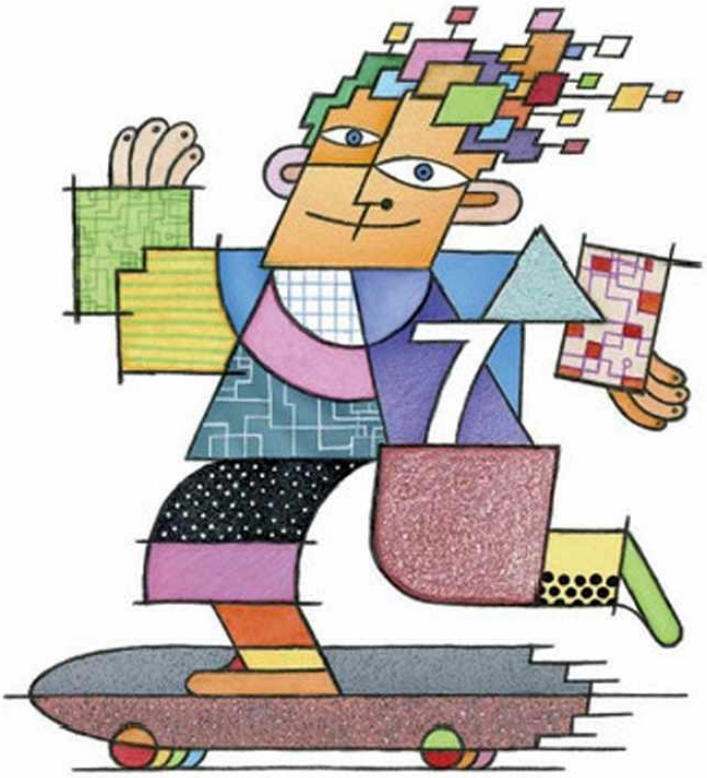
Sokszínű matematika

7

IX. Budapesti Könyvfesztivál Budai Könyvdíj
Szép Magyar Könyv 2001 Díj
Szép Magyar Könyv 2001 Különdíj
Hundidac 2003 Arany-díj
Szép Magyar Könyv 2003 Díj





Sokszínű matematika

Jakab Tamás
Kosztolányi József
Pintér Klára
Vincze István

Matematika

tankönyv

7

Ötödik kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2012

A könyvet írta: Jakab Tamás · *gimnáziumi tanár*
Dr. Kosztolányi József · *egyetemi docens*
Pintér Klára · *főiskolai adjunktus*
Vincze István · *gimnáziumi tanár*

Lektorálta: Balogh Terézia · *általános iskolai tanár, szakértő*
Juhász Nándor · *általános iskolai tanár*
Kothencz Jánosné · *általános iskolai tanár*
Pálfalvi Józsefné dr. · *tanszékvezető főiskolai docens*



Felelős szerkesztő: Tóth Katalin
Borítóterv, tipográfia: Reményfy Tamás
Műszaki szerkesztő: Vass Tibor
Illusztrációk: Ábrahám István
Gönczi Anikó
Anyanyelvi lektor: Solymosy Boglárka
Fotók: Mozaik Archívum; képügynökségek
Kirendelt szakértők: Nagy Károly; Tariné Szentes Katalin; Vecseiné dr. Munkácsy Katalin

Kerettanterv: Mozaik Kerettantervrendszer 17/2004 (V. 20.)
OM Kerettanterv 17/2004 (V. 20.)

A Mozaik Archívum képeinek kizárólagos felhasználási joga a Mozaik Kiadó Kft. tulajdona.
Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában nem sokszorosítható.

Engedélyszám: KHF/4339-17/2008
ISBN 978 963 697 549 4
Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2008

A tankönyv fejezetei



1 Természetes számok, racionális számok

2 Algebrai kifejezések

3 Egyenletek, egyenlőtlenségek

4 Síkgeometria I.

5 Halmazok, kombinatorika

6 Lineáris függvények, sorozatok

7 Síkgeometria II.

8 Statisztika, valószínűség

9 Térgeometria

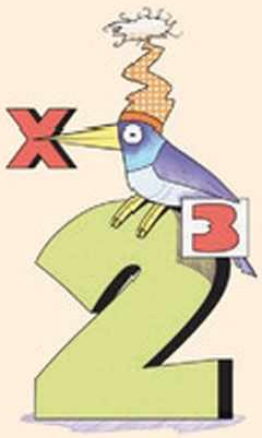
Tartalomjegyzék

Természetes számok, racionális számok



1. A racionális számok alakjai 10
2. Műveletek racionális számokkal 15
3. Arányos következtetések (emlékeztető) 21
4. Százalékszámítás (emlékeztető) 27
5. Kamatszámítás. Gazdálkodj okosan! 33
6. A hatványozás 36
7. Műveletek azonos alapú hatványokkal 41
8. Műveletek azonos kitevőjű hatványokkal 45
9. Prímszámvadászat 50
10. Nagyon nagy számok 55
11. Vegyes feladatok 60

Algebrai kifejezések



1. Az algebrai kifejezés 64
2. Behelyettesítés 68
3. Műveleti sorrend 74
4. Egytagú és többtagú algebrai kifejezések 78
5. Összevonás – egynemű kifejezések 83
6. Egytagú algebrai kifejezések szorzása, osztása 89
7. Kéttagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval 94
8. Kiemelés 97
9. Vegyes feladatok 100

Egyenletek, egyenlőtlenségek



1. Hogyan oldjunk meg feladatokat? (emlékeztető) 104
2. Hogyan születnek az egyenletek? 109
3. A mérlegelv I. 115
4. A mérlegelv II. 120
5. Amit nem szabad elfelejteni: az egyenlet alaphalmaza 125
6. Mikor érdemes egyenleteket használni? 129
7. Egyenlőtlenségek 135
8. Vegyes feladatok 139

Síkgeometria I.



1. Középpontos tükrözés, középpontos szimmetria 142
2. Középpontos tükörképek szerkesztése 148
3. Szögpárok, a háromszög belső szögeinek összege 153
4. Középpontosan szimmetrikus négyszög: a paralelogramma 156
5. A trapéz 162
6. A paralelogramma, a trapéz és a háromszög középvonala 166
7. Vegyes feladatok 171

Halmazok, kombinatorika



1. Halmazok (részhalmazok) 174
2. Komplementer halmaz 181
3. Halmazok metszete és egyesítése 187
4. Hány eleme van a halmazoknak? 193
5. Rendszerezzük a lehetőségeket! 199
6. Hányféle sorrend lehetséges? 205
7. Kapcsolatok 210
8. Vegyes feladatok 213

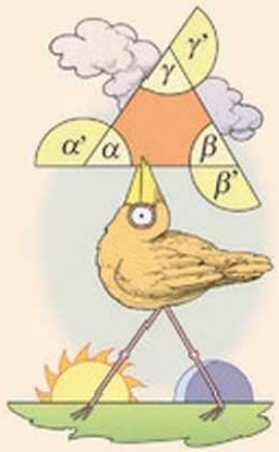
Lineáris függvények, sorozatok



1. Sorozatok 218
2. Számtani sorozat 222
3. Grafikonok a mindennapi életben 229
4. Hozzárendelések 233
5. Függvények 238
6. A függvények ábrázolása 242
7. A lineáris függvények 247
8. A lineáris függvény meredeksége 253
9. Egyenletek grafikus megoldása 258
10. Vegyes feladatok 262



Síkgeometria II.



1. A háromszögek csoportosítása, egybevágósága 266
2. A háromszög köré írható kör 274
3. A háromszög belső szögfelezői, a beírható kör 279
4. A magasságvonal és a súlyvonal 284
5. A háromszög szögeivel kapcsolatos összefüggések 289
6. Sokszögek 293
7. A háromszögek területe 297
8. A négyszögek területe 302
9. A kör kerülete, területe 309
10. Vegyes feladatok 313

Statisztika, valószínűség



1. Adatok elemzése, átlag, medián 318
2. A módusz, a gyakoriság és a relatív gyakoriság 324
3. A valószínűség becslése 331
4. Vegyes feladatok 338

Térgeometria

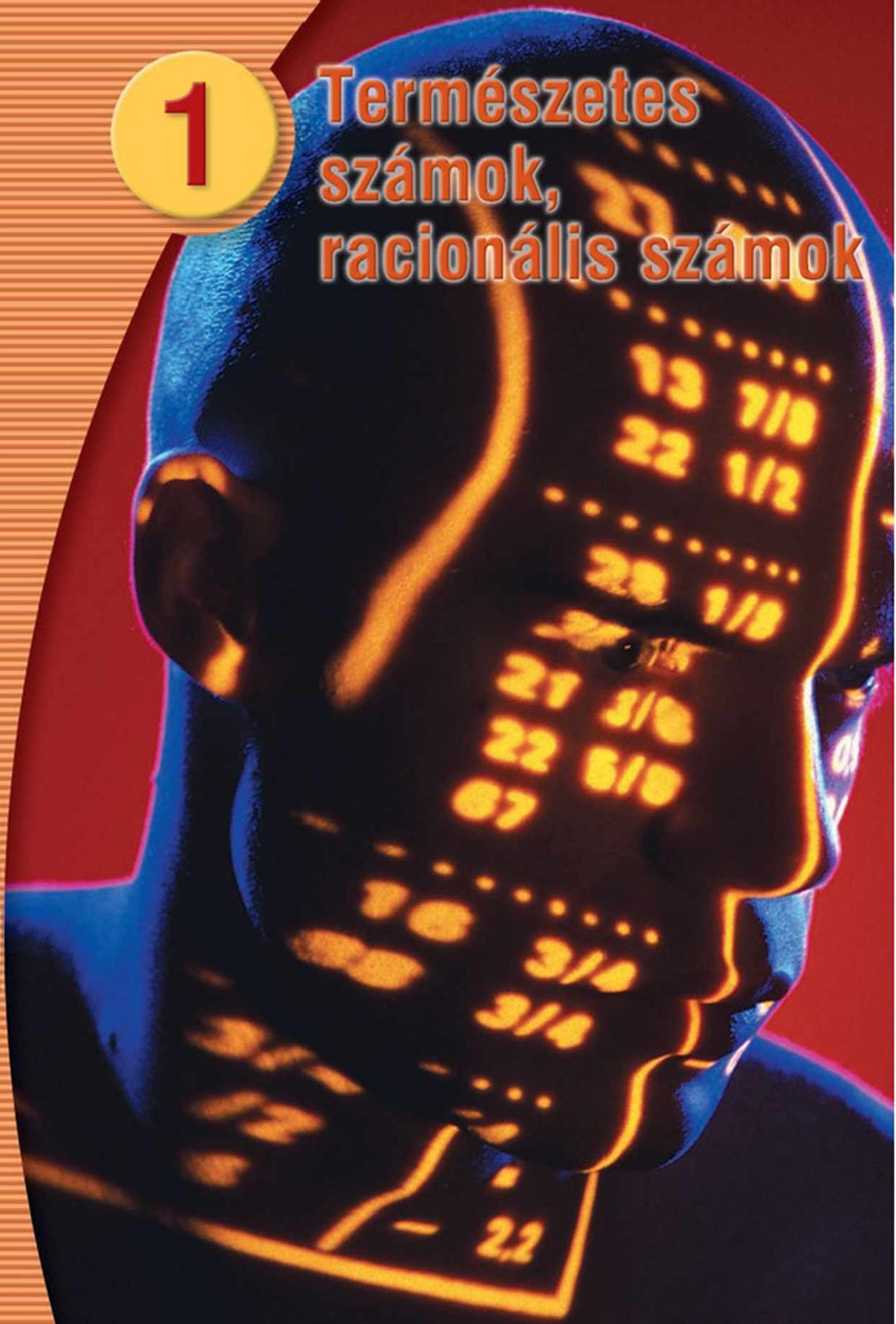
1. Egyenesek, síkok, testek a térben 342
2. Henger, hasáb 348
3. A hasáb és a henger felszíne 353
4. A hasáb és a henger térfogata 359
5. Vegyes feladatok 365

Az új szakszavak jegyzéke 367

Útmutató a könyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában. A leckék legtöbbször kidolgozott példákkal kezdődnek. Ezek gondolatmenetét érdemes elemezni és megérteni, mert mintát nyújtanak a további feladatok megoldásához is. A megtanulandó legfontosabb szabályokat és meghatározásokat a könyv zöld aláfestéssel és vastag betűs kiemeléssel jelzi. A *-gal jelölt gyakorló feladatok megoldásához ügyes ötletek szükségesek. A lapszélen olvasható apró betűs információk a mindennapi élettel, a matematika alkalmazásával kapcsolatos érdekességek, magyarázatok, kiegészítő ismeretek vagy kérdések.

1 Természetes számok, racionális számok



1. A racionális számok alakjai



Természetes számok ($\mathbb{N}$)
↓ kivonás $2 - 5 = -3$
Egész számok ($\mathbb{Z}$)
↓ osztás $2 : 5 = \frac{2}{5}$
Racionális számok ($\mathbb{Q}$) (két egész szám hányadosaként felírható számok)

A számok majdnem olyanok, mint az emberek. Vannak közöttük azonos családba tartozók, mint például az egész számok vagy a racionális számok. Vannak közöttük híresebbek, és vannak egészen hétköznapiak is. Még arra is képesek lehetnek, hogy egy-egy alkalommal más és más ruhába bújjanak!

A nagy francia forradalom idején születtek azok a javaslatok, melyek alapján bevezették a tízes mértékegységrendszert. Ekkor az újítások hívei inkább a tizedes törtekkel, míg a régi rend hívei a törtekkel számoltak.

1. példa

Írjuk át a következő számokat tizedes tört alakba! Milyen tizedes törtet kapunk?

a) $-\frac{12}{3}$; *b)* $3\frac{3}{4}$; *c)* $\frac{1}{9}$.

Megoldás

a) $-\frac{12}{3} = (-12) : 3 = -4$ → egész szám;

b) $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 15 : 4 = 3{,}75$ → véges tizedes tört;

c) $\frac{1}{9} = 1 : 9 = 0{,}\dot{1}$ → végtelen szakaszos tizedes tört.

$-\frac{12}{3} = \frac{-12}{3} = \frac{12}{-3} = -4$

$\frac{12}{3} = \frac{-12}{-3} = 4$

Egy tört akkor pozitív, ha számlálója és nevezője azonos előjelű.

Eredményeink azt sugallják, hogy a racionális számok tizedes tört alakja háromféle lehet:

- egész szám;
- véges tizedes tört;
- végtelen szakaszos tizedes tört.

2. példa

Írjuk át a következő tizedes törteket tört alakba!

a) 0,2; *b)* −3,25; *c)* $1,\dot{1}$.

Megoldás

a) $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

b) $-3,25 = -\frac{325}{100} = -\frac{13}{4}$.

c) Használjuk fel az előző feladatban kapott eredményt! Ennek alapján $\frac{1}{9} = 0,\dot{1}$. Így:

$$1,\dot{1} = 1 + 0,\dot{1} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}.$$

Bővítés:

$$\frac{3}{4} \overset{\cdot 25}{=} \frac{75}{100} = 0,75$$

Egyszerűsítés:

$$\frac{25}{100} \overset{:25}{=} \frac{1}{4}$$

Eredményeink alapján elmondható, hogy egy racionális szám többféle alakban is felírható.

Így például az $1 = \frac{7}{7} = 0,\dot{9}$ ugyanazt a racionális számot jelenti.

$0,\dot{1} = \frac{1}{9}$

$0,\dot{9} = 9 \cdot 0,\dot{1} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$

3. példa

Rendezzük növekvő sorrendbe, és ábrázoljuk számegyenesen a következő számokat!

$$0,3;\quad -0,6;\quad \frac{3}{8};\quad -\frac{35}{50};\quad 0,\dot{6}.$$

Megoldás

Írjuk át mindegyik számot tizedes tört alakba!

$$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375;\qquad -\frac{35}{50} = -\frac{7}{10} = -0,7;\qquad 0,\dot{6} = 0,666...$$

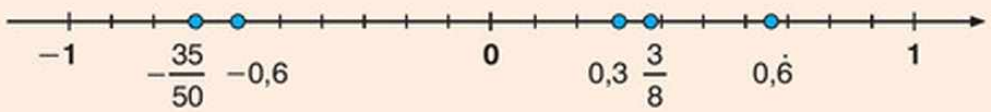
Növekvő sorrendbe rendezve:

$$-0,7 < -0,6 < 0,3 < 0,375 < 0,\dot{6}.$$

Így az adott számok növekvő sorrendje:

$$-\frac{35}{50} < -0,6 < 0,3 < \frac{3}{8} < 0,\dot{6}.$$

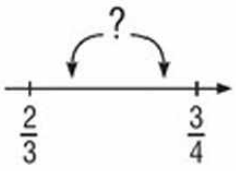
Számegyenesen ábrázolva:



$|0,6| = 0,6$

$|-0,6| = 0,6$

$0,\dot{6} = 6 \cdot 0,\dot{1} = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$



4. példa

Írjunk fel két olyan racionális számot, amely a $\frac{2}{3}$ és a $\frac{3}{4}$ közé esik!

1. megoldás

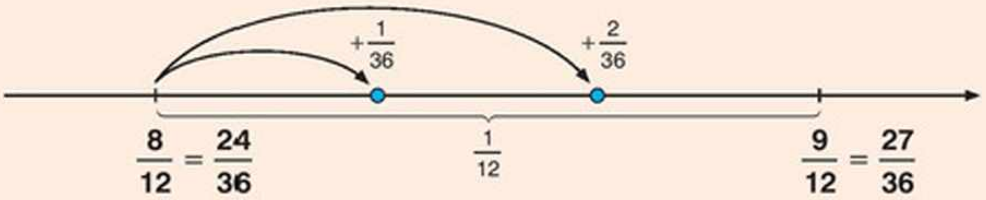
Két adott racionális szám közé eső racionális számot többféleképpen kaphatunk. Megtehetjük például, hogy a köztük levő távolságot három egyenlő részre osztjuk. Az eredeti két tört különbsége (távolsága a számegyenesen):

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}.$$



Ezt a különbséget osszuk három egyenlő részre!

$$\frac{1}{12} : 3 = \frac{1}{36}.$$





Így a számegyenesen kijelölt két szám:

$$\frac{8}{12} + \frac{1}{36} = \frac{24}{36} + \frac{1}{36} = \frac{25}{36} \quad \text{és} \quad \frac{8}{12} + \frac{2}{36} = \frac{24}{36} + \frac{2}{36} = \frac{26}{36}.$$

Tehát:

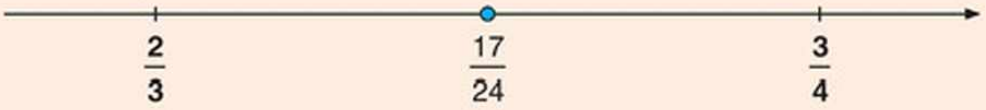
$$\frac{2}{3} < \frac{25}{36} < \frac{26}{36} < \frac{3}{4}.$$

2. megoldás

Két racionális szám összege, különbsége, szorzata, átlaga is racionális szám.

Felhasználhatjuk azt is, hogy bármely két különböző szám átlaga a számegyenesen a két szám közé esik.

A $\frac{2}{3}$ és a $\frac{3}{4}$ átlaga: $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) : 2 = \left(\frac{8}{12} + \frac{9}{12}\right) : 2 = \frac{17}{12} : 2 = \frac{17}{24}$.



Most vegyük a $\frac{2}{3}$ és a $\frac{17}{24}$ átlagát!

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{17}{24}\right) : 2 = \left(\frac{16}{24} + \frac{17}{24}\right) : 2 = \frac{33}{24} : 2 = \frac{33}{48} = \frac{11}{16}.$$

Bármely két racionális szám közé beilleszthető egy újabb racionális szám (például a két szám átlaga). Így bármely két racionális szám közé végtelen sok racionális szám írható.

Tehát:

$$\frac{2}{3} < \frac{11}{16} < \frac{17}{24} < \frac{3}{4}.$$



Feladatok

1. Írjuk fel a következő számokat tizedes tört alakban!

a) $\frac{1}{4}$; *b)* $\frac{2}{5}$; *c)* $-\frac{5}{16}$; *d)* $2\frac{3}{7}$;

e) $-\frac{20}{8}$; *f)* $-5\frac{1}{8}$; *g)* $\frac{4}{20}$; *h)* $-\frac{5}{8}$.

2. Írjuk fel tört alakban a következő tizedes törteket!

a) 0,2; *b)* 0,125; *c)* 1,15; *d)* $1,\dot{6}$;

e) −2,5; *f)* −0,16; *g)* $2,\dot{9}$; *h)* −3,875.

3. Melyik a kakukktojás a következő számok között?

a) 0,25 $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{10}{40}$;

b) 1,2 $\frac{12}{6}$ $\frac{120}{10}$ $\frac{240}{20}$;

c) $-\frac{3}{5}$ −0,6 $\frac{-6}{12}$ $-\frac{18}{30}$;

d) $\frac{1}{6}$ 1,6 $0,1\dot{6}$ $\frac{8}{42}$.

4. Döntsük el a kövekező állításokról, hogy melyik igaz, és melyik hamis!

a) Ha egy tört számlálójának és nevezőjének előjele különböző, akkor a tört negatív.

b) Van olyan egész szám, amelyiknél a reciproka nagyobb.

c) Ha két tört számlálója és nevezője egyenlő, akkor a törtek is egyenlők egymással.

d) Ha két törtszám tizedes tört alakja azonos, akkor a törtek nevezője is egyenlő.

e) Egyetlen olyan racionális szám van, amelyik egyenlő a reciprokával.

5. Írjunk a $-\frac{3}{\square}$ törtbe a négyzet helyére olyan számot, hogy a tört

a) legalább 1 legyen; *b)* legfeljebb −1 legyen;

c) pozitív, és 1-nél kisebb legyen; *d)* negatív, és −1-nél nagyobb legyen!

6. Melyik szám nagyobb?

a) A 0,17 vagy az $\frac{1}{6}$; *b)* a 0,92 vagy a $\frac{12}{13}$; *c)* a $-\frac{225}{11}$ vagy a −20,5?

7. Rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat, és ábrázoljuk őket számegyenesen!

a) 1,25; $1\frac{1}{2}$; $\frac{15}{6}$; 2,5;

b) 0,2; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{3}$; $0,\dot{6}$;

c) −0,2; $-\frac{2}{5}$; $-\frac{1}{3}$; $-0,\dot{6}$;

d) −1,25; $-1\frac{1}{2}$; $-\frac{15}{6}$; −2,5;

e) −0,2; $\frac{2}{5}$; $-\frac{1}{3}$; $-0,\dot{6}$;

f) 1,25; $-1\frac{1}{2}$; $\frac{15}{6}$; −2,5.

8. Milyen sorszámú helyeken szerepel 2-es számjegy a tizedesvessző után az $\frac{1}{7}$ tört tizedes tört alakjában?

9. Milyen számjegy szerepel az $\frac{1}{7}$ tört tizedes tört alakjában a tizedesvessző után

a) a 2. helyen; *b)* a 20. helyen; *c)* a 2008. helyen?

10. Milyen számjegy áll a tizedesvessző után a 100. helyen a következő törtek tizedes tört alakjában?

a) $\frac{1}{12}$; *b)* $\frac{2}{7}$; *c)* $\frac{2}{11}$; *d)* $\frac{33}{13}$.

11. A *Lenge szél* vitorlásversenyen Annáék egy és negyed óra alatt értek célba, Boriék $\frac{5}{6}$ óra alatt, Katiék 85 perc alatt, Dóriék 1,6 óra alatt, Eszterék pedig $\frac{8}{6}$ óra alatt.

Milyen sorrendben futottak be a célba?



12. Írjunk fel két olyan racionális számot, amely a

a) a $\frac{2}{3}$ és az 1; *b)* a $\frac{2}{5}$ és a $\frac{3}{5}$; *c)* az $\frac{1}{10}$ és az $\frac{1}{5}$ közé esik!

A kapott számokat ábrázoljuk számegyenesen!

13. Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az alábbi pontokat, és kössük össze őket az adott sorrendben! Folytassuk még 4 ponttal a felsorolást!

$A\left(0; -\frac{1}{4}\right)$; $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; $C(0; 1)$; $D(-2; 0)$; $E(0; -4)$; $F(8; 0)$.

14. Játsszuk el! Ketten felváltva húznak az 1 2 3 4 5 6 7 8 kártyákból. Ezután külön-külön előállítanak egy-egy törtet úgy, hogy a $\frac{\square\square}{\square\square}$ ábrába tetszőlegesen berakják a kártyákat a téglalapok helyére. Az nyer, aki nagyobb törtet tud előállítani. Mikor lesz a tört értéke a legnagyobb, és mikor lesz a legkisebb?

Rejtvény

Mi a lehetséges legkisebb és legnagyobb értéke az 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 kifejezésnek, ha tetszőlegesen zárójelezhetünk?

2. Műveletek racionális számokkal



Emlékeztető

Játék • Számoljunk racionális számokkal!

Készítsük el a következő kártyákat!

Racionális számok: $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 12 | 3,5 | 1,2;

előjelek: $+, +, -, -$;

műveleti jelek: $\cdot, +, -, :$.

Fordítsuk meg a kártyákat, és keverjük össze! Ezután húzzunk a következő formáknak megfelelően!



Írjuk fel az így kapott műveletet, majd számítsuk ki az eredményt! Rakjuk vissza a kártyákat, majd húzzunk újabb műveletsort! Az nyer, aki négy húzás eredményeit összeadva a legnagyobb számot kapja.

Összeadás:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Szorzás:

$$(-3)\cdot(-4)=12$$
$$(-3)\cdot 4=-12$$
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$$

Osztás:

$$\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$$

$\frac{5}{7}$ reciproka $\frac{7}{5}$

Összeg és különbség szorzása

1. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $(-2)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$; *b)* $-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$; *c)* $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$.

Megoldás

a) Kétféleképpen járhatunk el.

I. Először a zárójelben levő műveleteket végezzük el.

$$(-2)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=(-2)\cdot\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)=(-2)\cdot\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}.$$

II. Tudjuk, hogy összeget és különbséget úgy is szorozhatunk, hogy a tagjait külön-külön megszorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk, illetve kivonjuk. Ezt röviden zárójelfelbontásnak nevezzük.

$$(-2)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=(-2)\cdot 1-(-2)\cdot\frac{1}{3}=-2-\left(-\frac{2}{3}\right)=$$
$$=-2+\frac{2}{3}=-\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}.$$

b) Ha először a zárójelben lévő műveletet végezzük el:

$$-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\right)=-\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{5}{4}.$$

Ha először a zárójelet bontjuk fel:

$$-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=(-1)\cdot\frac{3}{4}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=-\frac{5}{4}.$$

$$-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=(-1)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

c) Ha először a zárójelben lévő műveleteket végezzük el:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{4}+\frac{1}{4}-\frac{2}{4}\right)=\left(-\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right)\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}=-\frac{1}{2}.$$

Ha először a zárójelet bontjuk fel:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 1+\left(-\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\underset{2}{\cancel{4}}}-\left(-\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}=$$
$$=-\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{6}-\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}=-\frac{1}{2}.$$

2. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)$; *b)* $2-12\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)$.

Megoldás

a) Ha először a zárójelben levő műveleteket végezzük el:

$$\frac{2}{3}-\left(\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}\right)=\frac{2}{3}-\left(\frac{10}{15}-\frac{3}{15}\right)=\frac{2}{3}-\frac{7}{15}=$$
$$=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{7}{15}=\frac{10}{15}-\frac{7}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}.$$

Ha előbb felbontjuk a zárójelet, majd elvégezzük az összevonást:

$$\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}.$$

zárójelfelbontás

Ez a megoldás most kevesebb számolást igényelt. Érdemes minden feladatnál megfontolnunk, melyik módszert válasszuk.



b) Ha először a zárójelben lévő műveletet végezzük el:

$$2-12\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)=2-12\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}\right)=$$

$$=2-12\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{6}\right)=2-\overset{2}{\cancel{12}}\cdot\frac{3}{\cancel{6}}=2-6=-4.$$

Ha először a zárójelet bontjuk fel:

$$2-\overset{2}{\cancel{12}}\cdot\frac{5}{\cancel{6}}+(-\overset{4}{\cancel{12}})\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right)=2-10+4=-4.$$

3. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}-0{,}1;$ *b)* $\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{5}-0{,}1;$

c) $1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}-0{,}1\right);$ *d)* $\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}-0{,}1\right).$

Megoldás

Az egyes műveletek között az a különbség, hogy a zárójelezéssel különböző műveleti sorrendet határozunk meg.

Az $\frac{1}{3}$ miatt tört alakban érdemes számolni.

a) $1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=1-\frac{2}{15}-\frac{1}{10}=\frac{30-4-3}{30}=\frac{23}{30};$

b) $\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{4}{15}-\frac{1}{10}=\frac{8-3}{30}=\frac{5}{30};$

c) $1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{10}\right)=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{4-1}{10}=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}=\frac{27}{30};$

d) $\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{10}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{30}.$

$0{,}1=\frac{1}{10}$

$1-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}$

$\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{4-1}{10}=\frac{3}{10}$

Emeletes törtek:

$A = \dfrac{\frac{1}{2}}{3}$ ← főtörtvonal

$B = \dfrac{1}{\frac{2}{3}}$

4. példa

Melyik a nagyobb szám: az $A = \dfrac{\frac{1}{2}}{3}$, vagy a $B = \dfrac{1}{\frac{2}{3}}$?

Megoldás

Az emeletes törteknél mindig a főtörtvonal határozza meg a műveleti sorrendet. Írásban a főtörtvonal mindig az egyenlőség jelével egy magasságban helyezkedik el.

$$A = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}; \qquad B = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Mivel $\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{6}$, ezért $A < B$.

Osztásnál különböző zárójelezéssel különböző eredményeket kaphatunk.

$(1 : 2) : 3 \neq 1 : (2 : 3)$

Észrevehetjük, hogy a kétféle módon elhelyezett főtörtvonal kétféle zárójelezést jelent:

$$\text{az } A = \frac{\frac{1}{2}}{3} = (1 : 2) : 3, \text{ míg a } B = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 : (2 : 3).$$

5. példa

Hozzuk egyszerűbb alakra az $1 + \dfrac{4}{1 - \frac{1}{3}}$ emeletes törtet!

Megoldás

A feladatban szereplő tört számlálója 4, a nevezője pedig $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Így a következő módon hozhatjuk egyszerűbb alakra:

$$1 + \frac{4}{1 - \frac{1}{3}} = 1 + \frac{4}{\frac{2}{3}} = 1 + 4 : \frac{2}{3} = 1 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7.$$

Feladatok

1. Számítsuk ki a következő műveletek eredményét!

a) $1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - 4\right)$; b) $4 - 3 \cdot (1 - 2 \cdot 3)$; c) $3{,}5 - (4 \cdot 3 - 9) \cdot \frac{1}{2}$;

d) $1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right)$; e) $\frac{1}{2} + 10 \cdot \left(0{,}2 - \frac{1}{4}\right)$; f) $-3 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right) + \frac{1}{3}$.

2. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)$;

b) $\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)$;

c) $\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)$;

d) $\frac{2}{5}-0{,}1\cdot\left(10+\frac{200}{2}\right)$;

e) $(-5)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{8}\right)-\frac{1}{8}$;

f) $\left(\frac{1}{2}-0{,}4\right)\cdot\left(0{,}4-\frac{1}{10}\right)$.

3. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\frac{5}{9}\cdot(-18)+\frac{1}{3}$;

b) $\left(-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$;

c) $\left[-\frac{5}{3}-\left(-\frac{3}{4}\right)\right]:\left(-\frac{2}{9}\right)$;

d) $\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{7}{5}\right)$.

4. Morgó nagyon szereti a mézet. Három napon keresztül mindig mézet eszik, naponta egynegyed csupornyit. Minden negyedik napon málnával tömi tele a bendőjét. Ezeken a napokon kétharmad csupor mézet szerez be. Ma reggel még egy teli csupor méze volt.



a) Hányadrészig lesz a csupor négy nap múlva?

b) Hányadrészig lesz a csupor nyolc nap múlva?

*c) Hányadik napon történik majd meg vele az, hogy nem talál elég mézet a csuprában?

***5.** Kőműves Kelemen és társai újabb várépítésbe fogtak. Nappal mindig felépítették az egész vár $\frac{1}{30}$-ad részét, de éjjel az aznap megépített rész $\frac{1}{3}$-a mindig leomlott. Mennyi ideig tart a vár felépítése?

6. A következő számok és jelek állnak rendelkezésünkre:

2	1	$\frac{1}{3}$	−	+	·	(	)

Alkossunk velük műveletsort, és számítsuk ki az eredményt!
Keressünk több megoldást!

7. Melyik a nagyobb?

a) $A=\frac{\frac{2}{3}}{5}$ vagy $B=\frac{2}{\frac{3}{5}}$;

b) $A=\frac{\frac{5}{3}}{5}$ vagy $B=\frac{5}{\frac{3}{5}}$;

c) $A=\frac{\frac{5}{3}}{2}$ vagy $B=\frac{5}{\frac{3}{2}}$;

d) $A=\frac{-\frac{2}{3}}{5}$ vagy $B=\frac{2}{-\frac{3}{5}}$?

8. Figyeljük meg alaposan a következő törteket! Számítsuk ki az értéküket!

a) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}-0{,}25+1\right):\left(\frac{1}{3}-0{,}25+1\right)}{(0{,}5-1):(0{,}75-1-0{,}25)}$;

b) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}-0{,}25+1{,}8\right):\left(\frac{1}{3}-0{,}25+1{,}8\right)}{(0{,}25-1):(0{,}5-1-0{,}25)}$;

c) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-0{,}5+2\right):\left(\frac{1}{3}-0{,}25+1\right)}{(0{,}5-1):(0{,}75-1-0{,}25)}$;

d) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}-0{,}25+1\right):\left(\frac{1}{3}-0{,}25+1\right)}{(1-2):(0{,}75-1-0{,}25)}$.

***9.** Milyen műveleti jelet tegyünk a számok közé, hogy igaz legyen az egyenlőség?

a) $\frac{1}{2}\ \bigcirc\ \frac{1}{3}=\frac{5}{6}$;

b) $\frac{3}{5}\ \triangle\ \frac{12}{6}=0{,}3$;

c) $0{,}7\ \triangledown\ \frac{1}{2}=\frac{1}{5}$;

d) $\frac{13}{70}\ \square\ \frac{39}{10}=\frac{1}{21}$.

***10.** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő emeletes törteket!

a) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{5}$;

b) $\dfrac{2-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-2}$;

c) $1+\dfrac{1}{3+\frac{4}{5}}$;

d) $\dfrac{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}{2}$.

11. Hány kilométeres utat tettünk meg, ha miután az út $\frac{2}{3}$ részét megtettük, még $\frac{2}{3}$ km-t kellett mennünk?



***12.** Karcsi részt vett egy kerékpárversenyen, majd ezt mesélte otthon:

„A versenyzők harmada előttem ért célba, a fele mögöttem. Holtverseny nem volt."

Hányadik lett Karcsi?

13. Az 1 2 3 számkártyákat illesszük be az $\dfrac{\square}{\frac{\square}{\square}}$ emeletes törtbe úgy, hogy

a) a legnagyobb; b) a legkisebb értékű számot kapjuk!

Rejtvény

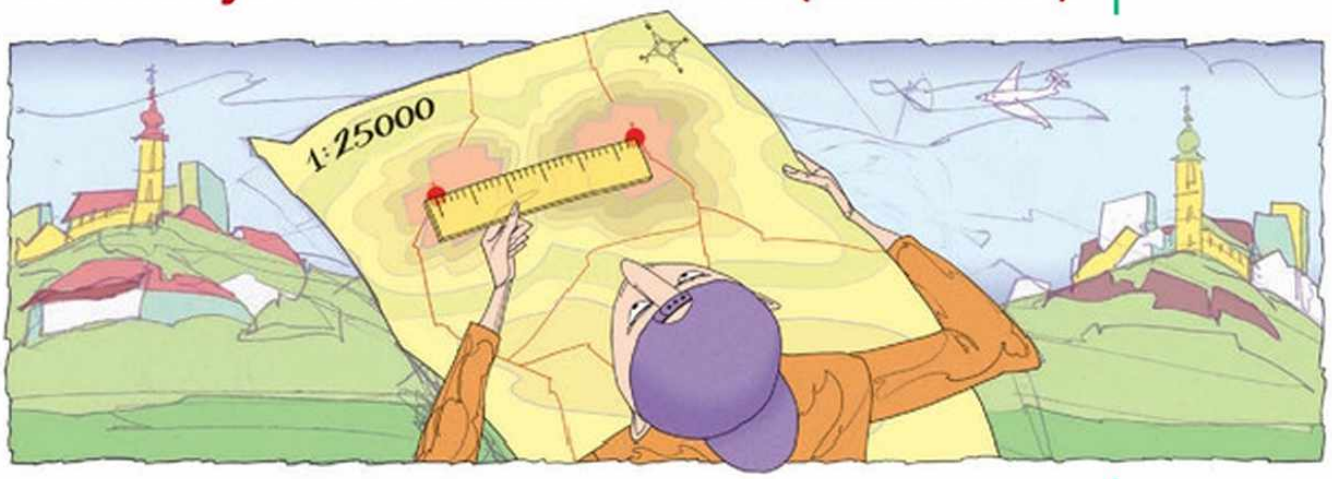
Írjunk a következő törtek közé műveleti jeleket, illetve használjunk zárójeleket úgy, hogy a végeredmény helyes legyen!

a) $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$;

b) $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}=1$;

c) $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}=0$.

3. Arányos következtetések (emlékeztető)



Két szám (mennyiség) *arányának* a két szám (mennyiség) hányadosát nevezzük. Például 12 és 16 aránya $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, másképpen $12 : 16 = 3 : 4$.

Arányokkal sok helyen találkozhatunk. Fontos szerepet kapnak a térképészetben, a fizikában, a képzőművészetben, de számos más területen is.

Keress olyan Magyarország-térképet, amelyen megtalálod a lakóhelyedet! Mérd meg a térképen, és számold ki, hogy légvonalban milyen messze van Szegedtől!

(Ha Szegeden laksz, akkor határozd meg a Budapesttől való távolságot!)

1. példa

Egy térkép méretaránya 1 : 25 000.

a) Hány kilométer távolságra van egymástól az a két falu, melyet ezen a térképen egymástól 10 cm-re találunk?

b) Mekkora a térképen az a távolság, ami a valóságban 10 km?

Megoldás

a) A térképen 1 cm a valóságban 25 000 cm = 250 m = 0,25 km-nek felel meg. Ezért 10 cm 10-szer akkora, vagyis $10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$ km távolságot jelent.

	Térképen	Valóságban	
· 10 ↓	1 cm	25 000 cm = 0,25 km	↓ · 10
	10 cm	10 · 25 000 cm = 2,5 km	

b) A 10 km-es távolság a 0,25 km-nek épp a $\frac{10}{0{,}25} = 40$-szerese, ezért ez a térképen 40 cm-nek felel meg.

	Valóságban	Térképen	
· 40 ↓	0,25 km = 25 000 cm	1 cm	↓ · 40
	10 km	40 · 1 cm = 40 cm	

Az arányosságoknak két fajtáját ismertük meg: az **egyenes arányosságot** és a **fordított arányosságot.**

Egyenes arányosság

2. példa

Vágjuk ki papírból az ábrán látható szöget, és mérjük meg egy mutatós óra segítségével!



Megoldás

1. Becsüljük meg a szöget! Körülbelül 60° lehet.
2. Állítsuk be az óra mutatóit úgy, hogy éppen akkora szöget zárjanak be egymással, mint amit papírból kivágtunk!
3. Olvassuk le, melyik időpontot mutatja ekkor az óra! Ez most a 12 óra 12 perc.
4. Számítsuk ki, mekkora szöget zárnak be az óra mutatói egymással 12 óra 12 perckor!



12 órakor az óra mutatói fedik egymást.

Számítsuk ki, mekkora szöggel fordulnak el a mutatók 12 perc alatt, ha tudjuk, hogy az eltelt idő és az elfordulás szöge egyenesen arányos!

Mekkora szöget zárnak be az óra mutatói 10 órakor, fél 11-kor, háromnegyed 12-kor?

Mérjük meg a szöget szögmérővel is, és hasonlítsuk össze az eredményeket!

Az órával való szögmérést pontosabbá tehetjük, ha a másodperceket is figyelembe vesszük.

Nagymutató	
eltelt idő	elfordulás szöge
60 perc	360°
1 perc	$\frac{360°}{60} = 6°$
12 perc	$12 \cdot 6° = 72°$

Kismutató	
eltelt idő	elfordulás szöge
12 óra	360°
1 óra = 60 perc	$\frac{360°}{12} = 30°$
1 perc	$\frac{30°}{60} = 0{,}5°$
12 perc	$12 \cdot 0{,}5° = 6°$

12 óra után 12 perc alatt a nagymutató 72°-os szöggel, a kicsi 6°-os szöggel fordult el, így az általuk bezárt szög $72° - 6° = 66°$, ami megfelel az előzetes becslésnek.

Tehát az ábrán látható szög nagysága 66°.

Fordított arányosság

3. példa

Zsiga az interneten az állatok sebességéről keresett adatokat.

A következőket találta:

cserebogár: $3\ \frac{m}{s}$; lazac: $5\ \frac{m}{s}$; háziméh: $6{,}5\ \frac{m}{s}$; gepárd: $30\ \frac{m}{s}$.

Mennyi idő alatt tennének meg ezek az állatok olyan hosszú utat, amely a cserebogárnak 1 percig tart?

A $3\ \frac{m}{s}$ sebesség azt jelenti, hogy a cserebogár 1 másodperc alatt 3 métert repül.

Megoldás

A megtett út hossza adott. Ha az időegység alatt megtett távolság (a sebesség) kétszeresére nő, akkor az adott távolság megtételéhez szükséges idő a felére csökken, azaz a sebesség és az idő között fordított arányosság van. Készítsünk táblázatot!

Állat	Sebesség	Időtartam	A megtett út
cserebogár	$3\frac{m}{s}$ ($\cdot\frac{5}{3}$)	1 perc = 60 s ($:\frac{5}{3}$)	$3\frac{m}{s} \cdot 60\,s = 180\,m$
lazac	$5\frac{m}{s}$ ($\cdot\frac{6,5}{3}$)	36 s ($:\frac{6,5}{3}$)	$5\frac{m}{s} \cdot 36\,s = 180\,m$
háziméh	$6,5\frac{m}{s}$ ($\cdot 10$)	$\frac{360}{13} \approx 27,7\,s$	$6,5\frac{m}{s} \cdot \frac{360}{13}\,s = 180\,m$
gepárd	$30\frac{m}{s}$	$60 : 10 = 6\,s$ ($:10$)	$30\frac{m}{s} \cdot 6\,s = 180\,m$

A lazac 36 s, a háziméh 27,7 s, a gepárd pedig 6 s alatt tesz meg annyi utat, mint amennyit a cserebogár 1 perc alatt.

Összetett feladatoknál a mennyiségek természete alapján dönthetjük el, hogy azok arányosak-e egymással, és ha igen, akkor egyenes vagy fordított arányosság van közöttük.

Következtetések arányos mennyiségek körében

4. példa

Ha egy 4 tagú család 4 hónap alatt 120 m^3 vizet fogyaszt, akkor

a) mennyit fogyaszt 2 ember 2 hónap alatt;

b) mennyi idő alatt fogyaszt el 8 ember 60 m^3 vizet;

c) hány ember fogyaszt el 120 m^3 vizet 1 hónap alatt?

(Feltételezzük, hogy mindegyik ember ugyanannyi vizet fogyaszt 1 hónap alatt.)

Megoldás

a) A vízfogyasztás egyenesen arányos az emberek számával és az eltelt hónapok számával is.

$$\begin{array}{lll} :2\begin{pmatrix}\searrow\\\searrow\end{pmatrix} & 4\text{ ember} & 4\text{ hónap alatt} \\ & 2\text{ ember} & :2\begin{pmatrix}\searrow\\\searrow\end{pmatrix} \\ & 2\text{ ember} & 2\text{ hónap alatt} \end{array} \qquad \begin{array}{l} :2\begin{pmatrix}\searrow\\\searrow\end{pmatrix} \\ \\ :2\begin{pmatrix}\searrow\\\searrow\end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 120\,m^3\text{ vizet fogyaszt;} \\ \\ 60\,m^3\text{ vizet fogyaszt;} \\ \\ 30\,m^3\text{ vizet fogyaszt.} \end{array}$$

Tehát 2 ember 2 hónap alatt 30 m^3 vizet fogyaszt.

Feleannyi ember feleannyi idő alatt negyedannyi vizet fogyaszt.

b) A vízfogyasztás egyenesen arányos az emberek számával és az eltelt hónapok számával is.

$$\cdot 2\left(\begin{array}{l}4 \text{ ember}\\ 8 \text{ ember}\end{array}\right.\quad \cdot 2\left(\begin{array}{l}120\ m^3 \text{ vizet fogyaszt}\\ 240\ m^3 \text{ vizet fogyaszt}\end{array}\right.\quad \text{4 hónap alatt;}$$

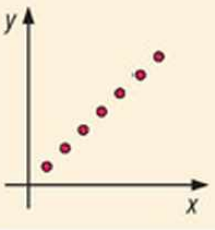
$$:4\left(\begin{array}{l}8 \text{ ember}\\ 60\ m^3 \text{ vizet fogyaszt}\end{array}\right.\quad :4\left(\begin{array}{l}\text{4 hónap alatt;}\\ \text{1 hónap alatt.}\end{array}\right.$$

Tehát 8 ember 60 m^3 vizet 1 hónap alatt fogyaszt el.

c) Ha a vízmennyiség állandó, az idő és az emberek száma közt fordított arányosság van.

$$\begin{array}{l}120\ m^3 \text{ vizet}\\ 120\ m^3 \text{ vizet}\end{array}\quad :4\left(\begin{array}{l}\text{4 hónap alatt}\\ \text{1 hónap alatt}\end{array}\right.\quad \cdot 4\left(\begin{array}{l}\text{4 ember fogyaszt el;}\\ \text{16 ember fogyaszt el.}\end{array}\right.$$

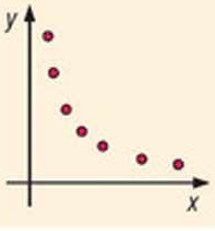
Tehát 16 ember fogyaszt el 120 m^3 vizet 1 hónap alatt.



y és *x* egyenesen arányos

$\frac{y}{x}$ = állandó

Ha két mennyiség egyenesen arányos egymással, akkor összetartozó értékpárjaik hányadosa állandó.



y és *x* fordítottan arányos

$x \cdot y$ = állandó

Ha két mennyiség fordítottan arányos egymással, akkor akkor összetartozó értékpárjaik szorzata állandó.

5. példa

Egy benzinkútnál az autónk tankjába 1 perc alatt 36 liter üzemanyagot tudunk betölteni. Egy Formula–1-es versenyautó tankolásakor másodpercenként 12 liter üzemanyagot pumpálnak a tartályba.

a) Mennyi ideig tartana az autónk tankolása a versenypályán, ha az a benzinkútnál másfél percig tartott?

b) Mennyi ideig tankolna Hamilton a versenyautójával annyi benzint egy benzinkútnál, mint amennyit a pályán nyolc másodperc alatt töltenek a tankjába?

Megoldás

a) A könnyebb összevetés érdekében érdemes megadnunk, hogy a benzinkútnál hány litert tankolhatunk másodpercenként.

A benzinkútnál a tankolási idő és a benzin térfogata között egyenes arányosság van.

$$:60\left(\begin{array}{ll}1 \text{ perc alatt} & 36 \text{ liter}\\ 1 \text{ másodperc alatt} & 0{,}6 \text{ liter}\end{array}\right):60$$

Tehát a benzinkútnál 1 másodperc alatt 0,6 litert tankolhatunk.

A tankolt benzin mennyisége és a tankolási idő hányadosa állandó, ez a tankolás sebessége.

Ha adott mennyiséget tankolunk, akkor a tankolás sebessége és a tankoláshoz szükséges idő között fordított arányosság van.

A tankolás sebessége $\left(\frac{l}{s}\right)$	Tankolási idő (s)
0,6	90
12	4,5

$\cdot 20$ (sebesség) és $\cdot \frac{1}{20}$ (idő)

Tehát a versenypályán 4,5 másodperc alatt tankolhatnánk.

b)

A tankolás sebessége $\left(\frac{l}{s}\right)$	Tankolási idő (s)
12	8
0,6	160

$\cdot \frac{1}{20}$ (sebesség) és $\cdot 20$ (idő)

Tehát Hamilton a versenyautót 160 s = 2 perc 40 másodperc alatt tudná a benzinkútnál megtankolni.

A tankolás sebességének és a tankolási időnek a szorzata állandó, ez a tankolt üzemanyag mennyisége.

Feladatok

1. Egy térkép méretaránya 1 : 1 500 000.
   a) Mekkora távolságot jelent a valóságban a térképen mért 5 cm?
   b) Ha két város 225 km-re van egymástól, akkor mekkora távolságra vannak jelölve a térképen?

2. Milyen méretarányú a térkép, ha a valóságban Tapolca és Balatonboglár légvonalban mért távolsága 20 km? (➡)



3. Válasszuk ki, hogy mely mennyiségek között van egyenes, melyek között fordított arányosság, és melyek között nincs egyik sem!
   a) Egy edényben lévő víz tömege és térfogata között;
   b) egy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző autó által megtett út és az idő között;
   c) egy gyerek testmagassága és az életkora között;
   d) egy könyv lapjainak száma és a könyv vastagsága között;
   e) egy autó országúti átlagfogyasztása és a tele tankkal országúton megtehető kilométerek száma között.

4. Egy autó 5 óra alatt 600 km-t tett meg. Mekkora utat tesz meg ez az autó ugyanekkora átlagsebességgel 8 és fél óra alatt?

5. Egy iskolai menzán 70 adag pörkölthöz 10,5 kg húst használtak fel. Mennyi hús szükséges 100 adag pörkölt elkészítéséhez?

6. 30 kg szőlőt 20 dobozba csomagolnak. Hány ugyanilyen doboz szükséges 150 kg szőlő becsomagolásához?

7. Otthon gyümölcslevet készítettünk. 25 db 7 dl-es üveg lett tele. Hány 12,5 dl-es üvegbe fért volna el ez a mennyiség?

8. Egy repülőgép sebessége 1000 $\frac{km}{h}$, egy másiké ennek $\frac{3}{5}$ része. Ha az első egy utat 3 óra alatt tesz meg, akkor mennyi időbe telik ez a másik gépnek?

9. Egy csapon percenként 10 liter víz folyik egy kádba, így az 20 perc alatt telik meg. Mennyi ideig tartana a kád feltöltése egy olyan csappal, amelyen 25 liter víz folyik át percenként?

10. Egy kacsa felhizlalásához 10 kg kukorica szükséges. Hány kilogrammal több kukorica kell 20 kacsa felhizlalásához, mint 15-éhez?

11. 5 gyerek 2 óra alatt 80 szendvicset készített egy szülinapi zsúrra. Hány szendvicset készítene el 12 gyerek 3 óra alatt?

*12. Ha 3 egér 4 nap alatt 5 sajtot eszik meg, akkor 5 egér hány nap alatt eszik meg 10 sajtot?

*13. András, Balázs és Csaba kirándulni mentek. András 4, Balázs 5 szendvicset vitt magával, Csaba viszont otthon felejtette a tízóraiját. Végül egyformán osztoztak a szendvicseken, de Csaba ragaszkodott hozzá, hogy kifizesse a részét. Ezért fizetett a többieknek 450 Ft-ot. Hogyan osszák el az összeget egymás közt a fiúk?

*14. Egy napkollektor a bojlerünkben tárolt víz hőmérsékletét 30 perc alatt 1 °C-kal emeli meg. Egy másik ugyanezt 40 perc alatt végzi el. Mennyi ideig tartana ez a melegítés, ha mindkét napkollektort bekapcsolnánk?

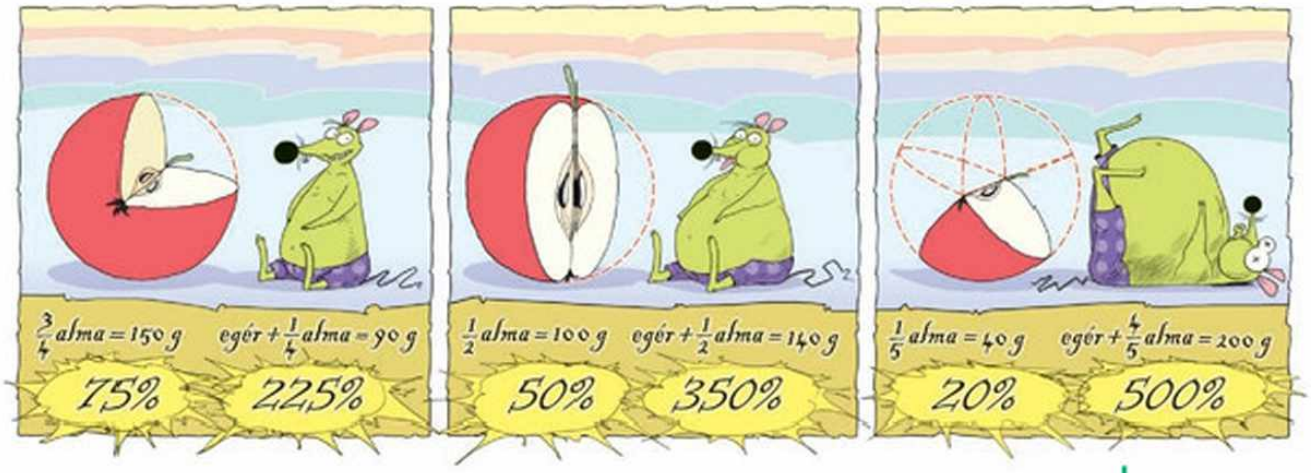


15. Túl az Óperencián egy táltos ló ára 100 arany meg egy öszvér. Egy öszvér ára 20 arany meg egy fél malac. Egy malac ára 10 arany meg egy negyed kacsa. Mennyibe kerül a táltos, ha a kacsáért 8 aranyat kell fizetni?

Rejtvény

A hét első napján délben 10 $\frac{km}{h}$-ás szél fúj. A második napon, kedden délben 20 $\frac{km}{h}$ a szél sebessége. A harmadik napon, szerdán délben 30 $\frac{km}{h}$-ás a szél. Milyen erős szél fúj ezek után a negyedik napon, csütörtökön délben?

4. Százalékszámítás (emlékeztető)



A mindennapi életben a mennyiségeket sokszor nem a nagyságuk, hanem az egymáshoz viszonyított arányuk alapján hasonlítjuk össze. Ezt az arányt százalékban is kifejezhetjük.

Például a 40% jelentése: $\frac{40}{100}$ rész = $\frac{2}{5}$ rész = 0,4 rész.

1 egész = 100%

Ugyanakkor a törtrészeket is felírhatjuk százalékos alakban.

Pl.: $\frac{3}{4}$ rész = $\frac{75}{100}$ rész = 0,75 rész = 75%.

1. példa

A táblázat annak az 50 vásárlónak az életkorát mutatja, akik a Harry Potter sorozat utolsó kötetének megjelenésekor először léptek be egy könyvesboltba.

Az életkor (év)	11	12	13	14	15	16	17
A vásárlók száma	6	12	15	5	8	3	1

a) Adjuk meg, hogy a vásárlók hány %-a volt 11 éves, 12 éves stb.!

b) Ábrázoljuk az adatokat kördiagramon!

Megoldás

a) Mivel 50 vásárló adatait tüntették fel, ezért a százalékos arányok könnyen adódhatnak, ha az 50 nevezőjű törteket 2-vel bővítjük.

A 11 évesek aránya az összes vásárló számához viszonyítva:

$$\frac{6}{50} = \frac{12}{100},\ \text{azaz } 12\%.$$

A többi adatot hasonlóan felírva a következő eredményt kapjuk:

Az életkor (év)	11	12	13	14	15	16	17
A vásárlók százalékos aránya (%)	12	24	30	10	16	6	2

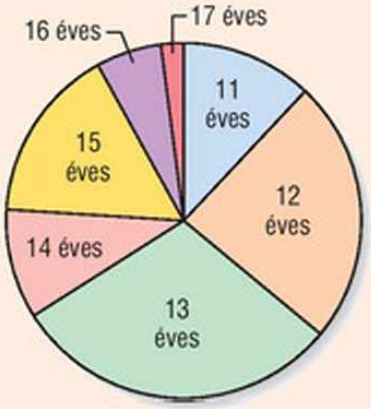
b) A kördiagram elkészítéséhez a táblázatban szereplő arányoknak megfelelően kell felosztanunk a 360°-os teljes szöget.

Így a 11 évesek esetén a megfelelő szög nagysága a 360° 12%-a:

$$360° \cdot \frac{12}{100} = 360° \cdot 0{,}12 = 43{,}2°.$$

A többi szöget hasonlóan kiszámolhatjuk:

Az életkor (év)	11	12	13	14	15	16	17
A középponti szög nagysága (°)	43,2	86,4	108	36	57,6	21,6	7,2



2. példa



Egy autó motorjának fogyasztása a légellenállás csökkentésével 15%-kal csökkent. Mennyi lesz a fogyasztása a csökkenés után, ha az autó kezdetben 8 liter üzemanyagot fogyasztott 100 km-en?

Megoldás

1. módszer: Meghatározzuk a csökkenés mértékét, a 8 liter 15%-át:

$$8 \cdot \frac{15}{100} = 8 \cdot 0{,}15 = 1{,}2.$$

Majd ezt kivonjuk az eredeti fogyasztásból:

$$8 - 1{,}2 = 6{,}8.$$

Tehát a fogyasztás 6,8 liter lesz 100 km-en.

2. módszer: Az autó fogyasztása (100%) 15%-kal csökkent, így

$$100\% - 15\% = 85\%\text{-ra változott.}$$

A 8-nak a 85%-a a 0,85-szorosa:

$$8 \cdot 0{,}85 = 6{,}8 \text{ liter.}$$

15%-kal csökken
↓
85%-a lesz
↓
0,85-szorosa lesz

3. példa

Egy téglalap oldalainak hossza 10 cm és 20 cm. Közülük a nagyobbikat 10%-kal növeltük, a kisebbet pedig 10%-kal csökkentettük.

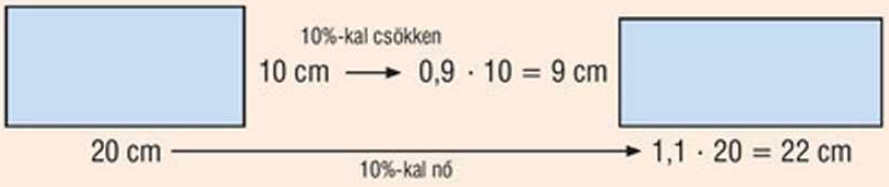
a) Hány százalékkal változott a téglalap kerülete?

b) Hány százalékkal változott a téglalap területe?

10%-kal csökken
↓
90%-a lesz
↓
0,9-szerese lesz

Megoldás

a)



10%-kal nő
↓
110%-a lesz
↓
1,1-szerese lesz

A kerület 10 cm + 10 cm + 20 cm + 20 cm = 60 cm-ről

9 cm + 9 cm + 22 cm + 22 cm = 62 cm-re változott.

Az új és a régi kerület aránya: $\frac{62}{60} = 1{,}0\dot{3}$.

A kerület $1{,}0\dot{3}$-szorosra nőtt → $103{,}\dot{3}$-a lett → $3{,}\dot{3}$%-kal nőtt.

$0{,}9 \cdot 1{,}1 = 0{,}99$

b) A terület $10 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2$-ről

$9 \text{ cm} \cdot 22 \text{ cm} = 198 \text{ cm}^2$-re csökkent.

Az új és a régi terület aránya: $\frac{198}{200} = \frac{99}{100} = 0{,}99$.

A terület $0{,}\dot{9}\dot{9}$-szorosa lett → $9\dot{9}$%-a lett → 1%-kal csökkent.

4. példa

A nyári vásárkor a 30%-os leértékelés után egy papucs ára 2100 Ft.

a) Mennyi volt az eredeti ára?

b) Hány százalékkal csökken az ára az eredetihez viszonyítva, ha újra 30%-kal leértékelik?

Megoldás

a) Az eredeti ár a 100%, ennek 70%-a 2100 Ft.

30%-kal csökken
↓
70%-a lesz
↓
0,7-szerese lesz

$$: 0{,}7 \left(\begin{array}{ccc} 70\% & \rightarrow & 2100 \text{ Ft} \\ 100\% & \rightarrow & ? \end{array} \right) : 0{,}7$$

$$\frac{2100}{0{,}7} = 3000.$$

A papucs eredeti ára 3000 Ft volt.

b) Az új ár is 30%-kal csökken:

$$2100 \cdot 0{,}7 = 3000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 3000 \cdot 0{,}49.$$

Így az eredeti ár 0,49-szorosa lesz → 51%-os csökkenés.

Tehát az eredeti árhoz viszonyítva 51%-kal csökken az ára.

Feladatok

1. Mennyit kapunk, ha a 100-at

a) $\frac{2}{5}$-del csökkentjük; *b)* $\frac{2}{5}$ részével csökkentjük;

c) $\frac{2}{5}$ részére csökkentjük?

2. Hányszorosára változik az 1000, ha

a) 20%-kal nő; *b)* 20%-kal csökken;

c) 200%-kal nő; *d)* 200-zal nő;

e) 200%-ra változik; *f)* 200-ad részére változik?

3. Mennyit kapunk, ha az 500

a) 50%-kal nő; *b)* 50-nel nő;

c) 50%-ra változik; *d)* 50-ed részére változik?

4. Hány %-kal változik a 400, ha

a) kétszeresére növeljük; *b)* felére csökkentjük;

c) másfélszeresére növeljük; *d)* ötszörösére növeljük;

e) ötödrészére csökkentjük; *f)* 500-ra növeljük?

5. Hányszorosára változik a cipő ára, ha

a) 25%-kal nő; *b)* 8%-kal csökken?

6. Hány százalékkal változott egy színházban a bérlettel rendelkezők száma, ha

a) 1,4-szeresére növekedett; *b)* negyedével nőtt?

7. Az állatóvodában egy hónap alatt a medvebocs 40 kg-ról 50 kg-ra, míg az elefántbébi 120 kg-ról 140 kg-ra hízott. Melyik nőtt nagyobb mértékben?

8. A futballmérkőzések nézőinek átlagosan 20%-a nő. Átlagosan hány férfi szurkoló van jelen egy olyan mérkőzésen, melyet 45 000-en tekintenek meg? Készítsünk kördiagramot a labdarúgó-mérkőzéseket látogató férfiak és nők arányáról!



9. A Bajnokok Ligája döntő mérkőzésére 75 000 jegyet adnak el, mégpedig a következő szabályok alapján:

- A döntőben szereplő mindkét csapat szurkolói megkapják a jegyek 30-30%-át.
- A szervezők fenntartanak maguknak 1%-ot.
- A bajnokságban részt vevő csapatok között szétosztanak 15%-ot.
- A Nemzetközi Labdarúgó Szövetség rendelkezik a jegyek 20%-val.
- A maradék jegyet ismert személyiségeknek tartják fenn.

Hány jegyet kapnak az egyes csoportok külön-külön?

10. A diákok 15%-a hoz magával szendvicset az iskolába. Hányan vannak ők, ha az iskola létszáma 1200 fő?

11. Hány százalékkal változik egy 1000 Ft-os áru ára, ha

a) először 8%-kal növelik, majd 8%-kal csökkentik az árát?

b) először 7%-kal csökkentik, majd 7%-kal növelik az árát?

12. Egy erdő fáinak 20%-a fenyő, a többi tölgy. Hány százaléka a fenyőfák száma a tölgyfák számának?

13. Hányszorosára változik annak a 100 kg-os bálnabébinek a tömege, amelyik 400%-kal lesz nagyobb?

14. Egy 10 cm-es oldalú négyzet oldalait 10%-kal megnöveltük.

a) Hány százalékkal növekedett a négyzet kerülete?

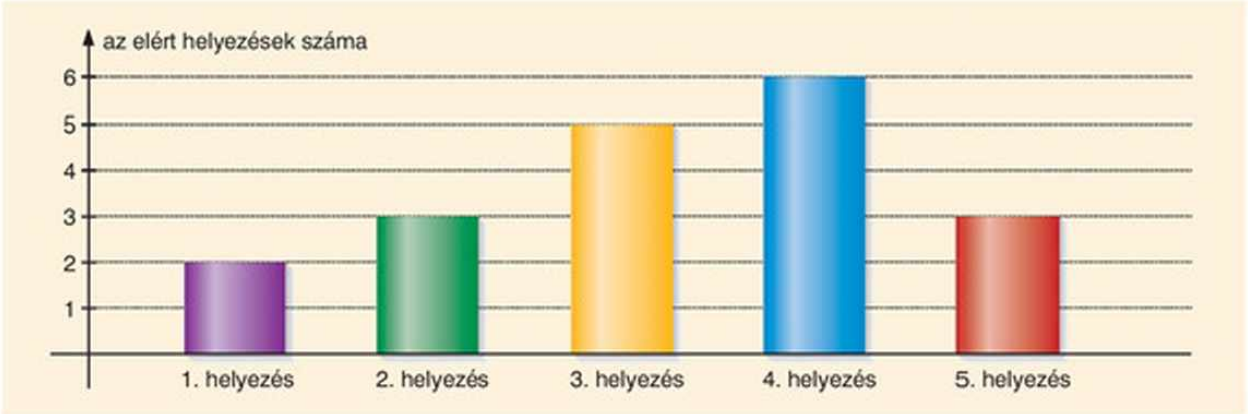
b) Hány százalékkal növekedett a négyzet területe?

15. Egy téglalap oldalainak hossza 10 cm és 20 cm. Közülük a nagyobbikat 15%-kal növeltük, a kisebbet pedig 15%-kal csökkentettük.

a) Hány százalékkal változott a téglalap kerülete?

b) Hány százalékkal változott a téglalap területe?

16. Barnabás nagyon szeret sakkozni, ezért gyakran vesz részt versenyeken, és az elért helyezéseiről statisztikát vezet. Az alábbi diagram az elmúlt évi versenyeken elért helyezéseinek számát mutatja.



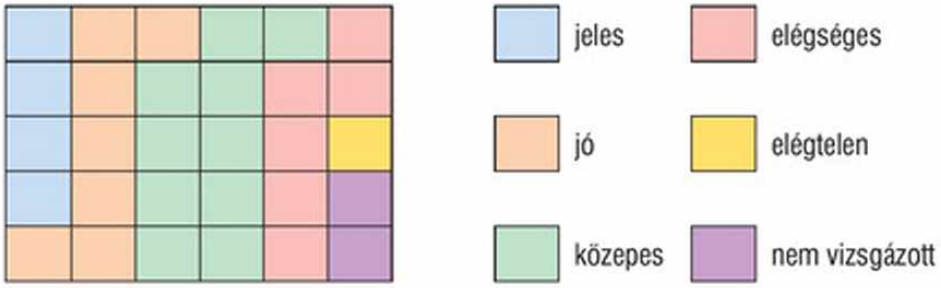
a) Hány versenyen indult összesen, ha minden versenyén az első ötben végzett?

b) A versenyek hány százalékát nyerte meg?

c) A versenyek hány százalékában végzett a dobogón?

d) Készítsünk kördiagramot a helyezésekről!

17. A következő ábra egy osztály által elért vizsgaeredményeket szemlélteti.



a) Készítsünk táblázatot az elért eredményekről!
b) Adjuk meg az elért eredmények százalékos arányát!
c) Ábrázoljuk az eredményt oszlopdiagramon és kördiagramon!

18. A következő táblázat a 7. osztály matematikadolgozatainak eredményét mutatja.
a) Adjuk meg az egyes csoportokban található diákok százalékos arányát! Eredményünket szemléltessük diagramon!
b) Számítsuk ki, hogy mennyi lett az osztályzatok átlaga!

Érdemjegyek	jeles (5)	jó (4)	közepes (3)	elégséges (2)	elégtelen (1)	nem írt
Tanulók száma	3	8	10	6	1	2

19. Egy téglalap kerülete 42 cm, az egyik oldala 75%-a a másiknak. Mekkorák az oldalai? Mekkora a területe?

20. Egy Formula–1-es versenyautó a verseny első 40 km-én elfogyasztotta az üzemanyaga 20%-át. A következő 10 km-en 7 litert fogyasztott. Feltételezve, hogy a motor fogyasztása egyenletes volt,
a) mennyi volt az autó fogyasztása 100 km-en;
b) hány liter üzemanyaggal vágott neki a futamnak a versenyautó?

***21.** Egy könyv eladási árát 10%-kal leszállították. Ezen a könyvön így a bolt haszna csak 8% lett. (A haszon számításának alapja a könyv beszerzési ára.) Hány százalék volt a könyvesbolt haszna az árleszállítás előtt?

***22.** A 2 és az $\frac{1}{2}$ egymás reciprokai. A 2-t 25%-kal megnöveljük. Hány százalékkal kell az $\frac{1}{2}$-et csökkenteni, hogy továbbra is egymás reciprokai legyenek?

Rejtvény

Mi hiba az alábbi újságcikkben?

„Néhány éve az autósok $\frac{1}{6}$ része lépte túl a sebességkorlátozást. Az ellenőrzéseknek köszönhetően ezeknek a gyorshajtóknak ma már csak $\frac{1}{5}$ része követ el sebességtúllépést, azonban ez még mindig az autósok 5%-a."

5. Kamatszámítás. Gazdálkodj okosan!



1. példa

Peti kinézett egy kerékpárt, melynek ára 20 000 Ft. A kereskedő felajánlotta neki, hogy 10 000 Ft befizetésével is hazaviheti és használhatja. A hiányzó összeget elég egy év múlva megfizetnie, viszont arra a kereskedő 15% hitelkamatot számít fel. Mennyibe kerül így ténylegesen a kerékpár?

Megoldás

A hiányzó összeg $20\,000 - 10\,000 = 10\,000$ Ft.

Ezt kapja meg hitelként Peti, melynek 15%-kal megnövelt értékét kell majd visszafizetnie.

$$10\,000 \cdot 1{,}15 = 11\,500 \text{ Ft.}$$

Így a kerékpár ára ténylegesen $10\,000 + 11\,500 = 21\,500$ Ft lesz.

15%-os kamat
15%-os növekedés
↓
115%
↓
1,15-szoros

A kamatos kamat

Ha több évre bankba tesszük a pénzünket, akkor a 8%-os éves kamat azt jelenti, hogy a bank minden év lejártakor megnöveli a bent lévő összeget annak 8%-ával. Dönthetünk úgy, hogy a következő évben a megnövelt összeg kamatozzon tovább. Az így számított kamat a **kamatos kamat.**

2. példa

Nóra elhatározza, hogy a megtakarított 5000 forintját három éven keresztül bent tartja a bankban, mely a pénzéért 8%-os éves kamatot fizet.

a) Mennyi pénze lesz három év múlva? Hány százalékos növekedést jelent ez az eredeti összeghez képest?

**b)* Hány év alatt érné el a pénze a 7500 Ft-ot?

Megoldás

a) Nóra pénze
1 év múlva $5000 \cdot 1{,}08 = 5400$ Ft.
2 év múlva $5400 \cdot 1{,}08 = 5832$ Ft.
3 év múlva $5832 \cdot 1{,}08 = 6298{,}56$ Ft.

8%-os kamat
8%-os növekedés
↓
108%
↓
1,08-szoros

Számoljunk számológéppel!

1,2598-szeres
↓
25,98%-os növekedés

Az összeg tehát 3 év alatt a következő értékre nő:

$$\underbrace{\underbrace{(5000 \cdot 1{,}08)}_{1\text{ év}} \cdot 1{,}08}_{2\text{ év}} \cdot 1{,}08 = 6298{,}56 \approx 6299.$$

Mivel $\frac{6299}{5000} = 1{,}2598$, ezért ez 25,98%-os növekedésnek felel meg.

*b) Láthattuk, hogy 3 év nem elegendő.

4 év múlva: $(((5000 \cdot 1{,}08) \cdot 1{,}08) \cdot 1{,}08) \cdot 1{,}08 \approx 6802$.

5 év múlva: $((((5000 \cdot 1{,}08) \cdot 1{,}08) \cdot 1{,}08) \cdot 1{,}08) \cdot 1{,}08 =$

$= 5000 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08 =$

(a zárójelek elhagyhatók)

$$= 5000 \cdot \underbrace{1{,}08 \cdot \ldots \cdot 1{,}08}_{5\text{ tényező}} \approx 7347.$$

(Ha nem szeretnénk leírni az összes azonos tényezőt, akkor ezek létezésére a „...” jelöléssel utalhatunk.)

6 év múlva: $5000 \cdot \underbrace{1{,}08 \cdot 1{,}08 \cdot \ldots \cdot 1{,}08}_{6\text{ tényező}} \approx 7934 > 7500$.

8%-os kamat esetén Nórának legalább 6 évet kell várnia, hogy a pénze elérje a 7500 Ft-ot.

3. példa

Van 15 000 forintunk, melyet a lehető legkedvezőbb feltételekkel szeretnénk kamatoztatni három éven keresztül. Válasszuk ki a legjobb ajánlatot az alábbi lehetőségek közül!

a) A Spóri Bank 10%-os éves kamatot ajánl fel.

b) A Pazar Bank minden évben 1600 Ft-ot hozzáad a befizetett összeghez.

c) A Gavallér Bank pedig a három év elteltével 30%-kal növeli meg a befizetett összeget.

Hova célszerű elhelyeznünk a pénzt?



Megoldás

Azt az ajánlatot célszerű választanunk, amellyel a legtöbbet nyerünk.

a) A Spóri Bank ajánlata alapján

$$15\,000 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 = 19\,965 \text{ Ft-unk lesz.}$$

b) A Pazar Bank három év múlva

$$15\,000 + 1600 + 1600 + 1600 = 19\,800 \text{ Ft-ot fizetne ki.}$$

c) A Gavallér Bank által kifizetendő összeg

$$15\,000 \cdot 1{,}3 = 19\,500 \text{ Ft lenne.}$$

Ezek alapján a Spóri Bank ajánlatát célszerű elfogadnunk.

Feladatok

1. Egy bankban 10 000 Ft-ot helyezünk el évi 7%-os kamatra.
   a) Mennyi pénzünk lesz egy év múlva?
   b) Mennyi pénzünk lesz három év múlva?
   c) Hány százalékkal nő meg a pénzünk három év alatt?



2. Életük első hónapjában a fókabébik tömege naponta 5%-kal nő. Egy fókabébi a megszületésekor 10 kg volt.
   a) Mekkora lesz a tömege 1 nap múlva?
   **b)* Hány nap elteltével éri el a tömege a 12 kg-ot?

3. Van 10 000 forintunk. Mennyit ér majd ez a pénzünk 5 év múlva, ha minden évben 3%-ot veszít az értékéből?

4. Mennyi pénzt kell elhelyeznünk a bankban ahhoz, hogy egy év múlva 5%-os kamat mellett 20 000 Ft-ot kapjunk érte?

5. Mennyi pénzt kell elhelyeznünk a bankban ahhoz, hogy évi 5%-os kamat mellett három év alatt 20 000 Ft-unk legyen?

6. Lilla 10 000 Ft-ját 5%-os éves kamat mellett köti le a bankban négy évre.
   a) Mennyi pénzt vehet majd fel négy év múlva?
   **b)* Mennyi idő múlva lenne a betét értéke 20 000 Ft?

7. Hitelként 20 000 Ft-ot veszünk fel 25%-os kamatra. Mennyit kell visszafizetnünk, ha egy év múlva egy összegben törlesztünk?

8. Szeretnénk egy 50 000 Ft értékű számítógépet venni. Sajnos csak 30 000 Ft-ot sikerült összegyűjtenünk. A boltban mégis megkaphatjuk a gépet, ha a megmaradó részletet egy év elteltével 10%-os hitelkamattal fizetjük vissza. Mennyibe fog kerülni ténylegesen a gép?

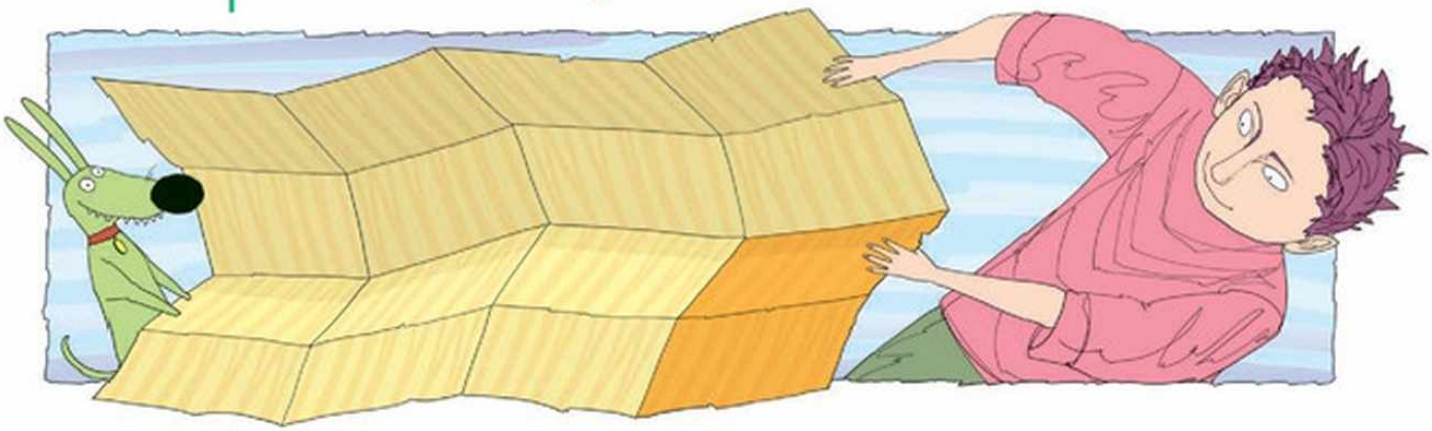
9. Takarékos Józsi összegyűjtött 50 000 Ft-ot. Érdemes-e a pénzét 2 hónapra betennie a bankba, ha a bank 1 hónapra 0,5% kamatot fizet, és a pénzfelvétel díja 0,15%, de legalább 500 Ft?

*10. Ákos elhatározta, hogy négy éven keresztül takarékoskodni fog, és minden év elején 20 000 Ft-ot helyez el a bankban 5%-os éves kamat mellett.
   a) Mennyi pénze lesz így a negyedik év végén?
   b) Mennyi pénze lesz, ha ezután még négy évig bent hagyja a pénzét a bankban?

Rejtvény

Egy felmérés során az autósok utazási szokásait vizsgálták. Megállapították, hogy a személyautók 40%-ában kettő vagy több ember utazott. Ha a személyautóban csak a vezető ült, akkor a vezető az esetek 25%-ában nő volt. Az összes személyautó hány százalékában utazott pontosan egy férfi?

6. A hatványozás



Tudjuk, hogy ha sokszor össze kell adnunk egy számot, akkor az ismételt összeadást egyszerűbben szorzással is kifejezhetjük:

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 6 \cdot 2.$$

Miért ne tehetnénk valami hasonlót, ha a szorzásnál a tényezők azonosak? Erre a hatványozás műveletét vezetjük be.

1. példa

Egy terem oldalainak hossza 5 m.

a) Mekkora az alapterülete?

b) Mekkora a térfogata, ha a magassága szintén 5 m?

Megoldás

a) Az alapterülete: $5 \cdot 5 = 25$ (m^2).

b) A terem térfogata: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ (m^3).

$3 \cdot 3 = 3^2$
• három a másodikon
• három második hatványa
• három a négyzeten
• három a négyzetre emelve

Az $5 \cdot 5$, két azonos tényezőből álló szorzatot röviden így jelöljük:

$$5 \cdot 5 = 5^2,$$

és **5 második hatványának**, másként **öt a másodikonnak** is nevezzük. Úgy is mondhatjuk, hogy **ötöt a második hatványra emeljük.**

Az 5 a **hatványalap:** az ismétlődő tényező;
a 2 pedig a **hatványkitevő:** a szorzatban az azonos tényezők száma.

hatványalap —— 5^2 —— **hatványkitevő**

hatvány

A második hatvány külön elnevezést is kap. 5^2-t szokás **öt a négyzetennek** is mondani. $5^2 = 25$, ahol 25 a **hatvány értéke.**

Azokat a számokat, amelyek egy egész szám második hatványaként állnak elő, **négyzetszámoknak** nevezzük.

Az első tíz pozitív egész szám **négyzete:**

$1^2 = 1$;
$2^2 = 4$;
$3^2 = 9$;
$4^2 = 16$;
$5^2 = 25$;
$6^2 = 36$;
$7^2 = 49$;
$8^2 = 64$;
$9^2 = 81$;
$10^2 = 100$.

A három 5-ös tényezőt tartalmazó szorzatot 5^3-nal jelölhetjük:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3.$$

Így olvashatjuk ki:
- **öt harmadik hatványa,**
- **öt a harmadikon,**
- **öt a köbön,**
- **öt a harmadikra emelve.**

Azokat a számokat, amelyek egy egész szám harmadik hatványaként állnak elő, **köbszámoknak** szokás nevezni.

Az első tíz pozitív egész szám **köbe:**

$1^3 = 1$;
$2^3 = 8$;
$3^3 = 27$;
$4^3 = 64$;
$5^3 = 125$;
$6^3 = 216$;
$7^3 = 343$;
$8^3 = 512$;
$9^3 = 729$;
$10^3 = 1000$.

2. példa

Ákos elhatározza, hogy egy nagyméretű, 0,1 mm vastag papírlapot felezve összehajtogat. Milyen vastag lenne az összehajtott lap akkor, ha a hajtogatást képes lenne 20-szor egymás után megismételni?

Megoldás

Először határozzuk meg, hány lap vastagságú lenne a papír a 20. hajtogatás után! Az egymásra kerülő lapok száma minden egyes félbehajtás során megkétszereződik.

Az első hajtás után 2 réteg kerül egymásra.

A második után $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ réteg kerül egymásra.

A harmadik után $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ réteg kerül egymásra.

A hajtogatást folytatva a 20. után összesen

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{20 tényező}}$$ réteg kerül egymásra.

Ezt a 20 tényezős szorzatot jelölhetjük rövidebben is: 2^{20}.

Ha ezt a szorzatot kiszámítjuk, akkor 1 048 576-ot kapunk eredményül, ami azt jelenti, hogy a „lap” vastagsága

$$1\,048\,576 \cdot 0{,}1 \text{ mm} = 104\,857{,}6 \text{ mm} = 104{,}8576 \text{ m}$$ lenne!

Ha megpróbálunk egy lapot összehajtogatni, akkor látni fogjuk, hogy már 5-6 hajtogatás után is nehéz folytatni.

DEFINÍCIÓ: Jelöljön *a* egy tetszőleges számot, *n* pedig legyen pozitív egész szám! Ekkor *a n*-edik hatványának nevezzük azt az *n* tényezős szorzatot, melynek minden tényezője *a*. Jele a^n (*a* az *n*-ediken).

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}.$$

Az *a*-t a hatvány alapjának, az *n*-et kitevőnek nevezzük.

Minden szám első hatványa önmaga, azaz $a^1 = a$.

A **definíció** latin eredetű szó. Jelentése: pontos meghatározás, amely valamely fogalom vagy tárgy lényeges tulajdonságait írja le. A matematika felépítésében nagyon fontos szerepet kapnak a definíciók a fogalmak pontos meghatározásában.

$a^2 = a \cdot a$
$a^3 = a \cdot a \cdot a$
$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$

$0^1 = 0$;
$0^2 = 0$;
$0^3 = 0$; ...

0-nak minden pozitív egész kitevőjű hatványa 0.

$1^1 = 1$;
$1^2 = 1$;
$1^3 = 1$; ...

1-nek minden hatványa 1.

3. példa

Írjuk fel hatvány alakban a következő szorzatokat! Írjuk le szavakkal is a kapott eredményt!

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; *b)* $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;

c) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; *d)* $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$.

Megoldás

A hatványalap az azonos szorzótényező, a kitevő a tényezők száma.

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$, három a negyediken.

b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$, kettő az ötödiken.

c) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$, öt a hatodikon.

d) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3$, mínusz kettő a harmadikon.

4. példa

Írjuk fel szorzat alakban a következő hatványokat, és számítsuk ki az értéküket!

a) 2^6; *b)* $(-3)^5$; *c)* $0{,}1^3$; *d)* $\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

Megoldás

a) $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$;

b) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$;

c) $0{,}1^3 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$;

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$.

5. példa

Írjuk fel a 3; a -1 és a -3 első öt pozitív egész kitevős hatványát!

Megoldás

$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$
$(-1)^1 = -1$	$(-1)^2 = 1$	$(-1)^3 = -1$	$(-1)^4 = 1$	$(-1)^5 = -1$
$(-3)^1 = -3$	$(-3)^2 = 9$	$(-3)^3 = -27$	$(-3)^4 = 81$	$(-3)^5 = -243$

Láthatjuk, hogy a negatív számok páros kitevőjű hatványa mindig pozitív, páratlan kitevőjű hatványa pedig mindig negatív.

Figyeljünk az előjelekre és a zárójelek használatára!

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16,$$

ugyanakkor $$-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16.$$

Feladatok



1. Írjuk fel és számítsuk ki a következő kifejezéseket!

a) három a négyzeten;
b) öt a köbön;
c) hét a harmadikon;
d) tíz a negyediken;
e) kettő a hatodikon;
f) hat a köbön;
g) nyolc negyedik hatványa;
h) ezer az elsőn.

2. Írjuk fel hatvány alakban a következő szorzatokat! Írjuk le szavakkal is a kapott hatványt!

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;
b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
c) $0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1$;
d) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$;
e) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
f) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$.

A következő feladatok megoldásaiban segítségünkre lehet a számológép.

3. Szorozzuk meg a 2-t önmagával addig, amíg eredményünk el nem éri az 500-at! Írjuk fel a kapott szorzatot hatvány alakban is!

4. Határozzuk meg a következő hatványok értékét!

a) 4^3; *b)* 5^4; *c)* 6^3; *d)* 8^2; *e)* 10^4; *f)* 7^5.

5. Állítsuk növekvő sorrendbe a következő hatványokat, szorzatokat!

a) 2^4; 4^2; 3^4; 4^3;

b) 2^3; 3^2; $(-2)^3$; $(-3)^2$;

c) $2 \cdot 3^3$; $2 \cdot (3^3)$; $(2 \cdot 3)^3$; $2^3 \cdot 3$;

d) $\frac{1}{2} \cdot 2^5$; $\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^5$; $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 2$; $\frac{1}{2} \cdot (2)^5$.

6. Melyik a nagyobb szám?

a) 101^{100} vagy 100^{99}; *b)* 100^{101} vagy 101^{101}; *c)* 101^{100} vagy 101^{101}?

7. Melyik a nagyobb szám? $A = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ vagy $B = \frac{2^2}{3}$?

8. Állítsuk növekvő sorrendbe a következő hatványokat: 3^4; $(-2)^6$; -5^4; $(-4)^3$!

9. Játsszunk! Mindenki írja fel 4 kártyára pirossal, 4 kártyára pedig kékkel az 1; 2; 3; 4 számokat! Mindegyik színű kártyából véletlenszerűen húzzunk egyet-egyet! A piros szám egy hatvány alapját, a kék pedig a kitevőjét jelentse! Az nyer, aki a legnagyobb számot kapja.

a) Mekkora a legkisebb és a legnagyobb így kapható hatvány?

b) Hányféle hatványt kaphatunk?

c) Állítsuk a lehetséges hatványokat növekvő sorrendbe!

10. Egy fehér és egy piros dobókockával dobunk. A fehér kockával dobott szám legyen egy hatvány alapja, a piros pedig a hatvány kitevője.

a) Melyik az így felírható legkisebb és legnagyobb hatvány?

b) Melyik szám nagyobb, az 5^6 vagy a 6^5?

c) Hányféle hatványt kaphatunk eredményül?

d) Hányféle eredményt kaphatunk?

11. Egy 2003-ban megjelent adat szerint a Földön található ritka és veszélyeztetett állatfajok számát 5000 körülire becsülték. A számítások szerint az életterük csökkenése miatt ezeknek a fajoknak évente 12%-a kipusztul. Mennyi marad meg belőlük 2010-re?







12. Egy baktériumtenyészet percenként osztódással szaporodik. 10 perc elteltével hány baktérium alakul ki egyetlen egyedből? Hány baktérium lesz egy óra múlva? Lehetséges ez?

13. 10 000 Ft-ot betettünk egy bankba. Öt év elteltével a kapott pénz nagyságát a $10\,000 \cdot 1{,}07^5$ művelettel számolhatjuk ki.

a) Hány % az éves kamat?

b) Mennyi pénzt kaphatunk vissza öt év múlva?

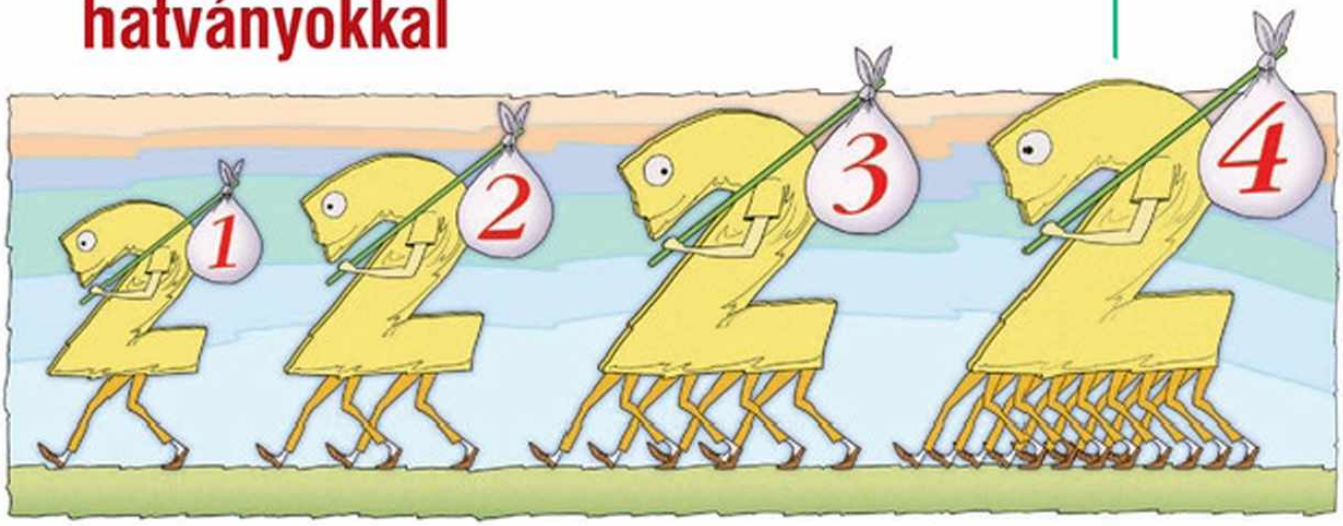
c) Ha az éves kamat 8% lenne, akkor mennyit érne a pénzünk hat év múlva?

14. Írjuk fel az *a)* 2; *b)* 3; *c)* 4; *d)* 6 számok első néhány hatványát!
Figyeljük meg az utolsó számjegyet, és keressünk szabályosságot!
Milyen számjegyre végződik a 3., a 10., a 20. és a 2007. hatvány?

Rejtvény

Melyik a nagyobb? Kettő a négyzeten a köbön vagy kettő a köbön a négyzeten?

7. Műveletek azonos alapú hatványokkal



A következőkben olyan hatványok közötti műveleteket vizsgálunk, melyekben a hatványok alapjai megegyeznek. Ezeket azonos alapú hatványoknak nevezzük. Azonos alapú hatványok például a 2^3, a 2^4 és a 2^5, mert alapként mindegyikben a 2 szerepel.

Megvizsgálunk néhány műveletet, melyekben hatványok szerepelnek. Olyan szabályokat keresünk, melyek egyszerűsítik a számításainkat.

Azonos alapú hatványok szorzása

1. példa

Írjuk fel hatvány alakban a következő szorzatokat!

a) $3^2 \cdot 3^4$; *b)* $0{,}1^3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}1$; *c)* $(-2)^3 \cdot (-2)^3$.

Megoldás

A megoldás során először a hatványozás definícióját alkalmazzuk (a hatványokat szorzat alakban írjuk fel).

a) $3^2 \cdot 3^4 = \overbrace{(3 \cdot 3)}^{2\text{ db}} \cdot \overbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}^{4\text{ db}} = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{2+4=6\text{ db}} = 3^6.$

$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4}$

b) $0{,}1^3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}1 = \overbrace{(0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1)}^{3\text{ db}} \cdot \overbrace{(0{,}1 \cdot 0{,}1)}^{2\text{ db}} \cdot 0{,}1 =$

$= \overbrace{0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1}^{3+2+1=6\text{ db}} = 0{,}1^6.$

$0{,}1^3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}1^1 =$
$= 0{,}1^{3+2+1}$

c) $(-2)^3 \cdot (-2)^3 = \overbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}^{3\text{ db}} \cdot \overbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}^{3\text{ db}} =$

$= \overbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}^{6\text{ db}} = (-2)^6.$

$(-2)^3 \cdot (-2)^3 =$
$= (-2)^{3+3}$



Észrevehetjük a következőt:

a) $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4}$;

b) $0{,}1^3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}1^{3+2+1}$;

c) $(-2)^3 \cdot (-2)^3 = (-2)^{3+3}$.

$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4}$

Azonos alapú hatványokat úgy is összeszorozhatunk, hogy az azonos alapot a kitevők összegére emeljük.

Azonos alapú hatványok osztása

2. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $3^5 : 3^2$; *b)* $0{,}1^3 : 0{,}1^2$; *c)* $(-2)^5 : (-2)^3$.

Megoldás

Írjuk a hatványokat szorzat alakba, az osztást pedig tört alakba, és végezzük el az egyszerűsítéseket!

$3^5 : 3^2 = 3^{5-2}$

a) $3^5 : 3^2 = \dfrac{3^5}{3^2} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$.

$0{,}1^3 : 0{,}1^2 = 0{,}1^{3-2}$

b) $0{,}1^3 : 0{,}1^2 = \dfrac{0{,}1^3}{0{,}1^2} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{0{,}1}} \cdot \overset{1}{\cancel{0{,}1}} \cdot 0{,}1}{\underset{1}{\cancel{0{,}1}} \cdot \underset{1}{\cancel{0{,}1}}} = 0{,}1^1$.

$(-2)^5 : (-2)^3 = (-2)^{5-3}$

c) $(-2)^5 : (-2)^3 = \dfrac{(-2)^5}{(-2)^3} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{(-2)}} \cdot \overset{1}{\cancel{(-2)}} \cdot \overset{1}{\cancel{(-2)}} \cdot (-2) \cdot (-2)}{\underset{1}{\cancel{(-2)}} \cdot \underset{1}{\cancel{(-2)}} \cdot \underset{1}{\cancel{(-2)}}} =$

$= (-2) \cdot (-2) = (-2)^2$.

A feladat megoldása során azt kaptuk, hogy:

a) $3^5 : 3^2 = 3^{5-2}$;

b) $0{,}1^3 : 0{,}1^2 = 0{,}1^{3-2}$;

c) $(-2)^5 : (-2)^3 = (-2)^{5-3}$.

$3^5 : 3^2 = 3^{5-2}$

Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az azonos alapot a kitevők különbségére emeljük. (A különbséget úgy kapjuk, hogy a számláló kitevőjéből vonjuk ki a nevező kitevőjét.)

Hatvány hatványozása

3. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\left(2^3\right)^2$; *b)* $\left(3^2\right)^4$.

Megoldás

Először írjuk át a hatványokat a definíció (def.) szerint szorzat alakba, majd alkalmazzuk az azonos alapú hatványok szorzására (sz.) vonatkozó szabályt!

a) $\left(2^3\right)^2 \overset{\text{def.}}{=} 2^3 \cdot 2^3 \overset{\text{sz.}}{=} 2^{3+3} = 2^6$.

$\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2}$

b) $\left(3^2\right)^4 \overset{\text{def.}}{=} 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \overset{\text{sz.}}{=} 3^{2+2+2+2} = 3^8$.

$\left(3^2\right)^4 = 3^{2\cdot 4}$

Ezek alapján megfogalmazhatjuk:

Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

$\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2}$

4. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $3^2 \cdot 3^3 : 3^4$; *b)* $\dfrac{\left(5^2\right)^3 \cdot 5^3}{\left(5^3\right)^3}$; *c)* $2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$.

Megoldás

Alkalmazzuk a korábban megállapított műveleti szabályokat!

a)

$$3^2 \cdot 3^3 : 3^4 = \frac{3^2 \cdot 3^3}{3^4} = \frac{3^{2+3}}{3^4} = \frac{3^5}{3^4} = 3^{5-4} = 3^1 = 3.$$

b)

$$\frac{\left(5^2\right)^3 \cdot 5^3}{\left(5^3\right)^3} = \frac{5^{2\cdot 3} \cdot 5^3}{5^{3\cdot 3}} = \frac{5^6 \cdot 5^3}{5^9} = \frac{5^{6+3}}{5^9} = \frac{5^9}{5^9} = 1.$$

c)

$$2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 = 4 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$



Feladatok

1. Végezzük el a következő szorzásokat!

a) $2^4 \cdot 2^2$; b) $2^2 \cdot 2^2$; c) $2 \cdot 2^2$;

d) $2^8 \cdot 2$; e) $2^5 \cdot 2^3$; f) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3$.

2. Végezzük el a következő szorzásokat!

a) $2^2 \cdot (-2^3)$; b) $-2^2 \cdot 2^3$; c) $(-2)^2 \cdot 2^3$;

d) $(-2^2) \cdot 2$; e) $2^4 \cdot (-2)^3$; f) $(-2)^4 \cdot (-2)^2$.

3. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\frac{3^5}{3^2}$; b) $\frac{5^5}{5^3}$; c) $\frac{7^4}{7^2}$; d) $\frac{6^8}{6^5}$; e) $\frac{9^5}{9^4}$; f) $\frac{0{,}1^7}{0{,}1^3}$.

4. Állítsuk növekvő sorrendbe a következő számokat!

A) $\frac{5^4}{5^3}$; B) $-\frac{5^5}{5^4}$; C) $\frac{(-5)^4}{5^3}$; D) $\frac{5^6}{(-5)^5}$.

5. Melyik a nagyobb a megadott két szám közül?

a) $2^4 \cdot 2^3$ vagy a $3^3 \cdot 3^2$;

b) $5^2 \cdot 5^4$ vagy az $5^7 : 5^2$;

c) $7^3 \cdot 7^2$ vagy a $(-7)^3 \cdot 7^2$;

d) $6^5 : 6$ vagy a $6^3 \cdot 6$?

6. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\left(2^3\right)^4$; b) $\left(6^3\right)^2$; c) $\left(5^3\right)^5$; d) $\left(0{,}1^5\right)^2$; e) $\left(3^5\right)^{10}$; f) $\left(20^2\right)^5$.

7. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $2^5 \cdot 2^3 : 2^4$; b) $3^7 : 3^4 \cdot 3^2$; c) $\frac{2^4}{2^2} \cdot 2^{10}$;

d) $\frac{7^2 \cdot 7^4}{(-7)^3}$; e) $\left(0{,}1^4\right)^2 \cdot 0{,}1^3$; f) $\frac{\left(10^5\right)^2 : 10^3}{10^5}$.

***8.** Helyezzük el a 2^1; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6; 2^7; 2^8 és 2^9 számokat egy 3×3-as táblázatba úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és az átlók mentén ugyanaz legyen a számok szorzata!

Rejtvény

Egy bicegő, száz lábú százlábú így panaszkodik:
„Fájó lábaim számának kétszerese négyzetszám és köbszám is." Hány lába nem fáj a százlábúnak?

8. Műveletek azonos kitevőjű hatványokkal



Azonos kitevőjű hatványok szorzása

1. példa

Számítsuk ki az *a)* $2^3 \cdot 5^3$ és *b)* $\left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2$ hatványok szorzatát!

Megoldás

a) Először a hatványokat kiszámítva:

$2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000.$

Számolhatunk így is:

$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 =$

$= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000.$

$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3$

b) $\left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{\overset{4}{\cancel{100}}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\overset{4}{\cancel{36}}}{\cancel{25}} = 16.$

Vagy számolhatunk így:

$\left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{10}{3} \cdot \frac{10}{3}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5}\right) = \frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5} =$

$= \left(\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) \cdot \left(\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) = \left(\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{5}}\right)^2 = 4^2 = 16.$

$\left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5}\right)^2$

Azonos kitevőjű hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.

$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3$

Gyakran szükség lehet a szabály fordított irányú alkalmazására is:

Szorzatot úgy is hatványozhatunk, hogy a tényezők hatványait összeszorozzuk.

$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$

Azonos kitevőjű hatványok osztása

2. Példa

Számítsuk ki!

a) $\frac{6^4}{3^4}$; *b)* $\frac{(-10)^3}{5^3}$; *c)* $27^6 : 9^6$.

Megoldás

Ismét a hatványozás fogalmát használjuk fel.

a) $\frac{6^4}{3^4} = \frac{1296}{81} = \frac{16 \cdot \cancel{81}}{\cancel{81}} = 16$.

Számolhatunk így is:

$\frac{6^4}{3^4} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{6}{3} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{6}{3} = \left(\frac{6}{3}\right)^4 = 2^4 = 16$.

$\frac{6^4}{3^4} = \left(\frac{6}{3}\right)^4$

b) $\frac{(-10)^3}{5^3} = \frac{-1000}{125} = \frac{-8 \cdot \cancel{125}}{\cancel{125}} = -8$.

Ugyanezt kapjuk, ha így számolunk:

$\frac{(-10)^3}{5^3} = \frac{(-10) \cdot (-10) \cdot (-10)}{5 \cdot 5 \cdot 5} =$

$= \left(-\frac{10}{5}\right) \cdot \left(-\frac{10}{5}\right) \cdot \left(-\frac{10}{5}\right) = \left(\frac{-10}{5}\right)^3 = (-2)^3 = -8$.

$\frac{(-10)^3}{5^3} = \left(\frac{-10}{5}\right)^3$

c) Először átírjuk az osztást tört alakba:

$27^6 : 9^6 = \frac{27^6}{9^6} = \frac{27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9} =$

$= \frac{27}{9} \cdot \frac{27}{9} \cdot \frac{27}{9} \cdot \frac{27}{9} \cdot \frac{27}{9} \cdot \frac{27}{9} = \left(\frac{27}{9}\right)^6 = 3^6$.

$\frac{27^6}{9^6} = \left(\frac{27}{9}\right)^6$

Ezek alapján kimondhatjuk, hogy:

Azonos kitevőjű hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapok hányadosát a közös kitevőre emeljük.

$\frac{3^5}{4^5} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$

Fordított irányban:

Törtet úgy is hatványozhatunk, hogy a számlálót és a nevezőt külön hatványozzuk, majd vesszük ezek hányadosát.

$\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}$

Ezek után összefoglalhatjuk a hatványozásra vonatkozó legfontosabb szabályokat (egy-egy példán bemutatva):



I. Azonos alapú hatványok szorzata: $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3}$.

II. Azonos alapú hatványok hányadosa: $\frac{6^5}{6^2} = 6^{5-2}$.

III. Hatvány hatványa: $\left(2^5\right)^3 = 2^{5 \cdot 3}$.

IV. Azonyos kitevőjű hatványok szorzata: $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4$.

V. Azonos kitevőjű hatványok hányadosa: $\frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

3. Példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 5^3$; *b)* $\frac{7^2 \cdot 7^5}{7^4}$; *c)* $\left(2^2 \cdot 2^3\right)^3$; *d)* $\frac{\left(2^4 \cdot 5^4\right)^2}{10^5}$.

Megoldás

Az átalakítások során a fenti műveleti szabályokat alkalmazzuk.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 5^3 \overset{\text{IV.}}{=} \left(\frac{2}{3} \cdot 5\right)^3 = \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27}$.

b) $\frac{7^2 \cdot 7^5}{7^4} \overset{\text{I.}}{=} \frac{7^{2+5}}{7^4} \overset{\text{II.}}{=} 7^{7-4} = 7^3 = 343$.

c) $\left(2^2 \cdot 2^3\right)^3 \overset{\text{II.}}{=} \left(2^{2+3}\right)^3 = \left(2^5\right)^3 \overset{\text{III.}}{=} 2^{5 \cdot 3} = 2^{15} = 32\,768$.

d) $\frac{\left(2^4 \cdot 5^4\right)^2}{10^5} \overset{\text{IV.}}{=} \frac{\left((2 \cdot 5)^4\right)^2}{10^5} = \frac{\left(10^4\right)^2}{10^5} \overset{\text{III.}}{=} \frac{10^{4 \cdot 2}}{10^5} = \frac{10^8}{10^5} \overset{\text{II.}}{=}$

$= 10^{8-5} = 10^3 = 1000.$

A hatványozás során is vigyázzunk a zárójelek használatára!

$$\left(3^2\right)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729, \quad \text{másrészt} \quad 3^{(2^3)} = 3^8 = 6561.$$

Az utóbbi hatványt így is jelölhetjük:

$$3^{(2^3)} = 3^{2^3}.$$

Ebben az esetben tehát nem hatványt hatványozunk, hanem a hatvány kitevőjében szerepel hatvány.

4. Példa

Válasszuk ki a következő számok közül az egyenlőket!

$A)\ 2^{12}\cdot\left(5^3\right)^4;\quad B)\ (-2)^{12}\cdot\left(5^4\right)^4;\quad C)\ \left(-2^3\right)^4\cdot\left(-5^4\right)^3;\quad D)\ \dfrac{\left(2^2\cdot 5^2\right)^8}{10^4}.$

Megoldás

A műveletek elvégzése során arra törekszünk, hogy a számokat könnyen összehasonlítható alakra hozzuk.

$A)\ 2^{12}\cdot\left(5^3\right)^4 \overset{\text{III.}}{=} 2^{12}\cdot 5^{3\cdot 4} = 2^{12}\cdot 5^{12} \overset{\text{IV.}}{=} (2\cdot 5)^{12} = 10^{12}.$

$B)\ (-2)^{12}\cdot\left(5^4\right)^4$ kifejezésben $(-2)^{12} = 2^{12}$, mert negatív szám páros kitevőjű hatványa pozitív.

$$(-2)^{12}\cdot\left(5^4\right)^4 \overset{\text{III.}}{=} 2^{12}\cdot 5^{4\cdot 4} = 2^{12}\cdot 5^{16} = 2^{12}\cdot 5^{12+4} =$$

$$= 2^{12}\cdot 5^{12}\cdot 5^4 \overset{\text{IV.}}{=} (2\cdot 5)^{12}\cdot 5^4 = 10^{12}\cdot 5^4 = 625\cdot 10^{12}.$$

$C)\ \left(-2^3\right)^4\cdot\left(-5^4\right)^3 = \left(2^3\right)^4\cdot\left(-\left(5^4\right)^3\right) \overset{\text{III.}}{=} 2^{3\cdot 4}\cdot\left(-5^{3\cdot 4}\right) =$

(páros, páratlan)

$$= 2^{12}\cdot\left(-5^{12}\right) = -2^{12}\cdot 5^{12} = -(2\cdot 5)^{12} = -10^{12}.$$

$$D)\ \frac{\left(2^2\cdot 5^2\right)^8}{10^4} \overset{\text{IV.}}{=} \frac{\left((2\cdot 5)^2\right)^8}{10^4} = \frac{\left(10^2\right)^8}{10^4} \overset{\text{III.}}{=} \frac{10^{2\cdot 8}}{10^4} = \frac{10^{16}}{10^4} \overset{\text{II.}}{=}$$

$$= 10^{16-4} = 10^{12}.$$

Tehát az *A* és *D* számok lesznek egyenlők.

Feladatok

1. Számítsuk ki a következő hatványértékeket!

a) $(3\cdot 5)^3$; *b)* $(2\cdot 5)^4$; *c)* $(3\cdot 7)^2$; *d)* $(4\cdot 3)^5$.

2. Hatványozzuk a következő törteket!

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$; *b)* $\left(\dfrac{1}{4}\right)^4$; *c)* $\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$; *d)* $\left(\dfrac{11}{8}\right)^5$.

3. Számítsuk ki a következő hatványértékeket!

a) $\left(3 \cdot \frac{2}{4}\right)^3$; *b)* $\left(\frac{7}{8} \cdot 5\right)^4$; *c)* $\left(-\frac{3}{4} \cdot 7\right)^2$; *d)* $\left(4 \cdot \frac{2}{5}\right)^5$.

4. Számítsuk ki a következő hatványértékeket!

a) $\left(3^2 \cdot 5\right)^3$; *b)* $\left(2 \cdot 5^3\right)^4$; *c)* $\left(\frac{7^2}{3^3} \cdot 7\right)^2$; *d)* $\left(4^2 \cdot \frac{4^3}{2^3}\right)^5$.

5. Melyik szám nagyobb?

a) $\left(2^3 \cdot 3\right)^2$ vagy $\left(2^2 \cdot 3\right)^3$; *b)* $\left(2^3 \cdot 2^4\right)^2$ vagy $\left(2^4 \cdot 2^2\right)^3$;

c) $\left(2^3 \cdot \frac{2^5}{2^2}\right)^2$ vagy $\left(2^2 \cdot 2^2\right)^3$; *d)* $\left(2^3 \cdot (-3)\right)^2$ vagy $\left(\left(-2^2\right) \cdot 3\right)^3$?

6. Állítsuk növekvő sorrendbe a következő számokat!

A) $2^{12} \cdot \left(5^3\right)^4$; *B)* $(-2)^{12} \cdot \left(5^3\right)^3$; *C)* $-\left(\left(5^2\right)^3\right)^2 \cdot (-2)^{12}$; *D)* $\frac{\left(2^2 \cdot 5^2\right)^8}{10^3}$.

7. Mit írjunk a hiányzó számok helyére, hogy igaz legyen az egyenlőség?

a) $2 \cdot 2^{\triangledown} = 16$; *b)* $(2 \cdot 2)^{\triangle} = 16$; *c)* $\frac{2^{\square}}{2} = 16$; *d)* $2^3 + 2^{\bigcirc} = 16$.

8. Mit írjunk az ◇ helyére, hogy igaz legyen az egyenlőség?

a) $\left(2^{\diamond}\right)^2 = 2^6$; *b)* $3^2 \cdot 3^{\diamond} = 3^{10}$; *c)* $\left(\frac{5^6}{5^4}\right)^2 \cdot 5^{\diamond} = 5^{10}$; *d)* $\left(\frac{4^4}{4^{\diamond}}\right)^2 = 16$.

9. Állítsuk növekvő sorrendbe a következő számokat!

A) $\left(2^2 \cdot 3^3\right)^4$; *B)* $\left(4^2 \cdot 3^3\right)^4$; *C)* $\left(4^3 \cdot 2^4\right)^3$.

***10.** Milyen számjegyre végződik a $2002^{2007} + 2002^{2008}$ összeg?

***11.** Állítsuk növekvő sorrendbe a következő számokat!

a) $2^3 + 3^3$; $(2 + 3)^3$; $(-2)^3 + (-3)^3$.

b) $2^4 + 3^4$; $(2 + 3)^4$; $(-2)^4 + (-3)^4$.

c) $2^3 + 3^2$; $(2 + 3)^3$; $(-2)^3 + (-3)^2$.

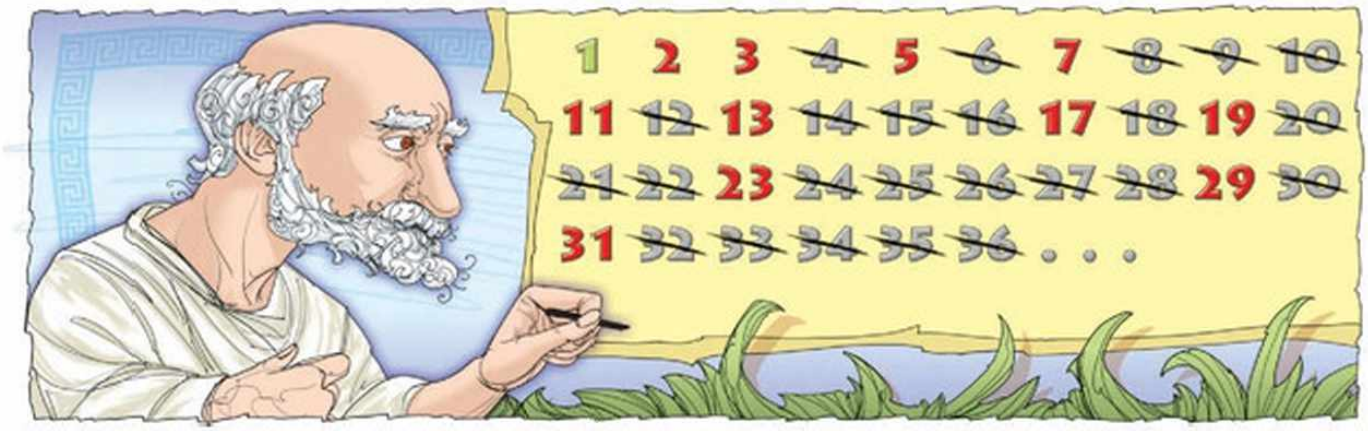
***12.** Helyettesítsük be a ♡, ♤ jelek helyére a 2; 3 számokat az összes lehetséges módon! Mi az így előállítható legkisebb és legnagyobb szám értéke? (A különböző jelek helyén azonos számok is állhatnak.)

a) $\left(5^{\heartsuit} \cdot 5^{\spadesuit}\right)^{\heartsuit}$; *b)* $\frac{7^{\heartsuit}}{\heartsuit^{\spadesuit}} \cdot 7^{\spadesuit}$; *c)* $4^{\heartsuit^{\diamond}}$; *d)* $\left(4^{\heartsuit}\right)^{\spadesuit}$.

Rejtvény

Három 5-ös számjegy segítségével állítsuk elő a lehető legnagyobb számot!

9. Prímszámvadászat



Korábban már láttuk, hogy a számok világában sokféle csoport előfordul.

Ezek a csoportok, azaz számhalmazok még tovább is oszthatók. A természetes számokat például csoportosíthattuk az osztóik száma szerint is.

Azokat az egynél nagyobb természetes számokat, amelyeknek kettőnél több pozitív osztójuk van, **összetett számoknak** nevezzük (4; 6; 8; 9; 10; ...).

Prímszámoknak (törzsszámoknak) nevezzük azokat a számokat, melyeknek pontosan két osztójuk van (2; 3; 5; 7; ...).

Az 1 és a 0 se nem összetett, se nem prímszám.

A nagyobb természetes számok esetén az egyik legnehezebb probléma annak eldöntése, hogy a szám prím vagy összetett szám. Ez az alapja az információk szinte tökéletesnek mondható titkosításának.

Korábbról tudjuk, hogy minden összetett szám felbontható prímszámok szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. Ezt az állítást nevezik a **számelmélet alaptételének.**

2008-ban az ismert legnagyobb prímszám $2^{32\,582\,657} - 1$, melyben a számjegyek száma 9 808 358. Ilyen nagy prímszámok megkereséséhez nagy kapacitású számítógépeket használnak. Az elért legfrissebb eredményeket leellenőrizhetjük pl. a www.mersenne.org internetcímen.

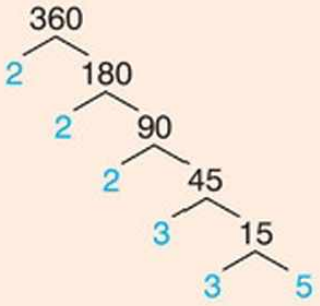
1. példa

Bontsuk prímtényezőkre a 360-at és a 600-at, majd határozzuk meg a két szám legnagyobb közös osztóját!

Megoldás

A felbontást kétféleképpen is elvégezhetjük. Eredményünk természetesen mindkét módszer esetén ugyanaz lesz.

Használhatjuk az osztópárokat:



Prímosztók keresésével:

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

A legnagyobb közös osztó a közös osztók közül a legnagyobb.

Ezek alapján a számokat felírhatjuk prímtényezők szorzataként, majd hatvány alakban is. Így

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

$$600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

A két szám legnagyobb közös osztója felírható a két szám összes közös prímtényezőjének szorzataként.

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3.$$

$$600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

A legnagyobb közös osztó többszöröse a többi közös osztónak.

Tehát a legnagyobb közös osztó:

$$(360; 600) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

Vizsgáljuk meg, hogy mi a kapcsolat a két szám és a legnagyobb közös osztójuk prímtényezős alakja között!

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

$$(360; 600) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$



A közös prímtényezők:

- a 2 mindkét számban a harmadik hatványon van, ezért a legnagyobb közös osztó prímtényezős felbontásában is szerepel a 2^3;
- a 3 a 600 prímtényezős felbontásában csak első hatványon van, ezért a közös osztóban is legfeljebb első hatványon szerepelhet;
- az 5 a 360 prímtényezős felbontásában csak első hatványon van, ezért a közös osztóban is legfeljebb első hatványon szerepelhet.

A legnagyobb közös osztót úgy is meghatározhatjuk, hogy a számokat prímtényezőkre bontjuk, majd a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk.

Határozzuk meg a 8 és a 15 legnagyobb közös osztóját!

Bár a $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ és a $15 = 3 \cdot 5$ sem prímszám, de prímtényezős felbontásukban nincs közös prímtényező. Ezért a 8 és a 15 legnagyobb közös osztója az 1, azaz

$$(8; 15) = 1.$$

Ha két szám legnagyobb közös osztója 1, akkor a számokat relatív prímeknek nevezzük.

2. példa

Határozzuk meg a 36 és a 60 legkisebb közös többszörösét!

Megoldás

A legkisebb közös többszörös a pozitív többszörösök közül a legkisebb.

Írjuk fel a két szám prímtényezős felbontását!

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad \text{és} \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Először soroljuk fel mindkét szám néhány pozitív többszörösét prímtényezős alakban! Írjuk a többszörösöket növekvő sorrendbe!

$36 = 2^2 \cdot 3^2$ többszörösei:

$2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3^2$;
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^3$;
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 = 2^4 \cdot 3^2$;
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$;
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3^3$;
⋮

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ többszörösei:

$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$;
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$;
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$;
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$;
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$;
⋮

36	2	60	2
18	2	30	2
9	3	15	3
3	3	5	5
1		1	

$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Leolvashatjuk, hogy a legkisebb közös többszörös a

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180 \text{ lesz.}$$

$$[36; 60] = [2^2 \cdot 3^2; 2^2 \cdot 3 \cdot 5] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180.$$

A legkisebb közös többszörös osztója a többi közös többszörösnek.

Vizsgáljuk meg, hogy mi a kapcsolat a két szám és a legkisebb közös többszörös prímtényezős felbontása között!

Megfigyelhetjük, hogy

- a 36 minden többszörösében szerepel
  a 2 legalább a 2-dik hatványon → 2^2;
  a 3 legalább a 2-dik hatványon → 3^2;
- a 60 minden többszörösében szerepel
  a 2 legalább a 2-dik hatványon → 2^2;
  a 3 és az 5 prímtényező → 3 és 5.

Ezért ezeknek a közös többszörösökben is szerepelniük kell.

Az összes előforduló prímtényező szorzata adja a legkisebb közös többszöröst.

$$[36; 60] = [2^2 \cdot 3^2; 2^2 \cdot 3 \cdot 5] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180.$$

A legkisebb közös többszöröst úgy is meghatározhatjuk, hogy a számokat prímtényezőkre bontjuk, majd az összes prímtényezőt az előforduló legnagyobb hatványon összeszorozzuk.

***3. példa**

Írjunk a betűk helyére számokat úgy, hogy

a) a $2^x \cdot 3^2 \cdot 5$ és a $2^3 \cdot 3^y \cdot 5^4 \cdot 7^2$ számok legnagyobb közös osztója $2^2 \cdot 3 \cdot 5^z$ legyen!

b) a $3^a \cdot 7^2 \cdot 11^3$ és a $3^5 \cdot 7^b \cdot 11^4 \cdot 13^2$ számok legkisebb többszöröse a $3^6 \cdot 7^3 \cdot 11^c \cdot 13^d$ legyen!

Megoldás

a) Mivel a legnagyobb közös osztó csak a közös prímtényezőket tartalmazhatja az előforduló legkisebb hatványon, ezért ezeket a tényezőket sorban megvizsgálva kapjuk a következőket:

$x = 2$, hiszen a 2-es prímtényező legkisebb hatványa 2, és ez csak az első számban fordulhat elő.

$y = 1$, mert a közös osztóban a 3 ezen a hatványon szerepel.

$z = 1$, mert az első szám 5-nek csak ezt a hatványát tartalmazza.

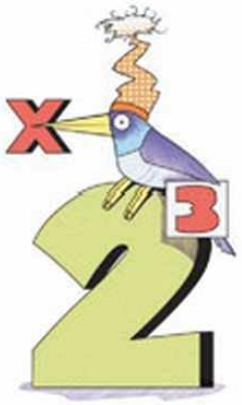
b) Itt arra kell figyelnünk, hogy a legkisebb közös többszörösben az összes prímszámnak az előforduló legnagyobb hatványon kell szerepelnie.

$a = 6$, mert a második számban csak az ötödik, a legkisebb közös többszörösben viszont a hatodik hatványon szerepel a 3.

$b = 3$, hiszen a közös többszörös a 7-nek ezt a hatványát tartalmazza.

$c = 4$, mert ez a 11 előforduló legnagyobb hatványa.

$d = 2$, mert ez szerepel a második számban.



Feladatok

1. Lehet-e két prímszám összege 2007?

2. Szorozzunk össze a 10-nél kisebb prímek közül két különbözőt, és adjunk hozzá az eredményhez 1-et!
   a) Hány különböző számot kapunk? *b)* Válasszuk ki közülük a prímeket!

3. Bontsuk prímtényezőkre a következő számokat!
   a) 252; *b)* 720; *c)* 300; *d)* 2475.

4. Határozzuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját!
   a) (12; 26); *b)* (8; 40); *c)* (12; 66); *d)* (35; 60).

5. Határozzuk meg a következő számok legkisebb közös többszörösét!
   a) [6; 8]; *b)* [8; 20]; *c)* [12; 15]; *d)* [26; 4].

6. Határozzuk meg a következő prímtényezős alakban megadott számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

a) $2^3 \cdot 3$ és $2 \cdot 3 \cdot 5$; *b)* $7 \cdot 11^2$ és $2 \cdot 3 \cdot 7^3$;

c) $5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ és $5 \cdot 7^2 \cdot 11^3$; *d)* $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ és $5 \cdot 7^3 \cdot 11^2$.

7. Egyszerűsítsük a következő törteket!

a) $\frac{24}{60}$; *b)* $\frac{32}{56}$; *c)* $\frac{110}{200}$; *d)* $\frac{35}{700}$.

8. Adjuk össze a következő törteket!

a) $\frac{1}{8} + \frac{5}{6}$; *b)* $\frac{1}{12} + \frac{5}{30}$; *c)* $\frac{1}{4} + \frac{7}{6}$; *d)* $\frac{1}{15} + \frac{5}{12}$.

9. A következő számok közül válasszuk ki azokat a párokat, amelyek relatív prímek!

4; 7; 14; 21; 30; 42; 50.

10. Egy autóbusz-végállomásról reggel 5-kor indulnak a járatok. Az 1-es busz 15 percenként, míg a 2-es busz 20 percenként indul. Ha reggel 5-kor egyszerre indultak, akkor mikor lesz a következő időpont, amikor újra egyszerre indul a két járat?

11. Egy kikötőből két hajó indult el január elsején. Az egyik 4 hónap múlva érkezik vissza, és utána mindig 4 havonta; a másik 6 hónap múlva és utána mindig 6 havonta. Mikor találkozik a két hajó legközelebb?



12. Hány olyan természetes szám van, amelynek és a 8-nak a legkisebb közös többszöröse 24?

13. Két természetes szám legnagyobb közös osztója 10, legkisebb közös többszöröse pedig 100. Az egyik szám az 50. Melyik a másik szám?

***14.** Írjunk a betűk helyére számokat úgy, hogy

a) a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^y$ és a $2^x \cdot 3 \cdot 5^3$ számok legnagyobb közös osztója $2 \cdot 3^z \cdot 5^2$ legyen!

b) a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^x$ és a $2^y \cdot 3^3 \cdot 5$ számok legkisebb közös többszöröse $2^4 \cdot 3^z \cdot 5$ legyen!

15. Melyik az a legkisebb kétjegyű szám, melyre igaz lesz a következő egyenlőség?

$$(2^3 \cdot 3;\ x) = 2 \cdot 3.$$

Melyik az egyenlőségnek megfelelő legnagyobb kétjegyű szám?

Rejtvény

Három testvér közül a legidősebb 14 évvel idősebb a legfiatalabbnál, a középső testvér pedig 4 évvel fiatalabb a legidősebbnél. Mindhármuk életkora prímszám. Hány évesek?

10. Nagyon nagy számok



2005 januárjában a Huygens űrszonda sikeresen landolt a Szaturnusz bolygó Titán nevű holdján. Eddig ez volt a legtávolabbi égitest, melyet emberi kéz alkotta szerkezet megközelített, és ahol sikeresen a felszínre ereszkedett.

A normálalak

A Huygens űrszonda 1997-ben indult, és több mint 7 éven keresztül repült az űrön át, hogy végül elérje célját. Ezalatt több mint 1400 millió kilométert tett meg (1 400 000 000 km = egymilliárd-négyszázmillió kilométer).

Az űrkutatásban gyakran használnak olyan adatokat, számokat, melyek lejegyzése hosszadalmas, mivel nagyon nagy számokról van szó. A hatványozás műveletének felhasználásával viszont lehetőség nyílik az ilyen számok egyszerűbb felírására.

Például az űrszonda által megtett út:

$$1\,400\,000\,000 \text{ km} = 1{,}4 \cdot 1\,000\,000\,000 \text{ km} = 1{,}4 \cdot 10^9 \text{ km}.$$

A természetes számok leírásakor a tízes számrendszert használjuk, ezért ebben az alakban célszerű a 10 hatványait alkalmazni.

A tízes számrendszer helyiérték-táblázata:

milliárd	millió	százezer	tízezer	ezer	száz	tíz	egy
10^9	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	1

Például: $100\,000 = 10^5$;
$9\,000\,000\,000 = 9 \cdot 1\,000\,000\,000 = 9 \cdot 10^9$;
$3\,560\,000 = 3{,}56 \cdot 1\,000\,000 = 3{,}56 \cdot 10^6$.

Ha egy számot olyan szorzatként írunk fel, amelynek egyik tényezője legalább 1, de 10-nél kisebb szám, másik tényezője pedig 10 egész kitevős hatványa, akkor ezt a szorzatot a szám **normálalakjának** nevezzük.

A normálalak ismeretében az eredeti számot is könnyen felírhatjuk:

$3 \cdot 10^8 = 300\,000\,000$ → háromszázmillió;
$6{,}2 \cdot 10^5 = 620\,000$ → hatszázhúszezer;
$3{,}27 \cdot 10^{10} = 32\,000\,700\,000$ → harminckétmilliárd-hétszázezer.

A különböző mértékegységek többszöröseinek képzése során gyakran találkozunk a tíz hatványaival.



	előtag	jelentése	jele
10	deka-	tíz	dk
10^2	hekto-	száz	h
10^3	kilo-	ezer	k
10^6	mega-	millió	M
10^9	giga-	milliárd	G
10^{12}	tera-	billió	T

Így például, amikor a boltban 1 kg kenyeret vásárolunk, akkor

$$\text{az } 1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 10^3 \text{ g-ot jelent.}$$

Az 5 hektoliteres hordó literekben megadott térfogata

$$5 \text{ hl} = 5 \cdot 10^2 \text{ l} = 500 \text{ l.}$$

A maratoni táv 42,195 km hosszú távja normálalakban felírva

$$42\,195 \text{ m} = 4{,}2195 \cdot 10^4 \text{ m} = 4{,}2195 \cdot 10 \text{ km.}$$

A Föld és Hold között mért átlagos távolság

$$384\,404 \text{ km} = 384\,404\,000 \text{ m} = 3,84404 \cdot 10^8 \text{ m.}$$

Műveletek normálalakban felírt számokkal

1. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $30\,000 \cdot 43\,000\,000\,000$; *b)* $\dfrac{6\,500\,000\,000}{500\,000}$.

Megoldás

A normálalakban felírt számok szorzásakor és osztásakor a hatványozásnál megismert műveleti szabályokat alkalmazzuk.

a) $30\,000 \cdot 43\,000\,000\,000 = 3 \cdot 10^4 \cdot 4{,}3 \cdot 10^{10} \overset{\text{I.}}{=}$

$= 12{,}9 \cdot 10^{4+10} = 1{,}29 \cdot 10 \cdot 10^{14} \overset{\text{I.}}{=} 1{,}29 \cdot 10^{15}$;

b) $\dfrac{6\,500\,000\,000}{500\,000} = \dfrac{6{,}5 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^5} \overset{\text{II.}}{=} 1{,}3 \cdot 10^{9-5} = 1{,}3 \cdot 10^4$.

2. példa

Végezzük el a műveleteket, majd az eredményt írjuk át normálalakba!

a) $23\,000 + 320\,000$; *b)* $671\,000\,000 - 1\,230\,000$.

Megoldás

A megoldás során érdemes úgy átírnunk a számokat, hogy azokban a 10 hatványai azonos kitevővel szerepeljenek.

a) $23\,000 + 320\,000 = 2{,}3 \cdot 10^4 + 32 \cdot 10^4 = 34{,}3 \cdot 10^4 =$
$= 3{,}43 \cdot 10 \cdot 10^4 = 3{,}43 \cdot 10^5;$

b) $671\,000\,000 - 1\,230\,000 = 671 \cdot 10^6 - 1{,}23 \cdot 10^6 =$
$= 669{,}77 \cdot 10^6 = 6{,}6977 \cdot 10^2 \cdot 10^6 = 6{,}6977 \cdot 10^8.$

***3. példa**

Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\left(2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^6\right)^5$; b) $\left(\frac{3 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^6}{1{,}2 \cdot 10^4}\right)^4$.

Megoldás

Felhasználjuk a hatványozásnál tanult műveleti szabályokat.

a) $\left(2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^6\right)^5 \overset{\text{I.}}{=} \left(5 \cdot 10^9\right)^5 \overset{\text{III.}}{=}$

$= 3125 \cdot 10^{9 \cdot 5} = 3{,}125 \cdot 10^3 \cdot 10^{45} \overset{\text{I.}}{=} 3{,}125 \cdot 10^{48};$

b) $\left(\frac{3 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^6}{1{,}2 \cdot 10^4}\right)^4 \overset{\text{I.}}{=} \left(\frac{24 \cdot 10^9}{1{,}2 \cdot 10^4}\right)^4 \overset{\text{II.}}{=}$

$= \left(20 \cdot 10^5\right)^4 = \left(2 \cdot 10 \cdot 10^5\right)^4 \overset{\text{I.}}{=} \left(2 \cdot 10^6\right)^4 \overset{\text{III.}}{=}$

$= 2^4 \cdot 10^{6 \cdot 4} = 16 \cdot 10^{24} = 1{,}6 \cdot 10 \cdot 10^{24} \overset{\text{I.}}{=} 1{,}6 \cdot 10^{25}.$

4. példa

A Hold–Föld-távolság 384 404 km, a Napnak a Földtől mért közepes távolsága pedig 150 millió km. Hányszorosa a Hold–Föld-távolságnak a Nap–Föld-távolság?

Megoldás

A számítás során használjunk normálalakot!

A Hold–Föld-távolság:

$384\,404 \text{ km} = 3{,}844\,04 \cdot 10^5 \text{ km} \approx 3{,}84 \cdot 10^5 \text{ km}.$

A Nap–Föld-távolság:

$150\,000\,000 \text{ km} = 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}.$

Hányadosuk:

$$\frac{1{,}5 \cdot 10^8}{3{,}84 \cdot 10^5} = 0{,}3906 \cdot 10^3 \approx 391.$$

A Nap–Föld-távolság a Hold–Föld-távolságnak a 391-szerese.



5. példa

A Föld a Nap körüli keringése során 1 év alatt 940 millió km utat tesz meg. Mekkora sebességgel halad eközben?

Megoldás

Először ki kell számolnunk, hogy az egy év hány másodperc.
365 nappal számolva:

$$365 \text{ nap} = 365 \cdot 24 \text{ óra} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \text{ perc} =$$
$$= 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 31\,536\,000 \text{ s} = 3{,}15 \cdot 10^7 \text{ s}.$$

A megtett út:

$$940 \text{ millió km} = 940 \cdot 10^6 \text{ km} = 9{,}4 \cdot 10^8 \text{ km}.$$

A sebességet a megtett út és és az eltelt idő hányadosaként kapjuk.

$$\frac{\text{út}}{\text{idő}} = \frac{9{,}4 \cdot 10^8 \text{ km}}{3{,}15 \cdot 10^7 \text{ s}} = \frac{9{,}4 \cdot 10}{3{,}15} \frac{\text{km}}{\text{s}} = 2{,}98 \cdot 10 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

A Föld sebessége a Nap körüli keringése közben $30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Feladatok

1. Írjuk fel a következő számok helyi értékes alakját!
   a) $2 \cdot 10^2$; *b)* $2{,}23 \cdot 10^3$; *c)* $8{,}8765 \cdot 10^4$; *d)* $3{,}44454 \cdot 10^5$.

2. Írjuk át normálalakba a következő számokat!
   a) 245; *b)* 3400; *c)* 213,45; *d)* 2342,332.

3. Írjuk át normálalakba a következő számokat!
   a) $20 \cdot 10^2$; *b)* $22{,}12 \cdot 10$; *c)* $211{,}1 \cdot 10^5$; *d)* $10 \cdot 10^2$; *e)* 25 millió.

4. Írjuk fel normálalakban a következő mondatokban szereplő számokat!
   a) Az egyik évben a New York-ban megrendezett maratoni futóversenyen 27 797 versenyző állt rajthoz.
   b) A Föld első három legnépesebb várostömörülése:

	Város	Ország	Elővárosokkal	Elővárosok nélkül
1	Tokió	Japán	35 197 000	8 124 310
2	Mexikóváros	Mexikó	19 411 000	8 538 639
3	New York	USA	18 718 000	8 158 957

   c) 2006-ban egy személy által felállított dominók számának rekordja 303 621, a csapatrekord ezzel szemben már 4 079 381 volt.
   d) A világ egyik legforgalmasabb hídja az indiai Kalkuttában található. Ezen naponta átlagosan 57 000 jármű halad át.

5. Határozzuk meg a következő műveletek eredményét, és írjuk fel normálalakban!

a) $(2 \cdot 10^2) \cdot (7 \cdot 10^3)$; *b)* $(4 \cdot 10^4) \cdot (9 \cdot 10^5)$;

c) $(2{,}5 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^2)$; *d)* $(4{,}4 \cdot 10^6) \cdot (5 \cdot 10^4)$.

6. Határozzuk meg a következő műveletek eredményét, és írjuk fel normálalakban!

a) $(9 \cdot 10^5) : (3 \cdot 10^3)$; *b)* $(8 \cdot 10^7) : (2 \cdot 10^5)$;

c) $(2{,}7 \cdot 10^5) : (9 \cdot 10^2)$; *d)* $(9{,}6 \cdot 10^6) : (8 \cdot 10^4)$.

7. $a = 8 \cdot 10^5$ és $b = 4 \cdot 10^3$. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét, és az eredményt írjuk fel normálalakban!

a) $a \cdot b$; *b)* $a : b$; *c)* $a + b$; *d)* $a - b$; *e)* $\frac{a}{b}$.

8. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $20000 \cdot 5300$; *b)* $120000 \cdot 500$; *c)* $\frac{1500\,000}{5000}$; *d)* $\frac{5\,400\,000}{30\,000}$.

9. Végezzük el a kijelölt műveleteket, és az eredményt írjuk fel normálalakban!

a) $3000 + 20\,000$; *b)* $67\,000 - 1200$;

c) $45\,000 - 2300$; *d)* $821\,000 + 23\,000$.

10. A hatványozás műveleti szabályait felhasználva végezzük el a kijelölt műveleteket, és az eredményt írjuk fel normálalakban!

a) $(200 \cdot 1500)^3$; *b)* $(40 \cdot 2000)^4$; *c)* $\left(\frac{32\,000}{400}\right)^4$; *d)* $\left(\frac{30 \cdot 800}{120}\right)^3$.

11. A fény 1 másodperc alatt 300 000 km-t tesz meg. Mennyit tesz meg

a) 1 perc; *b)* 1 óra; *c)* 1 nap; *d)* 1 év alatt?

***12.** Egy meleg nyári napon a Balaton felszínéről átlagosan 1 mm vastag vízréteg párolog el. Megközelítőleg hány liter víz ez, ha a Balaton felszíne körülbelül 600 km^2?

***13.** A Földhöz legközelebbi csillag a Nap. A következő legközelebbi a Proxima Centauri, melyről a fény 4,2 év alatt ér ide.

a) Milyen messze van ez a csillag a Földtől?

b) Mennyi ideig tartana az út a Proxima Centaurira, ha a francia TGV szuperexpressz 515 $\frac{km}{h}$ nagyságú rekordsebességével utaznánk?



Rejtvény

Becsüljük meg, hány ember kellene ahhoz, hogy összekapaszkodva körülöleljék a Földet!

11. Vegyes feladatok

1. Mennyi a $7 + 36 : 4 \cdot 2$ műveletsor eredménye?

2. Állítsuk növekvő sorrendbe a következő törteket!

   a) $\frac{401}{501}$; *b)* $\frac{4001}{5001}$; *c)* $\frac{4}{5}$; *d)* $\frac{41}{51}$.

3. Mivel egyenlő?

   a) $\frac{1}{15} - \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) : \frac{2}{3}$;

   b) $\frac{7}{6} \cdot \left(\frac{3}{5} - 0{,}1 \cdot \frac{5}{2}\right)$;

   c) $\frac{2}{3} : \left(\frac{10}{14} - \frac{2}{7}\right) - \frac{2}{3}$;

   d) $\frac{5}{2008} - \left(\frac{7}{2008} - \frac{1}{2008}\right) + \frac{1}{1004}$.

4. Mit írjunk a jelek helyére, hogy igaz legyen az egyenlőség?

   a) $-\frac{3}{2} - \bigcirc = \frac{1}{3}$;

   b) $\frac{2}{7} : \bigtriangledown - \frac{11}{12} = \frac{4}{5}$;

   c) $\left(0{,}25 - \frac{1}{2} : \bigtriangleup\right) - 1 = 0{,}5$;

   d) $\square : \left(0{,}5 - \frac{1}{5} : \frac{2}{3}\right) = 1$.

5. Micimackó a születésnapjára két nagy edény mézet kapott. Az egyikben 8,5 liter, a másikban 3,3 liter méz volt. Hány csupor lesz tele, ha a mézet $\frac{2}{3}$ literes csuprokba töltögeti át? Mennyi méz kerül az utolsó csuporba? Hányad részéig telik meg az utolsó csupor?

6. Melyik szám a nagyobb?

   a) $\frac{1}{2 - \frac{1}{2}}$ vagy a $\frac{2}{1 - \frac{1}{2}}$;

   b) $\frac{\frac{2}{3}}{2 - \frac{1}{2}}$ vagy a $\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}}$;

   **c)* $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$ vagy a $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$;

   **d)* $\frac{0{,}4}{2 - \frac{1}{2}}$ vagy a $\frac{0{,}2}{1 - \frac{1}{1 + 0{,}5}}$?

7. Írjunk a jelek helyére számokat úgy, hogy igaz legyen az egyenlőtlenség!

   a) $\frac{1}{2} < \bigtriangleup < \bigtriangledown < \bigcirc < 1$;

   b) $-\frac{1}{2} < \bigtriangleup < \bigtriangledown < \bigcirc < 0$;

   c) $\frac{1}{2} < \bigtriangleup < \bigtriangledown < \bigcirc < \frac{2}{3}$;

   d) $-\frac{1}{2} < \bigtriangleup < \bigtriangledown < \bigcirc < -\frac{1}{3}$.

*8. Melyik egész számhoz van legközelebb a számegyenesen a $\frac{10^{20} + 10^{22}}{10^{21} + 10^{21}}$ tört értékét jelölő pont?

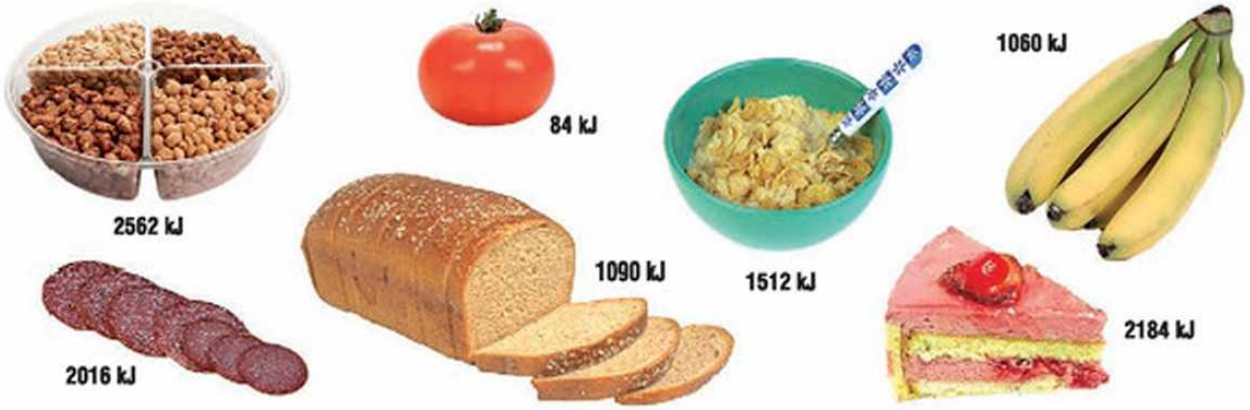
9. Télapó a zsákját negyed nap alatt a negyedrészéig ürítette ki. Mennyi idő alatt ürül ki teljesen a zsák?

10. Az ábrán feltüntettük, hogy az adott élelmiszerekből 100 g mennyi energiát tartalmaz. Mennyi energiát vittünk be a szervezetünkbe, ha

a) 70 g mogyorót és 120 g süteményt;

b) 80 g szalámit, 70 g kenyeret és 160 g paradicsomot;

c) 40 g gabonapelyhet és 180 g banánt fogyasztottunk?



11. Egy téglalap szomszédos oldalainak hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 3 : 5. Egy másik téglalap oldalainak aránya 2 : 3. Ennek a téglalapnak a rövidebb oldala ugyanolyan hosszú, mint az első téglalap hosszabb oldala. Hányad része az első téglalap rövidebb oldalának hossza a második téglalap hosszabb oldalának?

