másodperc elteltével érkeznek meg egymáshoz?

Megoldás



A sebesség egyenlő a megtett út és az út megtételéhez szükséges idő hányadosával

$$v = \frac{s}{t}$$
$$v \cdot t = s$$
$$t = \frac{s}{v}$$

Az, hogy Rómeó sebessége $5\ \frac{m}{s}$, azt jelenti, hogy 1 másodperc alatt 5 métert tesz meg. Hasonlóan, Júlia 1 másodperc alatt 3 métert fut. Mivel egymással szemben futnak, a köztük lévő távolság másodpercenként $5 + 3 = 8$ méterrel csökken.

A találkozásig eltelt időt x-szel jelölve felírhatjuk, hogy x másodperc alatt a távolságuk $8x = 60$ méterrel csökken.

$$8x = 60 \qquad / : 8$$
$$x = \frac{60}{8}$$
$$x = 7{,}5$$

Ellenőrzés:

Rómeó 7,5 másodperc alatt $5\ m \cdot 7{,}5 = 37{,}5$ métert tesz meg.

Júlia 7,5 másodperc alatt $3\ m \cdot 7{,}5 = 22{,}5$ métert tesz meg.

$37{,}5\ m + 22{,}5\ m = 60$ méter.

Ilyen messze voltak egymástól, amikor megpillantották egymást.

Válasz: Rómeó és Júlia 7,5 másodperc múlva találkoznak.

2. példa

Egy macska 40 m távolságból üldözőbe vett egy egeret. Az egér azonnal futni kezdett az egérlyuk felé, a macska utána. A macska háromszor olyan gyorsan futott, mint az egér, így éppen a lyuk előtt utolérte. Az üldözés mindössze 5 másodpercig tartott. Mekkora sebességgel futott a macska és az egér? Hány métert futottak?

1. megoldás

Jelöljük az egér sebességét x-szel, és készítsünk táblázatot a feladat adataival!



	t (s)	$v\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	s (m)
egér	5	x	$5x$
macska	5	$3x$	$5 \cdot 3x = 15x$

A macska 40 méterrel nagyobb utat tett meg, mint az egér. Így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\begin{aligned} 15x - 5x &= 40 \\ 10x &= 40 \qquad / : 10 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

Az egér útja: $s_e = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5\,\text{s} = 20\,\text{m};$

a macska útja: $s_m = 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5\,\text{s} = 60\,\text{m}.$

$\Big\}\ 60 - 20 = 40\ (\text{m})$

Válasz: Az egér $4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel 20 métert, a macska $12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel 60 métert futott.

2. megoldás

Mivel a 40 méter távolság 5 másodperc alatt fogyott el, 1 másodperc alatt 8 méterrel került közelebb a macska az egérhez. Ez azt jelenti, hogy a macska sebessége $8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$-mal volt nagyobb, mint az egéré.

Jelölje az egér sebességét x!

A macskáé ekkor $3x$.

$$\begin{aligned} 3x - x &= 8 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Ellenőrzés: A másik megoldással.

Válasz: Az egér $4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel 20 métert, a macska $12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel 60 métert futott.

Ha egy feladatnak két egymástól független megoldását is megadjuk, akkor az egyik megoldás a másik ellenőrzésének is tekinthető.

3. példa



Balatonfüredről délelőtt 10 órakor indul egy személyhajó Siófokra, a menetideje 50 perc. Siófokról ugyanakkor indul egy gyorsjárat, amely 20 perc alatt ér Balatonfüredre. Mikor lesz a két hajó egymástól (közel) 1 km-re, ha a hajóút 11 km, és a hajók végig egyenletes sebességgel haladnak?

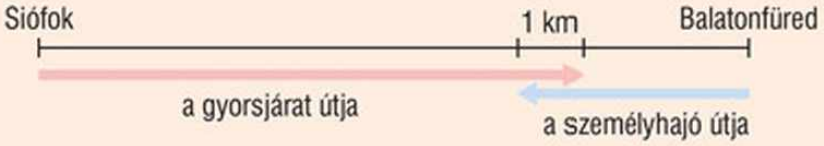
Megoldás

A két hajó két esetben lesz 1 km-re egymástól.

szembe haladnak egymással



miután elhaladtak egymás mellett



A példában szereplő adatok a valóságnak megfelelőek. A hétköznapi életben gyakran kapunk és elfogadunk közelítő értékeket.

A menetrend alapján tudjuk a két hajó sebességét:

$$v_{\text{személy}} = \frac{11\,000\text{ m}}{50\text{ perc}} = 220\ \frac{\text{m}}{\text{perc}};\quad v_{\text{gyors}} = \frac{11\,000\text{ m}}{20\text{ perc}} = 550\ \frac{\text{m}}{\text{perc}}$$

1. eset: Legyen a hajók mozgásideje a kérdéses távolságig x perc!

	$v\left(\frac{\text{m}}{\text{perc}}\right)$	t (perc)	s (m)
személyhajó	220	x	$220x$
gyorsjárat	550	x	$550x$



Ha a két hajó 1 km-re van egymástól, akkor együtt már 10 km-t, azaz 10 000 m-t tettek meg, így

$$\begin{aligned} 220x + 550x &= 10\,000 \\ 770x &= 10\,000 \quad /:770 \\ x &= 12{,}99 \\ x &\approx 13 \end{aligned}$$

Ellenőrzés: 13 perc alatt

a személyhajó: $s_{\text{személy}} = 220 \cdot 13 = 2860$ métert,

a gyorsjárat: $s_{\text{gyors}} = 550 \cdot 13 = 7150$ métert tesz meg.

Ekkor a távolságuk:

$$11\,000 - (2860 + 7150) = 11\,000 - 10\,010 = 990\ (\text{m}) \approx 1\ \text{km}.$$

Válasz: Először 13 perc múlva lesznek közel 1 km-re egymástól.

2. eset: Legyen a hajók mozgásideje a kérdéses távolságig y perc!

	$v\left(\frac{\text{m}}{\text{perc}}\right)$	t (perc)	s (m)
személyhajó	220	y	$220y$
gyorsjárat	550	y	$550y$

Ha a két hajó egymás mellett elhaladva ismét 1 km-re lesz egymástól, akkor az általuk együtt megtett út 12 km = 12 000 m, így

$$\begin{aligned} 220y + 550y &= 12\,000 \\ 770y &= 12\,000 \quad / : 770 \\ y &= 15{,}58 \\ y &\approx 15{,}6. \end{aligned}$$



Ellenőrzés: 15,6 perc alatt

a személyhajó: $s_{\text{személy}} = 200 \cdot 15{,}6 = 3430$ métert,

a gyorsjárat: $s_{\text{gyors}} = 550 \cdot 15{,}6 = 8580$ métert tesz meg.

Ekkor a távolságuk:

$$(3430 + 8580) - 11\,000 = 12\,010 - 11\,000 = 1010 \text{ (m)} \approx 1 \text{ km}.$$

Válasz: Másodszor 15,6 perc múlva lesznek közel 1 km-re egymástól.

Feladatok

1. Egy csiga 2 óra 30 perc alatt 3 métert halad.

a) Hány métert halad 1 óra alatt?

b) Hány métert halad negyed óra alatt?

c) Hány métert halad 4 óra 45 perc alatt?

2. Végezzünk átalakítást! Értelmezzük!

a) $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \ldots\ldots\,\frac{\text{m}}{\text{perc}}$; *b)* $1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \ldots\ldots\,\frac{\text{m}}{\text{h}}$; *c)* $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \ldots\ldots\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$;

d) $1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \ldots\ldots\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; *e)* $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \ldots\ldots\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; *f)* $7{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \ldots\ldots\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3. Egy 12 cm hosszú kukac 8 másodperc alatt halad át egy nyitott ajtón. Mekkora sebességgel halad a kukac? (Az ajtó vastagságától tekintsünk el.)

4. Egy fizikai kísérletben két kiskocsit egyszerre indítanak el egy 7 m hosszú egyenes pálya két végéről. A kocsik sebessége $7{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, illetve $5{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Fejezzük ki a kocsik sebességét $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-ban!

b) Mennyi idő elteltével ütköznek össze?

5. Egy repülőgép 2 óra alatt ér Budapestről Brüsszelbe. Egy autó ugyanezt az utat 15 óra alatt teszi meg. Ha egyszerre indulnak, az autónak még 1300 km útja lesz hátra, mikor a repülőgép már Brüsszelbe ér.

a) Milyen messze van Brüsszel Budapesttől?

b) Mekkora a repülőgép, ill. az autó átlagsebessége?

6. A Kelén elnevezésű hajó elindul Badacsonyból Fonyódra. Ugyanekkor indul Fonyódról Badacsonyba a Siófok nevű hajó, amelynek átlagsebessége 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val nagyobb, mint a Keléné. A hajók 15 perc múlva, Fonyódtól 4 km távolságra találkoznak.

a) Mekkora sebességgel haladnak a hajók?

b) Milyen távol van Fonyód Badacsonytól?

7. Baja 100 km-re van Szegedtől. Reggel 8 órakor Pisti elindul Szegedről biciklivel Bajára, Andi ugyanekkor elindul Pisti elé Bajáról Szegedre autóval. Pisti átlagsebessége 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Bajától 77,5 km-re találkoznak.

a) Hány órakor találkoznak?

b) Mekkora átlagsebességgel haladt Andi?

c) Ha ekkor Andi felveszi Pistit biciklistől, majd elviszi Bajára, hány órára érnek oda?

8. Andris az asztal körül kergeti az öccsét, Lacikát. Lacikának kezdetben 3 méter előnye van. Andris sebessége Lacika sebességének a kétszerese. Andris 6 másodperc alatt utoléri csintalan öccsét. Mekkora sebességgel szalad Lacika, illetve Andris?

9. Kukutyinból Budapestre 10 óra 15 perckor elindul egy személyvonat, 11 órakor pedig egy gyorsvonat. Egyszerre érnek Budapestre negyed kettőkor. A gyorsvonat átlagsebessége 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val nagyobb, mint a személyvonaté.

a) Milyen messze van Budapest Kukutyintól?

b) Mekkora a vonatok átlagsebessége?

***10.** Egy kerékpárversenyen a résztvevők egy 4 km hosszú körpályán haladtak. A rajtnál egyszerre indult mindenki. A győztes átlagsebessége 38 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, az utolsó helyezetté 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt. Mennyi idő elteltével körözte le először a győztes az utolsót? Hány kört tettek meg eközben?

Rejtvény

Balázs a kutyáját, Farkast sétáltatja. Mikor elindulnak hazafelé, 6 km-t kell megtenniük. Balázs 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel megy. A kutya eközben oda-vissza rohangászik Balázs és a házuk között (elrohan a házhoz, visszarohan Balázshoz, aztán megint haza és így tovább). A kutya átlagsebessége 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mekkora utat tesz meg a kutya, míg mindketten hazaérnek?

5. Méregkeverés – egyenletekkel



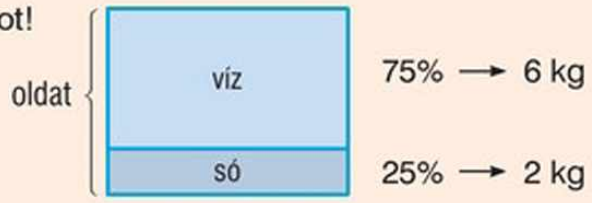
1. példa

Mennyi sót kell 6 liter, azaz 6 kg vízhez adni, ha 25 tömeg%-os sóoldatot szeretnénk készíteni?

1. megoldás

Az, hogy az oldat 25 tömeg%-os, azt jelenti, hogy az oldat tömegének 25%-a az oldott anyag tömege (amely most a só).

Készítsünk rajzot!



Válasz: Az oldathoz 2 kg só szükséges.

2. megoldás

Jelöljük x-szel a keresett só mennyiségét!

6 kg 0%-a só	+	x kg 100%-a só	=	$(6 + x)$ kg 25%-a só

Az oldott só mennyisége összeöntéskor nem változik.

$$0 \text{ kg} + x \text{ kg} = (6 + x) \cdot 0{,}25 \text{ kg}$$

$$x = (6 + x) \cdot 0{,}25$$
$$x = 1{,}5 + 0{,}25x \quad / - 0{,}25x$$
$$0{,}75x = 1{,}5 \quad / : 0{,}75$$
$$x = 2$$

Ellenőrzés: Az oldott anyag tömege 2 kg, az oldaté 2 kg + 6 kg = 8 kg.

$\frac{2}{8} = 0{,}25$, ami valóban 25%.

Válasz:

2 kg sót kell 6 kg vízhez keverni, hogy 25 tömeg%-os oldatot kapjunk.

2. példa

Hány térfogat%-os őszibaracklét kapunk, ha összekeverünk 2 liter 40%-os és 3 liter 50%-os őszibaracklét?

Megoldás

Készítsünk rajzot!

2 liter 40%-os	+	3 liter 50%-os	=	5 liter x%-os

Az oldott anyag:

$$0{,}4 \cdot 2 \text{ liter} + 0{,}5 \cdot 3 \text{ liter} = \frac{x}{100} \cdot 5 \text{ liter}$$

$$0{,}8 + 1{,}5 = 0{,}05x$$
$$2{,}3 = 0{,}05x \quad / : 0{,}05$$
$$\underline{\underline{46 = x}}$$



Ellenőrzés: Az oldott anyag: 1. edényben: 0,8 liter;
2. edényben: 1,5 liter;
összeöntve: 2,3 liter.

5 liter 46%-os oldatban az oldott anyag térfogata:

$$\frac{46}{100} \cdot 5 \text{ liter} = 2{,}3 \text{ liter}.$$

Válasz: A keverék 46 térfogat%-os.

3. példa

Mennyi vízre és ecetre van szükségünk 4 deciliter 8%-os ecetoldat elkészítéséhez, ha a konyhában csak 20%-os ecetoldatunk van?

Megoldás

Készítsünk rajzot!

víz		ecet		
x dl 0%-os	+	$(4-x)$ dl 20%-os	=	4 dl 8%-os

Az oldott anyag mennyisége:

$$0 \cdot x \text{ dl} + 0{,}2 \cdot (4-x) \text{ dl} = 0{,}08 \cdot 4 \text{ dl}$$

$$0{,}2 \cdot (4-x) = 0{,}08 \cdot 4$$
$$0{,}8 - 0{,}2x = 0{,}32 \quad / - 0{,}8$$
$$-0{,}2x = -0{,}48 \quad / : (-0{,}2)$$
$$\underline{\underline{x = 2{,}4}}$$

Ellenőrzés:

A víz térfogata:	2,4 dl,	az oldott anyag	0 dl;
a 20%-os ecet térfogata:	1,6 dl,	az oldott anyag	0,32 dl;
a 8%-os keverék térfogata:	4 dl,	az oldott anyag	0,32 dl.

Válasz: 2,4 dl vízre és 1,6 dl 20%-os ecetre van szükség.

Feladatok

1. Töltsük ki az alábbi táblázatot a hiányzó adatokkal! (Az egyes sorok különböző oldatokra vonatkoznak.)

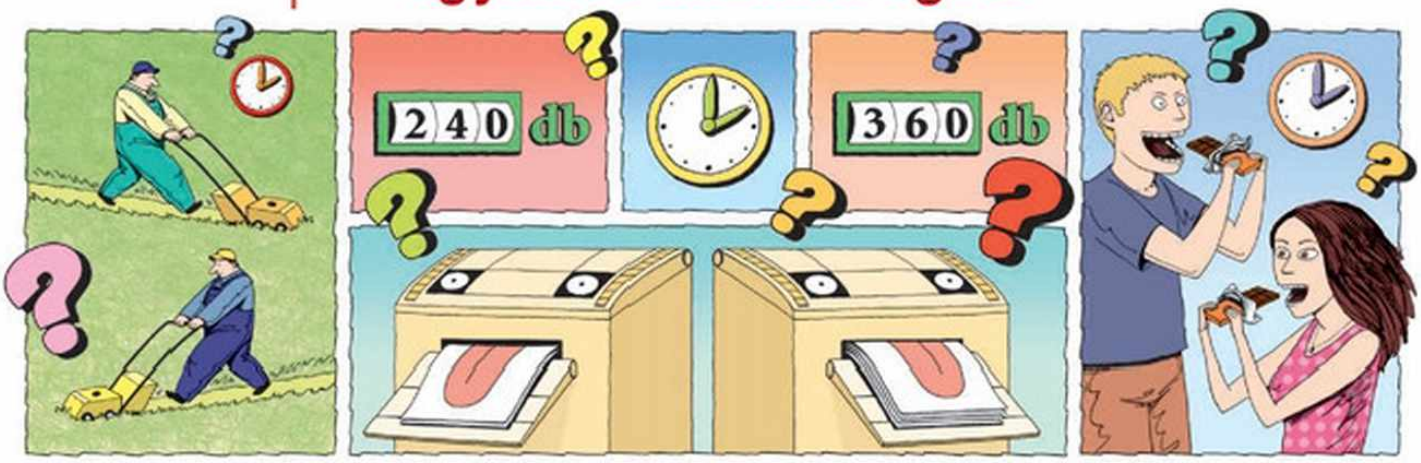
	az oldat tömege	tömegszázalék	az oldott anyag tömege
1. oldat	150 dkg	70 %	
2. oldat	48 kg		12 kg
3. oldat		15 %	6 dkg

2. Hány kilogramm tiszta alkohol van 15 kilogramm 25%-os alkoholban?
3. Mennyi vizet öntsünk 4 liter 100%-os almaléhez, hogy 60%-os almalevet kapjunk?
4. Mennyi cukrot adjunk 8 kilogramm vízhez, hogy 60%-os cukoroldatot kapjunk?
5. Mennyi víz (oldószer) van abban a 45 tömegszázalékos cukoroldatban, amelynek cukortartalma 235g?
6. Mennyi vizet kell elpárologtatni 15 kilogramm 20%-os cukoroldatból, hogy 40%-os oldatot kapjunk?
7. Hány liter 100%-os narancslevet adjunk 1,8 liter 30%-os narancsléhez, hogy 50%-os narancslevet kapjunk?
8. Mennyi vizet adjunk 8 kg 16%-os sóoldathoz, hogy az oldat töménysége 5%-ra csökkenjen?
9. Összekevertünk 6 liter 80%-os és 8 liter 60%-os alkoholt. Hány százalékos a keverék?
10. 10 kilogramm 40%-os sóoldathoz mennyi 60%-os sóoldatot adjunk, hogy a keverék 50%-os legyen?
11. Hány százalékos volt az az ecet, amelyből 6 decilitert kevertünk 4 deciliter 45%-os ecethez, és a keverék 30%-os lett?

Rejtvény

A füge 92 százaléka víz. Az aszalt fügének 20%-a víz. Hány kilogramm fügéből lesz 10 kilogramm aszalt füge?

6. A fénymásolástól a fűnyírásig: együttes munkavégzés



1. példa

Egy fénymásológép 40 perc alatt 800 színes fénymásolatot készít. Egy másik fénymásológép percenként 30 színes fénymásolatot készít. 600 színes fénymásolatot szeretnénk elkészíteni.

a) Mennyi idő alatt készítené el a másolatokat az első gép?
b) Mennyi idő alatt készítené el a másolatokat a második gép?
c) Mennyi idő alatt készülnek el a másolatok, ha mindkét gépet egyszerre működtetjük?

Megoldás

a) A fénymásolatok száma és az elkészülésükhöz szükséges idő között egyenes arányosság áll fenn.

	40 perc alatt	800 másolat	
: 40 ↓			: 40 ↓
	1 perc alatt	20 másolat	
· 30 ↓			· 30 ↓
	30 perc alatt	600 másolat	

Az első másológép tehát 30 perc alatt készül el a másolatokkal.

b) A második fénymásoló 20 perc alatt készülne el a másolatokkal.

c) Az előzőek alapján tudjuk, hogy 1 perc alatt az első gép 20, a második 30 másolatot készít.

Jelöljük x-szel azt az időt, amely alatt a két gép egyszerre működve elkészíti a 600 másolatot.

x perc alatt az első gép $20x$, a második gép $30x$ másolatot készít.

x perc alatt az együtt elkészített másolatok száma:

$$20x + 30x = 600$$
$$50x = 600 \quad / : 50$$
$$x = 12$$

A két gép együtt 12 perc alatt készítené el a 600 másolatot.

Ha együtt dolgoznak, természetesen rövidebb idő alatt végeznek, mint bármelyikük külön.



2. példa

Pókember egyedül 30 perc alatt, Pókasszony 20 perc alatt szőne meg egy pókhálót. Hány perc alatt lesznek kész, ha együtt dolgoznak?

Megoldás

Tekintsük a háló elkészítéséhez szükséges munkát 1 egésznek!

Pókember egyedül 1 perc alatt a munka $\frac{1}{30}$ részét végzi el.

Pókasszony 1 perc alatt a munka $\frac{1}{20}$ részét végzi el.

Jelöljük x-szel azt az időt, amennyi alatt együtt megszövik a hálót, és készítsünk táblázatot!!

	egész	1 perc alatt	x perc alatt
Pókember	30 perc	$\frac{1}{30}$ rész	$\frac{x}{30}$ rész
Pókasszony	20 perc	$\frac{1}{20}$ rész	$\frac{x}{20}$ rész

Együtt dolgozva x perc alatt elvégzik az egész munkát, így:

$$\frac{x}{30} + \frac{x}{20} = 1 \qquad / \cdot 60$$

$$2x + 3x = 60$$

$$5x = 60 \qquad / : 5$$

$$x = 12.$$

Ellenőrzés:

Pókember 12 perc alatt elkészít $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ részt

Pókasszony 12 perc alatt elkészít $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ részt

$\Big\}\ \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

Válasz: Ketten együtt 12 perc alatt szövik meg a hálót.

Észrevehetjük, hogy az adatok megegyeznek az 1. példa adataival. Ennek alapján azt várjuk, hogy az eredmény 12 perc lesz. Most azonban nem tudjuk, mekkora a háló, tehát az előzőnél kevesebb adat áll rendelkezésünkre.

Valóban ugyanazt az eredményt kaptuk, mint az 1. példában.

3. példa

Dani és Levente egy kicsi vállalkozást üzemeltetnek: lenyírják a füvet bármelyik szomszédnál. Mivel mindkettejüknek van saját fűnyírója, nagyon hatékonyan dolgoznak. Jóska bácsi kertjében például Levente 2 óra alatt, Dani 80 perc alatt szokott végezni egyedül a fűnyírással. A múlt szombaton úgy beszélték meg, hogy együtt nyírják le Jóska bácsinál a füvet, és 9 órakor kezdenek. Levente azonban félórát késett, ezért Dani addig egyedül dolgozott.

Hány órára lettek készen, ha ezután már együtt fejezték be a munkát?

Az ilyen típusú feladatoknál feltételezzük, hogy külön-külön ugyanolyan sebességgel dolgoznak a szereplők, mint amikor együtt dolgoznak.

Megoldás

Jelöljük x-szel azt az időt, ameddig együtt dolgoztak, és készítsünk táblázatot!



	egész	1 perc alatt	30 perc alatt	x perc alatt
Dani	80 perc	$\frac{1}{80}$ rész	$\frac{30}{80}$ rész	$\frac{x}{80}$ rész
Levente	120 perc	$\frac{1}{120}$ rész	—	$\frac{x}{120}$ rész

Az egész füvet lenyírták, így a kettejük által elvégzett munka:

$$\frac{30}{80} + \frac{x}{80} + \frac{x}{120} = 1 \qquad / \cdot 240$$

$$90 + 3x + 2x = 240 \qquad / - 90$$

$$5x = 150 \qquad / : 5$$

$$x = 30.$$

Ellenőrzés:

Dani $x + 30 = 60$ perc alatt lenyírt $\frac{60}{80} = \frac{3}{4}$ részt

Levente 30 perc alatt lenyírt $\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ részt

$\Big\}\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

Válasz: Múlt szombaton 10 órára lettek készen a fűnyírással.

4. példa

Egy kádat a meleg vizes csap 45 perc alatt tölt meg. Ha a meleg és a hideg vizes csapot egyszerre nyitjuk meg, a kád 18 perc alatt telik meg. Mennyi idő alatt telik meg a kád, ha csak a hideg vizes csap van nyitva?

Megoldás

Legyen x az az idő, amennyi alatt a hideg vizes csap megtölti a kádat!

A feladat szövegéből következik, hogy $x \neq 0$.

	egész	1 perc alatt	18 perc alatt
meleg vizes	45 perc	$\frac{1}{45}$ rész	$\frac{18}{45}$ rész
hideg vizes	x perc	$\frac{1}{x}$ rész	$\frac{18}{x}$ rész

A két csap együtt 18 perc alatt tölti meg az egész kádat, így:

$$\frac{18}{45} + \frac{18}{x} = 1 \qquad \text{egyszerűsítünk 9-cel}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{18}{x} = 1 \qquad / - \frac{2}{5}$$

$$\frac{18}{x} = \frac{3}{5} \qquad / \cdot 5x \quad (x \neq 0)$$
$$90 = 3x$$
$$x = 30.$$

Ellenőrzés: 18 perc alatt

a meleg vizes csap megtölti a kád $\frac{18}{45} = \frac{6}{15}$ részét

a hideg vizes csap megtölti a kád $\frac{18}{30} = \frac{9}{15}$ részét

$\Big\}\ \frac{6}{15} + \frac{9}{15} = 1$

Válasz: A hideg vizes csapon keresztül 30 perc alatt telik meg a kád.



Feladatok

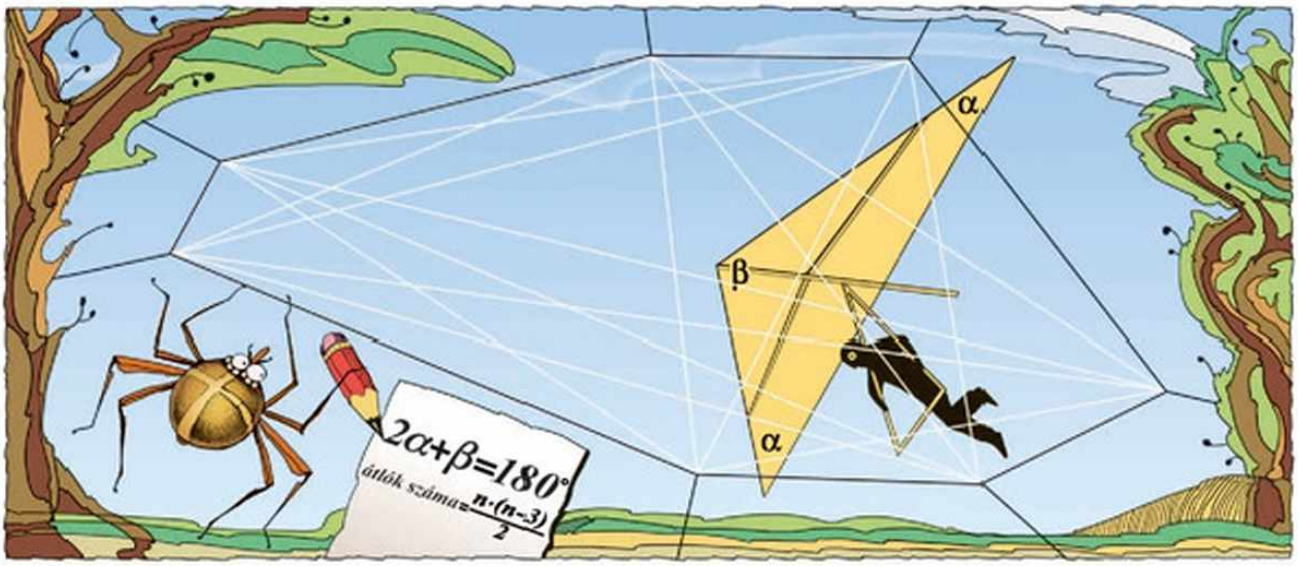
1. Kovácsék karácsonyra 300 üdvözőlapot küldenek ismerőseiknek és üzletfeleiknek. Ha Kovács úr egyedül írja meg a lapokat, 4 óra alatt végez a feladattal. Ha a felesége is segít, 1 óra 20 perc alatt végeznek. Mennyi idő alatt írná meg Kovácsné a lapokat egyedül?
2. Egy adag húst Lajos hentes 2 perc alatt darál le, Béla hentes pedig 3 perc alatt. Mennyi idő alatt darálják le a húst, ha a két darálóval egyszerre dolgoznak?
3. Az udvaron egy nagy halom fa van. Ha Tibi egyedül hordja be, 24 perc alatt végez a munkával. Ha bátyja, Zoli hordja be a fát egyedül, 16 perc alatt készül el. Mennyi idő alatt végeznek, ha együtt hordják be a fát?
4. Egy metróalagút-szakaszt az egyik fúrópajzs egyedül 12 nap alatt, a másik 15 nap alatt fúrná ki. Mennyi idő múlva találkozik a két fúrópajzs, ha egymással szemben egyszerre indítják őket a leendő alagút két végéről?
5. Egy elöntött pincéhez két szivattyúval vonult ki a tűzoltóság. Az egyik szivattyú 1,2 óra alatt szivattyúzná ki a vizet, a két szivattyú együtt 40 perc alatt. Mennyi idő alatt szivattyúzná ki a vizet a második szivattyú?
6. Apa 4 és fél óra alatt ássa fel a kertet egyedül. Ha Peti segít neki, 2 óra 42 perc alatt végeznek. Mennyi idő alatt ásná fel a kertet Peti egyedül?

*7. Egy fürdőkádat úgy töltöttünk meg, hogy a hideg és meleg vizes csapot is nyitva hagytuk 5 percig, majd a hideg vizest elzártuk. A meleg vizes csap további 25 percig volt nyitva, s így a kád éppen tele lett. Tudjuk, hogy a hideg vizes csap 20 perc alatt tölti meg a kádat. Mennyi idő alatt tölti meg a kádat a meleg vizes csap?

Rejtvény

Három kismalac házat épít. Ha külön-külön dolgoznának, akkor az első 2 nap alatt, a második 3 nap alatt, a harmadik pedig 4 nap alatt építené fel a házat. A malacok megtudják, hogy a gonosz farkas pontosan 1 nap múlva érkezik, ezért együtt kezdenek dolgozni. Túlélik-e a farkas látogatását, sikerül-e befejezniük a házat 1 nap alatt?

7. Szögek, oldalak, átlók: geometriai számítások

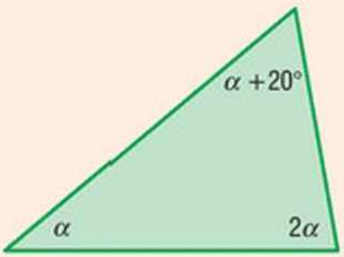


1. példa

Egy háromszög egyik belső szöge egy másik belső szögének kétszerese. A harmadik szög éppen 20°-kal nagyobb, mint az első. Határozzuk meg a háromszög belső szögeit!

Megoldás

Jelöljük a feladatban szereplő egyik belső szöget α-val! A másik belső szög ennek a kétszerese, tehát 2α. A harmadik belső szög az elsőnél 20°-kal nagyobb, tehát $\alpha + 20°$.



Készítsünk ábrát!

α
$\beta = 2\alpha$
$\gamma = \alpha + 20°$

Mivel bármely háromszög belső szögeinek összege 180°, felírhatjuk a következő egyenletet:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$$\begin{aligned} \alpha + 2\alpha + (\alpha + 20) &= 180 \\ 4\alpha + 20 &= 180 \qquad /-20 \\ 4\alpha &= 160 \qquad /:4 \\ \alpha &= 40 \end{aligned}$$

Ellenőrzés: $40° + 80° + 60° = 180°$.

Válasz: A háromszög szögei: 40°, 80° és 60°.

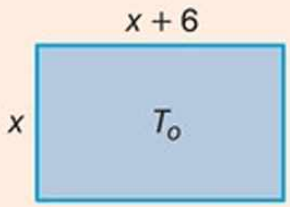
Geometriai problémák megoldásakor rendszerint geometriai összefüggések, ismeretek segítségével tudunk egyenletet felírni. (Az 1. példában a háromszög belső szögeinek összegét használtuk.)

2. példa

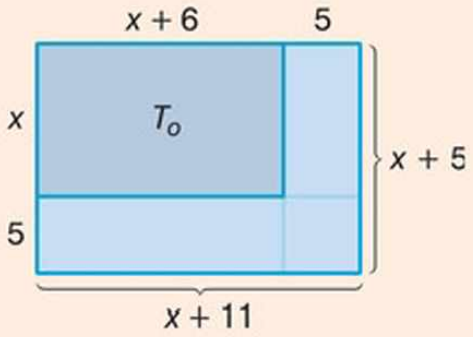
Egy településen az óvoda és az iskola udvara is téglalap alakú. Az óvoda udvarának egyik oldala 6 m-rel hosszabb, mint a másik. Az iskolaudvar minden oldala 5 m-rel hosszabb, mint az óvoda udvarának oldalai, így a területe 155 m^2-rel nagyobb. Hány négyzetméter az iskolaudvar?

1. megoldás

Készítsünk rajzot!

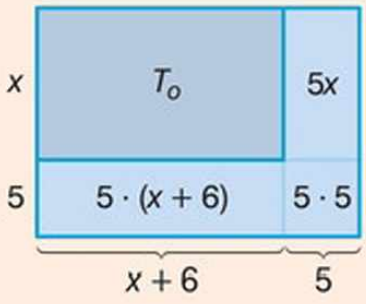


Legyen az óvodaudvar rövidebb oldala x méter, így a hosszabb oldala $x + 6$ méter.



Ekkor az iskolaudvar szomszédos oldalainak hossza $x + 5$ méter, ill. $(x + 6) + 5 = x + 11$ méter.

A két terület különbségét bontsuk olyan kisebb téglalapokra, amelyeknek a területét ki tudjuk fejezni x-szel!



$$5x + 5(x + 6) + 25 = 155$$
$$5x + 5x + 30 + 25 = 155$$
$$10x + 55 = 155 \quad / -55$$
$$10x = 100 \quad / : 10$$
$$x = 10$$

Az egyenlet gyöke itt még nem adja meg a kérdésre a választ.

Ellenőrzés: Az óvodaudvar oldalai 10 m és 16 m hosszúak.

$T_o = 10\ m \cdot 16\ m \qquad T_o = 160\ m^2$

Az iskolaudvar oldalai 15 m és 21 m hosszúak.

$T_i = 15\ m \cdot 21\ m \qquad T_i = 315\ m^2$

A 315 m^2 155 m^2-rel nagyobb, mint a 160 m^2.

Válasz: Az iskolaudvar területe 315 m^2.

2. megoldás

A rajzok alapján felírható az iskolaudvar területe:

$$(x + 5) \cdot (x + 11),$$

az óvodaudvar területe:

$$x \cdot (x + 6).$$

Az iskolaudvar területe az óvodaudvar területénél 155 m^2-rel nagyobb, ezért:

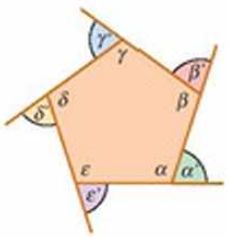
Kéttagú összegek szorzásakor az egyik tényező minden tagját szorozzuk a másik tényező minden tagjával, a szorzatokat összeadjuk.

$$\begin{aligned}
(x + 5) \cdot (x + 11) &= x \cdot (x + 6) + 155 \\
x^2 + 11x + 5x + 55 &= x^2 + 6x + 155 \\
x^2 + 16x + 55 &= x^2 + 6x + 155 \quad / - x^2 \\
16x + 55 &= 6x + 155 \quad / - 6x \\
10x + 55 &= 155 \quad / - 55 \\
10x &= 100 \quad / : 10 \\
x &= 10.
\end{aligned}$$

Így is megkaptuk az óvodaudvar rövidebb oldalának hosszát. Ebből az első megoldáshoz hasonlóan kiszámolható, hogy az iskolaudvar területe 315 m^2.

3. példa

Egy szabályos sokszög egy belső szöge 150°. Hány oldalú a sokszög?



A szabályos ötszög belső és külső szögei

1. megoldás

Tudjuk, hogy bármely konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.

Ha a szabályos sokszög belső szögei 150°-osak, akkor a külső szögek nagysága 180° – 150° = 30°.

Mivel szabályos sokszögnél a külső szögek is egyenlők, így a sokszög oldalainak számát megkaphatjuk úgy is, hogy a külső szögek összegét elosztjuk egy szög nagyságával: $\frac{360°}{30°} = 12$.

Válasz: A szabályos sokszög 12 oldalú.

2. megoldás

Egy n oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180°$. A szabályos sokszögek minden belső szöge egyenlő, amit úgy kaphatunk meg, hogy a belső szögek összegét elosztjuk az oldalak számával.

A sokszög egy belső szöge így $\frac{(n-2) \cdot 180}{n}$, ami egyenlő 150°-kal.

$$\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = 150 \qquad / \cdot n$$

$$(n-2)\cdot 180 = 150\cdot n$$

$$180\cdot n - 360 = 150\cdot n \qquad / -150n$$

$$30\cdot n - 360 = 0 \qquad / +360$$

$$30\cdot n = 360 \qquad / : 30$$

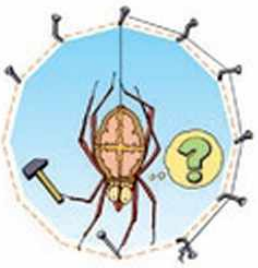
$$n = 12$$ a sokszög oldalainak száma

$n \neq 0$, mert létezik a sokszög.

Ellenőrzés:

A tizenkétszög belső szögeinek összege $(12-2)\cdot 180° = 1800°$.

A szabályos tizenkétszög egy belső szöge $\frac{1800°}{12} = 150°$.



Válasz: A feladatban szereplő sokszög 12 oldalú.

4. példa

Hány oldalú az a sokszög, amelyiknek kilencszer annyi átlója van, mint ahány oldala?

Megoldás

Legyen a sokszög oldalszáma n, összes átlóinak száma $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

Az átlók száma 9-szerese az oldalak számának, ezért:

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2} = 9n \qquad / \cdot 2$$

$$n\cdot(n-3) = 18n \qquad / : n$$

$$\frac{\cancel{n}^{1}\cdot(n-3)}{\cancel{n}_{1}} = \frac{18\cancel{n}^{1}}{\cancel{n}_{1}}$$

$$n - 3 = 18 \qquad / + 3$$

$$n = 21$$ a sokszög oldalainak száma

$n \neq 0$, mert létezik a sokszög.

Ellenőrzés:

A 21 oldalú sokszög átlóinak száma

$$\frac{21\cdot(21-3)}{2} = \frac{21\cdot \cancel{18}^{9}}{\cancel{2}_{1}} = 189,$$

$189 = 9\cdot 21$, ami valóban 9-szerese az oldalak számának.

Válasz: A sokszög 21 oldalú.



Feladatok

1. Egy paralelogramma egyik belső szöge egy másik belső szögének 5-szöröse. Határozzuk meg a paralelogramma belső szögeit!

2. Egy háromszög egyik belső szöge 49°-kal nagyobb, egy másik 25°-kal kisebb, mint a harmadik. Mekkorák a háromszög belső szögei?

3. Egy derékszögű háromszög egyik külső szöge és a mellette fekvő belső szög háromszorosa együtt 280°. Mekkora a háromszög legkisebb belső szöge?

4. Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeinek összege 10°-kal nagyobb, mint a háromszög legnagyobb és legkisebb belső szöge különbségének háromszorosa. Mekkorák lehetnek a háromszög belső szögei?

5. Az $ABCD$ négyszög A csúcsánál fekvő belső szöge 60°-kal nagyobb, mint a B csúcsnál fekvő szög harmada. A B csúcsnál fekvő szög megegyezik a C csúcsnál fekvő szöggel és a D csúcsnál fekvő külső szöggel. A négyszög minden oldala 8 cm. Mekkora a területe?

6. Egy téglalap egyik oldala 3 cm-rel rövidebb, mint a másik. A rövidebb oldallal megegyező oldalú négyzet területe 18 cm^2-rel kisebb, mint a téglalap területe. Mekkorák a négyzet és a téglalap oldalai?

*7. Marciék kertje négyszög alakú. A kert minden oldala ugyanolyan hosszú. Marci egyszer megmérte, hogy a kert két szemközti sarka háromszor olyan messze van egymástól, mint a másik két szemközti sarka. A telekkönyvi kivonat szerint Marciék kertje 121,5 m^2 alapterületű. Milyen messze vannak egymástól a szemközti sarkok?

8. Egy téglalap egyik oldala 24 cm-rel rövidebb, a másik 30 cm-rel hosszabb, mint egy négyzet oldala. A téglalap és a négyzet területe megegyezik. Mekkorák az oldalaik?

9. Egy szabályos sokszög egy belső szöge 165°. Hány oldalú a sokszög?

10. Egy sokszögnek 20-szor annyi átlója van, mint ahány oldala. Hány oldalú ez a sokszög?

11. Hány oldalú az a szabályos sokszög, amelynek egy belső szöge éppen egy külső szögének 14-szerese?

12. Egy ötszög belső szögei számtani sorozatot alkotnak (vagyis a nagyság szerint egymást követő szögek különbsége ugyanannyi). A legnagyobb és a legkisebb belső szög különbsége 32°. Mekkorák az ötszög belső szögei?

Rejtvény

Az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $AC = 12$ cm, az AC oldallal szemközti szög pedig az AB oldallal szemközti szög háromszorosa. Mekkorák a háromszög belső szögei?

8. Vegyes feladatok

1. Gondoltam egy számot. Kivontam belőle 3-at, az eredményt elosztottam 5-tel, a kapott számhoz hozzáadtam az eredetit, és 33-at kaptam. Melyik számra gondoltam?

2. Bence megtakarított zsebpénzének $\frac{3}{5}$-ét bankszámlán, 15%-át részvényekben, a maradék 260 forintot pedig a párnájába varrva tartja. Bence szeretne egy 1000 forintos kisautót vásárolni. Elég-e rá a megtakarított zsebpénze?

3. A szürke egerek 72%-a, a fehér egerek 64%-a szereti az edámi sajtot. Egy laboratóriumban az egerek egynegyede szürke, a többi fehér. A laboratórium egereinek hány százaléka szereti az edámi sajtot?

4. Zsanett, Laura, Alexa és Vani cukrászdába mentek. Zsanett evett egy krémest és egy gesztenyés szeletet, Laura egy krémest és egy rétest, Alexa pedig egy gesztenyés szeletet és egy rétest. Zsanett 250 forintot, Laura 270 forintot, Alexa pedig 280 forintot fizetett. Vani csak egy gesztenyés szeletet evett. Mennyit fizetett érte?

5. Mónika 2 évvel idősebb öccsénél, Norbinál, aki éppen harmadannyi idős, mint édesanyjuk. Hárman együtt 62 évesek. Melyikük hány éves?

6. Laci feleannyi idős, mint a bátyja. Tíz év múlva a bátyja négyszer annyi idős lesz, mint Laci egy évvel ezelőtt volt. Hány éves most Laci?

*7. Kati édesapja 26 éves volt, amikor Kati született. Egy évvel ezelőtt kétszer annyi idős volt, mint Kati lesz akkor, amikor az édesapja négyszer annyi idős lesz, mint Kati most. Hány éves most Kati és az édesapja?

8. Gondoltam egy kétjegyű számra. Számjegyeinek összege 7. A számból a számjegyeinek felcserélésével kapott számot kivonva, majd az eredményt 2-vel megszorozva az eredeti számnál 2-vel nagyobb számot kapunk. Melyik számra gondoltam?

9. Gondoltam egy kétjegyű számra. Egyik jegye hárommal nagyobb, mint a másik. A számból a számjegyei felcserélésével kapott számot kivonva az eredeti szám felénél 10-zel kisebb számot kapunk. Melyik számra gondoltam?

*10. Számzáras lakatunkat egy olyan háromjegyű szám nyitja, amelynek első és második számjegye megegyezik, a harmadik számjegy ezeknek kétszerese. Az első és harmadik számjegy megcserélésével kapott számot az eredetihez hozzáadva az összeg 1292. Melyik ez a háromjegyű szám?



11. Egy kerékpáros váltóversenyen egy háromtagú csapat indult. Mindegyikük 50 km-t tekert. A 150 km-es távot 4 óra alatt tették meg. Az első kerékpáros kétszer akkora átlagsebességgel haladt, mint a második. A harmadik átlagsebessége megegyezett az első kerékpárosával. Melyikük mennyi idő alatt tette meg a maga 50 km-ét?

12. A csata végén, délután négy órakor a győztes sereg hírnöke futva elindul 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel, hogy megvigye a jó hírt a 40 km-re lévő városba. Ugyanekkor a városból is elindul egy lovas a friss hírekért 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel. Miután találkoznak, a lovas azonnal visszavágtat a városba.

a) Hány órakor találkoznak?
b) Mikor kapják meg a híreket a városban?

13. Panni meghívta néhány osztálytársát a névnapjára. Meglepetésként citromfagylaltot szeretne készíteni nekik. A Sztárszakács honlapján azt olvasta, hogy ehhez először 3 dl vízből és cukorból 40%-os cukoroldatot kell főzni. Ez a recept azonban 4 személyre szól. Hány dekagramm cukorból főzze Panni a szirupot, ha ő 10 személyre szeretne fagylaltot készíteni?

14. Összekeverünk 10 dl 10%-os és 200 ml 20%-os sósavoldatot. Hány százalékos lesz az oldat?

15. Mennyi 40%-os alkoholt öntsünk fél liter 25%-os alkoholhoz, hogy a keverék
a) 25%-os; *b)* 30%-os; *c)* 35%-os; *d)* 40%-os legyen?

16. Rebi néni olvasztott varjúhájból és méhpempőből készít varázserejű szépítőkenőcsöt. Háromféle kenőcse van, 10%-os, 20%-os és 40%-os méhpempő-tartalmú. Pörge Dani egy 50 grammos csodakenőccsel szeretné meglepni a kedvesét, Sinkó Terát. Tera érzékeny bőrére azonban 25%-os kenőcs kellene. Hogyan keverhetné ki Rebi néni háromféle kenőcséből a szükséges 50 grammot? Keressünk több megoldást!

17. Egy mézeskalács-készítő mester nagyobb megrendelést kap. Egyedül 20 óra alatt végezne vele. Ha az egészet az inasára bízná, az 30 óra alatt készülne el. Mennyi idő alatt végeznének együtt dolgozva?



18. A Föld napja alkalmából rendezett szemétszedési akcióban Dani vállalta, hogy megtisztít egy részt a tóparton. Ha Dani egyedül végezte volna a munkát, akkor 6 óra alatt lett volna kész. Lili, a húga felajánlotta, hogy elmegy vele és segít a munkában. Így 4 óra alatt végeztek a szemétszedéssel. Mennyi idő alatt tudta volna Lili egyedül összeszedni a szemetet?

19. Egy szög a kiegészítő szögének háromszorosánál 20°-kal kisebb. Mekkora ez a szög?

20. Egy háromszög egyik belső szöge egy másik belső szög négyszeresénél 10°-kal nagyobb, a harmadiknál pedig 70°-kal kisebb. Mekkorák a háromszög belső szögei?

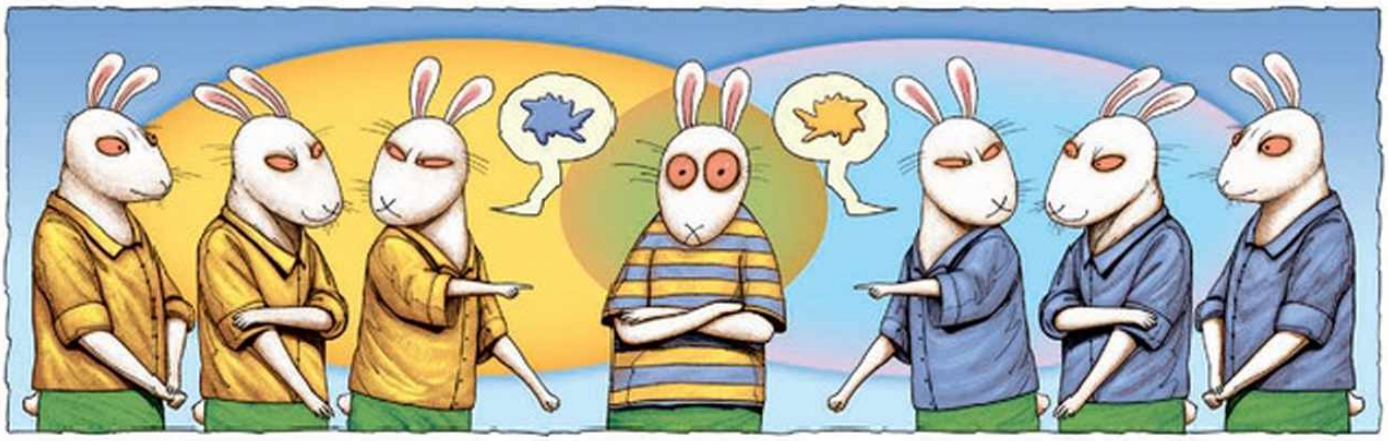
21. Egy sokszögnek 14-szer annyi átlója van, mint oldala. Hány oldalú ez a sokszög?

22. Egy kétszobás lakás mindkét szobája négyzet alakú. A nagyobbik szoba oldala 1,4 méterrel hosszabb, alapterülete pedig 12,04 m^2-rel nagyobb, mint a kisebbik szobáé. Határozzuk meg a szobák alapterületét!

3 Halmazok, kombinatorika



1. Halmazok



A dolgokat tulajdonságaik alapján halmazokba rendezhetjük. A halmazokkal műveleteket végezhetünk, melyeknek eredménye szintén halmaz. Felírhatjuk két halmaz metszetét, egyesítését, egy halmaz komplementerét.

1. példa

Tekintsük az alábbi országok zászlóit, legyen ez az alaphalmaz (U).

Zászlók: *Magyarország, Ausztria, Németország, Svájc, Brazília, Görögország, Svédország, Madagaszkár.*



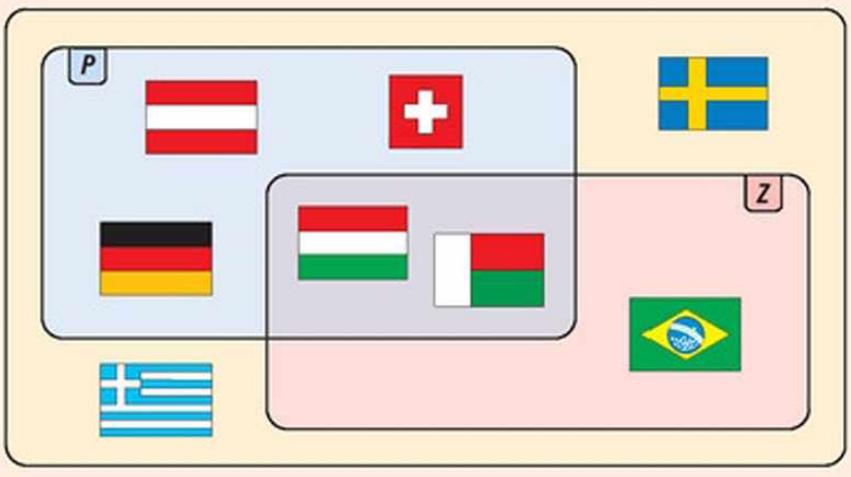
Legyen P azoknak a zászlóknak a halmaza, amelyekben van piros szín, Z pedig azoknak a zászlóknak a halmaza, amelyekben van zöld szín.

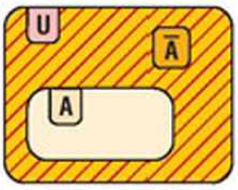
a) Készítsünk halmazábrát a P és Z halmazokkal, és helyezzük el benne a zászlókat!

b) Soroljuk fel a $\overline{P}$, $P \cap Z$ és $P \cup Z$ halmazok elemeit!

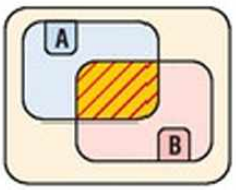
Megoldás

a) A halmazábra:

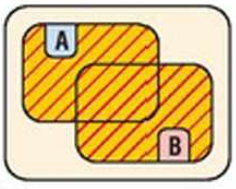




komplementer halmaz
$\overline{A}$



két halmaz metszete
$A \cap B$



két halmaz egyesítése
$A \cup B$

b) A $\overline{P}$ a P halmaz komplementere. A $\overline{P}$ halmazba azok a zászlók tartoznak, amelyekben nincs piros szín, azaz Görögország, Svédország és Brazília zászlói.

$\overline{P} =$ {  ;  ;  }

A $P \cap Z$ a P és Z halmazok metszete. A $P \cap Z$ halmazba azok a zászlók tartoznak, amelyekben piros **és** zöld szín is van, azaz Magyarország és Madagaszkár zászlói.

$P \cap Z =$ {  ;  }

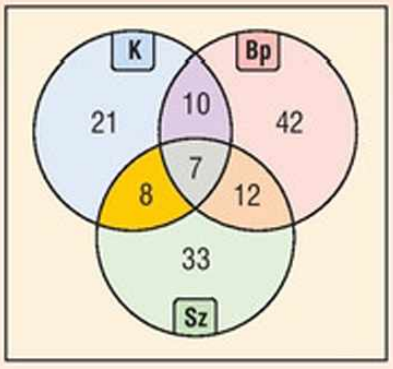
A $P \cup Z$ a P és Z halmazok egyesítése. A $P \cup Z$ halmazba azok a zászlók tartoznak, amelyekben piros **vagy** zöld szín van, azaz Ausztria, Németország, Svájc, Magyarország, Madagaszkár és Brazília zászlói.

Mondjuk el az egyes halmazrészekbe eső elemek tulajdonságait!

$P \cup Z =$ {  ;  ;  ;  ;  ;  }

2. példa

A tavaszi szezonban három helyszínen rendeztek amatőr tollaslabdaversenyt. Kaposváron, Budapesten és Szegeden. A halmazábrába az egyes versenyeken részt vevő játékosok számát írtuk.



Írjuk le, hogy az egyes halmazrészekbe eső játékosok melyik versenyen vettek részt, és melyiken nem!

a) Hány játékos vett részt mindhárom versenyen?
b) Hány játékos vett részt pontosan egy versenyen?
c) Hány játékos vett részt pontosan két versenyen?
d) Összesen hány játékos vett részt a versenyeken?

Megoldás

A halmazrészeknek megfelelő színnel jelöljük, hogy melyik részbe eső játékosok számát adjuk össze.

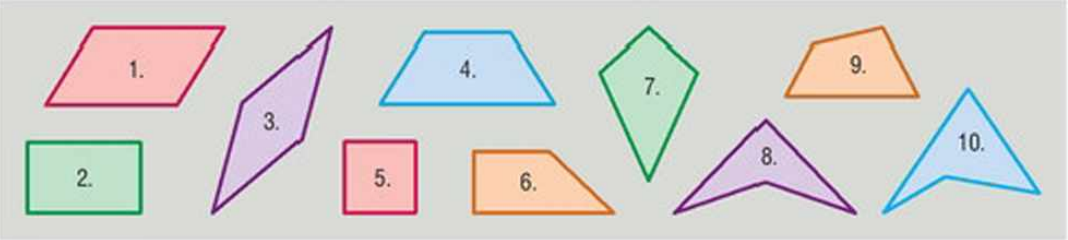
a) Mindhárom versenyen részt vett a  részbe eső 7 játékos. $A \cap B \cap C$

b) Pontosan egy versenyen vett részt a  részbe eső $21 + 33 + 42 = 96$ játékos.

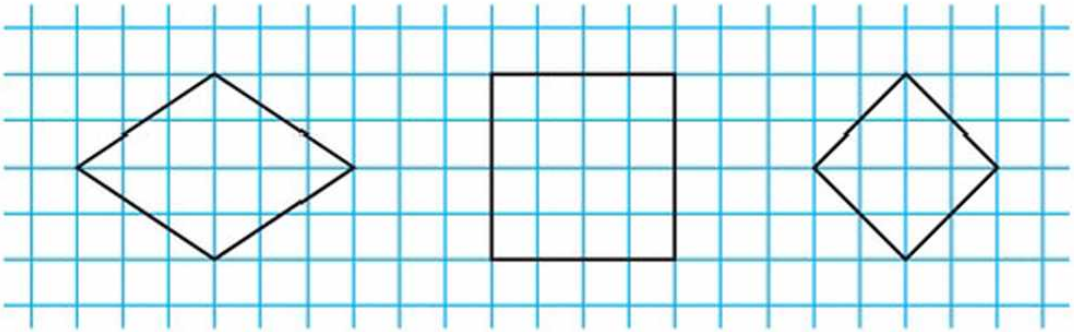
c) Pontosan két versenyen vett részt a  részbe eső $10 + 8 + 12 = 30$ játékos.

d) Az összes játékos a színes részekbe eső játékosok száma összesen, azaz $21 + 10 + 42 + 8 + 7 + 12 + 33 = 133$. $A \cup B \cup C$

Ismételjük át, hogy mit tanultunk eddig a négyszögekről!



Rontó játék négyszögekkel: Négyzetrácsos papírra négyszögeket rajzolunk. Az alábbi három négyszöggel kezdjük a játékot:



Az első játékos mond egy igaz állítást a papíron levő négyszögekről.

Például András azt mondja:

Mindegyik négyszög rombusz.

Ezután a következő játékos vagy rajzol egy újabb négyszöget, vagy áthúz egyet úgy, hogy az előző állítás már hamis legyen. Ezután mond egy állítást, amely a most papíron levő négyszögekre igaz.

Például Bence rajzol egy téglalapot, és azt mondja:

Mindegyik négyszög középpontosan szimmetrikus.

Az állítás elrontásáért és az igaz állításért 1-1 pont jár. Ha valaki elronthatatlan igaz állítást mond (pl. *Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.*), akkor kiesik a játékból, és visszaállítják a kiesett játékos előtti helyzetet. A sorban utána következő játékos folytatja a játékot.

3. példa

Rajzoljuk le a négyszögeknek egy olyan halmazábráját, melyben szerepelnek a trapézok, paralelogrammák, deltoidok, téglalapok, rombuszok, négyzetek! Döntsük el, hogy melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) Nincs olyan négyzet, amelyik nem rombusz.

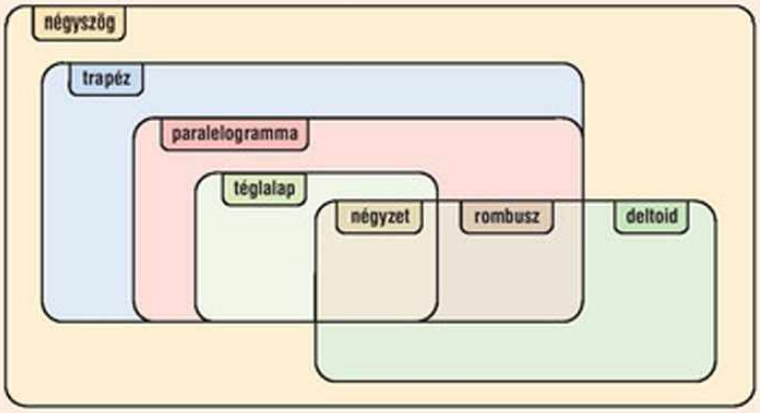
b) Ha egy négyszög deltoid, akkor trapéz.

c) Minden négyszög trapéz vagy deltoid.

d) Akár téglalap, akár rombusz egy négyszög, mindenképpen paralelogramma.

e) A paralelogrammák és deltoidok halmazának közös része a rombuszok halmaza.

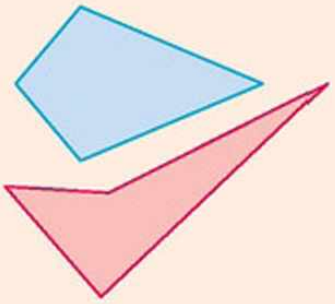
Megoldás



Rajzoljuk le a négyszögek halmazábráját, és mindegyik halmazrészbe rajzoljunk négyszögeket!

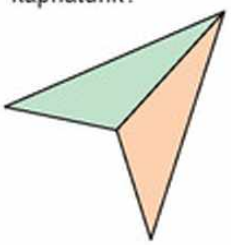
a) A „*nincs olyan négyzet, amelyik nem rombusz*” állítás azt jelenti, hogy „*minden négyzet rombusz*”. Az állítás igaz, mert a négyzet minden oldala egyenlő. Tehát a négyzetek halmaza részhalmaza a rombuszok halmazának.

b) A „*ha egy négyszög deltoid, akkor trapéz*” állítás hamis, mert van olyan deltoid, amelyik nem trapéz, például:



c) A „*minden négyszög trapéz vagy deltoid*” állítás hamis, mert van olyan négyszög, amely se nem trapéz, se nem deltoid, például:

Vágjunk ki két egybevágó tompaszögű háromszöget! Két egyenlő oldalukat egymáshoz illesztve hányféle különböző négyszöget kaphatunk?



d) Az „*egy négyszög akár téglalap, akár rombusz, mindenképpen paralelogramma*” állítás igaz, mert a téglalapok és a rombuszok halmaza is részhalmaza a paralelogrammák halmazának, ugyanis szemközti oldalaik egyenlőek.

e) „*A paralelogrammák és a deltoidok halmazának metszete a rombuszok halmaza*” állítás igaz, mert ha egy négyszög paralelogramma és deltoid, akkor rombusz. Ugyanis a négyszög szemközi oldalai egyenlőek, mert paralelogramma, két-két szomszédos oldala is egyenlő, mert deltoid, így minden oldala egyenlő, tehát rombusz.

4. példa

Rajzolható-e olyan háromszög, amelyre teljesül, hogy bármely két szögének összege kisebb, mint 120°?

Megoldás

Mivel a háromszög három szögének összege 180°, így ha két szög összege kisebb, mint 120°, akkor a harmadik szög nagyobb, mint $180° - 120° = 60°$.

Ha viszont a háromszög **bármely két** szögének összege kisebb, mint 120°, akkor a háromszög **minden** szöge nagyobb 60°-nál. Ekkor a háromszög szögeinek összege nagyobb lenne 180°-nál, ami viszont nem lehet. Tehát nem rajzolható ilyen háromszög.

A háromszög szögei: α, β, γ.

$\alpha + \beta < 120° \Rightarrow \gamma > 60°$,
$\alpha + \gamma < 120° \Rightarrow \beta > 60°$,
$\beta + \gamma < 120° \Rightarrow \alpha > 60°$.

Így $\alpha + \beta + \gamma > 3 \cdot 60°$,
$\alpha + \beta + \gamma > 180°$.

Az előző példában a háromszög két szögére vonatkozó feltételt átfogalmaztuk a harmadik szögre. Sokszor könnyebben megoldhatjuk a feladatot, ha a kérdéses dolgok helyett a kimaradtakat, azaz a komplementer halmazt vizsgáljuk.

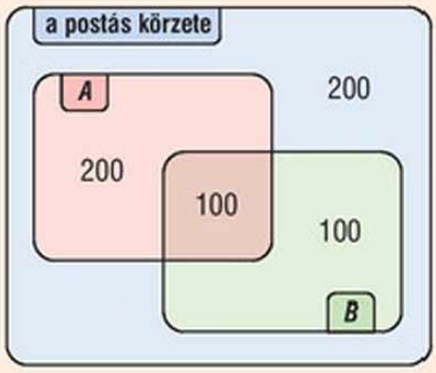


4. példa

Egy postás 600 házba hord levelet. Egy havas napon azt találta, hogy minden második ház postaládája behavazódott, így oda nem lehetett küldeményt kézbesíteni. Minden harmadik házba pedig nem jött levél. Hány ház postaládájába dobott be levelet aznap a postás?

Megoldás

Ábrázoljuk halmazábrán azoknak a házaknak a halmazát, amelyeknek behavazódott a postaládája (A), és azokét, ahová nem jött levél (B). Az alaphalmaz azoknak a házaknak a halmaza, ahová ez a postás jár. Mindegyik halmazrészbe írjuk be az elemek számát!



A — Behavazódott minden második postaláda: $600 : 2 = 300$ darab.

B — Nem jött levél minden harmadik házba: $600 : 3 = 200$ darab.

Két halmaz metszete $A \cap B$ — Behavazódott, de nem is jött levél minden hatodik házba:

$$600 : 6 = 100 \text{ darab.}$$

Ez a két halmaz metszetének elemszáma.

$A \cap \bar{B}$ — Behavazódott, így nem kapta meg a levelét:

$$300 - 100 = 200.$$

$\bar{A} \cap B$ — Nem havazódott be, és nem is jött levele:

$$200 - 100 = 100.$$

Két halmaz egyesítése $A \cup B$ — Azoknak a postaládáknak a száma, amelyekbe nem dobott be levelet a postás:

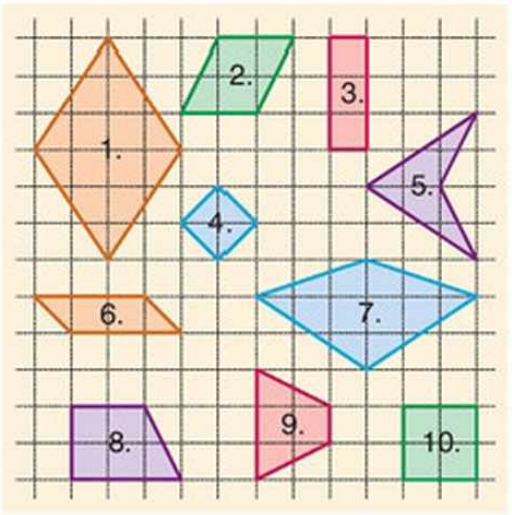
$$200 + 100 + 100 = 400.$$

$\bar{A} \cap \bar{B}$ — Így azok kaptak levelet, akik nem havazódtak be, és jött levelük:

$$600 - (200 + 100 + 100) = 200.$$

Tehát 200 ház postaládájába dobott be levelet a postás aznap.

Feladatok



1. Legkevesebb hány négyszöget, és melyeket kell elvenni az alábbiak közül, hogy a megmaradt négyszögekre igaz legyen a következő állítás? (Az állításokat egyenként vegyük figyelembe!)

a) Minden négyszög tengelyesen szimmetrikus.
b) Minden négyszög trapéz.
c) Minden négyszög középpontosan szimmetrikus.
d) Minden négyszögnek van derékszöge.
e) Minden négyszög belső szögeinek összege 360°.

2. Válasszuk ki a két oszlopból, hogy mely állítások jelentik ugyanazt!

1. Ha egy négyszög rombusz, akkor trapéz.	*A)* Nem minden trapéz téglalap.
2. A paralelogrammák halmaza részhalmaza a trapézok halmazának.	*B)* Minden rombusz trapéz.
3. Van olyan trapéz, amely nem téglalap.	*C)* Minden téglalap trapéz.
4. Nincs olyan téglalap, amely nem trapéz.	*D)* Minden paralelogramma trapéz.

3. Legyen az alaphalmaz a szabályos dobókockával dobható számok halmaza! Ezen az alaphalmazon legyen az *A* halmaz a prímszámok halmaza, *B* a 3-nál nem nagyobb számok halmaza, *C* pedig a 3 többszöröseinek halmaza.

a) Készítsünk halmazábrát!
b) Írjuk be az alaphalmaz elemeit a megfelelő helyre, és írjuk le a halmazrészek jellemzőit! Pl. a 2 prím és 3-nál nem nagyobb, és 3-nak nem többszöröse.
c) Maradt-e halmazrész üresen?

***4.** Az alábbi igaz állítások a részecskékre vonatkoznak. Készítsük el az állítások alapján a részecskék halmazábráját!



Minden részecske fermion vagy bozon.
Egyetlen fermion sem bozon.
A mezonok azok a hadronok, amelyek bozonok.
Azok a hadronok, amelyek fermionok, a barionok.

5. Egy dolgozat után mindegyik tanuló vetett egy pillantást a tanár papírjára, melyre ő a dolgozat jegyeit írta. Mindenki látott 5 darab ötöst, de senki sem látta az összes jegyet, és senki sem látta a sajátját. Legkevesebb hány tanuló dolgozata sikerült ötösre?

6. A plimuf nyelvben megadtuk néhány egyszerű mondat fordítását:

Szeretek reggel tornázni.	Blum paru gomm.
Reggel esőben mentem.	Plem gomm lape.
Tornázni egészséges.	Tegem paru.
Sétálni mentem.	Lape korem.

Mi lehet a „Szeretek esőben sétálni.” mondat a plimuf nyelvben az alábbiak közül (minden szó jelentése különböző, és két szó nem jelentheti ugyanazt)?

A) Paru blum lape.
B) Gomm plem paru.
C) Korem blum plem.
D) Plem paru gomm.

7. Bence, Karcsi és Dani egy tesztet töltöttek ki, melyben minden kérdésre igennel(I) vagy nemmel(N) kellett felelni.

A fiúk válaszait a táblázatban láthatjuk.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Bence	N	N	I	I	I	I
Karcsi	I	N	N	I	I	I
Dani	I	I	N	N	I	I

A javításkor kiderült, hogy Bence és Karcsi is 5-5 kérdésre adott helyes választ. Legfeljebb hány helyes válasza lehet Daninak?

8. Hány olyan, legfeljebb kétjegyű természetes szám van, amely

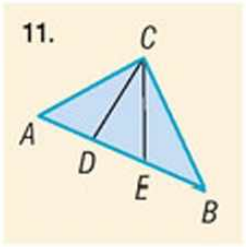
a) 6-tal osztható; *b)* 15-tel osztható; *c)* 6-tal is és 15-tel is osztható;
d) 6-tal vagy 15-tel osztható; *e)* se 6-tal, se 15-tel nem osztható?

Készítsünk halmazábrát, és írjuk be a megfelelő halmazrészekbe az elemek számát!

9. Egy nagy családi összejövetelen 55-en vettek részt. 28-an legfeljebb 25 évesek, 29-en pedig legalább 25 évesek. Hány 25 éves családtag vett részt az összejövetelen, ha mindenkit egész évesnek számítunk?

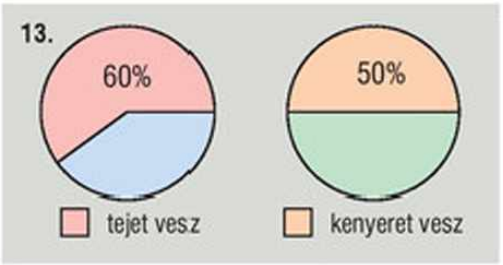
10. Megkérdeztek 100 üzletembert a sportolási szokásaikról. 70-en teniszeznek, 50-en golfoznak rendszeresen. Legfeljebb hányan játsszák csak az egyiket rendszeresen?

11. Az ABC háromszög területe 20 cm^2. A háromszög AB oldalán felvettük a D és E pontokat úgy, hogy az AEC háromszög területe 10 cm^2, míg a DBC háromszög területe 16 cm^2. Hány négyzetcentiméter a DEC háromszög területe? (➡)



12. Egy szociológiai kutatás során 40 ember töltött ki egy kérdőívet. Kiderült, hogy közülük 22-nek a kék a kedvenc színe, 19-nek van autója, és 13 szereti a virágokat. A kék a kedvenc színe 10 olyan embernek, akinek van autója, és 7 olyan ember van, aki szereti a virágokat és a kék a kedvenc színe. 8 autótulajdonos szereti a virágokat, ezek közül 5-nek a kék a kedvenc színe. Hány olyan ember van, aki szereti a virágokat, de nem a kék a kedvenc színe, és nincs autója?

13. Egy élelmiszerboltban felmérték a vásárlási szokásokat. A tejet vásárlók arányát és a kenyeret vásárlók arányát a diagramok mutatják. Tejet is és kenyeret is a vásárlók 30%-a vesz. A vásárlók hány százaléka nem vesz se tejet, se kenyeret? (➡)

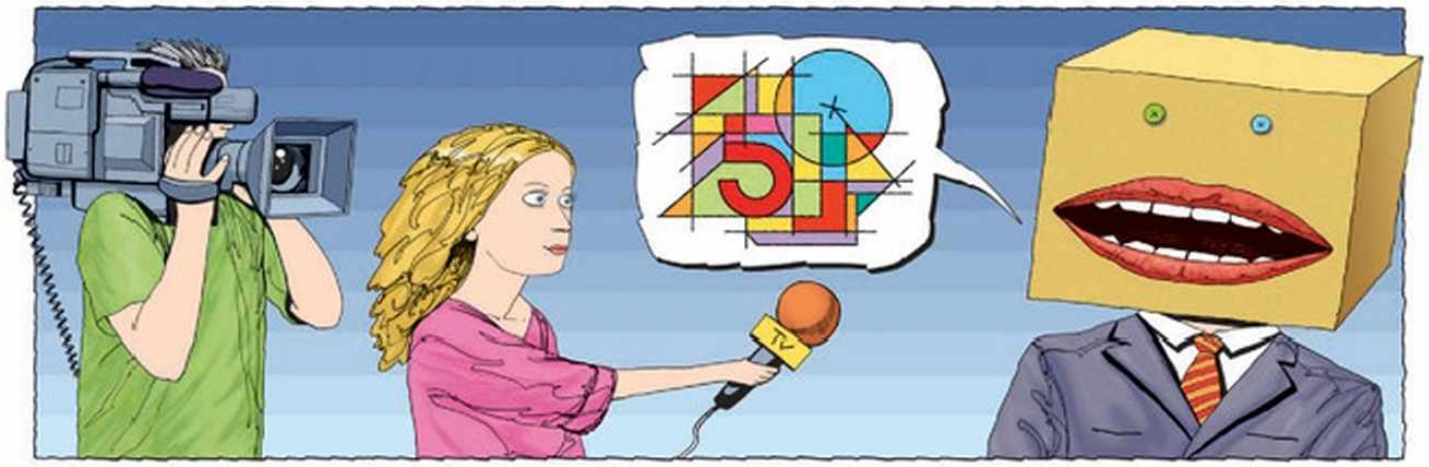


***14.** Egy 26 fős osztály matematikadolgozatában 4 feladat volt. Az eredményről a tanár így számolt be: „Csak a teljes megoldásokat értékeltem. Legalább 2 feladatot 20-an oldottak meg. Legfeljebb 3 jó megoldása 21 tanulónak van, miközben 11-en kettőnél több feladatot helyesen oldottak meg. 24 tanulónak legalább egy feladata hibátlan.” Hány gyerek van az osztályban, akinek pontosan két feladata sikerült?

Rejtvény

Eszter állatseregletében két kivétellel mindegyik állat madár. Két kivétellel mindegyik állat kutya, és két kivétellel mindegyik állat macska. Hány állat van Eszter állatseregletében?

2. Beszéljünk helyesen a matematika nyelvén!



A hétköznapi életben is fontos, csakúgy, mint a matematikában, hogy pontosan fejezzük ki magunkat.

1. példa

Mit jelentenek az alábbi kijelentések? Döntsük el, vajon helyesek-e!

a) A meccs hátralevő részében azért küzdünk, hogy elkerüljük, hogy ne kapjunk ki.

b) A pekingi olimpián 90 ezer néző látta a jamaicai csodafutó, Usain Bolt mindhárom győzelmét.

c) A nemzeti olimpiai futballcsapatban legalább 3 játékosnak legfeljebb 21 évesnek kell lennie.

Keressünk hasonló álhíreket újságban, rádióban, tévében!

Megoldás

a) Ha elkerülünk egy eseményt, akkor az nem történik meg. Így a kijelentés azt jelenti, hogy azt szeretnénk elérni, hogy ne történjen meg az, hogy nem kapunk ki. Ez pedig éppen azt mondja, hogy azt szeretnénk elérni, hogy kikapjunk, ami nyilván nem helyes.

Figyeljük meg, hogy ha egy kijelentésnek a **tagadását** tagadjuk, akkor éppen a kijelentést kapjuk.

b) A kijelentés szerint ugyanaz a 90 ezer néző látta Usain Boltnak mind a három győzelmét, ami nem valószínű, mert a 100 méter és 200 méter síkfutás döntője nem ugyanazon a napon volt. Inkább az a helyes, hogy Usain Bolt mindhárom győzelmét 90 ezer néző látta. Ez nem jelenti azt, hogy ugyanazok a nézők látták mind a három esetben.

A szavak sorrendjének változása sokszor megváltoztatja a mondat jelentését.

c) A kijelentés azt jelenti, hogy legkevesebb 3 játékos 21 éves vagy annál fiatalabb, de a három fiatal mellett lehet akár 8 idősebb játékos is. Valójában ennek az olimpián a fordítottja igaz: legfeljebb 3 játékos lehet legalább 21 éves. Ez utóbbi szerint nem lehet 3-nál több olyan játékos, aki 21 éves vagy annál idősebb. Eszerint legalább 8 játékosnak 21 évesnél fiatalabbnak kell lennie.

A **legalább, legfeljebb** szavak helytelen használata megváltoztatja a mondat értelmét.



nem minden = = van olyan, aki nem

nem igaz, hogy van olyan = = mindre nem igaz

Alkossunk mondatokat, melyekben szerepel a *minden* vagy a *van olyan* kifejezés és a *nem* tagadószó! Írjuk fel a tagadásukat!

Ha egy kijelentés igaz, a tagadása hamis, ha egy kijelentés hamis, a tagadása igaz.

2. példa

Peti és Panni mindig ellentmondanak egymásnak.
Mit mond Panni, ha Peti a következőket mondja?

a) Minden gyerek szereti a csokoládét.
b) Van olyan kutya, amelyik négylábú.
c) Van olyan lemez, amelyen minden szám jó.
d) Minden focicsapatban van kapus.

Megoldás

Panni többféleképpen is megfogalmazhatja a tagadást.
Mondhatja például a következőket:

a) *Nem minden* gyerek szereti a csokoládét.
Van olyan gyerek, *aki nem* szereti a csokoládét.
b) *Nincs* olyan kutya, amelyik négylábú. *Minden* kutya *nem* négylábú.
Egyik kutya *sem* négylábú.
c) *Nincs* olyan lemez, amelyen *minden* szám *jó*.
Minden lemezen *van* olyan szám, amelyik *nem jó*.
d) *Nincs minden* focicsapatban kapus.
Van olyan focicsapat, *amelyikben nincs* kapus.

3. példa

Tagadjuk a következő kijelentéseket! Az állításról és a tagadásáról is döntsük el, hogy igaz vagy hamis!

a) Minden háromszög derékszögű.
b) Van olyan téglalap, amelyik nem négyzet.
c) A 15 osztható 2-vel és 3-mal.
d) A 3 és a $|-3|$ különbsége pozitív vagy negatív.

Megoldás

a) A „*minden háromszög derékszögű*” kijelentés hamis.
A kijelentés tagadása:
Nem igaz, hogy minden háromszög derékszögű.
Másképpen: **Van olyan** háromszög, **amelyik nem** derékszögű.
Ez igaz, vagyis az eredeti kijelentés tagadása igaz.
b) A „*van olyan téglalap, amelyik nem négyzet*” kijelentés igaz.
A kijelentés tagadása:
Nem igaz, hogy van olyan téglalap, amelyik **nem** négyzet.
Másképp: **Minden** téglalap négyzet. Ez hamis, vagyis az eredeti kijelentés tagadása hamis.
c) „*A 15 osztható 2-vel és 3-mal*” kijelentés hamis.
A kijelentés tagadása:
Nem igaz, hogy a 15 **osztható** 2-vel és 3-mal.
Másképp: A 15 **nem osztható** 2-vel **vagy nem osztható** 3-mal.
Ez igaz, mert a 15 nem osztható 2-vel, vagyis az eredeti kijelentés tagadása igaz.

d) „*A 3 és a |−3| különbsége pozitív vagy negatív*” kijelentés hamis.
A kijelentés tagadása:
Nem igaz, hogy a 3 és a |−3| különbsége pozitív **vagy** negatív.
Másképp: A 3 és a |−3| különbsége **nem** pozitív **és nem** is negatív.
Ez igaz, mert ez a különbség 0, az eredeti kijelentés tagadása igaz.

Figyeljük meg, hogy a „*ha esik az eső, akkor kinyitom az esernyőmet*” állítás mikor igaz, mikor hamis!



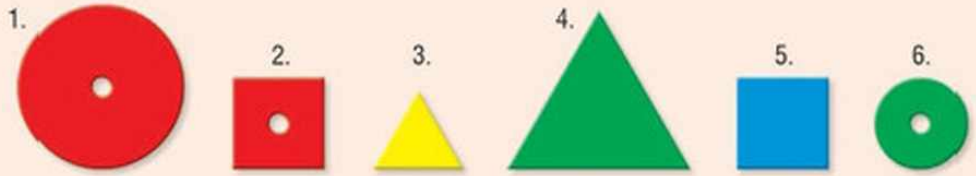
1. Esik, és kinyitom az esernyőm.
2. Esik, de nem nyitom ki az esernyőm.
3. Nem esik, és kinyitom az esernyőm.
4. Nem esik, és nem nyitom ki az esernyőm.

A „*ha esik az eső, akkor kinyitom az esernyőmet*” állítás nem vonatkozik arra az esetre, ha nem esik az eső, így akkor akár kinyitom az ernyőt, akár nem, az állítás igaz.

A „*ha esik az eső, akkor kinyitom az esernyőmet*”-hez hasonló állításokban a ha utáni rész a **feltétel,** az akkor utáni rész a **következmény.** Az ilyen állítások akkor is igazak, ha a feltétel nem teljesül.

***4. példa**

Dávid a logikai lapok közül becsukott szemmel kihúzta az ábrán látható hatot.



Melyekre igazak, és melyekre nem a következő állítások?

a) Ha a kihúzott lap piros, akkor nagy.
b) Ha a kihúzott lap háromszög, akkor sárga.
c) Ha a kihúzott lap nem kék, akkor lyukas.
d) Ha a kihúzott lap nem kör, akkor nem zöld.

Megoldás

a) A „*ha a kihúzott lap piros, akkor nagy*” állítás igaz a következő lapokra: 1. lapra, mert az piros és nagy; a 3., 4., 5., 6. lapra, mert azok nem pirosak, így nem kell nagyoknak lenniük. Ez az állítás csak a 2. lapra nem igaz, mert az piros, de nem nagy.

b) A „*ha a kihúzott lap háromszög, akkor sárga*” állítás igaz a 3. lapra, mert háromszög és sárga, valamint az 1., 2., 5., 6. lapokra, mert nem háromszögek, így akármilyen színűek lehetnek. Ez az állítás csak a 4. lapra nem igaz, mert háromszög, de nem sárga.

c) A „*ha a kihúzott lap nem kék, akkor lyukas*” állítás igaz az 1., 2., 6. lapokra, mert nem kékek és lyukasak, valamint az 5. lapra, mert kék, így lehet akár lyukas, akár teli. Az állítás nem igaz a 3. és a 4. lapokra, mert nem kékek, viszont nem lyukasak.

d) A „*ha a kihúzott lap nem kör, akkor nem zöld*” állítás igaz a 2., 3., 5. lapokra, mert egyik sem kör és nem is zöld, valamint az 1. és a 6. lapokra, mert körök, így lehetnek akár zöldek, akár nem zöldek. Az állítás nem igaz a 4. lapra, mert az nem kör, viszont zöld.

A „*ha kapok zsebpénzt, akkor veszek csokoládét*” állítás **megfordítása** a „*ha veszek csokoládét, akkor kapok zsebpénzt*”.

Ha az ilyen típusú állításokban a feltételt és a következményt felcseréljük, az állítás megfordítását kapjuk.

Állapítsuk meg minden állításról és a megfordításáról, hogy igaz vagy hamis!

5. példa

Fordítsuk meg a következő állításokat!

a) Ha esik az eső, akkor vizes az úttest.

b) Ha egy háromszögnek van két egyenlő nagyságú szöge, akkor tengelyesen szimmetrikus.

c) Ha egy szám osztható 2-vel, akkor a szám osztható 4-gyel is.

d) Ha egy négyszög trapéz, akkor van két egyenlő oldala.

Megoldás

Az állítások megfordításakor a feltételt és a következményt megcseréljük.

a) Ha vizes az úttest, akkor esik az eső.

b) Ha egy háromszög tengelyesen szimmetrikus, akkor van két egyenlő szöge.

c) Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor a szám osztható 2-vel is.

d) Ha egy négyszögnek van két egyenlő oldala, akkor a négyszög trapéz.

Feladatok

1. Válasszuk ki azokat az állításokat, amelyek ugyanazt jelentik!

A) Minden egér szereti a sajtot.

B) Egyetlen egér sem szereti a sajtot.

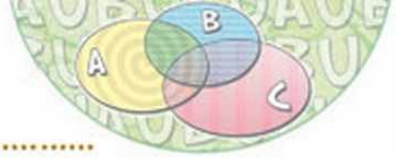
C) Van olyan egér, amelyik nem szereti a sajtot.

D) Nem igaz, hogy minden egér szereti a sajtot.

E) Nem igaz, hogy van olyan egér, amelyik nem szereti a sajtot.

F) Nincs olyan egér, amelyik nem szereti a sajtot.





2. Juli néni és Kati néni 70 éve szomszédok, azóta folyton ellentmondanak egymásnak. Mit mondott Juli néni, ha Kati néni a következőket mondta?

a) Októberben minden nap esni fog az eső.
b) A héten volt olyan nap, amikor a postás 10 óra után jött.
c) Van olyan tyúk, amelyik mindennap tojik egy tojást.
d) Minden nyáron van olyan nap, amikor legalább 40°C van.

3. Tagadjuk a következő állításokat! Döntsük el, melyik igaz, melyik hamis!

a) Minden négyzet rombusz.
b) Van olyan egyenlet, amelynek nincs megoldása.
c) Minden 3-mal osztható szám osztható 6-tal is.
d) Van olyan pont, amelyik egyenlő távolságra van a négyszög minden csúcsától.

4. Mit mondhatunk a 7. a osztályos Nóriról, ha a következő állítások igazak?

a) Minden 7. a osztályos tanuló sportol kedd délután.
b) A 7. a osztály minden tanulója tanul angolul vagy franciául. Nóri nem tanul angolul.
c) Shakespeare szülőházában nem járt még 7. a osztályos tanuló.
d) Az iskolai farsangot a 7. a osztály néhány tanulója szervezi.

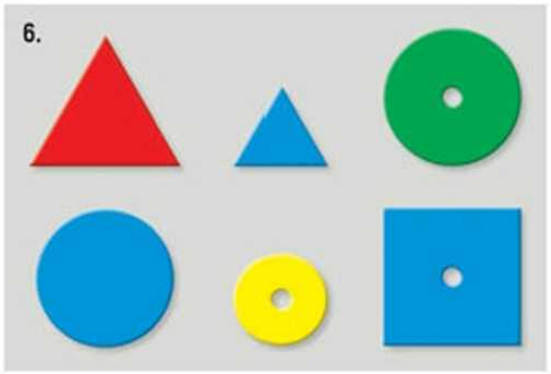
5. Írjuk le az állításokat, a megfordításukat, és mindkettőről döntsük el, hogy igaz vagy hamis!

a) Ha egy szám osztható 15-tel, akkor osztható 9-cel.
b) Ha egy pont rajta van egy szög szögfelezőjén, akkor egyenlő távolságra van a szög két szárától.
c) Ha egy szám pozitív, akkor nagyobb 1-nél.
d) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor a négyszög trapéz.

6. Legkevesebb hány lapot és melyeket kell elvenni az alábbiak közül, hogy a megmaradt lapokra igaz legyen az állítás? (➡)

a) Minden lap kék vagy kicsi.
b) Van olyan lap, amelyik piros és nagy.
c) Ha egy lap lyukas, akkor kicsi.
d) Ha egy lap kék, akkor kör.
e) Ha egy lap nagy, akkor piros vagy lyukas.
f) Ha egy lap kék vagy négyzet, akkor kicsi.

6.



***7.** Három dobozban két-két érme van, az egyikben egy 50-es és egy 100-as, a másikban két 50-es, a harmadikban két 100-as, nem tudjuk, melyikben milyen. Mindegyik dobozon van egy-egy címke: 50+100, 50+50, 100+100, de mindegyik doboz címkéje mást mond, mint ami valójában a dobozban van. Valamelyik dobozt kiválasztva abból látatlanban kivehetünk egy érmét, és megnézhetjük. Legkevesebb hány érmét kell kivenni, és megnézni, hogy mindegyik dobozról eldönthessük, hogy mi van benne?

Rejtvény

Egy nő nem vitte magával a jogosítványát. Nem állt meg a stoptáblánál, sőt nem vett tudomást az egyirányú utcáról sem, és három háztömbnyit haladt a rossz irányba. Egy rendőr mindezt látta, mégsem tett semmit, de ezzel nem követett el kötelességmulasztást. Hogy lehet ez?

3. Hányféle útvonal lehet? Az összegzési módszer



Piroska 3 olyan ösvényen juthat el nagymamához, ahol találkozik a farkassal, és 2 olyan ösvényen, amely a virágos réten át vezet. Így összesen $3 + 2 = 5$ útvonalon mehet nagymamához.

1. példa

Zoli szeretné meglátogatni Annát, ezért megkérdezi tőle, hogyan juthat otthonról Annáék házához.

Anna így válaszolt: „*Indulj kelet felé, a harmadik sarkon fordulj jobbra, a következő saroknál lesz egy szökőkút. Az ez utáni téren lakom*”.

Zolinak ez az útvonal nem volt ismerős, ezért Anna másikkal próbálkozott: „*Semmivel sem kell többet gyalogolnod, ha délre indulsz, aztán a második sarkon balra fordulsz, innen a második sarkon látsz egy tornyot, az ez utáni téren lakom*”.

Persze még számos lehetőség közül választhatsz anélkül, hogy hosszabb utat kellene megtenned, mert ezen a környéken minden utca vagy észak-dél, vagy kelet-nyugat irányú.

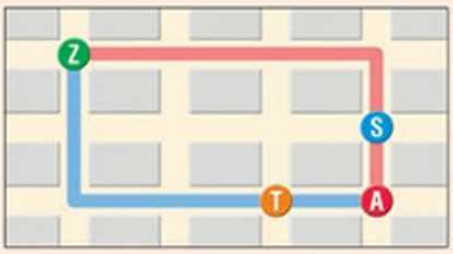
a) Készítsünk térképvázlatot, melyen *A* jelöli Anna helyét, *S* a szökőkutat, *T* a tornyot, *Z* pedig Zoli helyét! Rajzoljuk az Anna által javasolt első útvonalat kékkel, a másodikat pedig pirossal!

b) Hányféle különböző útvonal közül választhat Zoli? Rajzoljunk térképvázlatokat, és jelöljük az összes lehetőséget! Két útvonal különböző, ha van olyan szakaszuk, amelyben eltérnek.

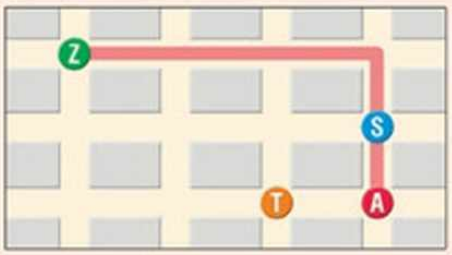
c) A Zolitól Annához vezető útvonalak közül hány érinti a szökőkutat, és hány a tornyot?

Megoldás

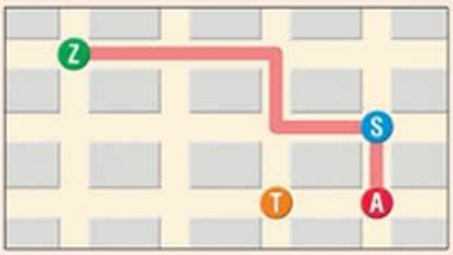
a) A térképvázlat azokat az utcarészeket mutatja, amelyeken Zoli haladhat, ha a legrövidebb úton szeretne Annáékhoz jutni. Ekkor Zoli csak lefele vagy jobbra haladhat.

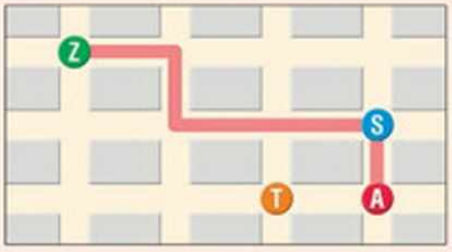


b) A különböző útvonalak:



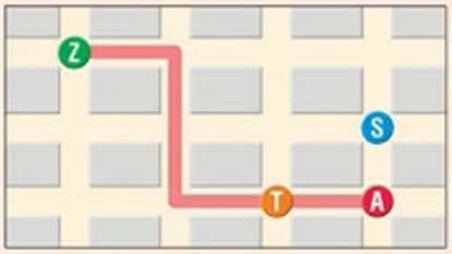
J J J L L
J J L J L





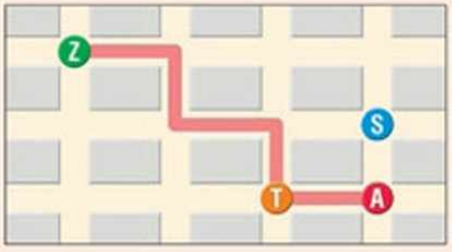
J L J J L
L J J J L





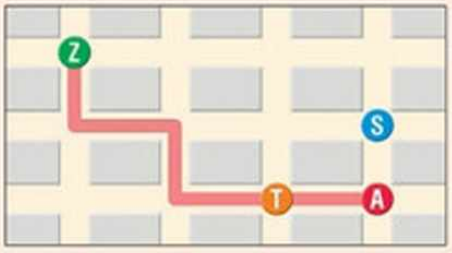
J L L J J
J J L L J





J L J L J
L J J L J





L J L J J
L L J J J



J = jobbra,
L = lefele
jelölésekkel
az útvonalak:

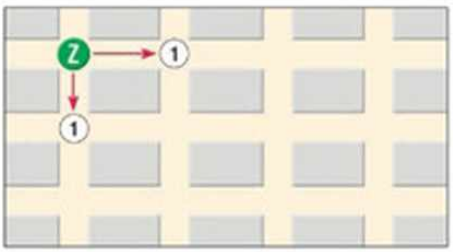
Tehát Zoli 10 különböző útvonalon juthat Annához.

