Sokszínű matematika

5

A kötet hátsó borítójának belsején egyedi kód található, melyet a ***www.mozaweb.hu*** *oldalon aktiválhatsz. Az aktiválás hozzáférést biztosít a kiadvány elektronikus változatához a honlapon található feltételekkel.*





Sokszínű matematika

Csordás Mihály
Konfár László
Kothencz Jánosné
Kozmáné Jakab Ágnes
Pintér Klára
Vincze Istvánné

Matematika 5

Tizenkettedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2024

A könyvet írta: Csordás Mihály · *általános iskolai tanár*
Konfár László · *általános iskolai szakvezető tanár*
Kothencz Jánosné · *általános iskolai tanár*
Kozmáné Jakab Ágnes · *általános iskolai szakvezető tanár*
Pintér Klára · *főiskolai adjunktus*
Vincze Istvánné · *általános iskolai szakvezető tanár*

Lektorálta: Juhász Nándor · *általános iskolai tanár*
Pálfalvi Józsefné dr. · *tanszékvezető főiskolai docens*
Sós Mária · *általános iskolai tanár*

Felelős szerkesztő: Tóth Katalin
Borítóterv, tipográfia: Reményfy Tamás
Műszaki szerkesztő: Vass Tibor
Illusztrációk: Ábrahám István
Számítógépes ábrák: Szentirmai Péter, Vass Tibor
Fotók: Mozaik Archívum – Vadász Sándor (53 db), Reményfy Tamás (4 db); Képügynökségek (59 db)

Kerettanterv: EMMI kerettanterv 51/2012. (XII. 21.)
EMMI rendelet 2. sz. melléklet (2.2.03, 2.3.1.1, 2.3.1.2)

Kiadja a Mozaik Kiadó, Szeged • Telefon: (62) 470-101, (62) 554-660
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu
Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Aggod István
Terjedelem: 24,31 (A/5) ív • Tömeg: 540 g • 2024. május • Raktári szám: MS-2305U

A Mozaik Archívum képeinek kizárólagos felhasználási joga a Mozaik Kiadó Kft. tulajdona.
Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában nem sokszorosítható.

ISBN 978 963 697 493 0

Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2005

Így használd a könyved!

A tankönyv az órán tanultak áttekintését, megértését és a matematika önálló tanulását is segíti. Ez a mintaoldal bemutatja, hogy a leckék egyes részeinek mi a szerepe.

EZ A FEJEZET CÍME

A lecke címe





1 Minden lecke bevezető képpel vagy rajzzal, és egy ehhez kapcsolódó kérdéssel, feladattal vagy gondolattal kezdődik. Ezt olvasd el, és értsd meg! Ha órán használjátok a könyvet, akkor beszélgessetek el a képről, gyűjtsetek további példákat, vagy játsszatok el hasonló helyzetet! Ha otthon veszed a kezedbe a könyvet, akkor gondold végig, hogyan kapcsolódik a kép és a problémafelvetés az órán megtanultakhoz!

2

Példa

A rózsaszín mezőkben kidolgozott mintapéldákat találsz. Először olvasd el a kérdést, és próbáld a feladatot önállóan megoldani!

Megoldás

Ezt követően hasonlítsd össze a megoldásod a könyvben leírttal! Lehet, hogy te is ugyanarra az eredményre jutottál, de más módon. Ekkor is gondold végig, és értsd meg a könyvben alkalmazott módszert, mert az olyan gondolatmenetet mutat be, amelyet a hasonló feladatok megoldásánál sokszor használhatsz majd!

A példák arra is útmutatást adnak, hogy hogyan lehet röviden és áttekinthetően leírni egy-egy feladat megoldását.

3 A normál betűs szöveg megmagyarázza és összefoglalja **a lecke lényegét.**

A zöld mezőben a legfontosabb szabályokat és az új fogalmak meghatározásait találod. Ezeket jegyezd meg!

5 A lap szélén korábban tanult ismereteket, érdekességeket, magyarázatokat, kiegészítő anyagokat, vagy izgalmas kérdéseket olvashatsz. Gondolkodj el rajtuk!



6 A leckék anyagának gyakorlásához és megértéséhez a munkafüzet feladatlapjainak megoldása is sokat segíthet.

Feladatok

4 1. A lecke utáni feladatok megoldása során az órán tanult új ismereteket és módszereket gyakorolhatod.

*2. A *-gal jelölt feladatok esetén más ügyes ötletekre is szükséged lehet.

Rejtvény

A lecke végén található rejtvény általában nem szokványos matematikafeladat. Reméljük, hogy ezt is sikerrel megoldod, és ez örömöt jelent a számodra.

7



Tartalomjegyzék



A természetes számok

1. A halmazok 10
2. A természetes számok 14
3. A tízes számrendszer 16
4. A kettes számrendszer (emelt szint) 21
5. A római számírás (emelt szint) 24
6. A számegyenes 26
7. A számok összehasonlítása 28
8. A számok kerekítése 31
9. A természetes számok összeadása 34
10. A természetes számok kivonása 37
11. A természetes számok szorzása 41
12. Szorzás 10-zel, 100-zal, 1000-rel 44
13. A szorzat változásai 46
14. Többjegyű számok szorzása 48
15. A természetes számok osztása 50
16. A hányados változásai 54
17. Osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel 56
18. Osztás többjegyű osztóval 58
19. Osztó és többszörös 60
20. A műveletek sorrendje 62
21. Vegyes feladatok 65





Geometriai alapismeretek



1. Ponthalmazok 68
2. Az egyenes és részei 71
3. Egyenesek kölcsönös helyzete 74
4. Síkok 78
5. Síkbeli alakzatok, sokszögek 80
6. A kör 84
7. A testek 88
8. Vegyes feladatok 91

Mérés, statisztika

1. A mérés mint összehasonlítás 94
2. A hosszúság 98
3. A tömeg 101
4. A mértékegységek tízes rendszere 103
5. Az idő 104
6. Diagramok 106
7. Az átlag 110
8. Valószínűségi játékok 113
9. Vegyes feladatok 115



A szögek

1. A szög fogalma, fajtái 118
2. A szögek mérése és rajzolása 122
3. Vegyes feladatok 129



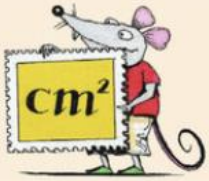
A törtszámok

1. A tört értelmezése 132
2. A törtek összehasonlítása 1 egésszel, vegyes számok 139
3. Törtek bővítése és egyszerűsítése 141
4. A törtek helye a számegyenesen 144
5. A törtek összehasonlítása 146
6. Egyenlő nevezőjű törtek összeadása és kivonása 150
7. Különböző nevezőjű törtek összeadása és kivonása 154
8. Tört szorzása természetes számmal 159
9. Tört osztása természetes számmal 162
10. Vegyes feladatok 164



A téglalap

1. A téglalap tulajdonságai 168
2. A kerület 172
3. A terület mérése 176
4. A téglalap területe 180
5. Vegyes feladatok 184





A téglatest



1. A téglatest 188
2. A testek ábrázolása (kiegészítő anyag) 192
3. A téglatest hálói 194
4. A téglatest felszíne 198
5. A térfogat (űrtartalom) mérése 202
6. A téglatest térfogata 204
7. Vegyes feladatok 208

A tizedes törtek



1. A tizedes tört fogalma 212
2. A tizedes törtek ábrázolása számegyenesen 214
3. A tizedes törtek bővítése, egyszerűsítése, összehasonlítása 216
4. A tizedes törtek kerekítése 219
5. A tizedes törtek összeadása és kivonása 222
6. A tizedes törtek szorzása és osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel 226
7. A tizedes törtek szorzása és osztása természetes számmal 229
8. A törtszámok tizedes tört alakja 232
9. Vegyes feladatok 235



Az egész számok

1. A negatív egész számok 240
2. A számok ellentettje, abszolút értéke 243
3. Az egész számok összeadása 246
4. Az egész számok kivonása 251
5. Vegyes feladatok 256

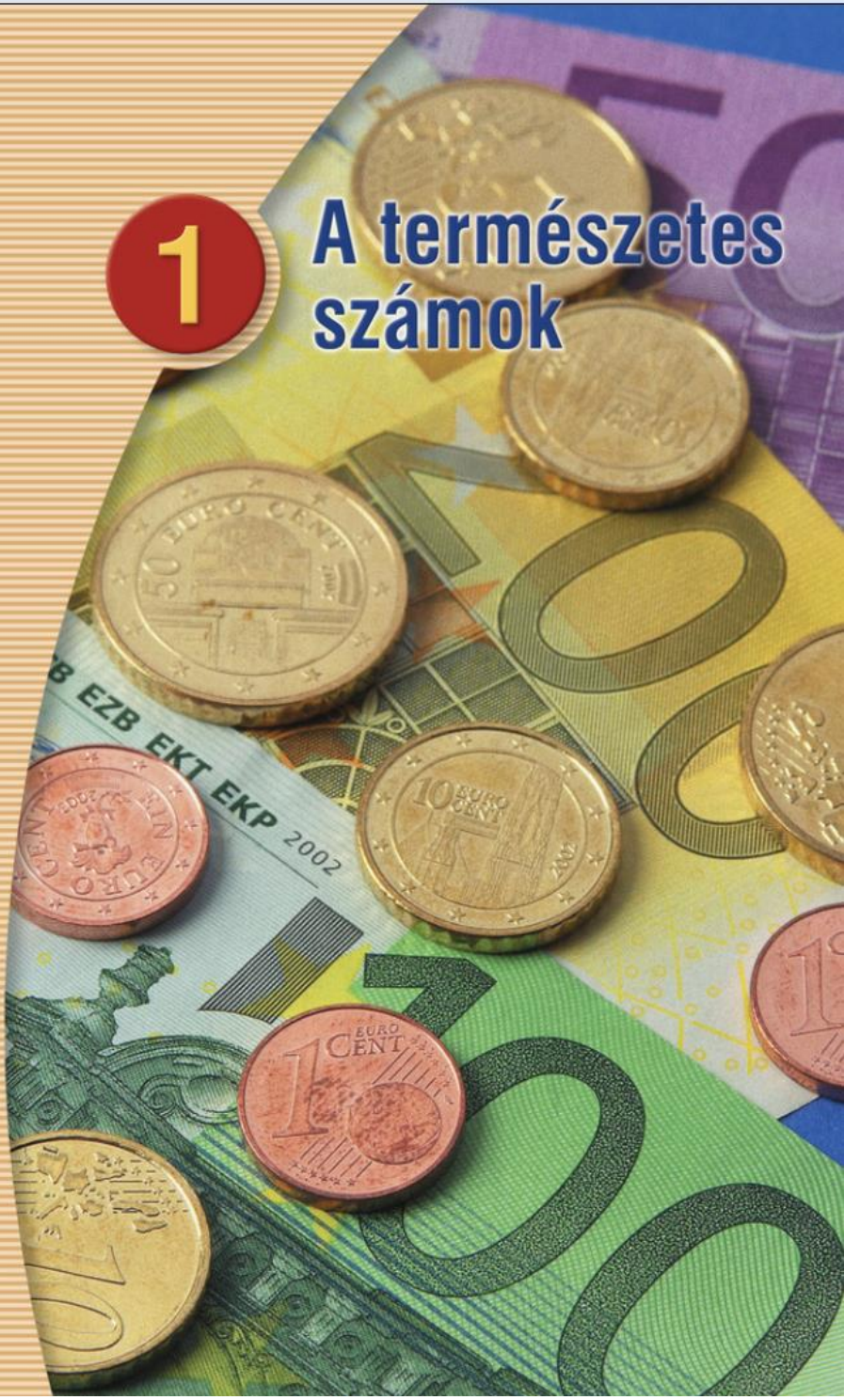


Helymeghatározás

1. Tájékozódás a környezetünkben 260
2. Helymeghatározás a síkon 262
3. Grafikonok 265
4. Vegyes feladatok 268

Az új szakszavak jegyzéke 270

1 A természetes számok



1. A halmazok



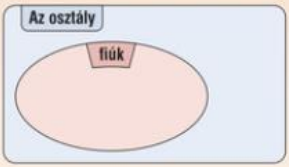
Egy iskolában az ötödikesek vittek magukról egy igazolványképet, és kitöltöttek egy adatlapot. Az adatlapon a gyerekek keresztneve és életkora mellett az is szerepelt, hogy eddig milyen nyelvet tanultak, mivel járnak iskolába és mi a kedvenc sportáguk. Ezekből készült az alábbi tabló.

 Zsófi *11 éves* angol, autó, úszás	 Hunor *11 éves* angol, gyalog, foci	 Petra *12 éves* francia, kerékpár, tenisz	 Szilvi *11 éves* német, busz, úszás
 Csaba *12 éves* angol, kerékpár, úszás	 Zita *11 éves* német, gyalog, torna	 Niki *11 éves* német, busz, kosárlabda	 Gergő *11 éves* angol, autó, úszás
 Milán *12 éves* angol, autó, kosárlabda	 Dani *11 éves* francia, kerékpár, úszás	 Berci *12 éves* angol, autó, foci	 Zsombor *11 éves* német, autó, kézilabda
 Bence *11 éves* francia, busz, kosárlabda	 Noémi *12 éves* angol, autó, úszás	 Dávid *12 éves* angol, busz, foci	 Máté *12 éves* angol, busz, kézilabda
 Kamilla *11 éves* francia, autó, torna	 Roland *12 éves* német, kerékpár, tenisz	 Emese *11 éves* angol, busz, kosárlabda	 Panni *12 éves* francia, busz, úszás

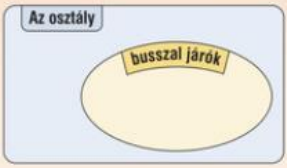
1. példa

Az adatlap alapján írjuk a halmazábrába a megfelelő neveket!

a)



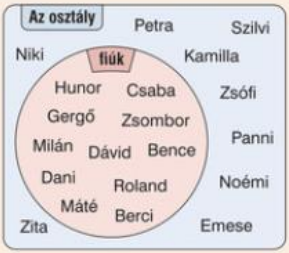
b)



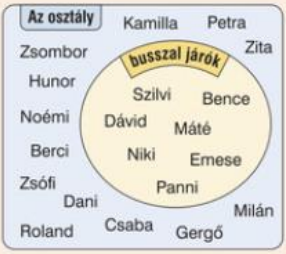
A halmazokat halmazábrával szemléltetjük.

Megoldás

a)



b)



2. példa

Mit mondhatunk a vonalkázással jelölt halmazokba tartozó gyerekekről, ha a színek az előző példában szereplő halmazokat jelölik?

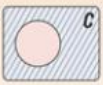
a)



b)



c)



d)



e)



Megoldás

a) Az *A* halmazba beletartozik az osztály minden tanulója.

Az osztály tanulói közül

b) az *F* halmazba tartoznak a fiúk;

c) a *C* halmazba tartoznak azok, akik nem fiúk, vagyis a lányok;

d) a *B* halmazba tartoznak azok, akik busszal járnak iskolába;

e) az *E* halmazba tartoznak azok, akik nem busszal járnak iskolába.

Alkossatok részhalmazokat az osztályotok tanulóiból!

Az 1. és a 2. példában az 5. osztály tanulóinak halmazát vizsgáltuk. Ez a halmaz a feladatban az **alaphalmaz.**

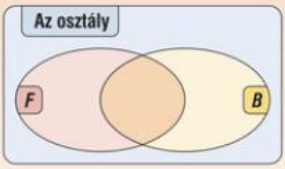
Ennek a halmaznak az egyik **részhalmaza** az osztályba járó fiúk halmaza. Az alaphalmaznak a fiúk halmazán kívüli része (a fiúk halmazának a kiegészítő halmaza) a lányok halmaza. Az osztályba járó lányok halmaza is részhalmaza az alaphalmaznak.



halmaz részhalmaza

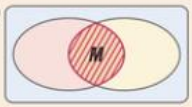
3. példa

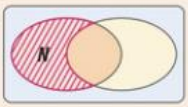
Az osztály tanulóiról olyan halmazábrát készítettünk, amely a fiúk halmazát (F) és a busszal iskolába járók halmazát (B) is mutatja.

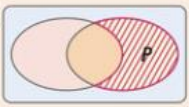


a) Írjuk a neveket a megfelelő halmazrészbe!

Mit mondhatunk azokról, akik az alábbi halmazokba kerültek?

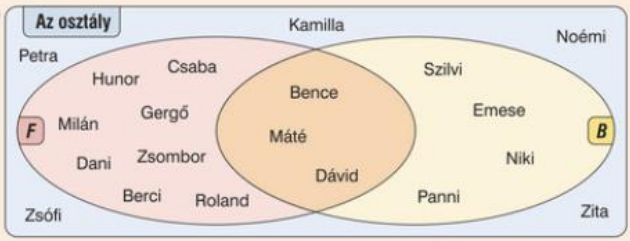
b) 

c) 

d) 

Megoldás

a)

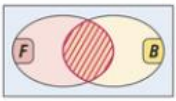


Az osztályotokban hány olyan fiú van, aki busszal jár iskolába?

b) Az M halmaz azoknak a tanulóknak a halmaza, akik fiúk **ÉS** busszal járnak.

c) Az N halmazba tartoznak azok a fiúk, akik nem busszal járnak.

d) A P halmazba azok a gyerekek kerültek, akik busszal járnak, de nem fiúk.



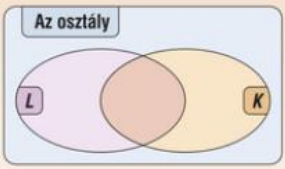
két halmaz metszete

Azoknak a gyerekeknek a halmaza, akik fiúk **ÉS** busszal járnak, a fiúk halmazának és a busszal járók halmazának a **közös része,** azaz **metszete.**

A lányok és a fiúk halmazának közös részébe senki sem tartozik, ez a halmaz **üreshalmaz.**

4. példa

Készítsünk halmazábrát az osztály tanulóiról, ábrázoljuk a lányok halmazát (L) és a kosárlabdázók halmazát (K)!



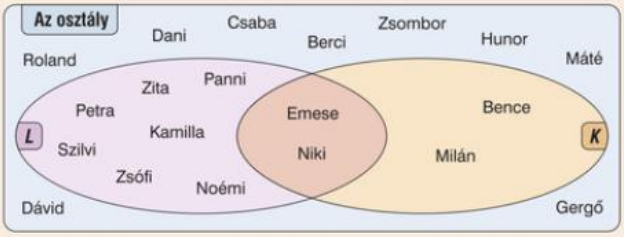
Színezzük különböző színnel a halmazrészeket, és írjuk le szöveggel a jellemzőjüket!

a) Írjuk a neveket a megfelelő halmazrészbe!

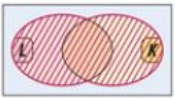
b) Hány olyan gyerek van az osztályban, aki lány vagy kosárlabdázik?

Megoldás

a)



b) Azon gyerekek halmazába, akik lányok vagy kosárlabdáznak, beletartozik a 7 nem kosárlabdázó lány, a 2 kosárlabdázó lány, valamint a 2 kosárlabdázó fiú. Összesen: $7 + 2 + 2 = 11$ gyerek.

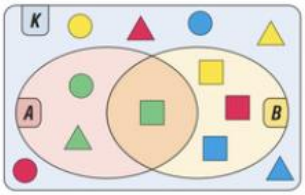


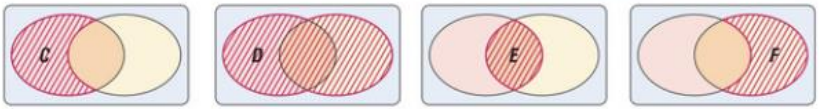
két halmaz egyesítése

Azoknak a gyerekeknek a halmaza, akik lányok **VAGY** kosárlabdáznak a lányok halmazának és a kosárlabdázók halmazának az **egyesítése.**

Feladatok

1. Ábrázoljuk halmazábrán a 10. oldalon levő osztály tanulóinak következő részhalmazait:
   A: angolt tanulók halmaza; *B*: úszásra járók halmaza!
   a) Hány gyerek került az *A* és *B* halmazok metszetébe?
   b) Hány gyerek került az *A* és *B* halmazok egyesítésébe?
2. Legyen az alaphalmaz a magyar települések halmaza, az *A* halmaz a Csongrád megyei, a *B* halmaz az Sz-szel kezdődő települések halmaza! Készítsünk halmazábrát, és írjunk az egyes halmazrészekbe elemeket!
   Találjatok ki hasonló feladatokat!
3. A logikai készlet 12 elemét elhelyeztük egy halmazábrában. A halmazábra alapján fogalmazzuk meg, hogy milyen tulajdonságú elemek kerültek
   a) az *A* halmazba; *b)* a *B* halmazba;
   c) a *C* halmazba; *d)* a *D* halmazba;
   e) az *E* halmazba; *f)* az *F* halmazba!

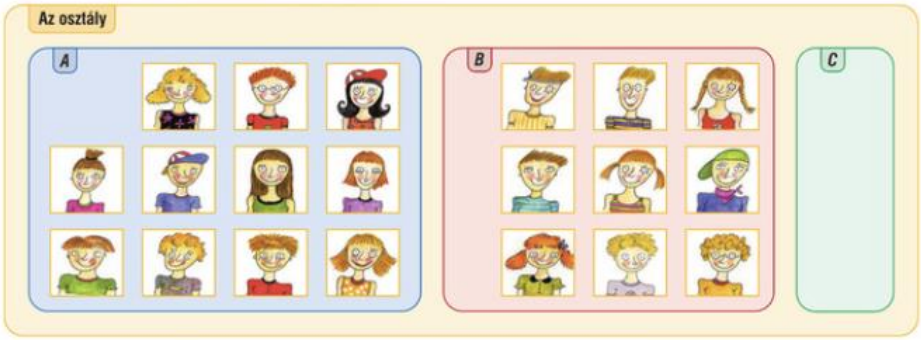




Rejtvény

Gombóc Artúr megevett 5 csokoládét, amelyből 4 kerek és 3 epres volt. Hogy lehetséges ez?

2. A természetes számok



Az osztály tanulóit életkoruk szerint halmazokba soroltuk.
A: 11 évesek
B: 12 évesek
C: 13 évesek

1. példa

Hány 11 éves, 12 éves és 13 éves gyerek jár az osztályba?

Megoldás

Az osztályba járó 11 éves gyerekek halmazát jelöljük *A*-val, a 12 évesekét *B*-vel, a 13 évesekét *C*-vel! Soroljuk fel a halmazok elemeit! Felsoroláskor az elemeket kapcsos zárójelbe tesszük.

A = {Zsófi; Hunor; Szilvi; Zita; Niki; Gergő; Dani; Zsombor; Bence; Kamilla; Emese}
B = {Petra; Csaba; Milán; Berci; Noémi; Dávid; Máté; Roland; Panni}
C = {}

A *C* halmaz üreshalmaz.

Az *A* halmazba 11 gyerek neve került, az *A* halmaz elemeinek száma: 11
A *B* halmazba 9 gyerek neve került, a *B* halmaz elemeinek száma: 9
A *C* halmazba 0 gyerek neve került, a *C* halmaz elemeinek száma: 0
} természetes számok

A természetes számok: a 0 és a pozitív egész számok.

A 11; 9; 0 számok megadják, hogy az *A*, *B* és *C* halmazban hány elem van. Az ilyen számokat természetes számoknak nevezzük. **A természetes számok a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; ... és így tovább.** A természetes számok halmazának jele: $\mathbb{N}$ (a *natura:* természet szó kezdőbetűje). $\mathbb{N}$ = {0; 1; 2; 3; 4; ...}



- A legkisebb természetes szám a 0 (nulla).
- Minden természetes számnál van eggyel nagyobb természetes szám, ezért a természetes számok között nincs legnagyobb.
- Végtelen sok természetes szám van.

A sivatag homokszemeinek száma véges.

2. példa

Legyen az alaphalmaz a 25-nél kisebb természetes számok halmaza, és legyen annak két részhalmaza A és B!

A: 25-nél kisebb páratlan természetes számok halmaza;

B: két azonos számjegyből álló természetes számok halmaza.

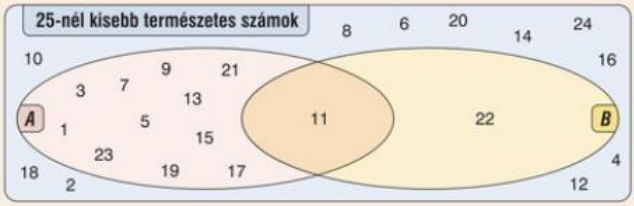
a) Készítsünk halmazábrát!

b) Hány eleme van az A és B halmazok közös részének?

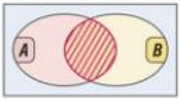
c) Hány eleme van az A és B halmazok egyesítésének?

Megoldás

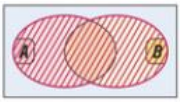
a)



b) Az A és B halmazok közös részébe a 11 került. Az A és B halmazok **közös része** az a halmaz, amelybe azok a 25-nél kisebb természetes számok tartoznak, amelyek páratlanok **ÉS** két azonos számjegyből állnak. Ennek a halmaznak 1 eleme van, a 11.



c) Az A és B halmazok egyesítése a következő számokat tartalmazza: {1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 22; 23}. Az A és B halmazok **egyesítése** az a halmaz, amelybe azok a 25-nél kisebb természetes számok tartoznak, amelyek páratlanok **VAGY** két azonos számjegyből állnak. Ennek a halmaznak 13 eleme van.



Feladatok

1. Mondjunk mese-, film- és regénycímeket, amelyekben természetes számok is vannak!

2. Megadtuk az A, a B és a C halmaz elemeit.

   A: {0; 2; 4; 6; 8}; B: {0; 3; 6; 9}; C: {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

   a) Ábrázoljuk a három halmazt, és írjuk az elemeket a megfelelő helyre, ha tudjuk, hogy az egyik az alaphalmaz, a másik kettő annak részhalmaza!

   b) Hány elemű a két részhalmaz metszete?

*3. Hány eleme van annak a halmaznak, amely

   a) a páros számok halmazának és a páratlan számok halmazának metszete;

   b) az egyjegyű számok halmazának és a kétjegyű számok halmazának egyesítése?

Rejtvény

7 rakás és 5 rakás összehordva hány rakás?

3. A tízes számrendszer



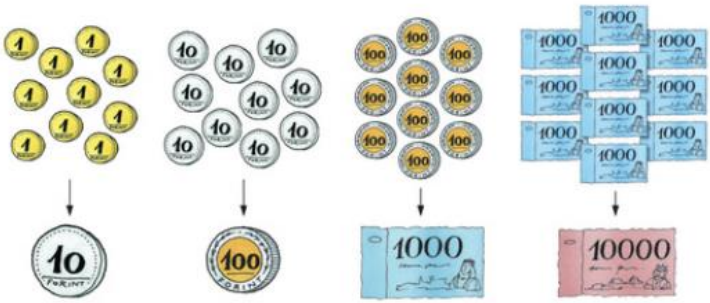
Beszéljétek meg, hogyan kell postán nagy mennyiségű pénzérmét befizetni!



Berci és Zsolti régi egyforintosokat gyűjtenek. Ma mindketten megszámolták, hogy eddig hány darabot gyűjtöttek össze. Melyikük számolt ügyesebben?

A pénz számlálása során célszerű az érméket először tízesével csoportosítani, majd ezekből ismét tízes csoportokat kialakítani és így tovább.

A **tízes számrendszer** a tízes csoportosításon alapul.



A számlálás során a tárgyakat csoportosíthatjuk kettesével, hármasával, négyesével stb. Ennek megfelelően léteznek kettes, hármas, négyes ... számrendszerek is.

A tízes számrendszer helyiérték-táblázata

A számokat **tíz számjegy (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9)** segítségével tízes helyiérték-rendszerben írjuk.

Az alsó tagozatban megismert helyi értékek: *egyes, tízes, százas, ezres, tízezres és százezres.* A nagyobb számok leírásához a helyiérték-táblázatot tovább kell bővíteni.

...	száz	tíz	egy	száz	tíz	egy	száz	tíz	egy	száz	tíz	egy	...
	milliárd			*millió*			*ezer*						
									1	8	4	8	
									2	2	0	9	
								1	2	0	0	2	
					8	3	7	5	2	1	9	4	

A számjegyek helyi értékének fogalma minden bizonnyal Mezopotámiából származik.

Vizsgáljuk meg a 2209 számot! Miért különbözőek a 2-es számjegy valódi értékei?

A számjegyek	2	2	0	9
helyi értéke	ezres	százas	tízes	egyes
alaki értéke	2	2	0	9
valódi értéke	2000	200	0	9



Az 2209 felbontása helyi érték szerint összeg alakban:

$2209 = 2 \text{ ezres} + 2 \text{ százas} + 0 \text{ tízes} + 9 \text{ egyes}$

$2209 = 2 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 9 \cdot 1$

Nagyobb számokat is hasonlóan bonthatunk fel:

83 752 194 = **8** tízmilliós + **3** milliós + **7** százezres + **5** tízezres + **2** ezres + **1** százas + **9** tízes + **4** egyes

83 752 194 = **8** · 10 000 000 + **3** · 1 000 000 + **7** · 100 000 + **5** · 10 000 + **2** · 1000 + **1** · 100 + **9** · 10 + **4** · 1

A többjegyű számokat **hármas tagozódás** szerint olvassuk (lásd helyiérték-táblázat):

83 752 194 = 83 millió 752 ezer 194.

Ha egy természetes számot két, három, négy ... számjeggyel írunk le, akkor azt két-, három-, négyjegyű ... számnak nevezzük (pl. 28, 896, 2005).

Az egyjegyű természetes számok száma 10: {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}.

Példa

Hány kétjegyű pozitív egész szám van?

1. megoldás

Írjuk le 1-től 99-ig a pozitív egész számokat!

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; ...; 42; 43; ...; 97; 98; 99

egyjegyű: 9 kétjegyű: 99 − 9 = 90

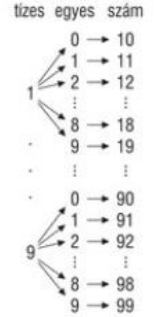
Összesen 99 olyan pozitív egész szám van, amelyik egy- vagy kétjegyű. Ebből 9 egyjegyű. Így 90 kétjegyű pozitív egész szám van.

2. megoldás

A tízes helyi értékre 9-féle számjegy kerülhet (mert egy kétjegyű szám nem kezdődhet nullával). Minden tízes helyi értékre írt számjegy után az egyes helyi értékre 10-féle számjegy kerülhet (a 0 is).

Így összesen 9 · 10 = 90 kétjegyű pozitív egész szám van.





A természetes számok helyesírása

A jelenleg használatos számjegyek az indiai számjegyekből fejlődtek ki. Ezeket a számokat arab számoknak nevezzük, mert az arabok közvetítésével kerültek Európába.

A számokat vagy számjegyekkel, vagy betűkkel írjuk le. Mindkét írásmódnak szabályai vannak.

SZÁMMAL:
A legalább ötjegyű számok esetén nyomtatásban az egyesektől számítva minden harmadik számjegy után kicsivel nagyobb helyet hagyunk.
Például: 1848; 12 002; 5 273 964.

BETŰVEL:
– **Kétezerig** a számokat **egybeírjuk.** Például: *ezernyolcszáznegyvennyolc.*
– A **kétezernél nagyobb** számoknál **a hármas tagozódás szerint kötőjelet** írunk.
Például: *tizenkettőezer-kettő* (12 002),
ötmillió-kétszázhatvanháromezer-ötszázhatvannégy (5 263 564).



Feladatok

1. Hány tízforintosra lehet felváltani
   a) 7 százforintost; *b)* 4 ezerforintost; *c)* 5 tízezerforintost?
2. Hány tízest jelent
   a) 7 ezres; *b)* 1 tízezres; *c)* 4 milliós?
3. Hány százforintost kapunk, ha százforintosokra felváltunk
   a) 2 ezrest és 1 ötezrest; *b)* 13 ezrest és 2 ötezrest;
   c) 3 tízezrest és 3 ezrest; *d)* 2 tízezrest, 2 ötezrest és 2 ezrest?
4. Hány százast jelent
   a) 15 ezres; *b)* 2 tízezres és 4 ezres; *c)* 23 tízezres és 15 százas;
   d) 2 milliós; *e)* 3 milliós és 3 ezres; *f)* 10 milliós és 9 százezres?

5. Egy ötödikes kerékpárra gyűjt. Jelenleg 1 ötezrese, 7 ezrese, 18 százasa, 6 tízforintosa és 21 ötforintosa van.

a) Mennyi pénze van?

b) Hogyan válthatja át a pénzét a lehető legkevesebb pénzdarabra?

6. Számítsuk ki!

a) $3 \cdot 100\,000 + 2 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 1$;

b) $5 \cdot 1\,000\,000 + 3 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1000 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 1$;

c) $3 \cdot 1\,000\,000 + 3 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 3 \cdot 10$;

d) $3 \cdot 100\,000 + 12 \cdot 10\,000 + 7 \cdot 1000 + 13 \cdot 1$;

e) $9 \cdot 1\,000\,000 + 19 \cdot 100\,000 + 21 \cdot 10\,000 + 17 \cdot 10$.



7. Hány nulla szerepel a műveletsor eredményében?

a) $4 \cdot 100\,000 + 6 \cdot 1000 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1$;

b) $12 \cdot 10\,000 + 21 \cdot 1000 + 13 \cdot 100$;

c) $5 \cdot 1\,000\,000 + 7 \cdot 1000 + 4 \cdot 10$;

d) $7 \cdot 1\,000\,000 + 31 \cdot 100\,000 + 4 \cdot 100 + 21 \cdot 10$;

e) $7 \cdot 10\,000 + 31 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 21 \cdot 10 + 9 \cdot 1$.

8. Melyik az a szám, amelyben pontosan

a) 8 tízezres, 7 ezres, 9 százas és 3 egyes van;

b) 1 milliós, 3 százezres, 1 százas és 7 tízes van;

c) 2 tízmilliós, 5 százezres és 8 egyes van;

d) 2 százezres, 2 milliós és 2 ezres van;

e) 7 százas, 8 százezres és 9 egyes van;

f) 4 tízezres, 5 milliós és 6 egyes van?

9. Számítsuk ki az összeget, és írjuk le betűkkel is!

a) 7 tízes + 12 egyes + 8 százas + 32 ezres;

b) 32 tízezres + 2 milliós + 21 ezres;

c) 13 tízezres + 9 ezres + 5 százas + 4 egyes;

d) 6 egyes + 13 ezres + 31 százas + 4 tízezres;

e) 41 ezres + 4 milliós + 5 tízezres;

f) 6 tízes + 15 egyes + 28 százas + 8 ezres.

10. Bontsuk fel helyi érték szerint a következő számokat!

a) 1800; *b)* 25 050; *c)* 1001;

d) 73 730; *e)* 402 024; *f)* 1 008 700.

11. Hogyan változik a 2-es számjegy valódi értéke, ha a 10 325 számban a tízes és az ezres helyi értéken álló számjegyeket felcseréljük?

12. Írjuk le számjegyekkel a következő számokat!

a) A teljes napfogyatkozás éve Szegeden: ezerkilencszázkilencvenkilenc.

b) A Nap átmérője méterben: egymilliárd-háromszázkilencvenkettőmillió.

c) A Föld–Nap távolsága a nyári napfordulókor kilométerben: százötvenkétmillió-kilencvenkétezer-kilencszáz.

13. Írjuk le betűkkel a következő számok közül azokat, amelyek helyesírásánál egyetlen kötőjelet használunk!

a) 18 400; *b)* 1 050 116; *c)* 6001; *d)* 348;
e) 1256; *f)* 4372; *g)* 2000; *h)* 5 432 100.

14. Írjunk olyan kétjegyű számot, amelyben a tízesek helyén álló számjegy 2-vel nagyobb az egyesek helyén álló számjegynél! Hány ilyen kétjegyű szám van?

15. Alkossunk olyan háromjegyű számot, amelyben a legkisebb helyi értéken a legnagyobb számjegy áll! Hány ilyen háromjegyű szám van? A megtalált számok közül írjuk le a legkisebbet betűkkel is!

16. Írjunk olyan nyolcjegyű számot, amelyben az egyesek helyén álló számjegynél 1-gyel nagyobb a tízesek helyén álló, ennél 1-gyel nagyobb a százasok helyén álló és így tovább! Hány ilyen szám van? Írjuk le betűkkel a legkisebbet!

17. Mikor jelentek meg a Földön? Írjuk le számokkal is:

a) az első élőlények több mint 3 milliárd éve;
b) az első halak kb. 600 millió éve;
c) az első dinoszauruszok kb. 400 millió éve;
d) a madarak kb. 200 millió éve;
e) a mai ember kb. 100 ezer éve!





18. Ez a négy darab számkártyánk van: 2 5 7 9.

a) Hány négyjegyű számot lehet ezekből kirakni?
b) Hány szám páros ezek közül? (⇒)

19. A 2; 5 és 7 számjegyekből tetszőleges számút használhatunk fel háromjegyű számok felírásához.

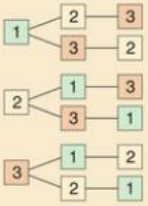
a) Hány különböző háromjegyű számot lehet így felírni?
b) Hány páratlan szám lesz közöttük?

20. Hány olyan természetes szám van, amely

a) háromjegyű; *b)* négyjegyű; *c)* ötjegyű?

SÚGÓ • a 18. feladathoz

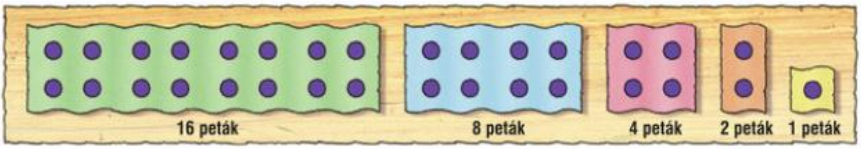
Az 1; 2; 3 számjegyekből felírható 3-jegyű számok:



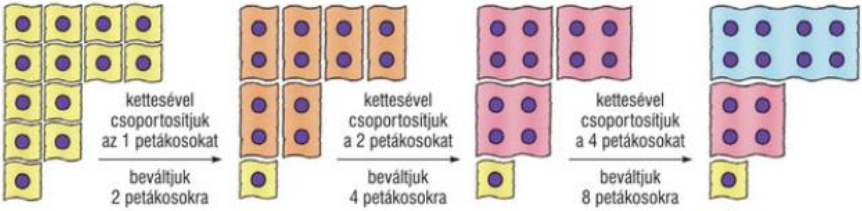
Rejtvény

Hány háromjegyű palindrom szám van? (A palindrom számok azok, amelyek visszafelé olvasva is ugyanazt a számot adják. Például: 2002.)

4. A kettes számrendszer (emelt szint)



Bináriában az ábrán látható bankjegyeket használják, amelyek annyi petákot érnek, ahány pötty látható rajtuk. Fizessünk ki a a lehető legkevesebb bankjeggyel 13 petákot!



Írjuk táblázatba a szükséges bankjegyek számát!

8 petákos	4 petákos	2 petákos	1 petákos	Kifizetett összeg
1	1	0	1	13 peták

Írjuk táblázatba, hogyan fizethetünk ki Bináriában a lehető legkevesebb bankjeggyel 9 petákot, 15, 18, 24 és 29 petákot! Hány petákos legyen a 16 petákos után következő bankjegy?

Kettes számrendszernek a kettes csoportosításon alapuló rendszert nevezzük. A fenti példa alapján

$$13_{(10)} = 1101_{(2)},$$

ahol a bekarikázott kis számjegy a **számrendszer alapszáma,** amely megmutatja, hogy hányasával csoportosítunk. Ha nem a tízes számrendszerben dolgozunk, akkor ezt mindig jelölni kell.

Az $1101_{(2)}$ kiejtése: egy-egy-nulla-egy a kettes számrendszerben.

A kettes számrendszer helyiérték-táblázata

A számokat a kettes számrendszerben **két számjegy,** a **0** és az **1** segítségével kettes helyiérték-táblázatba írjuk.

...	harminckettes (·2)	tizenhatos (·2)	nyolcas (·2)	négyes (·2)	kettes (·2)	egyes	...
				1	0	1	
			1	0	1	1	
	1	0	1	0	1	1	

$$101_{(2)} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$$
$$1011_{(2)} = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 11$$
$$101011_{(2)} = 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 43$$

Minden számrendszerben annyi számjegyet használunk, amennyi a számrendszer alapszáma. Például a hármas számrendszerben használt számjegyek a 0; 1; 2, a helyi értékek pedig az egyes, hármas, kilences, huszonhetes, ...

Miért különböznek az 1 számjegyek valódi értékei az $1101_{(2)}$ számban?

1101

helyi értéke:	alaki értéke:	valódi értéke:
négyes	1	4

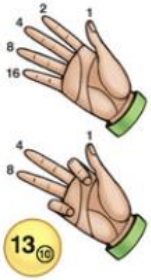
A számjegyek	1	1	0	1
helyi értéke	nyolcas	négyes	kettes	egyes
alaki értéke	1	1	0	1
valódi értéke	8	4	0	1

A kettes számrendszerbeli számok sorban:

1; 10; 11; 100; 101; 110; 111; 1000; 1001; 1010; ...

Az alábbi példákban megmutatjuk, hogyan írhatjuk át a számokat kettes számrendszerből tízes számrendszerbe és fordítva.

Számoljunk az ujjunkon a 2-es számrendszerben, ha az ujjak a helyi értékeket jelentik sorban.



1. példa

Írjuk át az $10111_{(2)}$ számot a tízes számrendszerbe!

Megoldás

Írjuk be a számot a kettes számrendszer helyiérték-táblázatába!

tizenhatos	*nyolcas*	*négyes*	*kettes*	*egyes*
1	0	1	1	1

Ez alapján a szám összeg alakja:

$$1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 23.$$

A $10111_{(2)}$ szám tízes számrendszerbeli alakja 23.

Tízes számrendszer	Kettes számrendszer
1	$1_{(2)}$
2	$10_{(2)}$
3	$11_{(2)}$
4	$100_{(2)}$
5	$101_{(2)}$
6	$110_{(2)}$
7	$111_{(2)}$
8	$1000_{(2)}$
9	$1001_{(2)}$
10	$1010_{(2)}$

2. példa

Írjuk át a tízes számrendszerbeli 27-es számot kettes számrendszerbe!

Megoldás

Használjuk a kettes számrendszer helyiérték-táblázatát!

27 < **32**, ezért a harminckettes helyi értékre nem írunk számjegyet.
27 > **16**, ezért **1 tizenhatos** lesz (és marad 27 − 16 = 11).
11 > **8**, ezért **1 nyolcas** lesz (és marad 11 − 8 = 3).
3 < **4**, ezért **0 négyes** lesz.
3 > **2**, ezért **1 kettes** lesz (és marad 3 − 2 = 1).
Maradt 1, ezért **1 egyes** lesz.

Írjuk be ezeket a helyiérték-táblázatba!

harminckettes	*tizenhatos*	*nyolcas*	*négyes*	*kettes*	*egyes*
	1	1	0	1	1

Tehát a $27_{(10)}$ kettes számrendszerbeli alakja $11011_{(2)}$.

A kettes számrendszer gyakorlati alkalmazásai







Mivel a kettes számrendszerben csupán kétféle jelet használunk, ezért kiválóan alkalmas az adatok tárolására, továbbítására. A különböző eszközök (pl. a számítógép és a digitális fényképezőgép) az információkat 0-kból és 1-esekből álló jelsorozatként dolgozzák fel. A CD-k, DVD-k, memóriakártyák is ilyen jelsorozatok formájában tárolják a szöveget, képet, zenét.

Feladatok

1. Melyik kettes számrendszerbeli számot mutatja a lámpasor, ha a világító lámpa 1-et, a nem világító 0-t jelent?

   a)  *b)*  *c)* 

2. Írjuk fel tízes számrendszerben!

   a) $1011_{(2)}$; *b)* $1100_{(2)}$; *c)* $10001_{(2)}$; *d)* $11111_{(2)}$.

   Hogyan tudjuk ránézésre eldönteni, hogy egy kettes számrendszerbeli szám páros-e?

3. Írjuk át kettes számrendszerbe a következő tízes számrendszerbeli számokat!

   a) 35; *b)* 47; *c)* 65; *d)* 78; *e)* 128; *f)* 160;
   g) 216; *h)* 333; *i)* 512; *j)* 1024; *k)* 1025; *l)* 1028.

4. Írjunk fel tíz számot a kettes számrendszerben

   a) egyesével számolva; *b)* kettesével számolva; *c)* négyesével számolva!

5. Számoljunk kettesével a megadott számoktól visszafelé! Írjuk le az első öt-öt ilyen számot a kettes, majd a tízes számrendszerben!

   a) $10110_{(2)}$; *b)* $10010_{(2)}$; *c)* $10001_{(2)}$; *d)* $10101_{(2)}$; *e)* $10000_{(2)}$.

6. Hány olyan egész szám van a kettes számrendszerben, amely

   a) egyjegyű; *b)* kétjegyű; *c)* háromjegyű; *d)* négyjegyű?

Rejtvény

Hány kétjegyű szám van az ötös számrendszerben ?

5. A római számírás (emelt szint)

Környezetünkben még ma is láthatunk római számokat (például épületeken, órákon, évszázadok megadásánál). Ez a számírás az ókori Római Birodalom idején terjedt el, és Európában egészen a XVI. századig számoltak is vele. A római számírás nem helyi értékes írásmód, hanem jelcsoportokkal adja meg a számokat.









A római számjegyek:

M	D	C	L	X	V	I
1000	500	100	50	10	5	1

A római számírásnál és a számok olvasásánál alkalmazott elvek:

– **Az összeadási elv:** a balról jobbra csökkenő sorrendben álló jelekkel megadott értékeket össze kell adni.

Például: CCXIII = 213 (100 + 100 + 10 + 1 + 1 + 1);
MDXI = 1511 (1000 + 500 + 10 + 1).

– **A kivonás elve:** ha egy kisebb számértékű jel megelőz egy nagyobbat, akkor azt kivonjuk belőle.

Például: CD = 400 (500 − 100 = 400).

A megengedett kivonások:
IV = 4; IX = 9; XL = 40; XC = 90; CD = 400; CM = 900.

Például: CMXLIX = 949.

– **A szorzás elve:** a számok fölé húzott vízszintes vonal ezerszerezést jelent.

Például: $\overline{X}$ = 10 000; $\overline{XV}$ = 15 000; $\overline{D}$ = 500 000; $\overline{M}$ = 1 000 000).

A római számírással nehézkes a számolás. A középkorban a római számokkal való osztást az egyetemeken tanították. A gyakorlati jellegű számolásokat a római számolómesterek a számolótábla (abacus) segítségével végezték.

Érdekesség: Egy római bíróság elfogadta annak a gyámnak a védekezését, aki nem tudott elszámolni a rábízott vagyonnal, mondván, hogy ő nem számolómester, nem kívánhatják tőle, hogy számolni tudjon.

Feladatok

1. Írjuk le római számírással a megadott számokat!

a) 15;	*b)* 52;	*c)* 108;	*d)* 516;	*e)* 2310;	*f)* 24;
g) 93;	*h)* 99;	*i)* 435;	*j)* 1742;	*k)* 2596;	*l)* 3104;
m) 619;	*n)* 977;	*o)* 1555;	*p)* 12 000;	*q)* 4000;	*r)* 200 000.

2. Írjuk le arab számokkal!

a) XVIII;	*b)* LII;	*c)* LXX;	*d)* XLIV;
e) XXXIII;	*f)* DCCL;	*g)* DCLXXV;	*h)* MCM;
i) MXI;	*j)* MMXXIV;	*k)* $\overline{\text{XXIV}}$;	*l)* $\overline{\text{DLXI}}$.

3. Írjuk le római számmal

a) a 195-nél néggyel nagyobb számot;
b) az 1072 felét;
c) a 213 négyszeresénél 7-tel kisebb számot;
d) a 419 dupláját!

4. Írjuk le római számmal, hogy

a) meddig uralkodott István király;	*b)* mikor fedezték fel Amerikát;
c) mikor lépett az első ember a Holdra;	*d)* mikor volt az utolsó olimpia;
e) melyik évben születtek családunk tagjai;	*f)* milyen évet írunk most!

5. Melyik 100-nál kisebb szám leírásához használjuk fel a legtöbb római számjegyet?

6. Az alábbi felsorolásban gyufaszálakból kirakott hibás egyenlőségek szerepelnek római számírással.

a) Adjunk hozzá egy gyufaszálat úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen!



b) Helyezzünk át egy gyufaszálat úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen!



c) Helyezzünk át két gyufaszálat úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen!



d) Helyezzünk át egy gyufaszálat úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen!



Rejtvény

Melyik az a legkisebb szám, amelynek római számírással írt alakjában mind a hét jel pontosan egyszer szerepel?

6. A számegyenes



Az autók helyzetét az országúton a kilométerkövekhez viszonyítjuk, a folyók vízszintjét vízmércén mérjük, a hőmérsékletet a hőmérő skálájáról olvassuk le.

A természetes számokat számegyenesen ábrázoljuk, szemléltetjük.

A számegyenes készítésének lépései:

1. Megrajzoljuk az egyenest, és kijelöljük a növekedési irányt:

2. Megadunk egy viszonyítási pontot és az egységet (pl. kijelöljük a 0 és az 1, vagy másik két szám helyét).





A nulla kilométerkő. Nézz utána, hol van és miről nevezetes!

1. példa

Keressük meg a 0 és az 1 helyét a következő számegyenesen!



Megoldás

A számegyenes a 7 és a 10 között 6 kisebb részre van felosztva. A 10 a 7-nél 3-mal nagyobb, ezért 2 kis rész jelent egy egységet.



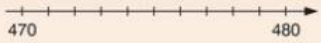
Így a 0 és az 1 helye az alábbi számegyenesen:



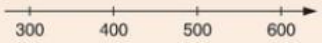
2. példa

Ábrázoljuk a 473 helyét az alábbi számegyeneseken!

a)



b)



Megoldás

a)



Ezen a számegyenesen **pontosan** tudjuk ábrázolni a 473-at.

b)



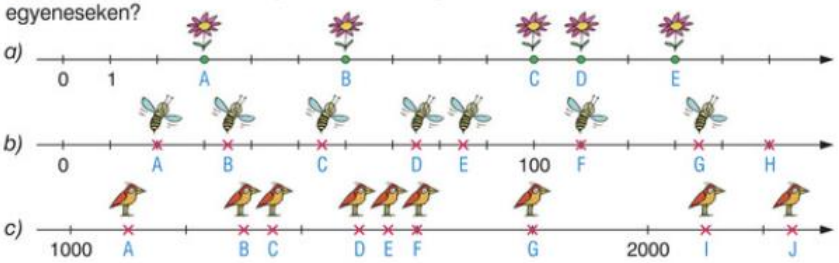
Ezen a számegyenesen csak **közelítően** tudjuk ábrázolni a 473-at.

Az egységet az ábrázolandó számoknak megfelelően választjuk.

A 0-t nem kell mindig feltüntetni a számegyenesen.

Feladatok

1. Mely természetes számok helyén vannak a virágok, a méhek és a madarak az alábbi számegyeneseken?



2. Készítsünk olyan számegyeneseket, ahol pontosan megjelölhető a felsorolt számok helye!

a) 25; 21; 30; 32; 23; 28;

b) 254; 249; 250; 259; 261; 256;

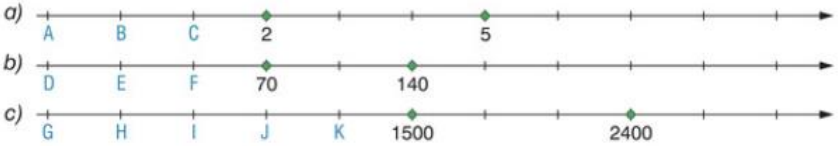
c) 2400; 2350; 2700; 2550; 2500; 2650;

d) 120; 190; 200; 150; 130; 90;

e) 1001; 1003; 1010; 1007; 999; 1005;

f) 90 000; 70 000; 40 000; 45 000; 65 000.

3. Melyik betű jelöli a nulla helyét a következő számegyeneseken?



***4.** Készítsünk olyan számegyeneseket, amelyeken közelítően megjelölhetjük a következő számok helyét! Jelöljük is meg!

a) 189; 246; 518; 432; 350; 490;

b) 2500; 6800; 3750; 9050; 1150; 4950.

Rejtvény

Egy csiga a 11 m mély kiszáradt kútból szeretne kimászni. Nappal 3 m-t mászik felfelé, de éjjel 1 m-t visszacsúszik. Hány nap múlva ér ki a kútból, ha ma reggel kezd kimászni?

7. A számok összehasonlítása



Hasonlítsátok össze a képen látható gyümölcsök árát!

Vásárláskor, számoláskor gyakran előfordul, hogy természetes számokat kell összehasonlítanunk. A matematikában az összehasonlítás rövid leírására **relációjeleket** használunk.

Relációjelek	Kiolvasásuk
$2 = 1 + 1$	2 egyenlő 1 + 1.
$3 > 0$	3 nagyobb, mint 0.
$b \geq 4$	b nagyobb vagy egyenlő, mint 4 (legalább 4).
$7 < 10$	7 kisebb, mint 10.
$c \leq 5$	c kisebb vagy egyenlő, mint 5 (legfeljebb 5).
$5 \neq 7$	5 nem egyenlő 7.

1. példa

Jelöljük a számegyenesen azokat a természetes számokat, amelyek

a) 3-nál nagyobbak; *b)* 3-nál kisebbek;
c) 3-nál nem nagyobbak; *d)* 3-nál nem kisebbek;
e) 3-nál nagyobbak és 7-nél kisebbek; *f)* legalább 3 és legfeljebb 7!

Megoldás

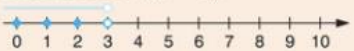
A számegyenes színessel jelölt részén keressük a természetes számokat!

a) 3-nál nagyobbak (■ > 3):



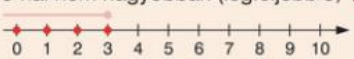
■ = {4; 5; 6; ...}

b) 3-nál kisebbek (● < 3):



● = {0; 1; 2}

c) 3-nál nem nagyobbak (legfeljebb 3; ▲ ≤ 3):



▲ = {0; 1; 2; 3}

d) 3-nál nem kisebbek (legalább 3; ▼ ≥ 3):

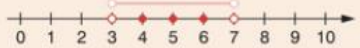


▼ = {3; 4; 5; ...}



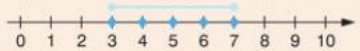
„Legfeljebb 3 gombócos fagylaltot kaphatsz." „De én legalább 3 gombócosat szeretnék!"

e) 3-nál nagyobbak és 7-nél kisebbek ($3 < \bigcirc < 7$):



$\bigcirc = \{4; 5; 6\}$

f) legalább 3 és legfeljebb 7 ($3 \leq \triangle \leq 7$):



$\triangle = \{3; 4; 5; 6; 7\}$

A ○-val jelölt szám nem tartozik a megoldáshalmazba, a ●-tal jelölt szám a megoldáshalmazba tartozik.

Hogyan hasonlítunk össze többjegyű természetes számokat?

2. példa

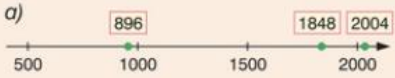
Állítsuk növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

a) 1848; 2004; 896; *b)* 1848; 1867; 1830.

Megoldás

Ábrázoljuk alkalmasan választott számegyenesen, majd állítsuk növekvő sorrendbe a számokat!

a)



$0896 < 1848 < 2004$

b)



$1830 < 1848 < 1867$

Az azonos helyi értéken lévő számjegyek összehasonlításával döntjük el, hogy melyik szám a nagyobb. Az összehasonlítást mindig a nagyobb helyi értéken lévő számmal kezdjük.

Feladatok

1. A gyerekek kosarakba szedték a diót, majd a szüretelés befejeztével megszámolták. Zsuzsi 342 db, Márti 348 db, Gábor 402 db, Feri 384 db, Helga 420 db diót szedett. Írjuk az egyes gyerekek kosarában levő diók számát csökkenő sorrendbe!

2. Állítsuk növekvő sorrendbe Magyarország alábbi hegycsúcsait! Keressük meg, hol találhatóak (a megye vagy a hegység megadásával)!



A: Csóványos 939 m; *B:* Kab-hegy 600 m;
C: Zengővár 682 m; *D:* Kékes 1014 m;
E: Istállóskő 959 m; *F:* Dobogókő 700 m;
G: Karancs 729 m; *H:* Badacsony 437 m.

3. Rendezzük a számokat növekvő, majd csökkenő sorrendbe! Írjuk a számok alá a megfelelő betűt! Milyen szót kapunk?

a) A = 20 144, I = 24 011, D = 21 044, N = 21 404;
b) Ő = 2714, D = 2741, R = 2471, E = 2417.

4. A piacot végigjárva azt tapasztaltuk, hogy 1 kg őszibarack egyik árusnál sem kerül többe 250 Ft-nál, de mindegyiknél legalább 170 Ft. Mennyi lehet a legolcsóbb, illetve a legdrágább őszibarack kilogrammja?

5. Melyik szám a nagyobb? Amelyik 13 ezrest, 8 tízest és 9 egyest tartalmaz, vagy amelyik 1 tízezresből, 7 százasból, 3 ezresből és 19 egyesből áll?

6. Hányféle számjegy kerülhet a □ helyére, hogy igaz legyen a reláció?
   a) 21 342 < 21 □42; *b)* 17□ 832 > 172 632; *c)* 1 325 □48 ≤ 1 32□ 148.

7. Egy táskában legalább 3 db, de legfeljebb 12 db könyv van. Hány könyv lehet a táskában?

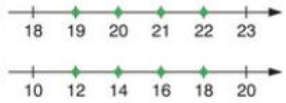
8. Egy iskolai kiránduláson 930-nál nem kevesebb, de 945-nél kevesebb tanuló vett részt. Hány gyerek kirándulhatott?

9. Hány olyan természetes szám van, amely
   a) 17-nél kisebb; *b)* 17-nél nem nagyobb;
   c) legfeljebb 17; *d)* 17-nél nagyobb és 25-nél kisebb;
   e) legalább 17 és legfeljebb 25; *f)* 17-nél nagyobb és 25-nél nem kisebb?

10. Készítsünk megfelelő számegyeneseket, és jelöljük azoknak a természetes számoknak a helyét, amelyekre igaz, hogy
    a) $n < 5$; *b)* $n \geq 86$, és n kétjegyű;
    c) $200 \leq n < 1000$, és n kerek százas; *d)* $79 < n \leq 88$, és n páratlan!
    Olvassuk ki a kisebb, nem kisebb, nagyobb, nem nagyobb, legalább, legfeljebb kifejezések segítségével a feladatrészekben szereplő relációkat!

11. Írjuk le az összes lehetséges különböző háromjegyű számot, amelyben az egyesek helyén 2 áll, a százasok helyén ennek a duplája, a tízesek számát pedig dobókockával dobtuk ki! Rajzoljunk számegyenest, és keressük meg rajta a helyüket!

12. Jellemezzük az alábbi számegyenesen jelölt számok nagyságát!



13. Állítsuk növekvő sorba a blokkon lévő áruk árát! (➡)

14. Egy iskolában minden osztály létszáma különböző. Egy osztályba legalább 20 és legfeljebb 35 gyerek jár. Hány osztálya lehet az iskolának?

15. Legkevesebb hány gyerek van abban a családban, amelyikben minden gyereknek van legalább egy fiú- és legalább egy lánytestvére?

```
Fabatka Kft. 3. sz. áruház
Drágafalva, Zsivány u. 11.

          NYUGTA

Nektarin 1 kg          212,00
Kék szilva 1 kg        179,00
Francia kifli          129,00
Türós táska             75,00
Vizes zsemle            18,00
Riska tej 1 l          180,00
Halkonzerv             241,00
Csokoládés drazsé      225,00

ÖSSZESEN:             1259,00

05/08/12  16:30

Köszönjük a vásárlást!
```

Rejtvény

Az egyszeri pék furcsa neveket ad a péksüteményeinek: rolk, csump és sonc.
7 rolk ugyanakkora tömegű, mint 4 csump, 5 sonc ugyanakkora tömegű, mint 6 csump.
Rendezzük tömegük szerint növekvő sorrendbe a péksüteményeket!

8. A számok kerekítése



Nem született meglepetés a mérkőzésen
A tegnapi negyeddöntő mérkőzést 50 000 néző előtt 3–2-re Brazília labdarúgó válogatottja nyerte.



Nézettségi csúcs a negyeddöntőn
A labdarúgó világbajnokság tegnapi mérkőzését 198 országban csaknem 900 millió tévénéző látta.

Pontosan adtuk meg a mérkőzésen a gólok számát és a negyeddöntőt tévén közvetítő országok számát.

Közelítően, becsléssel adtuk meg a tévénézők számát, mert nem tudtunk pontos értéket mondani.

Közelítően, kerekítve adtuk meg a stadionban lévők számát. Ismerhetjük a pontos értéket, de nem szükséges megadni.

Kerekítéskor először megadjuk, hogy melyik **helyi értékre** kerekítünk.

Keress példákat pontos és közelítő értékek megadására!

KEREKÍTÉS TÍZESEKRE

		1	3	0	≈		1	3	0
	7	5	4	1	≈	7	5	4	0
			4	2	≈			4	0
1	3	9	6	3	≈	1	3	9	6	0
		7	9	4	≈		7	9	0

Lefelé kerekítünk, ha az egyesek helyén 0; 1; 2; 3 vagy 4 áll.
A tízesek száma **változatlan,** az egyesek helyére 0-t írunk.

		1	3	5	≈		1	4	0
	7	5	4	6	≈	7	5	5	0
	3	9	9	7	≈	4	0	0	0
1	3	7	0	8	≈	1	3	7	1	0
			9	9	≈		1	0	0

Felfelé kerekítünk, ha az egyesek helyén 5; 6; 7; 8 vagy 9 áll.
A tízesek száma **eggyel nő,** az egyesek helyére 0-t írunk.

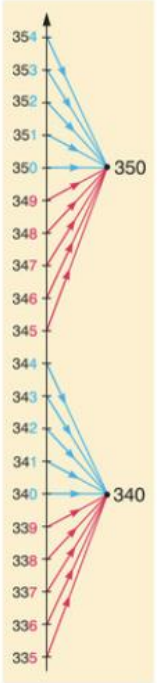
KEREKÍTÉS SZÁZASOKRA

		1	0	7	≈		1	0	0
2	3	5	1	8	≈	2	3	5	0	0
			2	4	≈				0
	4	7	3	6	≈		4	7	0	0
		7	4	9	≈			7	0	0

Lefelé kerekítünk, ha a tízesek helyén 0; 1; 2; 3 vagy 4 áll.
A százasok száma **változatlan,** a tízesek és az egyesek helyére 0-t írunk.

		1	5	6	≈		2	0	0
	7	0	6	1	≈	7	1	0	0
	3	9	7	2	≈	4	0	0	0
1	4	7	8	3	≈	1	4	8	0	0
	9	9	9	4	≈	1	0	0	0	0

Felfelé kerekítünk, ha a tízesek helyén 5; 6; 7; 8 vagy 9 áll.
A százasok száma **eggyel nő,** a tízesek és az egyesek helyére 0-t írunk.





Válassz a fenti sporteszközökből legalább hármat, és becsüld meg, hogy mennyit kellene összesen fizetned értük! Becslésed számolással ellenőrizd!

1. példa

Hány olyan természetes szám van, amelyeket

a) tízesekre kerekítve 50-et; *b)* százasokra kerekítve 400-at kapunk?

Megoldás

a) A keresett számok: 45; 46; 47; 48; 49; 50; 51; 52; 53; 54. Összesen 10 olyan természetes szám van, amelyeket tízesekre kerekítve 50-et kapunk.



b) A legkisebb szám a 350, a legnagyobb a 449. A 350 és a 449 között (beleértve a két számot is) 100 olyan természetes szám van, amelyeket százasokra kerekítve 400-at kapunk.



Beszéljétek meg, hogyan kerekítik a boltokban a fizetendő összeget!

A kerekítés hibája

A kerekítés hibája a kerekített érték és a pontos érték közötti eltérés.

2. példa

Mekkora a kerekítés hibája, ha az 1746-ot tízesekre, százasokra és ezresekre kerekítjük?

Kerekítés	Számegyenes	A kerekítés hibája
Tízesekre: $1746 \approx 1750$		4
Százasokra: $1746 \approx 1700$		46
Ezresekre: $1746 \approx 2000$		254

Feladatok

1. Kerekítsük az alábbi számok mindegyikét tízesekre és százasokra! Mekkora a kerekítés hibája az egyes esetekben?

   a) 3748; *b)* 701; *c)* 3196; *d)* 9572; *e)* 374; *f)* 7007;
   g) 3106; *h)* 9527; *i)* 37; *j)* 7117; *k)* 5996; *l)* 9752.

2. Kerekítsük az alábbi számok mindegyikét ezresekre és tízezresekre! Mekkora a kerekítés hibája az egyes esetekben?

   a) 5555; *b)* 30 034; *c)* 40 009; *d)* 71 518; *e)* 6666; *f)* 30 909;
   g) 40 199; *h)* 79 658; *i)* 9999; *j)* 39 997; *k)* 40 789; *l)* 79 095.

3. Melyek azok a természetes számok, amelyeket

   a) tízesekre kerekítve 70-et;
   b) százasokra kerekítve 200-at;
   c) ezresekre kerekítve 5000-et;
   d) százasokra kerekítve 8000-et kapunk?

   Készítsünk soronként számegyenest a kereséshez! Hány ilyen szám van az egyes esetekben? Mekkora lehet a kerekítés legnagyobb hibája?

4. Kutatók megfigyeltek már 33 m-es, 145 tonna tömegűnek becsült kék bálnákat is. Legalább hány kilogramm és legfeljebb hány kilogramm lehet egy ilyen bálna?



5. Melyik lehet a következő számok közül a 12 568 kerekített értéke?

   A: 12 560; *B:* 12 500; *C:* 12 600;
   D: 12 570; *E:* 12 580; *F:* 13 000; *G:* 10 000.

6. Robi magasságát kerekítve 130 cm-nek adták meg. Hány centiméter lehet Robi, ha helyesen kerekítettek?

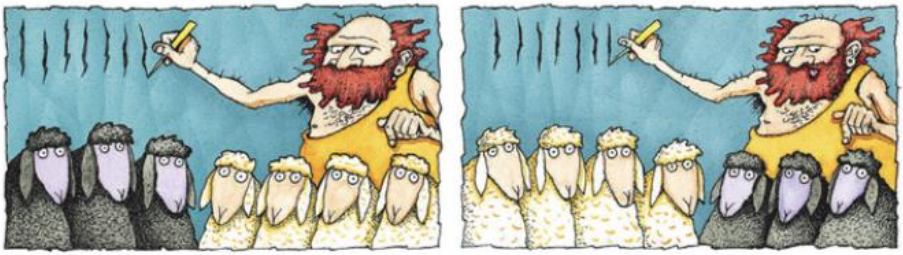
7. Az ábra néhány magyar város lakosainak számát mutatja a 2001-es népszámlálás alapján. Egy emberalak 10 000 főt jelent. Hány ezer lakója lehetett ezen városoknak 2001-ben? (➡)



Rejtvény

A 2004 számot ezresekre kerekítve a kerekített szám utolsó három számjegye nulla. Hány ilyen négyjegyű természetes szám van?

9. A természetes számok összeadása



A számlálás már az emberiség fejlődésének kezdeti szakaszában is megjelenik. Az őskori emberek a tárgyaikat, a zsákmányolt állataikat, állatbőröket, fegyvereiket tartották így számon. Számoláskor rovátkákat rajzoltak, vagy köveket, kavicsokat rakosgattak. A műveletek közül az összeadás alakult ki először.

Az összeadás tulajdonságai

Az fenti rajzok alapján felírható, hogy:

$$3 + 4 = 4 + 3$$

összeadandók vagy tagok

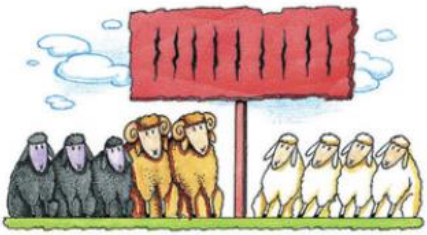
$$\underbrace{3 + 4}_{\text{összeg}} = 7$$

összeg

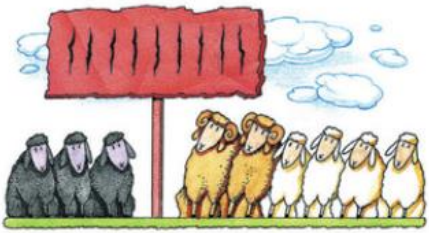
$a + b = b + a$

Az összeg nem változik, ha tagjait felcseréljük.

Ha három számot akarunk összeadni, először adjunk össze közülük kettőt, majd ehhez adjuk hozzá a harmadikat! A zárójel jelzi, hogy először melyik két szám összegét képezzük.



$(3 + 2) + 4 = 5 + 4 = 9$



$3 + (2 + 4) = 3 + 6 = 9$

A rajzok alapján felírható, hogy:

$$(3 + 2) + 4 = 3 + (2 + 4) = 3 + 2 + 4$$

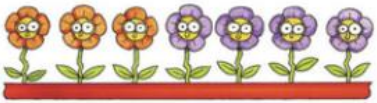
$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

Több tag összeadásakor az összeg nem változik, ha tagjait tetszőlegesen csoportosítjuk, ezért a zárójelet elhagyhatjuk.

Az összeg változásai

Figyeljük meg, hogyan változik az összeg, ha a tagokat változtatjuk!

$3 + 4 = 7$



$3 + 4 = 7$ 2-vel nő ↓ 2-vel nő ↓ $5 + 4 = 9$	$3 + 4 = 7$ 1-gyel csökken ↓ 1-gyel csökken ↓ $3 + 3 = 6$	$3 + 4 = 7$ 3-mal nő ↓ 3-mal csökken ↓ változatlan $6 + 1 = 7$
		
Ha az összeg egyik tagja 2-vel nő, akkor az összeg is 2-vel nő.	Ha az összeg egyik tagja 1-gyel csökken, akkor az összeg is 1-gyel csökken.	Ha az összeg egyik tagja 3-mal nő, a másik tagja 3-mal csökken, akkor az összeg nem változik.

Az összeg nem változik, ha az egyik tagja ugyanannyival növekszik, mint amennyivel a másik tagja csökken.

Feladatok

1. Nagyapó magyaráz az unokájának: 28 meg 36 és 49 összege egyenlő 28 és 49 összege meg... Ekkor nagyapó elbóbiskolt. Hogyan fejezhetnénk be a mondatot?

2. Hasonlítsuk össze a két összeget a műveletek elvégzése nélkül! Tegyük ki a relációjelet!
   a) $518 + 683 \square 683 + 518$;
   b) $528 + 683 \square 683 + 518$;
   c) $796 + 1423 \square 1423 + 796$;
   d) $12\,645 + 8355 \square 8355 + 12\,645$;
   e) $796 + 1423 \square 1723 + 796$;
   f) $12\,645 + 8355 \square 12\,545 + 8455$.

3. Számítsuk ki az összegeket! Melyik számítási mód az egyszerűbb?
   a) $(642 + 958) + 1040$ vagy $642 + (958 + 1040)$;
   b) $(1673 + 569) + 431$ vagy $1673 + (569 + 431)$;
   c) $(3918 + 82) + 968$ vagy $3918 + (82 + 968)$.

4. Számítsuk ki a legegyszerűbben! Az összeadás melyik tulajdonságait alkalmazzuk?
   a) $43 + 205 + 157$;
   b) $17 + 25 + 35$;
   c) $11\,169 + 15\,831 + 642$;
   d) $54 + 0 + 246$;
   e) $349 + 1666 + 151$;
   f) $99\,863 + 1346 + 137 + 5654$.

5. Állítsunk össze 4 személyre menüt (leves, főétel, desszert), ha mind a 4 személy legfeljebb 1000 Ft-ot szán az ebédre, és nincs köztük két olyan, aki pontosan ugyanazt a három fogást választja! (➡)

Levesek:	
Erőleves	185 Ft
Paradicsomleves	169 Ft
Gyümölcsleves	227 Ft
Tápéi legényfogó leves	292 Ft
Főételek:	
Pulykamell vajas burgonyával	489 Ft
Kijevi jércemell párolt rizzsel	523 Ft
Zöldbabfőzelék vagdalthússal	398 Ft
Sajtos makaróni	292 Ft
Desszertek:	
Rizsfelfújt málnaöntettel	362 Ft
Fahéjas alma vaniliaöntettel	311 Ft
Lekváros palacsinta	275 Ft
Gyümölcssaláta	231 Ft

6. A papírgyűjtési versenyre az 5.a osztály 2586 kg, az 5.b 2178 kg, az 5.c 2522 kg, az 5.d 2414 kg papírt vitt. Mi lett az osztályok közötti sorrend? Ráfér-e a teljes mennyiség egy 10 t teherbírású teherautóra?

7. Andrásnak volt 351 bélyege. Édesapjától kapott még 186 darabot, a nagyapja pedig neki adta a 769 bélyegből álló gyűjteményét. Hány darab bélyege lett Andrásnak?

Tízesekre kerekítve mennyi bélyeget kapott külön-külön? Mennyit együtt?

8. Egy parkerdőben százasokra kerekítve 1600 tölgyfa, 2100 fenyőfa és 3700 bükkfa áll. (Másfajta fa nincs.)

a) Legalább hány fa van az erdőben? *b)* Legfeljebb hány fa lehet az erdőben?

9. A bal és a jobb zsebemben együtt 4000 Ft van. Mennyi pénzem lesz, ha 600 Ft-ot áttesszek a bal zsebemből a jobb zsebembe?

10. Két pénztárcám közül az egyikben 1500 Ft, a másikban 2100 Ft van.

a) Mennyi pénz van a pénztárcákban összesen?

b) Az egyikből elköltök 400 Ft-ot, a másikba beleteszem az ajándékba kapott 400 Ft-ot. Mennyi pénzem lesz így?

11. Mivel egyenlők az alábbi összegek, ha $4563 + 2589 = 7152$?

a) $4663 + 2589$; *b)* $4663 + 2989$; *c)* $5663 + 1589$;

d) $4863 + 2889$; *e)* $4783 + 2369$; *f)* $5674 + 1478$.

12. Tekintsük a $18 + 17 + 5 = 40$ összeget!

a) Növeljük az összeget úgy, hogy páros maradjon, és

- egy tagot;
- két tagot;
- három tagot változtatunk!

b) Érjük el, hogy az összeg ne változzék úgy, hogy

- egy tagot;
- két tagot;
- három tagot változtatunk!

13. Egy négytagú családban a családtagok életkorának összege 105 év. Mennyi lesz az életkoruk összege 5 év múlva? Hány évesek lehetnek most a család tagjai?

14. Az ábrán látható összeadásban négy számjegyet helyettesítsünk 0-val úgy, hogy az összeg 1111 legyen! (Az első számjegy is lehet nulla.) (➡)

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1 \\ 4\,4\,4 \\ 7\,7\,7 \\ +\,8\,8\,8 \\ \hline \end{array}$$

15. Írjunk le négy páratlan számot úgy, hogy az összeg 25 legyen!

Rejtvény

Szét lehet-e osztani 100 diót 5 gyerek között úgy, hogy minden gyerek páratlan számú diót kapjon?

10. A természetes számok kivonása





Domonkos és barátai gyalogtúrára indultak a falutól 7 km-re lévő várhoz. 3 km megtétele után megálltak egy kútnál inni. Hány kilométert kell még gyalogolniuk, hogy odaérjenek a várhoz?

kisebbítendő kivonandó

$7 - 3 = 4$

különbség különbség

A kivonás tulajdonságai

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha a különbség tagjait felcseréljük!

A $7 - 3 = 4$, a $3 - 7$ azonban nem természetes szám, tehát

$$7 - 3 \neq 3 - 7.$$

A különbség megváltozhat, ha a kisebbítendőt és a kivonandót felcseréljük.

$a - b \neq b - a$

Ha egymás után több kivonást szeretnénk elvégezni, akkor zárójelezéssel jelöljük, hogy milyen sorrendben végezzük el a műveleteket.

Példa

Egy virágárusnak 14 szál szegfűje és 14 szál rózsája volt. Az első vevő megvett 5 szegfűt, a második a megmaradt szegfűkből választott 2-t. A harmadik vevő 5 szál rózsát akart vásárolni, de végül 2-t mégis visszaadott.

Egyforma számú szegfű és rózsa maradt-e az árusnál?



Megoldás

Szegfűk: $(14 - 5) - 2 = 9 - 2 = 7$.

Rózsák: $14 - (5 - 2) = 14 - 3 = 11$.

A szegfűből 7 szál, a rózsából 11 szál maradt.

$$(14 - 5) - 2 \neq 14 - (5 - 2)$$

Kivonáskor a zárójel áthelyezése más-más eredményhez vezethet.

$(a - b) - c \neq a - (b - c)$

Az összeadás és a kivonás kapcsolata

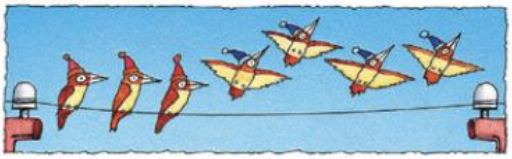
1. Az összeadás ellenőrzése:
   Az összeadás ellenőrzésére a kivonást alkalmazzuk.
2. A kivonás ellenőrzése:
   A kivonás ellenőrzésére alkalmazhatunk kivonást vagy összeadást.

$3 + 4 = 7 \begin{cases} 7 - 4 = 3 \\ 7 - 3 = 4 \end{cases}$

$7 - 4 = 3 \begin{cases} 3 + 4 = 7 \\ 7 - 3 = 4 \end{cases}$

A különbség változásai

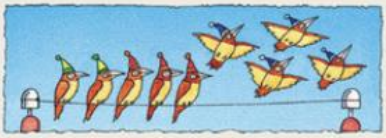
Figyeljük meg, hogyan változik a különbség, ha a kisebbítendőt és a kivonandót változtatjuk!



$7 - 4 = 3$

A kisebbítendő változik (a kivonandó változatlan)

$7 - 4 = 3$ → (2-vel nő, 2-vel nő) → $9 - 4 = 5$



Ha a kisebbítendő 2-vel nő, akkor a különbség is 2-vel nő.

$7 - 4 = 3$ → (2-vel csökken, 2-vel csökken) → $5 - 4 = 1$



Ha a kisebbítendő 2-vel csökken, akkor a különbség is 2-vel csökken.

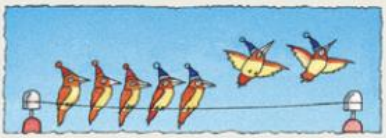
A kivonandó változik (a kisebbítendő változatlan)

$7 - 4 = 3$ → (2-vel nő, 2-vel csökken) → $7 - 6 = 1$



Ha a kivonandó 2-vel nő, akkor a különbség 2-vel csökken.

$7 - 4 = 3$ → (2-vel csökken, 2-vel nő) → $7 - 2 = 5$



Ha a kivonandó 2-vel csökken, akkor a különbség 2-vel nő.

A kisebbítendő és a kivonandó azonosan változik

7	–	4	=	3		7	–	4	=	3	
2-vel nő		2-vel nő		változatlan		2-vel csökken		2-vel csökken		változatlan	
9	–	6	=	3		5	–	2	=	3	



Ha a kisebbítendő és a kivonandó is 2-vel nő, akkor a különbség nem változik.



Ha a kisebbítendő és a kivonandó is 2-vel csökken, akkor a különbség nem változik.

A különbség nem változik, ha a kisebbítendő és a kivonandó ugyanannyival nő vagy csökken.

Feladatok

A 1–5. feladatok megoldása előtt végezzünk becslést, utána ellenőrizzünk!

1. Végezzük el a kivonásokat fejszámolással!
   a) 6750 – 1750; *b)* 4000 – 2500; *c)* 2300 – 900;
   d) 35 000 – 26 000; *e)* 1910 – 1010; *f)* 1910 – 910;
   g) 11 910 – 10 910; *h)* 11 910 – 11 010; *i)* 11 910 – 10 900.

2. Számítsuk ki!
   a) 9675 – 7520; *b)* 9675 – 5897; *c)* 74 302 – 63 818;
   d) 382 916 – 63 818; *e)* 57 976 – 15 673; *f)* 110 100 – 78 654.

3. Mennyi a különbség, ha kivonunk
   a) kilencezer-hétszáznégyből hatezer-hetet;
   b) ötvenezer-kilencszázhúszból ötezer-kilencvenkettőt;
   c) egymillióból százhúszezer-háromszázötvenötöt?

4. Mennyi a különbség, ha
   a) a kisebbítendő 172-vel nagyobb a kivonandónál;
   b) a kivonandó 200, a kisebbítendő pedig a háromszorosa a kivonandónak;
   c) a kisebbítendő 57 041, a kivonandó 9999;
   d) a kivonandó 236-tal kisebb a kisebbítendőnél?

5. Mennyit kaptunk vissza a tízezer forintosból, ha 4355 Ft-ért vásároltunk? A másnapi vásárlás ennél 870 Ft-tal kevesebb volt. Mennyi a visszajáró pénz egy ötezresből?

6. A kertészetben paradicsom- és paprikapalántát neveltek, összesen 2340 darabot. Paradicsompalánta 1150 db volt.
   a) Mennyi a paprikapalánták száma? *b)* Melyik növényből van több és mennyivel?

7. Áginak ma 1000 Ft-ja van, mert tegnap kapott 250 Ft-ot. Hány forintja volt tegnapelőtt, ha közben nem költött a pénzéből?

8. Mennyi a különbsége a legkisebb ötjegyű és a legnagyobb háromjegyű természetes számnak?

9. Állítsuk elő a 2; 3; 5; 7 számjegyekből az összes olyan négyjegyű számot, amelyben minden számjegy csak egyszer fordul elő, és a százasok helyén 7 áll. Mennyi a legnagyobb és a legkisebb ilyen számnak a különbsége?

10. Állítsuk elő a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből az összes olyan hatjegyű számot, amelyben az egyesek helyén 1, a tízesek helyén 2, az ezresek helyén 3 áll, és minden számjegy csak egyszer fordul elő!
    a) Mennyi a legnagyobb és a legkisebb ilyen szám különbsége?
    b) Mennyi a kapott számok közül a két legnagyobb összegének és a két legkisebb összegének a különbsége?

11. Tomi 5 évvel idősebb Ferinél, aki 14 éves. Mennyi lesz köztük a korkülönbség hét év múlva?

12. Mennyit adtunk a kisebbítendőhöz, ha a kivonandót 5-tel csökkentettük, és a különbség 15-tel nőtt?

13. *a)* Egy nyári táborban 39 sátor és 15 faház volt. Mennyivel több sátor volt, mint faház?
    b) A másik táborban az előbbinél 4-gyel kevesebb sátor és 6-tal több faház volt. Itt mennyivel több a sátor, mint a faház?
    c) Hogyan változott a különbség?

14. Elvégeztünk egy kivonást, a különbség 12 457 lett. Mennyi lesz a különbség, ha
    a) a kisebbítendőt 140-nel növeljük;
    b) a kivonandót 43-mal csökkentjük;
    c) a kisebbítendőt is és a kivonandót is 200-zal csökkentjük;
    d) a kisebbítendőt is és a kivonandót is 4973-mal növeljük;
    e) a kisebbítendőt 137-tel növeljük, a kivonandót 163-mal csökkentjük?

15. *a)* Melyik a legnagyobb és a legkisebb ötjegyű természetes szám? Mennyi a különbségük?
    b) Hogyan változik a különbség, ha a legnagyobb ötjegyű számot 100-zal növeljük, a legkisebbet pedig 100-zal csökkentjük?

16. Dorottya, Bálint és Csenge ugyanabban az utcában lakik, ahol az iskola is van. Dorottya 1327 m-re, Bálint 2433 m-re, Csenge 975 m-re lakik az iskolától. Milyen messze lakhatnak egymástól a gyerekek, ha az utca egyenes?

Rejtvény

7 dobozba őszibarackot tettek. Az első dobozba valamennyit, minden következőbe pedig 3-mal többet, mint az előzőbe. Így az utolsó dobozba kétszer annyi őszibarack került, mint az elsőbe.

Hány őszibararackot tettek az egyes dobozokba?

11. A természetes számok szorzása



$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \cdot 5 = 20$



$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4 = 20$

Két gyerek megszámolja az erkélyeket azon a házon, ahol laknak. Az egyik lépcsőházanként, a másik szintenként számolja. Mindkét gyerek 20 erkélyt számolt.

Az azonos tagokból álló összeg felírható szorzat alakban, ahol az egyik tényező az *ismétlődő tag,* a másik tényező a *tagok száma.*

tényezők

$\underbrace{5}_{\text{szorzat}} \cdot 4 = \underbrace{20}_{\text{szorzat}}$

A szorzás tulajdonságai

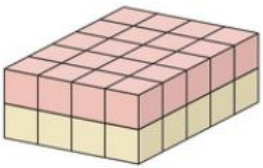
$$5 \cdot 4 = 4 \cdot 5 = 20$$

A szorzat nem változik, ha a tényezőit felcseréljük.

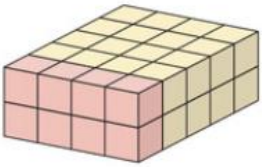
$a \cdot b = b \cdot a$

A szorzásnak ez a tulajdonsága minden kéttényezős szorzatra igaz.

Ha három számot akarunk összeszorozni, akkor először szorozzunk össze közülük kettőt, majd ezt szorozzuk meg a harmadikkal. A zárójel jelzi, hogy először melyik két számot szorozzuk össze.



$(5 \cdot 4) \cdot 2 = 20 \cdot 2 = 40$



$5 \cdot (4 \cdot 2) = 5 \cdot 8 = 40$

$$(5 \cdot 4) \cdot 2 = 5 \cdot (4 \cdot 2) = 5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$$

Több tényező szorzásakor a szorzat nem változik, ha a tényezőit tetszőlegesen csoportosítjuk, ezért a zárójelet elhagyhatjuk.

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$

Nulla a szorzásban

$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 6 \cdot 0 = 0 \cdot 6 = 0$$

Ha egy kéttényezős szorzat egyik tényezője 0, akkor a szorzat is 0.

$$5 \cdot 3 \cdot 0 \cdot 2 = 0$$

Ha egy szorzat valamelyik tényezője 0, akkor a szorzat is 0.

Ha a tényezők között nem szerepel a 0, akkor a szorzat sem lehet 0.

Ha egy szorzat 0, akkor valamelyik tényezője 0.

Összeg és különbség szorzása

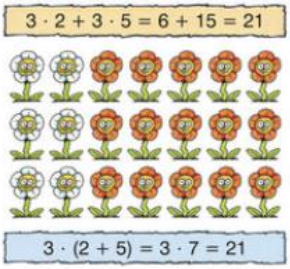


Hány virág van a tartóban?

A tartóban $3 \cdot 2$ fehér és $3 \cdot 5$ sárga virág van, ezért a tartóban lévő virágok száma $3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21$.



Mind a 3 sorban 2 fehér és 5 sárga virág van, ezért a tartóban lévő virágok száma $3 \cdot (2 + 5) = 3 \cdot 7 = 21$.



$$3 \cdot (2 + 5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5$$

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Összeget úgy is szorozhatunk egy számmal, hogy a tagjait külön-külön megszorozzuk a számmal, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

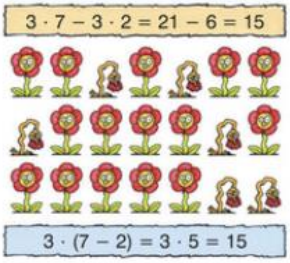


Hány virág nem hervadt el?

Mind a 3 sorban 7 virág volt, és mind a 3 sorban elhervadt 2, ezért $3 \cdot 7 - 3 \cdot 2 = 21 - 6 = 15$ szál maradt.