12. Egy szörpösüvegen ez olvasható: „Javasolt hígítási arány 1 : 9". (Ez azt jelenti, hogy 1 dl szörphöz 9 dl vizet kell önteni.) Hány deciliter szörp van az üvegben, ha a szörphöz – a javasolt hígítási aránynak megfelelően – vizet öntve 4 liter italt kapunk?

13. Tom Sawyer és barátai a kerítést 8-an 5 nap alatt festik le, ha 8 órán át dolgoznak naponta. Hány órát kellene dolgozniuk naponta, ha 5-en 4 nap alatt szeretnének végezni?

14. 3 kendermagos tyúk 3 nap alatt 30 dkg, 4 gyöngytyúk pedig 4 nap alatt 40 dkg kendermagot eszik meg. Mennyi kendermagot eszik meg 1 kendermagos tyúk és 1 gyöngytyúk összesen 1 nap alatt?

15. A Szegedi Szabadtéri Játékok 2007-es évadjának nyitó előadását 4000 néző látta. A nézők 15%-a gyermek, a többi felnőtt volt. A felnőttek 60%-a nő. Hány felnőtt férfi volt a színházi előadáson?

16. Árleszállítás előtt 20 db kulcstartó 1200 Ft-ba került. Hány darabbal több kulcstartót vehetnénk árleszállítás után ugyanennyi pénzért, ha az árleszállítás 20%-os?

17. Mikor járunk jobban? Ha 10 000 Ft pénzünket négy éven keresztül 10%-os kamatos kamatra helyezzük el egy bankban, vagy ha úgy adjuk kölcsön négy évre, hogy négy éven keresztül minden év végén 3000 Ft-ot kapunk vissza?

18. Egy dobozban kártyák vannak, melyeken a 6; 8; 9; 10; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 21 számok találhatók. Melyik számot húzhattuk ki közülük, ha a kiválasztott szám

a) 3 és 4 többszöröse; *b)* páros négyzetszám; *c)* 39 prímosztója;

d) 4-gyel osztható, és többszöröse 2-nek és 7-nek;

e) olyan prím, amely eggyel nagyobb egy négyzetszámnál?

19. A 25 négyzetszám pozitív osztói az 1, az 5 és a 25. Igaz-e az az állítás, hogy „minden négyzetszámnak három pozitív osztója van”?

20. Melyik a legkisebb a 3^4; $0{,}5^1$; -10^2; $-(-3)^4$; -2^4 számok közül?

21. Mit írhatunk a jelek helyére, hogy igaz legyen az egyenlőség?

a) $2^{\triangle} \cdot 2^3 = 64$; *b)* $2^{\triangledown} : 2^3 = 64$; *c)* $2^{\square} + 2^5 = 64$; *d)* $\left(2^{\heartsuit}\right)^3 = 64$.

22. A következő számok közül melyek egyenlők 1-gyel?

A) $2^{74} : 9^6$; *B)* $16^3 : 64^2$; *C)* $32^3 : 8^4$;

D) $81^5 : 9^{10}$; *E)* $27^3 : 81^2$; *F)* $8^8 : 16^6$.

23. Melyik szám a nagyobb?

a) $A = \left(\frac{1}{4}\right)^3$ vagy $B = \frac{1^3}{4}$; *b)* $C = \left(\frac{1}{4}\right)^3$ vagy $D = \left(\frac{1}{2}\right)^3$;

c) $E = \left(-\frac{1}{4}\right)^3$ vagy $F = \left(-\frac{1}{4}\right)^2$; *d)* $G = \left(-\frac{1}{4}\right)^4$ vagy $H = \left(\frac{1}{2}\right)^6$?

***24.** Milyen szám kerülhet az alábbi bűvös négyzetekbe a △ helyére, ha tudjuk, hogy a bűvös négyzetek minden cellájában azonos alapú hatványok szerepelnek, és minden sorban, oszlopban és átlóban ugyanannyi a számok szorzata?

a)

2^3		2^7
△		2^5

b)

3^9		3^7
	△	
	3^{10}	

c)

△		5^6
	5^4	
		5^4

25. Zúzmara kutyánk 8 másodpercenként, míg a szomszédban Bundás 12 másodpercenként ugat egyet. Ha az egyik pillanatban egyszerre ugattak, akkor mennyi idő múlva ugatnak újra együtt?

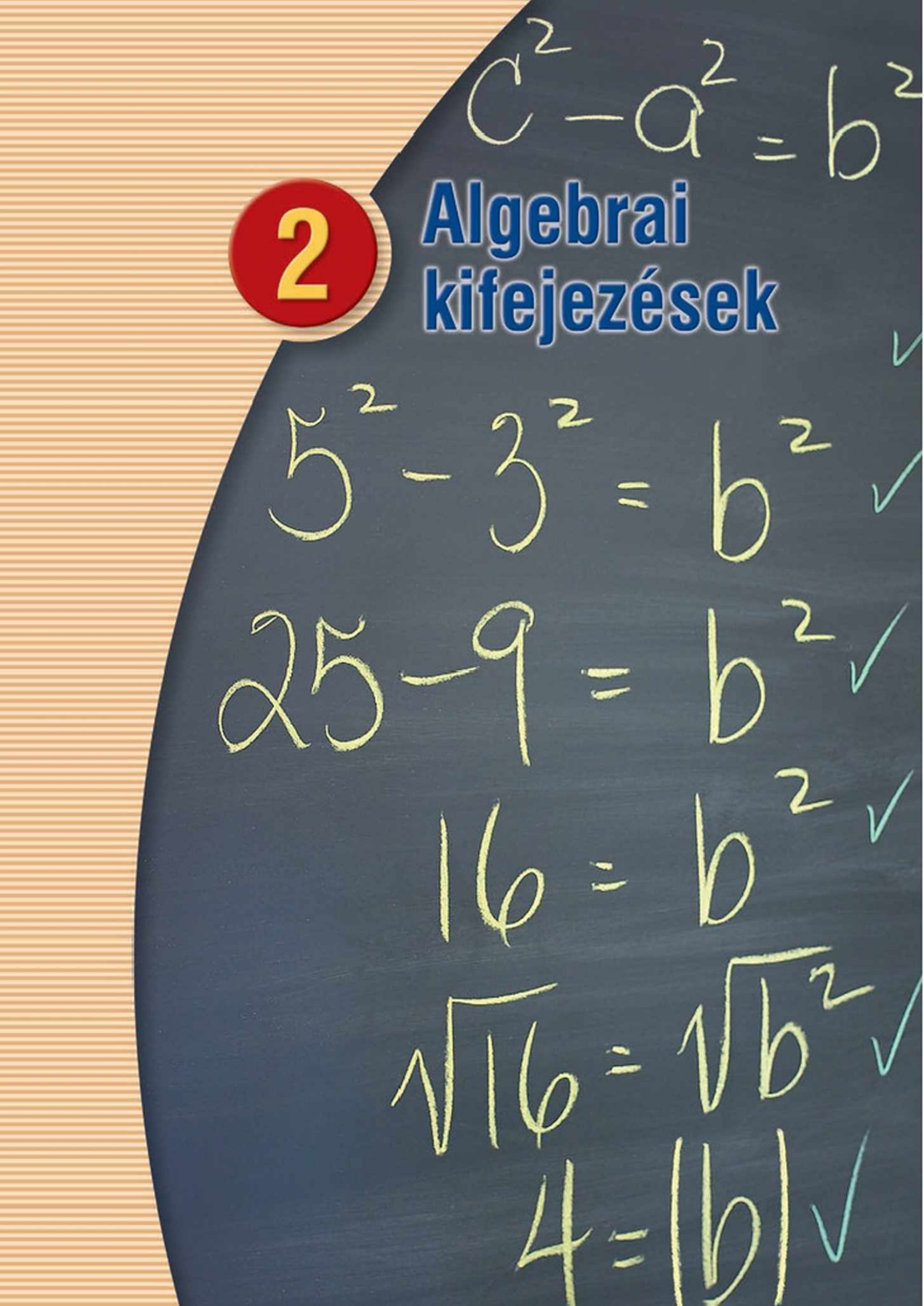


26. Az Aggteleki-cseppkőbarlangban két szomszédos cseppkőre a magasból vízcseppek hullanak. A nagyobbra 20 másodpercenként, a kisebbre 28 másodpercenként esik egy. Ha egy adott pillanatban egyszerre halljuk a két csepp becsapódását, akkor mennyi idő múlva halljuk ezt újra legközelebb?

27. A Hold tömege $7{,}343 \cdot 10^{19}$ tonna.

a) Mekkora a tömege kilogrammban mérve?

b) A Föld tömege ennél 81-szer nagyobb. Hány kilogramm a Föld tömege?



2 Algebrai kifejezések

1. Az algebrai kifejezés



Algebrai kifejezések például:

$3 \cdot a$; $4m + 1$; b^2; $2p + 5q$; $-x$; $\frac{y}{2}$.

Előfordul, hogy a problémákban szereplő mennyiségek sokféle értéket vehetnek fel, vagy nem ismerjük őket, esetleg általános szabályt akarunk leírni. Ekkor a mennyiségek, számok helyett betűket írunk, és ezeket műveletekkel kapcsoljuk össze. Így **algebrai kifejezéseket** kapunk.

1. példa

A Tel-Efon társaságnál a telefon előfizetési díja 1900 forint havonta. Hálózaton belül percenként 20 forintért, hálózaton kívül percenként 40 forintért beszélhetünk. Mennyit kellett fizetnünk januárban, februárban és egy tetszőleges *n.* hónapban, ha az egyes hónapokban lebeszélt időt a táblázat mutatja?

	január	február	*n.* hó
hálózaton belül (perc)	135	53	x
hálózaton kívül (perc)	48	70	y

Kimondva:

$2 \cdot x$ = *kétszer x vagy két x*

$-x$ = *mínusz x*

$\frac{x}{2}$ = *x per kettő*

Megoldás

Januárban hálózaton belül percenként 20 Ft-ért 135 percet, hálózaton kívül percenként 40 Ft-ért 48 percet beszéltünk. Ez az 1900 Ft-os előfizetési díjjal együtt:

$$1900 + 20 \cdot 135 + 40 \cdot 48 = 6520 \text{ (Ft)}.$$

Februárban ugyanígy:

$$1900 + 20 \cdot 53 + 40 \cdot 70 = 5760 \text{ (Ft)}.$$

Mondjuk el szavakkal, hogyan számítjuk ki az egy havi telefonálás díját!

A telefonálásért fizetendő összeg kiszámítási módját általánosan is felírhatjuk az *n.* hónapban (az *n* itt bármelyik hónap száma lehet):

$$1900 + 20 \cdot x + 40 \cdot y \text{ (Ft)}.$$

$2 \cdot a = a \cdot 2$

Ha a szorzat egyik tényezője betű, a szorzás jelét nem feltétlenül kell kiírni: $2 \cdot a$ helyett írhatunk $2a$-t, $x \cdot a$ helyett xa-t.

2. példa

Gabi és Csabi mákos kalácsot ettek. A megevett kalácsok számát szakaszokkal ábrázoltuk, az egyenlő hosszúságú szakaszokat ugyanazzal a betűvel jelöltük. Írjuk le az adatok közötti összefüggést szöveggel, majd algebrai kifejezéssel! Hány kalácsot ettek meg összesen?



Megoldás

Szöveggel: Csabi kétszer annyi kalácsot evett, mint Gabi és még t darabot.

Algebrai kifejezéssel a megevett kalácsok száma: Gabi: g,
Csabi: $2 \cdot g + t$.

Összesen $g + (2 \cdot g + t)$ mákos kalácsot ettek meg.



A feladatok megoldásakor írjuk fel, melyik betű melyik mennyiséget jelöli!

3. Példa

Ábrázoljuk szakaszokkal, és írjuk fel algebrai kifejezéssel többféleképpen az alábbi mennyiségek közötti összefüggést!

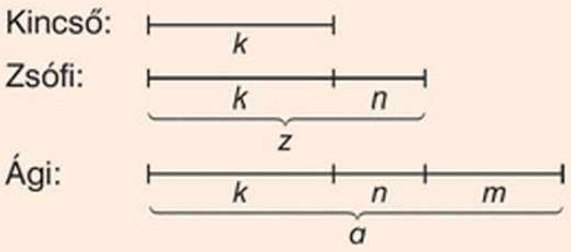
a) Zsófi m évvel fiatalabb Áginál, és n évvel idősebb Kincsőnél, ahol m és n pozitív egész számok.

b) Zoli fényképezőgépének memóriakártyája 3-szor akkora, mint Andrisé, és feleakkora, mint Gergőé.

Megoldás

a) Először állapítsuk meg, hogy ki a legfiatalabb, és ki a legidősebb! Átfogalmazva a feladat szövegét: Ági idősebb Zsófinál, és Zsófi idősebb Kincsőnél. Így Ági a legidősebb, Kincső a legfiatalabb.

Jelöljük Kincső életkorát k-val, Zsófi életkorát z-vel, Ágiét a-val!



Zsófi és Kincső életkora között az összefüggés:

$$z = k + n \quad \text{vagy} \quad k = z - n.$$

Zsófi és Ági életkora között az összefüggés:

$$z = a - m \quad \text{vagy} \quad a = z + m.$$

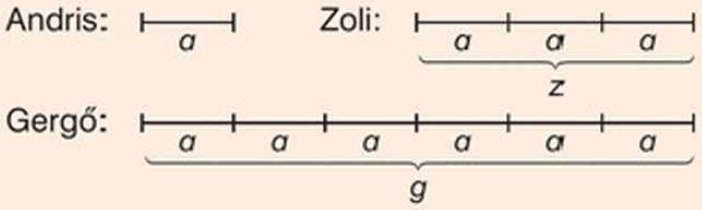
Kincső és Ági életkora között az összefüggés:

$$a = k + n + m \quad \text{vagy} \quad k = a - n - m.$$

A III. századból való Diophantosz (ejtsd: diofantosz) Arithmetika című könyve az egyik első írásos emlék, amelyben algebrai jeleket használtak az összefüggések leírására. Ezeket korábban szöveggel mondták el.



b) Először állapítsuk meg, hogy kinek a memóriakártyája a legkisebb, és kié a legnagyobb!
Zolié nagyobb, mint Andrisé, de kisebb, mint Gergőé. Így Andrisé a legkisebb, Gergőé a legnagyobb. Jelöljük a memóriakártyák méretét betűkkel: Andrisét a-val, Zoliét z-vel, Gergőét pedig g-vel!



Zolié és Andrisé között az összefüggés: $z = 3a$ vagy $a = z : 3$.

Zolié és Gergőé között az összefüggés: $z = g : 2$ vagy $g = 2z$.

Andrisé és Gergőé között az összefüggés: $g = 2 \cdot 3a$ vagy $a = g : 2 : 3$.

$z : 3 = \frac{z}{3}$

$g : 2 = \frac{g}{2}$

4. példa

Medve egyik reggel tejet iszik, következő reggel kakaót, aztán teát, végül málnalevet, és ezt ugyanilyen sorrendben folytatja. Ha ma tejet ivott, akkor hány nap múlva iszik *a)* újra tejet; *b)* kakaót?

Megoldás

d többszörösei: 0; d; $2d$; $3d$; $4d$; ...

Az a-val osztva m maradékot adó számok ($0 \le m < a$): m; $m + a$; $m + 2a$; $m + 3a$; $m + 4a$; $m + 5a$; ...

a) Először 4 nap múlva iszik újra tejet, aztán 8 nap múlva, majd $3 \cdot 4 = 12$ nap múlva és így tovább: $4 \cdot 4 = 16$; $5 \cdot 4 = 20$; ... $n \cdot 4$ nap múlva, ahol n természetes szám. Ezek 4 többszörösei.

b) Kakaót 1 nap múlva, $1 + 4 = 5$ nap múlva, $1 + 2 \cdot 4 = 9$ nap múlva, $1 + 3 \cdot 4 = 13$ nap múlva iszik és így tovább: $1 + 4 \cdot 4 = 17$; $1 + 5 \cdot 4 = 21$; $1 + 6 \cdot 4 = 25$; ... $1 + n \cdot 4$ nap múlva, ahol n természetes szám. Ezek a 4-gyel osztva 1 maradékot adó számok.

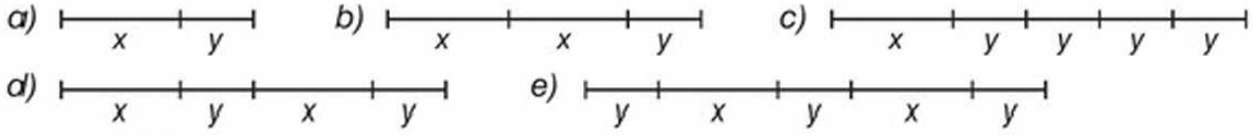
Feladatok

1. Írjuk fel algebrai kifejezéssel:

a) az x-nél 5-tel nagyobb számot;
b) az x 5-szörösét;
c) azt a számot, amelynél az x 5-tel nagyobb;
d) az x ötödrészét;
e) az x ellentettjét;
f) az x reciprokát!

2. Válasszuk ki a szakaszokhoz tartozó algebrai kifejezést a felsoroltak közül!

$2y + x$; $x + y$; $x + 4y$; $2x + y$; $2x + 2y$; $2x + 3y$.



3. Válasszuk ki a szöveges meghatározásoknak megfelelő algebrai kifejezéseket!

$p \cdot q$; $p : q$; $p + q$; $2p + 2q$; $2p^2 + 4pq$; $2p + 4q$; $(p + q) : 2$.

a) A p és q oldalhosszúságú téglalap kerülete.

b) A p és q élű négyzetes oszlop felszíne, ha p a négyzet alakú lap oldalának hosszúsága.

c) Annak az autónak a sebessége, amelyik egyenes vonalú egyenletes mozgással p utat q idő alatt tesz meg.

d) A p és q átlaga.

4. Melyek jelentik ugyanazt? Írjunk mindegyikhez szöveget!

A) Az a b-vel több a c-nél.	1. $b = c : a$
B) A b a-szorosa a c-nek.	2. $c = a + b$
C) Az a-nál b-vel nagyobb szám a c.	3. $a = b + c$
D) A c-nek b-szerese az a.	4. $a = b \cdot c$
E) A c a-adrésze a b.	5. $b = a \cdot c$

5. A 28 fős osztály 5 napos (4 éj) kirándulásának buszköltsége összesen b Ft, a szállás egy éjszakára fejenként s Ft.

a) Mennyibe kerül az osztálynak a busz és a szállás összesen?

b) Mennyibe kerül a busz és a szállás fejenként?

6. A k Ft-ba kerülő kabát árát 25%-kal csökkentették. Mennyi a kabát ára a leértékelés után?

7. Ha 10 db egyforma füzet f Ft-ba kerül, akkor mennyibe kerül k db ugyanilyen füzet?

8. A málnaszörp üveggel együtt m Ft-ba kerül, az üveg betétdíja $ü$ Ft.

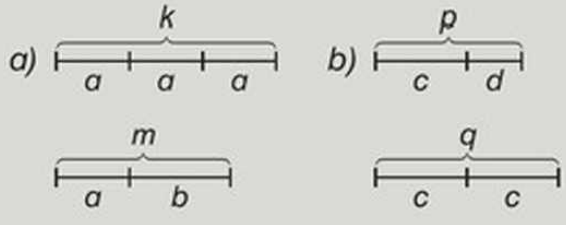
a) Mennyit fizetünk, ha x üveg málnaszörpöt vásárolunk?

b) Mennyit fizetünk, ha emellett visszaviszünk y darab málnaszörpös üveget?

9. A farsangon k darab a literes üdítőt b pohárba töltünk. Hány deciliter üdítő jut egy pohárba?

10. A k kerületű egyenlő szárú háromszög alapja a cm. Írjuk fel a szárának a hosszát!

11. Egy szöveges feladatban az adatok közötti összefüggést szakaszokkal ábrázoltuk. Készítsünk szöveget a szakaszokhoz, és írjuk fel az adatok közötti összefüggést algebrai kifejezéssel! (➡)



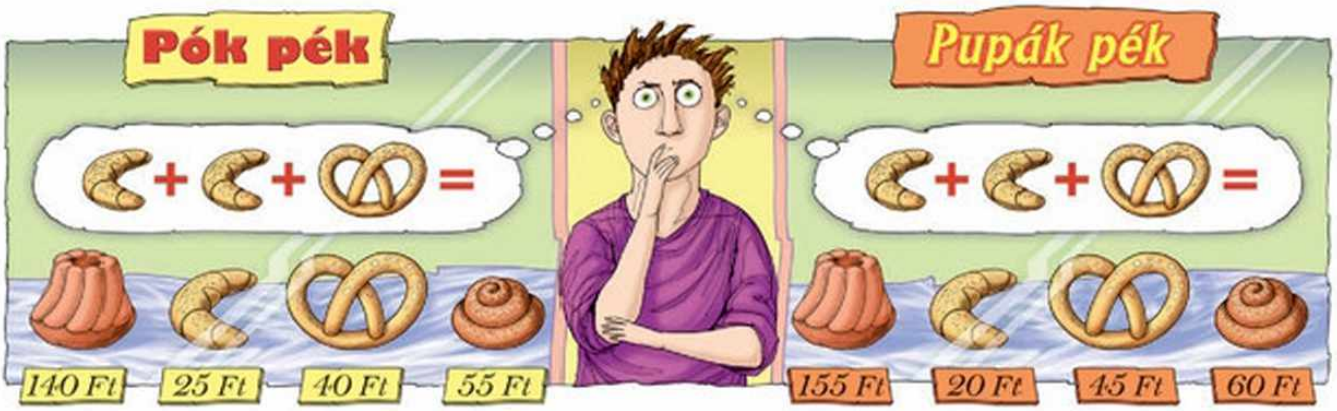
12. Írjuk fel betűkkel, hogy az összeadás és a szorzás felcserélhető és csoportosítható!

Rejtvény

Írjunk a betűk helyére megfelelő számjegyeket!
(Különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek, a CC kétjegyű szám.)

$$\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & CC \\ + & & + & & + \\ -C & + & A & = & B \\ \hline B & + & CC & = & CA \end{array}$$

2. Behelyettesítés



Melyik péknél olcsóbb a reggeli?

1. példa

Frédi és Béni egy piros és egy kék kockával játszik. Amikor Frédi feldobja a két kockát, annyi kavicsot kap Bénitől, amennyi a piros kockával dobott szám duplája, viszont annyit ad Béninek, amennyit a kék kockával dobott. (Ugyanilyen szabály érvényes Béni dobására.)

a) Írjuk fel a dobó játékos nyereményét algebrai kifejezéssel!

b) Mennyi 1 dobás lehetséges legkisebb és legnagyobb nyereménye?

Megoldás

a) Jelöljük a piros kockával dobott számot x-szel, a kékkel dobottat y-nal! Ekkor a dobó játékos $2x$ kavicsot nyer, és y kavicsot veszít. Így a nyereménye 1 dobással összesen $2x - y$ kavics.

Lehet-e a nyeremény 0 kavics?

b) A dobó nyereménye akkor a legkisebb, ha a legkevesebbet nyeri, és a legtöbbet veszíti. Ez akkor következik be, ha $x = 1$ és $y = 6$. Ekkor a nyeremény $2 \cdot 1 - 6 = -4$, azaz 4 kavicsot veszít.

Hány kavicsot nyerhet a dobó egy dobással?

A nyeremény akkor a legnagyobb, ha $x = 6$ és $y = 1$. Ekkor a dobó játékos $2 \cdot 6 - 1 = 11$ kavicsot nyer.

Az algebrai kifejezés **alaphalmazának** nevezzük azt a számhalmazt, melynek elemeit az algebrai kifejezésben szereplő betűk helyére írhatjuk.

Az 1. példában x és y egy-egy kockával dobott szám, így az alaphalmaz az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számok halmaza.

Ha nem írjuk ki külön, akkor az alaphalmaz a legbővebb olyan halmaz, ahol a szövegnek értelme van, vagy a műveletek elvégezhetők.

Például az $\frac{1}{x}$ algebrai kifejezés alaphalmazába az $x = 0$ nem tartozik bele, mert a tört nevezője nem lehet 0.

Behelyettesítést végzünk, ha az algebrai kifejezésben szereplő betűk helyébe az alaphalmazból számokat írunk. A műveleteket elvégezve megkapjuk az algebrai kifejezés **helyettesítési értékét.**

$2x - y$
$\uparrow \quad \uparrow$
$6 \quad 1$

A $2x - y$ algebrai kifejezés helyettesítési értéke az $x = 6$, $y = 1$ helyen:

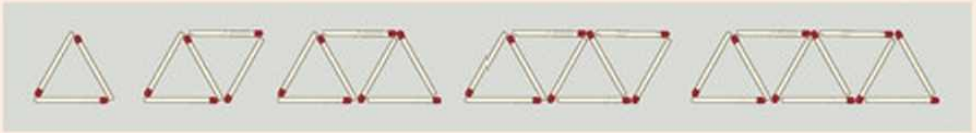
$$2x - y = 2 \cdot 6 - 1 = 11.$$

Két algebrai kifejezés egyenlő, ha alaphalmazuk megegyezik, és a két algebrai kifejezés az alaphalmaz minden elemére ugyanazt a helyettesítési értéket veszi fel.

2. példa

Gyufaszálakból a rajzon látható sorozatot raktuk ki. Hány gyufaszálból áll a sorozat

a) tizedik; *b)* 2007-edik; *c)* *n*-edik; *d)* 45 379-edik tagja?



Megoldás

A sorozat első tagja 3 gyufaszálból áll, a második 5, a harmadik 7, a negyedik 9, az ötödik 11 gyufaszálból áll.

Észrevehetjük, hogy az újabb tagokat úgy kapjuk, hogy 2 gyufaszálat hozzáillesztünk az előző taghoz. Így a gyufák száma minden lépésben 2-vel nő.

a) A tizedik tagot az elsőből 9 lépésben kapjuk, így ebben a gyufaszálak száma: $3 + 9 \cdot 2 = 21$.

b) A 2007-dik tagot az elsőből 2006 lépésben kapjuk, így ebben a gyufaszálak száma: $3 + 2006 \cdot 2 = 4015$.

Ezek alapján megfogalmazhatjuk a szabályt a gyufaszálak számára.

c) Az *n*-edik tagot az elsőből $n - 1$ lépésben kapjuk, így a gyufaszálak száma: $3 + (n - 1) \cdot 2$ lesz.

d) A szabály alapján a 45 379-dik tagot megkapjuk, ha a $3 + (n - 1) \cdot 2$ algebrai kifejezésbe az *n* helyére 45 379-et írunk: $3 + (45\,379 - 1) \cdot 2 = 90\,759$.

Állhat-e a sorozat valamelyik tagja 18 638 gyufaszálból?

Domi a gyufaszálak számára a $2n + 1$ szabályt találta.

Döntsük el, hogy helyes-e az ő szabálya is!

3. példa

A számítógép táblázatkezelő programja az egyik oszlopban lévő adatokból úgy számolta ki a másik oszlopot, hogy az adatokat egy megadott algebrai kifejezésbe helyettesítette be. A táblázat egy része az ábrán látható.

a	
−4	
0,5	
10	
12	
1	9
2	8
3	7
5	5

a) Mi lehetett az az algebrai kifejezés, amely alapján a gép számolt? Pótoljuk a hiányzó adatokat!

b) Ábrázoljuk koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyek első koordinátája az *a* értéke, második koordinátája pedig az algebrai kifejezés helyettesítési értéke ezen a helyen!



Megoldás

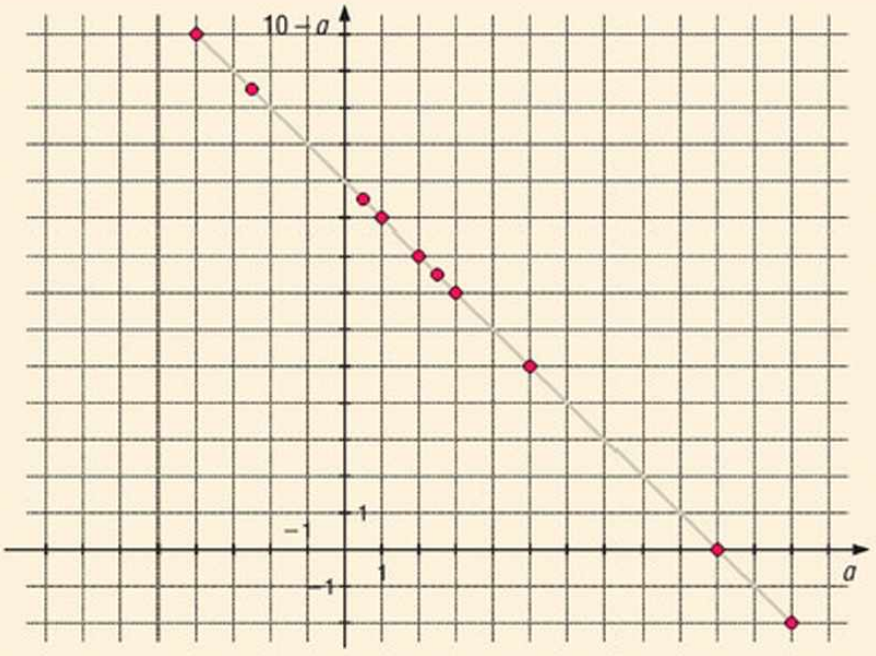
a) Észrevehetjük, hogy a két oszlopban a számok összege 10. Így a második oszlopba írt szám a 10 és az első oszlopbeli szám különbsége, algebrai kifejezéssel: $10 - a$.

Valóban: $10 - 1 = 9$;
$10 - 2 = 8$;
$10 - 3 = 7$;
$10 - 5 = 5$.

Írjuk be a táblázatba a hiányzó értékeket!

a	$10 - a$
−4	14
−2,5	12,5
0,5	9,5
10	0
12	−2
1	9
2	8
2,5	7,5
3	7
5	5

b) Koordináta-rendszerben ábrázoljuk a pontokat, melyek első koordinátája a táblázatban szereplő a, második koordinátája pedig $10 - a$.



Észrevehetjük, hogy a koordináta-rendszerben ábrázolt pontok egy egyenesre illeszkednek.



Játsszunk!

Írjunk fel egy kartonlapra egy egyszerű algebrai kifejezést, és tegyük egy gyerek homlokára! Ő nem láthatja ezt a kifejezést, csak azt mondjuk meg neki, hogy milyen betűk szerepelnek benne. Ezek helyére mondhat számokat, amelyeket a többiek behelyettesítenek az algebrai kifejezésbe, és megmondják neki a helyettesítési értéket. A játékos feladata kitalálni a felírt algebrai kifejezést.



***4. példa**

Az $a \odot b$ (ejtsd: a mosoly b) művelet jelentse azt, hogy az a háromszorosához hozzáadjuk a b-t, ahol a és b racionális számok.

a) Számítsuk ki a következő műveletsorok eredményét!

A) $1 \odot 2$; *B)* $2 \odot 1$; *C)* $\frac{2}{3} \odot (-0{,}5)$; *D)* $(2 \odot 3) \odot 4$; *E)* $2 \odot (3 \odot 4)$.

b) Igaz-e, hogy a $\odot$ művelet tagjai felcserélhetők és tetszőlegesen csoportosíthatók?

A $\odot$ művelet akkor felcserélhető, ha $a \odot b = b \odot a$ minden a és b racionális számpárra.

Megoldás

A $\odot$ művelet algebrai kifejezéssel felírva: $a \odot b = 3a + b$.

a) Ebbe az algebrai kifejezésbe behelyettesítve az adott számokat, a felírt műveletek a következők:

A) $1 \odot 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$;

B) $2 \odot 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$;

C) $\frac{2}{3} \odot (-0{,}5) = 3 \cdot \frac{2}{3} + (-0{,}5) = 1{,}5$.

A következő műveletsoroknál először a zárójelben levő műveletet végezzük el.

D) $(2 \odot 3) \odot 4 = (3 \cdot 2 + 3) \odot 4 = 9 \odot 4 = 3 \cdot 9 + 4 = 31$;

E) $2 \odot (3 \odot 4) = 2 \odot (3 \cdot 3 + 4) = 2 \odot 13 = 3 \cdot 2 + 13 = 19$.

b) Mivel $1 \odot 2 = 5$, de $2 \odot 1 = 7$, van olyan számpár, amelyiket felcserélve a művelet eredménye megváltozik. Tehát a $\odot$ művelet nem felcserélhető.

Hasonlóan láttuk, hogy $(2 \odot 3) \odot 4 = 31$, de $2 \odot (3 \odot 4) = 19$, azaz vannak olyan számok, melyeket különféleképpen csoportosítva más-más eredményt kapunk. Tehát a $\odot$ művelet nem csoportosítható tetszőlegesen.

Annak megmutatására, hogy az $a \odot b = b \odot a$ egyenlőség nem teljesül minden a, b számpárra, elegendő egy **ellenpélda,** azaz egy olyan számpár, amelyre nem igaz az egyenlőség.

Érdekesség

A következő feladatot megoldással együtt a Rhind papirusz tartalmazza, amely az egyiptomi matematika fontos írásos emléke kb. Kr. e. 1650-ből.

Ha egy számnak és a hetedének összege 19, akkor mennyi a szám?

Ha a szám a 7 lenne, akkor a hetede 1, és így a szám a hetedével együtt 8-at adna.

Ahányszorosa a 19 a 8-nak, ugyanannyiszorosa lesz a keresett szám a 7-nek. Tehát a szám: $\frac{19}{8} \cdot 7$.

Jelöljük az ismeretlen számot x-szel! A szám és a hetede együtt: $x + \frac{x}{7}$.

A megoldás során ebbe az algebrai kifejezésbe helyettesítettünk be találomra egy számot, az $x = 7$-et, és az eredménynek megfelelően módosítottuk az x értékét. Ez a behelyettesítés módszere, amely hasonló feladatok megoldásánál hasznos lehet.

Feladatok

1. Számítsuk ki az $a = 5;\ -2;\ 1{,}4;\ \frac{2}{3}$ és a $b = 1;\ -2;\ 4;\ \frac{3}{2}$ helyeken a következő algebrai kifejezések helyettesítési értékét!

a) A: $a+3$; B: $a-3$; C: $-a+3$; D: $-a-3$; E: $3-a$; F: $-3+a$;

b) A: $2b$; B: b^2; C: $\frac{b}{2}$; D: $\frac{2}{b}$; E: $b \cdot 2$; F: $\frac{1}{2} \cdot b$.

2. Töltsük ki a táblázatot, és ábrázoljuk koordináta-rendszerben kékkel azokat a pontokat, amelyek első koordinátája x, második koordinátája pedig $3x - 2$!

x	$-2{,}5$	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	$2{,}5$
$3x-2$									

Folytassuk a táblázatot, és ábrázoljunk további színes pontokat!
A piros pontok második koordinátája legyen $3 - 2x$, a zöldeké $\frac{x}{3} - 2$, a sárgáké $\frac{x-2}{3}$ (a pontok első koordinátái ugyanazok, mint a kékeké).

3. Számítsuk ki a következő algebrai kifejezések helyettesítési értékét!

a) $x+y$; $2x+y$; $x-2y$; $x \cdot y$, ha $x = 0{,}5$ és $y = 4$;

b) $2a-b+1$; $b-2a-1$; $-a+2b+1$; $-2b-a-1$, ha $a = -2$ és $b = \frac{1}{2}$.

4. Az összes lehetséges módon párosítsuk a kék és a sárga feliratokat! Írjuk le és fejezzük be a mondatokat a kiszámított helyettesítési értékekkel!

Az $a \cdot b - 3$ algebrai kifejezés helyettesítési értéke	ha $a = 0$ és $b = -1$
Az $a + 3b - 1$ algebrai kifejezés helyettesítési értéke	ha $a = -0{,}1$ és $b = \frac{1}{2}$
Az $\frac{1}{2}a - b$ algebrai kifejezés helyettesítési értéke	ha $a = \frac{1}{3}$ és $b = -2$

5. Egy matematikaversenyen a 7. osztályosoknak 30 feladatot kellett megoldaniuk. A pontokat a $4 \cdot H - R + 30$ algebrai kifejezés alapján számolják, ahol H a helyes, R a rossz válaszok számát jelöli. Hány pontja van annak, aki

a) 28 helyes és 2 rossz választ adott;
b) 25 helyes és 3 rossz választ adott, 2 kérdésre pedig nem válaszolt;
c) 18 helyes és 5 rossz választ adott, a többi kérdésre pedig nem válaszolt;
d) 15 helyes és 15 rossz választ adott?

6. Az Egyesült Államokban a hőmérsékletet Celsius-fok (°C) helyett Fahrenheit-fokban (°F) mérik. A Celsius-fokban mért értéket a $h\,°C = (32 + \frac{9}{5} \cdot h)\,°F$ algebrai kifejezés alapján számíthatjuk át Fahrenheit-fokba. Hány Fahrenheit-fokos a víz, ha forr, illetve ha fagy?

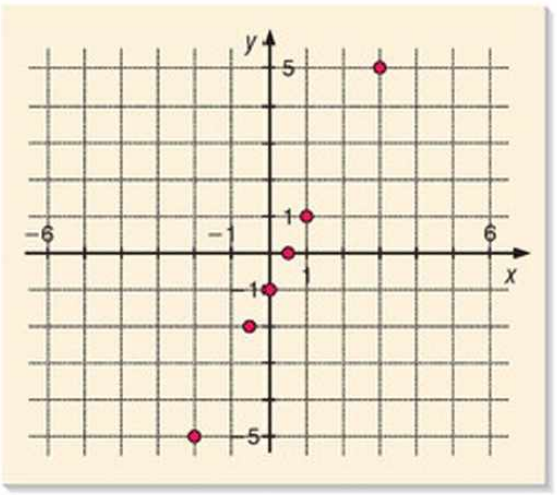
7. Egy 8 tagú család naponta 2 kg kenyeret és 3 liter tejet fogyaszt el. Mennyibe került ez naponta az egyes években, ha a táblázat 1 l tej és 1 kg kenyér árának változását mutatja? (➡)

	2004	2005	2006	2007
tej (Ft)	121	137	169	189
kenyér (Ft)	96	142	175	200

8. *a)* Olvassuk le az ábráról, és írjuk táblázatba az egyes pontok x és y koordinátáit!

b) Írjuk fel azt az algebrai kifejezést, amely alapján az x-ből az y-t kapjuk!

c) Számítsuk ki az algebrai kifejezés $x = -1$; $x = 2$; $x = 2{,}5$; $x = 4$; helyeken vett helyettesítési értékeit, és ábrázoljuk a megfelelő pontokat koordináta-rendszerben! (➡)



9. Az $1 - a$; $a + 2$; a^2; $-a$; $\frac{1}{a}$ algebrai kifejezések közül melyik lesz 1-nél nagyobb, ha a helyébe 0 és 1 közé eső tetszőleges racionális számot írunk?

10. Az $1 - x$; $x - 2$; $(-x)^2$; $2x$; $-x$; $\frac{1}{x}$ algebrai kifejezések közül melyik lesz pozitív, ha x helyébe 0 és 1 közé eső tetszőleges racionális számot írunk?

11. A □ (ejtsd: négyzet) művelet a következő: $a \square b = a \cdot b - b$. Mennyi a

a) $2 \square 3$; *b)* $3 \square 2$; *c)* $(-1) \square 3$; *d)* $1 \square (-3)$;

e) $(2 \square 4) \square 3$; *f)* $3 \square (4 \square 2)$; *g)* $(3 \square 4) \square 2$?

***12.** Mi lehet a ○ (ejtsd: karika) művelet, ha $1 \circ 1 = 1$; $1 \circ 0 = \frac{1}{2}$; $1 \circ (-1) = 0$; $3 \circ 1 = 2$? Számítsuk ki a $2 \circ 0{,}5$; $1{,}5 \circ (-2{,}5)$; $(-3) \circ 2$; $1{,}2 \circ 3{,}6$ műveletek eredményét!

***13.** Hány különböző értéket vehet fel a $(p - q) \cdot r$ algebrai kifejezés, ha a p, q és r helyébe valamilyen sorrendben a -1; 0; 2 számokat írjuk?

***14.** Számítsuk ki az összes $\overline{1abc}$ alakú számok összegét, ahol az a, b, c számjegyek mindegyike csak 0 vagy 1 lehet! (Az $\overline{1abc}$ az a négyjegyű szám, amelynek számjegyei 1; a; b; c ebben a sorrendben.)

Rejtvény

A Rhind papirusz feladata a következő: 7 ház mindegyikében 7 macska. Mindegyik megevett 7 egeret. Minden egér megevett 7 kalászt. Minden kalászban volt 7 szem búza. Mennyi mindezek összege?

3. Műveleti sorrend



Számítsuk ki az algebrai kifejezések helyettesítési értékét, ha $a = 6$ és $b = 6$!

1. példa

Készítsünk folyamatábrát a következő algebrai kifejezés kiszámítására! Írjuk le szöveggel, hogy milyen műveleteket végzünk egymás után!

a) $\frac{2a+3}{5} - 4$; b) $\frac{2(b+3)-4}{5}$.

Megoldás

a)

Az a számot szorozzuk 2-vel!

↓

Adjunk hozzá 3-at!

↓

Osszuk el 5-tel!

↓

Vonjunk ki belőle 4-et!

b)

A b számhoz adjunk 3-at!

↓

Szorozzuk meg 2-vel!

↓

Vonjunk ki belőle 4-et!

↓

Osszuk el 5-tel!

$2a$

$2a + 3$

$\frac{2a+3}{5}$

$\frac{2a+3}{5} - 4$

$\frac{a+3}{5} = (a+3):5$

Az algebrai kifejezésekből leolvasható, hogy milyen műveleteket milyen sorrendben kell elvégezni. Algebrai kifejezéseknél többnyire törtvonal jelöli az osztást. A törtvonal egyben a zárójelet is helyettesíti.

2. példa

A „3-szor x plusz 5” algebrai kifejezés lehet $3x + 5$ vagy $3 \cdot (x + 5)$. Aladár számítógéppel beírta egy táblázatba ezek helyettesítési értékeit, ám véletlenül néhány cella tartalmát kitörölte. Melyik oszlopba melyik algebrai kifejezés került? Pótoljuk a hiányzó számokat!

Keressünk más olyan algebrai kifejezéseket, amelyeket egyformán mondunk, mégis különbözőek! Számítsunk is ki néhány helyettesítési értéket!

x		
-2		
-1		
0	5	
2	11	

Megoldás

Ha $x = 0$, akkor a középső oszlopban a helyettesítési érték 5.

Mivel $3x + 5 = 3 \cdot 0 + 5 = 5$ és
$3 \cdot (x + 5) = 3 \cdot (0 + 5) = 15$,

ezért a középső oszlop tartalmazza a $3x + 5$ algebrai kifejezés helyettesítési értékeit. Ezután a táblázat a megfelelő helyettesítési értékekkel:

x	$3x + 5$	$3 \cdot (x + 5)$
-2	-1	9
-1	2	12
0	5	15
2	11	21

A különböző helyettesítési értékek mutatják, hogy a műveletsort különféleképpen zárójelezve különböző algebrai kifejezéseket kaphatunk.

A különböző zárójelezéseket szöveggel is érzékeltethetjük:

$3x + 5$ → az x 3-szorosához adunk 5-öt;

$3 \cdot (x + 5)$ → szorozzuk 3-mal az x plusz 5-öt.

Az „x plusz 3 a négyzeten” lehet $x + 3^2$ vagy $(x + 3)^2$.

Töltsük ki a táblázatot!

x	$x + 3^2$	$(x + 3)^2$
0		
1		
-1		
2		
-2		

Az algebrai kifejezésekben a betűk számokat jelentenek, így a műveleti sorrend ugyanaz, mint a számoknál:

1. **a zárójelben levő műveletek;**
2. **hatványozás;**
3. **szorzás, osztás balról jobbra;**
4. **összeadás, kivonás balról jobbra.**

3. példa

Rakjuk össze a dominókat úgy, hogy olyan algebrai kifejezések kerüljenek egymás alá, amelyek egyenlők!

$2 \cdot (x - 1)$	$2x - 1$	$-1 + 2x$	$x + 1 - 3$	$2 - x$	$x \cdot (-2)$
$-2x$	$2 \cdot (3x)$	$x - 2$	$2 + (-x)$	$6x$	$2 \cdot (3 + x)$

Megoldás

$2 \cdot (x - 1)$	$2x - 1$	$x - 2$	$2 + (-x)$	$-2x$	$2 \cdot (3x)$
	$-1 + 2x$	$x + 1 - 3$	$2 - x$	$x \cdot (-2)$	$6x$	$2 \cdot (3 + x)$

$2x - 1 = -1 + 2x$,
mert az összeg tagjai ugyanazok, csak más sorrendben.

$a + b = b + a$

$(x + 1) - 3 = x + (1 - 3) = x - 2$,
mert az összeadásnál a tagok tetszőlegesen csoportosíthatók.

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$2 + (-x) = 2 - x$,
az összeadás szabályai szerint.

$-a = +(-a)$

$x \cdot (-2) = (-2) \cdot x = -2x$,
mert a szorzatok tényezői ugyanazok, csak más sorrendben.

$ab = ba$

$2 \cdot (3x) = (2 \cdot 3) \cdot x = 6x$,
mert a szorzat tényezői tetszőlegesen csoportosíthatók.

$(ab)c = a(bc) = abc$

Az összeg tagjai felcserélhetők és tetszőlegesen csoportosíthatók.
A szorzat tényezői felcserélhetők és tetszőlegesen csoportosíthatók.

Feladatok

1. Írjuk le azt az algebrai kifejezést, amelyet a folyamatábra alapján kapunk!

a)



b)



2. Készítsünk folyamatábrát a következő algebrai kifejezések kiszámítására!

a) $6(y - 4) + 3$; *b)* $\frac{1 - 2x}{3}$; *c)* $5 - (3x + 1)$.

3. Zsuzsi ezt mondja: „Gondoltam egy számot, megszoroztam 3-mal, hozzáadtam 2-t, elosztottam 5-tel, és végül elvettem belőle 6-ot.

a) Írjuk fel algebrai kifejezéssel, mit kapott Zsuzsi, ha a gondolt számot x-szel jelöljük!

b) Számítsuk ki, mit kapott, ha a 99-re gondolt!

c) Készítsünk folyamatábrát a kapott szám kiszámítására!

4. Az „x mínusz 2 per 3 plusz 1” algebrai kifejezés többek között lehet $\frac{x-2}{3}+1$; $x-\frac{2}{3+1}$ vagy $\frac{x-2}{3+1}$.

A következő táblázat ezek helyettesítési értékeit tartalmazza oszloponként, de nem feltétlen ebben a sorrendben. Határozzuk meg, hogy melyik oszlopba melyik kifejezés került! Másoljuk le a táblázatot, és pótoljuk a hiányzó számokat!

x			
−2	−1		
0,5			0
1			
2		1	



5. Egy számot, amely a p 7-szerese, 9-cel csökkentünk. Melyik algebrai kifejezéssel egyenlő ennek az ötöde?

A) $7p-\frac{5}{9}$; *B)* $\frac{7(p-9)}{5}$; *C)* $\frac{7p-9}{5}$; *D)* $(7p-9)\cdot 5$; *E)* $(7p-9)\cdot\frac{1}{5}$.

6. Írjuk fel a következő algebrai kifejezéseket!

a) A p felénél néggyel nagyobb szám háromszorosa.
b) A q-nál kettővel kisebb számot szorozzuk öttel, és hozzáadunk hetet.
c) Kivonjuk az r-et hatból, a különbséget osztjuk kilenccel.
d) Összeadjuk az s háromszorosát és négyszeresét, és az összeget elosztjuk héttel.

7. Írjuk le szöveggel a következő algebrai kifejezéseket úgy, hogy abból egyértelműen fel lehessen írni az algebrai kifejezést!

a) $2a-1$; *b)* $\frac{3+b}{2}$; *c)* $5\cdot(c+3)$; *d)* $1-\frac{d}{2}$; *e)* $2-(1-e)$.

8. Írjuk fel algebrai kifejezéssel, hogy n db 50 forintos mennyi pénz, és hogy 50 darab n forintos áruért mennyit kell fizetni! Melyik a több?

9. A felsorolt algebrai kifejezések közül válasszuk ki, hogy melyek egyenlőek!

a) *A:* $2p+1$; *B:* $2-p$; *C:* $1+2p$; *D:* $1+p^2$; *E:* $p-2$; *F:* $-p+2$;

b) *A:* $3+(q-1)$; *B:* $q-3$; *C:* $(3+q)-1$; *D:* $3q-1$; *E:* $(q-2)-1$; *F:* $3q+(-1)$;

c) *A:* $2\cdot(5\cdot r)$; *B:* $r\cdot 5$; *C:* $-8r$; *D:* $10r$; *E:* $5\cdot r$; *F:* $r\cdot(-8)$.

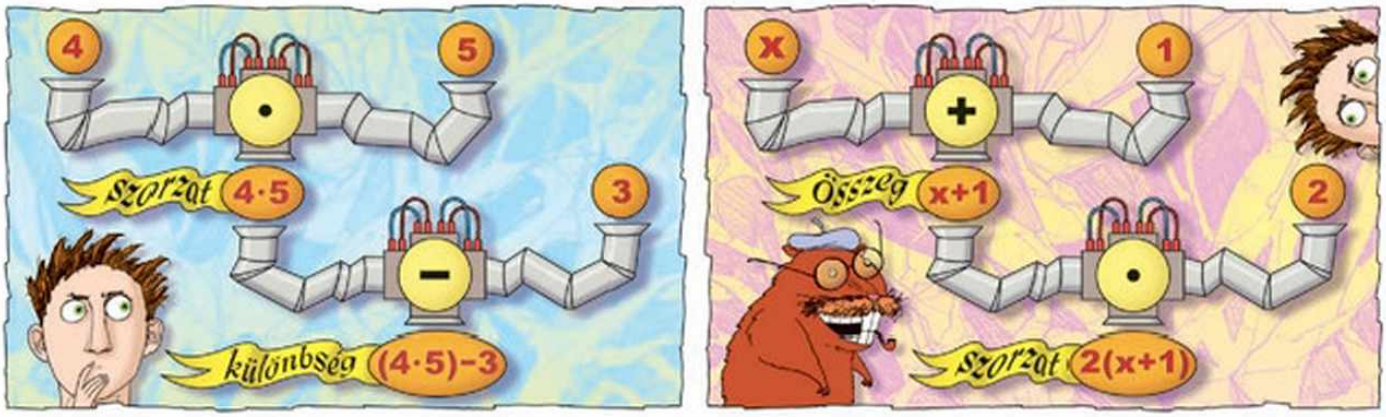
10. A [2] [x] [3] kártyák közé helyezzük el a [·] [+] [(] [)] kártyákat többféleképpen úgy, hogy algebrai kifejezéseket kapjunk, majd írjuk fel ezeket!

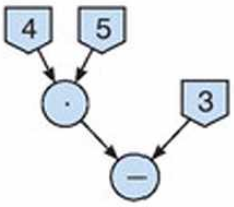
Rejtvény

Tegyünk ki zárójeleket és műveleti jeleket úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen!

$a\ \ a\ \ a\ \ a\ \ a = a$ $\qquad$ $a\ \ a\ \ a\ \ a = a$

4. Egytagú és többtagú algebrai kifejezések





A műveletek végzésének sorrendjét **fadiagrammal** szemléltethetjük.

Például a balra látható fadiagram a $4 \cdot 5 - 3$ műveletsornak felel meg.

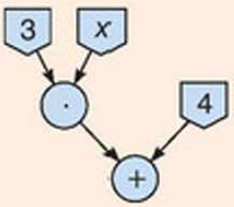
1. Példa

Szemléltessük fadiagrammal az algebrai kifejezéseket, és állapítsuk meg, hogy melyik műveletet kell utoljára elvégeznünk!

a) $3x + 4$; *b)* $\frac{x+2}{5}$.

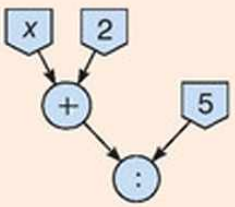
Megoldás

a)



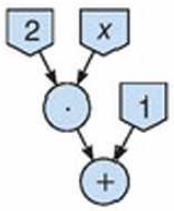
Az utolsó művelet az összeadás.

b)

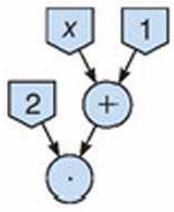


Az utolsó művelet az osztás.

$2x + 1$ kéttagú algebrai kifejezés



$2 \cdot (x + 1)$ egytagú algebrai kifejezés



Egytagú az az **algebrai kifejezés,** amelyben az utoljára elvégzett művelet a szorzás, az osztás vagy a hatványozás.

Például: $2a$; $3b^2$; $4 \cdot (m + 3)$; $\frac{k+2}{3}$; $(x + 1)^2$.

Többtagú az az **algebrai kifejezés,** amelyben az utoljára elvégzett művelet az összeadás vagy a kivonás.

Például – kéttagúak: $a + 2$; $\frac{c}{2} - 1$; $x^2 + 1$; $3z + 5$;

– háromtagúak: $a + a + a$; $a + b - c$; $x^2 - 2x + 1$.

2. Példa

Írjuk két oszlopba a következő algebrai kifejezéseket: az első oszlopba az egytagúakat, a másodikba a többtagúakat!

$1 - 3x$; $3x$; $\frac{1}{4} \cdot p$; $\frac{2-y}{5}$; $\frac{1}{4} + p$; $\frac{2}{5} - y$; $3p + 2$; $3(p + 2)$.

Megoldás

Mindegyik algebrai kifejezés esetén állapítsuk meg, hogy melyik műveletet kell utoljára elvégeznünk!

Egytagúak		Többtagúak	
algebrai kifejezés	utolsó művelet	algebrai kifejezés	utolsó művelet
$3x$	szorzás	$1 - 3x$	kivonás
$\frac{1}{4} \cdot p$	szorzás	$\frac{1}{4} + p$	összeadás
$\frac{2-y}{5}$	osztás	$\frac{2}{5} - y$	kivonás
$3(p + 2)$	szorzás	$3p + 2$	összeadás

3. Példa

Melyik szövegnek felel meg egytagú, és melyiknek többtagú algebrai kifejezés? Válaszoljunk az algebrai kifejezés felírása nélkül, majd írjuk fel az algebrai kifejezést!

a) Imi zsebpénze, miután az s Ft-os zsebpénzét a duplájára emelték.

b) Három darab m Ft árú csokimikulás és 1 kg szaloncukor ára, ha 1 kg szaloncukor 500 Ft-ba kerül.

c) Domi életkora, aki ötödannyi idős, mint a nagyapja, aki n éves.

d) Gabi pénze, miután a p forintjából vett egy q forintos és egy r forintos könyvet.

Megoldás

a) Imi mostani zsebpénze a korábbinak a kétszerese, így szorzatot kapunk. Egytagú algebrai kifejezés: $2s$.

b) A mikulás árának 3-szorosához hozzáadjuk az 1 kg szaloncukor árát, így összeget kapunk.
Kéttagú algebrai kifejezés: $3m + 500$.

c) Nagyapa életkorát osztjuk 5-tel, így hányadost kapunk.
Egytagú algebrai kifejezés: $n : 5 = \frac{n}{5}$.

d) Gabi pénzéből kivonjuk az egyik könyv árát, majd a másik könyv árát, így különbséget kapunk.
Többtagú (háromtagú) algebrai kifejezés: $p - q - r$.

4. példa

Mennyibe kerülnek az alábbi virágcsokrok, ha egy szál tulipán t forint, egy szál nárcisz pedig n forint?

a) 3 tulipán és egy nárcisz; *b)* egy tulipán és 3 nárcisz;
c) 2 tulipán és 2 nárcisz; *d)* 3 tulipán és 5 nárcisz.

Megoldás

A csokrok ára:

a) $3t + n$; *b)* $t + 3n$; *c)* $2t + 2n$; *d)* $3t + 5n$.

együtthatók

A fenti algebrai kifejezések azokban a számokban különböznek, amelyekkel megszoroztuk a t-t, a tulipán árát és az n-et, a nárcisz árát. Ezek a számok az **együtthatók.**

Együtthatónak nevezzük az egytagú algebrai kifejezésekben a szám szorzótényezőt.

$2x = 2 \cdot x$, az együttható 2;
$x = 1 \cdot x$, az együttható 1;
$-x = (-1) \cdot x$, az együttható -1.

$$3t$$

együttható

A $3t + 5n$ algebrai kifejezésben a t együtthatója 3, az n együtthatója 5.
A $3t + n$ algebrai kifejezésben a t együtthatója 3, az n együtthatója 1.

5. példa

Mely számok az együtthatók a következő algebrai kifejezésekben?

a) d^2; *b)* $-bc$; *c)* $a \cdot 8$; *d)* $3a \cdot 2$; *e)* $\frac{4r}{3}$; *f)* $\frac{p^2}{2}$; *g)* $2(x + 1)$.

Megoldás

Az algebrai kifejezéseket felírjuk egy szám és egy betűkifejezés szorzataként.

a) $d^2 = 1 \cdot d^2$, az együttható 1.

b) $-bc = (-1) \cdot (bc)$, az együttható -1.

c) $a \cdot 8 = 8 \cdot a$, az együttható 8.

d) $3a \cdot 2 = (3 \cdot 2) \cdot a = 6 \cdot a$, az együttható $3 \cdot 2 = 6$.

e) $\frac{4r}{3} = \frac{4}{3} \cdot r$, az együttható $\frac{4}{3}$.

f) $\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot p^2$, az együttható $\frac{1}{2}$.

g) $2(x + 1) = 2 \cdot (x + 1)$, az együttható 2.

6. példa

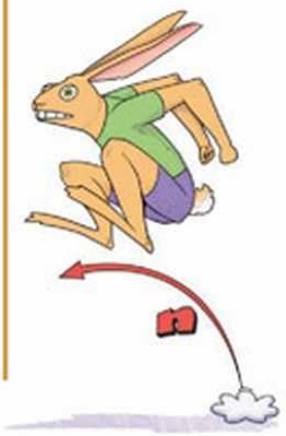
Nyuszi ugrásai n hosszúságúak. Kanga ugrásai háromszor akkorák, viszont amíg ő egyet ugrik, addig Nyuszi négyet. Melyikük ér hamarabb Micimackóhoz, ha egyszerre indulnak el?

Megoldás

Kanga egy ugrása $3n$ hosszúságú. Ezalatt Nyuszi 4-szer ugrik n hosszúságút, így $4n$ távolságra jut.

n az ugrás hossza, ezért n pozitív szám. Így n 3-szorosa kisebb a 4-szeresénél: $3n < 4n$.

Tehát ugyanannyi idő alatt Nyuszi messzebbre jut, így hamarabb ér Micimackóhoz.



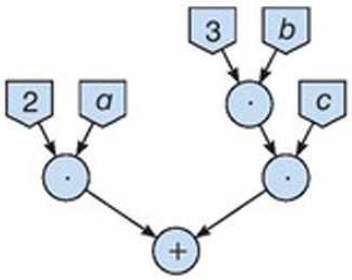
Feladatok

1. Írjuk fel algebrai kifejezéssel, majd számítsuk ki az x, y, z számok összegét és szorzatát, ha

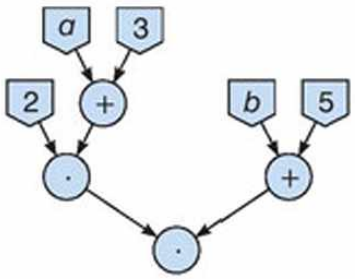
a) $x = 2$; $y = -3$; $z = 1{,}5$; *b)* $x = 0{,}6$; $y = \frac{2}{3}$; $z = 0$; *c)* $x = -\frac{1}{2}$; $y = 5$; $z = -7{,}5$.

2. Az alábbi fadiagramok közül melyik szemléltet egytagú, és melyik többtagú algebrai kifejezést? Írjuk fel a megfelelő algebrai kifejezéseket!

a)



b)



3. Rajzoljuk le a következő algebrai kifejezésekhez tartozó fadiagramot, és döntsük el, hogy melyik egytagú, és melyik többtagú algebrai kifejezés!

a) $b + 2 \cdot (a + 1)$; *b)* $(b + 2) \cdot (a + 1)$; *c)* $(b + 2) \cdot a + 1$; *d)* $b + 2a + 1$.

4. Válasszuk ki az egytagú algebrai kifejezéseket!

A) $1 + 7x$; *B)* $(x - 1)^2$; *C)* $2x^2$; *D)* $(3x)y$;

E) $-6xy$; *F)* $\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y$; *G)* $\frac{2x + 4y}{3}$; *H)* $3 + 3 \cdot (x - 3)$.

5. Egészítsük ki a $2x\,3y$ jelsorozatot műveleti jelekkel és zárójelekkel úgy, hogy

a) egytagú algebrai kifejezés legyen;

b) többtagú algebrai kifejezés legyen!

Keressünk minél több megoldást!

6. Egytagú vagy többtagú algebrai kifejezést kapunk? Döntsük el, majd írjuk fel az algebrai kifejezéseket!

a) Hány perc a k óra és p perc?
b) Hány nap a p nap híján q hét?
c) Hány kilogramm az m dkg?
d) Hány deciliter az u liter?

7. Írjuk le az alábbi algebrai kifejezéseket úgy, hogy az együtthatókat pirossal, a többit pedig kékkel írjuk!

a) $2p + 5q$; *b)* $\frac{1}{2}p - q$; *c)* $p + 3q$; *d)* $2(p + q)$; *e)* $p \cdot 3q$;

f) $\frac{4}{5}p - \frac{7}{6}q$; *g)* $\frac{1}{2}p \cdot 2$; *h)* $\frac{2}{3}p \cdot \frac{3}{2}q$; *i)* $2{,}5p + (-2)q$.

8. Mennyi az együttható a következő egytagú algebrai kifejezésekben?

a) $2a \cdot 3$; *b)* $-4b$; *c)* $6 \cdot (c - 3)$; *d)* $\frac{d}{2} \cdot 3$;

e) $\frac{8 \cdot e}{2}$; *f)* $-\frac{f}{7}$; *g)* $g \cdot 3 \cdot 7$; *h)* $(6 - 2) \cdot h$.

9. Írjunk öt-öt olyan algebrai kifejezést, amely csak együtthatójában különbözik a megadottól!

a) $3xy$; *b)* $-5x2z$; *c)* $\frac{2x}{3}$; *d)* $-1{,}5xyz$.

10. Írjunk számokat a jelek helyére úgy, hogy az alábbi algebrai kifejezések mind egyenlők legyenek! Keressünk több megoldást, és figyeljük meg, milyen kapcsolat van köztük!

A) $2 \cdot \square ab$; *B)* $12 \cdot \square ab$; *C)* $\square b \cdot 3a$; *D)* $b \cdot \square \cdot 4a$;

E) $ba \cdot \square$; *F)* $\frac{1}{2}ab \cdot \square$; *G)* $\square ab$; *H)* $a \cdot 6 \cdot \square \cdot b$.

11. Írjuk fel algebrai kifejezéssel az alábbiakat, és jelöljük pirossal az együtthatókat!

a) n nyúl és t tyúk lábainak száma összesen.
b) k kerékpár, t tricikli és a autó kerekeinek száma összesen.
c) Kosárlabdameccsen Gabi dobott pontjai, ha x kétpontos, y hárompontos kosarat dobott, és z egypontos büntetőt értékesített.

12. Mely természetes számokkal osztható biztosan a következő (algebrai kifejezéssel megadott) szám, ha m és n természetes számok?

a) $18m$; *b)* $6m \cdot 5n$; *c)* $4m \cdot 6n$; *d)* $8m \cdot \frac{1}{2}n$.

Rejtvény

A következő egyenlőségek visszafelé olvasva is igazak:

$23 + 75 = 61 + 37$ és $73 + 16 = 57 + 32$; $13 \cdot 13 = 169$ és $961 = 31 \cdot 31$.

Keressünk hasonló egyenlőségeket!

5. Összevonás – egynemű kifejezések



1. példa

Zsófi három gombóc, Dorka két gombóc fagyit vesz a kedvenc cukrászdájukban.

a) Mennyit fizetnek összesen, ha egy gombóc ára 110 Ft?
b) Mennyit fizetnek összesen, ha egy gombóc ára x Ft?

Megoldás

Kétféle módszerrel számítjuk ki a megoldást. Úgy is, hogy külön-külön, és úgy is, hogy egyben fizetnek.

a) *Ha külön-külön fizetnek:*

Zsófi $3 \cdot 110$ Ft-ot, Dorka pedig $2 \cdot 110$ Ft-ot fizet, így összesen

$$3 \cdot 110 + 2 \cdot 110 = 330 + 220 = 550 \text{ Ft-ot fizetnek.}$$

Ha egyben fizetnek:

Együtt $3 + 2$ gombócot vesznek, ennek ára

$$(3 + 2) \cdot 110 = 5 \cdot 110 = 550 \text{ Ft.}$$

A két módszerrel kapott eredmények egyenlők:

$$3 \cdot 110 + 2 \cdot 110 = (3 + 2) \cdot 110 = 5 \cdot 110.$$

b) A fagylalt ára más cukrászdában más is lehet, ezért egy gombóc árát most jelöljük x-szel!

Ha külön-külön fizetnek:

Zsófi $3 \cdot x$ Ft-ot, Dorka pedig $2 \cdot x$ Ft-ot fizet, így összesen

$$3 \cdot x + 2 \cdot x \text{ Ft-ot fizetnek.}$$

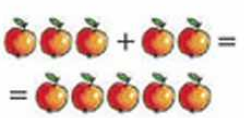
Ha egyben fizetnek:

Együtt $3 + 2$ gombócot vesznek, ennek ára

$$(3 + 2) \cdot x = 5 \cdot x \text{ Ft.}$$

A két módszerrel kapott eredmények egyenlők:

$$3 \cdot x + 2 \cdot x = (3 + 2) \cdot x = 5 \cdot x.$$



3 alma + 2 alma =
= 5 alma

$3x + 2x =$
$= (3 + 2) \cdot x$

A $3x$ és $2x$ algebrai kifejezéseket úgy is össze lehet adni, hogy az együtthatóik összegével szorozzuk az x-et.



3 alma + 2 körte = ?

2. példa

Kati vett három egyforma füzetet és két egyforma ceruzát. Mennyit fizetett, ha

a) egy füzet 80 Ft, egy ceruza 45 Ft;
b) egy füzet x Ft, egy ceruza y Ft?

Megoldás

Mivel a füzet és a ceruza ára különböző, most csak egyféleképpen számolhatunk:

a) $3 \cdot 80 + 2 \cdot 45 = 240 + 90 = 330$ Ft-ot fizetett.
b) $3x + 2y$ Ft-ot fizetett. Mivel az x és az y értéke különböző lehet, ezért a $3x + 2y$ **nem írható rövidebben.**

Például
egynemű algebrai kifejezések:

3; $-\frac{1}{2}$; $10{,}1$;
$3a$; $\frac{a}{5}$; $-\frac{8a}{3}$;
$2xy$; yx; $\frac{xy}{3}$; $-8yx$;

nem egynemű algebrai kifejezések:

a $2xy$ és a $2ab$;
az x^2y és az xy^2;
a $3c$ és a c^3.

Csak olyan algebrai kifejezéseket lehet az együtthatóik segítségével összeadni (összevonni), melyek legfeljebb együtthatójukban különböznek. Ezek az egynemű algebrai kifejezések.

Egynemű algebrai kifejezéseknek nevezzük azokat az algebrai kifejezéseket, amelyek ugyanazokat a betűket tartalmazzák, és ezekkel ugyanazokat a műveleteket kell elvégezni.

Egynemű algebrai kifejezések összegének (különbségének) együtthatója a tagok együtthatóinak összege (különbsége).

$$2x + 3x = (2 + 3)x = 5x; \quad 7x - 3x = (7 - 3)x = 4x.$$

3. példa

Legkevesebb hány csoportba oszthatjuk az alábbi algebrai kifejezéseket, ha egy csoportba csak egynemű kifejezések kerülhetnek?

$3pq$; pq; $4p^2$; $p^2 \cdot 3$; $-6q$; $0{,}5qp$; $2q \cdot 9$; $p \cdot \frac{q}{7}$; $\frac{2q}{3}$.

Megoldás

A tényezők csoportosításával és felcserélésével úgy rendezzük át a szorzatokat, hogy elöl az együtthatók legyenek, utána pedig a betűk azonos sorrendben álljanak. Írjuk fel, mi a közös betűkifejezés az egynemű kifejezésekben!

algebrai kifejezés	együttható	
$3pq$	3	pq
pq	1	
$0{,}5pq$	$0{,}5$	

pq	$3 \cdot pq$; $pq = 1 \cdot pq$; $0{,}5pq = 0{,}5 \cdot pq$; $p \cdot \frac{q}{7} = p \cdot \frac{1}{7}q = \frac{1}{7}pq$
p^2	$4 \cdot p^2$; $p^2 \cdot 3 = 3 \cdot p^2$
q	$-6 \cdot q$; $2q \cdot 9 = 2 \cdot 9q = 18 \cdot q$; $\frac{2q}{3} = \frac{2}{3} \cdot q$

Tehát a felsorolt algebrai kifejezéseket legkevesebb három csoportba oszthatjuk, ha egy csoportba csak egynemű kifejezések kerülhetnek.
A pq, p^2 és a q algebrai kifejezések nem egyneműek.

4. példa

Végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $a + 2a + 3a$; *b)* $3b - b + 8b - 6b$;

c) $1 - c + 5 + 3c$; *d)* $2c - 3cd + 5c + 7cd$;

e) $-5e + 5e$.

Megoldás

Az algebrai kifejezéseket úgy rendezzük át, hogy az egynemű tagok egymás mellé kerüljenek, és ezek együtthatójával végezzük el az összevonásokat.

a) $a + 2a + 3a = 1 \cdot a + 2 \cdot a + 3 \cdot a = (1 + 2 + 3) \cdot a = 6a$;

b) $3b - b + 8b - 6b = 3b + (-1)b + 8b + (-6)b =$
$= (3 - 1 + 8 - 6)b = 4b$;

c) $1 - c + 5 + 3c = -c + 3c + 1 + 5 = -1 \cdot c + 3c + 1 + 5 =$
$= (-1 + 3)c + (1 + 5) = 2 \cdot c + 6 = 2c + 6$;

d) $2c - 3cd + 5c + 7cd = 2c + 5c - 3cd + 7cd =$
$= (2 + 5)c + (-3 + 7)cd = 7c + 4cd$;

e) $-5e + 5e = (-5 + 5)e = 0 \cdot e = 0$.

Számítsuk ki az algebrai kifejezések helyettesítési értékét összevonás előtt és után!

Legyen:

$a = 1{,}5$; $b = 28$;

$c = \frac{1}{7}$; $d = 7$;

$e = 38{,}46$;

$f = 3{,}25$; $g = 4{,}75$.

Melyik esetben számoltunk gyorsabban?

$a = 1 \cdot a$

$-b = (-1) \cdot b$

$0 \cdot c = 0$

$d - d = 0$

Összeg hozzáadása, kivonása

5. példa

Zsombi különböző nemzetek zenéit gyűjti. Tegnap feltöltött az MP3-lejátszójára egy finn népzenei válogatást és a kedvenc ír zenekara lemezéről két számot. Hány perc zenét töltött fel a lejátszóra, ha

a) a finn népzenei válogatás 45 perc, az első ír zeneszám 5 perc, a második pedig 15 perc hosszú;

b) a finn népzenei válogatás a perc, az első ír zeneszám b perc, a második pedig c perc hosszú?



Megoldás

a) Kétféleképpen számolunk.

1. módszer: Az ír zeneszámok időtartama együtt $5 + 15$ perc, ezt adjuk hozzá a finn népzene idejéhez:

$45 + (5 + 15) = 45 + 20 = 65$ perc zenét töltött fel a lejátszóra.

2. módszer: A finn népzenei válogatás idejéhez egymás után adjuk hozzá az ír zeneszámok időtartamát:

$45 + 5 + 15 = 50 + 15 = 65$ perc zenét töltött fel a lejátszóra.

A két módszerrel kapott eredmények egyenlők:

$$45 + (5 + 15) = 45 + 5 + 15.$$

b) Kétféleképpen számolunk.

1. módszer: Az ír zeneszámok időtartama együtt $b + c$ perc, ezt adjuk hozzá a finn népzene idejéhez:

$a + (b + c)$ perc zenét töltött fel Zsombi.

2. módszer: A finn népzenei válogatás idejéhez egymás után adjuk hozzá az ír zeneszámok időtartamát:

$a + b + c$ perc zene került az MP3-lejátszóra.

A két módszerrel kapott eredmények egyenlők:

$$a + (b + c) = a + b + c.$$

Azt kaptuk, hogy

$$a + (b + c) = a + b + c.$$

Összeg hozzáadásakor a tagok előjele nem változik.

Találjunk ki szöveges feladatokat az alábbi összefüggések megmutatására!

$a + (b + c) = a + b + c$

$a + (b - c) = a + b - c$

$a + (-b + c) = a - b + c$

$a + (-b - c) = a - b - c$

6. példa

Egy mérkőzésen az egyik csapat néhány perc különbséggel rúgott két gólt. Mennyi ideje maradt a másik csapatnak az egyenlítésre, ha

a) a mérkőzés 90 perces volt, az első gól 75 perc elteltével esett, és ezt 3 perccel később követte a második;

b) a mérkőzés a perces volt, az első gól b perc elteltével esett, és ezt c perccel később követte a második?



Megoldás

a) Kétféleképpen számolunk.

1. módszer: A második gól $75 + 3$ perc elteltével esett, ekkor $90 - (75 + 3) = 90 - 78 = 12$ perc van még hátra a mérkőzésből.

2. módszer: Az első gól után $90 - 75$ perc, a második után $90 - 75 - 3 = 12$ perc maradt a mérkőzésből.

A két módszerrel kapott eredmények egyenlők:

$$90 - (75 + 3) = 90 - 75 - 3.$$

b) Kétféleképpen számolunk.

1. módszer: A második gól $b + c$ perc elteltével esett, ekkor $a - (b + c)$ perc volt még hátra a mérkőzésből.

2. módszer: Az első gól után $a - b$ perc, a második után $a - b - c$ perc maradt a mérkőzésből.

A két módszerrel kapott eredmények egyenlők:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Találjunk ki szöveges feladatokat az alábbi összefüggések megmutatására!

$a - (b + c) = a - b - c$

$a - (b - c) = a - b + c$

$a - (-b + c) = a + b - c$

$a - (-b - c) = a + b + c$

Azt kaptuk, hogy

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Összeg kivonásakor az összeg tagjainak az előjele ellentettjére változik.

Feladatok

1. Hányszor 80 a

a) $4 \cdot 80 + 16 \cdot 80$; *b)* $3 \cdot 80 + 80 \cdot 3$; *c)* $8 \cdot 80 - 5 \cdot 80$;

d) $7 \cdot 80 - 80 \cdot 7$; *e)* $80 \cdot 80 - 80 \cdot 2$; *f)* $800 \cdot 80 + 80 \cdot 80 + 8 \cdot 80$?

2. Mennyi az összeg?

a) $1998 + 1998 + 1998 + 1998 + 1998$;

b) $1999 + 1999 - 1999 + 1999$;

c) $2001 + 2001 - 2001 - 2001 + 2001$;

d) $2007 - 2007 - 2007 - 2007 - 2007 - 2007 - 2007$.

3. Számoljunk fejben!

a) $48 \cdot 2007 + 52 \cdot 2007$; *b)* $3{,}875 \cdot 1989 - 2{,}875 \cdot 1989$;

c) $1998 \cdot \frac{5}{2} - 2{,}5 \cdot 1998$; *d)* $\frac{5}{3} \cdot \frac{11}{4} + \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{3}$.

4. Zsuzsi képeslapokat ír n barátjának. Egy képeslap 75 Ft, a bélyeg 62 Ft. Mennyit fizet összesen a képeslapokért és a bélyegekért? Írjuk fel kétféleképpen!

5. Anna két gombóc fagyit kért tejszínhabbal, Bori három gombócot mézes tölcsérben, Dóri pedig két gombócot mézes tölcsérben tejszínhabbal. Írjuk fel kétféleképpen, mennyit fizettek összesen, ha egy gombóc fagyi g Ft, egy adag tejszínhab t Ft, és egy mézes tölcsér m Ft!



6. Vonjunk össze!

a) $a + a + a + a + a$; *b)* $b + b + b + b - b - b$;

c) $c - c + c - c + c - c + c$; *d)* $d - d - d - d - d$.

7. Végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $x + 2x - 4x + 6x$; *b)* $2{,}3y + 1{,}4y - 0{,}7y$;

c) $z + \frac{2}{3}z - \frac{3}{4}z$; *d)* $0{,}5d + \frac{3}{5}d - d + \frac{4}{15}d$.

8. Melyik algebrai kifejezés egyenlő 0-val?

A) $2p - p - p$; *B)* $\frac{1}{3}q - \frac{1}{3}q$; *C)* $4r + 2r - 4r - 2r$;

D) $s - 2s + s - 2s$; *E)* $-\frac{t}{7} + \frac{3t}{21}$; *F)* $\frac{u}{4} - \frac{2u}{6}$.

9. Rendezzük át a tagokat úgy, hogy az egynemű kifejezések egymás mellé kerüljenek, majd végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $2x + 3y + 4x + 5y$; *b)* $x + 4 - 7 + 2x$;

c) $2xy + 3xy - x - y$; *d)* $7x^2 + 3x - 1 + 4x - 2x^2$.

10. Melyik a kakukktojás az alábbi algebrai kifejezések közül?

A) $a + 2 - 2b + 3 + 2a$;

B) $3b - a + 5 - 5b + 4a$;

C) $\frac{1}{2}a - 5 + 2b + \frac{5}{2}a - 4b$;

D) $\frac{2}{3}b - 2a - 1 + 5a - \frac{8}{3}b + 6$.

11. Végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $2a - 3 + a \cdot 4 + 5$;

b) $2b \cdot 3 - 1 - b + 2$;

c) $\frac{c}{2} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}c + 1$;

d) $0{,}8d - 0{,}75 + 1{,}2d - 0{,}25$.

12. Melyek egyenlők az alábbi algebrai kifejezések közül?

A) $\frac{1}{3}x - 2 + \frac{5}{3}x + 1$;

B) $\frac{x}{4} - 3 + x + 4 - x$;

C) $x \cdot 5 + 2y \cdot 2 + 0{,}5 - 4y$;

D) $2x + 2y - 3 - 2y + 2$;

E) $0{,}8 - 0{,}75x + \frac{x}{2} + 0{,}2$;

F) $\frac{x}{2} + 3 + 4{,}5x - 2{,}5$.

13. Melyik az a szám, amelynek a duplájából a számot kivonva 1998-at kapunk?

14. Tomi november közepéig elköltötte a havi zsebpénzének harmadát, a következő héten a $\frac{2}{7}$ részét. Írjuk fel algebrai kifejezéssel, mennyi pénze maradt ezután a novemberi zsebpénzéből! Meg tudja-e venni ebből azt a könyvet, amely a zsebpénzének a negyedébe kerül?



15. Zsolti gondolt egy számot, hozzáadta a gondolt szám kétszeresét, majd a háromszorosát, végül a négyszeresét. Melyik számra gondolt, ha eredményül 80-at kapott?

16. Egy c természetes szám végére írtunk egy 0-t, majd hozzáadtuk a szám hatszorosát. Mivel osztható biztosan a kapott szám?

17. Bontsuk fel a zárójeleket, majd végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $2x + (1 - 3x)$;

b) $-y + (-4y - 2)$;

c) $(5z + 5) - 3z$;

d) $(4 - x) + 5x$;

e) $2y - (2y + 2)$;

f) $5z - (3 - z)$;

g) $4x + 2 - (-3 + 2x)$;

h) $1 - (-x - 1) + 2x$;

i) $-(y - 5) + 2y - 1$;

j) $2 + (3z - 2) - (2 - 3z)$.

	$a-c$	$a+b$
	a	
$a-b$		

Rejtvény

Töltsük ki a bűvös négyzet hiányzó mezőit úgy, hogy minden sorban, oszlopban és átlóban ugyanaz legyen az összeg!

6. Egytagú algebrai kifejezések szorzása, osztása



Szorzat szorzása

1. példa

Hány ujja van *n* űrlénynek, ha mindegyiknek *k* keze, és minden kezén *m* ujja van?

Megoldás

Kétféleképpen számolunk.

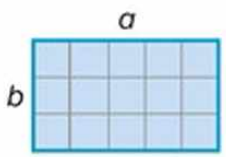
1. *módszer:* Először azt számoljuk, hogy egy űrlénynek hány ujja van: $k \cdot m$, majd ezt szorozzuk az űrlények számával: $n \cdot (k \cdot m)$.
2. *módszer:* Először azt számoljuk, hogy *n* űrlénynek összesen hány keze van: $n \cdot k$, majd ezzel szorozzuk az egy kezükön levő ujjak számát: $(n \cdot k) \cdot m$.

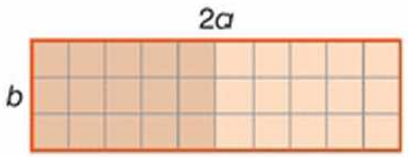
A kétféle módszerrel kapott eredmények egyenlők:

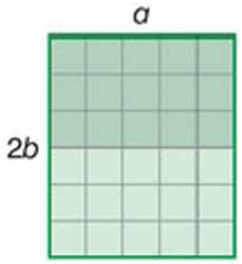
$$n \cdot (k \cdot m) = (n \cdot k) \cdot m.$$

Hány ujja van 5 űrlénynek? Számítsuk ki kétféleképpen! Először kezdjük azzal, hogy egy űrlénynek hány ujja van, utána pedig azzal, hogy 5 űrlénynek hány keze van!

Hogyan változik az *a* és *b* oldalú téglalap területe, ha az oldalait az ábra szerint változtatjuk?







$$(2a) \cdot b = a \cdot (2b) = 2 \cdot ab.$$

Vigyázzunk! Ha a téglalap mindkét oldalát kétszeresére növeljük, a területe a 4-szeresére nő.

A téglalap területének kétszeresét kapjuk, ha egyik oldalát kettővel szorozzuk (a másik oldalt változatlanul hagyjuk).

Szorzat szorzásakor csak az egyik tényezőt szorozzuk a szorzóval.

$$n \cdot (k \cdot m) = (n \cdot k) \cdot m = k \cdot (n \cdot m).$$

2. példa

Írjuk egyszerűbb alakba a következő szorzatokat!

a) $3 \cdot (-2a)$; *b)* $(-4a) \cdot (-3b)$; *c)* $3 \cdot \left(\frac{c}{3} \cdot \frac{d}{3}\right)$; *d)* $(2e) \cdot (2e)$.

Megoldás

A számokkal való szorzásokat elvégezve kiszámítjuk az együtthatókat.

$(+2) \cdot (+3) = +6$
$(+2) \cdot (-3) = -6$
$(-2) \cdot (+3) = -6$
$(-2) \cdot (-3) = +6$

a) $3 \cdot (-2a) = (3 \cdot (-2))a = -(3 \cdot 2)a = -6a$;

b) $(-4a) \cdot (-3b) = ((-4) \cdot (-3)) \cdot ab = 12ab$;

c) $3 \cdot \left(\frac{c}{3} \cdot \frac{d}{3}\right) = \left(\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{3}} \cdot \frac{c}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right) \cdot \frac{d}{3} = \frac{1}{3}cd$;

$x \cdot x = x^2$

d) $(2e) \cdot (2e) = (2 \cdot 2) \cdot (e \cdot e) = 4 \cdot e^2$.

Szorzat osztása

3. példa

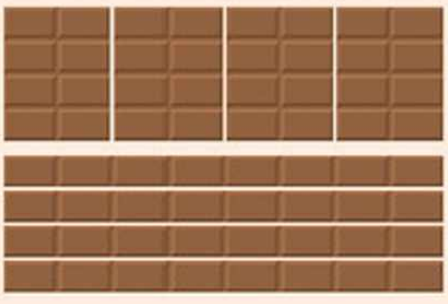
Dorka a testvéreivel egyenlően osztozik egy tábla csokoládén. Mennyi jut egy gyereknek, ha

a) a csokoládé az egyik oldalán 4, a másikon 8 „kis kockából” áll, és négyen osztoznak rajta;

b) a csokoládé az egyik oldalán n, a másikon m „kis kockából” áll, és a gyerekek száma 4?

Megoldás

a) A csokoládé összesen $4 \cdot 8 = 32$ kis kockából áll, ennek a negyedrésze: $\frac{4 \cdot 8}{4} = \frac{32}{4} = 8$.



A csokit el lehet osztani úgy, hogy a 8 egységnyi oldala mentén 4 egyenlő részre vágjuk, így egy gyereknek

$4 \cdot \frac{8}{4} = 4 \cdot 2 = 8$ kis kocka jut.

A 4 egységnyi oldala mentén is 4 egyenlő részre vághatjuk, ekkor

$$\frac{4}{4} \cdot 8 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ kis kocka jut egy gyereknek.}$$

Mivel mindegyik esetben ugyanannyi jut egy gyereknek:

$$\frac{4 \cdot 8}{4} = 4 \cdot \frac{8}{4} = \frac{4}{4} \cdot 8.$$



b) A csokoládé összesen $m \cdot n$ kis kockából áll, ennek a negyed része:

$$\frac{m \cdot n}{4}.$$

A csokit el lehet osztani úgy, hogy az n egységnyi oldala mentén 4 egyenlő részre vágjuk, így egy gyereknek

$$m \cdot \frac{n}{4} \text{ kis kocka jut.}$$

Az m egységnyi oldala mentén is 4 egyenlő részre vághatjuk, ekkor

$$\frac{m}{4} \cdot n \text{ kis kocka jut egy gyereknek.}$$

Mivel mindegyik esetben ugyanannyi jut egy gyereknek, ezért:

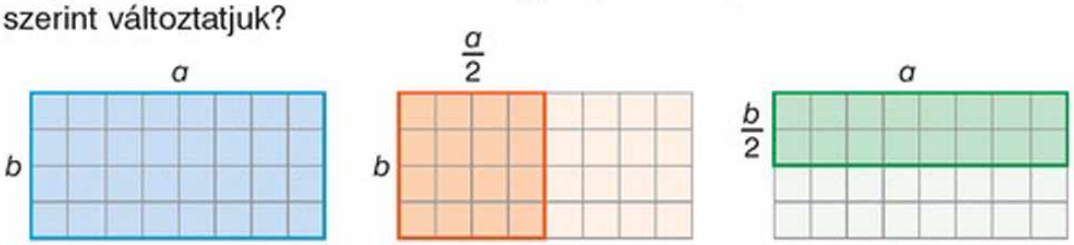
$$\frac{m \cdot n}{4} = m \cdot \frac{n}{4} = \frac{m}{4} \cdot n.$$

$(4 \cdot 8) : 4 =$
$= (4 : 4) \cdot 8 =$
$= 4 \cdot (8 : 4)$

Vigyázzunk!
Ha a táblát mindkét oldala mentén 4 részre vágjuk, akkor 16 db 2 kis kockából álló csokit kapunk.

$$\frac{m}{4} \cdot \frac{n}{4} = \frac{m \cdot n}{4 \cdot 4}$$

Hogyan változik az a és b oldalú téglalap területe, ha az oldalait az ábra szerint változtatjuk?



$$\frac{a}{2} \cdot b = a \cdot \frac{b}{2} = \frac{a \cdot b}{2}.$$

A téglalap területének felét kapjuk, ha egyik oldalát a felére csökkentjük (a másik oldalt változatlanul hagyjuk).

Vigyázzunk!
Ha a téglalap mindkét oldalának a felét vesszük, a téglalap területe a negyedére csökken.

Szorzat osztásakor csak az egyik tényezőt osztjuk az osztóval.

$$\frac{m \cdot n}{4} = m \cdot \frac{n}{4} = \frac{m}{4} \cdot n.$$

4. példa

Osszuk el a $4x \cdot 6y$-t *a)* 2-vel; *b)* 3-mal; *c)* 8-cal!

Megoldás

a) $\frac{4x \cdot 6y}{2} = \frac{4}{2} \cdot x \cdot 6y = 12xy$;

b) $\frac{4x \cdot 6y}{3} = 4x \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{6}}\, y}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 4x \cdot 2y = 8xy$;

c) $\frac{4x \cdot 6y}{8} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}\, x \cdot \overset{3}{\cancel{6}}\, y}{\underset{1}{\cancel{8}}\,\underset{2}{\cancel{2}}} = 3xy$.

Először 4-gyel osztjuk az első, majd 2-vel a második tényezőt.

Írjuk fel az osztásokat a törtvonal helyett a : jelével is!

Feladatok

1. A dobozos üdítőket kartonokba csomagolják. Hány liter üdítő van egy kartonban, ha
   a) eredetileg egy dobozban 1 liter van, és a dobozokat hatosával csomagolják kartonokba, de most egy akció keretében a dobozokban másfélszer annyi üdítő van;
   b) eredetileg egy dobozban p liter van, és q darab doboz van egy kartonban, de most egy akció keretében a dobozokban másfélszer annyi üdítő van;
   c) eredetileg egy dobozban p liter van, és q darab doboz van egy kartonban, de most egy akció keretében a dobozokban r-szer annyi üdítő van?

   Számoljunk kétféleképpen!

2. Egy téglalap oldalai 4 cm és 5 cm hosszúak. Első lépésben a téglalap valamelyik oldalpárját kétszeresére, majd a kapott téglalap valamelyik oldalpárját háromszorosára növeljük (úgy, hogy a négyszög téglalap maradjon).
   a) Hányféle téglalapot kaphatunk?
   b) Melyiknek a legnagyobb a területe?
   c) Írjuk fel a téglalapok területét, ha az eredeti téglalap oldalai a és b!

3. Hányszorosára változik az a, b oldalú téglalap területe, ha
   a) mindkét oldalát kétszeresére növeljük;
   b) az egyik oldalát kétszeresére, a másik oldalát háromszorosára növeljük;
   c) az egyik oldalát felére csökkentjük, a másik oldalát kétszeresére növeljük;
   d) az egyik oldalát felére, a másikat harmadára csökkentjük?

   A változtatások során mindig téglalapot kapunk. Rajzoljuk le őket!

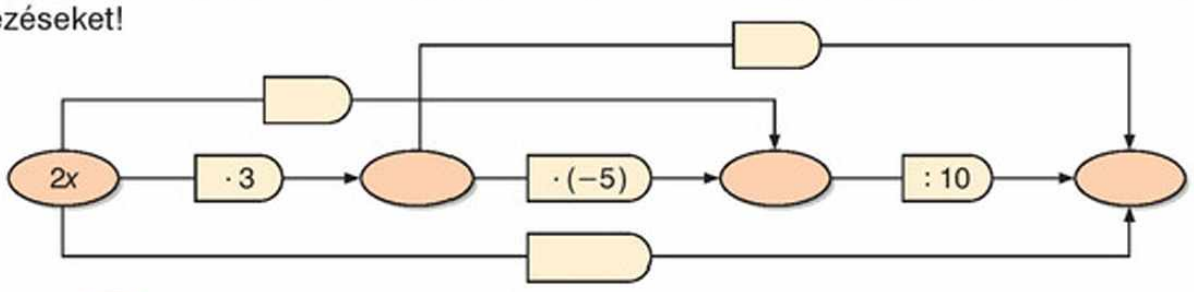
4. Írjuk fel a kapott algebrai kifejezést a legegyszerűbb alakban, ha a $2x$-et szorozzuk
   a) 3-mal; *b)* $\frac{1}{7}$-del; *c)* $-\frac{1}{2}y$-nal; *d)* $3x$-szel!

5. Írjuk fel a kapott algebrai kifejezést a legegyszerűbb alakban, ha a $15a \cdot 6b$-t osztjuk
   a) 3-mal; *b)* -5-tel; *c)* 10-zel; *d)* 20-szal!

6. *a)* Számítsuk ki az algebrai kifejezések helyettesítési értékét!
   b) Írjuk egyszerűbb alakba az algebrai kifejezéseket!

x	y	$4 \cdot (2x \cdot 3y)$	$(4 \cdot 2x) \cdot 3y$	$(4 \cdot 2x) \cdot (4 \cdot 3y)$
7	9			
10	11			

7. Végezzük el a műveleteket a nyilaknak megfelelően, és írjuk be a hiányzó algebrai kifejezéseket!



8. Végezzük el a szorzásokat!

a) $3 \cdot (2x \cdot 4)$; *b)* $5 \cdot ((-2) \cdot 3x)$; *c)* $2x \cdot (4x \cdot 3)$; *d)* $\frac{4}{15} \cdot \left(\frac{3}{2}x \cdot \frac{3}{4}\right)$.

9. Írjuk fel a szorzatokat a legrövidebben!

a) $2 \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$; *b)* $\left(-0{,}25\frac{b}{4}\right) \cdot 4$; *c)* $\left((-2) \cdot \left(-\frac{c}{3}\right)\right) \cdot (-3)$; *d)* $\left(2 \cdot \frac{d}{6}\right) \cdot 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$.

10. Mivel szorozzuk a felsorolt algebrai kifejezéseket, hogy $12abc$-t kapjunk?

a) $4abc$; *b)* $-3abc$; *c)* $-12ac$; *d)* $-ba$; *e)* $24c$; *f)* $18bc$.

11. Válasszuk ki azokat a tényezőket, amelyek mindkét szorzatban benne vannak!
Például: $4a = 2 \cdot 2a$; $10ab = 2 \cdot 5 \cdot ab$. Közös tényezőik a 2 és az a.

a) $6x$ és $4y$; *b)* $4x$ és 2; *c)* $15x$ és $10x$; *d)* $3x^2$ és $6x$.

12. Végezzük el az osztásokat!

a) $\frac{4x \cdot 6x}{2}$; *b)* $\frac{9y \cdot 6y}{-3}$; *c)* $\frac{20v \cdot 30v}{10}$; *d)* $\frac{4z \cdot 3z}{6}$.

13. Mivel kell osztani a felsorolt algebrai kifejezéseket, hogy $2xy$-t kapjunk?

a) $3x \cdot 2y$; *b)* $4x \cdot 5y$; *c)* $y \cdot x \cdot 2$; *d)* $-4xy$.

14. Egy téglatest egy csúcsból induló a, b, c éleit úgy változtatjuk meg, hogy a test továbbra is téglatest marad. Hányszorosára változik a téglatest térfogata, ha



a) minden élét kétszeresére növeljük;
b) minden élét felére csökkentjük;
c) az a élét felére csökkentjük, a b, c éleket kétszeresére növeljük;
d) az a élét harmadára csökkentjük, a b-t másfélszeresére növeljük, a c nem változik?

15. Végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket!

a) $\frac{2x \cdot (3y) \cdot 8}{12}$; *b)* $\frac{(-y) \cdot (6x) \cdot (-5)}{15}$; *c)* $\frac{0{,}5x \cdot 12 \cdot (6x)}{36}$.

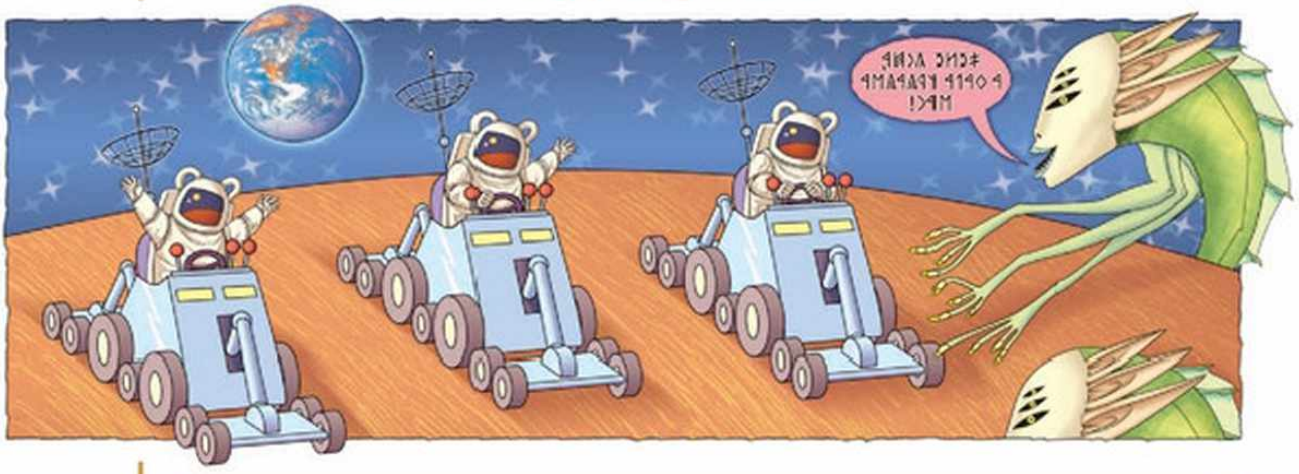
***16.** Melyek egyenlők a következő algebrai kifejezések közül?
Írjuk az osztásokat tört alakba!

A) $a : b : c$; *B)* $a : (b \cdot c)$; *C)* $(a : b) \cdot c$; *D)* $a \cdot (b : c)$; *E)* $(a \cdot b) : c$.

Rejtvény

Egy téglatest egy csúcsba futó élei a, b és c. Az a él hosszát két és félszeresére növeljük, a b él hosszát 40%-kal csökkentjük. Hogyan változtassuk meg a c él hosszát, ha azt akarjuk, hogy a keletkező téglatest térfogata megegyezzen az eredeti téglatest térfogatával?

7. Kéttagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval



1. példa

Hány kereke van összesen a holdjáró autóknak, ha

a) 3 autó van, és mindegyiknek 4 nagy és 10 kicsi kereke van;

b) a autó van, és mindegyiknek b nagy és c kicsi kereke van?

Megoldás

Kétféleképpen számolhatunk.

a) *1. módszer:* Egy autónak $4 + 10 = 14$ kereke van, tehát 3 autónak $3 \cdot (4 + 10) = 3 \cdot 14 = 42$ kereke van.

2. módszer: 3 autónak $3 \cdot 4 = 12$ nagy kereke és $3 \cdot 10 = 30$ kicsi kereke van, összesen tehát $3 \cdot 4 + 3 \cdot 10 = 42$ kerekük van.

A kétféle módszerrel számolva kapott eredmények egyenlők:

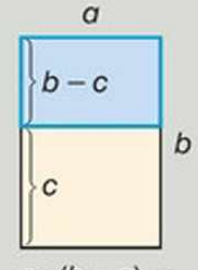
$$3 \cdot (4 + 10) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 10.$$

b) *1. módszer:* Egy autónak $b + c$ kereke van, tehát a autónak $a \cdot (b + c)$ kereke van.

2. módszer: a autónak $a \cdot b$ nagy kereke és $a \cdot c$ kicsi kereke van, összesen tehát $a \cdot b + a \cdot c$ kerekük van.

A kétféle módszerrel számolva kapott eredmények egyenlők:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

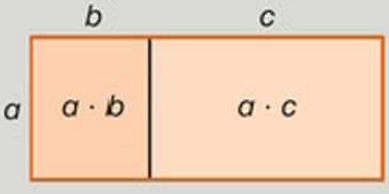


$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Az összeg szorzását szemléltethetjük egy téglalappal, amelynek a területét kétféleképpen is felírhatjuk.

1. A nagy téglalap egyik oldala a, a másik $b + c$, így a területe: $a \cdot (b + c)$.

2. Az egyik kis téglalap területe $a \cdot b$, a másiké $a \cdot c$, a nagy téglalap területe ezek összege: $a \cdot b + a \cdot c$.



A kétféle módszerrel kapott eredmények egyenlők, tehát

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

A tényezők felcserélhetők, ezért: $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Összeget úgy is szorozhatunk, hogy az összeg minden tagját szorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk.

Algebrai kifejezés szorzat alakjából **beszorzással** összeg alakot kapunk.

2. példa

Végezzük el a beszorzásokat!

a) $2 \cdot (3a + 5)$; *b)* $3 \cdot (6b - 1)$; *c)* $(4c + 3) \cdot 5$;

d) $-3 \cdot (2d + 1)$; *e)* $-(1 - 2e)$; *f)* $\frac{f+1}{2}$.

Megoldás

a) $2 \cdot (3a + 5) = 2 \cdot 3a + 2 \cdot 5 = 6a + 10$;

b) $3 \cdot (6b - 1) = 3 \cdot 6b - 3 \cdot 1 = 18b - 3$;

c) $(4c + 3) \cdot 5 = 4c \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 4 \cdot 5c + 3 \cdot 5 = 20c + 15$;

d) $-3 \cdot (2d + 1) = (-3) \cdot 2d + (-3) \cdot 1 = -6d - 3$;

e) $-(1 - 2e) = (-1) \cdot (1 - 2e) = (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 2e = -1 + 2e = 2e - 1$;

f) $\frac{f+1}{2} = \frac{1}{2}(f + 1) = \frac{1}{2} \cdot f + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{f}{2} + \frac{1}{2}$.



A példa *f)* részében látható, hogy az összeget tagonként osztottuk.

Ez általában is érvényes:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Összeget úgy is oszthatunk, hogy az összeg minden tagját osztjuk, és a hányadosokat összeadjuk.

Mindig a feladattól függ, hogy érdemes-e elvégezni a beszorzást.

Például a beszorzást elvégezve:

$$2 \cdot (3a - a) = 2 \cdot 3a - 2 \cdot a = 6a - 2a = 4a.$$

Ha előbb a zárójelben levő összevonást végezzük el:

$$2 \cdot (3a - a) = 2 \cdot 2a = 4a.$$

Ekkor kevesebb számolással kaptuk meg az egyszerűbb alakot.

Feladatok

1. Egy tejüzem családi csomagolásban kínálja a joghurtokat. Egy doboz banánosat csomagolnak egybe három epressel. Hány doboz joghurtot veszünk, ha 5 családi csomagot vásárolunk? Számoljunk kétféleképpen!

2. Az állatkertben a zebrák és az antilopok etetéséhez takarmányt rendelnek. Írjuk fel algebrai kifejezéssel, hogy mennyit rendeljenek 30 napra, ha egy zebra naponta x kg, egy antilop naponta y kg takarmányt fogyaszt, és

   a) 8 zebra és ugyanennyi antilop van;

   b) z zebra és ugyanennyi antilop van?

3. Egy zacskóban n narancsos, m málnás és c citromos ízű gumicukor van. Hány szem cukor van z zacskóban ízenként külön-külön, és mennyi van összesen?

4. Mennyi víz fér még az m magasságú akváriumba, ha most h magasságig van vízzel, és az alaplapja egy a és b oldalhosszúságú téglalap (az adatokat centiméterben mértük)?

5. Írjunk szöveget a következő algebrai kifejezésekhez! Végezzük el a beszorzást, és értelmezzük a szöveggel a kapott algebrai kifejezéseket!

   a) $a \cdot (b + c)$; *b)* $a \cdot (b - c)$.

6. Végezzük el a beszorzásokat!

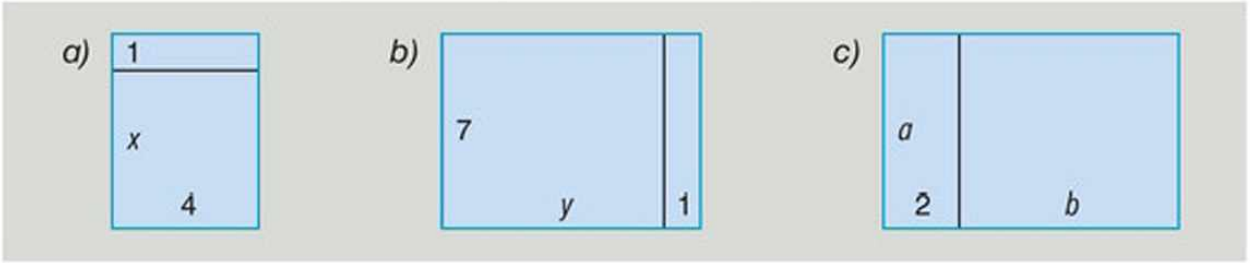
   a) $2 \cdot (x + 5)$; *b)* $(-3) \cdot (2x + 1)$; *c)* $(4y - 3) \cdot 5$; *d)* $2x \cdot (2 - 3x)$;

   e) $(-y) \cdot (5y - 1)$; *f)* $x \cdot (x - y) \cdot 2$; *g)* $2y(3xy + 4y)$; *h)* $5xy(x^2 + y^2)$.

7. Írjuk fel összeg alakban a következő algebrai kifejezéseket!

   a) $\frac{2x + 1}{3}$; *b)* $\frac{x - 8}{2}$; *c)* $-\frac{x + 3}{2}$; *d)* $-\frac{2x - 1}{2}$.

8. Írjunk minél többféle algebrai kifejezést az alábbi téglalapok területéről!



9. Rajzoljunk az előző feladatban szereplőkhöz hasonló téglalapokat, és írjuk fel többféleképpen a területüket!

Bűvészmutatvány

Írd le, hányadikán születtél! Szorozd meg 20-szal! Adj hozzá 4-et! Szorozd meg 5-tel! Add hozzá a születési hónapod számát! Szorozd meg 25-tel! Adj hozzá 5-öt! Szorozd meg 4-gyel! Add hozzá a születési éved utolsó két számjegyéből álló kétjegyű számot! Ha megmondod a végeredményt, kitalálom, mikor születtél! Hogyan?

8. Kiemelés



1. példa

Ha egy szendvics és egy üdítő 150 Ft-ba kerül, akkor mennyibe kerül 3 szendvics és 3 üdítő?

Megoldás

Jelöljük egy szendvics árát x-szel, egy üdítő árát y-nal! 3 szendvics és 3 üdítő ára $3x + 3y$, azonban külön-külön nem tudjuk a szendvics és az üdítő árát.

Készítsünk egyforma tányérokat, tegyünk mindegyikre egy szendvicset és egy üdítőt. Az egy tányéron levő dolgok ára: $x + y = 150$.

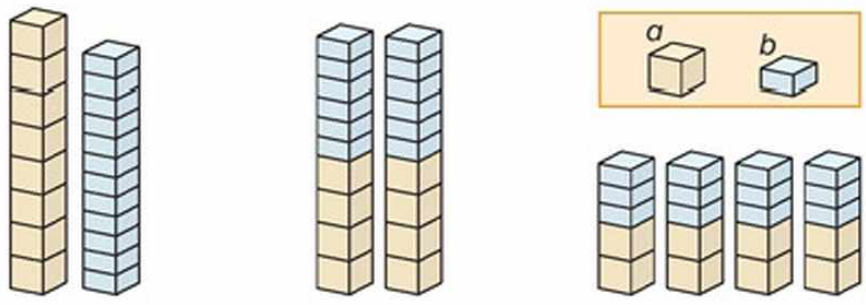
3 szendvics és 3 üdítő 3 ilyen tányéron van rajta, azaz:

$$3x + 3y = 3 \cdot (x + y) = 3 \cdot 150 = 450 \text{ Ft.}$$

A megoldás során az összeg alakban felírt algebrai kifejezést szorzattá alakítottuk.

$3 \cdot (x + y) =$
$= 3x + 3y$

Írjuk fel algebrai kifejezéssel többféleképpen a sárga és kék elemek számát az alábbi ábra alapján!



$8a + 12b$ = $2 \cdot (4a + 6b)$ = $4 \cdot (2a + 3b)$

Ha egy összeg tagjainak közös szorzótényezőjét **kiemeljük,** akkor szorzat alakot kapunk.

$$3 \cdot x + 3 \cdot y = 3 \cdot (x + y).$$

$$4 \cdot 2a + 4 \cdot 3b = 4 \cdot (2a + 3b).$$



3. példa

Keressük meg a tagok közös tényezőit, és végezzük el a kiemelést!

a) $2a + 10$; *b)* $9b + 3$; *c)* $5c - 15$; *d)* $-2d - 4$.

Megoldás

Először szorzat alakba írjuk az együtthatókat, megkeressük a tagok közös tényezőit, aztán ezt kiemeljük.

a) $2a + 10 = 2 \cdot a + 2 \cdot 5 = 2 \cdot (a + 5)$.
Az a együtthatója a kiemelés után 1 lett.

b) $9b + 3 = 3 \cdot 3b + 3 \cdot 1 = 3 \cdot (3b + 1)$.
Ha a 3-ból kiemeljük a 3-at, 1 marad.

c) $5c - 15 = 5 \cdot c - 5 \cdot 3 = 5 \cdot (c - 3)$.
Különbséget is átírhatunk szorzat alakba.

d) $-2d - 4 = (-2) \cdot d + (-2) \cdot 2 = (-2) \cdot (d + 2) = -2(d + 2)$.

$4x - 4y = 4(x - y)$

$-x - y =$
$= (-1)\,x + (-1)y =$
$= (-1) \cdot (x + y) =$
$= -(x + y)$

A kiemelést alkalmazhatjuk például törtek egyszerűsítésére, oszthatósági feladatok megoldására is.

4. példa

Egyszerűsítsük a $\frac{5x + 10}{15}$ törtet!

Megoldás

A számlálóban kiemelést végzünk, majd egyszerűsítünk.

$$\frac{5x + 10}{15} = \frac{5 \cdot x + 5 \cdot 2}{15} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot (x + 2)}{\underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{x + 2}{3}.$$

5. példa

Melyik számmal osztható mindig egy 4-gyel osztható és egy 6-tal osztható természetes szám összege?

Megoldás

A 4-gyel osztható szám felírható $4m$ alakban, ahol m természetes szám, a 6-tal osztható szám pedig $6n$ alakban, ahol n természetes szám. Így összegük: $4m + 6n$.

A tagokat felírjuk szorzatként: $2 \cdot 2 \cdot m + 2 \cdot 3 \cdot n$.

A közös tényező a 2, ezt ki lehet emelni:

$4m + 6n = 2 \cdot (2 \cdot m) + 2 \cdot (3 \cdot n) = 2 \cdot (2m + 3n)$.

A $2m + 3n$ is természetes szám, így a $4m + 6n$ összeg egy természetes szám 2-szerese, tehát osztható 2-vel.

Feladatok

1. Melyik összegnek nincs vele egyenlő párja a szorzatok között?

A) $5 - 15a$; B) $25a + 35$; C) $30 + 45a$; D) $15a - 5$;

1. $15 \cdot (3a + 2)$; 2. $5 \cdot (1 + 3a)$; 3. $-5 \cdot (3a - 1)$; 4. $5 \cdot (5a + 7)$.

2. Végezzünk kiemelést!

a) $18x + 6$; *b)* $5x - 20$; *c)* $14x + 21y$; *d)* $9x^2 + 3$;

e) $4 - 2x$; *f)* $-3x - 9$; *g)* $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; *h)* $\frac{2}{5}x - \frac{6}{5}$.

3. Melyik a kakukktojás?

a) $8x - 4$; $1 - 2x$; $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$; $5x - 5$; $7 - 14x$;

b) $9x + 12y$; $15y + 20x$; $4x + 3y + 2x + 5y$; $2y - 6x - 10y$; $28y + 21x$.

4. Egyszerűsítsük a következő törteket!

a) $\frac{12a + 6}{3}$; *b)* $\frac{8b + 4}{12}$; *c)* $\frac{3c - 6}{9}$; *d)* $\frac{4d + 6}{2d + 4}$.

5. Melyik számmal osztható mindig

a) egy 15-tel osztható és egy 6-tal osztható természetes szám összege;
b) egy 24-gyel osztható és egy 42-vel osztható természetes szám összege;
c) egy 12-vel és egy 18-cal osztható szám különbsége;
d) egy 30-cal és egy 45-tel osztható szám különbsége?

6. Írjuk fel szorzat alakban

a) az a, b oldalhosszúságú téglalap kerületét;
b) az a, b, c élhosszúságú téglatest felszínét!

7. Kristóf gondolt egy számot, vette a dupláját, és hozzáadott 12-t. Az eredményhez hozzáadta a gondolt számot, elosztotta 3-mal, kivont belőle 4-et, és visszakapta a gondolt számot. Hogy lehet ez?

8. Hozzuk egyszerűbb alakra a $\frac{(a + b) + (b + c) + (c + a)}{a + b + c}$ törtet!

9. Három számot páronként összeadva a 14; 21 és 23 összegeket kaptuk. Mennyi a három szám összege?

Bűvészmutatvány

Elővettem a pénztárcámat, és kiszórtam belőle 9 érmét. Vegyél valamennyit a bal kezedbe, a maradékot pedig a jobb kezedbe! A bal kezedben levők számát szorozd meg 4-gyel, a jobb kezedben levők számát 5-tel! Add össze a két szorzatot, és mondd meg az eredményt! Kitalálom, hogy melyik kezedben hány érme van! Hogyan?

9. Vegyes feladatok

1. Írjuk fel azt az algebrai kifejezést, amely
   a) az x és y összege;
   b) az x és y szorzata;
   c) az x és az y négyzetének különbsége;
   d) az x és y összegének a reciproka;
   e) az x és y különbségének a négyzete;
   f) az x és y reciprokának összege!

2. Anikó a születésnapjára kapott c tábla csokoládéból már az első nap megevett e táblával. A második nap a maradék felét ette meg. Hány tábla csokoládéja maradt ezután?

3. Egy n fős baráti társaság Van Gogh kiállításra utazik Szegedről Budapestre. A teljes árú vonatjegy t Ft, a helyjegy h Ft. Mennyit fizetnek a vonatjegyre oda-vissza az intercityn, ha d diáknak 60%-os kedvezménye, f felnőttnek félárú igazolványa van, és a helyjegyekre a kedvezmények nem vonatkoznak?

4. Mennyi a következő algebrai kifejezések helyettesítési értéke, ha $x = 2{,}5$?
   a) $2 + x \cdot x + 2$; *b)* $2 \cdot x + x \cdot 2$; *c)* $x + 2 \cdot (x + 3) + 5$; *d)* $x \cdot 2 + (x + 3) \cdot 5$.

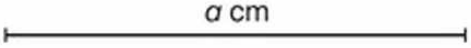
5. Rakjunk minél többféleképpen egy zárójelpárt az alábbi kifejezésekbe! Hányféle eredményt kaphatunk?
   a) $3 + x \cdot x + 4$; *b)* $2 \cdot y - y + 3$; *c)* $5 \cdot z + 3 \cdot z + 4$.

6. Öt dobókockával egyszerre dobtunk. Mennyi a dobott számok összegének lehetséges legkisebb és legnagyobb értéke, ha csak kétféle számot dobtunk, az egyiket három, a másikat két kockán? Írjuk fel algebrai kifejezéssel a dobott számok összegét, és számoljunk lehetséges helyettesítési értékeket!



7. Mennyi a $[a - (b - c)] - [(a - b) - c]$ kifejezés értéke, ha $a = -\frac{3}{5}$; $b = \frac{2}{3}$ és $c = \frac{1}{2}$?

8. Legyen adott a következő, a hosszúságú szakasz!

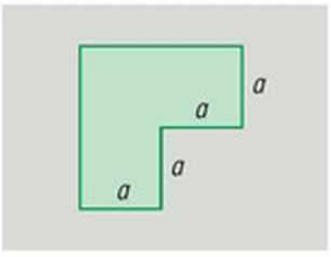


   Szerkesszünk olyan síkidomokat, melyek kerülete:
   a) $4a$; *b)* $8a$; *c)* $2a$; *d)* a; *e)* $3a$!

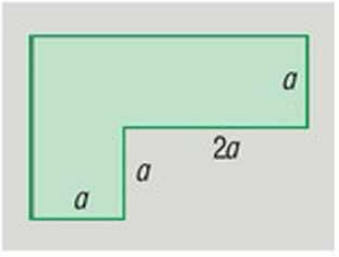
9. *a)* Írjuk fel három egymás utáni természetes szám összegét, ha a középső szám az x!
   b) Írjuk fel öt egymás utáni természetes szám összegét, ha a középső szám az y!

10. Írjuk fel az ábrán látható kertek kerületét, területét!

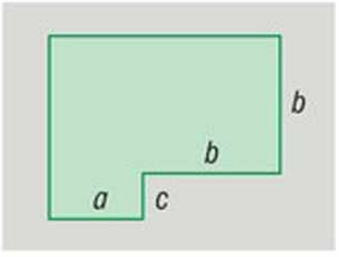
a)



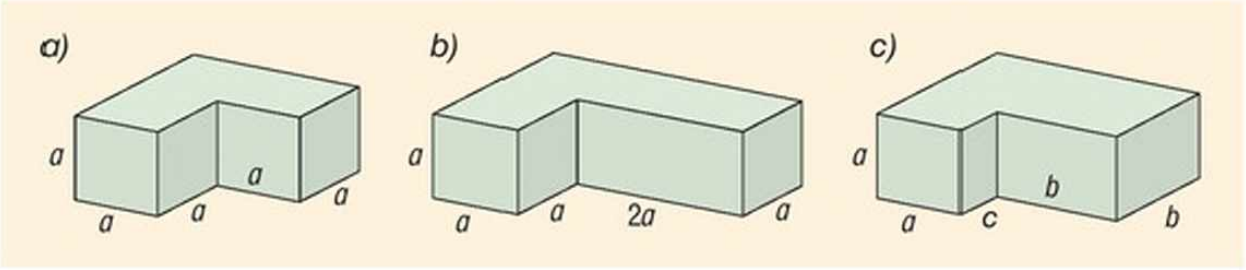
b)



c)



11. Írjuk fel az ábrán látható testek térfogatát!



12. Melyik a kakukktojás?



a) $2ab$; $\frac{1}{2}ab$; $-6b$; $-\frac{1}{3}ab$;

b) $2a + 3b$; $3a - 2b$; $2a + 2b$; $2ab$; $2a - 2b$;

c) $2x + 3y$; $3x + 2y$; $x + 2y$; $2xy$; $x + y$;

d) $\frac{1}{4}xy$; $\frac{1}{2}xy$; $0{,}25y$; $\left(\frac{1}{2}\right)^2 x$; $\frac{2}{8}x$;

e) $8z - 2z$; $\frac{1}{2} \cdot (18z)$; $2z + 4z$; $2(3z + 1) - 2$; $\frac{3}{4} \cdot (8z)$.

13. Hány zárójel felesleges az alábbi műveletsor felírásában? Számolással ellenőrizzük!

a) $\left((-2) + \frac{2}{3}\right) + \left(8 \cdot \frac{5}{12}\right)$; *b)* $\left(\left(\frac{5}{2} - 0{,}4\right) - \left(1 + \frac{3}{4}\right)\right)$.

14. Hagyjuk el a lehető legtöbb zárójelet úgy, hogy az algebrai kifejezés egyenlő maradjon az eredetivel!

a) $\left(a + \left(a + \left(a(a + 3)\right)\right)\right)$; *b)* $\left(b \cdot \left(b \cdot \left(b \cdot \left(1{,}2 \cdot \left(b \cdot (2 + b)\right)\right)\right)\right)\right)$.

15. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő algebrai kifejezéseket!

a) $2a + 4 + 3 \cdot (a - 2)$; *b)* $4b - 2 \cdot (b + 1) + 3$; *c)* $5c + 1 - (c - 3)$;

d) $d + \frac{2d + 6}{2}$; *e)* $\frac{e}{2} + \frac{e - 2}{3}$; **f)* $\frac{f + 1}{2} - \frac{f - 1}{2}$.

16. Írjuk fel annak a téglalapnak kerületét és területét, amelyet a $6 \cdot 8$-as téglalapból úgy kapunk, hogy

a) az egyik oldalát p-vel növeljük, a másik oldalát változatlanul hagyjuk;
b) az egyik oldalát q-val csökkentjük, a másik oldalát változatlanul hagyjuk;
c) mindkét oldalát p-szeresére változtatjuk;
d) az egyik oldalát p-szeresére, másik oldalát q-szorosára változtatjuk!

17. Hányszorosára változik az x (pozitív mennyiség), ha

a) a felére csökkentjük;
b) a felével növeljük;
c) a másfélszeresére változtatjuk;
d) a harmadával csökkentjük?

18. Egy vers v versszakból áll, minden versszakban s sor és minden sorban t szótag van. Hány szótagból áll a vers? Írjuk fel algebrai kifejezéssel úgy is, hogy előbb versszakonként számoljuk a szótagokat, és úgy is, hogy előbb azt számoljuk, hogy hány sorból áll a vers! Keressünk olyan verset, melyben minden sorban ugyanannyi szótag van, és adjuk meg a v, s és t értékeket!

19. A téli vásáron az eredetileg c árú csizma árát 40%-kal csökkentették. Mely algebrai kifejezések írják le helyesen a csizma új árát?

A) $c - 40c$; *B)* $\frac{60c}{100}$; *C)* $c - 0{,}4c$; *D)* $\frac{40}{100}c$; *E)* $(100 - 40) \cdot c$;

F) $\frac{(100 - 40)}{100}c$; *G)* $0{,}6c$; *H)* $(1 - 0{,}4)c$; *J)* $\frac{3}{5}c$; *I)* $\frac{(100c - 40c)}{100}$.

20. A villamosjegy árát 20%-kal emelték január 1-től. Mely algebrai kifejezések írják le a villamosjegy új árát, ha a villamosjegy december 31-ig v Ft-ba került?

A) $20v$; *B)* $v + 0{,}2v$; *C)* $(100 + 20)v$; *D)* $1{,}2v$; *E)* $\frac{100v + 20v}{100}$;

F) $\frac{6}{5}v$; *G)* $(1 + 0{,}2)v$; *H)* $v + 20v$; *I)* $\frac{120v}{100}$; *J)* $0{,}8v$.

21. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, és melyik hamis!

a) Ha a b az a és a c hányadosa, akkor az a-nak a b c-szerese.

b) A 7 óra 56 perc 42 másodperc 7-szerese az 1 óra 8 perc 6 másodperc időtartamnak.

c) Ha a pénzemnek elköltöm előbb a felét, majd az eredeti harmadát, akkor az eredeti ötöde marad meg.

22. Ha c darab ceruza f Ft-ba kerül, akkor hány ceruza kerül g Ft-ba?



23. Hogyan működik a következő bűvészmutatvány?

– Gondolj egy számot!
– Mondd meg, mivel akarod megszorozni, és szorozd meg!
– Mondd meg, mivel akarod elosztani, és oszd el!
– Szorozd meg egy számmal! Mondd meg, mivel szoroztál!
– Szorozd meg egy másik számmal! Most is mondd meg, mivel szoroztál!
– Még egyszer osszál, és mondd meg, mivel osztottál!
– A kapott számot oszd el a gondolt számmal!
– Add hozzá a gondolt számot!
– Az eredményből kitalálom, hogy mire gondoltál!

24. Írjuk fel algebrai kifejezéssel szorzat alakban, hogy

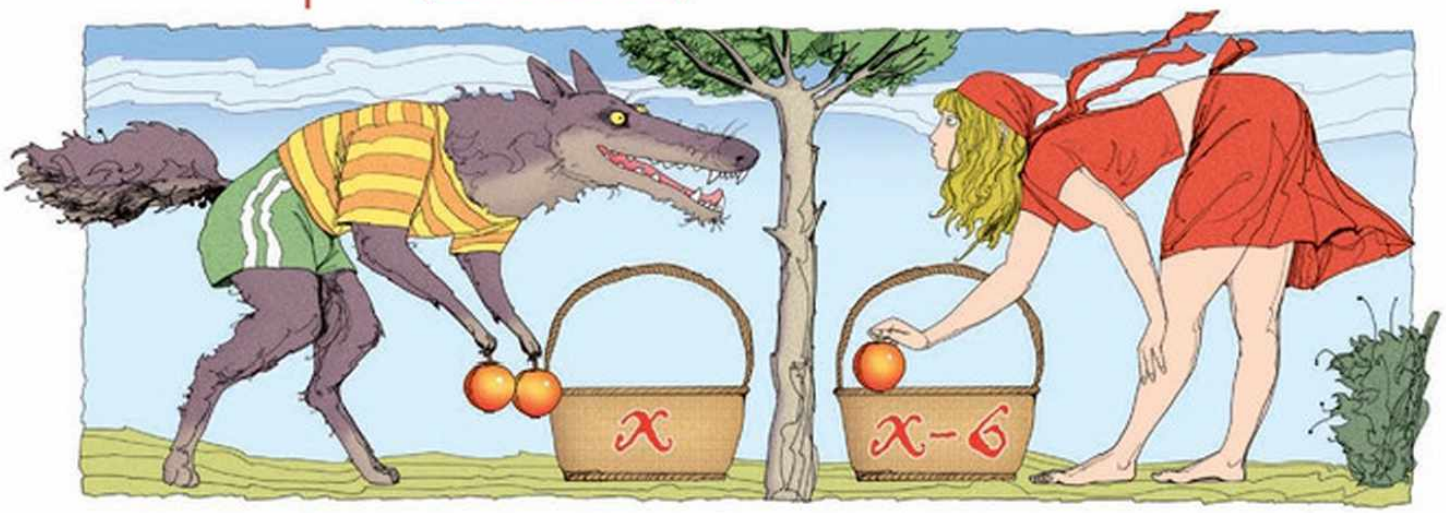
a) mennyi utat tesz meg együtt Bence és Gergő t idő alatt, ha a falujukat összekötő úton Bence 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Gergő 17 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ egyenletes sebességgel biciklizik egymás felé;

b) a kert hányad részét ássa fel Domi és Zoli együtt t óra alatt, ha Domi 1 óra alatt a kert $\frac{1}{5}$ részét, Zoli pedig az $\frac{1}{9}$ részét ássa fel (mindketten egyenletes tempóban ásnak)!

3 Egyenletek, egyenlőtlenségek



1. Hogyan oldjunk meg feladatokat? (emlékeztető)



Az ilyen problémák megoldása során a következő lépéseket kell végigjárni:

1. Értsük meg a problémát!

2. Mi a kérdés?

3. Vizsgáljuk meg az adatokat!

4. Keressünk összefüggést az adatok között, és ennek segítségével oldjuk meg a feladatot!

5. Ellenőrizzük a megoldást!

6. Válaszoljunk a kérdésre!

1. példa

Nagymama megkérte Piroskát és Farkast, hogy szedjenek neki néhány almát a háza melletti fáról. Piroska 6-tal kevesebb almát szedett, mint a szorgalmas Farkas. Összesen 22 almát szedtek le, amiből nagymama 6 üveg remek almakompótot főzött. Hány almát szedett Piroska? Hányat szedett Farkas?

Megoldás

Kérdés: Hány darab almát szedett külön-külön Piroska és Farkas?

Adatok: Az, hogy Nagymama 6 üveg almakompótot főzött, felesleges adat.

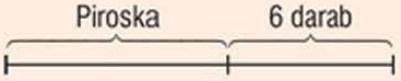
Összefüggések, megoldás:

Farkas almái = ahányat Piroska szedett és még 6 db.
Piroska és Farkas együtt 22 almát szedett.

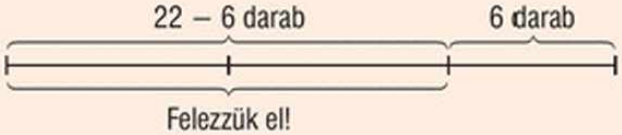
Rajzoljunk ábrát!

Piroska ennyi almát szedett:

Farkas ennél 6-tal többet szedett:



Ha az összes almából levesszük azt a 6-ot, amennyivel Farkas többet szedett, mint Piroska, akkor éppen ugyanannyi almát szedtek.



Mivel 22 – 6 = 16 fele 8, ezért Piroska 8 almát szedett, Farkas pedig ennél 6-tal többet, tehát 14-et.

Ellenőrzés:

Ha Piroskának 8, Farkasnak pedig 14 almája volt, akkor Piroskának tényleg 6-tal volt kevesebb, mert $14 - 8 = 6$.

Összesen $14 + 8 = 22$ almájuk volt.

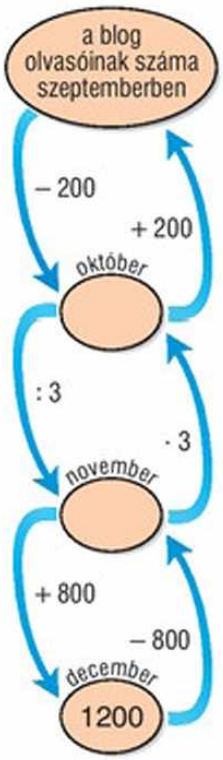
Válasz: Piroska 8 darab, Farkas pedig 14 darab almát szedett.

A szöveges feladatok megoldása során az adatok közti összefüggést szemléltethetjük szakaszok rajzolásával, ahogy az 1. példában tettük. Vannak olyan feladatok is, amelyeket visszafelé gondolkodással oldhatunk meg.

2. példa

Gábor minden hónapban megnézi, hányan látogatták meg a blogját. Októberben 200 fővel csökkent a látogatók száma szeptemberhez képest, novemberben viszont csak harmadannyian olvasták a blogot, mint az előző hónapban. Decemberben javult a helyzet: a novemberinél 800-zal többen voltak rá kíváncsiak, ekkor összesen 1200-an látogatták. Hányan olvasták Gábor blogját szeptemberben?

Gondolkodjunk visszafelé!



Megoldás

Kérdés: Hányan olvasták a blogot szeptemberben?

Adatok: A blog olvasóinak száma:

- októberben 200-zal csökkent a szeptemberihez képest;
- novemberben az októberi harmadára esett vissza;
- decemberben 800-zal emelkedett a novemberihez képest, így 1200 lett.

Gondolkozzunk visszafelé!

Novemberben 800-zal kevesebb látogató volt, mint decemberben,

azaz $1200 - 800 = 400$.

Októberben háromszor annyi látogató volt, mint novemberben,

azaz $3 \cdot 400 = 1200$.

Szeptemberben 200-zal több látogató volt, mint novemberben,

azaz $1200 + 200 = 1400$.

Ellenőrzés:

$$1400 - 200 = 1200$$
$$1200 : 3 = 400$$
$$400 + 800 = 1200$$

Decemberben valóban 1200 látogatója volt a blognak, tehát a megoldás jó.

Válasz: Gábor blogját szeptemberben 1400-an olvasták.

Egyes feladatokat úgy is meg tudunk oldani, hogy az adatokat képzeletben egy kétserpenyős egyenlő karú mérleg két serpenyőjébe helyezzük. Ezután olyan módosításokat hajtunk végre, amelyek az egyensúlyt nem befolyásolják.

3. példa

A boltban kétféle csomagolásban árulják Lilla kedvenc sajtját. A kisebbik doboz tömege 15 dkg. Lilla kétszer is vett ilyen sajtot: először 2 kisebb és 3 nagyobb dobozt 2040 Ft-ért, másodszor pedig 1 nagyobbat és 6 kisebbet 2120 Ft-ért. Testvére, Csilla, észrevette, hogy Lilla mindkét alkalommal ugyanakkora tömegű sajtot vásárolt. Mekkora a nagyobbik doboz tömege?

Megoldás

Kérdés: Mekkora a nagyobbik doboz tömege?

Adatok: A kisebbik doboz tömege 15 dkg. 2 kicsi és 3 nagyobb doboz tömege megegyezik 6 kicsi és 1 nagyobb doboz tömegével.



Az egyensúly fennmarad, ha mindkét serpenyőből ugyanakkora tömeget leveszünk.

Vegyünk le mindkét serpenyőből 2 kis dobozt és egy nagyot!



Az egyensúly fennmarad, ha mindkét serpenyőből levesszük az ott lévő tömeg felét.

Vegyük el mindkét serpenyőből a rajta lévő mennyiség felét: balról 1 nagy dobozt, jobbról pedig 2 kicsit!



Egy nagy doboz tömege tehát két kis dobozéval egyenlő, azaz

$$2 \cdot 15 = 30 \text{ (dkg)}.$$

Ellenőrzés:

$$2 \cdot 15 + 3 \cdot 30 = 120 \text{ (dkg)}$$
$$6 \cdot 15 + 1 \cdot 30 = 120 \text{ (dkg)}$$

Lilla tehát valóban ugyanannyi sajtot vett, a megoldás jó.

Válasz: Egy nagy doboz sajt tömege 30 dkg.

Próbáljuk meghatározni, mennyibe került külön-külön egy kis és egy nagy doboz sajt!

A fenti példa szövegében a sajtok tömege volt a kérdés, ezért a sajtokért fizetett összeg felesleges adatként szerepelt.

Feladatok

1. Zsófi és Dorka együtt 34 kg újságot gyűjtött, Zsófi 11 kg-mal többet, mint Dorka. Mennyit gyűjtöttek külön-külön?

2. Január 23-án az éjszaka 5 óra 40 perccel hosszabb a nappalnál! Mikor nyugszik a nap, ha 7 óra 21 perckor kel?

3. Kukutyinból Piripócsra és vissza utazunk Intercity-n, ami egy személynek a két helyjeggyel együtt 2800 Ft-ba kerül. Mennyibe kerülne az út a nem helyjegyes vonaton, ha a menetjegy egy irányba 700 Ft-tal drágább egy helyjegynél?

4. A labdarúgó bajnokság 2006/2007-es szezonjában a bajnok Debrecen éppen 50-nel több pontot szerzett, mint az utolsó helyen végzett Vác. A két csapat pontjainak átlaga 44 pont. Hány pontot gyűjtött a Vác?

5. Apa 34 éves, egy év híján ötször annyi idős, mint Kristóf. Hány éves Kristóf?

6. Annának ötször annyi ötöse van matekból, mint Zsuzsinak. Ketten együtt 18 db ötöst kaptak eddig. Hány ötösük van külön-külön?

7. A focimeccsen Bálint kezdőjátékos volt, majd lecserélték, és a 90 perces meccs végéig Csaba játszott a helyén. Csaba feleannyi időt töltött a pályán, mint Bálint. A meccs hányadik percében történt a csere?

8. Hókuszpók elfogott néhány törpöt, és most szószt szeretne készíteni hozzájuk. Ehhez vásárolt négy üveg áfonyalekvárt és három üveg mogyorókrémet. Összesen 4030 Ft-ot fizetett. Mennyibe kerül egy üveg áfonyalekvár és egy üveg mogyorókrém külön-külön, ha egy üveg mogyorókrém éppen háromszor olyan drága, mint egy üveg áfonyalekvár?

9. A Vénuszon egy év 225 földi napig tart. Hány földi nap telt el a vénuszi évből, ha az eltelt napok száma éppen $\frac{4}{5}$-e a hátralévő napok számának?

10. Kukutyin három iskolájába összesen 1480 gyerek jár. Az Arany Iskolának kétszer annyi tanulója van, mint az Ezüst Iskolának, legtöbben pedig a Bronz Iskolába járnak: 10-zel többen, mint a másik kettőbe összesen. Hány gyerek jár a három iskolába külön-külön?

11. Gondoltam egy számot. A hétszereséből kivontam 8-at, és így 83-at kaptam. Melyik számra gondoltam?

12. Boglárka minden születésnapján feljegyezték, hogy milyen magas, és mennyit nőtt az előző évben.

    Tizenegyedik születésnapján azt látták, hogy 6 cm-t nőtt.

    Tizenkettedik születésnapján azt, hogy két és félszer annyit nőtt, mint az előző évben.

    Tizenharmadik születésnapjáig az egy évvel korábbinál 4 cm-rel kevesebbet nőtt.

    Ekkor Boglárka 172 cm magas volt.

    Milyen magas volt a tizenegyedik születésnapján?



13. Szörnyű dolgok történtek egy csirkenevelő telepen: a csirkék 20%-át elvitte a róka, a maradék $\frac{3}{4}$-e a madárinfluenza áldozata lett. Összesen 120 csirke élte túl a megpróbáltatásokat.



a) Hány csirke pusztult el madárinfluenzában?
b) Hány csirke maradt a róka látogatása után?
c) Hány csirkét vitt el a róka?
d) Hány csirke volt a telepen eredetileg?

14. 2006-ban a Rózsaszín Köd nevű zenekar bevételeinek felét a CD-eladások, a maradék egyharmadát az interneten keresztül való vásárlások tették ki. A bevétel fennmaradó része, azaz kétmillió dollár a zenekar világ körüli turnéján folyt be. Mennyi volt a Rózsaszín Köd 2006-os bevétele?

15. Nagy úr fizetésemelésben reménykedik. Ha fizetését a két és félszeresére emelnék, és még adnának ezen felül is 10 000 Ft emelést, akkor már csak 5000 forinttal keresne kevesebbet, mint főnöke, Kiss úr. Kiss úr fizetése 290 000 forint. Mennyit keres Nagy úr?

16. Budapesten az év legcsapadékosabb hónapja a június. A júniusban átlagosan lehulló eső harmada 6 mm-rel több, mint az év legszárazabb hónapjában, márciusban átlagosan lehulló csapadék mennyiségének a fele. Márciusban átlagosan 30 mm eső hullik. Mennyi az átlagos csapadékmennyiség júniusban?

***17.** Tíz év múlva háromszor annyi idős leszek, mint ahány éves akkor voltam, mikor az apám olyan idős volt, mint most én. Én most 44 éves vagyok. Hány éves lesz tíz év múlva az apám?

18. Egy híres színésznőtől egyszer megkérdezte egy tizenhárom éves hetedikes, hogy hány éves. A színésznő így válaszolt: „Ha harmadannyi éves lennék, mint amennyi vagyok, akkor pontosan 5 évvel lennék idősebb annál, amennyi te leszel 2 év múlva." Hány éves volt a színésznő?

19. Egy kétkarú mérleg egyik serpenyőjében 4 db 15 dkg-os vaj és 3 db ismeretlen (de egyforma) tömegű margarin, a másikban pedig 8 db 15 dkg-os vaj van. A mérleg egyensúlyban van. Mekkora egy margarin tömege?

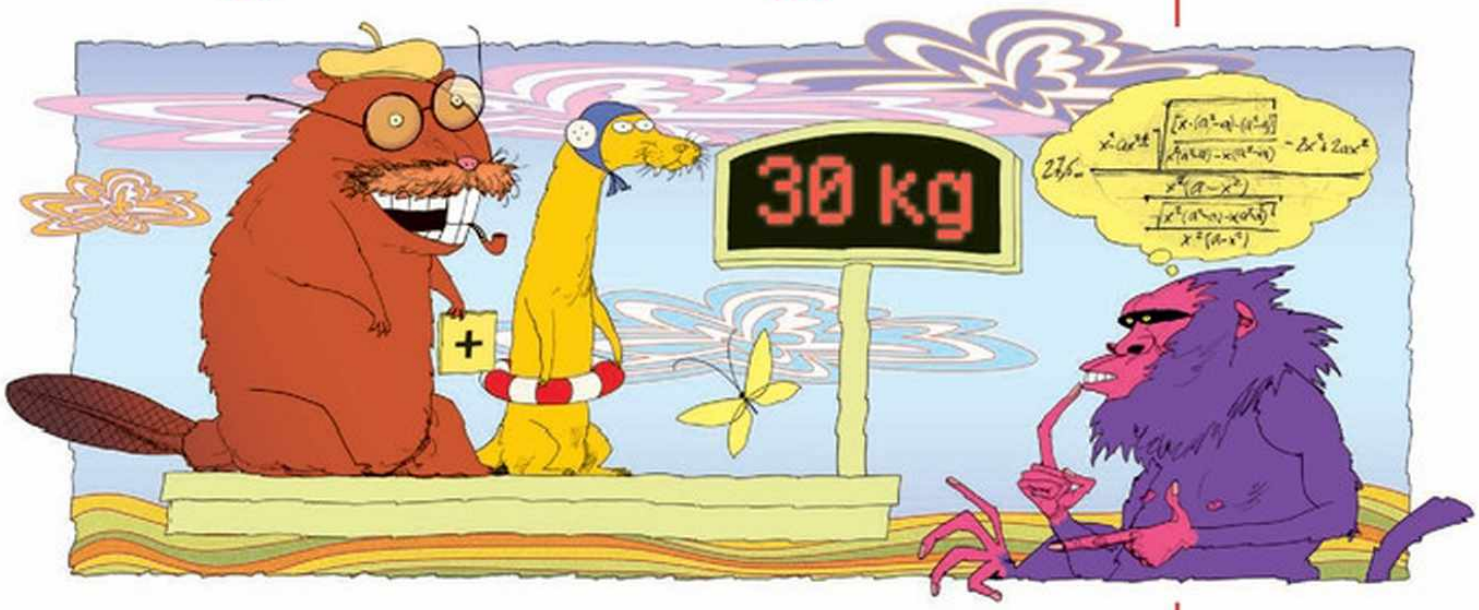
20. Ha két banán négy kiwit ér és két narancs és egy kiwi együtt ugyanannyit ér, mint három kiwi és egy banán, akkor
a) hány kiwit ér egy banán;
b) hány narancsot ér egy kiwi?

Rejtvény

Töltsük ki a bűvös négyzet hiányzó mezőit úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és minden átlóban ugyanannyi legyen a számok összege! Egy szám csak egyszer szerepelhet.

22	8	
		18
	26	

2. Hogyan születnek az egyenletek?



A következőkben a feladatok megoldását úgy keressük, hogy az adatok közötti összefüggéseket a matematika nyelvére lefordítva, algebrai kifejezésekkel írjuk fel.

1. példa

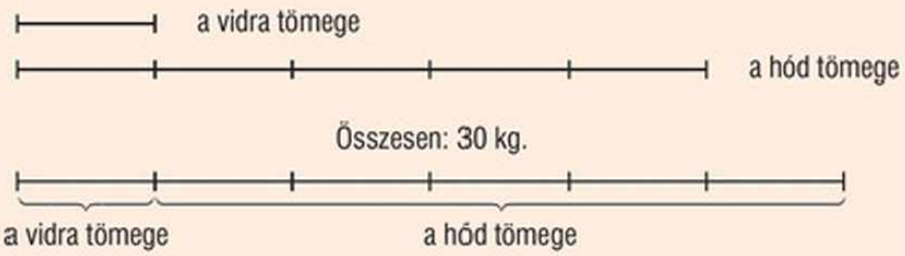
Ha a hód és a vidra együtt állnak a mérlegre, az 30 kg-ot mutat. A hód testtömege egy vidra testtömegének 5-szöröse. Mit mutat a mérleg, ha külön-külön áll rá a hód és a vidra?

1. megoldás

Kérdés: Mekkora a hód és a vidra tömege külön-külön?

Adatok: A hód és a vidra együtt 30 kg. A hód 5-ször olyan nehéz, mint a vidra.

Rajzoljunk!



Az ábráról leolvasható, hogy a vidra tömege a 30 kg hatodrésze, azaz 5 kg. A hód tömege ennek ötszöröse, tehát 25 kg.

Ellenőrzés: 5 kg + 25 kg = 30 kg.

Válasz: A vidra tömege 5 kg, a hódé 25 kg.



Nézzünk utána, hogy élnek-e hazánkban hódok és vidrák!

2. megoldás

Írjuk fel az adatok közötti összefüggéseket matematikai jelek segítségével a lehető legegyszerűbb formában!

A „fordítást” több lépésben fogjuk elvégezni.



A hód és a vidra együttes tömege 30 kg.

↓

A hód tömege + a vidra tömege = 30 kg.

↓

A hód tömege a vidra tömegének 5-szöröse.