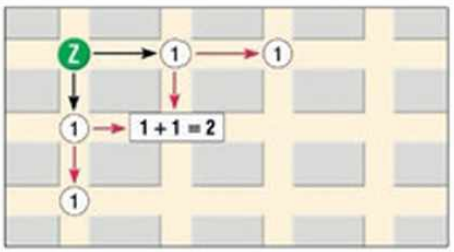
10-féle

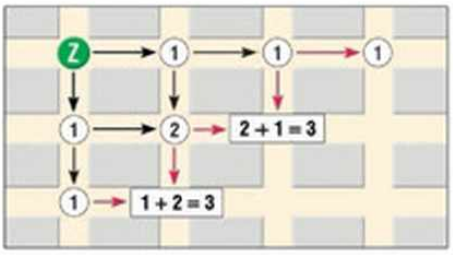
c) A *Z*-től *A*-ig vezető utvonalak közül 4 érinti a szökőkutat, és 6 érinti a tornyot. Mivel Annához vagy a toronytól vagy a szökőkúttól lehet eljutni, így 6 + 4 = 10 különböző útvonal vezet hozzá Zolitól.

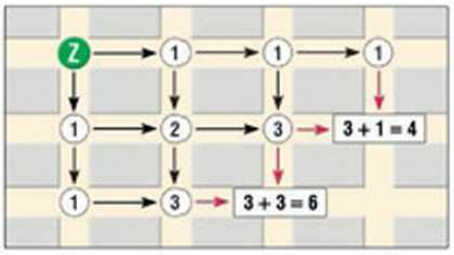
A fenti összegzés általánosan is alkalmazható. Írjuk be minden kereszteződésbe a *Z*-ből a kereszteződésbe vezető legrövidebb (jobbra vagy lefele haladó) különböző útvonalak számát!

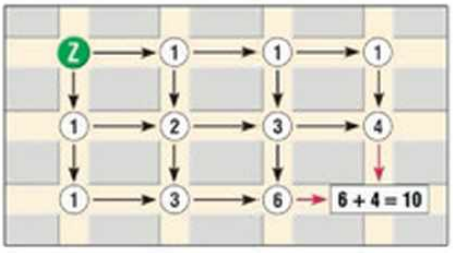
Ismerni kell a
– kiindulási pontot,
– célpontot,
– megközelítés módját.











Mindegyik pont esetén először jelöljük piros nyilakkal, hogy honnan érkezhetünk ebbe a pontba. Ha ezután **összeadjuk a nyilak kezdőpontjaiba vezető útvonalak számát, megkapjuk, hogy hányféle útvonal vezet a vizsgált pontba.**

2. példa

Hányféleképpen lehet kiolvasni a városok nevét az alábbi betűtáblákból, ha mindig csak szomszédos betűre léphetünk?

a)

S	Z	E	G
Z	E	G	E
E	G	E	D

b)

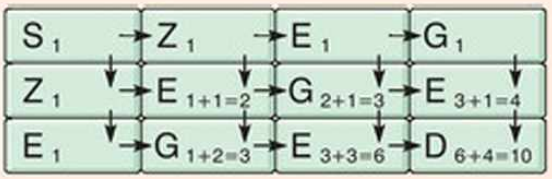
G	Y	Ő	R
Y	Ő	R	
Ő	R		
R			

Megoldás

Rajzoljuk be a nyilakat a betűk közé a nevek kiolvasásának megfelelően! A nevek kiolvasása megfelel annak, hogy a táblázatban lefelé vagy jobbra lépkedünk szomszédos betűkre. Annyiféleképpen olvashatjuk ki a neveket, ahány különböző útvonalon így eljuthatunk az első betűtől az utolsóig.

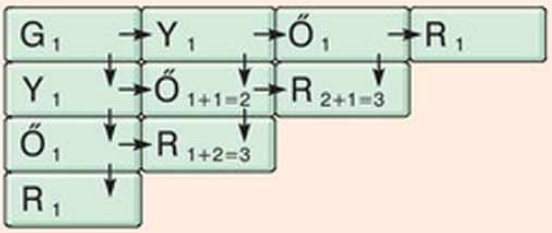
Írjuk a betűk jobb alsó sarkához azt a számot, ahányféleképpen az első betűtől addig a betűig juthatunk az olvasásban!

a)



Tehát SZEGED város neve 10-féleképpen olvasható ki.

b)

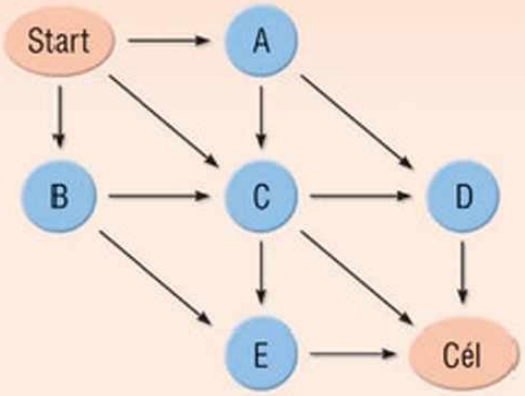


Mivel a G betűtől négy R betűig juthattunk összesen $1 + 3 + 3 + 1 = 8$-féleképpen, így GYŐR város neve 8-féleképpen olvasható ki a táblázatból.

A lehetőségek száma:
– a célpontnál (D-nél) levő szám;
– a célpontotoknál (R-eknél) levő számok összege.

3. példa

A HEX számítógépes játékban a játékosnak különböző próbákat kell teljesítenie. Ezek között a nyilaknak megfelelően haladhat. A játékos mindegyik próba után választhat, hogy melyik irányban halad tovább. Hányféleképpen juthat a játékos a START-tól a CÉL-ig?

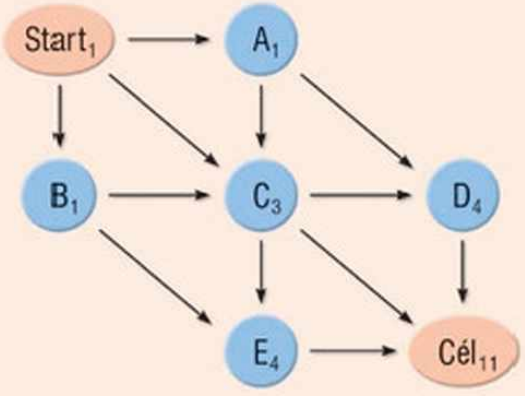


(Két útvonal különböző, ha a játékos nem pontosan ugyanazokat a próbákat járta végig.)

Megoldás

Írjuk mindegyik próbához, hogy a starttól hányféle útvonalon lehet odajutni! Nézzük például a *C* próbát! Ide az *A*-ból, a starttól közvetlenül, és a *B*-ből lehet jutni. Mivel a starttól *A*-ba és *B*-be is egyféleképpen lehetett elérni, így *C*-be $1 + 1 + 1 = 3$-féleképpen juthatunk.

D-be *A*-ból vagy *C*-ből juthatunk. Ezért a *D*-be vezető különböző utak száma: $1 + 3 = 4$.

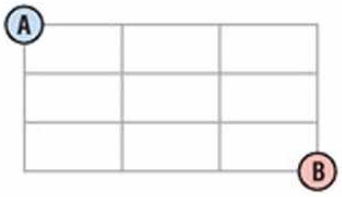


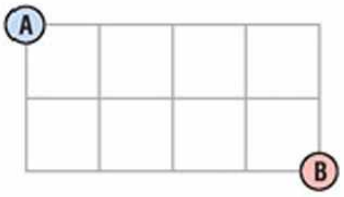
A Starttól *E*-be *B*-ből vagy *C*-ből juthatunk, vagyis összesen $1 + 3 = 4$-féleképpen.

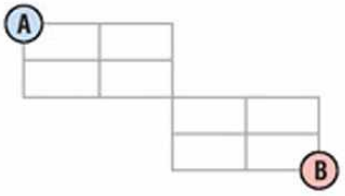
A célba *D*-ből, *C*-ből vagy *E*-ből juthatunk, így az ide vezető utak száma: $4 + 3 + 4 = 11$.

Feladatok

1. Hányféle útvonalon juthatunk A-ból B-be, ha csak lefelé vagy jobbra haladhatunk a vonalakon?

a) 

b) 

c) 

2. Hányféleképpen olvashatók ki az Ágnes, Zsófi, Gabi, Dorka nevek a következő betűtáblázatokból, ha mindig csak szomszédos betűre léphetünk?

a)

Á	G	N
G	N	E
N	E	S

b)

Z	S	Ó	F
S	Ó	F	I
Ó	F	I	A

c)

G	A	B	I
A	B	I	
B	I		
I			

d)

D	O	R	K	A
O	R	K	A	
R	K	A		
K	A			
A				

e) Írd táblázatba a saját nevedet, és számold össze, hányféleképpen lehet kiolvasni!

3. Hányféleképpen olvashatók ki a Miskolc, Szolnok, Esztergom városnevek a következő betűtáblázatokból, ha mindig csak szomszédos betűre léphetünk?

a)

M	I	S	K	O
I	S	K	O	L
S	K	O	L	C

b)

			L			
			O	N		
		Z	L	O		
S	O	N	K			
		Z	L	O		
			O	N		
				L		

c)

				E						
			S		S					
		Z		Z		Z				
	T		T		T		T			
E		E		E		E		E		
	R		R		R		R			
		G		G		G				
			O		O					
				M						

d) Írjunk különböző városneveket táblázatokba, és számoljuk össze, hányféleképpen lehet kiolvasni!

4. Hányféle útvonalon érhetjük el a kocka *A* csúcsából a *H* csúcsot úgy, hogy pontosan három élen haladunk végig? (*A* és *H* a kocka egy testátlójának két végpontja. Két útvonal különböző, ha van olyan él, amelyik az egyik útvonalban benne van, a másikban nincs.)

5. A derékszögű koordináta-rendszerben lépkedünk úgy, hogy 1-et adunk annak a pontnak valamelyik koordinátájához, amelyiken éppen állunk. (Így egy lépéssel pl. az (1; 2) pontból csak a (2; 2) vagy az (1; 3) pontba juthatunk.) Hányféle különböző úton juthatunk a (0; 0) pontból az *a)* (3; 2); *b)* (3; 3); *c)* (2; 4) pontba?

Rejtvény

A francia kártya 26 különböző lapjából hármat leraktunk fejjel lefelé az asztalra sorban egymás mellé. A királytól jobbra közvetlenül egy vagy két dáma van. Egy dáma bal oldalán közvetlenül egy vagy két dáma található. A kőrtől balra egy vagy két káró fekszik, és egy kárótól jobbra egy vagy két káró van. Soroljuk fel balról jobbra a három kártyát!

4. Hányféleképpen választhatunk?



Az úgynevezett összeszámlálási feladatok esetén a hasonló szövegű feladatok nagyon eltérő helyzeteket írhatnak le. Ezért az ilyen feladatok szövegét különös gonddal kell elolvasni és értelmezni!

1. példa

A társastánc tanfolyamon a 8. a osztályból András, Bence és Csaba, valamint Dóra, Eszter és Flóra vesz részt. Egyikük sem táncol soha más osztálybelivel, és csak fiú-lány pár táncolhat.

a) Hányféleképpen lehet kiválasztani közülük egy párt a szólótáncra?

b) Hányféleképpen állhatnak párba a keringőhöz mind a hatan, ha a fiúk úgy kérik fel a lányokat, hogy először András választ, utána Bence, végül Csaba?

(Két párba állítás különbözik, ha van eltérő pár.)

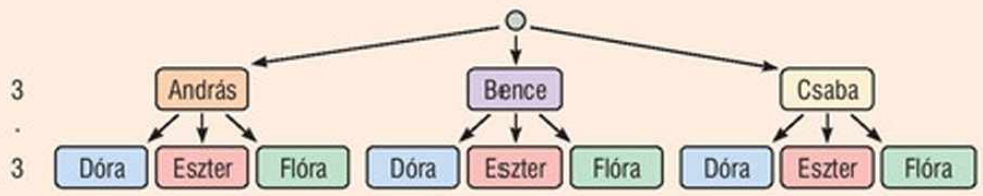
c) Hány táncot táncolhatnak, ha mindenki minden táncot mással táncol, és mind a hatan táncolnak?



Csak egy pár táncol.

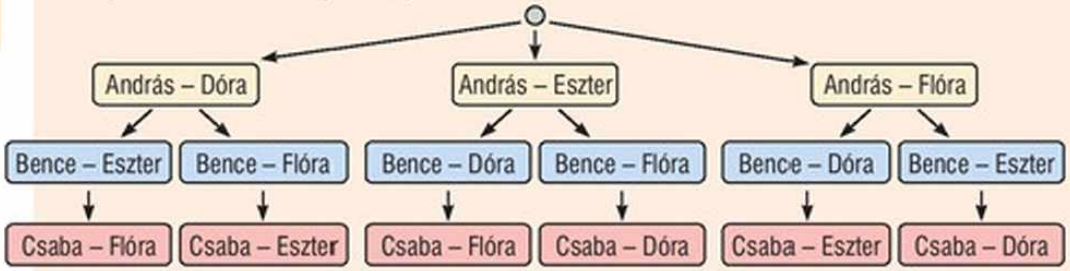
Megoldás

a) Ábrázoljuk nyíldiagramon a lehetőségeket, ha először a szólótáncos pár fiú tagját, utána a lányt választjuk ki!



Mivel 3 fiú van, a szólótáncos pár fiú tagját 3-féleképpen választhatjuk ki. Bármelyik fiúhoz 3-féleképpen választhatunk lányt, így a lehetőségek száma: $3 \cdot 3 = 9$.

b) Készítsünk nyíldiagramot!



3 · 2 · 1

András 3-féleképpen választhat lányt, Bence már csak 2-féleképpen, végül Csabának 1 lány marad. Így a lehetőségek száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Tehát 6-féleképpen állhatnak párba a keringőhöz.

Mindenki táncol, és **van** eltérő pár a különböző párosításokban.

c) Mivel minden fiú minden táncot más lánnyal táncol, és 3 lány van, így nem lehet 3-nál több tánc. 3 táncot valóban táncolhatnak úgy, hogy mindenki mindig mással táncol, például:

1. tánc	2. tánc	3. tánc
András – Dóra	András – Eszter	András – Flóra
Bence – Eszter	Bence – Flóra	Bence – Dóra
Csaba – Flóra	Csaba – Dóra	Csaba – Eszter

Mindenki táncol. **Minden** pár különbözik, azaz nincs azonos pár a különböző párosításokban.

2. példa

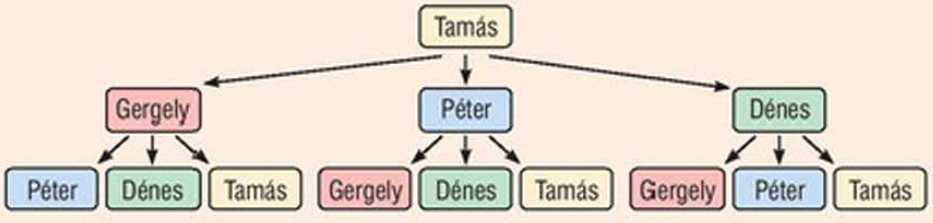
A vízilabdameccsen Tamás, Gergely, Péter és Dénes vesznek részt a támadásban. Tamásnál van a labda. Hányféle támadási lehetőség van, ha csak azt vesszük figyelembe, hogy ki kinek passzolja a labdát, és a kapura lövés

a) 2 passz után; *b)* 3 passz után; *c)* 4 passz után történik?

Hány különböző támadási lehetőség van, ha Dénes sosem lő kapura?

Megoldás

a) Készítsünk nyíldiagramot!



3 · 3

Tamás 3 játékos közül választhatja ki, hogy kinek passzol. Ha például Gergelynek passzol, akkor ő is 3 játékos közül választhat, hiszen visszaadhatja a labdát Tamásnak, vagy továbbdobja Péternek vagy Dénesnek, aki kapura lő. Így a támadási lehetőségek száma: $3 \cdot 3 = 9$.

b) A passzoló játékos a 3. passznál is 3 másik játékos közül választhatja ki, hogy kinek dobja a labdát. Így a lehetőségek száma az előző 3-szorosa: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

c) A negyedik passznál is 3 lehetőség van, így ha 4 passz után lőnek kapura, akkor a támadási lehetőségek száma: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Egy támadásban ugyanaz a játékos többször is kaphat labdát, azaz lehet ismétlődés. Más a helyzet a tánc esetén. Ott egy táncot ugyanaz a fiú több lánnyal nem táncolhat, azaz nem lehet ismétlődés.

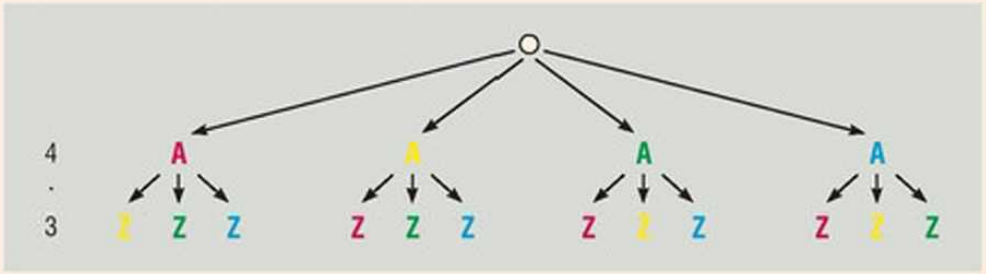
Mindig figyeljük meg a feladatok szövegét, hogy lehet-e ismétlődés egy eseten belül!

3. példa

Angyal Zita a monogramját rajzolja színessel a naplója elejére. A piros, sárga, zöld, kék színek közül két különböző színt használ. Hányféle színű lehet a monogramja?

Megoldás

Ábrázoljuk a lehetőségeket nyíldiagramon!





A színek nem ismétlődhetnek, de a sorrendjük számít.

Az A betű 4-féle színű lehet. Ha az A betű piros, akkor a Z már nem lehet piros, csak, sárga, zöld vagy kék, azaz 3-féle színű. Bármilyen színű az A betű, a Z 3-féle színű lehet, így a két betű $4 \cdot 3 = 12$-féle színű lehet.

Tehát Angyal Zita monogramja 12-féle színű lehet.

4. példa

Máté az aprópénzét a dzsekije két zsebében tartja. Öt érméje van:



Hány forint lehet a bal zsebében, ha ott három érme van?

Megoldás

Soroljuk fel a lehetőségeket! Könnyebben elkerülhetjük, hogy ugyanazt az esetet többször is felsoroljuk, ha nagyság szerint növekvő sorrendbe írjuk az érméket.

		BAL zseb	Összeg a BAL zsebben	JOBB zseb
Az 5 a bal zsebben van	Az 5 és 10 mellé választunk 3. érmét.	5 10 20	35	50 100
		5 10 50	65	20 100
		5 10 100	115	20 50
	Az 5 és 20 mellé választunk 3. érmét.	5 20 50	75	10 100
		5 20 100	125	10 50
	Az 5 és 50 mellé választunk 3. érmét.	5 50 100	155	10 20
A 10 a bal zsebben van, az 5 nincs	A 10 és 20 mellé választunk 3. érmét.	10 20 50	80	5 100
		10 20 100	130	5 50
	A 10 és 50 mellé választunk 3. érmét.	10 50 100	160	5 20
A 20 a bal zsebben van, az 5 és 10 nincs	A 20 és 50 mellé csak a 100 jöhet.	20 50 100	170	5 10

A zsebben az érmék nem ismétlődhetnek, és sorrendjük nem számít.

A táblázatból látható, hogy 10-féleképpen választható 3 érme Máté bal zsebébe. Mindegyik esetben különböző az összegük, így Máté bal zsebében 10-féle összeg lehet: 35 Ft, 65 Ft, 75 Ft, 80 Ft, 115 Ft, 125 Ft, 130 Ft, 155 Ft, 160 Ft, 170 Ft.

A feladat megoldásában láthatjuk, hogy **ugyanannyiféleképpen választhatunk 3 érmét a bal, mint ahányféleképpen 2 érmét a jobb zsebbe.**

2 érmét 5 közül a jobb zsebbe választhatunk a következőképpen is:

- először választunk egyet – 5 lehetőség;
- másodszor már csak 4 közül választhatunk – 4 lehetőség;
- két érmét sorban egymás után $5 \cdot 4$-féleképpen választhatunk. Ekkor például az 5; 10 és a 10; 5 választás különböző.
- a választás sorrendje most nem számít, két érmét 2 sorrendben választhattunk, ezért osztani kell 2-vel: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ lehetőség van.

***5. példa**

Hányféleképpen választhatunk ki az {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} halmazból egy 7 elemű részhalmazt úgy, hogy a kiválasztott számok összege osztható legyen 3-mal?

1. megoldás

A 9 elemű halmazból 7 elemű részhalmazt választunk, vagyis kihagyunk 2 elemet. Az összes szám összege:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \text{ osztható 3-mal.}$$

A kiválasztott 7 szám összege akkor osztható 3-mal, ha a kihagyott 2 szám összege is osztható 3-mal.

Így ugyanannyiféleképpen lehet 7 számot választani, melyek összege osztható 3-mal, mint ahányféleképpen 2-t, melyek összege osztható 3-mal.

A halmaz elemei nem ismétlődhetnek, és nem számít a sorrendjük.

Az 1 mellé választhatjuk a 2-t, 5-öt, 8-at: {1; 2}, {1; 5}, {1; 8}.
A 2 mellé már csak a 4 és a 7 lehet: {2; 4}, {2; 7}.
A 3 mellé választhatjuk a 6-ot vagy a 9-et: {3; 6}, {3; 9}.
A 4 mellé már csak az 5 vagy a 8 lehet: {4; 5}, {4; 8}.
Ezután az 5-höz, a 6-hoz és a 7-hez is egy-egy szám választható: {5; 7}, {6; 9}, {7; 8}.

Így 12 párt kaptunk, tehát 12-féleképpen választhatunk olyan 7 elemű részhalmazt, melyek elemeinek összege osztható 3-mal.

2. megoldás

Két szám összege osztható 3-mal, ha mindkettő osztható 3-mal, vagy ha az egyik 1, a másik 2 maradékot ad 3-mal osztva.

Ez alapján a lehetséges párokat összeszámolhatjuk úgy is, hogy:

- A 3-mal osztható 3, 6, 9 számok közül választunk 2-t, vagyis 1-et kihagyunk. Ez 3-féleképpen lehetséges.
- A 3-mal osztva 1 maradékot adó 1, 4, 7 számok közül választunk egyet, hozzá a 3-mal osztva 2 maradékot adó 2, 5, 8 számok közül választunk párt. Ez $3 \cdot 3 = 9$-féleképpen lehetséges.

Az adott halmazból összesen $3 + 9 = 12$-féleképpen lehet kiválasztani olyan 7 elemű részhalmazt, melyek elemeinek összege osztható 3-mal.

6. példa

Egy pingpongbajnokságon körmérkőzést játszanak, azaz mindenki játszik mindenkivel egyszer.

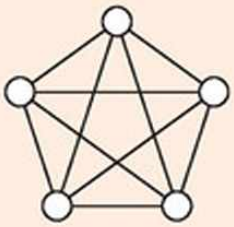
a) Hány mérkőzést játszanak 5 résztvevő esetén?
b) Hány mérkőzést játszanak 8 résztvevő esetén?
c) Hányszor annyi meccset játszik 8 résztvevő körmérkőzéssel, mint egyenes kieséses rendszerben?



Megoldás

a) 1. megoldás

Ábrázoljuk karikákkal a versenyzőket, és kössük össze azokat, akik játszanak egymással, így a szakaszok jelentik a mérkőzéseket.



A rajzról látható, hogy a versenyzők 10 mérkőzést játszanak.

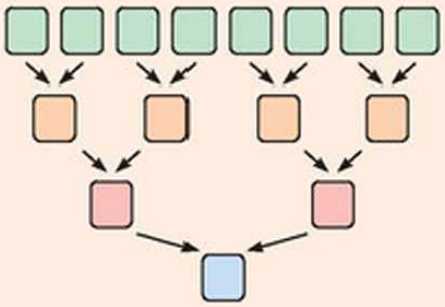
Senki sem játszik önmagával, így egy mérkőzés 2 résztvevőjének kiválasztásakor nem lehet ismétlődés, és a sorrend sem számít.

2. megoldás

Mivel mind az 5 játékos 4 másikkal játszik, így $5 \cdot 4$ meccs lenne. Viszont így minden mérkőzést mindkét résztvevőnél számoltunk, ezért $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ meccset játszanak a bajnokságban.

b) A 8 résztvevő mindegyike 7 másikkal játszik, de minden meccsen ketten játszanak, így a mérkőzések száma: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

c) Ábrázoljuk egyenes kieséses rendszerben a bajnokság lefolyását!



1. forduló: 4 meccs
2. forduló: 2 meccs
3. forduló: 1 meccs

Összesen: 7 meccs

Tehát 8 játékos körmérkőzéses rendszerben 4-szer annyi meccset játszik, mint egyenes kieséssel.

Keressünk szabályosságot a résztvevők száma és a lejátszott meccsek száma között, ha körmérkőzést játszanak, és ha kieséses rendszerben játszanak!

A kiválasztási feladatok szövegében mindig figyeljük meg, hogy számít-e a választás sorrendje!

Feladatok

1. A ballagási meghívó szerkesztésekor a MEGHÍVÓ szót 6-féle betűtípussal 3-féle méretben és 2-féle színnel írhatják. Hányféle írásmód közül választanak?

2. Egy háromjegyű szám számjegyeit dobókockával dobjuk sorban.



a) Hányféle háromjegyű számot kaphatunk?
b) Hányféle páratlan számot kaphatunk?
c) Hányféle 5-tel nem osztható számot kaphatunk?

3. A gyümölcsöt ehetjük frissen, lekvárként, szárítva, befőtt vagy dzsúsz formájában. Minden nap reggelihez, ebédhez és vacsorához is eszünk gyümölcsöt, de egy nap nem eszünk kétszer ugyanolyan formában gyümölcsöt.

a) Hányféleképpen választhatjuk a reggelihez, ebédhez, vacsorához fogyasztott gyümölcsöt?
b) Legkevesebb hányféle gyümölcsöt kell ennünk, ha mindegyik gyümölcs választható mindegyik formában, és azt szeretnénk, ha az év minden napjára különböző „gyümölcsmenü” jutna? (Két „gyümölcsmenü” különböző, ha valamelyik étkezéskor nem ugyanazt a gyümölcsöt esszük, vagy nem ugyanolyan formában.)

4. Hány olyan háromjegyű szám van, melynek számjegyei különböző prímszámok? Hány páros közülük?

5. Hány háromszöget határoznak meg egy konvex ötszög csúcsai? (A háromszög minden csúcsa az ötszögnek is csúcsa, és két háromszög különböző, ha van olyan csúcsuk, amelyik eltér.)

6. Adott a síkon 3 pont, amelyek nincsenek egy egyenesen. Hány olyan paralelogramma van, amelynek három csúcsa a 3 adott pont?

7. Egy lift előtt 5 fiú és 5 lány várakozik. A liftbe egyszerre 2 fiú és 2 lány száll be először. Hányféleképpen választhatók ki a lift utasai?

*8. Az 1, 2, 3, 4, 5 számkártyákból egy kétjegyű és egy háromjegyű számot rakunk ki úgy, hogy mindegyik kártyát pontosan egyszer használjuk fel. Ezután felírjuk a háromjegyű és a kétjegyű szám különbségét.
   a) Hányféle különbséget írhatunk fel?
   b) Melyik a legnagyobb különbség?

9. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fog egyszer. Hány kézfogás volt, ha a társaságban
   a) 7 ember van; *b)* 10 ember van; *c)* 15 ember van?

10. Nyolc csapat körmérkőzéses bajnokságot játszik. Egy mérkőzésen a győztes 2 pontot, a vesztes 0 pontot kap, döntetlen esetén mindkét csapat 1-1 pontot kap. Hány pontot szerzett a Nekeresd SC, ha a többi 7 csapat együtt 45 pontot szerzett?

11. Hány csapat játszott a körmérkőzéses bajnokságban, ha összesen 15 mérkőzést játszottak?

12. Tíz csapat körmérkőzéses bajnokságot játszott. Egy-egy mérkőzésen a győztes 3 pontot, a vesztes 0 pontot kapott, döntetlen esetén pedig 1-1 pontot kaptak a csapatok. A 10 csapat végül összesen 130 pontot szerzett. Hány döntetlen volt?



13. Néhány csapat körmérkőzéses bajnokságot játszott. Egy mérkőzésen a győztes 2 pontot, a vesztes 0 pontot, döntetlen esetén mindkét csapat 1-1 pontot kapott. A bajnokságban a csapatok hatodrésze nem szerzett pontot. Hány csapat szerepelt a bajnokságban?

Rejtvény

Két ember öt sakkjátszmát játszott, és mindketten ugyanannyi játszmát nyertek meg, döntetlen nem volt. Hogy lehetséges ez?

5. Válasszuk szét az eseteket!



1. példa

A Mézes Mackó Fagylaltozóban 6-féle fagylaltot mérnek, ezek: eper, citrom, csokoládé, vanília, mogyoró, gesztenye. Hányféle két- vagy háromgombócos fagylaltot választhatunk, ha a tölcsérben a gombócok sorrendje is számít?

Megoldás

A **kétgombócos** fagylalt mindkét gombócát 6-féleképpen választhatjuk, ez $6 \cdot 6 = 36$ lehetőség.
A **háromgombócos** fagylalt mindhárom gombócát 6-féleképpen választhatjuk, ez $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ lehetőség.
Két- vagy háromgombócos fagylaltot összesen $36 + 216 = 252$-féleképpen választhatunk.

Megkönnyíti az összeszámlálást, ha a lehetőségeket valamilyen tulajdonság alapján csoportosítjuk, így a feladatot különböző esetekre bontjuk.

2. példa

Hány háromjegyű páros számot rakhatunk ki a 0, 1, 2, 3 számkártyákból, ha minden számkártyát legfeljebb egyszer használhatunk fel?

Megoldás

A háromjegyű szám páros, így a végződése a számkártyák közül 0 vagy 2 lehet. Válasszuk szét azt a két esetet, amikor a szám 0-ra végződik, és amikor 2-re végződik! Vegyük figyelembe, hogy a háromjegyű szám nem kezdődhet 0-val!

120,
130,
210,
230,
310,
320.

1. eset: a szám utolsó számjegye 0. A másik két helyi értékre az 1, 2, 3 számkártyák közül választhatunk számjegyet.
A százas helyi értékre három, a tízesre két számkártya közül választhatunk, így a lehetőségek száma $3 \cdot 2 = 6$.

2. eset: A szám utolsó számjegye 2. A másik két helyi értékre a 0, 1, 3 számkártyák közül választhatunk számjegyet.
A százas helyi értékre 0-t nem választhatunk, így csak 2 lehetőség van (1, 3). A tízes helyi értékre már választhatjuk a 0-t, csak a százas helyi értékre írt számjegyet nem, tehát ez is 2 lehetőség. Így összesen $2 \cdot 2 = 4$ olyan háromjegyű számot rakhatunk ki, amelyik 2-re végződik.

102,
132,
302,
312.

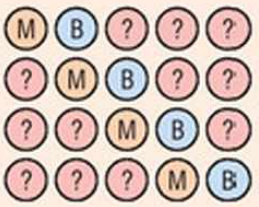
Vagyis összesen $6 + 4 = 10$ páros háromjegyű számot rakhatunk ki a megadott számkártyákból.

3. példa

Egy lakomán öten ülnek egymás mellett egy hosszú asztalnál. Hányféleképpen ülhetnek le, ha Mátyás mindenképpen Beatrix mellé ül?

Megoldás

Mátyás és Beatrix ebben a sorrendben 4-féleképpen ülhetnek egymás mellé a sorban.
A kimaradó 3 helyre $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féle sorrendben ülhetnek le hárman.
De Mátyás és Beatrix fordítva is ülhetnek, vagyis BM sorrendben.
Így a lehetőségek száma: $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.



Másképp: Mátyást és Beatrixet egynek véve 4 ember $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$-féle sorrendben ülhet egymás mellé. Mátyás és Beatrix 2-féle sorrendben ülhet egymás mellett, így a lehetőségek száma: $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.

Játék

Húzzunk az 1–9-ig számkártyák közül egyet egy háromjegyű szám százas helyi értékére! Ezután a 0–9-ig számkártyák közül a tízes, végül ugyanezek közül az egyes helyi értékre is húzzunk egyet-egyet! Az így kapott háromjegyű számról soroljunk fel igaz állításokat, és egyenként írjuk cédulákra őket! Az így elkészített cédulák közül húzunk, és összeszámoljuk, hogy hány olyan háromjegyű szám van, amely a kihúzott cédulák mindegyikének megfelel.

Játsszunk ilyen játékot!

4. példa

Gabi és Zsuzsi az előbb leírt játékot játszotta, és a számkártyák húzásával a 355 háromjegyű számot kapta.

Megállapították, hogy a szám:

1. páratlan;
2. van két azonos számjegye;
3. osztható 5-tel.

Hány olyan háromjegyű szám van, amelyre ezek a megállapítások igazak?

Írjunk állításokat úgy, hogy a 355 legyen az egyetlen szám, amely az összes állításnak megfelel!

1. megoldás

Mivel a szám páratlan és osztható 5-tel, így 5-re végződik.
Az 5-ös számjegyek száma szerint három esetet különböztetünk meg, megszámoljuk, hány lehetőség van az egyes esetekben, majd ezeket összeadjuk:

555 **1. eset:** 3 db 5-ös számjegyből áll: 555.
Ez 1 lehetőség.

2. eset: 2 db 5-ös számjegy szerepel benne. Az egyik ötös az egyes helyi értéken áll, mert a szám 5-re végződik.

A55 *a)* a szám ?55 alakú, ekkor a százas helyi értékre a 0 számjegy nem kerülhet, mert nem lenne háromjegyű a szám, és az 5 sem, mert csak 2 db 5-ös szerepel. Marad 8 számjegy a százas helyi értékre. Ez 8 lehetőség.

5B5 *b)* a szám 5?5 alakú, ekkor a tízes helyi értékre csak az 5-ös számjegy nem kerülhet. Ez 9 lehetőség.

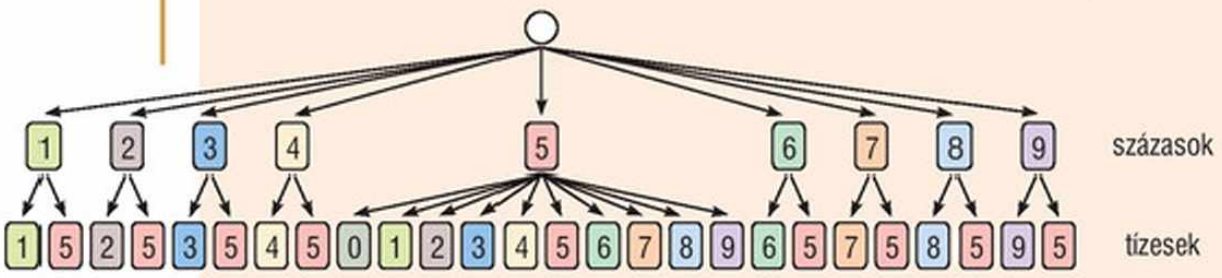
CC5 **3. eset:** A számban 1 db 5-ös számjegy szerepel. Mivel a szám 5-re végződik, ez az egyes helyi értéken áll. Ekkor a százas és a tízes helyi értéken álló számjegyek azonosak, és a 0 és az 5 kivételével bármelyik számjegy lehet. Ez 8 lehetőség.

A lehetőségeket összeszámolva kapjuk, hogy összesen

$$1 + 8 + 9 + 8 = 26$$ lehetőség van.

2. megoldás:

A szám páratlan és 5-tel osztható, így 5-re végződik. A százas és a tízes helyi értékre választunk számjegyeket.
Készítsünk nyíldiagramot a lehetőségek összeszámlálására. A százas helyi értékre a 0 kivételével bármelyik számjegy kerülhet. Ezután a tízes helyi értékre aszerint kell számjegyet írni, hogy legyen két azonos számjegy, ez a százas helyi értékre írt számjegy vagy az 5-ös.



A diagramról leolvasható, hogy 8 számjegy után 2-féle számjegy írható a tízes helyi értékre, egy számjegy után pedig 10-féle, így összesen $8 \cdot 2 + 10 = 26$ háromjegyű szám van.

Az összeszámlálás során **a problémát esetekre bontottuk** úgy, hogy minden, a feltételeknek megfelelő háromjegyű szám pontosan egy esetben szerepeljen. Ezután **összeadtuk** a különböző esetekben **a lehetőségek számát.**

Feladatok

1. Hányféle gyümölcssalátát lehet készíteni, ha az alma, őszibarack, narancs, kivi, banán, ananász gyümölcsök közül legalább háromféle gyümölcsöt teszünk bele? (Kétféle saláta különböző, ha valamelyik összetevője eltér.)

2. Abigél három kártyára leírt egy-egy számjegyet. A számjegyek közt szerepelhet 0 is, és ugyanazt a számjegyet több kártyára is írhatta. Bori minden esetben leírta, hogy a számkártyákból hányféle háromjegyű számot lehet kirakni. Mely számokat írta le Bori?

3. Hány számjegy kellett a 8. osztályos matematikakönyv oldalainak megszámozásához?

4. Leírtuk a természetes számokat 1-től 2009-ig egymás után. Hány számjegyet írtunk le?

5. Panni megszámozta a naplója oldalait 1-től kezdve egyesével. Hány oldalt számozott meg, ha összesen

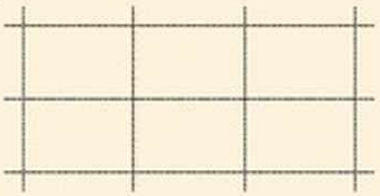
   a) 37 számjegyet írt le; *b)* 192 számjegyet írt le; *c)* 948 számjegyet írt le?

6. Hányféleképpen ülhet egymás mellé a moziban egy sorba Anna, Bori, Dóri, Gábor és Miklós, ha

   a) két lány nem ülhet egymás mellé;

   b) két fiú nem ülhet egymás mellé?

7. Hány olyan hatszög van, melynek csúcsai rácspontok, és oldalai az ábrán levő szakaszok, vagy azok egy része? (➡)



8. Palindrom számoknak nevezzük azokat a természetes számokat, amelyek számjegyeit fordított sorrendben leírva ugyanazt a számot kapjuk. Hány olyan palindrom szám van, amely

   a) kétjegyű;

   b) háromjegyű;

   c) 10 000-nél kisebb;

   d) 100 000-nél kisebb?

*9. A francia forradalom évszáma: 1789. Ebben három, de nem több szomszédos számjegy van, melyek egymás utáni számjegyek növekvő sorrendben. Hány ilyen évszám lehet 1000 és 9999 között?



Rejtvény

Hány olyan szám van 999 és 2009 között, amelyben szerepel az 1-es számjegy?

6. Hány lehetőség van?



A lehetőségek összeszámlálását azzal kezdjük, hogy rendszerezzük őket.

1. példa

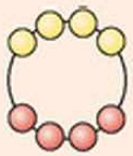
Hányféle karkötőt készíthetünk négy egyforma sárga és négy egyforma piros gyöngyből, ha az összekötés helye nem látszik? (Két karkötő különböző, ha mozgatással nem tudjuk elérni, hogy egyforma legyen.)

Megoldás

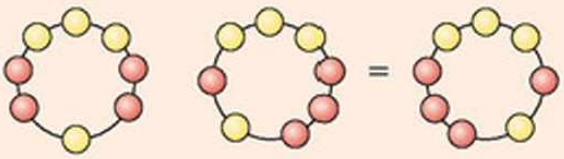
Keressünk rendszert a lehetőségek felsorolására!

A karkötő ugyanaz marad, ha körbe forgatjuk, vagy megfordítjuk.

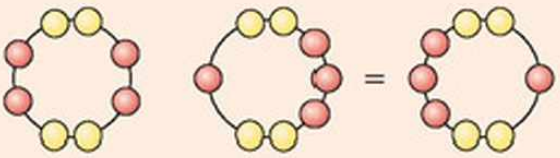
Mind a 4 sárga egymás mellett van:



3 sárga van egymás mellett:

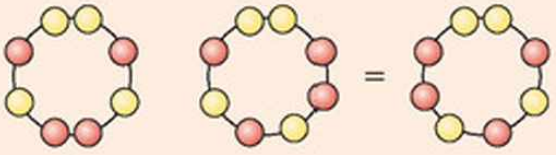


2-2 sárga van egymás mellett:

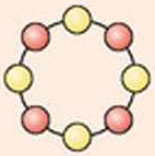


A lehetőségek száma más lesz, ha egy fonalra sorban egymás után fűzzük fel a gyöngyöket.

2 sárga van egymás mellett:



Nincs 2 sárga egymás mellett:



Az = jellel összekapcsolt esetek egymás tengelyes tükörképei, így most nem számítanak külön esetnek. Tehát összesen 8 lehetőség van.

2. példa

Egy fesztiválra 100 000 tombolajegyet készítettek, melyekre 00000-tól 99999-ig írtak számokat, mindet 5 számjeggyel. Vannak olyan tombolajegyek, amelyeket ha megfordítunk, akkor is egy lehetséges szám olvasható rajtuk, például a 09081 és az 18060 számú (lásd a margón az ábrát). Hány ilyen kétértelmű tombolajegy van?

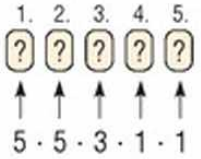


Megoldás

A megfordítva is értelmes számjegyek a 0, 1, 6, 8, 9. Ezekből a számjegyekből $5^5=3125$ db öt számjegyből álló sorozat készíthető. Tehát 3125 olyan tombolajegy van, amely megfordítva is értelmes, azonban nem mindegyik kétértelmű, mert vannak olyan tombolajegyek, amelyek száma megfordítva ugyanaz, mint az eredeti.

Az ilyen középpontosan szimmetrikus tombolajegyek:

- A középső számjegynek középpontosan szimmetrikusnak kell lennie, így ez csak a 0, 1, 8 lehet.
- Az első számjegy bármelyik megfordítható számjegy lehet, ez 5 lehetőség. Ekkor az utolsó számjegynek az első megfordításának kell lennie, így azt az első számjegy meghatározza, például ha az első számjegy 6, akkor az utolsó 9, ha az első 8, akkor az utolsó is 8.
- A második számjegy szintén bármelyik megfordítható számjegy lehet, ez 5 lehetőség. Ekkor az utolsó előtti számjegynek a második megfordításának kell lennie.



Így a középpontosan szimmetrikus tombolajegyek száma:

$$3 \cdot 5 \cdot 5 = 75,$$

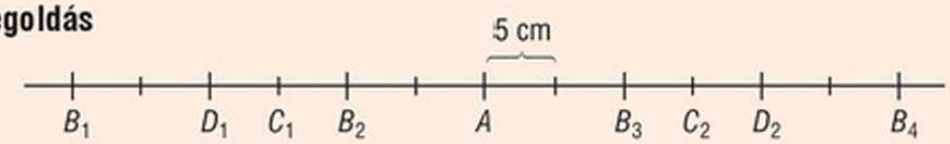
ezek nem kétértelműek, így ki kell vonni a megfordítva is értelmes tombolajegyek számából.

Tehát a kétértelmű tombolajegyek száma: $3125 - 75 = 3050$.

3. példa

Az A, B, C, D pontok egy egyenesen vannak. Az A és D pontok távolsága 20 cm, az A és C pontok 15 cm-re, a B és D pontok pedig 10 cm-re vannak egymástól. Mekkora lehet a B és C pontok távolsága?

Megoldás



Vegyük fel az egyenesen az A pontot! Ennek mindkét oldalára rajzolhatjuk a D pontot 20 cm távolságra: D_1, D_2.

A C pont szintén bármelyik oldalán lehet az A-nak 15 cm-re: C_1, C_2. Bármelyik D-nek mindkét oldalán lehet a B pont: B_1, B_2, B_3, B_4.

Mivel B pont 4-féle, C pont 2-féle lehet, a BC szakasz $4 \cdot 2 = 8$-féle lehet.

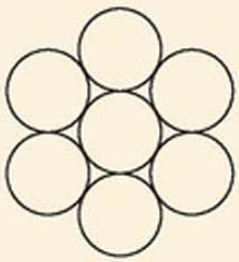
A BC szakasz hossza lehet:

$B_1C_1 = B_4D_2 = 5$ cm, $B_1C_2 = B_4C_1 = 25$ cm,
$B_3C_1 = 40$ cm, $B_2C_1 = 15$ cm,
$B_3C_2 = 10$ cm, $B_2C_2 = 45$ cm.

Feladatok

1. Az ábrán levő 7 kör közül 3-at pirosra, 4-et pedig kékre színezünk. Hányféleképpen lehetséges ez, ha az egymásba forgatással átvihető eseteket nem tekintjük különbözőnek? (➡)

1.



2. Egy kerek asztal köré leül 5 lány és 3 fiú társasjátékozni. Hány olyan egymás mellett ülő pár lehet, akik azonos neműek?

3. Egy kerek asztal köré leült 15 fiú és valahány lány. 10 olyan egymás mellett ülő párt számoltunk össze, ahol a pár mindkét tagja fiú. Hány lány ül az asztalnál?

4. Hány olyan páros szám van 1 és 1000 között, amely nem osztható 7-tel?

5. A magyarországi autórendszámok három betűből és három számjegyből állnak. Hány olyan rendszám lehetséges, amelyben a H, K, Z betűk és a 0, 0, 2 számjegyek szerepelnek? (➡)

5.



6. Az A, B, C, D, E betűket az összes lehetséges módon sorba írtuk. Hány olyan sorrend van, amelyben az A betű megelőzi a B betűt (nem feltétlenül közvetlenül)?

7. A MÁRTI név betűiből képezzük az összes lehetséges 5 betűs sorozatot, és ezeket a „szavakat” írjuk ábécé sorrendbe!

   a) Melyik az 52. szó?

   b) Milyen betű áll a 100. helyen a betűk sorozatában?

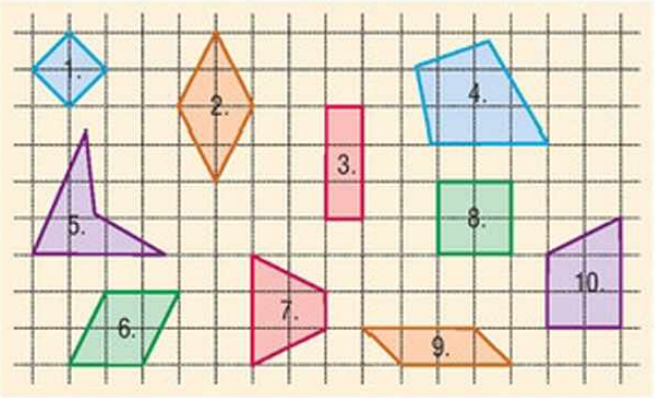
Rejtvény

Melyik szám nagyobb? Az, ahányféleképpen a 10 különböző számjegyet sorba írhatjuk egymás mellé, vagy az, ahány másodperc van 6 teljes hétben?

7. Vegyes feladatok

1. Zsófi háromféle 100%-os gyümölcslé közül válogat. A Reggeli Ital sárgarépát, narancsot, almát, szőlőt és meggyet tartalmaz. A Trópusi Elixírben ananász, maracuja, mangó, banán, alma, szőlő, citrom, narancs és körte van. A Csupa Vitamin őszibarackból, citromból, ananászból, narancsból, banánból, maracujából és almából készül. Készítsünk halmazábrát három halmazzal, melyek a háromféle gyümölcslének felelnek meg.

2. Írjuk le szöveggel, mely négyszögek tartoznak az alábbi, halmazműveletekkel adott halmazokba, ha T a trapézok, P a paralelogrammák, L a téglalapok, N a négyzetek, R a rombuszok és D a deltoidok halmaza! Mindegyik halmazhoz soroljuk fel, hogy az ábra mely négyszögei tartoznak hozzá! (➡)



a) $T \cap P$; *b)* $\overline{T}$;
c) $R \cup P$; *d)* $D \cap T$.

3. Az okos emberek 25%-a szép is, és a szépek fele okos is. Az emberek 25 %-a se nem szép, se nem okos. Az emberek hány százaléka szép is és okos is?

4. Az osztályok közötti bajnokságokban 100 gyerek vett részt. 50-en fociztak, 45-en kosárlabdáztak és 50-en röplabdáztak. 15-en mindhárom labdajátékban részt vettek. Hány gyerek játszott pontosan kétféle labdajátékot?

5. A kézilabdameccsen a nézők $\frac{3}{5}$ része 30 évesnél nem idősebb, 0,12 része 40 évesnél nem fiatalabb, de 60-nál nem idősebb. Ha a nézők 15 százaléka 30 és 40 év közötti, akkor hány százalékuk idősebb 60 évesnél?

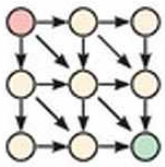
6. Hány oldalú az a szabályos sokszög, amelyet két átlója egy háromszögre, egy négyszögre, egy ötszögre és egy hatszögre bont?

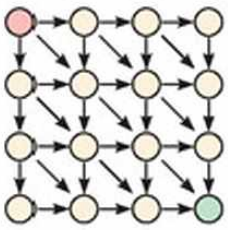
7. Tagadjuk a következő állításokat!
   a) A táblára írt háromjegyű számnak van páros és van páratlan számjegye is.
   b) Mindhárom kockával 6-ost dobtunk.
   c) A lerajzolt négyszögnek minden szöge egyenlő nagyságú.
   d) Van három szám, melyek közül bármely kettő összege páratlan.

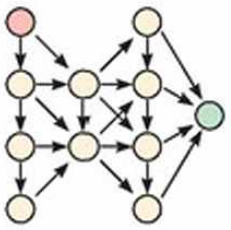
8. Dóri azt állítja, hogy a legutóbbi dolgozatíráskor az osztályból legalább 5 gyerek ötös matekdolgozatot írt. Lóri szerint legalább 6 gyerek írt ötös dolgozatot. Hányan írtak ötös dolgozatot, ha egyikük állítása igaz, a másiké hamis?

9. Marci, Soma és Balázs kosarazott az udvaron. Egyikük véletlenül betört egy ablakot. A többiek látták a szerencsétlen dobást. Marci azt mondta: „Ártatlan vagyok.” Soma: „Marci és én ártatlanok vagyunk.” Balázs: „Marci és Soma is ártatlan.” Ki törte be az ablakot, ha csak egyikük mondott igazat?

10. Hányféleképpen haladhatunk a nyilaknak megfelelően a piros körből a zöld körbe?

a) 

b) 

c) 

11. Egy Bizonyos Városban 7 utca megy É-D irányba és 4 utca K-Ny irányba, melyek mindegyike keresztezi az összes É-D irányú utcát. Hányféle útvonalon juthatunk a város délnyugati csúcsából az északkeleti csúcsba, ha mindig a legrövidebb úton haladunk?

12. Szabályos dobókockával kétszer dobunk egymás után, így egy kétjegyű számot kapunk.

a) Hányféle kétjegyű számot kaphatunk?

b) Hányféle kétjegyű páros számot kaphatunk?

c) Hányféle kétjegyű 5-tel osztható számot kaphatunk?

d) Hányféle kétjegyű 3-mal osztható számot kaphatunk?

13. Az 1, 2, 3, 4, 5, számkártyákból háromjegyű számokat készítünk úgy, hogy minden számjegyet legfeljebb egyszer használunk.

a) Hányféle háromjegyű számot kaphatunk?

b) Hányféle háromjegyű páros számot kaphatunk?

c) Hányféle háromjegyű 5-tel osztható számot kaphatunk?

d) Hányféle háromjegyű 3-mal osztható számot kaphatunk?

14. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Hány kézfogás nem lehetett így az alábbiak közül?

a) 15; *b)* 36; *c)* 42; *d)* 66; *e)* 91.

15. A 8. a osztály néhány tagja egyszerre érkezett a kosármeccsre, és mindenki mindenkivel kezet fogott. Kicsit később a másik iskolába járó Gáspár csatlakozott hozzájuk, de ő nem ismert mindenkit, és csak azokkal fogott kezet, akiket ismert. Hány 8.a-s szurkolót ismert Gáspár, ha összesen 74 kézfogás történt?

16. Két egymásra merőleges egyenesen jelöljünk meg 4-4 pontot! Hány olyan háromszög van, melynek minden csúcsa a megjelölt pontok közül való, ha

a) a két egyenes metszéspontja nincs a megjelölt pontok között;

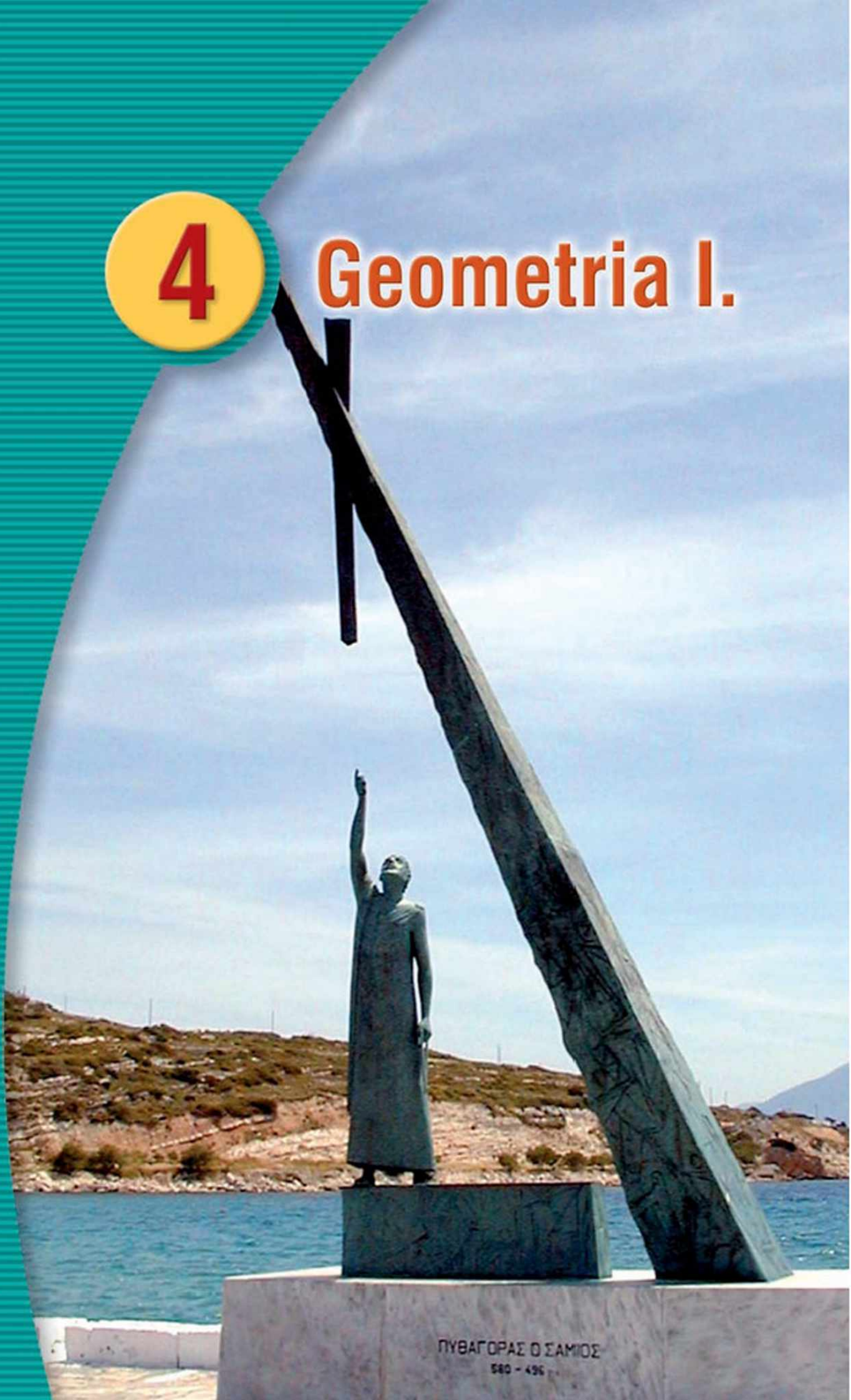
b) a két egyenes metszéspontja is megjelölt pont (így összesen 7 pontot jelöltünk meg)?

17. Két iskola sportvetélkedőjére összesen 105 lány és 95 fiú érkezett. Iskolánként két egyforma hosszú sorba álltak, és az egymással szemben állók kezet fogtak egymással. Mennyivel több olyan kézfogás történt, amelyben két lány fogott kezet egymással, mint olyan, amelyben két fiú?

18. Mennyi a számjegyek összege, ha leírjuk a számokat 1-től

a) 100-ig; *b)* 1000-ig?

4 Geometria I.



1. A terület



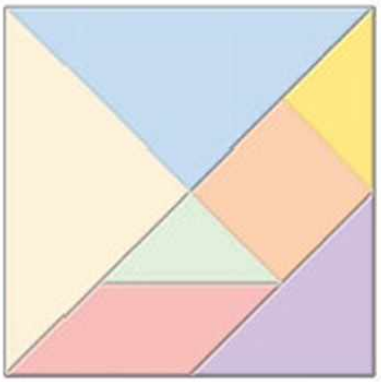
Rakjuk össze a tangram elemeiből az ábrán látható figurákat!

Számos matematikai játék alapja az, hogy különböző alakú síkidomokat előre megadott szabályok szerint kell egymáshoz illeszteni.

Ezek egyike a tangram, amely az ősi Kínából származik. Egy négyzetet daraboltak fel 7 síkidomra az ábrának megfelelően.

Az alkotórészek:

- 5 egyenlő szárú derékszögű háromszög:
  - 2 kicsi,
  - 1 közepes,
  - 2 nagy;
- 1 négyzet;
- 1 paralelogramma.



Az interneten keresgetve számos feladványt találhatunk ezekkel a síkidomokkal kapcsolatban.

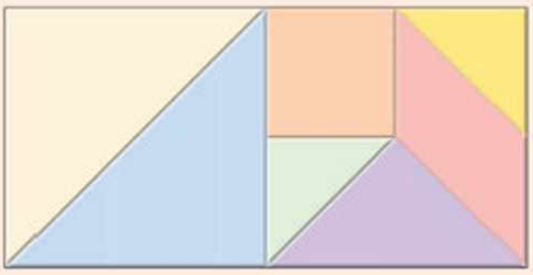
A sík különböző alakzatokkal való lefedésének nagy mestere volt M. C. Escher (1898–1972) holland művész. Képei ma is népszerűek és egyben elgondolkodtatóak.



1. példa

Vágjuk ki az előző ábrán látható síkidomokat egy négyzetből, és rakjunk ki egy téglalapot!

Megoldás



Az eredeti négyzet és a kirakott téglalap területe megegyezik, hiszen ugyanazokból a síkidomokból raktuk ki azokat.

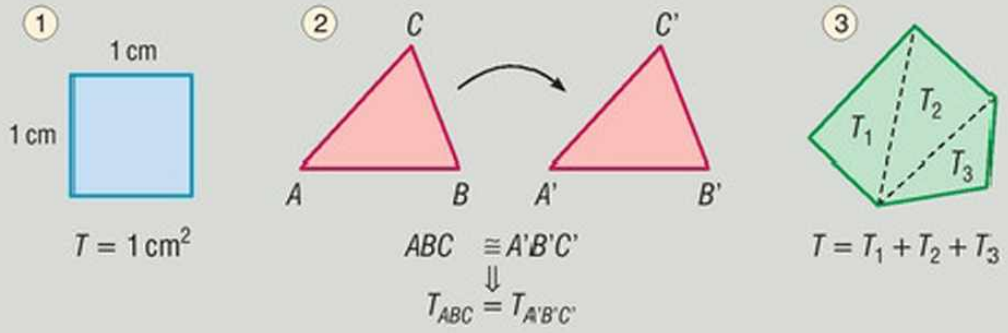


A terület fogalma

Minden síkidomhoz hozzárendelhetünk egy pozitív számot a következő tulajdonságokkal:

1. az egységnyi oldalú négyzet (egységnégyzet) területe 1 területegység;
2. az egybevágó síkidomok területe egyenlő;
3. ha egy síkidomot részekre vágunk szét, akkor a részek területének összege egyenlő a síkidom területével.

Ez a szám a síkidom területe.



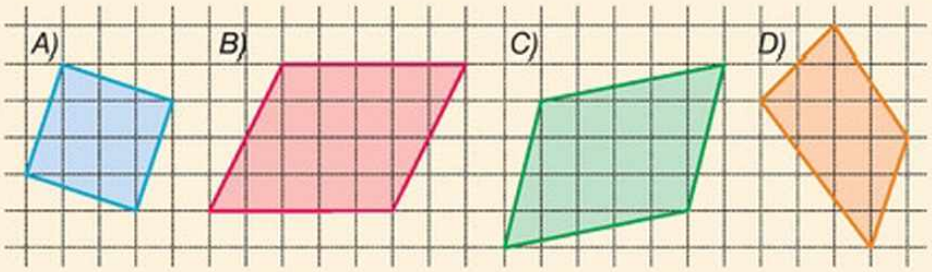
Néhány mértékegység, mellyel a területet mérjük:

$1\ \text{m}^2$: az 1 m oldalhosszúságú négyzet területe.

$1\ \text{cm}^2 = 0{,}0001\ \text{m}^2$;
$1\ \text{dm}^2 = 0{,}01\ \text{m}^2$;
$1\ \text{ár} = 100\ \text{m}^2$;
$1\ \text{ha} = 10\,000\ \text{m}^2$;
$1\ \text{km}^2 = 1\,000\,000\ \text{m}^2$.

2. példa

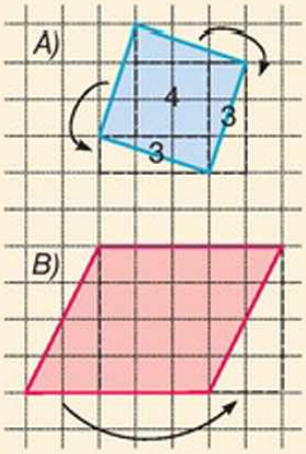
A négyzetrácson felrajzoltunk néhány síkidomot. Mekkora ezek területe, ha egy rácsnégyzet területe 1 területegység?





Megoldás

Az egyes területek nagyságát darabolás segítségével próbáljuk megadni. Erre mutatnak egy-egy példát az alábbi ábrák.

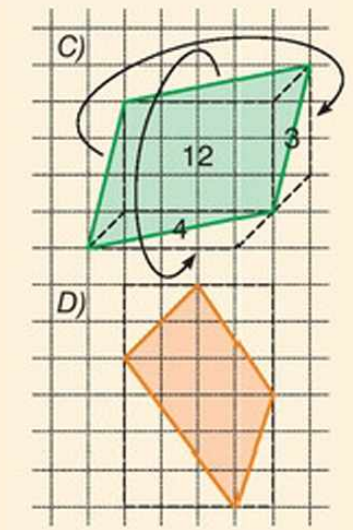


Átdarabolás

$T_A = 4 + 3 + 3 = 10$ területegység

$T_B = 5 \cdot 4 = 20$ területegység

$T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a$



$T_C = 12 + 3 + 4 = 19$ területegység

Téglalappá való kiegészítés

Egészítsük ki az ábrát téglalappá!

A keresett területet megkapjuk, ha a befoglaló téglalap területéből kivonjuk a csúcsokban található derékszögű háromszögek területét.

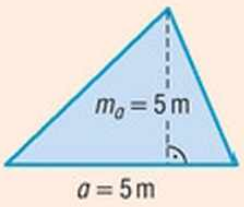
$$T_D = 6 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} =$$

$$= 24 - \frac{12 + 3 + 6 + 4}{2} = 24 - 12{,}5 = 11{,}5 \text{ területegység.}$$

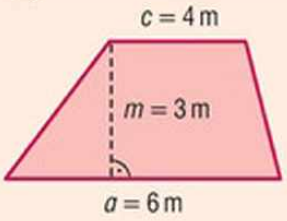
3. példa

Állítsuk területük szerint növekvő sorrendbe a következő síkidomokat!

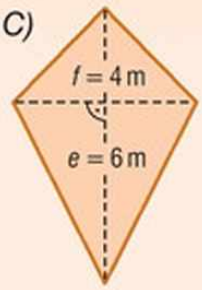
A)



B)



C)



Megoldás

Az első síkidom egy háromszög, amelynek a területe:

$T_\triangle = \frac{a \cdot m_a}{2}$

$$T_A = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = 12{,}5\,(\text{m}^2).$$

A második esetben egy trapéz területét kell meghatároznunk:

$T_{\text{trapéz}} = \frac{a + c}{2} \cdot m$

$$T_B = \frac{a + c}{2} \cdot m = \frac{6 + 4}{2} \cdot 3 = 15\,(\text{m}^2).$$

A harmadik esetben egy deltoid területét keressük:

$T_{\text{deltoid}} = \frac{e \cdot f}{2}$

$$T_C = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\,(\text{m}^2).$$

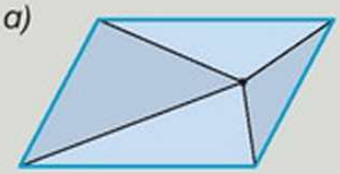
Tehát

$$T_C < T_A < T_B.$$

4. példa

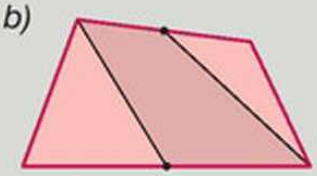
Az ábrán látható síkidomokat egy világosabb és egy sötétebb színű részre osztottuk. Igaz-e, hogy így a négyszögek területét éppen megfeleztük?

a)



egy pontot kötöttünk össze a paralelogramma csúcsaival

b)



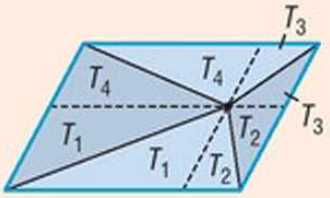
oldalfelező pontokat kötöttünk össze csúcsokkal

Ősi területmérték a katasztrális hold. Eredetileg az egy ekével egy nap alatt felszántott terület nagysága volt. Ennek 1600-ad része a négyszögöl.

1 katasztrális hold = 1600 négyszögöl = 5755 m^2 = 57,55 ár.

Megoldás

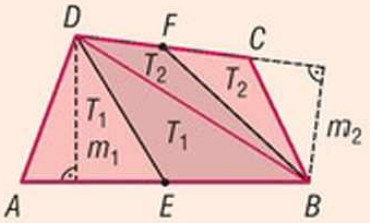
a) Az első négyszög paralelogramma. Rajzoljunk be a belső ponton át az oldalakkal párhuzamos egyeneseket! Ezek 4 paralelogrammára bontják az eredeti paralelogrammát.



A paralelogrammát az átlója egybevágó háromszögekre bontja, amelyek területe egyenlő. Az egybevágó háromszögek területét azonos betűvel jelöljük.

A sötét és a világos rész területe is $T_1 + T_2 + T_3 + T_4$.
Így a két rész területe egyenlő.

b) Rajzoljuk meg a négyszög DB átlóját, majd állítsunk merőlegest D-ből az AB oldalra! Az így kapott m_1 az ABD, AED és EBD háromszögnek is magassága.



$$\text{Az } AED\triangle \text{ területe } \frac{AE \cdot m_1}{2}, \text{ az } EBD\triangle \text{ területe } \frac{EB \cdot m_1}{2}.$$

Mivel E felezőpont, ezért $AE = EB$, így a két háromszög területe egyenlő. Jelöljük ezt T_1-gyel!

Az előbbihez hasonlóan állítsunk merőlegest B-ből DC egyenesére is! Így megkapjuk m_2-t.

$$\text{A } DFB\triangle \text{ területe } \frac{DF \cdot m_2}{2}, \text{ az } FCB\triangle \text{ területe } \frac{FC \cdot m_2}{2}.$$

$DF = FC$, így a két háromszög területe egyenlő. Jelöljük ezt T_2-vel!

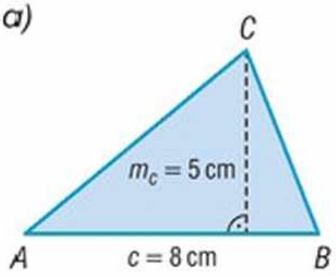
A sötét rész területe $T_1 + T_2$, a világos rész területe szintén $T_1 + T_2$, tehát a két terület egyenlő.

A sötét rész területe az *a)* és *b)* esetben is fele a négyszög területének.

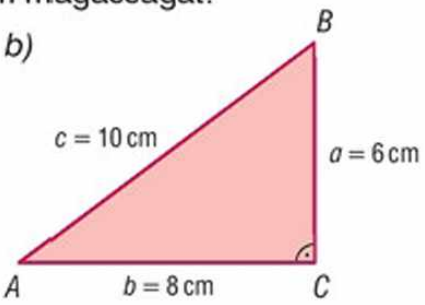
Feladatok

1. Határozzuk meg az ábrán látható háromszögek területét! A *b)* és *c)* esetben határozzuk meg a háromszög mindhárom magasságát!

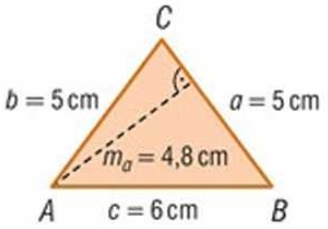
a)



b)

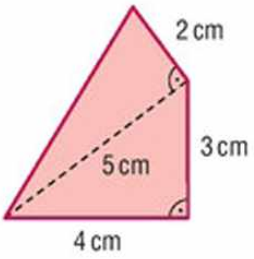


c)

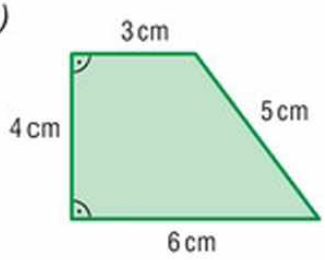


2. Határozzuk meg az alábbi négyszögek területét!

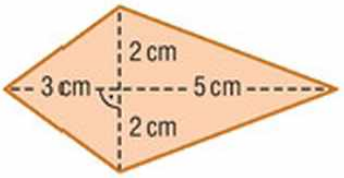
a)



b)



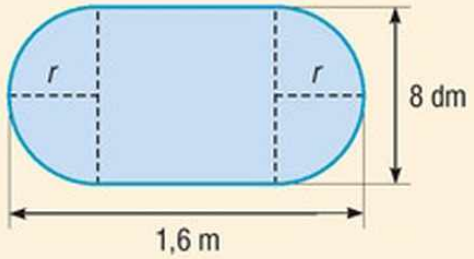
c)



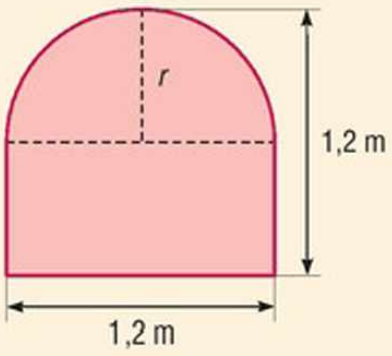
3. Egy háromszög két oldalának hossza $a = 6$ cm, $b = 7$ cm, az a oldalhoz tartozó magassága $m_a = 5$ cm. Mekkora a b oldalhoz tartozó magassága?

4. Egy végzős nyolcadikos osztály tablót készít. Két terv közül kell választaniuk. Melyik tablónak nagyobb a területe?

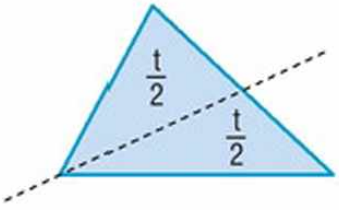
a)



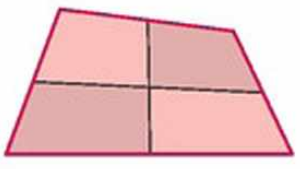
b)



5. Egy háromszög egyik csúcsán át szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi a háromszög területét! (➡)

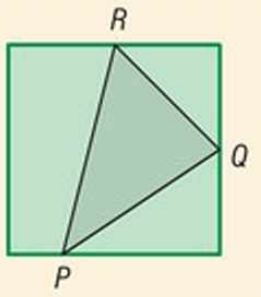


6. Egy négyszögben az ábrának megfelelően összekötöttük az oldalfelező pontokat. A sötétebb részek területének összege 10 cm^2. Mekkora a négyszög területe? (➡)



7. Egy négyzet oldalainak hossza 1 m. Mekkora a sötétebb háromszög területe, ha a P negyedeli, a Q és R pontok pedig felezik a megfelelő oldalakat? (➡)

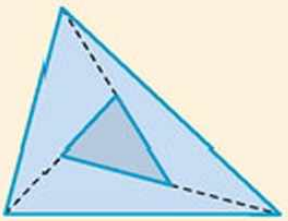
7.



8. Egy téglalap egyik oldala 3 cm-rel nagyobb, mint a másik. Mindkét oldalt 2 cm-rel növelve a terület 26 cm^2-rel növekszik. Mekkorák az eredeti téglalap oldalai?

9. Egy háromszög oldalait az ábrának megfelelően meghosszabbítottuk az oldal hosszával, majd a végpontokat összekötöttük. Hányszorosa az így kapott háromszög területe az eredeti háromszög területének? (➡)

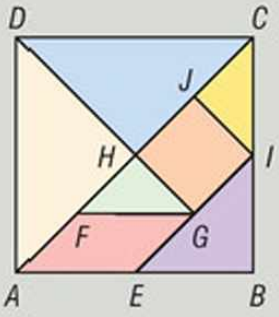
9.



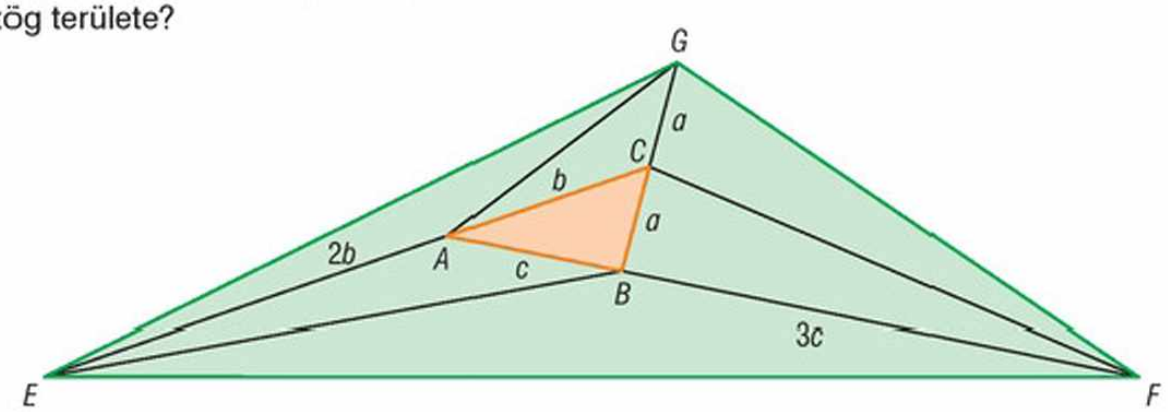
10. Egy négyzet átlójának hossza 1 dm. Hány cm^2 a négyzet területe?

11. A tangram játék darabjait egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetből vágtuk ki. Határozzuk meg az egyes darabok területét, ha E az AB, I a BC, H az AC, F az AH, G az EI és J a HC szakasz felezőpontja! (➡)

11.



12. Az ABC háromszög oldalait az ábrán látható módon meghosszabbítjuk, és az így kapott pontokat összekötjük. Hányszorosa az ABC háromszög területének az EFG háromszög területe?

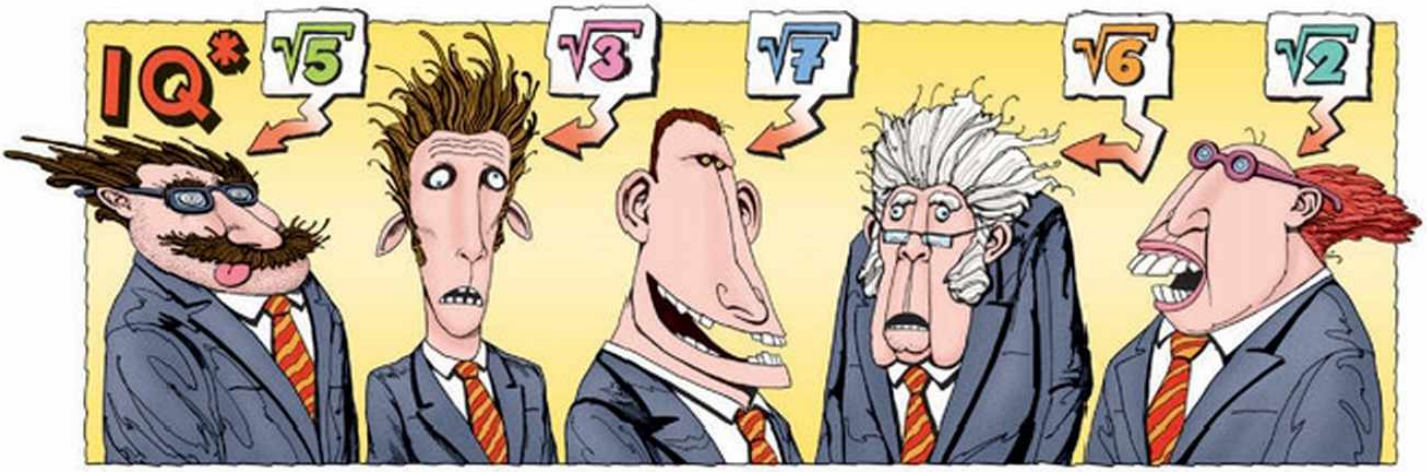


Rejtvény

Töltsük ki az ábrát egyjegyű pozitív számokkal a következő szabályok szerint! Egy-egy összefüggő terület pontosan annyi négyzetből áll, amennyi a benne elhelyezkedő számok értéke. Az összefüggő területekben a négyzetek csakis oldalukkal csatlakozhatnak egymáshoz, az azonos nagyságú területek pedig legfeljebb csúcsaikkal érintkezhetnek egymással.

2	1	2		1
2				
1	3	3	2	
		1		
	1		2	

2. A négyzetgyökvonás



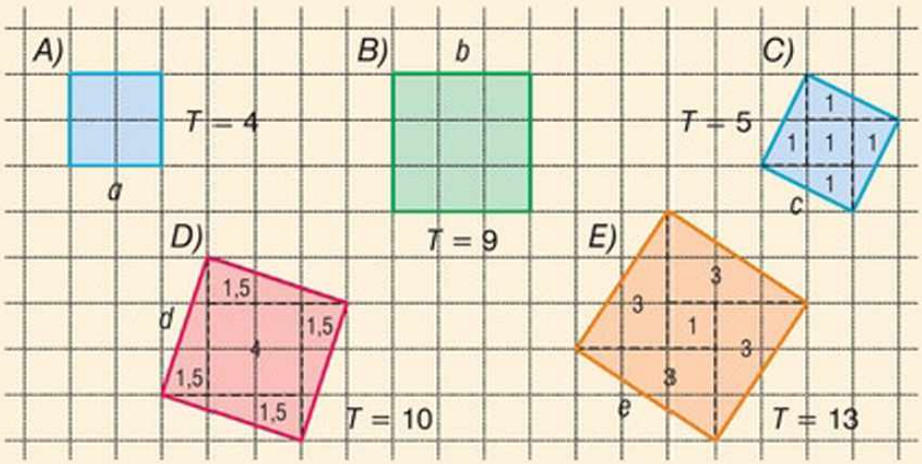
1. példa

A négyzetrácson egy rácsnégyzet területe 1 területegység. Rajzoljunk olyan négyzetet, amelynek a területe

A) 4; *B)* 9; *C)* 5; *D)* 10; *E)* 13 területegység!

Megoldás

A megfelelő négyzetek az ábrákon láthatók.



Az 1. példában ismerjük a négyzetek területét. Határozzuk meg ezeknek a négyzeteknek az oldalát!

négyzetre emelés

négyzet oldala → négyzet területe

négyzetgyökvonás

A négyzet oldalából úgy tudjuk meghatározni a négyzet területét, hogy négyzetre emelést végzünk. Ha a négyzet oldala x, akkor a négyzet területe $T = x^2$.

Most a négyzet területéből akarjuk meghatározni a négyzet oldalát. Erre bevezetünk egy új műveletet, melyet **négyzetgyökvonásnak** nevezünk.

Ha a négyzet területe $T = 4$, akkor az oldala $x = \sqrt{4}$.

$\sqrt{4}$ (kiolvasva: négyzetgyök 4) jelenti azt a pozitív számot, amelyet négyzetre emelve 4-et kapunk:

$$\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4.$$

A gyökjel eredete elég bizonytalan, de többen úgy gondolják, hogy a latin „radix" (gyökér) szó „r" kezdőbetűjének elnyújtásából származik.

Ennek alapján felírhatjuk az 1. példában szereplő négyzetek oldalait:

$T_A = 4 \rightarrow a = \sqrt{4}$, mert $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$.

$T_B = 9 \rightarrow b = \sqrt{9}$, mert $\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$.

$T_C = 5 \rightarrow c = \sqrt{5}$, mert $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$.

$T_D = 10 \rightarrow d = \sqrt{10}$, mert $\left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$.

$T_E = 13 \rightarrow e = \sqrt{13}$, mert $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$.

Tudjuk, hogy a $\sqrt{4} = 2$, mert $2^2 = 4$, és $\sqrt{9} = 3$, mert $3^2 = 9$.

Ezért a $\sqrt{4}$ és a $\sqrt{9}$ racionális számok.

$\sqrt{5}$ pontos értékét nem tudjuk, de tetszőleges pontossággal meg tudjuk közelíteni.

$2 < \sqrt{5} < 3$, mert $2^2 = 4 < 5 < 3^2 = 9$.

$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$, mert $2{,}2^2 = 4{,}84 < 5 < 2{,}3^2 = 5{,}29$.

$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$, mert $2{,}23^2 = 4{,}9729 < 5 < 2{,}24^2 = 5{,}0176$.

$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$, mert $2{,}236^2 = 4{,}999696 < 5 < 2{,}237^2 = 5{,}004169$.

Próbálgatással mindig eggyel több tizedesjegyet írunk úgy, hogy az egyik tizedes tört négyzete 5-nél kisebb, a másik négyzete 5-nél nagyobb legyen.

További 12 lépés után azt kapjuk, hogy

$$2{,}236\,067\,977\,499\,789 < \sqrt{5} < 2{,}236\,067\,977\,499\,790.$$

Ennek alapján a $\sqrt{5}$ értéke:

$$\sqrt{5} = \underbrace{2{,}236\,067\,977\,499\,789...}_{\text{végtelen nem szakaszos tizedes tört}}$$



Bármely racionális szám (azaz két egész szám hányadosaként felírható szám) felírható véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört alakban.

Bebizonyítható, hogy a $\sqrt{5}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként, tizedes tört alakja **végtelen nem szakaszos tizedes tört.**

A $\sqrt{5}$ nem racionális szám.

Már az ókorban is próbálták meghatározni $\sqrt{2}$ értékét.
Mezopotámia: $\sqrt{2} \approx 1{,}4167$.
Ókbabilon: $\sqrt{2} \approx 1{,}414213$.
India: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142156$.

2006-os rekord: a $\sqrt{2}$ első 200 000 000 000 jegyét határozták meg számítógéppel.

Hasonlóan felírhatjuk bármely nemnegatív szám négyzetgyökét. Például:

$\sqrt{2} \approx 1{,}414\,213\,5...$ $\quad$ $\sqrt{7} \approx 2{,}645\,751\,3...$
$\sqrt{3} \approx 1{,}732\,050\,8...$ $\quad$ $\sqrt{8} \approx 2{,}828\,427\,1...$
$\sqrt{4} = 2$ $\quad$ $\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{5} \approx 2{,}236\,067\,9...$ $\quad$ $\sqrt{10} \approx 3{,}162\,277\,6...$
$\sqrt{6} \approx 2{,}449\,489\,7...$ $\quad$ $\sqrt{13} \approx 3{,}605\,551\,2...$

A felsorolt számok között vannak véges és végtelen nem szakaszos tizedes törtek is.

DEFINÍCIÓ: A végtelen nem szakaszos tizedes törteket irracionális számoknak nevezzük. Az irracionális számok halmazának jele $\mathbb{Q}^*$.

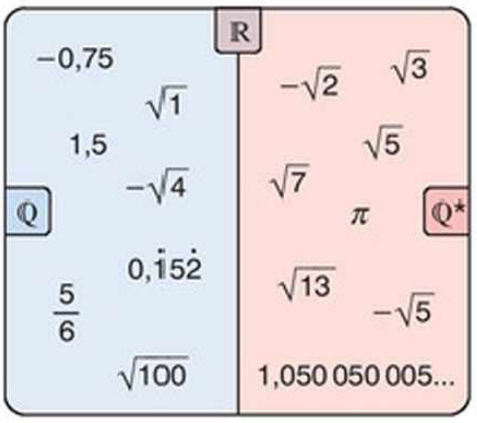
A $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; π; 0,123 411 223 344 111... irracionális számok ($\mathbb{Q}^*$).

A 0; $\sqrt{1}$; $-\sqrt{4} = -2$; $\frac{1}{3} = 0{,}\dot{3}$ stb. racionális számok ($\mathbb{Q}$).

Az $\mathbb{R}$ jelölés a reális (valós) szóból származik.

DEFINÍCIÓ: A racionális és irracionális számok halmazának egyesítése a valós számok halmaza. A valós számok halmazának jele $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^* = \mathbb{R}.$$



A racionális és az irracionális számok halmazának nincs közös eleme:

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* = \varnothing$. $\quad$ ($\varnothing$: üres halmaz)

Az irracionális számok felfedezését a Kr. e. 500 körül élt metapontumi Hippasusnak tulajdonítják.

Püthagorasz, Hippasus kortársa nem tudta elfogadni az ilyen számok létezését, és emiatt a legenda szerint Hippasust a tengerbe vettette.

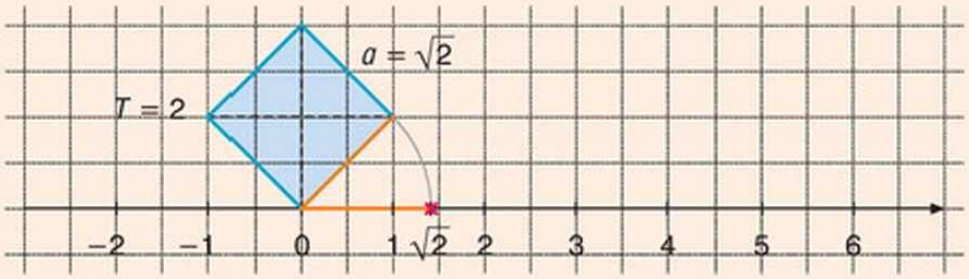
Van-e helye az irracionális számoknak a számegyenesen?

2. példa

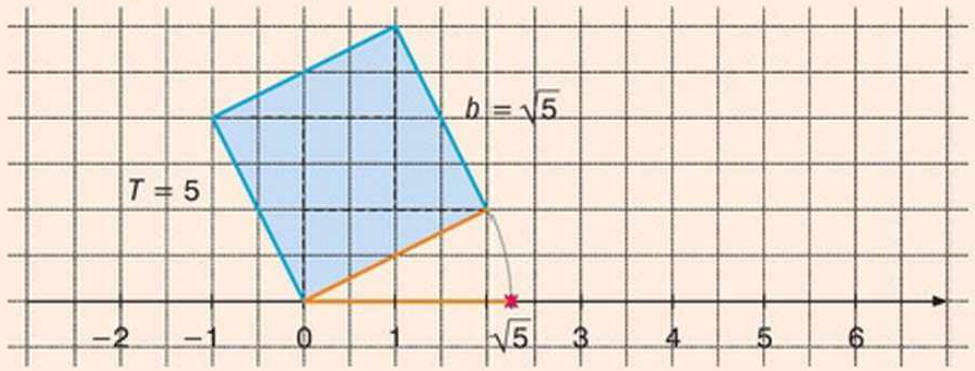
Keressük meg a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{5}$ helyét a számegyenesen!

Megoldás

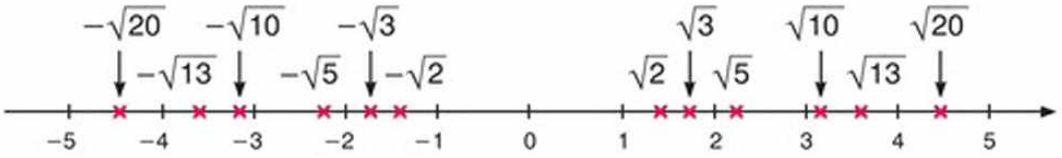
A $T = 2$ területű négyzet oldalhosszúsága $\sqrt{2}$, így:



A $\sqrt{5}$ helye a számegyenesen:



Megmutatható, hogy minden irracionális számnak megtalálható a helye a számegyenesen, így a számegyenes a végtelen sok racionális szám mellett végtelen sok irracionális számot is tartalmaz.



3. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\sqrt{25}$; *b)* $\sqrt{64}$; *c)* $\sqrt{400}$; *d)* $\sqrt{0}$; *e)* $-\sqrt{4}$; *f)* $\sqrt{-36}$.

Megoldás

a) $\sqrt{25} = 5$, mert $5^2 = 25$.

b) $\sqrt{64} = 8$, mert $8^2 = 64$.

c) $\sqrt{400} = 20$, mert $20^2 = 400$.

d) $\sqrt{0} = 0$, mert $0^2 = 0$.

e) $-\sqrt{4} = -2$, mert $2^2 = 4$ és így $-\sqrt{4} = -2$.

f) A $\sqrt{-36}$-ot nem értelmezzük, mert nincs olyan valós szám, melynek a négyzete -36 lenne.



Mivel bármely valós szám négyzete nemnegatív szám, ezért csak nemnegatív valós szám négyzetgyökét értelmezzük.

Másrészt a $\sqrt{a}$-t is nemnegatív számnak tekintjük.

DEFINÍCIÓ: A nemnegatív valós *a* szám négyzetgyöke jelenti azt a nemnegatív számot, amelynek a négyzete *a*. Jele: $\sqrt{a}$.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \qquad (a \geq 0,\ a \in \mathbb{R} \text{ és } \sqrt{a} \geq 0,\ \sqrt{a} \in \mathbb{R})$$

4. példa

Adott egy téglalap, amelynek oldalai 5 dm és 7 dm hosszúak. Melyik egész számhoz van legközelebb annak a négyzetnek az oldalhosszúsága, amelynek a területe megegyezik a téglalap területével?

Megoldás

A téglalap területe $5 \cdot 7 = 35$ (dm^2), így a keresett négyzet területének is 35 dm^2-nek kell lennie.

A 35 dm^2 területű négyzet oldalának hossza: $\sqrt{35} \approx \sqrt{36} = 6$ (dm).

$\sqrt{35} \approx 5{,}9160$

A $\sqrt{35}$ az egész számok közül a számegyenesen a 6-hoz van legközelebb.

5. példa

A számok négyzetgyökét általában számológéppel számoljuk ki.

Számológép segítségével határozzuk meg a következő kifejezések értékét!

a) $\sqrt{10}$; *b)* $\sqrt{100}$; *c)* $\sqrt{1000}$; *d)* $\sqrt{10\,000}$; *e)* $\sqrt{100\,000}$; *f)* $\sqrt{1000\,000}$.

Megoldás

a) $\sqrt{10} \approx 3{,}162$;

b) $\sqrt{100} = 10$;

c) $\sqrt{1000} \approx 31{,}62$;

d) $\sqrt{10\,000} = 100$;

e) $\sqrt{100\,000} \approx 316{,}2$;

f) $\sqrt{1000\,000} = 1000$.