Egy sorban 7 virág volt. Mind a 3 sorban a 7 virágból 2 elhervadt, ezért $3 \cdot (7 - 2) = 3 \cdot 5 = 15$ szál maradt.



$$3 \cdot (7 - 2) = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 2$$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Különbséget úgy is szorozhatunk egy számmal, hogy a kisebbítendőt és a kivonandót külön-külön megszorozzuk a számmal, majd a kapott szorzatokat kivonjuk egymásból.

Példa

Mennyi a szorzat? Számoljunk fejben!
a) $4 \cdot 525$; *b)* $2 \cdot 1999$; *c)* $102 \cdot 16$; *b)* $980 \cdot 54$.

Megoldás

a) $4 \cdot 525 = 4 \cdot (500 + 25) = 4 \cdot 500 + 4 \cdot 25 = 2000 + 100 = 2100$;
b) $2 \cdot 1999 = 2 \cdot (2000 - 1) = 2 \cdot 2000 - 2 \cdot 1 = 4000 - 2 = 3998$;
c) $102 \cdot 16 = (100 + 2) \cdot 16 = 100 \cdot 16 + 2 \cdot 16 = 1600 + 32 = 1632$;
d) $980 \cdot 54 = (1000 - 20) \cdot 54 = 54\,000 - 1080 = 52\,920$.

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Feladatok

1. Számoljunk fejben! (Segít az előző példa.)
   a) $7 \cdot 1995$; *b)* $2125 \cdot 8$; *c)* $108 \cdot 820 - 8 \cdot 820$; *d)* $58 \cdot 37 + 42 \cdot 37$.

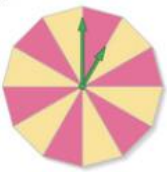
2. Válasszuk ki az egyenlőket!
   a) $5 \cdot (23 + 47)$; $5 \cdot 23 + 47$; $23 + 5 \cdot 47$; $5 \cdot 23 + 5 \cdot 47$;
   b) $145 - 55 \cdot 2$; $145 \cdot 2 - 55$; $145 \cdot 2 - 55 \cdot 2$; $(145 - 55) \cdot 2$.

3. Kata és Panka egy írószerboltban 3-3 üvegfestéket vásárolt. Az a fajta, amit Kata vett, darabonként 690 Ft-ba, amit Panka vett, darabonként 628 Ft-ba került. Mennyivel fizetett többet Kata, mint Panka?

4. Egy család a Mátrában töltött egy hetet (7 teljes napot). A szállásért naponta 8500 Ft-ot, az étkezésért átlagosan napi 5500 Ft-ot fizettek. Elég volt-e 100 000 Ft a szállásra és az étkezésre? Írjunk fel többféle tervet a megoldásra! Számoljunk ügyesen!

5. A piacon egy csokorba egy tucat (12 szál) gerberát kötöttek. Egy tartóba nyolc ilyen csokrot tettek. Hány szál gerbera van öt ilyen tartóban? Írjuk le a számítást! Milyen sorrendben számoljunk, ha a leggyorsabban akarunk eredményhez jutni?

6. A képen látható óralaphoz hasonló virágórát kétféle színű virággal ültetik be. A sárga árvácskából 20 tő, a piros begóniából pedig 14 tő kerül egy-egy cikkbe. Hány virág díszíti az óralapot? (⇒)



7. A sztepptáncolás világbajnoka másodpercenként 35-öt képes kopogni a lábával. Legfeljebb hányat kopoghat, ha
   a) 15 másodpercet; *b)* fél percet;
   c) egy percet; *d)* 75 másodpercet szteppel?

8. Hányszorosa az első hat páratlan természetes szám szorzata az első öt páratlan természetes szám szorzatának?

Rejtvény

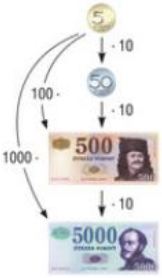
Öt természetes szám szorzata 0. A legnagyobb szám 1024. Melyik a legkisebb?

12. Szorzás 10-zel, 100-zal, 1000-rel



Mennyi pénzünk lesz, ha a jó tündér minden bankjegyünket, pénzérménket a tízszeresére változtatja?

A mértékegységek átváltásakor, pénzszámláláskor gyakran előfordul, hogy számokat kell 10-zel, 100-zal, 1000-rel ... szoroznunk. Ehhez nyújt segítséget az alábbi helyiérték-táblázat.



egyezres	százas	tízes	egyes	
			5	$5 \cdot 1 = 5$
		5	0	$5 \cdot 10 = 50$
	5	0	0	$5 \cdot 100 = 500$
5	0	0	0	$5 \cdot 1000 = 5000$

A táblázatból látható, hogy a szorzások során az 5 helyi értéke változik meg.

$374 \cdot 10 = 3740$
tízes százas

Ha egy természetes számot 10-zel szorzunk, akkor minden számjegye eggyel nagyobb helyi értékre kerül. (Az egyes helyi értékre 0-t írunk.)

	3	7	4	· 10 =	3	7	4	0

$374 \cdot 100 = 37400$
tízes ezres

Ha egy természetes számot 100-zal szorzunk, akkor minden számjegye kettővel nagyobb helyi értékre kerül. (Az egyes és a tízes helyi értékre 0-t írunk.)

		3	7	4	· 100 =	3	7	4	0	0

$374 \cdot 1000 = 374000$
tízes tizezres

Ha egy természetes számot 1000-rel szorzunk, akkor minden számjegye hárommal nagyobb helyi értékre kerül. (Az egyes, a tízes és a százas helyi értékre 0-t írunk.)

			3	7	4	· 1000 =	3	7	4	0	0	0

Példa

Végezzük el a következő szorzásokat!

a) $16 \cdot 300$; *b)* $5 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 125 \cdot 2 \cdot 4$.

Megoldás

A szorzás tulajdonságainak felhasználása megkönnyítheti a számolást:

a) $16 \cdot 300 = 16 \cdot (3 \cdot 100) = (16 \cdot 3) \cdot 100 = 48 \cdot 100 = 4800$;

b) $5 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 125 \cdot 2 \cdot 4 = \underbrace{(5 \cdot 2)}_{10} \cdot \underbrace{(25 \cdot 4)}_{100} \cdot \underbrace{(125 \cdot 8)}_{1000} = 1\,000\,000$.

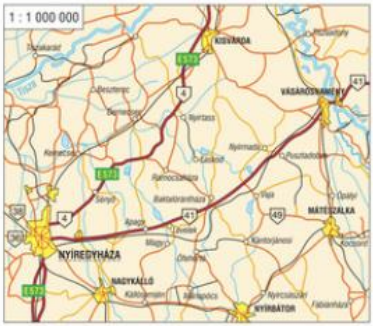
$300 = 3 \cdot 100$

$2 \cdot 5 = 10$
$4 \cdot 25 = 100$
$8 \cdot 125 = 1000$

Feladatok

1. Az alábbi hosszúságokat váltsuk át deciméterre, centiméterre, milliméterre!
   a) 21 m; *b)* 201 m; *c)* 314 m; *d)* 450 m; *e)* 1101 m; *f)* 60 m;
   g) 671 m; *h)* 607 m; *i)* 670 m; *j)* 5021 m; *k)* 3303 m; *l)* 1001 m.

2. Az 1 : 1 000 000 azt jelenti, hogy ami a térképen 1 cm, az a valóságban 1 000 000 cm. Hány kilométer a valóságban a Nyíregyháza – Vásárosnamény távolság? Hány kilométerre van Nyírbátor Mátészalkától? Mérjük meg a térképen egy cérna segítségével! (➡)



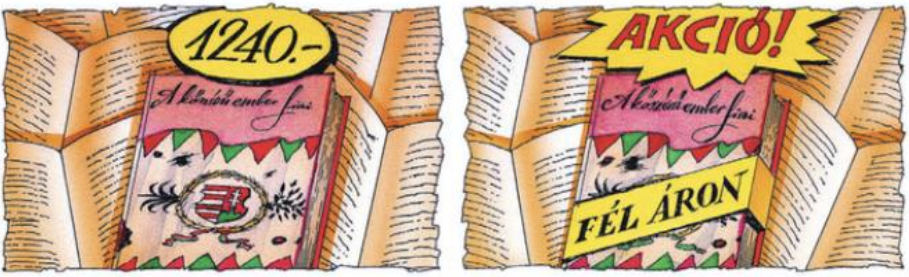
3. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás!
   a) Ha egy természetes szám minden számjegyét egy hellyel nagyobb helyi értékre írtuk, akkor 10-zel szoroztuk a számot.
   b) Ha egy számban pontosan két nulla van, akkor az egy másik természetes szám százszorosa.
   c) Ha egy természetes számot 10-zel szoroztunk, akkor a szám végén pontosan egy nulla áll.
   d) Ha egy természetes számot 100-zal szoroztunk, akkor a szám végén legalább két nulla áll.

4. Melyik természetes szám tízszeresének a százszorosa
   a) 7000; *b)* 14 000; *c)* 3 600 000; *d)* 0?

Rejtvény

Egy természetes szám tízszeresének a százszorosa megegyezik a szám egymilliószorosával. Melyik ez a szám?

13. A szorzat változásai



Az iskolai könyvtáros 10 db-ot akar venni A kőszívű ember fiai című regényből. A könyv ára jelenleg 1240 Ft, de a jövő heti akció keretében a felére csökken. Mennyibe kerülne a 10 db könyv ma, illetve a következő héten?

Jelenleg: $10 \cdot 1240\ \text{Ft} = 12\,400\ \text{Ft}$. *Fél áron:* $10 \cdot (1240\ \text{Ft} : 2) = 10 \cdot 620\ \text{Ft} = 6200\ \text{Ft}$.

Ha egy könyv ára a felére csökken, akkor a 10 db könyv ára is a felére csökken.

A szorzat változásai

Három gyerek fejenként 4 gombóc fagylaltot eszik. Hány gombócot esznek összesen?



A három gyerek összesen 12 gombóc fagylaltot eszik.

$3 \cdot 4 = 12$

Figyeljük meg a szorzat változásait az alábbi esetekben!

Ha kétszer annyi gyerek fejenként 4 gombóc fagylaltot eszik



$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$

Ha a szorzat egyik tényezője kétszeresére nő (a másik változatlan), akkor a szorzat is kétszeresére nő.

Ha ugyanannyi gyerek fejenként feleannyi gombóc fagylaltot eszik



$3 \cdot (4 : 2) = 3 \cdot 2 = 6$

Ha a szorzat egyik tényezője felére csökken (a másik változatlan), akkor a szorzat is felére csökken.

Ha kétszer annyi gyerek fejenként feleannyi gombóc fagylaltot eszik



$(2 \cdot 3) \cdot (4 : 2) = 6 \cdot 2 = 12$

Ha a szorzat egyik tényezője kétszeresére nő, a másik a felére csökken, akkor a szorzat nem változik.

Példa

Számítsuk ki minél egyszerűbben: *a)* $36 \cdot 25$; *b)* $68 \cdot 50$; *c)* $33 \cdot 30$!

Megoldás

A szorzat változásairól tanultak alapján:

a) $36 \cdot 25 = \underset{\downarrow :4}{} \cdot \underset{\downarrow \cdot 4}{} = 9 \cdot 100 = 900;$

b) $68 \cdot 50 = \underset{\downarrow :2}{} \cdot \underset{\downarrow \cdot 2}{} = 34 \cdot 100 = 3400;$

c) $33 \cdot 30 = \underset{\downarrow \cdot 3}{} \cdot \underset{\downarrow :3}{} = 99 \cdot 10 = 990.$

Feladatok

1. Számoljuk ki ügyesen!
   a) $720 \cdot 30$; *b)* $47 \cdot 20$; *c)* $130 \cdot 200$; *d)* $250 \cdot 40$; *e)* $1800 \cdot 5$; *f)* $76 \cdot 50$.

2. Döntsük el az állításokról, hogy igazak vagy hamisak!

   Ha egy kéttényezős szorzat

   a) egyik tényezője háromszorosára változik, a másik tényező pedig változatlan, a szorzat háromszorosára nő;
   b) egyik tényezője nő, a másik csökken, a szorzat nem változik;
   c) egyik tényezője kétszeresére nő és a másik tényező változatlan, a szorzat is kétszeresére nő;
   d) mindkét tényezője kétszeresére nő, a szorzat négyszeresére nő;
   e) tényezői háromszorosukra változnak, a szorzat hatszorosára változik.

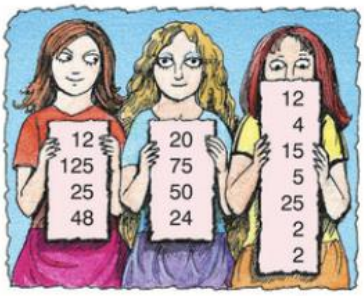
   Ha egy többtényezős szorzat

   f) egyik tényezője kétszeresére nő, a másik felére csökken, a többi tényező pedig változatlan, akkor a szorzat nem változik.

3. Végezzük el a szorzásokat minél egyszerűbben!
   a) $80 \cdot 25$; *b)* $50 \cdot 92$; *c)* $125 \cdot 72$; *d)* $400 \cdot 16$.

4. Végezzük el a szorzásokat minél egyszerűbben!
   a) $2 \cdot 28 \cdot 5$; *b)* $5 \cdot 57 \cdot 5 \cdot 4$;
   c) $40 \cdot 9 \cdot 25$; *d)* $50 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5$;
   e) $72 \cdot 18 \cdot 0 \cdot 25 \cdot 50$.

5. Szilvia, Krisztina és Melinda (a rajzon balról jobbra) azt a feladatot kapták, hogy szorozzák össze a táblájukon látható számokat. Melyikük kapta a legnagyobb számot eredményként? (Mindhárman ügyesen számoltak.) (➡)



Rejtvény

Melyik kerül többe? Fél tucat tucat tucat tojás vagy hat tucat tucat tojás? (1 tucat = 12 db.)

14. Többjegyű számok szorzása

Az egyik szünetben az ötödik osztályos tanulók 12 doboz tejet vettek a büfében. Mennyibe került összesen, ha 1 doboz 32 Ft-ba került?



Többféle módon számolhatunk:

32 · 12		
64		
384		

12 · 32		
36		
24		
384		

A 12 doboz tej 384 Ft-ba került.

Három- vagy többjegyű számok szorzását hasonlóan végezzük, mint a kétjegyű számokét. A szorzó számjegyeivel külön-külön megszorozzuk a szorzandó számjegyeit, ügyelve a részletszorzatok helyi értékére.

Példa

Végezzük el a következő szorzásokat: *a)* 624 · 473; *b)* 732 · 461; *c)* 347 · 204!

Megoldás

a) $624 \cdot 473 = 624 \cdot (400 + 70 + 3) = 624 \cdot 400 + 624 \cdot 70 + 624 \cdot 3$

Kezdjük a szorzást a százasokkal!

624 · 473			**RÖVIDEN:** 624 · 473
24960	←	624 · 400	24960
4368	←	624 · 70	4368
1872	←	624 · 3	1872
295152	←	624 · 473	295152

b) $732 \cdot 461 = 732 \cdot (400 + 60 + 1) = 732 \cdot 400 + 732 \cdot 60 + 732 \cdot 1$

Kezdjük most a szorzást az egyesekkel!

732 · 461			**RÖVIDEN:** 732 · 461
732	←	732 · 1	732
4392	←	732 · 60	4392
29280	←	732 · 400	29280
337452	←	732 · 461	337452

Ha a szorzóban az 1 számjegy szerepel, kevesebb részletszorzatot írhatunk.

732 · 461			**RÖVIDEN:** 732 · 461
4392	←	732 · 60	4392
29280	←	732 · 400	29280
337452	←	732 · 461	337452

Láthatjuk, hogy az így kapott szorzat megegyezik az előbbivel.

c) $347 \cdot 204 = 347 \cdot (200 + 4) = 347 \cdot 200 + 347 \cdot 4$

3	4	7	·	2	0	4												
6	9	4	0	0	←			3	4	7	·	2	0	0				
		0	0	0	0	←		3	4	7	·			0				
			1	3	8	8	←		3	4	7	·			4			
7	0	7	8	8	←			3	4	7	·	2	0	4				

RÖVIDEN:

3	4	7	·	2	0	4												
6	9	4																
			0	0	0													
				1	3	8	8											
7	0	7	8	8														

A csak nullát tartalmazó részletszorzatot nem írjuk ki.

3	4	7	·	2	0	4												
6	9	4	0	0	←			3	4	7	·	2	0	0				
		1	3	8	8	←		3	4	7	·			4				
7	0	7	8	8	←			3	4	7	·	2	0	4				

RÖVIDEN:

3	4	7	·	2	0	4												
6	9	4																
			1	3	8	8												
7	0	7	8	8														

Érdekesség: A többjegyű számok szorzását úgy is elvégezhetjük, hogy a megfelelő részletszorzat utolsó számjegyét az alá a számjegy alá írjuk, amelyikkel éppen szorzunk. Így nem tévesztjük el a részletszorzatok helyét még akkor sem, ha a szorzó számjegyeivel tetszőleges sorrendben szorzunk.

6	2	4	·	4	7	3	
	2	4	9	6			
			1	8	7	2	
		4	3	6	8		
2	9	5	1	5	2		

Feladatok

1. Végezzük el a szorzásokat írásban!
   a) $57 \cdot 96$; *b)* $957 \cdot 96$; *c)* $43 \cdot 49$; *d)* $843 \cdot 49$;
   e) $79 \cdot 98$; *f)* $79 \cdot 298$; *g)* $94 \cdot 61$; *h)* $943 \cdot 618$;
   i) $23 \cdot 14$; *j)* $231 \cdot 314$; *k)* $44 \cdot 83\,834$; *l)* $70\,707 \cdot 6008$;
   m) $390\,050 \cdot 5130$; *n)* $194 \cdot 6825$; *o)* $2001 \cdot 376$; *p)* $6060 \cdot 1001$.
2. *a)* Egy moziban 37 sorban soronként 24 ülőhely van. Hány férőhelyes a mozi?
   b) Egy másik mozi földszinti részén 28 sor, az emeleten 17 sor mindegyikében 26 ülőhely található. Telt ház esetén hány néző lehet a nézőtéren?
3. A stadionban szektoronként 3720 fő fér el. Hányan nézhetik meg a mérkőzést, ha a stadionban 16 szektor van?
4. Mennyi a szorzat?
   a) $25 \cdot 5 \cdot 34 \cdot 8 \cdot 2$; *b)* $125 \cdot 32 \cdot 4$; *c)* $666 \cdot 33 \cdot 421$; *d)* $125 \cdot 15 \cdot 40 \cdot 4$.
5. Egy kartonban 24 doboz, egy dobozban 36 csoki van. Egy csoki 47 Ft. Mennyibe kerül egy karton csoki?

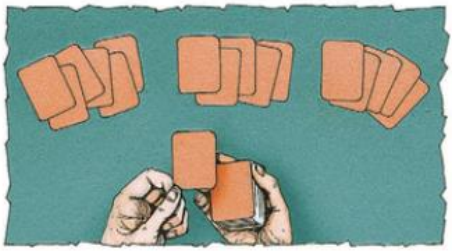
Rejtvény

Milyen számjegy kerüljön a betűk helyére, hogy a szorzás vízszintesen és függőlegesen is igaz legyen?

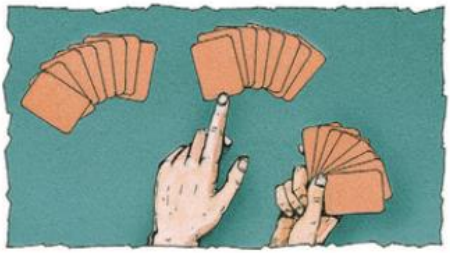
A	B	·		C	=	B	A	C
·						·		
A	·		D	=				C
=						=		
E	A	·	B	F	=	G	H	C

15. A természetes számok osztása

Osszunk szét 24 kártyalapot 3 gyerek között úgy, hogy mindegyik gyerek ugyanannyit kapjon!



Mind a 3 gyereknek adjunk 1-1 lapot, majd újra egyet-egyet, egészen addig, amíg el nem fogy a kártya.



A 24 kártyát a 3 gyerek között úgy oszthatjuk szét egyenlően, ha mindegyiknek 8 lapot adunk.

Maradék nélküli osztás

Ha 24 kártyát egyenlően osztunk szét 3 gyerek között, akkor mindhárman 8 lapot kapnak.

osztandó osztó

24 : 3 = 8

hányados hányados

Az osztás ellenőrzése:

szorzással:

$8 \cdot 3 = 24$

hányados · osztó = osztandó

osztással:

$24 : 8 = 3$

osztandó : hányados = osztó

Maradékos osztás

Ha 26 kártyát osztunk szét egyenlően 3 gyerek között, akkor az elosztás után kimarad két lap.

26 : 3 = 8

2 maradék

A maradékos osztás ellenőrzése:

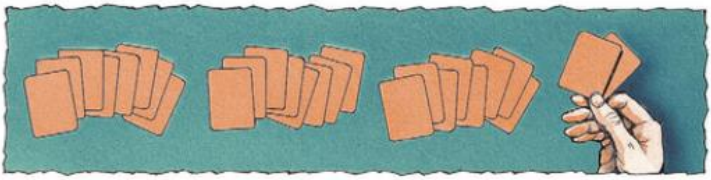
$8 \cdot 3 + 2 = 26$

hányados · osztó + maradék = osztandó

$(26 - 2) : 8 = 3$

(osztandó − maradék) : hányados = osztó

A maradék az osztónál mindig kisebb.



Mivel 3 játékos között osztjuk szét a lapokat, legfeljebb 2 lehet a maradék.

Az osztás tulajdonságai

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha az osztandót és az osztót felcseréljük, illetve különbözőképpen csoportosítjuk!

$36 : 3 = 12$ — a hányados természetes szám

$3 : 36 = ?$ — nincs ilyen természetes szám

$$36 : 3 \neq 3 : 36$$

Az osztásban az osztandó és az osztó nem cserélhető fel, mert a hányados megváltozhat.

$a : b \neq b : a$

$(36 : 6) : 3 = 6 : 3 = 2$ $\qquad$ $36 : (6 : 3) = 36 : 2 = 18$

$$(36 : 6) : 3 \neq 36 : (6 : 3)$$

Az osztásban nem csoportosíthatunk tetszőlegesen, mert a hányados megváltozhat.

$(a : b) : c \neq a : (b : c)$

Nulla az osztásban

Lehet-e az osztandó nulla?

$0 : 7 = 0$, mert $7 \cdot 0 = 0$

$0 : 100 = 0$, mert $100 \cdot 0 = 0$

Ha a nullát bármilyen (0-tól különböző) természetes számmal osztjuk, a hányados 0 lesz.

Lehet-e az osztó nulla?

Ha a $7 : 0 = \blacktriangle$ osztást értelmezni szeretnénk, akkor a $\blacktriangle$ helyére olyan számot kellene írnunk, amelyet 0-val megszorozva 7-et kapunk, vagyis $\blacktriangle \cdot 0 = 7$.

A szorzásnál láttuk, hogy bármely számot nullával szorozva nullát kapunk. Tehát nincs olyan természetes szám, amit a $\blacktriangle$ helyére írhatunk.

Például:

ha $\blacktriangle = 7$, akkor $7 \cdot 0 = 0 \neq 7$;

ha $\blacktriangle = 0$, akkor $0 \cdot 0 = 0 \neq 7$;

ha $\blacktriangle = 896$, akkor $896 \cdot 0 = 0 \neq 896$.

Lehet-e az osztó és az osztandó is nulla?

Ha a $0 : 0 = \square$ osztást értelmezni szeretnénk, akkor a $\square$ helyére olyan számot kellene írnunk, amellyel a 0-t megszorozva 0-t kapunk, vagyis $\square \cdot 0 = 0$.

Mivel bármely számot nullával szorozva nullát kapunk, ezért a $\square$ helyére bármely természetes számot írhatnánk. A hányadost nem lehet egyértelműen meghatározni, ezért a $0 : 0$ hányadost **nem értelmezzük.**

Például:

ha $\square = 0$, akkor $0 \cdot 0 = 0$;

ha $\square = 7$, akkor $0 \cdot 7 = 0$;

ha $\square = 896$, akkor $0 \cdot 896 = 0$.

A nullával való osztást nem értelmezzük.

Összeg és különbség osztása

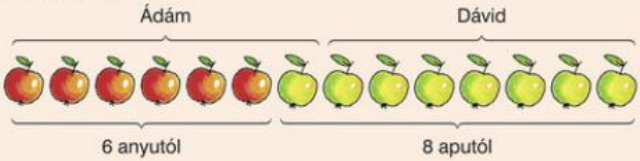
Példa

Anyu 6 piros, apu 8 zöld almát vett Ádámnak és Dávidnak. A gyerekek egyenlően osztották szét az almákat. Hány jutott egy gyereknek?



1. megoldás

Az első esetben a gyerekek az almák színét nem vették figyelembe a szétosztásnál.

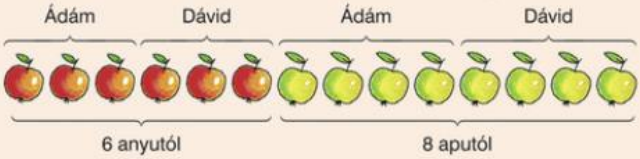


$$(6 + 8) : 2 = 14 : 2 = 7$$

Mindkét gyereknek 7 alma jutott.

2. megoldás

A szétosztás során a gyerekek az almák színét is figyelembe vették.



$$6 : 2 + 8 : 2 = 3 + 4 = 7$$

Így is 7 alma jutott mindkét gyereknek.

Mindkét esetben azonos eredményre jutottunk:

$$(6 + 8) : 2 = 6 : 2 + 8 : 2$$

$(a + b) : c = a : c + b : c$

Összeg osztását úgy is elvégezhetjük, hogy az összeg tagjait külön-külön elosztjuk, majd a hányadosokat összeadjuk.

A különbség osztását ugyanúgy végezhetjük, mint az összeg osztását.

Például: $(21 - 9) : 3 = 12 : 3 = 4$ és $21 : 3 - 9 : 3 = 7 - 3 = 4$.

Azonos eredményt kaptunk, vagyis

$$(21 - 9) : 3 = 21 : 3 - 9 : 3$$

$(a - b) : c = a : c - b : c$

Különbség osztását úgy is elvégezhetjük, hogy a kisebbítendőt és a kivonandót külön-külön elosztjuk, majd a hányadosokat kivonjuk.

Feladatok

1. Írjuk le az osztást, és számítsuk ki a hányadost, ha
   a) az osztandó 120, az osztó pedig a legkisebb kétjegyű szám;
   b) az osztandó 120, az osztó pedig az osztandó tizede;
   c) az osztó 20, és 120 az osztandó!

2. Mennyi lehet az osztandó, ha az osztó egyjegyű szám, a maradék 8, a hányados 15?

3. Végezzük el a műveleteket a lehető legegyszerűbben!
   a) $(130 + 39) : 13$; *b)* $(1717 + 3434) : 17$; *c)* $(6622 - 5544) : 11$;
   d) $3785 : 11 - 3763 : 11$; *e)* $2713 : 19 + 1087 : 19$; *f)* $3971 : 100 + 4029 : 100$.

4. Írjuk le a füzetbe azt a betű-jel párt, amelyeknek egyenlők az eredményei!
   $A = (42 - 24) : 6$; $B = 42 : 6 - 24$; ■ $= 42 - (24 : 6)$; ▲ $= 42 : 6 - 24 : 6$;
   $C = (7 \cdot 6) : 2$; $D = 42 : 6 - 4$; ● $= 42 - 24 : 6$; ▼ $= 42 : (6 - 24 : 6)$.

5. Osszuk el 4-gyel az 50-nél nagyobb és 60-nál kisebb számokat!

6. Mennyi lehet a maradék, ha az osztó
   a) 7; *b)* 12; *c)* 13; *d)* 1001?

7. Egy sorozat első három elemét írtuk le. Mi a következő három elem?
   a) 16 384; 4096; 1024; ...; *b)* $126 \cdot 243$; $126 \cdot 81$; $126 \cdot 27$; ....

8. Egy tehén egy év alatt 4500 liter tejet ad. Hány kannát lehetne megtölteni ezzel a mennyiséggel, ha a kannák űrtartalma
   a) 2 liter; *b)* 5 liter; *c)* 10 liter; *d)* 20 liter; *e)* 25 liter?

9. Egy iskola zenei tagozatos diákjai 3600 Ft-ért hangversenyjegyeket vásároltak. A jegyek ára 100 forinttól 100 forintosával emelkedett, és 1000 forintnál drágább jegy nem volt.
   a) Hányan mehettek a hangversenyre, ha mindenki azonos árú jegyet vett?
   b) Hány forintos jegyeket vehettek, ha összesen hatan mentek el a hangversenyre, és mindenki különböző árú jegyet vásárolt?

10. Végezzük el a műveleteket a lehető legegyszerűbben!
    a) $465 : 5 + 535 : 5$; *b)* $162 : 3 + 138 : 3$; *c)* $434 : 7 - 217 : 7$;
    d) $6372 : 9 + 3528 : 9$; *e)* $473 : 2 + 527 : 2$; *f)* $6952 : 11 - 2541 : 11$.

11. Egy boltban kapható gyümülcsjoghurtok:
    eper ízű (200 g) 78 Ft; epres joghurt (200 g) 98 Ft;
    bio joghurt eperdarabokkal (300 g) 216 Ft; epres joghurt (500 g) 175 Ft.
    epres joghurt (1 kg) 296 Ft;
    Hogyan hasonlíthatjuk össze az egyes joghurtok árait?
    Indokoljuk meg, hogy melyik joghurtot miért ajánlanánk a vásárlóknak!

Rejtvény

Gondolj egy háromjegyű számra! Szorozd meg 13-mal, majd 7-tel, végül 11-gyel! Írd le a szorzatot! Ha helyesen számoltál, ebből azonnal meg tudom mondani, hogy melyik számra gondoltál! Miért?

16. A hányados változásai

Nagymama aprósüteményt süt. Egy tepsibe 18 db fér. Hány darab jut egy tepsi süteményből három gyereknek, ha mindenki ugyanannyit kap?



$18 : 3 = 6,$

azaz egy gyereknek 6 db sütemény jut.

Figyeljük meg a hányados változásait az alábbi esetekben!

Az osztandó változik (az osztó változatlan)

$18 : 3 = 6$

2-szeresére nő — 2-szeresére nő

$36 : 3 = 12$



Két tepsi süteményből egy személynek kétszer annyi, azaz 12 db sütemény jut.

$18 : 3 = 6$

harmadára csökken — harmadára csökken

$6 : 3 = 2$



Egy tepsi sütemény harmadából egy személynek harmadannyi, azaz 2 db sütemény jut.

Az osztó változik (az osztandó változatlan)

$18 : 3 = 6$

2-szeresére nő — felére csökken

$18 : 6 = 3$



Ha a süteményből kétszer annyian esznek, akkor feleannyi sütemény, azaz 3 db jut 1 gyereknek.

$18 : 3 = 6$

harmadára csökken — 3-szorosára nő

$18 : 1 = 18$



Ha harmadannyi gyerek között osztjuk el a süteményt, akkor egy gyereknek háromszor annyi jut.

Az osztandó és az osztó azonosan változik

18	:	3	=	6
2-szeresére nő		2-szeresére nő		változatlan
36	:	6	=	6



Ha két tepsi süteményt kétszer annyian esznek, akkor nem változik az 1 főre jutó sütemények száma.

18	:	3	=	6
harmadára csökken		harmadára csökken		változatlan
6	:	1	=	6



Ha a sütemények egyharmadát harmadannyian eszik, akkor nem változik az 1 gyereknek jutó sütik száma.

A hányados nem változik, ha az osztandót és az osztót ugyanazzal a nullától különböző számmal szorozzuk vagy osztjuk.

Feladatok

1. Végezzük el az osztást! A lehető legegyszerűbben számoljunk!
   a) 60 000 : 1500; *b)* 800 000 : 4000; *c)* 1 000 000 : 1000;
   d) 6 400 000 : 640; *e)* 6 400 000 : 3200; *f)* 1 000 000 : 20 000.

2. Hasonlítsuk össze a hányadosokat! Keressük meg a változás okát!
   A) 72 : 4; *B)* 24 : 8; *C)* 48 : 4; *D)* 36 : 12; *E)* 144 : 16; *F)* 96 : 12.

3. Egy keresztrejtvény megfejtését beküldők között 240 könyvutalványt sorsolnak ki. Hány utalvány jut egy hibátlan megoldást beküldőnek, ha
   a) 120 nyertes van; *b)* a nyertesek száma a felére csökken;
   c) a hibátlanul megfejtők csak harmadannyian vannak, mint az első esetben?

4. Folytassuk a sorozatokat 3-3 taggal a felismert szabály alapján!
   a) 240 : 96; 240 : 48; 240 : 24; ...; *b)* 15 625 : 5; 3125 : 5; 625 : 5; ...;
   c) 70 000 000; 7 000 000; 700 000; ...; *d)* 960 : 480; 480 : 240; 240 : 120; ....

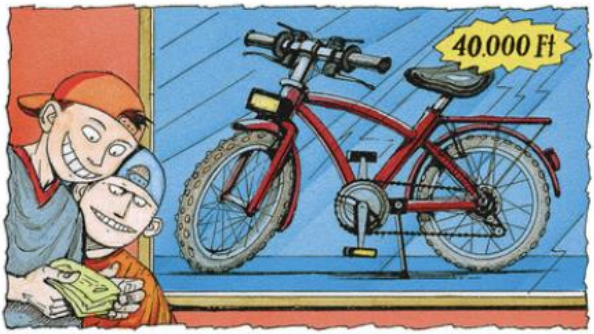
5. Hány óra, illetve hány nap
   a) 2880 perc; *b)* 7200 perc; *c)* 14 400 perc; *d)* 432 000 másodperc?

Rejtvény

Melyik egyenlőség a hibás, ha *a*, *b*, *c* természetes számok?

a) $(a : b) : c = a : c : b \quad b \neq 0, c \neq 0;$ *b)* $(a : c) : (b : c) = a : b \quad b \neq 0, c \neq 0;$
c) $(a \cdot c) : (b : c) = a : b \quad b \neq 0, c \neq 0;$ *d)* $a : (b : c) = (a : b) \cdot c \quad b \neq 0, c \neq 0.$

17. Osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel



Csabiék kerékpárt vásárolnak. Hány darab bankjeggyel tudják kifizetni, ha csak 10 000 Ft-osokat, illetve ha csak 1000 Ft-osokat vittek magukkal?



A hétvégén a barátjával 25 000 métert túráztak. Hány km-t tekertek?

Nagyobb mértékegységre való váltáskor, pénzváltáskor gyakran osztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel ... Ezt könnyen, fejben is elvégezhetjük a helyi értékek változtatásával.

M	*Sz*	*T*	*E*	*sz*	*t*	*e*	
3	7	4	0	0	0	0	
	3	7	4	0	0	0	3 740 000 : 10 = **374 000**
		3	7	4	0	0	3 740 000 : 100 = **37 400**
			3	7	4	0	3 740 000 : 1000 = **3740**
				3	7	4	3 740 000 : 10 000 = **374**

A táblázatból látható, hogy az osztások során hogyan változik a számjegyek helyi értéke.

37 400 : 10 = 3740
ezres, százas

Ha egy természetes számot 10-zel osztunk, akkor az osztandó minden számjegye eggyel kisebb helyi értékre kerül.

3 | 7 | 4 | 0 | 0 : 10 = | 3 | 7 | 4 | 0

37 400 : 100 = 374
ezres, tízes

Ha egy természetes számot 100-zal osztunk, akkor minden számjegye kettővel kisebb helyi értékre kerül.

3 | 7 | 4 | 0 | 0 : 100 = | | 3 | 7 | 4

Ha egy természetes számot 1000-rel osztunk, akkor minden számjegye hárommal kisebb helyi értékre kerül.

3	7	4	0	0	0	: 1000 =				3	7	4

374 000 : 1000 = 374
↑ tízezres ↑ tízes

Példa

Imi eurócentet gyűjt. Hogy könnyebben meg tudja számolni a pénzt, az 1; 2 és 5 centeseket 10 db-os oszlopokba rendezte. Megállapította, hogy az 1 centesekből 80, a 2 centesekből 155, az 5 centesekből pedig 42 oszlop lett.

a) Hány eurót kapna érte, ha az összes pénzt beváltaná?
b) Be tudná-e váltani a gyűjtött centeket 10 eurósokra?

Megoldás

1 centesből $80 \cdot 10 = 800$
2 centesből $155 \cdot 2 \cdot 10 = 3100$ } 6000 cent
5 centesből $42 \cdot 5 \cdot 10 = 2100$

a) Mivel 1 euró = 100 eurócent, ezért 6000 : 100 = 60 eurója van Iminek.

b) 60 : 10 = 6 ⟶ 6 db 10 eurósra válthatja be az eurócenteket.

Feladatok

1. Fogalmazzuk meg a 10 000-rel való osztás szabályát!

2. Mennyi a következő számok századrésze?
   a) 7400; *b)* 70 400; *c)* 740 000; *d)* 74 000;
   e) 704 000; *f)* 7 000 400; *g)* 7 040 000; *h)* 100 000 000.

3. Osszuk el a következő számokat 10-zel, 100-zal, illetve 1000-rel!
   a) 61 000; *b)* 7 140 000; *c)* 3 200 000; *d)* 21 000 000.

4. Egy számot 1000-rel osztva 702-t kaptunk. Melyik számot osztottuk?

5. Gondoltam egy számra. A számot először elosztottam 100-zal, majd az eredményt újra elosztottam 10-zel, így 52-t kaptam. Melyik számra gondoltam?

6. Egy szám ezredrésze 48. Mennyi a szám
   a) tízszerese; *b)* tizedrésze; *c)* tízszeresének a tizedrésze?

Rejtvény

A Gizi néni kosarában lévő 25 almát szétosztjuk. Kiveszünk belőle hármat, Ildi négyet, Kati ötöt, Zsófi kettőt, Ági négyet, Gyula egyet, Laci kettőt. Hány almánk lesz?

18. Osztás többjegyű osztóval

1. példa

Papírgyűjtéskor egy 24 fős osztály 3264 kg papírt gyűjtött. Az osztályok közti versenybe az egy főre jutó papírmennyiséggel nevezhetnek be. Hány kilogramm ez a mennyiség?

Megoldás

Terv: Az egy főre jutó mennyiség 3264 kg : 24 = ?

Becslés: A hányados 100 kg és 200 kg között lehet, mert

$24 \cdot 100\ \text{kg} = 2400\ \text{kg} < 3264\ \text{kg}$ és $24 \cdot 200\ \text{kg} = 4800\ \text{kg} > 3264\ \text{kg}$.

Ezután elvégezzük az írásbeli osztást.

3 2' 6' 4'	: 2 4					
3 2 százas	: 2 4 = 1 százas					
− 2 4 ←	2 4 · 1					
8 6 tízes	: 2 4 = 3 tízes	} = 1 százas + 3 tízes + 6 egyes = 1 3 6				
− 7 2 ←	2 4 · 3					
1 4 4 egyes	: 2 4 = 6 egyes					
− 1 4 4 ←	2 4 · 6					
0 egyes						

AZ ÍRÁSBELI OSZTÁS LEJEGYZÉSE:

3 2' 6' 4'	: 2 4 = 1 3 6					
− 2 4						
8 6						
− 7 2						
1 4 4						
− 1 4 4						
0						

PÓTLÁS FEJBEN:

3 2' 6' 4'	: 2 4 = 1 3 6					
8 6						
1 4 4						
0						

ELLENŐRZÉS:

1 3 6	· 2 4					
2 7 2						
5 4 4						
3 2 6 4						

A versenyre az osztály 136 kg-mal nevezhetett be.

2. példa

Erdősítés alkalmával 5179 db facsemetét ültetnek el úgy, hogy egy sorba 54 csemetét tesznek. Hány sorba tudják elültetni a fákat?

Megoldás

Terv: a sorok száma 5179 : 54 = ?

Becslés:

5400 : 54 = 100

5179 : 54 ≈ 100

Osztás:

517'9'	: 5 4 = 9 5					
3 1 9						
4 9						

Ellenőrzés:

$95 \cdot 54 + 49 =$

$= 5130 + 49 = 5179$

A hányados 95, a maradék 49, ezért a fákat 96 sorba tudják elültetni úgy, hogy az utolsó sorba már csak 49 fa kerül.

Feladatok

A feladatok megoldása előtt, ha lehet, végezzünk becslést, utána ellenőrizzünk!

1. Végezzük el az osztásokat fejben! Mit veszünk észre?

a)	*b)*	*c)*	*d)*
81 : 27;	960 : 96;	56 : 14;	51 : 17;
27 : 9;	960 : 48;	560 : 14;	510 : 170;
9 : 3;	960 : 24;	5600 : 14;	5100 : 1700.

2. Végezzük el az osztásokat írásban!

a) 6666 : 66;	*b)* 66 066 : 66;	*c)* 666 666 : 66;	*d)* 660 660 : 66;
e) 528 : 48;	*f)* 528 528 : 48;	*g)* 5328 : 48;	*h)* 5808 : 48.

3. Végezzük el az osztásokat!

a) 72 300 : 13;	*b)* 72 300 : 130;	*c)* 72 300 : 1300;	*d)* 723 000 : 1300;
e) 2289 : 109;	*f)* 6867 : 327;	*g)* 19 789 : 981;	*h)* 20 601 : 981.

4. Hány percig tartott az eső, ha 1080 másodpercig esett?

5. Melyik hányados a legnagyobb? Rendezzük a hányadosokat növekvő sorrendbe, majd végezzük el az osztásokat!

A) 37 995 : 51;	*B)* 37 995 : 745;	*C)* 37 995 : 149;
D) 37 995 : 255;	*E)* 37 995 : 85;	*F)* 37 995 : 447.

6. A kirándulásra a buszért 12 000 Ft-ot kell fizetni. Mennyi lesz egy kiránduló buszköltsége, ha mindenki ugyanannyit fizet, és a buszon
   a) 50-en utaznak; *b)* 48-an utaznak?

7. A Szegedi Szabadtéri Játékok jegyárai a következők: 6000 Ft, 4500 Ft, 4000 Ft, 3000 Ft, 2000 Ft, 1500 Ft és 1000 Ft. Egy társaság elhatározza, hogy azonos árú jegyeket vesz 36 000 Ft értékben. Hány jegyet vásárolhatnak az egyes fajtákból?

8. A Szabadtéri Játékokon Ági perecet árult. Hány forintba kerül egy perec, ha 98 db-ot adott el, és 6370 Ft lett a bevétele?

9. Egy iskolai büfébe 6 karton dobozos üdítőt szállítottak 12 150 Ft-ért. Mennyibe került egy karton, illetve egy doboz üdítő, ha egy kartonban 27 doboz van?

10. Az osztandó 5593, a hányados 147, a maradék 7. Mennyi az osztó?

11. Egy áruházban egy nap alatt 170 db akciós DVD-t adtak el. Mennyibe került egy DVD, ha az ebből származó bevétel 84 150 Ft volt?

12. Ha a Földről a Marsra küldenének egy űrhajót, annak 189 millió kilométert kellene megtennie. Az utazási idő 259 nap lenne. Hány kilométeres utat tenne meg naponta az űrhajó? Mekkora utat tenne meg egy óra alatt?

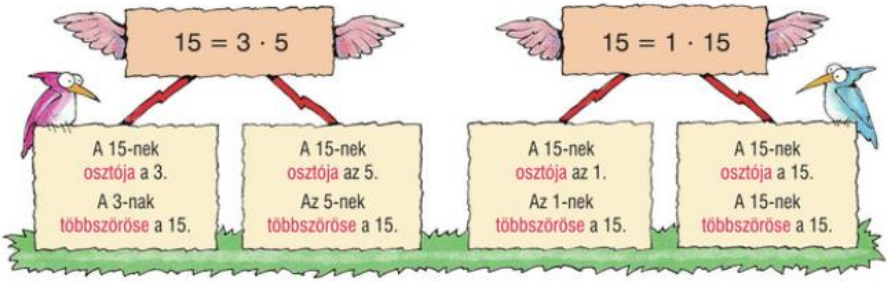
Rejtvény

Melyik az a négyjegyű szám, amelyiknek a kilencszeresére igaz ugyanaz, mint a 2178-nak a négyszeresére?



19. Osztó és többszörös

Írjuk fel a 15-öt két természetes szám szorzataként!



Osztópárok:
1; 15
3; 5

A 15 **osztói:** 1; 3; 5; 15.

Egy szám osztóit párokba rendezhetjük, amelyek szorzata maga a szám.

1. példa

Soroljuk fel a következő számok osztóit: 6; 8; 2; 1; 0!

Megoldás

$6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$, ezért a 6 osztói: 1; 2; 3; 6.

$8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$, ezért a 8 osztói: 1; 2; 4; 8.

$2 = 1 \cdot 2$, ezért a 2 osztói: 1; 2.

$1 = 1 \cdot 1$, ezért az 1 osztói: 1.

A 0-nak minden természetes szám osztója.

$0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 2 = \ldots$, ezért a 0 osztói: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 ...

Az 1 minden számnak osztója. Minden szám osztója önmagának.

Az osztópárok segítségével megkereshetjük egy szám összes osztóját.

2. példa

Keressük meg az 54 osztóit!

Megoldás

Írjuk fel az 54 osztóit osztópárok segítségével!

$1 \cdot 54$
$2 \cdot 27$
$3 \cdot 18$
$6 \cdot 9$

Mivel $7 \cdot 7 = 49 < 54$ és $8 \cdot 8 = 64 > 54$, ezért az osztópárok kisebb tényezője legfeljebb 7 lehet.

Vizsgáljuk meg a számokat 1-től 7-ig, hogy osztói-e az 54-nek.

Az 1 osztója,
mert $1 \cdot 54 = 54$,
a 2 osztója,
mert $2 \cdot 27 = 54$,
a 3 osztója,
mert $3 \cdot 18 = 54$,
a 4 nem osztója,
az 5 nem osztója,
a 6 osztója,
mert $6 \cdot 9 = 54$,
a 7 nem osztója.

Az 54 osztói: 1; 2; 3; 6; 9; 18; 27 és 54.

3. példa

Soroljuk fel a 8; 3; 1; 0 többszöröseit!

Megoldás

8 többszörösei: 0; 8; 16; 24; 32; ...
3 többszörösei: 0; 3; 6; 9; 12; ...
1 többszörösei: 0; 1; 2; 3; 4; ...
0 többszörösei: 0

A 0-nak csak önmaga a többszöröse.

Az 1-nek minden természetes szám többszöröse.
A 0 többszöröse minden természetes számnak.
Minden természetes szám többszöröse önmagának.

Feladatok

1. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás!
   a) A 45 osztója a nullának.
   b) A 45 osztója a 45-nek.
   c) A 45-nek többszöröse a nulla.
   d) A 45-nek többszöröse önmaga.
   e) A 45-nek osztója a nulla.
   f) A 45 többszöröse a nullának.
   g) A nullának osztója a 45.
   h) A 45-nek osztója az 1.
   i) Az 1-nek osztója a 45.
   j) Az 1 osztója a 0-nak.

SÚGÓ
12 osztópárjai:
1;12
2; 6
3; 4

2. Soroljuk fel a következő számok összes osztóját!
   a) 8; *b)* 18; *c)* 24; *d)* 72; *e)* 96.

3. Soroljuk fel a következő számok első öt többszörösét!
   a) 5; *b)* 25; *c)* 7; *d)* 21; *e)* 9; *f)* 19.

4. Végezzük el a következő osztásokat, majd ellenőrizzük számításunk eredményét!
   325 : 13 = 7200 : 228 = 22 317 : 43 =
   a) Mindhárom osztandónak soroljuk fel legalább négy osztóját!
   b) Melyik az az osztó, amelyik legalább két számnak osztója a felsoroltak közül?
   c) Melyik számmal osztható minden természetes szám?

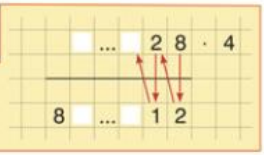
5. Egy béka 50 cm-t, egy szöcske pedig 80 cm-t ugrik. Milyen messzire jutnak 3; 7; 10; 25 ugrással? Ha egy helyről indulva azonos irányba ugrálnak, akkor az indulóponttól milyen messze van az első olyan pont, amelyre mindketten ráugranak? (A megoldáshoz célszerűen elkészített számegyenes segíthet.)

6. Melyek azok a számok, amelyeknek többszöröse a 60?

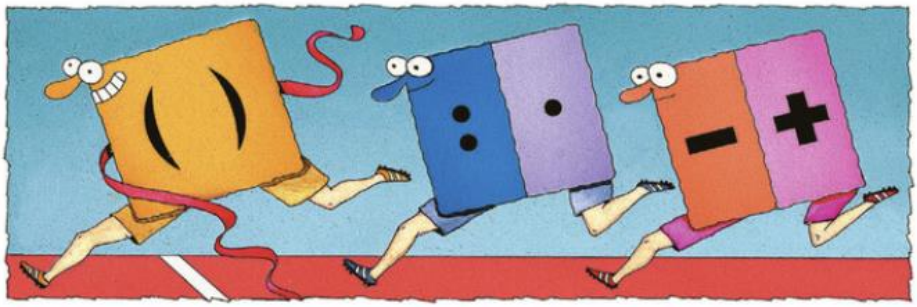
7. Soroljunk fel olyan számokat, amelyeknek pontosan
   a) 2 osztója; *b)* 3 osztója; *c)* 4 osztója van!

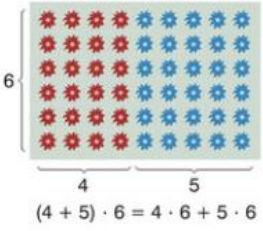
Rejtvény

Hány jegyű az a szám, melynek négyszeresét úgy kapjuk meg, hogy az utolsó helyen lévő 8-as számjegyet az első helyre tesszük?



20. A műveletek sorrendje



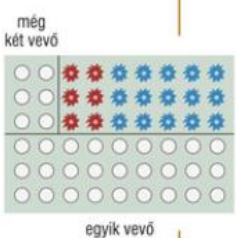


1. példa

Az ábrán látható tartóban piros és kék színű virágok vannak. Hány virág van a tartóban?

Megoldás

Egy sorban 4 + 5 szál virág látható, és mivel 6 sor van, ezért a tartóban összesen $(4 + 5) \cdot 6 = 9 \cdot 6 = 54$ szál virág van.
Először a zárójelben lévő műveletet végeztük el.

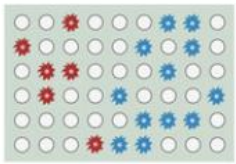


2. példa

Hány virág lesz a tartóban, ha egy vevő elvitte a virágok felét, majd két vevő mindegyike elvisz három-három szál piros színű virágot?

Megoldás

Az egyik vevő elvitte a virágok felét, így maradt $54 : 2$ virág. Majd a két vevő $2 \cdot 3$ szál piros virágot vitt el.
Ezért a tartóban $54 : 2 - 2 \cdot 3 = 27 - 6 = 21$ szál virág maradt.
Először az osztást és a szorzást végeztük el.



3. példa

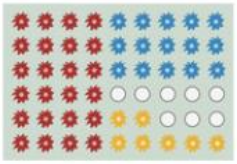
Hány virág lesz a tartóban, ha minden sorban a virágok harmada marad a tálcán, a többit eladják?

Megoldás

Egy sorban $9 : 3$ virág lesz. Így a tartóban összesen $9 : 3 \cdot 6 = 3 \cdot 6 = 18$ szál virág maradt.
A műveleteket a felírás sorrendjében (balról jobbra haladva) végeztük el.

4. példa

Hány virág lesz a tartóban, ha egy vevő 15 szál kék színű virágot megvesz, utána pedig 7 sárga virágot a tartóba tesznek?



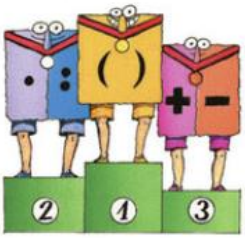
Megoldás

A tartóban eredetileg 54 szál virág volt, eladtak belőle 15 szál virágot, így maradt $54 - 15$. Hoztak hozzá 7 szálat, ezért most $54 - 15 + 7 = 39 + 7 = 46$ szál van a tartóban.

A műveleteket itt is a felírás sorrendjében végeztük el.

Megállapodás szerint a műveletek végzésének sorrendje:

1. **Először a zárójelben lévő műveleteket végezzük el.**
2. **Ezután a szorzásokat és az osztásokat végezzük el a felírás sorrendjében.**
3. **Végül az összeadásokat és a kivonásokat végezzük el a felírás sorrendjében.**



Feladatok

1. Számítsuk ki!

   a) $5 \cdot 6 + 4 \cdot 7$; *b)* $9 + 11 \cdot 13$; *c)* $7 + 3 \cdot 8 - 11$;
   d) $38 - (13 + 11) - 4$; *e)* $45 - 6 : 3 + 12$; *f)* $12 \cdot 15 - 15$;
   g) $56 - 22 + 4$; *h)* $48 : 6 \cdot 2$ *i)* $127 - 36 : 9$.

2. Számítsuk ki a műveletsorok eredményét!

   a) $9 + (8 \cdot 6 - 15) : 3$; *b)* $70 : 7 \cdot 2 + 20 - 4$; *c)* $40 - 20 + 72 : 9$;
   d) $65 - 20 : 4 + 6 \cdot 5 : 3$; *e)* $65 - (20 : 4 + 6) \cdot 6 : 3$; *f)* $120 - 20 \cdot 4 + 15$;
   g) $72 - 13 \cdot 4 + 10 - 2 \cdot 3$; *h)* $144 : (3 \cdot 15 - 9)$; *i)* $83 - 13 \cdot 2 + 5 \cdot 14 - 13$.

3. Tegyünk ki váltogatva úgy zárójelpárt, hogy minél több különböző eredményt kapjunk! Válasszuk ki az egyiket, és írjunk hozzá szöveget!

   a) $12 + 4 \cdot 5 + 2$; *b)* $36 : 4 \cdot 3 + 6$; *c)* $36 + 24 : 4 + 2$.

4. Tegyük ki a relációjeleket ($>$; $=$; $<$), hogy igaz legyen!

   a) $7 \cdot (8 + 3) \square 7 \cdot 8 + 3$; *b)* $9 \cdot (5 - 4) \square 9 \cdot 5 - 4$;
   c) $9 \cdot (10 + 11) \square 9 \cdot 10 + 9 \cdot 11$; *d)* $71 - (18 + 23) \square 71 - 18 + 23$;
   e) $52 - (14 + 21) \square 52 - 14 - 21$; *f)* $63 - (47 - 18) \square 63 - 47 + 18$;
   g) $7 + 6 \cdot 8 - 2 \square (7 + 6) \cdot (8 - 2)$; *h)* $77 : (7 + 4) \square 77 : 7 + 4$.

5. Számítsuk ki!

   a) $2295 : 17 - 17 + 1$; *b)* $2295 : (17 - 17 + 1)$;
   c) $45\,637 - (645 - 278) \cdot 2$; *d)* $45\,637 - (645 - 278 \cdot 2)$;
   e) $(3714 + 5104) \cdot [4765 - (4700 + 65)]$; *f)* $81\,439 \cdot (456 - 9 \cdot 50 - 18 : 3)$.

6. Hogyan lehetne gyorsan kiszámolni a kártyalapokon látható számok összegét?

a) 

b) 

c) A francia kártyalapokat 2-től 10-ig számozzák, és mindegyikből 4 szín van. Hány számozott lap van egy csomag francia kártyában? Mennyi a lapokon lévő számok összege?

7. A murmucok bolygóján 1 év 5 hónapból, 1 hónap pedig 12 napból áll.

a) Hány napot élt a 8 éves 3 hónapos 7 napos murmuc?

b) Hány éves egy 360 napos murmuc?

8. Számítsuk ki!

a) $(76 + 23) - (48 - 33)$;
b) $(98 + 54) - (97 + 37)$;
c) $(546 + 268) - (87 + 69)$;
d) $(759 + 268) - (1501 - 653)$;
e) $(3417 - 1079) + (6804 - 3119)$;
f) $(8866 - 2244) - (5533 - 3355)$;
g) $83 + [54 - (38 - 17)]$;
h) $4160 - [2019 - (483 - 216)]$;
i) $(35 - 18) - [27 - (28 - 9)]$;
j) $5426 - [(357 - 186) - (253 - 199)]$.

9. Mi az eredménye a műveletsoroknak?

a) $78 - 27 - (34 - 28 - 3 + 15 - 11)$;
b) $87 - (36 + 14) - (52 - 48)$;
c) $825 - [413 - (51 - 17)] + 201$;
d) $(25 - 8) + [(43 + 7) - (58 - 19)]$;
e) $[(4117 - 326) - (411 + 17)] - 361$;
f) $398 - [218 - (184 - 93 + 11)] + 51$.

10. Tegyünk ki egy-egy zárójelpárt úgy, hogy az alábbi egyenlőségek igazzá váljanak!

a) $48 - 36 : 4 - 3 = 0$;
b) $23 - 2 \cdot 6 + 1 = 9$;
c) $75 - 32 + 28 - 10 = 5$;
d) $64 : 2 \cdot 8 - 3 = 1$;
e) $64 : 8 - 6 : 2 = 16$;
f) $27 \cdot 18 \cdot 5 - 5 \cdot 12 = 0$.

11. A négy alapművelet és zárójelek felhasználásával írjuk fel:

a) a 12-t 6 db 1-essel;
b) a 7-et 5 db 2-essel;
c) a 100-at 5 db 5-ösel;
d) a 100-at 5 db 3-assal!

12. Mely szám kerülhet a jel helyére, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) $(21\,478 + 516) \cdot \square = 0$;
b) $(1000 + 5 \cdot \triangle) - 1 = 1104$;
c) $\triangledown \cdot (852 - 851) = 200$;
d) $7145 : (314 - \bigcirc) = 7145$.

Rejtvény

Számítsuk ki a következő műveletsor eredményét!

$10 - 9 \cdot (9 - 8 \cdot (8 - 7 \cdot (7 - 6 \cdot (6 - 5 \cdot (5 - 4 \cdot (4 - 3 \cdot (3 - 2 \cdot (2 - 1)))))))$

22. Vegyes feladatok

A feladatok megoldása előtt ahol lehet, végezzünk becslést, utána ellenőrizzünk!

1. Rendezzük a szorzatokat növekvő sorrendbe! Mit jelent a kirakott szó?

40 · 21	61 · 14	29 · 28	21 · 41	92 · 9	58 · 15	291 · 3	19 · 43
Y	E	T	Z	N	Ó	K	É

2. Végezzük el a következő műveleteket!

   a) 333 333 : 9; *b)* 999 999 : 7; *c)* 10 000 : 27; *d)* 10 000 : 37.

3. Számítsuk ki! Ügyeljünk a műveletvégzés sorrendjére!

   a) 17 264 : 8 − 475 · 3; *b)* (17 264 : 8 − 475) · 3;

   c) (3775 + 1250) : 25; *d)* 3775 : 25 + 1250 : 25.

4. Az áruházba dobozos üdítőt szállítanak. Egy csomagban 4 doboz, egy rekeszben 12 csomag, egy raklapon 3 sorban soronként 5 db rekesz van. Hány doboz üdítőital érkezett két ilyen raklapon?

5. Egy kertészetben 17 napon át paprikát palántáltak, összesen 32 500 darabot. Hány tövet ültettek el átlagosan naponta?

6. Földünk legmagasabb hegycsúcsa (a Csomolungma, Mount Everest) 8848 m, az óceán legnagyobb mélysége (a Mariana-árok) 11 034 m. Hány méter magas vízréteg borítaná a Föld legmagasabb hegycsúcsát, ha a hegycsúcs az óceán legnagyobb mélységénél az óceánba merülne?



7. Márk születésekor édesapja 5 évvel volt idősebb, mint az édesanyja. Márk most 12 éves, édesanyja 37 éves. Hány év korkülönbség van most a szülei között?

8. Bence malacperselyében 142 ötvenforintos, 227 húszforintos és 304 tízforintos gyűlt össze. Hány ötszázforintost kapott ezért az összegért? Maradt-e beváltatlan érméje?

9. Egy iskolába 600 diák jár, minden osztályba 30. Minden diáknak minden nap 5, minden tanárnak minden nap 4 órája van. Minden órán egy egész osztály és egy tanár van együtt. Hány tanára van az iskolának?

10. Melyik állítás hamis az alábbiak közül, ha $a = 6 \cdot b$?

    a) Az a hatszorosa a b-nek. *b)* A 6 a-szorosa a b-nek.

    c) A 6 b-szerese a-nak. *d)* Az a hatodrésze b-nek.

    e) Az a hattal nagyobb b-nél. *f)* A b hatszorosa a-nak.

11. Zoli egy lőlapon 8 lövéssel 100 pontot ért el. Hány ötöst lőtt, ha tudjuk, hogy legtöbb találata a 12-es mezőben volt, néhányszor beletalált a 21-es mezőbe is, és csak ez a háromfajta találata volt? (⇒)



12. A kirándulásra anyukánk 30 db palacsintát csomagolt kettőnknek. Én annyiszor hármat ettem belőle, ahányszor kettőt a húgom. Mennyit ettünk meg külön-külön, mire az összes palacsinta elfogyott?

13. A szürke bálna nevezetessége, hogy az emlősök között a leghosszabb a vonulása. Évente 12 000 – 20 000 km távolságot tesz meg.
   a) Legalább hány kilométert úszott egy 42 évet élt szürke bálna?
   b) Legfeljebb hány kilométert úszhatott a 42 éves szürke bálna?
   (Élete során akkora távolságot tesz meg, mintha oda-vissza utazott volna a Holdra.)

14. Évi lemásolt Dani füzetéből egy összeadást, de az egyik számjegyet hibásan olvasta ki. Melyik számjegyet és mire kellene cserélni az összes előfordulási helyén, hogy helyes eredményt kapjunk? (➡)

	7	4	2	5	8	6
+	8	2	9	4	3	0
1	2	1	2	0	1	6

15. Három gyerek közt egyenlően osztanak szét egy kosár diót. Amikor mindegyik megevett a magáéból 8-at, akkor összesen annyi diójuk maradt, mint amennyi először volt mindegyiküknél. Hány diót kaptak a szétosztásnál?

16. Gondoltam egy számot. Ha elosztjuk 10-zel, és a hányadoshoz hozzáadunk 99-et, ezután az összegből elhagyjuk az utolsó számjegyet, a 6-ost, akkor 12-t kapunk. Melyik számra gondoltam?

17. Az egyik áruházban a fél literes fenyő illatú tusfürdő 740 Ft-ba kerül. A másik áruházban ugyanezt a márkát 2 dl-es kiszerelésben árulják 352 Ft-ért. Melyik tusfürdőt érdemesebb megvenni?

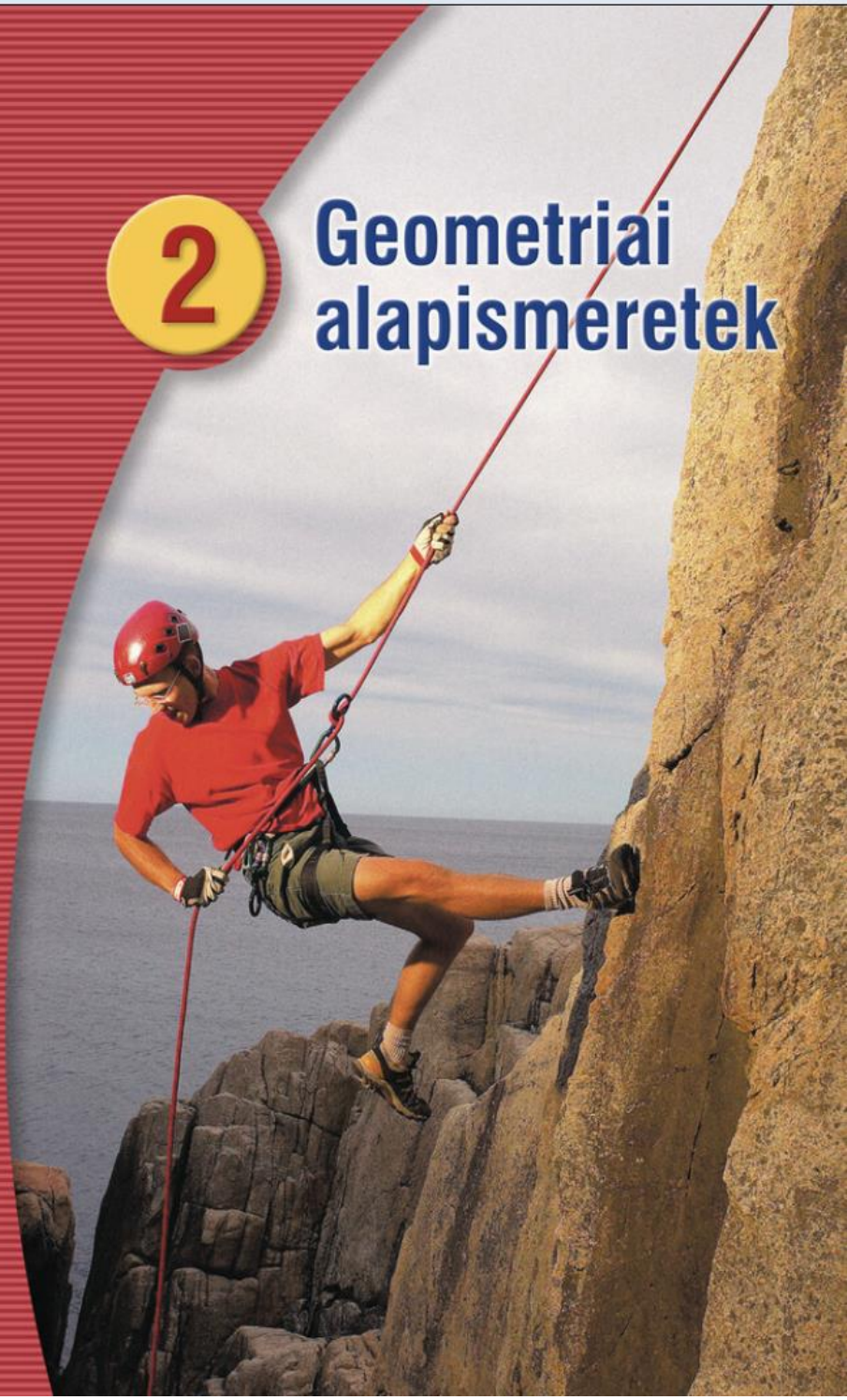
18. A kifejlett hím oroszlánok tömege 150–225 kg, a nőstényeké 125–180 kg. Döntsük el a következő állításokról, hogy igazak vagy hamisak!
   a) Egy hím oroszlán tömege kétszerese is lehet a nőstény oroszlán tömegének.
   b) Minden hím oroszlán nagyobb tömegű, mint a legnagyobb tömegű nőstény oroszlán.
   c) Van olyan nőstény oroszlán, amelyik nagyobb tömegű, mint egy hím oroszlán.
   d) A hím oroszlánok akár 30 kg-mal is nehezebbek lehetnek a nőstény oroszlánoknál.
   e) Nincs olyan hím oroszlán, amelyik kisebb tömegű, mint egy nőstény oroszlán.



19. Rakjuk ki gyufából az ábrát, majd helyezzünk
   a) egyetlen gyufát; *b)* két gyufaszálat; *c)* három gyufaszálat; *d)* négy gyufaszálat máshová úgy, hogy helyes legyen a kirakott egyenlőség!



2 Geometriai alapismeretek



1. Ponthalmazok



Az ábrán a környezetünkben lévő tárgyak láthatók. Soroljátok fel ezen tárgyak egy-egy tulajdonságát!

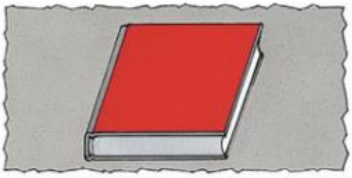
A geometria szó a görög „geo": Föld és „metria": mérés szavakból származik. A geometria a matematika egyik legrégibb területe, melynek tudományos alapjait az ókori görög matematikusok rakták le.

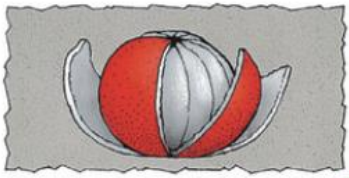
A geometria területén ért el kiemelkedő eredményeket az első két nemzetközi hírnevet szerzett magyar matematikus: Bolyai Farkas (1775–1856) és fia, Bolyai János (1802–1860) is. Munkásságukról később tanulunk majd.

A geometriában a sokféle tulajdonság közül a testek alakjával és nagyságával foglalkozunk. A tárgyakról leegyszerűsített képet képzelünk, rajzolunk, amely már csak a geometria szempontjából lényeges tulajdonságokat jelzi. Ahhoz, hogy ezekről beszélhessünk, olyan elnevezésekben kell megállapodnunk, amelyek mindenki számára ugyanazt jelentik.

Térben

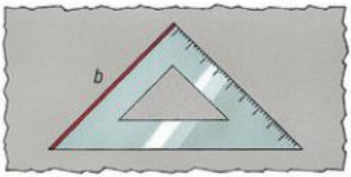
A könyv, a vonalzó, a narancs, az óra, a földgömb, a lámpa ... **testek.**
A testeket **felületek** határolják, amelyek lehetnek **sík** vagy **görbe** felületek.





Síkban

A felületeket **vonalak** határolják, amelyek lehetnek **egyenes** vagy **görbe** vonalak.



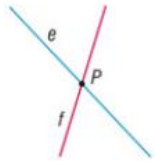


A vonalak jele: *a*, *b*, *c*, ...

A vonalakat az ábécé kisbetűivel jelöljük.

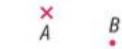
Ha két vonal metszi egymást, meghatároznak egy **pontot.** A pontokat az ábécé nagybetűivel jelöljük.

A testek, a felületek, a vonalak és a pontok **ponthalmazok.**



A pontok jele:
A, B, C, ..., P, ...

Jelölésük ábrán:



A térben különböző tárgyak vesznek körül bennünket. Vannak kisebbek, nagyobbak, hasonló, azonos vagy különböző alakúak.



alakjuk és méretük megegyezik → **egybevágó testek**

alakjuk megegyezik, méretük különböző; alakjuk különböző → **nem egybevágó testek**



alakjuk és méretük megegyezik → **egybevágó alakzatok**

méretük különböző; alakjuk különböző → **nem egybevágó alakzatok**

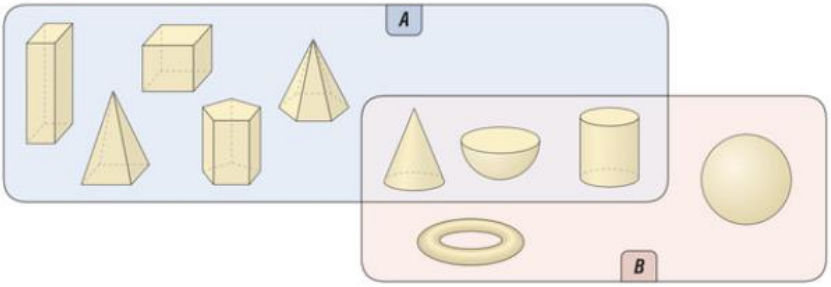
Feladatok

1. Milyen felületek határolják
   a) a táblát; *b)* a zongorát; *c)* a padot; *d)* a gumimatracot?
2. Sorolj fel tárgyakat, amelyeken
   a) csak sík felületeket találunk; *b)* csak görbe felületeket találunk;
   c) sík felületeket és görbe felületeket is találunk!
3. Milyen vonalakat kapunk, ha körberajzoljuk a füzetlapra helyezett
   a) vonalzót; *b)* tolltartót; *c)* könyvet; *d)* kezünket?
4. Milyen felületeket és vonalakat találhatunk egy gyufásdobozon?

3D

5. Milyen felületeket és vonalakat találunk egy téglatesten?

6. *a)* Mi jellemző az *A* halmazban lévő testekre?
   b) Mi jellemző a *B* halmazban lévő testekre?
   c) Mi jellemző a két halmaz közös részében lévő testekre?



7. Az alábbi ábrán a műszaki rajzban használatos betűk láthatók.
   Melyek azok a betűk, amelyeket:
   a) csak egyenes vonalakkal; *b)* csak görbe vonalakkal rajzolunk meg?

A B C D E F G H I J K L M
N O P Q R S T U V W X Y Z

8. Egybevágó-e az ábrán látható két alakzat?

a)  *b)*  *c)*  *d)* 

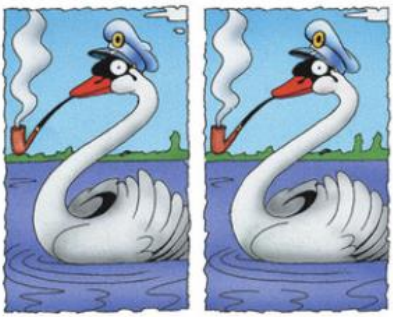
9. Egybevágó-e a két pecsétnyomat?

a)  *b)*  *c)*  *d)* 

10. Keressünk a sakk-készletben egybevágó és nem egybevágó figurákat!

Rejtvény

Keressük meg a két rajzon az eltéréseket!



2. Az egyenes és részei



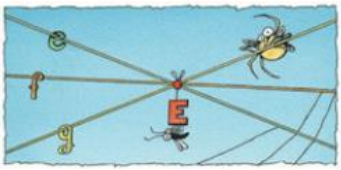


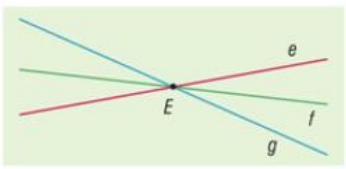
A geometriában, ha azt mondjuk, hogy egyenes, akkor végtelen egyenes vonalra gondolunk. Az egyeneseket az ábécé kisbetűivel jelöljük.

Az egyenesek jele: *e*, *f*, *g*, ...

3D

Egy ponton keresztül több egyenes is rajzolható.





Euklidesz görög matematikus körülbelül 2300 évvel ezelőtt élt. Szerinte „a pont az, aminek nincsen része" és „a vonal szélesség nélküli hosszúság".

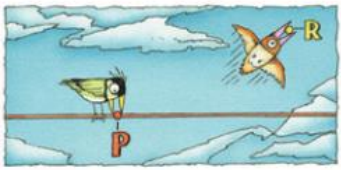
Két ponton keresztül pontosan egy egyenes rajzolható.





A *K* és *L* pontokon áthaladó egyenes a *KL* egyenes.

A *P* pont rajta van az *f* egyenesen: **a *P* pont illeszkedik az *f* egyenesre.**
Az *R* pont nincs rajta az *f* egyenesen: **az *R* pont nem illeszkedik az *f* egyenesre.**

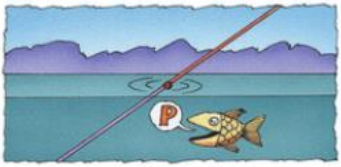


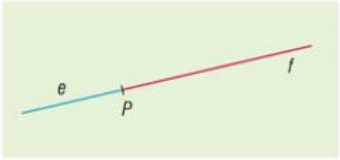




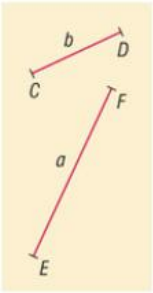
Félegyenes

Az e egyenesen kijelölünk egy P pontot. A P pont az egyenest két **félegyenesre** bontja. Ha nem mondunk mást, a P pont mindkét félegyeneshez hozzátartozik.



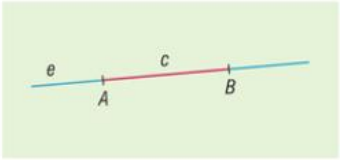


Szakasz



Az e egyenesen kijelölünk két *különböző* pontot: A-t és B-t. Az egyenesnek az A és B pontok közé eső része az A és B pontokkal együtt a c **szakasz.**

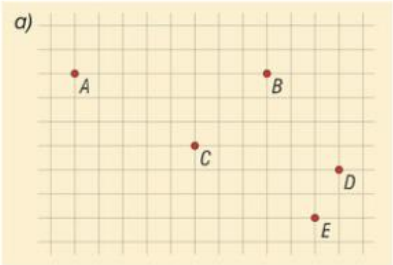


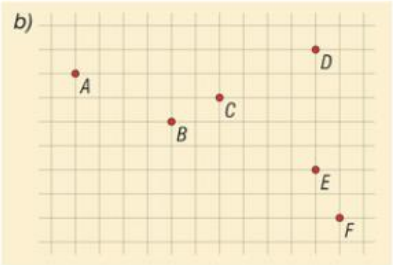


A c szakaszt megadhatjuk a két **végpontjával** is: AB szakasz.
Az AB szakasz hosszúságát az ***A* és *B* pontok távolságának*** nevezzük.

Feladatok

1. Vegyük fel négyzetrácson a pontokat az ábrán látható módon, és húzzuk be az összes lehetséges egyenest, amely legalább két felvett ponton átmegy! Hány egyenest kaptunk?





2. Rajzoljunk 5 pontot úgy, hogy

a) pontosan 3 pont legyen egy egyenesen;
b) pontosan 4 pont legyen egy egyenesen;
c) minden pont egy egyenesen legyen;
d) legfeljebb 2 pont legyen egy egyenesen!

3. Az f egyenesen az ábra szerint felvettük az E, F, G és H pontokat.



a) Mi a közös része az E kezdőpontú, F-et tartalmazó félegyenesnek és a G kezdőpontú, E-t tartalmazó félegyenesnek?
b) Mi a közös része az E kezdőpontú, F-et tartalmazó félegyenesnek és az F kezdőpontú, G-t tartalmazó félegyenesnek?

4. Az e egyenesen az ábra szerint felvettük az A, B, C és D pontokat.



a) Mi a közös része az AC és a BD szakaszoknak?
b) Mi a közös része az AB és a DB szakaszoknak?
c) Milyen ponthalmazt alkotnak az AC és a BD szakaszok pontjai együtt?

5. Számoljuk ki az AE és a DE szakaszok hosszúságát, ha
a) $AC = 5$ cm, $BE = 10$ cm, $CD = 4$ cm és $BC = 2$ cm;
b) $AD = 5$ cm, $BE = 7$ cm, $CD = 2$ cm és $BD = 4$ cm!



6. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
Ha két félegyenes egy egyenesre illeszkedik, akkor
a) biztosan van közös pontjuk;
b) lehet, hogy egy közös pontjuk van;
c) biztosan nincs közös pontjuk;
d) lehet, hogy végtelen sok közös pontjuk van.

7. Andi, Bandi, Ceci, Dömi és Eszti egy egyenes utcának ugyanazon az oldalán laknak (ebben a sorrendben). Mindegyikük háza előtt van egy fa: az Andiék és Esztiék előtti fák között 90 m, az Esztiék és Ceciék előtti fák között 60 m, a Dömiék és Esztiék előtti fák között 28 m, végül a Dömiék és Bandiék előtti fák között 58 m a távolság.
Milyen távolságra van egymástól az Andiék és a Bandiék előtti fa?

Rejtvény

A Hétházán élő Kovács család így számolt be rosszul sikerült vasárnapi kirándulásukról:

Apa: Ebéd után elindultunk a szomszéd faluba meglátogatni Sári néniéket, de az autóval alig 20 km-t tettünk meg óránként, mert volt az a baleset a körforgalom után.

Anya: De nem rögtön utána! Még legalább negyed órát mentünk, amíg megláttuk, hogy mi történt.

Piri: Igen, több mint 2 kilométerre a kakukkfalvi templomtól felborult egy utánfutó, és az útra ömlött a sok savanyú káposzta.

Nagymama: Volt az 3 kilométer is! Éppen a Marikáék előtt történt.

Hol lakhatnak Marikáék? Jelöljük be a térképvázlaton! Nevezzük meg a térképen látható két falut!



3. Egyenesek kölcsönös helyzete

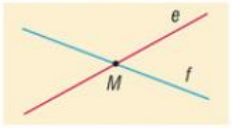
Két egyenes egymáshoz viszonyított helyzetét a térben az alábbiak szerint csoportosíthatjuk.

Keressetek az osztályteremben olyan egyeneseket, amelyek egymást metszik, egymással párhuzamosak, illetve kitérőek!

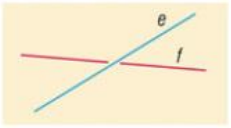












egy közös pontjuk van

nincs közös pontjuk (vagy végtelen sok közös pontjuk van)

nincs közös pontjuk

metsző egyenesek

párhuzamos egyenesek

kitérő egyenesek

egy síkban vannak

nincsenek egy síkban

3D

Párhuzamos egyenesek

Minden egyenes párhuzamos önmagával.

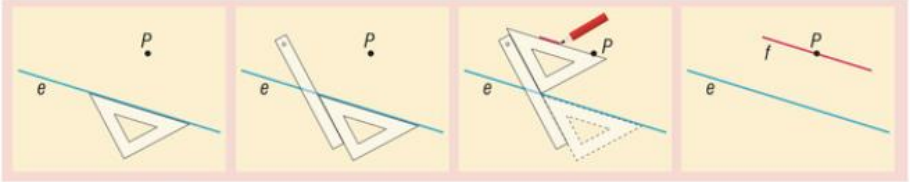
Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak és nem metszik egymást. Jelölése: $e \parallel f$.

1. példa

Adott az e egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont.
Rajzoljunk a P ponton át e-vel párhuzamos f egyenest!

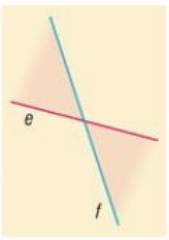
Megoldás

1. A háromszögvonalzó egyik oldalát az e egyenesre helyezzük.
2. A másik vonalzót az ábrán látható módon a háromszögvonalzó mellé illesztjük.
3. A háromszögvonalzót a másik vonalzó mentén a P pontig csúsztatjuk, és megrajzoljuk az f egyenest.
4. Az e egyenessel párhuzamos f egyenes áthalad a P ponton.

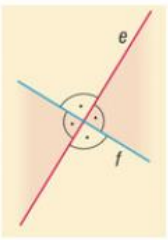


Metsző egyenesek

Két egymást metsző egyenes a síkot négy részre osztja. A négy síktartomány közül a szemközti síktartományok egybevágók. Ha a metsző egyenesek úgy osztják fel a síkot, hogy mind a négy síktartomány egybevágó, akkor ezek az egyenesek **merőlegesek** egymásra.

két-két síktartomány egybevágó

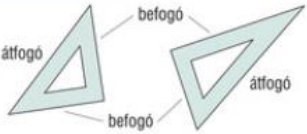



a négy síktartomány egybevágó

Keressünk a környezetünkben (épületeken, bútorokon, sportpályákon stb.) egymásra merőleges egyeneseket!

Két metsző egyenes merőleges egymásra, ha a síkot négy egybevágó részre osztják fel. Jelölése: $e \perp f$; a rajzon ⌞, ⌞.

A háromszögvonalzó két rövidebb oldala merőleges egymásra. Ha a vonalzót körberajzoljuk, **derékszögű háromszöget** kapunk, melynek két rövidebb oldalát **befogónak,** a leghosszabb oldalát pedig **átfogónak** nevezzük.



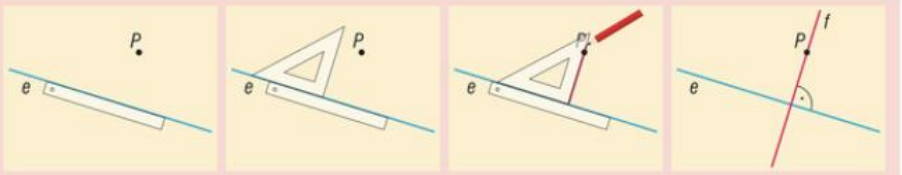
2. példa

Adott az e egyenes és a P pont. Rajzoljunk olyan f egyenest, amely áthalad a P ponton és merőleges az e egyenesre!

Megoldás

1. Az e egyeneshez vonalzót illesztünk.
2. Ehhez hozzáillesztjük a háromszögvonalzó egyik befogóját.
3. A háromszögvonalzót a másik vonalzó mentén a P pontig csúsztatjuk, és a másik befogó mellett megrajzoljuk az f félegyenest.
4. A P ponton áthaladó félegyenest meghosszabbítjuk.
5. Az f egyenes merőleges az e egyenesre, és áthalad a P ponton.

Háromszögvonalzó segítségével merőlegest rajzolhatunk.

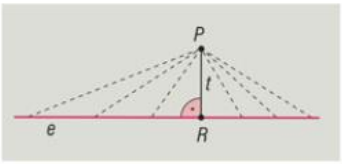


3D

Pont és egyenes távolsága, két egyenes távolsága

A P pontot az e egyenessel végtelen sok szakasszal összeköthetjük. Pontosan egy olyan szakasz van, amelyiknél nincs rövidebb, ez a legrövidebb szakasz merőleges az egyenesre. **A pontból az egyenesre rajzolt merőleges szakasz hosszát az egyenes és a pont távolságának nevezzük.**





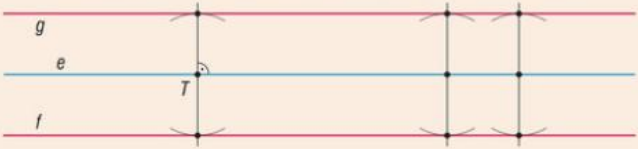


3. példa

Rajzoljunk egy adott egyenestől 1 cm távolságra lévő pontokat!

Megoldás

1. Vegyünk fel egy e egyenest és rajta egy tetszőleges T pontot! Rajzoljunk ebbe a pontba egy, az e-re merőleges egyenest!
2. Vegyünk körzőnyílásba a vonalzón 1 cm-t, és rajzoljunk a T pontból körívet vele!
3. Ezt a műveletet ismételjük meg más tetszőleges pontokban is!
4. A merőlegesek és a körívek metszéspontjait kössük össze!



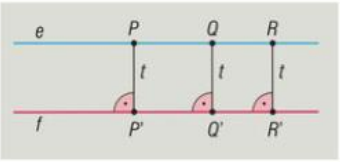
Az e egyenestől adott távolságra lévő pontok két egyenesen vannak. Ezek párhuzamosak az e egyenessel: $e \parallel g$ és $e \parallel f$.

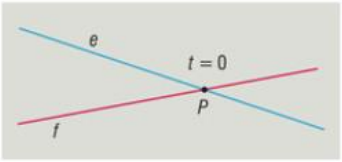


A 3. példa megoldása során láttuk, hogy ha két egyenes párhuzamos egymással, akkor az egyik egyenes bármely pontjának a másik egyenestől vett távolsága ugyanakkora. Az e és f (e és g) párhuzamos egyenesek távolsága 1 cm.

Az e és f **párhuzamos egyenesek távolsága** az e egyenes tetszőleges pontjából az f egyenesre bocsájtott merőleges szakasz hossza.

Két metsző egyenes távolsága 0.





Feladatok

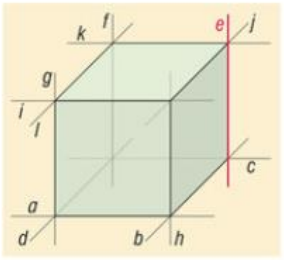
1. Keressünk a térképen olyan utcákat,
   a) amelyek egymásra merőlegesek;
   b) amelyek egymással párhuzamosak!



