Sokszínű matematika

12



Sokszínű matematika

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Gyakorló
és érettségire
felkészítő
feladatokkal

12

Megoldásokkal

Második, javított kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2011

A könyvet írta: Árki Tamás · *középiskolai tanár*
Konfárné Nagy Klára · *középiskolai tanár*
Kovács István · *középiskolai tanár*
Trembeczki Csaba · *középiskolai tanár*
Dr. Urbán János · *középiskolai tanár*

Lektorálta: Biróné Füle Zsuzsanna · *középiskolai tanár*
Kunovszki István · *középiskolai tanár*

Felelős szerkesztő: Tóth Katalin
Borítóterv, tipográfia: Reményfy Tamás
Ábrák: Becsei György, Horváth Péter
Fotók: Bozsó Márton, Mozaik Archívum, képügynökségek
Műszaki szerkesztő: Becsei György, Horváth Péter

Kirendelt szakértők: Maus Pál
Dr. Hillné Benkó Katalin
Király Ildikó

KERETTANTERV:
MOZAIK Kerettantervrendszer 17/2004 (V. 20.) OM rendelet
OM Kerettanterv 17/2004 (V. 20.) OM rendelet 3. sz. melléklet

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, ill. rövidített változat kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más hordozó) nem sokszorosítható.

Engedélyszám: AK/119-3/2011
ISBN 978 963 697 640 8
Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2010

Tisztelt Olvasó!

Feladatgyűjtemény-sorozatunk egyedülálló a középiskolai matematika feladatgyűjtemények között. A könyvek felépítése pontosan követi a *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád köteteinek szerkezetét, így akik ezekből a tankönyvekből tanulnak, közvetlenül alkalmazhatják az órai munka és az önálló gyakorlás, sőt az érettségi felkészülés során is.

Ugyanakkor – mivel a feladatgyűjtemények felépítése természetesen megfelel a tantárgy belső logikájának és az iskolákban általánosan alkalmazott kerettanterveknek – minden nehézség nélkül használhatják azok is, akik más tankönyvekből tanulják, illetve tanítják a matematikát.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a tanulók bőségesen találnak a maguk számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a tankönyveket és a feladatgyűjteményt együtt használva kellő jártasságot szerezhetnek a feladatmegoldásban.

Az egyes fejezetek végén található *Vegyes feladatok* áttekintést adnak az adott fejezet anyagából, ezért jól segíthetik az átfogóbb számonkérés előtti felkészülést.

A feladatok nehézségének jelölése

Minden fejezetben három különböző szintre bontva találjuk a feladatokat:

4253 **Gyakorló feladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

4412 **Középszintű feladatok:** az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismétlését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. *(kék színű feladatsorszám)*

4569 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

A feladatok sorszámozása

A feladatgyűjtemények feladatainak sorszámozása a tankönyvcsalád egyes köteteire utal.

A 9. évfolyam feladatai az 1001-es, a 10. évfolyam feladatai a 2001-es, a 11. évfolyamé a 3001-es, a 12. évfolyamé pedig a 4001-es sorszámtól kezdődnek.

A 12.-es kötetben a négy év anyagát áttekintő rendszerező összefoglalás feladatai az 5001-es sorszámtól indulnak, ezáltal segíti a feladatok közötti válogatást az érettségire történő felkészüléskor.

Megoldások

A feladatgyűjtemény minden feladat megoldását tartalmazza. A gyakorló feladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők



TARTALOMJEGYZÉK



Bevezető 5
A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések 8

12.1. *Logika, bizonyítási módszerek* (4001–4067) MEGOLDÁS

Logikai feladatok, kijelentések ..... 10 ..... *180*
Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció ..... 13 ..... *182*
Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia ..... 15 ..... *185*
Teljes indukció (emelt szintű tananyag) ..... 17 ..... *188*
Vegyes feladatok ..... 18 ..... *194*

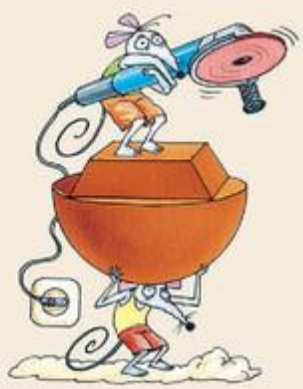
12.2. *Számsorozatok* (4068–4165)

A sorozat fogalma, példák sorozatokra ..... 20 ..... *195*
Példák rekurzív sorozatokra ..... 21 ..... *196*
Számtani sorozatok ..... 21 ..... *196*
Mértani sorozatok ..... 24 ..... *200*
Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása ..... 25 ..... *205*
Vegyes feladatok ..... 26 ..... *207*



12.3. *Térgeometria* (4166–4511)

Térelemek ..... 29 ..... *210*
Testek osztályozása, szabályos testek ..... 33 ..... *223*
A terület fogalma, a sokszögek területe ..... 37 ..... *233*
A kör és részeinek területe ..... 41 ..... *249*
A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata ..... 44 ..... *256*
A gúla és a kúp térfogata ..... 49 ..... *267*
A csonka gúla és a csonka kúp ..... 52 ..... *282*
A gömb térfogata és felszíne ..... 55 ..... *293*
Egymásba írt testek (kiegészítő anyag) ..... 57 ..... *297*
Vegyes feladatok I. ..... 59 ..... *309*
Vegyes feladatok II. ..... 61 ..... *313*



12.4. *Valószínűség-számítás, statisztika* (4512–4577)

Geometriai valószínűség ..... 64 ..... *320*
Várható érték (emelt szintű tananyag) ..... 66 ..... *324*
Statisztika ..... 67 ..... *328*
Vegyes feladatok ..... 71 ..... *335*



Készüljünk az érettségire!



12.5. *Rendszerező összefoglalás* (5001–5620)

Gondolkodási módszerek (5001–5113)

Halmazok ..... **74** *338*
Kijelentések, események ..... **77** *343*
Kombinatorika ..... **78** *344*
Valószínűség-számítás ..... **82** *350*



Algebra és számelmélet (5114–5277)

Számok és műveletek ..... **88** *358*
Számelmélet, oszthatóság ..... **89** *360*
Hatvány, gyök, logaritmus ..... **92** *364*
Műveletek racionális kifejezésekkel ..... **96** *368*
Egyenletek, egyenlőtlenségek ..... **98** *370*
Egyenletrendszerek ..... **106** *384*

Függvények (5278–5402)

A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai ..... **109** *389*
Műveletek függvényekkel (kiegészítő anyag) ..... **118** *404*
Függvénytulajdonságok ..... **119** *407*

Geometria (5403–5620)

Alapvető fogalmak ..... **127** *424*
Geometriai transzformációk ..... **129** *432*
Vektorok. Szögfüggvények ..... **135** *445*
Nevezetes síkidomok tulajdonságai ..... **139** *455*
Koordináta-geometria ..... **145** *466*



12.6. *Érettségi gyakorló feladatsorok*

Középszintű feladatsorok ..... **150** *478*
Emelt szintű feladatsorok ..... **171** *507*



A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset$, $\{\}$	üres halmaz
$\overline{A}$	az A halmaz komplementere
$\lvert A \rvert$	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}$, $\vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\sphericalangle$	szög

Feladatok



Logika, bizonyítási módszerek 10

Számsorozatok 20

Térgeometria 29

Valószínűség-számítás, statisztika 64



12.1. LOGIKA, BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

Logikai feladatok, kijelentések

4001 Logikai kijelentésnek tekinthetjük-e az alábbi állításokat?

a) Jómagam matematikából okos vagyok.

b) Jómagam matematikából ötös voltam tavaly év végén.

c) Te vagy a legszebb lány a világon!

d) Repül a bálna.

e) Sápadt a Hold.

f) A Hold fényrendje ebben a pillanatban 5 vizuális magnitúdó.

4002 Logikai kijelentések-e az alábbi mondatok? Ha igen, akkor mi a logikai értékük?

a) A 100 nagy szám.

b) A 100 a 10-nek négyzete.

c) A 100 csak a 10-nek négyzete.

d) Láttál-e már karón varjút?

e) Esik az eső.

f) Józsi alacsonyabb, mint Géza; Géza alacsonyabb, mint Feri, és Józsi magasabb, mint Feri.

4003 Adjuk meg a következő kijelentések logikai értékeit.

a) A 12 osztója a 156-nak.

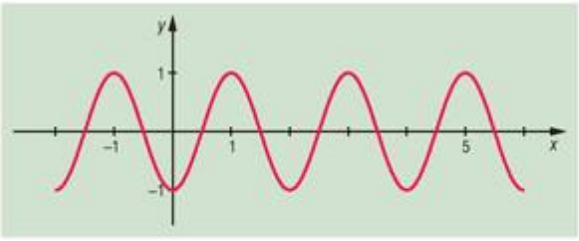
b) Minden téglalap négyzet.

c) A rombusz átlói egymás felezőmerőlegesei.

d) A szinuszhullám transzformálható úgy, hogy minden egész helyen szélsőértéke legyen.

e) Az $f(x) = \{\operatorname{sgn}([x^2 - 4])\}$ függvény szigorúan monoton növő.

(Utóbbi kérdésben $[x]$ az x egészrészét, $\{x\}$ az x törtrészét jelenti.)



4004 Töltsük ki az alábbi 5+1-es geometriai totó tipposzlopát. Jelentse 1 az igaz, 2 a hamis állítást, X pedig, ha az állítás nem kijelentés.

Állítás	Tipp
1. Van olyan deltoid, amely rombusz.	
2. Minden rombusz deltoid.	
3. Nem létezik olyan paralelogramma, amely deltoid.	
4. Minden deltoid trapéz?	
5. Van olyan trapéz, amely deltoid.	
+1. A tipposzlop nem telitalálatos.	



4005 Döntsük el, igazak-e az alábbi kijelentések. Töltsük ki a táblázatot.

Állítás	Logikai értéke
a) Az öt négyzetgyöke racionális szám.	
b) Az öt négyzetgyöke valós szám.	
c) Van olyan szám, amely negatív, és abszolút értéke az öt négyzetgyöke.	

4006 Jancsi és Juliska gyermekkorukban sokat játszottak együtt a mézeskalács ház kertjében. A *hazudós* játékuk vagy úgy kezdődött, hogy Jancsi kijelentette:

a) *„Én most hazudok."*

vagy úgy, hogy azt mondta:

b) *„Én most hazudni fogok."*

Logikailag egyenértékű-e a két kijelentés?

4007 Ravaszdi Rudolf elsőéves hallgató a rókaképzőben. A hét első négy napján hazudik, a többi napon igazat mond. Mikor mondhatta a következőket?

a) *„Holnap igazat mondok."*

b) *„Holnap hazudok."*

4008 Ravaszdi Rudolf elvégezte a rókaképzőt, nemrég diplomázott. Már minden második napon mond csak igazat (jó eséllyel fel is veszik a *masterképzésre*). Mikor mondhatta a következőket?

a) *„Holnap hazudok."*

b) *„Holnap igazat mondok."*

4009 Egy bolondokházában négyféle emberrel találkozhatunk. Vannak egészségesek, akik meg tudják különböztetni az igaz és a hamis dolgokat, és vannak betegek, akik pontosan fordítva gondolják: az igazat hamisnak és a hamisat igaznak vélik. Másrészt a lakók egy része ápolt, a többiek orvosok. Sajnos lehetnek az intézetben egészséges ápoltak és beteg orvosok is.

A bolondokházában Jani kijelenti: *„Nem vagyok egészséges orvos."* Mi Jani:

a) beteg ápolt; *b)* egészséges ápolt; *c)* beteg orvos; *d)* egészséges orvos?

4010 A tizedikes fiúk foci közben kirúgták az ablakot. A *„Ki rúgta ki az ablakot?"* kérdésre csapat négy tagja – Laci, Marci, Nándi, valamint Oszi – a következőket válaszolta ebben a sorrendben:

Laci: *„Nándi volt."* Marci: *„Nem én voltam."* Nándi: *„Oszi tette."* Oszi: *„Nándi hazudik."*

Később kiderült, hogy pontosan ki tette, és az is, hogy a fiúk közül csak hárman mondtak igazat. Döntsük el ennyi információból mi is, hogy László, Márton, Nándor, Oszkár közül ki volt a tettes.

4011 Mivel az ellentétek vonzzák egymást, az igazmondó juhász és a hazudós királylány összeházasodott. Nos, hosszú együttélés után már nem mondott mindig igazat a juhász, és nem hazudott mindig a királylány. Azonban, hogy az ellentét megmaradjon, egyszerre nem teszik ugyanazt. Döntsük el egyetlen kérdéssel, hogy ki mond éppen igazat, és melyikük hazudik.

4012 Tizenegyedik évfolyam elején az osztályba négy új diák érkezett. Keresztneveik: Emma, Tivadar, Konrád, Csilla. Vezetékneveik: Kis, Nagy, Fekete és Fehér, de ebben a sorrendben egyik vezetéknév sem a sorban megfelelő helyen álló keresztnévhez tartozik. Azt is tudjuk, hogy Tivadar, Fekete és Fehér különböző iskolából érkeztek, valamint Konrád és Emma vezetéknevei ellentétek. Mi az új tanulók teljes neve?



4013 A január elsején megrendezett korhelyfutáson 50 fő indult, és ugyanennyien célba is értek. A célban megkérdeztek mindenkit, hogy véleménye szerint hányadik lett. Negyvenen tévedtek. Mi lehetett a legkisebb és a legnagyobb összege azoknak az értékeknek, amit a célbaérkezők mondtak?

4014 Egy bolondokházában négyféle emberrel találkozhatunk. Vannak egészségesek, akik meg tudják különböztetni az igaz és a hamis dolgokat, és vannak olyanok, akik pontosan fordítva gondolják: az igazat hamisnak és a hamisat igaznak vélik. Másrészt a lakók egy része ápolt, a többiek orvosok. Sajnos lehetnek az intézetben egészséges ápoltak és beteg orvosok is.

A bolondokházában Józsi azt hiszi, hogy Jani beteg; Jani pedig azt, hogy Józsi orvos. Mit tudhatunk meg ebből Janiról és Józsiról?

4015 Logikai kijelentésnek tekinthetők-e a következő mondatpárok? Ha igen, mi lehet a logikai értékük?

a) Ez a mondat igaz. Az előző mondat hamis.

b) A következő mondat hamis. Ez a második mondat igaz.

c) A következő mondat igaz. Az előző mondat hamis.

d) A következő mondat hamis. Az előző mondat hamis.

4016 Károly, Pista és Zsolt moziba mennek, jegyük egymás mellé szól. Három különböző italt és három különböző ételt vesznek a pénztárnál: jeges teát, kólát és gyömbért, illetve sós mogyorót, pattogatott kukoricát és ropit. Tudjuk, hogy az alábbi kijelentések csak rájuk vonatkoznak:

1. Károly nem iszik kólát.
2. Aki ropit eszik, középen ül.
3. A Zsolti jobbján ülő kólát iszik.
4. A pattogatott kukoricát balra kellett adni, mert a sós mogyoró hamar elfogyott.
5. Pista csak a sor szélén szeret ülni.
6. Károly szomszédja gyömbért iszik.

Ki hol ül a moziban, mit eszik és mit iszik?

4017 Hugi, Angi, Kati, Feri és Lóri, öt jó barát együtt reggelizik egy kör alakú asztal mellett. Öten ötféle ételt esznek és ötféle italt isznak: hideg szendvicset, rántottát, főtt tojást, pirítóst, konzervhalat, illetve baracklevet, teát, kakaót, vizet, narancslevet (nem ebben a sorrendben). Tudjuk a következőket:

1. A fiúk nem egymás mellett ülnek.
2. Feri nem szereti a gyümölcsleveket.
3. Angi kakaót iszik, és egyik szomszédja süti magának a reggelit.
4. A rántottát reggelizőnem gyümölcslevet kért.
5. Aki szendvicset eszik, vizet iszik hozzá.
6. Hugi Lóri mellett ül.
7. A narancslét ivó a rántottát és a főtt tojást evő között ül.
8. Az egyik fiú narancslevet iszik.
9. Kati teát iszik.
10. Lényeges információ, hogy aki a pirítóst szereti, nem kér hozzá teát.

Ki hol ül az asztalnál, mit reggelizik és mit iszik hozzá?



Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció

4018 Adjuk meg formulával az alábbi kijelentéseket. Használjuk az A, B, C, D betűket, a logikai műveleteket és zárójelet.

a) Nem vagyok hazudós.

b) Kimegyünk a strandra és megiszunk egy bambit.

c) Ötöst kapok vagy világgá megyek.

d) Nyerek a lottón és gazdag leszek, vagy holnap is bemegyek dolgozni.

e) Nem igaz, hogy ronda és kopasz vagyok.

f) Jó vagyok matekból és fizikából, de nem vagyok jó se németből, se biológiából.

g) Holnap kirándulni megyünk és hegyet mászunk, vagy csak ülünk a tv előtt és pop-cornt eszünk.

4019 Fogalmazzuk meg a következő kijelentések tagadását.

a) Nem félek a dolgozattól.

b) Minden filmet láttam már.

c) Minden szarka farka tarka.

d) Van rövid nyakú zsiráf, amely jól fésült.

e) Létezik olyan geometriai rendszer, amelyben a háromszög belső szögeinek összege nem 180°.

f) Minden érettségi feladatsorban van ilyen feladat.

g) Létezik holló, amely nem fekete.

h) Egyik 7-tel osztható szám sem osztható 5-tel.

i) Bármely két egyenes metszi egymást.

4020 Jelölje A = *hideg van*, B = *jól felöltözöm*, C = *fázom*, D = *mozogni kell* kijelentéseket. Írjuk le szöveggel a következőket:

a) $A \wedge C$; *b)* $B \vee D$; *c)* $D \wedge \neg C$;

d) $\neg(C \wedge D) \vee B$; *e)* $(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg D)$.

4021 Ma kedd van. Melyik kijelentés igaz és melyik hamis?



a) Nincs hétvége.

b) Vasárnap van vagy hétköznap.

c) Holnap kedd van vagy ma hétfő.

d) Holnap szerda van és ma csütörtök.

e) Tegnap hétköznap volt és holnap nem lesz hétvége.

f) Holnap péntek lesz, vagy tegnapelőtt hétvége volt vagy csütörtök.

4022 Az alábbi mondatok közül melyik a *„Zsoltinak matematikából minden jegye ötös."* kijelentés tagadása?

a) Zsoltinak matematikából csak hármasai vannak.

b) Zsoltinak matekból van ötösnél rosszabb jegye is.

c) Zsoltinak matekból két hármasa van és biológiából megbukott félévkor.

d) Zsoltinak nincs ötöse matekból.



4023 Keressük meg, melyik kijelentésnek melyik a tagadása. Állítsuk párba őket.

A = Minden egész szám osztható hárommal.

B = Van olyan egész szám, amely osztható hárommal.

C = Egyetlen egész szám sem osztható hárommal.

D = Van olyan egész szám, amely nem osztható hárommal.

4024 A De Morgan-azonosságok segítségével fogalmazzuk át a következő kijelentéseket.

a) Nem igaz, hogy jól biliárdozok és golfozok.

b) Nem igaz, hogy a neved Kata vagy Klára.

c) Nem vagyok James és nem vagyok Bond.

d) Nem megyek a boltba vagy nem porszívózok fel.

4025 *a)* Fogalmazzuk meg az állítások tagadását.

b) Döntsük el, hogy melyik kijelentés igaz vagy hamis. Írjuk a logikai értékeket a táblázatba.

	Állítás	Tagadás
A = Minden trapéznak van két párhuzamos oldala és minden szöge különböző.		
B = Van olyan deltoid, melynek minden szöge különböző.		
C = Létezik négyzet, melynek minden oldala vagy területe egységnyi.		

4026 Mit kell tennünk ahhoz, hogy igazzá váljanak a kijelentések?

a) Délután megcsinálom a matek és a fizika házit, vagy megtanulom a verset.

b) Vacsorára rántottát sütök vagy bundás kenyeret és este megnézem a *Szívszerelem* című filmet.

4027 Fogalmazzunk meg kijelentéseket, melyeknek negációja a következő:

a) Van olyan nap, amelynek egy bizonyos órája egyik percében nem gondolok rád.

b) Létezik együttes, amelynek minden számában van olyan versszak, amit nem értek.

c) Minden ételnek van olyan elkészítési módja, melyet egy bizonyos napszakban nem vagyok hajlandó megenni.

4028 Értékeljük ki a következő kijelentések logikai értékét minden lehetséges esetben.

a) Nem igaz, hogy Karesi korán kelt és sokat dolgozott.

b) Ez a labda gömbölyű és piros, vagy én színvak vagyok.

c) A színházi előadás rövid vagy izgalmas, és nem alszom el közben.

4029 Fogalmazzuk meg a következő kijelentések negációját.

a) Minden feladat könnyű volt és mindet meg is oldottam.

b) Ebben a pizzériában minden pizza finom, vagy van olyan, amit még nem kóstoltunk meg.

c) Létezik olyan háromszög, amelynek minden szöge derékszög.

d) Minden Rubik-kockának van olyan oldala, hogy az azon levő összes négyzet kék.

4030 Milyen logikai értéket adjunk az A, B, C, D kijelentéseknek, hogy a formulák logikai értéke hamis legyen? Keressünk minél egyszerűbb megoldást.

a) $(\neg(A \wedge B) \vee C) \wedge D$; *b)* $A \vee B \vee C \vee D$; *c)* $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$; *d)* $\neg(A \wedge B) \wedge (C \vee D)$.



4031 Értékeljük ki igazságtáblázat segítségével a következő logikai formulákat.

a) $A \wedge (\neg B)$; *b)* $(A \wedge B) \vee \neg A$; *c)* $A \wedge (B \vee \neg A)$.

4032 Értékeljük ki igazságtáblázat segítségével a következő logikai formulákat.

a) $\neg(A \wedge B) \vee C$; *b)* $\neg A \wedge (B \vee C)$; *c)* $\neg(A \wedge B) \wedge (C \vee D)$.

Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia

4033 Írjuk fel az A, B, C, D betűk és logikai műveletek felhasználásával a következő kijelentéseket. Ugyanazon kijelentésekre azonos betűket használjunk az *e)* és *f)* feladatokban.

a) Ha Dezső felkér, akkor elmegyek vele táncolni.

b) Ha Xénia rám kacsint vagy dob egy puszit, akkor meghívom cukrászdába.

c) Akkor veszek nagykabátot, ha hideg van és esik az eső.

d) Ha megtanulok úszni, akkor csak a Desedát úszom át, de a Balatont soha.

e) Akkor és csak akkor fáj a lábam, ha ráléptek vagy ha bokán rúgsz.

f) Ha rálépnek vagy bokán rúgsz, akkor fáj a lábam, és ha fáj a lábam, akkor ráléptek vagy bokán rúgtál.

g) Pontosan akkor félek, ha sötét van.

4034 Az alábbi kijelentések csak négyszögekről szólnak. Használjuk a következő jelöléseket: N = négyzet, P = paralelogramma, R = rombusz, E = két-két szemközti oldala egyenlő, K = két-két szomszédos oldala egyenlő, T = szögei egyenlők. Fordítsuk le „magyarra" az alábbi kijelentéseket, majd döntsük el, igazak-e vagy sem.

a) $N \rightarrow P$; *b)* $P \rightarrow R$; *c)* $P \leftrightarrow E$; *d)* $(E \wedge K) \rightarrow R$;

e) $(E \wedge K \wedge T) \rightarrow N$; *f)* $(E \wedge K \vee T) \rightarrow R$; *g)* $N \leftrightarrow (R \wedge T)$.

4035 *a)* Melyik tétel egyik irányú megfogalmazása a következő kijelentés?

T = Ha egy háromszög derékszögű, akkor az átfogó felezőpontja a háromszög köré írt kör középpontja.

b) Döntsük el, az alábbi mondatok közül melyik az így kimondott tétel megfordítása.

A = Ha egy háromszög átfogójának felezőpontja a háromszög köré írt kör középpontja, akkor a háromszög derékszögű.

B = Ha egy háromszög egyik oldalának felezőpontja a háromszög köré írt kör középpontja, akkor a háromszög derékszögű.

C = Ha egy háromszög egyik oldalának felezőpontja a háromszög köré írt kör középpontja, akkor a háromszög befogóinak négyzetösszege az átfogó négyzetével egyenlő.

4036 *a)* Fogalmazzuk meg az alábbi állítások megfordítását.

b) Döntsük el az állításról és megfordításáról, hogy igaz vagy hamis. Töltsük ki a táblázatot.

	Állítás	Megfordítás
A = Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az paralelogramma.		
B = Ha egy háromszög súlypontja a háromszögön kívülre esik, akkor belső szögeinek felezői egy pontban metszik egymást.		
C = Ha egy függvénynek van minimuma, akkor felülről korlátos.		
D = Ha egy egész szám osztható 7-tel, akkor osztható 21-gyel.		



4037 Melyik alábbi tételeket lehet csak implikációként, illetve melyeket lehet ekvivalenciaként megfogalmazni úgy, hogy igaz legyen?

a) Ha egy háromszög derékszögű, akkor befogóinak négyzetösszege az átfogójának négyzetével egyenlő.

b) Ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 5-tel is.

c) Ha egy háromszög köré írt körének középpontja az egyik oldal felezőpontja, akkor a háromszög derékszögű.

d) Ha egy $\mathbb{R}$-en értelmezett függvény monoton növő, akkor nem monoton csökkenő.

4038 Fejezzük be úgy az alábbi mondatot, hogy az implikáció

a) igaz; *b)* hamis legyen.

Ha egy háromszög belső szögfelezői belső pontban metszik egymást, akkor…

4039 Egészítsük ki úgy az alábbi mondatot, hogy az implikáció

a) igaz; *b)* hamis legyen.

Ha …, akkor a 100 négyzetgyöke 50.

4040 Figyeljük meg az alábbi kijelentéseket:

A = Ha a 15 osztható 7-tel, akkor…

B = Ha …, akkor $\sqrt{x^2-2x+1}=|x-1|$.

Egészítsük ki úgy a mondatokat, hogy

a) az A mondat igaz legyen;

b) a B mondat igaz legyen;

c) az A mondat hamis legyen;

d) a B mondat hamis legyen.

4041 Az alábbi kijelentések n pozitív egész számokra vonatkoznak:

$A = n$ 3-mal osztható.

$B = n$ 8-cal osztható.

$C = n$ 24-gyel osztható.

$D = n$ páros.

$E = n$ osztható 12-vel.

$F = n$ prím.

a) Fogalmazzuk meg szövegesen a következő formulákat:

$$(A \wedge B) \to C, \quad D \to \neg F, \quad E \leftrightarrow (A \vee B), \quad (F \wedge \neg A) \to D.$$

b) Adjuk meg a formulák logikai értékét.

4042 A következő kijelentések két pozitív számról szólnak, de mindegyik állítás csak az egyikről. Keressük meg a lehető legkisebb ilyen számokat.

A = Számjegyeinek összege 6.

B = Páros.

C = Utolsó jegye 5.

D = Osztható hárommal.

E = Prím.



4043 Értékeljük ki a következő állítások igazságtartalmát. Mit figyelhetünk meg?

a) A = Ha hideg van, akkor fázom. B = Nincs hideg, vagy fázom.

b) A = Ha piszkálnak, akkor mérges leszek. B = Nem piszkálnak, vagy mérges leszek.

c) A = Ha süt a nap, akkor jó a kedvem. B = Ha nem jó a kedvem, akkor nem süt a nap.

d) A = Ha most nem mond igent, akkor soha. B = Ha egyszer igent mond, akkor most.

4044 Igazoljuk igazságtáblázattal, hogy:

a) $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$; *b)* $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.

4045 Bizonyítsuk ekvivalens formulák felhasználásával, hogy:

a) $A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$; *b)* $(A \to B) \to C \equiv [(\neg A) \to C] \wedge [B \to C]$.

Teljes indukció (emelt szintű tananyag)

4046 Bizonyítsuk be, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorában levő számok összege 2^n. (A legfelül álló 1-et nulladik sornak tekintjük.)

4047 Mutassuk meg, hogy 3 osztója $2 \cdot 7^n + 1$-nek bármely n természetes számra.

4048 Bizonyítsuk be, hogy:

a) 2 osztója az $n^2 - n$ kifejezésnek bármely n természetes számra;

b) 27 osztója a $10^n + 18n - 1$ kifejezésnek minden n természetes számra;

c) 6 osztója az $n^3 + 11n$ kifejezésnek minden n természetes számra.

4049 Igazoljuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget: bármely $a \geq -1$ és n természetes számra

$$(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

4050 Bizonyítsuk be, hogy az első n pozitív egész szám négyzeteinek összege:

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

4051 Bizonyítsuk be, hogy bármely $n > 1$-re teljesül:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}}.$$

4052 Igazoljuk, hogy bármely n pozitív egész számra:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

4053 Adjunk sejtést arra, mivel egyenlő az első n pozitív páratlan szám összege. Igazoljuk is sejtésünket teljes indukcióval.

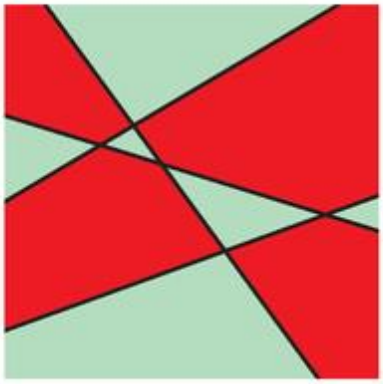
4054 Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n-re:

$$3 + 33 + 333 + \ldots + 33\ldots3 = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27},$$

ahol a bal oldalon pontosan n darab tag szerepel. (Minden tagban eggyel több 3-as számjegy található, mint az előzőben.)



4055 Bizonyítsuk be, hogy bárhogy is rajzolunk a síkon n darab egyenest, a kapott „térkép” mindig kiszínezhető két színnel úgy, hogy az oldalszomszédos részek ne legyenek azonos színűek.



4056 Igazoljuk, hogy bármely n természetes számra 11 osztója a következő kifejezésnek:

$$2^{6n+1}+3^{2n+2}$$

4057 Milyen kezdőértéktől teljesül a

a) $n! > 3^n$ egyenlőtlenség bármely n egész számra?

b) $3^n > n^3$ egyenlőtlenség bármely n egész számra?

Bizonyítsuk is be az egyenlőtlenségeket.

4058 Bizonyítsuk, hogy az

$$1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+1\cdot\pi\right)+2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi\right)+3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\cdot\pi\right)+\ldots+n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi\right)$$

összeg eredménye

$$-\frac{n+1}{2} \quad \text{vagy} \quad \frac{n}{2}.$$

4059 Olvassuk el az alábbi gondolatmenetet, és keressük meg benne a hibát.

Állítás: Bármely a pozitív valós számra és bármely n természetes kitevőre $a^n = 1$.

Bizonyítása teljes indukcióval történik, $(*)$ lépésben használjuk ki az indukciós feltevést.

1. $n = 0$-ra az állítás teljesül, $a^0 = 1$ bármely $a > 0$-ra.
2. Tegyük fel, hogy valamely k természetes szám esetén bármely $n \le k$-ra $a^n = 1$.
3. Ekkor $a^{k+1} = a^{2k-(k-1)} = \dfrac{a^k \cdot a^k}{a^{k-1}} = (*) = \dfrac{1\cdot 1}{1} = 1.$

Vegyes feladatok

4060 Igaz vagy hamis?

a) Bármely két prím összege páros.

b) Van olyan szög, amely szinuszának és koszinuszának szorzata 1.

c) Egész oldalú derékszögű háromszög egyik befogójának hossza mindig osztható 3-mal.

d) Van olyan függvény, amely páros és páratlan, monoton növő és csökkenő, periodikus, de nincs legkisebb periódusa.

4061 Logikailag egyenértékű kijelentések-e az alábbiak?

a) A = Nem igaz, hogy tanultam és hármast kaptam.

B = Nem tanultam és nem is kaptam hármast.

b) A = Kerékpározom, és futok vagy síelek.

B = Kerékpározom és futok, vagy kerékpározom és síelek.

4062 *a)* Írjuk le magyar mondattal a következő kijelentést, ha A = *kinyitottam a sütőt*, B = *kivettem a tálat*, C = *megégettem a kezem:*

$$(A\vee B)\wedge C, \quad \neg(A\wedge B), \quad (A\wedge B)\vee(\neg B\wedge C).$$

b) Írjuk le a kijelentések tagadását.



4063 Jelölje A = *próbára megyek*, B = *fáradt vagyok*, C = *esik az eső* kijelentéseket. Írjuk fel formulával a következő összetett kijelentéseket:

a) Akkor és csak akkor vagyok fáradt, ha próbára megyek és esik az eső.

b) Ha esik az eső és fáradt vagyok, akkor nem megyek próbára.

Írjuk le magyar mondattal a következő formulákat:

c) $C \to (A \vee B)$; *d)* $A \wedge (\neg B) \wedge C$.

4064 „*Beteg ápolt vagyok.*" – állítja a bolondokháza egy lakója, ahol mindenki ápolt vagy orvos és mindenki egészséges vagy beteg (a beteg az igazat hamisnak véli és fordítva). Mit tudunk meg kijelentése alapján erről a lakóról?

4065 Legyen $I =]1; 3[$. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz vagy hamis, és jelöljük X-szel a táblázatban.

a) I-nek van legnagyobb eleme.

b) I-nek minden eleménél van nagyobb eleme.

c) I-be esik prímszám.

d) I pontosan kettő prímet tartalmaz.

Állítás	Igaz	Hamis
a)		
b)		
c)		
d)		

4066 Igazoljuk, hogy $6 \mid n \cdot (n^2 + 5)$ bármely n természetes számra.

4067 Olvassuk el az alábbi gondolatmenetet, és keressük meg benne a hibát.

Állítás: Minden lánynak ugyanolyan színű a haja.

Bizonyítása a lányok száma szerinti teljes indukcióval történik.

1. $n = 1$-re az állítás igaz.
2. Tegyük fel, hogy valamely $n = k$ értékre az állítás teljesül.
3. Tekintsünk $n = k + 1$ leányt. Közülük kiválasztva k főt, az indukciós feltevés szerint hajuk színe azonos. Most az előbb kimaradó egy főt cseréljük ki a kiválasztottak valamelyikével, így ismét k fős csoportot alkottunk, az indukciós feltevés rájuk is érvényes (és ez a hajszín csak az lehet, ami az eredetileg résztvevő $k - 1$ főnek már az előbb is volt). Tehát $n = k + 1$ leánynak is egyforma a hajszíne.

12.2. SZÁMSOROZATOK

A sorozat fogalma, példák sorozatokra

4068 Számítsuk ki a következő sorozatok ötödik és huszadik elemét:

a) $a_n = 2n - 12$; *b)* $b_n = 100 - 5n$; *c)* $c_n = 2n^2 - 30n$;

d) $d_n = n^3 - 15n + 3$; *e)* $e_n = \sqrt{3n + 4}$; *f)* $f_n = \sqrt{4n + 1} - n$;

g) $g_n = \dfrac{3n - 15}{2n + 1}$; *h)* $h_n = \dfrac{n^2 - 3}{n - 3}$.

4069 Folytassuk az alábbi sorozatokat, adjuk meg a sorozat általános tagját:

a) 5; 6; 7; 8; 9; ... *b)* −3; −1; 1; 3; 5; ... *c)* −1; −2; −4; −8; −16; ...

d) 1; −1; 1; −1; 1; ... *e)* $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$ *f)* $\sqrt{7}; \sqrt[3]{7}; \sqrt[4]{7}; \sqrt[5]{7}; \sqrt[6]{7}; \ldots$

g) 0; 1; $\log_2 3$; 2; $\log_2 5$; ... *h)* 1; 2; 3; 1; 2; ...

4070 Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben és számegyenesen a következő sorozatok első hat tagját:

a) $a_n = \dfrac{3n}{5}$; *b)* $b_n = 2 - (-1)^n$; *c)* $c_n = \dfrac{2n + 3}{n + 2}$;

d) $d_n = \dfrac{5 - 3n}{n + 1}$; *e)* $e_n = 3 - \dfrac{2}{n}$; *f)* $f_n = 2 \cdot (-1)^{n+3}$.

4071 Határozzuk meg a következő sorozatok első hat tagját:

a) $a_n = \dfrac{64}{4^n}$; *b)* $b_n = 2010 - 4n$; *c)* $c_n = \sqrt{4n - 1}$.

4072 Határozzuk meg az $a_n = 3 - 2 \cdot (-1)^n$ sorozat 2010. tagját és az első 2010 tag összegét.

4073 Döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb az alábbi esetekben:

a) az $a_n = 9 + 3 \cdot (-1)^n$ sorozat 50. tagja vagy a $b_n = \sqrt{n} + 7$ sorozat 25. tagja;

b) az $a_n = \dfrac{5 \cdot n}{n + 3}$ sorozat 12. tagja vagy a $b_n = (-1)^{n+6} + 5$ sorozat 99. tagja;

c) az $a_n = 1$ sorozat 60. tagja vagy a $\dfrac{8}{7}$ tizedes tört alakjában a tizedes vessző utáni 67. jegy;

d) az $a_n = \cos\dfrac{7 \cdot n \cdot \pi}{3}$ sorozat 43. tagja vagy a $b_n = \dfrac{7n - 7}{12n + 88}$ sorozat 101. tagja;

e) Az $a_n = \lg(13n - 1)$ sorozat 77. tagja vagy a $b_n = \sqrt[n+3]{146n + 2}$ sorozat 7. tagja?

4074 Hányadik tagja az alábbi sorozatoknak a 30?

a) $a_n = 8n - 18$; *b)* $b_n = \dfrac{10n + 20}{3n - 26}$; *c)* $c_n = |47 - 7n|$;

d) $d_n = n^2 - 11n + 18$; *e)* $e_n = \log_2 n$; *f)* $f_n = 60 \cdot \sin\dfrac{n \cdot \pi}{6}$.

Példák rekurzív sorozatokra

4075 Egy számsorozat első eleme 5. Számítsuk ki a sorozat első öt tagját, ha a második tagtól kezdve igaz, hogy

a) $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 6$; *b)* $a_n = -3 \cdot a_{n-1} + 21$; *c)* $a_n = \frac{2}{3} \cdot a_{n-1} - 1$; *d)* $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$.

4076 Hányféleképpen juthatunk fel egy 10 lépcsőből álló lépcsősoron, ha egyszerre egyet, kettőt vagy három lépcsőfokot lépünk?

4077 Egy sorozat tagjaira a harmadiktól kezdve teljesül, hogy $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$. Mennyi a sorozat 2010. eleme és az első 2010 elem összege, ha $a_1 = a_2 = 1$?

4078 Egy sorozat elemeire a harmadiktól kezdve teljesül, hogy $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Mennyi a sorozat 2009. eleme és az első 2009 tag összege, ha $a_1 = a_2 = 1$?

4079 Az a_n sorozatban $a_1 = p$, $a_2 = q$, adott pozitív számok, a sorozat tagjaira igaz, hogy:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}.$$

Adjuk meg a sorozat 2014. tagját p és q segítségével.

4080 Egy sorozat elemei pozitív egész számok, a harmadiktól kezdve mindegyik elem az összes őt megelőző elem összege. A sorozat első eleme 1.

a) Lehet-e eleme a sorozatnak a 2010?

b) Mekkora lehet a sorozat második eleme, ha a sorozat n-edik eleme 1000, és n a lehető legnagyobb?

Számtani sorozatok

4081 Egy számtani sorozat első tagja –7, differenciája 3. Adjuk meg a sorozat következő tagjait:

a) a_{11}; *b)* a_{56}; *c)* a_{237}; *d)* a_{2010}.

4082 Egy számtani sorozat huszadik tagja 41, differenciája 5. Mennyi a sorozat

a) 21-edik; *b)* 30-adik; *c)* 1956-odik tagja?

4083 Egy számtani sorozat első tagja 1, differenciája $\frac{2}{3}$. Hányadik tagja a sorozatnak az

a) 1849; *b)* 2011; *c)* 3000?

4084 Egy számtani sorozat negyvenedik tagja 25-tel kevesebb, mint a tizenötödik tag. Mennyi a sorozat differenciája?

4085 Kvarc Laci 12 éve gyűjti az értékes ásványokat. Az első évben 17 darabot gyűjtött, majd a következő évek során minden évben 9-cel többet, mint az előző évben.

a) Hány darab ásványt gyűjtött Laci a 12. évben?

b) Mennyi ásványt gyűjtött a 12 év alatt összesen?



4086 A Menő Manók Társasága hétnapos gyalogtúrát szervezett. A túra első napján 23 km-t gyalogoltak, minden további napon pedig 5 km-rel többet, mint az előző napon.

a) Hány kilométer tettek meg a hatodik napon?

b) Hány kilométer volt a túra teljes hossza?

4087 Frédi részt vett a kőemelő-bajnokságon. Az első edzésen egy 7 kg-os követ emelt fel. Az edzések során napról napra 5 kg-mal sikerül emelnie a felemelt legnagyobb kő tömegét. Az edzések 30 napig tartottak.

A kőemelő-bajnokságon minden versenyző ötször próbálkozhat, az nyer, aki a legnehezebb követ felemeli.

Frédi első kísérletére 10 kg-mal kevesebbet emelt, mint a versenyt megelőző utolsó edzésen, de minden további emeléskor 4 kg-mal tudott többet emelni, mint az előző emeléskor. A versenyt Frédi világcsúccsal nyerte. Mekkora tömegű kő felemelése jelentette a világcsúcsot?

4088 Egy számtani sorozat harmadik tagja 13, hetedik tagja pedig 25.

a) Mennyi a sorozat első eleme és különbsége?

b) Mennyi a sorozat első negyven elemének összege?

4089 Egy számtani sorozat hatodik tagja 30, tizenegyedik tagja 10.

a) Számítsuk ki a sorozat első tagját és differenciáját.

b) Mennyi a sorozat első 50 tagjának összege?

4090 Van-e olyan számtani sorozat, amelynek első három eleme:

$$3\cdot\sqrt{5}+1;\quad \frac{11\cdot\sqrt{5}-1}{2};\quad 8\cdot\sqrt{5}-2?$$

4091 Az a_n számtani sorozat esetén ismert a következő tagok összege:

$$a_3+a_8=34 \quad \text{és} \quad a_2+a_{11}=46.$$

a) Mennyi a sorozat első eleme és differenciája?

b) Tagja-e a sorozatnak a 2012?

4092 Egy számtani sorozat első és negyedik tagjának összege 38, a hetedik és harmadik tag különbsége 16.

a) Mennyi a 40. és 17. tag különbsége?

b) Mennyi a sorozat 23. tagja?

c) Mennyi a sorozat első 60 tagjának összege?

4093 Egy számtani sorozat tagjaira teljesül, hogy $a_5\cdot a_{10}=-25$ és $a_2+a_8=10$. Adjuk meg a sorozat első tagját és differenciáját.

4094 Egy számtani sorozat első három tagjának összege -9, a harmadik, negyedik és ötödik tag összege pedig 39. Melyik ez a sorozat?

4095 Egy számtani sorozat első nyolc tagjának összege 14, a hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik tag összege pedig 1. Határozzuk meg a sorozatot.

4096 Egy számtani sorozat első négy tagjának összege harmada a következő négy tag összegének. Határozzuk meg az első tíz tag és a következő tíz tag arányát.

4097 Egy számtani sorozat ötödik tagja 10. Az első öt tag összege ötöde a következő öt tag összegének. Mennyi a sorozat differenciája?



4098 *a)* A Long Street páratlan oldalán egytől 2011-ig vannak számozva a házak. Egy napon a postás az utca páratlan oldalán végighaladva először a 3-as számú, majd minden negyedik házhoz kézbesített levelet.

Hány házhoz hozott levelet ezen a napon a postás az utca páratlan oldalán?

b) A Long Street páros oldalán kettőtől 2010-ig vannak számozva a házak. Egy napon a postás az utca páros oldalán végighaladva először a 6-os számú, majd minden ötödik házhoz kézbesített levelet.

Hány házhoz hozott levelet ezen a napon a postás az utca páros oldalán?



4099 Az a_n számtani sorozatból ismert tagok: $a_1 = 18$ és $a_k = 99$. Mennyi a k értéke, ha az első k tag összege 1638?

4100 A 17-től kezdve a pozitív egész számok sorában összeadtunk minden tizedik számot. Hány darab számot adtunk össze, ha a kapott összeg 1472?

4101 Egy számtani sorozat differenciája 3. Az első n elem összege 5010, az első $n + 10$ elem összege pedig 6895. Mennyi a sorozat első tagjának és az n-nek az értéke?

4102 Egy diáknak 385 oldalas kötelező olvasmányt kell elolvasnia. Az első napon 22 oldalt olvas és úgy dönt, hogy minden nap 5 oldallal többet olvas el, mint az előző napon.

a) Hány nap alatt tudja befejezni a kötelező olvasmány elolvasását?

b) Hány oldal marad az utolsó napra?

4103 Egy nyomdában 30 papírlap közül néhányat 10 részre vágtak, majd az így kapott részek közül néhányat ismét 10 részre vágtak szét és így tovább. Egy ilyen munkaszakasz után valaki azt mondta: „Most 2010 papírdarabunk van.” Jól számolt-e az illető?

4104 Egy számtani sorozat első eleme 13, a sorozatra jellemző különbség pedig 17. Hány olyan tagja van a sorozatnak, amely ötjegyű szám?

4105 Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszáma egy számtani sorozat három szomszédos eleme. Mekkorák a háromszög szögei?

4106 Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat szomszédos elemei. A háromszög kerülete 120 cm. A legrövidebb és leghosszabb oldal szorzata 1431 cm^2. Adjuk meg a háromszög területét egy tizedesjegyre kerekítve.

4107 Egy konvex sokszög belső szögeinek mérőszámai egy számtani sorozat egymást követő elemei. Hány oldalú a sokszög, ha a legkisebb szög 142°30', a legnagyobb szög pedig 172°30'?

4108 Az első 201 természetes szám összegében akárhánynak az előjelét megváltoztatjuk. El lehet-e érni, hogy a kapott összeg 2010 legyen?

4109 Adjunk meg különböző pozitív egész számokból álló számtani sorozatot, amelynek elemei között nincs négyzetszám.

4110 Egy számtani sorozat első három eleméről a következőket tudjuk: az első tag kétjegyű szám, a második tag az első jegyeinek felcserélésével jön létre, a harmadik pedig az elsőből úgy kapható, hogy a jegyei közé egy 0-t írunk. Határozzuk meg a számokat.

4111 Az a_n számtani sorozatról tudjuk, hogy $a_k = m$ és $a_m = k$ $(k \neq m)$. Adjuk meg az a_n sorozatot k, m és n függvényeként.

4112 Az a_n számtani sorozat differenciája d. Első 5 elemének összege legyen b_1, a következő öt elem összege b_2, a következő öt elem összege b_3, és így tovább. Igazoljuk, hogy b_n számtani sorozat. Adjuk meg a_1-gyel és d-vel a b_n sorozat első tagját és differenciáját.

Mértani sorozatok

4113 Egy mértani sorozat első tagja -2, hányadosa $q = -\frac{3}{8}$. Számítsuk ki a sorozat első hat tagját.

4114 Egy mértani sorozat negyedik tagja 5, hányadosa -3. Mennyi a sorozat első, hatodik, illetve kilencedik tagja?

4115 Egy mértani sorozat első tagja 20, a negyedik tag $-2{,}5$. Mennyi a sorozat hányadosa? Adjuk meg a tizedik elemet és az első 10 tag összegét.

4116 Egy mértani sorozat első tagja -3, az ötödik tag -48. Adjuk meg a sorozat hányadosát, számítsuk ki a nyolcadik elemét, és az első nyolc tag összegét.

4117 Egy mértani sorozat hatodik eleme 28, a nyolcadik eleme pedig 7. Mennyi a sorozat első tagja? Számítsuk ki az első hat tag összegét.

4118 Egy mértani sorozat ötödik és nyolcadik tagja is 23. Mennyi az első kilenc tag összege?

4119 Egy mértani sorozat hetedik tagja 17, a tizedik tagja pedig -17. Mennyi az első 100 tag összege?

4120 Az 1, a 8 és a 22 számokhoz ugyanazt a valós számot adva egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Mennyi a mértani sorozat hányadosa?

4121 Egy lián hossza minden nap az előző napi hosszánál 25%-kal több. Az első napon 1 méteres volt. Hányadik napon éri el a 15 méteres hosszúságot?

4122 Egy mértani sorozat első eleme 3, a hányadosa 5. Hány ötjegyű tagja van a sorozatnak?

4123 Egy mértani sorozat harmadik és negyedik tagjának összege 80, az ötödik és harmadik tag különbsége 240. Melyik ez a sorozat?

4124 Egy-egy mértani sorozat tagjaira teljesülnek a következő összefüggések. Számítsuk ki az egyes sorozatok első tagját és hányadosát.

a) $\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 15 \\ a_3 + a_4 &= 60 \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 56 \\ a_2 &= 16 \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 57 \\ a_1 - a_3 &= 15 \end{aligned}\right\}$; *d)* $\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 160 \\ a_6 + a_7 &= 1215 \end{aligned}\right\}$.

4125 Egy mértani sorozat első négy tagjának összege 468, az ötödik, hatodik, hetedik és nyolcadik tag összege 292 500. Melyik ez a sorozat?

4126 Igaz-e, hogy a következő számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai:

$$\frac{7 + 4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}; \quad \frac{\sqrt{3} + 2}{2 - \sqrt{3}}; \quad 5 + 3 \cdot \sqrt{3}?$$

4127 Egy számtani sorozat negyedik tagja 10. A sorozat második, harmadik és hatodik eleme egy mértani sorozat három szomszédos tagja. Mennyi a számtani sorozat első tagja, a sorozatra jellemző differencia és a mértani sorozat hányadosa?

4128 Egy számtani sorozat első három tagjának összege 6. Ha az első taghoz 5-öt, a másodikhoz 2-t, a harmadikhoz 1-et adunk, egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Melyik ez a mértani sorozat?

4129 Egy mértani sorozat második tagja 12. Ha a sorozat első tagjához 4-et, a másodikhoz 3-at, a harmadikhoz pedig 1-et adunk, egy számtani sorozat egymást követő elemeit kapjuk. Mennyi a mértani sorozat hányadosa?

4130 Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszáma egy mértani sorozat három szomszédos eleme. Mekkorák a háromszög szögei?

4131 Egy háromszög oldalainak hosszai egy mértani sorozat egymást követő elemei. A háromszög legnagyobb oldala 9 cm, a kerülete pedig 19 cm. Mekkora a háromszög másik két oldala? Számítsuk ki a háromszög legnagyobb szögét.

4132 Egy mértani sorozat első három tagjának összege 63, ha a második tagot megszorozzuk az első és harmadik összegével, 810-et kapunk. Melyik ez a sorozat?

4133 Egy nem állandó számtani sorozat első és második, második és harmadik, illetve harmadik és első tagjának szorzata – ebben a sorrendben – egy mértani sorozat három, egymás utáni eleme. Mekkora a mértani sorozat hányadosa?

4134 Egy mértani sorozat negyedik és hatodik tagjának összege -40, a harmadik és hetedik tag összege pedig 68. Melyik ez a sorozat?

Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása

4135 Ha elhelyezünk egy bankban 180 000 Ft-ot évi 7%-os kamatra, és a kamat is kamatozik 10 éven át, akkor 10 év múlva mekkora összeghez jutunk?

4136 Egy település lakossága 2000-ben 9800 fő volt. A következő tíz évben évről évre 3%-kal csökkent a lakosok száma. Hányan éltek a településen 2010-ben?

4137 Egy pénzintézet évi 6%-os kamatot ad annak, aki 8 évre leköti a pénzét. Mekkora haszonhoz jut 8 év múlva az, aki most 500 000 Ft-ot tesz be a bankba?

4138 Péter elhelyez egy bankban 1 000 000 Ft-ot, hogy 20 évig kamatoztassa. Mekkora összeghez jut 20 év múlva, ha a bank az első 5 évben 8%-os, a következő 15 évben pedig csak 6%-os kamatot fizet?

4139 Szeged lakossága 1960-ban 118 ezer fő volt, 1990-ben pedig 170 ezer. Feltételezzük, hogy évről évre azonos arányban nőtt a lakosok száma. Hány százalékkal nőtt évente Szeged lakossága 30 év alatt?

4140 A madártani szakemberek azt tapasztalták, hogy az utóbbi évek ben csökkent a hazánkban fészkelő fecskék száma. A csökkenés évente 13% volt.

Ha így folytatódik a folyamat, hány év múlva számíthatunk feleannyi fecskére, mint ebben az évben?



4141 Pénzes Dénes egy bankban tartotta a pénzét 6 évig. Hat éve lekötött 4,8 millió forintot, most pedig felvett 6 506 300 Ft-ot. A bank minden évben azonos kamatot adott. Mennyi volt az éves kamat?

4142 Hány év alatt növekszik háromszorosára egy bankban elhelyezett betétünk, ha a kamat 4,7%, és évek alatt nem változik?

4143 A Gondos szülők Szilveszter nevű gyermekük megszületésekor, és azután minden évben befizetnek egy bankszámlára 200 000 Ft-ot, amíg a gyermek eléri a 14 éves kort. Ezután még 6 évig nem veszik ki a pénzt. Mekkora összeghez jut ilyen módon 20 éves korában Szilveszter, ha a bank minden évben 4,5%-os kamatot ad?

4144 Ha 2000. január elején elhelyezett valaki egy bankban 250 000 Ft-ot, és a bank minden évben 5%-os kamatot fizet, akkor melyik évben éri el az illető bankbetétje a 400 000 Ft-ot? (Feltesszük, hogy közben nem vesz ki a pénzből és nem is tesz hozzá).

4145 A Vastag nagyszülők úgy döntöttek, hogy 1 700 000 Ft megtakarított pénzüket bankba rakják 5 évre. Az a céljuk, hogy 5 év múlva a lehető legnagyobb összeggel támogathassák az egyetemre készülő unokájukat.

A Fitying Bank a náluk elhelyezett összeg esetén 1 millió forintig 4%-ot, az 1 millió feletti összegre 6,3% éves kamatot ad.

A Peták Bank háromhavonta írja jóvá a kamatot, és negyedévre 1,9% kamatot fizet.

Melyik bankot válasszák a Vastag nagyszülők?

4146 Szerencsés Flótás a szilveszteri tombolán nyert 100 000 000 Ft-ját január elején egy bankban helyezi el, ahol éves 5% kamatot fizetnek. Úgy dönt, hogy 20 év alatt fogja felhasználni a nyereményt, mégpedig úgy, hogy minden év elején azonos összeget fog kivenni a bankból. Mekkora összeget vehet fel évente, ha 20 év múlva nem marad pénze a bankban?

4147 Egy fiatal család lakásépítésre felvesz 15 000 000 Ft kölcsönt 15 évre, évi 8%-os kamatra.

a) Mennyi lesz a havi törlesztőrészletük, ha havonta egyenlő összeget kell befizetni, és a havi kamat az éves kamat 12-ed része?

b) Mennyi lenne a törlesztőrészlet, ha a bank évente azonos összeget kérne, de azt 12 egyenlő részletben?

c) Mindkét esetben számítsuk ki, hogy a felvett összegnek hányszorosát fizetik vissza.

Vegyes feladatok

4148 Számítsuk ki az $\{5n-7\}$ sorozat első 30 elemének összegét.

4149 Számítsuk ki a $\{7\cdot 2^{n-1}\}$ sorozat első 20 tagjának összegét.

4150 A következő sorozatok közül válasszuk ki a számtani, illetve a mértani sorozatokat:

a) $a_n = 8n-3$; *b)* $b_n = \frac{4-17n}{9}$; *c)* $c_n = \cos(n\pi)$;

d) $d_n = \frac{n^2-25}{n+5}$; *e)* $e_n = \frac{n-7}{n^2-49}$; *f)* $f_n = n^2+2$;

g) $g_n = (-1)^n$; *h)* $h_n = 23\cdot(-1)^{3n-5}$; *i)* $i_n = 11\cdot 4^{n-3}$;

j) $j_n = \lg(3\cdot 10^n)$; *k)* $k_n = 3n+\sin(3n\pi)$; *l)* $l_n = \sin\frac{n\pi}{2}$.

4151 Egy számtani sorozat első tagja $a_1 = \frac{13}{\sqrt{3}+1}$, differenciája $\sqrt{3}$. Számítsuk ki az első 30 tag összegét.

4152 Egy számtani sorozat első tagja 7, differenciája $\frac{3}{7}$. Hány tagja van a sorozatnak 500 és 1000 között?

4153 Melyik az a mértani sorozat, amelynél az első 3 tag szorzata 1 157 625, és ennek a három tagnak az összege 1687?

4154 Az $\{a_n\}$ sorozat első n tagjának összege: $S_n = 2n^2 - 7n$. Mutassuk meg, hogy $\{a_n\}$ számtani sorozat. Adjuk meg a sorozat első tagját és differenciáját.

4155 Számítsuk ki azoknak a négyjegyű számoknak az összegét, amelyek 11-gyel osztva 7-et adnak maradékul.

4156 Egy mértani sorozat harmadik tagja 18, a huszadik tagja pedig 120. Tagja-e a sorozatnak a

a) 108; *b)* 800?

4157 Adjuk meg azokat a mértani sorozatokat, amelyeknek elemeire igaz, hogy

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot a_5 &= 4 \\ a_2 \cdot a_6 &= 16 \end{aligned}\right\}.$$

4158 Egy mértani sorozat első három tagjának összege 5,25. Ugyanezen három tag reciprokának összege $\frac{7}{3}$. Határozzuk meg az első három tag szorzatát.

4159 A 3 és 48 közé iktassunk be három számot úgy, hogy a kapott számokkal együtt egy

a) számtani sorozat; *b)* mértani sorozat

öt egymást követő elemét alkossák. Írjuk fel az öt számot.

4160 Egy számtani sorozat első három elemének összege 18. Ha az első számhoz egyet adunk, egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Mennyi a számtani sorozat első eleme és a mértani sorozat hányadosa?

4161 Egy mértani sorozat első három elemének összege 114. Ez a három szám egy számtani sorozat első, negyedik és huszonötödik tagja. Melyik ez a három szám?

4162 A következő számok olyan valós számok, melyekben az első három egy számtani sorozat, az utolsó három pedig egy mértani sorozat három szomszédos eleme:

$$y, \quad x, \quad 4x - 5, \quad 7x + 10.$$

a) Határozzuk meg a négy számot.

b) Adjuk meg a számtani sorozat különbségét, illetve a mértani sorozat hányadosát.

4163 Statisztikai adatok szerint az 1997-es év utáni években 2003-mal bezárólag a világon évente átlagosan 1,1%-kal több autót gyártottak, mint a megelőző évben. A 2003-at követő években, egészen 2007-tel bezárólag évente átlagosan már 5,4%-kal gyártottak többet, mint a megelőző évben.

2003-ban összesen 41,9 millió autó készült.

a) Hány autót gyártottak a világon 2007-ben?

b) Hány autót gyártottak a világon 1997-ben?



2008-ban az előző évhez képest csökkent a gyártott autók száma, ekkor a világon összesen 48,8 millió új autó hagyta el a gyárakat. 2008-ban előrejelzés készült a következő 5 évre vonatkozóan. Eszerint 2013-ban 38 millió autót fognak gyártani. Az előrejelzés úgy számolt, hogy minden évben az előző évinél ugyanakkora százalékkal csökken a termelés.

c) Hány százalékkal csökken az évenkénti termelés a 2008-at követő 5 év során az előrejelzés szerint?

d) Elfogadjuk az előrejelzés adatait, majd feltételezzük, hogy 2013 után évente 3%-kal csökken a gyártott autók száma. Melyik évben lesz így az abban az évben gyártott autók száma a 2013-ban gyártottaknak a 74%-a?

4164 Az $\{a_n\}$ pozitív tagú számsorozatról azt tudjuk, hogy $a_1 = 1$; $a_4 = 0{,}125$, és $\{\log_5 a_n\}$ számtani sorozatot alkot. Számítsuk ki az $\{a_n\}$ sorozat tizedik elemét.

4165 A pozitív a és b számok $(a < b)$ közé iktassunk négy számot úgy, hogy a kapott számok egy

a) számtani; *b)* mértani

sorozat hat egymást követő elemei legyenek. Adjuk meg a hat számot.

12.3. TÉRGEOMETRIA

Térelemek

4166 A térben kijelölünk 10 pontot úgy, hogy közülük semelyik 3 nem illeszkedik egy egyenesre.

a) Hány különböző egyenest határoznak meg az adott pontok közül kiválasztható pontpárok?

b) Legalább hány síkot határoznak meg a pontok közül kiválasztható ponthármasok?

c) Legfeljebb hány síkot határoznak meg a pontok közül kiválasztható ponthármasok?

4167 Legalább, illetve legfeljebb hány metszésvonala lehet 10 különböző síknak?

4168 Hány olyan sík van, amely egy adott kocka csúcsai közül

a) pontosan; *b)* legalább

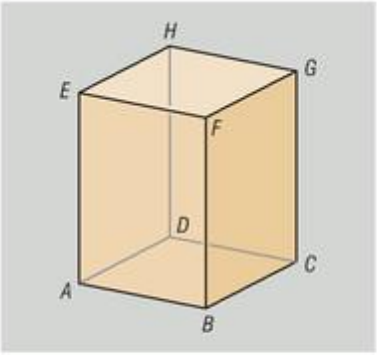
hármat tartalmaz?

4169 Az ábrán látható téglatest mely élei

a) párhuzamosak az AE egyenessel;

b) merőlegesek az AB egyenesre;

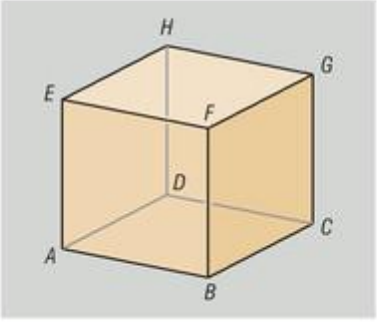
c) illeszkednek az AB egyenessel kitérő helyzetű egyenesre?



4170 Határozzuk meg, hogy az ábrán látható kockában az alábbi egyenesek mekkora szöget zárnak be az AC lapátlót tartalmazó egyenessel. Vannak-e a felsorolt egyenesek közt olyanok, amelyekkel az AC egyenes kitérő helyzetű, illetve párhuzamos?

a) FB; *b)* GC; *c)* HF; *d)* EG;

e) AB; *f)* ED; *g)* HG.



4171 Milyen hosszúságú az a élű kocka

a) lapátlója; *b)* testátlója?

4172 Egy téglatest egy csúcsából kiinduló élei hosszának aránya 1 : 1 : 3. Mekkorák a téglatest lapátlói, illetve testátlói, ha legrövidebb éle 3 cm?

4173 Egy kocka testátlója 12 cm. Mekkora a kocka éle?

4174 Mekkora szöget zár be a 4170. feladat ábráján látható kocka AB éle az AG testátlóval?

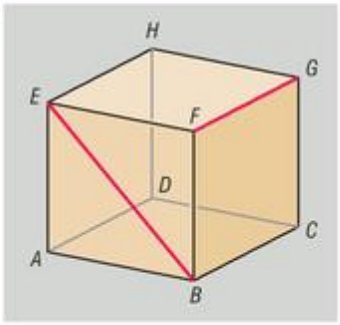
4175 Mekkora szöget zár be egymással a kocka egy csúcsából kiinduló két lapátlója?

4176 Mekkora szöget zár be a kocka egyik csúcsából kiinduló lapátlója és testátlója?

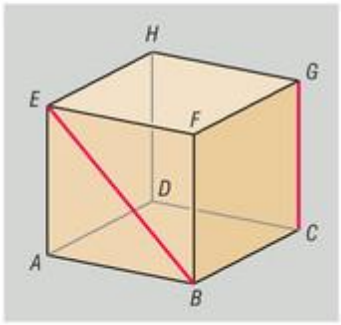
4177 Mekkora távolságra vannak az a élű kocka csúcsai valamely élének felezőpontjától? Hány különböző távolságot kaphatunk eredményül?

4178 Határozzuk meg az a élű $ABCDEFGH$ kocka pirossal jelölt szakaszainak távolságát és hajlásszögét. Minden esetben rajzoljuk be a piros szakaszokat tartalmazó egyenesek normál transzverzálisát.

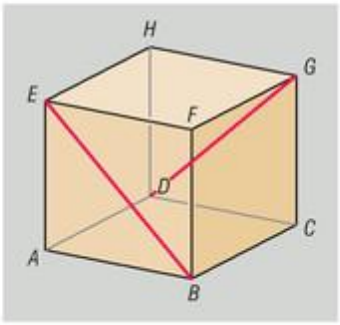
a)



b)



c)



4179 A 4170. feladat látható kocka $ABFE$, $BCGF$ és $EFGH$ lapjainak középpontja egy háromszöget fog közre. Számítsuk ki a háromszög oldalainak hosszát, ha a kocka minden éle 5 cm hosszú. Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

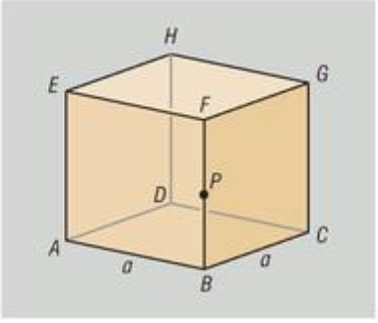
4180 Bizonyítsuk be, hogy ha egy kocka négy oldallapjának középpontja egy síkra illeszkedik, akkor négyzetet fog közre. Számítsuk ki a négyzet területét, ha a kocka éle a egység hosszúságú.

4181 Az $ABCDEFGH$ kocka éleinek hossza a, BF élének felezőpontja pedig P.

a) Milyen távolságra van a P pont a kocka H csúcsától?

b) Mekkora a hossza a legrövidebb olyan útnak, amely P-ből H-ba vezet és csak a kocka élei mentén halad?

c) Mekkora a hossza a legrövidebb olyan útnak, amely a kocka lapjain halad, és a P pontot a H ponttal köti össze?



4182 A 12 cm élű $ABCDEFGH$ fakockából kifaragtuk az $ABCDO$ gúlát, ahol O a kocka fedőlapjának középpontja.

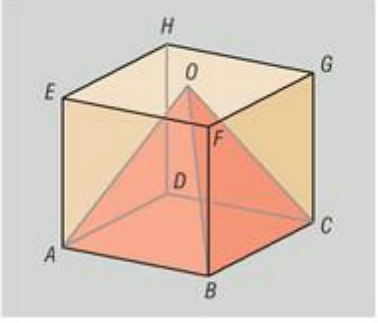
a) Mekkorák a keletkező gúla élei?

b) Mekkora szöget zár be a gúla oldallapja az $ABCD$ síkkal?

c) Mekkora szöget zár be a gúla oldaléle az alaplappal?

d) Mekkora szöget zár be a gúla oldaléle az alapéllel?

e) Mekkora szöget zár be egymással a gúla két szomszédos oldallapja?

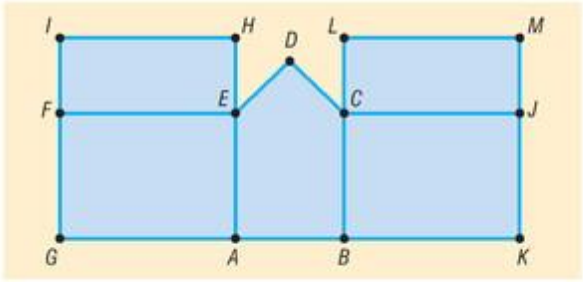


4183 Egy kocka csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott csúcsok által közrefogott háromszög

a) szabályos; *b)* derékszögű?

4184 Igaz-e, hogy ha két párhuzamos (egymástól különböző) síkot metszünk egy harmadik síkkal, akkor a kialakuló két metszésvonal egymással párhuzamos? Válaszunkat indokoljuk.

4185 Egy óvodásoknak készült magazinban gyakran találjuk kivágható és összeragasztható testek síkbeli hálóját. A legutóbbi számból az ábrán is látható mozdonygarázs hálózatát lehetett kivágni.



a) Az elkészült garázs mely élei párhuzamosak az AE éllel?

b) A garázs mely élei merőlegesek az ED szakaszt tartalmazó egyenesre?

c) A garázsnak melyek azok az élei, amelyek az EF szakaszt tartalmazó egyenessel kitérő helyzetű egyenesre illeszkednek?

4186 A Balaton-felvidék 1 : 40 000 méretarányú turistatérképének tanúsága szerint a Szent György-hegy magassága 415 méter, a szomszédos Csobáncé 376 méter.

a) Milyen távolságra van egymástól a két hegy csúcsa a valóságban, ha a térképen mért távolságuk 15 cm? A választ egy tizedesjegy pontossággal, méterben kerekítve adjuk meg.

b) Mekkora emelkedési szögben látja a Csobánc tetején álló turista a Szent György-hegy tetejét?

4187 Mekkora távolságra van egymástól az a élű kocka két kitérő helyzetű élének felezőpontja?

4188 Egy téglatest alaplapjának két éle 15 cm, illetve 20 cm, a téglatest testátlója az alaplap síkjával 60°-os szöget zár be.

a) Mekkora szöget zár be egymással az alaplap két átlója?

b) Számítsuk ki a téglatest testátlójának hosszát.

c) Mekkora a téglatest ismeretlen hosszúságú éle?

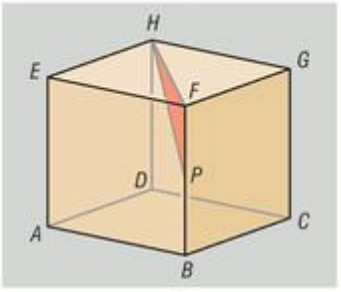
4189 Mekkora szöget zár be egymással a kocka egyik testátlója és a vele kitérő helyzetű lapátlója?

4190 Határozzuk meg az $ABCDEFGH$ kockában (ld. 4170. feladat ábrája) az alábbi szögek nagyságát:

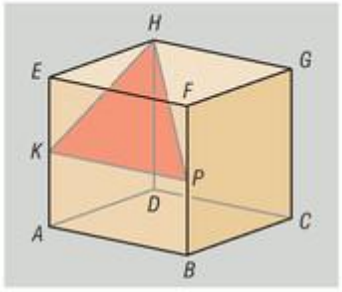
a) $HAF\sphericalangle$; *b)* $ADG\sphericalangle$; *c)* $FGD\sphericalangle$; *d)* $BDF\sphericalangle$.

4191 Számítsuk ki az ábrákon megjelölt háromszögek oldalainak hosszát, ha az $ABCDEFGH$ kocka éleinek hossza 10 cm. Vannak-e a háromszögek közt derékszögűek, illetve egyenlő szárúak? Ha igen, akkor melyek? (Az ábrák a kocka csúcsain kívül csak oldalfelező pontokat tartalmaznak.)

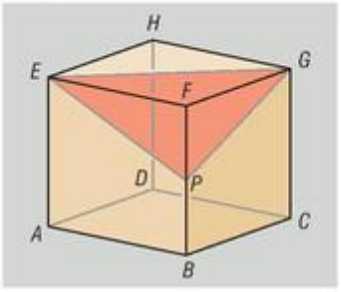
a)



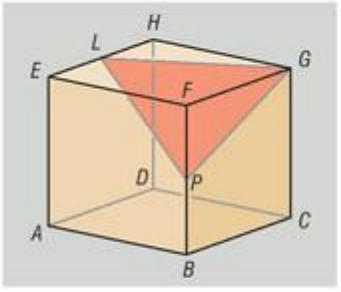
b)



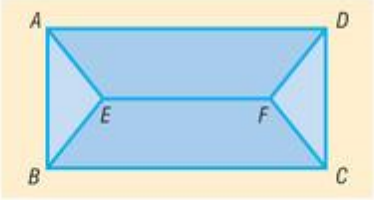
c)



d)



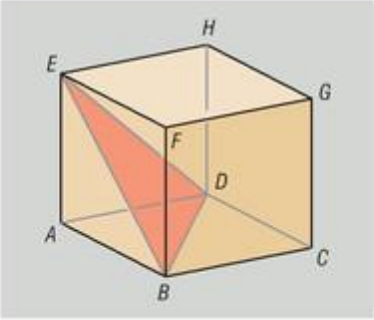
4192 Az ábra egy hétvégi ház tetőszerkezetének felülnézeti képét mutatja. Számítsuk ki, hogy mekkora szöget zárnak be a tető síkjai a vízszintes síkkal, ha tudjuk, hogy $AB = 5$ m, $AD = 10$ m, $EF = 6$ m, továbbá az EF gerenda az $ABCD$ tetősík felett 4 méter magasságban helyezkedik el. A választ minden esetben egész fokra kerekítve adjuk meg.



4193 Az ábrán látható $ABCDEFGH$ kocka minden éle 10 cm. A kockát az EBD síkkal két részre vágjuk.

a) Bizonyítsuk be, hogy a kocka EBD síkmetszete szabályos háromszög.

b) Mekkora szöget zár be az EBD sík a kocka $ABCD$ alaplapjával?



4194 Egy vízszintes terepen kijelölt téglalap alakú leszállópálya csúcsai A, B, C és D. Egy helikopter az A pont fölött 120 méter magasságban tartózkodik, amikor a B ponttól 130, a C ponttól 133 méter távolságra található. Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal megadva válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

a) Mekkorák a leszállópálya méretei?

b) Milyen messze van a helikopter a leszállópálya D sarkától?

c) Mekkora emelkedési szögben látja a C pontban álló megfigyelő a helikoptert?

d) Hány méterrel van az A pontra illeszkedő vízszintes sík felett a helikopter akkor, amikor a D pontból kétszer akkora emelkedési szög alatt látszik, mint a C pontból?

4195 Bizonyítsuk be, hogy ha az e egyenes merőleges az S sík két metsző helyzetű egyenesére, akkor az e egyenes merőleges az S síkra.

4196 Az $ABCDEFGH$ kocka BF élének felezőpontja P. Számítsuk ki, hogy a következő pontok milyen távolságra vannak az AG testátlótól, ha a kocka élei a hosszúságúak.

a) H; *b)* P; *c)* a $BCGF$ lap középpontja.

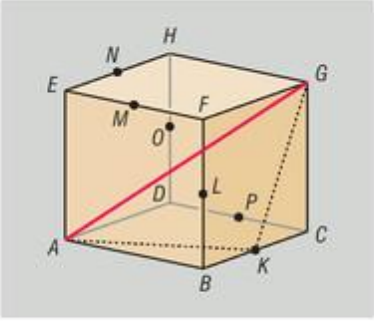
4197 Az ábrán megjelöltük az a élű $ABCDEFGH$ kocka néhány élének felezőpontját.

a) Mutassuk meg, hogy a megjelölt felezőpontok (K, L, M, N, O és P) a kocka AG testátlójától ugyanakkora távolságra vannak.

b) Számítsuk ki az *a)* feladatban megadott pontok AG testátlótól mért távolságát.

c) Mutassuk meg, hogy a K, L, M, N, O és P pontok egy síkra illeszkednek. Mekkora szöget zár be ez a sík az AG testátlóval?

d) Számítsuk ki az $AKG\sphericalangle$ koszinuszának pontos értékét.



4198 Adott az S sík, valamint a tér egy AB szakasza. Az AB szakasz S síkra vonatkozó merőleges vetülete $A'B'$.

a) Számítsuk ki az $\dfrac{A'B'}{AB}$ tört értékét, ha az AB szakasz az S síkkal α szöget zár be.

b) Mely α esetén lesz minimális, illetve maximális az $A'B'$ szakasz hossza?

4199 A 4193. feladat ábráján látható kocka minden éle 10 cm.

a) Számítsuk ki az EBD háromszög területét.

b) Határozzuk meg az EBD háromszögnek az $ABCD$ síkra vonatkozó merőleges vetületét.

c) Bizonyítsuk be, hogy ha az EBD háromszög $ABCD$ síkra vonatkozó merőleges vetületének területét T jelöli, akkor

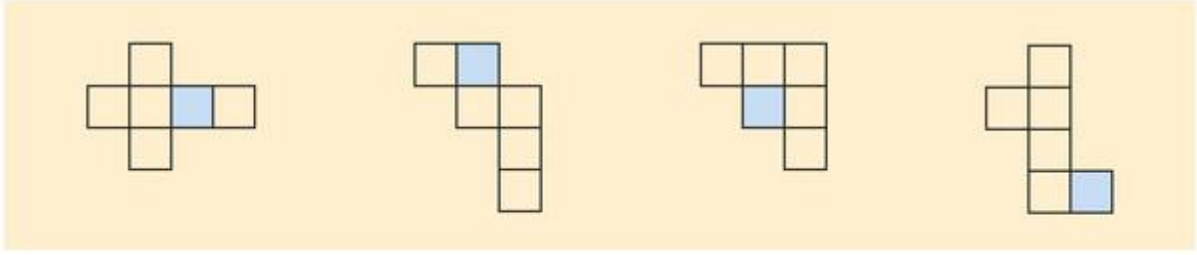
$$T = T_{EBD} \cdot \cos\alpha,$$

ahol α az EBD sík és az $ABCD$ alaplap síkja által bezárt szög.

d) A *c)* feladat eredménye alapján számítsuk ki α értékét.

Testek osztályozása, szabályos testek

4200 Az alábbi ábrák közül melyik lehet egy kocka síkbeli hálózata? Amelyik lehet, abban melyik a színezéssel megjelölt lappal szemközti lap?



4201 Egy fából készült $4 \times 4 \times 4$-es kocka lapjait pirosra festjük, majd a kockát egységkockákra daraboljuk. Hány olyan kockát kapunk, amelynek pontosan

a) 1; *b)* 2; *c)* 3

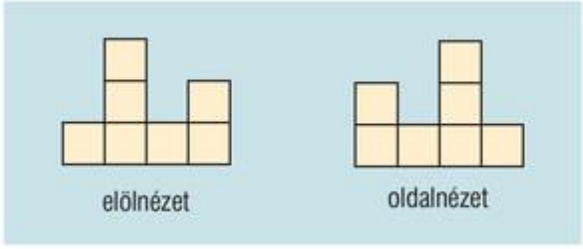
piros lapja van?

4202 Hányféle síkbeli hálója lehet egy kockának, ha az egybevágó ábrákat nem különböztetjük meg? Rajzoljuk le az összes lehetőséget.

4203 Barnabás fa építőkockákból „tornyot" épített. Az ábrák a tornyot elölnézetből, illetve oldalnézetből mutatják.

a) Legfeljebb hány építőkockát használt fel Barnabás a torony megépítéséhez?

b) Lehetséges-e, hogy pontosan 10 építőkockából áll az építmény?



4204 Az alábbiak közül melyik lehet egy kocka síkmetszete:

a) szabályos háromszög; *b)* négyzet;

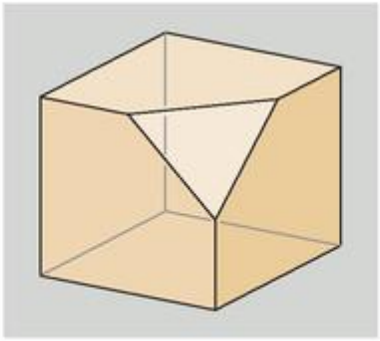
c) szabályos hatszög; *d)* szabályos nyolcszög?

4205 Legfeljebb mekkora sugarú földgömb helyezhető el abban a kocka alakú kartondobozban, amelynek minden éle 45 cm?

4206 Legalább mekkora annak a gömbnek a sugara, amelyben elfér az a kocka, amelynek minden éle 12 cm? Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

4207 Mekkora a 12 cm élű szabályos oktaéder köré írható gömb sugara?

4208 Az alábbi ábrán látható testet úgy kaptuk, hogy egy kockát elmetszettünk egy olyan síkkal, amely tartalmazza egy csúcsából kiinduló 3 élének felezőpontját.



a) Milyen síkidomok határolják a levágott (az ábrán nem látható) testet?

b) Milyen testet vágott le a metsző sík a kockából?

c) Hány lapja, csúcsa, éle van a kockából visszamaradó (az ábrán is látható) testnek?

d) Ellenőrizzük az Euler-féle poliédertétel teljesülését a visszamaradó testen.

e) Milyen síkidomok határolják az ábrán látható testet?

4209 A 4208. feladatban leírt csonkolást a kocka minden csúcsánál elvégezzük.

a) Milyen síkidomok határolják a csonkolás után megmaradt testet?

b) Hány lapja, csúcsa, illetve éle van az így kapott testnek?

c) Ellenőrizzük az Euler-féle poliédertétel teljesülését a visszamaradó testre vonatkozóan.