A $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$; $\sqrt{10\,000} = \sqrt{10^4} = \sqrt{\left(10^2\right)^2} = 10^2 = 100$;

$$\sqrt{1000\,000} = \sqrt{10^6} = \sqrt{\left(10^3\right)^2} = 10^3 = 1000.$$

A 10 páros kitevőjű hatványának a négyzetgyöke 10 valamely hatványa. Ennek ismeretében nagyon nagy és nagyon kis számok négyzetgyöke is meghatározható.

6. példa

Írjuk fel más alakban! Használjunk számológépet!

a) $\sqrt{6\,250\,000}$;

b) $\sqrt{62\,500\,000}$;

c) $\sqrt{625\,000\,000}$;

d) $\sqrt{0{,}000\,625}$;

e) $\sqrt{0{,}000\,006\,25}$;

f) $\sqrt{0{,}000\,000\,062\,5}$.

Megoldás

a) $\sqrt{6\,250\,000} = \sqrt{625 \cdot 10^4} = \sqrt{625} \cdot \sqrt{10^4} = 25 \cdot 10^2 = 2500$;

b) $\sqrt{62\,500\,000} = \sqrt{6250 \cdot 10^4} = \sqrt{6250} \cdot \sqrt{10^4} \approx 79{,}057 \cdot 10^2 = 7905{,}7$;

c) $\sqrt{625\,000\,000} = \sqrt{625 \cdot 10^6} = \sqrt{625} \cdot \sqrt{10^6} = 25 \cdot 10^3 = 25\,000$;

d) $\sqrt{0{,}000\,625} = \sqrt{6{,}25 : 10^4} = \sqrt{6{,}25} : \sqrt{10^4} = 2{,}5 : 10^2 = 0{,}025$;

e) $\sqrt{0{,}000\,006\,25} = \sqrt{6{,}25 : 10^6} = \sqrt{6{,}25} : \sqrt{10^6} = 2{,}5 : 10^3 = 0{,}002\,5$;

f) $\sqrt{0{,}000\,000\,062\,5} = \sqrt{0{,}625 : 10^8} \approx \sqrt{6{,}25} : \sqrt{10^8} \approx$

$\approx 0{,}79 : 10^4 = 0{,}000\,079.$



7. példa

Állítsuk növekvő sorrendbe a következő számokat!

$$1;\quad \sqrt{1{,}44};\quad \sqrt{0{,}81};\quad 0{,}81;\quad 1{,}44.$$

Megoldás

A számok négyzetgyökének meghatározásához használhatjuk a számológépet, de mindegyik esetben mutatunk egy másik lehetőséget is:

$$\sqrt{1{,}44} = 1{,}2, \quad \text{vagy} \quad \sqrt{1{,}44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} = 1{,}2.$$

$$\sqrt{0{,}81} = 0{,}9, \quad \text{vagy} \quad \sqrt{0{,}81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

Így a számok növekvő sorrendben:

$$0{,}81 < \sqrt{0{,}81} < 1 < \sqrt{1{,}44} < 1{,}44.$$

Ha $0 < a < 1$, akkor $a < \sqrt{a}$.

Ha $1 < a$, akkor $\sqrt{a} < a$.

Feladatok

1. Számítsuk ki!

a) $\sqrt{36}$; b) $\sqrt{81}$; c) $\sqrt{144}$; d) $-\sqrt{100}$; e) $\sqrt{-25}$; f) $-\sqrt{-16}$.

2. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$; b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$; c) $\sqrt{7 \cdot 28}$; d) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$;

e) $\sqrt{1600}$; f) $\sqrt{250\,000}$; g) $\sqrt{19\,600}$; h) $\sqrt{36\,000\,000}$.

3. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}}$; b) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{5}}$; d) $\sqrt{\frac{27}{3}}$;

e) $\sqrt{0{,}36}$; f) $\sqrt{0{,}0081}$; g) $\sqrt{0{,}0016}$; h) $\sqrt{0{,}0009}$.

4. Hozzuk egyszerűbb alakra!

a) $\sqrt{\frac{81}{16} \cdot \frac{25}{49}}$; *b)* $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}$; *c)* $\sqrt{\frac{2}{3} : \frac{8}{27}}$; *d)* $\sqrt{\frac{4}{9} : \frac{25}{16}}$.

5. Állítsuk növekvő sorrendbe, és ábrázoljuk számegyenesen a következő számokat!

a) 7,1; $\sqrt{49}$; $\left(\sqrt{7{,}2}\right)^2$; $\sqrt{6{,}9^2}$;

b) $\sqrt{3}$; $\sqrt{3^2}$; $\left(\sqrt{3}\right)^2$; 3,5;

c) $\frac{1}{2}$; $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{0{,}25}$; 0,4;

d) 5; $\sqrt{25}$; $\sqrt{5^2}$; $\left(\sqrt{5}\right)^2$;

e) -2; $-\sqrt{16}$; $-\sqrt{(3)^2}$; $-\sqrt{\frac{1}{4}}$;

f) $0{,}\dot{1}$; $\frac{1}{\sqrt{100}}$; $\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2}$; $\sqrt{0{,}09}$.

6. Mely állítások igazak, és melyek hamisak?

a) Minden számnak van négyzetgyöke.

b) Bármely pozitív szám négyzetgyöke kisebb, mint a szám.

c) Van olyan egész szám, melynek a négyzetgyöke racionális.

d) Ha egy szám nem egész, akkor a négyzetgyöke irracionális.

e) Két irracionális szám szorzata nem lehet racionális.

7. Egy négyzet területe 100 cm^2.

a) Mekkora az oldala?

b) Hányszorosára kell változtatnunk az oldalának hosszát, ha a területét meg szeretnénk háromszorozni?

8. Ha egy négyzet oldalait megkétszerezzük, hányszorosára változik a területe? Hányszorosára változnak az oldalai, ha a területét kétszerezzük meg?

9. Batman és Robin pizzát rendeltek. Batman kétszer akkora területűt kapott, mint Robin. Hányszor akkora Batman pizzájának sugara, mint a Robiné?

10. Számológépünk elromlott. Próbáljuk meg három tizedesjegy pontossággal közelíteni a $\sqrt{3}$ értékét!

11. Döntsük el a következő számokról, hogy melyek racionálisak, és melyek irracionálisak!

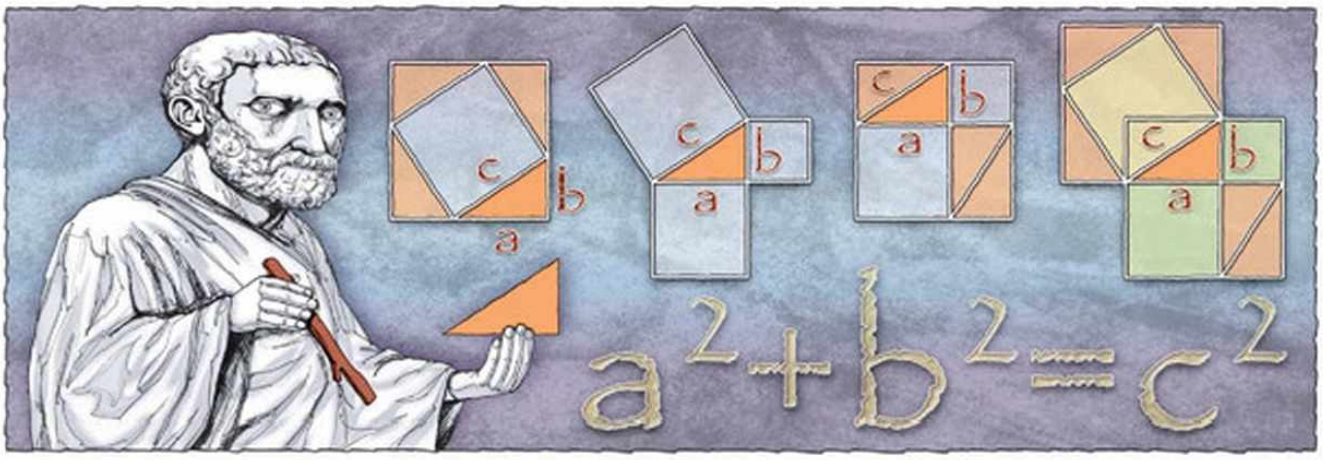
a) 2,256; *b)* $3{,}\dot{1}\dot{3}$; *c)* $\sqrt{10}$; *d)* $\sqrt{625}$;

e) $-\sqrt{75}$; *f)* 1,1010010001... .

Rejtvény

Gergő programozni tanult és különböző képleteket használt. Egy alkalommal választott egy tetszőleges számot, és azt az $\frac{x + \frac{2}{x}}{2}$ képletbe helyettesítette. A kapott eredményre újra alkalmazta a képletet, és ezt megismételte néhányszor. Mit tapasztalt Gergő az ismétlések után?

3. Pitagorasz tétele



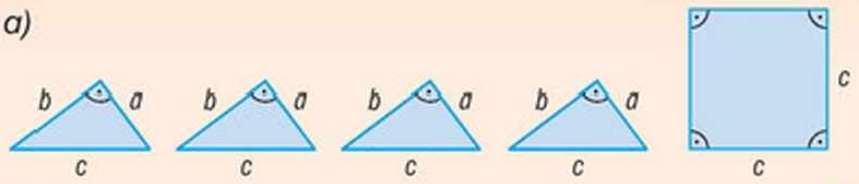
A fenti képsorozat alapján a geometria egyik nevezetes tételét sejthetjük meg. Az ábrák alapján úgy tűnik, hogy egy derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege az átfogóra rajzolt négyzet területével egyezik meg.

A tétel olyan állítás a matematikában, melynek helyességét indokolnunk, bizonyítanunk kell.

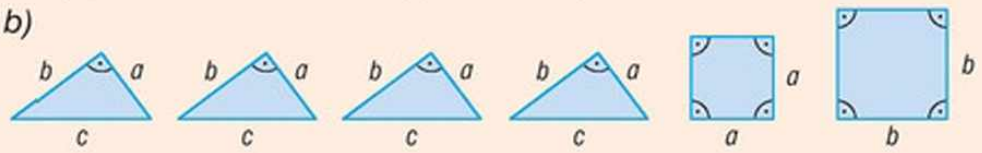
1. példa

Építsünk a következő síkidomok felhasználásával négyzetet!

a)

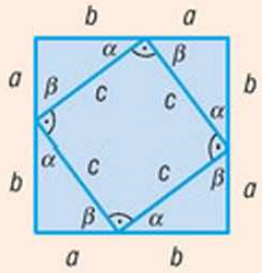


b)

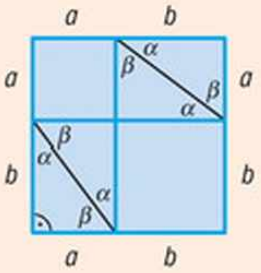


Megoldás

a)



b)



a) A derékszögű háromszög belső szögeire $\alpha + \beta + 90° = 180°$, ezért a c oldalú négyzet csúcsaiban találkozó befogók egy egyenesre illeszkednek. A keletkező síkidom négyzet lesz.

b) Mivel $\alpha + \beta + 90° = 180°$, ezért $\alpha + \beta = 90°$.
A keletkező síkidom így négyzet lesz.

A két négyzetről megállapíthatjuk, hogy ugyanakkora területűek, hiszen mindkét négyzet oldalainak hossza $a + b$.



$\alpha + \beta + 90° = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$

Püthagorasz (Kr. e. 582–496) görög matematikus és gondolkodó. Bár a nevéhez fűződő tételt már jóval korábban is ismerték, az általa adott bizonyítás miatt nevezték el róla.

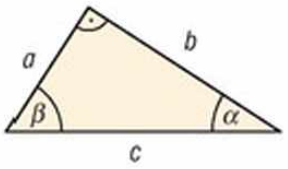
PITAGORASZ TÉTELE:

Ha egy háromszög derékszögű, akkor befogói hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

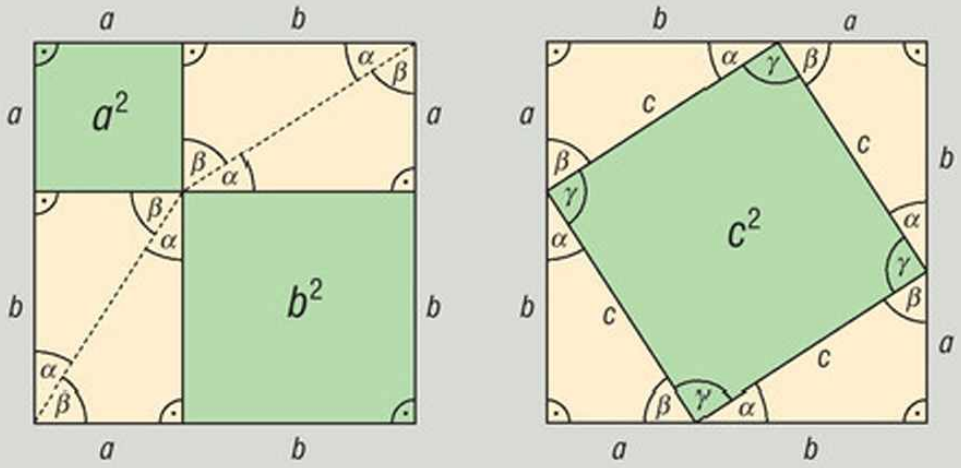
Bizonyítás:

Legyen a és b egy derékszögű háromszög két befogója, c az átfogója!



Állítás: $a^2 + b^2 = c^2$.

Vegyünk fel két $a + b$ oldalú négyzetet az ábra szerinti módon!



A két nagy ($a + b$ oldalú) négyzetben felvett négy-négy derékszögű háromszög egybevágó egymással és az eredeti derékszögű háromszöggel, mert két oldaluk (a és b) és közbezárt szögük (90°) egyenlő.

A bal oldali négyzetben a négy háromszögön kívül keletkezett egy a oldalú négyzet és egy b oldalú négyzet. Ezek területe

$$a^2 \quad \text{és} \quad b^2.$$

α és β a derékszögű háromszög két hegyesszöge, így $\alpha + \beta = 90°$, ezért $\gamma = 180° - 90° = 90°$

A jobb oldali négyzetben a négy háromszögön kívül van egy olyan négyszög, amelynek minden oldala c, ezért ez egy rombusz. Ez a rombusz négyzet, mert minden szöge egyenlő: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. A c oldalú négyzet területe

$$c^2.$$

A két nagy négyzet egyenlő területű, mert oldalaik egyenlőek: $a + b$.

Mindkét nagy négyzet területéből levonva a négy-négy derékszögű háromszög területét, a megmaradt területek egyenlőek.

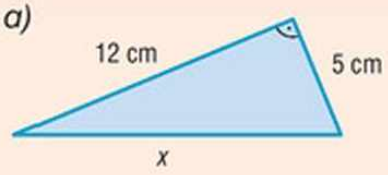
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

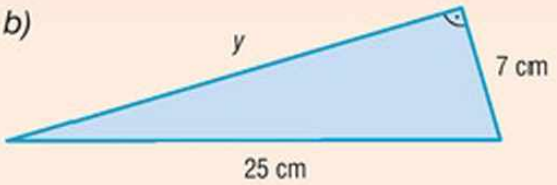
2. példa

Határozzuk meg az alábbi derékszögű háromszögek ismeretlen oldalainak hosszát!

a)



b)



Megoldás

a) A derékszögű háromszög két befogóját ismerjük, és az átfogóját keressük. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét!

$$12^2 + 5^2 = x^2$$
$$144 + 25 = x^2$$
$$169 = x^2$$

Az egyenletnek két megoldása van:

$$x_1 = \sqrt{169} = 13 \quad \text{vagy} \quad x_2 = -\sqrt{169} = -13.$$

Mivel egy háromszög oldala nem lehet negatív, ezért a keresett átfogó $x = 13$ cm.

b) A derékszögű háromszög egyik befogóját és az átfogóját ismerjük, és a másik befogóját keressük. Pitagorasz tételét felírva:

$$y^2 + 7^2 = 25^2$$
$$y^2 + 49 = 625$$
$$y^2 = 576$$

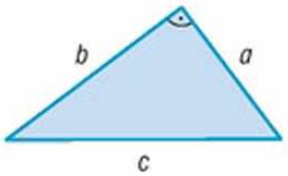
$$y_1 = \sqrt{576} = 24 \qquad y_2 = -\sqrt{576} = -24$$

A háromszög oldala nem lehet negatív, ezért a keresett befogó $y = 24$ cm.



A Pitagorasz-tétel alapján egy derékszögű háromszög bármely két oldalhosszúságának ismeretében a harmadik oldal hossza kiszámolható.

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



Bebizonyítható a tétel megfordítása is.

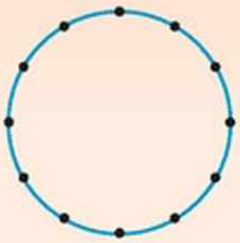
PITAGORASZ TÉTELÉNEK MEGFORDÍTÁSA:

Ha egy háromszögben két oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.



3. példa

Egy kötélből készült hurokra az ábrának megfelelően 12 csomót kötöttünk egyenlő távolságra egymástól. Hogyan lehet a hurok segítségével derékszöget szerkeszteni?



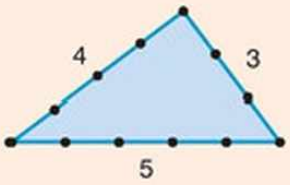
Megoldás

A 12 csomó 12 egyenlő részre osztja a kötelet.

Ezt felosztathatjuk így: $3 + 4 + 5 = 12$.

Kialakíthatunk egy olyan háromszöget, melynek oldalai 3, 4 és 5 egység hosszúak.

Mivel $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög derékszögű.



Az olyan pozitív egész számokból álló $(x; y; z)$ számhármasokat, melyekre teljesül, hogy $x^2 + y^2 = z^2$, **pitagoraszi számhármasoknak** nevezzük.

Ilyen számhármas például a (3; 4; 5), (5; 12; 13), (7; 24; 25) stb.

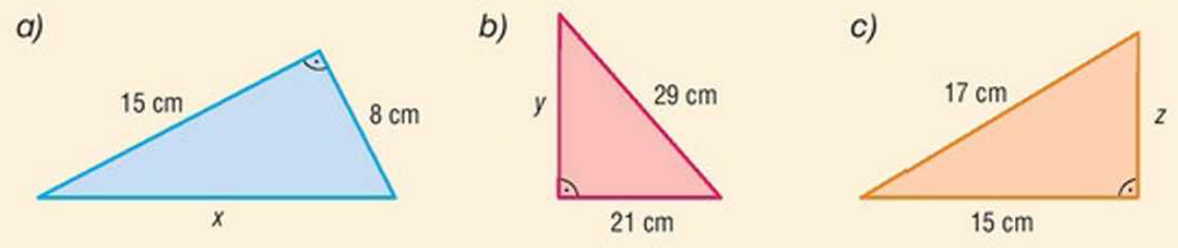
A pitagoraszi számhármasok bármely egész számszorosa is pitagoraszi számhármas. Például:

$$(2 \cdot 3;\ 2 \cdot 4;\ 2 \cdot 5) = (6;\ 8;\ 10);$$
$$(3 \cdot 3;\ 3 \cdot 4;\ 3 \cdot 5) = (9;\ 12;\ 15)\ldots$$

Végtelen sok pitagoraszi számhármas létezik.

Feladatok

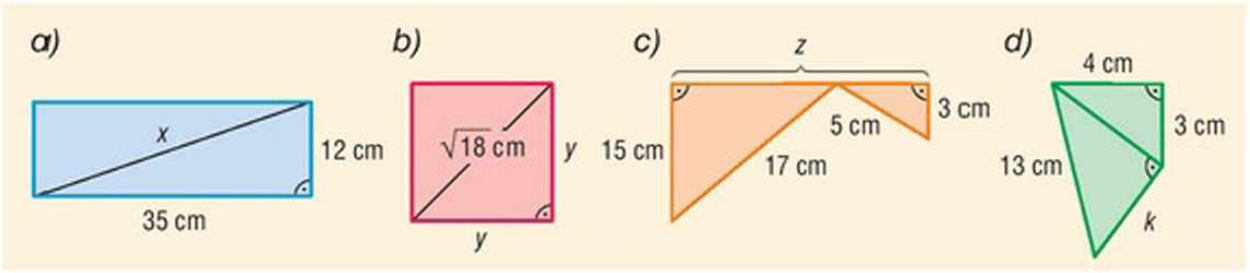
1. Határozzuk meg az ábrán látható derékszögű háromszögek ismeretlen oldalainak hosszát!



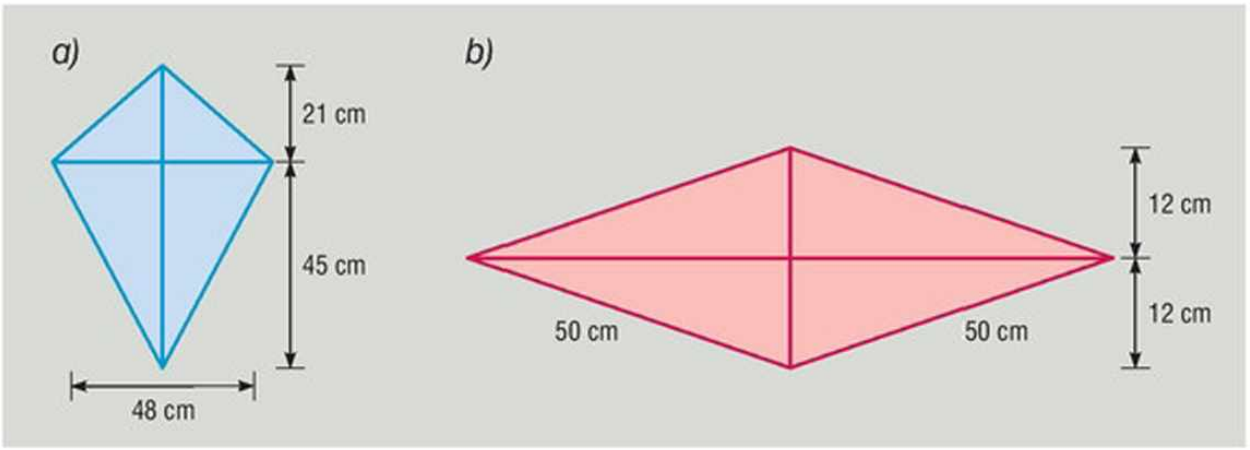
2. Mekkora annak a négyzetnek az átlója, amelynek a területe 64 m^2?

3. Egy téglalap átlója 85 cm, egyik oldalának hossza 13 cm. Mekkora a területe és a kerülete?

4. Határozzuk meg az ábrán betűvel jelölt szakaszok hosszát!



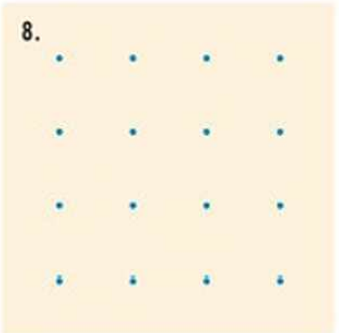
5. Összesen milyen hosszú pálcára van szükség az alábbi papírsárkányok vázának elkészítéséhez?



6. Egy 25 m széles úton két szemközti ház közé kifeszített huzalra lámpát rögzítettek, melynek a „belógása” 50 cm. Milyen hosszú a huzal?

7. Mekkora a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó súlyvonalának hossza, ha a befogók nagysága $a = 3$ cm, $b = 4$ cm?

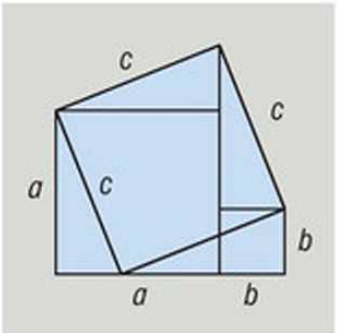
8. Az ábrán látható négyzetrácson a négyzetek oldalának hossza 1 cm. Hányféle különböző hosszúságú szakaszt tudunk kijelölni két rácspont segítségével? Számoljuk ki ezek hosszát! (➡)



9. Milyen hosszú kötelet kell rögzítenünk egy 100 m hosszú útszakasz két végén, ha azt akarjuk, hogy a kötelet középen felemelve egy 180 cm magas ember átsétálhasson alatta?

10. Egy téglalap alakú parkon átlósan egy 260 m hosszú sétány vezet át. Mekkora területen terül el a park, ha egyik oldalának hossza 100 m?

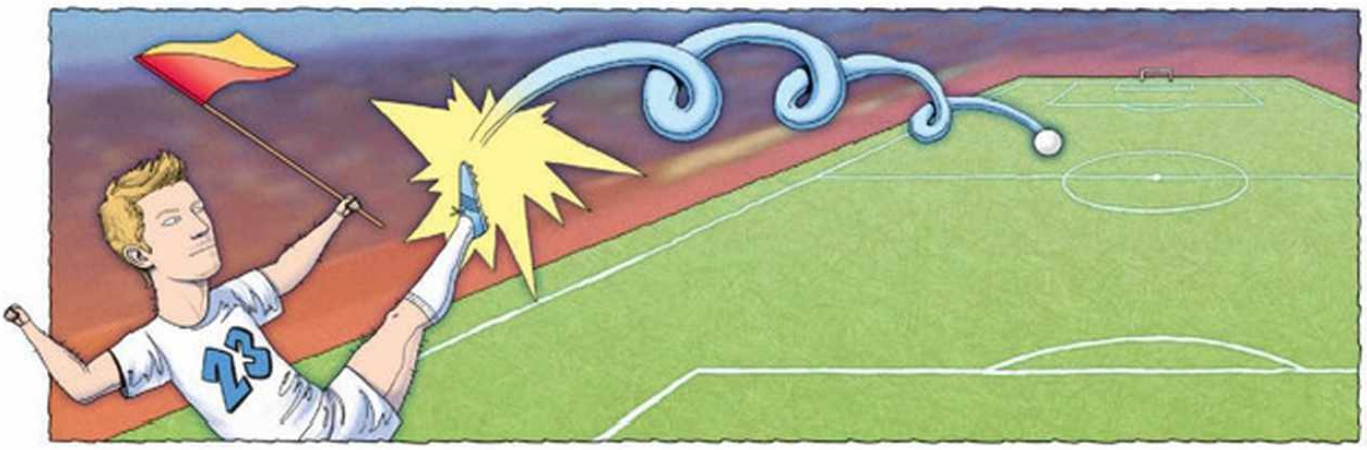
11. Egy 3 m magas létrát a falnak támasztunk. Milyen magasan érintkezik a létra a fallal, ha a lábai a faltól 0,5 m-re vannak?



Rejtvény

Hogyan igazolja Pitagorasz tételét a következő ábra? (➡)

4. A Pitagorasz-tétel alkalmazásai

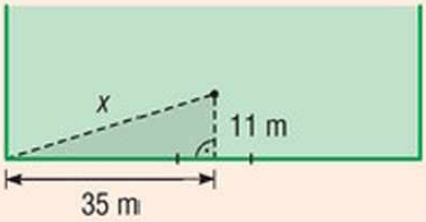


1. példa

David Beckham, a világ egyik legnépszerűbb labdarúgója a labdát legfeljebb a távolság 5%-os eltérésével képes célba juttatni. Legfeljebb hány méter lesz ez az eltérés, ha labdát a szögletzászlótól a tizenegyespontra íveli? (Az átlagos futballpálya szélessége 70 m, és a tizenegyespont a kapu közepétől 11 m távolságra található.)

Megoldás

Az ábrán látható derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét felírva:



$$35^2 + 11^2 = x^2$$
$$1225 + 121 = x^2$$
$$1346 = x^2$$

$x_1 = \sqrt{1346} \approx 36{,}69 \quad x_2 = -\sqrt{1346} \approx -36{,}69$

Mivel a távolság csak pozitív lehet, így a labdát közelítőleg 36,69 m-re kell eljuttatni. Ennek 5%-a: $36{,}69 \cdot 0{,}05 = 1{,}83$ (m).

Legfeljebb 1,83 m lesz az eltérés a tizenegyesponttól.



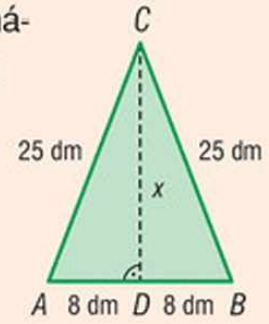
2. példa

Zita az almaszedéskor kétágú létrát használt, melynek szárai 2,5 m hosszúak. A létra két szárát összekötő lánc a létrát annyira engedi szétnyitni, hogy a két szárának a talajon mért távolsága 1,6 m legyen. Milyen magasan van ilyenkor a létra teteje?

Megoldás

A létra kinyitva egy egyenlő szárú háromszöget határoz meg. Ennek a háromszögnek keressük az *AB* alaphoz tartozó *CD* magasságát.

CD felezi az *AB* alapot, így az *ADC* derékszögű háromszög oldalaira felírhatjuk Pitagorasz tételét:



$$x^2 + 8^2 = 25^2$$
$$x^2 + 64 = 625$$
$$x^2 = 561$$

$$x_1 = \sqrt{561} \approx 23{,}69 \qquad x_2 = -\sqrt{561} \approx -23{,}69$$

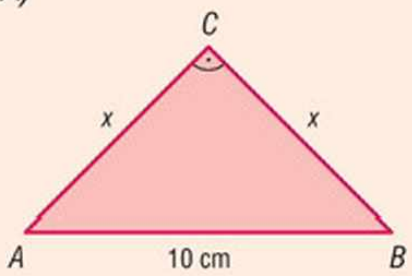
Mivel a magasság hossza csak pozitív lehet, ezért a létra teteje közelítőleg 23,69 dm = 2,369 m magasan lesz a talaj felett.



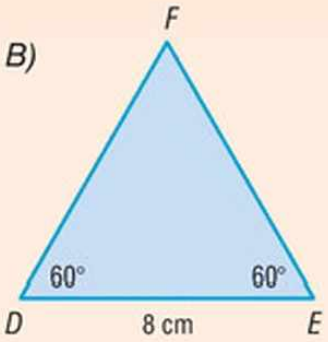
3. példa

Az alábbi két háromszög közül melyiknek nagyobb a területe, és melyiknek nagyobb a kerülete?

A)

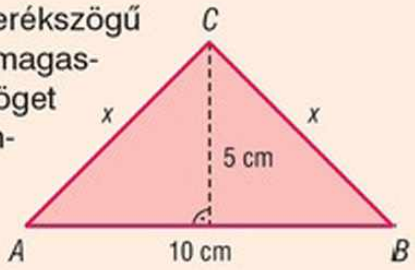


B)



Megoldás

A) Az *ABC* háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög. Az átfogóhoz tartozó magasság felezi az átfogót, és a háromszöget két egyenlő szárú derékszögű háromszögre osztja.



$$T_{ABC} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25\ (\text{cm}^2)$$

A háromszög kerületéhez ismernünk kell az x oldalt. Az *ABC* derékszögű háromszög oldalaira felírhatjuk Pitagorasz tételét:

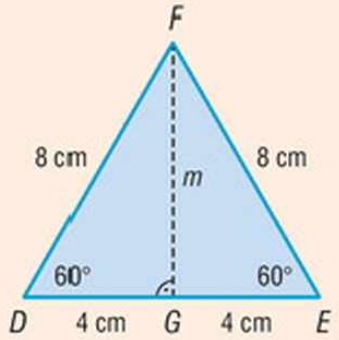
$$x^2 + x^2 = 10^2$$
$$2x^2 = 100$$
$$x^2 = 50$$

$$x_1 = \sqrt{50} \approx 7{,}07\ (\text{cm}) \qquad x_2 = -\sqrt{50} \approx -7{,}07\ (\text{cm})$$

A háromszög oldala csak pozitív lehet, így a háromszög kerülete:

$$K_{ABC} = 10 + 2 \cdot 7{,}07 = 24{,}14\ (\text{cm}).$$

B) A $DEF\triangle$ területének kiszámításához ismernünk kell a magasságát. A háromszög egyenlő oldalú, ezért a magassága felezi az alapot. A $DGF\triangle$ derékszögű, így felírhatjuk Pitagorasz tételét:



$$m^2 + 4^2 = 8^2$$
$$m^2 + 16 = 64$$
$$m^2 = 48$$

$$m_1 = \sqrt{48} \approx 6{,}93 \text{ (cm)} \qquad m_2 = -\sqrt{48} \approx -6{,}93 \text{ (cm)}$$

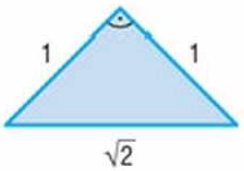
A magasság csak pozitív lehet, így a háromszög területe:

$$T_{DEF} = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A háromszög kerülete: $K_{DEF} = 3 \cdot 8 = 24$ (cm).

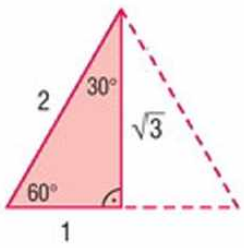
A területe a *DEF* háromszögnek, a kerülete pedig az *ABC* háromszögnek nagyobb.

Vizsgáljuk meg a példában szereplő két speciális háromszöget!



a) Ha az egyenlő szárú derékszögű háromszögben a befogók hossza $a = 1$ egység, akkor az átfogó

$$c^2 = 1^2 + 1^2$$
$$c = \sqrt{2}$$

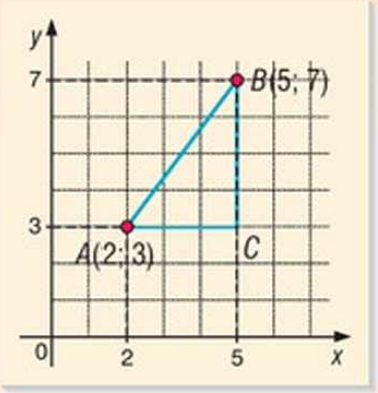


b) A 30°-ot és 60°-ot tartalmazó derékszögű háromszög az egyenlő oldalú háromszög fele. Ha ebben a rövidebb befogó $a = 1$ egység, akkor az átfogó $c = 2$ egység. Így a másik befogó:

$$1^2 + b^2 = 2^2$$
$$b^2 = 4 - 1$$
$$b = \sqrt{3}$$

4. példa

Mennyi az $A(2; 3)$ és $B(5; 7)$ pontok távolsága a koordináta-rendszerben?



Megoldás

Az *A* ponton át az *x* tengellyel, a *B* ponton át az *y* tengellyel párhuzamost húzva az ábrán látható derékszögű háromszöget kapjuk. Ennek befogói:

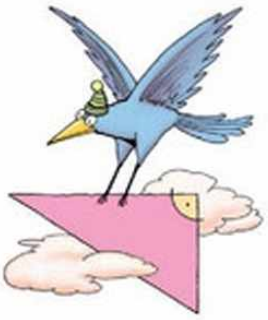
$AC = 5 - 2 = 3$; $BC = 7 - 3 = 4$.

Erre a háromszögre Pitagorasz tételét felírva:

$$AB^2 = 3^2 + 4^2$$
$$AB^2 = 9 + 16$$
$$AB^2 = 25$$

$$AB = \sqrt{25} = 5 \qquad AB = -\sqrt{25} = -5$$

Két pont távolsága nem lehet negatív, így az AB távolság 5 egység.



5. példa

Egy kartonból készült, felül nyitott, kocka alakú doboz éleinek hossza 10 cm. Belefér-e teljes egészében egy 15 cm hosszú ceruza?

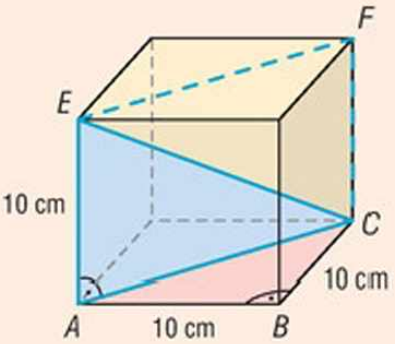
Megoldás

A leghosszabb szakasz a kocka testátlója. Ez az ábrán az CE szakasz.

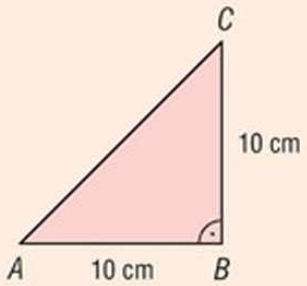
Keressünk derékszögű háromszögeket!

Az ACE derékszögű háromszög átfogóját keressük, de csak az $AE = 10$ cm befogó adott.

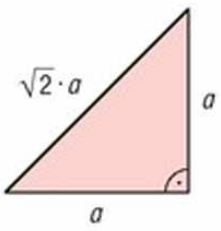
Az AC szakasz a kocka egyik lapátlója. Ez az ABC derékszögű háromszög átfogója. Pitagorasz tételét felírva:



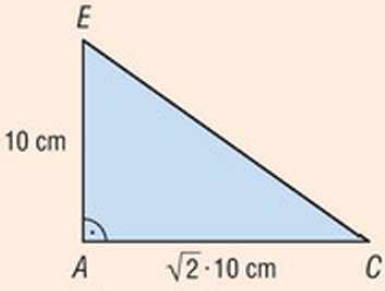
Az $ACFE$ téglalap, ennek átlója az EC testátló.



$$AC^2 = 10^2 + 10^2$$
$$AC^2 = 100 + 100$$
$$AC^2 = 200$$
$$AC = \sqrt{200} = \sqrt{2 \cdot 100} = \sqrt{2} \cdot 10, \quad \text{vagy}$$
$$AC = -\sqrt{200} = -\sqrt{2} \cdot 10$$



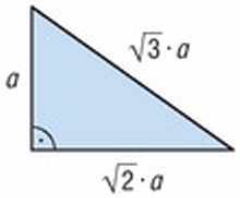
Ezután az ACE derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt:



$$CE^2 = 10^2 + (\sqrt{2} \cdot 10)^2$$
$$CE^2 = 100 + 2 \cdot 100$$
$$CE^2 = 300$$
$$CE = \sqrt{300} = \sqrt{3 \cdot 100} = \sqrt{3} \cdot 10 \approx 17{,}32$$

vagy

$$CE = -\sqrt{300} = -\sqrt{3} \cdot 10$$



A testátló hossza nem lehet negatív, így a testátló 17,32 cm, ami hosszabb a 15 cm-es ceruzánál. Tehát a ceruza belefér a dobozba.

Feladatok

1. Egy téglalap oldalainak hossza 8 cm és 4 cm. Határozzuk meg az átlóját!

2. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC = 9\,\text{cm}$. Az AB alaphoz tartozó magasság hossza 7 cm. Mekkora a háromszög kerülete és területe? (➡)

3. Az ABC derékszögű háromszögben a D pont az AC befogó olyan pontja, melyre $AD = 9\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$ és $AB = 13\,\text{cm}$. (➡)

   a) Mekkora a CD szakasz?

   b) Mekkora a BD szakasz?

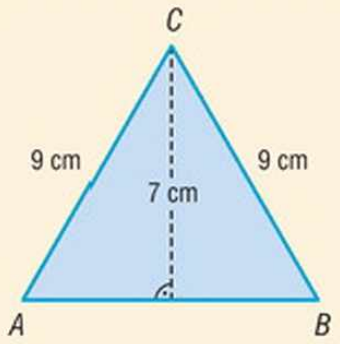
4. Mekkora az ábrán látható derékszögű trapéz területe és kerülete? (➡)

5. Mekkora a következő pontok távolsága a koordináta-rendszerben?

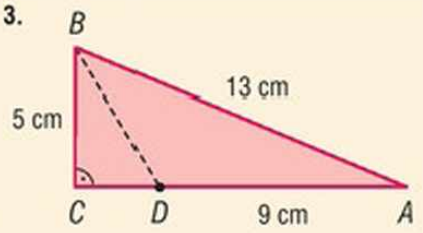
   a) $A(3; 4)$ és $B(8; 7)$; *b)* $C(1; 5)$ és $D(7; 2)$;

   c) $E(-3; 1)$ és $F(2; 5)$; *d)* $G(-4; 2)$ és $H(2; 3)$.

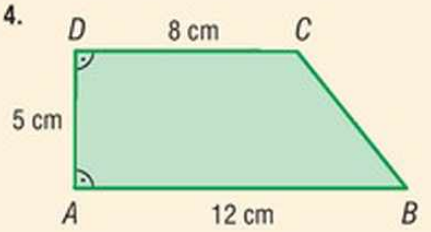
2.



3.



4.



6. A koordináta-rendszerben $A(2; 1)$ és $B(14; 17)$ egy kör átmérőjének két végpontja.

   a) Mekkora a kör átmérőjének hossza?

   b) Melyik pontban van a kör középpontja?

7. Egy kör középpontjának koordinátái: $O(3; 1)$. A kör sugara $r = 6$. Az alábbi pontok közül melyik van a körvonalon, melyik a kör belsejében, és melyik a körön kívül?

   a) $A(7; 6)$; *b)* $B(3; 7)$; *c)* $C(5; 3)$; *d)* $D(9; 1)$.

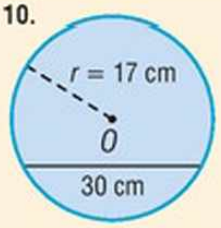
8. Egy falnak támasztott létra lába 2 m távolságra van a faltól, a teteje 6 m magasan a talajtól. Milyen hosszú a létra?

9. Egy derékszögű háromszög két oldalának hossza 12 cm és 13 cm. Mekkora lehet a harmadik oldala? (Több eset is lehetséges!)

10. Egy 17 cm sugarú körbe 30 cm hosszú húrt rajzolunk. Milyen messze van a húr a kör középpontjától? (➡)

11. Milyen messze került a hajó a kikötőtől, ha először 9 km-t délnek, majd 40 km-t keletnek haladt?

10.



Rejtvény

Új tévét szeretnénk vásárolni, amelyet állványra akarunk tenni. Az állvány fölött 65 cm hely van. Megvehetjük-e azt a készüléket, amelynek képátlója 82 cm, oldalainak aránya pedig 4 : 3?

5. Vegyes feladatok

1. Egy háromszög oldalainak hossza: $a = 10$ cm, $b = 6$ cm és $c = 8$ cm. Az egyik oldalához tartozó magasság hossza 4,8 cm.
   a) Milyen háromszögről van szó?
   b) Mekkora a háromszög területe?
   c) Mekkora a másik két oldalhoz tartozó magasság?

2. Egy négyzet átlóinak hossza 10 cm. Mekkora a négyzet területe?

3. *a)* Egy háromszög kerülete $k = 30$ cm, a háromszögbe írható kör sugara $r = 2$ cm. Mekkora a háromszög területe?
   b) Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza $a = 3$ cm, $b = 4$ cm. Mekkora az átfogója, a területe és a bele írható kör sugara?

4. Egy rombusz területe 24 cm^2. Átlóinak hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 3 a 4-hez. Mekkora a rombusz kerülete?

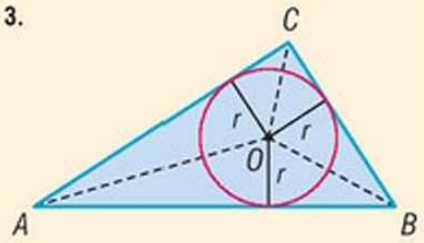
5. Az ábrán látható létra alja a talajon 2 m-rel távolabb csúszik a faltól. Mekkora a létra hossza, és mennyivel kerül alacsonyabbra a teteje?

6. Milyen magasan tört le az eredetileg 2 m hosszú ág, ha a vége a talajt az ág tövétől 1 m távolságra érinti? (Az ágat egyenesnek tekintjük.)

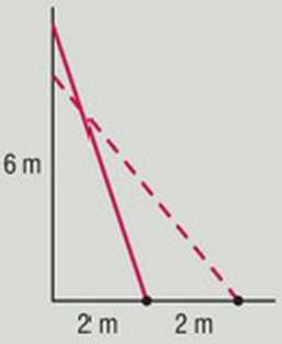
7. Három $r = 0{,}5$ m sugarú csövet az ábrának megfelelően egymásra helyeztek. Milyen magasan van a felső cső teteje? (➡)

8. Egy lámpa két oszlop között egy kötélen függ. A kötél hossza 16 m, az oszlopok távolsága $d = 15$ m. A kötél felfüggesztési pontjaihoz képest mekkora a lámpa x belógása? (➡)

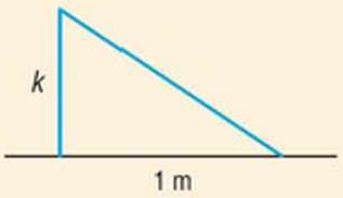
3.



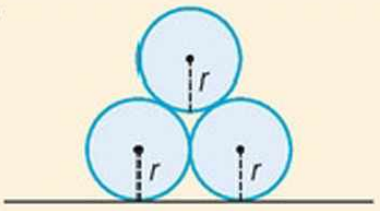
5.



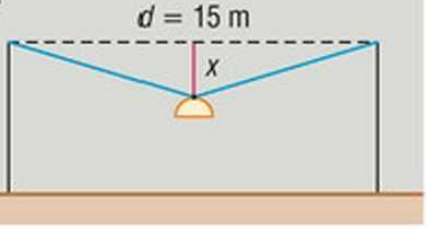
6.



7.



8.



*9. Ákos egy focimeccs után kint felejtette egy víztócsában a labdáját, mely másnapra belefagyott. Amikor reggel kivette, a helyén egy 17 cm átmérőjű, a közepén 2 cm mély lyuk maradt a jégben. Mekkora a labda átmérője?

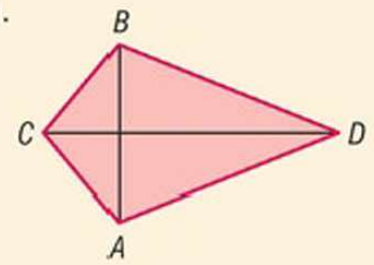
10. Misi úgy készített deltoidot, hogy egy 5 cm és 12 cm oldalú téglalapot az egyik átlója mentén kettévágott, és a két részt összeragasztotta. Milyen hosszú az így kapott deltoid két átlója?

11. Egy deltoid alakú papírsárkányt tervezünk. A középső merevítő rudak hossza: $AB = 48$ cm; $DC = 80$ cm, a rövidebb átló a hosszabbat annak negyedelőpontjában metszi. (➡)

a) Mekkora a papírsárkány területe?

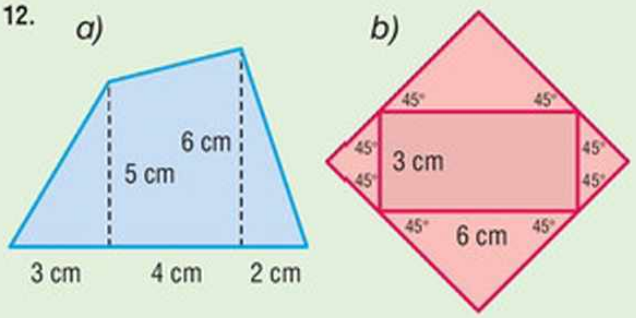
b) Mekkora a kerületén futó zsinór hossza?

11.



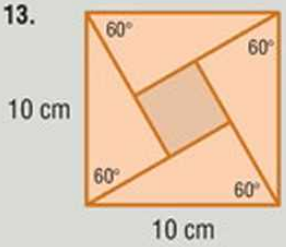
12. Mekkora az ábrán látható síkidomok területe és kerülete? (➡)

12.



*13. Az ábrán látható 10 cm oldalhosszúságú négyzetbe derékszögű háromszögeket szerkesztettünk, melyeknek egyik hegyesszöge 60°-os. Mekkora a sötétebb színnel jelölt síkidom területe és kerülete? (➡)

13.



14. Az ábrán látható szabályos sokszög területe hányszorosa a sötétebb színnel jelölt sokszög területének? (➡)

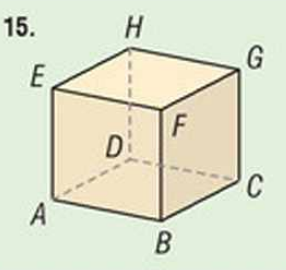
14.



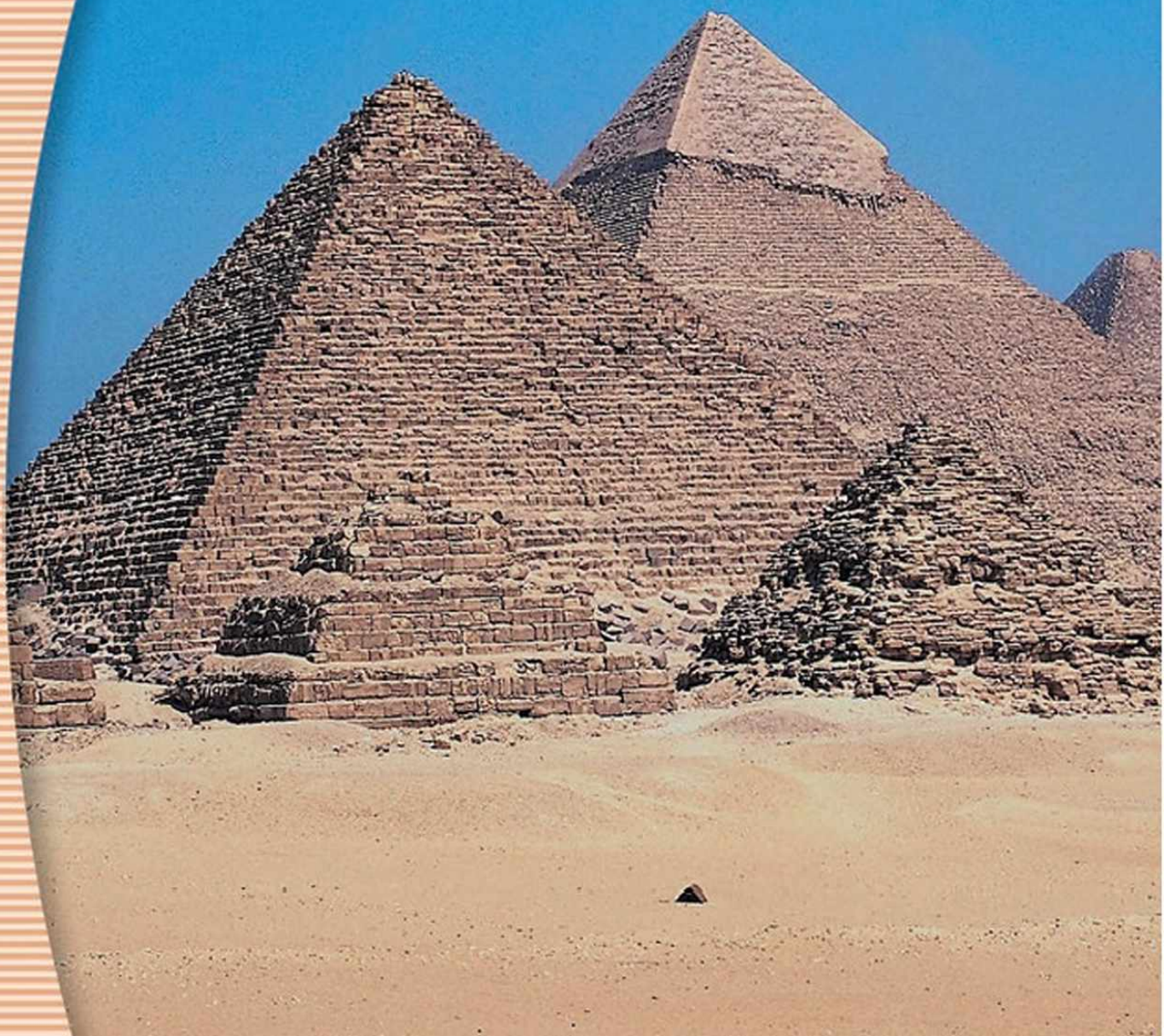
15. Egy kocka minden élének hossza $a = 1$ m. (➡)
Milyen távolságra van az A csúcsa

a) a BD lapátlótól; *b)* az EG lapátlótól;
c) a HF lapátlótól; *d)* a HB testátlótól?

15.



5 Térgeometria

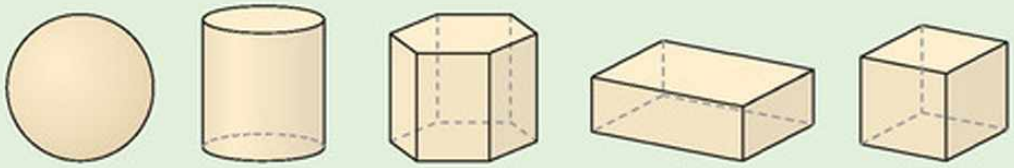


1. A testek csoportosítása. Kúp, gúla



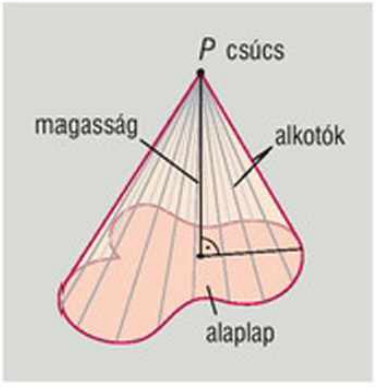
Keressünk a környezetünkben gömböket, hengereket, hasábokat, gúlákat, kúpokat!

Keressük meg a fenti képen az alábbi testeket!



Kúp

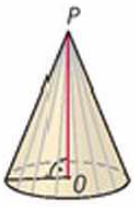
Tekintsünk egy síkidomot és annak síkján kívül egy P pontot! Kössük össze a P ponttal a síkidomot határoló zárt görbe minden pontját! Azt a testet, melyet a síkidom és az így kapott szakaszok alkotta felület meghatároz, **kúpnak** nevezzük.



A síkidomot a **kúp alaplapjának,** a P pontot a **kúp csúcsának,** a szakaszokat **alkotóknak,** az alkotók által meghatározott felületet a **kúp palástjának** nevezzük.

A **kúp magassága** a kúp csúcsából az alaplap síkjára bocsátott merőleges szakasz.

Egyenes körkúp: Alaplapja kör, PO merőleges az alaplapra, alkotói egyforma hosszúak.



Ferde kúp: alkotói nem egyforma hosszúak.

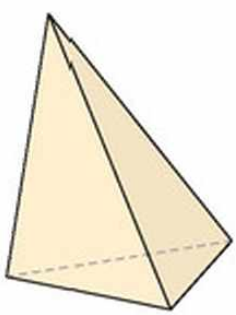


A kúpokat csoportosíthatjuk az alaplapjuk szerint:

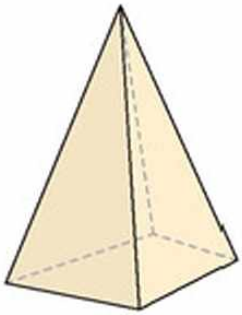
- Ha a kúp alaplapja kör, a kúpot **körkúpnak** nevezzük.

  Ha a körkúp alaplapjának középpontját a kúp csúcsával összekötő szakasz merőleges az alaplap síkjára, a kúpot **egyenes körkúpnak** nevezzük.
- Ha a kúp alaplapja sokszög, a kúpot **gúlának** nevezzük. A gúla **oldallapjai** háromszögek.

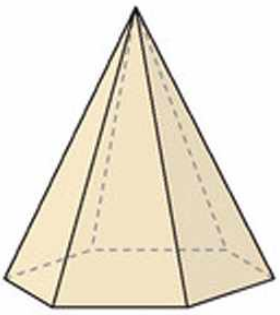
A gúlákat osztályozhatjuk az alaplapot alkotó sokszögek alapján:



háromszög alapú gúla, azaz **tetraéder**

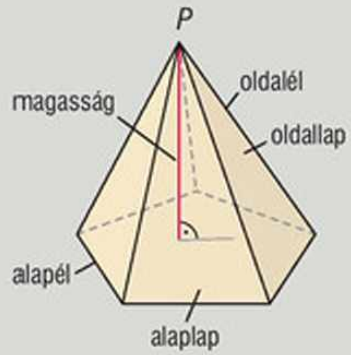


négyszög alapú gúla



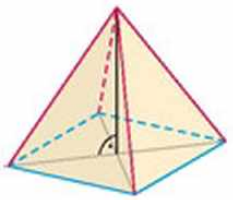
hatszög alapú gúla

Elnevezések

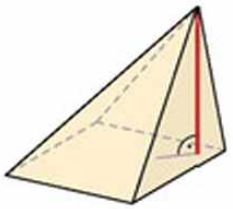


A szabályos gúla

- alaplapja szabályos sokszög;
- oldalélei egyenlő hosszúságúak;
- alapélei egyenlő hosszúságúak;
- testmagasságának talppontja az alaplap középpontja.



szabályos gúla



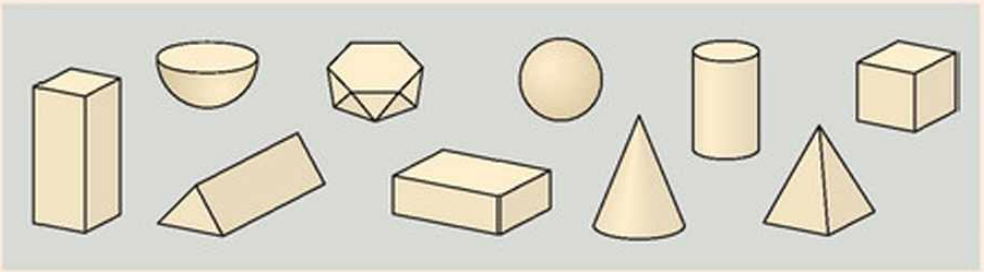
nem szabályos gúla

1. példa

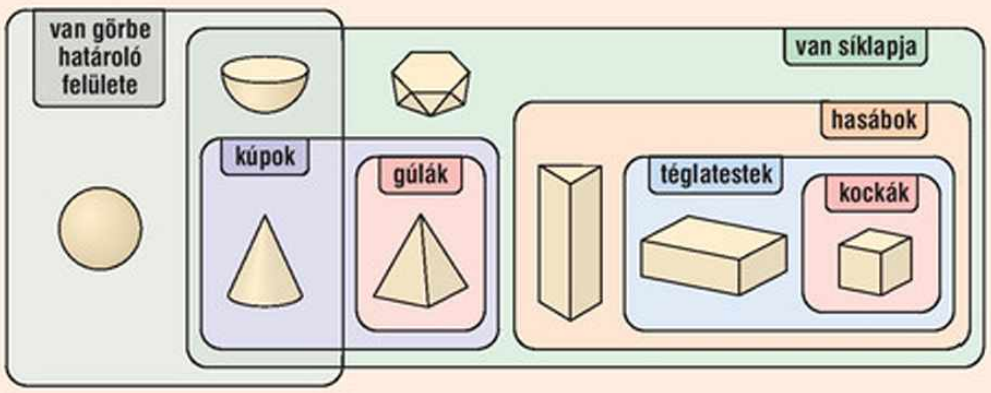
Készítsünk halmazábrát a testek következő halmazaival!

A: van görbe határoló felülete; *B*: van síklapja; *C*: kúpok; *D*: gúlák; *E*: hasábok; *F*: téglatestek; *G*: kockák.

Helyezzük el az alábbi testeket a halmazábrában!



Megoldás



Kísérletezzünk!

Egy papírtölcséren keresztül szórjunk homokot egyenletesen egy lapra! Milyen alakú lesz a „homokhegy”?



A továbbiakban általában egyenes körkúp helyett kúpot írunk.

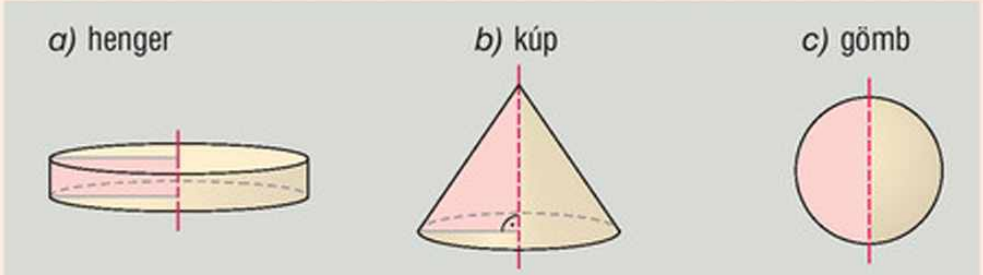
2. példa

Ragasszunk hurkapálcát a keménypapírból kivágott síkidomokra az egyenes helyére, és forgassuk meg a síkidomokat!

Milyen testeket kapunk, ha az ábrán látható síkidomokat megforgatjuk a pirossal jelölt egyenesek körül?



Megoldás



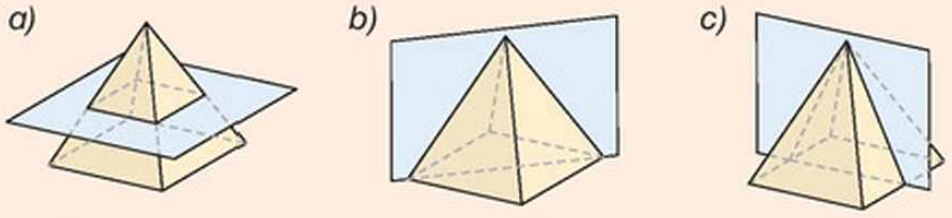
Az egyenes körhenger, az egyenes körkúp és a gömb egy egyenes körüli forgatással keletkeznek, vagyis **forgástestek.**

3. példa

Készítsünk gyurmából három négyzet alapú gúlát, vágjuk szét a feladat szerint, és vizsgáljuk a síkmetszeteket!

Az ábrán látható négyzet alapú szabályos gúlát egy síkkal kettévágjuk. Milyen síkidom lesz a síkmetszet, azaz a vágáskor keletkezett új lap, ha a vágás síkja

a) az alaplappal párhuzamos;
b) az alaplapra merőleges, és átmegy a gúla három csúcsán;
c) az alaplapra merőleges, két alapéllel párhuzamos, és átmegy a gúla csúcsán?

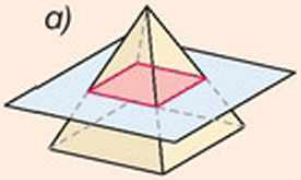


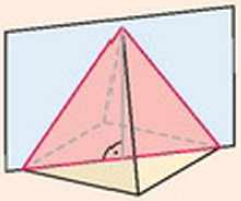
Megoldás

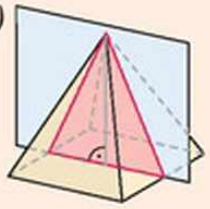
a) A metsző sík párhuzamos az alaplappal, így a síkmetszet négyzet.

b) A síkmetszet egy olyan egyenlő szárú háromszög, melynek alapja az alaplap átlója, szára pedig a gúla oldaléle. A háromszög alaphoz tartozó magassága a gúla magassága.

c) A kapott síkmetszet egy olyan egyenlő szárú háromszög, melynek alapja megegyezik a négyzet oldalával, szára pedig az oldallap magassága. A háromszög alaphoz tartozó magassága a gúla magassága.

a) 

b) 

c) 

A testeket különböző síkokkal elvágva különböző síkmetszeteket kaphatunk.

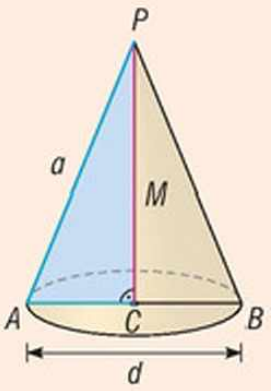
4. példa

Dönci ceruzahegyezőjének a pengéje 16 mm hosszú. Az új, henger alakú, 17 cm hosszú ceruzáját most először hegyezi ki éppen addig, amíg a ceruza hegye a hegyező végéhez nem ér. Mekkora lesz a ceruza hegyezetlen részének hossza, ha a ceruza átmérője 8 mm?

Megoldás

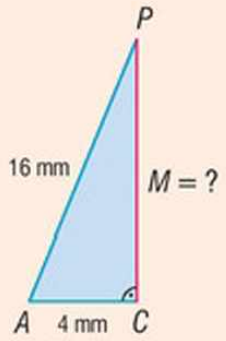
A ceruza kihegyezett része kúp alakú. A kúp alapkörének átmérője 8 mm, alkotója 16 mm. A kúp magasságát keressük.

Ha a kúpot az alaplapra merőlegesen az alaplap átmérőjére illeszkedő egyenessel kettévágjuk, a síkmetszet az ABP egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja a kör átmérője, szára a kúp alkotója, alaphoz tartozó magassága pedig a kúp magassága.



Az ACP derékszögű háromszögben:

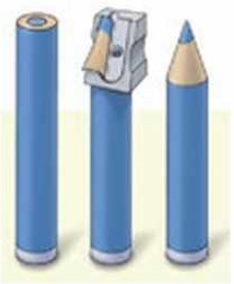
az átfogó $a = 16$ (mm);
az egyik befogó $r = 8 : 2 = 4$ (mm);
a másik befogó M.



A Pitagorasz-tétel alapján:

$$r^2 + M^2 = a^2$$
$$4^2 + M^2 = 16^2$$
$$M^2 = 256 - 16 = 240$$
$$M = \sqrt{240} = 15{,}49 \approx 15{,}5$$

Így a ceruza hegyezetlen részének hossza: $170 - 15{,}5 = 154{,}5$ (mm).

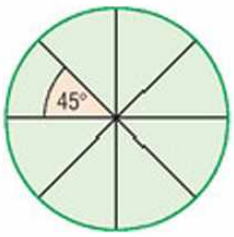


A példában a kúp 3 adata szerepelt:

- a kúp alapkörének sugara;
- a kúp alkotója;
- a kúp magassága.

A testek megfelelő síkmetszete segíti a számítási feladatok megoldását.

Keressünk a földgömbön olyan helyeket, amelyek egy hosszúsági körön vannak, és számítsuk ki a távolságukat!

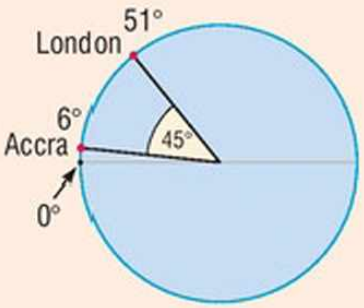


*5. példa

Az afrikai Accra városa a 0°-os hosszúsági körön és a 6°-os szélességi körön fekszik. London ugyanezen a hosszúsági körön az 51°-os szélességi körön fekszik. Milyen távol vannak egymástól, ha a Földet gömbnek tekintjük, és az Egyenlítő hossza 40 000 km?

Megoldás

A hosszúsági körök és az Egyenlítő is a földgömbnek a középpontján átmenő síkmetszetei. Rajzoljuk le a 0°-os hosszúsági kört, amelynek kerülete megegyezik az Egyenlítő hosszával! Mivel a szélességi körök közti különbség 45°, ami a 360° nyolcadrésze, így a két város közti távolság is az Egyenlítő hosszának nyolcadrésze, azaz 5000 km.



Feladatok

1. Mi a nevük azoknak a geometriai testeknek, amelyek a fotókon látható tárgyaknak feleltethetők meg?







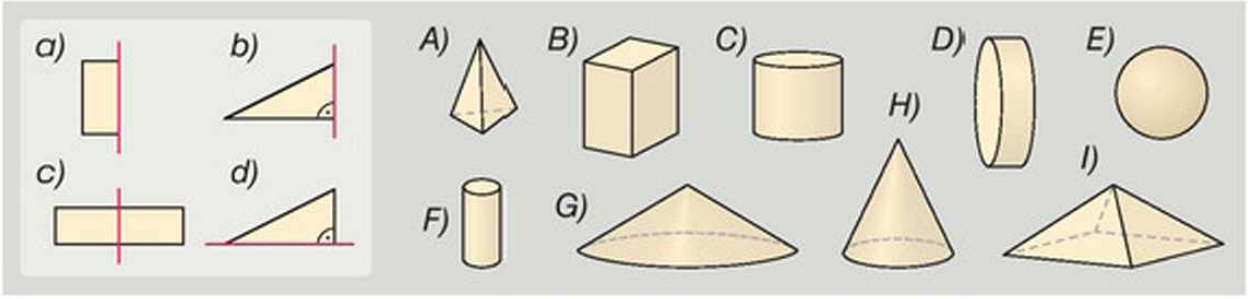
2. Milyen geometriai formákat fedezhetünk fel a képeken látható épületeken?





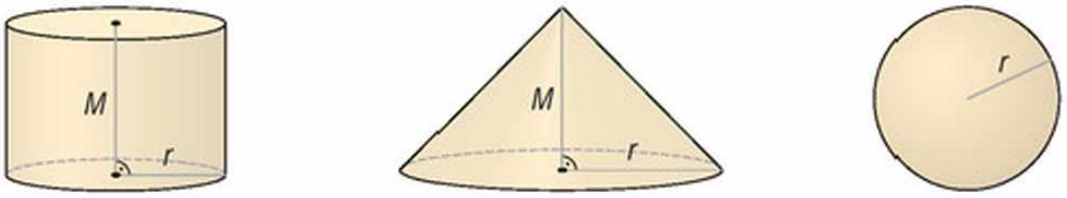

3. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis!
   a) Van olyan gúla, amelynek minden lapja háromszög.
   b) Minden kocka téglatest.
   c) Van olyan kocka, amelyik nem téglatest.
   d) Minden négyszög alapú hasáb téglatest.
   e) Van olyan hasáb, amelynek minden lapja téglalap.

4. Válasszuk ki, melyik testet kapjuk a betűkkel jelölt testek közül, ha az ábrán látható síkidomot a pirossal jelölt egyenes körül megforgatjuk!



5. Szerkesszünk olyan síkidomot, amelyet egy egyenes körül megforgatva az alábbi testet kapjuk! (A megfelelő egyenest jelöljük pirossal!) Ahol lehet, keressünk több megoldást!

a) $r = 3$ cm; $M = 4$ cm; *b)* $r = 35$ mm; $M = 4$ cm; *c)* $r = 4$ cm.

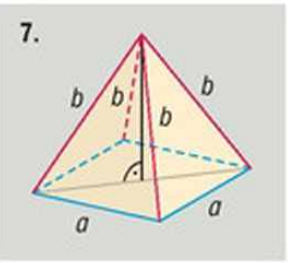


6. Egy négyzet alapú gúla oldallapjai egybevágó háromszögek. Hogyan vágjuk egy síkkal ketté a gúlát, hogy a keletkezett síkmetszet

a) négyzet; *b)* trapéz (de nem négyzet); *c)* háromszög;
d) ötszög; *e)* hatszög legyen?

7. Egy négyzet alapú gúla minden oldaléle egyforma hosszúságú. Mekkorák az oldalélek, ha

a) a gúla alapjának átlója 6 cm, a test magassága pedig 4 cm;
b) a gúla alapéle $4\sqrt{2}$ cm, a test magassága pedig 3 cm;
c) a gúla alaplapjának kerülete 5,64 cm, a test magassága pedig 5 cm? (➡)



8. Egy derékszögű háromszög két befogója 5 cm és 12 cm. A háromszöget megforgatjuk az 5 cm-es befogója körül. Mekkora a keletkezett kúp magassága, alkotója, alapkörének átmérője?

9. A Kilimandzsáró és Szingapúr az Egyenlítő közelében helyezkednek el úgy, hogy hosszúsági köreik közti különbség kb. 60°. Becsüljük meg a távolságukat, ha a Földet gömbnek tekintjük, és az Egyenlítő 40 000 km hosszú!

Rejtvény

Készítsük el gyöngyökből az ábrán látható 4 darabot! Szükséges eszközök: 20 db gyöngy, 6 db fogpiszkáló, ragasztó. Állítsunk össze belőlük egy tetraédert!



2. Nézzük több oldalról!



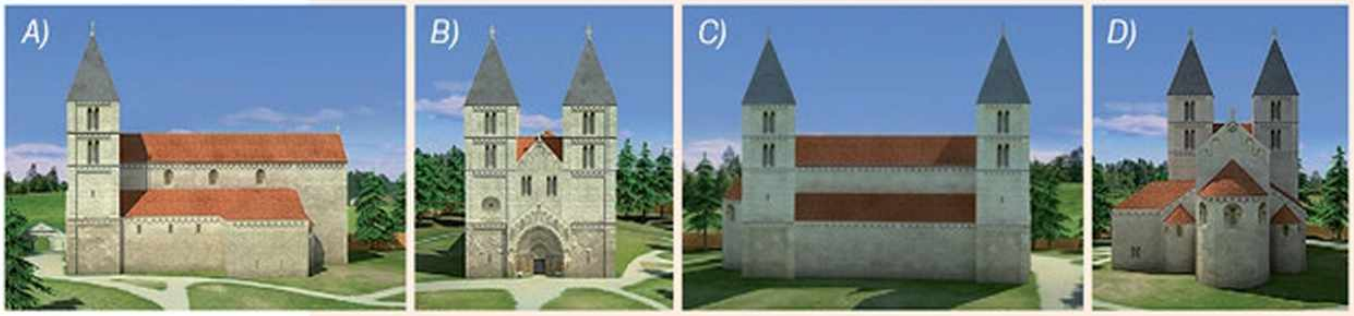
1. példa

Három különböző pontból nézve készültek a fenti képek a jáki bencés apátságról.

a) Rajzoljuk be a felülnézeti rajzba a nézőpontokat a megfelelő számokkal!

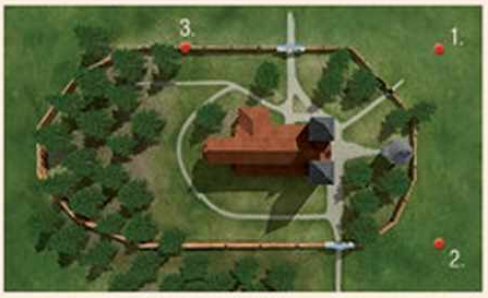
b) Az alábbi nézetek közül melyek nem lehetnek a jáki bencés apátság nézetei?





Megoldás

a) A nézőpontok helye: ➡



b) Az *(A)* a jobb oldali nézet kellene legyen a torony miatt, akkor viszont hiányzik a főhajó apszisa és az oldalkapu.

A *(B)* elölnézeti képről hiányzik a jobb oldali kiugró rész.

A *(C)* nem lehet egyik nézet sem, mert csak elöl van tornya az apátságnak.

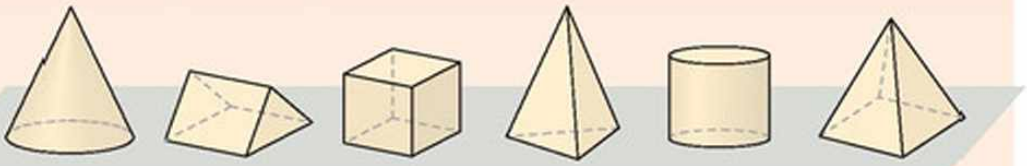
A *(D)* az apátság hátulnézeti képe.

Tehát az *(A)*, *(B)* és *(C)* nem lehetnek az apátság nézetei.

apszis: félkör alakú szentély

2. példa

Zsófi és Botond kirakják az asztalra a képen látható hat testet. Botond ezek közül gondol egyre.



Zsófi kérdései és Botond ezekre adott igaz válaszai a következők:

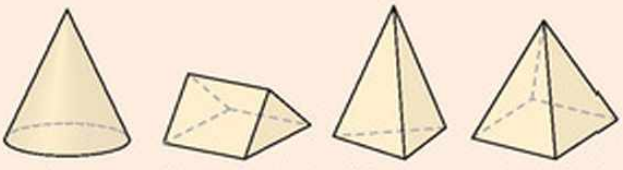
Zsófi kérdései	*Botond válaszai*
1. Elölnézete háromszög?	Igen.
2. Oldalnézete háromszög?	Igen.
3. Felülnézete sokszög?	Nem.

Botond minden válasza után soroljuk fel azokat a testeket nevükkel együtt, amelyek bármelyike lehetne a Botond által gondolt test!

Megoldás

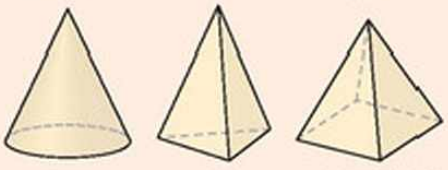
A test elölnézete háromszög, ezért nem lehet a kocka és a henger.

A megmaradt testek:



A test oldalnézete is háromszög, ezért nem lehet a háromszög alapú hasáb.

A megmaradt testek:



A test felülnézete nem háromszög és nem is négyzet, ezért nem lehet a háromszög alapú gúla és a négyzet alapú gúla sem.

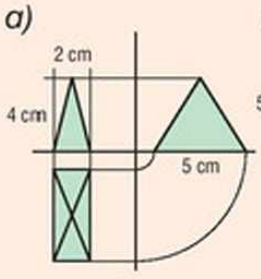
Tehát Botond a kúpra gondolt.



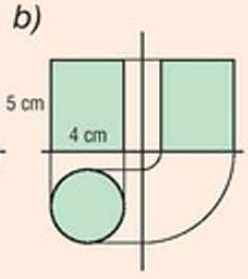
3. példa

Egy fajátékkészítő a megrendelőtől az alábbi rajzokat kapta. Határozzuk meg, milyen testeket ábrázoltak a nézeteivel, és azoknak mely adatai olvashatók le az ábráról!

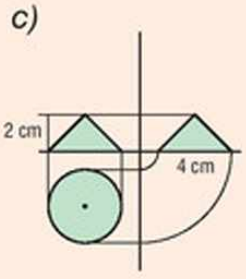
a)



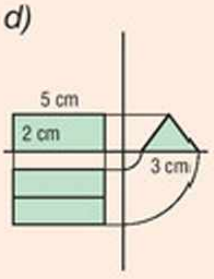
b)



c)



d)





Barkochbázzunk az ábrán látható testekkel! Játsszunk hazudós barkochbát is!

Tetraéder:
Elölnézete: háromszög
Oldalnézete: háromszög
Felülnézete: háromszög

Kúp:
Elölnézete: háromszög
Oldalnézete: háromszög
Felülnézete: kör

Megoldás

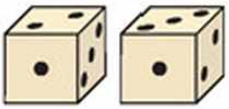
a) Két nézete háromszög, egy téglalap: téglalap alapú gúla.
Az alaplap oldalai: 2 cm és 5 cm.
A gúla magassága: 4 cm.

b) Két nézete téglalap, egy kör: henger.
Az alapkör átmérője: 4 cm.
A henger magassága: 5 cm.

c) Két nézete háromszög, egy kör: kúp.
Az alapkör átmérője: 4 cm.
A kúp magassága: 2 cm.

d) Két nézete téglalap, egy háromszög: háromszög alapú hasáb.
A háromszög alakú alaplap egyik oldala 3 cm, és ehhez az oldalhoz tartozó magassága 2 cm.
A hasáb magassága: 5 cm.

Figyeljük meg, hogy mi a különbség a képen látható szabályos dobókockák között!

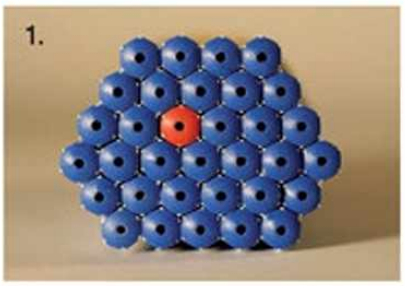


Érdekesség

Az egyiptomi szobrászok a hasáb alakú kő lapjaira felrajzolták az alakok nézeteit, és ez alapján faragták ki a szobrokat. Így születtek a mereven előrenéző, mozdulatlanságot sugárzó alakok.

Feladatok

1. Miket ábrázolhatnak az alábbi képek?







2. Milyen lehet az alábbi épületek felülnézete és oldalnézete? Próbáljuk lerajzolni!

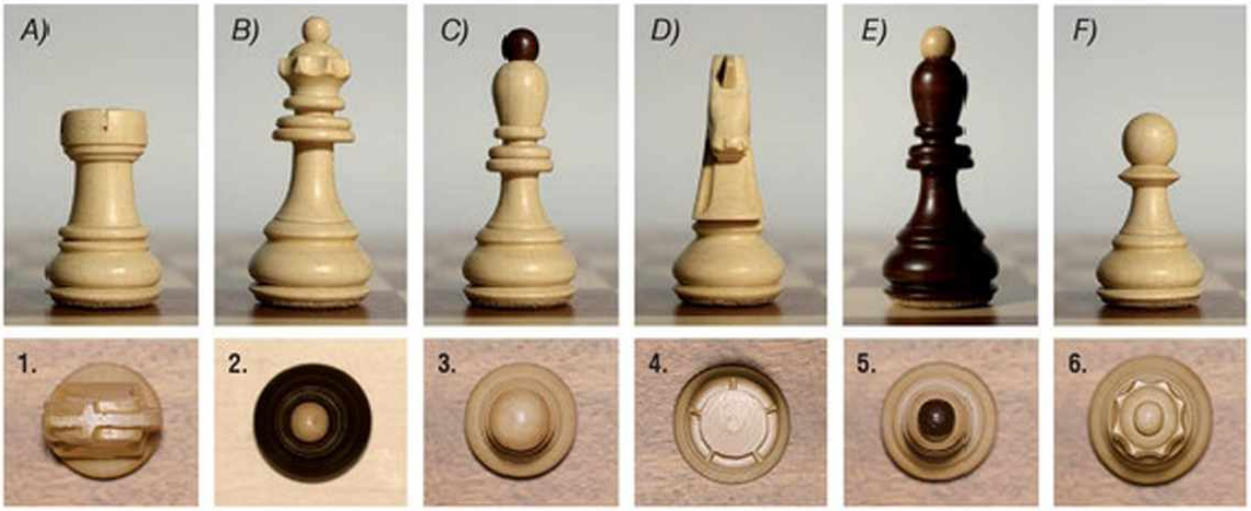






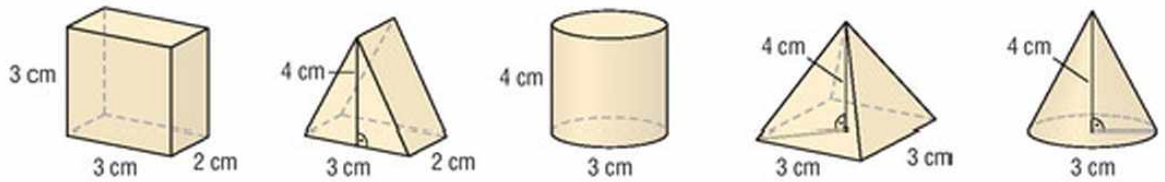


3. Sakkfigurák elöl- és felülnézeteit összekevertük. Párosítsuk azokat a képeket, amelyek ugyanazt a sakkfigurát ábrázolják! Milyen lehet a figurák oldalnézete?



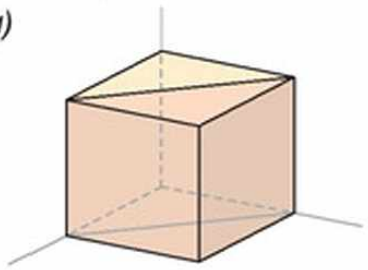
4. Rakjunk egy zsákba 3-3 egybevágó négyzetet, háromszöget és kört! Húzzunk egymás után 3 darabot! Rajzoljunk olyan testet, amelynek ez a 3 lap a három nézete! Ha szükséges, a kihúzott darabok közül egyet egy tetszés szerinti lapra kicserélhetünk a zsákból.

5. A következő testekből építsünk tornyokat, és rajzoljuk le a nézeteiket!

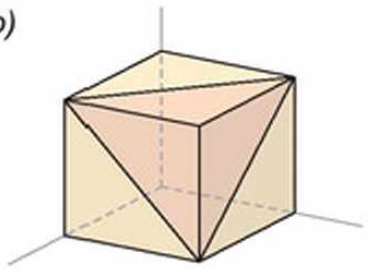


6. A rajzokon látható kockák sötéttel jelölt részeit levágjuk. Rajzoljuk le a megmaradt testek elöl-, oldal- és felülnézetét!

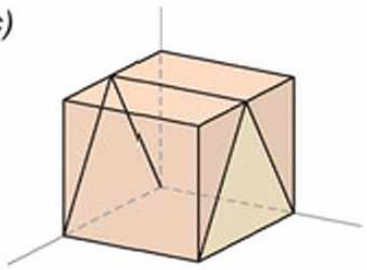
a)



b)



c)



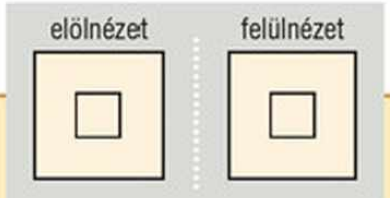
***7.** Két kék kockából és valamennyi sárga kockából egy nagy téglatestet építünk. A kockák egyforma méretűek.

a) Legfeljebb hány lap lesz csupa sárga, ha 25 sárga kockánk van?

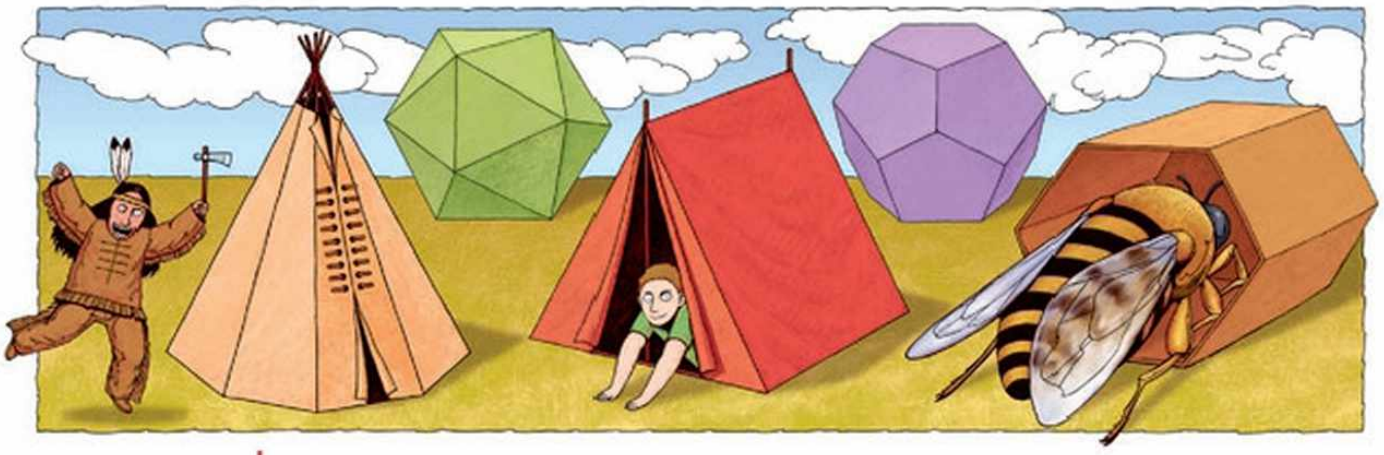
b) Legkevesebb hány sárga kocka szükséges ahhoz, hogy a keletkezett téglatest minden lapja csupa sárga legyen?

Rejtvény

Rajzoljuk le annak a testnek az oldalnézetét, amelynek elölnézete és felülnézete az ábrán látható!

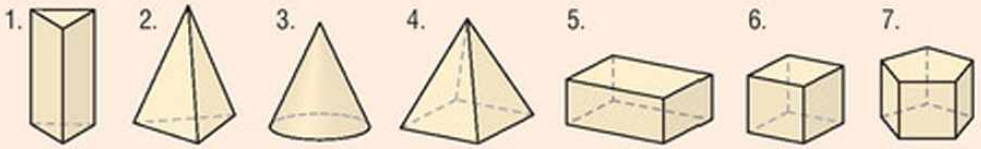


3. Csúcsok, élek, lapok



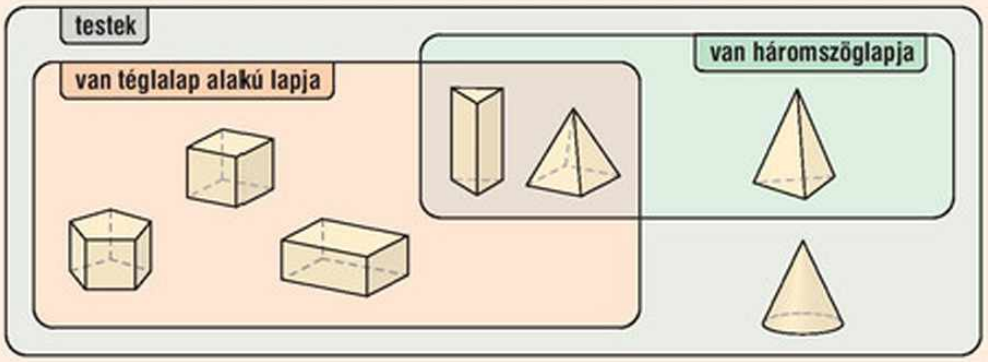
1. példa

Készítsünk halmazábrát a „Van téglalap alakú lapja” és a „Van háromszöglapja” halmazokkal, és helyezzük el az alábbi testeket!



1. Háromszög alapú hasáb;
2. tetraéder;
3. kúp;
4. négyzet alapú gúla;
5. téglatest;
6. kocka;
7. ötszög alapú hasáb.

Megoldás





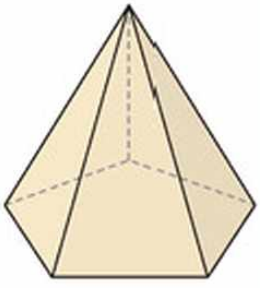
2. példa

Hány lapja, éle, csúcsa van egy ötszög alapú gúlának?

Megoldás

Az ötszög alapú gúlának

- 1 ötszög alakú alaplapja és 5 háromszög alakú oldallapja, vagyis összesen 6 lapja van.
- az alaplapon 5 éle van, az alaplapján kívüli csúcsát 5 oldalél köti össze az alaplap csúcsaival, így $2 \cdot 5 = 10$ éle van.
- az alaplapon 5, azon kívül 1 csúcsa van, így csúcsainak száma 6.



	Háromszög alapú gúla	Négyszög alapú gúla	Hatszög alapú gúla	Nyolcszög alapú gúla
				
Lapok száma	4	5	7	9
Élek száma	6	8	12	16
Csúcsok száma	4	5	7	9

Általában egy n szög alapú gúla ($n \geq 3$)

- lapjainak száma: $n + 1$;
- éleinek száma: $2n$;
- csúcsainak száma: $n + 1$.

***3. példa**

Építsünk testeket szabályos háromszögekből!
Számoljuk össze az élek, lapok, csúcsok számát!

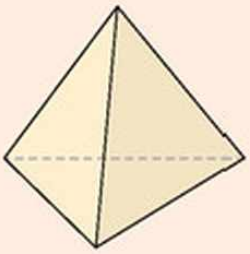
a) Legkevesebb hány lap találkozhat egy csúcsban?
b) Építsünk testet, amelynek minden csúcsában 3 lap találkozik!
c) Építsünk testet, amelynek minden csúcsában 4 lap találkozik!
d) Legfeljebb hány szabályos háromszöglap találkozhat egy csúcsban?

Csoportokban készítsük el a testeket!

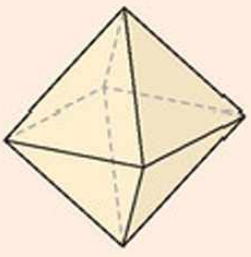
Megoldás

a) Sokszöglapokból csak úgy lehet testet építeni, ha minden csúcsban legalább 3 lap találkozik.

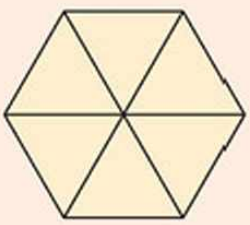
b) Ha a test minden csúcsában 3 szabályos háromszöglap találkozik, akkor a **szabályos tetraédert** kapjuk.
Lapok száma: 4; élek sz.: 6; csúcsok sz.: 4.

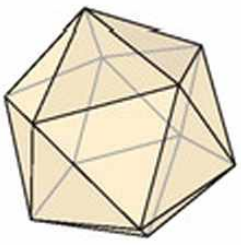


c) Ha a test egy csúcsában 4 szabályos háromszöglap találkozik, akkor egy négyzet alapú gúla oldallapjait kapjuk. Két ilyet összeépítve pedig olyan testet kapunk, melynek minden csúcsában 4 lap találkozik, ez az **oktaéder.**
Lapok száma: 8; élek sz.: 12; csúcsok sz.: 6.



d) A szabályos háromszög minden szöge 60°. Ha 6 darab szabályos háromszöglapot illesztünk egy csúcsba, akkor a szögek összege 360°, így a háromszögek egy síkban vannak, nem alkothatnak testet. 6-nál kevesebb szabályos háromszög találkozhat egy csúcsban, tehát legfeljebb 5 lap találkozhat.





Az ikozaéder olyan test, melynek minden csúcsában pontosan 5 háromszöglap találkozik.



Szabályos testeknek nevezzük azokat az egybevágó szabályos sokszöglapokkal határolt konvex testeket, amelyek minden csúcsában ugyanannyi lap találkozik.