2. Rajzoljunk olyan egyeneseket, amelyekre teljesülnek a táblázatban foglaltak!

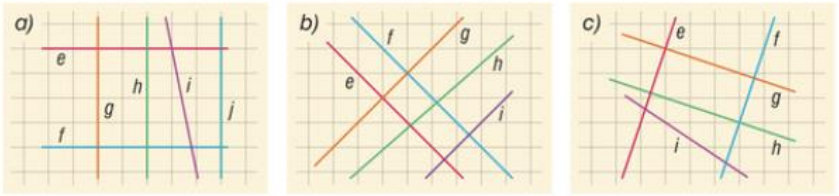
	e	f	g
e	$\parallel$	$\parallel$	$\perp$
f	$\parallel$	$\parallel$	$\perp$
g	$\perp$	$\perp$	$\parallel$

3. A kocka egyik élét tartalmazza az e egyenes. Keressünk a kockán olyan éleket, amelyek egyenesei
   a) az e egyenessel párhuzamosak;
   b) metszik az e egyenest;
   c) az e egyenessel kitérő egyenespárt alkotnak! (➡)



4. Vegyünk fel egy e egyenest!
   a) Rajzoljunk az e egyenesre merőleges f egyenest, majd az f egyenesre merőleges g egyenest! Milyen kapcsolat van az e és a g egyenesek között?
   b) Rajzoljunk az e egyenestől 2 cm-re az e-vel párhuzamos f egyenest, majd az f egyenesre merőleges g egyenest! Milyen kapcsolat van az e és a g egyenesek között?
   c) Rajzoljunk az adott e egyenessel párhuzamos f egyenest, majd az f egyenessel párhuzamos g egyenest! Milyen kapcsolat van az e és a g egyenesek között?

5. Keressünk az ábrán párhuzamos és merőleges egyenespárokat!

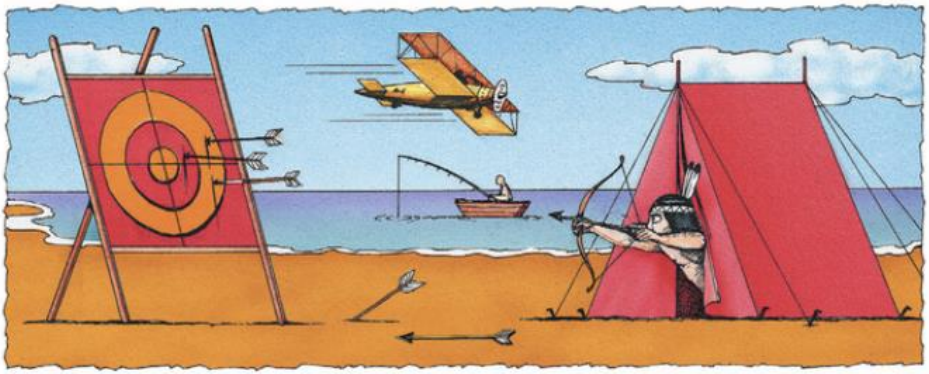


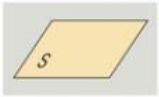
Rejtvény

Rajzoljunk a ceruza felemelése nélkül négy egyenes vonaldarabból álló törött vonalat úgy, hogy az ábrán látható kilenc pont mindegyikén áthaladjon!



4. Síkok



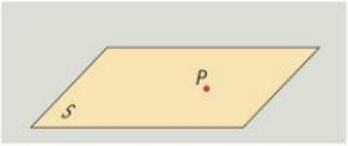


A sík ábrázolása.

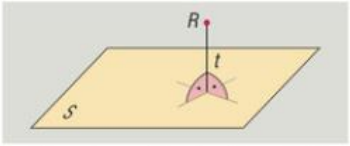
A síkot a víztükör, az asztallap vagy a tábla síkjával szemléltethetjük. A geometriában a síkot végtelennek tekintjük.

Pont és sík kölcsönös helyzete

Egy S síkra nem illeszkedő R pont és az S sík távolsága az R pontból az S síkra bocsájtott merőleges szakasz hossza.



A P pont illeszkedik az S síkra.
P és S távolsága 0.



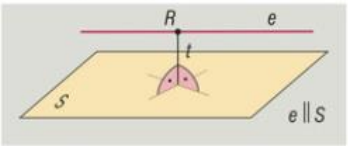
Az R pont nem illeszkedik az S síkra.
R és S távolsága t.

Egyenes és sík kölcsönös helyzete

3D

Egy S síkra nem illeszkedő e egyenes és az S sík távolsága az e tetszőleges pontjából az S síkra bocsájtott merőleges szakasz hossza.

1. Az egyenes **párhuzamos** a síkkal.

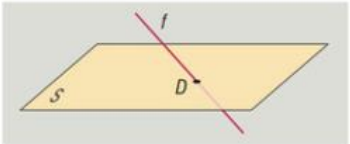


Nincs közös pontjuk.
e és S távolsága t.

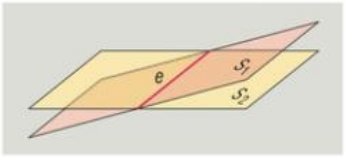


Végtelen sok közös pontjuk van, **az egyenes illeszkedik a síkra.**
f és S távolsága 0.

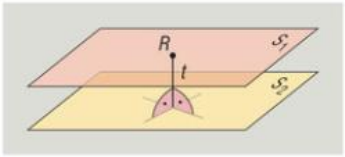
2. Az egyenes **nem párhuzamos** a síkkal. Ekkor az egyenesnek és a síknak pontosan egy közös pontja van. **Ez a pont a döféspont.** f és S távolsága 0.



Két sík kölcsönös helyzete



Egymást metsző síkok:
egy közös egyenesük van.
S_1 és S_2 távolsága 0.



Párhuzamos síkok:
nincs közös pontjuk.
S_1 és S_2 távolsága t.

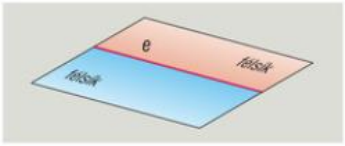
A párhuzamos S_1 és S_2 sík távolsága az S_1 tetszőleges pontjából az S_2 síkra bocsájtott merőleges szakasz hossza.





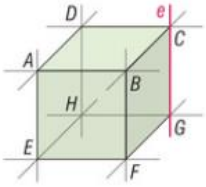
Félsík

A síkon adott egy egyenes, amely a síkot két félsíkra osztja. Az egyenes mindkét félsíkhoz hozzátartozik (ha nem állapodunk meg másban).



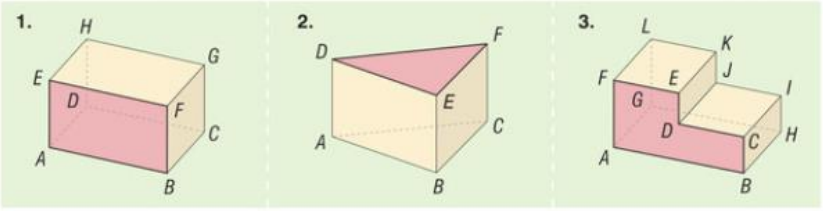
Feladatok

1. Keressünk az ábrán látható kockán olyan lapokat, amelyek
   a) az *e* egyenessel egy síkban vannak;
   b) az *e* egyenessel nem egy síkban vannak;
   c) az *e* egyenessel párhuzamosak! (➡)



2. Határozzuk meg a kockát határoló síkok és az *ABCD* lap síkjának közös részét! (➡)

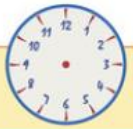
3. Keressünk az alábbi ábrákon a színes lappal párhuzamos lapot, ill. párhuzamos éleket!



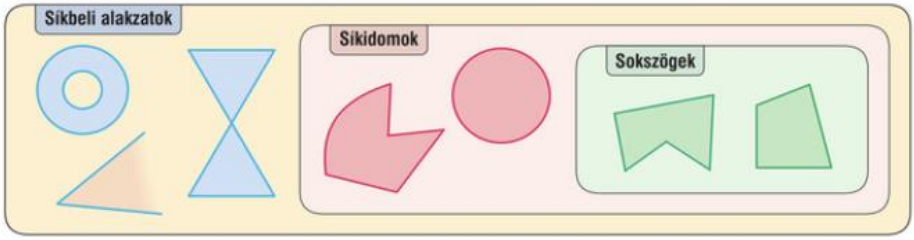
4. Hány részre lehet osztani egy síkot:
   a) 1 egyenessel; *b)* 2 egyenessel; *c)* 3 egyenessel; **d)* 4 egyenessel?

Rejtvény

Osszuk fel egy óra számlapját két egyenessel három részre úgy, hogy az egyes részekben levő számok összege megegyezzen!



5. Síkbeli alakzatok, sokszögek



A síkbeli alakzatok csoportosítása

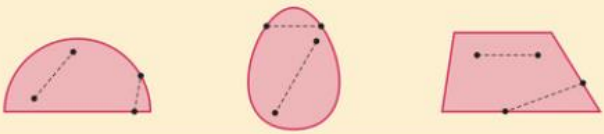
Ha egy **síkbeli alakzat** végtelen, vagy lyukas, vagy egy pontját elvéve szétesik, akkor nem síkidom.
A **síkidomokat** görbe és egyenes vonalak is határolhatják.
A **sokszögek** a szakaszokkal határolt síkidomok.

A síkidomokat nem csupán a határoló vonalak szerint csoportosíthatjuk, hanem aszerint is, hogy a síkidom két pontját összekötő szakasz hol halad. Így a síkidomok lehetnek konvex vagy nem konvex alakzatok.



A konvex szoba bármelyik pontjából az egész szobát beláthatjuk.

Konvex síkidomok

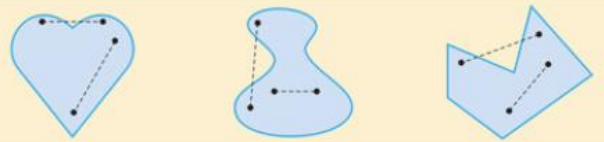


Konvex az a síkidom, amelynek bármely két pontját összekötő szakasznak minden pontja a síkidomhoz tartozik.



A nem konvex (konkáv) szobának van olyan pontja, ahonnan nem látjuk be az egész szobát.

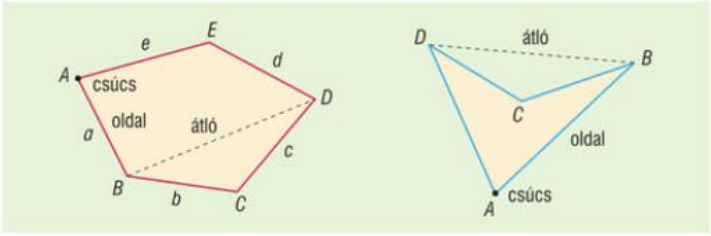
Nem konvex síkidomok



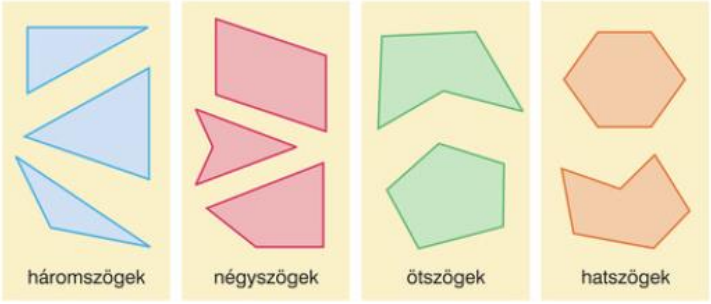
Nem konvex (azaz konkáv) az a síkidom, amelynek van két olyan pontja, amelyeket összekötő szakasznak nem minden pontja tartozik a síkidomhoz.

A sokszögek

A sokszöget határoló szakaszok az **oldalak** (a, b, c, d, e).
Két oldal közös végpontját **csúcsnak** (A, B, C, D, E), egy oldal két végpontját **szomszédos csúcsoknak** (pl. A és B) nevezzük.
Két **nem szomszédos** csúcsot összekötő szakasz az **átló** (pl. BD átló).



A sokszögeket **oldalaik száma** alapján is osztályozhatjuk.



Gondolkodj és válaszolj!
Létezik-e konkáv háromszög?

Egy sokszögben a csúcsok száma megegyezik az oldalak számával.

Példa

Hány átlója van a következő sokszögeknek?
a) háromszög; *b)* négyszög; *c)* ötszög; *d)* hatszög.

Megoldás

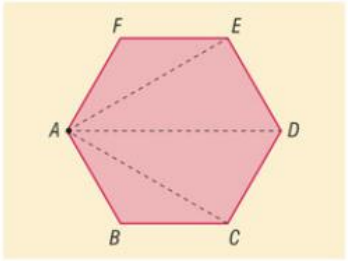
a) A háromszögnek bármely két csúcsa szomszédos, ezért nincs átlója.
b) A négyszög két-két szemközti csúcsát összekötve kapjuk a két átlóját.
c) Berajzoljuk, majd összeszámoljuk az ötszög átlóit: 5 átlót kapunk.
d) A hatszög átlóinak számát is megkaphatjuk úgy, hogy mindet berajzoljuk, majd összeszámoljuk őket: 9 átlót kapunk.

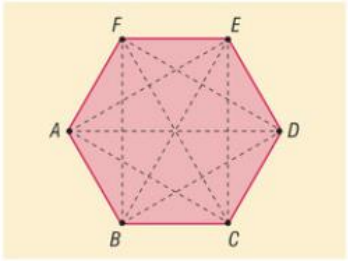
	Csúcsok száma	Oldalak száma	Átlók száma
háromszög	3	3	0
négyszög	4	4	2
ötszög	5	5	5
hatszög	6	6	9

A hatszög átlóinak berajzolását a következő módszer szerint végezzük:

Először az A csúcsból húzzuk be az összes lehetséges átlót (3 db).
Ha a B, C, D, E és F csúcsokból is behúzzuk a belőlük induló 3-3 átlót, akkor összesen a 6 csúcsból $6 \cdot 3 = 18$ átló indul. Viszont minden átlót pontosan kétszer húztunk meg, így a hatszög átlóinak száma: $18 : 2 = 9$.

Tehén-elv: Hogyan számolja meg a matematikus a tehén lábait? Elöl kettő, hátul kettő, balról kettő, jobbról kettő, ez összesen nyolc. De mindegyiket kétszer számoltuk, így osztani kell kettővel. A tehén lábainak száma tehát: $8 : 2 = 4$.



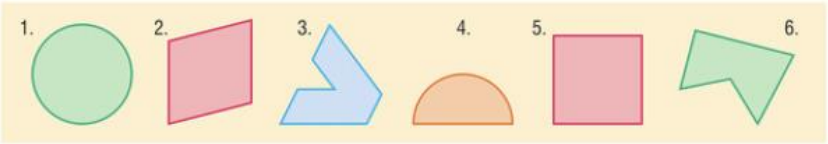


Ez utóbbi módszer nagyobb oldalszámú sokszögeknél is alkalmazható.

Feladatok

1. Válasszuk ki az alábbi síkidomok közül, hogy melyik

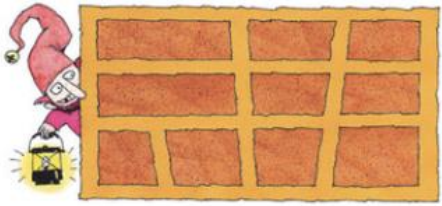
a) konvex; *b)* konkáv; *c)* sokszög; *d)* konkáv sokszög!



2. *a)* Rajzoljunk egy konvex és egy konkáv sokszöget!

b) Rajzoljunk egy konvex és egy konkáv síkbeli alakzatot, amelyik nem sokszög!

3. Az ábrán a törpék aranybányájának alaprajza látható. Legkevesebb hány mécsessel lehet egyszerre minden járatot kivilágítani? (Egy mécses egy teljes folyosót minden irányban be tud világítani.) (➡)



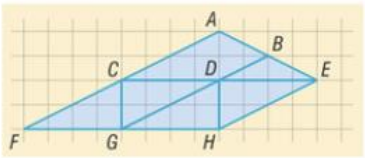
4. Keressünk az ábrán olyan pontokat, amelyek

a) egy konvex négyszög csúcsai;

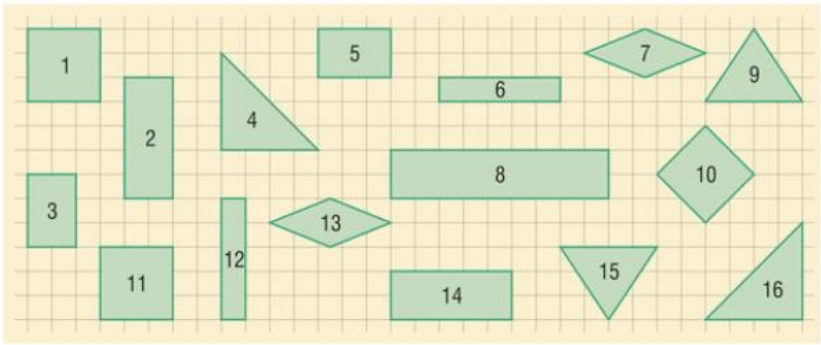
b) egy konkáv négyszög csúcsai;

c) egy konvex ötszög csúcsai;

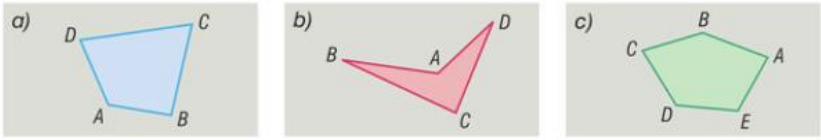
d) egy konkáv ötszög csúcsai! (➡)



5. Keressünk az ábrán egybevágó sokszögeket!



6. Adjuk meg végpontjaikkal a sokszögekben az oldalakat és az átlókat!



7. Rajzoljunk le egy konvex

a) háromszöget; *b)* négyszöget; *c)* ötszöget; *d)* hatszöget; *e)* hétszöget!

Rajzoljuk be kékkel az egyik csúcsból induló átlókat! Hány átló rajzolható?

8. Összesen hány átlója van egy

a) ötszögnek; *b)* hatszögnek; *c)* hétszögnek; *d)* nyolcszögnek?

9. Van-e olyan sokszög, amelynek ugyanannyi átlója van, mint oldala?

10. Keressünk olyan sokszögeket, amelyeknek

a) kevesebb átlója van, mint oldala; *b)* több átlója van, mint oldala;

c) ugyanannyi átlója van, mint oldala!

11. Hány metszéspontja lehet egy háromszög oldalainak

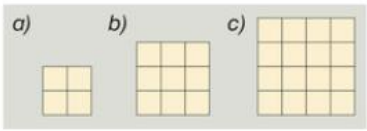
a) egy szakasszal; *b)* egy téglalap oldalaival;

c) egy konvex négyszög oldalaival; *d)* egy négyszög oldalaival?

12. Rajzoljunk olyan négyszöget, amelyet egy alkalmas egyenessel

a) három sokszögre bonthatunk;

b) három háromszögre bonthatunk!

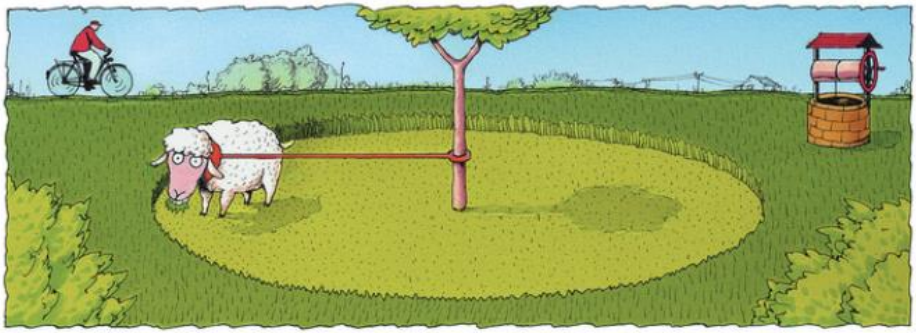


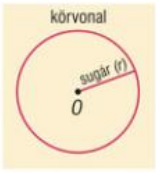
13. Hány négyzet látható az egyes ábrákon? (═)

Rejtvény

Hogyan lehet elültetni tíz fát öt sorba úgy, hogy mind az öt sorban legyen négy fa?

6. A kör





A körvonal és a sugár

Egy adott ponttól egy adott távolságra lévő pontok halmaza a síkban a körvonal.

Az adott pont a kör **középpontja (*O*).** Az adott távolság a kör **sugara (*r*).**

A körrel kapcsolatos elnevezések

Sugár: a középpontot a körvonal tetszőleges pontjával összekötő szakasz.

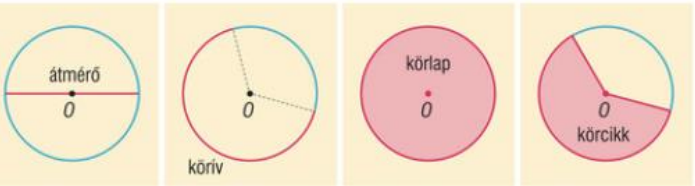
Átmérő: a körvonal két pontját összekötő olyan szakasz, amely áthalad a középponton, jelölése: d. Az átmérő hossza kétszerese a sugár hosszának ($d = 2 \cdot r$).

Körív: a körvonal egy része.

Körlap: a körvonal által határolt síkidom.

Körcikk: két sugár a körlapot két körcikkre osztja.

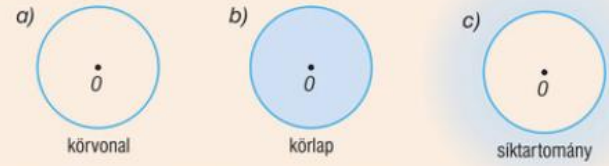




1. példa

Színezzük kékre a sík azon pontjait, amelyek az adott *O* ponttól
a) pontosan 1 cm távolságra vannak;
b) legfeljebb 1 cm távolságra vannak;
c) legalább 1 cm távolságra vannak!

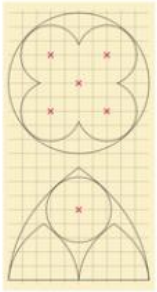
Megoldás



a) Az *O*-tól 1 cm távolságra lévő pontok halmaza egy 1 cm sugarú körvonal.

b) Az *O*-tól legfeljebb 1 cm távolságra lévő pontok halmaza egy 1 cm sugarú körlap (a körvonalat is beleértjük).

c) Az *O*-tól legalább 1 cm távolságra lévő pontok halmaza egy olyan lyukas síktartomány, amelyből az 1 cm sugarú körlap hiányzik.



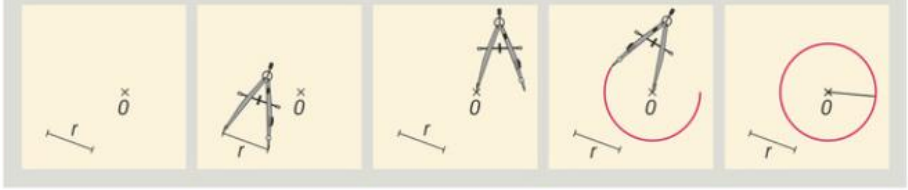
A rózsaablakok körívekkel rajzolhatók meg. Készíts hasonlót, és színezd is ki!

A **kör** szó a **körvonalat** és a **körlapot** is jelentheti.

A körvonal rajzolása

O középpontú, *r* sugarú körvonal rajzolása:

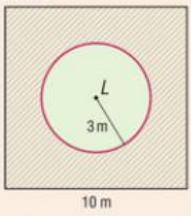
1. Adott az *O* pont és az *r* szakasz.
2. Körzőnyílásba vesszük az *r* szakasz hosszát.
3. Az *O* pontba szúrjuk a körzőt.
4. Körvonalat rajzolunk.



2. példa

Nagypapa elindított egy locsolót a kertben, amely 3 m távolságig locsol körbe. Hová ülhet le a kertben nagypapa újságot olvasni, ha nem szeretné, hogy vizes legyen? (A kert négyzet alakú, oldalai 10 m hosszúak, és a locsoló a kert közepén van.)

Vázlat:



Megoldás

Rajzoljuk meg a kert alaprajzát a locsolóval! (A füzetben 1 m legyen 1 cm!) Mivel a locsoló 3 m sugarú körben locsol körbe, rajzoljunk egy *L* középpontú 3 cm sugarú kört (*L* a négyzet középpontja).

Ha nagypapa az így kapott körlap bármely pontjába ülne, elázna az újságja. Ezért a kertnek abba a részébe ülhet le olvasni, amely kívül esik azon a 3 m sugarú körön, amelynek középpontja a locsoló.

3. példa

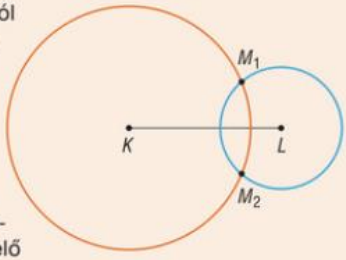
Keressünk a síkban olyan M pontot, amely a K ponttól 20 mm és az L ponttól 10 mm távolságra van, ha a KL szakasz hossza

a) $KL = 25$ mm; *b)* $KL = 30$ mm; *c)* $KL = 40$ mm!



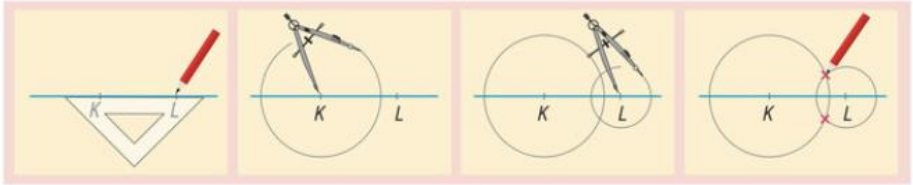
Megoldás

Mivel az M pontnak a K ponttól 20 mm távolságra kell lenni, ezért rajta van a K középpontú, 20 mm sugarú körvonalon. Az M pontnak az L ponttól 10 mm távolságra kell lenni, ezért rajta van az L középpontú, 10 mm sugarú körvonalon. A két körvonal metszéspontjai adják a feltételnek megfelelő pontokat.



A szerkesztés lépései:

1. Felvesszük a KL szakaszt.
2. Megrajzoljuk a K középpontú 20 mm sugarú kört.
3. Megrajzoljuk az L középpontú, 10 mm sugarú kört.
4. Kijelöljük a metszéspontokat.



$25 < 20 + 10$

$30 = 20 + 10$

$40 > 20 + 10$

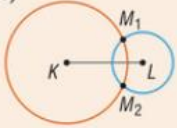
Háromszög egyenlőtlenség: a háromszögben bármely két oldal hosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hosszúsága.

Az *a)* esetben két megoldás van, mivel **a két kör metszi egymást,** így a körvonalaknak két közös pontjuk van. Ha összekötjük a K, L, M_1 pontokat, háromszöget kapunk.

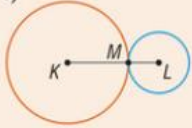
A *b)* esetben egy megoldás van, mivel **a két kör érinti egymást,** így egy közös pontjuk van. A K, L, M pontok egy egyenesre esnek.

A *c)* feladatnak nincs megoldása, mert **a két körnek nincs közös pontja.**

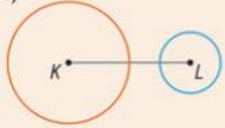
a)



b)



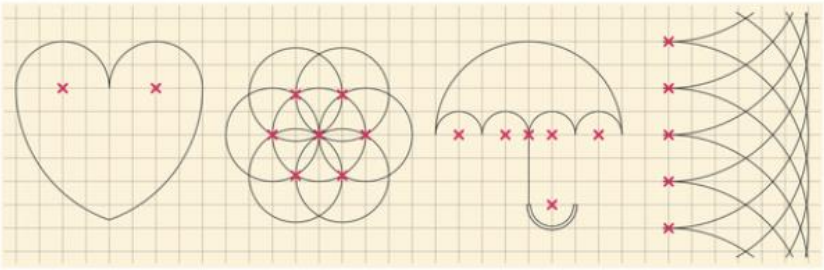
c)



Feladatok

1. Rajzoljunk meg néhányat a kör alakú KRESZ-táblák közül!

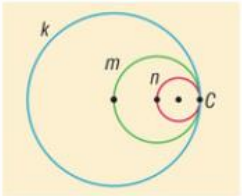
2. Rajzoljuk le négyzetrácsos papírra, és színezzük ki a mintákat!



3. Hány közös pontja lehet
   a) egy egyenesnek és egy körvonalnak; *b)* egy egyenesnek és egy körlapnak;
   c) egy háromszög oldalainak és egy körvonalnak?

4. Hány közös pontja lehet két olyan körvonalnak, amelyeknek
   a) különböző a sugaruk; *b)* azonos a sugaruk?

6. Az ábra szerinti k, m és n körök közös pontja a C pont. A k kör középpontja az m körvonalon, az m kör középpontja az n körvonalon van. Mekkora a k kör átmérője, ha az n kör sugara 3 hosszúságegység? (⇒)



7. Szerkesszünk olyan pontokat, amelyek az $EF = 5$ cm hosszúságú szakasz egyik végpontjától 3 cm, a másik végpontjától 4 cm távolságra vannak! Milyen alakzatot kapunk, ha a kapott pontokat összekötjük az E és F pontokkal?

8. Az egy éves Petike a járókájából 1 m-re tudja kidobálni a játékait. Rajzoljuk meg a szoba alaprajzát, és jelöljük be rajta, hová eshetnek a játékok! (A járóka oldalainak hossza: 1 m és 15 dm, a négyzet alakú szoba oldalainak hossza 4 m.)



9. Hány részre lehet osztani egy síkot
   a) 1; *b)* 2; *c)* 3 körvonallal?

10. Vegyünk egy írólapot, hajtsuk ketté, majd a hajtásvonalon kívül szúrjuk át körzővel! Hajtsuk szét a papírlapot, az átszúrással kapott két pontot jelöljük A-val és B-ve! Rajzoljuk meg az AB szakaszt!
    a) Jelöljünk a hajtásélen tetszőleges E, F és G pontokat, és mérjük meg ezeknek a távolságát az A és B végpontoktól! Mit tapasztalunk?
    b) Milyen helyzetű a hajtásél és az AB szakasz?

Rejtvény

Hány közös pontja lehet három körlapnak?

7. A testek



Csoportosítsuk az ábrán látható testeket különböző tulajdonságuk szerint!

A testek csoportosítását végezhetjük a színük, az alakjuk, az anyaguk stb. szerint.

A testeket – a síkidomokhoz hasonlóan – csoportosíthatjuk az alapján is, hogy **konvexek** vagy **konkávok.**

Konvex testek, konkáv testek

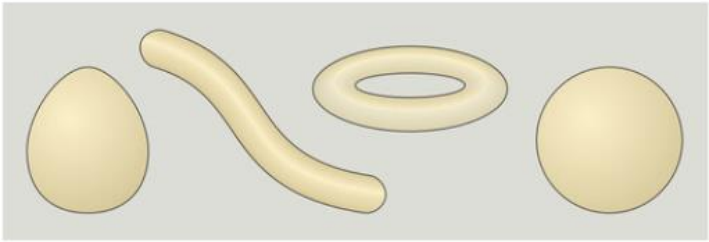


Konvex az a test, amelynek bármely két pontját összekötő szakasznak minden pontja a testhez tartozik.

Konkáv (nem konvex) az a test, amelynek van két olyan pontja, amelyeket összekötő szakasznak nem minden pontja tartozik a testhez.

A testeket határoló felületek szerint is történhet a csoportosítás.

Görbe felületekkel határolt testek



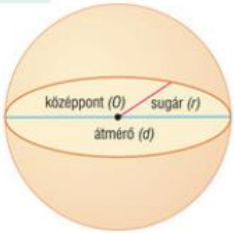
3D



A **gömb** görbe felülettel határolt test.

Egy adott ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza a térben a gömbfelület.

Az adott pont a gömb **középpontja (O).** Az adott távolság a gömb **sugara (r).**

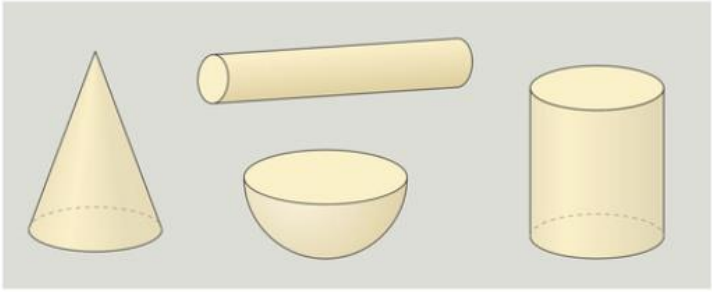


A gömb sugara a gömb középpontját a gömbfelület tetszőleges pontjával összekötő szakasz.

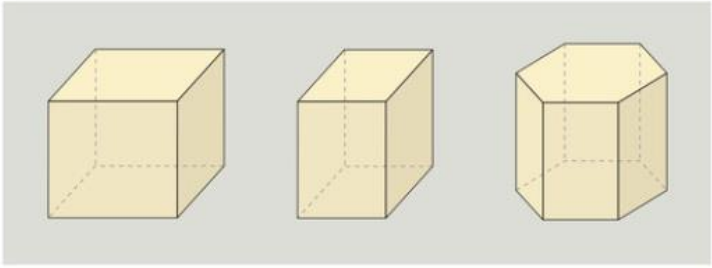
A gömb átmérője a gömbfelület két pontját összekötő olyan szakasz, amely áthalad a gömb középpontján. Jele: *d*. A gömb átmérője a sugarának a kétszerese **($d = 2 \cdot r$).**

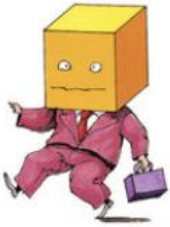
A **gömb** szó a **gömbfelületet** és a **gömbtestet** is jelentheti.

Görbe és sík felületekkel határolt testek



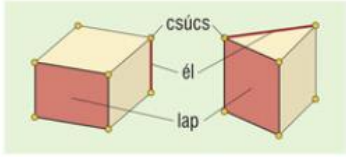
Síklapokkal határolt testek





A csak síklapokkal határolt testeket **sokszöglapú testeknek** (poliédereknek) nevezzük.

A poliédereket **lapok** határolják.
A lapok metszésvonalát **élnek** nevezzük.
Az élek **csúcsokban** metszik egymást.



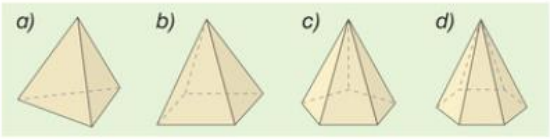
Feladatok

1. Melyik test konvex, melyik test konkáv?

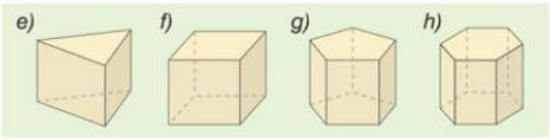


3D

2. Hány éle, lapja és csúcsa van az ábrán látható testeknek? Melyik sokszöglapból hány darab határolja a testet? (➡)

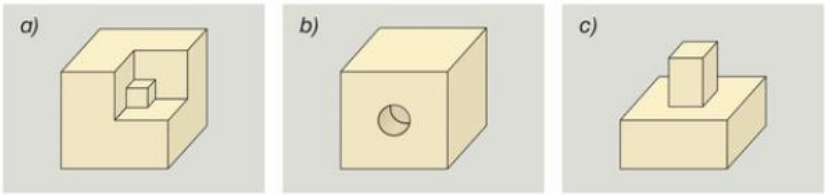


3. Hány éle, lapja és csúcsa van az ábrán látható testeknek? Melyik sokszöglapból hány darab határolja a testet? (➡)

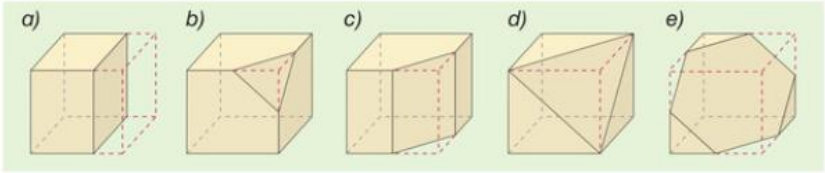


4. Legkevesebb hány síklap határol egy testet?

5. Konvex vagy konkáv test hiányzik a kockából?



6. A kockának egy síkkal levágtuk egy részét.
   a) Hány éle, lapja és csúcsa van az ábrán látható testeknek?
   b) Hány éle, lapja és csúcsa van a levágott testeknek?



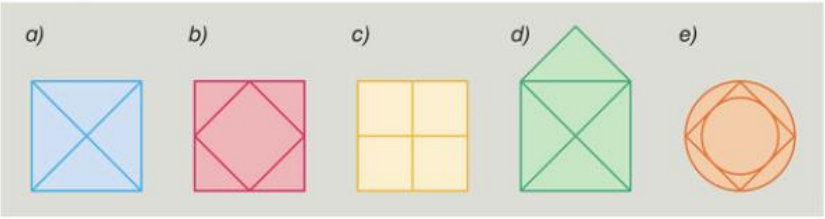
Rejtvény

Hogyan lehet hat szál gyufa segítségével négy egybevágó háromszöget kirakni úgy, hogy minden háromszög minden oldala gyufaszál hosszúságú legyen?

8. Vegyes feladatok

1. Keressünk szavakat, amelyeket a műszaki rajzban használatos betűkkel leírva
   a) csupa egyenes vonalat húzunk; *b)* csupa görbe vonalat húzunk!

2. Melyik ábrát lehet a ceruza felemelése nélkül megrajzolni úgy, hogy egyetlen vonalon se haladjunk át kétszer?

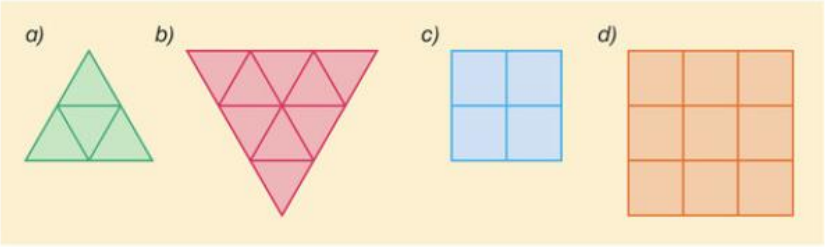


3. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
   Ha két félegyenes nem egy egyenesre illeszkedik, akkor
   a) biztosan nincs közös pontjuk;
   b) lehet, hogy egy közös pontjuk van;
   c) lehet, hogy végtelen sok közös pontjuk van;
   d) biztosan nincs egynél több közös pontjuk.

4. Egy parkban öt vakondtúrás van egy egyenes út mentén. Az elsőtől a harmadik 4 m, a másodiktól az ötödik 8 m, a harmadiktól a negyedik 3 m és a másodiktól a harmadik 1 m távolságra van. Milyen messze van az elsőtől az utolsó vakondtúrás?

5. Mekkora lehet az EC szakasz hosszúsága, ha a megadott pontok egy egyenesre illeszkednek, és $AB = 2$ cm; $AC = 3$ cm; $AE = 4$ cm; $DB = 12$ cm?

6. Hány háromszög, illetve téglalap látható az egyes ábrákon?



7. Van-e olyan hatszög, amelynek bármely két szomszédos oldala merőleges egymásra?

8. Van-e olyan négyszög, amelynek két-két szomszédos oldala merőleges egymásra, de nincsenek párhuzamos oldalai?

9. Adott az $AB = 6$ cm hosszúságú szakasz. Szerkesszünk a síkban olyan pontot, amely:
   a) az AB szakasz végpontjaitól 4 cm távolságra van;
   b) az A ponttól 3 cm és a B ponttól 5 cm távolságra van;
   c) az AB szakasz egyik végpontjától 4 cm és a másik végpontjától 5 cm távolságra van!

10. Adott az $AB = 5$ cm hosszúságú szakasz. Színezzük ki a sík azon pontjait, amelyek az A ponttól legfeljebb 3 cm-re, és a B ponttól 4 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak!

11. A legelőre kikötnek egy bárányt és egy kecskét egymástól 7 m távolságra. A bárány kötele 3 m, a kecskéé 5 m hosszú.
   a) Rajzoljuk le a füzetbe, hogy hol helyezkedhet el a két állat! (A rajzon 1 m-nek 1 cm feleljen meg!)
   b) Színezzük pirossal, ahol együtt legelhetnek, kékkel, ahol csak a bárány, sárgával, ahol csak a kecske legelhet, és zölddel, ahol egyikük sem!

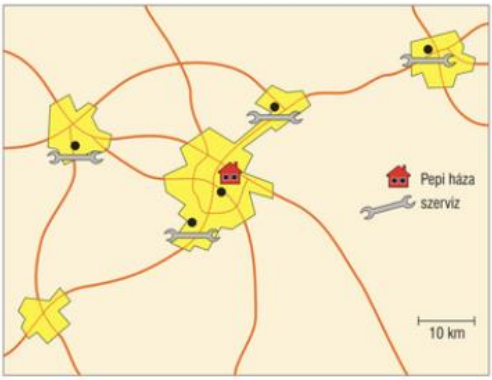
12. Rajzoljunk egy tetszőleges háromszöget! Ezután mindegyik csúcsán át rajzoljunk egy olyan egyenest, amely párhuzamos a csúccsal szemközti oldallal! Milyen alakzatot határoznak meg a megrajzolt egyenesek?

13. A ceruza felemelése nélkül rajzoljunk meg egy ötszöget az átlóival úgy, hogy egy oldalon és átlón se haladjunk át kétszer!

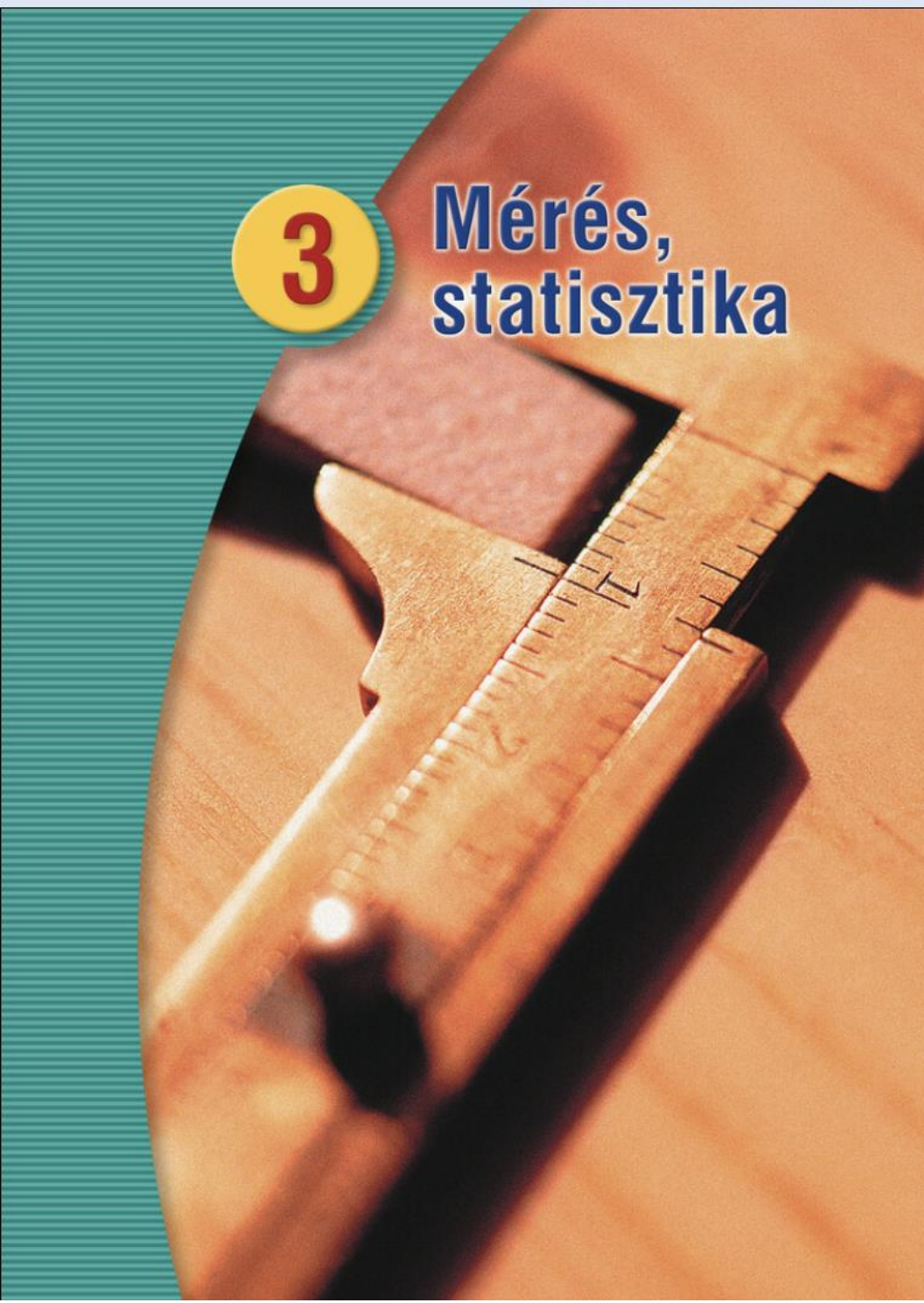
14. Rajzoljunk olyan négyszöget, amelynek
   a) vannak merőleges, de nincsenek párhuzamos oldalpárjai;
   b) vannak párhuzamos, de nincsenek merőleges oldalpárjai!

*15. Egy sokszöglapok által határolt testnek 8 csúcsa és 8 lapja van, és 8 lapja közül 7 lap egybevágó. Milyen sokszög a nyolcadik lapja?

16. Mókás Pepi autóját ellopta a háza elől egy autótolvaj banda. Szimat felügyelő úgy tudja, hogy az autóba szerelt riasztó több mint 20, de kevesebb mint 30 percig bocsátott ki figyelmeztető jeleket, aztán valaki kikapcsolta. Mivel a riasztót csak a négy szakszerviz valamelyikében tudják hatástalanítani, arra gyanakszik, hogy valamelyik szervizben dolgozik egy bandatag. Melyik szervizhez küldje a rendőrautót? Az ellopott autóval 1 km-t lehet megtenni percenként. (➡)



3 Mérés, statisztika



1. A mérés mint összehasonlítás

Beszéljétek meg! Milyen mérőeszközöket használtok otthon? Soroljátok fel a rájuk jellemző mértékegységeket is! Milyen mérőeszközöket készítenétek, ha hajótörés után egy lakatlan szigetre vetődnétek?



Amikor egy mennyiséget megmérünk, akkor azt egy általunk választott egységgel hasonlítjuk össze. Ha azt akarjuk, hogy a mért mennyiség mindenkinek ugyanazt jelentse, meg kell állapodnunk a **mértékegységben.**

Az ókorban a földművelés, a különböző ipari tevékenységek, a kereskedelem megjelenésével szükségessé vált a **mennyiségek (a hosszúság, a terület, a térfogat, a tömeg, az idő stb.) mérése.**

A **mennyiségeket** célszerűen választott mértékegységekben mérjük.

térfogat
1 liter



időtartam
1 óra



hosszúság
19 centiméter



tömeg
300 gramm



terület
8 hektár



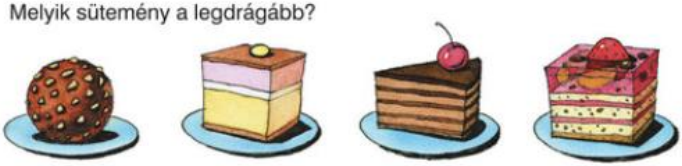
A mérés során a mérendő mennyiségeket a választott **mértékegységgel hasonlítjuk össze.** Az így kapott **mérőszám** a mértékegységgel együtt meghatározza a mennyiséget.

mennyiség	
hosszúság	
115	cm
mérőszám	mértékegység

Mennyiségek összehasonlítása

- Ha a mértékegység azonos és a mérőszám különböző

Melyik sütemény a legdrágább?



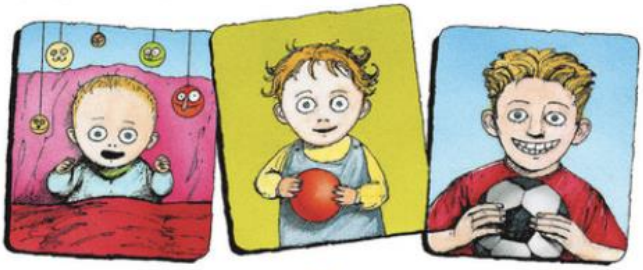
85 Ft < 130 Ft < 140 Ft < 145 Ft

azonos mértékegység, különböző mérőszám

Azonos mértékegység esetén minél nagyobb a mérőszám, annál nagyobb a mennyiség.

- Ha a mérőszám azonos és a mértékegység különböző

Melyik gyerek a legidősebb?



10 nap < 10 hónap < 10 év

azonos mérőszám, különböző mértékegység

Azonos mérőszám esetén minél nagyobb a mértékegység, annál nagyobb a mennyiség.

1. példa

Összegyűjtöttünk 2000 darab tízforintost. Váltsuk fel először ezerforintosokra, majd tízezerforintosokra!

Megoldás





Egyenlő mennyiségek esetén ahányszorosára nő a mértékegység, annyiad részére csökken a mérőszám, és ahányad részére csökken a mértékegység, annyiszorosára nő a mérőszám.

Sokszor előfordul, hogy a mérés során a mennyiségeket nem a mértékegységhez, hanem egymáshoz hasonlítjuk. Például a tanulmányi és a sportversenyen a helyezést a versenyzők egymáshoz viszonyított teljesítménye határozza meg.

3D

***2. példa**

Van három látszólag egyforma pénzérménk: egy *alig*, egy *bagó* és egy *csenevész*. Tudjuk, hogy a három érme közül az egyik nehezebb, mint a másik kettő (amelyek tömege egyenlő). Van egy kétserpenyős mérlegünk, amely megmutatja, hogy melyik serpenyőjébe tettünk nagyobb tömeget. Meg lehet-e állapítani egy méréssel, hogy melyik pénzérme a legnehezebb?

Megoldás

Tegyük fel például az aligot és a bagót a mérleg egy-egy serpenyőjére. Három eset lehetséges:



Ha alig > bagó, akkor az alig a legnehezebb (bagó = csenevész).

Ha alig < bagó, akkor a bagó a legnehezebb (alig = csenevész).

Ha alig = bagó, akkor a kimaradt csenevész a legnehezebb.

Tehát egy méréssel meg lehetett állapítani, hogy melyik a legnehezebb a három pénzérme közül.

A mérés során a mennyiségeket egymáshoz hasonlítottuk. Ha a mennyiségeket sorba rendezzük, akkor is mérést végzünk (például matematikaverseny, bajnokságok eredménye).

Feladatok

1. Állítsuk növekvő sorrendbe a magyar pénzérméket méretük szerint! Megegyezik-e ez a sorrend az értékük szerinti sorrenddel?

2. A hangyának 1 forintos, az egérnek 10 forintos, a nyúlnak 100 forintos érméi, az elefántnak 1000 forintos bankjegyei vannak. Hány darab érmével, illetve bankjeggyel tudják kifizetni a következő összegeket?



a) 42 Ft;
b) 5634 Ft;
c) 10 058 Ft.



a) 140 Ft;
b) 3400 Ft;
c) 972 000 Ft.



a) 5300 Ft;
b) 48 000 Ft;
c) 8 000 000 Ft.



a) 9000 Ft;
b) 160 000 Ft;
c) 7 010 000 Ft.

3. Rendezzük növekvő sorrendbe a következőket! (Ha szükséges, nézzünk utána a pontos adatoknak, vagy becsüljük meg eddigi ismereteink alapján!)
   a) Kína, Luxemburg, Magyarország, Németország – a lakosaik száma szerint;
   b) Budapest, Eger, Szeged, Ópusztaszer – a lakosaik száma szerint;
   c) Géza fejedelem, Széchenyi István, Mátyás király, Attila hun király, IV. Béla – a születési évük szerint;
   d) bicikli, repülőgép, személyautó, roller, busz – az áruk szerint.

4. Írjuk le a következő mennyiségekben kékkel a mérőszámot, zölddel a mértékegységet! 3 liter tej; 25 dkg szalámi; 40 dkg sajt; fél kg kenyér; 1 liter mosogatószer; 240 perces videokazetta; 50 cm széles és 100 cm hosszú törülköző.

5. A sakkbajnokságon Vilmos, Tamás, Mátyás, Dani és János vett részt. Mátyás legyőzte Vilmost, Tamást, Danit és Jánost; János legyőzte Vilmost és Tamást, Dani legyőzte Tamást, Vilmost és Jánost; Vilmos pedig legyőzte Tamást. Állítsuk fel a bajnokság végső sorrendjét!

6. Peti és Gabi együtt nehezebb, mint Laci és Zsuzsi. Ha Gabi és Zsuzsi helyet cserélnek, akkor átbillen a mérleg. Ki a nehezebb, Gabi vagy Zsuzsi?

7. Egy futóversenyen Anna előbb ért célba, mint Bogi, de később, mint Cili. Dénes és Cili nem egymás után futottak be. Anna és Dénes nem közvetlenül Gergő előtt és nem is közvetlenül mögötte ért célba. Mi lehetett a befutási sorrend a versenyen? Keressük meg az összes megoldást!

*8. A téli olimpián a lesiklásban az első öt induló a finn, a német, az osztrák, a svájci és a francia versenyző volt ebben a sorrendben. Mindegyikük lesiklása után kiírták az eredményjelzőre, hogy akkor éppen hányadik helyen álltak. Mi volt az első öt versenyző sorrendje, ha egymás után két 1-es és három 3-as jelent meg?



*9. Kilenc látszólag egyforma pénzdarab közül egy könnyebb a többinél. Van egy kétserpenyős mérlegünk, amely megmutatja, hogy melyik serpenyőjébe tettünk nagyobb tömeget. Legkevesebb hány méréssel dönthetjük el, hogy melyik pénzdarab a könnyebb?

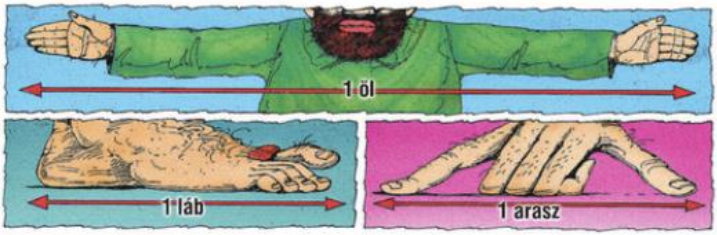
10. Gyűjtsük össze az alsó tagozaton tanult mennyiségeket! Soroljuk fel a hozzájuk tartozó mértékegységeket nagyság szerint növekvő sorrendben!

11. Készíts legalább 8 elemből álló listát arról, hogy a családod a múlt héten milyen élelmiszerből milyen mennyiséget vásárolt! Írd mellé azt is, hogy mi mennyibe került (legalább becsült áron), majd számítsd ki, hogy összesen mennyit kellett fizetni a boltban!

Rejtvény

Mi ér többet: 2 kg 5 forintos vagy 1 kg 10 forintos?

2. A hosszúság



Kezdetben a hosszúság mértékegységei az emberi test méreteihez (öl, láb, arasz stb.) kötődtek.

Az ősméter a Párizs melletti Sèvresben elhelyezett platina-iridium rúd, amelyen két karcolás jelzi az 1 méteres távolságot.

Amikor az emberek távoli országok lakosaival kezdtek kereskedni, szükségessé vált a mértékegységek egységesítése. Ma a világ legtöbb országában azt a mértékegységrendszert használják, amelyet Franciaországban vezettek be az 1700-as évek végén, a nagy francia forradalom idején. Ekkor a hosszúságmérés alapegységének a Föld Párizson áthaladó délkörének negyven milliomod részét választották, amit 1 méternek neveztek el.

Bizonyos hosszúságokat méterben mérve túl nagy vagy túl kicsi mérőszámokat kapunk, ezért célszerű nagyobb és kisebb mértékegységeket is bevezetni.

Régi magyar mértékegységek:
1 bécsi öl = 1896 mm (a honfoglalás ezer éves évfordulója tiszteletére vezették be);
1 magyar mérföld ≈ 8354 m.



hosszúság	
1 mérőszám	m mértékegység

A hosszúság mértékegységei:

$$1\ \text{mm} \overset{\cdot 10}{<} 1\ \text{cm} \overset{\cdot 10}{<} 1\ \text{dm} \overset{\cdot 10}{<} 1\ \text{m} \overset{\cdot 1000}{<} 1\ \text{km}$$

$10\ \text{mm} = 1\ \text{cm} \quad 10\ \text{cm} = 1\ \text{dm} \quad 10\ \text{dm} = 1\ \text{m} \quad 1000\ \text{m} = 1\ \text{km}$

$1\ \text{km} = 1000\ \text{m} = 10\,000\ \text{dm} = 100\,000\ \text{cm} = 1\,000\,000\ \text{mm}$

Feladatok

1. Becsüljük meg, majd mérjük meg
   a) a fenti címben a nagy F betű magasságát;
   b) a fenti pontsor hosszát;
   c) a matematikakönyv vastagságát;
   d) a matematikakönyv fedőlapjának magasságát;
   e) a matematikakönyv fedőlapjának szélességét!

2. Mérjük meg az araszunk nagyságát! Hány arasz hosszú egy pad? Mérjük meg a pad hosszúságát centiméterben is!

3. Rajzoljuk le a cipőnk talpát egy papírra, és mérjük meg a kerületét!

4. Éva ezt újságolta édesanyjának: „Apa is megmérte az asztalának hosszát, meg én is, és mindketten 5 araszt kaptunk." Kinek hosszabb az asztala, és mennyivel, ha Éva arasza 15 cm, az édesapjáé pedig 25 cm?

5. A hangya csak milliméterben, az egér csak centiméterben, a nyúl csak deciméterben, az elefánt pedig csak méterben tud mérni. Az alábbi mennyiségeket váltsuk át az ő mértékegységükbe! (Például a hangyának 5 dm 4 cm = 500 mm + 40 mm = 540 mm.)



a) 3 m 4 dm;
b) 67 cm 8 mm;
c) 975 dm 8 mm;
d) 8 dm 57 cm.



a) 5000 mm;
b) 48 dm 6 cm;
c) 2 m 8 dm;
d) 3 dm 25 cm.



a) 6700 mm;
b) 3 m 9 dm;
c) 12 m 70 cm;
d) 2 dm 430 cm.



a) 340 dm;
b) 5900 cm;
c) 52 m 40 dm;
d) 540 m 700 dm.

6. Az út mellett az ábrán látható tábla áll. Továbbmehetnek-e azok az autók, amelyek magassága:
   a) 328 cm; *b)* 15 dm; *c)* 227 cm;
   d) 1187 cm; *e)* 10 dm 89 cm; *f)* 2 m 11 dm;
   g) 25 dm 25 cm; *h)* 1 m 96 dm? (⟹)



7. Melyik nagyobb?
   a) 16 mm vagy 2 cm; *b)* 28 km vagy 5600 m;
   c) 567 dm vagy 48 m; *d)* 1867 m vagy 1 és fél km.

8. Válasszuk ki a legvalószínűbb választ!

a) Az újságpapír szélessége: 3 cm, 3 dm, 3 km.

b) Egy kosárlabdázó magassága: 1 km, 100 cm, 2000 mm.

c) Egy új ceruza hossza: 19 mm, 19 cm, 56 cm.

d) Egy bevásárló körút hossza: 5 mm, 5 cm, 5 km.

e) Egy karóra mutatójának hossza: 20 cm, 12 mm, 5 cm.

9. Állítsuk sorba a következő városokat az Egyenlítőtől való távolságuk szerint a legközelebbivel kezdve: Budapest, Róma, Prága, Helsinki!

10. Vajon a következő mértékegységek közül melyikkel dolgozik legtöbbször a csillagász, a földmérő, a kőműves, az asztalos és a kulcsmásoló?

centiméter, kilométer, tizedmilliméter, milliméter, méter

11. Állítsuk sorba a madarakat a szárnyuk fesztávolsága szerint a legnagyobbal kezdve!



szürke gém



füleskuvik



gyurgyalag



dankasirály

12. Egy 10 m hosszú mérőszalag elejéről leszakadt egy darab. Ezzel a szalaggal a távolugróversenyen úgy mérték az ugrások hosszát, hogy a mérőszalag 10 cm-es beosztását illesztették az elugrási ponthoz. Így a szalag 380 cm-es beosztása jelezte, hogy Zsombor meddig ugrott. Hány centiméter hosszú volt Zsombor ugrása?

***13.** *a)* Egy régi vonalzón csak a 0 és a 6 cm-nél van jel. Legkevesebb hány jelet kell még rátenni, hogy 0-tól 6-ig minden egész centiméternyi távolság mérhető legyen a vonalzóval valamely két jel közötti távolságként?



b) Egy vonalzón csak a 0 és a 12 cm-nél van jel. Legkevesebb hány jelet kell még rátenni, hogy 0-tól 12-ig minden egész centiméternyi távolság mérhető legyen a vonalzóval valamely két jel közötti távolságként?



Rejtvény

A szabónak van egy 16 méteres posztódarabja, amelyből minden nap levág két métert. Hányadik napon vágja le az utolsó darabot?

3. A tömeg







A francia forradalom idején kidolgozott mértékegységrendszerben a tömeg alapegységének az 1 dm^3 4 °C-os tiszta víz tömegét választották. Elkészítettek egy ezzel megegyező tömegű fémhengert (mintakilogramm), amit az ősméterrel együtt ma is a Párizs melletti Sèvres-ben őriznek.

A tömeg alapegysége az 1 kilogramm (kg). Gyakran használatos mértékegységek még: milligramm, gramm, dekagramm, tonna.



1 gramm



1 dekagramm



1 kilogramm



1 tonna

A tömeg mértékegységei:

$$1\ \text{mg} \overset{\cdot 1000}{<} 1\ \text{g} \overset{\cdot 10}{<} 1\ \text{dkg} \overset{\cdot 100}{<} 1\ \text{kg} \overset{\cdot 1000}{<} 1\ \text{t}$$

$1000\ \text{mg} = 1\ \text{g} \quad 10\ \text{g} = 1\ \text{dkg} \quad 100\ \text{dkg} = 1\ \text{kg} \quad 1000\ \text{kg} = 1\ \text{t}$

$1\ \text{t} = 1000\ \text{kg} = 100\ 000\ \text{dkg} = 1\ 000\ 000\ \text{g} = 1\ 000\ 000\ 000\ \text{mg}$

Régi magyar tömegegységek:
1 uncia = 25 g,
1 mázsa (1 q) = 100 kg.

Angliában ma is használatos tömegegység az 1 font ≈ 45 dkg.

tömeg	
1 (mérőszám)	kg (mértékegység)

Feladatok

1. A hangya grammban, az egér dekagrammban, a nyúl kilogrammban, az elefánt tonnában tud mérni. A következő mennyiségeket váltsuk át az ő mértékegységükbe!



a) 20 dkg;
b) 5 kg;
c) fél dkg;
d) 3 dkg 67 g.



a) 2300 g;
b) 56 kg;
c) fél kg;
d) 6 kg 34 dkg.



a) 78 t;
b) 500 dkg;
c) 3000 g;
d) 6 t 76 kg.



a) 7000 kg;
b) 350 000 dkg;
c) 5 t 500 kg;
d) 3 t 72 000 kg.

2. Melyik a nagyobb? Tegyük ki a megfelelő relációjelet!
a) 867 mg ☐ 2 és fél dkg; *b)* 5 kg ☐ 5600 g; *c)* 25 dkg ☐ negyed kg;
d) 672 dkg ☐ 6 és fél kg; *e)* 7 t ☐ 895 kg; *f)* 814 g ☐ 1 kg.

3. Melyik a legvalószínűbb?
a) 1 liter dobozos tej tömege: 12 g; 120 g; 1200 g.
b) Egy újszülött csecsemő tömege: 3 dkg; 30 kg; 3000 g.
c) Egy felnőtt ember tömege: 750 dkg; 75 kg; 750 kg.
d) Egy 100 forintos érme tömege: 5 g; 5 mg; 5 dkg.
e) Egy iratkapocs tömege: 1 mg; 1 g; 1 dkg.

4. Egy vitamintabletta 3 g tömegű. A tabletta 40 mg C-vitamint, 1 mg E-vitamint, 150 mg kalciumot és 221 mg nátriumot tartalmaz. Mekkora a tablettában levő egyéb anyagok együttes tömege?

5. Egy 5 Ft-os érme tömege 4 g és 5 g között van. Legalább mennyi és legfeljebb mennyi pénzünk lehet, ha 6 kg 5 Ft-osunk van? Mennyi lehet a legnagyobb különbség a két lehetséges érték között?

6. Egy híd előtt az ábrán látható figyelmeztető tábla áll. Átmehet-e a hídon az a kamion, amely üresen 10 t, most viszont 8 db 1600 kg tömegű gépet szállít? (➡)



7. Egy lift a felirata szerint nem bír el többet 500 kg-nál, és nem szállhat be egyszerre 6 személynél több. Lehetséges-e, hogy 6 ember száll be a liftbe, és az mégsem indul el?

*8. Egy medve tömege megegyezik egy szarvas és három róka együttes tömegével. Két szarvas tömege egyenlő egy medve és két róka tömegével. Hány róka tömegével egyenlő egy szarvas tömege, és hány róka tömegével egyenlő egy medve tömege?

Rejtvény

Egy tégla 2 kg meg egy fél tégla. Hány kilogramm két tégla?



4. A mértékegységek tízes rendszere



A megismert mértékegységek között találkoztunk például a kilogramm és a kilométer elnevezésekkel is. 1 kg = 1000 g, 1 km = 1000 m. A mennyiségek nevében szereplő *kilo-* előtag ezerszerest jelent.

A mennyiségek mértékegységeinek nevében előforduló *kilo-*, *hekto-*, *deka-*, *deci-*, *centi-*, *milli-* előtagok jelentése a következő:

előtag	jel	jelentés	előtag	jel	jelentés
deka	dk	tízszeres	deci	d	tized
hekto	h	százszoros	centi	c	század
kilo	k	ezerszeres	milli	m	ezred
mega	M	milliószoros	mikro	μ	milliomod
giga	G	milliárdszoros	nano	n	ezermilliomod

Kivétel!

Számítástechnikában:

1 bájt = 8 bit
1 kilobájt = 1024 bájt
1 megabájt = 1024 kilobájt
1 gigabájt = 1024 megabájt.

Feladatok

1. Fejezzük ki a mennyiségeket méterben, ill. grammban az előtagok jelentése alapján!
   a) 1 centigramm; *b)* 1 megaméter; *c)* 1 hektométer;
   d) 1 dekaméter; *e)* 1 decigramm; *f)* 1 hektogramm.

2. Írjuk fel a következő mennyiségeket a megfelelő előtagok segítségével!
   a) 1 század méter; *b)* 100 méter; *c)* 10 gramm;
   d) 1000 méter; *e)* 1 ezred méter; *f)* 1 milliomod gramm.

3. Pótoljuk a hiányzó mérőszámokat vagy mértékegységeket!
   a) ..... km = 2000 m; *b)* ..... g = 32 dkg; *c)* 40 dm = ... m;
   d) 5 m = 5000 .....; *e)* 2 cm = ... mm; *f)* negyed kg = 25 ..... ;
   g) ..... mm = 12 dm; *h)* 70 dkg = ... g; *i)* fél km = 50 000 ..... .

4. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?
   a) Az 1 km az 1 m ezredrésze. *b)* Az 1 dkg kevesebb, mint az 1 g.
   c) Az 1 g az 100 mg. *d)* A 100 g az 1 kg.
   e) Az 1 dm az 1 m tizedrésze. *f)* Az 1 mm az 1 m ezredrésze.

5. Hasonlítsuk össze az alábbi mennyiségeket! Tegyük ki a relációjelet!
   a) 6 km ☐ 60 000 mm; *b)* 5 dm ☐ 50 cm; *c)* 4 és fél km ☐ 450 m;
   d) 73 dkg ☐ 730 g; *e)* 3000 cm ☐ 3 km; *f)* 1500 mm ☐ 15 dm;
   g) 500 g ☐ 5 kg; *h)* 9200 kg ☐ 92 t; *i)* 80 000 μg ☐ 800 mg.

Rejtvény

Hány mikrométernek az ezerszerese az 1 kilométer?

5. Az idő



Az időmérés alapjául nem a 10-es, hanem a 60-as számrendszer szolgál.

A 60-as számrendszert a sumérok vezették be az ókorban.

Kezdetben az időpontok jelzése a természethez kötődött. A hónapokat, napszakokat a különböző tevékenységekhez, vagy a Nap és a Hold járásához kapcsolták (vetés, aratás ideje, napkelte, napnyugta). Az egyiptomiak például a napot 24 időegységre osztották. Vízóra segítségével képesek voltak azt is megmondani, hogy mennyi idő telt el a napból. A görögök és a kínaiak pedig napórát szerkesztettek, ahol egy rúd árnyéka jelezte az idő múlását. A technika fejlődésével egyre pontosabb időmérő eszközök születtek.



Időpont: egy esemény mikor történik (14.15-kor indul a vonat).
Időtartam: egy esemény mennyi ideig tart (a menetidő 1 óra 20 perc).

Az idő mértékegységei:

időtartam	
1 mérőszám	s mértékegység

$$1\ \text{másodperc} \overset{\cdot 60}{<} 1\ \text{perc} \overset{\cdot 60}{<} 1\ \text{óra} \overset{\cdot 24}{<} 1\ \text{nap} \overset{\cdot 7}{<} 1\ \text{hét}$$

1 óra = 60 perc = 3600 másodperc (mp)

1 nap = 24 óra 1 hét = 7 nap 1 év = 12 hónap

mértékegység	
jele	neve
s	másodperc (secundum)
min	perc (minutum)
h	óra (hora)

1 hónap = 28 (29), 30 vagy 31 nap

1 év ≈ 52 hét 1 év = 365 (366) nap

Szökőév esetén a február 29 napos, így a szökőév 366 napból áll.

Melyik év szökőév? Ha az évszám osztható 4-gyel, de nem osztható 100-zal (kivéve ha 400-zal osztható), akkor az az év szökőév. Például 1900 nem volt szökőév, 2000 azonban igen.

Feladatok

1. A hangya másodpercben, az egér percben, a nyúl órában, az elefánt napban méri az időt. A következő mennyiségeket váltsuk át az ő mértékegységükbe!



a) 45 perc; *b)* 2 óra 20 perc; *c)* 1 nap.



a) 1 nap; *b)* 6600 mp; *c)* 4 év.



a) 5400 perc; *b)* 4 év; *c)* 100 év.



a) 1 szökőév; *b)* 4 év; *c)* 744 óra.

2. New York és Magyarország között 6 óra az időeltolódás. Amikor New Yorkban délelőtt 10 órát mutatnak az órák, akkor Magyarországon délután 4 óra van. Mit csinálhat egy New York-i iskolás, amikor egy magyarországi iskolás
a) felkel; *b)* vacsorázik; *c)* kijön az iskolából?

3. Melyik a hosszabb időtartam?
a) 40 nap vagy 1000 óra; *b)* 327 000 perc vagy 500 óra;
c) 24000 perc vagy 21 nap; *d)* 80 nap vagy 6 millió mp;
e) 11 év vagy 5 millió perc; *f)* egynegyed óra vagy 1000 mp.

4. Melyik a legvalószínűbb?
a) A színházi előadás időtartama: 120 perc; 1200 mp; 12 óra.
b) Egy teniszmeccs időtartama: 1500 mp; 15 perc; másfél óra.
c) Egy szívdobbanás időtartama: 1 perc; 1 másodperc; egytized óra.
d) Vonattal Szegedről Budapestre az út: 132 perc; 22 óra; 400 mp.

5. Egy lemezen az egymás utáni dalok időtartama: 2 perc 15 mp; 3 perc 5 mp; 2 perc 45 mp; 1 perc 32 mp; 4 perc 19 mp; 6 perc 30 mp; 3 perc 27 mp; 4 perc 52 mp; 2 perc 18 mp. Kb. hány perc alatt lehet végighallgatni a lemezt?

6. Ha most délelőtt 11 óra van, akkor hány óra lesz
a) 48; *b)* 60; *c)* 100; *d)* 1000 óra múlva?

7. Az időszámítás kezdete óta 2000-ig kb. 1 milliárd másodperc, 1 milliárd perc vagy 1 milliárd nap telt el?

8. Ha március 4-én péntek van, milyen nap lesz ugyanabban az évben
a) március 25-én; *b)* április 1-jén; *c)* május 15-én?

9. Egy családban négy gyermek van. A gyerekek életkorának összege most 20 év. Mennyi lesz az életkoruk összege 3 év múlva?

Rejtvény

Egy kémikus felfedezett egy kémiai reakciót, amelyet ha dzsekiben végez el, akkor 80 percig tart, ha viszont nem viseli a dzsekit, akkor mindig 1 óra 20 percig. Magyarázzuk meg, hogyan lehetséges ez!

6. Diagramok

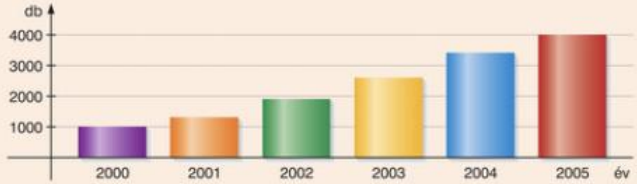
A mérések eredményeit táblázat helyett gyakran diagramon való ábrázolással tesszük szemléletesebbé.

Adatok leolvasása diagramokról



1. példa

Olvassuk le az oszlopdiagramról, hogy mennyi volt a gyerekeknek szóló matematikai folyóirat megrendelőinek a száma (százasokra kerekítve) az elmúlt években!

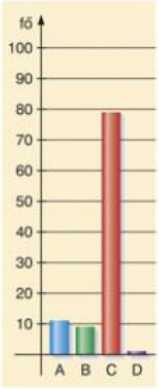


Megoldás

A megrendelők számát az oszlopok magassága mutatja meg.

év	2000	2001	2002	2003	2004	2005
a megrendelők száma	1000	1300	1900	2600	3400	4000

Az **oszlopdiagramon** jól látható a megrendelők számának emelkedése és egymáshoz viszonyított nagysága.



2. példa

Egy televíziós vetélkedőben négy lehetséges válasz közül kell kiválasztani az egyetlen helyes választ. A játékos segítséget kérhet a stúdióban ülő 100 nézőtől, akik szavaznak az egyes választási lehetőségekre.

Kérdés: Milyen elnevezést takar a dingó?

A lehetséges válaszok:

A: szerencsejáték; B: édes gyökér; C: vadkutya; D: lovas szán.

Olvassuk le az oszlopdiagramról, mire szavaztak a legtöbben!

Megoldás

A vadkutyára szavaztak a legtöbben: 79-en. A vadkutyára szavazók **gyakorisága** 79, a szerencsejátékra szavazók gyakorisága 11, az édes gyökérre szavazók gyakorisága 9, a lovas szánra szavazóké pedig 1.

Az adatok között egy adat gyakorisága az a szám, ahányszor ez az adat előfordul.

3. példa

A diagram azt mutatja meg, hogy az elmúlt 100 évben átlagosan mennyi csapadék hullott Budapesten az egyes hónapokban.



A diagram alapján válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

a) Melyik hónapban a legkevesebb, illetve a legtöbb a csapadék?

b) Melyik egymást követő hónapokban nő, és melyekben csökken a csapadék mennyisége?

c) Melyik az a két egymás utáni hónap, amelyekben a csapadékmennyiség különbsége a legnagyobb?

Megoldás

a) A legkevesebb csapadék szeptemberben hullott, a legesősebb hónap pedig a június volt.

b) Januártól februárig, márciustól júniusig, illetve szeptembertől novemberig nő, februártól márciusig, júniustól szeptemberig, illetve novembertől decemberig csökken a csapadék mennyisége.

c) Az április és a május az a két egymás utáni hónap, amikor a csapadékmennyiség különbsége a legnagyobb. Az egymás melletti oszlopok különbsége ebben a két hónapban a legnagyobb.



Adatok ábrázolása diagramokon

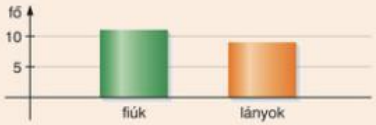
4. példa

Gyűjtsük össze a tankönyv 10. oldalán levő gyerekek adatait (fiúk és lányok száma, tanult nyelv) és ábrázoljuk diagramon!

Megoldás

A fiúk és lányok száma:

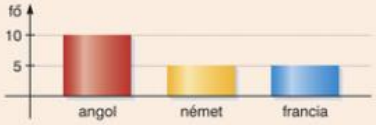
fiú	𝍸 𝍸 |	11
lány	𝍸 ||||	9



Láthatjuk, hogy majdnem ugyanannyi lány van az osztályban, mint fiú.

A tanult nyelvek:

angol	𝍸 𝍸	10
német	𝍸	5
francia	𝍸	5

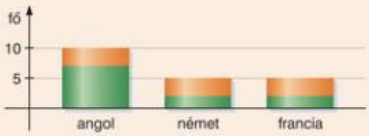




Megfigyelhetjük, hogy a tanulók fele angolt tanul, negyede németet és negyede franciát. Ezt kördiagramon is ábrázolhatjuk (balra). A kördiagramon a részeknek az egészhez viszonyított arányát jobban láthatjuk, mint az oszlopdiagramon.

Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy a fiúk és a lányok közül hányan tanulják a különböző nyelveket, a következő táblázatot és grafikont készíthetjük:

	fiú	lány
angol	//// //	///
német	//	///
francia	//	///

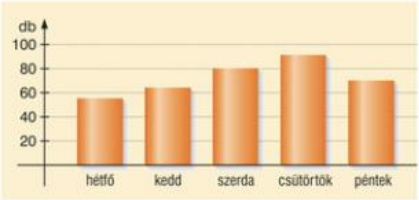


Láthatjuk, hogy több mint kétszer annyi fiú tanul angolt, mint ahány lány. A franciát és a németet a lányok tanulják többen.

Feladatok

1. Gyűjtsünk további adatokat a tankönyv 10. oldalán található osztályról, és ábrázoljuk diagramon! Végezzük el az adatgyűjtést és az ábrázolást úgy is, hogy külön tekintjük a fiúkat és a lányokat! Gyűjtsünk és ábrázoljunk hasonló adatokat saját osztályunkban is!

2. Oszlopdiagramon ábrázoltuk, hogy hány szendvicset adtak el egy iskolai büfében október első hetében. Tegyünk fel kérdéseket, és válaszoljunk! (⟹)



3. Dobjunk fel egy pénzérmét 20-szor egymás után, és vizsgáljuk a fej és az írás gyakoriságát! Ábrázoljuk oszlopdiagramon!

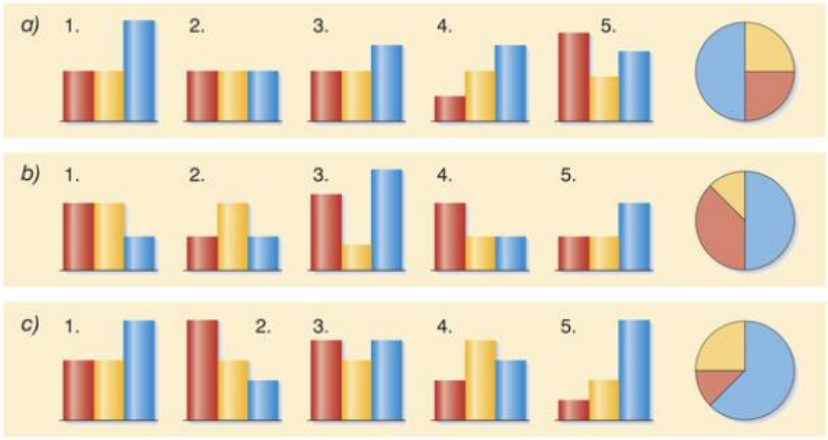
4. Az alábbi diagramok azt mutatják meg, hogy átlagosan mennyi csapadék hullik Sopronban és a Kékestetőn az egyes hónapokban. A diagramok alapján tegyünk fel kérdéseket, és válaszoljunk!



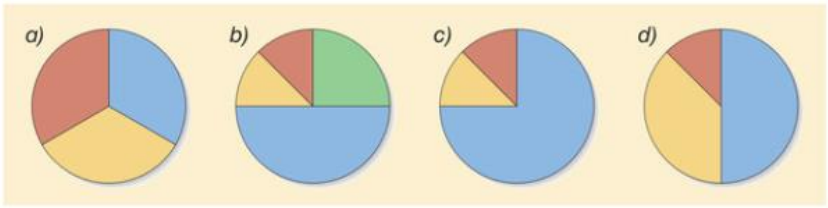


5. Dobjunk fel százszor egy dobókockát, és jegyezzük fel, hogy melyik számot hányszor dobtuk! Ábrázoljuk oszlopdiagramon az eredményt!

6. A következő oszlopdiagramok közül melyik felel meg az ábrán levő kördiagramnak?



7. Készítsünk oszlopdiagramokat az ábrán levő kördiagramokhoz!



8. Ezresekre kerekítve ábrázoljuk oszlopdiagramon a következő hegycsúcsok tengerszinthez viszonyított magasságát: Mount Everest 8848 m; Mont Blanc 4807 m; Etna 3340 m; Gerlachfalvi-csúcs 2655 m; Kilimandzsáró 5892 m; Kékestető 1014 m!

9. Ábrázoljuk kördiagramon, hogy egy osztály tanulóinak fele barna szemű, egynegyede kék szemű, a többiek szeme színe pedig szürke! A tanulók hányad részének szürke színű a szeme?



Rejtvény

Az egyik tévécsatorna diagrammal bizonyította, hogy népszerű rajzfilmjének nézettsége többszörösére nőtt. Igaz-e ez az állítás?



7. Az átlag



Sokszor előfordul, hogy több adatot egyetlen számmal szeretnénk jellemezni. Például a bizonyítványban szereplő jegyek felsorolása helyett csak az átlagukat nézzük.

1. példa

A repülőgépre feladott 20 kg-nál nagyobb tömegű csomag esetén felárat kell fizetni. Ági csomagja 26 kg, Csabáé 12 kg. Ági arra hivatkozott, hogy kettejük csomagjának átlagos tömege a megengedett határ alatt marad.

a) Igaza volt-e Áginak?

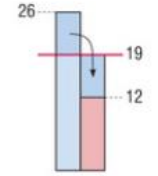
b) Mekkora tömegű holmit kell Ági csomagjából áttenni Csabáéba, hogy mindkettőjük csomagjának tömege ugyanakkora legyen?

Megoldás (a)

Ha a két csomagban levő tömeget egyenlően osztanánk el, mindkettő (26 + 12) : 2 = 38 : 2 = 19 (kg) lenne. Ez a két csomag tömegének **átlaga:**

$$(26 + 12) : 2 = 19 \text{ (kg)}.$$

átlag:
(26 + 12) : 2 = 19



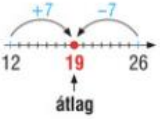
A két csomag tömegének átlaga a tömegek összege osztva kettővel.

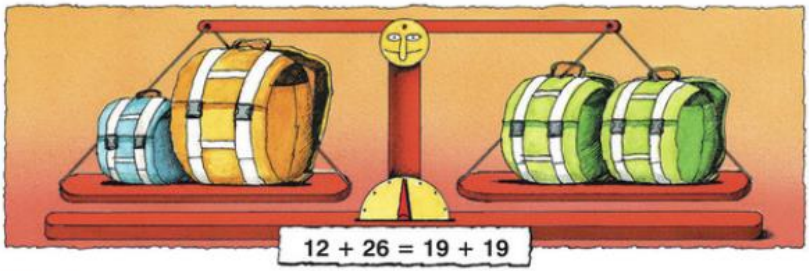
A csomagok átlagos tömege a megengedett határ alatt marad, így a repülőgép túlterhelése szempontjából igaza volt Áginak.

Megoldás (b)

26 − 19 = 7 (kg), 19 − 12 = 7 (kg), ezért 7 kg tömegű holmit kell Ági csomagjából átrakni Csabáéba, hogy mindkettőjük csomagja ugyanakkora tömegű legyen.

Ági csomagja eredetileg ugyanannyival (7 kg) nehezebb az átlagnál, mint amennyivel Csabáé könnyebb.





a és *b* átlaga:
$(a + b) : 2$

Két szám átlagát megkapjuk, ha a két szám összegét elosztjuk kettővel.

Ha két szám átlagát kétszer vesszük, akkor a két szám összegét kapjuk.

$$2 \cdot 19 = 12 + 26$$

2. példa

Kati három egymást követő napon 2-2 db paradicsomot vett a piacon. Első nap a két paradicsom 65 Ft-ba került, a második napon 45 Ft-ba, harmadnap pedig már csak 40 Ft-ba. Jutka mindhárom napon 50 Ft-ért vett 2-2 db paradicsomot. Melyikük fizetett többet a három napon összesen a paradicsomért?



Megoldás

A Kati által fizetett összeg: $65 + 45 + 40 = 150$ (Ft).
A Jutka által fizetett összeg: $3 \cdot 50 = 150$ (Ft).

Tehát mindketten ugyanannyit fizettek a három napon összesen.

A Kati által fizetett három ár átlaga $(65 + 45 + 50) : 3 = 150 : 3 = 50$ (Ft), és ez megegyezik azzal, amit Jutka fizetett mindhárom nap.

Kati átlagosan 50 Ft-ot fizetett naponta, így összesen annyit költött a paradicsomra, mintha mindhárom nap 50 Ft-ot fizetett volna.

Három szám átlagát megkapjuk, ha a három szám összegét elosztjuk hárommal.

a, *b* és *c* átlaga:
$(a + b + c) : 3$

***3. példa**

Az alábbi táblázatban egy 24 fős ötödik osztály félévi jegyei láthatók matematikából és magyar irodalomból.

Osztályzatok	5-ös	4-es	3-as	2-es	1-es
Matematika	9 diák	10 diák	2 diák	2 diák	1 diák
Irodalom	8 diák	9 diák	6 diák	1 diák	0 diák

Melyik tantárgyból jobb az átlag ebben az osztályban?

Megoldás

Számítsuk ki először a matematikajegyek átlagát!

$(5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1) : 24 = (5 \cdot 9 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1) : 24 = (45 + 40 + 6 + 4 + 1) : 24 = 96 : 24 = \mathbf{4}$

A félévi matematikajegyek átlaga ebben az osztályban 4-es.

Számítsuk ki az irodalomjegyek átlagát!

$(5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2) : 24 = (5 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 2) : 24 = (40 + 36 + 18 + 2) : 24 = 96 : 24 = \mathbf{4}$

A félévi irodalomjegyek átlaga is 4-es.

Több szám (mennyiség) átlagát úgy számoljuk ki, hogy a számokat (mennyiségeket) összeadjuk, és az összeget elosztjuk a tagok számával.

Feladatok

1. Gabi a kétnapos kirándulás első napján 870 Ft-ot költött, a második napon 1050 Ft-ot. Mennyit költött átlagosan naponta?

2. Pisti a kétnapos kirándulására napi 1000 Ft zsebpénzt kapott. Mennyit költhet a második napon, ha első nap 1160 Ft-ot költött?

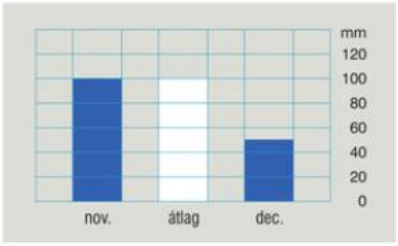
3. A kosárlabdázó Dávid Kornél három egymás utáni meccsén 17; 26 és 23 pontot dobott. Mennyi volt a dobott pontjainak átlaga a három meccsen?

4. Peti ebben a hónapban eddig két matematikadolgozatot írt. Az elsőre kettest, a másodikra ötöst kapott. Hányasra kell megírnia a harmadik dolgozatot, hogy e havi matematikajegyeinek átlaga négyes legyen? (Több jegyet nem kap ebben a hónapban.)

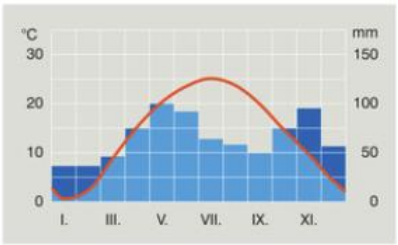
5. Karcsi hátizsákja telerakva 20 kg. A hátizsák maga 2 kg, benne Karcsi személyes holmija 6 kg. Ezen kívül három ajándékcsomagot visz benne a barátainak, mást nem.
   a) Mennyi az ajándékok átlagos tömege?
   b) Mekkora lehet a csomagok tömege külön-külön, ha tudjuk, hogy azok tömege egész kilogramm?