4210 Készítsük el az öt szabályos test egy-egy lehetséges síkbeli hálózatát.

4211 Töltsük ki az alábbi táblázatot. Ellenőrizzük az Euler-féle poliédertétel teljesülését az egyes esetekben.

Test neve	Lapok száma	Csúcsok száma	Élek száma
Kocka			
Szabályos tetraéder			
Oktaéder			
Háromszög alapú hasáb			
Háromszög alapú gúla			
Négyzet alapú hasáb			
Négyzet alapú gúla			
Ötszög alapú hasáb			
Ötszög alapú gúla			
Tizenkétszög alapú hasáb			
Tizenkétszög alapú gúla			

4212 Egy hasáb síkbeli hálóját alkotó sokszögek belső szögeinek összege 3600°. Hány oldallapja van a hasábnak?

4213 Hány oldallapja van annak a gúlának, amelynek síkbeli hálóját alkotó sokszögei belső szögeinek összege 3960°?

4214 Számítsuk ki az n oldalú

a) hasáb; *b)* gúla

lapjait alkotó sokszögek belső szögeinek összegét.



4215 Lehetnek-e egy szabályos hatoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek? Válaszunkat indokoljuk.

4216 Mekkora az egyenes körkúp nyílásszöge, ha

a) alkotója 5 m, alapkörének sugara 3 m;

b) alkotója 5 m, magassága 4 m;

c) magassága 3 m, alapkörének sugara 5 m;

d) alkotója 4 m, alapkörének sugara 2 m?

4217 Mekkora szöget zár be az egyenes körkúp alkotója az alapkör síkjával, ha

a) alkotója 13 m, alapkörének sugara 5 m;

b) magassága 12 m, alkotója 13 m;

c) magassága 8 m, alapkörének sugara 6 m?

Mekkora a kúp nyílásszöge az egyes esetekben?

4218 Mekkora az egyenes körkúp nyílásszöge, ha alkotója és alapkörének átmérője ugyanolyan hosszúságú?

4219 Mekkora szöget zár be az alaplap síkjával annak a szabályos négyoldalú gúlának az oldallapja, amelynek

a) minden éle egyenlő;

b) oldaléle kétszer akkora, mint az alapéle?

4220 Mekkora szöget zár be a szabályos hatoldalú gúla oldallapja az alaplap síkjával, ha az alapél hossza 5 cm, az oldaléleké pedig 10 cm?

4221 Mekkora távolságra van az a élű szabályos tetraéder csúcsa a szemközti lapjától?

4222 Mekkora a szabályos tetraéder két szomszédos lapjának hajlásszöge?

4223 Mekkora szöget zár be a szabályos tetraéder éle az élt nem tartalmazó lapjával?

4224 Mutassuk meg, hogy egy kocka csúcsai közül kiválasztható négy úgy, hogy azok egy szabályos tetraéder csúcsai legyenek. Mekkora a keletkező szabályos tetraéder élének hossza, ha a kocka éle a hosszúságú?

4225 Számítsuk ki az a élű szabályos tetraéder két kitérő helyzetű élének távolságát, illetve hajlásszögét.

4226 Egy szabályos tetraéder minden csúcsát levágjuk egy-egy olyan síkkal, amely tartalmazza az adott csúcsra illeszkedő élek felezőpontjait.

a) Készítsük el a visszamaradó test síkbeli hálózatát.

b) Hány lapja, csúcsa, éle van a visszamaradó testnek?

c) Ellenőrizzük az Euler-féle poliédertétel teljesülését a kapott testre vonatkozóan.

4227 Egy kocka minden éle 20 cm hosszú. A kocka szomszédos lapjainak középpontját összekötjük, így egy test éleit kapjuk.

a) Számítsuk ki a keletkező test éleinek hosszát.

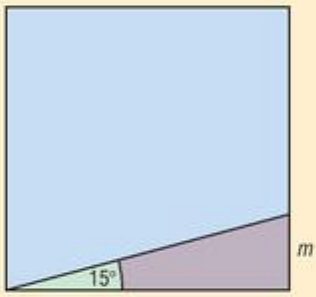
b) Hány lapja, csúcsa, éle van a keletkezett testnek?

c) Milyen testet kapunk?

4228 Mekkora szöget zárhat be egymással egy szabályos oktaéder két éle?

4229 Hány testátlója van egy szabályos oktaédernek? Mekkora ezek hossza, ha az oktaéder minden éle 10 cm? Mekkora szöget zárhat be a szabályos oktaéder két testátlója?

4230 Egy 5 cm élű fakockából éket készítünk konyhabútorunk alá, ezért a kockát elfűrészeljük. Az alábbi ábra a fűrészelés után mutatja a kocka keresztmetszetét, valamint a vágás vonalát.



a) Milyen „magas" a keletkező ék, azaz mekkora az m-mel jelölt szakasz hossza?

b) Mekkora területű síkidomban metszettük el a kockát a fűrészelés során?

c) Milyen testek keletkeznek a kockából a fűrészelés után?

4231 Egy társasjáték szabályai szerint a játékosok nem dobókockával, hanem úgynevezett dobótetraéderrel dobnak. A dobótetraéder egy szabályos tetraéder, melynek lapjai az 1, 2, 3, 4 számokkal vannak számozva.

A játék tartalmaz egy dobóoktaédert, egy dobódodekaédert és egy dobóikozaédert is. Ez utóbbiak olyan szabályos testek, amelyeknek lapjai az $1, 2, \ldots, n$ számokkal vannak számozva, ahol n a test lapjainak számát jelöli.

Ági a négy tárggyal egyszerre dob.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy Ági mindegyik tárggyal prímszámot dob?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az Ági által dobott számok összege legalább 42?

4232 Mekkora szöget zár be egymással egy szabályos oktaéder két szomszédos lapja?

4233 Egy kisvárosban olyan köztéri szobrot adtak át, amelynek fémváza egy szabályos oktaéder, lapjai pedig erős, átlátszó plasztikból készültek. A test egyik csúcsa a szobor talapzatán áll, a szemközti csúcs pedig pontosan fölötte helyezkedik el. Az oktaéder belsejében elhelyeztek egy kockát is, amelynek csúcsai az oktaéder lapjainak középpontjába esnek.

a) A talapzattól számítva milyen magas a szobor, ha az oktaéder minden éle 1 méter hosszú?

b) Mekkora az oktaéder belsejében elhelyezett kocka éle?

4234 Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder paralelogrammában, illetve rombuszban is metszhető.

4235 Lehet-e egy szabályos oktaédert szabályos hatszögben metszeni? Válaszunkat indokoljuk.

4236 *a)* Egy szabályos háromszög belsejében kiválasztunk egy tetszőleges P pontot, majd a pontból merőlegest állítunk a háromszög oldalaira. A kapott merőlegesek rendre az X, Y, illetve Z pontokban metszik a háromszög oldalait.

Bizonyítsuk be, hogy a $PX + PY + PZ$ összeg a P pont választásától függetlenül állandó.

Mekkora az összeg, ha a háromszög minden oldala a?

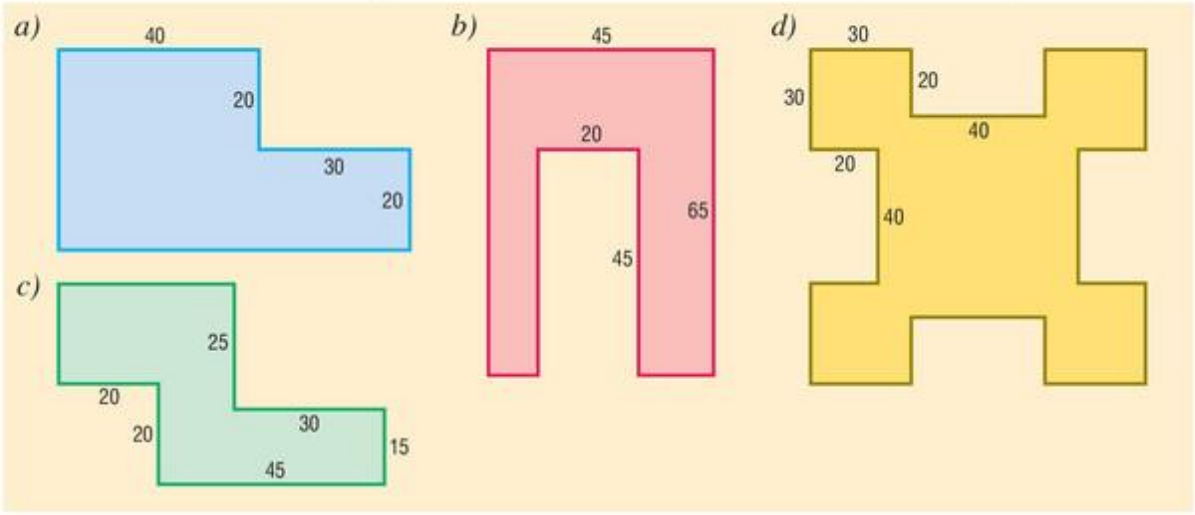
b) Egy szabályos tetraéder alaplapjának belsejében kiválasztunk egy tetszőleges P pontot, majd a pontból merőlegest állítunk a tetraéder alaplapjának síkjára. A kapott merőleges rendre az X, Y, illetve Z pontokban metszi az oldallapok síkjait.

Bizonyítsuk be, hogy a $PX + PY + PZ$ összeg a P pont választásától függetlenül állandó.

Mekkora az összeg, ha a tetraéder minden éle a?

A terület fogalma, a sokszögek területe

4237 Számítsuk ki az alábbi sokszögek területét. Az oldalak centiméterben vannak megadva.



4238 Számítsuk ki a háromszög területét a következő adatokból:

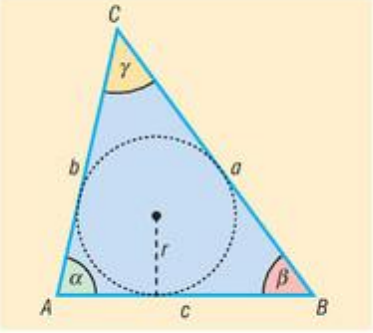
a) $a = 12$ cm, $b = 18$ cm, $\gamma = 30°$;

b) $a = 5$ cm, $\beta = 40°$, $\gamma = 50°$;

c) $a = 1{,}7$ dm, $c = 8$ cm, $\alpha = 120°$;

d) $a = 25$ cm, $b = 52$ cm, $c = 6{,}3$ dm;

e) $a = 13$ cm, $\alpha = 90°$, $r = 2$ cm. (➡)



4239 Mekkora a háromszög legrövidebb magassága, ha oldalai 21 cm, 17 cm és 10 cm hosszúak?

4240 Mekkora a háromszögbe írható kör sugara, ha oldalai

a) 10 cm, 24 cm, 26 cm; *b)* 16,8 cm, 13,6 cm, 8 cm?

4241 Egy téglalap és egy (vele nem egybevágó) paralelogramma oldalai páronként megegyeznek. Melyiknek nagyobb a területe? Válaszunkat indokoljuk.

4242 Számítsuk ki a paralelogramma területét, ha az egyik csúcsából kiinduló két oldala a és b, a csúcsnál lévő szöge pedig α. Minden esetben adjuk meg a paralelogramma magasságainak hosszát.

a) $a = 3$ cm, $b = 7$ cm, $\alpha = 90°$; *b)* $a = 2{,}4$ cm, $b = 3{,}7$ cm, $\alpha = 30°$;

c) $a = 12$ cm, $b = 17$ cm, $\alpha = 120°$; *d)* $a = 8{,}3$ cm, $b = 5{,}6$ cm, $\alpha = 55°$.

4243 Mekkora a paralelogramma területe, ha két átlóját e és f, az átlók által bezárt szögét pedig φ jelöli? Számítsuk ki a paralelogramma oldalait és szögeit. Minden esetben adjuk meg a paralelogramma magasságainak hosszát.

a) $e = 3$ cm, $f = 7$ cm, $\varphi = 90°$; *b)* $e = 2{,}5$ cm, $f = 3{,}5$ cm, $\varphi = 45°$;

c) $e = 5$ cm, $f = 8$ cm, $\varphi = 65°$.

4244 Mekkora szöget zár be a T területű paralelogramma két átlója, ha hosszuk e és f?

a) $e = 5$ cm, $f = 1{,}2$ dm, $T = 30$ cm^2; *b)* $e = 3{,}5$ cm, $f = 7{,}2$ cm, $T = 6{,}3$ cm^2;

c) $e = 12$ cm, $f = 18$ cm, $T = 57$ cm^2; *d)* $e = 4{,}2$ cm, $f = 6$ cm, $T = 0{,}11$ dm^2.

4245 Mekkora a rombusz területe, ha magassága 3 cm, hegyesszöge 60°?

4246 Számítsuk ki a húrtrapéz területét, ha alapjai 6 cm és 12 cm, szárai 5 cm hosszúak.

4247 Számítsuk ki a trapéz területét, ha a szárakat összekötő középvonala 7 cm, magassága 5 cm.

4248 Számítsuk ki a szabályos

a) hatszög; *b)* nyolcszög; *c)* tízszög

területét, ha oldalai 12 cm hosszúak. Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

4249 Egy szabályos ötszög átlója 10 cm. Számítsuk ki az ötszög területét.

4250 Számítsuk ki a szabályos hétszög területét, ha

a) beírt; *b)* körülírt

körének sugara 3 cm.

4251 Számítsuk ki a szabályos tizenkétszög és a szabályos négyszög területének arányát, ha mindkettő oldala a.

4252 A Vasvilla étteremben szabályos hatszög alakú tányéron szolgálják fel a túrós csuszát. A nagy adagot egy 1,2-szer akkora oldalú tányéron hozza ki a pincér, mint a kis adagot. Megéri-e kis adagot rendelni 950 Ft-ért, ha a nagy adag ára 1400 Ft?

4253 Az A4-es lap méretei 210 mm × 297 mm. Lerajzolható-e egy A4-es lapra egy 110 m^2-es családi ház 1 : 40 méretarányú kicsinyített tervrajza?

4254 Egy konvex négyszög területe 50 cm^2. A négyszöget az átlói négy olyan háromszögre bontják, melyek közül két szomszédosnak a területe 8 cm^2, illetve 12 cm^2. Számítsuk ki a másik két háromszög területét.

4255 Vanda 1 : 40 000 méretarányú turistatérképén lemérte egy jó közelítéssel paralelogramma alakú erdő két oldalának, valamint egyik átlójának hosszát; az oldalak 3,5, illetve 4 cm, az átló 7 cm. Az erdőben az átlók mentén egy-egy jelzett turistautat építettek ki.

a) Hány hektáros az erdő a valóságban?

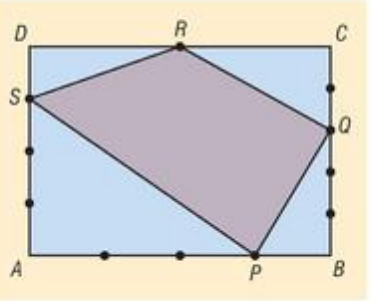
b) Hány kilométer hosszú az erdőt átszelő másik turistaút?

c) Mekkora szögben metszi egymást a két turistaút?

4256 Dorka az $ABCD$ téglalap alakú kartonlapból kivágta a $PQRS$ négyszöget. Az $ABCD$ téglalap oldalain megjelölt belső pontok a kartonlap egy-egy oldalát egyenlő részekre bontják.

a) Hány százaléka a kivágott négyszög területe az $ABCD$ kartonlap területének?

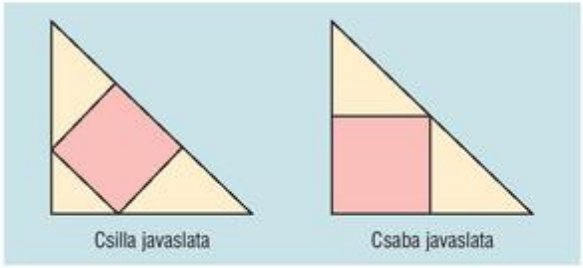
b) Igaz-e, hogy a Dorka által kivágott négyszög PS és QR oldalai párhuzamosak? Válaszunkat indokoljuk.



4257 Melyek azok a négyszögek, amelyeknek területét valamelyik középvonala megfelezi? Válaszunkat indokoljuk.

4258 Egy húrtrapéz alapjai 27 cm, illetve 12 cm. A trapézba olyan kör írható, amely a trapéz minden oldalát érinti. Számítsuk ki a trapéz területét, valamint a trapézba írható kör sugarát.

4259 Csaba és Csilla olyan saroktelket vásároltak, melynek befogói 24 m, illetve 25 m. A telekre négyzet alaprajzú házat szeretnének építeni, de a ház tájolásáról még nem tudtak megállapodni. Az ábrák Csaba, illetve Csilla javaslatát mutatják. Döntsük el, hogy melyik terv elfogadása esetén építenének nagyobb alapterületű házat.



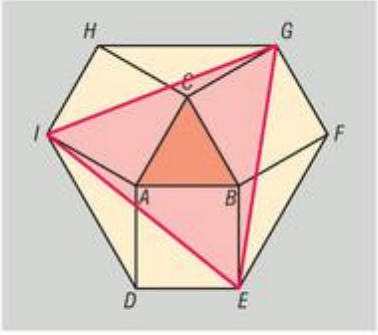
4260 Két testvér, András és Béla, egy konvex négyszög alakú kertet örököltek. A telket fele-fele arányban kellett felosztaniuk.

Kezdetben tanácstalanok voltak, majd András javasolta, hogy a telket valamelyik középvonala mentén próbálják felosztani. A javasolt középvonal valóban megfelezte a telket. Ekkor Béla azt tanácsolta, hogy mégis inkább a másik középvonal mentén osszák két részre az örökségüket. Azt tapasztalták, hogy a telket a másik középvonala is megfelezi.

a) Milyen alakú lehetett az örökölt telek?

b) Mekkora területű részt kaptak a testvérek, ha a telek egyik csúcsából kiinduló két oldala 18 m és 15 m, a csúccsal szemközti átló hossza pedig 22,4 m?

4261 Az ABC szabályos háromszög oldalaira kifelé egy-egy négyzetet rajzolunk. A kapott hat pont egy konvex hatszög (a $DEFGHI$ hatszög) csúcsait alkotják.



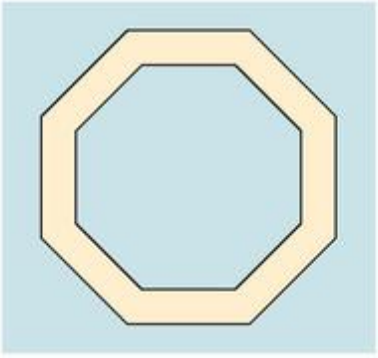
a) Számítsuk ki a kialakuló hatszög szögeit.

b) Milyen szimmetriatulajdonságokkal rendelkezik a kapott hatszög?

c) Mekkora a hatszög területe, ha a szabályos háromszög oldalai 10 cm hosszúak?

d) Számítsuk ki a GEI háromszög területét.

4262 Egy festő szabályos nyolcszög alakú képkeretbe szereti rámáztatni a képeit. Legújabb keretének külső oldalai 50 centiméteresek, maga a keret pedig 5 cm széles. Hány m^2-es vászon fér el a keretben?



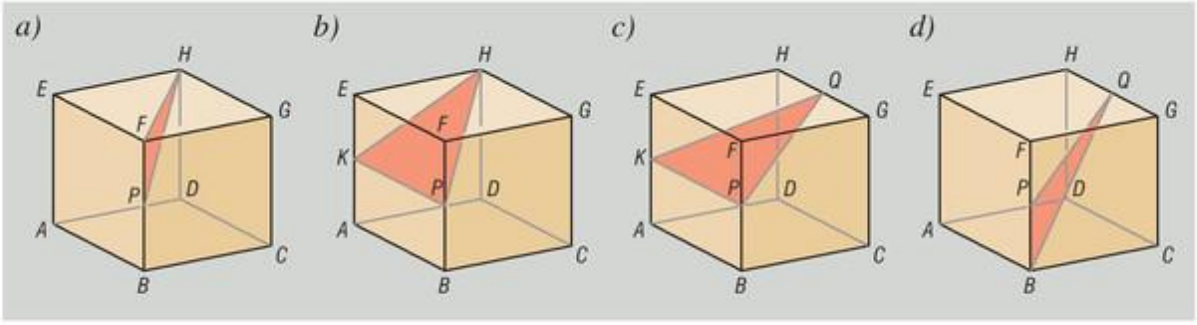
4263 Egy 8 cm oldalú szabályos hatszög középpontját tükrözzük a hatszög oldalfelező pontjaira, így egy újabb hatszöget kapunk. Mekkora a kapott hatszög területe?

4264 Egy szabályos sokszögben összekötjük a szomszédos oldalfelező pontokat, így egy újabb szabályos sokszöget kapunk. Számítsuk ki az eredeti, valamint az így kapott sokszög területének arányát, ha a kiindulásul vett sokszög oldalainak száma

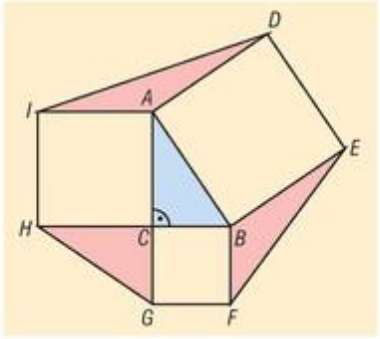
a) 3; *b)* 4; *c)* 6; *d)* 8.

e) Számítsuk ki az n oldalú szabályos sokszög, valamint az oldalfelező pontjai által közrefogott sokszög területének hányadosaként értelmezett sorozat határértékét, ha n tart a végtelenbe.

4265 Számítsuk ki, hogy a megjelölt háromszögekre illeszkedő síkok mekkora területű alakzatot metszenek ki az $ABCDEFGH$ kockából, ha a kocka minden éle 5 cm hosszú. Rajzoljuk be a kialakuló síkmetszeteket az egyes ábrákba. (A kocka csúcsain kívül csak oldalfelező pontok láthatók az ábrákon.)



4266 Az ABC derékszögű háromszög (a derékszög a C csúcsnál van) oldalaira kifelé négyzeteket szerkesztettünk, majd a kapott négyzetek csúcspontjait az ábra szerint összekötöttük.



a) Bizonyítsuk be, hogy a megjelölt háromszögek (azaz az ADI, a HGC, valamint az FEB háromszögek) területe megegyezik.

b) Hogyan kell megválasztanunk az ABC háromszög befogóinak hosszát ahhoz, hogy a $DEFGHI$ hatszög területe a lehető legkisebb legyen, ha a befogók hosszának összege 10 cm?

4267 Az ABC (nem derékszögű) háromszög oldalai a szokásos módon a, b, c. Jelölje továbbá a háromszög A csúcsából induló magasságvonalának BC oldalegyenesre illeszkedő pontját T, az A csúcsnak a körülírt kör középpontjára vonatkozó tükörképét A'.

a) Bizonyítsuk be, hogy a CAT háromszög hasonló az $A'AB$ háromszöghöz.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszög területe T, a körülírt körének sugara pedig R, akkor:

$$T = \frac{abc}{4R}.$$

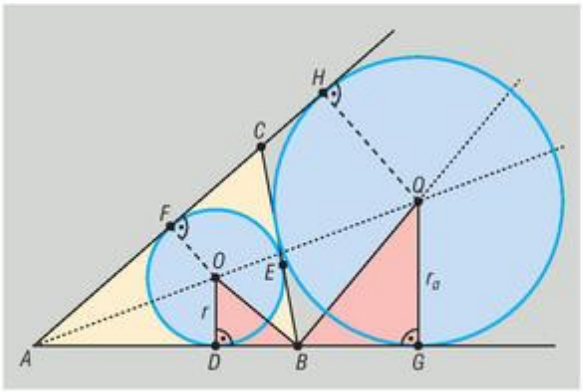
c) Igaz-e a fenti területképlet derékszögű háromszögre?

4268 (A Heron-képlet bizonyítása.) Az ABC háromszög oldalai:

$$AB = c, \quad BC = a \quad \text{és} \quad AC = b,$$

területe T, kerületének fele s, beírt körének sugara r, a BC oldalához írt körének sugara pedig r_a.

Az ábra további jelöléseit figyelembe véve oldjuk meg a következő feladatokat.



a) Mutassuk meg, hogy a háromszögbe írt kör a háromszög oldalait olyan pontokban érinti, amelyekre:

$$AD = AF = s - a, \quad BE = BD = s - b \quad \text{és} \quad CE = CF = s - c.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög BC oldalához írt kör az AB és AC egyeneseket olyan pontokban érinti, amelyekre:

$$AG = AH = s.$$

c) Igazoljuk, hogy a BOD háromszög hasonló a QBG háromszöghöz.

d) Az ABC háromszög ABO, BCO, CAO háromszögekre bontása alapján mutassuk meg, hogy:

$$T = r \cdot s.$$

e) Az $ABQC$ négyszög területének kétféle kiszámításával igazoljuk, hogy:

$$T = r_a \cdot (s - a).$$

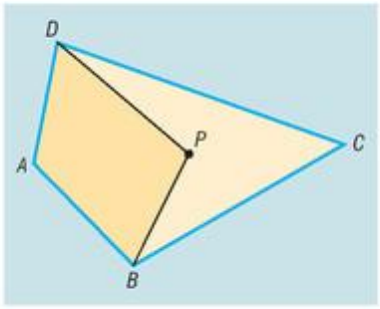
f) A BOD és QBG háromszögek hasonlóságának felhasználásával bizonyítsuk be, hogy:

$$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}.$$

4269 Pista bácsi konvex négyszög alakú $ABCD$ földjén kétféle takarmányt kíván vetni, mindkettőt ugyanakkora területen. Keressük meg a birtok belsejében azokat a P pontokat, amelyekre teljesül, hogy

$$T_{ABPD} = T_{BCDP}$$

Milyen alakzaton helyezkednek el a megfelelő P pontok?



4270 Az $ABCD$ konvex négyszöget átlói négy háromszögre bontják. Bizonyítsuk be, hogy a „szemközti" háromszögek területének szorzata megegyezik, azaz ha az átlók metszéspontját O jelöli, akkor:

$$T_{ABO} \cdot T_{CDO} = T_{BCO} \cdot T_{DAO}$$

4271 Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja O. Az ABO, BCO, illetve CDO háromszögek területe rendre 8 cm^2, 4 cm^2, illetve 2 cm^2.

a) Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét.

b) Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz.

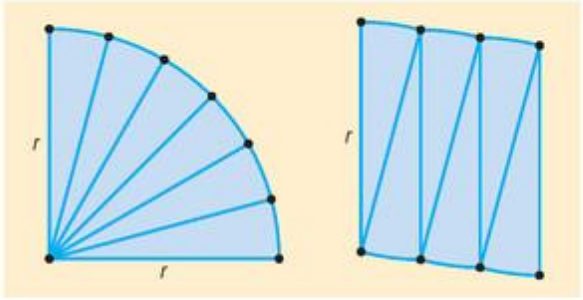
4272 Az $ABCDEFGH$ kocka alapja a 18 cm oldalú $ABCD$ négyzet, az alaplapra merőleges élei AE, BF, CG, illetve DH. A kocka FG élének felezőpontja P, a GH élé pedig Q.

a) Milyen alakzatban metszi a kockát az A, P és Q pontokra illeszkedő sík?

b) Mekkora az *a)* feladatban szereplő alakzat területe?

A kör és részeinek területe

4273 Az alábbi ábrán egy negyed körlapot 15°-onként haladva körcikkekre bontottunk, majd a kapott körcikkeket egymás mellé helyeztük. Figyeljük meg a két ábrát. Milyen „négyszög" területével közelíthető a negyed körlap területe? Mekkorák az oldalai a közelítő „négyszögnek"? Hogyan alakul a közelítés pontossága, ha a körcikkek középponti szögét csökkentjük? Észrevételeink alapján adjunk becslést a kör területére.



4274 Számítsuk ki a körcikk területét, ha sugara r, középponti szöge pedig α. Minden esetben adjuk meg a határoló körív hosszát.

a) $r = 5$ cm, $\alpha = 65°$;

b) $r = 12$ cm, $\alpha = 135°$;

c) $r = 13$ cm, $\alpha = 275°$;

d) $r = 8$ cm, $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

e) $r = 18$ cm, $\alpha = \frac{2\pi}{5}$.

4275 Mekkora a középponti szöge annak a körcikknek, amelynek területe T, sugara pedig r?

a) $T = 6{,}75$ cm^2, $r = 3$ cm;

b) $T = 16{,}36$ cm^2, $r = 2{,}5$ cm;

c) $T = 16{,}76$ cm^2, $r = 0{,}4$ dm.

4276 Mekkora területű körszeletekre bontja az 5 cm sugarú kört egy 8 cm hosszú húrja?

4277 A 12 cm sugarú kör egy húrja a kör középpontjából 65°-os szögben látszik. Milyen hosszú a húr? Mekkora a területe a húr által a körből levágott nagyobb körszeletnek?

4278 Mekkora a körgyűrű területe, ha határoló köreinek sugara

a) $r = 2{,}3$ cm, $R = 5{,}4$ cm;

b) $r = 12$ cm, $R = 15$ cm?

4279 Egy CD lemez átmérője 12 cm, a közepén található lyukas köré pedig 1,5 cm. A CD lemez tetejére gyakran helyeznek el színes képet. Legfeljebb mekkora lehet egy ilyen kép területe?

4280 Mekkora a körgyűrű területe, ha középkörének sugara 14 cm, szélessége pedig 4 cm?

4281 Két koncentrikus kör sugara 3 cm, illetve 7 cm. Mekkora területű részekre bontja a két kör által határolt körgyűrűt a két kör középköre?

4282 Egy dísztányér pereme 5 cm szélességben népi motívumokat tartalmaz. Mekkora területű a motívumokat tartalmazó rész területe, ha a tányér átmérője 28 cm?

4283 Egy 30 cm átmérőjű pizza ára 1500 Ft. Tegyük fel, hogy a pizza ára egyenesen arányos a területével. Mennyibe kerül

a) egy 30°-os középponti szöggel rendelkező pizzaszelet;

b) egy 18 cm átmérőjű pizza;

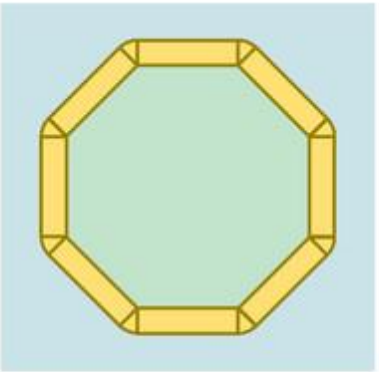
c) egy 60°-os középponti szöggel rendelkező 12 cm sugarú pizzaszelet;

d) az 1500 Ft értékű pizzából nyerhető legnagyobb, négyzet alakú pizza?

4284 Számítsuk ki az a oldalú szabályos háromszög köré írt, valamint beírt körének területarányát.

4285 Egy újságárus pavilon felülnézeti képe olyan szabályos nyolcszög, amelynek minden oldala 2 méter.

Mekkora területet kell leaszfaltozni a pavilon körül, ha az aszfaltozásnak mindenhol pontosan 50 cm szélesnek kell lennie? Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg. (➡)



4286 Két koncentrikus kör sugara r, illetve R ($R > r$). A két kör középköre a körgyűrűt két kisebb körgyűrűre bontja. Számítsuk ki a két keletkező körgyűrű területének arányát.

4287 Két koncentrikus kör sugara r, illetve R $(R > r)$. Mekkora annak a körökkel koncentrikus körnek a sugara, amelyik

a) megfelezi a két kör által határolt körgyűrű szélességét;

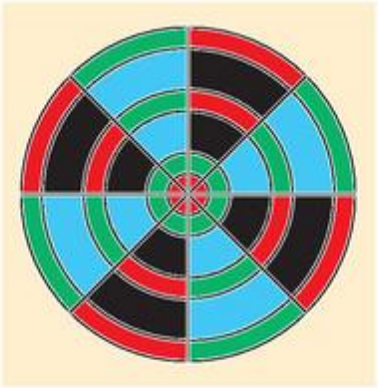
b) két olyan körgyűrűre bontja az eredetit, amelyek területe úgy aránylik egymáshoz, mint $r : R$, továbbá a középponthoz közelebb eső rész területe a kisebb;

c) megfelezi a két kör által határolt körgyűrű területét?

d) A határoló körök közül melyikhez vannak közelebb a kapott körök?

4288 Az ábrán egy speciális dartstáblát látunk. A koncentrikus körök sugara rendre:

5 cm, 10 cm, 18 cm, 23 cm, 31 cm és 36 cm.



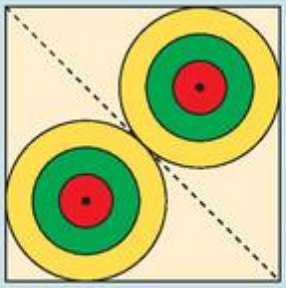
a) Mekkora a feketével jelölt részek területösszege?

b) Számítsuk ki a zölddel megjelölt részek területösszegét.

c) Mekkora valószínűséggel találja el Bence a tábla pirossal megjelölt részét?

(A színes részek határainak területe elhanyagolható.)

4289 Berci és Marci szeretnek íjjal célba lőni. Egy 2 m × 2 m-es négyzet alakú hungarocelltáblából két céltáblát vágtak ki maguknak (ld. ábra).



Egy-egy céltáblát koncentrikus körökkel három ugyanolyan széles részre osztottak, amelyeket különböző színekkel festettek be.

A találat szempontjából legértékesebb részt pirossal jelölték meg.

a) A tábla hány százaléka veszett kárba?

b) Hány cm^2 területű részt festettek pirosra a fiúk egy-egy céltáblán?

c) Hányszor akkora valószínűséggel találja el Marci a legértéktelenebb (sárga) részt, mint a legértékesebb pirosat, ha tudjuk, hogy Marci a céltáblát mindenképpen eltalálja, és a találat ugyanakkora valószínűséggel esik a tábla bármely pontjára?

4290 Barbara a szabadidejében gyakran kertészkedik. Legutóbb egy 35 cm oldalú szabályos háromszög alakú kovácsoltvas virágtartót vásárolt. Később úgy döntött, hogy új virágtartóját kör alakú terítővel takarja le.

a) Mekkora a területe a legkisebb kör alakú terítőnek, amely teljes egészében lefedi a virágtartó tetejét?

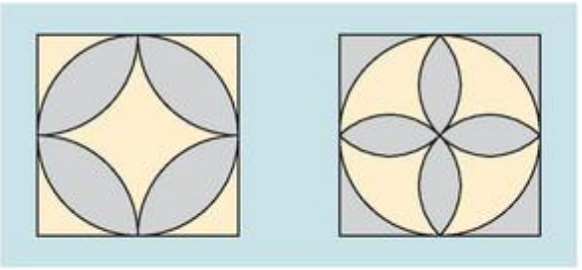
b) Mekkora az alapterülete annak a legnagyobb kör alapú cserépnek, amely még elhelyezhető a virágtartón úgy, hogy semelyik irányba ne lógjon le arról?

c) Számítsuk ki a terítő és a virágcserép alapköre sugarának arányát.

d) Hányszorosa a terítő területe a virágcserép alapterületének?

4291 Egy 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikkből a lehető legnagyobb kört szeretnénk kivágni. Számítsuk ki, hogy a körcikknek hány százaléka lesz hulladék.

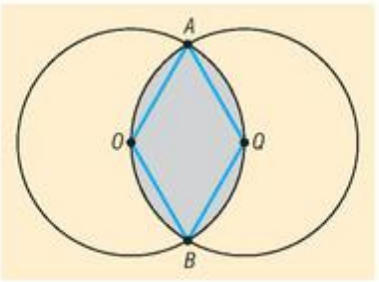
4292 Egy négyzetbe kört, valamint néhány körívet rajzoltunk. Számítsuk ki, hogy az egyes esetekben a négyzet területének hány százalékát színeztük szürkére. (Az első ábrán a négyzet egy-egy csúcsa köré írt negyedköröket, a másodikon pedig két-két szomszédos oldalfelező pont fölé emelt félköröket láthatunk.) Az eredményt egész százalékra kerekítve adjuk meg.



4293 Az O középpontú és a Q középpontú körök sugara 12 cm. A két kör további metszéspontjai A és B (ld. ábra).

a) Milyen speciális négyszög az $OAQB$ négyszög? Mekkora a területe?

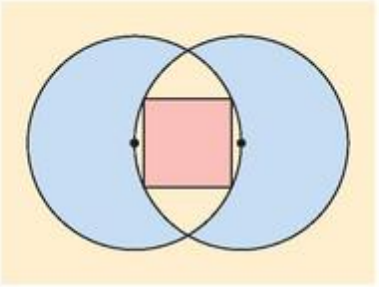
b) Mekkora a területe az ábrán szürkével megjelölt síkidomnak?



4294 Három kör (melyek egy síkban fekszenek) páronként érinti egymást. A körök sugara rendre 2 cm, 3 cm, illetve 4 cm. Számítsuk ki a körök által közrefogott síkidom területét.

4295 Béla bácsi kiskertje négyzet alakú, melynek oldalai 15 m hosszúak. Béla bácsi olyan mozgófejes öntözőberendezést használ, amelynek hatótávolsága 4 méter, azaz a rögzítés helyétől legfeljebb 4 méter távolságra található helyeket éri el. Egyik alkalommal a berendezést olyan helyen rögzítette, amely a telek két oldalától egyaránt 1 méter távolságban volt. A telek hány százalékát éri el az öntözőberendezés?

4296 Zsuzsa pogácsát készít a családjának. A vékonyra kinyújtott tésztából egy 8 cm átmérőjű kör alakú szaggatóval szaggatja ki a süteményt. Először kivág egy kör alakú részt, majd a szaggatót úgy helyezi arrébb, hogy középpontja az imént kivágott körvonalra kerüljön. Ezzel az eljárással hold alakú pogácsákat tud kiszaggatni (ld. ábra). A két pogácsa közötti részből még kivág egy lehető legnagyobb négyzet alakú pogácsát.



a) Mekkora egy hold alakú tésztadarab területe?

b) Számítsuk ki a négyzet alakú tészta területét.

A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata

4297 Egy kocka felszíne 337,5 cm^2. Mekkora a kocka

a) egy oldallapjának átlója; *b)* testátlója?

4298 Egy kocka oldallapjának átlója 20 cm hosszú. Mekkora a kocka

a) felszíne; *b)* térfogata?

4299 Egy kocka testátlója 3 centiméterrel hosszabb, mint az oldaléle. Mekkora a kocka

a) felszíne; *b)* térfogata?

4300 Egy kocka éle 5 centiméterrel hosszabb, mint egy másik kocka éle. Térfogatuk különbsége 1385 cm^3. Mekkora a két kocka éle?



4301 Egy négyzetes oszlop alapéle 5 centiméterrel rövidebb az oldalélénél. Mekkora a négyzetes oszlop térfogata, ha a felszíne 250 cm^2?

4302 Ha egy téglatest éleinek hosszát 1, 3, illetve 5 centiméterrel megnöveljük, akkor olyan kockát kapunk, amelynek térfogata 1 dm^3. Adjuk meg a téglatest felszínét.

4303 Az alumínium sűrűsége 2700 $\frac{kg}{m^3}$. Hány gramm alumíniumból készült egy 20 méter hosszú, 30 cm széles és 10 mikrométer vastag alufólia tekercs?

4304 Falazótéglát vásárolunk, amelynek méretei centiméterekben mérve $38 \times 25 \times 23{,}8$. Mekkora egy raklapnyi tégla tömege, ha sűrűsége 0,8 $\frac{kg}{dm^3}$, és egy raklapra 60 db tégla fér?

4305 Egy téglatest két éle 12 cm és 9 cm, a testátlója $\sqrt{325}$ cm hosszú. Mekkora a téglatest

a) térfogata; *b)* felszíne?

4306 Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 12 cm, magassága 20 cm. Mekkora a hasáb

a) felszíne; *b)* térfogata?

4307 Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapéle 24 cm, magassága 42 cm. Mekkora a hasáb

a) felszíne; *b)* térfogata?

4308 Egy 20 cm magas egyenes hasáb alaplapja olyan húrtrapéz, amelynek alapjai 12 cm és 6 cm, szárai 10 cm hosszúak. Mekkora a hasáb

a) felszíne; *b)* térfogata?

4309 Egy egyenes hasáb valamennyi éle egyenlő hosszú. Az alaplapja olyan rombusz, amelynek egyik hegyesszöge 60°. Mekkora a hasáb egy éle, ha a felszíne 143,3 cm^2?

4310 Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 12 cm. A palást területe az alaplap területének harminchatszorosa. Mekkora a hasáb térfogata?

4311 Egy négyzet alapú ferde hasáb oldaléle az alaplap síkjával 73°-os szöget zár be. Mekkora a hasáb térfogata, ha az alapéle 12 cm, az oldaléle 40 cm hosszú?

4312 Egy 5 cm oldalú négyzetet megforgatunk egyik oldala körül. Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata és felszíne?

4313 Egy téglalap oldalai 10 cm és 12 cm hosszúak. A téglalapot megforgatjuk a

a) rövidebbik; *b)* hosszabbik középvonala körül.

Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata és felszíne?

4314 Egy egyenes körhenger alakú poharat egy 6 cm élű kocka alakú dobozba csomagoltak. Mennyi víz fér a pohárba, ha teteje és alja illeszkedik a doboz két szemben lévő lapjára, és a pohár érinti a doboz másik négy lapját is? (A pohár falvastagságát hanyagoljuk el.)

4315 Egy egyenes körhenger alaplapjának kerülete 25,13 cm, magasságának és az alaplap sugarának összege 22 cm. Mekkora a körhenger térfogata és felszíne?

4316 Egy egyenes körhenger tengelymetszete olyan téglalap, amelynek oldalai 12 cm és 30 cm hosszúak. Mekkora lehet a körhenger térfogata?

4317 Elfér-e 2 dl kakaó abban a henger alakú bögrében, amelynek az alaplapja 7 cm átmérőjű kör, magassága pedig 10 cm?

4318 Egy egyenes körhenger palástja egy 20 cm átlójú négyzet. Mekkora a körhenger

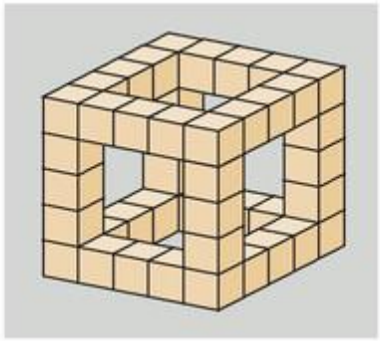
a) felszíne; *b)* térfogata?

4319 Egy egyenes körhenger felszíne 691,15 cm^2. A henger magasságának és az alapkör sugarának az összege 22 cm. Mekkora a henger térfogata?

4320 Egy egyenes körhenger magasságának hossza az alapkör átmérőjének hosszához úgy aránylik, mint 3 : 2. Mekkora a körhenger térfogata, ha tengelymetszetének területe 384 cm^2?

4321 Öt egység élű kockából az ábrán látható módon kifúrtunk három „alagutat". Mekkora az így keletkezett test

a) térfogata; *b)* felszíne?



4322 Mekkora annak a kockának a térfogata, amelynek egy csúcsa a hozzá képest kitérő testátlótól 16,33 cm távolságra van?

4323 Befektető Béla 108,8×46,2×11,7 mm méretekkel rendelkező mobiltelefonjával azonos méretű aranyrudat szeretne vásárolni. Interneten utánajárt, hogy jelenleg 1 uncia arany ára 1161 dollár (1 uncia = 31,103 gramm).

a) Az arany sűrűsége 19,3 $\frac{g}{cm^3}$. Hány gramm egy ilyen aranyrúdnak a tömege?

b) Hány forintot ér ekkor ez az aranyrúd, ha 1 dollár 182 forint?

c) Befektető Béla azt is olvasta az interneten, hogy Manhattan központjában 7000 tonna aranyat őriznek. Szívesen vásárolna belőle, de aggódik, hogy nem lenne elég helye a tároláshoz. Felesége szerint viszont az egész elférne az úszómedencéjükben, amelynek szélessége 10 m, hosszúsága 20 m és 2,5 m mély. Igaza van-e?

4324 A téglatest alakú csomagunk hosszúságának, szélességének és magasságának aránya 3 : 2 : 1. Postai szállításhoz az ábrán látható módon 260 cm hosszú zsineggel átkötöttük, amelyből a csomó megkötéséhez 20 centimétert használtunk fel.

a) Mekkorák a csomag oldalélei?

b) Hány dm^2 papír kellett a becsomagoláshoz, ha az átfedések miatt a veszteség 4%?

c) Elfér-e a csomagban egy 50 cm hosszú rúd?



4325 Egy téglatest egyik lapján az élek hosszának aránya 3 : 4. A téglatest 50 cm hosszú testátlója ezzel a lappal 30°-os szöget zár be. Mekkora a téglatest

a) felszíne; *b)* térfogata?

4326 Egy négyzet alapú egyenes hasáb két szemközti oldalélén áthaladó síkmetszetének területe $60\sqrt{2}$ cm^2, az alap- és fedőlap két szemközti élén áthaladó síkmetszet területe pedig 65 cm^2. Mekkora a hasáb

a) felszíne; *b)* térfogata?

4327 Egy szabályos ötszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm, magassága 22 cm. Mekkora a hasáb
a) felszíne; *b)* térfogata?

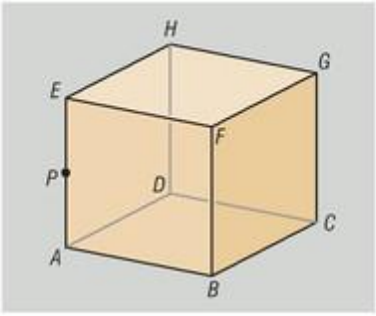
4328 Vera 8 éves születésnapjára édesanyja szabályos nyolcszög alapú egyenes hasáb alakú tortát készít. A torta magassága 8 cm lesz, és a lehető legnagyobb, ami egy 30 cm-es átmérőjű kör alakú süteményes tálcán még elfér.
a) Hány cm^2-es felületet kell csokimázzal bevonni, ha a tortának a tetejét és az oldalát fedi majd máz?
b) Hány százalékkal lesz a tortán nagyobb a bevonandó felület Vera 10 éves születésnapján, ha édesanyja ugyanerre a tálcára szabályos tízszög alapú, és 10 cm magasságú tortát fog készíteni?

4329 Egy 2,5 m magas hirdetőoszlop szabályos háromszög alapú egyenes hasáb, amelynek az oldalait és a tetejét kell befesteni. Mekkora a hasáb alapéle, ha a befestendő felület 6,28 m^2?

4330 Egy háromszög alapú egyenes hasáb magassága 20 cm. Két oldallapja 70°31'-os szöget zár be, és a területük aránya 2 : 3. Mekkora a hasáb térfogata, ha a harmadik oldallap területe 120 cm^2?

4331 Egy 3 m mély csatorna keresztmetszete olyan lefelé keskenyedő egyenlő szárú trapéz, amelynek alapjai 8 m és 6 m.
a) Ha a víz folyásának sebessége 1,4 $\frac{m}{s}$, akkor egy óra alatt legfeljebb mennyi vizet tud elvezetni a csatorna?
b) Számoljuk ki mennyi vizet vezet el a csatorna óránként, ha félig van vízzel, és a víz folyásának sebessége 0,9 $\frac{m}{s}$.

4332 Az ábrán látható kockát kettévágjuk az AE él P felezőpontján, illetve a H és G csúcsokon áthaladó síkkal. Adjuk meg az így keletkezett testek felszínét és térfogatát, ha a kocka éle 10 cm.



4333 Egy paralelepipedon két éle 15 cm és 30 cm, a közbezárt szögük 42°. Mekkora a paralelepipedon térfogata, ha a harmadik éle 24 cm hosszú, és a másik két él által meghatározott síkkal 75°-os szöget zár be?

4334 Új úszómedencénk alapja 3,6 m átmérőjű kör.
a) Mennyi idő alatt telik meg a medencénk 90 cm magasan vízzel, ha a csapból percenként 30 liter víz folyik?
b) Hány forinttal emelkedik az éves vízdíjunk, ha kéthavonta egyszer kell cserélni a vizet a medencében, és 1 m^3 víz ára 542 Ft?

4335 A kétéves Bendegúz beledobta az építőkockáját a fazékba. Hány centiméter a kocka éle, ha a 22 cm átmérőjű fazékban a húsleves szintje 1 cm-t emelkedett? (A kockát teljesen ellepi a leves.)

4336 Öntözéshez 80 cm átmérőjű 120 cm magas henger alakú hordóba gyűjtjük az ereszcsatornán kiömlő csapadékvizet. Házunk alapterülete 120 m^2, és ma 8 mm eső esett. Megtelt-e az üres hordó esővízzel, ha a tetőre hullott összes csapadékot fel tudjuk fogni?

4337 Szüreteléshez egy henger alakú felül nyitott vaskádat kívül-belül lefestenek. A kád magassága és átmérője egyaránt 150 cm, és 1 m^2 lefestéséhez 4,5 dkg festéket használnak fel. Mennyi festéket kell venni, ha háromszor szükséges a kádat átfesteni? (A kádfal vastagsága elhanyagolható.)

4338 Mekkora annak a két méter hosszú egyenes fémcsőnek a tömege, amelynek belső átmérője 5,4 cm, a falvastagsága pedig 3 mm, ha anyagának sűrűsége 7,2 $\frac{kg}{dm^3}$?

4339 Egy ferde körhenger alkotói 20 cm hosszúak, és az alaplappal 80°-os szöget zárnak be. Mekkora a henger térfogata, ha a henger magassága az alaplap sugarának kétszerese?

4340 Egyenes körhenger alakú fahasábot tengelyével párhuzamos két síkkal 3 részre hasítunk szét úgy, hogy a síkok az alapkör egy átmérőjét három egyenlő részre osztják. Mekkora a keletkezett részek tömege, ha a fahasáb alapkörének sugara 15 cm, magassága 45 cm, és a fa sűrűsége 0,71 $\frac{g}{cm^3}$?

4341 Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló három élének összege 18 cm, testátlója $\sqrt{110}$ cm. Mekkora a felszíne?

4342 Egy téglatest testátlójának a téglatest két élével bezárt szöge 23° és 72°.

a) Mekkora a testátlónak a harmadik éllel bezárt szöge?

b) Mekkora a téglatest térfogata, ha a testátló hossza 80 cm?

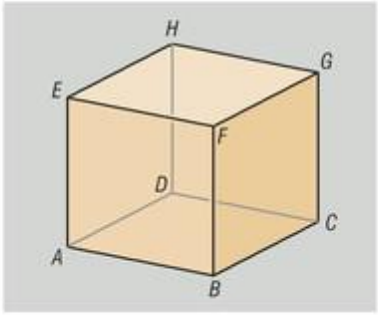
4343 Egy paralelepipedon minden oldallapja olyan rombusz, amelynek oldala 18 cm hosszú, és hegyesszöge 60°. Mekkora a paralelepipedon

a) felszíne; *b)* térfogata?

(Az ilyen testet romboédernek is szokás nevezni.)

4344 Az $ABCDEFGH$ téglatest AE, AD és AB éleinek aránya 3 : 4 : 5. Az AB él egyenesének az EC testátló egyenesétől mért távolsága 2,4 méter. Mekkora a téglatest térfogata?

4345 Egy kocka két szemközti csúcsa F és D. Tekintsük az ezen csúcsokba be nem futó élek felezőpontjait. Bizonyítsuk be, hogy ezek egy szabályos hatszög csúcsai. (➡)



4346 Egy 12 cm élű kocka minden lapján kijelöltük a középvonalak negyedelőpontjait.

Mekkora az ezen pontok mint csúcsok által meghatározott test

a) térfogata; *b)* felszíne?

4347 Egy szobor talapzata olyan szabályos háromszög alapú egyenes hasáb, amelynek alapéle 1 m, magassága pedig 1,5 m. A talapzatot szabályos tizenkétszög alapú egyenes hasábbá kívánjuk alakítani. Ehhez a hasáb magasságát megtartva az oldalélekkel párhuzamosan úgy hasítunk le belőle részeket, hogy a térfogata a lehető legnagyobb legyen.

a) Mekkora az így kapott hasáb alapéle?

b) Mekkora tömegű hulladékot kell elszállítanunk, ha a talapzat olyan bazaltból készült, amelynek sűrűsége 2,85 $\frac{kg}{dm^3}$?

4348 A 125 cm^3 térfogatú téglatestek közül melyiknek a felszíne a legkisebb?

4349 Az egyenlő felszínű egyenes körhengerek közül melyiknek a térfogata a legnagyobb?



A gúla és a kúp térfogata

4350 A következő táblázatban szabályos gúlák néhány adatát tüntettük fel. Számítsuk ki a hiányzó adatokat.

Alaplap	Alapél	Oldalél	Testmagasság	Felszín	Térfogat
négyzet	10 cm		22 cm		
négyzet	2 dm	26 cm			
négyzet		30 cm	20 cm		
négyzet			42 cm		5600 cm^3
szabályos háromszög	1,2 dm		20 cm		
szabályos háromszög	18 cm	15 cm			
szabályos hatszög	12 cm		20 cm		
szabályos hatszög	24 cm	30 cm			

4351 A Kheopsz-piramis megközelítőleg olyan szabályos négyoldalú gúla, amelynek alapéle 232 m, magassága 148 m. Határozzuk meg a piramis

a) térfogatát;

b) az alaplap és az oldallap szögét.



4352 Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 10 cm, az oldallapok az alaplappal 45°-os szöget zárnak be. Mekkora a gúla

a) felszíne; *b)* térfogata?

4353 Egy szabályos négyoldalú gúla térfogata 648 cm^3, magassága harmada az alapélnek. Mekkora a gúla

a) alapéle; *b)* felszíne?

4354 A következő táblázatban egyenes körkúpok néhány adatát tüntettük fel. Számítsuk ki a hiányzó adatokat.

Alapkör sugara	Kúp magassága	Alkotó hossza	Felszín	Térfogat
6 cm	10 cm			
	20 cm	30 cm		
7 cm		18 cm		
	2 dm			2094,40 cm^3
8 cm			452,39 cm^2	



4355 Egy egyenes körkúp magassága 10 cm, nyílásszöge 40°. Mekkora a forgáskúp

a) felszíne; *b)* térfogata?

4356 Egy talpas koktélospohár magassága 24 cm. A felső része egyenes körkúp alakú, amelynek magassága a teljes magasság kétharmada. Legfeljebb hány deciliter ital tölthető a pohárba, ha a teteje 12 cm átmérőjű kör?

4357 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 12 cm és 5 cm. Forgassuk meg a derékszögű háromszöget a

a) rövidebbik; *b)* hosszabbik befogója körül.

Mekkora az így keletkezett forgástestek felszíne és térfogata?

4358 Egy forgáskúp kiterített palástja 8 cm sugarú 150°-os középponti szögű körcikk. Mekkora a forgáskúp

a) alapkörének sugara; *b)* nyílásszöge;

c) térfogata; *d)* felszíne?

4359 Mekkora annak a kúpnak a térfogata, amelynek palástja egy 100 cm^2 területű negyed körcikk?

4360 Mekkora a forgáskúp kiterített palástjának középponti szöge, ha alkotója 40 cm, magassága 32 cm?

4361 Egy egyenes körkúp tengelymetszete olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárai 28 cm hosszúak, és az általuk bezárt szög 30°. Mekkora a forgáskúp

a) felszíne; *b)* térfogata?

4362 Egy szabályos négyoldalú gúlának minden éle 18 cm. Mekkora a gúla

a) felszíne; *b)* térfogata?

4363 Egy szabályos négyoldalú gúla térfogata 147,8 cm^3. Ha a gúlát az alaplapra merőleges, annak egyik középvonalára illeszkedő síkkal elmetsszük, a síkmetszet szabályos háromszög lesz. Mekkora a gúla

a) magassága; *b)* oldaléle; *c)* felszíne?

4364 Egy szabályos háromoldalú gúla felszíne 202,65 cm^2. Egy oldallapjának területe az alaplap területének $\frac{3}{4}$ része. Mekkora a gúla térfogata?

4365 Egy $ABCD$ tetraéder ABC alaplapja olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelyben $AC = BC = 10$ cm. A CD él merőleges az alaplap síkjára, valamint az ABC alaplap és az ABD oldallap 45°-os szöget zár be. Mekkora a tetraéder felszíne és térfogata?

4366 Kerti pavilonunk alapja 2 m oldalú szabályos ötszög, amelyen lévő tetőnek a lejtésszöge minden oldalról 48°. Hány darab cserepet kell vásárolnunk a tető befedéséhez, ha 1 négyzetméterre 10 darabot kell számolnunk, és a veszteség 10%?

4367 Egy téglalap alapú gúla alaplapjának élei 12 cm és 20 cm hosszúak. A gúla csúcsából az alaplapra bocsátott merőleges talppontja a téglalap átlóinak metszéspontja. Ha a gúla térfogata 1200 cm^3, akkor mekkora a gúla

a) felszíne; *b)* oldaléleinek az alaplappal bezárt szöge?

4368 Egy 20 cm élű kocka minden lapjára kifelé egy-egy 30 cm magas szabályos négyoldalú gúlát állítunk. Mekkora az így keletkezett test

a) felszíne; *b)* térfogata?



4369 Egy 30 cm élű kocka minden csúcsából levágunk egy-egy olyan tetraédert, amelynek egyik csúcsa a kocka csúcsa, a másik három pedig ezen csúcsba futó éleknek a csúcshoz közelebbi harmadolópontjai. Mekkora az így keletkezett test

a) felszíne; *b)* térfogata?

4370 Egy gúla magassága 15 cm. Az alaptól 8 cm távolságban levő, az alappal párhuzamos síkmetszet területe 100 cm^2. Mekkora a gúla térfogata?

4371 A pattogatott kukoricát egyenes körkúp alakú tölcsérekben árulják. Három tölcsért készítenek egy 30 cm sugarú körlapból úgy, hogy azt három egybevágó körcikkre vágják, majd összeragasztják.

a) Mekkora lesz egy-egy tölcsér magassága?

b) Legfeljebb hány liter pattogatott kukorica fér egy ilyen tölcsérbe?

4372 Egy teherautó 2 m^3 sódert öntött le az udvarunkba egy 2 m oldalú négyzet alakú fólia közepére. A sóder olyan forgáskúp alakot vett fel, amelynek nyílásszöge 100°.

a) Elfért-e a sóder a kikészített fólián? *b)* Milyen magas a sóderkúp?

4373 Egy háromszög két oldalának hossza 42 cm és 30 cm, az általuk bezárt szög 100°. Forgassuk meg a háromszöget a harmadik oldala körül. Mekkora az így keletkezett forgástest

a) felszíne; *b)* térfogata?

4374 Egy húrtrapéz alapjainak hossza 30 cm és 60 cm, magassága 15 cm. Megforgatjuk a

a) hosszabbik; *b)* rövidebbik alapja körül.

Mekkora az így keletkezett forgástestek térfogata és felszíne?

4375 Egy egyenes körkúp tengelymetszete 5,56 dm^2. Mekkora a térfogata, ha alkotója 4 dm?

4376 Egy 20 cm alapsugarú és 40 cm magasságú forgáskúpból egy 12 cm alapsugarú forgáskúp alakú részt kivágunk. A két kúpnak közös a tengelye, és egyenlő a nyílásszöge. Mekkora a megmaradt rész térfogata?

4377 Egy ferde körkúp leghosszabb alkotója 40 cm, legrövidebb alkotója 32 cm, az alapkör sugara 10 cm. Mekkora a kúp

a) magassága; *b)* térfogata?

4378 Az $ABCD$ gúla ABC alaplapja 18 cm oldalú szabályos háromszög, a gúla oldalélei $6\sqrt{6}$ cm hosszúak. Az AB és AC élek felezőpontjain át az AD éllel párhuzamos síkot fektetünk.

a) Adjuk meg a síkmetszet területét.

b) Számítsuk ki, hogy ez a sík mekkora térfogatú részekre osztja a gúlát.

4379 Az $ABCD$ téglalapban $AB = 16$ cm, $BC = 12$ cm. A téglalap síkjára az A és C pontokban állítsunk egy-egy merőlegest, és az egyik félsíkban a merőlegeseken vegyük fel az AM és CN szakaszokat. Az M és N pontokra teljesül, hogy az MDB, illetve az NBD sík a téglalap síkjával 30°, illetve 60° szöget zár be. Adjuk meg az $MNBD$ tetraéder térfogatát.

4380 Házunk alapja egy 10 m széles és 20 m hosszú téglalap. A tető minden oldalról 60°-os szöget zár be a vízszintessel.

a) Hány légköbméter a padlás térfogata?

b) Egészekre kerekítve hány m^2-nyi cserepet kell vásárolnunk a tetőfedéséhez, ha 18% a hulladék?

c) Azokat az éleket, ahol a tető síkja megtörik, kúpcseréppel fedjük le. Hány cserepet vegyünk, ha 1 méterre 5 cserepet számolunk, és praktikus okokból a kiszámolt mennyiségen felül 20%-kal több cserepet vásárolunk?



4381 Üvegből készült, szabályos négyoldalú gúla alakú, belül üreges zárt ajándéktárgy belső magassága 10 cm. Ha az alaplapjára állítjuk, a benne levő színes folyadék a gúla magasságának feléig ér. Milyen magasan áll benne a folyadék, ha megfordítjuk, és a csúcsával lefelé tartjuk úgy, hogy az alaplapja ismét vízszintes legyen,?

4382 Hányadrésze egy tetraéder lapjainak súlypontjai által meghatározott tetraéder felszíne és térfogata az eredeti tetraéder felszínének és térfogatának?

4383 Egy 12 cm élhosszúságú szabályos tetraédert egy olyan síkkal kettévágunk, amelyik a tetraéder egyik élét tartalmazza, és a vele kitérő élt 2 : 1 arányban osztja. Adjuk meg az így keletkezett testek

a) térfogatát; *b)* felszínét.

4384 Egy 25 cm magas forgáskúp alapkörének sugara 10 cm. A kúp csúcsán áthaladó sík az alapkör síkjával 80°-os szöget képez, és kettévágja a kúpot. Számítsuk ki a részek térfogatát.

4385 Egy egyenlő magasságú forgáshenger és forgáskúp alapköre egyenlő sugarú. Mekkora a forgáskúp nyílásszöge, ha felszínük aránya 8 : 5?

4386 Egy egyenes körkúp felszíne 634,86 cm^2, tengelymetszetének területe 90 cm^2. Mekkora a térfogata?

4387 Bakelitből készült egyenes körkúp alakú belül üreges test falvastagsága mindenütt 3 cm. A kúp 40 cm magas, és az alapkörének sugara 30 cm.

a) Mekkora a test tömege, ha a bakelit sűrűsége 1,3 $\frac{kg}{dm^3}$?

b) Milyen mélyen merül el a vízben, ha csúcsával lefelé fordítjuk?

4388 Adott egy 20 cm sugarú bádog körlap, amelyből tölcsért kell készítenünk. Mekkora középponti szögű körcikket kell kivágnunk ahhoz, hogy ezt egy kúp palástjává összehajtva, a kúp térfogata a legnagyobb legyen?

A csonka gúla és a csonka kúp

4389 Egy négyzet alapú csonka gúla alapéle 20 cm, fedőlapjának éle 15 cm, magassága 30 cm. Mekkora a csonka gúla térfogata?

4390 Egy szabályos háromszög alapú csonka gúla alapéle 18 cm, fedőlapjának éle 12 cm, magassága 10 cm. Mekkora a csonka gúla térfogata?

4391 Egy csonka gúla fedőlapjának területe 50 cm^2, az alaplap területe 1250 cm^2. Mekkora a magassága, ha a térfogata 15 500 cm^3?

4392 Egy tartály lefelé keskenyedő csonka gúla alakú. Felső lapja téglalap, amelynek oldalai 18 dm és 20 dm hosszúak, az alsó élek hossza 9 dm és 10 dm. Hány liter folyadék fér bele, ha mélysége 1 m?

4393 Egy vászonnal bevont lámpabura szabályos hatoldalú csonka gúla palástja. Hány cm^2 vászon szükséges a bura elkészítéséhez, ha az alapél és oldalél 20 cm, a fedőlap éle 15 cm hosszú?

4394 Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla felszíne 905 cm^2. Az alapél 10 cm, a fedőlap éle 5 cm. Mekkora a csonka gúla

a) egy oldallapjának a magassága; *b)* oldaléle?

4395 Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla alapéle 10 cm, térfogata 584 cm^3. Mekkora a fedőlap éle, ha a csonka gúla magassága 8 cm?



4396 A fez csonka kúp formájú fejfedő, amelyen általában bojt lóg. Milyen magas az a fez, amelynek az alsó nyílása 52 cm, a teteje 28 cm kerületű kör, és a csonka kúp alkotója 25 cm?



4397 Egy egyenes csonka kúp alapkörének sugara 10 cm, fedőlapjának sugara 7 cm, magassága 12 cm. Mekkora a csonka kúp

a) alkotója; *b)* felszíne; *c)* térfogata?

4398 Egy egyenes csonka kúp alapkörének sugara 15 cm, alkotója 10 cm, magassága 8 cm. Mekkora a csonka kúp

a) fedőlapjának sugara; *b)* felszíne; *c)* térfogata?

4399 Egy egyenes csonka kúp alapkörének sugara 20 cm, fedőlapjának sugara 7 cm, térfogata 6168 cm^3. Mekkora a csonka kúp

a) magassága; *b)* alkotója; *c)* felszíne?

4400 Egy egyenes csonka körkúp 20 cm hosszú alkotója az alaplappal 60°-os szöget zár be. Az alaplap sugara 30 cm. Mekkora a csonka kúp

a) felszíne; *b)* térfogata?

4401 Egy húrtrapéz alapjai 10 cm és 6 cm, szárai 8 cm hosszúak. A húrtrapézt megforgatjuk a szimmetriatengelye körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

4402 Egy egyenes csonka kúp alapkörének sugara 23 cm, fedőlapjának sugara 17 cm, felszíne pedig 4454,78 cm^2. Mekkora a csonka kúp

a) alkotója; *b)* magassága; *c)* térfogata?

4403 Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla alapéle 12 cm, a fedőlap éle 6 cm, a testmagassága 8 cm. Mekkora a csonka gúla

a) oldallapjának a magassága;

b) oldaléle;

c) oldallapjának és alaplapjának a hajlásszöge;

d) térfogata;

e) felszíne?

4404 Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla alapéle 12 cm, a fedőlap éle 4 cm, oldaléle 15 cm. Mekkora a csonka gúla

a) oldallapjának a magassága;

b) testmagassága;

c) oldalélének és az alaplapjának a hajlásszöge;

d) térfogata;

e) felszíne?

4405 Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla felszíne 1264 cm^2. Az alapél 18 cm, a fedőlap éle 10 cm hosszú. Mekkora a csonka gúla térfogata?

4406 Egy szabályos négyzet alapú csonka gúla alapterülete 36 cm^2, fedőlapja feleakkora területű. Mekkora egy oldallapjának területe, ha térfogata 180 cm^3?

4407 Egy szabályos négyzet alapú csonka gúla fedőlapjának területe az alaplap területének negyede. A palást területe a fedőlap területének ötszöröse. Mekkora a csonka gúla térfogata, ha az alapéle 20 cm?

4408 Virágtartó edényünk lefelé keskenyedő szabályos négyzet alapú csonka gúla. Az aljának az éle 14 cm, felső éle 20 cm. Hány liter virágföld van benne, ha a 20 centiméteres magasságának feléig töltjük meg?

4409 Egy egyenes csonka kúp alakú bádogvödör alapkörének átmérője 20 cm, felső körének átmérője 26 cm, magassága 36 cm.

a) Hány liter víz fér bele? (Az eredményt egészre kerekítve adjuk meg.)

b) Mennyi bádog kell 1000 vödör elkészítéséhez, ha az összeállítás során 18% hulladék termelődik?

4410 Egy egyenes csonka kúp alapkörének sugara 12 cm, alkotója 10 cm, felszíne 1130,97 cm^2. Mekkora a csonka kúp

a) fedőlapjának a sugara; *b)* térfogata?

4411 Egy csonka kúp palástja olyan körgyűrűcikk, amelyet egy 15 cm és egy 30 cm sugarú körív határol, és középponti szöge 150°. Mekkora a csonka kúp

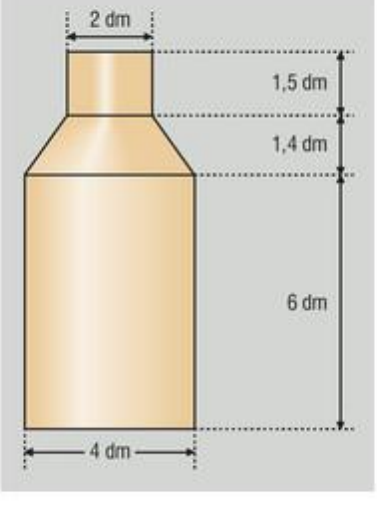
a) felszíne; *b)* térfogata?

4412 Egy 6 dm magas egyenes csonka kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal magasságának felénél két részre vágunk. Mekkora az így levágott felső csonka kúp felszíne és térfogata, ha az eredeti csonka kúp alapkörének sugara 30 cm, és a fedőlap sugara 20 cm?

4413 A mellékelt ábrán egy mézesbödön oldalnézetét láthatjuk.

a) Hány kilogramm méz fér bele, ha a méz szintje legfeljebb a perem alatt 2 centiméterre lehet, és a méz sűrűsége 1,4 $\frac{kg}{dm^3}$?

b) Adjuk meg, hogy mennyi bádog kell a bödön elkészítéséhez, ha az összeállításakor az illesztések miatt 8% anyagtöbblettel kell számolni.



4414 Egy gúlát az alaplapjával párhuzamos síkkal úgy vágunk ketté, hogy a keletkezett csonka gúla térfogata 1000π cm^3. Milyen magas ez a csonka gúla, ha az eredeti gúla magassága 40 cm, az alaplap területe pedig 300π cm^2?

4415 Egy vízgyűjtő medence lefelé keskenyedő szabályos hatoldalú csonka gúla alakú. Mélysége 6 m, az alapéle 9 m, a fedőlap éle 12 m. Mennyi víz van benne, ha magasságának

a) harmadáig; *b)* kétharmadáig van benne víz?



4416 Egy egyenes csonka gúla alaplapja $ABCD$, fedőlapja $A'B'C'D'$ négyzet. Két szemben lévő AA' és CC' oldalélén áthaladó síkmetszetének területe a palástja területének harmada, valamint az AC' testátló merőleges az $A'C$ testátlóra.

a) Mekkora a csonka gúla alaplapjának és az oldallapjának a hajlásszöge?

b) Mekkora a csonka gúla térfogata, ha magassága 30 cm?

4417 Egy szabályos háromszög alapú csonka gúla formájú levélnehezék bronzból készült. Egy oldallapjának területe az alaplap és fedőlap területének mértani közepe. Az alaplap éle 10 cm, a fedőlap éle 8 cm.

a) Mekkora a levélnehezék oldallapjának a magassága?

b) Mekkora a levélnehezék tömege, ha a bronz sűrűsége $8\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$?

4418 Egy csonka kúpszerű testet az alaplappal párhuzamosan, a két alaplaptól egyenlő távolságra egy síkkal elmetszünk. Bizonyítsuk be, hogy a kimetszett síkidom területe a két alapterület számtani és mértani közepének a számtani közepe.

4419 Egy csonka kúp alaplapjának, illetve fedőlapjának a sugara R, illetve r. A csonka kúpot egy, az alaplappal párhuzamos síkkal két egyenlő térfogatú részre vágjuk. Mekkora az így keletkezett síkmetszet sugara?

4420 Egy egyenes csonka kúp alaplapjának, illetve fedőlapjának a sugara R, illetve r. A csonka kúpot egy, az alaplappal párhuzamos síkkal két részre vágjuk úgy, hogy az a palást területét felezze. Mekkora az így keletkezett síkmetszet sugara?

4421 A háziasszony egy üvegtálba két liter tejet öntött. A tál egyenes csonka kúp alakú, amely 9 cm magas, alapkörének átmérője 20 cm, fedőkörének átmérője 30 cm. Milyen magasan áll a tej az üvegtálban? (Az edény falvastagságát hanyagoljuk el.)

A gömb térfogata és felszíne

4422 Otto Guericke 1657-ben mutatta be világhíres kísérletét, amellyel bizonyította a vákuum erejét. Ebben két egymáshoz illesztett 35 cm átmérőjű félgömbből kiszivattyúzta a levegőt (magdeburgi féltekék). A félgömböket 12 lóval is alig bírta széthúzatni. Mekkora a két félgömbből álló gömb térfogata? (➡)



4423 Mekkora a gömb felszíne, ha térfogata

a) $200\ \text{cm}^3$; *b)* $1400\ \text{cm}^3$?

4424 Mekkora a gömb térfogata, ha felszíne

a) $1200\ \text{cm}^2$; *b)* $630\ \text{cm}^2$?

4425 Egy gömb sugarát háromszorosára növeltük. Hányszorosára nőtt a

a) felszíne; *b)* térfogata?

4426 Hány négyzetméter polimerizált szövetből készült az az ejtőernyő, amelyik 6 m sugarú félgömb alakú, és a felhasznált anyag 20%-a veszteség?

4427 Egy 8 cm sugarú ólomgömbből három egyenlő sugarú gömböt öntöttünk. Hányszorosa a három gömb felszínének az összege az eredeti gömb felszínének?

4428 Pisti zsebében 4 darab 2 cm átmérőjű, Zoli zsebében 2 darab 4 cm átmérőjű üveggolyó van. Kinek a zsebét húzza le jobban a benne levő üveggolyó? (A golyók sűrűsége ugyanakkora.)

4429 Egy középkori ágyúgolyó átmérője a korrózió miatt 2%-kal csökkent. Hány cm^3-rel csökkent az ágyúgolyó térfogata, ha most a sugara 6,8 cm?

4430 Jelenleg a Föld felszínének harmada szárazföld. Hány km^2 az óceánok, tengerek területe? (A Földet tekintsük gömb alakúnak, és vegyük a sugarát 6378 km-nek.)

4431 Hány kilométert utazunk akkor, ha a Föld Ráktérítőjén haladva 2 hosszúsági fokot teszünk meg? (A Ráktérítő a 23°26'22" szélességi kör, és a Föld sugara 6378 km.)

4432 A Vénusz bolygó felszíne a Föld felszínének 0,9-szerese.

a) Mekkora a Vénusz sugara?

b) Hányszorosa a Föld térfogatának a Vénusz térfogata?

(A Föld sugara 6378 km, és mindkét bolygót tekintsük gömbnek.)

4433 Egy víztartály alul félgömbben végződő 5 m átmérőjű henger. Milyen magas a hengeres rész, ha a tartályba 100 m^3 víz fér?

4434 Mekkora annak a hidroglóbusznak a belső átmérője, amely 1 hétig képes biztosítani napi 50 m^3 vízmennyiséget?



4435 Milyen távolságra halad a 26 cm sugarú gömb középpontjától az a sík, amelyiknek a gömbbel való síkmetszete 100π cm^2 területű?

4436 Egy gömböt a középpontjától 4 centiméterre haladó síkkal elmetszettünk. Mekkora a gömb térfogata és a felszíne, ha a síkmetszet területe

a) 9π cm^2; *b)* 3421 cm^2?

4437 Két gömb felszínének összege 2060,88 cm^2, sugaraik különbsége 2 cm. Mekkora a két gömb sugara?

4438 Két gömb térfogatának különbsége 4255,81 cm^3, sugaraik különbsége 2 cm. Mekkora a két gömb sugara?

4439 Egy fából készült téglatest éleinek hossza 8 cm, 10 cm és 12 cm. A téglatest csúcsai körül szerkesztünk egy-egy 3 cm sugarú gömböt, majd a gömböknek a téglatestbe eső részeit a téglatestből kiesztergáljuk. Mekkora a megmaradt test térfogata?

4440 Milyen távolságra van az 1000 cm^3 térfogatú gömb középpontjától az a sík, amelyik a gömbből feleakkora területű kört metsz ki, mint amekkora a gömb főkörének területe?

4441 Adjuk meg a tér azon pontjainak halmazát, amelyekből egy 10 cm sugarú gömbhöz húzott érintőszakaszoknak a hossza is 10 cm.

4442 Adott két koncentrikus gömb. Vegyük a kisebbik gömbnek egy érintősíkját, ez a nagyobbikat egy körben metszi. Bizonyítsuk be, hogy annak a gömbnek a felszíne, amelynek főköre ez a kör, egyenlő a másik két gömb felszínének a különbségével.

4443 Egy alumíniumból készült üreges gömb külső átmérője 10 cm, falvastagsága 6 mm.

a) Mekkora az üreges gömb tömege, ha az alumínium sűrűsége 2,7 $\frac{kg}{dm^3}$?

b) Hány százalékkal nagyobb a külső gömbfelszín, mint a belső?

4444 Egy tekegolyó 1,4 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ sűrűségű műanyagból készült. Hányszor fordul meg az egyenes vonalban guruló tekegolyó a 16,5 m hosszú pályán, ha tömege 2,8 kg?

4445 Gömb alakú szilvás gombócokat készítünk, amelyek átmérője 4 cm. Közülük 20 darabot egy olyan fazékban szeretnénk megfőzni, amelynek átmérője 20 cm és magassága 28 cm. Milyen magasan töltsük meg a fazekat vízzel, ha azt akarjuk, hogy miután beletettük a gombócokat a vízbe, a víz a fazék felső peremétől számítva 4 cm magasan álljon benne? (A gombócokat ellepi a víz.)

4446 Mekkora a gömb térfogata, ha két egymástól 17 centiméterre lévő párhuzamos körmetszetének sugara 5 cm és 12 cm?

4447 Egy csapágy külső gyűrűjének belső átmérője 54 mm.

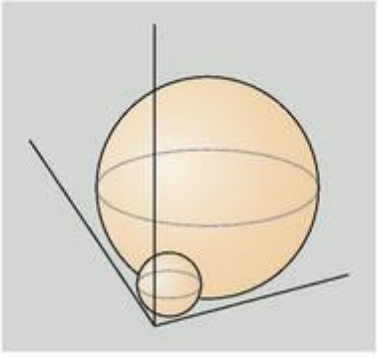
a) Legfeljebb hány darab 5 mm átmérőjű csapágygolyót lehet elhelyezni a csapágyba?

b) Adjuk meg a csapágyba elhelyezhető 5 mm átmérőjű csapágygolyók tömegének az összegét, ha azokat olyan fémből készítették, amelynek sűrűsége 7,14 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.



4448 Egy asztallapra 3 biliárdgolyót helyeztünk el úgy, hogy azok páronként érintsék egymást, majd ezek tetejére egy negyediket tettünk úgy, hogy az az előző három mindegyikét érintse. Milyen magas az így létjött „gúla”, ha a biliárdgolyó átmérője 52,4 mm?

4449 Az asztalfiók egyik sarkában egy 7 cm átmérőjű teniszlabda áll, amely érinti a fiók oldalfalait. Mekkora annak a golyónak a sugara, amelyik a teniszlabda és a fiók sarka között van, és érinti a teniszlabdát és a fiók oldalfalait is?



Egymásba írt testek (kiegészítő anyag)

4450 Egy gömb köré írt kocka térfogata 1728 cm^3. Mekkora a gömb

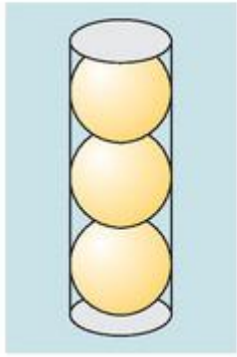
a) felszíne; *b)* térfogata?

4451 Egy gömbbe írt kocka felszíne 864 cm^2. Mekkora a gömb

a) felszíne; *b)* térfogata?

4452 Egy téglatest köré 30 cm sugarú gömb írható. Mekkorák a téglatest élei, ha az élek hosszának aránya 2 : 3 : 4?

4453 Egy négyzetes oszlop köré írt gömb sugara 40 cm. Mekkora a négyzetes oszlop térfogata, ha az alapél és a magasság hosszának aránya 2 : 3?



4454 Három darab 4 cm átmérőjű gömb alakú karácsonyfadíszt henger alakú műanyag dobozba csomagolnak az ábrán látható módon. Mekkora a doboz palástjának a területe?