Érdekesség

A szabályos testek a lapok számáról kapták a nevüket. (kocka = hexaéder)
tetra = 4
hexa = 6
okta = 8
dodeka = 12
ikoza = 20

Csak ötféle szabályos test létezik. Ezek közül hármat, a **szabályos tetraédert,** az **oktaédert** és az **ikozaédert** szabályos háromszögek határolják. Négyzetlapokkal határolt szabályos test egy van, a **kocka.** Ötszöglapokkal határolt szabályos test is egy van, a **dodekaéder,** amelyet 12 lap határol.

Így az 5 szabályos test:

	tetraéder	oktaéder	ikozaéder	kocka	dodekaéder
Lapok száma	4	8	20	6	12
Lapok fajtája	sz. háromszög	sz. háromszög	sz. háromszög	négyzet	sz. ötszög
Élek száma	6	12	30	12	30
Csúcsok száma	4	6	12	8	20
Egy csúcsból induló élek száma	3	4	5	3	3

Keressünk összefüggést a lapok, az élek és a csúcsok száma között!



4. példa



Focilabdát készítünk 20 darab fehér szabályos hatszögből és 12 fekete szabályos ötszögből.

a) Hány lapja, éle, csúcsa van a focilabdának?

b) Keressünk összefüggést a focilabda ötszög- és hatszöglapjai száma között!

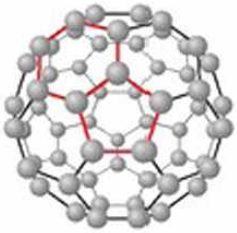
Megoldás

a) A focilabdának összesen $20 + 12 = 32$ lapja van.

A hatszögeknek $6 \cdot 20 = 120$ oldala, az ötszögeknek $5 \cdot 12 = 60$ oldala van, ez összesen 180 sokszögoldal. Minden élben két sokszögoldal találkozik, így az élek száma: $180 : 2 = 90$.

A test minden élének két vége van, ez összesen 180 élvég.
A focilabda minden csúcsában 3 élvég találkozik, így a csúcsok száma: $180 : 3 = 60$.

Tehát a focilabdának 32 lapja, 90 éle és 60 csúcsa van.



A 60 szénatomból álló fullerénmolekula alakja a futballabdához hasonló.

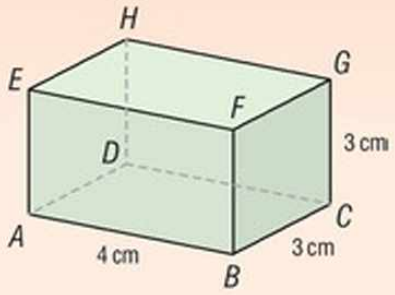
b) Figyeljük meg, hogy a focilabda minden ötszöglapjának 5 darab hatszöglap szomszédja van, és minden hatszöglapnak 3 darab ötszöglap szomszédja van! Ezért ha az ötszöglapok számának 5-szörösét vesszük, minden hatszöglapot 3-szor számoltunk, tehát az ötszöglapok számának $\frac{5}{3}$-szorosa a hatszöglapok száma.

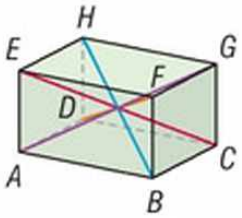
5. példa

Egy téglatest éleinek hossza 3 cm, 4 cm és 3 cm.

a) Mennyi az élek, lapátlók, testátlók számának összege?

b) Milyen hosszúságúak a téglatest lapátlói és testátlói?





A téglatest testátlói

Megoldás

a) 1. megoldás

A téglatestnek 12 éle van. Mind a 6 lapjának 2 lapátlója van, így összesen 12 lapátlója van. A téglatest 4 testátlója: AG, BH, CE, DF. Tehát az élek, lapátlók és testátlók számának összege:

$$12 + 12 + 4 = 28.$$

él: 12
lapátló: 12
testátló: 4
összes: 28

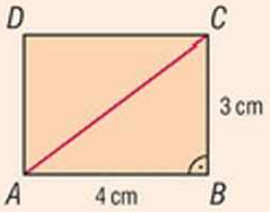
2. megoldás

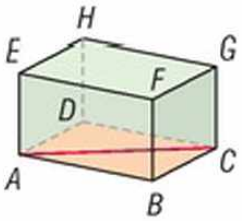
A téglatestben az élek, lapátlók és testátlók számának összege annyi, ahány szakasz húzható a téglatest 8 csúcsa között. Mind a 8 csúcsot 7 másikkal köthetjük össze, ez $8 \cdot 7$ szakasz lenne. Ekkor minden szakaszt kétszer számoltunk volna, mert mindkét végpontjánál megszámoltuk, így a szakaszok száma: $(8 \cdot 7) : 2 = 28$.

$$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

b) A téglatest négy lapja: $ABCD$, $EFGH$, $ABFE$ és $DCGH$ egybevágó. Ezek lapátlói egyenlőek, és a Pitagorasz-tétel alapján számolhatók:

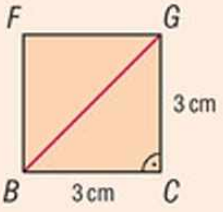
$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$
$$4^2 + 3^2 = AC^2$$
$$AC^2 = 16 + 9 = 25$$
$$AC = 5 \text{ (cm)}$$

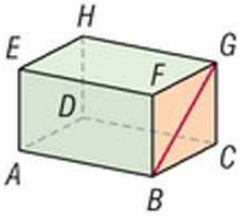




A $BCGF$ és az $ADHE$ lapok átlói:

$$BC^2 + CG^2 = BG^2$$
$$3^2 + 3^2 = BG^2$$
$$BG^2 = 9 + 9 = 18$$
$$BG = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4{,}23$$



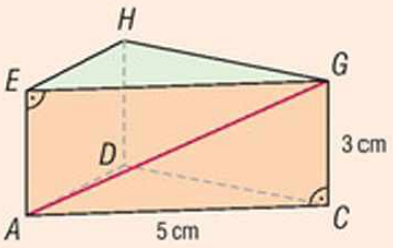


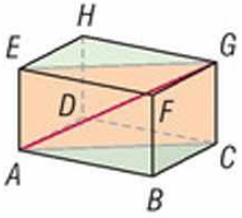
A téglatest $BCGF$ és $ADHE$ lapjainak átlói 4,23 cm hosszúságúak.

Vágjuk ketté a téglatestet egy síkkal, amely merőleges az $EFGH$ lapra, és átmegy az EG átlón! Erre a síkra illeszkedik az $ABCD$ lap AC átlója is. Így az $ACGE$ síkmetszet téglalap, melynek átlója a téglatest testátlója.

A Pitagorasz-tétel alapján:

$$AC^2 + CG^2 = AG^2$$
$$5^2 + 3^2 = AG^2$$
$$AG^2 = 25 + 9 = 34$$
$$AG = \sqrt{34} \approx 5{,}83$$





Tehát a téglatest testátlója 5,83 cm.



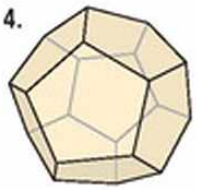
Feladatok

1. Rajzoljuk le a gúlát, és számoljuk meg, hány lapja, csúcsa van, ha a gúla éleinek száma:
   a) 6; *b)* 8; *c)* 12; *d)* 15!

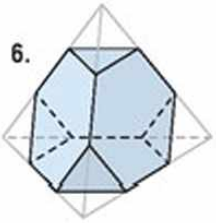
2. Építsünk gúlákat szabályos háromszögekből egy kocka minden lapjára! (A szabályos háromszög oldala ugyanolyan hosszúságú, mint a kocka éle.) Hány lapja, éle, csúcsa van a kapott testnek?

3. Készítsük el egy szabályos tetraéder élvázát egy 36 cm hosszú drótszálból!
   a) Milyen hosszúságú a tetraéder egy éle?
   **b)* Legkevesebb hány helyen kell elvágni a drótszálat?

4. Hány éle, csúcsa van a 12 szabályos ötszöglapból álló dodekaédernek, amelynek minden csúcsában 3 lap találkozik? (➡)



5. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
   a) A sokszöglapokból álló testek minden éle pontosan két lapot határol.
   b) Van olyan sokszöglapokból álló test, amelynek 4-nél kevesebb lapja van.
   c) Van olyan nem szabályos test, amelynek minden lapja szabályos háromszög.

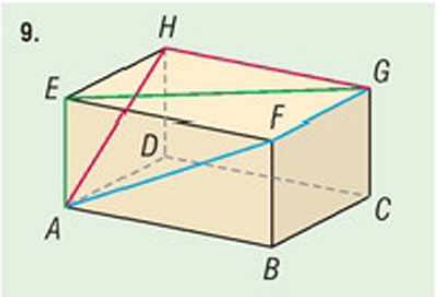


6. Vágjunk le tetraédereket egy tetraéderből az élei harmadolópontjain keresztül! Hány lapja, éle, csúcsa lesz a megmaradt testnek? (➡)

7. Számítsuk ki a kocka lapátlóinak és testátlóinak hosszát, ha a kocka élének hosszúsága:
   a) 1 m; *b)* 5 dm; *c)* 100 mm!

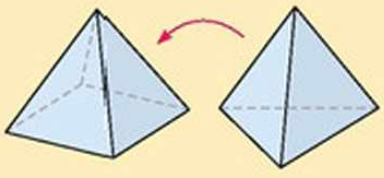
8. Hányféle hosszúságú lehet a téglatest két csúcsa közötti távolság? Számítsuk ki az összes lehetséges távolságot, és állítsuk őket növekvő sorrendbe, ha a téglatest élei:
   a) 1 cm; 2 cm; 3 cm; *b)* 5 cm; 12 cm; 20 cm; *c)* $\sqrt{6}$ cm; $\sqrt{10}$ cm; 3 cm!

9. Egy villanyszerelőnek egy szoba A sarkából az átellenes G sarokba kell a falon vezetéket húznia. (➡)
   a) Melyik a legrövidebb az ábrán különböző színnel jelölt lehetőségek közül, ha a téglatest alakú szoba méretei: $AB = 8\,\text{m}$; $BC = 6\,\text{m}$; $AE = 3\,\text{m}$?
   b) Lehetséges-e a szoba falán az előzőeknél rövidebb vezetéket húzni A és G között?

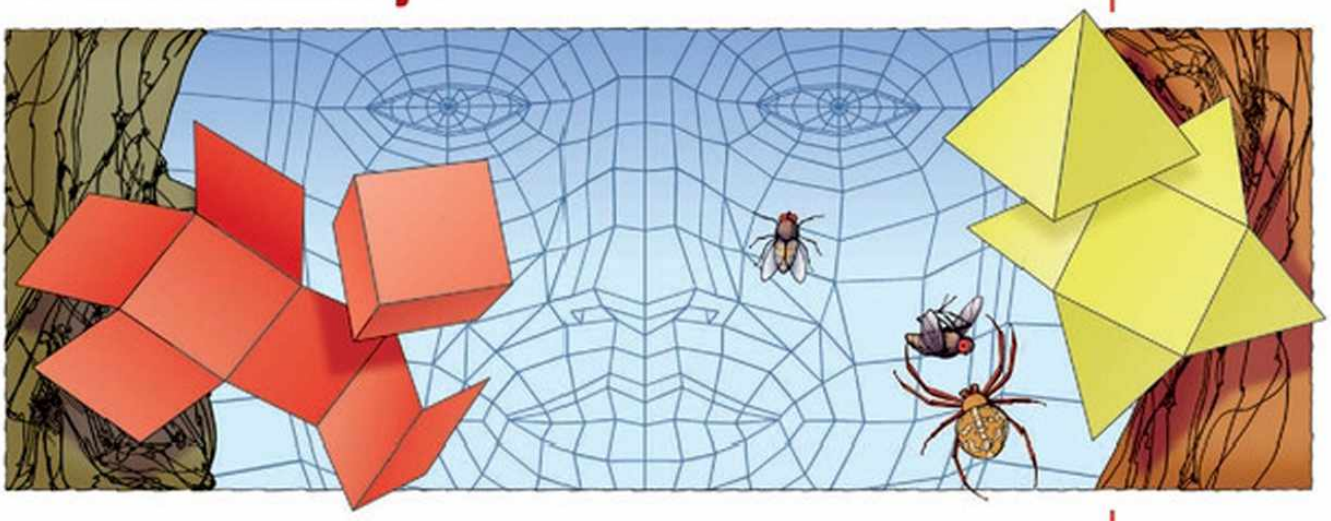


Rejtvény

Egy négyzet alapú szabályos gúla oldallapjai szabályos háromszögek. A gúla egy oldallapjára szabályos tetraédert ragasztunk, melynek lapja pontosan illeszkedik a gúla lapjára. Hány lapja, éle, csúcsa lesz a kapott testnek?



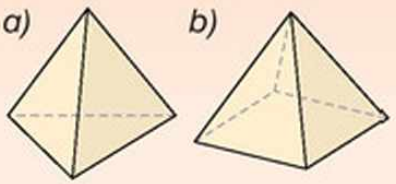
4. Testek hálója



1. példa

Vágjuk fel az ábrán látható, papírból készült testek felületét néhány élük mentén úgy, hogy azok kiteríthetők legyenek!

Rajzoljuk le az így kapott hálókat, és számoljuk meg, hogy hány élt kellett felvágni!



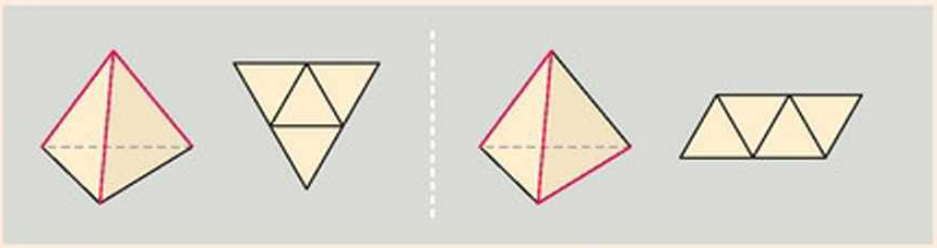
szabályos tetraéder

négyzet alapú szabályos gúla

Van-e olyan test, amelynek a felületét nem lehet síkba kiteríteni?

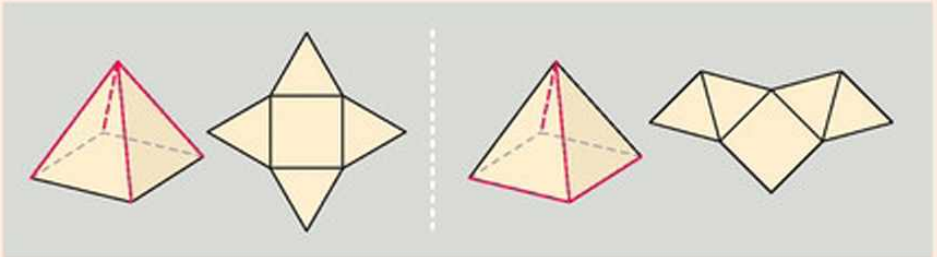
Megoldás

a) A szabályos tetraéder pirossal jelölt éleit felvágva kapott háló:



A hálón a 4 háromszög 3 élben kapcsolódik egymáshoz, így a tetraéder kiterítéséhez a 6 éle közül 3-at kellett felvágni.

b) A négyzet alapú szabályos gúla jelölt éleit felvágva kapott háló:



A hálón az 5 lap 4 élben kapcsolódik egymáshoz, így a gúla kiterítéséhez a 8 éle közül 4-et kellett felvágni.

Keressünk további hálókat!

A testek elnevezéseit a tömör testekre és a testek felületére is szoktuk használni.

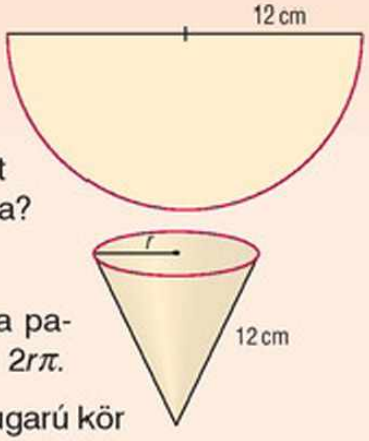
Papírból készült testek esetén valójában a testek felületét készítjük el.

Ha a testek síkmetszetéről van szó, akkor a testek értelemszerűen tömörek.

A kúp palástja kiterítve körcikk, az ívhossza egyenlő az alapkör kerületével.

2. példa

Készítsünk papírtölcsért egy 12 cm sugarú félkörből úgy, hogy az átmérő két végpontját összeillesztjük, és a sugár mentén leragasztjuk! Így egy kúp palástját kapjuk. Mekkora a kúp alapkörének sugara?



Megoldás

A kúp alapkörének kerülete megegyezik a palást ívének hosszával. Az alapkör kerülete: $2r\pi$.

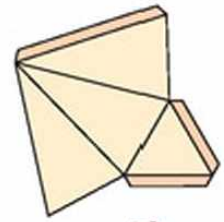
A palástot alkotó félkör ívhossza a 12 cm sugarú kör kerületének a fele: $\frac{2 \cdot 12\pi}{2}$. Ez egyenlő a kúp alapkörének kerületével.

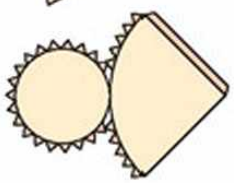
$$2r\cancel{\pi} = 12\cancel{\pi} \Rightarrow r = 6 \text{ (cm)}.$$

Tehát a kúp alapkörének sugara 6 cm.

Papírból készült testeknél figyeljünk arra, hogy hagyjunk olyan „füleket”, amelyekkel összeragaszthatjuk a hálót!

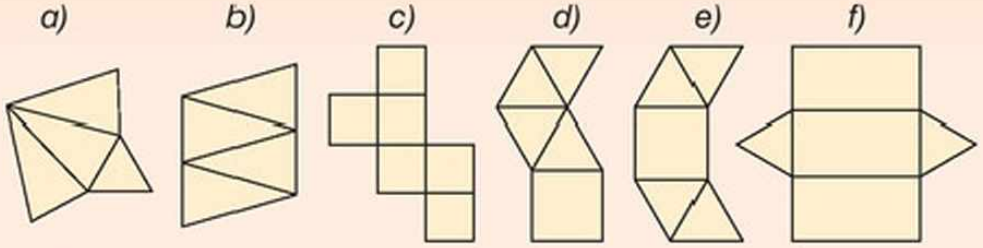
Például:





3. példa

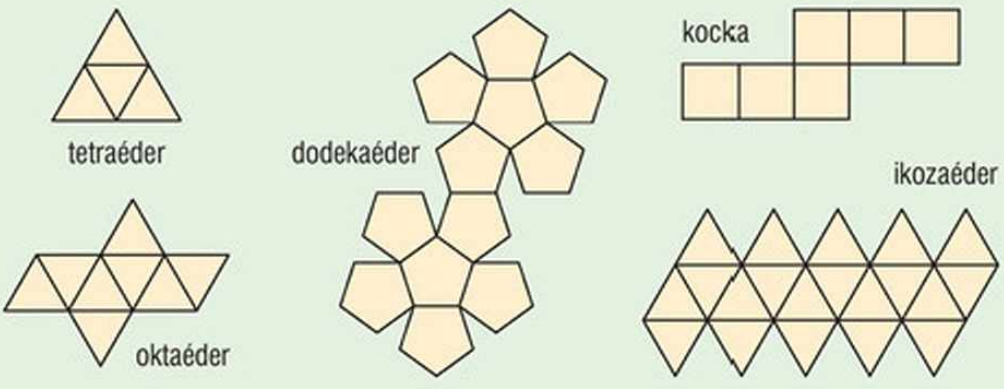
Milyen testet kapunk, ha az ábrán látható hálókat összehajtogatjuk?



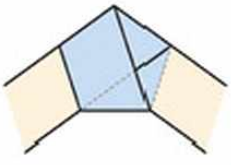
Megoldás

a) Háromszög alapú gúlát kapunk.
b) Nem lehet testté összehajtani.
c) Kockát kapunk.
d) Négyzet alapú gúlát kapunk.
e) Két háromszög egymásra hajlik, nem lehet belőle testet hajtogatni.
f) Háromszög alapú hasábot kapunk.

Szabályos testek egy-egy hálóját mutatja az ábra:

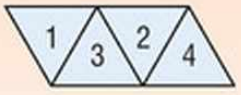


Szabályos ötszöget kapunk, ha egy papírcsíkot megcsomózunk.



4. példa

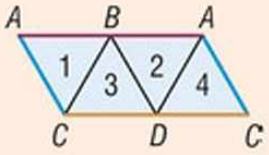
Az ábrán látható hálót összehajtjuk, majd a kapott test minden csúcsához odaírjuk a csúcsban találkozó lapokra írt számok összegét. Mely számokat írjuk a csúcsokhoz?



Készítsük el papírból a hálót, és hajtsuk össze!

Megoldás

A háló összehajtásával egy tetraédert kapunk. Az ábrán azonos színnel jelöltük az egymáshoz illeszkedő oldalakat, és megbetűztük a csúcsokat. A tetraéder minden csúcsában 3 lap találkozik.

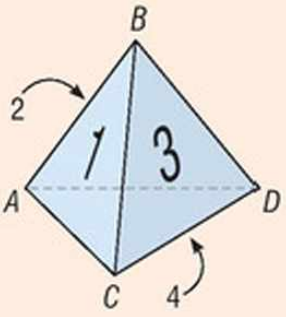


Az A csúcsban találkozó lapokon a számok összege: $1 + 2 + 4 = 7$.

A B csúcsnál: $1 + 3 + 2 = 6$.

A C csúcsnál: $4 + 1 + 3 = 8$.

A D csúcsnál: $3 + 2 + 4 = 9$.



Kutatás

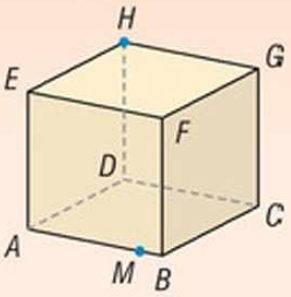
Hajtogassunk papírból tetraédert úgy, hogy ne kelljen ragasztani! Keressünk módszereket az interneten!

A tetraéder minden csúcsában három lap találkozik. A tetraéder bármely 3 lapja találkozik csúcsban.

*5. példa

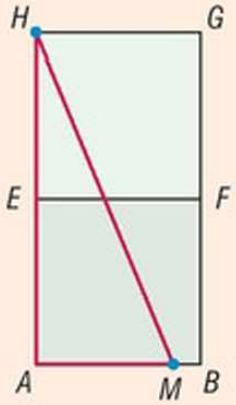
Egy 6 cm élhosszúságú kocka alakú átlátszó doboz felületén sétál egy hangya. Amikor a H csúcsba ér, a doboz AB élén, a B csúcstól 1 cm-re megpillant egy morzsát.

Milyen hosszú az a legrövidebb út, amelyen haladva a hangya eléri a morzsát (M)?



Megoldás

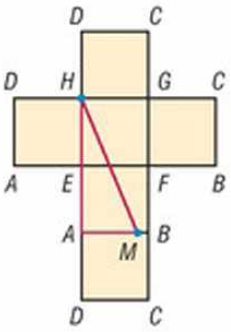
A doboz hálóján a hangya és a morzsa közti legrövidebb út az őket összekötő egyenes szakasz.

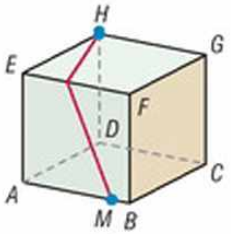


A HAM derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$HA^2 + AM^2 = HM^2$$
$$12^2 + 5^2 = HM^2$$
$$HM^2 = 144 + 25 = 169$$
$$HM = \sqrt{169} = 13$$

Tehát a hangya legrövidebb útja a morzsához 13 cm hosszú.



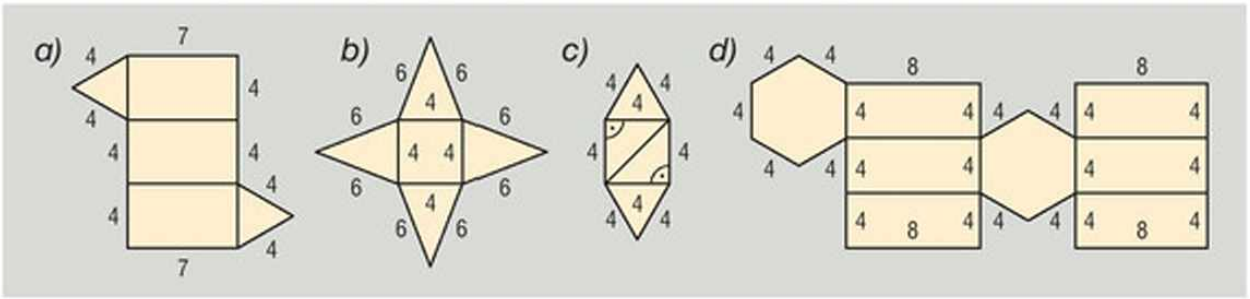


Projekt

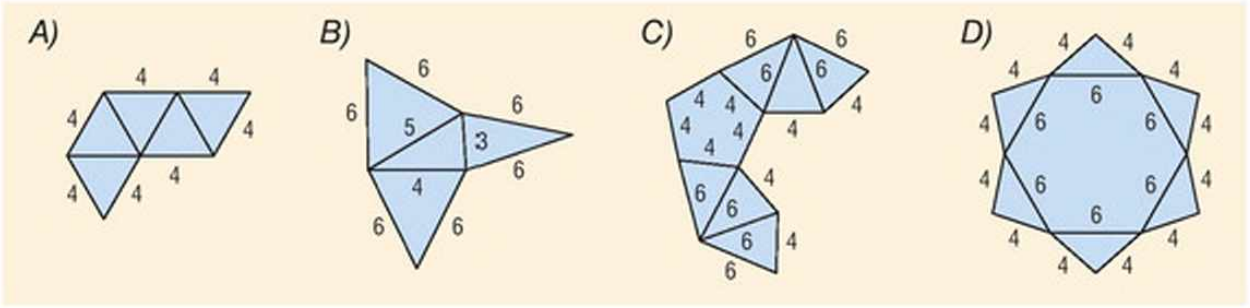
Készítsük el egy falu makettjét! Legyen vár, templom, malom és különféle alakú háztetők!

Feladatok

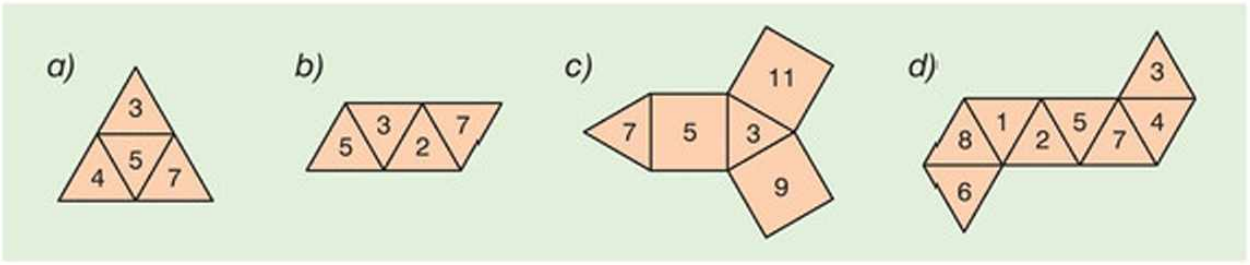
1. Készítsük el és rajzoljuk le azokat a testeket, melyeket az ábrán látható hálókból lehet összeállítani! Jelöljük a rajzon, mely éleket kellett összeragasztani!



2. Válasszuk ki az ábrán látható hálók közül azokat, amelyekből gúlát lehet hajtogatni!

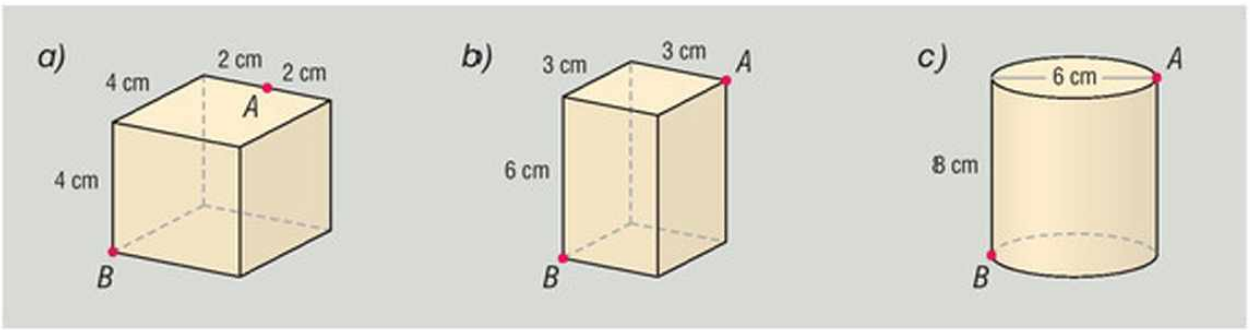


3. Az ábrán látható hálókat összehajtva testeket kapunk. Minden csúcsba beírjuk a csúcsban találkozó lapokon levő számok szorzatát. Mi lesz a legnagyobb szorzat?



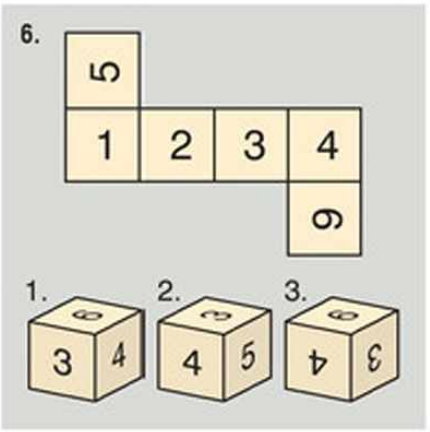
4. Szerkesszük meg annak a négyzet alapú szabályos gúlának egy hálóját, amelynek alapéle 7 cm, oldaléle 9 cm! Vágjuk ki kartonból (a megfelelő helyekre tervezzünk füleket), és ragasszuk össze!

5. Milyen hosszú a legrövidebb út az ábrán látható testek felületén, amely az *A* pontból a *B*-be vezet?





6. Melyik kockát kaphattuk az ábrán látható háló összehajtásával? (A számok állása is számít.) (➡)

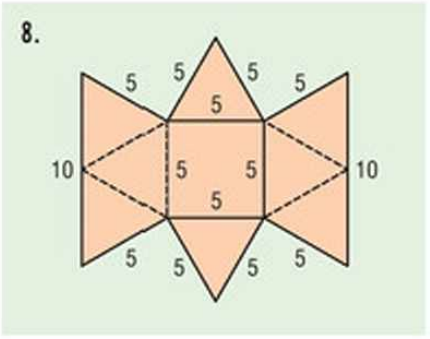


7. Egy háromszög alapú gúla, egy négyszög alapú gúla és egy kocka lapjait színezzük úgy, hogy a szomszédos lapok különböző színűek legyenek! (egy lap egyszínű)

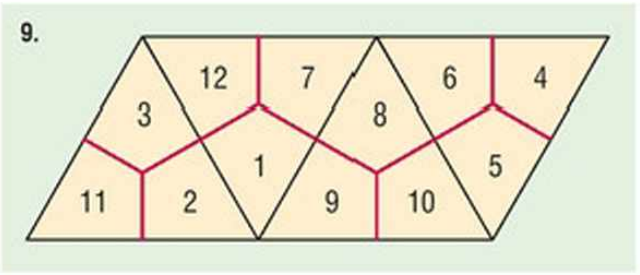
a) Rajzoljuk le egy hálójukat!

b) Legkevesebb hány szín szükséges az egyes testek lapjainak színezéséhez?

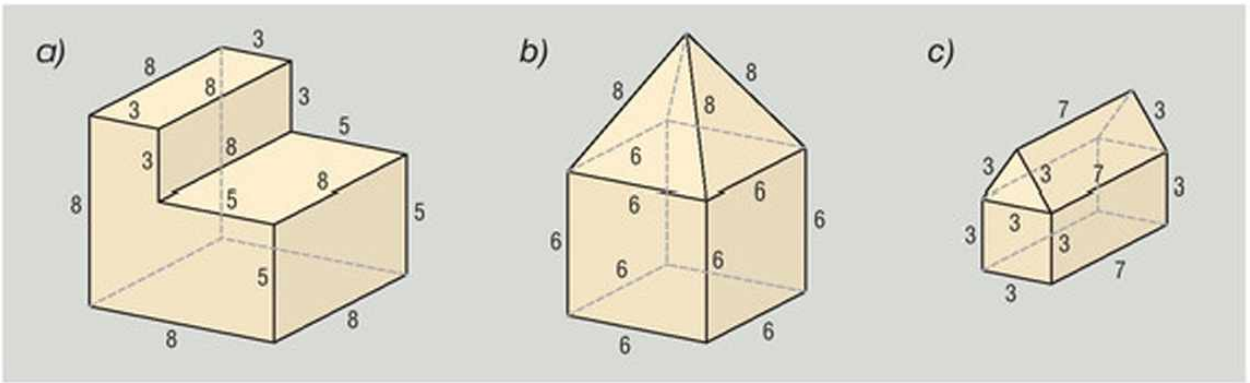
8. Készítsünk el két darabot az ábrán látható hálóból, amely egy négyzetből, két szabályos háromszögből és két trapézból áll. Ragasszuk össze testté! (A megfelelő helyekre tervezzünk füleket!) A kapott testeket egymáshoz illesztve állítsunk elő tetraédert! (➡)



9. Az ábrán látható hálón a piros vonalak egy tetraéder felületére rajzolt labirintus átjárhatatlan falait mutatják. Keressünk olyan utat a labirintusban, amely a tetraéder felületén az 1-esről a 11-esre vezet! (➡)

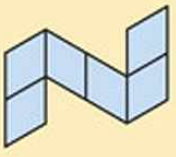


10. Rajzoljuk le az ábrán látható testek egy hálóját!



Rejtvény

A rajzon látható hálót 6 egybevágó rombusz alkotja, amelyek szögei 60 és 120 fokosak. Hajtsuk össze a hálót egy testté! Melyik az a három szabályos test, amelyekre ez a test szétvágható?



5. Testek felszíne



A síklapok által határolt testek felszíne a határoló lapok területének összege.

Mérjük meg egy tojás felszínét! (Előtte végezzünk becslést!)

1. példa

Két egyforma téglatest alakú dobozt együtt csomagolunk be. Hogyan rakjuk egymás mellé a dobozokat, hogy a csomagoláshoz a legkevesebb papírra legyen szükség, ha egy doboz hosszúsága és szélessége is 20 cm, magassága 12 cm? (A csomagolásnál egy réteg papírral számoljunk a téglatest alakú csomag felületén!)

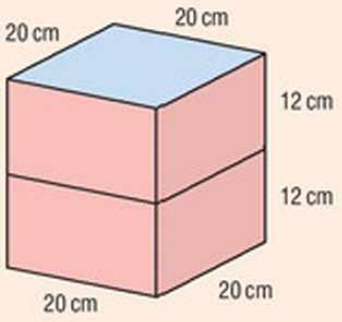
Rajzoljunk olyan lehetőségeket a dobozok összerakására, amelyek nem téglatestek!

Van-e köztük olyan, amelynek kisebb a felszíne, mint amit a megoldásban kaptunk?

1. megoldás

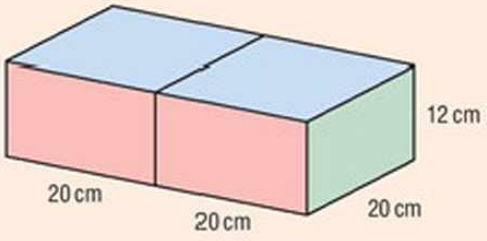
Egy doboznak két négyzet alakú lapja, és négy egybevágó, téglalap alakú lapja van. Rajzoljuk le a megfelelő lapok összeillesztésével kapott téglatesteket, majd adjuk össze a lapok területét!

Két négyzet alakú lapot illesztünk össze.



$A_1 = 2 \cdot (20 \cdot 20) + 4 \cdot (20 \cdot 24) =$
$= 2720\ (\text{cm}^2)$

Két téglalap alakú lapot illesztünk össze



$A_2 = 2 \cdot (40 \cdot 20 + 40 \cdot 12 + 20 \cdot 12) =$
$= 3040\ (\text{cm}^2)$

Tehát a négyzetlapok összeillesztésével kaptuk a kisebb felszínű téglatestet, amelyet kevesebb papírral csomagolhatunk be.



2. megoldás

Azt vizsgáljuk, mennyivel csökken a csomag felszíne, ha a dobozokat egymáshoz illesztve csomagoljuk be, mint ha külön-külön, két csomagban csomagolnánk.

Ha a négyzet alakú lapokat illesztjük össze, akkor a két négyzetlap területével:

$$2 \cdot (20 \cdot 20) = 800 \text{ (cm}^2\text{)-rel csökken a felszín.}$$

Ha két téglalap alakú lapot illesztünk össze, akkor

$$2 \cdot (20 \cdot 12) = 480 \text{ (cm}^2\text{)-rel csökken a felszín.}$$

Tehát a négyzet alakú lapok összeillesztésével kapjuk a kisebb felszínű téglatestet. Akkor járunk jobban, ha a csomagolásnál a nagyobb területű lapokat illesztjük össze, így azok csomagolását megtakaríthatjuk.

A két dobozból álló csomag térfogata az összerakástól függetlenül a dobozok térfogatának összege.

Becsüljük meg egy autó, egy kerékpár festendő felszínét!

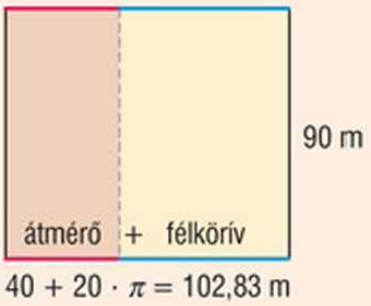
2. példa

Egy 90 m magas felhőkarcoló alaprajza olyan félkör, amelynek átmérője 40 m. Az épület oldalát teljes egészében üveg borítja. Mekkora ez az üvegfelület?

Megoldás

A felhőkarcoló félhenger. A félhenger palástja kiterítve egy olyan téglalap, amelynek egyik oldala a félhenger magassága (90 m), másik oldala a félkör alakú alaplap kerülete:

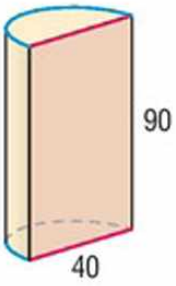
$$40 + 20 \cdot \pi \approx 102{,}83 \text{ (m)}.$$



A félhenger palástjának területe:

$$90 \cdot 102{,}83 = 9254{,}7 \approx 9255 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Ekkora az épület oldalát borító üvegfelület területe.

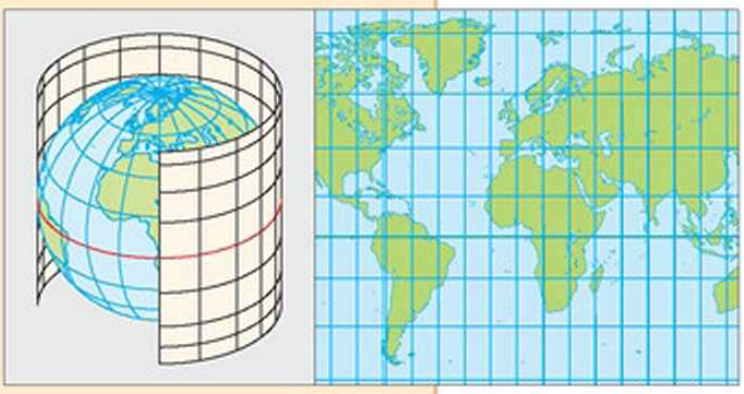


Lakóhelyeden keress akkora területet, mint amekkora a felhőkarcoló üvegfelülete!

Érdekesség

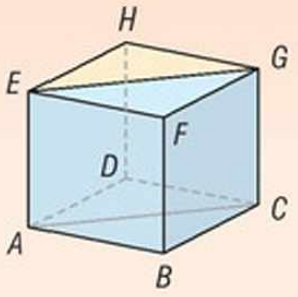
A térképészet egyik alapproblémája, hogy a gömb felszínét síkba kiterítve kell ábrázolni. Az egyik leképezési mód az, hogy a földgömböt a tengelyéből a köré írt henger palástjára vetítjük. Ezt a palástot kiterítve olyan térképet kapunk, amelyen a távolságok torzítottak, de az országok területe megegyezik a földgömbön levő területtel. Így a földgömb felszíne egyenlő a köré írt henger palástjának területével.

Ha a gömb sugara r, a henger alapkörének sugara is r, kerülete $2r\pi$. A henger magassága $2r$, így a henger palástjának területe: $2r \cdot 2r\pi = 4r^2\pi$. Tehát az r sugarú gömb felszíne: $4r^2\pi$.



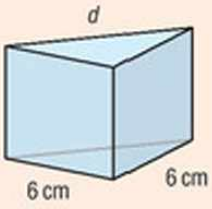
3. példa

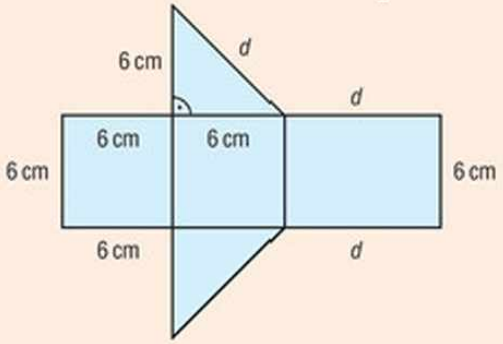
Egy 6 cm élhosszúságú kockát az ábra szerint kettévágunk. Mekkora a kapott fél kocka felszíne?



Megoldás

A fél kocka egy háromszög alapú hasáb, amelynek hálója:





A szükséges adatokat Pitagorasz-tétellel számolhatjuk ki.

A hálón a d-vel jelölt hosszúság a 6 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója. A lapok területének összegéhez szükségünk van d kiszámítására.

Mivel a háromszög derékszögű, a Pitagorasz-tétel alapján:

$$d^2 = 6^2 + 6^2, \text{ így } d^2 = 72,\ d = \sqrt{72} \approx 8{,}5 \text{ (cm)}.$$

A hasáb felszíne a két háromszöglap és a palást területének összege:

$$A = 2 \cdot \frac{6 \cdot 6}{2} + 6 \cdot (6 + 6 + 8{,}5) = 159 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

4. példa



Rakjunk ki egy kockát 27 kockacukorból!

a) Mekkora a kapott kocka felszíne, ha egy kockacukor éle 1 cm?

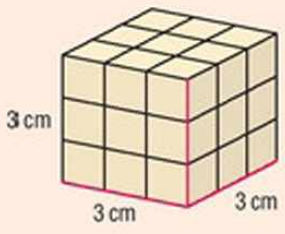
b) Vegyünk el két kockacukrot úgy, hogy a test felszíne ne változzon!

c) Vegyünk el egy kockacukrot úgy, hogy a test felszíne 2 cm^2-rel nőjön!

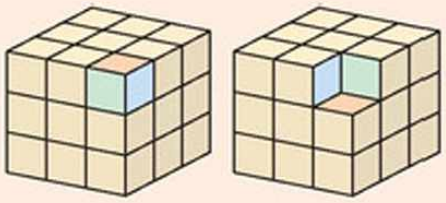
d) Vegyünk el egy kockacukrot úgy, hogy a test felszíne 4 cm^2-rel nőjön!

Megoldás

a) A 27 kockacukorból kirakott kocka egy éle mentén 3 kocka van, így a kapott kocka éle 3 cm,
egy lapjának területe $3^2 = 9$ (cm^2),
a felszíne: $A = 6 \cdot 9 = 54$ (cm^2).

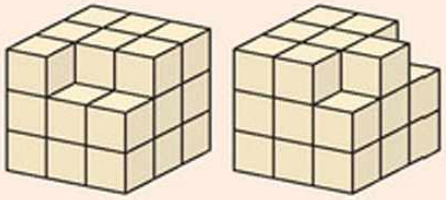


b) Ahhoz, hogy a test felszíne ne változzon, olyan kockacukrot kell elvenni, amelynek 3 lapja látható és 3 lapja nem látható, mert a 3 látható lap helyett a 3 nem látható lapra illeszkedő lapok válnak láthatóvá.



A térfogat csökkent, a felszín nem változott.

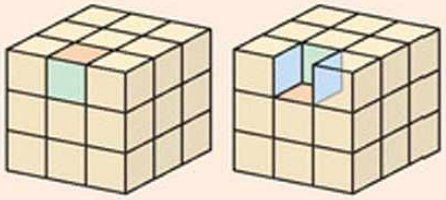
Így a test felszíne nem változik, ha valamelyik csúcsánál két szomszédos kockacukrot kiveszünk, vagy két különböző csúcsánál egy-egy kockacukrot kiveszünk.



$3 - 3 = 0$ (cm^2)-rel változik a kocka felszíne.

c) Ahhoz, hogy 2 cm^2-rel nőjön a test felszíne, egy olyan kockacukrot kell elvenni, amelynek 2 lapja látható és 4 lapja nem látható.

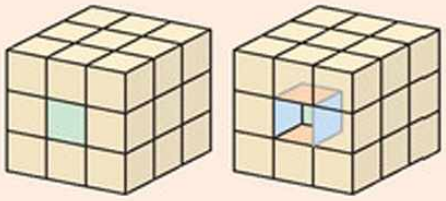
Ilyen a kocka egy élének közepén levő kockacukor. Így azt kell elvenni.



$4 - 2 = 2$ (cm^2)-rel változik a kocka felszíne.

d) Ahhoz, hogy a test felszíne 4 cm^2-rel nőjön, olyan kockacukrot kell elvenni, amelynek 1 lapja látható és 5 lapja nem látható.

Ilyen a kocka egy lapjának közepén levő kockacukor. Így azt kell elvenni.



$5 - 1 = 4$ (cm^2)-rel változik a kocka felszíne.

Előfordulhat, hogy egy test térfogata csökken, felszíne mégsem változik.

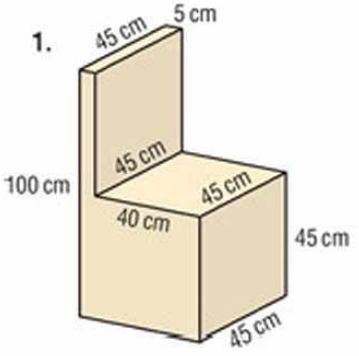
Játsszunk kockacukorral csoportban! Adjunk fel egymásnak az előzőhöz hasonló feladatokat! Változtassuk az eredetileg kirakott téglatest méretét, a kivehető kockák számát! Lehessen hozzá is rakni kockacukrot!

Elvehetünk-e egy kockát úgy, hogy a test felszíne 3 cm^2-rel nőjön?

Feladatok

1. Egy támlás egyenes székre huzatot tervezünk az ábra szerint. A méretek az ábráról leolvashatók. (➡)
   a) Rajzoljuk meg a huzat szabásmintáját!
   b) Hány m^2 anyagot használunk fel, ha a varráshoz szükséges többlettől eltekintünk?
   **c)* Hány méter vegyünk egy székhez a 150 cm széles anyagból, ha a huzat egy-egy lapját nem akarjuk toldani? Tervezzük meg, hogy hogyan helyezzük el az anyagon a szabásmintát!

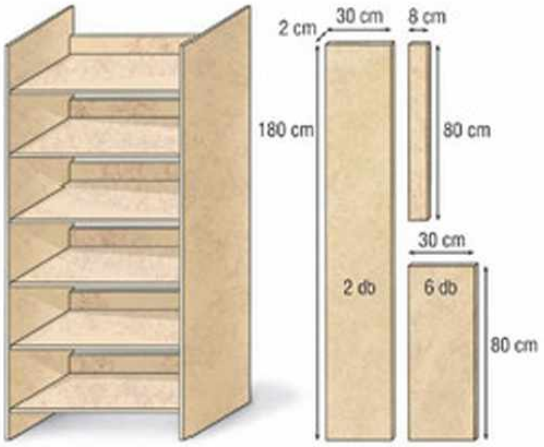
1.



2. Gabi interneten rendelt három könyvet, melyek méretei milliméterben a következők:
   – a regény $156 \times 230 \times 20$;
   – a gyerekversek: $182 \times 232 \times 10$;
   – az útleírás: $178 \times 253 \times 8$.

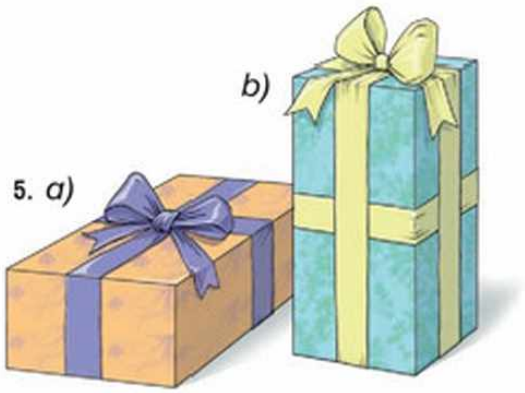
   A könyveket a lehető legkisebb felszínű téglatest alakú dobozokba csomagolják. Mekkora lesz annak a doboznak a felszíne, amelybe mind a három könyv belefér? (A doboz falának vastagságától tekintsünk el!)

3. Zsuzsi katalógusból választott könyvespolcának méretei az ábrán láthatók. Minden polc hátulján egy-egy 8 cm magas perem akadályozza meg a könyvek lecsúszását. A polcot lapra szerelten árulják a lehető legkevesebb kartont igénylő téglatest alakú dobozban. (A karton vastagságától tekintsünk el!) (➡)
   a) Mekkora ennek a doboznak a felszíne?
   b) Hány négyzetméterrel kevesebb kartonpapírt használnak így, mint ha az összeszerelt polcot csomagolnák be?



4. Téglatesteket készítettünk fehér papírból, és éleiket piros ragasztószalaggal megerősítettük (átfedés nélkül). A felhasznált ragasztószalag hossza 60 cm. Mekkora a téglatest felszíne, ha
   a) minden éle ugyanolyan hosszú;
   b) egy csúcsból induló éleinek aránya 2 : 2 : 1;
   c) egy csúcsból induló éleinek aránya 3 : 2 : 1?

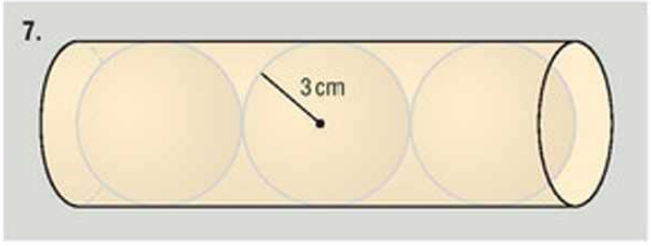
5. Egy téglatest alakú díszdoboz egy csúcsból induló éleinek aránya 1 : 2 : 3. A téglatestet az ábrán látható módon átkötöttük, a szalag hossza 2,3 m, amiből a megkötés és a masni 62 cm. (➡) Mekkora a díszdoboz felszíne?



6. Egy téglatest egy csúcsból induló élei hosszának összege 30 cm. Ha minden csúcsnál az egyik élet 3 cm-rel növeljük, a másikat másfélszeresére növeljük, a harmadikat felére csökkentjük, akkor kockát kapunk. Hogyan változott a téglatest felszíne?

7. Három 3 cm sugarú teniszlabdát csomagolnak egy henger alakú fémdobozba. (A doboz alja és fedele is fém, az illesztésektől eltekintünk.)

   Legkevesebb hány cm^2 fémlemez kell a doboz készítéséhez? (➡)



8. Egy henger alapkörének átmérője és magassága is 8 cm. Mikor kapunk nagyobb felszínű hengert, ha a henger átmérőjét kétszerezzük és a test magasságát változatlanul hagyjuk, vagy ha a test magasságát kétszerezzük és az átmérőt változatlanul hagyjuk?



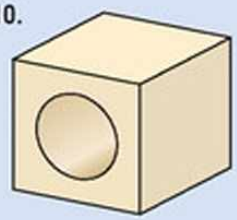
9. Gergő papírból testeket készített, majd mindegyiket befestette. Melyikhez kellett több festék, ha mindet egyenletesen, ugyanolyan vastagon festette?

a) A 8 cm élhosszúságú kockához, vagy a 8 cm átmérőjű, 8 cm magasságú hengerhez;

b) A 8 cm magas, 3 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög alapú hasábhoz, vagy a 8 cm magas, 2 cm sugarú hengerhez?

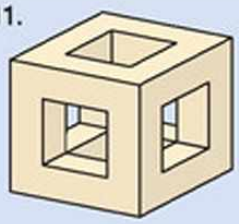
10. Egy 6 cm élhosszúságú tömör fakockát az egyik lapjára merőlegesen átfúrunk. A henger alakú lyuk átmérője 4 cm. Mekkora a kapott test felszíne? (➡)

10.



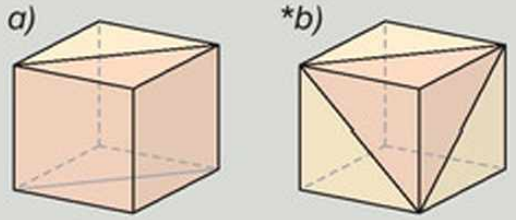
11. Egy 2 dm élhosszúságú tömör fakockába három irányból, a megfelelő lapokra merőlegesen 20 cm × 10 cm × 10 cm-es téglatest alakú lyukakat vágunk. Mennyi a megmaradt test felszíne? (➡)

11.



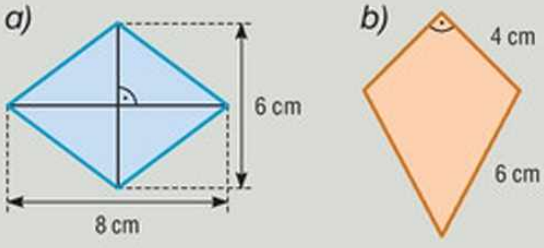
12. Egy 1 dm élhosszúságú kockát két részre vágunk az ábra szerint. Mekkora a kapott testek felszíne? (➡)

12. *a)* **b)*



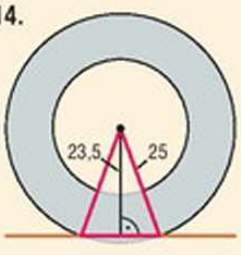
13. Mekkora a felszíne annak a 10 cm magasságú hasábnak, amelynek felülnézete az ábrán látható? (➡)

13. *a)* *b)*



14. Mekkora felületen tapad az az autógumi, amelynek sugara 25 cm, szélessége 16 cm, és az autó tömegétől 1,5 cm-re lapul be? (➡)

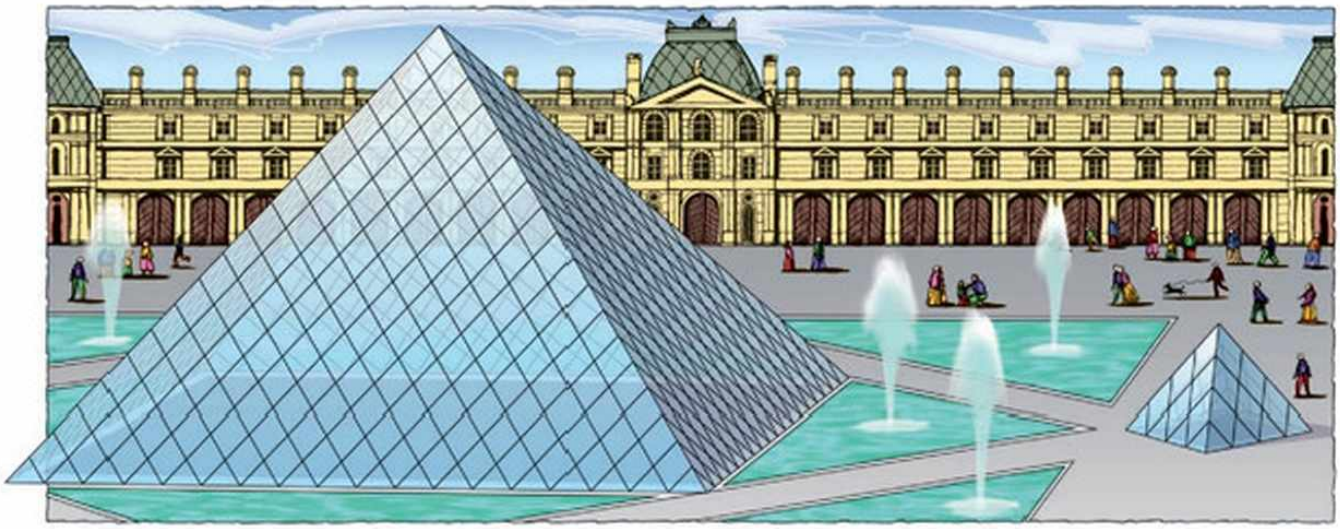
14.



Rejtvény

Hányféle tömör téglatestet rakhatunk ki 2009 egységkockából?

6. A gúla felszíne (kiegészítő anyag)



1	17
2	16
3	15
4	14
5	13
6	12
7	11
8	10
9	9
10	8
11	7
12	6
13	5
14	4
15	3
16	2
17	1

1. példa

Párizsban a Louvre bejárata egy négyzet alapú gúla, amelynek üveg oldallapjai egybevágó rombuszokból és háromszögekből állnak úgy, hogy a gúla egy élét 18 egyenlő részre osztották. Hány egység a gúla üveglapjainak területe, ha egy egység egy rombusz?

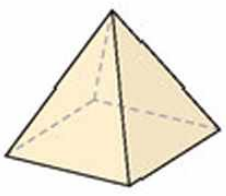
Megoldás

Felülről lefelé haladva a rombuszok száma soronként 1; 2; 3; …; 16; 17, és végül az alsó sorban van 18 háromszög, amelynek területe $18 : 2 = 9$ rombusz területével egyenlő.

A gúla egy lapjának területe:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 16 + 17 + 9 = \frac{17 \cdot 18}{2} + 9 = 162 \text{ egység.}$$

A gúla 4 üveg oldallapjának területe $4 \cdot 162 = 648$ egység.

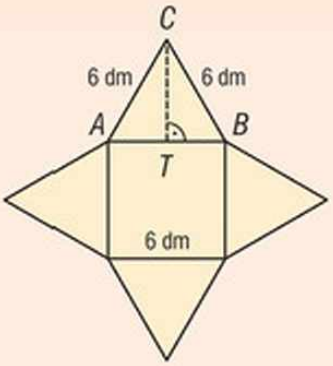


Sokszöglapú testek felszíne: a lapok területének összege

2. példa

Egy négyzet alapú szabályos gúla minden éle 6 dm. Mekkora a felszíne?

Megoldás

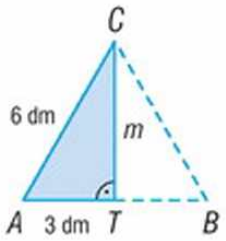


A felszín a határoló lapok területének összege. A gúlának 1 négyzet és 4 egybevágó szabályos háromszög alakú lapja van.

A négyzet területe: $6^2 = 36$ (dm^2).

Egy szabályos háromszög területét keressük, ehhez a magasságát kell meghatározni.

Az ABC szabályos háromszög magassága az ATC derékszögű háromszög egyik befogója. Ismerjük az ATC derékszögű háromszög AC átfogóját: 6 dm és AT befogóját, amely az AB oldal fele, azaz 3 dm.



A Pitagorasz-tétel alapján a másik befogó: $m^2 = 6^2 - 3^2 = 27$, így

$$m = \sqrt{27} \approx 5{,}2 \text{ (dm)}.$$

$$T_{ABC} = \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}6 \text{ (dm}^2\text{)}$$

A gúla felszíne: $A = 36 + 4 \cdot 15{,}6 = 98{,}4 \text{ (dm}^2\text{)}$.

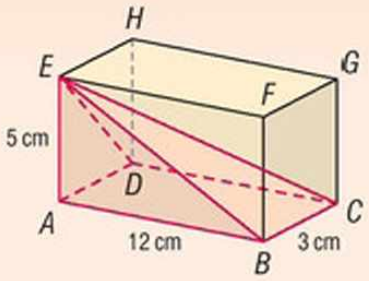
$$T_{\triangle} = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

A gúla felszíne a határoló lapjai területének összege.

3. példa

Egy téglatest egy csúcsba futó élei:

$AB = 12$ cm, $AD = 3$ cm, $AE = 5$ cm.



Készítsük el a téglatest és a gúla élvázát hurkapálcából úgy, hogy a csúcsokba gyurmagombócokat rakunk!

Kössük össze a téglatest $ABCD$ lapjának csúcsait a szemközti lap E csúcsával! Így egy téglalap alapú gúlát kapunk.

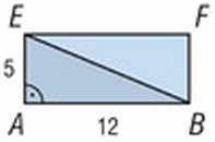
a) Hány olyan lapja van a gúlának, amely derékszögű háromszög?

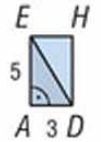
b) Adjuk meg a gúla éleinek hosszát!

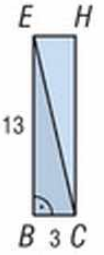
c) Rajzoljuk meg a gúla egy hálóját!

d) Számítsuk ki a gúla felszínét!

Megoldás







a) Az ABE háromszög a téglatest $ABFE$ téglalap lapjának fele, így az A csúcsnál derékszög van.

Hasonlóan az ADE háromszög az $ADEH$ téglalap fele, vagyis az A csúcsnál derékszög van.

A BCE háromszögben B-nél derékszög van, mert a BE él az $ABFE$ lapnak része, és a BC él merőleges erre a lapra.

Ugyanígy a CD él merőleges az $ADHE$ lapra, így az ED élre is, ezért a CDE háromszög derékszögű.

Tehát a gúlának négy derékszögű háromszög lapja van.

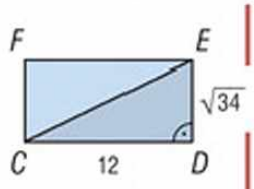
b) A gúlának a téglatest éleivel egybeeső élei:

$$AB = CD = 12 \text{ cm}, \quad BC = AD = 3 \text{ cm}, \quad AE = 5 \text{ cm}.$$

Az EB él a téglatest egyik lapátlója, az ABE derékszögű háromszög átfogója.

A Pitagorasz-tétel alapján:

$$EB^2 = 12^2 + 5^2 = 169, \text{ így } EB = \sqrt{169} = 13 \text{ (cm)}.$$



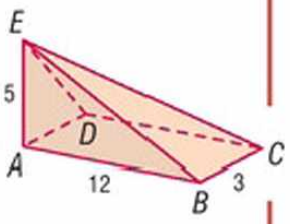
Az ED él is a téglatest egyik lapátlója, az ADE derékszögű háromszög átfogója. A Pitagorasz-tétel alapján:

$$ED^2 = 5^2 + 3^2 = 34, \text{ így } ED = \sqrt{34} \approx 5{,}83 \text{ (cm)}.$$

Az EC él a téglatest testátlója, a BCE derékszögű háromszög átfogója.

A Pitagorasz-tétel alapján:

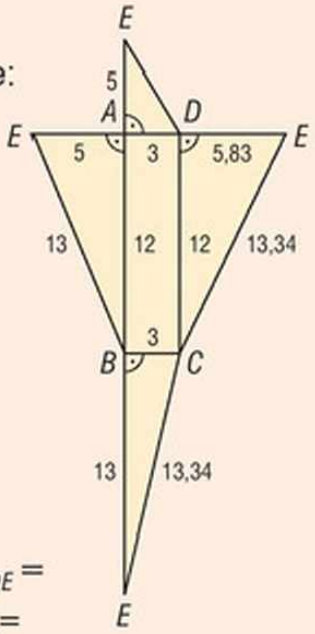
$$EC^2 = EB^2 + 3^2 = 169 + 9 = 178, \text{ így } EC = \sqrt{178} \approx 13{,}34 \text{ (cm)}.$$



A téglalap alapú gúlának 8 éle van.

A téglalap alapú gúlának 5 lapja van.

c) A gúla egy hálója az ábrán látható.



d) A gúla felszíne a lapok területének összege:

$$T_{ABCD}: 3 \cdot 12 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$T_{ABE}: \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$T_{BCE}: \frac{3 \cdot 13}{2} = 19{,}5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$T_{CDE}: \frac{12 \cdot 5{,}83}{2} = 34{,}98 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$T_{ADE}: \frac{3 \cdot 5}{2} = 7{,}5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A felszín: $A = T_{ABCD} + T_{ABE} + T_{BCE} + T_{CDE} + T_{ADE} =$

$= 36 + 30 + 19{,}5 + 34{,}98 + 7{,}5 =$

$= 127{,}98 \text{ (cm}^2\text{)}.$

A környezetünkben található gúlának megfelelő tárgyak felszínét hasonló módszerekkel számolhatjuk ki.

Feladatok

1. Az Eiffel-tornyot fel akarják öltöztetni. Mekkora területű anyagra van szükség, ha az Eiffel-torony magassága 294 méter, négyzet alakú alapjának oldala 125 méter, és a tornyot gúlának tekintjük? (➡)



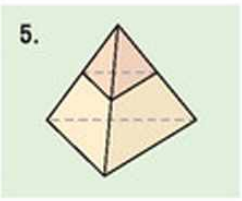
2. Hány négyzetdeciméter a 2 dm élhosszúságú szabályos tetraéder felszíne?

3. A 2 cm élhosszúságú szabályos tetraéder minden élét 25%-kal növeljük. Hány százalékkal nő a felszíne?



4. Egy négyzet alapú gúla minden éle 5 cm. Mekkora kocka felszínével egyezik meg a gúla felszíne?

5. Egy szabályos tetraéderből egy csúcsba futó három élének felezőpontján keresztül egy kisebb tetraédert vágunk le. Hányadrésze a kis tetraéder felszíne az eredetinek? (➡)



***6.** Egy téglatest egy csúcsba futó élei 4 cm, 5 cm, 8 cm. A téglatest egy lapjának minden csúcsát összekötjük a szemközti lap valamelyik csúcsával.

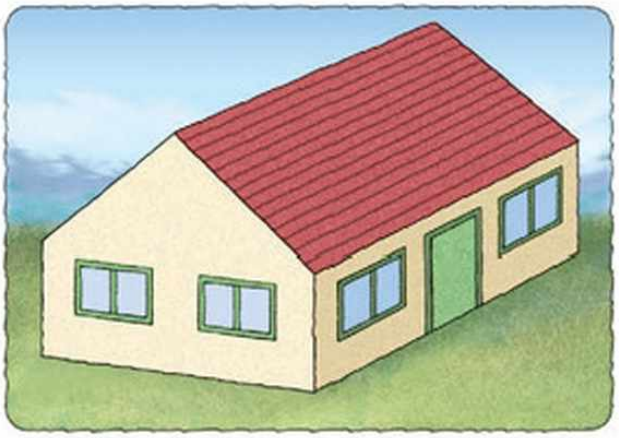
a) Hányféle gúlát kaphatunk? (Az egybevágó gúlákat nem tekintjük különbözőknek.)

b) Rajzoljuk le a kapott gúlák hálóját!

c) Számítsuk ki a kapott gúlák felszínét!

7. Egy 9 m × 10 m-es házra kétféle tetőt terveznek. Mindkettő magassága 5 m a födémhez képest. Melyikhez kell kevesebb cserepet vásárolni, a sátortetőhöz vagy a nyeregtetőhöz?

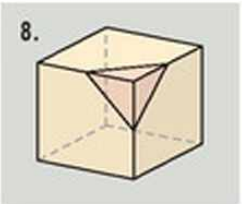




8. Egy 8 cm élhosszúságú kocka egyik csúcsánál levágtunk egy tetraédert a kocka egy csúcsba futó három élének felezőpontjain keresztül. (➡)

a) Mekkora a levágott tetraéder felszíne?

b) Mekkora a kapott két test felszínének összege?

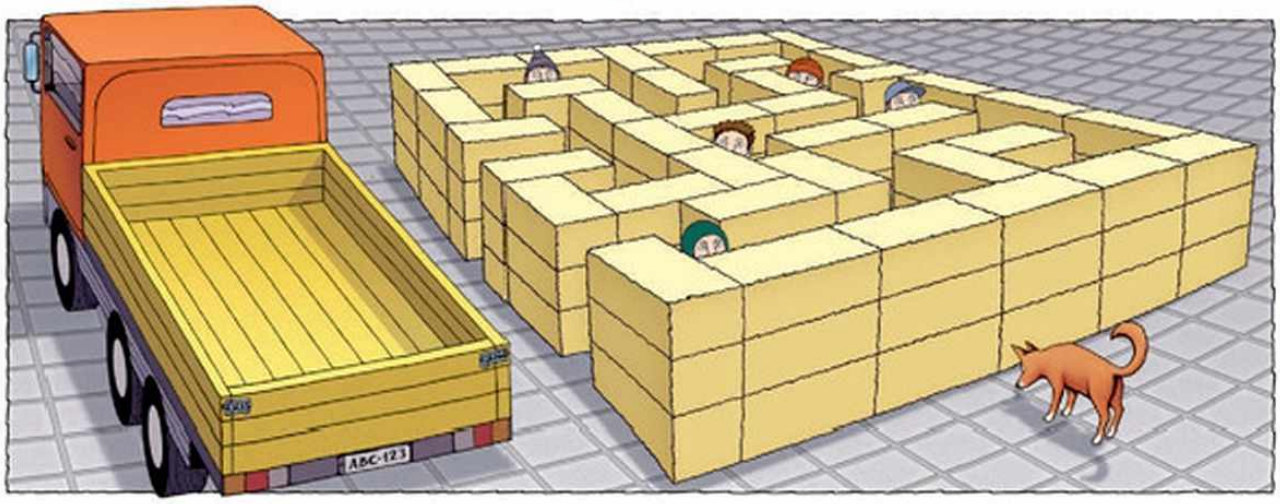


Rejtvény

Egy szabályos tetraéder minden lapja különböző színű, az egyik piros, a másik kék, a harmadik sárga, a negyedik zöld. Melyik a kakukktojás az alábbi öt nézet közül?



7. Testek térfogata



Tervezz labirintust!

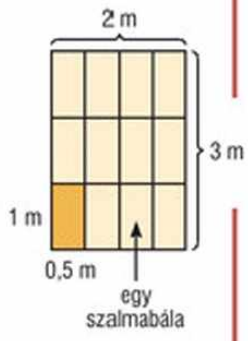
1. példa

A karácsonyi vásárra az ábrán látható szalmalabirintust építették.

a) Hány szalmabálára volt szükség, ha egy szalmabála hossza kétszerese a szélességének, és minden szalmabálát fektetve raktak le, hármat egymásra?

b) Hány olyan teherautóra fér rá ennyi szalmabála, amelynek a rakodófelülete 3 m hosszú és 2 m széles, és 1,5 m magasra lehet megpakolni, ha egy szalmabála szélessége és magassága is 50 cm?

Teherautó rakodófelülete:



Megoldás

a) Összeszámolva a szalmabálákat, azt kapjuk, hogy egy rétegben 38 bála van. Mivel 3 rétegben rakták a labirintusba, így összesen $3 \cdot 38 = 114$ szalmabálából állt a labirintus.

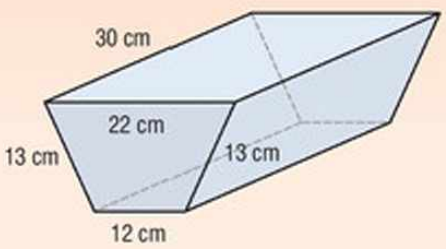
b) Egy szalmabála szélessége 50 cm, hosszúsága ennek kétszerese, azaz 1 m. Így egy teherautó rakodófelületére fektetve 12 bála fér. Egy bála 0,5 m magas, a teherautót 1,5 m magasságig lehet pakolni, így 3 réteg fér egymásra, tehát egy teherautóra $3 \cdot 12 = 36$ bála fér. $114 : 36 = 3{,}16$, ezért a szalmabálák szállításához 4 teherautóra van szükség.

Egy szalmabálát egy térfogategységnek tekintve a labirintusban a szalmabálák száma a labirintus falának térfogata.



2. példa

Az erkélyre 8 virágládába muskátlit ültetünk. Egy virágláda belső méretei az ábráról leolvashatók. Elég-e egy 50 literes zsák virágföld, ha mindegyik virágládát teletesszük földdel?

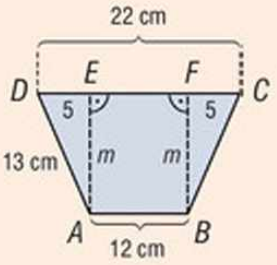


Megoldás

A virágláda húrtrapéz alapú hasáb, térfogata az alaplap területének és a hasáb magasságának szorzata. A hasáb magassága $M = 30$ cm.

A hasáb térfogata: az alaplap területe szorozva a hasáb magasságával.

A húrtrapéz területének kiszámításához szükségünk van a trapéz magasságára.



Húzzuk be a trapéz A és B csúcsából induló magasságokat! Ezek talppontja E és F.

$ABEF$ téglalap, ezért $EF = AB = 12$ cm.

Mivel a húrtrapéz tengelyesen szimmetrikus,

$$DE = FC.$$

$$\text{Így } DE = \frac{22 - 12}{2} = 5 \text{ (cm)}.$$

Az AED háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m^2 = 13^2 - 5^2 = 144,$$

$$\text{így } m = \sqrt{144} \approx 12 \text{ (cm) a trapéz magassága.}$$

A trapéz területe: $T_{alap} = \frac{22 + 12}{2} \cdot 12 = 204$ (cm^2).

A hasáb térfogata: $V = 204 \cdot 30 = 6120$ (cm^3). $V_{hasáb} = T_{alap} \cdot M$

A 8 virágládába $8 \cdot 6120$ cm^3 = 48 960 cm^3 = 48,96 dm^3 föld fér.

1 dm^3 = 1 liter

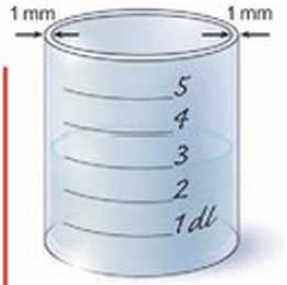
$$48{,}96 \text{ liter} < 50 \text{ liter}$$

Válasz: 50 liter virágföld elég a 8 virágládába.

A térfogatszámításkor gyakran használhatjuk a Pitagorasz-tételt.

3. példa

Egy mérőhenger alapkörének átmérője kívül 10 cm, a henger fala 1 mm vastag. A henger oldalfalán egy deciliterenként szeretnénk vonalakat húzni a méréshez. Hány milliméter lesz két szomszédos vonal távolsága? (A vonal vastagsága elhanyagolható.)



Megoldás

A mérőhenger alapkörének átmérője belül $100 - 1 - 1 = 98$ mm, sugara 49 mm. A két vonal közti távolság annak a hengernek a magassága, amely alapkörének sugara 49 mm, térfogata 1 dl = 100 ml (= 100 cm^3 = 100 000 mm^3).

A henger térfogata egyenlő az alapkör területének és a henger magasságának szorzatával:

$V_{henger} = T_{alap} \cdot M$

$$100\,000 = 49^2\pi \cdot M$$

$$100\,000 \approx 7543 \cdot M \qquad / : 7543$$

$$M = 100\,000 : 7543 \approx 13{,}3 \text{ (mm)}$$

Válasz: A mérőhenger 1 dl-es beosztásakor két szomszédos vonal távolsága 13,3 mm.

A számoláskor figyelnünk kell a mértékegységekre. A számolás pontosságát a feladat szövege határozza meg. Például a mérőhengernél a tizedmilliméternek is lehet jelentősége, a virágládánál ugyanez elhanyagolható.

4. példa

Hány deciliter csokoládémázzal lehet 3 mm vastagon bevonni egy 24 cm átmérőjű kör alakú csokitortát, amelynek magassága 10 cm?

Megoldás

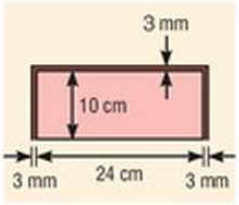
A csokimáz térfogata a bevont torta és az eredeti torta térfogatának különbsége. Mindkét torta henger.

Az eredeti torta: alapkörének átmérője 24 cm, sugara 12 cm, magassága 10 cm,
térfogata: $V_e = 12^2\pi \cdot 10 \approx 4524\ (cm^3)$.

A bevont torta: alapkörének sugara 3 mm-rel több az eredetinél:
$12 + 0{,}3 = 12{,}3$ (cm),
magassága 3 mm-rel több az eredetinél:
$10 + 0{,}3 = 10{,}3$ (cm)
térfogata: $V_b = 12{,}3^2\pi \cdot 10{,}3 \approx 4896\ (cm^3)$.

Válasz: A csokimáz térfogata:

$$4896\ cm^3 - 4524\ cm^3 = 372\ cm^3 = 372\ ml = 3{,}72\ dl.$$

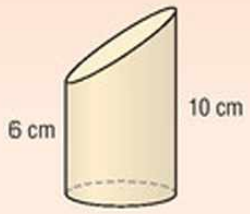


lyukas test: csokimáz
teli test: bevont torta
lyuk: csupasz torta

Lyukas test térfogatát számolhatjuk úgy, hogy a teli test térfogatából kivonjuk a lyuk térfogatát.

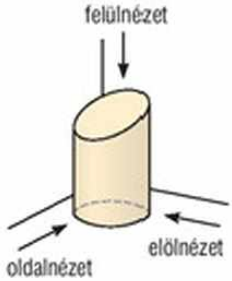
5. példa

Egy henger alakú szalámirudat elvágva az ábrán látható testet kaptuk. Az alapkör sugara 3 cm, a test fedőlapja egy ellipszis, amelynek legalacsonyabb pontja 6 cm-re, legmagasabb pontja 10 cm-re van az alaplaptól. Mekkora a szalámidarab térfogata?



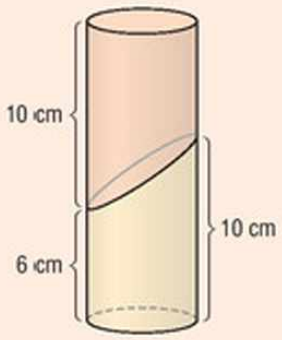
Figyeljük meg a vágáskor kapott síkmetszetet! Így vágva egy vékony szelet szalámit, ellipszist kapunk.

Rajzoljuk le a szalámi nézeteit!



Megoldás

Két darab ugyanígy elvágott szalámit egymáshoz illesztve egy hengert kapunk, amelynek magassága $6 + 10 = 16$ (cm), alapkörének sugara pedig 3 cm.



A szalámidarab térfogata:

$$\frac{3^2\pi \cdot 16}{2} = 226{,}19 \approx 226\ (cm^3).$$

Hogyan lehet egy henger alakú poharat mérés nélkül épp a feléig tölteni vízzel?

A több darabból álló test térfogata a darabok térfogatának összege.

Két egybevágó test térfogatának összege az eredeti test térfogatának kétszerese.



***6. példa**

A konzervgyár 15%-kal csökkenti a henger alakú konzervdobozba rakott kukorica mennyiségét. A doboz magassága ugyanakkora kell maradjon, csak az átmérője csökkenhet. (A konzervdoboz mindig tele van kukoricával.) Hány százalékkal csökkentsék a henger alapkörének átmérőjét, hogy a konzervdoboz megfeleljen a feltételeknek?



$V_1 = r_1^2\pi \cdot M$



$V_2 = r_2^2\pi \cdot M$

Megoldás

Jelöljük az eredeti, henger alakú konzervdoboz alapkörének sugarát r_1-gyel, a csökkentés utáni sugarát pedig r_2-vel!

Mindkét henger magassága M.

A térfogatuk: $V_1 = r_1^2\pi \cdot M$ és $V_2 = r_2^2\pi \cdot M$.

A második henger térfogata 15%-kal kevesebb az elsőnél, ami azt jelenti, hogy az első henger térfogatának 85%-a, vagyis 0,85-szorosa. A második henger térfogata:

$$V_2 = 0{,}85 \cdot V_1$$

$$r_2^2\pi \cdot M = 0{,}85 \cdot r_1^2\pi \cdot M \quad / : \pi M$$

$$r_2^2 = 0{,}85 \cdot r_1^2$$

Mindkét oldalnak vegyük a négyzetgyökét!

$$r_2 = \sqrt{0{,}85}\, r_1$$

$$r_2 \approx 0{,}92\, r_1 \quad / \cdot 2$$

$$2r_2 \approx 0{,}92 \cdot 2r_1$$

$d = 2r$

$$d_2 \approx 0{,}92 \cdot d_1$$

Tehát az új konzervdoboz alapkörének átmérője 92%-a a régi konzervdoboz átmérőjének, azaz 8%-kal kell csökkenteni a konzervdoboz átmérőjét.

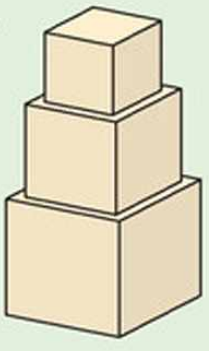
A betűkkel való számolás segíthet a megoldásban, ha nincsenek megadva konkrét számadatok, vagy az adatok túl nagy számok, esetleg közelítően pontos értékek.

Feladatok

1. Becsüljétek meg, hány literes a legnagyobb edényetek otthon! Méréssel, számolással ellenőrizzetek!

2. Egy 3, egy 4 és egy 5 cm élhosszúságú kockát egymás tetejére teszünk. (➡)
   a) Mekkora a kapott test térfogata?
   b) Hány centiméter egy éle az ugyanekkora térfogatú kockának?

2.



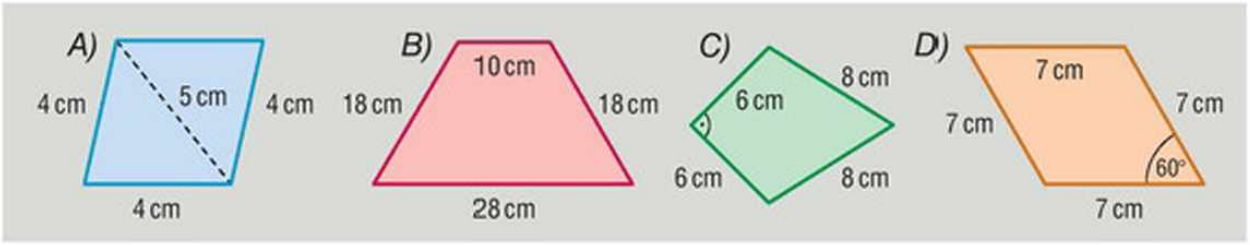
3. Rozi díszhalakat vásárol. Kiválasztott 4 db vitorláshalat, 5 db gurámit és 3 db guppit. A boltban azt tanácsolták neki, hogy akkora akváriumot vegyen, amelyikbe halanként legalább 12 liter víz fér.

a) Melyik akváriumot válassza az alábbiak közül, és milyen magasan álljon benne a víz?

b) Hány kilogramm az akvárium tömege, ha az üveg sűrűsége 2500 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?



4. Mekkora a térfogata azoknak a 10 cm magas hasáboknak, amelyek felülnézete az ábrán látható?



5. Egy elefánt naponta 300 liter vizet iszik. Elég-e neki naponta egy hordó víz, ha a henger alakú hordó magassága 120 cm, alapkörének átmérője 60 cm?

6. Melyik henger alakú konzervdobozba fér több babkonzerv? Abba, amelynek magassága 5 cm és alapkörének átmérője 15 cm, vagy abba, amelynek magassága 15 cm és alapkörének átmérője 5 cm?

7. Egy paradicsomszósz-konzerv doboza 12 cm magasságú henger, alapkörének sugara 3,5 cm. Átlagosan milyen vastagon terítene be egy 15 cm sugarú pizzát, ha a teli dobozban levő összes paradicsomszószt rátennénk?

8. A gyümölcstorta receptje 20 cm átmérőjű, henger alakú tortaformára van megadva. Hányszorosát kell venni a hozzávalókból, ha ugyanolyan magasságú tortát készítünk 26 cm átmérőjű tortaformában?

9. Egy 100 g-os tábla csokoládé alapja 15 cm × 7 cm-es téglalap. A csokoládét 8 szeletre lehet osztani, az elölnézete az ábrán látható. Mekkora a csokoládé sűrűsége?



Rejtvény

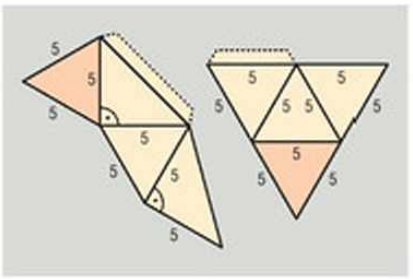
Egy 4 cm átmérőjű labda beleesett egy 5 cm átmérőjű, 30 cm magas hengerbe. Hogyan vegyük ki a labdát anélkül, hogy megfordítanánk a hengert?

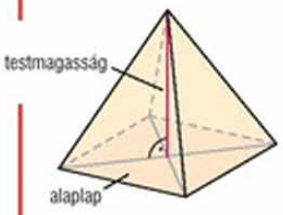
8. A gúla térfogata (kiegészítő anyag)



Kísérletezzünk!

Készítsük el kartonból az ábrán látható hálók alapján a két gúlát, amelyek sötétebb színnel jelölt alaplapja kihajtható! Ellenőrizzük azt, hogy a gúlák alaplapja ugyanakkora területű-e, és a testmagasságuk is megegyezik-e! Az egyik gúlát öntsük tele liszttel, majd azt öntsük át a másikba! Így láthatjuk, hogy a két gúla térfogata megegyezik. Ebből arra gondolhatunk, hogy a gúla térfogata csak az alaplap területétől és a test magasságától függ.



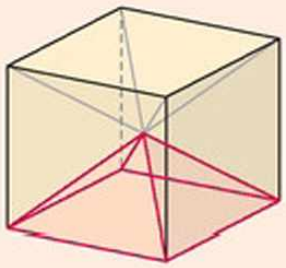


1. példa

Mekkora annak a gúlának a térfogata, amelyet úgy kapunk, hogy a 6 cm élhosszúságú kocka középpontját összekötjük a kocka egy lapjának négy csúcsával?

Megoldás

Rajzoljunk egy kockát, és húzzuk be a testátlóit! Kössük össze ezek metszéspontját a kocka csúcsaival! Így a kocka mind a hat lapjához tartozik egy-egy gúla, amely megfelel a feladat feltételeinek. Ez a hat gúla egybevágó, így térfogatuk is egyenlő.



A kocka testátlói egy pontban metszik egymást, amely minden testátlónak a felezőpontja. Ez a pont a kocka középpontja.

Ezért egy ilyen gúla térfogata a kocka térfogatának hatoda: $V = \frac{6^3}{6} = 36\ (\text{cm}^3)$.

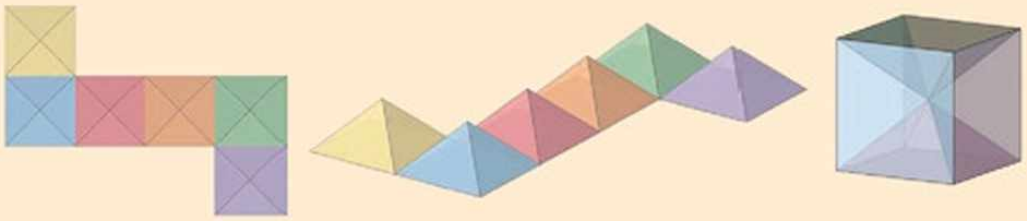
A példában szereplő gúla alaplapja a kocka egy lapja, területe $6^2 = 36\ (\text{cm}^2)$. A gúla testmagassága a kocka egy élének fele: 3 cm. Így a gúla térfogata az alaplap területének és a testmagasság szorzatának a harmada. Ez minden gúlára igaz.

A **gúla térfogata** egyenlő az alaplap területének és a testmagasság szorzatának harmadával.

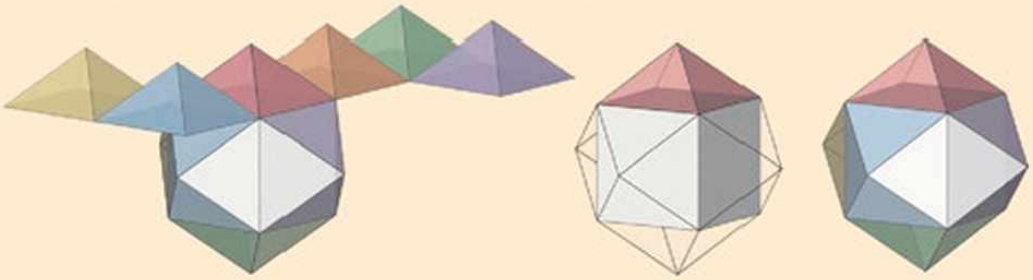
$$V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3} T_{\text{alap}} \cdot M$$

Érdekesség!

Készítsünk négyzet alapú gúlát! A négyzetlap oldalai 6 cm-esek, a négy egyenlő szárú háromszöglap szárai 5,2 cm-esek legyenek! Hat darab ilyen gúlát az ábrán látható kockahálóra ragasztva kockát hajthatunk össze, amellyel az 1. példa szemléltethető.



Ha az előbbi gúlákat „fordítva” hajtanánk össze, rombdodekaédert kaphatnánk.

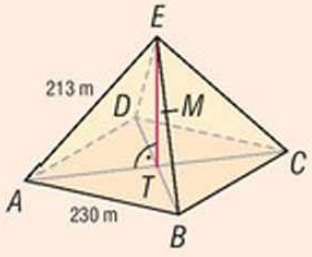


2. példa

A Kheopsz-piramis négyzet alapú gúla, melynek alapéle 230 m, oldaléle 213 m. Mekkora a piramis térfogata?

Megoldás

A piramis térfogatához az alaplap területét és a test magasságát kell ismernünk.



Az alaplap négyzet, melynek oldala 230 m, így az alaplap területe:

$$T_{alap} = 230^2 = 52\,900\ (m^2).$$

A testmagasság meghatározásához vágjuk félbe a gúlát a négyzet átlója mentén, az alaplapra merőlegesen! A síkmetszet egyenlő szárú háromszög, melynek magassága a testmagasság.

A háromszög alapja a négyzet átlója: $AC = \sqrt{2} \cdot 230$.

$$AT = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 230}{2} = \sqrt{2} \cdot 115$$

Az ATE derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

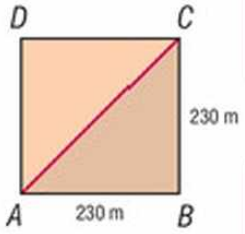
$$M^2 = AE^2 - AT^2 = 213^2 - (\sqrt{2} \cdot 115)^2 = 213^2 - 2 \cdot 115^2 = 18\,919,$$

amiből

$$M = \sqrt{18\,919} \approx 138\ (m).$$

Így a piramis térfogata: $V = \frac{1}{3} \cdot 52\,900 \cdot 138 = 2\,433\,400\ (m^3)$.

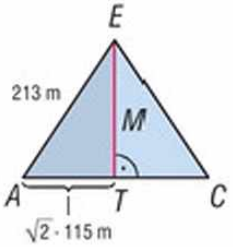
$V_{gúla} = T_{alap} \cdot M$



$AC^2 = 230^2 + 230^2$

$AC = \sqrt{2 \cdot 230^2}$

$AC = \sqrt{2} \cdot 230$

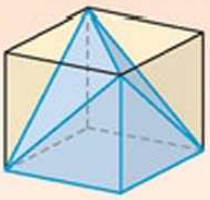


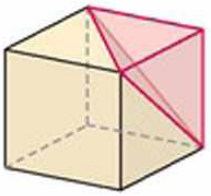
Hány köbkilométer a piramis térfogata?



*3. példa

Egy 5 cm élhosszúságú kockából két tetraédert vágtunk le az ábra szerint. Mekkora a megmaradt test térfogata?





$V_{tetr} = \frac{1}{3} \cdot T_{alap} \cdot M$

1. megoldás

A kockából levágott két tetraéder egybevágó, alaplapja a kocka egy lapjának fele, magassága pedig a kocka egy éle, így a térfogata:



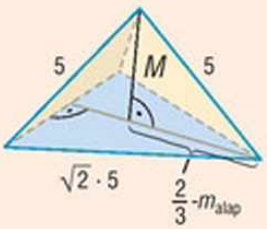
$$V_{tetr} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5^2}{2} \cdot 5 = \frac{5^3}{6} \ (\text{cm}^3).$$

A megmaradt test térfogatát megkapjuk, ha a kocka térfogatából kivonjuk a két levágott tetraéder térfogatát:

Rajzoljuk le a darabok hálóját!

$$V = 5^3 - 2 \cdot \frac{5^3}{6} = \frac{2}{3} \cdot 5^3 = 83{,}\dot{3} \ (\text{cm}^3).$$

Megjegyzés: A levágott tetraéder térfogatát úgy is kiszámíthatjuk, hogy a szabályos háromszög lapjára állítjuk. Az alaphoz tartozó testmagasság talppontja a szabályos háromszög középpontja, ez alapján a testmagasságot Pitagorasz-tétellel számoljuk.