6. Két kalóz egy sziget barlangjában aranyrudakat talált. Megállapították, hogy a kettejük által talált rudak számának átlaga 16. Hány aranyrudat találhatott az egyik, és mennyit a másik, ha tudjuk, hogy az egyik háromszor annyit hozott ki a barlangból, mint a másik? Rajzoljuk le az aranyrudakat szakaszokkal!

7. A diagram a novemberben és decemberben lehullott csapadék mennyiségét mutatja. Színezzük a középső oszlopot úgy, hogy az a két hónapban lehullott csapadékmennyiség átlaga legyen! (➡)



8. Az éghajlati diagramon a piros vonal a hőmérséklet változását, a kék oszlopok pedig a csapadék havi mennyiségét adják meg.
   a) Számítsuk ki a grafikon alapján az őszi, a téli, a tavaszi és a nyári hónapok átlagos csapadékmennyiségét!
   b) Mennyi a lehullott csapadék különbsége a legcsapadékosabb és a legkevésbé csapadékos hónapok esetén?
   c) Becsüljük meg, hogy mennyi a legmelegebb és a leghidegebb hónap átlagos hőmérséklete közti különbség (évi közepes hőingás)! (➡)



Rejtvény

Öt különböző életkorú unokatestvér átlagéletkora 12 év. Mindegyik gyerek életkora egész szám. Hány éves a legidősebb, ha egyikük sem fiatalabb 10 évesnél?

8. Valószínűségi játékok

3D

Sok társasjátékra jellemző, hogy a továbbhaladásról, kezdésről kockadobással vagy pénzfeldobással döntünk. Ezeknél a játékoknál a véletlennek is szerepe van.



Mit figyelhetünk meg, ha egy dobókockával dobunk?
– A dobás **lehetséges** eredményei: 1; 2; 3; 4; 5 és 6.
– **Lehetetlen,** hogy a dobott szám 6-nál nagyobb legyen.
– **Biztos,** hogy a dobott szám nem kisebb 1-nél.
– **Véletlen,** hogy 6-ost dobunk.



Ha kétszer egymás után feldobunk egy pénzérmét, akkor
– lehet, hogy először és másodszor is fejet dobunk (**f f**);
– lehet, hogy először fejet, másodszor írást dobunk (**f í**);
– lehet, hogy először írást és másodszor fejet dobunk (**í f**);
– lehet, hogy először is és másodszor is írást dobunk (**í í**).
Más lehetőség nincs.

Játékok pénzérmékkel

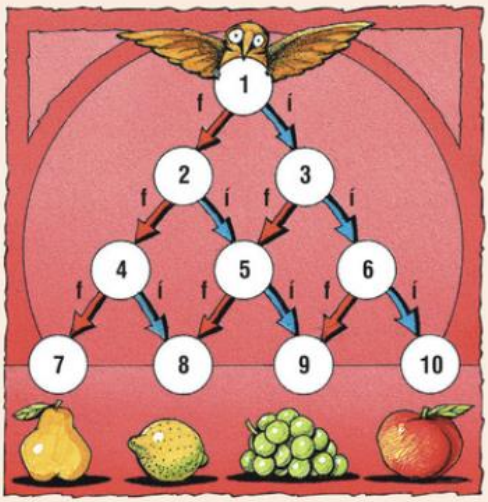
1. játék: GYÜMÖLCSVADÁSZAT

A játéktábla 1-es mezőjéről indulunk, és minden elágazásnál egy pénzérme feldobásával döntünk, hogy merre menjünk. Ha fejet dobunk, balra megyünk, ha írást, akkor jobbra. Három lépés után az alsó sor egyik (7; 8; 9 vagy 10) mezőjére jutunk, ahol négyféle gyümölcsöt: körtét, citromot, szőlőt és almát találunk.

a) Játsszuk el a játékot 20-szor egymás után, és jegyezzük fel, hogy melyik gyümölcshöz hányszor jutottunk!

b) Válasszunk egy gyümölcsöt! Jegyezzük fel, hogy 20 játékból hányszor jutottunk a kiválasztott gyümölcshöz, és hányszor nem!

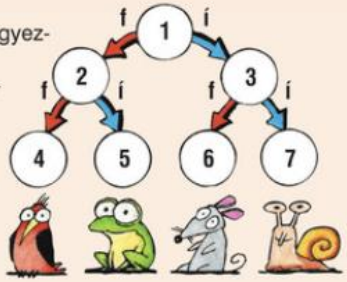
c) Játsszátok ketten a játékot! Mindketten válasszatok két-két gyümölcsöt (felváltva egyet-egyet)! Ezután lépjetek felváltva! Csak akkor kaphattok pontot, ha a lépések végén az általatok választott gyümölcsök valamelyikére érkeztek. Az győz, aki 10 játék során több pontot gyűjt össze.



2. játék

A játéktábla 1-es mezőjéről indulunk, minden elágazásnál egy pénzérme feldobásával döntünk, hogy merre menjünk.

1. változat: Ha fejet dobunk, balra megyünk, ha írást, akkor jobbra. Két lépés után az alsó sor egyik (4-es; 5-ös; 6-os vagy 7-es) mezőjére jutunk, ahol négyféle állatot: madarat, békát, egeret és csigát találunk.



a) Játsszuk el a játékot 20-szor egymás után, és jegyezzük fel, hogy melyik állathoz hányszor jutottunk!

b) Válasszunk egy állatot, és jegyezzük fel, hogy 20 játékból hányszor jutottunk a kiválasztott állathoz, és hányszor nem!

c) Játsszátok ketten a játékot! Mindketten válasszatok két-két állatot (felváltva)! Ezután lépjetek felváltva! Csak akkor kaphattok pontot, ha a lépések végén az általatok választott állatok valamelyikére érkeztek. Az győz, aki 10 játék során több pontot gyűjt össze.

2. változat: Játsszuk végig az előbbi játékokat úgy is, hogy ha egy pénzérmével írást dobunk, akkor balra, ha pedig fejet dobunk, akkor jobbra megyünk!

3. változat: Játsszuk végig az előbbi játékokat úgy is, hogy az elágazásokban egy dobókocka feldobásával döntünk a továbbhaladás irányáról. Ha a kockával 6-ot dobunk, akkor balra, ha pedig 1-et, 2-t, 3-at, 4-et vagy 5-öt dobunk, akkor jobbra megyünk!

3. játék

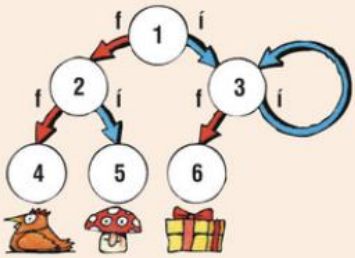
A játéktábla 1-es mezőjéről indulunk, és minden elágazásnál egy pénzérme feldobásával döntjük el, hogy merre menjünk. Ha fejet dobunk, akkor balra megyünk, ha írást, akkor pedig jobbra. Látható, hogy ha ennél a táblánál a 3-as mezőn állva írást dobunk, akkor helyben maradunk. Így nem biztos, hogy két dobás után lejutunk az alsó sorba, vagyis a 4-es, 5-ös, 6-os mezők valamelyikére.

a) Játsszuk el a játékot 20-szor egymás után, és jegyezzük fel, hogy hány lépéssel jutottunk az alsó sorba!

b) Tippeljünk egy lépésszámra, és jegyezzük fel, hogy 20 játékból hányszor sikerült annyi lépéssel lejutni az alsó sorba, és hányszor nem!

c) Soroljunk fel nyolc olyan különböző dobássorozatot, mellyel az alsó sorba lehet jutni! Hány ilyen dobássorozat lehet?

d) A következő állítások közül melyik az, amelyik biztosan igaz, melyik lehetséges, és melyik lehetetlen?
- Két lépéssel leértünk az alsó sorba.
- **fí** dobásokkal leértünk az alsó sorba.
- Négy dobással, mégpedig a **fffí** dobásokkal értünk le az alsó sorba.
- Négy dobással, mégpedig az **íííf** dobásokkal értünk le az alsó sorba.





9. Vegyes feladatok

1. Rendeljünk hozzá megfelelő hosszméreteket a következőkhöz!

a) egy ajtó magassága; *b)* egy pad szélessége; *c)* egy kézilabda átmérője;
d) egy ajtó szélessége; *e)* a maratoni futás távja; *f)* egy mozdony hossza;
g) a stadionkör; *h)* egy autó hossza; *i)* egy darázs fullánkja;
j) egy gyufaszál hossza; *k)* a triatlon úszástávja; *l)* a Mount Everest magassága

A: 2 m	*B*: 5 dm	*C*: 17 cm	*D*: 95 cm	*E*: 42 195 m	*F*: 23 m
G: 400 m	*H*: 45 mm	*I*: 3 mm	*J*: 5 m	*K*: 8848 m	*L*: 3800 m

2. Egy szoba szélessége 3 m 60 cm. Befér-e erre a falra egymás mellé egy 120 cm széles szekrény, egy 90 cm széles polc és egy 1 m 40 cm széles íróasztal? Tervezzük meg az elrendezést rajzon is!

3. A maratoni futás távja 42 195 m.

a) Kerekítsük a távolságot egész kilométerre!

b) Hány stadionkör (400 m) tesz ki körülbelül egy maratoni távot?

c) Ha gyalogosan 5 km-t teszünk meg óránként, akkor hány óra alatt tennénk meg a maratoni távot? (A sebességet végig tartani tudjuk.)

d) Körülbelül hányszorosa a maratoni táv az iskolád és az otthonod távolságának?

4. Állítsuk növekvő sorrendbe az alábbi mennyiségeket!

80 700 dkg; 80 kg 7 dkg; 8 t; 807 kg; 70 kg 8 dkg; 70 000 g.

5. Dorka egy szökőév 92. napján született. 60 hónapos korában 15 000 g tömegű, 6 dm és 540 mm magas volt. Iskolába 88 hónapos korában kezdett járni. Testvérével általában 1200 mp alatt tették meg reggelente az iskolába vezető 8200 dm-es utat.

Meséljük el a történetet más mértékegységeket használva!

6. Pótoljuk a hiányzó mértékegységeket, mérőszámokat!

a) 57 cm = ... mm; *b)* 8500 g = ... kg ..... dkg; *c)* 2 óra = ... mp;

d) ..... m = 2900 cm; *e)* ..... t = 6 500 000 dkg; *f)* ..... óra = 1 hét;

g) 72 000 ..... = 72 km; *h)* 1400 dkg = 14 .....; *i)* 45 perc = 2700 .....

7. Milyen nap van ma, ha ugyanannyi nap telt el Mikulás óta, mint amennyi karácsonyig hátra van?

8. Egy hagyományos mutatós óra január 1-jén 0 órakor a pontos időt mutatja, azután naponta 15 percet késik. Mikor mutatja újra a pontos időt?

9. Melyik szám áll a számegyenesen az alábbi két számtól ugyanakkora távolságra?

a) 22 és 38; *b)* 498 és 934; *c)* 1863 és 3459.

10. Anna, Bori és Cili megmérték a tömegüket, és a következőket mondták el: Anna és Bori együtt 81 kg, Bori és Cili együtt 89 kg, Anna és Cili pedig együtt 84 kg tömegű. Hány kilogramm Bori?



11. Vanda a négy tengeri malacát páronként méri meg. Duci és Buci együtt 110 dkg, Buci és Dagi együtt 103 dkg, Dagi és Röfi együtt 108 dkg. Megmondható-e ezekből a mérésekből, hogy Duci és Röfi együtt hány dekagramm? Válaszunkat indokoljuk meg!

12. Mekkora tömegeket tudunk kimérni, ha van egy kétkarú mérlegünk, és a következő tömegegységek mindegyikéből 1 db van: 1 g-os, 2 g-os, 4 g-os, 8 g-os és 16 g-os?

13. Kati, Zsuzsi, Máté és Robi osztálytársak. Negyedik év végén különböző osztályzatuk volt matematikából, és egyikük sem bukott meg. Kinek milyen osztályzata volt matematikából, ha az ezekre vonatkozó mindhárom állítás igaz?

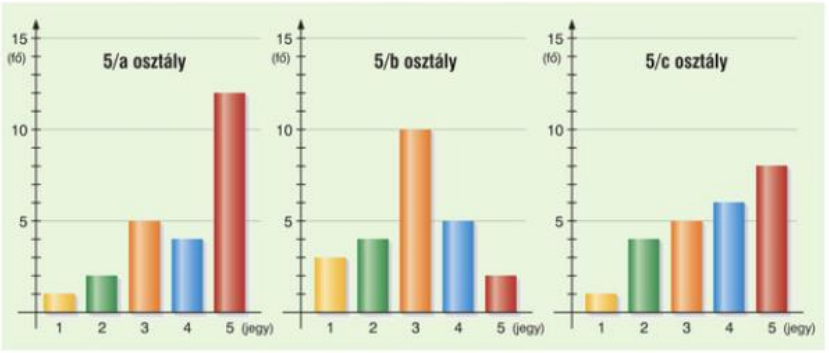
- Kati: Robi osztályzata jeles, Mátéé nem négyes.
- Zsuzsi: Mátéé nem közepes.
- Robi: Kati osztályzata nem közepes.

14. Ági, Bea és Csilla egy sportversenyen első, második és harmadik helyezést ért el. A verseny után ezt mondták közös barátjuknak: „Ági nem lett első. Bea nem lett második. Csilla nem lett sem első, sem harmadik." Ezután elárulták, hogy a három állításból csak egy igaz. Mi volt a lányok helyes helyezési sorrendje a versenyen?

15. Hány hiba van az alábbi történetben?

Géza vonalzója reggel 6 centiméterkor csörgött. Megnézte az óráját, és megállapította, hogy jól fel kell öltöznie, mert a levegő csak 5 kilogrammos. Megivott 3 perc kakaót, majd bepakolta a táskáját. Nagyon nehéznek tűnt, ezért hőmérővel megmérte, és 12 méternek találta.

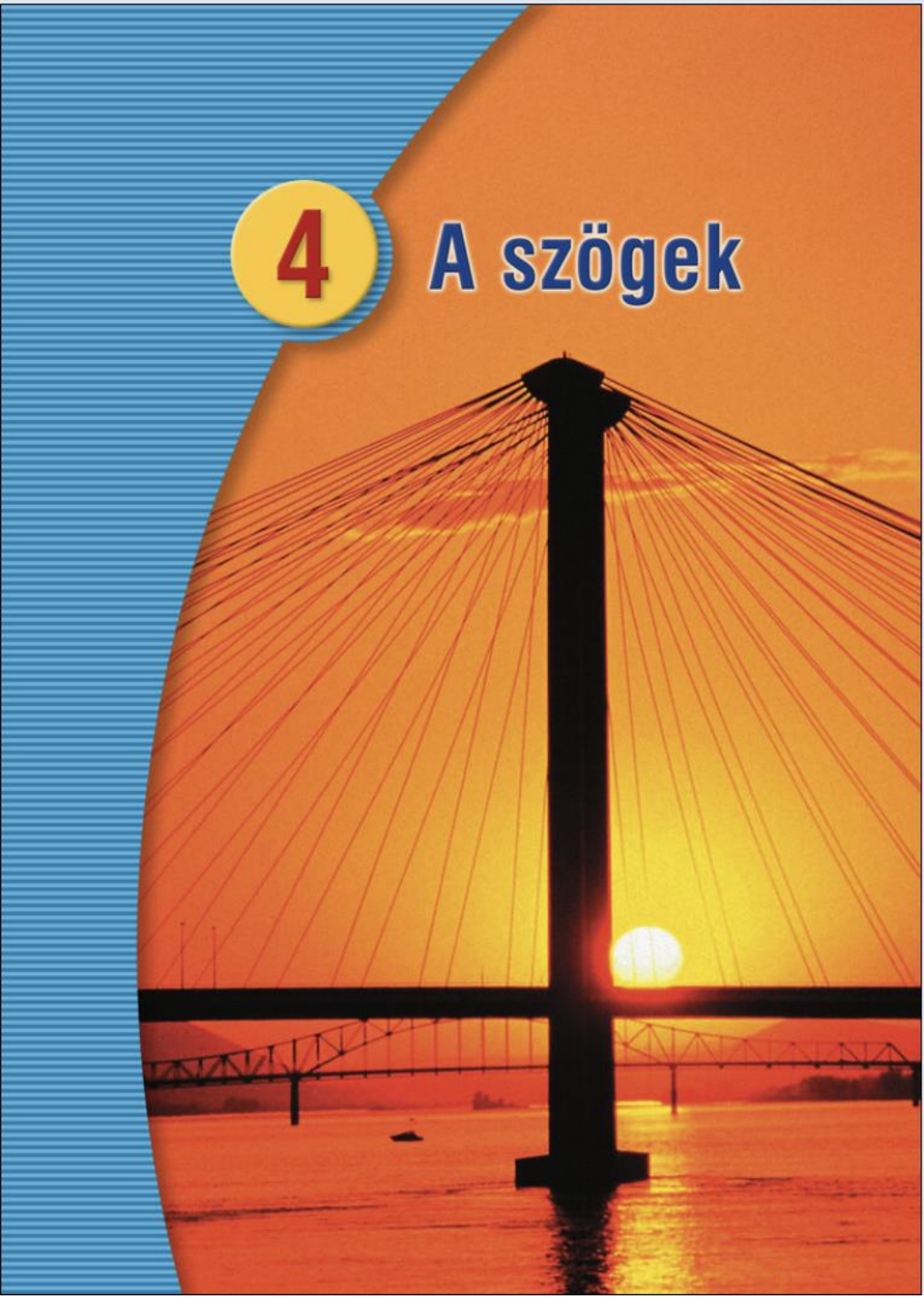
16. Három osztály matematika dolgozatának eredményét az alábbi oszlopdiagramok szemléltetik. Melyik osztályban sikerültek legjobban a dolgozatok?



17. Milyen mértékegység nevét rejtik a következő szavak?

a) RÉMET; *b)* MRMAG; *c)* RAKDMEGMA; *d)* MERCITEÉD;
e) MORGKAMLI; *f)* CSODÁMPER; *g)* TÉRICEMENT; *h)* MIKORETÉL

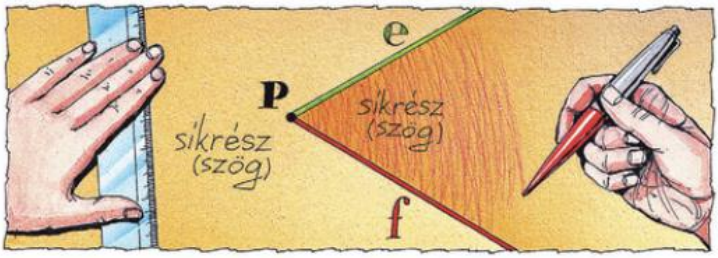
4 A szögek



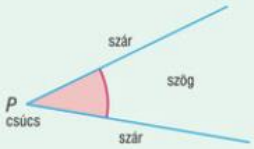
1. A szög fogalma, fajtái

Rajzoljunk egy papírlapra két, egy pontból kiinduló félegyenest! Ez a két félegyenes a síkot két síkrészre osztja.

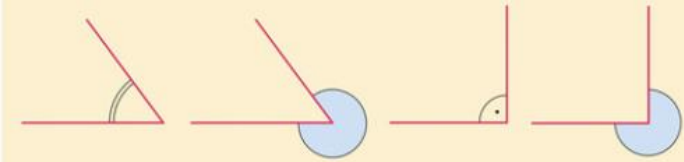




A sík egy pontjából kiinduló két félegyenes a síkot két síkrészre, két szögre bontja. A félegyenesek a szögek szárai, a közös kezdőpont a két szög csúcsa.



A félegyenesek által meghatározott két síkrész, vagyis szög közül az ábrán valamilyen módon megjelöljük azt, amelyikről beszélünk.

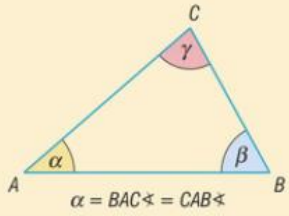


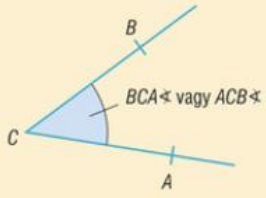
$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$

A szögeket jelölhetjük a görög ábécé kisbetűivel (pl. α), vagy úgy, hogy az egyik szár egy pontját, a szög csúcspontját és a másik szár egy pontját egymás után írjuk (pl. $BCA\sphericalangle$). Mindig a középső betű jelzi a szög csúcsát.

A görög ábécé leggyakrabban használt betűi:

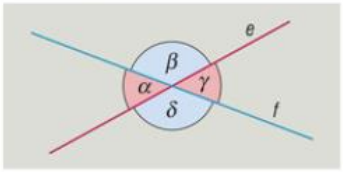
α (alfa), β (béta), γ (gamma), δ (delta), ε (epszilon), π (pi), ρ (rhó), σ (szigma), φ (fi), ω (omega), η (éta)





Két metsző egyenes szöge

A síkot két metsző egyenes négy szögre bontja. A keletkezett szögekre igaz, hogy $\alpha = \gamma$ és $\beta = \delta$.



Két egymást metsző egyenes által bezárt szögön a keletkezett szögek közül a nem nagyobb szöget értjük.

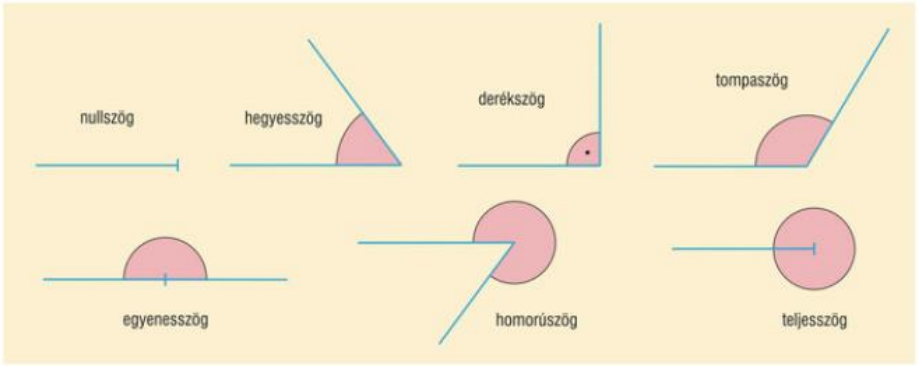
A szögek fajtái



a) Ha a két szögszár merőleges egymásra, akkor az így keletkező két szög közül a kisebbet **derékszögnek** nevezzük. Jele: ⦜ vagy ⦝.

b) Ha a két szögszár egy egyenest alkot, akkor az így keletkező mindkét szöget **egyenesszögnek** nevezzük.

c) Ha a két szögszár illeszkedik egymásra, akkor a két szög közül a nagyobbat **teljesszögnek,** a kisebbet **nullszögnek** nevezzük.



nullszög < hegyesszög < derékszög < tompaszög < egyenesszög < homorúszög < teljesszög

A nullszögnél nagyobb, de a derékszögnél kisebb szög a **hegyesszög.**
A derékszögnél nagyobb, de az egyenesszögnél kisebb szög a **tompaszög.**
Az egyenesszögnél nagyobb, de a teljesszögnél kisebb szög a **homorúszög.**
A homorúszög konkáv, a többi szögfajta konvex.

Feladatok



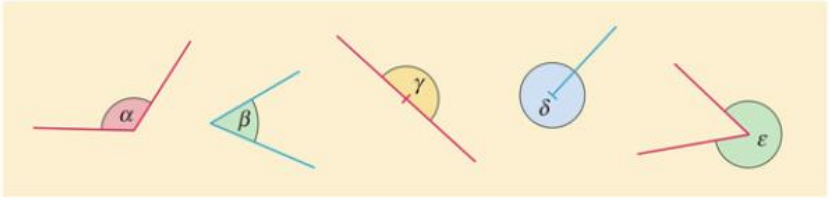
1. Hajtsunk félbe egy papírlapot, majd ismételjük ezt meg! Terítsük ki!

   Milyen helyzetűek a keletkezett hajtásélek, és milyen szögeket határoznak meg? (➡)

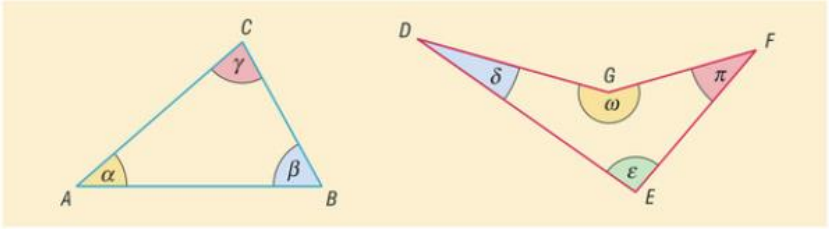


2. Készítsük el a képen látható szögkorongot két egyenlő sugarú, különböző színű körlapból! Egy-egy sugár mentén mindkettőt vágjuk be, majd illesszük össze őket! Az egyik körlap forgatásával szemléltessük a szögfajtákat! (➡)

3. Milyen szögfajtát jelölnek a görög betűk?

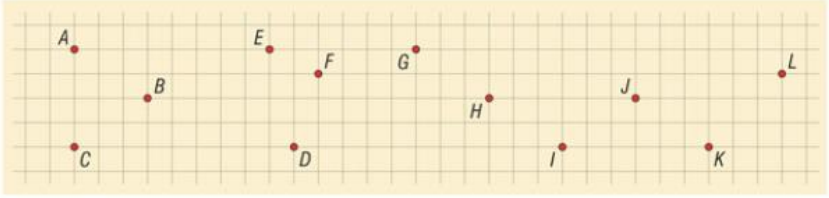


4. Írjuk fel a görög betűkkel jelölt szögeket a háromszög, illetve a négyszög csúcsaival! Pl. $\alpha = BAC\sphericalangle = CAB\sphericalangle$.



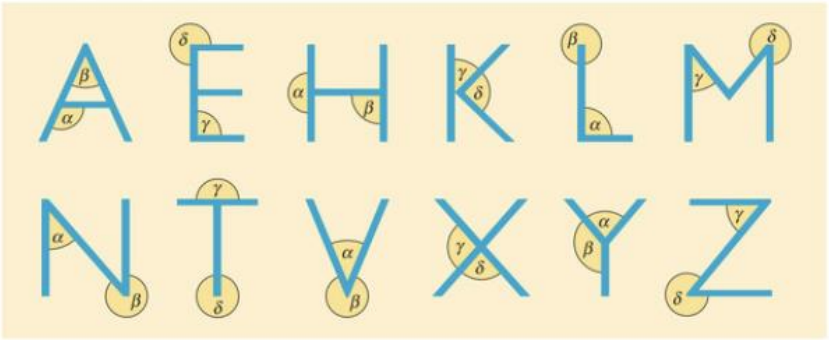
5. Rajzoljuk be az ábrába az alábbi szögeket!

   $\alpha = BAC\sphericalangle$; $\beta = EFD\sphericalangle$; $\gamma = GHI\sphericalangle$; $\delta = JKL\sphericalangle$.





6. Milyen fajta szögeket jelöltünk a betűkön?



7. Milyen konvex szöget zár be az óra nagy- és kismutatója

a) 12:00 órakor; *b)* 12:30 órakor; *c)* 15:00 órakor;
d) 17:00 órakor; *e)* 17:30 órakor; *f)* 18:00 órakor;
g) 19:30 órakor; *h)* 21:00 órakor; *i)* 21:45 órakor?

8. Rajzoljunk olyan háromszöget, amelynek

a) minden szöge hegyesszög; *b)* van derékszöge;
c) van tompaszöge; *d)* két derékszöge van!

9. Rajzoljunk olyan négyszöget, amelynek

a) minden szöge derékszög; *b)* van derékszöge;
c) pontosan egy derékszöge van; *d)* van tompaszöge;
e) minden szöge hegyesszög; *f)* pontosan két derékszöge van!

10. Milyen fajta szög lehet egy hegyesszög

a) kétszerese; *b)* háromszorosa?



11. Milyen fajta szög lehet egy homorúszög

a) fele; *b)* harmada?

12. Rajzoljunk olyan négyszöget, amelynek

a) van egy homorúszöge; *b)* van egy homorú- és egy derékszöge!

13. Egy hajó északi irányba halad, majd egy derékszöggel elfordul. Melyik világtáj felé veszi az irányt a fordulás után?

14. *a)* Milyen szöget zárnak be a fő- és mellékvilágtájak az északi irányhoz viszonyítva?
b) Mondjunk olyan világtájakat, amelyek merőlegesek egymásra!
c) Mondjunk olyan világtájakat, amelyek hegyesszöget zárnak be egymással!
d) Mondjunk olyan világtájakat, amelyek tompaszöget zárnak be egymással!

Rejtvény

Hányszor fedi egymást az óra nagy- és kismutatója egy nap alatt?

2. A szögek mérése és rajzolása



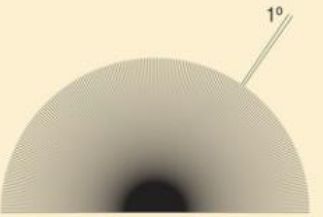


A mindennapi életben elsősorban a mérnöki munkában az épületek, utak, hidak tervezésekor, illetve a térképek készítése során találkozhatunk szögek mérésével.

A szög nagyságának mérésekor a szöget egy választott egységgel hasonlítjuk össze.

szög	
1 mérőszám	° mértékegység

A szögmérés egységének az egyenesszög százhetvenedrészét választjuk, amit 1 foknak nevezünk. Jelölése 1°.





A szögmérés kisebb egységei:

1 szögperc: 1'.
60' = 1°

1 szögmásodperc: 1".
60" = 1'

A szögmérés alapja a 60-as számrendszer.

Az egyenesszög 180°.

A derékszög az egyenesszög fele, ezért **a derékszög 90°.**

A teljesszög az egyenesszög kétszerese, ezért **a teljesszög 360°.**



0° < hegyesszög < 90° < tompaszög < 180° < homorúszög < 360°

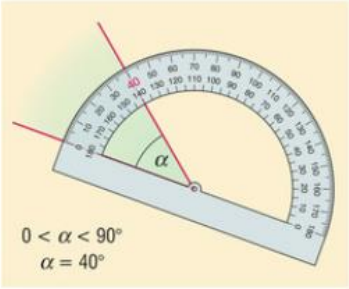
A 180°-nál kisebb szögek mérése

Illesszük a szögmérőt a szöghöz úgy, hogy

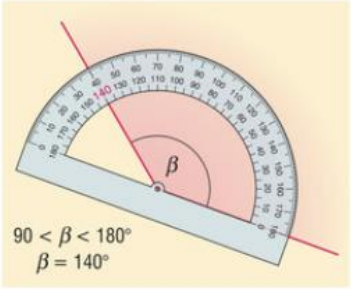
- a szögmérő középpontja a szög csúcsához illeszkedjen;
- a szög mindkét szára messe a skálát (ehhez esetleg meg kell hosszabbítani a szögszárakat);
- az egyik skála 0 beosztása illeszkedjen az egyik szögszárra.

Ezután a megfelelő skála és a másik szár metszéspontjánál leolvasható a szög nagysága.

messe = metssze



Az α szög hegyesszög, vagyis $0 < \alpha < 90°$, ezért $\alpha = 40°$.

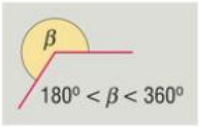


A β szög tompaszög, vagyis $90° < \beta < 180°$, ezért $\beta = 140°$.

A 180°-nál nagyobb szögek mérése

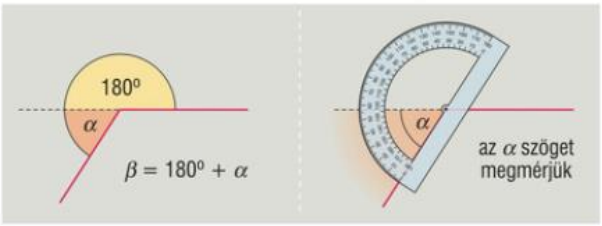
A homorúszögek mérését visszavezetjük a 180°-nál kisebb szögek mérésére.

Mérjük meg az ábrán látható β szöget!



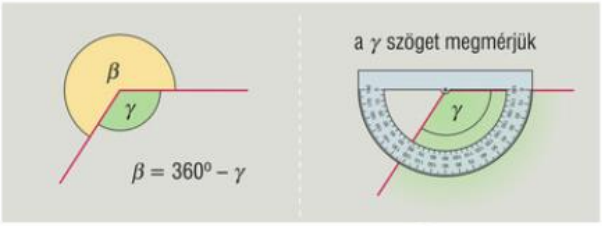
I. MÓDSZER:

Az egyik szögszár meghosszabbításával a mérendő β szöget egy egyenesszög és egy 180°-nál kisebb α szög **összegére** bontjuk. Az α szöget megmérjük. Ebből β kiszámítható: $\beta = \alpha + 180°$.



II. MÓDSZER:

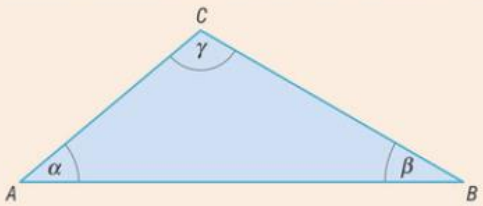
A mérendő β homorúszög a teljesszög és egy 180°-nál kisebb γ szög **különbségeként** is megkapható. A γ szöget megmérjük. Így β kiszámítható: $\beta = 360° - \gamma$.



Játsszátok el párban! Egyikőtök adja az utasításokat, a másik vezesse a robotot, és rajzolja az útját.

1. példa

Egy robot mindig egyenes mentén halad, megáll, majd elfordul. A robot az *A* pontból indul, és az ábrán látható *ABC* háromszög oldalain végighaladva visszajut az *A* pontba, majd befordul a kiindulási irányba.



a) Adjunk utasítást a robotnak, hogy milyen hosszú utat tegyen meg a háromszög egy-egy oldala mentén, és hány fokos szöggel forduljon el a haladási irányához képest a csúcspontokban! Mérjük meg a megfelelő oldalakat és szögeket!

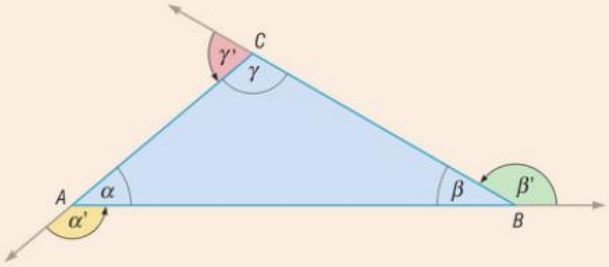
b) Adjuk össze azokat a szögeket, amelyekkel a robot az útja során elfordult!

c) Mérjük meg a robot által bejárt háromszög szögeit (α; β; γ), majd adjuk össze őket!

A mérési eredmények a mérés pontosságától függően eltérőek lehetnek.

Megoldás

a) A háromszög oldalai: $AB = 75$ mm, $BC = 5$ cm és $CA = 4$ cm. A szögek méréséhez hosszabbítsuk meg a háromszög oldalait a haladási iránynak megfelelően! Így: $\beta' = 150°$; $\gamma' = 70°$ és $\alpha' = 140°$.



A robotnak adott utasítás: Menj az *A* pontból 75 mm-t a *B* pontba, fordulj balra 150°-kal, haladj 5 cm-t a *C* pontig, ott fordulj balra 70°-kal, haladj 4 cm-t az *A* pontig, majd fordulj balra 140°-kal!

b) Az elfordulási szögek összege:

$\alpha' + \beta' + \gamma' = 140° + 150° + 70° = 360°$.

c) A háromszög szögei: $\alpha = 40°$; $\beta = 30°$ és $\gamma = 110°$.

Összegük: $\alpha + \beta + \gamma = 40° + 30° + 110° = 180°$.

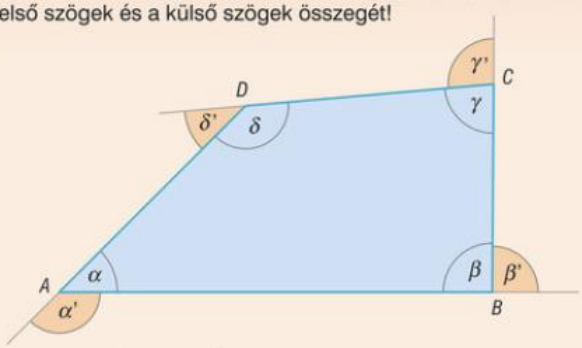
A példa ábráján az α; β; γ szögek a háromszög **belső szögei.**
A α'; β'; γ' szögek az α; β; γ belső szögekhez tartozó **külső szögek.**

Az egy csúcsnál levő belső és külső szög összege egyenesszög. A méréssel azt tapasztaltuk, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°.

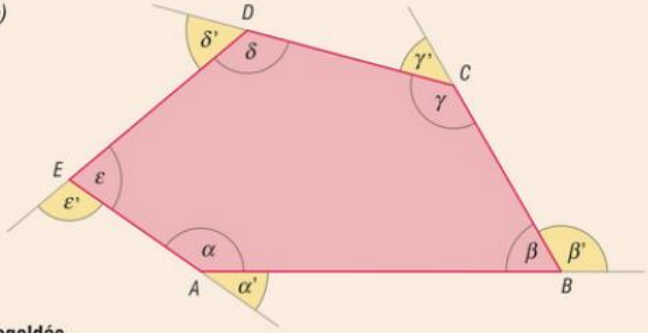
2. példa

Mérjük meg a sokszögek belső és külső szögeit, majd számítsuk ki a belső szögek és a külső szögek összegét!

a)



b)



Megoldás

Ha pontosan mértünk, akkor

a) $\alpha = 45°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 85°$; $\delta = 140°$; $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$;
$\alpha' = 135°$; $\beta' = 90°$; $\gamma' = 95°$; $\delta' = 40°$; $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360°$.

b) $\alpha = 145°$; $\beta = 160°$; $\gamma = 135°$; $\delta = 123°$; $\varepsilon = 77°$;
$\alpha' = 35°$; $\beta' = 30°$; $\gamma' = 45°$; $\delta' = 57°$; $\varepsilon' = 103°$;
$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540°$; $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \varepsilon' = 360°$.

Mérjük meg csoportonként különböző konvex sokszögek belső és külső szögeit! Vessük össze a belső szögek összegére kapott eredményeket!

A méréssel azt tapasztaltuk, hogy a négyszögek belső szögeinek összege 360°, külső szögeinek összege szintén 360°.

A példában az ötszögek belső szögeinek összege 540°, a külső szögeinek összege pedig 360°.

A 180°-nál kisebb szögek rajzolása

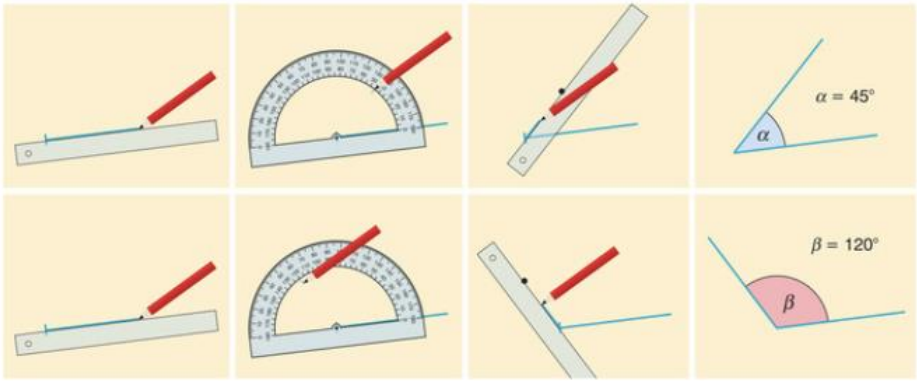
3. példa

Rajzoljunk egy $\alpha = 45°$-os és egy $\beta = 120°$-os szöget!

Megoldás

A két skála közül azt használjuk, amelyiknek 0° beosztása a már megrajzolt szögszárra illeszkedik.

1. Rajzoljunk egy félegyenest (tetszőlegesen), ez lesz a szög egyik szára.
2. Illesszük a szögmérő középpontját a félegyenes kezdőpontjához. Jelöljük meg a kívánt szöget a szögmérő skálájánál.
3. A szög másik szárát úgy kapjuk meg, hogy a félegyenes kezdőpontját összekötjük a megjelölt ponttal.



A 180°-nál nagyobb szögek rajzolása

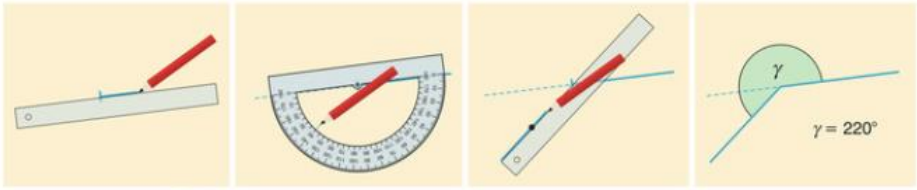
4. példa

Rajzoljunk egy $\gamma = 220°$-os szöget!

1. megoldás: felhasználjuk, hogy $220° = 180° + 40°$.

A szöget egy egyenesszög és egy 180°-nál kisebb szög összegére bontjuk.

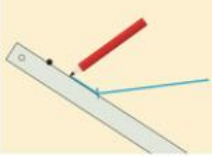
1. Rajzoljuk meg az egyik szögszárat!
2. A megrajzolt félegyenest a kezdőpontján túl meghosszabbítva megkapjuk a 180°-os szöget.
3. A meghosszabbított szárhoz rajzoljuk meg a 40°-os szöget!

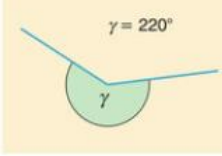


2. megoldás: felhasználjuk, hogy $220° = 360° - 140°$.

1. Rajzoljuk meg a 140°-os szöget az 1. példában megismert módon!
2. Jelöljük a rajzon a 220°-os szöget!







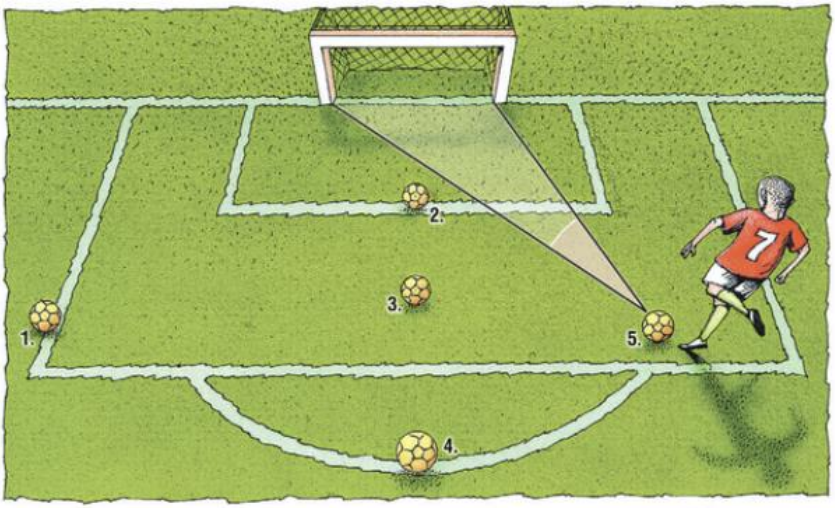
A szöget a teljesszög és egy 180°-nál kisebb szög különbségeként írjuk fel.

Feladatok

1. Mérés nélkül döntsük el, hogy melyik szög 95°, 22°, 155°, 51°!



2. Mérjük meg, hogy mekkora szögben rúghatja el a játékos a labdákat, hogy kapura menjen a lövés! Melyik labda elrúgásakor van a legnagyobb esélye a góllövésre?



3. Használjuk ismét a 120. oldal 2. feladatánál elkészített szögkorongot! Szögmérő segítségével állítsuk be rajta az alábbi szögeket! (➡)



$\alpha = 15°$; $\beta = 30°$; $\gamma = 45°$; $\delta = 60°$; $\varepsilon = 135°$;
$\pi = 152°$; $\mu = 330°$; $\rho = 225°$; $\eta = 170°$; $\omega = 245°$.

4. Rajzoljuk meg a következő szögeket! Színezzük a tompaszögeket pirossal!

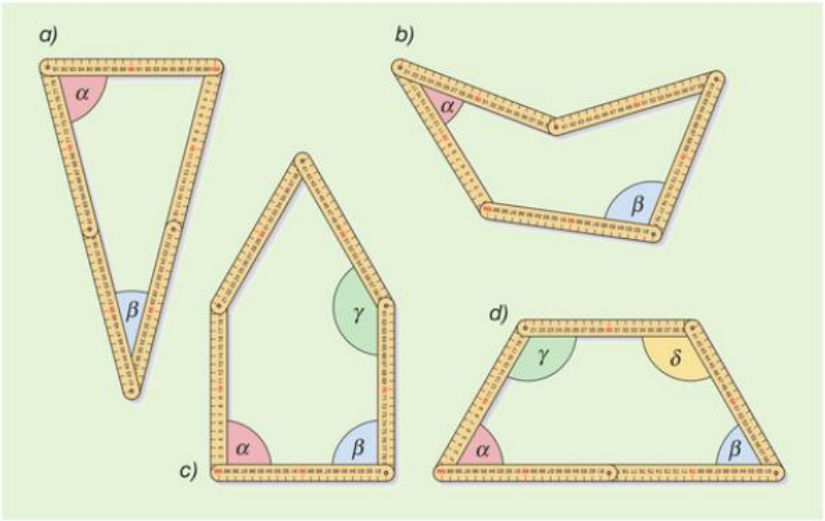
a) $\alpha = 35°$; $\beta = 80°$; $\gamma = 135°$; $\delta = 150°$.

b) $\alpha = 28°$; $\beta = 124°$; $\gamma = 168°$; $\delta = 190°$.

c) $\alpha = 42°$; $\beta = 142°$; $\gamma = 242°$; $\delta = 342°$.

d) $\alpha = 21°$; $\beta = 121°$; $\gamma = 221°$; $\delta = 321°$.

5. Mérjük meg a sokszögek megjelölt szögeit!



6. Rajzoljunk tetszőleges háromszöget, négyszöget, ötszöget! Mérjük meg a szögeit, majd számítsuk ki a belső szögek összegét!

7. Hajtogassunk egy papírlapból
a) 180°; *b)* 90°; *c)* 45°; *d)* 135° nagyságú szöget!

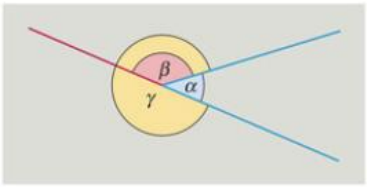
8. Mekkora szöget zár be az óra nagy- és kismutatója
a) 6 órakor; *b)* 9 órakor; *c)* 1 órakor; *d)* 4 órakor; *e)* 7 óra 30 perckor?
Szögmérővel rajzoljuk meg ezeket a szögeket a füzetünkbe!

Rejtvény

Hány foknak látjuk egy kétszeres nagyítású lencsével az $\alpha = 20°$ szöget?



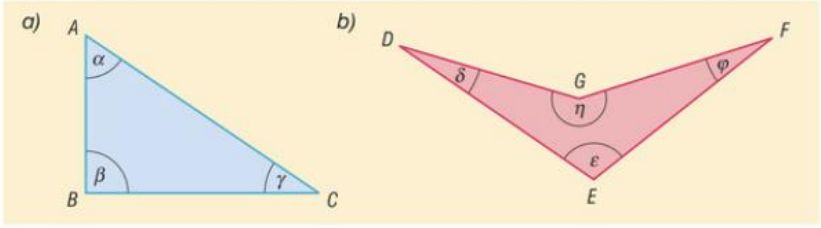
3. Vegyes feladatok



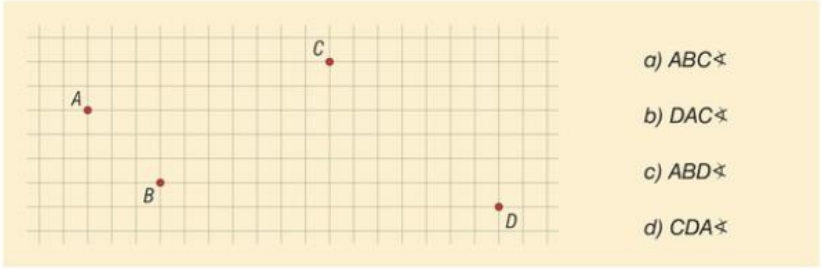
1. Milyen fajta szög β és γ, ha α hegyesszög?

2. Milyen fajta szöggel fordul el az óra nagymutatója
   a) negyed óra; *b)* háromnegyed óra;
   c) fél óra; *d)* húsz perc alatt?

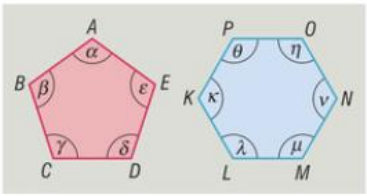
3. Mérjük meg a háromszög és a négyszög szögeit, majd számítsuk ki a belső szögek összegét!



4. Mérjük meg a pontok által meghatározott alábbi szögeket!



5. A bőrfoci külső részét – az ábrán látható – szabályos ötszögekből és hatszögekből varrják össze. Mérjük meg a szögeiket! (➡)



6. Hány fokkal fordul el az óra nagymutatója
   a) negyed óra; *b)* fél óra;
   c) háromnegyed óra; *d)* húsz perc alatt?

7. Hány fokkal fordul el az óra kismutatója
   a) két óra; *b)* egy óra;
   c) fél óra; *d)* húsz perc alatt?

   Szögmérővel rajzoljuk meg ezeket a szögeket!

8. Rajzoljuk meg körző és szögmérő segítségével egy óra számlapját!

9. Hány fokkal térnek el az északi iránytól a mellékvilágtájak?

10. Mondjunk olyan fő- vagy mellékvilágtájakat, amelyek egymással bezárt szöge
   a) 90°; *b)* 180°; *c)* 45°; *d)* 135°; *e)* 225°!

11. Egy hajó a kikötőből indulva északi irányban megtesz 5 km-t, majd kelet felé fordul, és ismét 5 km-t halad. Rajzoljuk le a hajó útját (1 km a füzetben 1 cm)! Milyen irányban van ekkor a kikötőtől?

12. Egy turista kelet felé indul el, majd 5 km megtétele után jobbra fordul 45°-kal, és ebben az irányban 3 km-t halad. Ezt követően balra fordul 60°-kal, és 4 km-t halad. Rajzoljuk le a turista útját (1 km a füzetben 1 cm)! Mérjük meg a rajz alapján, hogy milyen messzire jutott a kiindulási ponttól!

13. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
   a) Két hegyesszög összege mindig hegyesszög.
   b) Hegyesszög fele mindig hegyesszög.
   c) Tompaszög fele biztosan hegyesszög.
   d) Homorúszög fele nem lehet hegyesszög.
   e) Két tompaszög összege biztosan homorúszög.

14. *a)* Rajzoljunk négyzetrácsos lapra olyan derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója 3 négyzetrács, a másik 4 négyzetrács hosszúságú! Mérjük meg a szögeit!
   b) Rajzoljunk olyan háromszöget, amelynek oldalai az előző háromszög megfelelő oldalainak kétszeresei! Mérjük meg ennek a háromszögnek is a szögeit!
   c) Rajzoljunk olyan háromszöget, amelynek oldalai az első háromszög megfelelő oldalainak háromszorosai! Mérjük meg ennek a háromszögnek is a szögeit!
   Hasonlítsuk össze a három háromszög szögeit!

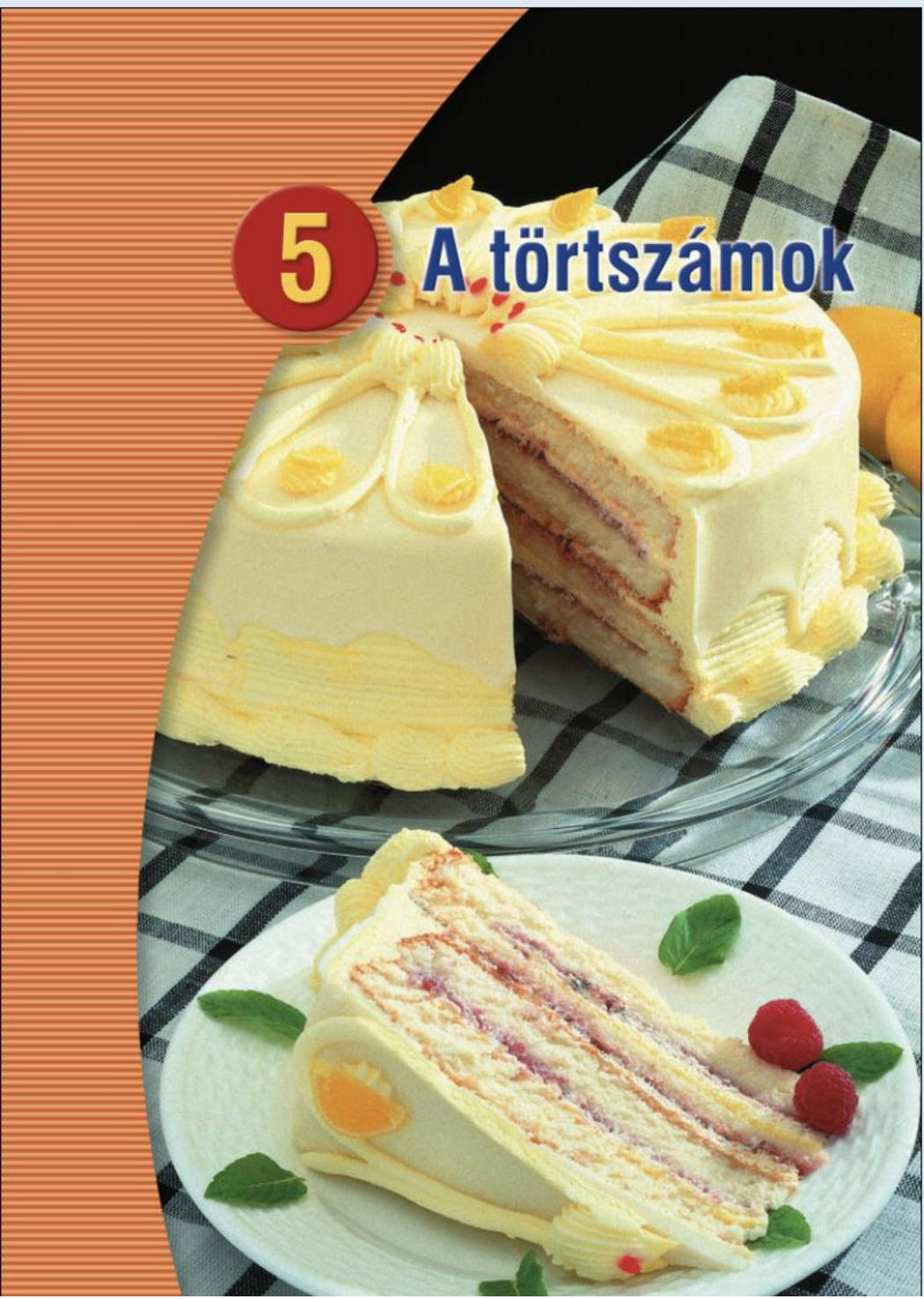
15. Rajzoljuk meg az α, β, $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ szögeket, ha
   a) $\alpha = 65°$ és $\beta = 25°$; *b)* $\alpha = 165°$ és $\beta = 45°$; *c)* $\alpha = 235°$ és $\beta = 75°$!
   Mérjük meg az $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ szögeket! Ellenőrizzük számítással, hogy pontosan rajzoltunk-e! Mennyi az eltérés a mért és a számított értékek között?

*16. Mekkora az a szög, amelynek háromszorosa 30°-kal kisebb az egyenesszögnél?

*17. Egy felmérés során három kérdést tettek fel 120 ötödikes tanulónak. A válaszok megoszlását a kördiagramok mutatják. Becsüljük meg, hogy hányan válaszoltak az egyes kérdésekre nemmel! Becsléseinket a szögek megmérésével és számítással ellenőrizzük!



5 A törtszámok



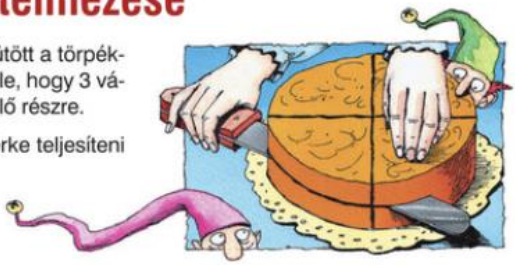
1. A tört értelmezése



Az osztás jele a számológépeken.

Hófehérke piskótát sütött a törpéknek, akik azt kérték tőle, hogy 3 vágással ossza 8 egyenlő részre.

Hogyan tudta Hófehérke teljesíteni a törpék kérését?



Egy egész egyenlő részekre osztása

Vágjunk szét egy tortát 2; 3; 4 egyenlő részre!



Vegyünk az egyenlő részekből egy-egy darabot!

$1 : 2 = \frac{1}{2}$

$1 : 3 = \frac{1}{3}$

$1 : 4 = \frac{1}{4}$



1 egész — 1 ketted — 1 harmad — 1 negyed

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$

Minél több egyenlő részre osztjuk az egészet, annál kisebb darabokat kapunk.

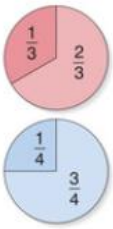
Az 1 egészet többféle formában is kifejezhetjük:



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ — 1 ketted + 1 ketted = 2 ketted;

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ — 1 harmad + 1 harmad + 1 harmad = 3 harmad;

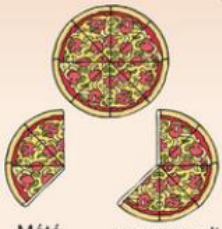
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ — 1 negyed + 1 negyed + 1 negyed + 1 negyed = 4 negyed.





1. példa

Máté az ábrán látható pizzából megevett három szeletet. Hányad részét ette meg a pizzának? Hányad részét hagyta meg?



$\frac{3}{8}$ rész $\frac{5}{8}$ rész

Megoldás

Egy szelet pizza az egésznek 1 nyolcad része. Máté három szeletet evett, amely az egész pizzának 3 nyolcad része.

Máté a pizzának az 5 nyolcad részét hagyta meg.

Ha egy egészet egyenlő részekre osztunk, és ezekből veszünk valamennyit, akkor törtet kapunk.

Közönséges tört alakban a törteket így írjuk:

számláló — 3
törtvonal —
nevező — 8

– A számláló megadja, hogy hány darabot választunk ki az egyenlő részek közül.

– A nevező meghatározza, hogy hány egyenlő részre osztjuk az 1 egészet.

A tört nevezője nem lehet 0.

2. példa

Kriszti, Hanna és Dorka nyertek két ugyanakkora tábla csokoládét a rejtvényfejtő csapatversenyen. Az egyik tábla tejcsoki volt, a másik fehér csoki.

Rajzoljuk le, hogyan oszthatják el igazságosan a két tábla csokit, ha

a) mindenki ugyanannyit kap a kétfajta csokiból!

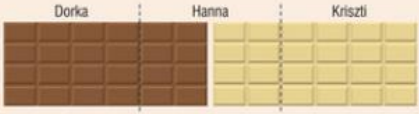
b) Dorka csak a tejcsokit szereti, Kriszti csak a fehéret, így Dorka a fehér csokiját elcseréli Krisztivel tejcsokira. Hány tábla csokit kap Dorka?

Megoldás

a) Mindenki megkapja a két tábla csokoládé harmadát.



b) A csere után:



Dorka a tejcsokoládé $\frac{2}{3}$ részét kapta, azaz $\frac{2}{3}$ tábla csokoládét.

Írjunk, rajzoljunk minél többféle meghatározást a $\frac{3}{4}$ törtre!

A két tábla csokoládé harmada (2 : 3) ugyanannyi, mint ha egy táblát három egyenlő részre osztunk, és az egyenlő részekből kettőt veszünk.

$\frac{2}{3}$-ot kapunk ha
- 1 egészet 3 egyenlő részre osztunk, és ezekből 2-t veszünk.
- 2 egésznek veszük a harmadát.

$\frac{2}{3} = 2 : 3$

Két egész szám hányadosát törtnek nevezzük.

3. példa

Rakjuk össze a dominókat úgy, hogy az egymás alatti négyzetekben ugyanaz a tört álljon!

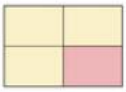


Megoldás

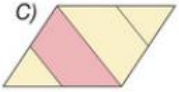


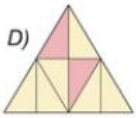
Feladatok

1. Melyik rajzon színeztük be pirossal a terület 1 negyed részét? (Mindegyik rajz egy egészet jelent.)

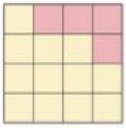
A) 

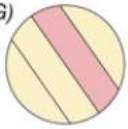
B) 

C) 

D) 

E) 

F) 

G) 

H) 



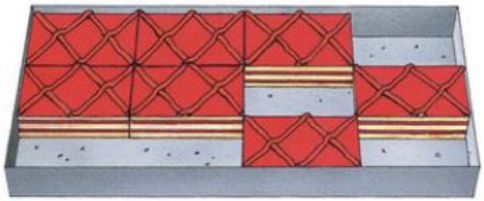
2. Írjuk le a következő törteket számokkal:

a) három ötöd; *b)* kettő heted; *c)* kilenc kilenced; *d)* hét hatod; *e)* hat heted;
f) öt tized; *g)* tíz ötöd; *h)* ötven ötöd *i)* tizenhárom nyolcad!

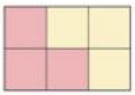
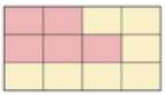
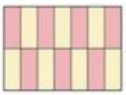
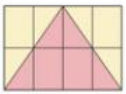
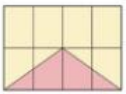
3. Írjuk le azt a törtet, amelynek

a) számlálója 7 és nevezője 10; *b)* nevezője 8 és számlálója 3;
c) nevezője 17 és számlálója 12; *d)* számlálója 21 és nevezője 53!

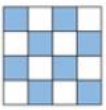
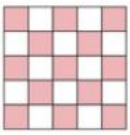
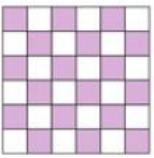
4. A rácsos linzert egyenlő részekre vágták. A sütemény hányad része fogyott el? A sütemény hányad része maradt meg? (➡)



5. A rajzok hányad része piros színű, ha mindegyik rajz egy egészet jelent?

a) 
b) 
c) 
d) 
e) 
f) 
g) 
h) 

6. A négyzetek hányad része van színezve, és hányad része fehér, ha a nagy négyzet mindegyik esetben 1 egész?

a) 
b) 
c) 
d) 
e) 

7. A számológépen az ábrán látható módon jelennek meg a számok. Írjuk fel törttel, hogy az egyes számoknál a jelek hányad része világít! Melyik esetben egyezik meg a kapott tört számlálója a kijelzett számmal?



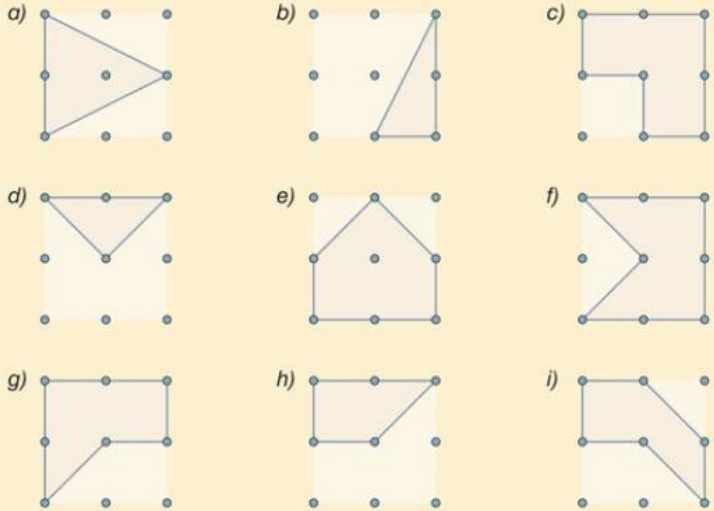
8. Hányad része hiányzik a bonbonoknak?

a) 

b) 

c) 

9. Hányad része van körbekerítve a lyukas tábla szögekkel körülhatárolt területének?

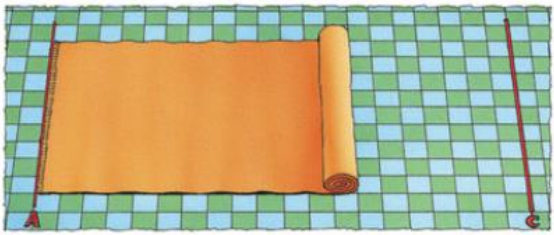


10. Az úszómedence 8 sávjából öt sávban úszhatnak a strandolók, a többit lefoglalták a versenyúszók edzésére. A medence hányad részén edzenek a versenyúszók?

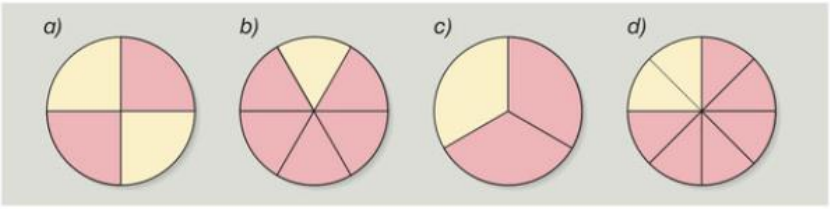
11. A kiterített szőnyeg az *A*-tól a *C* jelig ér.

a) A szőnyeg hányad része van már kiterítve?

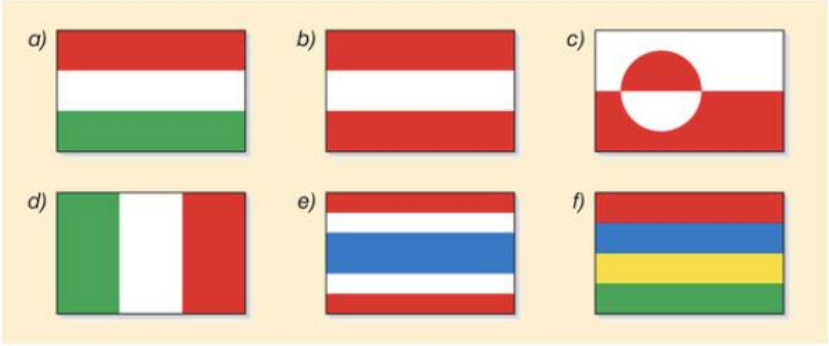
b) Az *A* jeltől számított hányadik beosztásnál lesz a szőnyeg $\frac{3}{4}$ része kiterítve? (➡)



12. Rajzoljunk a füzetünkbe 3 cm hosszú és 2 cm széles téglalapokat! Színezzük ki a téglalap annyiad részét, amennyi a körökön látható!

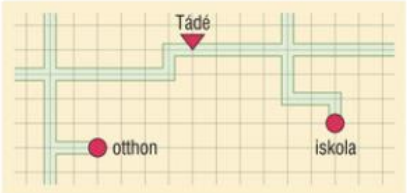


13. Hányad része piros a következő zászlóknak, ha mindegyik zászlót 1 egésznek tekintünk? Mely országok zászlói ezek? Sorolj fel olyan országokat, amelyek zászlóinak ugyanannyiad része piros színű, mint a magyar zászlónak!



14. Tádé iskolába igyekszik. Megtette-e már az út felét az iskola és az otthon között?

Először becsüljük meg, majd a négyzetrács segítségével számoljuk ki! (➡)



15. *a)* Hány nap egy hét? Hány hét egy nap?
b) Három nap hány hét?
c) Hány óra egy nap? Hány nap egy óra?
d) A mai napnak hányad részét töltöd iskolában?
e) Hány perc egy óra? Hány óra egy perc?
f) Hány másodperc egy perc? Hány perc egy másodperc?

16. *a)* Hány fő az osztályotok létszáma? Egy fő hányad része az osztálynak?
b) Az osztálylétszám hányad része fiú, és hányad része leány?

17. Rajzoljunk a füzetünkbe egy 5 cm hosszú szakaszt! Színezzük be a szakasznak az

a) $\frac{1}{10}$; *b)* $\frac{3}{10}$; *c)* $\frac{7}{10}$; *d)* $\frac{10}{10}$; *e)* $\frac{5}{10}$ részét!

Hány centiméter az 5 cm hosszú szakasz beszínezett része?

18. Egy ötödikes osztálybulin a gyerekek 1 negyed része sós süteményt, fele édes süteményt, 3 nyolcada gyümölcsöt, 7 tizenketted része üdítőt hozott. Miből hányan hoztak, ha az osztály létszáma 24? (Legfeljebb hányan hozhattak kétfélét?)

19. *a)* Rajzoljunk a füzetbe egy 1 dm hosszú szakaszt! Színezzük pirossal a szakasz $\frac{2}{5}$ részét! Hány centiméter a piros szakasz hossza?

b) Rajzoljunk egy 2 dm hosszú szakaszt, és színezzük kékkel a szakasz $\frac{1}{5}$ részét! Hány centiméter a kék szakasz hossza?

c) A piros vagy a kék színű szakasz a hosszabb?

20. Számítsuk ki, majd rajzoljuk meg szögmérővel azt a szöget, amely a derékszögnek

a) $\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{2}{3}$; *c)* $\frac{5}{3}$ része!

Milyen fajta szögek ezek?

21. Számítsuk ki, majd rajzoljuk meg szögmérővel azt a szöget, amely az egyenesszög

a) $\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{2}{3}$; *c)* $\frac{5}{3}$ része!

Milyen fajta szögek ezek?

22. Egy anyuka és fia élelmiszert vásárolnak. Hazafelé haladva megállapítják, hogy az anyukánál 7 kg, a fiánál 100 dkg áru van. Az anyukánál lévő áru $\frac{1}{10}$ része, míg a fiánál lévő áru fele zöldségféle. Melyiküknek visz több zöldségfélét?

23. Rendezzük át a $\frac{\boxed{3}\boxed{9}}{\boxed{5}\boxed{7}}$ törtben a számjegyeket úgy, hogy a lehető legkisebb pozitív törtet kapjuk! Mennyivel lesz több így a nevező számjegyeinek összege a számláló számjegyeinek összegénél?

24. Egy tört számlálójába pozitív egyjegyű egész számokat, nevezőjébe pozitív kétjegyű egész számokat írhatunk. Melyik lesz az így képzett törtek közül a lehető legnagyobb? Melyik lesz a lehető legkisebb?

25. Az osztálykirándulásra Dani 1 liter, Csaba 5 dl teát vitt magával. A pihenő során Dani megitta a teája 1 negyed részét, Csaba pedig a felét. Melyiküknek ivott több teát?

26. Fejezd ki törtrészben a következő előtagokat:

a) deci-; *b)* centi-; *c)* milli-; *d)* mikro-!



Rejtvény

A zebrának hányad része csíkos?



2. A törtek összehasonlítása 1 egésszel, vegyes számok





$\frac{8}{8} = 1$



$\frac{10}{10} = 1$



$\frac{12}{12} = 1$

A tört egyenlő 1-gyel, ha a számlálója egyenlő a nevezőjével.



$\frac{3}{8} < 1$



$\frac{7}{10} < 1$

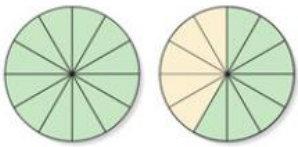


$\frac{5}{12} < 1$

A pozitív tört kisebb 1-nél, ha a számlálója kisebb, mint a nevezője.



$\frac{13}{8} > 1$



$\frac{19}{12} > 1$

A pozitív tört nagyobb 1-nél, ha a számlálója nagyobb, mint a nevezője.



A vegyes számok

Az 1-nél nagyobb törteket felírhatjuk **vegyes szám alakban is.**

$\frac{13}{8} = \frac{8}{8} + \frac{5}{8} = 1 + \frac{5}{8} = \boxed{1\frac{5}{8}}$

$\frac{19}{12} = \frac{12}{12} + \frac{7}{12} = 1 + \frac{7}{12} = \boxed{1\frac{7}{12}}$

vegyes szám alak

$1\frac{1}{8}$

egész szám

1-nél kisebb törtszám

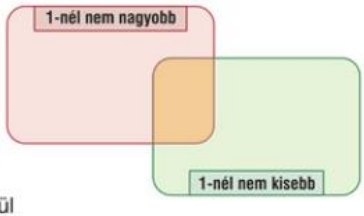
Feladatok

1. Az alábbi törtek közül melyek

   a) kisebbek 1-nél; *b)* nagyobbak 1-nél; *c)* egyenlőek 1-gyel?

   $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{28}{33}$; $\frac{12}{11}$; $\frac{17}{17}$; $\frac{13}{4}$; $\frac{42}{31}$; $\frac{9}{14}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{6}{11}$.

2. Írjunk a halmazokba a megfelelő helyekre törtszámokat! (➡)



3. Írjunk olyan törteket, amelyek

   a) számlálója eggyel kisebb, mint a nevezője;

   b) számlálója kettővel nagyobb, mint a nevezője;

   c) számlálójának és nevezőjének összege 10!

   d) Az *a), b), c)* feladatokban szereplő törtek közül melyek nagyobbak 1-nél, melyek kisebbek 1-nél és melyek egyenlőek 1-gyel?

4. Írjunk olyan *a)* 1-nél nagyobb; *b)* 1-nél kisebb törteket, amelyeknek a számlálója 5-nél kisebb természetes szám, nevezője pedig legfeljebb 7! Hány ilyen tört van?

5. *a)* Írjunk olyan 1-nél kisebb pozitív törteket, amelyeknek a számlálója 6-nál nagyobb természetes szám, nevezője pedig legfeljebb 10! Hány ilyen tört van?

   b) Írjunk olyan 1-nél nagyobb törteket, amelyeknek a számlálója legfeljebb 8, nevezője pedig legalább 4! Hány ilyen tört van?

6. Legyen $A = \{1; 3; 5\}$ és $B = \{2; 3; 4; 5\}$ elemeivel megadott két halmaz. Képezzünk olyan törteket, amelyeknek a számlálóját az A halmazból, a nevezőjét pedig a B halmazból választjuk! Hány ilyen törtet lehet felírni? Válasszuk ki közülük az

   a) 1-nél kisebbeket, *b)* 1-gyel egyenlőket, *c)* 1-nél nagyobbakat!

7. Adjunk meg olyan $\frac{\triangle}{\square}$ alakú törtszámokat, amelyekre igaz, hogy

   a) 1-nél nagyobbak, valamint $3 \le \triangle \le 8$ és $4 \le \square \le 10$;

   b) 1-nél kisebbek, valamint $5 \le \triangle \le 13$ és $3 \le \square \le 9$;

   c) 1-gyel egyenlők, valamint $7 \le \triangle < 14$ és $9 < \square < 17$!

8. Írjuk a törteket vegyes szám alakba!

   a) $\frac{7}{3}$; *b)* $\frac{19}{15}$; *c)* $\frac{17}{5}$; *d)* $\frac{19}{7}$; *e)* $\frac{11}{4}$; *f)* $\frac{24}{9}$; *g)* $\frac{23}{6}$.

9. Írjuk át a következő vegyes számokat tört alakba!

   a) $1\frac{2}{3}$; *b)* $5\frac{1}{2}$; *c)* $2\frac{1}{4}$; *d)* $1\frac{3}{7}$; *e)* $3\frac{4}{5}$; *f)* $7\frac{1}{2}$; *g)* $5\frac{2}{3}$.

Rejtvény

Malacka, Micimackó és Füles labdázik. Mindenki mindenkinek ugyanannyiszor dobja a labdát. Az összes dobás hányad részében dobja Malacka Micimackónak a labdát?

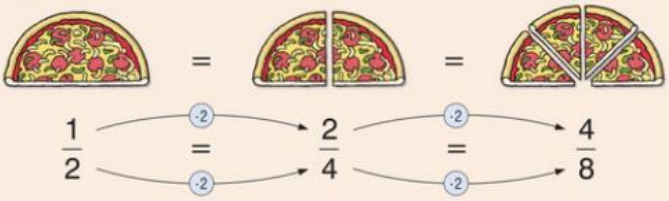
3. Törtek bővítése és egyszerűsítése

1. példa

Peti egy fél pizzát kapott vacsorára. Először két egyenlő részre vágta, majd a keletkezett darabokat is két egyenlő részre vágta. Írjuk fel törtekkel a pizza mennyiségét az egyes esetekben!



Megoldás



Az első vágáskor az $\frac{1}{2}$ pizzából $\frac{2}{4}$, a második során pedig $\frac{4}{8}$ pizza keletkezik. A pizza teljes nagysága a vágások során nem változik.



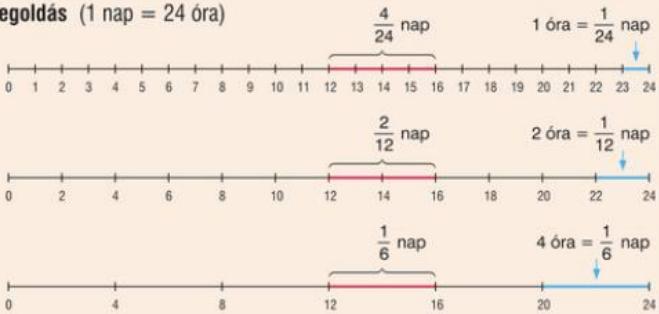
4-gyel bővítettünk

Bővítéskor a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a (0-tól különböző) számmal szorozzuk. Ekkor a tört értéke nem változik.

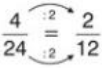
2. példa

Vince 12 órától 16 óráig úszóedzésen volt. A nap hányad részét töltötte az edzésen?

Megoldás (1 nap = 24 óra)



Vince a nap $\frac{4}{24} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ részét töltötte az edzésen.



2-vel egyszerűsítettünk



4-gyel egyszerűsítettünk

Egyszerűsítéskor a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a (0-tól különböző) számmal osztjuk. Ekkor a tört értéke nem változik.

Bővítéskor és egyszerűsítéskor a tört értéke nem változik.

3. példa

a) Egyszerűsítsük a $\frac{15}{20}$ törtet 5-tel!

b) Egyszerűsítsük a $\frac{24}{36}$-ot a lehető legnagyobb számmal!

c) Bővítsük a $\frac{4}{5}$-öt huszadokra!

d) Bővítsük a $\frac{9}{10}$-et úgy, hogy a számlálója 45 legyen!

Megoldás

a) 5-tel egyszerűsíteni azt jelenti, hogy a számlálót és a nevezőt is elosztjuk 5-tel, azaz $\frac{15}{20} \overset{:5}{=} \frac{3}{4}$.

b) $\frac{24}{36} \overset{:2}{=} \frac{12}{18} \overset{:2}{=} \frac{6}{9} \overset{:3}{=} \frac{2}{3}$, vagy $\frac{24}{36} \overset{:6}{=} \frac{4}{6} \overset{:2}{=} \frac{2}{3}$, vagy $\frac{24}{36} \overset{:12}{=} \frac{2}{3}$.

Mivel a $2 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot 2 = 12$, egyszerűsíthetünk 12-vel egy lépésben. A $\frac{2}{3}$ tovább nem egyszerűsíthető.

c) Ha huszadokra bővítünk, akkor a tört nevezője 20 lesz.

$\frac{4}{5} \overset{\cdot 4}{=} \frac{16}{20}$ A nevezőt 4-gyel kell szorozni, ezért a számlálónak is a 4-szeresét kell venni.



d) Ahhoz, hogy a számláló 45 legyen, a 9-et 5-tel kell szorozni, ezért a nevezőt is 5-tel szorozzuk: $\frac{9}{10} \overset{\cdot 5}{=} \frac{45}{50}$.

Az egyszerűsítések és a bővítések során a törtek értéke nem változott.

Feladatok

1. Írjunk legalább 5 olyan törtet, amely

a) $\frac{1}{3}$-dal; *b)* $\frac{2}{5}$-del; *c)* $\frac{4}{7}$-del; *d)* $\frac{10}{20}$-dal; *e)* $\frac{9}{12}$-del egyenlő!

2. Milyen számot írhatunk a ○ és a □ helyére, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) $\frac{14}{35} = \frac{○}{5}$; *b)* $\frac{25}{40} = \frac{5}{○}$; *c)* $\frac{26}{39} = \frac{○}{3}$; *d)* $\frac{○}{60} = \frac{9}{12} = \frac{3}{□}$.

3. Egy kisgyerek 12 lufival a kezében sétál. A 12 lufiból 3 elszáll. A léggömböknek hányad része szállt el? Hányad része maradt a kezében? Írjuk fel a legegyszerűbb alakban!



4. Egyszerűsítsük a törteket!

a) $\frac{4}{2}$; *b)* $\frac{12}{3}$; *c)* $\frac{30}{5}$; *d)* $\frac{48}{12}$; *e)* $\frac{66}{11}$; *f)* $\frac{63}{9}$.

5. Egyszerűsítsük a törteket a lehető legnagyobb számmal!

a) $\frac{8}{12}$; *b)* $\frac{16}{20}$; *c)* $\frac{15}{25}$; *d)* $\frac{40}{60}$; *e)* $\frac{30}{48}$; *f)* $\frac{56}{100}$; *g)* $\frac{75}{100}$.

6. Gábor a 24 órából 8-at alszik. Hányad részét alussza át a napnak?

7. Írjuk fel az összes olyan törtet, amelynek számlálójában a 6 osztói, nevezőjében pedig a 8 osztói szerepelnek, majd egyszerűsítsünk!

8. Milyen számokat írhatunk a □ helyére, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) $\frac{10}{7} = \frac{80}{\square}$; *b)* $\frac{5}{6} = \frac{\square}{30}$; *c)* $\frac{9}{17} = \frac{18}{\square}$; *d)* $\frac{2}{9} = \frac{\square}{63}$; *e)* $\frac{13}{12} = \frac{\square}{36}$.

9. Egyszerűsítsük vagy bővítsük a $\frac{2}{3}$; $\frac{70}{150}$ és $\frac{3}{5}$ törteket úgy, hogy mindegyiknek 15 legyen a nevezője! Írjuk növekvő sorrendbe!

10. Egyszerűsítsük vagy bővítsük a következő törteket úgy, hogy

a) mindegyiknek 12 legyen a nevezője: $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{40}{48}$!

b) mindegyiknek 20 legyen a számlálója: $\frac{1}{2}$; $\frac{60}{90}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{10}{7}$; $\frac{2}{5}$!

11. Írjunk az üres helyekre számokat úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen!

a) $\frac{10}{4} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{10}$; *b)* $\frac{6}{15} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{25}$; *c)* $\frac{21}{35} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{10}$; *d)* $\frac{55}{77} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{35}$.

12. Melyik esetben egyenlő a két tört?

a) $\frac{4}{7}$; $\frac{30}{35}$; *b)* $\frac{4}{5}$; $\frac{20}{25}$; *c)* $\frac{9}{12}$; $\frac{21}{28}$; *d)* $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$.

13. Melyik lehet Panni nyaklánca, ha azon a szívecskék kétharmada lila?



Rejtvény

Hat gyufaszál segítségével kiraktuk az $\frac{1}{7}$ törtet. Helyezzünk át egy gyufaszálat úgy, hogy $\frac{1}{3}$-ot kapjunk!



4. A törtek helye a számegyenesen



A **kettedek** helye a számegyenesen: az egységet **két egyenlő** részre osztjuk, és az osztáspontokhoz írjuk a megfelelő törteket.



A **harmadok** helye a számegyenesen: az egységet **három egyenlő** részre osztjuk, és az osztáspontokhoz írjuk a törteket.



A **negyedek** helye a számegyenesen: az egységet **négy egyenlő** részre osztjuk, és az osztáspontokhoz írjuk a törteket.



A nagyobb nevezőjű törteket a fentiekhez hasonlóan ábrázolhatjuk.

1. példa

Jelöljük be egy számegyenesen a $\frac{2}{3}$ és a $\frac{3}{4}$ törteket!

Megoldás

Közös nevezőre hozás:

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

Mindkét nevezőnek, a 3-nak és a 4-nek is többszöröse a 12, ezért bővítsük a törteket úgy, hogy mindkettő nevezője 12 legyen!

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ **Közös nevezőre hoztuk a törteket.**

A 0 és 1 közötti távolságot osszuk 12 egyenlő részre, majd jelöljük be a számok helyét!



A számegyenesről leolvashatjuk, hogy $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Számegyenesen való ábrázolással összehasonlíthatjuk a törteket.

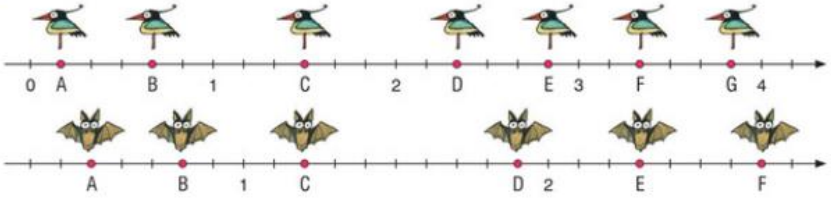


Feladatok

1. Jelöljük számegyenesen a számok helyét!

a) $\frac{2}{5}$; $\frac{10}{5}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{6}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{6}$; $\frac{11}{6}$; $\frac{12}{6}$; c) $\frac{3}{10}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{4}{10}$; $\frac{17}{10}$; $\frac{13}{10}$; $\frac{10}{10}$.

2. Mely számok helyén állnak az állatok?



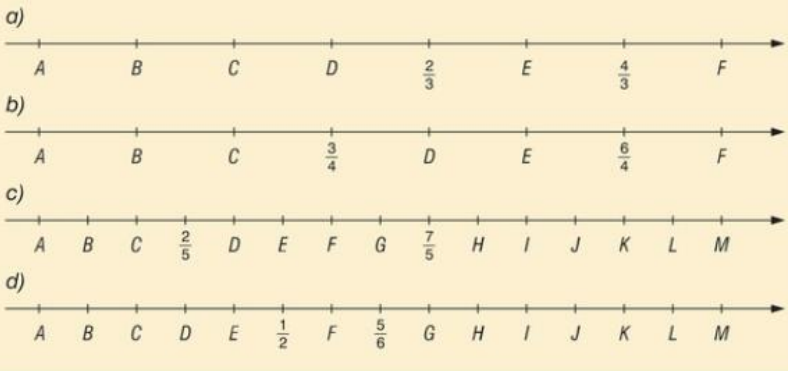
3. Ábrázoljuk ugyanazon a számegyenesen a két törtet!

a) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; c) $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{8}$; d) $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$.

4. Adjuk meg egy számegyenesen a törtek helyét! Mindhárom feladathoz külön számegyenest készítsünk!

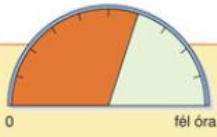
a) $\frac{7}{6}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{4}$; c) $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{6}{5}$.

5. Melyik betű jelöli a 0 és az 1 helyét a számegyenesen?



Rejtvény

Az ábrán látható parkolóóra narancs színű része a hátralévő időt jelzi. Hány perc van még hátra a parkolási időből?



5. A törtek összehasonlítása

Az egyenlő nevezőjű pozitív törtek összehasonlítása

1. példa

Melyik nagyobb: *a)* $\frac{2}{6}$ vagy $\frac{5}{6}$; *b)* $\frac{2}{5}$ vagy $\frac{3}{5}$?

Megoldás

Jelöljük a törteket egy körön! Ábrázoljuk a törteket számegyenesen!

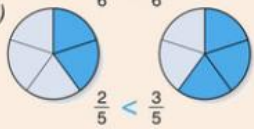
a)



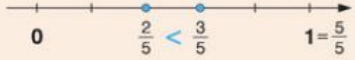
$\frac{2}{6} < \frac{5}{6}$



b)



$\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$



Egyenlő nevezőjű pozitív törtek közül az a nagyobb, amelyiknek a számlálója nagyobb.