4455 Egy 8 cm átmérőjű 15 cm magasságú egyenes körhenger alakú gyertyát téglatest alakú papírdobozba csomagolnak. A gyertya alja és teteje illeszkedik a téglatest két szemben lévő lapjára, és palástja érinti a téglatest egy-egy oldallapját. Hány cm^2 a doboz felszíne?

4456 Egy 20 cm élű kockába olyan körkúpot írunk, amelynek kör alaplapja illeszkedik a kocka egyik lapjára, és érinti annak oldalait. Mekkora a körkúp

a) felszíne; *b)* térfogata,

ha a kúp csúcsa a kocka szemben lévő lapjának középpontja?

4457 Egy négyzetes oszlop alapéle 24 cm, magassága 10 cm. A négyzetes oszlopba egy olyan négyzet alapú gúlát írunk, amelynek alaplapja a négyzetes oszlop alaplapja, a szemben lévő csúcsa pedig a négyzetes oszlop fedőlapjának egyik csúcsa. Mekkora a gúla

a) felszíne; *b)* térfogata?

4458 Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 10 cm, magassága 12 cm. Mekkora a belőle csiszolható legnagyobb térfogatú körkúp

a) felszíne; *b)* térfogata?

4459 Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasábba gömb írható. Mekkora a hasáb magassága, ha alapéle 24 cm?

4460 Hogyan aránylik egymáshoz annak a három gömbnek a

a) felszíne; *b)* térfogata,

amelyek közül az elsőt egy a élű kockába, a másodikat a kocka köré írjuk, a harmadik pedig érinti a kocka éleit?

4461 Egy téglatest köré $5\sqrt{2}$ cm sugarú gömb írható. Mekkora a téglatest térfogata, ha két oldallapjának területe 48 cm^2 és 60 cm^2?

4462 Egy szabályos hatszög alapú gúla alapéle 15 cm, oldaléle 20 cm. Lehető legnagyobb térfogatú kúpot akarunk belőle esztergálni. Hány százalék a hulladék?

4463 Egy szabályos négyzet alapú gúla magassága 30 cm, alapéle 12 cm.

a) Mekkora a gúlába írható gömb sugara?

b) Mekkora a gúla köré írt gömb sugara?

4464 Egy szabályos négyzet alapú gúla magassága 30 cm, az alaplap és az oldallap bezárt szöge 60°.

a) Mekkora a gúlába írható gömb sugara?

b) Mekkora a gúla köré írt gömb sugara?

4465 Egy szabályos négyzet alapú gúla magassága 32 cm, a gúla lapjait érintő gömb sugara 8 cm. Mekkora a gúla térfogata?

4466 Egy szabályos háromszög alapú gúla magassága 20 cm, alapéle 18 cm.

a) Mekkora a gúlába írható gömb sugara?

b) Mekkora a gúla köré írt gömb sugara?



4467 Egy háromszög alapú $ABCD$ gúla alaplapja olyan ABC derékszögű háromszög, melynek befogói $AC = BC = 12$ cm hosszúak. A gúla DC éle merőleges az alaplapra, és 10 cm hosszú. Mekkora a gúlába írható gömb sugara?

4468 Egy szabályos négyzet alapú gúla alapéle 15 cm, magassága 10 cm.

a) Mekkora a gúla oldalélének az alaplappal bezárt szöge?

b) A gúlába olyan kockát helyezünk el, amelynek egyik lapja a gúla alaplapjára, négy csúcsa pedig a gúla egy-egy oldalélére illeszkedik. Mekkora ennek a kockának az éle?

4469 Egy 10 cm sugarú gömbbe olyan hengert írunk, amelynek alapköre és fedőköre illeszkedik a gömb felszínére. Mekkora a henger térfogata, ha palástjának területe kétszerese az alaplap területének?

4470 Egy gömbbe olyan egyenes körkúpot írtunk, amelynek nyílásszöge 50°. A gömb felszíne 400π cm^2.

a) Hány cm^2 a kúp felszíne?

b) Mekkora területű kört metsz ki a kúpból a gömb középpontján átmenő, a kúp alaplapjával párhuzamos sík?

4471 Egy vágódeszkán lévő téglatest alakú sajt alaplapjának élei 8 cm és 10 cm. Legfeljebb mekkora a sajt magassága, ha lefedhető egy 30 cm belső átmérőjű félgömb alakú üvegfedővel úgy, hogy annak főköre illeszkedik a vágódeszka síkjára?

4472 Egy asztalon álló vasgolyót megvilágítunk egy, a golyó középpontja fölött az asztallaptól 24 cm-re levő pontszerű fényforrással. A golyó árnyéka egy 10 cm sugarú kör. Határozzuk meg a golyó átmérőjét.

4473 Egy egyenes csonka kúpba ρ sugarú gömb írható úgy, hogy a gömb érinti a csonka kúp alap- és fedőkörét, továbbá egy körben a palástját is. Mekkora a csonka kúp felszínének és térfogatának hányadosa?

4474 Pisti homokozó vödre csonka kúp alakú. A vödörbe beletette a 12 cm átmérőjű labdáját, amely érinti a vödör alját, és egy körben a vödör oldalát is. Mekkora a vödör magassága, ha a vödör aljának az átmérője 10 cm, a felső nyílásának az átmérője 16 cm?

4475 Egy forgáskúp felszíne kétszer akkora, mint a beírt gömb felszíne. Mekkora a kúp nyílásszöge?

4476 Egy forgáskúpba írt gömb térfogata harmada a kúp térfogatának. Hanyadrésze a gömb felszíne a kúp felszínének?

4477 Egy talpas koktélospohár felső része olyan forgáskúp, amelynek magassága 12 cm, alkotója 13 cm. A pohárban 7,5 cm magasan áll a koktél, amikor beleteszünk egy 2 cm átmérőjű gömb alakú ringlószilvát. Mennyivel emelkedik meg a pohárban a koktél szintje?

4478 Számítsuk ki egy 30 cm oldalélű oktaéder

a) oldallapjait érintő;

b) csúcsain áthaladó gömb sugarát.

Vegyes feladatok I.

4479 A $3 \times 3 \times 3$-as bűvös kockánk leesett, és minden csúcsánál kiesett belőle egy-egy $1 \times 1 \times 1$-es kis kocka. Számoljuk meg, hogy hány csúcsa, éle, lapja van a bűvös kockából visszamaradó testnek.

4480 Egy gúla alaplapja szabályos hatszög, amelynek oldalai 3 cm hosszúak. A gúla magasságának felezőpontján keresztül az alaplappal párhuzamos síkot fektetünk. Mekkora területű síkidomban metszi a sík a gúlát?

4481 Számítsuk ki a T területű háromszög szögeit és ismeretlen oldalának hosszát, ha a szokásos jelöléseket használva

a) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm és $T = 12$ cm^2;

b) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm és $T = 6$ cm^2.

4482 Mekkora szöget zárhat be egymással annak a paralelogrammának a két szomszédos oldala, amelynek területe 100 cm^2, két oldalának hossza pedig

a) $a = 10$ cm és $b = 10$ cm;

b) $a = 10$ cm és $b = 50$ cm?

4483 Mekkora a körgyűrűcikk szélessége és középponti szöge, ha területe 45 cm^2, határoló köríveinek hossza 14 cm, továbbá kisebb körívének sugara 7 cm?

4484 Egy kartonból kivágott háromszög oldalai 13 cm, 14 cm, illetve 15 cm.

a) Számítsuk ki a háromszög területét.

b) Mekkora a területe annak a legkisebb kör alakú kartonlapnak, amelyből a háromszöget kivághattuk?

c) Mekkora a háromszögből kivágható legnagyobb kör területe?

4485 Az $ABCD$ négyszög oldalai $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 5$ cm és $DA = 3$ cm, a négyszög AC átlójának hossza $2\sqrt{13}$ cm.

a) Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét.

b) Van-e olyan kör, amelyre a négyszög mind a négy csúcsa illeszkedik?

c) Mekkora a területe a legkisebb olyan körnek, amellyel a négyszöget teljes egészében le lehet fedni?

d) Igaz-e, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz?

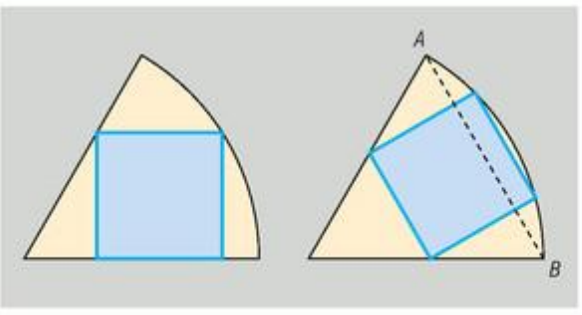
4486 Egy kör alakú futópálya mind a négy futósávja 1 méter széles. Egy-egy futósáv hosszát a középkörének hosszával adjuk meg. A legbelső futósáv hossza 400 méter.

a) Hány méter hosszú a futópálya többi futósávja? Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

b) Hány m^2 salak borítja az egyes futósávokat?

4487 Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes egy háromszöget két olyan részre bont, amelyeknek területe és kerülete is megegyezik, akkor az egyenesnek van olyan pontja, amely a háromszög oldalaitól ugyanakkora távolságra található.

4488 Egy 60°-os középponti szöggel rendelkező 12 cm sugarú körcikkbe kétféleképpen írunk négyzetet. Melyik esetben lesz nagyobb a négyzet területe? (A második ábrán a négyzet két oldala párhuzamos az AB szakasszal.)



4489 Egy fából készült tömör kocka éleinek centiméterben mért hossza egész szám. A kockát a lapjaival párhuzamos vágások mentén felbonthatjuk egy szintén egész hosszúságú élekkel rendelkező, valamint további 152 darab 1 cm élű kockára. Mekkora lehet az eredeti kocka éle?



Vegyes feladatok II.

4490 Egy téglatest alapélei 24 cm és 10 cm hosszúak. Mekkora a téglatest

a) felszíne; *b)* térfogata,

ha az alaplapra merőleges átlósíkja négyzetet metsz ki belőle?

4491 Egy négyzetes hasáb testátlója 22 cm, és az alaplappal 50°-os szöget zár be. Mekkora a hasáb térfogata?

4492 Egy sátortetős ház alapja 12 m oldalú négyzet. A padlástér szabályos négyoldalú gúla alakú, és térfogata 384 légköbméter. Mekkora a padlástér legnagyobb magassága?

4493 Hollandiában 2002-ben elkészítették a világ legnagyobb, 562 kg tömegű sajtját. A kolosszus henger alakú volt, amelynek magassága 60 cm, és az átmérője 1 m. Az elkészítéshez 4000 liter tejet használtak fel.

a) Hány darab szokásos méretű (6 cm magas 13 cm átmérőjű) sajt készülhetett volna belőle?

b) Mennyi tejből készül egy ilyen minőségű 1,4 kg tömegű sajt?

c) Michael Phelps többszörös olimpiai bajnok úszó napi kalóriaszükséglete 12 ezer kilokalória. Hány napra lenne elegendő neki ez a rekord méretű sajt, ha 10 dkg 390 kcal?

4494 A hangyaleső lárvái a homokba tölcsért készítenek, és ott lesnek hangyákra és más kisebb rovarokra. Egy 10 mm hosszú lárva negyedóra alatt 8 cm átmérőjű, 5 cm mély tölcsért ásott. Mekkora volt a megmozgatott homok térfogata?



4495 A gyulai Százéves Cukrászdában árult borbonbont tokaji aszúval töltik. Hány darabot készíthetnek 1 liter aszúból, ha egy-egy bonbon egyenes körkúp alakú, és a benne lévő ugyancsak körkúp alakú üreg magassága 7 cm, valamint az alapkör átmérője 1,5 cm?

4496 Egy derékszögű háromszög átfogója 13 cm, egyik befogója 12 cm. Megforgatjuk a háromszöget a rövidebb befogója körül. Mekkora az így keletkezett forgástest

a) felszíne; *b)* térfogata?

4497 Hány liter víz fér abba a csonka kúp alakú lavórba, amelynek magassága 20 cm, alapkörének átmérője 35 cm, a fedőkör átmérője 40 cm?

4498 50 darab 1,5 cm átmérőjű és 40 darab 0,8 cm átmérőjű csapágygolyót megolvasztunk, és az anyagukból két egyenlő sugarú golyót készítünk. Mekkora lesz az új golyók felületének az összege?

4499 Egy négyzetes oszlop térfogata 2880 cm^3. Mekkora a felszíne, ha a testátlója az alaplappal 49°41' szöget zár be?

4500 Ha egy átlagos testalkatú ember teljesen belemerül egy 1,5 m^2-nyi vízfelülettel rendelkező fürdőkádba, a vízszint 8 cm-t emelkedik. A Föld lakossága jelenleg 6,9 milliárd fő. Mennyivel emelkedne az 594 km^2 vízfelületű Balaton szintje, ha a Föld összes lakosa egyszerre (és teljesen) elmerülne vizében?

4501 Egy 11 mm belső átmérőjű csőbe két 5,5 mm külső átmérőjű UTP kábelt húztak.

a) Mekkora a tömege 20 m csőnek a két UTP kábellel együtt, ha a cső méterenként 0,5 dkg, és az UTP kábel sűrűsége $0{,}8\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$?

b) Legfeljebb mekkora külső átmérőjű kábel húzható még ebbe a csőbe?

4502 Egy kör keresztmetszetű csatorna átmérője 90 cm. Hány liter vizet vezet el a csatorna óránként, ha átmérőjének harmadáig van vízzel tele, és a víz folyásának sebessége $0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

4503 Legyen az ABC háromszög A csúcsánál levő szöge 90°. Az A csúcsban állítsunk merőlegest a háromszög síkjára, és ezen a merőlegesen vegyünk fel egy D pontot úgy, hogy $AD = 20$ cm legyen. Ha $AB = 15$ cm és $AC = 20$ cm hosszú, akkor mekkora az így keletkezett $ABCD$ tetraéder

a) térfogata; *b)* felszíne?

4504 Egy 2 méter magas egyenes gúla alaplapja 1 m sugarú kör köré írt szabályos ötszög. Mekkora a gúla

a) térfogata; *b)* palástjának területe?

4505 Egy 12 cm oldalú szabályos háromszöget megforgatunk egy olyan egyenes körül, amely átmegy a háromszög egyik csúcsán, és párhuzamos a szemközti oldal egyenesével. Mekkora a keletkezett forgástest

a) felszíne; *b)* térfogata?

4506 Adott egy csonka kúp alakú tejfölös doboz, amelynek alul az átmérője 6,5 cm, felül 8,5 cm, az alkotója pedig 12 cm. Mekkora a tejföl sűrűsége, ha a tele doboz 450 g tejfölt tartalmaz?

4507 Mekkora annak a forgáskúpnak a felszíne, amelyet egy 20 cm sugarú gömbbe írunk, és a kúp alkotója a gömb átmérőjének a $\frac{3}{4}$-e?

4508 Egy szabályos háromoldalú gúla 28 cm-es oldaléle az alaplappal 60°-os szöget zár be. Mekkora a gúla

a) felszíne; *b)* térfogata?

4509 Az asztalon egy egyenes körkúp alakú süvegcukor áll. Az alaplapja 12 cm átmérőjű kör, magassága 30 cm.

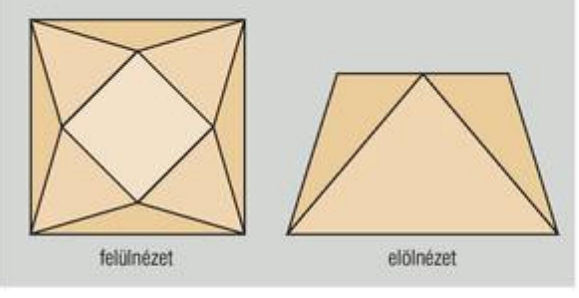
a) Egy légy a süvegcukor felületén haladva az alaplap kerületének L pontjából kiindulva a körkúpot megkerüli. Mekkora utat tesz meg, ha a lehető legrövidebb utat választja?

b) A kúp palástján levő P pontból induló hangya a palást felületén haladva a legrövidebb úton jut vissza a P pontba. Mekkora utat tesz meg, ha a P pont az alaplap síkjától 5 cm távolságra van?

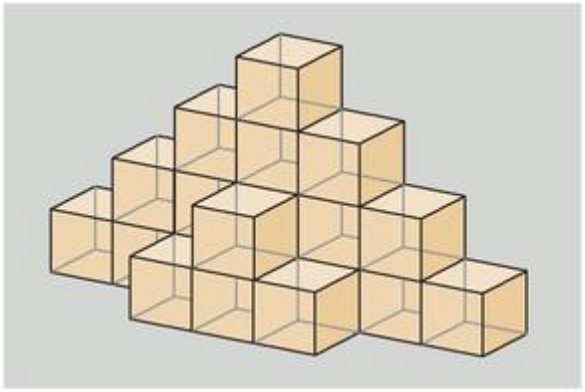
c) Találkozhat-e a hangya és a légy útjuk során a süvegcukor felületén?

4510 Egy szobor talapzata 1,5 dm magas. Az alaplapja 4 dm oldalú négyzet, a fedőlapja pedig 2 dm oldalú négyzet, amely az alaplaphoz képest 90°-kal van elforgatva. A talapzat felülnézete és elölnézete látható az ábrán.

Hány kilogramm tömegű a talapzat, ha $2{,}7\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ sűrűségű gránitból készítették?



4511 Egybevágó 1 cm élű kockákból a kockákat egymás mellé, illetve egymásra helyezve az alábbi minta szerint induló építményt készítünk.



A soron következő függőleges réteg mindig két kockányival magasabb az előzőnél, és az ábrának megfelelően lépcsőzetesen halad felfelé mindkét irányból egészen addig, amíg el nem éri a 12 kockányi magasságot. Ezután az előző szabályok szerint két kockányival csökkentve fejezzük be az építményt.

a) Hány kockából áll az építmény?

b) Hány cm^2 felületet kell lefestenünk, ha az építmény oldalait és tetejét szeretnénk befesteni?

c) Az építményben hány kockának nem lesz egy oldala sem festett?

12.4. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Geometriai valószínűség

4512 Egy számegyenesen kijelöltük a $J = [0; 10]$ intervallumot és annak $I = [2; 6]$ részhalmazát. Véletlenszerűen rádobunk egy pontot J-re.

a) Mekkora valószínűséggel esik a pont az I intervallumba?

b) Csökken-e a találat valószínűsége, ha I-t a nyitott $]2; 6[$ intervallumra cseréljük?

4513 Játsszuk párban a következő játékot. Mindkét játékos előtt van egy papírlap, amit a társa nem lát. A játékosok előre megegyeznek egy kiinduló intervallumban, amit jelöljön J. Az A játékos saját papírjára felír egy, a kiinduló intervallumba eső x valós számot, B pedig felírja az intervallum egy I részhalmazát. Ezután megmutatják a papírokat. Ha $x \in I$, akkor B nyert, ha $x \notin I$, akkor A. A következő fordulóban szerepet cserélnek. Az A játékos nyereménye annyi, ahány százaléka az I összhossza J-nek. B nyereménye a komplementer százaléka.

Például J alapintervallum legyen $[0; 5]$. Az A játékos megjelöli az $x = 4{,}5$ számot, B pedig az $I = [0; 3]$ intervallumot. Ekkor $x \notin I$, tehát A nyert. Mégpedig $\frac{|I|}{|J|} \cdot 100 = \frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$-nak megfelelő 60 pontot. Ha $x = 2$-t választotta volna, akkor B nyer $100 - 60 = 40$ pontot.

4514 Gizi és Géza a fenti játékot játsszák. Mekkora valószínűséggel nyer az intervallumot író, ha

a) $J = [1; 10]$ és $I = [1; 5]$; *b)* $J =]0; 8[$ és $I = [2; 7]$;

c) $J = [-3; 3[$ és $I = [-2; -1] \cup]1; 2[$?

4515 Péter és Pál is a fenti játékot játssza. Mekkora valószínűséggel nyer a számot író, ha $J = [1; 10]$, és az intervallumot író

a) az összes páratlan számmal kezdődő zárt egységnyi intervallum unióját felírja;

b) az összes prímszámmal kezdődő zárt egységnyi intervallum egyesítését felírja?

4516 A $J = [8; 15]$ intervallumon belül úgy szeretnénk kijelölni az I intervallumot, hogy ha véletlenül ráejtünk J-re egy pontot, akkor 0,7 valószínűséggel I-be essen. Adjunk meg ilyen I intervallumot.

4517 Menő Manó, a rajzfilmfigura a számegyenes $[0; 1]$ intervallumán barangol. Egyszer csak az ábrán látható dobbantó feldobja a levegőbe, miközben a másik oldalon eltűnik a vonal egy része. Most azon izgulunk, hogy a mi Manónk a lyukba esik-e. Mekkora ennek a valószínűsége, ha Menő Manó véletlenszerűen hullik vissza a $[0; 1]$ szakaszra?



4518 Táborozás alkalmával a ruhaszárító kötelet két, egymástól 12 méterre álló fához kötöttük. Mivel a kötél nagyon hosszú, egymástól azonos távolságra 5 darab Y alakú tartóoszlopot helyeztünk el. Az Y két felső szára 80 cm-re van egymástól, azokon rögzítve fut át a kötél. Arra lettünk figyelmesek, hogy egy kismadár reggelente véletlenszerűen rászáll valahol a kötélre, és csipkedni kezdi. Ha az Y két szára között csípi el a kötelet, az nem gond. Ám ha az oszlopok között, az már igen! Mekkora annak a valószínűsége, hogy ilyen részre száll a madár?



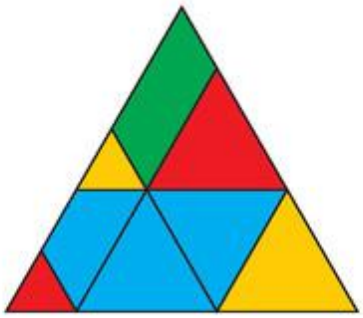


4519 Egy 5 cm × 15 cm-es fa téglalapból valahol kivágunk kettő, egymást nem fedő 3 cm oldalú négyzetet, és a „lyukas" téglalapot az ágyra tesszük. Magasról ráejtünk egy golyót a téglalapra. Mekkora valószínűséggel hallunk koppanást?

4520 A darts tábla 33,5 cm átmérőjű kör. A közepén levő nagyobb (általában zöld) kört *bullnak* nevezik, átmérője 3 cm. Az ebben levő kis piros kör a *bull's eye,* átmérője 1,5 cm. Dávid dartsozni tanul. Már eljutott arra a szintre, hogy a táblába biztosan dobja a nyilat, de azon belül még véletlenszerűen talál. Mekkora valószínűséggel dob

a) legalább bullt; *b)* bull's eye-t?

4521 Juliska egy ultramodern mézeskalács ház padlásterében lakik. A padlástérnek egyetlen szabályos háromszög formájú ablaka van, azon is csak a kékkel jelölt részt lehet kinyitni. Jancsi csúzlival próbál bejuttatni az ablakon egy Juliskának szánt üzenetet. Mekkora valószínűséggel fog kilőni színes üvegtáblát, ha az ablak épp nyitva van? (Jancsi az ablakot mindenképpen eltalálja. A kis háromszögek oldalai éppen feleakkorák, mint a nagyobbakéi.)



4522 A céltáblán minden sáv 2 cm széles, a középkör átmérője 4 cm. A legbelső kör 10 pontot ér, utána sorban kifelé 9, 8, 7, 6, 4, 2, 1 pontot érnek a sávok. A céltáblát biztosan eltaláljuk, de azon belül véletlenszerűen érünk el pontszámot. Mekkora valószínűséggel érünk el egy lövésből

a) 10; *b)* 9; *c)* 7; *d)* 4;

e) legalább 8; *f)* legfeljebb 4 pontot;

g) 8 és 4 pont között, beleértve a 8-at és a 4-et is?

h) Mekkora valószínűséggel érünk el két lövésből 15 pontot?



4523 A dartstábla 33,5 cm átmérőjű kör, amely 20 egybevágó körcikkre van osztva. A külső, 1 cm széles színes sáv a duplázó. A belső triplázó sáv ugyanolyan széles, külső széle 5 cm-re van a duplázó belső szélétől. (A zöld bull átmérője 3 cm.) Dávid már sokat gyakorolt, biztosan megdobja a 20-at. Azon belül azonban még véletlenszerűen talál. Mekkora valószínűséggel dob

a) dupla 20-at;

b) tripla 20-at;

c) két nyíllal 80 pontot,

ha csak a 20-as mezőbe érkeznek a dobónyilai?



4524 Hány százaléka legyen a céltábla sugarának a középső kör sugara, ha azt akarjuk, hogy a céltáblát érő véletlen találatok esetén a maximális pontszám valószínűsége 0,01 legyen?

4525 Mennyi a valószínűsége, hogy az $x^2 - 4x + c = 0$ egyenlet mindkét megoldása 1-nél nagyobb, ha c-t a $[-2; 4]$ intervallumból választjuk véletlenszerűen?

4526 Tekintsük az $A(-4; -3)$, $B(4; -3)$, $C(4; 3)$, $D(-4; 3)$ csúcsokkal adott téglalapot. Válasszunk véletlenszerűen egy $P(x; y)$ pontot az $ABCD$ téglalapból. Mennyi a valószínűsége, hogy ekkor a pont koordinátáira $|x| + |y| \leq 2$?

4527 Jancsi és Juliska összeköltöztek a mézeskalács házban. Mindketten 6^{30}-kor kelnek, és 7^{40}-ig be kell fejezniük a reggeli készülődést, hogy odaérjenek a munkahelyükre. Julisnak 30 perc, Jancsinak 10 perc a fürdőszobai elfoglaltsága. A ház finom, ám kicsi, két ember kényelmesen nem fér el a fürdőben. Mindketten véletlenszerűen mennek be, és mivel szemérmesek, nem örülnek, ha nem lehetnek egyedül. Mekkora valószínűséggel vesznek reggelente örömmel búcsút egymástól? (Mosdatlanul egyikük sem indul a munkába, és feltételezzük, hogy a fürdőn kívül teljes a béke közöttük.)

4528 Az $y = mx + c$ egyenletű egyenes m és c paramétereit a $[-2; 2]$ intervallumból választhatjuk meg véletlenszerűen. Mekkora a valószínűsége, hogy ekkor az $y = mx + c$ egyenes az x tengelyt a $[-3; 3]$ intervallumon kívül metszi?

4529 Károly bácsi és Irma néni konyhája nagyon pici. Ha Irma néni bemegy, Károly bácsinak ki kell jönnie. Irma néni a délelőtt folyamán (7^{00} és 12^{00} óra között, de véletlenszerűen) 2 folyamatos órát tölt el az ebéd elkészítésével, amiben Károly bácsi nem szeretné zavarni. Legfeljebb mennyi időt tölthet el Károly bácsi folyamatosan a konyhában, ha annak esélyét, hogy megzavarja az ebédfőzést

a) 50% alatt szeretné tartani?

b) a legkisebb mértékűnek szeretné tudni? Mennyi ez a minimális valószínűség?

Várható érték (emelt szintű tananyag)

4530 Egy játékban a négy lehetséges kimenetel valószínűsége rendre:

$$P(A) = 0{,}1; \quad P(B) = 0{,}2; \quad P(C) = 0{,}3; \quad P(D) = 0{,}4.$$

Az egyes A, B, C, D esetekben a játékos nyereménye 1, −2, 3, −4 pont. Érdemes-e ebben a játékban részt venni?

4531 Egy játékban a négy lehetséges kimenetel valószínűsége rendre:

$$P(A) = 0{,}4; \quad P(B) = 0{,}3; \quad P(C) = 0{,}2; \quad P(D) = 0{,}1.$$

Az egyes A, B, C, D esetekben a játékos nyereménye 1, −2, 3, −4 pont. Igazságos-e a játék?

4532 Határozzuk meg a kockadobás várható értékét.

4533 Egy játékban két játékos játszik egy hagyományos érmét feldobva. Ha fej, akkor A fizet B-nek 10 eurót, ha írás, akkor B fizet A-nak 8 eurót. Mennyi a várható nyeremény

a) A szempontjából; *b)* B szempontjából?

4534 2010. február elején egy ötöslottó-szelvény ára 225 Ft volt. Az ötödik héten 1145 Ft-ot fizettek ki a kettesekre, 17 690 Ft-ot a hármasokra, 2 127 600 Ft-ot a négyesekre, és 675 millió volt a főnyeremény. Megérte ezen a héten lottózni?

4535 Egy szerencsekeréken a következő „nyeremények" találhatók: nullázó, negyedelő, felező, −1000, 1000, 2000, 3000, duplázó. A játékosnak a játék kezdetekor 2000 pontja van. (A játék során nullánál kevesebb pontja nem lehet a játékosnak.)

a) Maximum hány pontja lehet 3 pörgetés után a játékosnak?

b) Az első pörgetés után hány pontra számíthat a játékos?

c) Mennyi a játékos pontszámának várható értéke a pörgetés után, ha előtte lenullázta magát?

d) Hány pontra számíthat a pörgetés után a játékos, ha 10 000 ponton áll?





4536 Dani a diáknapra egy egyszerű játékot talált ki. A játékos dob egyet a hagyományos kockával. Ha ötöst vagy hatost dob, akkor Dani fizet neki 6 játékeurót. Mennyiért árulja Dani a játékot, ha csak a játék kedvéért csinálja (hosszú távon nem akar sem veszteséget, sem nyereséget)?

4537 Balázs, látva Dani játékának sikerét, jövőre egy másik, hasonló játékot akar szervezni a diáknapra. Danihoz hasonlóan 2 játékeuróért fogja árulni a játékot, amin 6 eurót lehet nyerni. Balázs szeretné, ha játékonként átlagosan 1 játékeuró nyereséget hozna neki a játék. Adjunk neki ötletet, hogyan alakítsa ki a szabályokat: melyik dobott számokra fizessen nyereményt és melyekre ne?

4538 Egy edzőnek kétféle labdarúgó áll a rendelkezésére: tapasztalt és rutintalan játékosok. Közülük kell összeválogatnia 10 főt a csapatba. Biztosra veszi, hogy a meccs végén tizenegyesrúgások lesznek és azt is, hogy minden játékosára szüksége lesz. A tapasztalt játékosok az esetek 80%-ában rúgják be a büntetőket, míg a fiatalok csupán minden negyediket értékesítik. Legalább hány rutinos játékos legyen a csapatban, ha az edző azt szeretné, hogy tíz büntetőből ötnél többet rúgjanak majd be várhatóan a játékosok?

4539 Egy játékban a négy lehetséges kimenetel valószínűsége:

$$p_1 = 0{,}4;\quad p_2 = 0{,}3;\quad p_3 = 0{,}2;\quad p_4 = 0{,}1.$$

A játékos nyereménye 1, –2, 3, –4 pont lehet.

a) Hozzárendelhetjük-e úgy az egyes kimenetelekhez a nyereményeket, hogy a játékosnak megérje játszani ezt a játékot?

b) Mennyi lehet a legnagyobb várható nyeremény ebben a játékban?

4540 Egy nagy dobozban van 2 meggyes és 4 vaníliás krémtúró. Ha még beleteszünk 4 kekszes krémtúrót, akkor várhatóan hányadikra fogunk véletlenszerűen választva először vaníliás krémtúrót kivenni a dobozból

a) visszatevés nélkül; *b)* visszatevéssel?

A *b)* esetben az első 10 esetig felírva számítsuk ki a várható értéket.

4541 A szerencsekeréken a következő „nyeremények" találhatók: nullázó, negyedelő, felező, –1000, 1000, 2000, 3000, duplázó. (A játék során nullánál kevesebb pontja nem lehet a játékosnak. Ha 1000-nél kevesebb pontja van és –1000-t forgat ki, akkor 0-ról folytatja.)

a) Adjunk meg egy függvényt, amely az éppen aktuális pontszám függvényében megadja a sok játék átlagában tekintett, egy forgatás után elért várható pontszámot.

b) Mennyi az a pontérték, ami felett a játékszabályok miatt a forgatások után nagy átlagban várhatóan kevesebb pontja lesz a játékosnak? Elemezzük a kapott értéket.

Statisztika

4542 A 101 férőhelyes Ikarus 412-est helyi közlekedésre alkalmazzák a busztársaságok. Az egyik hét öt hétköznapján a maximális utaslétszámok így alakultak:

hétfőn 115 fő, kedden 98 fő, szerdán 107 fő, csütörtökön 85 fő, pénteken 70 fő.

Határozzuk meg a hétköznapok maximális utaslétszámainak számtani átlagát.

4543 Tornaórán a jelenlevő fiúk magasságai:

187, 188, 176, 180, 182, 169, 190, 177, 188 centiméter.

A csökkenő tornasorban legalább hányadik helyre kell állnia az egyetlen hiányzónak, ha tudjuk, hogy az összes fiú magasságainak átlaga kisebb, mint 182,2 cm?



4544 Határozzuk meg az alábbi minta mediánját:

2, 6, 5, 2, 6, 8, 6, 6, 3, 4.

4545 Egy üzletlánc neve „1 €URÓS", mert sok terméket lehet kapni náluk 1 euróért. Egyik boltjukban az eladó összeírta nyitás után egy órával, melyik vevő hány darab 1 eurót adott addig neki:

2, 5, 3, 4, 2, 2, 3 darabot.

a) Mennyi bevétele van eddig a boltosnak, ha csak két vevőnek kellett fél-fél eurót visszaadnia?

b) Mi az egyszerre kapott 1 eurósok darabszámainak mediánja?

4546 Dávid elég sokszor késik az első órákról. A tanárok felírták, mikor hány percet késett:

5, 7, 7, 3, 10, 2, 6, 5, 5, 7, 3, 5 percet.

Vajon legközelebb mennyit késik? Matektanára szerint a legvalószínűbb válasz a késések módusza. Mennyi ez a módusz?

4547 100 elhaladó autót megnézve felírjuk, hogy hány fő utazik a gépjárműben. Legalább hány alkalommal kell az egyes számot felírnunk, hogy a létrejövő minta

a) egyik módusza biztosan 1 legyen; *b)* egyetlen módusza az 1 legyen?

4548 A kördiagram egy osztályban a tavaly év végén szerzett érdemjegyek megoszlását mutatja; bukás nem volt.

Adjuk meg a kördiagram alapján a jegyek

a) móduszát; *b)* mediánját.



4549 Egyik télen egy kis lakásban havonta

54,7; 115,6; 120,1; 116,9 és 78,9 köbméter

gázt fűtöttek el. Mennyi a kapott értékek terjedelme?

4550 Fizikai kísérleteknél abszolút hibának nevezik a mért és a tényleges érték eltérését. Egy hosszmérés-kísérletben az abszolút hibák 2, 3, 4, 2 és 5 mm-nek adódtak. Ám nem tudjuk, hogy melyik hiba tért el pozitív és melyik negatív irányban a valós értéktől. Ezt figyelembe véve mennyi lehet az előjeles eltérések terjedelmének

a) maximuma; *b)* minimuma?

4551 Egy ötelemű mintáról tudjuk, hogy két módusza a 2 és a 4, mediánja 4 és terjedelme 7. Mi a minta ötödik eleme?

4552 Egy minta terjedelme, mediánja, számtani átlaga egyaránt 7, módusza pedig 4. Írjuk fel ezt az öt elemű mintát.

◆ ◆ ◆

Roland kosárlabdázó, csapatában hármas-négyes poszton játszik magas bedobót-centert.

Egy őszi szezon első 10 mérkőzésén a következő statisztikát érte el, minden oszlop egy mérkőzés adatait tartalmazza (forrás: ferfikosar.hu).

A következő kérdések (4553–4563. feladat) a statisztika egyes adataira vonatkoznak.





Mérkőzés	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Idő	18	27	29	31	40	30	23	22	35	36
Pt	10	9	27	24	21	20	11	12	21	24
2ZS	2	4	7	8	9	8	4	4	9	10
2ZK	3	5	11	8	10	12	6	5	10	14
2Z%	67	80	64	100	90	67	67	80	90	71
2KS	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2KK	2	2	2	0	2	1	1	0	1	2
2K%	0	0	0	0	0	0	100	0	0	50
3PS	1	0	2	1	0	0	0	0	0	0
3PK	1	3	5	3	2	0	0	0	1	3
3P%	100	0	40	33	0	0	0	0	0	0
BDS	3	1	7	5	3	4	1	4	3	2
BDK	4	2	8	6	5	7	2	4	5	4
BD%	75	50	88	83	60	57	50	100	60	50
Tám	4	1	3	3	4	3	2	1	4	4
Véd	3	2	4	4	6	4	2	7	5	5
ÖL	7	3	7	7	10	7	4	1	9	9
F	2	2	2	2	3	3	4	3	4	5
KF	2	4	4	3	5	4	1	2	4	3
Bl	1	1	4	4	2	2	2	1	5	2
Kb	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
El	0	0	1	3	3	5	0	1	5	0
Sz	1	2	3	2	2	2	1	1	2	2
Gp	0	0	0	0	1	2	1	1	2	2
VAL	17	12	34	34	30	24	17	16	27	32

Jelmagyarázat: **Idő:** pályán töltött idő percben; **Pt:** dobott pontok száma; **2ZS:** sikeres közeli (zóna) dobások; **2ZK:** zóna dobáskísérletek; **2Z%:** ennyi százaléka 2ZS 2ZK-nak; **2KS, 2KK, 2K%:** ua. középtávoli dobásokra; **3PS, 3PK, 3P%:** hárompontos (távoli); **BDS, BDK, BD%:** büntető-dobás; **Tám:** támadólepattanó; **Véd:** védőlepattanó; **ÖL:** összes lepattanó; **F:** saját hiba (fault); **KF:** kiharcolt hiba; **Bl:** adott blokk; **Kb:** kapott blokk; **El:** eladott labda; **Sz:** szerzett labda; **Gp:** gólpassz; **VAL:** value rövidítése, a játékos „értéke" az adott mérkőzésen.

4553 Ábrázoljuk közös oszlopdiagramban mind a tíz mérkőzésen a sikeres közeli (2ZS), középtávoli (2KS) és távoli (3PS) dobások számát.

4554 Ábrázoljuk kördiagrammal a harmadik mérkőzésen végrehajtott különböző dobáskísérletek (2ZK, 2KK, 3PK, BDK) számát.



4555 A játékos értékébe (VAL) pozitív előjellel számítanak a Pt, ÖL, Sz, Gp, KF, illetve negatív előjellel az eladott labdák és a kimaradt dobások. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az egyes mérkőzéseken dobott pontokat és a VAL értékeit. Milyen következtetést vonhatunk le?

4556 Ábrázoljuk egymás mellett két sávdiagrammal az utolsó két mérkőzés közeli (2ZK), középtávoli (2KK), hárompontos (3PK) és büntetődobás (BDK) kísérletek számait. Mit állapíthatunk meg?

4557 *a)* Készítsünk egyenlő osztályközökkel egy három kategóriát tartalmazó gyakorisági táblázatot a mérkőzésenként dobott pontokból (Pt). A kategóriák neve legyen „Nagyon jó", „Jó", „Közepes". Tüntessük fel a táblázatban az osztályközöket is.

b) Számítsuk ki a dobott pontok átlagát a dobott pontszámokból.

c) Számítsuk ki a dobott pontok átlagát a táblázat alapján, az osztályközepek segítségével.

d) Mekkora eltérést tapasztalunk a *c)* és a *b)* pontban kapott átlagok között? Mi okozza az eltérést?

4558 *a)* Készítsünk gyakorisági táblázatot négy osztállyal és egyenlő osztályközökkel arról, hány százalékban sikerültek a büntetődobások (BD%). A kategóriák neve legyen I., II., III., IV., az I-es kategória legyen a legjobb. Tüntessük fel a táblázatban az osztályközöket is.

b) Számítsuk ki a BD%-ok átlagát az összes értékből.

c) Számítsuk ki a BD%-ok átlagát a táblázat alapján, az osztályközepek segítségével.

d) Mekkora eltérést tapasztalunk a *c)* és a *b)* pontban kapott átlagok között?

4559 *a)* Határozzuk meg a kapott blokkok (Kb) és a hárompontos dobások százalékainak (3P%) terjedelmét. Fontos adatot tudtunk-e meg?

b) Adjunk meg a hárompontosok százalékai alapján két olyan 10 elemű mintát, melyek terjedelme 100%, azonban átlagaik között 80% különbség van.

4560 Határozzuk meg a mérkőzésenként pályán töltött percek

a) A számtani közepét; *b)* s szórását.

c) Tekintsük az $I =]A - s; A + s[$ intervallumot. Hány mérkőzésen esnek a pályán töltött percek az intervallumba?

4561 Határozzuk meg a mérkőzésenként dobott pontok

a) Me-vel jelölt mediánját;

b) AE-vel jelölt abszolút átlagos eltérését.

c) Tekintsük az $I =]Me - AE; Me + AE[$ intervallumot. Hány mérkőzésen esnek a dobott pontok az intervallumba?

4562 Figyeljük meg a táblázat utolsó sora előtti tíz sor mutatóit (alulról felfelé: gólpasszok, szerzett és eladott labdák, kapott és adott blokkok, kiharcolt és elkövetett faultok, összes lepattanók, védő és támadó lepattanók). A játékos menedzserének egyik dolga, hogy a lehető legjobb képet mutassa a játékosról. A menedzser választhat, hogy a játékos portfóliójában melyik sort melyik mutatóval jellemzi (módusszal, mediánnal vagy számtani átlaggal). Segítsünk neki választani.

a) Mely mutatókat kell minél nagyobb és melyeket minél kisebb értékkel jellemezni?

b) Határozzuk meg, melyik mutató értékét érdemes használni Gp, Sz, El, Kb, Bl, KF, F, ÖL, Véd, Tám sorokra, hogy a játékos minél jobb színben tűnjön fel.

4563 A különböző dobások százalékos kimutatásainál (2Z%, 2K%, 3P%, BD%) melyik mutatót érdemes közölni minden esetben a módusz, medián, számtani átlag közül?



4564 A középiskola vége felé járva egy osztály tanulói közül páran kiszámolták az utolsó két év végén megszerzett, továbbtanulásba számító pontjaikat:

76, 83, 80, 94, 88, 86, 92, 83.

a) Határozzuk meg a kapott pontok számtani átlagát. Adjuk meg egész pontra kerekítve.

b) Mennyi a pontok mediánja, módusza és terjedelme?

c) Készítsünk egy három kategóriát tartalmazó gyakorisági táblázatot.

d) Készítsünk oszlopdiagramot a gyakorisági táblázat alapján.

4565 Igazoljuk, hogy az A számtani átlag

a) $A + b$, ha minden adathoz hozzáadunk b valós számot;

b) $c \cdot A$, ha minden adatot c valós számmal szorzunk.

4566 Hogyan változik a módusz és a medián, ha a minta

a) minden eleméhez hozzáadunk egy valós b értéket;

b) minden elemét megszorozzuk egy valós c számmal?

4567 Hogyan változik egy minta terjedelme, abszolút átlagos eltérése és szórása, ha

a) a minta minden eleméhez ugyanazt a b valós számot adjuk;

b) a minta minden elemét ugyanazzal a c valós számmal szorozzuk?

4568 Tekintsük egy minta valamely gyakorisági táblázatból számított átlagának és közvetlenül a minta elemeiből számított átlagának eltérését. Mennyi lehet az eltérés maximuma, ha egyenlők az osztályközök?

4569 Bizonyítsuk be, hogy adott minta szórása a számtani középpel számítva minimális.

4570 Bizonyítsuk be, hogy adott minta átlagos abszolút eltérése a mediánnal számítva minimális.

Vegyes feladatok

4571 A $J =]-3; 7[$ intervallumra véletlenszerűen ejtünk egy Q pontot. Az 1 ponttól melyik irányba mérjük fel azt a nyitott I intervallumot, amelyre 0,5 valószínűséggel esik Q? Írjuk fel I-t.

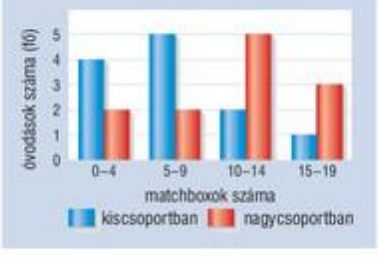
4572 Egy doboz teteje 15 cm × 35 cm-es téglalap, a rajta levő nyílás pedig 5 cm × 7 cm. Mekkora valószínűséggel találunk a nyílásba, ha a doboztetőt biztosan eltaláljuk?

4573 Egy energiatakarékos égőket gyártó cégnél úgy osztályozzák a minőségellenőrök a termékeket, hogy azok hány százaléka megy tönkre 1, 2, 3, 4 és 5 vagy több év alatt. Eredményeik a táblázatban láthatók.

Életkor	1	2	3	4	5 ≤
Összes %-a	2,00%	3,00%	24,00%	60,00%	11,00%

Mennyi egy véletlenszerűen kiválasztott termék várható élettartama?

4574 A diagramon azt látjuk, hogy egy kis létszámú óvodáscsoport tagjai hány matchboxszal rendelkeztek kis-, illetve nagycsoportos korukban. Válaszoljunk a kérdésekre.



a) Hány fő jár a csoportba?

b) Hány darab matchboxszal rendelkeztek átlagosan az óvodások kis-, illetve nagycsoportos korukban a diagramok alapján? (Az egyes kategóriákban osztályközepekkel számoljunk.)



4575 A gyakorisági táblázatból azt olvashatjuk ki, hogy a 40 pontos dolgozaton a 30 fős osztályból hány tanuló milyen eredménnyel szerepelt. (Nullapontos dolgozat nem volt.)

Érdemjegy	elégtelen	elégséges	közepes	jó	jeles
Pontszám	1–8	9–16	17–24	25–32	33–40
Gyakoriság	4	9	6	8	3

a) Meg tudjuk-e határozni a táblázat alapján az érdemjegyek móduszát, mediánját?

b) Meg tudjuk-e határozni a táblázat alapján a pontszámok móduszát, mediánját?

c) Számítsuk ki a pontszámok A átlagát, s szórását és az $I =]A - s; A + s[$ intervallumot. (Számoljunk az osztályközepekkel.)

d) Adjuk meg a jegyek AE abszolút átlagos eltérését és az $I =]Me - AE; Me + AE[$ intervallumot.

4576 Mi tudjuk, hogy a múzeum padlóját egymástól 10 cm-re futó derékszögű infravörös (láthatatlan) lézerrács védi (ha valami a lézerfény útjába kerül, riaszt). A betörő csak sejti ezt, ezért próbaképpen az erkélyről a padlóra ejt egy 3 cm átmérőjű puha korongot. A korong leesik, és tompa puffanással a padlón marad. Vajon nagyobb valószínűséggel szólal meg a riasztó, mint marad a csend?

4577 Zsófi zenelejátszóján sokszor használja az EVL funkciót. (Az „egyes véletlen lejátszás”-t bekapcsolva, a lejátszó találomra lejátszik egy számot, majd alaphelyzetbe áll.) A lejátszóra Zsófi 18, testvére pedig 32 számot töltött fel. Az EVL funkciót hétszer használva, várhatóan hány olyan zeneszámot fog hallani Zsófi, amelyet ő maga töltött fel?



Készüljünk az érettségire!

Rendszerező összefoglalás 74

Gondolkodási módszerek
Algebra és számelmélet
Függvények
Geometria

Érettségi gyakorló feladatsorok 150



12.5. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – ÖSSZEFOGLALÁS

Halmazok

5001 Döntsük el, halmazok-e vagy sem a következők. Ha igen, adjuk meg az elemszámukat, illetve soroljuk fel elemeiket is, ahol lehetséges.

a) A = {7-nél nagyobb, hatoldalú szabályos dobókockával dobott számok};

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0{,}5 < x < 0{,}6\}$;

c) $C = \{\{1; 2; 3; 4\}$ halmaz valódi részhalmazai, melyeknek részhalmaza $\{2; 3\}\}$;

d) $D = \{x \mid x \notin D\}$.

5002 *a)* Soroljuk fel az $A = \{a; b; c\}$ halmaz összes részhalmazát. Hány diszjunkt párt találunk közöttük?

b) Hány részhalmaza van a B = {16-nál kisebb pozitív prímszámok} halmazának?

5003 Adott az A = {egyjegyű pozitív prímek} és a B = {páratlan egyjegyű pozitív egészek} halmaz.

a) Adjuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ halmazokat.

b) Mivel egyezik meg $\overline{A}$, illetve $\overline{B}$, ha az univerzum $U = A \cup B$?

c) Legyen az alaphalmaz U = {egyjegyű pozitív egészek}. Adjunk meg úgy egy $C \subseteq U$ halmazt, hogy a lehető legtöbb eleme legyen, és $B \cap C$ diszjunkt legyen A-val.

5004 Adott az $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 10\}$ alaphalmazban a következő két halmaz: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 4\}$ és $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3t$ valamely $t \in \mathbb{Z}$-re$\}$.

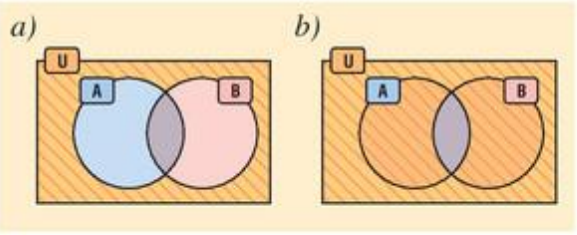
a) Ábrázoljuk U, A és B halmazt közös Venn-diagramon.

b) Adjuk meg $\overline{A}$ és $\overline{B}$ halmazokat.

c) Olvassuk le a diagramról, hogy milyen elemek alkotják az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ halmazokat.

5005 Ábrázoljuk Venn-diagrammal az $A \setminus \overline{B}$ halmazt (U, A, B nem üres halmazok). Adjuk meg másképp is a kapott eredményt.

5006 Írjuk le legalább kétféleképpen az alábbi Venn-diagramokon vonalkázással jelzett részeket. (➡)



5007 Szemléltessük Venn-diagrammal, hogy

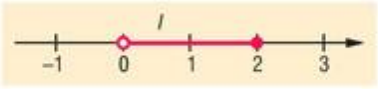
$$(B \cup C) \setminus (A \setminus (B \cap C)) =$$
$$= (B \setminus A) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

5008 A rock and roll klubban hat fő iszik bambit, nyolc pedig tvisztel. Hárman – ugyancsak elítélhető módon – bambival a kezükben tvisztelnek, tizenhárman pedig csak beszélgetnek. Hány vendég van éppen a rock and roll klubban? (A klubban csak bambi kapható.)

5009 Egy szobában 12 fő tartózkodik, közülük négy fő haja barna, öt fő szeme fekete. Van három fő, aki nem rendelkezik egyik tulajdonsággal sem. Hány barna hajú fekete szemű illető van itt?

5010 A 30 fős osztály röpdolgozatot írt matematikából. 15-en megoldották az első feladatot, öten mindkét feladatot, hét személy pedig csak a másodikat. A csoport létszámának hány százaléka nem tudott megbirkózni egyik kérdéssel sem?

5011 Adott az ábrán látható I intervallum. Határozzuk meg I komplementerét, ha



a) $U =]0, 5]$; *b)* $U =]-2, 2]$;

c) $U = [0, 7]$; *d)* $U = \mathbb{R}$.

5012 Ábrázoljuk számegyenesen az I, J, K halmazokat.

a) $I = [2, 4[$; *b)* $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 5 < 0\}$;

c) $K = \left\{ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-6}} \text{ függvény értelmezési tartománya} \right\}$.

Jelöljük számegyenesen és adjuk meg intervallummal is a következőket.

d) $J \setminus I$; *e)* $I \cap K$; *f)* $(K \setminus J) \cup I$.

5013 Ábrázoljuk egységkörben azokat az $x \in U = [0°, 360°]$ szögeket, melyekre teljesül:

a) $I = \{x \mid 0 \le \operatorname{tg} x \le 1\}$; *b)* $J = \{x \mid 0{,}5 \le \sin x\}$; *c)* $x \in J \cap I$;

d) $x \in \overline{I} \setminus J$.

5014 Adott az A halmaz. Tudjuk róla, hogy $|A| = 10$.

a) Hány darab nullaelemű részhalmaza van? Hány kilencelemű részhalmaza van?

b) Hány kettő-, négy-, öt-, nyolcelemű részhalmaza van?

c) Hány elemű az a részhalmaza, amelyből 120 darab különbözőt számolhatunk össze?

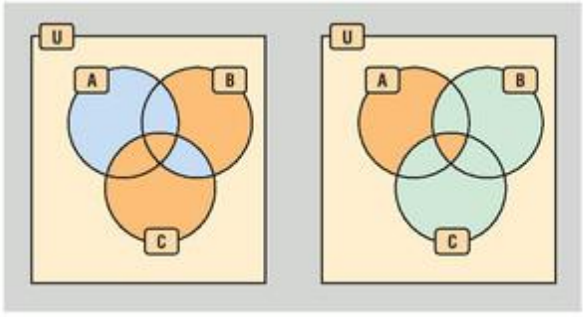
5015 Adjunk meg úgy négy halmazt, hogy közülük bármely háromnak legyen közös eleme, de a négy halmaz metszete üres legyen.

5016 Figyeljük meg az ábrákon jelölt halmazokat. (A kéket nevezzük P-nek, a zöldet Q-nak.)

a) Adjuk meg P-t és Q-t A, B, C és a halmazműveletek segítségével.

b) Milyen feltételt kell A, B, C-re adnunk, hogy P és Q diszjunkt halmazok legyenek?

c) Milyen feltételek mellett lesz $P \subset Q$?



5017 Legyen $U = \{a; b; c; d; e\}$. Ebben az univerzumban A, B, C halmazokról tudjuk, hogy elemszámaik megegyeznek, továbbá:

$$A \cap B \cap C = \{b\}, \quad B \setminus A = \{c\}, \quad A \setminus (B \cap C) = \{d\} \quad \text{és} \quad C \setminus B = \varnothing.$$

Adjuk meg $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ elemeit.

5018 Az $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmaz A, B, C részhalmazairól ismerjük a következőket:

$$A \cap B = \{2\}, \quad (A \cup B) \cap C = \{5; 6\}, \quad A \setminus C = \{2; 3; 4\} \quad \text{és} \quad C \setminus B = \{1; 5\}.$$

Határozzuk meg az A, B, C halmazokat.

5019 Az $U = \{1; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ halmaz A, B, C részhalmazairól tudjuk, hogy:

$$A \setminus B = \{7; 8; 9\},\quad C \setminus B = \{5; 6; 7\},\quad A \cap B = \{10\},\quad (A \cup B) \setminus C = \{1; 8; 9; 10\}.$$

a) Határozzuk meg az A, B és C halmazokat. *b)* Ábrázoljuk Venn-diagrammal.

c) Hány elemű az $A \cap B \cap C$ halmaz? *d)* Hány elemű $(A \cup B) \cap C$ halmaz?

5020 Az A, B, C halmazok az $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ részhalmazai. Tudjuk róluk, hogy:

$$A \setminus (B \cup C) = \{2; 5\},\quad \{3; 6; 7\} \subseteq A \cap B,\quad B \setminus C = \{3; 4; 6; 7\},\quad C \setminus B = \varnothing.$$

Megmondhatjuk-e A, B, C elemeit, ha

a) $|C| = 0$; *b)* $|C| = 1$?

5021 Legyen $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Az A, B, $C \subset U$ halmazokról a következőket tudjuk:

$A \cap B = \{1; 5\}$, B-nek csak páratlan számok az elemei, $(A \cup B) \cap C = \{1; 3; 5; 8\}$,

$\overline{A \cup B \cup C}$-be eső elemek összege 8, $(B \cup C) \setminus A = \{3; 4; 7\}$, B elemeinek összege páros.

a) Készítsünk Venn-diagramot.

b) Mennyi külön-külön az A, B, C halmazokba eső elemek összege?

5022 A Kiskunsági Nemzeti Park dolgozóinak dönteniük kell, hogy ősszel vagy tavasszal szeretnének-e ellátogatni a Hortobágyi Nemzeti Parkba. A dolgozók 60%-a ősszel, 80%-a tavasszal menne, így akadt olyan is, aki mindkét évszakban szívesen látogatna a Hortobágyra, ők 8-an voltak.

a) Hányan dolgoznak a Kiskunsági Nemzeti Parkban, ha mindenki válaszolt a feltett kérdésre?

b) Hányan szeretnének inkább csak ősszel utazni?

5023 Egy osztályban 20 tanuló gyűjt a Forma–1 versenyzőitől dedikált emléket. Lewis Hamilton 12, Jenson Button 16, Fernando Alonso 15 főnek dedikált már. A 20 tanuló mindegyike szeretne mindhárom pilótától autogramot, így természetesen akad 8 olyan is, akinek Hamiltontól és Buttontól, 12 akinek Buttontól és Alonsótól és 7 fő, akinek Hamiltontól és Alonsótól is van már emléke.

a) Hány tanuló szerzett mindhárom említett versenyzőtől emléket?

b) Hányan gyűjtöttek csak Jenson Buttontól emléket?

5024 Amikor Hófehérkét az ételmérgezés után kiengedték a kórházból, a törpék nagy vigasságot csaptak. A hét törpe (akik között nincsenek testvérek) mindegyike meghívta 5-5 testvérét, akik szintén bányászok. A jelen levő törpék között volt 21 vájár, 21 telepvezető és 20 fő, aki narancssárga sapkát viselt. Telepvezető vájár annyi volt, mint narancssárga sapkás telepvezető (7-7 fő), ellenben narancssárga sapkában csak 6 vájár díszelgett. Hány telepvezető vájár jött az ünnepségre narancssárga sapkában? (A partira a törpéken kívül csak a királyfi és maga Hófehérke volt hivatalos, a sajtót – Réti Kurír – sem engedték be.)

5025 A 101 kiskutyát Szörnyella De Frász pribékjei három nagy csoportra osztották: fekete farkú, tarka fülű és fehér lábú csoportokba. Megszámolták, hogy az egyes csoportokban a fenti sorrendben 64, 60, 56 kutyus van. Fekete farkú és tarka fülű kölyök van 41, tarka fülű és fehér lábú van 22, fehér lábú és fekete farkú pedig 35.

a) Hány kutya bírja a fogva tartottak közül mindhárom tulajdonságot, ha egy megszökött a számolás előtt a pribékektől?

b) Hány olyan kutyus van Szörnyellánál, amelyiknek fehér a lába, de nem tarka a füle és nem fekete a farka?

5026 Egy panzióban ebédnél nyolcan rendeltek levest, tízen főételt.

a) Milyen határok között mozoghat azoknak a száma, akik mindkét ételtípusból kértek?

b) Összesen mennyien ülhettek asztalhoz délben a panzióban?

5027 Az A, B, C halmazokról a következőket tudjuk: $|C| = 13$. Ehhez képest A-nak 1-gyel több, B-nek 4-gyel kevesebb eleme van. $A \cap C$ elemszáma fele $|A|$-nak, $|A \cap B|$ kétharmada B elemszámának, $|B \cap C|$ pedig 5-tel kevesebb, mint $|B|$. A hármas metszet elemszáma az egyetlen páros prímszám. Hány elemű az alaphalmaz, ha $|\overline{A \cup B \cup C}| = 3$?

5028 Tekintsük az $\frac{5x-4}{2x+8} - \frac{x-3}{x+4} \geq 1$ egyenlőtlenséget a racionális számok halmazán.

a) Megoldás-e az 1?

b) Adjuk meg a legkisebb pozitív megoldását a feladatnak. Van-e legnagyobb negatív megoldás?

c) Soroljuk fel az összes olyan 2 nevezőjű valódi törtet, amely nem megoldása a feladatnak.

5029 Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi halmazokat.

a) $L = \{(x, y) | y \leq \log_2(x+3)\}$; *b)* $M = \{(x, y) | 2^{x-3} \leq y\}$;

c) $L \cap M$.

5030 Legyen az univerzum $U = \{1; 2; \ldots; n\}$. Adjunk meg úgy n darab $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazt az alaphalmazból, hogy bármely $(n-1)$ halmaznak pontosan egy közös eleme legyen, mégpedig mindig a hiányzó index. Pl.: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} = \{n\}$.

5031 Adjuk meg úgy A, $B \subseteq U$ nemüres halmazok lehető legkisebb elemszámait, hogy teljesüljenek a következők:

$$2|A| = |U|, \quad 3|A \cap B| = |B|, \quad 10|A \cup B| = 9|U|.$$

5032 Tekintsük az $I_n = \left]0; \frac{1}{n}\right[$ és $J_n = \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[$ intervallum-sorozatokat.

a) Van-e közös pontja a J_n sorozat elemeinek?

b) Van-e közös pontja az I_n sorozat elemeinek?

c) Van-e közös pontja a $J_n \setminus I_n$ sorozat elemeinek?

Kijelentések, események

5033 Legyenek $A = \{$szép idő lesz$\}$ és $B = \{$kirándulni megyek$\}$ események.

a) Adjuk meg szövegesen az $A + B$ és az $A \cdot B$ eseményeket.

b) Írjuk le események közötti műveletekkel a „Nem lesz szép idő, de elmegyek kirándulni” kijelentést.

c) Tekintsük a „Ha szép idő lesz, akkor kirándulni megyek” kijelentést, és fogadjuk el, hogy mindig igazat mondok. Milyen idő lehet, ha most éppen kirándulok?

5034 Egy véletlenszám-generátor 1-nél nem kisebb és 20-nál nem nagyobb egész számot ad. Legyenek a következő események:

$A = \{$páros szám$\}$, $B = \{$hárommal osztható szám$\}$, $C = \{$öttel osztható szám$\}$.

a) Hány elemi eseményből állnak A, B, C események?

b) Adjuk meg szövegesen és elemi eseményeik felsorolásával a következő eseményeket:

$$A \cdot B, \quad B + C, \quad \overline{A} \cdot C.$$

c) Adjuk meg az A, B, C események és műveletek segítségével a $D = \{$második páratlan prím$\}$ eseményt.

5035 Egy körökre osztott céltábla belülről kifelé a 10, 8, 6, 4, 2 pontokat érő sávokra van osztva. Tekintsük az alábbi eseményeket:



A = {5-nél kisebb lövés},

B = {3-mal osztható lövés},

C = {2 hatvány értékű lövés}.

a) Határozzuk meg elemi eseményeikkel az alábbi eseményeket:
$A+B+C$, $A\cdot B\cdot C$, $A\cdot B\cdot \overline{C}$, $\overline{A}\cdot B\cdot C$, $A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}$, $B\cdot \overline{A}\cdot \overline{C}$.

b) Adjuk meg az A, B, C események és a műveletek segítségével a telitalálat eseményt.

5036 Döntsük el, hogy a kijelentés vagy megfordítása igaz vagy hamis. Töltsük ki a táblázatot.

A = Ha egy háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást, akkor a háromszög derékszögű.

B = Ha egy négyszög négyzet, akkor minden szöge derékszög.

C = Ha egy tétel igaz, akkor a tagadása hamis.

D = Ha egy szám 3-mal osztható, akkor páros.

	A	B	C	D
Kijelentés				
Megfordítása				

5037 Döntsük el, hogy igazak vagy sem a következtetések.

a) Minden ember fenség. Ember vagyok. Ebből következik, hogy fenség vagyok.

b) Bármely tanya nádfedeles. Ez az épület nádfedeles. Tehát ez az épület tanya.

5038 Tagadjuk az alábbi kijelentéseket, és döntsük el, hogy az állítás, illetve a tagadása igaz vagy hamis.

a) Minden deltoid átlói merőlegesek egymásra.

b) Van olyan háromszög, melynek a legkisebb szöge is nagyobb 60°-nál.

c) Minden hattal osztható szám osztható kilenccel is.

d) Van olyan pozitív egész, melynek a prímtényezős felbontásában nem szerepel a 17.

e) A hét törpe közül egyik sem volt magasabb Hófehérkénél.

f) Sohasem írom le azt, hogy soha.

g) Ha egy szám 7-nek valamely hatványa, akkor osztható 3-mal.

h) Bármely kicsiny α ($\alpha>0$) szöghöz létezik olyan pozitív egész n, hogy az n-nél több csúcsú szabályos sokszögek külső szöge kisebb, mint α.

Kombinatorika

5039 Egy kis ország kis demokráciájában öt párt állíthat országos listát. A választási bizottság sorsolással dönti el, melyik párt hányadik helyen szerepel a szavazólapon. Hányféle sorrendben kerülhetnek egymás alá a pártok nevei?

5040 Álmos összeírta hat ismerősét, akiket meghív a születésnapjára. Elsőnek Előd, utolsónak Töhötöm jutott eszébe. Hányféle sorrend alakulhatott ki a papíron, ha a többiek véletlenszerűen jutottak Álmos eszébe?



5041 Peti öccsének van egy-egy kör, háromszög, négyszög, ember és madár formájú bélyegzője. Úgy nyomta a papírra sorban őket, hogy a két élőlény egymás mellé került. Hány különböző ilyen bélyegzést készíthet még az előző alá?

5042 Katinak és Pistinek nagy családja van, két gyermekük mellé hármas ikreik születtek. Ebédnél hányféleképpen ültethetik őket sorban a hosszú asztalhoz, ha a két nagyobb gyerek nem lehet egymás mellett, mert folyton birkóznak?

5043 Lili hat vendéget vár délután. Kör alakú asztala mellé kikészített hét különböző széket. Hányféleképpen helyezhette el a székeket? (Két elhelyezést akkor tekintünk különbözőnek, ha valamilyen körüljárás szerint legalább egy szék egy szomszédja más.)

5044 György négy vendéget vár délután. Hányféleképpen foglalhatnak helyet a kör alakú asztalnál, ha Viktor és Ferenc biztosan nem fog egymás mellé ülni? (Két ülésrend akkor különböző, ha legalább egy fő legalább egy szomszédja más.)

5045 Hány különböző négyjegyű szám készíthető a páros számjegyekből? (Egy jegyet többször is felhasználhatunk.) Közülük hány osztható 5-tel?

5046 Ötször dobunk a dobókockával, a kapott számokat egymás után írjuk. Hány különböző 4-gyel osztható szám alakulhat így ki?

5047 Hány háromjegyű számot képezhetünk a páratlan számjegyekből, ha egy jegyet csak egyszer használhatunk fel?

5048 A 30 fős osztályból 5 főt véletlenszerűen felkérnek egy kérdőív kitöltésére. Hányféle sorrendben adhatják át az öt kérdőívet az osztály tanulóinak?

5049 Amikor a jószívű hétpettyes katicabogár találkozott a szomorú cserebogárral, felajánlott neki három pöttyöt a hátáról. Hányféleképpen választhatott a cserebogár a katica pettyeiből?

5050 Zsoltnak van 12 tolla. Tündinek a virágos toll nagyon tetszik. Zsolt felajánlja, hogy válasszon a tollai közül hármat. Hányféleképp választhat Tündi, ha a virágosat mindenképpen elkéri?

5051 A 2005. májusi középszintű matematika érettségi első részében volt 7 kettő, 4 három és 1 négy pontos feladat. Csak az értük kapható pontszámokat tekintve hányféle sorrendben oldhatták meg a diákok a feladatokat?

5052 A középszintű matematikaérettségik második részében általában van három 12 és három 17 pontos feladat (utóbbiak közül kettőt kell megoldani). Legfeljebb hány fős az a csoport, melynek minden tagja különböző sorrendben oldja meg a feladatokat, ha csak a példákért kapható pontokat vesszük figyelembe?

5053 Vendégségbe mentünk Humor Haroldékhoz. Miután levettük a lábbelijeinket, öt pár cipő sorakozott egymás mellett az előszobában. Vendéglátónk szokásos tréfás kedvében az este során többször is összecserélte a cipőket:



a) először a jobb-bal párokat ebben a sorban megtartva;

b) aztán a párokat együtt tartva, de a jobb-bal sorrendet nem feltétlenül;

c) végül a párokra tekintet nélkül az összeset.

Ekkor megelégelve a humort, hazajöttünk. Az egyes esetekben hányféle sorrendet alakíthatott ki cipőinkből a házigazda, Humor Harold?

5054 Egy 90 fős rendezvényen mindenki egy tombolát vásárolhat, és 8 egyforma nyereményt sorsolnak ki. A tombola után minden nyertest felhívnak a színpadra, ahol sorban egymás mellé állnak és készül egy közös fénykép róluk. Összesen hányféleképpen állhatnak a résztvevők a fotón, ha

a) már tudjuk, kik a nyertesek; *b)* még nem tudjuk, kik a nyertesek?

5055 Egy barátságos kispályás focikupán három csapat vett részt. A torna végén a csapatok tagjai felsorakoztak az oldalvonal mentén. Hányféleképpen állhatnak fel, ha a játékosokat csak az alapján különböztetjük meg, hogy melyik csapatban játszanak? Minden csapat 8 fős (a cserékkel együtt).

5056 Marcsi délután a piacon árul gyümölcsöt. Hogy ne legyen éhes, minden nap elfogyaszt 20 szemet az árult fajtákból. Tegnap például evett 5 szem epret, 6 szem cseresznyét, 7 szem meggyet és 2 szem szilvát.

a) Hányféle sorrendben ehette meg ezeket a nap folyamán?

b) Ma 4 szem szilvát evett és 1-1 szemmel kevesebb cseresznyét és meggyet. Válaszoljuk meg a lehetséges esetek meghatározása nélkül, hogy nőtt vagy csökkent a lehetséges sorrendek száma. Hányszoros a változás?

5057 A nyelvi tesztfüzet egyik feladatában ki kell egészíteni 7 mondatot 12 előre megadott, különböző szóval. (Minden mondatba pontosan egy szót kell beírni, és egy szót legfeljebb egy helyre lehet beírni.) Hányféleképpen tölthetjük ki a tesztet?

5058 A 30 körös MotoGP futam 20 indulójából 12 fő ér célba. Hányféle végeredmény alakulhat ki, ha

a) bárki bármelyik helyen célba érhet?

b) Gábor dobogóra állhat?

(Holtverseny nincs.)

5059 Puerto Rico tengerpartjára egy építész különleges 11 emeletes épületet tervezett. A tervek szerint az épület minden szintjét kivilágítják négy különböző színnel úgy, hogy a színek sorrendje óránként véletlenszerűen változik. Hány évezreden keresztül üzemelhet úgy az épület, hogy ne ismétlődjön meg egy korábbi színösszeállítás sem? (Vegyük az éjszakát 8 órásnak, az évet 365 napnak.)

5060 A labdarúgó-mérkőzés végeredménye 6-2 lett. Hányféleképp rúghatták a hat gólt a hazai csapat játékosai, ha csak annyit tudunk, hogy a 10 mezőnyjátékos közül

a) bárki rúghatta bármelyik gólt;

b) csak csatár lőtt gólt, és a csapatnak három csatára van;

c) az első négy gólt csatár lőtte, a maradékot pedig a négy középpályás közül bárki;

d) négy gólt csatárok lőttek, a maradékot pedig a középpályások közül bárki?

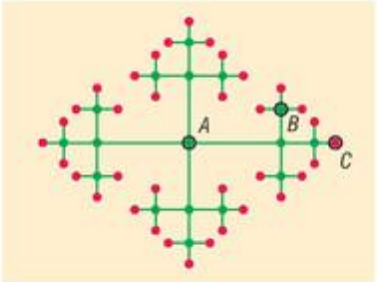
5061 Fejtsük ki a binomiális tétel segítségével a $(2 - a)^5$ hatványt.

5062 Tekintsük az alábbi fagráfot, melyben a leveleken kívül minden pont fokszáma 4. Hány különböző hosszúságú úton juthatunk a piros levelekbe

a) A; *b)* B; *c)* C

pontból kiindulva?

(Egy-egy élen csak egyszer mehetünk végig.)



5063 Vegyük a kettes, illetve a páratlan számjegyeket, és készítsünk belőlük ötjegyű számokat. (Egy számot csak egyszer használhatunk fel). Hány darab olyan számot írhatunk így fel,

a) amelyben az egymás után álló számjegyek növekednek;

b) amelyekben egymás mellett állnak a nem prím számjegyek;

c) amely 4-gyel osztható?

5064 10 betűből és 5 számjegyből 4-jegyű kódot készítünk (a betűk csak kisbetűk lehetnek). Hány különböző kódot állíthatunk elő, ha

a) minden karakter előfordulhat többször is;

b) a kódszónak tartalmaznia kell legalább egy betűt;

c) akármennyi szám szerepelhet, de a betűk mégis szerepelhetnek kis- és nagybetűként is?

5065 Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = [\sin x]$ ($\sin x$ egészrész) függvény értékkészletét. Hányféle módon írhatjuk le az értékkészlet egyes elemeit négyszer egymás után, ha

a) bármely érték akárhányszor felléphet;

b) legfeljebb egy érték szerepelhet legfeljebb kétszer;

c) ezt abban a sorrendben tesszük meg, ahogy a $g(x) = \sin x$ függvény is értékként adná őket?

5066 A tablót készítő cég megajándékozta a 22 fős osztályt egy olyan tortával, aminek a tetejére színes marcipánból elkészítették a tabló mását. A tablóra 12 tanár fényképe is felkerült.

a) A diákok persze a tanárok képeit akarták megszerezni. Hányféleképpen sorsolhatták ki egymás között a képeket, ha megegyeztek, hogy egy diák csak egy tanár képét kaphatja?

b) Valaki felvetette, hogy a lányok kapják a férfi tanárok képeit, a fiúk pedig a tanárnőkét. Az ötletet elfogadva hányféleképp oszthatják el a képeket, ha 14 lány jár az osztályba és 6 tanár férfi?

c) Erre a jelenlevő nyolc tanár is felvetette, hogy akkor ők meg a diákok képét szeretnék. Hányféle kiosztásban kaphatják a képeket, ha hat tanárnak 3-3, kettőnek pedig 2-2 diák marcipánképe jut?

5067 A fogyasztóvédelmi hatóság egyik akciójában a plüssmacikat ellenőrizték. A forgalmazók saját bevallása szerint is a macik 30%-a selejtes. Az egyik áruház 500 darabos készletéből 20-at visszatevés nélkül kiválasztva hányféleképpen fordulhat elő, hogy

a) nincs köztük selejtes; *b)* pontosan kettő selejtes van; *c)* legalább három selejtes van?

5068 A 30 fős osztályban pontosan ugyanaz a 21 fő készül minden földrajzórára, ők biztosan szépen is felelnek (a többiek pedig biztosan gyengén). A tanár a jövő hétre nagyjából 10 feleletet tervezett. A diákok tudják, hogy ennél a tanárnál bárki felelhet bármikor, akkor is, ha már akár aznap volt kint a térkép előtt. Hányféleképp fordulhat elő, hogy

a) 10 szép feleletet fog a földrajztanár hallani? *b)* pontosan 4 gyenge felelet lesz a héten?

c) legfeljebb 7 alkalommal ad jó jegyet?

5069 Esztinek van két egyforma babája. A babaszekrényében tart nekik 5 szoknyát, 8 inget és 4 kabátot (minden ruhadarab különbözik egymástól). Először kiválaszt mindegyik fajta ruhából kettő-kettő darabot, majd közülük az egyiket az egyik, a másikat a másik babára adja véletlenszerűen.

a) Hányféleképp öltöztetheti fel a babákat?

b) Hányféleképp teheti ugyanezt meg, ha három babája van és rájuk három-három szoknyát, inget és kabátot választ?

5070 Egy tehetségkutató műsorba 58 lány és 42 fiú jelentkezik. Közülük kiválasztanak 12 főt, akikkel a műsor reklámfilmjeit készítik (minden kiválasztott csak egy filmben szerepel). Hányféleképp választhatják ki a 12 főt, ha

a) a jelentkezők közül bárki bekerülhet a kiválasztottak közé?

b) pontosan 7 lányt és 5 fiút választanak ki?

c) mindig kettesével mutatnak be különböző nemű kiválasztott jelentkezőket?

d) nem tudjuk pontosan, hány fiút vagy lányt választanak ki, csak azt, hogy minden reklámfilmben hármasával mutatnak majd be azonos nemű kiválasztott jelentkezőket?

5071 Janinak 13 indiános és 2 cowboyos könyve van, és azt az ígéretet kapta, hogy születésnapjára megajándékozzák még néhány távol-keleti regénnyel. Hány könyvet kaphat, ha az ajándékot adó barátja szerint könyveit majd 406 980 különböző módon rendezheti el a polcon téma szerint?

5072 Készítsünk a páratlan számjegyekből hárommal osztható négyjegyű számokat. Hány ilyet írhatunk fel összesen, ha

a) egy jegyet csak egyszer használhatunk fel?

b) minden számjegyet többször is felhasználhatunk?

5073 Hányféleképpen lehet 8 főt 3 szobába elosztani, ha a szobák hatágyasak és

a) csak a személyek számát vesszük figyelembe, de a szobákat megkülönböztetjük;

b) csak a személyek számát vesszük figyelembe, a szobákat nem különböztetjük meg;

c) a személyeket megkülönböztetjük, de a szobákat nem;

d) a személyeket és a szobákat is megkülönböztetjük egymástól?

5074 A 23 fős 11/*n* osztály háromnapos kirándulásra megy. Kaptak 1 darab kétágyas, 3 darab háromágyas, 1 darab négyágyas és 1 darab nyolcágyas szobát. Hányféleképpen helyezhetők el a szobákban a diákok, ha a szobákban levő ágyak között

a) nem teszünk különbséget? *b)* különbséget teszünk?

Az osztályba 10 leány jár. Hányféleképpen oszthatják el a szobákat egymás között, ha a lányok nem kerülhetnek egy szobába fiúkkal és az ágyak között

c) nem teszünk különbséget? *d)* különbséget teszünk?

Valószínűség-számítás

5075 Adjunk meg szövegesen egy-egy biztos és lehetetlen eseményt a következő valószínűségi kísérletben: négy hagyományos dobókockával egyszerre dobunk.

5076 Legyen a valószínűségi kísérlet egy érme egymás után négyszer való feldobása. Tekintsük a következő eseményeket: A = {két fejet és két írást dobtunk}; B = {elsőre írást, harmadikra fejet dobtunk}.

a) Hány elemi eseményből áll A komplementer eseménye? Adjunk meg belőlük kettőt.

b) Adjuk meg AB és $\overline{A+B}$ eseményeket elemi eseményeikkel.

c) Adjuk meg $P(A)$, $P(AB)$, $P\left(\overline{A+B}\right)$ értékét.

5077 Egy virágárus mindennap felírja, hogy a hozzá betérő vevők közül hány fogadta el az általa ajánlott virágcsokrot. A múlt héten a következőket tapasztalta: hétfőn 10-ből 8, kedden 12-ből 9, szerdán 7-ből 4, csütörtökön 18-ból 15, pénteken pedig 24-ből 20 vevő köttette meg az ajánlott csokrot.

a) Adjuk meg minden napra, mekkora relatív gyakorisággal találta el az árus a vevők ízlését.

b) Mit mondhatunk a találatok valószínűségéről?

5078 Jancsi biatlonozik (a biatlon téli sport, a sífutás és a lövészet összekapcsolása). Általában 20 lövésből 17-szer talál. Mekkora valószínűséggel nem találja el a célt

a) a következő lövése; *b)* a következő öt lövése?

5079 Gyuri gondolt egy 50-nél kisebb nemnegatív egész számra, amelyről annyit árult el Gyulának, hogy 5-tel osztható. Mekkora valószínűséggel találja ki Gyula ezt a számot?

5080 Teri rajzolt a füzetébe 3 négyzetet, 2 ellipszist és 5 háromszöget. Janka rábök találomra az egyikre. Mekkora valószínűséggel felezik egymást a Janka által kijelölt alakzat átlói?

5081 Ágnes megadta a hétjegyű vonalas telefonszámát Áronnak, aki azonban elfelejtette az egyik számot (423X567). Mekkora valószínűséggel hívja Ágit, ha tudja, hogy a teljes szám nem osztható hárommal?

5082 Az A, A, B, C, S betűket véletlenszerűen egymás mellé téve mekkora valószínűséggel jutunk értelmes magyar keresztnévhez?

5083 Egy zacskó a felirat szerint tartalmaz 30% kakaós és 35-35% vaníliás, illetve csokis kekszet. Mekkora valószínűséggel választunk találomra a zacskóból elsőnek csokis kekszet?

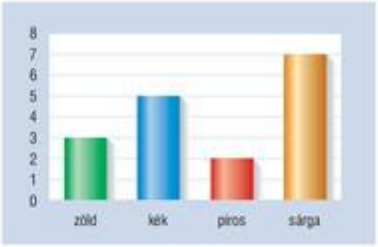
5084 A bécsi átlagos havi maximum hőmérsékleteket látjuk az alábbi táblázatban:

Hónap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
°C	2,9	5,1	10,3	15,2	20,5	23,4	25,6	25,4	20,3	14,2	7,5	4

Találomra kijelölve egy hónapot az évben, mennyi az esélye, hogy átlagos napi hőmérsékletének maximuma 20 °C alatt van?