↓

A vidra tömegének 5-szöröse + a vidra tömege = 30 kg.

↓

A vidra tömegét v-vel jelölve a vidra tömegének 5-szöröse $5v$.

↓

$5v + v = 30$.

A bal oldalon összevonhatjuk az egynemű algebrai kifejezéseket, azaz a v-ket:

$$6v = 30$$

v hatszorosa 30, ezért

$$v = 30 : 6$$

$$v = 5$$

v-vel a vidra tömegét jelöltük, tehát a vidra tömege 5 kg.

Az ismeretlen mennyiséget (v-t) röviden ismeretlennek nevezzük.

Ha az összefüggések felírásában egyenlőség szerepel, akkor **egyenletet** kapunk. Az egyenletben szereplő ismeretlen mennyiségeket röviden **ismeretleneknek** nevezzük.

Az **egyenlet megoldása** során az ismeretlen(ek) azon értékeit keressük, amelyekre az egyenlőség teljesül.

2. példa

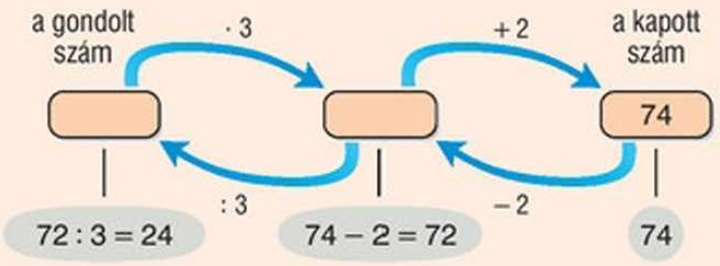
Gondoltam egy számot. A háromszorosához kettőt adtam, így 74-et kaptam eredményül. Melyik számra gondoltam?

1. megoldás

Kérdés: Melyik a gondolt szám?

Adatok: A gondolt szám háromszorosához kettőt adva 74-et kapunk.

Ábrázoljuk nyilakkal a műveleteket, majd gondolkodjunk visszafelé!



Az a szám, amelyhez kettőt adva 74-et kapunk, a $74 - 2 = 72$.
Az a szám, amelynek a háromszorosa 72, a $72 : 3 = 24$.

Válasz: A gondolt szám a 24.

Ellenőrzés: 24 háromszorosa 72, ehhez 2-t adva tényleg 74-et kapunk.

Válasz: A gondolt szám a 24.

2. megoldás

Írjunk fel egyenletet!

A gondolt szám háromszorosához kettőt adva 74-et kapunk.

↓ Jelöljük a gondolt számot x-szel!

Az x 3-szorosához 2-t adva az összeg egyenlő 74-gyel.

↓

$3x + 2 = 74$.

Oldjuk meg az egyenletet visszafelé gondolkozva!

$\boxed{3x} + 2 = 74$ A $3x$-hez 2-t adva 74-et kapunk, így $3x = 74 - 2$.

$3\boxed{x} = 72$ Az x háromszorosa 72, így $x = 72 : 3$.

$x = 24$

Tehát a gondolt szám a 24.

Az egyenletek megoldásának azt a módszerét, melynek során a műveleteket **fordított sorrendben, visszafelé** elvégezve számítjuk ki az ismeretlent, **lebontogatásnak** nevezzük.

Az olyan feladatok esetén, amelyeket visszafelé gondolkodva meg tudunk oldani, általában egyenleteket is felírhatunk. Az ilyen egyenleteket a lebontogatás módszerével oldhatjuk meg.

3. példa

Fordítsuk vissza a $4x + 12 = 40$ egyenletet hétköznapi nyelvre! Próbáljunk meg minél több különböző feladatot gyártani ennek segítségével! Oldjunk meg legalább egyet ezek közül!

Lehetséges megoldások

1. Gondoltam egy számot. Megszoroztam 4-gyel, majd hozzáadtam 12-t. Eredményül 40-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

   Megoldás:

   Kérdés: Melyik a gondolt szám?
   Adatok: A gondolt szám 4-szeresénél 12-vel nagyobb szám a 40.

   $\boxed{4x} + 12 = 40$ — A $4x$-hez 12-t adva 40-et kapunk, ezért $4x = 40 - 12$.

   $4\boxed{x} = 28$ — Az x négyszerese 28, ezért $x = 28 : 4$.

   $x = 7$

   Ellenőrzés: Ha a 7-et 4-gyel megszorzom, akkor 28-at kapok. Ha ehhez még 12-t hozzáadunk, az eredmény valóban 40.

   Válasz: Tehát a gondolt szám a 7.

2. Kristóf és Bendegúz horgászni mentek. Kristóf utána azzal dicsekedett, hogy négyszer annyi halat fogott, mint Bendegúz, ha pedig még 12-t fogott volna, akkor pontosan 40 halat fogott volna. Hány halat fogott Bendegúz?

3. Édesapám 40 éves. Mikor az öcsém négyszer annyi idős lesz, mint amennyi most, akkor éppen 12 évvel lesz fiatalabb, mint édesapám most. Hány éves az öcsém most?



Adjunk további megoldásokat! Fogalmazzuk meg ezek megoldását az 1.-höz hasonlóan!

4. példa

Oldjuk meg a $\frac{2x-4}{3} + 5 = 13$ egyenletet!

Megoldás

Az egyenletet lebontogatással oldjuk meg.

$\boxed{\frac{2x-4}{3}} + 5 = 13$ — A $\frac{2x-4}{3}$-hoz 5-öt adva 13-at kapunk, ezért $\frac{2x-4}{3} = 13 - 5$.

$\frac{\boxed{2x-4}}{3} = 8$ — A $2x - 4$-et 3-mal osztva 8-at kapunk, ezért $2x - 4 = 3 \cdot 8$.

$\boxed{2x} - 4 = 24$ A $2x$-ből 4-et kivonva 24-et kapunk, ezért $2x = 24 + 4$.

$2\boxed{x} = 28$ Az x kétszerese 28, ezért $x = 28 : 2$.

$\underline{\underline{x = 14}}$

Ellenőrzés: A bal oldalra x helyére 14-et behelyettesítve:

$$\frac{2 \cdot 14 - 4}{3} + 5 = \frac{28 - 4}{3} + 5 = \frac{24}{3} + 5 = 8 + 5 = 13.$$

Mivel a jobb oldalon is 13 szerepel, a megoldás helyes.

Az egyenlet megoldását gyakran úgy emeljük ki, hogy kétszer aláhúzzuk.

Az egyenlet megoldását úgy ellenőrizzük, hogy az egyenlet két oldalába külön-külön behelyettesítjük az ismeretlen értékét. A megoldás helyes, ha a helyettesítési értékek egyenlők.

Feladatok

Oldjuk meg a következő feladatokat ábra segítségével vagy visszafelé gondolkozva, majd írjunk fel mindegyik feladathoz egyenletet, és oldjuk is meg azt!

1. Öt gyerek gondolt egy-egy számra, melyekről a következőket mondták:

   Gábor: A számot megszoroztam 3-mal, az eredményből kivontam 4-et és 50-et kaptam.

   Balázs: A számhoz hozzáadtam 12-t, az összeget elosztottam 3-mal és 48-at kaptam.

   Eszter: A számhoz hozzáadtam 18-at, az összeget elosztottam 5-tel, a hányadosból kivontam 23-at és 35-öt kaptam.

   Blanka: A szám 4-szeresénél 15-tel kisebb szám harmada 3.

   Kinga: A szám felénél 3-mal nagyobb szám ötszörösénél 3-mal kisebb szám -8.

   Mely számokra gondoltak? Következtessünk visszafelé, majd írjuk fel egyenletet és oldjuk meg lebontogatással!

2. Oldjuk meg lebontogatással a következő egyenleteket, és írjuk le a lépéseket!

   a) $15x = 525$; *b)* $x - 35 = 82$; *c)* $0{,}5x = 93$;

   d) $x + 17 = -17$; *e)* $9x + 23 = 122$; *f)* $8x - 5 = 99$;

   g) $2x + 17 = 11$; *h)* $48 = 5x + 13$; *i)* $6{,}5 + 2{,}5x = 19$;

   j) $4 \cdot (2x + 3) = 76$; *k)* $3 \cdot (x - 2) + 5 = 41$; *l)* $2 \cdot (3x - 7) - 3 = 7$;

   m) $\frac{x + 2}{3} - 4 = -1$; *n)* $\frac{3x - 5}{4} - 3 = 1$; *o)* $2 + \frac{7x - 4}{3} = 10$.

3. Melyik súlycsoport világcsúcsát tartja 187 kg-mal szakításban az a súlyemelő, aki saját tömegének háromszorosánál 68 kg-mal kevesebbet tud felemelni?

4. Oldjuk meg lebontogatással a következő egyenleteket, és írjuk le a lépéseket!

   a) $3x + x + 2 = 134$; *b)* $5x - 3 - 2x = 72$;

   c) $5x + 3 - 2x + 9 + 3x = 24$; *d)* $x - 3x - 2 + 4x + 8 = 94$.

5. Karcsi gólyalábakon tanul járni. Karcsi 3-szor olyan magas, mint a gólyalábai. Amikor rááll a gólyalábakra, 2 méter 12 centiméter magas lesz. Hány centiméter magas Karcsi? Mekkorák a gólyalábak?

6. Hány km-es az a túra, amelynek miután megtettük a harmadát, még 10 km van hátra?

7. Hófehérke palacsintát süt a hét törpének. Vidor, Tudor, Szende és Szundi ugyanannyi palacsintát eszik meg. Hapci kétszer annyit, mint Vidor, Kuka pedig kétszer annyit, mint Hapci. Morgó csak egy palacsintát hajlandó megenni. Hófehérke 31 palacsintát süt. Hány palacsintát eszik meg Szundi?

8. Egy fagylaltárus 3 híján 4-szer annyi gombóc citromfagyit adott el egy forró júliusi napon, mint ahány vaníliafagyit. A két fajtából összesen 407 gombócot adott el. Mennyit adott el belőlük külön-külön?

9. A waterloo-i csatában három sereg ütközött meg. Napóleon seregében 5000-rel több katona volt, mint Wellingtonéban. Blücher a poroszok élén 52 000 katonával vett részt az ütközetben. A csatában összesen 191 000 katona harcolt.

   Hány főből állt Napóleon, illetve Wellington serege?



10. Lili, Katinka és Peti a következő egyenletet kapta házi feladatnak: $4x - 5 = 27$. Lili 7-et, Katinka 8-at, Péter 9-et kapott eredményül. Melyikük oldotta meg helyesen a feladatot?

11. Oldjuk meg lebontogatással a következő egyenleteket, és írjuk le a lépéseket!

   a) $5 - 3 \cdot (3 + x) = 2$; *b)* $3 \cdot [3 + 2 \cdot (x - 1)] - 10 = 5$;

   c) $2 = \frac{x + 3}{2} + \frac{3}{8}$; *d)* $2 \cdot \frac{2x - 7}{5} + \frac{3}{5} = 1$.

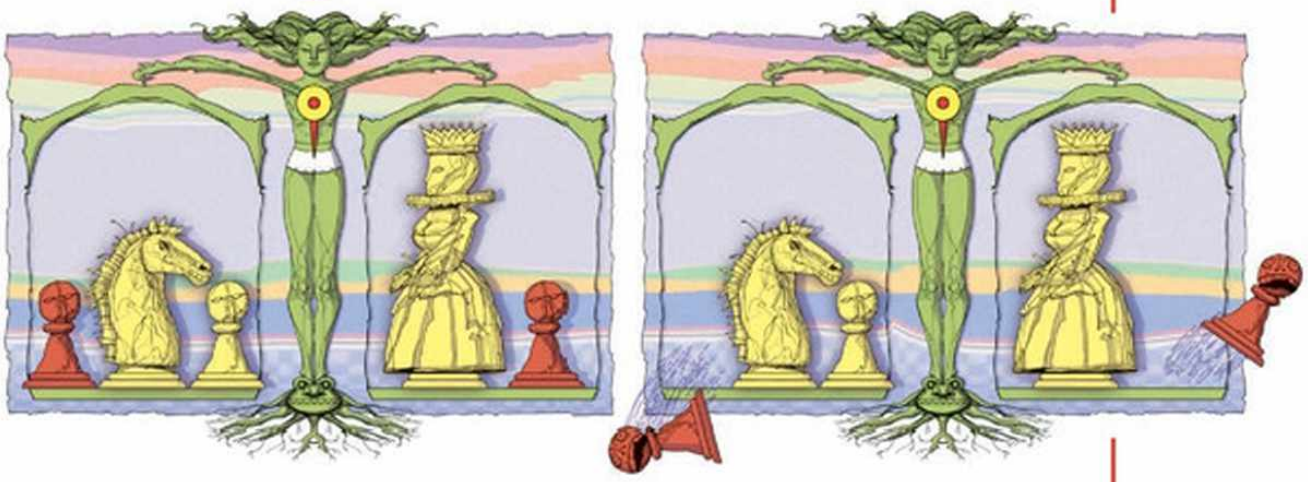
12. Fordítsuk vissza az alábbi egyenleteket „hétköznapi nyelvre”, majd oldjuk is meg a feladatokat!

   a) $2x + 12 = 26$; *b)* $4 + \frac{x - 3}{6} = 6$; *c)* $x + 2x + 3x + 4x - 2 = 48$.

Rejtvény

Van-e olyan egyenlet, amelynek nincs megoldása?

3. A mérlegelv I.



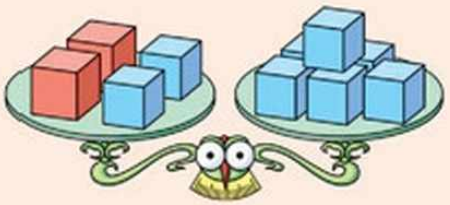
Korábban egyes feladatokat úgy oldottunk meg, hogy képzeletben egy kétserpenyős, egyenlő karú mérlegre helyeztük a feladatban szereplő dolgokat.

1. példa

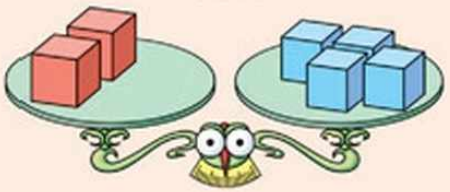
Egy kétkarú mérleg egyik serpenyőjében 2 piros és 2 kék kocka, a másikban pedig 6 kék kocka van. A mérleg egyensúlyban van. A kék kockák mind 10 g tömegűek. A piros kockák tömege is egyforma, de nem tudjuk mennyi. Meg tudjuk-e mondani?

1. megoldás

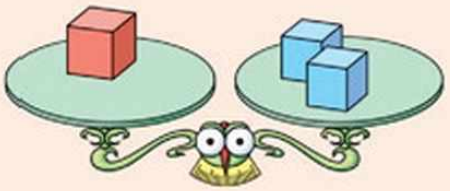
Készítsünk ábrát!



Vegyünk le 2 kék kockát mindkét oldalról!



A mérleg mindkét oldalán változtassuk felére a kockák számát!



1 piros kocka tömege = 2 kék kocka tömege = $2 \cdot 10\ \text{g} = 20\ \text{g}$.

Ellenőrzés:

2 piros kocka + 2 kék kocka tömege → $2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 60$ (g),

6 kék kocka tömege → $6 \cdot 10 = 60$ (g).

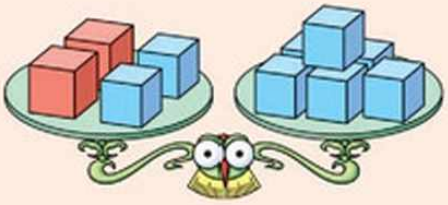
A két oldalon a tömegek valóban egyenlők.

Válasz: Egy piros kocka tömege 20 g.

Kövessük ugyanazokat a lépéseket, amelyeket az előző megoldásban!

2. megoldás

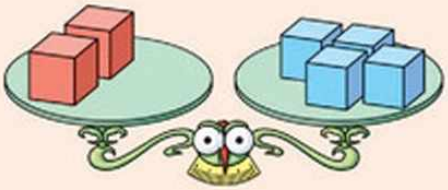
Írjunk fel egyenletet! Jelöljük egy piros kocka tömegét x-szel!



$2x + 20 = 60 \quad / -20$

$-20 \qquad -20$

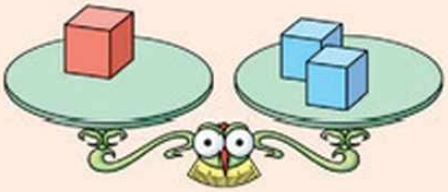
Vegyünk le 2 kék kockát, (azaz 20 g tömeget) mindkét oldalról!



$2x = 40 \quad / : 2$

$:2 \qquad :2$

A mérleg mindkét oldalán változtassuk felére a kockák számát!



$x = 20$

Azt kaptuk, hogy egy piros kocka tömege (x) 20 g.

Az egyenlet mindkét oldalából ugyanazt a számot kivonva az egyenlőség megmarad.

Az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a 0-tól különböző számmal osztva az egyenlőség megmarad.

2. példa

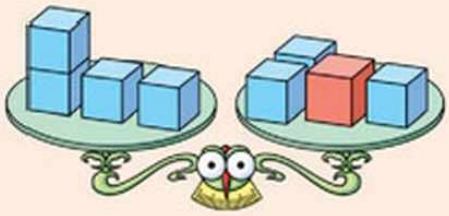
Határozzuk meg, milyen számokra teljesül a következő egyenlet!

$$4x = 3x + 33.$$

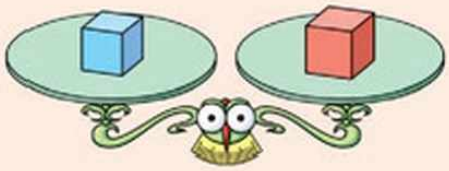
Megoldás

Fordítsuk le a feladatot „mérlegnyelvre”, majd készítsünk rajzot!

A mérleg egyik serpenyőjében most négy ismeretlen, de egyforma tömegű (például kék) kocka, a másikban pedig három ugyanilyen kék kocka és egy 33 g tömegű piros kocka van.



Vegyünk le mindkét oldalról 3 db kék kockát!



$$4x = 3x + 33 \quad / -3x$$

$$-3x \qquad -3x$$

$$x = 33$$

Azt kaptuk, hogy egy kék kocka tömege, azaz $x = 33$ g.

Az egyenlet megoldása most egyetlen lépésből állt.

Ellenőrzés: Bal oldal: $4 \cdot 33 = 132$.
Jobb oldal: $3 \cdot 33 + 33 = 4 \cdot 33 = 132$.

A két oldal egyenlő, tehát a megoldás helyes.

Válasz: Az egyenlet megoldása tehát az $x = 33$.

Az egyenlet mindkét oldalából az ismeretlen ugyanannyiszorosát kivonva az egyenlőség megmarad.

3. példa

Határozzuk meg, mely szám(ok)ra teljesül az $\frac{x}{3} + 9 = 29$ egyenlet!

Megoldás

Most már mérlegek nélkül írjuk le a megoldást!

Az átalakítások célja az, hogy az egyenlet egyik oldalán az ismeretlen, a másik oldalán pedig egy szám álljon.

$$\frac{x}{3} + 9 = 29 \quad / -9$$

$$-9 \qquad -9$$

$$\frac{x}{3} = 20 \quad / \cdot 3$$

$$\cdot 3 \qquad \cdot 3$$

$$x = 60$$

Mindkét oldalból vonjunk ki 9-et!

A bal oldalon $\frac{x}{3}$ van. Az x-et úgy kapjuk meg, hogy az egyenlet mindkét oldalát 3-mal szorozzuk.



Ellenőrzés:

A bal oldalon $\frac{60}{3} + 9 = 20 + 9 = 29$ szerepel, tehát az eredmény helyes.

Az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozva az egyenlőség megmarad.

4. példa

Flóra 9 éves. Amikor a testvére, Márk született, akkor 3 évvel volt idősebb, mint ahány éves az öccse most. Hány éves most Márk?

Megoldás

Jelöljük x-szel Márk életkorát!

Írjuk fel kétféleképpen Flóra életkorát Márk születésekor!

1. Márk x éve született → Flóra $9 - x$ éves volt;
2. 3 évvel volt idősebb, mint Márk most → Flóra $x + 3$ éves volt.

A kétféleképpen felírt életkorok egyenlők, tehát

$9 - x = x + 3$	$/ + x$	Adjunk mindkét oldalhoz x-et!
$9 = 2x + 3$	$/ - 3$	Vonjunk ki mindkét oldalból 3-at!
$6 = 2x$	$/ : 2$	Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát 2-vel!
$3 = x$		

Azt kaptuk, hogy Márk 3 éves.

Ellenőrzés:
Márk születésekor Flóra $9 - 3 = 6$ éves volt, valóban 3 évvel volt idősebb, mint Márk most. Tehát a megoldás helyes.

Válasz: Márk 3 éves.

Az egyenlet mindkét oldalához az ismeretlen ugyanannyiszorosát hozzáadva az egyenlőség megmarad.

Azt az egyenletmegoldási módszert, amelynek során az egyenlet mindkét oldalával ugyanazt a műveletet hajtjuk végre, **mérlegelvnek** nevezzük.

A mérlegelv végrehajtása során a következő átalakításokat végezhetjük:

Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadhatjuk
- ugyanazt a számot;
- az ismeretlen ugyanannyiszorosát.

Az egyenlet mindkét oldalából kivonhatjuk
- ugyanazt a számot;
- az ismeretlen ugyanannyiszorosát.

Az egyenlet mindkét oldalát megszorozhatjuk
- ugyanazzal a 0-tól különböző számmal.

Az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk
- ugyanazzal a 0-tól különböző számmal.

Mindig úgy alakítjuk át az egyenletet, hogy végül az egyik oldalon az ismeretlen, a másikon pedig egy szám álljon.



Feladatok

1. Négy egyforma zacskó cukorka egy 3 dkg-os súllyal együtt egyensúlyt tart három darab negyed kilogrammos súllyal. Hány dekagramm egy zacskó cukor?

A mérlegelv segítségével oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

2. *a)* $x + 2 = 11$; *b)* $x + 280 = 1007$; *c)* $x + 3 = 1$; *d)* $5 + x = 21$;
   e) $6 + x = 0$; *f)* $7 = x + 1$; *g)* $x + 1{,}3 = 2{,}1$; *h)* $0{,}65 + x = 1{,}03$.

3. *a)* $x - 3 = 9$; *b)* $x - 42 = 19$; *c)* $x - 8 = -3$; *d)* $-6 + x = 13$;
   e) $-5 + x = 0$; *f)* $9 = x - 5$; *g)* $x - 4{,}2 = -2$; *h)* $-6{,}3 + x = 0{,}5$.

4. *a)* $3x = 15$; *b)* $8x = 96$; *c)* $18x = 54$; *d)* $1000x = 80\,000$;
   e) $5x = 0$; *f)* $3x = -42$; *g)* $-4x = 72$; *h)* $-6x = -84$.

5. *a)* $\frac{x}{3} = 8$; *b)* $\frac{x}{8} = 2$; *c)* $\frac{x}{9} = 1$; *d)* $\frac{x}{11} = 11$;
   e) $\frac{2}{3}x = 8$; *f)* $\frac{3}{5}x = \frac{6}{7}$; *g)* $\frac{3}{4}x = -9$; *h)* $-\frac{2}{7}x = \frac{4}{5}$.

6. *a)* $2x + 1 = 13$; *b)* $12x + 7 = 43$; *c)* $4 + 5x = 64$;
   d) $3x - 4 = 32$; *e)* $21x - 105 = 0$; *f)* $9 - 2x = 17$;
   g) $4 = 10x - 26$; *h)* $49 = 4 + 5x$; *i)* $38 = 13 - 25x$;
   j) $\frac{x}{2} + 1 = 2$; *k)* $\frac{3}{4}x - 2 = 4$; *l)* $4 - \frac{2}{5}x = 0$.

7. *a)* $2x = x + 8$; *b)* $5x = x + 16$; *c)* $x + 27 = 10x$;
   d) $6x = 4x + 14$; *e)* $4x = x - 6$; *f)* $2 + 3x = 7x$;
   g) $x = 9 - 2x$; *h)* $3x = 54 - 3x$; *i)* $15 - x = 4x$.

8. *a)* $4x + 1 = x + 7$; *b)* $5x + 3 = x + 19$; *c)* $3x + 8 = 2x + 12$;
   d) $2x - 3 = x + 1$; *e)* $x + 1 = 4x - 8$; *f)* $2x - 4 = 6x - 12$;
   g) $x - 5 = 1 - x$ *h)* $2x + 1 = 11 - 3x$; *i)* $8 - 5x = 3 + 5x$.

9. Mennyi a házszámunk, ha a szám 6-szorosa 82-vel kevesebb a 8-szorosánál?

10. Melyik az a szám, amelynek a 11-szeresénél 9-cel kisebb a 14-szerese?

11. Ha ötször annyi lábam lenne, mint amennyi van, akkor még mindig hússzal kevesebb lábam lenne, mint neked – mondta egy Soklábú Állat egy Még Több Lábúnak.

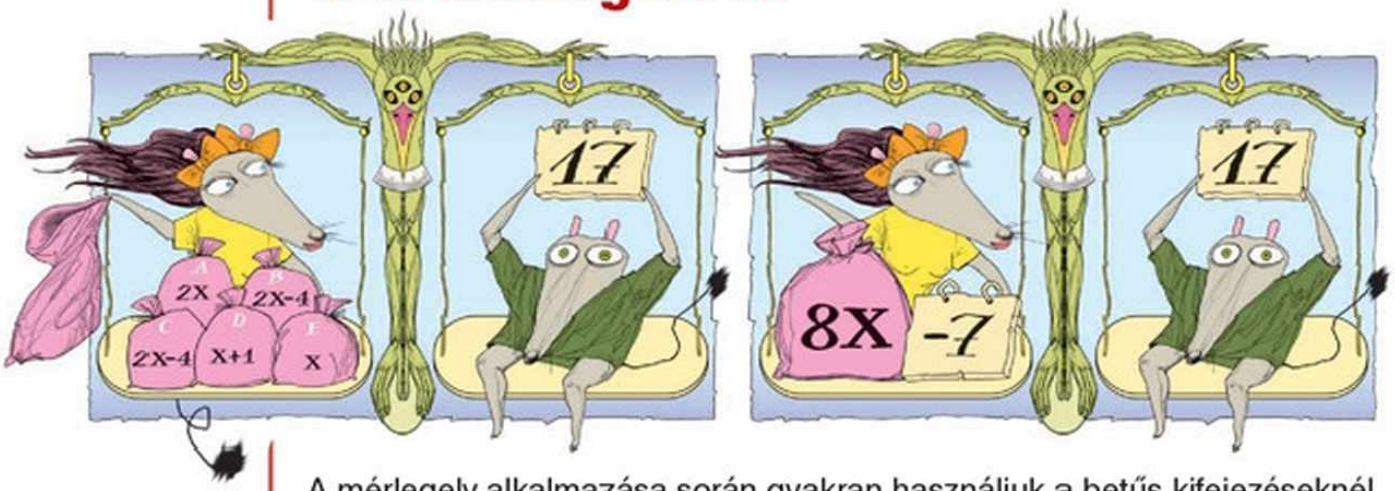
    Ha viszont hétszer annyi lábad lenne, mint amennyi van, akkor 16-tal több lábad lenne, mint nekem – mondta a Még Több Lábú Állat a Soklábúnak. Melyiknek hány lába van?



Rejtvény

Egy futballcsapat átlagéletkora 23 év. Egy játékost kiállítanak, ezután 22 év lesz az átlagéletkor. Hány éves a kiállított játékos?

4. A mérlegelv II.



A mérlegelv alkalmazása során gyakran használjuk a betűs kifejezéseknél megismert átalakításokat.

1. példa

Anna, Balázs, Cili, Dóri és Eszter azon versenyeznek, hogy ki gyűjt több ötöst egy hét alatt. Esztertől a következőket tudtuk meg:

– Annának kétszer annyi ötöse van, mint nekem;
– Balázsnak néggyel kevesebb ötöse van, mint Annának;
– Cilinek ugyanannyi ötöse van, mint Balázsnak;
– Dórinak eggyel több ötöse van, mint nekem;
– ötünknek összesen 17 db ötösünk van.

Hány ötöse van Eszternek? Kinek van a legtöbb ötöse?

Megoldás

Kérdés: Eszter ötöseinek száma. Jelöljük ezt x-szel!

Írjuk fel x segítségével, hogy kinek hány ötöse van!

Eszter: x;
Anna: $2x$;
Balázs: $2x - 4$;
Cili: $2x - 4$;
Dóri: $x + 1$.

Összesen 17 db ötösük van, tehát

$$x + 2x + 2x - 4 + 2x - 4 + x + 1 = 17.$$

Vonjuk össze az egynemű tagokat a bal oldalon!

$$\underbrace{x + 2x + 2x + 2x + x}_{8x} - \underbrace{4 - 4 + 1}_{7} = 17$$

Most már alkalmazhatjuk a mérlegelvet:

$$\begin{aligned} 8x - 7 &= 17 \quad / + 7 \\ 8x &= 24 \quad / : 8 \\ x &= 3 \end{aligned}$$



Tehát Eszternek 3, Annának $2 \cdot 3 = 6$, Balázsnak és Cilinek $6 - 4 = 2$, Dávidnak pedig $3 + 1 = 4$ ötöse van.

Ellenőrzés: $3 + 6 + 2 + 2 + 4 = 17$, tehát a megoldás helyes.

Válasz: Eszternek 3 ötöse van. A legtöbb ötöse, 6 db, Annának van.

Az egyenlet megoldását célszerű azzal kezdeni, hogy az egyenletet egyszerűbb alakra hozzuk (például az egy oldalon szereplő egynemű kifejezéseket összevonjuk). Ezután **rendezzük az egyenletet.**

2. példa

Keressük meg, mely számok teszik igazzá a következő egyenletet!

$$3x - 10 + x = 5 + 6x - 3$$

Megoldás

Vonjuk össze az egynemű kifejezéseket!

$$\underbrace{3x + x} - 10 = 6x + \underbrace{5 - 3}$$

$$4x - 10 = 6x + 2$$

Most mindkét oldalon szerepel az ismeretlen és egy szám is. Úgy kell alkalmaznunk a mérlegelvet, hogy az egyik oldalon az x, a másikon pedig egy szám maradjon.

$$\begin{aligned} 4x - 10 &= 6x + 2 && / - 6x \\ -2x - 10 &= 2 && / + 10 \\ -2x &= 12 && / : (-2) \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

Bal oldal: $3 \cdot (-6) - 10 + (-6) = -18 - 10 - 6 = -34.$

Jobb oldal: $5 + 6 \cdot (-6) - 3 = 5 - 36 - 3 = -34.$

A két oldal egyenlő, tehát a megoldás helyes.

Megjegyzés: A $4x - 10 = 6x + 2$ egyenletet így is rendezhettük volna:

$$\begin{aligned} 4x - 10 &= 6x + 2 && / - 4x \\ -10 &= 2x + 2 && / - 2 \\ -12 &= 2x && / : 2 \\ -6 &= x \end{aligned}$$

Így elkerültük a negatív számmal való osztást, az pedig mindegy, hogy a végén az x a bal vagy a jobb oldalon marad.

Fontos, hogy az átrendezésnél odafigyeljünk az előjelekre!



Az egyenlet két oldala bármikor felcserélhető.

3. példa

Gabi és Zsuzsi kaktuszokat gyűjtenek. Kettőjük gyűjteménye 48 darabból áll. Gabi kaktuszai számának 4-szerese 6-tal kevesebb, mint Zsuzsi kaktuszai számának 5-szöröse.

Hány kaktusza van Gabinak és hány Zsuzsinak?

Megoldás

Jelöljük x-szel Gabi kaktuszainak számát!

Gabi:	x	4-szerese: $4x$	$+6$
Zsuzsi:	$48 - x$	5-szöröse: $5 \cdot (48 - x)$	

Így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\begin{aligned} 4x + 6 &= 5 \cdot (48 - x) \\ 4x + 6 &= 5 \cdot 48 - 5x && / + 5x \\ 9x + 6 &= 240 && / - 6 \\ 9x &= 234 && / : 9 \\ x &= 26 \end{aligned}$$

Így Gabinak 26, Zsuzsinak $48 - 26 = 22$ kaktusza van.

Ellenőrzés:

Gabi kaktuszai számának 4-szerese: $4 \cdot 26 = 104$;

Zsuzsi kaktuszai számának 5-szöröse: $5 \cdot 22 = 110$.

$110 - 104 = 6$. Gabi kaktuszai számának 4-szerese valóban 6-tal kevesebb, mint Zsuzsi kaktuszai számának 5-szöröse.

Válasz: Tehát Gabinak 26, Zsuzsinak 22 kaktusza van.

Az egyenletek megoldása során a következő lépéseket hajtjuk végre:

- **a kijelölt műveletek elvégzésével, az egynemű kifejezések összevonásával egyszerűbb alakra hozzuk az egyenletet;**
- **a mérlegelv vagy a lebontogatás alkalmazásával megoldjuk az egyenletet;**
- **ellenőrizzük a megoldást.**

Feladatok

1. Oldjuk meg az egyenleteket a mérlegelv segítségével!

a) $3x + 2 + 6x - 4 = 25$;

b) $6 + 9x - 10 + 3x = 0$;

c) $4x + 3 + x + 5x - 6 = 2x + 13$;

d) $x - 2 - 2x + 9 = 7 - 6x$;

e) $3x - 5 - 4x = x + 5 + 5x - 24$;

f) $3x - 5 + 7 + 7x - 9 = 12x + 8 - 23x + 6$.

2. Rita házi feladatának sajnos megégett a széle, és már nem emlékszik, milyen műveleteket végzett az egyes lépésekben! Segítsünk neki!

$$\begin{aligned} 3 - 2x &= 8 - 4x \quad / \\ 3 &= 8 - 2x \quad / \\ -5 &= -2x \quad / \\ 2{,}5 &= x \end{aligned}$$



3. Határozzuk meg, mi volt az eredeti egyenlet!

$$\begin{aligned} & / - 5x \\ & / + 6 \\ & / : 4 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

4. Aladár, Elemér és Jonatán egyforma aranyrudakat rabolt a bankból. Aladár 4 aranyrudat vitt magával, Elemér 3-at, Jonatán pedig annyit, mint Aladár és Elemér összesen. Amikor otthon a mérlegre rakták, kiderült, hogy összesen 156,8 kg aranyrudat zsákmányoltak. Hány kilogramm egy aranyrúd tömege?

5. Széchenyi István 15 évvel született korábban, mint Batthyány Lajos. 1848-ban ketten együtt éppen 99 évesek voltak. Melyikük hány éves volt 1848-ban? (➡)





6. Andrea nyomtatója 450 oldal kinyomtatására elegendő festéket tartalmazott. Ezzel kinyomtatta azt a novellát, amit magyarórára kell elolvasnia. Kiszámolta, hogy ha még 11 osztálytársának kinyomtatná a novellát, akkor már csak 18 oldalra elegendő festék maradna a nyomtatóban. Hány oldalas a novella?

7. Oldjuk meg az egyenleteket a mérlegelv segítségével!

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 15$; *b)* $\frac{2}{5}x - \frac{1}{15}x = 2$; *c)* $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 38$; *d)* $\frac{x}{3} + 1 = \frac{x}{2} - 2$.

8. Ha csak egyharmad zsemlét eszünk, akkor 700 kcal-val kevesebb energiát veszünk magunkhoz, mintha 3 zsemlét ettünk volna meg. Mennyi egy zsemle energiatartalma?

9. Ha a házszámom harmadát és negyedét összeadom, és még hozzáadok 20-at, akkor éppen a házszámomat kapom. Hányas számú házban lakom?

10. Oldjuk meg az egyenleteket a mérlegelv segítségével!

a) $2 \cdot (x + 3) + 4x = 21$;
b) $x + 3 \cdot (x - 2) = 10$;
c) $4 \cdot (x - 1) = 3 \cdot (x + 2)$;
d) $9 \cdot (1 - x) = 2 \cdot (x - 4)$;
e) $3 \cdot (2x - 4) = 2 \cdot (x - 2)$;
f) $5 \cdot (3 - 2x) = 3 \cdot (4x - 5)$.

11. A 7. évfolyamon a gyerekek 3 lehetőség közül választhatták ki, hogy hova menjenek kirándulni. A szavazatok felét Aggtelek, egynegyedét Hortobágy, egyötödét pedig Veszprém kapta. Négyen mindhármat felírták, ezért az ő szavazatukat érvénytelenítették. Hány fős a hetedik évfolyam, ha mindenki szavazott?

(mészkőfal Aggteleken ➡)



12. Brigi, Erika, Pisti és Zoli ugyanattól az árustól vett egy-egy dinnyét. Brigi dinnyéje 6 kg-os volt, Erikáé 7 kg-os, Pistié 9 kg-os. Zoli egy 12 kg-os dinnyét vett, ezért ő kilóját 4 Ft-tal olcsóbban kapta. Összesen 2468 Ft-ot fizettek.

Mennyibe került 1 kg dinnye az árusnál?

13. Oldjuk meg az egyenleteket a mérlegelv segítségével!

a) $(x + 3) - 2x = 15$;
b) $x + (3 - 2x) = 15$;
c) $(6 - x) + 4 = 3x - 2$;
d) $6 - (x + 4) = 3x - 2$;
e) $2000 - (x + 2) = 1000$;
f) $8x - (2x - 3) = 16 - (2x - 3)$.

14. Oldjuk meg az egyenleteket a mérlegelv segítségével!

a) $2 \cdot (x + 1) - 8 = 3 \cdot (2x - 5) - 3x$;
b) $2 \cdot (2 - 3x) + 5 = x - 5$;
c) $1 - 5(x - 1) = 2 \cdot (2x - 1) - x$;
d) $3 \cdot (2x - 3) - 4(x - 2) = x + 19$.

15. Áron és Gergő ikrek. Születésnapjukon mindketten ugyanannyi pénzt kaptak a nagymamájuktól. Áron elköltötte a pénze felét és még 200 forintot, Gergő viszont csak a pénze harmadát költötte el, ráadásul még talált az utcán egy 100 forintost. Most Gergőnek éppen kétszer annyi pénze van, mint Áronnak. Hány forintot kaptak eredetileg?

16. Mari néni brokkolit és gombát vitt a piacra, összesen 15 kg-ot. Ha kétszer annyi gombát, viszont 1,5 kg-mal kevesebb brokkolit vitt volna, akkor ugyanannyit vitt volna mindkettőből. Hány kilogramm brokkolit és gombát vitt Mari néni a piacra?

17. Zsuzsi kétszer annyi pénzt vitt magával az osztálykirándulásra, mint Levente. Ha Levente 300 forinttal kevesebbet vitt volna magával, akkor éppen feleannyi pénzt vitt volna, mint Sanyi. Hárman együtt 5400 forintot vittek a kirándulásra. Mennyi pénzt vittek külön-külön?

18. A 2007-es rögbi-világbajnokságon a csoportmérkőzések során Anglia öttel szerzett több pontot, mint Új-Zéland pontjainak egyharmada. Új-Zéland éppen annyival szerzett több pontot Angliánál, mint amennyit Olaszország és Skócia összesen elért. Olaszország 85, Skócia pedig 116 pontot szerzett. Hány pontot gyűjtött Új-Zéland?

Rejtvény

Egy 35 éves matematikatanár rájött, hogy édesapja éppen 8-szor annyi éves, mint ő volt akkor, amikor édesapja feleolyan idős volt, mint most. Hány éves most a matematikatanár édesapja?

5. Amit nem szabad elfelejteni: az egyenlet alaphalmaza



1. példa

2007. május 23-án a 34 fős 7. b osztályban éppen háromszor annyian nézték a Bajnokok Ligája döntőjét, mint ahányan valamelyik másik csatorna műsorát. Nyolcan egyáltalán nem néztek tévét aznap este. Hányan látták az osztályból a döntőt?

Megoldás

Kérdés: Hányan nézték a BL-döntőt?

Adatok:

Mást nézett:	x	Összesen: 34.
focit nézett:	$3x$	
semmit sem nézett:	8	

Írjunk fel egyenletet! Az osztály tanulóinak száma:

$$\begin{aligned} x + 3x + 8 &= 34 \\ 4x + 8 &= 34 \qquad / - 8 \\ 4x &= 26 \qquad / : 4 \\ x &= 6{,}5 \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy 6,5 gyerek nézett más műsort, 19,5 gyerek pedig focimeccset. Azonban annak, hogy 19,5 ember néz egy tévéműsort, nincs értelme, a feladat megoldása csak természetes szám lehet.

A válasz: A feladatnak nincs megoldása.

Megjegyzés: Az egyenlet megoldása helyes volt, mert

$$6{,}5 + 3 \cdot 6{,}5 + 8 = 26 + 8 = 34,$$

de az egyenlet felírásából hiányzott az a feltétel, hogy x csak természetes szám lehet.

A szöveges feladatok megoldását a szöveg alapján kell ellenőrizni!

Az egyenlet **alaphalmazának** nevezzük azt a számhalmazt, melynek elemei között az egyenlet megoldását keressük.

Az ismeretlennek az alaphalmazba eső azon értékét, amelyre az egyenlőség teljesül, az **egyenlet megoldásának** vagy **gyökének** nevezzük.

2. példa

Oldjuk meg az $\frac{x+8}{2} = 3$ egyenletet a negatív egész számok halmazán!

Az egyenletmegoldás lépései:
1. Meghatározzuk az ismeretlen azon értékét, amelyre az egyenlőség teljesül.
2. Megvizsgáljuk, hogy a kapott érték az alaphalmazba esik-e.
3. Behelyettesítéssel ellenőrzünk.
4. Válaszolunk.

Megoldás

$$\frac{x+8}{2} = 3 \qquad / \cdot 2$$
$$x + 8 = 6 \qquad / - 8$$
$$x = -2$$

A -2 negatív egész szám, tehát beleesik az alaphalmazba.

Ellenőrzés: Bal oldal: $\frac{-2+8}{2} = 3$.

Mivel mindkét oldalon ugyanaz a szám áll, az egyenlet megoldása jó.

Válasz: $x = -2$.

3. példa

Oldjuk meg az $\frac{1-x}{4} + 2x = 5$ egyenletet a 3-nál nagyobb racionális számok halmazán!

Megoldás

Arra törekszünk, hogy a tört magában álljon az egyenlet egyik oldalán. Ezt elérhetjük

Mérlegelvvel:

$$\frac{1-x}{4} + 2x = 5 \qquad / - 2x$$
$$\frac{1-x}{4} = 5 - 2x \qquad / \cdot 4$$
$$1 - x = 4 \cdot (5 - 2x)$$
$$1 - x = 20 - 8x \qquad / + 8x$$
$$1 + 7x = 20 \qquad / - 1$$
$$7x = 19 \qquad / : 7$$
$$x = \frac{19}{7}$$

Közös nevezőre hozással:

$$\frac{1-x}{4} + 2x = 5$$
$$\frac{1-x+8x}{4} = 5 \qquad / \cdot 4$$
$$1 + 7x = 20 \qquad / - 1$$
$$7x = 19 \qquad / : 7$$
$$x = \frac{19}{7}$$

A $\frac{19}{7} < 3$, tehát nem esik bele az alaphalmazba.

Válasz: A feladatnak nincs megoldása.



Ha egy egyenletnek nincs megadva az alaphalmaza, akkor általában azt a legbővebb halmazt tekintjük alaphalmaznak, amelyen az egyenletben szereplő műveletek elvégezhetők, illetve a szövegnek értelme van.

4. példa

Oldjuk meg a $\frac{2x-5}{3}+\frac{x-1}{2}=6$ egyenletet a természetes számok halmazán!

Megoldás

$$\frac{2x-5}{3}+\frac{x-1}{2}=4$$

Hozzuk közös nevezőre a bal oldalon álló törteket!

A tört számlálójában álló kifejezést közös nevezőre hozáskor zárójelbe kell tenni!

$$\frac{2\cdot(2x-5)+3\cdot(x-1)}{6}=6 \qquad /\cdot 6$$

$$2\cdot(2x-5)+3\cdot(x-1)=36$$

$$4x-10+3x-3=36$$

$$7x-13=36 \qquad /+13$$

$$7x=49$$

$$\underline{\underline{x=7}}$$

A 7 természetes szám, tehát beleesik az alaphalmazba.

Ellenőrzés: Bal oldal:

$$\frac{2\cdot 7-5}{3}+\frac{7-1}{2}=\frac{14-5}{3}+\frac{6}{2}=\frac{9}{3}+3=3+3=6.$$

Megegyezik a jobb oldallal, ezért az egyenlet megoldása jó.

Válasz: $x=7$.

Feladatok

1. Oldjuk meg az egyenleteket a természetes számok halmazán!

a) $\frac{x+2}{3}=4$; b) $\frac{x+7}{2}=1$; c) $\frac{x-5}{4}=-2$;

d) $\frac{5x+1}{2}=8$; e) $\frac{3x-2}{4}=5$; f) $\frac{1-2x}{3}=-7$.

2. Oldjuk meg az egyenleteket a negatív racionális számok halmazán!

a) $\frac{x-1}{3}+4=2$; b) $\frac{2x+7}{4}-1=5$; c) $\frac{1-3x}{2}+5=8$;

d) $\frac{x-3}{4}+2=x$; e) $\frac{2x-1}{3}+x=-2$; f) $\frac{4-3x}{2}-2x=5$.

3. Oldjuk meg az egyenleteket az 1-nél nagyobb racionális számok halmazán!

a) $\frac{3x-4}{2}+\frac{x}{3}=1$;

b) $\frac{4x+2}{4}+\frac{x+3}{2}=5$;

c) $\frac{2x-5}{4}+\frac{x-3}{5}=2x$;

**d)* $\frac{x+7}{2}-\frac{2x-1}{7}=x-1$.

4. Az iskolai énekkarban a gyerekek 40%-a énekli a szoprán szólamot, egyharmada az altot, 14 gyerek pedig a mezzoszopránt. Hány tagú az iskolai énekkar?

5. Öcsinek és Huginak összesen 52 foga van. Ha Huginak éppen feleennyi foga lenne, Öcsinek pedig kétszer ennyi, akkor Huginak eggyel több foga lenne, mint Öcsinek. Hány foga van Huginak?

6. 2005-ben Belgium egy főre jutó nemzeti összterméke (GDP, ejtsd dzsídípí)) 5610 dollárral volt több, mint Magyarország GDP-jének háromszorosa. Észtország egy főre jutó GDP-je 46 dollárral volt kevesebb, mint Magyarország és Belgium együttes GDP-jének egyötöde. Észtország egy főre jutó GDP-je 2005-ben 9100 dollár volt. Mennyi volt Magyarország egy főre jutó GDP-je 2005-ben?

7. A városi korcsolyapálya pénztárosa szombat este megszámolta, hogy hány belépőt adott el aznap. Azt kapta, hogy a délelőtti és délutáni nyitvatartás alatt is éppen 70-nel több diákjegyet vásároltak, mint felnőttet, valamint délelőtt összesen 110-en, délután pedig 125-en vettek jegyet. Amikor a jégpálya igazgatója ezt meghallotta, azt állította, hogy valamelyik számolás hibás. Honnan tudhatta ezt?

8. A *Marci és a cukorkagyár* című film a nyitó hétvégéjén az USA-ban éppen a *Háry Péter 3* által hozott bevétel háromötödét produkálta. A két film azonban együtt is 2,3 millió dollárral kevesebbet hozott, mint a *Békaember 3*, ami 151,1 millió dollár bevétellel zárt. Mennyi volt a *Marci és a cukorkagyár,* illetve a *Háry Péter 3* bevétele a nyitó hétvégéjükön?



9. Laci megszámolta a széklábakat az osztályban. A teremben három- és négylábú székek voltak, és minden széken ült valaki. Az osztály létszáma 27 fő, és a teremben volt a tanár is.

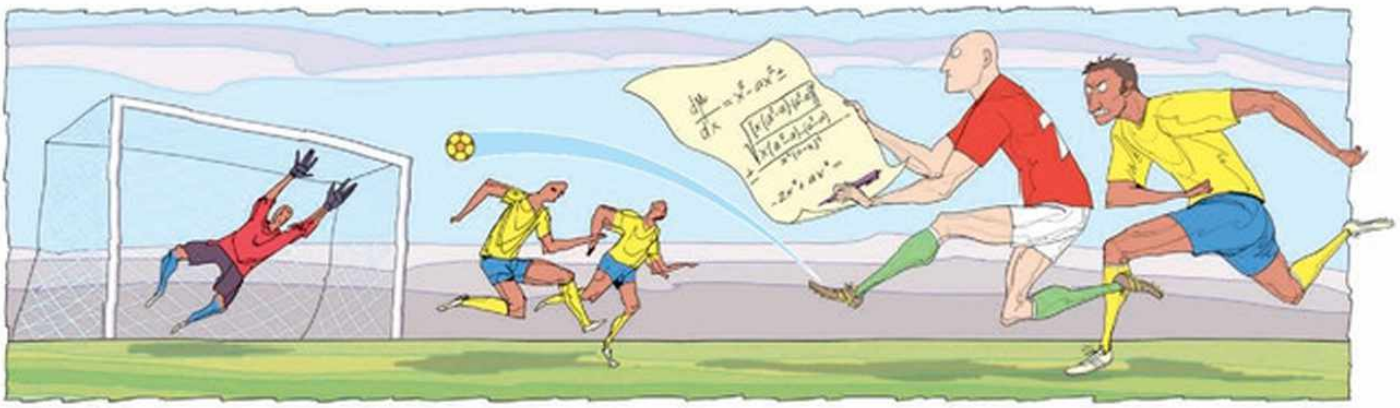
a) Laci összesen 116 széklábat számolt össze. Mutassuk meg, hogy tévedett!

b) Laci rájött, hogy tévedett, és újra összeszámolta a széklábakat. Ezúttal 75 széklábat számolt össze. Lehetséges-e, hogy most jól számolt?

Rejtvény

Zoli jó matekból. Egyszer egy barátja megkérte, hogy nézze meg, jól csinálta-e meg a házi feladatát. A feladat így szólt: *Oldjuk meg a $12+9(4x-5)+3x=44$ egyenletet az egész számok halmazán!* – A megoldásom -100 és 100 közé esik – mondta Zolinak a barátja.
Zoli – anélkül, hogy bármit is számolt volna vagy megnézte volna a megoldást – rávágta, hogy rosszul oldotta meg a feladatot. Hogyan jött rá?

6. Mikor érdemes egyenleteket használni?



Sok feladatot meg tudunk oldani következtetéssel, rajz segítségével és egyenlettel is. Vajon mikor érdemes egyenletet felírni? Van-e olyan eset, amikor nem tanácsos, vagy olyan, amikor nem is lehet?

1. példa

Gergő és Dávid egyszerre olvassák a *Hogyan rúgjunk gólt?* című könyvet. Hétfőn kezdték el olvasni, szerdán pedig az iskolában megbeszélték, ki hol tart. Kiderült, hogy Dávid 30 oldallal többet olvasott.

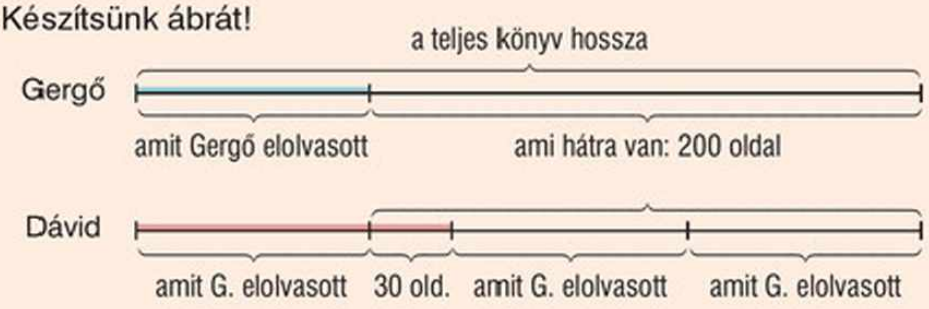
– Nekem még éppen kétszer annyi oldal van hátra, mint amennyit te már elolvastál – mondta Dávid.

– Nekem pedig még 200 oldal van hátra – mondta Gergő.

Hány oldalas a könyv?

1. megoldás

Készítsünk ábrát!



Az ábráról leolvasható, hogy ha a 200 oldalból levesszük a 30-at, éppen a Gergő által elolvasott rész kétszeresét kapjuk.

Tehát Gergő $\frac{200-30}{2} = \frac{170}{2} = 85$ oldalt olvasott el.

A könyv ennél 200 oldallal hosszabb, tehát 285 oldalas.

Ellenőrzés: Dávid $85 + 30 = 115$ oldalt olvasott, és $2 \cdot 85 = 170$ oldal van még neki hátra. Tehát a könyv valóban $115 + 170 = 285$ oldalas.

Válasz: A könyv 285 oldalas.

A szakaszok lerajzolása az egyenlet felírásában is segíthet.

2. megoldás

Jelöljük x-szel a Gergő által elolvasott oldalak számát, és készítsünk táblázatot!

	elolvasott	hátra van	a könyv oldalainak száma
Gergő	x	200	$x + 200$
Dávid	$x + 30$	$2x$	$x + 30 + 2x$

Emlékezető:
- összevonjuk az egynemű kifejezéseket;
- kivonjuk ugyanazt a számot az egyenlet két oldalából;
- kivonjuk az ismeretlen ugyanolyan számú többszörösét az egyenlet két oldalából;
- az egyenlet két oldalát ugyanazzal a számmal osztjuk.

Mivel ugyanazt a könyvet olvassák, a két esetben a könyv oldalainak a száma egyenlő.

$$x + 200 = x + 30 + 2x$$
$$x + 200 = 3x + 30 \qquad / - 30$$
$$x + 170 = 3x \qquad / - x$$
$$170 = 2x \qquad / : 2$$
$$85 = x$$

Gergő tehát 85 oldalt olvasott el. Mivel a könyv ennél 200 oldallal hosszabb, ezért összesen 285 oldalas.

Ellenőrzés: Lásd az első megoldásnál!

Válasz: A könyv 285 oldalas.

A szöveges feladatokat egyenlettel, következtetéssel, rajzzal, esetleg próbálgatással is meg lehet oldani. Azt, hogy melyik módszert alkalmazzuk, mi dönthetjük el. Sokszor érdemes a megoldási módokat kombinálni. Amint láttuk, egy-egy bonyolultabb szövegű feladat megértésében segítségünkre lehetnek a rajzok. Ezeket felhasználva vagy közvetlenül oldjuk meg a feladatot, vagy egyenletet írhatunk fel.

A következő példákban olyan eseteket mutatunk, amikor egyik vagy másik módszert sokkal könnyebb használni.

2. példa

Egy tóban élt néhány béka. A békák száma egy év alatt kettő híján a háromszorosára nőtt, egy újabb év elteltével pedig (az előző évihez képest) megötszöröződött. A harmadik évben annyival csökkent a számuk, amennyi béka eredetileg a tóban volt. Ekkor 12-szer annyi béka volt a tóban, mint eredetileg, és még 6. Hány béka volt eredetileg a tóban?

Megoldás

Jelölje az eredetileg a tóban élő békák számát x!
Egy év elteltével: $3x - 2$ béka élt a tóban.
Újabb egy év múlva: ennek 5-szöröse, azaz $5(3x - 2)$ béka élt a tóban.

A harmadik év után: $5(3x - 2) - x$ béka élt a tóban.
Ez egyenlő $12x + 6$-tal.

Tehát a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$5(3x - 2) - x = 12x + 6$$

Először végezzük el a kijelölt műveleteket!

$$15x - 10 - x = 12x + 6$$

Vonjuk össze az egynemű kifejezéseket!

$$\begin{aligned} 14x - 10 &= 12x + 6 \quad / - 12x \\ 2x - 10 &= 6 \quad / + 10 \\ 2x &= 16 \quad / : 2 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

A tóban eredetileg 8 béka volt.

Ellenőrzés:
Egy év után $3 \cdot 8 - 2 = 22$ béka volt a tóban.
Két év után $5 \cdot 22 = 110$ béka élt ott.
Három év után ez a szám 8-cal csökkent, tehát maradt 102 béka.
$12 \cdot 8 + 6 = 96 + 6 = 102$, vagyis a megoldás jó.

Válasz: A tóban tehát eredetileg 8 béka volt.



Ezt a feladatot következtetéssel vagy rajzzal nagyon körülményes lett volna megoldani, annyira sokféle összefüggés volt az adatok között.

3. példa

A hetedikesek Valentin-napon rózsát árultak az iskolában. A rózsák 20%-át és még 2 rózsát az ötödikesek, a maradék harmadánál 2-vel kevesebbet pedig a hatodikosok vettek meg. A megmaradt rózsák kétharmadát a nyolcadikosok vették meg, és még így is maradt 50 szál rózsa. Hány rózsájuk volt összesen a hetedikeseknek?

1. megoldás

Következtessünk visszafelé! Készítsünk ábrát!



A nyolcadikosok a rózsák $\frac{2}{3}$-át vették meg, azaz az $\frac{1}{3}$-a maradt meg.

Tehát 50 rózsa $\frac{1}{3}$ rész, ami azt jelenti, hogy 150 rózsa volt előtte.

A hatodikosok a rózsák harmadánál 2-vel kevesebbet vettek meg, így maradt 150 rózsa. Ha azt a 2-t is megvették volna, akkor 148 rózsa maradt volna, ami az összes $\frac{2}{3}$-a, hiszen az $\frac{1}{3}$ részét vették volna meg. Ekkor 148 fele, azaz 74 rózsa az $\frac{1}{3}$ rész, tehát összesen $3 \cdot 74 = 222$ rózsa volt előtte.

Az ötödikesek a rózsák 20%-át és még 2 rózsát vettek.

Ha 2-vel kevesebbet vettek volna, éppen a 20%-át veszik meg, ekkor 224 rózsa maradt volna.

Ha 20%-át, azaz $\frac{1}{5}$-ét vették volna meg, akkor a 224 rózsa $\frac{4}{5}$ rész lenne. Ekkor ennek negyede, azaz 56 rózsa lenne $\frac{1}{5}$ rész. Összesen pedig $5 \cdot 56 = 280$ rózsa volt.

Ellenőrzés: Az ötödikesek megvették a 280 db 20%-át és még 2-t, azaz $0{,}2 \cdot 280 + 2 = 56 + 2 = 58$ rózsát. Maradt $280 - 58 = 222$ rózsa.

A hatodikosok a 222 rózsa egyharmadánál 2-vel kevesebbet vettek, azaz $\frac{222}{3} - 2 = 74 - 2 = 72$-t, és így maradt $222 - 72 = 150$ rózsa.

A nyolcadikosok a 150 rózsa kétharmadát, azaz $\frac{2}{3} \cdot 150 = 100$ rózsát vettek meg, azaz maradt $150 - 100 = 50$ rózsa. Tehát a megoldás jó.

Válasz: A hetedikeseknek összesen 280 db rózsájuk volt eredetileg.



Ne felejtsük el a zárójelet, hiszen az egészet vonjuk ki az x-ből!

2. megoldás

Írjunk fel egyenletet! Jelöljük x-szel a hetedikesek rózsáinak számát.

Az ötödikesek megvették a rózsák 20%-át, azaz egyötödét és még 2 rózsát, azaz $\frac{x}{5} + 2$ rózsát, így maradt $x - \left(\frac{x}{5} + 2\right)$ rózsa.

A hatodikosok a maradék egyharmadánál 2-vel kevesebbet vettek,

azaz $\dfrac{x - \left(\frac{x}{5} + 2\right)}{3} - 2$ db rózsát,

maradt $x - \left(\frac{x}{5} + 2\right) - \left(\dfrac{x - \left(\frac{x}{5} + 2\right)}{3} - 2\right)$ rózsa.

A nyolcadikos megvették a maradék kétharmadát, azaz megmaradt az egyharmada, ez pedig 50 rózsa volt.

Tehát $\dfrac{x-\left(\dfrac{x}{5}+2\right)-\left(\dfrac{x-\left(\dfrac{x}{5}+2\right)}{3}-2\right)}{3}=50.$

Az egyenlet nem tűnik túlságosan barátságosnak (azért persze meg lehet oldani). Próbálkozzunk tehát más megoldási módszerrel!

Megállapíthatjuk, hogy ha egy feladat túl bonyolult egyenletre vezet, akkor általában érdemes más módszerrel próbálkozni. Előfordulhat olyan feladat is, hogy nincs elég összefüggés az adatok között ahhoz, hogy egyenletet írjunk fel.

4. példa

Egy családban három különböző életkorú gyerek van. Életkoruk összege 12 év. Minden gyerek életkora különböző prímszám. Melyik gyerek hány éves?

Megoldás

Az adatok között egyetlen olyan összefüggés van, amely alapján egyenletet írhatunk fel. Ez pedig az, hogy a gyerekek életkorának összege 12 év. Ezért a feladatot egyenlettel nem tudjuk megoldani.

Az, hogy az életkoruk prímszám, egymástól függetlenül vonatkozik az adatokra, így más megoldási módszert kell keresnünk.

A 12-nél kisebb prímszámok a 2; 3; 5; 7; 11.

11 éves egyikük sem lehet, mert akkor az életkoruk összege legalább $2 + 3 + 11 = 16$ lenne. A maradék eseteket próbálgassuk végig!

$2 + 3 + 5 = 10$; $\quad 2 + 5 + 7 = 14$;
$2 + 3 + 7 = 12$; $\quad 3 + 5 + 7 = 15$.

Látható, hogy az egyetlen helyes megoldás az, hogy a három gyerek életkora 2; 3 és 7 év.



Három páratlan szám összege nem lehet 12, így a 2-nek szerepelnie kell a tagok között.

Ha egy feladatot próbálgatással oldunk meg, a következőt tesszük:

1. Minden esetet kipróbálunk (ha nincs túlságosan sok eset).
2. **Megindokoljuk, miért nincs több megoldás** (ha nagyon sok vagy akár végtelen sok esetet kellene kipróbálnunk).

A szöveges feladatok megoldására tehát több módszer is alkalmazható: dolgozhatunk következtetéssel és egyenlettel, illetve vannak olyan feladatok is, amelyek esetén a próbálgatás a leghasznosabb.

Feladatok

1. Pistinek ugyanannyi lánytestvére van, mint ahány fiútestvére. Nővérének, Gabinak, feleannyi lánytestvére van, mint fiútestvére. Hány fiú és hány lány van a családban?

2. Egy juhász így gondolkodott:
„Ha háromszor annyi juhom lenne, mint amennyi van, akkor éppen annyival lenne több juhom 700-nál, mint ahánnyal most kevesebb van."
Hány juha van a juhásznak?



3. Egy apa háromszor annyi idős, mint a fia. 6 évvel ezelőtt éppen négyszer annyi idős volt, mint a fiú. Hány éves most apa és fia?

4. Egy este a kórházi ügyeletre érkező betegek kétheted részét kivizsgálásra bent tartották, 70%-át kezelés után hazaengedték, 8-an pedig képzelt betegnek bizonyultak, őket egyszerűen hazaküldték. Hányan jelentek meg ezen az estén az ügyeleten?

5. Az iskolaújság első számával a szerkesztők sorban végigjárták az osztályokat. A kiadott példányok 20%-át a nyolcadikosok vették meg. A megmaradt példányok 25%-át a hetedikesek, a maradék egyik felét a hatodikosok, a másik felének kétharmadát pedig az ötödikesek vásárolták meg. A tanároknak így már csak 8 újság maradt.
Hány példányban jelent meg az iskolaújság első száma?

6. Egy árus egy kosár almát vitt a piacra. Az első vevő megvette az almák $\frac{1}{2}$-ét, a második a maradék $\frac{1}{3}$-át, a harmadik a maradék $\frac{1}{5}$-ét, a negyedik elvitte a megmaradt 8 almát.
Hány alma volt a kosárban eredetileg?

7. Anya palacsintát sütött. Először Peti jött haza, és megevett 6 palacsintát. Utána Kati érkezett, aki megette a maradék egyharmadát. Apa 3-mal több palacsintát evett, mint Kati. Így Anyának végül 2 palacsinta maradt. Hány palacsintát sütött Anya összesen?

8. Egy könyvből kiesett valahány szomszédos lap. Az első kiesett oldal oldalszáma 163 volt. Az utolsó kiesett oldal oldalszámában ugyanezek a számjegyek szerepeltek, csak éppen más sorrendben. Hány lap esett ki a könyvből?

Rejtvény

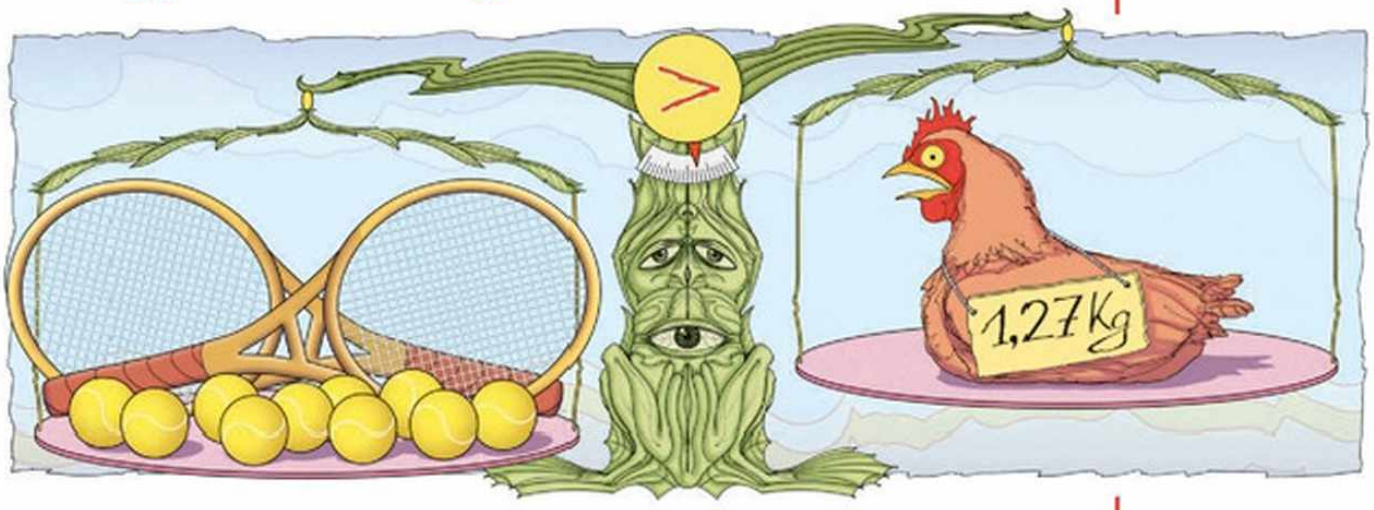
Két matematikus, István és Ágnes évek óta nem látta egymást. Amikor találkoznak, István boldogan újságolja, hogy már három gyereke van. Ezután a következő párbeszéd zajlik közöttük:

Ágnes:
– És hány évesek a gyerekeid?
– Ebből még nem tudom, hány évesek.
– Még mindig nem tudom.
– Most már tudom, melyik hány éves!

István:
– Az életkoruk szorzata 36.
– Az életkoruk összege megegyezik a házszámoddal.
– A legidősebbnek van egy anyajegy a bal hüvelykujján.

Hány évesek a gyerekek?

7. Egyenlőtlenségek



1. példa

Áginak két egyforma teniszütője van. Annyit tudunk a teniszütők tömegéről, hogy a két teniszütő és tíz 57 g-os teniszlabda együtt nehezebb 1,27 kg-nál. Mekkora Ági ütőinek tömege?

1. megoldás

A tíz teniszlabda együtt 570 g-ot nyom.

1,27 kg = 1270 g.

Tehát a két ütő nehezebb 1270 g − 570 g = 700 g-nál.

Egy ütő tömege több, mint $\frac{700}{2} = 350$ g.

2. megoldás

Tegyük egy mérleg egyik serpenyőjébe a két teniszütőt és a labdákat, a másikba pedig az 1,27 kg = 1270 g tömeget! Írjuk le az algebra nyelvén, hogy a mérleg lebillen! Jelölje egy teniszütő tömegét x!

$$2x + 570 > 1270$$

Változtassuk egyformán a mérleg két serpenyőjében lévő mennyiségeket!

$2x + 570 > 1270 \quad / - 570$

Ha a két oldalról leveszünk 570 g-ot, a mérleg állása nem változik.

$2x > 700 \quad / : 2$

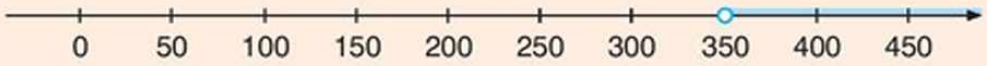
Ha a mérleg két oldalán lévő tömegek felét vesszük, a mérleg állása nem változik.

$\underline{\underline{x > 350}}$

Azt kaptuk, hogy x, azaz Ági egy teniszütőjének tömege nagyobb, mint 350 g.

Itt is az egyenletek megoldása során megismert mérlegelvet alkalmazzuk.

Ábrázoljuk számegyenesen az egyenlőtlenség megoldását!



Az üres körrel a 350-nél azt jelezzük, hogy 350 g-os nem lehet a teniszütő. Ellenkező esetben teli kört rajzolnánk oda.

Ha az összefüggések felírásában $>$, $<$, $\leq$ vagy $\geq$ jel szerepel, **egyenlőtlenséget** kapunk.

Az egyenlőtlenség megoldása általában nem egyetlen szám, hanem az összes olyan szám, amelyre valamilyen feltétel teljesül. A megoldásokat aláhúzással jelöljük és számegyesen ábrázoljuk.

Ha kipróbálunk egy-két számot, azzal megnyugtathatjuk magunkat, de ez nem igazi ellenőrzés!

Mivel nagyon sok (sőt, gyakran végtelen sok) megoldás van, ezeket nem tudjuk ellenőrizni.

2. példa

Oldjuk meg a $-4x \geq -12$ egyenlőtlenséget!

1. megoldás

Alakítsuk át úgy az egyenlőtlenséget, hogy az ismeretlen együtthatója pozitív legyen!

$$\begin{aligned} -4x &\geq -12 && / + 4x \\ 0 &\geq 4x - 12 && / + 12 \\ 12 &\geq 4x && / : 4 \\ \underline{\underline{3 &\geq x}} \end{aligned}$$

Ábrázoljuk számegyenesen az egyenlőtlenség megoldását!



2. megoldás

Az egyenlőtlenséget úgy is megoldhatjuk, hogy mindkét oldalát (-4)-gyel osztjuk.

$$-4x \geq -12 \qquad / : (-4)$$

Az előző megoldás alapján azt kell kapnunk, hogy

$$\underline{\underline{x \leq 3}}$$

$-1 < -\frac{1}{2}$ $/ \cdot (-2)$
$2 > 1$

Figyeljük meg, hogy ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát negatív számmal osztjuk (vagy szorozzuk), az egyenlőtlenség iránya megfordul!

$$\begin{aligned} -4 &< -2 \qquad / : (-1) \\ 4 &> 2 \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségeket megoldhatjuk mérlegelvvel:

Az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadhatjuk, vagy mindkét oldalából kivonhatjuk ugyanazt a számot, ill. az ismeretlen ugyanannyiszorosát.

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozhatjuk vagy eloszthatjuk ugyanazzal a 0-tól különböző számmal.

Vigyázzunk!
A relációjel negatív számmal való osztásnál és szorzásnál megfordul!

3. példa

Az osztály díszítéséhez néhány gyerek hozott posztereket, mégpedig mindenki pontosan hármat. Az osztályfőnök is hozott 5 posztert. Összesen 23-nál kevesebb gyűlt össze. Hány gyerek vihetett posztert?

Megoldás

Jelölje x azoknak a gyerekeknek a számát, akik posztereket vittek be (x csak pozitív egész szám lehet)! Mivel fejenként 3 posztert vittek be, ez összesen $3x$ poszter. Az osztályfőnök is hozott 5-öt, tehát $3x + 5$ poszter gyűlt össze. Erről tudjuk, hogy kevesebb, mint 23.

$$\begin{aligned} 3x + 5 &< 23 \quad / - 5 \\ 3x &< 18 \quad / : 3 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

A gyerekek száma pozitív egész szám, és kevesebb, mint 6. Így az egyenlőtlenség megoldásai: 5; 4; 3; 2; 1. Számegyenesen ábrázolva:

Megoldás:
- 6-nál kisebb számok;
- pozitív egész számok.



Az egyenlőtlenséghez is hozzátartozik az **alaphalmaza.**
Az egyenlőtlenségnek azok a számok a megoldásai, amelyek
- megfelelnek az egyenlőtlenségnek;
- elemei az alaphalmaznak.

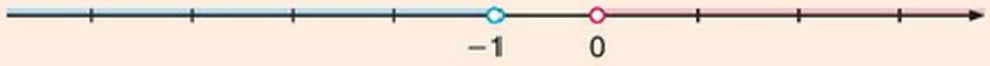
4. példa

Oldjuk meg a $3 - 2x < 1 - 4x$ egyenlőtlenséget a pozitív számok halmazán!

Megoldás

$$\begin{aligned} 3 - 2x &< 1 - 4x \quad / + 4x \\ 3 + 2x &< 1 \quad / - 3 \\ 2x &< -2 \quad / : 2 \\ x &< -1 \end{aligned}$$

Az $x < -1$ egyenlőtlenségnek megfelelő számokat és az alaphalmazt ábrázoljuk számegyenesen!



Láthatjuk, hogy a két félegyenesnek nincs közös pontja, vagyis az egyenlőtlenségnek nincs az alaphalmazba eső megoldása.

Feladatok

1. Írjuk fel az egyenlőtlenséget!
   a) x nem kisebb, mint 5; *b)* x nagyobb vagy egyenlő, mint 1;
   c) x legfeljebb -3; *d)* x maximum 8; *e)* x több, mint -6.

2. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán! Ne felejtsük el a megoldásokat számegyenesen ábrázolni!
   a) $x + 3 > 1$; *b)* $2 + 8x < 6$; *c)* $5 - 3x \leq 2$;
   d) $4x - 2 \leq 2x$; *e)* $6 - 3x \geq 11 + 2x$; *f)* $3x - 5 \geq 3 + 5x$;
   g) $x - 2 < 12 - 3x$; *h)* $1 - 6x > 1 + 3x$; *i)* $3x + 2x - 7 \leq 5 - 3x + 3$.

3. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a természetes számok halmazán! Jelöljük a számok helyét a számegyenesen!
   a) $2x \leq 7$; *b)* $3 - x \geq 2$; *c)* $5x - 13 < 12$;
   d) $3 + 2x > x - 7$; *e)* $6x + 15 \leq x + 25$; *f)* $8 - 14x + 4 > x - 2 - 18x$;
   g) $x + 5 \geq x + 9$; *h)* $3x + 8 < 4x + 8$; *i)* $7x + 5 - 3x + 11 < x + 26$.

4. Egy kézilabda-mérkőzésen a vesztes csapat olyan kevés gólt dobott, hogy ha négyszer annyit dobtak volna, még akkor is kikaptak volna. A győztes csapat 28 gólt dobott. Hány gólt dobhatott a vesztes csapat?

5. Robi és Veronika régi képeslapokat gyűjt. Robi rendet rakott a szobájában. Miután nem találta meg mind a 26 képeslapját, rájött, hogy elveszett néhány, pont annyi, amennyi Veronikának van. Neki azonban még így is legalább annyi képeslapja maradt, mint Veronikának. Hány képeslapja lehet Veronikának?

6. A baromfiudvarban 28 tyúk kapirgált. Megjelent néhány róka, így a lábak száma a baromfiudvarban rövid időre meghaladta a 70-et. Hány róka járhatott a baromfiudvarban?

7. 2007. április 24-én a legmagasabb hőmérséklet 23 °C volt. Ez 6 foknál kevesebbel maradt el az átlaghőmérséklet 1,5-szeresétől. Mit állíthatunk a napi átlaghőmérsékletről?

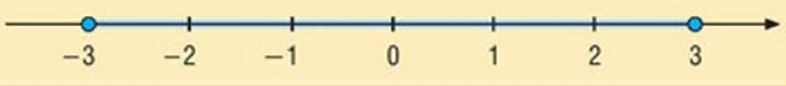
8. Három dinnyét vettünk. Amikor együtt a mérlegre tettük őket, az nem mutatott többet, mint 34 kg. A legkisebb dinnye 6 kg-mal volt könnyebb, mint az egyik, és csak feleolyan tömegű, mint a másik. Mekkora lehetett a legkisebb dinnye tömege, ha tudjuk, hogy mindegyik dinnye legalább 4 kg-os volt?



9. Gondoltam egy számot. A nyolcszorosa nagyobb, mint a gondolt számnál 10-zel nagyobb szám 3-szorosa. Ki lehet-e ebből találni, melyik számra gondoltam? Mit tudunk megállapítani a gondolt számról?

Rejtvény

Adjunk meg olyan egyenlőtlenséget, amelynek megoldását az alábbi számegyenesen ábrázoltuk!



8. Vegyes feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán!

   a) $4x - 12 = 0$; *b)* $2x + 8 = 11$; *c)* $7 - 3x = 2x - 3$;

   d) $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 2$; *e)* $\frac{x-2}{3} + 4 = 7$; *f)* $\frac{2-3x}{2} + x = 0$.

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

   a) $5(3x - 2) = 3(2x - 3)$; *b)* $2(x - 4) + 3(3 - x) = 5x - 11$;

   c) $3(3x + 2) - 2(4x + 3) = 9$; *d)* $\frac{2x+2}{3} + \frac{7-x}{2} = 5$.

3. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a természetes számok halmazán! Jelöljük a számegyenesen a számok helyét!

   a) $x - 3 \leq 5$; *b)* $2x + 5 > 4x + 3$; *c)* $3(x - 2) - x > 2 + x$.

4. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán! Jelöljük a számegyenesen a számok helyét!

   a) $2x + 5 < 11$; *b)* $3 - x \geq 8$; *c)* $4(x - 2) + 6(x + 3) > 4$.

5. Gabi nagyon szeret kosárlabdázni. A legutóbbi mérkőzésén kétszer annyi pontot dobott, mint az előzőn. A két mérkőzésen összesen 33 pontot dobott. Hány pontot dobott a két mérkőzésen külön-külön?

6. Gondoltam egy számot. A háromszorosához 12-t adva 2-vel kisebb számot kaptam, mintha a négyszereséből levontam volna 3-at. Melyik számra gondoltam?

7. Dávidnak és Petinek összesen 91 üveggolyója van. Dávidnak éppen 6-szor annyi üveggolyója van, mint Petinek. Melyiküknek hány üveggolyója van? (➡)



8. Egy apa 3 év múlva kétszer olyan idős lesz, mint a fia. 7 évvel ezelőtt az apa éppen háromszor olyan idős volt, mint a fia. Melyikük hány éves most?

9. A parkban sokan sétáltatják a kutyáikat. Most éppen 98 láb sétál a parkban, és ezekhez 34 fej tartozik. Ha a parkban csak kutyák és emberek vannak, melyikből hány van?

10. Csilla egy 6200 Ft-os nadrágot vett. Csak 50 és 100 Ft-os érmék voltak nála, így kénytelen volt azokkal fizetni. Összesen 78 darab érmét adott a nadrágért. Hány 50 forintos érmét használt fel?

11. A 7.a és 7.b osztály együtt ment kirándulni. Az erdőben minden harmadik 7.a-s eltévedt, viszont a 7.b mind a 32 tanulója időben odaért a megbeszélt helyre. Így összesen 50 gyerek várta az eltévedt 7.a-sokat. Hány fős a 7.a osztály?

12. Az osztálykiránduláson az első napi szállás harmadannyiba került, mint a második napi, a harmadik napi pedig feleannyiba, mint az első napi. A három éjszakára a szállásért összesen 13 500 Ft-ot fizettünk. Mennyibe került a három éjszaka külön-külön?

13. Az iskolai büfében naponta átlagosan megvásárolt szendvicsek $\frac{1}{5}$-e sonkás, 30%-a tonhalas, a többi sajtos. Naponta átlagosan 175 sajtos szendvicset adnak el.



a) Hány szendvicset adnak el összesen?

b) Ebből mennyi a sonkás és mennyi a tonhalas?

Egy sonkás és egy sajtos szendvics együtt 300 Ft. Egy sajtos és egy tonhalas 250 Ft, egy sonkás és egy tonhalas együtt 310 Ft.

c) Mennyit fizet az, aki venni akar egy sajtos, egy sonkás és egy tonhalas szendvicset is?

d) Mennyibe kerül külön-külön egy-egy szendvics?

e) Mennyi a büfé napi átlagos bevétele a szendvicsekből?

14. Most kétszer annyi idős vagyok, mint te voltál akkor, amikor én annyi idős voltam, mint te vagy most. Amikor te annyi idős leszel, mint én vagyok most, akkor ketten együtt 54 évesek leszünk. Hány évesek vagyunk most külön-külön?

15. Egy iskola focirajongó tanulóinak 40%-a a Fradinak szurkol, a többiek $\frac{1}{3}$-a az Újpestnek. A többi klubnak összesen 144 tanuló szurkol. Hány szurkolója van az iskolában a Fradinak és az Újpestnek? Összesen hányan kedvelik a futballt?

16. A Messzevisz Bt. kisbuszában 4-gyel több utas fér el, mint a Távoltravel Kft. egy kisbuszában. A Távoltravel Kft. két kisbuszában és a Messzevisz Bt. buszában összesen több mint 50 utas fér el. Ha a Messzevisz Bt. kisbuszában a helyek kétharmada foglalt, akkor ebbe a buszba és a Távoltravel Kft. egy üres buszába már csak kevesebb mint 25 utas fér. Hány utas fér a Messzevisz Bt. és a Távoltravel Kft. egy-egy üres buszába?

17. Lóri, Gyurika és Csöpike madárcsemegét csipeget. Lóri és Gyurika összesen 600 db, Gyurika és Csöpike összesen 695 db, Csöpike és Lóri pedig együtt 455 db magot evett meg.

a) Melyik papagáj ette a legtöbb madárcsemegét?

b) Melyikük ette a legkevesebbet?

c) Hány szem magot ettek összesen?

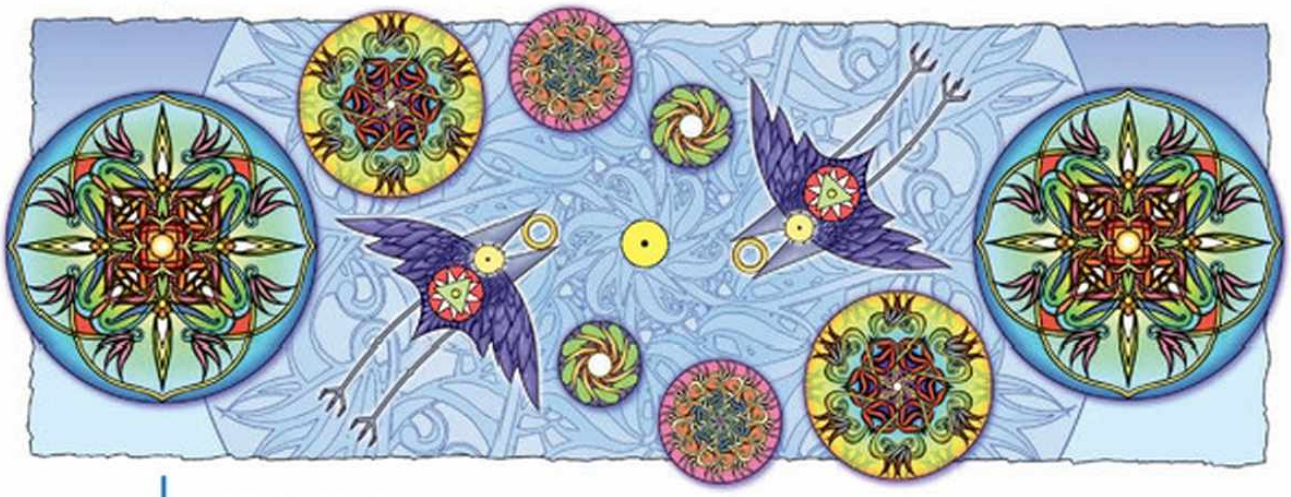
d) Mennyit ettek külön-külön?



4 Síkgeometria I.



1. Középpontos tükrözés, középpontos szimmetria

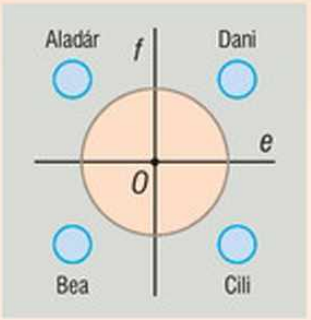


Emlékeztető

Az előző tanévben megismerkedtünk a **tengelyes tükrözéssel,** a **tengelyes szimmetriával,** néhány tengelyesen szimmetrikus alakzattal és azok tulajdonságaival.

1. példa

Aladár, Bea, Cili és Dani egy kerek asztalnál társasjátékot játszik. A gyerekek kezdeti elhelyezkedése az alábbi felülnézeti ábrán látható.



Az ábrán látható az is, hogy az asztalt két, a középponton átmenő, egymásra merőleges egyenes (*e* és *f*) négy egybevágó részre osztja. A játék során a gyerekek többször helyet cserélnek.

Kik cserélnek helyet, ha a helycsere

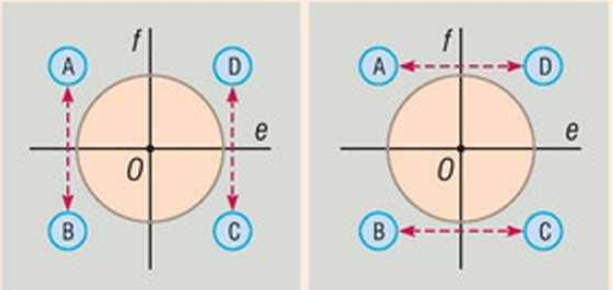
a) az *e* egyenesre vonatkozó tükrözésnek felel meg;

b) az *f* egyenesre vonatkozó tükrözésnek felel meg?

Megoldás

a) Az *e* egyenesre vonatkozó tükrözésnél Aladár Beával, Dani pedig Cilivel cserél helyet.

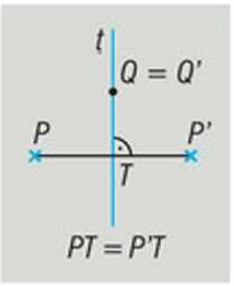
b) Az *f* egyenesre vonatkozó tükrözésnél Aladár Danival, Bea pedig Cilivel cserél helyet.



A sík egy adott t egyenesére (tengelyre) vonatkozó tükrözésnél egy pont képét a következőképpen szerkesztjük meg:

- Ha a pont a t tengelyen van, akkor a képe önmaga ($Q = Q'$).
- Ha a pont nincs a tengelyen (az ábrán a P pont), akkor a pontból merőlegest állítunk a tengelyre (T pont), és a merőleges meghosszabbítására T-ből felmérjük a PT távolságot (P' pont).

  Ekkor a t tengely a PP' szakasz felezőmerőlegese.



A tengelyes tükrözés tulajdonságai:

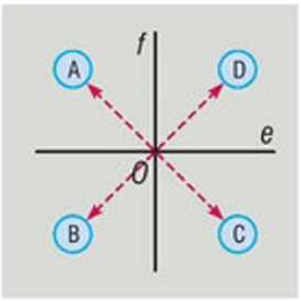
1. A tengely minden pontjának tükörképe önmaga.
2. A tengelyre merőleges egyenes tükörképe önmaga.
3. Egyenes tengelyes tükörképe egyenes.
4. Szakasz tengelyes tükörképe az eredetivel egyenlő hosszú szakasz.
5. Szög tengelyes tükörképe az eredetivel egyenlő nagyságú szög.
6. Bármely alakzat és tengelyes tükörképének körüljárási iránya ellentétes.

A sík egy alakzata tengelyesen szimmetrikus, ha van olyan t egyenes, amelyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat képe önmaga. A t egyenes az alakzat szimmetriatengelye.

A középpontos tükrözés

Képzeljük el, hogy az 1. példában Aladár Cilivel, Bea pedig Danival cserél helyet!

Ekkor a helycserét a legrövidebb úton úgy tudnák megoldani, ha az O ponton keresztül mennének át az átellenes helyre.



Tekintsük a francia kártya káró király lapját, és jelöljük be a középpontját, az O-t! Erre nézve a kártyalap bármely pontjához találunk egy neki megfelelő, vele átellenes pontot.

Pl. az $A - A'$, $B - B'$, $C - C'$ egymásnak megfelelő pontok.



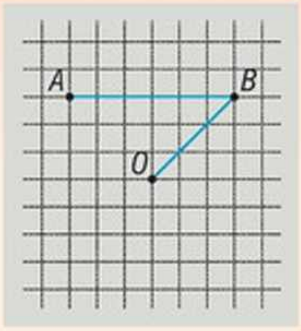
Az A' pontot az A pont O-ra vonatkozó középpontos tükörképének nevezzük, ha az A, O, A' pontok egy egyenesen vannak (ebben a sorrendben), és az AO és az OA' távolságok egyenlők.

Azt mondjuk, hogy ez a kártyalap **középpontosan szimmetrikus,** és a **szimmetria-középpontja** az O pont. Az AA', BB', CC' szakaszok közös felezőpontja az O pont.

♣ treff ♦ káró
♠ pikk ♥ kőr

2. példa

Tükrözzük az AB és BO szakaszokból álló alakzatot az O pontra!

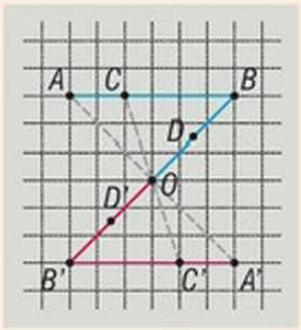


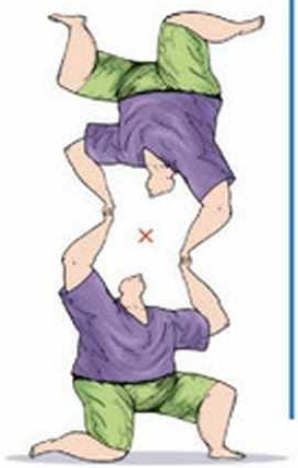
Megoldás

Válasszuk ki az alakzat néhány pontját, például az A-t, a B-t, a C-t és a D-t!

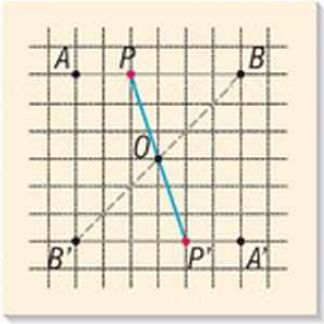
A pontok tükörképének megkeresésekor felhasználjuk, hogy az A pont, az O középpont és az A' pont egy egyenesre esik, és $AO = OA'$.

A középpontos tükrözéssel kapott A', B', C', D' pontok összekötésével megkapjuk az alakzat képét.

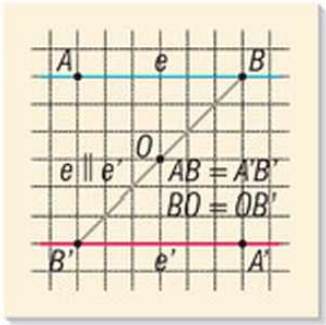




A 2. példa alapján megfogalmazhatjuk a középpontos tükrözés **tulajdonságait:**

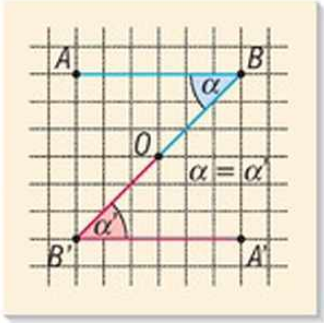


1. Az O pont képe önmaga.
2. A sík bármely O ponttól különböző P pontjának képe az a P' pont, amelyre igaz, hogy a PP' szakasznak az O pont felezőpontja.
3. Ha az O pontra vonatkozó tükrözésnél a P pont képe P', akkor a P' pont képe P.



4. Ha egy e egyenes illeszkedik az O pontra, akkor a képe önmaga, ha e nem illeszkedik az O pontra, akkor a képe olyan e' egyenes, amely párhuzamos az e-vel ($e \parallel e'$).
5. Bármely szakasz és képe egyenlő hosszúságú.

$$AB = A'B' \quad \text{és} \quad OB = OB'.$$



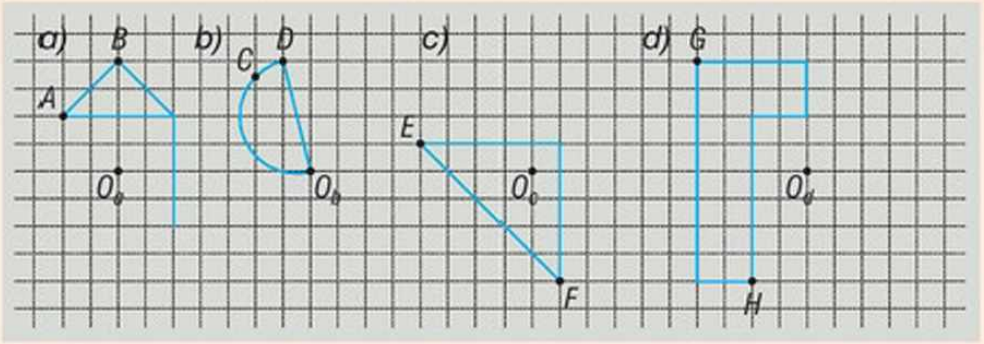
6. Bármely szög és a képe egyenlő nagyságú.

$$\alpha = \alpha'.$$

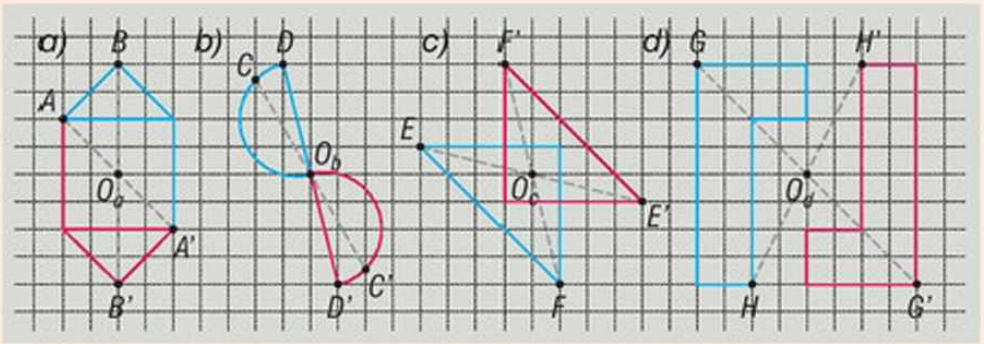


3. példa

Tükrözzük az alábbi ábrán látható alakzatokat az adott *O* pontra!



Megoldás



Középpontosan szimmetrikus alakzatok

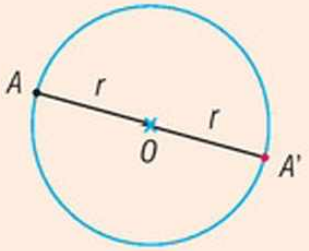
4. példa

Vegyünk fel egy *O* középpontú kört, és jelöljünk ki a körvonalon egy *A* pontot! Tükrözzük az *A* pontot az *O* középpontra! Hol lesz az *A'* képpont? Tapasztalatunk érvényes-e a körvonal többi pontjára?

Megoldás

A középpontos tükrözés miatt az *A*, *O* és *A'* pontok egy egyenesen vannak, és $AO = OA' = r$ a kör sugara. Így az *A* pont képe illeszkedik a körvonalra, *AA'* a kör egyik átmérője.

Az *A* pontot a körvonalon bárhol kijelölhettük volna, ezért a körvonal bármely pontjának képe a körvonalon van.

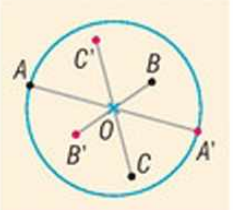


A kör a középpontjára tükrözve önmagába megy át. Ezért a kör **középpontosan szimmetrikus** alakzat.

A sík egy alakzatát középpontosan szimmetrikusnak nevezzük, ha van olyan *O* pont, amelyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat képe önmaga. Az *O* pont az alakzat szimmetria-középpontja.

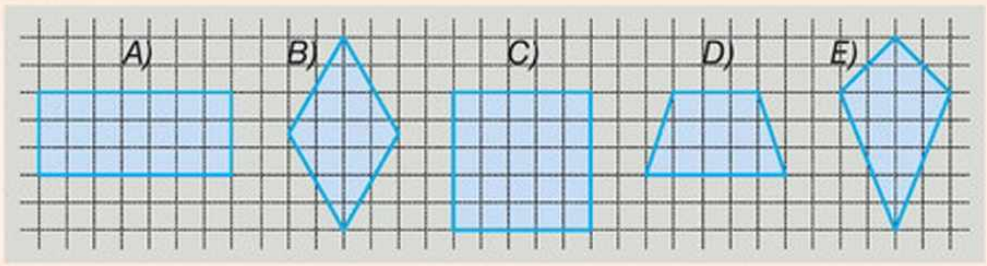


A körlap is középpontosan szimmetrikus alakzat.



5. példa

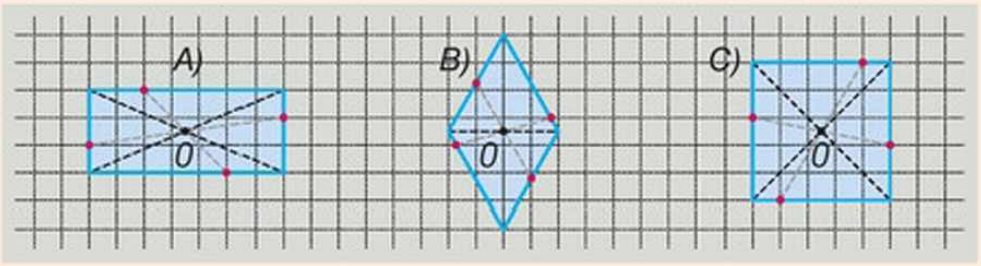
Melyek a középpontosan szimmetrikusak az ábrán látható négyszögek közül?



Megoldás

Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor szemközti csúcsai egymás középpontos tükörképei. Ezért a szimmetria-középpont csak az átlók metszéspontja lehet. Ha az A pont középpontos tükörképe a C pont, akkor a középpont az AC szakasz felezőpontja.

Az *A)*, *B)*, *C)* négyszögek középpontosan szimmetrikusak, mert átlóik felezik egymást. Ez nem teljesül a *D)* és az *E)* esetben.





A **téglalap,** a **rombusz** és a **négyzet** középpontosan szimmetrikus négyszögek.

Feladatok

1. Mely számjegyek és betűk
   a) tengelyesen szimmetrikusak;
   b) középpontosan szimmetrikusak;
   c) tengelyesen is és középpontosan is szimmetrikusak az alábbiak közül?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

A B C D E F G H I J K L M

N O P Q R S T U V W X Y Z

2. Mely kártyák

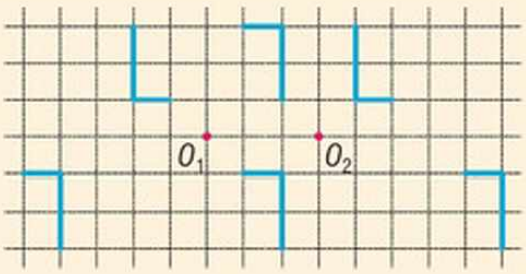
a) tengelyesen szimmetrikusak;
b) középpontosan szimmetrikusak;
c) tengelyesen is és középpontosan is szimmetrikusak az alábbiak közül?



3. Az alábbi zászlók közül melyeknek van egy, és melyeknek két szimmetriatengelyük? Melyek középpontosan szimmetrikusak? (Nézzünk utána, mely államok zászlói ezek!)



4. Az ábrán látható L betűk közül melyek egymás középpontos tükörképei az O_1, O_2 pontok valamelyikére nézve? (➡)

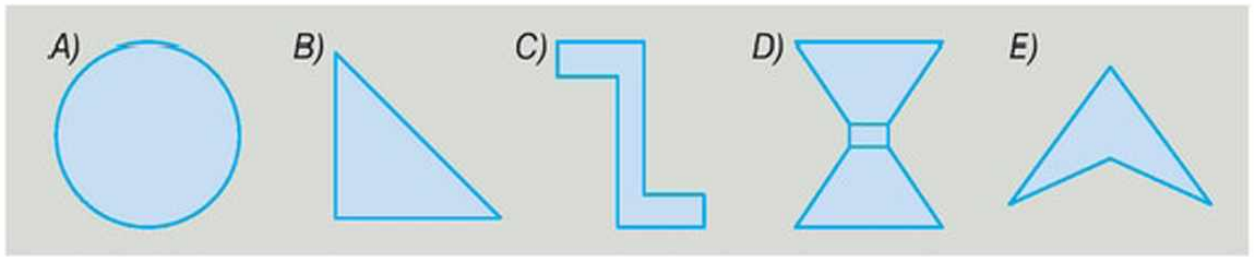


5. Rajzoljunk középpontosan szimmetrikus autómárka-emblémákat!

6. Tükrözzük az adott pontot a derékszögű koordináta-rendszer origójára (a (0; 0) pontra), és adjuk meg a képpont koordinátáit, ha

a) $A(0; 2)$; *b)* $B(3; 0)$; *c)* $C(1; 4)$; *d)* $D(-2; 5)$; *e)* $E(4; -3)$; *f)* $F(-1; -6)$!

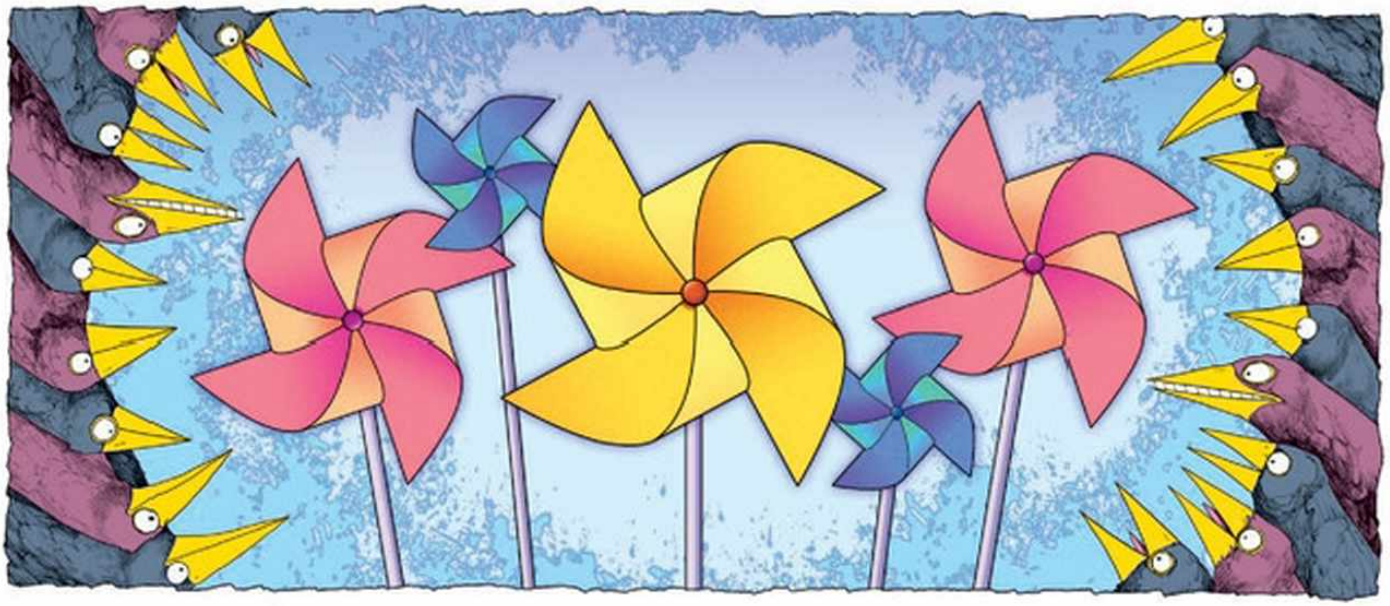
7. Melyek középpontosan szimmetrikusak az ábrán látható alakzatok közül? Hol van az alakzatok szimmetria-középpontja?



Rejtvény

Egy asztalon 29 darab egyforma kavics van egy sorban. Aladár és Béla azt játsszák, hogy felváltva elvesznek a kavicsokból: egy alkalommal vagy egy darabot, vagy pedig két szomszédosat. A játékot az nyeri, aki az utolsó kavicsot elveszi. A játékot Aladár kezdi. Hogyan játsszon, ha nyerni akar?

2. Középpontos tükörképek szerkesztése



1. példa

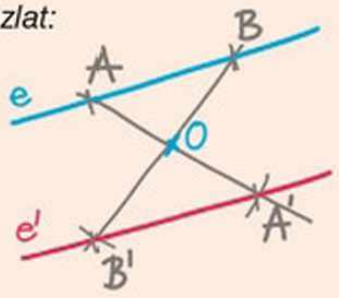
Adott egy e egyenes és rajta kívül egy O pont. Tükrözzük az e egyenest az O pontra!

Megoldás

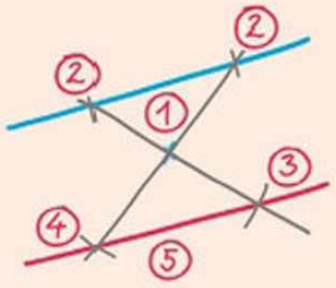
Tudjuk, hogy középpontos tükrözéskor egyenes képe egyenes.

Az egyenest két pontja egyértelműen meghatározza, ezért elegendő az e egyenes két tetszőleges pontját tükrözni az O pontra.

Vázlat:

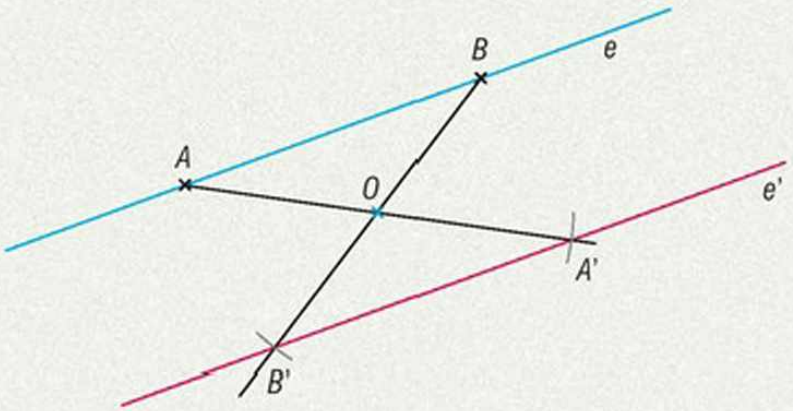


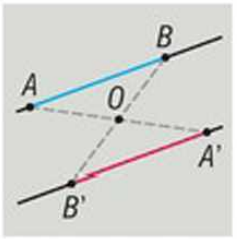
A szerkesztés menete:



1. Felvesszük az e egyenest és rajta kívül az O pontot.
2. Kijelölünk az e egyenesen egy A és egy B pontot.
3. Az AO szakasz O-n túli meghosszabbítására felmérjük az AO távolságot. Megkapjuk az A' pontot.
4. A BO szakasz O-n túli meghosszabbítására felmérjük az BO távolságot. Megkapjuk a B' pontot.
5. Az A' és B' pontokra illeszkedő egyenes a keresett e' képegyenes.

Szerkesztés:





Az AB szakasz képe az $A'B'$ szakasz.

Megjegyzés:

A szerkesztésből az is kiderül, hogy az AB szakasz O pontra vonatkozó tükörképe az $A'B'$ szakasz.

2. példa

Vegyünk fel egy ABC háromszöget, és a háromszögön kívül egy O pontot! Tükrözzük a háromszöget az O pontra!

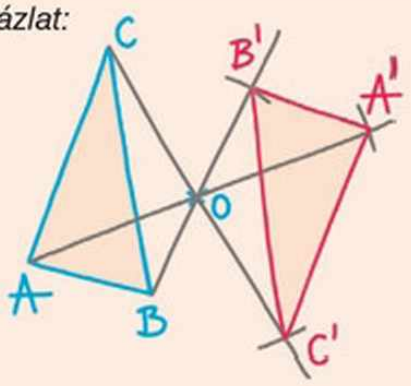
Megoldás

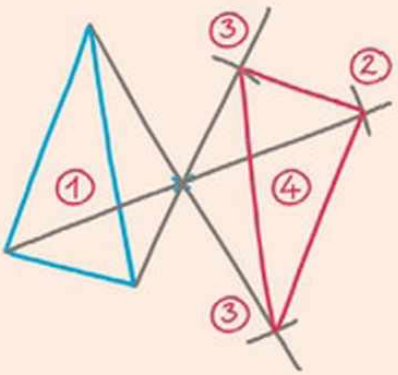
A háromszöget a három csúcsa egyértelműen meghatározza, ezért elegendő az A, B és C csúcspontokat tükrözni.

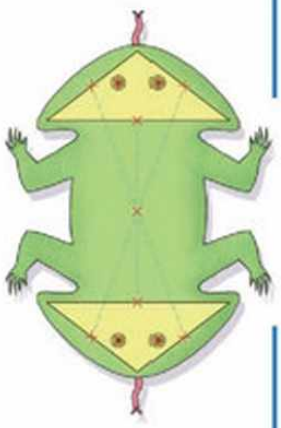
A szerkesztés menete:

1. Felvesszük az ABC háromszöget és az O pontot.
2. Az AO szakaszt O ponton túl meghosszabbítjuk, és a meghosszabbításra O-ból felmérjük az AO távolságot. Így megkapjuk az A' pontot.
3. Az A' ponthoz hasonlóan megszerkesztjük a B' és C' pontokat.
4. A kapott A', B', C' csúcspontokat összekötjük, így megkapjuk az $A'B'C'$ háromszöget.

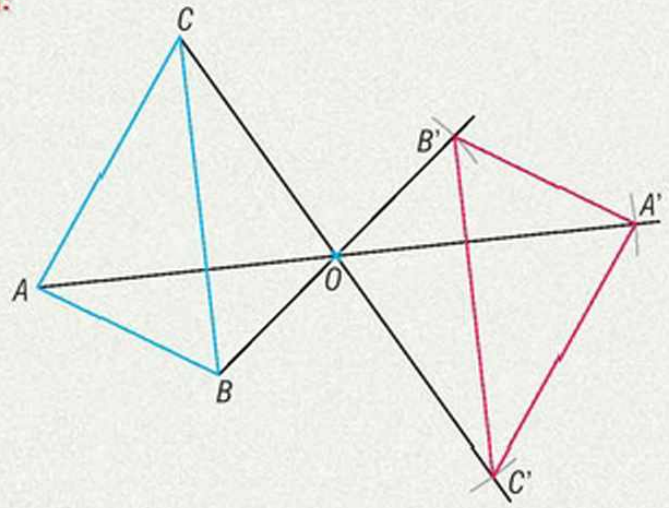
Vázlat:

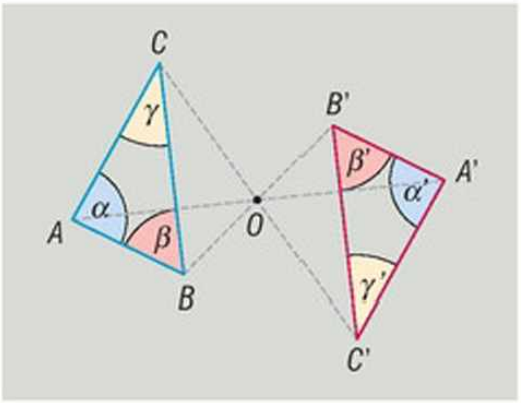


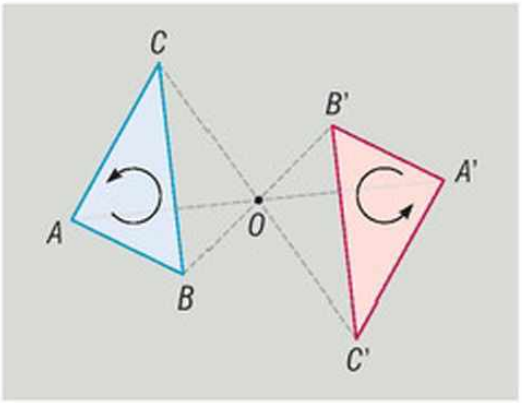




Szerkesztés:







Az ABC háromszög egybevágó az $A'B'C'$ háromszöggel.

$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \beta'$$
$$\gamma = \gamma'$$

$$AB = A'B'$$
$$BC = B'C'$$
$$CA = C'A'$$

Ha az $A'B'C'$ háromszög az ABC háromszög középpontos tükörképe, akkor

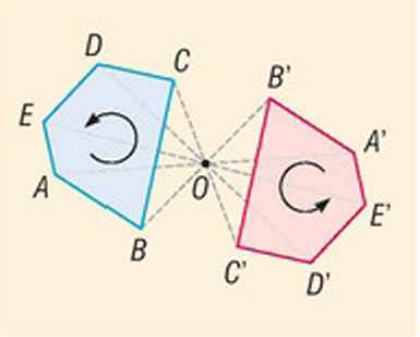
- a két háromszög megfelelő oldalai egyenlő hosszúak;
- a két háromszög megfelelő szögei egyenlő nagyságúak;
- a két háromszög körüljárási iránya megegyezik.

Általában is igaz, hogy bármely háromszög és a középpontos tükörképe egybevágó, és körüljárási irányuk megegyezik.

Hasonlóan egy tetszőleges sokszög középpontos tükörképét megszerkeszthetjük úgy, hogy a csúcsait középpontosan tükrözzük.

Bármely sokszög egybevágó a középpontos tükörképével.

A sokszögnek és középpontos tükörképének körüljárási iránya megegyezik.





3. példa

Tükrözzünk egy tetszőleges konvex szöget a szögtartományába eső O pontra!

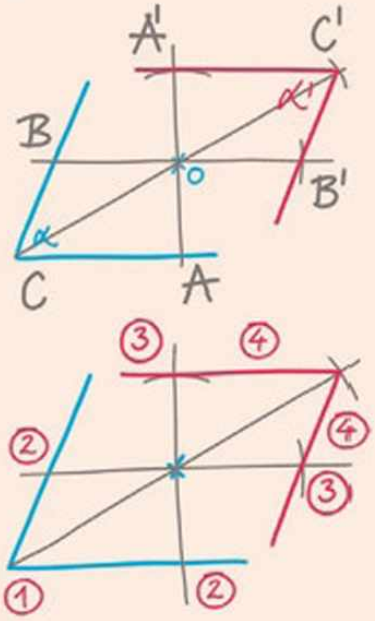
Megoldás

A szög tükrözését visszavezethetjük a háromszög tükrözésére, mert a szöget meghatározza a csúcsa és a két szárán felvett egy-egy tetszőleges pont.

A szerkesztés menete:

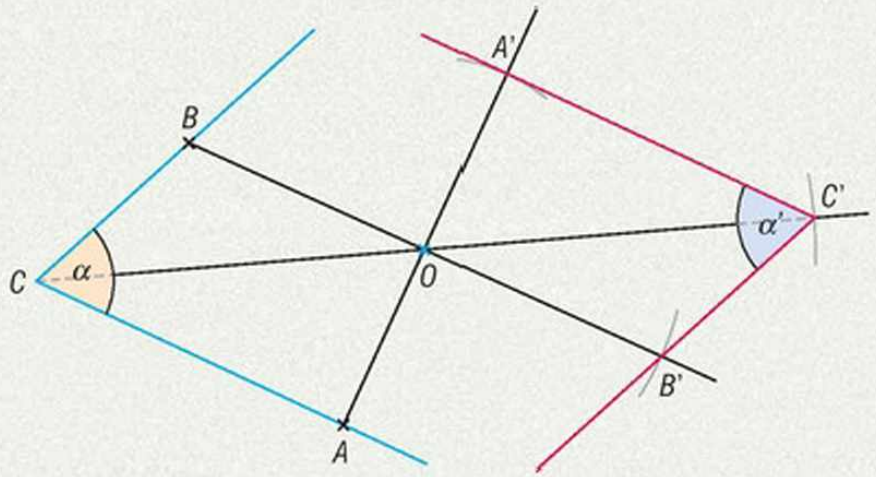
1. Felvesszük az α szöget és az O pontot.
2. Kijelölünk a szögszárakon egy-egy pontot (A és B) és a szög C csúcsát.
3. Az A, B és C pontot tükrözzük az O pontra.
4. A C' pontot összekötjük az A' és B' képpontokkal, így megkapjuk az α szög képét, α'-t.

Vázlat:



Ügyeljünk az összekötés sorrendjére! A kapott szög csúcsa a C' pont lesz.

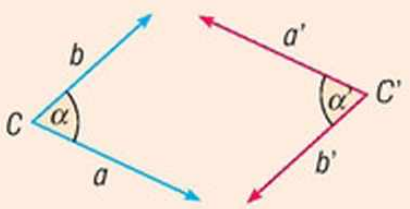
Szerkesztés:



$\alpha = \alpha'$

Megjegyzés:

Az α szögnek és tükörképének száraira teljesül, hogy a C kezdőpontú a félegyenes és a C' kezdőpontú a' félegyenesek párhuzamosak, de irányításuk ellentétes. Hasonlóan $b \parallel b'$, és irányuk ellentétes.



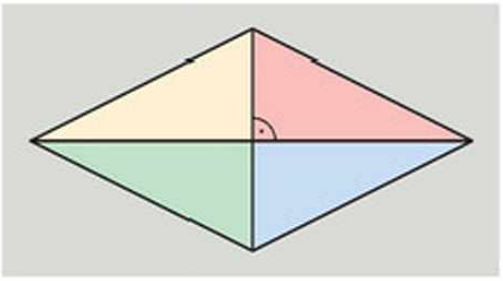
Feladatok

1. Vegyünk fel egy ABC háromszöget, és a háromszögön kívül egy O pontot! Szerkesszük meg azt az $A'B'C'$ háromszöget, amelynek csúcsaira teljesül, hogy az O pont felezőpontja az AA', BB', CC' szakaszoknak!

2. Vegyünk fel egy *a)* hegyesszöget; *b)* derékszöget; *c)* tompaszöget, és tükrözzük egyik szárának egy tetszőleges pontjára! (Írjuk le a szerkesztés lépéseit!)

3. Szerkesszünk egy *a)* 60°-os; *b)* 90°-os; *c)* 120°-os szöget, és tükrözzük a szögtartomány egy adott O pontjára! (Írjuk le a szerkesztés lépéseit!)

4. Rakjunk össze négy különböző színű, egybevágó derékszögű háromszöget az ábra szerint!



   a) Milyen tükrözéssel kaphatjuk a piros háromszögből a sárga, a zöld és a kék háromszöget?

   b) Milyen tükrözéssel kaphatjuk a sárga háromszögből a zöld háromszöget? Mire következtethetünk ebből?

5. Vegyünk fel egymással párhuzamosan két egyenest, és mindkét egyenesen egy-egy olyan szakaszt, melyek egyenlő hosszúságúak! Szerkesszük meg azt az O pontot, amelyre az egyik szakaszt tükrözve a másik szakaszt kapjuk!

6. Vegyünk fel egy 2 cm sugarú kört, és a kör K középpontjától 3 cm távolságra egy O pontot! Tükrözzük a kört az O pontra! (Írjuk le a szerkesztés lépéseit!)

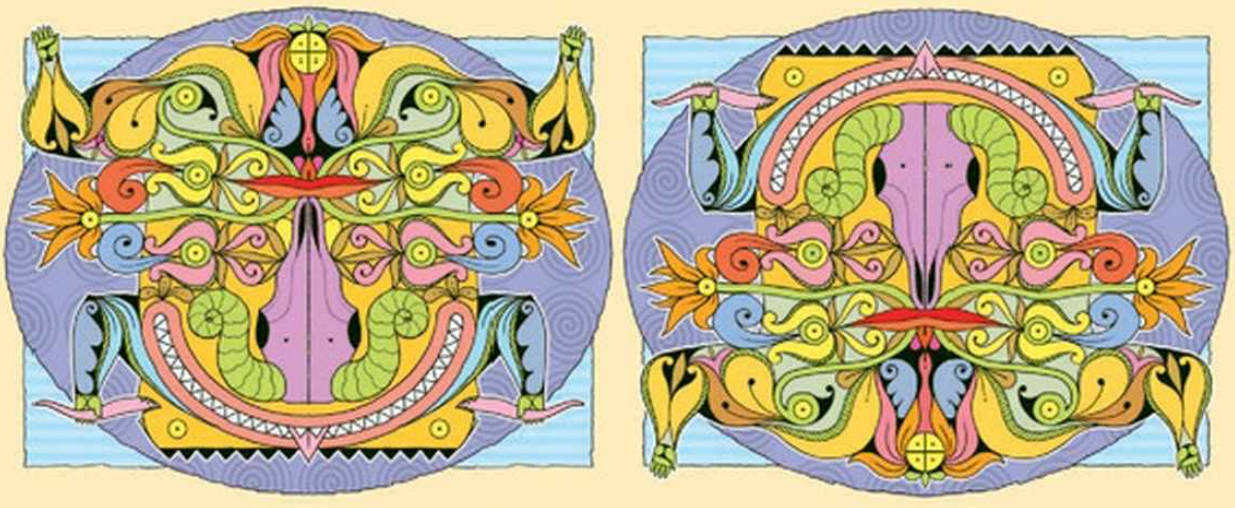
7. Tükrözzünk egy 3 cm oldalhosszúságú négyzetet

   a) az átlói metszéspontjára; *b)* egy csúcsára; *c)* egyik oldalának felezőpontjára!

8. A koordináta-rendszerben egy háromszög csúcsai: $A(3; 6)$, $B(1; 4)$, $C(8; 0)$. Tükrözzük a háromszöget az *a)* $(0; 2)$; *b)* $(-2; 1)$; *c)* $(-1; -3)$ pontra! Határozzuk meg a képháromszög csúcspontjainak koordinátáit!

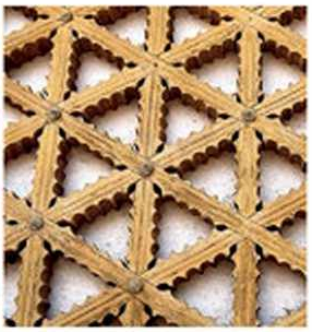
Rejtvény

Az alábbi kép középpontos tükrözésekor 6 hibát ejtettünk. Melyek ezek?



3. Szögpárok, a háromszög belső szögeinek összege

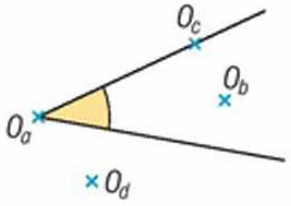


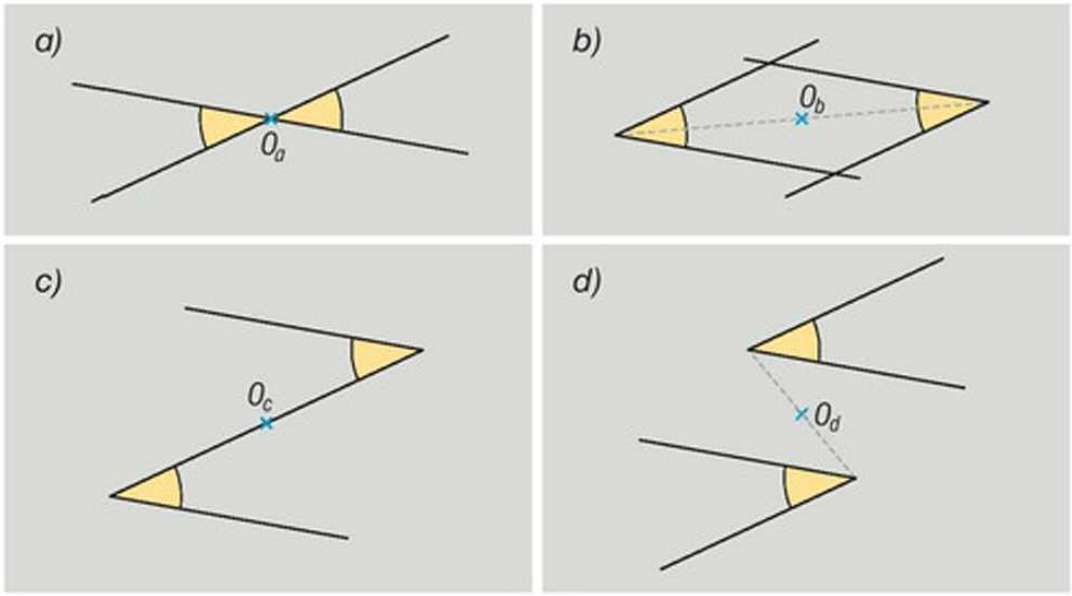


Keressünk a képeken azonos nagyságú szögeket!

Felvettünk egy α hegyesszöget, és tükröztük

a) a szög csúcsára;
b) a szögtartomány egy belső pontjára;
c) a szögszár egy pontjára;
d) a szögtartomány egy külső pontjára.



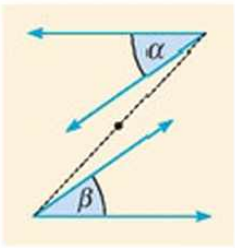


A szögek csúcsai egymás tükörképei az adott *O* pontra vonatkozóan, a tükrözésben egymásnak megfelelő szögszárak pedig párhuzamosak (egybe is eshetnek) egymással.

A középpontos tükrözés tulajdonságai alapján mind a négy esetben teljesül a szögre és középpontos tükörképére, hogy:

- a megfelelő szárak párhuzamosak;
- a megfelelő szárak ellentétes irányúak.

DEFINÍCIÓ: Két konvex szöget fordított állású szögeknek vagy más szóval váltószögeknek nevezünk, ha megfelelő száraik párhuzamosak és ellentétes irányúak. Ha a váltószögek csúcsa egybeesik, akkor csúcsszögeknek nevezzük őket.



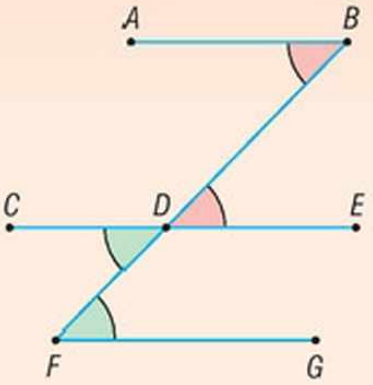
$\alpha = \beta$

A fordított állású szögek (váltószögek) egyenlő nagyságúak.

A középpontos tükrözés tulajdonságaiból adódik, hogy a **fordított állású szögek (váltószögek) egyenlő nagyságúak.**

2. példa

Keressünk egyenlő nagyságú szögeket az ábrán! ($AB \parallel CE \parallel FG$)



Megoldás

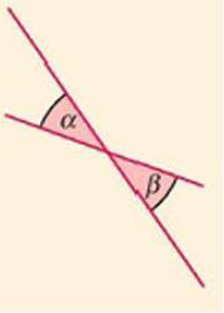
Az $ABD\sphericalangle$ és a $BDE\sphericalangle$ váltószögek, ezért egyenlők.

Az $CDF\sphericalangle$ és a $DFG\sphericalangle$ váltószögek, ezért egyenlők.

Mivel a $CDF\sphericalangle$ és a $BDE\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért ezek is egyenlők.

Tehát mind a négy szög egyenlő.

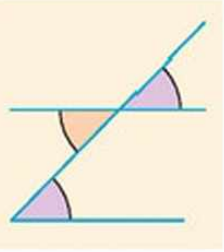
Vegyük észre, hogy a $BDE\sphericalangle$ és a $DFG\sphericalangle$ szárai páronként egyező irányúak, és ezek a szögek egyenlők. Ugyanígy az $ABD\sphericalangle$ egyenlő a $CDF\sphericalangle$-gel.



csúcsszögek

$\alpha = \beta$

DEFINÍCIÓ: Két konvex szöget egyállású szögeknek nevezünk, ha megfelelő száraik páronként párhuzamosak és egyező irányúak.



Például az ábrán a $BDE\sphericalangle$ és a $DFG\sphericalangle$, illetve az $ABD\sphericalangle$ és a $CDF\sphericalangle$ egyállású szögek.

Az egyállású szögek egyenlők, mert ha az egyiknek vesszük a csúcsszögét, az váltószöge a másiknak, így mind a három szög egyenlő.

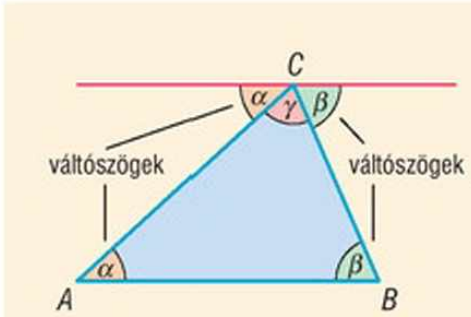
A háromszög belső szögeinek összege

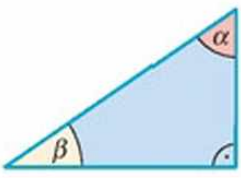
Legyenek az ABC háromszög belső szögei: α; β; γ! Húzzunk a C csúcson át párhuzamost AB egyenesével!

A C csúcsnál keletkezett egyenesszöget a háromszög oldalai három szögre bontják. Az egyik az A csúcsnál, a másik a B csúcsnál lévő szög váltószöge, a középső pedig γ.

Így a C csúcsnál lévő egyenesszög egyenlő a háromszög belső szögeinek összegével:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$





A derékszögű háromszög két hegyesszögének összege 90°.

A háromszög belső szögeinek összege 180°.

A háromszög külső szöge

Vegyünk fel egy ABC háromszöget, és az AB oldalt hosszabbítsuk meg az A csúcson keresztül! Az így keletkezett α' szöget a háromszög α melletti **külső szögének** nevezzük.

α és α' együtt egyenesszöget alkot:

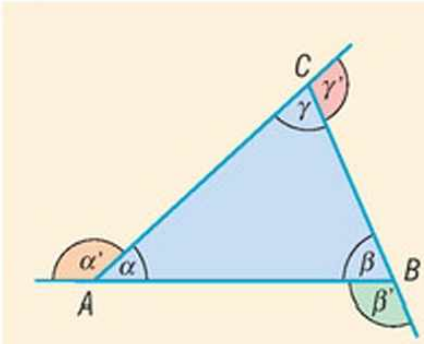
$$\alpha + \alpha' = 180°.$$

A háromszög belső szögeinek összege is 180°,

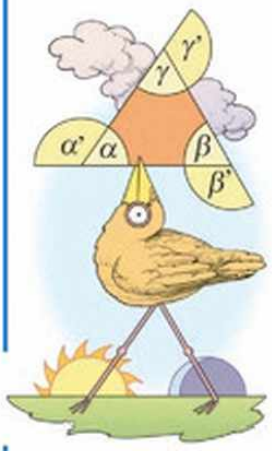
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

α-t az α' is és a $\beta + \gamma$ is 180°-ra egészíti ki, ezért

$$\alpha' = \beta + \gamma.$$



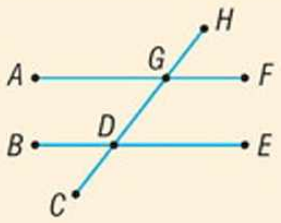
A háromszögben egy külső szög egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével.

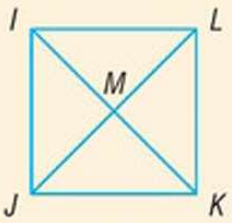


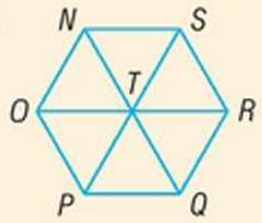
$\alpha' = \beta + \gamma$
$\beta' = \alpha + \gamma$
$\gamma' = \alpha + \beta$

Feladatok

1. Keressünk az ábrákon fordított állású és egyállású szögpárokat!

a)


b)


c)


2. Mekkorák annak a háromszögnek a külső szögei, amelynek két belső szöge:
   a) 25°; 90°; b) 38°; 110°; c) 77°; 77°?

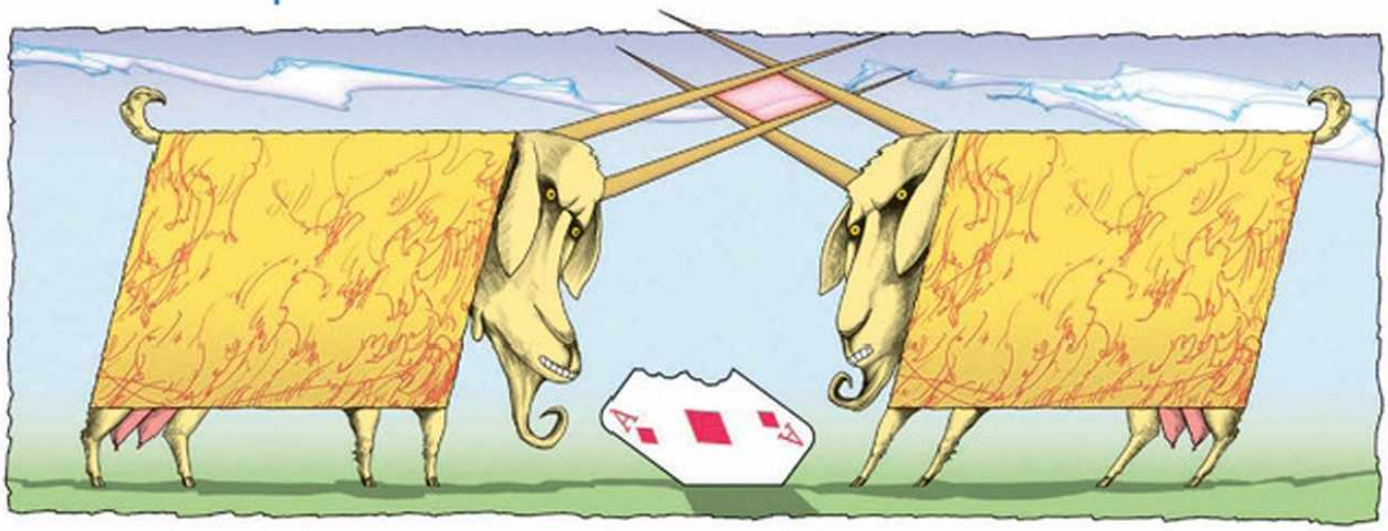
3. Hányféle háromszöget lehet összeállítani a 30°; 60°; 45°; 120°; 90°; 75°-os szögekből, ha mindegyik szög többször is szerepelhet egy háromszögben? (Két háromszöget akkor tekintsünk különbözőnek, ha van különböző szögük.)

4. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, és melyik hamis!
   a) Nincs olyan háromszög, amelynek két derékszöge van.
   b) Van olyan háromszög, amelynek két tompaszöge van.
   c) Van két olyan háromszög, melyek két-két szöge megegyezik, de a harmadik különböző.

Rejtvény

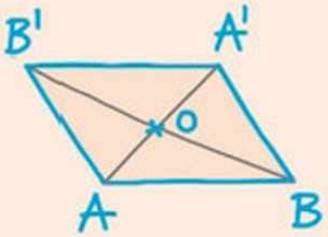
Legkevesebb hány egyenest határozhatnak meg három különböző, egy síkban fekvő hegyesszög szárai?

4. Középpontosan szimmetrikus négyszög: a paralelogramma



1. példa

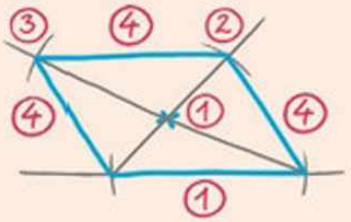
Vegyünk fel egy *AB* szakaszt, és egy, az *AB* egyenesére nem illeszkedő *O* pontot! Tükrözzük az *AB* szakaszt az *O* pontra! Milyen tulajdonságai vannak az *ABA'B'* négyszögnek?



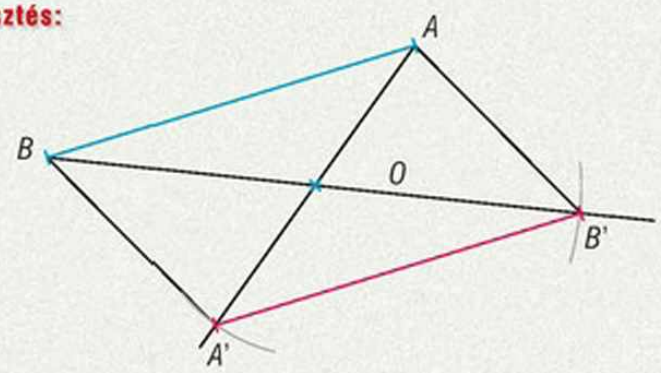
Megoldás

A szerkesztés menete:

1. Vegyük fel az *AB* szakaszt és az egyenesére nem illeszkedő *O* pontot!
2. Mérjük fel az *AO* egyenesre *O* ponton túl az *AO* távolságot! (Megapjuk *A'*-t.)
3. Mérjük fel a *BO* egyenesre *O* ponton túl a *BO* távolságot! (Megapjuk *B'*-t.)
4. A megfelelő pontok összekötésével megkapjuk az *ABA'B'* négyszöget.



Szerkesztés:





A kapott $ABA'B'$ négyszög tulajdonságai:

- Két szemközti oldala, az AB és az $A'B'$ párhuzamos és egyenlő hosszú, mert AB középpontosan szimmetrikus képe $A'B'$.
- Másik két oldala (AB' és $A'B$) is párhuzamos és egyenlő hosszú, mert B' képe a B, ezért az AB' szakasz középpontos tükörképe az $A'B$ szakasz ($AB' = A'B$ és $AB' \parallel A'B$).
- Átlói felezik egymást, mert az átlók metszéspontja a tükrözés középpontja.

$AB = A'B'$
$AB' = A'B$

$AB \parallel A'B'$
$AB' \parallel A'B$

Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező négyszög paralelogramma.

A paralelogramma szokásos meghatározása:

Definíció: Paralelogrammának nevezzük azt a négyszöget, amelynek két-két szemközti oldala párhuzamos.

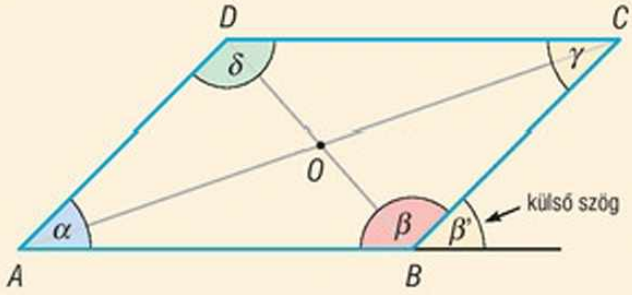
Keressünk összefüggést a paralelogramma szögei között!

Mivel a paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak, ezért a paralelogramma szemközti szögeire teljesül, hogy:

– α és γ fordított állású szögek, így $\alpha = \gamma$;

– β és δ fordított állású szögek, így $\beta = \delta$.

Tehát a paralelogramma szemközti szögei egyenlők.



Tekintsük a β szög melletti β' külső szöget!

Az α és β' szögek egyállású szögek, mert egyik száruk egybeesik, másik száruk pedig párhuzamos és azonos irányú ($AD \parallel BC$). Így $\alpha = \beta'$.

Mivel $\beta' + \beta = 180°$, így $\alpha + \beta = 180°$, azaz a paralelogramma szomszédos szögeinek összege 180°.

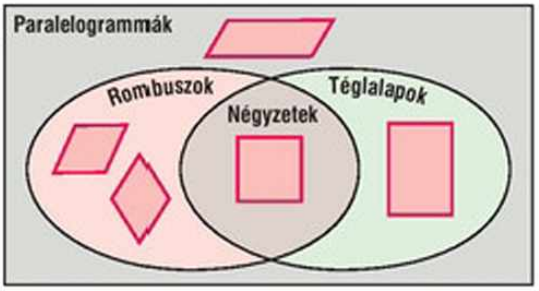
$\alpha + \delta = \alpha + \beta =$
$= \gamma + \delta = \gamma + \beta =$
$= 180°$

A paralelogramma tulajdonságai:

- A paralelogramma középpontosan szimmetrikus négyszög, szimmetria-középpontja az átlók metszéspontja.
- Átlói felezik egymást.
- Két-két szemközti oldala egyenlő hosszú.
- Szemközti szögei egyenlő nagyságúak.
- Bármely két szomszédos szögének összege 180°.
- Két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő.

Ha a felsorolt tulajdonságok közül bármelyik teljesül egy négyszögre, akkor az paralelogramma. Ez azt is jelenti, hogy bármelyik tulajdonságból következik az összes többi.

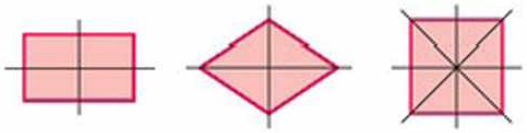
Mivel a téglalap, a rombusz és a négyzet középpontosan szimmetrikus négyszögek, ezért paralelogrammák.



A téglalap olyan paralelogramma, amelynek szögei egyenlő nagyságúak.

A rombusz olyan paralelogramma, amelynek oldalai egyenlő hosszúak.

A négyzet olyan paralelogramma, amelynek szögei egyenlő nagyságúak, és oldalai egyenlő hosszúak.

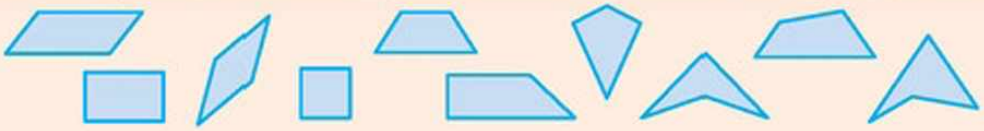


Korábbról tudjuk, hogy a téglalapok, a rombuszok és a négyzetek tengelyesen szimmetrikus négyszögek. Ezek a négyszögek tehát tengelyesen is és középpontosan is szimmetrikusak.

Vágjunk ki papírból ilyen négyszögeket!

2. példa

Készítsünk halmazábrát a tengelyesen és középpontosan szimmetrikus négyszögekre, és helyezzük el benne az alábbi négyszögeket!

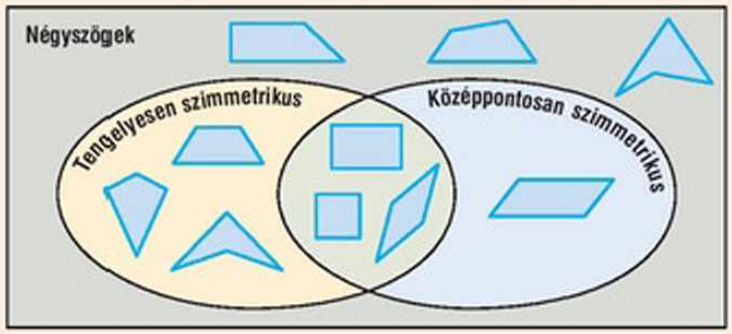


Középpontosan szimmetrikus, de tengelyesen nem szimmetrikus.