Az egyenlő számlálójú pozitív törtek összehasonlítása

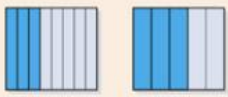
2. példa

Melyik nagyobb: *a)* $\frac{3}{8}$ vagy $\frac{3}{5}$; *b)* $\frac{2}{3}$ vagy $\frac{2}{7}$?

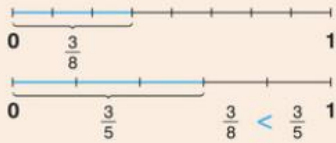
Megoldás

Jelöljük a törteket egy téglalapon! Ábrázoljuk a törteket számegyenesen!

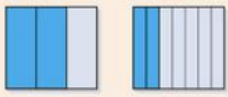
a)



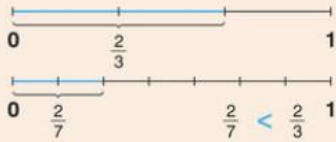
$\frac{3}{8} < \frac{3}{5}$



b)



$\frac{2}{3} > \frac{2}{7}$



Egyenlő számlálójú pozitív törtek közül az a nagyobb, amelyiknek a nevezője kisebb.

Különböző nevezőjű és számlálójú pozitív törtek összehasonlítása

Ha különböző nevezőjű és számlálójú törteket kell összehasonlítanunk, célszerű a megadott törteket úgy bővíteni vagy egyszerűsíteni, hogy a nevezőjük vagy a számlálójuk egyenlő legyen.

3. példa

Hasonlítsuk össze a $\frac{2}{3}$ és a $\frac{3}{4}$ törteket!

Megoldás

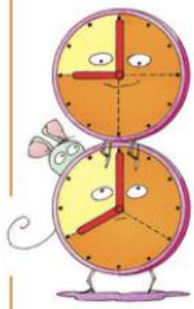
Mindkét nevezőnek, a 3-nak és a 4-nek is többszöröse a 12, ezért bővítsük úgy a törteket, hogy a közös nevező 12 legyen:

$\frac{2}{3} \overset{\cdot 4}{=} \frac{8}{12}$ **A törteket közös nevezőre hoztuk.** $\frac{3}{4} \overset{\cdot 3}{=} \frac{9}{12}$

Mivel $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$, ezért $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Számegyenesen ábrázolva:





Azonos számlálójú törteket is össze tudunk hasonlítani, ezért azt is megtehetjük, hogy a törteket bővítéssel közös számlálóra hozzuk.

4. példa

Hasonlítsuk össze a $\frac{3}{13}$ és $\frac{5}{21}$ törteket!

Megoldás

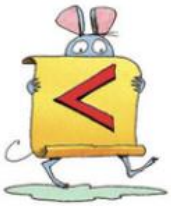
$\frac{3}{13} \overset{\cdot 5}{=} \frac{15}{65}$ **A törteket közös számlálóra hoztuk.** $\frac{5}{21} \overset{\cdot 3}{=} \frac{15}{63}$

Mivel $\frac{15}{65} < \frac{15}{63}$, ezért $\frac{3}{13} < \frac{5}{21}$.

A feladatban megadott törtek esetén egyszerűbb meghatározni a közös számlálót, mint megkeresni a közös nevezőt.

Törteket összehasonlíthatunk közös nevezőre vagy közös számlálóra hozással.

Sok esetben a törtek értelmezése alapján is eldönthetjük, hogy melyik tört nagyobb.



5. példa

Melyik nagyobb, a $\frac{2000}{2001}$ vagy a $\frac{2001}{2000}$?

Megoldás

A számlálót és a nevezőt összehasonlítva a törtekről el tudjuk dönteni, hogy 1-nél nagyobbak vagy kisebbek.

Mivel $\frac{2000}{2001} < 1$ és $1 < \frac{2001}{2000}$, ezért $\frac{2000}{2001} < \frac{2001}{2000}$.

A törteket felírhatjuk vegyes szám alakban is:

$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

$\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Mivel $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, ezért

$1\frac{1}{4} < 1\frac{1}{3}$.

6. példa

Melyik kisebb, az $\frac{5}{4}$ vagy a $\frac{4}{3}$?

Megoldás

Vizsgáljuk meg, hogy a törtek mennyivel nagyobbak az 1 egésznél!



$\frac{5}{4} < \frac{4}{3}$



Az $\frac{5}{4}$ az 1 egésznél $\frac{1}{4}$-del nagyobb.

A $\frac{4}{3}$ az 1 egésznél $\frac{1}{3}$-dal nagyobb.

Mivel $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, ezért $\frac{5}{4} < \frac{4}{3}$.

7. példa

Hasonlítsuk össze a $\frac{7}{8}$ és a $\frac{8}{9}$ törteket!

Megoldás

Vizsgáljuk meg, hogy a törtek mennyivel kisebbek az 1 egésznél!



A $\frac{7}{8}$ tört $\frac{1}{8}$-dal kisebb, mint az 1 egész.



A $\frac{8}{9}$ tört $\frac{1}{9}$-del kisebb, mint az 1 egész.

Mivel az $\frac{1}{9} < \frac{1}{8}$, ezért a $\frac{8}{9}$-hez kell kevesebbet hozzáadnunk, hogy 1 egészet kapjunk. Tehát $\frac{7}{8} < \frac{8}{9}$.

Hasonló gondolatmenettel döntsük el, hogy igaz-e az alábbi egyenlőtlenség:

$\frac{2008}{2009} < \frac{2006}{2007}$!

Törteket összehasonlíthatunk úgy is, hogy ugyanahhoz a számhoz viszonyítjuk őket.



Feladatok

1. Melyik tört a kisebb? Válaszunkat indokoljuk!

a) $\frac{5}{7}$ vagy $\frac{5}{9}$; *b)* $\frac{5}{6}$ vagy $\frac{6}{7}$; *c)* $\frac{7}{13}$ vagy $\frac{5}{13}$; *d)* $\frac{8}{7}$ vagy $\frac{10}{9}$;

e) $\frac{5}{8}$ vagy $\frac{4}{7}$; *f)* $\frac{3}{5}$ vagy $\frac{4}{9}$; *g)* $\frac{47}{45}$ vagy $\frac{34}{35}$; *h)* $\frac{1999}{2000}$ vagy $\frac{2000}{2001}$?

2. Írjunk természetes számokat a □ helyére úgy, hogy teljesüljön a reláció! Hány megoldást találunk? Ha lehet, egyszerűsítsük, vagy alakítsuk vegyes számmá!

a) $\frac{\square}{8} < 1$; *b)* $\frac{8}{\square} < 1$; *c)* $1 \le \frac{\square}{8} \le 2$; *d)* $\frac{8}{\square}$ egész szám legyen!

3. Állítsuk növekvő sorrendbe a törteket:

a) egy hatod, hét ötöd, két harmad, tizenkilenc tized, tizenöt tizenötöd, egy ketted;

b) két heted, tizenegy nyolcad, három negyed, öt ötöd, huszonegy hatod, nyolc kilenced!

4. Melyik tört a nagyobb? Írjuk le, hogyan döntöttük el!

a) $\frac{30}{31}$ vagy $\frac{40}{41}$; *b)* $\frac{10}{9}$ vagy $\frac{15}{14}$; *c)* $\frac{9999}{10\,000}$ vagy $\frac{10\,000}{9999}$;

d) $\frac{2}{7}$ vagy $\frac{7}{9}$; *e)* $\frac{17}{18}$ vagy $\frac{7}{8}$; *f)* $\frac{23}{22}$ vagy $\frac{18}{17}$?

5. Milyen pozitív egész számokat írhatunk a △ helyébe, hogy teljesüljön a reláció?

a) $\frac{\triangle}{12} > \frac{5}{12}$; *b)* $\frac{\triangle}{7} < \frac{8}{7}$; *c)* $\frac{13}{\triangle} < \frac{13}{8}$; *d)* $\frac{25}{18} < \frac{25}{\triangle}$.

6. Állapítsuk meg az agárversenyen a versenyzők befutási sorrendjét, ha az időeredményük

A: $1\frac{2}{3}$ perc; *B*: $1\frac{1}{10}$ perc; *C*: $1\frac{5}{6}$ perc; *D*: $1\frac{3}{5}$ perc; *E*: $1\frac{11}{15}$ perc!

7. Milyen pozitív egész számokat írhatunk a ○ helyébe, hogy teljesüljön a reláció?

a) $\frac{7}{17} < \frac{\bigcirc}{17} < \frac{9}{17}$; *b)* $\frac{13}{18} < \frac{\bigcirc}{18} < \frac{19}{18}$; *c)* $\frac{3}{14} < \frac{3}{\bigcirc} < \frac{3}{11}$; *d)* $\frac{10}{13} < \frac{10}{\bigcirc} < \frac{10}{9}$.

8. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

a) Azonos számlálójú pozitív törtek közül az a nagyobb, amelyiknek a nevezője kisebb.

b) Két azonos nevezőjű pozitív tört közül a nagyobbnak nagyobb a számlálója.

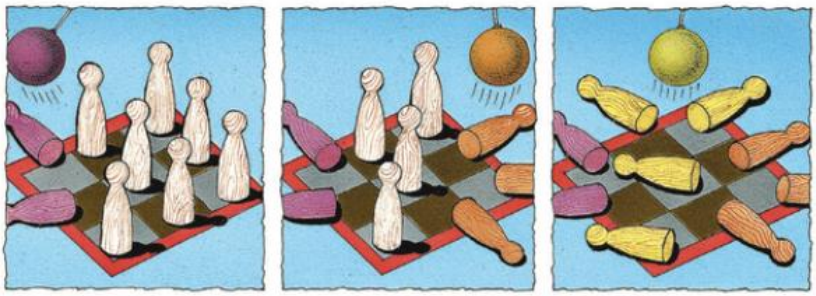
c) Két pozitív tört közül az a kisebb, amelyiknek a számlálója és a nevezője is kisebb.

d) Azonos nevezőjű pozitív törtek közül az a kisebb, amelyiknek a számlálója nagyobb.

Rejtvény

Keressünk olyan törteket, amelyek számlálója és nevezője is kétjegyű, továbbá a $\frac{3}{20}$ és a $\frac{4}{25}$ között van a helyük a számegyenesen!

6. Egyenlő nevezőjű törtek összeadása és kivonása



A tekejátékos az első dobással a bábuk két kilenced, a másodikkal három kilenced, a harmadikkal négy kilenced részét döntötte fel.

$$\frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

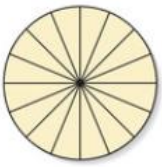
1. példa

Ákos születésnapi tortáját 16 egyforma szeletre vágták. A szeletekből Ákos egyet, Eni hármat, Soma ötöt evett meg. A torta hányad részét ették meg a gyerekek?

Megoldás

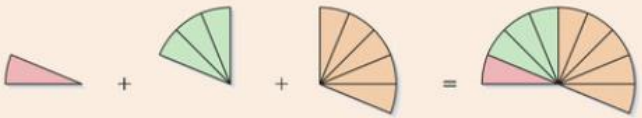
Osszuk a tortát 16 egyenlő részre, így egy szelet a torta $\frac{1}{16}$ része.

Jelöljük különböző színekkel a gyerekek által megevett szeleteket!



16 tizenhatod

$\frac{16}{16}$



1 tizenhatod + 3 tizenhatod + 5 tizenhatod = 9 tizenhatod

$$\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{16} = \frac{1+3+5}{16} = \frac{9}{16}$$

A gyerekek a torta $\frac{9}{16}$ részét ették meg.

$$\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{16} = \frac{1+3+5}{16} = \frac{9}{16}$$

Egyenlő nevezőjű törteket úgy adunk össze, hogy a számlálókat összeadjuk, ez lesz az összeg számlálója, a közös nevező pedig a nevezője.

2. példa

A 16 szeletes torta $\frac{9}{16}$ részét megették a gyerekek.

a) A torta hányad része maradt meg?

b) Ezután vendégek érkeztek, és 4 szeletet elfogyasztottak. A torta hányad részét hagyták meg a vendégek?

Megoldás

Szemléltessük rajzon a kivonásokat!

a)



$$\frac{16}{16} - \frac{9}{16} = \frac{16-9}{16} = \frac{7}{16}$$

A torta $\frac{7}{16}$ része maradt meg.

b)



$$\frac{7}{16} - \frac{4}{16} = \frac{7-4}{16} = \frac{3}{16}$$

A torta $\frac{3}{16}$ részét hagyták meg a vendégek.

$$\frac{7}{16} - \frac{4}{16} = \frac{7-4}{16} = \frac{3}{16}$$

Egyenlő nevezőjű törtek kivonásakor a kisebbítendő számlálójából kivonjuk a kivonandó számlálóját, ez lesz a különbség számlálója, a közös nevező pedig a nevezője.

Azonos nevezőjű törtek összeadásakor és kivonásakor ugyanolyan részekkel végzünk műveleteket. Ezért elegendő a számlálókkal elvégezni az összeadást vagy a kivonást, a nevező változatlan marad.

Feladatok

1. Végezzük el a műveleteket!

a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$; *b)* $\frac{6}{7}-\frac{4}{7}$; *c)* $\frac{5}{11}+\frac{3}{11}+\frac{1}{11}$; *d)* $\frac{10}{11}-\frac{7}{11}$;

e) $\frac{8}{21}+\frac{5}{21}+\frac{6}{21}$; *f)* $\frac{18}{21}-\frac{7}{21}$; *g)* $\frac{7}{9}+\frac{13}{9}-\frac{20}{9}$; *h)* $\frac{9}{10}-\frac{5}{10}+\frac{6}{10}$.

2. Végezzük el a műveleteket!

a) $1+\frac{2}{3}$; *b)* $1+\frac{7}{9}$; *c)* $1+\frac{11}{18}+\frac{3}{18}$; *d)* $\frac{2}{25}+1+\frac{7}{25}$;

e) $\frac{8}{30}+\frac{13}{30}+1$; *f)* $1-\frac{13}{18}$; *g)* $1-\frac{2}{15}-\frac{7}{15}$; *h)* $1+\frac{12}{17}-\frac{8}{17}$.

3. Melyik nagyobb, és mennyivel?

a) $\frac{11}{9}$ vagy $\frac{2}{9}$; *b)* $\frac{7}{13}$ vagy $\frac{10}{13}$; *c)* $\frac{11}{10}$ vagy $1\frac{5}{10}$; *d)* $2\frac{3}{10}$ vagy $\frac{19}{10}$?

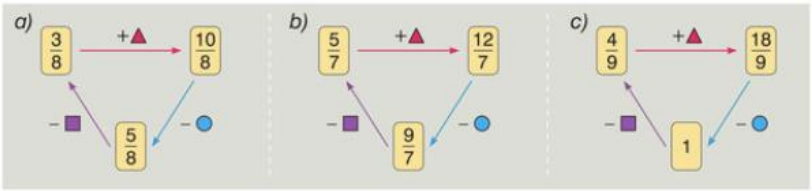
4. Mennyit kell adni a $\frac{3}{7}$-hez, hogy

a) $\frac{5}{7}$-et; *b)* 1-et; *c)* $\frac{3}{7}$-et; *d)* $\frac{19}{7}$-et kapjunk?

5. *a)* Mennyivel kisebb a $\frac{3}{10}$ a $\frac{7}{10}$-nél? *b)* Mennyivel nagyobb az 1 a $\frac{3}{10}$-nél?

c) Mennyivel nagyobb a $\frac{8}{5}$ az 1-nél? *d)* Mennyivel kisebb az 1 a $\frac{11}{8}$-nál?

6. Mely számok kerüljenek a jelek helyére?



7. *a)* Két tört összege $\frac{13}{15}$, az egyik tört a $\frac{4}{15}$. Melyik a másik tört?

b) Melyik az a szám, amelyik az $\frac{5}{8}$-nál $\frac{7}{8}$-dal nagyobb?

c) Két szám különbsége $\frac{5}{9}$, a kivonandó $\frac{3}{9}$. Mennyi a kisebbítendő?

d) Két szám különbsége $\frac{4}{13}$, a kisebbítendő $\frac{11}{13}$. Mennyi a kivonandó?



8. Írjuk át a következő vegyes számokat törtté!

a) $4\frac{5}{6}$; *b)* $7\frac{2}{3}$; *c)* $10\frac{3}{5}$; *d)* $8\frac{2}{9}$; *e)* $15\frac{1}{4}$; *f)* $23\frac{5}{7}$.

9. A következő törteket írjuk vegyes szám alakba!

a) $\frac{17}{3}$; *b)* $\frac{10}{4}$; *c)* $\frac{35}{8}$; *d)* $\frac{13}{5}$; *e)* $\frac{29}{7}$; *f)* $\frac{400}{11}$.

10. Melyik két tört egyenlő?

a) $2\frac{2}{3}$; $1\frac{5}{6}$; *b)* $1\frac{7}{8}$; $1\frac{7}{6}$; *c)* $3\frac{1}{2}$; $\frac{63}{18}$; *d)* $5\frac{1}{3}$; $\frac{32}{6}$.

11. Hány kilométert tettünk meg a 3 órás vártúrán, ha az első órában $4\frac{3}{20}$ km-t, a második órában $3\frac{7}{20}$ km-t, a harmadik órában $1\frac{17}{20}$ km-t tettünk meg?

12. Végezzük el az összeadásokat!

a) $3+\frac{2}{7}+1$; *b)* $2\frac{3}{4}+1\frac{1}{4}$; *c)* $3\frac{4}{7}+2\frac{6}{7}$; *d)* $2\frac{3}{8}+3\frac{5}{8}+4\frac{7}{8}$.

13. Végezzük el a műveleteket!

a) $2\frac{3}{11}+3\frac{5}{11}-1\frac{10}{11}$; *b)* $7\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}-6\frac{1}{4}$; *c)* $5\frac{9}{20}-3\frac{11}{20}+10\frac{1}{20}$.

14. Festéskor a három 1 literes festékes dobozban a rajzon látható mennyiség maradt. Hány liter festékünk van még? (➡)



15. Egy szőnyeg szélessége $2\frac{3}{5}$ m, hosszúsága $3\frac{3}{5}$ m. Hány métert szegtem körbe, ha még csak a felével készültem el?

16. Zsolti a 12 méter hosszú járdáról lapátolja a havat. Hány méterrel több van még hátra, mint amennyivel már végzett, ha eddig $5\frac{1}{4}$ m-t tisztított meg?



17. A 20 liter bodzaszörpből elfogyott $\frac{18}{5}$ liter. Hány liter maradt?

18. Írjuk fel a sorozatok további két elemét! Ahol lehet, írjuk át vegyes szám alakba!

a) $\frac{3}{5}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{12}{5}$; ...; *b)* $1\frac{1}{3}$; $2\frac{2}{3}$; 4; $5\frac{1}{3}$; ...; *c)* $10\frac{3}{4}$; 9; $7\frac{1}{4}$; $5\frac{2}{4}$; ....

Rejtvény

Egy 1 literes edénybe először $\frac{3}{5}$ liter vizet, majd $\frac{4}{5}$ liter vizet öntöttünk. Hány liter víz van benne?

7. Különböző nevezőjű törtek összeadása és kivonása



1. példa

A város főterén kétféle virágot ültettek. A terület $\frac{2}{5}$ részére tulipánt, $\frac{1}{2}$ részére pedig begóniát.

a) A terület hányad részét ültették be virággal?

b) Mekkora részre lehet még virágot ültetni?

Megoldás (a)

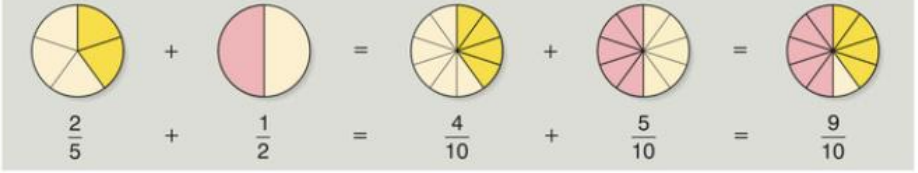
$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = ?$

Egyenlő nevezőjű törteket tudunk összeadni, ezért hozzuk közös nevezőre a törteket! Ezt most bővítéssel tehetjük meg.

Mivel $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ és $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, ezért $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$.

A terület $\frac{9}{10}$ részét ültették be virággal.

Az összeadás szemléltetése:



Megoldás (b)

A rajzról leolvasható, hogy a terület egy tized része maradt üresen, ennyit lehet még beültetni. Ezt számítással is igazolhatjuk:

Mivel $1 = \frac{10}{10}$, ezért $1 - \frac{9}{10} = \frac{10}{10} - \frac{9}{10} = \frac{10-9}{10} = \frac{1}{10}$.

2. példa

Mennyi a $\frac{8}{10} - \frac{3}{5}$ különbség?

1. megoldás

Vegyük észre, hogy $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, ezért most egyszerűsítéssel is közös nevezőre hozhatjuk a törteket.

A különbség: $\frac{8}{10} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$.

A közös nevező: 5.

$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

egyszerűsítés

2. megoldás

Természetesen bővítéssel is közös nevezőre hozhatjuk a törteket.

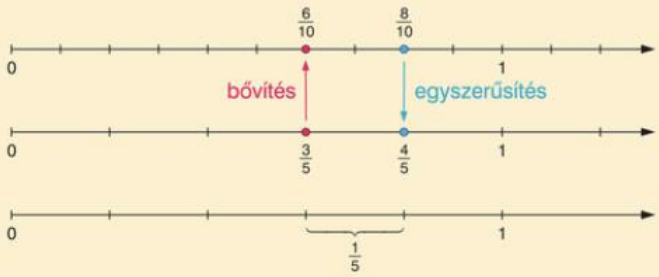
Mivel $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, ezért $\frac{8}{10} - \frac{3}{5} = \frac{8}{10} - \frac{6}{10} = \frac{8-6}{10} = \frac{2}{10}$.

A végeredmény egyszerűsíthető: $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

A közös nevező: 10.

$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

bővítés



Különböző nevezőjű törtek összeadásakor és kivonásakor a törteket közös nevezőre hozzuk, majd elvégezzük a műveletet.



A vegyes számok összeadását visszavezetjük a különböző nevezőjű törtek összeadására.

Adjuk össze külön az egészeket és külön a törteket, majd vegyük ezek összegét!

$$3\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3} = \left(3 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{2}{3}\right) = 3 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 4 + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = 4\frac{7}{6} = 5\frac{1}{6}$$

Úgy is eljárhatunk, hogy a vegyes számokat törtté alakítjuk, majd ezeket összeadjuk.

$$3\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3} = \frac{7}{2} + \frac{5}{3} = \frac{21}{6} + \frac{10}{6} = \frac{31}{6} = 5\frac{1}{6}$$

Feladatok

1. Végezzük el az összeadásokat!

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$; c) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$; d) $\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$;

e) $\frac{3}{4}+\frac{4}{7}$; f) $\frac{4}{5}+\frac{3}{8}$; g) $\frac{5}{7}+\frac{1}{3}$; h) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$.

2. Végezzük el a kivonásokat!

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$; b) $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$; c) $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$; d) $\frac{2}{3}-\frac{5}{9}$;

e) $\frac{3}{4}-\frac{7}{12}$; f) $\frac{4}{5}-\frac{11}{20}$; g) $\frac{5}{8}-\frac{7}{40}$; h) $\frac{5}{6}-\frac{9}{24}$.

3. Végezzük el a műveleteket!

a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$; b) $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$; c) $\frac{2}{9}+\frac{1}{6}$; d) $\frac{7}{10}+\frac{8}{15}$;

e) $\frac{5}{6}-\frac{3}{8}$; f) $\frac{7}{12}+\frac{5}{8}$; g) $\frac{7}{9}-\frac{5}{12}$; h) $\frac{7}{20}-\frac{7}{30}$.

4. Végezzük el a műveleteket! (A közös nevezőt egyszerűsítéssel keressük meg!)

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$; b) $\frac{2}{3}-\frac{3}{9}$; c) $\frac{3}{4}-\frac{9}{12}$; d) $\frac{3}{5}+\frac{8}{20}$;

e) $\frac{5}{6}-\frac{12}{18}$; f) $\frac{5}{9}+\frac{6}{27}$; g) $\frac{8}{12}+\frac{3}{9}$; h) $\frac{15}{20}-\frac{3}{12}$.

5. Hány liter italunk lesz, ha összekeverünk $\frac{3}{4}$ liter ásványvizet és $\frac{1}{2}$ liter bodzaitalt?

6. Ma két műsort töltöttem föl az MP3 lejátszómra. Az egyik $\frac{11}{12}$ óra, a másik $\frac{19}{20}$ óra hosszú volt. Hány órányi műsort rögzítettem összesen?

7. Frédi a nyári szünet felét a nagyszüleinél, $\frac{2}{7}$ részét táborban, a többit otthon tölti. A szünet hányad részében lesz otthon?

8. Végezzük el fejben a műveleteket!

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$; d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}$;

e) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$; f) $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$; g) $\frac{7}{8}-\frac{1}{2}$; h) $\frac{15}{16}-\frac{5}{8}$.

9. Végezzük el a műveleteket!

a) $\frac{5}{12}-\frac{2}{5}$; b) $\frac{6}{7}+\frac{5}{6}$; c) $\frac{9}{10}-\frac{3}{4}$; d) $\frac{13}{16}-\frac{7}{12}$

e) $\frac{3}{20}+\frac{2}{30}$; f) $\frac{5}{36}+\frac{7}{24}$; g) $\frac{5}{8}-\frac{8}{32}$; h) $\frac{3}{18}+\frac{4}{24}$.

10. Egy pók háló szövésébe kezd. Az első órában elkészíti a háló $\frac{3}{8}$ részét, a második órában az $\frac{5}{12}$ részét. A háló hányad részét kell még megszőnie?

11. Egy könyvet négy nap alatt olvastam el. Az első napon elolvastam a $\frac{3}{20}$ részét, a második napon a $\frac{2}{5}$ részét, a harmadik napon az $\frac{1}{6}$ részét. A könyv hányad része maradt a negyedik napra? Hányadik napon olvastam legtöbbet?

12. Egy virágkertészet $\frac{2}{7}$ részén rózsa, $\frac{1}{6}$ részén gerbera, $\frac{5}{14}$ részén szegfű, a többi területen jácint van. A kertészet hányad részén van jácint?

13. A vízimanók az 5 napos sporttáborban az első nap $\frac{1}{2}$ km-t, majd minden nap $\frac{1}{5}$ km-rel többet úsztak, mint a megelőző napon. Hány kilométert úszott egy vízimanó 5 nap alatt?

14. Végezzük el a műveleteket!

a) $1\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$; *b)* $2\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}$; *c)* $1\frac{3}{8}+2\frac{5}{6}$; *d)* $2\frac{5}{8}+5\frac{7}{12}$;

e) $4\frac{5}{6}-3\frac{4}{5}$; *f)* $4\frac{1}{6}-3\frac{5}{8}$; *g)* $1\frac{5}{24}-2\frac{7}{12}$; *h)* $2\frac{3}{12}-1\frac{3}{4}$.

15. Melyik törtszámot kell a ○ helyére írni, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) $\bigcirc+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$; *b)* $\bigcirc-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{7}{10}-\bigcirc=\frac{1}{5}$;

d) $\frac{8}{9}+(1-\bigcirc)=1\frac{5}{9}$; *e)* $1\frac{1}{8}+\bigcirc=1\frac{3}{4}$; *f)* $\frac{17}{18}-\left(\frac{1}{2}+\bigcirc\right)=\frac{1}{3}$.

16. Végezzük el a műveleteket!

a) $1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$; *b)* $5-\frac{7}{4}-\frac{4}{3}$; *c)* $\frac{3}{8}+1-\frac{4}{3}$; *d)* $1+\frac{7}{36}-\frac{4}{9}$;

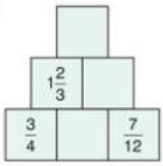
e) $\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{14}\right)$; *f)* $\left(3\frac{1}{2}-1\frac{5}{18}\right)-\left(\frac{5}{9}+\frac{3}{4}\right)$; *g)* $4\frac{2}{5}-\left(1\frac{2}{7}-\frac{3}{35}\right)$.

17. Mi lehet a szabály? Írjuk le a megkezdett sorozatok következő három tagját!

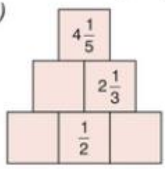
a) $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{4}$; 2; ...; *b)* $3\frac{2}{5}$; $3\frac{4}{5}$; $4\frac{1}{5}$; ...; *c)* $4\frac{2}{3}$; $4\frac{1}{6}$; $3\frac{2}{3}$; ....

18. Töltsük ki a számpiramist úgy, hogy mindegyik négyzetben az alatta lévő két négyzetben szereplő számok összege álljon!

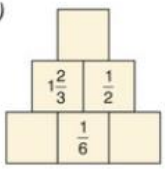
a)



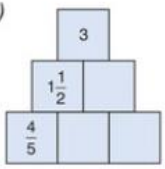
b)



c)



d)



19. Végezzük el a műveleteket!

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{5}{4}$; *b)* $\frac{3}{8}+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}$; *c)* $\frac{1}{2}+\frac{4}{9}-\frac{7}{18}$; *d)* $\frac{9}{7}-\frac{7}{9}+\frac{1}{3}$.

20. Végezzük el minél egyszerűbben az összeadásokat!

a) $\frac{3}{10}+\frac{2}{3}+\frac{7}{10}$; *b)* $\frac{5}{12}+\frac{1}{3}+\frac{3}{12}$; *c)* $\frac{3}{8}+\frac{2}{7}+\frac{1}{8}+\frac{5}{7}$.

21. Keressünk az üres mezők helyére olyan számokat, hogy a bűvös négyzet mindegyik sorában, mindegyik oszlopában és átlósan is ugyanannyi legyen a számok összege!

a)

$\frac{4}{15}$		
	$\frac{1}{3}$	
$\frac{8}{15}$		$\frac{2}{5}$

b)

$\frac{3}{4}$		$\frac{7}{12}$
	$\frac{1}{2}$	
		$\frac{1}{4}$

c)

	$\frac{4}{3}$	
	$\frac{3}{2}$	
	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{6}$

d)

$\frac{7}{6}$		
$\frac{8}{3}$	$1\frac{11}{12}$	$5\frac{2}{3}$

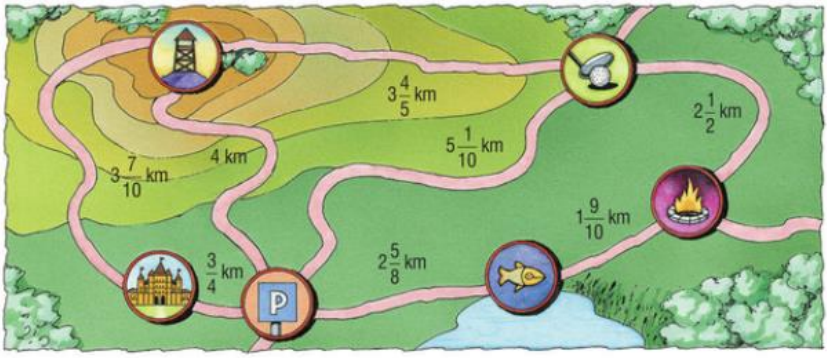
22. Milyen hosszú út vezet a parkolótól

a) a kastélyon át a magasleshez;

b) a halastó irányába a minigolfpályához;

c) a minigolfpálya érintésével a kastélyhoz?

d) Találjunk ki olyan útvonalat, amelyen haladva visszaérünk a parkolóhoz! Hány kilométert kell megtennünk?



Rejtvény

Egy naplopó ekként múlatja az időt: a napnak $\frac{5}{12}$ részét átalussza, $\frac{1}{4}$ részét evéssel, ivással és öltözködéssel tölti, $\frac{1}{8}$ részét a karosszékében ásítozással üti el, $\frac{3}{16}$ részét sétálásra fordítja, a maradék időben pedig dolgozik. A nap hányad részében dolgozik? Hány óra ez?

8. Tört szorzása természetes számmal

1. példa

A gyalogtúrán a diákok egy óra alatt a teljes út $\frac{4}{17}$ részét teszik meg.

A teljes út hányad részét teszik meg 3 óra alatt, ha végig egyenletes tempóban haladnak?

Megoldás

Készítsünk rajzot!



$$\boxed{3 \cdot \frac{4}{17}} = \frac{4}{17} + \frac{4}{17} + \frac{4}{17} = \frac{4+4+4}{17} = \boxed{\frac{3 \cdot 4}{17}} = \frac{12}{17}$$

A diákok 3 óra alatt az út $\frac{12}{17}$ részét teszik meg.



Ha a túra 17 km hosszú, akkor 1 óra alatt 4 km-t, 3 óra alatt 12 km-t, azaz a teljes út $\frac{12}{17}$ részét teszik meg.

Tört természetes számmal úgy szorzunk, hogy a tört számlálóját megszorozzuk a természetes számmal, a nevezőt pedig változatlanul leírjuk.

$$3 \cdot \frac{4}{17} = \frac{3 \cdot 4}{17} = \frac{12}{17}$$

(·3 felül, változatlan alul)

2. példa

Végezzük el a következő szorzásokat! *a)* $5 \cdot \frac{3}{10}$; *b)* $\frac{2}{15} \cdot 3$.

1. megoldás

a) $5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 3}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$; *b)* $\frac{2}{15} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

A tényezők felcserélhetők:

$$5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{10} \cdot 5$$

Az egyszerűsítés jelölése:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{3}{2} \qquad \frac{2}{\underset{5}{\cancel{15}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{1} = \frac{2}{5}$$

2. megoldás

Vegyük észre, hogy ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a természetes számmal elosztjuk a tört nevezőjét:

$$5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{10:5} = \frac{3}{2} \qquad \frac{2}{15} \cdot 3 = \frac{2}{15:3} = \frac{2}{5}$$

(változatlan felül, :5 és :3 alul)

Tört természetes számmal úgy is szorozhatunk, hogy a tört nevezőjét elosztjuk a természetes számmal, a számlálót pedig változatlanul leírjuk. Ezt a módszert csak akkor alkalmazhatjuk, ha a természetes szám osztója a nevezőnek.



3. példa

Végezzük el a következő szorzásokat! *a)* $\frac{7}{24}\cdot 9$; *b)* $10\cdot\frac{8}{15}$.

Megoldás

Ha a tört nevezőjének és a természetes számnak van közös osztója, akkor a közös osztóval egyszerűsíthetünk.

a) $\frac{7}{\cancel{24}_{8}}\cdot\overset{3}{\cancel{9}}=\frac{7}{8}\cdot 3=\frac{21}{8}=2\frac{5}{8}$; *b)* $\overset{2}{\cancel{10}}\cdot\frac{8}{\cancel{15}_{3}}=2\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$.

4. példa

Szorozzuk meg a $2\frac{1}{5}$-öt 3-mal!

Megoldás

1. módszer: $2\frac{1}{5}\cdot 3=\left(2+\frac{1}{5}\right)\cdot 3=2\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot 3=6+\frac{3}{5}=6\frac{3}{5}$.

2. módszer: $2\frac{1}{5}\cdot 3=\left(2+\frac{1}{5}\right)\cdot 3=\left(\frac{10}{5}+\frac{1}{5}\right)\cdot 3=\frac{11}{5}\cdot 3=\frac{33}{5}=6\frac{3}{5}$.

Vegyes számot kétféleképpen is szorozhatunk természetes számmal:

– vagy az egész részt és a törtrészt is szorozzuk a természetes számmal, majd a szorzatokat összeadjuk;

– vagy a vegyes számot törtté alakítjuk, és azt szorozzuk a természetes számmal.

Feladatok

1. Számítsuk ki a szorzatokat! Ahol tudjuk, egyszerűsítsük az eredményt!

a) $\frac{7}{5}\cdot 4$; *b)* $\frac{3}{8}\cdot 7$; *c)* $\frac{6}{5}\cdot 4$; *d)* $\frac{10}{3}\cdot 2$; *e)* $3\cdot\frac{9}{7}$; *f)* $4\cdot\frac{7}{8}$;

g) $\frac{11}{15}\cdot 5$; *h)* $\frac{4}{10}\cdot 5$; *i)* $\frac{7}{72}\cdot 9$; *j)* $\frac{3}{4}\cdot 8$; *k)* $10\cdot\frac{7}{5}$; *l)* $9\cdot\frac{2}{3}$.

2. Melyik számot írjuk a betűk helyére, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) $\frac{4}{5}\cdot a=\frac{28}{5}$; *b)* $\frac{7}{6}\cdot b=\frac{35}{6}$; *c)* $c\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{2}$; *d)* $d\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{3}$;

e) $\frac{e}{11}\cdot 3=\frac{18}{11}$; *f)* $\frac{f}{6}\cdot 3=\frac{5}{2}$; *g)* $g\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{2}$; *h)* $9\cdot\frac{h}{12}=3$.

3. Édesanya mindennap $\frac{3}{4}$ kg kenyeret vásárol. Hány kilogrammot vesz meg 6 nap alatt?

4. Egy négytagú család minden tagja naponta 2 és fél dl tejet iszik. Hány decilitert isznak meg négyen 3 nap alatt?

5. Egy csiga 10 percenként $\frac{2}{7}$ m-t haladt. Mennyi utat tett meg 50 perc alatt?

6. Egy lakópark festésekor a szobafestők naponta átlagosan $4\frac{2}{3}$ doboz festéket használtak fel. Hány doboz festék fogyott el májusban, ha 21 napot dolgoztak?

7. Vali átlagosan napi $\frac{5}{6}$ órát tanul. Hány órát tanul egy 30 napos hónapban?

8. Végezzük el a szorzásokat! Fogalmazzuk meg, hogy mit veszünk észre!

a) $\frac{6}{5} \cdot 5$ *b)* $\frac{2}{7} \cdot 7$ *c)* $\frac{6}{11} \cdot 11$ *d)* $\frac{9}{4} \cdot 4$ *e)* $2\frac{5}{6} \cdot 6$.

9. Melyik számot írjuk a betűk helyére, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) $\frac{4}{9} \cdot a = 4$; *b)* $\frac{10}{7} \cdot b = 10$; *c)* $\frac{8}{13} \cdot c = 8$; *d)* $\frac{d}{5} \cdot 5 = 9$; *e)* $\frac{e}{7} \cdot 0 = 0$.

10. Melyik nagyobb?

a) A $\frac{7}{5}$ tizenötszöröse vagy az $\frac{5}{4}$ tizenkétszerese?

b) A $\frac{6}{13}$ ötszöröse vagy az $\frac{5}{13}$ hatszorosa?

c) A $\frac{15}{21}$ háromszorosa vagy a $\frac{15}{14}$ kétszerese?



11. Mi lehet a szabály? Írjuk le a sorozatok következő három tagját!

a) $\frac{3}{5}; \frac{6}{5}; \frac{12}{5}; \ldots$; *b)* $\frac{2}{21}; \frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \ldots$; *c)* $\frac{3}{10}; \frac{3}{5}; \frac{6}{5}; \ldots$; *d)* $\frac{13}{9}; \frac{13}{3}; 13; \ldots$.

12. Számítsuk ki a szorzatokat!

a) $1\frac{1}{2} \cdot 2$; *b)* $4\frac{1}{5} \cdot 5$; *c)* $2\frac{5}{9} \cdot 7$; *d)* $10\frac{2}{3} \cdot 6$; *e)* $7\frac{3}{10} \cdot 6$; *f)* $5\frac{6}{11} \cdot 3$.

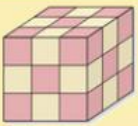
13. Váltsuk át az alábbi mennyiségeket! Ahol lehet, egyszerűsítsünk!

a) $\frac{1}{5}$ m = ... dm; *b)* $\frac{3}{2}$ m = ... cm; *c)* $\frac{6}{10}$ dkg = ... g;

d) $\frac{49}{100}$ kg = ... dkg; *e)* $\frac{1}{25}$ km = ... m; *f)* $\frac{5}{8}$ kg = ... g.

Rejtvény

A kocka minden lapjának $\frac{5}{9}$ részét befestettük. A kocka felületének hányad része van befestve?



3D
3D

9. Tört osztása természetes számmal

1. példa

Egy gyümölcstorta $\frac{3}{5}$ részét egyenlően szeretnénk elosztani Bandi és Ádám között. A torta hányad részét kapja Bandi?

Megoldás

Minden ötödrészt osszunk két egyenlő részre!

Bandi a 3 darab ötödrésznek a felét kapja, ez $\frac{3}{5} : 2$.



Minden ötödrész fele tizedrész, így 3 ötödrész fele 3 tizedrész, tehát $\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$.

Bandi a torta $\frac{3}{10}$ részét kapja.



BANDIÉ ÁDÁMÉ

változatlan

$\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{5 \cdot 2}$

$\cdot 2$

Törtet természetes számmal úgy osztunk, hogy a tört nevezőjét megszorozzuk a természetes számmal, a számlálót pedig változatlanul leírjuk.

2. példa

Egy kertben az ágyások $\frac{6}{7}$ részébe salátát, káposztát és paprikát ültettek egyenlő területekre. Az ágyások hányad részébe ültettek salátát?

Megoldás

Szemléltessük rajzon a megoldást!



A $\frac{6}{7}$ harmad része: $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6 : 3}{7} = \frac{2}{7}$.

Azért számolhattunk így, mert a 6-nak osztója a 3.

Az ágyások $\frac{2}{7}$ részébe ültettek salátát.

: 3

$\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$

változatlan

Törtet természetes számmal úgy is oszthatunk, hogy a tört számlálóját elosztjuk a természetes számmal, a nevezőt pedig változatlanul leírjuk.

Ezt a módszert csak akkor alkalmazhatjuk, ha a természetes szám osztója a számlálónak.

3. példa

Végezzük el a következő osztásokat: *a)* $2\frac{1}{5} : 3$; *b)* $4\frac{9}{10} : 7$!

Megoldás

Írjuk a vegyes számokat tört alakba, és végezzük el az osztásokat!

a) $2\frac{1}{5} : 3 = \frac{11}{5} : 3 = \frac{11}{15}$; *b)* $4\frac{9}{10} : 7 = \frac{49}{10} : 7 = \frac{7}{10}$.



Feladatok

1. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\frac{6}{7} : 3$; *b)* $\frac{4}{5} : 2$; *c)* $\frac{7}{4} : 3$; *d)* $\frac{10}{3} : 5$; *e)* $\frac{4}{9} : 3$; *f)* $\frac{2}{5} : 5$;

g) $\frac{3}{8} : 2$; *h)* $\frac{7}{10} : 7$; *i)* $\frac{12}{13} : 4$; *j)* $\frac{42}{13} : 7$; *k)* $\frac{3}{10} : 4$; *l)* $\frac{15}{8} : 7$.

2. *a)* 10 liter fűtőolaj $8\frac{3}{4}$ kg tömegű. Mennyi a tömege 1 liter fűtőolajnak?

b) 10 liter benzin tömege $7\frac{1}{2}$ kg. Mennyi a tömege 1 liter benzinnek?

c) 5 liter tej tömege $5\frac{3}{20}$ kg. Mennyi a tömege 1 liter tejnek?

d) 8 járólap tömege $19\frac{1}{5}$ kg. Mennyi a tömege 1 járólapnak?

3. Mit írhatunk a betűk helyére, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) $\frac{4}{7} : a = \frac{4}{49}$; *b)* $\frac{12}{11} : b = \frac{3}{11}$; *c)* $\frac{16}{3} : c = \frac{4}{3}$; *d)* $\frac{14}{3} : d = \frac{14}{15}$.

4. Az osztálykiránduláson az egyik napon 5 kg kenyér fogyott el. Ebédre fél kilogrammal több, mint vacsorára. Hány kilogramm kenyér fogyott el ebédkor?

5. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $2\frac{8}{9} : 13$; *b)* $4\frac{4}{7} : 8$; *c)* $4\frac{6}{13} : 2$; *d)* $5\frac{1}{3} : 2$.

6. Az atlétikaedzésen Laci $3\frac{1}{2}$ km-t 15 perc alatt, Zoli $5\frac{1}{4}$ km-t 21 perc alatt futott le.

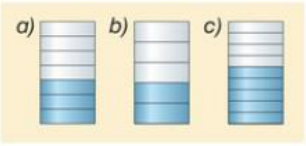
Melyikük futott gyorsabban?

7. Melyik nagyobb, és mennyivel?

a) $1\frac{3}{5} \cdot 4$ vagy $15\frac{3}{4} : 3$; *b)* $2\frac{6}{7} : 5$ vagy $\frac{3}{32} \cdot 4$?

10. Vegyes feladatok

1. Az ábrán látható henger alakú tartályokban folyadék van. Hányad részig vannak töltve a tartályok? (➡)



2. A sakktáblán lévő mezők hányad részét foglalják el a bábuk?

a)



b)



c)



3D

3. Hányad részei a következő szögek az egyenesszögnek?
a) 90°; *b)* 45°; *c)* 60°; *d)* 30°; *e)* 20°.

4. *a)* Hány fok a 60° negyede?
b) Hány fok a derékszög harmada?
c) Hány fok a teljesszög kilencede?

Súgó:



5. Egy órának hányad része a(z)
a) 1 perc; *b)* 2 perc; *c)* 3 perc; *d)* 4 perc; *e)* 5 perc;
f) 6 perc; *g)* 10 perc; *h)* 12 perc; *i)* 20 perc; *j)* 36 perc?

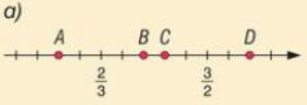
6. Hány perc a(z)
a) $\frac{1}{2}$ óra; *b)* $\frac{1}{4}$ óra; *c)* $\frac{3}{4}$ óra; *d)* $\frac{1}{3}$ óra; *e)* $\frac{5}{3}$ óra;
f) $\frac{7}{60}$ óra; *g)* $\frac{4}{5}$ óra; *h)* $\frac{5}{6}$ óra; *i)* $\frac{7}{10}$ óra; *j)* $\frac{11}{12}$ óra?

7. Egyszerűsítsük a törteket!
a) $\frac{24}{36}$; *b)* $\frac{18}{27}$; *c)* $\frac{48}{64}$; *d)* $\frac{77}{154}$; *e)* $\frac{120}{140}$; *f)* $\frac{30}{45}$.

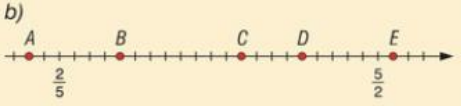
8. Egy fehér és egy fekete dobókockával dobunk. Hányféle törtet kaphatunk, ha a fehér kockával dobott szám a tört számlálója, a feketével dobott szám a tört nevezője? Van-e az így keletkezett törtek között olyan, amelyik egyszerűsíthető? Vannak-e közöttük egyenlőek?

9. Mely számok helyét jelölik a betűk a számegyenesen?

a)



b)





10. *a)* Keressünk $\frac{3}{4}$-nél nagyobb és $\frac{4}{5}$-nél kisebb számokat!

b) Keressünk $\frac{4}{5}$-nél nagyobb és $\frac{5}{6}$-nál kisebb számokat!

11. Melyik tört nagyobb? Indokoljuk meg!

a) $\frac{15}{5}$ vagy $\frac{17}{6}$; *b)* $\frac{9}{4}$ vagy $\frac{13}{6}$; *c)* $\frac{57}{15}$ vagy $\frac{30}{7}$;

d) $\frac{28}{9}$ vagy $\frac{34}{11}$; *e)* $\frac{5}{8}$ vagy $\frac{7}{10}$; *f)* $\frac{7}{12}$ vagy $\frac{3}{5}$?

12. Melyik nagyobb?

a) A $\frac{7}{12}$ négyszerese vagy a $\frac{21}{18}$ kétszerese?

b) A $4\frac{1}{2}$ ötszöröse vagy a $3\frac{1}{3}$ hatszorosa?

c) A $\frac{16}{11}$ négyszerese vagy a $\frac{64}{33}$ háromszorosa?

d) A $\frac{10}{8}$ hétszerese vagy a $\frac{30}{24}$ hétszerese?

13. A tagok ügyes csoportosításával végezzük el a műveleteket!

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{6}+\frac{3}{5}-\frac{3}{4}$; *b)* $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$; *c)* $1\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{7}{4}+2\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{3}$.

14. *a)* Ábrázoljuk számegyenesen a $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{9}{20}$ törteket!

b) Hány kéttagú összeget írhatunk fel az adott törtekből?

c) Janka és Panka kiválasztott a törtek közül kettőt-kettőt és összeadták őket. A lányok által kiszámított két összeg egyenlő. Írjuk fel a két összeget!

15. Mazsola az iskolába érkezés előtt 1 órával ébred. Az óra $\frac{1}{6}$ részét tisztálkodással, $\frac{2}{15}$ részét öltözködéssel, $\frac{1}{4}$ részét reggelizéssel tölti, $\frac{3}{10}$ részében még rendet rak, majd elindul az iskolába. Az 1 óra hányad része alatt ér oda? Ez hány perc?

16. Váltsuk át az alábbi mennyiségeket az adott mértékegységbe!

a) $\frac{10}{20}$ dkg = ... g; *b)* $\frac{4}{5}$ m = ... dm; *c)* $\frac{3}{4}$ km = ... m;

d) $\frac{25}{2}$ km = ... m; *e)* $\frac{500}{25}$ cm = ... dm; *f)* $\frac{2}{3}$ óra = ... perc.

17. Végezzük el a műveleteket!

a) $\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{10}\right)\cdot 5$; b) $\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{2}{3}\cdot 4$; c) $2\frac{8}{9}-\frac{2}{5}\cdot 6$.

18. Végezzük el a műveleteket!

a) $\left(\frac{4}{7}+\frac{2}{7}\right):3$; b) $\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\right):11$; c) $\left(\frac{20}{9}-\frac{2}{3}\right):7$; d) $\frac{4}{9}:\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\right)$

e) $\frac{8}{9}:\left(\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\right)$; f) $\frac{15}{7}:\left(\frac{2}{3}+\frac{26}{6}\right)$; g) $\left(\frac{4}{10}-\frac{2}{5}\right):5$; h) $12:\left(\frac{4}{6}-\frac{6}{9}\right)$.

19. Végezzük el a műveleteket! Hasonlítsuk össze az eredményt! Melyik esetben tudunk gyorsabban számolni?

a) $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)\cdot 4$ $\frac{2}{5}\cdot 4+\frac{3}{5}\cdot 4$; b) $\left(5\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\right):2$ $5\frac{1}{2}:2+\frac{3}{6}:2$.

20. Számoljuk ki! Ügyeljünk a műveleti sorrendre!

a) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}:3$; b) $\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\right):3$; c) $5\frac{2}{3}-1\frac{1}{3}:2$;

d) $\left(5\frac{2}{3}-1\frac{1}{3}\right):2$; e) $\frac{14}{3}:7-\frac{18}{5}:6$; f) $\frac{2}{5}\cdot 3+\frac{4}{7}:2$;

g) $\frac{16}{21}:4+\frac{5}{7}:3$; h) $3\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\cdot 7$; i) $2\frac{7}{10}-3\frac{3}{5}:9$;

j) $\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot 4-3\frac{1}{3}$; k) $\frac{7}{10}-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)\cdot 6$; l) $\left(3\frac{1}{2}-\frac{5}{9}\right)\cdot 6-10\frac{2}{3}:16$.

***21.** Számítsuk ki!

$$2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)+3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)+4\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)+\ldots+10\cdot\left(1-\frac{1}{10}\right)=?$$

***22.** Digitális fényképeinket CD-re írjuk fel. Amikor a számítógép a felírás négy ötöd részével már készen van, azt írja ki, hogy a feladat befejezéséhez még 3 perc szükséges.

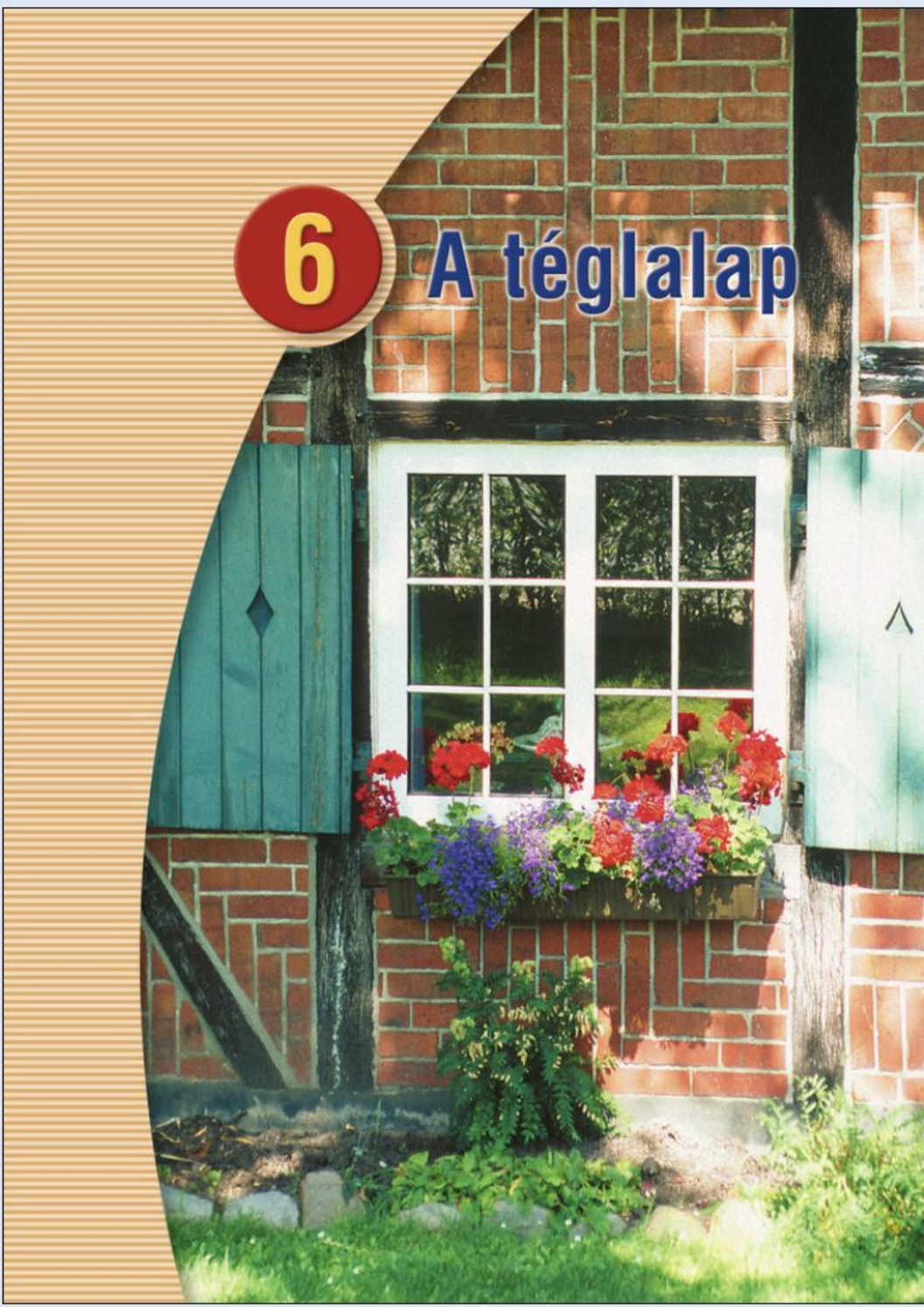
a) Az összes kép hányad részét írja fel a gép a CD-re 1 perc alatt?

b) Hány percig tart összesen a felírás?

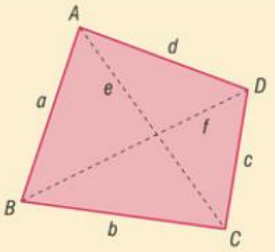
***23.** A W, X, Y és Z betűk különböző egész számokat jelentenek az {1; 2; 3; 4} halmazból, de nem feltétlenül ebben a sorrendben.

Melyik betű melyik számot jelöli, ha $\frac{W}{X}-\frac{Y}{Z}=1$?

6 A téglalap



1. A téglalap tulajdonságai



Azokat a sokszögeket, amelyeknek négy oldala van, **négyszögeknek** nevezzük.

Négyszögek esetén a következő elnevezéseket használjuk:

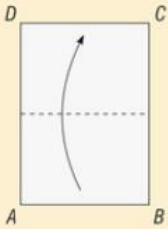
- szomszédos csúcsok (például B és C vagy A és D);
- szemközti csúcsok (A és C vagy B és D);
- szomszédos oldalak (például a és b vagy a és d);
- szemközti oldalak (a és c vagy b és d);
- átlók ($e = AC$ és $f = BD$).

A téglalap

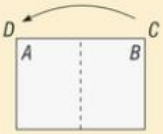
A téglalap olyan négyszög, amelynek szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.



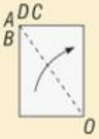
Vegyünk egy **téglalap** alakú papírlapot, és végezzük el a következő hajtogatásokat!



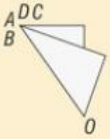
Hajtsuk A pontot D-re, B pontot C-re!



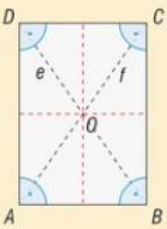
Hajtsuk $B(C)$ pontot $A(D)$ pontra!



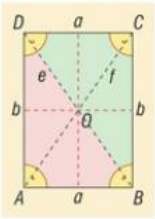
Hajtsuk meg CO mentén!



Terítsük ki!



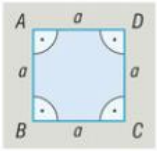
Ezt kapjuk.



A téglalap tulajdonságai:

- minden szöge egyenlő (90°);
- szemközti oldalai párhuzamosak ($AB \parallel DC$ és $AD \parallel BC$);
- szemközti oldalai egyenlő hosszúak ($AB = DC = a$ és $AD = BC = b$);
- átlói egyenlő hosszúak ($AC = BD$; $e = f$);
- átlói felezik egymást ($AO = CO = BO = DO$);
- két helyen is félbehajtható úgy, hogy a két rész fedje egymást (a piros vonalak mentén);
- egy átlója a téglalapot két egybevágó derékszögű háromszögre bontja.

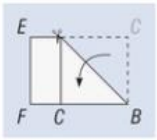
A négyzet



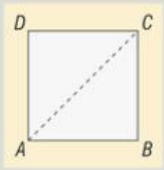
A négyzet olyan téglalap, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú.

Egy téglalap alakú papírlapból készítsünk négyzetet!

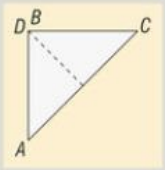
1. Hajtsuk a *C* csúcsot az *FB* oldalra!
2. Vágjuk el *C*-nél *EF*-fel párhuzamosan!



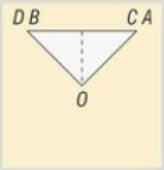
Az így kapott négyzet alakú lapon végezzük el a következő hajtogatásokat!



Hajtsuk félbe az *AC* átló mentén!



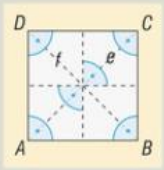
Hajtsuk rá az *A* csúcsot a *C* csúcsra!



Még egyszer hajtsuk félbe!

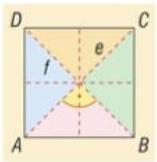


Terítsük ki!



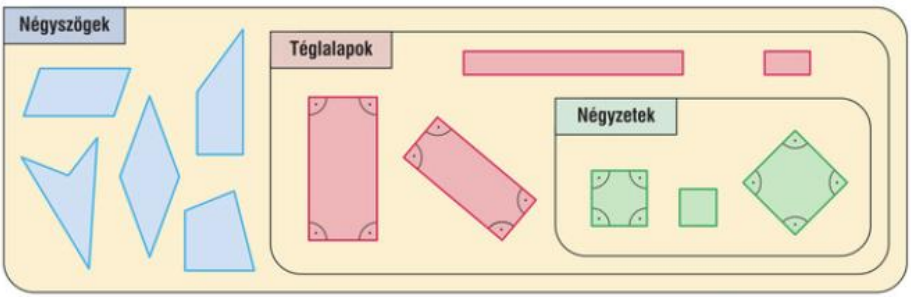
Ezt kapjuk.

A négyzet tulajdonságai:



- minden szöge egyenlő (90°);
- minden oldala egyenlő;
- átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást;
- átlói merőlegesek egymásra ($AC \perp BD$; $e \perp f$);
- az átlók négy egybevágó háromszögre bontják;
- négy helyen is félbehajtható úgy, hogy a két rész fedje egymást.

A négyszögeket halmazokba rendezhetjük:



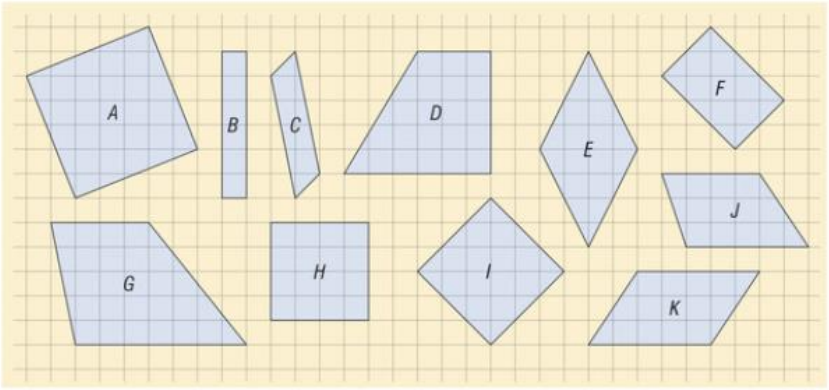
Az ábráról leolvasható, hogy

- nem minden négyszög téglalap;
- van olyan téglalap, amelyik nem négyzet.

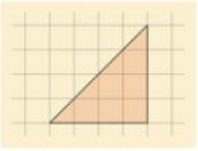
Feladatok

1. Soroljuk fel azoknak a négyszögeknek a betűjelét, amelyek
   a) négyzetek; *b)* téglalapok!

   Készítsünk halmazábrát, és írjuk a betűjeleket a megfelelő helyre!



2. Készítsünk el négy darabot az ábrán látható háromszögből! (➡)
   Állítsunk össze belőlük:
   a) négyzetet;
   b) olyan téglalapot, amelyik nem négyzet!
   Rajzoljuk le az összeállításokat!



3. Bontsunk fel egy négyzetet négy egybevágó részre hajtogatással, majd rajzon is! Keressünk többféle megoldást!

4. Fel lehet-e bontani egy négyzetet öt egybevágó részre?

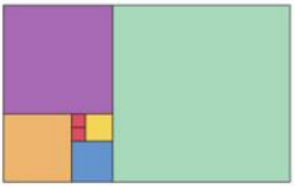
5. Bontsunk fel egy téglalapot négy egybevágó részre hajtogatással, majd rajzon is! Keressünk többféle megoldást!

6. Két hurkapálca egy négyszög két átlója. Illesszük össze a hurkapálcákat úgy, hogy
   a) a négyszög téglalap legyen;
   b) a négyszög négyzet legyen;
   c) a két hurkapálca merőleges legyen egymásra, de a négyszög ne legyen négyzet!

7. Döntsük el az egyes állításokról, hogy melyik igaz, és melyik hamis!
   a) Ha egy téglalap átlói egyenlő hosszúak, akkor a téglalap négyzet.
   b) Ha egy téglalap átlói merőlegesek egymásra, akkor a téglalap négyzet.
   c) Ha egy téglalap átlói felezik egymást, akkor a téglalap négyzet.
   d) Ha egy téglalap bármely két oldala egyenlő hosszú, akkor a téglalap négyzet.
   e) Ha egy téglalapnak két oldala egyenlő hosszú, akkor a téglalap négyzet.
   f) Ha egy téglalapnak két szomszédos oldala egyenlő hosszú, akkor ez a téglalap négyzet.



8. Mekkora az alábbi ábrán a színes négyzetek oldala, ha a két legkisebb négyzet oldala 1 egység? Rajzoljuk le az ábrát négyzetrácsos papírra!



9. Négy gyerek négyzeteket és téglalapokat vágott ki papírból, és a következőket állapította meg:

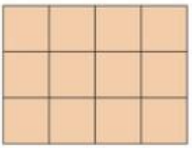
Anna: Ha két egybevágó négyzetet egymás mellé teszünk, téglalapot kapunk.

Bence: Ha egy téglalapot valamelyik oldalával párhuzamosan elvágunk, két téglalapot kapunk.

Csaba: Ha két téglalap egybevágó, akkor azokat egymás mellé illesztve biztosan téglalapot kapunk.

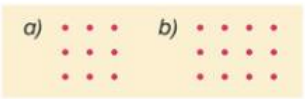
Dóra: Ha két téglalap nem egybevágó, akkor nem illeszthetők egymás mellé úgy, hogy téglalapot kapjunk.

Kinek van igaza, és kinek nincs? Készítsük el, és rajzoljuk le a megfelelő négyzeteket, téglalapokat, majd ezek alapján indokoljunk!



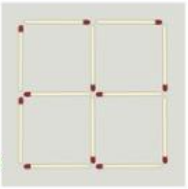
10. Hányféle nem egybevágó téglalap található az ábrán? (➡)
Hány darab téglalap található az ábrán?

11. Hányféleképpen lehet kiválasztani a megadott pontok közül négyet úgy, hogy azok egy négyzet csúcsai legyenek? (➡)



12. Rajzoljunk olyan négyszögeket négyzetrács segítségével, amelyeknek pontosan
a) egy; *b)* két; *c)* három; *d)* négy derékszöge van!

13. Gyufaszálakból készítsük el a következő alakzatot! (➡)
a) Vegyünk el két gyufaszálat úgy, hogy három négyzet maradjon!
b) Vegyünk el két gyufaszálat úgy, hogy két négyzet maradjon!
A gyufaszálakat nem helyezhetjük egymásra, közvetlenül egymás mellé, és nem is „lóghatnak ki"!

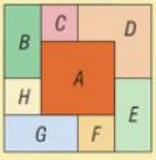


14. Eddigi ismereteink alapján soroljunk fel olyan csapatjátékokat, amelyek pályája téglalap, és amelyeké nem téglalap alakú!

15. Bontsunk fel egy négyzetet (nem feltétlenül egybevágó)
a) 4 darab; *b)* 7 darab; *c)* 9 darab;
d) 12 darab; *e)* 17 darab kisebb négyzetre!

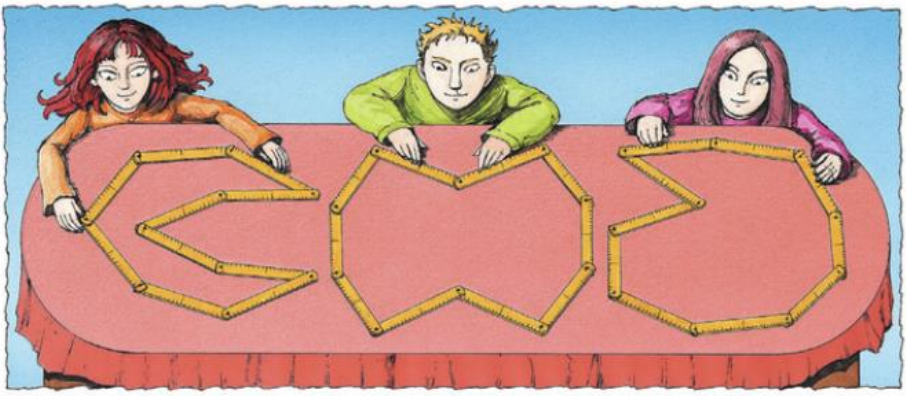
Rejtvény

Egybevágó négyzetlapokat tettünk le egymás után az asztalra. Amikor a nyolcadikat is letettük, az ábrának megfelelően helyezkedtek el egymáson. Milyen sorrendben tettük le őket?



3D

2. A kerület





A síkidom kerülete a határoló vonal hossza.

Egy 2 m hosszú famércéből (colstok) sokszögeket hajtogattunk. Mekkora a keletkezett sokszögeket határoló töröttvonal hossza?

A sokszög kerülete az oldalak hosszának összege.

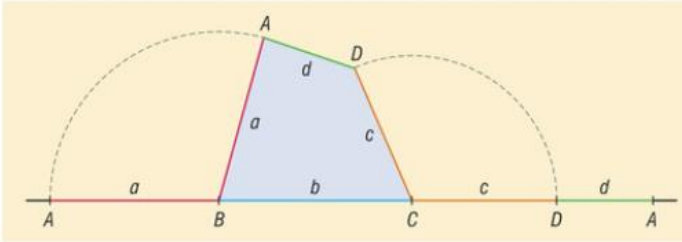
A kerületet általában K-val jelöljük.
A kerület hosszúság, ezért mértékegységei a hosszúság egységei.

$$1\text{ mm} \underset{\cdot 10}{<} 1\text{ cm} \underset{\cdot 10}{<} 1\text{ dm} \underset{\cdot 10}{<} 1\text{ m} \underset{\cdot 1000}{<} 1\text{ km}$$

A bevezető példában szereplő valamennyi sokszög kerülete ugyanannyi: a famérce hossza ($K = 2$ m).

A négyszögek kerülete

Gördítsünk végig egy négyszöget egy egyenes mentén, és jelöljük meg az egyenesen a csúcsai helyét!



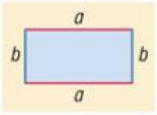
$K = a + b + c + d$

Az egyenesen megkapjuk a négyszög kerületét: $K = a + b + c + d$.

A négyszög kerülete a négy oldal hosszának összege.



A téglalap kerülete

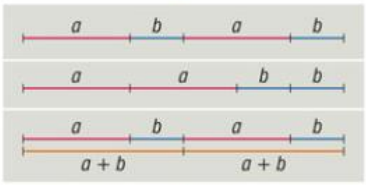


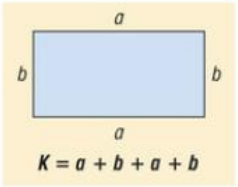
A téglalap két-két szemközti oldala egyenlő hosszúságú. Az egyik hosszúságot jelöljük a-val, a másikat b-vel. A téglalap kerületét, azaz oldalai hosszának összegét többféleképpen is felírhatjuk.

a) Sorban összeadjuk az oldalak hosszát:
$K = a + b + a + b$.

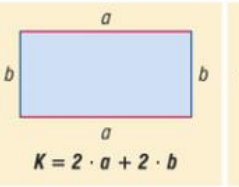
b) Először a szemközti oldalak hosszát adjuk össze:
$K = (a + a) + (b + b) = 2 \cdot a + 2 \cdot b$.

c) Először a szomszédos oldalak hosszát adjuk össze:
$K = (a + b) + (a + b) = 2 \cdot (a + b)$.

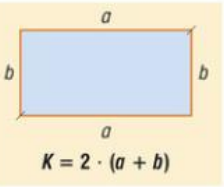




$K = a + b + a + b$



$K = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



$K = 2 \cdot (a + b)$

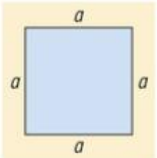
A téglalap kerülete a két szomszédos oldalhossz összegének kétszerese.
Az a és b oldalhosszúságú téglalap kerülete:

$$K = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b).$$

A négyzet kerülete

A négyzet olyan téglalap, amelynek oldalai egyenlő hosszúságúak. Ezt a hosszúságot jelöljük a-val.

A négyzet kerülete, azaz oldalai hosszának összege:
$K = a + a + a + a = 4 \cdot a$.



A négyzet kerülete egy oldal hosszának négyszerese.
Az a oldalhosszúságú négyzet kerülete:

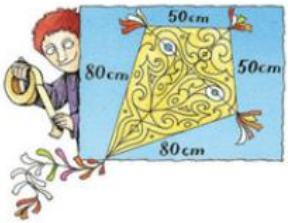
$$K = 4 \cdot a.$$

Feladatok

1. Rakjunk ki gyufaszálakból *a)* 8 gyufaszál; *b)* 15 gyufaszál kerületű sokszögeket! Rajzoljuk le az így kapott alakzatokat!
2. Rakjunk ki gyufaszálakból *a)* 12; *b)* 16; *c)* 20 egység kerületű téglalapokat! Ki lehet-e rakni 9 gyufaszálból egy téglalapot, ha a gyufaszálakat nem törhetjük el?
3. Daniék skót juhászkutyákat tenyésztenek, és a négyzet alakú kennelt léckerítéssel veszik körül. A kennel oldala 6 m hosszú. Milyen hosszú lesz a kerítés az ajtóval együtt?

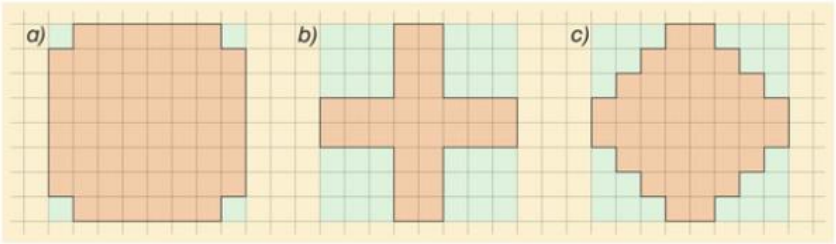


4. Feri sárkányt készített. Milyen hosszú ragasztószalagra van szüksége, ha a szélét egy rétegben kell körberagasztani? (➡)

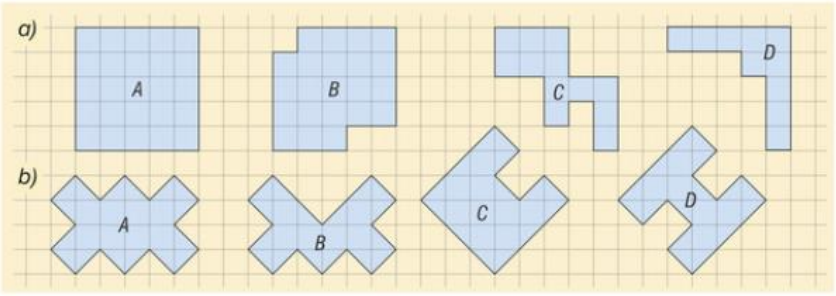


5. Az 5. c osztály tantermében parkettacsiszoláskor kicserélték a szegőléceket. Hány méter szegőlécet kell vásárolni, ha a terem téglalap alakú, oldalainak hossza 9 m és 7 m, az ajtó pedig 1 méter széles? (Az ajtó elé nem tesznek szegőlécet.)

6. Az ábrán látható sokszögeket egy négyzetbe rajzoltuk. Számítsuk ki a kerületüket, ha az egység a négyzetrács egy négyzetének oldala! Hasonlítsuk össze a sokszögek kerületét!

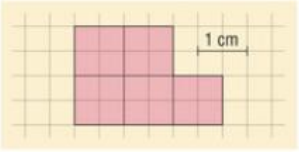


7. Válasszuk ki az alábbi sokszögek közül azt, amelyik nem illik a sorba! Írjuk fel a sokszögek betűjelét a kerületük szerint növekvő sorrendben!

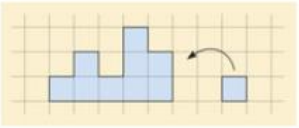


8. Öt darab egybevágó négyzetből az ábrán látható hatszöget raktuk ki. Teljes oldallal illesszünk egy hatodik ugyanilyen négyzetet az ábrához úgy, hogy a keletkező sokszög kerülete
   a) a lehető legkisebb legyen;
   b) a lehető legnagyobb legyen! (➡)

   Hány cm a legkisebb, illetve a legnagyobb kerület?



9. Az ábrán látható sokszöghöz teljes oldallal illesszünk egy négyzetet úgy, hogy a keletkezett sokszög kerülete:
   a) ne változzon; *b)* csökkenjen; *c)* növekedjen! (➡)





10. Mekkora a téglalap kerülete, ha szomszédos oldalainak hossza

a) 12 cm és 26 cm; *b)* 480 mm és 2 dm; *c)* 136 mm és 14 cm?

11. Mekkora a négyzet kerülete, ha oldalai

a) 12 cm; *b)* 24 mm; *c)* 125 m hosszúak?

12. Hány centiméter a négyzet kerülete, ha az egyik oldal hossza

a) $\frac{4}{5}$ dm; *b)* $4\frac{1}{5}$ dm; *c)* 17 és fél milliméter?

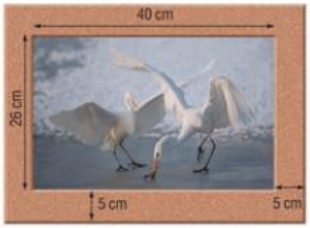
13. Egy téglalap egyik oldala $\frac{2}{3}$ dm, a másik oldala $\frac{3}{4}$ dm hosszú. Mekkora a téglalap kerülete?

14. Mekkora a téglalap kerülete, ha az egyik oldala $\frac{5}{6}$ dm, és a másik oldala ennél $\frac{1}{4}$ dm-rel hosszabb?

15. Mekkora a téglalap kerülete, ha az egyik oldal hosszúsága 120 mm, és a szomszédos oldalak hosszának különbsége 10 mm?

16. Milyen hosszú a négyzet oldala, ha a kerületének hossza $\frac{2}{3}$ dm?

17. Mekkora lehet a négyzet oldalának hossza, ha mérőszáma centiméterben kifejezve egész szám, és a kerülete 2 dm-nél kisebb?



18. Egy képkeret méretei az ábrán láthatók. Mekkora a képkeret kerülete? Mekkora a fénykép kerülete? (➡)

19. Egy téglalap kerülete 36 cm. Mekkora két szomszédos oldal hosszúságának az összege?

20. Mekkora a téglalap alakú boríték kerülete, ha az egyik oldala 16 cm hosszú, a szomszédos oldalak hosszának összege pedig 27 cm?

21. Mekkorák a téglalap alakú papírlap oldalai, ha a kerülete 102 cm, és az egyik oldala 9 cm-rel rövidebb a másiknál? Mekkora kerületű lapokat kapunk egy ilyen papírlap félbevágásával?

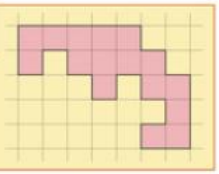
22. Egy téglalap alakú telek egyik oldala 14 méterrel rövidebb a másik oldalnál. Bekerítéséhez a gazda 130 m hosszú drótháló vásárolt. A 4 méter széles kaput ugyanebből az anyagból készítette, és így is kimaradt 6 m hosszú drótháló. Milyen hosszú és milyen széles a telek?

23. Egy téglalap egyik oldala 14 cm. Ha a téglalap két szemközti oldalát 5-5 cm-rel megváltoztatjuk, négyzetet kapunk. Mekkora lehet a téglalap másik oldala? Mekkora lehet a keletkező négyzet kerülete?

24. Hány különböző téglalapot rakhatunk ki 12 gyufaszálból? (A gyufaszálakat nem helyezhetjük egymásra, illetve közvetlenül egymás mellé, és nem is „lóghatnak ki”!)

Rejtvény

Másoljuk le a sokszöget, majd a négyzetháló mentén vágjuk fel három részre úgy, hogy a darabokból négyzetet rakhassunk ki! Mekkora a négyzet kerülete?



3. A terület mérése

Régi területmértékegységek:
1 négyszögöl = 3,61 m^2,
1 katasztrális hold = 1600 négyszögöl.



A terület meghatározásának igénye az ókorba vezethető vissza. Egyiptomban a Nílus évenkénti áradása miatt a földbirtokok határát elmosta a víz. Ezért a földtulajdonosoknak az eredeti földterületüket újra ki kellett jelölni.

A mérendő területet négyzet alakú területekkel hasonlíthatjuk össze.

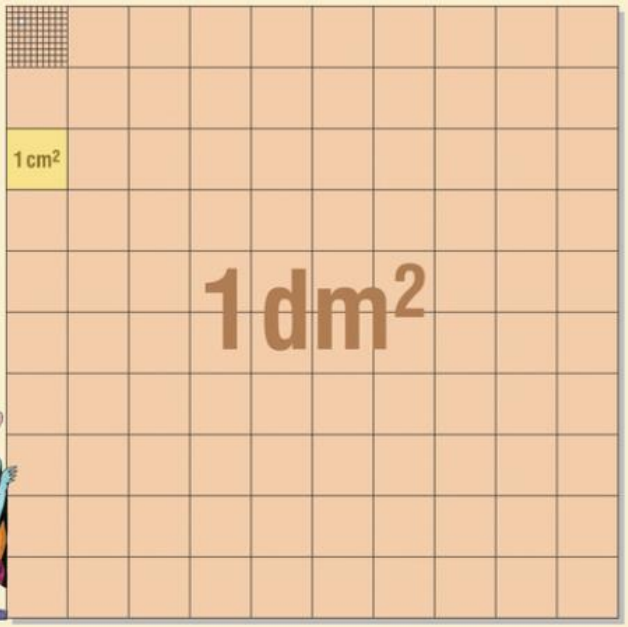
A terület alapegysége az **1 négyzetméter (m^2)**, ami az 1 m oldalhosszúságú négyzet területe.

A kisebb területegységeket az ábra mutatja.

1 mm oldalhosszúságú négyzet területe:
1 mm^2.

1 cm oldalhosszúságú négyzet területe:
1 cm^2.

1 dm oldalhosszúságú négyzet területe:
1 dm^2.









A lakások területét négyzetméterben, a földterületeket hektárban, az országok területét négyzetkilométerben szokták megadni.

Magyarország területe $= 93\,000\ km^2$.

A terület mértékegységei:

a négyzet oldalának hossza	négyzet területe	mértékegység neve
1 mm	$1\ mm^2$	négyzetmilliméter
1 cm	$1\ cm^2$	négyzetcentiméter
1 dm	$1\ dm^2$	négyzetdeciméter
1 m	$1\ m^2$	négyzetméter
10 m	$100\ m^2$	ár (a)
100 m	$10\,000\ m^2$	hektár (ha)
1 km	$1\ km^2$	négyzetkilométer

terület	
1 mérőszám	m^2 mértékegység

$$1\ mm^2 \overset{\cdot 100}{<} 1\ cm^2 \overset{\cdot 100}{<} 1\ dm^2 \overset{\cdot 100}{<} 1\ m^2 \overset{\cdot 100}{<} 1\ a \overset{\cdot 100}{<} 1\ ha \overset{\cdot 100}{<} 1\ km^2$$

$100\ mm^2 = 1\ cm^2$ $\quad$ $100\ dm^2 = 1\ m^2$ $\quad$ $100\ a = 1\ ha$

$100\ cm^2 = 1\ dm^2$ $\quad$ $100\ m^2 = 1\ a$ $\quad$ $100\ ha = 1\ km^2$

$$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10\,000\ cm^2 = 1\,000\,000\ mm^2$$

$$1\ km^2 = 100\ ha = 10\,000\ a = 1\,000\,000\ m^2$$

Feladatok

1. Becsüljük meg, hogy mekkora a területe
   a) a tanteremnek; *b)* az iskola udvarának; *c)* az iskolai focipályának;
   d) a matematikafüzetnek; *e)* egy cipő talpának; *f)* egy 10 Ft-os egyik lapjának!
   Többféle mértékegységet is használhatunk.

2. A hangya csak négyzetmilliméterben, az egér csak négyzetcentiméterben, a nyúl csak négyzetdeciméterben, az elefánt csak négyzetméterben tud mérni. A következő mennyiségeket váltsuk át az ő mértékegységükbe!



a) 21 dm^2;	*a)* 43 000 mm^2;	*a)* 540 000 mm^2;	*a)* 18 000 dm^2;
b) 5 dm^2 23 cm^2;	*b)* 45 dm^2 12 cm^2;	*b)* 6 m^2 23 dm^2;	*b)* 2 m^2 500 dm^2;
c) 6 m^2 218 cm^2;	*c)* 6 m^2 25 dm^2;	*c)* 5 dm^2 23 000 cm^2;	*c)* 3 700 000 cm^2;
d) 48 dm^2 518 mm^2.	*d)* 2 dm^2 6300 mm^2.	*d)* 49 m^2 860 dm^2.	*d)* 9 m^2 7600 dm^2.

3. Melyik nagyobb?

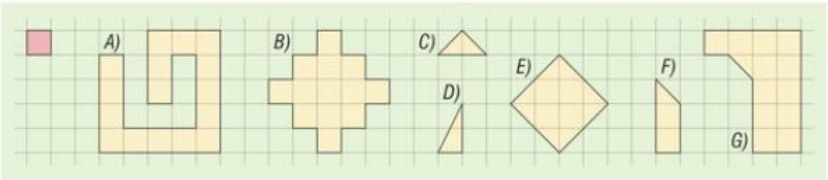
a) 4 km^2 vagy 58 000 m^2;
b) 16 a vagy 2300 m^2;
c) 245 mm^2 vagy 1 cm^2 168 mm^2;
d) 78 cm^2 259 mm^2 vagy 8000 mm^2.

4. Válasszuk ki a legvalószínűbb választ!

a) Egy A4-es papírlap területe: 6 dm^2, 6 cm^2, 6 m^2.
b) Egy szoba alapterülete: 12 mm^2, 28 km^2, 16 m^2.
c) Egy asztallap területe: 32 km^2, 2 m^2, 45 mm^2.
d) Egy tévéképernyő területe: 1500 cm^2, 15 m^2, 150 km^2.
e) Egy ceruzahegy keresztmetszete: negyed mm^2, 3 cm^2, fél dm^2.
f) Egy erdő területe: 100 dm^2, 100 cm^2, 100 ha.

5. Rendezzük területük nagysága szerint növekvő sorrendbe a következő országokat! (Ha szükséges, az adatokat keressük meg interneten vagy könyvtárban, vagy becsüljük meg!)
Magyarország; Franciaország; Németország; Dánia; Ausztria.

6. *a)* Mekkora a sárga színű alakzatok területe, ha az ábrán a piros négyzet területe 1 cm^2?
b) Hány négyzetcentiméter a sárga színű alakzatok területe, ha az ábrán a piros négyzet területe 2 cm^2?

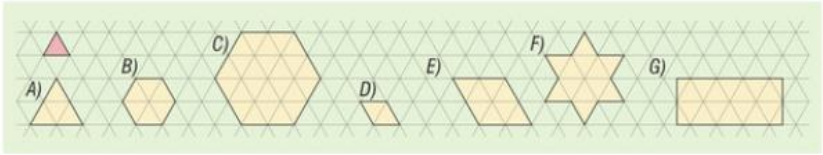


7. Rajzoljunk olyan összefüggő alakzatokat a négyzetrácsos füzetbe, amelyek területe

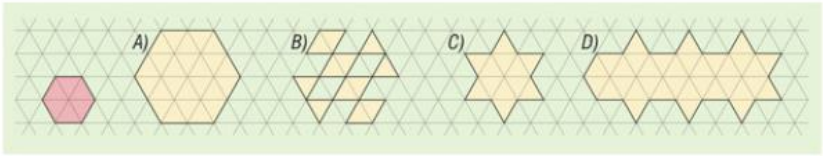
a) 8 négyzet;
b) 12 négyzet;
c) 9 négyzet;
d) 16 négyzet;
e) 4 és fél négyzet;
f) 10 és fél négyzet!



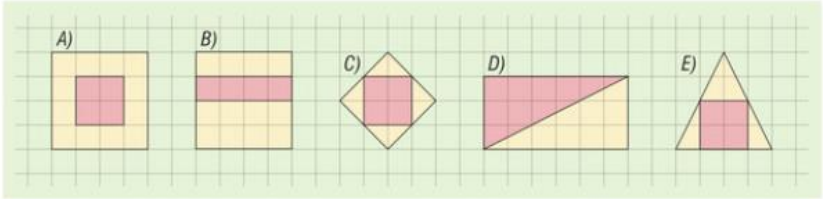
8. Hány négyzetmilliméter a sárga színű alakzatok területe, ha az ábrán a piros háromszög területe 3 cm^2?