5085 A 12/*c*-ben bukás nem volt félévkor matekból, elégséges 5, közepes 10, jó 7, jeles pedig 8 volt. Mekkora valószínűséggel jelölünk ki egy olyan tanulót, aki legalább közepes matekból?

5086 Nyuszi megszagolta a festett tojásokat, majd egy piros elé ült. Mennyi volt ennek előzetesen a valószínűsége, ha az oszlopdiagram mutatja a különböző színű tojások számát?



5087 A kördiagram igazából egy rágcsálnivalókat tartalmazó kör alakú doboz felülnézete. A gyártási eljárás miatt minden körcikk középponti szöge 30°-nak egész számú többszöröse. Összeöntve egy tálba a rágcsálnivalókat, mekkora valószínűséggel veszünk ki egy halacskát?

(A rágcsálnivalók azonos méretűek, és egyenletesen töltik meg a rekeszeket.)



5088 Mekkora valószínűséggel jön ki a bánya bejáratán a hét törpe növekvő ábécérendben, ha véletlenszerűen álltak sorba? (Mindegyik törpének más a neve.)

5089 Adottak az e, f, g, h, i, j egyenesek, melyek közül semelyik kettő nem párhuzamos és semelyik három nem megy át ugyanazon a ponton. Az egyenesek metszéspontjai közül egyet kiválasztva, mennyi a valószínűsége, hogy az éppen f és i egyenesek metszéspontja?

5090 Mennyi a valószínűsége, hogy az $\{a, b, c, d, e\}$ halmaz összes részhalmaza közül pont az $\{a, c, d\}$ halmazt választjuk ki véletlenszerűen?

5091 Egységsugarú körbe írunk egy négyzetet. Egy pontot véletlenül ráejtve a körre, mennyi a valószínűsége, hogy az a négyzet mellé esik? Kettő tizedesjegyre pontosan adjuk meg.

5092 Tekintsük az a, b, c, d, e, f, g, h, i, j betűket, közülük négyet kiválasztva és egymás után írva készítsük el az összes lehetséges négybetűs szót. Ha ezek közül véletlenszerűen választunk egyet, mekkora valószínűséggel szerepel a kiválasztott szóban az e betű?

5093 Hány üveggolyónk van összesen, ha közülük 14 színtelen, és egy színtelen véletlenszerű kiválasztásának esélye 70%?

5094 A szekrényben van 12 sima nyakkendő. Reggeli félálomban 0,4 annak a valószínűsége, hogy csíkos nyakkendőt veszünk fel. Hány csíkos nyakkendőnk van, ha a két említetten kívül nincs másfajta nyakkendőnk?

5095 Egy dobozkába beletettünk 5 zöld és 7 kék szalagot. Hány darab narancssárga szalagot kell ahhoz beletennünk, hogy a szalagok közül egyet véletlenszerűen kivéve az 0,25 valószínűséggel legyen narancssárga?

5096 A totó 13+1 fogadási tételéből néhánynak már ismerjük az eredményét, és még van esélyünk a telitalálatra. Hány tippünk jött eddig be, ha ebben a pillanatban nyerési esélyünk $\frac{1}{3^5}$?

5097 Egy dobókockával játszunk. Mennyi a valószínűsége, hogy hat dobásból minden számot kidobunk egyszer?

5098 Mekkora valószínűséggel készítünk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből egy hétjegyű, de csupa különböző jegyet tartalmazó számot, ha minden helyre minden jegyet ugyanakkora valószínűséggel választunk és egy jegyet többször is felhasználhatunk?

5099 Érmegyűjtő Ernő a következő korabeli érméit állítja ki egy üveges szekrényben:

Érme típusa	Lajos-arany	Bethlen-garas	József-krajcár	Mária Terézia-tallér
Darabszám	5	3	4	

Tudjuk, hogy a vitrinből egy véletlenszerűen kiválasztott érme $\frac{1}{3}$ valószínűséggel lesz Mária Terézia korabeli tallér.

a) Töltsük ki a táblázat üres celláját.

b) Ábrázoljuk kördiagramon, melyik pénzből hány darabot tartalmaz Ernő gyűjteménye.

c) Hányféleképpen teheti Ernő egyetlen sorba a vitrinben az érméit?

d) Még legalább mennyi Lajos-aranyat kell Ernőnek összegyűjtenie, ha azt szeretné, hogy egy tallér kiválasztásának valószínűsége 0,3 alá csökkenjen? (A többi érme darabszáma nem változik.)

5100 Karola és Petra a kaszinó új játékát próbálják ki. Petra kezében egy piros és egy kék érme van, Karolánál egy dobókocka. Egyszerre kell dobniuk a náluk levő tárgyakkal. Ha Petra két fejet dob az érmékkel, akkor megduplázzák a Karola által dobott számot. Ha egy fejet és egy írást dob, akkor nem kapnak semmit. Ha két írást dob, akkor a Karola által dobott számhoz hozzáadnak 3-at. Nyereményük ennyi euró. Egyetlen játékot játszanak, amelynek az árát, 4 eurót, a játék előtt kell befizetni.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 4 euró veszteséggel zárnak a lányok?

b) Hányféleképpen kereshetnek a lányok 4 eurót a játékon (a játék árát is beleszámítva)? Mennyi ennek a valószínűsége?

c) Készítsünk áttekintő táblázatot a játékon nyerhető összegekről (a játék árát ne tekintsük).

d) Mennyi a valószínűsége, hogy pozitív mérleggel fejezik be a játékot (a játék árát is beleszámítva)?

5101 Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy a 26 fős osztályból ki hány pontot ért el a legutóbbi dolgozaton. (A tanár minden feladatra egész pontszámot adott.)

Pontszám	0–8	9–16	17–24	25–32	33–40
Gyakoriság	3	6	5	7	5

a) Készítsünk oszlopdiagramot az adatok ábrázolására.

b) Határozzuk meg a tanulók által átlagosan gyűjtött pontok számát egy tizedesjegyre. (A számításokat az osztályközepekkel végezzük.) A ponthatárokat a tanár így adta meg: 20%-ig elégtelen, 40%-ig elégséges, 60%-ig közepes, 80%-ig jó és afelett jeles.

c) Kiválasztva az osztály egy tanulóját, mennyi a valószínűsége, hogy legalább jó dolgozatot írt?

d) Ha kiválasztjuk az osztály öt tanulóját, mekkora valószínűséggel lesz közülük kettőnek jeles és háromnak jó a dolgozata?

5102 *a)* Határozzuk meg azon háromjegyű számokat, melyeknek a számjegyei a leírás sorrendjében mértani sorozatot alkotnak.

b) Tekintsük azon háromjegyű számokat, melyeknek a jegyei számtani vagy mértani sorozatot alkotnak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük egy számot kiválasztva, annak számjegyei éppen számtani sorozatot alkotnak?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a csupa különböző jegyből álló számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, annak jegyei nem alkotnak sem számtani, sem mértani sorozatot?

5103 Van egy szabályos tetraéder alakú dobókockánk, oldalain az 1, 2, 3, 4 számokkal. Ha 1-est dobunk, akkor feltett pénzünk háromnegyedét, ha 2-est, akkor felét elveszítjük. Ha 3-ast dobunk, akkor pénzünknél maradunk, ha 4-est, akkor megháromszorozzuk a feltett pénzünket. (Minden fordulóban feltesszük az egész rendelkezésünkre álló összeget.)

a) Két fordulót játszva mennyi lehet a maximális összeg, amit 10 €-t feltéve megnyerhetünk?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy három forduló alatt a lehető legkevesebb pénzünk marad?

c) Három forduló alatt mekkora valószínűséggel érünk el 10 €-ból 15 €-t?

5104 Egy dobókockával addig dobunk, míg hatos nem lesz. Minek nagyobb a valószínűsége: négy dobásnál többször nem kell, vagy legalább ötször kell dobnunk a kockával?

5105 Egy nem átlátszó üvegkehelyben van 10 epres és 15 meggyes cukorka. A kehelybe markolunk, és kiveszünk találomra 5 cukorkát. Mekkora valószínűséggel lesz

a) mind az öt epres;

b) mind az öt meggyes;

c) vegyesen epres és meggyes is?

5106 Egy rendezvényen Kati nagyjából 60% esélyt ad magának arra, hogy nyer a tombolán. Jani saját esélyét 50%-ra tartja. Hogy mindketten nyernek, azt egybehangzóan 25%-nak látják. Mekkora valószínűséggel nyer legalább egyikük, ha elfogadjuk az általuk mondott számokat?

5107 Eszter nyakláncot készít. Egyik dobozába beleöntött 5 csomag zöld és 3 csomag kék gyöngyöt (egy csomagban 10 darab gyöngy volt). Benyúl a dobozba, és a tenyerébe vesz belőlük nyolcat. Mekkora valószínűséggel lesz a tenyerében levő gyöngyök között legalább kettő kék?

5108 Károly nagy átlagban négy esetből egyszer tudja a választ a vetélkedő kérdéseire. Mekkora valószínűséggel találja el a következő

a) kérdésre a választ;

b) három kérdésre a választ;

c) két kérdésre a választ, majd utána háromra nem, végül az utolsóra ismét igen;

d) hat kérdés közül négyre a választ és kettőre nem?

5109 Az óvodai kis szekrényen áll egy 20 cm oldalú szabályos háromszög alakú óratok, melynek számlapja a háromszög beírt köre. A számlapot üveg fedi, ezen jól megtapad a gyurma (az óra többi részéről könnyen lecsúszik). Alfréd és Gerzson már vagy fél órája kis gyurmadarabokat dobálnak az órára, és az óratokot biztosan el is találják. Mekkora valószínűséggel találja el a következő

a) dobás a számlapot;

b) két dobás a számlapot, míg a harmadik lecsúszik;

c) öt dobásból három a számlapot, míg a többi lecsúszik?

5110 A 32 lapos kártyacsomagból 7 lapot húzunk (az éppen kihúzott lapot megtekintés után visszatesszük a csomagba). Mekkora a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok közül

a) 4 figurás (ász, király, felső vagy alsó) és 3 hetes;

b) legfeljebb öt figurás?

5111 Az azonos 24 fő létszámú A és B osztály közös kirándulásra megy. Az A osztály fele fiú, a B-ben kétszer annyi fiú van, mint lány. Kiválasztva a kiránduláson részt vevő tanulók közül

a) egy lányt, mekkora valószínűséggel lesz a B osztály tanulója?

b) kettő lányt, mekkora valószínűséggel jár mindegyikük az A osztályba?

c) három lányt, mekkora valószínűséggel jár kettő a B, egy az A osztályba?

d) négy fiút, mekkora valószínűséggel jár három az egyik, egy fő a másik osztályba?

e) hét tanulót, mekkora annak a valószínűsége, hogy többen járnak közülük az A, mint a B osztályba?

5112 Egy négy fordulóból álló játékban a játékosnak kezdetben 1296 pontja van. Minden fordulóban feltesznek neki egy kérdést, ami után dönthet három lehetőség közül:

A = megpróbálja megháromszorozni a pénzét,

B = megpróbálja megduplázni a pénzét,

C = kihagyja a kérdést.

Ha az A vagy B lehetőséget választja, akkor dob egy dobókockával. Az A esetben ha 5-öst vagy 6-ost dob, és jól válaszol a kérdésre, akkor megháromszorozza a pontjait. Ha mást dob, vagy mégsem tudja jól a választ, a pénzét harmadolják. A B esetben ugyanez a helyzet, csak 4-5-6-ost kell dobni és duplázni, vagy felezni lehet a pontokat. A C esetben dob a kockával: ha 6-ost dob, akkor pontjai megmaradnak, különben hattal osztják őket.

a) Mennyi a lehető legtöbb és legkevesebb szerezhető pont a játékon?

b) Ha valaki minden kérdésre tudja a választ, mekkora valószínűséggel szerzi meg a maximális pontot? Ha minden kérdést passzol, mekkora valószínűséggel jut el a minimális pontig?

c) Mekkora valószínűséggel ér el 5832 pontot a játékos, ha minden olyan kérdésre helyesen válaszolt, amelyet nem hagyott ki?

5113 Kornélia elhatározza, hogy ma délután különös módon internetezik: amikor megnyit egy weblapot, az oldalon található linkek közül ugyanakkora valószínűséggel nyitja meg bármelyiket. Tudjuk, hogy az általa látogatott A, B, C, D oldalakon sorban 4, 5, 2 és 4 hiperhivatkozás található. Az ötödik megnyitott oldal (E) egy női magazin weboldala. Mekkora volt előzetesen annak a valószínűsége, hogy pont ide jut (akár más útvonalon), ha

a) minden oldalon minden link különböző weblapokra mutat? (Tehát csak az utolsó, D oldal egyik linkje visz E-re.)

b) minden általa megtekintett A, B, C, D oldalról mutat egy link a női magazin E oldalára, de a többi link mind más, különböző oldalakra mutat?



c) minden általa megtekintett A, B, C, D oldalról mutat egy link a női magazin E oldalára, de a többi, egy oldalon található link mind ugyanarra az oldalra mutat?

d) Mekkora valószínűséggel nem talál Kornélia A, B, C, D weblapokon keresztül a női magazin E oldalára, ha

1. az A, B, C, D oldalakról egy-egy link mutat az E-re;
2. az A oldal többi linkje a B-re, a B oldal többi linkje a C-re, a C oldal többi linkje a D-re mutat, illetve
3. a D oldal minden linkje különböző oldalakra visz?

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET – ÖSSZEFOGLALÁS

Számok és műveletek

5114 Milyen (nem feltétlenül azonos) műveleti jelek írhatók a * helyére, hogy igaz legyen az állítás? Ha szükséges, zárójelet is használhatunk.

a) $20 + 7 * 3 - 4 * 11 = 9$;
b) $13 * 9 + 6 * 5 - 13 = 10$;
c) $1 + 2 * 3 + 4 * 5 = 6$;
d) $5 * 4 \cdot 3 - 2 * 1 = 15$;
e) $5 * 6 - 7 * 8 - 9 = -35$;
f) $10 \cdot 3 * 6 + 4 * 5 = 25$.

5115 Mi az alábbi műveletek eredménye? Ábrázoljuk számegyenesen a megoldást.

a) $[-1; 2] \cap [1; 3]$;
b) $]-2; 2[\cup [1; 3[$;
c) $[-4; 3[\setminus]2; 4]$;
d) $]2; 5[\cap [1; 4]$;
e) $]-4; 6[\setminus [-5; 7]$;
f) $[1; 7[\cup]2; 8[$;
g) $[-4; 3[\cap]-2; 5]$;
h) $]-3; 5[\cup [5; 7]$;
i) $[-3; 5] \setminus]6; 10[$;
j) $]-5; 3] \cap [4; 11]$;
k) $[2; 12] \setminus]4; 7]$;
l) $[-4; 2[\cup [-3; 1]$.

5116 Írjunk fel három racionális számot, melyek az $\left[\frac{1}{33}; \frac{2}{33}\right]$ intervallumban vannak.

5117 Írjunk fel három irracionális számot, melyek az $\left[\frac{1}{33}; \frac{2}{33}\right]$ intervallumban vannak.

5118 Két szám különbsége 8. Ha az elsőt osztjuk a másodikkal, a hányados 2 és a maradék is 2. Mennyi a két szám összege?

5119 Adjuk meg a következő két szám számtani és mértani közepét:

a) 2 és 8;
b) 1 és 16;
c) 4 és 16;
d) 2 és 2.

5120 Határozzuk meg az $a = 4$ szám ismeretében a b számot úgy, hogy a számtani közepük

a) 6;
b) 5;
c) 12;

illetve a mértani közepük

d) 6;
e) 5;
f) 12

legyen.

5121 Milyen számjegy áll a következő számok tizedes tört alakjában a tizedes vessző utáni 2010-edik helyen?

a) $\frac{21}{5}$;
b) $\frac{35}{6}$;
c) $\frac{13}{7}$;
d) $\frac{7}{17}$.

5122 Ha 7 szíriai aranyhörcsög 5 nap alatt 14 csomag olajos magkeveréket eszik meg, akkor

a) 10 aranyhörcsög 3 nap alatt hány ilyen csomag olajos magkeveréket fogyaszt el?

b) 4 aranyhörcsögnek hány napra elegendő 10 csomag a fenti keverékből?

5123 A tizenkettedik osztályos matematika-tankönyv oldalainak számozása 6-tal kezdődik, az utolsó számozott oldal 287. Hány számjegyet írtak le az oldalszámok nyomtatásakor? Az oldalak számozása során hányszor írták le az 5-ös számjegyet?

5124 A következő állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis:

a) Két természetes szám hányadosa nem lehet természetes szám.

b) Minden racionális szám reciproka racionális szám.

c) Két negatív egész szám szorzata lehet természetes szám.

d) Van olyan irracionális szám, amelyhez 1-et adva racionális számot kapunk.

e) Van olyan irracionális szám, amelynek a négyzete is irracionális.

f) Ha egy egész szám négyzetgyöke egész, akkor a harmadik gyöke irracionális szám.

5125 Hány nullára végződik az 56! szorzat?

5126 Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyben a számjegyek összege 2010?

5127 Melyik az a legkisebb természetes szám melyben a számjegyek szorzata 2000?

5128 A Minden Olcsó áruház akciót hirdet, amelyben minden termék árát 27%-kal csökkentik.

a) Az akció befejezése után hány %-kal növeljék az aktuális árakat, hogy minden annyiba kerüljön, mint az akció előtt?

b) Ha az akció befejezése után a „Senkinek sem kell" nevű termék pillanatnyi árát további 30%-kal csökkentik, hány %-a lesz a kapott ár az akció előtti árnak?

c) Az akció befejezése után a „Fogyi Fagyi" aktuális árát 45%-kal felemelik. Hány %-a lesz ekkor az ár az akció előtti árnak?

5129 Egy osztály tanulói a tanév során kétszer szerveztek közös színházlátogatást, télen és tavasszal. A tanulók közül mindenki el tudott menni legalább az egyik programra. A téli színházlátogatáson a tanulók 75%-a, a tavaszi színházlátogatáson pedig a diákok 60%-a vett részt. Az osztály tanulóinak hány százaléka vett részt mindkét színházlátogatáson? A tanulók hány százaléka volt csak a téli, illetve csak a tavaszi programon?

5130 Egy vállalat a dolgozóknak két csoportépítő tréninget szervezett. Minden dolgozónak kötelező volt legalább az egyik tréningen részt venni. Az elsőn a dolgozók 64%-a, a másodikon a dolgozók 72%-a vett részt. 54 olyan dolgozó volt, aki mindkét tréningen megjelent. Hányan dolgoznak a vállalatnál?

5131 Dús Kálmán havi bruttó fizetése 320 000 Ft. Adóra és egyéb járulékokra levonják a fizetése 38%-át.

a) Mennyi Dús Kálmán havi nettó fizetése? *b)* A nettó fizetésnek hány %-a a levonás?

c) A levont összegnek hány %-a a nettó bér?

5132 Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő végtelen szakaszos tizedes törteket:

a) $1,\dot{2}$; *b)* $1,\dot{9}$; *c)* $2,\dot{1}\dot{7}$; *d)* $0,5\dot{3}4\dot{2}$.

5133 Zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki ügyesen a következő műveletek eredményét:

a) $1623 \cdot 623 - 623^2$; *b)* $1956^2 - 956^2$; *c)* $\dfrac{314^2 - 196}{328}$.

Számelmélet, oszthatóság

5134 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis:

a) Ha egy szám osztható 4-gyel és 9-cel, akkor osztható 36-tal.

b) Ha egy szám osztható 2-vel és 18-cal, akkor osztható 36-tal.

c) Ha egy szám osztható 36-tal, akkor osztható 2-vel, 4-gyel, 9-cel és 18-cal.

5135 Fogalmazzunk meg

1. szükséges de nem elegendő;
2. elegendő, de nem szükséges;
3. szükséges és elegendő

feltételt

a) 15-tel; *b)* 45-tel; *c)* 12-vel

való oszthatóságra.

5136 Határozzuk meg azokat a pozitív egész a számokat, melyre:

a) $(15; a) = 1$; *b)* $(a; 48) = 24$; *c)* $[6; a] = 60$; *d)* $[a; 16] = 48$.

5137 Számológép használata nélkül egyszerűsítsük egy lépésben a következő törteket:

a) $\frac{126}{294}$; *b)* $\frac{720}{1176}$; *c)* $\frac{1425}{1725}$; *d)* $\frac{72^4}{24^6}$; *e)* $\frac{9240}{11088}$; *f)* $\frac{96^3}{144^2}$.

5138 Számológép használata nélkül (a legkisebb közös többszörös hatvány alakjának felhasználásával) számítsuk ki:

a) $\frac{7}{60} - \frac{5}{72}$; *b)* $\frac{3}{14} - \frac{2}{5} + \frac{8}{21}$.

5139 Írjunk természetes számot a jelek helyére úgy, hogy a szorzatok

a) 6 többszörösei; *b)* 10 többszörösei

legyenek:

$$A = 3 \cdot \square \cdot 2; \quad B = 9 \cdot \square \cdot \triangle \cdot 5; \quad C = 2 \cdot \triangle \cdot 5 \cdot \square.$$

5140 Számolás nélkül határozzuk meg, hogy hányszorosa a $11 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 5$ szorzat az alábbiaknak.

a) 13; *b)* 11; *c)* $5 \cdot 13$;
d) $11 \cdot 13$; *e)* $2 \cdot 13 \cdot 5$; *f)* $13 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11$;
g) 26; *h)* 22.

5141 Hány pozitív osztója van a 60-nak? Az eredményt ellenőrizzük felsorolással.

5142 Mennyinek felel meg a tízes számrendszerben?

a) 100111_2; *b)* 1201_3; *c)* 11002_4.

5143 Mennyinek felel meg az 1516

a) a kettes számrendszerben; *b)* a négyes számrendszerben; *c)* az ötös számrendszerben?

5144 Az alábbi tízes számrendszerbeli számokban milyen számjegy állhat az ismeretlenek helyén, ha igaz az oszthatóság:

a) $8 \mid \overline{6712a}$; *b)* $15 \mid \overline{34y25x}$; *c)* $12 \mid \overline{781b2a}$.

5145 Melyik az a legkisebb ötjegyű szám, amely 19-cel osztva 11-et ad maradékul?

5146 Az alábbi számok közül válasszuk ki a relatív prím párokat: 210, 297, 560, 800. Van-e közöttük három olyan szám, melyek relatív prímek?

5147 A kettő ötszöröséhez egyet adva újra prímszámot kapunk. Van-e másik prímszám, melynek az ötszörösét eggyel megnövelve az eredmény újra prímszám?

5148 A 28-nak melyik az a legnagyobb hatványa, amellyel a $16^{15} \cdot 35^{28}$ szorzat osztható?

5149 Az alábbi számokról döntsük el, hogy négyzetszámok-e vagy nem:

a) $2^8 \cdot 3^{16} \cdot 5^{20} \cdot 7^{100}$; *b)* $2^{2010} \cdot 3^{2009}$; *c)* $8^{42} \cdot 9^7 \cdot 25^9$.

5150 Indokoljuk meg, hogy miért nem prímszámok a következők:

a) $10^{10} + 8$; *b)* 10002000300040005; *c)* $10^{15} + 10^{25} + 25$.

5151 *a)* Milyen jegyre végződik öt darab egymást követő pozitív egész szám szorzata?

b) Milyen jegyre végződik öt darab egymást követő pozitív páratlan szám szorzata?

c) Milyen jegyre végződik az első hét prímszám szorzata?

5152 Egy pozitív számokból álló számtani sorozat első három eleme prímszám. Mennyi lehet a sorozat differenciája, ha az első három tag összege 51?

5153 Igazoljuk számológép használata nélkül a következő állításokat:

a) $9 \mid 10^{53} + 8$; *b)* $3 \mid 10^{10} - 4$; *c)* $6 \mid 10^{10} - 4$.

5154 Bizonyítsuk be, hogy a következő számok összetettek:

a) $10^{50} - 50$; *b)* $10^{70} - 7$; *c)* $10^{128} - 128$.

5155 Egy síparadicsomban az egyik csúcsról délre kék színű, nyugat felé piros pályán lehet lesiklani. Anna egész nap a kék pályán síel, ahol 8 perc alatt ér le, és a felvonóval 10 perc alatt jut fel a csúcsra. Bea folyamatosan a piros pályán síel, 12 perc alatt ér le és 11 perc alatt fel. Mindketten 2 percet töltenek a felvonóra való várakozással, pihenéssel minden leérkezéskor. Ha 8 óra 30 perckor egyszerre indulnak el a csúcsról lefelé, mikor fognak újra találkozni a csúcson?

5156 Határozzuk meg azokat a pozitív egész a és b számokat, amelyekre teljesül, hogy $(a; b) = 15$ és $[a; b] = 1350$.

5157 Félix matematikus. Ha ebben az évben megkérdezik tőle, hogy hány éves, így válaszol: *„Az életkorom fele prímszám, jövőre pedig a harmada lesz prím."* Hány éves lehet Félix, ha tudjuk, hogy életkora 20 és 70 év közé esik?

5158 Egy digitális óra kijelzőjén az órák és percek kettőspontal elválasztva jelennek meg, mindegyik rész egy-egy kétjegyű számot tartalmaz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha délelőtt 10 és 11 óra között valaki ránéz egy ilyen órára, akkor két relatív prím kétjegyű számot lát?

5159 Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható 10-zel és 10 db osztója van?

5160 Mennyi annak a számrendszernek az alapszáma, amelyben a tízes számrendszerben felírt 302-t így írjuk: 456_a?

5161 Milyen számjegyek írhatók a betűk helyére, hogy igaz legyen a következő összeadás?

$$1b341_5 + 213a_5 = 200c0_5.$$

5162 Milyen n egész számok esetén lesz a következő A kifejezés értéke egész szám?

$$A = \frac{n-2}{n+3} \quad (n \neq -3).$$

5163 Milyen n természetes számok esetén lesz a következő kifejezés értéke természetes szám?

a) $\frac{2n+10}{n+1}$; *b)* $\frac{3n+5}{n-5}$.

5164 Tudjuk, hogy $29 \mid 3a + 8b$ és $29 \mid 2a - 5b$. Bizonyítsuk be, hogy $29 \mid 11a - 12b$.

5165 Hány olyan $(x; y)$ pozitív egész számokat tartalmazó számpár van, amelyre

$$(x; y) = 5 \quad \text{és} \quad x + y = 200?$$

5166 Határozzuk meg a tízes számrendszerben az x értékét úgy, hogy igaz legyen a következő egyenlőség:

$$2^5 \cdot 9^x = \overline{259x}.$$

5167 Mennyi a 2^{2010} és 5^{2010} számok számjegyei számának az összege?

5168 Milyen n egész szám esetén lesz a következő szorzat prímszám:

$$|(n^3 - 63) \cdot (n^2 - 65)|?$$

5169 Osztható-e 2011-gyel a következő összeg:

$$1^{2011} + 2^{2011} + 3^{2011} + \ldots + 2009^{2011} + 2010^{2011} + 2011^{2011}?$$

Hatvány, gyök, logaritmus

5170 A 2-nek hányadik hatványai a következő számok:

a) $16^{-2} \cdot 128^3$; *b)* $\sqrt{1024} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; *c)* $\dfrac{32^3}{\sqrt[3]{512^5}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt[4]{256^{-3}} \cdot 4^{-1}}{\sqrt[3]{8^{-7}} \cdot 2^{-5}}$.

5171 Írjuk fel prímszámok hatványainak szorzataként a következő számokat:

a) $160^4 \cdot 28^3 \cdot 70$; *b)* $\dfrac{32^{-2} \cdot 14^5}{35^7 \cdot 16^{-3}}$; *c)* $\left[\dfrac{6 \cdot 125^{-1} \cdot 35^3}{14 \cdot (7 \cdot 3)^2}\right]^{-1}$; *d)* $\dfrac{180^{-4}}{90^{-8} \cdot 20}$.

5172 Zsebszámológép használata nélkül adjuk meg a következő műveletek eredményét:

a) $8^5 \cdot 2^8 : (64^3 \cdot 4^2)$; *b)* $\left(49^{-2} \cdot 7^5\right) \cdot \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-5}$; *c)* $\left[\left(\dfrac{213}{57}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^0$; *d)* $\dfrac{5^{11} - 5^{12} + 33 \cdot 5^{10}}{5^9 + 5^{11}}$.

5173 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\left(\dfrac{4}{2^4} + \dfrac{3}{2^3}\right) \cdot \dfrac{2^6}{5}$; *b)* $\left(\dfrac{4}{3^5} + \dfrac{2}{3^6}\right) \cdot \dfrac{3^9}{7}$; *c)* $\dfrac{3^3}{5^4} : \left(\dfrac{2}{5^3} - \dfrac{1}{5^4}\right)$; *d)* $\left(\dfrac{3^3}{4^5} - \dfrac{3^2}{4^5}\right) : \dfrac{3^2}{4^5}$;

e) $\dfrac{7^3}{5^4} : \left(\dfrac{9}{5^4} + \dfrac{4}{5^5}\right)$.

5174 Végezzük el a műveleteket:

a) $\sqrt{a^2 \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a}}}$ $(a > 0)$; *b)* $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{b}{a} \cdot \sqrt{a}}}$ $(a, b > 0)$;

c) $\sqrt[5]{\dfrac{2}{5}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{25}{4}} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{5}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt[20]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[10]{9} \cdot \sqrt[3]{3}}{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot 3^{-1} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}$.

5175 A nevezők gyöktelenítése után végezzük el a kijelölt műveleteket:

a) $\frac{7}{\sqrt{3}}-\frac{5}{2\cdot\sqrt{3}}$;

b) $\frac{16}{3-\sqrt{7}}-\frac{2}{3+\sqrt{7}}$;

c) $\frac{3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}}+\frac{3\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}$;

d) $\left(\frac{7}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\frac{12}{2\sqrt{7}-\sqrt{24}}\right)\cdot\left(13\sqrt{7}+6\right)$;

e) $\left(\frac{13}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}-\frac{6}{4\sqrt{2}+\sqrt{28}}\right)\cdot\left(5\sqrt{8}-8\sqrt{7}\right)$.

5176 Határozzuk meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők:

a) $\log_7(4x-3)$;

b) $\log_6\frac{5x+1}{2-3x}$;

c) $\log_9(2x^2+x-15)$;

d) $\log_x(7x-3)$;

e) $\log_{x-3}(7-x)$;

f) $\log_{x-1}(1-5x)$.

5177 Rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat:

a) $4^{-\frac{1}{2}}$, $3^{-\log_3 7}$, $\log_{25}\left(\frac{1}{5}\right)$, $\log_6\sqrt[3]{6}$;

b) $5^{1-\log_5 8}$, $\log_3 81$, $\sqrt[5]{-32}$, $9^{\sin\frac{\pi}{6}}$;

c) $100^{\lg 2}$, $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{-2}$, $\log_{11}\left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt[4]{11}}\right)$, $13^{\log_8 1}$.

5178 Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

a) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{16}$;

b) $\log_{\sqrt{5}}25^{-3}$;

c) $\log_{\sqrt{27}}81^{-\frac{9}{5}}$;

d) $\log_{11}\frac{1}{121}$;

e) $\log_{25}\frac{1}{625}$;

f) $\log_7\frac{1}{\sqrt{7}}$;

g) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{8}$;

h) $\log_3\sqrt{243}$;

i) $\log_{\sqrt{27}}9$;

j) $\lg 0{,}001$;

k) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}32$;

l) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)^{-3}$;

m) $\log_a 1$, $a>0$, $a\neq 1$;

n) $\log_{a^5}\frac{1}{\sqrt[7]{a}}$, $a>0$, $a\neq 1$;

o) $\log_{\frac{1}{\sqrt{a}}}a^{\frac{3}{2}}$, $a>0$, $a\neq 1$;

p) $\log_a\sqrt[7]{a^{-2}}$, $a>0$, $a\neq 1$;

q) $\log_a\frac{1}{\sqrt[5]{a^{\frac{3}{8}}}}$, $a>0$, $a\neq 1$;

r) $\log_a\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}}{a}\right)$, $a>0$, $a\neq 1$;

s) $\log_a\left(a^{-2}\cdot\sqrt[6]{a^5}\right)$, $a>0$, $a\neq 1$;

t) $\log_a\left(\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}\right)$, $a>0$, $a\neq 1$;

u) $\log_a\left(\frac{a^{-1}\cdot\sqrt[3]{a^{-2}}}{\sqrt[6]{a^{-1}}\cdot\sqrt{a^{-3}}}\right)$, $a>0$, $a\neq 1$.

5179 Adjuk meg az x értéket a következő esetekben:

a) $\log_x 8 = 2$; *b)* $\log_8 x = 2$; *c)* $\log_8 2 = x$; *d)* $\log_x 27 = -\frac{3}{5}$;

e) $\log_{27} x = -\frac{5}{3}$; *f)* $\log_x 64 = -\frac{1}{6}$; *g)* $\log_x \sqrt{5} = 0{,}5$; *h)* $\log_{\sqrt{5}} x = -1$;

i) $\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{5}{3}$; *j)* $\log_{\sqrt{x}} 9 = 4$; *k)* $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = \frac{1}{2}$; *l)* $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = -2$.

5180 Végezzük el a következő hatványozásokat, majd adjuk meg a kifejezéseket a legegyszerűbb alakban:

a) $\frac{\left(25 \cdot a^{-2} \cdot b^{5}\right)^{-4}}{\left(16 \cdot b^{-2} \cdot a^{3}\right)^{-1}} : \frac{\left(8 \cdot a^{-7} \cdot b^{-2}\right)^{5}}{\left(5 \cdot a^{-6} \cdot b\right)^{3}}$; *b)* $\frac{a^{-3} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{-7}}}}{\left(\frac{5}{a^8}\right)^{-3} \cdot \sqrt{a^{-9}}}$.

5181 Pontos értékekkel számolva adjuk meg a következő műveletek eredményét:

a) $\sqrt{\sqrt{17} - 2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{17} - 2 \cdot \sqrt{2}}$; *b)* $\sqrt{\sqrt{57} + \sqrt{48}} \cdot \sqrt{\sqrt{57} - 4\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot \sqrt{5}}$; *d)* $\left(\sqrt{5 \cdot \sqrt{2} - 1} + \sqrt{\sqrt{50} + 1}\right)^2$;

e) $\left(\sqrt{\sqrt{27} - \sqrt{2}} + \sqrt{3\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right)^2$;

f) $\left(\sqrt{147} + \sqrt{45} - \sqrt{80} - \sqrt{75}\right) \cdot \left(\sqrt{75} + \sqrt{180} - \sqrt{125} - \sqrt{27}\right)$;

g) $\left(9\sqrt{3} - 5\sqrt{18} + \sqrt{200} + 4\sqrt{48}\right) \cdot \left(15\sqrt{3} + 7\sqrt{8} + 4\sqrt{27} - \sqrt{162} - \sqrt{12}\right)$;

h) $\sqrt{192x} + \sqrt{1200x} - \sqrt{300x} - \sqrt{48x} \quad (x > 0)$;

i) $\left(\sqrt{245} + 7\sqrt{5} + \sqrt{343} - \sqrt{125}\right) \cdot \left(9\sqrt{5} - 7\sqrt{7}\right)$;

j) $\left(\sqrt[4]{1280} - \sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{3125} - 4 \cdot \sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$;

k) $\left(\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{320} + 2\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{135}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{25}\right)$.

5182 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$; *b)* $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

5183 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis:

a) $\sqrt{11} + 2 = \sqrt{15 + 4 \cdot \sqrt{11}}$; *b)* $\sqrt{12} - 3 = \sqrt{21 - 12 \cdot \sqrt{3}}$;

c) $\sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{17 - 2 \cdot \sqrt{15}}$; *d)* $\sqrt{28} - 5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{53 - 10 \cdot \sqrt{21}}$.

5184 Zsebszámológép használata nélkül adjuk meg a következő kifejezések értékét:

a) $\log_{64}(\log_2 16 \cdot \log_5 25)$; *b)* $\lg\left(25^{\log_5 2} \cdot 4^{\log_2 5}\right)$;

c) $\log_9\left(4^{\log_{16} 25} - 7^{\log_{49} 16}\right)$; *d)* $(\log_{20} 4 + \log_{20} 5)^{\log_4 27}$.

5185 A logaritmus definícióját és azonosságait felhasználva hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $3^{3+\log_3 5}$; *b)* $\sqrt[3]{10^{3+\lg 27}}$; *c)* $5^{1+\log_{25} 16}$; *d)* $9^{1-\log_3 2}$;

e) $16^{\log_4 2}$; *f)* $2^{3-\log_2 3}$; *g)* $5^{3-\log_5 4}$; *h)* $10^{1-\lg 3}$;

i) $16^{\log_4 5}$; *j)* $\sqrt{7}^{\log_{49} 2}$; *k)* $16^{\log_2 3}$; *l)* $64^{\log_{\sqrt{2}} 2}$;

m) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5}$; *n)* $10^{-\lg 2} + 2^{2+\log_4 9}$; *o)* $8^{\log_4 3 - \log_2 3}$; *p)* $8^{\log_{64} 9 - \log_{\sqrt{8}} 5}$;

q) $\sqrt{10^{6+\lg 36}}$; *r)* $19^{1+\frac{1}{2}\log_{19} 36}$; *s)* $\sqrt[3]{10^{\lg 8+3}}$; *t)* $25^{\log_5 2+1}$;

u) $\sqrt[3]{p^{9-\log_p 8}}$; *v)* $(\sqrt{2})^{1-\log_2 5}$; *w)* $10^{-\lg 2} + 3^{\log_9 16} - 9^{\log_3 2}$.

5186 Zsebszámológép használata nélkül döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb az egyes esetekben:

a) $\left(16^{\log_2 3}\right)^{15}$ vagy $4^{15} \cdot 5^{30}$; *b)* $(\log_8 2)^{60}$ vagy $32^{-12\log_2 3}$;

c) $7(\lg 2 - \lg 5)$ vagy $\lg 128 + \lg 5^{-5}$; *d)* $\sqrt{48}$ vagy $-\frac{5}{\sqrt{12} - \sqrt{17}}$;

e) $\frac{60}{3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ vagy $\frac{50}{2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2}}$; *f)* $\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^5 \cdot 2^9}$ vagy $\frac{1}{3^4 \cdot 2^3} - \frac{1}{2^{11} \cdot 3^4}$;

g) $\dfrac{1000^{-2} : \left(\frac{1}{100}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} : 100^2}$ vagy $\dfrac{1}{\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot 10000^{-5}}}$.

5187 Adjuk meg normálalakban a következő műveletek eredményét:

a) $\frac{0{,}0037 \cdot 336 \cdot 10^5}{0{,}074 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}000048}$; *b)* $\frac{0{,}00000093 \cdot 1170000}{3 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5}}$.

5188 Végezzük el a műveleteket:

a) $\frac{2\sqrt{ab} + a}{4b - a} : \frac{2\sqrt{a}}{6\sqrt{b} - 3\sqrt{a}}$, $a > 0,\ b \geq 0,\ a \neq 4b$;

b) $\frac{5}{5\sqrt{x} + 15\sqrt{y}} \cdot \frac{x - 9y}{10\sqrt{x} - 30\sqrt{y}}$, $x, y \geq 0,\ x \neq 9y$;

c) $\frac{x + \sqrt{x} - 30}{x - 25} : \left(2 + \frac{2}{\sqrt{x} + 5}\right)$, $x \geq 0,\ x \neq 25$.

5189 Az Egyesült Arab Emirátusokban épül az első „ökováros", ahol várhatóan 50 000 ember fog lakni. A város energiaszükségletének 82%-át napenergiából biztosítják, 17%-át a városi szerves hulladék elégetésével nyerik, 1%-ot pedig szélturbinák adják.

Vizsgálatok szerint egy ember egy év (365 nap) alatt $1{,}7 \cdot 10^{11}$ J energiát használ fel.

a) Egy átlagos szélturbina teljesítménye 40 kW, a helyi időjárásnak megfelelően a szélturbinák átlagosan naponta 9 órát működnek ezzel a teljesítménnyel. Hány szélturbina megépítésére lesz szükség ahhoz, hogy a fenti feltételeket biztosítani tudják?

b) Egy átlagos napkollektor maximális teljesítménye 1800 W/m^2, de csak 70%-os hatásfokkal működik. Feltételezzük, hogy átlagosan naponta 11 órát süt a nap. Hány m^2 legyen az összes napkollektor területe?

5190 Egy apa a gyermeke születésekor elhelyezett egy bankban 100 000 forintot, évi 6%-os kamatra. Hány éves lesz a gyermek, amikor a betét eléri az 1 000 000 forintot, ha nem veszünk ki belőle és a kamat sem változik az évek során?

5191 Mely k természetes szám esetén igaz, hogy: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_n (n+1) = 7$?

5192 Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt[5]{5^{n-1}\sqrt{\ldots \sqrt[25]{5\sqrt{5}}}}, \quad \text{ha } n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Műveletek racionális kifejezésekkel

5193 Számítsuk ki $f\left(-\frac{7}{3}\right)$ értékét, ha

a) $f(x) = (3x-1)(3x+1) - 8 \cdot (x+2)^2 - (x-1)^2$;

b) $f(x) = (4x-1)^2 - (3x+2)^2 - 7(x-5)(x+5) - 4(x+13)$;

c) $f(x) = (5x+7)^2 - (2-x)^2 + (5x+6)(5x-6) - (7x-2)^2$.

5194 *a)* Igaz-e, hogy ha $4a - 3b = 5$, akkor $16a^2 - 24ab + 9b^2 = 25$?

b) Igaz-e, hogy ha $16a^2 - 24ab + 9b^2 = 25$, akkor $4a - 3b = 5$?

5195 Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

a) $49 - 25a^2$; *b)* $100b^3 - 81b$; *c)* $c^2 - 24c + 144$; *d)* $400 - 40d + d^2$;

e) $5e^2 - 60e + 180$; *f)* $49f - 56f^2 + 16f^3$.

5196 Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

a) $36p^4 + 12p^2q^2 + q^4$;

b) $-2pq + q^2 + p^2$;

c) $-p^2 - 2p - 1$;

d) $-6a - a^2 - 9$;

e) $3ab^2 + 3a + 6ab$;

f) $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$;

g) $16(m-z)^2 - 25(m+z)^2$;

h) $m^2 + 2mz + z^2 - p^2$;

i) $-2m^3z^4 - 4m^4z^3$;

j) $ab - am + kb - km$;

k) $5a(m-k) + m - k$.

5197 Írjuk fel elsőfokú tényezők szorzataként a következő polinomokat:

a) $a^2 + 4a - 21$;

b) $2b^2 + 11b + 15$;

c) $20c^2 - 13c + 2$;

d) $42d^3 + 85d^2 + 42d$.

5198 Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\frac{2a^2 + 7a + 6}{-2a^2 + 5a + 12}$;

b) $\frac{b^2 - 9b + 14}{6b^2 - 6b - 12}$.

5199 Adjuk meg a valós számoknak a legbővebb részhalmazát, melyen a következő kifejezések értelmezhetők. Egyszerűsítsük a kifejezéseket.

a) $\frac{a^2 - 4a}{a}$; *b)* $\frac{2 \cdot b^2 - 4b}{b-2}$; *c)* $\frac{c^4 - 4 \cdot c^3}{c-4}$; *d)* $\frac{d^2 - 49}{d+7}$;

e) $\frac{e-12}{e^2 - 144}$; *f)* $\frac{f^2 - 10f}{f^2 - 20f + 100}$; *g)* $\frac{g^2 - 36}{g^2 + 12g + 36}$.

5200 Határozzuk meg $x^2+\frac{1}{x^2}$ értékét, ha tudjuk, hogy $x+\frac{1}{x}=7$.

5201 Adjuk meg a valós számoknak a legbővebb részhalmazát, melyen a következő kifejezések értelmezhetők. Végezzük el az algebrai törtek szorzását és osztását:

a) $\frac{3a^2+a}{9a^2-6a+1}\cdot\frac{9a^2-1}{9a^2+6a+1}$;

b) $\frac{4b^2+12b+9}{2b-3}:\frac{20b^3-45b}{4b^2-12b+9}$;

c) $\frac{c^3-5c^2}{c^2-25}:\frac{c^3+5c^2}{c^2+10c+25}$;

d) $\frac{d^4-16}{d^2+4d+4}:\frac{d^4+4d^2}{d^3+2d^2}$;

e) $\frac{2e^2+e-3}{3e^2+5e-12}:\frac{2e^3+3e^2}{3e^2+2e-8}$;

f) $\frac{\frac{27}{f-4}+6}{1-\frac{f+5}{2f+1}}$;

g) $\frac{g^2+5g}{g^2-9}:\frac{g^2-25}{g^2-3g}$;

h) $\frac{g^2-gh}{gh+g^2}\cdot\frac{g^2h+h^2g}{2gh}$;

i) $\frac{i^2+6i+9}{24i+18}:\frac{i^3+27}{16i+12}$;

j) $\frac{5i+5j}{2i+2j}\cdot\frac{i^2-j^2}{2(j+i)^2}$.

5202 Adjuk meg a valós számoknak a legbővebb részhalmazát, melyen a következő kifejezések értelmezhetők. Végezzük el a következő törtek összevonását:

a) $\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{2x-3}$;

b) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}$;

c) $\frac{3a+5}{6a-2}-\frac{a+1}{3a-1}-\frac{4}{9a-3}$;

d) $\frac{b+5}{10b+25}-\frac{2b-4}{4b+10}-\frac{3-b}{2b+5}$;

e) $\frac{2c+1}{c+6}-\frac{2c-3}{c-6}+\frac{22c}{c^2-36}$;

f) $\frac{55+19{,}5d}{d^2-100}-\frac{2d+5}{2d-20}-\frac{7}{d+10}$;

g) $\frac{e+1}{2e+6}-\frac{9(e+5)}{2e^2-18}-\frac{2e}{3-e}$;

h) $\frac{f-2}{f^2+6f+9}-\frac{3}{3f+9}$;

i) $\frac{6}{g+5}\cdot\left(\frac{g+1}{4-2g}+\frac{g-1}{3(g-2)}\right)$;

j) $\frac{3}{2+j}-\frac{j+1}{4-j^2}+\frac{-1-3j}{j^2+4-4j}$.

5203 Adjuk meg a következő kifejezések értékét, ha tudjuk, hogy $3a-2b=5$ és a törtek nevezője nem 0.

a) $\frac{9a^2-4b^2}{30a+20b}$;

b) $\frac{15a^3}{9a^5-12\cdot a^4b+4\cdot a^3b^2}$.

5204 Hozzuk egyszerűbb alakra, majd adjuk meg a következő kifejezések helyettesítési értékét, ha $x=5$.

a) $\frac{6}{x+2}-\frac{x^2}{4-x^2}+\frac{x+2}{2-x}$;

b) $2-\frac{2}{2+\frac{1}{2-\frac{1}{x}}}$.

5205 Igazoljuk, hogy ha $a+b+c=0$, akkor $a^3+a^2\cdot c-a\cdot b\cdot c+b^2\cdot c+b^3=0$.

5206 Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ és $x \neq z$ és $\frac{x^2+y^2}{y^2+z^2} = \frac{x}{z}$, akkor $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$.

5207 Bizonyítsuk be, hogy ha k pozitív egész szám, akkor $\left(\frac{k}{3} - \frac{9}{k^2}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k}\right)$ értéke szintén egész szám.

Egyenletek, egyenlőtlenségek

5208 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $4(3x-1) - 2(x+5) = 3(4+3x)$;

b) $2(2x-11) - 5(2x+3) = 7(4-x)$;

c) $\frac{2}{3} \cdot (5x-3) = \frac{1}{2} \cdot (3x+5)$;

d) $\frac{4x-7}{4} - \frac{3x+10}{3} = 1$;

e) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{5} = x$;

f) $1 - x = \frac{1-2x}{2} + \frac{3-4x}{3}$;

g) $3(4-x) = 2[3-2(x+4)]$;

h) $\frac{3x+5}{18} + \frac{4x+1}{12} - \frac{5x-2}{6} = 0$;

i) $2x(x+1)(2-3x)(x-4) = 0$;

j) $2\frac{x-3}{5} + 3 = \frac{2-3x}{5} - 3\frac{x-2}{2}$;

k) $(x+4)(2x-1) = (-x-7)(4+x)$;

l) $x \cdot \frac{(15-x)(x+7)}{x-15} \cdot (2x-1) = 0$.

5209 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

a) $|x| = \frac{3-x}{2}$;

b) $-|x| + 3 = \frac{x+1}{3}$;

c) $x^2 - 6 = x$;

d) $x^2 = 3x - 2$.

5210 Adjuk meg a a következő egyenletek valós megoldásait:

a) $|2x+7| = 1$;

b) $|5x-13| = 7$;

c) $3 \cdot |7x-19| = 11$.

5211 Határozzuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletek megoldásait:

a) $14x^2 - 25x - 25 = 0$;

b) $3x - \frac{4}{x} - 1 = 0$;

c) $(4x+5)(5x-4) = x + 13$;

d) $(5x+1)(3x-5) = 2(1-19x)$;

e) $\frac{2x-2}{x-5} = 2x - 8$;

f) $\frac{2x}{x+6} = x$;

g) $2x - 2 = \frac{x^2+6}{x+3}$;

h) $x^2 = 9x$;

i) $4x^2 - x = 0$;

j) $3x^2 - 75 = 0$;

k) $(x+5)^2 = 25$;

l) $(x+1)^2 - 3 = 6$;

m) $\frac{3x-9}{x-3} = 3$;

n) $\frac{x^2-25}{x+5} = 0$;

o) $\frac{x^2+4}{x+4} = 1$.

5212 Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet,

a) amelynek a megoldásai: $x_1 = 5$, $x_2 = -3$;

b) amelynek az együtthatói egész számok és a gyökei $-\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{5}$;

c) amelynél a gyökök számtani közepe 5, a mértani közepük pedig 4;

d) amelynek az együtthatói egész számok és egyik gyöke: $x_1 = 3 - \sqrt{7}$.

5213 Mely valós számok esetén igazak a következő egyenletek:

a) $\sqrt{5x-3} = 2$;

b) $\sqrt{8-3x} = 4$;

c) $\sqrt{\frac{2x-1}{x}} = 3$;

d) $\sqrt{11-3x} = \sqrt{x-4}$;

e) $\sqrt{7x-5} = \sqrt{4x+7}$;

f) $\sqrt{3x+11} = \sqrt{2x-1}$;

g) $\sqrt[3]{x^2+28} - 4 = 0$;

h) $\sqrt[4]{2x - \frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$;

i) $\sqrt[7]{x+3} = -1$;

j) $\sqrt{x-7} - \sqrt{5-x} = 0$;

k) $\sqrt{20-x} = x - 20$;

l) $|3x+6| + \sqrt{(x-3y)^2} = 0$;

m) $|5y-3x| + \sqrt{y-1} = 0$;

n) $x - \sqrt{25-x^2} = 1$;

5214 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő exponenciális egyenleteket:

a) $5^{x-1} = 625$;

b) $9^{2x-1} = 27^3$;

c) $2^{\frac{x}{3}-2} = 16^{1-x}$;

d) $\frac{4^{x-1}}{2^x} = 8^8$;

e) $5^{5x-2} - 1 = 0$;

f) $36 \cdot 2^x - 8 \cdot 6^{x-1} = 0$;

g) $\left(\frac{5}{3}\right)^{5x-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{3x-5}$;

h) $\frac{9}{\sqrt[3]{3^x}} = \frac{\sqrt{27}}{3}$;

i) $\sqrt[4]{5^x} = \sqrt[5]{625}$;

j) $\left(\frac{125}{343}\right)^x = \left(\frac{7}{5}\right)^9$;

k) $0{,}01 \cdot \sqrt{1000} = 10^{3x}$;

l) $\sqrt{7^x} \cdot \sqrt{2^x} = 196$;

m) $0{,}125^{2-x} = \frac{8}{2^{x-5}}$.

5215 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\log_3(2x+1) = 4$;

b) $\log_5(4x+1) = -1$;

c) $\lg(8x-15) = \lg(1-x)$;

d) $\lg(x-4)^2 = 2\lg(x-4)$;

e) $\frac{\log_4(x+2)}{\log_4(2x-1)} = 1$;

f) $\frac{\log_7(x+4)}{\log_7(x-2)} = 2$;

g) $\frac{\log_5(3x-2)}{2} = \log_5 x$;

h) $\lg(x-4) - \lg(x+1) = \lg(x-1) - \lg(2x+2)$;

i) $3 + \log_2 5 = \log_2(7x-2)$.

5216 Adjuk meg a $[0; 2\pi]$ intervallumon azokat a valós számokat, amelyekre igaz, hogy:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $2\cos x = -1$;

c) $\operatorname{tg} x = 1$;

d) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;

e) $\sin 8x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

f) $2\cos 5x = -\sqrt{3}$.

5217 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 \geq 6 - x$; *b)* $-x^2 + 2 \geq x$; *c)* $|x| - 3 < \frac{x-3}{2}$; *d)* $|x+2| - 1 \geq 2x$.

5218 Határozzuk meg a valós számoknak azt a részhalmazát, melynek elemeire teljesül a következő egyenlőtlenség:

a) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x+2}{5} \geq -1$; *b)* $\frac{13x-7}{4} - \frac{2x-3}{2} \leq -3$; *c)* $\frac{37}{4x-19} > 0$;

d) $\frac{17}{8x+13} < 0$; *e)* $\frac{x^2}{6x-1} \leq 0$; *f)* $\frac{13x+7}{x^2+22} > 0$;

g) $|2x-3| < 5$; *h)* $|7x-1| \geq 9$.

5219 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $2^{3x-7} \geq 16$; *b)* $3^{2-5x} < 81$; *c)* $16^{2x-3} \leq 32$;

d) $49^x < \frac{1}{343}$; *e)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \geq \frac{1}{32}$; *f)* $7^{3x-4} > \frac{1}{49}$;

g) $13^{2\cdot|x|-1} < 169$; *h)* $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x+4} \leq 1$; *i)* $\left(\frac{5}{7}\right)^{x-3} > \frac{49}{25}$.

5220 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\lg x \geq 4$; *b)* $\log_5 x > -1$; *c)* $\log_7 x \leq \frac{1}{2}$;

d) $\log_{0,5}(10-x) < 1$; *e)* $\log_5(x^2-25) \geq 0$; *f)* $\log_{\frac{1}{3}}(5x-3) \leq -3$;

g) $\log_{\frac{1}{5}}(5x-1) > -1$; *h)* $\log_{0,1}(10x-2) \geq -1$; *i)* $\lg(x^2-3) < 0$.

5221 Béla bácsi a piacon eladta a kivitt paradicsomok felét és még kettőt; másnap a megmaradt paradicsomok felét és még 2 paradicsomot. A harmadik napon Mari néninek adta a megmaradt paradicsomok felét és még kettőt, így neki is maradt még egy darab.

a) Hány paradicsomot vitt ki Béla bácsi eredetileg a piacra?

b) Mennyit adott Mari néninek a harmadik napon?

5222 Melyik az a szám, melyet hozzáadva 8-hoz, 5-höz és 3-hoz, három olyan számot kapunk, melyek közül az első úgy aránylik a másodikhoz, mint a második a harmadikhoz?

5223 Melyik az a két szám, melyek aránya 3 : 5, az összegük pedig 200?

5224 Egy apa életkora ebben az évben négyszerese a fia életkorának. Ezelőtt 6 évvel az apa hétszer volt idősebb a fiánál. Hány évesek most?

5225 Szonja anyukája 4 évvel ezelőtt 6-szor olyan idős volt, mint a lánya. 5 év múlva az anya életkora Szonjáénak a háromszorosa lesz. Hány évesek jelenleg?

5226 Móricka 12 éves, az anyukája háromszor annyi idős.

a) Hány évvel ezelőtt volt az anyukája négyszer annyi idős, mint ő?

b) Hány év múlva lesz kétszer annyi idős az anyuka, mint a fia?

5227 Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 10. Ha a számjegyeket felcseréljük, 72-vel kisebb számot kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

5228 Egy kétjegyű természetes szám egyik számjegye 3-mal kisebb a másiknál. Ha a jegyeit felcseréljük, az eredeti harmadánál 15-tel nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám?

5229 Antal gazda akácfákat telepít a földjére. Miután kijelölte a sorok helyét, elgondolkodott: *„Ha minden sorba 31 facsemetét ültetek, kimarad 12 csemete, de ha minden sorba 32-t teszek, az utolsó sorba nem jut, sőt, az előzőben is csak 28 kis fa lesz".*

Hány facsemetét vásárolt Antal gazda, és hány sort jelölt ki az ültetéshez?

5230 Két szám különbsége 100. Ha a nagyobb számot elosztjuk a kisebbel, a hányados is és a maradék is 4 lesz. Melyik ez a két szám?

5231 6 munkás napi 8 órai munkával 15 nap alatt végez egy feladattal. Hány nap alatt végez ugyanezzel a feladattal 5 munkás napi 3 órai munkával?

5232 Csaba és András együtt kezdenek egy munkához. András egyedül 12 óra alatt, Csaba 16 óra alatt végezne a munkával. Sajnos Csabának 4 óra munka után el kell mennie, így András egyedül fejezi be a munkát. Hány órát kell még dolgoznia?

5233 Mennyi 92%-os kénsavat kell hozzáönteni 10 g 80%-os kénsavhoz, hogy a keverék 82%-os legyen?

5234 Két tanya 12 km-re van egymástól. Bálint délután 13^{00} órakor indul A faluból gyalog B falu felé $2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, majd 16^{00} órakor barátja Gábor B falutól A felé $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel.

a) Mikor találkoznak?

b) Ki mennyi utat tesz meg a találkozásukig?

5235 Hajnali 5^{00} órakor indul egy tehervonat Szegedről $30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel Budapest felé. 8^{00} órakor utána indul egy IC $80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel.

a) Mikor éri utol az IC a tehervonatot?

b) Hány kilométert tettek meg a találkozásukig?

5236 Matyi futóedzéseket végez, és ma 3 km-rel többet futott, mint tegnap. Ha tegnap 7 km-rel kevesebbet futott volna, a tegnap lefutott hossz a mai mennyiségnek csak a harmada lett volna. Hány kilométert futott Matyi tegnap, illetve ma?

5237 Egy kisváros útjairól két géppel tisztítják el a havat. A régebbi autóval 8 óra, az újabbal 5 óra szükséges az utak megtisztításához.

a) Hány órakor végeznek az utak tisztításával, ha mindketten reggel 6-kor állnak munkába?

b) Hány órakor végeznek, ha reggel 6 órakor kezdenek, de a régebbi gép fél nyolckor meghibásodik, és nem tudja folytatni a munkát?

c) Hány órakor végeznek, ha reggel 6 órakor kezdenek, de az újabb gépet 8 órakor a városon kívülre irányítják?

5238 Egy kiránduló csoport egyes tagjai gyalog, mások kerékpárral indulnak el ugyanarról a helyről ugyanazon az útvonalon. A gyalogosok reggel nyolc órakor indulnak és egy óra ebédszünettel délután öt órára érnek célhoz. A gyalogosok óránként 5 km-t, míg a kerékpárosok 16 km-t tesznek meg.

a) Mekkora távot tesznek meg az adott napon a turisták?

b) Hány órakor induljanak el a kerékpárosok, ha útközben nem állnak meg és azt szeretnék, hogy egyszerre érkezzenek meg a gyalogosokkal?

5239 *a)* Mennyi 52%-os alkoholból lehet 3 liter tiszta víz hozzáadásával 28%-os alkoholt kapni?

b) 3 liter 52%-os alkoholhoz mennyi tiszta vizet kell öntenünk, ha 30%-os alkoholt szeretnénk kapni?

c) Mennyi 52%-os alkoholt és tiszta vizet öntsünk össze, ha 3 liter 28%-os alkoholt akarunk előállítani?

5240 Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 221 cm, két oldal aránya 3 : 7. Mekkorák a háromszög oldalai?

5241 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $|11x - 7| = |19 - 9x|$;

b) $|3x - 14| = |3x + 26|$;

c) $|5x + 13| = \frac{x + 65}{5}$;

d) $|2x - 3| = -9 - 8x$;

e) $|4x - 11| = 2x - 7$;

f) $|x - 2| + |3x + 1| = 5$;

g) $|x + 2| + |x - 5| = 10$;

h) $|3 - x| - |4 - x| = 2x + 1$;

i) $5x + 13 = \frac{|x| + 65}{5}$;

j) $5x + 13 = \frac{|x| + 89}{5}$;

k) $3 \cdot |5 - x| + |x| = 25$;

l) $\big||x - 1| - 6\big| = 5$.

5242 Vizsgáljuk az $x^2 - 3ax + 2a^2 - a - 1 = 0$ másodfokú egyenletet, ahol a valós paraméter.

a) Milyen a paraméter értékek esetén lesz az egyenlet egyik gyöke $x_1 = 5$?

b) Adjuk meg azokat a paraméter értékeket, amelynél az egyenletnek lesz valós megoldása.

5243 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $(2x + 1)(2x + 2)(2x + 3) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$;

b) $\sqrt{x^2 + 4x - 32} \cdot (x^2 - 3x - 10) = 0$;

c) $(x - 2)^2 - 5(x - 2) + 6 = 0$;

d) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) = 24$;

e) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 30 = 0$.

5244 *a)* Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 252 átlója van?

b) Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 250-nel több átlója van, mint oldala?

c) Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynél az oldalak és átlók száma együtt 465?

5245 Adjuk meg a következő egyenletek valós megoldásait:

a) $x = \sqrt{2x + 3}$;

b) $\sqrt{4 - 5x} = 3x$;

c) $x + 2 = \sqrt{13x - 4}$;

d) $2x - 3 = \sqrt{7x + 9}$;

e) $\sqrt{4x - 7} = 1 - x$;

f) $\sqrt{8x + 1} = 1 - 2x$;

g) $\sqrt{x - 3} - \frac{3}{\sqrt{x - 3}} = 2$;

h) $\sqrt{2x^2 + 5x - 3} = x + 1$;

i) $\sqrt{(x - 3)^2} + \sqrt{(x + 4)^2} = 11$;

j) $\sqrt{x - 4} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{x + 4}$;

k) $\frac{x-1}{\sqrt{5x+1}} = \sqrt{x}$;

l) $\frac{x+1}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{2(x+1)}$;

m) $2x - 6\sqrt{x} = 8$;

n) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+5}} = \sqrt{4-x}$.

5246 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $15 \cdot 2^{x+3} - 7 \cdot 2^{x+1} + 2^x = 107$;

b) $8 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{x-2} - 3^{x-3} = 609$;

c) $5^{2x^2+5x-10} = 25$;

d) $0{,}5^{4x^2+11x-7} = 16$;

e) $3^{2x+2} - 10 \cdot 3^x + 1 = 0$;

f) $4^{x+2} - 65 \cdot 2^x + 2^2 = 0$;

g) $\sqrt{5^{2x+2}} \cdot \sqrt[3]{125^{x+4}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-3}$;

h) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2 \cdot x^2 - 11x + 10} = \frac{25}{4}$;

i) $2^{4x-1} \cdot 5^{4x-1} = 0{,}01^x$;

j) $2 \cdot 64^{\frac{x}{2}+1} + 3 \cdot 8^{1+x} = 289 + 15 \cdot 2^{3x-1}$;

k) $5^x = \frac{1}{5^x} + \frac{24}{5}$;

l) $3 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 2 = 9^{\sqrt{x}}$;

m) $9^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 81^{\sqrt{x}} + 3 = 0$;

n) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2x} = 3 \cdot 2^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}$;

o) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$;

p) $\left(\frac{1}{0{,}25}\right)^{2x} = 256$.

5247 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\log_3(5x-7) - \log_3(3x+9) = 2$;

b) $\lg(3x^2+8) - \lg(2x-1) = \lg(5x+6)$;

c) $2\lg(2x+3) = \lg(4x+1) + \lg(2x-3)$;

d) $\lg(14-x) = 2\lg(2x-4) - \lg(3x-11)$;

e) $\lg(9x-14) + \lg(3x+10) = 2$;

f) $\log_8(23x+8) - 2\log_8(4x+4) = -\frac{2}{3}$;

g) $\lg^2 x = \lg x^2 + 3$;

h) $1 - \frac{2}{\lg x + 1} = \frac{1}{5 - \lg x}$;

i) $\log_{x+1}(2x^2+1) = 2$;

j) $\log_x(x+7) + \log_x(2x+5) = 1 + \log_x(8x-4)$;

k) $\log_{\frac{1}{4}}[\log_{16}(\log_2 x)] = 1$;

l) $\frac{\lg x + \lg 4}{\lg x} = 3$;

m) $\ln(x^3+8) - \ln(x^2-2x+4) = \ln 3$;

n) $\log_3(x-4)(3+x) = \log_3(4+5x)$.

5248 Van-e olyan valós szám, amely mindkét egyenletnek megoldása?

a) $x + \frac{16}{x} = 10$ és $\frac{2^{x^2}}{4^x} = 8^{x+8}$;

b) $2\log_3 x = 2 - \log_3 4$ és $2x = |4x-3|$.

5249 Oldjuk meg a következő egyenleteket a $[-\pi; \pi]$ intervallumon:

a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;

c) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = -1$;

d) $\operatorname{tg}(2x - \pi) = \sqrt{3}$;

e) $\cos(2x+30°)=\frac{1}{2}$;

f) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$;

g) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

h) $\sin^2\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$.

5250 Adjuk meg a következő egyenletek valós megoldásait:

a) $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin(2x+\pi)$;

b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}(x+\pi)$;

d) $\operatorname{ctg}\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$;

e) $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$;

f) $4\sin^2(x+\pi)=3$;

g) $\cos^2 x=\cos x$;

h) $\sin x=\sin^3 x$.

5251 Határozzuk meg a következő egyenletek valós megoldásait:

a) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$;

b) $2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cdot\cos x+3=0$;

c) $2\sin^2 x+3\cos x=3$;

d) $6-2\cos^2 x-9\sin x=0$;

e) $\sqrt{2}\cdot\sin x=\operatorname{tg} x$;

f) $2\cos x+\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg} x=0$;

g) $\frac{\cos x}{1-\sin x}=1+\sin x$;

h) $\cos^3 x=\cos^2 x$;

i) $\frac{1}{3}\cos^2 x=\sin^2 x$;

j) $\cos x\cdot\operatorname{tg} x=0$;

k) $\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x-4\cos^2 x=0$;

l) $\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg}^2 x=3+3\operatorname{ctg} x$.

5252 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{5}{x-3}\geq 0$;

b) $\frac{-2}{2x+1}<0$;

c) $\frac{5x-3}{2x+7}<0$;

d) $\frac{6x+5}{8x-3}\geq 0$;

e) $\frac{4x-3}{3-x}\leq 2$;

f) $\frac{7x+1}{3-2x}\geq -3$;

g) $\frac{x+5}{2x+1}+\frac{3x+1}{4x+2}>1$;

h) $\frac{7-3x}{6x-2}-\frac{4x+1}{3x-1}<-2$.

5253 Adjuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait:

a) $|4x-1|\geq x+3$;

b) $|8x-5|\leq 3x-1$;

c) $|2x-7|\geq 5x-9$;

d) $|7x-3|>4x-5$.

5254 Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait:

a) $(x+3)(2x-4)>0$;

b) $6x^2+x-15<0$;

c) $8x^2-10x-7>0$;

d) $(x+1)(3-x)(2x-1)>0$;

e) $\frac{-5,9}{x^2+3x-4} \geq 0$;

f) $\frac{3x+2}{2x^2-x-10} \geq 0$;

g) $\frac{-5-3x}{x^2-6x-7} \leq 0$;

h) $\frac{x^2-12}{3x} \geq \frac{4}{3}$;

i) $\frac{x^2-16}{x+4} < 0$;

j) $\frac{(3x+1)(x-2)}{(x-5)(3-x)} \leq 0$;

k) $\frac{x^2-x-30}{x^2-x-12} \leq 0$;

l) $\frac{3x^2+7x-6}{3x^2-14x-5} \geq 0$;

m) $1-\frac{x-1}{x-3} \geq 4 \cdot \frac{1}{x-1}$;

n) $\frac{2x-1}{(x-1)(x+4)} \leq \frac{1}{2}$;

o) $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-3} > 3$.

5255 Adjuk meg a természetes számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelynek elemeire teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

a) $\frac{4x+1}{11-3x} > 0$;

b) $4x^2-35x+24 \leq 0$.

5256 Mekkorák annak a szabályos sokszögnek a szögei, amelynek az átlóinak száma 100 és 200 között van?

5257 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $5^{3x-1} \geq 25^{4-x}$;

b) $32^{2x-1} \leq 8^{4x+11}$;

c) $9^{2x^2-x-10} \geq 1$;

d) $10^{7x-3} > 5$;

e) $\lg(7x-3) < \lg(4x+5)$

f) $\log_3(2x+5) > \log_3(x-1)$;

g) $\lg(3x-4)+\lg(2x+1) \leq \lg(4x+2)$;

h) $\lg(8x+4)-\lg(3x+5) \leq \lg(2x-4)$;

i) $\log_3[2+\log_2(x-4)] > 1$;

j) $\frac{\log_2(x+5)}{\log_2(x-4)} \geq 0$;

k) $216^{1-|x|} > \frac{1}{6}$;

l) $\log_2\frac{3-x}{3x-1} \geq 0$;

m) $\left(\frac{7}{3}\right)^{3x+2} > \frac{3}{7}$;

n) $2^x-3 < -2 \cdot 2^{-x}$.

5258 A következő egyenlőtlenségeket oldjuk meg a $[2; 5]$ intervallumon:

a) $7^{3x^2-11x-4} \leq 1$;

b) $1+\log_2 x+\log_2(x-1) < \log_2 3+\log_2(5x-7)$.

5259 Oldjuk meg a $[0; 2\pi]$ intervallumon a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\sin(x-\pi) \geq \frac{1}{2}$;

b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{3}$;

d) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5260 Határozzuk meg a következő egyenleteknél a kérdezett kifejezések értékét.

a) Mennyi az $x^2 - 11x + 3 = 0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege? A választ az egyenlet megoldóképletes megoldása nélkül adjuk meg.

b) A $2x^2 - 5x - 3 = 0$ egyenlet megoldása nélkül számítsuk ki az $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ kifejezés értékét, ahol x_1 és x_2 az egyenlet gyökei.

c) Határozzuk meg a $-2x^2 + 5x + 7 = 0$ egyenlet valós gyökei reciprokának az összegét az egyenlet megoldása nélkül.

d) Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, melynek együtthatói racionálisak, és az egyik gyöke:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}.$$

5261 Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $x^2 - 3x - 13 - \dfrac{15}{x^2 - 3x - 15} = 0;$

b) $x + 2y + 3z = 2 \cdot \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2y-1} + \sqrt{3z-1}\right);$

c) $7x + \dfrac{7}{x} = 14 - \sqrt{1 - x^2};$

d) $\log_3^2(x^2 - 8x + 15) - \left[\log_3(x^2 - 8x + 15) - 1\right] \cdot \log_3 5 =$

$= \log_3(x^2 - 8x + 15) + \left[\log_3(x^2 - 8x + 15) - 1\right] \cdot \log_3 7.$

5262 Mely x, y pozitív egész számok a megoldásai a következő egyenletnek?

$$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2.$$

Egyenletrendszerek

5263 Bontsuk az 55-öt három részre úgy, hogy ha az első részt 3-mal osztjuk, a második részhez 3-at adunk, a harmadik részből 3-at kivonunk, mindig ugyanazt a számot kapjuk. Melyik ez a 3 szám?

5264 Határozzuk meg azokat a valós számpárokat, amelyekre teljesülnek a következő egyenletrendszerek:

a) $\left.\begin{aligned} 4x - 7y &= 41 \\ x + 3y &= -23 \end{aligned}\right\};$ *b)* $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 9 \\ 3x + 6y &= 17 \end{aligned}\right\};$ *c)* $\left.\begin{aligned} 10x + y &= 1 \\ 5x - 4y &= 14 \end{aligned}\right\};$

d) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 12 \\ -4x + 9y &= -31 \end{aligned}\right\};$ *e)* $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 7x + 2y &= -5 \end{aligned}\right\};$ *f)* $\left.\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} &= \frac{1}{15} \\ \frac{x}{5} - \frac{y}{7} &= \frac{1}{35} \end{aligned}\right\};$

g) $\left.\begin{aligned} \frac{7}{1-2x} - \frac{3}{y+1} &= 15 \\ \frac{5}{1-2x} + 6 \cdot \frac{1}{y+1} &= 27 \end{aligned}\right\};$ *h)* $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ x + 3y &= x^2 + 5 \end{aligned}\right\};$ *i)* $\left.\begin{aligned} x + y &= 12 \\ x \cdot y &= 32 \end{aligned}\right\};$

j) $\left.\begin{matrix} x-2y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{matrix}\right\}$;

k) $\left.\begin{matrix} 4\cdot 3^x+2^y=16 \\ 5\cdot 3^x-3\cdot 2^y=3 \end{matrix}\right\}$;

l) $\left.\begin{matrix} 5^{xy}=\frac{1}{25} \\ 9^x\cdot 3^y=27 \end{matrix}\right\}$;

m) $\left.\begin{matrix} 2^x=4\cdot 16^y \\ \log_2 x+\log_2 y=1 \end{matrix}\right\}$;

n) $\left.\begin{matrix} 5\cdot \lg x+\lg y=7 \\ 2\cdot \lg x-3\cdot \lg y=-4 \end{matrix}\right\}$;

o) $\left.\begin{matrix} \log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}} y=1 \\ \log_2 x+\log_2 y=5 \end{matrix}\right\}$.

5265 Nagyi a befőzéshez meggyet és cseresznyét vásárol a piacon. Ha 3 kg meggyet és 5 kg cseresznyét vesz, 1980 Ft-ot kell fizetnie. Ha 5 kg meggyet és 3 kg cseresznyét vásárol, 1860 Ft-ba kerül. Mennyi 1 kg meggy, illetve cseresznye ára?

5266 Egy kamion és egy személyautó ugyanazon az úton közlekedik. Tíz órakor egymástól 40 km távolságra vannak. Ha azonos irányban haladnak, a személyautó tizenegy órakor éri utol a kamiont. Ha egymással szemben haladnának, már tizenkét perccel tíz óra után találkoznának. Mekkora a két jármű sebessége?

5267 Egy pozitív egész számot 19-cel osztva 5 lesz a maradék, ha az előző számnál 30-cal nagyobb számot 21-gyel osztjuk, a hányados ugyanannyi lesz, mint az imént, a maradék pedig 9. Mely számokat osztottuk, és mennyi a hányados?

5268 Mely valós számpárok a megoldásai a következő egyenletrendszereknek?

a) $\left.\begin{matrix} x^2-y^2+x-y=20 \\ x+y+1=5 \end{matrix}\right\}$;

b) $\left.\begin{matrix} 2xy=-3 \\ 6x+2y=-3 \end{matrix}\right\}$;

c) $\left.\begin{matrix} x^2-y^2=285 \\ 2x-3y=28 \end{matrix}\right\}$;

d) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{matrix}\right\}$;

e) $\left.\begin{matrix} x\cdot y=36 \\ 2x^2+y^2=162 \end{matrix}\right\}$;

f) $\left.\begin{matrix} \frac{y-4}{x+1}=3 \\ (y-4)(x+1)=12 \end{matrix}\right\}$;

g) $\left.\begin{matrix} 2x+3y=-1 \\ x-3=\sqrt{3x+y} \end{matrix}\right\}$;

h) $\left.\begin{matrix} x^2y-xy^2=-12 \\ x-y+xy=4 \end{matrix}\right\}$.

5269 Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{matrix} 2^{x-3}+3^{y+1}=5 \\ 2^{x-4}+3^{y+3}=11 \end{matrix}\right\}$;

b) $\left.\begin{matrix} 5^{2x-y}+2^{x+1}=21 \\ 5^{2x-y+1}-2^x=17 \end{matrix}\right\}$;

c) $\left.\begin{matrix} \log_2(x+1)+\log_2(y-3)=2+\log_2 3 \\ \lg(6y-2)-\lg(x+2)=1 \end{matrix}\right\}$;

d) $\left.\begin{matrix} 7\cdot \log_3 x-3\cdot \log_2 y=-6 \\ 3\cdot \log_3 x+8\cdot \log_2 y=81 \end{matrix}\right\}$;

e) $\left.\begin{matrix} \log_7 \log_3(x+y)=0 \\ \lg x+\lg y=\lg 2 \end{matrix}\right\}$;

f) $\left.\begin{matrix} \lg\left(x^2-13+y^2\right)=2 \\ \lg(x+y)=\lg 15+\lg(x-y) \end{matrix}\right\}$;

g) $\left.\begin{matrix} y^{3x^2+7x-6}=1 \\ \lg(3x-y)=1 \end{matrix}\right\}$;

h) $\left.\begin{matrix} 5^x-16y=0 \\ 4^x-25y=0 \end{matrix}\right\}$.

5270 Egy derékszögű háromszög átfogója 39 cm, a háromszög területe 270 cm^2. Mekkorák a háromszög befogói?

5271 János gazdának volt egy négyzet alakú földterülete, majd megvette a vele szomszédos, az övénél kisebb, szintén négyzet alakú földet, így 724 m^2-es lett az összes tulajdona. Ha körül akarja keríteni a teljes tulajdont, 116 m kerítésre van szükség. Mekkorák a négyzet alakú telkek oldalai?

5272 Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a következő egyenletrendszerek megoldásait. Határozzuk meg a kapott pontok távolságát.

a) $\left.\begin{matrix} 17 + x^2 - y^2 = 10x - 5y \\ 3x + 4y = 25 \end{matrix}\right\}$;

b) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 2x + 15 - 6y \\ x^2 + y^2 + 57 = 18x + 2y \end{matrix}\right\}$.

5273 A 2010-et írjuk fel három természetes szám összegeként úgy, hogy ha a második számmal elosztjuk az első számot, hányadosul is és maradékul is 9-et kapunk. Ha a második számmal a harmadik számot osztjuk, a hányados ismét 9, de a maradék 82. Melyik ez a három természetes szám?

5274 Adjuk meg az egyenletrendszer megoldásait:

$$\left.\begin{matrix} x \cdot (x + 6y) = 27 \\ y \cdot (y - 4x) = -11 \end{matrix}\right\}.$$

5275 Egy osztályban a statisztika tanításakor a tanár felmérte a tanulók lábméretét. Kiderült, hogy az osztály átlagos lábmérete pontosan 39,5. A lányok lábméretének átlaga néggyel kevesebb, mint a fiúké. Tudjuk még, hogy nyolccal több lány van, mint fiú. Hány lány és hány fiú jár az osztályba?

5276 Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{x-1}{y} + \dfrac{x+1}{z} = 1 \\ \dfrac{x+1}{y} - \dfrac{x-1}{z} = 1 \end{matrix}\right\}.$$

5277 Milyen x, y, z valós számokra teljesül a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{matrix} x^4 + y^4 + z^4 = 178 \\ x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} = 2^{2011} \\ \dfrac{x+y+z}{yz} + \dfrac{1}{x} = 0 \end{matrix}\right\}.$$

FÜGGVÉNYEK – ÖSSZEFOGLALÁS

A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai

5278 Rajzoljuk meg a következő lineáris függvények grafikonjait:

a) $x \mapsto 2x - 3$; *b)* $x \mapsto -\frac{3}{2}x + 5$; *c)* $x \mapsto -\frac{1}{2}x$; *d)* $x \mapsto 7$;

e) $x \mapsto \frac{6 - 2x}{2}$; *f)* $x \mapsto -5 - x$.

5279 Válasszuk ki az előző feladat lineáris függvényei közül

a) az egyenes arányosság; *b)* konstans;

c) egymással párhuzamos; *d)* nulladfokú

függvényeket.

5280 Írjuk fel annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, melynek képe illeszkedik az adott két pontra:

a) $A(3; 1)$ és $B(-1; 3)$; *b)* $A(0; -2)$ és $B(2; 1)$;

c) $A(-5; 3)$ és $B(7; 3)$; *d)* $A(0; 0)$ és $B(1; -3)$.

Melyik függvény

e) konstans; *f)* egyenes arányosság;

g) növekvő; *h)* szigorúan monoton csökkenő?