Tengelyesen szimmetrikus, de középpontosan nem szimmetrikus.

Tengelyesen is és középpontosan is szimmetrikus.

Megoldás



Játsszunk barkochbát!

A fenti négyszögek közül gondoljon valaki egy négyszögre! A többieknek úgy kell kitalálniuk ezt a négyszöget, hogy annak tulajdonságaira rákérdeznek. Csak olyan kérdéseket tehetnek fel, amelyekre igennel vagy nemmel lehet válaszolni.

Például:	*Kérdések:*	*Válaszok:*
	Középpontosan szimmetrikus?	Igen.
	Minden oldala egyenlő?	Nem.
	Minden szöge egyenlő?	Igen.

Ezek alapján csak a ▭ téglalapra gondolhattak.

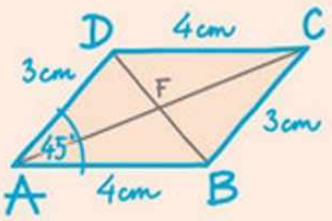
3. példa

Egy paralelogramma két szomszédos oldalának hossza 3 cm, illetve 4 cm, az általuk bezárt szög 45°-os. Szerkesszük meg a paralelogrammát!

A paralelogramma szerkesztéséhez három egymástól független adat elegendő.

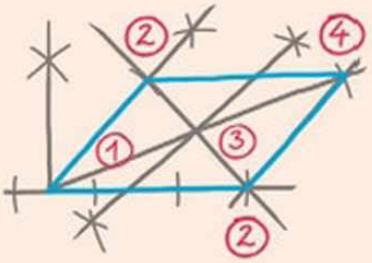
Megoldás

Vázlat:



Az ABD háromszöget az adatok alapján meg tudjuk szerkeszteni. A paralelogramma a BD átló F felezőpontjára középpontosan szimmetrikus, így a C csúcs az A csúcsnak F-re vonatkozó tükörképe.

A szerkesztés menete:

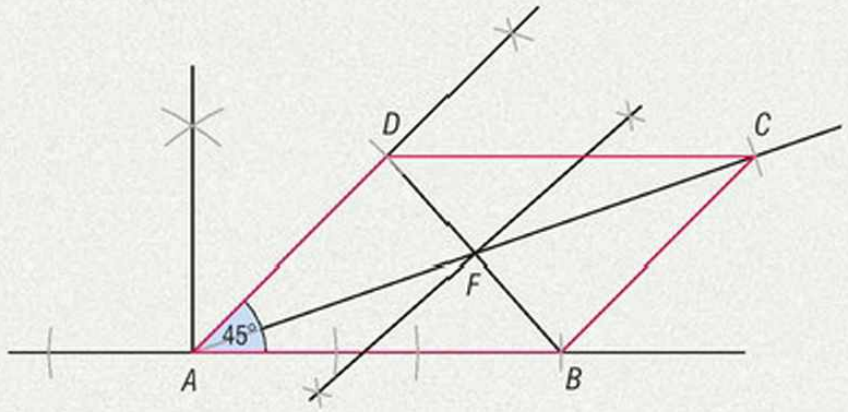


1. 45°-os szöget szerkesztünk. A szög csúcsa az A pont.
2. A szög egyik szárára 3 cm-t, másik szárra 4 cm-t mérünk fel az A pontból. Így megkapjuk a B és a D csúcsot.
3. Megszerkesztjük a BD szakasz F felezőpontját.
4. Az A csúcsot tükrözzük az F pontra, így megkapjuk a C csúcsot.
5. A C pontot összekötjük B-vel és D-vel.



A C csúcsot úgy is megkaphatjuk, hogy a B csúcsból 3 cm, a D-ből 4 cm sugarú körívet rajzolunk.

Szerkesztés:



Elemzés (diszkusszió):

A feladatnak egy megoldása van. (Ha az AB egyenesen a másik irányban vesszük fel a 45°-os szöget, akkor a szerkesztés során kapott paralelogrammával egybevágó paralelogrammát kapunk.)



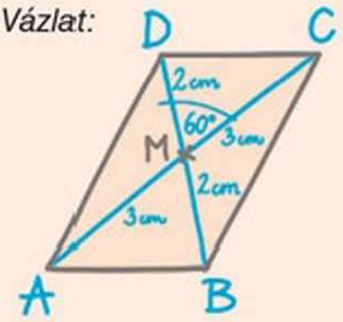
4. példa

Egy paralelogramma egyik átlója 4 cm, másik átlója 6 cm hosszú. A két átló 60°-os szöget zár be egymással. Szerkesszük meg a paralelogrammát!

Megoldás

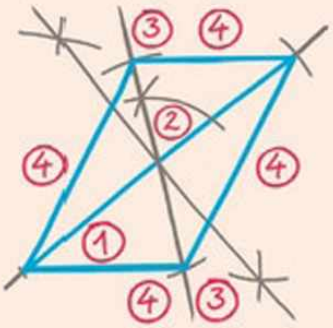
A szerkesztésnél azt használjuk fel, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást.

Vázlat:



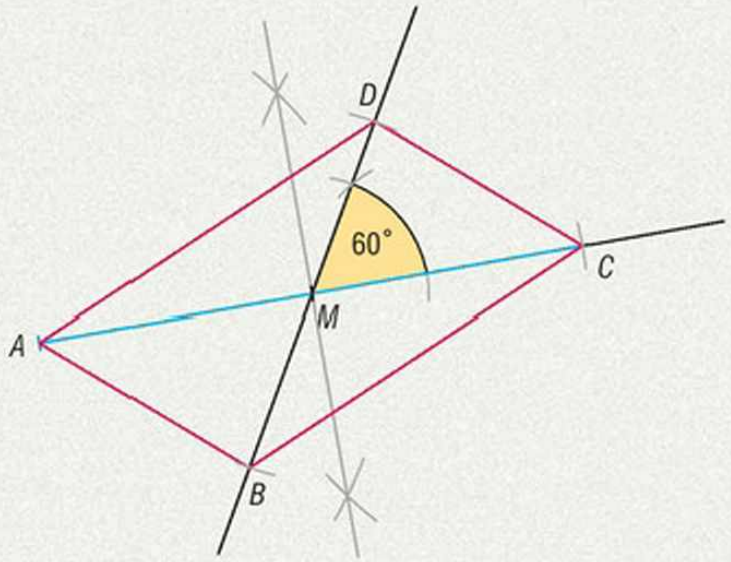
A szerkesztés menete:

1. Felvesszük a 6 cm-es AC átlót, és megszerkesztjük a felezőpontját (M).
2. Az M pontból az AC átló egyenesére 60°-os szöget szerkesztünk, és a kapott szögszárat mindkét irányban meghosszabbítjuk. Így megkapjuk a BD átló egyenesét.
3. Az előző lépésben kapott egyenesre M pontból mindkét irányban felmérjük a BD átló felét, 2 cm-t. Megkapjuk a B és D csúcsokat.
4. A megfelelő csúcsok összekötésével megrajzoljuk a paralelogramma oldalait.



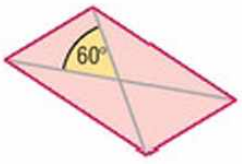


Szerkesztés:



Elemzés (diszkusszió):

A feladatnak egy megoldása van.



Feladatok

1. Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 4$ cm. Tükrözzük a háromszöget az

   a) AB oldal felezőpontjára; *b)* BC oldal felezőpontjára; *c)* CA oldal felezőpontjára!

   Milyen síkidomot határoz meg az eredeti és a képháromszög együtt? Miért? Számítsuk ki a kapott síkidomok kerületét!

2. Az előző feladatbeli háromszöget tükrözzük a C csúcsára! Mit mondhatunk az $ABA'B'$ négyszögről? Miért?

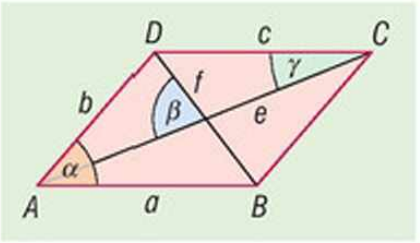
3. Szerkesszük meg az $ABCD$ paralelogrammát, ha adott két szomszédos csúcsa, A és B, valamint az átlók M metszéspontja! (Adott a füzetünkben három nem egy egyenesre illeszkedő pont: A, B, M.)

4. Szerkesszünk paralelogrammát a következő adatokból!

   a) $a = 6$ cm; $b = 5$ cm; $\alpha = 30°$;

   b) $e = 6$ cm; $f = 5$ cm; $\beta = 30°$;

   c) $c = 4$ cm; $e = 6$ cm; $\gamma = 30°$.



5. Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, és melyik hamis!

   a) Van olyan négyszög, amelyik középpontosan szimmetrikus.
   b) Minden négyszög középpontosan szimmetrikus.
   c) Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor szemközti oldalai egyenlő hosszúak.
   d) Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor szemközti szögei egyenlő nagyságúak.
   e) Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor szögei egyenlő nagyságúak.
   f) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor középpontosan szimmetrikus.

6. Egy paralelogramma átlói egyenlő hosszúak. Mit mondhatunk erről a paralelogrammáról?

7. Egy paralelogramma átlói merőlegesek egymásra. Mit mondhatunk erről a paralelogrammáról?

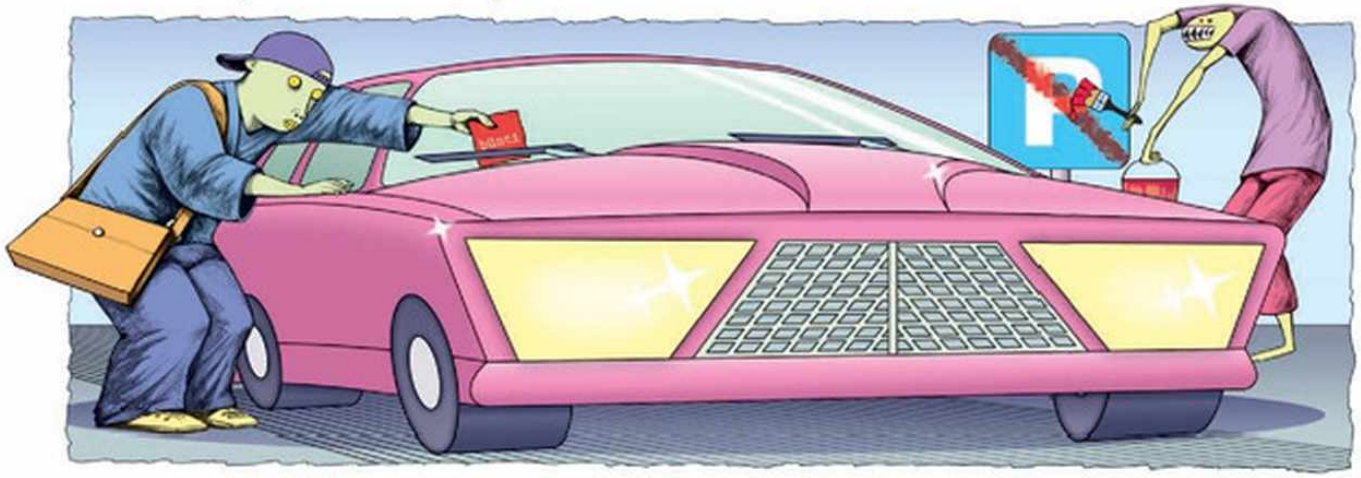
8. Számítsuk ki a paralelogrammák belső szögeit!



Rejtvény

Van-e olyan tengelyesen is és középpontosan is szimmetrikus négyszög, amelynek pontosan három szimmetriatengelye van?

5. A trapéz

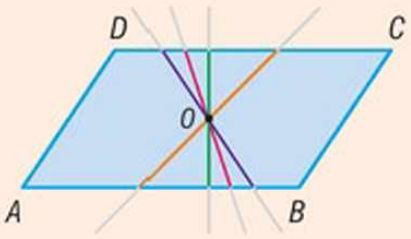


1. példa

Szét lehet-e vágni egy paralelogrammát két egybevágó négyszögre?

Megoldás

Mivel a paralelogramma középpontosan szimmetrikus, úgy vágjuk két egybevágó részre, hogy a kapott darabok egymás O-ra vonatkozó középpontos tükörképei legyenek. Így a vágás vonalának a szimmetria-középponton átmenő egyenesnek kell lennie.



Az ábra alapján látható, hogy az O középponton átmenő bármely egyenes (amely nem az átló egyenese) két egybevágó négyszögre vágja a paralelogrammát.



A példában kapott négyszögek közös tulajdonsága, hogy **két szemközti oldaluk párhuzamos,** vagyis **trapézok.**

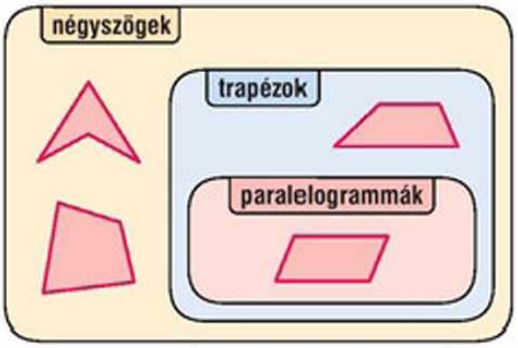


Ha az O középponton átmenő vágást az AD oldallal párhuzamosan végezzük, akkor olyan trapézt kapunk, amelyik paralelogramma, hiszen két-két szemközti oldala párhuzamos.

Speciális trapézok:



Ábrázoljuk a trapézok és a paralelogrammák halmazát!



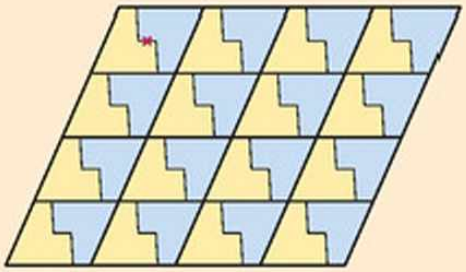
- Minden paralelogramma trapéz.
- Van olyan trapéz, amely nem paralelogramma.



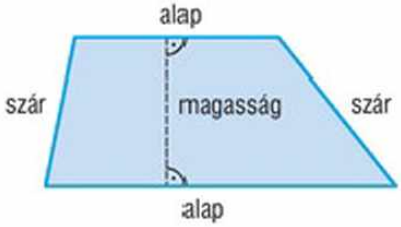
Érdekesség

A paralelogrammát a középpontján átmenő, arra szimmetrikus töröttvonallal is kettévághatjuk egybevágó darabokra.

Ha a paralelogrammákat egymás mellé rakjuk, látható, hogy ilyen alakzatokkal a sík (hézagmentesen és átfedés nélkül) lefedhető.



Elnevezések a trapézban:



A trapéz magassága az alapok távolsága.

2. példa

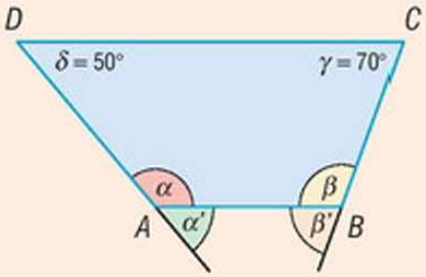
A rajzon Flóra trapéz alakú táskája látható. Flóra egyszer unatkozott, és megmérte a táska két szögét a szögmérőjével: az egyik szög 50°-os, a másik pedig 70°-os.

Mekkora a trapéz másik két szöge?



Megoldás

Hosszabbítsuk meg a trapéz két szárát! α', β' a trapéz két külső szöge. Az α' és a trapéz δ szöge egyállású, mert egyik száruk közös, a másik pedig párhuzamos és egyező irányú. Így nagyságuk egyenlő, vagyis



$$\alpha' = \delta = 50°.$$

Ugyanígy β' és a trapéz γ szöge is egyállású, tehát $\beta' = \gamma = 70°$.

A trapéz egy száron fekvő szögeire igaz:

$\alpha + \delta = 180°$

$\beta + \gamma = 180°$.

Mivel $\alpha + \alpha' = 180°$, és $\alpha' = 50°$, így $\alpha = 180° - 50° = 130°$.

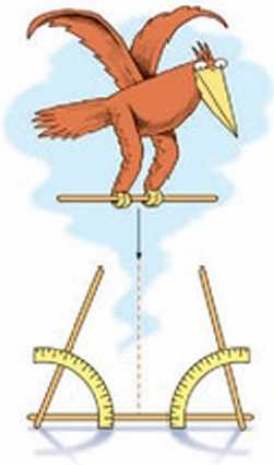
Ugyanígy $\beta + \beta' = 180°$, és $\beta' = 70°$, így $\beta = 180° - 70° = 110°$.

A példa megoldásában láttuk, hogy

$\alpha + \alpha' = 180°$, és $\alpha' = \delta$, így $\alpha + \delta = 180°$, valamint

$\beta + \beta' = 180°$, és $\beta' = \gamma$, így $\beta + \gamma = 180°$.

Általában is igaz, hogy a trapéz egy száron fekvő szögeinek összege 180°.

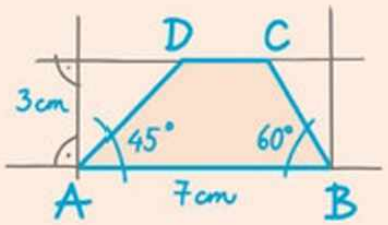


3. példa

Szerkesszünk trapézt, ha a trapéz egyik alapja 7 cm, a rajta fekvő két szög 45° és 60°, és a trapéz magassága 3 cm!

Megoldás

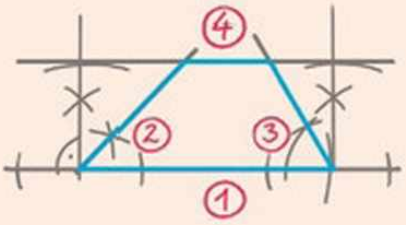
Vázlat:



Felhasználjuk, hogy a trapéz alapjai párhuzamosak, és távolságuk a magassággal egyenlő.

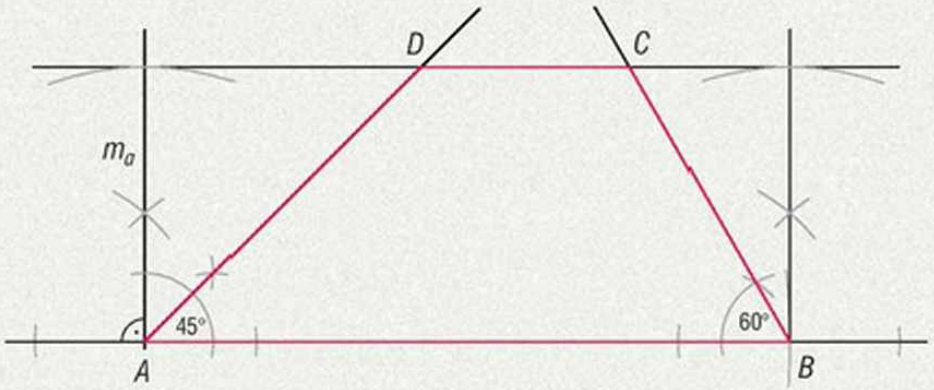
A szerkesztés menete:

1. Vegyük fel az $AB = 7$ cm-es alapot!
2. Az A csúcsba szerkesszünk 45°-os szöget! Így megkapjuk a trapéz AD szárának egyenesét.
3. A B csúcsba szerkesszünk 60°-os szöget! Így megkapjuk a BC szár egyenesét.



4. Szerkesszünk az AB oldallal párhuzamos, tőle 3 cm távolságra lévő egyenest (ennek része a CD alap)! Az egyenes és a szögszárak metszéspontjai megadják a trapéz C és D csúcsát.

Szerkesztés:



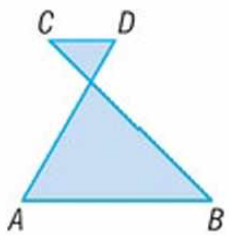
Elemzés (diszkusszió):

A feladatnak egy megoldása van.

Megjegyzés:

A fenti adatokkal a trapézt meg lehetett szerkeszteni. De az adatokat úgy is megadhattuk volna, hogy a feladatnak nincs megoldása.

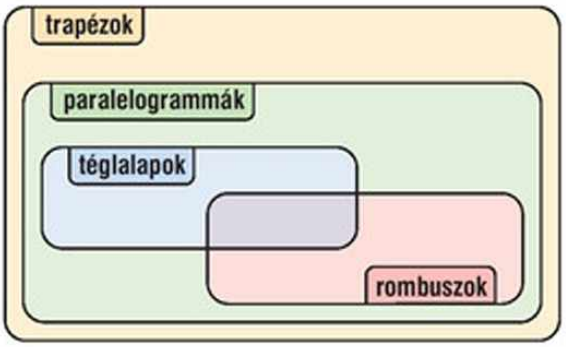
Például: $\alpha = 60°$; $\beta = 45°$; $a = 7$ cm; $m = 6$ cm esetén a trapéz szárai „átmetszik" egymást. Az így kapott alakzatot nem tekintjük trapéznak.



Feladatok

1. Egy papírszalagból trapézokat vágtunk le. Írjuk a sorszámokat a halmazábra megfelelő részébe! (➡)

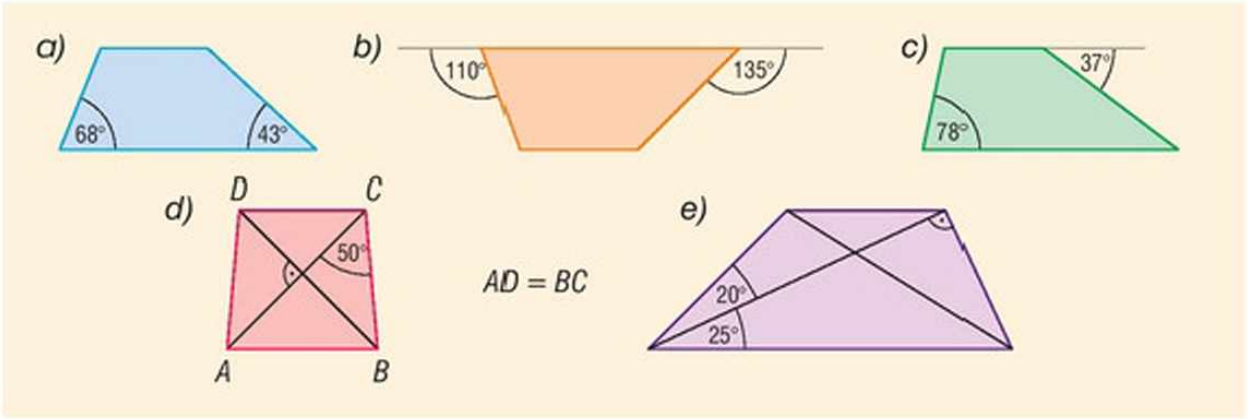




2. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, és melyik hamis!

a) Minden trapéz paralelogramma.
b) Amelyik trapéznak van derékszöge, az téglalap.
c) A négyzet egyenlő oldalú paralelogramma.
d) Nincs konkáv trapéz.
e) Minden paralelogramma egyenlő szárú trapéz.
f) Minden egyenlő szárú trapéz húrtrapéz.

3. Számítsuk ki a trapézok belső szögeit!

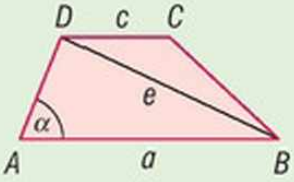


4. Szerkesszünk trapézt a következő adatokból!

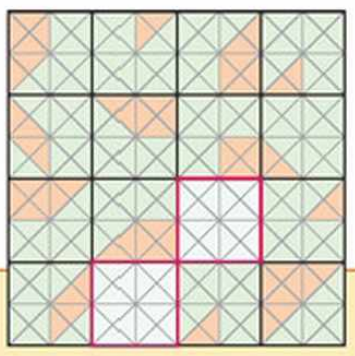
a) $a = 6$ cm; $e = 6{,}5$ cm; $c = 2$ cm; $\alpha = 60°$;

b) $a = 6$ cm; $e = 4$ cm; $c = 2$ cm; $\alpha = 60°$;

c) $a = 6$ cm; $e = 5{,}5$ cm; $c = 2$ cm; $\alpha = 60°$.



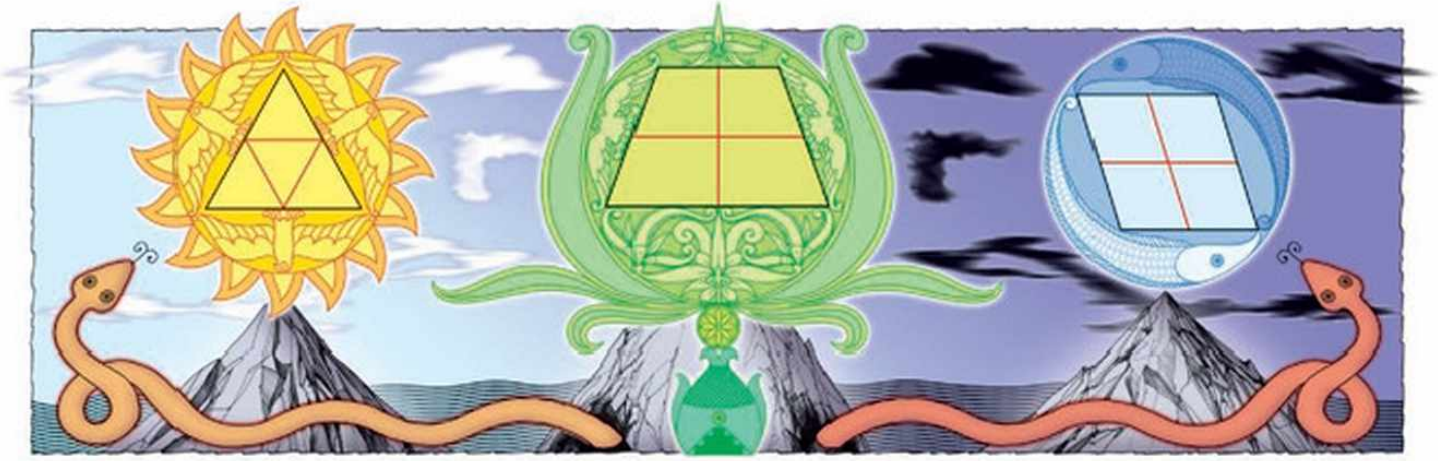
5. Vágjunk szét egy négyzetet négy háromszögre az átlói mentén! Rakjunk össze különböző trapézokat a négy háromszögből! (A háromszögeket átfedés nélkül és hézagmentesen illesszük egymás mellé!)



Rejtvény

Hogyan színezzük a pirossal jelölt négyzeteket?

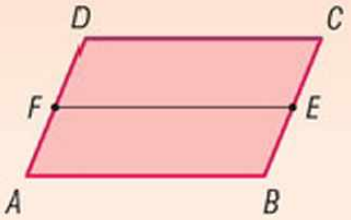
6. A paralelogramma, a trapéz és a háromszög középvonala



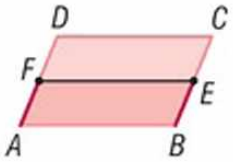
A paralelogramma középvonala

1. példa

Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának felezőpontja E, DA oldalának felezőpontja F. Milyen hosszú az EF szakasz, ha $AB = 10$ cm?



Megoldás



Vizsgáljuk az $ABEF$ négyszög oldalait! Az $ABCD$ paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak, ezért $BC = DA$.

E és F felezőpontok, ezért $BE = \frac{BC}{2}$ és $AF = \frac{DA}{2}$.

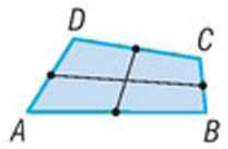
Mivel $BC = DA$, ezért $BE = AF$.

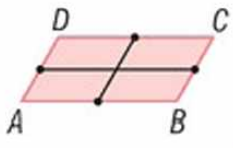
$BE = AF$
$BE \parallel AF$
$\Downarrow$
az $ABEF$ négyszög paralelogramma
$\Downarrow$
$AB = EF$

A paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak, ezért BE párhuzamos AF-fel.

Az $ABEF$ négyszögben két szemközti oldal (BE és FA) párhuzamos és egyenlő. Ebből következik, hogy az $ABEF$ négyszög paralelogramma.

A paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, ezért AB párhuzamos EF-fel és $AB = EF$. Így $EF = AB = 10$ cm.





DEFINÍCIÓ: A négyszög középvonalának nevezzük a négyszög két szemközti oldalának felezőpontját összekötő szakaszt.

A paralelogramma középvonala párhuzamos és egyenlő hosszú a paralelogramma megfelelő oldalával.



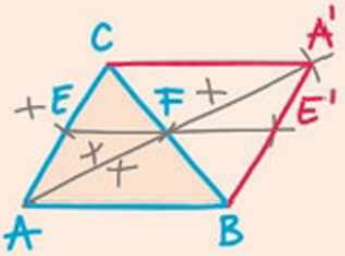
A háromszög középvonala

2. példa

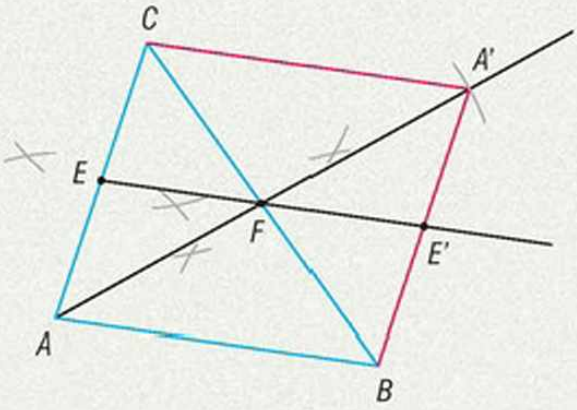
Vegyünk fel egy ABC háromszöget! Szerkesszük meg az AC oldal E és a BC oldal F felezőpontját, majd tükrözzük a háromszöget és az E pontot az F pontra! Milyen alakzat az eredeti és a képháromszög egyesítése? Mit mondhatunk az EF szakaszról?

Megoldás

Mivel a középpontos tükrözésnél szakasz és képe párhuzamos, ezért AB párhuzamos CA'-vel és AC párhuzamos BA'-vel. Ebből következik, hogy az egyesített $ABA'C$ négyszög paralelogramma.



Szerkesztés:

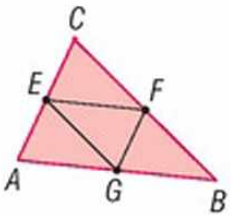


Az AC oldal E felezőpontjának E' képe a középpontos tükrözés során az $A'C'$ oldal felezőpontja lesz. Ezért az $ABA'C$ paralelogrammának az EE' szakasz középvonala, így EE' párhuzamos AB-vel, és $EE' = AB$.

A középpontos tükrözés miatt az EE' szakasznak F felezőpontja, ezért EF szakasz is párhuzamos AB-vel, és $EF = FE'$, így $EF = \frac{AB}{2} = \frac{EE'}{2}$.



DEFINÍCIÓ: A háromszög középvonalának nevezzük a háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakaszt.



Minden háromszögnek három középvonala van.

A 2. példa megoldása során azt kaptuk, hogy a háromszög EF középvonala párhuzamos az AB oldallal, és feleakkora: $EF = \frac{AB}{2}$.

Általánosan is igaz, hogy a háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakasz (középvonal) párhuzamos a háromszög harmadik oldalával, és hossza ezen oldal hosszának felével egyenlő.

$$EF = \frac{AB}{2}$$

$$FG = \frac{AC}{2}$$

$$GE = \frac{BC}{2}$$



Van-e olyan háromszög, amelynek középvonalai 1 cm, 2 cm és 3 cm hosszúak?

3. példa

Egy háromszög három középvonalának hossza: 3 cm, 4 cm, 6 cm. Számítsuk ki a háromszög kerületét!

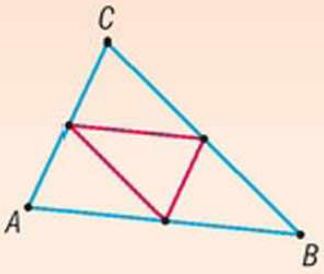
Megoldás

A háromszög mindegyik oldala kétszer olyan hosszú, mint a megfelelő középvonal. Így a háromszög oldalhosszai: 6 cm, 8 cm, 12 cm.

A háromszög kerülete: $K = 6\text{ cm} + 8\text{ cm} + 12\text{ cm} = 26\text{ cm}$.

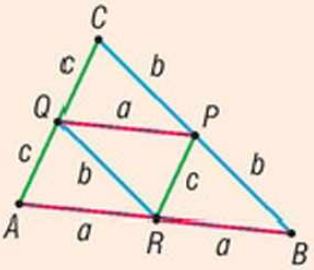
4. példa

Az ABC háromszöget szétvágtuk a középvonalai mentén. A középvonalak által meghatározott háromszög kerülete 10 cm. Számítsuk ki a levágott háromszögek kerületét!

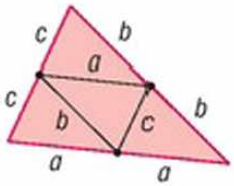


Megoldás

Legyenek P, Q és R a megfelelő oldalak felezőpontjai az ábrának megfelelően! Bármely középvonal hossza feleakkora, mint a szemben lévő oldal, ezért



$$AR = RB = PQ = a,$$
$$BP = PC = QR = b, \text{ és}$$
$$CQ = QA = RP = c.$$



Így $K_{QPC} = a + b + c = K_{PQR} = 10\text{ cm}$,
$K_{ARQ} = a + b + c = K_{PQR} = 10\text{ cm}$,
$K_{RBP} = a + b + c = K_{PQR} = 10\text{ cm}$.

A középvonalak négy egyenlő kerületű háromszögre bontják az eredeti háromszöget. Ezek kerülete 10–10 cm.

A trapéz középvonala

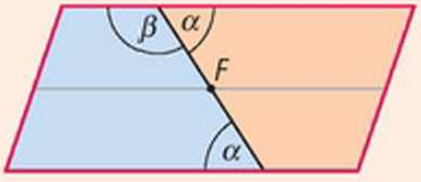


5. példa

Vágjunk ki több egybevágó, színes trapézt! Lefedhető-e elég sok ilyen trapézzal a füzetlap úgy, hogy ne maradjon hézag, és a trapézok ne fedjék egymást? (A füzetlap szélén lelóghatnak.)

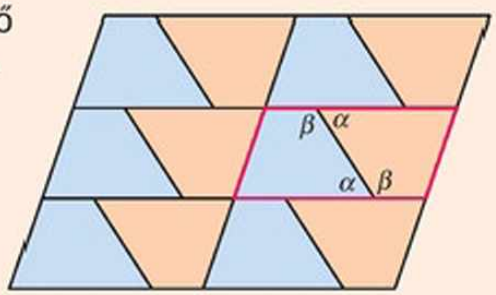
Megoldás

Két egybevágó trapézt illesszünk egymás mellé az ábra szerint! Ezek egymás tükörképei lesznek a közös oldaluk F felezőpontjára.



Mivel a trapéz egy száron fekvő szögeinek összege $\alpha + \beta = 180°$, így a két – piros keretbe rajzolt – trapéz együtt paralelogrammát alkot.

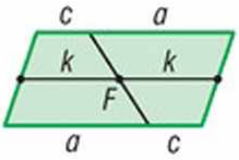
Ezekkel a paralelogrammákkal lefedhető a sík.



Az 5. példa alapján látható, hogy ha egy trapézt az egyik szárának felezőpontjára tükrözünk, akkor a trapéz és a tükörképe együtt egy paralelogrammát alkot.

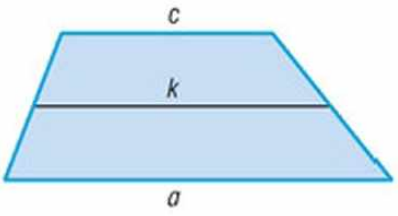
Ennek a paralelogrammának a középvonala egyenlő

- egyrészt a paralelogramma vele párhuzamos oldalával, ami a trapéz két alapjának összege;
- másrészt a trapéz középvonalának kétszeresével.



Így a trapéz alapokkal párhuzamos középvonalának hossza az alapok összegének felével egyenlő.

$$k = \frac{a + c}{2}.$$





A trapéz másik középvonaláról általában semmit nem tudunk mondani.

Feladatok

1. Vágjunk szét egy 4 és 6 cm oldalú paralelogrammát a két középvonala mentén!
   a) Mekkora a négy darab kerületének összege?
   b) A keletkezett négy darabból rakjunk össze különböző négyszögeket, és számítsuk ki a kerületüket!

2. Tükrözzünk egy paralelogrammát az egyik középvonalának egyenesére! Milyen sokszöget alkot az eredeti paralelogramma a képével együtt?

3. Tükrözzünk egy háromszöget mindhárom oldalának felezőpontjára! Milyen alakzat az eredeti és a három képháromszög egyesítésével kapott alakzat? A választ indokoljuk!

4. Egy háromszög oldalainak hossza
   a) 4 cm; 8 cm; 9 cm; *b)* 5 cm; 6,5 cm; 10 cm; *c)* 11 cm; 6 cm; 13 cm.
   Milyen hosszúak a háromszög középvonalai?

5. Megrajzolható-e egy háromszög és három középvonala a ceruza felemelése nélkül egy vonallal úgy, hogy mindegyik szakaszon pontosan egyszer haladunk végig? Milyen hosszú ez a vonal, ha az eredeti háromszög oldalainak hossza
   a) 5 cm; 6 cm; 7 cm; *b)* 11,8 cm; 13,2 cm; 17 cm?

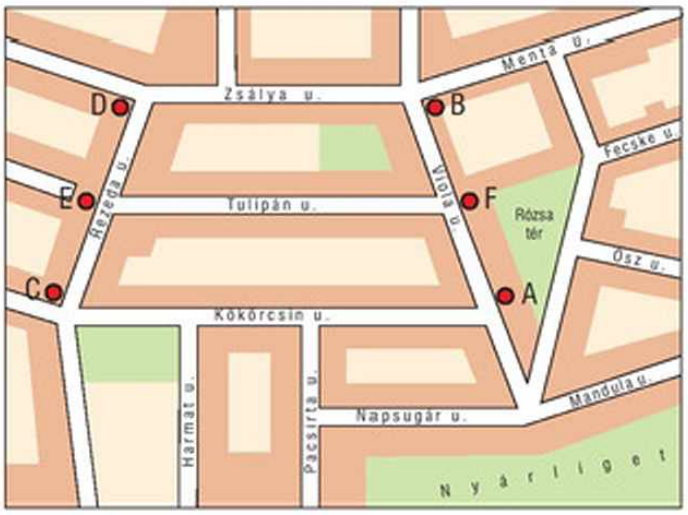
6. Egy háromszög kerületének és három középvonala hosszának összege 27 cm. Mekkora a háromszög kerülete?

7. Szerkesszük meg a háromszöget, ha középvonalainak hossza
a) 2 cm; 2 cm; 3 cm; *b)* 2 cm; 3 cm; 4 cm; *c)* 2 cm; 3 cm; 5 cm!

8. Egy háromszög két középvonalának hossza 2 cm, illetve 3 cm, az általuk közrezárt szög 60°-os. Szerkesszük meg a háromszöget!

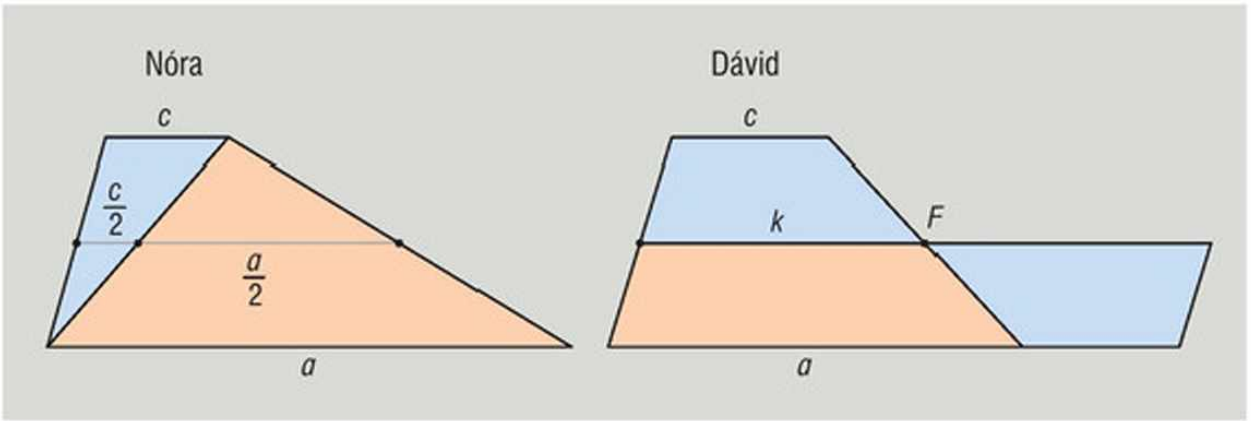
9. Adjuk meg az összes olyan háromszög oldalainak hosszát, amelynek középvonalai centiméterben mérve egész számok, és két középvonalának hossza 2 cm, illetve 5 cm!

10. András, Flóra, Bori, Cili, Edit és Dóri a térképen jelölt helyeken lakik. A Zsálya utca párhuzamos a Kökörcsin utcával. Flóra félúton lakik András és Bori lakása között, Edit pedig félúton Dóri és Cili lakása között. Dóri ugyanolyan messze lakik Cilitől, mint András Boritól, ez a távolság 450 m. Edit 540 m-re lakik Flórától. Húsvétkor András mindegyik lányhoz elmegy locsolkodni. Mekkora utat tesz meg amíg hazaér, ha a legrövidebb útvonalat választja, és másfelé nem megy?



11. Egy trapéz egyik alapja 6 cm-rel hoszabb a másiknál, középvonala 7 cm. Milyen hosszúak a trapéz alapjai?

12. Nóra és Dávid a trapéz középvonalára vonatkozó összefüggés magyarázatához az alábbi ábrákat készítette. Találjuk ki, milyen magyarázat tartozhatott az ábrákhoz!



Rejtvény

9 gyufaszálból állítsunk össze olyan ábrát, amelyen 5 háromszög látható!

7. Vegyes feladatok

1. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, és melyik hamis!
   a) Van középpontosan szimmetrikus háromszög.
   b) A deltoid középpontosan szimmetrikus négyszög.
   c) Van olyan deltoid, amelyik középpontosan szimmetrikus.
   d) Ha egy négyszög tengelyesen is és középpontosan is szimmetrikus, akkor rombusz.
   e) Ha egy paralelogramma tengelyesen is szimmetrikus, akkor rombusz vagy téglalap.
   f) Minden szabályos sokszög középpontosan szimmetrikus.
   g) Van olyan szabályos sokszög, amelyik középpontosan szimmetrikus.

2. Vegyünk fel egy ABC háromszöget, és a háromszögön kívül egy pontot! Tudjuk, hogy ez a pont *a)* az A; *b)* a B; *c)* a C pont középpontos tükörképe.
   Szerkesszük meg mindhárom esetben a tükrözés középpontját, és tükrözzük a háromszöget a megfelelő pontra!

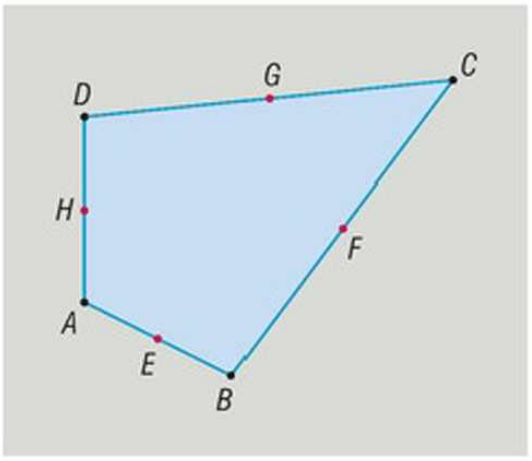
3. A koordináta-rendszerben az $A(-2;\ 1)$ és $B(-1;\ 3)$ pontok egy, az origóra ($(0;\ 0)$ pontra) szimmetrikus $ABCD$ négyszög szomszédos csúcsai. Számítsuk ki a C és D pontok koordinátáit.

4. Adottak a koordináta-rendszerben az $A(-2;\ 2)$, $B(0;\ 4)$, $C(4;\ 0)$ pontok. Adjuk meg a D pont koordinátáit úgy, hogy az $ABCD$ négyszög középpontosan szimmetrikus legyen!

5. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, és melyik hamis!
   a) A paralelogramma szemközti szögei egyenlők.
   b) Van olyan trapéz, amelynek pontosan három derékszöge van.
   c) Nincs olyan háromszög, amelynek nincs hegyesszöge.
   d) Van olyan trapéz, amelynek két-két szöge egyenlő.

*6. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a három oldalának felezőpontja! (Adott a papíron három nem egy egyenesre illeszkedő pont.)

7. Az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjai E, F, G és H az ábrának megfelelően. Igazak-e a következő állítások? (Válaszainkat indokoljuk!) (➡)
   a) EF párhuzamos AC átlóval és $EF = \frac{AC}{2}$.
   b) HG párhuzamos AC átlóval és $HG = \frac{AC}{2}$.
   c) EH párhuzamos BD átlóval és $EH = \frac{BD}{2}$.
   d) FG párhuzamos BD átlóval és $FG = \frac{BD}{2}$.



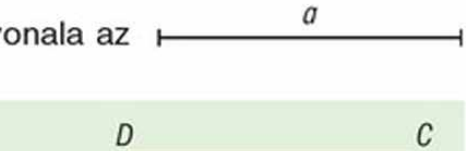
8. Mit mondhatunk az előző ábrán látható $EFGH$ négyszögről? Állításunkat indokoljuk!

*9. Mit mondhatunk arról a négyszögről, amelyben az oldalfelező pontok által meghatározott négyszög *a)* rombusz; *b)* téglalap; *c)* négyzet? Állításainkat indokoljuk!

10. Igaz-e, hogy bármely négyszög középvonalai felezve metszik egymást? Válaszunkat indokoljuk!

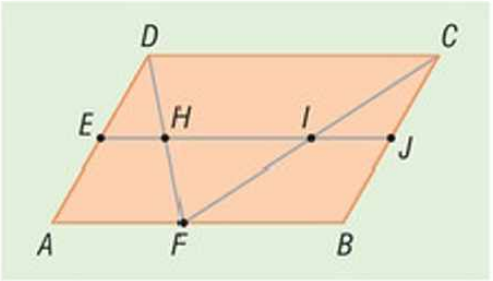
11. Egy rombusz egyik belső szöge kétszerese a másiknak.
a) Határozzuk meg a rombusz szögeinek a nagyságát!
b) Írjuk fel a rombusz oldalának és rövidebb átlójának arányát!

12. Szerkesszünk szabályos háromszöget, ha a középvonala az a szakasz!



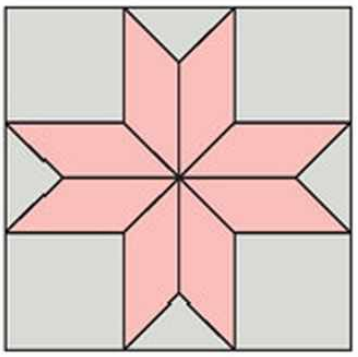
13. Egy $ABCD$ paralelogramma AB oldalán vegyünk fel egy tetszőleges F pontot! Jelölje E az AD, H a FD, I az FC, J pedig a BC szakasz felezőpontját!

Igazoljuk, hogy $EH + IJ = HI$! (➡)



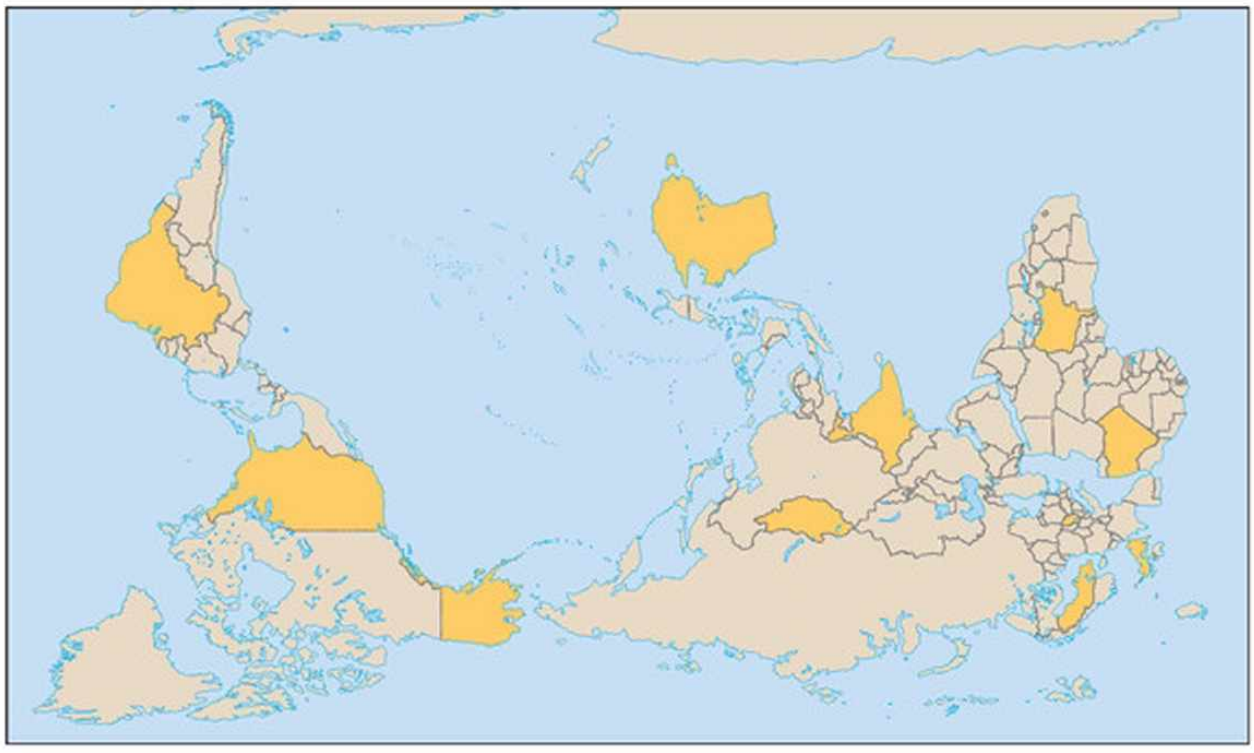
14. Luca karácsonyra foltmozaikpárnát szeretne készíteni. Az ábrán látható virágmintát 8 egybevágó paralelogrammából kell összeállítani, a párna többi darabját különböző anyagokból vágja ki.

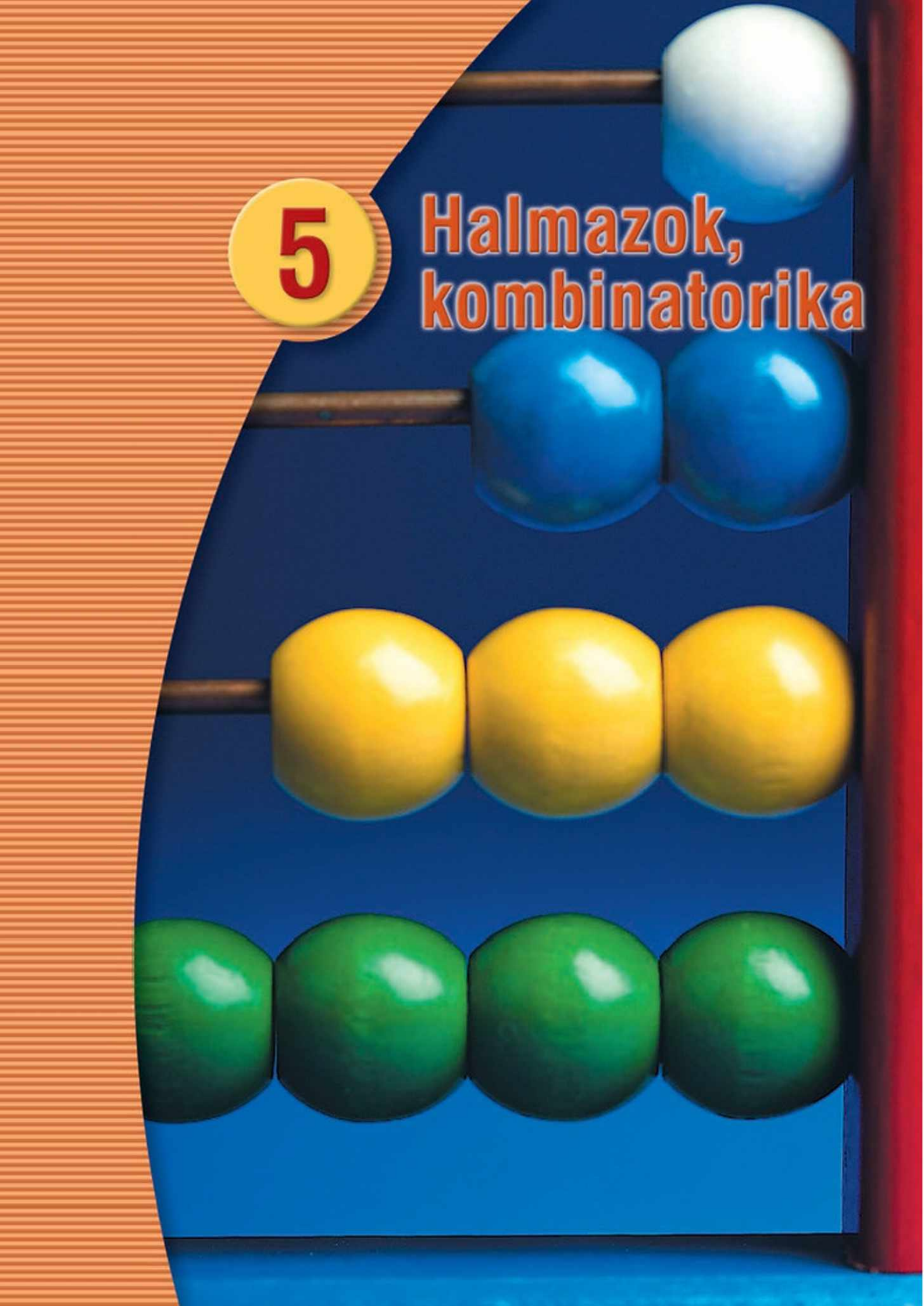
Mekkorák az egyes alakzatok szögei? (➡)



15. Egy körhintára 2 piros, 2 zöld és 2 kék autót szerelnek úgy, hogy az azonos színű autók egymás középpontos tükörképei legyenek. Hányféle körhinta készíthető így?

16. Milyen érdekességet fedezhetünk fel a következő térképen? Azonosítsunk rajta minél több országot!





5 Halmazok, kombinatorika

1. Halmazok (részhalmazok)



Magyarországot közigazgatásilag megyékre osztották. Mindegyik településről el lehet dönteni, hogy melyik megyébe tartozik. Soroljuk fel megyénk néhány települését!

1. példa

Döntsük el, hogy az alábbi magyarországi települések közül melyik van Csongrád megyében, és melyik nem!

Kecskemét; Békéscsaba; Szeged; Ópusztaszer; Hódmezővásárhely; Kaposvár; Szentes; Makó; Veszprém.

Megoldás

Csongrád megyei települések:

Szeged; Ópusztaszer; Hódmezővásárhely; Szentes; Makó.

Nem Csongrád megyei települések:

Kecskemét; Békéscsaba; Kaposvár; Veszprém.

Matematikában a **halmaz** szót dolgok összességére szoktuk alkalmazni, ezek a dolgok a **halmaz elemei.** Valamely dolgok összességét akkor tekintjük halmaznak, ha bármely dologról el lehet dönteni, hogy eleme a halmaznak vagy nem.

A *szép települések* nem alkotnak halmazt, mert nem lehet egyértelműen eldönteni, hogy egy település szép-e.

Az 1. példában a magyarországi települések halmazának néhány elemét soroltuk fel. Mindegyikről el lehet dönteni, hogy eleme-e a Csongrád megyei települések halmazának.

2. példa

Az alábbi szavak mindegyikből kihagytuk ugyanazt a hárombetűs szót. Melyik ez a szó?

___óra; al___; ta___; ___ó; a___at.

Megoldás

Próbálgatással megkapjuk, hogy a *kar* szó betűi a *karóra, alkar, takar, karó, akarat* szavak mindegyikében benne vannak.

Írjuk fel a *karóra* szó betűinek halmazát! Ez a halmaz: $\{k; a; r; ó\}$ megegyezik a *karó* és a *róka* szavak betűinek halmazával. A halmazban minden elem csak egyszer szerepel, és az elemek sorrendje nem számít.

A halmazt megadhatjuk:

- azokkal a közös tulajdonságokkal, amelyek alapján a halmaz elemei egyértelműen meghatározhatók (például „a magyarországi települések halmaza”);
- a halmaz elemeinek felsorolásával (például $\{k; a; r; ó\}$).

Jelölések:

A halmazokat általában nyomtatott nagybetűvel szoktuk jelölni: A, B, C, …

Például a *karóra* szó betűinek halmaza $B = \{k; a; r; ó\}$.

A halmazok elemeit felsoroláskor kapcsos zárójelbe tesszük.

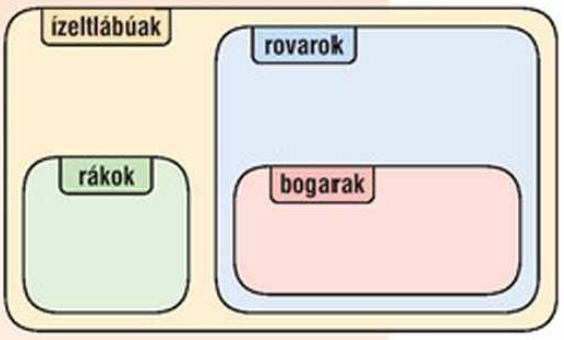
A k betű eleme a *karóra* szó betűi halmazának: $k \in \{k; a; r; ó\}$.

A p betű nem eleme a *karóra* szó betűi halmazának: $p \notin \{k; a; r; ó\}$ vagy $p \notin B$.

A 7-nél nagyobb számjegyek halmaza: $\{n \mid n > 7; n \text{ számjegy}\} = \{8; 9\}$.

3. példa

Az állatok országának néhány halmazát ábrázoltuk.



a) Helyezzük el a megfelelő halmazrészben a következő fajokat:

folyami rák, káposztalepke, májusi cserebogár, nappali pávaszem, szarvasbogár, széleslábú szitakötő, koronás keresztespók!

b) Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, és melyik hamis!

- Minden bogár rovar.
- Van olyan rovar, amelyik nem bogár.
- Minden ízeltlábú rák.
- Van olyan rák, amelyik nem ízeltlábú.

Biológiában az állatokat és a növényeket jellemző tulajdonságaik alapján csoportosítjuk. Ezek a csoportok is halmazok.

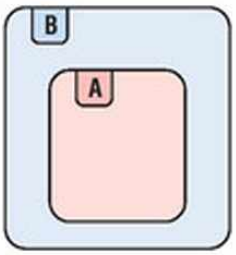


Megoldás

a)



b)
- *Minden bogár rovar.*
  Igaz, mert minden bogár rendelkezik a rovarokat meghatározó tulajdonságokkal. A bogarak halmazának minden eleme eleme a rovarok halmazának is.
- *Van olyan rovar, amelyik nem bogár.*
  Igaz, mert például a széleslábú szitakötő rovar, de nem bogár.
- *Minden ízeltlábú rák.*
  Hamis, mert például a koronás keresztespók ízeltlábú, de nem rák, azaz van olyan ízeltlábú, amelyik nem rák. Ez azt jelenti, hogy nem igaz, hogy minden ízeltlábú rák.
- *Van olyan rák, amelyik nem ízeltlábú.*
  Hamis, mert minden ráknak megvannak az ízeltlábúakra jellemző tulajdonságai, azaz minden rák ízeltlábú. Ez azt jelenti, hogy nem igaz, hogy van olyan rák, amelyik nem ízeltlábú.



$A \subseteq B$

Az ábra alapján látható, hogy az ízeltlábúak halmaza tartalmazza a rovarok halmazát, vagyis a rovarok halmaza része az ízeltlábúak halmazának.

DEFINÍCIÓ: Az *A* halmazt a *B* halmaz részhalmazának nevezzük, ha *A* minden eleme a *B*-nek is eleme. Jele: $A \subseteq B$. (*A* részhalmaza *B*-nek.)

A halmazokat jól szemléltethetjük a fenti feladatban szereplőhöz hasonló halmazábrákkal. Ezek segítenek a feladatok megoldásakor is.

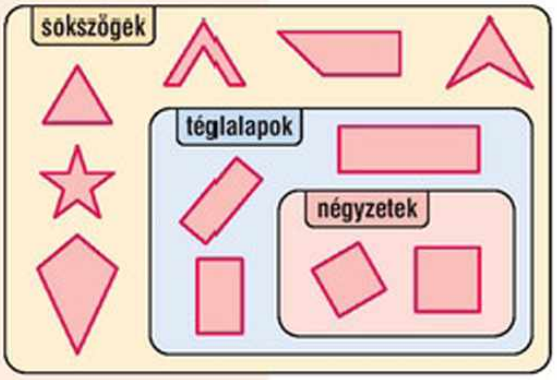
4. példa

Domi papírcsíkokra felírta a MINDEN; VAN OLYAN; AMELYIK; AKKOR; NEM; HA EGY NÉGYSZÖG; TÉGLALAP; NÉGYZET szavakat (több példányban), majd igaz állításokat rakott ki belőlük. Zoli odasettenkedett, és egy-egy mondatban néhány szót felcserélt. Így most ezek vannak kirakva:

1. MINDEN TÉGLALAP NÉGYZET.
2. VAN OLYAN TÉGLALAP, AMELYIK NEM NÉGYZET.
3. HA EGY NÉGYSZÖG TÉGLALAP, AKKOR NÉGYZET.

Hogyan rakta ki Domi a papírcsíkokat eredetileg?

Megoldás



Mivel definíciója szerint a négyzet olyan téglalap, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú, ezért minden négyzet téglalap. A négyzetek halmaza részhalmaza a téglalapok halmazának.

1. A „MINDEN TÉGLALAP NÉGYZET." állítás hamis, mert van olyan téglalap, amelyik nem négyzet. Zoli összecserélte a TÉGLALAP és NÉGYZET szavakat. Helyesen: MINDEN NÉGYZET TÉGLALAP.

2. Az a téglalap, melynek szomszédos oldalai különbözőek, nem négyzet, tehát a „VAN OLYAN TÉGLALAP, AMELYIK NEM NÉGYZET." állítás igaz. Ebben a mondatban Zoli nem cserélte fel a szavakat.

3. Mivel van olyan téglalap, amely nem négyzet, ezért abból, hogy egy négyszög téglalap, nem következik, hogy négyzet. Tehát a „HA EGY NÉGYSZÖG TÉGLALAP, AKKOR NÉGYZET." állítás hamis, Zoli összecserélte a TÉGLALAP és NÉGYZET szavakat. Helyesen: HA EGY NÉGYSZÖG NÉGYZET, AKKOR TÉGLALAP.

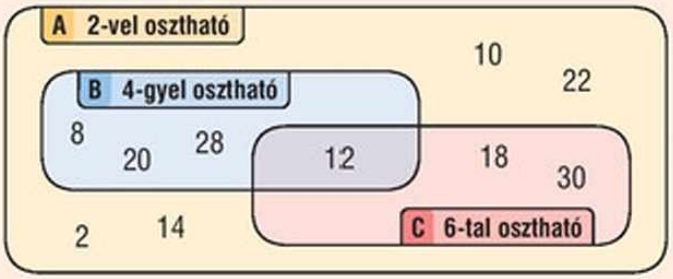
Készítsük el a feliratokat, és rakjunk ki állításokat! Melyik igaz, és melyik nem?

5. példa

Ábrázoljuk a következő halmazokat halmazábrán, és döntsük el, melyik halmaz melyiknek a részhalmaza! Írjunk természetes számokat a megfelelő halmazrészekbe!

A = {2-vel osztható természetes számok halmaza};
B = {4-gyel osztható természetes számok halmaza};
C = {6-tal osztható természetes számok halmaza}.

Megoldás



Minden 4-gyel osztható szám osztható 2-vel is, ezért B részhalmaza A-nak ($B \subseteq A$). Ezt úgy is mondhatjuk, hogy: Ha egy természetes szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel is.

Minden 6-tal osztható szám osztható 2-vel is, ezért C részhalmaza A-nak ($C \subseteq A$). Ezt úgy is mondhatjuk, hogy: Ha egy természetes szám osztható 6-tal, akkor osztható 2-vel is.

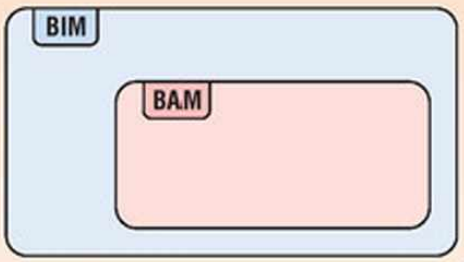
Mivel van olyan 4-gyel osztható szám, amelyik nem osztható 6-tal (például a 8), ezért a B nem részhalmaza C-nek.

Hasonlóan: van olyan 6-tal osztható szám, amely nem osztható 4-gyel (például a 18), ezért C sem részhalmaza B-nek.

$2 \in A$, de $2 \notin B$ és $2 \notin C$, ezért az A halmaz B-nek és C-nek sem részhalmaza.

6. példa

Írjunk igaz állításokat a BIM-ekről és BAM-okról a halmazábra alapján!



Megoldás

A halmazábra alapján:

- Minden BAM egyben BIM is.
- A BAM-ok halmaza részhalmaza a BIM-ek halmazának.
- Ha valami BAM, akkor BIM is.
- Nincs olyan BAM, amelyik nem BIM.

Feladatok

1. Tekintsük a következő halmazokat: A = {Európa országai}, B = {Amerika országai}, C = {Afrika országai}! Írjuk fel jelekkel, melyik halmazba tartoznak az alábbi országok!
   Málta; Tanzánia; Chile; Ghána; Kanada; Luxemburg; Mexikó; Nigéria; Egyiptom.
   Adjuk meg a halmazok 3-3 további elemét!

2. Arany János és Petőfi Sándor néhány költeményének címét soroltuk fel. Írjuk fel halmazjelöléssel, melyik vers melyik költő verseinek halmazába tartozik, ha
   A = {Arany János versei}, P = {Petőfi Sándor versei}!
   A walesi bárdok; A négyökrös szekér; Szeptember végén; Nemzeti dal; A fülemile; Családi kör.

3. Soroljuk fel az alábbi halmazok elemeit!
   A = {Magyarországgal szomszédos országok};
   B = {Aradi vértanúk};
   C = {A kőszívű ember fiai című regény címszereplői}.

4. Mi a közös tulajdonsága az alábbi halmaz elemeinek?
   a) {Merkúr; Vénusz; Föld; Mars; Jupiter; Szaturnusz; Uránusz; Neptunusz};
   b) {Rigoletto; Aida; Otelló; Don Carlos; A trubadúr; Az álarcosbál; Traviata};
   c) {hegedű; brácsa; cselló; nagybőgő; gitár; mandolin};
   d) {Munkácsy Mihály; Szinyei Merse Pál; Csontváry Kosztka Tivadar; Victor Vasarely}.

5. Melyik a kakukktojás? Rajzoljunk halmazábrát, és helyezzük el benne az elemeket!
   a) Szent István; Salamon; Szent László; IV. Béla; III. András; Mátyás király.
   b) Eiffel-torony; Tower; Szent Pál-székesegyház; British Museum; Buckingham-palota.

6. Soroljuk fel a következő halmazok elemeit!
   a) $\{n \mid n \in \mathbb{N};\ 21 \leq n < 30\}$;
   b) $\{b \mid b \in \mathbb{N};\ b$ legalább 2 és legfeljebb 8$\}$;
   c) $\{x \mid x \in \mathbb{Z};\ |x| \leq 5\}$;
   d) $\{a \mid a \in \mathbb{N};\ a$ kétjegyű, és osztható 11-gyel$\}$.

7. Rajzoljunk halmazábrát az állatok következő halmazaival: gerincesek (G), madarak (M), emlősök (E), rágcsálók (R)!

a) Helyezzük el az ábrában a következő állatokat!








b) Az alábbi állítások közül melyik igaz, és melyik hamis?

1. Van olyan emlős állat, amely nem rágcsáló.
2. Minden madár gerinces.
3. Van olyan emlős állat, amely nem gerinces.
4. Minden gerinces állat emlős.

c) Írjuk fel, hogy melyik halmaz melyiknek a részhalmaza!

8. Rajzoljunk halmazábrát a sokszögek, háromszögek, négyszögek halmazával, és döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, és melyik hamis!

a) Minden háromszög sokszög.

b) Van olyan négyszög, amely nem sokszög.

c) A háromszögek halmaza részhalmaza a sokszögek halmazának.

d) A háromszögek halmaza részhalmaza a négyszögek halmazának.

9. $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza. Írjuk fel jelekkel, hogy melyik halmaz melyiknek a részhalmaza!

10. Készítsük el a következő halmazok halmazábráját!

$A = \{5\text{-tel osztható természetes számok}\}$; $B = \{10\text{-zel osztható természetes számok}\}$;

$C = \{100\text{-zal osztható természetes számok}\}$.

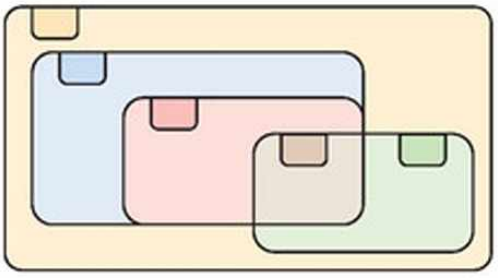
a) Írjunk számokat mindegyik halmazrészbe!

b) Döntsük el, hogy melyik állítás igaz, és melyik hamis!

1. Minden 5-tel osztható szám osztható 10-zel is.
2. Van olyan 5-tel osztható szám, amely osztható 10-zel is.
3. Van olyan 5-tel osztható szám, amely nem osztható 10-zel.
4. Ha egy természetes szám osztható 100-zal, akkor osztható 5-tel is.
5. Ha egy természetes szám osztható 5-tel, akkor osztható 100-zal is.

c) Írjuk fel, hogy melyik halmaz melyiknek a részhalmaza!

11. Írjuk a *négyszögek (N)* halmazábrájába a *trapéz (T), paralelogramma (P), rombusz (R), deltoid (D)* címkéket!



a) Rajzoljunk elemeket mindegyik halmazrészbe!

b) Írjuk fel, melyik halmaz melyiknek részhalmaza!

c) Döntsük el, melyik állítás igaz, és melyik hamis!

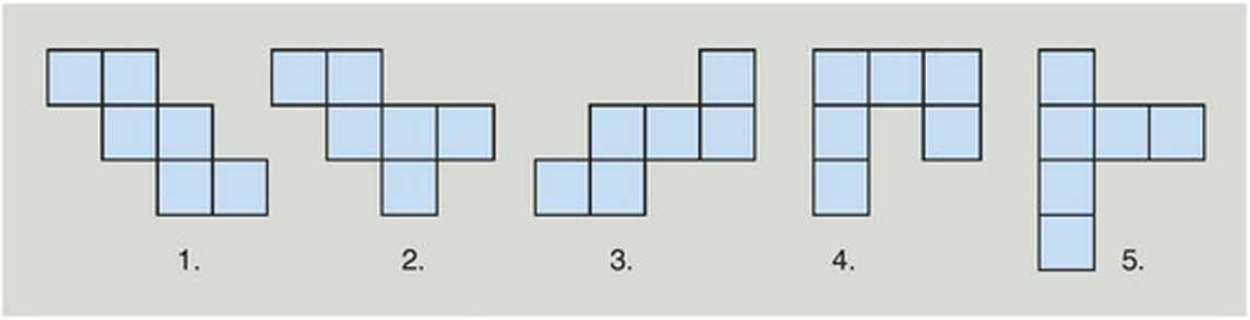
1. Minden rombusz deltoid.
2. Nem minden rombusz trapéz.
3. Minden paralelogramma trapéz.
4. Van olyan paralelogramma, amelyik nem rombusz.
5. Ha egy négyszög rombusz, akkor paralelogramma.
6. Van olyan rombusz, amelyik nem paralelogramma.

12. Készítsük el a következő halmazok halmazábráját!

A = {3-mal osztható természetes számok};
B = {6-tal osztható természetes számok};
C = {9-cel osztható természetes számok}.

a) Írjunk számokat mindegyik halmazrészbe!
b) Írjuk fel, hogy melyik halmaz melyiknek a részhalmaza!
c) Írjunk 2-2 igaz állítást, amely úgy kezdődik, hogy „Minden …"; „Van olyan …"; „Ha …. , akkor …"!

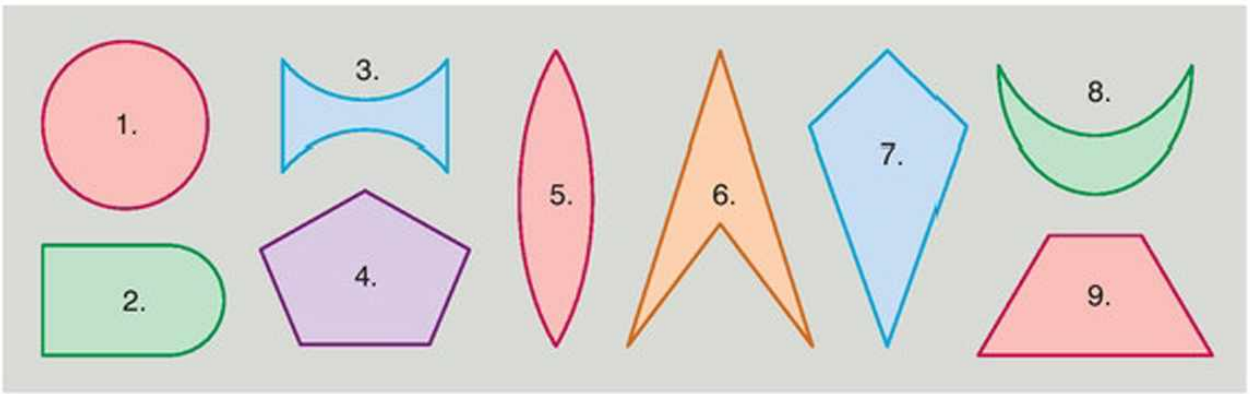
13. Milyen kapcsolat van a 6 egybevágó négyzetből álló sokszögek halmaza és a kockahálók halmaza között? Készítsünk halmazábrát, és helyezzük el az alábbi sokszögeket a megfelelő részben! Rajzoljunk további 2-2 megfelelő sokszöget mindegyik részbe!



14. A következő állítások közül melyik igaz, és melyik nem?

a) Van olyan négyszög, amelyet egy egyenessel fel lehet bontani egy háromszögre és egy ötszögre.
b) Van olyan négyszög, amelyet egy egyenessel fel lehet bontani két háromszögre és egy hatszögre.
c) Van olyan négyszög, amelyet egy egyenessel fel lehet bontani három háromszögre.

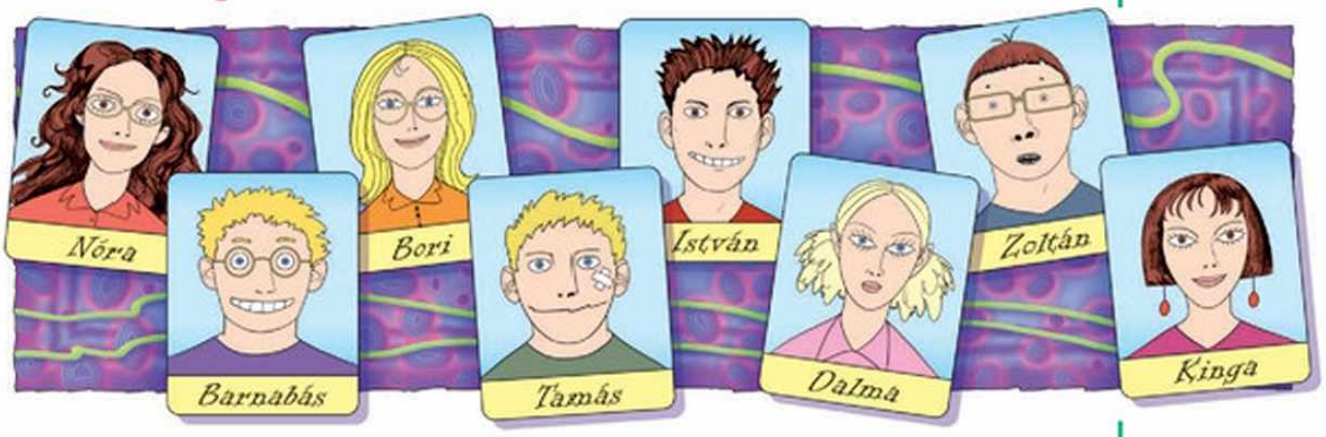
15. Rendezzük halmazokba az alábbi alakzatokat közös tulajdonságaik alapján, és készítsünk halmazábrát!



Rejtvény

Péter macskája mindig dorombol, mielőtt esik az eső. Ma dorombolt.
– Ez azt jelenti, hogy esni fog? – gondolkodik Péter. Segítsünk neki!

2. Komplementer halmaz



Kristóf és Bence barkochbáznak. Bence a képen látható gyerekek közül gondol valamelyikre. Legkevesebb hány kérdésből lehet kitalálni, hogy kire gondolt?

1. példa

Kristóf gondolt valakire a képen látható gyerekek közül. Ezután Bence kérdéseire így válaszolt:

Bence:	A gondolt személy fiú?	*Kristóf:*	Nem.
	Szőke?		Nem.
	Szemüveges?		Nem.

Kitalálhatja-e ezekből Bence, hogy kire gondolt Kristóf?

Megoldás

A gondolt személy *nem fiú*, tehát *lány. Nem szőke,* tehát *barna,* és *nem szemüveges*. Vagyis Kristóf arra gondolt, aki *lány, barna* és *nem szemüveges*. Ez a gyerek csak Kinga lehet.

A halmazokkal kapcsolatos játékokat játszhatjuk a logikai készlet lapjaival is.

Ezek közt van

- 3-féle alak: kör, négyzet, háromszög;
- 2-féle méret: kicsi, nagy;
- 4-féle szín: piros, kék, zöld, sárga;
- 2-féle elem: lyukas vagy teli.

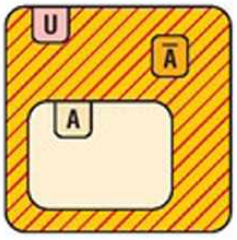
Figyeljük meg, hogy a gondolt személy

- nem volt a fiúk halmazában,
- nem volt a szőkék halmazában és
- nem volt a szemüvegesek halmazában.

Minden halmazhoz megadhatjuk a rajta kívül eső elemek halmazát. Ehhez azonban előbb meg kell állapodni abban, melyik az a legbővebb halmaz, melynek elemeit vizsgáljuk.

Alaphalmaznak nevezzük azt a halmazt, melynek minden vizsgált halmaz részhalmaza. Az alaphalmaz jele U (latin neve: univerzum).

Komplementer halmaz = kiegészítő halmaz



DEFINÍCIÓ: **Az *A* halmaz komplementer halmazának (kiegészítő halmazának) nevezzük az alaphalmaz azon elemeinek halmazát, amelyek az *A* halmaznak nem elemei. Jele: $\bar{A}$.** (*A* komplementere.)

Az alaphalmaz komplementere az **üres halmaz,** amelynek nincsen egy eleme sem. Az üres halmaz jele: ∅ vagy { }.

$\bar{U} = \varnothing$

2. példa

Jelöljük a számegyenesen a következő halmazokat kékkel és a komplementerüket pirossal, ha az alaphalmazt a számegyenes pontjainak megfelelő számok alkotják!

A = {3-nál kisebb számok};
B = {–1-nél nem kisebb számok};
C = {4-nél nagyobb vagy egyenlő számok}.

Megoldás

A 3-nál kisebb számok halmazának komplementere a 3-nál nem kisebb számok halmaza:

$\overline{A}$ = {3-nál nem kisebb számok} =
= {3-nál nagyobb vagy egyenlő számok}.

Az $\{x|x > 3\}$ jelölés jelentése: azon x számok halmaza, amelyekre teljesül, hogy $x > 3$.

$A = \{x|x < 3\}$ $\qquad$ $\overline{A} = \{x|x \geq 3\}$



A –1-nél nem kisebb számok halmazának komplementere a –1-nél kisebb számok halmaza:

$\overline{B}$ = {*–1-nél kisebb számok*}.

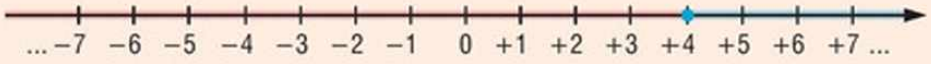
$\overline{B} = \{x|x < -1\}$ $\qquad$ $B = \{x|x \geq -1\}$



A 4-nél nagyobb vagy egyenlő számok halmazának komplementere a 4-nél kisebb számok halmaza:

$\overline{C}$ = {*4-nél kisebb számok*}.

$\overline{C} = \{x|x < 4\}$ $\qquad$ $C = \{x|x \geq 4\}$



3. példa

Melyik halmaznak komplementere

a) a negatív racionális számok halmaza, ha az alaphalmaz $\mathbb{Q}$;
b) a páros számok halmaza, ha az alaphalmaz $\mathbb{N}$;
c) a 3-mal osztva 1 vagy 2 maradékot adó természetes számok halmaza, ha az alaphalmaz $\mathbb{N}$;
d) a tengelyesen nem szimmetrikus háromszögek halmaza, ha az alaphalmaz a háromszögek halmaza?

Megoldás

Azt a tulajdonságot keressük, amely ha nem teljesül, éppen a kívánt halmazt kapjuk. Ez alapján a keresett halmazoka következők:

a) A negatív racionális számok halmazának a komplementere a nemnegatív racionális számok, azaz a 0 és a pozitív racionális számok halmaza.



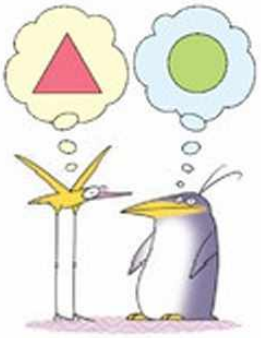
b) A páros természetes számok halmazának komplementere a nem páros természetes számok halmaza, azaz a páratlan természetes számok halmaza.



c) A számok 3-mal osztva 0, 1 vagy 2 maradékot adhatnak. Ha a maradék nem 1 vagy 2, akkor csak 0 lehet. Ez pedig azt jelenti, hogy a szám osztható 3-mal. Tehát a 3-mal osztva 1 vagy 2 maradékot adó számok halmazának a komplementere a 3-mal osztható számok halmaza.



d) A tengelyesen nem szimmetrikus háromszögek halmazának komplementere a tengelyesen szimmetrikus háromszögek, azaz az egyenlő szárú háromszögek halmaza.



A példa alapján megállapíthatjuk, hogy ha egy A halmaznak a B komplementere, akkor a B halmaznak is komplementere az A.

$$\text{Ha } B = \overline{A}, \text{ akkor } A = \overline{B}.$$

Ez azt is jelenti, hogy egy tetszőleges halmaz komplementerének komplementere maga a halmaz:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Játsszunk olyan barkochbát, amikor a válaszoló minden kérdésre hamis választ ad!

A komplementer halmazok kapcsolatban állnak az állítások tagadásával.

Állítás:

„Ez a természetes szám páros."

Az állítás tagadása:

„Ez a természetes szám nem páros."

Ha P azoknak a természetes számoknak a halmaza, amelyekre az állítás igaz, akkor a P halmaz komplementerébe ($\overline{P}$) azok a természetes számok tartoznak, amelyekre az állítás tagadása igaz.

P = {páros természetes számok}

$\overline{P}$ = {páratlan természetes számok}

4. példa

Anna, Marcsi és Zsuzsi egy-egy ajándékot vitt Kata születésnapjára. Kata elfelejtette, melyik ajándékot ki hozta. Így emlékezett:

1. A könyvet nem Anna hozta.
2. A CD-t nem Zsuzsitól kapta.
3. A DVD Anna ajándéka.

Melyik ajándékot kitől kapta, ha a három állítás közül csak egy igaz?

Megoldás

Ahhoz, hogy az összes lehetőséget megnézzük, sorba kell vennünk az eseteket aszerint, hogy melyik állítás az igaz. Minden esethez rajzoljunk egy táblázatot, amelyben az egyes állítások alapján ✗-szel jelöljük, hogy kinek mi az ajándéka és —-szal, ami nem az ajándéka!

1. eset: az 1. állítás igaz, a másik kettő hamis.

	A	M	ZS
k	—		—
cd	—	—	✗
dvd	—		—

(I) A könyvet nem Anna hozta. → A könyvet nem Anna hozta.
(H) A CD-t nem Zsuzsitól kapta. → A CD-t Zsuzsitól kapta.
(H) A DVD Anna ajándéka. → A DVD nem Anna ajándéka.

(A színek azt jelölik, hogy a táblázat melyik celláját tudjuk kitölteni.)

A táblázat szerint Anna nem vitt ajándékot. Ez ellentmondás, mert Kata mindenkitől kapott valamit. Tehát ez az eset nem lehetséges.

2. eset: a 2. állítás igaz, a másik kettő hamis.

	A	M	ZS
k	✗	—	—
cd	—	✗	—
dvd	—	—	✗

(H) A könyvet nem Anna hozta. → A könyvet Anna hozta.
(I) A CD-t nem Zsuzsitól kapta. → A CD-t nem Zsuzsitól kapta.
(H) A DVD Anna ajándéka. → A DVD nem Anna ajándéka.

A CD csak Marcsi, a DVD csak Zsuzsi ajándéka lehet. Ez egy lehetséges megoldás, mert mindenki vitt egy-egy ajándékot.

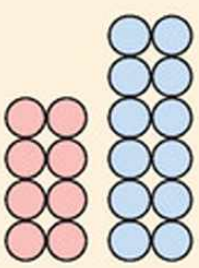
3. eset: a 3. állítás igaz, a másik kettő hamis.

	A	M	ZS
k	✗	—	—
cd	—		✗
dvd	✗		

(H) A könyvet nem Anna hozta. → A könyvet Anna hozta.
(H) A CD-t nem Zsuzsitól kapta. → A CD-t Zsuzsitól kapta.
(I) A DVD Anna ajándéka. → A DVD Anna ajándéka.

A táblázat szerint Anna két ajándékot vitt, ez ellentmondás.

Tehát csak a 2. eset lehetséges: Kata a könyvet Annától, a CD-t Marcsitól, a DVD-t pedig Zsuzsitól kapta.



*5. példa

Rakjunk ki két kupacot piros és kék korongokból úgy, hogy a bal oldali kupacban 8 piros, a jobb oldaliban pedig 12 kék korong legyen! Tegyünk át a jobb oldali kupacból 6 kék korongot a bal oldali kupacba! Keverjük össze a bal oldalon a korongokat! Tegyünk vissza csukott szemmel 6 korongot a bal oldalról a jobb oldalra!

Melyik szám a nagyobb: a bal oldali kupacban a kék korongok száma vagy a jobb oldali kupacban a piros korongok száma?

Megoldás

Próbáljunk ki egy lehetőséget!

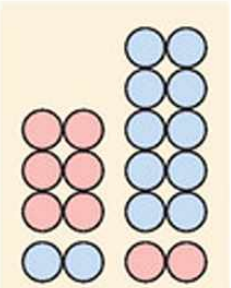
Az első átrakás után: bal oldal: 8 piros + 6 kék;
jobb oldal: 6 kék.

Ha például 2 pirosat és 4 kéket rakunk vissza, akkor

bal oldal: 6 piros + 2 kék;
jobb oldal: 2 piros + 10 kék.

Bal oldalon a kékek száma ugyanannyi (2), mint a jobb oldalon a pirosak száma. További eseteket kipróbálva ugyanerre az eredményre jutunk. Megindokoljuk, hogy ez a tapasztalat minden esetben érvényes.

A két oldalon a végén ugyanannyi korong van, mint az elején. A bal oldalról hiányzó pirosak helyére kékek kerültek. Ezeknek a helyén vannak a jobb oldalon a bal oldalról hiányzó pirosak. Tehát ugyanannyi kék van a bal oldalon, mint ahány piros a jobb oldalon.



Feladatok

1. Soroljuk fel a következő halmazok komplementereinek elemeit, ha az alaphalmaz a kétjegyű természetes számok halmaza!

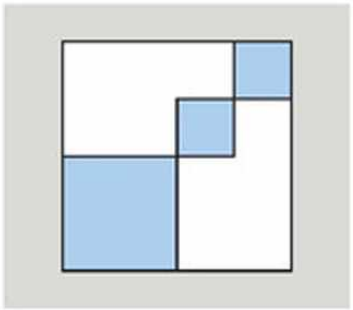
   $A = \{n \mid n$ 20-nál nagyobb$\}$; $B = \{n \mid n$-nek nincs 1-es számjegye$\}$;
   $C = \{n \mid n$ legfeljebb 90$\}$; $D = \{n \mid n$ számjegyei különbözők$\}$.

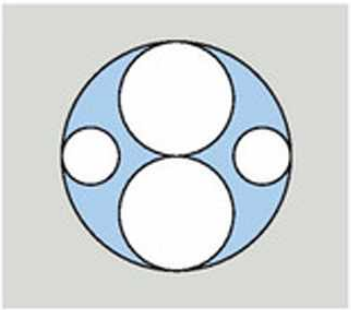
2. Keressünk az alábbi halmazok között olyan párokat, amelyek egymás komplementerei, ha az alaphalmaz a négyszögek halmaza!

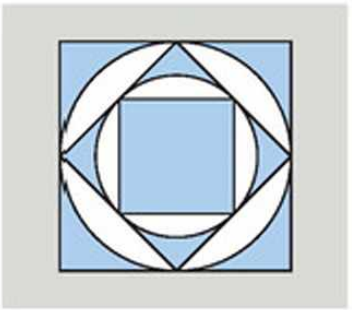
   $A = \{$konvex négyszög$\}$; $B = \{$deltoid$\}$; $C = \{$konkáv négyszög$\}$;
   $D = \{$rombusz$\}$; $E = \{$nem tengelyesen szimmetrikus négyszög$\}$;
   $F = \{$négyszög, melynek van két különböző oldala$\}$.

   Ábrázoljuk egy-egy halmazábrán a megtalált párokat, és rajzoljunk mindegyik halmazba elemeket!

3. Rajzoljuk le az alábbi ábrákat, és színezzük a kék részek komplementereit pirossal!

   a) 

   b) 

   c) 

4. Ábrázoljuk számegyenesen a következő számhalmazokat kékkel, ezek komplementerét pedig pirossal! (Az alaphalmaz a számegyenes pontjaihoz tartozó számok halmaza.)

a) $X = \{x | x < -0{,}5\}$; *b)* $Y = \{y | y \geq \frac{2}{3}\}$; *c)* $Z = \{z | z > 0\}$.

5. Dorka gondolt egy természetes számot, társai pedig kérdéseket tettek fel róla.

Eszter: 100-nál kisebb? *Dorka:* Nem.
Blanka: Páratlan? *Dorka:* Nem.
Hanna: Igaz, hogy 110-nél nem kisebb? *Dorka:* Nem.
Stella: 5-tel osztható? *Dorka:* Igen.

Hány természetes számra gondolhatott Dorka? (Dorka mindig igazat mond.)

6. Legyen E a legalább egy 1-es számjegyet tartalmazó háromjegyű számok halmaza!

a) Mely számok tartoznak az $\overline{E}$ halmazba, ha az alaphalmaz a háromjegyű számok halmaza?

b) Hány eleme van az E és az $\overline{E}$ halmazoknak külön-külön és együtt?

***7.** Éva, Ágota és Kati barátnők. Egyikük Szegeden, a másik Kecskeméten, a harmadik Veszprémben lakik. Egyikük németet, a másik angolt, a harmadik olaszt tanul. Ágota és Kati nem tanul olaszt. Ágota nem Szegeden lakik, a kecskeméti lány nem angolra jár, aki viszont Veszprémben lakik, az olaszt tanul. Hol lakik Kati, és milyen nyelven tanul?

***8.** Egy lány és egy fiú számítógépen beszélgetnek. „Én lány vagyok.” – mondja Gabi. „Én fiú vagyok.” – mondja Viki. Melyik állítás nem igaz az alábbiak közül, ha a két fiatal közül legalább az egyik hazudik?



A) Gabi lány.
B) Nem igaz, hogy Viki lány.
C) Viki fiú.
D) Gabi lány és Viki fiú.
E) Viki lány és Gabi fiú.
F) Nem igaz, hogy Gabi fiú.



***9.** Négy szerénység – Szeréna, Szergej, Szervác, Szeráf – szerényen ezt mondta:

Szeréna: Szergej a legszerényebb. *Szervác:* Nem én vagyok a legszerényebb.
Szergej: Szervác a legszerényebb. *Szeráf:* Nem én vagyok a legszerényebb.

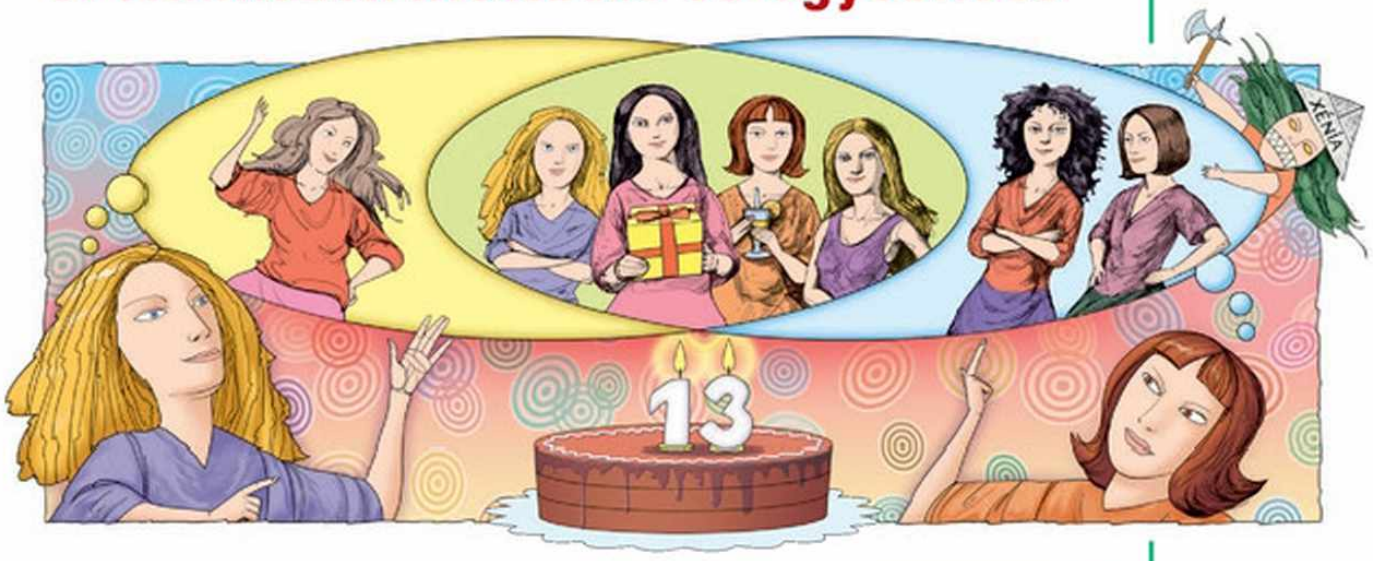
A négy állítás közül – mint utóbb szerényen kiderült – csak egy volt igaz. A négy szerénység közül ki a legszerényebb?

***10.** Az 52 lapos francia kártyát összekevertük, majd két egyforma csomagra szedtük szét. Melyik nagyobb szám: az egyik csomagban a pirosak (♦, ♥), vagy a másik csomagban a feketék (♣, ♠) száma?

Rejtvény

Géza, Norbi és Klári egymás melletti házakban lakik. Norbi nem közvetlenül Géza mellett lakik. A sárga ház melletti házban csak vizet isznak. A kék házban lakó kedvence az őszibarackié. Géza nem a zöld házban lakik, és legszívesebben kólát iszik. Ki milyen színű házban lakik, és mi a kedvenc itala?

3. Halmazok metszete és egyesítése



1. példa

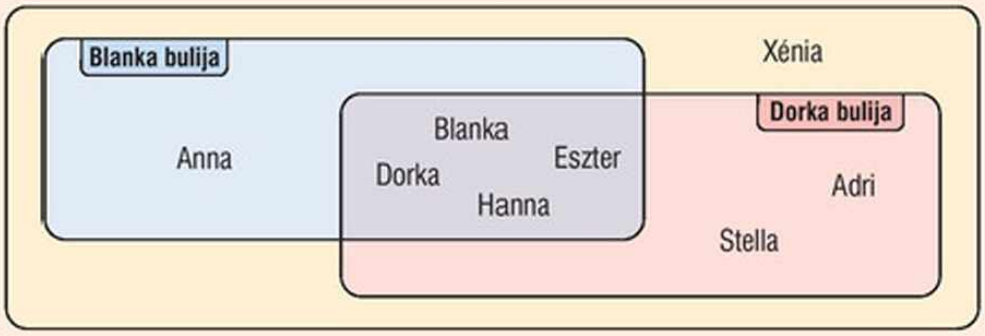
Blanka és Dorka barátnők, és mindketten szeptember 25-én születtek. Azon a napon mindketten születésnapi bulit rendeznek. Blanka Esztert, Hannát, Dorkát és Annát hívta meg, Dorka pedig Blankát, Esztert, Hannát, Adrit és Stellát. Xéniát egyik buliba sem hívták meg.

a) Kik azok, akik mindkét buliba hivatalosak?

b) A viták elkerülésére együtt ünneplik a születésnapjukat. Kik lesznek ott ezen a közös bulin?

Megoldás

Készítsünk halmazábrát a Blanka és a Dorka buliján részt vevő gyerekekkel!



Láthatjuk, hogy Annát csak Blanka hívta meg, Dorka nem. Adrit és Stellát csak Dorka hívta meg, Blanka nem, Xéniát pedig egyikük sem hívta meg.

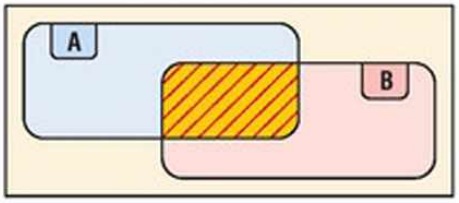
a) Azok hivatalosak mindkét buliba, akik mindkét halmaznak elemei: Blanka, Dorka, Eszter, Hanna.

b) A közös bulin azok lesznek ott, akik legalább az egyik halmazban benne vannak: Anna, Blanka, Dorka, Eszter, Hanna, Adri, Stella.

A halmazok között is definiálhatunk műveleteket, csakúgy, mint a számok között. Ezekkel az előbbi halmazrészek meghatározhatók.

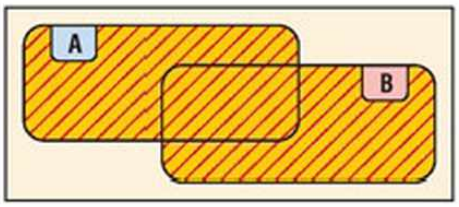
$A \cap B$

Definíció: *A* és *B* halmazok metszete (közös része) mindazon elemek halmaza, melyek mindkét halmaznak elemei. Jele: $A \cap B$. (*A* metszet *B*)



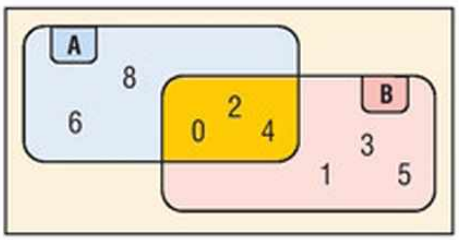
$A \cup B$

Definíció: *A* és *B* halmazok egyesítése (uniója) mindazon elemek halmaza, melyek legalább az egyik halmaznak elemei. Jele: $A \cup B$. (*A* unió *B*)



Ha például az alaphalmaz a számjegyek halmaza, *A* a páros számjegyek halmaza, *B* pedig a 6-nál kisebb számjegyek halmaza, akkor:

$A \cap B = \{0; 2; 4\}$;
$A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$.

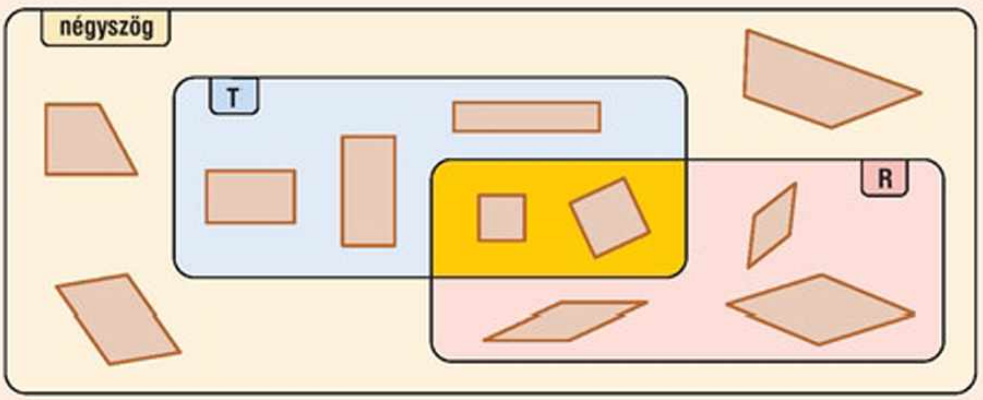


2. példa

Ábrázoljuk a téglalapok *T* és a rombuszok *R* halmazát a négyszögek halmazában! Milyen négyszögek tartoznak a $T \cap R$ és a $T \cup R$ halmazokba?

Matematikában a kötőszavaknak is nagy jelentőségük van, ezért nem mindegy, hogy ÉS-t vagy VAGY-ot mondunk. Ráadásul a VAGY használata eltér a köznyelvitől. Például a matematikában a téglalap vagy a rombusz lehet négyzet is, a köznyelv szerint azonban vagy csak az egyik, vagy csak a másik!

Megoldás



$T \cap R$ halmaz eleme minden olyan négyszög, amely téglalap és rombusz, azaz minden szöge és minden oldala is egyenlő, tehát négyzet.

$T \cup R$ halmaz eleme minden olyan négyszög, amely téglalap vagy rombusz, ezek (a megfelelő halmazrész színével jelölve):

$T \cap \bar{R}$ • azok a téglalapok, amelyek nem rombuszok: ▭;

$T \cap R$ • azok a téglalapok, amelyek rombuszok is, ezek a négyzetek: ▭;

$\bar{T} \cap R$ • azok a rombuszok, amelyek nem téglalapok: ▭.

3. példa

Ábrázoljuk halmazábrán a 6-tal osztható számok halmazát és a 6-tal nem osztható számok halmazát, ha K a 2-vel osztható, H a 3-mal osztható számok halmaza! (Alaphalmaz a természetes számok halmaza.)

Megoldás

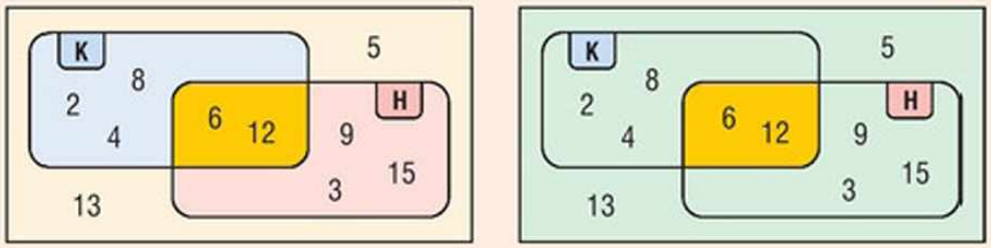
Készítsük el a 2-vel, 3-mal osztható számok halmazábráját!

6-tal osztható számok azok, amelyek oszthatók 2-vel és 3-mal, például 6; 12; ... : .

$K \cap H$

A 6-tal nem osztható számok halmaza a 6-tal osztható számok halmazának a komplementere: .

$\overline{K \cap H}$



6-tal nem osztható egy szám ,

- ha sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható, például 5; 13; ... : ; $\bar{K} \cap \bar{H}$
- ha osztható 2-vel, de nem osztható 3-mal, például 4; 8; ... : ; $K \cap \bar{H}$
- ha nem osztható 2-vel, de osztható 3-mal, például 3; 9; ... : . $\bar{K} \cap H$

Feladatok





1. Készítsünk halmazábrát az oroszlán és a jaguár tulajdonságaival! Írjuk be a megfelelő helyre a következő tulajdonságokat!
   2 méter körüli testhossz; farokbojt; sörény; foltos szőrzet; visszahúzható karmok; ragadozó életmód; hosszú fülek.

2. Egészítsük ki a szavakat a hiányzó betűkkel, majd írjuk halmazábrába úgy, hogy az egyik halmazba a *j*-t tartalmazó szavak, a másikba a *ly*-t tartalmazó szavak kerüljenek!
   var__ú; bé__eg; a__tó; re__té__; pocso__a; uszá__; fú__

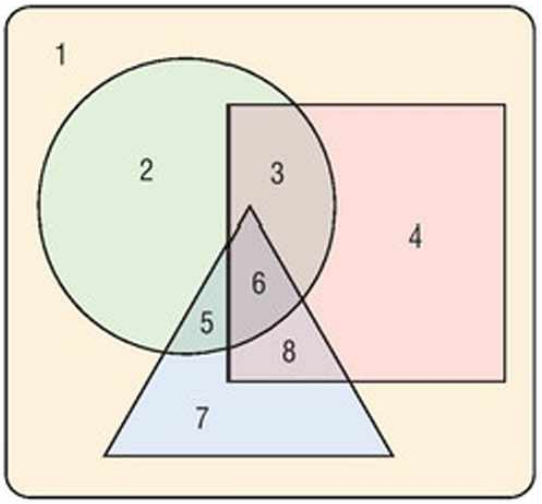
3. Legyen az A a fiúnevek halmaza, a B pedig a magánhangzóval kezdődő keresztnevek halmaza! Ábrázoljuk halmazábrán, és soroljuk fel az $A \cup B$ és az $A \cap B$ halmazok néhány elemét, ha az alaphalmaz: {András; Anna; Bence; Bori; Dóra; Csaba; Ernő; Imre; Orsolya; Márta; Miklós; Oszkár; Tímea; Szabolcs}!

4. Legyen az A a dobókockával dobható számok halmaza, B pedig az egyjegyű prímszámok halmaza! Soroljuk fel az $A \cap B$ és az $A \cup B$ halmazok elemeit, és ábrázoljuk halmazábrán, ha az alaphalmaz a számjegyek halmaza!

5. Legyen A azoknak a négyszögeknek a halmaza, amelyeknek minden szöge egyenlő, B pedig azoknak a négyszögeknek a halmaza, amelyeknek minden oldala egyenlő. Készítsünk halmazábrát, és rajzoljunk minden halmazrészbe elemeket, ha az alaphalmaz a négyszögek halmaza! Írjuk fel szöveggel a következő halmazokba eső négyszögek tulajdonságait: $\overline{A}$; $\overline{B}$; $A \cap B$; $A \cup B$!

6. Melyik az a szám, amely

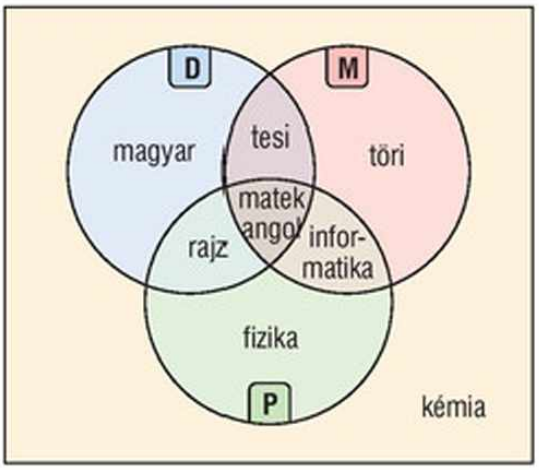
a) benne van a körben és a négyzetben, de nincs benne a háromszögben;
b) benne van a körben és a háromszögben, de nincs benne a négyzetben,
c) benne van a négyzetben és a háromszögben, de nincs benne a körben;
d) benne van a körben, a négyzetben és a háromszögben is;
e) csak a háromszögben van benne;
f) csak a négyzetben van benne;
h) csak a körben van benne;
i) sem a körben, sem a négyzetben, sem pedig a háromszögben nincs benne?



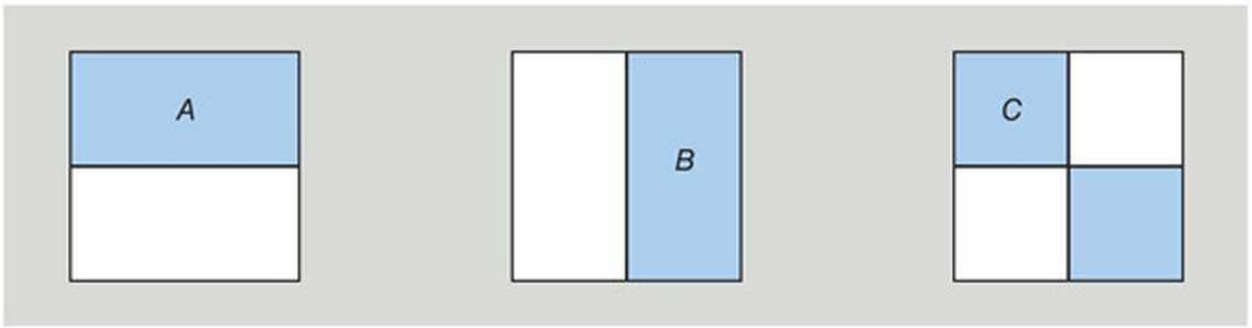
7. Dóri, Misi és Pali felírta egy-egy cédulára az öt kedvenc tantárgyát. A kedvenc tantárgyak halmazát a nevek kezdőbetűjével jelölve a következő halmazábrát kapták. (➡)

Melyek azok a tantárgyak, amelyek:

a) D-nek, M-nek és P-nek is elemei;
b) D-nek és M-nek elemei, de P-nek nem;
c) M-nek és P-nek elemei, de D-nek nem;
d) D-nek és P-nek elemei;
e) csak M-nek elemei;
f) P-nek elemei?



8. Egy négyzet pontjainak kékre színezett részhalmazai:



Ábrázoljuk a következő halmazokat!

a) $\overline{A}$; *b)* $A \cap B$; *c)* $A \cup B$; *d)* $B \cap C$; *e)* $B \cup C$; **f)* $A \cup \overline{C}$; **g)* $\overline{A} \cap C$.

9. A logikai készlet két lapjára gondoltam. A barkochba kérdései és a válaszok alapján találjuk ki, hogy melyik kettőre!

1. Egyforma színűek?	IGEN	6. Egyforma alakúak?	NEM
2. Van köztük kör?	IGEN	7. Van köztük négyzet?	NEM
3. Egyforma méretűek?	NEM	8. A kör nagy?	NEM
4. Egyforma lyukasságúak?	NEM	9. Amelyik nem kör, az teli?	IGEN
5. A színük piros vagy kék?	NEM	10. A színük sárga?	NEM

10. Legyen A a 4-gyel osztható természetes számok halmaza, B pedig a 6-tal osztható természetes számok halmaza. Készítsünk halmazábrát, színezzük a megfelelő halmazokat, és soroljuk fel néhány elemüket!

a) 4-gyel és 6-tal osztható számok halmaza;
b) 4-gyel vagy 6-tal osztható számok halmaza;
c) 4-gyel osztható, de 6-tal nem osztható számok halmaza;
d) 6-tal osztható, de 4-gyel nem osztható számok halmaza;
e) sem 4-gyel, sem 6-tal nem osztható számok halmaza.

11. Keressük meg a szükséges adatokat, és válaszoljunk a kérdésekre!

a) Utazhatott-e gőzhajóval II. Rákóczi Ferenc?
b) Beszélhetett-e telefonon Deák Ferenc és Eötvös József?
c) Készíthettek-e röntgenfelvételt Babits Mihály tüdejéről?
d) Gyújthatott-e gyufát Ady Endre?
e) Találkozhatott-e egymással Jókai Mór és József Attila?
f) Találkozhatott-e egymással Beethoven és Mozart?



Kiket ábrázolnak a képek? (➡)

12. Eszter Budapesten minden hétköznap reggel 7 órakor kel, 8-tól 17 óráig dolgozik, és este 11-kor fekszik le aludni. Bátyja, István New Yorkban él, és 6 óra időeltolódással ugyanilyen napirend szerint alszik és dolgozik. Tudnak-e telefonon beszélni egymással hétköznap úgy, hogy épp egyikük sem alszik és nem is dolgozik?

13. Legyen T a tengelyesen szimmetrikus négyszögek halmaza, Z pedig a trapézok halmaza! Készítsünk halmazábrát, és rajzoljunk mindegyik részbe négyszögeket! Írjuk le az egyes részekbe eső négyszögek tulajdonságait!

***14.** Jelölje a 36 osztóinak halmazát A, többszöröseinek halmazát B! A 48 osztóinak halmaza legyen C, a többszöröseinek halmaza D! Az alaphalmaz a 300-nál nem nagyobb természetes számok halmaza.

a) Írjuk fel az A; B; C; D; $A \cap C$; $B \cap D$; $A \cap B$; $B \cap C$ halmazok elemeit!
b) Mely halmazoknak eleme a 36 és a 48 legnagyobb közös osztója?
c) Mely halmazoknak eleme a 36 és a 48 legkisebb közös többszöröse?

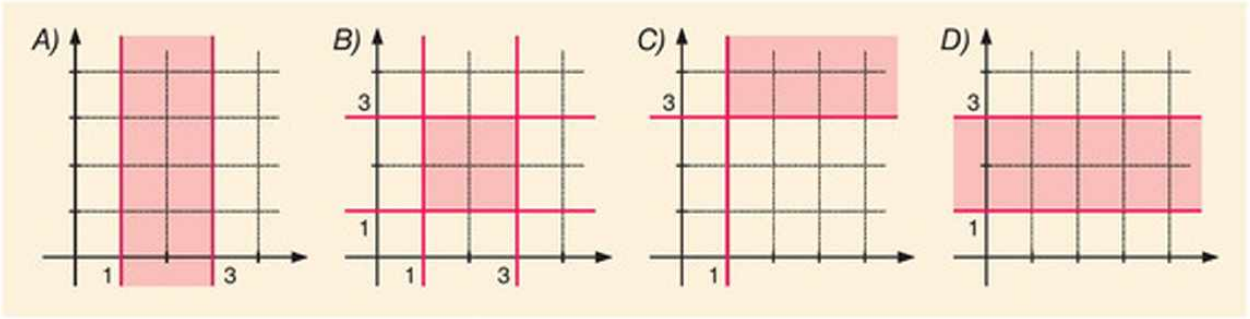
15. Adott három halmaz: $A = \{x \mid x \leq 3\}$; $B = \{x \mid x > -2\}$; $C = \{x \mid -1 \leq x < 4\}$, ahol az alaphalmaz a racionális számok halmaza.

Rajzoljunk számegyenest, és jelöljük különböző színekkel az alábbi halmazokat!

$\overline{A}$; $\overline{B}$; $\overline{C}$; $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cap C$; $A \cap B \cap C$.

***16.** Párosítsuk a koordináta-rendszerben színessel jelölt részekhez az őket meghatározó feliratokat!

1. $1 \leq x \leq 3$ és $1 \leq y \leq 3$; 2. $x \geq 1$ és $y \geq 3$; 3. $1 \leq x \leq 3$; 4. $1 \leq y \leq 3$.



***17.** Ábrázoljuk koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyekre teljesül, hogy

a) $x \geq 0$ és $y \leq 0$;

b) $x \leq 0$ és $y \leq 0$;

c) $2 \leq x \leq 5$ és $y \geq 0$;

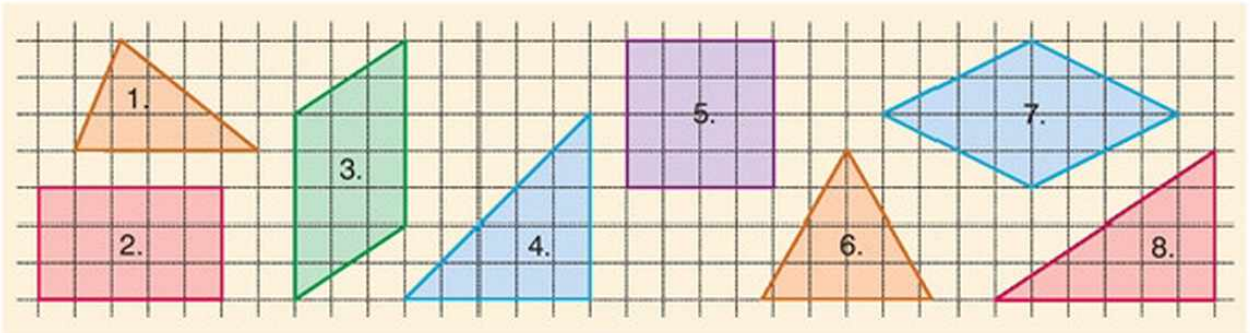
d) $-2 \leq x \leq 3$ és $1 \leq y \leq 5$!

***18.** Rajzoljunk le egy üres lapra egy háromszögvonalat és egy körvonalat! Jelöljük meg sárga színnel a háromszögvonal és a körvonal közös pontjait!

a) Mennyi lehet a sárga színnel megjelölt pontok legnagyobb száma?

b) Mennyi lehet a sárga pontok legnagyobb száma, ha az eddigieken kívül egy négyzetvonalat is rajzolunk, és sárgával jelöljük az előbbi vonalakkal közös pontjait?

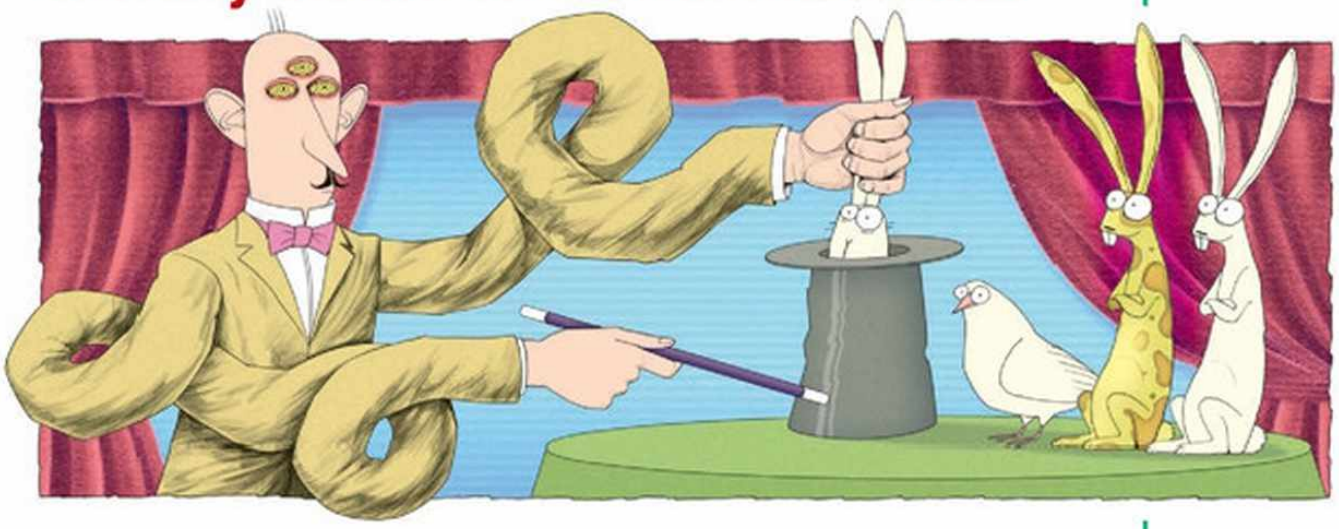
19. Barkochbázzunk a következő sokszögekkel! A lehető legkevesebb kérdést tegyük fel!



Rejtvény

Az éjszaka sötétjében egy keskeny és rozoga híd előtt 4 fiú, Benő, Tódor, Kázmér és Tihamér álldogál. A hídon egyszerre csak ketten tudnak átmenni, többet a híd nem bír el. Ugyanakkor az átkeléshez elemlámpa is szükséges, amiből csak egyet vittek magukkal. Ha egyedül mennének, akkor Benő 1 perc alatt, Tódor 2 perc alatt, Kázmér 5 perc alatt, Tihamér pedig csak 10 perc alatt érne át a hídon. Ha ketten mennek, akkor a lassabban haladónak a sebességével mennek mind a ketten. Mennyi az a legrövidebb idő, amely alatt mind a négyen át tudnak jutni a hídon?

4. Hány eleme van a halmazoknak?



1. példa

A bűvész cilinderében 5 nyúl és 4 fehér állat van, összesen 6 darab. Hogy lehet ez?

Megoldás

Látszólag ellentmondás, hogy a nyulak és a fehér állatok számának összege nagyobb, mint az állatok száma: $5 + 4 > 6$.

Nyulak = [fehér nyulak] + [nem fehér nyulak]

Fehér állatok = [fehér nyulak] + [fehér nem nyulak]

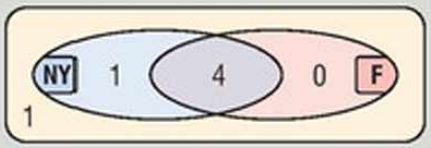
Így a nyulak és a fehér állatok összege:

[fehér nyulak] + [nem fehér nyulak] + [fehér nyulak] + [fehér nem nyulak]

Ebben az összegben *kétszer számoltuk* a fehér nyulakat, így lehet a nyulak és fehér állatok száma nagyobb az állatok számánál.

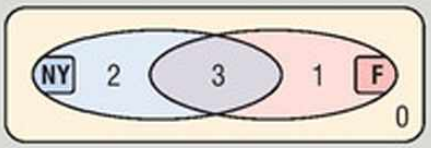
Készítsünk halmazábrát az előbbi példához, és keressük a fehér nyulak lehetséges számát!

Ha a fehér nyulak száma 4:



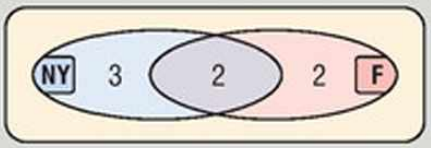
[1] + [4] + [0] + [1] = 6

Ha a fehér nyulak száma 3:



[2] + [3] + [1] + [0] = 6

2; 1; 0 fehér nyúl nem lehet:



[3] + [2] + [2] > 6

A halmazok elemszámának összeszámlálásakor figyelnünk kell azokra a részekre, melyeket többször számoltunk!

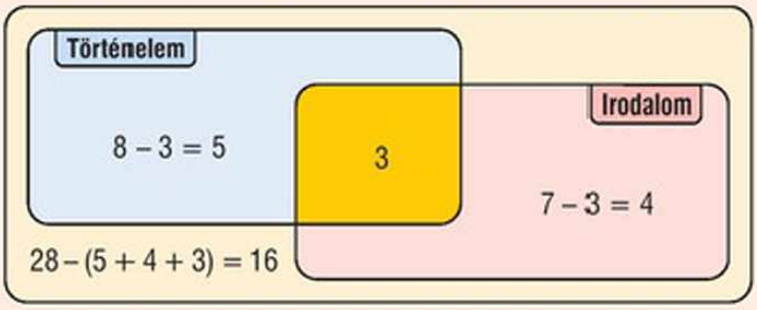
2. példa

Csaba este azt mesélte otthon: Ma 8-an feleltek történelemből, 7-en irodalomból, és 3 olyan gyerek volt, aki mind a kettőből.

Hányan nem feleltek sem történelemből, sem magyarból, ha Csabáék osztályába 28-an járnak?

Megoldás

Készítsünk halmazábrát a történelemből és az irodalomból felelők halmazával! Írjuk be a halmazrészekbe az ott levők számát!



$T \cap I$ A két halmaz metszetében 3-an vannak: .

$T \cap \bar{I}$ A 8 történelemből felelő közül 3-an irodalomból is feleltek, őket már beírtuk. Így 8 − 3 = 5-en vannak, akik történelemből feleltek, de irodalomból nem: .

$I \cap \bar{T}$ A 7 irodalomból felelő közül 3-an történelemből is feleltek, őket már beírtuk. Így 7 − 3 = 4-en vannak, akik irodalomból feleltek, de történelemből nem: .

$T \cup I$ Így összesen 5 + 3 + 4 = 12-en vannak a két halmaz egyesítésében, vagyis akik történelemből vagy irodalomból feleltek.

$\bar{T} \cap \bar{I} = \overline{T \cup I}$ 28 – 12 = 16-an maradtak, akik egyik tárgyból sem feleltek: .

A 2. példához hasonlóan járunk el akkor is, ha három halmazról van szó.

3. példa

Mielőtt a kérdést végigolvasnánk, gondoljuk meg, hogy a diagram alapján meg tudjuk-e mondani, hogy hányan nem sportoltak egyik nap sem. Milyen további adatra van szükség a kérdés megválaszolásához?

Hétfőn a 28 fős osztályban felmérést végeztek , hogy a gyerekek péntek, szombat és vasárnap közül melyik napon sportoltak. Az egyes napokon sportolók számát az oszlopdiagram mutatja.

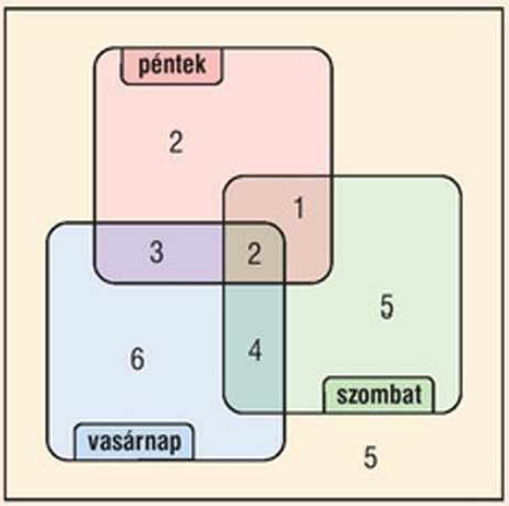


Hányan nem sportoltak egyik napon sem, ha tudjuk, hogy 2-en mindhárom napon sportoltak, 3-an pénteken és szombaton is, 5-en pénteken és vasárnap is és 6-an szombaton és vasárnap is sportoltak?

Megoldás

Készítsünk halmazábrát a pénteken, szombaton, vasárnap sportolókkal, és írjuk be a megfelelő részekbe az ott lévő elemek számát!

Először a három halmaz metszetébe tudjuk beírni az elemszámot, ez azoknak a száma, akik mindhárom napon sportoltak: 2.



$P \cap S \cap V$

Pénteken és szombaton 3-an sportoltak, közülük 2-en vasárnap is. Így 1 gyerek van, aki pénteken és szombaton sportolt, de vasárnap nem.

$P \cap S \cap \overline{V}$

Pénteken és vasárnap 5-en sportoltak, közülük 2-en szombaton is. Így 3 olyan gyerek van, aki pénteken és vasárnap sportolt, de szombaton nem.

$P \cap V \cap \overline{S}$

Szombaton és vasárnap 6-an sportoltak, közülük 2-en pénteken is. Így 4 olyan gyerek van, aki szombaton és vasárnap sportolt, de pénteken nem.

$S \cap V \cap \overline{P}$

Pénteken 8-an sportoltak, közülük $1 + 2 + 3 = 6$ gyerek más napon is, őket már beírtunk.
Így $8 - 6 = 2$ gyerek marad, aki csak pénteken sportolt.

$P \cap \overline{S} \cap \overline{V}$

Szombaton 12-en sportoltak, közülük $1 + 2 + 4 = 7$ gyerek más napon is, őket már beírtunk.
Így $12 - 7 = 5$ gyerek marad, aki csak szombaton sportolt.

$S \cap \overline{V} \cap \overline{P}$

Vasárnap 15-en sportoltak, közülük $3 + 2 + 4 = 9$ gyerek más napon is, őket már beírtunk.
Így $15 - 9 = 6$ gyerek marad, aki csak vasárnap sportolt.

$V \cap \overline{P} \cap \overline{S}$

Az ábra alapján összeszámoljuk, hány gyerek van a három halmaz egyesítésében, azaz hányan sportoltak legalább az egyik napon: $2 + 1 + 5 + 2 + 3 + 4 + 6 = 23$.

$P \cup S \cup V$

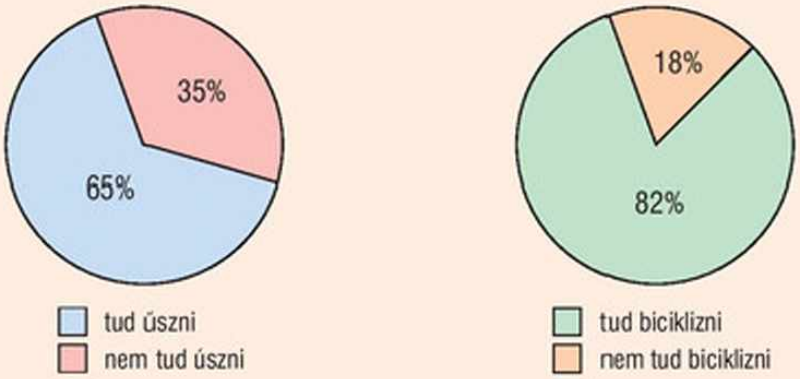
Mivel az osztályba összesen 28 gyerek jár, így azt kaptuk, hogy $28 - 23 = 5$ gyerek nem sportolt egyik napon sem.

$\overline{P} \cap \overline{S} \cap \overline{V} = \overline{P \cup S \cup V}$

A halmazok elemszáma helyett százalékokkal is számolhatunk.

4. példa

Egy iskolában felmérést végeztek a felsősök között, hogy hányan tudnak úszni, és hányan tudnak biciklizni. A felmérés eredményét az alábbi kördiagramok mutatják. Mit mondhatunk arról, hogy a gyerekek hány százaléka tud úszni is és biciklizni is?



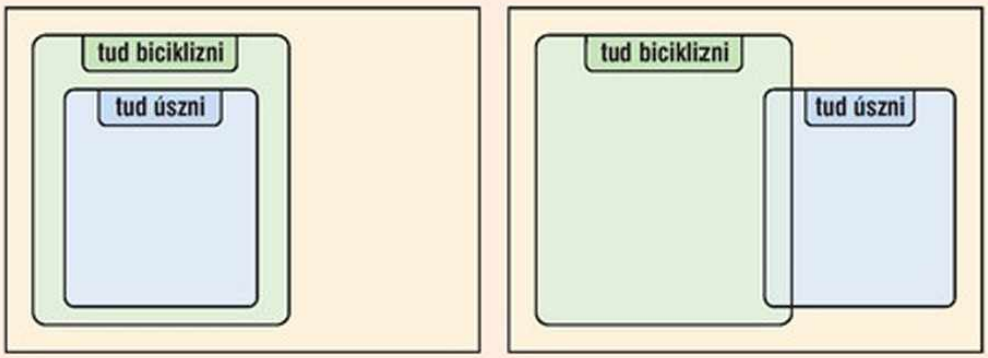
Számítsuk ki, hogy hányan vannak az egyes részekben, ha 100 gyereket kérdeztek meg!





Megoldás

Úszni kevesebben tudnak, mint biciklizni, így legtöbben akkor vannak az úszni tudók és a biciklizni tudók halmazának metszetében, ha az összes úszni tudó biciklizni is tud. Ekkor az úszni tudók halmaza részhalmaza a biciklizni tudóknak (1. halmazábra). Tehát a megkérdezetteknek legfeljebb a 65%-a tud úszni is és biciklizni is.



A legkevesebben akkor tudnak úszni is és biciklizni is, ha nincs olyan, aki sem úszni, sem biciklizni nem tud (2. halmazábra). Ekkor az úszni tudók számának és a biciklizni tudók számának összege (százalékban) annyival több az összes megkérdezettnél (100%), amennyien úszni is és biciklizni is tudnak:

$$65\% + 82\% - 100\% = 47\%.$$

Így a megkérdezetteknek legalább a 47%-a úszni is és biciklizni is tud.

Az úszni és biciklizni is tudók számára becslést lehet adni: a megkérdezetteknek legalább 47%-a és legfeljebb 65%-a tud úszni és biciklizni is.

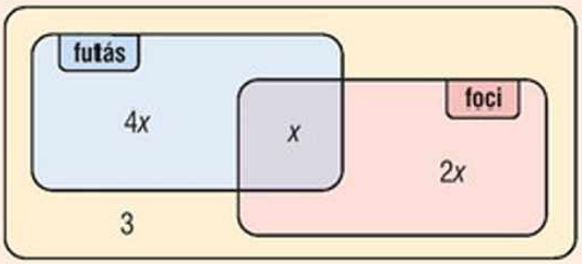
***5. példa**

István rendszeresen jár futni és focizni. A futós napjai ötödrészében focizik is, és a focizós napjai harmadrészében fut is. Hány nap volt márciusban, amikor futott is és focizott is, ha mindössze 3 nap volt, amikor nem futott és nem is focizott?

Megoldás

Készítsünk halmazábrát a márciusi napokról úgy, hogy jelöljük István futós és focizós napjainak halmazát!

Jelöljük x-szel azoknak a napoknak a számát, amikor fut is és focizik is! Mivel ez a futós napjainak ötöde, így $4x$ olyan nap van, amikor fut, de nem focizik.



Hasonlóan az x a focizós napoknak a harmada, így $2x$ olyan nap van, amikor István focizik, de nem fut.

Így a márciusi napok összesen:

$$4x + x + 2x + 3 = 31$$

Az egyenletet rendezve és megoldva:

$$\begin{aligned} 7x + 3 &= 31 \quad / - 3 \\ 7x &= 28 \quad / : 7 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

4 nap futott és focizott is, $5 \cdot 4 = 20$ nap futott, és $3 \cdot 4 = 12$ nap focizott, így a márciusi napok száma:

$$20 + 12 - 4 + 3 = 31.$$

Tehát 4 olyan nap volt márciusban, amikor István futott és focizott is.



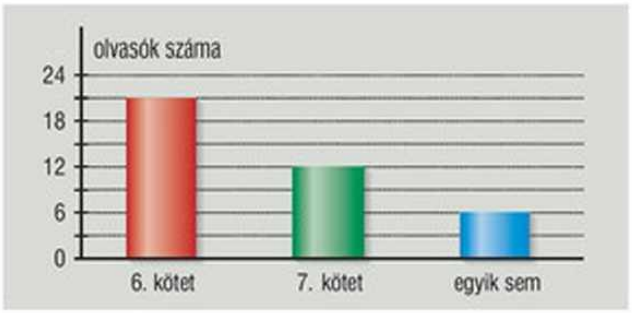
Feladatok

1. A parkolóban biciklik és autók állnak, 12 bicikli és 8 piros jármű. Hány jármű áll a parkolóban, ha 3 bicikli piros és 6 autó nem piros?

2. Egy társasutazás 43 résztvevője közül 37-en beszélnek angolul, 16-an németül. Hányan beszélnek angolul is és németül is, ha nincs olyan, aki legalább az egyik nyelven ne beszélne?

3. A zeneiskolában 21-en tanulnak furulyázni, közülük 5-en zongoráznak is. 18-an hegedülnek, közülük 6-an zongoráznak is. Hányan tanulnak a három hangszer valamelyikén, ha összesen 32-en zongoráznak, és senki sem játszik mindhárom hangszeren?

4. Egy 30 fős osztályban megkérdezték a gyerekeket, hogy ki olvasta a Harry Potter 6., és ki a 7. kötetét. A felmérés eredményét az oszlopdiagram mutatja. Hányan olvasták a 6. és a 7. kötetet is?



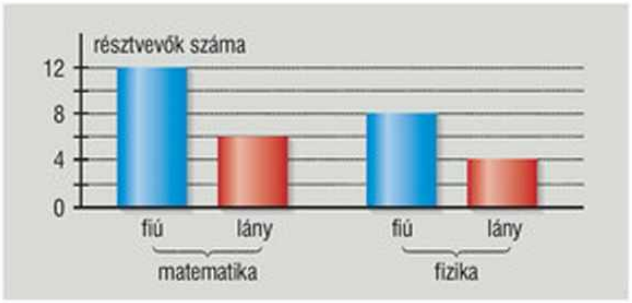
5. A 7/a focirajongói megvitatták a legutóbbi bajnoki meccseket. Az angol forduló közvetítéseit 17-en, a németet 17-en, a spanyolt csak 13-an látták. 7-en nézték meg a spanyolt és az angolt is, 10-en az angolt és a németet is, 9-en a németet és a spanyolt is. Csak 4-en voltak, akik az angol, a spanyol és a német meccsek közvetítéseit is látták. Hányan láttak legalább egy meccset?

6. Egy osztályban 12-en járnak matematika-, 12-en fizika- és ugyancsak 12-en számítástechnika-szakkörre. 5 tanuló matekra és fizikára is jár, 3 matekra és számítástechnikára is, 6 pedig fizikára és számítástechnikára. 2 olyan gyerek van, aki mindhárom szakkörnek tagja, és 2, aki egyiknek sem. Mennyi az osztálylétszám?

7. Egy nemzetközi konferencia egyik napján csak európaiak, afrikaiak és egy amerikai tudós tartott előadást. 5 olyan előadó volt, aki nem francia, 6, aki nem angol, 6, aki nem afrikai, és 3, aki nem európai. Hány francia tartott előadást aznap?

8. Az oszlopdiagram a megyei matematika- és fizikaversenyre bejutott tanulók számát mutatja. (➡)

Hány tanuló jutott be a két tárgyból legalább az egyik versenyre, ha 5 fiú és 2 lány mindkét tárgyból bejutott a megyei fordulóba?



9. Egy osztályban a gyerekek közül az egyik napon 12-en voltak moziban, egy másik alkalommal pedig 9-en mentek színházba. 10 gyerek egyik helyre sem tudott eljutni. Mennyi lehet az osztálylétszám?

10. Az iskolában a matematika-szakkörbe járó tanulók $\frac{4}{5}$ része kosarazik, a kosárlabdázóknak pedig $\frac{3}{10}$ része jár matematika-szakkörbe. Ha összesen 15 tanuló jár matematika-szakkörbe, akkor hány tanuló kosarazik?

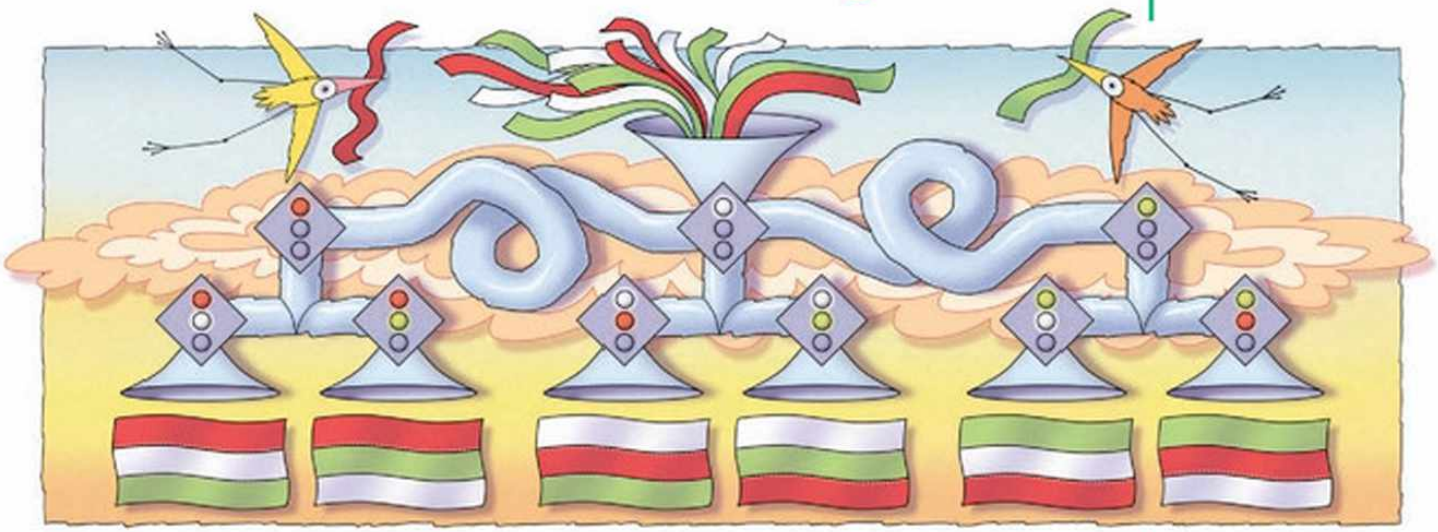
***11.** Zsófi kiskertjében tavaszi virágok nyílnak. Amikor megszámolta őket, éppen 30 virág nyílt. A tulipánok harmada piros volt, és kétszer annyi piros virág volt, mint ahány tulipán. Hány piros tulipán nyílt éppen, ha 6 virág nem tulipán és nem is piros?

12. Egy osztályban 18-an tanulnak angolt és 15-en franciát. Mennyivel többen tanulhatnak csak angolt, mint ahányan csak franciát, ha vannak olyanok, akik mindkét nyelvet tanulják, és más nyelvet senki sem tanul?

Rejtvény

Egy téglalap alakú csokoládé egyik oldala 6, a másik 8 négyzetből áll. Két gyerek felváltva tör a csokoládéból a négyzetoldalak mentén. Az veszít, aki már nem tud törni. Ki fog győzni?

5. Rendszerezzük a lehetőségeket!



Sok olyan feladat van, amikor különböző lehetőségeket kell összeszámlálnunk. Ezek kombinatorikai feladatok.

Például: Hányféle ülésrend lehet egy osztályban? Hányféle összeget dobhatunk két dobókockával? Hányféle 2 gombócos fagyit választhatunk, ha 5-féle fagyi kapható?

A lehetőségek összeszámlálásakor két fontos szempontra kell figyelnünk:
- különböző lehetőségeket számoljunk össze;
- az összes lehetőséget számoljuk össze.

Megkönnyíti a dolgunkat, ha a lehetséges eseteket rendszerezzük.



Hányféle különböző öltözetet állíthatunk össze a fenti ruhadarabokból?

1. példa

A színjátszó Lili a fellépésére frizurát tervez. Egy számítógépes programmal képet készít magáról 3-féle hosszúságú (rövid, félhosszú és hosszú) hajjal, és mindegyiket kipróbálja szőke vagy vörös színnel is.

a) Hányféle képet készíthet?

b) Hányféle képet készíthet, ha a frizurákat szemüveggel és szemüveg nélkül is kipróbálja?