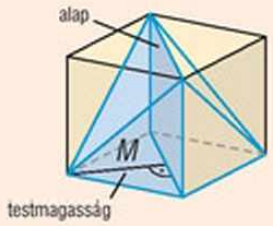


2. megoldás

A megmaradt testet két téglalap alapú egybevágó gúlára vághatjuk. A téglalap egyik oldala a kocka éle: 5 cm, másik oldala a kocka lapátlója: $\sqrt{2} \cdot 5$ cm, így a gúla alaplapjának területe:

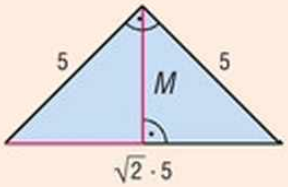
$$T_{alap} = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot 5 = \sqrt{2} \cdot 5^2 \ (\text{cm}^2).$$

A gúla testmagasságának kiszámításához vegyük észre, hogy a gúla egyik oldallapja merőleges az alaplapra, így a testmagasság ennek a háromszög alakú lapnak a magassága. A háromszög egyenlő szárú, derékszögű, és befogója a kocka éle.



Rajzoljuk le a testek nézeteit!

A háromszöget a magassága két egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja, így a magasság egyenlő az átfogó felével:



$$M = \frac{\sqrt{2} \cdot 5}{2} \ (\text{cm}).$$

A gúla térfogata: $V_{gúla} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 5^2 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 5}{2} = \frac{5^3}{3} \ (\text{cm}^3).$

$V_{gúla} = \frac{1}{3} \cdot T_{alap} \cdot M$

A megmaradt test térfogata ennek kétszerese: $2 \cdot \frac{5^3}{3} = 83{,}\dot{3} \ (\text{cm}^3).$



Testeket kaphatunk úgy is, hogy nagyobb testből levágunk darabokat, vagy darabokból összeállítjuk a testet. Mindkét módszernek megfelelően számolhatjuk a test térfogatát.

Feladatok

*1. Az alábbi táblázat különböző gúlák adatait tartalmazza. Töltsük ki a táblázatot!

Alaplap területe (T_{alap})	15 cm^2	3 dm^2	150 cm^2		250 dm^2	
Testmagasság (M)	4 cm	25 cm		20 cm		2 dm
Térfogat (V)			450 cm^3	180 cm^3	1 m^3	3200 cm^3

*2. Határozzuk meg a négyzet alapú szabályos gúláknak a táblázatból hiányzó adatait! (A gúlák testmagasságának talppontja a négyzet átlóinak felezőpontja.)

Alaplapél (cm)	7	10	2	$\overline{8}$			5	
Oldalél (cm)			6	5	5	13		
Testmagasság (cm)	8	3			3	12		3
Felszín (cm^2)							100	243
Térfogat (cm^3)								

*3. Egy 6 cm élhosszúságú kocka egy lapjának középpontját összekötjük a szemközti lap csúcsaival, így egy gúlát kapunk. Mekkora a kapott gúla térfogata és felszíne?

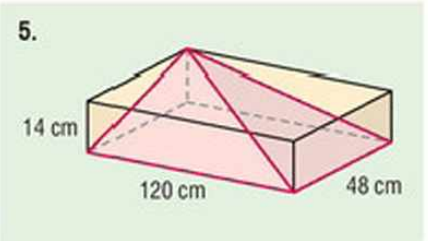
*4. A téglalap alapú gúla alapélei a és b, testmagassága M, és a testmagasság talppontja a téglalap átlóinak metszéspontja. Mekkora a gúla térfogata és felszíne?

a) $a = 5$cm; $b = 3$ cm; $M = 6$ cm;

b) $a = 10$ cm; $b = 8$ cm; $M = 12$ cm;

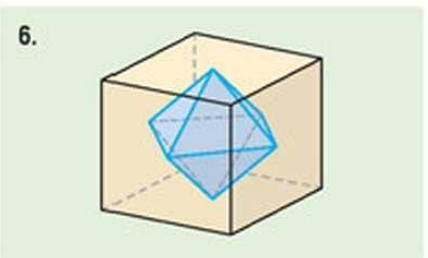
c) $a = 72$ mm; $b = 45$ mm; $M = 6$ cm.

*5. Egy asztalos egy téglatest alakú fagerendából az ábrán látható testet vágta ki. Mennyi a levágott rész tömege, ha a fa sűrűsége 600 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$? (➡)



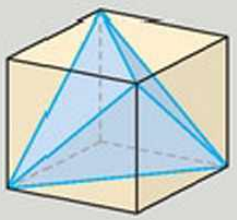
*6. Kössük össze egy 2 cm élhosszúságú kocka lapközéppontjait az ábra szerint! Így egy oktaédert kapunk. (➡)

a) Mekkorák a kapott test élei?
b) Rajzoljuk le a kapott test egy hálóját!
c) Számítsuk ki a kapott test térfogatát!
d) Számítsuk ki a kapott test felszínét!



7. Milyen testet kapunk, ha a 4 cm élhosszúságú kocka megfelelő csúcsait az ábra szerint összekötjük? Számítsuk ki a test éleit, felszínét és térfogatát! (➡)

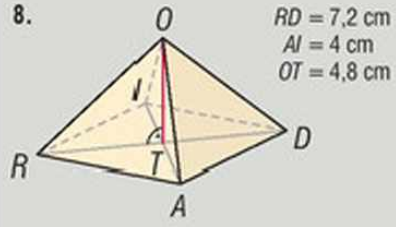
7.



8. A *RADIO* rombusz alapú gúla testmagasságának talppontja az alaplap átlóinak felezőpontja. A gúla adatai az ábrán láthatók. (➡)

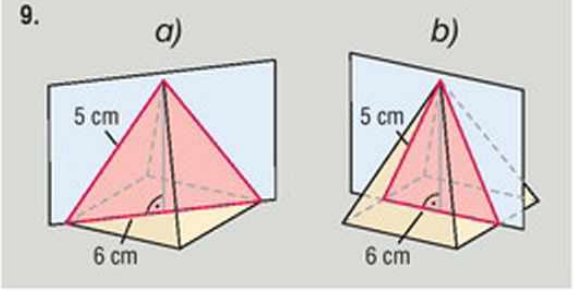
a) Hány centiméteresek a gúla élei?
b) Szerkesszük meg a gúla egy hálóját!
c) Hány köbcentiméter a gúla térfogata?

8.



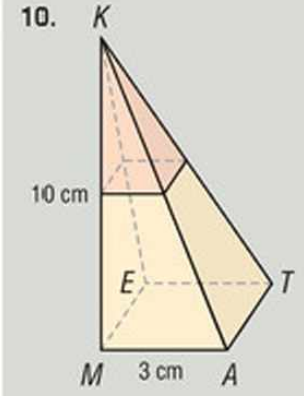
9. Egy négyzet alapú szabályos gúlát elvágva a síkmetszet egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja 6 cm, szára 5 cm. Mekkora a gúla felszíne és térfogata, ha a vágás az alaplapra merőlegesen az ábra szerint történt? (➡)

9.



10. A *MATEK* négyzet alapú gúla *KM* éle merőleges az alaplapra. A gúlát a *K* csúcstól 5 cm-re elvágtuk az alaplappal párhuzamosan. Hányadrésze a levágott kis gúla térfogata az eredeti gúla térfogatának? (➡)

10.



11. Egy szabályos tetraéder éleinek felezőpontjain keresztül minden csúcsnál vágjunk le egy szabályos tetraédert!

a) Milyen testet kapunk?
b) Hányadrésze a megmaradt test felszíne az eredetinek?
c) Hányadrésze a megmaradt test térfogata az eredetinek?

12. Hányszorosára nő a négyzet alapú szabályos gúla térfogata, ha

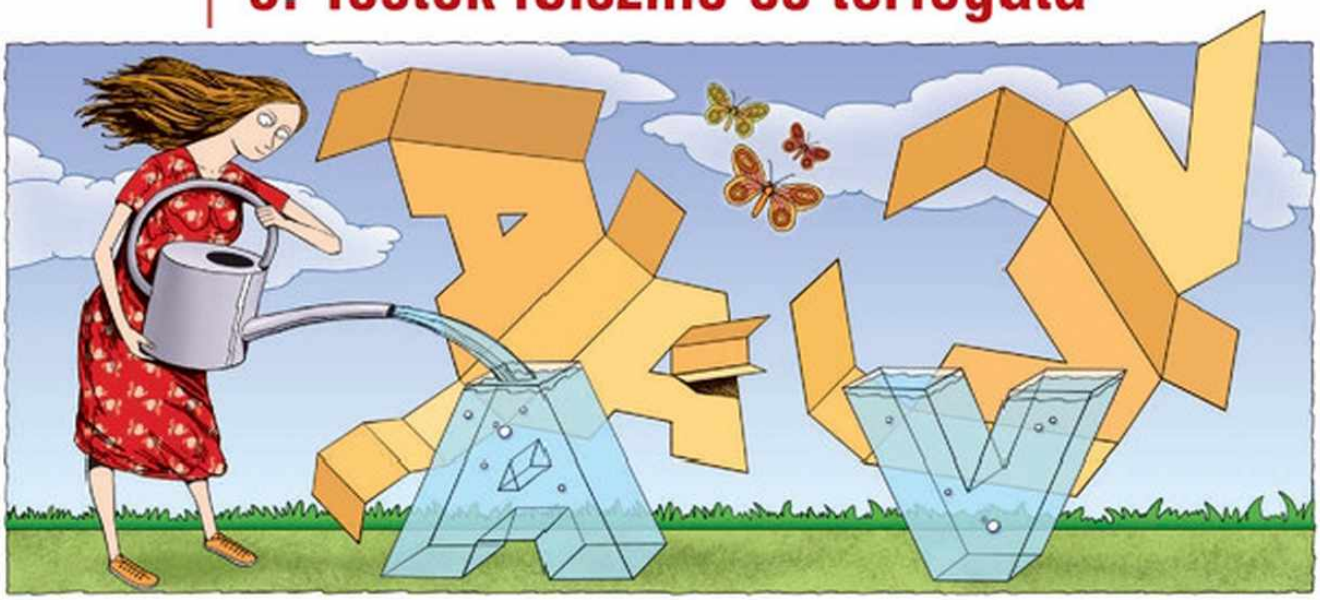
a) minden alapélét kétszeresére növeljük, a test magassága változatlan marad;
b) a test magasságát kétszeresére növeljük, az alapélek változatlanok maradnak;
c) minden alapélét és a test magasságát is kétszeresére növeljük?

Rejtvény

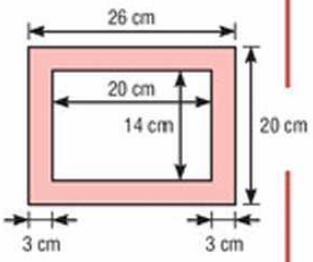
Készítsünk olyan testet gyurmából, amelynek három nézete:



9. Testek felszíne és térfogata

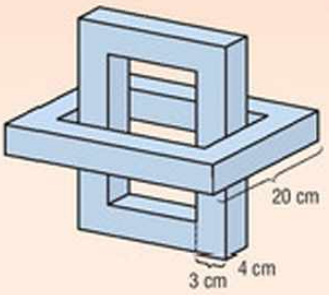


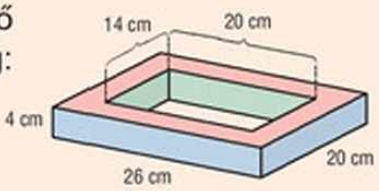
Készítsük el rudakból a példa ábráján látható alakzatot!



1. példa

Két darab egyforma keretet az ábra szerint összeraktak. (A két keret érintkezik.) Mekkora a keretek együttes felszíne és térfogata?





Megoldás

Az ábráról leolvasható, hogy mindegyik keret külső szélessége ugyanakkora, mint a belső hosszúsága. Így egy keret külső szélessége 20 cm, belső szélessége pedig: $20 - 3 - 3 = 14$ (cm).

Egy keret belső hossza 20 cm,
külső hossza: $20 + 3 + 3 = 26$ (cm).

A felszín kiszámításához adjuk össze a lapok területét!

Az alaplap területe a külső és belső téglalap területének különbsége:

$$t_{alap} = 26 \cdot 20 - 20 \cdot 14 = 240 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A külső széle a vastagság és a külső téglalap kerületének szorzata:

$$t_{külső\ szél} = 4 \cdot (26 + 20 + 26 + 20) = 4 \cdot 92 = 368 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A belső széle a vastagság és a belső téglalap kerületének szorzata:

$$t_{belső\ szél} = 4 \cdot (20 + 14 + 20 + 14) = 4 \cdot 68 = 272 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Egy keret felszíne:

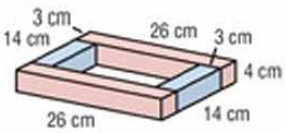
$$A = 2 \cdot t_{alap} + t_{külső\ szél} + t_{belső\ szél};$$

$$A = 2 \cdot 240 + 368 + 272 = 1120 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A két keret együttes felszíne: $2 \cdot 1120 = 2240$ (cm^2).

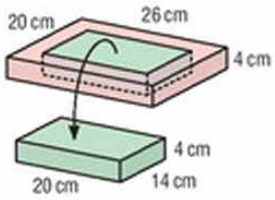
Egy keret térfogatának kiszámításához vágjuk szét a keretet két 26 cm hosszú, és két 14 cm hosszú rúdra! Ezek a rudak téglatestek, térfogatuk összege egy keret térfogata:

$$V = 2 \cdot 26 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 4 = 624 + 336 = 960\ (\text{cm}^3).$$



Egy keret térfogatát másképp is kiszámíthattuk volna. A külső téglatest térfogatából vonjuk ki a belső, kivágott téglatest térfogatát:

$$V = 26 \cdot 20 \cdot 4 - 20 \cdot 14 \cdot 4 = 2080 - 1120 = 960\ (\text{cm}^3)!$$



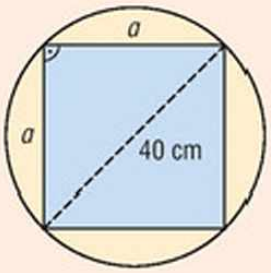
A két keret együttes térfogata: $2 \cdot 960 = 1920$.

Előfordul, hogy a számításokhoz szükséges adatokat a testek egymáshoz viszonyított helyzetéből olvashatjuk le.

2. példa

Egy 40 cm átmérőjű henger alakú fatörzsből a lehető legnagyobb négyzet keresztmetszetű gerendát vágják ki. Hány százalék a levágott rész (szelezék), ha a fatörzs 4,5 m magas?

Megoldás



A szelezék a gerendák kivágásakor keletkező hulladék, amely a henger alakú fatörzs és a gerenda térfogatának különbségeként adódik.

A gerenda térfogatának meghatározásához szükségünk van az alapél hosszára.

A hengerből kivágható legnagyobb négyzet alapú hasáb alaplapja a henger kör alakú alaplapjába írható négyzet. Így a négyzet átlója a kör átmérője, azaz 40 cm.

A négyzet oldalát a-val jelölve a Pitagorasz-tétel alapján:

$$a^2 + a^2 = 40^2$$
$$2a^2 = 1600$$
$$a^2 = 800$$
$$a = \sqrt{800} = \sqrt{2 \cdot 400} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{400} = \sqrt{2} \cdot 20 \approx 28{,}28\ (\text{cm})$$

$V_{\text{fatörzs}} = r^2 \cdot \pi \cdot M$

$V_{\text{gerenda}} = a^2 \cdot M$

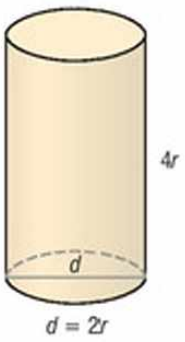
A hulladék és a fatörzs térfogatának aránya:

$$\frac{20^2 \cdot \pi \cdot 450 - \left(\sqrt{2} \cdot 20\right)^2 \cdot 450}{20^2 \cdot \pi \cdot 450} = \frac{\pi - 2}{\pi} \approx 0{,}36.$$

Tehát a fatörzs 36%-a a szelezék.

Megjegyzés: A térfogatok arányánál egyszerűsítettünk a fatörzs hosszával, sőt a sugár négyzetével is. Ez azt jelenti, hogy az arány független a fatörzs méretétől.

A megoldáshoz szükséges adatokat a meglevőkből kiszámíthatjuk.



***3. példa**

Egy henger alapkörének átmérője fele a henger magasságának. A henger térfogata V cm^3, felszíne A cm^2. Mennyi a henger alapkörének sugara, ha $\frac{V}{A} = 4$?

Megoldás

Jelöljük a henger alapkörének sugarát r-rel! A henger átmérője $2r$, fele a henger magasságának, ezért a henger magassága: $4r$.

A henger térfogata köbcentiméterben:

$$V = r^2\pi \cdot 4r = 4r^3\pi.$$

A henger felszíne négyzetcentiméterben:

$$A = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot 4r = 2 \cdot r^2\pi + 8 \cdot r^2\pi = 10 \cdot r^2\pi.$$

Ezeket behelyettesítve a $\frac{V}{A} = 4$ egyenletbe:

$$\frac{4r^3\pi}{10r^2\pi} = 4$$

r^2-tel és π-vel egyszerűsítve: $\frac{2}{5}r = 4$

$$r = 10$$

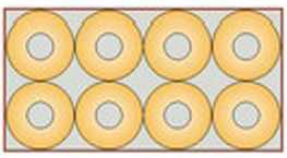
Tehát a henger alapkörének sugara 10 cm.

Feladatok

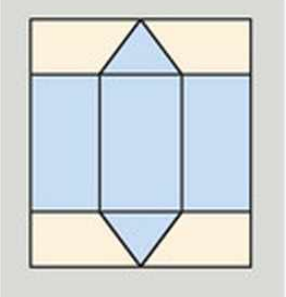
1. Egy 5400 cm^2 felszínű kockát 216 cm^3 térfogatú kis kockákra vágtunk szét. Hány kis kockát kaptunk?

2. Tükrözzünk egy téglatestet mindegyik lapjára, és tekintsük az összes tükörkép és az eredeti téglatest által alkotott testet!
   a) Hányszorosa az így kapott test térfogata az eredetinek?
   b) Hányszorosa az így kapott test felszíne az eredetinek?

3. Egy kekszes dobozba vajas karikákat csomagolnak két rétegben az ábra szerint. Egy vajas karika átmérője 5 cm, vastagsága 1 cm. Mekkora a doboz felszíne és térfogata? (➡)

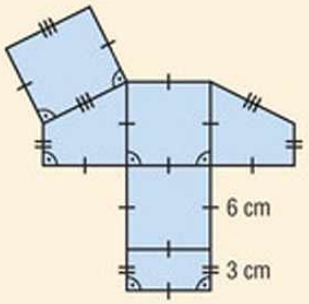


4. Egy 120 cm^3-es csokis doboz alaplapja egyenlő szárú háromszög, melynek alapja 6 cm, szára 5 cm. Hány százalék a veszteség, ha a dobozt téglalap alakú kartonból vágják ki az ábra szerint? (➡)

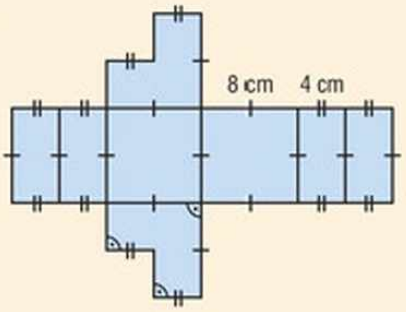


5. Mekkora az alábbi, hálójukkal megadott testek felszíne és térfogata?

a)



b)



6. Egy kocka térfogata N cm^3, felszíne M cm^2. Mekkora az éle, ha $\frac{N}{M} = 6$?

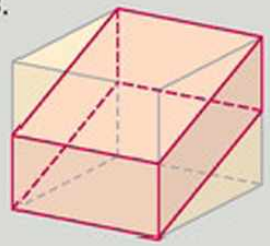
7. Egy téglalapot az egyik oldalegyenese körül megforgatva kapott henger térfogata A cm^3. A másik oldalegyenese körül megforgatva kapott henger térfogata B cm^3. $\frac{A}{B} = 3$.

a) Írjuk fel a téglalap két oldalának arányát!

**b)* Írjuk fel a két henger felszínének arányát!

8. Egy 5 cm élhosszúságú kockából az élek felezőpontjai mentén egy testet vágtunk ki az ábra alapján. Mekkora a kapott test felszíne és térfogata? (➡)

8.



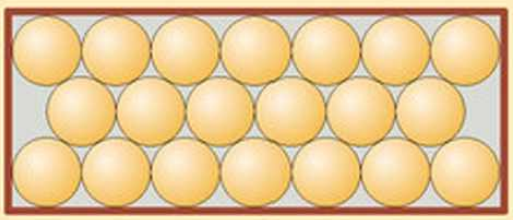
***9.** Milyen görbére illeszkednek azok a pontok, amelyeket úgy kapunk, hogy koordinátarendszerben ábrázoljuk azoknak a hengereknek a térfogatát, amelyek:

a) alapkörének sugara 5 cm, és magassága 1 cm-enként változik 8 cm-től 15 cm-ig. (az x tengelyen a henger magasságát, az y tengelyen a térfogatát jelöljük)

b) magassága 10 cm, és alapkörének sugara 1 cm-enként változik 1 cm-től 8 cm-ig. (az x tengelyen a henger alapkörének sugarát, az y tengelyen a térfogatát jelöljük)

Rejtvény

A királyi kincsestárban egy dobozban tárolják a király 20 kedvenc aranygolyóját az ábra szerint. A király minden nap megrázogatja a dobozt, hogy ellenőrizze, nem hiányzik-e közülük golyó.



Egyik nap a kincstárnok kivett néhány golyót, de a király nem vette észre.

Másnap a királyné is kivett néhányat, a király még mindig nem sejtett semmit. Harmadnap a főminiszter csent el a golyókból, de nem lepleződött le a hiány. Legfeljebb hány golyó hiányozhat a dobozból ekkor?

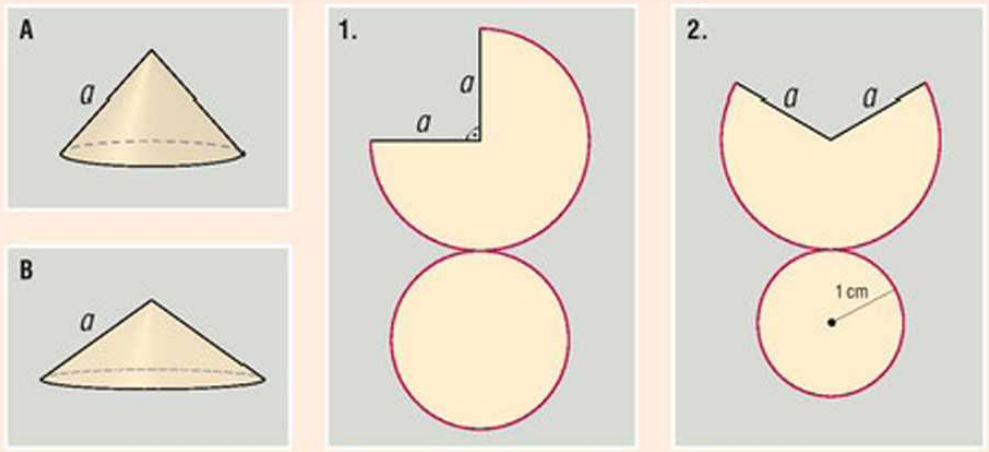
10. A kúp és a gömb felszíne, térfogata (kiegészítő anyag)

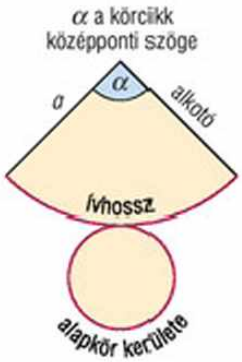
A kúp felszíne

1. példa

Az ábrán két kúpot, valamint azok kiterített palástját és alaplapját látjuk. Mindkét kúp alkotója 1,5 cm.

Készítsük el papírból a kúpokat!





a palást ívhossza = az alapkör kerülete

a) Állítsuk párba a kúpokat és a hálójukat!

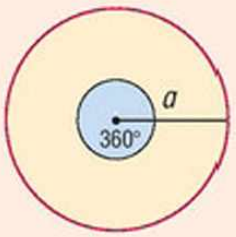
b) Írjuk fel, hogyan aránylik a palástot alkotó körcikk középponti szöge, ívhossza és területe az ugyanekkora sugarú teljes kör középponti szögéhez, ívhosszához és területéhez!

c) Számítsuk ki a kúpok felszínét!

Megoldás

a) Az alapkör kerülete = a palástot alkotó körcikk ívhossza.
Ez alapján a párok: A – 2; B – 1.

b) Figyeljük meg az a sugarú kört és az 1. kúp palástját!



középponti szög

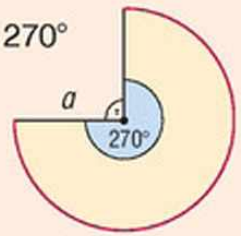
kerület

terület

$$\alpha = 360° \qquad \alpha' = \frac{3}{4} \cdot 360° = 270°$$

$$k = 2a\pi \qquad k' = \frac{3}{4} \cdot 2a\pi$$

$$t = 2a^2\pi \qquad t' = \frac{3}{4} \cdot a^2\pi$$



A megfelelő arányok egyenlők:

$$\frac{\text{a körcikk középponti szöge}}{360°} = \frac{\text{a körcikk kerülete}}{\text{a teljes kör kerülete}} =$$

$$= \frac{\text{a körcikk területe}}{\text{a teljes kör területe}} = \frac{3}{4}$$

c) **A kúp felszíne = a palást területe + az alapkör területe**

1. kúp

Adatok: $a = 2$ cm; $\alpha = 270°$ = a teljes kör $\frac{3}{4}$ része.

- A palást területe = a teljes kör területének $\frac{3}{4}$ része = $= \frac{3}{4} \cdot 1{,}5^2\pi \approx 5{,}30\ (\text{cm}^2)$.
- A palást ívhossza = a teljes kör kerületének $\frac{3}{4}$ része = $= \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 1{,}5\pi = 2{,}25\pi\ (\text{cm})$.
- Az alapkör kerülete = a palást ívhossza = $2{,}25\pi$ (cm).
- Az alapkör sugara = $r = \frac{1}{2\pi} \cdot$ az alapkör kerülete = $= \frac{1}{2\pi} \cdot 2{,}25\pi = 1{,}125\,(\text{cm})$.
- Az alapkör területe = $r^2\pi = 1{,}125^2\pi \approx 3{,}98\ (\text{cm}^2)$.
- A kúp felszíne = a palást területe + az alapkör területe = $\approx 5{,}30 + 3{,}98 = 9{,}28\ (\text{cm}^2)$.

A kör kerülete:
$k = 2r\pi$
↓
A kör sugara:
$r = \frac{1}{2\pi} \cdot k$

A kúp felszíne = a palást területe + + az alapkör területe

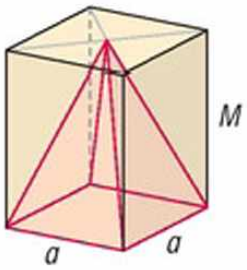
2. kúp

Adatok: $a = 2$ cm; $r = 1$ cm.

- Az alapkör területe = $1^2\pi = \pi \approx 3{,}14\ (\text{cm}^2)$.
- Az alapkör kerülete = $2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi$ (cm).
- A palást ívhossza = 2π = a teljes kör kerületének $\frac{2\pi}{2 \cdot 1{,}5\pi}$ = $= \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$ része.
- A palást területe = a teljes kör területének $\frac{2}{3}$ része = $= \frac{2}{3} \cdot 1{,}5^2\pi \approx 4{,}71\ (\text{cm}^2)$.
- A kúp felszíne = a palást területe + az alapkör területe = $\approx 3{,}14 + 4{,}71 = 7{,}85\ (\text{cm}^2)$.

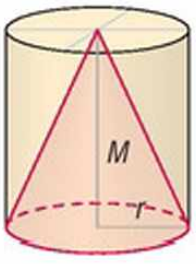
A kúp térfogata

A négyzet alapú, M magasságú hasábba írt szabályos gúla térfogata a hasáb térfogatának $\frac{1}{3}$ része, vagyis $V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot M$.



Hasonlóan:

Az M magasságú körhengerbe írt egyenes körkúp térfogata a henger térfogatának $\frac{1}{3}$ része, vagyis $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot M$.



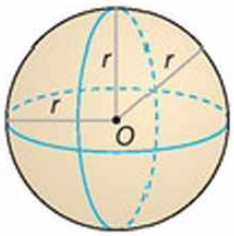


A térfogatra vonatkozó előző összefüggéseket magasabb matematikai eszközökkel lehet igazolni, csakúgy mint a gömb felszínét és térfogatát meghatározó képleteket.

Az r sugarú gömb felszíne: $A_{\text{gömb}} = 4r^2 \cdot \pi$.

Az r sugarú gömb térfogata: $V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$.

Ellenőrizzük!
$V_{\text{gömb}} + V_{\text{kúp}} = V_{\text{henger}}$

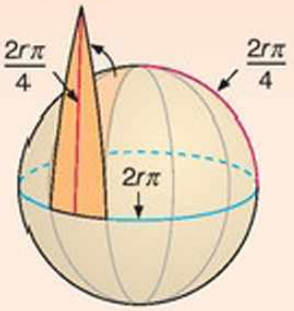


A főkör középpontja: O, sugara: r.

A görbe felületek nagyságának becslésével vigyázni kell!

2. példa

Zsófinak narancshámozás közben az az ötlete támadt, hogy a gömb felszínét talán ki lehetne számolni háromszögek területének összegeként a következő módon: a felső félgömb héjának felszíne olyan háromszögek területeinek összege, amelyek magassága a főkör kerületének negyede, alapjaik összege pedig a főkör kerülete. Megkapja-e így a helyes képletet?





Megoldás

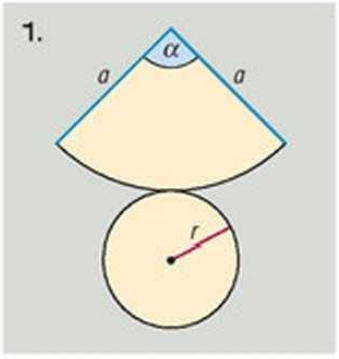
Zsófi módszerével a gömb felszíne:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot \frac{2r\pi}{4} = r^2\pi^2 = \pi \cdot r^2\pi,$$

a helyes képlet $4 \cdot r^2\pi$ helyett.

Tehát Zsófi így nem a helyes képletet kapta.

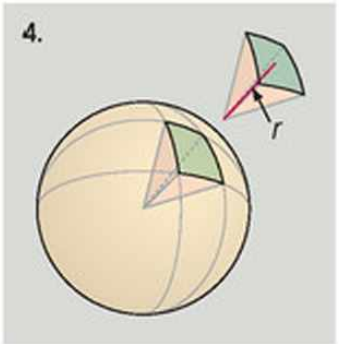
Feladatok



1. Számítsuk ki a kúpok felszínét! (➡)
   a) $a = 3$ cm; $\alpha = 120°$; *b)* $a = 5$ cm; $r = 2$ cm.

2. Számítsuk ki a kúpok térfogatát!
   a) $r = 2$ cm; $M = 5$ cm; *b)* $r = 3$ cm; $M = 2$ cm;
   **c)* $r = 2$ cm; $a = 5$ cm.

3. Számítsuk ki a gömbök felszínét és térfogatát!
   a) $r = 1$ cm; *b)* $r = 1{,}2$ cm.

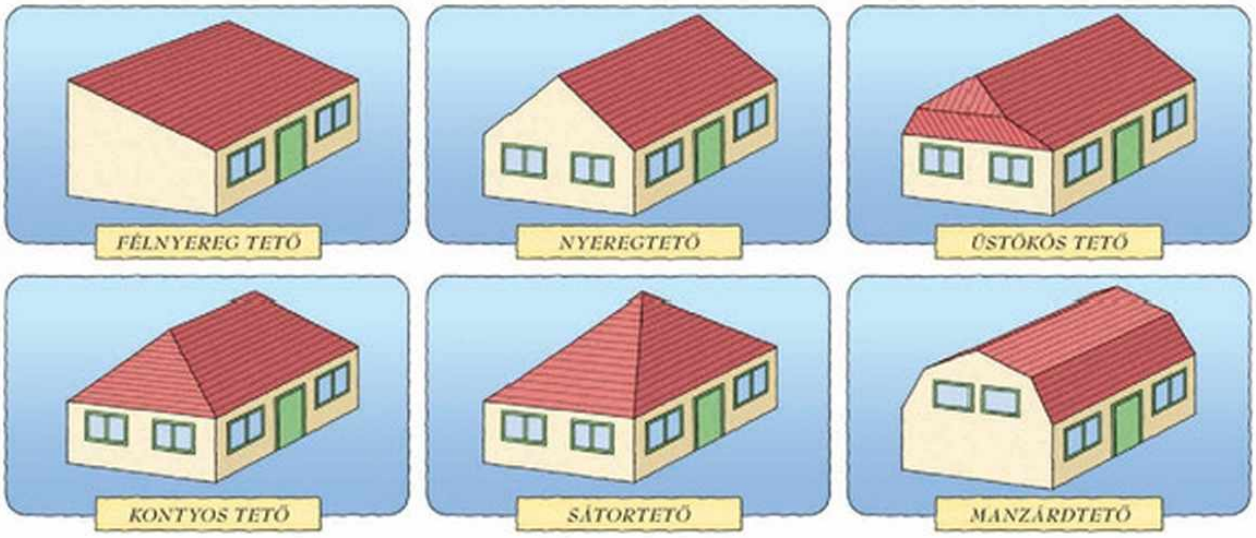


4. Gábor a gömb térfogatát gúlák térfogatának összegeként számolja. A gúlák magassága r, alapjaik területének összege pedig a gömb felszíne. Helyes képletet kap-e így? (➡)

5. Egy 4 mm átmérőjű higanygömb 1 mm átmérőjű kis gömbökre esik szét. Hány darab kis gömb lesz?

11. Vegyes feladatok

1. Milyen testet alkotnak az alábbi háztetőfajták? Rajzoljuk le az elöl-, oldal- és felülnézetüket!



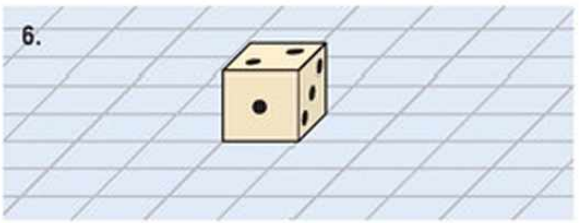
2. Egy tetraéder élvázán egy hangya sétál. Legfeljebb hány élen tud végigmenni úgy, hogy mindig olyan élen halad, ahol azelőtt sosem járt?

3. Egy kocka éleinek felezőpontjain keresztül vágjunk le tetraédereket a kockából! Hány lapja, éle, csúcsa lesz a megmaradt testnek?

4. Egy dobókocka minden élére ráírjuk a rá illeszkedő lapokra írt számok összegét. Ezután minden csúcsba beírjuk a belőle induló három élre írt számok összegét.
   a) Mennyi az élekre írt számok összege?
   b) Mennyi a testátlók végpontjaiba írt számok összege?
   c) Mennyi a csúcsokba írt számok összege?

5. Egy ötszög alapú hasábot egy síkkal két darabra vágunk szét. Hogyan vágjunk, hogy a két darab lapjai számának összege
   a) a lehető legnagyobb; *b)* a lehető legkisebb legyen?

6. A négyzetrácsos lap egy négyzetén álló szabályos dobókocka felső lapján 2 pötty van. (A kocka szemközti lapjain levő pöttyök számának összege 7.) A kockát a lapon úgy görgetjük, hogy egy-egy gördítés során egy éle körül 90°-kal forgatjuk el. (➡)



   a) Négy gördítés után a kocka rácson levő lapjai rendre 1, 2, 3, végül 5. Milyen irányba néz az 1-es lap ezek után?
   b) Görgessük úgy a kockát, hogy két gördítés után a felső lapon 4 pötty álljon! Rajzoljuk le a négyzetrácson a kocka lehetséges „útvonalait”!
   c) Oldjuk meg a *b)* feladatot, ha a felső lapon 4 helyett 1, 2, 3, 5, 6 pötty áll!
   d) A kockát először a 3-as lapjára gördítjük, utána ebbe az irányba folytatjuk a görgetést. Hány pötty áll a felső lapon az *(i)* 4.; *(ii)* 25.; *(iii)* 2010. görgetés után?

7. Egy téglatestről tudjuk, hogy két négyzet alakú lapja van, és a nem négyzet alakú lapjának egyik oldala fele a másik oldalának.

a) Hányféle ilyen téglatest van?

b) Mekkora a téglatest felszíne és térfogata, ha az élek hosszának összege 120 cm?

8. Egy téglalapot, melynek oldalai 3 cm és 5 cm, egy egyenes mentén úgy forgatunk meg, hogy a kapott forgástest henger. Mekkora a térfogata annak az így kapott hengernek, amelynek a felszíne a lehető

a) legnagyobb;

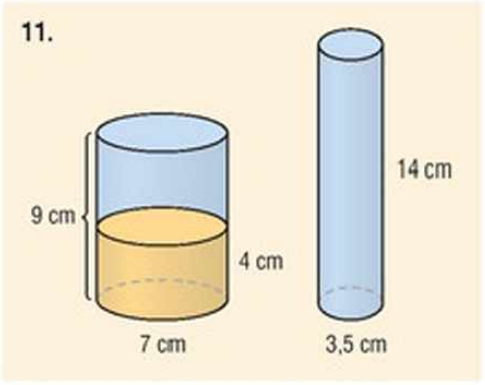
b) legkisebb?

9. Mekkora a felszíne és a térfogata annak a kockának, amelynek lapátlója

a) $\sqrt{2}$ cm; *b)* 3 cm; *c)* $\sqrt{6}$ cm?

10. Egy titkárnőnek 100 meghívót kell postáznia. 100 üres boríték egy 11,5 cm × 16 cm × 3,9 cm-es oszlop. 500 db A4-es lap egy 21 cm × 29,7 cm × 5 cm-es téglatest alakú csomag. A titkárnő a meghívót egy lapra írja, a lapot négybe hajtja, és belerakja egy borítékba. A borítékokat egy oszlopba rakja. Mekkora lesz ez az oszlop, ha a borítékok közötti légréteget nem tekintjük?

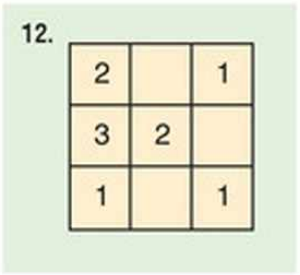
11. Az ábrán két henger alakú pohár látható, a belső méreteikkel. A szélesebb pohárban 4 cm magasan áll a narancslé, amit átöntünk a magasabb pohárba. Milyen magasan áll ebben a narancslé? (➡)



12. Az ábrán 1 cm^3 térfogatú kis kockákból épített testek alaprajzát látjuk, a négyzetbe írt számok az ott álló kis kockák számát mutatják. (➡)

a) Rakjuk a testhez a lehető legtöbb kis kockát úgy, hogy se az elölnézete, se az oldalnézete ne változzon! Rajzoljuk le az új építmény alaprajzát!

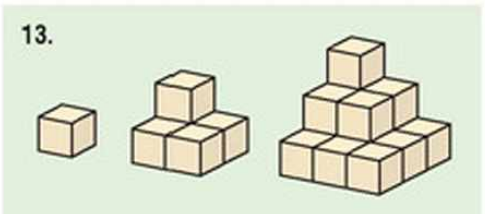
b) Hogyan változott a testek felszíne, térfogata?



13. Testek sorozatát építettük 1 cm^3-es kis kockákból. (➡)

a) Folytassuk a sorozatot még két testtel!

b) Számítsuk ki a testek felszínét, térfogatát!

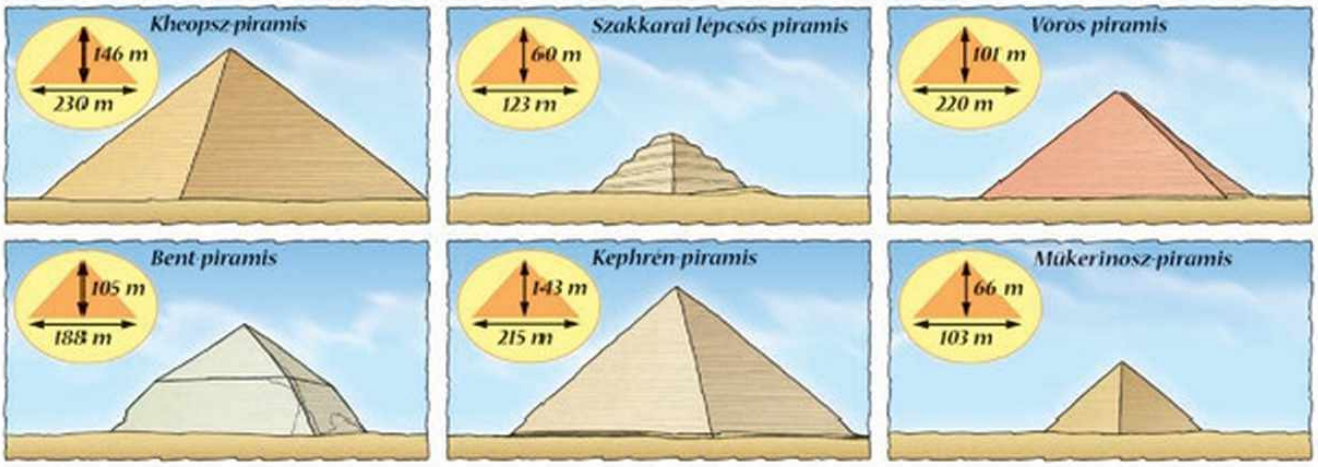


14. Egy téglalap két szomszédos oldalának aránya 2 : 3. A téglalapot a két oldala körül megforgatva két hengert kapunk. Írjuk fel a két henger térfogatának arányát!

6 Statisztika, valószínűség



1. Adatok elemzése



Különböző adatok szemléltetésére ábrákat, diagramokat, grafikonokat használunk.

Mit gondolsz, miért változtatták meg építés közben a Bent-piramis lapjainak dőlésszögét?

1. példa

A fenti ábrán hat egyiptomi piramis méreteit ábrázoltuk.

a) Állítsuk a piramisokat magasságuk szerint csökkenő sorba!
b) A felsoroltak közül hány piramis szélesebb 200 méternél?
c) Igaz-e, hogy amelyik piramis szélesebb, az magasabb is?

Megoldás

Az ábráról leolvassuk a válaszokat.

a) Magasságuk szerinti csökkenő sorrend:
Kheopsz-piramis; Kephrén-piramis; Bent-piramis; Vörös piramis; Mükerinosz-piramis; szakkarai lépcsős piramis.

b) Az ábráról leolvasható adatok szerint három piramis szélesebb, mint 200 méter: a Vörös piramis, a Kheopsz-piramis és a Kephrén-piramis.

c) Nem igaz, mert a Vörös piramis szélesebb, de nem magasabb, mint a Kephrén-piramis.

A gazdaság és a közvélemény-kutatások adatait is diagramokon ábrázolják.

2. példa

Egy internetes közvélemény-kutatás során a következőt kérdezték: Ön szerint melyik állítás igaz az alábbiak közül a világ személyautó-gyártásával kapcsolatban?

1. A világ vezető személyautó-gyártója Németország.
2. A világon a legtöbb gépkocsit Japánban gyártják.
3. Kína a világ vezető személyautó-gyártója.
4. A világon a legtöbb gépkocsit az USA-ban gyártják.

a) Ábrázoljuk kördiagramon a szavazás eredményét, ha a szavazók
12%-a az 1. állítást;
48%-a a 2. állítást;
11%-a a 3. állítást;
29%-a a 4. állítást
választotta!

b) A szavazók hány százaléka tévedett, ha a legnagyobb személyautó-gyártókat az oszlopdiagram mutatja?

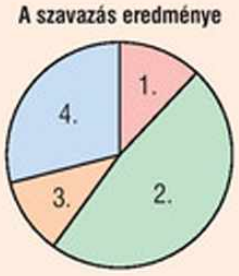


Végezzünk hasonló szavazást az osztályban, és jegyezzük fel, majd ábrázoljuk az eredményt!

Megoldás

a) A kördiagramon az 1%-nak megfelelő körcikk középponti szöge 3,6°.

1. állítás: 12% → 43,2°;
2. állítás: 48% → 172,8°;
3. állítás: 11% → 39,6°;
4. állítás: 29% → 104,4°.



b) Az oszlopdiagram szerint a világ legnagyobb személyautó-gyártója Japán. Így az 1., 3. és 4. állítást választók tévedtek, ők a szavazók

$$12 + 11 + 29 = 52\%\text{-a}.$$

Tehát a szavazók 52%-a tévedett.

Bizonyos adatoknál a korábbihoz viszonyított növekedést ábrázoljuk.

3. példa

Az oszlopdiagram a magyarországi internet-előfizetések számának százalékos növekedését mutatja az előző évihez képest.

a) Mennyi volt az internet-előfizetések száma 2001-ben, ha 2000-ben 230 000 volt?

b) Hányszorosára nőtt az internet-előfizetések száma 2003-ban a 2002-es adathoz képest?



Tippeljünk, hogy ezalatt a 8 év alatt hányszorosára nőtt az internet-előfizetők száma!

c) Hányszorosára nőtt az internet-előfizetések száma 2008 végére a 2000-es adathoz képest?

Megoldás

a) Az internet-előfizetések száma 2001-ben 40%-kal nőtt az oszlopdiagram alapján, így $230\,000 \cdot 1{,}4 = 322\,000$ lett.

b) Az internet-előfizetések száma 2003-ban 50%-kal nőtt, így 1,5-szerese, azaz másfélszerese az előző évinek.

c) Olvassuk le, és írjuk a diagram adatait táblázatba!

Év	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
%	40	38	50	20	26	33	37	27

Az évenkénti növekedést figyelembe véve – a 2000-es adathoz képest – 2008 végére a növekedés:

$$1{,}4 \cdot 1{,}38 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}26 \cdot 1{,}33 \cdot 1{,}37 \cdot 1{,}27 \approx 10.$$

Tehát 8 év alatt 10-szeresére nőtt az internet-előfizetések száma.

Az adatokat középértékekkel is jellemezhetjük.

átlag = $\dfrac{\text{adatok összege}}{\text{adatok száma}}$

medián = középső adat

módusz = leggyakoribb adat

4. példa

Dorka összeszámolta, hogy az utcájukban az egyes házakban hány kutya van:

2; 0; 1; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 2; 3; 1; 0; 7.

Mennyi a kutyák számának *a)* átlaga, *b)* mediánja, *c)* módusza?

Megoldás

a) A kutyák számának házankénti átlaga a kutyák számának és a házak számának a hányadosa:

$$\frac{2+0+1+1+1+0+1+1+1+2+3+1+0+7}{14} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Tehát az utcában házanként átlagosan 1,5 kutya van.

b) A kutyák számának mediánja a nagyság szerint sorba rendezett adatok közül a középső vagy a két középső átlaga:

0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 3; 7.

$$\frac{1+1}{2} = 1$$

Tehát a kutyák számának mediánja: 1.

c) A kutyák számának módusza a leggyakoribb adat.

Az egyes adatok gyakorisága:

Adat	0	1	2	3	7
Gyakoriság	3	7	2	1	1

Tehát a kutyák számának módusza: 1.

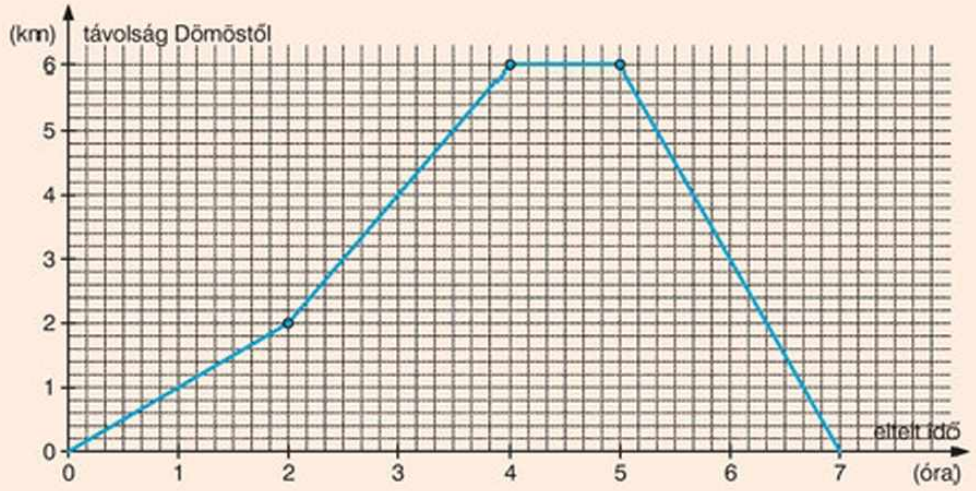


Az utcában a legtöbb házban 1 kutya van. Ezt az adatot a medián és a módusz is jól jellemzi. Viszont ha az utcában levő összes kutya számára vagyunk kíváncsiak, ahhoz az átlag ismerete hasznosabb.

Az adatok természetétől és az elemzés céljától függ, hogy a középértékek közül az átlagot, a mediánt vagy a móduszt használjuk.

5. példa

Bálinték egy kiránduláson Dömösön szálltak meg. Az egyik nap Dobogó-kőre tettek egy túrát, majd visszatértek a szállásra. Elemezzük a túráról készült grafikont!



Készítsünk hasonló grafikont egy kirándulásról!

a) Mekkora volt az átlagsebességük az első és a második 2 órában?
b) Mekkora volt az átlagsebességük az első 4 órában?
c) Mekkora volt az átlagsebességük a visszaúton?
d) Mekkora volt az átlagsebességük a teljes túrán?

Megoldás

Az átlagsebesség a megtett út és az eltelt idő hányadosa.

átlagsebesség = $\frac{\text{megtett út}}{\text{eltelt idő}}$

a) Az első 2 óra alatt 2 km-t tettek meg, így az átlagsebességük

$$\frac{2}{2} = 1\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right).$$

A második 2 órában 4 km-t tettek meg, így az átlagsebességük:

$$\frac{4}{2} = 2\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right).$$

Az átlagsebességet mindig a megtett út és az eltelt idő hányadosaként számoljuk. Az átlagsebesség nem egyenlő az egyes szakaszokon mért sebességek átlagával.

b) Az átlagsebességük az első 4 órában: $\frac{6}{4} = 1{,}5\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

c) A visszaúton az átlagsebességük: $\frac{6}{2} = 3\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

d) A teljes túrán az átlagsebesség:

$$\frac{\text{az összesen megtett út}}{\text{az összes idő}} = \frac{12}{7} = 1{,}7\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right).$$

$\frac{1{,}5+3}{2} \neq 1{,}7$

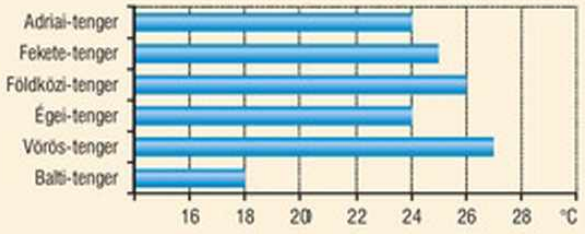
Feladatok

1. A diagram néhány tenger átlaghőmérsékletét mutatja egy nyári napon. (➡)

a) Melyik tenger a legmelegebb, melyik tenger a leghidegebb?

b) Hány tenger nem melegebb, mint 25 °C?

c) Mennyi az adatok módusza és mediánja?



2. A Föld Napja alkalmából felmérték az internetezők tájékozottságát. A honlapon a következő kérdést tették fel: „A veszélyes hulladék mennyisége 2000 és 2007 között 2007-ben volt a legalacsonyabb Magyarországon. Ön szerint hány milliárd tonna veszélyes hulladék keletkezett ekkor?"

1. állítás: 2,0 milliárd tonna; 2. állítás: 1,1 milliárd tonna; 3. állítás: 2,6 milliárd tonna;
4. állítás: 1,4 milliárd tonna; 5. állítás: 1,8 milliárd tonna.

A szavazatok megoszlása: 16% az 1., 30% a 2., 20% a 3., 17% a 4., 17% az 5. állítás.

a) Ábrázoljuk kördiagramon a szavazás eredményét!

b) A szavazók hány %-a találta el a helyes mennyiséget, ha a veszélyes hulladék mennyisége az oszlopdiagramról olvasható le? (➡)

c) Mennyi a veszélyes hulladék mennyiségének éves átlaga 2000–2007-ig?

d) Mennyi az ebben a 8 évben termelődött veszélyes hulladék mennyiségének mediánja?



3. 2007-ben egy szavazáson megválasztották Magyarország hét csodáját. Ábrázoljuk oszlopdiagramon a szavazás eredményét!



Országház
6781 szavazat



Dóm tér (Szeged)
5235 szavazat



Mátyás-templom, Halászbástya
3646 szavazat



Érseki pincerendszer (Eger)
3599 szavazat



Pannonhalmi főapátság
3392 szavazat



Esztergomi bazilika
3110 szavazat



Lánchíd
2898 szavazat

4. Állapítsuk meg a kördiagram alapján, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis! (➡)



A) Magyarország lakosságának 75%-a szereti a csokoládét.

B) A csokoládét szerető emberek 75%-a magyar.

C) Magyarországon négyszer annyian szeretik a csokoládét, mint ahányan nem.

D) Magyarországon a csokoládét nem szeretők száma a harmada a csokoládét szeretők számának.

Készítsünk hasonló közvélemény-kutatást az osztályban! Ábrázoljuk az eredményt kördiagramon! Fogalmazzunk meg igaz és hamis állításokat a diagram alapján!

***5.** Az Abacus újságba minden hónapban be lehet küldeni egy sudoku és egy számrejtvény megoldását. (Mindkettőnek csak egy helyes megoldása van.) Az első 3 hónap adatait a táblázat tartalmazza. (➡)

A sudoku versenyen a három hónap alatt összesen 543 tanuló vett részt. Közülük 312-en mindhárom feladatot hibátlanul oldották meg. A számrejtvényre összesen 401 tanuló küldött be megoldást, mindhármat 116-an oldották meg helyesen.

	Sudoku		Számrejtvény	
	Beküldött megoldások száma			
	Összes	Hibátlan	Összes	Hibátlan
Szept.	515	487	357	323
Okt.	500	477	345	326
Nov.	401	385	153	141

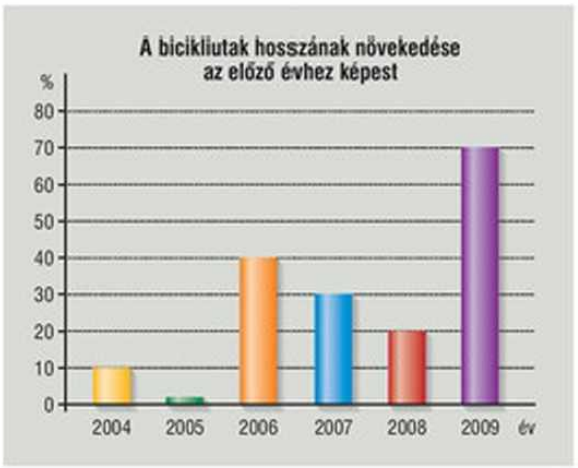
a) Melyik hónapban változott legtöbbet a beküldők száma (valamelyik versenyen)?

b) Hány olyan tanuló lehetett, aki a sudokunak csak a szeptemberi megoldását küldte be?

c) Hány olyan tanuló van, aki szeptemberben még nem küldött be megoldást a számrejtvényre, de később igen?

d) Tegyünk fel további kérdéseket, amelyekre az adatok alapján válaszolhatunk!

6. A városi levegő tisztasága érdekében folyamatosan fejlesztik a bicikliutakat. A diagram egy nagyvárosban a bicikliutak hosszának százalékos növekedését mutatja az előző évihez képest. (➡)



a) Hány százalékkal nőtt a bicikliutak hossza 2008-ban?

b) Volt-e olyan év, amikor nem nőtt a bicikliutak hossza?

c) Melyik évben nőtt a bicikliutak hossza legalább az ötödével?

d) Hányszorosára nőtt 2 év alatt a bicikliutak hossza 2008–2009-ben?

e) Mennyi a bicikliutak hossza 2009 végén, ha 2007 elején 60 km volt?

f) Hányszorosára nőtt a bicikliutak hossza 6 év alatt?

7. A grafikon a zöldségek és gyümölcsök termésmennyiségének évenkénti alakulását mutatja Magyarországon 1995-től 2008-ig.



A táblázat az egy főre jutó zöldség- és gyümölcsfogyasztás adatait tartalmazza kg-ban.

	1980	1990	2000	2004	2007
Zöldségfogyasztás (kg/fő)	79,7	83,3	109,2	117,7	117,6
Gyümölcsfogyasztás (kg/fő)	74,9	72,3	108,5	93,7	76,5
Ebből: hazai gyümölcs	65,9	61,6	89,0	74,5	58,8
déligyümölcs	9,0	10,7	19,5	19,2	17,7

a) Melyik évben volt a legmagasabb a zöldségtermés mennyisége?

b) Melyik évben volt legalacsonyabb a gyümölcstermés mennyisége?

c) Hány százaléka a 2007-es gyümölcstermés a 2004-esnek?

d) Ábrázoljuk kördiagramon a hazai és a déligyümölcs-fogyasztás arányát a 2004-es és a 2007-es évre vonatkozóan!

e) Hány százaléka a 2007-es gyümölcsfogyasztás a 2004-esnek?

***f)* Mire következtethetünk a gyümölcstermés és -fogyasztás változásából?

g) Írjunk olyan éveket, amikor

– a zöldség- és gyümölcstermés is nőtt;
– a zöldség- és gyümölcstermés is csökkent;
– a zöldségtermés nőtt, de a gyümölcstermés csökkent;
– a zöldségtermés csökkent, de a gyümölcstermés nőtt!

8. Ági kedvence a forró csoki. Októberben minden alkalommal, amikor forró csokit ivott, felírta, hogy hány forintot fizetett érte:

80; 80; 80; 90; 80; 120; 90; 80; 80; 90; 130; 120; 260; 80; 90.

a) Mennyi az Ági által megivott forró csokik árának átlaga?

b) Mennyi a forró csokik árának módusza és mediánja?

c) Az átlag, a módusz és a medián közül melyik jellemzi legjobban ezeknek az adatoknak a középértékét?

d) Ábrázoljuk diagramon az egyes adatok gyakoriságát!

9. Egy család két helyről rendelt tűzifát. A Fanyűvő Bt.-től 2 db 2 m^3-es bálát rendeltek, és 60 000 Ft-ot fizettek érte. A Favágó Társaságtól egy teherautónyi fát rendeltek, és 36 000 Ft-ot fizettek érte. Miután a fát felpakolták, kiderült, hogy a Favágó Társaság által szállított fa 2,25 m^3 volt.



a) Melyik cég árulta olcsóbban a fát?

b) Mennyi a család által vásárolt fa árának köbméterenkénti átlaga?

10. Eszter első féléves matematikajegyeit mutatja a táblázat.

Szeptember	Október	November	December	Január
4; 5	5; 5; 5	3; 5; 4; 5	4; 5	4; 5; 5

a) Mennyi a félévi jegyeinek a módusza, mediánja, átlaga?

b) Számoljuk ki a jegyek havi átlagát!

c) Igaz-e, hogy a félévi jegyek átlaga egyenlő a havi átlagok átlagával?

11. Felsoroltunk 5 számot, amelyek közül egyik átlaga a többi négynek. Tippeljük meg, melyik lehet ez a szám, és számolással ellenőrizzük!

a) 14; 22; 29; 20; 15;

b) 27; 36; 25; 29; 28;

c) 32; 43; 40; 41; 39.

12. Három szám átlaga 2010. Mennyi a harmadik szám, ha az első kettő átlaga 2009?

13. Az ötös lottón öt számot húznak az 1–90 számok közül. A kihúzott öt szám átlaga két egymást követő héten is 45 volt. Mennyi volt az ötödik szám, ha az első négy szám:

a) 1; 8; 67; 70; *b)* 32; 34; 36; 38?

14. Juneau-ban, Alaszkában az egyik évben január első 20 napjának átlaghőmérséklete 30,9 °F volt. Mennyi volt a hátralevő napok átlaghőmérséklete, ha a januári átlaghőmérséklet 25,7 °F volt ebben az évben?



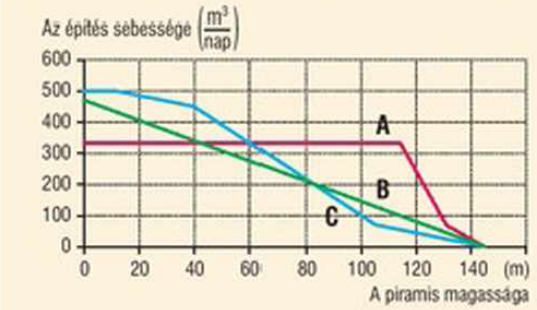
15. A 25 fős osztály minden tanulója megírta a próbafelvételit matematikából. A tanár kiszámolta az osztályátlagot, amely 42 pont lett. Később kiderült, hogy Zsuzsi 48 pontos eredményét tévedésből 23 pontnak számolta. Mennyi a helyes átlag?

16. Négy szám közül három: 102; 120; 210. A negyedik szám a négy szám átlagának kétszerese. Mennyi az átlaguk?

17. Öt szám közül az egyik megegyezik az öt szám átlagával, a második az átlaguk fele, a harmadik pedig az átlaguk kétszerese. Mennyi az átlag, ha a negyedik szám 23, az ötödik szám 34?

18. A piramisok építésének módjára különböző feltételezések vannak. Kutatók vizsgálják a piramisok épülésének sebességét, azaz hogy naponta hány köbméter követ építettek be. Ez a sebesség függ attól, hogy éppen milyen magas a piramis.

A grafikon a Kheopsz-piramis épülési sebességét ábrázolja a magasság függvényében az **A**, a **B** és a **C** elmélet alapján. (➡)



a) Jellemezzük az **A**, **B**, **C** elmélet alapján a piramis épülési sebességét!

b) Az **A** elmélet szerint milyen magasságnál kezd csökkenni az épülési sebesség?

19. A piramisok építésére vonatkozó egyik elmélet szerint az építés sebessége a magasság növekedésével egyenletesen csökken. Az építésben részt vevő munkások számát az alapján próbálják becsülni, hogy mennyi energia szükséges a kövek mozgatásához, és egy ember naponta átlagosan mennyi munkát tud végezni. Ez alapján készült az itt látható táblázat. (➡)

magasság	emelés	szállítás	egyéb	összesen
145	15	5	21	41
140	215	85	321	621
130	860	370	1360	2590
120	1290	590	2120	4000
110	1640	810	2850	5300
100	1930	1030	3540	6500
90	2150	1250	4190	7590
80	2290	1470	4830	8590
70	2370	1690	5400	9460
60	2380	1910	6010	10 300
50	2320	2130	6450	10 900
40	2190	2350	6960	11 500
30	1990	2570	7440	12 000
20	1716	2794	7890	12 400
10	1380	3010	8210	12 600
0	970	3230	8600	12 800

a) Milyen magasságnál szükséges a legtöbb munkás a kövek emeléséhez?

b) Hogyan változik a szállításhoz szükséges munkások száma a magasság emelkedésével? Miért?

c) Melyik magasságig szükséges több munkás a szállításhoz, mint az emeléshez?

Érdekesség

Bánjunk óvatosan a statisztikákkal!

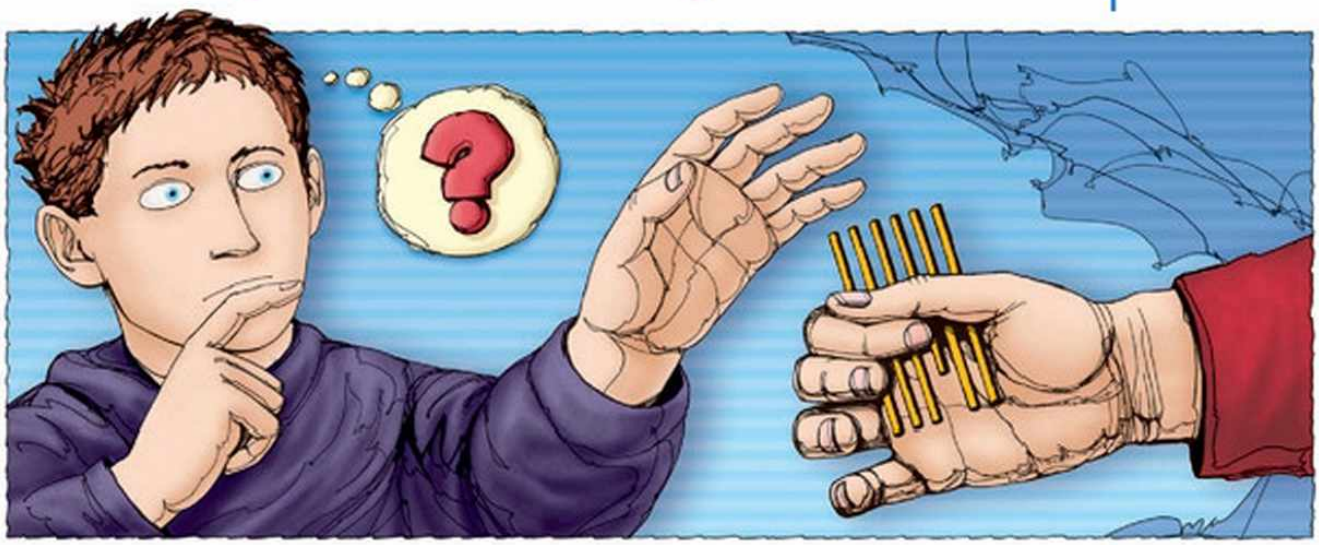
A 2009-es Roland Garros teniszverseny 2. fordulója után megjelent statisztika szerint a női mezőnyben Magyarország szerepelt a legjobban.

A főtáblán addig lejátszott mérkőzések alapján ugyanis Szávay Ágnesnek és Czink Melindának köszönhetően Magyarország 100%-os volt.

Ebben a rangsorban Oroszország a 16., az Egyesült Államok a 29. helyen állt. Igaz ugyan, hogy a legjobb négy közé két orosz és két amerikai teniszező került, és a ranglistán is előrébb álltak, mint a magyarok.

	Ország	A főtáblán pályára lépő játékosok száma	A 2. forduló után versenyben lévő játékosok száma
1.	Magyarország	2	2
2.	Dánia	1	1
3.	Svédország	1	1
4.	Szerbia	6	4
5.	Fehéroroszország	3	2
6.	Ausztrália	6	3
7.	Svájc	4	2

2. Mennyi a valószínűsége?



Mennyi a valószínűsége, hogy ő húzza a rövidebbet?

1. példa

Egy valószínűségi kísérletben feldobunk 6 érmét. A számegyenesen mindig a 0-ból indulva annyit lépünk előre, ahány fejet dobunk, és annyit hátra, ahány írást. Ezt a kísérletet 20-szor megismételtük, és a következőt kaptuk:

Dobás	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Fejek száma	2	4	4	3	4	3	3	2	4	4	1	2	5	3	1	4	3	3	2	2
Írások száma	4	2	2	3	2	3	3	4	2	2	5	4	1	3	5	2	3	3	4	4

a) Jegyezzük fel a $[-6; 6]$ szakasz egész pontjai közül, hogy melyik pontba hányszor jutottunk!
b) Készítsünk gyakorisági diagramot!
c) Mennyi az egyes pontokba jutás relatív gyakorisága?
d) Juthat-e valaki az 1 pontba?
e) A $[-6; 6]$ szakasz mely egész pontjaiba lehetetlen eljutni?

Megoldás

a) Először írjuk fel, hogy az egyes kísérletek során hová jutottunk!

Dobás	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Számegyenes pontja	−2	2	2	0	2	0	0	−2	2	2	−4	−2	4	0	−4	2	0	0	−2	−2

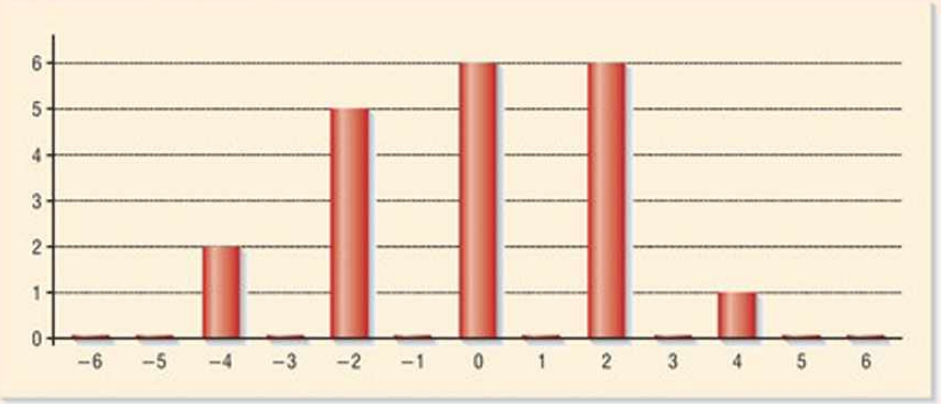
Számoljuk össze, melyik pontba hányszor jutottunk! Ez az érték az adott pont gyakorisága.

Számegyenes pontja	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság	0	0	2	0	5	0	6	0	6	0	1	0	0



Mindenki húz egy egész számot a [−6; 6] szakaszról. Minden kísérletnél az nyer, akinek a számához jutunk a számegyenesen. Ki hányszor nyert? Ha választhatnál számot, akkor melyiket választanád?

b) A gyakoriságI diagram:



c) Annak a relatív gyakorisága, hogy egy adott pontba jutunk, a pont gyakoriságának és a kísérletek számának hányadosa:

Számegyenes pontja	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
Relatív gyakoriság	0	0	$\frac{2}{20}$	0	$\frac{5}{20}$	0	$\frac{6}{20}$	0	$\frac{6}{20}$	0	$\frac{1}{20}$	0	0

d) Az 1-es pontba úgy juthatnánk, ha 1-gyel több fejet dobnánk, mint írást. Mivel 6 érmét dobunk fel, így az írások száma $\frac{6-1}{2} = 2{,}5$ kellene, hogy legyen, ami nem egész szám, ezért lehetetlen.

e) A 6-os pontba 6 fej dobásával, a −6-os pontba 6 írás dobásával juthattunk volna. Mivel 6 érmét dobunk fel, ezért se 6-nál nagyobb, se −6-nál kisebb számot jelző pontba nem juthatunk.

Egy dobással a *fejek száma − írások száma* különbségnek megfelelő pontba jutunk. Mivel 6 érme esetén a *fejek száma + írások száma* = 6 páros, ezért a *fejek száma − írások száma* különbség is páros. Ezért csak páros számot jelző pontba juthatunk.

Tehát a −5; −3; −1; 1; 3; 5 pontokba lehetetlen eljutni.

A kísérletek során egy esemény bekövetkezéseinek száma az esemény **gyakorisága.** Az esemény gyakoriságának és a kísérletek számának hányadosa az esemény **relatív gyakorisága**:

$$\text{relatív gyakoriság} = \frac{\text{az esemény gyakorisága}}{\text{a kísérletek száma}}.$$

Ha egy esemény lehetetlen, a relatív gyakorisága 0.
Ha egy esemény relatív gyakorisága 0, még nem biztos, hogy lehetetlen.

2. példa

Dobjunk fel egy szabályos dobókockát 10-szer egymás után, és számítsuk ki a „legfeljebb 2-est dobtunk” esemény relatív gyakoriságát! Végezzük el 10-szer egymás után ezt a dobássorozatot!



a) Mennyi a relatív gyakoriságok átlaga?

b) A lehetséges esetek hányadrészében következik be a „legfeljebb 2-est dobtunk” esemény?

Megoldás

Sorozat	A tíz dobás	Legfeljebb 2-t dobtunk gyakorisága	Legfeljebb 2-t dobtunk relatív gyakorisága
1.	1; 2; 3; 4; 2; 3; 5; 2; 2; 4	5	$\frac{5}{10}$
2.	4; 3; 2; 6; 6; 5; 4; 5; 1; 5	2	$\frac{2}{10}$
3.	1; 4; 5; 3; 4; 2; 6; 5; 4; 1	3	$\frac{3}{10}$
4.	4; 3; 5; 2; 4; 5; 2; 1; 2; 6	4	$\frac{4}{10}$
5.	6; 2; 2; 3; 1; 3; 4; 5; 1; 3	4	$\frac{4}{10}$
6.	3; 2; 5; 4; 3; 2; 3; 6; 6; 3	2	$\frac{2}{10}$
7.	5; 4; 4; 3; 6; 1; 2; 3; 1; 2	4	$\frac{4}{10}$
8.	6; 4; 5; 5; 5; 1; 4; 6; 1; 6	2	$\frac{2}{10}$
9.	6; 4; 6; 1; 2; 2; 5; 2; 6; 4	4	$\frac{4}{10}$
10.	3; 1; 3; 1; 3; 3; 6; 6; 2; 1	4	$\frac{4}{10}$

a) A relatív gyakoriságok átlaga:

$$\frac{\frac{5}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{4}{10}+\frac{2}{10}+\frac{4}{10}+\frac{2}{10}+\frac{4}{10}+\frac{4}{10}}{10}=\frac{34}{100}=0{,}34.$$

b) Szabályos dobókockával 6-féle számot dobhatunk, mindegyiket ugyanakkora valószínűséggel. Az összes lehetséges eset száma: 6. A „legfeljebb 2-est dobtunk” esemény akkor következik be, ha 1-est vagy 2-est dobtunk, így a kedvező esetek száma: 2.

Tehát a lehetséges esetek $\frac{2}{6}\approx 0{,}33$ részében következik be a „legfeljebb 2-est dobtunk” esemény.



Ha sok kísérletet végzünk, egy esemény relatív gyakorisága egy érték körül ingadozik. Ezt az értéket az esemény **valószínűségének** tekintjük.

A példában a kocka mindegyik lapjára ugyanakkora valószínűséggel esik, ilyenkor egy esemény valószínűségét megadhatjuk a kedvező esetek és az összes lehetséges eset számának arányával:

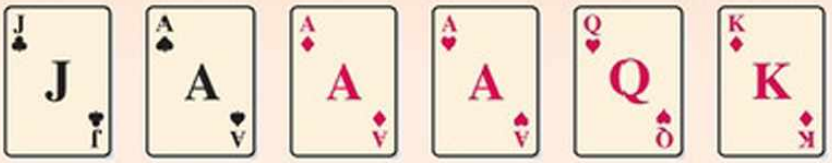
$$\textbf{valószínűség}=\frac{\textbf{kedvező esetek száma}}{\textbf{összes eset száma}}.$$

Ász A
Király K
Dáma Q
Bubi J

♣ treff
♠ pikk
♦ káró
♥ kőr

3. példa

Egy játék során mindig egy lapot húzunk az alábbi kártyalapok közül:



Minden húzásnál korongokat lehet nyerni. Egy húzásnál többen is nyerhetnek a következő szabályok szerint:

– Anna nyer, ha piros lapot húzunk.
– Bori nyer, ha ászt húzunk.
– Csaba nyer, ha feketét húzunk.
– Dorka nyer, ha ászt, királyt, dámát vagy bubit húzunk.
– Eszter nyer, ha fekete ászt húzunk.
– Kristóf nyer, ha feketét vagy ászt húzunk.
– János nyer, ha fekete királyt húzunk.

Például, ha a  lapot húzzuk, akkor Anna nyer, mert a lap piros, Bori nyer, mert ász, Dorka nyer, mert ász, és Kristóf is nyer, mert ász.

20 húzás a következő volt:



a) Ki hány korongot nyert a 20 húzás során?

b) Állítsuk növekvő sorba a játékosokat nyerésük relatív gyakorisága alapján!

c) Állítsuk növekvő sorba a játékosokat az alapján, hogy a lehetséges húzások hányadrészében nyernek!

Megoldás

a) Írjuk fel, hogy az egyes húzásoknál kik nyertek!

Húzás																					Gyak.	Rel. gy.
Anna			•	•	•		•		•	•	•	•		•	•		•	•		•	13	$\frac{13}{20}$
Bori			•		•			•	•	•	•		•	•	•	•	•		•		12	$\frac{12}{20}$
Csaba	•	•				•		•					•			•			•		7	$\frac{7}{20}$
Dorka	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	20	$\frac{20}{20}$
Eszter								•					•			•			•		4	$\frac{4}{20}$
Kristóf	•	•	•		•	•		•	•	•	•		•	•	•	•	•		•		15	$\frac{15}{20}$
János																					0	0



b) A játékosok sorrendje a relatív gyakoriság alapján:

János < Eszter < Csaba < Bori < Anna < Kristóf < Dorka.

c) A játék során mindig 6 lap közül húzunk 1-et, mindet ugyanakkora valószínűséggel, így a lehetséges húzások száma összesen 6.

Írjuk fel, ki mely lapok húzása esetén nyer, és a kedvező húzások száma hányadrésze az összes lehetséges húzásnak!

	Anna	Bori	Csaba	Dorka	Eszter	Kristóf	János
Kedvező lapok	♦A ♥A ♣Q ♠K	♦A ♥A ♠A	♣J ♠A	♦A ♥A ♣J ♣Q ♠K ♠A	♠A	♣J ♦A ♥A ♥A	—
Nyerési esély	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{6}{6}=1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	0

Ez alapján a játékosok sorrendje:

János < Eszter < Csaba < Bori < Anna = Kristóf < Dorka.

Nyerési esélyek összehasonlítása kísérletezéssel.

A példa alapján vegyük észre a relatív gyakoriság és a valószínűség következő tulajdonságait!

Nyerési esélyek összehasonlítása következtetéssel.

- A példában a nyerési esélyek sorrendjét kétféleképpen határoztuk meg:
  - kísérletezéssel: a relatív gyakoriság alapján;
  - következtetéssel: a kedvező húzások és az összes lehetséges húzás aránya alapján.

  A két sorrend megegyezett, csak az egyenlő esélyt a relatív gyakoriság nem mutatja.
- A példában Dorka mindig nyert. Dorka nyerése biztos esemény, mert a relatív gyakorisága 1, és a nyerési esélye is 1.

  A biztos esemény valószínűsége 1.
- A példában János soha nem nyerhetett. János nyerése lehetetlen esemény, mert a relatív gyakorisága 0, és a nyerési esélye is 0.

  A lehetetlen esemény valószínűsége 0.



- A relatív gyakoriság nem lehet 0-nál kisebb és 1-nél nagyobb. Így a valószínűség is 0 és 1 közé esik.
- A példában Anna és Csaba közül egyikük biztosan nyer, de együtt nem nyerhetnek. Anna és Csaba nyerése relatív gyakoriságának összege:

$$\frac{13}{20}+\frac{7}{20}=\frac{20}{20}=1.$$

Ugyanígy nyerésük valószínűségének összege: $\frac{4}{6}+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}=1$.

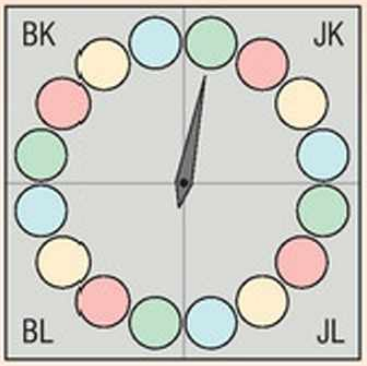
Ha két esemény közül az egyik biztosan bekövetkezik, de a kettő együtt nem következhet be, akkor valószínűségük összege 1.

Anna nyer = = Csaba nem nyer

Anna nem nyer = = Csaba nyer

4. példa

A TWISTER nevű játékban az ábrán látható pörgettyűvel sorsolják ki, hogy a következő lépésben a játékosoknak melyik kezüket vagy lábukat a játékszőnyegen milyen színű körre kell tenniük.

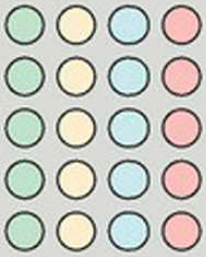


a) Mennyi a valószínűsége, hogy a bal lábat piros körre kell tenni?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy (kézzel vagy lábbal) kék kört kell érinteni?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a bal kezet nem kell mozdítani?

d) Flóra bal keze és jobb lába piros körön, jobb keze kéken, bal lába sárgán van. Mennyi a valószínűsége, hogy mindegyik végtagja olyan színű körre kerül a pörgetés után, mint amilyenen előtte volt?



A játékszőnyeg

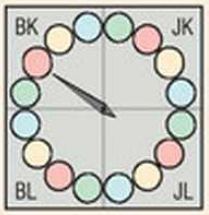
Megoldás

A pörgettyű mutatója a pörgettyűn levő 16 színes kör valamelyikére mutat, mindegyikre ugyanakkora valószínűséggel. Ezért a kérdésekben szereplő valószínűségeket a kedvező esetek számának és az összes lehetséges eset számának hányadosával számolhatjuk.

Az összes eset száma: 16.

A kedvező esetek száma a pörgettyűről leolvasható.

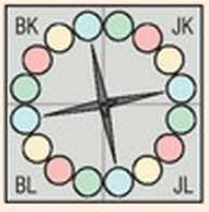
a) Esemény: a bal láb piros körére mutat a mutató.



Kedvező esetek száma: 1.

Valószínűség: $\frac{1}{16}$.

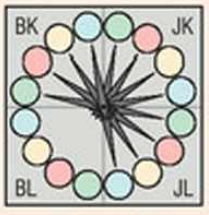
b) Esemény: kék körre mutat a mutató.



Kedvező esetek száma: 4.

Valószínűség: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

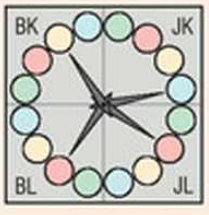
c) Esemény: a mutató nem mutat bal kézre, azaz jobb kézre, bal lábra vagy jobb lábra mutathat.



Kedvező esetek száma: 12.

Valószínűség: $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

d) Esemény: a mutató bal kéz piros vagy jobb láb piros vagy jobb kéz kék vagy bal láb sárgára mutathat.



Kedvező esetek száma: 4.

Valószínűség: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

A lehetőségek számbavételekor az ábrázolás segíthet. Érdemes rajzolni!

5. példa

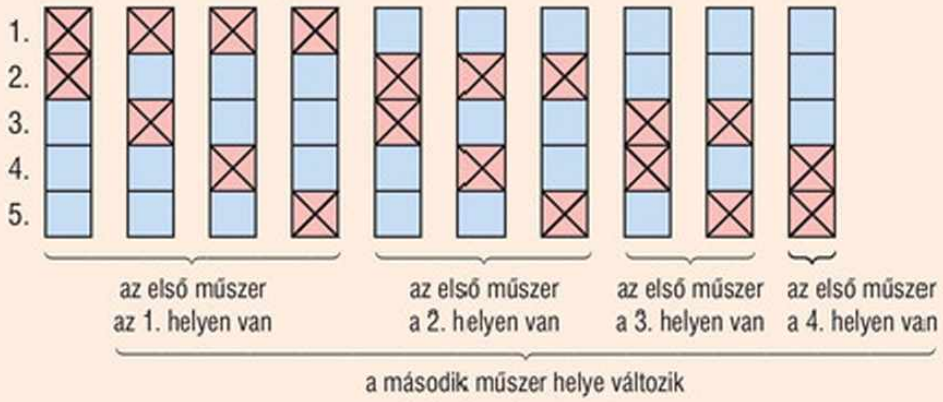
Az M1-es autópálya öt legveszélyesebb szakaszán egy-egy dobozt szereltek fel, amelyekbe véletlenszerűen sebességmérő műszereket telepítenek. Mindig 2 dobozban van sebességmérő. Az első dobozhoz közeledünk. Mennyi a valószínűsége, hogy van benne műszer, ha a műszerek ugyanakkora valószínűséggel kerülhetnek bármelyik dobozba?



Megoldás

A műszerek mindegyik elhelyezésének ugyanakkora a valószínűsége, ezért a kérdéses valószínűséget számolhatjuk a kedvező esetek számának és az összes lehetséges eset számának hányadosával.

Rajzoljuk le az összes lehetséges esetet! A négyzetek az egymás utáni dobozokat jelentik, és x-et rajzolunk abba a négyzetbe, amelyik dobozban van műszer.



Az összes lehetséges eset száma: 10.
A vizsgált esemény: az egyik műszer az 1. dobozban van.
A kedvező esetek száma: 4.

A vizsgált esemény valószínűsége: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Tehát $\frac{2}{5}$ valószínűséggel van sebességmérő műszer az 1. dobozban.



A valószínűség-számítási feladatok egy részénél az esetek összeszámlálása jelenti a fő nehézséget.

***6. példa**

Egy csaló olyan dobókockát készített, amellyel $\frac{1}{12}$ valószínűséggel lehet 1-est, $\frac{1}{12}$ valószínűséggel 2-est, $\frac{1}{10}$ valószínűséggel 3-ast, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel 4-est és $\frac{1}{5}$ valószínűséggel 5-öst dobni.

Mekkora valószínűséggel dobhatunk ezzel a kockával 6-ost?



Megoldás

A dobókockán egyszerre csak egy számot dobhatunk, így annak valószínűsége, hogy 1-est, 2-est, 3-ast, 4-est, 5-öst vagy 6-ost dobunk, egyenlő az egyes dobások valószínűségének összegével.

Mivel valamelyik számot biztosan dobjuk, az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számok dobási valószínűségeinek összege 1.

p-vel jelölve a 6-os dobás valószínűségét:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+p=1$$

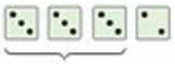
$$\frac{5+5+6+10+12}{60}+p=1$$

$$p=1-\frac{38}{60}$$

$$p=\frac{22}{60}=\frac{11}{30}$$

Tehát a 6-os dobás valószínűsége $\frac{11}{30}$.

Példa a játékra:



Ezeket kiveszem.

Ezután 1 kockával dobok.

Ha , akkor érvénytelen a sorozat.

Ha , akkor ezt is kiveszem.

$3+3+3+5=14$ pontom van.

Ekkor bármelyik 8–14-ig bent lévő kártyát kivehetem.

Ha az egyes számok dobásának nem ugyanakkora a valószínűsége, akkor a valószínűséget **nem lehet** a kedvező esetek számának és az összes lehetséges eset számának hányadosaként számolni.

Felhasználhatjuk viszont azt, hogy a „6-os dobás” valószínűségének és a „nem 6-os dobás” valószínűségének összege 1.

Játék (2-4 játékos)

Rakjuk az asztalra a következő 11 kártyát: 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18!

A soron következő játékos 4 dobókockával dob. A dobott számok közül választ egyet, és kiveszi az összes olyan kockát, amelyen a választott szám van. A játékos minden dobás után eldönti, hogy megáll, vagy a megmaradt kockákkal folytatja a dobást, de ezután már nem választhat olyan számot, amit az előző dobás(ok) után kivett. Ha a játékos nem áll meg, és a következő dobása után nem tud kockát kivenni, akkor nem húzhat lapot, és a következő játékos dob. Amikor úgy dönt, hogy megáll, akkor elvehet egy olyan kártyát az asztalról, amelyen legfeljebb annyi áll, mint amennyi a kivett kockákon lévő számok összege. Ha a játékos nem tud elvenni kártyát, akkor a dobása érvénytelen, és vissza kell raknia az asztalra az előző dobássorozat végén megszerzett kártyáját. Az győz, akinek az összegyűjtött kártyáin a számok összege a legnagyobb.

Feladatok

1. Két érmét, egy 10 és egy 20 forintost 50-szer egymás után feldobtunk, és feljegyeztük, hogy hányszor dobtunk 0; 1; 2 fejet:

   a) Ábrázoljuk oszlopdiagramon a 0, 1, 2 fej dobásának gyakoriságát!

Fejek száma	Strigulák
0	𝍸 𝍸 ||
1	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||
2	𝍸 𝍸 |
összesen	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸

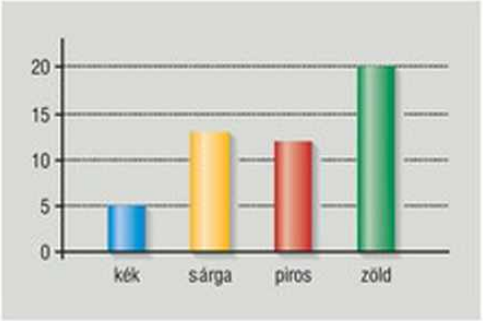
b) Számítsuk ki a 0, 1, 2, fej dobásának relatív gyakoriságát!

c) Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Indokoljuk a kísérlet alapján, és következtetéssel is!

1. A „0 fejet dobtunk”, az „1 fejet dobtunk” és a „2 fejet dobtunk” események valószínűsége megegyezik.
2. Az „1 fejet dobtunk” esemény valószínűsége kétszerese a „0 fejet dobtunk” esemény valószínűségének.
3. Ugyanakkora valószínűséggel dobtunk 0 fejet, mint 2 fejet.

d) Végezzük el a kísérletet, és vizsgáljuk meg az eredményeinket!

2. Egy zsákban 20 golyó van, kékek, sárgák, zöldek és pirosak. A zsákból egy golyót kihúztunk, feljegyeztük a színét, majd visszatettük. Ezt a kísérletet 50-szer megismételtük. Az egyes színek gyakoriságát a diagram mutatja. (➡)



a) Számítsuk ki az egyes színek húzásának relatív gyakoriságát!

b) Melyik színű golyóból lehet a legtöbb és melyikből lehet a legkevesebb a zsákban?

3. Dobjunk fel egy szabályos dobókockát, és figyeljük, hogy páros számot dobtunk-e.

a) Végezzük el a kísérletet 10-szer, és számítsuk ki a páros szám dobásának relatív gyakoriságát!

b) Dobjunk öt ilyen tízes sorozatot! Mindegyik sorozatnál számítsuk ki a páros szám dobásának relatív gyakoriságát! Mennyi az öt relatív gyakoriság átlaga?

4. A táblázat a 8. b osztályban tanuló fiúk és lányok számát, valamint az angolul és a franciául tanulók számát mutatja. (Mindenki csak egy nyelvet tanul.) Az osztályból véletlenszerűen kiválasztunk egy tanulót.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló

a) fiú;

b) franciául tanul;

c) angolul tanuló lány;

d) angolul tanul vagy lány?

	angol	francia
fiú	10	4
lány	4	8

5. Egy szabályos dobókockát egyszer feldobunk. Figyeljük meg a következő eseményeket:

A: a dobott szám prímszám;
B: a dobott szám páros és legalább 5;
C: a dobott szám páros vagy legalább 5;
D: a dobott szám nem 6!

a) Végezzünk öt 10 kísérletből álló kísérletsorozatot! Számoljuk ki egy-egy kísérletsorozatra a fenti események relatív gyakoriságát, majd a relatív gyakoriságok átlagát!

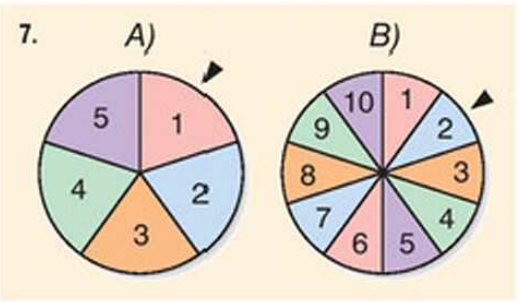
b) Mennyi a fenti események valószínűsége?

6. Véletlenszerűen választunk egy kétjegyű számot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kétjegyű szám

a) osztható 5-tel;
b) legalább 50;
c) kerekítve 40;
d) osztható 5-tel és 3-mal;
e) osztható 5-tel vagy 3-mal?

7. Az ábrán látható két pörgettyűt megforgatjuk, és a kapott számokat összeszorozzuk. Mennyi a valószínűsége, hogy a szorzat

a) kisebb 10-nél;
b) páratlan;
c) páros;
d) 3-mal osztható?



8. Öt pingponglabdára egy-egy számot írunk 1–5-ig, majd a pingponglabdákat egy zsákba tesszük. Gyerekek sorban húznak egy labdát, majd visszateszik a zsákba. Mennyi a valószínűsége, hogy minden gyerek különböző számot húz, ha a gyerekek száma

a) 2; *b)* 5; *c)* 6.

9. Lórinak 6 pólója van: két fehér, egy drapp, két kék és egy barna, valamint 2 rövidnadrágja: egy drapp és egy kék. Lóri véletlenszerűen választ a 6 póló és a 2 rövidnadrág közül egy pólót és egy nadrágot. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) barna pólót és drapp nadrágot választott;
b) fehér pólót és kék nadrágot választott;
c) a pólója és nadrágja ugyanolyan színű?