5281 Adjuk meg az f lineáris függvény hozzárendelési szabályát, ha

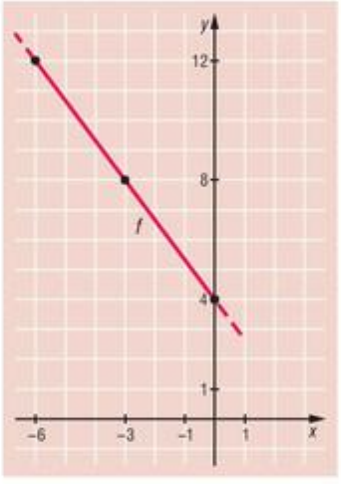
a) $m = 5$ és illeszkedik a $P(1; 7)$ pontra; *b)* $m = -\frac{3}{4}$ és illeszkedik a $P(2; 0)$ pontra;

c) $m = -0{,}25$ és illeszkedik a $P(8; 2)$ pontra; *d)* $m = 0$ és illeszkedik a $P(7; 5)$ pontra.

5282 Ábrázoljuk a $[-3; 6]$-on a következő lineáris függvényeket, és jellemezzük értékkészlet, zérushely és monotonitás szerint.

a) $x \mapsto \frac{1}{3}x + 3$; *b)* $x \mapsto 1 - x$; *c)* $x \mapsto -3$; *d)* $x \mapsto \frac{2}{3}x$.

5283 Az alábbi ábrán egy f lineáris függvény grafikonjának részlete látható.



a) Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát.

b) Határozzuk meg a következő értéket:

$$\frac{f(-3) + f(-6)}{f(6)}.$$

c) Számoljuk ki a függvény zérushelyét.

5284 Ábrázoljuk a következő függvényt:

$$f(x)=\frac{4x-6}{3},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Határozzuk meg a függvény tengelymetszeteit.

5285 Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f(x)=2x-3 \quad \text{és} \quad g(x)=-\frac{1}{2}x+2.$$

A következő pontok közül melyek illeszkednek f, valamint g függvény grafikonjára?

$$A(3;3),\quad B(4;0),\quad C(6;-1),\quad D(2;1),\quad E(0;-3),\quad F(-2;3).$$

5286 Ábrázoljuk a következő függvényeket a $]-4;5[$-on:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2},\quad g(x)=\frac{x^2-16}{x-4} \quad \text{és} \quad h(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}.$$

Adjuk meg az egyes függvényeknél, hol pozitívak az adott intervallumon.

5287 Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetőek:

a) $\dfrac{2x^2-9x+4}{x-4}$; *b)* $2x-1$.

Ábrázoljuk az ezen a halmazon értelmezett

c) $x\mapsto\dfrac{2x^2-9x+4}{x-4}$; *d)* $x\mapsto 2x-1$

függvényt a $[-1;5[$-on. Állapítsuk meg a függvények értékkészletét.

5288 Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonjait:

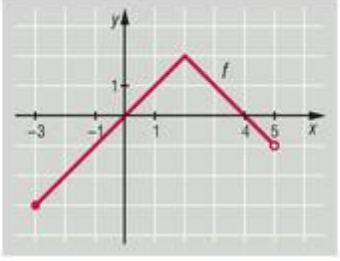
$$f(x)=\begin{cases}2x-3, & \text{ha} \quad x\geq 2,\\ -\dfrac{1}{2}x+2, & \text{ha} \quad x<2,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x+2, & \text{ha} \quad x\leq 0,\\ x, & \text{ha} \quad x>0.\end{cases}$$

5289 Ábrázoljuk a következő függvényeket a valós számok halmazán:

a) $x\mapsto -|x|$; *b)* $x\mapsto |x-3|+2$; *c)* $x\mapsto |2x-1|$;

d) $x\mapsto -2|x-1|+3$; *e)* $x\mapsto 3-|x+3|$; *f)* $x\mapsto |-3x|$.

5290 Az alábbi ábrán egy f abszolútérték-függvény grafikonja látható a $[-3;5[$-on ábrázolva.



a) Adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát az adott intervallumon.

b) Hol vesz fel a függvény negatív értékeket?

c) Határozzuk meg, mely részeken növekszik a függvény.

d) Hány zérushelye van a függvénynek az adott intervallumon? Adjuk meg ezek helyét is.

5291 Ábrázoljuk függvénytranszformáció segítségével az alábbi függvényeket ($x \in \mathbb{R}$):

a) $x \mapsto -2x^2 + 1$; *b)* $x \mapsto -(x-2)^2 + 3$; *c)* $x \mapsto x^2 - 4x + 4$;

d) $x \mapsto x^2 + 4x + 6$.

5292 Rajzoljuk meg a következő függvény grafikonját a $[-2; 3[$-on:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ -2x^2, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$

Jellemezzük a függvényt értékkészlet, zérushely, monotonitás szempontok szerint.

5293 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$f(x) = (x-4)^2 - 2 \quad \text{és} \quad g(x) = -(x+5)^2.$$

a) Állapítsuk meg, hol veszik fel a függvények a -1 értéket.

b) Határozzuk meg, hogy az adott pontok közül melyek illeszkednek az f és melyek a g függvényre:

$$A(2; 2), \quad B(-3; -4), \quad C(1; 7), \quad D(6; 2), \quad E(-6; -1), \quad F(-1; -1).$$

5294 Ábrázoljuk függvénytranszformációval az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket:

a) $x \mapsto \sqrt{x} - 3$; *b)* $x \mapsto \sqrt{x+4} - 2$; *c)* $x \mapsto -2 \cdot \sqrt{x}$;

d) $x \mapsto \sqrt{-x} - 4$; *e)* $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3-x}$; *f)* $x \mapsto \sqrt{4 \cdot (x-1)}$.

5295 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-3} - 2$; *b)* $g(x) = x \mapsto \sqrt{4-x} - 2$.

Adjuk meg azokat az x értékeket, melyekre $f(x) \geq 2$, illetve $g(x) < 0$.

5296 Az alábbi függvények közül válasszuk ki, melyek a fordított arányosság hozzárendelési szabályai. Ábrázoljuk őket.

a) $f(x) = \frac{3}{x}$; *b)* $g(x) = \frac{5-2x}{2}$; *c)* $h(x) = \frac{-1}{x-2} + 2$;

d) $i(x) = \frac{x^2-9}{x+3} \quad (x \neq -3)$; *e)* $j(x) = \frac{2x-4}{3x-6} \quad (x \neq 2)$.

Milyen függvények hozzárendelési szabályát látjuk még? Nevezzük meg őket.

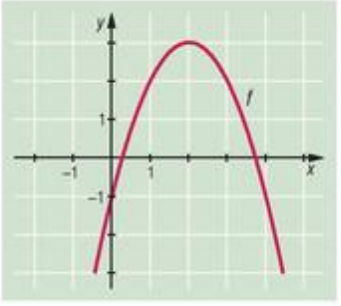
5297 Válasszuk ki, melyik hozzárendelési szabály tartozik a grafikonhoz. Adjuk meg a függvény szélsőértékét.

a) (1) $x \mapsto x^2 + 3$;

(2) $x \mapsto -(x+2)^2 + 3$;

(3) $x \mapsto (x-2)^2 - 3$;

(4) $x \mapsto -(x-2)^2 + 3$.

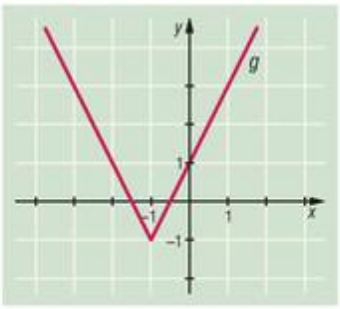


b) (1) $x \mapsto \frac{1}{2}|x-1|-1$;

(2) $x \mapsto 2|x-1|-1$;

(3) $x \mapsto 2|x-1|+1$;

(4) $x \mapsto 2|x+1|-1$.

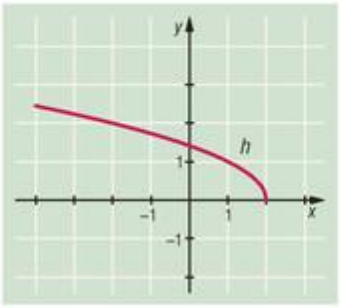


c) (1) $x \mapsto \sqrt{x}+2$;

(2) $x \mapsto -\sqrt{x+2}$;

(3) $x \mapsto \sqrt{2-x}$;

(4) $x \mapsto \sqrt{x+2}$.



5298 Adjunk meg 3 olyan értékpárt, amely eleget tesz a hozzárendelésnek:

a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ x \mapsto -\frac{2}{3}x$;

b) $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \frac{3x}{x-1}\ (x \neq 1)$;

c) $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \frac{5}{7}x+1$;

d) $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \sqrt{x-3}\ (x \geq 3)$.

5299 Adjuk meg a következő függvények grafikonjairól kijelölt pontok hiányzó koordinátáit, és rajzoljuk meg a grafikonokat.

a) $f(x)=\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}$, $A\left(\frac{1}{5};\ \right)$, $B\left(-\frac{6}{5};\ \right)$, $C(\ ;0)$;

b) $g(x)=(x-2)^2-\frac{7}{4}$, $A\left(\ ;\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\ ;\frac{9}{4}\right)$, $C(-1;\ )$;

c) $h(x)=|3-2x|+1$, $A\left(-\frac{1}{2};\ \right)$, $B(\ ;5)$, $C(\ ;1)$;

d) $i(x)=-2\cdot\sqrt{2x-5}$, $A\left(\frac{1}{2};\ \right)$, $B(7;\ )$, $C(\ ;-4)$.

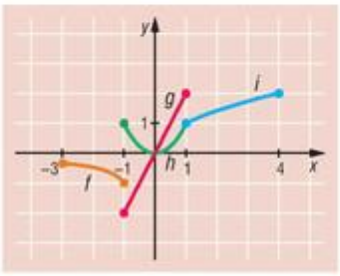
5300 A következő függvényeket ábrázoltuk az ábrán:

a) $x \mapsto 2x$, $x \in [-1;1]$;

b) $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in [1;4]$;

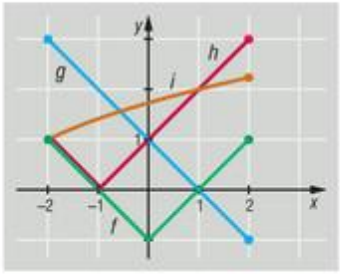
c) $x \mapsto x^2$, $x \in [-1;1]$;

d) $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \in [-3;1]$.



Az ábrán ezeket így neveztük el: *f*, *g*, *h*, *i*. Állapítsuk meg, melyik név melyik függvényhez tartozik.

5301 A következő függvényeket ábrázoltuk az ábrán:



a) $x \mapsto 1 - x, \quad x \in [-2; 2]$;

b) $x \mapsto |x| - 1, \quad x \in [-2; 2]$;

c) $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 1}, \quad x \in [-2; 2]$;

d) $x \mapsto \sqrt{x + 3}, \quad x \in [-2; 2]$.

Melyik függvényhez melyik grafikon tartozik?

5302 Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto 2x - 3, \quad x \in \mathbb{R}$;

b) $x \mapsto -x + 1, \quad |x| \leq 2$;

c) $x \mapsto |x - 3|, \quad |x| \leq 4$;

d) $x \mapsto \frac{1}{x - 2}, \quad -3 \leq x < 2, \ 2 < x \leq 3$;

e) $x \mapsto \sqrt{x + 1}, \quad -2 \leq x < 2$;

f) $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 1}, \quad -2 \leq x \leq 2$;

g) $x \mapsto \sqrt{2 - x}, \quad -2 \leq x \leq 2$.

5303 Adott az $f(x) = 2^x - 3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény. A függvény ábrázolása után jelöljük meg a grafikonján azokat a pontokat, amelyek az alábbi két feltételt egyidejűleg teljesítik:

$$x < 3 \quad \text{és} \quad y \geq -2.$$

5304 Egy exponenciális függvényről tudjuk, hogy a hozzárendelési szabálya:

$$x \mapsto a^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A $P(3; 7)$ pont illeszkedik a függvényre.

a) Határozzuk meg a értékét. Ábrázoljuk a függvényt a $[0; 3[$-on.

b) Adjuk meg ezen az intervallumon a függvény értékkészletét.

c) Hogyan változna az értékkészlet, ha a függvényt az $[1; 3]$-on ábrázolnánk?

5305 Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját $(x \in \mathbb{R})$:

a) $x \mapsto 5 \cdot 5^x - 1$;

b) $x \mapsto \frac{2^x}{4} + 1$;

c) $x \mapsto \frac{3^x + 9}{3}$;

d) $2^{-x} - 3$.

5306 Adott az alábbi függvény:

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ f(x) = \log_a x,$$

melyről tudjuk, hogy a $P(9; 2)$ pont illeszkedik rá.

a) Határozzuk meg a értékét, és adjuk meg az f hozzárendelési szabályát.

b) Mennyi $f(3)$, $f(-1)$ és $f(1)$ értéke?

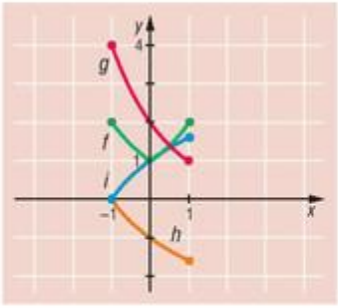
5307 Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto \log_2 x, \quad x \in]0{,}5; 8[$;

b) $x \mapsto \log_2(x - 3), \quad 3 < x \leq 5$;

c) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x + 1), \quad -1 < x \leq 3$.

5308 A következő függvényeket ábrázoltuk az ábrán:



a) $x \mapsto \log_2(x+2)$, $x \in [-1;1]$;

b) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$, $x \in [-1;1]$;

c) $x \mapsto 2^{-x+1}$, $x \in [-1;1]$;

d) $x \mapsto 2^{|x|}$, $x \in [-1;1]$.

Melyik függvényhez melyik grafikon tartozik?

5309 Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

b) $x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

c) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$;

d) $x \mapsto \operatorname{tg}(x - \pi)$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$;

e) $x \mapsto 2\cos x$, $0 \le x \le 2\pi$;

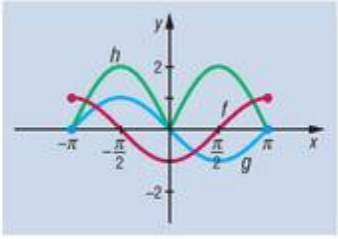
f) $x \mapsto \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

g) $x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$;

h) $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$;

i) $x \mapsto \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $0 < x < \pi$.

5310 A következő ábrán trigonometrikus függvények grafikonja látható. Adjuk meg képlettel az f, g, h függvényeket.



5311 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket:

a) $(3x-6)-(2x-4) \ge (x-2)^2$;

b) $-\frac{2}{3}x + 1 < \frac{1}{3}x + 4$;

c) $|2-2x| \ge \frac{2}{3}x + 2$.

5312 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto x^2 + 2x$, $x \in [-3;1]$;

b) $x \mapsto \frac{x}{x-1}$, $-2 \le x \le 3$, $x \ne 1$;

c) $x \mapsto |x-1| + |x+2|$, $-3 \le x \le 2$;

d) $x \mapsto \sqrt{2-x}$, $-2 \le x \le 2$;

e) $x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, $0 \le x \le 4$;

f) $x \mapsto |x| \cdot x^2$, $-1 \le x \le 2$.

5313 Ábrázoljuk a következő függvényeket, és határozzuk meg a zérushelyüket:

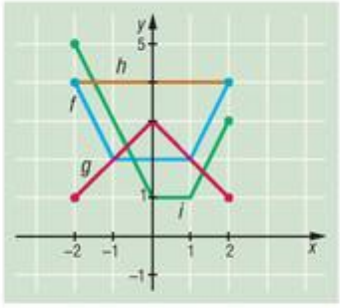
a) $x \mapsto |x-2| - 2$, $0 \le x \le 4$;

b) $x \mapsto \frac{x}{x+1}$, $0 \le x \le 3$;

c) $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$; *d)* $x \mapsto \sqrt{x-2}$, $2 \le x \le 4$;

e) $x \mapsto \log_2 |x-2|$, $0 \le x \le 5$, $x \ne 2$.

5314 A következő függvényeket ábrázoltuk az ábrán:



a) $x \mapsto |x-1| + |x+1|$, $-2 \le x \le 2$;

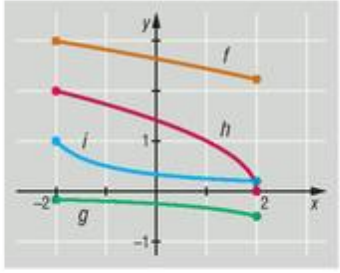
b) $x \mapsto |x-2| + |x+2|$, $-2 \le x \le 2$;

c) $x \mapsto \big||x| - 3\big|$, $-2 \le x \le 2$;

d) $x \mapsto |x-1| + |x|$, $-2 \le x \le 2$.

A grafikonok mellé írtuk az *f*, *g*, *h*, *i* betűket. Döntsük el, melyik betű melyik függvényt jelöli.

5315 A következő függvényeket ábrázoltuk az ábrán:



a) $x \mapsto \sqrt{2-x}$, $-2 \le x \le 2$;

b) $x \mapsto \sqrt{7-x}$, $-2 \le x \le 2$;

c) $x \mapsto \frac{1}{x+3}$, $-2 \le x \le 2$;

d) $x \mapsto \frac{1}{x-4}$, $-2 \le x \le 2$.

Melyik függvényhez melyik grafikon tartozik?

5316 Határozzuk meg a valós számok halmazán azt a legbővebb részhalmazt, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetőek:

a) $\sqrt{(x-2)^2}$; *b)* $x-2$; *c)* $\left(\sqrt{x-2}\right)^2$.

Ábrázoljuk a kifejezéseket függvényként a $[-3; 4[$-on. Határozzuk meg a függvények értékkészletét.

5317 Határozzuk meg a valós számok halmazán azt a legbővebb részhalmazt, amelyen a következő kifejezések értelmezhetőek:

a) $\frac{x-7}{x-7}$; *b)* $\frac{|x-7|}{x-7}$.

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

$$f\colon x \mapsto \frac{x-7}{x-7} \quad \text{és} \quad g\colon x \mapsto \frac{|x-7|}{x-7}.$$

Határozzuk meg a függvények értékkészletét.

5318 Határozzuk meg a valós számok halmazán azt a legbővebb részhalmazt, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetőek:

a) $3^x + 1$; *b)* $\frac{9^x - 1}{3^x - 1}$.

Ábrázoljuk a $[-2; 1]$-on a következő függvényeket:

c) $x \mapsto 3^x + 1$; *d)* $x \mapsto \frac{9^x - 1}{3^x - 1}$.

Határozzuk meg a függvények értékkészletét.

5319 Határozzuk meg a valós számok halmazán azt a legbővebb részhalmazt, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetőek:

a) $\log_{\frac{1}{2}} x$; *b)* $\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$.

Ábrázoljuk az ezen a halmazon értelmezett következő függvényeket a $[0{,}5; 4[$-on:

c) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$; *d)* $x \mapsto \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$.

Adjuk meg a függvények értékkészletét.

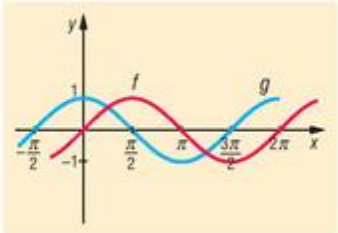
5320 Ábrázoljuk a valós számok halmazán az alábbi függvényt:

$$f\colon x \mapsto \Big|\big||x-3|-2\big|-4\Big|.$$

a) Adjuk meg a függvény zérushelyeit.

b) Hol veszi fel a függvény az 1 értéket?

5321 Az ábrán két ismert alapfüggvény látható, jelölje őket f és g.



a) Mely függvényeket jelölik a grafikonok?

Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

b) $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f(\pi)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}$; *c)* $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}$;

d) $\dfrac{g(2\pi)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{g\left(\frac{\pi}{4}\right)}$; *e)* $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)+g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{f\left(\frac{\pi}{6}\right)+g\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.

5322 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } 0\le x\le 2,\\ 4-x, & \text{ha } 2<x\le 4;\end{cases}$ *b)* $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{ha } -1\le x\le 3,\\ 5-x, & \text{ha } 3<x\le 5;\end{cases}$

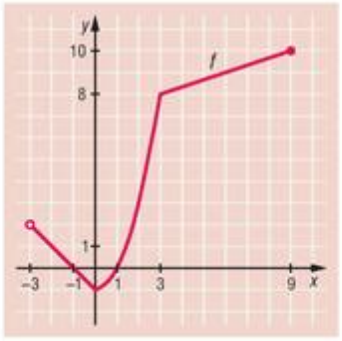
c) $h(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{ha } -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2},\\ \operatorname{ctg} x, & \text{ha } \frac{\pi}{2}<x<\pi;\end{cases}$ *d)* $k(x)=\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x+1), & \text{ha } -1<x\le 1,\\ \log_2 x-1, & \text{ha } 1<x\le 4.\end{cases}$

5323 Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $-1\le x<1$ és $1<x\le 2$; *b)* $g(x)=\begin{cases} x^2-4x+6, & \text{ha } 0\le x\le 2,\\ -x+4, & \text{ha } 2<x\le 4;\end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x+1}, & \text{ha } -2\le x\le 0,\\ \frac{x}{3}+1, & \text{ha } 0<x\le 3;\end{cases}$ *d)* $k(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & \text{ha } -2\le x\le 0,\\ (x-1)^2, & \text{ha } 0<x\le 2.\end{cases}$

5324 Az ábrán a $]-3; 9]$-on értelmezett f függvény grafikonja látható. A grafikon két egyenes szakaszból és egy parabolaívből áll össze.



a) Adjuk meg a függvényt az alábbi módon:

$$f\colon\ ]-3;9] \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} \ldots, & \text{ha} \quad -3 < x \le 0, \\ \ldots, & \text{ha} \quad 0 < x \le 3, \\ \ldots, & \text{ha} \quad 3 < x \le 9. \end{cases}$$

b) Határozzuk meg a függvény értékkészletét.

c) Adjuk meg az $f(x) \le 3$ egyenlőtlenség megoldásait.

5325 Két város távolsága 120 km. Marci reggel 7 órakor indul A-ból B-be kerékpárral 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Barátja, Jenő 9 órakor indul B faluból A felé 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. (Sebességük állandó.)

a) Ábrázoljuk Marci és Jenő mozgását (alkalmasan választott egységekkel) út–idő grafikonon.

b) Mikor találkoznak? Válaszunkat indokoljuk.

c) Hány kilométert tettek meg a találkozásukig külön-külön?

5326 Vázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto x^3 - x,\quad x \in [-2; 2]$;

b) $x \mapsto x + \frac{1}{x},\quad x \in [-2; 2] \setminus \{0\}$;

c) $x \mapsto x^2 \cdot |x - 1|,\quad x \in [-2; 2]$;

d) $x \mapsto x^4 - x^2,\quad x \in [-2; 2]$.

5327 Oldjuk meg függvények felhasználásával a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{x - 2\cdot\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\cdot\sqrt{x-1}} = \frac{1}{x-1}$;

b) $\sqrt{x - 2\cdot\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\cdot\sqrt{x-1}} = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$;

c) $2^{-|x|} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \cdot \left(|x+1| + |x+1|\right)$.

5328 A megfelelő függvények felhasználásával oldjuk meg a következő egyenletet:

$$|1 - \lg x| + |\lg x + 1| = 4 \cdot \left(1 - \frac{|x-5|}{5}\right).$$

5329 A megfelelő függvények ismeretében oldjuk meg a $\sqrt{1 - x^2} \ge x$ egyenlőtlenséget.

5330 Vázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto x - 1 + \frac{1}{x-1},\quad x \ne 1$;

b) $x \mapsto \frac{x}{1 - x^2},\quad |x| \ne 1$;

c) $x \mapsto |x| \cdot \sqrt{4 - x^2},\quad |x| \le 2$.

5331 Vázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x \mapsto \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x,\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$;

b) $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\quad 0 \le x \le 2\pi$;

c) $x \mapsto \sin 2x + \cos 2x + 2\sin^2 x,\quad \pi \le x \le \pi$;

d) $x \mapsto \sin^2 x - 2\sin x,\quad 0 \le x \le 2\pi$;

e) $x \mapsto x^{\frac{1}{\lg x}},\quad x > 0,\ x \ne 1$.

Műveletek függvényekkel (kiegészítő anyag)

5332 Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a megadott függvényt, és az adott függvény szintén megadott inverzét:

a) $x \mapsto x+4,\ -3 \le x \le 3$; $\quad x \mapsto x-4,\ 1 \le x \le 7$;

b) $x \mapsto 2x-1,\ -2 \le x \le 2$; $\quad x \mapsto \frac{1}{2}x+\frac{1}{2},\ -5 \le x \le 3$;

c) $x \mapsto 2-\frac{1}{2}x,\ -2 \le x \le 6$; $\quad x \mapsto 4-2x,\ -1 \le x \le 3$;

d) $x \mapsto x^2+1,\ 0 \le x \le 2$; $\quad x \mapsto \sqrt{x-1},\ 1 \le x \le 5$;

e) $x \mapsto \log_2 x,\ 1 \le x \le 4$; $\quad x \mapsto 2^x,\ 0 \le x \le 2$;

f) $x \mapsto \frac{1}{x+2},\ -1 \le x \le 1$; $\quad x \mapsto \frac{1}{x}-2,\ \frac{1}{3} \le x \le 1$;

g) $x \mapsto x^3,\ -1 \le x \le 1$; $\quad x \mapsto x^{\frac{1}{3}},\ -1 \le x \le 1$.

5333 Adott a következő két függvény:

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad x>0;$$

$$g(x)=x^2,\quad x>0.$$

Ábrázoljuk a következő függvényeket: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.

5334 Adott az $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $x \ge 0$ függvény.

Adjuk meg képlettel az alábbi függvényeket:

$$f_2(x)=f(f(x)),\ f_3(x)=f_2(f(x)),\ \ldots,\ f_{n+1}(x)=f_n(f(x)).$$

5335 Egy f függvényt a következő definícióval adunk meg:

$$f(x)=x(1-x),\ \text{ha } 0 \le x \le 1 \quad \text{és} \quad f(x+1)=2f(x),\ \text{ha } x \ge 0.$$

Ábrázoljuk az f függvényt.

5336 A g függvény definíciója:

$$g(x)=0,\ \text{ha } 0 \le x \le \pi \quad \text{és} \quad g(x+\pi)=g(x)+\sin x,\ \text{ha } x>0.$$

Ábrázoljuk a g függvényt.

5337 Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre teljesül:

a) $\min(x, y)=1$; $\quad$ *b)* $\max(x, y)=1$.

5338 Határozzuk meg a következő függvény inverz függvényét:

$$f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad x \in \mathbb{R}.$$

5339 Igazoljuk, hogy az alábbi függvények egymás inverzei:

$$f(x)=x^2-x+1,\ 0{,}5 \le x \quad \text{és} \quad g(x)=\sqrt{x-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2},\ \left(\frac{3}{4} \le x\right).$$

Vázoljuk a függvények grafikonjait.

5340 Az előző feladat felhasználásával oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^2 - x + 1 = \sqrt{x - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \quad \left(\frac{3}{4} \le x\right).$$

5341 Igazoljuk, hogy az alábbi függvény inverze önmaga. Vázoljuk a grafikonját.

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

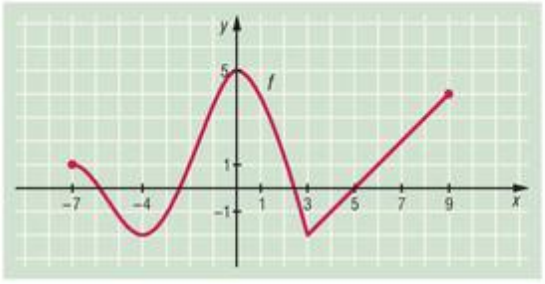
Függvénytulajdonságok

5342 Mennyi a következő függvény legnagyobb értéke, és hol veszi fel ezt az értéket?

$$f(x) = -|x| + 8, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5343 A valós számok halmazának melyik a legbővebb részhalmaza, amelyen az $\frac{1}{|x|-4}$ kifejezés értelmezhető?

5344 Adjunk meg olyan zárt intervallumot, ahol az alábbi, grafikonnal megadott függvény növekvő.



5345 Az adott, valós számok halmazán értelmezett függvényeknek minimuma vagy maximuma van? Adjuk meg a szélsőérték helyét és értékét is.

a) $f\colon x \mapsto -(x-2)^2 + 3$;

b) $g\colon x \mapsto 2 \cdot |x| - 5$;

c) $h\colon x \mapsto -\sqrt{x+2}$;

d) $i\colon x \mapsto -|x-5|$;

e) $j\colon x \mapsto |x| + 4$;

f) $k\colon x \mapsto x^2 - 3$.

5346 Adott a következő függvény:

$$f\colon \mathbb{R}^- \cup \{0\},\ f(x) = \sqrt{-x+2}.$$

Határozzuk meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyhez tartozó függvényérték 3.

5347 Rendeljük hozzá az $[1; 6]$ pozitív egészeihez a pozitív osztóik számát.

a) Adjuk meg a függvény értékkészletét.

b) Ha léteznek a függvénynek szélsőértékei, akkor adjuk meg azokat.

c) Van-e zérushelye a függvénynek, ha igen, hol?

5348 Mi az értékkészlete az alábbi függvényeknek a $[-1; 7]$-on $(x \in \mathbb{R})$?

a) $f\colon x \mapsto \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$;

b) $g\colon x \mapsto \frac{1}{4}(x-3)^2 - 4$;

c) $h\colon x \mapsto -\frac{1}{4} \cdot |x-3| + 1$;

d) $i\colon x \mapsto \sqrt{x+2}, \quad x \ge -2$.

5349 Adjunk egy-egy példát olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelynek értékkészlete

a) csak pozitív számokból áll;

b) csak negatív számokból áll;

c) a nemnegatív számok halmaza;

d) -5-nél kisebb elemet nem tartalmaz;

e) 6-nál nagyobb elemet nem tartalmaz.

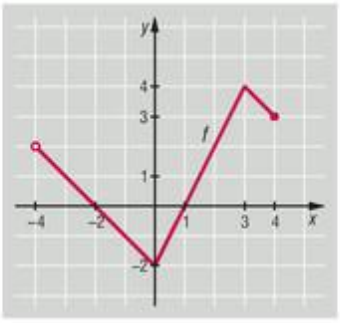
5350 Állapítsuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát és zérushelyét:

a) $\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{x}-3}{4-\sqrt{x}}$; *c)* $\dfrac{x+2}{\sqrt{x-2}}$;

d) $\dfrac{x+3}{\sin x}$; *e)* $\dfrac{2x-7}{4x-14}$; *f)* $\dfrac{x-9}{\lg x}$;

g) $\log_2 2x - \log_2(x+1)$; *h)* $\log_x(4x-1)$.

5351 Az alábbi függvény a grafikonjával adott. Válaszoljunk a következő kérdésekre:



a) Mi az értelmezési tartománya és értékkészlete a függvénynek?

b) Hol van a függvény zérushelye?

c) Adjuk meg a függvény szélsőértékeit.

d) Hol pozitív a függvény?

e) Hol negatív a függvény?

f) Írjuk fel azokat az intervallumokat, ahol csökkenő a függvény.

5352 Adjuk meg a következő függvények tengelymetszeteit:

a) $x \mapsto 3x - 5$; *b)* $x \mapsto \sqrt{x-2} - 1 \quad (x \geq 2)$; *c)* $x \mapsto \dfrac{1}{x+1} - 1 \quad (x \neq -1)$;

d) $x \mapsto 2^x - 2$; *e)* $x \mapsto -\log_2 x \quad (x > 0)$; *f)* $x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 4$.

5353 Adjuk meg az összes olyan forgásszöget fokban mérve, amelyre az $f(x) = \dfrac{7}{\sin x}$ kifejezés nem értelmezhető. Válaszunkat indokoljuk.

5354 Adott a következő két függvény:

$$f(x) = \sin x \quad \text{és} \quad g(x) = \log_2 x \quad (x > 0).$$

Határozzuk meg az alábbi értékeket, majd hasonlítsuk össze őket:

a) $f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)$ és $g(2)$; *b)* $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ és $g\left(\dfrac{1}{8}\right)$; *c)* $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ és $g\left(\dfrac{1}{4}\right)$;

d) $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ és $g(4)$.

5355 Válaszoljunk a következő kérdésekre:

a) Melyek a zérushelyei az $f\colon x \mapsto x^2 - 2x \ (x \in \mathbb{R})$ másodfokú függvénynek, és határozzuk meg a helyettesítési értékét az 1,3 helyen.

b) A $g\colon x \mapsto -|x| + 7 \ (x \in \mathbb{R})$ függvénynek mi a legnagyobb értéke, és hol veszi fel azt?

c) A $h\colon x \mapsto \sin x - 2$ függvénynek határozzuk meg az értékkészletét a függvény ábrázolása nélkül.

d) Adott az $i\colon x \mapsto \log_2(2x - 20) - 1$ függvény. Hol vesz fel nemnegatív értékeket?

e) Adott a $j\colon x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9} + 1$ függvény. Ábrázoljuk a függvényt az $[1; 4[$-on. Adjuk meg a következő értéket:

$$\frac{j(1) - j(3)}{j(2)}.$$

5356 Hány prímszámot tartalmaz a következő függvény értelmezési tartománya?

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 18x - 17}}$$

5357 Az alábbiak közül melyikkel egyenlő a $\log_{15}^2 3 - \log_{15}^2 5$?

a) $\left(\frac{\log_{15} 3}{\log_{15} 5}\right)^2$; *b)* $\log_{15}^2 \frac{3}{5}$; *c)* $\log_{15} \frac{3}{5}$.

5358 Függvénygrafikonok felhasználásával oldjuk meg a következő egyenletet, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $f(x) = 2^{2x}$ és $g(x) = 5 - x$, $f(x) = g(x)$;

b) $f(x) = 3^{2x}$ és $g(x) = 11 - 2x$, $f(x) \le g(x)$;

c) $f(x) = 2 \cdot \log_2 x$ $(x > 0)$ és $g(x) = 2$, $f(x) > g(x)$.

5359 Válaszoljunk az alábbi kérdésekre. Válaszunkat indokoljuk.

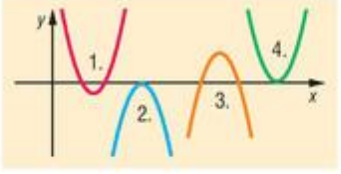
a) Adott a következő két függvény:

$$f(x) = 3^x + 2 \cdot 3^{2x} \quad \text{és} \quad g(x) = x \cdot \log_2 x.$$

Melyik a nagyobb: $f(2)$ vagy $g(32)$?

b) Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ függvényről tudjuk, hogy a diszkriminánsa 0, továbbá, hogy $f(2010) = 2010$.

Az ábrán látható grafikonok közül melyik lehet $f(x)$ grafikonja?



5360 Mely valós számokra értelmezhetőek a következő kifejezések?

a) $\sqrt{\lg(4x^2 - 5x + 1)}$; *b)* $\frac{3x^2}{\lg(x - 4)} + \sqrt{x - 3}$.

5361 Határozzuk meg a következő függvények zérushelyeit:

a) $f(x) = x^3 - x$, $-2 \le x \le 2$;

b) $g(x) = (x - 2) \cdot \log_2 x$, $0 < x < 4$;

c) $h(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$, $x \neq 3$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $i(x) = x^2 - 5 \cdot |x| + 6$, $x \in \mathbb{R}$;

e) $j(x) = \sqrt{4x - x^2}$, $0 \le x \le 4$;

f) $k(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $0 < x < \pi$;

g) $l(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$, $x \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

5362 Határozzuk meg, hogy hol nő, hol fogy, hol van szélsőértéke a következő függvénynek:

a) $f(x) = x - x^2$, $-2 \le x \le 2$;

b) $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$;

c) $h(x) = 2\log_2 x$, $x > 0$;

d) $i(x) = \log_2|x| + 6$, $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$;

e) $j(x) = 2^{|x|}$, $-2 \le x \le 2$;

f) $k(x) = \operatorname{tg}|x|$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

g) $l(x) = |x^2 - 2x|$, $0 \le x \le 2$.

5363 Döntsük el, hogy a következő függvények közül melyik páros, melyik páratlan, esetleg melyik az, amelyik se nem páros, se nem páratlan:

a) $f(x) = |x| \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = \sin x \cdot \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $h(x) = x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $i(x) = x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$;

e) $j(x) = 0{,}5 \cdot (2^x + 2^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$;

f) $k(x) = x^2 - 2 \cdot |x| + 1$, $x \in \mathbb{R}$;

g) $l(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$;·

h) $m(x) = |x^2 - 3x|$, $x \in \mathbb{R}$.

5364 Adjuk meg a következő függvények legnagyobb és legkisebb értékét:

a) $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$;

b) $g(x) = |x - 1| + |x - 3|$, $0 \le x \le 4$;

c) $h(x) = \log_2 4x$, $1 \le x \le 4$;

d) $i(x) = 2 + 2x - x^2$, $0 \le x \le 2$;

e) $j(x) = |x^2 - 4x|$, $0 \le x \le 4$;

f) $k(x) = \log_{0,5} x$, $1 \le x \le 4$;

g) $l(x) = x^2 - 4x$, $0 \le x \le 2$;

h) $m(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $0 \le x \le \pi$.

5365 Adjuk meg a következő függvények értékkészletét:

a) $f(x) = x^2$, $-1 \le x \le 2$;

b) $g(x) = \lg x$, $0{,}1 \le x \le 10$;

c) $h(x) = \operatorname{ctg} \pi x$, $0 < x < 1$.

5366 Állapítsuk meg, hol nő, hol fogy a következő függvény:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 5$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = |x| - x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $h(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $i(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \le x \le 1$.

5367 Döntsük el, hogy a következő függvények közül melyik páros, melyik páratlan, esetleg melyik az, amelyik se nem páros, se nem páratlan:

a) $f(x) = \log_2 \frac{1 - x}{1 + x}$, $|x| < 1$;

b) $g(x) = \sqrt[3]{(1 - x)^2} + \sqrt[3]{(1 + x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $h(x) = \log_2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $i(x) = 2x - x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

5368 Egy függvény korlátosság szempontjából négyféle lehet:

1. csak alulról korlátos;
2. csak felülről korlátos;
3. korlátos, ha alsó és felső korlátja is létezik;
4. alulról sem, felülről sem korlátos.

Jellemezzük korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket:

a) $x \mapsto 3x - 2$;

b) $x \mapsto |3x - 2|$;

c) $x \mapsto 3^{x-2}$;

d) $x \mapsto \log_3(x - 2)$;

e) $x \mapsto -2^x + 1$;

f) $x \mapsto -\log_5(x - 2)$;

g) $x \mapsto -(x - 2)^2$;

h) $x \mapsto 2\sin 2x$.

5369 Adjuk meg a következő függvények periódusát:

a) $x \mapsto \sin 2x$; *b)* $x \mapsto 2\cos\frac{1}{2}x$; *c)* $x \mapsto 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

d) $x \mapsto \frac{1}{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$; *e)* $x \mapsto \operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$; *f)* $x \mapsto \frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x$.

5370 Jellemezzük a következő függvényeket paritás és periodicitás szempontjából ($x \in \mathbb{R}$):

a) $x \mapsto \cos x$; *b)* $x \mapsto \sin x$; *c)* $x \mapsto 7$;

d) $x \mapsto 2\operatorname{tg} 3x$; *e)* $x \mapsto 3^x$; *f)* $x \mapsto -x^3$;

g) $x \mapsto -\sin 3x$; *h)* $x \mapsto 3\cos\frac{1}{2}x$; *i)* $x \mapsto -|x|$.

5371 Határozzuk meg az alábbi függvények zérushelyeit, szélsőértékeit a függvény ábrázolása nélkül:

a) $f(x) = 10x^2 - 20x + 10$; *b)* $g(x) = x^2 - 14x + 49$; *c)* $h(x) = -x^2 - 5x + 6$;

d) $i(x) = 3x^2 - 5x + 1$; *e)* $j(x) = 4x^2 - 2x - 6$; *f)* $k(x) = -5x^2 + 16x - 3$.

5372 Adott a következő függvény:

$$f\colon\ ]-3;11] \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 9, & \text{ha} \quad x \le 1, \\ -|x-5| + 4, & \text{ha} \quad x > 1. \end{cases}$$

a) Ábrázoljuk a függvényt, és jellemezzük a következő szempontok szerint: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás.

b) Adjuk meg a következő függvényértékeket: $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(-4)$, $f(10)$.

c) Hol vesz fel negatív értékeket a függvény?

5373 A valós számok halmazán értelmezett f abszolútérték-függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy a

$$g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad g(x) = |x| - 2$$

függvény grafikonját a $\vec{v}(3;\ 1)$ vektorral eltoltuk.

a) Adjuk meg az f hozzárendelési szabályát. *b)* Határozzuk meg az f és g zérushelyeit.

c) Ábrázoljuk az f függvényt a $[-3;\ 7]$-on. Mi az így kapott függvény értékkészlete?

d) Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$|x| - 2 \ge -x + 2,\quad x \in [-3;\ 7].$$

5374 Döntsük el, hogy igaz vagy hamis a következő hat állítás.

a) Az $x \mapsto \frac{1}{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ függvény periódusa 2π.

b) Az $x \mapsto 3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ függvény periódusa π.

c) Az $x \mapsto \cos 3x$ függvény periódusa 6π.

d) Az $x \mapsto \operatorname{tg} 3x$ függvény periódusa $\frac{\pi}{3}$.

e) Az $x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ függvény periódusa π.

f) Az $x \mapsto 2\sin(x-30°)$ függvény periódusa $360°$.

5375 Fogalmazzuk meg, hogy az

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = (x+2)^2 - 1$$

függvény grafikonja milyen transzformációval származtatható az

$$f_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f_0(x) = x^2$$

függvény grafikonjából. Ábrázoljuk az f függvényt a $[-5; 0]$-on.

Válaszoljunk a következő kérdésekre:

a) Mi a $[-5; 0]$-on értelmezett függvény értékkészlete?

b) Hol pozitív ez a függvény?

c) Adjuk meg a következő függvényértékeket:

$$f(-1),\quad f(-2) \quad \text{és} \quad f(-4).$$

d) Milyen helyen veszi fel a függvény a 3 értéket?

5376 Függvénytulajdonságok felhasználásával határozzuk meg az alábbi egyenletek valós megoldásait:

a) $(\log_2 x - 1)\cdot(\log_2 x^2 + 6) = 0$; *b)* $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$.

5377 Oldjuk meg függvénytulajdonságok, illetve függvénygrafikonok segítségével a következő egyenleteket:

a) $\log_2\left(\sqrt{x} + 1\right) = -x$; *b)* $0{,}5^{2-\log_2 x} = 5$; *c)* $5 + 4\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x$.

5378 Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} \lg(x+y) + \lg 5 &= 1 \\ 2x &= 1 + y \end{aligned}\right\}.$$

5379 Legyenek az A halmaz elemei a $\sqrt{-x^2 + 2x + 15}$, a B halmaz elemei pedig a $\sqrt{2\cos \pi x - 1}$ kifejezés értelmezési tartományának elemei.

a) Adjuk meg az A és a B halmazt.

b) Adjuk meg az $A \cap B$ elemeit, és ábrázoljuk is azokat.

c) Ábrázoljuk számegyenesen az $A \setminus B$ halmazt.

5380 Adott a következő függvény:

$$g(x) = \left|\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 2\right|.$$

a) Ábrázoljuk a függvényt a valós számok halmazán.

b) Hány megoldása van a $g(x) = p$ egyenletnek, ahol $p \in \mathbb{R}$?

5381 Hogyan kell az adott $f\colon x \mapsto x^2 + bx + c$ függvénynél a b és c értékét megválasztani, hogy a függvénynek a szélsőértéke az $x = -2$ helyen $y = 4$ legyen?

a) Ábrázoljuk az így kapott függvényt a $]-3; 0]$-on, és állapítsuk meg az értékkészletét.

b) Hogyan adjuk meg egy g függvény hozzárendelési szabályát a $]-3; 0]$-on, hogy a függvénynek a maximuma 4 legyen a -2 helyen? Hogy alakul ekkor a g értékkészlete?

5382 Állítsuk elő a következő függvényeket egy páros és egy páratlan függvény összegeként:

a) $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x,\quad x \in \mathbb{R}$; *b)* $g(x) = \sin x + x^2 + x,\quad x \in \mathbb{R}$;

c) $h(x) = 2^x + 2^{-x} + x^3,\quad x \in \mathbb{R}$.



5383 Határozzuk meg a következő függvény legkisebb értékét:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5384 Adott az $a > 0$ hosszúságú szakasz. Ezt két részre bontjuk, és mindegyik részre, mint oldalra, egy négyzetet rajzolunk. Fejezzük ki a négyzetek területének összegét egyváltozós függvénnyel. Mikor lesz a két négyzet területének összege a legkisebb?

5385 Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^3 + 3x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$ függvény az egész értelmezési tartományában nő.

5386 Igazoljuk, hogy a $g(x) = \frac{x}{1 + x^2}, \quad 1 \leq x$ függvény az egész értelmezési tartományában csökken.

5387 Határozzuk meg az alábbi függvény legkisebb értékét:

$$f(x) = (x^2 - 2)^3 + 8, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5388 Hol nő, hol fogy a következő függvény?

$$f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

5389 Az alábbi függvény hol veszi fel a legkisebb értékét?

$$f(x) = (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x + c)^2 \quad (a, b, c \text{ adott számok}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

5390 Határozzuk meg a következő függvények legkisebb pozitív periodusát:

a) $f(x) = \sin 4x + \cos 4x, \quad x \in \mathbb{R}$; *b)* $g(x) = |\cos x|, \quad x \in \mathbb{R}$.

5391 Igazoljuk, hogy az $f(x) = \cos x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ függvény nem periodikus.

5392 Egy 12 dm^3 térfogatú, téglatest alakú dobozt akarunk készíteni, amit díszes szalaggal átkötnénk, méghozzá a leghosszabb élére merőleges irányban kétszer, a másik két élre merőleges irányban csak egyszer. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy a lehető legkevesebb szalagra legyen szükség?

5393 Adott egy egyenlő szárú háromszög, az alapja a, az alaphoz tartozó magassága m. A háromszögbe olyan téglalapot írunk, amelynek két csúcsa az alapon van, másik két csúcsa egy-egy száron. Milyen esetben lesz a beírt téglalap területe maximális?

5394 Adott egy forgáskúp, amelynél az alapkör sugara r, magassága m. A kúpba olyan forgáshengert írunk, amelynek alapköre a kúp alaplapjának része, fedőköre pedig illeszkedik a kúp palástjára. Milyen esetben lesz a henger térfogata maximális?

5395 Határozzuk meg a következő függvény legnagyobb értékét:

$$f(x) = \sin 4x + \cos 6x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

5396 Határozzuk meg az alábbi függvény legkisebb értékét:

$$f(x, y) = x - 1 + \frac{1}{x - 3}, \quad x > 3.$$

5397 Határozzuk meg a következő függvény legkisebb értékét:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + \frac{1}{x^2 \cdot y^2}, \quad x, y > 0.$$

5398 Határozzuk meg az alábbi függvény legkisebb értékét.

$$f(x)=\frac{16x^4+3}{16x},\quad 0<x<1.$$

5399 Határozzuk meg a következő függvény legnagyobb értékét:

$$f(x)=\frac{729}{16}\cdot x^4\cdot(1-x)^2,\quad 0\le x\le 1.$$

5400 Adjuk meg az alábbi függvény értékkészletét:

$$f(x)=\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}\right)^2,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

5401 Adjuk meg az alábbi függvény legkisebb értékét:

$$f(x)=\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3},\quad -1\le x\le 3.$$

5402 Vázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $f(x)=|x^2+x|-x^2,\quad -3\le x\le 3;$ *b)* $g(x)=|0{,}5\cdot\log_2 x^2|,\quad 0<|x|\le 4;$

c) $h(x)=0{,}5\cdot\log_2(|x|-1)^2,\quad |x|\ne 1,\ -3\le x\le 3.$

GEOMETRIA – ÖSSZEFOGLALÁS

Alapvető fogalmak

5403 Adott két egyenes út, amelyek párhuzamosak. Hova építhetjük azt az adótornyot, amelyik az egyik úttól kétszer akkora távolságra van, mint a másiktól? (Az utakat tekintsük végtelen hosszúnak.)

5404 Adjuk meg a sík azon pontjainak halmazát, amelyek egy 6 cm oldalú négyzet minden oldalegyenesétől 2 cm-nél nagyobb vagy egyenlő távolságra vannak.

5405 Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek két metsző egyenestől legfeljebb 3 cm távolságra helyezkednek el?

5406 Adjunk meg a térben 2010 pontot úgy, hogy létezzen mindegyiktől egyenlő távol lévő pont.

5407 Hol helyezkednek el a térben azok a pontok, amelyeknek egy adott szakasztól vett távolságuk 3 cm?

5408 Adott a térben 10 különböző pont, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesbe. Hány

a) egyenest; *b)* háromszöget

határoznak meg ezek a pontok?

5409 Hány részre osztják a teret egy tetraéder lapjainak síkjai?

5410 Mekkora az a szög, amelyik mellékszögének

a) $\frac{5}{4}$-ével; *b)* 260%-ával egyenlő?

5411 Egy szög és pótszögének nagysága úgy aránylik egymáshoz, mint

a) 2 : 3; *b)* $\frac{2}{\sqrt{2}+1} : \sqrt{2} - 1$.

Mekkorák ezek a szögek?

5412 Két párhuzamos egyenest egy harmadik 48° hajlásszögben metsz. Mekkora szögben metszi a 48°-os szögnek a szögfelezője a másik párhuzamos egyenest?

5413 Két egymás mellett levő szög szögfelezője merőleges egymásra. Mekkorák a szögek, ha az egyik 30°-kal nagyobb a másiknál?

5414 Két párhuzamos egyenest egy harmadikkal elmetszünk, és megszerkesztjük az így keletkezett szögek szögfelezőit. Milyen négyszöget határoz meg ez a négy szögfelező?

5415 Síktükörre 15°-os beesési szögben érkezik egy fénysugár, majd visszaverődik. Mekkora szögben fordul el a visszavert fénysugár, ha a síktükröt 20°-kal elforgatjuk?

5416 Egy háromszög oldalainak hossza 6 cm, 8 cm és 10 cm. Milyen messze van a 6 és 8 cm-es oldal felezőmerőlegeseinek a metszéspontja a 10 cm-es oldal felezőpontjától?

5417 Egy ABC háromszög A csúcsánál lévő szöge 70°. Mekkora szögben látszik a B és C csúcsoknál lévő szögek szögfelezőinek metszéspontjából a BC oldal?

5418 Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$. Mekkorák a háromszög oldalai, ha a belső szögfelezők metszéspontja az oldalaktól 6 cm távolságra van?

5419 Egy telek három oldalának hossza ebben a sorrendben 50 m, 60 m és 40 m. Mekkora a telek negyedik oldala, ha a belső szögek felezői egy pontban metszik egymást?

5420 Mekkora szöget zár be egy négyzetes oszlop alaplapja a testátlójával, ha alaplapjának éle 10 cm, oldaléle 20 cm hosszú?

5421 Egy szabályos négyoldalú gúla alaplapjának éle 10 cm, magassága 40 cm. Mekkora szöget zár be

a) az alaplap az oldaléllel;

b) az alaplap az oldallappal;

c) két szemben levő oldallap egymással?

5422 Az $ABCDEF$ szabályos oktaéder csúcsain áthaladó összes egyenes közül véletlenszerűen kettőt kiválasztunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a kettő áthalad az oktaéder A csúcsán?

5423 Hány háromszöget határoznak meg egy $ABCDEFGH$ kocka csúcsai? Mekkora ezen háromszögek területének az összege, ha a kocka éle 10 cm?

5424 A kertünkben egymástól 4 m távolságra van egy fa és egy kút. A virágágyásunk minden pontja a fától legfeljebb 3 m távolságra van, de a kúthoz közelebb van, mint a fához. Mekkora területű a virágágyás?

5425 Egy rombusz alakú park két átlójának hossza 60 m és 100 m hosszú. Milyen hosszúak a park területén lévő, a park középpontjától 40 méterre haladó sétányok?

5426 Az ABC háromszögben $AC \neq BC$, és a háromszög körülírható körének sugara 10 cm.

a) Hány olyan pont van a háromszög síkjában, amely a háromszög AC és BC oldalegyeneseitől, valamint az A és a B csúcstól is egyenlő távol van?

b) Mekkora távolságra vannak egymástól ezek a pontok?

5427 Egy téglalap alakú telek határának mely pontjai vannak egyenlő távol a telek valamely két szemközti sarkától, ha a telek egyik oldala 18 m, a másik 12 m hosszú?

5428 Az $ABCD$ téglalap P belső pontja az A csúcstól 5, a B-től 11, a D-től 10 cm távolságra van. Milyen távol van a P pont a C csúcstól?

5429 Az ABC háromszög A csúcsánál levő szöge 60°, $AB = 10$ cm és $AC = 8$ cm. Az A csúcsból kiinduló belső szögfelező

a) mekkora távolságra halad a B és C csúcsoktól;

b) mekkora részekre osztja a BC oldalt?

5430 Egy háromszögbe írt kör középpontja a háromszög melyik csúcsától van a legtávolabb?

5431 Egy síktól az ABC háromszög csúcsainak a távolsága rendre 3 cm, 6 cm és 9 cm. Mekkora a háromszög súlypontjának a síktól vett távolsága?

5432 Két egymásra merőleges sík egyikén adott egy A pont, a másikon egy B pont. Mekkora távolságra van AB szakasz felezőpontjától az A, illetve B pontoknak a két sík metszésvonalára eső merőleges vetülete, ha az A és a B pontok távolsága 20 cm?

5433 Hány részre osztják a teret egy szabályos ötszög alapú egyenes hasábot határoló lapok síkjai?

5434 Van-e olyan pont a térben, amelyre igaz, hogy egy 12 cm élű szabályos tetraéder minden csúcsától $3 \cdot \sqrt{6}$ cm távolságra van?



5435 A piros labdánk a fal és a pad közé esett, majd ott leengedett, de nem esett le a földre. Milyen alakzaton mozgott eközben a labda középpontja? (A pad éle párhuzamos a fallal.)

5436 Egy szabályos háromszög csúcspontjain át egymással párhuzamos egyeneseket húzunk úgy, hogy a középsőnek a két szélsőtől vett távolsága 1, illetve 3 cm. Mekkora a szabályos háromszög oldala?

5437 Az $ABCD$ szabályos háromoldalú gúla alaplapja 18 cm oldalú szabályos háromszög. Az ABC alaplapon vegyünk fel egy P pontot, és állítsunk merőlegest az alaplapra. Ez a merőleges az ABD, BCD és ACD oldallapok síkját P_1, P_2 és P_3 pontokban metszi. Adjuk meg a PP_1, PP_2 és PP_3 szakaszok hosszának összegét, ha a gúla oldallapjai az alaplappal 45°-os szöget zárnak be.

Geometriai transzformációk

5438 Töltsük ki az egybevágósági transzformációk tulajdonságait összefoglaló alábbi táblázatot.

	Identikus transzformáció	Tengelyes tükrözés	Forgatás (mely nem identitás)	Eltolás (mely nem identitás)
Fixpontok				
Fixegyenesek				
Invariáns egyenesek				
Példa invariáns körre				
Szögtartó				
Távolságtartó				
Egyenes és képe párhuzamos?				
A körüljárási irányt megtartja?				

5439 Adjunk meg legalább 3 különböző egybevágósági transzformációt, amellyel egy kört egy vele megegyező sugarú körbe át lehet vinni.

5440 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) Ha egy trapéz tengelyesen szimmetrikus, akkor húrtrapéz.

b) Van olyan tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelynek átlói merőlegesek egymásra.

c) Ha egy négyszög tengelyesen szimmetrikus, akkor átlói merőlegesek egymásra.

d) Ha egy tengelyesen szimmetrikus négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor deltoid.

e) A szabályos tizenkétszög 30°-os forgatással önmagába vihető.

f) A szabályos sokszögek közül egyedül a 36 oldalú vihető önmagába 10°-os forgatással.

g) Van középpontosan szimmetrikus deltoid.

h) A szabályos háromszögön kívül van olyan szabályos sokszög, amelyik nem középpontosan szimmetrikus.

5441 Hány szimmetriatengelye van a szabályos sokszögnek, ha oldalainak száma

a) 13; *b)* 14?

Hány olyan szimmetriatengely van az egyes esetekben, amelyre illeszkedik a sokszög valamelyik átlója?

5442 Melyek a tengelyesen szimmetrikus paralelogrammák?

5443 Melyek a középpontosan szimmetrikus deltoidok?

5444 Egy trapézt egyik oldalegyenesére tükrözzük. Lehet-e a trapéz és tükörképének egyesítése

a) paralelogramma; *b)* konkáv hatszög;

c) szabályos hatszög; *d)* négyzet;

e) rombusz, melynek nincs derékszöge?

Indokoljuk válaszunkat.

5445 Egy trapézt egyik oldalának felezőpontjára tükrözzük. Lehet-e a trapéz és tükörképének egyesítése

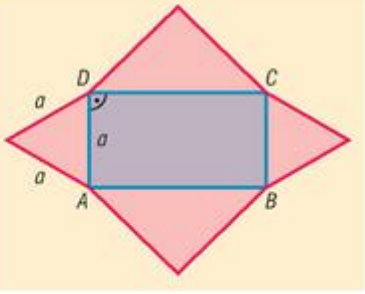
a) paralelogramma; *b)* konkáv hatszög;

c) szabályos hatszög; *d)* négyzet;

e) rombusz, amelynek nincs derékszöge?

Válaszunkat indokoljuk.

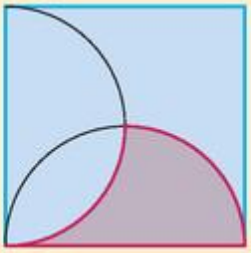
5446 Az $ABCD$ téglalap két szemközti oldalára egyenlő szárú derékszögű háromszögeket, másik két oldalára szabályos háromszögeket rajzoltunk. Milyen szimmetriatulajdonságokkal rendelkezik a kialakuló (az ábrán pirossal jelölt) konkáv nyolcszög?



5447 Az alábbi ábrán egy négyzet két oldala mint átmérők fölé egy-egy félkört rajzoltunk. A lilával jelölt síkidomot a négyzet középpontja körül négyszer egymás után 90°-kal elforgatjuk.

a) Hova kerül a lila alakzat az egyes forgatások után? Rajzzal válaszoljunk.

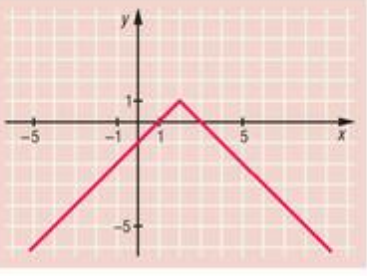
b) A négyzet területének hány százaléka van lilával megjelölve?



5448 *a)* Fogalmazzuk meg, hogy milyen egybevágósági transzformációk egymás utáni elvégzésével kaphatjuk meg az ábrán látható függvény grafikonját az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonjából.

b) Mi a hozzárendelési szabálya annak a függvénynek, amelynek grafikonja a fenti ábrán látható grafikon origóra vonatkozó tükörképe?

c) Írjuk fel annak a függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonját úgy kapjuk, hogy az ábrán látható grafikont a $\vec{v}(-3; -2)$ vektorral eltoljuk.



5449 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) Két négyzet mindig hasonló egymáshoz.

b) Két téglalap mindig hasonló egymáshoz.

c) Egy négyzet középpontos hasonlósággal bármely másik négyzetbe átvihető.

d) A háromszög magasságvonala két hasonló háromszögre bontja az eredeti háromszöget.

e) A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága két hasonló háromszögre bontja a derékszögű háromszöget.

f) Ha két háromszög minden szöge 60°-os, akkor a háromszögek hasonlók egymáshoz.

g) Ha két hatszög minden szöge 120°-os, akkor a hatszögek hasonlók egymáshoz.

5450 Egy derékszögű háromszög befogói 13 cm és 84 cm. Mekkorák a hozzá hasonló háromszög oldalai, ha átfogója 17 cm?

5451 Hogyan tudnánk jellemezni a

a) $\lambda = -\frac{3}{4}$; *b)* $\lambda = \frac{5}{4}$; *c)* $\lambda = -2$

hasonlósági arányú középpontos hasonlósági transzformációt?

5452 Adott egy ötszög az oldalainak hosszával. A hozzá hasonló ötszög legkisebb oldala 7 cm. Határozzuk meg a többi oldal hosszát, ha az eredeti ötszög oldalai:

30 cm, 14 cm, 28 cm, 20 cm és 42 cm.

5453 Hasonlóak-e az alábbi ABC és $A'B'C'$ háromszögek, ha oldalaik hossza

a) $a = 21$ cm, $b = 15$ cm, $c = 9$ cm és $a' = 7$ cm, $b' = 0{,}5$ dm, $c' = 3$ cm;

b) $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 0{,}6$ dm és $a' = 5$ cm, $b' = 2$ cm, $c' = 3$ cm?

5454 Felnagyítottunk egy háromszöget, mely oldalainak hossza:

$a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 3$ cm.

Mekkorák a hasonló háromszögnek az oldalai, ha tudjuk, hogy kerülete 24 cm?

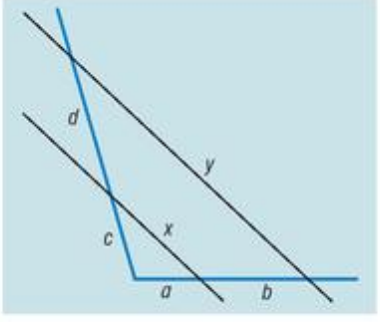
5455 Két négyzet egy-egy oldalának összege 27 cm. Számítsuk ki a négyzetek oldalainak hosszát, ha tudjuk, hogy a területeik aránya

a) 1:4; *b)* 16:25.

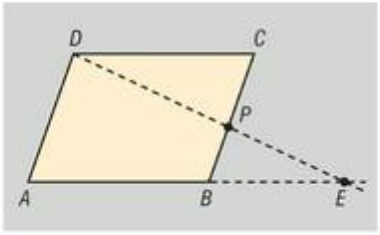
5456 Két hasonló test térfogatának aránya 8:27. Adjuk meg a hasonlósági arányt, és számítsuk ki a testek felszínének arányát.

5457 Az ábrán látható szög szárait párhuzamos egyenesekkel metszettük el. Töltsük ki a táblázat hiányzó celláit.

a	*b*	*c*	*d*	*x*	*y*
3 cm	5 cm	4 cm			15 cm
	4 cm	3,5 cm		2,5 cm	7 cm
2 cm	4 cm		4,3 cm	3 cm	
3,2 cm			7 cm	4 cm	11 cm



5458 Az ábrán látható $ABCD$ paralelogramma BC oldalát a P pont $3 : 4$ arányban osztja. Számítsuk ki a BE szakasz hosszát, ha tudjuk, hogy $AB = 1{,}2$ dm.



5459 Egy háromszög oldalainak hossza:

$$a = 6 \text{ cm}, \quad b = 8 \text{ cm} \quad \text{és} \quad c = 10 \text{ cm}.$$

Milyen hosszúságú szakaszokra osztják a szemközti oldalakat a belső szögfelezők?

5460 Adott egy szakasz. Hogyan lehet megszerkeszteni annak a szabályos ötszögnek az oldalát, amelynek kerülete megegyezik az adott szakasz hosszával?

5461 Egy település központjából két egyenes út is indul (a 12-es, illetve a 13-as számúak), melyek egymással tompaszöget zárnak be. A 12-es úton a falu központjától 5 km, illetve 8 km távolságra újabb útkereszteződések találhatók, amelyeket egy-egy szintén egyenes útszakasz köt össze a településből kiinduló másik, 13-as számú úttal. Az összekötő utak párhuzamosak egymással, és a 13-as út mentén 2,5 km a köztük lévő távolság.

a) Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével.

b) Mekkora távolságra található a 13-as úton az első útkereszteződés a település központjától?

c) Hány kilométer a távolság a 12-es és 13-as utakat összekötő hosszabb úton, ha a rövidebb út 7 km hosszú?

5462 *a)* Számítsuk ki a trapéz kiegészítő háromszögének oldalait, ha alapjai 6 cm és 15 cm, szárainak hossza pedig 7 cm.

b) Milyen arányban osztják egymást a trapéz átlói?

5463 Egy tó területe az $1 : 20\,000$ méretarányú térképen $3{,}5 \text{ cm}^2$.

a) Hány km^2 a tó felszíne a valóságban?

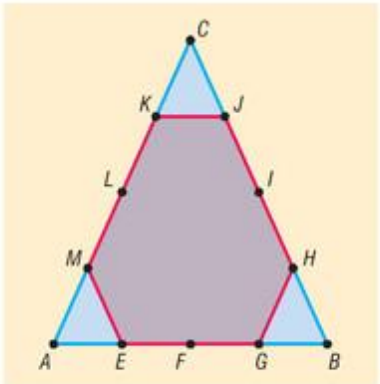
b) Hány cm^2 a területe a tónak egy $1 : 40\,000$ méretarányú térképen?

5464 Az egyik forgalmazó a tejföl (geometriai értelemben) egymáshoz hasonló dobozokban hozza forgalomba. Feltételezzük, hogy a tejföl ára egyenes arányos a doboz térfogatával. A legkisebb kiszerelés ára 0,4 €. A következő méretű doboz 20%-kal magasabb, mint a legkisebb. Mennyibe kerül a következő méretű doboz tejföl?

5465 *a)* Három négyzet területének aránya $9 : 25 : 49$, a legnagyobb és a legkisebb területének összege 232 m^2. Számítsuk ki a négyzetek oldalának hosszát.

b) Három kocka térfogatának aránya $1 : 27 : 512$, a legnagyobb és a legkisebb térfogatának összege $13\,851 \text{ m}^3$. Számítsuk ki a kockák élének hosszát.

5466 Az ábrán látható ABC egyenlő szárú háromszög ($AC = BC$) oldalait négy egyenlő részre osztottuk, majd berajzoltuk az $EGHJKM$ hatszöget.

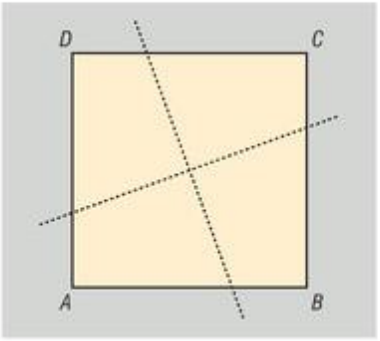


a) Mutassuk meg, hogy a hatszög tengelyesen szimmetrikus. Adjuk meg a szimmetriatengelyét.

b) Hányadrésze a hatszög kerülete az ABC háromszög kerületének?

c) Hányadrésze a hatszög területe az ABC háromszög területének?

5467 Az ábrán látható $ABCD$ négyzetet két egyenes vágással négy részre bontottuk.



a) Mutassuk meg, hogy ha a két vágás egymásra merőleges, és mindkettő átmegy a négyzet középpontján, akkor a keletkező részek területe megegyezik.

b) Mutassuk meg, hogy ha a keletkező részek területe megegyezik, akkor mindkét vágás átmegy a négyzet középpontján, továbbá merőlegesek egymásra.

5468 Az ABC háromszög BC oldala 6 cm hosszú, az oldalon fekvő két szög $\beta = 70°$, $\gamma = 45°$. A háromszög köré írható kör középpontját tükrözzük a háromszög oldalegyeneseire. A tükörképek az A, B és C pontokkal együtt egy hatszöget fognak közre.

a) Mutassuk meg, hogy a hatszög minden oldala ugyanakkora.

b) Mutassuk meg, hogy a kapott hatszög felbontható három rombuszra.

c) Mekkorák a kialakuló hatszög szögei?

d) Számítsuk ki a keletkező hatszög területét.

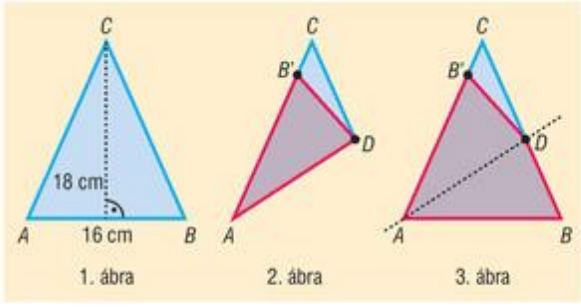
5469 Adott a koordináta-rendszerben három pont, amelyek koordinátái $A(3; -2)$, $B(6; 4)$ és $C(1; 4)$. Adjuk meg azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyek a megadott pontokkal együtt egy

a) középpontosan szimmetrikus;

b) tengelyesen szimmetrikus

négyszöget fognak közre. Mindkét esetben adjuk meg az összes megoldást.

5470 Egy origami nagymester az általa kifejlesztett madár elkészítéséhez az 1. ábrán látható egyenlő szárú ABC háromszög alakú színes papírlapból indul ki. A hajtogatás első lépése, hogy a B pontot a 2. ábrának megfelelően az AC szárra „hajtogatja" az AD vonal mentén. Végül a 3. ábrának megfelelően kivágja az $ABDB'$ négyszöget az ABC háromszögből, mivel a kapott négyszög képezi a madár törzsét.



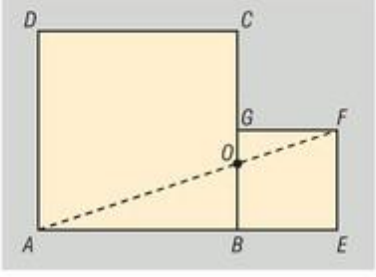
a) Milyen szimmetriatulajdonsággal rendelkezik az $ABDB'$ négyszög?

b) Milyen speciális négyszög képezi a madár törzsét?

c) Az ABC háromszög melyik nevezetes vonala mentén történt az első hajtogatás?

d) Számítsuk ki, hogy mekkora területű papírlapból készül a madártörzs.

5471 Az ábrán látható $ABCD$ négyzet területe négyszer akkora, mint a $BEFG$ négyzet területe.



a) Bizonyítsuk be, hogy az ABO háromszög hasonló az FGO háromszöghöz.

b) Mekkora távolságra van az O pont a négyzetek csúcsaitól, ha $BE = 6$ cm?

c) Igaz-e, hogy az ábrán látható kisebb négyzetet az O pontra vonatkozó középpontos hasonlósággal át lehet vinni az $ABCD$ négyzetbe? Ha igaz, akkor mekkora a hasonlóság aránya?

5472 Az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = 8$ cm, $CD = 4$ cm. A trapéz átlói az O pontban metszik egymást. Az AO és BO szakaszok O-hoz közelebbi negyedelőpontja F, illetve G, az O pont tükörképe a C és D pontokra pedig H, illetve I.

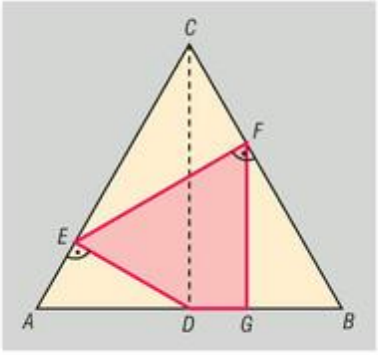
a) Mutassuk meg, hogy az $FGHI$ négyszög trapéz.

b) Számítsuk ki az $FGHI$ és $ABCD$ trapézok területének arányát.

c) Hogyan kell megválasztani az $ABCD$ trapéz alapjainak hosszát, ha azt szeretnénk, hogy az $FGHI$ és az $ABCD$ trapézok területe megegyezzen?

5473 A 20 cm oldalú $ABCD$ rombusz belsejében felveszünk egy P pontot. A DP egyenes a rombusz BC oldalát az E pontban, az AB oldal B csúcson túli meghosszabbítását pedig a B csúcstól 4 cm távolságra metszi. Az AP egyenes a rombusz BC oldalát F-ben, a DC oldal meghosszabbítását pedig K-ban metszi. Számítsuk ki a CK szakasz hosszát, ha $EF = 5$ cm.

5474 Noémi a szabályos háromszög alakú ABC virágágyás középső részébe tulipánt szeretne ültetni. Az AB oldal D felezőpontjából merőlegest állít az AC oldalra, majd a kapott E pontból ismét merőlegest állít, ezúttal a BC oldalra, végül a kapott F pontból párhuzamost húz a háromszög CD magasságával. Noémi végül úgy dönt, hogy a $DEFG$ négyszög alakú részbe ültet tulipánt.



a) Bizonyítsuk be, hogy virágágyás csúcsainál kialakuló ADE, CEF és FBG háromszög alakú részek mindegyike hasonló az ACD háromszöghöz.

b) Noémi az ABC virágágyás hány százalékába ültet tulipánt?

5475 Az ABC háromszög S súlypontját összekötjük a háromszög csúcsaival. A keletkező ABS, BCS és CAS háromszögek súlypontját jelölje rendre E, F és G.

a) Bizonyítsuk be, hogy az EFG és a CAB háromszögek hasonlók egymáshoz.

b) Mekkorák az EFG háromszög oldalai, ha az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm és $CA = 12$ cm?

c) Adjunk meg egy olyan hasonlósági transzformációt, amelyik az EFG háromszöget a CAB háromszögbe viszi át.

5476 Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$, továbbá $AB = 8$ cm. A háromszög A csúcsából induló magasságvonala az AB szakasz felezőmerőlegesét az M pontban, a BC oldalt a D pontban metszi. Tudjuk, hogy az M pont a háromszög C csúcsától szintén 8 cm távolságra található.

a) Mutassuk meg, hogy az ABD háromszög egybevágó a CMD háromszöggel.

b) Számítsuk ki az ABC háromszög szögeit.

5477 Az O középpontú R sugarú, valamint a Q középpontú r sugarú körök kívülről érintik egymást a P pontban. Az OQ egyenes a P ponton kívül az R sugarú kört A-ban, a másikat C-ben metszi. Az OQ egyenest a P pont körül 30°-kal elforgatjuk. Az elforgatott egyenes az R sugarú kört a P ponton kívül B-ben, a másikat D-ben metszi.

a) Milyen speciális négyszög az $ABCD$ négyszög?

b) Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét az r és R sugarak segítségével.

5478 Egy 3 cm és egy 5 cm sugarú kör középpontjának távolsága 16 cm.

a) Számítsuk ki, hogy a kisebb kör középpontjától mekkora távolságra találhatók azok a pontok, amelyekből közös érintő húzható a két körhöz.

b) Számítsuk ki, hogy milyen hosszú a két kör közös belső érintőjének a körök közé eső szakasza.

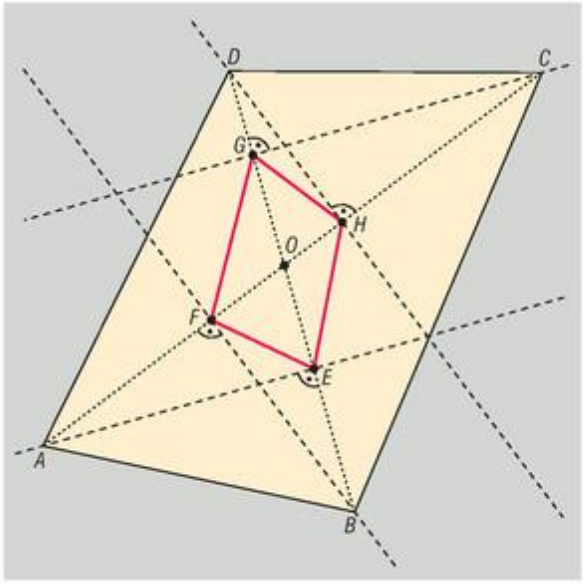
5479 Az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle = 90°$. A háromszög C csúcsából induló magasságvonala a háromszög átfogóját a T pontban metszi. A BCT háromszög beírt körének középpontja O, az ACT háromszögé pedig Q.

a) Bizonyítsuk be, hogy a QOT és ABC háromszögek hasonlók egymáshoz.

b) Mutassuk meg, hogy az OQ egyenes az ABC háromszögből egyenlő szárú derékszögű háromszöget vág le.

5480 Az $ABCD$ konvex négyszög A és C csúcsából merőlegest állítunk a BD átlóra, a B és D csúcsokból pedig az AC átlóra. A kialakuló négy merőleges talppontja, az ábrának megfelelően, az $EFGH$ négyszöget fogja közre.

Mutassuk meg, hogy az $EFGH$ és az $ABCD$ négyszögek hasonlók egymáshoz.



Vektorok. Szögfüggvények

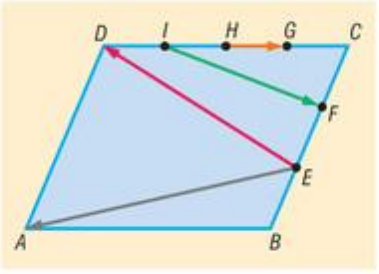
5481 Az ábrán látható $ABCD$ paralelogramma BC oldalának harmadolópontjai E és F, a DC oldalának negyedelőpontjai G, H és I. Fejezzük ki a következő vektorokat $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ segítségével:

a) $\overrightarrow{HG}$;

b) $\overrightarrow{IF}$;

c) $\overrightarrow{ED}$;

d) $\overrightarrow{EA}$.



5482 Az $ABCD$ négyzet oldala 10 cm hosszú. Adjuk meg a négyzet A csúcsából a

a) C csúcsába mutató;

b) CD oldal felezőpontjába mutató

vektor hosszát.

5483 Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

A: Ha két vektor skaláris szorzata pozitív, akkor a két vektor tompaszöget zár be.

B: Két párhuzamos vektor összege nem lehet nullvektor.

C: Két vektor különbségének abszolút értéke lehet ugyanakkora, mint összegük abszolút értéke.

D: Háromszög súlypontjába mutató vektor a csúcsokba mutató vektorok számtani közepe.

5484 Adjuk meg egy szabályos tízszög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összegét.

5485 Az $ABCDE$ négyzet alapú szabályos gúla E csúcsából az alaplap A és C csúcsába mutató vektorok legyenek $\vec{a}$ és $\vec{c}$. Adjuk meg az E csúcsból a gúla magasságának talppontjába mutató vektort $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével.

5486 Két nem párhuzamos vektorról tudjuk, hogy $|\vec{a}| = 5$ és $|\vec{b}| = 5$. Mekkora szöget zár be az $\vec{a} - \vec{b}$ és az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor?

5487 Az $ABCD$ paralelogramma síkjában adjuk meg annak a $\vec{v} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ vektornak a végpontját, amelynek kezdőpontja az A csúcs.

5488 Egy csónak sebessége állóvízben 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mekkora sebességgel mozog a csónak, ha 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű folyóban a partra merőlegesen indul?

5489 Mekkora a közös kezdőpontú 8 N és 12 N nagyságú erők eredője, ha 60°-os szöget zárnak be egymással?

5490 Hány fokos szöget zár be az a két egységvektor, amelyek skaláris szorzata

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $-\frac{1}{2}$; *c)* 0?

5491 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\frac{5 - 3\cos 60°}{\sin 30° \cdot \cos 30°}$; *b)* $\frac{\cos 315°}{\sin 315°} + \sin^2 35° \cdot \frac{1}{\cos^2 55°}$;

c) $256^{\cos\frac{256}{3}\cdot\pi}$.

5492 Adjuk meg az α konkáv szög többi szögfüggvényének értékét (az α szög kiszámítása nélkül), ha

a) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; *b)* $\cos\alpha = 0{,}6$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$; *d)* $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

5493 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét zsebszámológép használata nélkül, és állítsuk őket növekvő sorrendbe:

$$\sin\frac{2\pi}{3};\quad \operatorname{tg} 2010°;\quad \lg(\cos 8\pi);\quad \frac{1}{\operatorname{ctg} 390° - 1};\quad \sqrt{3}\cdot\cos 240°.$$

5494 Adjuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát, és hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

a) $\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}$; *b)* $\log_3 3^{\cos x}$; *c)* $\lg\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}$; *d)* $\sqrt{\sin^2 x - 1}$.

5495 Mekkora lehet $\sin x$ értéke, ha

$$\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{3}?$$

5496 Adjuk meg az $a_n = \sin\frac{n\pi}{3}$ sorozat első

a) 100; *b)* 2010

tagjának összegét.

5497 Mekkora szögben esnek a Nap sugarai a Földre, ha egy 175 cm magas ember árnyéka 120 cm?



5498 A világ legmagasabb épülete a Burj Kalifa. Vízszintes terepen a lábától vett 100 m távolságban mekkora szög alatt láthatjuk a 828 m magas épületet? (➡)



5499 Egy hegyre vezető egyenes út emelkedési szöge 2,5°.

a) Hány százalékos az emelkedő?

b) Milyen magas a hegy, ha az út hossza 8 km?