Megoldás

a) A lehetséges frizurák képeit táblázatba rendezhetjük.

A táblázatból látható, hogy mivel Lili mindhárom hosszúságot kétféle (szőke vagy vörös) színnel választhatja, így összesen 3 · 2-féle, azaz 6-féle frizurát választhat.

	rövid	félhosszú	hosszú
szőke			
vörös			

b) Mindegyik korábbi változat lehet szemüveggel, vagy szemüveg nélkül is, így a táblázat minden celláját két részre kell osztani, hogy el lehessen helyezni a képeket.

		rövid	félhosszú	hosszú
szőke	szemüveggel			
	szemüveg nélkül			
vörös	szemüveggel			
	szemüveg nélkül			

A lehetséges változatok száma megduplázódik, így $2 \cdot 6 = 12$-féle képet készíthet magáról.

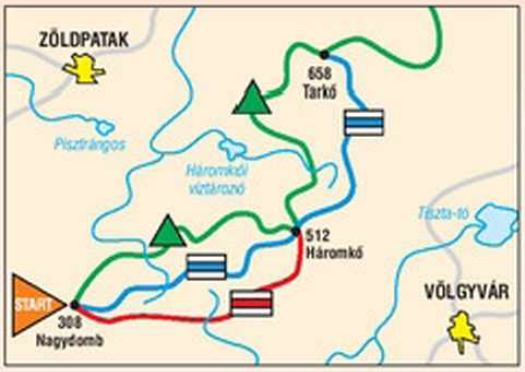
A lehetőségek rendszerezését végezhetjük táblázattal vagy nyíldiagrammal.

2. példa



A 7. a osztály kirándulásán a gyerekek hegyet másznak. A turistatérkép szerint Nagydombról három ösvény vezet Háromkőre, onnan pedig két ösvény indul Tarkőre.

Hányféle útvonalon juthatnak fel Nagydombról Tarkőre?

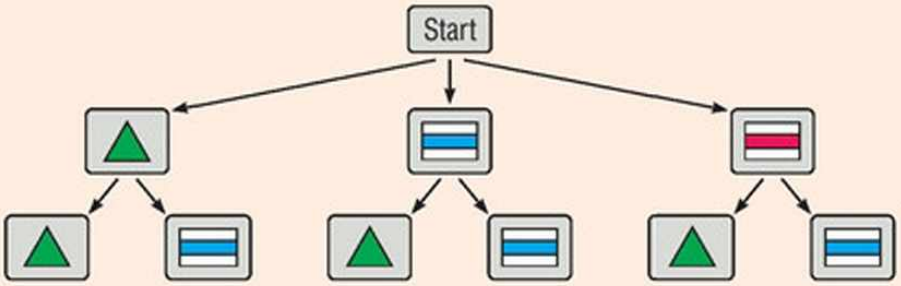


Megoldás

Készítsünk vázlatot!



A különböző lehetőségeket nyíldiagram segítségével számoljuk össze:



A hegyre vezető különböző útvonalak száma: $3 \cdot 2 = 6$.

3. példa

Dávid rendszeresen ugyanabban az étteremben ebédel. Az ebédjegyével az alábbi étlapról választhat.

Leves:	Feltét:	Köret:
tyúkhúsleves	*rántott sajt*	*rizibizi*
gyümölcsleves	*pirított máj*	*sült burgonya*
	natúrszelet	*borsófőzelék*

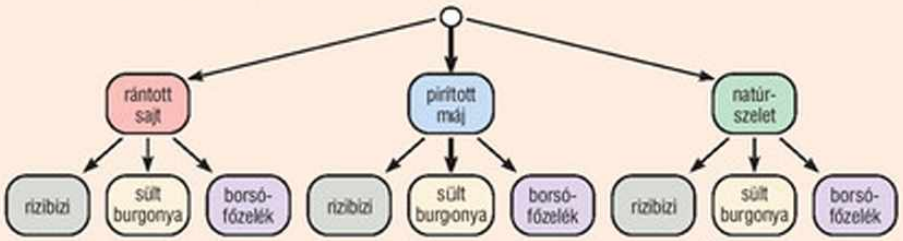
a) Hány napon ehet különböző ebédet, ha nem kér levest, de bármelyik feltéthez akármelyik köretet veheti?

b) Hány napon ehet különböző ebédet, ha levesnek mindig tyúkhúslevest választ?

c) Hány napon ehet különböző ebédet, ha a feltét és a köret mellé kétféle leves közül választ?

Megoldás

a) Ábrázoljuk nyíldiagramon a lehetőségeket!



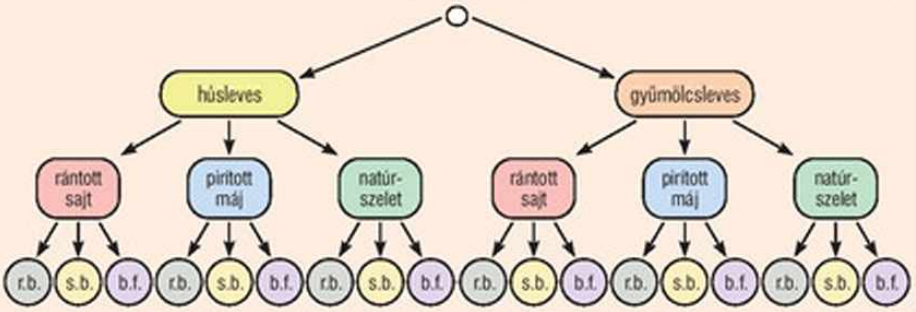
3

$3 \cdot 3 = 9$

A diagramon a nyilak mentén végighaladva egy lehetséges ebédet kapunk. Dávid először feltétet választ, amit 3-féleképpen tehet meg. Mindegyikhez 3-féle köretet kérhet, így $3 \cdot 3 = 9$ napon tud különböző ebédet enni.

b) Az, hogy tyúkhúslevest is eszik, nem változtatja meg a lehetséges választások számát. Tehát az *a)* esethez hasonlóan 9 napig ehet különböző ebédet.

c) Ha 2-féle levest ehet, akkor az alábbi választási lehetőségei vannak:



2

$2 \cdot 3$

$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

A húsleves után is és a gyümölcsleves után is 9-féle második fogást ehet, így $2 \cdot 9 = 18$ napon tud különböző ebédet enni.

Nyíldiagram segítségével a különböző eseteket könnyen elkülöníthetjük, és meggyőződhetünk róla, hogy minden lehetőséget összeszámoltunk.

4. példa

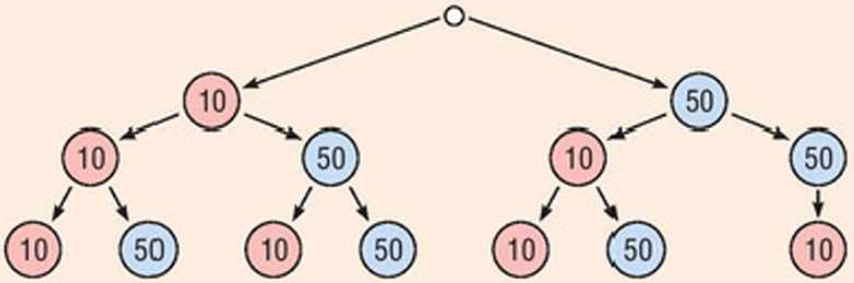
Tibi pénztárcájában 3 db 10 Ft-os és 2 db 50 Ft-os érme van.

a) Hányféleképpen vehet ki közülük sorban egymás után hármat? (Az azonos értékű érméket nem tudjuk megkülönböztetni.)

b) Hány forint lehet a kezében, ha három érmét vett ki?

Megoldás

a) A három érme húzását nyíldiagramon ábrázoljuk:



a sorrend számít

Az érmék húzásának sorrendjét figyelembe véve 7 lehetőséget kapunk.

b) Az előbbi ábra alapján láthatjuk, hogy Tibi több különböző húzással is ugyanakkora összeget kaphat.

a sorrend nem számít

- 10; 10; 10: 3 db 10-es;
- 10; 10; 50; 10; 50; 10; 50; 10; 10: 2 db 10-es és 1 db 50-es;
- 10; 50; 50; 50; 10; 50; 50; 50; 10: 1 db 10-es és 2 db 50-es.

Tibi kezében háromféle összeg lehet: 30 Ft, 70 Ft vagy 110 Ft.

Látható, hogy más a feladat, ha az elemek sorrendjét figyelembe vesszük, és más, ha nem.



30 Ft 70 Ft 110 Ft

Vigyázat! Nem mindig lehet szorzással számolni! Ezért mindig a nyíldiagram rajzolásával kezdjük a megoldást!

Feladatok

1. Egy piros és egy fehér dobókockával dobunk. A pirossal a tízes helyi értéken álló, a fehérrel pedig az egyes helyi értéken álló számjegyet határozzuk meg.
   a) Hányféle kétjegyű számot kaphatunk így?
   b) Hányféle kétjegyű páros számot kaphatunk?
   c) Hányféle 5-tel osztható kétjegyű számot kaphatunk?
   d) Hányféle 6-tal osztható kétjegyű számot kaphatunk?

2. Vakond Vili föld alatti járatainak több kijárata van. Hányféleképpen teheti meg, hogy az egyiken bemegy, és egy másikon jön ki, ha a kijáratok száma

a) 4; *b)* 6?

3. Zsuzsi nagyon szeret színházba járni, de semmiképpen sem szeretne két előadáson ugyanabban az öltözékben megjelenni. Legfeljebb hány előadást nézhet meg ebben az évben, ha 3-féle blúz, 2-féle szoknya, egy nadrág és 2-féle cipő közül választhat? (Szerencsére mindegyik ruhadarab mindegyikhez illik.)

4. A kettes számrendszerbeli számokban csak a 0 és az 1 számjegyek szerepelhetnek. Hány olyan kettes számrendszerbeli szám képezhető, amely:

a) háromjegyű; *b)* négyjegyű és páros; *c)* ötjegyű?

5. Egy dobókockával kétjegyű számot dobunk úgy, hogy az első dobással a tízes helyi értéken álló, a másodikkal pedig az egyes helyi értéken álló számjegyet határozzuk meg. Hányféle olyan kétjegyű számot dobhatunk így, amely

a) 50-nél nagyobb; *b)* tízesekre kerekítve 20; *c)* páros; *d)* 3-mal osztható?

6. Egy osztály budapesti kirándulásra utazik. Szavazással döntik el, hogy délelőtt az Állatkertbe vagy a Vidámparkba menjenek, utána pedig a Nemzeti Múzeumot vagy a Szépművészeti Múzeumot nézzék meg. Esti programként 3-féle színházi előadás közül választhatnak.

Hányféleképpen állíthatják össze a kirándulás programját?



7. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számkártyákból kettőt húzunk egymás után, így egy kétjegyű számot kapunk. Hányféle olyan 50-nél kisebb kétjegyű számot kaphatunk, amelyet (tízesekre) felfelé kell kerekíteni?

8. A könyvtárban 5 gyerek egyszerre szerette volna kikölcsönözni ugyanazt a két könyvet. Mivel csak egy-egy példány van belőlük, kisorsolták, hogy melyik könyvet ki kölcsönözheti ki először. Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak, ha egy gyerek csak egy könyvet kölcsönözhet egyszerre?

9. Az iskolai focibajnokság következő fordulójára totószelvényt adtak ki. Három meccs eredményére lehet tippelni az 1, 2 vagy x bekarikázásával. Az 1 az első csapat győzelmét jelenti, a 2 a második csapatét, az x pedig a döntetlent. Hányféleképpen tippelhetünk?

7. a – 8. b	1	2	X
8. a – 7. c	1	2	X
7. b – 8. c	1	2	X

10. Eszter elfelejtette szegedi barátnője telefonszámát. Csak arra emlékezett, hogy kétféle számjegy szerepel benne, és a hatjegyű telefonszám első két jegye megegyezik a körzetszámmal (62). Végighívogatva a lehetséges telefonszámokat, legrosszabb esetben hány számot kell felhívnia, amíg a barátnőjét meg nem találja?

11. A színházi világosító egy lámpa elé zöld, piros vagy kék üveget rakhat, egyszerre akár mindhármat.



a) Hányféle színhatást érhet el így?

**b)* Végigpróbálhatja-e az összes színhatást pontosan egyszer úgy, hogy egyszerre csak egy üveget mozdít ki vagy be?

A tévé és a projektor a színes képet a vörös, a zöld és a kék színekből állítja elő.

12. A vidámparkban Robi, Viki, Teri és Soma dodzsemezni akartak. Egy lila, egy kék, egy zöld és egy sárga autót kaptak. Hányféleképpen szállhattak be, ha Robi nem hajlandó a lila autóba ülni, Viki sem a kékbe, sem a zöldbe nem ül bele, Soma pedig csak a sárga vagy a kék autóval akar dodzsemezni?

13. Egy virágboltban háromféle virág közül választhatunk. Hányféle csokrot köttethetünk (akár egy szál virágból), ha legfeljebb 800 Ft-ot akarunk költeni, és a díszítés 300 Ft-ba kerül? (➡)

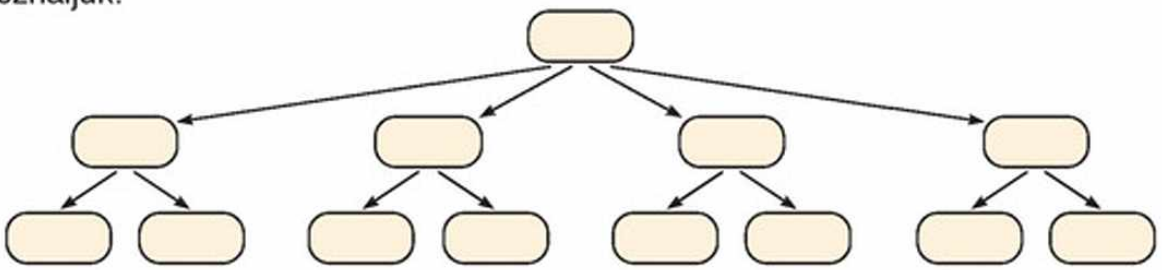


14. Vonatot építünk 1; 2; 3; 4; 5 egység hosszúságú kocsikból (a kocsikból több is rendelkezésünkre áll).

a) Hányféle 5 egység hosszúságú vonatot építhetünk, ha a kocsik sorrendje is számít?

b) Hányféle olyan 5 egység hosszúságú vonat van, amely pontosan három kocsiból áll?

15. Találjunk ki olyan feladatot, amelyiknél az esetek összeszámlálásához az alábbi ábrát használjuk!



16. Az utcai futóversenyre 1500 nevezőt várnak. A lehető legkevesebb féle számjegyet akarják felhasználni a négyjegyű rajtszámokhoz, de úgy, hogy mindenkinek különböző rajtszáma legyen. Legkevesebb hányféle számjegyet használjanak?

17. Hány olyan természetes szám van, melyet 4-gyel osztva a hányados nem nagyobb a maradéknál?

Rejtvény

5 láncdarabot, amelynek mindegyikében 3 arany láncszem volt, elvittek az ötvöshöz, hogy készítsen belőlük egyetlen körláncot. A mester, mielőtt hozzáfogott volna a munkához, elgondolkodott, hány szemet is kell ehhez szétnyitnia, majd újra összeillesztenie. Úgy találta, hogy ötöt. El lehetne-e végezni a munkát kevesebb láncszem megbontásával is?

6. Hányféle sorrend lehetséges?



Bizonyos kombinatorikai feladatokban a lehetséges sorrendek száma a kérdés. Például: Hányféle sorrendbe rakhatjuk a zászlók színes csíkjait? Hányféle sorrendben végezhet egy versenyen 3 versenyző?

1. példa

A Scrabble-játék betűiből 4 különböző betűt húztunk: R; D; E; Ő.

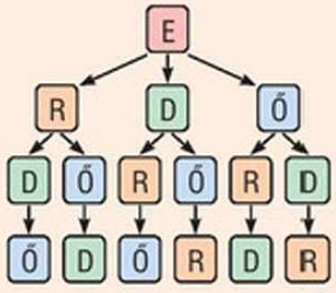
a) Hányféle E-vel kezdődő szót lehet kirakni ezekből a betűkből?
b) Hányféle betűsort lehet kirakni ezekből a betűkből?
c) Hány értelmes magyar szót lehet kirakni a 4 betűből?
d) Hány betűsorban nincs egymás mellett két magánhangzó?

Keressünk olyan mondatokat, melyek értelmét a szavak felcserélése megváltoztatja!

Például:
A csokifagyit szeretem,
a puncsot nem.

Megoldás

a) Az E-vel kezdődő betűsorok nyíldiagramján láthatjuk, hogy 6 ilyen szó lehet.



A lehetőségek számát szorzással gyorsabban is kiszámolhatjuk. A diagramon látható, hogy a második betűt 3-féleképpen választhatjuk. Akármelyik betűt is választjuk másodiknak, a harmadik betűt 2-féleképpen választhatjuk, utána a negyedik helyre már csak 1-féle betű marad. Így a lehetőségek száma: $3 \cdot 2 \cdot 1$.

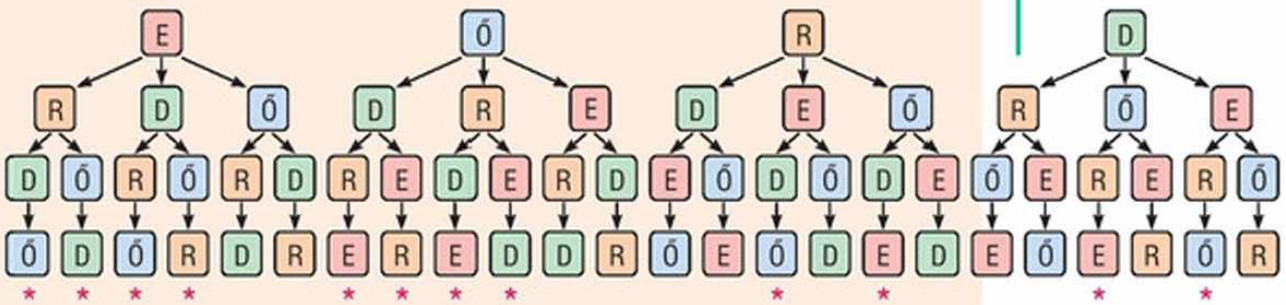
3

$3 \cdot 2$

$3 \cdot 2 \cdot 1$

b) A betűsorok 4 különböző betűvel kezdődhetnek, és az *a)* esethez hasonlóan mindegyik kezdőbetű után 6-féle folytatás következhet. Így a lehetőségek száma: $4 \cdot 6 = 24$.

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$



c) A diagramról leolvashatók az értelmes szavak: ERDŐ, ERŐD, DŐRE, REDŐ.

d) A diagramon csillaggal jelöltük azokat az eseteket, amikor két magánhangzó nincs egymás mellett. Látható, hogy 12 ilyen lehetőség van. Ezt közvetlenül szorzással már nem tudjuk meghatározni.

2. példa

Játsszunk!
Keverjük meg az 1; 2; 3; 4 számkártyákat, és rakjuk le őket egymás mellé! Nézzük meg, hogy hány lesz annyiadik helyen, amilyen szám a kártyán szerepel!

Csaba, Zoli, Gábor és Domi versenyt futott. Réka és Ági szurkolt nekik, és mindketten előre megtippelték, mi lesz a helyezési sorrend.

a) A verseny végén Ági azt mondta, hogy ő két futó helyezését találta el. Hányféleképpen tippelhetett Ági, ha Csaba 1., Zoli 2., Gábor 3. és Domi 4. lett?

b) Réka azt mondta, hogy ő csak egy futó helyezését nem találta el. Ági csodálkozott: De hisz az lehetetlen! Ki tévedett?

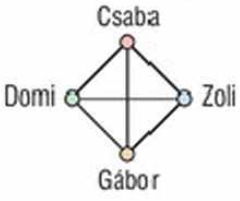
Megoldás

a) Különböző eseteket kapunk aszerint, hogy Ági melyik két futó helyezését találta el.

Például ha Ági Csaba és Zoli helyezését találta el, akkor Gábor és Domi helyezését nem találta el, így Gábort nem 3.-nak, hanem 4.-nek, Domit nem 4.-nek, hanem 3.-nak tippelte. Vagyis ha kiválasztjuk, hogy melyik két futó helyezését találta el, utána egyféleképpen tippelhet rosszat a másik két futó helyezésére.

Írjuk táblázatba a lehetséges eseteket, és narancs alapon jelöljük azokat a futókat, akiknek a helyezését Ági eltalálta! Először Csabához választunk párt 3-féleképpen, utána Zolihoz még 2-féleképpen, végül a Domi–Gábor páros marad.

4 gyerek közül 2-t választunk, őket összekötjük a rajzon:



Láthatjuk, hogy 6 lehetőség van.

	1. Csaba	2. Zoli	3. Gábor	4. Domi
1.	Csaba	Zoli	Domi	Gábor
2.	Csaba	Domi	Gábor	Zoli
3.	Csaba	Gábor	Zoli	Domi
4.	Domi	Zoli	Gábor	Csaba
5.	Gábor	Zoli	Csaba	Domi
6.	Zoli	Csaba	Domi	Gábor

A táblázatból látható, hogy 6-féleképpen lehetséges, hogy pontosan kettőnek találta el a helyét.

b) Ha Réka csak egy futó helyezését nem találta el, akkor 3 futóét eltalálta. Például ha Csaba, Zoli és Gábor helyezését eltalálta, akkor Domi kimaradt. De őt csak a 4. helyre tippelhette, ezért az ő helyezését is eltalálta.

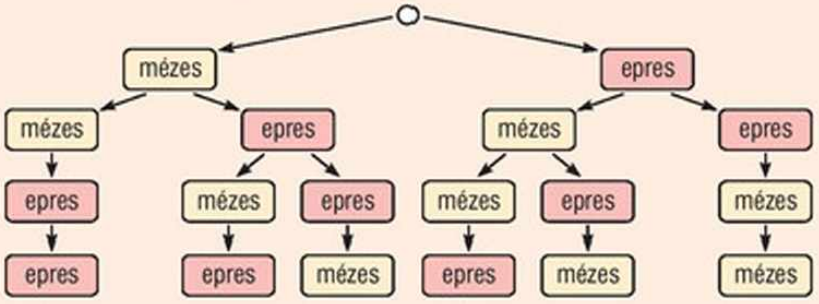
Tehát pontosan 3-at nem találhatott el, ezért Áginak van igaza.

3. példa

Falánk Benő két egyforma mézes és két egyforma epres süteményt evett meg. Hányféle sorrendben ehette meg Benő a négy süteményt?

Megoldás

Ábrázoljuk a lehetőségeket nyíldiagramon!



Láthatjuk, hogy ha a négy süteményt közöttük 2-2 egyforma van, akkor a lehetséges sorrendjeik száma: 6.



Mindig figyelnünk kell arra, hogy vannak-e egyforma elemek a sorba rendezendő dolgok között!

4. példa

Zsófi kistestvére felsorolja az évszakokat: tavasz, nyár, ősz, tél.

a) Hányféleképpen mondhatja jó sorrendben az évszakokat?

b) Hányféleképpen mondhatja őket rossz sorrendben?

Megoldás

a) Az évszakoknak körben (az óramutató járásával egyező irányban) egy jó elrendezése van, de a felsorolást bármelyik évszaknál elkezdhetjük.



Így a jó sorrendek:

- tavasz, nyár, ősz, tél;
- nyár, ősz, tél, tavasz;
- ősz, tél, tavasz, nyár;
- tél, tavasz, nyár, ősz.

Tehát 4-féleképpen mondhatja jól az évszakok sorrendjét.

b) Mivel a négy évszakot összesen $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sorrendben mondhatja, így $24 - 4 = 20$ rossz sorrend lehetséges.









Figyeljük meg, hogy 4 dolgot egy körben 6-féle sorrendbe írhatunk, és egy körbeli sorrendnek 4 egyvonalban felírt sorrend felel meg!

Az évszakok sorrendje körben elrendezve:



Feladatok



1. Mohó manó nagyon szereti az epret. Gyűjtött négy gyönyörű epret, de különböző nagyságúak voltak, így nem tudta eldönteni, milyen sorrendben egye meg őket. „Ha a legnagyobbat eszem meg először, akkor a végére kisebb marad. Ha pedig a végére hagyom a legnagyobbat, akkor valaki esetleg elcseni közben” – töprengett gondterhelten.

   a) Hányféle sorrendben eheti meg az epreket, ha a legnagyobbal kezdi?
   b) Hányféle sorrendben eheti meg az epreket, ha a legnagyobbat hagyja a végére?
   c) Hányféle sorrendben eheti meg az epreket?
   d) Hányféle sorrendben eheti meg az epreket, ha nem a legnagyobbal kezdi, és nem is azzal fejezi be?

2. Gergő és Bence úgy játszik, hogy a 0-9 számjegykártyákból felváltva húznak egyet-egyet, összesen fejenként 4-et. Az nyer, aki a kártyáiból több négyjegyű számot tud kirakni.

   a) Ki nyer, ha Gergő a 2; 3; 5; 7 kártyákat, Bence pedig az 1; 8; 3; 9 kártyákat húzta?
   b) Gergő az első húzás után felkiáltott: „Vesztettem!” Mit húzott?
   c) Megváltoztatták a szabályokat. Most az nyer, aki több négyjegyű páros számot tud kirakni. Nyerhet-e így Gergő, ha elsőre 0-t húzott?

3. A szabadrúgás előtt a védelem különböző magasságú játékosai sorfalat állnak. A sorfalban nincs olyan játékos, aki két nála magasabb között áll. Hányféleképpen állhatnak egymás mellé, ha a sorfalban álló játékosok magasságuk szerint növekvő sorrendben

   a) Tibor, Sándor és Miklós; *b)* Tibor, Sándor, Miklós és János?

   Azok a különböző esetek, amelyeknél a neveket balról jobbra felsorolva különböző sorrendet kapunk.

4. Jelölje *a*; *b*; *c* azokat a számokat, ahányféleképpen sorba lehet rendezni a PALI, LALI és LILI becenevek betűit!

   a) Adjuk ameg az *a*; *b*; *c* számokat!
   b) Hányszorosa a *b* a *c*-nek és az *a* a *b*-nek?

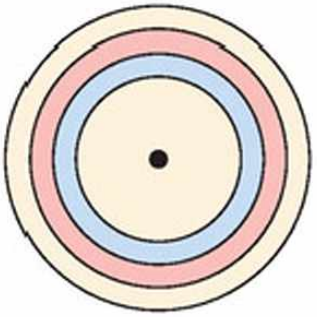


5. Hányféle sorrendben vehetjük fel a következő ruhadarabokat? (➡)

   a) sapka, kabát, cipő;
   b) kabát, zokni, cipő;
   c) sapka, kabát, zokni, cipő.

6. A jelmezbálra Rita orvosnak, Bori szakácsnak, Karcsi kőművesnek, Laci pedig bűvésznek öltözött. Ehhez Ritának sztetoszkópja, Borinak fakanala, Karcsinak vakolókanala, Lacinak varázspálcája volt. Készülődés közben lerakták őket, és induláskor annyira siettek, hogy mindenki valaki másét kapta fel. Hányféleképpen tehették ezt meg?

7. Virágos város főterén a szökőkút köré négy sávban virágokat ültettek. Hányféleképpen ültethették a virágokat a négy sávba, ha csak háromféle virág van, és két szomszédos sávba nem kerülhet ugyanolyan virág? (➡)



8. A 2; 0; 0; 7 számkártyákból számokat rakunk ki úgy, hogy minden kártyát pontosan egyszer használhatunk fel.

a) Hány négyjegyű számot képezhetünk?

b) Hány legfeljebb négyjegyű számot képezhetünk?

c) Hány 5-tel osztható, legfeljebb négyjegyű számot képezhetünk?

9. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számokat hányféleképpen lehet egymás után sorba írni úgy, hogy ne legyen két egymás utáni, amelyek összege osztható 2-vel vagy 3-mal?

10. Az iskolai dekázóbajnokságban 3 egymás utáni évben Anikó, Csabi, Tomi és Kristóf végzett az első négy helyen.

a) Az első évben Anikó lett az első, és nem volt holtverseny. Hányféle sorrend lehetett?

b) Hányféle sorrendben végezhettek a 2. évben, ha csak azt tudjuk, hogy nem volt holtverseny?

c) Hányféle sorrendben végezhettek a 3. évben, ha a harmadik helyen holtverseny volt?



11. Erika, Gabi, Hilda és Ibolya néptáncot tanul. Az egyik táncban egymás kezét fogva körtáncot járnak. Hányféleképpen alkothatnak kört? (Két kör akkor különböző, ha forgatással nem vihetők át egymásba.) Keressük meg az összes lehetséges felállást!

12. A XUXU-k földjén két betűt ismernek, az X-et és az U-t. Ezekből alkotnak szavakat úgy, hogy két X nem kerülhet közvetlenül egymás mellé. Hány 5 betűs szó lehet a XUXU nyelvben?

13. Zsuzsa, Orsi, Jóska és Zoli minden héten egyszer kártyázik. Hány héten át játszhatnak úgy, hogy minden alkalommal különféle sorrendben ülnek az asztalhoz? Két sorrend akkor különböző, ha van olyan játékos, akinek a két esetben a bal vagy a jobb oldali szomszédja közül legalább az egyik különböző.

14. Lázár Ervin Négyszögletű Kerek Erdő című meséjében versíró versenyt rendeztek. Aromo, a fékezhetetlen agyvelejű nyúl az itt látható verset adta elő. (➡)

a) Hogyan írhatta Aromo a versét?

b) Írjunk „verset” ugyanezzel az ötlettel!

BÁLÖMBÖKI BAG Ú FAN
BALÁMBÖKÖ BÍG A FÚN
BÚLAMBÁKÖ BÖG Í FAN
BALÚMBAKÁ BÖG Ő FÍN
BÍLAMBÚKA BÁG Ö FÖN
BÖLÍMBAKÚ BAG Á FÖN
BÖLÖMBÍKA BÚG A FÁN

Rejtvény

Hány pizzaszeletet kaphatunk, ha egy kör alakú pizzát öt egyenes vágással szétvágunk?

7. Kapcsolatok


VESZPRÉM
CELLDÖMÖLK
SÁRVÁR
Kis-Somlyó
-219
Somló
DEVECSER
AJKA
Ürkút
-599
Kab-hegy
Rendeki-h.
374
Ság
-278
Középosó-Hajag
646
Papod
Üsti-h.
536
HEREND
VESZPREM
VARPALOTA
Öreg Futóné
574
Tési-tenesik
SZEKESFEHÉRVÁR
GÁRDONY
BERHIDA
POLGÁRDI
BALATONFÜZFÖ
BALATON-
ALMÁDI
BALATONFÜRED
Agár-tető
511
SÜMEG
ZALASZENTGRÓT
ZALAEGERSZEG
Halap
359
TAPOLCA
Csehbánya
Kisköri
Kővágó-h.
Szent György-h.
Gulács
HÉVÍZ
Balaton-felvidéki N.P.
Balaton-parti erdők
Balaton-szárszó
BALATONFÖLDVÁR
SIÓFOK
ENYING
Lepsény
Kisláng
Sárvíz-völgyi T.K.
Soponya
Sárkeresztúr
Adand
Dég
Lajoskomárom
SÁRBOGÁ
Tátika
416
331
232
Tihany
Zánka
Balaton-szentgyörgy
Balatonszemes
Balatonendréd
Balatonmáriafürdő-Balatonkeresztúr
Balatonmáriafürdő
Balatonkeresztúr
Balatonsz

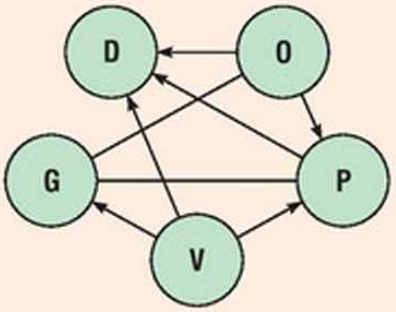
a) Ábrázoljuk diagramon a meccseket úgy, hogy nyíl mutasson a győztestől a vesztes felé! Döntetlen esetén nyíl nélküli vonalat rajzoljunk!

b) Kinek van a legtöbb győzelme?

c) Kinek hány pontja van?

d) Hány meccs van még hátra?

e) Ki nyerheti a bajnokságot?



Megoldás

a) A csapatok nevét kezdőbetűikkel jelölve a következő diagramot kapjuk:

b) Figyeljük meg, hogy melyik körből indul a legtöbb nyíl! Ebből láthatjuk, hogy a Vérebeknek van a legtöbb győzelmük: 3.

c) Vérebek: $3 \cdot 2 = 6$ pont; Gazellák: $1 + 1 = 2$ pont; Denevérek 0 pont; Polipok $2 + 1 = 3$ pont; Oroszlánok $2 \cdot 2 + 1 = 5$ pont.

d) Az ábráról leolvasható, hogy 2 meccs van még hátra, a Denevérek és a Gazellák, valamint az Oroszlánok és a Vérebek között. (A bajnokságban összesen 10 meccset játszanak.)

e) Az utolsó fordulóban az Oroszlánok a Vérebekkel játszanak. Ha a Vérebek nyernek vagy döntetlent játszanak, akkor megőrzik vezető helyüket, és megnyerik a bajnokságot. Ha az Oroszlánok nyernek, akkor 7 pontjuk lesz, a Vérebeknek csak 6, így az Oroszlánok nyerik a bajnokságot.

A bajnokság állása:

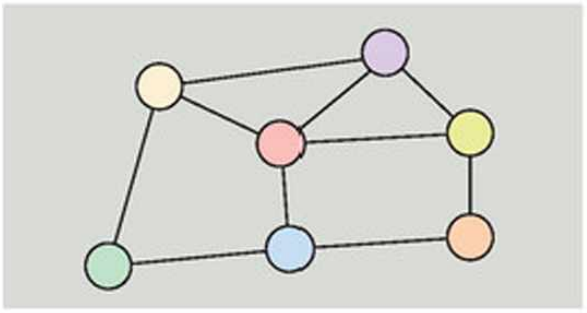
1. Vérebek	6 pt
2. Oroszlánok	5 pt
3. Polipok	3 pt
4. Gazellák	2 pt
5. Denevérek	0 pt

Feladatok



1. Jelöljük nyilakkal, hogy az ábrán látható élőlények közül melyik melyikkel táplálkozik! A nyíl mutasson az állattól a tápláléka felé! (➡)

   kék bálna; állati plankton; hal; kardszárnyú delfin; polip; fóka és növényi plankton.



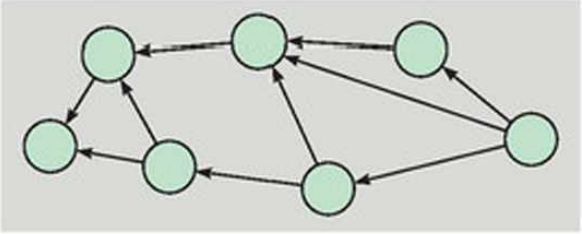
2. Egy magas hegyen falvak vannak. A köztük lévő utakat az ábra mutatja. (➡)

   Keressünk 3 falut úgy, hogy közülük

   a) bármely kettő között legyen közvetlen út;

   b) bármely kettő között ne legyen közvetlen út!

3. Dóri elkezdett rajzolni egy ábrát, melyben a nyíl a számtól az osztójára mutat. Még nem sikerült minden nyilat berajzolnia és a számokat beírnia. Rajzoljuk le az ábrát, helyezzük el benne az 1; 2; 4; 6; 8; 12; 48 számokat, és húzzuk be a hiányzó nyilakat!



4. A megyei teniszbajnokságban kieséses rendszerben játszanak, azaz a játékosokat minden fordulóban párokba sorolják, és mindig a győztes jut tovább. Végül két játékos marad, ők játsszák a döntőt, és ennek győztese nyeri a bajnokságot. Készítsünk nyíldiagramot, és határozzuk meg, hogy hány meccset játszanak, mire kiderül, hogy ki a bajnok, ha a bajnokságban *a)* 8 játékos; *b)* 16 játékos indul!

5. Samu és Sári testvérek. Samunak ugyanannyi lánytestvére van, mint fiútestvére. Sárinak kétszer annyi fiútestvére van, mint lánytestvére. Hány fiú és hány lány van a családban?

6. Az iskolai kosárbajnokságon minden csapat játszik mindegyikkel oda-visszavágót. Hány meccset játszanak összesen, ha *a)* 3; *b)* 4; *c)* 5 csapat nevezett a bajnokságba?

7. A 7. b osztály sakkbajnokságára hatan neveztek. Két csoportra osztották őket. A csoportokban mindenki mindenkivel egyszer játszott, majd a csoportelsők játszottak az első helyért, a másodikok a harmadik helyért, és a harmadikok az ötödik helyért. Hány meccset játszottak így összesen?

8. A Naprendszer 8 bolygója között a következő űrjáratokat létesítették:

Vénusz–Neptunusz;	Merkúr–Vénusz;
Jupiter–Szaturnusz;	Jupiter–Uránusz;
Szaturnusz–Neptunusz;	Uránusz–Mars;
Neptunusz–Merkúr;	Merkúr–Jupiter;
Szaturnusz–Jupiter;	Mars–Neptunusz;
Föld–Merkúr;	Mars –Föld.



Hogyan juthat el egy űrutazó a Földről a Marsra ezekkel a járatokkal? (A járatok csak a megadott irányba közlekednek.)

***9.** Figura országban kilenc város van, melyek neve 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Egy utazó azt találta, hogy egyik városból egy másikba akkor és csak akkor tud repülővel eljutni, ha a két város nevét (ebben a sorrendben) egymás után írva, az így kapott kétjegyű szám osztható 3-mal. Eljuthat-e az utazó az 1 városból a 9 városba?

***10.** Egy hattagú társaságban az egyik embernek egy, a másodiknak kettő, a harmadiknak három, a negyediknek négy, az ötödiknek pedig öt barátja van jelen. Hány barátja van jelen a hatodik embernek, ha a barátságok kölcsönösek?

Rejtvény

Trim ország királya megelégelte miniszterelnöke ténykedését, és útilaput akart kötni a talpára. Az elbocsátás alkotmányos módja az országban az, hogy az illetőnek látatlanban húznia kell a „Menjen" és a „Maradjon" feliratú cédulák közül, ez dönti el a sorsát. A király azonban nem akart lehetőséget adni miniszterelnökének a maradásra, ezért mindkét cédulára a „Menjen" feliratot íratta. A ravasz miniszterelnök megtudta ezt, és egy ügyes trükkel mégis elérte, hogy maradjon. Hogyan történhetett ez?

8. Vegyes feladatok

1. Készítsünk halmazábrát a kockák, téglatestek, négyzetes oszlopok halmazával! Az alaphalmaz a sokszöglapokból álló testek halmaza.

   a) Melyik halmaz melyiknek a részhalmaza?

   b) A következő állítások közül melyik nem igaz?

   - Minden kocka téglatest.
   - Van olyan kocka, amely nem téglatest.
   - Nincs olyan négyzetes oszlop, amely nem kocka.
   - Ha egy test téglatest, akkor kocka.
   - Ha egy test négyzetes oszlop, akkor téglatest.

2. Készítsünk halmazábrát, melyben ábrázoljuk a következő halmazokat, ha az alaphalmaz az $\mathbb{N}$!

   A = {páros számok}; B = {4-gyel osztható számok};

   C = {8-cal osztható számok}; D = {3-mal osztható számok}.

   a) Írjunk egy-egy számot mindegyik halmazrészbe!

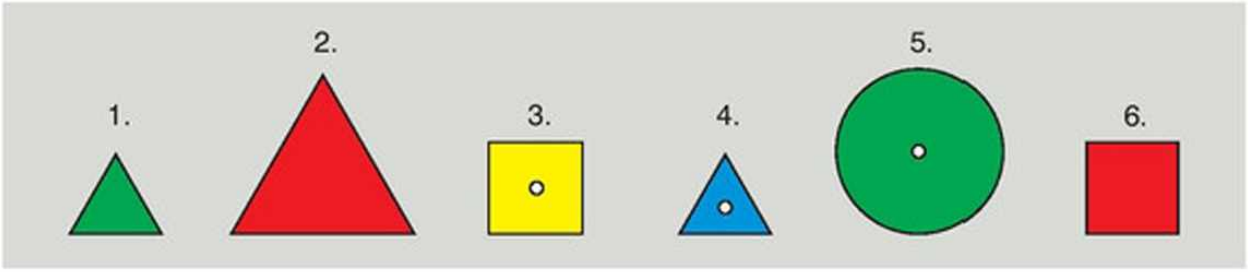
   b) Írjuk fel az egyes halmazrészekben lévő számokat, és írjuk oda mindegyik mellé, hogy a 2; 4; 8 és 3 számok közül melyikkel osztható, és melyikkel nem!

3. Az ábrán látható logikai lapokról döntsük el, hogy igaz vagy hamis rájuk az állítás!

   A) Kicsi és háromszög. *B)* Kör és négyzet.

   C) Háromszög, de nem lyukas. *D)* Négyzet vagy nagy.

   E) Nem nagy, mégis lyukas. *F)* Se nem kör, se nem kicsi.



4. Melyek azok a számok, amelyekre a következő állítások egyike sem igaz?

   A) 500-nál nagyobb;

   B) legfeljebb 300;

   C) nem osztható 25-tel;

   D) 0-ra végződik.

5. Egy-egy cédulára leírtuk a következő két állítást:

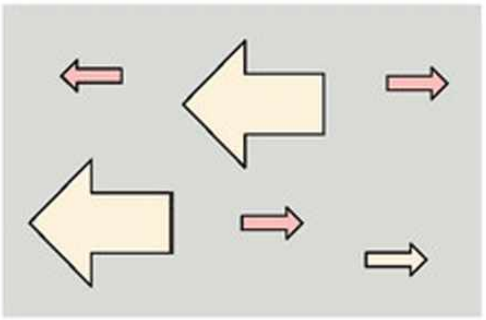
   A) A négyszög tengelyesen szimmetrikus.

   B) A négyszög minden oldala egyenlő.

   Rajzoljunk négyszögeket! Kékkel, amelyekre mindkét állítás igaz; zölddel, amelyekre egyik állítás igaz, a másik hamis; pirossal, amelyekre mindkét állítás hamis! Készítsünk halmazábrát, és színezzük a négyszögeknek megfelelő színnel a részeit!

6. A nyilak lehetnek kicsik vagy nagyok, pirosak vagy sárgák, jobbra vagy balra mutatók. Döntsük el, hogy az alábbi nyilakra melyik állítás igaz, és melyik hamis!

a) Minden piros nyíl jobbra mutat.
b) Van olyan balra mutató nyíl, amelyik piros.
c) Ha a nyíl nagy, akkor balra mutat.
d) Van jobbra mutató nagy nyíl.
e) Minden sárga nyíl nagy.
f) Minden nagy nyíl balra mutat.



Írjunk további igaz és hamis állításokat!
Rajzoljunk ábrát, amelyre az első 4 állítás igaz!

7. A Hazig szigeten három szomszédos házat sárgára, zöldre és kékre festettek. (Mindegyiket egyféle színű festékkel festették, és mindhárom színre festettek házat.) A három házban Kovács, Nagy és Varga lakik, nem feltétlenül ebben a sorrendben. A három házigazda a következőket mondta:

Kovács: „Az én házam sárga."
Nagy: „Az én házam nem sárga."
Varga: „Az én házam nem kék."



Kinek milyen színű a háza, ha tudjuk, hogy a gazdák közül pontosan egy mond igazat, a másik kettő pedig hazudik?

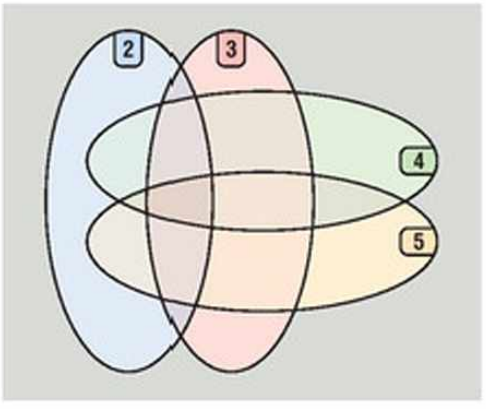
8. Az Ötök Klubjában három lány van, akik 11; 12 és 13 évesek, valamint két fiú, akik 11 és 13 évesek. Pepe és Titi ugyanolyan neműek, Bubu és Dodó ugyanolyan korúak. Lala fiatalabb Titinél, és ugyanolyan nemű, mint Dodó. Melyik gyerek milyen nemű és hány éves, ha mindegyik becenév lehet akár fiúé, akár lányé?

9. Egy matematikaverseny országos döntőjének öt különböző városban (Győr, Kecskemét, Miskolc, Pécs és Szeged) lakó résztvevői a következőket állítják:

Anna: „Dezső kecskeméti. Én szegedi vagyok."
Béla: „Szegedi vagyok. Csilla pécsi."
Csilla: „Én Szegeden lakom. Dezső miskolci."
Dezső: „Kecskeméti vagyok. Ernő győri."
Ernő: „Valóban győri vagyok. Anna viszont miskolci."

Ki hol lakik, ha mindegyik versenyzőnek egyik állítása igaz, a másik hamis?

10. A mellékelt ábrán a 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel osztható számok halmazát ábrázoltuk. Rajzoljuk le az ábrát, és írjunk egy-egy számot a különböző halmazrészekbe! Színezzük feketére azokat a részeket, amelyeknek nincs egyetlen elemük sem! (➡)



11. Hány közös pontja lehet

a) két háromszögvonalnak;
b) két különböző sugarú körvonalnak és egy téglalapvonalnak?

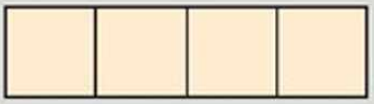
12. Hány olyan kétjegyű természetes szám van, amely nem osztható
a) sem 3-mal, sem 7-tel;
b) sem 2-vel, sem 6-tal;
c) sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

13. Egy családban 4 gyerek van: Anna, Botond, Csaba és Dóra. Botond Anna előtt született, Dóra idősebb, mint Csaba, Dóra pedig Botond után született. Anna fiatalabb, mint Dóra, de nem ő a legfiatalabb. Milyen sorrendben születtek a gyerekek?

14. A 6000-nél kisebb, de 5000-nél nem kisebb számok között melyikből van több: amelyik százasokra kerekítve 5000, vagy amelyik 6000?

15. Egy kancsóban fél liter víz van, egy üvegben pedig háromnegyed liter bor. Az üvegből 1 dl bort áttöltünk a kancsóba, ott elkeverjük, majd a keverékből 1 dl-t visszatöltünk az üvegbe. Mi lesz több, a kancsóban a bor, vagy az üvegben a víz?

16. Matyi kockahálókat rak össze négyzetekből. Négy négyzetet már összerakott az ábra szerint. Hányféleképpen helyezheti el a maradék két négyzetet, ha a tengelyes tükrözéssel egymásba átvihető kockahálókat nem tekintjük különbözőnek? (➡)



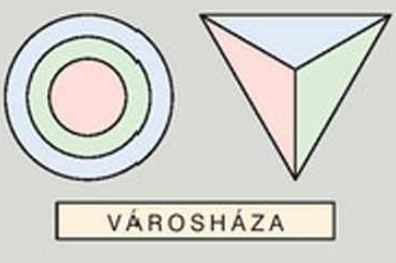
17. A Quarto-játékban a bábukat 4 tulajdonság jellemzi. Kétféle alak: négyzetes hasáb vagy henger; kétféle méret: kicsi vagy nagy; kétféle szín: világos vagy sötét, és mindegyik lehet lyukas vagy tömör.
a) Hány bábu van, ha az összes lehetőség előfordul?
b) Hány olyan bábu van, amely a kicsi, világos, tömör hengertől pontosan 1 tulajdonságban tér el?

18. Egy hatjegyű szám csupa páros számjegyből áll. Az első és az utolsó számjegy megegyezik, a két középső számjegy pedig 0. Az első és a második számjegy összege kétszerese az 5. és a 6. összegének.
a) Melyik számjeggyel kezdődhet a szám?
b) Melyik a lehetséges legnagyobb ilyen hatjegyű szám?
c) Melyik a lehetséges legkisebb ilyen hatjegyű szám?
d) Összesen hány olyan szám van, amely a feltételeknek megfelel?

19. Keressünk szabályosságot a 2007-es évszámban, és számoljuk össze, hány négyjegyű számra teljesül egy-egy ilyen szabályosság! Például: az első két számjegy szorzata megegyezik az utolsó két számjegy szorzatával. Végezzük el ugyanezt a feladatot az aktuális évszámmal!

20. Egy városban a városháza előtti térre háromféle színű árvácskát ültetnek különböző alakban úgy, hogy egy-egy részbe egyszínű, de a szomszédos részekbe különböző színű virág kerüljön. (➡)

Hányféleképpen ültethetik a két ágyásba a virágokat, ha mindhárom színt felhasználják?



21. Egy négy kocsiból álló vonatot színesre akarnak festeni úgy, hogy minden kocsi egyszínű legyen. A piros, a sárga és a kék színek mindegyikét legalább egyszer felhasználják (más szín nincsen).

a) Hányféle lehet a vonat?

b) Hány lehetőség lenne, ha a vonat öt kocsiból állna?

***22.** Piros és kék pálcikákból szabályos ötszöget rakunk ki úgy, hogy az elforgatással egymásba átvihető ötszögeket egy esetnek tekintjük.

a) Hány lehetőség van, ha 1 piros és 4 kék pálcikát használunk?

b) Hány lehetőség van, ha 2 piros és 3 kék pálcikát használunk?

c) Hány lehetőség van, ha csak azt tudjuk, hogy az ötszög nem egyszínű?

23. Hány pontban metszhet egy egyenes

a) egy hatszögvonalat; *b)* egy hétszögvonalat?

Nézzük meg, hány olyan eset van, amikor az egyenes nem halad át csúcson!

***24.** Szombaton Zorka azt mondta: Most 5. hó 5-e, és 5 óra 5 perc van. Hány olyen időpont lesz még ebben az évben, amelyet így leírva csak egyféle számjegyet használunk? (Az órákat 1–24-ig számozzuk.)

25. Egy öreg és egy fiatal indián ül egy csónakban. A fiatal fia az öregnek, de az öreg nem apja a fiatalnak. Hogy lehet ez?

26. Mókás Pepi kutyatenyészetéből elrabolták a kölyköket. Szimat felügyelő a következőket jegyezte fel Pepi és három szomszédjának vallomásából:



Mókás Pepi: „Reggel hétkor mentem el a munkába. Fél ötkor, amikor hazaértem, üresen találtam a kölykök kennelét. Nem tudom, ki tehette, de a felnőtt kutyák biztos nagyon megugatták. Ezt a szomszédaimnak is hallaniuk kellett."

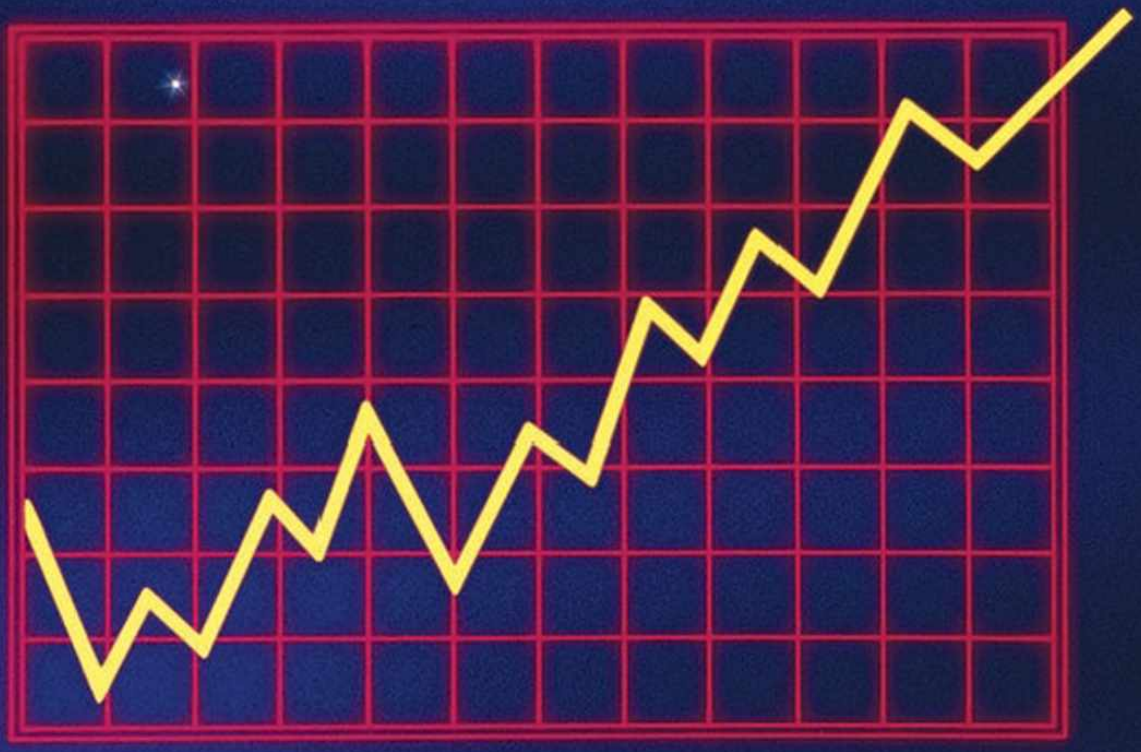
Alapos Alajos: „Kérem, én mindent pontosan feljegyeztem. Délben hazajöttem elkészíteni egy számítógépes bemutatót. Pontosan 12.10-kor értem haza, és nagyon siettem volna vissza az előadásra. De hiába mentem ki idejében a Pepi úr háza előtti megállóba, a 14 óra 55 perces busz megint 12 percet késett. Fel is írtam, kérem, a rendszámát: AUT 145. Panaszt fogok tenni a Volánnál. "

Csupafül Gerzson: „Az biztos, hogy én meghallottam volna az ugatást! Micsoda egy bitang, aki ilyet tesz! Hogy ennek is ma kellett történnie, amikor orvoshoz kellett mennem! Ráadásul nagyon elhúzódott a vizsgálat, ezért rohantam haza, nehogy lemaradjak kedvenc rádióműsoromról, a fél 4-kor kezdődő Hangáriáról."

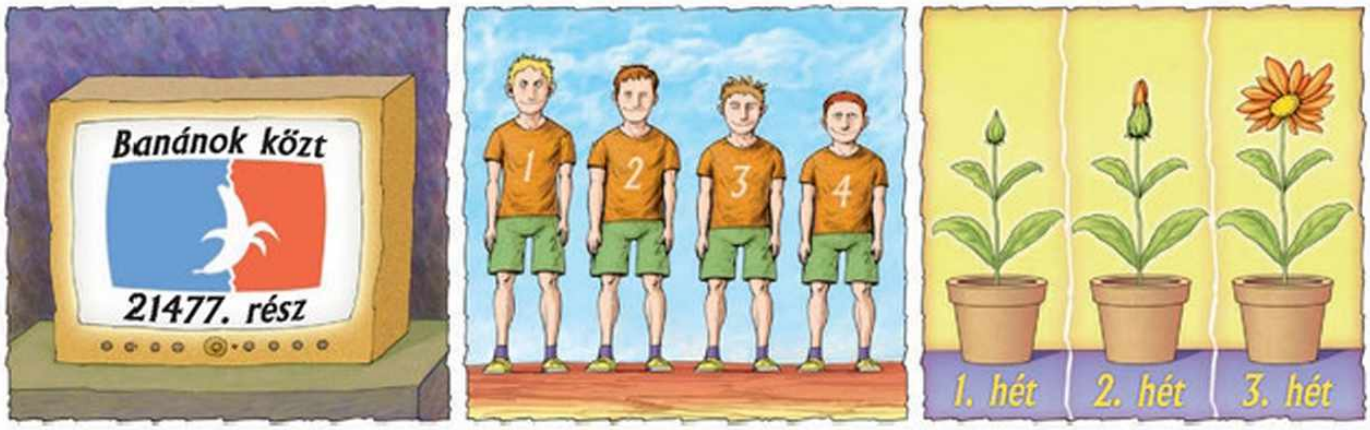
Cserfes Malvin: „Majdnem egész nap itthon voltam, nem hallottam semmit. Csak ebéd után, valamikor háromnegyed 3 körül mentem el a boltba. Aztán összefutottam a sógornőmmel, és egy kicsit beszélgettünk. Akkor értem haza, amikor Pepi úr kiszaladt az utcára. Úgy sajnálom azokat a drága kiskutyákat!"

Szimat felügyelőnek két gyanúsítottja van. Pecér Petyának 1 órától fél 3-ig, Sunyi Sanyának negyed 3-tól 4 óráig nincs alibije. Melyikük lehet a tettes?

6 Lineáris függvények, sorozatok



1. Sorozatok



A fenti képeken sorozatok láthatók. Ezek jellemző tulajdonsága, hogy bármely tag egy sorszámhoz tartozik, amely megadja, hogy az adott tag a sorozat hányadik helyén áll.

Egy tévésorozat vagy tornasor esetén már az elnevezésből is tudjuk, hogy sorozatról van szó. Az Árpád-házi királyok időrendben, egy úszóverseny helyezettjei (ha nincs holtverseny) vagy éppen ennek a könyvnek a fejezetei sorozatot alkotnak.

1. példa

Rakjunk ki kavicsokból egyre nagyobb négyzeteket az alábbi módon!

1. 2. 3. 4.



a) Rajzoljuk le a sorozat 6. tagját!

b) Hány kavicsból állnak a sorozat első hat tagját alkotó négyzetek?

Megoldás

a) A sorozat 6. tagja egy olyan négyzet, amelynek oldala 6 kavicsból áll.



b) Foglaljuk táblázatba az adatokat!

sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.
kavicsok száma	1	4	9	16	25	36

A fenti példában a kavicsok száma is sorozatot alkot, a négyzetszámok sorozatát.

A sorozatok tagjaira bevezetjük a következő jelölést:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots,$$

ahol a_n a sorozat n-edik tagja ($n = 1; 2; 3; 4; \ldots$).



Az 1. példabeli sorozat tehát

$$a_1 = 1;\ a_2 = 2^2;\ a_3 = 3^2;\ a_4 = 4^2;\ \ldots;\ a_n = n^2;\ \ldots.$$

Hasonló számsorozatot alkotnak a természetes számok, a páros számok, a hárommal osztva 1 maradékot adó számok stb.

2. példa

Írjuk fel a következő sorozatok első négy tagját, majd adjuk meg az n-edik tagot is a fenti jelölésekkel!

a) A pozitív természetes számok növekvő sorrendben;
b) a pozitív páros számok növekvő sorrendben;
c) a hárommal osztva 1 maradékot adó pozitív számok növekvő sorrendben.

Megoldás

Írjuk fel a sorozatok első elemeit, majd próbáljunk olyan szabályosságot találni, amely alapján az n-edik tag is meghatározható!

a) 1; 2; 3; 4; ...
$a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_3 = 3;\ a_4 = 4;\ \ldots;\ a_n = n;\ \ldots$

b) 2; 4; 6; 8; ...
$a_1 = 2 \cdot 1;\ a_2 = 2 \cdot 2;\ a_3 = 2 \cdot 3;\ a_4 = 2 \cdot 4;\ \ldots;\ a_n = 2n;\ \ldots$

c) 1; 4; 7; 10; ...
$a_1 = 3 \cdot 0 + 1;\ a_2 = 3 \cdot 1 + 1;\ a_3 = 3 \cdot 2 + 1;\ a_4 = 3 \cdot 3 + 1;\ \ldots;$
$a_n = 3 \cdot (n - 1) + 1;\ \ldots$

A pozitív **páros** számok sorozatának n-edik tagja $\mathbf{2n}$.

A pozitív **páratlan** számok sorozatának n-edik tagja $\mathbf{2n - 1}$.

3. példa

Egy sorozat első két tagja: 2; 1. A sorozat következő tagját úgy kapjuk, hogy az előzőből kivonjuk az azt megelőző tagot.

a) Írjuk fel a sorozat első nyolc tagját!
b) Mi lesz a sorozat első 54 tagjának az összege?

Megoldás

a) $a_1 = 2;\ a_2 = 1;\ a_3 = a_2 - a_1 = 1 - 2 = -1;$
$a_4 = a_3 - a_2 = -1 - 1 = -2;\ a_5 = a_4 - a_3 = -2 - (-1) = -1;\ \ldots$

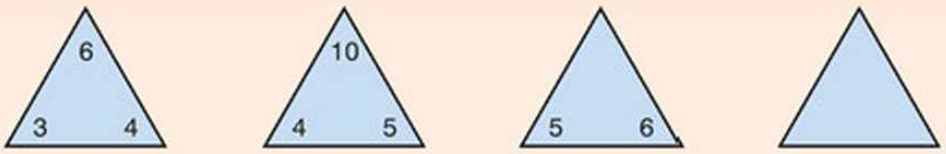
Hasonlóan folytatva, a sorozat első 8 tagja:
2; 1; −1; −2; −1; 1; 2; 1.

b) Észrevehetjük, hogy a sorozatban az első 6 tag ismétlődik. Ezek összege 0, így az első 54 tag összege is 0.

Mi a sorozat 13., 62. és 663. tagja?

4. példa

Keressünk szabályt, és folytassuk a háromszögek sorozatát a harmadik és negyedik ábra kiegészítésével!



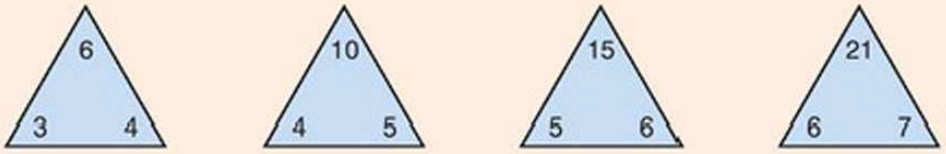
Megoldás

A háromszögek bal alsó sarkában lévő számok mindig 1-gyel nőnek, így a negyedik háromszög bal alsó sarkába 6 kerül.

A jobb alsó számok mindig 1-gyel nagyobbak a bal alsó számoknál, így a negyedik háromszögben a jobb alsó szám 7 lesz.

Észrevehetjük, hogy az első két háromszögben a felső szám az alsó kettő szorzatának a fele, hiszen $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ és $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$.

Így a harmadik háromszögbe a felső csúcshoz $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$, a negyedikbe pedig $\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ kerül.



Ugyanígy elfogadható megoldás lenne az is, hogy a felső csúcsnál lévő szám mindig 4-gyel nő, így a harmadik háromszögbe 14, a negyedikbe 18 kerülne.

Egy sorozatról néhány tagjának ismeretében nem mindig tudjuk megmondani, hogy hogyan kell folytatni.

5. példa

Folytassuk az 1; 3; 9; ... sorozatot még három taggal!

Megoldás

Többféle megoldást találhatunk, például a következőket:

a) 1; 3; 9; 27; 81; 243; ... (·3 ·3 ·3 ·3 ·3) — A második tagtól kezdve minden tag az előzőnek a háromszorosa.

b) 1; 3; 9; 19; 33; 51; ... (+2 +6 +10 +14 +18; +4 +4 +4 +4) — A tagok különbsége néggyel nő.

c) 1; 3; 9; 1; 3; 9; ... — Az első három tag ismétlődik.

d) 1; 3; 9; 17; 31; 53; ... — A harmadik tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk, hogy az előző két tag összegéhez 5-öt adunk.



$9 = 1 + 3 + 5$
$17 = 3 + 9 + 5$
$31 = 9 + 17 + 5$
$53 = 17 + 31 + 5$

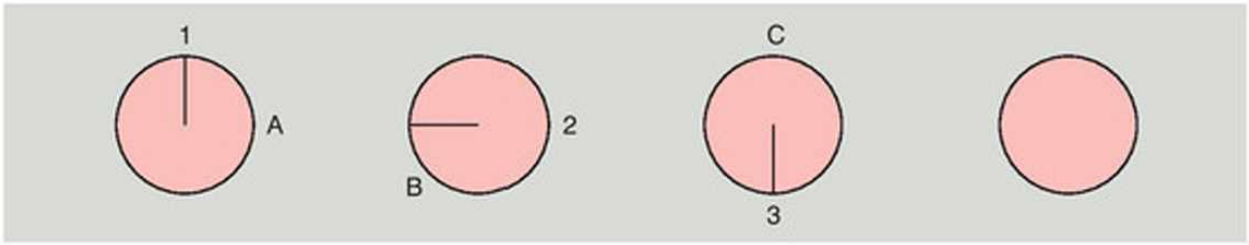
Feladatok

1. Adjuk meg annak a számsorozatnak az első 5 tagját, amelynek az első tagja 9, a további tagjait pedig úgy kapjuk, hogy
   a) az előző taghoz −2-t adunk; *b)* az előző tag kétszereséből 10-et kivonunk!

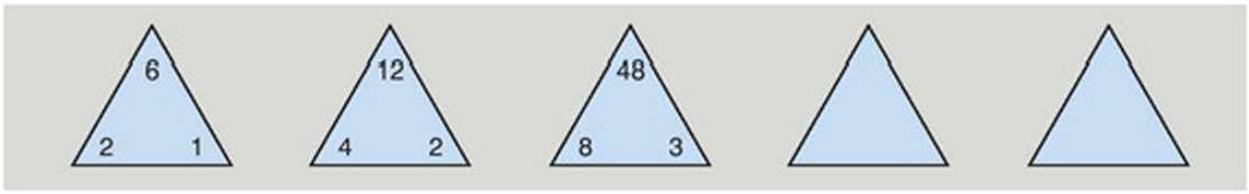
2. Egy számsorozat minden tagja annak a számnak a fele, ahányadik tagja a sorozatnak. Adjuk meg a sorozat első öt, valamint a 100. tagját!

3. Rajzoljunk egy szabályos háromszöget! Legyen ez egy sorozat első tagja! A sorozat további tagjait úgy kapjuk, hogy az előzőleg kapott ábrán látható háromszögek középvonalait berajzoljuk. Rajzoljuk meg a sorozat első négy elemét!

4. Folytassuk a sorozatot a negyedik ábra kiegészítésével!



5. Folytassuk a sorozatot a negyedik és az ötödik háromszög kiegészítésével! Írjuk fel a szabályt!



6. Folytassuk az alábbi számsorozatokat!
   a) 2; 5; 8; 11; 14; ... ; *b)* 2; 3; 5; 7; 11; ... ; *c)* 2; 5; 10; 17; 26; ...

7. Milyen szabály szerint képezhetjük az alábbi sorozatok következő tagjait? Folytassuk a sorozatokat további öt-öt taggal!
   a) 1; 2; 4; 5; 7; 8; ... ; *b)* 1; 4; 16; 64; ... ; *c)* 1; 8; 27; 64; ...

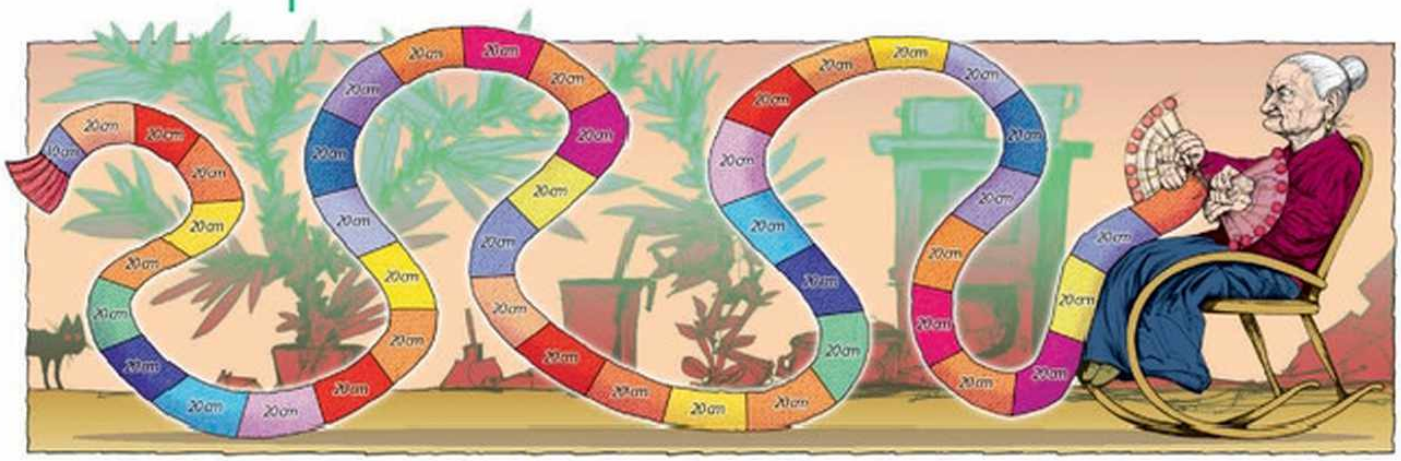
8. Egy sorozat első 7 tagja a következő: 1; 2; 0; 1; 2; 0; 1; ...
   a) Mi a sorozat képzési szabálya?
   b) Mennyi a sorozat első 15; 73; 188 tagjának összege?
   c) Mi a sorozat 27., 77., 97. tagja?

*9. 43-tól kezdve felírtuk a páratlan számokat. Bekarikáztuk az elsőt, aztán kihagytunk egyet, majd újra bekarikáztunk egyet, kihagytunk kettőt és így tovább. A bekarikázott számok mind prímek. Vajon mindig prímszámokat kapunk így?

Rejtvény

Folytassuk a sorozatot a következő 5 taggal: J, F, M, Á, M, J, J, ... !

2. Számtani sorozat



1. példa

Nagymama sálat köt az unokájának, Panninak karácsonyra. Az első napon csak 10 cm-rel készül el, de azt követően minden nap 20 cm-t köt.

a) Milyen hosszú lesz a sál a 2., 3., 4., 5. nap végén?
b) Volt-e olyan nap, amelynek a végén éppen 2 m hosszú volt a sál?

Adjunk meg olyan tulajdonságot, amely a sorozat minden tagjára igaz!

Megoldás

a) A sál hossza

az 1. nap végén 10 cm;
a 2. nap végén 10 cm + 20 cm = 30 cm;
a 3. nap végén 30 cm + 20 cm = 50 cm;
a 4. nap végén 50 cm + 20 cm = 70 cm;
az 5. nap végén 70 cm + 20 cm = 90 cm.

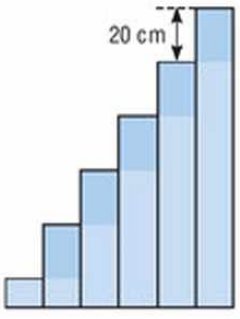
A sál hossza az 1., 2., 3., 4., 5. nap végén 10 cm, 30 cm, 50 cm, 70 cm, 90 cm.

A sorozat minden tagja 10 többszöröse, másképpen fogalmazva minden tag osztható 10-zel.

b) Jól látható, hogy a napok végén a sál hossza olyan sorozatot alkot, amelynek tagjai a 10-nek páratlan számú többszörösei.

A 2 m = 200 cm = 20 · 10 cm, ami a 10 páros számú többszöröse, ezért nem lesz olyan nap, amikor a nap végén a sál 2 méter hosszú.

Vajon milyen hosszú lesz a sál 100 nap elteltével?



A példában az egyes napok végén a sál hossza sorozatot alkot. Vizsgáljuk meg a tagjait!

$a_1 = 10$;
$a_2 = 30$; $\quad a_2 - a_1 = 20$;
$a_3 = 50$; $\quad a_3 - a_2 = 20$;
$a_4 = 70$; $\quad a_4 - a_3 = 20$;
$a_5 = 90$. $\quad a_5 - a_4 = 20$.

A második tagtól kezdve bármely tag és az előző különbsége mindig 20.

DEFINÍCIÓ: Számtani sorozatnak nevezzük azt a számsorozatot, amelyre teljesül, hogy (a második tagtól kezdve) bármely tag és az előző tag különbsége (differenciája) állandó.

A számtani sorozat n-edik tagját a_n-nel, az előzőt a_{n-1}-gyel, a különbséget pedig d-vel jelölve felírhatjuk, hogy

$$a_n - a_{n-1} = d \quad (n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}),$$

ahol a d (differencia) a sorozatra jellemző állandó.



Ez azt is jelenti, hogy egy számtani sorozat egy tagját megkapjuk, ha az előző taghoz hozzáadjuk a különbséget:

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad (n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}).$$

2. példa

Melyek számtani sorozatok az alábbiak közül?

a) 2; 2,75; 3,5; 4,25; ... ; *b)* 1; 2; 1; 2; 1; 2; ... ;
c) 5; 5; 5; 5; 5; ... ; *d)* 7; 3; −1; −5; −9; ...

Megoldás

Egy sorozat akkor számtani sorozat, ha (a 2. tagtól kezdve) bármely tag és az előző tag különbsége ($a_n - a_{n-1}$) állandó.

a) 2; 2,75; 3,5; 4,25; ...

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2{,}75 - 2 = 0{,}75 \\ a_3 - a_2 &= 3{,}5 - 2{,}75 = 0{,}75 \\ a_4 - a_3 &= 4{,}25 - 3{,}5 = 0{,}75 \end{aligned}\right\} \quad d = 0{,}75 \rightarrow \text{állandó}$$

$d > 0$
növekvő sorozat

b) 1; 2; 1; 2; 1; ...

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2 - 1 = 1 \\ a_3 - a_2 &= 1 - 2 = -1 \\ a_4 - a_3 &= 2 - 1 = 1 \\ a_5 - a_4 &= 1 - 2 = -1 \end{aligned}\right\} \quad \text{A különbség nem állandó.}$$

c) 5; 5; 5; 5; 5; ...

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 5 - 5 = 0 \\ a_3 - a_2 &= 5 - 5 = 0 \\ a_4 - a_3 &= 5 - 5 = 0 \\ a_5 - a_4 &= 5 - 5 = 0 \end{aligned}\right\} \quad d = 0 \rightarrow \text{állandó}$$

$d = 0$
konstans (állandó) sorozat

d) 7; 3; −1; −5; −9; ...

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 3 - 7 = -4 \\ a_3 - a_2 &= -1 - 3 = -4 \\ a_4 - a_3 &= -5 - (-1) = -4 \\ a_5 - a_4 &= -9 - (-5) = -4 \end{aligned}\right\} \quad d = -4 \rightarrow \text{állandó}$$

$d < 0$
csökkenő sorozat

Az *a)*, *c)* és *d)* sorozatok számtani sorozatok, mert a tagok különbsége állandó, a *b)* nem számtani sorozat.

Játsszunk!

Adjunk meg egy számtani sorozatot! Sorban mindenki mondjon egy-egy tagot a sorozatból, de úgy, hogy a 3-as számjegyet tartalmazó tagok helyett BUMM-ot kell mondani!

Például:

$a_1 = 4$, $d = 7$.

4; 11; 18; 25; BUMM; BUMM; 46; BUMM; 60; ...

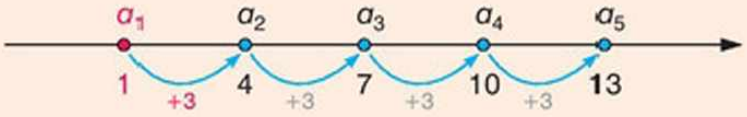
3. példa

Adjuk meg annak a számtani sorozatnak az első öt és a 20. tagját, amelynek első tagja $a_1 = 1$ és különbsége $d = 3$!

Megoldás

Mivel a sorozat számtani sorozat, az első tagot követő tagokat úgy kaphatjuk meg, hogy az előző taghoz hozzáadjuk a különbséget.

$a_1 = 1;$
$a_2 = 1 + 3 = 1 + 1 \cdot 3 = 4;$
$a_3 = 1 + 1 \cdot 3 + 3 = 1 + 2 \cdot 3 = 7;$
$a_4 = 1 + 2 \cdot 3 + 3 = 1 + 3 \cdot 3 = 10;$
$a_5 = 1 + 3 \cdot 3 + 3 = 1 + 4 \cdot 3 = 13;$
...
$a_{20} = 1 + 19 \cdot 3 = 58.$



A számtani sorozatot egyértelműen meghatározza az első tagja és a különbsége. Ezek ismeretében a számtani sorozat n-edik tagját a következő módon fejezhetjük ki:

$a_1;$
$a_2 = a_1 + d;$
$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$
$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d;$
$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d;$
$\vdots$
$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,}$ **ahol** $\mathbf{n \geq 2}$ **és egész szám.**



4. példa

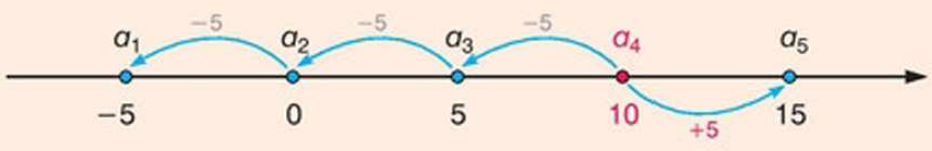
Adjuk meg a következő számtani sorozatok első öt tagját!

a) $a_4 = 10$; $d = 5$; *b)* $a_7 = 22$; $a_9 = 28$.

Megoldás

a) Alkalmazzuk a számtani sorozat definícióját!

$a_5 = a_4 + d$, ezért $a_5 = 10 + 5 = 15.$
$a_4 = a_3 + d$, ezért $a_3 = a_4 - d$, így $a_3 = 10 - 5 = 5.$
$a_3 = a_2 + d$, ezért $a_2 = a_3 - d$, így $a_2 = 5 - 5 = 0.$
$a_2 = a_1 + d$, ezért $a_1 = a_2 - d$, így $a_1 = 0 - 5 = -5.$



b) $a_9 = a_7 + 2d$, azaz $28 = 22 + 2d$, amelyből $d = \frac{28 - 22}{2} = 3$.

A számtani sorozat különbségének és egy tagjának ismeretében kiszámíthatjuk az előző tagokat.

$a_1 + 6d = a_7$, ebből $a_1 = a_7 - 6d$, azaz $a_1 = 22 - 18 = 4$.

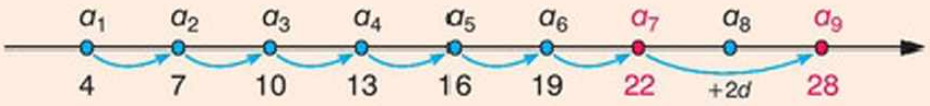
$a_2 = a_1 + d = 4 + 3 = 7$.

$a_3 = a_2 + d = 7 + 3 = 10$.

$a_4 = a_3 + d = 10 + 3 = 13$.

$a_5 = a_4 + d = 13 + 3 = 16$.

Az *a)* esethez hasonlóan visszafelé haladva is eljuthatunk az első taghoz.



5. példa

Egy számtani sorozat első öt tagja 28; 23; 18; 13; 8; ...

a) Mi lesz a sorozat 100. tagja?

b) Ábrázoljuk a sorozat első nyolc tagját derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy a tag sorszáma a pont első, a sorozat megfelelő tagja pedig a pont második koordinátája legyen!

c) Tagja-e a sorozatnak a −206?

Megoldás

a) $a_1 = 28$,

$d = a_2 - a_1 = 23 - 28 = -5$.

A 100. tagot keressük.

$a_{100} = a_1 + (100 - 1) \cdot d$,

$a_{100} = 28 + 99 \cdot (-5) = -467$.

A 100. tag a −467.

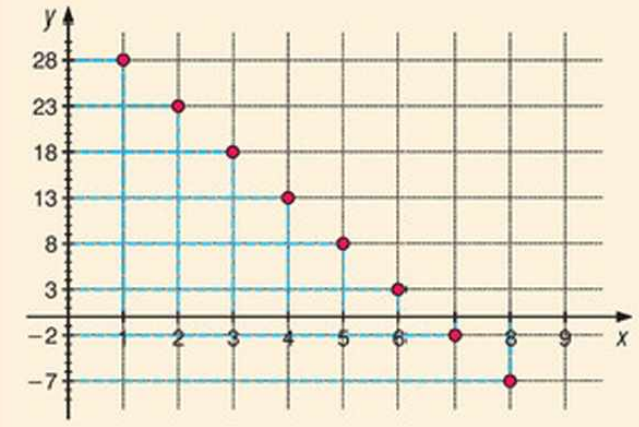
b) A sorozat első nyolc tagja:

$a_1 = 28$; $a_2 = 23$; $a_3 = 18$;
$a_4 = 13$; $a_5 = 8$; $a_6 = 3$;
$a_7 = -2$; $a_8 = -7$.

A sorozat 1. tagja a 28, tehát az (1; 28) pontot jelöljük meg.

A 2. tag a 23, tehát a következő pont a (2; 23).

Hasonlóan a sorozat további pontjai: (3; 18); (4; 13); (5; 8); (6; 3); (7; −2); (8; −7).



Mivel a sorozat különbsége –5, a negatív tagok: –2; –7; –12; –17; ... Az utolsó számjegyből is látható, hogy a –206 nem tagja a sorozatnak.

c) Ha a –206 a számtani sorozat tagja, akkor van olyan n egész szám, amelyre $a_n = -206$.

Ekkor $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, azaz

$$\begin{aligned} -206 &= 28 + (n-1)\cdot(-5) \\ -206 &= 28 - 5n + 5 \\ -206 &= 33 - 5n \qquad / + 5n \\ 5n - 206 &= 33 \qquad / + 206 \\ 5n &= 206 + 33 \\ n &= \frac{239}{5} \end{aligned}$$

A $\frac{239}{5}$ nem egész szám, ezért a -206 nem tagja a sorozatnak.



6. példa

Öt gyerek életkora számtani sorozatot alkot. A 2. és a 4. életkorának összege 22 év.

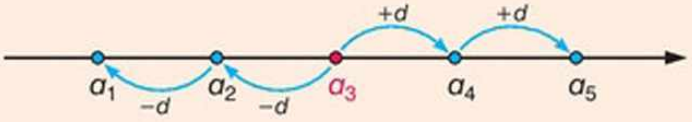
a) Hány éves a középső gyerek?

b) Mennyi a legfiatalabb és a legidősebb gyerek életkorának átlaga?

Megoldás

A gyerekek életkora nincs meghatározva, lehet pl. 1; 6; 11; 16; 21. Keressünk további lehetőségeket!

a) Ábrázoljuk a gyerekek életkorának sorozatát számegyenesen!



A középső gyerek életkorát keressük, és a 2. és a 4. korának összege adott. Ezért írjuk fel az a_2-t és az a_4-et a_3-mal kifejezve!

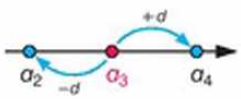
$$a_2 = a_3 - d \quad \text{és} \quad a_4 = a_3 + d.$$

Így $a_2 + a_4 = (a_3 - d) + (a_3 + d) = a_3 - d + a_3 + d = 2a_3$,

ebből

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{22}{2} = 11.$$

A középső gyerek 11 éves.



$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$$

b) A 1. és az 5. gyerek életkorának átlagát úgy kapjuk, hogy az életkorok összegét elosztjuk 2-vel. Az életkorokat az a_3-mal kifejezve:

$$\frac{a_1 + a_5}{2} = \frac{(a_3 - 2d) + (a_3 + 2d)}{2} = \frac{a_3 - 2d + a_3 + 2d}{2} = \frac{2a_3}{2} = a_3.$$

A 1. és 5. gyerek életkorának átlaga a 3. gyerek életkora, azaz 11 év.

Mennyi az öt gyerek életkorának átlaga?

A számtani sorozat három egymás utáni tagja közül a középső a két szélső átlaga, más néven **számtani közepe.**

Feladatok

1. Az alábbi számsorozatok közül melyek lehetnek számtani sorozatok?

a) $-3; 5; 13; 21; 29; \ldots$; *b)* $2; 4; 8; 16; 32; \ldots$; *c)* $\frac{3}{5}; 1; 1\frac{2}{5}; \frac{9}{5}; \ldots$;

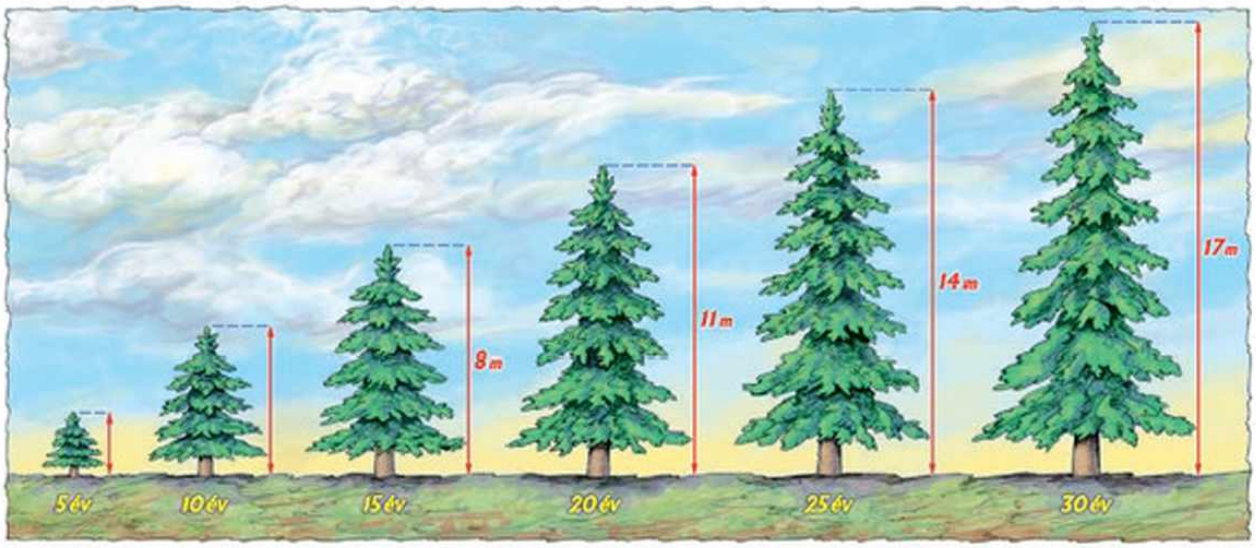
d) $11; 2; -7; -16; -25; \ldots$; *e)* $4; -2; -7; -12; -17; \ldots$

2. Helyezzünk egymás mellé egy-egy betűvel és számmal jelölt papírlapot úgy, hogy együtt számtani sorozatot alkossanak!

A) 15; 18; 21; 24; *B)* 22; 23; 24; 25; *C)* 14; 17; 20; 23; *D)* 33; 30; 27; 24

1. 26; 29; 32; 35; 2. 27; 30; 33; 36; 3. 21; 18; 15; 12; 4. 26; 27; 28; 29

3. Egy fenyőfa minden évben ugyanannyit nőtt. Az alábbi ábra azt mutatja, hány éves korában milyen magas volt. Milyen magas volt a fa 5 éves korában?



4. Egy családban a gyerekek születési évei számtani sorozatot alkotnak. A legidősebb gyerek 17 éves, a legkisebb 2. Hány gyerek lehet ebben a családban? Hány évesek a gyerekek? Az összes lehetséges választ adjuk meg!

5. Zsolti egy nagyon izgalmas könyvet olvas, így a héten minden nap olvasott belőle valamennyit. Hétfőn 34 oldalt olvasott el, kedden 50-et, pénteken pedig 98-at. Lehetséges-e, hogy a Zsolti által naponta elolvasott oldalak számtani sorozatot alkotnak? Ha igen, adjuk meg a sorozat különbségét!

6. Írjuk fel annak a számtani sorozatnak az első öt tagját, amelynek

a) harmadik tagja 9, különbsége 2;
b) különbsége –1,5, első tagja 7;
c) első tagja 3, második tagja 9;
d) első tagja –2, harmadik tagja 8;
e) harmadik tagja 3, ötödik tagja –11.

Ábrázoljuk a sorozatok tagjait derékszögű koordináta-rendszerben!

7. Egy sorozatnak ismerjük az n. tagját. Határozzuk meg a sorozat első tagját, különbségét és 100. tagját, ha az n. tag

a) $9 + 4(n - 1)$; *b)* $4 - 2(n - 1)$; *c)* $-6 + 5(n - 1)$!

*8. Egy sorozat n. tagja $7n + 3$. Határozzuk meg a sorozat első tagját, különbségét és 100. tagját!

9. Peti rendszeresen fut. Minden nap kétszer körbefutja a kiserdőt. Egy kör 4 km hosszú. Az első nap még nem bírta végigfutni a két kört, azóta azonban minden nap ezt teszi. 25 nap után összeszámolta, hogy addig összesen 195 km-t futott.
a) Hány km-t futott Peti az első napon? *b)* Mik alkotnak itt számtani sorozatot?

10. A Butajáték Kft. forgalma 2002-ben 12 millió Ft volt. Azóta minden évben 1,5 millió Ft-tal nőtt az előző évihez képest.
a) Mennyi volt a Butajáték Kft. forgalma 2006-ban?
b) Ha feltételezzük, hogy ez a továbbiakban is így folytatódik, mekkora lesz a cég forgalma 2014-ben?
c) Vajon mekkora lenne a forgalom 2100-ban?
d) Készítsünk diagramot, amelyen a Butajáték Kft. éves bevételét ábrázoljuk 2002-től 2010-ig!



11. Harkály Tóni az erdőben rábukkant egy odvas fára, ahol rengeteg ízletes, puha férget talált. Mindjárt meg is evett egyet. Annyira ízlett neki a finom falat, hogy azóta minden nap ellátogat ehhez a fához, és mindig 2-vel több férget eszik, mint az előző napon.
a) Hány férget eszik meg a 7. napon?
b) Hányadik napon fogyaszt el 23 férget?
c) Ha így folytatná tovább, hányadik napon enne meg 256 férget?

*12. Sün Aladár kevésbé rajong az efféle finomságokért. Ő desszertként inkább a ropogós bogarakat szereti. Egy szép napon az odvas fa tövében 92 bogarat talált, amelyekből rögtön meg is evett 22 darabot. Úgy megtömte a bendőjét, hogy elhatározta, diétázni kezd, és minden nap ugyanannyival csökkenti a napi bogáradagját. Az 5. és a 7. napon összesen 14 bogarat evett meg. Hányadik napon kell új desszertről gondoskodnia?



13. Három gyerek életkora számtani sorozatot alkot, az életkoruk összege 36 év.
a) Mennyi az életkoruk átlaga? *b)* Hány éves a középső gyerek?
c) Hány éves lehet a legfiatalabb? Keressünk több megoldást!

Rejtvény

Adjuk össze a pozitív egész számokat 1-től 100-ig!

3. Grafikonok a mindennapi életben





1. példa

Marci influenzás lett. Ahogy az ilyenkor lenni szokott, magas láza volt. A betegsége négy napja alatt naponta háromszor mérte a lázát. Anyukája feljegyezte a mérések eredményét, az adatokból pedig Marci az alábbi grafikont készítette.



Sajnos Marci anyukájának eredeti feljegyzéseire ráborult a tea, így nem látszik, mikor mennyi volt Marci testhőmérséklete.

a) Írjuk be a hiányzó számokat a grafikon segítségével!

Kedd		Szerda			Csütörtök			Péntek	
13:00	18:00	8:00	13:00	18:00	8:00	13:00	18:00	8:00	13:00

b) Következtethetünk-e a grafikonból arra, hogy mennyi volt Marci testhőmérséklete szerdán éjjel 11-kor?

Megoldás

a) A hiányzó számokat le tudjuk olvasni a grafikonról. Például kedden 13 órakor Marci testhőmérséklete 39,6 °C volt. Hasonlóan leolvasható a többi hiányzó adat is.

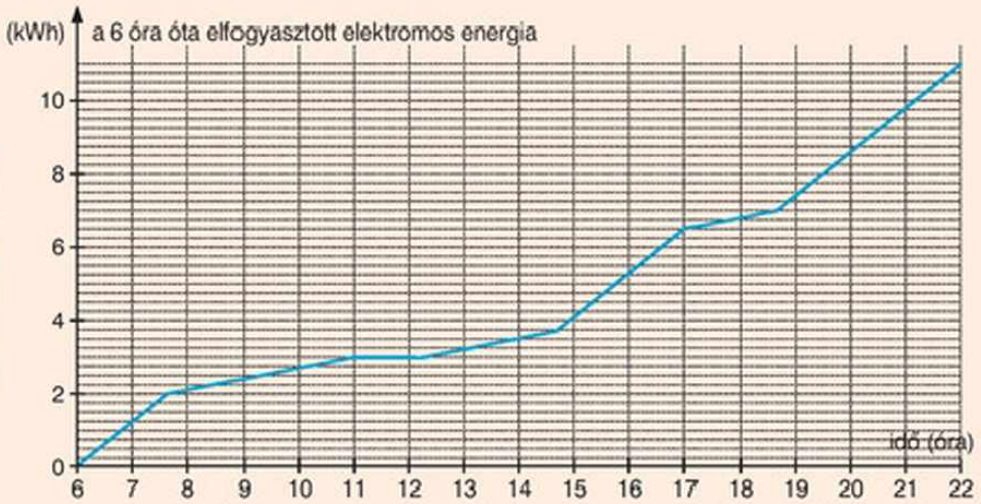
Kedd		Szerda			Csütörtök			Péntek	
13:00	18:00	8:00	13:00	18:00	8:00	13:00	18:00	8:00	13:00
39,6	39,8	37,9	38,2	39,4	38,1	38,3	38,1	37,2	37,5

b) Bár a lázgörbe pontjait össze szokták kötni, valójában semmiféle következtetést nem tudunk levonni arra nézve, hogy mennyi volt Marci testhőmérséklete két mérés között, pl. szerda este 11 órakor. A grafikon csak a megadott időpontokra szolgáltat adatokat.

2. példa

Az alábbi grafikon azt mutatja, hogy mennyi áramot fogyasztottak Kovácsék az egyik hétköznapon. Mikor otthon vannak, az áramfogyasztásuk 1,2 kilowattóra óránként. Néhány elektromos eszköz akkor is működik, amikor nincsenek otthon (pl. a hűtő és a készenléti állapotban lévő készülékek). Ekkor a fogyasztás óránként 0,3 kilowattóra. Csak akkor nincs fogyasztás, ha áramszünet van.





a) Hány óra körül mentek el otthonról reggel Kovácsék?

b) Volt-e a nap folyamán áramszünet?

c) Kovácsék fél 6 és fél 7 között szoktak vacsorázni. Otthon vacsoráztak-e ezen a napon?

d) Egészítsük ki a táblázatot! (Otthon voltak.; Nem voltak otthon.; Áramszünet volt.)

Időpont	Mi történt?
9 óra	
11 óra	
15 óra	
18 óra	
21 óra	

Megoldás

a) Kovácsék 8 óra előtt nem sokkal mentek el otthonról. Ezt követően a grafikon kevésbé meredeken emelkedik. Ez mutatja, hogy az áramfogyasztás csökkent.

b) Amikor nincs áramfogyasztás, akkor a grafikon nem emelkedik. A grafikonon található egy ilyen szakasz. Eszerint az áramszünet 11 órakor kezdődött, és nem sokkal 12 után fejeződött be.

c) Fél 6 és fél hét között a grafikon szerint lassan fogyott az áram, tehát Kovácsék nem vacsorázhattak otthon.

d)

Időpont	Mi történt?
9 óra	Nem voltak otthon.
11 óra	Áramszünet volt.
15 óra	Otthon voltak.
18 óra	Nem voltak otthon.
21 óra	Otthon voltak.

A grafikonok alapján gyakran olyasmire is következtetni tudunk, ami nem szerepel rajtuk. Az előző példa grafikonjáról például meg tudtuk állapítani, hogy mikor volt otthon a Kovács család.

A grafikonok vizsgálata az élet nagyon sok területén használható folyamatok elemzésére, valamint újabb következtetések levonására.

Feladatok

1. Dani vonattal utazott a nagymamájához. Egyszer át kellett szállnia. A grafikon alapján válaszoljunk a kérdésekre!

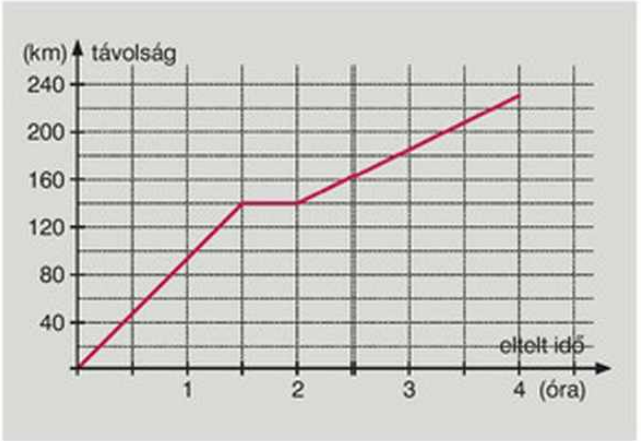
a) Hány órás volt Dani utazása?

b) Milyen messze lakik Dani a nagymamájától?

c) Mennyi időt kellett Daninak a csatlakozásra várnia?

d) Hány kilométerre van a nagymama lakhelyétől az az állomás, ahol Daninak át kellett szállnia?

e) A két vonat közül az egyik egy Intercity, a másik egy kis piros szerelvény volt. Melyikkel utazott előbb Dani? Hogyan állapítható ez meg?



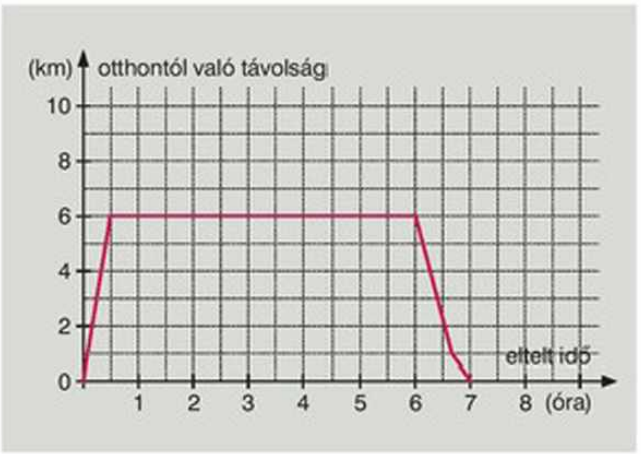
2. Egy színház büféje fél hatkor nyit. Az üdítő a felvonások közti szünetekben fogy a leggyorsabban. Az előadás alatt természetesen nem szolgálnak fel italokat. Az alábbi grafikon azt mutatja, hogy hogyan változott a büfében lévő üdítő mennyisége egy este.

a) Hány órakor kezdődött az előadás?
b) Hány felvonásos volt az előadás?
c) Hánykor zárt be a büfé?
d) Hány liter üdítő fogyott összesen ezen az estén?
e) Átlagosan hány liter üdítő fogyott el egy perc alatt a szünetekben? És az előadás előtt?



3. A grafikon Pirinek az otthonától való távolságát mutatja egy hétköznapon. (➡)

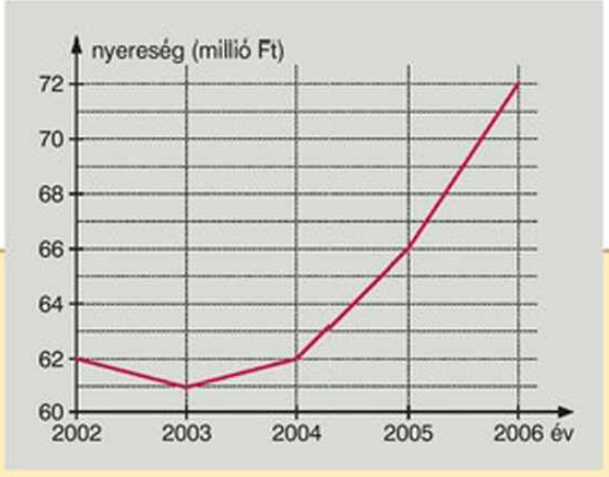
a) Állítsuk időrendbe a táblázat kiegészítésével az alábbi eseményeket: buszozott, autóval vitték, gyalogolt, iskolában volt.
b) Hány órát töltött Piri az iskolában?
c) Hány százalékkal tartott tovább az útja délután, mint délelőtt?
d) Mekkora volt annak az autónak a sebessége, amelyik Pirit vitte?



elindult otthonról					megérkezett haza

4. Egy kiránduló család reggel 8 órakor indult el autóval Győrből az olaszországi Urbinóba. Délig állandó sebességgel haladva 360 km-t tettek meg. Ekkor pihentek egy órát, majd óránként 120 km-t megtéve este 6 órára érkeztek meg Urbinóba.

a) Milyen messze van Urbino Győrtől?
b) Készítsünk grafikont az autó által megtett útról!
c) Olvassuk le a grafikonról, hogy hány órakor tettek már meg 480 km-t!



Rejtvény

A következő grafikon egy cég nyereségének változását mutatja 2002 és 2006 között. A cég vezetője büszkén mutatta be a grafikont, hiszen látszik rajta, hogy a cég nyeresége megsokszorozódott az utolsó két évben. Valóban?

4. Hozzárendelések

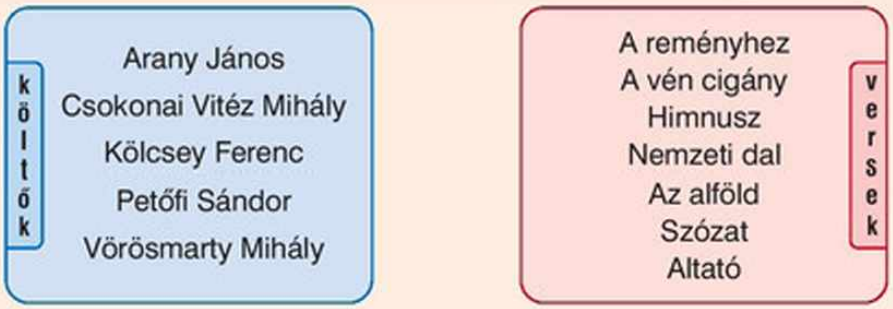


AFRIKA
ANTARKTISZ
AUSZTRÁLIA
ÁZSIA
DÉL-AMERIKA
EURÓPA
ÉSZAK-AMERIKA

Létesítsünk kapcsolatot az állatok és a földrészek között!

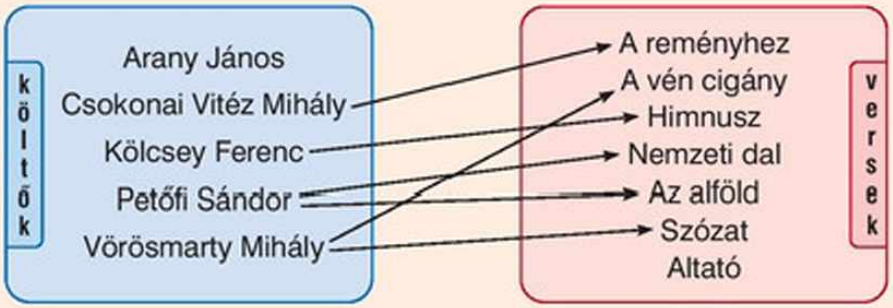
1. példa

Létesítsünk kapcsolatot a következő két halmaz elemei között! Kössük össze a költőket az általuk írt versekkel!



Megoldás

Az első halmazban költők, a másodikban verscímek vannak.



A példában a költők halmazához hozzárendeltük a versek halmazát. A hozzárendelés szabálya az volt, hogy minden költőhöz azt a verset rendeltük hozzá, amelyet ő írt.

Arany Jánoshoz nem tudtunk verset rendelni, mert egyik verse sem szerepelt a *versek* halmazában. Az Altató című verset pedig a *költők* halmazának egyetlen eleméhez sem tudtuk hozzárendelni, mert a *költők* halmazában nem szerepelt József Attila.

A költők halmazát a hozzárendelés alaphalmazának nevezzük.
A verscímek halmazát a hozzárendelés képhalmazának nevezzük.

A hozzárendeléseket általában f, g, h, … betűkkel jelöljük.

Egy **hozzárendelést** úgy adunk meg, hogy megadjuk az **alaphalmazt** és a **képhalmazt,** és megmondjuk azt a szabályt, amellyel az alaphalmaz elemeihez a képhalmaz elemeit rendeljük.

2. példa

Legyen egy hozzárendelés alaphalmaza

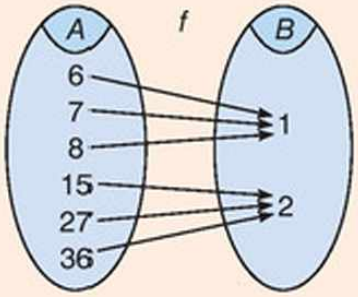
$A = \{3; 6; 8; 15; 27; 36\}$, a képhalmaza $B = \{1; 2\}$!

Adjunk meg olyan szabályt, amellyel az A halmaz elemeihez a B halmaz elemeit rendeljük!

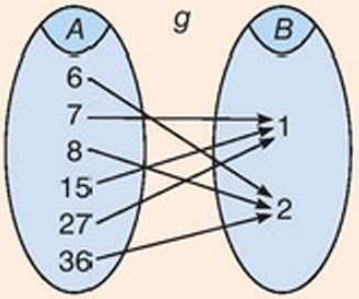
Megoldás

Sokféle szabályt találhatunk, például a következőket:

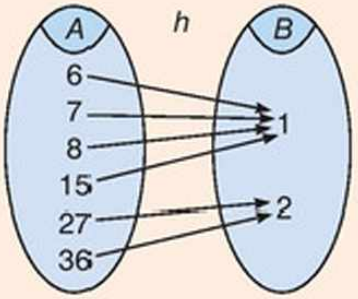
f: olyan hozzárendelés, amely az egyjegyű számokhoz 1-et, a kétjegyűekhez 2-t rendel.



g: olyan hozzárendelés, amely a páratlan számokhoz 1-et, a párosokhoz 2-t rendel.



Egy nyelviskolában legfeljebb 20 fős csoportokat indítanak. Legyen h az a hozzárendelés, amely a jelentkezők számához az elindított csoportok számát rendeli!



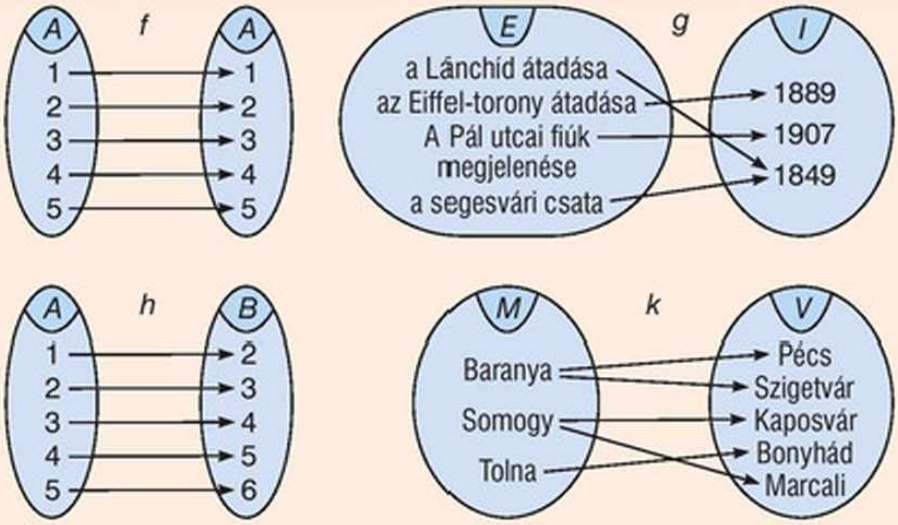
A 2. példa hozzárendeléseit felsorolással is megadhatjuk oly módon, hogy rendezett párokat sorolunk fel.

f: {(6; 1); (7; 1); (8; 1); (15; 2); (27; 2); (36; 2)};
g: {(6; 2); (7; 1); (8; 2); (15; 1); (27; 1); (36; 2)};
h: {(6; 1); (7; 1); (8; 1); (15; 1); (27; 2); (36; 2)}.

Például a (6; 1) rendezett pár azt jelenti, hogy az alaphalmaz elemei közül a 6-hoz a képhalmazból az 1-et rendeljük.

3. példa

Adjuk meg szavakkal és rendezett párokkal a következő hozzárendeléseket!



Lehetséges, hogy az alaphalmaz és a képhalmaz is ugyanazokat az elemeket tartalmazza.

Figyeljük meg a nyilakat! Miben különböznek egymástól ezek a hozzárendelések?

Megoldás

f hozzárendelés:

Az 5-nél nem nagyobb pozitív egész számokhoz önmagukat rendeljük.

f: {(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5)}.

g hozzárendelés:

A felsorolt eseményekhez azt az évet rendeljük, amikor történtek.

g: {(az Eiffel-torony átadása, 1889); (a Lánchíd átadása, 1849); (a Pál utcai fiúk megjelenése, 1907); (a segesvári csata, 1849)}.

h hozzárendelés:

Az 5-nél nem nagyobb pozitív egész számokhoz a náluk 1-gyel nagyobb számot rendeljük.

h: {(1; 2); (2; 3); (3; 4); (4; 5); (5; 6)}.

k hozzárendelés:

A dél-dunántúli megyékhez a felsorolt városok közül a bennük találhatókat rendeljük.

k: {(Baranya, Pécs); (Baranya, Szigetvár); (Somogy, Marcali); (Somogy, Kaposvár); (Tolna, Bonyhád)}.



4. példa

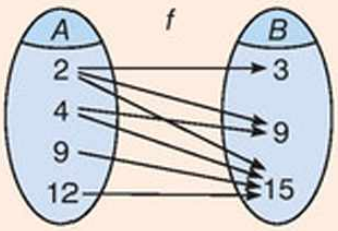
Adjuk meg ábrával és szavakkal a következő hozzárendeléseket!

f: {(2; 3); (2; 9); (2; 15); (4; 9); (4; 15); (9; 15); (12; 15)};

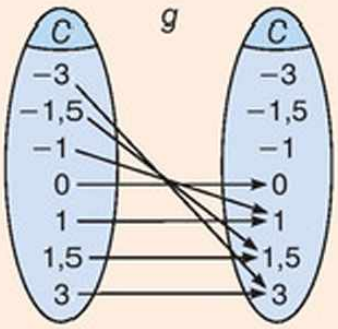
g: {(0; 0); (−1; 1); (1; 1); (−1,5; 1,5); (1,5; 1,5); (−3; 3), (3; 3)}.

Megoldás

f: az $A = \{2; 4; 9; 12\}$ alaphalmaz elemeihez a $B = \{3; 9; 15\}$ képhalmazból a nála nagyobbakat rendeli hozzá.



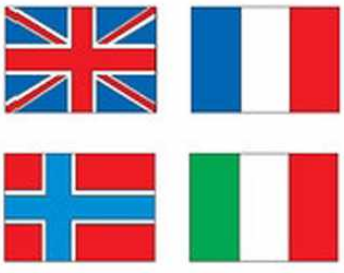
g: a $C = \{-3; -1,5; -1; 0; 1; 1,5; 3\}$ alaphalmaz elemeihez azok abszolút értékét rendeli hozzá a *C* képhalmazból.



Feladatok

1. Adjunk meg olyan hozzárendeléseket, amelyek az osztály tanulóihoz természetes számokat rendelnek hozzá!

2. Rendeljük hozzá az alábbi európai országok térképéhez a zászlójukat!





3. Adjunk meg olyan hozzárendeléseket, amelyeknek alaphalmaza
   a) az iskola osztályainak halmaza;
   b) az iskolai büfében található áruk halmaza;
   c) a pozitív egész számok halmaza!

4. Adjunk meg olyan hozzárendeléseket, amelyeknek képhalmaza
   a) az európai fővárosok halmaza;
   b) a racionális számok halmaza;
   c) az ábécé betűinek halmaza;
   d) az egyjegyű pozitív számok halmaza!

5. Adjunk meg hozzárendelést az alábbi városok és épületek között!

Városok: {Budapest; Róma; Párizs; Berlin; Prága; London}.






6. Adjuk meg a következő hozzárendeléseket ábrával és szöveggel!

a) $\{(0; -1); (1; 1); (2; 3); (3; 5); (4; 7); (5; 9); (6; 11)\}$;

b) $\{(1; 1); (2; \frac{1}{2}); (3; \frac{1}{3}); (4; \frac{1}{4}); (5; \frac{1}{5}); (6; \frac{1}{6})\}$.

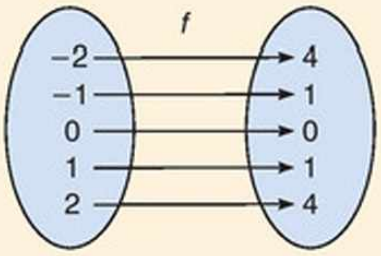
7. Adjuk meg a következő hozzárendeléseket rendezett párokkal és ábrával!

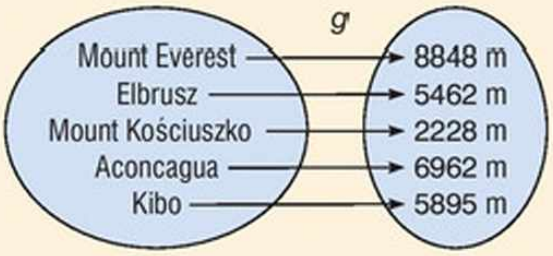
a) Az őszi hónapokhoz rendeljük hozzá azt a számot, ahány napból állnak!

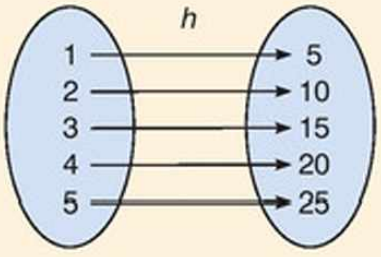
b) A tíznél kisebb páros természetes számokhoz rendeljük a köbüket!

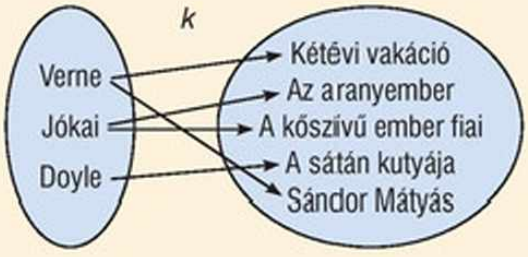
c) A koordináta-rendszer $A(1; 2)$, $B(4; -2)$, $C(-3; 0)$, $D(-3; 4)$ pontjaihoz rendeljük hozzá az x-tengelyre vett tükörképüket!

8. Adjuk meg a következő hozzárendeléseket szöveggel és rendezett párokkal!









Rejtvény

Kik vannak a képeken? Melyik században éltek? Miről híresek? Adjuk meg hozzárendelésekkel!



5. Függvények



Julius Caesar (Kr. e. 100–Kr. e. 44) az első római császár volt. A Caesar-féle titkosírást elsősorban hadászati célokra használták.

1. példa

Az a titkosírás, amellyel a következő szöveget kódolták, Julius Caesar nevét viseli.

NÓTU NÉHUÚEÓE, NÍ ÁA Á GŰHHWFOZ.

Fejtsük meg az üzenetet!

Megoldás

Tételezzük fel, hogy a titkosításkor az ábécé egyes betűit valamilyen szabály szerint egy másik betűvel helyettesítették. A szöveg tagolva van, tehát ha feltételezzük, hogy a magyar helyesírás szabályai szerint tagolták, akkor egybetűs szó nem sok lehet, leggyakoribb az *A*. Ekkor az előtte álló kétbetűs szó például lehetne *AZ*.

Ha ez így van, akkor az *A* betű helyett *Á*-t, a *Z* helyett pedig *A*-t írtak.

$$A \rightarrow Á$$
$$Z \rightarrow A$$

Észrevehetjük, hogy az ábécében az *A* betű után az *Á* jön, a *Z* után pedig (ha elölről kezdjük), az *A*. Ez alapján a szabály az lehet, hogy minden betű helyett az ábécében őt követő betűt írták.

Vagyis:

A Á B C D E É F G H I Í J K L M N O Ó Ö Ő P Q R S T U Ú Ü Ű V W X Y Z

A Á B C D E É F G H I Í J K L M N O Ó Ö Ő P Q R S T U Ú Ü Ű V W X Y Z A

Írjunk egymásnak üzeneteket ezzel a titkosírással!

Ennek segítségével most már megfejthetjük az üzenetet.

NÓTU NÉHUÚEÓE, NÍ ÁA Á GŰHHWFOZ.

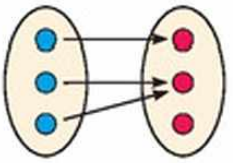
AZ A

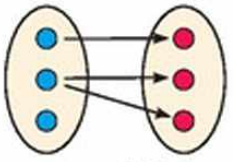
A titkosított szöveg elkészítésekor minden betűhöz pontosan egy betűt rendeltünk, azaz a hozzárendelés egyértelmű volt. (Az *A*-hoz *Á*-t, *Á*-hoz *B*-t stb.) A titkosírás megfejtésekor azt használhattuk ki, hogy minden betű pontosan egy betűhöz volt hozzárendelve. (Az *Á* az *A*-hoz, a *B* az *Á*-hoz stb.)

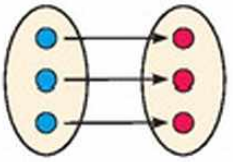
Egy hozzárendelést **egyértelműnek** nevezünk, ha az alaphalmaznak nincs olyan eleme, amelyhez két vagy több elemet rendel hozzá a képhalmazból.

Egy hozzárendelést **kölcsönösen egyértelműnek** nevezünk, ha

- egyértelmű, azaz az alaphalmaznak nincs olyan eleme, amelyhez két vagy több különböző elemet rendel hozzá,
- és a képhalmaznak nincs olyan eleme, amelyiket az alaphalmaz két különböző eleméhez rendeli hozzá.


egyértelmű


nem egyértelmű


kölcsönösen egyértelmű

2. példa

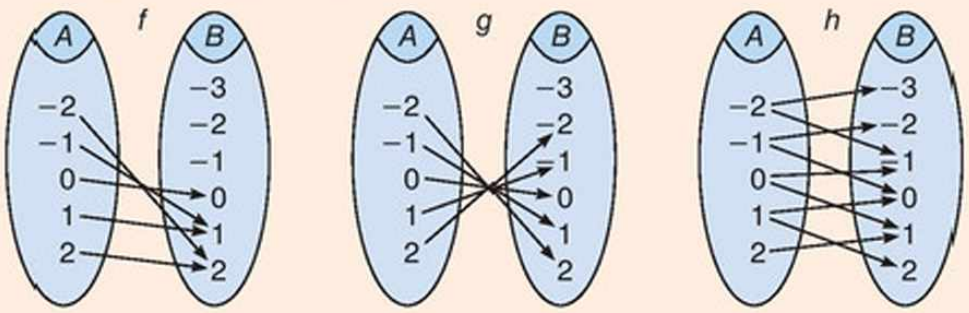
Legyen a következő hozzárendelések alaphalmaza az $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, képhalmaza a $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ halmaz, a hozzárendelés szabályai pedig a következők:

f: Minden számhoz hozzárendeljük az abszolút értékét.
g: Minden számhoz hozzárendeljük az ellentettjét.
h: Minden számhoz hozzárendeljük a tőle 1-gyel eltérő számot.

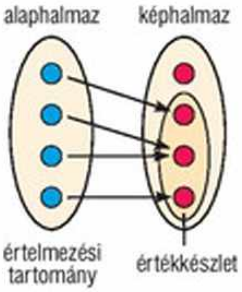
Melyik hozzárendelés egyértelmű, és melyik kölcsönösen egyértelmű?

Megoldás

Ábrázoljuk a hozzárendeléseket!



egyértelmű kölcsönösen egyértelmű nem egyértelmű



DEFINÍCIÓ: Függvénynek nevezzük azt a hozzárendelést, amely az alaphalmaz minden eleméhez hozzárendeli a képhalmaz egy-egy elemét.

Az alaphalmazt a függvény értelmezési tartományának nevezzük.

Az elemek képét függvényértéknek, a függvényértékek halmazát pedig a függvény értékkészletének nevezzük.

A függvény egyértelmű hozzárendelés.

A függvények megadásához meg kell adnunk a függvény értelmezési tartományát (*A*), a képhalmazát (*B*) és a hozzárendelés szabályát (*f*).

Jelölés: $f: A \to B, \quad x \mapsto f(x)$,

ahol $f(x)$ a függvény x helyen felvett függvényértékét jelöli.

Az *f* függvény az *A* halmaz *x* eleméhez a *B* halmaz *f*(*x*) elemét rendeli.

3. példa

Válasszuk ki a 2. példában megadott hozzárendelések közül a függvényeket, és adjuk meg őket a függvényekre jellemző jelölésekkel!

Megoldás

Az f függvény, mert egyértelmű hozzárendelés, azaz az A alaphalmaz minden eleméhez a B képhalmaz egy elemét rendeli.

Jelölés: $f: A \to B,\ x \mapsto |x|$, azaz az f függvény értelmezési tartománya A, képhalmaza B, és minden x-hez az x abszolút értékét rendeli.

A g függvény, mert egyértelmű hozzárendelés.

x ellentettje $-x$.

Jelölés: $g: A \to B,\ x \mapsto -x$, azaz a g függvény értelmezési tartománya A, képhalmaza B, és minden x-hez az x ellentettjét rendeli.

A h nem függvény, mert nem egyértelmű hozzárendelés. Például a 0-hoz a -1-et és a 1-et is, az 1-hez a 0-t és a 2-t is hozzárendeli.

Feladatok

1. A Caesar-féle titkosírás kódszáma, a d azt jelenti, hogy minden betű helyett az ábécében a d-vel utána lévő betűt írjuk. (Az 1. példában $d = 1$.)

   Fejtsük meg a következő rejtjeles szöveget, ha $d = 3$!

   C ECÖNNDUÜÁDÓ SKÖNPFMC C ÖHÍÁ OGÍNKÚGEE SULÓÚBDÓ ÉÚQNNGÖR ÚŐUUGÖFEGÖ.

   Készítsünk hasonló rejtjeles szövegeket tetszőlegesen választott kódszámmal!

2. Tekintsük a következő hozzárendeléseket! Melyek függvények?

   f: Az év napjaihoz rendeljük az osztály tanulói közül azt, aki azon a napon született!

   g: Az osztály minden tanulójához rendeljük hozzá az évnek azt a napját, amelyen született!

   h: Ennek a mondatnak minden szavához rendeljük hozzá azt a számot, ahány betűből áll!

   k: Az osztály minden tanulójához rendeljük hozzá annak a háznak a házszámát, ahol lakik!

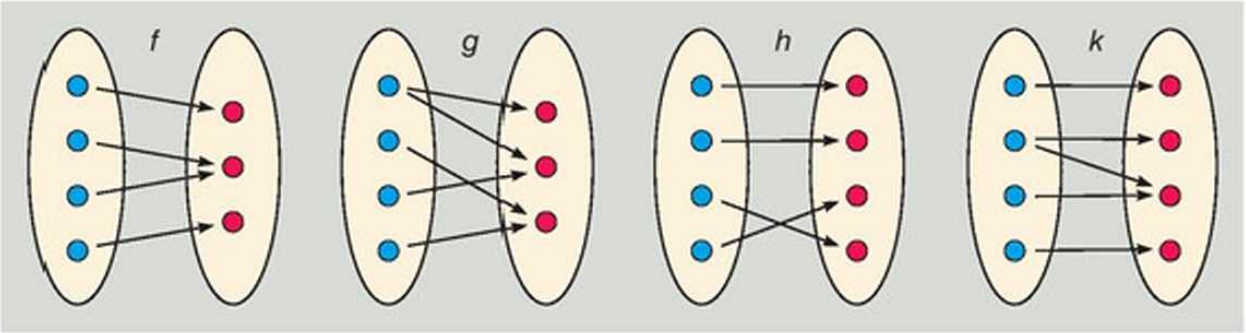
3. Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

   a) Az f függvény rendelje hozzá Magyarország négy legmagasabb hegycsúcsához a tengerszint feletti magasságát!

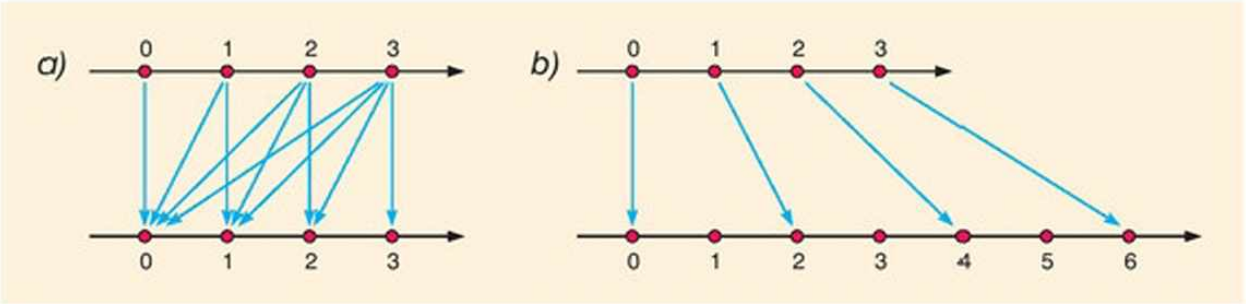
   b) A g függvény rendelje hozzá az egyjegyű pozitív számokhoz a négyzetüknél 5-tel nagyobb számot!

   c) A h függvény rendelje hozzá az 1-nél nagyobb, de 10-nél nem nagyobb számokhoz a kétszeresüket!

4. Vizsgáljuk meg egyértelműség szempontjából az alábbi hozzárendeléseket! Melyek függvények ezek közül?



5. A következő hozzárendelés alaphalmaza {0; 1; 2; 3}. A hozzárendelést nyilakkal ábrázoltuk. Írjuk fel rendezett párokkal! Mi lehet a hozzárendelési szabály? Melyik függvény, és melyik nem?



6. Legyen a következő hozzárendelések alaphalmaza a −3-nál nem kisebb és 3-nál nem nagyobb egész számok halmaza, képhalmaza pedig az egész számok halmaza! Ábrázoljuk a hozzárendeléseket, és döntsük el, hogy melyik egyértelmű, és melyik kölcsönösen egyértelmű! A függvényeket írjuk fel függvényjelöléssel!

a) Minden számhoz rendeljük hozzá a háromszorosánál 1-gyel kisebb számot!

b) Minden számhoz rendeljük hozzá az abszolút értékének a kétszeresét!

7. Ábrázoljuk az alábbi rendezett párokkal megadott hozzárendelést! Döntsük el, hogy melyik függvény, és melyik nem! Adjuk meg a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

a) $\{(-2; -1); (-1; -1); (-\frac{1}{2}; -1); (0; 0); (1; 1); (2; 1); (3; 1)\}$;

b) $\{(\frac{1}{2}; 1); (\frac{2}{3}; 2); (\frac{4}{5}; 4); (\frac{1}{2}; 2); (\frac{2}{3}; 3); (\frac{4}{5}; 5)\}$.

Rejtvény

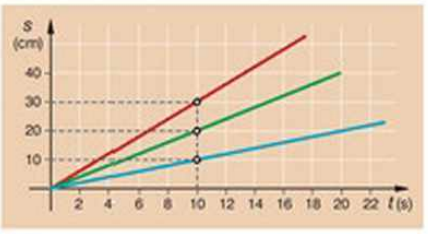
Egy számítógépet egy bizonyos művelet végrehajtására programoztak be. A következő számokkal kipróbáltuk a gépet, és ezeket az eredményeket kaptuk:

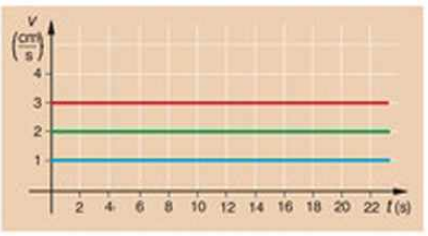
3 → 6; 7 → 42; −2 → 6; 10 → 90; −4 → 20.

Vajon mit programozhattak a gépbe?

6. A függvények ábrázolása







Elemezzük és értelmezzük a kapott grafikonokat!

Mérjük meg, hogy egy vízzel telt, ferde helyzetű üvegcsőben mekkora utat tesz meg egy buborék 1; 2; 3; ... időegység alatt! Az adatok alapján elkészíthetjük a buborék út–idő, illetve sebesség–idő grafikonját. A megtett utat az eltelt idő függvényében ábrázoltuk.

1. példa

Adott a következő f függvény: $f: \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \to \mathbb{N},\ x \to 2x$.

a) Állapítsuk meg, hogy mi a függvény értelmezési tartománya! Fogalmazzuk meg a hozzárendelés szabályát, és határozzuk meg az értékkészletét!

b) Írjunk olyan szöveget, amelyik éppen ezt a hozzárendelést határozza meg!

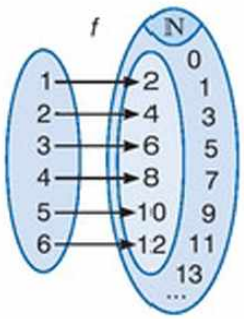
c) Adjuk meg a függvényt rendezett párok felsorolásával! Készítsünk olyan táblázatot, amelynek első sorába az értelmezési tartomány elemeit, második sorába a megfelelő függvényértékeket írjuk!

Megoldás

a) A függvény az 1; 2; 3; ... ; 6 számokhoz rendel természetes számokat, ezért az értelmezési tartománya az {1; 2; 3; 4; 5; 6} halmaz.

A függvény minden x-hez a $2x$-et, vagyis az értelmezési tartomány minden eleméhez a kétszeresét rendeli.

Az értelmezési tartomány és a hozzárendelési szabály meghatározza az értékkészletet. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számok kétszereseinek halmaza: {2; 4; 6; 8; 10; 12}.



Találjunk ki további szövegeket a hozzárendeléshez!

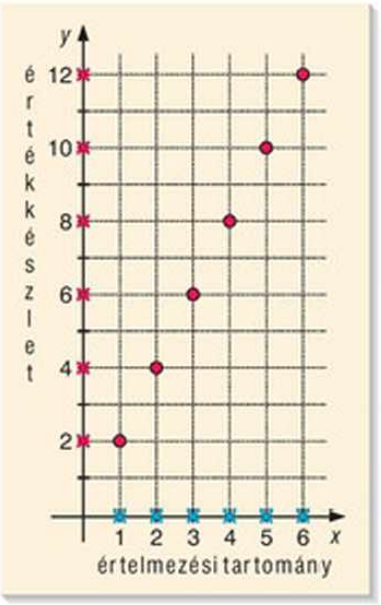
b) Egy táncversenyen a parketten egyszerre 1; 2; 3; 4; 5 vagy 6 pár táncolhat. Rendeljük hozzá a táncoló párok számához a táncoló emberek számát!

c) A rendezett párok halmaza: {(1; 2); (2; 4); (3; 6); (4; 8); (5; 10); (6; 12)}. Az értéktáblázat:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x) = 2x$	2	4	6	8	10	12

Minden rendezett pár meghatároz egy pontot a derékszögű koordináta-rendszerben.

Az $(x; f(x))$ rendezett párhoz tartozó pont első koordinátája x, második koordinátája $f(x)$. Ezeket a pontokat a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva a **függvény grafikonját** kapjuk.



Jobbra az 1. példában szereplő függvény grafikonját ábrázoltuk. (➡)

Az x tengelyen bejelöltük az értelmezési tartomány elemeit, az y tengelyen pedig az értékkészlet elemeit.



2. példa

Flóra és Gergő padtársak. Azt a feladatot kapták, hogy ábrázoljanak egy-egy függvényt.

Flóra függvénye:

$$f: \{-2; -1; 0; 1; 2\} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto x^2 - 1.$$

Gergő függvénye:

$$g: \{-2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1; 1{,}5; 2\} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto x^2 - 1.$$

a) Ábrázoljuk Flóra és Gergő függvényét értéktáblázat segítségével!

Flóra és Gergő kicserélték a grafikonjaikat, és azok alapján válaszolniuk kell a következő kérdésekre. Segítsünk nekik!

b) Milyen értéket vesz fel az f és g függvény az $x = -2$, az $x = 0$ és az $x = 0{,}5$ helyen?

c) Hol veszi fel az f és a g függvény az $y = -1$, az $y = 1{,}25$ és az $y = 3$ értékeket?

A két függvény hozzárendelési szabálya megegyezik. Értelmezési tartományuk és értékkészletük azonban különböző, így a két függvény különböző.

Megoldás

a) Flóra függvényének értéktáblázata $f(x) = x^2 - 1$ alapján:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	0	-1	0	3

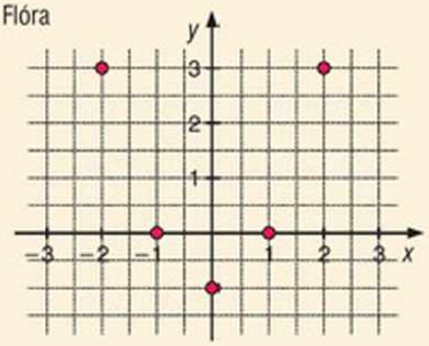
$(-1)^2 - 1 = 0$
$(0)^2 - 1 = -1$
$(0{,}5)^2 - 1 = -0{,}75$

Gergő függvényének értéktáblázata $g(x) = x^2 - 1$ alapján:

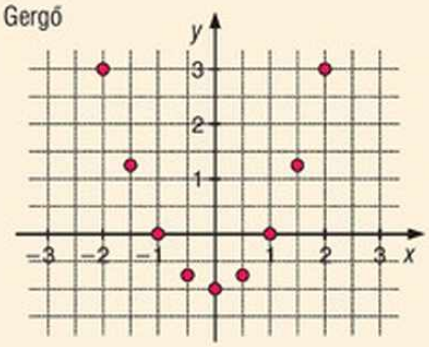
x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$g(x)$	3	$1{,}25$	0	$-0{,}75$	-1	$-0{,}75$	0	$1{,}25$	3

Ábrázoljuk a függvényeket!

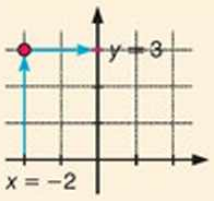
Flóra



Gergő

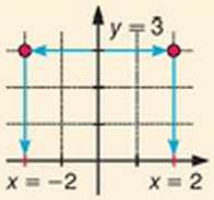


b) Az $x = -2$ helyen az f függvény $f(-2) = 3$, a g függvény $g(-2) = 3$ értéket veszi fel.



Az $x = 0$ helyen az $f(0) = -1$, a $g(0) = -1$;
az $x = 0{,}5$ helyen az f nincs értelmezve, a $g(0{,}5) = -0{,}75$.

c) Az $y = -1$ értéket az f és a g függvény is az $x = 0$ helyen veszi fel, mert $f(0) = -1$ és $g(0) = -1$.



Az $y = 1{,}25$ értéket az f függvény az értelmezési tartomány egyetlen pontjában sem veszi fel, a g függvény viszont két helyen, az $x = -1{,}5$ és $x = 1{,}5$ helyeken veszi fel, mert $g(-1{,}5) = 1{,}25$ és $g(1{,}5) = 1{,}25$.

Az $y = 3$ értéket az f és g függvény két helyen, az $x = -2$ és az $x = 2$ helyen is felveszi, mert $f(-2) = 3$, $f(2) = 3$, $g(-2) = 3$ és $g(2) = 3$.

Egy helyen egy függvény csak egy értéket vehet fel, de lehet olyan függvényérték, amelyet a függvény több helyen is felvesz.



függvény



nem függvény

3. példa

Hugó gondol egy függvényre, és megadja a függvény értéktáblázatának néhány elemét. Hanna ábrázolja a függvény grafikonjának így megadott pontjait, és megpróbálja kitalálni, hogy melyik függvényre gondolhatott Hugó.

a) Melyik függvényre gondolhatott Hugó, ha a függvény értéktáblázata a következő?

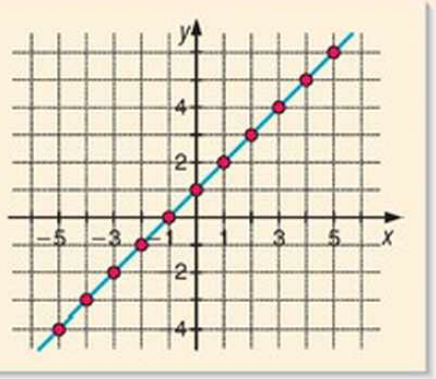
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5

b) Hol metszik a lehetséges függvények az x és az y tengelyt?

Megoldás

a) Hanna az értéktáblázat alapján a pirossal jelölt pontokat ábrázolta. A megadott értékek mindegyikére érvényes az $x \mapsto x + 1$ hozzárendelési szabály.

A függvény értelmezési tartománya minden olyan halmaz lehet, amely a megadott x értékeket tartalmazza. A lehetséges legbővebb értelmezési tartomány a racionális számok halmaza. Ekkor az értékkészlet is a racionális számok halmaza.

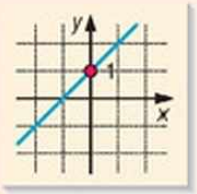


Ez alapján Hugó például a következő függvényre gondolhatott:

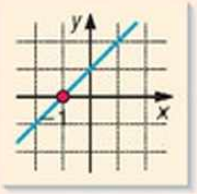
$$h: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Ennek a függvénynek a grafikonját kapjuk, ha a megadott pontokon át egy egyenest húzunk.

b) Az ábráról leolvasható, hogy a grafikon az y tengelyt az 1 pontban metszi. Ez **az $x = 0$ helyen felvett függvényérték:** $f(0) = 0 + 1 = 1$.

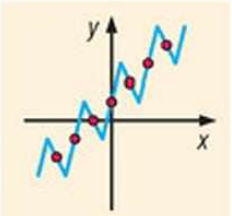


A függvény grafikonja az x tengelyt az $x = -1$ pontban metszi. Ez **az a pont, ahol a függvényérték 0.**



$$f(x) = 0$$
$$x + 1 = 0$$
$$x = -1$$

A függvény hozzárendelési szabálya más is lehet, mert a megadott pontok másképp is összeköthetők, például:



Ha egy függvénynek csak a hozzárendelési szabálya van megadva, akkor értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt szoktuk érteni, amelyen a hozzárendelési szabály értelmezhető.

Például az $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény az $x = 0$ helyen nem értelmezhető, ezért az értelmezési tartománya minden racionális szám, kivéve a 0.

Írjunk fel további függvényeket, melyek értelmezési tartománya ettől eltérő!

Feladatok

1. Adott az $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto x - 3$ és a $g: \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\} \to \mathbb{Q}, \ x \mapsto \frac{x-4}{2}$ függvény.

   a) Határozzuk meg a függvényértékeket, ha $x = -2$, $x = 1$, illetve $x = 3$!

   b) Melyik függvényre illeszkedik az f és a g közül az $A(2; -1)$, a $B(6; 1)$, a $C(5; 2)$ és a $D(3; 4)$ pont?

2. A következő ábrákon néhány függvény grafikonját láthatjuk.

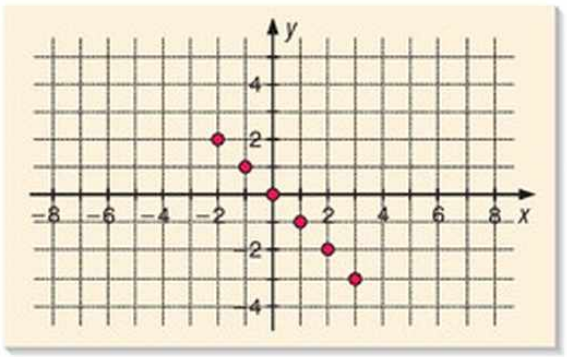
a) Adjuk meg értéktáblázattal az összetartozó értékpárokat (az *A* és *B* esetben)!

b) Párosítsuk össze a grafikonokat az alábbi függvényekkel!

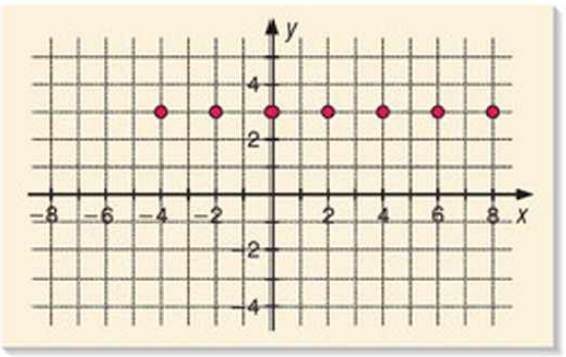
I. $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto x^2$; II. $g: \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \to \mathbb{Z},\ g: x \mapsto -x$;

III. $h: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 3$; IV. $k: \{-4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\} \to \mathbb{N},\ k: x \mapsto 3$.

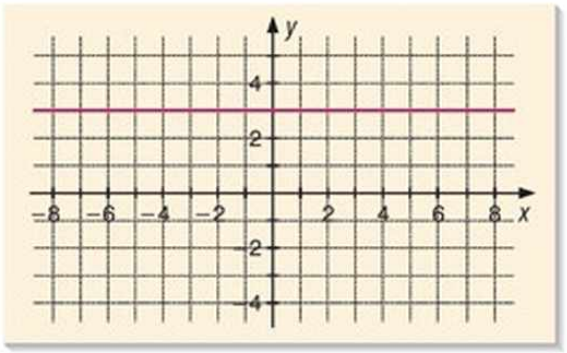
A)



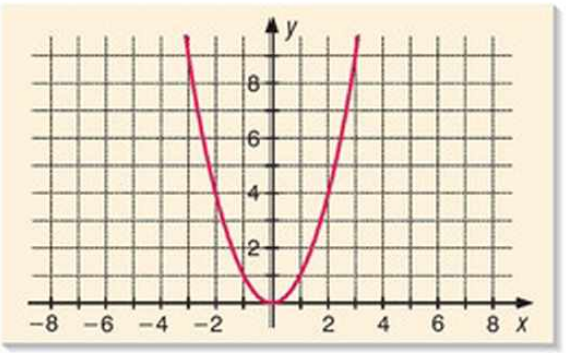
B)



C)



D)



3. Ábrázoljuk a következő függvényeket derékszögű koordináta-rendszerben!

a) $f: \{1; 2; 3; 4\} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto \frac{1}{x} + 1$;

b) $g: \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \to \mathbb{Q},\ g: x \mapsto x^2$;

c) $h: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto x$;

d) $k: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 1 - 3x$.

4. Egy x cm élhosszúságú kocka V térfogatát a $V = x^3$ képlettel számolhatjuk ki.

a) Egészítsük ki a következő táblázatot a hiányzó adatokkal!

x (cm)	0,5		2	2,5	
V (cm^3)	0,125	1			27

b) Ábrázoljuk az így kapott pontokat derékszögű koordináta-rendszerben!

c) Van-e értelme folytatni a grafikont negatív x értékekre? Miért?