9. Hány négyzetcentiméter a sárga színű alakzatok területe, ha az ábrán a piros hatszög területe 18 cm^2?

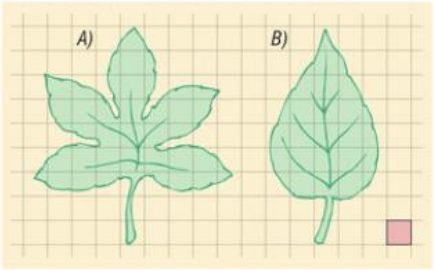


10. Hányad része van pirosra festve a következő alakzatok területének?



***11.** Becsüljük meg a falevelek területét! (➡)

***12.** Ragasszunk össze öt darab 1 cm oldalhosszúságú négyzetből különböző alakzatokat! Két négyzet oldalát mindig pontosan illesszük egymáshoz, és mindegyik alakzathoz használjuk fel mind az öt négyzetet! Keressünk minél több ilyen alakzatot! Számoljuk meg, hogy az egyes alakzatokat hány négyzetoldal határolja!



Rejtvény

Keressünk módszert, amellyel el tudjuk dönteni, hogy az itt látható két paca közül melyiknek nagyobb a területe!



4. A téglalap területe

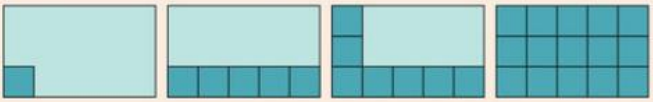


Példa

Hány burkolólapot vegyünk a téglalap alakú kamra lefedéséhez, ha az egyik oldala mentén 5, a másik oldala mentén pedig 3 darab négyzet alakú járólap fér el?

Megoldás

Szemléltessük rajzon a megoldást:



A kamra egyik oldala mentén 1 sorba 5 járólapot tudunk tenni. 3 ilyen sor van, ezért összesen $5 \cdot 3 = 15$ járólapot kell venni.

Az 1 egység oldalhosszúságú négyzet területe 1 területegység. A téglalap területét úgy határozzuk meg, hogy lefedjük 1 egység oldalhosszúságú négyzetekkel.

A téglalap területének kiszámítása



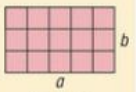
Egy téglalap oldalainak hossza 3 cm és 5 cm. Hogyan számíthatjuk ki a területét?

1. Területegység: az 1 cm oldalhosszúságú négyzet területe (1 cm^2).
2. Az 5 cm-es oldal mentén 5 db 1 cm oldalhosszúságú négyzet fér el.
3. A 3 cm-es oldal mentén 3 db 1 cm oldalhosszúságú négyzet fér el.
4. A téglalapot $5 \cdot 3$ db 1 cm oldalhosszúságú négyzet fedi le.

Az 5 cm és 3 cm oldalhosszúságú téglalap területe: $\boldsymbol{T = 3 \cdot 5\ cm^2 = 15\ cm^2}$.

A téglalap területe a két szomszédos oldal hosszának szorzata.
Az *a* és *b* oldalhosszúságú téglalap területe:

$$T = a \cdot b.$$



$T = a \cdot b$

Az összefüggés nem csak egész mérőszámok esetén igaz.

A négyzet területe

Minden négyzet téglalap, így az előbbi módszer most is alkalmazható. A 3 cm oldalhosszúságú négyzet $3 \cdot 3$ db 1 cm oldalhosszúságú négyzettel fedhető le, így a négyzet területe: $T = 3 \cdot 3\ \text{cm}^2 = 9\ \text{cm}^2$.

A négyzet területe egy oldal hosszának önmagával vett szorzata.
Az *a* oldalhosszúságú négyzet területe:

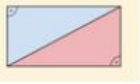
$$T = a \cdot a.$$



$T = a \cdot a$

A derékszögű háromszög területe

A téglalapot egy átlója két egybevágó derékszögű háromszögre bontja. Egy ilyen derékszögű háromszög területe a téglalap területének a fele.



Feladatok

1. Mérjük meg az iskolai tanulóasztal területét! Területegységként használjuk a matematikakönyv fedőlapját!
2. Becsüld meg *a)* egy fényképed; *b)* az íróasztalod; *c)* a szobátok; *d)* a tantermetek területét! Becslésedet méréssel és számolással ellenőrizd!
3. Számítsuk ki a téglalap alakú írólap területét, ha az egyik oldala 21 cm, a másik 15 cm!
4. Mekkora a téglalap területe, ha a szomszédos oldalak hossza
   a) 8 cm és 5 cm; *b)* 4 m és 35 dm; *c)* $\frac{4}{5}$ dm és 12 cm; *d)* $4\frac{7}{10}$ m és 5 m?
5. Hány négyzetméteres az a szoba, amelynek padlója 4 m oldalhosszúságú négyzet?
6. Mekkora a téglalap alakú telek területe, ha az egyik oldala 18 m, a másik oldal ennél 6 m-rel hosszabb?
7. Egy tér közepén olyan négyzet alakú virágágyás van, amelynek oldalai 6 és fél méter hosszúak. Hány virágpalánta került ebbe a virágágyásba, ha négyzetdeciméterenként egyet ültettek bele?
8. Mekkora a téglalap területe, ha a szomszédos oldalainak különbsége 3 cm, és a rövidebb oldal 1 dm?
9. Egy téglalap szomszédos oldalainak különbsége 5 cm, az egyik oldal 1 dm. Mekkora lehet a téglalap területe?
10. Egy téglalap alakú padlószőnyeg oldalai 2 méter, illetve 3 és fél méter hosszúak. Mennyibe kerül a padlószőnyeg, ha 1 m^2 ára 3000 Ft?



11. Mekkora a téglalap területe, ha az egyik oldala 5 cm, a szomszédos oldala pedig $\frac{1}{3}$ cm-rel rövidebb?

12. Mekkora lehet a téglalap területe, ha az egyik oldala 2 és fél centiméter, és a szomszédos oldalak hosszának különbsége $\frac{1}{2}$ cm?

13. Mekkora annak a négyzetnek az oldala, amelynek területe
a) 16 cm^2; *b)* 64 dm^2; *c)* 900 cm^2; *d)* 8100 mm^2?

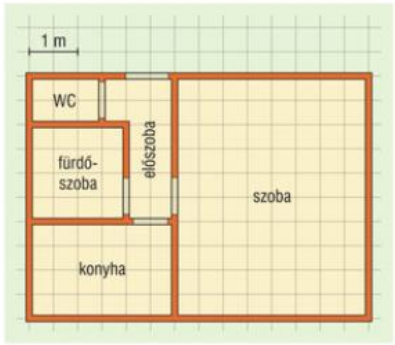
14. Mekkora a 48 dm^2 területű téglalap egyik oldala, ha a másik oldal
a) 12 cm; *b)* 16 dm; *c)* 48 dm; *d)* 10 cm?

15. Egy téglalap alakú telek 782 m^2, utcafrontja 23 m. Milyen hosszú kerítésre van szükség összesen a két oldalsó és a hátsó szomszéd telke mellett?

16. Egy téglalap oldalai centiméterben kifejezve egész számok, kerülete 12 cm. Hány négyzetcentiméter lehet a területe?

17. A 20 cm kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb, és melyiknek a legkisebb a területe, ha az oldalak mérőszáma centiméterben kifejezve egész szám?

18. Az ábrán egy garzonlakás alaprajza látható. Számítsuk ki az egyes helyiségek, valamint az egész lakás területét, ha a falakat vonalnak tekintjük! (➡)

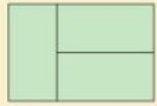


19. Mekkora a négyzet területe, ha a kerülete
a) 24 mm; *b)* 36 cm;
c) 92 m; *d)* 256 dm?

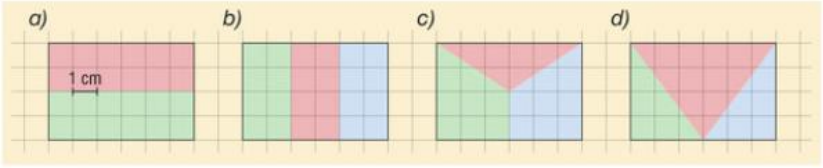
20. Mekkora a négyzet kerülete, ha a területe
a) 25 cm^2; *b)* 49 dm^2;
c) 100 m^2; *d)* 1 hektár?

21. Számítsuk ki annak a téglalapnak a területét és kerületét, amelynek oldalai 3 cm és 6 cm hosszúak! Mit tapasztalunk? Van-e olyan négyzet, amely területének és kerületének mérőszáma megegyezik? Ha van, milyen hosszú egy oldala?

22. Három egybevágó téglalapból az ábrán látható nagy téglalapot raktuk össze. Mekkora a nagy téglalap területe, ha a kerülete 40 cm? (➡)

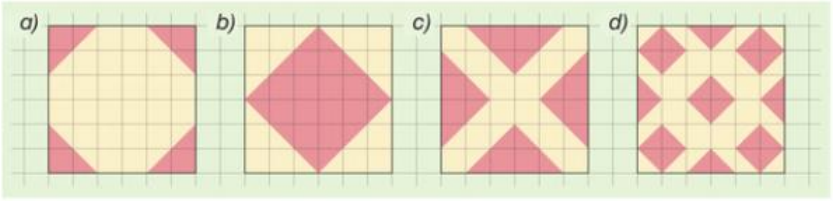


23. Tibi az alábbi zászlókat rajzolta a gombfocicsapatoknak. Hány négyzetcentiméternyit kellett kiszíneznie az egyes színekkel?



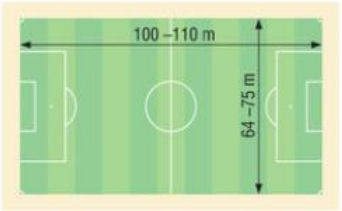


24. A négyzet hányad részét színeztük be pirosra?



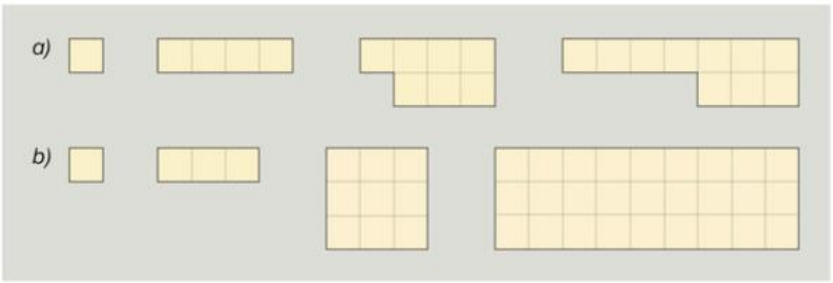
25. Nemzetközi labdarúgó mérkőzést olyan téglalap alakú pályákon játszhatnak, amelyek szélessége (alapvonala) legalább 64 m és legfeljebb 75 m, hosszúsága (oldalvonala) pedig legalább 100 m és legfeljebb 110 m. (➡)

Hány négyzetméter a különbség a legnagyobb és a legkisebb (nemzetközi mérkőzésre is alkalmas) focipálya területe között?



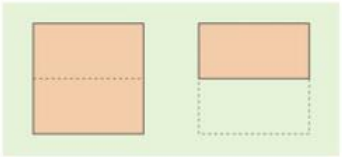
3D

26. Határozzuk meg az egymást követő síkidomok területét, ha a területegység 1 kis négyzet területe! Keressünk szabályt, és rajzoljuk le a következő két síkidomot!



27. Egy négyzetet pontosan félbehajtva olyan téglalapot kaptunk, amelynek kerülete 12 cm. Mekkora a négyzet területe? (➡)

28. Hányféle olyan téglalap van, amelynek oldalai méterben kifejezve egész számok, egyik oldala 100 m, és nincs ennél hosszabb oldala?



29. Hányféle olyan téglalap van, amelynek oldalai méterben kifejezve egész számok, és a kerülete 100 m?

Rejtvény

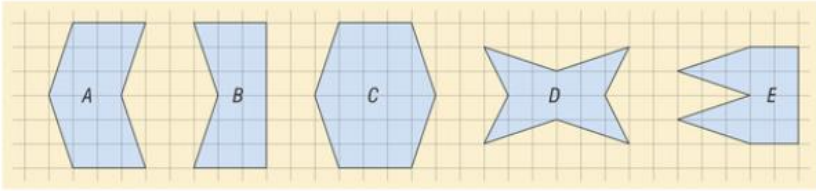
Hány olyan téglalap van, amelynek oldalai méterben kifejezve egész számok, és négyzetméterben mért területének mérőszáma az idei évszám?



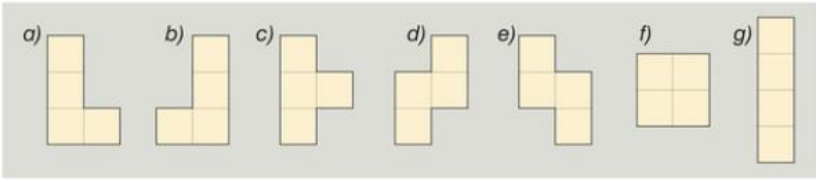
5. Vegyes feladatok

1. Rajzoljunk négyzetrács segítségével olyan téglalapot, amelynek egyik oldala 9, a másik oldala pedig 4 hosszúságegység! Bontsuk fel a téglalapot a négyzetrács vonalai mentén két egybevágó részre úgy, hogy azokból négyzetet lehessen kirakni!

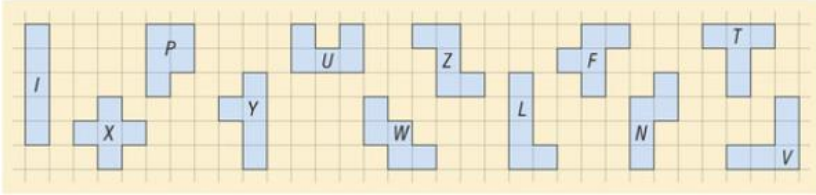
2. Határozzuk meg mérés nélkül, hogy az egymás melletti sokszögek közül melyiknek a kerülete a legnagyobb!



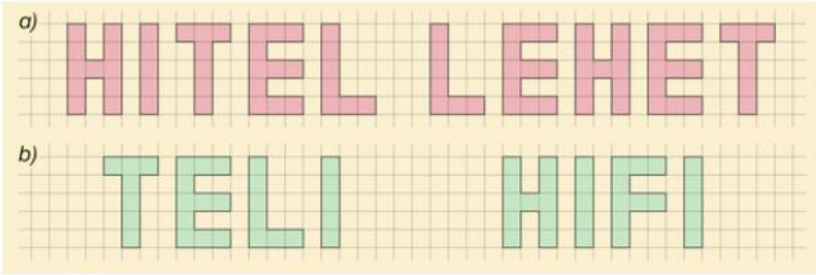
3. A TETRIS játékban hétféle sokszöggel játszanak. Melyiknek a kerülete tér el a többiétől?



4. A pentominó nevű játékban az alábbi (5 egység területű) sokszögeket kell tetszőleges sorrendben egy 8 × 8-as sakktáblára helyezni úgy, hogy ne fedjék egymást. Hány különböző kerületű sokszög van a pentominóban?

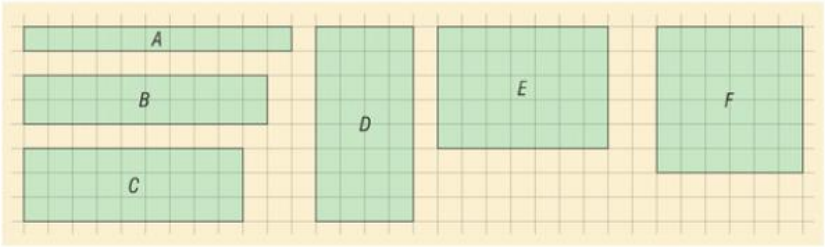


5. Melyik szót alkotó betűk kerülete nagyobb? Melyik szót alkotó betűk területe kisebb?





6. Az ábrán olyan téglalapok láthatók, amelyeknek a kerülete 24 egység. Melyik téglalap területe a legnagyobb?

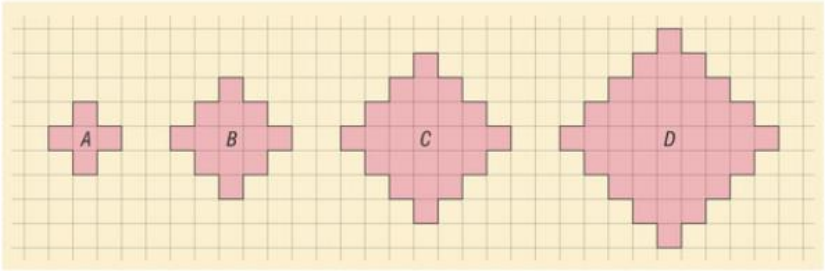


7. Hányféle olyan téglalap van, amelynek kerülete 16 egység, és oldalai egész számok? Melyiknek a legnagyobb, és melyiknek a legkisebb a területe?

8. Hányféle olyan téglalap van, amelynek a területe 24 cm^2? (Az oldalhosszúságok mérőszáma centiméterben mérve egész szám.) Mekkora lesz az egyes téglalapok kerülete?

9. Hányféle téglalapot lehet kirakni *a)* 12 db; *b)* 16 db; *c)* 36 db 1 cm oldalhosszúságú négyzet felhasználásával? Melyiknek a legnagyobb, és melyiknek a legkisebb a kerülete? Készítsünk táblázatot!

10. Az ábrán látható sokszögek minden oldala 1 cm hosszúságú, és szomszédos oldalaik merőlegesek egymásra. Mekkora az egyes sokszögek kerülete és területe? Keressünk szabályt, és rajzoljuk le a következő két síkidomot!



11. Egy téglalap alaprajzú szoba parkettázása után 19 méter szegőlécet használtak fel úgy, hogy az 1 m széles ajtóhoz nem került szegőléc. A szoba egyik oldala 2 m-rel hosszabb a másik oldalnál. Hány négyzetméteres szobát parkettáztak?

12. Mekkora a téglalap alakú szőnyeg területe, ha egyik oldala 20 dm, kerülete pedig 10 m? Mennyiért tisztítják ki a szőnyeget, ha 1 m^2 tisztítása 800 Ft?

13. Egy téglalap területe 300 cm^2, az egyik oldala 12 cm.
Mekkorák a téglalap oldalai? Mekkora a téglalap kerülete?

14. Egy téglalap kerülete 1 dm, az egyik oldala $\frac{1}{3}$ dm-rel nagyobb a másiknál.
Mekkora a téglalap területe?

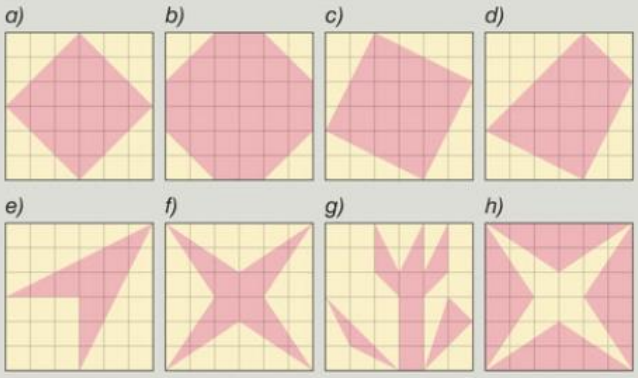


15. Mekkora a téglalap alakú szoba területe, ha a kerülete 15 m, és az egyik oldal másfél méterrel rövidebb a másik oldalnál?

16. Egy négyzet alakú, 10 egység oldalhosszúságú táblára a lehető legtöbb kártyát rakjuk fel átfedés nélkül úgy, hogy egyik sem lóg le. Hány darab téglalap alakú kártyát helyezhetünk el, ha a kártyák oldalai

a) 2 és 3 egység; *b)* 4 és 6 egység; *c)* 5 és 6 egység hosszúságúak?

*17. Mekkora a négyzetekben a piros rész területe, ha a területegység egy kis négyzet?



Súgó:
Bontsuk fel a piros síkidomokat a négyzetrács mentén háromszögekre és téglalapokra, vagy vonjuk ki az egész területből a sárga területek összegét!

18. Néhány csapatjáték téglalap alakú pályájának méreteit adtuk meg a táblázatban. (➡)

a) Írjuk fel ezeket a kerületük szerint növekvő sorrendben!

b) Írjuk fel ezeket a területük szerint növekvő sorrendben!

Játék	A pálya szélessége méterben	A pálya hosszúsága méterben
jégkorong	$31\frac{1}{2}$	61
kézilabda	20	40
kosárlabda	15	28
labdarúgás	70	105
röplabda	9	18
vízilabda	18	27

19. Mennyivel nő az 5 cm oldalhosszúságú négyzet kerülete, ha minden oldalát növeljük:

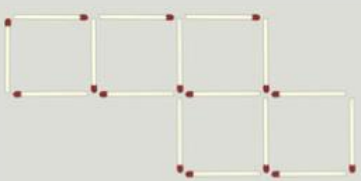
a) 3 centiméterrel; *b)* 10 centiméterrel;

c) kétszeresére; *d)* háromszorosára?

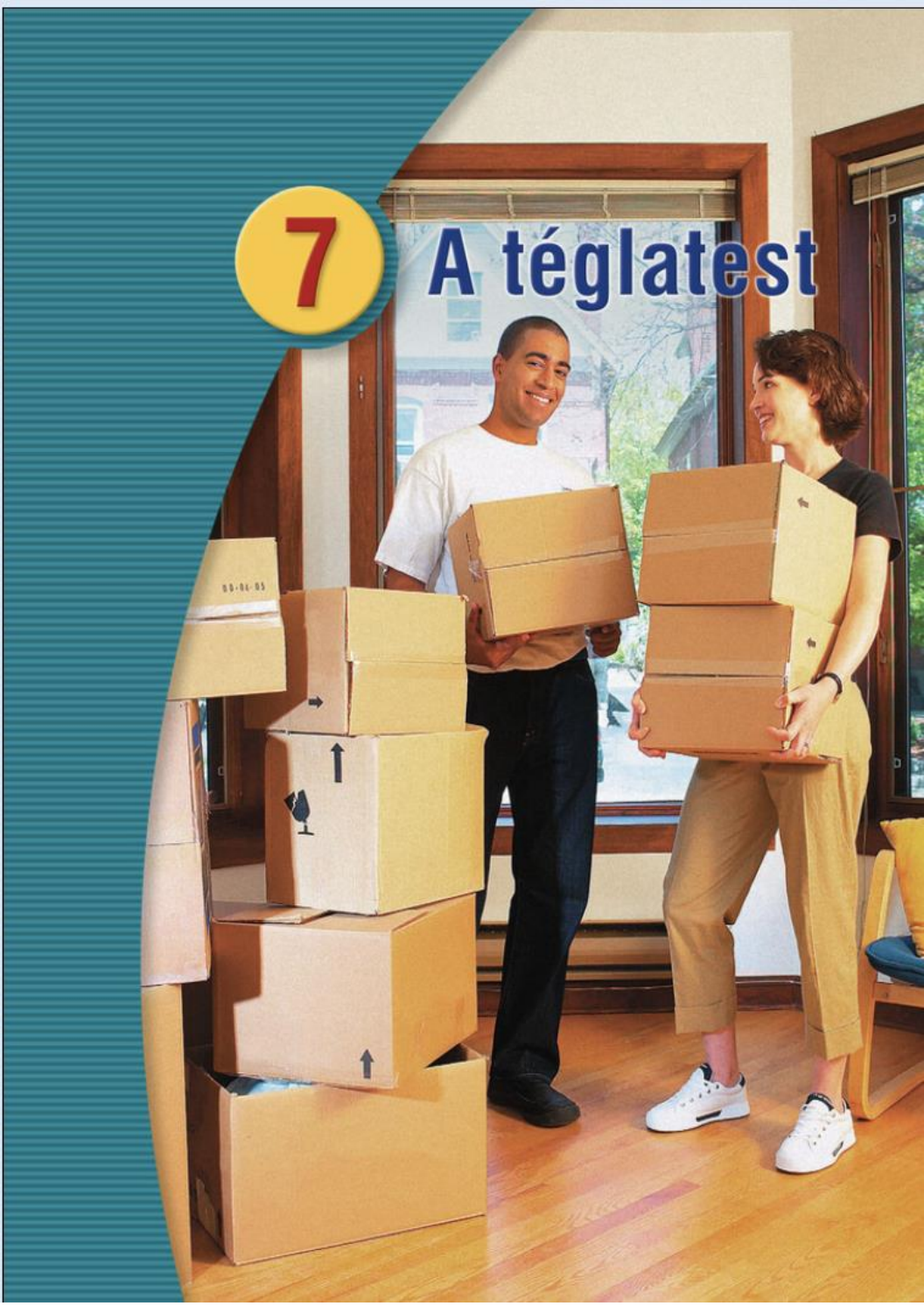
Hogyan változik a területe? Készítsünk rajzot!

20. Az ábrának megfelelően öt négyzetet raktunk ki 16 db gyufaszálból. Két gyufaszál áthelyezésével érjük el azt, hogy csak négy egybevágó négyzet maradjon! (➡)

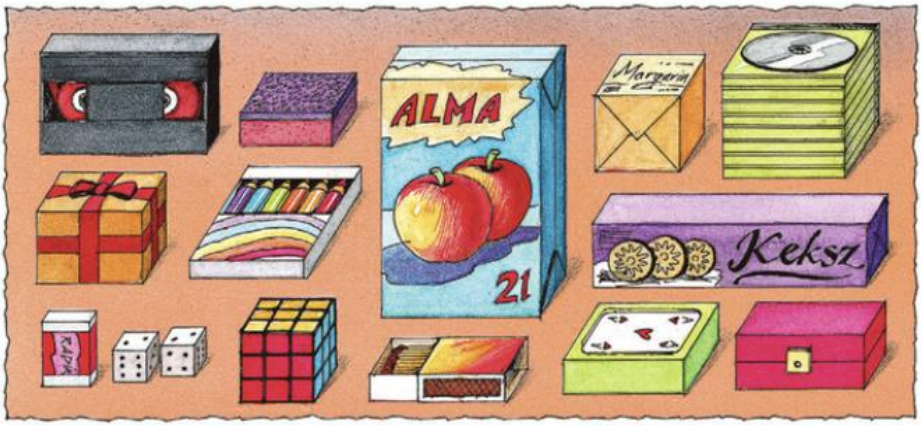
(Gyufaszálakat nem lehet egymásra helyezni. Mindegyik gyufaszál továbbra is valamelyik négyzet oldala legyen!)



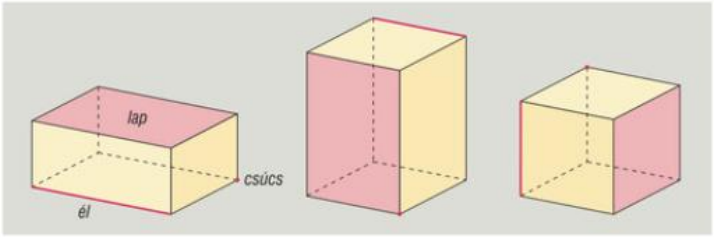
7 A téglatest



1. A téglatest



Geometriai tulajdonságaikat tekintve a rajzon látható testek **téglatestek.**

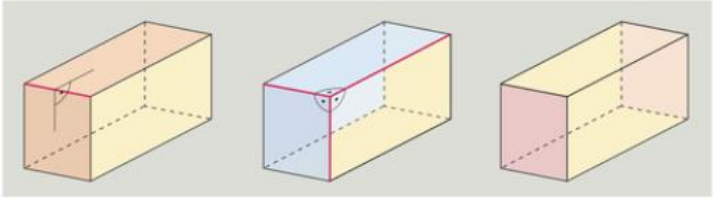


Téglatest
A lapok alakja: téglalap.
A lapok száma: 6.
Az élek száma: 12.
A csúcsok száma: 8.

A téglatest jellemzői

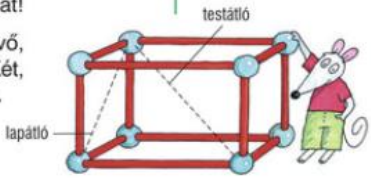
– A téglatestnek 6 lapja, 12 éle és 8 csúcsa van.
– A téglatest minden lapja téglalap.
– Minden él két lapra illeszkedik, ezek a szomszédos lapok.
– A szomszédos lapok merőlegesek egymásra.
– Minden csúcsban 3 él és 3 lap találkozik.
– Az egy csúcsban összefutó élek páronként merőlegesek egymásra.
– A téglatest szemközti lapjai párhuzamosak és egybevágóak.

3D



Vizsgáljuk a téglatesten a csúcsokat összekötő szakaszokat!

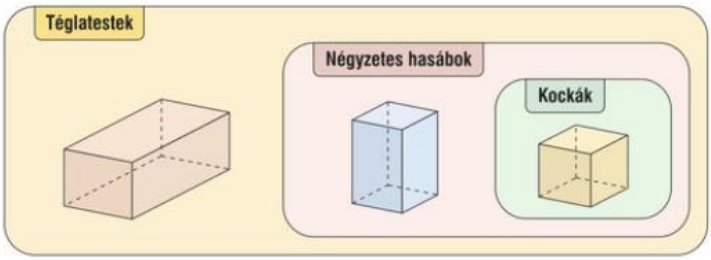
Két szomszédos csúcsot **él** köt össze. Két, egy lapon lévő, nem szomszédos csúcsot összekötő szakasz a **lapátló.** Két, nem egy lapon lévő csúcsot összekötő szakasz a **testátló.**



A téglatestek csoportosítása

A négyzetes hasáb olyan téglatest, amelynek van két négyzetlapja.

A **kocka olyan téglatest,** amelynek minden lapja négyzet.



3D

Feladatok



3D

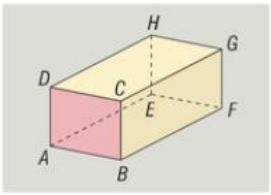
1. A szabályos dobókocka két-két szemközti lapján lévő pöttyök számának összege 7. Figyeljünk meg egy ilyen dobókockát!
   a) Mennyi az 1-es (1 pöttyös) lappal szomszédos lapokon lévő pöttyök számának összege?
   b) Mennyi a 2-es lappal szomszédos lapokon lévő pöttyök számának összege?

2. Hány pötty látható a dobókockán
   a) a 3-as; *b)* a 6-os; *c)* az 5-ös; *d)* a 4-es lappal párhuzamos lapon?

3. A dobókocka 1-es és 2-es lapjai merőlegesek egymásra.
   a) Keressük meg az összes olyan lapot, amely merőleges a 6-os lapra!
   b) Keressük meg az összes olyan lapot, amely merőleges a 4-es lapra!

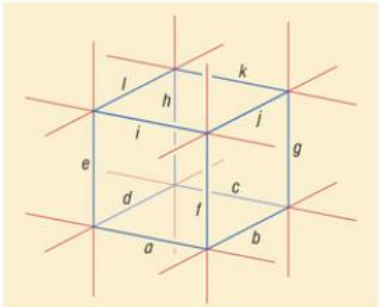
4. Válasszunk ki a dobókocka lapjai közül hármat tetszés szerint, és keressünk köztük egymásra merőleges lapokat!

5. Hány olyan lapja van az ábrán látható téglatestnek, amely a pirosra festett
   a) lappal párhuzamos; *b)* lapra merőleges;
   c) lappal egybevágó? (➡)



6. Soroljuk fel a téglatest *AB* élével egyenlő hosszúságú éleit! Milyen helyzetűek ezek az élek az *AB*-vel? (➡)

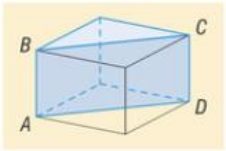
7. Az ábrán kékkel egy kocka élvázát rajzoltuk meg. Keressünk az a egyenessel
   a) párhuzamos egyeneseket;
   b) kitérő egyeneseket! (➡)



8. Válasszunk ki az ábrán az élek közül négyet, és keressünk köztük párhuzamos éleket!

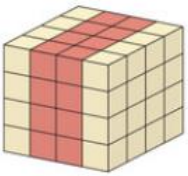
9. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, és melyik hamis!
   a) A téglatest éleinek száma a lapok számának kétszerese.
   b) A téglatestnek ugyanannyi éle van, mint csúcsa.
   c) A téglatest lapjai és csúcsai számának összege 2-vel nagyobb, mint éleinek száma.
   d) A téglatest minden lapjához csak egy olyan lap található, amely nem szomszédos vele.

10. Az A, B, C, D csúcsokon át kettévágjuk a négyzetes hasábot. Hány lapja, éle, csúcsa lesz az így kapott egyik testnek? (➡)



11. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, és melyik hamis!
   a) A téglatestnek van olyan lapja, amely nem téglalap.
   b) A téglatestnek három különböző hosszúságú éle lehet.
   c) Van olyan téglatest, melynek pontosan három lapja négyzet.
   d) Van olyan téglatest, melynek van négy különböző hosszúságú éle.
   e) Van olyan téglatest, melynek pontosan négy lapja négyzet.

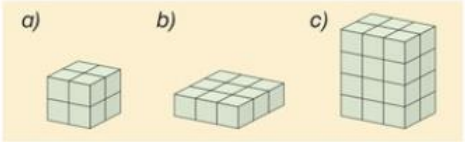
12. Egybevágó kockákból testeket ragasztunk össze úgy, hogy mindig egybevágó négyzetlapokat illesztünk egymásra.
   a) Hányféle testet építhetünk 3 egybevágó kockából?
   b) Hányfélét építhetünk 4 egybevágó kockából?



3D

13. 64 db egységkockából 4 egység élű kockát építettünk. Erre körben 2 egység szélességű csíkot festettünk. Hány 1 egység élű kocka maradt festetlen? (➡)

14. Egységnyi élhosszúságú kockákból téglatestet építettünk az ábra szerint.

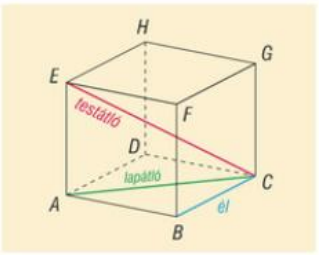


   Állapítsuk meg, hány egységkockát használtunk! Rakjuk ki kockacukorból a testeket! (➡)

15. Hányféle téglatest építhető *a)* 6 db; *b)* 8 db; *c)* 12 db egybevágó kockából? Hány téglatest lesz ezek közül kocka?

Egységkocka: az egy egység élhosszúságú kocka. Akkor használjuk, ha a feladatban lényegtelen, hogy milyen mértékegységet alkalmazunk.

16. Az ábrán betűkkel jelöltük a test csúcsait. (➡)
Például: *CB* él, *CA* lapátló, *CE* testátló.
Írjunk fel további éleket, lapátlókat és testátlókat!



17. Hány lapátlója van egy téglatestnek?
Hány lehet különböző hosszúságú?

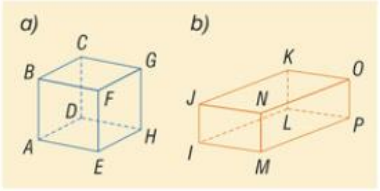
18. Hány testátlója van egy téglatestnek?

19. Összeadtuk egy téglatest éleinek, lapátlóinak és testátlóinak számát. Mennyit kaptunk?

20. Van-e olyan téglatest, melynek csak 2 cm és 4 cm hosszúságú élei vannak?

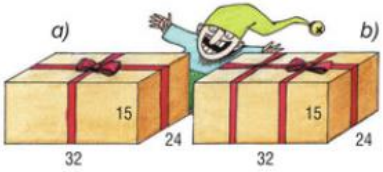
21. Egy téglatest minden csúcsát összekötöttük az összes többi csúccsal. Hány szakaszt kaptunk?

22. Keressünk párhuzamos lapátlókat az ábrán látható
a) kockán; *b)* téglatesten! (➡)



23. Járjuk be az előbbi ábrán látható kocka csúcsait úgy, hogy mindig éleken haladunk, és minden csúcson pontosan egyszer megyünk át! (Írjunk le egy bejárási útvonalat a csúcsokra írt betűk segítségével!)

24. Egy téglatest alakú csomagot kétféleképpen kötöttek át madzaggal. Milyen hosszú madzag szükséges a két csomagoláshoz, ha a téglatest élei 32 cm, 24 cm és 15 cm, a megkötésre pedig 20 cm-t számítunk? (➡)



***25.** Legkevesebb hány színre van szükség, ha a kocka lapjait úgy szeretnénk kiszínezni, hogy egy laphoz csak egy színt használunk, de a szomszédos lapjai különböző színűek legyenek?

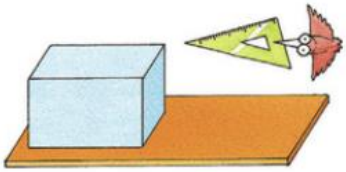
3D

***26.** Egy kocka minden csúcsára 1-et írtunk. Ezután minden élre a végpontjaiknál lévő számok összegét, majd minden lapra a határoló éleken lévő számok összegét írtuk. Mennyi a lapokon lévő számok összege?

***27.** Egy kocka két szomszédos csúcsára 2-t, a többire 1-et írtunk. Ezután minden élre a végpontjaiknál lévő számok összegét, majd minden lapra a határoló éleken lévő számok összegét írtuk. Mennyi a lapokon lévő számok összege?

Rejtvény

Hogyan tudnánk megmérni vonalzóval az asztalon lévő tömör téglatest két legtávolabbi csúcsának távolságát, vagyis a testátló hosszát?

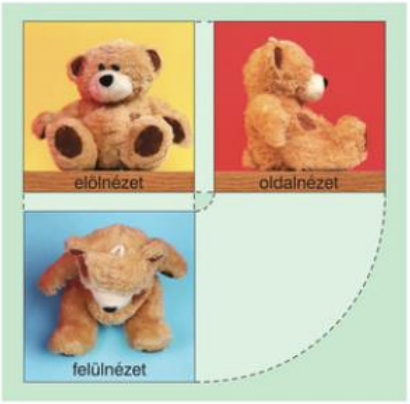


2. A testek ábrázolása (kiegészítő anyag)

3D

3D

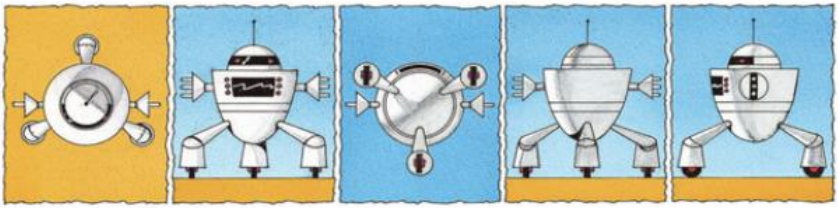




Feladatok

1. Állapítsuk meg, hogy a robot melyik képen van lerajzolva elölről, hátulról, alulról, felülről, illetve oldalról!

3D

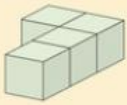


2. Lehet-e az itt látható három kocka ugyanannak a kockának a képe három különböző irányból nézve?

a) 

b) 

3. Melyik lehet a felülnézete az ábra bal oldalán látható testnek az itt következők közül,
   a) ha a testet nem állíthatjuk másik oldalára;
   b) ha a testet állíthatjuk másik lapjára is?
   c) Hány darab egységkockából áll a test, ha a rajzon egy négyzet oldala egy egység?



(A) 

(B) 

(C) 

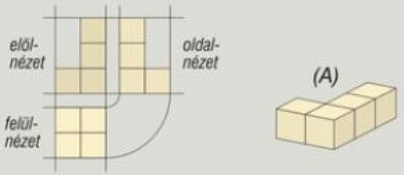
(D) 



4. Melyik lehet az oldalnézete az ábra bal oldalán látható testnek az itt következők közül,
a) ha a testet nem állíthatjuk másik oldalára;
b) ha a testet állíthatjuk másik oldalára is?
c) Hány darab egységkockából áll a test, ha a rajzon egy négyzet oldala egy egység?



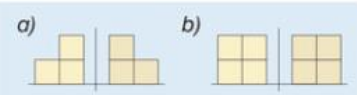
5. Az ábra bal oldalán egy test elöl-, oldal- és felülnézete látható. Az alábbi testek közül melyikről készülhettek ezek a nézetek? Hány darab egységkockából áll a test, ha a rajzon egy négyzet oldala egy egység?



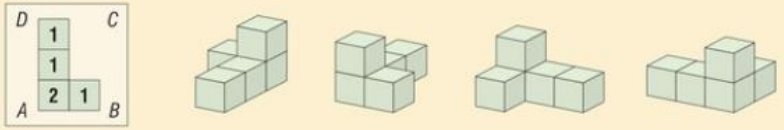
6. Rakjuk ki 10 kockából többféleképpen azokat a testeket, amelyek felülnézete az ábrán látható! (➡)



7. Egy testről annyit tudunk, hogy kockákból áll, és elöl-, illetve oldalnézete az ábrán látható. Legkevesebb hány kockából állhat a test? Legtöbb hány kockából állhat a test? (➡)



8. Egy papírlap négy sarkát *A*, *B*, *C* és *D* betűkkel jelöltük. A papírlapra építettünk egy testet úgy, hogy a négyzetekbe írt számok az ott egymáson álló kockák számát jelentik. A négy sarokból ránézve az alábbiakat látjuk. Mikor melyik sarokból néztük a testet?



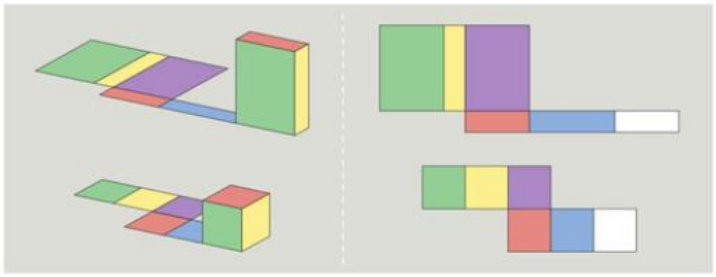
Rejtvény

Hány kocka látható az ábrán? Keressünk több megoldást! (Ha szükséges, számoljuk meg úgy is, hogy megfordítjuk a könyvet!)



3. A téglatest hálói

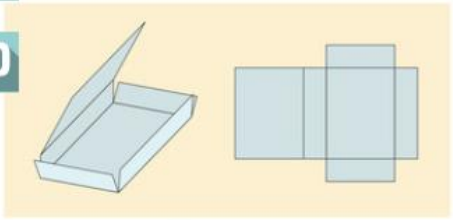


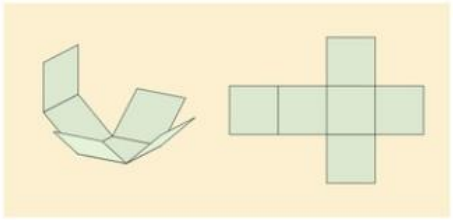


3D

Egy téglatestet a lapjain végiggörgetve minden lapját körberajzoljuk.
A kapott síkidom a téglatest egy hálója.

3D

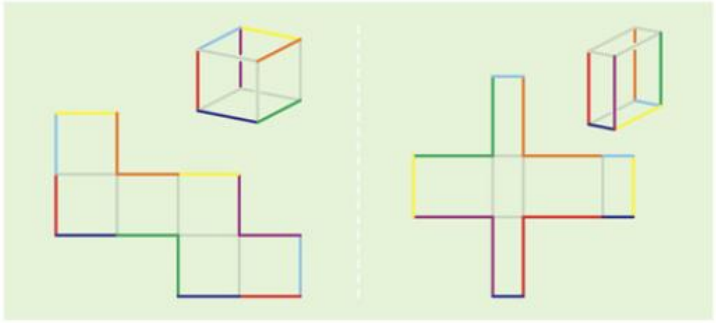




Egy téglatest néhány élét felvágva széthajtogathatjuk, és síkban kiterítjük a testet határoló lapokat. Így is a téglatest egy hálóját kapjuk.

Kiegészítő anyag

Vizsgáljuk meg, hogy hány különböző él mentén kell felvágni a téglatestet, hogy kiteríthető legyen a síkba! Jelöljük különböző színekkel a téglatest azon éleit, amelyeket felvágunk!



A hálón a 6 lapot 5 él tartja össze. Ahhoz, hogy egy téglatestet kiterítsünk, a 12 élből $12 - 5 = 7$ élet kellett felvágni.

Példa

Egy kocka minden lapján van egy betű. Ugyanaz a betű többször is előfordulhat. Az ábra a kockát mutatja három különböző dobás után.

Milyen betű van a kocka alsó lapján az egyes dobások után?



Megoldás

Rajzoljuk le, hogy hogyan helyezkedhet el az első két dobáskor látható 3-3 lap!



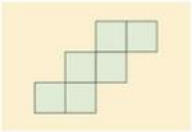
Próbáljuk ezeket összerakni kockahálóvá a harmadik dobásnak megfelelően! Ha a két **S** betű egymáson lenne, nem tudnánk kockává hajtani a lapokat, ezért a két **S** betű különböző. Az **A** és az **R** betű egymáshoz viszonyított helyzete alapján csak a következő háló lehetséges.

A háló alapján látható, hogy az első dobásnál az **A**-val szemközti **S** betű van az alsó lapon. A második dobásnál a felső lapon a két **S** betű közül az van, amelyik az **O**-val szomszédos, így vele szemközt az **A** betű van. Mivel **A** betű csak egy van, így a harmadik dobásnál is **S** betű van az alsó lapon.



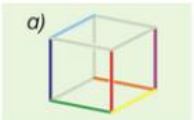
Feladatok

1. Görgessük úgy a dobókockát a füzetünkön, hogy az ábra szerinti hálót kapjuk a kocka lapjainak körberajzolásával! Írjuk be az alsó lapon lévő pöttyök számát a négyzetekbe! (➡)



2. Rajzoljunk le minél többet az 1 cm élhosszúságú kocka hálói közül!

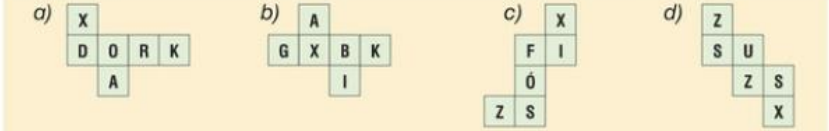
3. Rajzoljuk le azt a kockahálót, melyet a kocka színessel jelölt éleinek felvágásával kapunk! Jelöljük be a hálón az éleknek megfelelő színnel az egymáshoz illeszkedő négyzetoldalakat! (➡)



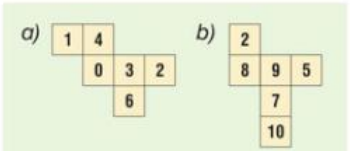
4. A 10 betűvel jelölt négyzet közül egyet hozzáveszünk a pirossal jelölt alakzathoz. Melyik betűvel jelölt négyzet hozzávételével kapunk olyan hálót, melyből kockát lehet hajtogatni? Keressük meg az összes lehetőséget! (➡)



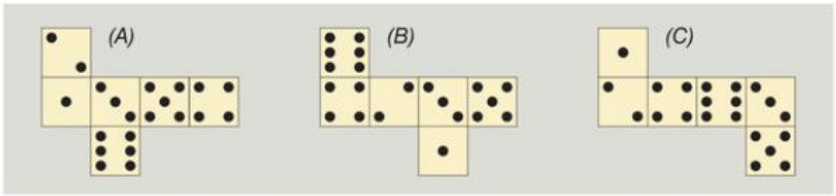
5. Milyen betű lesz az X lappal szemközti lapon, ha az ábrán látható hálót kockává hajtjuk össze?



6. Adott a kocka hálója, minden lapján egy-egy szám. Írjuk be a kocka minden csúcsába az ott találkozó lapokra írt számok összegét! Melyik a legnagyobb szám, amit valamely csúcsra írtunk?



7. Az alábbi hálók közül melyikből kaphatunk szabályos dobókockát?



8. Egy kocka minden lapjára írtunk egy betűt. A betűk egymáshoz viszonyított helye és iránya is kötött. Amikor a kockát háromszor feldobtuk, az ábra szerinti állásokat kaptuk. (➡)



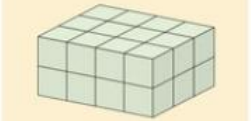
Készítsünk papírból kockahálót, és írjuk rá a betűket a megfelelő állásban! Hajtsuk össze kockává, és ellenőrizzük, hogy helyesen írtuk-e a betűket a lapokra!

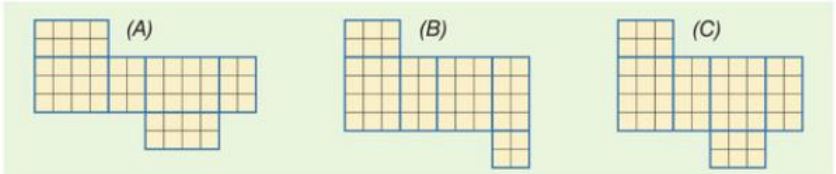
9. Az ábrán látható tömör téglatestet egységnyi élhosszúságú kockákból raktuk össze.

a) Hány darab egységkockát használtunk fel a téglatest építéséhez?

b) Hány darab egységnyi oldalú négyzetlap határolja a téglatestet?

c) Válasszuk ki az alábbi hálók közül azt, amelyik a téglatest hálója lehet!





10. Rajzoljuk le annak a téglatestnek egy hálóját, amelynek egy csúcsba futó élei

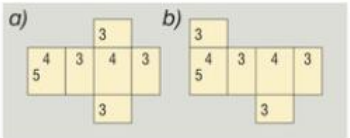
a) 1 cm; 2 cm; 3 cm;

b) 2 cm; 2 cm; 3 cm;

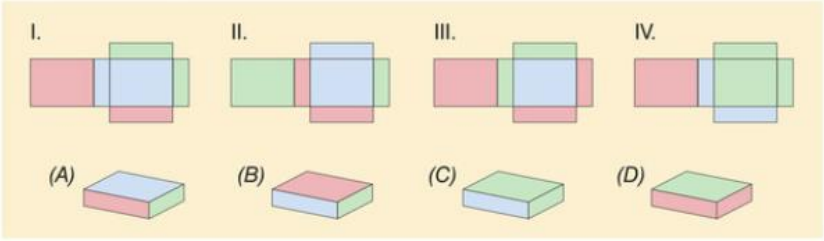
c) 8 mm; 10 mm; 15 mm;

d) 20 mm; 10 mm; 4 cm!

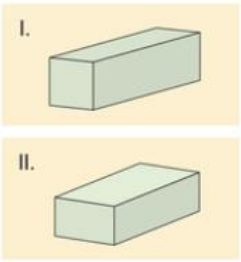
11. A téglatest éleinek hossza 3 cm, 4 cm és 5 cm. A téglatest éleit felvágva az ábra szerinti hálókat kaptuk. Melyik esetben hány centiméter hosszan vágtunk? Készítsük el a hálót, és ragasszuk össze testté! (➡)

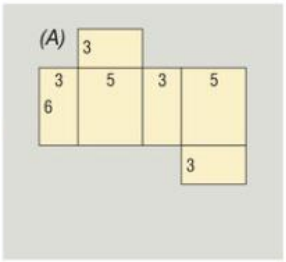


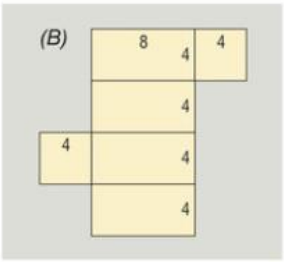
12. Melyik testhez melyik háló tartozik?



13. Az ábrán látható téglatesteknek elkészítettük a hálóját. Melyik háló melyik téglatesthez tartozik? A centiméterben megadott adatok alapján számoljuk ki a hálót alkotó téglalapok területének összegét!



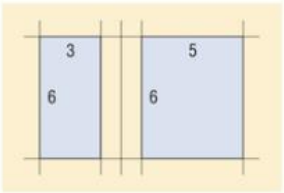




14. Egy téglatestnek az egyik lapja az ábrán látható téglalap. Tudjuk, hogy a téglatestnek van 1 centiméteres éle is. Mekkorák az élei? Rajzoljuk le a téglatest hálóját! (➡)

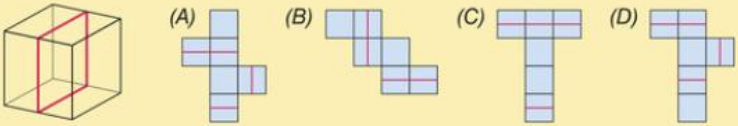


15. Egy téglatest két nézete az ábrán látható. Mekkorák az élei? Rajzoljuk le a téglatest egy hálóját és felülnézetét! (➡)



Rejtvény

Melyik nem az ábrán látható kocka hálója?

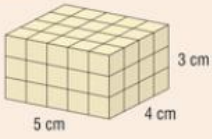


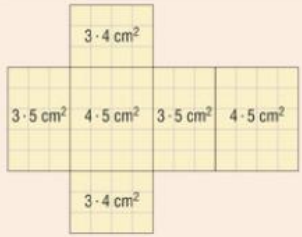
4. A téglatest felszíne

1. példa

Egy papírból készült téglatest egy csúcsban összefutó éleinek hossza 3 cm; 4 cm és 5 cm. Vágjuk szét az élek mentén, és terítsük ki! Mekkora a kapott háló területe?

Megoldás





Adjuk össze a lapok területét!

A téglatest szemközti lapjai egybevágóak, ezért a háló területe:

$$2 \cdot (3 \cdot 4\ \text{cm}^2 + 4 \cdot 5\ \text{cm}^2 + 3 \cdot 5\ \text{cm}^2) = 94\ \text{cm}^2.$$

A háló területe a lapok területének összege.



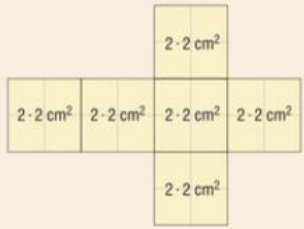
2. példa

Mekkora felületet kell lecsiszolnia egy játékkészítő kézművesnek, ha 100 darab 2 cm élhosszúságú fakockát készít?

Megoldás

Egy fakocka felszíne a kockát határoló lapok területének összege, azaz a háló területe.





A kockát hat egybevágó négyzetlap határolja, ezért a háló területe:

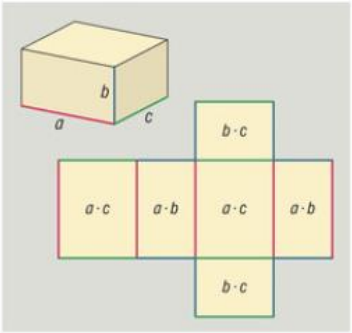
$$6 \cdot 2 \cdot 2\ \text{cm}^2 = 6 \cdot 4\ \text{cm}^2 = 24\ \text{cm}^2.$$

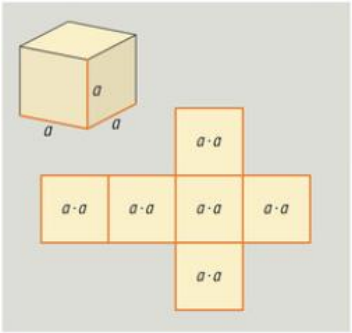
Egy kocka felülete 24 cm², ezért 100 kocka csiszolásakor $100 \cdot 24\ \text{cm}^2$, azaz $2400\ \text{cm}^2 = 24\ \text{dm}^2$ felületet kell lecsiszolnia.

A síklapokkal határolt test felszíne a testet határoló lapok területének összege. A felszín jele: *A*. (A latin *area* szó jelentése terület.)

A téglatest és a kocka felszíne

Legyen a téglatest három különböző éle a, b, c, a kocka éle a hosszúságú.





Az a, b, c élhosszúságú téglatest felszíne:

$$A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c).$$

Az a élhosszúságú kocka felszíne:

$$A = 6 \cdot a \cdot a.$$

A felszín mértékegységei megegyeznek a terület mértékegységeivel.

$$1\ \text{mm}^2 \underset{\cdot 100}{<} 1\ \text{cm}^2 \underset{\cdot 100}{<} 1\ \text{dm}^2 \underset{\cdot 100}{<} 1\ \text{m}^2 \underset{\cdot 1\,000\,000}{<} 1\ \text{km}^2$$



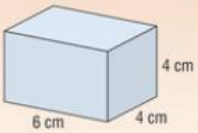
A téglatest felszíne az egy csúcsban találkozó lapok területösszegének a kétszerese.

A kocka felszíne egy lap területének hatszorosa.

3D

3. példa

Villő az ábrán látható, téglatest alakú dobozát színes papírral vonja be úgy, hogy minden lapra egy színes papírt ragaszt, ami pontosan lefedi a doboz lapját.

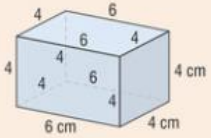


a) Mekkora színes lapokat vágjon ki? Rajzoljuk le őket, és színezzük egyformára az egyforma méretűeket!

b) Mekkora a kivágott színes lapok területének összege?

Megoldás

Írjuk rá a téglatest minden élére a hosszúságát az alapján, hogy a téglatest minden lapja téglalap, amelynek szemközti oldalai egyenlők.



a) A téglatest lapjai:



b) A színes lapok területének összege a téglatest felszíne:

$$A = 2 \cdot (4 \cdot 4) + 4 \cdot (4 \cdot 6) = 128\ (\text{cm}^2)$$

Feladatok

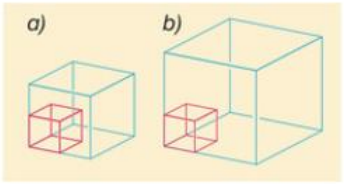
1. Számítsuk ki az alábbi kocka alakú testek felszínét!
   a) 12 mm élhosszúságú kockacukor; *b)* 6 cm élhosszúságú bűvös kocka;
   c) 25 dm élhosszúságú lift; *d)* 300 cm élhosszúságú szoba.

2. Számítsuk ki a felszínét annak a kockának, melynek élei
   a) 4 cm; *b)* 10 m; *c)* 80 dm; *d)* 1700 mm;
   e) 89 m; *f)* 400 mm; *g)* 2 cm 3 mm; *h)* 3 m 5 cm!

3. Mekkora a felszíne annak a kockának, melynek egy lapja
   a) 9 cm^2 területű; *b)* 49 dm^2 területű; *c)* 81 mm^2 területű?

4. Mekkora a felszíne annak a kockának, melynek
   a) két szemközti lapja területének összege 96 dm^2;
   b) négy oldallapja területének összege 76 mm^2;
   c) hat lapja területének összege 234 m^2?

5. Mekkora lesz a kapott kocka felszíne, ha egy 3 cm élhosszúságú kocka minden élét
   a) kétszeresére növeljük;
   b) háromszorosára növeljük?
   Hányszorosa a kapott kocka felszíne az eredeti kocka felszínének? (➡)



6. Számítsuk ki a kocka felszínét, ha a kocka éleinek összhosszúsága
   a) 96 mm; *b)* 60 cm; *c)* 108 dm; *d)* 360 mm!

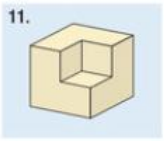
7. Mekkora a kocka egy lapjának területe, ha a kocka felszíne
   a) 48 cm^2; *b)* 66 mm^2; *c)* 96 m^2; *d)* 75 cm^2?

8. Mekkora annak a kockának az éle, melynek felszíne
   a) 24 m^2; *b)* 54 cm^2; *c)* 6 dm^2; *d)* 150 mm^2?

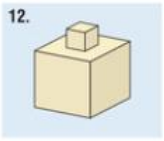
9. Befér-e az ajtón a tanterembe az a kocka, melynek felszíne 15 000 cm^2?

10. Belefér-e a zsebünkbe az a kocka, melynek felszíne
    a) 24 cm^2; *b)* 60 000 mm^2; *c)* 150 cm^2?

11. Egy 6 cm élhosszúságú kockából kivágtunk egy 3 cm élhosszúságú kockát az ábra szerint. Mekkora a maradék test felszíne? (➡)



12. Egy 3 cm élhosszúságú kocka felső lapjának közepére ráragasztottunk egy 1 cm élhosszúságú kockát az ábra szerint. Mekkora a keletkezett test felszíne? (➡)



13. Számítsuk ki annak a téglatestnek a felszínét, melynek élei
    a) 2 mm; 7 mm; 8 mm; *b)* 15 cm; 39 cm; 56 cm;
    c) 32 dm; 5 dm; 8 dm; *d)* 102 m; 7 m; 7 m;
    e) 18 cm; 120 mm; 400 mm; *f)* 30 m; 400 dm; 500 cm;
    g) 125 cm; 3 dm; 300 mm; *h)* 5600 mm; 480 cm; 12 dm!

14. Határozzuk meg annak a téglatestnek a felszínét, melynek egy csúcsban találkozó lapjainak területe

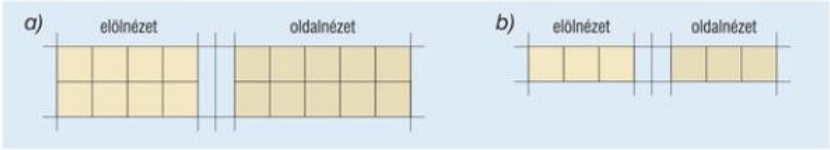
a) $12\ cm^2$; $18\ cm^2$; $24\ cm^2$;

b) $56\ cm^2$; $7\ cm^2$; $8\ cm^2$;

c) $1\ dm^2$; $2\ dm^2$; $32\ dm^2$;

d) $1600\ cm^2$; $40\ dm^2$; $\frac{1}{10}\ m^2$!

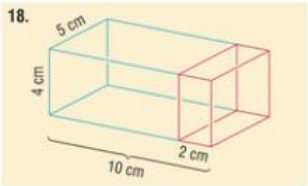
15. Egy téglatest két nézete az ábrán látható. Határozzuk meg az éleinek hosszát és a téglatest felszínét, ha az ábrán egy négyzet oldala 2 cm!



16. Egy téglatest egy csúcsba futó élei közül kettő egyenlő, a harmadik pedig 2 cm-rel hosszabb a másik kettőnél. E három él hosszának összege 14 cm. Számítsuk ki a téglatest felszínét!

17. Egy $25\ m^2$ alapterületű szoba élei méterben mérve egész számok, magassága 3 m. Két ajtó van rajta, amelyek 1 m szélesek és 2 m magasak. Egy ablaka van, amely 3 m széles és 2 m magas. A szoba falát és mennyezetét le akarjuk festeni. Hány kilogramm festéket vásároljunk, ha egy négyzetméter lefestéséhez $\frac{1}{5}$ kg festék szükséges?

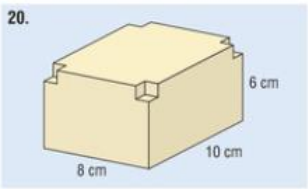
18. Az ábrán látható 4 cm, 5 cm és 10 cm élhosszúságú téglatestből levágtunk egy 4 cm, 5 cm és 2 cm élhosszúságú téglatestet. Hány négyzetcentiméterrel csökkent a téglatest felszíne? (➡)



19. Egy piros téglatest élei 2 cm, 4 cm és 7 cm, egy kék téglatest élei 2 cm, 4 cm és 10 cm. A két téglatestet összeragasztjuk úgy, hogy egybevágó lapjaik pontosan illeszkedjenek egymásra.

a) Mekkora a keletkezett test felszíne?

b) Hogyan lehet másképp összeragasztani a két téglatestet úgy, hogy a keletkezett test felszíne ugyanakkora legyen, mint az előbbi esetben?



20. Hogyan változik az ábrán látható téglatest felszíne, ha a fedőlapjának mind a négy csúcsánál kivágunk belőle egy-egy 1 cm élű kockát? (➡)

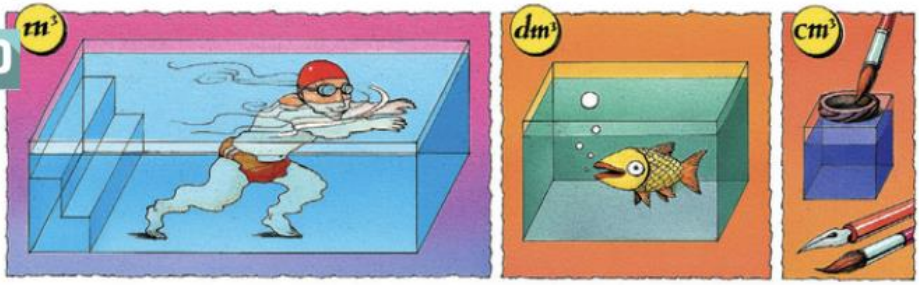
21. Három gyufásdobozt összeragasztottunk úgy, hogy téglatestet kaptunk. Mekkora az így keletkezett testek felszíne, ha egy gyufásdoboz élei 52 mm, 35 mm és 15 mm hosszúak?

Rejtvény

Három szabályos dobókockát egymás mellé tettünk egy körbejárható asztalra az ábra szerint. Összeadtuk a látható pöttyöket. Mennyi lehet az összeg?



5. A térfogat (űrtartalom) mérése



Régi magyar űrmérték egységek:
1 icce ≈ 85 cl,
1 akó ≈ 54 liter .

Amerikai űrmérték egységek:
1 pint ≈ 47 cl,
1 gallon ≈ 38 dl.

térfogat	
1 mérőszám	m^3 mértékegység

Egy test **térfogatát** úgy mérhetjük meg, hogy megszámláljuk, hány egységkockával tölthető ki.

A térfogat alapegysége az 1 köbméter (m^3), ami az 1 m élhosszúságú kocka térfogata.

a kocka élének hossza	a kocka térfogata (űrmértéke)	a mértékegység neve
1 mm	1 mm^3	köbmilliméter
1 cm	1 cm^3 (= 1 ml)	köbcentiméter (milliliter)
1 dm	1 dm^3 (= 1 l)	köbdeciméter (liter)
1 m	1 m^3	köbméter

Folyadékok térfogatának mérésekor mértékegységként a dm^3 helyett gyakran a **litert** használjuk (1 dm^3 = 1 liter).

1 liter = 10 dl = 100 cl = 1000 ml

Rövidítések: hektoliter – hl; liter – l; deciliter – dl; centiliter – cl; milliliter – ml.

1 dm^3 = 1 liter
1 cm^3 = 1 ml

A térfogat (űrmérték) mértékegységei:

$$1\ mm^3 \overset{\cdot 1000}{<} 1\ cm^3 \overset{\cdot 1000}{<} 1\ dm^3 \overset{\cdot 1000}{<} 1\ m^3 \overset{\cdot 1\,000\,000\,000}{<} 1\ km^3$$

$$1\ ml \overset{\cdot 10}{<} 1\ cl \overset{\cdot 10}{<} 1\ dl \overset{\cdot 10}{<} 1\ liter \overset{\cdot 100}{<} 1\ hl$$

$1000\ mm^3 = 1\ cm^3$ $\quad 1000\ dm^3 = 1\ m^3$ $\quad 10\ dl = 1\ liter$

$1000\ cm^3 = 1\ dm^3$ $\quad 1\,000\,000\,000\ m^3 = 1\ km^3$ $\quad 100\ liter = 1\ hl$

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3 = 1\,000\,000\,000\ mm^3$$

$$1\ hl = 100\ liter = 1000\ dl = 10\,000\ cl = 100\,000\ ml$$

Feladatok

1. A hangya csak köbmilliméterben, az egér csak köbcentiméterben, a nyúl csak köbdecimé-terben, az elefánt csak köbméterben tud mérni.
Váltsuk át az ő mértékegységükbe a következő mennyiségeket!



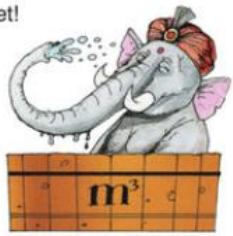
a) 31 dm^3;
b) 14 dm^3 93 cm^3;
c) 3 ml;
d) fél cl.



a) 5000 mm^3;
b) 89 dm^3 35 cm^3;
c) 67 ml;
d) 5 dl 34 cl.



a) 9 m^3 21 dm^3;
b) 6 liter;
c) 5000 ml;
d) 7 hl.



a) 18 000 dm^3;
b) 80 hl;;
c) 56 000 liter;
d) 4 millió cm^3.

2. Váltsuk át a következő mennyiségeket
a) milliliterbe: 45 cl; 3 dl 23 cl; 70 000 mm^3; 410 dm^3 85 cm^3;
b) centiliterbe: 5100 ml; 4 dl 67 cl; 43 000 000 mm^3; 27 dm^3 870 cm^3;
c) deciliterbe: 760 cl; 7 dl 50 cl; 200 000 mm^3; 34 dm^3;
d) literbe: 600 dl; 9 hl; 72 000 000 mm^3; 7 m^3 211 dm^3;
e) hektoliterbe: 400 liter; 8300 liter; 51 000 dm^3; 8 m^3 300 dm^3!

3. Melyik nagyobb?
a) 56 liter vagy 480 dl; *b)* 3 liter vagy 4 dm^3; *c)* 790 liter vagy 8 hl;
d) 670 ml vagy fél liter; *e)* 5 ml vagy 500 mm^3; *f)* 94 m^3 vagy 95 hl?

4. Válasszuk a legvalószínűbbet!
a) Egy autó tankja 500 l; 5 hl; 50 l. *b)* Egy fürdőkád 20 dl; 20 l; 200 l.
c) Egy kávéscsésze 8 cl; 8 l; 20 ml. *d)* Egy fazék 4 l; 34 hl; 54 ml.

5. A szederpite hozzávalói a következők:
• fél bögre cukor • 1 evőkanál citromlé • 2 és fél bögre szárított szeder
• fél bögre szederszörp • 2 és fél evőkanál liszt • fél teáskanál fahéj • 1 evőkanál olaj.
Becsüld meg a hozzávalók térfogatát milliliterben!

6. A Balatonban körülbelül 2 milliárd m^3 víz van. Fejezzük ki ezt köbkilométerben és hektoliterben!

7. Mikor használunk több vizet, ha egy 200 dm^3-es, vízzel teli kádban fürdünk, vagy ha 5 percig tusolunk, percenként 15 liter vizet fogyasztva?

Rejtvény

Beleférne-e a Földön élő összes ember egy 1 km^3 térfogatú kockába?

6. A téglatest térfogata

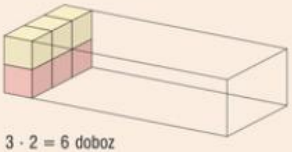
Példa

Egy teherautó rakterébe 1 m élhosszúságú, kocka alakú dobozokat rakodnak. Hány doboz fér a teherautóra, ha a raktér éleinek hossza 3 m; 2 m és 8 m?

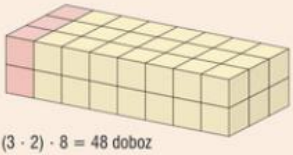
Megoldás

A raktér belső éléhez 3 dobozt, hátsó falához $3 \cdot 2 = 6$ dobozt rakhatunk. Mivel a raktér 8 m hosszú, ezért 8 ilyen réteg kerülhet egymás mellé. Így $8 \cdot 6 = 48$ doboz fér a raktérbe.



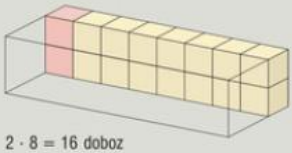


$3 \cdot 2 = 6$ doboz

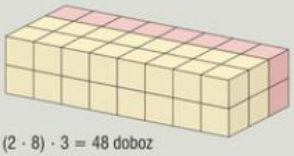


$(3 \cdot 2) \cdot 8 = 48$ doboz

A dobozok rakodását végezhettük volna az alábbi módokon is:



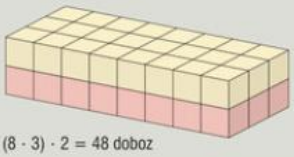
$2 \cdot 8 = 16$ doboz



$(2 \cdot 8) \cdot 3 = 48$ doboz



$8 \cdot 3 = 24$ doboz



$(8 \cdot 3) \cdot 2 = 48$ doboz

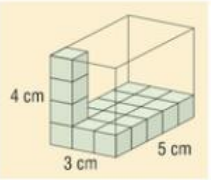
Láthatjuk, hogy bármilyen sorrendben raktuk be a dobozokat, a raktérben ugyanannyi 1 m élhosszúságú dobozt tudtunk elhelyezni.

$$(3 \cdot 2) \cdot 8 = (2 \cdot 8) \cdot 3 = (8 \cdot 3) \cdot 2 = 48$$

Ha a téglatest éleinek hossza egész szám, akkor a térfogatát úgy tudjuk megadni, hogy meghatározzuk, hány darab egységnyi élhosszúságú kockából rakható ki a test. A térfogat jele: *V* (volume = térfogat).

A téglatest térfogatának kiszámítása

Tekintsünk egy téglatestet, amelynek élei 3 cm; 5 cm és 4 cm hosszúságúak. A térfogatát úgy határozzuk meg, hogy 1 cm élű kockákkal rakjuk ki.



1. Térfogategység: az 1 cm élhosszúságú kocka térfogata (1 cm^3).
2. A 3 cm-es él mentén 3 db 1 cm élhosszúságú kocka fér el.
3. Egy rétegben $3 \cdot 5$ db 1 cm élhosszúságú kocka fér el.
4. A téglatestbe 4 db ilyen réteg rakható.

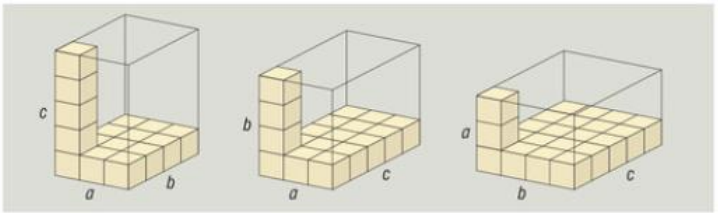
Az 3 cm, 5 cm, 4 cm élhosszúságú téglatest térfogata:

$$V = 3 \cdot 5 \cdot 4 \text{ cm}^3 = 60 \text{ cm}^3.$$

A téglatest térfogata az egy csúcsba futó élei hosszának szorzata.
Az *a; b; c* élhosszúságú téglatest térfogata:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

(Az összefüggés nem csak egész mérőszámok esetén igaz.)



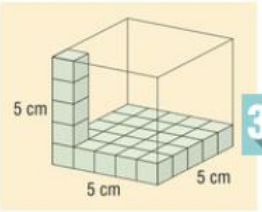
$V = a \cdot b \cdot c$
$V = a \cdot c \cdot b$
$V = b \cdot c \cdot a$

Ha egy téglatestnek a térfogatát három különböző lapjára állítva számoljuk, ugyanazt az eredményt kapjuk.

A téglatest térfogatát megkapjuk, ha egyik lapjának (alaplap) területét megszorozzuk a rá merőleges él (magasság) hosszával.

A kocka térfogata

Az 5 cm élhosszúságú kockát rakjuk ki 1 cm élhosszúságú kockákkal!



1. Egy rétegben $5 \cdot 5$ db 1 cm élhosszúságú kocka fér el.
2. A nagy kockába 5 db ilyen réteg rakható.

Az 5 cm élhosszúságú kocka térfogata:

$$V = 5 \cdot 5 \cdot 5 \text{ cm}^3 = 125 \text{ cm}^3.$$

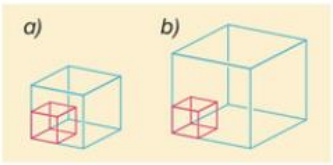
Az *a* élhosszúságú kocka térfogata: $V = a \cdot a \cdot a$.

3D

Feladatok

1. Számítsuk ki a következő kocka alakú testek térfogatát!
   a) 12 mm élhosszúságú kockacukor; *b)* 6 cm élhosszúságú bűvös kocka;
   c) 25 dm élhosszúságú lift; *d)* 300 cm éhosszúságú szoba.

2. Mekkora lesz a kapott kocka térfogata, ha egy 3 cm élhosszúságú kocka minden élét
   a) kétszeresére növeljük;
   b) háromszorosára növeljük?
   Hányszorosa a kapott kocka térfogata az eredeti kocka térfogatának? (➡)



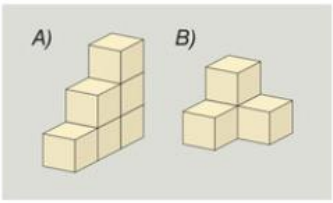
3. Számítsuk ki a kocka térfogatát, ha éleinek összhosszúsága
   a) 96 mm; *b)* 60 cm; *c)* 108 dm; *d)* 360 mm!

4. Hat darab négyzetlapból kockát állítottunk össze. Mekkora a kocka térfogata, ha egy négyzetlap területe
   a) 4 cm^2; *b)* 1600 dm^2; *c)* 121 mm^2; *d)* 36 cm^2?

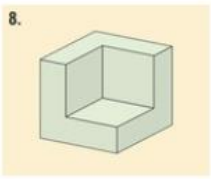
5. Belefér-e a zsebedbe az a kocka, melynek térfogata
   a) 8000 mm^3; *b)* 64 cm^3; *c)* 8 dm^3?

6. Befér-e az ajtón a tanterembe az a kocka, amelynek térfogata 27 000 dm^3?

7. Az ábrán látható testeket egybevágó, 1 cm élhosszúságú kockákból építettük. (➡)
   a) Mekkora a térfogatuk?
   b) Legkevesebb hány kis kockára van még szükség, hogy a testeket kockává egészítsük ki?

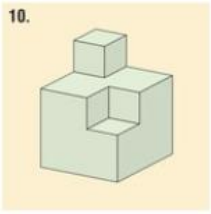


8. A 3 cm élhosszúságú kockából az egyik csúcsánál kivágunk egy 2 cm élhosszúságú kockát. (➡)
   a) Mekkora az így keletkezett test térfogata?
   b) Hogyan változott a test felszíne az eredetihez képest?



9. Hány különböző téglatest építhető nyolc darab 1 cm élhosszúságú kockából? Mekkora ezek térfogata? Melyiknek a legkisebb a felszíne?

10. Egy 5 cm élhosszúságú kockából az egyik csúcsánál kivágunk egy 2 cm élhosszúságú kockát, és a tetejére ragasztjuk az ábra szerint. (➡)
    a) Mekkora az így keletkezett test térfogata?
    b) Mennyivel változott a test felszíne az eredetihez képest?



11. Ki lehet-e vágni az 5 cm élű kockából 8, 9, 10 db 1 cm élű kockát úgy, hogy a keletkező test felszíne ne változzon?

12. Számítsuk ki annak a téglatestnek a térfogatát, melynek élei

a) 2 mm; 7 mm és 8 mm; *b)* 15 cm; 15 cm és 56 cm;

c) 32 dm; 5 dm és 8 dm; *d)* 102 m; 7 m és 7 m;

e) 200 mm; 20 cm és 2 dm; *f)* 3 m; 40 cm és 9 dm;

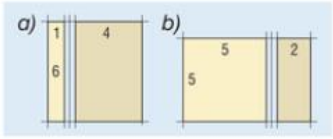
g) 10 mm; 1 cm és $\frac{1}{100}$ m; *h)* 4 m; 4 mm és 4 cm!

13. Számítsuk ki a téglatest térfogatát, ha egy lapjának területe és az adott lapra merőleges élének hossza:

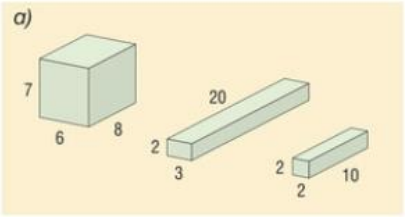
a) 35 cm^2; 18 cm; *b)* 197 dm^2; 23 dm; *c)* 48 dm^2; 30 cm;

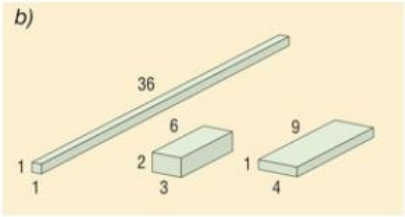
d) 719 mm^2; 5 cm; *e)* 3700 cm^2; 42 dm; *f)* 150 m^2; 380 dm!

14. Egy téglatest két nézetét látjuk az ábrán. Határozzuk meg éleinek hosszát, és a téglatest térfogatát!



15. Az ábrán látható téglatestek közül melyiknek a legnagyobb a térfogata? Először „ránézésre" válaszoljunk, utána számolással ellenőrizzük a választ!





16. Keressünk olyan egész centiméter élhosszúságú téglatesteket, amelyek térfogata 64 cm^3! Készítsük el az egyik ilyen test hálóját, és ragasszuk össze testté!

17. Adott egy téglatest térfogata és egy lapjának területe. Számítsuk ki a lapra merőleges élének hosszát!

a) 11664 dm^3; 486 dm^2; *b)* 3588 dm^3; 6900 cm^2; *c)* 1 720 000 dm^3; 215 m^2.

18. Adott egy téglatest térfogata és egy élének hossza. Számítsuk ki az adott élre merőleges lapjának területét!

a) 23 688 dm^3; 56 dm; *b)* 2006 dm^3; 340 cm; *c)* 1 512 000 dm^3; 42 m.

19. A házunk előtti 20 m hosszú járdára reggelre 15 cm hó esett. Hány köbméter havat kell ellapátolni, ha a járda 1 m széles?

20. Mérjük meg egy téglatest alakú 1 literes üdítős doboz méreteit! Hány köbmilliméter marad üresen, ha pontosan 1 liter üdítőt töltenek bele? (A doboz falának vastagságát elhanyagolhatjuk.)

Rejtvény

Van-e olyan test, amelynek minden lapja négyzet, és mégsem kocka?

7. Vegyes feladatok

1. A képen négyféle méretű doboz látható.
   a) Számítsuk ki az egyes dobozok térfogatát!
   b) Hány fér az 1-es méretű dobozból a 3-as méretűbe?
   c) Hány fér az 1-es méretű dobozból a 4-es méretűbe?



A dobozok mérete:
1. 250 × 175 × 100 (mm)
2. 350 × 250 × 120 (mm)
3. 400 × 250 × 150 (mm)
4. 500 × 300 × 200 (mm)

2. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, és melyik hamis!
   a) Minden négyzetes hasáb téglatest.
   b) Van olyan téglatest, amely nem négyzetes hasáb.
   c) Van olyan kocka, amely nem négyzetes hasáb.
   d) Nincs olyan négyzetes hasáb, amely kocka.
   e) Nem igaz, hogy minden kocka téglatest.

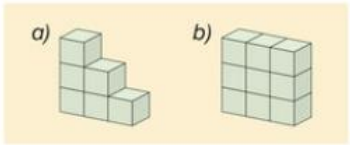
3. Egy téglatest két éle 5 és 12 egység hosszúságú. Mennyi a lehető legkisebb térfogatú ilyen test felszíne és térfogata, ha a harmadik élének hossza is egész szám?

4. Három 1 dm élű kockát egymás tetejére raktak. Mennyivel nő a test felszíne, ha még egy kockát ráteszünk? És ha utána még egyet?

5. Mekkora a felszíne annak a kockának, melynek térfogata
   a) 1 dm^3; *b)* 27 cm^3; *c)* 8 dm^3; *d)* 125 m^3; *e)* 64 mm^3?

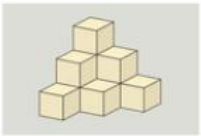
6. Mekkora a térfogata annak a kockának, melynek felszíne
   a) 6 m^2; *b)* 150 cm^2; *c)* 54 m^2; *d)* 294 mm^2; *e)* 600 dm^2?

7. Hasonlítsuk össze az ábrán látható két test felszínét és térfogatát, ha egybevágó kockákból vannak összerakva! (➡)



8. Vegyünk egy 1 cm^3, egy 8 cm^3 és egy 27 cm^3 térfogatú kockát, és ragasszuk össze lapjaiknál úgy, hogy a keletkező test felszíne a lehető legkisebb legyen! Mekkora ez a minimális felszín?

9. 11 kockából építünk egy testet. 10 kockát már összeragasztottunk az ábrán látható módon. Hová ragasszuk a 11-ediket, hogy a keletkező test felszíne a lehető legkisebb legyen? (➡)



10. Egy szobornak 14 db 1 m élű kockából építették az ábrán látható talapzatot. A talapzat külső felületét befestik (az alapját nem). Hány négyzetméter felületet kell befesteni? (➡)



11. Hogyan változik az 5 cm élű kocka felszíne és térfogata, ha

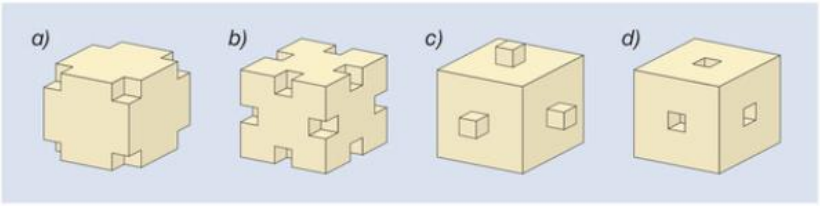
a) minden csúcsánál kivágunk egy-egy 1 cm élű kockát;

b) minden élének közepén kivágunk egy-egy 1 cm élű kockát;

c) minden lapjának közepére ráteszünk egy-egy 1 cm élű kockát;

d) minden lapjának közepén kivágunk egy-egy 1 cm élű kockát?

3D



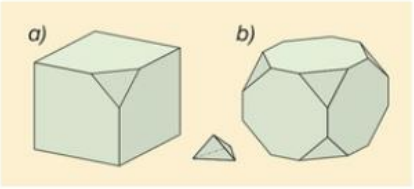
12. Hogyan lehet kivágni az 5 cm élű kockából 1 cm élű kockákat úgy, hogy a keletkező test felszíne *a)* 158 cm^2; *b)* 164 cm^2 legyen? Keressünk több lehetőséget!

13. Egy kocka (➡)

a) egyik csúcsánál;

b) minden csúcsánál

levágunk egy testet (tetraédert) a kocka éleinek a csúcshoz közelebbi harmadolópontján átmenő síkkal. Hány lapja, éle, csúcsa lesz a maradék testnek?



c) Hány lapja, éle, csúcsa lesz a maradék testnek, ha a metsző síkok mindig az él felezőpontján mennek át?

14. Egy kocka éleinek mindegyikét pirosra vagy kékre festettük úgy, hogy a kocka mindegyik lapján legyen legalább egy piros él. Próbáljunk minél kevesebb élet pirosra festeni úgy, hogy ez teljesüljön!

3D

15. Egy festékbe mártott

a) 3 cm élhosszúságú kockát;

b) 3 cm · 4 cm · 5 cm-es téglatestet,

szétvágtunk 1 cm élhosszúságú kockákra.

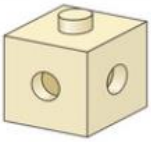
Hány olyan kis kockát kaptunk, melyeknek 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 lapja festett?

16. Egy fából készült 3 cm élhosszúságú kocka három szomszédos lapját pirosra, a többit kékre festettük. Ezután a lapjaival párhuzamos síkokkal szétvágtuk 1 cm élhosszúságú kockákra. Hány különböző színezésű kis kocka keletkezett?

17. Egy téglatestet 12 darab egységkockából állítottunk össze. Az így kapott téglatest egyik éle egy másik élének a kétszerese, és van két olyan éle, amelyek hosszának különbsége 1 egység. Hány egység hosszúak a téglatest élei?

18. Készítsünk 12 darab egységkockából téglatestet, és az élek hosszának megadása nélkül mondjunk olyan állításokat, melyekből az élek hossza meghatározható!

19. Egy kockákból álló építőjátékban minden kocka 5 lapjának közepén korong alakú lyuk, 1 lapjának közepén ugyanolyan méretű korong alakú kiemelkedés található. Legkevesebb hány ilyen kockát kell összerakni, hogy a kapott testen ne legyen olyan lap, amelyen kiemelkedés van? (➡)



3D

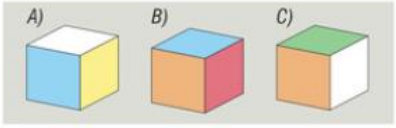
20. Az ábrán egy kocka látható három különböző nézetből. (➡)



Melyik lap van a  lappal szemben?

3D

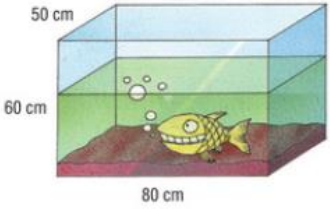
***21.** Három kocka mérete és színezése megegyezik. A hat lapjuk különböző színű. Milyen szín áll a fehérrel szemben, ha Albert, Béla és Csaba egy-egy kockát kézben tartva így látják a saját kockájukat?