10. Egy iskolában 8 osztály van, minden évfolyamon egy. Az igazgató véletlenszerűen kiválaszt két osztályt, akiket meghív pizzázni. Mennyi a valószínűsége, hogy a 8. osztályt meghívja?

11. Egy digitális óra kijelzője délután 1:00 és 2:00 között (ha a kettőspontot nem vesszük figyelembe) egy prímszámot mutat. Mennyi a valószínűsége, hogy elmúlt háromnegyed kettő?

***12.** Egy boltban 50 Ft-ot kapunk vissza. Az 50 Ft minden kifizetési módja ugyanolyan valószínű (az érmék sorrendje nem számít).

a) Mennyi a valószínűsége, hogy kapunk 20 forintost?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy nem kapunk 5 forintost?

***13.** Három játékos feldob egy-egy érmét. Ha ketten egyformát dobnak, a harmadik pedig mást, akkor a harmadik nyer. Különben döntetlen. Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik játékos nyer?

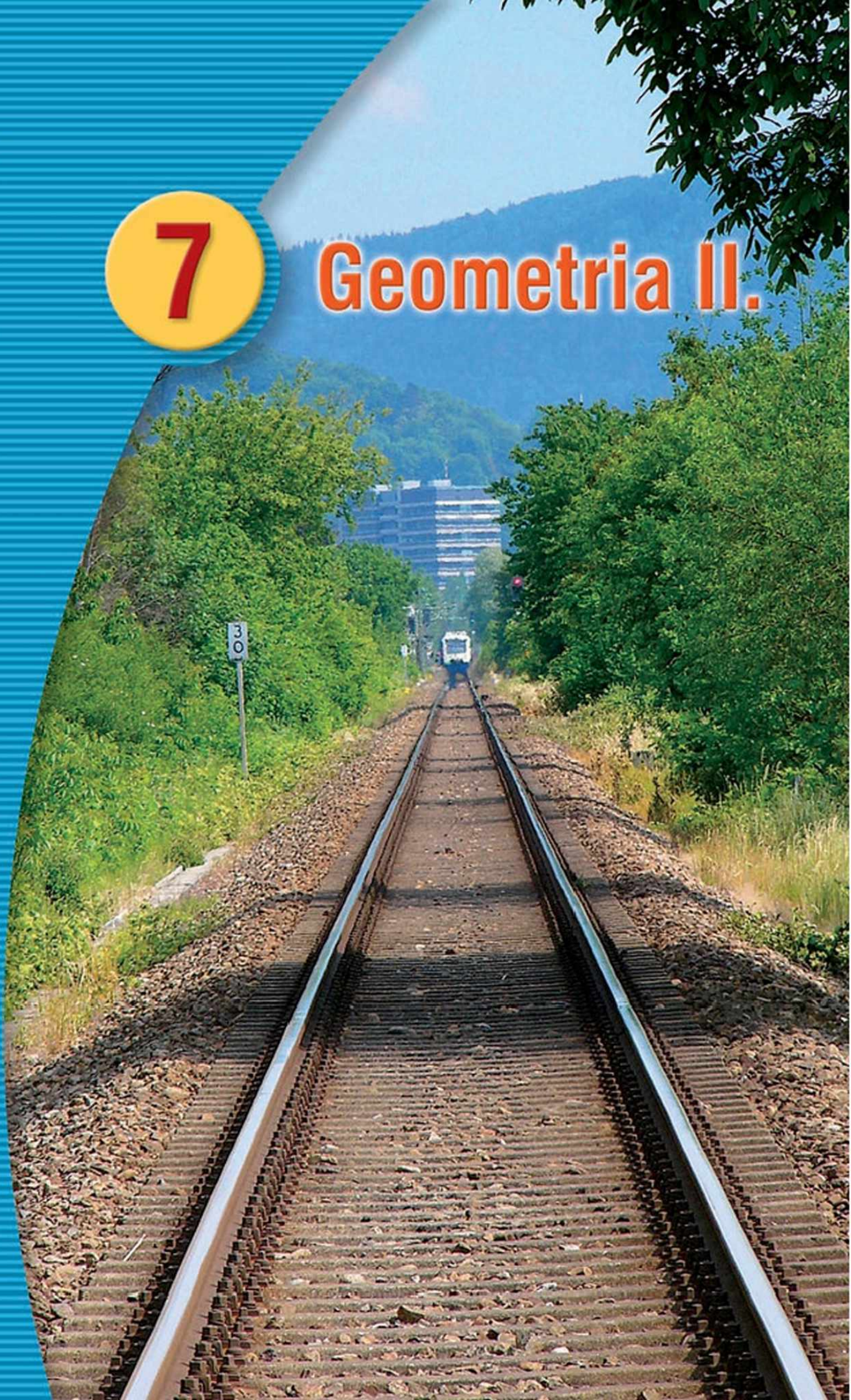
***14.** Egy nem szabályos dobókockával háromszor akkora valószínűséggel dobunk páros számot, mint páratlant. Mennyi a páros szám dobásának valószínűsége?

***15.** A 2009-es wimbledoni tenisztorna döntője előtt a fogadóirodák szerint Federer nyerési esélye kétszerese volt Roddick nyerési esélyének. Mekkora eséllyel nyerhetett volna Roddick a fogadóirodák szerint?

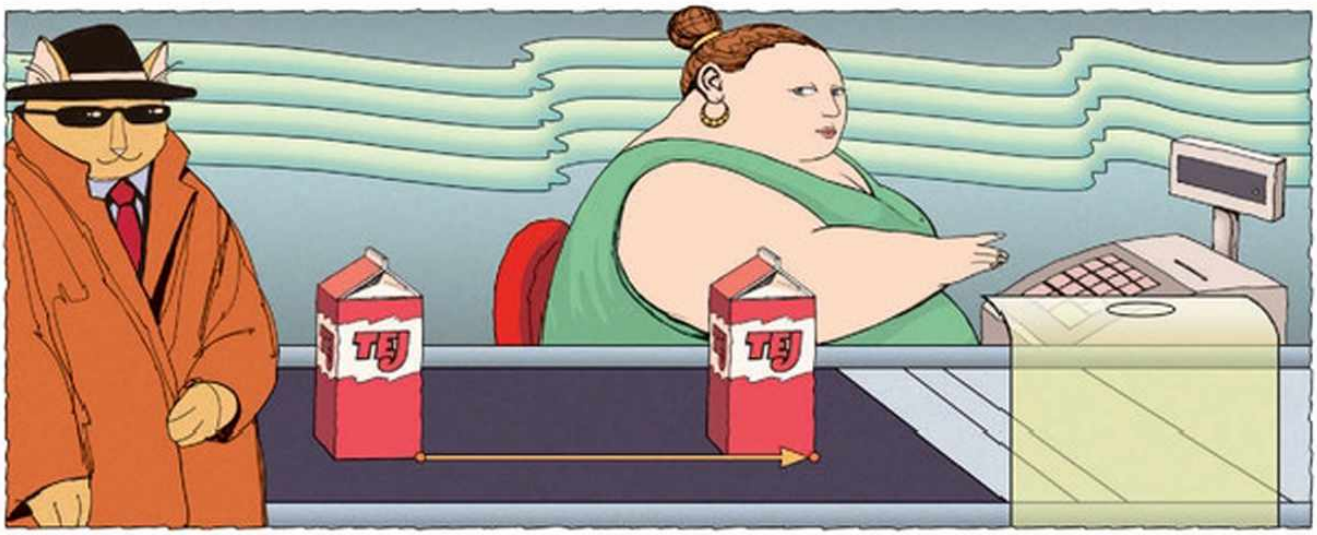
Rejtvény

Pista azt állítja, hogy két szám összege nagyobb valószínűséggel páros, mint páratlan. Ugyanis páratlan csak úgy lehet az összeg, ha egy páratlan és egy páros számot adunk össze, páros összeg viszont kétféleképpen lehet, ha két páros, vagy ha két páratlan számot adunk össze. Igaza van-e?

7 Geometria II.



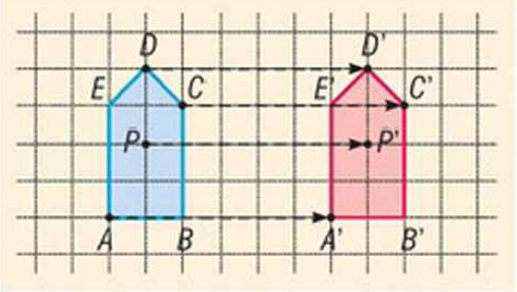
1. Az eltolás



A nagyáruházak pénztárgépei előtt az árut futószalagon mozgatják. Ezt a folyamatot a matematika segítségével is leírhatjuk. Az elmozdulással kapcsolatban néhány egyszerűsítést alkalmazunk.

Tekintsük a futószalagra helyezett tejesdoboz kezdeti és végállapotát!

A tejesdoboz elölnézeti képén megjelölt A pont a mozgás következtében az A' pontba kerül. Azt mondjuk, hogy az A pont képe A' ($A \to A'$), a C képe C' ($C \to C'$), a D képe D' ($D \to D'$), a tetszőlegesen kiválasztott P pont képe P' ($P \to P'$).



Mivel a futószalag a doboz minden pontját ugyanakkora távolságra mozgatta el egy egyenes mentén ugyanabba az irányba, ezért:

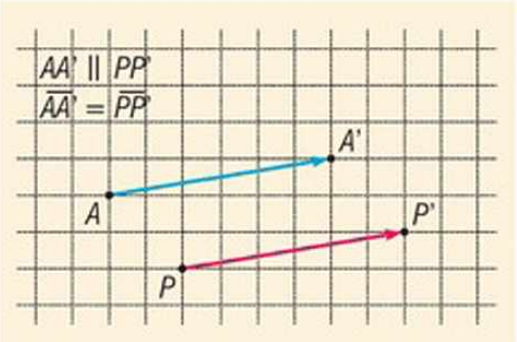
$$AA' = CC' = DD' = PP' \quad \text{és} \quad AA' \parallel CC' \parallel DD' \parallel PP'.$$

A párhuzamos eltolást röviden eltolásnak nevezzük.

Azt a mozgást, amely a sík minden pontját ugyanabba az irányba és ugyanolyan távolságra mozgatja el, **párhuzamos eltolásnak** nevezzük.

Ha egy párhuzamos eltolás során az A pont képe az A' pont, akkor a sík bármely P pontjának képe az a P' pont, amelyre teljesül, hogy

- a PP' szakasz párhuzamos és egyenlő az AA' szakasszal,
- a P kezdőpontú P'-n átmenő félegyenes azonos irányú az A kezdőpontú A'-n átmenő félegyenessel.

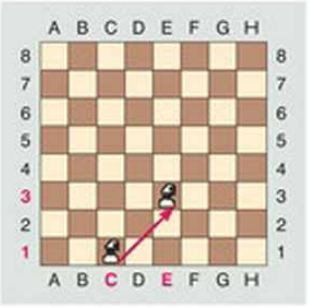


A párhuzamos eltolást tehát meghatározza egy pont és a képe ($A \to A'$), vagyis egy olyan szakasz, melynek A a kezdőpontja, A' pedig a végpontja.

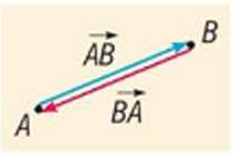
Az A kezdőpontú, B végpontú szakaszt az A-ból a B-be mutató **irányított szakasznak** nevezzük. Jelölése: $\overrightarrow{AB}$.

A hétköznapi életben sok elmozdulás tekinthető eltolásnak. Például:

- mozgólépcsőn álló bőrönd mozgása a lépcső aljától a tetejéig;
- a lift mozgása az 1. emeletről a földszintig;
- a futó elmozdulása a sakktáblán C1-ből E3-ba.



Mondjunk további példákat eltolásra!

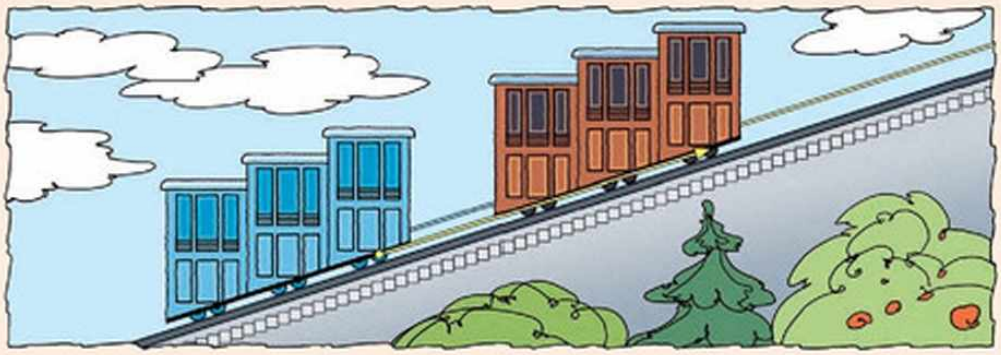


$\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BA}$ ellentétes irányú irányított szakaszok.

Az irányított szakasz egyszerre két információt közöl velünk: távolságot és irányt.

1. példa

Milyen mozgással kerül a rajzon látható fogaskerekű vagonja az egyik helyről a másikba?

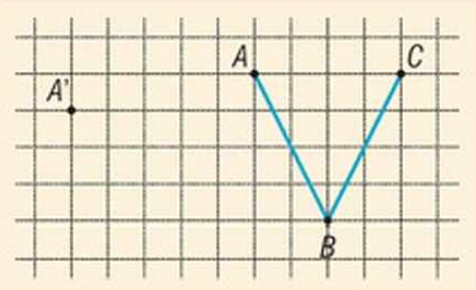


Megoldás

Mivel a vagon minden pontja ugyanabba az irányba és ugyanolyan távolságra mozgott a sínen, ezért a mozgása párhuzamos eltolás.

2. példa

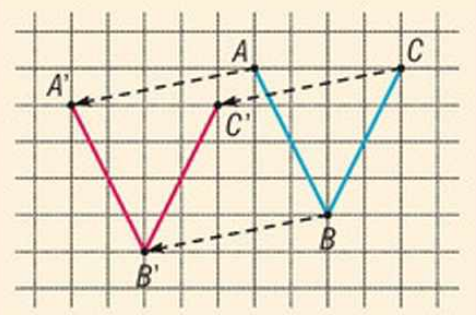
Rajzoljuk meg a rácson a V betű párhuzamos eltolással kapott képét úgy, hogy az A pont képe az A' pont legyen!



Megoldás

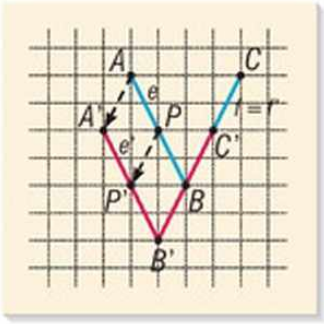
Rajzoljuk meg az AA' szakaszt! A B ponton át az AA'-vel párhuzamost húzunk. Erre B-ből felmérjük az AA' szakasz hosszával azonos távolságot úgy, hogy a félegyenesek azonos irányításúak legyenek.

Az eljárást C-re megismételve megkapjuk a C' pontot. A', B' és C' ismeretében megrajzolható a V betű eltolt képe.



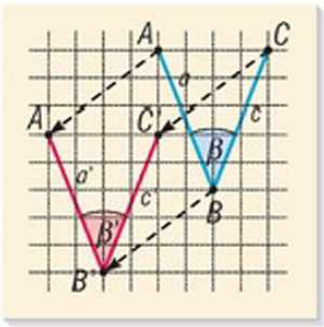


Az első két példából leolvashatók az eltolás **tulajdonságai.**



1. Eltoláskor a sík minden pontja elmozdul a helyéről, azaz a síknak nincs olyan pontja, melynek képe önmaga, ezért az eltolásnak **nincs fixpontja.**

$$P \longrightarrow P'$$



2. Ha egy egyenes párhuzamos az eltolás irányával, akkor az egyenes minden pontja elmozdul, de az egyenes képe önmaga.

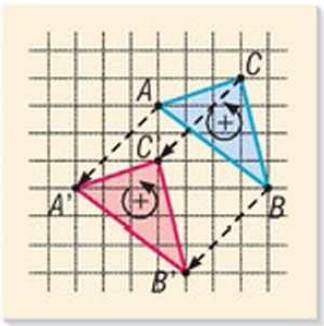
$$f = f'$$

3. Az eltolás során minden egyenes párhuzamos a képével.

$$a \parallel a',\ c \parallel c'$$

4. Bármely szakasz és képe egyenlő hosszúságú.

$$AB = A'B',\ AC = A'C'$$



5. Bármely szög és képe egyenlő nagyságú.

$$\beta = \beta'$$

Az egybevágóság jele: $\cong$.

6. Bármely alakzat és képe egybevágó.

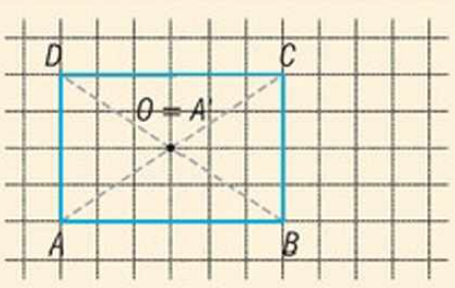
$$ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$$

7. Eltoláskor a körüljárási irány nem változik.

3. példa

a) Toljuk el az *ABCD* téglalapot úgy, hogy az *A* csúcsa az átlók metszéspontjába kerüljön!

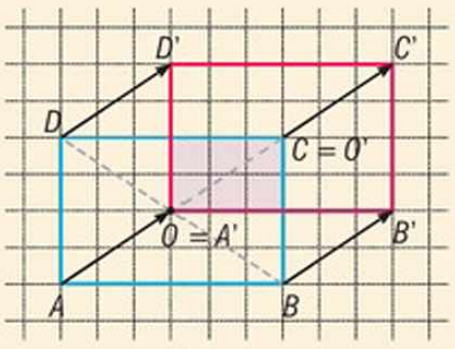
b) Hányad része közös az eredeti és a kép téglalap területének?

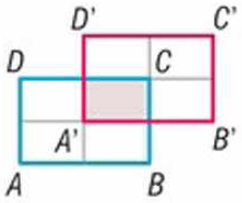


Megoldás

a) A téglalap eltolt képe az ábrán látható.

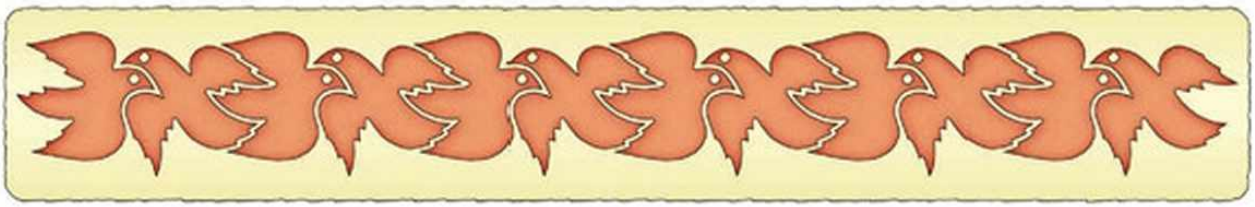
b) A téglalapot az átlójának felével toltuk el, így az eredeti és a kép téglalap közös része olyan téglalap lesz, melynek területe negyede az eredeti téglalap területének.





Feladatok

1. Tamás a következő mintát sablon segítségével készítette. Milyen sablonnal és hogyan készülhetett a sorminta? Készítsünk hasonló módon sablonokat, majd sormintákat!



2. Adott egy ABC háromszög a koordináta-rendszerben. Csúcsai: $A(-3; 1)$; $B(2; -1)$; $C(1; 6)$. Rajzoljuk meg a párhuzamos eltolással kapott háromszöget, és írjuk fel a csúcspontok koordinátáit, ha

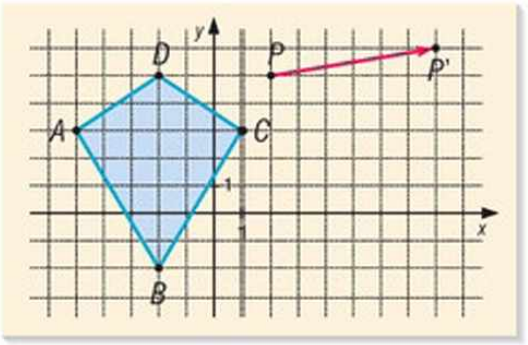
   a) az A pont képe B; *b)* az A pont képe C;

   c) a C pont képe A; *d)* az A pont képe $D(0; 2)$ pont!

3. Adott a koordináta-rendszerben egy PP' irányított szakasz és az $ABCD$ deltoid.

   a) Toljuk el párhuzamosan az $ABCD$ deltoidot az adott PP' irányított szakasszal!

   b) Milyen összefüggés van a csúcspontok és képeik koordinátái között?



4. Csúcspontjaival adott az ABC háromszög: $A(-3; 2)$; $B(6; 0)$; $C(4; 8)$. Végezzünk párhuzamos eltolásokat úgy, hogy a háromszög

   a) A csúcsa; *b)* B csúcsa; *c)* C csúcsa az origóba kerüljön!

5. A síkon egy 3 cm hosszú irányított szakasszal adtuk meg az eltolást. Döntsük el a következő állításokról, hogy melyik igaz, és melyik hamis!

   a) Az eltolás után minden pont az eredetitől 3 cm távolságra kerül.

   b) Van olyan pont, amelyik az eltolás során nem változtatja a helyét.

   c) Van a síkon olyan ponthalmaz, amelyet az eltolás ugyanabba a ponthalmazba visz át.

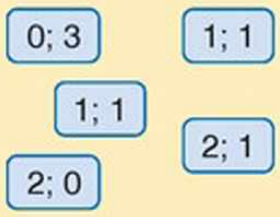
   d) Van olyan egyenes, amelyik párhuzamos a képével.

   e) Minden téglalapnak téglalap lesz a képe.

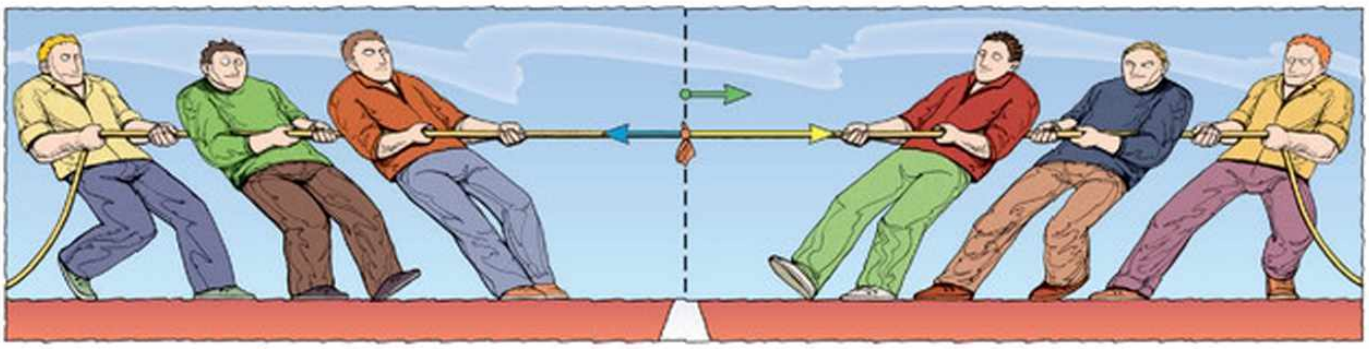
   f) Van olyan kör, amelynek a képe metszi az eredeti kört.

Rejtvény

Kössük össze az ábrán látható téglalapokat vízszintes és függőleges nyilakkal úgy, hogy ezek ne keresztezzék egymást, és a téglalapokba írt első szám azt mutatja, hogy hány nyíl mutat rá, a második pedig azt, hogy hány indul ki belőle.



2. A vektorok



Kötélhúzáskor a kötélre ható erők iránya és nagysága határozza meg, hogy melyik irányba mozdul el a kötél.

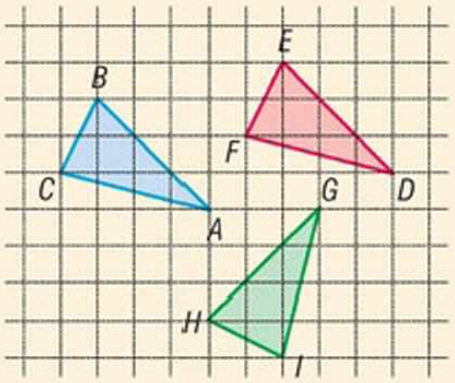
Fizikaórán találkoztunk már vektormennyiségekkel. Például: az erő, a sebesség, a lendület vektormennyiségek.

1. példa

Van-e olyan párhuzamos eltolás, amely az ABC háromszöget

a) a DEF háromszögbe viszi;

b) a GHI háromszögbe viszi?



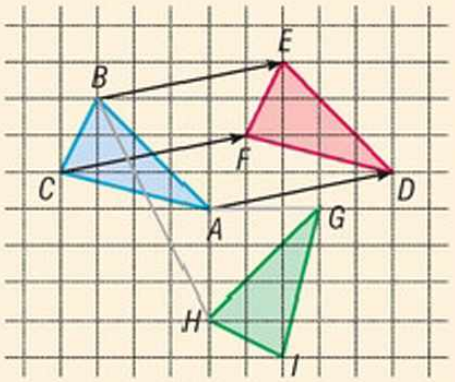
Megoldás

A háromszögek egybevágóak, mert a rácsról leolvasható, hogy megfelelő oldalaik egyenlő hosszúságúak.

a) Az A pontnak a D felel meg, B-nek az E, C-nek az F pont. A rácsról leolvasható, hogy

$$AD = BE = CF \text{ és}$$
$$AD \parallel BE \parallel CF.$$

Így párhuzamos eltolással megkaphatjuk az ABC háromszögből a DEF háromszöget. Az eltolást akár az $\vec{AD}$, akár a $\vec{BE}$, akár a $\vec{CF}$ irányított szakasz meghatározza.



b) Az A pontnak a G, a B-nek a H, a C-nek az I felel meg. Látható, hogy $AG \neq BH$, így párhuzamos eltolással nem kaphatjuk meg az ABC háromszögből a GHI háromszöget.

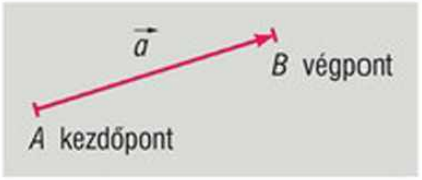
A példában az $\vec{AD}$, a $\vec{BE}$ és a $\vec{CF}$ irányított szakaszok ugyanazt a párhuzamos eltolást határozták meg, mert egymással párhuzamosak, egyenlő hosszúak és azonos irányúak voltak.

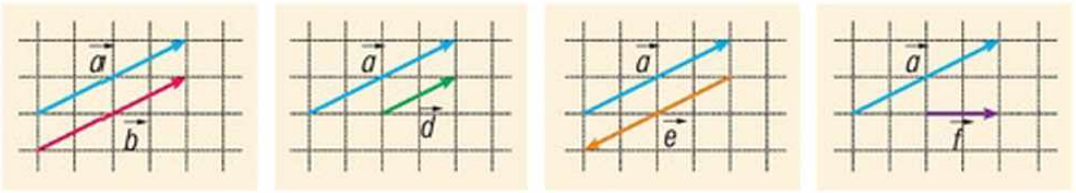
DEFINÍCIÓ: Az irányított szakaszokat vektoroknak nevezzük.

Két vektor azonos, ha ugyanazt az eltolást határozzák meg.

A vektort többféleképpen jelölhetjük:

$\overrightarrow{AB}$; $\vec{a}$; $\underline{a}$; $\boldsymbol{a}$.





azonos vektorok

$\vec{a} = \vec{b}$

ugyanazt a párhuzamos eltolást eredményezik

nem azonos vektorok

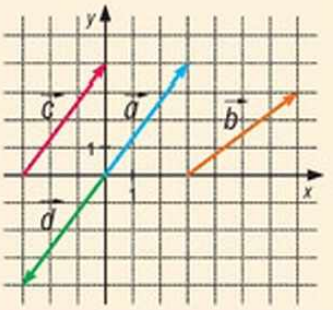
$\vec{a} \neq \vec{d}$ $\quad \vec{a} \neq \vec{e}$ $\quad \vec{a} \neq \vec{f}$

nem ugyanazt a párhuzamos eltolást eredményezik

2. példa

a) Határozzuk meg a koordináta-rendszerben adott $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$; $\vec{d}$ vektorok hosszát!

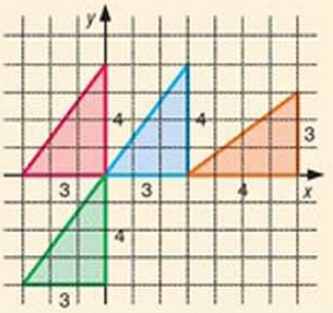
b) A négy vektor között vannak-e olyanok, amelyek ugyanazt a párhuzamos eltolást határozzák meg?



Megoldás

a) A vektorokat egy-egy olyan derékszögű háromszögbe foglalhatjuk, melyekben a befogók 3 és 4 egység hosszúak. Pitagorasz tétele segítségével meghatározhatjuk az átfogók, azaz a vektorok hosszát.

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$
$$a^2 = 9 + 16$$
$$a^2 = 25$$
$$a = \sqrt{25}$$
$$a = 5$$



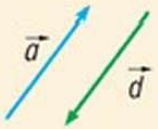
A $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektorok hossza is 5 egység.

b) Az $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$; $\vec{d}$ vektorok közül csak az $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektor határozza meg ugyanazt a párhuzamos eltolást, mert azokra teljesül, hogy párhuzamosak, azonos irányúak, és hosszuk egyenlő.

A vektor hosszát a vektor abszolút értékének is nevezzük.

Jelölhetjük úgy, hogy $|\vec{a}|$ vagy röviden a.

A 2. példában az $\vec{a}$ és $\vec{d}$ egyenlő hosszúságú és párhuzamos vektorok, de irányuk ellentétes. Az ilyen vektorokat **ellentett vektoroknak** nevezzük.



$$\vec{d} = -\vec{a} \quad (\vec{a} = -\vec{d})$$

Vektorok összeadása



3. példa

a) Egy lift a földszintről a harmadik emeletre egyik alkalommal úgy megy fel, hogy a második emeleten két utas kiszáll, majd a lift a többi utassal továbbmegy a harmadik emeletig.
Egy másik alkalommal minden utas a földszintről a harmadik emeletre megy. Rajzoljuk meg vektorok segítségével mindkét esetben a lift elmozdulását, és hasonlítsuk össze őket!

b) Adjuk meg a lift elmozdulásvektorát a 3. emeletről a földszintig, ha a földszinttől a 3. emeletig az elmozdulás vektora $\vec{c}$!

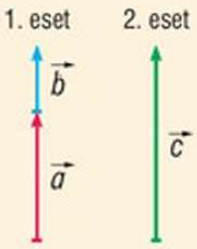
c) Adjuk meg a lift elmozdulásának vektorát, ha a lift a földszintről a 3. emeletre ment, majd visszatért a földszintre!

Megoldás

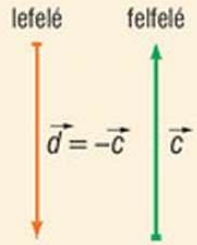


Az $\vec{a}$ végpontja a $\vec{b}$ kezdőpontja.

a) A lift elmozdulását a földszinttől a 2. emeletig jelölje $\vec{a}$, a 2. emelettől a 3. emeletig $\vec{b}$. A két elmozdulás egymásutánjaként a lift a földszintről a 3. emeletre jut.
A második esetben a lift egyetlen elmozdulással jut a földszintről a 3. emeletre. Ezt az elmozdulást $\vec{c}$ vektorral jellemezhetjük.
A kétféle elmozdulás egyenlő.



b) A lift elmozdulása a 3. emeletről a földszintig ($\vec{d}$) ellentétes irányú és azonos nagyságú, mint a $\vec{c}$, ezért az elmozdulás a $\vec{c}$ ellentettje, azaz $\vec{d} = -\vec{c}$.



c) A lift a két elmozdulás következtében a földszintre, vagyis az eredeti helyére került vissza. Ezt is tekinthetjük eltolásnak, melynek vektora nulla hosszúságú.



DEFINÍCIÓ: A nulla hosszúságú vektort nullvektornak nevezzük. A nullvektor minden más vektorral egyirányú. Jele: $\vec{0}$.

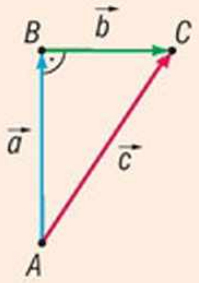


4. példa

A falon egy bogár mászott egyenesen felfelé 3 cm-t, majd jobbra fordulva 90°-kal megtett még 2 cm-t. Rajzoljuk meg egyetlen vektor segítségével a bogár elmozdulását!

Megoldás

Ábrázolva a bogár útját, a bogár először az A pontból a B pontba, majd a B pontból a C pontba mászott. A két elmozdulás egymásutánjaként az A pontból a C pontba jutott.



Használjuk a következő jelöléseket:

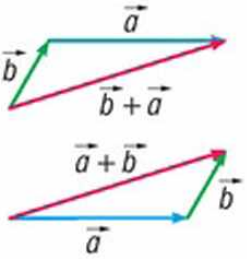
$$\vec{a} = \vec{AB}, \quad \vec{b} = \vec{BC}, \quad \vec{c} = \vec{AC}.$$

Az $\vec{a}$ végpontja (B) a $\vec{b}$ kezdőpontja; $\vec{c}$ az $\vec{a}$ kezdőpontjából a $\vec{b}$ végpontjába mutat.

Az $\vec{a}$ vektorú és $\vec{b}$ vektorú egymás utáni párhuzamos eltolások helyettesíthetők egyetlen párhuzamos eltolással, amelynek vektora $\vec{c}$.

Ez alapján definiálhatjuk két vektor összegét:

DEFINÍCIÓ: Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összege ($\vec{a}+\vec{b}$) azon párhuzamos eltolás vektora, amellyel az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorral meghatározott, egymás után elvégzett párhuzamos eltolások helyettesíthetők.



Az eltolásokat fordított sorrendben is végezhetjük.

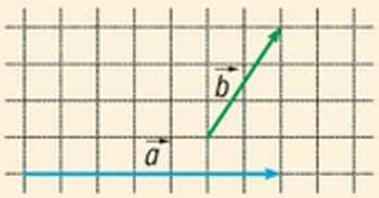
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

5. példa

Adottak az ábrán látható $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok. Rajzoljuk meg az

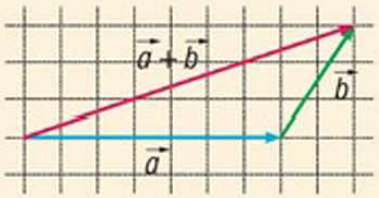
a) $\vec{a} + \vec{b}$;

b) $\vec{a} + (-\vec{b})$ vektorokat!

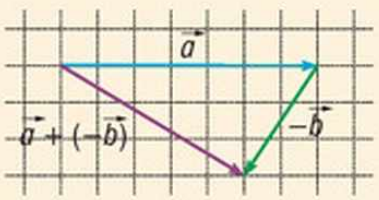


Megoldás

a) Mivel a $\vec{b}$ vektort a síkon bárhol felvehetjük, illesszük a kezdőpontját az $\vec{a}$ vektor végpontjához! Az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor az a vektor kezdőpontjából a $\vec{b}$ vektor végpontjába mutat.



b) Rajzoljuk meg a $\vec{b}$ vektor ellentettjét ($-\vec{b}$)! Illesszük az $\vec{a}$ vektor végpontjához a $-\vec{b}$ vektor kezdőpontját! Az $\vec{a} + (-\vec{b})$ vektor az $\vec{a}$ vektor kezdőpontjából a $-\vec{b}$ vektor végpontjába mutat.

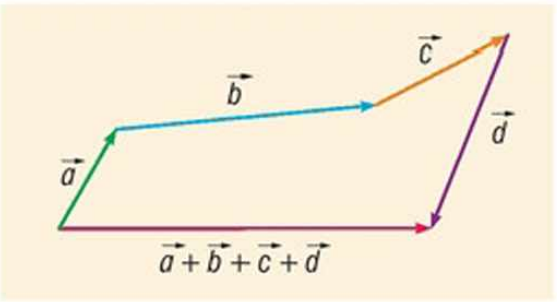


Az $\vec{a} + (-\vec{b})$ vektor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbsége: $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$.

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Megjegyzés:

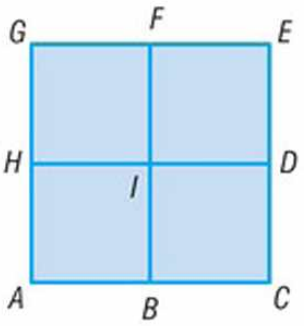
Abban az esetben, ha több vektort kell összeadni, akkor a vektorokat egymás után fűzve, a kezdőpontból a végpontba mutató vektor lesz az összegvektor.

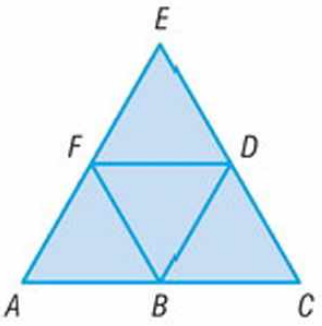


Feladatok

1. Írjunk fel az alábbi ábrák segítségével a kezdő- és végpontjával megadott

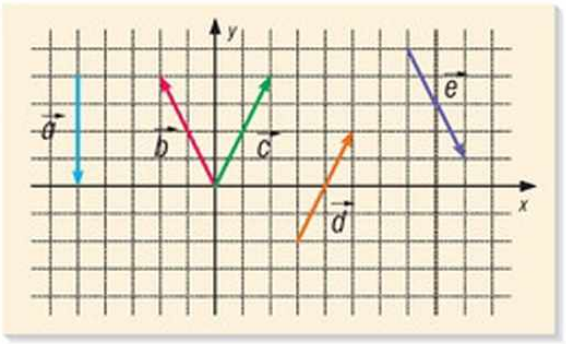
a) egyenlő irányú; *b)* egyenlő hosszú; *c)* azonos vektorokat!



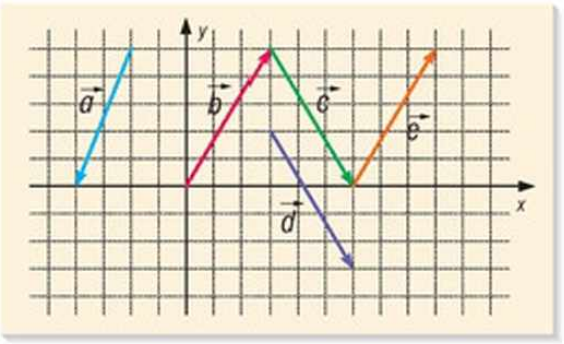


2. Keressünk azonos vektorokat az alábbiak között! Határozzuk meg a vektorok hosszát!

a)



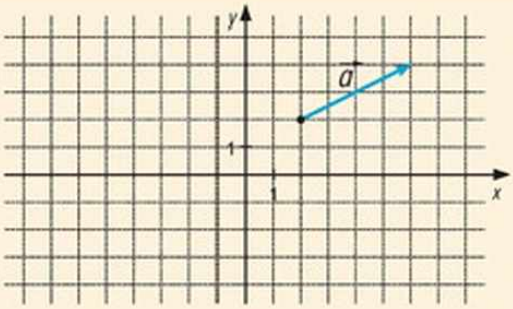
b)



3. Adott a koordináta-rendszerben az $\vec{a}$ vektor. Rajzoljuk meg az $\vec{a}$ vektort úgy, hogy kezdőpontja

a) az origó; *b)* $B(-3; 0)$;

c) $C(1; -4)$; *d)* $D(-5; -2)$ pont legyen!



4. Egy eltoláskor a koordináta-rendszerben adott $A(2; -1)$ pont képe az $A'(-1; 4)$ pont.

a) Rajzoljuk meg az eltolás vektorát!

b) Toljuk el az origót $\vec{AA'}$-ral! Írjuk fel az O' pont koordinátáit!

c) Rajzoljunk olyan vektort, amelynek a kezdőpontja $B(4; 2)$ és az $\vec{AA'}$-ral egyenlő!

d) Rajzoljunk origó kezdőpontú $\vec{AA'}$-ral ellentett vektort!

5. Az $A(3; 5)$; $B(5; 0)$; $C(9; 6)$ pontok egy háromszög csúcspontjai.

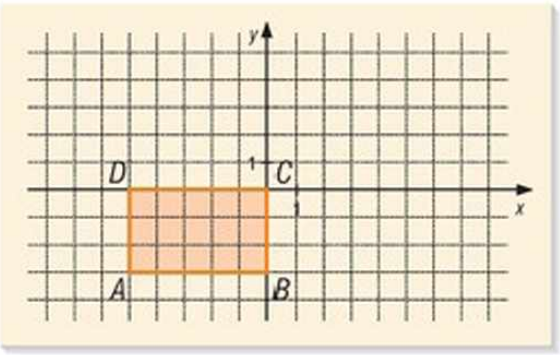
a) Rajzoljuk meg a háromszöget!

b) Végezzük el azt az eltolást, amely a háromszög C pontját a $C'(2; 1)$ pontba viszi! Rajzoljuk meg az eltolás vektorát színessel!

6. Rajzoljunk koordináta-rendszert, majd abba az ábra szerinti $ABCD$ téglalapot! Az $ABCD$ téglalapot toljuk el úgy, hogy az A pont képe az $A'(0; 0)$ pont legyen! (➡)

a) Írjuk fel az eredeti és az eltolással kapott téglalap csúcsainak koordinátáit!

b) Hasonlítsuk össze az eredeti és a megfelelő képpontok koordinátáit!



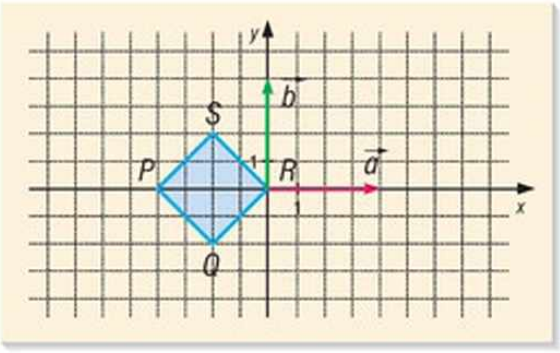
7. Adott a koordináta-rendszerben a $PQRS$ négyzet és az $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektor. (➡)

Toljuk el a négyzetet

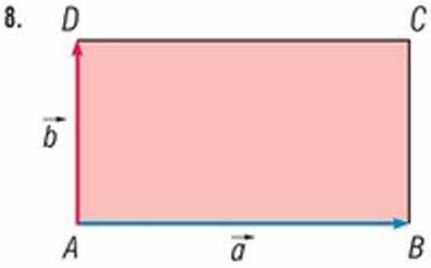
a) $\vec{a}$ vektorral; *b)* $\vec{b}$ vektorral;

c) $\vec{a} + \vec{b}$ vektorral; *d)* $\vec{b} + \vec{a}$ vektorral;

és írjuk fel a négyzetek csúcspontjainak koordinátáit!



8. Adott az $ABCD$ téglalap, melyben $\vec{a} = \vec{AB}$ és $\vec{b} = \vec{AD}$. Fejezzük ki az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ segítségével a $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AC}$, $\vec{CB}$ vektort! (➡)

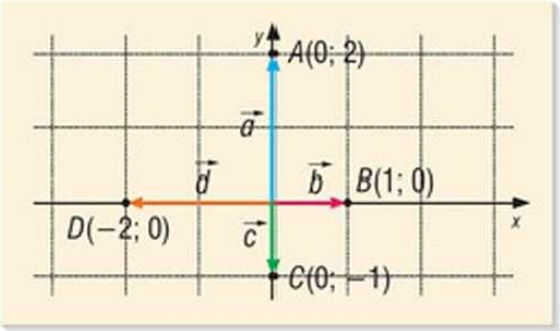


9. Egy robotot úgy programoztak, hogy az ábrán látható vektorok szerint tud lépni. (➡)

a) Hova érkezik, ha a koordináta-rendszer origójából indul, és a lépései:

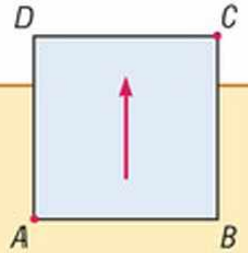
$$\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}, \vec{d}, \vec{d}, \vec{a}, \vec{c}?$$

b) Írjunk fel olyan – legalább négy lépésből álló – lépéssorozatot, amellyel az origóból indulva a robot a $P(8; 9)$ pontba, az $O(0; 0)$ pontba és az $R(-2; -5)$ pontba juthat!

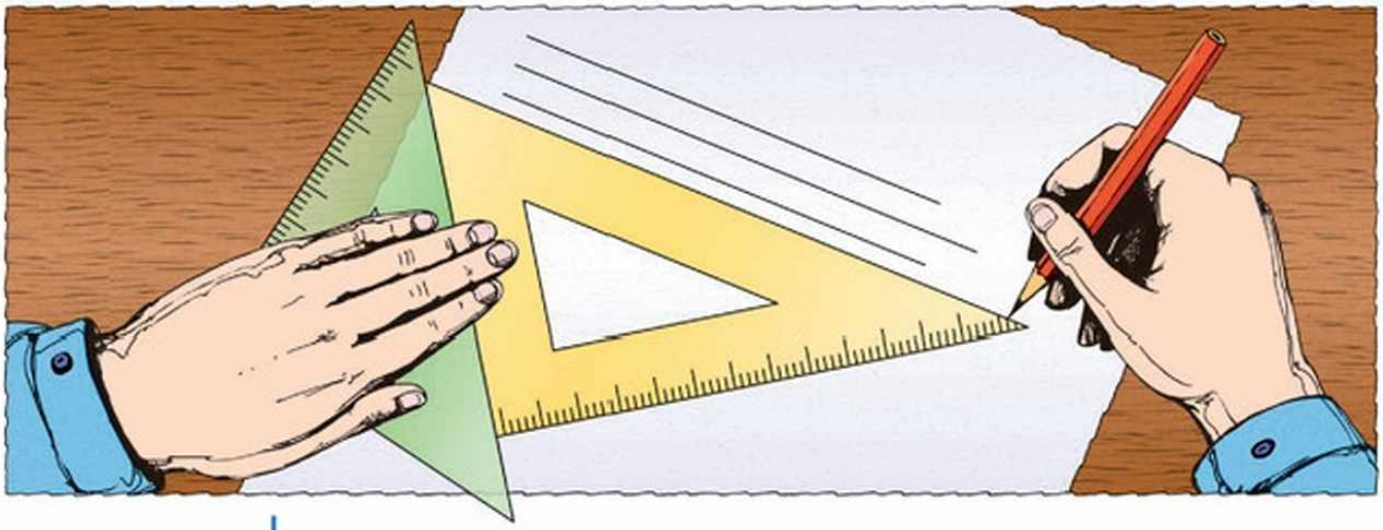


Rejtvény

Zsófi maga előtt függőlegesen tartva mutatja nekünk az ábrán látható papírlapot, majd az *A* és *C* csúcsoknál megfogva maga felé fordítja. Rajzoljuk le, hogy mit lát ezután Zsófi!



3. A párhuzamos eltolás alkalmazása, szerkesztések



Amikor párhuzamos egyenest rajzolunk két vonalzóval, az egyik vonalzót eltoljuk a másik mentén.

1. példa

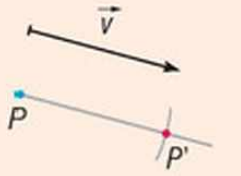
Vegyünk fel egy $\vec{v}$ vektort, és toljunk el egy

a) P pontot;
b) AB szakaszt;
c) ABC háromszöget az adott vektorral!

Megoldás

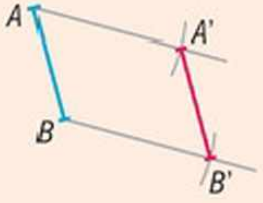
$P \to P'$

a) A P pont eltolt képét úgy kapjuk, hogy a P ponton keresztül párhuzamost rajzolunk a $\vec{v}$-ral, majd a kapott egyenesre P pontból az adott irányba körzővel felmérjük a $\vec{v}$ vektor hosszát. A kimetszett pont lesz a P eltolt képe P'.



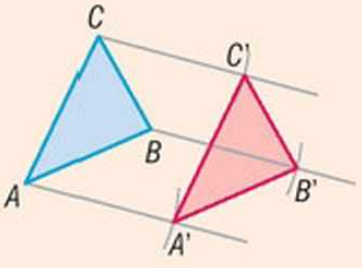
$AB = A'B'$ és $AB \parallel A'B'$

b) Az AB szakasz eltolásához elegendő a szakasz két végpontját az *a)* esethez hasonló módon $\vec{v}$ vektorral eltolni, majd a két pontot összekötni.



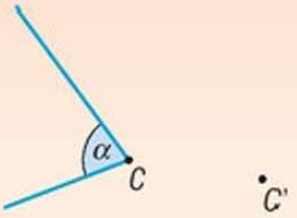
$ABC\triangle$ egybevágó $A'B'C'\triangle$-gel

c) Az ABC háromszöget meghatározza a három csúcsa. Ezért a háromszög eltolása visszavezethető a három csúcspontjának eltolására.



2. példa

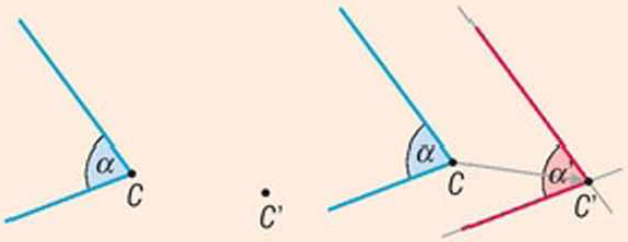
Toljunk el egy α szöget úgy, hogy a C csúcsa a C' pontba kerüljön! Keressünk többféle megoldási módszert!



Megoldás

1. módszer:

Felhasználjuk, hogy eltoláskor az egyenes és a képe párhuzamos.



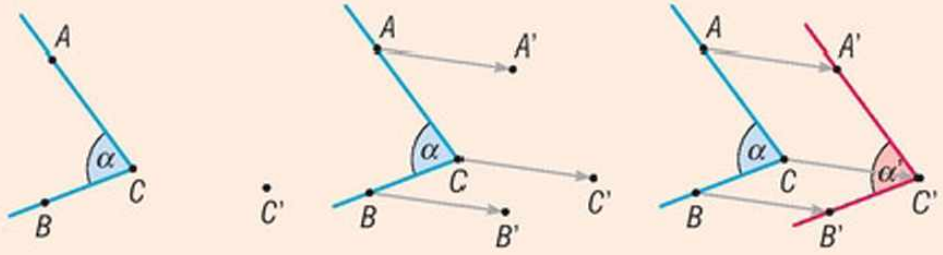
$\alpha = \alpha'$



Rajzoljuk meg a $\vec{CC'}$ vektort! A C'' ponton keresztül rajzoljunk párhuzamost az α szög száraival!

2. módszer:

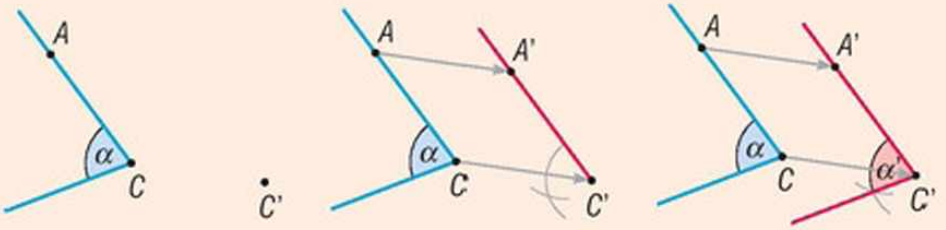
Szerkesztéskor felhasználjuk, hogy párhuzamos eltoláskor a sík minden pontja ugyanazzal a vektorral mozdul el, és bármely egyenes képe egyenes.



Jelöljünk ki az α szög mindkét szárán egy-egy pontot, legyenek ezek A és B! Rajzoljuk meg a $\vec{CC'}$ vektort! Toljuk el az A és a B pontot is $\vec{CC'}$ vektorral! Kössük össze a C' pontot A'-vel és B'-vel!

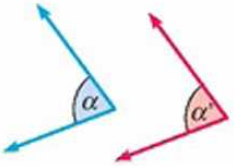
3. módszer:

Felhasználjuk, hogy bármely szög és az eltolt képe egyenlő nagyságú.



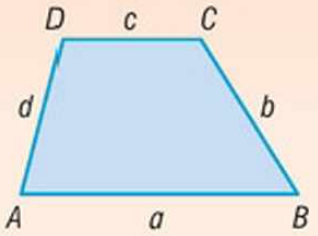
Jelöljünk ki az α szög egyik szárán egy pontot, legyen ez A! Toljuk el az A pontot $\vec{CC'}$ vektorral! Rajzoljuk meg a $C'A'$ félegyenest, majd másoljuk át a C' csúcsba az α szöget!

egyállású szögek



3. példa

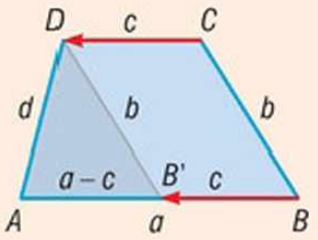
Szerkesszünk trapézt, ha adott a négy oldala: $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm, $d = 3{,}5$ cm!



Megoldás

Tudjuk, hogy három oldalának ismeretében bármely háromszög megszerkeszthető. Keressünk a trapézban olyan háromszöget, melynek oldalai a trapéz oldalaival megadhatók! Ha a trapéz BC oldalát $\vec{CD}$ vektorral eltoljuk, akkor kapunk egy $AB'D$ háromszöget. Ennek oldalai: $a - c$, b, d ismertek, ezért meg tudjuk szerkeszteni.

$\vec{CD} = \vec{BB'}$

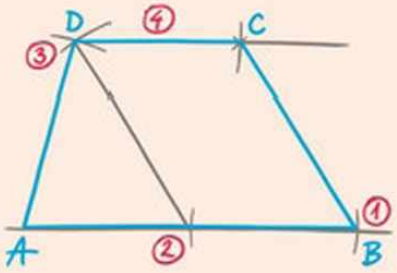


Ezután a háromszög $B'D$ oldalát a $\vec{B'B}$ vektorral eltoljuk, így megkapjuk a trapéz BC oldalát.

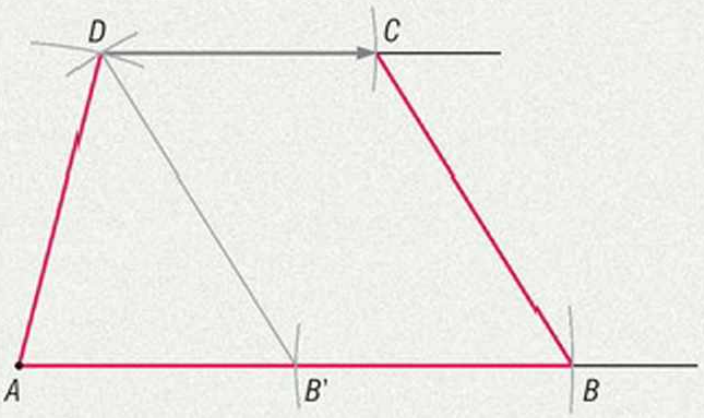
A szerkesztés lépései:

1. Felvesszük az AB alapot.
2. A B pontból visszamérünk 3 cm-t, megkapjuk a B' pontot.
3. Megszerkesztjük az $AB'D$ háromszöget. (Az A pont köré 3,5 cm-es, a B' pont köré 4 cm-es sugarú köröket rajzolunk, és megkeressük a körök metszéspontját, D pontot.)
4. A $B'D$ szakaszt $\vec{B'B}$ vektorral eltoljuk, megkapjuk a C pontot.

$\vec{B'B} = -\vec{CD}$



Szerkesztés:

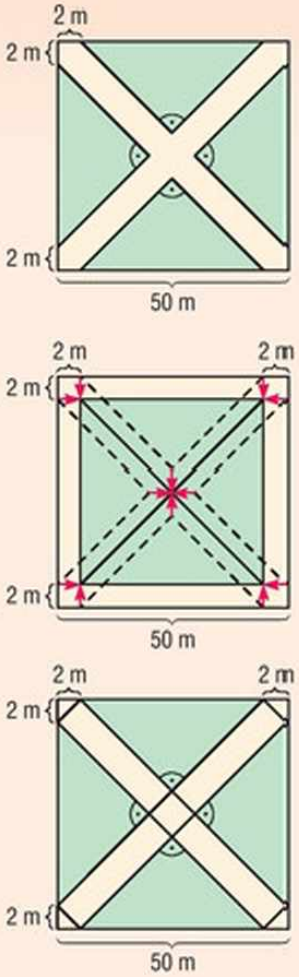


Diszkusszió:

A trapéz akkor nem szerkeszthető, ha az $AB'D$ háromszög oldalaira nem teljesül a háromszög egyenlőtlenség.

4. példa

Egy négyzet alakú füves parkot átlósan két egyforma széles kavicsos út szel át az ábra szerint. Hány négyzetméter területet kellett kaviccsal beszórni az utak készítésekor?



Bizonyítás

Képzeljük el, hogy a zöld területeket összetoltuk a park középpontjába! A négy egybevágó derékszögű háromszög itt egy négyzetet alkot, amely oldalainak hossza:

$$50 - 2 - 2 = 46 \text{ (m)}.$$

A kavicsos út területét megkapjuk, ha a park területéből kivonjuk a füves rész területét:

$$50^2 - 46^2 = 384 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Tehát a kavicsos rész területe 384 m^2.

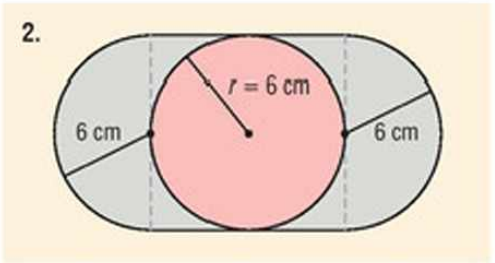
Megjegyzés:
A kavicsos út területét megkaphattuk volna úgy is, hogy téglalapokra és háromszögekre bontjuk az út alaprajzát, és ezek területét összegezzük. Így azonban sokkal többet kellett volna számolni, amit az eltolás ötletével sikerült elkerülni.



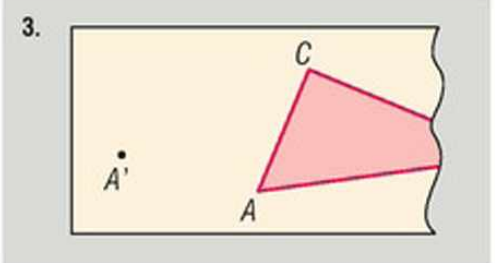
Feladatok

1. Szerkesszünk 4 cm oldalhosszúságú négyzetet! Keressünk olyan vektort, amellyel a négyzetet eltolva a közös rész területe az *ABCD* négyzet
   a) fele;
   b) negyede!
   Végezzünk el egy ilyen eltolást!

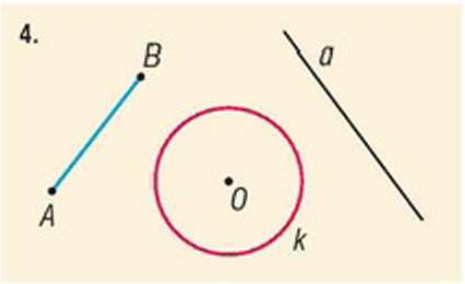
2. Az ábrán látható lemezből kivágtunk egy 6 cm sugarú kört. Mekkora a maradék lemez területe? (➡)



3. Az ábrán látható papírból leszakadt egy darab az *ABC* háromszög *B* csúcsával. Szerkesszük meg ezen a papíron az *ABC* háromszög eltolt képét úgy, hogy az *A* pont képe *A'* legyen! (➡)

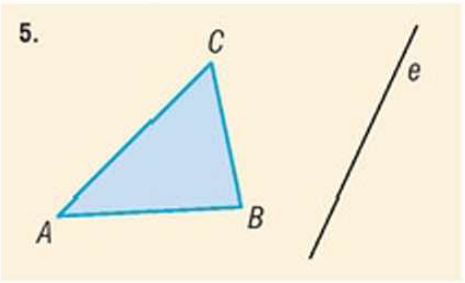


4. Az adott AB szakaszt toljuk el az a egyenessel párhuzamosan úgy, hogy a B pont képe az adott k körvonalra illeszkedjen! Hány megoldást kapunk? (➡)



5. Adott ABC háromszöget toljuk el egy 3 cm hosszúságú vektorral úgy, hogy a háromszög B csúcsának képe az adott e egyenesre kerüljön! Hány megoldást kapunk, ha a B csúcs és az e egyenes távolsága

a) 1 cm; *b)* 3 cm; *c)* nagyobb, mint 3 cm? (➡)

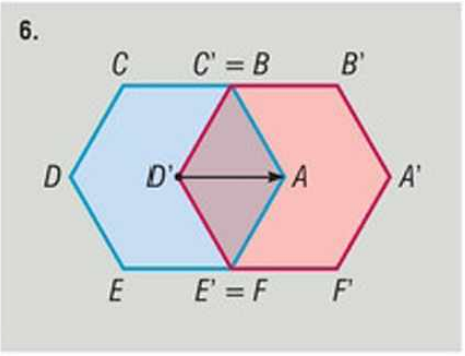


6. Szerkesszünk egy 25 mm oldalú $ABCDEF$ szabályos hatszöget! Toljuk el a hatszöget egy olyan vektorral, melynek kezdőpontja a hatszög középpontja, végpontja a hatszög A csúcsa! (➡)

a) Hányszorosa a közös rész területe a hatszög területének?

b) Írjuk fel az eredeti és a képként kapott hatszög egyesítésével kapott sokszög területének arányát az eredeti hatszög területéhez és viszonyítva!

c) Számoljuk ki a fenti arányokat a kerületekre vonatkozóan is!



7. Adott egy O középpontú, $r = 6$ cm sugarú kör körvonalán egy P pont. Toljuk el a kört $\overrightarrow{OP}$ vektorral! Hányad része lesz a közös rész kerülete az eredeti kör kerületének?

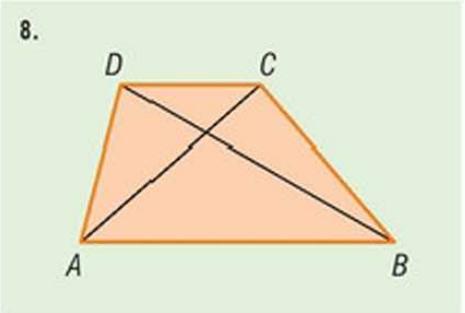
8. Szerkesszünk az ábra szerinti adatokkal trapézt, ha

a) $AB = 6$ cm;
$BC = 3{,}5$ cm;
$CD = 2{,}5$ cm;
$AD = 2{,}5$ cm;

b) $AB = 5$ cm;
$BC = 2$ cm;
$DC = 3$ cm;
$AD = 2$ cm;

c) $AB = 4$ cm;
$BC = 3{,}5$ cm;
$DC = 2$ cm;
$AC = 3{,}5$ cm;

d) $AB = 5$ cm;
$BC = 2$ cm;
$AD = 2$ cm;
DC az AB oldal $\frac{4}{5}$ része!



Rejtvény

Adjunk meg a síkon hat pontot úgy, hogy minden pont pontosan három másiktól legyen 1 egység távolságra!

4. Egybevágósági transzformációk





„Kéz-játék"

1. példa

Hajtsunk félbe egy (A4-es) lapot! Rajzoljuk körül az egyik kezünket a dupla lapon, majd vágjuk körbe a rajzot! Számozzuk meg a sablonokat (mindkét oldalon)!

a) Keressünk olyan tükrözést vagy eltolást, ahol az 1. „kéznek" a 2. „kéz" lesz a képe!

b) A 2. „kézre" hajtsuk végre újból ugyanazt a tükrözést vagy eltolást! Mit tapasztalunk?

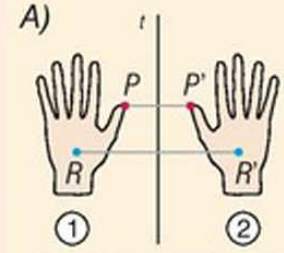
Megoldás

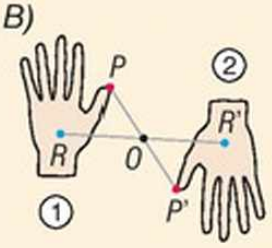
a) A kezeket elhelyezhetjük úgy, hogy

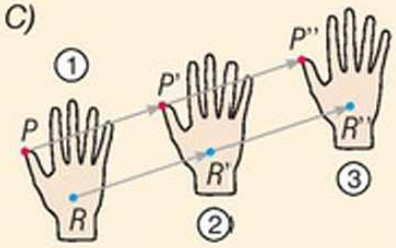
A) egymás tengelyes tükörképei egy t tengelyre;

B) egymás középpontos tükörképei egy O középpontra;

C) az egyik kéz a másiknak a $\vec{v}$ vektorral eltolt képe.





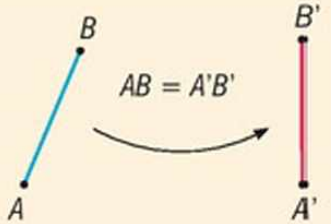


b) ① kéz képe ② kéz
② kéz képe ① kéz

① kéz képe ② kéz
② kéz képe ① kéz

① kéz képe ② kéz, ② kéz képe nem az ① kéz, hanem a ③ kéz

Ha a sík bármely P pontjához ugyanazon sík pontosan egy P' pontját rendeljük hozzá, akkor síkbeli **geometriai transzformációt** adunk meg. A tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés és a párhuzamos eltolás síkbeli geometriai transzformációk. Ezen transzformációk esetén bármely két pont távolsága egyenlő a képeik távolságával. Az ilyen transzformációt **egybevágósági transzformációnak** nevezzük.



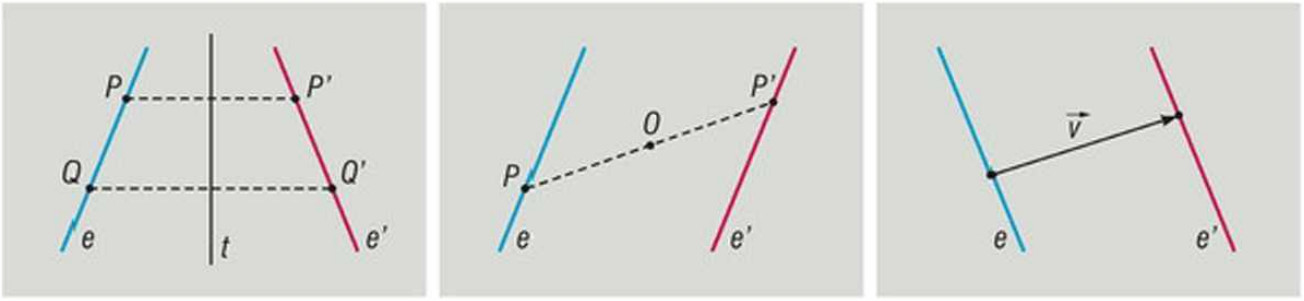
Tetszőleges AB szakasz hossza egyenlő a képének hosszával.

A geometriai transzformáció egy függvény, melynek értelmezési tartománya és értékkészlete is pontok halmaza.

A tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés és a párhuzamos eltolás tulajdonságai:

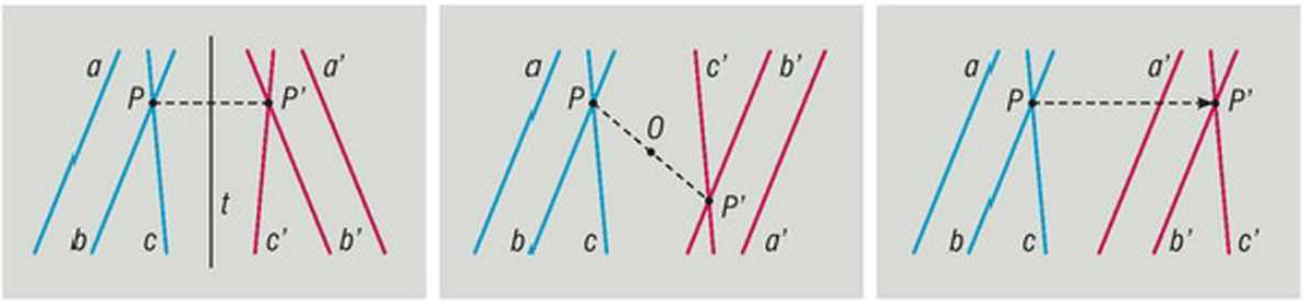
- **egyenestartó**

  Egy egyenesre illeszkedő pontok képei is egyenesre illeszkednek.



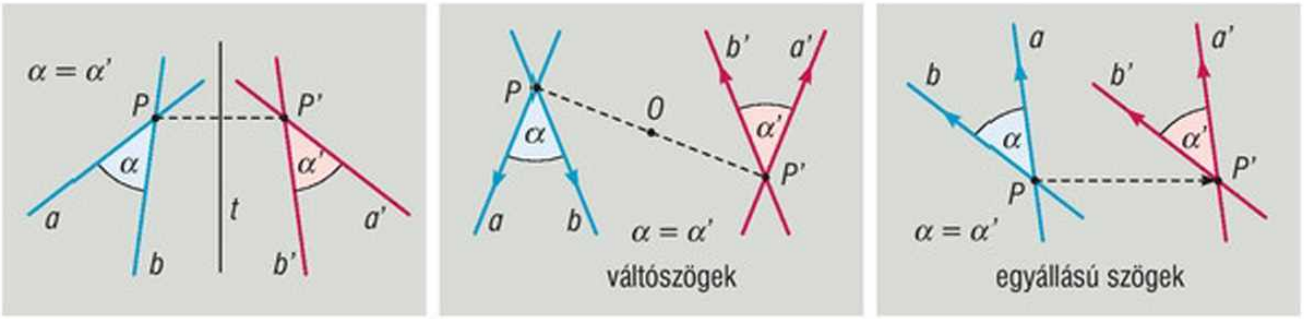
- **párhuzamosságtartó**

  Párhuzamos egyenesek képe párhuzamos, metsző egyenesek képe metsző.

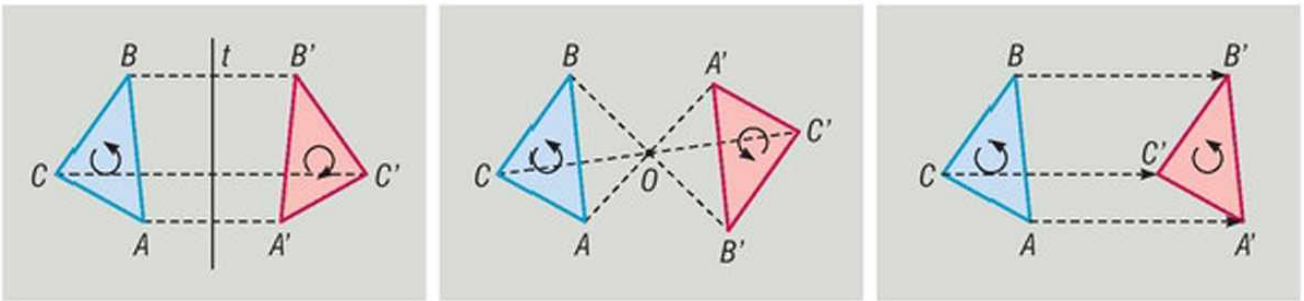


- **szögtartó**

  Szög és képe ugyanakkora.



Az eddigiekből következik, hogy bármely alakzat és képe egybevágó.



$AB = A'B'$; $BC = C'B'$; $CA = C'A'$ és $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$

Az ABC háromszög mindhárom esetben egybevágó az $A'B'C'$ háromszöggel, amit így jelölünk:

$$ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle.$$

***2. példa**

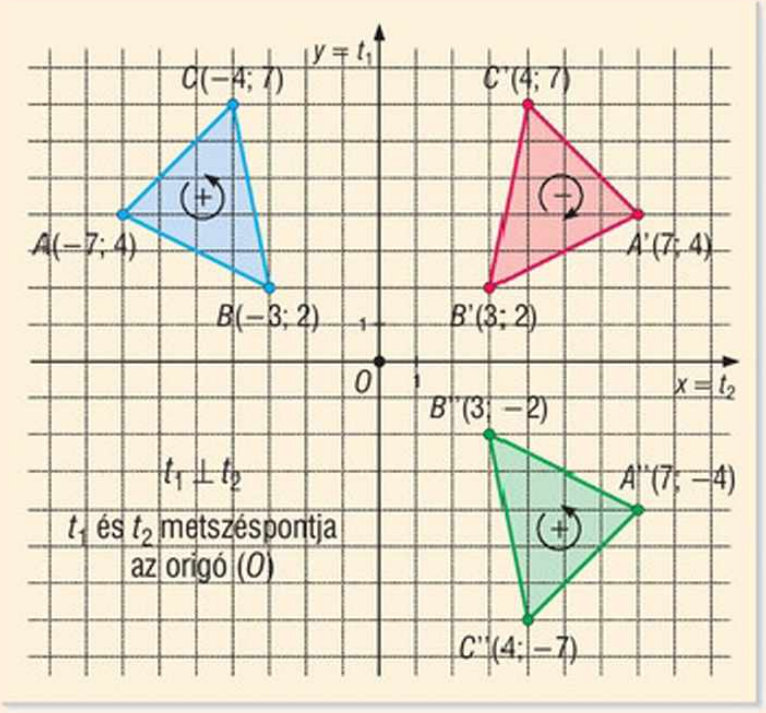
Vegyük fel a koordináta-rendszerben az $A(-7; 4)$; $B(-3; 2)$; $C(-4; 7)$ csúcspontokkal adott háromszöget!

a) Tükrözzük az ABC háromszöget az y (t_1) tengelyre, ezután tükrözzük az $A'B'C'$ képháromszöget az x (t_2) tengelyre! Rajzoljuk be a háromszögek irányítását a kapott ábrákba! Mit tapasztalunk?

b) Milyen transzformációval helyettesíthető a két (egymásra merőleges) tengelyre való tükrözés egymásutánja?

Megoldás

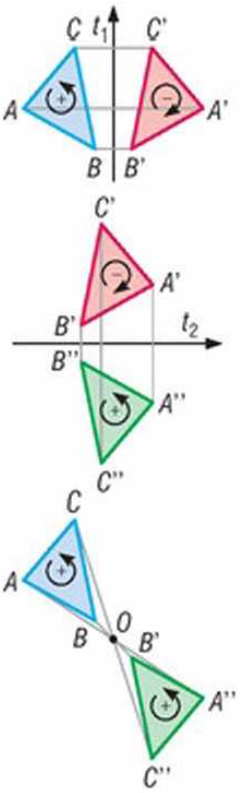
a) A két tengelyes tükrözés után kapott ábra:



tükrözés t_1-re
$A \to A'$
$B \to B'$
$C \to C'$
Az irányítás megfordul.

tükrözés t_2-re
$A' \to A''$
$B' \to B''$
$C' \to C''$
Az irányítás megfordul.

tükrözés O-ra
$A \to A''$
$B \to B''$
$C \to C''$
Az irányítás megmarad.

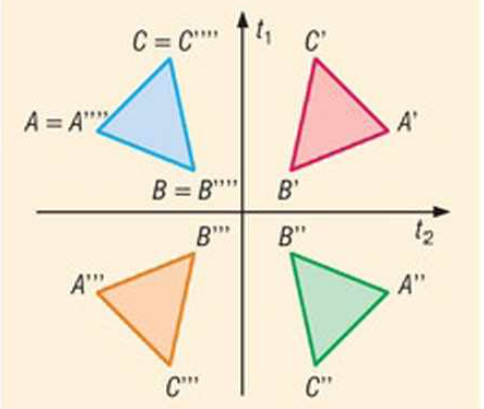


b) Az ABC háromszögből az $A''B''C''$ háromszög az O pontra vonatkozó középpontos tükrözéssel is előállítható.

Két egymásra merőleges tengelyre való egymás utáni tükrözés egy olyan középpontos tükrözéssel helyettesíthető, melynek középpontja a tengelyek metszéspontja.

Megjegyzés:

Ha a két egymásra merőleges tengelyre való tükrözést megismételjük (ismét t_1-re majd t_2-re tükrözünk), akkor az alakzat képe önmaga lesz. Azt a geometriai transzformációt, amely minden síkidomot önmagába képez le, azonos leképezésnek vagy helyben hagyásnak nevezzük.



***3. példa**

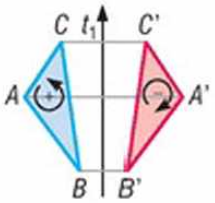
Vegyük fel a koordináta-rendszerben az $A(-5; 1)$; $B(-2; -3)$ és $C(-3; 4)$ csúcspontokkal adott háromszöget, és állítsunk merőlegest az x tengelyre a $P(7; 0)$ pontban!

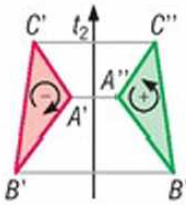
a) Tükrözzük az ABC háromszöget az y (t_1) tengelyre, ezután tükrözzük az $A'B'C'$ képháromszöget az x tengely P pontjába állított merőleges egyenesre (t_2-re)! Rajzoljuk be a háromszögek irányítását a kapott ábrákba! Mit tapasztalunk?

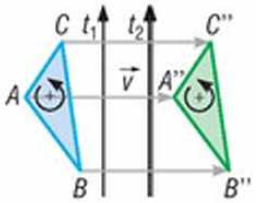
b) Milyen transzformációval helyettesíthető a két (egymással párhuzamos) tengelyre való tükrözés egymásutánja?

Megoldás

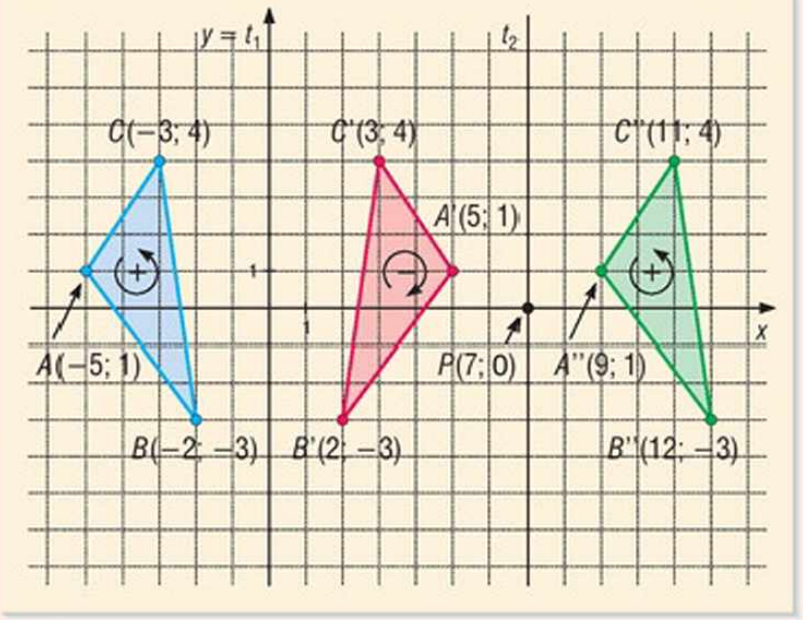
a) A két tengelyes tükrözés után kapott ábra:







tükrözés t_1-re
$A \to A'$
$B \to B'$
$C \to C'$
Az irányítás megfordul.
tükrözés t_2-re
$A' \to A''$
$B' \to B''$
$C' \to C''$
Az irányítás megfordul.
eltolás $\vec{v}$ vektorral
$A \to A''$
$B \to B''$
$C \to C''$
Az irányítás megmarad.



b) Az ABC háromszögből az $A''B''C''$ háromszög egy olyan párhuzamos eltolással is előállítható, amelynek $\vec{v}$ vektora merőleges a t_1 és t_2 tengelyre, és hossza a tengelyek távolságának kétszerese.

Két egymással párhuzamos tengelyre való egymás utáni tükrözés egy olyan eltolással helyettesíthető, melynek vektora a tengelyekre merőleges, hossza a tengelyek távolságának kétszerese.

A megismert egybevágósági transzformációk előállíthatók tengelyes tükrözések egymásutánjaként.

Páratlan számú tengelyre való tükrözések egymásutánja a körüljárási irányt megfordítja.

Páros számú tengelyre való tükrözések egymásutánja a körüljárási irányt megtartja.

4. példa

Antalfalva és Bendegúzfalva lakói elhatározták, hogy a közeli vasútvonal mellett közös vasútállomást építenek. A két falu között odavissza járó autóbusz viszi majd az utasokat a vasútállomásra a falvakból odáig vezető egyenes úton.

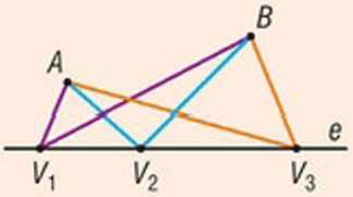
Hova építsék a vasútállomást, hogy a két faluból oda vezető új út teljes hossza a lehető legrövidebb legyen?





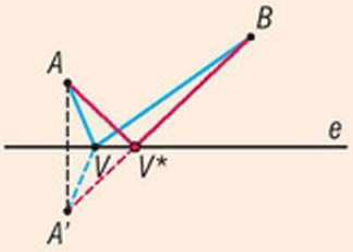
Megoldás

Azt a V pontot keressük az e egyenesen, melyre az $AV + VB$ törött vonal hossza a legkisebb.



Ha az egyik pontot (pl. az A-t) tükrözzük az e egyenesre, akkor $AV + VB = A'V + VB$ adódik, hiszen a tengelyes tükrözés a távolságokat megtartja.

Ezek után arra kell törekednünk, hogy az $A'V + VB$ törött vonal hossza a lehető legkisebb legyen.

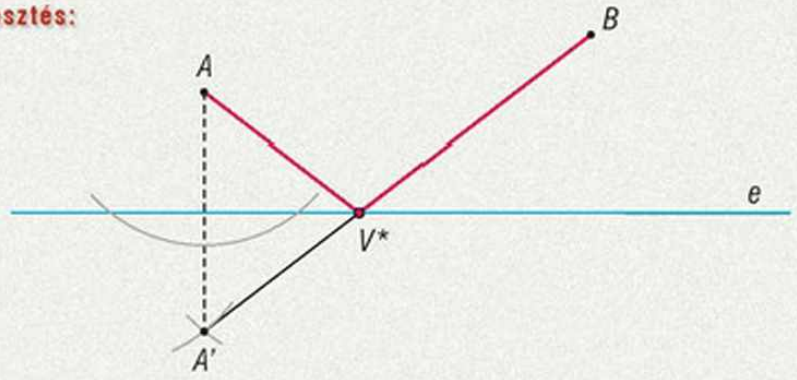


Ez akkor teljesül, ha a V pont illeszkedik az $A'B$ szakaszra. Vagyis az állomást az ábrán V^*-gal jelölt pontban kell megépíteni.

A szerkesztés lépései:

1. Az A pontot tükrözzük az e egyenesre $\Rightarrow A'$.
2. Megrajzoljuk az $A'B$ szakaszt.
3. Az $A'B$ szakasz és az e egyenes metszéspontja kijelöli a V^* pontot, melyre $AV^* + V^*B$ törött vonal hossza minimális.

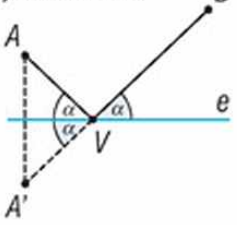
Szerkesztés:



Elemzés (diszkusszió):

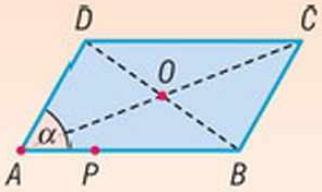
A B pont tükrözésével ugyanehhez a megoldáshoz jutunk, így a feladatnak egy megoldása van.

A szerkesztésből az is kiderül, hogy ha az e-t egy tükör felületének tekintjük, akkor az A pont tükörképét a BV szakasz irányában láthatjuk a B pontból. Az A-ból induló fénysugár a V pontban visszaverődve jut el a B-be.



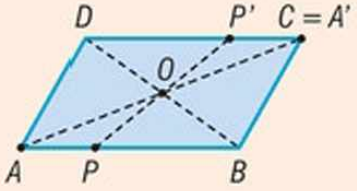
5. példa

Szerkesszük meg az $ABCD$ paralelogrammát, ha adott az A csúcsa, az AB oldalának egy P pontja, az átlók O metszéspontja, és tudjuk, hogy az A csúcsnál lévő szöge $\alpha = 60°$.



Megoldás

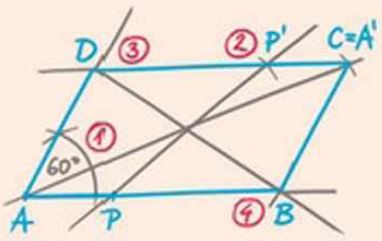
Az O pont a paralelogramma szimmetriaközéppontja, ezért az A csúcs O-ra vonatkozó tükörképe a C csúcs, a P pont tükörképe pedig a CD oldalra illeszkedik.



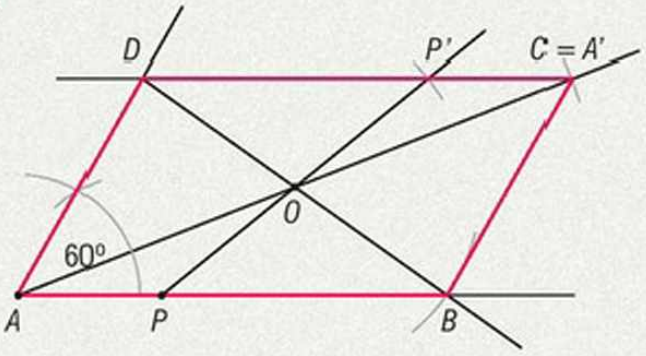
$A' = C$

A szerkesztés lépései:

1. Az AP szakaszra az A végpontban 60°-os szöget szerkesztünk.
2. Az O pontra tükrözzük az A és a P pontot $\Rightarrow A', P'$.
3. $A' = C$, CP' egyenes és a 60°-os szög szára kimetszi a D csúcsot.
4. D-t O pontra tükrözve megkapjuk B-t.



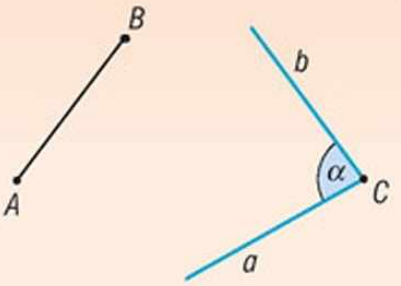
Szerkesztés:



Elemzés (diszkusszió): A feladatnak egy megoldása van.

6. példa

Adott az AB szakasz és a C csúcsú α szög. Toljuk el az α szöget úgy, hogy az eltolásnál keletkező szög szárai átmenjenek az AB szakasz végpontjain!

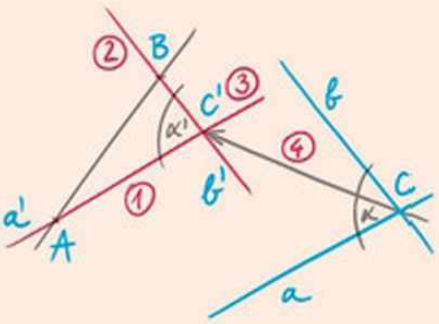


Megoldás

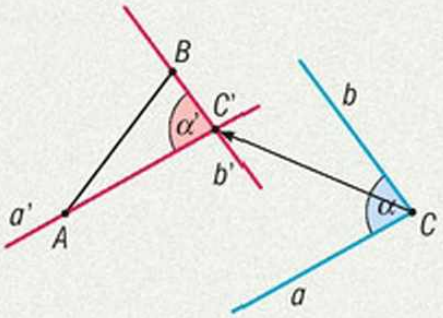
A szerkesztésnél használjuk fel, hogy az eltolásnál keletkező szögszárak párhuzamosak lesznek az eredeti szög száraival!

A szerkesztés lépései:

1. Párhuzamost szerkesztünk a-val A-n keresztül: a' egyenest kapjuk.
2. A B-n keresztül b-vel párhuzamos egyenes b'-t adja.
3. Az a' és b' egyenesek metszéspontja meghatározza a C pont képét, azaz C'-t.
4. Az eltolás vektora a $\overrightarrow{CC'}$ vektor lesz.



Szerkesztés:



Diszkusszió: A feladatnak egy megoldása van.



Feladatok

1. Szerkesszünk olyan háromszöget, melynek oldalai 5 cm, 6 cm és 7 cm hosszúak! Tükrözzük a háromszöget
   a) egyik szögfelezőjére;
   b) egyik oldalfelező merőlegesére;
   c) a legrövidebb oldalára;
   d) a 7 cm-es oldalhoz tartozó magasságára!

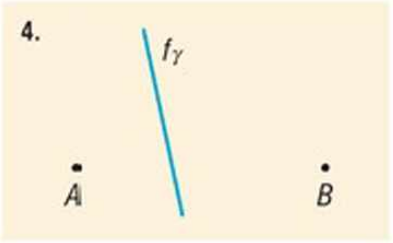
   Mit tapasztalunk az egyes esetekben? Milyen alakzatok jönnek létre az eredeti háromszög és a tükörkép háromszög egyesítésével?

2. Egy szimmetrikus trapéz szárainak és rövidebb alapjának hossza 3 cm, az egyik szöge 60°. Szerkesszük meg a trapézt, majd tükrözzük
   a) a hosszabb alapjára; *b)* a szárára!

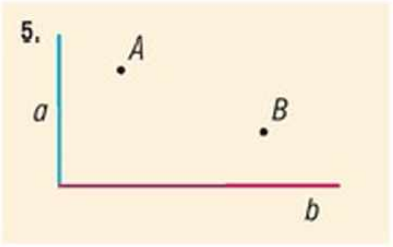
   Milyen síkidomot határoz meg az eredeti és a képként kapott trapéz egyesítése? Hány szimmetriatengelye van ennek a síkidomnak? Mekkora a keletkezett síkidom kerülete, illetve mekkorák annak szögei?

3. Egy háromszöget tükröztünk az egyik oldalára. Az eredeti és a tükörkép háromszög együtt szintén egy háromszöget határoz meg, melynek az egyik szöge 60°-os, az egyik oldala 10 cm-es.
   a) Mekkora a másik két szöge?
   b) Mekkorák az eredeti háromszög oldalai?
   c) Mekkora az eredeti háromszög területe?

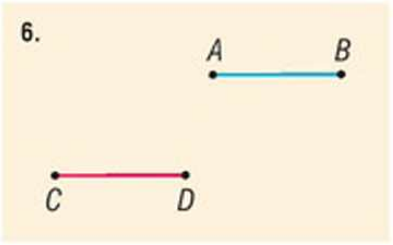
4. Adott egy háromszög A és B csúcsa, valamint a harmadik csúcsban levő szög szögfelezője. Szerkesszük meg a háromszöget! (➡)



*5. Az A pontban levő biliárdgolyót úgy szeretnénk meglökni, hogy az előbb az a, majd a b falat érintve találja el a B pontban levő golyót. Szerkesszük meg a golyó útját! (➡)

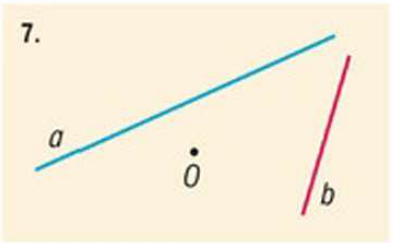


6. Adott két egyenlő nagyságú és párhuzamos helyzetű szakasz. Szerkesszük meg azt a pontot, amelyre tükrözve az egyik szakasz a másikba megy át! (➡)

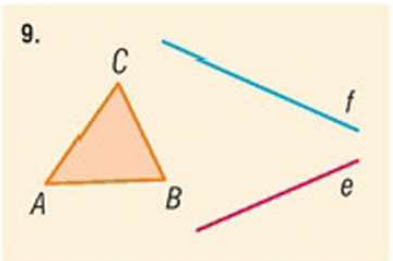


7. Az a egyenes melyik pontja lesz tükörképe a b egyenes egyik pontjának? (➡)

8. A derékszögű koordináta-rendszerben adott egy háromszög a következő csúcsokkal: $A(3; 2)$; $B(4; 7)$; $C(-2; 1)$. Adjuk meg annak a háromszögnek a csúcsait, melyet úgy kapunk, hogy az ABC háromszöget
   a) az x tengelyre tükrözzük;
   b) az y tengelyre tükrözzük;
   c) az origóra tükrözzük;
   d) a $P(1; 3)$ pontra tükrözzük!