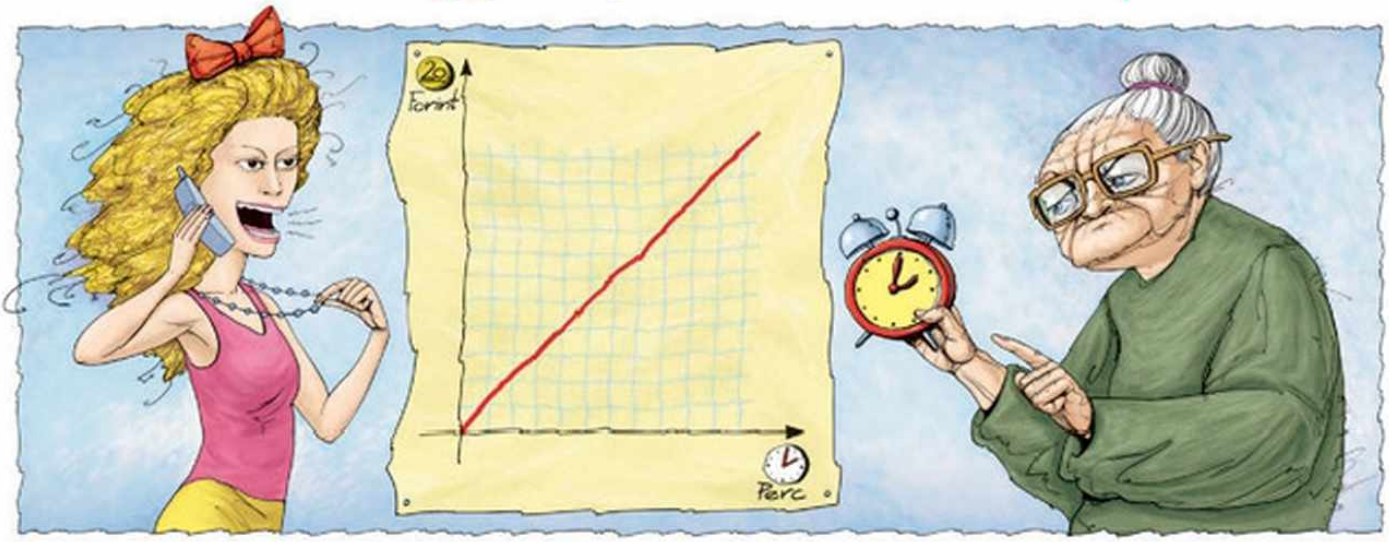
Rejtvény

Adjunk meg olyan függvényt, amelynek grafikonja

***a)* középpontosan szimmetrikus az origóra;** ***b)* tengelyesen szimmetrikus az *y* tengelyre;**

***c)* tengelyesen szimmetrikus az *x* tengelyre!**

7. A lineáris függvények



1. példa

A TelEfon nevű telefontársaságnál nincs előfizetési díj, hanem csak a lebeszélt idő arányában kell percenként 25 forintot fizetni.

Készítsünk értéktáblázatot, majd ábrázoljuk grafikonon a havi telefonszámla összegét a lebeszélt percek függvényében!

Megoldás

Mivel 1 percért 25 Ft-ot kell fizetni, ezért

1 perc 25 Ft,
x perc $25x$ Ft,

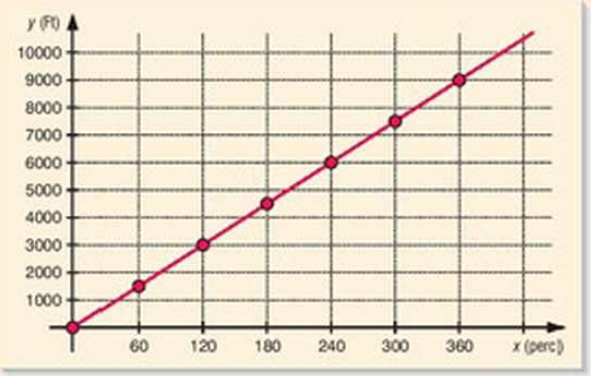
azaz ha valaki x percet telefonál egy hónapban, akkor $25x$ Ft-ot fizet.

A fenti egyenes arányosságot függvényként is felírhatjuk, hiszen a lebeszélt percekhez egyértelműen hozzárendelhetjük a fizetendő összeget. Az időtartam nem lehet negatív, így az értelmezési tartomány a nemnegatív racionális számok halmaza. Tehát a telefonszámla összegét leíró függvény:

$$f\colon \{\text{nemnegatív racionális számok}\} \to \mathbb{Q},\quad x \mapsto 25x.$$

Mennyibe kerül egy 2 perc 12 másodperc időtartamú beszélgetés?

x	$f(x) = 25x$
0	0
60	1500
120	3000
180	4500
240	6000
300	7500
360	9000



A függvény grafikonja egy origóból induló félegyenes.

2. példa

A LetEfon nevű telefontársaság havi előfizetési díja ugyan 2800 Ft, ezen felül viszont minden lebeszélt percért mindössze 8 Ft-ot kell fizetni.

Készítsünk értéktáblázatot, majd ábrázoljuk a LetEfonnál fizetett havi számla összegét a lebeszélt percek függvényében!



Megoldás

Az előfizetési díjat mindenképpen ki kell fizetni, ez 2800 Ft.
Az x lebeszélt perc után $8x$ Ft-ot kell fizetni.

Ha valaki x percet beszél egy hónapban, akkor összesen $8x + 2800$ Ft-ot kell fizetnie.

A telefonszámla összegét függvényként is felírhatjuk, hiszen a lebeszélt percekhez egyértelműen hozzárendelhetjük a fizetendő összeget. Az időtartam most sem lehet negatív, így az értelmezési tartomány a nemnegatív racionális számok halmaza. Tehát a telefonszámla összegét leíró függvény:

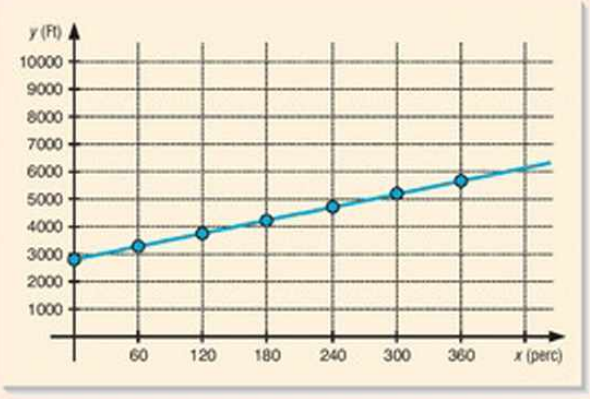
$$g: \{\text{nemnegatív racionális számok}\} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 8x + 2800.$$

A függvény értéktáblázata az egész órákat feltüntetve:

x	0	60	120	180	240	300	360
$g(x) = 8x + 2800$	2800	3280	3760	4240	4720	5200	5680

A lebeszélt percek száma **változik,** és ettől **függ** a telefonszámla összege. Ezért a percek száma az x változó, a fizetendő összeg pedig az $f(x)$ függvényérték.

A kapott pontok egy félegyenesre illeszkednek.



A beszélgetési szokásaidat figyelembe véve a TelEfon vagy a LetEfon telefontársaságnál lenne érdemes előfizetned?

Írjuk fel általánosan a telefonszámla összegét!

Jelöljük b-vel az előfizetési díjat, m-mel a percdíjat! Ekkor ha x percet beszéltünk, a telefonszámlát megadó függvény:

$$f: \{\text{nemnegatív racionális számok}\} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto mx + b.$$

A példák alapján ennek a függvénynek a grafikonja egyenes.

A *linea* latin szó, jelentése: egyenes.

DEFINÍCIÓ: Lineáris függvénynek nevezzük azt a függvényt, amelynek grafikonja egyenes.

3. példa

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket közös koordináta-rendszerben értéktáblázat segítségével!

$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$; $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 3$; $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto -x + 4$.

a) Olvassuk le a grafikonokról, hogy melyik függvény értéke a legnagyobb az $x = -1$ és az $x = 5$ helyeken!

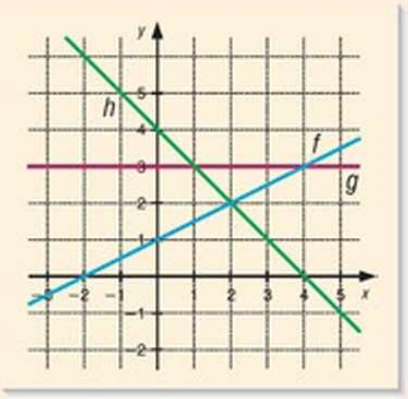
b) Olvassuk le, hogy hol veszik fel az egyes függvények az $y = 1$ és az $y = 3$ értékeket!

c) Melyik függvény grafikonján vannak rajta az alábbi pontok?
$A(0; 1)$; $B(-2; 3)$; $C(2; 2)$; $D(3; 0)$

Megoldás

A függvények értéktáblázata:

x	-1	0	2	4
$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$	0,5	1	2	3
$g(x) = 3$	3	3	3	3
$h(x) = -x + 4$	5	4	2	0

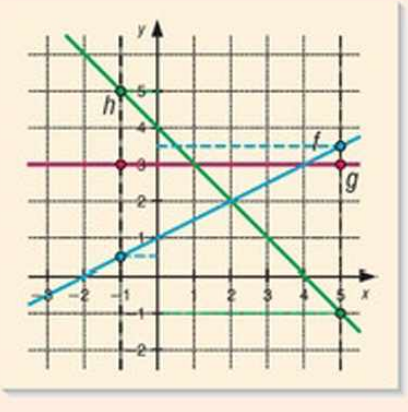


A függvények grafikonja egyenes.

a) A függvényeknek az x helyen felvett y függvényértékét úgy olvashatjuk le, hogy az x tengely megfelelő pontján át párhuzamost húzunk az y tengellyel, és megvizsgáljuk a függvények grafikonjaival való metszéspontjait. Az x helyen annak a függvénynek az értéke a legnagyobb, amelyik metszéspontjának y koordinátája a legnagyobb.

Az $x = -1$ helyen a metszéspontok y koordinátái közül az $y = 5$ a legnagyobb, így a h függvény értéke a legnagyobb.

Az $x = 5$ helyen az $y = 3{,}5$ a legnagyobb, így az f függvény értéke a legnagyobb.

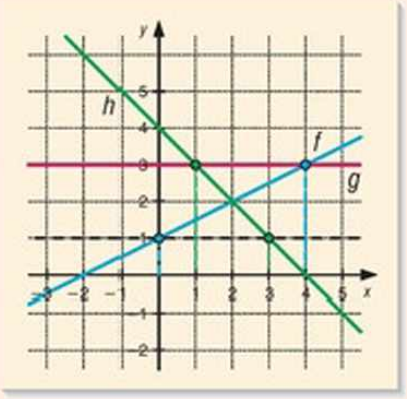


Megjegyzés: Az adott helyeken a hozzárendelési szabályba való behelyettesítéssel kiszámíthatjuk a három függvény értékét.

A függvényértéket behelyettesítéssel határozzuk meg.

Például az $x = 5$ helyen $f(5) = \frac{1}{2} \cdot 5 + 1 = \frac{7}{2} = 3{,}5$;
$g(5) = 3$;
$h(5) = -5 + 4 = -1$,
melyek közül az $f(5) = 3{,}5$ a legnagyobb.

b) Az x változó azon értékeit, ahol a függvény az adott y függvényértéket felveszi, úgy olvashatjuk le, hogy párhuzamost húzunk az x tengellyel az y tengely megfelelő pontján át. Ennek az egyenesnek a függvények grafikonjaival való metszéspontjait vizsgáljuk.



Az $y = 1$ függvényértéket
- az f függvény az $x = 0$ helyen,
- a g függvény sehol sem,
- a h függvény az $x = 3$ helyen

veszi fel.

Az $y = 3$ függvényértéket
- az f függvény az $x = 4$ helyen,
- a h függvény az $x = 1$ pontban

veszi fel.

A g függvény az értelmezési tartomány minden pontjában az $y = 3$ értéket veszi fel.

Azt, hogy a függvények melyik x helyen veszik fel az adott y értékeket, egyenletmegoldással határozzuk meg.

Az $f(x) = y$ összefüggés alapján számolással is megkaphatjuk, hogy a függvények melyik x helyen veszik fel az adott y értékeket.

Például az $y = 3$ értéket az f függvény azon az x helyen veszi fel, amelyre

$$\frac{1}{2}x + 1 = 3.$$

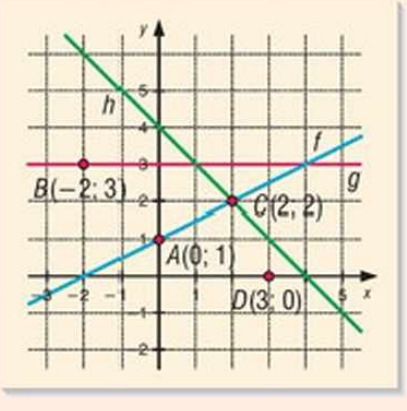
Az egyenletet megoldjuk:

$$\frac{1}{2}x = 2 \qquad / \cdot 2$$

$$x = 4$$

Tehát $f(4) = 3$.

c) Az ábrázolás alapján látható, hogy melyik pont melyik függvény grafikonján van rajta.



Azt, hogy egy pont rajta van-e az f függvény grafikonján, úgy döntjük el, hogy a pont koordinátáit behelyettesítjük az $y = f(x)$ összefüggésbe.

Számolással úgy dönthetjük el, hogy az $A(0; 1)$ pont rajta van-e az f függvény grafikonján, hogy a pont koordinátáit behelyettesítjük az $y = \frac{1}{2}x + 1$ összefüggésbe.

Az $1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1$ igaz, tehát az A pont rajta van az f függvény grafikonján.

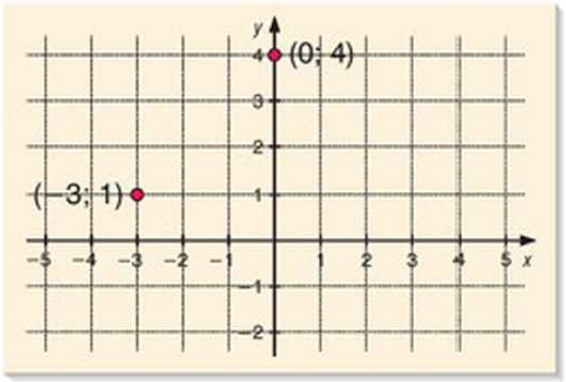
Hasonlóan számolva: a h függvény grafikonján az $A(0; 1)$ pont nincs rajta, mert az $1 = -0 + 4$ egyenlőség nem igaz.

Feladatok

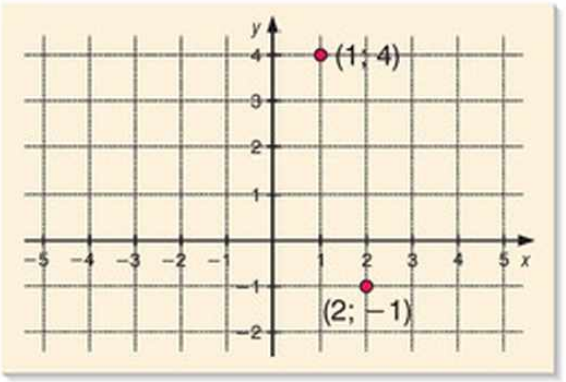
1. Az alábbi folyamatok közül melyiket ábrázolhatjuk lineáris függvény segítségével?
   a) A hőmérséklet változása az idő függvényében egy nyári napon;
   b) ha sajtot vásárolunk, a fizetendő összeg a sajt tömegének függvényében.

2. Az alábbi grafikonokon egy-egy lineáris függvény két pontját jelöltük. Adjunk meg még három pontot a függvény grafikonjáról!

a)



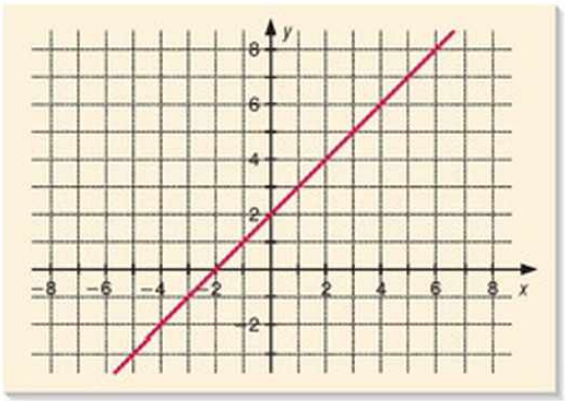
b)



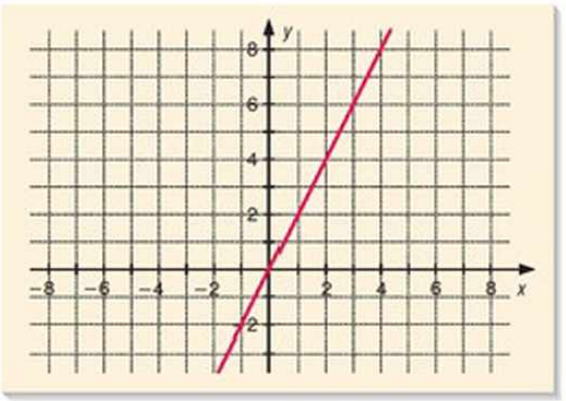
3. Ábrázoljuk a következő lineáris függvényeket értéktáblázat segítségével derékszögű koordináta-rendszerben!
   a) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 3x$;
   b) $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto -2x$;
   c) $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 2x - 1$;
   d) $k\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$.

4. Az alábbi grafikonokon lineáris függvények grafikonjai láthatók. Készítsünk hozzájuk értéktáblázatot!

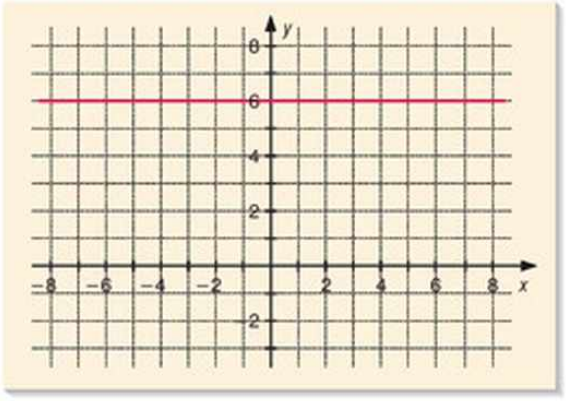
a)



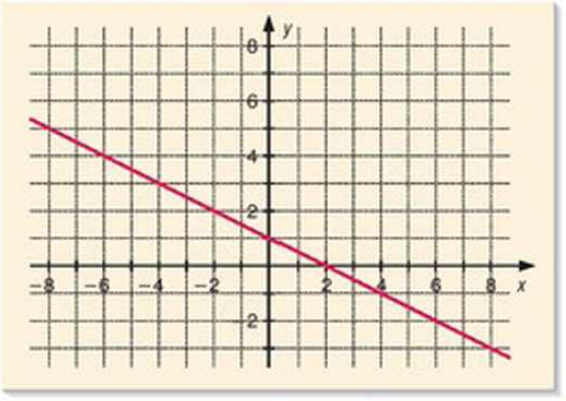
b)



c)



d)



5. Az alábbi grafikon azt mutatja, hogy a Földön adott súlyú test milyen súlyú lenne a Holdon.





a) Olvassuk le a grafikonról, hogy mekkora lenne egy olyan ember súlya a Holdon, akié a Földön 600 N!

b) Mekkora lenne egy olyan ember súlya a Holdon, akié a Földön 900 N?

c) Mekkora súlyú a Földön az a tárgy, amelynek súlya a Holdon 50 N?

d) Mekkora súlyú a Földön az a tárgy, amelynek súlya a Holdon 5 N?

e) Milyen összefüggés van ugyanannak a testnek a földi és a holdi súlya között?

f) Írjunk fel olyan függvényt, amely megadja a holdi súlyt a földi súly függvényében!

6. Az értéktáblázat az f, g, h és k lineáris függvények néhány pontban felvett értékét mutatja. A függvények értelmezési tartománya a racionális számok halmaza ($\mathbb{Q}$).

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	-3	-1	1	3	5
$g(x)$	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	2	0	-2	-4	-6
$k(x)$	-2	-2	-2	-2	-2

a) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

b) Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát!

c) Melyik függvény veszi fel a legnagyobb értéket az $x = 3$ helyen?

d) Hol veszik fel az egyes függvények az $y = -3$ értéket?

e) Melyik függvény grafikonján van rajta az $A(4; 2)$, melyiken a $B(-2; 0)$, a $C(-2; -1)$, a $D(-3; 5)$ pont?

7. Ábrázoljuk a következő lineáris függvényeket!

$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto x$;

$g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 2x$;

$h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 2x + 2$;

$k\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto x + 3$.

Olvassuk le a grafikonok x és y tengelyekkel vett metszéspontjainak koordinátáit! Mely grafikonoknak van közös pontja? Adjuk meg a koordinátáit!

Rejtvény

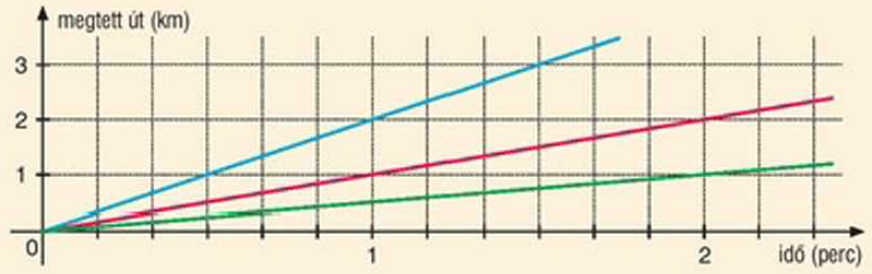
Van-e olyan lineáris függvény, amelynek értékkészletébe az 5 beletartozik, de a 6 nem?

8. A lineáris függvény meredeksége



1. példa

Három jármű: egy kerékpár, egy robogó és egy autó egyenletes sebességgel halad. Az út–idő grafikonjukat az ábra mutatja.



a) Melyik járműhöz melyik grafikon tartozhat?

b) Milyen sebességgel haladtak az egyes járművek?

c) Adjuk meg azokat a lineáris függvényeket, amelyek leírják az egyes járművek által megtett utat az idő függvényében!

Megoldás

a) Feltételezhetjük, hogy az autó a leggyorsabb és a kerékpár a leglassabb, vagyis az autó teszi meg a leghosszabb, a kerékpár pedig a legrövidebb utat 1 perc alatt. Tehát az autó útját a kék, a robogóét a piros, a kerékpárét a zöld színű grafikon mutatja.

b) A kék színű grafikonról leolvasható, hogy az autó 1 perc alatt 2 km-t tesz meg, így a sebessége $2\ \frac{\text{km}}{\text{perc}}$.

A piros színű grafikon alapján a robogó 1 perc alatt 1 km-t tesz meg, így a sebessége $1\ \frac{\text{km}}{\text{perc}}$.

A zöld színű grafikon alapján a kerékpár 2 perc alatt 1 km-t tesz meg, így a sebessége $\frac{1}{2}\ \frac{\text{km}}{\text{perc}}$.

$1\ \frac{\text{km}}{\text{perc}} = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

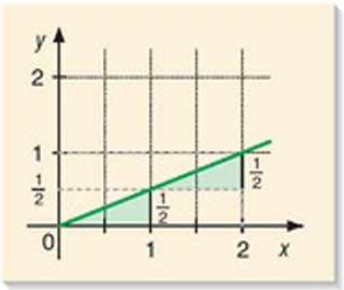
$s = v \cdot t$

c) Ha az utat ($s(t)$) km-ben, az időt (t) percben mérjük, akkor az egyes járművek által megtett út az idő függvényében:

autó: $s(t) = 2 \cdot t$; robogó: $s(t) = 1 \cdot t$; kerékpár: $s(t) = \frac{1}{2} \cdot t$.

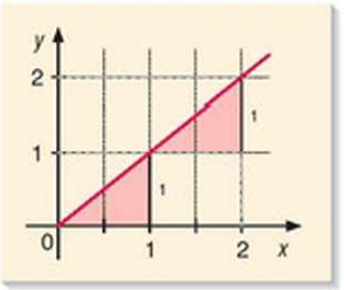
A példában szereplő lineáris függvények grafikonjának meredeksége különbözik. Két függvény közül az a meredekebb, amelynek a hozzárendelési szabályában a t együtthatója nagyobb.

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás út–idő grafikonjának meredeksége a test sebessége.



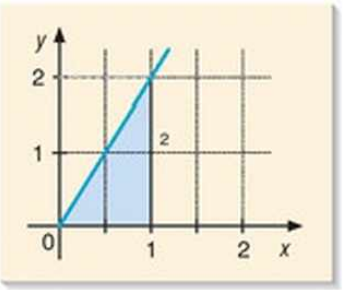
$f(x) = \frac{1}{2}x$

meredeksége: $\frac{1}{2}$



$g(x) = x$

meredeksége: 1



$h(x) = 2x$

meredeksége: 2

Az $f: x \mapsto mx$ alakú lineáris függvény meredeksége az x változó együtthatója, az m.

2. példa

Mennyi a meredeksége a következő függvényeknek? Ábrázoljuk a függvényeket a meredekségük alapján!

a) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto x$;

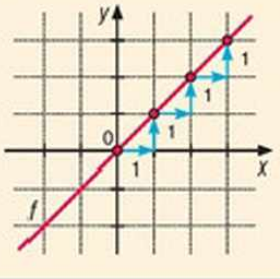
b) $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto -2x$.

Megoldás

Ha $m > 0$, akkor a függvény növekvő.

a) Az $x \mapsto x$ hozzárendelési szabályban az x együtthatója 1, mert $x \mapsto 1 \cdot x$, így a meredeksége 1.

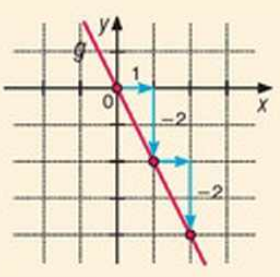
A függvény egy pontja (0; 0), így a meredekség alapján a grafikon megrajzolható.



Ha $m < 0$, akkor a függvény csökkenő.

b) Az $x \mapsto -2x$ hozzárendelési szabályban az x együtthatója -2, így a meredeksége -2.

A függvény egy pontja (0; 0), így a meredekség alapján a grafikon megrajzolható.



3. példa

Ábrázoljuk a következő lineáris függvényeket értéktáblázat alapján közös koordináta-rendszerben!

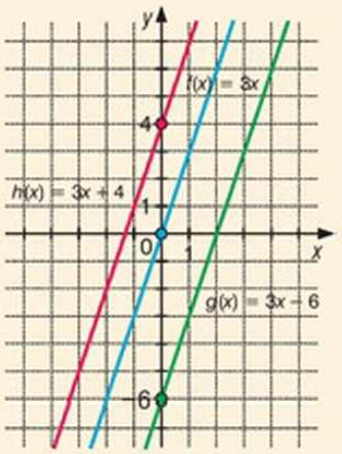
$$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\quad x \mapsto 3x;$$
$$g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\quad x \mapsto 3x - 6;$$
$$h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\quad x \mapsto 3x + 4.$$

Hasonlítsuk össze a kapott egyenesek meredekségét, és állapítsuk meg, hogy mely pontban metszik az y tengelyt!

Megoldás

A lineáris függvény grafikonja egyenes, így elég 2-2 pontot ábrázolni.

x	0	1
$f\colon x \mapsto 3x$	0	3
$g\colon x \mapsto 3x - 6$	−6	−3
$h\colon x \mapsto 3x + 4$	4	7



A kapott egyenesek párhuzamosak, meredekségük megegyezik.

Mindhárom egyenes meredeksége a hozzárendelési szabályban az x együtthatója, azaz 3.

Az y tengelyt

az $y = 3x$ egyenes 0-nál metszi, mert az $x = 0$ helyen $y = 0$;

az $y = 3x - 6$ egyenes -6-nál metszi, mert az $x = 0$ helyen $y = -6$;

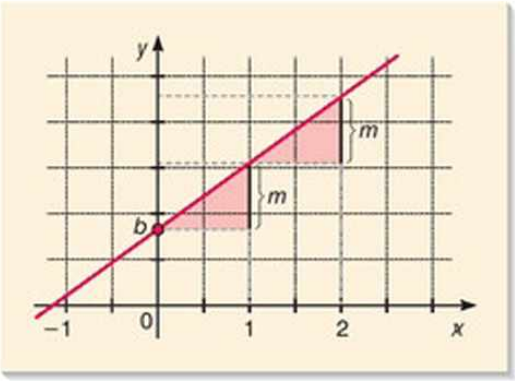
az $y = 3x + 4$ egyenes $+4$-nél metszi, mert az $x = 0$ helyen $y = 4$.

Általában igaz, hogy az y tengelyt

az $y = 3x + b$ egyenes b-nél metszi, mert az $x = 0$ helyen $y = b$.

Az $f\colon x \mapsto mx + b$ alakú lineáris függvény grafikonja olyan egyenes, amelynek meredeksége m, és az y tengelyt b-nél metszi.

Ha $b = 0$, akkor a függvény hozzárendelési szabálya $f\colon x \mapsto mx$, képe pedig az origón átmenő egyenes. Ekkor az x változó és az $f(x)$ függvényérték egyenesen arányos.



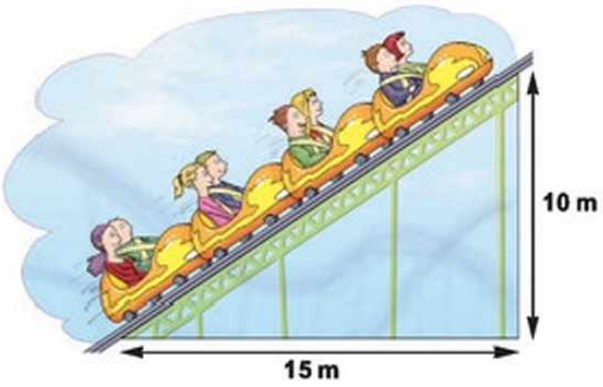
Ha $m = 0$, akkor a függvény képe az x tengellyel párhuzamos egyenes.

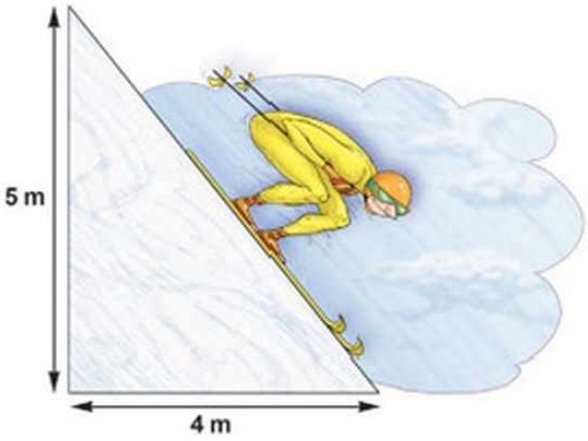
Az $f\colon x \mapsto b$ függvényt konstans (állandó) függvénynek nevezzük.



Feladatok

1. Mekkora az ábrákon látható hullámvasút és sípálya meredeksége?





2. Töltsük ki az alábbi táblázatot, és ábrázoljuk a függvények grafikonját derékszögű koordináta-rendszerben!

	Hol metszi az y-tengelyt?	Hol metszi az x-tengelyt?	Mennyi a meredeksége?	Növekvő vagy csökkenő?
$f(x) = 4x - 12$				
$g(x) = -x + 6$				
$h(x) = -2x - 4$				
$k(x) = 2x + 5$				

3. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket! Mit veszünk észre?

a) $f(x) = x + 3$; $g(x) = -3x + 3$; $h(x) = 0{,}5x + 3$; $k(x) = 3$.

b) $f(x) = 2x + 1$; $g(x) = 4 + 2x$; $h(x) = 2x - 5$; $k(x) = 2x$.

4. Egy lineáris függvény grafikonja áthalad a (7; 2) és (10; −4) pontokon. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e, és indokoljuk meg a döntésünket!

a) A függvény meredeksége negatív.

b) A függvény grafikonja metszi az x-tengelyt.

c) A függvény grafikonja az y-tengelyt egy negatív számnál metszi.

d) A függvény grafikonja áthalad a (4; 8) ponton.

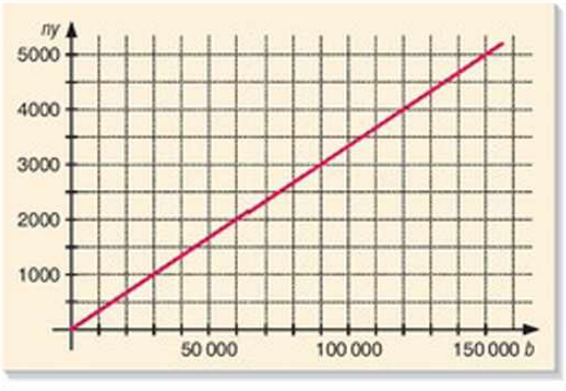
5. A szemüveggyártó *Mindent a szemnek Kft.* b bevétele és ny nyeresége között fennálló összefüggést a grafikon mutatja. (➡)

a) Mennyi a nyereség, ha a bevétel 30 000 Ft?

b) Mekkora bevétel esetén lesz a kft. nyeresége 40 000 Ft?

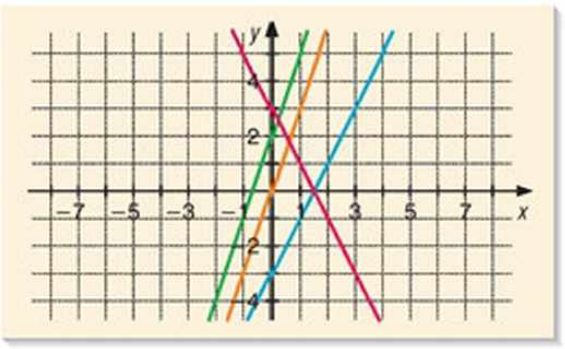
c) Mekkora az egyenes meredeksége?

d) Adjuk meg a nyereséget a bevétel függvényében!



6. Válasszuk ki, melyik lineáris függvényhez melyik grafikon tartozik! A választ indokoljuk is meg! (➡)

$$f(x) = 3x - 2;$$
$$g(x) = 2x - 3;$$
$$h(x) = 3 - 2x;$$
$$k(x) = 3x + 2.$$

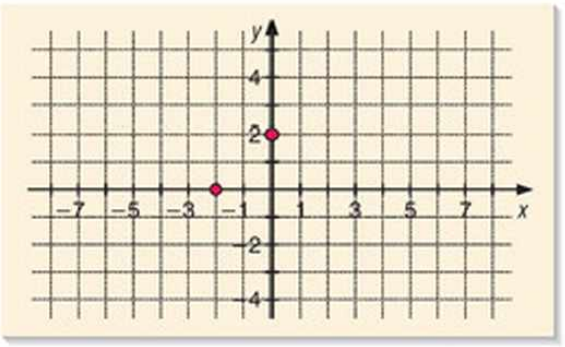


7. Orsi azt a feladatot kapta, hogy ábrázoljon egy racionális számok halmazán értelmezett lineáris függvényt. Először az ábrán látható két pontot ábrázolta. (➡)

a) Egészítsük ki az ábrát!

b) Adjuk meg a függvény meredekségét!

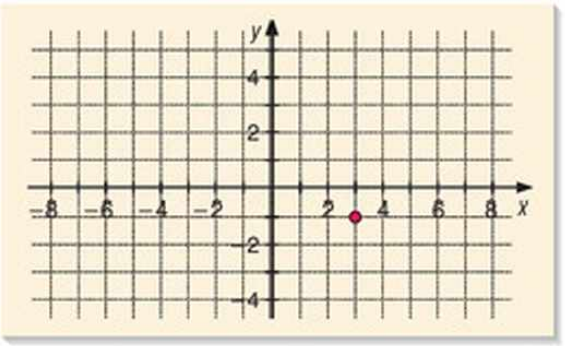
c) Határozzuk meg a függvény hozzárendelési szabályát!



8. Sanyinak is egy racionális számok halmazán értelmezett lineáris függvényt kellett ábrázolnia. Ő csak egy pontot ábrázolt, viszont tudjuk, hogy ennek a függvénynek a meredeksége 0. (➡)

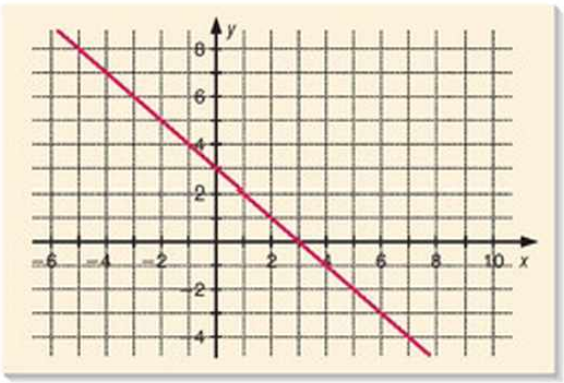
a) Egészítsük ki az ábrát!

b) Adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát!

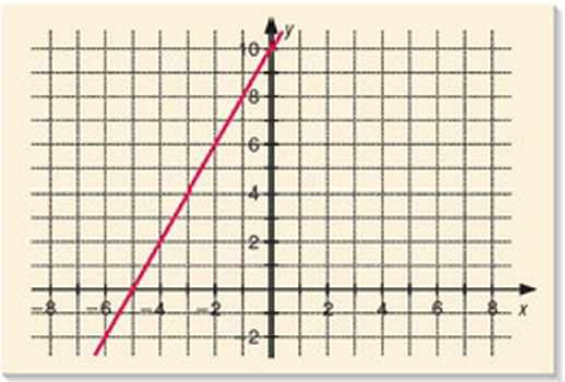


9. Mi a hozzárendelési szabálya annak a lineáris függvénynek, amelynek grafikonja az ábrán látható?

a)



b)



Rejtvény

Az egyik osztály azt a feladatot kapta, hogy rajzoljon olyan egyenest a koordináta-rendszerben, amelyik nem lineáris függvény grafikonja. Ez az osztályból egyedül Lucának sikerült. Milyen egyenest rajzolhatott Luca?

9. Egyenletek grafikus megoldása



1. példa

Karcsi elindul Kisdorogról Nagydorogra, ugyanakkor Nóri pedig Nagydorogról Kisdorogra biciklivel. Karcsi 16 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Nóri 24 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ állandó sebességgel halad. Kisdorog és Nagydorog 50 km-re van egymástól.

a) Készítsünk táblázatot a két biciklis mozgását jellemző adatokkal! Írjuk fel a biciklisek Kisdorogtól való távolságát az idő függvényében!

b) Mikor találkozik Karcsi és Nóri?

Megoldás

A megtett út: $s = v \cdot t$.

a)

	sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	idő (h)	megtett út (km)	távolság Kisdorogtól (km)
Karcsi	16	t	$16t$	$16t$
Nóri	24	t	$24t$	$50 - 24t$

Karcsi Kisdorogtól való távolsága az idő függvényében:

$$k: t \mapsto 16t.$$

Nóri Kisdorogtól való távolsága az idő függvényében:

$$n: t \mapsto 50 - 24t.$$

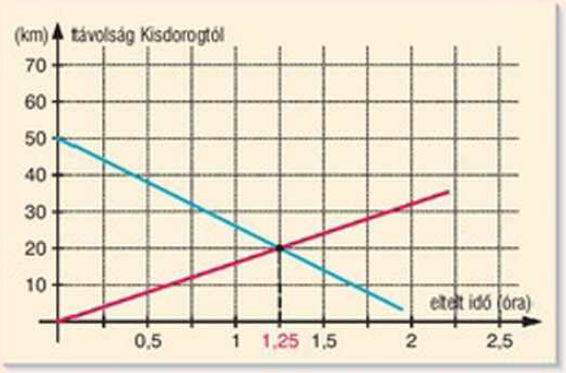
Mivel t az időt jelenti, ezért nem lehet negatív. Mindkét függvény értelmezési tartománya a nemnegatív racionális számok halmaza.

b) Amikor találkoznak, akkor ugyanakkora távolságra vannak Kisdorogtól, így azt a t értéket keressük, amelyre a két függvény értéke egyenlő.

Ábrázoljuk a k és n függvényeket közös koordinátarendszerben!

A függvényértékek a két egyenes metszéspontjában lesznek egyenlők.

A grafikonról az olvasható le, hogy az indulástól számított $t = 1{,}25$ óra múlva találkoznak.



Ekkor a Kisdorogtól való távolságuk a találkozási pont második koordinátája, azaz 20 (km). Tehát az indulástól számított 1 és negyed óra múlva találkoznak.

A találkozás időpontja meghatározható egyenletmegoldással is. (Az egyenlet alaphalmaza a nemnegatív számok halmaza.)

$$16t = 50 - 24t \qquad / + 24t$$
$$40t = 50 \qquad / : 40$$
$$t = 1{,}25 \text{ (óra)}$$

Ellenőrzés:

Karcsi Kisdorogtól való távolsága a találkozáskor (bal oldal):

$$16 \cdot 1{,}25 = 20 \text{ (km)};$$

Nóri Kisdorogtól való távolsága a találkozáskor (jobb oldal):

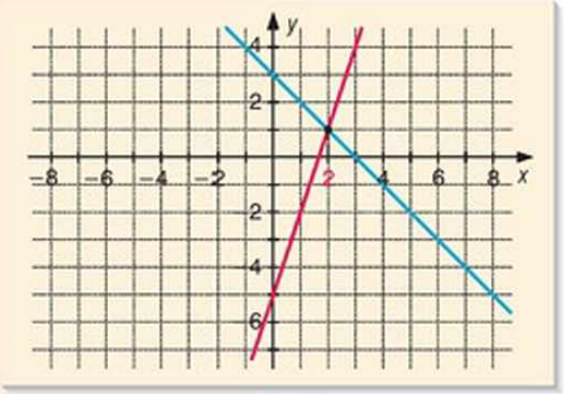
$$50 - (24 \cdot 1{,}25) = 50 - 30 = 20 \text{ (km)}.$$

Az egyenleteket grafikusan is megoldhatjuk úgy, hogy az egyenlet két oldalát függvényként ábrázoljuk. Az egyenlet megoldását a grafikonok metszéspontjának első koordinátája adja.

2. példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket grafikus úton a racionális számok halmazán!

a) $3x - 5 = 3 - x$; *b)* $3x - 5 = 4$.



Megoldás

a) Ábrázoljuk az $f: x \mapsto 3x - 5$ és $g: x \mapsto 3 - x$ függvényeket közös koordináta-rendszerben!

A grafikonról leolvashatjuk, hogy a két függvény metszéspontjának első koordinátája $x = 2$, tehát itt vesznek fel azonos értéket.

Így az egyenlet megoldása az $x = 2$ lehet.

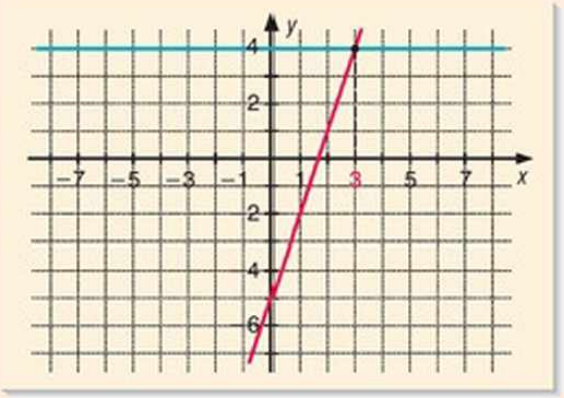
Ellenőrzés: $f(2) = 3 \cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1$;
$g(2) = 3 - 2 = 1$.

Tehát az $x = 2$ valóban megoldása az egyenletnek.

b) Az előzőhöz hasonlóan ábrázoljuk az $f: x \mapsto 3x - 5$ és a $h: x \mapsto 4$ függvényeket!

A grafikus módszer csak becslésre alkalmazható. A leolvasott érték helyességét behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

A grafikonok alapján az egyenlet megoldása az $x = 3$ lehet.



Ellenőrzés:

$f(3) = 3 \cdot 3 - 5 = 4$;
$h(3) = 4$.

Az $x = 3$ valóban megoldása az egyenletnek.

3. példa

Eszter egyszerre gyújt meg egy piros és egy kék gyertyát. A piros gyertya kétszer olyan magas, mint a kék, de mivel vékonyabb, így harmadannyi idő alatt ég le, mint a másik. Mennyi idő múlva lesz a két gyertya egyforma magas, ha a kék gyertya 3 óra alatt ég le?

Megoldás

Ábrázoljuk a gyertyák magasságát az idő függvényében! A gyertyák egyenletesen égnek, így magasságuk időegységenként ugyanannyival csökken, ezért a grafikonok egyenesek.



A $t = 0$ időpontban a kék gyertya magasságát tekintsük 1 egységnek, a pirosét 2 egységnek. A kék gyertya magassága $t = 3$-ban lesz 0, a pirosé a $t = 1$-ben.



A grafikonon azt láthatjuk, hogy $t = \frac{3}{5}$-nél lesz a két gyertya egyforma magas.

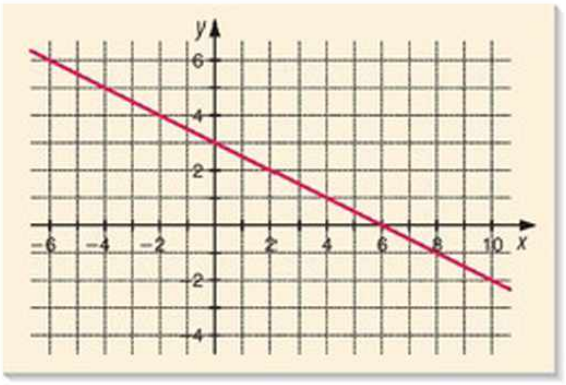
Ellenőrzés: $\frac{3}{5}$ óra alatt

a piros gyertyának a $\frac{3}{5}$ része, azaz $\frac{6}{5}$ egység ég le, marad $\frac{4}{5}$ egység;

a kék gyertyának az $\frac{1}{5}$ része, azaz $\frac{1}{5}$ egység ég le, marad $\frac{4}{5}$ egység.

Feladatok

1. Az ábrán az $f(x) = -0{,}5x + 3$ függvény grafikonját látjuk. Olvassuk le a grafikonról a következő egyenletek megoldását! (➡)



   a) $-0{,}5x + 3 = 3$;
   b) $-0{,}5x + 3 = 0$;
   c) $-0{,}5x + 3 = -2$;
   d) $-0{,}5x + 3 = 2{,}5$.

2. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az $f(x) = x - 2$ és a $g(x) = 6 - x$ függvények grafikonját! A grafikonok segítségével határozzuk meg az $x - 2 = 6 - x$ egyenlet megoldását! Oldjuk meg az egyenletet algebrai úton is!

3. Oldjuk meg grafikus úton a következő egyenleteket!

   a) $-1 = \frac{1}{2}x + 1$; *b)* $2x + 3 = x - 5$; *c)* $1 - x = 2x - 8$; *d)* $x + 3 = -x - 5$;

   e) $4 - \frac{1}{2}x = 3x - 3$; *f)* $-x = -2x - 2$; *g)* $\frac{1}{3}x + 1 = \frac{1}{3}x - 1$; *h)* $x - 2 = -3x + 6$.

4. Egy gepárd gazellára vadászik. Amikor 150 méterre lopódzik hozzá, a gazella észreveszi, és futni kezd. El tudja-e ejteni a gepárd a gazellát, ha a gepárd csúcssebessége $1500\ \frac{\text{m}}{\text{perc}}$, de ezt a sebességet csak 40 másodpercig tudja tartani, a gazella sebessége pedig $20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$? (A gazella több percen keresztül is tud ezzel a sebességgel futni.)

5. Bence és Zsuzsi teljesítménytúrán vesz részt. Bence éjfélkor indul gyalog, és átlagosan $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad. Zsuzsi hat óra elteltével indul utána biciklivel, $12\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel.

   a) Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben Bence és Zsuzsi helyzetét az idő függvényében, ha délig mindketten tartják az eredeti sebességüket!
   b) Hol lesznek a Zsuzsi indulásától számított másfél óra, illetve 4 óra 20 perc elteltével?
   c) Adjuk meg Bencének és Zsuzsinak a kiindulási ponttól mért távolságát az idő függvényében!
   d) Hány órakor éri utol Zsuzsi Bencét?

Rejtvény

András reggelente egyenletes sebességgel biciklizve 8 órára ér az iskolába. Kedden reggel, amikor indult volna, észrevette, hogy kilyukadt a biciklijének a kereke. Így ugyanakkor indult, de gyalog ment, ezért feleakkora sebességgel haladt, mint ha biciklivel ment volna. Félúton felvette egy autó. Milyen gyorsan kellene mennie az autónak, hogy András 8 órára beérjen az iskolába?

10. Vegyes feladatok

1. Adjunk meg olyan sorozatot, amelynek tagjai

a) az osztály tanulói; *b)* a magyar rendszámú autók; *c)* egy sakktábla mezői!

2. Egy tévésorozatnak mindennap leadják egy-egy epizódját. Hétköznap 30 perces részeket sugároznak, hétvégén viszont 45 perceseket. Az első részt hétfőn vetítették.



a) Írjuk fel, hogy a sorozat melyik részeit vetítik hétfőn! Mi a közös bennük? Igaz-e, hogy a sorozat 77. részét hétfőn sugározzák?

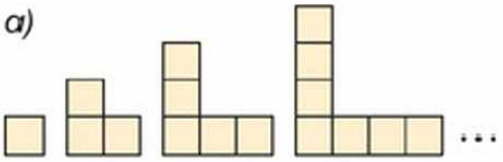
b) Írjuk fel, hogy a sorozat melyik részeit vetítik szombaton! Igaz-e, hogy a sorozat 77. részét szombaton sugározzák?

c) Hány perces a sorozat 77. epizódja?

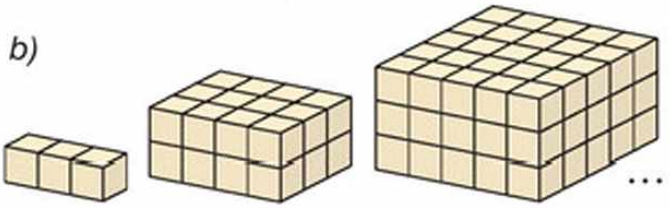
d) Hány perces a sorozat 100. epizódja?

3. Keressünk számtani sorozatot az ábrák sorozatán!
Adjuk meg a sorozatok első elemét, különbségét és 50. tagját!

a)



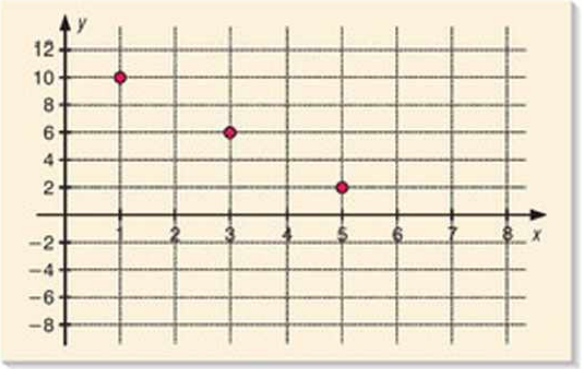
b)



4. Folytassuk a számpiramist! Keressünk számtani sorozatokat a számpiramisban! Adjuk meg az első tagjukat és a különbségüket! (➡)

1
2 3
3 4 5
4 5 6 7
5 6 7 8 9

5. Az alábbi grafikonon egy számtani sorozat néhány tagját ábrázoltuk. (➡)



a) Egészítsük ki az ábrát a sorozat néhány további tagjával!

b) Mi ennek a számtani sorozatnak a különbsége?

c) Mi lesz a sorozat 100. tagja?

d) Tekintsük a következő függvényt!

$f: \{1; 2; 3; ...\} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 12 - 2x$

Milyen kapcsolat van a függvény és a sorozat között? Válaszunkat indokoljuk!

e) Hogyan változik meg a függvény grafikonja, ha így írjuk fel: $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 12 - 2x$?

6. Egy sorozat bármely 3 szomszédos tagjára igaz, hogy a középső a két szélső átlaga. Adjuk meg a sorozat tagjait, ha az első 3 tag átlaga 4, a következő 3 tag átlaga pedig 13! Mi a sorozat képzési szabálya és n-edik tagja?

7. Adjuk meg az alábbi hozzárendeléseket más módon is! Határozzuk meg az értelmezési tartományukat és az értékkészletüket! Döntsük el, melyik lesz közülük függvény! Vizsgáljuk őket egyértelműség szempontjából!

a) $h: = \{(hétfő; h); (kedd; k); (szerda; sz); (csütörtök; cs); (péntek; p); (szombat; sz); (vasárnap; v)\}$.

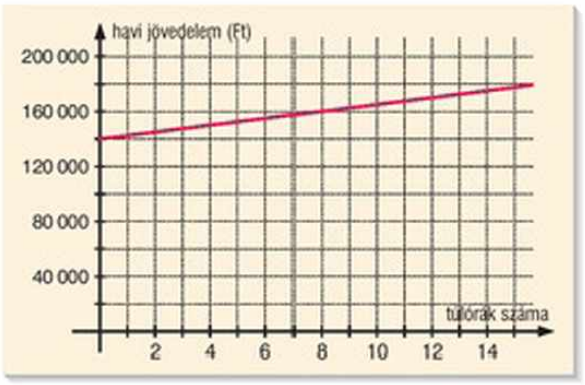
b) A g hozzárendelés rendelje hozzá Magyarország 1990 utáni miniszterelnökeihez azokat az éveket, amikor kormányon voltak!

c) $k: = \{-2; -1; 0; 1; 2\} \to \mathbb{Q}$, $k(x) = x^2 - 4$.

d) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2x - 4$.

Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a k és f hozzárendelések grafikonját!

8. Mi mindent tudunk megállapítani az ábrán látható függvényről? Értelmezzük a grafikont! (➡)



9. Gyakran szokták mondani, hogy egy ember ideális testtömegét (kilogrammokban kifejezve) úgy kapjuk meg, hogy a centiméterben megadott magasságának mérőszámából levonunk 100-at.

a) Írjuk fel azt a függvényt, amely ez alapján kifejezi az ideális testtömeget a magasság függvényében!

b) Ábrázoljuk ezt a függvényt derékszögű koordináta-rendszerben!

c) Milyen értelmezési tartományt kell megadnunk ahhoz, hogy értelmes legyen az állítás?

d) Megfelelő módja-e ez az ideális testsúly megállapításának? A választ indokoljuk meg!

10. Az alábbiak közül melyek jellemezhetők lineáris függvénnyel? A választ indokoljuk meg!

a) a hőmérséklet változása egy nap folyamán;

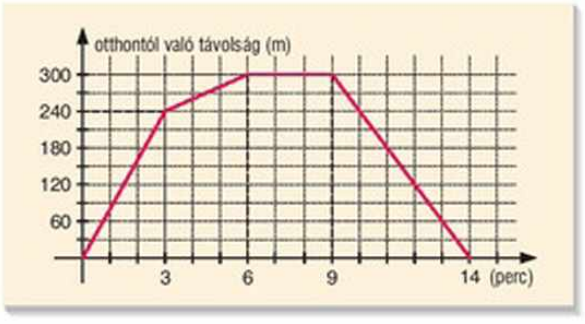
b) a boltban vásárolt kenyér ára a tömegének függvényében;

c) egy könyv oldalainak száma és a könyv ára közötti összefüggés.

11. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját! Igazoljuk, hogy mind egy ponton mennek át! Adjuk meg ennek a pontnak a koordinátáit!

$f(x) = 12 - x$; $g(x) = -3 + 0{,}5x$; $h(x) = 2$.

12. Fanni elment a boltba kenyérért, útközben találkozott a barátnőjével, ezután megvette a kenyeret, majd hazament. Olvassuk le a grafikonról, hogy mekkora sebességgel haladt az egyes szakaszokon! Mennyi ideig volt távol az otthonától, és mekkora utat tett meg ezalatt? Mekkora volt az átlagsebessége? (➡)



13. Egy edző azt mondta a tanítványainak, hogy az állóképességük fejlesztéséhez minden edzésen legalább 20 percig fenn kell tartaniuk egy bizonyos pulzusszámot. Ez a pulzusszám az életkortól függ, mégpedig a következő módon: egy t éves ember $p(t)$ fenntartandó pulzusszáma $p(t) = 0{,}7(220 - t)$.

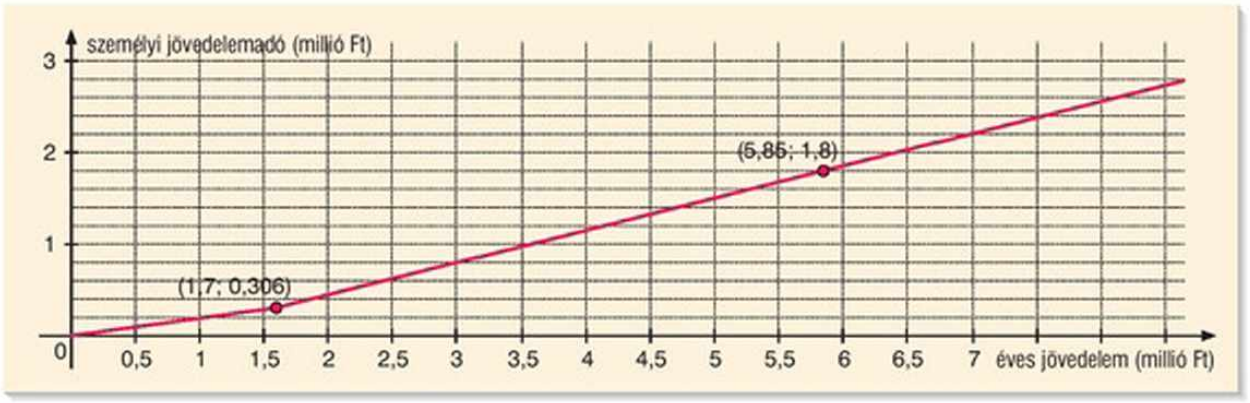
a) Milyen pulzusszámot kellene fenntartania egy 13 éves gyereknek?
b) Hány éves az, akinek 126-os pulzusszámot kellene fenntartania?
c) Írjuk fel a pulzusszámot az életkor alapján megadó függvényt!
d) Ábrázoljuk a függvényt derékszögű koordináta-rendszerben!

14. Antal gázszerelő. Ha kihívják valahova, a kiszállási díja 2000 forint, óradíja pedig 4000 forint. Béla szintén gázszerelő. Ő 4000 forint kiszállási díjat kér, az óradíja viszont csak 3000 forint.



a) Mennyit kér Antal egy 5 órás munkáért?
b) Hány órás volt az a munka, amelyért Béla 22 000 forintot kapott?
c) Fejezzük ki az órákban megadott munkaidő függvényében Antal, ill. Béla bevételét!
d) Ábrázoljuk a két függvényt közös koordináta-rendszerben!
e) Hány órás munkáért kapnak mindketten ugyanannyi pénzt? Igazoljuk a választ!

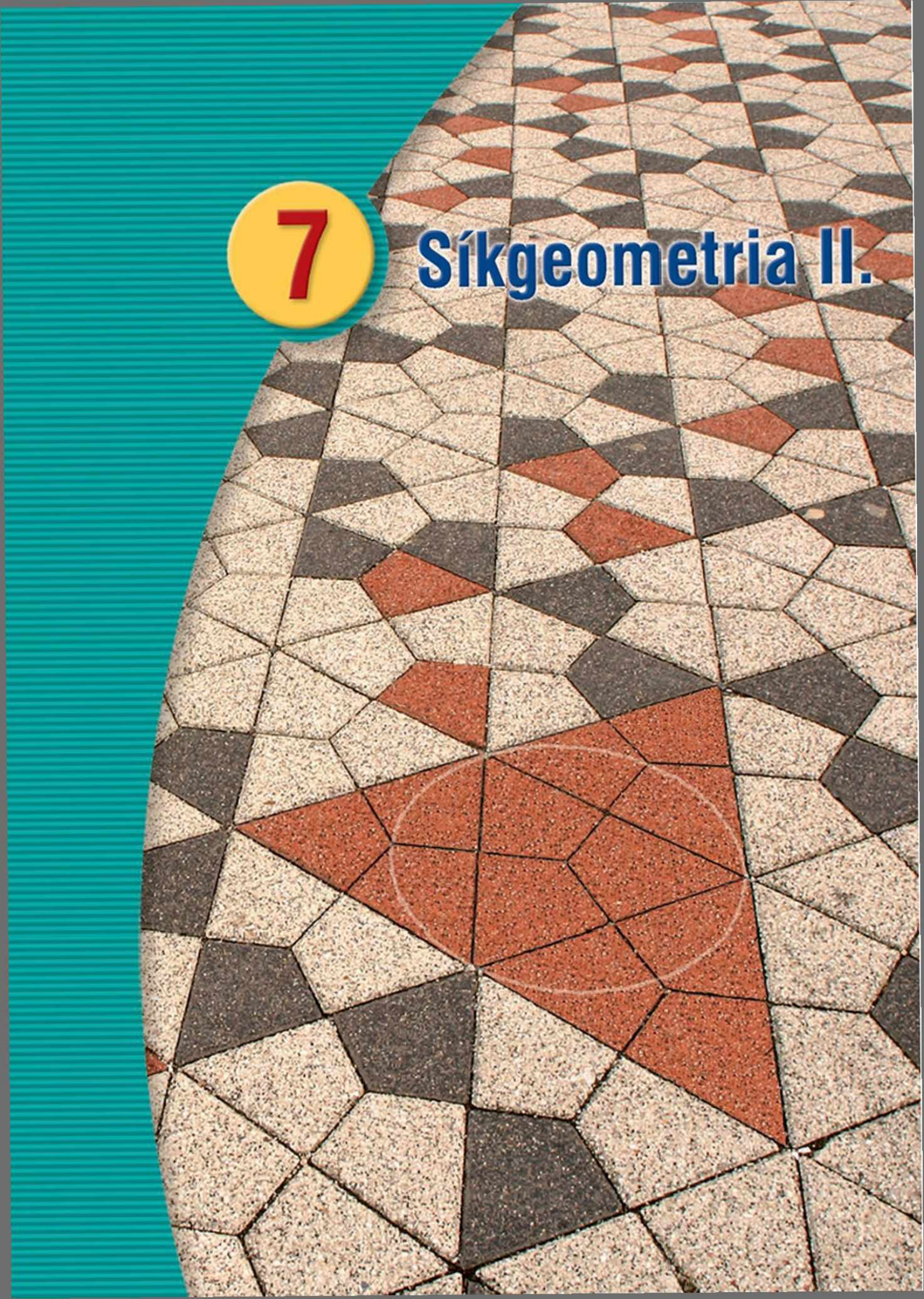
15. Az alábbi grafikon azt mutatja, hogy az éves jövedelem függvényében mennyi személyi jövedelemadót kellett fizetni 2007-ben Magyarországon.
A grafikon két pontjának koordinátáit megadták.



a) Mekkora a grafikon 0 és 1,7 közti szakaszán ábrázolt lineáris függvény meredeksége? Adjuk meg ezt a függvényt!
b) Mennyi személyi jövedelemadót fizet az, akinek éves jövedelme 1 millió forint?
c) Mekkora a grafikon második szakaszának meredeksége?
d) Olvassuk le az ábráról, hogy körülbelül mennyi adót fizet az, akinek éves jövedelme 4 millió forint! Megadható-e az adó pontos mértéke a grafikon alapján?
e) Mit jelenthet az a kifejezés, hogy Magyarországon kétkulcsos adózás van?

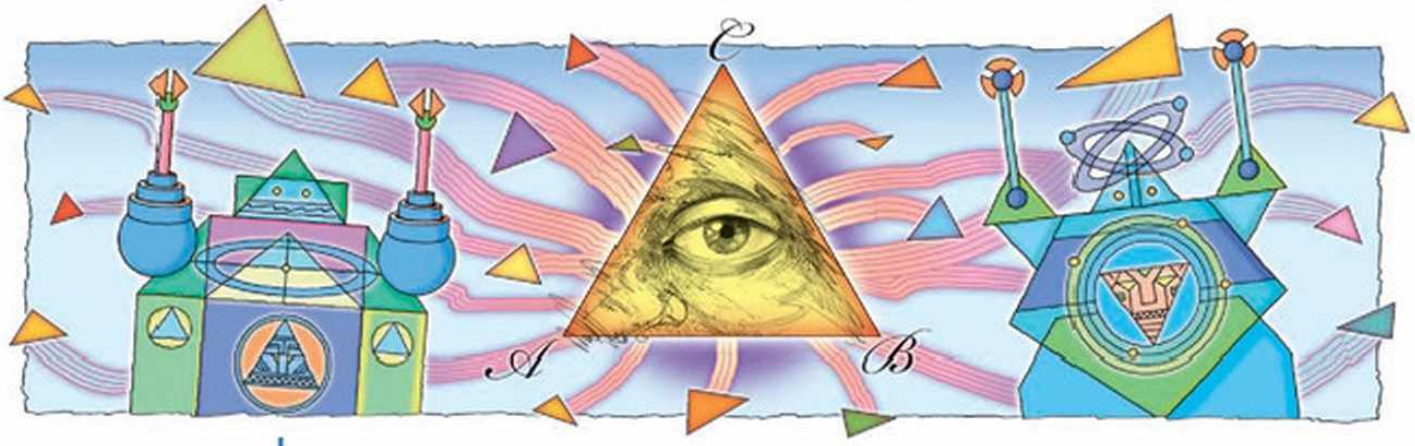
16. Adjuk meg a következő számtani sorozatok első öt tagját, és ábrázoljuk őket koordináta-rendszerben! Írjuk fel azt a lineáris függvényt, amelynek grafikonjára az ábrázolt pontok illeszkednek!

a) $a_1 = -2;\ d = 1;$ *b)* $b_1 = 4;\ d = -2;$ *c)* $c_1 = 1;\ d = 0{,}5.$



7 Síkgeometria II.

1. A háromszögek csoportosítása, a háromszögek egybevágósága



A háromszögek néhány tulajdonsága

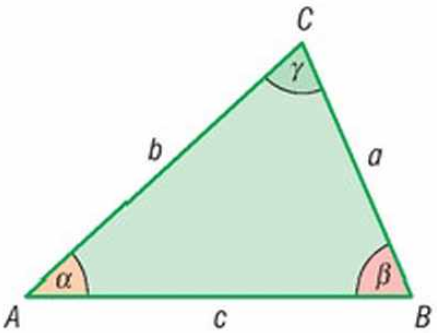
A háromszög három egyenes szakasszal határolt síkidom.

Jelölése: $ABC\triangle$.

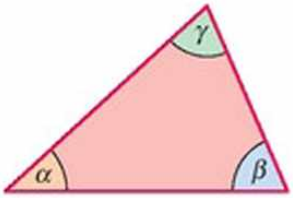
A csúcsai: A, B és C pontok.

A szögei: α, β, γ.

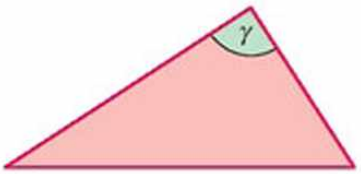
A megfelelő csúcsokkal szemben fekvő oldalai: a, b és c.



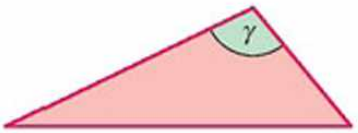
Szögei szerint egy háromszög lehet:



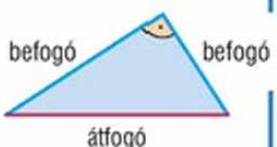
hegyesszögű
minden szöge kisebb, mint 90°
$\alpha < 90°, \beta < 90°, \gamma < 90°$



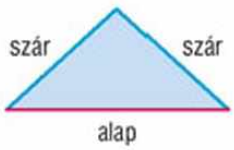
derékszögű
van 90°-os szöge
$\gamma = 90°$



tompaszögű
van 90°-nál nagyobb szöge
$\gamma > 90°$



A derékszögű háromszögben a 90°-os szöggel szemközti oldalt **átfogónak,** a másik két oldalt **befogónak** nevezzük.

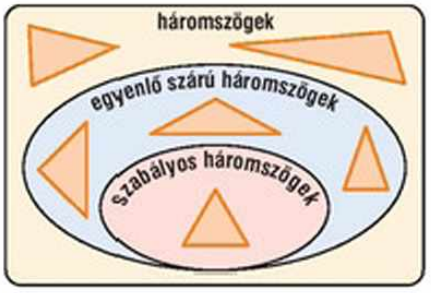


Egyenlő szárú háromszög:

- van két egyenlő hosszúságú oldala,
- van két egyenlő szöge.

Egyenlő oldalú (szabályos) háromszög:

- mindhárom oldala egyenlő hosszúságú,
- mindhárom szöge egyenlő.



1. példa

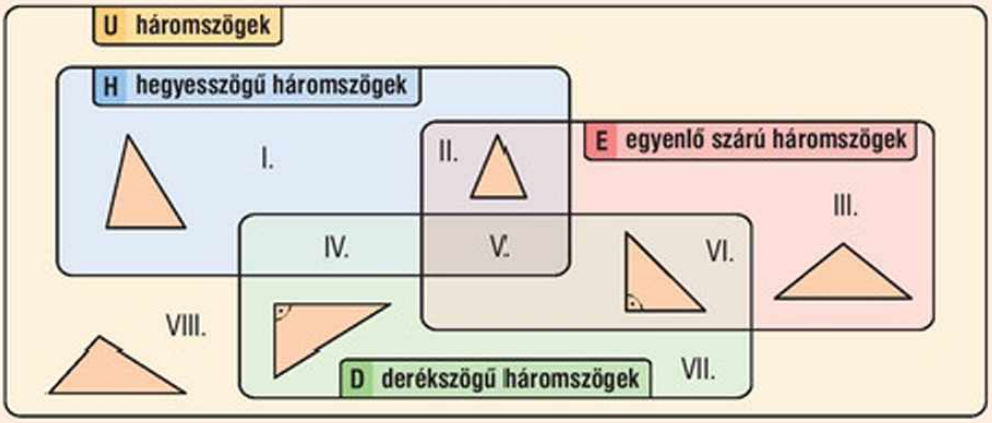
Készítsük el az alábbi halmazok halmazábráját! Milyen tulajdonságú háromszögek kerülnek az egyes halmazrészekbe?

U = {háromszögek};
H = {hegyesszögű háromszögek};
E = {egyenlő szárú háromszögek};
D = {derékszögű háromszögek}.

Megoldás

A háromszögek halmazának a másik három halmaz részhalmaza, ezért a H halmaz lesz az alaphalmaz.

Először vegyük fel a három halmazt úgy, hogy bármely kettőnek legyen metszete, és próbáljunk megfelelő háromszögeket rajzolni az egyes részekbe!



Írjuk fel az egyes halmazrészeket halmazműveletekkel!

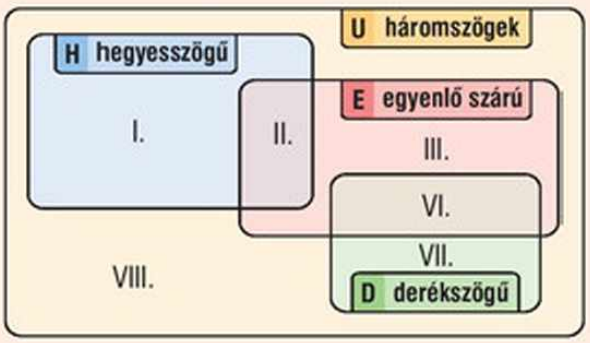
Például:
VIII. = $\overline{H \cup E \cup D}$

Adjuk meg a keletkezett halmazrészekbe tartozó elemek tulajdonságait!

I. Olyan hegyesszögű háromszög, amely nem egyenlő szárú.
II. Egyenlő szárú, hegyesszögű háromszög.
III. Egyenlő szárú, tompaszögű háromszög.
IV., V. Nem létezik olyan háromszög, amelyik hegyesszögű is és derékszögű is, ezért az IV. és V. rész üreshalmaz.
VI. Egyenlő szárú, derékszögű háromszög.
VII. Derékszögű, nem egyenlő szárú háromszög.
VIII. Olyan tompaszögű háromszög, amely nem egyenlő szárú.

Amelyik háromszög nem hegyesszögű és nem derékszögű, az tompaszögű.

Mivel van két olyan halmazrész, amelybe semmilyen háromszög sem tartozhat, az ábrát egyszerűsíthetjük.

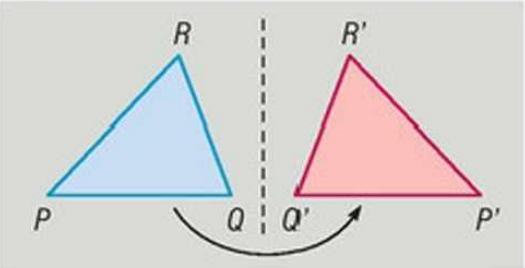


A háromszögek szerkesztése

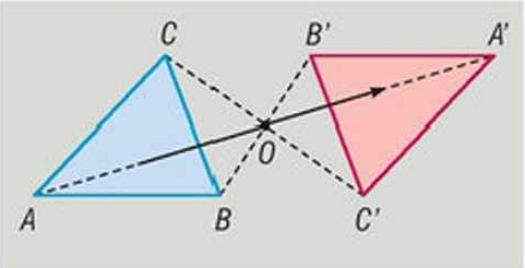
Az euklideszi szerkesztés követelményei szerint szerkesztünk, vagyis csak egyenes vonalzót és körzőt használhatunk. A megoldások vizsgálatakor az **egybevágó háromszögeket** nem tekintjük különböző megoldásoknak.

Két háromszög akkor egybevágó, ha megfelelő módon egymásra helyezve egybeesnek. Az egybevágóság jele: $\cong$.

Például tengelyes és középpontos tükrözéskor egybevágó háromszögeket kapunk.



$PQR\triangle \cong P'Q'R'\triangle$



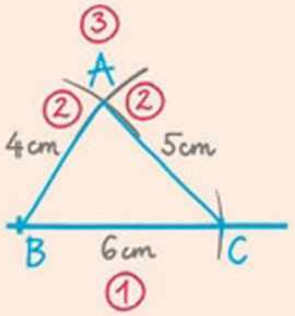
$ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$

1. példa

Szerkesszünk háromszöget, melynek adott a három oldala!

$a = 6$ cm, $b = 5$ cm és $c = 4$ cm.

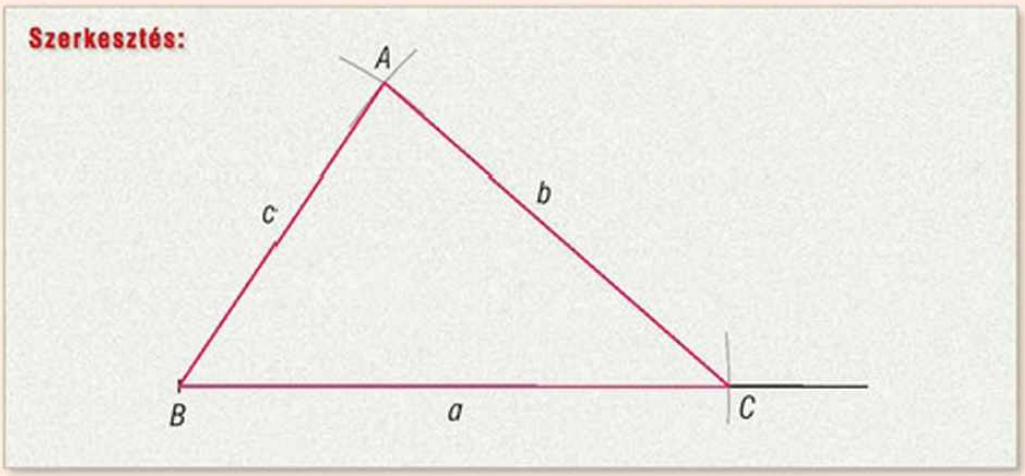
Megoldás



A szerkesztés menete:

1. Felveszünk egy 6 cm hosszú szakaszt.
2. A szakasz egyik végpontjából 5 cm sugarú, a másik végpontjából 4 cm sugarú körívet rajzolunk.
3. A körívek metszéspontja adja a harmadik csúcsot.

Szerkesztés:



Elemzés (diszkusszió):

A szerkesztést bármelyik szakaszból kiindulva elvégezhetjük, a kapott háromszögek egybevágók lesznek. Egy megoldás van.

A háromszöget három oldalának hossza egyértelműen meghatározza.

Három szakaszból akkor szerkeszthető háromszög, ha azokra fennáll a **háromszög-egyenlőtlenség,** vagyis bármely kettő hosszának összege nagyobb, mint a harmadiknak a hossza.

$a + b > c$
$a + c > b$
$b + c > a$

háromszög-egyenlőtlenség

2. példa

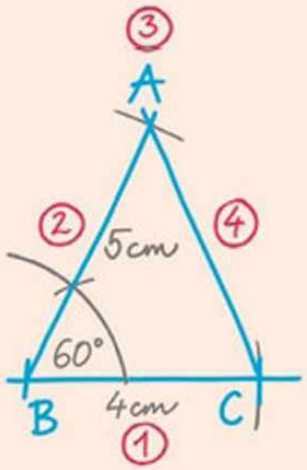
Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának hossza és a közbezárt szög nagysága!

$a = 4$ cm, $c = 5$ cm és $\beta = 60°$.

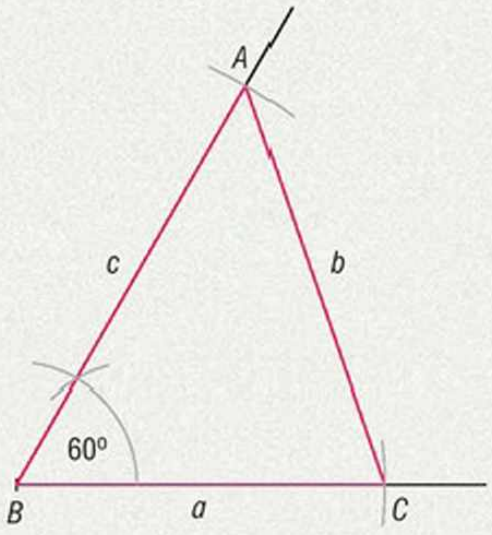
Megoldás

A szerkesztés menete:

1. Felveszünk egy 4 cm hosszúságú szakaszt *(BC)*.
2. A szakasz egyik végpontjában felvesszük a $\beta = 60°$-os szöget.
3. A szög másik szárára felmérjük az 5 cm-es szakaszt, így megkapjuk az *A* csúcsot.
4. Összekötve az *A* és a *C* pontokat megkapjuk a háromszög harmadik oldalát.



Szerkesztés:



Elemzés (diszkusszió):

A feladatnak egy megoldása van.

A háromszöget két oldala és az általuk bezárt szög egyértelműen meghatározza. (A két oldal által bezárt szög kisebb, mint 180°.)

$\gamma < 180°$

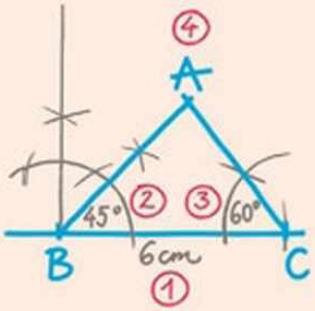
3. példa

Egy háromszög egyik oldala $a = 6$ cm. Az a oldalon fekvő két szög: $\beta = 45°$; $\gamma = 60°$. Szerkesszük meg a háromszöget!

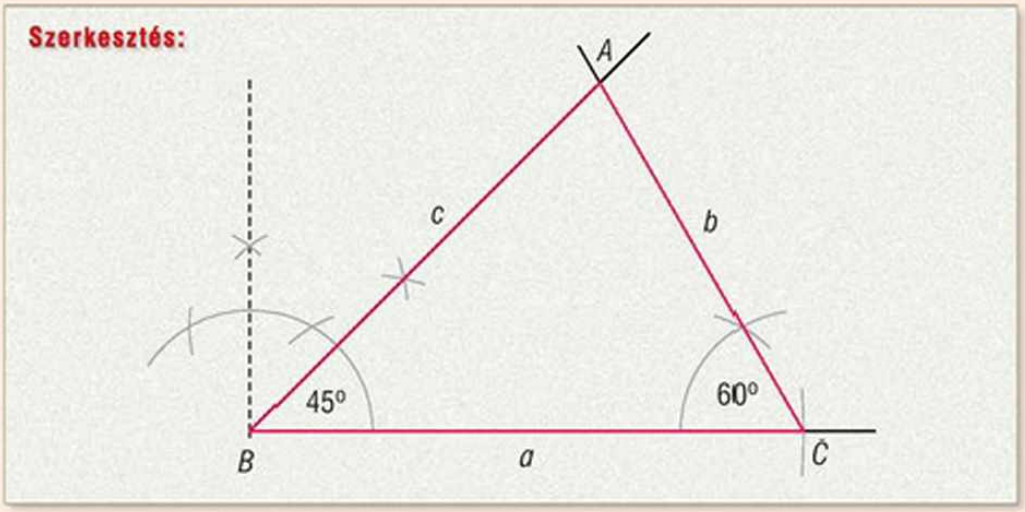
Megoldás

A szerkesztés menete:

1. Felvesszük a 6 cm-es szakaszt *(BC)*.
2. Az egyik végpontjában megszerkesztjük az $\beta = 45°$-os szöget.
3. A szakasz másik végpontjában $\gamma = 60°$-os szöget szerkesztünk.
4. A két szögszár metszéspontja a A csúcs.



Szerkesztés:



Elemzés (diszkusszió): A feladatnak egy megoldása van.

$\alpha + \beta < 180°$

A háromszöget egy oldala és a rajta fekvő két szög egyértelműen meghatározza. (Az adott oldalon fekvő két szög összege kisebb, mint 180°.)

4. példa

Adott egy háromszög két oldalának hossza: $a = 3$ cm, $b = 5$ cm.

Szerkesszük meg a háromszöget, ha

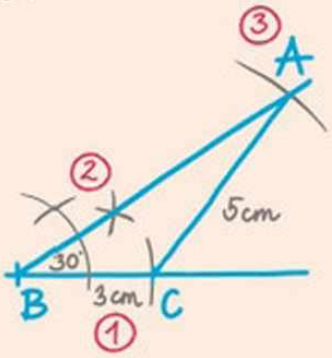
a) a nagyobb oldallal szemközti szög: $\beta = 30°$;

b) a kisebbik oldallal szemközti szög: $\alpha = 30°$!

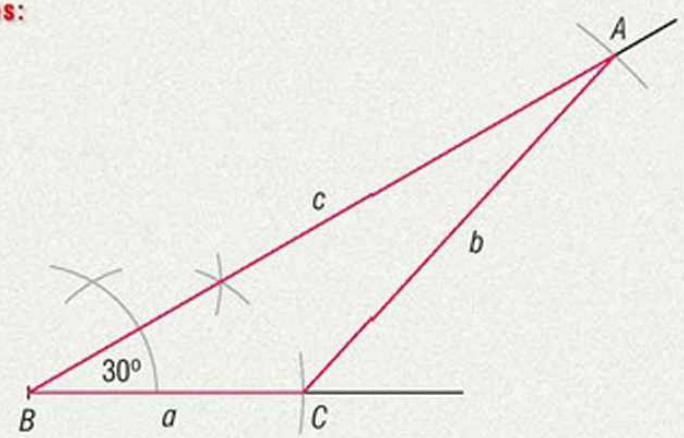
Megoldás

a) A szerkesztés menete:

1. Felvesszük a 3 cm-es oldalt *(BC)*.
2. A szakasz B végpontjába $\beta = 30°$-os szöget szerkesztünk.
3. A szakasz C végpontjából 5 cm sugarú körívvel elmetsszük a 30°-os szög szárát *(A)*.



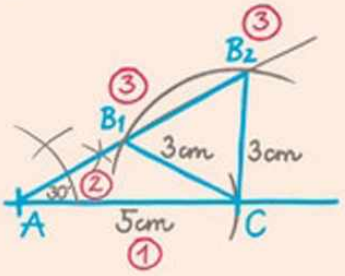
Szerkesztés:



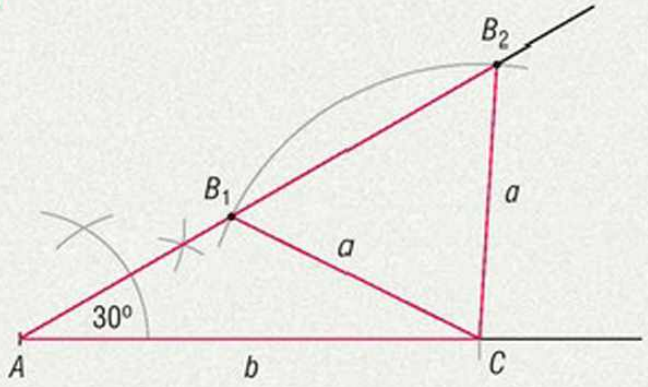
Elemzés (diszkusszió): A feladatnak egy megoldása van.

b) A szerkesztés menete:

1. Felvesszük az 5 cm-es oldalt *(AC)*.
2. A szakasz *A* végpontjában $\alpha = 30°$-os szöget szerkesztünk.
3. A *C* végpontból 3 cm sugarú körívvel elmetsszük a szög szárát *(B)*.



Szerkesztés:

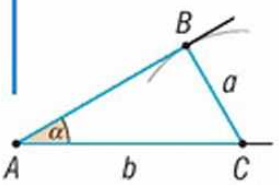


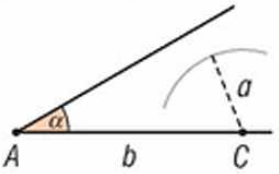
Elemzés (diszkusszió):

Két háromszöget kaptunk, hiszen a körív két pontban (B_1 és B_2) metszi a szögszárat. Tehát két oldal és a kisebbikkel szemközti szög nem határozza meg egyértelműen a háromszöget.

Elképzelhetőek olyan adatok is, hogy a *C* csúcsból a rövidebb oldal hosszával húzott körív érinti a szögszárat. Ekkor csak egy megoldást kapunk.

Abban az esetben, ha a körívnek nincs közös pontja a szögszárral, nincs megoldása a feladatnak.





A háromszöget két oldala és a nagyobbikkal szemben fekvő szöge egyértelműen meghatározza. (A szög kisebb, mint 180°.)

Egy háromszög megszerkesztéséhez három egymástól független adat elegendő.

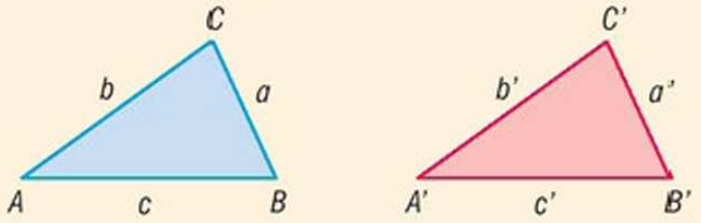
A háromszögeket egyértelműen meghatározó esetek alapján megadhatjuk a háromszögek **egybevágóságának alapeseteit.** Ezek alapján eldönthető, hogy két háromszög egybevágó-e vagy sem.

A háromszögek egybevágóságának alapesetei

Két háromszög egybevágó,

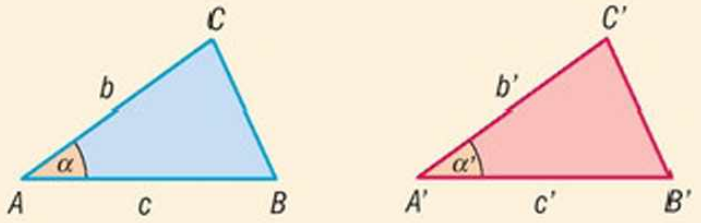
1. ha oldalaik páronként egyenlők;

$ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$



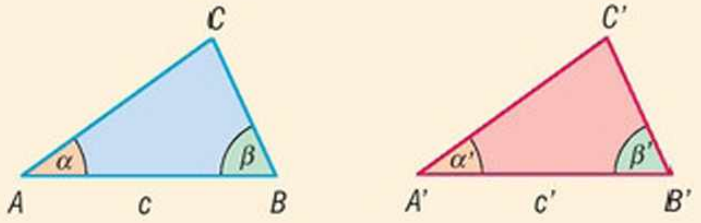
$a = a'$
$b = b'$
$c = c'$

2. ha két oldaluk és az általuk bezárt szög páronként egyenlő;



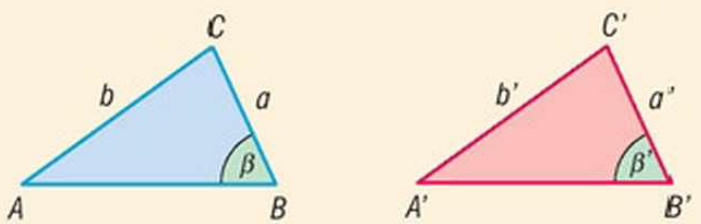
$b = b'$
$c = c'$
$\alpha = \alpha'$

3. ha egy oldaluk és a rajta fekvő két szögük páronként egyenlő;



$c = c'$
$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$

4. ha két oldaluk és a nagyobbikkal szemközti szög páronként egyenlő.



$a = a'$
$b = b'$
$a < b$
$\beta = \beta'$

Feladatok

1. Döntsük el, hogy melyik állítás igaz, és melyik hamis!
   a) Ha egy háromszög tompaszögű, akkor nem lehet egyenlő szárú.
   b) Minden egyenlő szárú háromszögnek van két egyenlő szöge.
   c) Nincs olyan háromszög, mely egyenlő szárú és derékszögű.
   d) Minden háromszögnek van olyan oldala, amelyik kisebb a többinél.
   e) Minden háromszögnek van olyan oldala, amelyik nem nagyobb a többinél.
   f) Egy tompaszögű háromszög nem lehet egyenlő oldalú.
   g) Két háromszög egybevágó, ha mindhárom szögükben megegyeznek.
   h) Két egyenlő szárú háromszög egybevágó, ha egy oldalukban és két szögükben megegyeznek.

2. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának hossza és az oldalak által bezárt szög!
   a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 45°$; *b)* $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 75°$.

3. Szerkesszünk háromszöget, ha adott három oldalának hossza!
   a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 3$ cm; *b)* $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 10$ cm.

4. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy odalának hossza és a rajta fekvő két szöge!
   a) $c = 4$ cm, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$; *b)* $c = 4$ cm, $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$.

5. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának hossza és egy szöge!
   a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 45°$; *b)* $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\beta = 75°$.

6. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha az egyik oldala 5 cm, egy másik oldala pedig 7 cm! Hány ilyen háromszöget kaphatunk?

7. Egy háromszög két oldala 5 cm és 7 cm. Mekkora lehet a harmadik oldal, ha tudjuk, hogy centiméterben mérve egész szám? Szerkesszük meg a megfelelő háromszögek közül azt, amelyiknek a legnagyobb a kerülete!

8. Szerkesszük meg a képen látható háromszög alapú ház 1 : 1000 méretarányú alaprajzát, ha az alap két oldala 80 m és 60 m, az általuk bezárt szög pedig 60°!

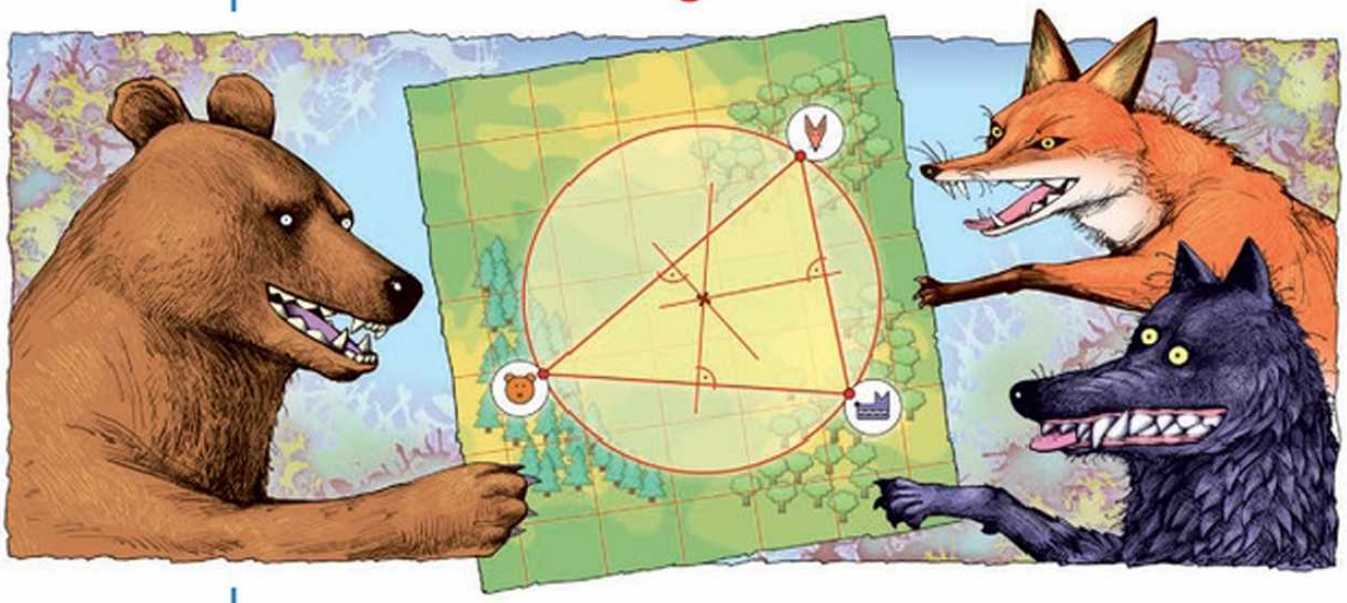


9. Egy 1 : 1 500 000 arányú térképen a Szeged–Budapest távolság légvonalban 13 cm, a Budapest–Szolnok távolság pedig 7 cm. A Szeged–Budapest–Szolnok szög 45°. Szerkesszük meg a három város helyét, mérjük meg a Szeged–Szolnok távolságot, és ennek alapján számítsuk ki, mekkora a két város légvonalban mért távolsága a valóságban!

Rejtvény

Hányféle háromszög rakható ki 20 db gyufaszálból, ha egy háromszöghöz mind a 20 gyufaszálat fel kell használni?

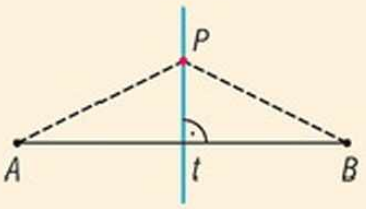
2. A háromszög köré írható kör



A szakaszfelező merőleges (emlékeztető)

A szakaszfelező merőleges azon pontok halmaza a síkon, melyek a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak.

Ez azt jelenti, hogy ha kiválasztjuk a t szakaszfelező merőleges egy tetszőleges P pontját, akkor az a szakasz két végpontjától ugyanakkora távolságra lesz.



$P \in t \Rightarrow AP = BP$

Ha $P \in t$, akkor $AP = BP$.

Fordítva, ha a síkon megadunk egy olyan P pontot, amely egy AB szakasz két végpontjától ugyanakkora távolságra van, akkor a P pont illeszkedik a szakasz felezőmerőlegesére.

$AP = BP \Rightarrow P \in t$

Ha $AP = BP$, akkor $P \in t$.

1. példa

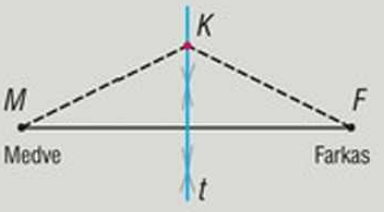
A medve és a farkas elhatározta, hogy egy erdei kilátót épít.

a) Hova építsék, ha azt szeretnék, hogy mindkettejük házától ugyanakkora távolságra legyen?

b) Később a róka is csatlakozott az ötlethez. Hova tervezzék most a kilátót, hogy mindhármuk házától ugyanakkora távolságra legyen?

Megoldás

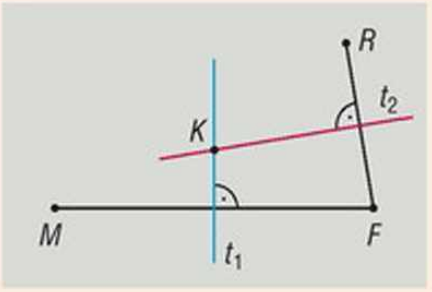
a) A medve és a farkas a házukat összekötő MF szakasz t felezőmerőlegesének bármely K pontjában megépítheti a kilátót.



b) Vegyük fel az előző ábrán a róka házának megfelelő R pontot is!

A medve és a farkas a t_1 felezőmerőleges pontjait választaná. A farkas és a róka a t_2 szakaszfelező merőleges pontjai közül választana.

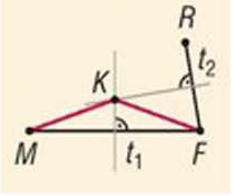
Jelölje K a t_1 és a t_2 egyenesek metszéspontját!

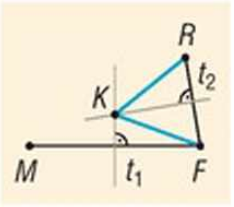


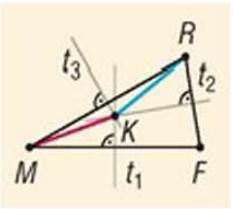
Ekkor

$K \in t_1$, ezért $KM = KF$;
$K \in t_2$, ezért $KF = KR$;
azaz $KM = KF = KR$.

A K pont megfelel a feladat feltételeinek, mert ugyanakkora távolságra van mindhárom ponttól. Ez egyben azt is jelenti, hogy illeszkedni fog az MR szakasz felezőmerőlegesére is.





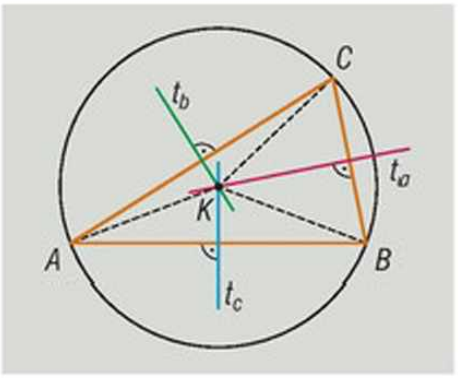


$KM = KF;\ KF = KR$
$\Downarrow$
$KM = KR$

A példa alapján a következőt állíthatjuk:

A háromszög oldalfelező merőlegesei mindig egy pontban metszik egymást.

Ez a pont ugyanakkora távolságra lesz mindhárom csúcstól, ezért ez egy olyan kör középpontja, mely átmegy a háromszög csúcsain. A háromszög csúcsain átmenő kört **a háromszög köré írható körnek** nevezzük.



A háromszög köré írt kört másképpen a háromszög körülírt körének is nevezzük.

A háromszög köré írható kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

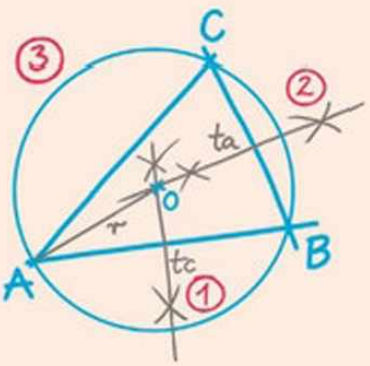
Minden háromszög köré írható kör.

2. példa

Vegyünk fel egy tetszőleges háromszöget, és szerkesszük meg a háromszög köré írható kört!

Megoldás

Tudjuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, a sugara pedig a középpont és valamelyik csúcs távolsága.



A szerkesztés menete:

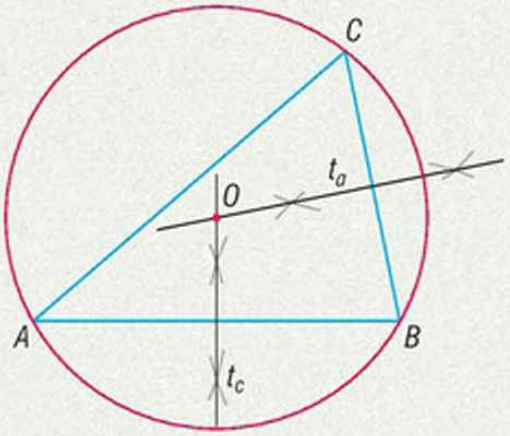
1. Szerkesszük meg az AB oldal felezőmerőlegesét!
2. Szerkesszük meg a BC oldal felezőmerőlegesét!
3. Jelöljük O-val az oldalfelező merőlegesek metszéspontját, és rajzoljuk meg az OA sugarú kört!

Három csoportban dolgozzunk!

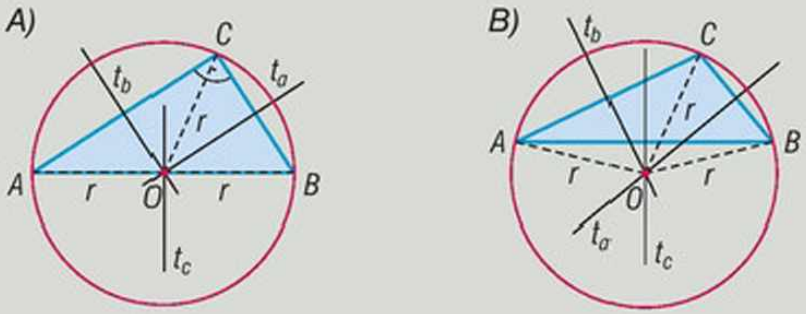
Az I. csoport háromszögének oldalai:
3 cm; 4 cm; 4,5 cm;
a II. csoporté:
3 cm; 4 cm; 5 cm;
a III. csoporté:
3 cm; 4 cm; 6 cm.

Az előbbi példák alapján elegendő két oldalfelező merőleges metszéspontját megszerkeszteni.

Szerkesztés:



A példa megoldása során egy hegyesszögű háromszög körülírt körét szerkesztettük meg. Ha derékszögű *(A)* vagy tompaszögű *(B)* háromszöget vettünk volna fel, akkor a megoldás a következő:



A szerkesztések azt mutatják, hogy

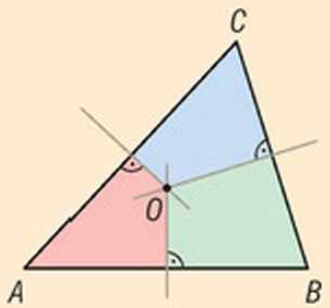
- a hegyesszögű háromszög köré írt kör középpontja a háromszög belsejében van;
- a derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az egyik oldalon, éppen az átfogó felezőpontjában van;
- a tompaszögű háromszög köré írt kör középpontja a háromszögön kívül van.

Érdekesség

Ha egy *ABC* hegyesszögű háromszögben azokat a pontokat, amelyek a csúcsok közül

- az *A* csúcshoz vannak a legközelebb, pirosra;
- a *B* csúcshoz vannak legközelebb, zöldre;
- a *C* csúcshoz vannak legközelebb, kékre

színezzük, akkor a következő ábrát kapjuk.



*3. példa

Ákos a lenyugvó Napról készített képet. Hogyan dönthető el, hogy a Nap középpontja látható-e még a felvételén?

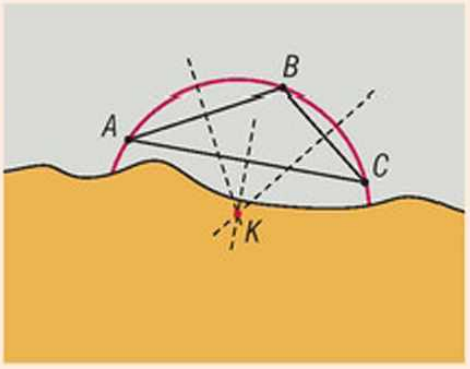


Megoldás

A körív alapján kell megszerkesztenünk a kör középpontját.

Vegyünk fel a köríven három pontot: A-t, B-t és C-t! A keresett kör az ABC háromszög köré írt kör. Ennek középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

A szerkesztés alapján eldönthető, hogy látható-e a napkorong középpontja, vagy sem.



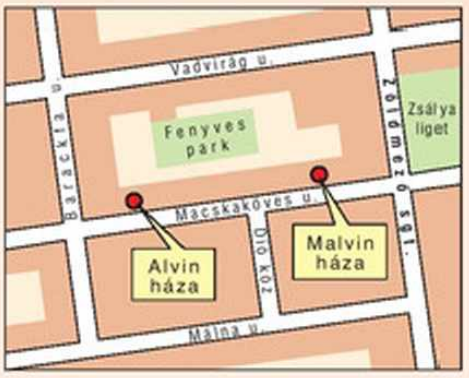
Vigyázzunk! A Napba nézni mindig veszélyes, és maradandó szemkárosodást, súlyosabb esetben vakságot is okozhat!

A kör minden húrjának szakaszfelező merőlegese átmegy a kör középpontján.

*4. példa

Alvin és Malvin a Macskaköves utcában laknak, mindössze 100 m távolságra egymástól. Közös barátjuk, Dorka közel lakik hozzájuk. Egyszer Dorka megjegyezte, hogy nincs a térképen olyan pont, amelyik mind a hármuk házától ugyanakkora távolságra lenne.

Melyik utcában lakik Dorka?

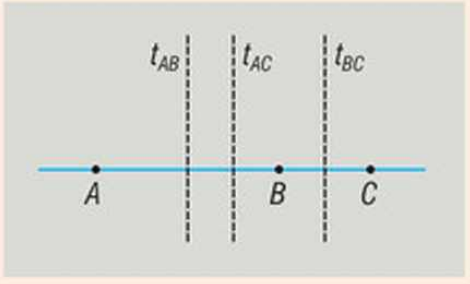


Megoldás

Ha a térképen nincs olyan pont, amely egyenlő távolságra van mindhárom háztól, akkor a pontok által meghatározott szakaszfelező merőlegeseknek nem lehet metszéspontjuk. Ez akkor teljesül, ha a szakaszfelező merőlegesek párhuzamosak.

$$t_{AB} \parallel t_{AC} \parallel t_{BC}$$

Ez azt jelenti, hogy a három barát háza egy egyenesre illeszkedik, vagyis mindhárman ugyanabban az utcában laknak. Tehát Dorka is a Macskaköves utca lakója.



Feladatok

1. Adott egy $AB = 5$ cm hosszúságú szakasz. Hol vannak azok a pontok, melyek
   a) a szakasz A végpontjától 3 cm távolságra találhatók;
   b) a szakasz A végpontjától 3 cm, a B végpontjától 6 cm távolságra találhatók;
   c) a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra találhatók;
   **d)* a szakasztól 3 cm távolságra találhatók?

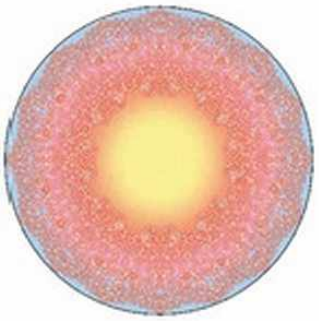
2. Három város elhatározta, hogy közös tévéadót hoz létre. Hova érdemes az adótornyot megépíteni, ha azt szeretnék, hogy mindegyik városban hasonlóan jó vételi viszonyok alakuljanak ki? Vizsgáljuk meg a megoldást, ha a városok
   a) egy egyenes mentén helyezkednek el;
   b) egy háromszög csúcsaiban helyezkednek el!

3. Szerkesszünk egy 4 cm oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszöget! Szerkesszük meg a háromszög köré írt kört!

4. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 3 cm, a szárai 5 cm hosszúságúak. Szerkesszük meg a háromszög köré írt kört!

5. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 2 cm-rel hosszabb, mint a szára. A háromszög kerülete 14 cm. Szerkesszük meg a háromszöget, majd a köré írt kört!

6. Egy kör alakú terítő közepére mintát szeretnénk hímezni. (➡) Hogyan kaphatjuk meg a minta helyét? Szerkesszük meg!



7. Felbontható-e egy hegyesszögű háromszög három egyenlő szárú háromszögre?

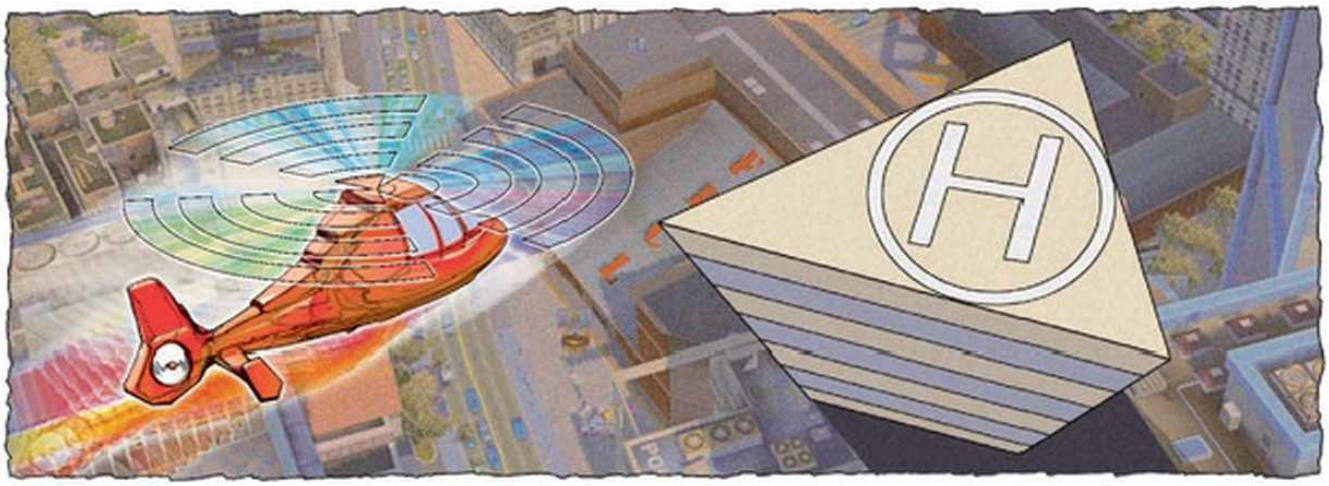
*8. A medve, a farkas és a róka erdei kilátót tervezett úgy, hogy az mindegyikük házától ugyanakkora távolságra legyen. Miután elkészültek a tervekkel, nyuszika is jelentkezett, hogy ő is be szeretne szállni a vállalkozásba.
   a) Mikor lehet úgy megépíteni a kilátót, hogy az mindegyikük házától egyenlő távolságra legyen?
   b) Rájöttek, hogy a házaik az erdőben úgy helyezkednek el, hogy ezt sajnos nem tudják megvalósítani. Ezért abban állapodtak meg, hogy a kilátót olyan helyre építik, ahol hármuk házától egyenlő távolságra lesz. Hány különböző helyre tudják így felépíteni a kilátót?

Rejtvény

Három város, Atavár, Bócújlak és Pér körzetében új kisvasutat terveznek. A városok lakói azt szeretnék, ha Pérben lenne a megálló, de a vasútvonal Atavártól és Bócújlaktól egyenlő távolságra futna. A mérnökök csak ahhoz ragaszkodnak, hogy ezen a szakaszon a vasútvonal egyenes legyen. Hányféle útvonalat tervezhetnek? Szerkesszük meg ezeket!

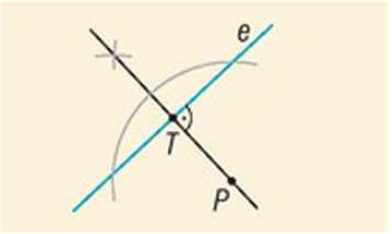


3. A háromszög belső szögfelezői, a beírható kör

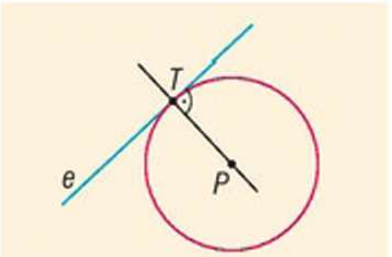


Pont és egyenes távolsága (emlékeztető)

A P pont és e egyenes távolsága a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza (PT).



Ha P középponttal és PT sugárral kört rajzolunk, akkor egy olyan kört kapunk, melynek az e egyenes érintője lesz. Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

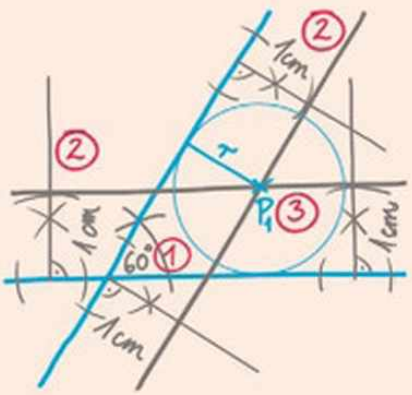


1. példa

Vegyünk fel egy $\alpha = 60°$-os szöget! Szerkesszünk olyan $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm és $r_3 = 2$ cm sugarú kört, amely a szög mindkét szárát érinti! Mit mondhatunk a körök középpontjának helyzetéről?

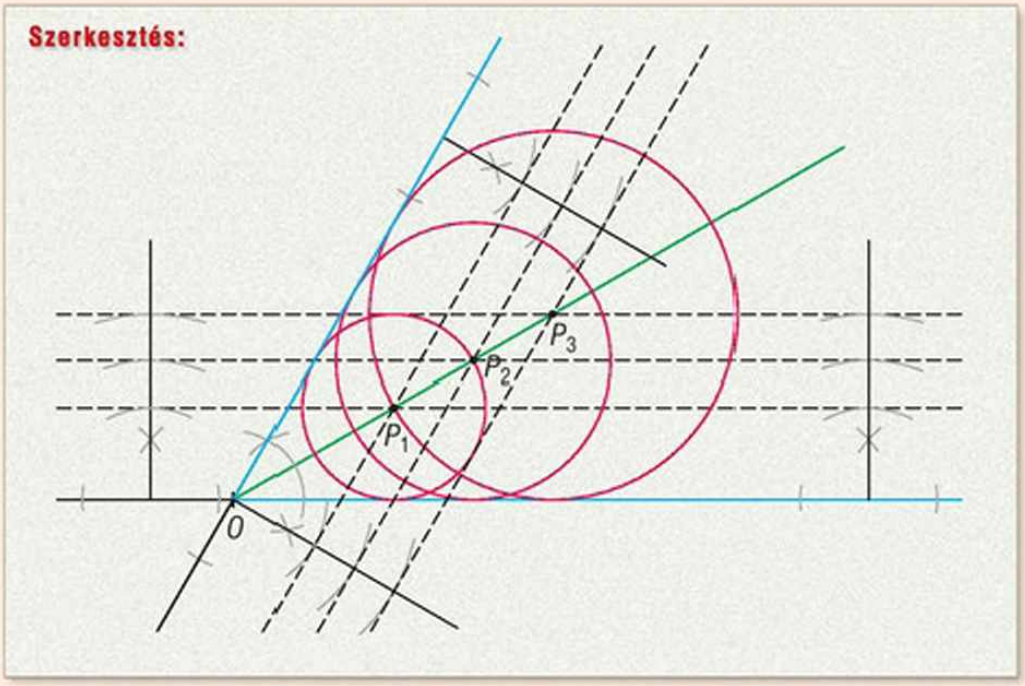
Megoldás

Először keressük meg az $r_1 = 1$ cm sugarú kör középpontját! A kör mind a két szögszárat érinti, ezért P_1 középpontja a szög mindkét szárától 1 cm távolságra lesz. Ezt a pontot megkaphatjuk úgy, hogy a szögszáraktól 1 cm távolságra párhuzamos egyeneseket szerkesztünk. Ezek szögtartományon belüli metszéspontja adja meg a P_1 középpontot.



Hasonlóan kaphatjuk meg az $r_2 = 1{,}5$ cm és az $r_3 = 2$ cm sugarú körök középpontját is.

Szerkesztés:



Azt tapasztaljuk, hogy a körök középpontjai egy olyan egyenesre esnek, amely átmegy a szög csúcsán.

tapasztalat
↓
sejtés
↓
bizonyítás

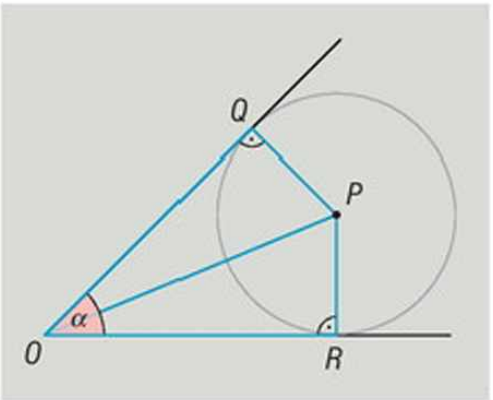
A fenti példa alapján megfogalmazhatjuk azt a sejtést, hogy a szögszárakat érintő körök középpontjai egy egyenesre esnek. Bizonyítsuk ezt be!

Legyen P egy olyan kör középpontja, amely érinti egy α szög két szárát! Mivel P mindkét szögszártól ugyanakkora távolságra van, ezért $PR = PQ$. Ha a P pontot összekötjük a szög O csúcsával, akkor két derékszögű háromszög keletkezik: $OPR\triangle$ és $OPQ\triangle$.

$OP = OP$ és $PR = PQ$, valamint OP-vel szemben 90° van.

Ez a két háromszög egybevágó, mert két oldaluk és a nagyobbikkal szemben fekvő szögük egyenlő.

$$OPR\triangle \cong OPQ\triangle.$$



Ebből következik, hogy az O csúcsnál lévő szögeik is egyenlőek, vagyis

$$POR\sphericalangle = POQ\sphericalangle.$$

Így bebizonyítottuk azt is, hogy a szögszárakat érintő körök középpontjai valóban egy egyenesen, a szögfelezőn vannak.

Ez pedig azt jelenti, hogy az OP egyenes felezi az α szöget, azaz P illeszkedik a szög felezőjére.

Mivel P tetszőleges pont volt, beláttuk, hogy bármely olyan pont, amely egyenlő távolságra van egy szög két szárától, illeszkedik a szögfelezőre.

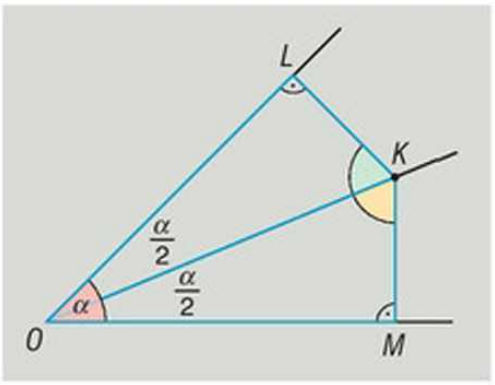
Az előző állításnak a megfordítása is igaz, vagyis ha egy pont illeszkedik a szögfelezőre, akkor a szög száraitól egyenlő távolságra van.

Vegyünk fel az α szög szögfelezőjén egy K pontot, és állítsunk merőlegest a szög két szárára! Így két derékszögű háromszög keletkezik: $OKL\triangle$ és $OKM\triangle$.

$OKL\triangle$ és $OKM\triangle$ egybevágó, mert egy oldalukban (OK) és a rajta fekvő két szögükben megegyeznek.

$$OKL\triangle \cong OKM\triangle.$$

Ebből következik, hogy megfelelő oldalaik egyenlőek, vagyis $KL = KM$, azaz K a szögszáraktól egyenlő távolságra van.



$OK = OK$ és

$LOK\sphericalangle = MOK\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$

$LKO\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$MKO\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$

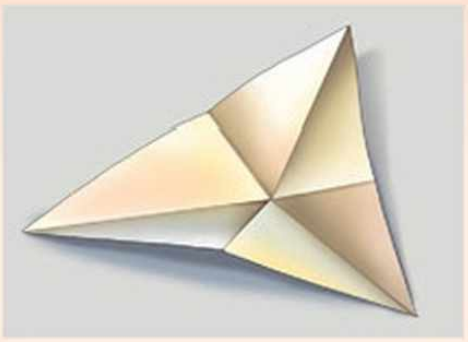
A konvex szög szögfelezője azon pontok halmaza a síkon, amelyek a szög két szárától egyenlő távolságra találhatók.

A háromszögbe írható kör

2. példa

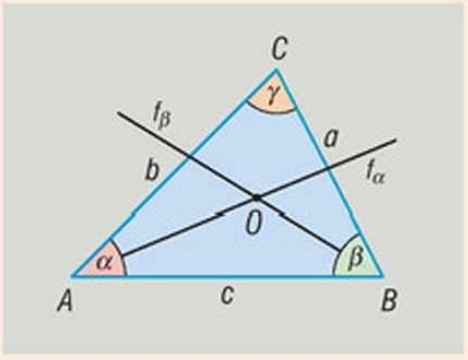
Zénó papírlapból kivágott egy háromszöget, és hajtogatással megkereste a szögfelezőit. Tapasztalata alapján azt a sejtést fogalmazta meg, hogy a háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást.

Igazoljuk Zénó sejtését!



Megoldás

Vegyünk fel egy háromszöget, és rajzoljuk be az α és a β szög szögfelezőit! Legyen az f_α és f_β szögfelezők metszéspontja O!

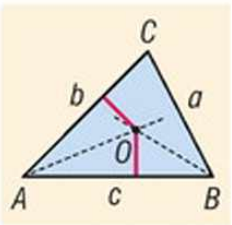


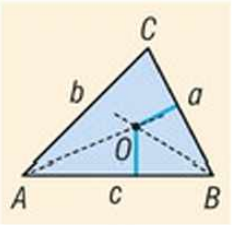
Egy szög szögfelezőjének minden pontja egyenlő távolságra van a szög két szárától.

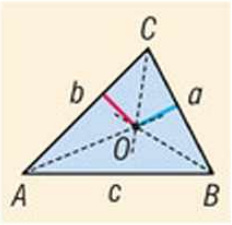
Mivel $O \in f_\alpha$, ezért O ugyanakkora távolságra van b-től és c-től;
$O \in f_\beta$, ezért O ugyanakkora távolságra van c-től és a-tól.

Ebből következik, hogy O ugyanakkora távolságra van az a és b oldaltól is. Ezért az O pontnak rajta kell lennie a γ szög szögfelezőjén is.

Tehát a szögfelezők egy pontban metszik egymást, Zénó sejtése igaz.







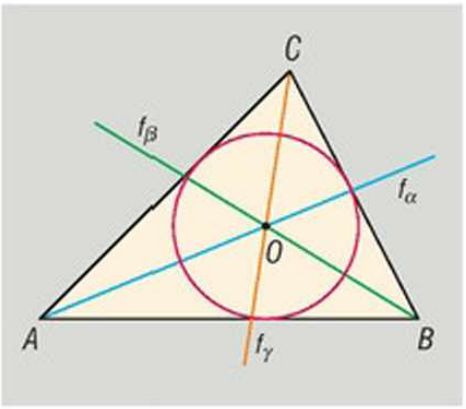
$Ob = Oc$ és $Oc = Oa$

$\Downarrow$

$Ob = Oa$

A példa alapján a következőt állíthatjuk:

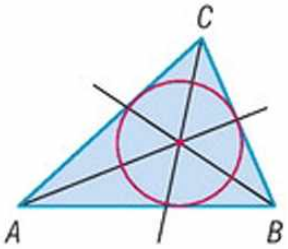
A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást, és ez a pont egyenlő távolságra van a háromszög három oldalától. Ezért rajzolható egy olyan kör, melynek középpontja a szögfelezők metszéspontja, és a kör a háromszög mindhárom oldalát érinti. **A háromszög mindhárom oldalát érintő kört a háromszögbe írható körnek nevezzük.**



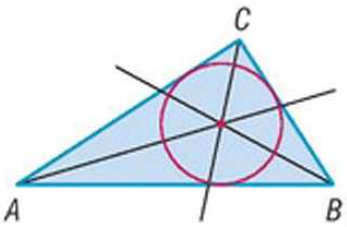
A háromszögbe írható kört a háromszög beírt körének is nevezzük.

A háromszögbe írt kör középpontja a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja. A beírható kör középpontja mindig a háromszög belsejében található.

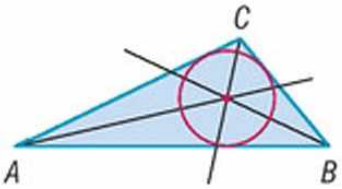
Minden háromszögbe írható kör.



hegyesszögű háromszög



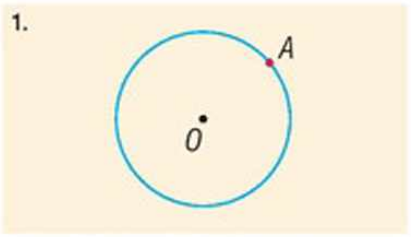
derékszögű háromszög



tompaszögű háromszög

Feladatok

1. Szerkesszük meg az ábrán látható kör *A* pontbeli érintőjét! (➡)

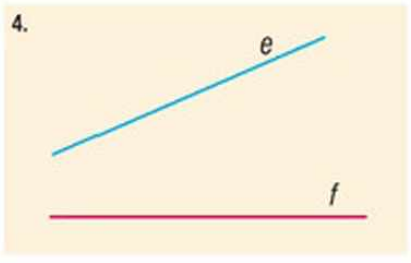


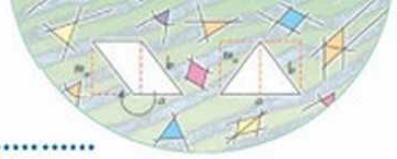
2. Az ábrán egy útkereszteződés látható. (➡)
   a) Hol vannak azok a pontok a térképen, melyek a Pinty és a Cinke utcától ugyanakkora távolságra találhatók?
   b) Hol vannak azok a pontok a térképen, melyek a Pinty utcához közelebb vannak, mint a Cinke utcához?



3. Adott egy 45°-os szögtartomány. Szerkesszünk ebbe olyan 3 cm sugarú kört, amely érinti a szögszárakat!

4. Vegyünk fel két (nem párhuzamos) egyenest az ábrán látható módon úgy, hogy az általuk bezárt szög csúcsa ne essen a papírra! Szerkesszük meg a szögfelező egyenest! (➡)





5. Szerkesszünk egy egyenlő oldalú ABC háromszöget, melynek oldalhosszúsága 5 cm!

a) Szerkesszük meg azt a pontját, amelyik mindegyik oldaltól ugyanakkora távolságra van!

b) Színezzük be sárgával a háromszög azon pontjait, melyek az AB oldalhoz közelebb vannak, mint az AC oldalhoz!

c) Színezzük be pirossal a háromszög azon pontjait, melyek az AB oldalhoz közelebb vannak, mint a másik kettőhöz!

6. Szerkesszük meg az ABC háromszög AB oldalán azt a P pontot, amelyik a másik két oldaltól ugyanakkora távolságra van!

7. Szerkesszük meg a háromszögbe írható kört, ha a háromszög oldalainak hossza:

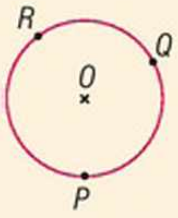
a) $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm és $AC = 5$ cm;

b) $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm és $AC = 6$ cm;

c) $AB = 4$ cm, $BC = 4$ cm és $AC = 5$ cm!

8. Az ábrán egy háromszög beírható köre látható, amely a P, Q és R pontokban érinti a háromszög oldalait. Szerkesszük meg a háromszöget! (➡)

8.

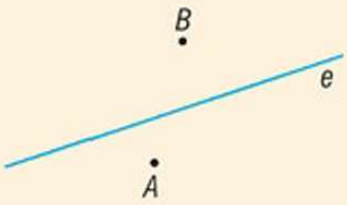


9. Adott három, nem egy egyenesre eső pont, A, B és O. Az A és a B egy háromszög két csúcsa, az O pedig a háromszögbe írható kör középpontja. Szerkesszük meg a háromszöget és a beírható kört!

***10.** Egy háromszög alakú asztalra kör alakú terítőt szeretnénk tenni úgy, hogy az asztal minden élénél ugyanannyira lógjon le. Hogyan helyezzük el a terítőt?

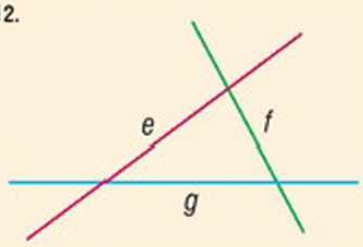
***11.** Adott egy szög e szögfelező egyenese, valamint a szög szárainak egy-egy pontja (A és B) az ábra szerinti elrendezésben. Szerkesszük meg a szöget! (➡)

11.



***12.** Az e, f és g egyenesek az ábra szerinti módon helyezkednek el. Szerkesszünk olyan kört, amelyik mindhárom egyenest érinti! Hány ilyen kör szerkeszthető? (➡)

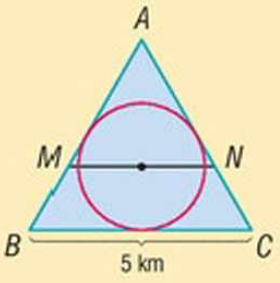
12.



Rejtvény

Andi és Bandi futóedzést tart. Andi az *AMN*, Bandi az *ABC* pályán fut végig, Andi 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Bandi pedig 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel.

Melyikük ér előbb vissza a kiindulási pontba, ha egyszerre indulnak az *A* pontból? Az *AMN* és az *ABC* háromszög is egyenlő oldalú.



4. A magasságvonal és a súlyvonal



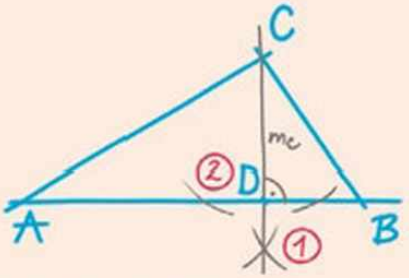
A háromszög magasságvonalai

1. példa

Adott egy hegyesszögű háromszög. Szerkesszük meg a háromszög c oldalegyenesén azt a pontot, amelyik legközelebb van a C csúcshoz!

Megoldás

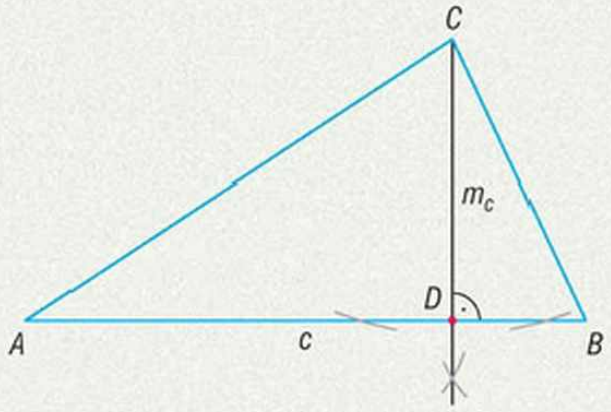
A keresett pont a C-ből az AB oldalra állított merőleges egyenes talppontja (vagyis a merőleges és az AB oldalegyenes metszéspontja) lesz.

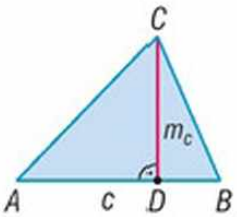


A szerkesztés menete:

1. C-ből merőlegest szerkesztünk az AB egyenesre (m_c).
2. Az m_c egyenes és az AB egyenes metszéspontja lesz a C-hez legközelebbi pont (D).

Szerkesztés:

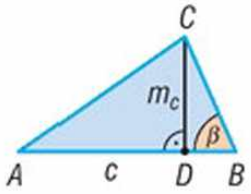




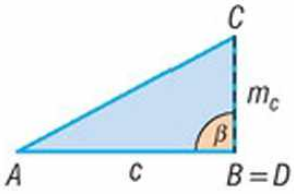
Ha egy háromszög c oldalához tartozó magassága 3 cm, akkor a C csúcs és a c oldalegyenes távolsága, $CD = 3$ cm.

DEFINÍCIÓ: A háromszög c oldalához tartozó magasságvonalának nevezzük a háromszög C csúcsából a c oldalegyenesre bocsátott merőleges egyenest (m_c).

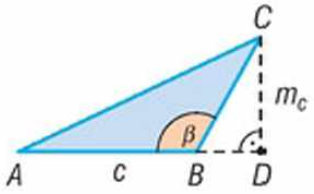
A magasság talppontja:



Ha β hegyesszög, akkor a talppont az AB szakasz belső pontja.



Ha β derékszög, akkor a talppont az AB szakasz végpontjába esik.



Ha β tompaszög, akkor a talppont nem esik az AB szakaszra.

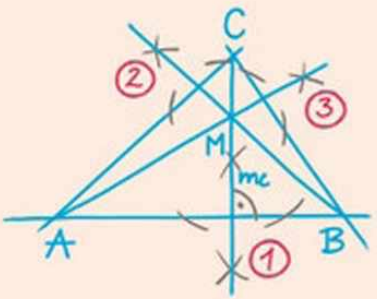
A magasságvonal a háromszögön kívül is eshet.

2. példa

Vegyünk fel egy tetszőleges háromszöget! Szerkesszük meg a magasságvonalait! Mit tapasztalunk?

Megoldás

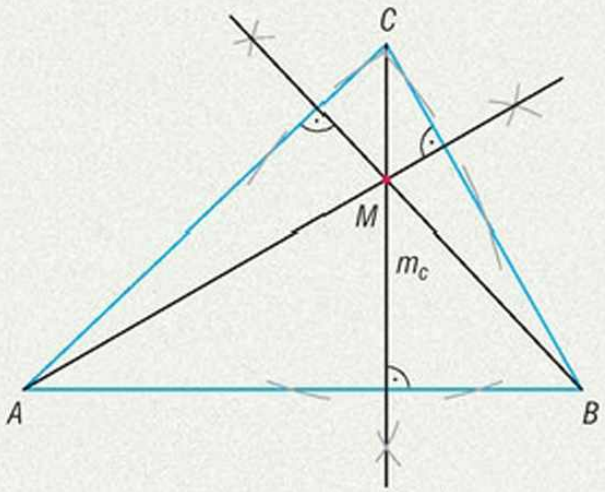
Tudjuk, hogy a háromszög magasságvonalai a háromszög csúcsaiból a szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges egyenesek. Szerkesszük meg ezeket!



A szerkesztés menete:

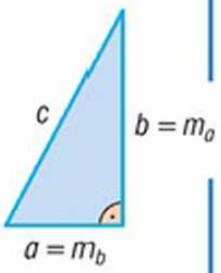
1. Szerkesszünk merőlegest a C csúcsból az AB oldalegyenesre!
2. Szerkesszünk merőlegest a B csúcsból az AC oldalegyenesre!
3. Szerkesszünk merőlegest az A csúcsból a BC oldalegyenesre!

Szerkesztés:



Ha a szerkesztésünk kellően pontos, azt tapasztaljuk, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Jelöljük ezt a pontot M-mel!

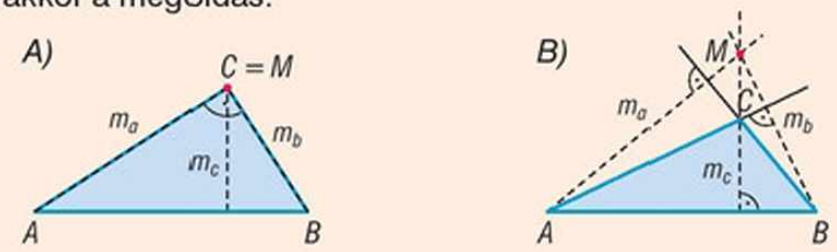
Bebizonyítható, hogy a háromszög magasságvonalai valóban egy pontban metszik egymást.



A derékszögű háromszögben az egyik befogóhoz tartozó magasság a másik befogó.

Elemzés (diszkusszió):

Ha derékszögű *(A)* vagy tompaszögű *(B)* háromszöget vettünk volna fel, akkor a megoldás:



DEFINÍCIÓ: A háromszög magasságpontjának nevezzük a háromszög magasságvonalainak metszéspontját.

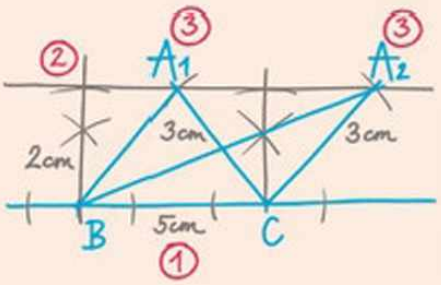
A magasságpont hegyesszögű háromszögnél a háromszög belsejébe, derékszögű háromszög esetén a derékszög csúcsába, tompaszögű háromszögnél pedig a háromszögön kívülre esik.

3. példa

Szerkesszünk háromszöget, ha a oldala 5 cm, b oldala 3 cm, az a oldalhoz tartozó m_a magassága pedig 2 cm hosszúságú!

Megoldás

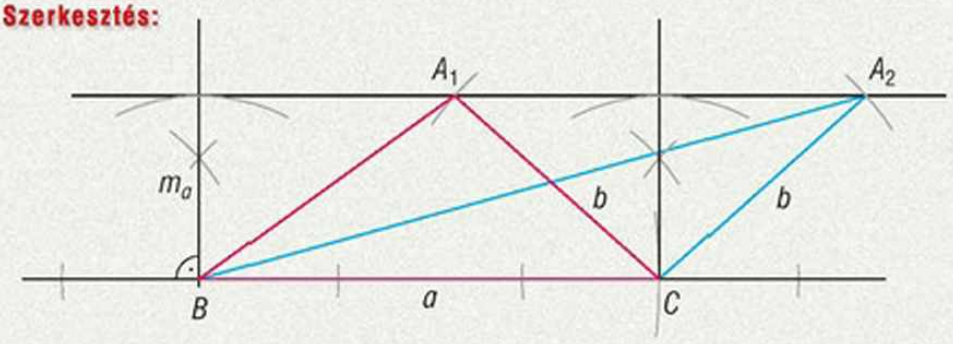
Mivel a háromszög m_a magassága 2 cm, ezért az A csúcs a BC oldalegyenestől 2 cm távolságra van.



A szerkesztés menete:

1. Vegyük fel az a oldalt *(BC)*!
2. Szerkesszünk párhuzamost a-tól 2 cm távolságra!
3. Metsszük el ezt az egyenest C-ből egy 3 cm sugarú körívvel (b oldal)! Így megkapjuk a háromszög A csúcsát.

Szerkesztés:



Ha $m_a < b$, akkor 2 megoldás van, ha $m_a = b$, akkor 1, ha $m_a > b$, akkor nincs megoldás.

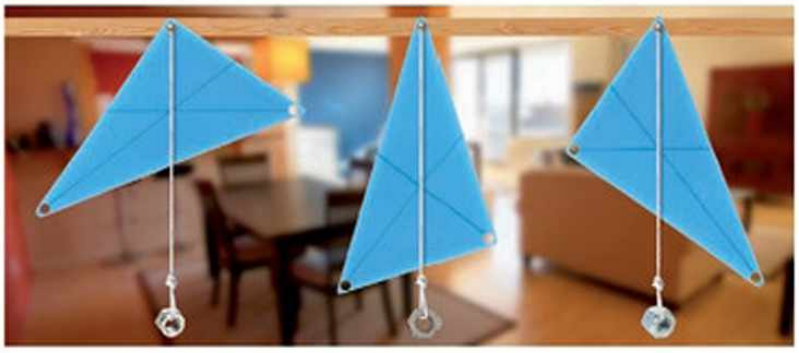
Elemzés (diszkusszió):

A megadott adatokkal két (nem egybevágó) háromszöget kapunk.

A háromszög súlyvonalai

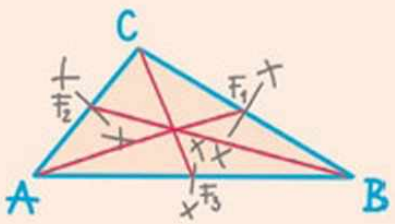
Vágjunk ki kartonból egy nagyobb háromszöget, és lyukasszuk ki a csúcsainál! Egy nehezékkel ellátott zsineget kössünk rá egy hurkapálcára, majd akasszuk a hurkapálcára a kilyukasztott háromszöget is!

A felfüggesztett zsineg a háromszög súlyvonala mentén helyezkedik el.



4. példa

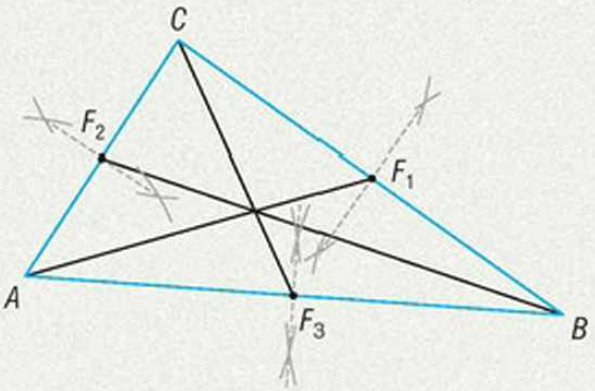
Vegyünk fel egy háromszöget, és kössük össze mindhárom csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával.
Mit tapasztalunk?



Megoldás

A szerkesztés lépései az ábráról leolvashatók.

Szerkesztés:



Ha szerkesztésünk kellően pontos, akkor azt tapasztaljuk, hogy a kapott három szakasz egy ponton megy át. Ez a pont bármely háromszög esetén a háromszög belsejében van.

Próbáljuk ki!

Ha egy háromszöglemezt a súlypontjában egy tűvel (vagy egy ceruza hegyével) alátámasztunk, akkor a lemez nem billen le, egyensúlyban van.

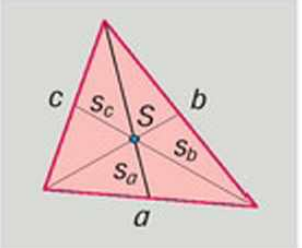
DEFINÍCIÓ: A háromszög súlyvonalának nevezzük a háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt. (Szokásos jelölése: s_a, s_b, s_c.)

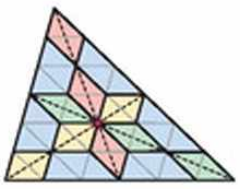
Minden háromszögnek három súlyvonala van.

Bebizonyítható, hogy:

A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög súlypontja (S).

A háromszög súlypontja minden súlyvonalnak a megfelelő oldalhoz közelebbi harmadolópontja.





Feladatok

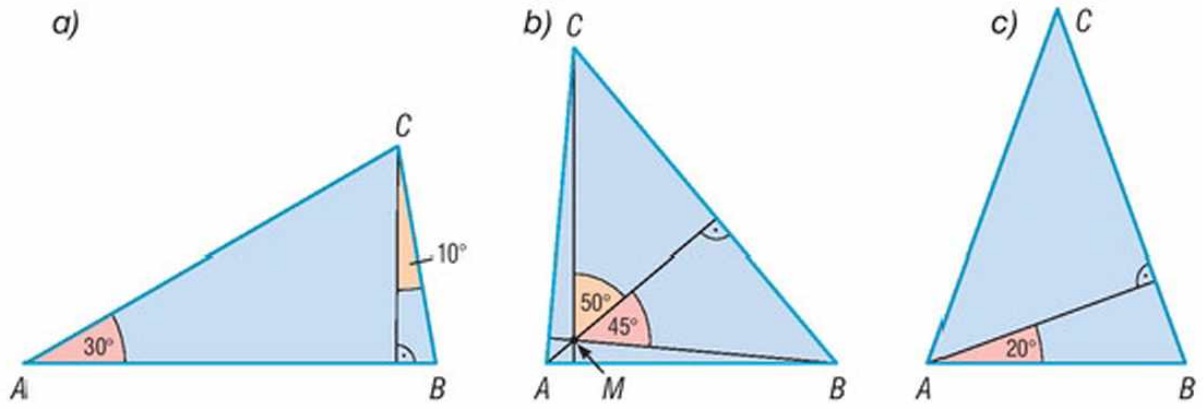
1. Egy háromszög oldalainak hossza 3 cm, 4 cm és 5 cm. Szerkesszük meg az 5 cm-es oldalnak azt a pontját, amelyik a szemben fekvő csúcshoz a legközelebb van!