5500 Egy 40 m magas épület teteje egy 30 m magas épület tetejéről 16° emelkedési szögben látszik. Milyen távol van egymástól a két épület?

5501 Egy villanyszerelő a talajon állva legfeljebb 2 m magasságig tud munkát végezni. Fel tud-e szerelni egy 3,8 m belmagasságú lakásban egy csillárt a mennyezetre, ha olyan kétágú létra áll rendelkezésére, amelynek szárai 1,9 m hosszúak, és biztonsági okokból a létra nyílásszögének legalább 30°-nak kell lennie?

5502 Egy teherautó platója 1,50 m magasságban van. Henger alakú hordót akarunk felgurítani a teherautóra úgy, hogy 20°-os emelkedési szögben egy pallót támasztunk a rakodótérhez. Hányszor fordul meg a tengelye körül a hordó, míg felgurítják, ha alapkörének átmérője 80 cm?

5503 Egy 18 cm oldalú szabályos háromszög egyik szögét osszuk fel 4 egyenlő részre. Mekkora részekre osztják a szögek szárai a háromszög szemközti oldalát?

5504 Egy rombusz kerülete 40 cm, területe 80 cm^2. Mekkora a rombusz

a) tompaszöge; *b)* két átlójának hossza?

5505 Egy körbe írható deltoid egyik szöge 48°, szimmetriatengelye 30 cm hosszú. Mekkora a deltoid

a) kerülete; *b)* területe; *c)* beírható körének sugara?

5506 Mekkora egy 20 cm sugarú körbe írt szabályos nyolcszög

a) kerülete; *b)* területe?

5507 Egy 50 m sugarú kör alakú park határoló ívén 20 m-t sétáltunk. Hány százalékkal rövidebb utat tettünk volna meg, ha egyenes mentén gyalogolunk?

5508 Egy háromszög köré 20 cm sugarú kör írható. Mekkora a háromszög 10 cm-es oldalával szemben levő szög?

5509 Az Apollo-13 űrhajó a Föld középpontjától 320 000 km távolságra volt, amikor felrobbant egy oxigéntartály. Mekkora szögben láthatták ekkor az asztronauták a Földet? (A Föld sugarát vegyük 6378 kilométernek.)

5510 Legalább milyen magasnak kell lennie annak a hegynek, amely a lábától mért 200 km távolságból is látszik? (A Föld sugarát vegyük 6378 kilométernek.)

5511 Két kör középpontjának távolsága 15 cm, sugaraik 6 cm és 4 cm hosszúak. Mekkora szöget zárnak be a két kör közös

a) külső; *b)* belső

érintői?

5512 Két nem párhuzamos $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor 30°-os szöget zár be. Hány fokos szöget zár be az $\vec{a}$ vektor az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektorral?

5513 Az ABC háromszögben $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével adjuk meg az AB oldal felezőpontjából az AC oldal C-hez közelebbi harmadolópontjába mutató vektort. Mekkora ennek a vektornak a hossza, ha $AB = 14$ cm, $AC = 9$ cm és $CAB\sphericalangle = 72°$?

5514 Egységnyi élű szabályos tetraéder egy csúcsából kiinduló élvektorai $\vec{a}$ és $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Adjuk meg a következő műveletek eredményeit:

a) $\vec{b}\cdot\vec{c}$; *b)* $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$; *c)* $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}$.

5515 Adjuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát, és hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

a) $\dfrac{2^{\log_2 \sin x}}{\cos x}$; *b)* $\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{x^2}}$.

5516 Mekkora $\dfrac{2\cdot\sin x+3\cdot\cos x}{5\cdot\cos x-2\cdot\sin x}$ értéke, ha $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$?

5517 Egy háromszög két oldalának hossza 10 cm és 22 cm. Mekkora lehet a háromszög harmadik oldala, ha a két adott oldal által bezárt α szögre teljesül, hogy:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{9}?$$

5518 Adjuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=-\cos^2 x+2\sin x-1$ függvény értékkészletét.

5519 Az $a_n=\cos\dfrac{n\pi}{6}$ sorozat első 200 tagja közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mi annak a valószínűsége, hogy mind a kettő irracionális szám lesz?

5520 Egy ingaóra ingája 20 cm hosszú, és percenként 50 lengést végez. (Egy lengés alatt az inga végpontja az egyik szélső helyzetéből a másik szélső helyzetébe jut el.)

a) Huszonnégy óra alatt mekkora utat tesz meg az inga végpontja, ha a két szélső helyzetben a végpont távolsága 8 cm?

b) Az óra nagymutatója 7 cm, a kismutató 5 cm hosszú. Milyen távol van egymástól a két mutató végpontja 2 óra 20 perckor?

5521 Egy rombusz egyik szöge 140°. Az oldalak felezőpontjai által meghatározott négyszög területe 100 cm^2. Mekkora a rombusz oldala?

5522 Mekkorák annak az egyenlő szárú háromszögnek a szögei, amelynek az alaphoz tartozó magassága, az alapja és a szára ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai?

5523 Egy szabályos sokszög köré írt kör területe 144π, a sokszögbe írt kör területe 108π.

a) Hány oldalú a szabályos sokszög?

b) Mekkora a szabályos sokszög egy oldala?

c) Tekintsük azt az egyenes gúlát, amelynek alaplapja a feladatban szereplő szabályos sokszög, és magassága 20 cm. Mekkora szöget zár be a gúla alaplapja az oldallapjával?

5524 Legyenek $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$ és $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ a C pontból az A és B pontokba mutató nem egyállású vektorok. Az AC szakasz felezőpontja F, és az AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontja E. A BF és CE egyenesek metszéspontja legyen M. Fejezzük ki a $\overrightarrow{CM}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével.

5525 Adjuk meg az ABC háromszög síkjában azon P pontok halmazát, amelyekre $PA^2 = PB^2 + PC^2$.

5526 Az ABC háromszög AB és AC oldalaira kifelé rajzoljuk az ABE és az ACF szabályos háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy a BC, AE és AF oldalak felezőpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

5527 Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezés minden x értékre állandó:

$$\sqrt{\sin^4 x + 4 \cdot \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \cdot \sin^2 x}.$$

5528 Igazoljuk, hogy a következő egyenlőségek fennállnak minden olyan valós x esetén, amelyekre az egyenlőség jobb, illetve bal oldala is értelmezve van:

a) $4 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \sin^2 x - 3$; *b)* $\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$.

5529 Adjuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a következő kifejezés x-től független állandó legyen:

$$(\sin^6 x + \cos^6 x) \cdot p^2 + (\sin^4 x + \cos^4 x) \cdot p - 4 \cdot (\sin^4 x + \cos^4 x).$$

5530 Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög oldalai a, b és c, a velük szemben lévő szögek rendre α, β és γ, valamint a háromszög területe t, akkor teljesül a következő egyenlőség:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot t}.$$

5531 Egy vízszintes terepen álló 60 m magas torony felső $\frac{3}{5}$ része a vízszintes sík mely pontjaiból látszik a legnagyobb szögben? Számítsuk ki ennek a szögnek a nagyságát.

5532 A Szekszárd melletti Mausz kápolnánál lévő kilátóhelynek a tengerszint feletti magassága 136 m. A helybéliek azt állítják, hogy innen jó időben lehet látni a szegedi Fogadalmi templom tornyát, amelynek teteje a tengerszint felett 165 méterre van. Igazuk van-e?

(Szekszárd és Szeged ugyanazon a szélességi körön van, a Fogadalmi templom a 20°09', a kilátóhely a 18°42' hosszúsági körön fekszik. A Föld sugarát ezen a szélességi körön 6367 km-nek vegyük.)

Nevezetes síkidomok tulajdonságai

5533 Mekkora lehet a háromszög harmadik oldala, ha tudjuk, hogy $a = 7$ cm, $b = 11$ cm és a kérdezett oldal hossza prímszám?

5534 Egy háromszögben az egyik szög a másik két szög összegével egyenlő. A háromszög legnagyobb szöge 45°-kal nagyobb a legkisebbnél. Számítsuk ki a háromszög szögeit.

5535 Egy háromszög egyik szöge 55°. Mekkora szöget zár be egymással a másik két belső szög szögfelezője?

5536 Egy hegyesszögű háromszög egyik szöge 55°. Mekkora szöget zár be egymással a másik két csúcsból kiinduló magasságvonal?

5537 Egy háromszög két szöge 60° és 50°. Mekkora szöget zárnak be egymással a két szög csúcsából kiinduló magasságvonalak?

5538 Lehetnek-e egy háromszög középvonalai 4 cm, 5 cm és 9 cm hosszúak? Indokoljuk válaszunkat.

5539 Az A, B és C települések nincsenek egy vonalban, továbbá egymástól mért távolságaik mindegyike kilométerben mérve egész szám. Mekkora lehet az AB távolság, ha tudjuk, hogy $AC = 3$ km és $BC = 11$ km?

5540 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) A háromszög köré írható kör középpontja a háromszög belsejében van;

b) A háromszög köré írható kör sugara legalább akkora, mint a háromszög leghosszabb oldalának a fele;

c) Bármely hegyesszögű háromszög felbontható 3 egyenlő szárú háromszögre;

d) A háromszög magasságpontja nem eshet a háromszögön kívülre;

e) A háromszög egyik oldalához tartozó súlyvonala hosszabb, mint az oldalhoz tartozó magassága;

f) Van olyan háromszög, amelyben a magasságpont 2:1 arányban osztja a magasságvonalakat;

g) A háromszög súlypontja mindhárom oldaltól egyenlő távolságra van;

h) A háromszög magasságpontja a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra van;

i) A háromszög szögfelezőinek metszéspontja a háromszög oldalaitól egyenlő távolságra van.

5541 Egy kerületi és a hozzá tartozó középponti szög összege 22,5°. Adjuk meg (fokokban és radiánban) az említett két szöget külön-külön.

5542 Egy háromszög oldalai a köré írt kör középpontjából 140°, 130° és 90°-os szög alatt látszanak. Mekkorák a háromszög belső szögei?

5543 Számítsuk ki a háromszög köré írt kör sugarát, ha ismert a háromszög egyik oldala, valamint a vele szemközti szög.

a) $a = 8$ cm, $\alpha = 30°$; *b)* $a = 13$ cm, $\alpha = 90°$; *c)* $a = 7{,}5$ cm, $\alpha = 125°$.

5544 Szögeit tekintve milyen az a háromszög, amelynek oldalai

a) 48 cm, 55 cm, 73 cm; *b)* 5 cm, 8 cm, 11 cm; *c)* 10 cm, 7,6 cm, 9,8 cm;

d) 16 cm, 63 cm, 65 cm?

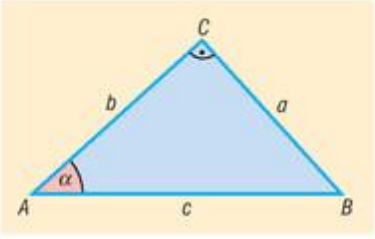
5545 Az ábrán látható derékszögű háromszögben $a = 65$ cm és $\alpha = 42°12'$. Számítsuk ki a háromszög

a) ismeretlen oldalainak hosszát;

b) körülírt körének sugarát;

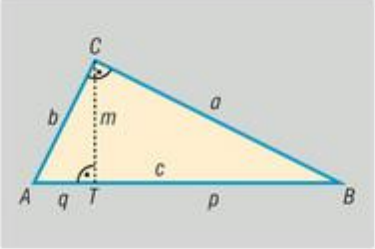
c) beírt körének sugarát;

d) súlyvonalainak hosszát.



5546 Az ábra alapján töltsük ki az alábbi táblázatot (az adatok cm-ben vannak megadva).

a	b	c	m	p	q
28	45				
				48	12
25				24	
		73	$\frac{2640}{73}$		



5547 Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót 1 : 4 arányban osztja. A háromszög magassága 4 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

5548 Számítsuk ki az ABC háromszög ismeretlen szögeit és oldalát, ha

a) $BC = 15$ cm, $AC = 7$ cm, $ABC\sphericalangle = 20°$; *b)* $BC = 15$ cm, $AC = 7$ cm, $ABC\sphericalangle = 27{,}83°$.

Milyen hibát követ el, aki a *b)* feladatban a szinusztétel alkalmazása során a szögfüggvény értékét két tizedesjegyre kerekíti?

5549 Az Andrásfalvát Barnabásfalvával összekötő egyenes út kétszer olyan hosszú, mint a Barnabásfalva és Csabaháza közti egyenes út hossza. A két említett út 60°-os szöget zár be egymással.

a) Hányszorosa az Andrásfalva és Csabaháza között húzódó, szintén egyenes út hossza a Barnabásfalvát Csabaházával összekötő út hosszának?

b) Mekkora szöget zár be egymással az Andrásfalván összefutó két út?

5550 Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) Van olyan konkáv négyszög, amelyik tengelyesen szimmetrikus.

b) Van középpontosan szimmetrikus konkáv négyszög.

c) Ha egy négyszög tengelyesen szimmetrikus, akkor szimmetriatengelye tartalmazza valamelyik átlóját.

d) A deltoidnak legalább egy hegyesszöge van.

e) A deltoid átlói felezik egymást.

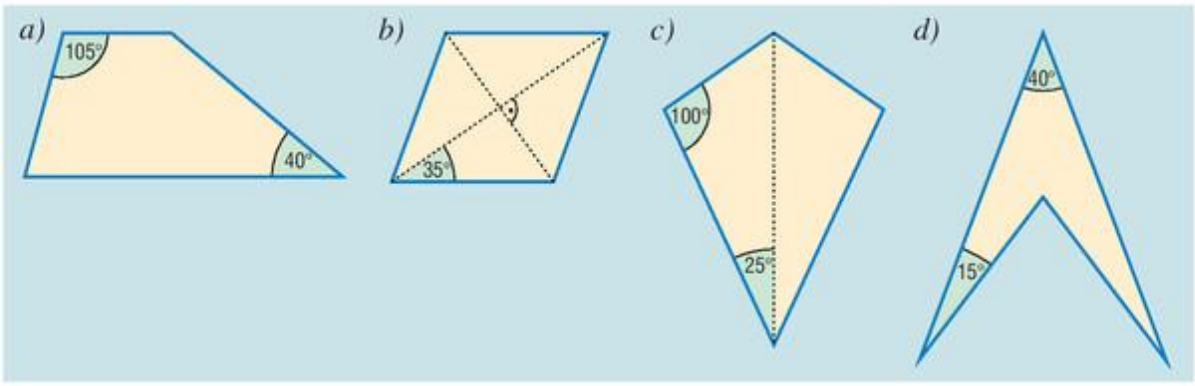
f) A paralelogramma egyik átlója szögfelező is egyben.

g) A húrtrapézok között vannak rombuszok is.

h) A deltoidok között vannak paralelogrammák is.

i) A rombusznak van körülírt köre.

5551 Számítsuk ki az ábrán látható trapézok, illetve deltoidok ismeretlen szögeit.



5552 Egy deltoid átlóinak hossza 22 cm és 80 cm. A rövidebb átló a hosszabb átlót 1:3 arányban osztja két részre. Számítsuk ki a deltoid oldalainak hosszát és szögeit. Mekkora a deltoid területe?

5553 Egy rombusz átlóinak hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 2 : 3, oldala $\sqrt{52}$ cm hosszú. Számítsuk ki a rombusz átlóinak hosszát, területét és szögeit.

5554 Határozzuk meg a paralelogramma középvonalainak hosszát és területét, ha átlóinak hossza 15 cm és 20 cm, továbbá az átlók 30°-os szöget zárnak be egymással. Mekkorák a paralelogramma szögei?

5555 Van-e olyan konvex sokszög, amelynek átlóinak száma pontosan

a) 324; *b)* 462?

5556 Mennyi a belső, illetve a külső szögek összege abban a konvex négyszögben, amelynek 42-vel több átlója van, mint ahány oldala?

5557 Hány szimmetriatengelye van és mekkora egy belső szöge annak a szabályos sokszögnek, amelyiknek 20 átlója van?

5558 Hány oldala lehet a konvex sokszögnek, ha az átlóinak és oldalainak száma úgy aránylik egymáshoz, mint 3 : 2?

5559 Jellemezzük szögei segítségével azokat a deltoidokat, amelyek húrnégyszögek. Hol található egy ilyen négyszög köré írt körének középpontja?

5560 Melyek azok a paralelogrammák, amelyek

a) húrnégyszögek; *b)* érintőnégyszögek?

5561 Egy deltoid két belső szöge 25° és 110°. Mekkora lehet a másik két szöge?

5562 Egy húrnégyszög egyik belső szöge 75°, egyik külső szöge pedig 55°. Mekkorák a négyszög további belső szögei?

5563 Milyen hosszú érintőszakaszok húzhatók a 24 cm átmérőjű körhöz abból a pontból, amelyik a kör középpontjától 20 cm távolságra található? Mekkora szöget zárnak be a pontból a körhöz húzható érintők?

5564 A 6 cm sugarú körben elhelyeztünk egy 4 cm hosszú húrt.

a) Mekkora szögben látszik (fokban és radiánban) a húr a kör középpontjából?

b) Mekkora szögben látszik (fokban és radiánban) a húr a körvonal pontjaiból?

c) Mekkora területű körcikkeket kapunk, ha a húr végpontjait a kör középpontjával összekötjük?

d) Milyen hosszú körívekre bontják a húr végpontjai a körvonalat?

e) Mekkora területű körszeletekre bontja a húr a kört?

5565 Az ABC háromszög oldalai $AB = c$, $BC = a$ és $CA = b$, a megfelelő oldalakhoz az s_a, s_b és s_c súlyvonalak tartoznak. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{2}\cdot(a+b+c) < s_a + s_b + s_c < \frac{3}{2}\cdot(a+b+c).$$

5566 Egy háromszög két külső szögének aránya 3 : 4, egyik belső szöge 65°-os. Számítsuk ki a háromszög belső szögeit.

5567 A hegyesszögű ABC háromszög C csúcsából induló magasságvonalának talppontja az A csúcstól 5 cm, a B csúcstól pedig 8 cm távolságra található. Az A csúcsból induló magasságvonal a B csúcstól 5 cm távolságra halad.

a) Számítsuk ki a háromszög oldalainak hosszát.

b) Mekkorák a háromszög szögei?

5568 Az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $AC = BC = 8$ cm. Számítsuk ki, hogy mekkora távolságra található a háromszög C csúcsától a háromszög

a) súlypontja; *b)* magasságpontja;

c) beírt körének középpontja; *d)* köré írható körének középpontja.

5569 Egy magas épületet az épülettől bizonyos távolságra 42°-os emelkedési szög alatt látunk. Ha a megfigyelési ponttól 30 métert távolodunk az épülettől, akkor olyan pontba jutunk, amely az épület tetejéről 26°-os depressziós szög alatt látszik. Milyen magas az épület?

5570 Egy 800 méter magas hegyről egy felhő 28°-os emelkedési szögben látszik. A hegy tövében levő tóban a felhő tükörképe 72°-os lehajlási szög alatt látszik. Milyen magasan van a felhő a hegycsúcs felett?

5571 Egy 100 m hosszú egyenes lejtős út végén levő emlékoszlopot 4,2°-os szög alatt látunk az út elejéről. Milyen magas az emlékoszlop, ha a lejtő hajlásszöge 18,3°?

5572 Az A, B és C településeket egyenesnek tekinthető utak kötik össze, amelyeknek hossza $AB = 30$ km, $AC = 25$ km és $BC = 35$ km. Az A és B településeket összekötő úton a két településtől egyenlő távolságra élményfürdő kialakítását tervezik, amelyet szintén egyenes úttal kívánnak összekötni a C településsel. Hány kilométer hosszú a tervezett útszakasz? A választ egy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.

5573 Egy kerékpártúrázó baráti társaság délkeleti irányba indult el egy egyenesnek tekinthető úton, majd 70 km megtétele után eredeti útirányukhoz képest 30°-kal déli irányba fordultak. Újabb 40 km megtétele után megálltak egy hosszabb pihenőre.

a) Mekkora távolságra kerültek légvonalban a kiindulási helyüktől?

b) Ha egyenes út vezetne a pihenőhelytől a kiindulási helyig, akkor hány fokos szöget zárna be az északi iránnyal?

5574 A 12/*b* osztály iskolai klubdélutánt tervez. Bori magára vállalta a teremdekoráció elkészítését. A díszítéshez színes kartonokból mintákat vág ki. Az egyik ilyen minta egy szabályos tizenkétszög. Ennek elkészítéséhez egy 14 cm oldalú négyzetből előbb egy maximális sugarú kört, majd a kapott körből szintén a lehető legnagyobb, szabályos tizenkétszög alakú mintát vágja ki.

a) Mekkora a kivágott sokszög oldalának hossza?

b) A kör alakú kartonlapnak hány százaléka megy kárba egy-egy dísz elkészítésekor?

c) Számoljuk ki, hogy a négyzet alakú kartonlapnak összesen hány százaléka megy kárba.

5575 Egy magashegység mellett hosszú egyenes autóút vezet. Az út mentén két szomszédos település központjának távolsága 3500 m. A településekről az egyik hegycsúcs 45°, illetve 40° emelkedési szög alatt látszik. A hegycsúcsról a településeket összekötő útszakasz 60°-os szögben látható. Az autóút síkjához képest milyen magasan van a hegy csúcsa? Az eredményt méterre kerekítve adjuk meg.

5576 Egy trapéz rövidebb alapjának hossza 2 cm, a hosszabb alapjának végpontjai az átlók metszéspontjától 6 cm, illetve 8 cm távolságra vannak.

a) Mekkora a trapéz szárakat összekötő középvonala, ha tudjuk, hogy a trapéz átlói 90°-os szöget zárnak be egymással?

b) Milyen hosszú a trapéz másik középvonala?

c) Milyen négyszöget fognak közre a trapéz középvonalainak végpontjai?

5577 A konvex $ABCD$ négyszög szögfelezői egy pontban metszik egymást.

a) Milyen speciális négyszög az $ABCD$ négyszög?

b) Mutassuk meg, hogy ha a szögfelezők közös pontja O, akkor:

$$AOB\sphericalangle + COD\sphericalangle = 180°.$$

5578 Két 3 cm sugarú kör középpontjának távolsága 5 cm. A két kör középpontja O és Q, metszéspontjaik A és B.

a) Milyen speciális négyszög az $OAQB$ négyszög? Mekkora a területe?

b) Számítsuk ki a két kör közös részének kerületét és területét.

c) Mekkora szög alatt látszik az AB szakasz a két kör közös részét határoló körívek pontjaiból?

5579 A P pont az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontja. A háromszög melyik nevezetes pontjával eshet egybe, ha

a) $PAB\sphericalangle = PCB\sphericalangle$, $PCA\sphericalangle = PBA\sphericalangle$ és $PAC\sphericalangle = PBC\sphericalangle$;

b) $APB\sphericalangle = 2 \cdot ACB$, $BPC\sphericalangle = 2 \cdot BAC$ és $CPA\sphericalangle = 2 \cdot CBA\sphericalangle$;

c) $APB\sphericalangle = 90° + \frac{ACB\sphericalangle}{2}$, $BPC\sphericalangle = 90° + \frac{BAC\sphericalangle}{2}$ és $CPA\sphericalangle = 90° + \frac{CBA\sphericalangle}{2}$?

5580 Egy konvex hatszögről tudjuk, hogy minden szöge egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy

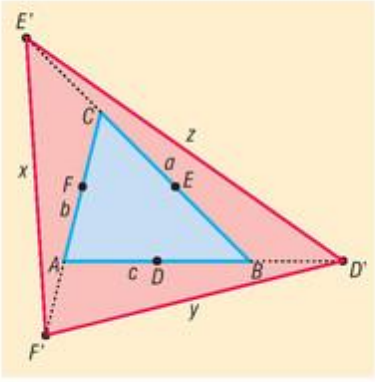
a) a hatszög szemközti oldalai párhuzamosak;

b) a hatszög három paralelogrammára és egy szabályos háromszögre bontható;

c) a hatszög szemközti oldalai hosszának különbsége megegyezik.

5581 Az ABC háromszög oldalai $AB = c$, $BC = a$ és $CA = b$, az AB oldal felezőpontja D, a BC oldalé E és a CA oldalé F. A D pont B-re vonatkozó tükörképe D', az E pont C-re vonatkozó tükörképe E' és végül az F pont A-ra vonatkozó tükörképe pedig F'. Az $E'F'D'$ háromszög oldalai x, y és z.

Számítsuk ki az $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ tört értékét.

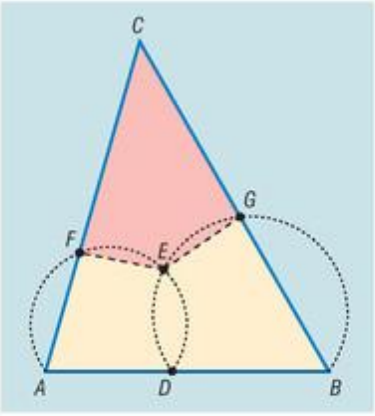


5582 A háromszögben a szokásos jelölések szerint az a oldallal szemben az α szög található, melyet a b és c oldalak fognak közre. Bizonyítsuk be, hogy ha az α szögfelezőjének hosszát f_a-val jelöljük, akkor

a) $f_a = \dfrac{2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b + c}$;

b) $f_a^2 = \dfrac{bc \cdot \left((b + c)^2 - a^2\right)}{(b + c)^2}$.

5583 Az ABC háromszög AB oldalán kijelöltünk egy D pontot, a háromszög belsejében pedig egy E pontot úgy, hogy az ADE, illetve BDE háromszögek köré írható körök metszik a háromszög AC, illetve BC oldalát (ld. ábra). Milyen speciális négyszög az $EGCF$ négyszög? Válaszunkat indokoljuk.



5584 Az ABC háromszög beírt körének középpontja O, az AC oldalhoz írt körének középpontja Q. Ez utóbbi kör érinti a háromszög AB és BC oldalegyenesét, valamint AC oldalát.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $AOCQ$ négyszög húrnégyszög.

b) Hol található az $AOCQ$ négyszög köré írt kör középpontja?

Koordináta-geometria

5585 Adottak az $\vec{a}(-3; 4)$ és $\vec{b}(7; -2)$ vektorok.

a) Számítsuk ki a $-2\vec{a} + 3\vec{b}$ vektor koordinátáit.

b) Számítsuk ki az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát.

c) Mekkora a két vektor abszolút értéke?

d) Mekkora az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge?

e) Állítsuk elő az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ és a $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektorokat az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Mekkora a két vektor hossza?

5586 Az alábbi vektorok közül melyek azok, amelyek merőlegesek a $\vec{v} = -5 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$ vektorra? Válasszuk ki a felsorolt vektorok közül azokat, amelyek párhuzamosak a $\vec{v}$ vektorral.

a) $\vec{a} = 3 \cdot \vec{v}$; *b)* $\vec{b} = 2 \cdot \mathbf{i} + 5 \cdot \mathbf{j}$; *c)* $\vec{c}\left(1; -\frac{2}{5}\right)$;

d) $\vec{d}(-6; -15)$; *e)* $\vec{e}(1; 2)$.

5587 A két vektor skaláris szorzatának kiszámolásával döntsük el, hogy a megadott vektorok hegyesszöget, derékszöget vagy tompaszöget zár be egymással.

a) $\vec{a}(-2; -3)$, $\vec{b}(-3; 2)$; *b)* $\vec{a}(7; -1)$, $\vec{b}(1; -6)$; *c)* $\vec{a}(-1; 1)$, $\vec{b}(5; 3)$.

5588 Számítsuk ki a megadott pontok távolságát, valamint a pontok által meghatározott szakasz felezőpontjának és harmadolópontjainak koordinátáit.

a) $A(-7; 3)$, $B(5; -1)$; *b)* $A(4; -1)$, $B(8; 5)$.

5589 Az ABC háromszög csúcsai $A(-1; -2)$, $B(6; -1)$, $C(2; 2)$.

a) Számításokkal igazoljuk, hogy a megadott pontok egyenlő szárú derékszögű háromszöget fognak közre.

b) Számítsuk ki az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit.

c) Írjuk fel az ABC háromszög köré írható kör egyenletét.

5590 A ABC háromszög csúcspontjai $A(-2; 1)$, $B(6; -1)$, $C(5; 6)$. Írjuk fel annak a háromszög belsejébe eső pontnak a koordinátáit, amelyet a háromszög csúcsaival összekötve olyan háromszögeket kapunk, amelyeknek a területe megegyezik. A háromszög melyik nevezetes pontját kapjuk?

5591 A térképre helyezett koordináta-rendszerben két falu koordinátái $A(-4; -2)$ és $B(3; 1)$. A két településen át hosszú egyenes út húzódik.

a) Milyen messze van egymástól a két település, ha a koordináta-rendszer egysége 1 km?

b) A két település közti útszakasz mely pontjában van az a buszmegálló, amelyik a B falutól kétszer olyan távol van, mint az A falutól?

c) Írjuk fel a településeket összekötő út egyenletét.

d) Áthalad-e a falvakat összekötő út a következő pontokban található településeken:

$$C(10; 4), \quad D(-9; -4); \quad E\left(\frac{17}{2}; \frac{7}{2}\right)?$$

e) Mekkora szöget zár be az út a koordináta-rendszer x tengelyével?

5592 Írjuk fel az egyenes egyenletét, ha

a) két pontja $A(-3; 2)$ és $B(4; 1)$;

b) egy pontja $P(7; -2)$, x tengellyel bezárt szöge $60°$;

c) egy pontja $P(-3; -2)$, egy irányvektora $\vec{v}(4; -3)$;

d) egy pontja $P(3; 1)$, meredeksége $-\frac{2}{5}$;

e) pontjai egyenlő távolságra vannak az $A(5; 2)$ és a $B(-2; 5)$ pontoktól;

f) áthalad az $A(-6; 2)$ ponton és párhuzamos az y tengellyel;

g) egy pontja $P(-1; -3)$, továbbá merőleges az $A(-1; 3)$ és $B(2; 1)$ pontokat tartalmazó egyenesre;

h) egy pontja $P(-2; 5)$, továbbá párhuzamos az $A(-1; 2)$ és $B(3; 1)$ pontokra illeszkedő egyenessel.

5593 Írjuk fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét, ha

a) $A(2; 3)$ és $B(-2; -1)$;

b) $A(4; 1)$ és $B(-2; 3)$;

c) $A(4; -2)$ és $B(4; 4)$;

d) $A(1; -5)$ és $B(0; 0)$.

5594 Adott az $A(1; -2)$ pont. Hány olyan egyenes van, amelyik átmegy az A ponton, továbbá az x tengellyel 45°-os szöget zár be? Írjuk fel ezek egyenletét.

5595 Adott az $A(-3; 5)$ pont. Írjuk fel az A pontra illeszkedő, az egyenletével adott e egyenesre merőleges, illetve azzal párhuzamos egyenesek egyenletét, ha

a) e: $y = 5x - 4$;

b) e: $x = -3$;

c) e: $y = 2$;

d) e: $x + 4y = -7$.

5596 Az alábbi egyenletükkel adott egyenesek közül melyek párhuzamosak, illetve merőleges helyzetűek az $y = \frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$ egyenletű egyenessel?

a) a: $y = -7x - 10$;

b) b: $y + 7x = 0$;

c) c: $5x + y = 4$;

d) d: $x - 7y = 13$.

5597 Mely pontokban metszi az $x^2 + y^2 - 3x + 9y - 10 = 0$ egyenletű kör a(z)

a) x tengelyt;

b) y tengelyt;

c) $3x + 11y + 45 = 0$ egyenletű egyenest?

5598 Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben az egyenletükkel megadott alakzatokat. Az egyenesek esetében adjuk meg egy-egy irányvektoruk és normálvektoruk koordinátáit, meredekségüket (amennyiben létezik), illetve irányszögüket. A körök esetében adjuk meg középpontjuk koordinátáit, valamint sugarukat.

a) a: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$;

b) b: $x = -3$;

c) c: $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 2 = -3$;

d) d: $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$;

e) e: $x^2 + y^2 - 3x + 3y = 10$;

f) f: $4x^2 + 4y^2 + 16y = 9$;

g) g: $2x + y = -3$.

5599 Írjuk fel a kör egyenletét, ha

a) középpontja az $O(-5; 2)$ pont, sugara 3;

b) középpontja az $O(3; -7)$ pont, továbbá átmegy az $A(2; 2)$ ponton;

c) egyik átmérőjének két végpontja az $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ és a $B\left(4; -\frac{9}{2}\right)$ pontok;

d) a vele koncentrikus, fele akkora sugarú kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$;

e) az $A(2; -1)$ pontra vonatkozó tükörképének egyenlete: $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$.

5600 Az $ABCD$ négyszög csúcspontjai:

$$A(-2; -3),\quad B(3; -2),\quad C(2; 3) \quad \text{és} \quad D(-3; 2).$$

a) Számításokkal igazoljuk, hogy az $ABCD$ négyszög négyzet.

b) Számítsuk ki az AB oldal felezőpontjából a BC oldal felezőpontjába mutató vektor koordinátáit.

c) Írjuk fel az $ABCD$ négyszög szimmetriatengelyeinek egyenletét.

d) Írjuk fel a négyzetbe írható, illetve a négyzet köré írható kör egyenletét.

e) Mekkora területű részekre osztja az $y = 4x$ egyenletű egyenes az $ABCD$ négyzetet?

5601 Egy pontszerű test az $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 15$ egyenletű körpályán mozog.

a) Mekkora utat tesz meg egy körbefordulás alkalmával?

b) Áthalad-e a test a következő pontokon: $A(7; 4)$, $B(0; 5)$, $C(2; -4)$ és $D(6; -3)$?

c) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyen a test továbbhaladna, ha az $E(-1; 4)$ pontban megszűnne a testet körpályára kényszerítő erőhatás.

5602 k mely értékére lesz egymással párhuzamos a következő két egyenes:

$$4x + ky = 30 \quad \text{és} \quad kx + 16y = 28?$$

5603 m mely értékére lesz egymásra merőleges a következő két egyenes:

$$mx - y = 2 \quad \text{és} \quad 5x - 7y = 12.$$

5604 Határozzuk meg a $P(2; 3)$ pontnak és a $2x - y = 6$ egyenesnek a távolságát.

5605 Az a egyenes egyenlete $-2x + 3y = -14$, a b egyenesé $y = -\frac{4}{5}x + \frac{6}{5}$.

a) Melyik pontban metszi egymást a két egyenes?

b) Számítsuk ki a két egyenes hajlásszögét. Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

c) Mekkora a területe annak a síkidomnak, amelyet a koordináta-rendszer tengelyei, valamint az a és b egyenesek fognak közre?

5606 Az ABC háromszög csúcspontjai $A(-1; -2)$, $B(5; -2)$ és $C(4; 3)$. Mekkora távolságra van egymástól a háromszög súlypontja és magasságpontja?

5607 Az ABC háromszög két súlyvonalának egyenlete:

$$s_a\colon\ -5x + 3y = 2 \quad \text{és} \quad s_b\colon\ 11x + 6y = 4,$$

egyik csúcsának koordinátái (2; 4), míg egyik oldalának felezőpontja $F\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

a) Számítsuk ki a háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit.

b) Írjuk fel a harmadik súlyvonal egyenletét.

5608 Egy deltoid szimmetriaátlójának két végpontja $A(1; -3)$ és $C(4; 3)$, egy további csúcsa pedig $D(-3; 4)$.

a) Írjuk fel a deltoid szimmetriatengelyének egyenletét.

b) Számítsuk ki a deltoid hiányzó csúcsának koordinátáit.

c) Mekkora a deltoid területe?

5609 Az $ABCD$ négyszög csúcsai:

$$A(-7; -2), \quad B(1; -2), \quad C(-2; 2) \quad \text{és} \quad D(-4; 2).$$

A táblázat megfelelő celláiban jelöljük, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis. Válaszainkat indokoljuk.

Állítás	Igaz	Hamis
Az $ABCD$ négyszög trapéz.		
Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög.		
Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.		
Az $ABCD$ négyszögnek minden szöge kisebb, mint 120°.		
A négyszög átlói a $\left(-3; \frac{3}{2}\right)$ pontban metszik egymást.		
Az átlók metszéspontja az AC átló C-hez közelebbi negyedelőpontja.		

5610 Az A, B és C településeket egyenes utak kötik össze, ezek egyenlete a megfelelő koordináta-rendszerben:

$$AB: \quad y = \frac{2}{5}x - \frac{17}{5},$$

$$BC: \quad 4x + 5y = 19,$$

$$AC: \quad x = 1.$$

A falvak egy szeméttelep közös kialakítását tervezik úgy, hogy mindhárom településtől ugyanolyan távolságra legyen.

a) Milyen távolságra vannak egymástól a települések, ha a koordináta-rendszer egysége 1 km?

b) Mekkora szögben metszi egymást az A településen összefutó két egyenes út?

c) Mekkora területet fog közre a három útszakasz?

d) A koordináta-rendszer mely pontja jelöli a tervezett szeméttelep helyét? Melyik nevezetes pontja ez az ABC háromszögnek?

5611 Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0 \quad \text{és az} \quad x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$$

egyenletű körök érintik egymást, valamint adjuk meg az érintési pont koordinátáit.

5612 Számítsuk ki a k kör és az e egyenes metszéspontjainak koordinátáit, ha

a) k: $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 11$ és e: $x - y = -1$;

b) a k kör középpontja a $(-1; -4)$ pont, sugara 5, az e egyenes átmegy a $(-11; 1)$ ponton, meredeksége pedig $-\frac{1}{7}$.



5613 Adott az $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 1 = 0$ egyenletű kör, valamint az $y = 7x + 9$ egyenletű egyenes.

a) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a két alakzatot.

b) Számítsuk ki a két alakzat metszéspontjainak koordinátáit.

c) Írjuk fel a kapott metszéspontokban a körhöz húzható érintők egyenletét.

d) Mekkora a területe az egyenes által a körből levágott kisebb körszeletnek?

5614 Az $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ egyenletű c kört eltoljuk a $\vec{v}(4; 4)$ vektorral, így a k kört kapjuk.

a) Számítsuk ki a k és c körök metszéspontjainak koordinátáit.

b) Mekkora a területe annak a négyszögnek, amelyet a két kör középpontja és metszéspontjai fognak közre?

5615 Egy nagy réten két magas fa található, melyek koordinátái $A(1; -1)$, $B(3; 3)$. Mi a halmaza azoknak a pontoknak, amelyekből a két fa 45°-os szög alatt látszik? Írjuk fel a megfelelő alakzat egyenletét.

5616 Vannak-e olyan pontok a $-2x + 3y = 9$ egyenletű egyenesen, amelyekből az AB szakasz 60°-os szög alatt látszik, ha $A\left(\sqrt{3}; 0\right)$ és $B\left(-\sqrt{3}; 0\right)$? Ha igen, akkor adjuk meg az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáinak pontos értékét.

5617 Adott a k: $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ egyenletű kör, valamint a $P(0; -4)$ pont.

a) Írjuk fel a P pontból a k körhöz húzott érintők egyenletét.

A k kör P ponton áthaladó érintői érintik a c kört is, amelynek sugara a k kör sugarának háromszorosa. Írjuk fel a c kör egyenletét, ha az *a)* feladatban meghatározott egyenesek a k és c körök közös

b) külső; *c)* belső érintői.

5618 Tekintsük az $y = x^2 - 6x + 7$ egyenletű parabolát.

a) Határozzuk meg a parabola csúcspontjának és fókuszpontjának koordinátáit.

b) Írjuk fel a parabola vezéregyenesének egyenletét.

c) Írjuk fel a parabolát érintő, $A(1; 2)$ ponton áthaladó egyenes egyenletét.

A parabolát az origó körül mindkét irányba 90°-kal elforgatjuk.

d) Írjuk fel az elforgatott parabolák egyenletét.

5619 Egy pontszerű test olyan egyenes mentén mozog, amelyik érinti az $y = -x^2 - 4x - 5$ egyenletű parabolát. Mozgása során a test áthaladt a $P(1; -6)$ ponton.

a) Írjuk fel a test pályájának egyenletét.

b) Mekkora távolságra volt a test a parabola fókuszpontjától, amikor a legközelebb volt ahhoz?

5620 A koordináta-rendszer $A(1; 1)$ pontján áthaladó e, valamint a $B(-1; 1)$ pontján áthaladó f egyenesek meredekségének adott sorrendben vett különbsége 3. Adjuk meg egyenletével az e és f egyenesek metszéspontjának mértani helyét (halmazát).

12.6. ÉRETTSÉGI GYAKORLÓ FELADATSOROK

KÖZÉPSZINTŰ FELADATSOROK

1. Feladatsor I. rész

1. Egyszerűsítsük a következő törtet: $\frac{x^3-4x}{x-2}$ $(x \neq 2)$.

2. Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága 2 cm, egyik hegyesszöge 25°-os. Számítsuk ki a háromszög köré írható kör sugarát. Az eredményt egytized centiméterre kerekítve adjuk meg.

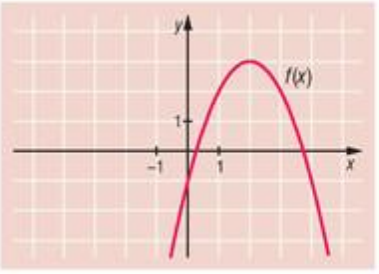
3. Egy zöldségárus körtét, almát és banánt árul. A háromféle gyümölcsből összesen 81 kilogrammot adott el. Almából kétszer annyit adott el, mint körtéből, banánból pedig háromszor annyit, mint almából. Hány kilogrammot adott el az egyes gyümölcsökből?

4. Hány literes az a hűtőszekrény, amelynek belső méretei 30 cm, 25 cm, illetve 70 cm?

5. Magyarországon 2009-ben a bankban elhelyezett betétek kamatából 20% kamatadót kellett fizetni, amelyet a bank a kamat jóváírásakor automatikusan levont. Hány forint kamatadót vont le a bank, ha a levonás után 12000 Ft kamatot fizetett?

6. Váltsuk át az 2345 tízes számrendszerben felírt számot kettes számrendszerbe.

7. Az ábra az $x \mapsto f(x)$ másodfokú függvény grafikonját ábrázolja. Adjuk meg az f függvény hozzárendelési szabályát.

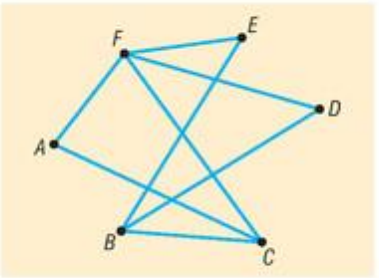


8. Írjuk fel az AB átmérőjű kör egyenletét, ha $A(-2; 2)$ és $B(4; 0)$.

9. Egy zacskóban 200 db gumicukor van. A cukrok 35%-a piros, $\frac{1}{5}$ része zöld, és feleannyi sárga van, mint zöld. A maradék cukrok mindegyike kék. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott gumicukor éppen kék színű?

10. Egy nagyváros lakosainak száma 180000 fő. Hány év eltelte után haladja meg a város lélekszáma a 210000 főt, ha a lakosok száma minden évben 5%-kal nő?

11. Az ábra hat nagyváros (A, B, C, D, E és F) közötti buszjáratokat mutatja. Ha két város vonallal van összekötve, akkor a két város közt közvetlen (átszállás nélküli) buszjárat közlekedik.



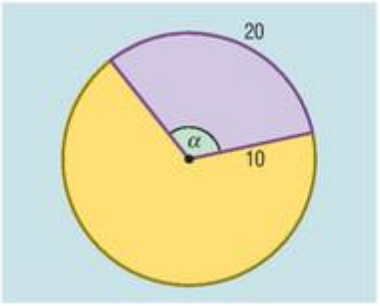
Eljuthatunk-e az A városból a B városba

a) átszállás nélkül;

b) 1 átszállással;

c) 3 átszállással?

12. Határozzuk meg az ábrán látható körcikk α középponti szögének nagyságát, ha sugara 10 cm, határoló körívének hossza 20 cm hosszúságú.



1. Feladatsor II. rész / A

13. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sin^2 x = \cos^2 x + 5 \cdot \sin x + 2$;

b) $\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{x^2+5}+1\right)=0$.

14. Az $ABCD$ négyzet két szemközti csúcsának koordinátái: $A(1;-2)$, $C(4;7)$.

a) Írjuk fel a BD átlót tartalmazó egyenes egyenletét.

b) Számítsuk ki a négyszög hiányzó csúcsainak koordinátáit.

15. Kristóf a könyveit három polcon tárolja, az első polcon a szépirodalmi könyveket, a másodikon az albumokat, a harmadikon pedig a műszaki jellegű könyveket. A szépirodalmi könyvek és az albumok száma úgy aránylik egymáshoz, mint 7 : 5, továbbá tudjuk, hogy műszaki témát feldolgozó könyvből 1,8-szer annyi van, mint albumból. Kristóf egy antikváriumi akció során 15 új könyvet tervez vásárolni, amelyekből ha minden polcra ugyannyit helyezne el, akkor az egyes polcokon lévő könyvek számának aránya 4 : 3 : 5 lenne.

a) Hány szépirodalmi mű található Kristóf első polcán?

b) Hányféleképpen tud Kristóf 3 albumot kölcsönadni Károly nevű barátjának?

c) Összesen hány könyvet tárolna Kristóf a három polcon, ha mind a 15 tervezett könyvet megvenné?

1. Feladatsor II. rész / B

16. A komáromi vásárban rendkívül népszerűek a nagyméretű, mesefigurákkal díszített színes lufik. Az egyik árus ötféle színben és árban kínálja a héliummal felfújt lufikat. Az azonos színű, de még fel nem fújt lufikat az árus egy-egy dobozban helyezi el az asztalon. A színeket és a lufik árát az alábbi táblázat tartalmazza.

Piros	Kék	Citromsárga	Narancssárga	Fekete
1 €	1,2 €	1,4 €	1,5 €	2 €

Az egyik vásári nap első órájában az árus 3 piros, 3 kék, 2 citromsárga, 4 narancssárga és 2 fekete lufit adott el.

a) Hányféle sorrendben helyezheti el az árus egymás mellé a pulton a lufival teli dobozokat?

b) Hányféleképpen vehet András a lufikból egyet-egyet három gyermekének, ha minden gyermek különböző színűt szeretne?

c) Átlagosan mennyi pénzt kért az árus egy lufiért az első órában? Az eredményt egész centre kerekítve adjuk meg. (1 € = 100 cent)

d) Mekkora haszonra tett szert az árus a vizsgált időszakban eladott lufikból, ha azok beszerzési ára egységesen a piros lufi eladási árának 40%-a? Hány százalékos haszonnal dolgozott az árus?

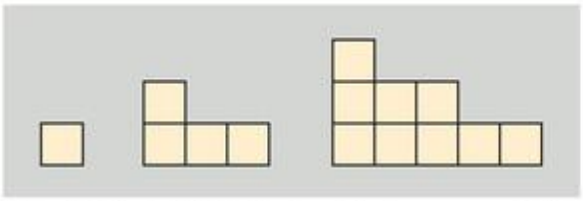
e) Hányféle sorrendben adhatta el az árus a lufikat, ha az egy árban lévő lufikat nem tudjuk megkülönböztetni egymástól?

17. Egy csonka kúp alakú gyertya tengelymetszete olyan szimmetrikus trapéz, amelynek rövidebb alapja 4 cm, hosszabb alapja 6 cm, szárai pedig $\sqrt{65}$ cm hosszúságúak.

a) Számítsuk ki a gyertya térfogatát.

b) A gyertyát az alapjaival párhuzamos síkkal két egyenlő magasságú részre vágjuk. Számítsuk ki a keletkező két rész térfogatának arányát.

18. Aladárnak 150 darab egybevágó építőkockája van. A kockákból „lépcsőket" épít úgy, hogy a lépcső legfelső szintjén 1 kocka van, majd minden következő szinten 2-vel több, mint a felette lévőn. Az egy szinten található szomszédos kockák teljes lapjukkal érintkeznek egymással csakúgy, mint a fölül lévő kocka az egy szinttel alatta lévővel. Példaként az ábrán az egy-, két-, illetve háromszintes „lépcsők" oldalnézeti képét láthatjuk.



a) Hány kockát tartalmaz a 15 szintes lépcső legalsó szintje?

b) Legfeljebb milyen magas (hány szintes) az a lépcső, amelyet Aladár megépíthet?

c) Hány építőkocka marad felhasználatlan, ha Aladár egy időben többféle (egymástól különböző) lépcsőt is építhet, és a lehető legtöbb kockát szeretné felhasználni?

2. Feladatsor I. rész

1. Adjuk meg az $5325 \cdot 10^{-21}$ szám normálalakját.

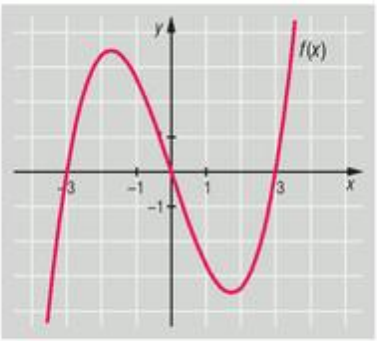
2. Egy munkahely 40 dolgozója közül 22 volt már Prágában. A dolgozók 60%-a korábban már járt Varsóban. Hányan voltak már mindkét városban, ha nincs olyan dolgozó, aki egyik várost sem látta?

3. Egy 10000 € értékű áru értékcsökkenése (amortizációja) évi 12,5%. Az alábbiak közül melyik művelet fejezi ki az áru euróban megadott értékét a vásárlást követő ötödik év végén?

a) $10000 \cdot 0{,}125^5$; *b)* $\dfrac{10000 \cdot 12{,}5^5}{100}$; *c)* $10000 \cdot \left(1 - \dfrac{12{,}5}{100}\right)^5$; *d)* $\dfrac{10000}{0{,}125^5}$.

4. A Kovács család gyermekei: Barnabás, Bea, Bendegúz, Béla, Bianka, Boldizsár és Borbála. A nyári szünetben a gyerekek közül egyszerre két fiú és két lány utazhat a nagymamához. Hányféle utazó csapat alakítható ki a gyerekekből?

5. Az ábra az $x \mapsto f(x)$ harmadfokú függvény grafikonjának egy részletét mutatja. Mely x értékekre teljesül, hogy $f(x) = 0$?



6. Géza egy nap feljegyezte az ötös lottón kihúzott számokat:

11, 35, 48, 83, 7□.

Az utolsó számjegyet később már nem tudta elolvasni, csak arra emlékezett, hogy a kihúzott számok összege osztható volt 9-cel. Melyik lehetett az ötödik nyertes szám? Válaszunkat indokoljuk.

7. Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

a) A deltoid hosszabb átlója megfelezi a rövidebbet.

b) Minden konvex deltoidba kör írható.

c) A deltoid átlói merőlegesen felezik egymást.

d) A deltoid szemközti oldalainak összege megegyezik.

8. A $[0; 2\pi]$ intervallum mely elemeire nem értelmezhető a következő tört? Válaszunkat indokoljuk.

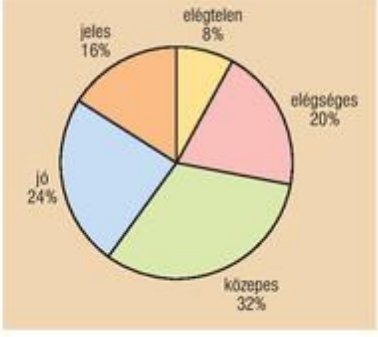
$$\frac{1}{2 \cdot \sin x - 1}.$$

9. Egy téglatest alakú, felül nyitott akvárium alapjának méretei 80 cm, illetve 60 cm, magassága szintén 60 cm. Hány négyzetméter üveget használtak fel az akvárium elkészítéséhez?

10. Aladár lemérte Magyarország 1 : 2 300 000 méretarányú térképén a Szeged–Cegléd távolságot, és 4,5 centimétert kapott. Milyen távolságra van Szeged Ceglédtől, Magyarország 1 : 1 200 000 méretarányú térképén? Az eredményt tized centiméter pontossággal adjuk meg. Válaszunkat indokoljuk.

11. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $x + 3y = 4$ egyenletű egyenessel párhuzamos, továbbá áthalad az $A(1; 3)$ ponton.

12. Az alábbi diagramon egy 25 fős osztály legutóbbi matematikadolgozaton elért eredményeinek eloszlását láthatjuk. Határozzuk meg az érdemjegyek mediánját és móduszát, ha tudjuk, hogy a dolgozatot minden tanuló megírta.

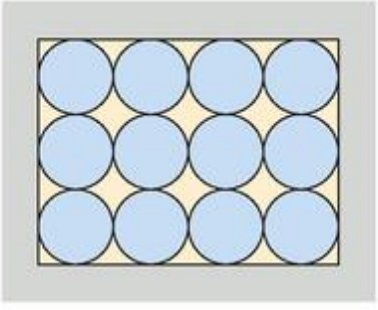


2. Feladatsor II. rész / A

13. Állapítsuk meg a következő egyenletek értelmezési tartományát. Oldjuk meg az egyenleteket értelmezési tartományukon.

a) $\log_2\left(5 - \sqrt{2x+1}\right) = 2 \cdot \log_3 9 + \log_{\frac{1}{4}} 4$; *b)* $3^{x^2} = 9^6 \cdot 81^x$.

14. Nagymama a befőzéshez olyan egyenes körhenger alakú üvegeket használ, amelyeknek alapja 8 cm átmérőjű, magassága pedig 15 cm. A megtöltött üvegeket a kényelmes tárolás céljából 3×4-es elrendezésben, az ábrán felülnézetben látható módon, felül nyitott kartondobozokba helyezi. Nagymama összesen 45 üveget használt el a befőzéshez.



a) Hány deciliteresek a nagymama által használt üvegek?

b) Rajzoljuk le a kartondoboz síkbeli hálózatának 1 : 2 arányú kicsinyített képét.

c) Összesen hány dm^3 helyet foglalnak el az üvegek tárolására szolgáló dobozok?

15. Egy bank a következő, euróalapú megtakarítást kínálja ügyfelei számára.



A bank a lekötött betét után sávos rendszerben kamatot fizet:

– a 0 és 200 euró közötti rész után évi 1%-ot;

– a 200 eurót meghaladó összeg után pedig évi 4%-ot.

A bank a kamatot egy összegben, a futamidő lejárta után írja jóvá az ügyfél számláján.

a) Számítsuk ki, hogy mennyi kamatot fizet a bank 1500 euró lekötött összeg után.

b) Ténylegesen hány százalékos kamatot fizet a bank az 1500 eurós bankbetétre?

c) Mekkora összeget kell lekötnünk, ha azt szeretnénk, hogy arra legalább 3,8%-os kamatot fizessen a bank?

2. Feladatsor II. rész / B

16. Ábrázoljuk a $[-1; 5]$ halmazon értelmezett, alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonját:

$$e\colon\ x \mapsto -|x-3|+2.$$

a) Adjuk meg az e függvény értékkészletét, valamint szélsőértékének helyét és értékét.

b) A $[-1; 5]$ intervallum mely elemei tesznek eleget a következő egyenlőtlenségnek?

$$-|x-3|+2 \geq 1.$$

c) Ábrázoljuk az alábbi szabállyal megadott függvény grafikonját a $[-1; 5]$ intervallumon:

$$x \mapsto \left|-|x-3|+2\right|.$$

Fogalmazzuk meg, milyen geometriai transzformáció alkalmazásával kapjuk a grafikont az e függvény grafikonjából.

17. Anna és Bori olyan társasjátékot játszanak, amelyben egy piros, egy zöld és egy kék szabályos dobókockával kell dobni, és a játékos a dobott pontok összegének megfelelő mezővel léphet arrébb. Anna a végjátékban jól áll, így ha a következő dobása legalább 15, akkor a játékot megnyeri.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy Anna a következő dobással megnyeri a játékot?

Anna végül elhatározta, hogy előbb a piros kockával dob, majd utána a másik kettőt egyszerre gurítja el. A piros kockával hatost dobott.

b) A piros kockával történő dobás után mennyi a valószínűsége annak, hogy Anna a másik két kockával úgy dob, hogy azzal végül megnyeri a játékot?

18. Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái:

$$A\left(-\sqrt{3}; 0\right),\quad B\left(\sqrt{3}; 0\right)\quad \text{és}\quad C(0; 3).$$

a) Igaz-e, hogy az ABC háromszög szabályos? Válaszunkat indokoljuk.

b) Írjuk fel az ABC háromszög köré írható kör egyenletét.

c) Számítsuk ki azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekben az ABC háromszög köré írható kör középpontján átmenő, az x tengellyel párhuzamos egyenes a háromszög köré írt kört metszi.



3. Feladatsor I. rész

1. Mi a tagadása a „Mindenki kiváló matematikából" állításnak?

2. Az ötnek hányadik hatványa a $\frac{\sqrt[4]{125}}{\sqrt[3]{25}}$?

3. Az angolszász országokban még ma is használatos hosszúsági egység a mérföld és az inch. Ha tudjuk, hogy 1 mérföld = 1,609344 km és 1 inch = 2,54 cm, akkor hány inch egy mérföld?

4. Egyszerűsítsük a következő törtet:
$$\frac{15a+30}{5a^2-20}.$$
Milyen értékeket nem vehet fel az a változó?

5. Adott az $A = [-3; 4[$ és $B = [-6; 2]$ intervallum. Adjuk meg az $A \cup B$ és az $A \cap B$ intervallumokat.

6. Mennyi a radián értéke annak az α tompa szögnek, amelyre
$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}?$$

7. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $\frac{5}{\sqrt{5x-2}}$ kifejezés értelmezhető.

8. Mennyi az x értéke, ha $\lg x = 3 \cdot \lg 2 + 2 \cdot \lg 3$?

9. Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögét felező egyenes a szemközti szárral 81°-os szöget zár be. Mekkorák a háromszög szögei?

10. Kanada kétnyelvű ország, minden lakos beszéli a francia és angol nyelvek közül legalább az egyiket. A lakosság 85%-a beszél angolul, és 75% beszél franciául. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy kanadai lakost, mennyi annak a valószínűsége, hogy angolul és franciául is beszél?

11. Ábrázoljuk a $[-1; 5]$ halmazon értelmezett következő függvényt:
$$f(x) = |x-1| - 2.$$
Határozzuk meg a függvény értékkészletét.

12. Egy háromszög oldalai 19 cm, 22 cm és 31 cm. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

3. Feladatsor II. rész / A

13. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{7x-13} = x-1$;

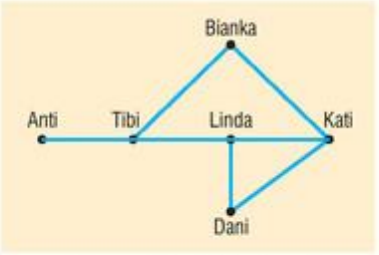
b) $9^{x+\frac{3}{2}} + 9 = 244 \cdot 3^x$.

14. Pató Pál január elsején 150000 Ft-ot helyez el egy bankban, ahol évi 5%-os kamatot fizetnek.

a) Mekkora haszonra tesz szert, ha 12 év múlva kiveszi a bankból a pénzét, és közben nem tesz hozzá és nem is vesz ki a pénzéből, és a kamat is változatlan?

b) Mekkora haszonra tesz szert, ha 12 év múlva kiveszi a pénzét a bankból, de addig minden év elején újra hozzátesz 150000 Ft-ot?

15. Tibi mozilátogatást szervez a barátaival. A mozi előtt egy kávézóban találkoznak. Az ábra azt mutatja, hogy a megjelentek közül ki kit ismer.



a) Akik nem ismerik egymást, azok a kávézóban kézfogással bemutatkoznak egymásnak. Hány kézfogásra kerül sor?

b) Le tudnak-e ülni a kávézóban egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki mellett egy-egy régi ismerőse ül?

c) Ha a moziban, egy sorban véletlenszerűen leülnek, mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy Tibi két lány között ül majd?

3. Feladatsor II. rész / *B*

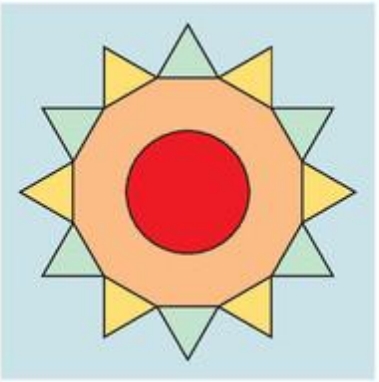
16. Csöpikénél csöpög a mosdó csapja, megszámolta: 1 perc alatt 4 csepp esik le. Egy csepp víz 3 mm átmérőjű gömbnek tekinthető.

a) Mennyi idő alatt telik meg a csap alá helyezett 2 dl-es pohár?

b) Hány liter víz csöpög el egy év (365 nap) alatt?

c) A lecsöpögő víztől a mosdón barna folt keletkezik. Hetente 1 dl folyékony tisztítószer szükséges az eltávolításához. Egy flakon félliteres tisztítószer ára 820 Ft. Mennyibe kerül egy éven át a mosdó tisztítása?

17. Az ábrán egy ősi napmotívum látható, amely egy szabályos tizenkét oldalú sokszögből, a sokszög oldalaira kifelé rajzolt szabályos háromszögekből és egy körből áll, amely koncentrikus a tizenkétszögbe írt körrel.



A kör sugara és a sokszög oldala egyaránt 6 cm hosszú.

a) Adjuk meg az egyes színekhez tartozó részek területét.

b) A sokszöget változatlanul hagyva mekkorának válasszuk a belső kör sugarát, hogy a piros és narancssárga területek egyenlők legyenek?

c) Hányféleképpen színezhető ki az ábra, ha a mind a négy színt felhasználjuk, a szomszédos részek nem lehetnek azonos színűek, és a szabályos háromszögeket két színnel színezzük úgy, hogy a közös csúccsal rendelkező háromszögek sem lehetnek azonos színűek? (A forgatással egymásba átvihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek.)

18. Erős Pista naponta jár edzőterembe. A táblázat azt mutatja, hogy egy adott hét napjain hány percet fordított az egyes izomcsoportok erősítésére.

	Hétfő, szerda, péntek	Kedd	Csütörtök	Szombat, vasárnap
Lábizom-erősítés	15	10	–	10
Mellizom-erősítés	–	20	20	10
Hátizom-erősítés	15	17	10	–
Hasizom-erősítés	10	14	10	–
Karizom-erősítés	20	–	10	10
Pihenés (összesen)	30	19	20	30

a) Ábrázoljuk kördiagramon az egyes tevékenységi formák heti mennyiségét. Adjuk meg a körcikkekhez tartozó középponti szögeket.

b) Az edzőteremben eltöltött idő hány %-ában pihen Erős Pista?

c) A keddi edzésen hányféle sorrendben végezheti a különböző testrészek erősítését, ha a pihenésre szánt időt a különböző gyakorlatok között használja fel, és nem végezhet egymás után mell- és hasizom-erősítést?

4. Feladatsor I. rész

1. Legyen A a kétjegyű négyzetszámok halmaza, B pedig azon kétjegyű számok halmaza, melyek jegyeinek összege 9. Adjuk meg az $A \cap B$ halmazt.

2. Egy egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge 130°. Mekkorák a háromszög szögei?

3. Egy α tompaszög esetén $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Adjuk meg $\cos\alpha$ értékét az α kiszámítása nélkül.

4. Tekintsük állításnak a következő vallomást: „Nélküled az élet gyötrelem."
A következők közül, melyik a fenti állítás tagadása?
a) Veled az élet gyötrelem.
b) Nélküled az élet kellemes.
c) Nélküled az élet nem gyötrelem.

5. Számítsuk ki a $36^{3\cdot\log_6 2}$ hatvány értékét.

6. Melyik szám a nagyobb: a 9 és 21 legkisebb közös többszöröse vagy a 4032 és 8000 legnagyobb közös osztója?

7. Egy sícentrumban a szálloda kihasználtsága a három téli hónapban 88%-os, az év többi időszakában 44%. Hány %-os a szálloda kihasználtsága egész évre számítva?

8. Egy háromszög oldalainak hossza 12 cm, 16 cm és 8 cm. Egy másik, az előzőhöz hasonló háromszög kerülete 14,4 m. Hány méteresek a második háromszög oldalai?

9. Hány nullára végződik az első harminc darab prímszám szorzata?

10. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\log_4(8x - 11)$ kifejezés értelmezhető.

11. Ábrázoljuk a $[-4; 2]$ intervallumon értelmezett következő függvényt:
$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

12. Egy háromszög egyik oldala 31 cm. Az adott oldalon lévő szögek 28° és 56° nagyságúak. Mekkora a háromszög legkisebb oldala?

4. Feladatsor II. rész / A

13. A boltban 10%-os ecet kapható.
a) Hány %-os ecetet kapunk, ha 0,5 liter ecethez 2,5 liter vizet öntünk?
b) Befőzéshez 3 liter 2%-os ecetre van szükség. Mennyi vizet és bolti ecetet keverjünk össze?

14. Egy diáknak a 413 oldalas kötelező olvasmány elolvasására 13 nap áll rendelkezésre. Az első napon 15 oldalt halad, majd úgy dönt, hogy ettől a naptól kezdve minden nap ugyanannyival növeli az elolvasott oldalak mennyiségét.

a) Hány oldallal olvasson többet napról napra, hogy időre befejezze a könyvet?

b) Ha naponta 4 oldallal olvasna többet, mint az előző napon, hány oldal maradna a 13. napra?

15. *a)* Milyen ponthalmaz egyenlete a következő: $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 89 = 0$?

b) Az $A(1; 2)$ középpontú 5 egység sugarú kör mely pontjai vannak egyenlő távolságra az $A(1; 2)$ és $B(8; 1)$ pontoktól?

4. Feladatsor II. rész / *B*

16. A magánházak tulajdonosai a nagyobb biztonság érdekében egyre gyakrabban alkalmaznak mozgásérzékelővel vezérelt világító berendezéseket. Egy épületen a bejárat felett a talajtól 2,5 m magasságban fel van szerelve egy készülék, amely a tőle legfeljebb 10 méterre történő minden mozgást érzékel. A ház előtt 1,4 m széles gyalogjárda, majd 6 m széles úttest, és az út másik oldalán szintén egy 1,4 m széles járda húzódik.

a) Érzékeli-e a készülék annak a macskának a mozgását, amely a felszerelés helyével szemben a túlsó járda távolabbi szélén oson?

b) Az érzékelővel pontosan szemben az úttest távolabbi oldala és a járda határán áll egy magas fa. Milyen magasságban szállhat erre a fára egy bagoly, hogy a készülék ne érzékelje?

c) Milyen hosszú a távolabbi járda készülékhez közelebb eső szélén az a szakasz, amelyet a mozgásérzékelő ellenőriz?

17. A 12/*zs* osztályba 36 tanuló jár, és mindenki tanul legalább egy nyelvet az arab, japán vagy kínai közül. Az arabot összesen 21-en, a japánt 25-en, a kínait pedig 20-an tanulják. Akik nem tanulnak kínaiul, azoknak a fele arabul és japánul is tanul. Akik kínaiul és arabul is tanulnak, azoknak a fele, azaz négy fő mindhárom nyelvet tanulja.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha egy tanulót véletlenszerűen kiválasztunk az osztályból, ő nem tanul kínaiul?

b) Az iskolába ázsiai delegáció érkezik, köszöntésükre minden osztályból két embert sorsolnak ki. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 12/*zs* osztályból kisorsolt két diák arab, japán és kínai nyelvet is tanul?

c) Hány olyan tanuló jár az osztályba, aki csak egy nyelvet tanul a fentiek közül?

18. Eszter a 17 literes virágcserépben lévő leandert egy nagyobb edénybe szeretné átültetni. Vásárolt egy 51 cm magas csonka kúp alakú műanyag edényt, amelynek alul 38 cm, felül pedig 56 cm az átmérője. Átültetéskor a növény gyökerei akkor sérülnek legkevésbé, ha nem szedi le róluk a régi földet. A kertészeti áruházban a táblázatban felsorolt csomagolásban és árban lehet virágföldet kapni.

Térfogat	Ár
50 liter	725 Ft
20 liter	380 Ft
10 liter	240 Ft
5 liter	132 Ft

A tapasztalat szerint a megvásárolt föld ültetéskor vagy locsoláskor a 90%-ára tömörödik össze.

a) Melyik virágföldből mennyit vásároljon, ha azt szeretné, hogy minél kevesebb legyen a maradék?

b) Melyik virágföldből mennyit vásároljon, ha a legolcsóbban szeretné megoldani az átültetést?

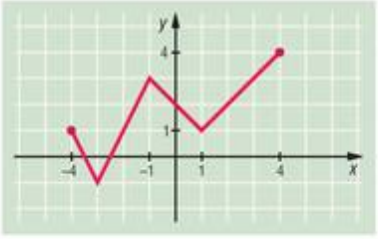
c) Hogyan alakulnak az előző eredmények, ha a kiürülő kisebb cserépbe is szeretne ültetni egy frissen vásárolt dísznövényt?

5. Feladatsor I. rész

1. Legyen $A = 5 \cdot 10^{12}$ és $B = 2 \cdot 10^{11}$. Írjuk fel normálalakban a következő számokat:
   a) $A \cdot B$; *b)* $A + B$.

2. Legfeljebb hány egyenest határoz meg a síkon 8 különböző pont?

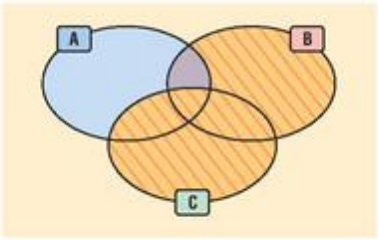
3. Adjuk meg az ábrán látható függvény
   a) értelmezési tartományát;
   b) értékkészletét.



4. Egy háromszög oldalfelező pontjai által meghatározott háromszög oldalainak hossza 5 cm, 4 cm és 6 cm. Mekkora az eredeti háromszög kerülete?

5. Egy túra során első nap megtettük az út $\frac{3}{5}$ részét, a második nap a még hátralévő út 25%-át. Mekkora a túra teljes hossza, ha még 9 km van hátra?

6. Írjuk fel az A, B és C halmazok közötti műveletekkel az ábrán vonalkázással jelölt tartományt.



7. Egy paralelogramma egyik csúcsából a két szomszédos csúcsba mutató vektor legyen $\vec{a}$ és $\vec{b}$. Adjuk meg a paralelogramma átlóinak metszéspontjából a csúcsokba mutató vektorokat az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével.

8. Egy háromszög két oldalának hossza 10 cm és 8 cm, a területe 20 cm^2. Mekkora lehet a háromszög két adott oldala által bezárt szög?

9. A „Minden erdésznek van zöld kalapja." mondatnak az alábbiak közül melyik lehet a tagadása?
   A: „Nincs olyan erdész, akinek zöld kalapja van."
   B: „Van olyan erdész, akinek nincs zöld kalapja."
   C: „Nincs olyan erdész, akinek nincs zöld kalapja."
   D: „Akinek nincs zöld kalapja, az erdész."

10. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:
$$x^2 - 3x - 10 > 0.$$

11. Egy ABC háromszög súlypontja S, és az AB oldalának felezőpontja F. Adjuk meg a háromszög C csúcsának koordinátáit, ha $S(2; -3)$ és $F(4; -5)$.

12. Lali leírta az összes 2-vel vagy 15-tel osztható kétjegyű pozitív egész számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük egyet véletlenszerűen kiválasztva, az 30-cal nem lesz osztható?

5. Feladatsor II. rész / A

13. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{27^{x+2}}}=9^{x-1}\cdot 81^{\frac{1}{4}}$;

b) $\frac{1}{2}\cdot\lg(x^2+5x+3)=\lg(4x-1)$.

14. Egy derékszögű háromszögben a két hegyesszög koszinuszának aránya $\frac{3}{4}$. Tudjuk, hogy az átfogó 25 cm.

a) Mekkorák a háromszög befogói?

b) Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

c) Milyen hosszú a kisebb hegyesszög felezőjének a háromszög belsejébe eső szakasza?

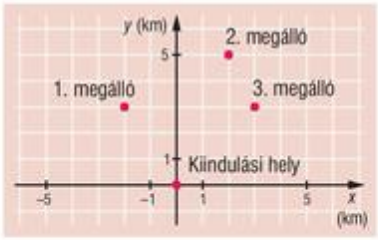
15. Egy buszmegállóban háromfajta buszjárat áll meg. A 70-es, 71-es és 72-es első járata reggel 5 órakor egyszerre indul. A 70-es 12, a 71-es 8 és a 72-es 14 percenként közlekedik.

a) Délelőtt 10 és 11 óra között van-e olyan időpont, amikor a megállóból egyszerre indul mind a három járat?

b) Az első buszra 35-en várnak. Ha véletlenszerűen szállnak fel az akkor induló három járat valamelyikére, akkor ezt hányféleképpen tehetik meg? (A felszállás sorrendjétől tekintsünk el, és a busz bármelyike képes mind a 35 utast egyszerre elszállítani.)

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utasok húsz százaléka a 70-es, $\frac{3}{7}$-e a 71-es, és a maradék a 72-es buszra száll?

d) A 70-es busz sík terepen közlekedik, és a koordináta-rendszerben ábrázoltuk az első három megállójának helyét. Mekkora utat tesz meg a kiindulási helyétől a harmadik megállóig a busz, ha két megálló közötti útszakasz egyenes? A tengelyeken egy beosztás 1 km.



5. Feladatsor II. rész / B

16. Takarékos Oszkár be szeretne tenni a bankba 2 000 000 forintot három évre. Az alábbi lehetőségeket kínálja a bank:

1. A betett pénz után évente 8% kamatot adnak, és minden év végén tőkésítenek, vagyis a következő évben a kamatokkal növelt érték kamatozik tovább.
2. Az első évben 1%, a másodikban 8%, a harmadikban 15% kamatot adnak, és ugyanúgy évente tőkésítenek.

a) Melyik befektetési forma esetén jut több pénzhez Takarékos Oszkár a 3 év letelte után?

b) Negyedévenként mekkora kamattal kellene tőkésítenie a banknak a pénzünket, hogy a harmadik év végén ugyanannyi pénzt kapjunk, mintha az első befektetési módot választottuk volna? (A kamatlábat két tizedesjegy pontossággal adjuk meg.)

c) Takarékos Oszkár évenkénti tőkésítéssel évi 8%-os kamatra helyezett el 2 000 000 forintot a bankba, majd egy év leteltével pénzét kiegészítette még 1 000 000 forinttal. Legalább hány évet kell várnia a 2 000 000 forintos betét elhelyezése után, ha 5 000 000 forintot szeretne kivenni, és a kamatláb végig 8%?

17. Új labdarúgó-stadion épült. A nézőterének első sorában 200 hely van, és minden továbbiban az előtte lévőnél 4-gyel több.

a) Hány soros lehet a nézőtér, ha a stadion befogadóképessége 11 500 és 12 000 között van?

b) A stadionban nemzetközi atlétikai versenyt rendeznek. A százméteres síkfutás nyolcas döntőjébe 3 angol, 2 holland és 1-1 francia, román és magyar versenyző jutott be. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három dobogós hely valamelyikére angol futó került?

c) A verseny utolsó napjára 4740 jegyet adtak el. Az eladott jegyek 40%-a 3200 forintos, a maradék egyik fele 4000, a másik fele 4700 forintos. Adjuk meg az eladott jegyek árainak átlagát, móduszát, mediánját.

18. Vendéglátó Vendel borral szeretné a látogatóit megkínálni. A számukra vásárolt 7,5 deciliter 12,5 térfogatszázalékos alkoholtartalmú bort az ábrán látható flaskába tölti.



A flaska alsó része egyenes csonka kúp alakú, az alkotója 13 cm, alapkörének átmérője 13 cm, a fedőköréé pedig 3 cm. A flaska felső része henger alakú, ennek alapköre 3 cm sugarú, magassága 12 cm.

a) A flaska felső peremétől számítva milyen magasan áll benne a bor? (A flaska falvastagságát hanyagoljuk el.)

b) Vendel a vendégek megérkezése előtt úgy gondolta, hogy meg kellene kóstolni a bort. Ki is öntött a flaskából annyit, hogy a bor szintje az üvegben 3 cm-rel csökkenjen. De hogy ne vegyék észre, a hiányt vízzel pótolta úgy, hogy az eredeti magasságig álljon a flaskában a folyadék. Mivel a bort finomnak tartotta, ezt még háromszor megismételte. Hány százalékos „borral" kínálta így a vendégeit Vendel?

6. Feladatsor I. rész

1. Egyszerűsítsük a következő törtet: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

2. Egy találkozón hat ember vett részt. A résztvevők felének 3, harmadának 2 és egy embernek 1 haragosa van a társaságban. Szemléltessük gráffal az egymással haragban levő embereket.

3. Egy népszavazáson, ahol a feltett kérdésre igennel vagy nemmel lehetett válaszolni, a választásra jogosultak 46%-a szavazott. A leadott szavazatok között 658 122 igen volt. Hányan mentek el szavazni, ha az igenek száma az összes leadott szavazat 19%-a? (Feltesszük, hogy minden leadott szavazat érvényes volt.)

4. Mennyi a következő sorozat első 5 elemének összege?

$$a_n = (-1)^n \cdot \sin\left((2n+1)\cdot\frac{\pi}{4}\right).$$

5. Legyen az A halmaz a téglalapok halmaza, a B a rombuszoké, a C pedig a deltoidoké. Az alábbi állítások közül döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis:

a) $A \cap B$ a négyzetek halmaza.

b) $C \setminus A$ azon deltoidok halmaza, amelyeknek pontosan egy szimmetriatengelye van.

c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ azon négyszögek halmaza, amelyeknek pontosan két szimmetriatengelye van.

6. Mekkora szögben látjuk azt a 30 cm átmérőjű focilabdát, amelynek középpontja tőlünk három méterre van?

7. Ábrázoljuk számegyenesen az $|x-2| = 2-x$ egyenlet valós megoldásait.

8. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja O. Mekkora az ABC szög, ha az $AOC\sphericalangle = 42°$?

9. Egy vállalat 70 dolgozója közül 30-nak a fizetése 90 000 forint, 20-nak 105 000, 12-nek 180 000, 7-nek 200 000 és egynek 500 000 forint. Adjuk meg a fizetések átlagát, móduszát, mediánját. (Az átlagot egészekre kerekítve adjuk meg.)

10. Számoljuk ki a következő másodfokú egyenlet diszkriminánsának pontos értékét:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot x^2 - \left(\sqrt{2}+2\right)\cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

11. Ábrázoljuk a $[-3; 3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ függvényt.

12. Attila, Ambrus, András, Orsi, Adri és Kriszti moziba mennek. Ha a jegyek egymás mellé szólnak, azokat véletlenszerűen osztják szét, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy Ambrus Adri mellett ül?

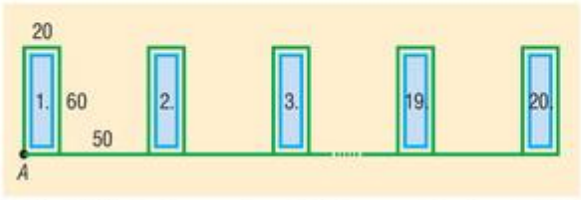
6. Feladatsor II. rész / A

13. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $2\cos^2 x + 1 = 5\sin x$;

b) $4^{x+|x+1|} = 32$.

14. Pista bácsi egy 20 házból álló lakótelep 1. számú házában lakik. Minden ház körül az ábrán látható módon téglalap alakú sétaút van, amelynek hosszúsága 60 m, szélessége 20 m. A házak közti utak egymástól 50 m távolságra vannak. Pista bácsi húsz napon keresztül minden nap lemegy a kutyájával sétálni, és megáll az A ponttal jelölt helyen. Az első nap a kutya A-ból indulva a sétaúton körbefutja az első tömböt, majd visszatér a gazdájához. Második nap szintén A-ból indulva ugyanezt megteszi a második tömbbel, és így tovább.



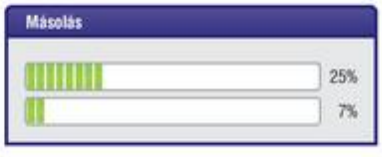
a) Mekkora utat fut be a kutya a hetedik napon?

b) Mekkora utat fut be a kutya húsz nap alatt összesen?

15. Ha a számítógépen egyszerre több fájl másolását indítjuk, akkor két sávban láthatjuk, hogy a másolás hol tart. A alsó sávban azt, hogy a teljes másolás hány százaléka történt meg, a felsőben pedig, hogy az aktuális fájl hány százalékát másolta át eddig a gép.