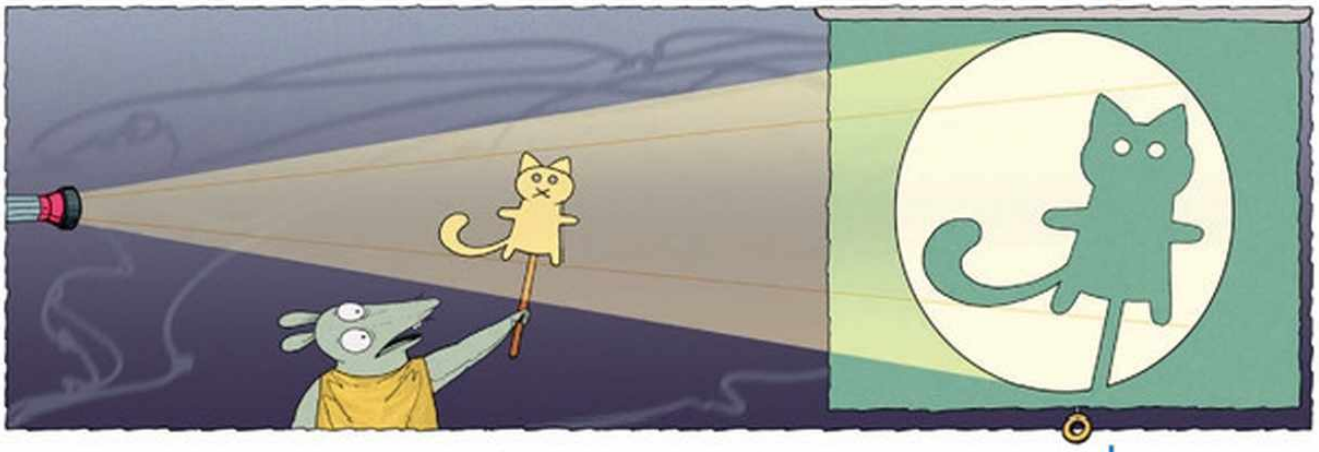
9. Adott az ABC háromszög, valamint az e és az f egyenes. Toljuk el a háromszöget az e egyenessel párhuzamosan úgy, hogy a háromszög B csúcsának képe az f egyenesre illeszkedjen! (➡)



Rejtvény

Meg lehet-e a biliárdasztalon lökni úgy a biliárdgolyót, hogy az az asztal mind a négy falával ütközve az eredeti helyzetébe érkezzen vissza? Ha igen, akkor hogyan?

5. A középpontos hasonlóság



A macskaforma árnyékát a zseblámpából kiinduló fénysugarak hozták létre. A papírmacska minden egyes pontjának létezik árnyékképe. A sablon és az árnyék formája azonos, csak méretükben térnek el. Ez a hozzárendelés egy olyan geometriai transzformáció, amelynél az alakzat és képe nem egybevágó.

1. példa

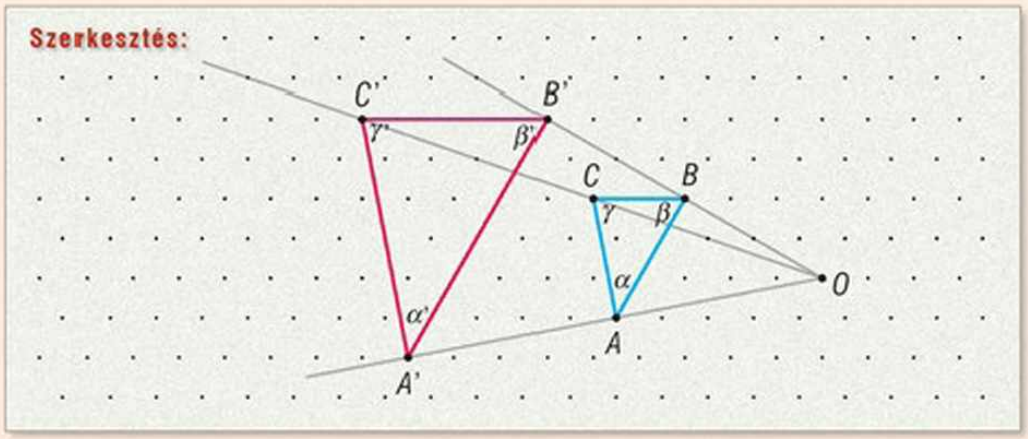
Vegyünk fel háromszögrácson egy tetszőleges O rácspontot, majd az A; B és C (nem egy egyenesre illeszkedő) rácspontokat!

a) Rajzoljuk meg az O pontból induló, az egyes pontokon áthaladó félegyeneseket! Mindegyik pont esetén keressük meg azt a pontot, melyre

$OA' = 2 \cdot OA$ és A' illeszkedik az OA félegyenesre;
$OB' = 2 \cdot OB$ és B' illeszkedik az OB félegyenesre;
$OC' = 2 \cdot OC$ és C' illeszkedik az OC félegyenesre!

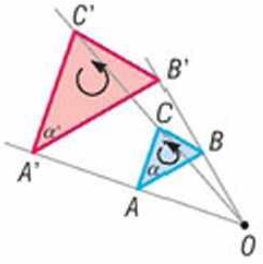
b) Kössük össze az ABC, majd az $A'B'C'$ pontokat! Mit tapasztalunk?

Megoldás



Az A', B', C' pontokat úgy kapjuk meg, hogy az OA, OB, OC szakaszokat a megfelelő ponton túl még egyszer felmérjük a félegyenesekre.

$A \to A'$
$B \to B'$
$C \to C'$
$ABC\triangle \to A'B'C'\triangle$



b) A háromszögrácsra helyezett ábráról leolvasható, hogy

1. bármely szakasz és képe párhuzamos egymással;

$$AB \parallel A'B' \qquad BC \parallel B'C' \qquad CA \parallel C'A'$$

2. bármely szakasz képe kétszer olyan hosszú, mint az eredeti szakasz;

$$A'B' = 2 \cdot AB \qquad B'C' = 2 \cdot BC \qquad C'A' = 2 \cdot CA$$

3. bármely szög és képe egyállású.

$$\alpha = \alpha' \qquad \beta = \beta' \qquad \gamma = \gamma'$$

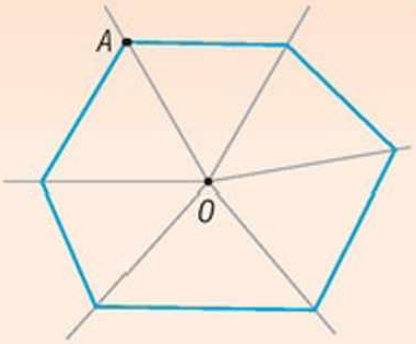
Az előzőekből következik, hogy az $A'B'C'$ háromszög minden oldala kétszerese az ABC háromszög megfelelő oldalának, és minden megfelelő szög azonos nagyságú. **A háromszögek körüljárási iránya megegyezik.**

Az 1. példában az ABC háromszög O-pontra vonatkozó kétszeresére **nagyított** képét kaptuk meg.



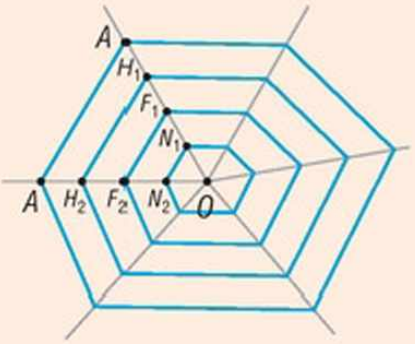
2. példa

Pók Petra szövögeti hálóját. A merevítőszálakat és a keretet már elkészítette. A továbbiakban úgy készíti a hálót, hogy a merevítőszálak negyedelőpontjaihoz rögzítve egyre sűrűbb háló legyen! Szerkesszük meg Pók Petra kész hálóját!



Megoldás

Válasszunk ki egy csúcspontot, legyen az A. Az AO szakaszt felezzük meg (F), majd ismételt felezéssel adjuk meg a negyedelőpontokat (H, N)! Megismételhetjük az eljárást minden csúcsra, majd a megfelelő negyedelőpontok összekötése megadja a háló belső kereteit.



$AB \parallel F_1F_2$
$AB \parallel N_1N_2$
$AB \parallel H_1H_2$

Az eljárás során egyre kisebb sokszögeket szerkesztünk. A megfelelő szakaszok aránya $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ volt. Ilyen esetekben középpontos **kicsinyítésről** beszélünk.

λ (lambda) írott görög kisbetű

1. példában: $\lambda = 2$;

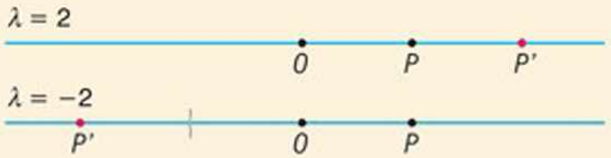
2. példában: $\lambda = \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}$.

Középpontos hasonlóságnak nevezzük a következő geometriai transzformációt: Megadunk a síkon egy O pontot, a hasonlóság középpontját, és egy nullától különböző λ valós számot, a hasonlóság arányát.

A középpontos hasonlóság a középponthoz önmagát rendeli: $O = O'$.

Minden O-tól különböző P pont képe az OP egyenes azon pontja, melyre teljesül, hogy $OP' = \lambda \cdot OP$, és

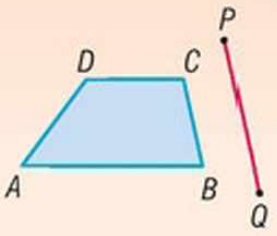
- ha $\lambda > 0$, akkor P' az O-ból kiinduló OP félegyenesre esik,
- ha $\lambda < 0$, akkor P' az O-ból kiinduló, P-t nem tartalmazó félegyenes egy pontja.



$\lambda = \dfrac{OP'}{OP}$

3. példa

Adott az $ABCD$ trapéz és annak BC szárával párhuzamos PQ szakasz, amely a BC szár középpontos hasonlósággal szerkesztett képe.



a) Szerkesszük meg a hasonlóság középpontját!

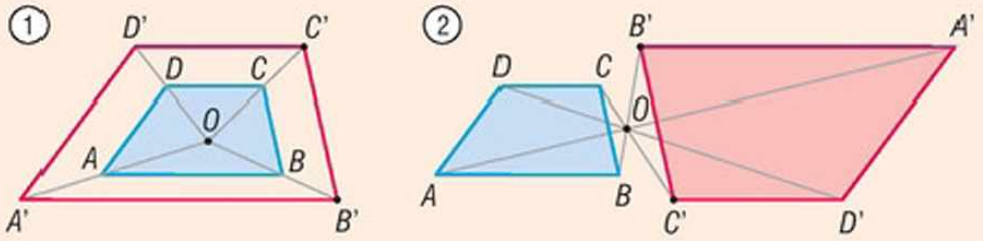
b) Szerkesszük meg a trapéz képét a kapott O-ra!

Megoldás

a) Két eset lehetséges:

1. A B pont képe a P és a C pont képe a Q. ($B' = P$ és $C' = Q$)
2. A B pont képe a Q és a C pont képe a P. ($B' = Q$ és $C' = P$)

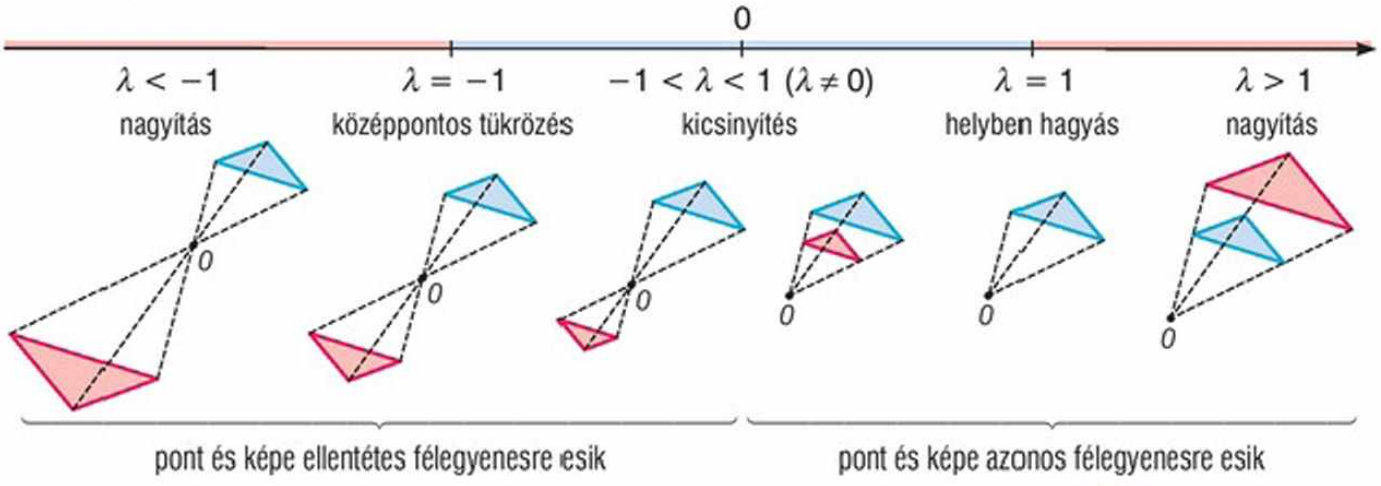
Az O középpont a BB' és CC' egyenesek metszéspontja lesz.



b) A szerkesztésnél felhasználjuk, hogy a trapéz és képe megfelelő oldalai párhuzamosak ($AB \parallel A'B'$). A hiányzó A' és D' csúcsokat az OA és OD egyenesekből a B', illetve a C' csúcsokon átmenő, a trapéz alapjaival párhuzamos egyenesek metszik ki.

Az 1. esetben $\lambda > 0$, az O középpont a BB' szakaszon kívül esik, ***O* külső hasonlósági pont.**
A 2. esetben $\lambda < 0$, az O középpont a BB' szakasz belső pontja, ***O* belső hasonlósági pont.**

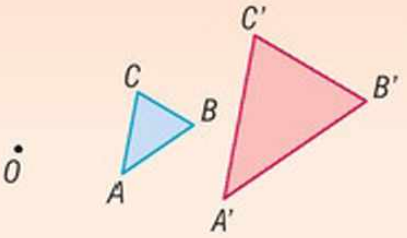
A középpontos hasonlóság **esetei** λ nagyságától függően:





4. példa

Az ABC háromszöget egy $\lambda = 2$ arányú O középpontú hasonlóság viszi $A'B'C'$ háromszögbe. Adjuk meg azt a hasonlóságot, amely $A'B'C'$ háromszöget viszi ABC háromszögbe!

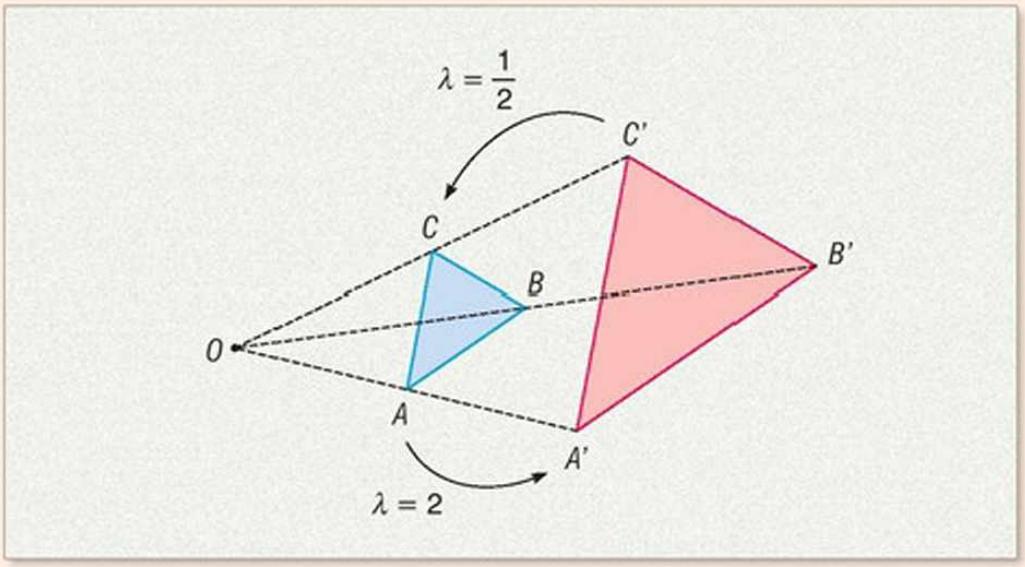


Megoldás

Az ABC háromszög és az $A'B'C'$ háromszög középpontosan hasonló, ezért a megfelelő oldalakra, így például az AB és $A'B'$ oldalra is teljesül, hogy:

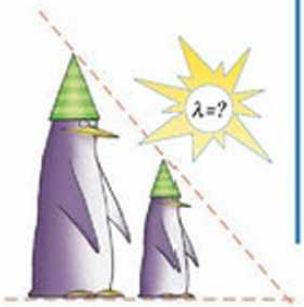
$$AB \parallel A'B' \text{ és } A'B' = 2 \cdot AB. \quad \text{Vagyis } AB = \frac{1}{2} \cdot A'B'.$$

Tehát az $A'B'C'$ háromszöget O pontból $\lambda = \frac{1}{2}$ aránnyal kell kicsinyítenünk, hogy az ABC háromszöget kapjuk.



A két háromszög hasonló egymáshoz, mert egy középpontos hasonlóság viszi át az egyiket a másikba. Jelölése: $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$.

Általában igaz, ha egy alakzat képe λ arányú hasonlósággal jön létre, akkor a képalakzatot $\frac{1}{\lambda}$ arányú hasonlóság viszi az eredeti alakzatba.



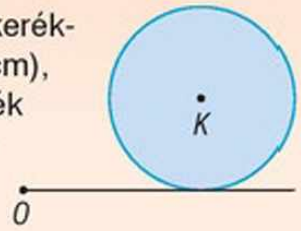
A középpontos hasonlóság tulajdonságai

A fentiek alapján megállapíthatjuk a következőket:

1. Ha $\lambda \neq 1$, akkor egyetlen fixpont van, az O középpont.
   $\lambda = 1$ esetén minden pont fixpont.
2. Bármely O-ra nem illeszkedő egyenes párhuzamos a képével.
   Ha az egyenes átmegy O-n, akkor az egyenes egybeesik a képével.
3. A középpontos hasonlóság szögtartó.
4. A középpontos hasonlóság irányítástartó.

5. példa

Egy kerékpáros artista drótkötélen biciklizik. A kerékpár első kerekének sugara 10 cm (a rajzon 1 cm), középpontja K. Szerkesszük meg a hátsó kerék rajzát, ha O középpontú és $\lambda = 3$ arányú hasonlósággal kapjuk az első kerék rajzából!

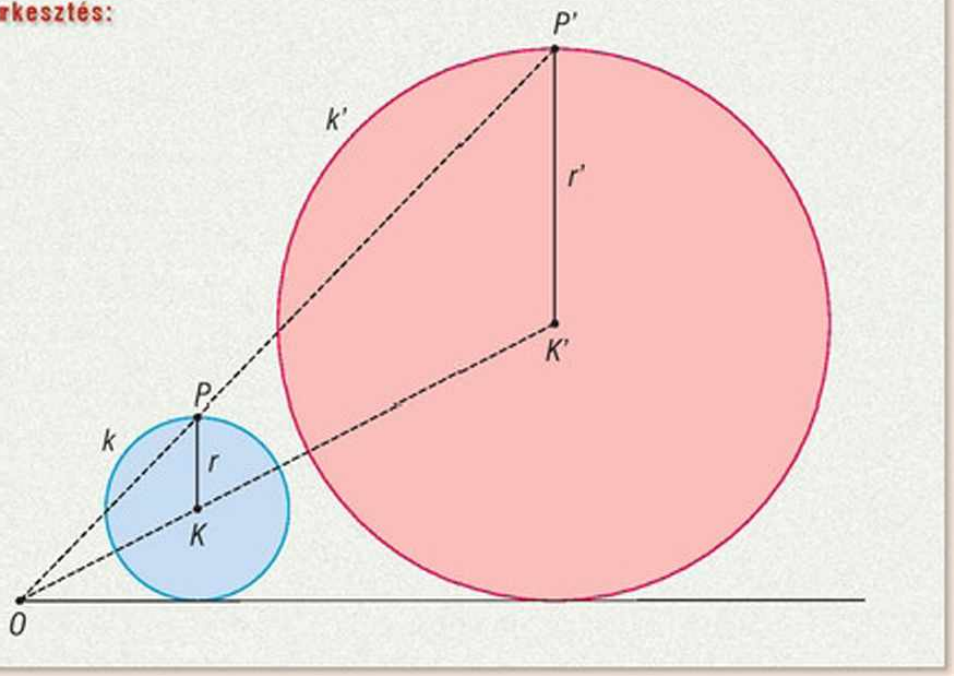




Megoldás

Megszerkesztjük a K középpont és a körív egy P pontjának a képét. A $K'P'$ szakasz megadja a keresett kör sugarát. Mivel $\lambda = 3$, a k' kör sugara $r' = 3$ cm. A hátsó kerék rajza a K' középpontú, 3 cm sugarú kör lesz.

Szerkesztés:





Feladatok

1. Adott egy $ABCD$ négyzet. Szerkesszük meg a négyzet középpontos hasonlósággal létrejövő képét, ha a hasonlóság középpontja az A csúcs, a hasonlóság aránya pedig

   a) $\lambda = 2$; *b)* $\lambda = 1{,}5$; *c)* $\lambda = \frac{1}{2}$; *d)* $\lambda = -\frac{1}{4}$; *e)* $\lambda = -1$; *f)* $\lambda = -3$!

   Ezek közül melyek lesznek kicsinyítések és melyek nagyítások?

2. Foltvarrásnál egy háromszög alakú mintát tervezünk úgy, hogy egy háromszöget az egyik csúcsából a felére kicsinyítünk.

   a) Készítsünk vázlatrajzot!

   b) Hányszor annyi cérnát kell felhasználni a nagy folt körülvarrásakor, mint a kicsi esetén?

   **c)* Hányadrésze a kisebb háromszög alakú anyag területe az eredetiének?

3. Az AB és az $A'B'$ szakaszokról tudjuk, hogy $A'B'$ az AB középpontosan hasonló képe, és:

1. $AB = 3$ cm; $A'B' = 9$ cm;
2. $AB = 2$ cm; $A'B' = 3$ cm;
3. $AB = 10$ cm; $A'B' = 5$ cm;
4. $AB = 15$ cm; $A'B' = 5$ cm.

a) Vegyük fel a hasonlóság középpontját és a szakaszokat úgy, hogy a hasonlóság aránya pozitív legyen!

b) Rajzoljuk fel a hasonlóság középpontját és a szakaszokat úgy, hogy a hasonlóság aránya negatív legyen!

c) Mennyi lesz a hasonlóság aránya az egyes esetekben?

4. Egy téglalap alakú fénykép mérete $9 \times 13{,}5$ (cm). Erről egy 10×15 (cm)-es másolatot készítettünk.

a) Mekkora a hasonlóság aránya?

b) Hogyan változik a fénykép kerülete?

c) Hogyan változik a fénykép területe?

d) Készítsünk vázlatokat úgy, hogy O az egyik csúcs legyen!

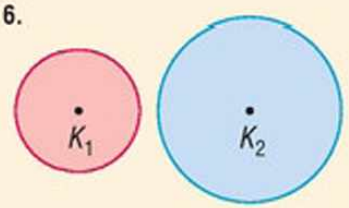
5. A derékszögű koordináta-rendszerben adott egy háromszög, amelynek csúcsai: $A(1; 2)$; $B(5; 1)$ és $C(-2; -4)$. Szerkesszük meg az ABC háromszög $O(0; 0)$ pontra vonatkozó középpontos hasonlósággal keletkező képét, ha a hasonlóság aránya

a) $\lambda = 2$; *b)* $\lambda = -2$; *c)* $\lambda = 1{,}5$!

Adjuk meg a keletkező háromszög csúcspontjainak koordinátáit!

6. Vegyünk fel egy $r = 4$ cm és egy $R = 6$ cm sugarú kört úgy, hogy ne legyen közös pontjuk! Keressük azt az O pontot, mely annak a hasonlóságnak a középpontja, amely a kisebb kört a nagyobba viszi. Hány megoldása van a feladatnak? Adjuk meg a hasonlóság arányát! (➡)

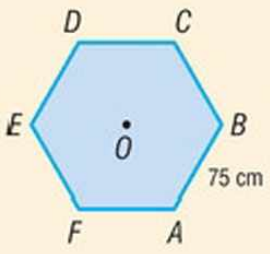
6.



7. Egy szobor talapzata szabályos hatszög alakú, oldala 75 cm hosszú. A szobor talapzata köré olyan virágágyást terveznek, amelyet a hatszög középpontjából másfélszeres nagyítás ad meg.

Hány tő begóniát ültethetnek a virágágy szélére, ha 12,5 cm-enként helyezik el a töveket? (➡)

7.



Rejtvény

Adott egy *ABC* háromszög és egy *O* pont. Az *ABC* háromszögön egymás után végrehajtunk három *O* középpontú középpontos hasonlósági transzformációt, így a háromszög visszakerül az *ABC* háromszögbe. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

***a)* Biztos, hogy mindegyik hasonlóság aránya $\lambda = 1$.**

***b)* A hasonlósági arányok között biztosan szerepel a $\lambda = 1$.**

***c)* A hasonlóságok aránya között lehet olyan, amelyik negatív.**

6. Vegyes feladatok

1. A koordináta-rendszerben egy párhuzamos eltolás az $A(2; 1)$ pontot az $A'(4; 7)$ pontba viszi.

a) Rajzoljuk fel az eltolás vektorát!

b) Melyik pontba viszi ez az eltolás az origót?

c) Rajzoljunk egy olyan vektort, melynek a $B(-2; 1)$ a kezdőpontja és az AA' vektorral egyenlő!

2. A derékszögű koordináta-rendszerben adott az ABC háromszög az $A(0; 1)$; $B(-3; -4)$; $C(-2; 5)$ csúcsokkal. Rajzoljuk meg azt az origó kezdőpontú vektort, amelyikkel az ABC háromszöget eltolva a megfelelő csúcs képe:

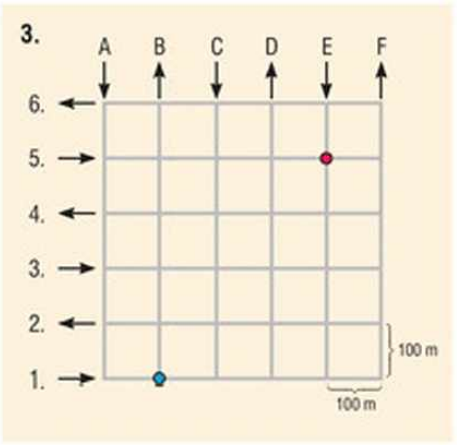
a) $A'(0; 4)$; *b)* $A'(2; -1)$; *c)* $B'(1; 2)$; *d)* $B'(0; 1)$; *e)* $C'(3; 2)$; *f)* $C'(-2; 4)$!

3. „Sakktábla városka” utcái négyzethálósan épültek. Az utcákat számok és betűk jelölik. Mivel minden utca egyirányú, azokon csak a bejelölt irányban haladhatnak a járművek. Bence a B és 1. utca kereszteződésénél, Endre pedig az E és 5. utcák találkozásánál lakik. (➡)

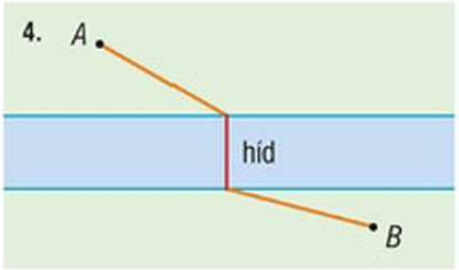
a) Milyen messze laknak egymástól légvonalban?

b) Merre mehet Bence, és legalább mekkora utat tesz meg, ha gyalog megy Endréhez?

c) Merre mehet Bence, és legalább mekkora utat tesz meg, ha autóval megy meglátogatni Endrét?



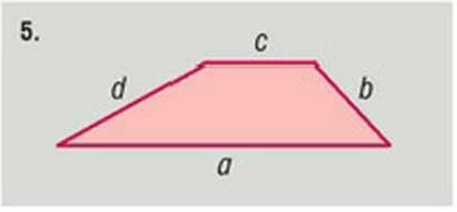
4. Az A és B városokat egy folyó választja el egymástól, melyen egy hidat terveznek. A híd merőleges a folyó partjára. Hova kell építeni a hidat, ha azt szeretnénk, hogy így a két város közötti út a lehető legrövidebb legyen? (➡)



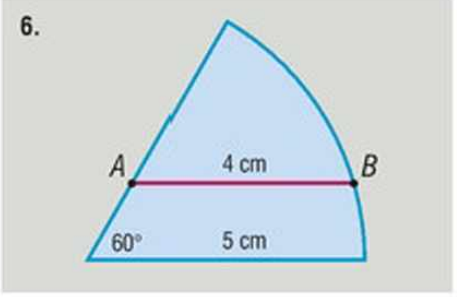
5. Szerkesszünk trapézt, ha adott a négy oldalának a hossza! (➡)

a) $a = 6$ cm; $b = 2$ cm; $c = 2$ cm; $d = 3$ cm.

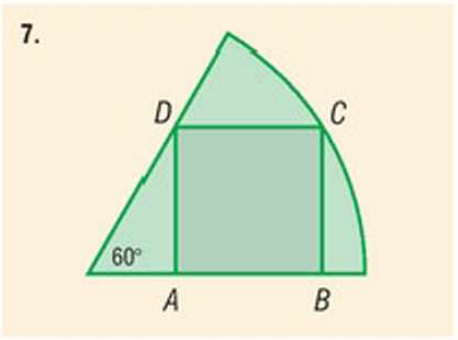
b) Változtassuk meg valamelyik adatot úgy, hogy ne lehessen a trapézt megszerkeszteni!



6. Szerkesszünk egy $r = 5$ cm sugarú, 60°-os körcikket! Szerkesszünk ebbe az ábrának megfelelően egy 4 cm hosszú AB szakaszt úgy, hogy az az egyik határoló sugárral párhuzamos legyen! (➡)



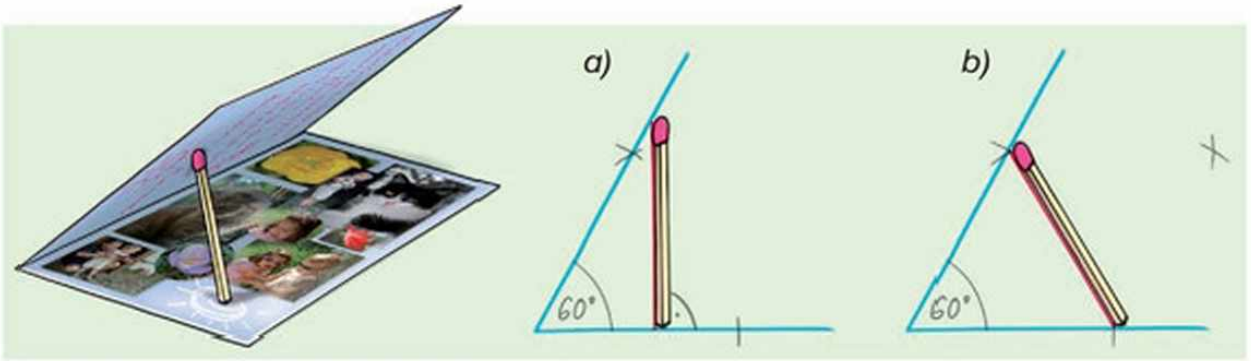
7. Szerkesszünk egy $r = 5$ cm sugarú 60°-os körcikkbe az ábrának megfelelően egy négyzetet! (➡)



8. Emese összehajtható képeslapot készített a barátai névnapjára. Az egyik lapra képeket ragasztott. A ragasztó száradásának idejére egy gyufaszállal tartotta szét a képeslap két lapját. A vázlatok alapján szerkesszük meg, hogyan helyezhette el Emese a 42 milliméter hosszú gyufaszálat, ha

a) az asztal síkjára merőlegesen állította fel a gyufát;

b) a hajtáséltől egyenlő távolságra támaszkodott fel a gyufa két vége!



9. Adott egy derékszögű háromszög. Szerkesszük meg a köré írható kör középpontját! Legyen ez egy olyan középpontos hasonlóság *0* középpontja, melynek aránya $\lambda = -1$. Szerkesszük meg a háromszög középpontosan hasonló képét! Milyen síkidomot alkot együtt az eredeti és a képháromszög?

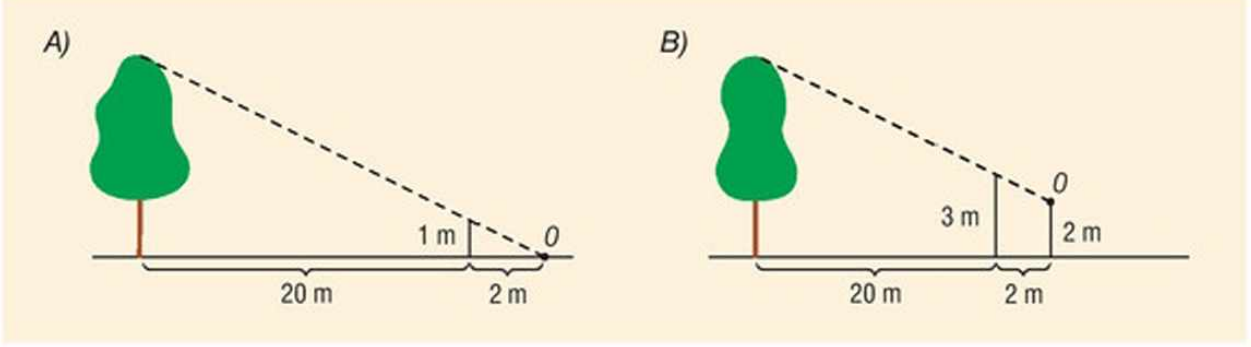
10. Szerkesszünk egy 3 cm oldalhosszúságú szabályos hatszöget, majd középpontosan nagyítsuk

a) az egyik csúcsából $\lambda = 2$ aránnyal;

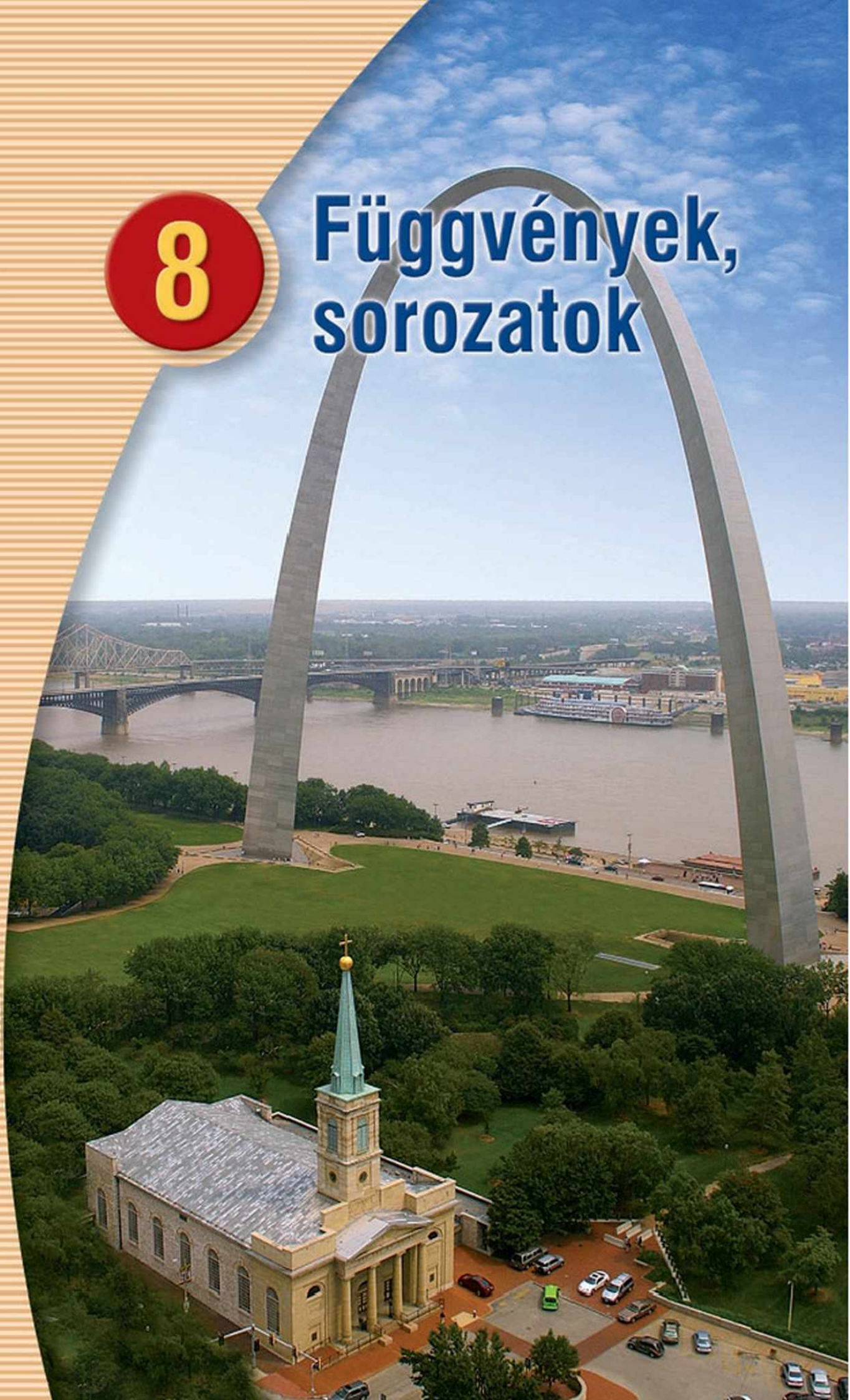
b) a középpontjából $\lambda = -2$ aránnyal;

c) az egyik oldal felezőpontjából $\lambda = -2$ aránnyal!

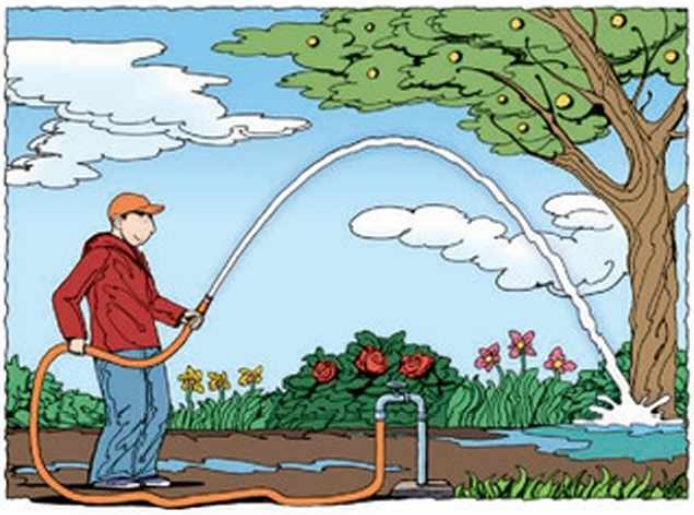
***11.** Mekkora az ábrán látható fa magassága, ha a következő adatokat ismerjük?

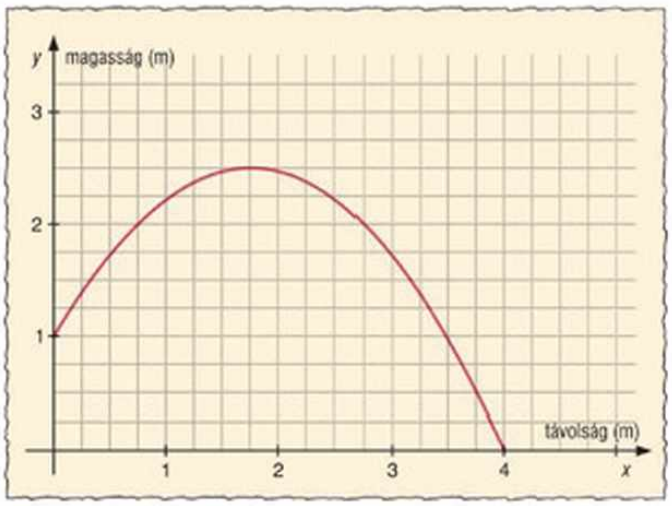


8 Függvények, sorozatok



1. Függvények, lineáris függvények

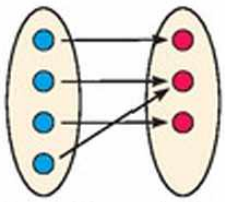




Béla locsolja a kertjét. Az ábrán a locsolócsőből távozó víz útja látható. Az x tengelyen a locsolótól mért távolságot, az y tengelyen pedig a föld szintjétől mért magasságot adjuk meg méterben.

A kapott görbe egy függvény grafikonja, hiszen minden távolsághoz pontosan egy magasságérték tartozik.

Függvény: az alaphalmaz minden eleméhez a képhalmaznak pontosan egy elemét rendeli hozzá.



1. példa

Válaszoljunk a következő kérdésekre a fenti grafikon segítségével!

a) Milyen magasan indul a víz a locsolócsőből?

b) Milyen magasra emelkedik a vízsugár?

c) Béla helyétől hány méter távolságban ér földet a vízsugár?

d) Határozzuk meg a grafikonon látható függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megoldás

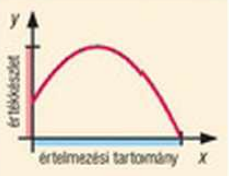
a) A grafikon kezdőpontja a (0; 1) pont, vagyis a locsolócső szájából 1 méter magasan folyik ki a víz.

b) A grafikon „legfelső” pontja az (1,75; 2,5) pont, azaz a vízsugár 2,5 méter magasra emelkedik.

c) Amikor „földet ér” a vízsugár, akkor a földtől mért távolság, azaz a második koordináta 0. A grafikonról leolvasható, hogy ez Béla helyétől 4 méter távolságra következik be.

d) Az értelmezési tartomány a 0 és 4 közé eső valós számok halmaza, a 0-t és a 4-et is beleértve.

Az értékkészlet a 0 és 2,5 közé eső valós számok halmaza, a 0-t és a 2,5-et is beleértve.



A függvényeket általában a valós számok ($\mathbb{R}$) halmazán, vagy annak valamely részhalmazán értelmezzük.

2. példa

Egy kísérlet során megmérték a levegő hőmérsékletét egy adott időpontban, különböző tengerszint feletti magasságokban. Az eredményeket a következő táblázatban foglalták össze:

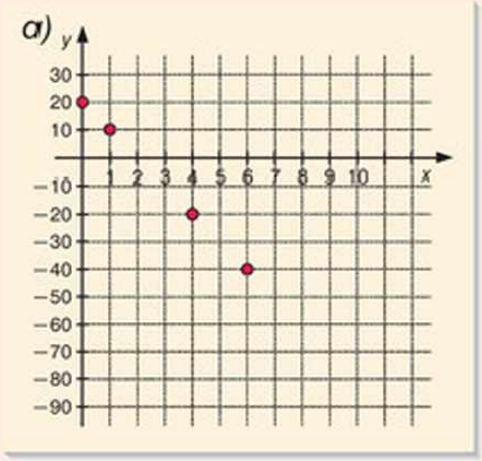
x	Tengerszint feletti magasság (km)	0	1	4	6
y	Hőmérséklet (°C)	20	10	−20	−40

a) Ábrázoljuk grafikonon a fenti adatokat!
b) Kössük össze a kapott pontokat! Mit tapasztalunk?
c) Adjuk meg, hány Celsius-fok van 10 km magasan, ha a hőmérséklet az eddigi szabályosság szerint változik!
d) Adjuk meg, hogy milyen magasságban éri el a levegő hőmérséklete a fagypontot!
e) Határozzuk meg a függvény meredekségét!
f) Írjuk le a hozzárendelés szabályát, és azt, hogy a grafikon hol metszi a tengelyeket!

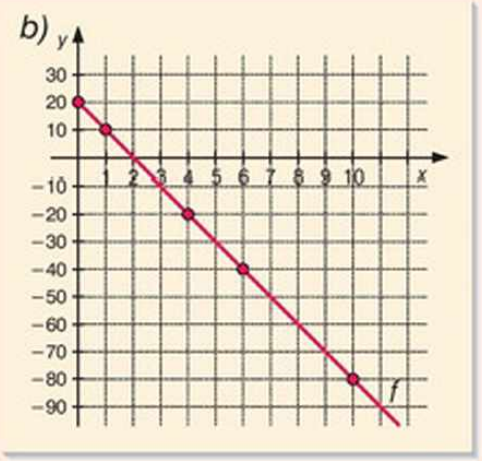
tengelymetszetek

Megoldás

a)



b)



b) A kapott pontokat összekötve észrevehetjük, hogy ezek egy egyenesre illeszkednek.

Ez azt jelenti, hogy ez egy **lineáris függvény grafikonja.**

Lineáris függvény: a grafikonja egyenes.

c) A grafikonról leolvasható, hogy ha $x = 10$, akkor $f(x) = -80$, tehát 10 km magasságban −80 °C van.

d) Azt az x értéket keressük, ahol $f(x) = 0$. Ez a hely az $x = 2$, tehát a fagypontot, azaz a 0 °C-ot 2 km magasságban érjük el.

A függvény grafikonja ott metszi az x tengelyt, ahol a függvény értéke 0.
$f(x) = 0 \Rightarrow x = ?$
Ez a függvény **zérushelye.**

e) A szintkülönbség 1 km-es növekedése esetén 10 °C-ot csökken a hőmérséklet, vagyis a függvény meredeksége −10.

f) f: {nemnegatív valós számok} $\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -10x + 20$.

Az x tengelyt a (2; 0) pontban (vagyis az $x = 2$-nél) metszi, az y tengelyt a (0; 20) pontban (azaz az $y = 20$-nál) metszi a függvény grafikonja.

A függvény y tengelymetszete a függvény 0 helyen felvett értéke.
$f(0) = ?$

Használatos jelölések:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$x \mapsto a\,x + b$

$f(x) = a\,x + b$

$y = a\,x + b$

a: meredekség; b: y tengelymetszet

Az $f: x \mapsto ax + b$ alakú függvények lineáris függvények, mivel grafikonjuk egyenes. Az egyenes meredekségét az a valós szám adja meg, az y tengelymetszetet pedig a b.

3. példa

Ábrázoljuk a következő lineáris függvények grafikonját derékszögű koordináta-rendszerben!

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}x - 2$;

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3$;

c) h: {olyan x valós számok, melyekre $-1 \le x \le 4$} $\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 - x$.

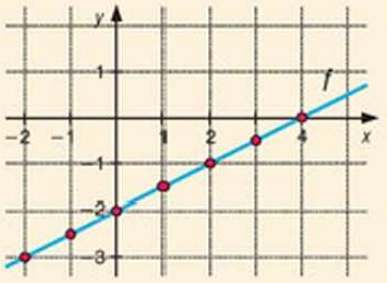
Megoldás

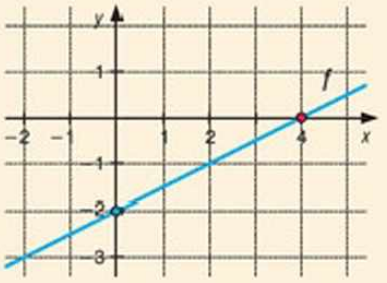
a) **1. módszer:** Értéktáblázat segítségével

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0

Lineáris függvények esetén a grafikonkészítés módjai:

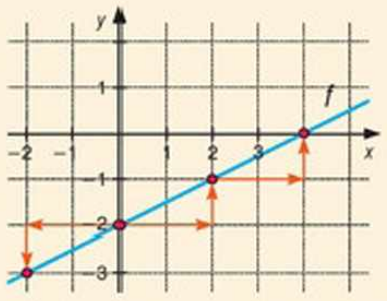
1. az ábrázolt pontok összekötésével (elegendő két pont összekötése)
2. az y tengellyel alkotott $(0; b)$ metszéspontból indulva az a meredekség felhasználásával





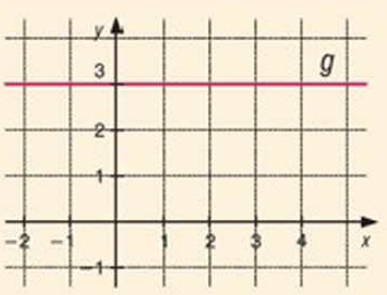
2. módszer: A hozzárendelési szabály segítségével

Az $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ hozzárendelési szabályból leolvashatjuk, hogy az egyenes meredeksége $\frac{1}{2}$, és az y tengelyt a $(0; -2)$ pontban metszi. További pontokat úgy kapunk, hogy a meredekségnek megfelelően 2-t jobbra, 1-et felfelé lépegetünk.



$g(x) = 0 \cdot x + 3$, a függvény meredeksége 0.

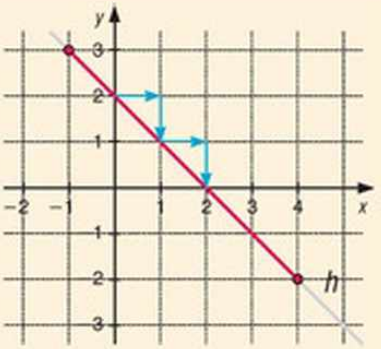
b) A $g(x) = 3$ függvény állandó (konstans), hiszen mindenütt ugyanazt az értéket veszi fel. Az ilyen függvények grafikonjának pontjai az x tengellyel párhuzamos egyenesre illeszkednek.



c) A $h(x) = 2 - x$ hozzárendelési szabály átírható $h(x) = -x + 2$ alakba. Ebből látszik, hogy

$$a = -1 \text{ és } b = 2.$$

Mivel ennek a függvénynek az értelmezési tartománya a valós számoknak egy részhalmaza ($-1 \leq x \leq 4$), ezért a grafikon az egyenesnek egy része.



$h(x) = -1 \cdot x + 2$

A ● jelölés azt jelenti, hogy a pont hozzátartozik a grafikonhoz.

Ha a pont nem tartozna a grafikonhoz, akkor a ○ jelölést használnánk.

Függvények a hétköznapokban

Jelenet a Szeged – Budapest intercity vonaton:

Az egyik utas felriad a szunyókálásából, és ijedten veszi észre, hogy a vonat lassít. A másik utashoz fordul:

– *Elnézést, ez már Kecskemét?*

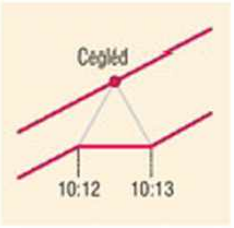
A másik utas, aki éppen egy könyvet olvas, az órájára pillant, és azt mondja:

– *9 óra 25 perc van.*

Erre az első utas megnyugodva visszaül.

Ha a vonat menetrend szerint halad, akkor az időpont egyértelműen meghatározza a helyét. A menetrend **a vonat út-idő függvénye.**





A vonat a menetrend szerint az állomáson rövid időre megáll.

Természetesen a valóságban lejátszódó eseményeknél adódhat eltérés az elméleti értékhez képest, a különböző napokon induló vonat helye 9 óra 25 perckor kismértékben különbözhet egymástól és a menetrendben meghatározott értékektől.

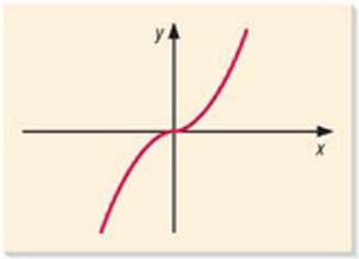
A tudományok legérdekesebb feladatai közé tartozik a természet törvényeinek felismerése, vagyis annak „kiderítése", hogy bizonyos folyamatokban melyik mennyiség melyiktől függ (és melyiktől nem), és hogyan.

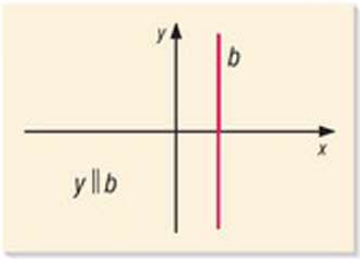
Még ha nem is gondolunk rá, a függvények egész életünket áthatják. A fáról lehulló alma esését és a bolygók Nap körüli mozgását ugyanaz a gravitációs erőtörvény határozza meg. Az ezt leíró függvény ismerete nélkül nem léphetett volna az ember a Holdra, és nem lennének tévéműsort közvetítő vagy meteorológiai műholdak sem.

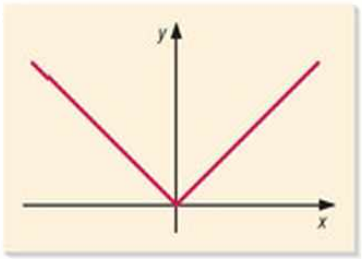


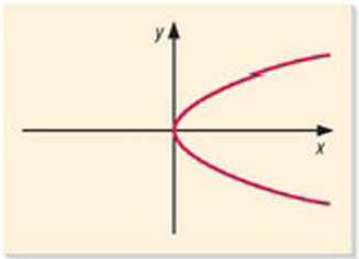
Feladatok

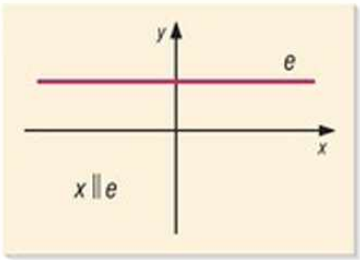
1. Válasszuk ki, hogy melyik grafikon ábrázol függvényt! Választásunkat indokoljuk!

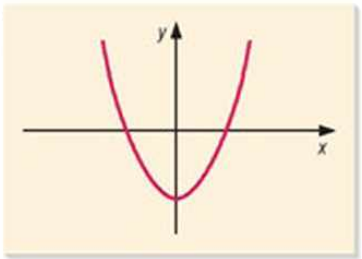
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

2. Soroljuk fel, hogy az adott pontok az

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x - 20$; $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$; $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3$ függvények közül melyiknek a grafikonjára illeszkednek! (Egy pont több függvényhez is tartozhat!)

a) $P(0; 3)$; *b)* $Q(2; 3)$; *c)* $R(-2; 3)$; *d)* $S(-1; -1)$; *e)* $T(5; 9)$.

3. Vizsgáljuk meg, melyik hozzárendelési szabály alapján töltöttük ki az értéktáblázatokat, majd nézzük meg, hogy a megadott pontok melyik grafikonra illeszkednek!

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3 - 4x$; $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x} - 2$;

$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 4x + 3$; $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x - 2| - 1$.

1.

x	−2	−1	0	1	2
y	−2,5	−3	—	−1	−1,5

2.

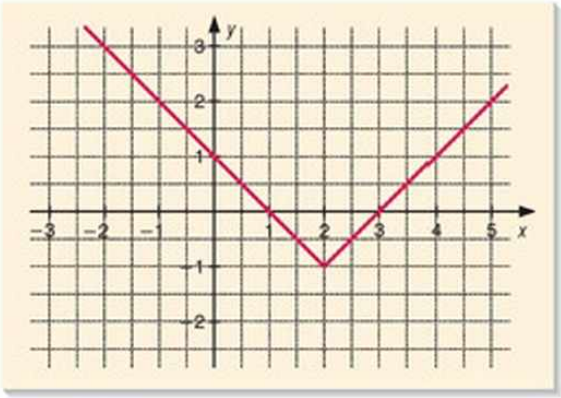
x	−2	−1	0	1	2
y	15	8	3	0	−1

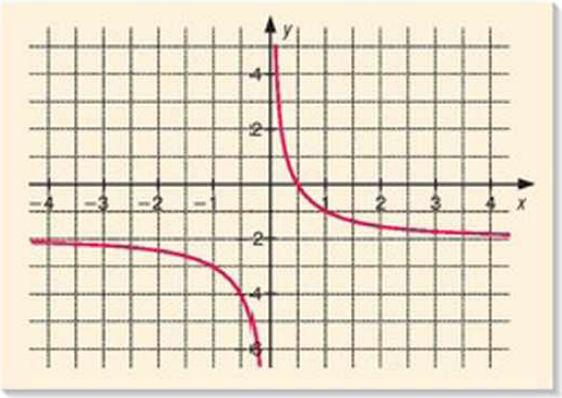
3.

x	−2	−1	0	1	2
y	3	2	1	0	−1

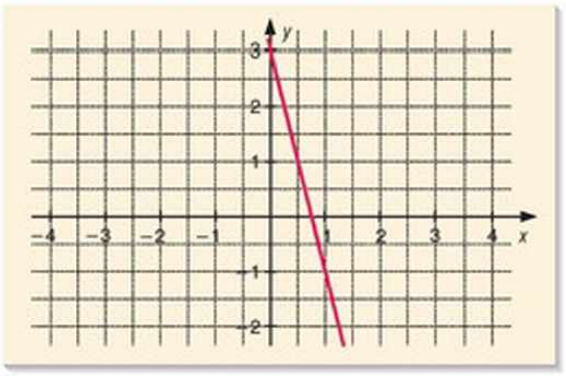
4.

x	−2	−1	0	1	2
y	11	7	3	−1	−5

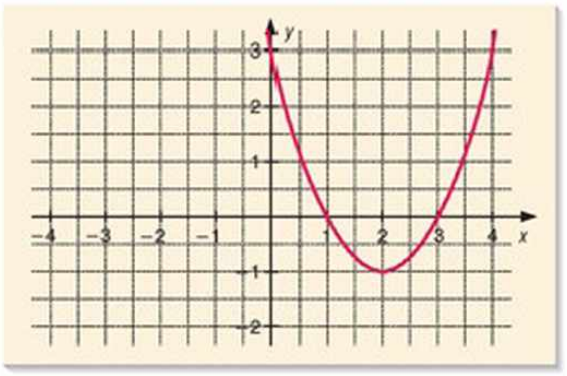
A) 

B) 

C)



D)



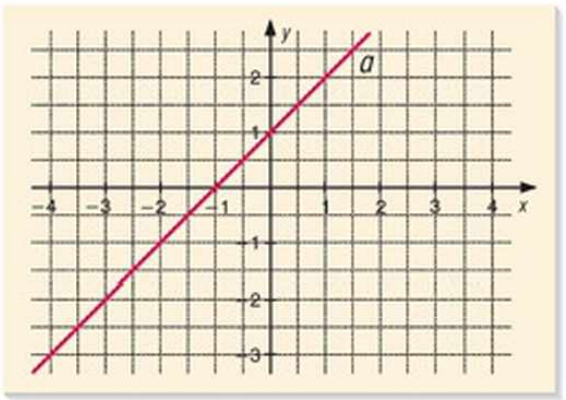
4. Ábrázoljuk (ha tudjuk, értéktáblázat nélkül) a következő lineáris függvényeket!

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x - 4$; $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x + 3$;

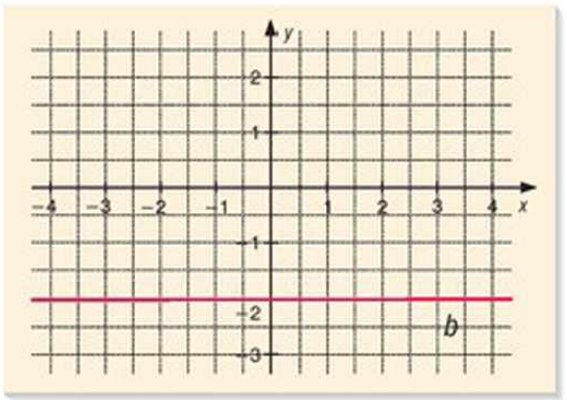
$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x + 6$; $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4 - 3x$.

5. Határozzuk meg a grafikonokon látható lineáris függvények meredekségét, tengelymetszeteit és hozzárendelési szabályát!

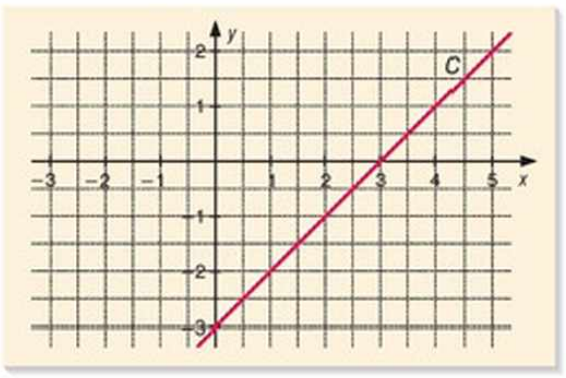
a)



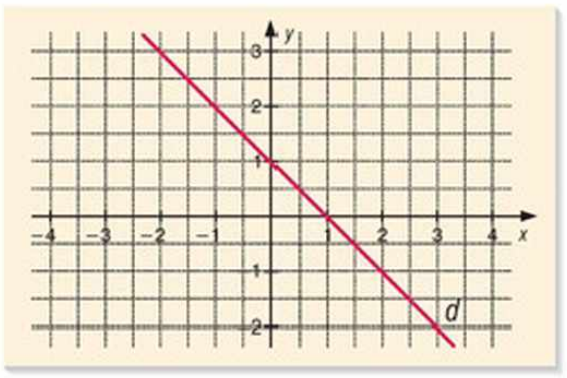
b)



c)



d)



6. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögét (α) változtatjuk. Hogyan változik ennek függvényében a másik hegyesszög (β)?

a) Töltsük ki a táblázatot!

x	Egyik hegyesszög (α)	20°	45°			60°	
y	Másik hegyesszög (β)			80°	22,5°		

b) Mi a hozzárendelés szabálya?

c) Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

d) Készítsük el a grafikonját!

*7. A megfigyelések szerint az, hogy egy tücsök mennyire intenzíven ciripel, a hőmérséklettől függ. Egy átlagos tücsök 20 °C-on 115-öt, 25 °C-on viszont már 145-öt ciripel egy perc alatt. Jelöljük T-vel a °C-ban megadott hőmérsékletet, $N(T)$-vel pedig a percenkénti ciripelések számát T hőmérsékleten. (15 °C alatt nem ciripel a tücsök, 45 °C felett pedig nem marad életben.)

a) Egészítsük ki a táblázatot, ha tudjuk, hogy $N(T)$ lineáris függvény!

T (°C)	15	20	25	30	35	40	45
$N(T)\left(\frac{\text{cirip}}{\text{perc}}\right)$		115	145				

b) Készítsük el a függvény grafikonját megfelelő beosztású koordináta-rendszerben!

c) Határozzuk meg a függvény meredekségét!

d) Mennyit ciripel egy tücsök egy perc alatt, ha a hőmérséklet 26 °C?

e) Tervezzünk „tücsökhőmérőt”! Hogyan lehetne ezt az összefüggést arra használni, hogy a tücsök ciripeléséből meghatározzuk, hány Celsius-fok van?

*8. Egy mézeskalácsárus hosszú évek tapasztalata alapján tudja, hogy ha a brüsszeli vásárban x eurót kér a mézeskalács darabjáért, akkor összesen $f(x) = 40 - 2x$ darab mézeskalácsot tud eladni egy nap alatt.



a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját megfelelő beosztású koordináta-rendszerben! Figyeljünk, hogy sem az ár, sem az eladott darabszám nem lehet negatív!

b) Hol metszi a függvény az x tengelyt? Mit jelent ez?

c) Hol metszi a függvény az y tengelyt? Mit jelent ez?

d) Mennyi a függvény meredeksége? Értelmezzük!

e) Mi a függvény értékkészlete és értelmezési tartománya?

*9. A hőmérsékletet Celsius-fokban (°C) és Fahrenheit-fokban (°F) is mérik. Ha C Celsius-fok van, akkor a Fahrenheit-fokban mért hőmérsékletet az $F(C) = 1{,}8C + 32$ képlet adja meg.

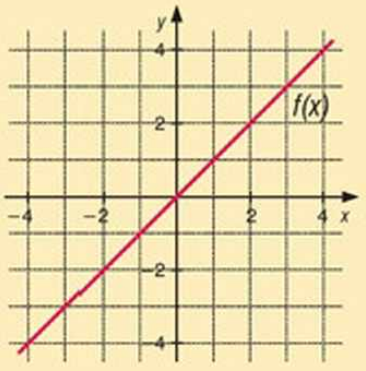
a) Ábrázoljuk az $F(C)$ függvényt egy olyan derékszögű koordináta-rendszerben, ahol a vízszintes tengely a C, a függőleges az F.

b) Hány °F-on fagy meg a víz, és hány fokon forr fel?

c) Fejezzük ki a 10 °F hőmérsékletet Celsius-fokban!

Rejtvény

Balázs grafikus számológépével ábrázolta az $f(x) = \frac{5x^2 + 950x}{1000}$ függvény grafikonját, és a következőt látta.

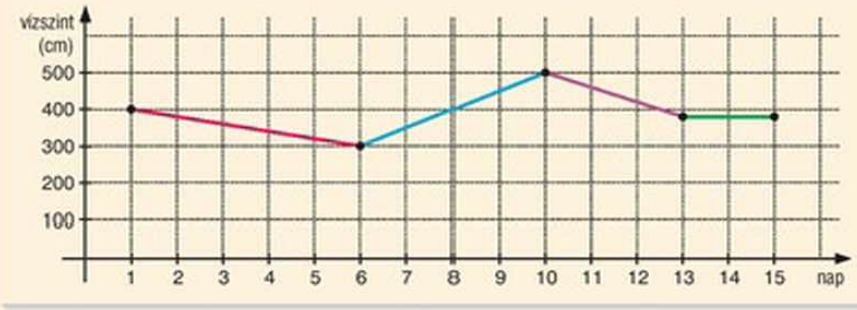


Balázs szerint ez nyilvánvalóan egy lineáris függvény grafikonja. Igaza van Balázsnak? Indokoljunk!

2. Függvények tulajdonságai

1. példa

A grafikon a Duna vízszintjét mutatja Bajánál 2009. augusztus 1–14-ig. Mit mondhatunk a vízszint változásáról a grafikon alapján?





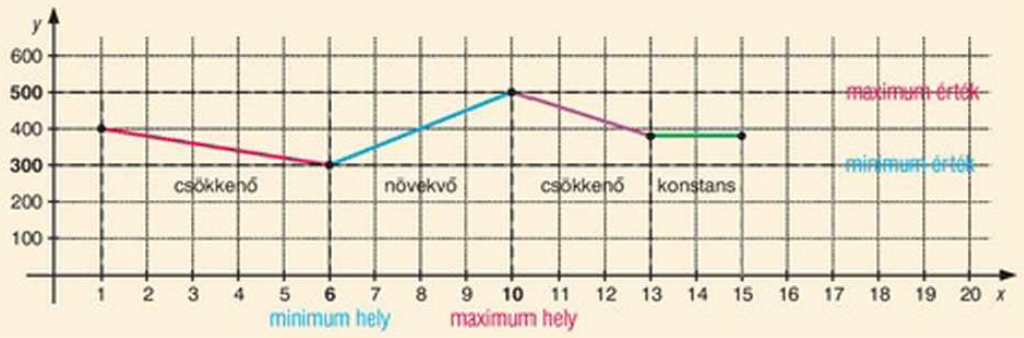
Megoldás

A vízszint
- csökkent augusztus 1-től 6-ig,
- növekedett augusztus 6-tól 10-ig,
- ismét csökkent augusztus 10-től 13-ig, és
- állandó (konstans) volt augusztus 13-tól 15-ig.

A legalacsonyabb vízszintet ebben az időszakban augusztus 6-án mérték, ez 300 cm volt, a legmagasabbat 10-én, ez pedig 500 cm volt.

legalacsonyabb, legkisebb, minimális

legmagasabb, legnagyobb, maximális



A vízszintváltozást megadó függvény menete:

Ha $1 \leq x < 6$ és ha $10 \leq x < 13$, **a függvény csökken.** Ezekben az időszakokban teljesül, hogy bármely két időpont közül a későbbiben alacsonyabb a vízállás, mint a korábbiban.

Ha $6 \leq x < 10$, **a függvény növekszik.** Ezen a szakaszon bármely két időpont közül a későbbiben magasabb a vízállás, mint a korábbiban.

Ha $13 \leq x \leq 15$, **a függvény konstans** (állandó), a vízállás nem változik.

Szélsőértékek:

A függvény a legkisebb értékét az $x = 6$ helyen veszi fel. **A függvénynek az $x = 6$ helyen minimuma van, a minimum értéke $f(6) = 300$.**

A függvény a legnagyobb értékét az $x = 10$ helyen veszi fel. **A függvénynek az $x = 10$ helyen maximuma van, a maximum értéke $f(10) = 500$.**

Szélsőértékek

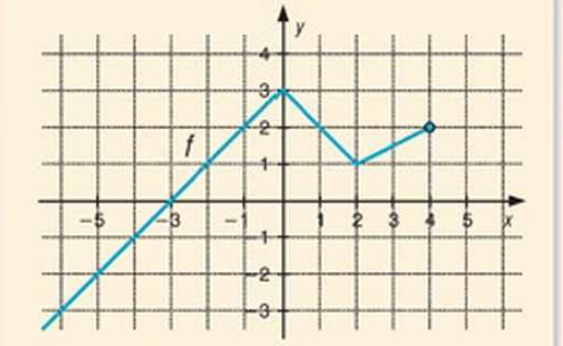
Minimum:
$f(x) \geq f(6)$
az értelmezési tartomány minden x elemére.

Maximum:
$f(x) \leq f(10)$
az értelmezési tartomány minden x elemére.

2. példa

Az ábrán látható f függvény értelmezési tartománya a 4-nél kisebb vagy egyenlő valós számok halmaza.

Adjuk meg az f függvény minél több tulajdonságát!



Megoldás

1. Értékkészlet: a 3-nál nem nagyobb számok halmaza (feltéve, hogy a negatív irányba ugyanúgy folytatódik, ahogyan látjuk). Ezt írhatjuk úgy is, hogy $f(x) \leq 3$.

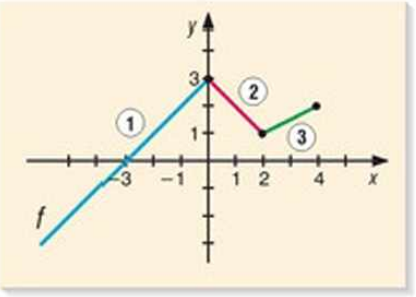
2. Tengelymetszetek: a függvény grafikonja az y tengelyt a +3-nál, az x tengelyt pedig a −3-nál metszi.

3. A függvény menete: a függvény $x = 0$-ig növekszik. Ha $0 < x \leq 2$, akkor csökken, és ha $2 < x \leq 4$, akkor ismét nő.

4. Szélsőértékek: a függvény a maximumát az $x = 0$ pontban veszi fel, a maximum értéke 3. Minimuma nincs.

„Sétáljunk végig” a függvény grafikonján, amely három különböző lineáris függvény grafikonjának egy-egy darabja.

1. Ha $x \leq 0$, akkor $f(x) = x + 3$;
2. ha $0 < x \leq 2$, akkor $f(x) = -x + 3$;
3. ha $2 < x \leq 4$, akkor $f(x) = \frac{1}{2}x$.



Az ábrázolt függvény hozzárendelési szabálya:

$$f\colon \{\text{4-nél kisebb vagy egyenlő valós számok}\} \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{ha } x \leq 0; \\ -x + 3, & \text{ha } 0 < x \leq 2; \\ \frac{1}{2}x, & \text{ha } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

A függvények jellemzői:

- **az értékkészlet;**
- **a tengelyekkel alkotott metszéspontok** (az x tengelymetszet, vagyis a zérushely, valamint az y tengelymetszet);
- **a függvény menete** (mely x értékekre nő, és melyekre csökken);
- **a szélsőértékek** (minimum, maximum – ha létezik).

3. példa

Végtelen Hangya a koordináta-rendszer III. síknegyedébe tévedt, és egy egyenes mentén az origó irányába indult. Az egyenes hozzárendelési szabálya $f(x) = -\frac{1}{2}x$. Így mászott az $x = 2$-ig, amikor megtorpant. Hirtelen elfordult balra, és az $f(x) = 2x - 5$ egyenesen haladt tovább. Ábrázoljuk a hangya útját, és jellemezzük az f függvényt, amelyen végigment!



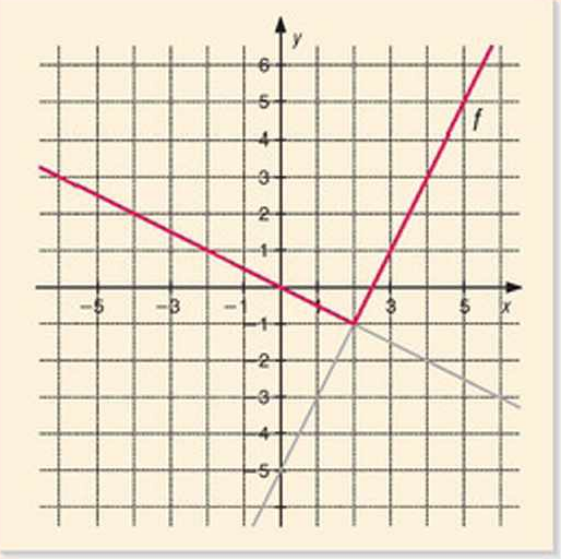
Megoldás

Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát!

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

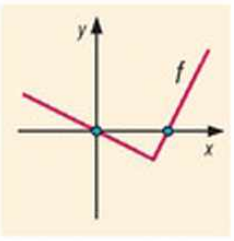
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, \text{ ha } x \leq 2; \\ 2x - 5, \text{ ha } 2 < x. \end{cases}$$

Ábrázoljuk a függvény grafikonját meghatározó két lineáris függvényt! Ezután jelöljük meg, hogy a két egyenes melyik része mutatja a hangya útját!



A függvény jellemzése:

- **értékkészlete:** -1-nél nem kisebb valós számok halmaza ($y \geq -1$);
- **tengelymetszetei:** zérushelyei $x = 0$ és $x = 2{,}5$;
  y tengelymetszete $y = 0$;
- **menete:** $x = 2$-ig csökken, majd a 2-nél nagyobb x-ekre nő;
- **szélsőértéke:** minimuma van az $x = 2$-nél, az értéke $y = -1$.

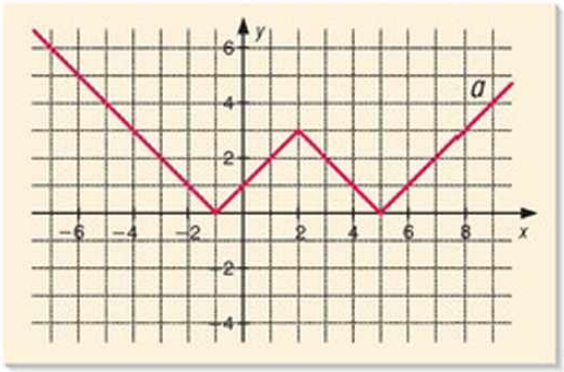


zérushelyek

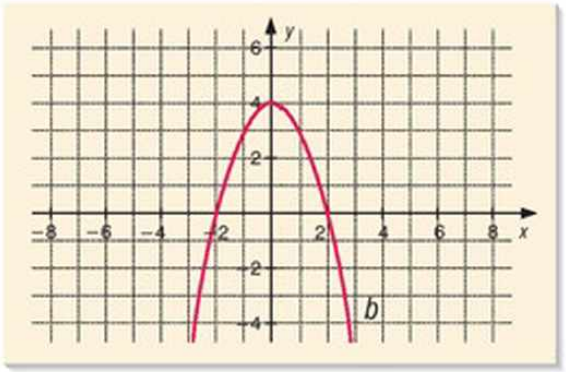
Feladatok

1. Jellemezzük az alábbi, grafikonjukkal adott függvényeket!

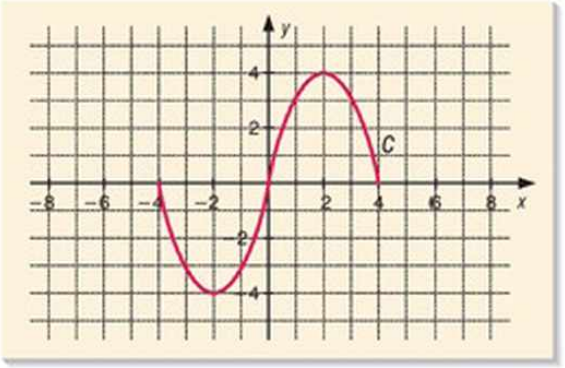
a: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

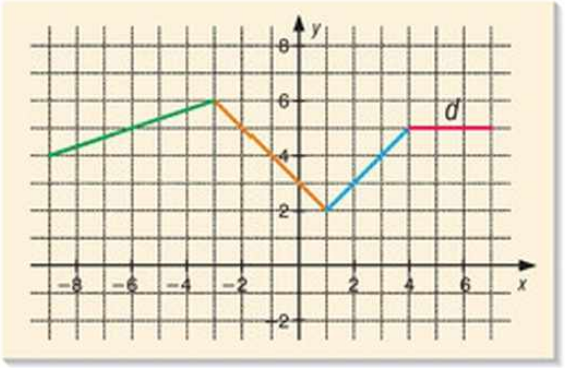


b: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



c: $\{-4 \le x \le 4;\ x \text{ valós szám}\} \to \mathbb{R}$ $\quad$ d: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$





2. Ábrázoljuk külön koordináta-rendszerben, majd jellemezzük a következő függvényeket!

f: {minden olyan x valós szám, amelyre $0 \le x \le 5$} $\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$;

g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$;

h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{2}$.

3. Rajzoljunk olyan függvényt,

a) amelynek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$, és maximuma a (3; 5) pontban van;

b) amelynek értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, szimmetrikus az origóra, és átmegy a (2; 2) ponton;

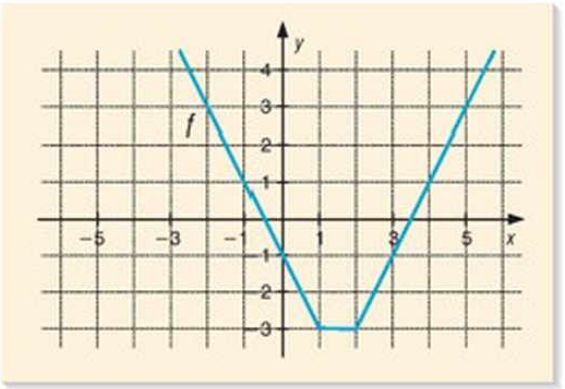
c) amely 0-nál kisebb számokra növekvő, 0-nál nagyobbakra csökkenő, és szimmetrikus az y tengelyre;

d) amelynek értékkészlete az {1; 2; 3} halmaz!

***4.** Ábrázoljuk a következő függvényeket, majd jellemezzük őket!

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -2x + 1, \text{ ha } x \le 1; \\ x - 2, \text{ ha } 1 < x. \end{cases} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} -x - 3, \text{ ha } x < 0; \\ x - 3, \text{ ha } 0 \le x \le 2; \\ 1, \text{ ha } 2 < x. \end{cases}$$

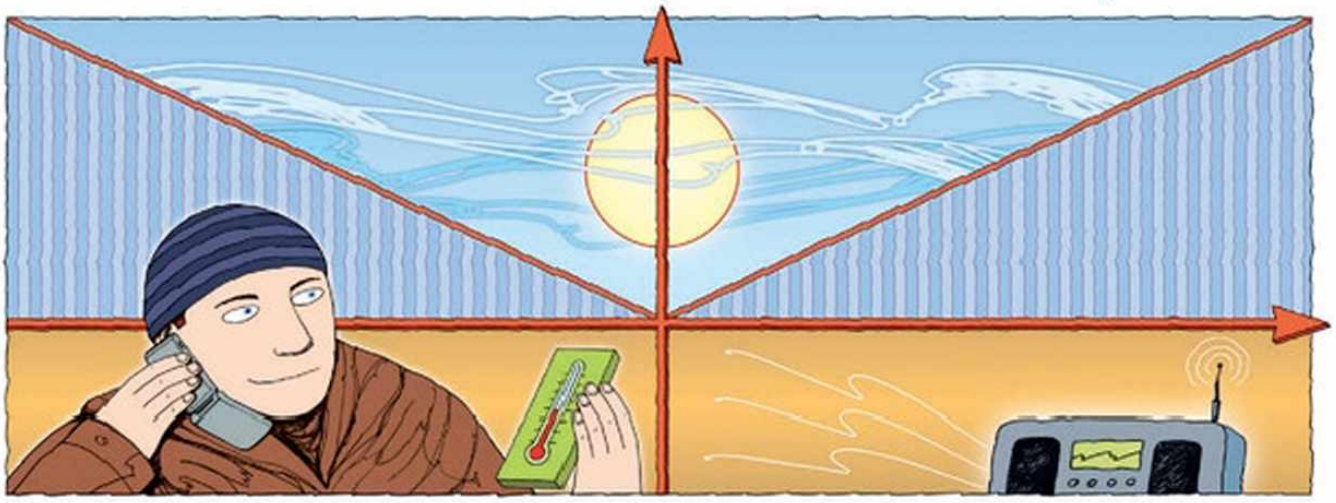
***5.** Adjuk meg annak a függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja az ábrán látható! (➡)



Rejtvény

Létezik-e olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a valós számok halmaza, szimmetrikus az y tengelyre és az origóra is?

3. Az abszolútérték-függvény



1. példa

A Rettentő Rádió nevű rádióállomás egy februári napon a következő telefonos játékot ajánlja a hallgatóknak: ha az adásba kerülő betelefonáló helyesen tippeli meg a másnapi legmagasabb hőmérsékletet, akkor annyi gramm aranyat kap ajándékba, ahány °C hőmérsékletet tippelt. Természetesen ez független a hőmérséklet előjelétől (vagyis −8,2 °C esetén is 8,2 g arany jár a nyertesnek.)

Ábrázoljuk a nyeremény tömegét a hőmérséklet függvényében!

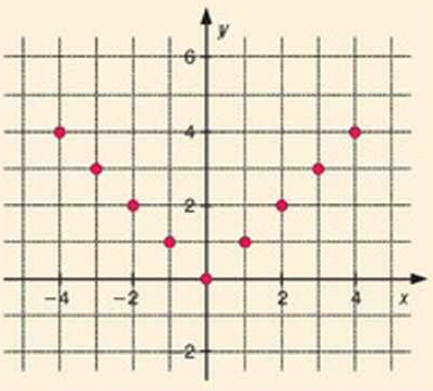


Megoldás

Készítsünk értéktáblázatot!

x	Hőmérséklet (°C)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	A nyert arany (gramm)	4	3	2	1	0	1	2	3	4

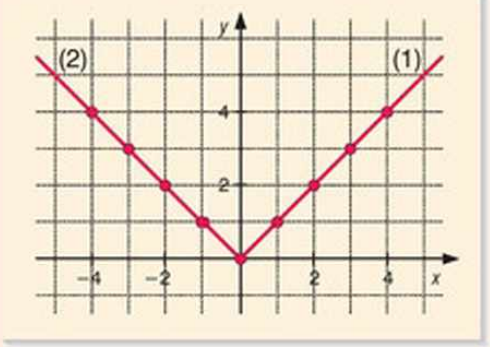
Ábrázoljuk a kapott pontokat!



A pontokat összeköthetjük, mivel a hőmérséklet nem feltétlenül egész szám. (Bár általában egészre kerekítve adják meg.)



Hasonlítsuk össze a hőmérséklet és a nyert arany tömegének mérőszámát!



- Ha a hőmérséklet nemnegatív, akkor a mérőszámok megegyeznek.

  Ekkor az x tengely bármely értékéhez önmagát rendeljük hozzá.

  A függvény az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ lineáris függvény, melynek képe az origóból kiinduló (1) félegyenes.

- Ha a hőmérséklet negatív, akkor a nyert arany tömegének mérőszáma a hőmérséklet mérőszámának -1-szerese (ellentettje).

  Ekkor az x tengely bármely értékéhez annak ellentettjét rendeljük hozzá.

  A függvény az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$ lineáris függvény, melynek képe az origóból kiinduló (2) félegyenes.

A példában a hőmérséklethez az abszolút értékét rendeltük hozzá.

Egy a valós szám abszolút értéke

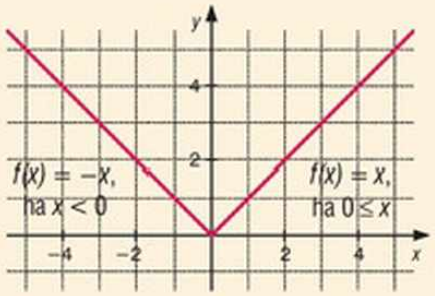
$$|a| = \begin{cases} a, \text{ ha } a \geq 0, \\ -a, \text{ ha } a < 0. \end{cases}$$

DEFINÍCIÓ: Az abszolútérték-függvény a valós számokon van értelmezve. Bármely nemnegatív számhoz magát a számot rendeli: $f(x) = x$, bármely negatív számhoz pedig a szám ellentettjét: $f(x) = -x$.

Jelekkel:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0; \\ -x, \text{ ha } x < 0. \end{cases}$$

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ **abszolútérték-függvény** grafikonja:



Jellemzői:

- **értékkészlete:** a nemnegatív valós számok halmaza;
- **tengelymetszetei:** az y tengelyt az $y = 0$-nál metszi;
  zérushelye $x = 0$;
- **menete:** ha $x < 0$, a függvény csökken, ha $0 \leq x$, a függvény növekszik;
- **szélsőértékek:** minimuma van az $x = 0$-nál, a minimum értéke $f(0) = 0$. Maximuma nincs.

2. példa

a) Ábrázoljuk értéktáblázat segítségével közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket!

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|;$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x| + 3;$$
$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x| - 4.$$

b) Hasonlítsuk össze az egyes függvények jellemzőit!

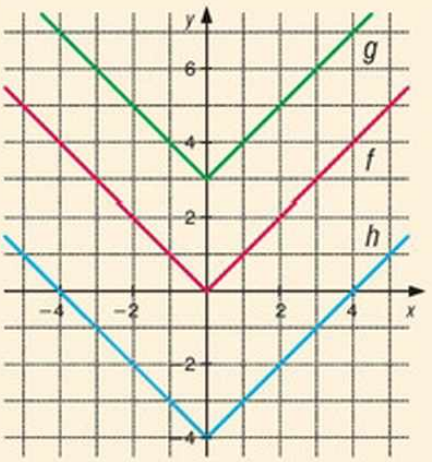
Megoldás

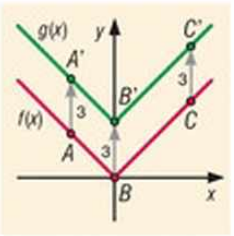
a) Készítsünk közös értéktáblázatot!

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\lvert x\rvert$	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
$\lvert x\rvert + 3$	8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8
$\lvert x\rvert - 4$	1	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	0	1

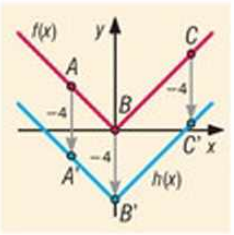
(+3, −4)

Ha a három függvény grafikonját közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk, észrevehetjük, hogy az f függvény grafikonjához képest a g függvény grafikonját 3 egységgel pozitív irányba, a h függvény grafikonját 4 egységgel negatív irányba toltuk el az y tengely mentén.





Minden függvényérték 3-mal nő



Minden függvényérték 4-gyel csökken

b) A jellemzők összehasonlítása:

Jellemzői	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
1. Értékkészlete	nemnegatív valós számok $f(x) \geq 0$	3-nál nem kisebb valós számok $g(x) \geq 3$	-4-nél nem kisebb valós számok $g(x) \geq -4$
2. Tengelymetszetei zérushelye: az y tengelyt metszi:	$x = 0$ $y = 0$-nál	nincs $y = 3$-nál	$x = -4$ és $x = 4$ $y = -4$-nél
3. Menete	Ha $x < 0$, akkor csökken, ha $x \geq 0$, akkor növekszik.		
4. Szélsőértéke minimuma: maximuma:	$x = 0$-nál $y = 0$ nincs	$x = 0$-nál $y = 3$ nincs	$x = 0$-nál $y = -4$ nincs

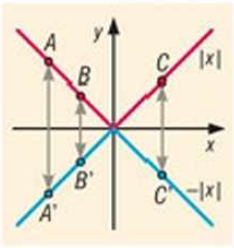
3. példa

a) Ábrázoljuk az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ és a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -|x|$ függvények grafikonját közös koordináta-rendszerben!

b) Jellemezzük a $g(x)$ függvényt!

Megoldás

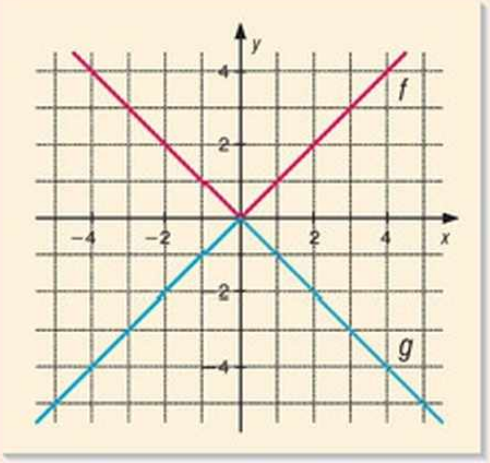
A -1-gyel való szorzás miatt a grafikont az x tengelyre tükröztük.



a) $g(x) = -|x| = \begin{cases} -x, & \text{ha } x \geq 0; \\ x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

Figyeljük meg az azonos x-ekhez tartozó függvényértékeket!

x	-3	-1	0	1	3
$\lvert x\rvert$	3	1	0	1	3
$-\lvert x\rvert$	-3	-1	0	-1	-3



Minden x helyen a $g(x)$ az $f(x)$-nek a (-1)-szerese. A $g(x)$ függvény grafikonja az $f(x)$ grafikonjának az x tengelyre vonatkozó tükörképe.

b) A $g(x)$ függvény jellemzői:

- **értékkészlete:** a nempozitív valós számok halmaza, $g(x) \leq 0$;
- **tengelymetszete:** zérushelye $x = 0$-nál van, az y tengelyt a 0-nál metszi;
- **menete:** ha $x < 0$, akkor növekvő, ha $x \geq 0$, akkor csökkenő;
- **szélsőértéke:** maximuma van $x = 0$-nál, a maximum értéke $y = 0$. Minimuma nincs.

4. példa

a) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$;

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x - 3|$ és

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x + 5|$ függvények grafikonját!

b) Hasonlítsuk össze a függvények jellemzőit!

Megoldás

a) Készítsünk közös értéktáblázatot az adott függvényekhez!

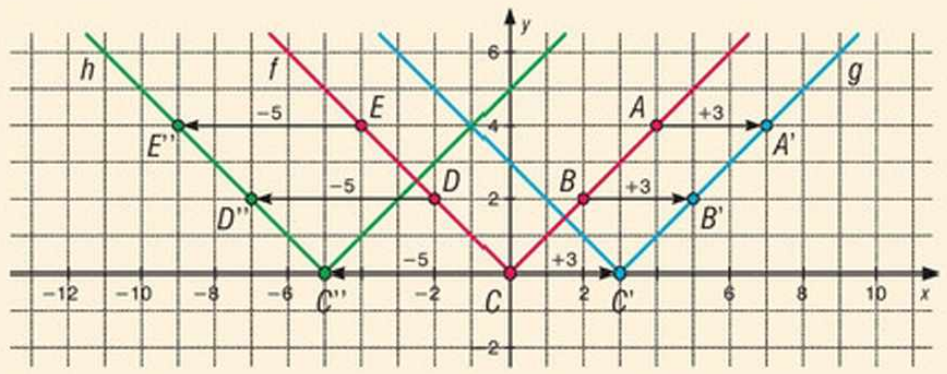
x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\lvert x\rvert$	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\lvert x-3\rvert$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
$\lvert x+5\rvert$	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$g(x) = |x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{ha } 3 \leq x, \\ -x + 3, & \text{ha } x < 3. \end{cases}$

$h(x) = |x + 5| = \begin{cases} x + 5, & \text{ha } -5 \leq x, \\ -x - 5, & \text{ha } x < -5. \end{cases}$

A táblázat értékeinek megválasztásához figyeljük meg, hogy hol lesz 0 az a kifejezés, amelynek az abszolút értékét vesszük!

Mivel $|x-3|$ az $x=3$-nál 0, $|x+5|$ az $x=-5$-nél 0, ezért a 3 és a -5 környékéről célszerű az értéktáblázat x értékeit választani.

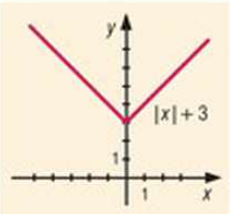


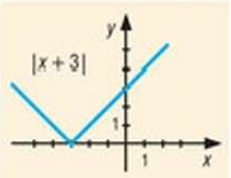
A három függvény grafikonját egy koordináta-rendszerben ábrázolva észrevehetjük, hogy az $|x|$-hez képest az $|x-3|$ grafikonja 3 egységgel pozitív irányba, az $|x+5|$ grafikonja pedig 5 egységgel negatív irányba tolódott az x tengely mentén.