2. Egy háromszög oldalainak hossza 4 cm, 5 cm és 6 cm.
   a) Szerkesszük meg a magasságvonalait és a magasságpontját!
   b) Szerkesszük meg a súlyvonalait és a súlypontját!

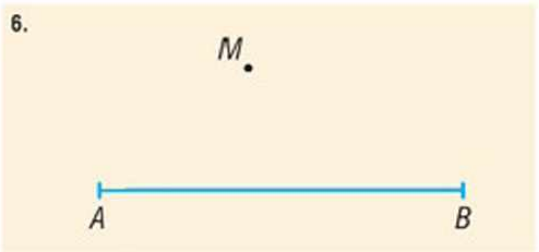
3. Szerkesszünk egy egyenlő oldalú háromszöget! Szerkesszük meg az egyik oldalhoz tartozó magasságát! Igaz-e, hogy a magasságvonal egyben súlyvonal is?

4. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, melynek
   a) a szára 5 cm, az alaphoz tartozó magassága pedig 4 cm;
   b) a szára 5 cm, és a szárhoz tartozó magassága 3 cm!

5. Az ábrán látható szögekből határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát! (A *b)* esetben az *M* pont magasságpont; a *c)* esetben az *ABC*△ egyenlő szárú.)



6. Adott egy háromszög *AB* oldala, valamint az *M* magasságpontja. Szerkesszük meg a háromszöget!



7. Mit mondhatunk arról a háromszögről, amely esetén a háromszög köré írható kör középpontja és a magasságpont egybeesik?

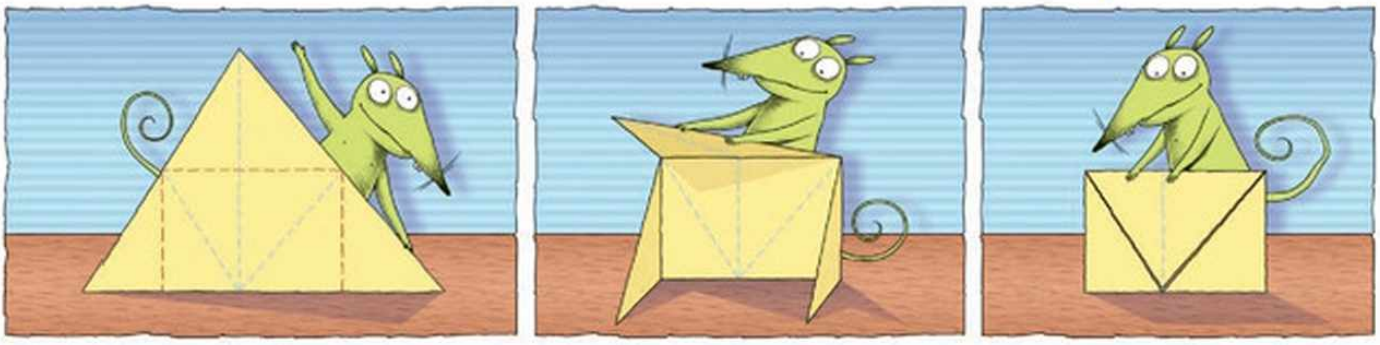
8. Felbontható-e egy tetszőleges háromszög 288 darab derékszögű háromszögre?

9. Vegyünk fel egy tetszőleges *ABC* háromszöget, és szerkesszük meg a *C* csúcsból kiinduló súlyvonalát! Tükrözzük a háromszöget a *c* oldal felezőpontjára! Milyen alakzatot alkot az eredeti és a képháromszög együtt? Mit mondhatunk ennek az alakzatnak az átlóiról?

Rejtvény

Egy háromszöget az egyik magassága két egyenlő szárú háromszögre osztja. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

5. A háromszög szögeivel kapcsolatos összefüggések



A háromszög belső szögeinek összege

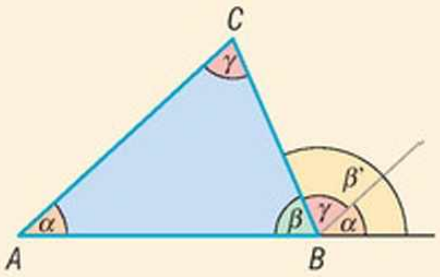
Korábban bebizonyítottuk, hogy:

- a háromszög belső szögeinek összege 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°;$$

- a háromszög bármely külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével:

$$\beta' = \alpha + \gamma.$$



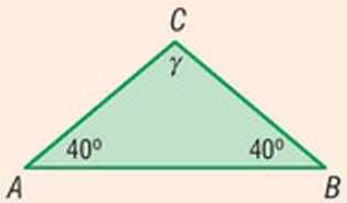
1. példa

Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 40°. Mekkorák a háromszög belső szögei?

Megoldás

Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők.
A 40°-os szög helyzetétől függően két eset fordulhat elő:

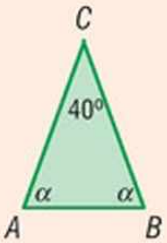
1. eset: az alapon fekvő szög a 40°



$40° + 40° + \gamma = 180°;$
$\gamma = 100°.$

A háromszög szögei:
40°; 40°; 100°.

2. eset: a szárszög a 40°

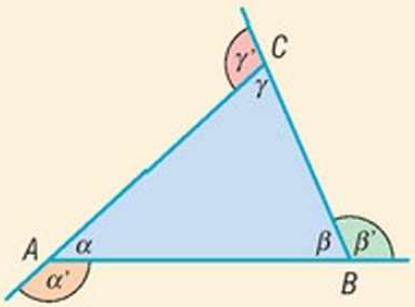


$\alpha + \alpha + 40° = 180°;$
$2\alpha = 140°;$
$\alpha = 70°.$

A háromszög szögei:
70°; 70°; 40°.

A háromszög külső szögei

Hosszabbítsuk meg egy háromszög oldalait az ábrán látható módon! Jelölje a külső szögeket α'; β'; γ'!



A csúcsokban található egyenesszögek alapján:

$$\alpha + \alpha' = 180°;$$
$$\beta + \beta' = 180°;$$
$$\gamma + \gamma' = 180°.$$

Az egyes csúcsoknál lévő szögeket összeadva azt kapjuk, hogy:

$$(\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') + (\gamma + \gamma') = 3 \cdot 180°.$$

A zárójeleket felbontjuk, és a tagokat felcseréljük, így:

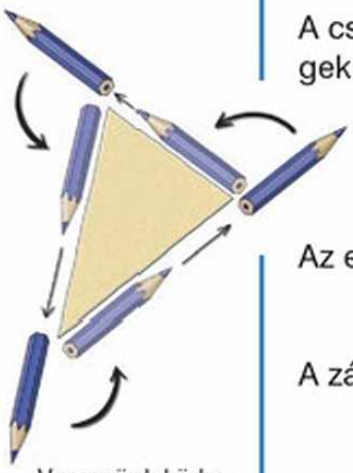
$$\underbrace{\alpha + \beta + \gamma}_{180°} + \alpha' + \beta' + \gamma' = 3 \cdot 180°.$$

Mindkét oldalból kivonunk 180°-ot:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°.$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő állítást:

A háromszög külső szögeinek összege 360°.

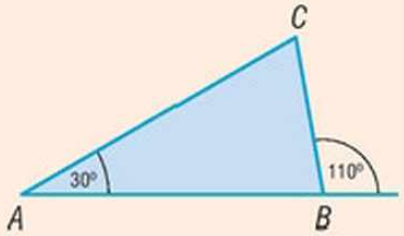


Vezessünk körbe egy ceruzát egy háromszög kerületén az ábra szerint! Hányszor fordul körbe?

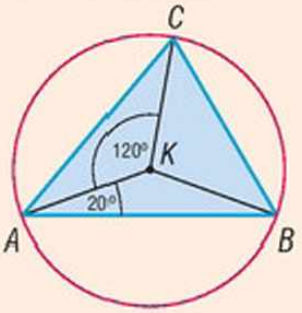
2. példa

Határozzuk meg a megadott szögekből a háromszög szögeit! (A K pont a háromszög köré írt kör középpontja.)

a)



b)



Megoldás

a) A szögeket a szokásos módon α-val, β-val és γ-val, a β mellett fekvő külső szöget β'-vel jelöljük.

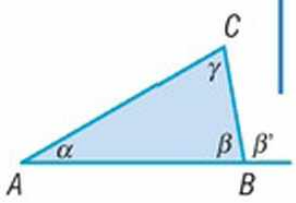
$\alpha = 30°$ és $\beta' = 110°$.

Az ábra alapján:

$\beta + \beta' = 180°$, ezért $\beta = 180° - 110° = 70°$.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ezért $\gamma = 180° - 30° - 70° = 80°$.

Tehát $\alpha = 30°$; $\beta = 70°$; $\gamma = 80°$.



b) $ABK\triangle$; $BCK\triangle$ és $ACK\triangle$ egyenlő szárú, mert 2-2 oldaluk a háromszög köré írt kör sugara.

Mivel az $ABK\triangle$ egyenlő szárú, alapon fekvő szögei egyenlőek:

$$KAB\sphericalangle = ABK\sphericalangle = 20°;$$

$$20° + 20° + AKB\sphericalangle = 180° \Rightarrow AKB\sphericalangle = 140°.$$

Hasonlóan az $ACK\triangle$-ben:

$$ACK\sphericalangle + KAC\sphericalangle + 120° = 180°;$$

$$ACK\sphericalangle + KAC\sphericalangle = 60°.$$

Mivel a két szög egyenlő, ezért

$$ACK\sphericalangle = KAC\sphericalangle = 30°.$$

Végül a $BCK\triangle$-ben:

$$CKB\sphericalangle = 360° - 140° - 120° = 100°;$$

$$KBC\sphericalangle = BCK\sphericalangle = \frac{180° - 100°}{2} = 40°.$$

Az ábra alapján a háromszög szögei:

$$\alpha = 20° + 30° = 50°;$$

$$\beta = 20° + 40° = 60°;$$

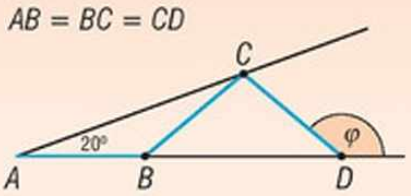
$$\gamma = 30° + 40° = 70°.$$

$KAB\sphericalangle$ olyan szöget jelöl, melyet K, A és B pontok határoznak meg, és a szög csúcsa az A pontban van.

Ellenőrzés:
A háromszög szögösszege
$50° + 60° + 70° = 180°$.

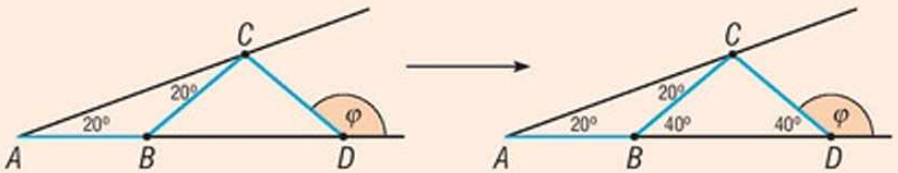
3. példa

Egy 20°-os szög szárára, ill. szárai közé egyenlő hosszúságú szakaszokat mértünk fel az ábrán látható módon. Határozzuk meg a φ szög nagyságát!



Megoldás

Az $ABC\triangle$ egyenlő szárú, ezért az $ACB\sphericalangle$ is 20°-os.
A $CBD\sphericalangle$ az $ABC\triangle$ külső szöge, ezért a nagysága $20° + 20° = 40°$.
A $BDC\triangle$ egyenlő szárú, ezért a $BDC\sphericalangle$ is 40°-os.
Ezért a mellette fekvő külső szög: $\varphi = 180° - 40° = 140°$.

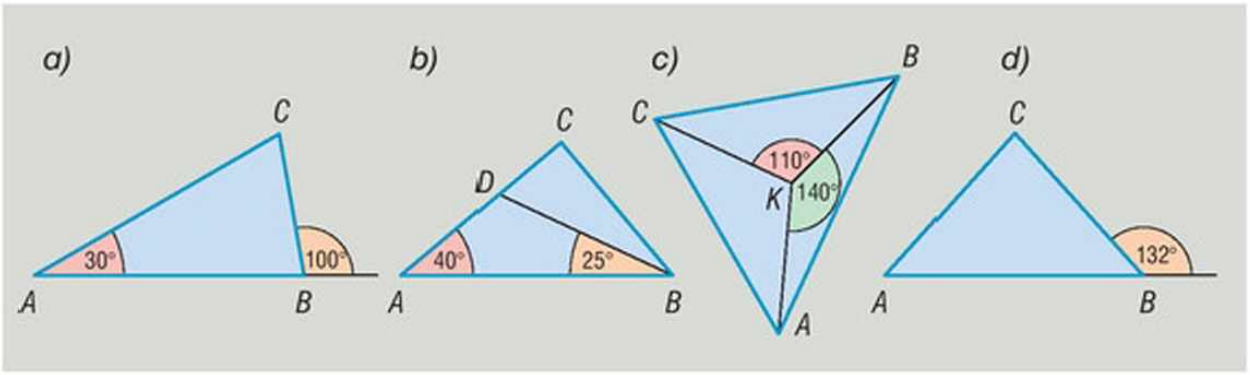


Feladatok

1. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge
   a) 30°-os; *b)* 70°-os; *c)* 100°-os.
   Mekkorák a háromszög külső és belső szögei?

2. Egy háromszög két külső szöge
   a) 100° és 120°; *b)* 90° és 120°; *c)* 110° és 130°.
   Mekkorák a háromszög külső és belső szögei?

3. Az ábrán látható szögekből határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát! (A *b)* esetben a BD szakasz az $ABC\sphericalangle$ szögfelezője; a *c)* esetben K a háromszög körülírt körének középpontja; a *d)* esetben pedig az ABC háromszög egyenlő szárú.)



4. Mekkorák a háromszög szögei, ha a belső szögeinek aránya
   a) 2 : 2 : 5; *b)* 3 : 4 : 2; *c)* 5 : 6 : 7?

5. Mekkorák a háromszög szögei, ha a külső szögeinek aránya
   a) 2 : 2 : 5; *b)* 3 : 4 : 2; *c)* 5 : 6 : 7?

6. Egy háromszög egyik külső szöge 100°, a nem mellette fekvő két belső szögének aránya 3 : 7. Mekkorák a szögei?

7. Egy háromszög egyik szöge 45°-os, a másik két szög közül pedig az egyik 20°-kal nagyobb a másiknál. Mekkorák a háromszög szögei?

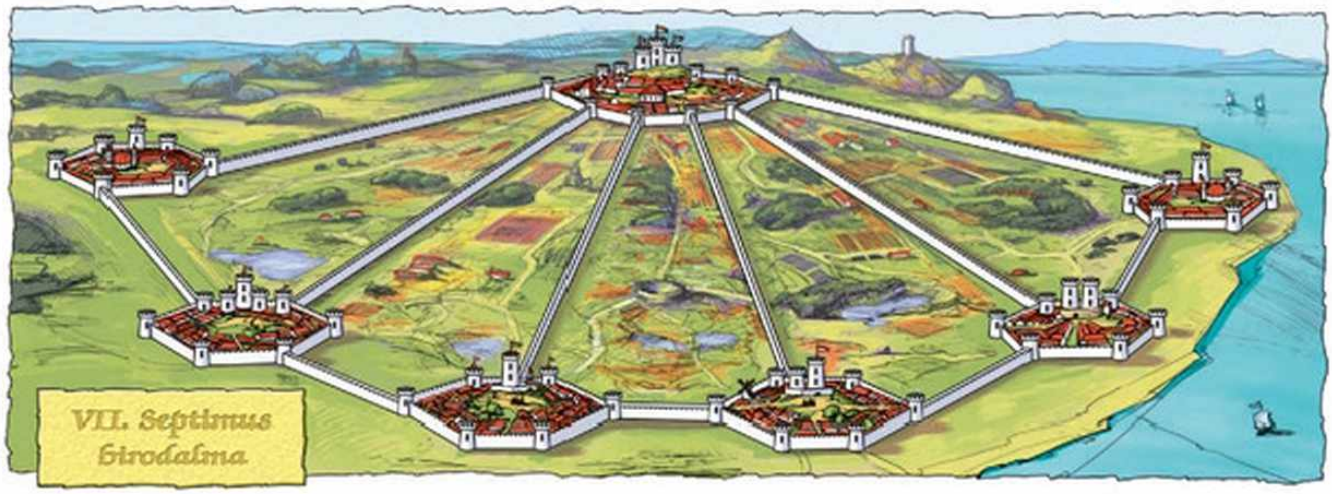
8. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 50°. Mekkora a hegyesszögek szögfelezői által bezárt szög nagysága?

9. Egy háromszög két szögének szögfelezője 80°-os szöget zár be. Mekkora a harmadik szögének a nagysága?

Rejtvény

Egy háromszög külső szögeinek aránya 3 : 4 : 5, a leghosszabb oldala 20 cm. Mekkora a legrövidebb oldalának a hossza?

6. Sokszögek

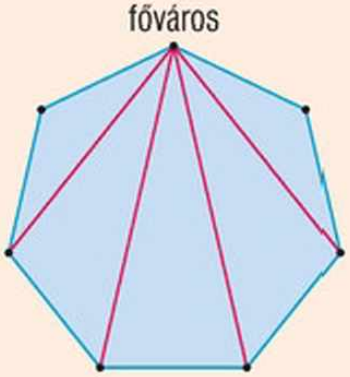


1. példa

VII. Septimus király hétszög alakú birodalmának minden csúcsában egy-egy város állt, körben pedig egy Kis Fal határolta. A király végrendeletében ez állt: „Királyi fővárosomat a többi várossal egy-egy Kis Fal kösse össze! Így birodalmamat háromszög alakú részekre osztván mindegyiket egy-egy fiam örökölje!" Septimus minden fiának éppen jutott egy-egy országrész. Hány Kis Falat kellett építeni? Hány fia volt Septimusnak?

Megoldás

A rajz mutatja, hogy négy Kis Falat kellett építeni. (A fővárost és a vele szomszédos két várost már korábban is Kis Fal kötötte össze, saját magával pedig természetesen nem kellett összekötni.)



Így a városok számánál **3-mal kevesebb,** azaz 4 Kis Fal épült.

Ezzel a birodalmat 5 részre osztotta Septimus, tehát öt fia volt. A részek száma **2-vel kevesebb,** mint a városok száma, hiszen minden megépült fal egy új, háromszög alakú országrészt hozott létre, az utolsó viszont kettőt.

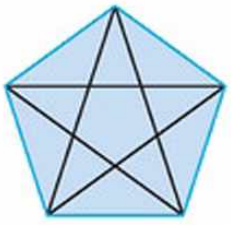
Máskép is indokolhatnánk: a keletkezett országrészekben az eredeti Kis Fal minden darabja szemben lesz a fővárossal, kivéve azt a kettőt, amely a fővárost a szomszéd városokkal összeköti.

Egy n oldalú sokszög egy csúcsából $n - 3$ átló húzható.

Ha egy sokszögnek az egyik csúcsából induló összes átlóját behúzzuk, a sokszöget $n - 2$ háromszögre bontjuk.

n csúcsból $n \cdot (n - 3)$ átló húzható, de így minden átlót kétszer (mindkét végpontnál) számoltunk.

Ezért az n oldalú sokszög összes átlóinak száma: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

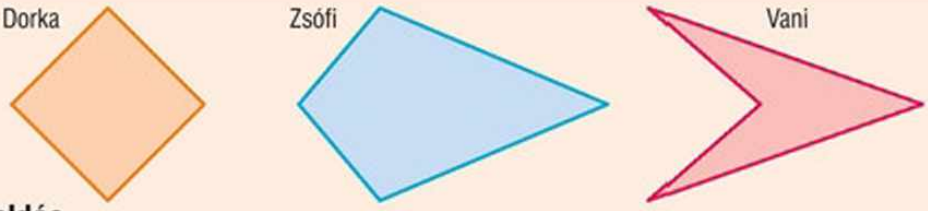


A sokszögek belső szögeinek összege

2. példa

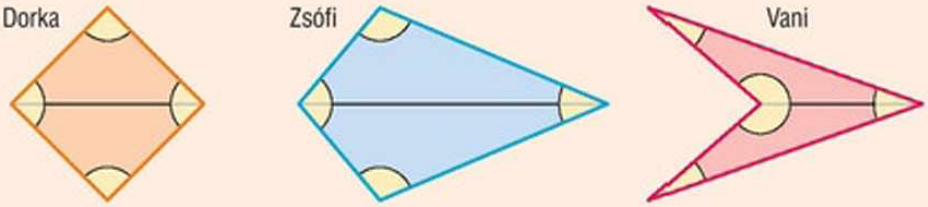
Dorka, Zsófi és Vani versenyeztek, ki tud olyan négyszöget rajzolni, amelyben a belső szögek összege a lehető legnagyobb. Ki nyert?

Dorka és Zsófi konvex, Vani viszont konkáv négyszöget rajzolt.



Megoldás

Húzzunk be egy-egy belső átlót a három négyszögbe! Ezzel a négyszögeket két háromszögre, a szögeiket pedig a háromszögek szögeire bontottuk. Mivel egy háromszög belső szögeinek összege 180°, mindhárom négyszög belső szögeinek összege $180° + 180° = 360°$. Így mindhárman egyformán győztesnek érezhetik magukat.



Egy tetszőleges négyszög belső szögeinek összege mindig 360°.
Ezt úgy láthatjuk be, hogy egy belső átló berajzolásával a négyszöget két háromszögre bontjuk.

3. példa

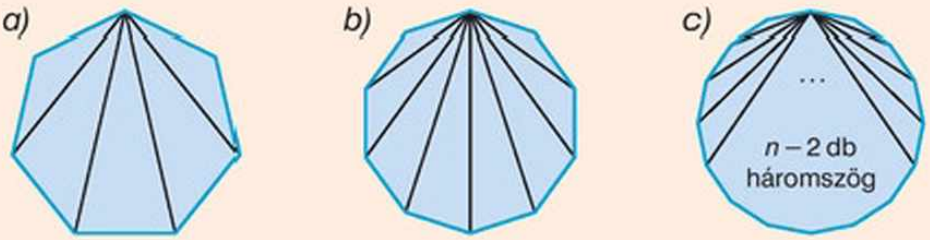
Mennyi az alábbi tetszőleges sokszögek belső szögeinek összege?

a) hétszög; *b)* tízszög; *c)* n oldalú sokszög.

Megoldás

Az előző két példa alapján dolgozunk.

a) *b)* *c)*



Az n oldalú sokszög egy csúcsból induló átlóival $n - 2$ háromszögre bontható.

a) A hétszöget egy csúcsából kiinduló átlói $7 - 2 = 5$ háromszögre bontják. Ezek belső szögeinek összege egyenként 180°, együtt pedig a hétszög belső szögeinek összege, azaz $5 \cdot 180° = 900°$.

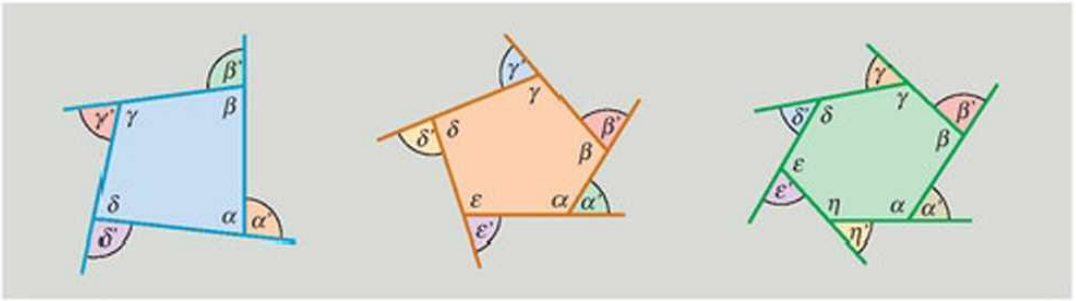
b) Tízszögnél: $(10 - 2) \cdot 180° = 8 \cdot 180° = 1440°$.

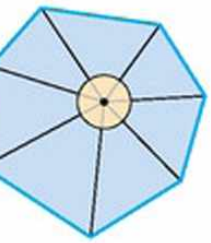
c) Egy n oldalú sokszögnél: $(n - 2) \cdot 180°$.

Egy tetszőleges n oldalú sokszög belső szögeinek összegét úgy kaphatjuk meg, hogy a sokszöget egy csúcsból induló átlókkal háromszögekre bontjuk. Mivel így $n - 2$ háromszögünk keletkezik, az n oldalú sokszög belső szögek összege $(n - 2) \cdot 180°$.

Egy n oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180°$.

A konvex sokszögek külső szögeinek összege





Lássuk be a fenti állítást az ábra alapján is!

4. példa

Határozzuk meg egy konvex hétszög külső szögeinek összegét!

A külső szögek összegéről csak konvex sokszögeknél beszélhetünk, hiszen a konkáv szögeknek nincs külső szögük.

Megoldás

A konvex hétszögben bármely belső szög és a mellette fekvő külső szög összege 180°.

Így a hétszög összes külső és belső szögének összege együtt

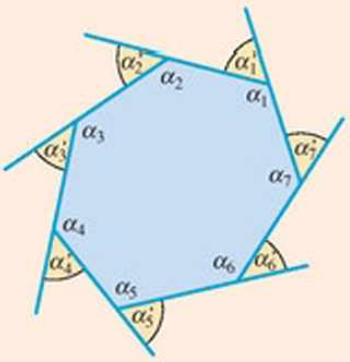
$$7 \cdot 180° = 1260°.$$

Az előző feladatból tudjuk, hogy a belső szögek összege

$$5 \cdot 180° = 900°.$$

A külső szögek összege a kettő különbsége, azaz

$$1260° - 900° = 360°.$$



Vezessünk körbe egy ceruzát a hétszög kerületén a háromszögeknél látott módon!

Hányszor fordul körbe?

Gondolatmenetünk tetszőleges n oldalú konvex sokszögre is alkalmazható.

a belső szögek összege	+	**a külső szögek összege**	=	a csúcsok száma szorozva 180°-kal

⇓

$(n - 2) \cdot 180°$	+	**a külső szögek összege**	=	$n \cdot 180°$

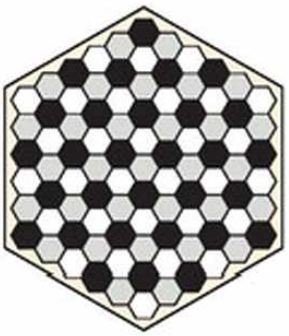
⇓

A külső szögek összege 360°.

Feladatok

1. Hány átló húzható egy
   a) hatszög; *b)* tizenötszög; *c)* nyolcvannyolcszög
   egy csúcsából? Hány háromszögre osztják ezek a sokszöget?

2. A hexasakktábla szabályos hatszög alakú. Határozzuk meg belső szögeinek összegét! (➡)



3. Vágjunk ki olyan egybevágó egyenlő szárú háromszögeket egy papírlapból, amelyek szárszöge 30°! Rakjunk ki belőlük különböző sokszögeket! Határozzuk meg ezek belső szögeinek összegét!

4. Egy négyszög belső szögeinek aránya 1 : 2 : 3 : 3. Mekkorák a négyszög belső szögei?

5. Egy ötszög belső szögeinek aránya 1 : 3 : 4 : 5 : 5. Mekkorák az ötszög belső szögei?

6. Egy konvex sokszögről tudjuk, hogy belső szögeinek összege éppen ötször annyi, mint külső szögeinek összege. Hány oldala van ennek a sokszögnek?

7. Töltsük ki az alábbi táblázatot a megadott szabályos sokszögekre vonatkozóan!

csúcsok száma	5	8						*n*
külső szögek összege								
egy külső szög			60°					
egy belső szög				90°	144°			
belső szögek összege						1800°	1980°	

8. Egy ötszög három külső szöge 110°, 40° és 80°. A másik két belső szöge egyenlő. Mekkorák az ötszög belső szögei?

9. Mennyi egy középpontosan szimmetrikus hatszög három szomszédos szögének összege?

10. Egy tengelyesen szimmetrikus ötszög két belső szöge 140° és 100°. Mekkorák lehetnek az ötszög belső szögei?

*11. Egy ötszög két belső szöge 160° és 137°. A másik három szög közül az egyik kétszerese a másodiknak és harmada a harmadiknak. Mekkorák az ötszög belső szögei?

12. Hány belső szöge lehet derékszög egy konvex sokszögnek?

Rejtvény

Egy szabályos ötszög átlóit berajzoltuk, majd oldalait letöröltük, és így az alábbi csillagot kaptuk. Mekkorák a csillag csúcsainál fekvő szögek?



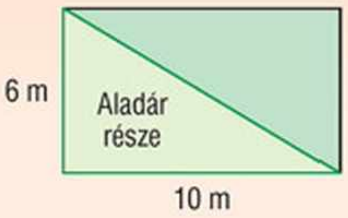
7. A háromszögek területe



A derékszögű háromszög területe

1. példa

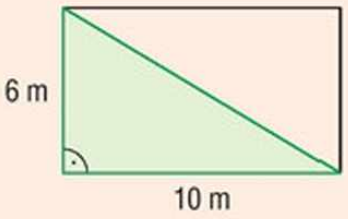
Aladár és Elemér apukája megkérte a fiúkat, hogy vasárnap délelőtt nyírják le a füvet a kertben. Aladár kezdte a munkát az ábrán látható módon. (A kert téglalap alakú, a két oldala 6 m és 10 m.)
Mekkora területen nyírta le a füvet Aladár? Mennyi maradt Elemérnek?



Megoldás

Aladár egy derékszögű háromszög alakú területet nyírt le, amelynek a két befogója 6 m és 10 m.

Az eredeti téglalap átlója a téglalapot két ilyen egybevágó derékszögű háromszögre bontja, ezért a derékszögű háromszög területe a téglalap területének a fele.



A két háromszög egymás középpontos tükörképe az átló felezőpontjára nézve.

$$T = \frac{10 \cdot 6}{2}\ \text{m}^2 = 30\ \text{m}^2.$$

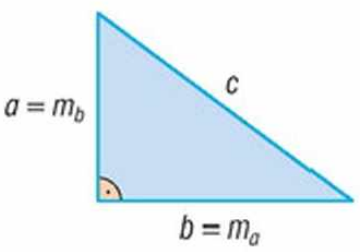
Aladár 30 m^2 füvet nyírt le, és ugyanannyi maradt Elemérnek is.

Ha egy tetszőleges téglalapot kettévágunk valamelyik átlója mentén, két egybevágó, egyenlő területű derékszögű háromszöget kapunk. Ezek területe a téglalap területének a fele. Így a derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának fele.

$$T_{\triangle} = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Mivel a derékszögű háromszögben az egyik befogóhoz tartozó magasság a másik befogó, a területe általánosan így is felírható:

$$T_{\triangle} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}.$$

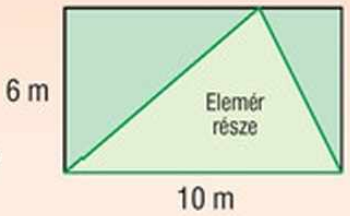


Derékszögű háromszögben:
$b = m_a$
$a = m_b$

Az általános háromszög területe

2. példa

A következő fűnyírás alkalmával Elemér az ábra szerint dolgozott.



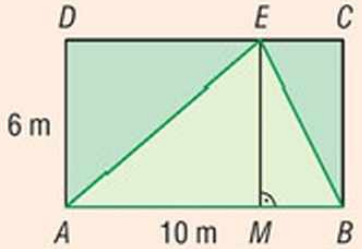
Mekkora területen nyírta le a füvet Elemér?

Megoldás

Az Elemér által lenyírt rész általános háromszög alakú.

Rajzoljuk be az ábrába a keletkezett háromszög magasságát!

Ez a magasság a lenyírt résznek megfelelő háromszöget két derékszögű háromszögre, az eredeti területet két téglalapra bontja.



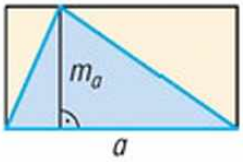
$T_{MBE\triangle} = T_{BEC\triangle}$

$T_{AME\triangle} = T_{EDA\triangle}$

Egy-egy derékszögű háromszög területe a megfelelő téglalap területének a fele. Így az *ABE* háromszög területe az *ABCD* téglalap területének a fele:

$$T_{ABE\triangle} = \frac{10 \cdot 6}{2}\ (\text{m}^2) = 30\ (\text{m}^2).$$

Tehát Elemér 30 m^2 füvet nyírt le.



A példa alapján a háromszög területét meghatározhatjuk úgy, hogy téglalapba foglaljuk, amelynek két szomszédos oldala a háromszög egyik oldala és a hozzá tartozó magassága. Ekkor a háromszög területe a befoglaló téglalap területének a fele.

$$T_{\triangle} = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

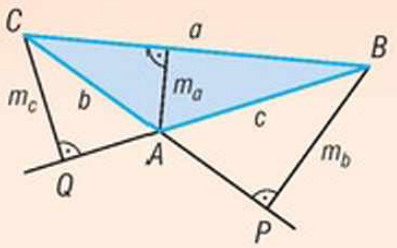
A háromszög területe az egyik oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatának a fele:

$$T_{\triangle} = \frac{a \cdot m_a}{2}.$$

3. példa

Ágnes, Balázs és Csaba ugyanannak a háromszögnek a területét akarja kiszámolni. Mindegyikük tudja egy oldal hosszát és a hozzá tartozó magasságot. Ági az a, m_a, Balázs a b, m_b, Csaba a c, m_c adatokat ismeri.

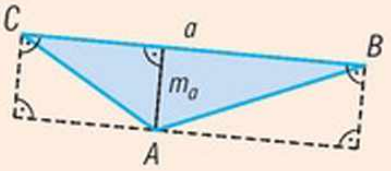
Hogyan számolhatnak?



$a = 12\ \text{cm}$ $b = 6\ \text{cm}$ $c = 8\ \text{cm}$
$m_a = 2\ \text{cm}$ $m_b = 4\ \text{cm}$ $m_c = 3\ \text{cm}$

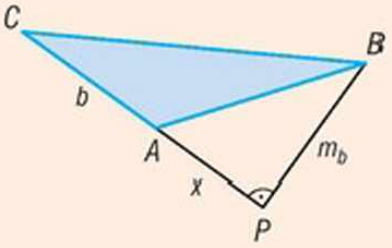
Megoldás

Ági a háromszöget téglalapba foglalhatja, a háromszög a téglalap területének a fele:



$$T_{\triangle} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{2 \cdot 12}{2} = 12\ (\text{cm}^2).$$

Balázs észreveszi, hogy az ABC háromszög területét megkapja, ha a BCP derékszögű háromszög területéből kivonja a BAP derékszögű háromszög területét.

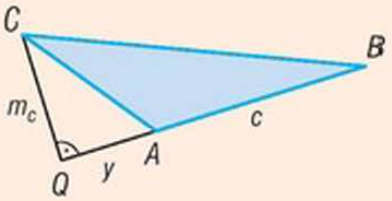


$$T_{\triangle} = \frac{(b+x)\cdot m_b}{2} - \frac{x \cdot m_b}{2} = \frac{(6+x)\cdot 4}{2} - \frac{x \cdot 4}{2} =$$
$$= \frac{6\cdot 4 + x\cdot 4}{2} - \frac{x\cdot 4}{2} = \frac{6\cdot 4}{2} + \frac{x\cdot 4}{2} - \frac{x\cdot 4}{2} = \frac{6\cdot 4}{2} = 12\ (\text{cm}^2).$$

Balázs is számolhatott a $T_{\triangle} = \frac{b \cdot m_b}{2}$ képlet alapján.

Csaba ugyanúgy számolhat, mint Balázs.

Az ABC háromszög területe a CQB derékszögű háromszög területének és az CQA derékszögű háromszög területének a különbsége:



$$T_{\triangle} = \frac{(c+y)\cdot m_c}{2} - \frac{y \cdot m_c}{2} = \frac{(8+y)\cdot 3}{2} - \frac{y \cdot 3}{2} =$$
$$= \frac{8\cdot 3 + y\cdot 3}{2} - \frac{y\cdot 3}{2} = \frac{8\cdot 3}{2} + \frac{y\cdot 3}{2} - \frac{y\cdot 3}{2} = \frac{8\cdot 3}{2} = 12\ (\text{cm}^2).$$

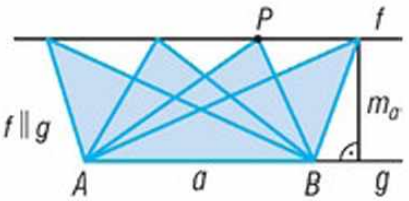
Csaba is számolhatott a $T_{\triangle} = \frac{c \cdot m_c}{2}$ képlettel.

A háromszög területét bármelyik oldala és a hozzá tartozó magassága ismeretében kiszámíthatjuk:

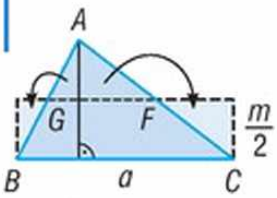
$$T_{ABC\triangle} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}.$$

Figyeljük meg!

Egy AB szakasz két végpontját a vele párhuzamos f egyenes tetszőleges P pontjával összekötve, az ABP háromszög területe mindig ugyanannyi.



Átdarabolással:



F és G oldalfelező pontok

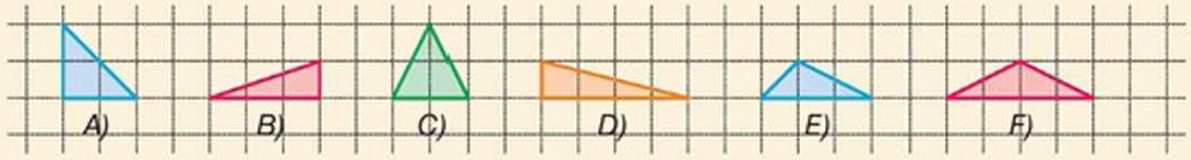
$T_{\text{téglalap}} = a \cdot \frac{m}{2}$

Ha az oldalhoz tartozó magasság a háromszögön kívül esik, a háromszög területe akkor is az oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatának a fele.

Feladatok

1. Máté és Balázs téglalap alakú telket örököltek, amelynek oldalai 400 m és 500 m hosszúak. Hogyan oszthatják ketté úgy, hogy mindketten ugyanakkora részt kapjanak? Keressünk minél több megoldást!

2. Írjuk fel azoknak a háromszögeknek a betűjelét, amelyek területe 2 □!



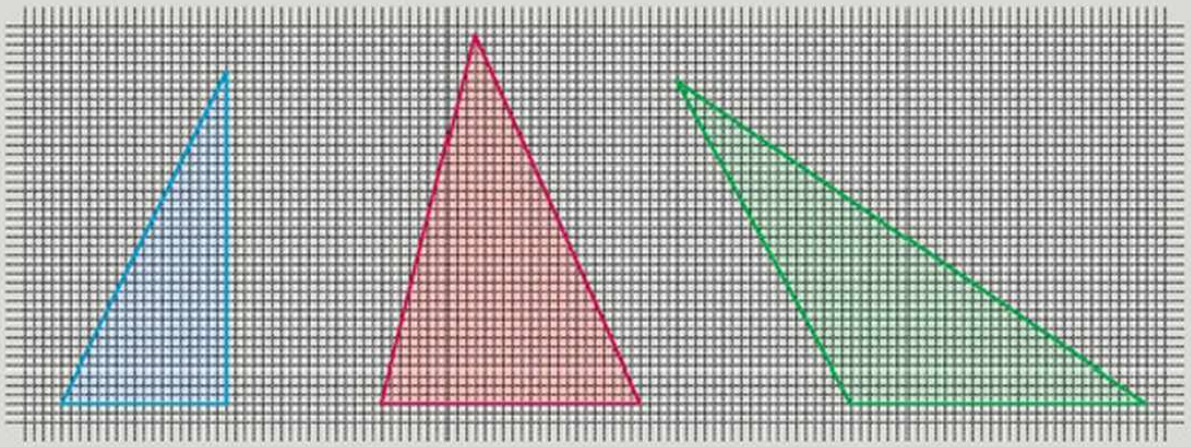
3. Egy mezőgazdasági vállalkozó az ábrán látható derékszögű háromszög alakú táblára búzát vetett. Ha a búza terméshozama hektáronként 5,1 tonna, várhatóan hány tonna búzát takaríthat be a területről? (Egy hektár 0,01 km^2.)



4. Szerkesszünk olyan háromszögeket, amelyek egyik oldala 4 cm, és ehhez az oldalhoz tartozó magassága 3 cm. Mekkora a háromszögek területe?

5. Szerkesszünk olyan háromszögeket, amelyek területe 6 cm^2!

6. Anita kirakós játékának néhány darabja látható milliméterpapírra rajzolva. Olvassuk le az ábráról a szükséges adatokat, és számítsuk ki az egyes darabok területét!



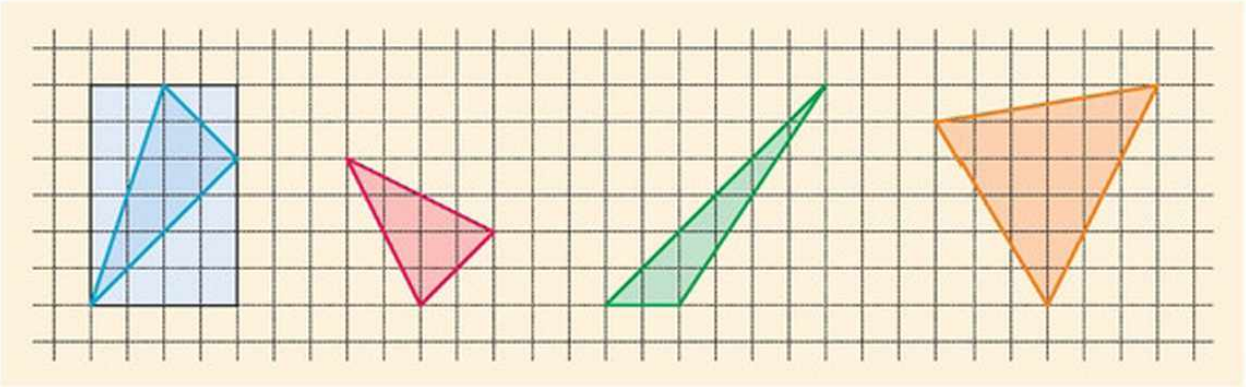
7. Petinek egy háromszög területét kell kiszámolnia, de nem emlékszik, hogy az oldala 2 cm vagy 4 cm, az oldalhoz tartozó magassága pedig 3 cm vagy 5 cm. Számítsuk ki az összes lehetséges háromszög területét!

8. Egy 5 cm oldalú *ABCD* négyzetből mindegyik csúcsnál levágtunk egy-egy derékszögű háromszöget. A derékszögű háromszögek befogói a következők:

A csúcs: 1 cm, 1 cm; *B* csúcs: 3 cm, 2 cm; *C* csúcs: 1,5 cm, 2 cm; *D* csúcs: 2 cm, 2 cm.

a) Hány oldalú a kapott sokszög? *b)* Mekkora a kapott sokszög területe?

9. Határozzuk meg az alábbi háromszögek területét! (Az első ábra segít abban, hogyan gondolkozzunk.)



10. Egy háromszög keresztmetszetű tetőtéri szoba 3,2 méter széles és 5,6 méter magas. Mekkora ennek a keresztmetszetnek a területe?

11. Pali 4 km-re lakik a Lali és Lili házát összekötő egyenes országúttól. Lali és Lili házainak távolsága 10 km. Mekkora területet fog közre a három ház között haladó három egyenes út?

12. Adjuk meg az egyes háromszögek hiányzó adatait! (a, b és c a háromszög oldalait, m_a, m_b és m_c az ezekhez tartozó magasságot, T a háromszög területét, K pedig a kerületét jelöli.)

a	m_a	b	m_b	c	m_c	T	K
6 cm	8 cm	10 cm					24 cm
5 cm	6 cm	4 cm		11,21 cm			
10 cm			8,66 cm			43,3 cm^2	30 cm
	12 cm	13 cm		12,65 cm		54 cm^2	

***13.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 12 cm, alapjához tartozó magassága 25 cm, a szárhoz tartozó magassága pedig 15 cm. Milyen hosszú a szára?

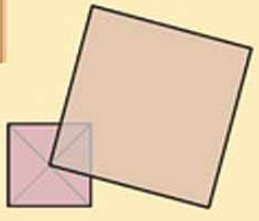
14. Három azonos hőszigetelő üvegből készült, ugyanolyan vastag háromszög alakú ablaktábla tömege egyformán 30 kg. Az üvegtáblákat egymás mellé állították a földre, és megmérték, hogy milyen széles a földön lévő oldaluk. Az egyiké 1,1 m, a másiké 150 cm, a harmadiké 800 mm volt.

a) Melyik ablaktábla a legmagasabb? Melyik a legalacsonyabb? Miért?

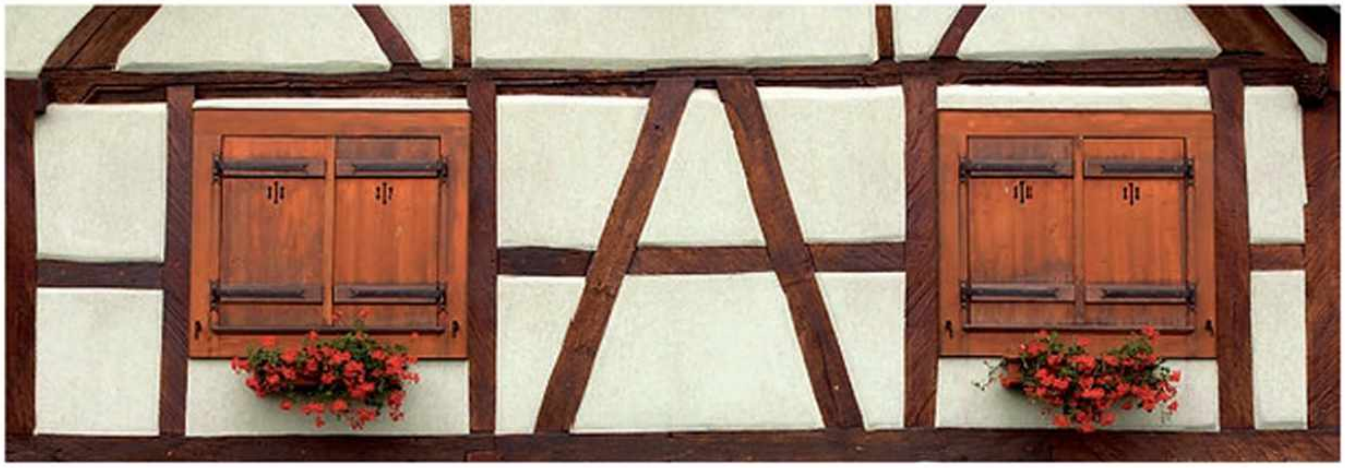
b) Ha tudjuk, hogy egy négyzetméter hőszigetelő üveg tömege 20 kg, akkor milyen magasak az egyes ablaktáblák?

Rejtvény

Egy 1 m oldalú, négyzet alakú szőnyegre az ábra szerinti módon ráterítettek egy 2 m oldalú, szintén négyzet alakú szőnyeget. Hány százalékát fedi le a nagy szőnyeg a kicsinek?



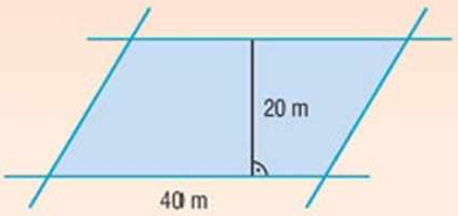
8. A négyszögek területe



A paralelogramma területe

1. példa

Szabóék telke két-két párhuzamos, de egymásra nem merőleges utca között terül el az ábrán látható módon.



a) Milyen alakú a telek?

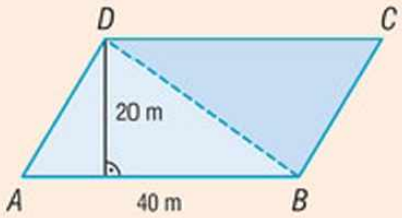
b) Mekkora a területe?

Megoldás

a) Az olyan négyszögek, amelyek szemközti oldalai párhuzamosak, a paralelogrammák. Tehát a telek paralelogramma alakú.

A paralelogramma területének meghatározása visszavezethető a háromszög területére.

b) **1. megoldás:** Húzzuk be az $ABCD$ paralelogramma BD átlóját! Mivel az átló két egybevágó háromszögre bontja a paralelogrammát, a paralelogramma területe az egyik ilyen háromszög területének a kétszerese.

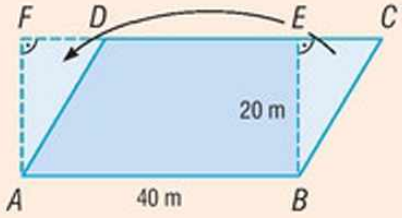


$$T_{ABCD} = 2 \cdot T_{ABD} = \cancel{2} \cdot \frac{40 \cdot 20}{\cancel{2}} = 40 \cdot 20 = 800 \text{ m}^2.$$

A paralelogramma átdarabolható ugyanakkora területű téglalappá.

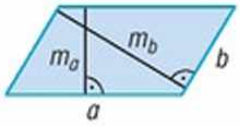
2. megoldás: Állítsunk merőlegeseket a paralelogramma A és B csúcsából a szemközti oldal egyenesére!

A keletkezett $ADF\triangle$ és $BCE\triangle$ egybevágó, mert két oldal és a közrezárt szög páronként egyenlő: $AF = BE$, $AD = BC$ és $FAD\sphericalangle = EBC\sphericalangle$ (egyállású szögek).



Vágjuk le a $BEC\triangle$-et a paralelogrammáról, és tegyük az $ADF\triangle$ helyére! Az így kapott $ABEF$ paralelogramma téglalap, mert $AF \perp FE$. A téglalap területe az átdarabolás miatt egyenlő a paralelogramma területével.

$$T_{ABCD} = T_{ABEF} = 40 \cdot 20 \text{ m}^2 = 800 \text{ m}^2.$$

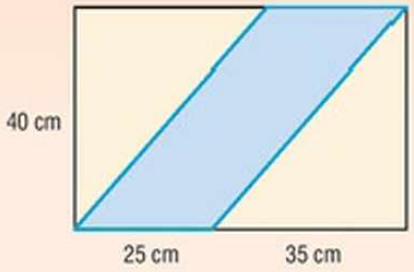


Az a oldalhoz tartozó magasság m_a, a b oldalhoz tartozó magasság m_b.

A parallelogramma magassága két szemközti oldalegyenesének távolsága.

2. példa

Egy nagyon modern festő Bárány című alkotása 60 cm × 40 cm-es téglalap. A paralelogramma formájú „bárány" egyik oldala 25 cm. Mennyi kék festékkel festhető meg a bárány, ha 1 cm^2-re 0,7 g festék kell?



1. megoldás

A téglalap alakú vászonból két derékszögű háromszög alakú részre nem került kék festék. Ezek területe külön-külön $\frac{40 \cdot 35}{2}$ cm^2.

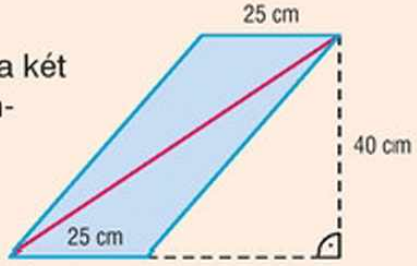
A téglalap területéből a két háromszög területét kivonva megkapjuk a festett rész területét:

$$T_{\text{bárány}} = 40 \cdot 60 - 2 \cdot \frac{40 \cdot 35}{2} = 40 \cdot 60 - 40 \cdot 35 =$$
$$= 40 \cdot (60 - 35) = 40 \cdot 25 = 1000 \text{ cm}^2.$$

A felhasznált festék tömege $1000 \cdot 0{,}7 = 700$ g $= 70$ dkg.

2. megoldás

A paralelogrammába az átlót berajzolva két olyan egybevágó (tompaszögű) háromszög keletkezik, melynek 25 cm-es oldalához éppen a 40 cm-es magasság tartozik.



Így a terület:

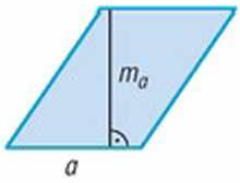
$$T_{\text{paralelogramma}} = 2T_{\text{háromszög}} = 2 \cdot \frac{25 \cdot 40}{2} = 25 \cdot 40 = 1000 \text{ cm}^2.$$

A festék tömege az előbb látott módon számolható.

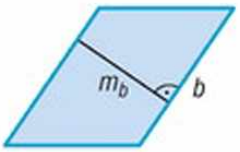
Mindkét megoldás során azt kaptuk, hogy a bárány területe $40 \cdot 25$ cm^2, ami éppen a paralelogramma egyik oldalának és a hozzá tartozó magasságnak a szorzata.

$$T_{\text{par.}} = a \cdot m_a = b \cdot m_b.$$

A paralelogramma területe az oldal és a hozzá tartozó magasság szorzata.



$T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a$



$T_{\text{paralelogramma}} = b \cdot m_b$

A trapéz területe

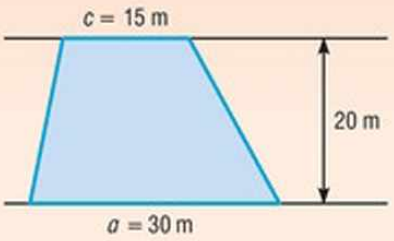


3. példa

Béláék repceföldje két párhuzamos út között terül el. A terület alaprajza az ábrán látható.

a) Milyen négyszög a telek?

b) Mekkora a területe?



Megoldás

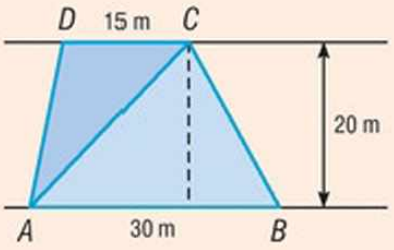
a) Mivel van két párhuzamos oldala, a telek trapéz alakú.

b) **1. megoldás**

A trapézt két háromszögre bontjuk.

Kössük össze a terület két szemközti csúcsát! Így a trapézt két háromszögre bontottuk.

Az $ABC\triangle$ háromszög 30 m-es oldalához és az $ADC\triangle$ 15 m-es oldalához tartozó magasság is 20 m.



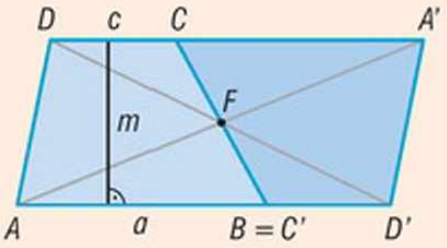
A trapéz területe a két háromszög területének összege is:

$$T_{trapéz} = \frac{30 \cdot 20}{2} + \frac{15 \cdot 20}{2} = 300 + 150 = 450\ \text{m}^2.$$

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{a \cdot m}{2} + \frac{c \cdot m}{2}$$

2. megoldás: Tükrözzük az $ABCD$ trapézt a BC oldal F felezőpontjára! A keletkezett $AD'A'D$ négyszög a középpontos tükrözés tulajdonságai miatt paralelogramma, melynek AD' oldala a trapéz két alapjának összege, magassága pedig a trapéz magassága.

Az $ABCD$ trapéz területe a paralelogramma területének a fele.



$$T_{ABCD} = \frac{T_{AD'A'D}}{2}$$

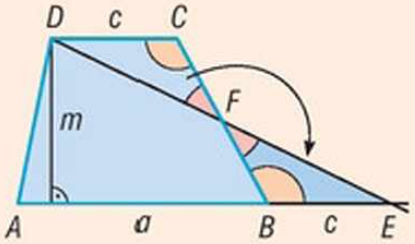
$$T_{ABCD} = \frac{(30+15)\cdot 20}{2} = 450\ \text{m}^2.$$

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(a+c)\cdot m}{2}$$

A trapézt háromszöggé daraboljuk át.

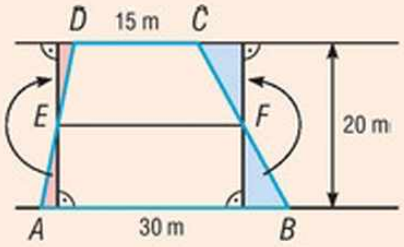
3. megoldás: Kössük össze a CB oldal F felezőpontját a D ponttal! A DF félegyenes kimetszi az AB oldal meghosszabbításából az E pontot.

Az $FDC\triangle$ és az $FBE\triangle$ egybevágó, mert egy oldalukban ($FB = FC$) és két szögükben megegyeznek. Így az $ABCD$ trapéz és az AED háromszög területe egyenlő.



$$T_{ABCD} = T_{AED} = \frac{(30+15)\cdot 20}{2} = 450\ \text{m}^2.$$

4. megoldás: Rajzoljuk be a trapéz szárainak felezőpontját összekötő középvonalat! Erről tudjuk, hogy párhuzamos az alapokkal, és hossza azok összegének a fele, azaz



$$\frac{30+15}{2}.$$

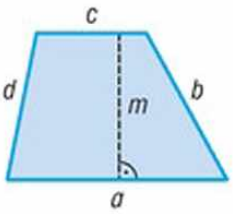
A trapézt téglalappá daraboljuk át.

Húzzuk be a trapéz magasságát a középvonal két végpontjában!

A két piros háromszög egybevágó, mivel megegyeznek egy oldalukban (hiszen elfeleztük a trapéz szárát) és a rajta fekvő két szögükben (váltószögek). Így területük is egyenlő.

Hasonló okokból a két kék háromszög is egybevágó, a területük egyenlő.

A trapéz területe tehát megegyezik annak a téglalapnak a területével, amelynek egyik oldala a trapéz középvonala, a másik pedig a magassága. Területe tehát



$$T_{\text{trapéz}} = \frac{30+15}{2} \cdot 20 = 22{,}5 \cdot 20 = 450\ \text{m}^2.$$

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{a+c}{2} \cdot m$$

A trapéz területét kiszámíthatjuk úgy, hogy az alapok összegének felét megszorozzuk a trapéz magasságával.

$$\boldsymbol{T_{\text{trapéz}} = \frac{a+c}{2} \cdot m}.$$

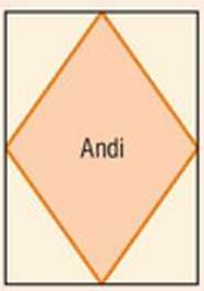
A deltoid területe

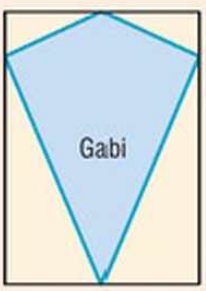
4. példa

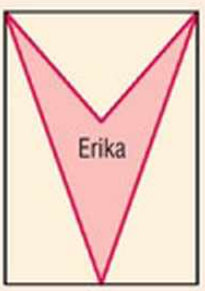
Andi, Gabi és Erika egy-egy 30 cm × 60 cm-es téglalap alakú papírlapból deltoid alakú sárkányt készít az ábrákon látható módon.

a) Ha semmilyen más információval nem rendelkezünk, meg tudjuk-e mondani, hogy ki vágta ki a legnagyobb területű deltoidot?

b) Mekkora a deltoidok területe?



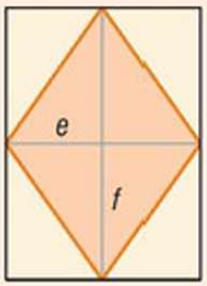


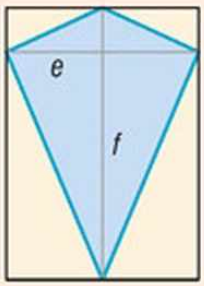


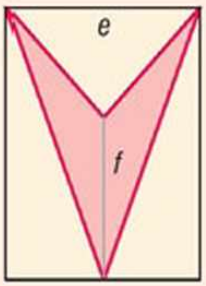
A feladat megoldása előtt tippeljük meg, melyik terület a legnagyobb!

Megoldás

a) Rajzoljuk be mindhárom deltoid átlóit!







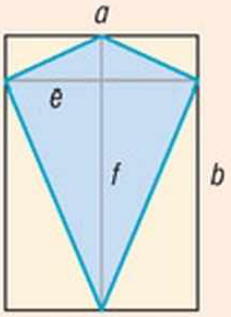


Andi és Gabi deltoidjának két átlója egyenlő a téglalap oldalaival. A deltoid átlói egymásra merőlegesek, így a papírlapot négy téglalapra bontják. Ezeknek a téglalapoknak a deltoid oldalai az átlói, amelyek felezik a téglalapok területét. Ezért a deltoid területe a papírlap területének a fele.

Erika deltoidja konkáv, az *f* átló egyenese a deltoidot két tompaszögű háromszögre bontja. Nyilvánvaló, hogy ezek területe kisebb, mint a téglalap területének a fele.

Tehát Andi és Gabi deltoidjának a területe egyenlő, Erikáé pedig ezeknél kisebb.

b) A konvex deltoidok esetén az átlók hossza egyenlő a befoglaló téglalap oldalaival.



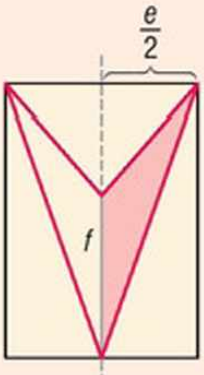
$e = a$
$f = b$

Az előzőekben azt kaptuk, hogy a deltoid területe a téglalap területének a fele, azaz

$$T_{\text{deltoid}} = \frac{e \cdot f}{2}$$

$$T_{\text{deltoid}} = \frac{30 \cdot 60}{2} = 900 \text{ cm}^2.$$

A konkáv deltoid területe két olyan egybevágó tompaszögű háromszög területének az összege, amelyek egyik oldala a deltoid egyik (*f*) átlója, a hozzá tartozó magasság pedig a másik átló fele $\left(\frac{e}{2}\right)$.



$e = a$
$f < b$

Ezért a deltoid területe:

$$T_d = \cancel{2} \cdot \frac{\left(\frac{e}{2}\right) \cdot f}{\cancel{2}} = \frac{e \cdot f}{2}.$$

Erika deltoidjának a területét akkor tudnánk meghatározni, ha ismernénk az *f* átlót.

A deltoid területe az átlók szorzatának a fele.

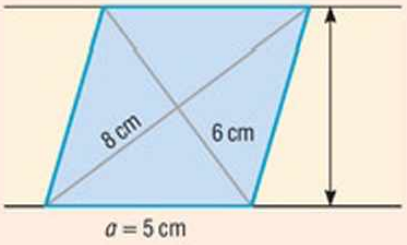
$$T_{\text{deltoid}} = \frac{e \cdot f}{2}.$$

5. példa

Egy papírszalagból két vágással olyan 5 cm oldalhosszúságú rombuszt vágtunk ki, amelynek átlói 6 cm és 8 cm hosszúak. Hány centiméter széles a papírcsík?

Megoldás

A papírszalag szélessége a rombusz magassága. Mivel a rombusz deltoid is és paralelogramma is, a területét kétféle módon is meghatározhatjuk.



$$T_{\text{rombusz}} = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2.$$

Ez a terület egyenlő a paralelogramma $a \cdot m$ területével.

$$T_{\text{rombusz}} = a \cdot m;$$
$$24 = 5 \cdot m;$$
$$4{,}8 = m.$$

A papírszalag szélessége 4,8 cm.

Kísérletezzünk!

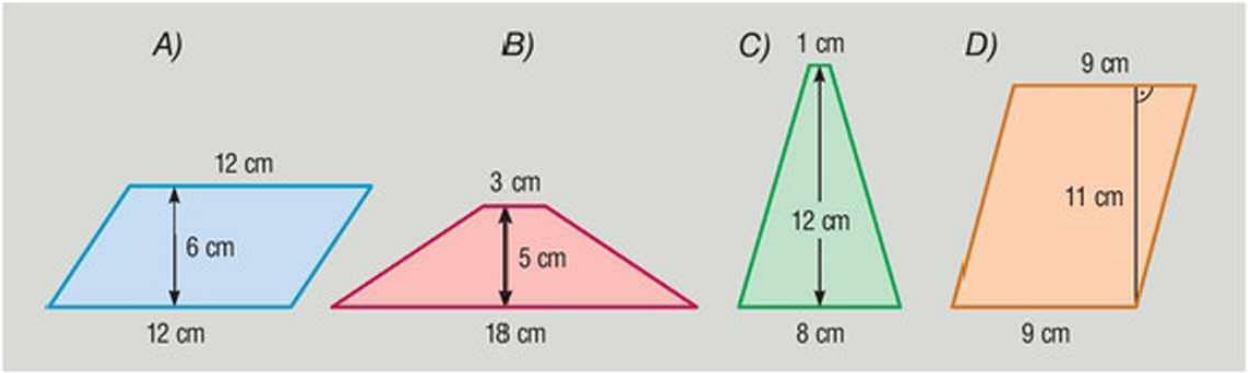
Vegyünk egy téglalap alakú négyzetrácsos lapot, és vágjunk le belőle derékszögű háromszögeket úgy, hogy nevezetes négyszöget kapjunk!

Határozzuk meg a kapott négyszög területét!

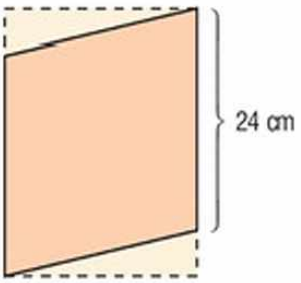
Feladatok

1. Egy 6 cm × 15 cm-es tábla csoki két sarkánál letörtünk egy-egy derékszögű háromszög alakú darabot, amelynek két oldala 6 cm-es volt, majd elfogyasztottuk.
   a) Milyen síkidomnak felelhet meg a csokiból megmaradt rész?
   b) Mekkora a letört darab területe?
   c) Mekkora a megmaradt rész területe? Számítsuk ki kétféleképpen!

2. Állítsuk területük szerint növekvő sorrendbe az alábbi trapézokat!



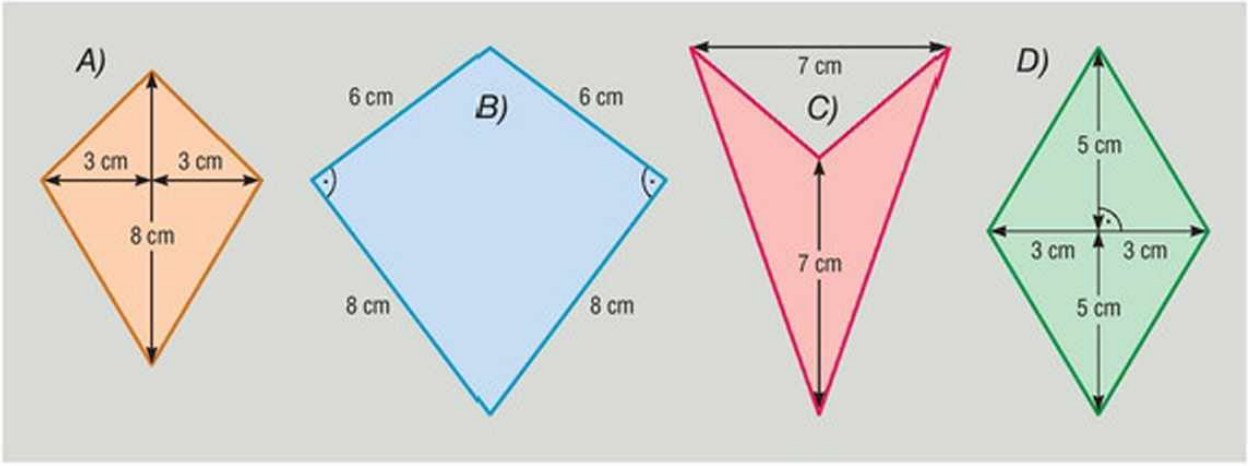
3. Egy téglalap alakú papírlap oldalai 21 és 29 cm hosszúak. A papírlapból két párhuzamos vágással levágtunk egy-egy háromszöget a rajzon látható módon. Mekkora területű háromszögeket vágtunk le? Milyen négyszög maradt a lapból? Mekkora ennek a területe? Számítsuk ki kétféleképpen!



4. Egy paralelogramma egyik csúcsából induló magasságvonala a szemközti oldalt egy 4 cm-es és egy 10 cm-es darabra bontja. A paralelogramma egyik szöge 135°. Mekkora lehet a területe?

5. Egy $r = 1$ sugarú körbe négyzetet írtunk. Mekkora a négyzet területe?

6. Állítsuk területük szerint növekvő sorrendbe a következő deltoidokat!



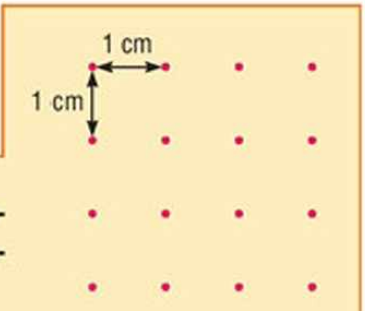
7. Marci egy négyszöget rajzolt, és a következő információkat írta le róla:

„A négyszögnek minden szöge különböző. Van két párhuzamos oldala, ezek 10 és 16 cm hosszúak. A két párhuzamos oldal távolsága 5 cm."

Határozzuk meg, milyen négyszöget rajzolt Marci, és számítsuk ki a területét! Van-e olyan információ, ami felesleges? Le tudnánk-e rajzolni pontosan Marci négyszögét?

8. Egy téglalapot elgázolt egy autó. Téglalap korábban oldalai 12 és 16 cm-esek voltak. A baleset után azonban paralelogrammaként tengette tovább napjait, és bár oldalainak hossza nem változott, területe 144 cm^2-re csökkent. Milyen magas a paralelogramma?

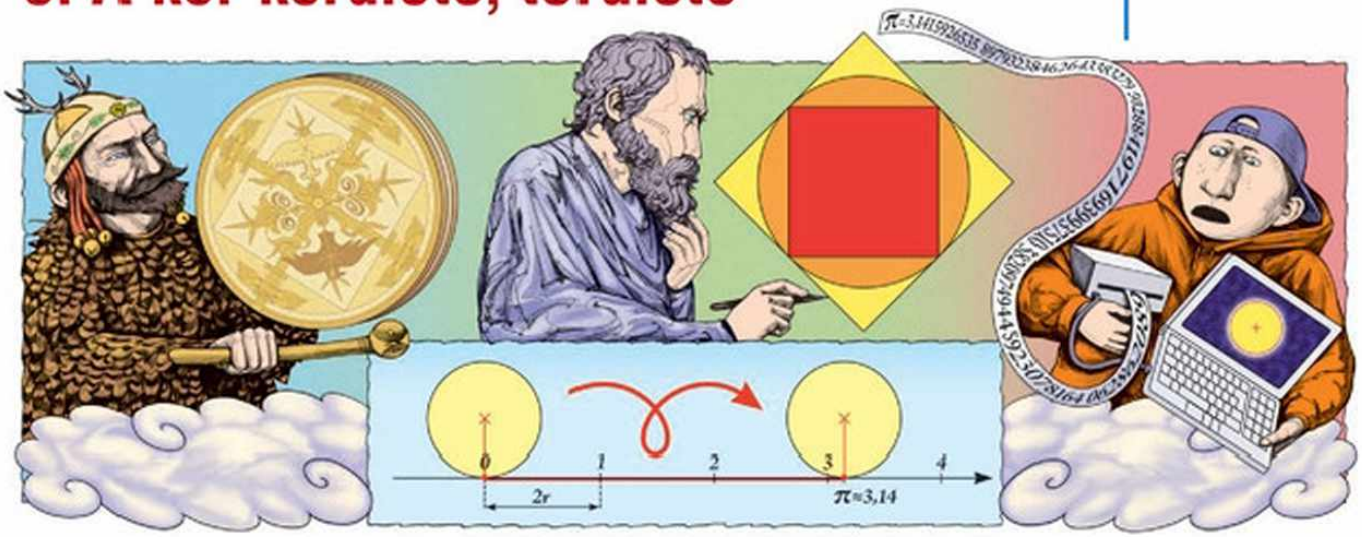
9. Egy rét négy sarkában négy tehén áll: Kefir, Tejfel, Karamell és Turmix. A szemközti sarkokban álló Kefir és Karamell távolsága 30 m, Tejfel és Turmix távolsága 20 m. A szemközti tehenek időnként átmennek egymáshoz, ezért a réten két, egymásra merőleges csapás alakult ki a fűben. Mekkora a rét területe?



Rejtvény

Egy táblába szögeket vertünk az ábrán látható módon. A szögekre befőttesgumit húzva sokszögeket kapunk. Keressünk ezek közül olyanokat, amelyeknek a területe 4 cm^2!

9. A kör kerülete, területe



Már az ókori matematikusokat is foglalkoztatta a *kör négyszögesítésének* problémája, vagyis hogy egy adott körhöz hogyan lehet vele azonos területű négyzetet szerkeszteni. A 19. században bizonyították be, hogy euklideszi szerkesztéssel nem oldható meg a probléma.

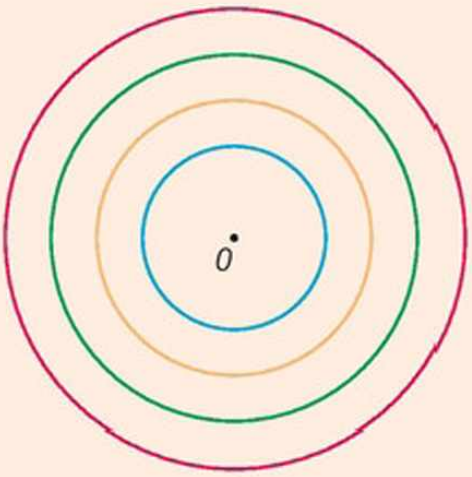
1. példa

Rajzoljunk 2; 3; 4; 5 cm átmérőjű köröket, és spárga segítségével mérjük meg a kerületüket! Mit tapasztalunk, ha megvizsgáljuk a kör kerületének és átmérőjének hányadosát?

Megoldás

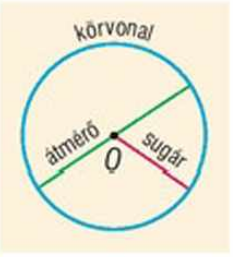
Méréseinket foglaljuk táblázatba!

átmérő (cm)	2	3	4	5
kerület (cm)	6,5	9,4	12,4	15,8
$\frac{\text{kerület}}{\text{átmérő}}$	3,25	3,13	3,1	3,16



A kapott adatok alapján azt sejtjük, hogy a kör kerületének és átmérőjének hányadosa 3,1 és 3,2 közötti állandó.

Ez azt jelenti, hogy a kör kerülete egyenesen arányos az átmérővel.



A kör kerülete a körvonal hossza.

$d = 2$ cm
$d = 3$ cm
$d = 4$ cm
$d = 5$ cm

Végezzük el a méréseket, és dolgozzunk a saját mérési eredményeinkkel! (Ezek eltérhetnek a táblázat adataitól.)

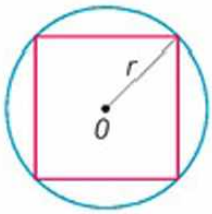
A kör kerületének és átmérőjének hányadosa egy nevezetes szám:

$$\pi = 3{,}14\ldots \quad \text{(ejtsd pí)}.$$

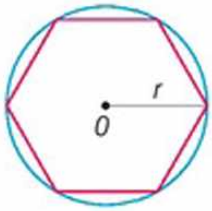
$$\frac{k}{d} = \pi$$

A π végtelen nem szakaszos tizedes tört, így nem racionális szám.

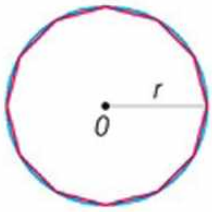
A kör kerülete: $k = d\pi = 2r\pi$.



$k_4 = 2r \cdot 2{,}83$



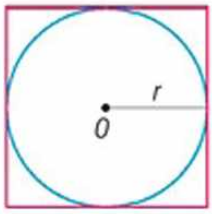
$k_6 = 6r$



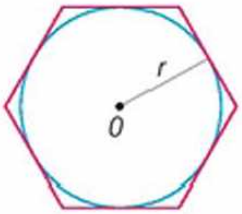
$k_{12} = 2r \cdot 3{,}105$

$k_{24} = 2r \cdot 3{,}133$

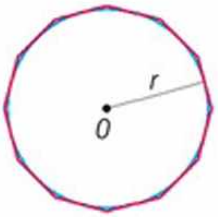
$k_{180} = 2r \cdot 3{,}141$



$K_4 = 2r \cdot 4 = 8r$



$K_6 = 2r \cdot 3{,}465$



$K_{12} = 2r \cdot 3{,}215$

$K_{24} = 2r \cdot 3{,}16$

$K_{180} = 2r \cdot 3{,}1419$

2. példa

Adott egy 2 cm sugarú kör.

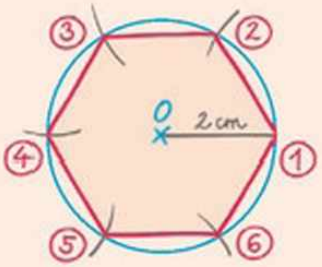
a) Szerkesszünk szabályos hatszöget, melynek minden csúcsa a körvonalon van!

b) Szerkesszünk négyzetet, melynek minden oldala érinti a kört!

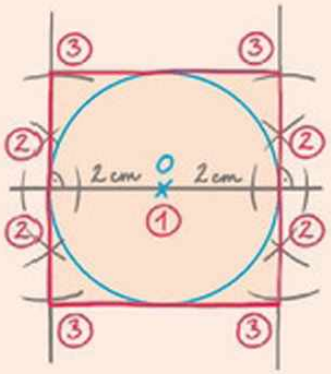
c) Állítsuk növekvő sorrendbe a három alakzat kerületét!

Megoldás

a) A szabályos hatszög minden oldala megegyezik a kör sugarával. Ezért ha a kör sugarával hatszor egymás után elmetszszük a körvonalat, akkor megkapjuk a hatszög csúcsait.



b) A négyzet oldala egyenlő a kör átmérőjével. A kör egy átmérőjének két végpontjába merőlegeseket állítunk, mert az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Az érintési pontból erre felmérjük a kör sugarát mindkét irányba, így megkapjuk a négyzet csúcsait.



c) Az ábra alapján látható, hogy a szabályos hatszög kerülete kisebb a kör kerületénél, amely kisebb a négyzet kerületénél.

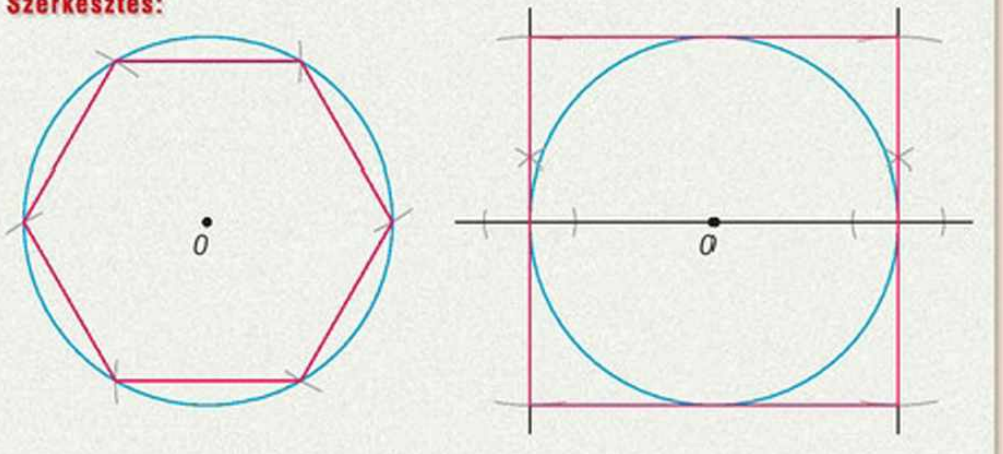
A szabályos hatszög kerülete: $6r$.

A négyzet kerülete: $4 \cdot 2r = 8r$.

A kör kerülete: $2\pi \cdot r$.

$6r < 2\pi \cdot r < 8r$, ebből $3 < \pi < 4$.

Szerkesztés:

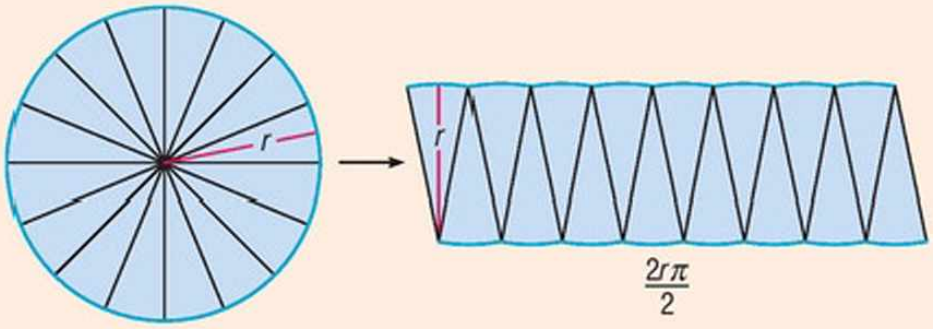


Azt kaptuk, hogy a π-nek 3 és 4 közé kell esnie. A beírt és körülírt sokszögek oldalszámának növelésével pontosabb közelítést adhatunk π-re.

3. példa

Vágjunk ki egy 8 cm sugarú kört, majd hajtsuk félbe egymás után négyszer! Nyissuk szét, és a hajtásvonalak mentén vágjuk körcikkekre! Rakjunk össze a körcikkekből más alakzatot! Mit mondhatunk az alakzatok területéről?

Megoldás



A kapott alakzat területe egyenlő a kör területével. Az alakzat közelítőleg egy olyan paralelogramma, amelynek egyik oldala a kör kerületének a fele, a magassága pedig a kör sugara.

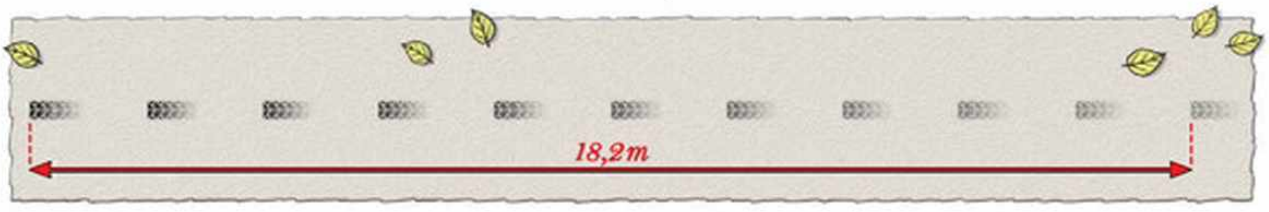
Ennek a paralelogrammának a területe: $r \cdot \frac{2r\pi}{2} = r^2\pi$.

A kör területe: $t = r^2\pi$.

Feladatok

1. Egy kerékpár kerekének átmérője 70 cm. Hányszor fordul körbe a kerék, amíg a kerékpár 1 km-t halad?

2. Klári a biciklijével belehajtott egy pocsolyába, ezért a kerék vizes nyomot hagyott az aszfalton. Mekkora a kerekének az átmérője?

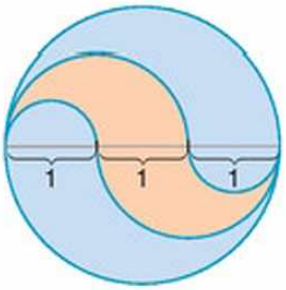


3. Vili óráján a nagymutató és a másodpercmutató hossza is 1,2 cm. Mekkora utat tesz meg

a) a nagymutató; *b)* a másodpercmutató hegye egy nap alatt?

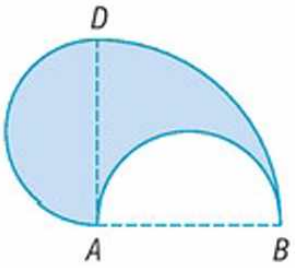
Mennyi ideig tartana, amíg a mutatók hegye megtenné a maratoni távot? (A maratoni táv 42 195 m.)

4. Eszter a 4 m hosszú ugrálókötelével különböző alakú területeket kerít körbe. Először egy téglalapot, azután egy négyzetet, majd egy rombuszt, végül egy kört. Melyik esetben kerítette körbe a legnagyobb területet?

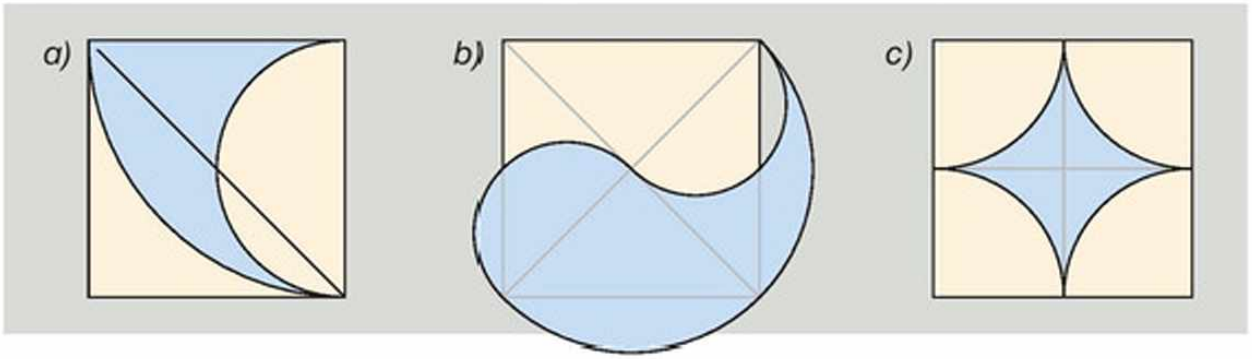


5. Márti félköröket rajzolva emblémát készített. A darabokat különböző anyagból vágta ki. Mekkora az ábrán látható narancssárga terület? (➡)

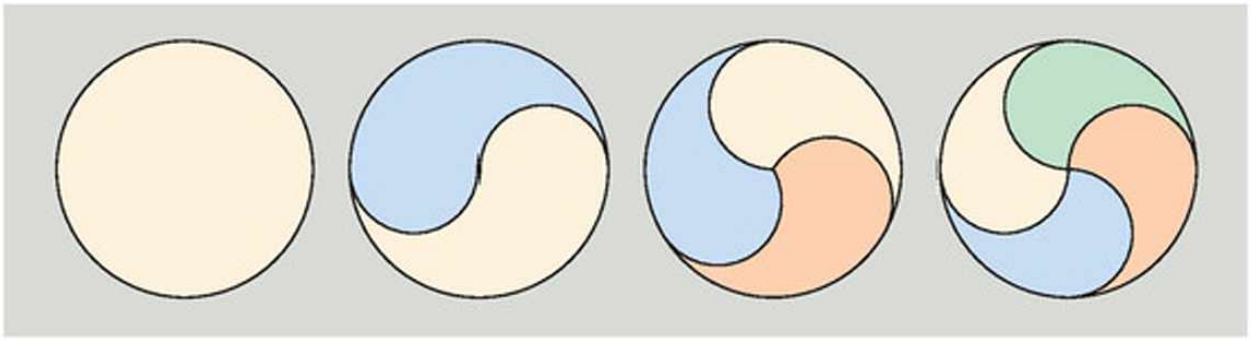
6. Mekkora az itt látható alakzat területe, ha $AB = AD = 2$ cm a félkörök átmérője, A pedig a negyedkör középpontja. (➡)



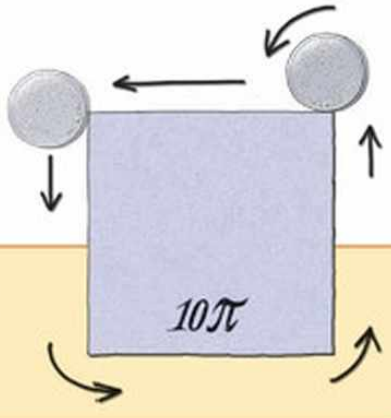
7. Hányadrésze a kék rész területe a négyzet területének?



8. Folytassuk a sorozatot! Mekkora a különböző színekkel jelölt alakzatok területe és kerülete? (A szomszédos színek határvonalai félkörök.)



9. Egy park közepén lévő, 6 m átmérőjű kör alakú virágágyás köré 5 m széles sávba füvet vetnek. Hány kilogramm fűmagra van szükség, ha 1 kg fűmag 30 m^2 terület füvesítésére elegendő?



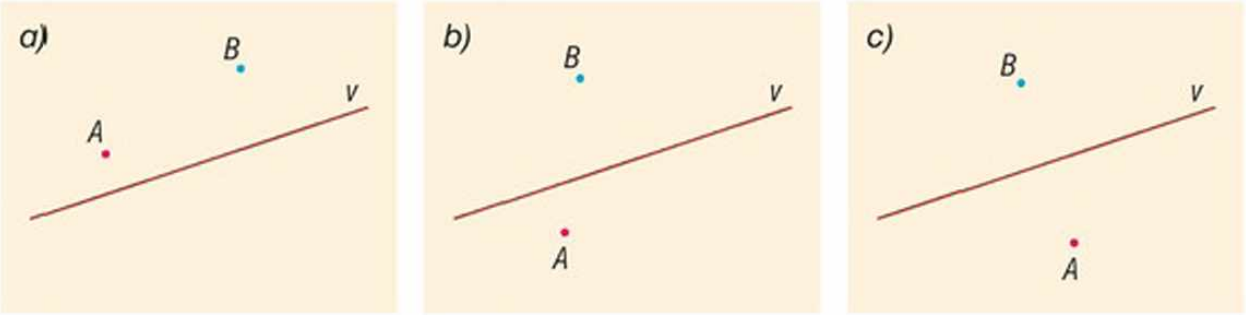
Rejtvény

Egy 10π oldalú négyzet oldalain körbegurítunk egy egységnyi sugarú pénzérmét. Hányszor fordul körbe az érme, amíg a kiindulási pontba visszajut?

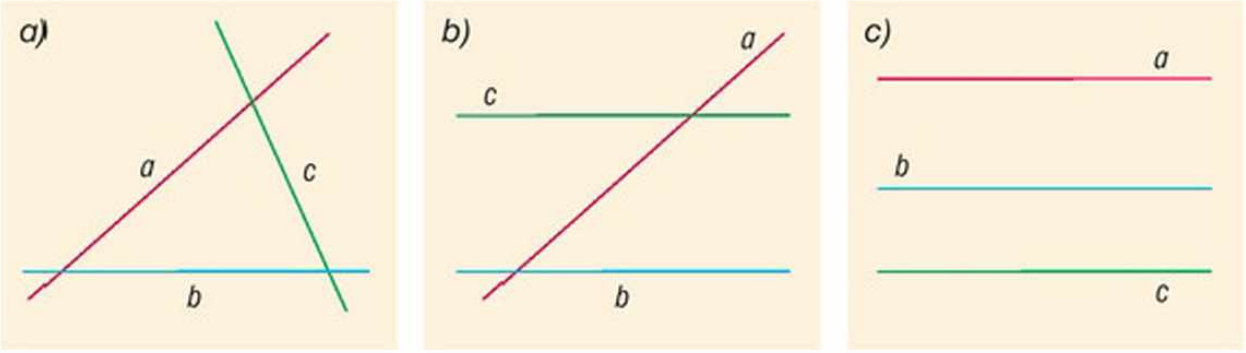
10. Vegyes feladatok

1. Adott A, B és C pont a síkon. Szerkesszük meg azt a pontot, vagy pontokat, melyekre igaz, hogy
   a) A-tól és B-től ugyanakkora, BC egyenestől pedig 2 cm távolságra van;
   b) A-tól és B-től ugyanakkora, C-től pedig 2 cm-re van;
   c) A-tól 2 cm, B-től 3 cm távolságra van;
   d) AB egyenestől 2 cm, BC egyenestől 3 cm távolságra van.

2. A térképvázlatokon feltüntetett falvak lakói úgy szeretnének állomást építeni a vasútvonal mellé, hogy az a két falutól ugyanakkora távolságra legyen. Hova építsék az állomást?



3. Hova kell tervezni a mentőállomást, ha azt akarjuk, hogy az az ábrán látható három út mindegyikétől ugyanakkora távolságra helyezkedjen el?



4. A térképen három falu Alsóvár, Bencevár és Csalavár egy háromszöget határoznak meg. Ebben a háromszögben színezzük ki azokat a pontokat, melyekre igaz, hogy
   a) Alsóvárhoz vannak a legközelebb;
   b) Alsóvárhoz vannak a legközelebb és a másik két falutól ugyanakkora távolságra vannak;
   c) Alsóvárhoz közelebb vannak mint Bencevárhoz, de Bencevárhoz közelebb vannak, mint Csalavárhoz.

5. Andi és Bandi sajnos gyakran vét számolási hibát a feladatok megoldásában. Legutóbb mindketten egy háromszög belső szögeinek kiszámításakor kaptak rossz eredményt. Andi 20%-kal nagyobb szöget kapott a kelleténél, Bandi meg 5°-kal kevesebbet. Mennyi volt a két eredmény közti különbség, ha a háromszög két szögét ismerték: 50° és 75° volt, és a harmadik szöget kellett kiszámolniuk.

6. Egy háromszög két belső szöge $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$. Mekkora szöget zár be a harmadik szög felezője a szemközti oldallal?

7. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 40°. Mekkora szögekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság a derékszöget?

8. Szerkesszük meg azt a derékszögű háromszöget, melynek az átfogója 6 cm, két hegyesszögének aránya pedig 1 : 2!

9. Egy háromszög egyik szöge 70°, egy másik csúcsához tartozó külső szög pedig 125°. Igaz-e, hogy a háromszög egyenlőszárú?

10. Egy háromszög egyik szöge 70°. Mekkora szöget zár be a másik két szög szögfelezője?

11. Egy egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szöge 30°-kal nagyobb, mint szárszögének kétszerese. Mekkorák a háromszög belső szögei?

12. Egy háromszög legkisebb szöge feleakkora, mint a legnagyobb szöge, amely 10°-kal nagyobb a középsőnél. Mekkorák a háromszög szögei?

13. Egy szabályos sokszög minden belső szöge ugyanakkora. Egy ilyen szabályos sokszög minden belső szöge kétszer akkora, mint a külső szöge.

a) Hány oldala van a sokszögnek?

b) Mennyi a belső szögek összege és a külső szögek összege?

c) Hány átlója van?

14. Az ábrán látható szabályos ötszögnek berajzoltuk az összes átlóját. Keressünk különböző egyenlő szárú háromszögeket az ábrán, és határozzuk meg a szögeiket! (➡)



15. Egy derékszögű háromszög köré írható kör sugara (R) 10 cm.

a) Mekkora az átfogója?

b) Mekkora az átfogóhoz tartozó súlyvonala?

16. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogóhoz tartozó súlyvonal, és az egyik befogó hossza.

$s_c = 4$ cm; $a = 3$ cm.

17. Szerkesszünk háromszöget a következő adatokból! (R a $\triangle$ köré írt körének sugara.)

a) $R = 4$ cm, $a = 5$ cm, $s_a = 3$ cm;

b) $R = 4$ cm, $a = 5$ cm, $m_a = 3$ cm;

c) $a = 5$ cm, $s_a = 4$ cm, $m_a = 3$ cm.

18. Adottak a következő halmazok!

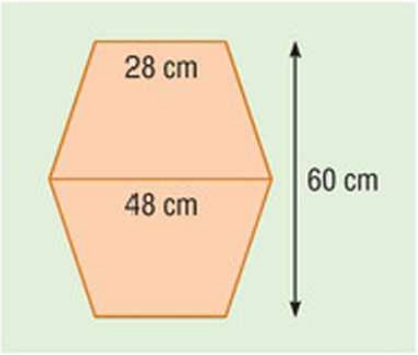
$A = \{$négyzetek$\}$; $B = \{$téglalapok$\}$; $C = \{$paralelogrammák$\}$;

$D = \{$rombuszok$\}$; $E = \{$deltoidok$\}$; $F = \{$trapézok$\}$.

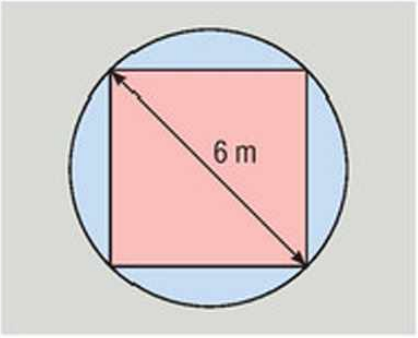
Adjuk meg a betűjelét azoknak a halmazoknak, melyeknek elemeire igazak a következő állítások!

a) A területét kiszámíthatjuk úgy, hogy az átlók szorzatát osztjuk kettővel;
b) A területét kiszámíthatjuk úgy, hogy két szomszédos oldalát összeszorozzuk;
c) A területét kiszámíthatjuk úgy, hogy az egyik oldalát megszorozzuk a hozzá tartozó magassággal;
d) A területét kiszámíthatjuk úgy, hogy az egyik oldalát megszorozzuk a hozzá tartozó magassággal és osztjuk kettővel;
e) Bármely két szomszédos szögének összege 180°;
f) Belső szögeinek összege ugyanakkora, mint a külső szögeinek az összege.

19. Peti egy sárkányt készített, melynek felszíne az ábrának megfelelő két egybevágó trapézból áll. Mekkora ennek a területe? (➡)

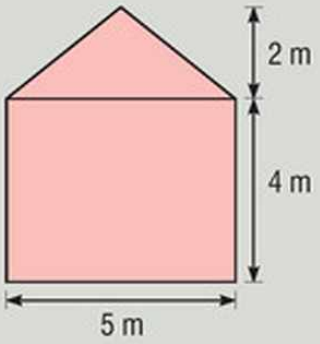


20. Az ábrán látható virágágyásba a közepén található négyzetbe tulipánokat, a körön belülre de a négyzeten kívülre jácintot ültettek. Hányszorosa a tulipánokkal beültetett terület a jácinttal beültetett területnek? (➡)

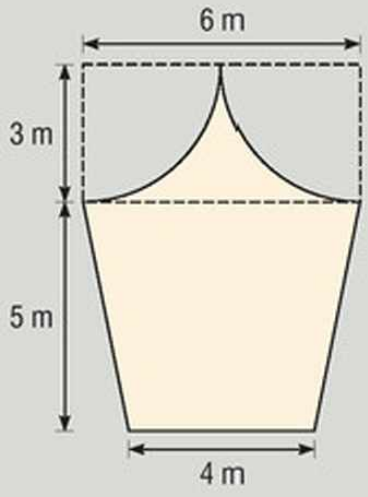


21. Mennyi festék szükséges a következő alakzatok lefestéséhez összesen, ha tudjuk, hogy 1 m^2 lefestésénél 1 dl festéket használunk el?

a)

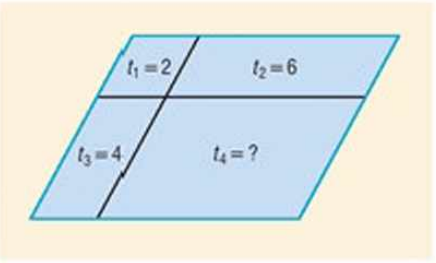


b)

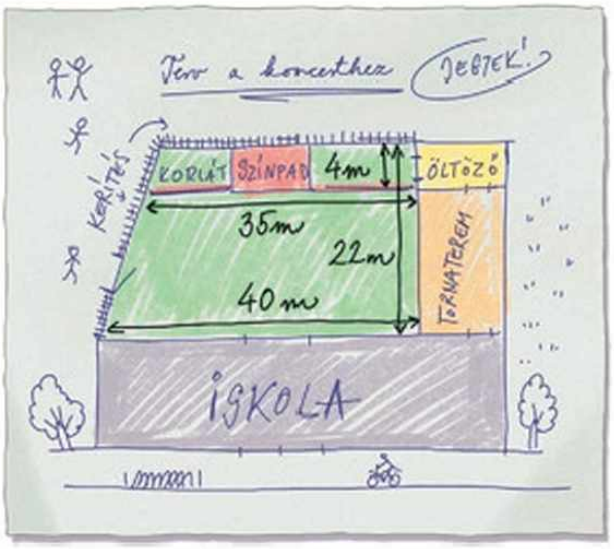


22. 15 cm oldalhosszúságú, négyzet alakú kartonlapból 4 egyforma méretű, kör alakú poháralátétet vágunk ki. Az eredeti lapnak legalább hány százaléka lesz a hulladék?

23. Egy paralelogrammát az ábra szerint négy kisebb paralelogrammára vágunk. Mekkora a negyedik rész területe? (➡)



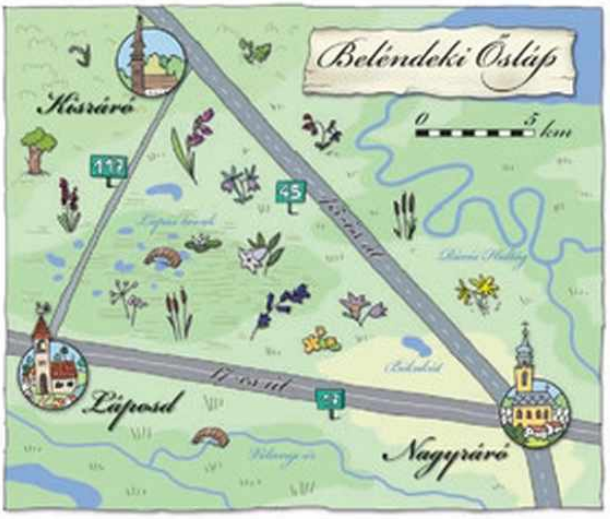
24. Az iskolai diákönkormányzat a nyolcadikosokat a ballagás előtt azzal lepi meg, hogy meghívja a Sakál Vokál nevű zenekart egy koncertre. A 75 nyolcadikos persze ingyen vehet részt a koncerten, de a többieknek jegyet kell venniük. Mivel a zenekar nagyon népszerű, rengeteg jegyet el lehetne adni. A diákönkormányzat azt szeretné, ha tele lenne a trapéz alakú udvar. A biztonsági előírások miatt azonban túl nagy zsúfoltság sem lehet, ezért úgy kell számolniuk, hogy egy személyre 60 x 60 cm-es terület jusson. Hány jegyet adhatnak el?



25. Mókás Pepi kirándulni indult a beléndeki ősláposba, hogy védett növényeket fotózzon. Túrázás közben rálépett egy kőre, és kibicsaklott a bokája. Szerencsére nála volt a mobiltelefonja, ezért segítséget tudott kérni. A láposban azonban nagyon nehéz megtalálni, ezért megpróbálta útbaigazítani a mentőcsapatot. Mindent elmondott, amire emlékezett:

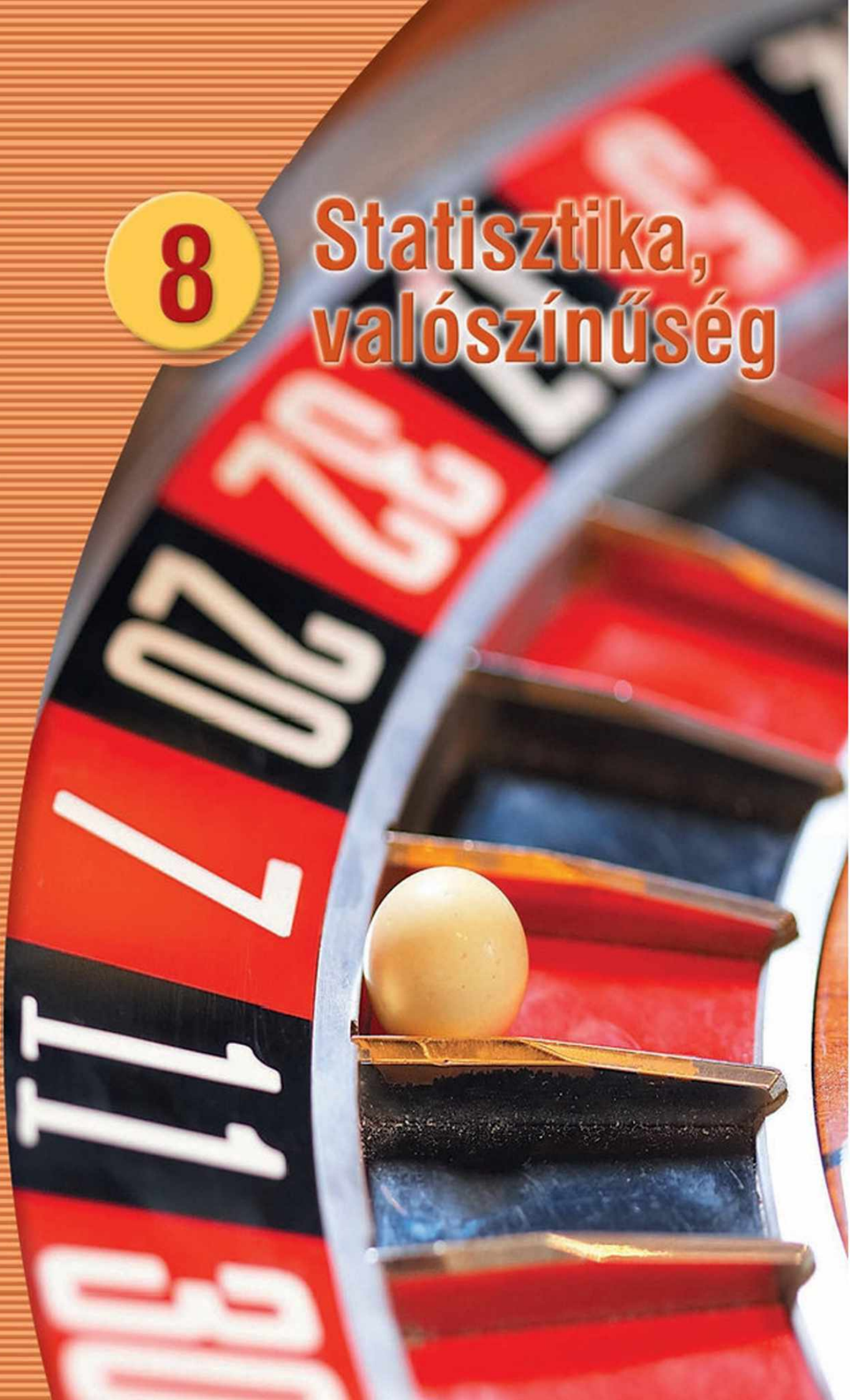
„Másfél órával ezelőtt éppen egyenlő távol voltam Kisrárótól, Nagyrárótól és Láposdtól. Akkor elhatároztam, hogy elmegyek lefotózni a mocsári gólyahíreket is. Nagyjából 4,5 km-t haladtam, amikor szétnéztem egy pillanatra. Onnan úgy látszott, hogy a 117-es úthoz már közelebb vagyok, mint a 45-öshöz.

Alig haladtam néhány lépést, amikor ráléptem arra a fránya kőre. Annyira bedagadt a bokám, hogy egy lépést se bírok megtenni. Innen látom a kisrárói és a láposdi templom tornyát is. Szerintem a kisrárói közelebb van, mint a láposdi."



A mentőcsapat vezetője tanulmányozza egy kicsit a térképet. Hol kell keresnie Mókás Pepit?

8 Statisztika, valószínűség



1. Adatok elemzése, átlag, medián

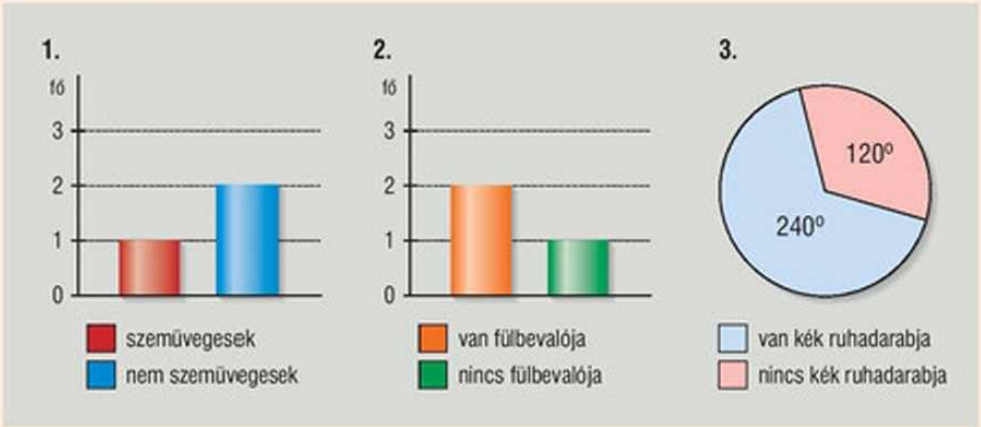


Készítsünk statisztikákat a rajzon látható csoportokról!

A hétköznapi életben gyakran találkozhatunk különféle statisztikai adatokkal, melyeket diagramok és átlagok alapján többféleképpen elemezhetünk.

1. példa

Az alábbi diagramokon ábrázolt statisztikák a fenti képen látható csoportok egyikéről készültek. Melyikről?



Megoldás

Az első diagramról leolvasható, hogy a csoportban 1 szemüveges és 2 nem szemüveges személy van. Ez a második és a harmadik csoportra igaz.

A második diagram szerint a csoportban 2 személynek van fülbevalója, 1-nek nincs. Ez mindegyik csoportra igaz.

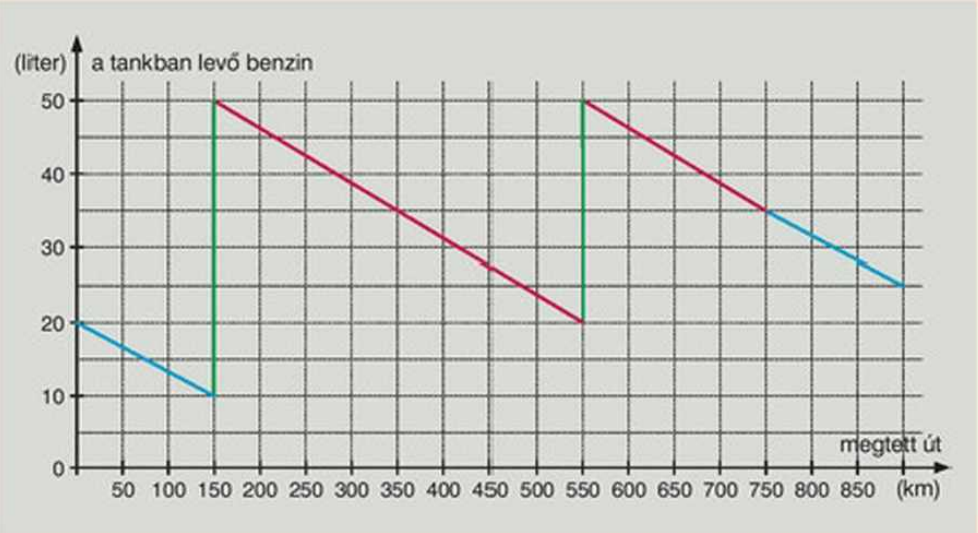
A harmadik diagram szerint a csoporttagok kétharmadán van kék ruhadarab, egyharmadán nincs. Ez az első és a második csoportra igaz.

Mindhárom feltétel a második csoportra teljesül, tehát a diagramok a második csoportról készültek.

Alkossatok csoportokat, készítsetek hasonló diagramokat, végül közösen találjátok ki, melyik diagram melyik csoportról készült!

2. példa

Gáborék hosszú autós kirándulásra mentek. Az első és az utolsó 150 km-t közúton tették meg, a többit autópályán. Az autó számítógépe grafikont készített, amely a megtett út és az autó tankjában levő benzin mennyisége közötti összefüggést mutatta.





a) Mennyi benzin volt a tankban induláskor?
b) Hányszor tankoltak útközben?
c) Mennyi benzint fogyasztott az autó összesen?
d) Mennyi volt az átlagfogyasztása (100 km-en)?
e) Hol volt nagyobb az átlagfogyasztása: közúton vagy autópályán?

Megoldás

a) Induláskor (0 km-nél) 20 liter benzin volt a tankban.

b) A tankolások alatt a kocsi áll, a tankban levő benzin mennyisége viszont nő. Két ilyen ugrás (zöld szakasz) látható a grafikonon, 150 és 550 km-nél. Tehát Gáborék útközben kétszer tankoltak.

c) Az elfogyasztott benzin:
– az 1. tankolásig: 20 – 10 = 10 liter;
– az 1. és 2. tankolás között: 50 – 20 = 30 liter;
– a 2. tankolás után: 50 – 25 = 25 liter.
Összesen az autó 10 + 30 + 25 = 65 liter benzint fogyasztott.

d) Az átlagfogyasztást úgy számítjuk ki, hogy az elfogyasztott benzin mennyiségét osztjuk azzal, ahányszor 100 km-t tett meg az autó.
A teljes út a grafikon alapján: 900 km.
Mivel ezalatt 65 liter benzint fogyasztott, 100 kilométerenként az átlagfogyasztása: $65 : 9 = 7{,}22 \frac{\text{liter}}{100\ \text{km}}$.

$$\text{Átlagfogyasztás} = \frac{\text{összes benzin literben}}{\text{összes út (100 km)}}$$

e) A grafikon meredekebb az autópályának megfelelő (piros) szakaszon, mint a közúton (kék), vagyis az autópályán gyorsabban csökken a benzin mennyisége, nagyobb a fogyasztás.

A különböző mérések során kapott adatok jellemzőit diagramokon szemléltetjük. A diagramokról leolvasható pl. a növekedés, a csökkenés, a legnagyobb és legkisebb érték, vagy az adatok egymáshoz viszonyított aránya.

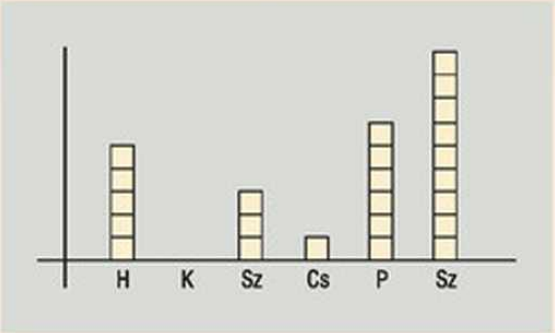
Az adatsokaságot jellemezhetjük a „közepükkel” is. Egy ilyen „középérték” például a számtani átlag.

Az átlag



3. példa

Imre matematikaversenyre készült, ezért elhatározta, hogy egy hétig átlagosan 5 feladatot old meg naponta. Egy lapra minden nap annyi kis négyzetet rajzolt, ahány feladatot azon a napon megoldott. Szombat estére ezt az ábrát kapta.



a) Átlagosan hány feladatot oldott meg az első 6 napon?

b) Hány feladatot kell vasárnap megoldania, hogy teljesítse a tervét?

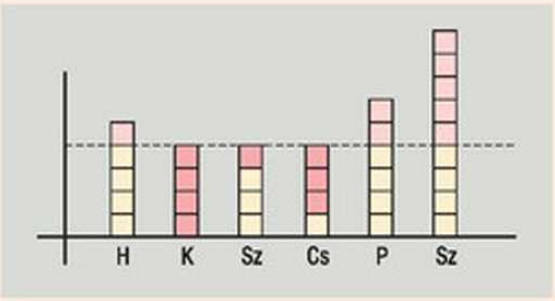
Megoldás

A napok számába az is beleszámít, amikor egy feladatot sem oldott meg!

a) Az első 6 napon összesen $5 + 0 + 3 + 1 + 6 + 9 = 24$ feladatot oldott meg, így az átlaga: $24 : 6 = 4$.

Az átlagot kirakhatjuk négyzetekkel is.

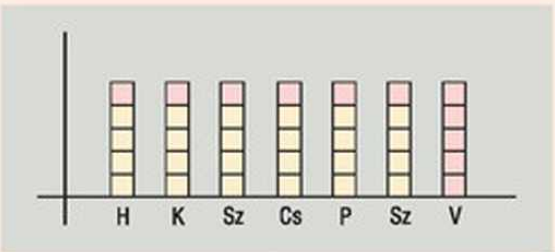
Az első 6 naphoz rakott négyzeteket úgy kell átrendezni, hogy mindegyik naphoz ugyananynyi jusson. Így minden naphoz 4 négyzet jut.



b) Ahhoz, hogy a 7 nap alatt megoldott feladatok átlaga 5 legyen, összesen $7 \cdot 5 = 35$ feladatot kell megoldania. Eddig 24-et oldott meg, így vasárnapra még $35 - 24 = 11$ van hátra.

A kérdésre válaszolhatunk a kis négyzetek kirakása alapján is.

Vasárnap meg kell oldania a vasárnapi 5 feladatot, és még az előző 6 nap 4-es átlagát is fel kell hoznia 5-re. Ez még napi 1, a 6 napra összesen 6 feladatot jelent.



Így Imrének vasárnap $5 + 6 = 11$ feladatot kell megoldania.

A medián

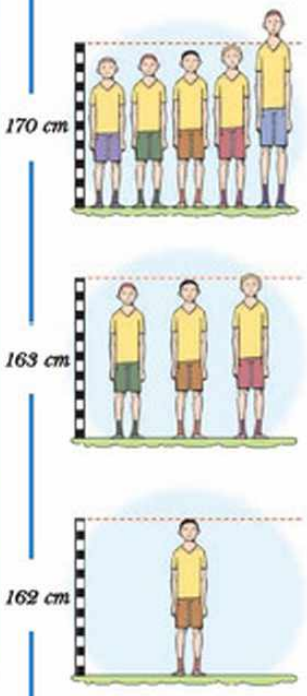
4. példa

A testnevelésórán 5 fős csapatok kosárlabdáznak. A csapat tagjainak magassága: Elemér 159 cm, Endre 156 cm, Ervin 205 cm, Emil 168 cm, Ede pedig 162 cm.

a) Mennyi a csapattagok magasságának átlaga?

b) Mennyi lenne az átlag a legalacsonyabb és a legmagasabb játékos nélkül?

c) Milyen magas a nagyság szerinti sorban a középső játékos?



Megoldás

a) Az 5 játékos magasságának átlaga:

$$(156 + 159 + 162 + 168 + 205) : 5 = 170 \text{ cm}.$$

b) A legalacsonyabb (156 cm) és a legmagasabb (205 cm) nélkül az átlag:

$$(159 + 162 + 168) : 3 = 163 \text{ cm}.$$

c) A nagyság szerinti sorban a középső játékos 162 cm magas.

Ha az előző példában az átlag alapján alkotunk véleményt az adatokról, akkor azt gondolhatjuk, hogy a csapat játékosai 170 cm körüliek. Ez azonban hamis kép a csapatról, hiszen annak tagjai egy kivétellel mind alacsonyabbak 170 cm-nél.

Tehát az átlag nem mindig jellemzi jól az adatokat, mert az átlagot egy kiugró érték eltorzíthatja.

Ha az adatokat nagyság szerint sorba rendezzük, akkor az adathalmazt a középső adattal is jellemezhetjük, mert ugyanannyi adat kisebb nála, mint amennyi nagyobb. Ezért előfordul, hogy ez a „középérték" pontosabb képet ad az adatokról, mint az átlag.

DEFINÍCIÓ: Ha páratlan számú adat van, akkor az adatok mediánjának nevezzük az adatok nagyság szerinti sorozatában a középső elemet. Páros számú adat esetén a medián a két középső adat átlaga.

5. példa

Zoli és Dani barátok, mindketten 13 évesek. Zoli bátyja 18, nővére 16 éves, húga és öccse pedig ikrek, és 10 évesek. Daninak egy 17 és egy 20 éves bátyja, valamint egy 2 éves kishúga van.

A medián vagy az átlag jellemzi jobban a gyerekek életkorát az egyes családokban?

10; 10; **13**; 16; 18

2; 13; 17; 20

15 **15**

Megoldás

Írjuk fel a gyerekek étetkorát növekvő sorrendben a két családban!

	Zoliék	Daniék
Életkorok	10; 10; 13; 16; 18	2; 13; 17; 20
A medián	13	$\frac{13+17}{2}=15$
Az átlag	$\frac{10+10+13+16+18}{5}=13{,}4$	$\frac{2+13+17+20}{4}=13$

Zoliék családjában az átlag és a medián közel egyenlő, a gyerekek életkorára mindkettő egyformán jellemző.

Daniék családjában az átlag jobban eltér a mediántól, mert Dani 2 éves húgának kora nagyon eltér a többiekétől. Náluk a medián jobban jellemzi az életkorok közepét, mint az átlag.

6. példa

Három pozitív egész szám mediánja 7, átlaga pedig 8.
Mennyi lehet a legnagyobb szám lehetséges legnagyobb értéke?

Megoldás

$\square \le 7 \le \square$

összegük:
$24-7=17$

A három szám mediánja 7, ezért a középső szám 7.

A három szám átlaga 8, ezért összegük: $3 \cdot 8 = 24$. Ebből következik, hogy a legkisebb és a legnagyobb szám összege: $24 - 7 = 17$.

A nagyobb szám akkor lesz a lehető legnagyobb, ha a kisebb a lehető legkisebb pozitív egész szám, azaz 1.

Ekkor a legnagyobb szám a 16.

Feladatok

1. A táblázat az 1000 lakosra jutó mozi-, színház- és hangverseny-látogatások számát mutatja Magyarországon. (➡)
   a) Készítsünk diagramot az adatokból!
   b) Írjunk újságcikket az adatok alapján! Elemezzük az arányokat! Mikor nőttek, mikor csökkentek a számok?

	mozi	színház	hangverseny
1990	3495	482	72
1995	1373	398	45
2000	1426	393	42
2005	1199	437	50



2. Egy kézilabdameccsen felmérést készítettek a nézők életkoráról. Nyolc ember válasza a következő volt: 17; 19; 42; 38, 56; 23; 28; 32. Mennyi a megkérdezett nyolc ember életkorának átlaga, illetve mennyi a mediánja?

3. Végezzünk felmérést, és számítsuk ki az osztályba járó gyerekek szüleinek átlagéletkorát és életkorának mediánját!

4. Az adatok nagyság szerinti sorozatában hányadik a medián, ha az adatok száma
   a) 9; *b)* 31; *c)* 101; *d)* 4?

5. Zsófi a cukrászdában süteményt vásárol a nővére névnapjára.
   a) Mennyi pénzt vigyen magával, ha ötüknek fejenként két szelet tortát akar venni, és tudja, hogy egy szelet torta átlagosan 200 Ft-ba kerül?
   b) Mennyibe kerülhetett a legdrágább sütemény, ha a legolcsóbb 190 Ft és a vásárolt 10 szelet sütemény árának átlaga 200 Ft volt?
   c) Ha a sütemények árának átlaga 200 Ft, akkor lehet-e a mediánja 200 Ft, 180 Ft, illetve 220 Ft?

6. Feri első két matematikadolgozata ebben az évben kettes és hármas lett, utána azonban 7 ötöst és 2 négyest szerzett. Mennyi a jegyei átlaga és mediánja? Mivel érveljen, ha jobb jegyet szeretne kapni év végén?

7. Az iskolai röplabdacsapat pályán levő 6 tagjának magassága: 162 cm, 158 cm, 172 cm, 168 cm, 178 cm és 166 cm.
   a) Mennyi a tagok magasságának átlaga és mediánja?
   b) Hogyan változik az átlag és a medián, ha a 162 cm-es játékos helyett egy 192 cm magas játékost küld pályára az edző?

8. Csaba az úszóversenyt megelőző 10 napon átlagosan 5 km-t úszott naponta. Mennyit úszott az utolsó napon, ha előtte az átlaga 5200 m volt?

9. Zénó a Kőszívű ember fiai című regényt olvassa. Eddig az átlaga 25 oldal volt naponta. Ma ráért, így 52 oldalt olvasott, ezért a napi átlaga 28 oldalra nőtt. Hány napja olvassa Zénó a könyvet?

10. Egy városi autóbuszvonalon 7-től 11 óráig félóránként számolják az utasokat. Az eredményt a táblázat mutatja.

óra	7.00	7.30	8.00	8.30	9.00	9.30	10.00	10.30	11.00
utasok száma	94	88	42	25	10	15	18	16	20

Mennyi az egy buszon utazó utasok számának átlaga és mediánja? A vállalat vezetője elégedett az átlagos utasszámmal. Mit mondhatnak az utasok?

Rejtvény

Egy zsákba olyan számokat teszünk, amelyek átlaga 6. Néhányat kihúzunk közülük. Lehetséges-e, hogy a kihúzott számok átlaga 5, a zsákban maradtaké pedig 8?

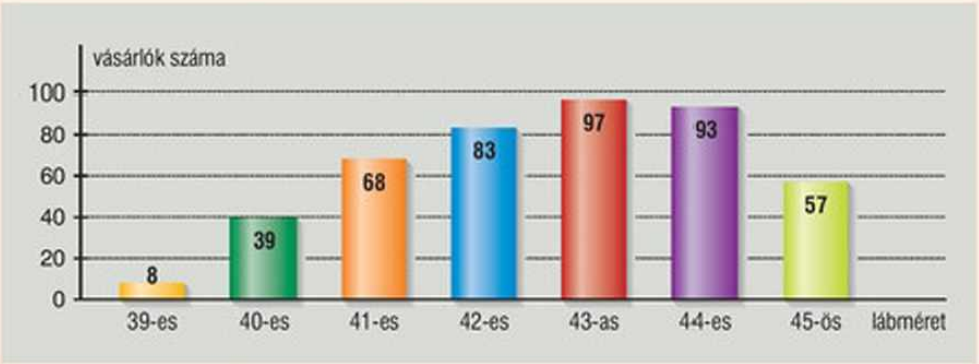
2. A módusz, a gyakoriság és a relatív gyakoriság



Határozzuk meg az osztályban a tanulók lábméretének átlagát, mediánját és móduszát!

1. példa

Egy sportboltba fiú görkorcsolyákból új modelleket várnak. A rendelés előtt felmérést végeztek a vásárlók lábméretéről. Ennek eredményét mutatja a diagram. Melyik méretből rendeljenek a legtöbbet?



Egy adat gyakorisága megmutatja, hogy az adat hányszor fordul elő az adatsokaságban.

Megoldás

A diagramról leolvasható, hogy a leggyakoribb lábméret a 43-as. Tehát a 43-as méretű görkorcsolyából érdemes a legtöbbet rendelni.

A vásárlók lábméretének átlaga és mediánja semmit sem mond arról, hogy melyik méretből rendeljék a legtöbbet.

Bizonyos helyzetekben az adatok átlaga és mediánja helyett hasznosabb a leggyakoribb adat ismerete.

Módusz

DEFINÍCIÓ: Az adatok móduszának a leggyakoribb adatot nevezzük.

Előfordulhat, hogy az adatoknak több módusza is van. Például az 1; 1; 1; 2; 2; 3; 4; 4; 4 adatok között a legnagyobb gyakoriság a 3, hiszen az 1 és a 4 is 3-szor fordul elő. Ezért az adatok módusza az 1 és a 4.

2. példa

Máté a legutóbbi félévben változatos jegyeket szerzett angolból:
1; 2; 4; 1; 3; 1; 4; 5; 4; 5; 5; 5.

a) Hányasra áll Máté a jegyek átlaga alapján?

b) Mivel érveljen, ha jobb jegyet szeretne?

Megoldás

a) A jegyek átlaga:

$$\frac{1+1+1+2+3+4+4+4+5+5+5+5}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33.$$

A jegyek átlaga alapján Máté 3-asra áll.

b) Máté az utóbbi időben több jó jegyet szerzett, ezért megpróbálkozik a medián kiszámításával. Nagyság szerint növekvő sorba írja a jegyeket:

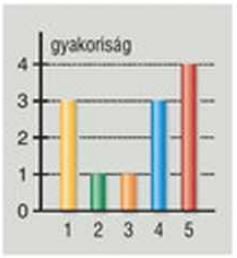
1; 1; 1; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5.

A 12 adat közül a két középső 4-es, ezek átlaga is 4, így a jegyek mediánja 4-es.

Máté még jobban áll, ha a jegyek móduszát tekintjük, hiszen a leggyakoribb jegye az 5-ös.

Tehát Máté a jobb jegy érdekében hivatkozzon a jegyek mediánjára vagy móduszára.





A jegyek gyakorisága

Az adatok átlaga, mediánja és módusza lehet nagyon eltérő is.

3. példa

Hat természetes szám átlaga és módusza is 10. Mi lehet a hat szám, ha két 8-as van köztük?

Megoldás

A számok módusza 10, ezért a 10 fordul elő legtöbbször a számok között. Mivel van két 8-as, legalább három 10-esnek kell lennie. Így öt szám már megvan: 8, 8, 10, 10, 10.

A hat szám átlaga 10, így összegük 60. A hiányzó számot az átlagból számíthatjuk ki:

$$60 - (8 + 8 + 10 + 10 + 10) = 14.$$

Tehát a hat szám: 8; 8; 10; 10; 10; 14.

A 3. példában a számok átlaga, mediánja és módusza megegyezett.

Érdekesség

1938-ban Frank Benford fizikus azt állította, hogy a világon bárhol leírt számok majdnem harmada 1-essel kezdődik. Ezt Benford-törvénynek nevezik, és 1988-ban Theodore P. Hill matematikailag be is bizonyította. A további számjegyek egyre ritkábban fordulnak elő. A 9-essel kezdődő számok aránya már kevesebb, mint 5%.

A mérési eredményeket egyenként ábrázolva nem mindig szemléletes az ábra. Ezért hasznos lehet, ha a mérési tartományt sávokra osztjuk, és az oszlopdiagramon az azokba eső gyakoriságokat ábrázoljuk.

4. példa

Végezzük el a mérést az osztályban!

Egy osztályban megmértük, hogy ki mennyire tudja megbecsülni az 1 perces időtartamot. A mérést párokban végeztük: a párok egyik tagja mért, a másik tippelt. Amikor a második tanuló azt mondta, hogy START, akkor az első elindította, amikor pedig azt mondta, hogy STOP, akkor az első megállította a stoppert.

18 mérés eredménye másodpercben a következő volt:

42; 44; 45; 48; 49; 51; 52; 54; 55; 55; 56; 57; 59; 61; 63; 63; 65; 71.

a) Mennyi a mérési eredmények átlaga?

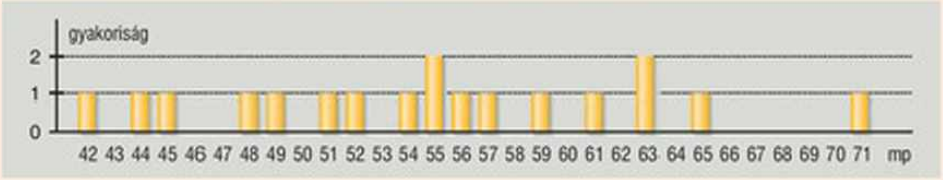
b) Szemléltessük az adatokat diagramon!

Megoldás

a) A mérési eredmények átlaga:

$$\frac{42 + 44 + 45 + 48 + \ldots + 63 + 63 + 65 + 71}{16} = 55 \text{ másodperc.}$$

b) A mérési eredmények gyakorisági diagramja:



Mivel mindegyik érték legfeljebb kétszer fordul elő, ez a diagram nem szemlélteti jól az adatokat.

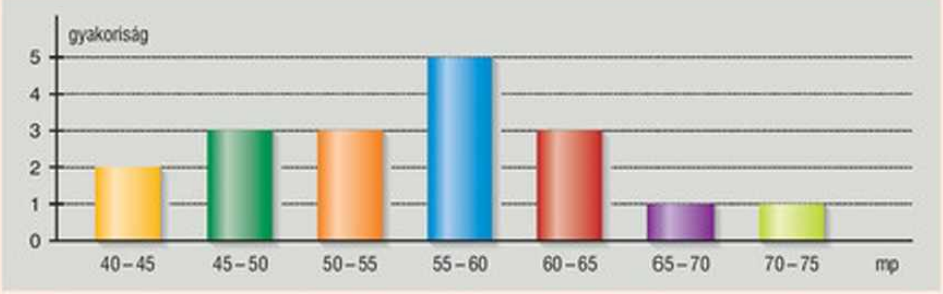
Ezért készítsünk egy új diagramot a következő módon: az időtartamot 40-től 75 másodpercig 5 másodperces szakaszokra osztjuk, és megszámoljuk, hogy ezekbe hány eredmény esik.

A sávokhoz a kezdőpontjuk is hozzátartozik, a végpontjuk nem.

sávok (mp)	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75
gyakoriság	2	3	3	5	3	1	1

Az így kapott diagram:

Rajzoljunk szemmértékre 10 cm hosszú szakaszt, 45°-os szöget, majd mérjük meg, hogy mekkora lett! Összesítsünk több mérési eredményt, és ábrázoljuk az adatokat!



Azt látjuk, hogy a mérési tartomány közepe táján, az átlag körül a legnagyobb a gyakoriság.

5. példa

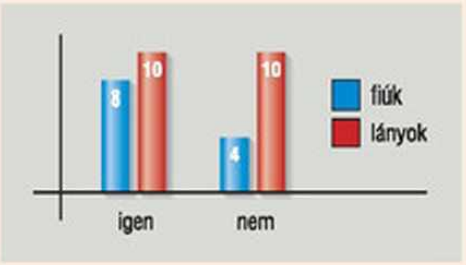
A hetedikes gyerekeket a húsvéti szokásaikról kérdezték. A fiúkat arról, hogy járnak-e locsolkodni, a lányokat pedig arról, hogy várják-e a locsolkodókat. A 12 fiú közül 8 igennel, 4 nemmel; a 20 lány közül pedig 10 igennel és 10 nemmel válaszolt.

a) Ábrázoljuk az adatokat oszlop- és kördiagramon!

b) Mit mondhatunk arról, hogy a fiúk vagy a lányok követik inkább a locsolkodás szokását?

Megoldás

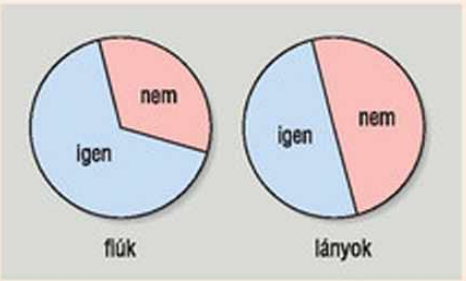
a) Az adatokat oszlopdiagramon ábrázolva csak azt látjuk, hogy igennel és nemmel is a lányok válaszoltak többen.



Készítsünk kördiagramot!

Fiúk: $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ részük válaszolt igennel.

Lányok: $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ részük válaszolt igennel.



b) Bár több lány válaszolt igennel, mint fiú, mégsem mondhatjuk azt, hogy a lányok jobban szeretnék a locsolkodást a fiúknál, mert összesen több lányt kérdeztek meg, mint fiút. Ezért célszerűbb azt nézni, hogy a válaszok hányad része igen a fiúknál, ill. a lányoknál.

Az igenek gyakoriságának és az adatok számának aránya

a fiúknál: $\frac{8}{12}$; a lányoknál: $\frac{10}{20}$.

Vagyis a fiúk **nagyobb arányban** követik a locsolkodási szokásokat.



Két csoportban a gyakoriságok összehasonlítása félrevezető lehet, ha az összes adat száma a két csoportban különböző. Ilyenkor hasznosabb a gyakoriságnak az összes adathoz viszonyított arányát számolni.

DEFINÍCIÓ: Egy adat relatív gyakoriságának nevezzük a gyakoriság és az összes adat számának hányadosát.

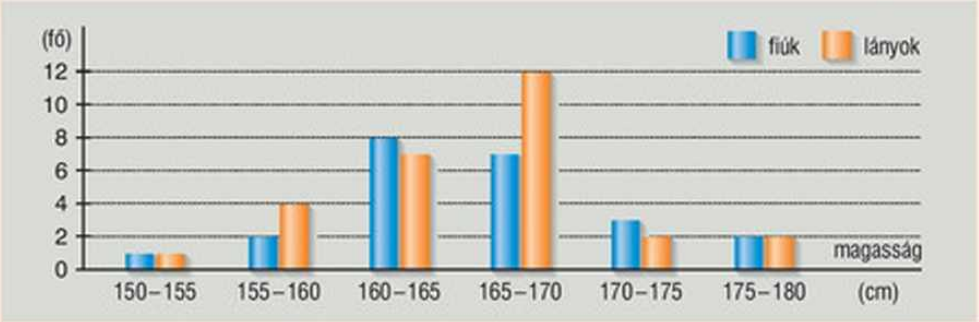
relatív gyakoriság

$$\text{A relatív gyakoriság} = \frac{\text{a vizsgált adat gyakorisága}}{\text{az összes adat}}.$$

A sávokhoz a kezdőpontjuk is hozzátartozik, a végpontjuk nem.

6. példa

Egy iskolában megmérték a 7. osztályos fiúk és lányok magasságát. Az adatokat sávokra osztották, és a következő diagramot rajzolták.



a) Mennyi a magasságok mediánja a fiúk, illetve a lányok esetén?
b) A fiúk hány százaléka alacsonyabb 165 cm-nél?
c) A lányok hány százaléka nem alacsonyabb 170 cm-nél?
d) A fiúk vagy a lányok közül vannak többen a 165 cm-nél alacsonyabbak?



Megoldás

Az adatokat itt a magassági sávok jelentik, az egy sávba eső gyerekek száma az adat gyakorisága. Ezt az oszlopdiagramról leolvashatjuk.

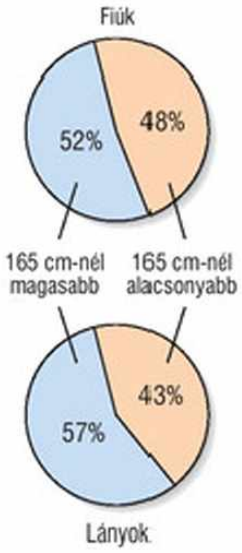
a) A diagramról leolvasható, hogy $1 + 2 + 8 + 7 + 3 + 2 = 23$ fiú és $1 + 4 + 7 + 12 + 2 + 2 = 28$ lány van összesen a két osztályban.

A fiúk magasságának mediánja a tornasorban a középső, azaz a 12. fiú magassága, ami 165 és 170 cm között van.

A lányoknál a medián a sorban a 14. és a 15. lány magasságának átlaga. Mivel mindkettejük magassága 165 és 170 cm közé esik, így a lányok magasságának mediánja is 165 és 170 cm között van.

b) A diagramról leolvasható, hogy a 23 fiú közül 11 alacsonyabb 165 cm-nél, ez a fiúk $\frac{11}{23} \cdot 100 \approx 48\%$-a.

A fiúk közül a 165 cm-nél alacsonyabbak relatív gyakorisága 48%.



c) A 28 lány közül 4 nem alacsonyabb 170 cm-nél, ez a lányok $\frac{1}{7}$-e, azaz közelítően 14%-a. A lányok közül a 170 cm-nél nem alacsonyabbak relatív gyakorisága 14%.

d) A fiúk közül 11-en, a lányok közül 12-en alacsonyabbak 165 cm-nél, ez alapján a lányok száma nagyobb.

Ha viszont figyelembe vesszük, hogy több lány van, és azt számoljuk, hogy a gyerekek hány százaléka alacsonyabb 165 cm-nél, akkor azt kapjuk, hogy ez a fiúknak a 48%-a, lányoknak pedig a $\frac{12}{28} \cdot 100 \approx 43\%$-a. Tehát a fiúk közt nagyobb arányban vannak a 165 cm-nél alacsonyabbak, mint a lányok közt.

Feladatok

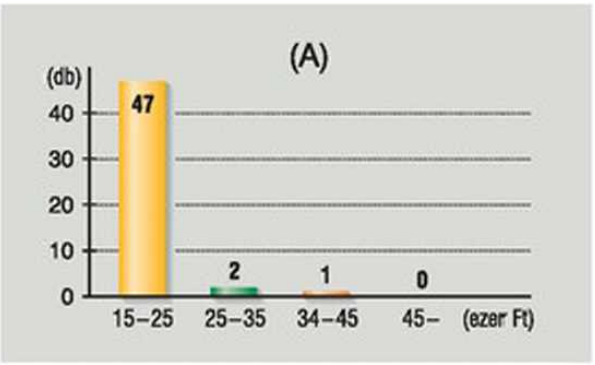
1. Készítsünk felmérést az osztályban arról, hogy melyik fajta fogkrémet hányan használják!
   a) Ábrázoljuk az adatokat diagramokon!
   b) Mennyi az egyes fogkrémek előfordulásának gyakorisága, relatív gyakorisága?
   c) Melyik fogkrémet használják a legtöbben?

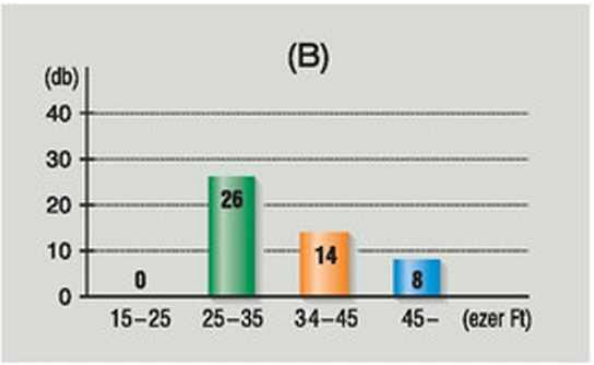
2. Készítsünk statisztikát arról, hogy a tankönyv egyenletekkel foglalkozó fejezetének 5 egymás utáni oldalán hány szám kezdődik 1-essel, hány szám 2-essel, ... és így tovább, hány szám kezdődik 9-essel!
   a) Mennyi a különböző kezdőszámjegyek gyakorisága és relatív gyakorisága?
   b) Melyik szám a kezdőszámjegyek módusza?

3. Keressünk teli gyufásdobozokat, és számoljuk meg, hogy hány gyufaszál van bennük! Jegyezzük fel az egy dobozban levő gyufaszálak számát!
   a) Ábrázoljuk az eredményeket!
   b) Mennyi az egy dobozban levő gyufák számának átlaga, mediánja, módusza?

4. Válasszunk ki egy regényből egy oldalt, és készítsünk statisztikát, hogy az egyes mondatok hány szóból állnak! Mennyi az egy mondatban levő szavak számának átlaga, mediánja, módusza? Melyik jellemzi legjobban az adatokat?