Most éppen három adatállományt másolunk. A képernyőre nézve ezt láthatjuk

az első fájl másolásakor:



a második fájl másolásakor:



Mit láthatunk a felső sávban a harmadik fájl másolása során, ha az alsó sávban 91% látható?

6. Feladatsor II. rész / B

16. A 2009-es Forma–1 futamokról készültek a következő táblázatok.

A verseny első 10 helyezettje		
	Pilóta neve	Pont
1.	Jenson Button	95
2.	Sebastian Vettel	84
3.	Rubens Barrichello	77
4.	Mark Webber	69,5
5.	Lewis Hamilton	49,0
6.	Kimi Raikkönen	48
7.	Nico Rosberg	34,5
8.	Jarno Trulli	32,5
9.	Fernando Alonso	26
10.	Timo Glock	24

Dátum	Futam	Győztes	Győztes csapata
2009. november 1.	Abu Dhabi nagydíj	Sebastian Vettel	Red Bull–Renault
2009. október 18.	Brazil nagydíj	Mark Webber	Red Bull–Renault
2009. október 4.	Japán nagydíj	Sebastian Vettel	Red Bull–Renault
2009. szeptember 27.	Szingapúr nagydíj	Lewis Hamilton	McLaren–Mercedes
2009. szeptember 13.	Olasz nagydíj	Rubens Barrichello	Brawn–Mercedes
2009. augusztus 30.	Belga nagydíj	Kimi Raikkönen	Ferrari
2009. augusztus 23.	Európa nagydíj	Rubens Barrichello	Brawn–Mercedes
2009. július 26.	Magyar nagydíj	Lewis Hamilton	McLaren–Mercedes
2009. július 12.	Német nagydíj	Mark Webber	Red Bull–Renault
2009. június 21.	Brit nagydíj	Sebastian Vettel	Red Bull–Renault
2009. június 7.	Török nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes
2009. május 24.	Monacoi nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes
2009. május 10.	Spanyol nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes
2009. április 26.	Bahrain nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes
2009. április 19.	Kínai nagydíj	Sebastian Vettel	Red Bull–Renault
2009. április 5.	Malajziai nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes
2009. március 29.	Ausztrál nagydíj	Jenson Button	Brawn–Mercedes

a) Melyik versenyző pontszáma van a legközelebb az első tíz versenyző átlagpontszámához?

b) Készítsünk oszlopdiagramot, amely a különböző csapatok győzelmének gyakoriságát ábrázolja. Adjuk meg ezen adatsor móduszát.

c) A versenybizottság a futamok számát túl soknak találja, ezért a helyszínek számát szeretné 15-re csökkenteni. Ha véletlenszerűen választanák ki ezeket, akkor mennyi lenne annak a valószínűsége, hogy Magyarország közte lenne?

d) A Hungaroring pálya hossza 4381 méter. A versenyek során a leggyorsabb kört Michael Schumacher tette meg, megközelítőleg 199 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel. Egészekre kerekítve hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ annak az autónak a sebessége, amelyiket ezen a pályán 199 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel Schumacher 3 perc 20 másodpercenként köröz le? (Az autók sebességét tekintsük végig ugyanakkorának.)

17. Egy szabályos hatoldalú egyenes hasáb két testátlója 30 cm és $3\sqrt{91}$ cm. Mekkora a hasáb

a) térfogata; *b)* felszíne?

18. Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai $A(-2; 13)$ és $B(8; -11)$, és a derékszögű csúcs illeszkedik az y tengelyre.

a) Adjuk meg a derékszögű csúcs koordinátáit.

b) Írjuk fel a háromszög köré írható kör 15 abszcisszájú pontjaiba húzott érintőinek az egyenletét, és adjuk meg az érintők hajlásszögét.

7. Feladatsor I. rész

1. Egyszerűsítsük az $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$, $(x \neq -y)$ törtet.

2. A csokigyárban egy nagy konténerben van 50 mazsolás csokigolyó, amelyekhez néhány marcipánost öntenek. Legfeljebb hány marcipános került közéjük, ha keveredés után 25%-nál kisebb a valószínűsége, hogy egy golyót véletlenszerűen kivéve az marcipános lesz?

3. Legfeljebb hány pontban metszheti egymást 5 kör, melyek közül semelyik kettő nem esik egybe?

4. Mi a 4, 8, 0, X, 10, 2, Y, 9 minta X és Y eleme, ha a mediánja 6, és minden elem 0 és 10 közé eső különböző egész szám?

5. Számítsuk ki a rombusz területét, ha oldala 5 cm, hegyesszöge 60°.

6. Egy ötpontú egyszerű gráf pontjainak fokszámai a következők: 2, 2, 2, 2, 4. Hány élt kell még berajzolnunk, ha teljes gráffá szeretnénk kiegészíteni?

7. Az e egyenes áthalad a $P(3, 5)$ ponton, és merőleges a $2x + 3y = 8$ egyenesre. Írjuk fel az egyenes egyenletét.

8. Oldjuk meg a negatív valós számok halmazán a $2x^2 + 18x = 0$ egyenletet.

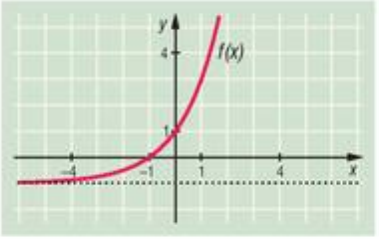
9. Melyik függvény grafikonja látható az ábrán?

   a) $y = 2^x - 1$;

   b) $y = 2^{x-1} + 1$;

   c) $y = 2^{x+1} - 1$;

   d) $y = 2^{x-1} - 1$.



10. Adjuk meg azon 0° és 360° közé eső szög koszinuszát, melynek szinusza $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ és koszinusza negatív.

11. A 14 fős csoportból 10-en jártak Bécsben és néhányan Berlinben. A Berlinben járók fele volt már Bécsben is. Hányan jártak mindkét városban, ha a csoportból mindenki járt legalább az egyik városban?

12. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát a természetes számok halmazán:

$$f(x) = \log_3 \sqrt{2x - 4}.$$

7. Feladatsor II. rész / A

13. A diagram egy autószervizben megfordult autók számát mutatja napi bontásban, hétfőtől csütörtökig. A kék oszlop a kötelező javításra visszahívott autók számát, a piros az éves szervizre érkezett járműveket mutatja.



   a) Számítsuk ki a péntekre visszahívott járművek számát, ha tudjuk, hogy egész héten a napi átlag 8 jármű volt.

b) Határozzuk meg az első négy nap alapján, hogy átlagosan mennyi az éves szervizre érkezett járművek számának változása egyik napról a másikra. Jósoljuk meg, hogy hány járművet hívnak vissza pénteken, ha csütörtökön ezzel az átlaggal számolunk.

c) Előfordulhatott, hogy a műhelybe érkezett autón az éves szerviz keretén belül végezték el a kötelező javítást is. Milyen határok között mozoghat annak a valószínűsége, hogy hétfőtől csütörtökig egy autót kiválasztva az csak az egyik szolgáltatást vette igénybe a szervizben?

14. Oldjuk meg az egyenletet (egy tizedesre) és az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

a) $2^{2x} - 2^{x+3} + 3 \cdot 2^2 = 0$; *b)* $\log_3 x - \log_3 (x+3) < 2$.

15. Eszter és Csaba családi házat terveznek. Kör alakú nappalijuk alját színes, összezúzott járólap darabkákkal fogják koncentrikus körökben kirakni. Ehhez a nappali középpontja mint középpont körül körvonalakat rajzolnak. A szomszédos körök sugarainak különbsége mindig az első kör sugara. A járólap darabkáit a rajzolt körök közé építik be.

a) Az egymás után következő körgyűrűkben számtani vagy mértani sorozat szerint fog növekedni a felhasznált járólapdarabok száma, ha a darabszám arányos a külső határoló kör hosszával?

b) Hány járólapot zúztak össze, ha egy járólapot 6 darabra törtek, a kezdőkörbe 4 darabka került, és a kezdőkörrel együtt összesen 20 körgyűrűt kell kitölteniük?

7. Feladatsor II. rész / *B*

16. Egy háromszög két oldalegyenese:

$$b\colon\ x + 7y = -9 \quad \text{és} \quad c\colon\ -2x + y = 3.$$

A háromszög köré írt kör egyenlete:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

a) Határozzuk meg a háromszög csúcsainak koordinátáit.

b) Mekkora a háromszög kerülete?

c) Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

17. A fagyizóban Gombóc Artúr csak egy (gömb alakú) gombóc csokoládéfagyit kér. Kézhez kapva a fagylaltot megállapítja, hogy oldalról nézve a gömb magasságának egyharmada látszik ki a tölcsérből.

a) Hány köbcentiméter a gömb alakú gombóc fagyi térfogata, ha a kúp alakú tölcsér átmérője 5,6 cm, magassága 9,6 cm? Az eredményt egész köbcentiméterre kerekítve adjuk meg.

b) Ha Gombóc Artúr a fagyi elfogyasztása előtt elkezd Madárvédő Golyókapkodóval beszélgetni, és véletlenül elolvad kezében a fagyi, milyen magasan áll majd a tölcsérben az olvadt csoki? (Feltételezzük, hogya tölcsér alján semennyi nem folyik ki.)

18. Egy lefelé mozgó, $a\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$-tel gyorsuló liftben elhelyezett L méter hosszú inga lengésidejét a $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g-a}}$ függvény írja le, ahol $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a földi gravitációs gyorsulás.

a) Adjuk meg pontosan a 25 cm hosszú inga lengésidejét egy $a = 0{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$-tel gyorsuló liftben.

b) Hány centiméter hosszú legyen az inga, ha azt akarjuk, hogy a lengésideje 2 másodperc legyen a $8{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulású liftben?

c) Mekkora a lift gyorsulása, ha a benne elhelyezett $L = 1$ m hosszú inga lengésideje $T = 3$s?

8. Feladatsor I. rész

1. Milyen számjegyet írhatunk X helyére, hogy $1212X2$ osztható legyen 4-gyel? Soroljuk fel mindet.

2. Egy P pont 4 cm-re van egy 6 cm sugarú kör vonalától. Milyen hosszú a körön kívüli P ponttól a körig húzott érintő szakasz?

3. Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások megfordításai. Karikázzuk be a helyes választ.

Állítás	Az állítás megfordítása
Ha egy szám 2-vel és 6-tal osztható, akkor 12-vel is osztható.	Igaz / Hamis
Ha egy szám prímtényezős felbontásában nincs 2-es prímtényező, akkor a szám páratlan.	Igaz / Hamis
Ha egy pozitív egész szám prím, akkor csak 1-gyel és önmagával osztható.	Igaz / Hamis

4. Adott az $I =]2; 7]$ és $J = [1; 4]$ intervallum. Ábrázoljuk számegyenesen az $I \setminus J$, $J \setminus I$ intervallumokat.

5. Eszter dobozában 10 különböző gyöngy van, közülük találomra választ 4-et. Hányféleképpen választhatja ki és fűzheti fel sorban a gyöngyöket?

6. Iván 3 dolgozatot írt eddig a félévben, egy 15, egy 62 és egy 58 pontosat. Legalább hány pontos dolgozatot kell írnia negyedikre, hogy átlagban teljesítse a 60%-ot, ha az első és harmadik dolgozat 100, a második és negyedik 80 pontos?

7. Milyen előjelű ctg α, ha tg α negatív érték? Indokoljuk is válaszunkat.

8. Adjuk meg azt a legbővebb intervallumot, amelyen monoton növő az $f(x) = -|x + 4| + 5$ függvény.

9. Egy termék árát a karácsonyi vásár előtt 40%-kal növelték, utána 40%-kal csökkentették. Nőtt vagy csökkent az ár a vásár előttihez képest? Hány százalékkal?

10. Adott a k: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ kör. Mekkora lehet annak a körnek a sugara, melynek középpontja $K(2, 4)$ és nincs közös pontja k-val?

11. Legyen $p = \log_2 3$. Fejezzük ki $\log_2 12$-t p segítségével.

12. Egy négyzet alakú képkeret széleit érinti a kör alakú üveg. Az üveg mögött van egy kép Lidiről. Mekkora valószínűséggel találja el az üveget Lidi öccse, amikor köpőcsövével a képtartót veszi célba és biztosan el is találja?



8. Feladatsor II. rész / A

13. Oldjuk meg az egyenletrendszert a racionális számok halmazán:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{y^2 + 2x - 5} &= 2x + 3 \\ x + y &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

14. Egy kör alakú asztalnál három házaspár foglal helyet. Hányféleképpen ülhetnek le, ha csak az egymáshoz viszonyított helyzetük érdekes valamilyen körüljárás szerint, és

a) bárki bárhova leülhet; *b)* a házastársak egymás mellé ülnek?

Vacsora közben a salátástálat a vendégek egymás között adták-vették. Egy pincér megszámolta, hogy a hat személyből ötnél 4, 2, 3, 3, 5 alkalommal fordult meg a tál.

c) Hányszor lehetett legalább és legfeljebb a salátástál a hatodik vendég kezében? (Ugyanazon két személy kétszer nem adta a tálat egymásnak.) Adjunk konkrét példát mindkét esetre.

15. Az $f(x) = 2x^2 - 5x + c$ függvényről tudjuk, hogy áthalad a (4; 16) ponton.

a) Határozzuk meg c értékét. *b)* Metszi-e a függvény az x tengelyt?

c) Melyik irányban, mennyivel kell eltolni függőlegesen a függvényt, hogy érintse az x tengelyt?

8. Feladatsor II. rész / B

16. A 13 emeletes szálloda minden szintjén 20 szoba található. A szobák három típusúak: van 2, 4 és 6 személyes. Az egy szinten levő szobák közül 7 kétszemélyes, 8 négyszemélyes, a többi hatszemélyes. Minden szinten van 6 konyhás szoba is, szobatípusonként 2-2.

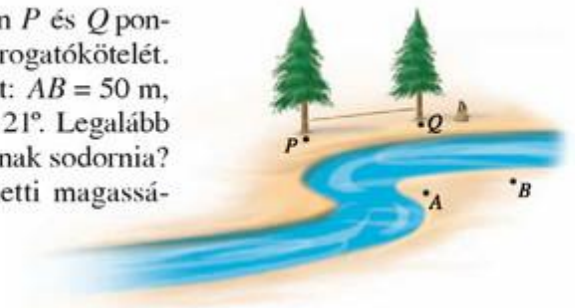
a) Egy turistacsoport érkezik a szállóba, 8 pár és 3 kétgyermekes család. Hányféleképpen kaphatnak szobákat, ha a recepciós a megfelelő számú és típusú szobákat véletlenszerűen osztja szét a párok és családok között? (A hotel éppen üres volt.)

b) Valaki beszáll a liftbe, véletlenszerűen kiválaszt egy emeletet, majd a liftből kiszállva találomra bekopog egy ajtón. Minek nagyobb a valószínűsége: a felső öt emelet valamelyikén egy négyszemélyes, vagy az alsó nyolc emeleten egy hatszemélyes szobába kopogott be?

c) Egy utazási iroda minden szinten mindenfajta szobából lefoglal egyet véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy szobához lesz konyha is?

17. Egy 30 fős osztályban megkérdezték a tanulókat, hányan olvasnak nem kötelező szépirodalmat, mennyien olvasnak képregényeket és mennyien újságot. Az első két kérdésre összesen 15 fő tette fel a kezét. A második kettőre 17-en, az elsőre vagy harmadikra 18-an jelentkeztek. Tudjuk, hogy az első kérdésre jelentkezők fele jelentkezett a második kérdésre is. Azok közül, akik a másodikra jelentkeztek, a harmadik kérdésre hatan már nem nyújtották a kezüket. Végül azt is tudjuk, hárman jelezték, hogy olvasnak szépirodalmat és újságokat is, egyetlen fő pedig mindhárom irodalmat. A diákok hány százaléka nem olvas sem szépirodalmat, sem képregényeket, sem újságot?

18. Nyuszitappancs, Nagy Papucs neje a folyó túlpartján P és Q pontokban álló két fa között szeretné kifeszíteni a szárogatókötelét. Mielőtt átkelnek a folyón, lemérik a következőket: $AB = 50$ m, $PAB\sphericalangle = 100°$, $QAB\sphericalangle = 65°$, $QBA\sphericalangle = 60°$, $PBA\sphericalangle = 21°$. Legalább milyen hosszú szárogatókötelet kell Nagy Papucsnak sodornia? (Minden tereptárgy ugyanazon a tengerszint feletti magasságon áll.)



9. Feladatsor I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$x + 1 > \sqrt{3 + x}.$$

2. Számítsuk ki a következő kifejezés értékét számológép használata nélkül:

$$\log_2 80 - \log_2 10 + \log_3 81.$$

3. Egy rombusz két átlója 8 és 6 egység. Számítsuk ki a rombusz kerületét.

4. Egy forgáskúp tengelyén áthaladó sík olyan szabályos háromszögben metszi a kúpot, amelynek oldala 4 egység. Számítsuk ki a kúp felszínét.

5. Adjuk meg fokban az összes olyan β szöget, amelyre teljesül, hogy $0° < \beta < 720°$ és $\cos\beta = \cos 31°$.

6. Egy szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám pímszám?

7. Egy számtani sorozat ötödik tagja 3. Számítsuk ki a sorozat első 9 elemének összegét.

8. Írjuk fel az $(1; 2)$ ponton áthaladó, az $y = 2x + 1$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenletét.

9. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x^3 + y^3 &= 9 \end{aligned}\right\}.$$

10. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben az $x \mapsto 2 - |x - 1|$, $-1 \le x \le 3$ függvényt, és határozzuk meg a legnagyobb és legkisebb értékét.

11. Az első 100 pozitív egész szám között hány olyan van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal?

12. Egy háromszög két oldalának hossza 3 és 8 egység, a közbezárt szög 120°. Számítsuk ki a háromszög területét.

9. Feladatsor II. rész / A

13. Adott az $x^2 + y^2 = 4$ és az $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ egyenletű kör. Az $r > 0$ mely értéke esetén érinti egymást a két kör? Adjuk meg az érintési pontokat is.

14. Egy háromszög két oldalának hossza 10 cm és 24 cm. Hogyan válasszuk meg a két oldal által közbezárt szöget, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez a terület?

15. Az A-ból B-be vezető út összesen 11,5 km. A-ból indul egy gyalogos, először emelkedőn megy, majd egy vízszintes útszakasz következik, végül egy lejtős útszakaszon ér B-be. Az útja 2 óra 54 percig tartott. Visszafelé ugyanezt az utat B-ből A-ba 3 óra 6 perc alatt tette meg. A gyalogos sebessége emelkedőn $3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, vízszintes úton $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, lejtőn $5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt. Mekkora út volt vízszintes?

9. Feladatsor II. rész / B

16. Az ABC háromszög AC oldalán egy P pontot, BC oldalán egy Q pontot adtunk meg. Az AQ és BP szakaszok metszéspontja O. Tudjuk, hogy az AOP, AOB és BOQ háromszögek területe sorra $2\ \text{cm}^2$, $4\ \text{cm}^2$, $6\ \text{cm}^2$. Mekkora a PCQ háromszög területe?

17. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátáira teljesül az $x^2 + y^2 + 2x \le 1$ egyenlőtlenség.

Melyek azok az a valós számok, amelyekre teljesül, hogy az

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x &\le 1 \\ y &= x + a \end{aligned}\right\}$$

egyenlőtlenség-rendszernek egyetlen $(x; y)$ megoldása van? Melyek ezek a megoldások?

18. Számítsuk ki azoknak a tízes számrendszerbeli kétjegyű számoknak az összegét, amelyek nem oszthatók sem 3-mal, sem 5-tel.



10. Feladatsor I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:
$$2 \cdot \cos x = -\sqrt{2}.$$

2. Számítsuk ki az alábbi kifejezés pontos értékét számológép használata nélkül:
$$\log_7 196 - \log_7 4 - \sin 270°.$$

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:
$$\sqrt{5x-4} < x.$$

4. Két szabályos dobókockával (egy pirossal és egy kékkel) dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege nagyobb, mint 10?

5. Egy háromszög egyik szöge 50°, a másik két szög aránya 6 : 7. Mekkora ez a két szög?

6. Egy gömb térfogata $4{,}5\pi$. Számítsuk ki a gömb felszínét.

7. Adott egy kocka. Az A csúcsából kiinduló három élvektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Állítsuk elő az A csúcsból induló testátló vektort.

8. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a következő függvényt:
$$x \mapsto \big||x-2|-3\big|, \quad -2 \le x \le 6.$$

9. Hány pozitív osztója van a 784-nek?

10. Számítsuk ki az egyenlő szárú háromszög területét, ha alapja 10 cm és szára 13 cm.

11. Az $\frac{a}{5}$ szám 70%-a 35. Mennyi az a értéke?

12. Ábrázoljuk a következő függvényt, és határozzuk meg a legnagyobb és legkisebb értékét:
$$x \mapsto x^2 - 5x + 6, \quad 0 \le x \le 5.$$

10. Feladatsor II. rész / A

13. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a következő függvényt:
$$x \mapsto x + |1-x| + 2 \cdot |x-2|, \quad 0 \le x \le 3.$$
Adjuk meg a függvény legnagyobb és legkisebb értékét.

14. Az ABC háromszög belsejében felvettünk egy P pontot, majd a P ponton át párhuzamosokat húztunk a háromszög oldalaival. Ez a három egyenes a háromszöget három paralelogrammára és három háromszögre darabolja. Ez utóbbi három háromszög területe 1, 4 és 9 területegység. Számítsuk ki az ABC háromszög területét.

15. Határozzuk meg az n egész szám azon értékeit, amelyekre az
$$\frac{n+3}{n+1} \quad \text{és} \quad \frac{2n+15}{n+4}$$
számok értéke is egész szám.

10. Feladatsor II. rész / B

16. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a következő függvényt:

$$x \mapsto x^2 + x - 12, \quad -5 \le x \le 4.$$

Adjuk meg a valós számok halmazán a következő két egyenlőtlenség közös megoldásait:

$$5^{3x-1} \le 25 \quad \text{és} \quad x^2 + x \le 12.$$

17. Egy üres medence 5 óra alatt telik meg vízzel, ha csak az A csapon folyik a víz. Ha csak a B csapon át folyik a víz, akkor 15 óra alatt telik meg a medence. Hány óra alatt telik meg az üres medence, ha egyszerre kinyitják az A és B csapot is?

18. Egy teherautó A-ból B-be ment áruval telerakva. Az úton az átlagsebessége 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt. Visszafelé üresen jött ugyanazon az úton, így átlagsebessége 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt. Számítsuk ki a teherautó átlagsebességét a teljes A–B–A úton.

EMELT SZINTŰ FELADATSOROK

1. Feladatsor / A

1. Melyek azok az x valós számok, amelyekre teljesül, hogy
$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3?$$

2. Egy egyenlő szárú háromszög alapja a, szára b és az alappal szemközti szög $20°$. Igazoljuk, hogy
$$a^3+b^3=3ab^2.$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:
$$\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}}2=\log_{\frac{x}{64}}2.$$

4. Egy R sugarú gömbbe olyan kúpot írunk, amely palástjának területe kétszerese az alapkör területének. Határozzuk meg a kúp térfogatát.

1. Feladatsor / B

5. Ábrázoljuk a következő függvényeket:
   a) $f(x)=|x^2-6x+8|$, $0\le x\le 6$;
   b) $g(x)=|x^2-6x+5|$, $0\le x\le 6$.
   Az a valós paraméter mely értékeire igaz, hogy az
$$|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=a$$
   egyenletnek háromnál több megoldása van a valós számok körében?

6. Határozzuk meg az alábbi egyenlettel megadott parabola (p valós paraméter) csúcspontjának koordinátáit:
$$y=x^2+(2p+1)\cdot x+p^2-1.$$
   Igazoljuk, hogy ha p befutja a valós számokat, akkor a kapott parabolák csúcspontjai egy egyenesen vannak.

7. Igazoljuk, hogy ha α, β, γ egy hegyesszögű háromszög szögei, akkor
$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma>2.$$

8. Adott egy háromszög alakú fémlemez. Ebből kell kivágni két egybevágó, kör alakú idomot. Hogyan vágjuk ki ezeket, ha a lehető legnagyobb területű köröket szeretnénk kapni?

9. Két test egyszerre kezd el mozogni azonos irányban. Induláskor egymástól 20 méter távolságra vannak. A hátrább lévő test egyenletesen gyorsul, az első másodpercben 25 métert tesz meg, a következő másodpercben egyharmad méterrel többet. A másik test egyenletesen lassul, az első másodpercben 30 métert tesz meg, a következő másodpercben fél méterrel kevesebbet. Hány másodperc alatt éri utol az első test a másodikat?

2. Feladatsor / A

1. *a)* Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezés értelmezhető:
$$\log_2(-x^2 + 4x - 3) - 2 \cdot \log_2(x - 1).$$
b) Oldjuk meg a fenti értelmezési tartományon a következő egyenletet:
$$\log_2(-x^2 + 4x - 3) - 2 \cdot \log_2(x - 1) = 1.$$

2. Egy húrtrapéz két alapjának hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 3:7, magassága $10 \cdot \sqrt{2}$ cm hosszúságú. A trapéz egyik átlója egy derékszögű és egy nem derékszögű háromszögre vágja szét a trapézt.
a) Számítsuk ki a trapéz területét.
b) Mekkora annak a körnek a területe, amely átmegy a trapéz összes csúcsán?

3. Egy matematikatanár 10 éves megfigyelése alapján annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott tanuló önállóan készíti el a matematika házi feladatát, mindössze 0,65. A tanár egy 15 fős csoportba megy órát tartani.
a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a csoportban mindenki önállóan készítette el a házi feladatot?
b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a fenti csoportban pontosan 10 olyan diákot találunk, aki nem önállóan munkálkodott a házi feladaton?

4. Az amatőrök úszóversenyén a döntőbe hat versenyző került: Andor, Barnabás, Csanád, Dezső, Ervin és Fábián. A szoros döntőben valamelyik helyen kettős holtverseny alakult ki, azaz két versenyző századmásodperc pontossággal (a versenyen ez volt az időmérés pontossága) ugyanazt az eredményt érte el. Ha például a 2. helyen alakult ki a holtverseny, akkor a szervezők két második helyezést osztottak ki, és harmadik helyezést nem ért el senki. A dobogóra legfeljebb négy versenyző állhatott, mindenki pontosan arra a fokra, ahányadik időeredménnyel a célba ért.
a) Hányféleképpen alakulhatott a verseny döntője, amennyiben két sorrendet akkor különböztetünk meg egymástól, ha legalább egy olyan versenyző van, akinek a helyezése a két sorrendben különböző?
Időközben kiderült, hogy a versenyt Andor egyedül nyerte meg, továbbá Fábián az utolsó helyen végzett.
b) Hányféleképpen alakulhatott végül a verseny eredménye?

2. Feladatsor / B

5. Az állam a fiatalok lakáshoz jutását a következő konstrukciójú bankszámlával támogatja. A spórolást vállaló személy minden hónap első napján köteles 10 000 Ft-ot befizetni a számlára. A számlavezető bank minden hónap utolsó napján 0,3% kamatot fizet a számlán szereplő összeg után. A kamaton felül az állam minden év első napján az előző évben a számlatulajdonos által elhelyezett összeg 30%-át utalja a számlára. A spórolási időszak 4 évig tart; a számla tulajdonosa a 4 teljes év eltelte utáni év első napján juthat hozzá megtakarításához (természetesen ekkor már a 4. évben elhelyezett összeg után is jár az állami támogatás). Anna január 1-jén nyit számlát a fenti feltételekkel.
a) Összesen mennyi pénzt fizet be Anna a 4 éves spórolási időszak alatt?
b) Számítsuk ki, hogy mennyi pénz lesz Anna számláján a számlanyitás évének december 31. napján, miután a bank a decemberi kamatot már jóváírta.
c) Mennyi pénzt vehet fel Anna a 4 éves takarékoskodási időszak eltelte után?

6. Az alábbi diagram egy iskola végzős tanulóinak matematika, illetve történelem emelt szintű érettségi érdemjegyeinek százalékos megoszlását mutatja. A tanulók között nem volt olyan, aki két tárgyból érettségizett emelt szinten. Összesen 20 diák választotta a matematika, 40 pedig a történelem emelt szintű érettségit.



a) Készítsünk olyan diagramot, amelyről leolvasható, hogy az emelt szinten érettségiző diákok közül összesen hányan kaptak 3-ast, 4-est, illetve 5-öst.

b) Számítsuk ki az iskola diákjainak a matematika-, illetve történelemérettségin elért átlagát. Az eredményt két tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

c) A matematikából közepest szerző diákok közül legalább hánynak kellett volna 4-est szereznie a többiek változatlan teljesítménye mellett ahhoz, hogy a matematikaérettségi átlaga legalább 3,75 legyen?

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a történelemből érettségizett diákok közül véletlenszerűen kiválasztott 2 diák átlaga legalább 4,20?

7. Tekintsük az $f\colon x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$ hozzárendeléssel értelmezett függvényt.

a) Mutassuk meg, hogy az $A(1; 2)$ és a $B(3; 4)$ pontok illeszkednek az f függvény grafikonjára.

b) Írjuk fel az AB egyenes egyenletét.

c) Bizonyítsuk be, hogy az AB egyenes olyan pontban metszi az x tengelyt, amely illeszkedik az f függvény grafikonjára is.

d) Határozzuk meg az f függvény zérushelyeit.

e) Mekkora a területe annak a síkidomnak, amelyet az f függvény grafikonja, valamint az AB szakasz fog közre?

8. Zsuzsi gyakran túrázik a hegyekben. Turistatérképéről leolvasta három, egymás közelében lévő hegy magasságát: a Pokol-hegy (A) magassága 650 méter, a Tündér-hegyé (B) 950 méter, valamint a Magas-hegyé (C) 1300 méter. Térképén lemérte azt is, hogy a hegyek a valóságban milyen messze vannak egymástól: $AB = 3000$ méter, $AC = 4000$ méter, $BC = 5000$ méter. Két tizedesjegy pontossággal válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

a) Mekkora emelkedési szög alatt látjuk a Tündér-hegy csúcsáról a Magas-hegy csúcsát?

b) A Magas-hegy csúcsáról mekkora szög alatt látszik a másik két hegy csúcsát összekötő szakasz?

9. Határozzuk meg az a, b, c valós paraméterek értékét úgy, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola az alábbi feltételek mindegyikét teljesítse.

1. Csúcspontja az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik.
2. Áthalad a $(0; 1)$, valamint a $(2; 10)$ pontokon.

3. Feladatsor / A

1. Egy motorcsónak a folyón a vízfolyás irányában haladva az AB utat 5 óra alatt, a BA utat a vízfolyással szemben haladva 5 óra 40 perc alatt teszi meg. Mennyi idő alatt teszi meg az AB utat egy tutaj, amely a víz sebességével halad, ha a folyó és a hajó sebessége állandó?

2. Határozzuk meg a p paraméter értékét, ha tudjuk, hogy az $x^2 + y^2 - 8x - 8y + p^2 = 0$ egyenletű kör a koordináta-rendszer kezdőpontjából 60°-os szögben látszik.

3. Attila, Balázs és Csanád kockáznak. Mindhárman egyszerre dobnak egy-egy szabályos dobókockával. Ha a dobott számok között van azonos, Attila nyer. Ha a három szám különböző és páronként relatív prímek, Balázs nyer. Ha a számok különbözőek, de előfordulnak közöttük nem relatív prím párok, akkor Csanád nyer.

Dobás előtt mind a hárman beraknak egy-egy tétet.

Az egyik játékban Balázs tétje 10 zseton. Mekkora legyen Attila és Csanád tétje, hogy igazságos legyen a játék?

4. Legyen az A halmaz a

$$\sin^2 x = 1 - \cos x \cdot \sin x$$

egyenlet $[0; 2\pi]$ intervallumba eső valós megoldásainak halmaza, a B halmaz pedig az

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 12) > -5$$

egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza. Adjuk meg az $A \cap B$ és az $A \cup B$ halmazokat.

3. Feladatsor / *B*

5. Egy téglalap alakú kertben, melynek két oldala 30 m és 40 m, filmfelvételt készítenek. Az operatőr olyan helyen állítja fel a kamerát, ahonnan két szomszédos oldal 90°-os szögben látszik.

a) Milyen távol van a kamera a kert sarkaitól?

b) Mekkora szögben látszik a kamera helyéről a másik két oldal?

6. 2009 novemberében különösen sok eső esett. Vizesréten ebben a hónapban az átlagos napi csapadékmennyiség pontosan 7,5 mm volt. Az egyes napokon mért csapadékmennyiséget a táblázat mutatja.

2009. november	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
csapadék (mm)							19		7	2	7			5	
2009. november	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
csapadék (mm)			21			3			3					4	

A táblázat hiányzó adatairól azt tudjuk, hogy a hónapban tíz eső nélküli nap volt, a többi adat pedig egy olyan növekvő számtani sorozatba rendezhető, amelynek differenciája 2.

a) Mekkora volt a mért legnagyobb napi csapadékmennyiség az adott hónapban?

b) Hányféleképpen tölthető ki a táblázat hiányzó része, ha a számtani sorozat elemei nem feltétlenül követik egymást?

c) Hányféleképpen tölthető ki a táblázat hiányzó része, ha a számtani sorozat elemei nem feltétlenül kerülnek szomszédos napokra, de egymást növekvő sorrendben követik?

7. Egy lakásfelújítás során a páraelszívó berendezésből a kivezetést csak úgy tudják megoldani, hogy hengerfúróval 12 cm átmérőjű lyukat fúrnak az 50 cm vastag falba úgy, hogy a fúrás iránya 60°-os szöget zár be a fal síkjával.

a) A páraelvezetéshez a kifúrt lyukba 12 cm átmérőjű csövet helyeznek. Milyen hosszú legyen a megvásárolt cső?

b) Mekkora területű a falon keletkezett lyuk?

c) Ezzel a módszerrel hány százalékkal több törmelék kerül ki a falból, mintha a falra merőlegesen fúrtak volna?

8. Egy sportegyesületi közgyűlésen a jelen lévők igennel vagy nemmel szavaztak három kérdésre. Tartózkodás nem volt, minden jelenlévő mindhárom kérdésben szavazott. Az első kérdésre 35 fő szavazott igennel, a másodikra 26-an szavaztak nemmel, a harmadikra 31-en szavaztak igennel.

   Azok, akik mindhárom kérdésre igennel szavaztak, ugyanannyian voltak, mint akik a második kérdésre igent mondtak, a többi kérdésre pedig nemet.

   Akik az első és harmadik kérdésre igen mondtak, de a másodikra nemet, éppen annyival voltak kevesebben azoknál, akik a második és harmadik kérdésre mondtak igent és az elsőre nemet, mint amennyivel többen voltak azoknál, akik az első és második kérdésre mondtak igent és a harmadikra nemet, és ez az eltérés megadja azoknak a számát, akik mindhárom kérdésre nemmel szavaztak.

   A harmadik kérdésre igennel szavazók közül ketten a másik két kérdésre nemmel szavaztak. Az első kérdésre igennel szavazók közül a másik kettőre nemmel szavazott 12 személy.

   a) Hányan vettek részt a szavazáson?

   b) Az egyesület 7 tagú elnökséget választ, azok közül, akik az első kérdésre igennel szavaztak. Hányféle eredménye lehet a választásnak?

   c) Az elektronikus szavazókészüléken három billentyű van: „igen", „nem" és „tartózkodás". Ha egy szavazáson harmincan szavaznak véletlenszerűen nyomva a gombokat, mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 igen, 10 nem és 10 tartózkodás lesz a szavazás eredménye?

9. Egy bérautó fogyasztását láthatjuk a következő táblázatban különböző sebességek esetén.

Sebesség (km/h)	Fogyasztás (liter/100 km)
50	5,5
100	7,0
150	9,5

   a) Mekkora a fogyasztás 100 kilométeren $90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebesség mellett, ha a $30-200\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességtartományban a fogyasztás a sebesség másodfokú függvénye?

   b) Az autót egy 300 km-es útra sofőrrel együtt szeretnénk kibérelni, akinek a bére óránként 2000 forint. Milyen sebesség esetén lesz az utazás költsége minimális, ha csak a sofőr óradíját és a benzinköltséget kell kifizetnünk, és egy liter benzin ára 320 forint? (Az autó sebességét tekintsük az egész úton egyenletesnek.)

4. Feladatsor / *A*

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 3^{3x+1} &= 3y^3+8y^2+8y+9 \\ x &= \log_3(y+1) \end{aligned}\right\}.$$

2. Egy (a_n) sorozatban minden pozitív n egész számra: $a_n = 2a_{n+1} - a_{n+2}$, továbbá $a_3 + a_7 = 12$. Adjuk meg a sorozat első 9 tagjának összegét.

3. Egy borversenyen a benevezett szekszárdi borászok átlagosan 5, a villányiak 4, az egriek 2 díjat kaptak.

   a) Hány szekszárdi, villányi és egri borász indult a versenyen, ha ezen borvidékeket összesen 8-an képviselték, és összesen 25 díjat kaptak?

   b) A 18 éven felüli emberek kétharmada jobban szereti a vörösbort, mint a fehéret. Tíz embert véletlenszerűen kiválasztva mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük heten mondják, hogy a vörösbort szeretik jobban?

4. Melyek azok az egyenesek, amelyek illeszkednek a koordináta-rendszer $A(2; 7)$ pontjára, és az x tengelyt és az y tengelyt is egész koordinátájú pontokban metszik?

4. Feladatsor / B

5. Tekintsük a $[-5; 5]$ intervallumon értelmezett következő függvényt:

$$f(x) = \frac{|x| + |x+2|}{|x| + |x-2|}.$$

Adjuk meg a függvény minimumát és maximumát, illetve azokat az x értékeket, ahol ezeket a függvény felveszi.

6. Andrásfalváról Bélatelepre és vissza egy időben indul egy autó és egy motor egyenletes sebességgel. Az autó előbb ér Bélatelepre, mint a motor, és onnan azonnal visszafordulva, Bélateleptől 5 kilométerre találkozik a motorossal. Az autó 20 perccel korábban ér vissza Andrásfalvára, mint a motor. Ha az autó ismét visszafordulna, akkor az Andrásfalva és Bélatelep közti távolság Bélateleptől számított harmadánál találkozna a motorral.

a) Hányszor nagyobb az autó sebessége, mint a motoré?

b) Mekkora az Andrásfalva és Bélatelep közti távolság?

c) Mekkora a két jármű sebessége?

7. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x - 2 = 0.$$

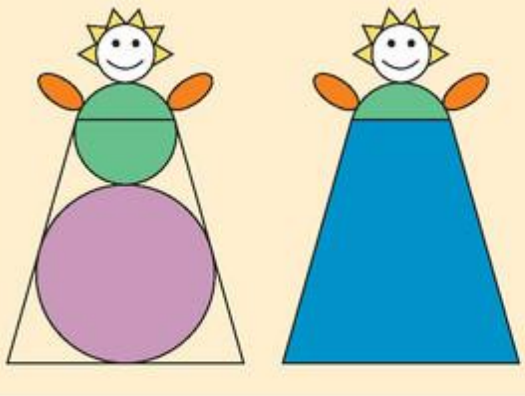
8. Születésnapi bulijára Péter, hogy a vendégeit szórakoztassa, darts játékot tervez. Ehhez az ábrán látható céltáblát készítette. A céltábla 1 méter magas és 40 cm széles, benne két parabolaívvel, amelyek csúcspontjai a tábla felső, illetve alsó szélétől 40 centiméterre, az oldalától 20 centiméterre vannak. Ezekhez a parabolaívekhez a tábla középpontjából érintőket húzott, és az így keletkezett síkrészeket piros, fehér és zöld színekkel befestette.



a) A céltáblára véletlenszerűen érkező lövések mekkora valószínűséggel esnek a különböző színű mezőkre?

b) A zöld, piros és fehér mezőbe érkezett lövés rendre 4, 5 és 6 pontot ér. Mekkora az egy lövésért kapható pont várható értéke?

9. Juliska keljfelbabája három egymásra helyezett gömbből áll. Jancsi szeretné meglepni Juliskát azzal, hogy a keljfelbabát olyan szoknyába öltözteti, amelyik érinti az alsó két gömböt. A szoknyát kartonból akarja elkészíteni úgy, hogy ha a baba függőleges helyzetben áll, akkor a szoknya az asztallap síkjától a középső gömbön lévő érintőkör síkjáig ér. Mekkora területű karton szükséges a szoknya elkészítéshez, ha az alsó gömb sugara 7 cm, a középsőé pedig 4 cm?



5. Feladatsor / A

1. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számokon:

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2+2x+1}.$$

2. Adottak az alábbi egyenletű körök:

$$k_1\colon\ (x+1)^2+(y-4)^2=4 \quad \text{és} \quad k_2\colon\ (x-2)^2+(y+3)^2=25.$$

Határozzuk meg a két kör közös belső érintőinek egyenleteit.

3. Egy dobozban 3 darab piros, 4 fehér és 3 zöld egybevágó téglalap alakú kartondarab van, melyek csak színükben különböznek. A lapokat egymás után kihúzzuk a dobozból.

a) Hányféle sorrendben vehetjük ki a papírdarabokat a dobozból?

A kivett téglalapokat sorban egymás alá helyezzük úgy, hogy csak hosszabb oldalukkal érintkezzenek. Hány olyan eset lehet, amikor

b) három; *c)* kettő; *d)* egy

magyar trikolórt (egymás alatt egy piros, egy fehér és egy zöld sáv) látunk a kialakuló alakzatban?

4. Az $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ függvényről az alábbiakat tudjuk:

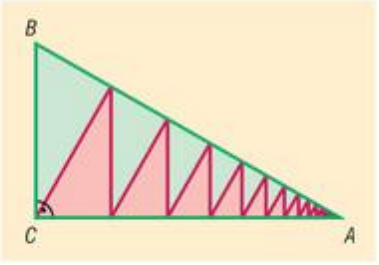
1. A függvény egyetlen zérushelye $x=-1$.
2. A függvény két szélsőértéke az $x=1$ és $x=3$ helyen van.

a) Adjuk meg az $f(x)$ függvény a, b, c, d paramétereit.

b) Mennyi a függvény lokális minimuma, ha $a=1$?

5. Feladatsor / B

5. Az ábrán egy kis ország derékszögű háromszög alakú zászlaját látjuk. A háromszög rövidebb befogója 80 cm, a hosszabb 140 cm. Minden egyszínű kis háromszög hasonló a zászlóhoz.



a) Adjuk meg a színes részeket elválasztó töröttvonal hosszát.

b) Hányszor nagyobb a zöld színű részek területe a piros színű részeknél?

6. *a)* Adjuk meg egy n pontú teljes gráf és egy n pontú fa élei számának hányadosát.

Figyeljük meg az alábbi fogalmakat. Bármely egyszerű gráfban az A és B pontokat összekötő AB út hossza alatt az AB úton előforduló élek számát értjük. Bármely egyszerű gráfban az A és B pontok távolsága alatt az összes AB utak közül a legrövidebb út hosszát értjük. (Például szomszédos pontok távolsága 1, izolált pontoké 0.) Bármely egyszerű és összefüggő gráf átmérője alatt a gráfban előforduló távolságok maximumát értjük.

b) Határozzuk meg az n pontú teljes gráf, valamint az n pontú fagráfok átmérőinek maximumát.

Az egyszerű, összefüggő G gráfnak 8 pontja van. Mennyi a feltételt kielégítő G gráfok átmérőinek maximuma, ha G minden pontjának foka

c) 2; *d)* 6; *e)* 4?

7. Egy tízelemű, egész számokból álló mintából ismerünk nyolc értéket: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 9, 10. Tudjuk továbbá, hogy a minta átlagának szórás sugarú környezete négy tizedesjegyre kerekítve

$$]A-s;A+s[\ =\ ]2{,}5941;9{,}4059[.$$

Határozzuk meg a minta hiányzó két elemét.

8. Legyen $I=[-2;2]$ intervallum és $(p;q)\in I^2$. Tekintsük a $g(x)=x^2+px+q$ polinomot. Mennyi a valószínűsége, hogy $g(x)$-nek két zérushelye van, ha a $(p;q)$ párt találomra választjuk ki I^2-ből?

9. A sebes sodrású folyó túlpartján P és Q pontokban áll két magas fa. Csúcsaik között kötélpályát akarnak építeni. Mielőtt a pályaépítők átkeltek a folyón, lemérték a következőket: $AB = 500$ m, $PAB\sphericalangle = 100°$, $QAB\sphericalangle = 65°$, $QBA\sphericalangle = 60°$, $PBA\sphericalangle = 21°$. Azt is tudjuk, hogy a P pontban álló fa 7°-os szögben látszik az A, a Q-ban álló fa 7,5°-os szögben látszik a B pontból. Számítsuk ki, legalább milyen hosszú kötél szükséges a kötélpályához, ha a csigák az ábrán látható módon mozgatják a kötelet. (Minden tereptárgy ugyanazon a tengerszint feletti magasságon áll.)



Megoldások



Logika, bizonyítási módszerek 180

Számsorozatok 195

Térgeometria 210

Valószínűség-számítás, statisztika 320



12.1. LOGIKA, BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

Logikai feladatok, kijelentések – megoldások

4001 *a)* Nem. *b)* Igen. *c)* Nem. *d)* Igen. *e)* Nem. *f)* Igen.

4002 *a)* Nem. *b)* Igen, igaz. *c)* Igen, hamis.
d) Nem. *e)* Igen, értéke függ a helyzettől. *f)* Igen, hamis.

4003 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Igaz. *d)* Igaz. *e)* Hamis.

4004 A helyes tippek: 1, 1, 2, X, 1, X.

4005 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Igaz.

4006 Nem, ugyanis
a) nem kijelentés (paradoxon);
b) kijelentés, amelynek logikai értéke a következő mondattól függ.

4007 *a)* Hétfőn, kedden, szerdán, pénteken, szombaton.
b) Csütörtökön, vasárnap.

4008 *a)* Minden nap. *b)* Soha.

4009 Beteg nem lehet, mert akkor nem mondhatna igazat. Egészséges orvos sem lehet, hiszen ők igazat mondanak. A megoldás *b)*, vagyis egészséges ápolt.

4010 Nándi és Oszi kijelentései ellentmondanak egymásnak. Ha mindkettőt igaznak fogadnánk el, akkor paradoxonhoz jutnánk, tehát valamelyiknek hamisnak kell lennie. Viszont így Laci és Marci igazat szólnak, azaz Nándi volt a tettes (és közben kiderült az is, hogy Nándi az, aki hazudik).

4011 Tudjuk, hogy kettejük közül az egyik igazat mond, a másik hazudik. Mivel a jelenlegi állapotukról egyelőre nincs információnk, ezért olyan kérdést kell egyiküknek szegezni, amellyel a jól ismert múltbeli helyzet után érdeklődünk. Például:

„Te vagy a királylány?” vagy *„Régen a házastársad mindig igazat mondott?”*

Ha a királylány válasza *„igen”*, akkor igazat mond (tehát a juhász éppen hazudik). Ha a válasza *„nem”*, akkor hazudós napja van (tehát a juhász igazat mond).

Ha a juhász válasza *„nem”*, akkor igazat mond (tehát a királylány éppen hazudik). Ha a válasza *„igen”*, akkor hazudós napja van (tehát a királylány igazat mond).

4012 Az első megjegyzés miatt Tivadar csak Kis, Fekete vagy Fehér lehet. Mivel Feketével és Fehérrel más iskolába járt, Tivadar vezetékneve Kis. Az első megjegyzés miatt Kisnek hívhatták volna még Konrádot (~~Kis~~, Nagy, Fehér) vagy Csillát (~~Kis~~, Nagy, Fekete). Konrád és Emma vezetéknevei ellentétek, így csak színek lehetnek: Fehér Konrád, Fekete Emma és Nagy Csilla.

4013 A legkisebb összeget akkor kapjuk, ha a lehető legalacsonyabb helyezésekkel rendelkezők mondanak igazat (azaz az első 10), mindenki más pedig azt mondja, hogy első lett. Ekkor az összeg $55 + 40 = 95$.

A legnagyobb összeget úgy halljuk, ha az utolsó 10 mond igazat, és minden előttük érkező utolsónak vallja magát. Ekkor az összeg 2455.



4014 Tekintsük végig a lehetőségeket Józsi szemszögéből.

Először tegyük fel, hogy Józsi beteg (azaz pont fordítva látja a valóságot, mint kellene). Ekkor Jani nem beteg, tehát egészséges (amit hisz, az úgy is van). Ekkor viszont Józsi orvos. Ajjaj, Józsi beteg orvos! (Janiról azonkívül, hogy egészséges, nem tudunk semmit.)

Másodszor tegyük fel, hogy Józsi egészséges. Ezek szerint Jani beteg, tehát Józsi nem orvos, hanem ápolt. Ajjaj, ekkor Józsi egészséges ápolt! (Janiról azonkívül, hogy beteg, nem tudunk többet.)

Bárhogy is nézzük, Józsi vagy beteg orvos, vagy egészséges ápolt. Bármelyik is, nem kellene az intézetben tartózkodnia. Janiról a feltételek alapján nem tudunk nyilatkozni.

4015 *a)* Ha az első mondat igaz, akkor saját igazságát állítja. Így a második mondatnak hamisnak kell lennie. Ha az első mondat hamis, akkor a második igaz.

Tehát a két mondat közül pontosan az egyik igaz.

b) Ha az első mondat igaz, akkor a második mondat hamis. Ha az első mondat hamis, akkor a második mondat igaz.

A két mondat közül pontosan az egyik igaz.

c) Ha az első mondat igaz, akkor a második mondat is igaz. Azonban akkor az első mondat hamis. Így ellentmondásra jutunk. Ha az első mondat hamis, akkor a második mondat is hamis. Ami azt jelenti, hogy az első mondat igaz. Így is ellentmondásra jutunk.

Ez a mondatpár paradoxon. A két mondatnak nem tudunk úgy logikai értéket tulajdonítani, hogy teljesüljön. A mondatpár tagjait nem tekinthetjük kijelentéseknek.

d) Ha az első mondat igaz, akkor a második mondat hamis. Ha az első mondat hamis, akkor a második mondat igaz.

Ismét arra jutunk, hogy a két mondat közül pontosan egy igaz, és egy hamis.

4016 Induljunk ki valamelyik állításból, és próbáljunk meg következtetéseket levonni. Kezdjük a legegyértelműbbel. (Zárójelben az állítások sorszáma, melyekből adódik.)

Aki ropit eszik, középen ül. (2)

Mivel sem Károly, sem Zsolt nem iszik kólát, azt csak Pista ihat. (1, 3)

Mivel Zsolt jobbján iszik Pista kólát és a sor szélén ül, így csak a jobb szélen ülhet. Ugyanebből adódik, hogy középen ül Zsolt és a bal oldalon Károly. (3, 5)

A pattogatott kukoricát balra kellett adni, tehát Pista pattogatott kukoricát és Károly sós mogyorót eszik. (4)

Károly szomszédja Zsolt, így ő iszik gyömbért, Károly pedig jeges teát. (6)

A fiúk így ülnek a moziban:

Mozivászon			
	jeges tea	gyömbér	kóla
…	sós mogyoró	ropi	pattogatott kukorica
	Károly	Zsolt	Pista

4017 Ismét kezdjük egy teljesen egyértelmű kijelentéssel. (Zárójelben az állítások sorszáma, melyekből adódik.)

A fiúk nem egymás mellett ülnek. (1)

Mivel Feri nem szereti a gyümölcsleveket és az egyik fiú gyümölcslevet iszik, így Lóri narancslevet iszik. (2, 8)

Mivel Angi kakaót, Kati teát iszik, Feri nem szereti a gyümölcslevet és Lóri narancslevet iszik, így Hugi baracklevet és Feri vizet iszik. (2, 3, 9)

Aki szendvicset eszik, vizet iszik hozzá, ezért Feri szendvicset eszik. (5)

Mivel rántottát és főtt tojást Lóri mellett esznek, pirítóst ehet Lóri vagy a Feri mellett (de nem a fiúk között egyedül) ülő lány. Lóriról azonban tudjuk, hogy narancslevet iszik: ekkor nem lényeges az az információ, hogy a pirítóst evő nem teát kér. Tehát pirítóst a Feri mellett ülő lány eszik. (7, előző)

Hugiról már tudjuk, hogy baracklevet iszik és Lóri mellett ül. Szabad még a tea és a kakaó helye: mivel a pirítóst evő nem kér teát, így ő csak kakaót ihat, tehát ő Angéla. (6, 10, 3)

Mivel ételnek már csak egy szabad hely maradt, így Lóri halat eszik. (előzőek)



Angi egyik szomszédja süti magának a reggelit – Feri nem, mert hideg szendvicset eszik. Ebből következik, hogy a Lóri és Angi között ülő rántottát eszik, a fiúk között ülő pedig főtt tojást. (3)

Mivel a rántottát reggelizőnem gyümölcslevet kért, így csak teát ihat: ő Kati. (4)

Következésképpen Hugi a két fiú között főtt tojást reggelizik baracklével. (előző)

A reggelizőkre és az általuk fogyasztott ételekre, italokra egy példa az ábrán látható.

Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció – megoldások

4018 *a)* $\neg A$; *b)* $A \wedge B$; *c)* $A \vee B$;
d) $(A \wedge B) \vee C$; *e)* $\neg(A \wedge B)$; *f)* $(A \wedge B) \wedge (\neg C) \wedge (\neg D)$;
g) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$.

4019 *a)* Félek a dolgozattól.
b) Van olyan film, amit még nem láttam.
c) Van olyan szarka, amelyiknek a farka egyszínű.
d) Minden rövid nyakú zsiráf rosszul fésült.
e) Bármely geometriai rendszerben a háromszög belső szögeinek összege 180°.
f) Létezik olyan érettségi feladatsor, amelyben nincs ilyen feladat.
g) Minden holló fekete.
h) Létezik olyan héttel osztható szám, amely 5-tel is osztható.
i) Van két egyenes, melyek nem metszik egymást.

4020 *a)* Hideg van és fázom.
b) Jól felöltözöm vagy mozogni kell.
c) Mozogni kell és nem fázom.
d) Nem igaz, hogy fázom és mozogni kell, vagy jól felöltözöm.
e) Hideg van és fázom, vagy jól felöltözöm és nem kell mozogni.



4021 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis. *e)* Igaz. *f)* Igaz.

4022 *b)*

4023 A és D, illetve B és C egymás tagadásai.

4024 *a)* Nem biliárdozok jól vagy nem golfozok jól.

b) Nem vagy Kata és nem is vagy Klára.

c) Nem igaz, hogy James vagy Bond vagyok.

d) Nem igaz, hogy a boltba megyek és felporszívózok.

4025 *a)* $\neg A$ = Van olyan trapéz, melynek nincsenek párhuzamos oldalai vagy vannak egyenlő szögei.

$\neg B$ = Bármely deltoidnak vannak egyenlő szögei.

$\neg C$ = Minden négyzetnek van olyan oldala, mely nem egységnyi és területe sem az.

b) A kitöltött táblázat:

	Állítás	Tagadás
A = Minden trapéznak van két párhuzamos oldala és minden szöge különböző.	hamis	igaz
B = Van olyan deltoid, melynek minden szöge különböző.	hamis	igaz
C = Létezik olyan négyzet, melynek minden oldala vagy területe egységnyi.	igaz	hamis

4026 *a)* Öt lehetőség van.

1. Az illető mindent megtanul.
2. Csak a verset tanulja meg.
3. A verset megtanulja, azonkívül csak matek házit ír.
4. A verset megtanulja, azonkívül csak fizika házit ír.
5. Csak a reál tárgyak háziját készíti el.

b) Három lehetőség van, de minden esetben meg kell nézni a filmet.

1. Elkészíti mindkét ételt.
2. Csak rántottát süt.
3. Csak bundás kenyeret süt.

4027 *a)* Minden nap minden órájának minden percében csak rád gondolok.

b) Bármely együttesnek van olyan száma, amelyben minden versszakot megértek.

c) Van olyan étel, amit akárhogyan is készítenek el, bármikor hajlandó vagyok megenni.

4028 *a)* Négy lehetőség van: Karcsi korán kelt vagy nem, illetve sokat dolgozott vagy nem. Ha tényleg korán kelt és sokat dolgozott (azaz mindkettő igaz), akkor annak a tagadása hamis. Minden más esetben valamelyik (vagy mindkettő) kijelentés hamis, így tényleg nem igaz, hogy egyszerre teljesülnek. Ekkor az állítás igaz.

b) Ha színvak vagyok, akkor az állítás igaz, bármilyen is a labda. Ha nem vagyok színvak és a labda valóban gömbölyű és piros, akkor is igaz. Ha viszont nem vagyok színvak és a labda valamelyik jellemzője (esetleg mind a kettő) hamis, akkor az összetett állítás hamis.

c) Ha elalszom, akkor az állítás hamis, függetlenül az előadástól. Ha nem alszom el és az előadás nem volt sem rövid, sem izgalmas, akkor is hamis. Ha viszont nem aludtam el és az előadás két jellemzője közül legalább az egyik teljesül, akkor igaz a kijelentés.



4029 *a)* Volt nehéz feladat, vagy olyan, amit nem oldottam meg.

b) Ebben a pizzériában van rossz ízű pizza, és minden pizzát megkóstoltunk.

c) Bármely háromszögnek van olyan szöge, ami nem derékszög.

d) Van olyan Rubik-kocka, amelynek bármely oldalán van olyan szín, ami nem kék.

4030 *a)* Elegendő, ha D hamis.

b) Szükséges, hogy mind a négy kijelentés hamis legyen.

c) Az első kettő vagy a második kettő kijelentésnek egyszerre kell hamisnak lennie.

d) Az első kettő kijelentésnek kell egyszerre igaznak lennie, vagy a második kettőnek egyszerre hamisnak.

4031 Mivel a formulák mindegyikében két kijelentés (változó) szerepel, így értékeik (igaz vagy hamis) összesen négy esetet adnak:

$$i\text{–}i,\quad i\text{–}h,\quad h\text{–}i,\quad h\text{–}h.$$

A legegyszerűbb, ha készítünk mindhárom formulához egy-egy *igazságtáblázatot.*

A piros oszlop mindegyik esetre érvényes, a végeredményt a zöld oszlop mutatja.

A	B
i	i
i	h
h	i
h	h

a)

A	$\wedge$	$(\neg B)$
i	**h**	h
i	**i**	i
h	**h**	h
h	**h**	i

b)

$(A$	$\wedge$	$B)$	$\vee$	$(\neg A)$
i	i	i	**i**	h
i	h	h	**h**	h
h	h	i	**i**	i
h	h	h	**i**	i

c)

A	$\wedge$	$(B$	$\vee$	$\neg A)$
i	**i**	i	i	h
i	**h**	h	h	h
h	**h**	i	i	i
h	**h**	h	i	i

4032 A feladatban az első két formula három kijelentést tartalmaz, melyek mindegyike lehet igaz vagy hamis, ezért a lehetőségek száma:

$$2^3 = 8,$$

azaz ennyi sora van az igazságtáblázatnak.

A *c)* kérdésben négy formula szerepel, ott 16 soros a táblázat. A végeredményt most is a zöld oszlop jelöli.

A	B	C
i	i	i
i	i	h
i	h	i
i	h	h
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

a)

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\vee$	C
h	i	i	i	**i**	i
h	i	i	i	**h**	h
i	i	h	h	**i**	i
i	i	h	h	**i**	h
i	h	h	i	**i**	i
i	h	h	i	**i**	h
i	h	h	h	**i**	i
i	h	h	h	**i**	h

b)

$\neg A$	$\wedge$	$(B$	$\vee$	$C)$
h	**h**	i	i	i
h	**h**	i	i	h
h	**h**	h	i	i
h	**h**	h	h	h
i	**i**	i	i	i
i	**i**	i	i	h
i	**i**	h	i	i
i	**h**	h	h	h



A	B	C	D
i	i	i	i
i	i	i	h
i	i	h	i
i	i	h	h
i	h	i	i
i	h	i	h
i	h	h	i
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	i	h
h	i	h	i
h	i	h	h
h	h	i	i
h	h	i	h
h	h	h	i
h	h	h	h

c)

¬	(A	∧	B)	∧	(C	∨	D)
h	i	i	i	**h**	i	i	i
h	i	i	i	**h**	i	i	h
h	i	i	i	**h**	h	i	i
h	i	i	i	**h**	h	h	h
i	i	h	h	**i**	i	i	i
i	i	h	h	**i**	i	i	h
i	i	h	h	**i**	h	i	i
i	i	h	h	**h**	h	h	h
i	h	h	i	**i**	i	i	i
i	h	h	i	**i**	i	i	h
i	h	h	i	**i**	h	i	i
i	h	h	i	**h**	h	h	h
i	h	h	h	**i**	i	i	i
i	h	h	h	**i**	i	i	h
i	h	h	h	**i**	h	i	i
i	h	h	h	**h**	h	h	h

Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia – megoldások

4033 *a)* $A \to B$; *b)* $(A \vee B) \to C$; *c)* $(A \wedge B) \to C$; *d)* $A \to (B \wedge \neg C)$;
e) $A \leftrightarrow (B \vee C)$; *f)* $\big((B \vee C) \to A\big) \wedge \big(A \to (B \vee C)\big)$; *g)* $A \leftrightarrow B$.

4034 *a)* Ha egy négyszög négyzet, akkor paralelogramma. Igaz.
b) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor rombusz. Hamis.
c) Egy négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha két-két szemközti oldala egyenlő. Igaz.
d) Ha a négyszög két-két szemközti és két-két szomszédos oldala egyenlő, akkor rombusz. Igaz.
e) Ha egy négyszög két-két szemközti és két-két szomszédos oldala egyenlő, továbbá szögei egyenlők, akkor négyzet. Igaz.
f) Ha egy négyszög két-két szemközti és két-két szomszédos oldala egyenlő, vagy szögei egyenlők, akkor rombusz. Hamis.
g) Egy négyszög pontosan akkor négyzet, ha rombusz és szögei egyenlők. Igaz.

4035 *a)* Thalész tétele.
b) B.



4036 *a)* *A* megfordítása: Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.

B megfordítása: Ha egy háromszög belső szögeinek felezői egy pontban metszik egymást, akkor súlypontja a háromszögön kívülre esik.

C megfordítása: Ha egy függvény felülről korlátos, akkor van minimuma.

D megfordítása: Ha egy egész szám osztható 21-gyel, akkor osztható 7-tel.

b) A kitöltött táblázat:

	Állítás	Megfordítás
A = Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az paralelogramma.	igaz	igaz
B = Ha egy háromszög súlypontja a háromszögön kívülre esik, akkor belső szögeinek felezői egy pontban metszik egymást.	igaz	hamis
C = Ha egy függvénynek van minimuma, akkor felülről korlátos.	hamis	hamis
D = Ha egy egész szám osztható 7-tel, akkor osztható 21-gyel.	hamis	igaz

4037 *a)* A Pitagorasz-tétel megfogalmazható ekvivalenciaként.

b) Ez a kijelentés igaz, de megfordítása nem.

c) A Thalész-tétel is megfogalmazható ekvivalenciaként.

d) Megfordítása sem igaz.

4038 Figyeljük meg, hogy a feltétel mindig teljesül.

a) Így az implikáció akkor válik igazzá, ha a következtetés is igaz.
A befejezés bármilyen igaz kijelentés lehet, például: $2 + 2 = 4$.

b) Igaz feltétel mellett az implikáció akkor válik hamissá, ha a következtetés hamis.
A befejezés bármilyen hamis kijelentés lehet, például: $2 + 2 = 5$.

4039 Figyeljük meg, hogy a következmény hamis.

a) Az implikáció akkor válik igazzá, ha a feltétel hamis.
A kiegészítés bármilyen hamis kijelentés lehet.

b) Az implikáció akkor hamis, ha a feltétel igaz.
A kiegészítés bármilyen igaz kijelentés lehet.

4040 *a)* Mivel *A* feltétele hamis, így az implikáció következményétől függetlenül válik igazzá.
Az *A* mondat kipontozott részére bármit írva az implikáció igaz. (Hiszen $h \to i \equiv i$ és $h \to h \equiv i$.)

b) Mivel *B* következménye igaz, akármit is írunk feltételnek, az implikáció teljesül. (Hiszen $i \to i \equiv i$ és $h \to i \equiv i$.)

c) Az *a)* pontban ismertetett megfontolások miatt az implikáció nem lehet hamis.

d) A *b)* pontban látott megfontolások miatt az implikáció nem lehet hamis.

4041 *a)* A keresett formulák:

$(A \wedge B) \to C$ = Ha n 3-mal és 8-cal osztható, akkor 24-gyel is osztható.

$D \to \neg F$ = Ha n páros, akkor nem prím.

$E \leftrightarrow (A \vee B)$ = n pontosan akkor osztható 12-vel, ha 3-mal vagy 8-cal osztható.

$(F \wedge \neg A) \to D$ = Ha n prím és nem osztható 3-mal, akkor páros.

b) A logikai értékek: igaz, hamis, hamis, hamis.



4042 Figyeljük meg a következőket:

– A-ból következik D, tehát az A és D kijelentések ugyanarról a számról szólnak.

– B és C kizárják egymást, tehát egyik az egyik, másik a másik számra vonatkozik.

– Amire A és D vonatkozik, az nem lehet prím, azaz A és D kizárja E-t.

Ezek alapján két eset lehetséges.

I. eset: Az egyik számra A, D, B; a másikra E, C vonatkozik. Az egyetlen 5-tel osztható prím az 5. Az A, D, B követelményeknek végtelen sok szám megfelel, legkisebb közülük a 6.

II. eset: Az egyik számra A, D, C; a másikra E, B vonatkozik. Az egyetlen páros prím a 2. Az A, D, C követelményeknek végtelen sok szám megfelel, legkisebb közülük a 15.

4043 *a)* Az A kijelentés csak abban az egy esetben hamis, ha hideg van és nem fázom. Ekkor a B kijelentés is hamis, hiszen nem igaz, hogy nincs hideg és nem fázom. Minden más esetben A és B is igaz. A és B ekvivalens állítások.

b) Az A kijelentés csak akkor hamis, ha piszkálnak és mégsem leszek mérges. B hamis, ha egyrészt nem igaz, hogy nem piszkálnak, másrészt nem igaz, hogy mérges vagyok. Minden más esetben A és B is igaz. A és B ekvivalens állítások.

c) Az A kijelentés pontosan akkor lesz hamis, ha süt a nap és mégsem jó a kedvem. Ebben az esetben a B kijelentés feltétele (nem jó a kedvem) igaz, de a következmény (nem süt a nap) nem teljesül, azaz B is hamis. Amennyiben a kedvem jó, akkor B igaz. Utoljára azt gondoljuk meg, ha rossz a kedvem és a nap se süt: ekkor igaz B feltétele és következménye is, azaz maga B kijelentés. Kimondhatjuk, A és B ekvivalens állítások.

Megjegyzés: Jelölje C = süt a nap, D = jó a kedvem. Ekkor formulákkal leírva az állításokat: $A = C \to D$ és $B = (\neg D) \to (\neg C)$.

d) Írjuk fel formulákkal a kijelentéseket. Jelölje M = most igent mond, S = soha nem mond igent. Ekkor $A = (\neg M) \to S$. A B állítás felírásához azt gondoljuk meg, hogy az „egyszer igent mond" megegyezik a „nem igaz, hogy sohasem mond igent" kijelentéssel. Tehát $B = (\neg S) \to M$.

Vegyük észre, hogy ez a forma megegyezik a *c)* feladatban látottal, csak C helyére $(\neg M)$-t és D helyére S-t kell írnunk! Tehát itt is teljesül, hogy A és B állítások ekvivalensek.

4044 A keresett táblázatok:

A	B
i	i
i	h
h	i
h	h

a)

A	$\to$	B	$(\neg A)$	$\vee$	B
i	**i**	i	h	**i**	i
i	**h**	h	h	**h**	h
h	**i**	i	i	**i**	i
h	**i**	h	i	**i**	h

b)

A	$\leftrightarrow$	B	$(A$	$\to$	$B)$	$\wedge$	$(B$	$\to$	$A)$
i	**i**	i	i	i	i	**i**	i	i	i
i	**h**	h	i	h	h	**h**	h	i	i
h	**h**	i	h	i	i	**h**	i	h	h
h	**i**	h	h	i	h	**i**	h	i	h

4045 *a)* Felhasználva a kettős tagadást, hogy a diszjunkció kommutatív és $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$:

$$A \to B \equiv (\neg A) \vee B \equiv B \vee (\neg A) \equiv \neg(\neg B) \vee (\neg A) \equiv (\neg B) \to (\neg A).$$

b) Az egyes lépéseket a számok magyarázzák:

$$(A \to B) \to C \equiv (1) \equiv [(\neg A) \vee B] \to C \equiv (2) \equiv \neg[(\neg A) \vee B] \vee C \equiv (3) \equiv [A \wedge (\neg B)] \vee C \equiv$$
$$\equiv (4) \equiv (A \vee C) \wedge [(\neg B) \vee C] \equiv (5) \equiv [\neg(\neg A) \vee C] \wedge [(\neg B) \vee C] \equiv (6) \equiv [(\neg A) \to C] \wedge [B \to C].$$

(1), (2) és (6): Az implikáció már megismert átírása diszjunkcióra, $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$.

(3): De Morgan-azonosság diszjunkcióra, $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$.



(4): a diszjunkció disztributív a konjunkcióra, $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

(5): kettős tagadás, $A \equiv \neg(\neg A)$.

Megjegyzés: Az *a)* pontban látott azonosság alapján alkothatjuk meg a *kontrapozíciónak* nevezett bizonyítási eljárást. A *„ha …, akkor …"* állításban megfordítjuk és letagadjuk a feltételt és a következményt, majd ezt az állítást bizonyítjuk. Ilyet alkalmaztunk pl. ebben a kijelentésben:

Ha α, β, γ egy háromszög belső szögei, akkor legalább az egyik szög legalább 60°-os.

A kontrapozíciós állítás:

Ha nem igaz, hogy $\alpha \geq 60°$ vagy $\beta \geq 60°$ vagy $\gamma \geq 60°$, akkor α, β, γ nem egy háromszög belső szögei.

A kontrapozíciós állítás bizonyítása:

A letagadott feltételt a De Morgan-azonosság alapján átírhatjuk $\alpha < 60°$ és $\beta < 60°$ és $\gamma < 60°$ alakban. Így $\alpha + \beta + \gamma < 3 \cdot 60° = 180°$. Mivel bizonyítottuk, hogy minden háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért α, β, γ nem lehetnek ugyanazon háromszög szögei. (Természetesen kijelentésünk csak az euklideszi geometriában érvényes.)

Teljes indukció (emelt szintű tananyag) – megoldások

4046 A sorok sorszáma szerinti teljes indukciót alkalmazunk. S_k jelöli a k-adik sorban levő számok összegét.

1. A 0-adik sorban levő 1-esre teljesül, hogy az összeg $S_0 = 1 = 2^0$.
2. Tegyük fel, hogy (t.f.h.) a k-adik sorban az összeg $S_k = 2^k$.
3. Kérdés, hogy $S_{k+1} = 2^{k+1}$ teljesül-e.

   Mivel minden sorban duplán számoljuk az előző sorban előforduló számokat (egyszer jobbra le, egyszer balra le, illetve az első és az utolsó 1-est odaírjuk), így az ott keletkező összeg is duplája lesz az előzőnek:

$$S_{k+1} = 2 \cdot S_k = (2) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

4047 Az n kitevő szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

1. A legkisebb természetes számra, $n = 0$-ra teljesül az állítás: $3 \mid 2 \cdot 7^0 + 1 = 3$.
2. T.f.h. $n = k$-ra teljesül az állítás: $3 \mid 2 \cdot 7^k + 1$.
3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén $3 \mid 2 \cdot 7^{k+1} + 1$ teljesül-e.

   Alakítsuk át a kifejezést:

$$2 \cdot 7^{k+1} + 1 = 2 \cdot 7 \cdot 7^k + 1 = 7 \cdot (2 \cdot 7^k + 1) - 6.$$

   Az indukciós feltevés miatt a zárójeles kifejezés (és annak hétszerese) osztható 3-mal, az utolsó 6-os osztható 3-mal, így különbségük is.

4048 Minden esetben n szerinti indukciót alkalmazunk.

a) 1. $n = 0$-ra: $2 \mid 0^2 - 0 = 0$.

2. T.f.h. $n = k$-ra $2 \mid k^2 - k$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén igaz-e, hogy $2 \mid (k+1)^2 - (k+1)$.

   Alakítsuk át:

$$(k+1)^2 - (k+1) = k^2 + 2k + 1 - k - 1 = k^2 + k = k^2 - k + 2k.$$

   Az első két tag különbsége az indukciós feltevés miatt osztható 2-vel, a $2k$ tag pedig páros. Tehát az állítás igaz.



b) 1. $n = 0$-ra: $27 \mid 10^0 + 18 \cdot 0 - 1 = 0$.

2. T.f.h. $n = k$-ra $27 \mid 10^k + 18k - 1$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re $27 \mid 10^{k+1} + 18 \cdot (k + 1) - 1$ teljesül-e.

Alakítsuk át:

$$10^{k+1} + 18 \cdot (k + 1) - 1 = 10 \cdot 10^k + 18k + 17 = 10 \cdot (10^k + 18k - 1) - 162k + 27.$$

A zárójeles kifejezés osztható 27-tel (az indukciós feltevés miatt), mint ahogy 162 és 27 is. Így az egész kifejezés osztható 27-tel.

c) 1. $n = 0$-ra $6 \mid 0^3 + 11 \cdot 0 = 0$.

2. T.f.h. $n = k$ esetén $6 \mid k^3 + 11k$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén $6 \mid (k + 1)^3 + 11 \cdot (k + 1)$ teljesül-e.

Alakítsuk át:

$$(k + 1)^3 + 11 \cdot (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = k^3 + 11k + 3k \cdot (k + 1) + 12.$$

Az első két tag összege az indukciós feltevés miatt osztható 6-tal. A szorzat osztható 3-mal, és mivel két egymást követő szám is szerepel benne, az egyik biztosan páros. Tehát $3k \cdot (k + 1)$ is osztható 6-tal. Végül $6 \mid 12$, így 6 az egész kifejezésnek is osztója.

4049 Ismét n szerinti indukciót alkalmazunk.

1. $n = 0$-ra az állítás teljesül: $1 = (1 + a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a = 1$.

2. T.f.h. $n = k$-ra igaz, hogy $(1 + a)^k \geq 1 + k \cdot a$.

3. Kérdés, hogy ekkor $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1) \cdot a$ teljesül-e.

Kezdjük átalakítani a bal oldalt:

$$(1 + a)^{k+1} = (1 + a) \cdot (1 + a)^k \geq (1 + a) \cdot (1 + k \cdot a) =$$
$$= 1 + a + k \cdot a + k \cdot a^2 \geq 1 + a + k \cdot a = 1 + (k + 1) \cdot a.$$

Az első egyenlőtlenségnél kihasználtuk az indukciós feltevést, a másodiknál egész egyszerűen elhagytunk egy nemnegatív tagot (k természetes szám, $a^2 \geq 0$).

4050 1. $n = 1$-re $1^2 = \dfrac{1 \cdot (1 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$.

2. T.f.h. $n = k$-ra $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k \cdot (k + 1) \cdot (2k + 1)}{6}$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \dfrac{(k + 1) \cdot (k + 2) \cdot (2k + 3)}{6}$ igaz-e.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k \cdot (k + 1) \cdot (2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 =$$

$$= \frac{k \cdot (k + 1) \cdot (2k + 1)}{6} + \frac{6 \cdot (k + 1)^2}{6} = (k + 1) \cdot \frac{k \cdot (2k + 1) + 6 \cdot (k + 1)}{6} =$$

$$= (k + 1) \cdot \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = (k + 1) \cdot \frac{(k + 2) \cdot (2k + 3)}{6}.$$

Pontosan ezt kerestük.

4051 n szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

1. A kiinduló érték $n = 2$, erre az állítás teljesül: $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} > \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Átalakítva $6\sqrt{2} > 8$, négyzetre emelve mindkét oldalt: $72 > 64$.

2. T.f.h. $n = k$ esetén $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2k - 1}{2k} > \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.



3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén teljesül-e: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot (k+1) - 1}{2 \cdot (k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{(k+1)}}$.

Az indukciós feltevés szerint igaz, hiszen minden szorzótényező pozitív szám:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2 \cdot (k+1) - 1}{2 \cdot (k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{2 \cdot (k+1) - 1}{2 \cdot (k+1)} = \frac{2k+1}{4\sqrt{k} \cdot (k+1)}.$$

Kérdés, hogy ez a csökkentett érték vajon nagyobb-e még a kérdéses $\frac{1}{2\sqrt{(k+1)}}$-nél. Szorozzuk meg mindkét oldalt $4\sqrt{k} \cdot (k+1)$-gyel:

$$\frac{2k+1}{4\sqrt{k} \cdot (k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{(k+1)}},$$

$$2k + 1 > 2\sqrt{k \cdot (k+1)}.$$

Négyzetre emelve mindkét oldalt, kapjuk az igaz $4k^2 + 4k + 1 > 4k^2 + 4k$ egyenlőtlenséget.

4052 1. $n = 1$-re: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 8 + 6}{24} > 1$.

2. T.f.h. $n = k$-ra az állítás teljesül: $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{3k+1} > 1$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re teljesül-e: $\frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \ldots + \frac{1}{3 \cdot (k+1)+1} > 1$.

$$\frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \ldots + \frac{1}{3 \cdot (k+1)+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+1} + \ldots + \frac{1}{3k+4} =$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+1} + \ldots + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} >$$

$$> 1 + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}.$$

Ha most az utolsó négy tag összege pozitív, akkor ez az összeg is nagyobb, mint 1.

Legyen $x = 3k + 3 > 0$, így $k + 1 = \frac{x}{3} > 0$.

Ekkor:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x} =$$

$$= \frac{x \cdot (x+1) + x \cdot (x-1) - 2 \cdot (x^2 - 1)}{x \cdot (x^2 - 1)} = \frac{2}{x \cdot (x^2 - 1)} > 0.$$

4053 Vizsgáljuk meg az első néhány összeget:

$$1 = 1; \quad 1 + 3 = 4; \quad 1 + 3 + 5 = 9; \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16; \quad \ldots$$

Egyrészt azt látjuk, hogy az összeg négyzetszám. Másrészt az utolsó, n-edik szám előáll $(2n - 1)$ alakban. Sejtésünk tehát így szól: az első n páratlan szám összege n^2.

Bizonyítsuk n szerinti teljes indukcióval.

1. $n = 1$-re az állítás teljesül.
2. T.f.h. $n = k$ esetén az állítás teljesül: $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$.
3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ teljesül-e.

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$



4054 1. $n = 1$-re $3 = \dfrac{10^{1+1} - 9 \cdot 1 - 10}{27} = \dfrac{81}{27} = 3$.

2. T.f.h. $n = k$ esetén $3 + 33 + 333 + \ldots + 33\ldots3 = \dfrac{10^{k+1} - 9k - 10}{27}$.

3. Kérdés, hogy $3 + 33 + 333 + \ldots + 33\ldots3 + 33\ldots33 = \dfrac{10^{k+2} - 9 \cdot (k+1) - 10}{27}$ teljesül-e.

(Az utolsó $33\ldots33$ szám $(k + 1)$ darab 3-as számjegyet tartalmaz.)

Használjuk fel az indukciós feltevést, majd vizsgáljuk meg, egyenlő-e a két oldal:

$$\frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + 33\ldots33 = \frac{10^{k+2} - 9 \cdot (k+1) - 10}{27}, \qquad /\cdot 27$$

$$10 \cdot 10^k - 9k - 10 + 27 \cdot 33\ldots33 = 100 \cdot 10^k - 9k - 19, \qquad /+9k,\ +10,\ -10 \cdot 10^k$$

$$81 \cdot 11\ldots11 = 90 \cdot 10^k - 9, \qquad /:9$$

$$9 \cdot 11\ldots11 = 10^{k+1} - 1,$$

$$99\ldots99 = 10^{k+1} - 1,$$

ez pedig igaz, mert a bal oldalon $(k + 1)$ darab 9-es számjegyet találunk.