A jellemzők összehasonlítása:

Jellemzői	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
1. Értékkészlete	A nemnegatív valós számok. $f(x) \geq 0$	$g(x) \geq 0$	$h(x) \geq 0$
2. Tengelymetszetei zérushelye: az y tengelyt metszi:	$x=0$ $y=0$-nál	$x=3$ $y=3$-nál	$x=-5$ $y=5$-nél
3. Menete	csökken, ha $x<0$, növekszik, ha $x \geq 0$	csökken, ha $x<3$, növekszik, ha $x \geq 3$	csökken, ha $x<-5$, növekszik, ha $x \geq -5$
4. Szélsőértéke minimuma: maximuma:	$x=0$-nál $y=0$ nincs	$x=3$-nál $y=0$ nincs	$x=-5$-nél $y=0$ nincs

Hasonlítsuk össze a két függvény hozzárendelési szabályát és grafikonját!





Feladatok

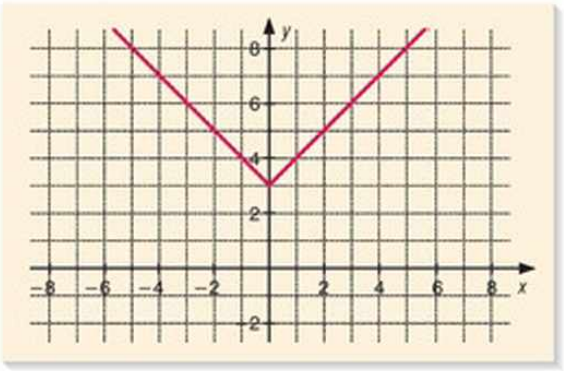
1. Ábrázoljuk a következő függvényeket közös koordináta-rendszerben! (Ha szükséges, akkor készítsünk értéktáblázatot!)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$; $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|+2$;

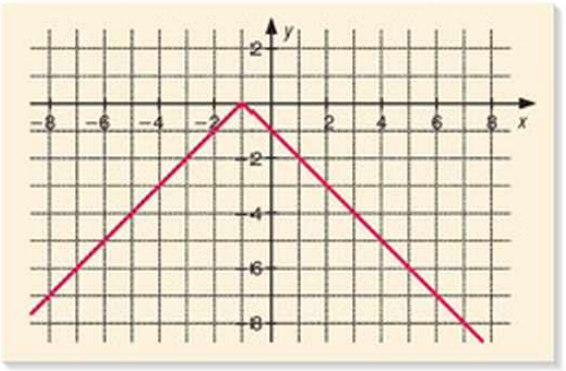
$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|-4$; $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|+1{,}5$.

2. Írjuk fel a grafikonjukkal adott függvények hozzárendelési szabályát!

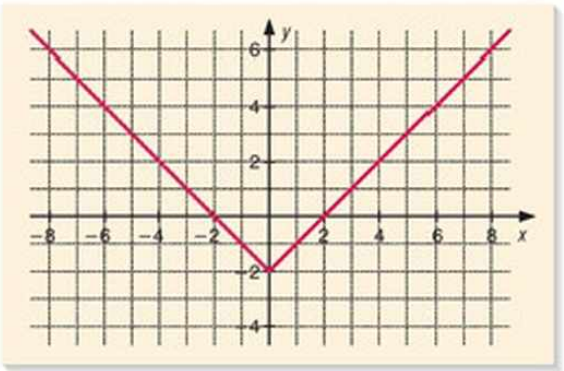
a)



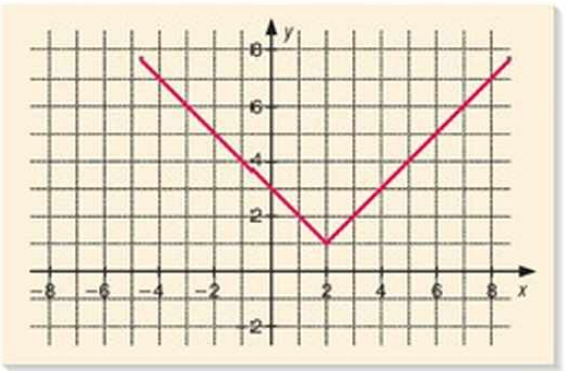
b)



c)



**d)*

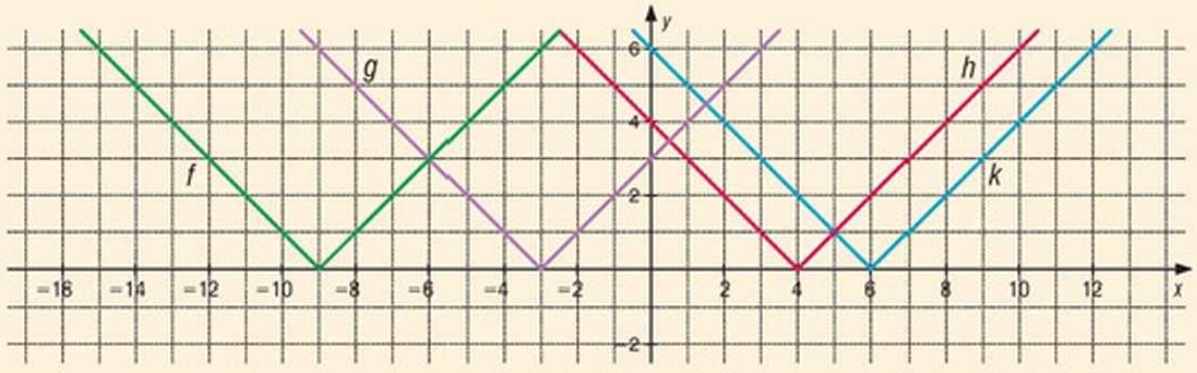


3. Ábrázoljuk értéktáblázat segítségével, majd jellemezzük az alábbi függvényeket!

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x-1|$; $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x+2|$;

$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x+4|$; $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x-1{,}5|$.

4. Milyen hozzárendelési szabály tartozik az ábrán látható grafikonokhoz?



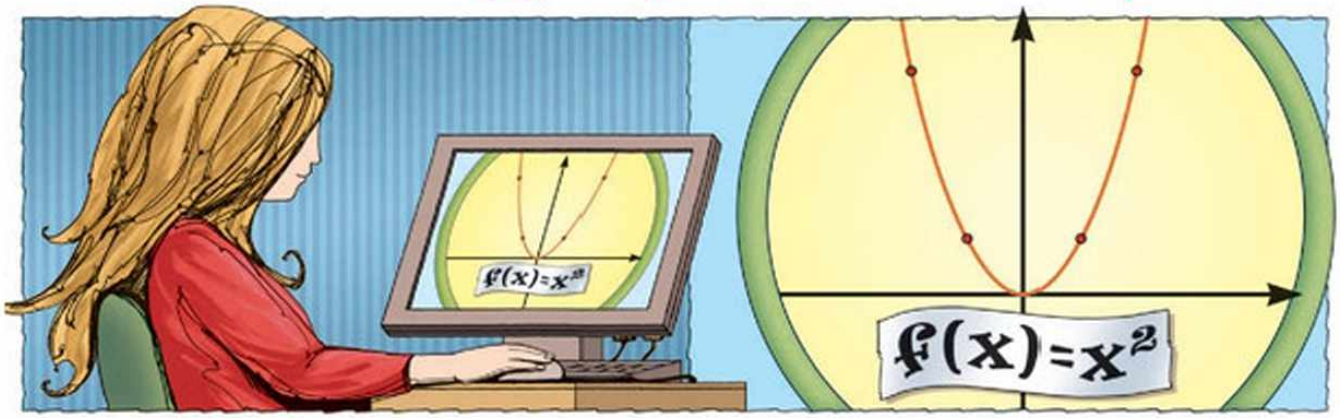
***5.** Készítsünk értéktáblázatot, és ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|-3$ és a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \big||x|-3\big|$ függvényt!

Rejtvény

Hol veszi fel az $f(x) = |x-2| + |x+4|$ függvény a -6 értéket?

4. Másodfokú függvények



1. példa

Viki a számítógépén olyan programot talált, amely függvényeket alkot. A gép a tetszőlegesen választott helyeken kiszámítja a függvényértéket, és ábrázolja a pontokat a koordináta-rendszerben. Viki az $f(x) = x^2$ függvényt választotta. Milyen grafikont rajzolt a gép, ha Viki az x értékeket -3-tól $+3$-ig

a) az egész helyeken;
b) 0,5-del változtatva;
c) 0,1-del változtatva adja meg?

Megoldás

A gép az $f(x) = x^2$ szabály alapján számol.

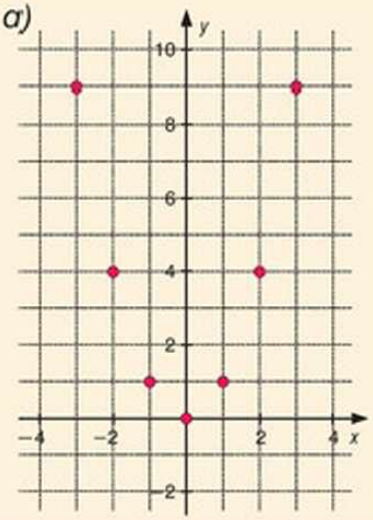
Például, ha $x = -3$, akkor $f(-3) = (-3)^2 = 9$.

Az *a)* esetben a pontok koordinátáit az alábbi táblázat mutatja:

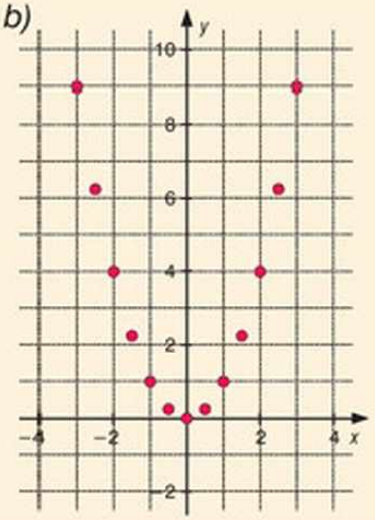
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

A *b)* és *c)* esetben hasonló táblázat készíthető. A kapott grafikonok:

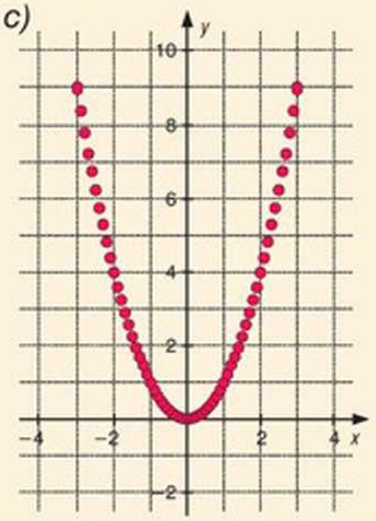
a)



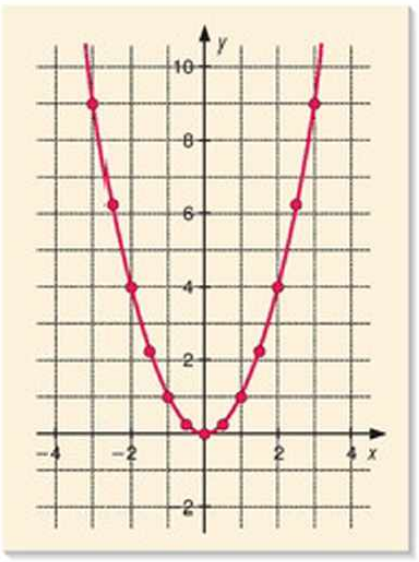
b)



c)



Az előző példában láthattuk, hogy minél sűrűbben vesszük fel a pontokat, annál jobban kirajzolódik egy görbe. Ez a görbe az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja.



Az ábrázolt függvény **másodfokú függvény,** mert az x változó a második hatványon szerepel benne. A másodfokú függvény grafikonja **parabola.**

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ másodfokú függvény jellemzői:



- **értékkészlete:** a nemnegatív számok halmaza;
- **tengelymetszetei:** zérushelye $x = 0$, az y tengelyt az $y = 0$-nál metszi;
- **menete:** ha $x < 0$, akkor csökken, ha $x \geq 0$, akkor növekszik;
- **szélsőértéke:** minimuma van $x = 0$-nál, értéke $y = 0$. Maximuma nincs.

2. példa

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett

a) $f(x) = x^2$ és $g(x) = x^2 + 4$;

b) $f(x) = x^2$ és $h(x) = x^2 - 2$ függvényeket!

Megoldás

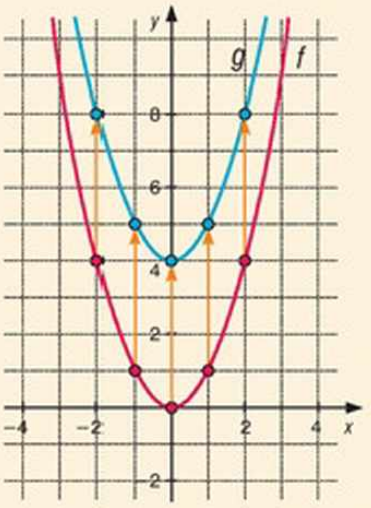
Készítsünk a három függvényhez egy értéktáblázatot!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$x^2 + 4$	13	8	5	4	5	8	13
$x^2 - 2$	7	2	−1	−2	−1	2	7

+4

−2

Mivel mindhárom függvény másodfokú, három parabolát kapunk.

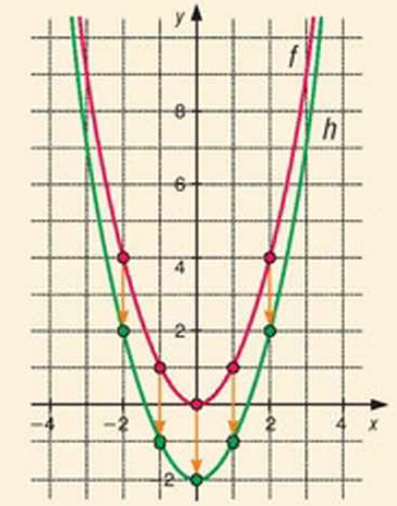


a) A fenti értéktáblázatból látható, hogy a $g(x) = x^2 + 4$ függvényértéket úgy kapjuk, hogy minden azonos helyen vett $f(x) = x^2$ értékhez 4-et adunk.

Ezért a $g(x)$ függvény grafikonját úgy kaphatjuk az $f(x)$ függvény grafikonjából, hogy annak minden pontját az y tengely mentén pozitív irányba 4 egységgel eltoljuk.

b) A $h(x) = x^2 - 2$ függvényértéket úgy kapjuk, hogy minden azonos helyen vett $f(x) = x^2$ értékből 2-t kivonunk.

Így a $h(x)$ függvény grafikonját úgy kaphatjuk az $f(x)$ függvény grafikonjából, hogy annak minden pontját az y tengely mentén negatív irányba 2 egységgel eltoljuk.



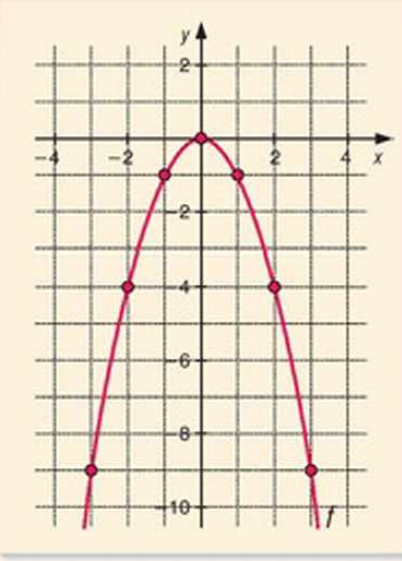
3. példa

A grafikonnal adott másodfokú függvényhez

a) készítsünk értéktáblázatot;

b) írjuk fel a hozzárendelési szabályt;

c) jellemezzük a függvényt!



Megoldás

a) A grafikonról leolvashatjuk az összetartozó értékpárokat:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9

b) A táblázat alapján megállapíthatjuk, hogy a függvény minden számhoz a négyzetének az ellentettjét rendeli hozzá.

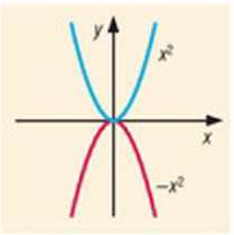
Így a **hozzárendelési szabály:**

$$f(x) = -x^2.$$

c) A függvény jellemzői:

- **értelmezési tartománya** a valós számok halmaza: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- **értékkészlete** a nempozitív számok halmaza;
- **tengelymetszetei:** zérushelye az $x = 0$-nál van, az y tengelyt az $y = 0$-nál metszi;
- **menete:** ha $x < 0$, akkor növekszik, ha $x \geq 0$, akkor csökken;
- **szélsőértéke:** maximuma van $x = 0$-nál, értéke $y = 0$. Minimuma nincs.

Tervezzünk legalább 2,5 m magas, parabola alakú kaput! Rajzoljuk le a tervet a koordinátarendszerbe!



Az x^2 grafikonjának a $-x^2$ grafikonja az x tengelyre vonatkozó tükörképe

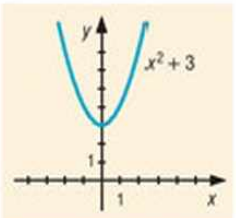
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto -x^2$

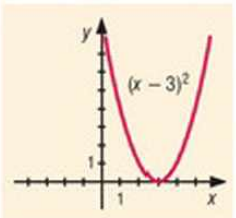
4. példa

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket közös koordináta-rendszerben!

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$; $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-3)^2$; $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x+4)^2$

Hasonlítsuk össze a két függvény hozzárendelési szabályát és grafikonját!





Megoldás

A függvények értéktáblázatában azokat az x értékeket célszerű választani, ahol a függvények a 0; 1; 4; 9 értékeket veszik fel.

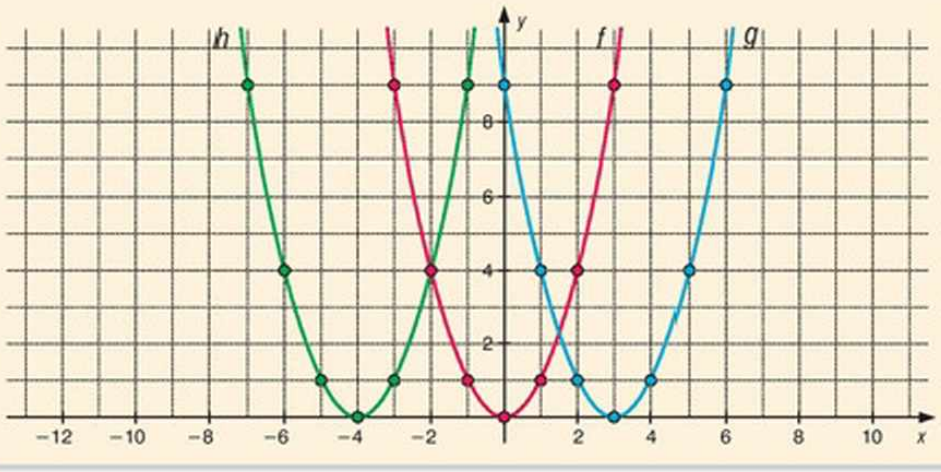
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

x	0	1	2	3	4	5	6
$(x-3)^2$	9	4	1	0	1	4	9

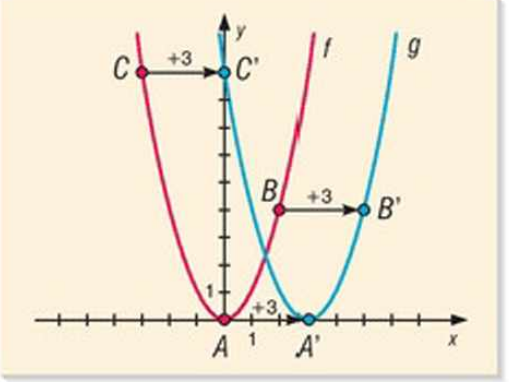
x	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1
$(x+4)^2$	9	4	1	0	1	4	9

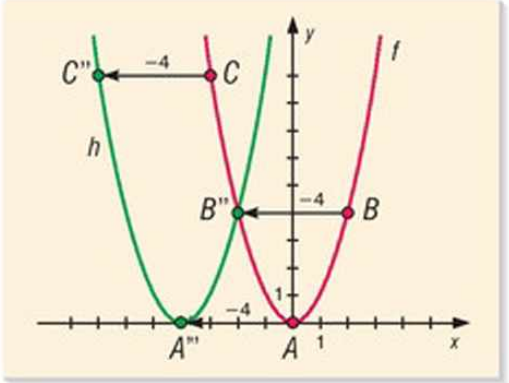
Az értéktáblázatok segítségével ábrázolhatjuk a függvényeket.

Jellemezzük a függvényeket!



A három függvény grafikonját egy koordináta-rendszerben ábrázolva észrevehetjük, hogy az x^2-hez képest az $(x-3)^2$ grafikonja 3 egységgel pozitív irányba, az $(x+4)^2$ grafikonja pedig 4 egységgel negatív irányba tolódott az x-tengely mentén.





Feladatok

1. Az alábbi függvények közül melyek grafikonja parabola?

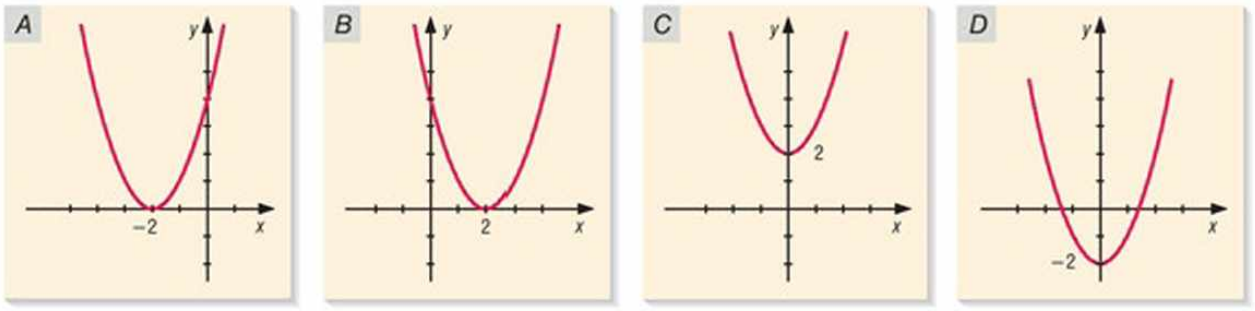
$f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = 4 - x^2$; $h(x) = x - 2$; $i(x) = |x| + 2$;
$j(x) = 3x - 2$; $k(x) = (x + 3)^2$.

2. Ábrázoljuk a következő másodfokú függvényeket közös koordináta-rendszerben!

a) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = x^2 - 3$; $h(x) = 5 + x^2$;
b) $f(x) = (x - 1)^2$; $g(x) = (x + 3)^2$; $h(x) = (x + 2)^2$;
**c)* $f(x) = -x^2 + 2$; $g(x) = -x^2 - 5$; $h(x) = 3 - x^2$.

3. Melyik másodfokú függvénynek melyik parabola a képe?

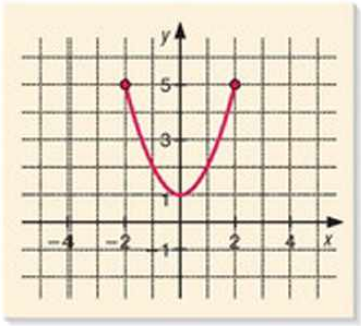
$f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = (x - 2)^2$; $h(x) = x^2 - 2$; $k(x) = (x + 2)^2$.



4. Az alábbi, hozzárendelési szabállyal adott másodfokú függvények közül válasszuk ki azokat, amelyeknek *a)* nincs minimuma; *b)* nincs maximuma! Választásunkat indokoljuk!

$f(x) = -x^2$; $g(x) = x^2 - 6$; $h(x) = 6 - x^2$; $i(x) = x^2 + 4$.

5. Az autók fényszórói gyakran parabola alakúak. (Ennek oka az, hogy a parabola alakú tükörről minden fénysugár párhuzamosan verődik vissza, és így elkerülhető, hogy nagyon „szórja" a fényt a fényszóró.) Egy busz fényszórójának terve látható a jobb oldali ábrán. Adjuk meg azt a másodfokú függvényt, amelynek ez a grafikonja! (Figyeljünk az értelmezési tartományra!) (➡)



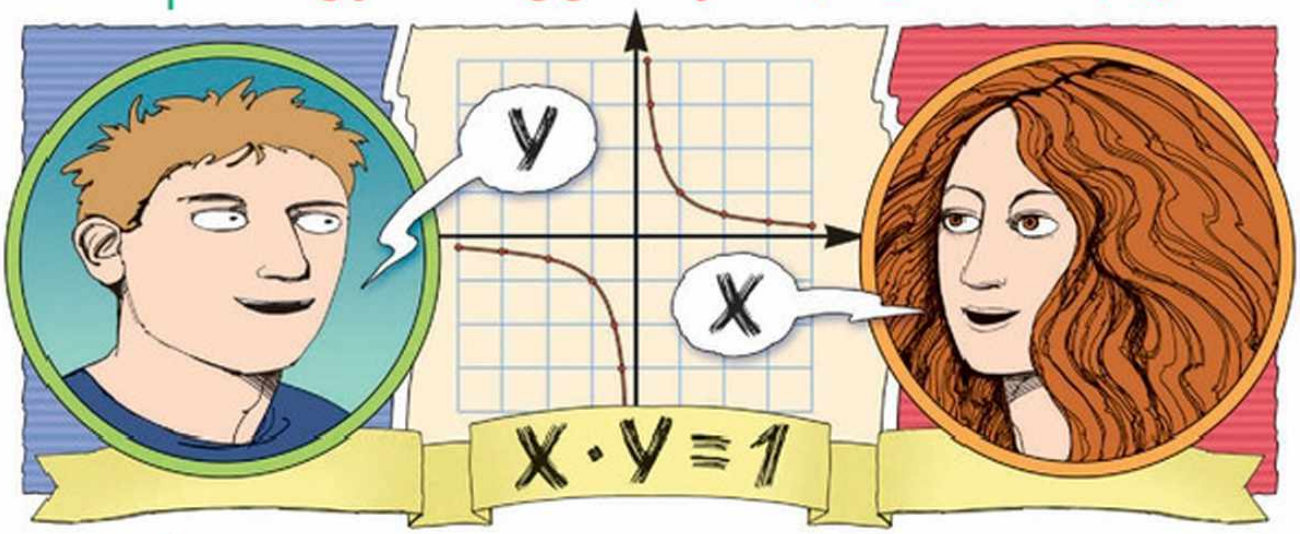
Rejtvény

A St. Louisban található Gateway Arch majdnem parabola alakú. Ha parabolaként tekintjük, és a magasságát az egyik „lábától" számított távolság függvényében írjuk fel, akkor ez az $f(x) = -0{,}02x^2 + 4x$.

Ábrázoljuk $f(x)$ megfelelő méretarányos grafikonját, azaz rajzoljuk meg a Gateway Arch-ot! Határozzuk meg, milyen magas, és milyen messze van a két lába egymástól!



5. Egyéb függvények (kiegészítő anyag)



1. példa

Julcsi és Lajcsi a következő játékot játsszák: Julcsi mond egy valós számot, Lajcsinak ezután olyan számot kell mondania, hogy a két kimondott szám szorzata 1 legyen.

a) A táblázatban a játék néhány fordulójában mondott számok szerepelnek. Egészítsük ki a táblázatot a hiányzó számokkal!

Julcsi	-3	-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1		3
Lajcsi	$-\frac{1}{3}$		-1		-3		2		$\frac{1}{2}$	

b) Van-e olyan szám, amelyre Lajcsi nem tud mit mondani?

c) Írjuk fel a Lajcsi által mondott számot a Julcsi által mondott szám függvényében!

d) Ábrázoljuk ezt a függvényt értéktáblázat segítségével!

Két szám egymásnak reciproka, ha a szorzatuk 1.

Megoldás

a) Jelöljük Julcsi számát x-szel, Lajcsiét y-nal. Ekkor

$$x \cdot y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}.$$

Julcsi	x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
Lajcsi	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

0-nak nincs reciproka. Bármely 0-tól különböző számnak van reciproka.

b) Ha Julcsi 0-t mond, Lajcsi nem tud semmit mondani, hiszen 0-t bármely valós számmal megszorozva 0-t kapunk, 1-et sosem. Julcsi bármely tetszőleges, 0-tól különböző számot mondhatja, Lajcsi mindig tud válaszolni a szám reciprokával.



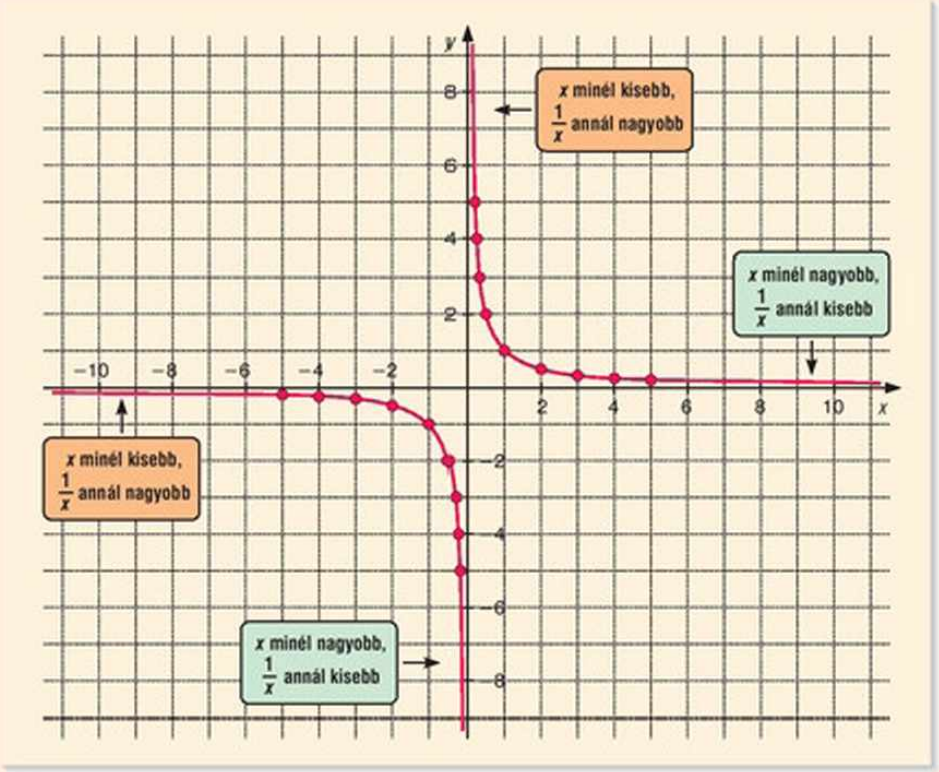
c) Ha Julcsi száma x, Lajcsi száma $\frac{1}{x}$ (azaz x reciproka), ezt f-fel jelölve a következő függvényt írhatjuk fel:

$$f\colon \{0\text{-tól különböző valós számok}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}.$$

d) A kapott pontokat ábrázolva megfigyelhetjük, hogy ha nagyon kis pozitív (vagy 0-hoz nagyon közeli negatív) x-et választunk, akkor a reciproka, $\frac{1}{x}$, nagyon nagy abszolút értékű szám lesz, így a grafikon egyre közelebb fog kerülni az y tengelyhez, de nem éri el azt (mert 0 nincs az értelmezési tartományban).

Ha nagy pozitív x-et (vagy nagy abszolút értékű negatív x-et) választunk, akkor $\frac{1}{x}$ nagyon kicsi abszolút értékű szám, azaz a grafikon az x tengelyhez kerül egyre közelebb (viszont azt sem éri el, hiszen egyetlen szám reciproka sem 0).

Pozitív szám reciproka pozitív, negatív szám reciproka negatív szám.



Az $f\colon \{0\text{-tól különböző valós számok}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény grafikonja **hiperbola.**

A függvény jellemzői:

- **értékkészlete:** a 0-tól különböző valós számok halmaza;
- **tengelymetszetei:** nem metszi egyik tengelyt sem;
- **menete:** a függvény akkor is csökken, ha $x < 0$, és akkor is, ha $x > 0$;
- **szélsőértékei:** nincsen sem maximuma, sem minimuma.

A függvénynek az $x = 0$-nál szakadási helye van.

2. példa

Koordináta-rendszerben ábrázoltuk az

f: {0-tól különböző valós számok} $\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvényt.

a) Rajzoljuk be ugyanebbe a koordináta-rendszerbe a

g: {0-tól különböző valós számok} $\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{x}$ függvényt is!

b) Írjuk le a g függvény jellemzőit!

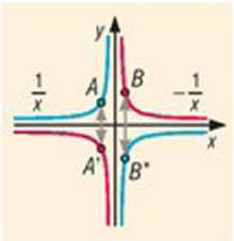
Megoldás

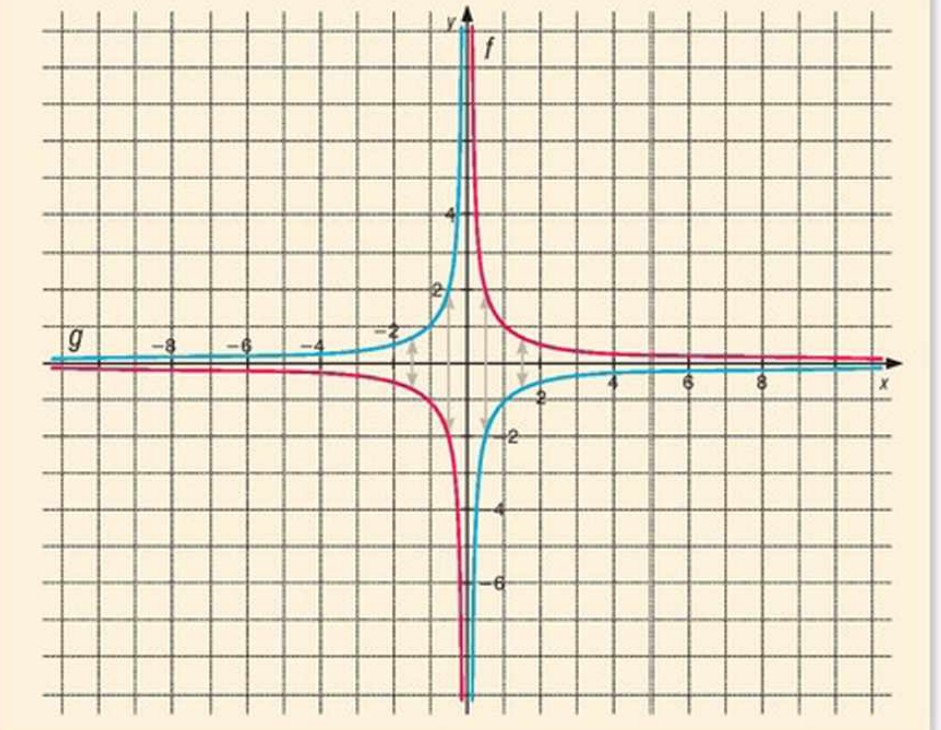
a) Az $f(x) = \frac{1}{x}$ és a $g(x) = -\frac{1}{x}$ függvény értelmezési tartománya azonos.

A g függvény az f függvény (-1)-szerese, ami azt jelenti, hogy a g függvény értékei az f függvény értékeinek ellentettjei.

A g függvény képe az f függvény grafikonjának x tengelyre való tükrözésével keletkezik.

A –1-gyel való szorzás miatt a grafikont az x tengelyre tükröztük.





b) A g: {0-tól különböző valós számok} $\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{x}$ függvény grafikonja **hiperbola.**

A függvény jellemzői:

- **értékkészlete:** a 0-tól különböző valós számok halmaza;
- **tengelymetszetei:** nem metszi egyik tengelyt sem;
- **menete:** a függvény mindkét ágán nő;
- **szélsőértékei:** nincsen sem maximuma, sem minimuma.

A függvénynek az $x = 0$-nál szakadási helye van.



3. példa



Egy újfajta ásványvíz bevezetési akciója során 3 üveg kupakjáért egy poharat adnak ajándékba.

a) Hány poharat kapunk, ha a vásárolt ásványvizes üvegek száma: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15?

b) Ábrázoljuk a kapott poharak számát a vásárolt üvegek függvényében, ha az üvegek száma 0 és 15 közötti természetes szám!

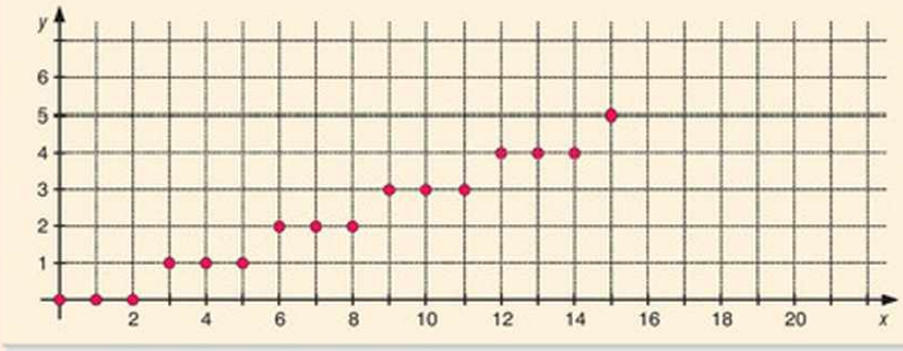
c) Hány poharunk lesz 29 üveg ásványvíz vásárlása után?

Megoldás

a) Írjuk értéktáblázatba az összetartozó értékeket!

Üvegek száma	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Poharak száma	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5

b) Az értéktáblázat alapján ábrázoljuk a poharak számát az üvegek számának függvényében!





Láthatjuk, hogy a függvény grafikonja lépcsőhöz hasonló képet mutat.

c) 3 kupakonként kapunk egy poharat.

$$29 : 3 = 9$$
$$2$$

Ezért a 29 kupakért 9 poharat kapunk, és marad 2 kupakunk.

Ha az üvegek (kupakok) száma n, akkor az ezekért kapható poharak száma az a legnagyobb egész szám, amely az $\frac{n}{3}$ hányadosnál nem nagyobb.

A példában szereplő függvény grafikonjáról látszik, hogy ez egy úgynevezett lépcsős függvény, amely több különböző értékhez ugyanazt az egész számot rendeli.

4. példa

Játsszuk el a játékot
az x^2 és x;
az x^2 és $\sqrt{x}$;
az x és $\frac{1}{x}$
kártyákkal is!

Réka és Tomi a következő játékot játsszák. Egyikük az x és $\sqrt{x}$ kártyák közül kihúzza az egyiket, az az övé, a másik kártya az ellenfélé. Ezután a másik játékos a

0, $0{,}25$, $0{,}81$, 1, $1{,}44$, 2, 3, 4, $6{,}25$, 9

számkártyák közül húz egyet. Mindketten behelyettesítik a kártyájukon levő kifejezésbe a kihúzott számot. Az győz, aki nagyobb értéket kap. Ha a két érték egyforma, döntetlen.

Az első húzásnál Réka az x, Tomi a $\sqrt{x}$ kártyát kapta

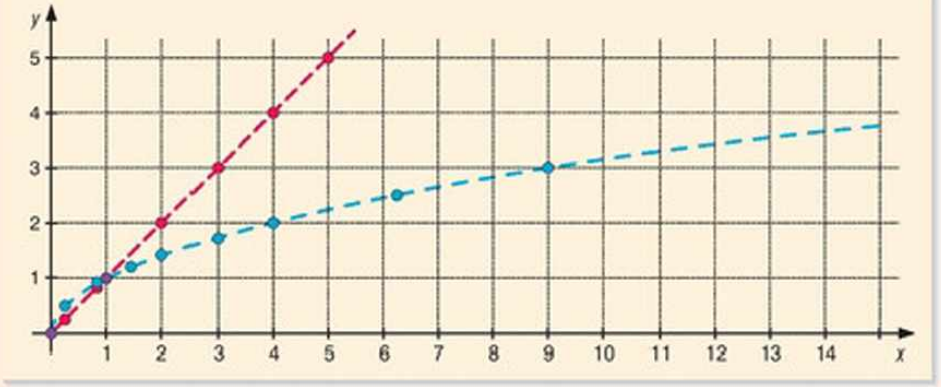
a) Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a megfelelő színnel, hogy az egyes számkártyák esetén a kifejezések milyen értéket vesznek fel, és állapítsuk meg, hogy mikor ki nyer!

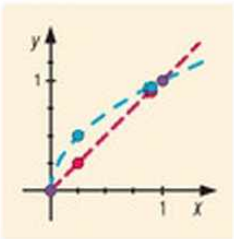
b) Melyiküknek nagyobb a nyerési esélye, ha a 10 számkártyából egyet húznak?

Megoldás

a) Készítsünk értéktáblázatot és ábrázoljuk a kapott pontokat!

Kártya	0	0,25	0,81	1	1,44	2	3	4	6,25	9
x	0	0,25	0,81	1	1,44	2	3	4	6,25	9
$\sqrt{x}$	0	0,5	0,9	1	1,2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	2,5	3





Réka pontjai egy egyenesre, Tomié egy görbére illeszkednek. Az nyer, akinek a grafikonja adott helyen nagyobb értéket vesz fel.

A 0 és 1 esetén a két érték egyenlő: döntetlen lesz.

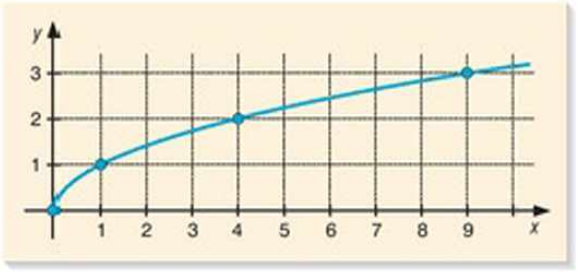
A 0 és 1 között a $\sqrt{x}$ értékek a nagyobbak: Tomi nyer.

Az 1-nél nagyobb számokra az x értékek a nagyobbak: Réka nyer.

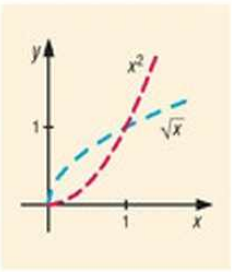
Annak a valószínűsége, hogy
Réka nyer: $\frac{6}{10}$;
Tomi nyer: $\frac{2}{10}$;
döntetlen: $\frac{2}{10}$.

b) A 10 számkártya mindegyikét ugyanakkora eséllyel húzzák. Mivel 6 kártyán szerepel 1-nél nagyobb szám, és csak 2 kártyán 0 és 1 közé eső szám, ezért Rékának nagyobb a nyerési esélye.

A 4. példában szereplő hozzárendelést függvényként is felírhatjuk.



Ha egy nemnegatív valós számhoz hozzárendeljük a négyzetgyökét, akkor a **négyzetgyökfüggvényt** kapjuk.



Jelekkel:

f: {nemnegatív valós számok} $\rightarrow$ {nemnegatív valós számok}, $x \mapsto \sqrt{x}$.

Feladatok

1. Egy 2 kg tömegű csokoládétortát x egyforma szeletre vágunk (x pozitív egész szám).
   a) Ábrázoljuk egy tortaszelet tömegét a szeletek számának függvényében!
   b) Írjuk fel a hozzárendelési szabályt, és állapítsuk meg, hogy milyen görbére illeszkednek az ábrázolt pontok!

*2. A fényvédő krémek faktorszáma azt jelenti, hogy a k faktorszámú krém a káros sugárzás k-ad részét engedi át. A bőrünk adott sugárzásmennyiséget képes károsodás nélkül elviselni. Például egy nyári napon délelőtt 10 percet tartózkodhatunk a napon leégés nélkül.
   a) Milyen arányosság van a fényvédő krém faktorszáma és a bőrt érő sugárzásmennyiség között, ha használjuk a krémet?
   b) Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a fényvédő krém faktorszámának függvényében a veszélytelen napozási időt, ha ezen a nyári napon délelőtt használjuk a fényvédő krémet!

*3. A benzinkúton egy akció keretében a megvásárolt benzinhez 10 literenként adnak egy kupont, amit a büfében lehet beváltani.
   Ábrázoljuk a kapott kuponok számát a megvásárolt benzin mennyiségének függvényében, ha nem veszünk 100 liternél több benzint!

*4. Írjuk fel és ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben azokat a függvényeket, amelyek a pozitív valós számokon vannak értelmezve, és hozzárendelési szabályuk:
   f: a négyzet oldalának hosszához rendeljük hozzá a négyzet területét;
   g: a négyzet területéhez rendeljük hozzá a négyzet oldalának hosszát;
   h: a négyzet oldalának hosszához rendeljük hozzá a négyzet átlójának hosszát!

Rejtvény

Készítsük el az $\left|\frac{1}{x}\right|$ függvény grafikonját!

6. Sorozatok, számtani sorozat



1. példa

Egy nemzetközi maratoni táncversenyen az utolsónak bennmaradt hat párt jutalmazzák. Amelyik pár a hat közül először feladja a versenyt, 100 eurót, a következő 200 eurót kap. A továbbiak rendre 400; 700; 1100; 1600 eurót kapnak.

a) Milyen szabály szerint jutalmazzák a versenyzőket?
b) Mennyi a verseny összdíjazása?
c) Ha ugyanilyen szabály szerint 10 párt jutalmaznak, és az első kieső ekkor is 100 eurót kap, akkor mennyivel kell több pénz a díjazáshoz?

Megoldás

a) Írjuk fel a díjakat a kiesés sorrendjében!

díjak: 100 $\overset{+100}{\rightarrow}$ 200 $\overset{+200}{\rightarrow}$ 400 $\overset{+300}{\rightarrow}$ 700 $\overset{+400}{\rightarrow}$ 1100 $\overset{+500}{\rightarrow}$ 1600

Látjuk, hogy a kiosztott díjak különbsége mindig 100 euróval nő.

b) Adjuk össze a díjakat!

$$100 + 200 + 400 + 700 + 1100 + 1600 = 4100 \text{ (euró)}$$

Összesen 4100 eurót osztottak ki.

c) Tekinthetjük úgy, hogy a díjak egy sorozatot alkotnak, amelynek most 10 tagja lesz. Az első hat tag megegyezik az *a)* esetben felsorolt díjakkal. A következő négy tag az adott szabály szerint:

díjak: 1600 $\overset{+600}{\rightarrow}$ 2200 $\overset{+700}{\rightarrow}$ 2900 $\overset{+800}{\rightarrow}$ 3700 $\overset{+900}{\rightarrow}$ 4600

Ezek összegével kell most többet kifizetni, mint az előző esetben.

$$2200 + 2900 + 3700 + 4600 = 13\,400 \text{ (euró)}$$

10 pár jutalmazásakor 13 400 euróval kell több pénz a díjazáshoz.

2. példa

Egy sorozat tagjait úgy képezzük, hogy a harmadik tagtól kezdve minden tag az előző két tag szorzata. A sorozat harmadik és negyedik tagja $a_3 = 12$, $a_4 = 48$.

a) Mi lesz a sorozat 5. tagja?

b) Határozzuk meg a sorozat első tagját!

Megoldás

a) Az ötödik tag a harmadik és a negyedik tag szorzata, azaz

$$a_5 = a_3 \cdot a_4 = 12 \cdot 48 = 576.$$

... 12; 48; 576

b) Visszafelé gondolkodva kiszámolhatjuk az előző tagokat:

$$a_4 = a_3 \cdot a_2, \quad \text{ebből} \quad a_2 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{48}{12} = 4,$$

$$a_3 = a_2 \cdot a_1, \quad \text{ebből} \quad a_1 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{4} = 3.$$

A sorozat:
3; 4; 12; 48; 576

A sorozat első tagja tehát a 3.

3. példa

Egy társasjáték mezőire egész számokból álló sorozatot írtunk. A sorozat képzési szabálya a következő:

Ha egy mezőn

- páros szám áll, akkor a következő mezőre ennek a fele;
- páratlan szám áll, akkor a következő mezőre a háromszorosánál eggyel nagyobb szám kerül.

A második mezőre a 7-et írtuk.

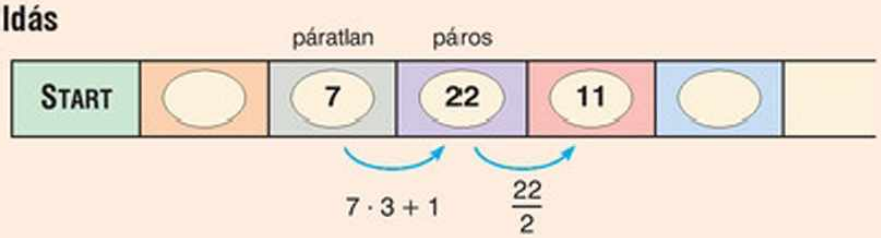
a) Határozzuk meg a harmadik és a negyedik mezőn álló számokat!

b) Mi állhat a játék első mezőjén?

Játsszuk el a játékot úgy, hogy a 7 helyett más egész szám áll a második mezőn!

Megoldás

a)



A harmadik mezőn 22, a negyediken 11 áll.

b) Az első tagot visszafelé gondolkodva adhatjuk meg.

- Ha a_1 páros, akkor $\frac{a_1}{2} = 7 \Rightarrow a_1 = 14$.
- Ha a_1 páratlan, akkor $3 \cdot a_1 + 1 = 7 \Rightarrow a_1 = 2$.

Mivel a 2 nem páratlan, ezért ez nem megoldás.
Az első mezőn csak a 14 állhat.

Egy sorozat számtani sorozat, ha a második tagtól kezdve bármely tag és az őt megelőző tag különbsége állandó.

$$a_2 - a_1 = d$$
$$a_3 - a_2 = d$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} = d$$

4. példa

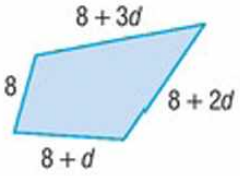
A Gondos család egy 50 m kerületű, négyszög alakú pihenőkertet alakít ki a telkén. Nyolcadikos fiuk megmérte a pihenőkert oldalait, és azt vette észre, hogy az oldalhosszak számtani sorozatot alkotnak. Mekkorák az oldalak, ha a legrövidebb oldal hossza 8 m?

Megoldás

Jelöljük a számtani sorozat különbségét d-vel, ekkor a hiányzó három oldal hossza: $8 + d$; $8 + 2d$ és $8 + 3d$!

A kerület, azaz az oldalak összege 50 m, így a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$8 + (8 + d) + (8 + 2d) + (8 + 3d) = 50$$
$$32 + 6d = 50 \quad / -32$$
$$6d = 18 \quad / : 6$$
$$d = 3$$



A számtani sorozat különbsége 3, így

$$8 + d = 11; \quad 8 + 2d = 14 \quad \text{és} \quad 8 + 3d = 17.$$

Ellenőrzés: $8 + 11 + 14 + 17 = 50$, tehát a megoldás helyes.

A pihenőkert oldalai: 8 m, 11 m, 14 m, 17 m.

5. példa

Egy kerékpáros augusztus 1-jén 41 km-t teker, majd minden nap az előző napinál 2 km-rel többet, egészen augusztus végéig.

a) Hány kilométert kerékpározott augusztus 31-én?
b) Hány kilométert kerékpározott összesen augusztus első 10 napján?
c) Hány kilométert kerékpározott összesen augusztusban?

Megoldás

Ha egy számtani sorozat első tagja a_1, különbsége d, akkor az n. tag $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

a) A kerékpáros által naponta megtett utak hossza számtani sorozatot alkot, mivel az egymást követő napokon megtett utak hosszának különbsége állandó, 2 km.

A sorozat első tagja 41, különbsége 2. A 31. tagot úgy kaphatjuk meg, hogy az első taghoz hozzáadjuk a különbséget 30-szor. Augusztus 31-én így $41 + 30 \cdot 2 = 101$ km-t tett meg.

b) Az első tíz napon rendre 41; 43; 45; 47; 49; 51; 53; 55; 57; 59 km-t kerékpározott. Az összeg meghatározásához a következő módszert alkalmazzuk. Írjuk le a keresett összeget kétszer egymás alá a tagok növekvő és csökkenő sorrendjében!

növekvő sorrendben
csökkenő sorrendben

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 41 & + & 43 & + & 45 & + & 47 & + & 49 & + & 51 & + & 53 & + & 55 & + & 57 & + & 59 \\ + & & + & & + & & + & & + & & + & & + & & + & & + \\ 59 & + & 57 & + & 55 & + & 53 & + & 51 & + & 49 & + & 47 & + & 45 & + & 43 & + & 41 \\ \hline 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100 \end{array}$$

Észrevehetjük, hogy így az egymás alá került tagok összege állandó, azaz 100, és 10 ilyen számpár van.

Azt kaptuk, hogy a keresett összeg kétszerese $10 \cdot 100$, amiből a keresett összeg

$$\frac{10 \cdot 100}{2} = 500.$$

A kerékpáros az első tíz nap alatt összesen 500 km-t tett meg.

c) Ismét a *b)* részben látott gondolatmenetet alkalmazzuk a sorozat 31 tagjára. Az első tag a 41, a 31. tag a 101.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 41 & + & 43 & + & 45 & + & \ldots & + & 97 & + & 99 & + & 101 \\ + & & + & & + & & & & + & & + & & + \\ 101 & + & 99 & + & 97 & + & \ldots & + & 45 & + & 43 & + & 41 \\ 142 & + & 142 & + & 142 & + & \ldots & + & 142 & + & 142 & + & 142 \end{array}$$

A keresett összeg kétszerese $31 \cdot 142$, a keresett összeg tehát

$$\frac{31 \cdot 142}{2} = 31 \cdot 71 = 2201.$$

A kerékpáros tehát 2201 km-t tekert összesen augusztusban.



Ha túl sok tagot kellene leírnunk, és azok szabályosan követik egymást, akkor a szabályosan következő tagok helyett 3 pontot írunk.
Például:
41; 43; 45 ... 99; 101

Egy számtani sorozat egymást követő tagjait mindig össze tudjuk adni az előző módszerrel:

- összeadjuk az első és az utolsó tagot (egy pár összege);
- az összeget szorozzuk a tagok számával (ennyi pár van);
- a szorzatot osztjuk kettővel (mert az összeg kétszer szerepelt).

Feladatok

1. Egy sorozat tagjai egész számok. A sorozat képzési szabálya a következő: ha egy tag páros, a következő tag ennek a fele, ha páratlan, akkor a hétszeresénél hárommal kisebb szám lesz. A sorozat első három tagja: 8; 4; 2.
   a) Határozzuk meg a sorozat következő öt tagját!
   b) Mi lesz a sorozat 10. tagja?
   c) Határozzuk meg a sorozat első 10 tagjának összegét!
   d) Adjuk meg a sorozat első 100 tagjának összegét!

2. Egy sorozat tagjait úgy képezzük, hogy a harmadik tagtól kezdve minden tag az előző két tag szorzatánál 1-gyel kisebb szám. A sorozat első két tagja: 1; 3. Határozzuk meg a sorozat következő három tagját!

3. Megadtuk különböző számsorozatok első négy tagját. Keressünk szabályt, és aszerint folytassuk a sorozatot még öt taggal!
   a) 0; 1; 4; 9; ... *b)* 21; 17; 13; 9; ... *c)* $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$ *d)* $1; \frac{7}{4}; 2{,}5; 3\frac{1}{4}; \ldots$

4. Egy szabadtéri színház nézőterén az első sorban 25 ülőhely van. Minden további sorban 4-gyel több ülőhely van, mint az előzőben. Hány ülőhely van
   a) a 15. (utolsó) sorban;
   b) a nézőtéren összesen?

5. Egy számtani sorozat első két tagja 5; 9.
   a) Mennyi a számtani sorozat különbsége?
   b) Határozzuk meg a sorozat következő 5 tagját!
   c) Mi lesz a sorozat 20. tagja?

6. Egy számtani sorozat különbsége 11, ötödik tagja 72. Határozzuk meg a sorozat első négy tagját!

7. Egy számtani sorozat negyedik tagja 7, hetedik tagja 25.
   a) Mennyi a sorozat különbsége?
   b) Határozzuk meg a sorozat első hét tagját!
   c) Adjuk meg a sorozat 50. tagját!

8. Egy számtani sorozat első tagja 2, különbsége 3.
   a) Adjuk meg a sorozat első öt tagját!
   b) Adjuk meg a sorozat 40. tagját!
   c) Számítsuk ki a sorozat első 40 tagjának összegét!

9. Határozzuk meg az első n pozitív egész szám összegét, ha
   a) $n = 50$; *b)* $n = 100$; *c)* $n = 75$; *d)* $n = 111$!

10. Mennyi az összes kétjegyű természetes szám összege?

11. Mennyi a kétjegyű páros természetes számok összege?

12. Adjuk össze az összes, 1000-nél kisebb 3-ra végződő természetes számot! Mivel egyenlő ez az összeg?

*13. Egy génkezelt szuperkukac születésekor 1 cm hosszú. Első nap 2 cm-t növekszik, majd minden nap 3 cm-rel többet növekszik, mint az előző nap.
   a) Hány centimétert nő a kukac a születése utáni 10. napon? Mennyit nő a 100. napon?
   b) Hány centiméteres a kukac 10 nap elteltével? Mennyit nő 100 nap elteltével?

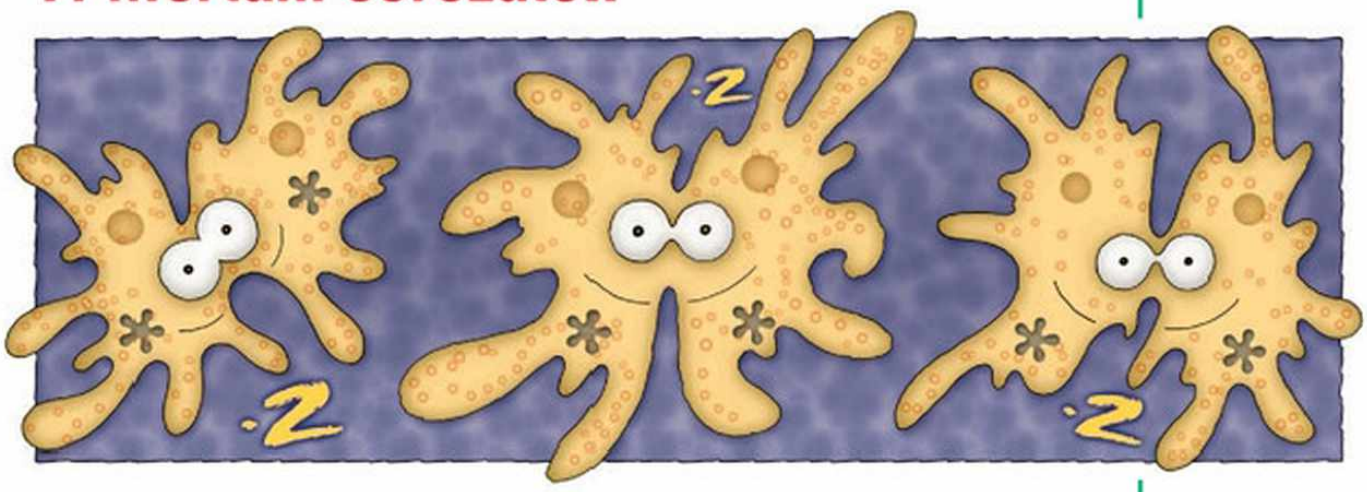


14. Kilenc egymás utáni természetes szám összege 123 456 789 987 654 321. Mennyi a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége?

Rejtvény

Milyen n természetes szám esetén végződhet az első n szám összege 4-re?

7. Mértani sorozatok



1. példa

Délután egy órakor elkezdünk megfigyelni három amőbát, melyek egy kémcsőben ülnek, és óránként egyszer (mindig félkor) kettéosztódnak. Hány amőba ül a kémcsőben

a) 1 óra múlva; *b)* 2 óra múlva; *c)* 3 óra múlva;
d) 6 óra múlva; *e)* egy nap múlva; *f)* egy hét elteltével?

Megoldás

a) Az 1. órában a három amőba egyszer kettéosztódik, vagyis a számuk megkétszereződik, így az amőbák száma a kémcsőben

$$1 \text{ óra múlva } 3 \cdot 2 = 6.$$

b) A 2. órában az előző óra végén élő 6 amőba osztódik ketté, így az amőbák száma

$$2 \text{ óra múlva } 6 \cdot 2 = 12.$$

c) A 3. órában az előző óra végén élő 12 amőba osztódik ketté, így az amőbák száma

$$3 \text{ óra múlva } 12 \cdot 2 = 24.$$

d) Írjuk fel az amőbák számát!

kezdetben: 3;
1 óra múlva: $3 \cdot 2 = 3 \cdot 2^1$; $\cdot 2$
2 óra múlva: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^2$; $\cdot 2$
3 óra múlva: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3$. $\cdot 2$

A felismert szabályosság alapján az amőbák száma a kémcsőben

$$6 \text{ óra múlva } 3 \cdot 2^6 = 3 \cdot 64 = 192.$$

e) Egy nap 24 óra, így az amőbák száma

$$1 \text{ nap után } 3 \cdot 2^{24} = 50\,331\,648.$$

f) Ha ugyanebben az ütemben folytatódna az osztódás, akkor 1 hét, azaz $7 \cdot 24 = 168$ óra múlva az amőbák száma

$$3 \cdot 2^{168} \approx 1{,}22 \cdot 10^{51} \text{ lenne.}$$

Már egy hét után annyi amőba lenne, amennyi több méter vastagon bevonná a Föld felszínét!

10^{51} = 1 oktilliárd...



A példában az amőbák száma számsorozatot alkot

$$\underset{\cdot 2}{3};\ \underset{\cdot 2}{6};\ \underset{\cdot 2}{12};\ \underset{\cdot 2}{24};\ \underset{\cdot 2}{48};\ 96\ldots$$

$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = 2$

Ebben a sorozatban a 2. tagtól kezdve a sorozat minden tagja az előző tag kétszerese. Másképp: minden tagot az előzővel elosztva, 2-t kapunk.

Az amőbás sorozat első tagja 3, a hányadosa 2.

DEFINÍCIÓ: Mértani sorozatnak nevezzük azt a számsorozatot, amelyre teljesül, hogy a második tagtól kezdve bármely tag és az őt megelőző tag hányadosa (idegen szóval: kvóciense) nullától különböző állandó.

A *q* jelölés a latin *quotiens* szó kezdőbetűje.

A mértani sorozat n-edik tagját a_n-nel, az előzőt a_{n-1}-gyel, a hányadost q-val jelölve felírhatjuk, hogy

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (n \geq 2;\ n \in \mathbb{N};\ q \neq 0),$$

ahol a q (kvóciens) a sorozatra jellemző állandó.

Ez azt is jelenti, hogy egy mértani sorozat bármely tagját (a másodiktól kezdve) megkapjuk, ha az előző tagot megszorozzuk a kvócienssel:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \quad (n \geq 2;\ n \in \mathbb{N};\ q \neq 0).$$

A mértani sorozatot meghatározza az első tagja és a hányadosa.

Mértani sorozat például: $\underset{\cdot 0{,}1}{1};\ \underset{\cdot 0{,}1}{0{,}1};\ \underset{\cdot 0{,}1}{0{,}01};\ \underset{\cdot 0{,}1}{0{,}001};\ 0{,}0001\ldots$

2. példa

Egy gyümölcs a szárítása során minden nap elveszíti nedvességtartalmának egytizedét. 1 kg friss gyümölcsöt szárítunk, amely kezdetben 80 dkg vizet tartalmaz.

a) Mennyi víz lesz a gyümölcsben 4 nap elteltével (vagyis a megfigyelés kezdetétől számított ötödik napon)?

b) Mennyi víz lesz a gyümölcsben 8 nap elteltével?

c) Mennyi lesz ekkor a szárított gyümölcs tömege?

d) Elveszti-e így valaha minden nedvességtartalmát a gyümölcs?

Megoldás

Törtek helyett százalékokkal is dolgozhatnánk: a gyümölcs nedvességtartalmának 10%-át veszíti el.

a) Ha a gyümölcs a nedvességtartalma egytizedét elveszíti, akkor kilenctizede marad meg. A gyümölcs nedvességtartalma minden nap az előző napi $\frac{9}{10}$-e lesz, azaz a $\frac{9}{10}$-szerese.

Írjuk fel a víz tömegét (dekagrammban) az egyes napokon az előző feladatban látott módon!

kezdetben: 80;

1 nap múlva: $80 \cdot \frac{9}{10} = 72$; $\cdot \frac{9}{10}$

2 nap múlva: $80 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = 80 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 64{,}8$; $\cdot \frac{9}{10}$

3 nap múlva: $80 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = 80 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 58{,}32$; $\cdot \frac{9}{10}$

4 nap múlva: $80 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = 80 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 52{,}488$.

Az ötödik napon tehát kb. 52,49 dkg víz lesz a gyümölcsben.

Mivel minden nap ugyanazzal a számmal szorzunk, a gyümölcsben lévő víz mennyisége mértani sorozatot alkot.

b) Az előző sorozatot folytatva kaphatjuk, hogy 8 nap elteltével a gyümölcsben $80 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^8 = 34{,}44$ dkg víz lesz.

c) Mivel a gyümölcs szárazanyag-tartalma a szárítás során nem változik, mindvégig $100 - 80 = 20$ dkg, a gyümölcs tömege ekkor $20 + 34{,}44 = 54{,}44$ dkg.

Ha egy tábla csokoládé felét megesszük, aztán minden nap a maradék felét, a csoki soha sem fogy el!

d) Nem, mivel minden nap megmarad az előző napon benne lévő víz egytizede. Ez egy idő után nagyon kicsi lesz, de soha sem fog elfogyni.

Az amőbák száma: 3; 6; 12; 24; 48; ...

A sorozat első tagja 3, hányadosa 2, a sorozat növekvő.

A gyümölcs nedvességtartalma: 80; 72; 64,8; ...

A sorozat első tagja 80, hányadosa $\frac{9}{10}$, a sorozat csökkenő.

3. példa

Válasszuk ki az alábbi sorozatok közül azokat, amelyek mértani sorozatok lehetnek. Határozzuk meg ezeknek az első tagját, hányadosát és 8. tagját!

a) 1; 2; 3; 4; ... *b)* 8; 4; 2; 1; ... *c)* 1; −1; 1; −1; 1; ...

d) 1; 0; 1; 0; 1; 0; ... *e)* $\frac{2}{3}$; 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{4}$; ... *f)* 3; 3; 3; 3; 3; ...



Megoldás

Egy számsorozat akkor mértani sorozat, ha a második tagtól kezdve bármely tagja és az őt megelőző tag hányadosa állandó.

a) 1; 2; 3; 4; ...

$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2} \Rightarrow$ A sorozat nem mértani sorozat.



b) $8;\ 4;\ 2;\ 1;\ \ldots$

$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ A sorozat lehet mértani sorozat.

A sorozat első tagja 8, hányadosa $\frac{1}{2}$.

Így a tagok $8;\ 4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16}$. Tehát a 8. tag az $\frac{1}{16}$.

b) csökkenő mértani sorozat: $a_1 = 8;\ q = \frac{1}{2}$

c) $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ \ldots$

$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow$ A sorozat lehet mértani sorozat.

A sorozat első tagja 1, hányadosa -1.

Az első nyolc tag: $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1$, tehát a 8. tag -1.

c) váltakozó előjelű mértani sorozat: $a_1 = 1;\ q = -1$

d) A 0-ból szorzással nem kaphatunk 1-et, ezért az $1;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1;\ 0;\ \ldots$ sorozat nem lehet mértani sorozat.

d) Mértani sorozat egyetlen tagja sem lehet 0.

e) $\frac{2}{3};\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{9}{4};\ \ldots$ $\quad 1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2};\quad \frac{3}{2} : 1 = \frac{3}{2};\quad \frac{9}{4} : \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$

$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ A sorozat lehet mértani sorozat.

A sorozat első tagja $\frac{2}{3}$, hányadosa pedig $\frac{3}{2}$.

A sorozat első 8 tagja: $\frac{2}{3};\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{9}{4};\ \frac{27}{8};\ \frac{81}{16};\ \frac{243}{32};\ \frac{729}{64}$.

A 8. tag tehát $\frac{729}{64}$.

e) növekvő mértani sorozat: $a_1 = \frac{2}{3};\ q = \frac{3}{2}$

f) $3;\ 3;\ 3;\ 3;\ \ldots$

$\frac{3}{3} = \frac{3}{3} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow$ A sorozat lehet mértani sorozat.

A sorozat első tagja 3, hányadosa 1. Minden tag, így a 8. is 1.

f) állandó mértani sorozat: $a_1 = 3;\ q = 1$

Ez egyben számtani sorozat is: $a_1 = 3;\ d = 0$

4. példa

Bankszámlát nyitunk, amelyre január 1-jén elhelyezünk 10 000 forintot 8%-os kamatra.

a) Mennyi pénzünk lesz a következő (második) év elején?

b) Mennyi pénzünk lesz a harmadik év elején, ha addig nem veszünk fel pénzt erről a számlánkról?

c) Az egyes években a számlán lévő összegek mértani sorozatot alkotnak-e? Ha igen, határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát!



d) Egészítsük ki az alábbi táblázatot az egyes években a számlán levő összegekkel!

Év	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Egyenleg (forint)	10 000							

Megoldás

a) A 8%-os kamat azt jelenti, hogy egy év elteltével az eredeti összeget 8%-kal megnövelik. Így annak 108%-át vehetjük fel, azaz az eredeti összeg 1,08-szorosát.

$10\,000 \cdot 1{,}08 = 10\,800$ forintunk lesz a következő év elején.

b) Ezután a 10 800 forint kamatozik 8%-ot. Ez azt jelenti, hogy a harmadik év elején 10 800 forint 108%-a lesz a számlán, ez pedig $10\,800 \cdot 1{,}08 = 11\,664$ forint.

c) Mivel a bankszámla új egyenlegét mindig úgy számítjuk ki, hogy a rajta lévő pénz 108%-át számoljuk, azaz az összeget megszorozzuk 1,08-dal, ez egy mértani sorozat, amelynek első tagja 10 000, hányadosa pedig 1,08.

d) Mivel mértani sorozatról van szó (első tag 10 000 Ft, a hányados 1,08), fel tudjuk írni az egyes években a számlán lévő pénzt.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Év	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Egyenleg (forint)	10 000	10 800 $10\,000 \cdot 1{,}08$	11 664 $10\,000 \cdot 1{,}08^2$	12 597 $10\,000 \cdot 1{,}08^3$	13 605 $10\,000 \cdot 1{,}08^4$	14 693 $10\,000 \cdot 1{,}08^5$	15 869 $10\,000 \cdot 1{,}08^6$	17 138 $10\,000 \cdot 1{,}08^7$

Feladatok

1. Válasszuk ki az alábbiak közül a mértani sorozatokat, és adjuk meg azok első tagját és a hányadosát!

   a) 1; 3; 5; 7; ... *b)* 16; 4; 1; 0,25; ... *c)* 12; 4; −4; −12; ... *d)* −5; −5; −5; −5; ...

2. Az első sorban mértani sorozatok első három eleme, a másodikban a sorozatok kvóciensei láthatók. Keressük meg, hogy melyek tartoznak egymáshoz!

   A) −9; −3; −1; ... *B)* 2; −6; 18; ... *C)* $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}$; ... *D)* −81; 27; −9; ...

   a) 3; *b)* $\frac{1}{3}$; *c)* −3; *d)* $-\frac{1}{3}$.

3. Van-e olyan mértani sorozat, amely egyben számtani sorozat is?

4. Melyik leírás ad meg számtani, és melyik mértani sorozatot?

a) Egy gyorsan növő cserepes virág minden héten másfélszer olyan magasra nő, mint az előző héten.

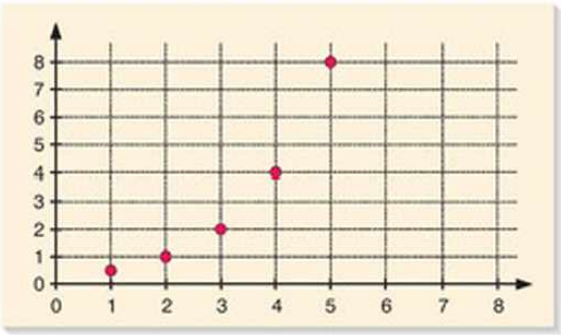
b) Egy virágcsokorban minden nap elhervad két virág.

c) Nóra minden héten elolvas 50 oldalt a kedvenc könyvéből.

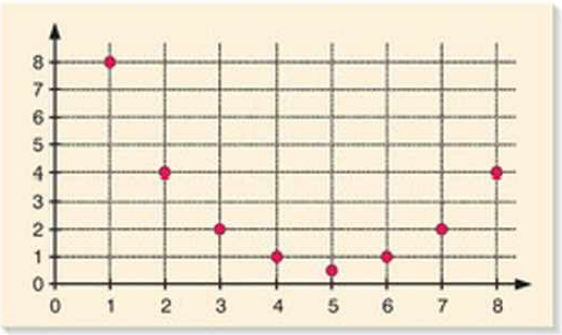
d) Nóra minden héten elolvassa a kedvenc könyvéből hátralévő rész egyhuszadát.

5. Melyik lehet mértani sorozat grafikonja az alábbi grafikonok közül? Indokoljunk!

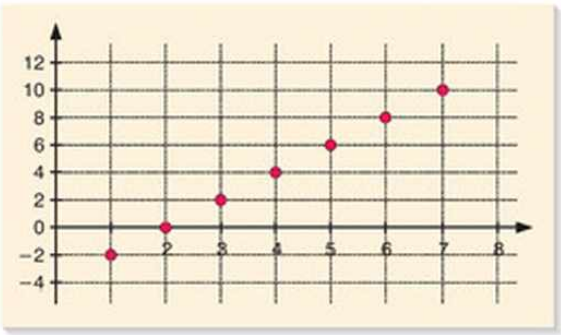
a)



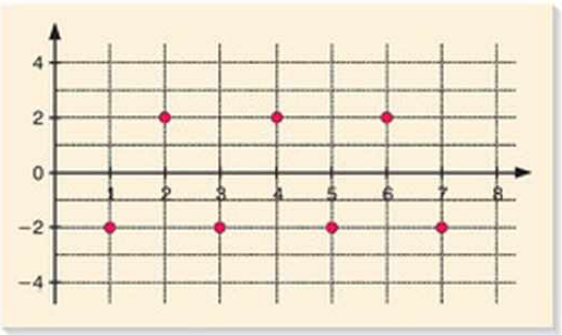
b)



c)



d)



6. Egy mértani sorozat első öt tagjából csak kettőt ismerünk. Adjuk meg az első öt tagot!

a) 3; .....; 12; .... *b)* .....; −5; 5; .... *c)* .....; 8; .....; 2; ... *d)* 8; .....; 18; ....

7. Egy szerencsétlen szerencsejátékos minden nap eljátssza pénze felét. Ha január 1-jén 100 000 forintja volt, hányadikán lesz 5000 forintnál kevesebb pénze?

8. Az éves infláció Óperenciában 20% (ennyivel emelkednek az árak évente). Egy kilogramm kenyér 100 petákba kerül. Mennyibe fog kerülni 3 év múlva?

***9.** 1 000 000 forint lekötése esetén egy bank évi 10%-os kamatot ajánl, egy másik azt, hogy minden évben 150 ezer forinttal növeli a betétünket. Melyik bank ajánlata kedvezőbb a számunkra, ha a futamidő

a) négy év; *b)* nyolc év?

***10.** Ha István király a koronázása alkalmából egy bankban elhelyezett volna 100 forintot, és az azóta is megszakítás nélkül évi 6%-ot kamatozna, mennyi pénz lenne most ezen a bankszámlán?

Rejtvény

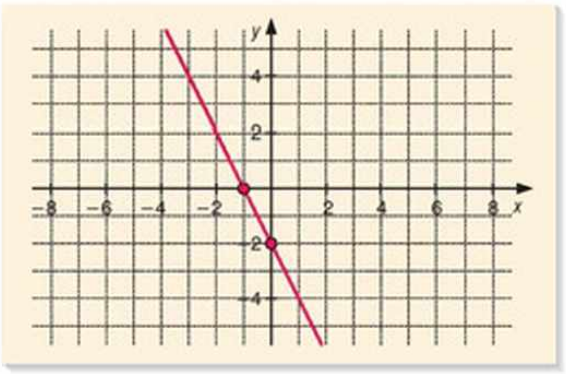
Egy 100 négyzetméteres tavon egy 1 négyzetcentiméter nagyságú békalencse lebeg. A békalencse felszíne naponta megduplázódik. Hány nap alatt fedi be a békalencse az egész tavat?

8. Vegyes feladatok

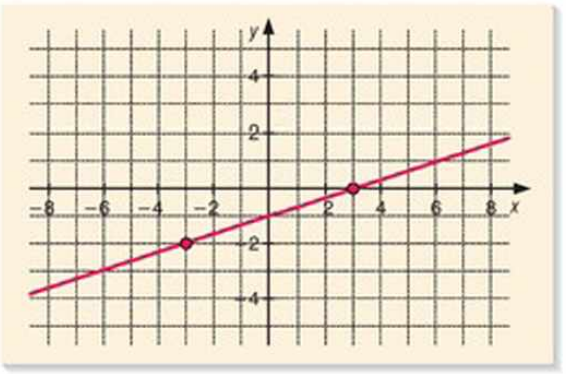
1. Grafikonnal adtunk meg a valós számokon értelmezett lineáris függvényeket és rajtuk két-két egész koordinátájú pontot. Adjuk meg ezeknek a függvényeknek

a) a meredekségét;
b) a zérushelyét;
c) az *y* tengellyel való metszéspontját;
d) a hozzárendelési szabályát!

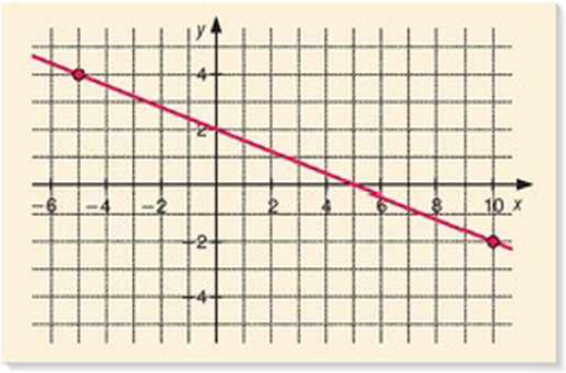
1.



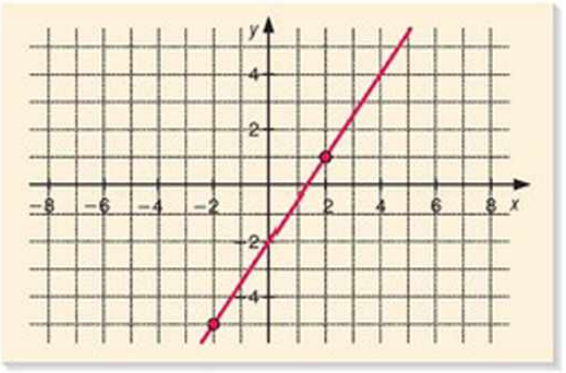
2.



3.



4.



2. Melyik lineáris függvény növekvő, melyik csökkenő, melyik állandó az alábbi függvények közül?

$e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 3;$ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x + 3;$ $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 3 - 3x;$

$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{x+6}{2};$ $i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto -\frac{6x-9}{3}.$

Mi a közös a függvények grafikonjában?

3. Ábrázoljuk külön-külön koordináta-rendszerben az egyes táblázatokban megadott pontokat! Adjuk meg azoknak a valós számokon értelmezett függvényeknek az értékkészletét és a hozzárendelési szabályát, amelyekre a táblázat pontjai illeszkednek!

1.

x	−1	0	1	2	3
y	−5	−2	1	4	7

2.

x	−2	−1	1	2	3	4	5
y	5	4	2	1	0	1	2

3.

x	−3	−1	1	3	5
y	2	1	0	−1	−2

4.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	7	2	−1	−2	−1	2	7

4. Készítsük el azoknak a függvényeknek a grafikonját, amelyekből leolvashatjuk

a) bármely valós szám kétszeresét;

b) bármely valós szám kétszeresénél 3-mal nagyobb valós számot;

c) bármely valós szám kétszeresénél 3-mal kisebb valós számot!

Vizsgáljuk meg a grafikonok helyzetét!

5. Két valós számról tudjuk, hogy a különbségük 5. Az egyik szám x. Adjuk meg a másik számot x függvényében! Készítsünk táblázatot, grafikont!

6. Két valós számról tudjuk, hogy hányadosuk 3. Az egyik szám x. Adjuk meg a másik számot x függvényében! Készítsünk táblázatot, grafikont!

7. Készítsük el annak a függvénynek a grafikonját, amely bármely számhoz a nála

a) 25%-kal nagyobb;

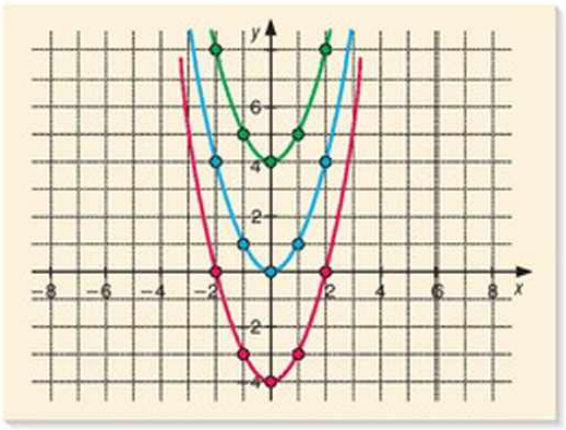
b) 20%-kal kisebb számot rendeli!

Mi a közös a grafikonokban?

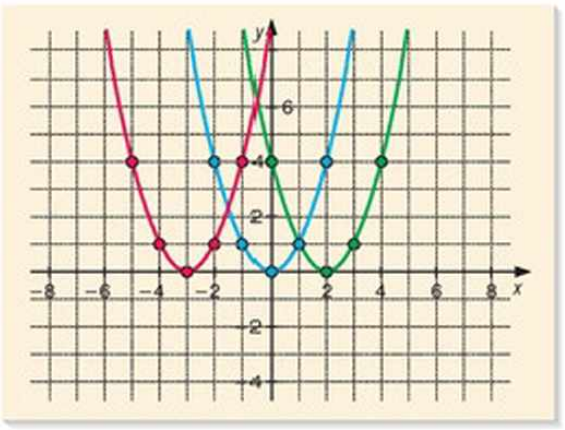
8. Adjuk meg a grafikonok alapján a hozzárendelési szabályt, ha a jelölt pontok egész koordinátájú pontok (rácspontok)! Mi a közös az egyes ábrákon látható függvénygrafikonok

a) hozzárendelési szabályában; *b)* képében?

1.



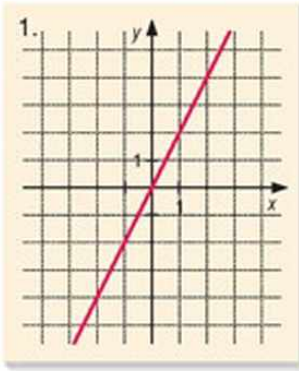
2.



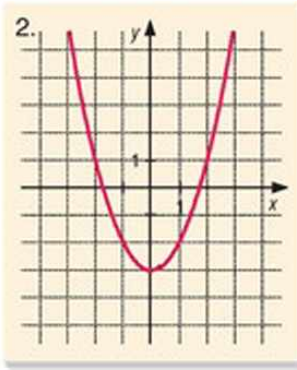
9. Melyik grafikonra melyik pont illeszkedik? Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát, és számítással ellenőrizzük megoldásunkat!

$P(-2; 1)$; $Q(3; 6)$; $R(2; 1)$; $S(1; -2)$; $T(3; -4)$; $U(-1; -6)$

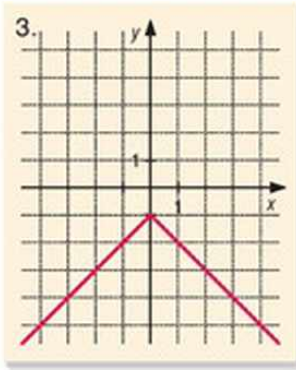
1.



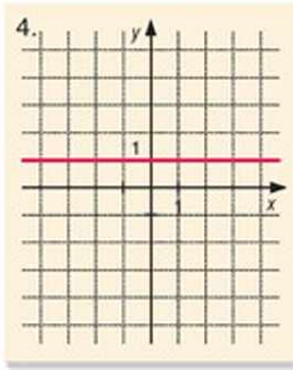
2.



3.



4.





***10.** Ábrázoljuk a következő függvényt, majd írjuk le a jellemzését!

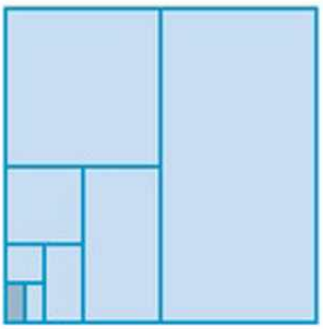
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \le 1; \\ 2, & \text{ha } 1 < x \le 3; \\ -x + 5, & \text{ha } 3 < x. \end{cases}$$

11. Az ábrákon látható legnagyobb sokszög területe 64 cm^2.

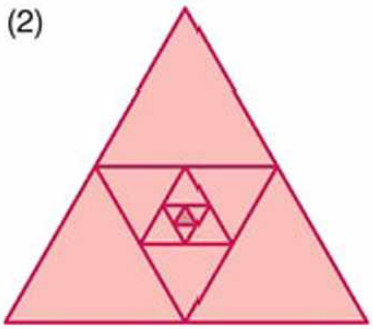
a) Milyen szabály szerint osztottuk egyre kisebb részekre a négyszöget és a háromszöget?

b) Mekkora a területe a sötétebb résznek?

(1)



(2)



12. Írjuk fel a sorozat következő négy tagját úgy, hogy a sorozat

a) számtani sorozat legyen;

b) mértani sorozat legyen!

A) 3; 6; ... *B)* −3; 6; ... *C)* 3; −6; ... *D)* −3; −6; ...

E) −3; −3; ... *F)* 3; 0; ... *G)* $\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \ldots$ *H)* $\frac{4}{5}; \frac{3}{4}; \ldots$

13. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben a számjegyek a leírás sorrendjében számtani sorozatot alkotnak?

14. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben a számjegyek a leírás sorrendjében mértani sorozatot alkotnak?

15. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben a számjegyek a leírás sorrendjében mértani sorozatot alkotnak?

16. Egy egész számokból álló számtani sorozat első néhány tagjának összege

a) 18; *b)* 24.

Melyek lehetnek ezek a számtani sorozatok?

17. Egy családban öt gyerek egész számokban kifejezett életkora ugyanazon prímszám különböző hatványa. (A testvérek között nincsenek ikrek.) Hány évesek a gyerekek, ha életkoruk összege prímszám?

18. Legyen $n \ge 1$ természetes szám! Írjuk fel azoknak a sorozatoknak az első öt tagját, melyek képzési szabálya:

a) $a_n = 5n - 2$; *b)* $a_n = n^2 + n$; *c)* $a_n = 2^n$; *d)* $a_n = 3 \cdot 2^n$!



Az új szakszavak jegyzéke

abszolútérték-függvény • A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x|$ függvény, amely bármely nemnegatív számhoz magát a számot rendeli: $f(x) = x$, bármely negatív számhoz pedig a szám ellentettjét: $f(x) = -x$.

algebrai egész kifejezés • Algebrai egész kifejezésnek nevezzük azt az algebrai kifejezést, amelyben nincs tört, vagy az előforduló tört nevezőjében nincs betű.

algebrai törtkifejezésnek • Algebrai törtkifejezésnek nevezzük azt az algebrai kifejezést, amelyben szereplő tört nevezőjében van betű.

azonosság • Azonosságnak nevezünk egy egyenletet, ha az egyenlőség a benne szereplő ismeretlen(ek) minden, az alaphalmazba eső értékére igaz.

egybevágósági transzformáció • Olyan geometriai transzformáció, amely esetén bármely két pont távolsága egyenlő a képeik távolságával.

egyenes körkúp térfogata • $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot M$, ahol r az alapkör sugara, M a kúp magassága.

ellentett vektorok • Egyenlő hosszúságú, párhuzamos, de ellentétes irányú vektorok.

esemény gyakorisága • Kísérletek során egy esemény bekövetkezéseinek száma.

esemény relatív gyakorisága • Kísérletek során az esemény gyakoriságának és a kísérletek számának hányadosa.

esemény valószínűsége • Ha sok kísérletet végzünk, egy esemény relatív gyakorisága egy érték körül ingadozik, amit az esemény valószínűségének tekintünk. Ha a kísérlet minden kimenetele egyformán valószínű, akkor az esemény valószínűségét megadhatjuk a kedvező esetek és az összes lehetséges eset számának arányával:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}.$$

geometriai transzformáció • Ha a sík bármely P pontjához ugyanazon sík pontosan egy P' pontját rendeljük hozzá, akkor síkbeli geometriai transzformációt adunk meg.

gömb felszíne • $A_{\text{gömb}} = 4r^2\pi$, ahol r a gömb sugara.

gömb térfogata • $V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$, ahol r a gömb sugara.

gúla • Olyan test, amelyet egy n oldalú sokszög és n darab háromszöglap határol.

gúla térfogata • $V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3} T_{\text{alap}} \cdot M$, ahol T_{alap} a gúla alapterülete, M a gúla magassága.

irányított szakasz • Az A kezdőpontú, B végpontú szakaszt az A-ból a B-be mutató irányított szakasznak nevezzük. Jelölése: $\overrightarrow{AB}$.

irracionális számok • A végtelen nem szakaszos tizedes törteket irracionális számoknak nevezzük. Az irracionális számok halmazának jele $\mathbb{Q}^*$.

lineáris függvény • Olyan, a valós számokon értelmezett függvény, amelynek grafikonja egyenes. Hozzárendelési szabálya $f: x \mapsto ax + b$, ahol az a valós szám az egyenes meredekségét, a b valós szám pedig az y tengelymetszetet adja meg.

másodfokú függvény • Olyan, a valós számokon értelmezett függvény, amelynek grafikonja parabola. Hozzárendelési szabályában a változó a második hatványon szerepel.



mértani sorozat • Mértani sorozatnak nevezzük azt a számsorozatot, amelyre teljesül, hogy a második tagtól kezdve bármely tag és az őt megelőző tag hányadosa (idegen szóval: kvóciense) nullától különböző állandó.

négyzetgyök • A nemnegatív valós a szám négyzetgyöke jelenti azt a nemnegatív számot, amelynek a négyzete a. Jele: $\sqrt{a}$.

négyzetgyökfüggvény • Azt a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett függvényt, amely minden nemnegatív valós számhoz annak négyzetgyökét rendeli hozzá, négyzetgyökfüggvénynek nevezzük.

nullvektor • A nulla hosszúságú vektort nullvektornak nevezzük. A nullvektor minden más vektorral egyirányú. Jele: $\vec{0}$.

Pitagorasz tétele • Ha egy háromszög derékszögű, akkor befogói hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.

párhuzamos eltolás • Azt a mozgást, amely a sík minden pontját ugyanabba az irányba és ugyanolyan távolságra mozgatja el, párhuzamos eltolásnak nevezzük.

pitagoraszi számhármas • Az olyan pozitív egész számokból álló $(x; y; z)$ számhármasokat, melyekre teljesül, hogy $x^2 + y^2 = z^2$, pitagoraszi számhármasoknak nevezzük.

szabályos testek • Szabályos testeknek nevezzük azokat az egybevágó szabályos sokszöglapokkal határolt konvex testeket, amelyek minden csúcsában ugyanannyi lap találkozik.

számtani sorozat • Egy sorozat számtani sorozat, ha a második tagtól kezdve bármely tag és az őt megelőző tag különbsége állandó.

valós számok • A racionális és irracionális számok halmazának egyesítése a valós számok halmaza. A valós számok halmazának jele $\mathbb{R}$.

vektor • Az irányított szakaszokat vektoroknak nevezzük. Két vektor egyenlő, ha ugyanazt a párhuzamos eltolást határozza meg.

vektorok összege • Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összege $(\vec{a} + \vec{b})$ azon párhuzamos eltolás vektora, amellyel az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorral meghatározott, egymás után elvégzett párhuzamos eltolások helyettesíthetők.



Kiadja a Mozaik Kiadó, 6723 Szeged, Debreceni u. 3/B.; Telefon: (62) 470-101, 554-660
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Grafikus: Deák Ferenc • Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Kovács János
Terjedelem: 26,10 (A/5) ív • Tömeg: 610 g • 2012. január • Raktári szám: MS-2308