5. Az *A)* és *B)* betűvel jelölt diagramok egy bevásárlóközpontban és egy kerékpárszaküzletben egy hónap alatt eladott biciklik számáról készültek.





   a) Becsüljük meg az eladott biciklik árának átlagát, mediánját!
   b) A gyakoriságok alapján számoljunk relatív gyakoriságokat, és ábrázoljuk őket!
   c) Vajon melyik diagram vonatkozhat a bevásárlóközpontra, és melyik a kerékpárszaküzletre?

6. Ági feljegyezte, hogy az osztályuk tanulói a héten hány napot hiányoztak. Tegyünk fel az adatok elemzésével megválaszolható kérdéseket, és válaszoljunk is rájuk!

?	0 napot	1 napot	2 napot	3 napot	4 napot	5 napot
?	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | |	𝍸 |	1	𝍸	1	| |

7. Felmérések során összegyűjtött adatokat kell elemeznünk. Ehhez diagramokat készítünk, és különböző közepeket számolunk.

Milyen diagramot és közepet válasszunk az alábbi felmérésekhez? Melyik mit mutat?



a) Egy kézilabda-játékos meccsenként dobott hétméteresei közül hányat értékesített, hányat nem.

b) Egy étteremben a vendégek száma a nyitvatartási időben óránként.

c) A különböző típusú mobiltelefonok meghibásodásának száma.

d) Az iskolás korú gyerekek hány órát néznek tévét naponta Magyarországon.

8. Az iskolaorvos megmérte a 7. osztályos fiúk és a lányok tömegét kilogrammban.

Fiúk: 44; 54; 50; 47; 50; 58; 53; 45; 40; 65; 72; 44; 57; 49; 41; 47; 59; 70; 49; 46; 39; 45; 77.

Lányok: 56; 39; 49; 67; 46; 47; 41; 45; 53; 51; 63; 51; 70; 47; 60; 44; 62; 54; 32; 49; 56; 55; 45; 49; 62; 65; 64; 43.

a) Készítsünk sávos gyakorisági diagramot (a sávok legyenek 5 kilogrammonként)!

b) Számoljunk a sávokba eső gyerekek számából relatív gyakoriságot, és ábrázoljuk!

c) Számoljunk átlagot, mediánt, móduszt!

d) Írjunk rövid cikket az iskolaújságba az adatok elemzése alapján!

9. Mennyi annak az öt számnak az átlaga, melyek

a) mediánja $\frac{3}{5}$, módusza $\frac{1}{2}$ és $\frac{4}{5}$; *b)* mediánja 0, módusza -2 és $\frac{3}{2}$;

c) mediánja -3, módusza -4 és a két legnagyobb szám összege -3?

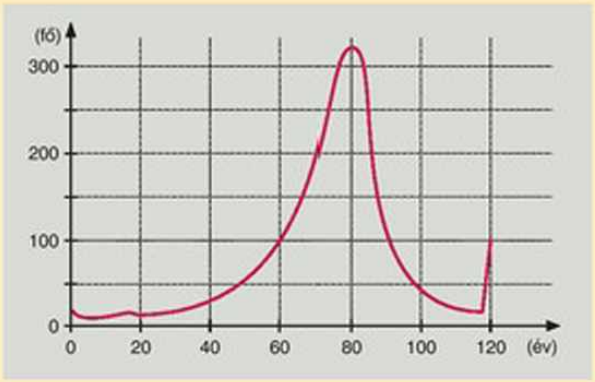
10. Hat egész szám átlaga 5, mediánja 3, módusza 1 és 3. Mekkora lehet a legnagyobb szám?

Rejtvény

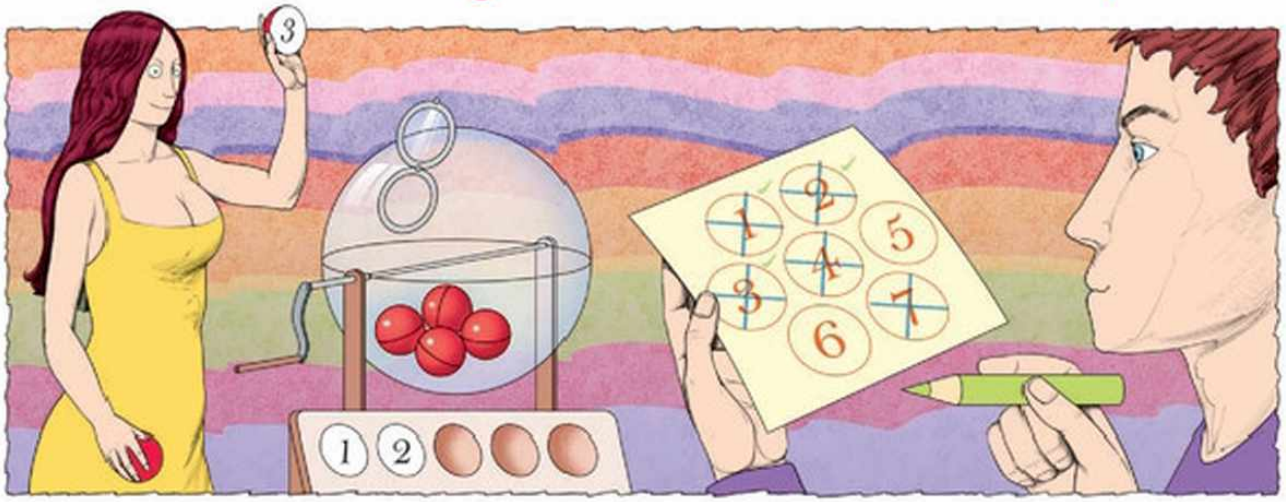
Egy város anyakönyvi hivatala statisztikai felmérés alapján grafikont készített a helyi halálozási adatokról.

A grafikon azok számát mutatja, akik *x* és *x* + 1 éves koruk között halnak meg. Eszerint 90 és 100 éves koruk közt egyre kevesebben halnak meg, ami azt jelenti, hogy ebben az életkorban a legjobb az életben maradás esélye!

Hogy lehet ez?



3. A valószínűség becslése



A lottóhúzás során egy szám kihúzása **véletlenszerű,** mert nem tudjuk előre meghatározni, hogy melyik számot húzzák ki. A sorsolás akkor szabályos, ha mindegyik számot ugyanakkora eséllyel húzhatják.

A véletlen jelenségek vizsgálatával foglalkozik a **valószínűség-számítás.** Segítségével kiszámíthatjuk például, hogy lottóhúzáskor mekkora eséllyel lesz 4-es vagy 5-ös találatunk.

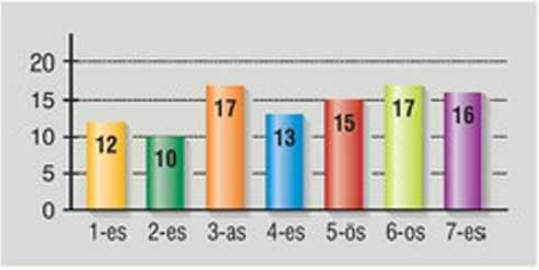
1. példa

Kati kedvenc száma a 7-es, Palié a 4-es. Ha az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 számok közül véletlenszerűen húznak egyet, melyikük kedvenc számát húzzák ki nagyobb eséllyel? Pali azt állítja, hogy az övét, mert a 4-es középen van a számok sorában. Kati tiltakozik. Kinek van igaza?

Megoldás

A sorsolás szabályos, így mindegyik számot ugyanakkora eséllyel húzhatják ki. Tehát Katinak és Palinak egyforma esélye van arra, hogy a kedvenc számát kihúzzák.

Elvégeztünk 100 húzást úgy, hogy mindig a hét szám közül húztunk egyet, feljegyeztük az eredményt, és visszatettük a számot. A diagram a húzássorozat eredményét mutatja. Figyeljük meg a 4-esek és a 7-esek számát!



Ebben a kísérletben nem kaptunk ugyanannyiszor 4-est, mint 7-est, pedig a két szám véletlenszerű húzásának esélye ugyanakkora kell hogy legyen. A konkrét kísérletekben a gyakoriság eltérhet, de ha nagyon sok kísérletet végzünk, a kihúzott 4-esek és a 7-esek száma közel lesz egymáshoz.

Annak ellenére, hogy két szám kihúzásának ugyanakkora az esélye, a kísérletet elvégezve a számok általában nem ugyanannyiszor fordulnak elő.

Készítsük el az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számkártyákat, és húzzunk egyet! Jegyezzük fel, mit húztunk, majd rakjuk vissza! 20 húzásból melyik fordult elő többször: a 4-es vagy a 7-es? Mindenki válasszon kedvenc számot a számkártyákon levő számok közül, és figyeljük meg, kinek a kedvenc száma fordul elő legtöbbször!



2. példa

Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 számok közül véletlenszerűen húzunk egyet. Melyiknek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy a húzott szám legalább 3, vagy annak, hogy a húzott szám legfeljebb 3?

Megoldás

A relatív gyakoriság: $\frac{\text{gyakoriság}}{\text{kísérletek száma}}$.

Az esélylatolgatásra két módszert alkalmazhatunk.

Következtetéssel: összehasonlítjuk a lehetséges esetek számát.

Legalább 3-ast akkor húzunk, ha a 3; 4; 5; 6; 7 számok közül húzunk egyet. Ez 5 lehetőség. Legfeljebb 3-ast akkor húzunk, ha az 1; 2; 3 számok közül húzunk egyet. Ez 3 lehetőség.

Tehát a „legalább 3-as” húzásának nagyobb az esélye.

Kísérletezéssel: többször elvégezzük a kísérletet, és összehasonlítjuk a gyakoriságokat.

Az előzőleg bemutatott 100 húzásból a „legalább 3-as” húzásának gyakorisága:

$$17 + 13 + 15 + 17 + 16 = 78.$$

A „legfeljebb 3-as” húzásának gyakorisága:

$$12 + 10 + 17 = 39.$$

A kísérletben a „legalább 3-as” húzásának relatív gyakorisága: $\frac{78}{100}$, a „legfeljebb 3-as” húzásának relatív gyakorisága: $\frac{39}{100}$.

A „legalább 3-as” húzásának lényegesen nagyobb a gyakorisága, mint a „legfeljebb 3-as” húzásának, ezért azt becsüljük, hogy nagyobb eséllyel húzunk legalább 3-at, mint legfeljebb 3-at.

3. példa

Zoli azt állítja, hogy ha az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 számok közül húzunk egyet, akkor a húzott szám ugyanakkora eséllyel lesz páros, mint páratlan, hiszen két lehetőség van, vagy páros, vagy páratlan számot húzunk. Igaza van-e?

Megoldás

Következtetéssel: összehasonlítjuk a lehetséges esetek számát.

Mindegyik számot ugyanakkora eséllyel húzhatjuk. A hét számból 3 páros és 4 páratlan, így páratlant többféleképpen húzhatunk, mint párosat. Tehát a páratlan szám húzásának nagyobb az esélye.

Kísérletezéssel: többször elvégezzük a kísérletet, és összehasonlítjuk a gyakoriságokat.

Az előzőleg bemutatott 100 húzásból a páros szám húzásának gyakorisága:

$$10 + 13 + 17 = 40,$$

a páratlan szám húzásának gyakorisága:

$$12 + 17 + 15 + 16 = 60.$$

A kísérletben a páros szám húzásának relatív gyakorisága: $\frac{40}{100}$, a páratlan szám húzásának relatív gyakorisága: $\frac{60}{100}$.

Mivel többször húztunk páratlan számot, mint párosat, így azt becsüljük, hogy a páratlan szám húzásának nagyobb az esélye.

A 331. oldalon leírt kísérletben az első 10 húzás a következő volt:

2; 2; 5; 6; 3; **4**; 4; 7; 2; 3.

Láthatjuk, hogy ekkor a kihúzott számok között még több páros van, mint páratlan.

Ha a lehetőségek száma között kicsi az eltérés, valószínűségi kísérletek elvégzésekor előfordulhat, hogy a nagyobb esélyű eseménynek kisebb a gyakorisága. Ha kellően nagy számú kísérletet végzünk el, akkor a gyakoriságokból már általában jól következtethetünk az esélyekre.



Játsszuk el párban a játékot!

4. példa

Anna és Bálint a következő játékot játssza:

Anna piros és kék színű tollal beszínezi egy kocka két lapját az egyik, négy lapját pedig a másik színre, de ezt Bálint nem látja.

Ezután 10-szer feldobja a kockát, és mindegyik dobás után megmondja Bálintnak, hogy milyen színt dobott. A 10 dobás után Bálint tippelhet, hogy Anna melyik színnel színezett be két lapot, és melyikkel négyet.

Anna újabb 10 dobása után Bálint dönthet, hogy fenntartja vagy megváltoztatja a tippjét. Anna addig dobálja a kockát, amíg Bálint biztos nem lesz abban, hogy melyik színből van két lap.

Ha Anna a következő színeket dobta, akkor melyik színből van két lap, és melyikből négy?

1. sorozat: □□□□□□□□□□ 2. sorozat: □□□□□□□□□□
3. sorozat: □□□□□□□□□□ 4. sorozat: □□□□□□□□□□

Megoldás

A kocka ugyanolyan eséllyel eshet a hat lapja közül bármelyikre.

Ha a kocka lapjai közül kettő piros és négy kék, akkor
több lehetőség van arra, hogy Anna kéket dobjon,

⇓

így a kék dobásának **nagyobb az esélye.**

⇓

Ekkor a dobások sorozatában általában több lesz a kék, mint a piros, vagyis a kék dobásnak **nagyobb lesz a gyakorisága.**

A kísérletben a „kék" relatív gyakorisága:

$\frac{24}{40} = 0{,}6,$

a „piros" relatív gyakorisága:

$\frac{16}{40} = 0{,}4.$

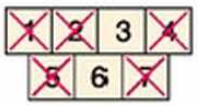


több lehetőség
↓
nagyobb esély
↓
általában nagyobb gyakoriság

Ránézésre is látszik, hogy Anna a kékből dobott többet. Az első sorozatban 7 : 3, a másodikban 6 : 4, a harmadikban 5 : 5, a negyedikben 6 : 4 az arány a kék javára. A harmadik sorozat kivételével Anna többször dobott kéket, mint pirosat, vagyis az adatok módusza a „kék".

Tehát Bálint nyugodtan tippelhet a kékre.

Az adatok módusza segíti a valószínűségi becslést.



5. példa

Az „5 a 7-ből” lottóban az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 számok közül 5-öt húznak ki, így 5-re kell tippelni. A következő események közül melyik biztos, melyik lehetséges, és melyik lehetetlen? Játsszuk le a játékot!

A) Pontosan 5 találatunk van.
B) Pontosan 2 találatunk van.
C) Legalább 3 találatunk van.

Megoldás



A) Lehetséges, hogy pontosan 5 találatunk legyen. Ha például az 1; 2; 3; 4; 5 számokat tippeltük, lehetséges, hogy éppen ezeket húzták ki, vagyis ötösünk van. Ha viszont az 1; 2; 3; 4; 6 számokat húzták, akkor nincs ötösünk.

B) 2 találatunk akkor lehet, ha 3 olyan számot tippeltünk, amelyet nem húztak ki, és 2 olyat, amelyet kihúztak. Viszont a 7 szám közül 5-öt húznak, így csak 2 „rossz” szám van. Így lehetetlen, hogy 2 találatunk legyen.

C) Az előzőek alapján az általunk tippelt 5 számból legfeljebb 2 „rossz” szám lehet, vagyis legalább 3 találatunk van. Tehát biztos, hogy van legalább 3 találatunk.

6. példa

Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 számok közül húzunk néhányat.

Legkevesebb hány számot kell kihúznunk, hogy

a) biztosan legyen köztük két szomszédos;
b) biztosan legyen köztük kettő, amelyek különbsége páros?

Megoldás

Az „5 a 7-ből” lottóban (amikor 7 szám közül húzunk 5-öt) biztosan lesz két szomszédos a kihúzott számok között.

a) Kezdjük az első számmal, és húzzunk ki minden második számot!

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7$$
$$2 \quad 4 \quad 6$$

Az így kihúzott 4 páratlan szám között nincsen két szomszédos. Ennél több számot azonban nem húzhatunk ki úgy, hogy ne legyen köztük két szomszédos szám.

Akárhogyan húzunk 5 számot, lesz köztük két szomszédos.

Két szám azonos paritású, ha mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan.

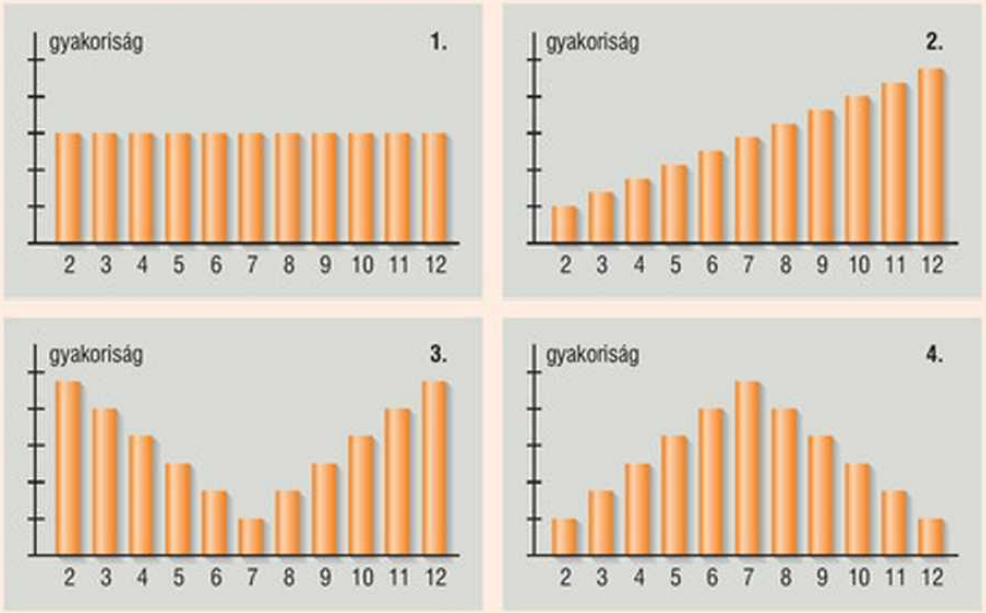
b) Páros – páros = páros és páratlan – páratlan = páros.

Így a kihúzott számok között vagy két páros, vagy két páratlan számnak kell lennie. Ha 2 számot húzunk, akkor még lehet, hogy az egyik páros, a másik páratlan. A 3. szám vagy páros, vagy páratlan, így a 3 szám között már biztosan van két azonos paritású.

Tehát legkevesebb 3 számot kell kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük kettő, amelyek különbsége páros.

7. példa

Egy piros és egy kék dobókockával dobtunk. Feljegyeztük a dobott számok összegét, és a gyakoriságokat ábrázoltuk. A következő diagramok közül melyikhez hasonlíthat legjobban az, amit kaptunk?



Végezzük el a kísérletet!

Megoldás

A dobott számok összege csak úgy lehet 2, hogy 1 + 1-et dobunk. 7 viszont 6-féleképpen lehet: 1 + 6, 6 + 1, 2 + 5, 5 + 2, 3 + 4, 4 + 3. Tehát a 7-es összeg valószínűsége nagyobb, ezért általában többször fordul elő, mint a 2-es összeg. Ezért az várható, hogy a gyakorisági diagram nem hasonlít az 1. és a 3. diagramra.

A 12-es összeg megint csak egyféleképpen lehet: ha 6 + 6-ot dobunk. Ezért ennek is akkora az esélye, mint a 2-es összegnek. Ezért várható, hogy a gyakorisági diagram a 2. diagramra sem hasonlít.

Tehát a megadott diagramok közül a 4.-hez hasonlíthat legjobban a gyakoriságok diagramja.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A dobott számok összegének táblázatáról a lehetőségek száma is leolvasható.

Játék

Minden játékos kap 20 korongot. Leírják egy papírra a számokat 1-től 12-ig, és mindegyik mellé raknak valamennyit a korongjaikból.

Ezután dobnak két kockával, és megnézik a dobott számok összegét. Az ennek megfelelő szám mellől levehet egy korongot az, akinek még van ott korongja.

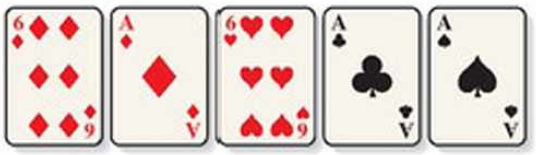
Az győz, akinek leghamarabb elfogynak a korongjai.



Feladatok

1. Az iskolai farsangon 1–480-ig megszámozott tombolaszelvényeket árultak (egyesével, sorban), és mindet eladták. Gabinak a 240-es szám jutott, Áginak pedig a 480-as. Kinek van nagyobb esélye az első nyereményre?

2. Az ábrán látható kártyákat megfordítjuk, összekeverjük, és véletlenszerűen húzunk közülük egyet. Melyik eseménynek nagyobb az esélye?



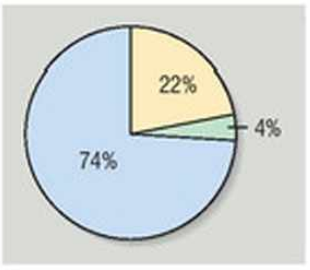
   a) Annak, hogy pirosat, vagy annak, hogy feketét húzunk?
   b) Annak, hogy ászt, vagy annak, hogy 6-ost húzunk?
   c) Annak, hogy kárót, vagy annak, hogy ászt húzunk?
   d) Annak, hogy feketét, vagy annak, hogy kárót (♦) húzunk?

3. Egy jótékonysági rendezvényen sorsjegyeket árulnak. A sorsjegyek karikára vannak fűzve, és mindegyik karikán van egy fődíjas sorsjegy. Melyik karikáról érdemes választanunk, ha az eladó szerint még egyikből sem húzták ki a fődíjat?



4. Tudjuk, hogy egy zsákban kék, zöld és sárga színű golyók vannak, összesen 24. Valamelyik színből kétszer annyi van, mint a másik kettőből együttvéve, egy másikból pedig 4-gyel több, mint a harmadikból.

   A zsákból 50-szer húztunk egy-egy golyót, amit minden húzás után visszatettünk. A húzott színek relatív gyakoriságát a kördiagram mutatja.



   Számítással és a diagram segítségével döntsük el, hogy melyik színű golyóból hány darab van a zsákban!

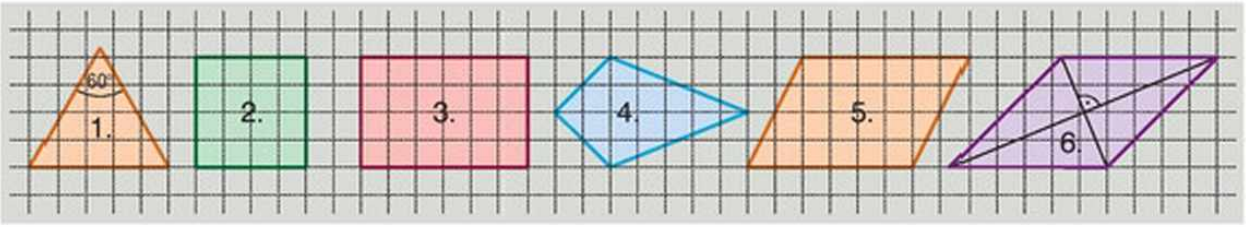
5. Dobjunk fel egy kockát 50-szer, és jegyezzük fel, hogy az alábbi események közül melyik hányszor következett be! Állítsuk sorba az eseményeket aszerint, hogy melyiknek nagyobb a valószínűsége! (Kezdjük azzal, amelyiknek a legkisebb az esélye!)

   A) Prímszámot dobunk.
   B) Legfeljebb 4-est dobunk.
   C) A dobott szám 4-nél nagyobb és páros.
   D) A dobott szám legalább 4 vagy páratlan.

6. Dobjunk fel egy piros és egy kék dobókockát 50-szer, és vegyük a dobott számok szorzatát! Jegyezzük fel, hogy az alábbi események közül melyik hányszor következett be! Állítsuk sorba az eseményeket aszerint, hogy melyiknek nagyobb a valószínűsége! (Kezdjük azzal, amelyiknek a legkisebb az esélye!)

   A dobott számok szorzata
   A) prímszám; *B)* 26; *C)* legalább 20; *D)* kisebb, mint 20; *E)* 36.

7. Egy zsákba a következő síkidomokat raktuk:



Ezek közül véletlenszerűen húzunk egyet, és figyeljük a következő események gyakoriságát:

A) a kihúzott síkidom tengelyesen szimmetrikus;
B) a kihúzott síkidom középpontosan szimmetrikus;
C) a kihúzott síkidom szabályos;
D) a kihúzott síkidom szemközti oldalai párhuzamosak.

Állítsuk sorba az eseményeket valószínűségük szerint csökkenő sorrendben!

8. Réka, Sári, Márti és Julcsi moziba megy. A négy mozijegy egymás mellé szól a 11; 12; 13; 14-es székekre. A lányok úgy döntik el, hogy ki hová üljön, hogy a jegyeket összekeverik, és mindenki húz egyet.

Az (A) és a (B) események közül melyiknek nagyobb a valószínűsége?

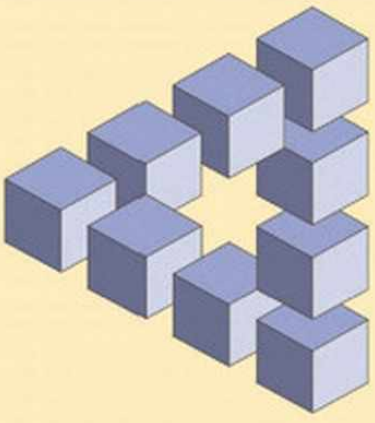
a) (A) Julcsi a 11-es széken ül, (B) Julcsi nem a 11-es széken ül.
b) (A) Réka és Sári osztoznak a 11-es és a 12-es széken, (B) Julcsi a 13-as széken ül.
c) (A) Sári kisebb sorszámú széken ül, mint Julcsi, (B) Julcsi ül kisebb sorszámú széken, mint Sári.
d) (A) Réka és Márti egymás mellé ül, (B) Réka és Márti nem ül egymás mellé.

9. Réka, Sári, Márti és Julcsi leül egy kerek asztal köré véletlenszerűen. Soroljuk fel a lehetőségeket, és döntsük el, hogy melyik eseménynek nagyobb az esélye: annak, hogy Réka és Sári szomszédok, vagy annak, hogy egymással szemben ülnek!

10. A parkolóban 4 ezüst, 3 piros és 2 kék színű autó áll. Legfeljebb hány autó mehet el (ha közben nem jön egy sem), hogy biztosan maradjon

a) mind a három színű autóból;
b) piros autó;
c) két egyforma színű autó?

11. Egy zsákban piros, kék és zöld golyók vannak, összesen 10 darab. Legkevesebb 5-öt kell kivenni, hogy biztosan legyen a kihúzott golyók között piros, és legkevesebb 8-at, hogy biztosan legyen zöld. Melyik színből hány darab van?



Rejtvény

Figyeljük meg az ábrán látható alakzatot! Milyen érdekességet vehetünk észre rajta?

4. Vegyes feladatok

1. Ábrázoljuk oszlop- és kördiagramon a 2006-ban bekövetkezett, személyi sérüléssel járó közlekedési balesetek számát természetük szerint!
   - Haladó járművek ütközése: 11 344;
   - szilárd tárgynak ütközés: 2719;
   - gyalogos elütése: 3491;
   - álló járműnek ütközés: 445;
   - farolás, felborulás, pálya elhagyása: 2409;
   - egyéb: 569.

   Mit lehet leolvasni az oszlopdiagramról, és mit a kördiagramról?

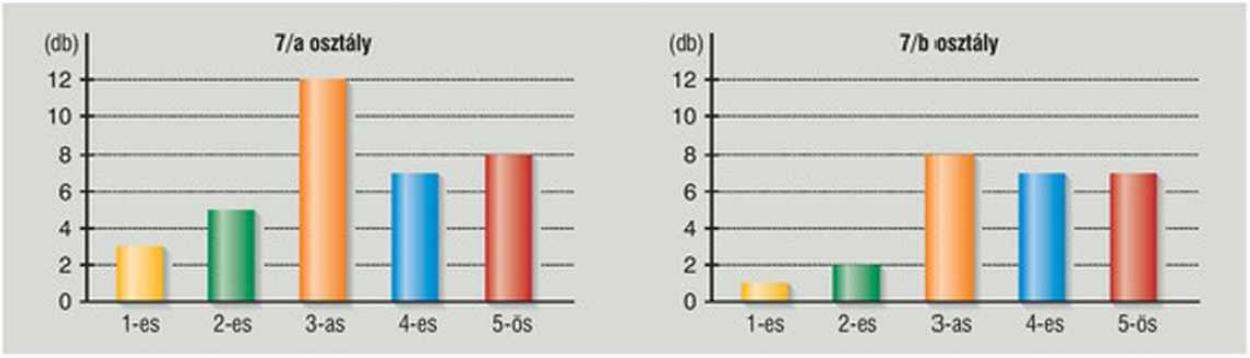
2. Az alábbi táblázat a Magyarországon kiadott könyvek számát és példányszámát mutatja.

   a) Készítsünk diagramokat, és elemezzük az adatokat!

   b) Hogyan változott a könyvek átlagos példányszáma az adott időszakban?

	A kiadott könyvek	
	száma (db)	összpéldányszáma (ezer db)
1990	7464	113 112
1995	8749	62 984
2000	8986	35 246
2005	12 898	40 974

3. Hasonlítsuk össze két osztály matematikadolgozatának eredményét!



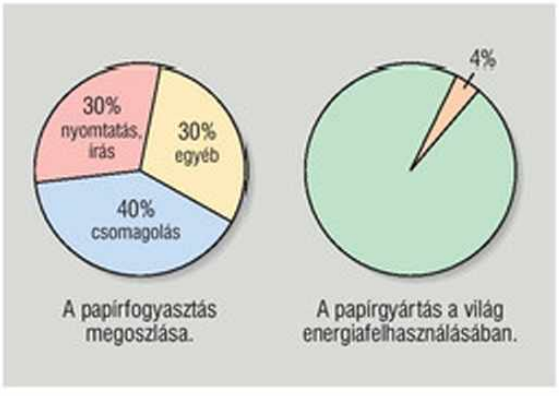
a) Hányan írták meg a dolgozatot a 7/a, illetve a 7/b osztályban?

b) Számítsuk ki a jegyek relatív gyakoriságát, és készítsünk kördiagramot osztályonként!

c) Mennyi a jegyek átlaga és mediánja osztályonként?

4. A 90-es években úgy gondolták, hogy a számítástechnika terjedésével csökkenni fog a papírfogyasztás. Ehelyett azonban évről évre több papírt használunk, egy európai polgár átlagosan havonta 20 kg-ot.

   1 kg papírhoz 2–3 kg fa, 350–700 liter víz és 8 kilowattóra energia szükséges. 1 tonna összegyűjtött papírral 16–17 fa kivágását lehet meggátolni, melyek 30 év alatt 2,8–3 tonna szén-dioxidot kötnének meg.



a) Olvassuk le a diagramokról, milyen arányban használjuk különböző célokra a papírt, és milyen arányban vesz részt a papírgyártás a világ energiafelhasználásában!

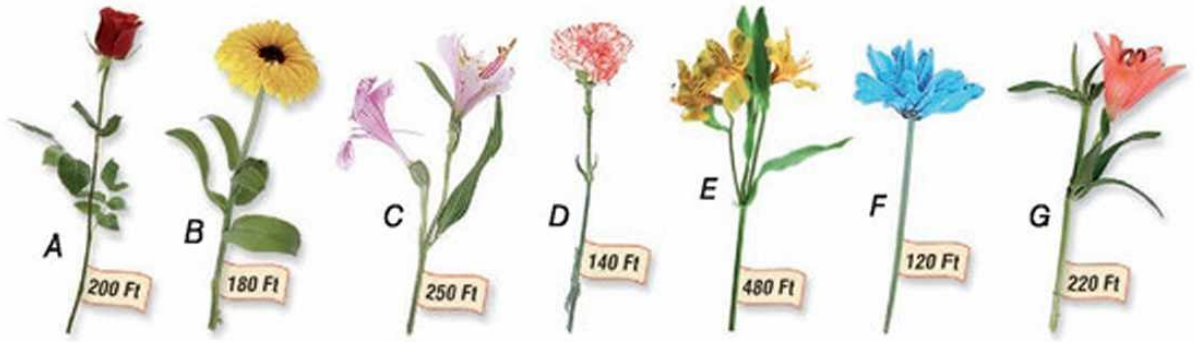
b) Alkossunk matematikafeladatokat a szövegben szereplő adatokkal!

5. Egy virágüzletben a képen látható virágok kaphatók. (Mindegyikből több szál áll rendelkezésre.) Állítsunk össze 4, majd 5 szálas csokrokat a virágokból úgy, hogy

a) a virágok árának átlaga 180 Ft, mediánja 200 Ft legyen;

b) a virágok árának átlaga és mediánja is 220 Ft legyen, de ne legyen minden virág egyforma;

c) legyen köztük a legdrágább virág, de az átlag ne legyen több 250 Ft-nál!



6. Készítsünk statisztikát arról, hogy az osztály tanulói melyik fajta íróeszközt (ceruza, golyóstoll, töltőtoll stb.) használják a legszívesebben! (Mindenki egy íróeszközt mondhat.)

a) Mennyi az egyes íróeszközök relatív gyakorisága?

b) Melyiket használják a legtöbben?

7. Melyik az a hat pozitív egész szám, amelyek

a) átlaga 100, mediánja és módusza 99, és a két legnagyobb szám a 101 és a 102;

b) átlaga 100, mediánja és módusza 1, és az ötödik legnagyobb szám a 2?

8. Miután 2007 13. hetében az ötös lottón a 7, 49, 63, 64, 72 számokkal megnyerték az 1 789 757 064 Ft-os főnyereményt, a következő hetek nyerőszámai az alábbiak voltak:

14. hét: 14, 20, 30, 55, 75;	15. hét: 14, 30, 47, 58, 77;
16. hét: 3, 10, 14, 30, 63;	17. hét: 21, 41, 45, 49, 63;
18. hét: 9, 14, 21, 55, 77;	19. hét: 52, 54, 72, 77, 83;
20. hét: 46, 65, 75, 84, 85;	21. hét: 1, 6, 18, 35, 79.

a) Mennyi a 13–21. héten kihúzott számok átlaga, mediánja, módusza? Ezek közül melyik mond valamit a kihúzott számokról?

b) A következő állítások közül melyikkel értünk egyet, és melyikkel nem?

A) A következő héten olyan számokra érdemes tippelni, amelyek a legtöbbször szerepeltek az előző hetekben.

B) A következő héten olyan számokra érdemes tippelni, amelyek ritkán szerepeltek az előző hetekben.

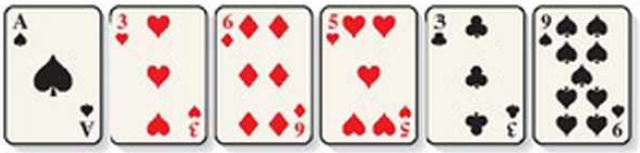
C) A következő heti sorsolás független az előző heti nyerőszámoktól.

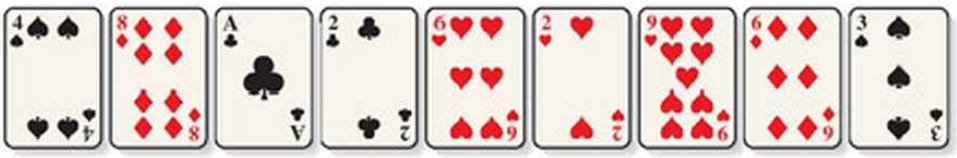
(A kihúzott számok gyakoriságát a www.szerencsejatek.hu lapon lehet megnézni.)

9. Tombolán 1-től 100-ig osztottak számokat. Zsófié a 4-es, Zolié a 48-as. Zoli azt mondja, hogy ő nagyobb eséllyel nyer, mert több kétjegyű szám van, mint egyjegyű. Zsófi szerint bármelyik számot ugyanakkora eséllyel húzzák ki. Kinek van igaza?

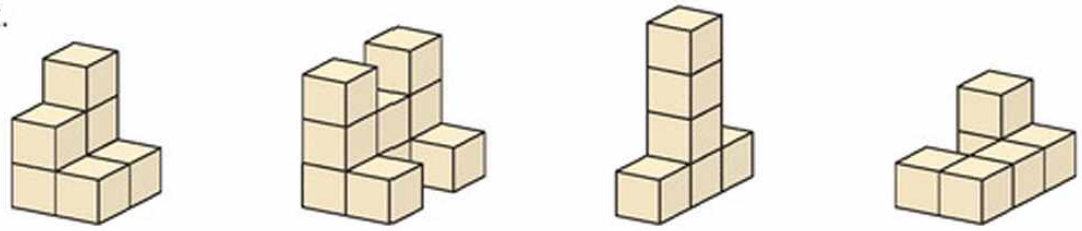
10. Az ábrán látható kártyacsomók mindegyikét megfordítjuk és megkeverjük. Ezután mindegyikből kihúzunk egy lapot. Melyikből lehet a legnagyobb eséllyel ászt húzni?

A) 

B) 

C) 

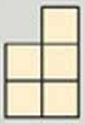
11. Az ábrán kis kockákból álló testeket látunk, melyek közül véletlenszerűen választunk egyet.



Állítsuk valószínűségük szerint csökkenő sorrendbe a kártyákra írt eseményeket!

A) A kihúzott testnek van  alakú nézete.

B) A kihúzott test 7 kis kockából áll.

C) A kihúzott testnek van  alakú nézete.

D) A kihúzott testnek van  alakú nézete.

12. A 0 1 2 3 4 5 számkártyákat összekeverjük, és véletlenszerűen egymás mellé tesszük. Állítsuk valószínűségük szerint növekvő sorrendbe a következő eseményeket!

A) Négyjegyű számot kapunk.
B) Páros számot kapunk.
C) 5-tel osztható számot kapunk.
D) 3-mal osztható számot kapunk.

13. Hányat kell véletlenszerűen kihúzni a 0,5; $\frac{2}{4}$; $\frac{4}{2}$; 2,4; 0,25; $\frac{3}{24}$ számok közül, hogy a kihúzottak között biztosan legyen

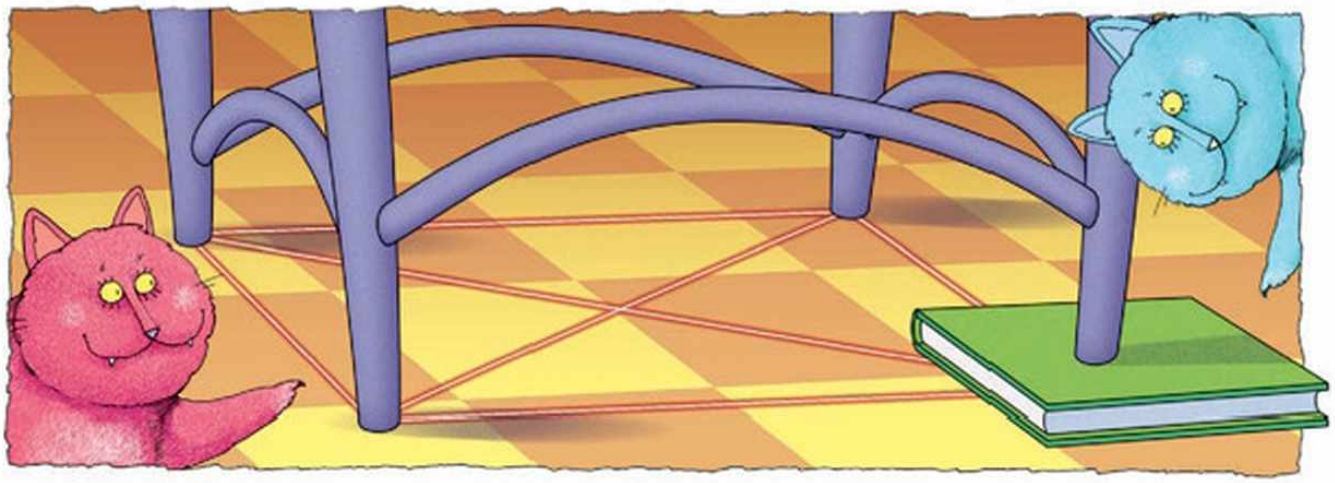
a) 1-nél kisebb; *b)* $\frac{1}{4}$-del egyenlő; *c)* $\frac{1}{2}$-del egyenlő?

14. Öt 1-nél nagyobb számjegyet beletettünk egy zsákba. Tudjuk, hogy
– legkevesebb 3-at kell kihúzni, hogy a kihúzottak között biztosan legyen páros;
– legkevesebb 2-t kell kihúzni, hogy a kihúzottak között biztosan legyen 6-nál kisebb;
– legkevesebb 4-et kell kihúzni, hogy a kihúzottak között biztosan legyen 3-mal osztható.
Mely számjegyeket tettük a zsákba?

9 Térgeometria



1. Egyenesek, síkok, testek a térben



Életünket a térben éljük le. Mozoghatunk benne jobbra és balra, előre vagy hátra, felfelé vagy lefelé. Térbeli helyzetünket három adattal írhatjuk le, ezért a teret 3-dimenziósnak tekintjük.



a vonal 1-dimenziós



a sík 2-dimenziós



a tér 3-dimenziós

A tér alakzatainak ábrázolása során használjuk **a pont, az egyenes, a sík és a tér** fogalmát. Ezek **alapfogalmak,** amelyeket külön nem definiálunk (nem adunk rá meghatározást).

1. példa

Billeghet-e egy sík padlón álló *a)* 3 lábú; *b)* 4 lábú szék?

Megoldás

A széklábak végét pontnak tekintjük.

a) Mivel 3 pont **1** síkot határoz meg, így a 3 lábú szék nem billeghet.

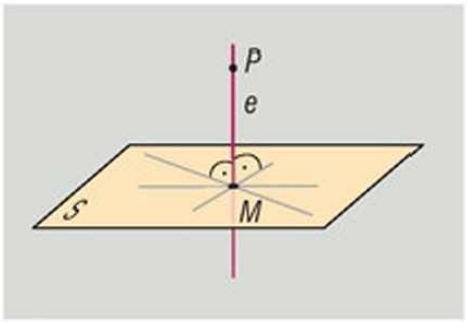
b) Bármelyik 3 székláb vége meghatároz egy síkot. A szék akkor billeg, ha a negyedik székláb vége nem esik ebbe a síkba.

Megjegyzés: Tegyük fel, hogy egy 4 lábú szék billeg, és minden székláb hossza állítható! Mivel bármelyik 3 láb meghatároz egy síkot, a negyedik lábat állíthatjuk úgy, hogy ebbe a síkba essen, így a szék ne billegjen. Ez a 4 láb bármelyikének állításával elérhető (4-féleképpen tehető meg), vagyis a 4 pont legfeljebb 4 síkot határoz meg.

Három nem egy egyenesre illeszkedő pont egyértelműen meghatároz egy síkot a térben.

Egyenes és sík hajlásszöge

Legyen az e egyenes és az S sík közös pontja M! Azt mondjuk, hogy **az e egyenes merőleges az S síkra,** ha a sík minden olyan egyenesére merőleges, amely átmegy az M ponton. Ekkor az egyenes és a sík hajlásszöge 90°.

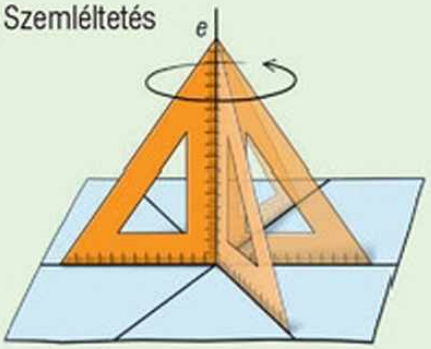


Elegendő két olyan egyenest vizsgálni, melyek az S síkban fekszenek és áthaladnak az M ponton. Ha az e egyenes ezekre merőleges, akkor a síkra is merőleges.

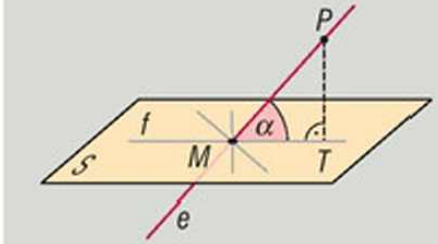
A P pontnak az S síkra való **merőleges vetülete** az a pont, amelyben a P-ből a síkra állított merőleges döfi a síkot.

Állítsuk a derékszögű vonalzót egy papír S síkjára az ábra szerint! Ha a vonalzót az egyik befogójára illeszkedő e egyenes körül körbe tudjuk forgatni úgy, hogy a másik befogó a papíron marad, akkor az e egyenes merőleges az S síkra.

Szemléltetés



Legyen az e olyan egyenes, amely az M pontban metszi az S síkot, és legyen az e egyenes tetszőleges P pontjának az S síkra eső merőleges vetülete az M-től különböző T pont! Jelöljük az M és T pontokon átmenő egyenest f-fel!

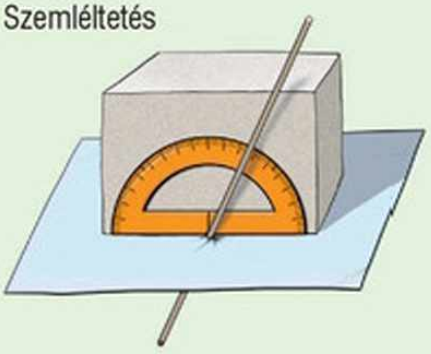


Ekkor az **e egyenes és az S sík hajlásszögének** az e és f egyenesek által bezárt szöget tekintjük. Az f egyenes az e egyenesnek az S síkra eső merőleges vetülete.



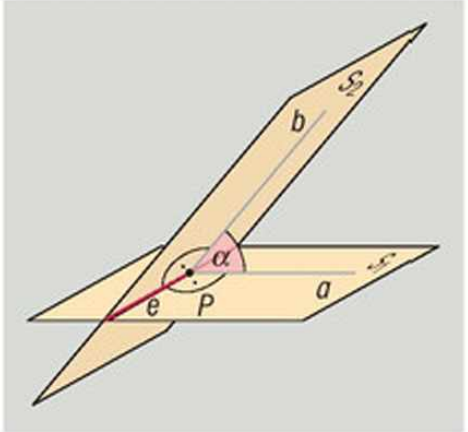
Szúrjunk át egy papírt hurkapálcával! Ragasszunk szögmérőt egy téglatest alakú dobozra! Állítsuk a papírra a dobozt az ábra szerint úgy, hogy a hurkapálca a doboz megfelelő lapjára illeszkedjen! Ekkor a szögmérőn leolvashatjuk a hurkapálcának a papír síkjával bezárt szögét.

Szemléltetés



Két sík hajlásszöge

Legyen az S_1 és S_2 sík metszésvonala az e egyenes! Állítsunk az e egyenes P pontjába mindkét síkban merőlegest ($a \perp e$; $b \perp e$)!



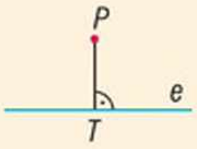
A két sík hajlásszögének az a és b egyenesek által bezárt szöget nevezzük.

Két sík merőleges egymásra, ha az általuk bezárt szög 90°.

Építs kártyavárat! Mely lapok párhuzamosak, melyek merőlegesek, és melyek zárnak be hegyesszöget egymással?

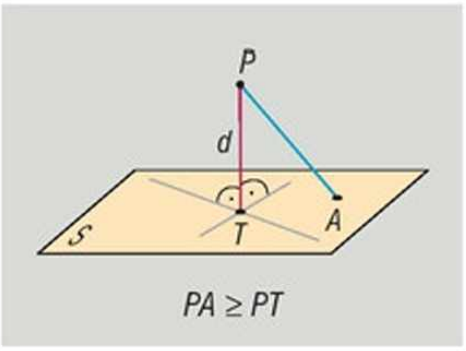
A távolság

Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza.



Pont és sík távolságának nevezzük a pontból a síkra bocsátott merőleges talppontjának és a pontnak a távolságát. Jelölése: $d(P; S) = d(P; T) = PT$.

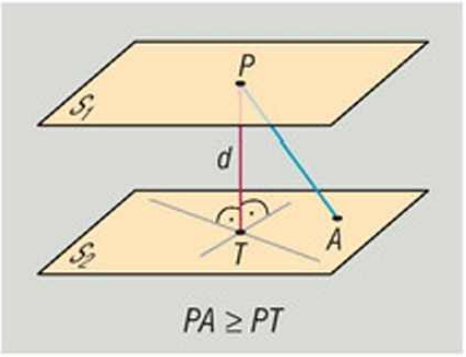
Ha a PT távolság a P pontnak a síktól való távolsága, akkor a P pontnak a sík bármely pontjától vett távolsága ennél nagyobb vagy egyenlő ($PA \geq PT$).



Metsző síkok távolsága 0.

Két párhuzamos sík távolságának nevezzük az egyik sík tetszőleges pontjának a másik síktól vett távolságát. Jelölése: $d(S_1; S_2) = PT$.

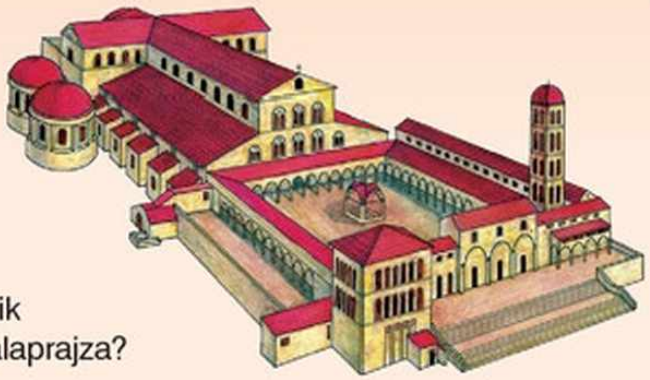
Ha a PT távolság a két sík távolsága, akkor a P pontnak az S_2 sík bármely pontjától vett távolsága ennél nagyobb vagy egyenlő ($PA \geq PT$).



Testek nézetei

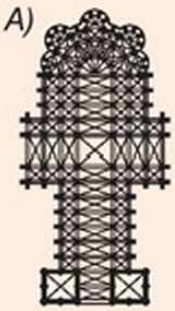
4. példa

A rajzon az idők során többször átépített Szent Péter-bazilika 15. sz-i rekonstrukciós rajza látható.

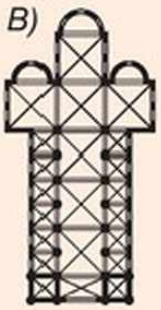


Az alábbiak közül melyik lehet a bazilika eredeti alaprajza?

A)



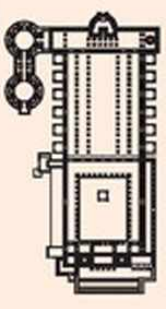
B)



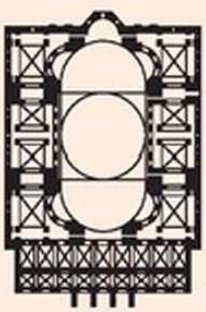
C)



D)



E)

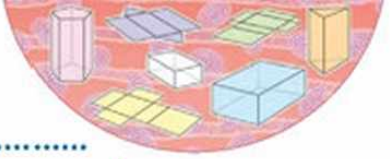


A rekonstrukciós és az alaprajz összehasonlításával állapítsuk meg, hogy milyen új részeket építettek a 15. századig az eredeti épülethez!

Megoldás

A kiválasztásnál fontos támpont a bazilika nyitott, oszlopfolyosóval körülvett, négyszög alaprajzú tere, valamint a másik végén található „kereszthajó” és a két kör alapú kupolás rész elhelyezkedése.
Ez alapján az eredeti alaprajz a *D)* lehet.

Az alaprajzok a tárgyaknak csak egy síkra vetített képét adják meg.



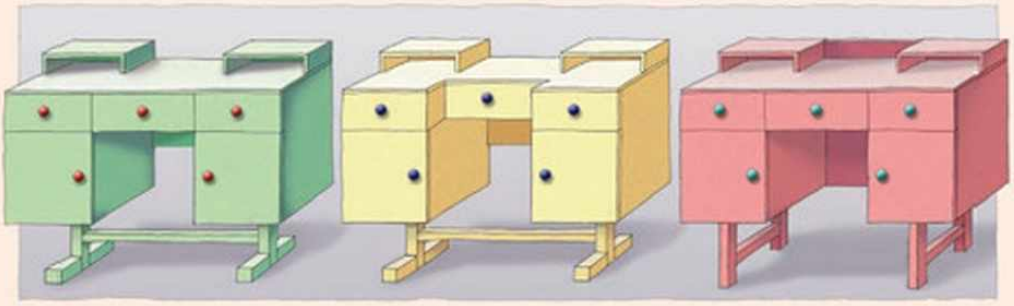
Több információt kapunk egy test három különböző irányú nézete alapján.

5. példa

Zsófi íróasztalt csináltat, ezért lerajzolta az asztalosnak az íróasztal elöl-, oldal- és felülnézetét. A következő rajzokat készítette:



Amikor Zsófi elment az asztalos műhelyébe a kész asztalért, ott a képeken látható asztalokat találta. Melyik volt az övé?



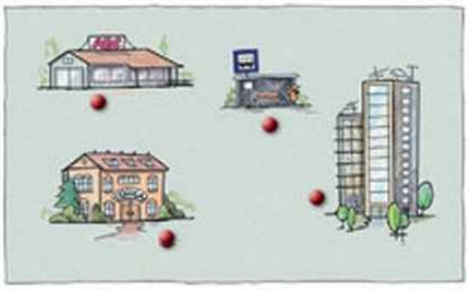
A Zsófi által lerajzolt nézeteknek csak a zöld asztal felel meg.

Tervezz magadnak íróasztalt!

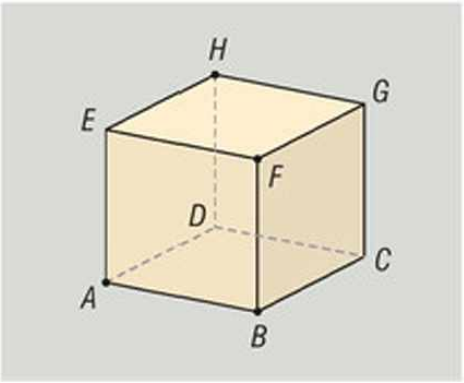


Feladatok

1. Egy lakópark tervrajzának vázlata látható az ábrán.
   a) Hány egyenes gyalogutat tervezzünk a buszmegálló, az ABC, az iskola és a toronyház bejárata között, hogy mindegyikből bármelyik másikba közvetlenül el lehessen jutni?
   b) Az épületek milyen más elrendezése esetén lenne elég kevesebb gyalogút?

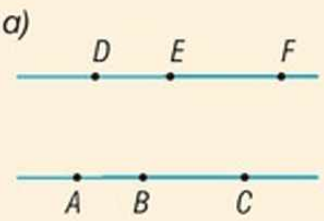


2. Tekintsük az ábrán látható kocka *A*, *B*, *F* és *H* csúcsait! (➡)
   a) Írjuk fel, mely síko(ka)t határozzák meg ezek a csúcsok!
   b) Írjuk fel, hogy a kiválasztott csúcsok által meghatározott síkokon a kocka mely csúcsai vannak!
   c) Van-e a kockának 3 olyan csúcsa, hogy az ezek által meghatározott síkon a kockának nincs további csúcsa?

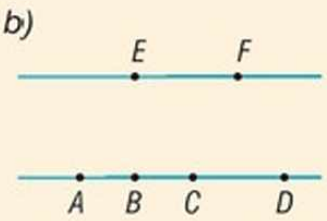


3. Adottak az ábrának megfelelően a síkon a következő pontok. Hány különböző egyenest határoznak meg?

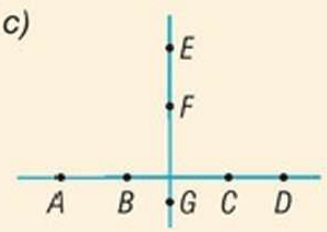
a)



b)



c)



4. Legfeljebb hány metszéspontja lehet az ugyanarra a síkra illeszkedő

a) két egyenesnek; *b)* három egyenesnek; *c)* négy egyenesnek?

5. Választhatunk-e a kocka élei közül négyet úgy, hogy ne legyen köztük két párhuzamos él?

6. Legfeljebb hány részre oszthatja a teret (az elhelyezkedésétől függően)

a) egy sík; *b)* két sík; *c)* három sík; **d)* négy sík?

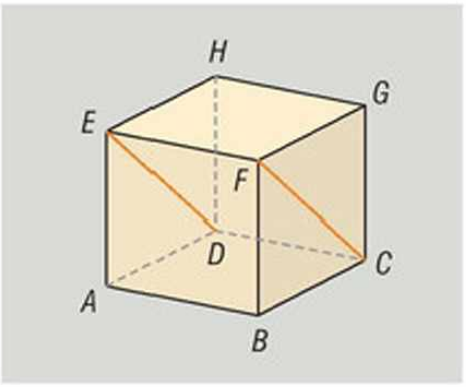
7. Vágjuk ketté az ábrán látható kockát az *ED* és *FC* lapátlók mentén! (➡)

a) Az *ABCDEF* test élei közül melyek párhuzamosak, melyek metszők, és melyek kitérők?

b) Mely élek illeszkednek a *CDFE* síkra, melyek párhuzamosak vele, és melyek metszik?

c) Mekkora szöget zárnak be a test élei a *CDEF* lappal?

d) Mekkora szöget zárnak be a test lapjai a *CDEF* lappal?

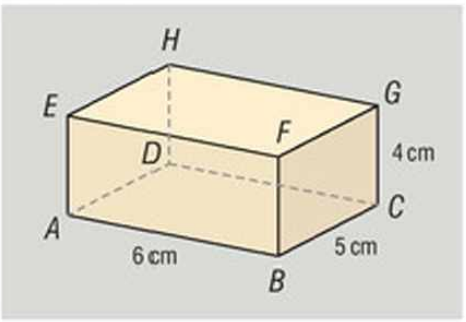


8. Az *ABCDEFGH* téglatest különböző hosszúságú éleinek hossza 4 cm; 5 cm és 6 cm. (➡)

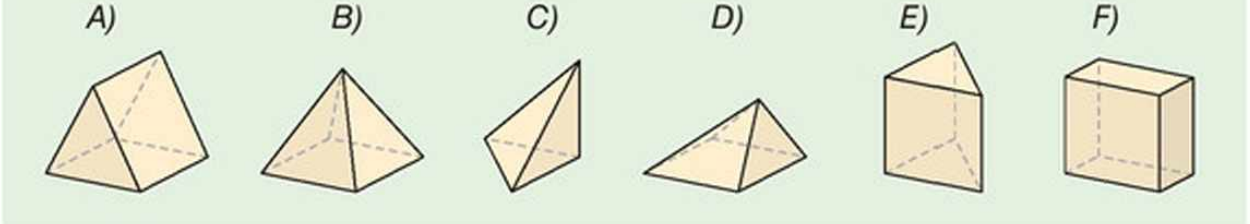
a) Mekkora az *AB* él és az *F* pont távolsága?

b) Mekkora az *AB* és a *DC* él egyenesének távolsága?

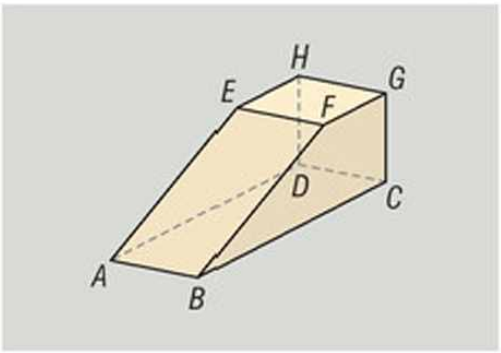
c) Mekkora az *A* pont és a *DCGH* lap távolsága?



9. Egy kockát két párhuzamos lapátlója mentén kettévágtunk. Válasszuk ki az alábbiak közül, hogy milyen darabot kaphattunk!



10. Vágjunk szét egy kockát egy lapjának két lapátlója mentén a lapra merőlegesen! Mekkora szöget zár be a két vágás síkja?



11. Egy véső éléről Feri ezt a rajzot készítette. (➡)

a) Keressünk olyan lapokat a testen, amelyek hegyesszöget zárnak be egymással!

b) Keressünk olyan lapokat, amelyek derékszöget zárnak be egymással!

12. Egy téglatest alakú sajtot egy vágással két egyforma darabra vágtunk. Rajzoljuk le, milyenek lehetnek a darabok!

13. Kristóf görkorcsolyájának néhány méretét láthatjuk a rajzon. Az alábbiak közül melyik dobozba fér bele egy ilyen pár görkorcsolya?



A) 35 cm × 30 cm × 15 cm;

B) 37 cm × 48 cm × 15 cm;

C) egyikbe sem.

14. Rajzoljuk le a következő tárgyak három nézetét!

a) bögre; *b)* vasaló; *c)* tornacipő.

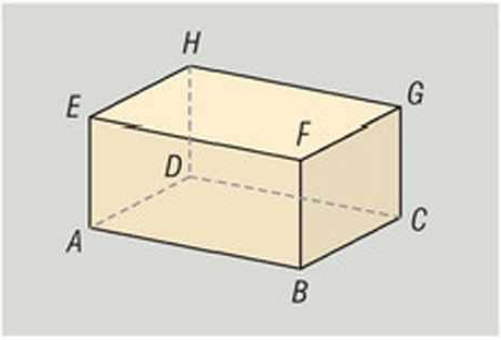
15. Egy téglatestről a következőket tudjuk. (➡)

A) Az $ABCD$ és az $EFGH$ lapok távolsága 2 cm-rel kisebb, mint az E pont és a $BCGF$ sík távolsága;

B) a BF él 6 cm-re van a $CGHD$ síktól;

C) a HD él 5 cm-rel hosszabb, mint a BC él.

Mekkorák a téglatest élei?

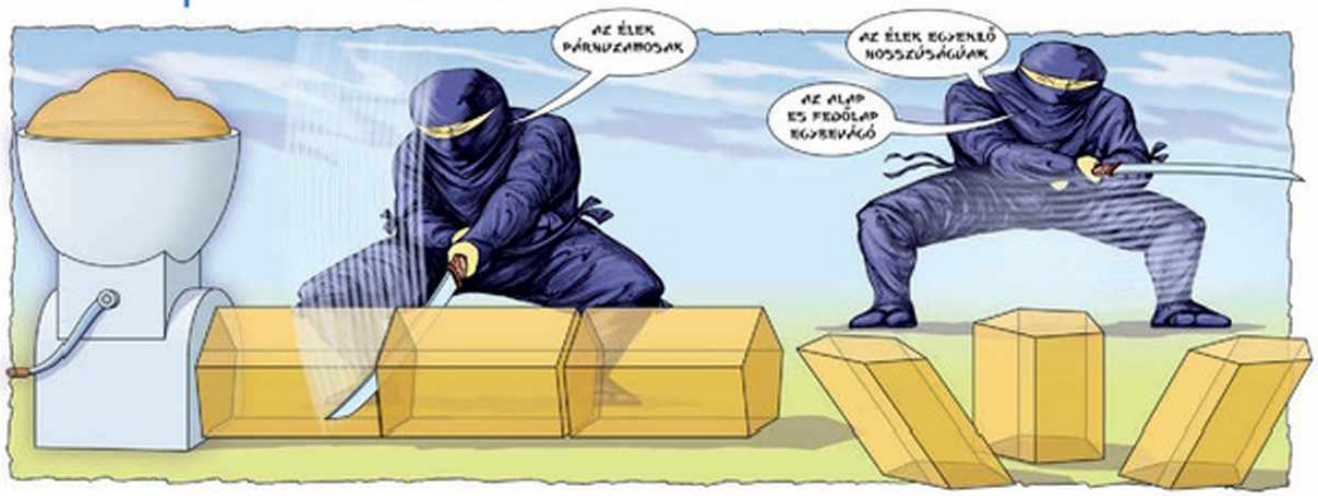


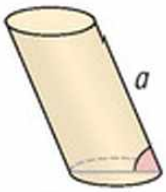
Rejtvény

Mit láthatunk az ábrán?

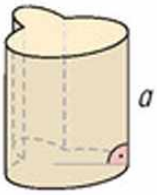


2. Henger, hasáb





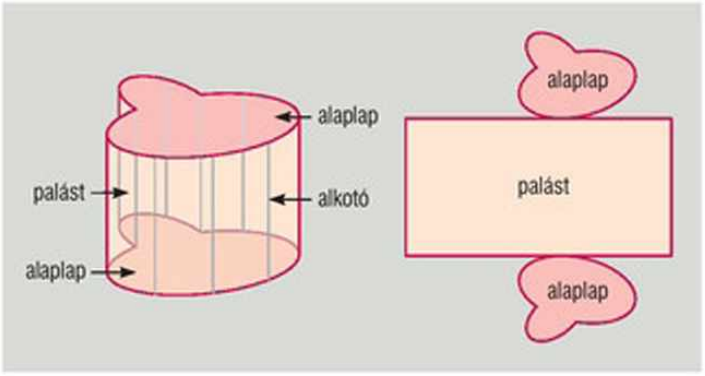
Ha az alkotók nem merőlegesek az alaplapra, akkor ferde hengert kapunk.



Ha az alkotók merőlegesek az alaplapra, akkor egyenes hengert kapunk.

Készítsünk egyenes hengert úgy, hogy két egybevágó lap megfelelő pontjai közé hurkapálcákat állítunk!

Tekintsünk egy síkidomot! Az őt határoló zárt görbe minden pontjába állítsunk egyenlő hosszúságú szakaszokat a síkidom síkjára merőlegesen! A szakaszok végpontjai egy, az eredetivel egybevágó síkidomot határolnak.



Azt a testet, amelyet a két egybevágó síkidom és a szakaszok alkotta felület meghatároz, **egyenes hengernek** nevezzük. A két egybevágó síkidomot **a henger alaplapjainak,** a szakaszokat **alkotóknak,** az alkotók által meghatározott felületet **a henger palástjának** nevezzük.

1. példa

A rajzon látható tárgyakat geometriai testnek tekintve melyik egyenes henger, és melyik nem?



Megoldás

Egyenes hengerek: a konzervdoboz, az üdítős doboz, a csokis doboz és a sajt. (A rajzon látható szalámidarab ferde henger.)

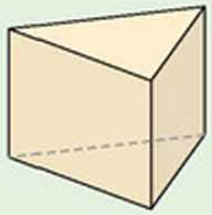
A hengereket csoportosíthatjuk az alaplapjuk szerint:

- A kör alapú egyenes hengert **egyenes körhengernek** nevezzük.
- A sokszög alapú egyenes hengert **egyenes hasábnak** nevezzük.

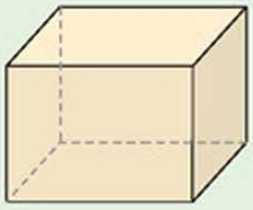
Az egyenes hasábok palástja téglalapokból áll, ezek a hasáb **oldallapjai,** amelyek merőlegesek az alaplapra.

Az egyenes hasáb magassága (M) megegyezik az alkotó hosszával.

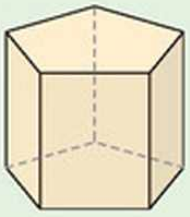
A hasábokat osztályozhatjuk az alaplapot alkotó sokszögek alapján:



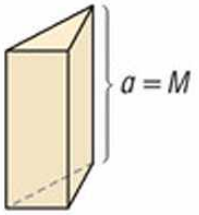
háromszög alapú hasáb



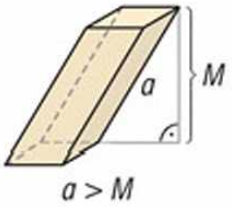
négyszög alapú hasáb



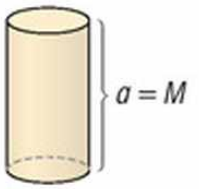
ötszög alapú hasáb



Az egyenes hasáb oldallapjai téglalapok.



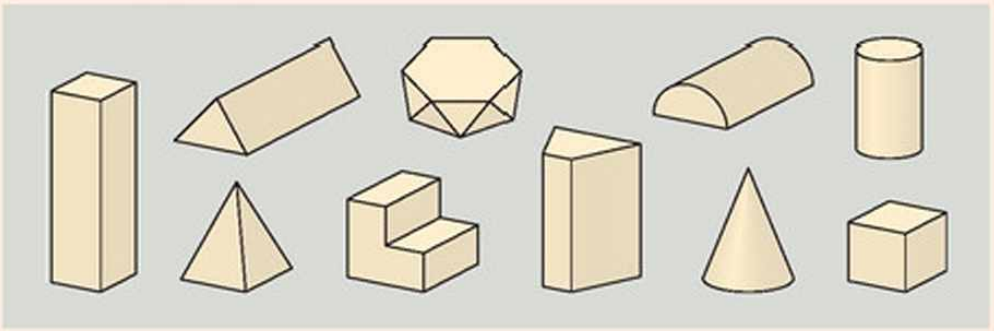
A ferde hasáb oldallapjai paralelogrammák.



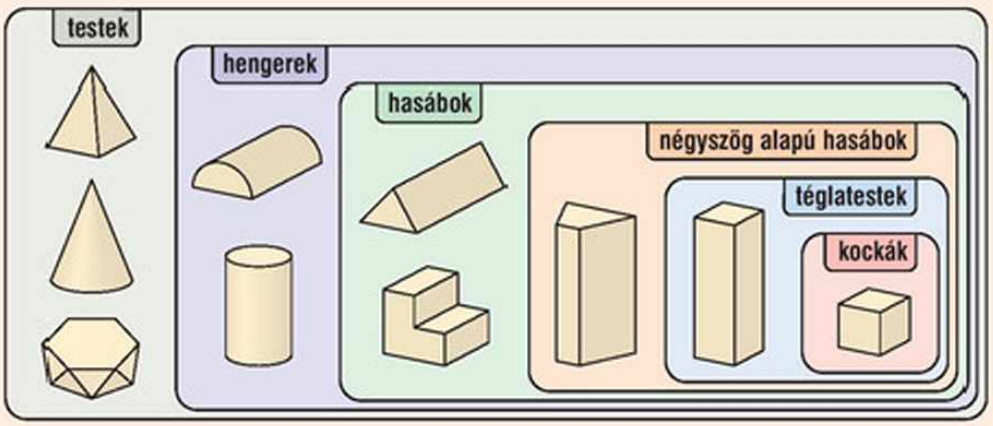
Az egyenes körhenger alaplapja kör, és alkotói merőlegesek az alaplapra.

2. példa

Készítsünk halmazábrát a hengerek, a hasábok, a négyszög alapú hasábok, a téglatestek és a kockák halmazával, és helyezzük el benne az alábbi testeket!

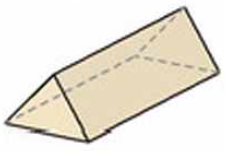


Megoldás



Mivel a téglatest alap- és fedőlapja négyszög, oldallapjai ezekre merőlegesek, így a téglatest négyszög alapú egyenes hasáb.

A hasábok állhatnak az oldallapjukon is.

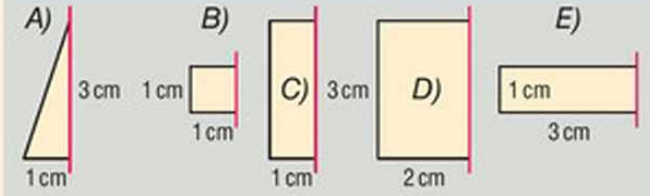


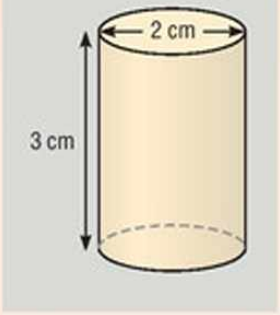
Sokszor előfordul, hogy az egyenes körhenger helyett csak hengert mondunk, és hasáb alatt (hacsak külön nem jelöljük) egyenes hasábot értünk.



3. példa

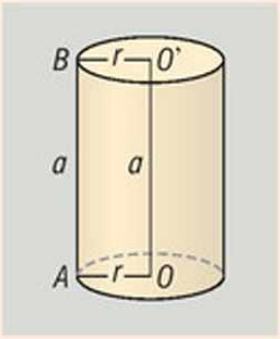
Az *A)*, *B)*, *C)*, *D)*, *E)* alakzatokat megforgatjuk a pirossal jelölt egyenesek körül. Melyik esetén kapjuk a következő egyenes körhengert? (➡)





Megoldás

A keletkezett egyenes henger alaplapjai 1 cm sugarú körök. Ezek középpontjainak távolsága megegyezik az alkotó hosszával (3 cm). Mivel az egyenes körhenger alkotója merőleges az alaplapra, az *0AB0'* négyszög téglalap. Ezt a téglalapot az *00'* egyenese körül megforgatva kapjuk a hengert.



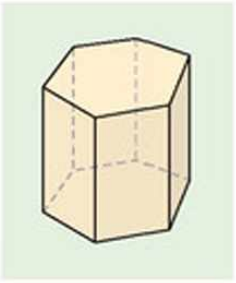
(A) nem téglalap, így forgatásával nem hengert kapunk.

(B) és *(E)* nem lehet, mert az így kapott henger alkotója 1 cm, amely nem hosszabb az alapkör sugaránál.

(D) nem lehet, mert a téglalapot megforgatva a keletkezett henger alapkörének sugara 2 cm (átmérője 4 cm) lenne.

(C) a megfelelő, mert a téglalap egyik oldala a henger alkotójával, másik oldala pedig az alapkör sugarával egyenlő.

Ha egy téglalapot az egyik oldala körül megforgatunk, egyenes körhengert kapunk. Ezért az egyenes körhenger **forgástest.**



4. példa

Hány lapja, éle és csúcsa van egy hatszög alapú hasábnak?

Megoldás

A hatszög alapú hasábnak 2 db hatszög és 6 db téglalap alakú lapja van. Ez összesen 8 lap.

Az alaplapok oldalain 6-6 él van. Az oldalélek az alaplapok csúcsait kötik össze, ezért ezekből is 6 van. Ez összesen $3 \cdot 6 = 18$ él.

A hasáb csúcsai az alaplapok csúcsai, ez összesen $2 \cdot 6 = 12$ csúcs.

Általában egy n-szög alapú hasáb ($n \geq 3$)

- lapjainak száma: $n + 2$;
- éleinek száma: $3n$;
- csúcsainak száma: $2n$.

Feladatok

1. Keressünk a képeken látható épületeken olyan részeket, amelyek hengerek, illetve amelyek hasábok!






2. A képeken látható tésztaszaggató formákkal mézeskalácsot készítünk. (➡)

Melyikkel lesz a kiszaggatott tészta hasáb alakú?

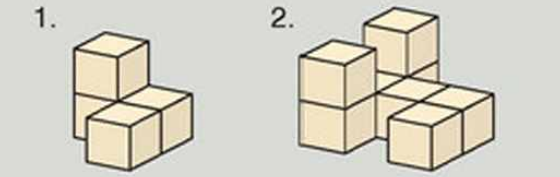


3. Az ábrán látható, kis kockákból álló testekből hasábot szeretnénk előállítani. (➡)

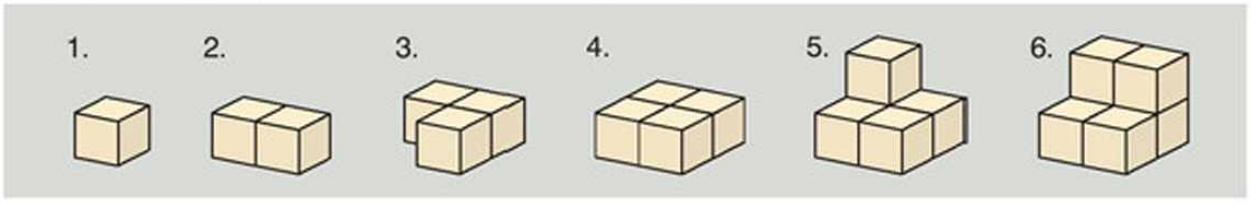
Ehhez legkevesebb hány kis kockát kell

a) hozzátenni;

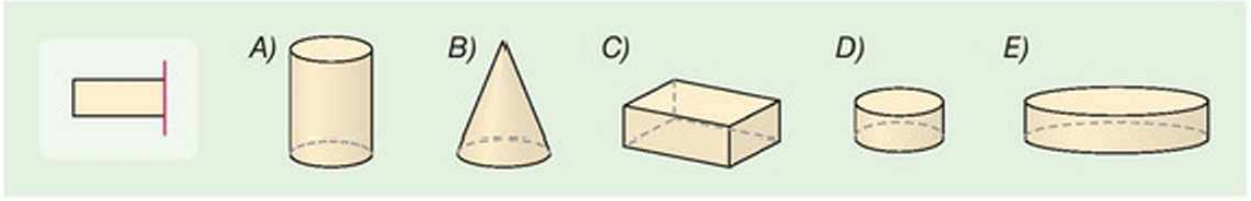
b) elvenni?



4. Folytassuk a sorozatot! A sorozat mely tagjai hasábok?



5. Az ábrán lévő téglalapot megforgatjuk a pirossal jelölt oldala körül. Melyik testet kapjuk?



6. Az ábrán látható téglalapot megforgatjuk

a) az AD oldal egyenese;

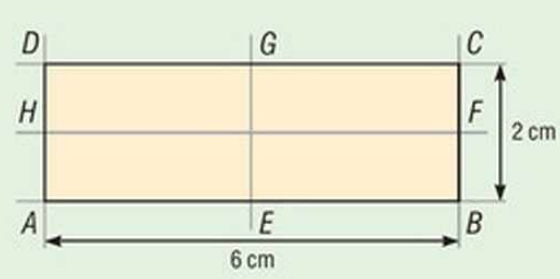
b) a CD oldal egyenese;

c) az FH középvonal egyenese;

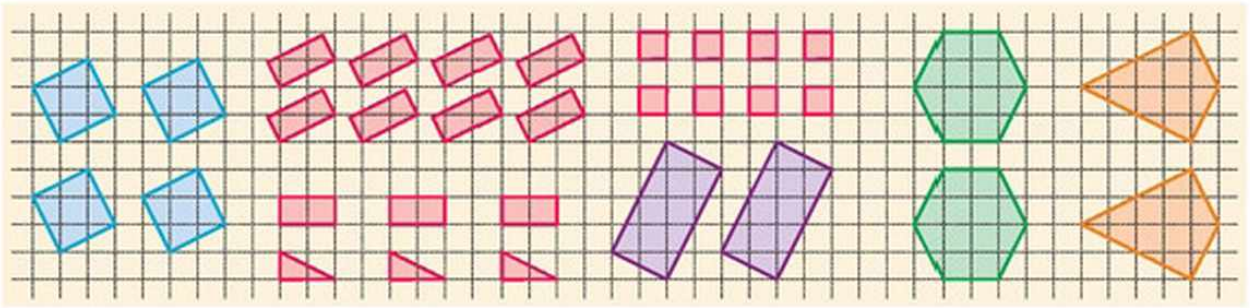
d) az EG középvonal egyenese;

e) az AC átló egyenese körül.

Melyik esetben kapunk egyenes körhengert? Mekkora a keletkezett henger alkotója és az alapkörének a sugara?



7. Válasszunk az alábbi lapokból úgy, hogy azokból hasábot lehessen összerakni! Keressünk több hasábot! (A piros alakzatok egyik oldala 1 egység.)

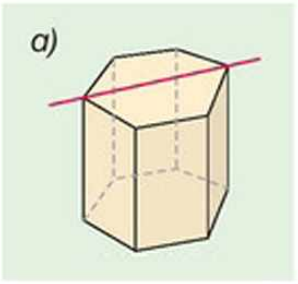


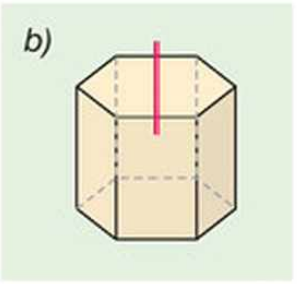
8. Hány oldalú sokszög az alapja annak a hasábnak, amelynek

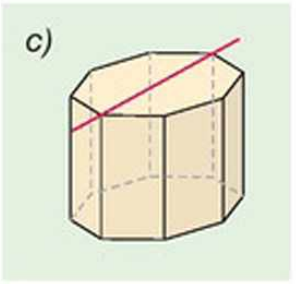
a) 6 lapja van; *b)* 10 lapja van; *c)* 12 lapja van?

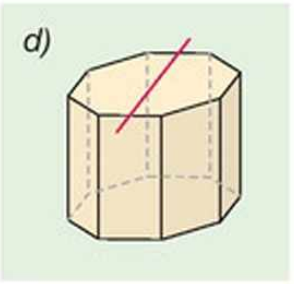
Van-e olyan test, amelynek 6 lapja van, és nem hasáb?

9. Hány lapja, éle, csúcsa lesz annak a testnek, amelyet úgy kapunk, hogy a hasábot az ábrán látható egyenes mentén az alkotókkal párhuzamosan kettévágjuk?



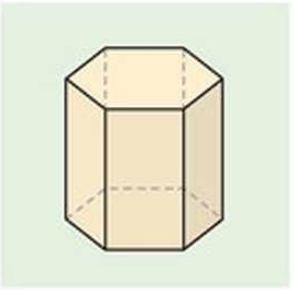






10. Vágjunk le egy darabot a hasábból az alkotókkal párhuzamosan úgy, hogy (a megmaradt testen)

a) a csúcsok száma 2-vel csökkenjen;
b) a csúcsok száma 2-vel nőjön;
c) a lapok száma ne változzon;
d) a lapok száma nőjön;
e) a lapok száma csökkenjen!



11. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, és melyik hamis!

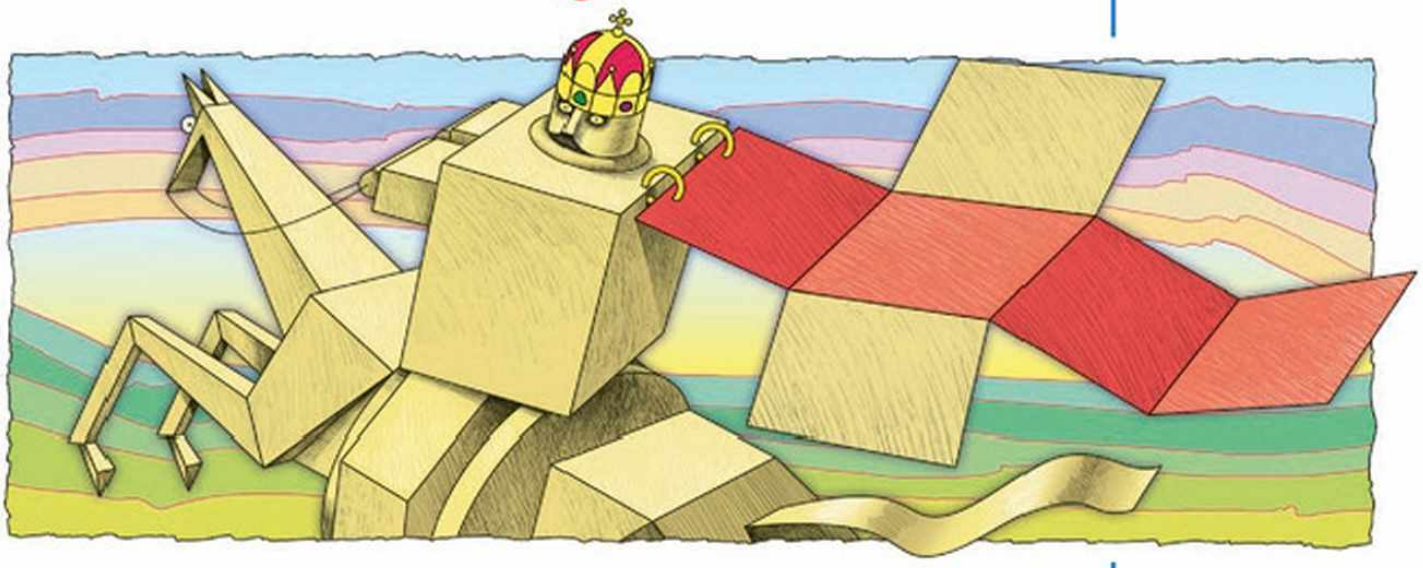
a) Van olyan hasáb, amelynek 14 éle van.
b) Minden kocka hasáb.
c) Nincs olyan hasáb, amelynek páratlan számú csúcsa van.
d) Van olyan négyszög alapú hasáb, amelyik nem téglatest.
e) Minden egyenes körhenger alkotója hosszabb az alapkörének sugaránál.

Rejtvény

Készítsünk különböző testeket az ábrán látható hasábokból! (Nem tekintünk különbözőnek két testet, ha azok mozgatással egymásba átvihetők.) Melyek a hasábok ezek közül?

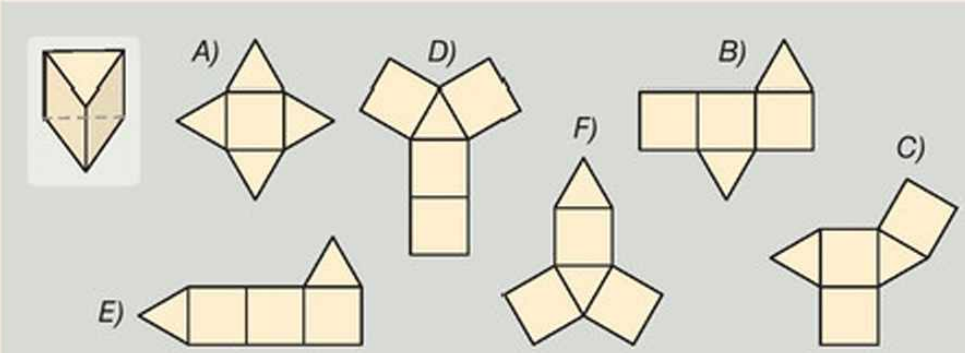


3. A hasáb és a henger felszíne



1. példa

Válasszuk ki azokat a hálókat, amelyeket összehajtva az ábrán látható háromszög alapú hasábot kapjuk! A hálókon jelöljük azonos színnel az egymáshoz csatlakozó éleket!

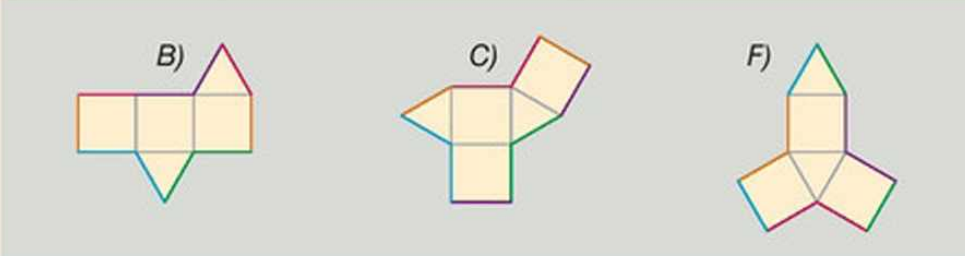


Megoldás

A háromszög alapú hasáb hálója 2 háromszögből és 3 téglalapból áll, ez az *(A)*, *(D)* hálókra nem teljesül, így azok nem lehetnek a háromszög alapú hasáb hálói.

Az *(E)* hálót nem lehet hasábbá összehajtani.

A *(B)*, *(C)* és *(F)* hálókat össze lehet hajtani hasábbá.

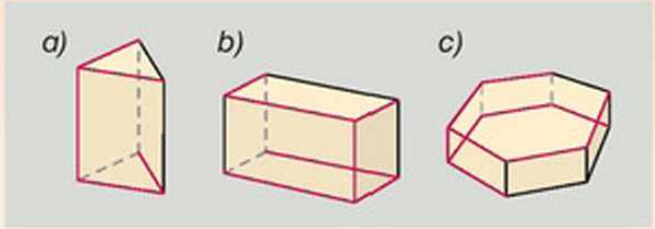




Keressünk további megfelelő hálókat!

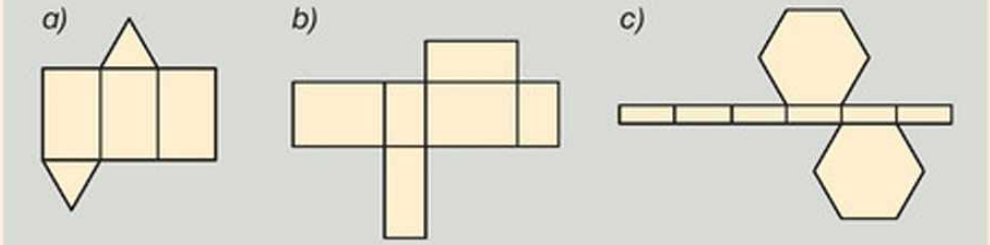
2. példa

Rajzoljuk le a hasáboknak azt a hálóját, amelyet a pirossal jelzett élek felvágásával kapunk!



Megoldás

Az alaplapokat egy él kivételével körbevágjuk, és a palástot egy él mentén felvágjuk. Így a palástot alkotó téglalapokból egy nagy téglalap áll össze. Figyeljük meg, hogy a palástot alkotó téglalapok közül melyekhez csatlakoznak az alaplapok!





Minden hasáb kiteríthető úgy, hogy a palást egy téglalapot alkot.

3. példa

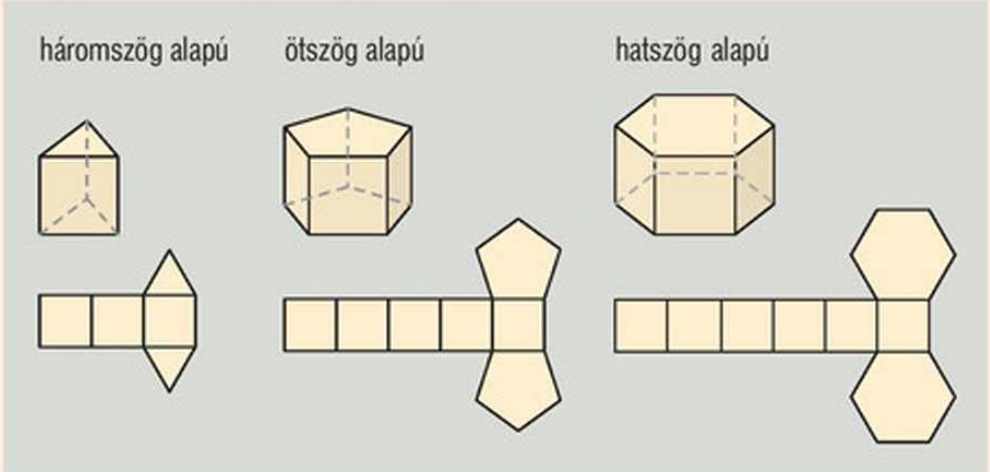
Egon azt állítja, hogy csak egyféle olyan hasábot lehet készíteni, amelynek minden éle 1 dm, mégpedig egy kockát. Orsi tiltakozik.

a) Milyen testeket készítsen Orsi, hogy bebizonyítsa Egonnak, hogy téved? Rajzoljuk le a testek hálóját!

b) Milyen hosszúak a palástot alkotó téglalap oldalai?

Megoldás

Az Orsi által készített hasáb lehet:



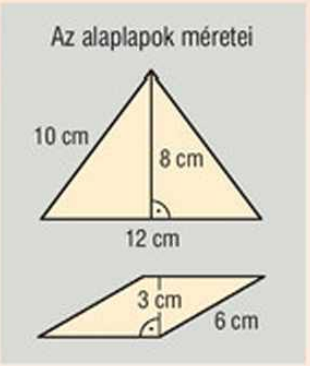
A hasáb alaplapja bármilyen olyan sokszög lehet, amelynek minden oldala 1 dm. A palástja olyan 1 dm oldalú négyzetekből álló téglalap lesz, amelynek egyik oldala a hasáb magassága, a másik oldala pedig az alaplap kerülete.

Minden egyenes hasáb palástja olyan téglalap, amelynek egyik oldala a hasáb magassága, a másik oldala pedig az alaplap kerülete.

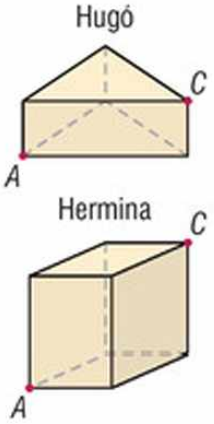
4. példa

Hangya Hugó és Hangya Hermina egyenes hasáb alakú dobozban laknak. Hugó lakása háromszög alapú, 4 cm testmagasságú, Herminéé rombusz alapú, 8 cm testmagasságú. (Az alaplapok méreteit lásd az ábrán!)

A lakás padlóján kívül annak oldalfalait és plafonját is be tudják járni, így ezek területének összege alapján akarják eldönteni, hogy melyikük lakása a nagyobb. Segítsünk nekik!

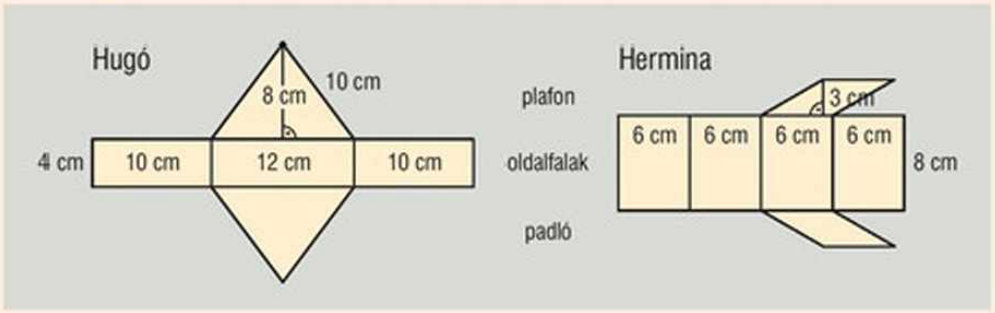


Melyik az a legrövidebb út, amelyen a hangyák az A pontból a C-be juthatnak?



Megoldás

Rajzoljuk le kiterítve a hangyák lakásául szolgáló dobozokat!



Számítsuk ki a padló, a plafon, valamint az oldalfalak területét, és adjuk össze!

A hasábok alaplapjai egybevágók, így a padló és a plafon területe

Hugó lakásában:

$$2 \cdot T_{\text{alaplap}} = 2 \cdot \frac{12 \cdot 8}{2} = 96\ \text{cm}^2.$$

Hermina lakásában:

$$2 \cdot T_{\text{alaplap}} = 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36\ \text{cm}^2.$$

Az oldalfalak területének összege a palást területe:

$$T_{\text{palást}} = 4 \cdot 10 + 4 \cdot 12 + 4 \cdot 10 = 4 \cdot (10 + 12 + 10) = 4 \cdot 32 = 128\ \text{cm}^2.$$

$$T_{\text{palást}} = 4 \cdot (6 \cdot 8) = 192\ \text{cm}^2.$$

Így Hugó lakása $96 + 128 = 224\ \text{cm}^2$, Herminéé $36 + 192 = 228\ \text{cm}^2$, tehát Hermina lakásának a felszíne nagyobb.

A hasáb felszíne a lapok területének összege. Az egyenes hasáb felszínét úgy kapjuk meg, hogy az alaplap területének kétszereséhez hozzáadjuk a palást területét:

$$A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást}.$$

Az egyenes hasáb palástjának területe a hasáb magasságának és az alaplap kerületének a szorzata.

5. példa

Készítsünk papírból olyan körhengert, melynek magassága 8 cm, alapkörének sugara pedig 3 cm!

a) Rajzoljuk meg a henger hálóját!

b) Mekkora a henger felszíne?



Készíts parafadugóból festőhengert!

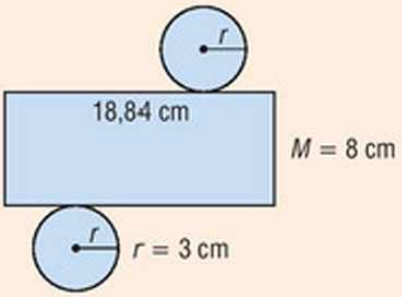
Mekkora a dugó átmérője és magassága, ha egy 6 cm hosszú és 4 cm széles minta épp ráfér a henger palástjára?

Megoldás

a) A henger hálója a két 3 cm sugarú kör alaplapból és a palástot alkotó téglalapból áll.

A téglalap egyik oldala a henger magassága, a másik oldala az alapkör kerülete:

$k = 2r\pi = 2 \cdot 3 \cdot \pi \approx 18{,}84$ cm.



b) A henger felszíne a két alaplap és a palást területének összege:

$A = 2 \cdot (r^2\pi) + (2r\pi) \cdot M;$

$A = 2 \cdot 3^2 \cdot \pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 = 66\pi \approx 207{,}35 \text{ cm}^2.$

Az egyenes henger felszínét a hasábhoz hasonlóan számíthatjuk ki:

$$A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást}.$$

Feladatok

1. Rajzoljuk meg annak a téglatestnek a hálóját, melynek az élei:

a) 2 cm; 3 cm és 4 cm;

b) 10 cm; 8 cm és 7 cm;

c) 1,5 cm; $\frac{3}{4}$ cm és 1,75 cm;

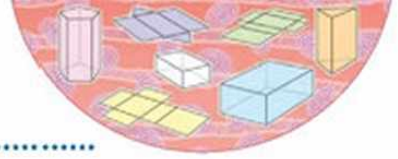
d) 3 cm; $\frac{5}{4}$ cm és 3,5 cm!

Mekkora a téglatestek felszíne?

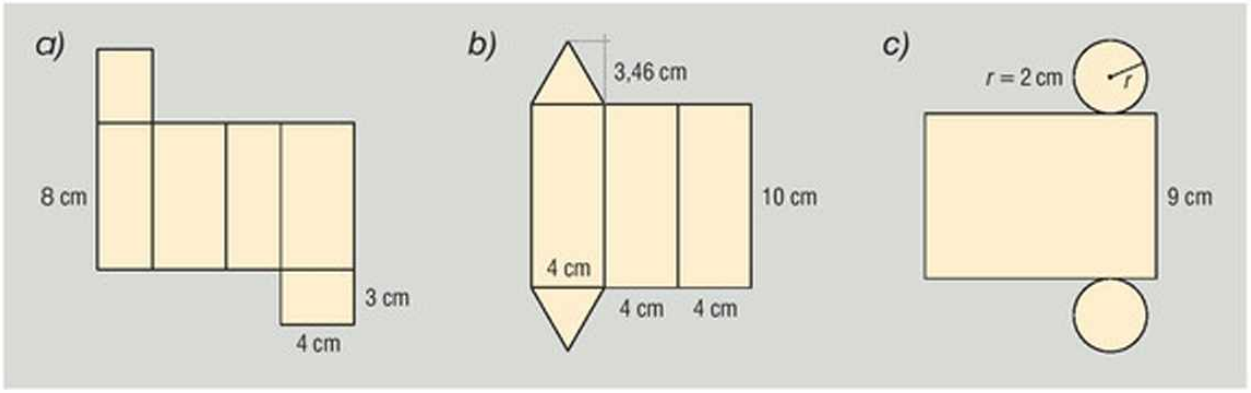
2. Mekkora annak az egyenes hengernek a felszíne, amelynek palástja egy olyan téglalap, amelynek oldalai:

a) 7 cm és 12,56 cm;

b) 10 cm és 2,8 cm?



3. Határozzuk meg az alábbi hálójukkal megadott testek felszínét! Hány csúcsa, éle és lapja lesz a megadott testeknek?

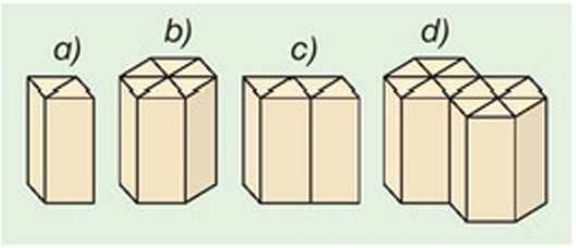


4. 1 dm oldalélű kockák összeragasztásával téglatesteket építünk.
Mekkora lehet a keletkező téglatestek felszíne, ha a felhasznált kockák száma:
a) 4; *b)* 5; *c)* 12?

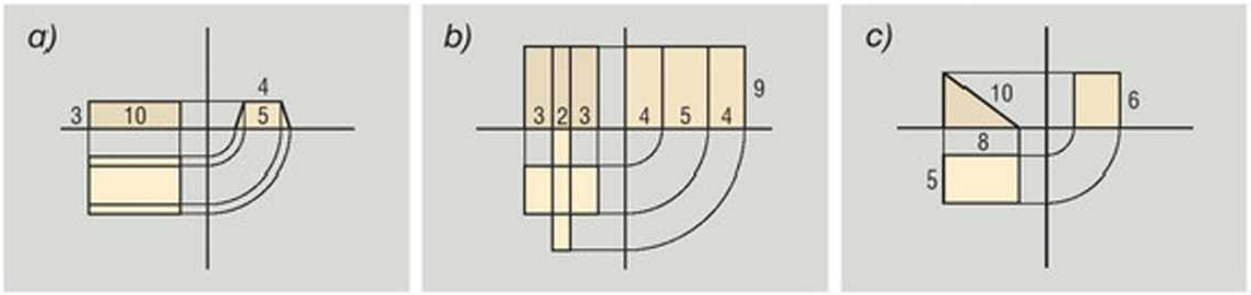
5. Réka törökmézet vett ajándékba a testvéreinek. 16 db 10 cm élű, kocka alakú darabra futotta a pénzéből. Elhatározta, hogy egybe csomagolva adja majd át, ezért a darabokat egy téglatestté rakta össze. Mekkorák legyenek a téglatest élei, ha azt szeretné, hogy a legkevesebb papírral tudja becsomagolni?

6. Szabályos háromszög alapú hasábokból az ábrán látható hasábokat állítottuk össze. A szabályos háromszög oldala 2 cm, magassága 1,73 cm, a hasáb magassága 5 cm.

Rajzoljuk le a hasábok hálóját, és számítsuk ki a felszínüket!



7. Az ábrán egy test három nézete látható. Rajzoljuk le a test hálóját, és számítsuk ki a felszínét!



8. Egy 7 cm magasságú hasáb alaplapjának területe 28 cm^2, kerülete 34 cm.
Mekkora a felszíne?

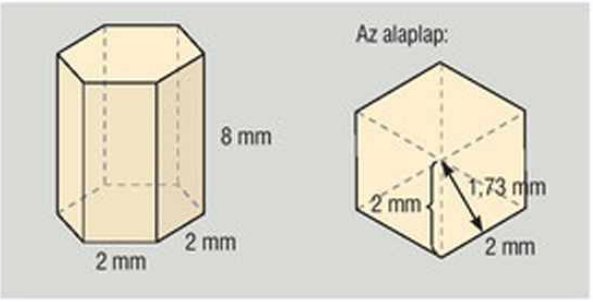
9. A következő állítások közül melyek igazak, és melyek hamisak?
a) Minden hasábnak van párhuzamos lappárja.
b) Az egyenes hasáb egyik lapja sem lehet rombusz.
c) Minden hasáb palástja kiterítve téglalapot alkot.
d) Van olyan hasáb, amelynek nincs két egybevágó lapja.

10. Egy 100 cm^2 alapterületű ötszög alapú egyenes hasáb magassága 50 cm. A hasábot az alaplappal párhuzamos vágásokkal három részre vágtuk.

a) Mennyivel nagyobb az eredeti hasáb felszínénél a kapott testek felszínének összege?

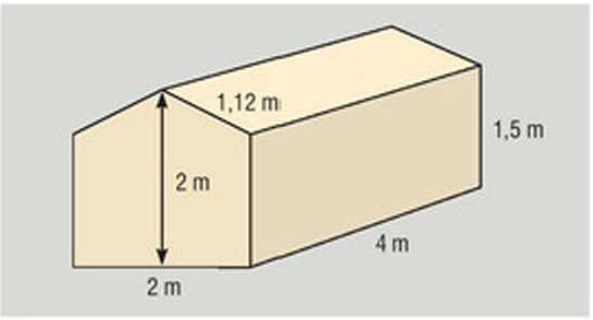
b) Elérhetjük-e ilyen vágásokkal, hogy a felszínek összege 500 cm^2-rel legyen több, mint az eredeti felszín?

11. Zümm, a méhecske a nektárt olyan szabályos hatszög alapú edényekbe gyűjti, amelyet az ábrán is láthatunk. Az edény viaszból készült, és amint megtelik, a tetejére is viaszlap kerül. Mekkora az így készült viaszkamra felszíne? (➡)



12. Mennyi anyagra volt szükség annak a sátornak az elkészítéséhez, melynek az adatai az ábrán láthatók? (➡)

(A sátor alapját szabadon hagyták.)



13. Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 10 cm hosszú, a felszíne 1000 cm^2.

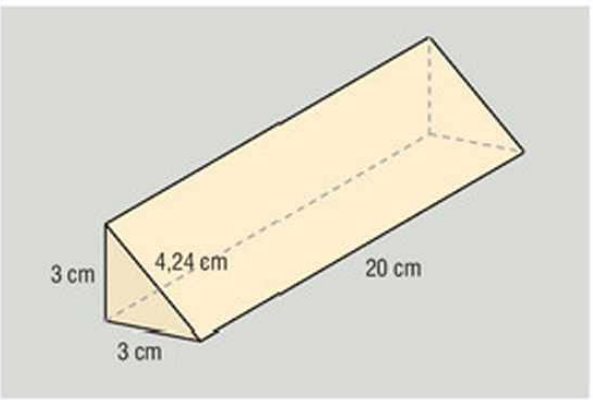
a) Mekkora a magassága?

b) Hányféleképpen lehet a hasábot befesteni, ha a festéshez két színt használunk, és minden egyes lapját egyszínűre festjük be? (Az egymásba vihető festett hasábokat nem tekintjük különbözőeknek.)

14. Egy csokoládéfajtát az ábrán látható dobozokba csomagolnak.

a) A papírgyárból 4 m^2 nagyságú ívekben kapják a csomagoláshoz szükséges kartonokat. A papír hány %-a lesz a veszteség, ha egy ívből 175 dobozt tudnak elkészíteni?

b) A boltokba a gyár kettes csomagolásban szállítja a csokoládét. Két dobozt a legnagyobb területű lapjukkal illesztenek össze, és ezt egy fóliával vonják be. Mennyi fólia szükséges egy ilyen csomaghoz?



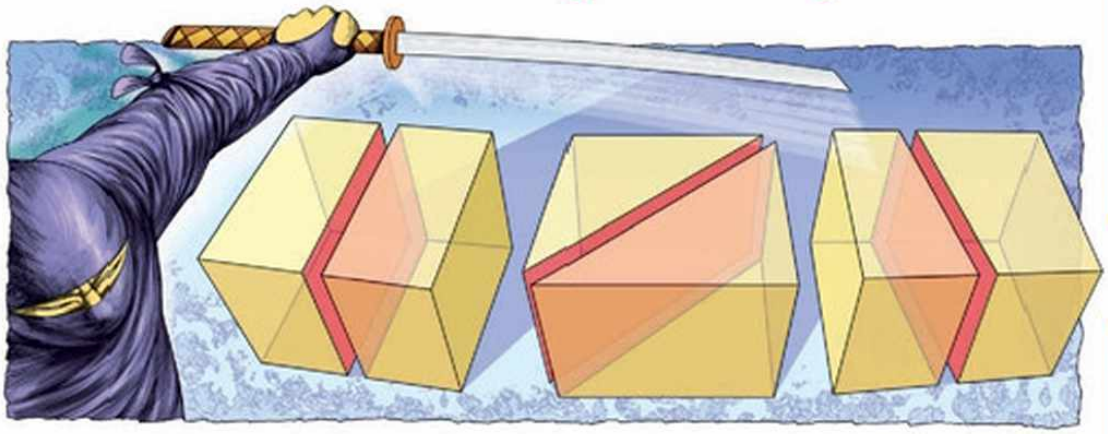
Rejtvény

Poirot, a híres nyomozó megbízást kapott arra, hogy rejtélyesen eltűnt aranytömböket kutasson fel. A károsult, akinek szerencsére volt biztosítása, pontos adatokat tudott megadni a téglatest alakú tömbökről:

– A tömbök mindegyik éle centiméterben mérve egész szám volt, felületük pedig pontosan 1967 cm^2.

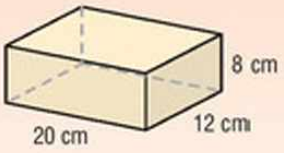
– Letartóztatom önt biztosítási csalásért! – válaszolta erre Poirot. Vajon miért?

4. A hasáb és a henger térfogata



1. példa

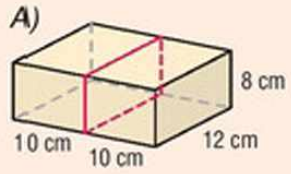
Az ábrán látható téglatestet egy – az alaplapjára merőleges – egyenes vágással két egybevágó részre akarjuk vágni. Hol vágjuk el? Mekkora lesz a darabok térfogata?

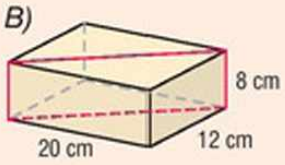


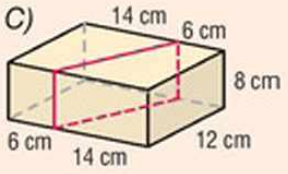
Megoldás

A téglalap középpontosan szimmetrikus, így a középponton átmenő egyenes vágás két egybevágó részre bontja.

A téglatestet elfelezhetjük úgy, hogy két téglatestet *(A)*; két háromszög alapú hasábot *(B)*; két trapéz alapú hasábot *(C)* kapjunk.







A kapott darabok térfogata mindegyik esetben ugyanakkora, mégpedig az eredeti téglatest térfogatának a fele:

$$V_{\text{fél}} = \frac{12 \cdot 20 \cdot 8}{2} = 960 \text{ cm}^3.$$

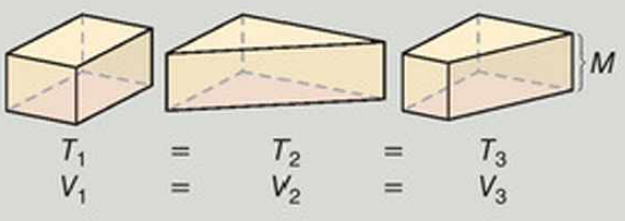
A téglalatestet másik lapjára állítva is hasonlóan kettévághatjuk.

A példa megoldásában felhasználtuk, hogy

- az egybevágó testek térfogata egyenlő;
- ha egy testet több darabra vágunk, a darabok térfogatának összege az eredeti test térfogatával egyenlő.

A fenti példában a hasábok alaplapja: téglalap, háromszög, trapéz. Területük egyenlő a 12 cm és 20 cm oldalú téglalap területének felével. A hasábok magassága megegyezik.

Az egyenes hasáb térfogata az alaplap területétől és a hasáb magasságától függ.



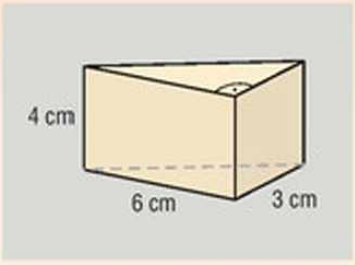


Végezz méréseket, majd számold ki, hogy mekkora helyet foglal el a szemétben 20 db 1 literes üdítős doboz!

Mekkora helyet foglalnak el összenyomva?

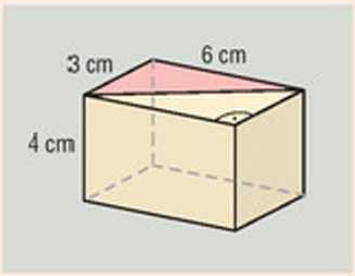
2. példa

Mekkora az ábrán látható háromszög alapú egyenes hasáb térfogata?



Megoldás

Vegyünk még egy ugyanilyen hasábot, és illesszük hozzá a megadott hasábhoz úgy, hogy együtt egy téglatestet alkossanak!



A kapott téglatest térfogata:

$$4 \cdot 6 \cdot 3 = 72 \text{ cm}^3.$$

Az eredeti háromszög alapú hasáb térfogata a téglatest térfogatának a fele:

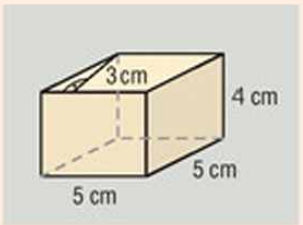
$$\frac{72}{2} = 36 \text{ cm}^3.$$

Az egyenes hasábok térfogatának kiszámítását visszavezethetjük a téglatest térfogatának a kiszámítására.

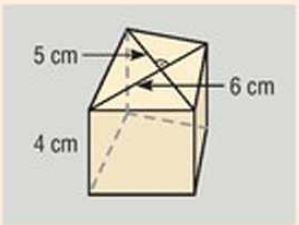
3. példa

Számítsuk ki az alábbi egyenes hasábok térfogatát!

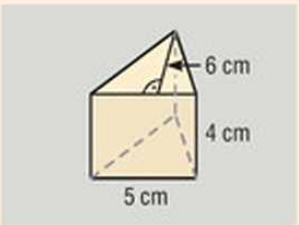
a) rombusz alapú hasáb



b) deltoid alapú hasáb



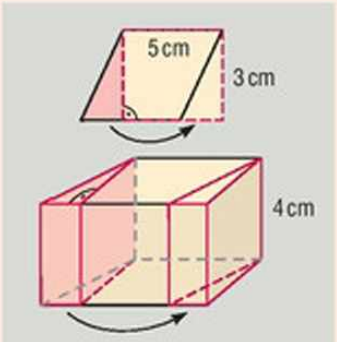
c) háromszög alapú hasáb



Megoldás

A hasáb alaplapját alkotó négyszögeket szétvághatjuk, és a darabokból téglalapot rakhatunk össze. Ha ugyanezeken a vonalakon áthaladó síkkal a hasábot az alaplapra merőlegesen vágjuk szét, akkor a darabokból téglatestet állíthatunk össze.

a) Az alapot az ábra szerint daraboljuk.



A kapott téglatest élei:

5 cm; 3 cm és 4 cm.

Így a térfogata:

$$5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \text{ cm}^3.$$

Tehát a rombusz alapú hasáb térfogata 60 cm^3.



b) Az alapot az ábra szerint daraboljuk.

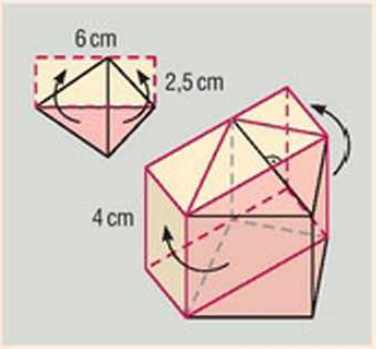
A kapott téglatest élei:

5 cm; 3 cm és 4 cm.

Így a térfogata:

$5 \cdot 3 \cdot 4 = 60\ \text{cm}^3$.

Tehát a deltoid alapú hasáb térfogata is $60\ \text{cm}^3$.

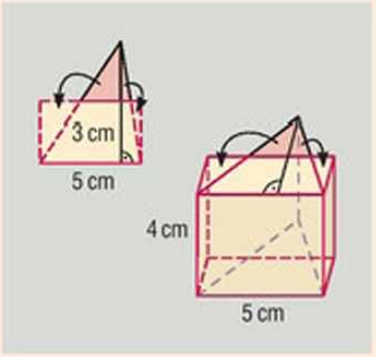


c) Az alapot a háromszög középvonala és a magasságvonal mentén vágjuk.

A kapott téglatest élei:
5 cm; 3 cm és 4 cm.

Így a térfogata: $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60\ \text{cm}^3$.

Tehát a háromszög alapú hasáb térfogata is $60\ \text{cm}^3$.



A hasábok térfogata megegyezik, mert magasságuk egyenlő, és az alapjukat szétvágva a darabokból ugyanazt a téglalapot lehet összerakni, vagyis az alapjaik területe is egyenlő.

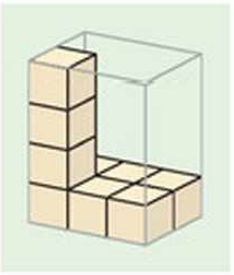
4. példa

Egy egyenes hasáb alapjának területe $6\ \text{cm}^2$, a hasáb magassága 4 cm. Meg lehet-e mondani, hogy mennyi a térfogata?

Megoldás

A hasáb alapja lehet téglalap (oldalai lehetnek például 2 cm és 3 cm). Ekkor a hasáb téglatest, térfogata: $6 \cdot 4 = 24\ \text{cm}^3$.

Ha a hasáb alapja tetszőleges $6\ \text{cm}^2$ területű sokszög, akkor ez átdarabolható ugyanekkora területű téglalappá. Így a hasáb átdarabolható $24\ \text{cm}^3$ térfogatú téglatestté. Tehát a hasáb térfogata $24\ \text{cm}^3$.



Bolyai Farkas (1775–1856) bizonyította be, hogy bármely két egyenlő területű sokszög átdarabolható egymásba.

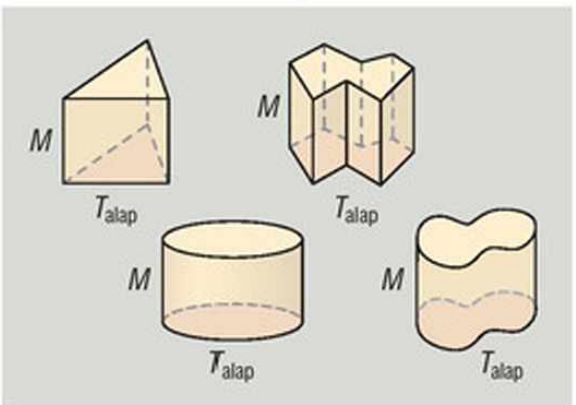
Ha egy egyenes hasáb alaplapjának területe T_{alap} és testmagassága M, akkor a hasáb térfogata:

$$V_{hasáb} = T_{alap} \cdot M.$$

Ha a példában $6\ \text{cm}^2$ alapterületű hengert veszünk a hasáb helyett, a térfogata akkor is ugyanannyi lesz.

Ha egy egyenes henger alaplapjának területe T_{alap} és testmagassága M, akkor a henger térfogata:

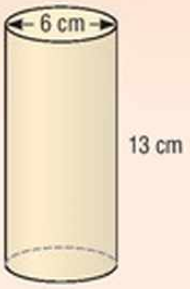
$$V_{henger} = T_{alap} \cdot M.$$





5. példa

Egy henger alakú üdítősdoboz alapkörének átmérője 6 cm, magassága 13 cm. A doboz hány százaléka üres, ha 0,33 liter üdítő van benne? (A doboz falának vastagságától tekintsünk el!)



Megoldás

A henger alakú doboz alaplapja 3 cm sugarú kör, így a térfogata:

$$V_{\text{doboz}} = T_{\text{alap}} \cdot M = (3^2 \cdot \pi) \cdot 13 = 367{,}38\ \text{cm}^3 \approx 367\ \text{cm}^3.$$

Az üdítő térfogata: $V_{\text{üdítő}} = 0{,}33\ \text{liter} = 330\ \text{cm}^3$.

Így az üres rész térfogata: $367 - 330 = 37\ \text{cm}^3$.

Ez a doboz térfogatának $\frac{37}{367} \cdot 100 \approx 10\%$-a.

Tehát az üdítősdoboznak közelítően 10%-a üres.

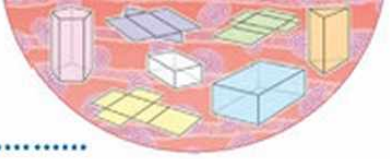
Feladatok

1. Számítsuk ki annak az egyenes hasábnak a térfogatát és a felszínét, melynek a magassága 15 cm, az alapja pedig
   a) 5 cm oldalú négyzet;
   b) 6 cm oldalú szabályos háromszög, melynek a magassága 5,2 cm;
   c) derékszögű háromszög, melynek oldalai 10 cm; 10 cm és 14,14 cm hosszúak;
   d) 10 cm és 15 cm oldalhosszúságú paralelogramma, melynek a hosszabb oldalához tartozó magassága 8 cm;
   e) 10 cm oldalhosszúságú rombusz, melynek a magassága 9 cm!

2. Az ábrán látható konzervdoboz címkéje pontosan (átfedés nélkül) beborítja a doboz oldalát. Mekkora a konzervdoboz térfogata?
   Keressünk konzervdobozokat, tervezzünk hozzájuk címkét, és számítsuk ki a dobozok térfogatát!



3. Egy áruházban háromféle átmérőjű edényt árulnak:
   a) 20 cm; *b)* 24 cm; *c)* 28 cm.
   Legalább milyen magas ezekből az az edény, amelynek a térfogata 4 liter?



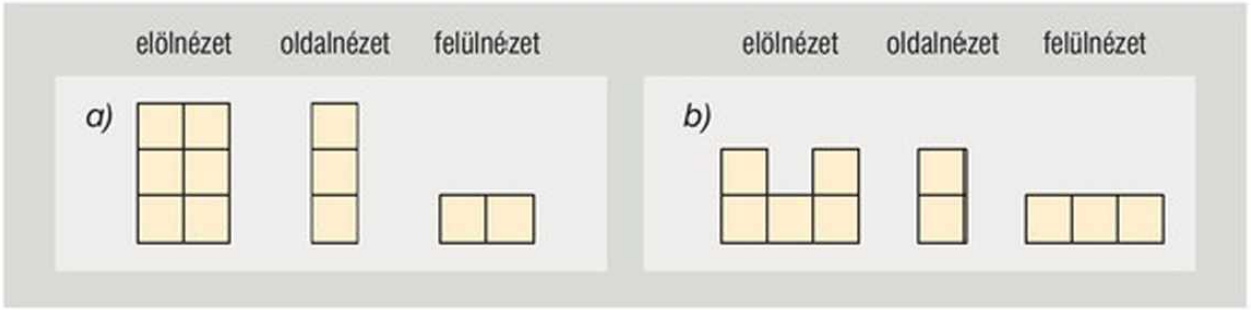
4. Milyen magas az a hasáb, amelynek térfogata és alaplapjának területe:

a) $V = 480\ \text{cm}^3$; $T_{\text{alap}} = 64\ \text{cm}^2$.

b) $V = 58\ \text{dm}^3$; $T_{\text{alap}} = 120\ \text{cm}^2$.

c) $V = 4{,}68\ \text{m}^3$; $T_{\text{alap}} = 670\ \text{cm}^2$?

5. 1 cm élhosszúságú kis kockákból testeket építünk. Ezek nézeteit láthatjuk az ábrán. Mekkora a testek térfogata és felszíne?



6. Mekkora annak az egyenes körhengernek a felszíne, amelynek alapköre r sugarú, térfogata pedig V?

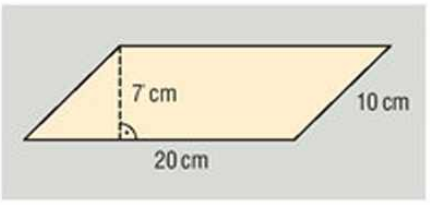
a) $r = 5$ cm; $V = 628\ \text{cm}^3$;

b) $r = 1{,}8$ dm; $V = 5086{,}8\ \text{cm}^3$.

7. Dóra és Nóra kivágott egy-egy 12 cm × 16 cm-es téglalapot. Dóra kör alapú henger, Nóra pedig négyzet alapú hasáb palástját készítette el belőle. Melyikük kaphatta a nagyobb térfogatú testet?

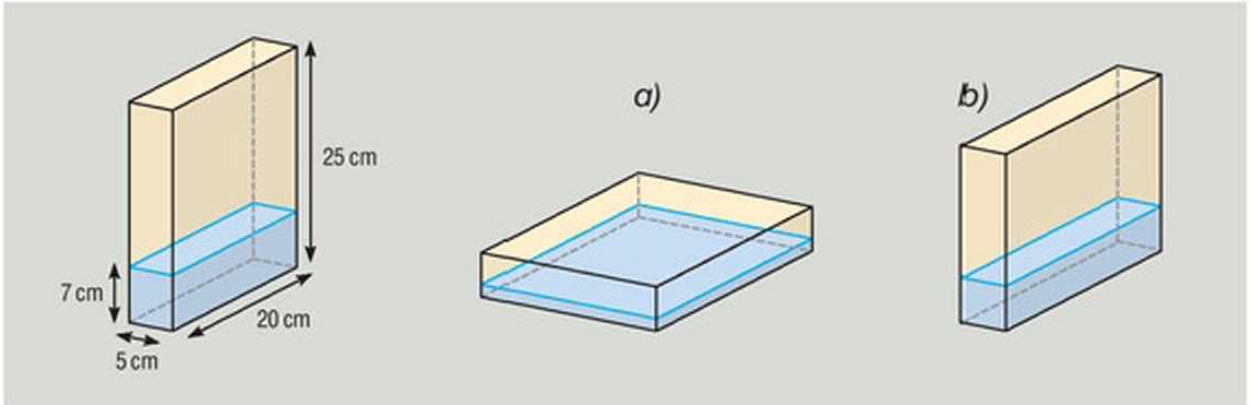
8. Egy paralelogramma alapú hasáb alapja az ábrán látható. A hasáb magassága 40 cm. Hogyan változtassuk meg a hasáb adatait, hogy a térfogata az eredetinek

a) 2-szerese; *b)* 4-szerese; *c)* 8-szorosa legyen?



9. Az erdészetben a tüzelőnek szánt fát 1,8 m magasságú hasábokba rendezik. A hasábok alapja 0,7 m és 1,2 m oldalhosszúságú téglalap. Egy hasáb 90%-a fa, a maradék részt a rönkök közötti rések teszik ki. Mikor járunk jobban, ha egy ilyen hasábot kapunk 21 500 Ft-ért, vagy ha 1 mázsa (100 kg) fát 2000 Ft-ért? (A fa sűrűsége: $\varrho = 700\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.)

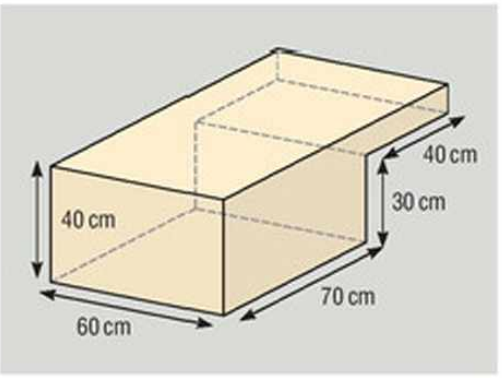
10. Az ábrán látható (zárt) üveghasábban 7 cm magasan áll a víz. Milyen magas lesz a vízszint, ha a téglatestet az ábra szerint valamelyik másik lapjára állítjuk?



11. Egy autó benzintankja az ábrán látható. (➡)

a) Hány liter benzin fér a tankba?

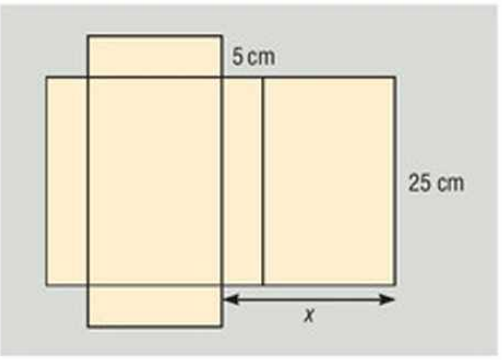
b) Mennyivel nő az autó tömege, ha az üres tankot teletöltjük? (A benzin sűrűsége $\varrho = 730\ \frac{kg}{m^3}$.)



12. Egy tengeralattjáró 100 m mélyre süllyed a tengerben. A tetején lévő ajtó mérete: 50×100 cm.

a) Mekkora tömegű vízoszlop nehezedik az ajtóra, ha a tengervíz sűrűsége $\varrho = 1025\ \frac{kg}{m^3}$?

**b)* Mekkora az ajtóra nehezedő nyomás?



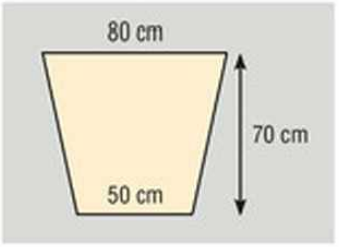
13. Mekkora legyen az ábrán x-szel jelölt szakasz hossza, ha a téglatest hálójából egy 2 liter űrtartalmú dobozt szeretnénk készíteni? (➡)

b) Mekkora lesz a doboz felszíne?

c) Hány százalékos lesz a veszteség, ha egy téglalapból vágjuk ki a hálót?

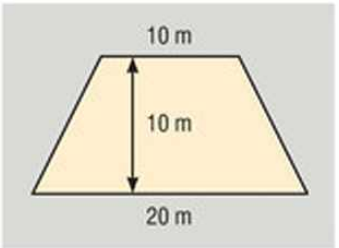
14. Egy téglalap alapú hasáb éleinek aránya $2:3:4$. Az egy csúcsból induló élei hosszának összege: 36 cm. Mekkora a hasáb térfogata és felszíne?

15. Az ábrán egy árok keresztmetszete látható. Mennyi víz képes átfolyni az árok keresztmetszetén 1 perc alatt, ha tele van vízzel, és a víz 1 másodperc alatt 1 m utat tesz meg? (➡)



16. Gabi az osztálykirándulásra csomagol. Hasáb alakú utazótáskája 60 cm hosszú, két vége 32 cm magasságú trapéz, az alján 30 cm, a tetején 25 cm széles. Az utazótáskájába vagy a 75 literes hátizsákjába fér több holmi?

17. Egy folyó mellé gátat építenek, melynek keresztmetszete az ábrán látható. Egy teherautó 18 m^3 földet képes elszállítani. Hány fordulóra lenne szüksége ahhoz, hogy az 1 km hosszú szakaszhoz szükséges földet a gáthoz szállítsa? (➡)



18. Zsiga szemeteszsákot vásárol, de nem tudja, hogy a 10, a 25 vagy az 50 literes zsák illik a konyhai szemetesükbe. Melyiket válassza? A szemetes méretei az ábrán láthatók. (➡)



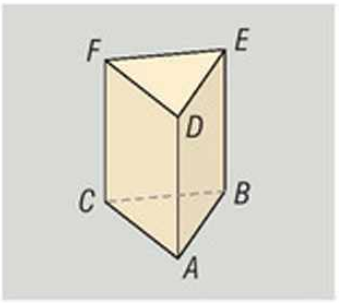
Rejtvény

Egy téglatest alakú vajból eddig 7 alkalommal reggeliztünk. Így most minden élének hossza éppen feleakkora, mint az első reggeli előtt volt. Hány reggelire elegendő még a vaj, ha minden reggelinél ugyanannyi vaj fogy?

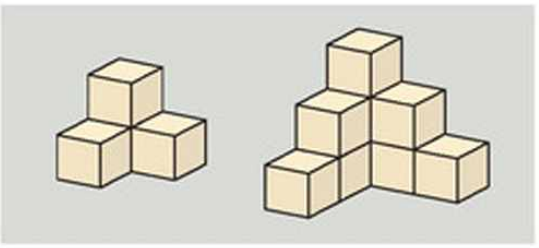
5. Vegyes feladatok

1. Adott egy síkon négy különböző pont, melyek közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre.
   a) Hány egyenest határoz meg a négy pont?
   b) Ha a síkon kívül felveszünk még egy pontot, akkor az így kapott öt pont hány síkot határoz meg a térben?

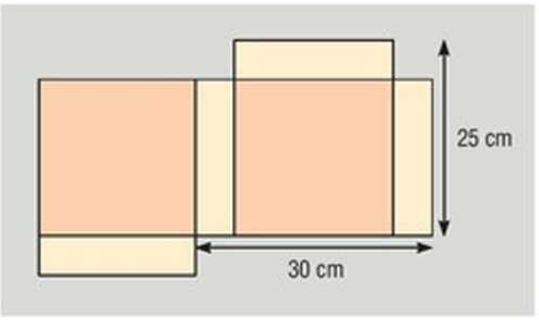
2. Adott egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb. Alapéleinek hossza 6 cm, a magassága 10 cm hosszú. (➡)
   a) Mekkora az A pont távolsága az EFD síktól?
   b) Mekkora a DA és az AB élek szöge?
   c) Mekkora szöget zár be az $ABED$ és a $BCFE$ lapok síkja?
   d) Mekkora az ABC és az EFD síkok távolsága és hajlásszöge?



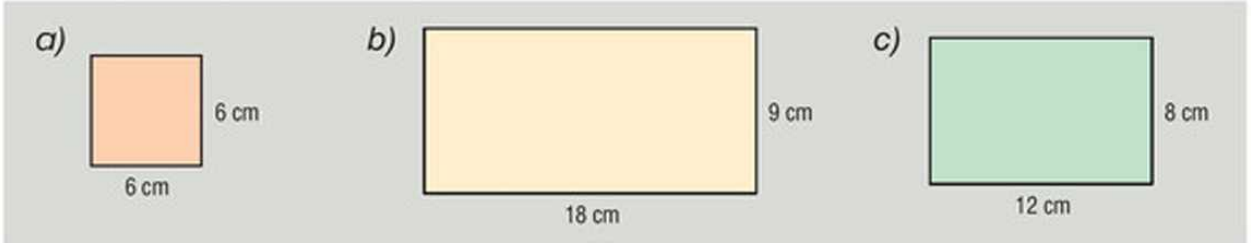
3. Az 1 dm élhosszúságú kockákból két testet építettünk.
   a) Folytassuk a sorozatot még két testtel!
   b) Rajzoljuk meg a testek elöl-, oldal- és felülnézetét!
   c) Hogyan változik az egymás utáni testek térfogata?
   d) Hogyan változik az egymás utáni testek felszíne?



4. Az ábrán egy test hálója látható, ahol a narancssárga lapok négyzetek. (➡)
   a) Mekkorák a test élei?
   b) Ha ezt a hálót dobozzá ragasztjuk össze, akkor belefér-e 1 liter narancslé?
   c) Mekkora a test felszíne?
   d) Ha a hálót egy téglalap alakú lapból vágjuk ki, akkor hány százalék lesz a veszteség?



5. Az ábrán egy egyenes körhenger elölnézete látható. Rajzoljuk le a másik két nézetét! Mekkora lehet a felszíne és a térfogata?



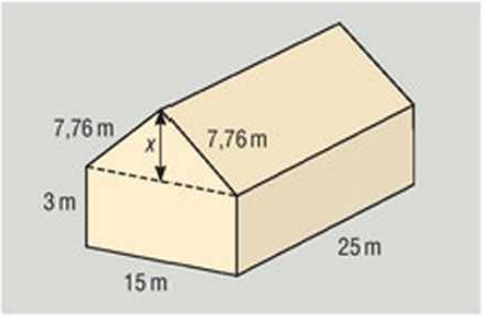
6. Egy ötszög alapú egyenes hasáb alapjának területe 500 cm^2, magassága 20 cm. A hasábot a palástjára fordítva görgetjük a síkon. Amíg egyszer körbefordul, 30 cm utat tesz meg.
   a) Mekkora a hasáb térfogata?
   b) Mekkora a felszíne?

7. Egy nyári felhőszakadás során Szeged területére átlagosan 18 mm eső esett. Hány liter esővizet jelent ez, ha a város területét közel 100 km^2 nagyságúnak tekinthetjük?

8. Az ábrán egy ház adatait láthatjuk. (➡)

a) Mekkora az x-szel jelölt távolság, ha tudjuk, hogy a ház belső terének $\frac{1}{4}$ részét a padlástér teszi ki?

b) Hány négyzetméter szigetelőanyagra van szükség, ha a tetőt és a falakat is szigetelik, és a falfelület 30%-át ablakok és ajtók fedik?



9. Egy négyzet alapú egyenes hasáb magassága az alapélének a 75%-a, a térfogata pedig 48 dm^3. Mekkora a hasáb felszíne?

10. Egy egyenes hasáb térfogata 96 dm^3, az alaplapjának területe 12 dm^2, a kerülete pedig 14 dm.

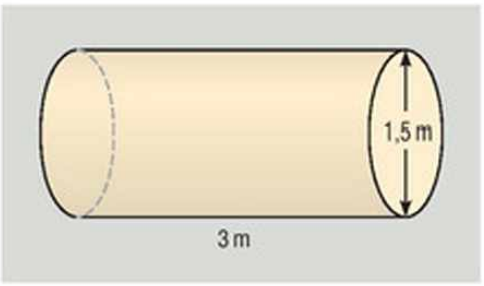
a) Mekkora a felszíne?

b) Hogy nézhet ki a hálója, ha még azt is tudjuk, hogy az alaplapja olyan téglalap, melynek az élei deciméterben mérve egész számok?

11. Egy öntözőkocsi tartályát láthatjuk az ábrán. (➡)

a) Hány liter víz fér a tartályba?

b) A locsolókocsi 4 m szélességben képes 1 mm vastag vízréteggel egyenletesen borítani az út felszínét. Hány kilométer hosszú útra elegendő egy teljes tartály vízmennyiség $\frac{3}{4}$ része?

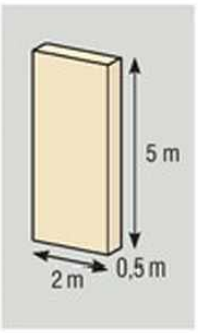


12. Stonehenge Angliában látható kőépítmény, melynek korát négyezer évre becsülik. A régészek ma is keresik azt a módszert, mellyel ezeket a kőtömböket az akkori kor embere mozgatni tudta. (➡)

Mekkora egy olyan kőtömb tömege, melynek mérete az ábrán látszik?

A kövek sűrűségét tekintsük 3000 $\frac{kg}{m^3}$-nek!

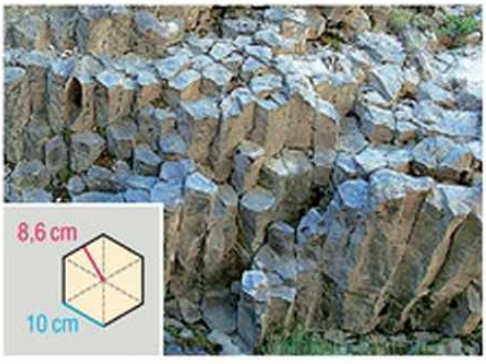


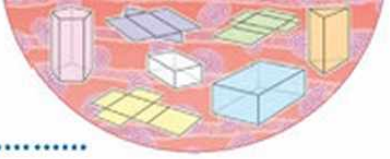


13. Geológusok megfigyelték, hogy a vulkánkitörések után a bazalt gyakran szabályos hatszög alapú hasábok formájában szilárdul meg.

Mekkora a tömege egy olyan 10 m magas bazaltoszlopnak, melynek az alapja 10 cm élhosszúságú, szabályos hatszög? (➡)

A bazalt sűrűségét tekintsük 2500 $\frac{kg}{m^3}$-nek!





Az új szakszavak jegyzéke

csúcsszögek • Lásd fordított állású szögek.

egyállású szögek • Két konvex szöget egyállású szögeknek nevezünk, ha megfelelő száraik páronként párhuzamosak és egyező irányúak.

fordított állású szögek • Két konvex szöget fordított állású szögeknek vagy más szóval **váltószögeknek** nevezünk, ha megfelelő száraik párhuzamosak és ellentétes irányúak. Ha a váltószögek csúcsa egybeesik, akkor **csúcsszögeknek** nevezzük őket.

függvény • Függvénynek nevezzük azt a hozzárendelést, amely az alaphalmaz minden eleméhez hozzárendeli a képhalmaz egy-egy elemét. Az alaphalmazt a **függvény értelmezési tartományának** nevezzük. Az elemek képét **függvényértéknek,** a függvényértékek halmazát pedig a **függvény értékkészletének** nevezzük.

halmazok egyesítése • A és B halmazok egyesítése (uniója) mindazon elemek halmaza, melyek legalább az egyik halmaznak elemei. Jele: $A \cup B$ (A unió B).

halmazok metszete • A és B halmazok metszete (közös része) mindazon elemek halmaza, melyek mindkét halmaznak elemei. Jele: $A \cap B$ (A metszet B).

háromszög középvonala • A háromszög középvonalának nevezzük a háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakaszt.

háromszög magasságpontja • A háromszög magasságpontjának nevezzük a háromszög magasságvonalainak metszéspontját.

háromszög magasságvonala • A háromszög c oldalához tartozó magasságvonalának nevezzük a háromszög C csúcsából a c oldalegyenesre bocsátott merőleges egyenest (m_c).

háromszög súlyvonala • A háromszög súlyvonalának nevezzük a háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt. (Szokásos jelölése: s_a, s_b, s_c.)

hatvány • Jelöljön a egy tetszőleges számot, n pedig legyen egy pozitív egész szám! Ekkor a^n hatványon egy olyan n tényezős szorzatot értünk, melynek minden tényezője a. Minden szám első hatványa önmaga, azaz $a^1 = a$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}$$

Az a-t a hatvány alapjának, az n-et kitevőnek nevezzük.

komplementer halmaz • Egy A halmaz komplementer halmazának (kiegészítő halmazának) nevezzük az alaphalmaz azon elemeinek halmazát, amelyek az A halmaznak nem elemei. Jele: $\overline{A}$ (A komplementere).

középpontosan szimmetrikus alakzat • A sík egy alakzatát középpontosan szimmetrikusnak nevezzük, ha van olyan O pont, amelyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat képe önmaga. Az O pont az alakzat szimmetria-középpontja.

lineáris függvények • Lineáris függvénynek nevezzük azt a függvényt, amelynek grafikonja egyenes.

medián • Ha páratlan számú adat van, akkor az adatok mediánjának nevezzük az adatok nagyság szerinti sorozatában a középső elemet. Páros számú adat esetén a medián a két középső adat átlaga.

módusz • Az adatok móduszának a leggyakoribb adatot nevezzük.



négyszög középvonala • A négyszög középvonalának nevezzük a négyszög két szemközti oldalának felezőpontját összekötő szakaszt.

paralelogramma • Paralelogrammának nevezzük azt a négyszöget, amelynek két-két szemközti oldala párhuzamos.

relatív gyakoriság • Egy adat relatív gyakoriságának nevezzük a gyakoriság és az összes adat számának hányadosát.

részhalmaz • Az A halmazt a B halmaz részhalmazának nevezzük, ha A minden eleme a B-nek is eleme. Jele: $A \subseteq B$ (A részhalmaza B-nek).

számtani sorozat • Számtani sorozatnak nevezzük azt a számsorozatot, amelyre teljesül, hogy (a második tagtól kezdve) bármely tag és az előző tag különbsége (differenciája) állandó.

váltószögek • Lásd fordított állású szögek.



Kiadja a Mozaik Kiadó, 6723 Szeged, Debreceni u. 3/B.; Telefon: (62) 470-101, 554-664
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Grafikus: Deák Ferenc • Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Kovács János
Terjedelem: 32,89 (A/5) ív • Tömeg: 650 g • 2012. január • Raktári szám: MS-2307