22. Egy akvárium belsejének méretei az ábrán láthatók. Az akváriumot félig feltöltöttük vízzel. Amikor ezután homokot és kavicsot tettünk bele, a vízszint 6 cm-t emelkedett. (➡)

a) Mekkora az akváriumba tett homok és kavics össztérfogata?

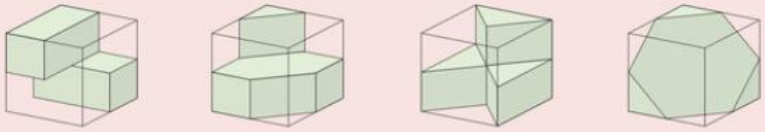
b) Hány centiméter magasan áll a víz az akváriumban, ha ezt követően még 40 liter vizet töltünk bele?



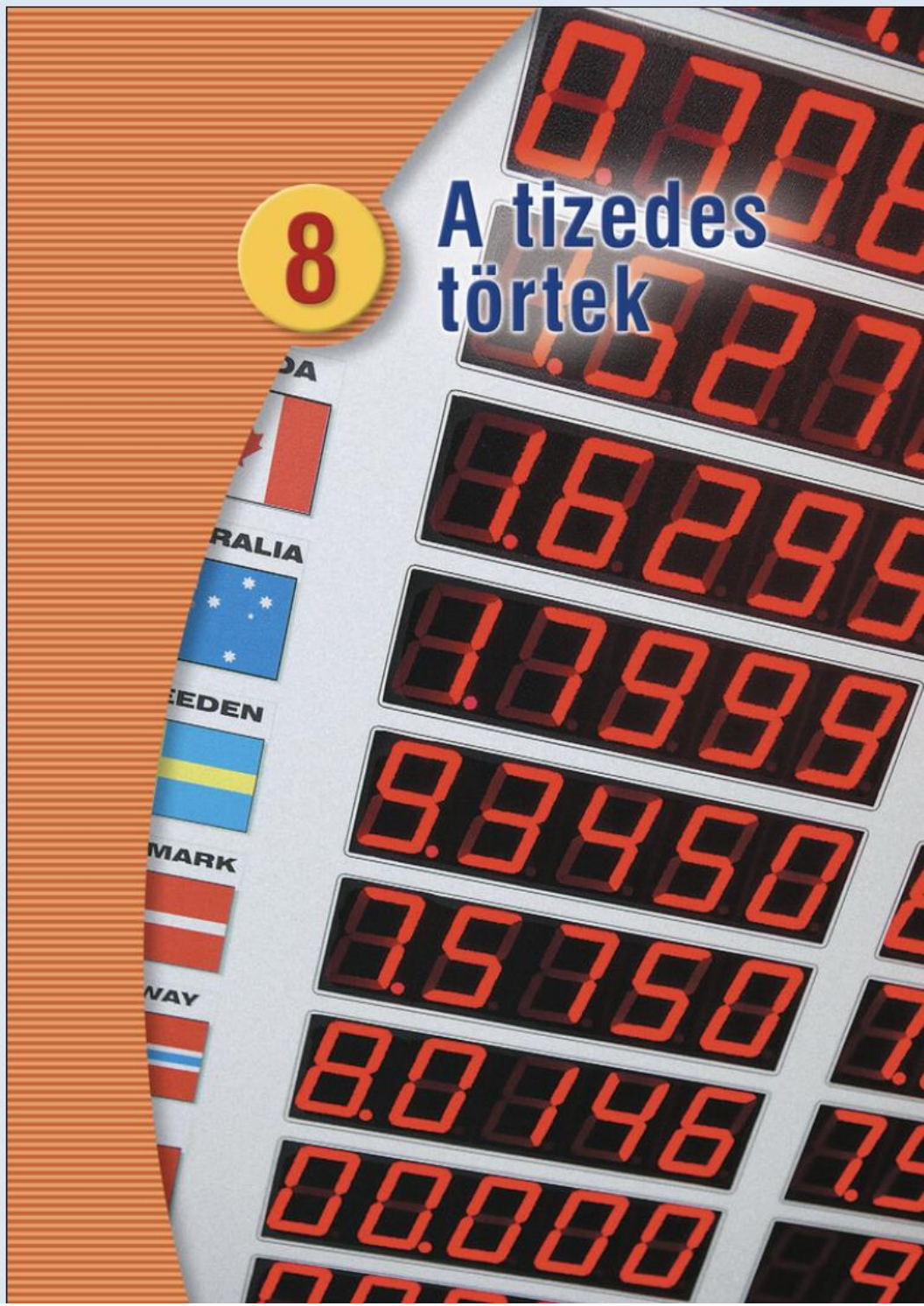
23. Egy kék és egy piros szabályos dobókockával egy kétjegyű számot szeretnénk kisorsolni. A kékkel dobunk egy számot, ez lesz a tízesek helyén, a pirossal dobott szám pedig az egyesek helyén. Hányféle kétjegyű számot kaphatunk? Hányféle háromjegyű számot kaphatunk, ha egy zöld, egy kék és egy piros dobókockával sorsoljuk ki egy szám százasok, tízesek és egyesek helyén álló számjegyeit?

Érdekesség

Az alábbi ábrákon olyan testeket láthatunk, amelyekből két darabot egymás mellé tudunk úgy rakni, hogy kockát kapjunk. Készítsünk kartonból ilyen testeket! Keressünk további ilyen testeket!



8 A tizedes törtek



1. A tizedes tört fogalma





$\frac{5}{10}$: közönséges tört;
0,5: tizedes tört alak

1. példa

Bővítsük az adott törteket 10; 100; 1000 nevezőjű törtekké!

a) $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{3}{4}$; *c)* $\frac{171}{125}$.

Megoldás

a) $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$; *b)* $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$; *c)* $\frac{171}{125} = \frac{1368}{1000} = 1\frac{368}{1000}$.

A 10; 100; 1000; ... nevezőjű törteket gyakran tizedes tört alakban írjuk:

a) $\frac{5}{10} = 0{,}5$; *b)* $\frac{75}{100} = 0{,}75$; *c)* $1\frac{368}{1000} = 1{,}368$.

$\frac{1}{10} = 0{,}1$

$\frac{1}{100} = 0{,}01$

$\frac{1}{1000} = 0{,}001$

A tizedes törtek helye a helyiérték-táblázatban

A tízes számrendszerben egy adott helyi értékről **egyet balra lépve tízszeres**, **egyet jobbra lépve tizedakkora** helyi értékre jutunk. Ha az egyesek után tovább haladunk jobbra, akkor 1-nél kisebb helyi értékeket kapunk. Ezek a **tizedek, századok, ezredek, tízezredek, százezredek, milliomodok...**

	...	*százas*	*tízes*	*egyes*	*tized*	*század*	*ezred*	...
a)			7	3	2			
b)		5	0	8	0	6		
c)				0	9	2	5	

tizedes tört

egész rész | tizedesvessző | tizedrész

508,06

A zsebszámológépeken és egyes országokban tizedesvessző helyett tizedespontot használnak.

	Helyi érték szerinti bontás		Vegyes szám alak		Tizedes tört alak
	$7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{10}$	=	$73\frac{2}{10}$	=	73,2
	$5 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100}$	=	$508\frac{6}{100}$	=	508,06
	$0 \cdot 1 + 9 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1000}$	=	$\frac{925}{1000}$	=	0,925

A tizedes törtek írásakor az egész részt a törtrésztől **tizedesvesszővel** választjuk el. A tizedesvessző után álló számjegyeket tizedesjegyeknek nevezzük. A 0-nál nagyobb és 1-nél kisebb tizedes törtekben a tizedesvessző elé 0-t írunk.



A tizedes törtek olvasása

a tizedes törtek olvasása	kimondjuk a tizedesvessző előtt álló számot	a tizedesvessző helyén mondjuk az „egész" szót	kimondjuk a tizedesvessző után álló számot	hozzátesszük a legkisebb leírt helyi értéket
73,2	hetvenhárom	egész	kettő	tized
508,06	ötszáznyolc	egész	hat	század
0,725	nulla	egész	hétszázhuszonöt	ezred



Feladatok

1. Írjuk le a helyiérték-táblázatban levő számokat tizedes tört alakban!

...	százas	tizes	egyes	tized	század	ezred	tízezred	százezred	milliomod	...
		1	2	0	3	4				
			0	0	0	7	8	5	1	
	9	7	0	1	4	5	7	9		
	8	0	5	4	0	4	4			
	2	3	4	7	5	0	5	2		

2. Írjuk be a következő számokat helyiérték-táblázatba, majd írjuk le tizedes tört alakban!

a) $5\frac{3}{10}$; *b)* $10\frac{3}{100}$; *c)* $\frac{61}{100}$; *d)* $200\frac{6}{10}$; *e)* $50\frac{60}{100}$; *f)* $60\frac{50}{1000}$.

3. Írjuk le a következő számokat tizedes tört alakban!

a) 3 egész 4 tized; *b)* 7 egész 96 század; *c)* 157 ezred;
d) 2 egész 51 tízezred; *e)* 10 egész 6 százezred; *f)* 0 egész 44 milliomod.

4. Írjuk le a következő számokat tizedes tört alakban:

a) negyven egész negyvenhét század; *b)* ötven egész hatszázhét ezred;
c) nulla egész négyszázhét milliomod; *d)* tizenöt egész háromezer-kettő tízezred!

5. Olvassuk ki a következő számokat! Írjuk le a számok helyi érték szerinti bontását!

a) 44,5; *b)* 70,03; *c)* 0,007; *d)* 123,0321; *e)* 20,00006.

6. Írjuk be a következő számokat helyiérték-táblázatba, majd írjuk le tizedes tört alakban!

a) 2 tízes + 5 tized; *b)* 12 tízes + 7 tized + 5 század;
c) 2 tízes + 3 század + 4 ezred; *d)* 0 egyes + 2 tized + 8 százezred.

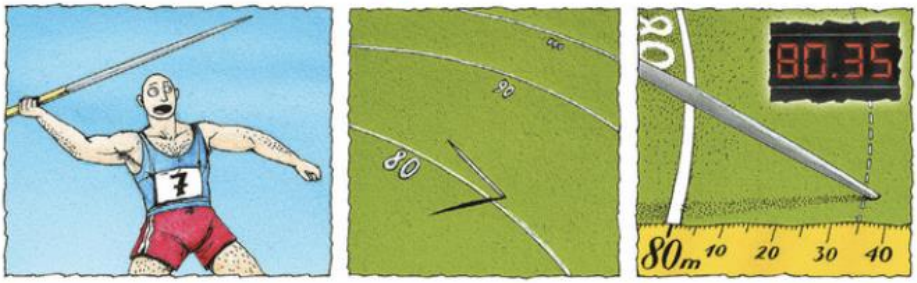
7. Az $A \cdot 1000 + B \cdot 100 + C \cdot 10 + D \cdot 1 + E \cdot \frac{1}{10} + F \cdot \frac{1}{100} + G \cdot \frac{1}{1000}$ összegben milyen számjegyet jelentenek a betűk, ha az összeg tizedes tört alakja

a) 803,47; *b)* 830,4; *c)* 8030,047; *d)* 345,350; *e)* 3405,035; *f)* 3045,005?

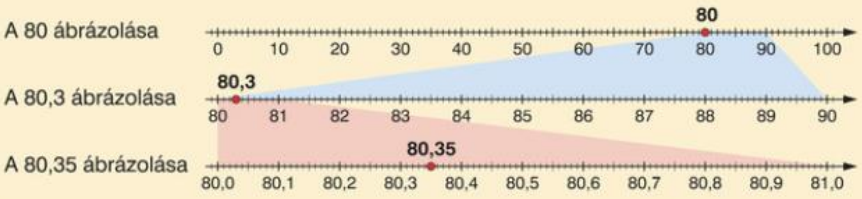
Rejtvény

Írjuk le a lehető legkevesebb számjeggyel a 0,000003 számot!

2. A tizedes törtek ábrázolása számegyenesen



A tizedes törtek helye is megkereshető a számegyenesen. A következő ábrázoláson megmutatjuk, hogy az egységet a pontosságnak megfelelően érdemes megválasztani. A 80,35 tizedes tört ábrázolása számegyenesen:



1. példa

A 60 m-es síkfutás döntőjében a következő eredmények születtek: Dani 12,2 mp; Feri 11,7 mp; Máté 11,4 mp; Viktor 13,8 mp és Robi 13,2 mp. Ábrázoljuk a versenyzők által elért időeredményeket számegyenesen! Milyen sorrendben értek célba?

Megoldás

Mivel az eredmények 11 másodperc és 14 másodperc közé esnek, ezért elegendő a számegyenesnek a 11 és a 14 közé eső részét ábrázolni. Az időeredmények tized másodperc pontosságúak, ezért az egységet 10 egyenlő részre osztjuk.



A számegyenesről leolvasható, hogy a versenyzők Máté, Feri, Dani, Robi, Viktor sorrendben értek célba.

2. példa

Hol helyezkednek el a számegyenesen azok a számok, amelyek:

a) 1,2-nél nagyobbak;

b) 4,7-nél nem nagyobbak;

c) 1,2-nél nem kisebbek és 4,7-nél kisebbek?

Megoldás

a)



$1{,}2 < \square$. Az 1,2 nem tartozik a pirossal jelölt számhalmazba.

b)



$\square \leq 4{,}7$. A 4,7 beletartozik a kékkel jelölt számhalmazba.

c)



$1{,}2 \leq \square < 4{,}7$. Az 1,2 beletartozik, a 4,7 nem tartozik bele a zölddel jelölt számhalmazba.

Feladatok

1. Ábrázoljuk közös számegyenesen a következő tizedes törteket!
   A = nulla egész öt tized; B = egy egész kettő tized; C = két egész huszonöt század; D = négy egész három tized; E = három egész ötven század.

2. Ábrázoljuk számegyenesen az alábbi tizedes törteket!
   a) $A = 52{,}8$; $B = 51{,}9$; $C = 53{,}7$; $D = 53{,}3$; $E = 53$; $F = 51{,}7$;
   b) $G = 3{,}193$; $H = 3{,}211$; $I = 3{,}208$; $J = 3{,}199$; $K = 3{,}19$; $L = 3{,}2$;
   c) $M = 0{,}297$; $N = 0{,}304$; $O = 0{,}29$; $P = 0{,}311$; $Q = 0{,}308$; $R = 0{,}3$.

3. Ábrázoljuk közös számegyenesen a következő tizedes törteket! Jelöljük meg azokat, amelyek helyét csak közelítőleg tudjuk meghatározni!
   $A = 11{,}4$; $B = 12{,}36$; $C = 10{,}92$; $D = 11{,}500$; $E = 12{,}25$; $F = 10{,}99$.

4. Ábrázoljuk számegyenesen azokat a tizedes törteket, amelyekre teljesülnek az egyenlőtlenségek!
   a) $2 < \blacksquare \leq 3$; *b)* $1{,}2 \leq \blacktriangle \leq 1{,}3$; *c)* $0{,}12 < \bullet < 0{,}13$.

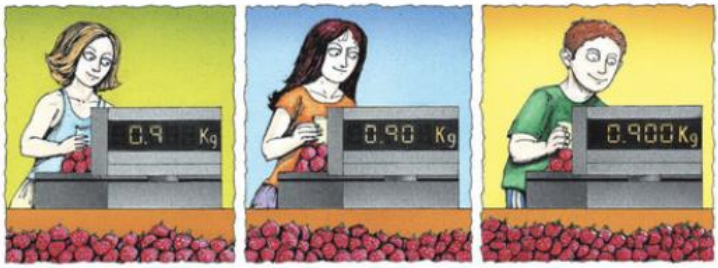
5. Ábrázoljuk számegyenesen azokat a tizedes törteket, amelyek
   a) 2,8-nél nagyobbak; *b)* 2,8-nél nem kisebbek; *c)* 5,3-nél kisebbek;
   d) 5,3-nél nem nagyobbak; *e)* 0,7-nél nagyobbak és 3,5-nél nem nagyobbak!

Rejtvény

Milyen matematikai jelet tegyünk a 5 és a 6 közé, hogy az így kapott szám 5-nél nagyobb és 6-nál kisebb legyen?

3. A tizedes törtek bővítése, egyszerűsítése, összehasonlítása

Figyeld meg, hogy a boltban működő mérleg hány tizedesjegy pontossággal írja ki az áruk tömegét!



A tizedes törtek bővítése és egyszerűsítése

1. példa

Zsuzsi 0,9 kg, Nóri 0,90 kg, Tibi 0,900 kg tömegű epret vásárolt. Melyikük vett többet?

Megoldás

Írjuk fel a mennyiségeket tört alakban, majd hozzunk közös nevezőre!

Zsuzsi: $0{,}9\text{ kg} = \frac{9}{10}\text{ kg} = \frac{900}{1000}\text{ kg};$

Nóri: $0{,}90\text{ kg} = \frac{90}{100}\text{ kg} = \frac{900}{1000}\text{ kg};$

Tibi: $0{,}900\text{ kg} = \frac{900}{1000}\text{ kg}.$

Mindhárman ugyanannyi epret vettek, azaz:

$$0{,}9\text{ kg} = 0{,}90\text{ kg} = 0{,}900\text{ kg}.$$

$\frac{9}{10} = \frac{90}{100} = \frac{900}{1000}$

Ha egy tizedes törtben az utolsó tizedesjegy után nullát vagy nullákat írunk, akkor a tizedes törtet **bővítjük.**

BŐVÍTÉS →

$$0{,}9 = 0{,}90 = 0{,}900 = 0{,}9000 = 0{,}90000 = 0{,}900000 = \ldots$$

← EGYSZERŰSÍTÉS

Ha egy tizedes tört végéről elhagyjuk a nullát vagy a nullákat, akkor a tizedes törtet **egyszerűsítjük.**

Bővítéskor és egyszerűsítéskor a tizedes tört értéke nem változik.

A tizedes törtek összehasonlítása

2. példa

Távolugróversenyen Peti 4,28 métert, Pali 4,3 métert ugrott. Melyikük ugrott nagyobbat?



Megoldás

a) Hasonlítsuk össze a mértékegységek átváltásával!

Peti: 4,28 m = 4 m 28 cm = 428 cm;

Pali: 4,3 m = 4 m 3 dm = 430 cm.

Mivel $428 < 430$, ezért Pali nagyobbat ugrott Petinél.

b) Hasonlítsuk össze a mértékegységek átváltása nélkül!

Peti $4{,}28 = 4\frac{28}{100}$ m-t, Pali $4{,}3 = 4\frac{3}{10} = 4\frac{30}{100} = 4{,}30$ m-t ugrott.

$4{,}28 = 4\frac{28}{100} < 4\frac{30}{100} = 4{,}30 = 4{,}3$. Tehát Pali ugrott nagyobbat.

3. példa

Hasonlítsuk össze a következő tizedes törteket!

a) 234,59 és 242,59; *b)* 346,24 és 346,23;

c) 2,48 és 2,476; *d)* 637,198 és 637,2.

Megoldás

A két tizedes törtben balról jobbra haladva az első olyan helyi értéket vizsgáljuk, ahol különbözőek a számjegyek. Az itt lévő számjegyek összehasonlításával döntjük el, hogy melyik tizedes tört a nagyobb.

a) $2\boxed{3}4{,}59 < 2\boxed{4}2{,}59$; *b)* $346{,}2\boxed{4} > 346{,}2\boxed{3}$;

c) $2{,}4\boxed{8} > 2{,}4\boxed{7}6$; *d)* $637{,}\boxed{1}98 < 637{,}\boxed{2}$.

Feladatok

1. Írjuk fel a következő tizedes törtek 3-3 bővített alakját!

a) 3,5; *b)* 100,970; *c)* 4,05; *d)* 6,0; *e)* 27,33; *f)* 19.

2. Egyszerűsítsük a tizedes törteket (ha lehet)!

a) 4,50; *b)* 6,200; *c)* 72, 030; *d)* 808,000;

e) 10,00970; *f)* 90,0; *g)* 23,500; *h)* 10,0020;

i) 60,00; *j)* 9,000; *k)* 5,0100; *l)* 12,00006.

3. Egy faliórán a másodpercet 6,7 cm, a percet 8,2 cm, az órát 5,5 cm hosszúságú mutató jelzi. Írjuk fel a mutatók hosszát növekvő sorrendben!

4. Válasszuk ki, hogy a két szám közül melyik a nagyobb!
   a) 22,888 vagy 22,9;
   b) 0,6400 vagy 0,639;
   c) 18,986 vagy 19;
   d) 7,0012 vagy 7,00099;
   e) 75,8 vagy 78,8000;
   f) 5457,3872 vagy 5459,12?

5. Írjunk három-három tizedes törtet a jelek helyére, ha
   a) $2 < \square < 3$; *b)* $1{,}2 < \triangle < 1{,}3$; *c)* $0{,}12 < \bigcirc < 0{,}13$!

6. Néhány rovar átlaghosszúsága:
   közönséges muslinca: 2,1 mm;
   hétpettyes katicabogár: 6,8 mm;
   óriáscsíbor: 4,1 cm;
   májusi cserebogár: 2,6 cm;
   szarvasbogár: 6 cm;
   lódarázs: 2,4 cm.
   Írjuk fel az adatok alapján a felsorolt rovarokat átlaghosszúságuk szerint növekvő sorrendben!

7. Vásároltunk 1,8 kg almát, negyed kg felvágottat, 90 dkg paradicsomot, 1225 g húst és 53 dkg sárgarépát. Írjuk fel a vásárolt mennyiségeket kilogrammba, majd az így kapott értékeket csökkenő sorrendbe!

8. Az athéni paralimpia úszódöntőjében a versenyzők a táblázatban található eredményeket érték el – másodpercben kifejezve. Írjuk fel a helyezési sorrendet!

   a) női 50 m pillangó

Pálya	Név	Ország	Idő
1	Theresa Goh Ruisi	SIN	55,23
2	Zámbó Diána	HUN	49,50
3	Engelhardt Katalin	HUN	48,88
4	Olena Akopjan	UKR	46,57
5	Teresa Perales	ESP	44,70
6	Bela Hlavackova	CZE	50,84
7	Dalia Dameno	ITA	1:04,08
8	Kaley McLean	CAN	1:05,25

   b) férfi 50 m hátúszás

Pálya	Név	Ország	Idő
1	Francisco Avelino	BRA	43,13
2	Pascal Pinard	FRA	42,67
3	Vereckei Zsolt	HUN	40,49
4	Junquan He	CHN	37,53
5	Kovács Ervin	HUN	40,14
6	Krzysztof Sleczka	POL	42,78
7	Anthony Stephens	GBR	43,45
8	Sidi Abdullah	MAS	43,50

9. Írjuk fel a 12,7-nél nagyobb, de a lehető legkisebb olyan tizedes törtet, amelynek 3 tizedesjegye van!

10. Írjunk a 12,7-nél kisebb, de minél nagyobb tizedes törteket!

Rejtvény

Hányféle tizedes törtet rakhatunk ki a 0 1 2 , kártyák mindegyikének felhasználásával? (Egy szám nem kezdődhet és nem végződhet , -vel; az 1-nél nagyobb számok írását nem kezdhetjük 0-val!)

4. A tizedes törtek kerekítése



Kérd meg a szüleidet, hogy – ha lehetséges – mutassák meg otthon a villanyórát (gázórát, vízórát)! Olvasd le az óra által mutatott értéket, és kerekítsd egészekre!

A tizedes törtek kerekítése a természetes számok kerekítéséhez hasonlóan történik.

- Megadjuk, hogy melyik helyi értékre kerekítünk.
- Lefelé kerekítünk, ha a megadott helyi értéket követő számjegy: 0; 1; 2; 3 vagy 4.
- Felfelé kerekítünk, ha a megadott helyi értéket követő számjegy: 5; 6; 7; 8 vagy 9.

KEREKÍTÉS TIZEDEKRE		KEREKÍTÉS SZÁZADOKRA	
2,105 ≈ 2,1		2,130 ≈ 2,13	
115,818 ≈ 115,8	LEFELÉ	115,811 ≈ 115,81	LEFELÉ
0,529 ≈ 0,5		0,502 ≈ 0,50	
73,233 ≈ 73,2		73,233 ≈ 73,23	
9,046 ≈ 9,0		9,044 ≈ 9,04	
3,954 ≈ 4,0	FELFELÉ	2,135 ≈ 2,14	FELFELÉ
16,262 ≈ 16,3		16,256 ≈ 16,26	
0,071 ≈ 0,1		0,087 ≈ 0,09	
504,382 ≈ 504,4		504,708 ≈ 504,71	
1,993 ≈ 2,0		1,399 ≈ 1,40	

Tizedekre kerekítve 2,135 ≈ 2,1. Tehát a 2,135 **egy tizedesjegy pontossággal** 2,1.

A számegyenesen a megjelölt szakaszon levő számokat tizedekre kerekítve 2,1-et kapunk:



Századokra kerekítve 2,135 ≈ 2,14. Tehát a 2,135 **kettő tizedesjegy pontossággal** 2,14.

A számegyenesen a megjelölt szakaszon levő számokat századokra kerekítve 2,14-et kapunk:





A mérés pontossága

A csatornázók 1,5 m mély árkot ástak.
Szilvi magasságát 150 cm-nek mérték az iskolaorvosnál.
Az üveges 1500 mm hosszúságú ablaküveget vágott.

Ezeket a mennyiségeket méterben kifejezve:
Az árok mélysége 1,5 m; Szilvi magassága 1,50 m; az üveg hossza 1,500 m.

Szilvi magasságánál és az üveg hosszánál kapott értéknél **a nullák nem hagyhatók el,** mert ezek fejezik ki, hogy Szilvi magasságát centiméter (század méter), az üveg hosszát milliméter (ezred méter) pontossággal mérték.

Feladatok

1. Kerekítsük tizedekre a következő tizedes törteket!
   a) 4,738; *b)* 1,2595; *c)* 10,267; *d)* 2,087; *e)* 15,509;
   f) 35,3535; *g)* 0,075; *h)* 140,0498; *i)* 20,00795; *j)* 42,988.

2. Kerekítsük századokra a következő tizedes törteket!
   a) 3,428; *b)* 1,8791; *c)* 10,854; *d)* 8,084; *e)* 17,709;
   f) 25,2729; *g)* 0,047; *h)* 130,0398; *i)* 80,70497; *j)* 5,0449.

3. Digitális lázmérővel mérve Peti testhőmérséklete 36,68 °C. Mennyit mérnénk hagyományos lázmérővel, amelyen tized pontossággal olvashatjuk le a testhőmérsékletet?

4. A Forma 1 autóverseny XX. Magyar Nagydíját 2005-ben Kimi Raikkönen hivatalosan 35,581 másodperc előnnyel nyerte meg Michael Schumacher előtt, amit egy napilap század, egy hetilap pedig tized pontossággal adott meg. Mekkora hátránya volt Schumachernek a napilap, illetve a hetilap szerint?

5. Egy damil vastagságát egy műszerrel 0,196 milliméternek mértük. Mekkora a damil vastagsága század milliméter pontossággal?

6. Kerekítsük tizedekre, majd egyesekre a következő tizedes törteket!
   a) 4,2; *b)* 3,58; *c)* 9,499; *d)* 12,58; *e)* 19,07;
   f) 20,499; *g)* 780,5; *h)* 34,725; *i)* 199,51; *j)* 39,999.

7. A boltban egy rúd szalámit 1,796 kg-nak mértek. Fejezzük ki a szalámi tömegét egészekre, tizedekre és századokra kerekítve!

8. Zsófi és Laci megmérték a hátizsákjuk tömegét. Zsófi hátizsákja 7 és fél kg, Lacié 7,05 kg volt. Ki vitte a nehezebb hátizsákot a kiránduláson?

9. A múlt században mért leghosszabb kék bálna 33,58 méteres volt. Adjuk meg a kék bálna hosszát
   a) méter pontossággal; *b)* deciméter pontossággal!

10. Az eddig ismert legnagyobb elefántbikát 1974-ben mérték, tömege 12,24 tonna volt. Adjuk meg a tömegét
    a) tonna pontossággal; *b)* tized tonna pontossággal!

11. *a)* Melyik az a legkisebb szám, amelyet 4-re kerekítünk?
b) Melyik az a legkisebb szám, amelyet 5-re kerekítünk?
c) Ábrázoljuk számegyenesen azokat a számokat, amelyeket 4-re kerekíthetünk!
d) Ábrázoljuk számegyenesen azokat a számokat, amelyeket 5-re kerekíthetünk!

12. *a)* Melyik az a legkisebb szám, amelyet 7,4-re kerekítünk?
b) Melyik az a legkisebb szám, amelyet 7,5-re kerekítünk?
c) Ábrázoljuk számegyenesen azokat a számokat, amelyeket 7,4-re kerekíthetünk!
d) Ábrázoljuk számegyenesen azokat a számokat, amelyeket 7,5-re kerekíthetünk!

13. Ábrázoljuk számegyenesen, hogy mely számokat kerekíthetjük 9,81-ra!

14. Egy lécről Anna azt állította, hogy 1,6 m-nél rövidebb, Béla pedig azt, hogy másfél méternél nem rövidebb. Milyen hosszú lehet a léc, ha mindketten igazat mondtak?

15. Egy áruház napi forgalma egy tizedesjegy pontossággal 12,7 millió forint volt. Hány forint lehetett e napon a bevétel?

16. Egy szoba hossza méterekre kerekítve 6 méter. Mekkora lehet a szoba hossza deciméterben, illetve centiméterben kifejezve?

17. Ho-hó, a nagy horgász azzal dicsekszik a barátainak, hogy kilogrammokra kerekítve 10 kg-os halat fogott. Hány dekagramm lehet a kifogott hal tömege?

18. Hány dekagramm lehet a vásárolt alma tömege, ha azt a piaci mérlegen tized pontossággal 2,8 kg-nak mérték?

19. Az eddig mért leghosszabb anakonda tized pontossággal 9,6 méter. Milyen hosszú lehet deciméterben, ill. centiméterben kifejezve?



20. Egy négyzet alakú gyerekszoba hosszméretét a tervrajzon így jelölték: 4,00 m. Mit fejez ki a tizedesvessző után írt két nulla? Hány centiméter szegőlécet használnak fel a parkettázáskor, ha az ajtónyílás mérete 0,90 m?

21. Mely értékek tartozhatnak össze?

A) Egy osztály által gyűjtött papír tömege	(1) 9,5 m
B) Egy lift teherbíró képessége	(2) 473,5 kg
C) A maratoni futás távja	(3) 0,20 l
D) Szeged és Mindszent távolsága	(4) 40 km
E) A távolugrás világcsúcsa 2005-ben	(5) 2 dl
F) Egy tanterem hossza	(6) 8,95 m
G) Egy bögre tej	(7) 480 kg
H) Egy kisdobozos almalé	(8) 42,195 km

Rejtvény

Melyik az a legkisebb szám, amelyet századokra kerekítve 5,60-ot kapunk?

5. A tizedes törtek összeadása és kivonása



1. példa

Egy háromnapos kerékpártúrán első nap 71,4 km-t, a második napon 59,1 km-t, a harmadik napon pedig 65,3 km-t tett meg a csoport. Hány kilométert bicikliztek összesen?

Megoldás

I. A naponta megtett utat átváltjuk méterbe, és ezeket adjuk össze:

1. nap:		7	1	4	0	0	m	=		7	1,4	km
2. nap:		5	9	1	0	0	m	=		5	9,1	km
3. nap:	+	6	5	3	0	0	m	=	+	6	5,3	km
összesen:	1	9	5	8	0	0	m	=	1	9	5,8	km

II. A számokat a megfelelő helyi érték alapján írjuk egymás alá, majd összeadjuk:

Mindkét esetben ugyanazt az eredményt kaptuk: a túrázók összesen 195,8 kilométert bicikliztek.

2. példa

Egy üzletben egy 15,4 m hosszú szövetből eladtak 1,35 m-t. Milyen hosszú szövet maradt meg?

Megoldás

I. A szövetek hosszúságát felírjuk centiméterben, és ezeket vonjuk ki:

kezdeti:		1	5	4	0	cm	=		1	5,4	0	m
eladott:	−		1	3	5	cm	=	−		1,3	5	m
maradék:		1	4	0	5	cm	=		1	4,0	5	m

II. A természetes számok kivonásához hasonlóan egymás alá írva:

Mindkét esetben ugyanazt az eredményt kaptuk: 14,05 m hosszú szövet maradt meg.

Tizedes törtek írásbeli összeadásakor, illetve kivonásakor az azonos helyi értékű számjegyeket egymás alá írjuk, így a tizedesvesszők is egymás alá kerülnek. A művelet elvégzése után az összegben, illetve a különbségben kiírjuk a tizedesvesszőt.

Feladatok

1. Végezzük el az összeadásokat fejben!

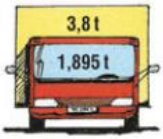
a) 2 + 0,3; *b)* 12 + 0,8; *c)* 5 + 0,12; *d)* 23 + 0,07;
e) 10 + 0,452; *f)* 83 + 0,017; *g)* 34 + 0,06; *h)* 0,2 + 8;
i) 0,55 + 15; *j)* 0,012 + 9; *k)* 37 + 0,053; *l)* 152 + 0,152.

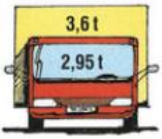
2. Végezzük el az összeadásokat!

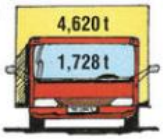
a) 2,3 + 0,9; *b)* 3,5 + 1,9; *c)* 18,8 + 7,2; *d)* 13,35 + 1,25;
e) 178,4 + 2,7; *f)* 93,47 + 16,53; *g)* 0,3 + 0,05; *h)* 1,4 + 0,12;
i) 8,12 + 0,045; *j)* 12,4 + 3,45; *k)* 42,6 + 1,25; *l)* 11,345 + 8,655.

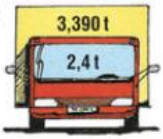
3. Egy teherautóra 3,25 tonna, az utánfutóra pedig 2,8 tonna árut raktak. Hány tonna árut raktak fel összesen az utánfutós teherautóra?

4. Melyik teherautónak kell visszafordulnia, ha a tábla a 6 tonnát meghaladó össztömegű járművek behajtását tiltja?

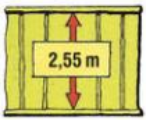
a) 

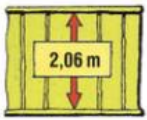
b) 

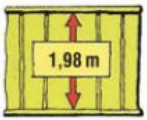
c) 

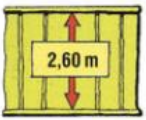
d) 

5. Egy tábla a 3,8 méternél magasabb járművek behajtását tiltja egy aluljáró előtt. Melyik konténert szállíthatja át az 1,2 méter magas platójú teherautó az aluljárón, ha a konténer magassága:

a) 

b) 

c) 

d) 

6. A táblázatban egy műlesikló verseny két futamában elért időeredményeket tüntettük fel. (⇒)

Ki nyerte a versenyt, ha az a versenyző győz, akinek a két futamban elért összideje a legkisebb?

Számítsuk ki az összidőket, és írjuk le a helyezési sorrendet!

Név	I. futam	II. futam
Balogh I.	53,47 s	52,78 s
Halász T.	52,34 s	52,17 s
Kovács F.	52,96 s	53,18 s
Lovász L.	51,86 s	52,63 s
Szabó P.	52,41 s	51,97 s
Vadász S.	53,01 s	52,10 s

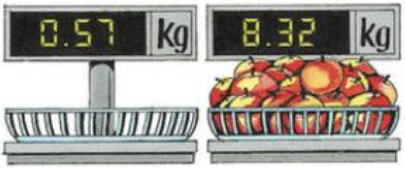
7. Végezzük el a kivonásokat fejben!

a) 12,3 − 0,3; *b)* 52,8 − 0,8; *c)* 34,22 − 0,12; *d)* 43,12 − 0,07;
e) 10 − 0,4; *f)* 18,2 − 0,17; *g)* 34 − 0,06; *h)* 10,7 − 0,8;
i) 0,73 − 0,65; *j)* 0,082 − 0,01; *k)* 72 − 0,01; *l)* 23 − 0,12.

8. Végezzük el a kivonásokat!

a) 2,3 − 0,9; *b)* 3,5 − 1,9; *c)* 18,8 − 7,2; *d)* 13,35 − 1,25;
e) 178,4 − 2,7; *f)* 93,47 − 16,53; *g)* 0,3 − 0,05; *h)* 1,4 − 0,12;
i) 8,12 − 0,045; *j)* 12,4 − 3,45; *k)* 42,6 − 1,25; *l)* 11,345 − 8,655.

9. Hány kilogramm alma van a rajzon látható kosárban? (➡)



10. Egy hím szarvasbogár hossza elérheti a 0,85 decimétert, egy betűzőszú hossza a 0,4 centimétert. Mennyivel hosszabb a hím szarvasbogár a betűzőszúnál?

11. Gabiék minden hónap első napján feljegyzik a gázóra állását. Melyik hónapban fogyott a legtöbb, és melyikben a legkevesebb gáz? Mennyi a két hónapban elfogyasztott gáz különbsége? (➡)

november 1.	13 418,481 m^3
december 1.	14 277,895 m^3
január 1.	15 306,063 m^3
február 1.	16 126,475 m^3
március 1.	16 742,673 m^3

12. Végezzük el az összeadásokat!

a) 1,2 + 2,3 + 3,4 + 4,5 + 5,6;
b) 7,019 + 0,81 + 19,999 + 0,1;
c) 2,82 + 0,27 + 17,9 + 10,63;
d) 5,617 + 438,3 + 0,18 + 3,22;
e) 3,78 + 20,42 + 13,55 + 0,45;
f) 76,333 + 3,7 + 86,4 + 0,987.

13. Milyen számjegyeket írhatunk a betűk helyére, hogy az összeadás igaz legyen?

a)
$$\begin{array}{r} A3{,}46 \\ +\,1B{,}5C \\ \hline 37{,}D9 \end{array}$$
b)
$$\begin{array}{r} 4A7{,}6B \\ +\;2C{,}D84 \\ \hline E46{,}61F \end{array}$$
c)
$$\begin{array}{r} 39A{,}45 \\ +\;B8{,}6C \\ \hline D38{,}E7 \end{array}$$
d)
$$\begin{array}{r} A46{,}B \\ +\;\;C{,}7D5 \\ \hline 7E7{,}51F \end{array}$$

14. Egy építkezésre az első keverőautó 11,46 tonna, a második 10,7 tonna, míg a harmadik 8,25 tonna betont szállított. Hány tonna betont vitt a három keverőautó összesen az építkezésre?

15. Számoljuk ki az
$A = 613{,}45 + 108{,}746 + 12{,}202 + 1{,}2002$ és a
$B = 714{,}702 + 28{,}8 + + 1{,}2345 + 2{,}8765$ összegek különbségét!

16. Három csomag húst vettünk. Az egyes csomagok tömege 1,347 kg; 1,284 kg és 1,436 kg volt. Hány kilogramm húst vettünk összesen?

17. Egy raktárban 23,68 tonna cukor volt, amikor a cukorgyárból megérkezett egy 12,4 tonnás szállítmány. A kirakodást követően négy kiskereskedő vásárolt cukrot. Az első 1,6 tonnát, a második 1860 kilogrammot, a harmadik 0,95 tonnát, a negyedik pedig 1,18 tonnát. Hány tonna cukor maradt ezután a raktárban?

18. Egy család 1500 eurót vitt magával a külföldi kirándulásra. Első héten 487,9 eurót, a másodikon 629,8 eurót költöttek. Meg tudják-e még venni a 380 eurós fényképezőgépet?

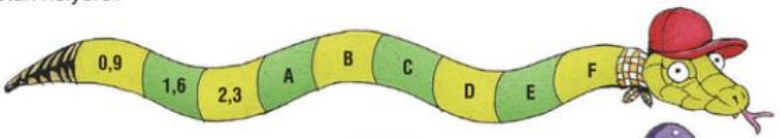
19. *a)* Mennyi a különbség, ha a kivonandó 1,5, és a kisebbítendő 2,45?
b) Mennyi a kisebbítendő, ha a különbség 17,435, és a kivonandó 125,65?
c) Mennyi a kivonandó, ha a különbség 0,1038, és a kisebbítendő 4,8962?

20. A legnagyobb édesvízi hal a Magyarországon is honos lesőharcsa. Az eddig feljegyzett legnagyobb példány 4,57 m hosszúságú és 336,3 kg tömegű volt. A legkisebb édesvízi hal a törpegéb (törpe guppi), melynek hosszúsága 7,5 mm, tömege pedig 0,002 gramm is lehet. Mekkora a legnagyobb és a legkisebb édesvízi hal
a) hosszúságának a különbsége;
b) tömegének a különbsége?

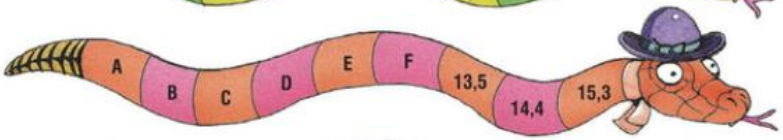
21. A leghosszabb rovar, a borneói óriás botsáska 32 cm hosszú. A legkisebb rovar az élősködő darázs, melynek hossza 0,21 mm. Hány centiméter a leghosszabb és a legrövidebb rovar hosszának a különbsége?

22. A számkígyókon lévő szomszédos számok különbsége egyenlő. Mely számokat írhatjuk a betűk helyére?

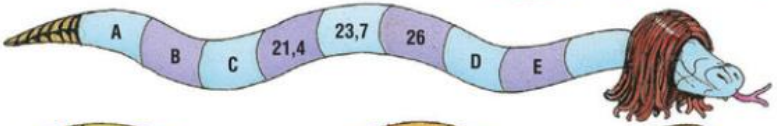
a)



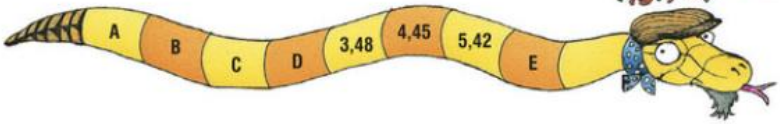
b)



c)



d)



23. Helyettesítsük a bűvös négyzetben a betűket olyan számokkal, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban a számok összege megegyezzen!

a)

A	B	C
0,1	D	E
0,8	0,3	0,4

b)

F	G	0,87
0,8	0,66	H
0,45	I	J

c)

K	13	L
M	10	N
8,5	7	O

d)

6,2	3,2	3,8
2	P	Q
R	S	T

e)

A	B	C
1,4	D	E
2,1	1,6	1,7

f)

F	G	8,7
8	6,6	H
4,5	I	J

g)

K	1,3	L
M	1,0	N
0,85	0,7	O

h)

0,26	P	0,42
Q	0,5	R
S	T	0,74

Rejtvény

Készítsünk 3 × 3-as bűvös négyzetet, amelybe olyan különböző 2-nél nagyobb és 3-nál kisebb tizedes törteket írhatunk, amelyeknek pontosan egy tizedesjegye van!

6. A tizedes törtek szorzása és osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel ...



50 darab 0,0015 mm-es aranyfüstlemez vastagsága egy átlagos hajszál vastagságával egyezik meg.

1. példa

A legügyesebb aranyművesek 0,0015 mm vastagságú aranyfüstlemezt is készítenek.

a) Hány milliméter vastagságú lenne 10 egymásra helyezett aranyfüstlemez?

b) Eléri-e az 1 mm-t 1000 aranyfüstlemez együttes vastagsága?

Megoldás

a) $0{,}0015 \cdot 10 = \frac{15}{10\,000} \cdot 10 = \frac{15}{1000} = 0{,}015.$

Tíz egymásra helyezett aranyfüstlemez vastagsága 0,015 mm.

b) $0{,}0015 \cdot 1000 = \frac{15}{10\,000} \cdot 1000 = \frac{15}{10} = 1{,}5.$

Ezer aranyfüstlemez együttes vastagsága 1,5 mm, ami nagyobb, mint 1 mm.

Elemezzük a 10-zel, 100-zal, 1000-rel ... való szorzást a helyiérték-táblázat segítségével!

százas	*tízes*	*egyes*	*tized*	*század*	*ezred*	*tizezred*	
					1	5	0,0015
				1	5		0,0015 · 10 = 0,015
			1	5			0,0015 · 100 = 0,15
		1	5				0,0015 · 1000 = 1,5
	1	5					0,0015 · 10 000 = 15
1	5	0					0,0015 · 100 000 = 150

Ha egy tizedes törtet 10-zel, 100-zal, 1000-rel ... szorzunk, akkor a tizedes tört minden számjegye eggyel, kettővel, hárommal ... nagyobb helyi értékre kerül.

A tizedes törtek osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel ...

2. példa

a) Ha 10 darab 1 Ft-ost egymásra helyezünk, akkor 13,5 mm magas oszlopot kapunk. Milyen vastag egy 1 Ft-os pénzérme?

b) Milyen vastag egy 10 000 Ft-os papírpénz, ha 100 db-ot egymásra helyezve 1,2 cm vastagságú pénzköteget kapunk?

Megoldás

a) $13{,}5 : 10 = \frac{135}{10} : 10 = \frac{135}{100} = 1{,}35.$

Egy 1 Ft-os pénzérme vastagsága 1,35 milliméter.

b) $1{,}2 : 100 = \frac{12}{10} : 100 = \frac{12}{1000} = 0{,}012.$

Egy 10 000 Ft-os papírpénz vastagsága 0,012 cm = 0,12 mm.

Elemezzük a 10-zel, 100-zal, 1000-rel ... való osztást a helyiérték-táblázat segítségével!

tízes	*egyes*	*tized*	*század*	*ezred*	*tizezred*	*százezred*	
1	3	5					13,5
	1	3	5				13,5 : 10 = 1,35
		1	3	5			13,5 : 100 = 0,135
			1	3	5		13,5 : 1000 = 0,0135
				1	3	5	13,5 : 10 000 = 0,00135

Ha egy tizedes törtet 10-zel, 100-zal, 1000-rel ... osztunk, akkor a tizedes tört minden számjegye eggyel, kettővel, hárommal ... kisebb helyi értékre kerül.

Feladatok

1. Mennyi az alábbi számok tízszerese, százszorosa, ezerszerese?

a) 152; *b)* 0,3; *c)* 0,8; *d)* 0,12;
e) 0,072; *f)* 0,152; *g)* 0,06; *h)* 0,0012;
i) 0,0515; *j)* 0,0102; *k)* 0,5003; *l)* 1,03;
m) 10,4; *n)* 22,08; *o)* 4,017; *p)* 70,202.

2. Mennyi a számok tized, század, ezred része?

a) 15,2; *b)* 30; *c)* 0,8; *d)* 0,12;
e) 0,72; *f)* 1,52; *g)* 0,06; *h)* 0,012;
i) 0,515; *j)* 0,102; *k)* 0,503; *l)* 1,03;
m) 10,4; *n)* 22,08; *o)* 4,017; *p)* 70,202.

3. Folytassuk a megkezdett sorozatot három-három taggal, ha a sorozat következő tagját úgy kapjuk meg, hogy az előző tagot megszorozzuk tízzel!
   a) 0,0001; 0,001; ...; *b)* 0,0023; 0,023; ...;
   c) 1,0005; 10,005; ...; *d)* 0,76543; 7,6543; ....

4. Folytassuk a megkezdett sorozatot három-három taggal, ha a sorozat következő tagját úgy kapjuk meg, hogy az előző tagot elosztjuk tízzel!
   a) 0,1; 0,01; ...; *b)* 23; 2,3; ...;
   c) 1,05; 0,105; ...; *d)* 7654,3; 765,43; ....

5. Váltsuk át az alábbi mennyiségeket centiméterbe!
   a) 2,3 m; *b)* 4,7 dm; *c)* 13,27 m; *d)* 3,082 dm;
   e) 42 mm; *f)* 0,7 m; *g)* 123 mm; *h)* 1,2 km.

6. Váltsuk át az alábbi mennyiségeket deciméterbe!
   a) 3,75 m; *b)* 4,7 cm; *c)* 38,5 mm; *d)* 0,3 km;
   e) 0,85 mm; *f)* 32,7 cm; *g)* 4,5 mm; *h)* 0,05 km.

7. Váltsuk át az alábbi mennyiségeket kilogrammba!
   a) 1,2 t; *b)* 0,03 t; *c)* 4570 g; *d)* 380 g;
   e) 0,8 t; *f)* 178 g; *g)* 12 dkg; *h)* 3,5 dkg.

*8. Egy személygépkocsi 100 kilométerenként átlagosan 6,2 liter benzint fogyaszt. Ugyanilyen fogyasztást feltételezve mennyi benzin szükséges
   a) 1000 km; *b)* 10 km; *c)* 1 km; *d)* 100 m megtételéhez?

9. Milyen vastag egy olyan papírlap, amelyből 1000 lap vastagsága 9 cm?

10. Egy fénymásoló papír 0,11 mm vastag. Az egyik fénymásolónak 100, a másiknak 1000 darabos lapadogatója van. Milyen vastagságú papírmennyiség fér az egyes gépekbe?

11. Írjuk fel kisebb mértékegységekkel!
   a) 0,056 km; *b)* 0,000 56 km^2; *c)* 0,000 0056 m^3.

12. Írjuk fel nagyobb mértékegységekkel!
   a) 73 000 mm; *b)* 73 000 000 mm^2; *c)* 0,056 cm^3.

13. A legkisebb ismert tengeri halat a Nagy-korallzátonynál fedezték fel ausztrál tudósok. A csupán 7-8 milliméteresre növő, 0,001 g tömegű halat tömzsi csecsemőhalnak nevezték el. Hány gramm a tömege 100 ilyen csecsemőhalnak?

14. Egy élősködő darázs tömege 0,000 005 gramm. Hány gramm 10; 100; 1000; 10 000, illetve 100 000 ugyanilyen darázsnak a tömege?

15. Egy törpeszúnyog-féle percenként 62 760 szárnycsapást tesz. Egy izom-összehúzódása 0,000 45 másodpercig tart. Mennyi ideig tart egymillió izom-összehúzódás?

Rejtvény

Számítsuk ki a 100 000 · 10 000 · 1000 · 100 · 10 · 0,1 · 0,01 · 0,001 · 0,0001 · 0,00001 szorzatot!

7. A tizedes törtek szorzása és osztása természetes számmal

1. példa

Egy 50 forintos vastagsága 1,8 milliméter. Milyen magas pénzoszlopot kapunk, ha 24 db 50 Ft-ost egymásra helyezünk?



1. megoldás (visszavezetjük a vegyes számok szorzására)

A 24 pénzdarab vastagsága mm-ben:

$$1{,}8 \cdot 24 = 1\frac{8}{10} \cdot 24 = \frac{18}{10} \cdot 24 = \frac{432}{10} = 43{,}2.$$

2. megoldás (írásbeli szorzással)

1,	8	·	2	4
3	6			
	7	2		
4	3,	2		

A részletszorzatokban nem írunk tizedesvesszőt.

24 darab 50 Ft-ost egymásra helyezve 43,2 mm magas pénzoszlopot kapunk.

$18 \cdot 24 = 432$
$\downarrow :10 \quad \downarrow :10$
$1{,}8 \cdot 24 = 43{,}2$

Tizedes törtet természetes számmal úgy szorzunk, mintha egész szám lenne, de a szorzatban annyi tizedesjegyet jelölünk, mint amennyi a tizedes törtben van.

$6 \cdot 4 = 24$
$0{,}6 \cdot 4 = 2{,}4$
$0{,}06 \cdot 4 = 0{,}24$
$0{,}006 \cdot 4 = 0{,}024$

Bármely tizedes törtet 0-val megszorozva a szorzat is 0.

Tizedes törtek osztása természetes számmal

2. példa

Három aranyásó 46,2 dkg aranyat talált. Hány dekagramm arany jutott nekik fejenként, ha egyenlően osztották szét egymás között?

1. megoldás

46,2 dkg = 462 g, ezért egy aranyásónak 462 g : 3 = 154 g arany jut.

2. megoldás (írásbeli osztással)

4	6,	2	:	3	=	1	5, 4
1	6						
	1	2					
		0					

Ha az osztandóban a tizedesvesszőhöz érünk, a hányadosban kiírjuk a tizedesvesszőt.

Fejenként 154 g = 15,4 dkg arany jut.

$462 : 3 = 154$
$\downarrow :10 \quad \downarrow :10$
$46{,}2 : 3 = 15{,}4$

Tizedes törtet természetes számmal úgy osztunk, mintha egész szám lenne, de amikor az osztandóban a tizedesvesszőhöz érünk, a hányadosban is kiírjuk a tizedesvesszőt.

$24 : 3 = 8$
$2{,}4 : 3 = 0{,}8$
$0{,}24 : 3 = 0{,}08$
$0{,}024 : 3 = 0{,}008$

A 0-val való osztást a tizedes törtek esetén sem értelmezzük.

Feladatok

1. Végezzük el fejben az alábbi szorzásokat!

a)	b)	c)	d)	e)
15 · 4;	18 · 2;	12 · 7;	25 · 4;	125 · 8;
1,5 · 4;	1,8 · 2;	1,2 · 7;	2,5 · 4;	12,5 · 8;
0,15 · 4;	0,18 · 2;	0,12 · 7;	0,25 · 4;	1,25 · 8.

2. Végezzük el ügyesen a szorzásokat!

a)	b)	c)	d)
57 · 14;	78 · 91;	13,5 · 176;	97 · 208;
5,7 · 14;	7,8 · 91;	1,35 · 176;	9,7 · 208;
0,57 · 14;	0,78 · 91;	0,135 · 176;	0,97 · 208;
0,057 · 14;	0,078 · 91;	0,0135 · 176;	0,097 · 208;
0,0057 · 14;	0,0078 · 91;	0,00135 · 176;	0,0097 · 208.

3. Egy parkettalap szélessége 3,5 cm. Milyen széles 12 db ilyen parkettalap?

4. Ha egy CD doboz 1,05 cm magas, akkor milyen magas 15 ilyen doboz egymásra téve?

5. Végezzük el a szorzásokat!

a) 25,6 · 142;	b) 47,3 · 93;	c) 1,25 · 80;
d) 12,5 · 107;	e) 37,4 · 559;	f) 80,06 · 147;
g) 1,025 · 444;	h) 32,125 · 320;	i) 2003,072 · 225.

6. Egy érmegyűjtő a régi egy-, kettő- és ötforintosokat ötvenesével csomagolja. Milyen hosszú lesz egy ilyen henger, ha
   a) egy darab 1 Ft-os 0,135 cm vastag; b) egy darab 2 Ft-os 0,146 cm vastag;
   c) egy darab 5 Ft-os 0,16 cm vastag?

7. A tíz-, húsz-, ötven- és százforintosokat húszasával rolnizzuk. Milyen hosszú lesz egy ilyen henger, ha
   a) egy darab 10 Ft-os 1,65 mm vastag; b) egy darab 20 Ft-os 1,75 mm vastag;
   c) egy darab 50 Ft-os 1,8 mm vastag; d) egy darab 100 Ft-os 2,6 mm vastag?

8. Milyen vastag a fedőlapok nélkül az a 408 lapos könyv, amelynek egy lapja 0,12 mm vastagságú?

9. Végezzük el fejben az alábbi osztásokat!

a)	b)	c)	d)	e)
36 : 4;	18 : 2;	42 : 7;	120 : 5;	108 : 9;
3,6 : 4;	1,8 : 2;	4,2 : 7;	12 : 5;	1,08 : 9;
0,36 : 4;	0,18 : 2;	0,042 : 7;	0,12 : 5;	0,0108 : 9.

10. Végezzük el ügyesen az osztásokat!

a)	b)	c)	d)
686 : 7;	45,6 : 12;	586,8 : 18;	578 : 17;
68,6 : 7;	4,56 : 12;	58,68 : 18;	57,8 : 17;
6,86 : 7;	0,456 : 12;	5,868 : 18;	5,78 : 17;
0,686 : 7;	0,0456 : 12;	0,5868 : 18;	0,578 : 17;
0,0686 : 7;	0,00456 : 12;	0,05868 : 18;	0,0578 : 17.

11. Egy 648 lapos lexikon a fedőlapok nélkül 6,48 cm vastag. Hány centiméter vastagságú lapokra nyomtatták?

12. *a)* Mennyi a hányados, ha az osztó 24, és az osztandó 31,2?
b) Mennyi az osztó, ha a hányados 12, és az osztandó 408,96?
c) Mennyi az osztandó, ha az osztó 47, és a hányados 23,9?

13. Az alábbi sorozatok valamely tagját (a másodiktól kezdve) úgy kapjuk meg, hogy az előző tagot megszorozzuk 13-mal. Mely számokat írhatjuk a betűk helyére?
a) 0,7; 9,1; 118,3; A; B; C.
b) A; B; 16,9; 219,7; 2856,1; C.

14. Az alábbi sorozatok valamely tagját (a másodiktól kezdve) úgy kapjuk meg, hogy az előző tagot elosztjuk 12-vel. Mely számokat írhatjuk a betűk helyére?
a) 12441,6; 1036,8; A; B; C; D.
b) A; B; 1,728; 0,144; C; D.

15. Angliában még ma is használják az alábbi hosszúságegységeket:
1 inch = 2,54 cm; 1 láb = 30,48 cm; 1 yard = 0,9144 m; 1 mérföld = 1,609 km.

a) Hány centiméter a képátlója egy 17 inches monitornak?
b) Hány centiméter magas az az ember, aki pontosan 6 láb magasságú?
c) Egy rövidtávfutó a 100 métert vagy a 110 yardot futja le rövidebb idő alatt?
d) Hány kilométerre van Londontól Manchester, ha a két város távolsága 185 mérföld?



16. Kovácséknál 1 hét alatt 110,642 m^3 gáz fogyott. Hány köbméter gázt fogyasztottak átlagban naponta?

17. Egy csomag magyar kártya 32 lapos, és az egész pakli 1,2 cm vastag. Hány centiméter vastag egy kártyalap?

18. Egy csomag francia kártyában 52 lap van. Ha két csomag francia kártya minden lapját egymásra helyezzük, a pakli 3,12 cm vastag lesz. Hány centiméter vastag egy kártyalap?



19. Egy turista a pénzváltónál 265 eurót vásárolt. 1 euró aznap 262,4 Ft-ba került. Hány forintot kapott vissza, ha tízezresekkel fizetett?

Rejtvény

István egy papírlapon elvégzett egy szorzást, de a kistestvére véletlenül elszakította a papírt. A megmaradt cetlin a szorzásnak már csak egy részlete látható. Melyik egész szám lehetett a szorzó?



8. A törtszámok tizedes tört alakja

A 10; 100; 1000 ... nevezőjű közönséges törteket a tizedes tört fogalmáról tanultak alapján könnyen átírhatjuk tizedes törtté.



1. példa

Alakítsuk tizedes törtté az alábbi törteket: *a)* $\frac{3}{10}$; *b)* $\frac{7}{100}$; *c)* $\frac{13}{1000}$!

Megoldás

a) $\frac{3}{10} = 0{,}3$; *b)* $\frac{7}{100} = 0{,}07$; *c)* $\frac{13}{1000} = 0{,}013$.

Vizsgáljuk meg, hogyan alakíthatók tizedes törtté azok a törtek, amelyek nevezője nem 10; 100; 1000 ..., de bővítéssel vagy egyszerűsítéssel ilyen alakra hozhatók!

2. példa

Alakítsuk tizedes törtté az alábbi törteket: *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{5}{4}$; *c)* $\frac{12}{30}$!

1. megoldás (bővítéssel vagy egyszerűsítéssel)

a) $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$; *b)* $\frac{5}{4} = \frac{125}{100} = 1{,}25$; *c)* $\frac{12}{30} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

2. megoldás (osztással)

A tört olyan hányados, amelyben a számláló az osztandó, a nevező az osztó. Ezt alkalmazva:

a) $\frac{1}{2} = 1 : 2$;

1	:	2	=	0,	5
1	0				
	0				

$\frac{1}{2} = 0{,}5$;

b) $\frac{5}{4} = 5 : 4$;

5	:	4	=	1,	2	5
1	0					
	2	0				
		0				

$\frac{5}{4} = 1{,}25$;

c) $\frac{12}{30} = 12 : 30$.

1	2	:	3	0	= 0, 4
1	2	0			
	0				

$\frac{12}{30} = 0{,}4$.

Úgy osztunk, mintha az egész szám tizedes törtté bővített alakját osztanánk.

$1 : 2 = 1{,}0 : 2$;
$5 : 4 = 5{,}00 : 4$;
$12 : 30 = 12{,}0 : 30$

$\frac{1}{2} = 0{,}5$
$\frac{1}{4} = 0{,}25$
$\frac{3}{4} = 0{,}75$
$\frac{1}{5} = 0{,}2$
$\frac{1}{8} = 0{,}125$
$\frac{1}{20} = 0{,}05$

Az osztások elvégzése során 0 lett a maradék, ezért véges tizedes törteket kaptunk.

Ha egy törtet lehet úgy bővíteni vagy egyszerűsíteni, hogy a nevezője 10; 100; 1000 ... legyen, akkor a tizedes tört alakja véges tizedes tört.

Végtelen szakaszos tizedes törtek

Hogyan írhatók tizedes tört alakba azok a közönséges törtek, amelyek nem alakíthatók 10; 100; 1000 ... nevezőjű törtekké?

3. példa

Alakítsuk tizedes törtté az alábbi közönséges törteket:

a) $\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{2}{11}$; *c)* $\frac{7}{27}$; *d)* $\frac{5}{6}$!

Megoldás

Az előző példa 2. megoldásához hasonlóan osszuk el a számlálót a nevezővel!

a) $\frac{1}{3} = 1 : 3;$

$\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\dot{3}.$

b) $\frac{2}{11} = 2 : 11;$

$\frac{2}{11} = 0{,}1818... = 0{,}\dot{1}\dot{8}.$

c) $\frac{7}{27} = 7 : 27;$

$\frac{7}{27} = 0{,}259259... = 0{,}\dot{2}5\dot{9}.$

d) $\frac{5}{6} = 5 : 6;$

$\frac{5}{6} = 0{,}833... = 0{,}8\dot{3}.$

```
1 : 3 = 0,3 3 3
1 0
  1 0
    1 0
      1
```

```
2 : 1 1 = 0,1 8 1 8
2 0
  9 0
    2 0
      9 0
        2
```

```
7 : 2 7 = 0,2 5 9 2
7 0
1 6 0
  2 5 0
    7 0
    1 6
```

```
5 : 6 = 0,8 3 3
5 0
  2 0
    2 0
      2
```

$\frac{1}{3} = 0{,}\dot{3}$

$\frac{2}{3} = 0{,}\dot{6}$

$\frac{1}{9} = 0{,}\dot{1}$

Az osztások elvégzése során nem lett 0 a maradék, de olyan maradékhoz jutottunk, amely már előzőleg is szerepelt. Ettől kezdve a maradékok ismétlődnek, így végtelen szakaszos tizedes törteket kaptunk. A szakasz olyan hosszú, ahány számjegy ismétlődik. Jelölése: a szakasz első és utolsó számjegyére pontot teszünk.

Ha egy törtet nem lehet úgy bővíteni, hogy a nevezője 10; 100; 1000 ... legyen, akkor a tizedes tört alakja végtelen szakaszos tizedes tört.

$0{,}2\dot{3}\dot{6} = 0{,}23636...$

Feladatok

1. Döntsük el, hogy véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört alakban írhatók fel az alábbi közönséges törtek!

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{7}{20}$; d) $\frac{13}{50}$; e) $\frac{9}{25}$; f) $\frac{1}{6}$ g) $\frac{26}{39}$;

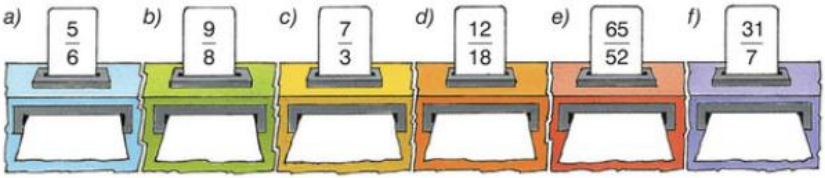
h) $\frac{1}{5}$; i) $\frac{7}{10}$; j) $\frac{2}{100}$; k) $\frac{7}{9}$; l) $\frac{4}{3}$; m) $\frac{11}{6}$ n) $\frac{15}{24}$.

2. Írjuk fel a közönséges törteket tizedes tört alakban, majd kerekítsük egy, két, illetve három tizedesjegyre!

a) $\frac{7}{16}$; b) $\frac{5}{3}$; c) $\frac{3}{32}$; d) $1\frac{4}{9}$; e) $\frac{22}{7}$; f) $\frac{9}{16}$; g) $\frac{11}{6}$;

h) $\frac{3}{4}$; i) $\frac{72}{10}$; j) $\frac{13}{8}$; k) $\frac{2}{3}$; l) $\frac{5}{8}$; m) $\frac{4}{2}$; n) $\frac{2}{4}$.

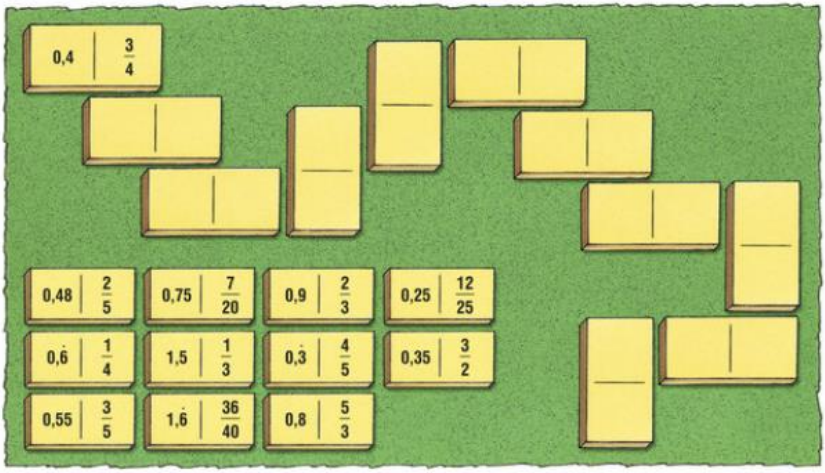
3. A gép a törteket tizedes törtté alakítja. Mit ad ki a gép a következő esetekben?



4. Írjuk fel az alábbi tizedes törteket közönséges tört alakban!

a) 0,25; b) 3,2; c) 0,17; d) 12,12; e) 20,1; f) 5,005.

5. Két számdominót akkor helyezhetünk egymás mellé, ha az egyiken lévő tört egyenlő a másikon lévő tizedes törttel. Folytassuk a játékot! Melyik dominó marad ki a sorból?



6. Döntsük el, hogy melyik törtnek véges a tizedes tört alakja!

a) $\frac{16}{25}$; $\frac{25}{16}$; *b)* $\frac{9}{8}$; $\frac{8}{9}$; *c)* $\frac{12}{7}$; $\frac{7}{12}$; *d)* $\frac{35}{28}$; $\frac{28}{35}$.

7. Melyik számjegy áll az alábbi közönséges törtek tizedes tört alakjában a tizedesvessző utáni tizedik helyen?

a) $\frac{9}{12}$; *b)* $\frac{10}{16}$; *c)* $\frac{12}{15}$; *d)* $\frac{14}{21}$; *e)* $\frac{35}{28}$; *f)* $1\frac{2}{3}$; *g)* $2\frac{3}{4}$.

8. Melyik számjegy áll az alábbi törtek tizedes tört alakjában a tizedesvessző utáni 2006. helyen?

a) $\frac{5}{9}$; *b)* $\frac{6}{11}$; *c)* $\frac{7}{110}$; *d)* $\frac{1}{7}$; *e)* $\frac{3}{13}$; *f)* $1\frac{9}{11}$; *g)* $1\frac{9}{11}$.

9. Vegyes feladatok

1. Melyik szám a nagyobb?

a) 20,49 vagy 20,5; *b)* 20,5 vagy 20,54; *c)* 20,48 vagy 20,0489;

e) 0,5 vagy $0,\dot{5}$; *f)* $\frac{1}{3}$ vagy 0,3; *d)* 20,01724 vagy 20,017342?

2. Írjuk fel a következő törteket tizedes tört alakban!

a) $\frac{3}{4}$; *b)* $\frac{9}{4}$; *c)* $\frac{9}{40}$; *d)* $\frac{5}{3}$; *e)* $\frac{7}{9}$; *f)* $\frac{10}{11}$; g) $\frac{27}{10}$;

h) $\frac{10}{27}$; *i)* $\frac{5}{7}$; *j)* $\frac{7}{13}$; *k)* $\frac{31}{7}$; *l)* $\frac{91}{130}$; *m)* $\frac{117}{26}$; *n)* $\frac{1001}{100}$.

3. Mekkora volt a különbség az első és a második helyezett között az athéni olimpián a férfi 200 m-es mellúszásban? A versenyzők az itt látható eredményeket érték el. Írjuk fel a helyezési sorrendet! (➡)

Vladiszlav Poljakov	KAZ	2:11,76
Scott Usher	USA	2:11,95
Kitadzsima Koszuke	JPN	2:09,44
Gyurta Dániel	HUN	2:10,80
Brendan Hansen	USA	2:10,87
Paolo Bossini	ITA	2:11,20
Mike Brown	CAN	2:11,94
Jim Piper	AUS	kizárták

4. Írjuk fel növekvő sorrendben a számokat!

a) 19,48; 1; 0,197; 19,475; 19,5; 1,999;

b) 0,0124; 0,0241; 0,124; 0,1024; 0,1204;

c) 11,4; 1,14; 11,04; 11,14; $\frac{114}{100}$; $\frac{5}{4}$.

5. Adjuk meg tizedes tört alakban, mennyi

a) 375-nek az egy negyed része; *b)* 375-nek a tíz negyed része;

c) 4,97-nek az egy heted része; *d)* 49,7-nek az egy heted része;

e) 0,4 ötszörösének a negyede; *f)* 0,4 négyszeresének az ötöde!

6. *a)* Melyik számhoz adjunk 0,7-et, hogy 1,35-ot kapjunk?

b) Melyik számból vonjunk ki 1,2-et, hogy 0,88-ot kapjunk?

c) Melyik számot szorozzuk 35-tel, hogy a szorzat 481,25 legyen?

d) Melyik számot osszuk el 42-vel, hogy a hányados 1,234 legyen?

7. Számoljunk visszafelé!

„Gondoltam egy számot. Hozzáadtam 1-et, az összeg feléből kivontam 1-et, majd a különbség ötszörösét elosztottam 11-gyel. A hányados 0,5 lett. Melyik számra gondoltam?"

8. Folytassuk a megkezdett sorozatot három-három taggal, ha a sorozat következő tagját úgy kapjuk meg, hogy az előző tagot megszorozzuk százzal!

a) 0,0001; 0,01; ...; *b)* 0,0023; 0,23; ...;

c) 1,0005; 100,05; ...; *d)* 0,76543; 76,543; ....

9. Folytassuk a megkezdett sorozatot két-két taggal, ha a sorozat következő tagját úgy kapjuk meg, hogy az előző tagot osztjuk ezerrel!

a) 2300; ...; *b)* 7654,3; ...; *c)* 701; ...; *d)* 10,5; ....

10. Számoljuk ki! Ügyeljünk a műveleti sorrendre!

a) $0{,}4 \cdot 2 + 2{,}75 \cdot 4$; *b)* $0{,}4 \cdot (2 + 2{,}75 \cdot 4)$; *c)* $3{,}14 \cdot 4 - 4{,}253 \cdot 2$;

d) $(3{,}14 \cdot 4 - 4{,}253) \cdot 2$; *e)* $6{,}42 + 3{,}36 - 2{,}88 : 6$; *f)* $(6{,}42 + 3{,}36 - 2{,}88) : 6$.

11. Számoljuk ki! Az eredményeket kerekítsük tizedekre!

a) $49{,}702 + (5{,}02 - 1{,}8) : 4$; *b)* $49{,}702 + 5{,}02 - 1{,}8 : 4$;

c) $6{,}4 : 16 + 4{,}3 \cdot 4 - 19 : 20$; *d)* $(6{,}4 : 16 + 4{,}3) \cdot 4 - 19 : 20$.

12. Számoljuk ki! Az eredményeket kerekítsük egészekre!

a) $(1{,}2 : 6) \cdot 4$; *b)* $1{,}2 : (6 \cdot 4)$; *c)* $1{,}2 : 6 \cdot 4$;

d) $72{,}84 \cdot (12 : 4) \cdot 3$; *e)* $72{,}84 \cdot 12 : (4 \cdot 3)$; *f)* $72{,}84 \cdot 12 : 4 \cdot 3$;

g) $27{,}48 \cdot (60 : 4) \cdot 5$; *h)* $(27{,}48 \cdot 60) : 4 \cdot 5$; *i)* $27{,}48 \cdot (60 : 4 \cdot 5)$.

13. Írjuk fel növekvő sorrendben az eredményeket!

$A = \left(122{,}4 + \frac{3}{4} - \frac{3}{5}\right) \cdot 60$; $B = 122{,}4 + \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{5} \cdot 60\right)$;

$C = 122{,}4 + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{5}\right) \cdot 60$; $D = 122{,}4 + \frac{3}{4} - \frac{3}{5} \cdot 60$.

14. Melyik számjegyet írhatjuk a □ helyébe, hogy teljesüljenek az egyenlőtlenségek?

a) $3{,}7\square < 3{,}8 < 3{,}\square 1$; *b)* $8{,}\square 7 < 8{,}2 < 8{,}2\square$; *c)* $0{,}058\square < 0{,}059 < 0{,}05\square 1$.

15. Egy festmény bekeretezett szélessége 41 cm, hosszúsága 60 cm, ebből a keret szélessége 1,5 cm. Hány négyzetcentiméter a keret?

16. A Magyar Nemzeti Bank devizaárfolyamai 2005 nyarán forintban:

angol font:	1 GBP	355,04;
svájci frank:	1 CHF	157,30;
USA-dollár:	1 USD	204,35;
euró:	1 EUR	245,49.

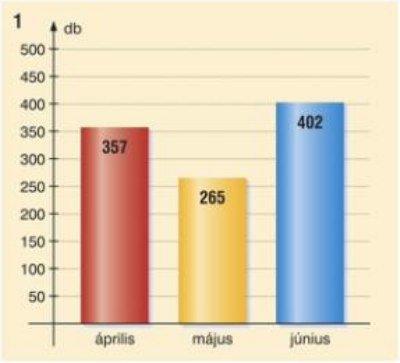
Hány forintot ért ekkor

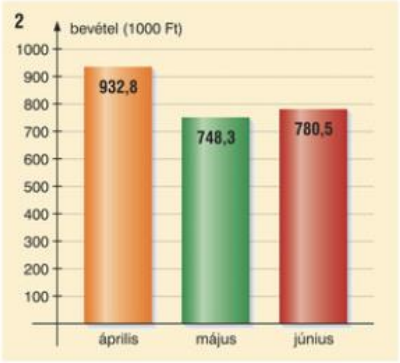
a) 150 CHF; *b)* 240 USD;

c) 1125 EUR; *d)* 170 GBP?



17. Egy áruházban az eladott rajzfilmes DVD-kről diagramokat készítettek. Az 1. diagram a II. negyedévben eladott lemezek számát, a 2. az ebből származó bevételt mutatja.





1. Mennyivel változott a rajzfilmes DVD-kből származó bevétel az egymást követő hónapokban?
2. Mennyi volt a II. negyedévi bevétel havi átlaga?
3. Melyik hónapban tartottak akciót, és mennyi volt ekkor egy rajzfilmes DVD átlagára?

Tegyünk fel további kérdéseket!

18. Egy iskola két ötödik osztályában a tizedes törtek témakörből írt dolgozatok eredményeit foglaltuk táblázatba.

Melyik osztályban lett jobb a dolgozatjegyek átlaga?

	5-ös	4-es	3-as	2-es	1-es
5/a osztály	6	9	5	3	1
5/b osztály	7	7	8	2	1

19. Egy autó 100 kilométerenként 7 liter benzint fogyaszt, az üzemanyagtartálya 52,5 liter.

a) Hány kilométert tudunk autózni egy tele tankkal?

b) Hány forintot fizetünk, ha 1 liter benzin 379 Ft, és 33,7 liter benzint tankoltunk?

20. *a)* Írjuk fel a 0,056 km-t kisebb hosszúságegységekkel!

b) Írjuk fel a 73 000 mm-t nagyobb hosszúságegységekkel!

c) Írjuk fel a 0,000 56 km^2-t kisebb területegységekkel!

d) Írjuk fel a 73 000 000 mm^2-t nagyobb területegységekkel!

e) Írjuk fel a 0,000 0056 m^3-t kisebb térfogategységekkel!

f) Írjuk fel a 0,056 cm^3-t nagyobb térfogategységekkel!

21. Milyen hosszú egy InterPici szerelvény, ha három darab 14,20 m hosszúságú kocsiból áll?

22. Milyen hosszú az az InterCity szerelvény, amelyik két I. osztályú kocsiból (24,5 m), hat II. osztályú kocsiból (26,4 m), egy étkezőkocsiból (24,5 m) és a 16,64 m hosszúságú mozdonyból áll?

23. Két tehervonat közül az egyik 25 darab 14,04 m, a másik 35 db 16,52 m hosszúságú vagonból áll. Melyik tehervonat a hosszabb, és mennyivel, ha mindkettőt 16,64 m hosszúságú mozdony húzza?

24. A következő sorozatok bármely tagját (a másodiktól kezdve) úgy kapjuk meg, hogy az előző taghoz hozzáadunk 2,9-et. Mely számokat írhatjuk a betűk helyére?

a) A; B; C; 13,4; 16,3; D; *b)* A; 3,01; B; C; D; E; *c)* A; B; C; D; 17,7; E.

25. A következő sorozatok bármely tagját (a másodiktól kezdve) úgy kapjuk meg, hogy az előző taghoz mindig ugyanazt a számot adjuk. Mely számokat írhatjuk a betűk helyére?

a) A; B; 7,5; 9,1; C; D; *b)* A; 12,3; B; 15,9; C; D; *c)* A; B; 27,4; C; D; 31,9.

26. Helyettesítsük a bűvös négyzetben a betűket olyan számokkal, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban a számok összege 42 legyen!

a)

A	B	C
D	14	E
13,9	14,4	F

b)

15,4	G	9,8
H	I	J
18,2	K	L

c)

M	N	O
13,75	P	Q
13,875	14,5	R

***27.** *a)* Helyettesítsük a betűket számokkal úgy, hogy a szomszédos tagok különbsége mindig ugyanannyi legyen: A; B; C; 8,35; 8,7; 9,05; D; E; F!

b) Írjuk az *a)* feladat megoldásaként kapott kilenc darab számot egy 3×3-as bűvös négyzetbe úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban a számok összege megegyezzen!

28. Egy téglalap alaprajzú szoba 3 m széles, 4 m hosszú és 3,4 m magas. A szobába nyíló ajtó 210 cm magas és 1 m széles, az ablak pedig 2 m magas és 120 cm széles. Hány kilogramm falfestéket kell vennünk a szoba egy rétegű lefestéséhez, ha 1 kg festék 9 m^2 felület lefestésére elegendő, és a mennyezetet is lefestjük?

29. Egy kirándulás programjáról Viki a következő SMS-eket küldte haza a testvérének:

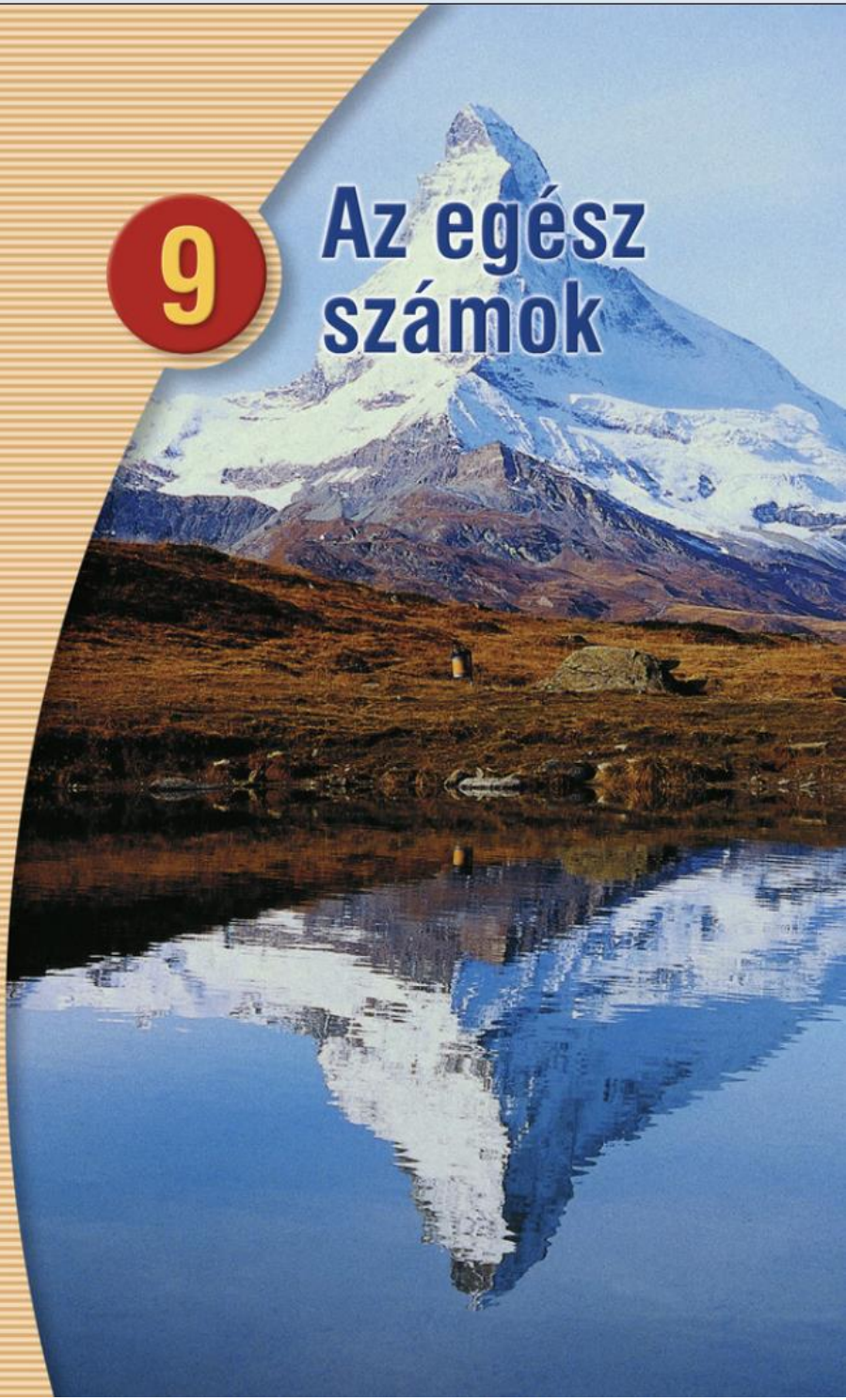


Viki testvére, Miki elmesélte a szüleiknek, hogy mi történt a kiránduláson, de minden adatot percekben adott meg. Hogyan mesélte el a történetet Miki?

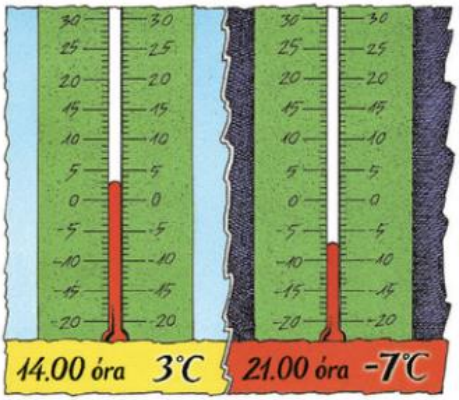
Rejtvény

Írjuk fel növekvő sorrendben a $0,\dot{1}2\dot{3}\dot{4}$; $0,1\dot{2}\dot{3}\dot{4}$; $0,12\dot{3}\dot{4}$; $0,123\dot{4}$ **tizedes törteket!**

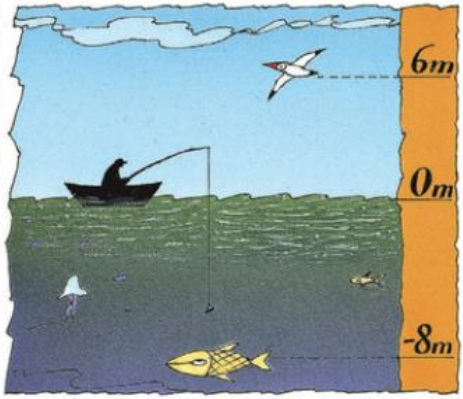
9 Az egész számok



1. A negatív egész számok



A hőmérséklet mérésekor a víz fagyáspontjához viszonyítunk. Ezt választották 0 Celsius-foknak (ejtsd: celziusz). Ha 0 °C-nál hidegebb van 7 °C-kal, akkor azt mondjuk, hogy mínusz 7 Celsius-fok van (−7 °C).



A földrajzi helyek magasságának megadásakor a tengerszinthez viszonyítunk (ezt tekintjük 0 m-nek). Az ábrán a hal a tenger szintje alatt 8 m-rel úszik, ezért a tengerszinthez viszonyított helyzete −8 m.

$0-1=-1$
$0-2=-2$
$0-3=-3$
⋮
$0-7=-7$
$0-8=-8$
⋮

Michael Stifel német matematikus (1487–1567) abszurd számoknak nevezte a negatív számokat. A −3 helyett a 0 − 3 alakot használta.

A nullánál kisebb egész számok a negatív egész számok.
Előjelük: − (mínusz), például: −5 (mínusz 5).

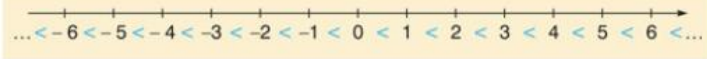
A nullánál nagyobb egész számok a pozitív egész számok.
Előjelük: + (plusz), például: 5 = +5 (plusz 5).
A szám előtti + jelet általában nem írjuk ki.

A nulla nem pozitív és nem is negatív szám.

AZ EGÉSZ SZÁMOK:

... −5, −4, −3, −2, −1	0	+1, +2, +3, +4, +5 ...
negatív egész számok	**nulla**	**pozitív egész számok**

Az egész számokat is ábrázolhatjuk számegyenesen:



Igaz állítások az egész számokról:

- Minden pozitív egész szám nagyobb 0-nál.
- Minden negatív egész szám kisebb 0-nál.
- Bármelyik pozitív egész szám nagyobb, mint bármelyik negatív egész szám.

Feladatok

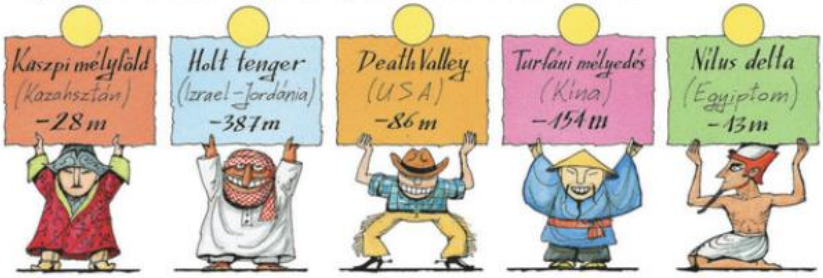
1. Írjuk a ☐ helyére a megfelelő relációjelet!

a) 123 ☐ 258; *b)* −24 ☐ 35; *c)* −23 ☐ 0;
d) −5 ☐ −8; *e)* −24 ☐ 24; *f)* −23 ☐ −18;
g) −24 ☐ 8; *h)* −1245 ☐ −1254; *i)* −2007 ☐ −2006.

2. Ábrázoljuk számegyenesen, majd rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat!

a) +7, −5, −1, +10, +2, +5, −9; *b)* −7, −2, +3, 0, −4, +8, −6;
c) +40, −80, −10, +70, 0, −30; *d)* +300, −100, −600, +400, −400.

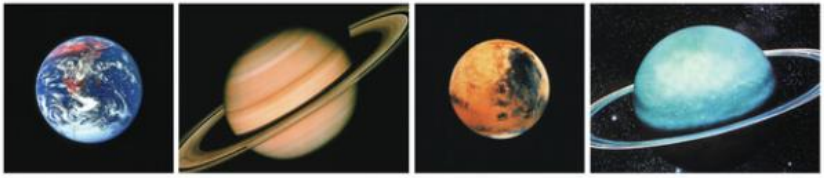
3. Rendezzük növekvő sorrendbe az ábrákon megadott mélyföldeket magasságuk szerint! Melyiknek a legnagyobb, és melyiknek a legkisebb a tengerszinthez viszonyított magassága? Keressük meg a földrajzi atlaszban ezeket a helyeket!



4. Rendezzük csökkenő sorrendbe az egész számokat!

a) −20, −50, −90, +20, +50, −10; *b)* +75, −48, −34, −12, +23, −98;
c) +8, −68, −104, +534, 0, −273; *d)* −154, −972, −843, −328, +592.

5. Az ábrán a Naprendszer néhány bolygóját és annak átlaghőmérsékletét láthatjuk. Állítsuk a bolygókat az átlaghőmérsékletük szerint növekvő sorrendbe!



Föld (+16 °C) Szaturnusz (–180 °C) Mars (–32 °C) Uránusz (–200 °C)

6. Egy téli napon a reggeli időjárás-jelentésben az alábbi értékeket olvasták be:

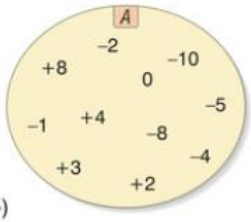
Debrecen −12 °C; Kékestető −18 °C; Sopron −3 °C;
Kecskemét −11 °C; Miskolc −13 °C; Szeged −8 °C.

a) Hol mérték ezen a reggelen a legalacsonyabb, és hol a legmagasabb hőmérsékletet?
b) A mért helyek közül hányban volt a reggel mért hőmérséklet −11 °C-nál alacsonyabb?
c) A mért helyek közül hányban volt a reggel mért hőmérséklet −12 °C-nál magasabb?

3D

7. Melyik a legnagyobb, és melyik a legkisebb a felsorolt egész számok közül?
   a) $-7,\ +5,\ -3,\ -9,\ -2,\ +4,\ 0,\ +8,\ -1$;
   b) $-3,\ -73,\ +375,\ -98,\ -124,\ +93,\ +8,\ -328$;
   c) $-18,\ -54,\ -74,\ -27,\ -87,\ -92,\ -23,\ -14$;
   d) $-13,\ -1342,\ -945,\ -834,\ -99,\ -528,\ -989$.

8. Az ábrán látható *A* halmaz mely elemeire igaz, hogy
   a) -3-nál kisebbek;
   b) nem nagyobbak 2-nél;
   c) 3 egységre vannak egymástól a számegyenesen;
   d) -2-nél nagyobbak, de nem nagyobbak 5-nél;
   e) természetes számok;
   f) a 0-tól egyenlő távolságra vannak a számegyenesen? (➡)



9. Rajzoljunk számegyenest! Jelöljük meg rajta azokat az egész számokat, amelyek
   a) a $+2$-től 4 egységre vannak;
   b) a $+2$-től legfeljebb 4 egységre vannak;
   c) a $+2$-től legalább 4 egységre vannak;
   d) a -2-től 3 egységre vannak;
   e) a -2-től legfeljebb 3 egységre vannak;
   f) a -2-től legalább 3 egységre vannak!

10. Rajzoljunk számegyenest! Jelöljünk meg rajta olyan egész számokat, amelyek egymástól
    a) 5 egységre találhatók;
    b) 6 egységre találhatók, és közöttük helyezkedik el a -2!
    Hány megoldása van a feladatnak?

11. Hány olyan egész szám található a számegyenesen, amely
    a) -2-nél nagyobb és 8-nál kisebb;
    b) -3-nál nagyobb és nem pozitív;
    c) legalább -5 és legfeljebb 5;
    d) -4-nél kisebb és -5-nél nagyobb;
    e) -2-nél nem nagyobb és 8-nál kisebb;
    f) -35-nél nem kisebb és 48-nál nem nagyobb?

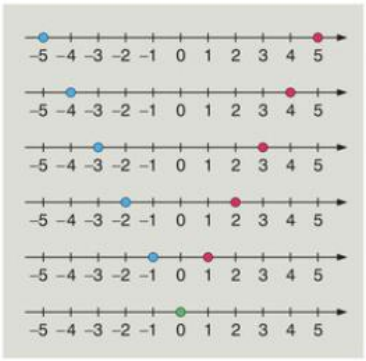
12. Írjunk egész számokat a jelek helyére! Ahol lehet, soroljuk fel az összes lehetőséget!
    a) $\square < -3$;
    b) $\bigcirc < -4$;
    c) $\triangle \geq -2$;
    d) $\bigcirc \leq +2$;
    e) $-8 < \triangledown < -5$;
    f) $-3 < \bigcirc < +5$;
    g) $-2 \leq \square \leq 3$;
    h) $-6 < \triangle \leq 2$.

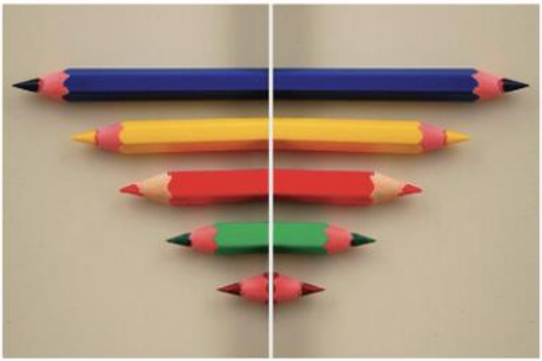
13. Melyik igaz az alábbi állítások közül?
    a) Van legkisebb negatív egész szám.
    b) A legkisebb pozitív egész szám nagyobb mindegyik negatív egész számnál.
    c) Van legnagyobb negatív egész szám.
    d) A legnagyobb negatív egész szám nagyobb a legkisebb pozitív egész számnál.

Rejtvény

Melyik az a szám, amely önmaga felénél 2-vel kisebb?

2. A számok ellentettje, abszolút értéke





Minden egész számhoz található egy olyan egész szám, amely ugyanolyan távolságra van a számegyenesen a 0-tól, mint az eredeti szám.



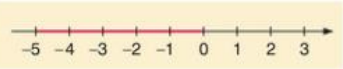
A -5 és a $+5$ ugyanolyan távolságra van a számegyenesen a nullától. Ezek a számok egymás **ellentettjei.**

A -5 ellentettje:
$-(-5) = +5$.

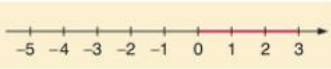
A $+5$ ellentettje:
$-(+5) = -5$.

$-(-3) = +3$
$-(-2) = +2$
$-(-1) = +1$
$-(0) = 0$
$-(+1) = -1$
$-(+2) = -2$
$-(+3) = -3$

Azokat a különböző előjelű számokat, amelyek a számegyenesen a nullától egyenlő távolságra vannak, egymás ellentettjeinek nevezzük. A nulla ellentettje nulla.



A -5 távolsága a számegyenesen a 0-tól 5 egység.



A 3 távolsága a számegyenesen a 0-tól 3 egység.

Egy szám abszolút értéke a szám nullától való távolsága a számegyenesen. Jelölése: $|-5| = +5$ (mínusz 5 abszolút értéke egyenlő plusz 5).

Mivel a távolság nem lehet negatív, ezért egy szám abszolút értéke mindig pozitív vagy 0.

A pozitív szám abszolút értéke maga a szám.
A nulla abszolút értéke 0.
A negatív szám abszolút értéke a szám ellentettje.

$|+3| = +3$
$|+2| = +2$
$|+1| = +1$

$|0| = 0$

$|-1| = +1$
$|-2| = +2$
$|-3| = +3$

Feladatok

1. Az alábbiakban néhány anyag esetén megadtuk azt a hőmérsékletet, amelyiken megfagy. A fagyáspontok mérőszámai közül melyiknek a legnagyobb, és melyiknek a legkisebb az abszolút értéke?

alkohol	−114 °C;	higany	−39 °C;	gázolaj	−30 °C;
oxigén	−219 °C;	hidrogén	−259 °C;	víz	0 °C.

2. Ábrázoljuk az alábbi számokat és ellentettjeiket egy számegyenesen!

a) −7; *b)* +8; *c)* +3; *d)* −5; *e)* −2; *f)* 0.

3. Írjuk le az alábbi számok ellentettjét! (Például −2 ellentettje: −(−2) = +2.)

a) −8; *b)* +7; *c)* +5; *d)* −6; *e)* +1; *f)* −1;
g) 0; *h)* −45; *i)* −75; *j)* +78; *k)* −128; *l)* 9876.

4. A földrajzi atlaszunkból felírtuk néhány hely tengerszinthez viszonyított magasságát. A magasságok közül melyiknek a legnagyobb, és melyiknek a legkisebb az abszolút értéke?

Debrecen	121 m;
Nílus-delta mélyföldje	−13 m;
Holt-tenger	−397 m;
Pécs	160 m;
Kaszpi-mélyföld	−28 m;
Szeged	84 m.



5. Ábrázoljuk három számegyenesen, majd írjuk le csökkenő sorrendben
   - a −2; −7; +8; 0; −9; +4; +6; −4 számokat;
   - az adott számok ellentettjeit;
   - az adott számok abszolút értékeit!

   Mit veszünk észre?

6. Mennyi a következő számok abszolút értéke? Írjuk fel a felsoroltak közül a legnagyobb, illetve a legkisebb abszolút értékű számot!

a) −4; *b)* −7; *c)* +5; *d)* 0; *e)* +2; *f)* −183;
g) −12; *h)* −23; *i)* +15; *j)* −17; *k)* +1; *l)* 251;
m) −45; *n)* +48; *o)* −205; *p)* +134; *r)* −2007; *s)* −358.

7. Adjunk meg olyan egész számokat, amelyeknek az abszolút értéke

a) 5; *b)* 8; *c)* 9; *d)* 28; *e)* 0; *f)* +400;
g) −7; *h)* 10; *i)* +12; *j)* 320; *k)* −500; *l)* 100!

8. Mennyivel egyenlő?

a) $|-5|$; *b)* $|-9|$; *c)* $|0|$; *d)* $|+27|$;
e) $-(+3)$; *f)* $-(-3)$; *g)* $-(-10)$; *h)* $-(+540)$;
i) $-|-7|$; *j)* $-|+43|$; *k)* $-|0|$; *l)* $-|-320|$.

9. Ábrázoljuk számegyenesen azokat az egész számokat, amelyeknek az ellentettje

a) kisebb 4-nél;
b) nagyobb −2-nél;
c) legfeljebb 3;
d) legalább 5;
e) nem kisebb 2-nél;
f) nem nagyobb −5-nél!

Súgó

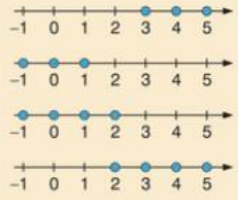
Egy egész szám

nagyobb, mint 2

kisebb, mint 2

nem nagyobb, mint 2 (legfeljebb 2)

nem kisebb, mint 2 (legalább 2)



10. Melyek azok a −10-nél nagyobb és 10-nél kisebb egész számok, amelyeknek az ellentettje

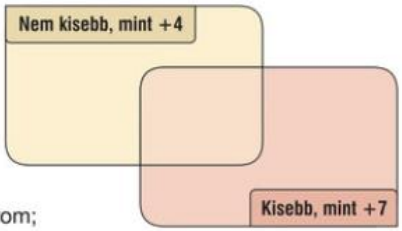
a) −3;
b) +6-nál nagyobb;
c) kisebb −3-nál;
d) −2 és −5 közé esik;
e) legfeljebb +6 és legalább +4;
f) nagyobb −3-nál és kisebb +2-nél?

11. Ábrázoljuk számegyenesen azokat az egyjegyű egész számokat, amelyeknek az abszolút értéke

a) kisebb 3-nál;
b) nagyobb 5-nél;
c) legfeljebb 6;
d) legalább 4;
e) legalább 3 és legfeljebb 5;
f) nem nagyobb 3-nál!

12. Írjuk a halmazábra megfelelő helyére az adott számokat! (➡)

$|-7|; -(-5); -(+8); -5; |+2|; +6; |10|;$
$|0|; -|+1|; -(-3); -(-1); |-12|; |-3|.$



13. Hány olyan egész szám van, amelynek az abszolút értéke:

a) három;
b) legfeljebb három;
c) legalább három;
d) legfeljebb 1001;
e) legalább három és legfeljebb öt;
f) nem nagyobb 6-nál és nem kisebb 3-nál?

14. Döntsük el a következő állításokról, hogy igazak vagy hamisak!

a) Van olyan egész szám, amelynek az abszolút értéke önmaga.
b) Nem minden egész szám abszolút értéke önmaga.
c) Nincs olyan egész szám, melynek az abszolút értéke és ellentettje egyenlő.
d) Található három olyan egész szám, amelyek abszolút értéke megegyezik.
e) Minden nempozitív egész szám ellentettje pozitív.

Rejtvény

Hány olyan negatív egész szám van, amely abszolút értékének az ellentettje nagyobb, mint az idei évszám?

3. Az egész számok összeadása

Feri, Bea, Gabi, Timi és Peti *Kis bankár* nevű társasjátékot játszanak. A játék kártyái közül 🔴 1 Ft készpénzt (+1), 🟦 pedig 1 Ft adósságot (−1) jelent.



Azonos előjelű számok összeadása

1. példa

a) Feri az első partiban 4 Ft-ot, a másodikban pedig 2 Ft-ot nyert. Mennyi pénze lett Ferinek összesen?

b) Bea az első játék végén 3 adósságkártyája volt, a második játékban további 2 adósságkártyát kapott. Mennyi adóssága lett Beának összesen?

Megoldás (a)

Az előjeles számokat a műveletek végzésekor zárójelbe tesszük.

Kártyákkal: 🔴🔴🔴🔴 + 🔴🔴 = 🔴🔴🔴🔴🔴🔴

Számokkal: (+4) + (+2) = (+6)

Ferinek összesen 6 Ft-ja lett.

Megoldás (b)

Kártyákkal: 🟦🟦🟦 + 🟦🟦 = 🟦🟦🟦🟦🟦

Számokkal: (−3) + (−2) = (−5)

Beának összesen −5 Ft-ja, vagyis 5 Ft adóssága lett.

Adjuk össze a példában szereplő tagok abszolút értékeit!

(a) $(+4) + (+2) = (+6)$
$|+4| + |+2| = 4 + 2 = 6$

(b) $(-2) + (-3) = (-5)$
$|-2| + |-3| = 2 + 3 = 5$

Azonos előjelű számokat úgy adunk össze, hogy a tagok abszolút értékeit összeadjuk, és az összeg előjele a közös előjel lesz.

Két különböző előjelű szám összeadása

2. példa

a) Timinek az első partiban 2 Ft adóssága lett, a másodikban pedig 3 Ft-ot nyert. Mennyi pénze lett Timinek összesen?

b) Gabi az első játékot 2 Ft adóssággal zárta, a másodikban 2 Ft-ot nyert. Mennyi lett Gabi vagyona a két játék után?

c) Peti az első játékban 1 Ft-ot nyert, a másodikban viszont 3 Ft adósságot szerzett. Milyen eredménnyel zárta Peti a két játékot?

Megoldás (a)

Kártyákkal: 

Számokkal: $(-2) + (+3) = 0 + 0 + (+1) = (+1)$

Timinek összesen 1 Ft-ja lett.

Megoldás (b)

Kártyákkal: 

Számokkal: $(-2) + (+2) = 0 + 0 = 0$

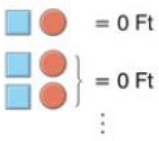
Gabi vagyona a játék végére nem változott.

Megoldás (c)

Kártyákkal: 

Számokkal: $(+1) + (-3) = 0 + (-2) = (-2)$

Peti a két játékot összesen −2 Ft-tal, azaz 2 Ft adóssággal zárta.



Ha bármely számhoz hozzáadjuk az ellentettjét, az összeg nulla lesz.

Például:
$(-1) + (+1) = 0$;
$(-2) + (+2) = 0$;
$(+5) + (-5) = 0$.

Az előző példában vegyük a tagok abszolút értékeit, majd a nagyobb abszolút értékből vonjuk ki a kisebb abszolút értéket!

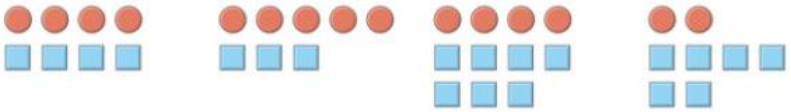
(a)	(b)	(c)
$(-2) + (+3) = +1$	$(-2) + (+2) = 0$	$(+1) + (-3) = -2$
$\|-2\| = 2$ és $\|+3\| = 3$	$\|-2\| = 2$ és $\|+2\| = 2$	$\|+1\| = 1$ és $\|-3\| = 3$
$3 > 2$	$2 = 2$	$3 > 1$
$3 - 2 = 1$	$2 - 2 = 0$	$3 - 1 = 2$

Két különböző előjelű számot úgy adunk össze, hogy először vesszük a két szám abszolút értékét, és a nagyobb abszolút értékből kivonjuk a kisebb abszolút értéket. Az összeg előjele a nagyobb abszolút értékű szám előjele lesz. Ha a különböző előjelű számok abszolút értéke egyenlő, akkor az összegük nulla.

Feladatok

1. A *Kis bankár* nevű játék befejezésekor a gyerekek előtt a következő játékkártyák voltak. Melyik gyereknek van a legtöbb, és melyiknek a legkevesebb vagyona?

a) Klári *b)* Jóska *c)* Pali *d)* Erzsi



2. Milyen a vagyoni helyzete Béninek, ha most
   a) 5 Ft készpénze és 3 Ft adóssága van; *b)* 5 Ft készpénze és 5 Ft adóssága van;
   c) 3 Ft készpénze és 7 Ft adóssága van; *d)* 2 Ft készpénze és 8 Ft adóssága van;
   e) 6 Ft készpénze és 2 Ft adóssága van; *f)* 3 Ft készpénze és 4 Ft adóssága van?

3. A *Kis bankár* nevű játék második fordulójában Zita 15 adósságkártyát, Norbi 8 készpénzcédulát, Brigi 6 adósságcédulát kapott. Kinek nőtt, és kinek csökkent a vagyona ebben a fordulóban, és mennyivel?

4. Írjuk le művelettel, és számoljuk ki a vagyoni helyzetünket, ha
   a) 20 Ft adósságunk és 50 Ft adósságunk van;
   b) 300 Ft készpénzünk és 450 Ft adósságunk van;
   c) 200 Ft adósságunk és 300 Ft adósságunk van!

5. Iminek van adóssága is és készpénze is. Az összes vagyona *a)* 3 Ft; *b)* −10 Ft; *c)* 0 Ft. Írjunk 3-3 példát, és rajzoljuk is le, hogy hogyan lehetséges ez!

6. A hőmérő most −8 °C-ot mutat. Hány °C-ot mutat a hőmérő, ha a hőmérséklet emelkedik
   a) 2 °C-kal; *b)* 5 °C-kal; *c)* 8 °C-kal; *d)* 10 °C-kal;
   e) 15 °C-kal; *f)* 20 °C-kal; *g)* 17 °C-kal; *h)* 14 °C-kal?

7. Hány °C-ot mutatott a hőmérő, ha 8 °C-os csökkenés után most
   a) 2 °C-ot mutat; *b)* 0 °C-ot mutat; *c)* −5 °C-ot mutat;
   d) −8 °C-ot mutat; *e)* −10 °C-ot mutat; *f)* −15 °C-ot mutat?

8. Írjuk le a megkezdett sorozat következő öt tagját!
   a) −15; −12; −9; −6; ...; *b)* −10; −8; −6; −4; ...;
   c) −59; −47; −35; −23; ...; *d)* −10; −9; −7; −6; −4; ....

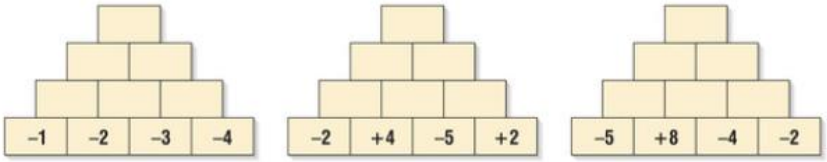
9. Írjunk szöveges feladatot a következő összeadásokhoz!
   a) (+5) + (−3); *b)* (+3) + (−8); *c)* (−4) + (−5).

10. Végezzük el az összeadásokat!
    a) (+3) + (+7); *b)* (−3) + (−7); *c)* (+3) + (−7); *d)* (−3) + (+7);
    e) (+5) + (+8); *f)* (−5) + (−8); *g)* (+5) + (−8); *h)* (−5) + (+8);
    i) (+9) + (+4); *j)* (−9) + (−4); *k)* (+9) + (−4); *l)* (−9) + (+4).

11. Végezzük el az összeadásokat!

a) $(-2) + (+6)$; *b)* $(-4) + (-3)$; *c)* $(-2) + (+1)$; *d)* $(-8) + (-2)$;
e) $(+6) + (-1)$; *f)* $(-7) + (+7)$; *g)* $(-1) + (+5)$; *h)* $(-4) + (+2)$;
i) $(-8) + (+3)$; *j)* $(+8) + (-5)$; *k)* $(-6) + (-6)$; *l)* $0 + (-9)$.

12. Folytassuk a számpiramisok kitöltését! Minden téglalapba az alatta levő két téglalapban szereplő számok összege kerüljön! Mely számok kerülnek a legfelső téglalapokba?



13. Végezzük el az összeadásokat!

a) $(+30) + (+40)$; *b)* $(+80) + (-30)$; *c)* $(+20) + (-40)$; *d)* $(-10) + (+10)$;
e) $(-60) + (+80)$; *f)* $(+70) + (-10)$; *g)* $(-40) + (-70)$; *h)* $(-20) + (-80)$.

14. Melyik számot kell hozzáadni a +6-hoz, hogy az eredmény

a) +15; *b)* +3; *c)* −10; *d)* −6; *e)* −12; *f)* −2000 legyen?

15. Végezzük el az összeadásokat!

a) $(-45) + (-34)$; *b)* $(-58) + (+37)$; *c)* $(-52) + (+49)$; *d)* $(-92) + (+49)$;
e) $(+64) + (+78)$; *f)* $(+77) + (-72)$; *g)* $(+65) + (-39)$; *h)* $(-94) + (-18)$;
i) $(-74) + (+74)$; *j)* $(-74) + (+84)$; *k)* $(-74) + (+64)$; *l)* $(+74) + (-74)$.

16. Melyik számhoz kell hozzáadni a −8-at, hogy az eredmény

a) −4; *b)* +5; *c)* −12; *d)* +8; *e)* 0; *f)* +1000 legyen?

17. Melyik számot írjuk a jelek helyére, hogy igaz legyen az egyenlőség?

a) $\bigcirc + (+8) = (+12)$; *b)* $\triangle + (-5) = (-9)$; *c)* $\bigcirc + (-3) = (+2)$;
d) $\triangle + (+2) = (-8)$; *e)* $\square + (-8) = (-3)$; *f)* $(-7) + \triangle = (-2)$;
g) $(+9) + \square = (-5)$; *h)* $(-5) + \bigcirc = (-10)$; *i)* $(+8) + \square = (-12)$.

18. Töltsük ki a táblázatot, ha $a + b = -4$!

a	–5	10	0	4				
b					5	–10	–21	7

19. Ha a bal oldali téglalapban lévő számhoz hozzáadjuk a nyílra (a betűk helyére) írt számot, akkor a jobb oldali téglalapban lévő számot kapjuk. Számítsuk ki a betűk értékét!

a) −8 —a→ −5 —b→ +2 —c→ +8

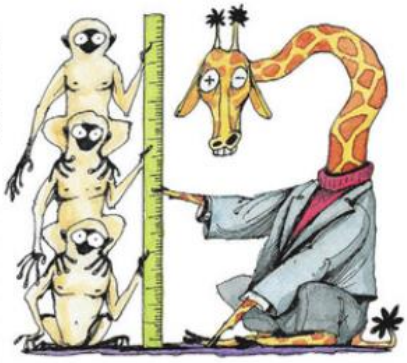
b) +9 —d→ +5 —e→ +3 —f→ 0

c) −7 —g→ −3 —h→ +2 —i→ −2

d) +3 —j→ −1 —k→ −2 —l→ +4

20. Melyik nagyobb, és mennyivel?

a) $A = (+3) + (+8)$ vagy $B = (+3) + (+2)$;
b) $C = (+5) + (-4)$ vagy $D = (+5) + (-9)$;
c) $E = (-3) + (-5)$ vagy $F = (-3) + (-2)$;
d) $G = (-8) + (+2)$ vagy $H = (-8) + (+7)$?

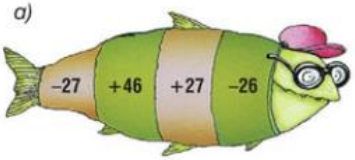


21. Írjuk növekvő sorrendbe az összegeket!

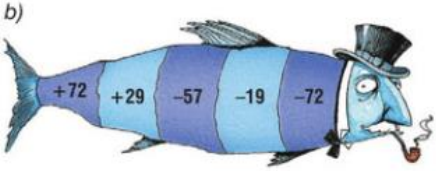
a) $A = (+7) + (-5)$; $B = (+7) + (+8)$;
$C = (+7) + 0$; $D = (+7) + (-9)$.
b) $E = (-8) + (+8)$; $F = (-8) + (+5)$;
$G = (-8) + (-2)$; $H = (-8) + (+6)$.
c) $J = (-8) + (-5)$; $K = (-8) + (+5)$;
$L = (+8) + (-5)$; $M = (+8) + (+5)$.

22. Mennyi a halakon látható számok összege?

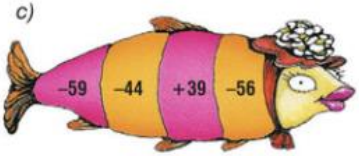
a)



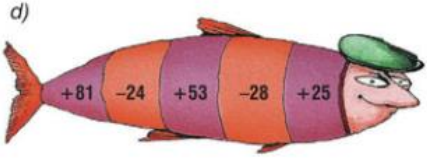
b)



c)



d)



23. Az alábbi bűvös négyzetekben minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban elhelyezkedő négyzetekben lévő számok összege ugyanannyi. Melyik számot írhatjuk a bűvös négyzetben a betűk helyére?

a)

A	B	C
D	−2	E
−4	+6	−8

b)

F	−15	G
H	−7	I
−11	+1	J

c)

+28	K	L
M	−14	N
O	+42	−56

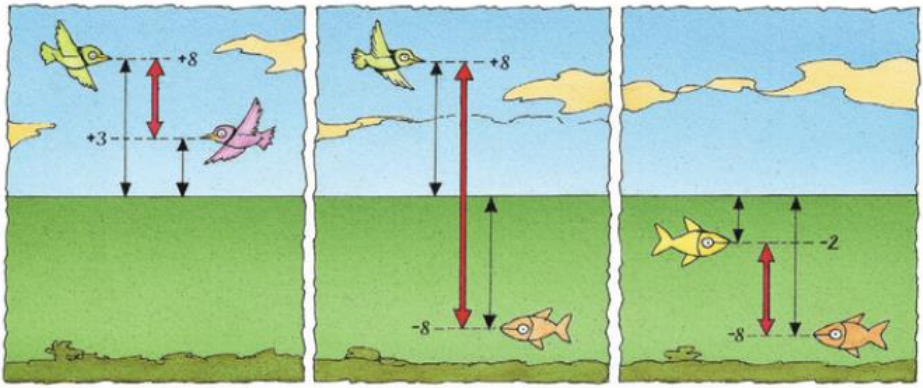
d)

P	Q	−50
R	−20	S
+10	T	+70

Rejtvény

Mennyi az egyjegyű pozitív egész számok kilencszeresének és a kétjegyű negatív egész számoknak az összege?

4. Az egész számok kivonása



$(+8) - (+3) = (+5)$ $(+8) - (-8) = (+16)$ $(-2) - (-8) = (+6)$

Pozitív szám kivonása

1. példa

Számítsuk ki az alábbi különbségeket!

a) $(+3) - (+2)$; *b)* $(+3) - (+3)$; *c)* $(+3) - (+4)$; *d)* $(-1) - (+3)$.

Megoldás

Szemléltessük játékkártyákkal a kivonásokat!

a) ●●● ⟶ $(+3) - (+2) = (+1)$ $+1 \underset{2}{<} +3$

b) ●●● ⟶ $(+3) - (+3) = 0$ $0 \underset{3}{<} +3$

c) A 3 készpénzcédulából nem tudunk elvenni 4 készpénzcédulát. Ezért hozzáadunk egy adósság- és egy készpénzcédulát, ami összesen 0. Így már elvehető a 4 készpénzcédula.

●●● ⟶ ●●●●□ $-1 \underset{4}{<} +3$

$(+3) - (+4) = (-1)$

d) 1 adósságcédulából kellene elvenni 3 készpénzcédulát, amit nem tudunk megtenni. Ezért hozzáadunk 3 készpénz- és 3 adósságcédulát, ami összesen 0. Így már elvehető a 3 készpénzcédula.

□ ⟶ □□□●●● $-4 \underset{3}{<} -1$

$(-1) - (+3) = (-4)$

Pozitív szám kivonása esetén a különbség kisebb a kisebbítendőnél.

Negatív szám kivonása

2. példa

Számítsuk ki az alábbi különbségeket!

a) $(-5) - (-3)$; *b)* $(-5) - (-5)$; *c)* $(-5) - (-6)$; *d)* $(+2) - (-3)$.

Megoldás

Szemléltessük játékkártyákkal a kivonásokat!

Az első két esetben az 5 db adósságcédulából el tudunk venni 3 db-ot, illetve 5 db-ot.

$-2 > -5$ (3)

a)  $(-5) - (-3) = (-2)$

$0 > -5$ (5)

b) $(-5) - (-5) = 0$

c) Az 5 adósságcédulából nem tudunk elvenni 6 adósságcédulát. Ezért hozzáadunk egy adósság- és egy készpénzcédulát, ami összesen 0. Így már elvehető a 6 adósságcédula.



$+1 > -5$ (6)

$(-5) - (-6) = (+1)$

d) 2 készpénzből kellene elvenni 3 adósságcédulát, amit nem tudunk megtenni. Ezért hozzáadunk 3 készpénz és 3 adósságcédulát, ami összesen 0. Így már elvehető a 3 adósságcédula.



$+5 > +2$ (3)

$(+2) - (-3) = (+5)$

Negatív szám kivonása esetén a különbség nagyobb a kisebbítendőnél.

Kapcsolat az összeadás és a kivonás között



3. példa

Hasonlítsuk össze az alábbi kivonásokat és összeadásokat!

a)	*b)*	*c)*	*d)*
$(+6) - (+2)$;	$(+2) - (-3)$;	$(-3) - (+2)$;	$(-4) - (-1)$;
$(+6) + (-2)$.	$(+2) + (+3)$.	$(-3) + (-2)$.	$(-4) + (+1)$.

Megoldás

Szemléltessük játékkártyákkal a műveleteket!



$(+6) - (+2) = (+4)$

$(+6) + (-2) = (+4)$

+2 ellentettje −2



$(+2) - (-3) = (+5)$

$(+2) + (+3) = (+5)$

−3 ellentettje +3



$(-4) - (-1) = (-3)$

$(-4) + (+1) = (-3)$

−1 ellentettje +1



$(-3) - (+2) = (-5)$

$(-3) + (-2) = (-5)$

Az összeadások és kivonások eredménye páronként egyenlő.

Bármely szám kivonását elvégezhetjük az ellentettjének hozzáadásával.

Ha bármely számból kivonjuk önmagát, vagy a számhoz hozzáadjuk az ellentettjét, akkor nullát kapunk.

$(+6) - (+6) = 0$

$(+6) + (-6) = 0$

Feladatok

1. A *Kis bankár* nevű játék harmadik fordulójában Zitának 20, Petinek 10 adósságkártyával, Bencének 15, Briginek 13 készpénzcédulával lett kevesebb kártyája. Kinek nőtt és kinek csökkent a vagyona? Ki nyerte meg ezt a fordulót, és ki veszített a legtöbbet?

2. Írjuk le és számoljuk ki vagyoni helyzetünket előjeles számokkal!
   a) Volt 10 Ft-unk, és elköltöttünk 7 Ft-ot.
   b) Volt 4 Ft-unk, és elköltöttünk 9 Ft-ot.
   c) Volt 5 Ft adósságunk, és elköltöttünk még 8 Ft-ot.
   d) Volt 12 Ft adósságunk, és édesapánk kifizetett ebből 8 Ft adósságot.

3. A hőmérő most +5 °C-ot mutat. Hány °C-ot mutat a hőmérő, ha a hőmérséklet csökken
   a) 2 °C-kal; *b)* 5 °C-kal; *c)* 6 °C-kal;
   d) 8 °C-kal; *e)* 10 °C-kal; *f)* 15 °C-kal?

4. Hány °C-ot mutatott a hőmérő, ha 6 °C-os emelkedés után most
   a) +2 °C-ot mutat; *b)* 0 °C-ot mutat; *c)* −5 °C-ot mutat;
   d) −8 °C-ot mutat; *e)* −10 °C-ot mutat; *f)* −15 °C-ot mutat?

5. A Dobsinai jégbarlangban a hőmérséklet −2 °C, a barlang bejárata előtt pedig +13 °C-ot mutat a hőmérő. Hány fokkal van hidegebb a barlangban, mint a bejárata előtt?

6. Írjuk le a megkezdett sorozat következő öt tagját!

a) 15; 12; 9; 6; ...; *b)* −4; −6; −8; −10; ...; *c)* −12; −18; −24; −30; ...;
d) 59; 47; 35; 23; ...; *e)* 15; 14; 12; 9; 5; ...; *f)* 10; 9; 7; 6; 4; ....

7. Írjunk szöveges feladatot a következő kivonásokhoz!

a) (+5) − (+3); *b)* (+3) − (+8); *c)* (−3) − (−7).

8. Milyen műveleti jelet írjunk a □ helyére, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) (+5) − (+8) = (+5) □ (−8); *b)* (+5) − (+2) = (+5) □ (−2);
c) (+7) − (−3) = (+7) □ (+3); *d)* (+7) − (−9) = (+7) □ (+9);
e) (−6) − (−4) = (−6) □ (+4); *f)* (−6) − (−8) = (−6) □ (+8);
g) (+3) − (+5) = (+3) □ (−5); *h)* (−5) − (−8) = (−5) □ (+8);
i) (−2) − (+6) = (−2) □ (−6); *j)* 0 − (+3) = 0 □ (−3).

9. Milyen előjelet írjunk a □ helyére, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) (+5) − (+8) = (+5) + (□8); *b)* (+3) − (+6) = (+3) + (□6);
c) (−4) − (+2) = (−4) + (□2); *d)* (−5) − (−9) = (−5) + (□9);
e) (+8) − (−3) = (+8) + (□3); *f)* (+7) − (+9) = (+7) + (□9);
g) (−4) − (−8) = (−4) + (□8); *h)* (−9) − (+3) = (−9) + (□3);
i) (+7) − (+4) = (+7) + (□4); *j)* 0 − (−5) = 0 + (□5).

10. Végezzük el a kivonásokat!

a) (−7) − (+5); *b)* (−7) − (−5); *c)* (+7) − (+5); *d)* (+7) − (−5);
e) (+5) − (+8); *f)* (−5) − (−8); *g)* (−5) − (+8); *h)* (+5) − (−8);
i) (+9) − (+4); *j)* (−9) − (−4); *k)* (+9) − (−4); *l)* (−9) − (+4).

11. Végezzük el a kivonásokat, és ellenőrizzük!

a) (+7) − (+3); *b)* (−7) − (−9); *c)* (+8) − (+4); *d)* (−9) − (+3);
e) (−4) − (+8); *f)* (+3) − (−8); *g)* (−4) − (−3); *h)* (+5) − (−5);
i) (−4) − (+2); *j)* (−8) − (−9); *k)* (+5) − (−6); *l)* (−1) − (+2);
m) 0 − (−8); *n)* (−5) − 0; *o)* 0 − (+2); *p)* (−3) − (−8).

12. Melyik számot kell a −5-ből kivonni, hogy az eredmény

a) 0; *b)* −5; *c)* −2; *d)* +5;
e) +3; *f)* −4; *g)* +1; *h)* −8 legyen?

13. Melyik számból kell a +3-at kivonni, hogy eredményül

a) +3; *b)* 0; *c)* −3; *d)* +1;
e) −4; *f)* +7; *g)* −6; *h)* +8 legyen?

14. Töltsük ki a táblázatot!

a	−9	−8	+18	+6	−13				
b	−4		−4			+4	+10	−2	
a − *b*		−3		+14	+5	−2	−4	+9	

15. Az első ókori olimpiát a hagyomány szerint Kr. e. 776-ban rendezték Olümpiában. Hány évvel ezelőtt volt ez?

16. Melyik számból vegyünk el

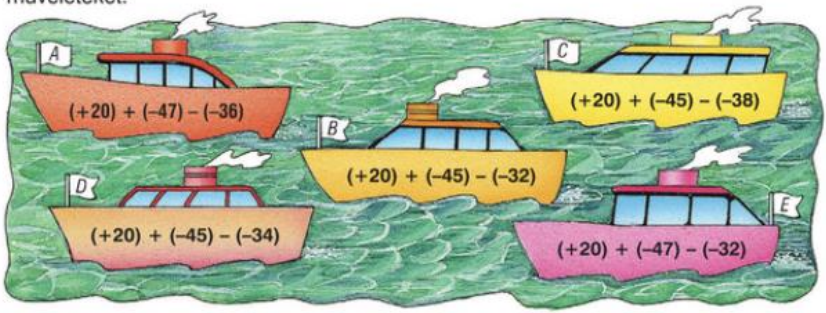
a) +3-at, hogy a különbség +7 legyen;
b) +8-at, hogy a különbség −3 legyen;
c) −5-öt, hogy a különbség +7 legyen;
d) −7-et, hogy a különbség −4 legyen;
e) −4-et, hogy a különbség 0 legyen;
f) −8-at, hogy a különbség −8 legyen?

17. A Magas-Tátra legmagasabb csúcsán, a Gerlachfalvi-csúcson egy téli napon −23 °C, a hegység lábánál ugyanakkor −6 °C hőmérsékletet mértek. Hol volt a melegebb, és hány Celsius-fokkal?

18. Mennyi volt az egyes földrészeken mért legmagasabb és legalacsonyabb hőmérsékletek különbsége? Melyik földrészen volt ez a különbség a legnagyobb, illetve a legkisebb?

	legmagasabb hőmérséklet	legalacsonyabb hőmérséklet
Európa	+50 °C	−55 °C
Ázsia	+54 °C	−68 °C
Afrika	+58 °C	−24 °C
Észak-Amerika	+57 °C	−63 °C
Dél-Amerika	+49 °C	−33 °C
Ausztrália és Óceánia	+53 °C	−22 °C
Antarktisz	+15 °C	−89 °C

19. Melyik folyamkilométernél kötnek ki a hajók? Megtudhatjuk, ha elvégezzük a rájuk írt műveleteket.



20. Írjunk a téglalapok helyére olyan számokat, hogy teljesüljenek a relációk!

a) $(-15) - (+7) - \square = 0$;
b) $(+9) - (-17) + (-9) - \square = 0$;
c) $(-23) - (-28) - \square < 0$;
d) $(-32) + (-14) - \square > 0$.

Rejtvény

Mennyi a következő két műveletsor eredménye?

a) $\underbrace{(-1) + (-1) + (-1) + (-1) + \ldots + (-1)}_{1001\text{ db}}$;
b) $\underbrace{(-1) - (-1) - (-1) - (-1) - \ldots - (-1)}_{1001\text{ db}}$.

6. Vegyes feladatok

1. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
   a) A nulla páros szám.
   b) Van olyan negatív egész szám, amelyik kisebb nullánál.
   c) Van olyan negatív egész szám, amelyik nagyobb nullánál.
   d) Egy számnak és az ellentettjének az összege mindig nulla.
   e) Minden negatív egész szám kisebb nullánál.

2. Jelöljük számegyenesen azokat az egész számokat, amelyeknek a −2-től való távolsága
   a) kisebb 3-nál; *b)* legfeljebb 4; *c)* legalább 2; *d)* nagyobb 5-nél;
   e) nagyobb 1-nél, és kisebb 5-nél; *f)* legalább 4, és legfeljebb 8!

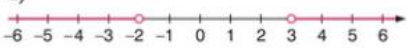
3. Jelöljük számegyenesen azokat az egész számokat, amelyeknek a 3-tól való távolsága
   a) nem kisebb 2-nél; *b)* nem nagyobb 4-nél;
   c) legalább 2, és legfeljebb 6; *d)* legfeljebb 2, és nagyobb, mint 1;
   e) legalább 5, és nem kisebb, mint 3; *f)* nem nagyobb 5-nél, nem kisebb 3-nál!

4. Milyen közös tulajdonsággal rendelkező számok találhatók a számegyenes színessel megjelölt részén?

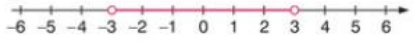
a)



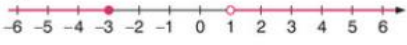
b)



c)



d)



5. Töltsük ki a táblázatot!

a	b	$\lvert a\rvert$	$\lvert b\rvert$	$a+b$	$\lvert a+b\rvert$	$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	$\lvert a\rvert+b$	$a+\lvert b\rvert$
+4	+8							
−3	+5							
−8	+2							
−3	−5							

6. Hány olyan egész szám van, amelynek az abszolút értéke 202-nél kisebb?

7. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
   a) Két természetes szám összege mindig természetes szám.
   b) Két természetes szám különbsége mindig természetes szám.

*8. Három egymást követő páratlan szám összege −2001. Melyek ezek a számok?

*9. Egy kétjegyű és egy háromjegyű egész számot összeadva −1098-at kaptam. Melyik két egész számot adtam össze?

10. Mennyi azoknak az egész számoknak az összege, amelyek nagyobbak −20-nál, de nem nagyobbak 20-nál?

11. Végezzük el a kivonásokat!

a) (+200) − (−400); *b)* (−800) − (−500); *c)* (+65) − (+450);
d) (+370) − (−540); *e)* (−930) − (+230); *f)* (+240) − (−540);
g) (+714) − (−825); *h)* (−756) − (−394); *i)* (−324) − (−793).

12. Mennyit vegyünk el

a) +18-ból, hogy a különbség +25 legyen;
b) −15-ből, hogy a különbség +13 legyen;
c) −32-ből, hogy a különbség −27 legyen;
d) +29-ből, hogy a különbség −14 legyen;
e) −37-ből, hogy a különbség 0 legyen;
f) −42-ből, hogy a különbség −42 legyen?



13. Írjunk fel

a) két különböző negatív számot, amelyek különbsége negatív;
b) két különböző negatív számot, amelyek különbsége pozitív;
c) két különböző pozitív számot, amelyek különbsége negatív;
d) két különböző egész számot, amelyek különbsége nulla;
e) egy negatív és egy pozitív számot, amelyek különbsége negatív!

14. A (□8) + (□5) − (□3) + (□6) műveletsorban a □-ek helyére a számok előjelét írhatjuk.

a) Hányféleképpen írhatjuk be az előjeleket?
b) Számítsuk ki az eredményeket!
c) Mely esetekben lesz az eredmény a legkisebb, illetve a legnagyobb?

15. Töltsük ki a táblázatot!

a	b	$\lvert a\rvert$	$\lvert b\rvert$	$a-b$	$\lvert a-b\rvert$	$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$	$\lvert a\rvert-b$	$a-\lvert b\rvert$
+2	+5							
+7	+3							
−8	+2							
+8	−2							
−2	−7							
−6	−4							

16. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) (+12) + (−23) − (+13); *b)* (−43) + (−23) + (+78);
c) (−84) − (−23) + (−35); *d)* (−135) + (−43) − (+26);
e) (+256) − (−142) + (−329); *f)* (+481) − (−253) + (−186).

17. Melyik művelet eredménye lesz nulla?

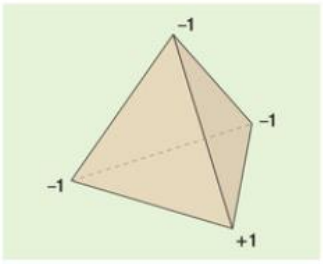
A) (+10) − (−10); *B)* (−15) − (−15); *C)* (+8) + (−8);
D) (−16) − (+16); *E)* |+29| + |−29|; *F)* |(+7) + (−7)|.

18. Ábrázoljuk számegyenesen azokat az egész számokat, amelyek igazzá teszik az alábbi nyitott mondatokat!

a) $a - (+5) = (+9)$; *b)* $b + 3 = (-2)$; *c)* $|c| = 5$; *d)* $|d| > 4$;
e) $|e| \leq 0$; *f)* $|f| < 3$; *g)* $1 < |g| < 5$; **h)* $-h < (-6)$.

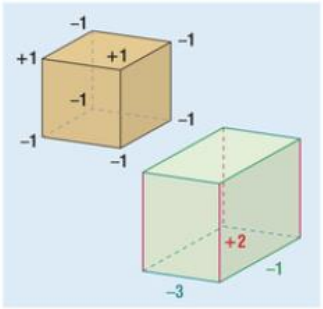
19. Az ábrán látható testnek (tetraédernek) mind a négy lapja szabályos háromszög. A test egyik csúcsára +1-et, a többire −1-et írtunk. A test minden élére írjuk rá a végpontjaiban található számok összegét, majd minden lapjára a lapot határoló éleken található számok összegét! (➡)

Mennyi lesz a test lapjaira írt számok összege?

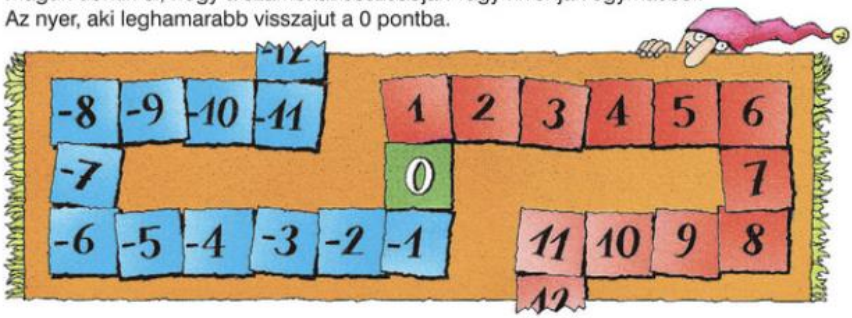


20. Egy kocka két szomszédos csúcsára +1-et, a többire −1-et írtunk. A kocka minden élére írjuk rá a végpontjaiban található két szám összegét! Ezután a kocka minden lapjára írjuk rá a lapot határoló éleken lévő számok összegét! Végül adjuk össze a lapokon lévő számokat! Melyik számot kapjuk? (➡)

21. Egy téglatest élei 3 cm, 4 cm és 5 cm. A téglatest legrövidebb élére −3-at, leghosszabb élére −1-et, a középső élére pedig +2-t írunk. Ezután a téglatest mindegyik csúcsára írjuk rá az azokon az éleken lévő számok összegét, amelyek abból a csúcsból indulnak ki! Mennyi lesz a csúcsokra írt számok összege? (➡)

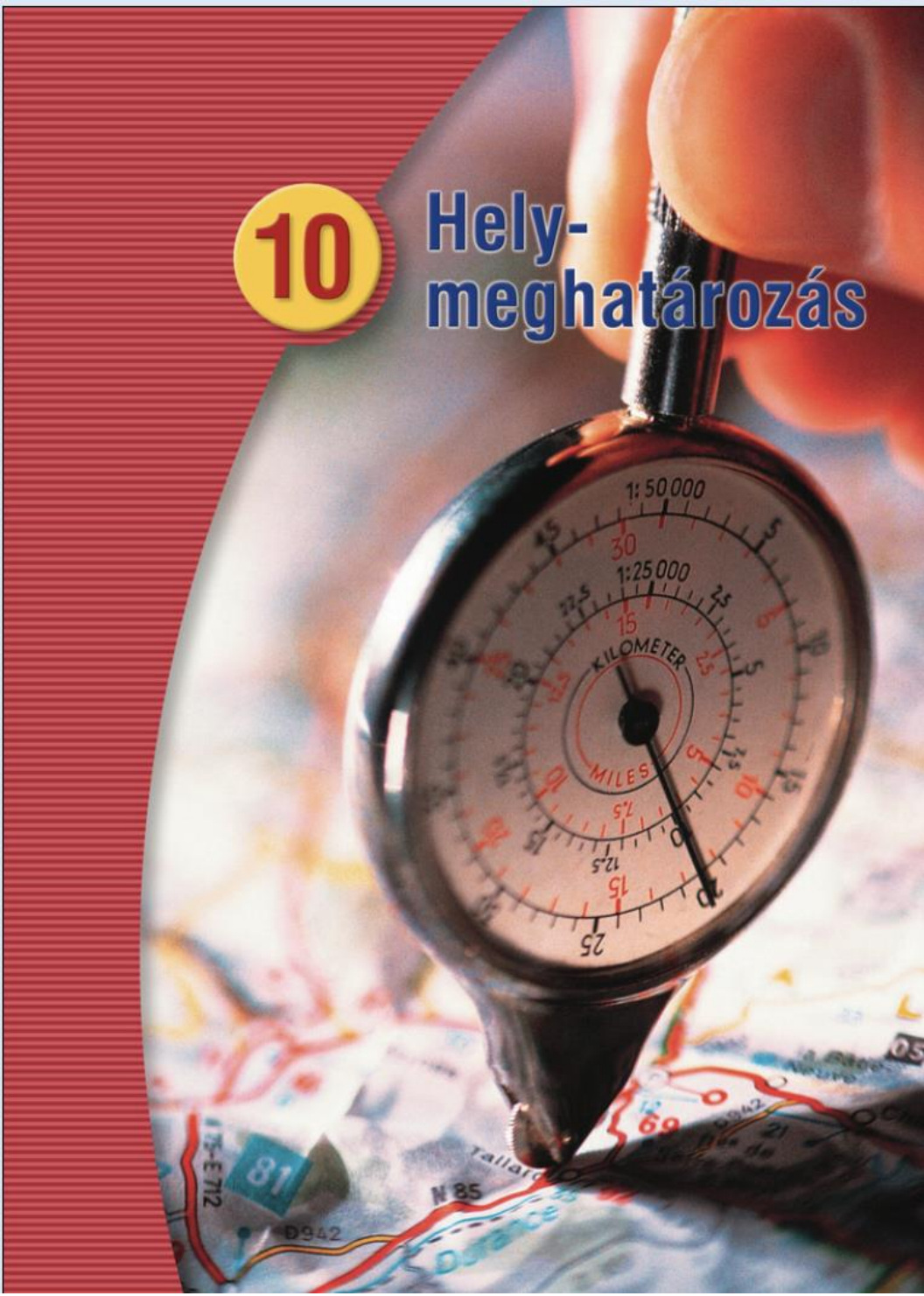


22. Játsszunk! Egy kék és egy piros dobókockával egyszerre dobunk. A kék dobókockával dobott számokat (+) előjellel, a pirossal dobottakat (−) előjellel vesszük figyelembe. A játék során minden játékos az alábbi pálya 0 pontjából indul, és annyit lép, amennyi az általa dobott számok összege vagy különbsége. A játékosok egy-egy dobás után maguk döntik el, hogy a számokat összeadják vagy kivonják egymásból.
Az nyer, aki leghamarabb visszajut a 0 pontba.



23. Enikő és Anikó az előző játékot játszotta. Enikő első dobása (3; 6), a második (2; 5) volt. Anikó először (4; 2)-t, majd (1; 1)-et dobott. Megnyerhette-e a második dobás után valamelyikük a játékot? Ha igen, akkor hogyan?

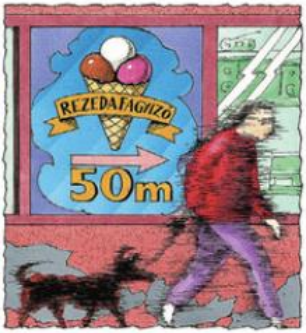
10 Hely-meghatározás



1. Tájékozódás a környezetünkben




A 47-es úton a 111-es és 112-es km között építés miatt jelzőlámpa irányítja az áthaladást



3D

Egy adott városban való tájékozódásnál a keresett épület helyének meghatározására két adat szolgál: az **utcanév** és a **házszám.**

Autóval közlekedve az **utak számozása** és az út mentén felállított **kilométerkövek** segítenek a tájékozódásban.



A sakktáblán a bábuk helyének meghatározásához az **oszlopokat** betűjelekkel, a **sorokat** számozással látták el. Az ábrán a sötét bástya a b3 mezőn, a világos király a g7 mezőn áll.

A Zrínyi Ilona Matematikaversenyen egy teremben egy kétjegyű szám megadásával jelölik ki a versenyzők számára az ülőhelyet. A 43 a terem **4. oszlopának 3. sorában** található helyet jelenti.

15	25	35	45	55	65
14	24	34	44	54	64
13	23	33	43	53	63
12	22	32	42	52	62
11	21	31	41	51	61

Tanári asztal

A tájfutók egy tájoló és egy részletes térkép segítségével tájékozódnak a terepen. A továbbhaladáshoz két adatra van szükségük, az **irányra** és a **távolságra.**

Ahhoz, hogy eligazodhassunk a minket körülvevő világban, biztos tájékozódási pontokra, pontos helymeghatározásra van szükségünk.

Feladatok

1. Készítsünk a Zrínyi Ilona Matematikaverseny ülésrendjéhez hasonló ülésrendet az osztálytermünkről!
   a) Hol van a helye a tanteremben: a szemüveges tanulóknak; az osztály legmagasabb tanulójának; a mai matematikaóráról hiányzó tanulóknak?
   b) Adjuk meg, hogy kik ülnek a 13, a 31, illetve a 24 és a 42 helyeken!

2. Határozzuk meg, hogy melyek a legfontosabb adatai a mellékelt belépőnek! (➡)

3. Keressük meg az alábbi autós térképrészleten a következő településeket!
   a) Csorna C2; *b)* Foktő A2; *c)* Kiskőrös D1.

4. Adjuk meg, hogy mely mezőkben találhatók!
   d) Uszód; *e)* Bátya; *f)* Erdőtelek.

Művészetek Palotája
1095 Budapest, Komor Marcell u. 1.

I. emelet középerkély
BAL 5. sor 10. szék



5. Soroljuk fel a fenti autós térképrészlet azon településeit, amelyek a B1 mezőben találhatók, és a nevük magánhangzóval kezdődik!

6. Mely mezőkben találhatók a fenti autóstérképen a tavak?

7. Írjuk le, hogy melyik mezőn áll
   a) a sötét futó; *b)* a világos király;
   c) a sötét király; *d)* a sötét bástya;
   e) a világos huszár; *f)* a sötét vezér? (➡)

8. Milyen bábu áll a sakktábla
   a) a5 mezőjén; *b)* h2 mezőjén;
   c) b4 mezőjén; *d)* e7 mezőjén;
   e) a8 mezőjén; *f)* a2 mezőjén;
   g) e3 mezőjén; *h)* c2 mezőjén? (➡)

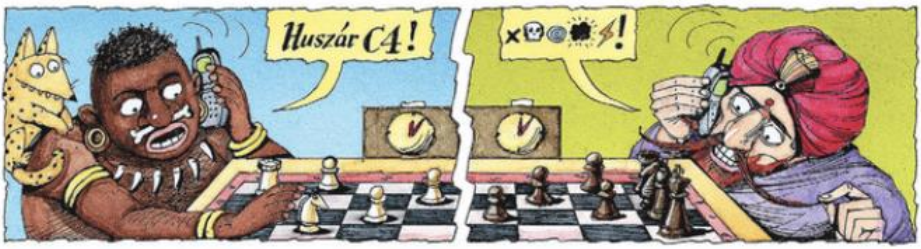




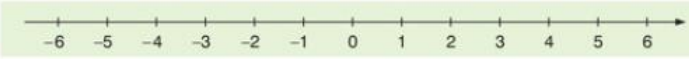
Rejtvény

Egy utazó egyik útja alkalmával 500 m-re keletre megpillantott egy hatalmas medvét. Nagyon megijedt, és elkezdett észak felé szaladni. Miután 500 m-t megtett, lihegve megállt, és azt látta, hogy a medve az előbbi helyen nyugodtan áll, de most tőle pontosan délre van. Milyen színű a medve?

2. Helymeghatározás a síkon



Az egyenesen való tájékozódáshoz **egy adat** elegendő. A számegyenesen minden számhoz pontosan egy pont tartozik.



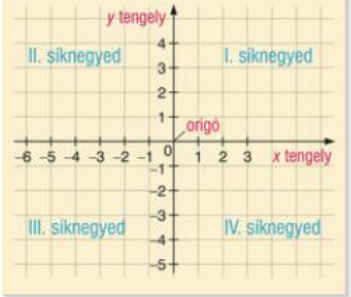
Egy sík pontjai helyének meghatározásához **két adat** szükséges. Például két különböző, egymást a 0 pontban metsző számegyenessel már egyértelmű a helymeghatározás a síkban.

A derékszögű koordináta-rendszert Descartes-féle (olvasd: dékárt-féle) koordináta-rendszernek nevezzük.

René Descartes (1596–1650) francia filozófus, természetkutató és matematikus volt. A matematikai problémák megoldását a koordináta-rendszer segítségével vezette vissza geometriai problémák megoldására.

A **derékszögű koordináta-rendszert** két egymásra merőleges számegyenes alkotja.

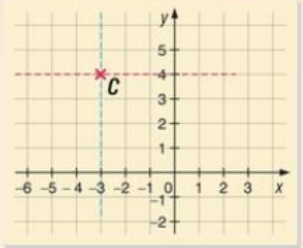
- A számegyenesek neve: *x* tengely és *y* tengely.
- A két tengely közös pontját origónak nevezzük.
- A két számegyenes a síkot négy síknegyedre osztja.



1. példa

Olvassuk le a *C* pont helyét a koordináta-rendszerben!

Megoldás



A *C* ponton áthaladó, az *x* tengelyre merőleges egyenes az *x* tengelyt a −3 pontban metszi. Ez a *C* pont **első koordinátája.**

A *C* ponton áthaladó, az *y* tengelyre merőleges egyenes az *y* tengelyt a 4 pontban metszi. Ez a *C* pont **második koordinátája.**

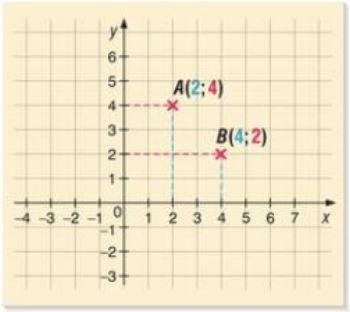
A *C* pont első koordinátája −3, a második koordinátája 4, röviden ***C*(−3; 4).**

3D

Az A pont első koordinátája 2, a második koordinátája 4. Röviden: $A(2; 4)$.

A B pont első koordinátája 4, a második koordinátája 2. Röviden: $B(4; 2)$.

A (2; 4) és (4; 2) számpárok esetén a számok sorrendje különböző, ezért különböző pontokat határoznak meg a koordináta-rendszerben.



A derékszögű koordináta-rendszerben a sík minden pontjához rendelhető egy rendezett számpár (két szám meghatározott sorrendben).

Minden rendezett számpár egyértelműen meghatároz egy pontot a síkon. (Például a (0; 0) számpár az origót.)

2. példa

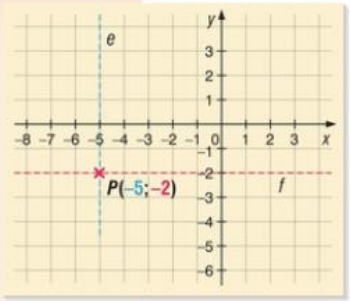
Ábrázoljuk az $P(-5; -2)$ pontot a derékszögű koordináta-rendszerben!

Megoldás

A P pont első koordinátája -5. Az x tengely -5 pontjában az x tengelyre állított merőleges e egyenes tartalmazza az összes olyan pontot, melynek első koordinátája -5.

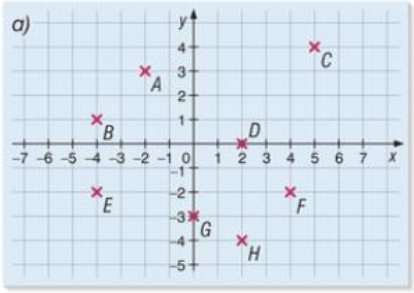
A P pont második koordinátája -2. Az y tengely -2 pontjában az y tengelyre állított merőleges f egyenes tartalmazza az összes olyan pontot, melynek második koordinátája -2.

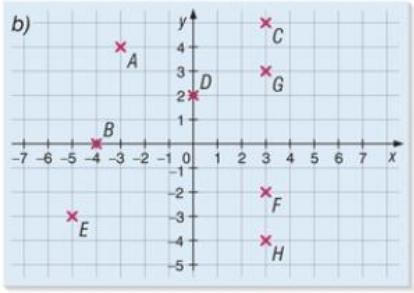
A $P(-5; -2)$ pont mindkét egyenesen rajta van, ezért a két egyenes metszéspontja lesz.



Feladatok

1. Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben megjelölt pontok koordinátáit!



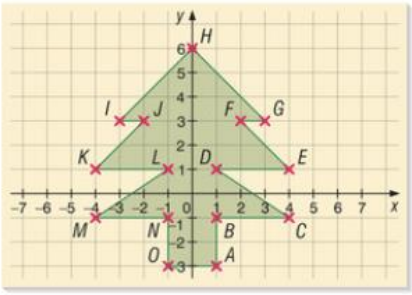


2. Jelöljünk ki 3-3 pontot a koordináta-rendszer tengelyein! Írjuk fel a pontok koordinátáit! Milyen közös tulajdonsággal rendelkeznek az azonos tengelyen lévő pontok?

3. Jelöljünk ki 3-3 pontot az első, a második, a harmadik és a negyedik síknegyedben!

   Írjuk fel ezeknek a pontoknak a koordinátáit! Milyen közös tulajdonsággal rendelkeznek az azonos síknegyedben lévő pontok?

4. Olvassuk le a fenyőfa megjelölt pontjainak koordinátáit! (➡)



5. Rajzoljunk egy derékszögű koordináta-rendszert, majd jelöljünk ki legalább 3-3 olyan pontot, amelyeknek az első koordinátája

   a) 3; *b)* 7; *c)* −2;
   d) −5; *e)* 1; *f)* 0!

   Hol helyezkednek el ezek a pontok?

6. Rajzoljunk egy derékszögű koordináta-rendszert, majd jelöljünk ki 3-3 olyan pontot, amelyeknek a második koordinátája

   a) 2; *b)* 6; *c)* −3; *d)* −7; *e)* −1; *f)* 0!

   Hol helyezkednek el ezek a pontok?

7. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a koordinátáikkal megadott pontokat!

   a) $A(3; 5)$; *b)* $B(-3; 5)$; *c)* $C(4; -2)$; *d)* $D(-3; -5)$;
   e) $E(3; -5)$; *f)* $F(-5; -4)$; *g)* $G(0; 2)$; *h)* $H(-3; 0)$.

8. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a koordinátáikkal megadott pontokat!

   a) $A(1; 2)$; *b)* $B(-3; -3)$; *c)* $C(2; -3)$; *d)* $D(-4; 1)$;
   e) $E(4; 0)$; *f)* $F(-2; -3)$; *g)* $G(0; -5)$; *h)* $H(0; 0)$.

9. Melyik síknegyedben vannak a következő pontok?

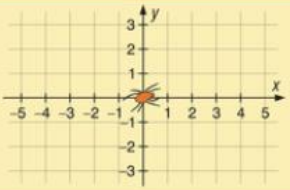
   a) $A(3; 2)$; *b)* $B(-4; 5)$; *c)* $C(-4; -3)$; *d)* $D(5; -2)$;
   e) $E(16; 25)$; *f)* $F(-1000; 1000)$; *g)* $G(1000; -1000)$; *h)* $H(-1000; -1000)$.

10. Ábrázoljuk egy derékszögű koordináta-rendszerben a koordinátáikkal megadott pontokat, majd kössük össze őket ábécésorrendben! Mit kaptunk?

    $A(0; 0)$; $B(3; 0)$; $C(4; -1)$; $D(5; -1)$; $E(6; 0)$; $F(7; 0)$; $G(7; 3)$; $H(5; 5)$;
    $I(-1; 5)$; $J(-2; 3)$; $K(-5; 2)$; $L(-5; 0)$; $M(-4; 0)$; $N(-3; -1)$; $P(-2; -1)$; $Q(-1; 0)$.

Rejtvény

Egy pók a derékszögű korodináta-rendszer origójából indulva egységnyi hosszúságú utat tesz meg valamelyik tengelyen. Ezután eddigi útjára merőlegesen tesz meg egységnyi utat, végül arra merőlegesen ismét egy egységnyit halad. Írjuk fel azokat a pontokat a koordinátáikkal, ahol az útja végén a pók lehet!





3. Grafikonok

A grafikonok az összetartozó mennyiségek változásait teszik szemléletessé. A tengelyeken az egységeket, az ábrázolni kívánt mennyiség nevét és mértékegységét tüntetjük fel.

1. példa

Az egri meteorológiai állomáson megrajzolták egy februári nap hőmérséklet-idő grafikonját.

a) Hány órakor volt a legmelegebb?
b) Hány °C volt a hőmérséklet 10 órakor?
c) Mikor csökkent a nap folyamán a hőmérséklet?
d) Mennyi volt a napi hőingás?



Megoldás

A válaszokat olvassuk le a grafikonról!

a) A legmelegebb 14 órakor volt, +2 °C.
b) A hőmérséklet 10 órakor −4 °C volt.
c) A hőmérséklet 0 órától 6 óráig, majd 14-től 24 óráig csökkent.
d) A napi hőingás a legmagasabb és a legalacsonyabb hőmérséklet különbsége, ami ezen a napon (+2) − (−8) = 10 (°C) volt.

2. példa

Robi és Zoli hetesek. Kedden és szerdán az órák előtt pénzfeldobással döntötték el, hogy melyikük törölje le a táblát. Készítsünk táblázatot, majd ábrázoljuk grafikonon, hogy melyikük hányszor törölhetett táblát, ha azt összesen hatszor kellett letörölni!

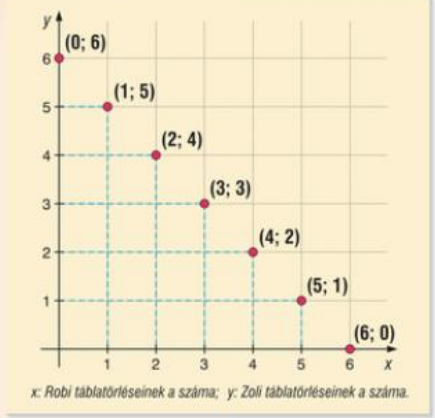
Megoldás

A lehetséges eseteket táblázatba foglalva:

Robi	0	1	2	3	4	5	6
Zoli	6	5	4	3	2	1	0

Az összetartozó számpárokat ábrázoljuk koordináta-rendszerben! (Például a (4; 2) pont azt az esetet jelöli, amikor Robi 4-szer, Zoli 2-szer törli le a táblát.)

A pontokat nem köthetjük össze, mert a táblatörlések száma csak egész szám lehet.



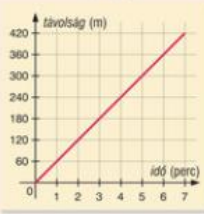
x: Robi táblatörléseinek a száma; y: Zoli táblatörléseinek a száma.



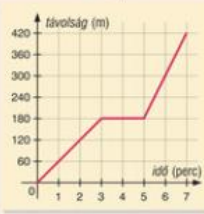
3. példa

Peti mindennap jár edzésre. A lakásuk és a focipálya közti 420 m-es távolságot gyalog teszi meg. Három egymást követő napon az alábbi grafikonok készültek Peti mozgásáról:

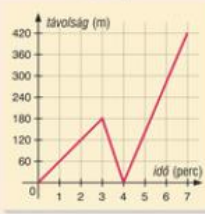
1. nap



2. nap



3. nap



a) Percenként hány métert tett meg Peti az első napon?

b) Melyik napon és hány percre állt meg beszélgetni a barátjával?

c) Melyik napon szaladt haza az otthon felejtett tornacipőért? Hogyan érhetett oda időben az edzésre?

Megoldás

A grafikonok egyik tengelyén az indulástól eltelt időt percekben, a másik tengelyen a Petiék lakásától mért távolságot méterben tüntettük fel.

a) Peti egyenletes sebességgel haladt, minden percben 60 m utat tett meg, a 420 m-t 7 perc alatt tette meg.

b) A 2. napon a 3. perctől az 5. percig nem változott az otthonától mért távolság, tehát ez alatt a 2 perc alatt beszélgetett.

c) Ha Peti hazaszaladt, akkor az otthontól mért távolsága nullára csökkent. Ez a 3. grafikonon látható. Ezután, hogy időben odaérjen az edzésre, 3 perc alatt (futva) kellett megtennie a 420 m utat.

Feladatok

1. Használjuk a 3. példa grafikonjait!

a) Töltsük ki a táblázatot! Mikor hány méterre volt Peti a lakásuktól?

1. nap	Idő (perc)	1	2		4		6	
	Távolság (m)	60		180		300		420

b) Mikor volt Peti 180 m-re a lakásuktól az egyes napokon?

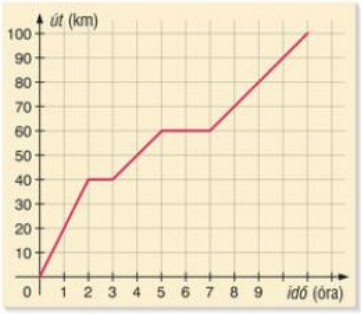
c) Hány méterre volt a focipályától az elindulás után 4 perccel az egyes napokon?

d) Összesen hány méter utat tett meg az egyes napokon?

e) Melyik útszakaszt tette meg a leggyorsabban?

2. Az egyik nap Peti 7 perc helyett 15 perc alatt tette meg az otthonától a focipályáig vezető utat. Találjunk ki erről egy történetet, és rajzoljuk meg a hozzá tartozó grafikont!

3. A derékszögű koordináta-rendszerben egy kerékpártúra első napjának út-idő grafikonja látható. (➡)



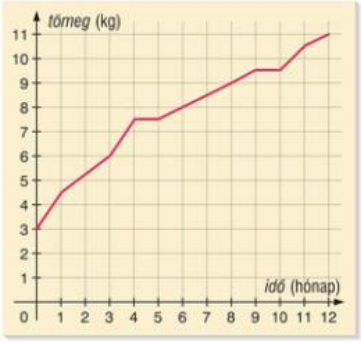
a) Hány kilométert tettek meg ezen a napon a résztvevők?

b) Hány kilométert tettek meg a 5. és 7. óra között? Mi lehet ennek a magyarázata?

c) Melyik szakaszon haladtak a leggyorsabban?

d) Hányszor és mikor tartottak hosszabb pihenőt a túra során?

4. A grafikon egy csecsemő tömegének változását mutatja. (➡)



a) Hány kilogrammot gyarapodott a csecsemő az első évben?

b) Hány hónapos korára nőtt a kétszeresére a tömege?

c) Volt-e olyan hónap, amikor nem változott a tömege?

d) Hány kilogrammot gyarapodott havonta átlagosan a csecsemő?

e) Mekkora lesz a tömege 10 éves korában?

5. Egy nyári napon reggel 6 órától 18 óráig óránként megmértük a hőmérsékletet.

Időpont (óra)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Hőmérséklet (°C)	19	19	20	22	24	27	31	32	33	32	30	28	25

a) Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a megadott értékpárokat!

b) Mikor volt a hőmérséklet a legmagasabb?

c) Hány Celsius-fok lehetett a hőmérséklet 10 óra 30 perckor?

d) Mikor lehetett a hőmérséklet 26 °C?

***6.** Egy gyalogos, egy kerékpáros és egy kismotoros egyszerre indulnak a 20 km-re lévő szomszédos faluba. Készítsünk táblázatot, és ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az általuk megtett utakat, ha 1 óra alatt a gyalogos 5 km-t, a kerékpáros 20 km-t, a kismotoros 40 km-t tesz meg! Mit tudunk leolvasni a kapott grafikonról?

***7.** Mekkora azoknak a négyzeteknek a kerülete, amelyek oldalai 6-nál kisebb egész számok? Készítsünk táblázatot, és ábrázoljuk grafikonon a négyzet oldalhosszának és kerületének összetartozó értékpárjait!

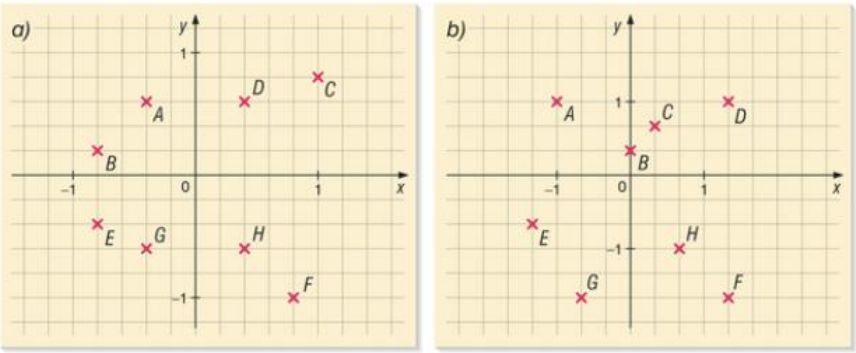
Rejtvény

Hány olyan pont van a derékszögű koordináta-rendszerben, amelynek mindkét koordinátája egész szám, és mindkét koordinátájának abszolút értéke legfeljebb 50?

4. Vegyes feladatok

1. A szülői értekezleten az osztályfőnöknek az a kérése, hogy a szülők a gyerekeik helyére üljenek. Hogyan adnánk meg, hogy hova üljenek a szülők? Keressünk többféle megoldást!

2. Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben megjelölt pontok koordinátáit!



3. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontokat!

$A(3; -1)$; $B(7; -1)$; $C(8; 1)$; $D(6; 1)$; $E(6; 6)$; $F(3; 4)$; $G(2; 1)$.

Ügyesen összekötve a pontokat egy jármű körvonalai rajzolódnak ki. Mi ez a jármű?

4. Az alábbiakban négyszöget adtunk meg csúcspontjainak koordinátáival. Rajzoljuk meg a négyszöget derékszögű koordináta-rendszerben! Milyen négyszöget kaptunk? Hány egységnégyzet a négyszög területe?

a)	$A(-1; 2)$;	$B(6; 2)$;	$C(6; -4)$;	$D(-1; -4)$;
b)	$A(0; 3)$;	$B(3; 0)$;	$C(0; -3)$;	$D(-3; 0)$;
c)	$A(0; 3)$;	$B(4; 7)$;	$C(8; 3)$;	$D(4; -1)$.

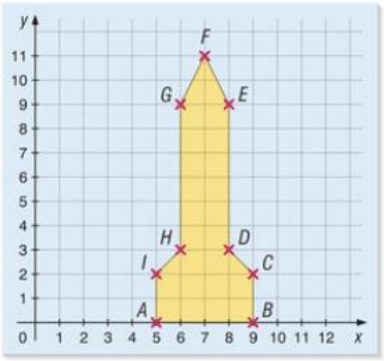
5. Az alábbiakban megadjuk egy négyzet három csúcspontjának koordinátáit. Írjuk fel a negyedik csúcspont koordinátáját!

a) $A(6; 2)$ $B(8; 2)$ $C(8; 4)$;
b) $A(-5; 1)$ $B(-3; 1)$ $C(-3; -1)$;
c) $A(0; 3)$ $B(4; 3)$ $C(2; 5)$;
d) $A(-1; 1)$ $B(2; -2)$ $C(-1; -5)$.

6. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontokat! Az ábrázolás után az egy sorban megadott pontokat kössük össze a felírás sorrendjében! Milyen név olvasható ki az összekötés után?

- $A(3; -4)$; $B(-1; -4)$; $C(1; -3)$; $D(-1; -2)$; $E(3; -2)$;
- $F(-1; -1)$; $G(3; -1)$;
- $H(-1; 2)$; $I(-1; 1)$; $J(1; 1)$; $K(1; 2)$; $L(3; 2)$; $M(3; 1)$;
- $N(-1; 3)$; $P(3; 3)$.

7. Az ábrán egy rakéta látható a derékszögű koordináta-rendszerben. (➡)



a) Adjuk meg a rajzon látható rakéta megjelölt pontjainak koordinátáit!

b) A rakéta kilövőállása a mostani helyzetétől balra található 6 egységgel. Rajzoljuk le a füzetünkbe a rakétát a kilövőállásban! Adjuk meg a rakéta megjelölt pontjainak a koordinátáit ebben a helyzetben is!

c) Rajzoljuk le a rakétát abban a helyzetben, amikor a kilövés után éppen 5 egységet emelkedett! Adjuk meg a rakéta megjelölt pontjainak koordinátáit az új rajzon!

8. Egy téglalap csúcspontjainak koordinátái: $A(-1; 2)$; $B(3; 2)$; $C(3; -2)$ és $D(-1; -2)$.

a) Rajzoljuk le a téglalapot a füzetünkbe egy derékszögű koordináta-rendszerbe!

b) Határozzuk meg a téglalap oldalfelező pontjainak koordinátáit!

c) Hány egység a téglalap kerülete?

d) Hány területegység annak a négyszögnek a területe, amelynek csúcsai a téglalap oldalfelező pontjai?

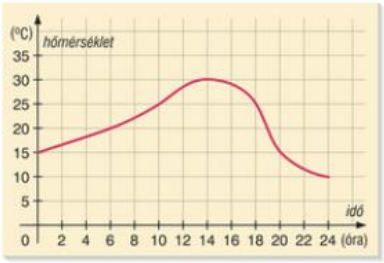
9. Az iskolai kirándulás egyik napján a 18 km-re lévő kilátóhoz indultak a gyerekek. Az első három órában egyenletesen gyalogolva elérték a 12 km-re található tisztást, ahol egy órát pihentek, játszottak. Majd két órát továbbgyalogolva elértek a kilátóhoz.



a) Készítsünk út-idő grafikont a kirándulásról!

b) Pihenés előtt vagy után tettek meg nagyobb utat egy óra alatt?

10. Egy meleg májusi napon az alábbi grafikont rajzolta egy szerkezet a hőmérséklet változásáról. (➡)



a) Hány órakor mérték a legmagasabb hőmérsékletet?

b) Hány °C volt a hőmérséklet reggel 6 órakor?

c) Mikor volt 15 °C a hőmérséklet?

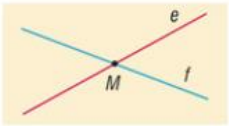
d) Volt-e állandó a hőmérséklet a nap folyamán?

e) Hány °C a legnagyobb és a legkisebb hőmérsékletek közötti különbség ezen a napon?

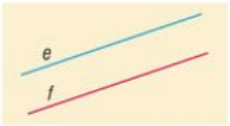
Az új szakszavak jegyzéke

GEOMETRIA

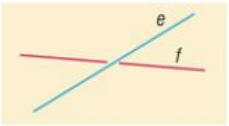
Egyenesek kölcsönös helyzete



egy közös pontjuk van



nincs közös pontjuk (vagy végtelen sok közös pontjuk van)



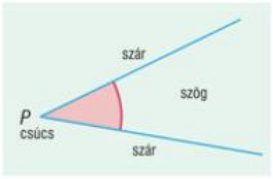
nincs közös pontjuk

metsző egyenesek | **párhuzamos egyenesek** — egy síkban vannak

kitérő egyenesek — nincsenek egy síkban

merőleges egyenesek • Két metsző egyenes merőleges egymásra, ha a síkot négy egybevágó részre osztják fel. Jelölése: $e \perp f$; a rajzon ⊾, ⊾.

szög • A sík egy pontjából kiinduló két félegyenes a síkot két síkrészre, két szögre bontja. A félegyenesek a szögek szárai, a közös kezdőpont a két szög csúcsa.



szögfajták

a) Ha a két szögszár merőleges egymásra, akkor az így keletkező két szög közül a kisebbet **derékszögnek** nevezzük. Jele: ⊾ vagy ⊾.

b) Ha a két szögszár egy egyenest alkot, akkor az így keletkező mindkét szöget **egyenesszögnek** nevezzük.

c) Ha a két szögszár illeszkedik egymásra, akkor a két szög közül a nagyobbat teljesszögnek, a kisebbet **nullszögnek** nevezzük.

A nullszögnél nagyobb, de a derékszögnél kisebb szög a **hegyesszög.**
A derékszögnél nagyobb, de az egyenesszögnél kisebb szög a **tompaszög.**
Az egyenesszögnél nagyobb, de a teljesszögnél kisebb szög a **homorúszög.**
A homorúszög konkáv, a többi szögfajta konvex.

nullszög < hegyesszög < derékszög < tompaszög < egyenesszög < homorúszög < teljesszög

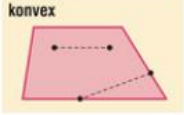
konkáv



konkáv síkidom • Nem konvex (azaz konkáv) az a síkidom, amelynek van két olyan pontja, amelyeket összekötő szakasznak nem minden pontja tartozik a síkidomhoz.

konvex síkidom • Konvex az a síkidom, amelynek bármely két pontját összekötő szakasznak minden pontja a síkidomhoz tartozik.

konvex

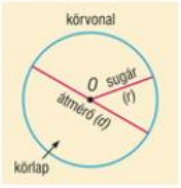


konkáv test • Konkáv (nem konvex) az a test, amelynek van két olyan pontja, amelyeket összekötő szakasznak nem minden pontja tartozik a testhez.

konvex test • Konvex az a test, amelynek bármely két pontját összekötő szakasznak minden pontja a testhez tartozik.



Kör



körvonal • Egy adott ponttól egy adott távolságra lévő pontok halmaza a síkban a körvonal. Az adott pont a kör középpontja (O). Az adott távolság a kör sugara (r).

körlap • A körvonal által határolt síkidom.

kör sugara • A kör középpontját a körvonal tetszőleges pontjával összekötő szakasz.

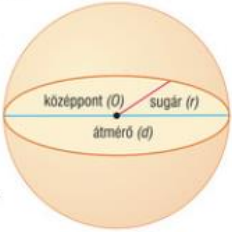
kör átmérője • A körvonal két pontját összekötő olyan szakasz, amely áthalad a középponton, jelölése: d. Az átmérő hossza kétszerese a sugár hosszának ($d = 2 \cdot r$).



körív • A körvonal egy része.

körcikk • A kör két sugara a körlapot két körcikkre osztja.

gömb • Egy adott ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza a térben a gömbfelület. Az adott pont a gömb középpontja (O). Az adott távolság a gömb sugara (r). A *gömb* szó a *gömbfelületet* és a *gömbtestet* is jelentheti.

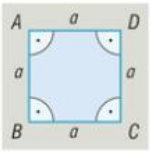


gömb sugara • A gömb középpontját a gömbfelület tetszőleges pontjával összekötő szakasz.

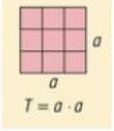
gömb átmérője • A gömbfelület két pontját összekötő olyan szakasz, amely áthalad a gömb középpontján. Jele: d. A gömb átmérője a sugarának a kétszerese ($d = 2 \cdot r$).

négyzet • A négyzet olyan téglalap, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú.

négyzet kerülete • A négyzet kerülete egy oldal hosszának négyszerese. Az a oldalhosszúságú négyzet kerülete: $K = 4 \cdot a$.



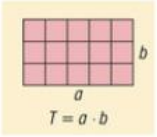
négyzet területe • A négyzet területe egy oldal hosszának önmagával vett szorzata. Az a oldalhosszúságú négyzet területe: $T = a \cdot a$.



téglalap • A téglalap olyan négyszög, amelynek szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.

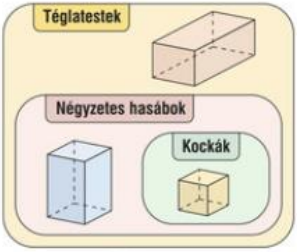


téglalap kerülete • A téglalap kerülete a két szomszédos oldalhossz összegének kétszerese. Az a és b oldalhosszúságú téglalap kerülete: $K = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)$.



téglalap területe • A téglalap területe a két szomszédos oldal hosszának szorzata. Az a és b oldalhosszúságú téglalap területe: $T = a \cdot b$.

sokszög kerülete • A sokszög kerülete az oldalak hosszának összege.



Téglatestek

kocka felszíne • Az a élhosszúságú kocka felszíne: $A = 6 \cdot a \cdot a$.

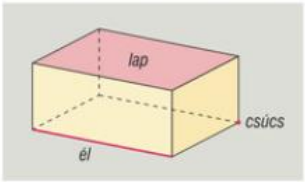
kocka térfogata • Az a élhosszúságú kocka térfogata: $V = a \cdot a \cdot a$.

téglatest felszíne • Az a, b, c élhosszúságú téglatest felszíne:
$A = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$.



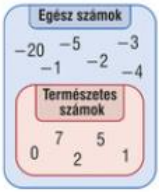
téglatest térfogata • A téglatest térfogata az egy csúcsba futó élei hosszának szorzata. Az *a; b; c* élhosszúságú téglatest térfogata:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$



test felszíne • A síklapokkal határolt test felszíne a testet határoló lapok területének összege. A felszín jele: *A.* (A latin *area* szó jelentése terület.)

SZÁMOK



természetes számok • A természetes számok a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; ... és így tovább. A természetes számok halmazának jele: $\mathbb{N}$ (a *natura:* természet szó kezdőbetűje).

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$$

pozitív egész számok • A nullánál nagyobb egész számok a pozitív egész számok. Előjelük: + (plusz), például: 5 = +5 (plusz 5). A szám előtti + jelet általában nem írjuk ki. A nulla nem pozitív és nem is negatív szám.

negatív egész számok • A nullánál kisebb egész számok a negatív egész számok. Előjelük: – (mínusz), például: –5 (mínusz 5).

számok ellentettje • Azokat a különböző előjelű számokat, amelyek a számegyenesen a nullától egyenlő távolságra vannak, egymás ellentettjeinek nevezzük. A nulla ellentettje nulla.

abszolút érték • Egy szám abszolút értéke a szám nullától való távolsága a számegyenesen. Jelölése: $|-5| = +5$ (mínusz 5 abszolút értéke egyenlő plusz 5).

Mivel a távolság nem lehet negatív, ezért egy szám abszolút értéke mindig pozitív vagy 0.

– A pozitív szám abszolút értéke maga a szám.
– A nulla abszolút értéke 0.
– A negatív szám abszolút értéke a szám ellentettje.



közönséges tört

1. értelmezés: Ha egy egészet egyenlő részekre osztunk, és ezekből veszünk valamennyit, akkor törtet kapunk.

A számláló megadja, hogy hány darabot választunk ki az egyenlő részek közül.

A nevező meghatározza, hogy hány egyenlő részre osztjuk az 1 egészet.

2. értelmezés: Két egész szám hányadosát törtnek nevezzük.

Átlag

a és *b* átlaga: $(a + b) : 2$

a, b és *c* átlaga: $(a + b + c) : 3$

két szám átlaga • Két szám átlagát megkapjuk, ha a két szám összegét elosztjuk kettővel.

három szám átlaga • Három szám átlagát megkapjuk, ha a három szám összegét elosztjuk hárommal.

adatok gyakorisága • Az adatok között egy adat gyakorisága az a szám, ahányszor ez az adat előfordul.