4055 Az egyenesek száma szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

1. Egy egyenes $(n = 1)$ a síkot két részre osztja: az egyiket pirosra, a másikat zöldre színezzük.
2. T.f.h. $n = k$ egyenes esetén kiszíneztük a feltételeknek megfelelően a „térképet".
3. Meg tudjuk-e ezt tenni még egy $(k + 1)$-edik egyenes berajzolása esetén? Igen, ugyanis berajzolva az újabb vonalat, ez két részre osztja a térképet. Az egyik oldalt hagyjuk meg úgy színezve, ahogy eddig is volt. A másik felén minden rész színét változtassuk az ellenkezőjére. Így
   – ezen az oldalon a szomszédos részek különböző színei különbözők maradnak;
   – azok a részek, amelyekbe az új egyenes belemetsz, két színűek lesznek, az egyenes két oldalán különböző színeket találunk.





Így elérjük, hogy továbbra se legyenek oldalszomszédos, azonos színű részek.

4056 1. $n = 0$ esetén $11 \mid 2^{6 \cdot 0 + 1} + 3^{2 \cdot 0 + 2} = 2 + 9 = 11$.

2. T.f.h. $n = k$-ra $11 \mid 2^{6k+1} + 3^{2k+2} = 2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re vajon $11 \mid 2^{6 \cdot (k+1)+1} + 3^{2 \cdot (k+1)+2}$ teljesül-e.

$$2^{6 \cdot (k+1)+1} + 3^{2 \cdot (k+1)+2} = 2^{6k+7} + 3^{2k+4} = 64 \cdot 2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9 \cdot 9^k =$$

$$= 64 \cdot (2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k) - 64 \cdot 9 \cdot 9^k + 9 \cdot (2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k) - 9 \cdot 2 \cdot 64^k.$$

A két zárójelben levő kifejezés az indukciós feltevés szerint osztható 11-gyel, ezért koncentráljunk a maradék két tagra. Kiemelve belőlük (-1)-et, kapjuk:

$$64 \cdot 9 \cdot 9^k + 9 \cdot 2 \cdot 64^k = 9 \cdot (2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k) + 55 \cdot 9 \cdot 9^k.$$

Itt a zárójeles kifejezés az indukciós feltevés szerint ismét osztható 11-gyel, mint ahogy az utolsó tagban levő 55-ös együttható is. Készen vagyunk: az összes tagról kimutattuk, hogy osztható 11-gyel.



4057 *a)* Kezdjük néhány eset megvizsgálásával:

$$1! < 3^1;\ \ 2! < 3^2;\ \ \ldots;\ \ 6! < 3^6;\ \ 7! > 3^7;\ \ 8! > 3^8.$$

Sejtésünk: bármely $n \geq 7$ egész számra $n! > 3^n$.

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 7$-re az állítás teljesül: $5040 = 7! > 3^7 = 2187$.
2. T.f.h. $n = k$ értékre teljesül az állítás: $k! > 3^k$.
3. Kérdés, hogy $(k+1)! > 3^{k+1}$ teljesül-e. Induljunk ki a faktoriálisból, használjuk az indukciós feltevést:

$$(k+1)! = k! \cdot (k+1) > (k+1) \cdot 3^k.$$

Ha ez utóbbi kifejezés nagyobb vagy egyenlő, mint $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k$, akkor készen is vagyunk:

$$(k+1) \cdot 3^k \geq 3 \cdot 3^k\,?$$

Osszuk le mindkét oldalt a pozitív 3^k-nal, így $k + 1 \geq 3$, ami természetesen teljesül, hiszen $k > 6$.

b) Vizsgáljunk meg néhány értéket:

$$3^0 > 0^3;\ \ 3^1 > 1^3;\ \ 3^2 > 2^3;\ \ 3^3 = 3^3;\ \ 3^4 > 4^3;\ \ 3^5 > 5^3;\ \ \ldots$$

Úgy tűnik, 3-nál nagyobb és kisebb értékekre teljesül az állítás, csak 3-ra nem (ekkor egyenlőség áll fenn). A bizonyítandó állítás tehát: bármely $n > 3$ természetes számra $3^n > n^3$.

Megjegyzés: Ha megengedjük az egyenlőséget, akkor $n = 0$-tól kimondhatjuk az állítást.

1. $n = 4$ esetén $81 = 3^4 > 4^3 = 64$.
2. T.f.h. $n = k$-ra $3^k > k^3$.
3. Kérdés, hogy $3^{k+1} > (k+1)^3$ teljesül-e. Először alakítsuk át a bal oldalt, majd használjuk fel az indukciós feltételt:

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot k^3.$$

Ha igaz, hogy $3 \cdot k^3 \geq (k+1)^3$, akkor készen is vagyunk.

Fejtsük ki a zárójelet, vonjunk ki mindkét oldalból k^3-t:

$$2k^3 \geq 3k^2 + 3k + 1.$$

Osszuk el mindkét oldalt k-val $(k > 3)$, és rendezzünk a tört kivételével egy oldalra:

$$2k^2 - 3k - 3 \geq \frac{1}{k}.$$

A parabola zérushelyei:

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}, \quad \text{azaz} \quad k_1 \approx -0{,}69 \ \text{ és } \ k_2 \approx 2{,}19.$$

Ne feledjük, hogy számunkra csak a $k > 3$ egész értékek lényegesek!

Ezekre $\frac{1}{k}$ kisebb 1-nél, a parabola pedig pozitív egész értékeket vesz fel, tehát az egyenlőtlenség teljesül.

4058 Figyeljük meg alaposan az összeget. Mivel a szinuszfüggvény 2π szerint periodikus, valamint $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, ezért a kérdéses összeg megegyezik a

$$-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \ldots$$

váltakozó előjelű összeggel.



Az alábbi táblázatban n az összeadandó váltakozó előjelű számok számát jelöli, S_n pedig az összegüket.

n	1	2	3	4	5	6	7
	-1	$-1+2$	$1-3$	$-2+4$	$2-5$	$-3+6$	$3-7$
S_n	-1	1	-2	2	-3	3	-4
	$-\frac{n+1}{2}$	$\frac{n}{2}$	$-\frac{n+1}{2}$	$\frac{n}{2}$	$-\frac{n+1}{2}$	$\frac{n}{2}$	$-\frac{n+1}{2}$

A probléma az, hogy összegünk a váltakozó előjel miatt kétféleképpen viselkedik: más lesz páros sok és más páratlan sok szám összegére. Az indukciót csak két lépésben végezhetjük el. Egyszer igazolnunk kell a párosról páratlanra történő lépés helyességét, egyszer pedig a páratlanról párosra lépés helyességét. Ehhez írjunk fel két kiinduló értéket és két indukciós feltevést.

Kezdjük a páratlan esettel.

1. $n = 1$-re az állítás igaz, $-1 = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi\right) = -\frac{1+1}{2} = -1$.

2. T.f.h. $n = (2k-1)$-re az állítás teljesül, azaz $S_n = S_{2k-1} = -\frac{n+1}{2} = -\frac{2k-1+1}{2} = -k$.

3. Kérdés, hogy $n = 2k$-ra igaz-e az állítás: $S_n = \frac{n}{2}$ vagy másképp $S_{2k} = \frac{2k}{2} = k$.

$$S_{2k} = S_{2k-1} + 2k = -k + 2k = k.$$

Páratlanról párosra tehát át tudunk lépni. Gondoljunk bele, a párosról páratlanra átlépő indukcióhoz nincs szükség kezdőérték-vizsgálatra, ugyanis az $n = 1$ kezdőértéket megvizsgáltuk, és utána igazoltuk a róla való továbblépést. A második $n = 2$ érték igazsága ebből már következik.

Lássuk a páros eseteket.

2. T.f.h. $n = 2k$-ra az állítás teljesül, azaz $S_{2k} = \frac{n}{2} = \frac{2k}{2} = k$.

3. Kérdés, hogy $n = 2k+1$-re igaz-e.

$$S_n = S_{2k+1} = S_{2k} - (2k+1) = k - 2k - 1 = -k - 1 = -\frac{2k+2}{2} = -\frac{(2k+1)+1}{2} = -\frac{n+1}{2}.$$

Megjegyzés: Érdemes megvizsgálni a következő összeget is (az utolsó tagban sin-t vagy cos-t írunk aszerint, mire jön ki a váltakozó lépés):

$$1 \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 4 \cdot \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \ldots + n \cdot \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

4059 A probléma kettős. Egyrészt a 2. indukciós feltevésben gyakorlatilag bármilyen k-ra feltesszük, hogy minden $n \leq k$-ra igaz a feltétel. Ez azonban csak $n = k = 0$-ra igaz, bármely annál nagyobb értékre nem teljesül a feltétel.

Másrészt a 3. pontban kifejtett gondolatmenetben két értékre, k-ra és $(k-1)$-re is alkalmazzuk az indukciós feltételt, holott a kezdőérték-vizsgálatot csak egy értékre végeztük el ($n = 0$-ra). Persze a feladatban ezt nem is végezhetjük el többre, hiszen csak $a^0 = 1$ bármely a-ra.

Megjegyzés: Természetesen, ha több kezdőértékre is meg tudjuk állapítani az állítás igazságát, akkor ezeket fel is használhatjuk a bizonyításban.



Vegyes feladatok – megoldások

4060 *a)* Hamis. Például $2 + 3 = 5$.

c) Hamis. Mindkettő kisebb vagy egyenlő, mint 1, de ha az egyik 1, a másik 0.

c) Igaz. Négyzetszám csak 0 vagy 1 maradékot adhat hárommal osztva.

d) Igaz. Például $f(x) = 0$.

4061 *a)* Nem, mert a De Morgan-azonosságok szerint B-ben „vagy" műveletnek kell szerepelni.

b) Igen, hiszen a műveletek disztributívak.

4062 *a)* Kinyitottam a sütőt vagy kivettem a tálat, és megégettem a kezem.

Nem igaz, hogy kinyitottam a sütőt és kivettem a tálat.

Kinyitottam a sütőt és kivettem a tálat, vagy nem vettem ki a tálat és megégettem a kezem.

b) Nem nyitottam ki a sütőt és nem vettem ki a tálat, vagy nem égettem meg a kezem.

Kinyitottam a sütőt és kivettem a tálat.

Nem nyitottam ki a sütőt vagy nem vettem ki a tálat, és kivettem a tálat vagy nem égettem meg a kezem.

4063 *a)* $B \leftrightarrow (A \wedge C)$;

b) $(C \wedge B) \rightarrow (\neg A)$.

c) Ha esik az eső, akkor próbára megyek vagy fáradt vagyok.

d) Próbára megyek és nem vagyok fáradt, de esik az eső.

Állítás	Igaz	Hamis
a)		X
b)	X	
c)	X	
d)		X

4064 A bolondokháza eme lakója őrült orvos.

4065 A kitöltött táblázat: (➡)

4066 1. $n = 0$-ra $6 \mid 0 \cdot (0^2 + 5) = 0$.

2. T.f.h. $n = k$ esetén $6 \mid k \cdot (k^2 + 5) = k^3 + 5k$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén $6 \mid (k + 1) \cdot [(k + 1)^2 + 5]$ teljesül-e.

$$(k + 1) \cdot [(k + 1)^2 + 5] = (k + 1) \cdot [k^2 + 2k + 6] = k^3 + 3k^2 + 8k + 6 =$$
$$= k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6 = k^3 + 5k + 3k \cdot (k + 1) + 6.$$

Az első két tag összege, azaz $k^3 + 5k$ az indukciós feltevés miatt osztható 6-tal. A szorzat osztható 3-mal és az egyik tényezője biztosan páros, tehát osztható 6-tal.

4067 A meggondolással két probléma is van. Egyrészt az indukciós feltevés hibás, nyilván lehet már két leányt is találni, akiknek különböző színű a haja. Másrészt ha ez igaz is lenne, a bizonyítás elve akkor sem működik $n = 1$-ről $n = 2$-re való átlépéskor. Egymást átfedő csoportok létrehozásában gondolkodunk, de 2 fő esetén 1 fős csoportok lesznek, melyek között nincs átfedés.

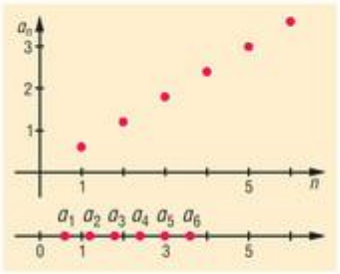
12.2. SZÁMSOROZATOK

A sorozat fogalma, példák sorozatokra – megoldások

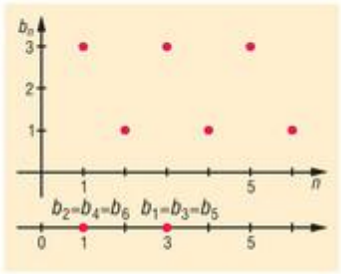
4068 *a)* $a_5 = -2$, $a_{20} = 28$; *b)* $b_5 = 75$, $b_{20} = 0$; *c)* $c_5 = -100$, $c_{20} = 200$;
d) $d_5 = 53$, $d_{20} = 7703$; *e)* $e_5 = \sqrt{19}$, $e_{20} = 8$; *f)* $f_5 = \sqrt{21} - 5$, $f_{20} = -11$;
g) $g_5 = 0$, $g_{20} = \frac{45}{41}$; *h)* $h_5 = 11$, $h_{20} = \frac{397}{17}$

4069 *a)* $a_n = 4 + n$; *b)* $b_n = 2n - 5$; *c)* $c_n = -2^{n-1}$;
d) $d_n = (-1)^{n+1}$; *e)* $e_n = \frac{1}{n}$; *f)* $f_n = \sqrt[n+1]{7}$;
g) $g_n = \log_2 n$; *h)* $h_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 3k+1, \\ 2, & \text{ha } n = 3k+2, \\ 3, & \text{ha } n = 3k. \end{cases}$

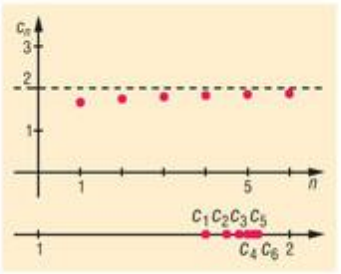
4070 *a)*



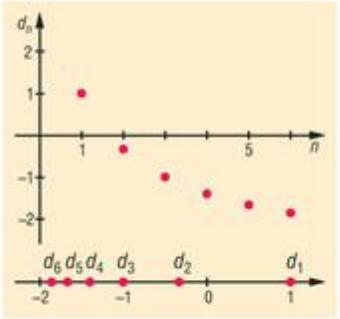
b)



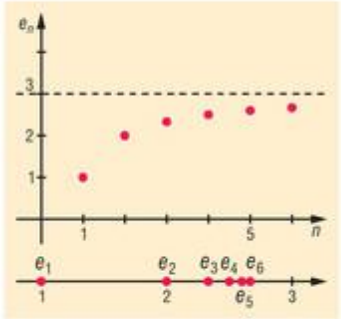
c)



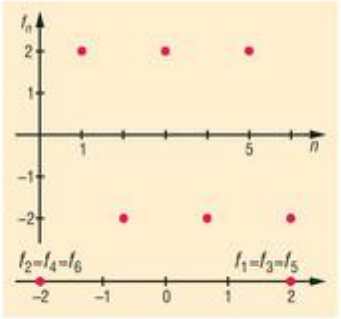
d)



e)



f)



4071 *a)* 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{64}$; *b)* 2006; 2002; 1998; 1994; 1990; 1986;
c) $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{15}$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{23}$.

4072 $a_{2010} = 1$, $S_{2010} = 6030$.

4073 *a)* $a_{50} = 12 = b_{25}$; *b)* $a_{12} = 4 = b_{99}$; *c)* $a_{60} = 1 = b_{67}$;
d) $a_{43} = \frac{1}{2} < b_{101} = \frac{7}{13}$; *e)* $a_{77} = 3 > b_7 = 2$.

4074 *a)* $n = 6$; *b)* $n = 10$; *c)* $n = 11$;
d) $n = 12$; *e)* $n = 2^{30}$; *f)* $n = 1; 5; 13; 17; \ldots$

Példák rekurzív sorozatokra – megoldások

4075 *a)* 5; 4; 2; −2; −10;

b) 5; 6; 3; 12; −15;

c) 5; $\frac{7}{3}$; $\frac{5}{9}$; $-\frac{17}{27}$; $-\frac{115}{81}$;

d) 5; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{1}{24}$.

4076 Építsük fel a sorozatot: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ és a negyedik tagtól kezdve:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},$$

tehát a további tagok:

$$a_4 = 7;\ a_5 = 13;\ a_6 = 24;\ a_7 = 44;\ a_8 = 81;\ a_9 = 149;\ a_{10} = 274.$$

Tehát 274-féleképpen érhetünk fel.

4077 A sorozat tagjai: 1; 1; 1; 1; 1, …, tehát $a_{2010} = 1$ és $S_{2010} = 2010$.

4078 A sorozat tagjai: 1; 1; 0; −1; −1; 0; 1; 1; …, látható, hogy egy hatos periódus után újra ugyanazok a számok lesznek a sorozat elemei.

Mivel $2009 = 6 \cdot 334 + 5$, a 2009-edik tag −1 lesz.

Egy periódusban a számok összege 0, mivel a hatodik elem is 0, az első 2009 tag összege is 0.

4079 Vizsgáljuk meg a sorozat tagjait:

$$a_3 = \frac{q+1}{p};\quad a_4 = \frac{\frac{q+1}{p}+1}{q} = \frac{p+q+1}{p\cdot q};\quad a_5 = \frac{\frac{p+q+1}{p\cdot q}+1}{\frac{q+1}{p}} = \frac{(p+1)\cdot(q+1)}{p\cdot q}\cdot\frac{p}{q+1} = \frac{p+1}{q};$$

$$a_6 = \frac{\frac{p+1}{q}+1}{\frac{p+q+1}{p\cdot q}} = p;\quad a_7 = \frac{p+1}{\frac{p+1}{q}} = q.$$

A tagok ismétlődnek, a periódus öt. Tehát:

$$a_{2014} = a_4 = \frac{p+q+1}{p\cdot q}.$$

4080 *a)* Lehet, például: 1; 2009; 2010; …

b) Ha a második tag x, a sorozat tagjai:

$$1;\ x;\ 1+x;\ 2\cdot(1+x);\ 4\cdot(1+x);\ 8\cdot(1+x);\ \ldots;\ a_n = 2^{n-3}\cdot(1+x).$$

A $2^{n-3}\cdot(1+x) = 1000$ egyenlet legnagyobb megoldása $n = 6$, ekkor $x = 124$.

Számtani sorozatok – megoldások

4081 *a)* $a_{11} = 23$; *b)* $a_{56} = 158$; *c)* $a_{237} = 701$; *d)* $a_{2010} = 6020$.

4082 *a)* 46; *b)* 91; *c)* 9721.

4083 *a)* 2773-adik; *b)* 3016-odik; *c)* nem tagja a sorozatnak.

4084 $d = -1$.

4085 *a)* 116; *b)* 798.



4086 *a)* $a_6 = 23 + 5 \cdot 5 = 48$ km. *b)* $S_7 = 266$ km.

4087 A világcsúcs 158 kg.

4088 *a)* $a_1 = 7$ és $d = 3$. *b)* $S_{40} = 2620$.

4089 *a)* $a_1 = 50$ és $d = -4$. *b)* $S_{50} = -2400$.

4090 Igen, mivel

$$\frac{11\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3\sqrt{5}+1+8\sqrt{5}-2}{2}.$$

A sorozat különbsége:

$$d = \frac{5\sqrt{5}-3}{2}.$$

4091 *a)* A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + 2d + a_1 + 7d &= 34 \\ a_1 + d + a_1 + 10d &= 46 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $a_1 = -10$ és $d = 6$.

b) $2012 = a_{338}$.

4092 Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + (a_1 + 3d) &= 38 \\ (a_1 + 6d) - (a_1 + 2d) &= 16 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = 4$ és $a_1 = 13$.

a) 92; *b)* 101; *c)* 7860.

4093 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 9d) &= -25 \\ 2a_1 + 8d &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $a_1 = 13$ és $d = -2$.

4094 Az egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{aligned} 3a_1 + 3d &= -9 \\ 3a_1 + 9d &= 39 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = 8$ és $a_1 = -11$.

4095 Az egyenletrendszerünk a következő:

$$\left.\begin{aligned} 8a_1 + 28d &= 14 \\ 4a_1 + 26d &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = -\frac{1}{2}$ és $a_1 = \frac{7}{2}$.

4096 A feltétel szerint:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} = \frac{4a_1 + 6d}{4a_1 + 22d} = \frac{1}{3}, \quad \text{amiből} \quad d = 2a_1.$$

A keresett arány:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}}{a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{20}} = \frac{10a_1 + 45d}{10a_1 + 145d} = \frac{1}{3}.$$

4097 A feltétel alapján:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}}=\frac{(a_5-4d)+(a_5-3d)+(a_5-2d)+(a_5-d)+a_5}{(a_5+d)+(a_5+2d)+(a_5+3d)+(a_5+4d)+(a_5+5d)}=$$

$$=\frac{50-10d}{50+15d}=\frac{1}{5},$$

ebből pedig a sorozat differenciája: $d=\frac{40}{13}$.

4098 *a)* Mivel $a_1=3$ és $d=8$, ezért: $a_n=2011=251\cdot 8+3$, amiből leolvasható, hogy $n=252$.

A $2011=3+(n-1)\cdot 8$ egyenlet megoldásából szintén $n=252$ adódik.

Tehát 252 házhoz kézbesített levelet a postás.

b) Mivel $a_1=6$ és $d=10$, továbbá az utolsó 6-ra végződő házszám a 2006, ezért felírható: $a_n=2006=200\cdot 10+6$, amiből leolvasható, hogy $n=201$.

A $2006=6+(n-1)\cdot 10$ egyenlet megoldásából szintén $n=201$ adódik.

Tehát 201 házhoz kézbesített levelet a postás.

4099 A számtani sorozat első k elemének összege $S_k=\frac{a_1+a_k}{2}\cdot k$, ez alapján: $k=28$.

4100 A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$\frac{2\cdot 17+(n-1)\cdot 10}{2}\cdot n=1472.$$

Rendezett alakja: $5n^2+12n-1472=0$, megoldásai $n_1=16$ és $n_2=-18{,}4$. Természetesen csak a pozitív egész szám lehet megoldás. Tehát 16 számot adtunk össze.

4101 Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned}5010&=\frac{2a_1+3\cdot(n-1)}{2}\cdot n\\ 6895&=\frac{2a_1+3\cdot(n+9)}{2}\cdot(n+10)\end{aligned}\right\}.$$

Az a_1 kiejtése után a $3n^2-347n+10020=0$ egyenletet kapjuk, amelynek pozitív egész megoldása: $n=60$, ebből $a_1=-5$.

4102 *a)* A következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{44+(n-1)\cdot 5}{2}\cdot n=385,\quad \text{ahonnan}\quad 5n^2+39n-770=0.$$

Ennek pozitív megoldása: $n\approx 9{,}12$, tehát 10 nap alatt ki tudja olvasni a könyvet.

b) $S_9=378$, tehát a tizedik napra csak 7 oldal olvasnivaló marad.

4103 Egy vágásnál 9-cel nő a lapok száma, ha összesen k darab lapot vágtunk el:

$$2010=30+9k\ \Rightarrow\ k=220.$$

Tehát 220 lap szétvágásával létrejöhetett 2010 darab, valószínűleg jól számolt az illető.

4104 Az alábbi egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$10\,000\le 13+17\cdot(n-1)\le 99\,999.$$

Azt kapjuk, hogy $588{,}47\le n\le 5882{,}53$. Az első ötjegyű tag: $a_{589}=10\,009$, az utolsó ötjegyű tag: $a_{5882}=99\,990$. Tehát a sorozatnak 5294 ötjegyű tagja van.

4105 Ha a középső oldal b és a sorozat különbsége d, akkor az oldalak:

$$b-d;\ \ b;\ \ b+d.$$

Ha az utóbbi az átfogó, akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$(b-d)^2+b^2=(b+d)^2,$$

amiből $b^2=4bd$. Mivel $b\neq 0$, ezért $b=4d$.

Tehát a háromszög oldalai: $3d$; $4d$; $5d$.

Az egyik hegyesszög:

$$\sin\alpha=\frac{3d}{5d}=\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\alpha=36{,}87°.$$

A másik hegyesszög: $\beta=53{,}13°$.

4106 Ha az oldalak hossza:

$$b-d;\ \ b;\ \ b+d;$$

a kerületből: $b=40$. A másik feltételből:

$$(40-d)\cdot(40+d)=1431,\quad\text{azaz}\quad 1600-d^2=1413,$$

amiből $d=13$ vagy $d=-13$.

Így az oldalak hossza: 27 cm, 40 cm és 53 cm.

A területet Héron-képlettel érdemes számolni: $T\approx 526{,}5\ \text{cm}^2$.

4107 Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege: $(n-2)\cdot 180°$. A számtani sorozat miatt:

$$(n-2)\cdot 180°=\frac{142{,}5+172{,}5}{2}\cdot n,$$

melynek megoldása: $n=16$.

4108 Az első 201 természetes szám összege:

$$1+2+3+\ldots+201=201\cdot 101=20\,301.$$

Ha az összegbe k helyett $-k$ kerül, akkor $2k$-val csökken. Mivel kezdetben páratlan volt az összeg, nem kaphatunk 2010-et.

4109 Például nincs 3-ra végződő négyzetszám, ezért az $a_n=10n+3$ megfelel, de megoldás lehet a $b_n=16n+7$ is.

4110 Ha az első szám $\overline{ab}$, akkor a számok:

$$10a+b;\ \ 10b+a;\ \ 100a+b.$$

Mivel számtani sorozatot alkotnak:

$$10b+a=\frac{10a+b+100a+b}{2},\quad\text{amiből}\quad b=6a.$$

Csak a 16; 61; 106 számhármas felel meg.

4111 A feltételek alapján:

$$\left.\begin{aligned}m&=a_1+(k-1)\cdot d\\ k&=a_1+(m-1)\cdot d\end{aligned}\right\}.$$

Kivonva egymásból:

$$m-k=d\cdot[(k-1)-(m-1)]=d\cdot(k-m),$$

ahonnan, mivel $k\neq m$, adódik, hogy:

$$d=-1\quad\text{és}\quad a_1=k+m-1,\quad\text{tehát}\quad a_n=k+m-1-(n-1)=k+m-n.$$

4112 Jelöljük az $\{a_n\}$ sorozat első elemét a_1-gyel, különbségét pedig d-vel. Írjuk fel a $\{b_n\}$ sorozat általános tagját:

$$b_n = \frac{a_{5n-4} + a_{5n}}{2} \cdot 5 = \frac{2a_1 + (10n-6)\cdot d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 25n \cdot d - 15d =$$

$$= (5a_1 - 15d) + 25d \cdot n = (5a_1 - 15d) + (n-1)\cdot 25d + 25d = (5a_1 + 10d) + (n-1)\cdot 25d.$$

Az általános tag azt mutatja, hogy egy olyan számtani sorozatot kapunk, melynek első eleme: $b_1 = 5a_1 + 10d$, differenciája pedig $D = 25d$.

Mértani sorozatok – megoldások

4113 A sorozat első hat tagja:

$$a_1 = -2; \quad a_2 = \frac{3}{4}; \quad a_3 = -\frac{9}{32}; \quad a_4 = \frac{27}{256}; \quad a_5 = -\frac{81}{2048}; \quad a_6 = \frac{243}{16384}.$$

4114 A keresett tagok:

$$a_1 = \frac{a_4}{q^3} = -\frac{5}{27}; \quad a_6 = a_4 \cdot q^2 = 45; \quad a_9 = -1215.$$

4115 Mivel:

$$q^3 = \frac{a_4}{a_1} = -\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Így a tizedik elem, illetve az első tíz tag összege:

$$a_{10} = 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{5}{128}, \quad \text{illetve} \quad S_{10} = 20 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{1705}{128}.$$

4116 Mivel

$$q^4 = \frac{a_5}{a_1} = 16 \quad \Rightarrow \quad q = 2 \quad \text{vagy} \quad q = -2.$$

Az első esetben: $a_8 = -384$ és $S_8 = -765$. A második esetben: $a_8 = 384$ és $S_8 = 255$.

4117 Mivel

$$q^2 = \frac{a_8}{a_6} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Az első esetben:

$$a_1 = \frac{a_6}{q^5} = 896 \quad \text{és} \quad S_6 = 1764.$$

A második esetben:

$$a_1 = \frac{a_6}{q^5} = -896 \quad \text{és} \quad S_6 = -588.$$

4118 Mivel $q = 1$, ezért minden tag 23, így $S_9 = 207$.

4119 Mivel $q = -1$, ezért $S_{100} = 0$.

4120 Ha a mértani sorozat elemei:

$$1+x;\quad 8+x;\quad 22+x;$$

akkor

$$(8+x)^2=(1+x)\cdot(22+x).$$

Megoldva az egyenletet: $x=6$, tehát a sorozatunk:

$$7;\quad 14;\quad 28.$$

A sorozat hányadosa: $q=2$.

4121 A hosszak olyan mértani sorozatot alkotnak, ahol $q=1{,}25$ és $a_1=1$.

A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$15=1\cdot 1{,}25^{n-1}.$$

Tízes alapú logaritmussal számolva:

$$n=1+\frac{\lg 15}{\lg 1{,}25}\approx 13{,}14.$$

Tehát a 14. napon éri el a 15 méteres hosszúságot.

4122 Keressük az alábbi egyenlőtlenség megoldásait:

$$10\,000\le 3\cdot 5^{n-1}\le 99\,999.$$

Tízes alapú logaritmussal számolva:

$$\lg 3333{,}33\le \lg 5^{n-1}\le \lg 33333,$$

azaz

$$\frac{\lg 3333{,}33}{\lg 5}\le n-1\le \frac{\lg 33333}{\lg 5},$$

ahonnan

$$6{,}04\le n\le 7{,}47.$$

Tehát a sorozatnak csak a hetedik tagja ötjegyű. Valóban: $a_7=46\,875$.

4123 A következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3&=80\\ a_1\cdot q^4-a_1\cdot q^2&=240\end{aligned}\right\},$$

kiemelés után:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot q^2\cdot(1+q)&=80\\ a_1\cdot q^2\cdot(q^2-1)&=240\end{aligned}\right\}.$$

Mivel $q\neq -1$, a második és első egyenlet hányadosából adódik, hogy:

$$\frac{q^2-1}{q+1}=3,$$

tehát $q=4$, a sorozat első eleme $a_1=1$.

4124 *a)* Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot(1+q)&=15\\ a_1\cdot q^2\cdot(1+q)&=60\end{aligned}\right\}.$$

Megoldásai:

$$a_1=5\ \text{és}\ q=2\quad\text{vagy}\quad a_1=-15\ \text{és}\ q=-2.$$

b) A megoldást a

$$\frac{16}{q}+16+16q=56, \quad \text{azaz} \quad 2q^2-5q+2=0$$

egyenletből kapjuk:

$$q=2 \text{ és } a_1=8 \quad \text{vagy} \quad q=\frac{1}{2} \text{ és } a_1=32.$$

c) A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot(1+q+q^2)&=57\\ a_1\cdot(1-q^2)&=15\end{aligned}\right\}.$$

Elosztva a két egyenletet, adódik hogy:

$$24q^2+5q-14=0.$$

Megoldásai:

$$q=\frac{2}{3} \text{ és } a_1=27 \quad \text{vagy} \quad q=-\frac{7}{8} \text{ és } a_1=64.$$

d) Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot(1+q)&=160\\ a_1\cdot q^5\cdot(1+q)&=1215\end{aligned}\right\}.$$

A két egyenlet hányadosából:

$$q^5=\frac{243}{32},$$

ebből adódik, hogy:

$$q=\frac{3}{2} \quad \text{és} \quad a_1=64.$$

4125 A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot(1+q+q^2+q^3)&=468\\ a_1\cdot q^4\cdot(1+q+q^2+q^3)&=292500\end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletek osztásával kapjuk, hogy $q^4=625$, amiből $q=5$ vagy $q=-5$.
A megoldás:

$$a_1=3 \text{ és } q=5 \quad \text{vagy} \quad a_1=-\frac{9}{2} \text{ és } q=-5.$$

4126 Mivel:

$$\frac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\cdot(5+3\sqrt{3})=97+56\sqrt{3},$$

a négyzetre emelés és a nevező gyöktelenítése után:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2-\sqrt{3}}\right)^2=(7+4\sqrt{3})^2=97+56\sqrt{3},$$

ezért az állítás igaz. A mértani sorozat hányadosa:

$$q=\sqrt{3}-1.$$



4127 Ha a számtani sorozat differenciája d, a feltétel szerint:

$$(10-d)^2=(10-2d)\cdot(10+2d).$$

Az egyenlet két megoldása:

$$d_1=0 \quad \text{és} \quad d_2=4.$$

A számtani sorozat első tagjai és a mértani sorozat hányadosai:

$d=0$ esetén $a_1=10$ és $q=1$, illetve $d=4$ esetén $a_1=-2$ és $q=3$.

4128 Az $\{a_n\}$ számtani sorozatra vonatkozó feltételből: $a_2=2$, így a számok:

$$2-d;\ \ 2;\ \ 2+d.$$

A $\{b_n\}$ mértani sorozat első három eleme:

$$7-d;\ \ 4;\ \ 3+d.$$

Ebből:

$$4^2=(7-d)\cdot(3+d),$$

ennek megoldásai:

$$d_1=5 \quad \text{és} \quad d_2=-1.$$

Az első esetben: $q_1=2$ és $b_1=2$, a második esetben: $q_2=\frac{1}{2}$ és $b_1=8$.

4129 A mértani sorozat elemei:

$$\frac{12}{q};\ \ 12;\ \ 12q.$$

A számtani sorozat elemei:

$$\frac{12}{q}+4;\ \ 15;\ \ 12q+1.$$

A számtani sorozat tulajdonságából:

$$15=\frac{\frac{12}{q}+4+12q+1}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad 12q^2-25q+12=0,$$

ezt megoldva:

$$q_1=\frac{4}{3} \quad \text{és} \quad q_2=\frac{3}{4}.$$

4130 Ha a legkisebb oldal a, és a sorozat hányadosa q, $q>1$, akkor az oldalak:

$$a;\ \ aq;\ \ aq^2.$$

Pitagorasz tétele alapján:

$$a^2+(aq)^2=\left(aq^2\right)^2.$$

Mivel $a\neq 0$, eloszthatjuk az egyenletet, és a $q^4-q^2-1=0$ negyedfokú egyenlethez jutunk. Megoldva:

$$\left(q^2\right)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

mivel $q^2>0$, ezért adódik, hogy:

$$q^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

A háromszög hegyesszögei:

$$\cos\alpha=\frac{a}{aq^2}=\frac{1}{q^2},$$

ebből $\alpha=51{,}83°$, a másik szög $\beta=38{,}17°$.

4131 Az oldalak hossza:

$$9;\ \ 9q;\ \ 9q^2.$$

A kerület:

$$19 = 9 + 9q + 9q^2,$$

ebből:

$$q_1 = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad q_2 = -\frac{5}{3}.$$

Természetesen csak a $q = \frac{2}{3}$ megoldás.

A háromszög oldalai: 9 cm, 6 cm, 4 cm.

A legnagyobb szög a leghosszabb oldallal szemben van, koszinusztétellel számolva:

$$\cos\alpha = \frac{6^2 + 4^2 - 9^2}{48} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 127{,}17°.$$

A háromszög legnagyobb szöge $\alpha = 127{,}17°$.

4132 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 63 \\ a_2 \cdot (a_1 + a_3) &= 810 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldáshoz vezessünk be új változót, legyen $x = a_1 + a_3$, a kapott

$$\left.\begin{aligned} a_2 + x &= 63 \\ a_2 \cdot x &= 810 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai: $a_2 = 45$ és $x = 18$, vagy $a_2 = 18$ és $x = 45$.

I. Ha $a_2 = 45$ és $x = 18$, akkor a $18 = \frac{45}{q} + 45q$ egyenletnek nincs megoldása.

II. Ha $a_2 = 18$ és $x = 45$, akkor a $45 = \frac{18}{q} + 18q$ egyenlet megoldásai és a keresett sorozat:

$$q_1 = 2, \ \ a_1 = 9 \quad \text{vagy} \quad q_2 = \frac{1}{2}, \ \ a_1 = 36.$$

4133 Legyenek a számtani sorozat tagjai:

$$a_1 = x - d; \quad a_2 = x; \quad a_3 = x + d; \quad d \neq 0.$$

A mértani sorozat elemei:

$$b_{n-1} = a_1 \cdot a_2 = (x - d) \cdot x; \quad b_n = a_2 \cdot a_3 = x \cdot (x + d); \quad b_{n+1} = a_3 \cdot a_1 = x^2 - d^2.$$

A mértani sorozat tulajdonsága alapján: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, vagyis:

$$[x \cdot (x + d)]^2 = (x - d) \cdot x \cdot (x^2 - d^2).$$

A műveletek elvégzése után, mivel $d \neq 0$, $x \neq 0$, $x + d \neq 0$, adódik, hogy: $d = 3x$.

A számtani sorozat tagjai:

$$a_1 = -2x; \quad a_2 = x; \quad a_3 = 4x.$$

A mértani sorozat elemei:

$$b_{n-1} = -2x^2; \quad b_n = 4x^2; \quad b_{n+1} = -8x^2.$$

A keresett hányados: $q = -2$.

4134 Jelöljük x-szel a sorozat ötödik tagját:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{q}+xq&=-40\\ \frac{x}{q^2}+xq^2&=68\end{aligned}\right\},\quad \text{ebből mivel } x\neq 0:\quad \left.\begin{aligned}\frac{1}{q}+q&=\frac{-40}{x}\\ \frac{1}{q^2}+q^2&=\frac{68}{x}\end{aligned}\right\}.$$

Felhasználva, hogy

$$\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=q^2+\frac{1}{q^2}+2,$$

a kapott egyenlet:

$$\left(\frac{-40}{x}\right)^2=\frac{68}{x}+2.$$

Ennek megoldásai: $x_1=16$ és $x_2=-50$.

Az elsőt visszahelyettesítve:

$$q+\frac{1}{q}=-\frac{5}{2},\quad \text{ebből:}\quad q_1=-2\ \text{ és }\ q_2=-\frac{1}{2},$$

a sorozat első tagjai pedig:

$$\{a_1\}_1=1\quad \text{és}\quad \{a_1\}_2=256.$$

A második esetben $q+\frac{1}{q}=\frac{4}{5}$. Ennek nincs megoldása.

Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása – megoldások

4135 $180\,000\cdot 1{,}07^{10}=354\,087$ Ft.

4136 $9800\cdot 0{,}97^{10}\approx 7227$ fő.

4137 $500\,000\cdot 1{,}06^8-500\,000=796\,924-500\,000=296\,924$ Ft lesz a haszon.

4138 $1\,000\,000\cdot 1{,}08^5\cdot 1{,}06^{15}=3\,521\,330$ Ft.

4139 A $118\,000\cdot x^{30}=170\,000$ egyenlet megoldása: $x\approx 1{,}0122$, ami 1,22%-os éves növekedést jelent.

4140 A $0{,}87^x=0{,}5$ egyenlet megoldása:

$$x=\frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}87}\approx 4{,}98.$$

Ha nem lesz változás, körülbelül 5 év múlva már felére csökken a fecskék száma.

4141 A $6\,506\,300=4\,800\,000\cdot x^6$ egyenlet megoldása: $x\approx 1{,}052$, tehát a bank 5,2%-os kamatot adott.

4142 Az $1{,}047^x=3$ egyenlet megoldása:

$$x=\frac{\lg 3}{\lg 1{,}047}\approx 23{,}92,$$

tehát 24 év alatt növekszik háromszorosára a betétünk.

4143 A keresett összeg kiszámítása:

$$(200000 \cdot 1{,}045^{14} + 200000 \cdot 1{,}045^{13} + 200000 \cdot 1{,}045^{12} + \ldots + 200000) \cdot 1{,}045^{6} =$$

$$= 200000 \cdot \left(1 + 1{,}045 + 1{,}045^{2} + \ldots + 1{,}045^{14}\right) \cdot 1{,}045^{6} =$$

$$= 200000 \cdot \frac{1{,}045^{15} - 1}{1{,}045 - 1} \cdot 1{,}045^{6} = 5413249.$$

Tehát 5 413 249 Ft lesz a számlán a gyermek 20 éves korában.

4144 A $250000 \cdot 1{,}05^{x} = 400000$ egyenletből: $1{,}05^{x} = 1{,}6$, ahonnan: $x = \frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}05} \approx 9{,}6$.

Tehát 10 év múlva, azaz 2010 januárjában éri el a betét a 400 000 Ft-ot.

4145 Az első bank öt év múlva

$$1000000 \cdot 1{,}04^{5} + 700000 \cdot 1{,}063^{5} \approx 2166742 \text{ Ft-ot fizet.}$$

A második bank öt év múlva

$$1700000 \cdot 1{,}019^{20} \approx 2477038 \text{ Ft-ot fizet.}$$

Tehát a Peták Bankot érdemes választani.

4146 Ha az évenként felvett összeg x, akkor az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$\left\{\left[(10^{8} \cdot 1{,}05 - x) \cdot 1{,}05 - x\right] \cdot \ldots \cdot 1{,}05 - x\right\} = 0.$$

Átrendezve:

$$10^{8} \cdot 1{,}05^{20} = x \cdot (1{,}05^{19} + 1{,}05^{18} + \ldots + 1),$$

vagyis

$$x = \frac{10^{8} \cdot 1{,}05^{20}}{\frac{1{,}05^{20} - 1}{1{,}05 - 1}} = 8024258{,}72 \approx 8024259 \text{ Ft.}$$

Tehát évente 8 024 259 Ft-ot vehet fel a bankból.

4147 *a)* Ha x a havi törlesztőrészlet, akkor a következő egyenletet kell megoldani:

$$15 \cdot 10^{6} \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{180} - x \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{179} - x \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{178} - \ldots - x = 0.$$

A megoldás:

$$x = \frac{15 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}006667^{180}}{\frac{1{,}006667^{180} - 1}{1{,}006667 - 1}} = 143372 \text{ Ft.}$$

Tehát a havi díj: 143 372 Ft.

b) Az évente fizetendő összeg legyen y. Ekkor az egyenletünk:

$$15 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}08^{15} - y \cdot (1{,}08^{14} + 1{,}08^{13} + \ldots + 1) = 0.$$

A megoldás:

$$y = \frac{15 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}08^{15}}{\frac{1{,}08^{15} - 1}{1{,}08 - 1}} = 1752443,$$

ebből a havi díj: 146 037 Ft.

c) Az első esetben a $\frac{180 \cdot 143372}{15000000} = 1{,}72$, a második esetben a $\frac{15 \cdot 1752443}{15000000} = 1{,}752$-szeresét kell visszafizetni.



Vegyes feladatok – megoldások

4148 A megadott számtani sorozat adatai:

$$a_1 = -2, \quad d = 5, \quad S_{30} = 2115.$$

4149 A megadott mértani sorozat adatai:

$$a_1 = 7, \quad q = 2, \quad S_{20} = 7\,340\,025.$$

4150 Célszerű a sorozatok első néhány tagját kiszámítani, majd a kialakult sejtést a definíciók segítségével $\left(a_{n+1} - a_n = d, \text{ illetve } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q\right)$ igazolni.

Számtani sorozatok: *a), b), d), j), k).*

Mértani sorozatok: *c), g), h), i).*

4151 $S_{30} = 630\sqrt{3} - 195.$

4152 A következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$500 < 7 + \frac{3}{7} \cdot (n-1) < 1000,$$

ennek megoldása:

$$1151{,}33 < n < 2318.$$

Tehát 1166 tag felel meg.

4153 A három tag szorzatából $a_2 = 105$.

A három tag összegéből:

$$\frac{105}{q} + 105 + 105q = 1687.$$

Az egyenlet megoldásai: $q_1 = 15$ és $q_2 = \frac{1}{15}$.

A feltételnek megfelelő sorozatok: $a_1 = 7$, $q = 15$ és $a_1 = 1575$, $q = \frac{1}{15}$.

4154 Mivel

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 7n - [2 \cdot (n-1)^2 - 7 \cdot (n-1)] = 4n - 9,$$

a sorozat számtani, $a_1 = -5$ és $d = 4$.

4155 Számtani sorozat, ahol: $d = 11$, $a_1 = 1008$, $a_{818} = 9995$, és az összeg: $S_{818} = 4\,500\,227$.

4156 A feltételekből adódik: $q^{17} = \frac{120}{18} = \frac{20}{3}$, azaz $q = \sqrt[17]{\frac{20}{3}}$.

a) Mivel az $a_3 \cdot q^x = 108$, azaz a $q^x = \frac{108}{18} = 6$ egyenlet megoldása

$$x = \frac{\lg 6}{\lg q} = \frac{\lg 6}{\lg \sqrt[17]{\frac{20}{3}}} \approx 16{,}056$$

nem egész szám, ezért a 108 nem tagja a sorozatnak.

b) Mivel $a_3 \cdot q^x = 800$, ezért $q^x = \frac{800}{18} = \frac{400}{9}$, az egyenlet megoldása: $x = 34$, tehát a sorozat 37. tagja 800.

4157 Az egyenletek hányadosait véve: $q^2 = 4$, azaz $q_1 = 2$ vagy $q_2 = -2$.

Visszahelyettesítés után a következő négy sorozat adódik:

$$a_1 = \frac{1}{2},\ q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{1}{2},\ q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = \frac{1}{2},\ q = -2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{1}{2},\ q = -2.$$

4158 A feltételekből az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 &= \frac{21}{4} \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot q} + \frac{1}{a_1 \cdot q^2} &= \frac{7}{3} \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletek hányadosát véve: $(a_1 \cdot q)^2 = \frac{9}{4}$. Ebből $a_1 \cdot q = \frac{3}{2}$ vagy $a_1 \cdot q = -\frac{3}{2}$.

Mivel $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = (a_2)^3$, a keresett szorzat: $\frac{27}{8}$ vagy $-\frac{27}{8}$.

4159 *a)* Mivel a különbség: $d = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$, ezért a számok:

$$3;\quad 14\frac{1}{4};\quad 25\frac{1}{2};\quad 36\frac{3}{4};\quad 48.$$

b) Mivel $q^4 = 16$, ebből $q_1 = 2$ vagy $q_2 = -2$.

A lehetséges számok:

$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48 \quad \text{vagy} \quad 3;\ -6;\ 12;\ -24;\ 48.$$

4160 Mivel az első három tag összege 18, ezért a számtani sorozatban $a_2 = 6$.

A számtani sorozat elemei:

$$6 - d;\ 6;\ 6 + d;$$

a mértani sorozat elemei:

$$7 - d;\ 6;\ 6 + d.$$

A mértani sorozat tulajdonsága alapján:

$$6^2 = (7 - d) \cdot (6 + d).$$

Az egyenlet megoldásai: $d_1 = 3$ és $d_2 = -2$.

Az első esetben a számtani sorozatban $a_1 = 3$ és a mértani sorozatban $q = \frac{3}{2}$.

A második esetben a számtani sorozatban $a_1 = 8$ és a mértani sorozatban $q = \frac{2}{3}$.

4161 Az első feltétel alapján a számokra:

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 114.$$

A számtani sorozat miatt:

$$a_1 \cdot q = a_1 + 3d \quad (1) \quad \text{és} \quad a_1 \cdot q^2 = a_1 + 24d \quad (2).$$

(1)-ből (2)-be helyettesítve:

$$a_1 \cdot q^2 = a_1 + 8 \cdot (a_1 \cdot q - a_1).$$

Mivel $a_1 \neq 0$, adódik, hogy:

$$q^2 - 8q + 7 = 0, \quad \text{ebből} \quad q_1 = 7 \text{ és } q_2 = 1.$$

Ha $q = 7$, az első feltételbe visszahelyettesítve: $a_1 = 2$, a számok: 2; 14; 98.

Ha $q = 1$, akkor $a_1 = 38$, a számok: 38; 38; 38.

4162 *a)* A feltételek miatt:

$$x = \frac{y + 4x - 5}{2} \quad \text{és} \quad (4x-5)^2 = x \cdot (7x + 10).$$

A második egyenlet megoldásai: $x_1 = 5$ és $x_2 = \frac{5}{9}$. Az elsőbe helyettesítve: $y_1 = -5$ és $y_2 = \frac{35}{9}$.
Tehát a négy szám:

$$-5;\ \ 5;\ \ 15;\ \ 45 \quad \text{vagy} \quad \frac{35}{9};\ \ \frac{5}{9};\ \ -\frac{25}{9};\ \ \frac{125}{9}.$$

b) Az első esetben a különbség 10, a hányados 3, a második esetben a különbség $-\frac{30}{9} = -\frac{10}{3}$, a hányados pedig -5.

4163 *a)* $41{,}9 \cdot 10^6 \cdot 1{,}054^4 \approx 51\,710\,230$.

b) $\frac{41{,}9 \cdot 10^6}{1{,}011^6} \approx 39\,238\,020$.

c) Ha az évenkénti csökkenésnek megfelelő szorzószám p, akkor $48{,}8 \cdot p^5 = 38$, ahonnan:

$$p = \sqrt[5]{\frac{38}{48{,}8}} \approx 0{,}9512.$$

Tehát évente 4,88%-kal csökken a termelés.

d) Jelölje x a 2013 után eltelt évek számát. A $0{,}97^x = 0{,}74$ egyenletből:

$$x = \frac{\lg 0{,}74}{\lg 0{,}97} \approx 9{,}89.$$

10 év múlva, azaz 2023-ban éri el a termelés a 2013-as év 74%-át.

4164 Ha $\{\log_5 a_n\}$ számtani sorozat, akkor:

$$\log_5 a_n = \frac{\log_5 a_{n-1} + \log_5 a_{n+1}}{2}.$$

Ebből a logaritmusfüggvény monotonitását felhasználva kapjuk, hogy:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1},$$

ami azt jelenti, hogy az $\{a_n\}$ mértani sorozat.
A keresett elem kiszámítása:

$$a_1 = 1 \ \text{ és } \ a_4 = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \ \text{ és } \ a_{10} = \frac{1}{512}.$$

4165 *a)* A különbség: $d = \frac{b-a}{5}$, így a számok:

$$a;\quad \frac{b+4a}{5};\quad \frac{2b+3a}{5};\quad \frac{3b+2a}{5};\quad \frac{4b+a}{5};\quad b.$$

b) A hányados: $q = \sqrt[5]{\frac{b}{a}}$, így a számok:

$$a;\quad \sqrt[5]{a^4 \cdot b};\quad \sqrt[5]{a^3 \cdot b^2};\quad \sqrt[5]{a^2 \cdot b^3};\quad \sqrt[5]{a \cdot b^4};\quad b.$$

12.3. TÉRGEOMETRIA

Térelemek – megoldások

4166 *a)* A pontok $\binom{10}{2} = 45$ egyenest határoznak meg.

b) Minimálisan 1 síkot határoznak meg a pontok.

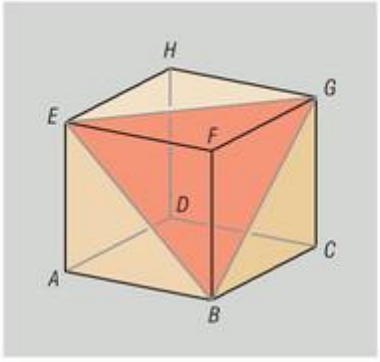
c) Maximálisan $\binom{10}{3} = 120$ síkot határoznak meg a pontok.

4167 Ha bármely két sík párhuzamos, akkor a metszésvonalak száma 0. A metszésvonalak számának maximuma: $\binom{10}{2} = 45$.

4168 *a)* Az ábra egy ilyen síkot mutat. A következő síkok felelnek meg a feltételnek:

BEG, *BED*, *AFH*, *AFC*, *DGB*, *DGE*, *HCF*, *HCA*.

A kocka csúcsai közül összesen 8 sík tartalmaz pontosan 3 csúcsot.



b) A sík a kockának 3 vagy 4 csúcsát tartalmazhatja. A 3 csúcsot tartalmazó síkokból 8 darab van. A 4 csúcsot tartalmazó síkok vagy a kocka két párhuzamos helyzetű lapátlóját tartalmazzák, vagy a kocka valamelyik lapját. Mindkét fajta síkból 6 darab van. A legalább 3 csúcsot tartalmazó síkok száma 20.

4169 *a)* *BF*, *CG*, *DH*;

b) *AD*, *BC*, *AE*, *BF*, *FG*, *EH*, *CG*, *DH*;

c) *CG*, *DH*, *EH*, *FG*.

4170 *a)* 90°; *b)* 90°; *c)* 90°; *d)* 0°; *e)* 45°; *f)* 60°;

g) 45°.

Az *AC* egyenes kitérő helyzetű az *FB*, *HF*, *ED* és *HG* egyenesekkel. Az *AC* egyenes párhuzamos az *EG* egyenessel.

4171 *a)* $a\sqrt{2}$; *b)* $a\sqrt{3}$.

4172 A lapátlók hossza: $3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ cm, illetve $3\sqrt{10} \approx 9{,}49$ cm.

A testátlók hossza: $3\sqrt{11} \approx 9{,}95$ cm.

4173 A kocka éle: $\sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm.

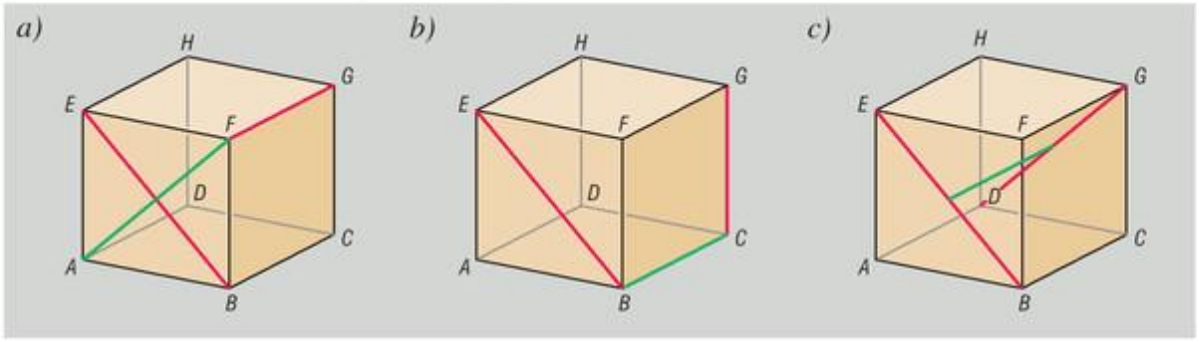
4174 Körülbelül 54,74°-ot.

4175 60°-ot. (Lásd a 4168. feladat ábráját.)

4176 Körülbelül 35,26°-ot.

4177 Három különböző távolság lép fel: $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{3a}{2}$.

4178 A piros szakaszok normál transzverzálisainak a kocka valamely lapjára vagy belsejébe eső részét minden esetben zöld színnel jelöltük meg.



a) Az EB és FG szakaszok távolsága $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, hajlásszögük 90°.

b) Az EB és GC szakaszok távolsága a, hajlásszögük 45°.

c) Az EB és DG szakaszok távolsága a, hajlásszögük 90°.

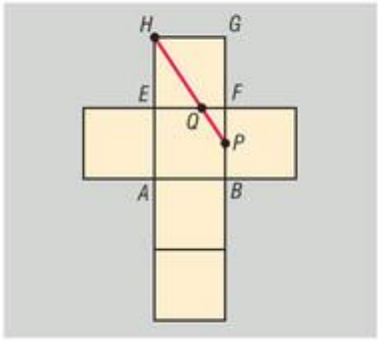
4179 A keletkező háromszög szabályos, oldalának hossza: $\frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5$ cm.

4180 A kialakuló négyszög minden oldala $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, tehát rombusz. Mivel átlói a kocka két szemközti lapjának középpontját kötik össze, ezért átlói is ugyanakkorák, így valóban négyzetről van szó. Természetesen szögeiről is könnyen belátható, hogy 90°-osak.

A keletkező négyzet területe: $\frac{a^2}{2}$.

4181 *a)* $\frac{3}{2}a$. *b)* $2{,}5a$.

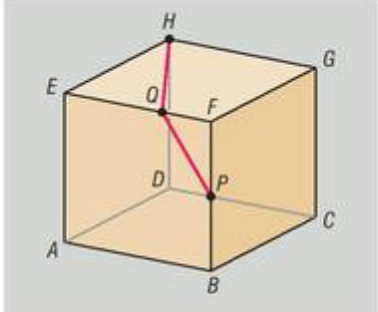
c) A kocka lapjain haladó legrövidebb PH út megtalálásához készítsük el a kocka síkbeli hálóját. A lapokon vezető legrövidebb út a P pontot a H ponttal összekötő szakasz lesz. Az ábrán látható háló esetén a PHG derékszögű háromszögben:



$$PH = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

A legrövidebb út hossza: $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Megjegyzés: Ha a legrövidebb PH út az EF élt a Q pontban metszi, akkor a PQF és PHG háromszögek hasonlóságát felhasználva meghatározhatjuk a Q pont F csúcstól való távolságát, hiszen:



$$\frac{QF}{HG} = \frac{PF}{PG} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad QF = \frac{HG}{3} = \frac{EF}{3},$$

ezért Q a kocka EF élének F-hez közelebbi harmadolópontja. A kocka lapjain vezető egyik legrövidebb PH utat az ábra szemlélteti.

Nem a fenti az egyetlen legrövidebb út, amely a kocka lapjain a P pontból a H pontba vezet. Javasoljuk az FG élen keresztülhaladó út, valamint a kocka ahhoz tartozó hálójának megkeresését is.

A teljes precizitáshoz hozzátartozik az AE, illetve a CG éleken keresztülvezető utak vizsgálata is. Az ilyen utak közül a legrövidebb hossza azonban $\frac{a\sqrt{17}}{2}$, ami nagyobb, mint az EF élen áthaladó legrövidebb út hossza.

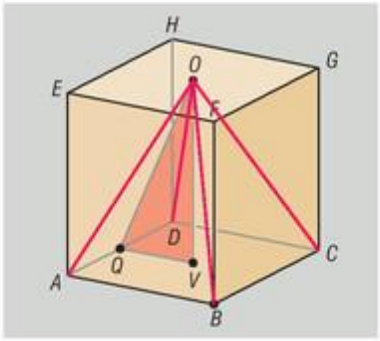
4182 *a)* Az alaplap élei (AB, BC, CD, DA) 12 cm hosszúak. Az oldallapokon található élek (AO, BO, CO és DO) hossza Pitagorasz tételével számolható. Például az AOE derékszögű háromszögben $AO^2 = AE^2 + OE^2$, azaz

$$AO^2 = 12^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2, \quad \text{amiből} \quad AO = \sqrt{216} = 6\sqrt{6} \approx 14{,}70 \text{ cm}.$$

A gúla oldaléleinek hossza körülbelül 14,70 cm.

b) A gúla ADO oldallapja és $ABCD$ alaplapja által bezárt szög megegyezik az OQV derékszögű háromszög Q csúcsánál lévő szögével, ahol Q az AD él felezőpontja, V pedig az $ABCD$ alaplap középpontja. Az $ADO_\triangle$ alaphoz tartozó magassága Pitagorasz tételével számolva:

$$OQ = 6\sqrt{5} \approx 13{,}42 \text{ cm}.$$



Mivel $OV = 12$ cm, ezért:

$$\sin(OQV\sphericalangle) = \frac{12}{6\sqrt{5}} \approx 0{,}8944 \quad \Rightarrow \quad OQV\sphericalangle \approx 63{,}43°.$$

A gúla oldallapja és alaplapja által bezárt szög körülbelül 63,43°.

c) A keresett szög megegyezik például az OAV derékszögű háromszög A csúcsánál lévő szögével. Az $OAV_\triangle$-ben:

$$\sin(OAV\sphericalangle) = \frac{12}{6\sqrt{6}} \approx 0{,}8165 \quad \Rightarrow \quad OAV\sphericalangle \approx 54{,}74°.$$

A gúla oldaléle az alaplappal körülbelül 54,74°-os szöget zár be.

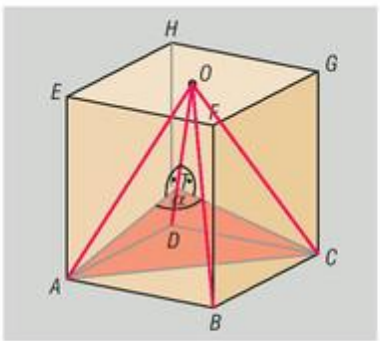
d) Az OA oldalél és az AD alapél által bezárt szöget az OAQ derékszögű háromszögből számolhatjuk ki:

$$\operatorname{tg}(OAQ\sphericalangle) = \frac{OQ}{AQ} = \frac{6\sqrt{5}}{6} \approx 2{,}2361 \quad \Rightarrow \quad OAQ\sphericalangle \approx 65{,}91°.$$

A gúla oldaléle az alapéllel körülbelül 65,91°-os szöget zár be.

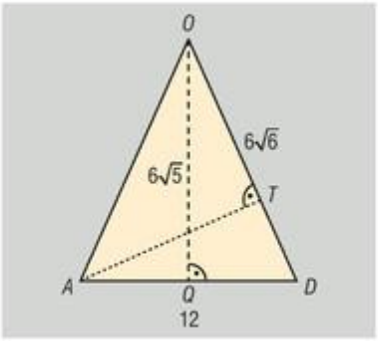
e) Jelöljük T-vel az $ADO_\triangle$ A csúcsából induló magasságának DO oldalon lévő talppontját. Ekkor a T pont egyben a $DCO_\triangle$ C csúcsából induló magasságának is talppontja, ezért a két szomszédos oldallap hajlásszöge megegyezik az AT és CT magasságok hajlásszögével.

A két sík által bezárt α szöget az ACT egyenlő szárú háromszög oldalaiból fogjuk kiszámolni.



Előbb kiszámoljuk az AT szakasz hosszát. Az $ADO_{\triangle}$ alaphoz tartozó magassága a *b)* feladat alapján:

$$OQ = 6\sqrt{5} \approx 13{,}42 \text{ cm}.$$



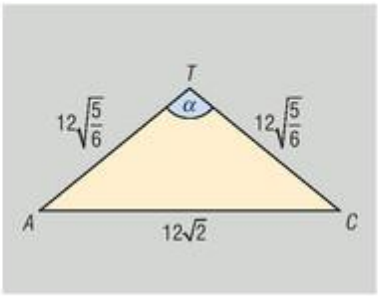
A háromszög területét kétféleképpen számítva:

$$\frac{6\sqrt{6} \cdot AT}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{5}}{2},$$

$$AT = 12\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 10{,}95 \text{ cm}.$$

Végül az $ACT_{\triangle}$-ben a koszinusztétel alapján:

$$AC^2 = AT^2 + CT^2 - 2 \cdot AT \cdot CT \cdot \cos\alpha.$$



Mivel $AC = 12\sqrt{2}$ ($\approx 16{,}97$ cm), ezért:

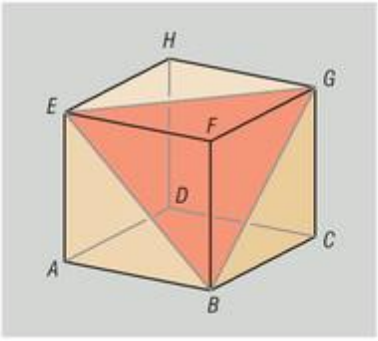
$$288 = 120 + 120 - 2 \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = -0{,}2.$$

A gúla két oldallapja 101,54°-os szöget zár be egymással.

4183 A kocka csúcsai közül összesen $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen lehet hármat kiválasztani.

a) Szabályos háromszöget úgy kaphatunk, ha kiválasztunk egy csúcsot, valamint a csúcsra illeszkedő két lapátló csúcstól különböző végpontjait (ilyen például az ábrán szereplő $BEG_{\triangle}$). Mivel egy csúcshoz 3 lapátló csatlakozik, ezért közülük 2-t összesen 3-féleképpen lehet kiválasztani. Ez azt jelenti, hogy a kocka minden csúcsa 3 darab szabályos háromszögre illeszkedik (például a B csúcs a BEG, BED, BDG háromszögekre). Mivel 8 csúcs van, ezért a háromszögek száma 24, de minden háromszöget mind a három csúcsánál egyszer számoltunk, így összesen 8 darab szabályos háromszög választható ki a kocka csúcsai közül, ezért a keresett valószínűség: $\frac{8}{56} = \frac{1}{7}$.



b) Derékszögű háromszögből kétféle van.

I. A kocka valamelyik lapjára illeszkedő háromszög. Minden lapon 4 derékszögű háromszög található (például a $BCGF$ lapon a BCG, CGF, GFB, FBC háromszögek). Ebből a fajta háromszögből tehát összesen 24 darab van.

II. A kocka valamelyik átlós síkjára illeszkedő háromszög. Minden ilyen síkon 4 derékszögű háromszög található (például az $ACGE$ síkon az ACG, CGE, GEA, EAC háromszögek). Mivel összesen 6 átlós sík van, ezért az ilyen típusú háromszögek száma szintén 24.

Összesen 48 darab derékszögű háromszög választható ki a kocka csúcsai közül, ezért a keresett valószínűség: $\frac{48}{56} = \frac{6}{7}$.

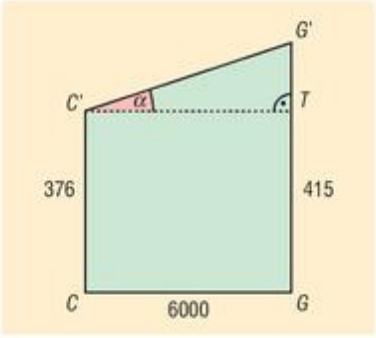
4184 Igaz. A két metszésvonal nem lehet kitérő helyzetű, mert egy síkban vannak, ugyanis mindkettő benne van a párhuzamosokat metsző síkban. Ugyanakkor nem lehet a két egyenes metsző helyzetű sem, mert a feltételek alapján különböző, egymással párhuzamos síkokban találhatók. Ebből adódóan a két kialakuló metszésvonal csakis párhuzamos lehet egymással.

4185 *a)* Az AE éllel a GF, BC, KJ élek párhuzamosak.

b) Az ED egyenesre a következő élek merőlegesek: EF, AG, BK, CJ, HI (illetve az összeillesztés után vele megegyező LM).

c) Az EF egyenessel kitérő helyzetű élek: DC (illetve az összeillesztés után vele megegyező LC), BC, AB, MJ, KJ.

4186 *a)* Az ábra azt a függőleges síkmetszetet mutatja, amelyik tartalmazza a Csobánc (C'), valamint a Szent György-hegy (G') csúcsát is. A két hegycsúcs vízszintes síkon lévő vetületét C, illetve G jelöli. A térképen mért 15 cm a valóságban 6000 méternek felel meg, ezért $CG = 6000$ méter. Ha a $CGG'C'$ derékszögű trapéz C' csúcsából induló magasságának talppontját T jelöli, akkor a $G'C'T$ derékszögű háromszögben:



$$G'C'^2 = C'T^2 + G'T^2,$$

$$G'C'^2 = 6000^2 + (415 - 376)^2,$$

$$G'C' = \sqrt{36001521},$$

$$G'C' \approx 6000{,}1 \text{ m}.$$

A két hegycsúcs távolsága 6000,1 méter.

b) A $G'C'T_{\triangle}$-ben:

$$\cos\alpha = \frac{6000}{\sqrt{36001521}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 0{,}37°.$$

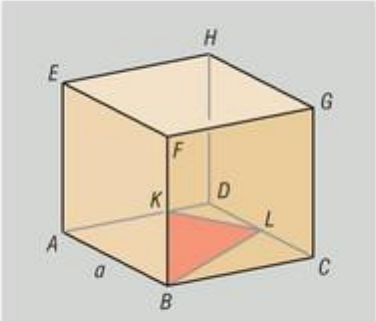
A Csobánc tetejéről a Szent György-hegy teteje 0,37°-os „emelkedési szög" alatt látszik (gyakorlatilag egy vonalban vannak).

Megjegyzés: $\cos\alpha$ négy tizedesjegyre kerekített értéke 1,0000, amiből α-ra 0°-ot kapnánk, ami azért lenne furcsa, mert a Szent György-hegy a magasabb.

Ha a $\cos\alpha$ kiszámolásakor a $G'C'$ távolság *a)* feladatban kapott közelítő értékét használjuk, akkor $\alpha \approx 0{,}33°$ adódik.

A feladat mutatja, hogy még a négy tizedesjegyre történő kerekítés sem mindig ad hű képet a valóságról.

4187 Tekintsük az $ABCDEFGH$ kocka BF élének K, illetve CD élének L felezőpontját. Mivel KB merőleges az $ABCD$ lap síkjára, így merőleges annak minden egyenesére, ezért az LKB háromszög derékszögű. A háromszög LB befogójának hossza könnyen kiszámolható az LBC derékszögű háromszögből. Pitagorasz tétele alapján ugyanis:



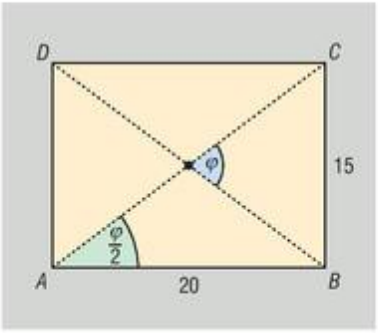
$$LB^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2 \quad \Rightarrow \quad LB = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Végül az LKB háromszögben:

$$LK^2 = LB^2 + BK^2 = \frac{5}{4}a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad LK = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Könnyen belátható, hogy bármely két kitérő helyzetű él felezőpontja ugyanekkora távolságra van egymástól.

4188 *a)* Ha az $ABCD$ alaplap átlói által bezárt szög φ, akkor az átlók $\frac{\varphi}{2}$ szöget zárnak be a téglalap megfelelő oldalával (ld. ábra).



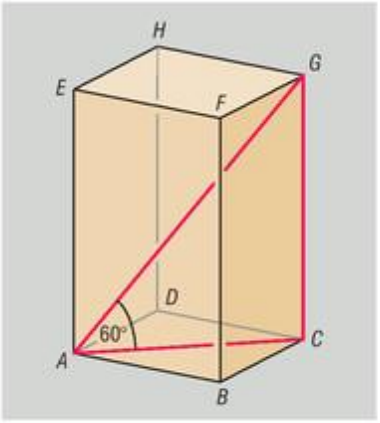
Az ABC derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{15}{20},$$

$$\varphi \approx 73{,}74°.$$

Az alaplap két átlója 73,74°-os szöget zár be egymással.

b) Az AC átló hossza 25 cm (Pitagorasz-tétel). Az ábra ACG háromszögében:



$$\cos 60° = \frac{AC}{AG},$$

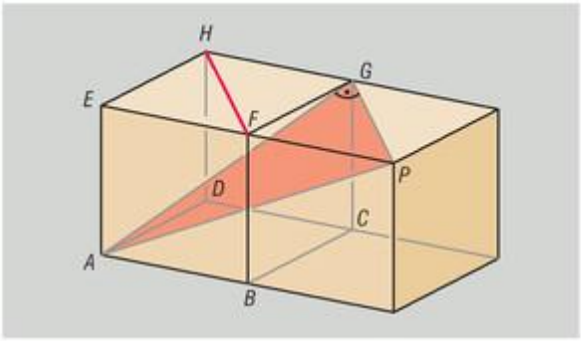
$$AG = 50 \text{ cm}.$$

A téglatest testátlója 50 cm hosszú.

c) A téglatest GC, illetve a GC-vel párhuzamos éleinek hossza:

$$25\sqrt{3} \approx 43{,}30 \text{ cm}.$$

4189 A két egyenes hajlásszögét úgy a legegyszerűbb kiszámolni, ha az egyiket önmagával párhuzamosan a másik egyenes egy pontjába toljuk. Például helyezzünk az $ABCDEFGH$ kocka „mellé" egy ugyanakkora élű kockát az ábrán látható módon. Mivel $GP \parallel HF$, ezért az AG testátló és a HF lapátló hajlásszöge megegyezik az AG szakasz, valamint az új kocka GP lapátlója által bezárt szöggel.

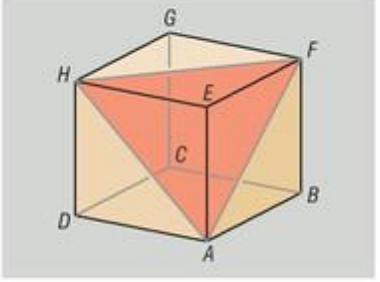


A keresett szöget az AGP háromszög oldalaiból számolhatjuk. Ha a kocka élét a jelöli, akkor az AG testátló hossza: $AG = a\sqrt{3}$, a GP lapátló hossza: $GP = a\sqrt{2}$, míg az AP szakasz hossza Pitagorasz tételének alkalmazásával $AP = a\sqrt{5}$. Vegyük észre, hogy $AG^2 + GP^2 = AP^2$, hiszen:

$$(a\sqrt{3})^2 + (a\sqrt{2})^2 = (a\sqrt{5})^2,$$

ezért Pitagorasz tételének megfordítása alapján az AGP háromszög derékszögű. Az AG testátló, valamint a HF lapátló tehát merőleges egymásra.

4190 *a)* Mivel a HAF háromszög minden oldala a kocka lapátlójával egyenlő (ld. ábra), ezért a háromszög szabályos. Ebből következik, hogy



$$HAF\sphericalangle = 60°.$$

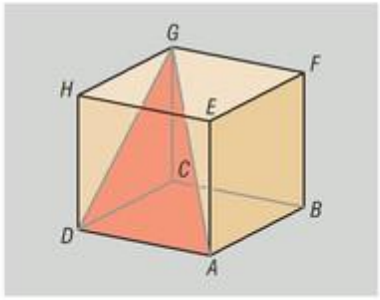
b) Ha a kocka éle a hosszúságú, akkor az ADG háromszög oldalai:

$$AD = a, \quad GD = a\sqrt{2} \quad \text{és} \quad AG = a\sqrt{3}.$$

Mivel $AD^2 + DG^2 = AG^2$, ezért a háromszög derékszögű, így

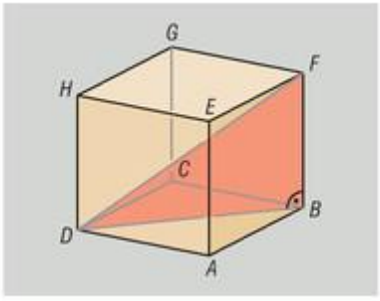
$$ADG\sphericalangle = 90°.$$

Megjegyzés: Mivel AD merőleges a $DCGH$ síkra, ezért annak minden egyenesére is merőleges, amiből szintén adódik, hogy $ADG\sphericalangle = 90°$.



c) A *b)* feladathoz hasonló módszerrel belátható, hogy

$$FGD\sphericalangle = 90°.$$



d) Ha a kocka éle a, akkor a BDF derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} BDF\sphericalangle = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$BDF\sphericalangle \approx 35{,}26°.$$

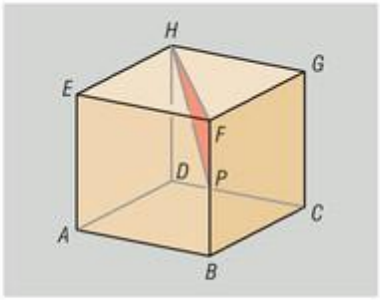
4191 *a)* A PHF háromszög derékszögű, hiszen PF merőleges az $EFGH$ síkra, így merőleges annak minden egyenesére. A háromszög oldalai:

$$PF = 5 \text{ cm}, \quad FH = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}.$$

Pitagorasz tétele alapján:

$$PH^2 = 5^2 + (10\sqrt{2})^2,$$

$$PH = 15 \text{ cm}.$$



b) Az EKH derékszögű háromszögben:

$$KH^2 = EK^2 + EH^2 = 5^2 + 10^2 = 125,$$

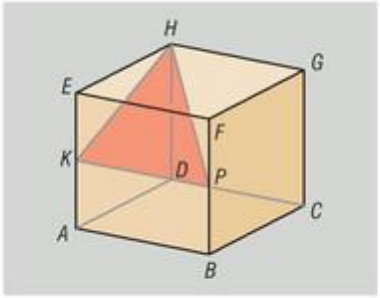
amiből:

$$KH = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm}.$$

Az *a)* feladat eredménye alapján $PH = 15$ cm. Nyilvánvaló továbbá, hogy $KP = 10$ cm. Mivel

$$KH^2 + KP^2 = 125 + 100 = 225 = PH^2,$$

ezért Pitagorasz tételének megfordítása alapján a PHK háromszög derékszögű.



Megjegyzés: Ez abból is következik, hogy a KP szakasz merőleges a kocka $AEHD$ lapjára.

c) Az EPF derékszögű háromszögben:

$$EP^2 = 10^2 + 5^2 = 125,$$

amiből:

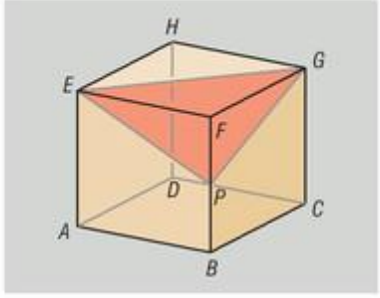
$$EP = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm}.$$

Az EPF és GPF háromszögek egybevágóságából következik, hogy:

$$GP = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm},$$

tehát az EGP háromszög egyenlő szárú ($EP = GP$). Mivel EG a kocka lapátlója, ezért:

$$EG = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}.$$



d) Az LPE derékszögű háromszögben:

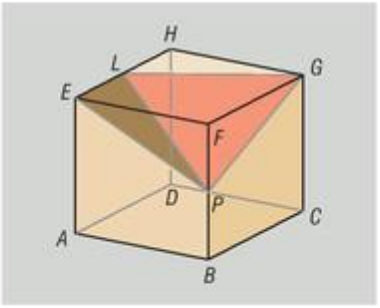
$$PL^2 = 5^2 + (5\sqrt{5})^2 = 150,$$

azaz

$$PL = 5\sqrt{6} \approx 12{,}25 \text{ cm}.$$

Az LPG háromszög egyenlő szárú, hiszen

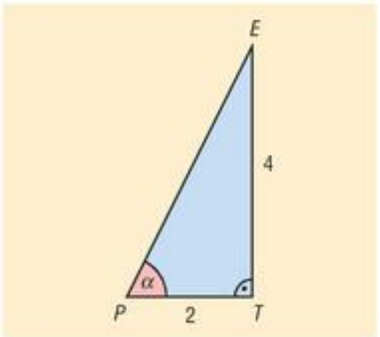
$$GP = GL = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm}.$$



4192 Jelöljük T-vel az E pont $ABCD$ síkra eső merőleges vetületét, valamint P-vel az ADE egyenlő szárú háromszög E csúcsából induló magasságának AD alapra illeszkedő talppontját. Az EPT derékszögű háromszögben $PT = 2$ m és $ET = 4$ m. Az ADE tetősík a vízszintes $ABCD$ síkkal bezárt szögére:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2,$$
$$\alpha \approx 63°.$$

Az ADE és BCF tetősíkok a vízszintes síkkal 63°-os szöget zárnak be.

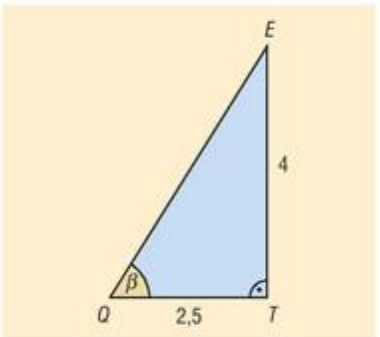


A másik két tetősík vízszintessel bezárt szögét hasonló módszerrel számolhatjuk ki. Ha Q jelöli az $ABFE$ trapéz E csúcsából húzott magasság AB szakaszra illeszkedő talppontját, akkor az EQT háromszög befogói: $ET = 4$ m és $TQ = 2{,}5$ m.

A tetősík vízszintessel bezárt β szögére:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{2{,}5},$$
$$\beta \approx 58°.$$

Az $ABFE$ és $DCFE$ tetősíkok a vízszintes síkkal 58°-os szöget zárnak be.



4193 *a)* Az EBD háromszög minden oldala a kocka egy-egy lapátlója, ezért az $EBD_{\triangle}$ minden oldala $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm hosszúságú, így a háromszög valóban szabályos.

b) Az $ABCD$ négyzet középpontját jelöljük O-val. Ekkor AO és BD a négyzet egy-egy átlójára illeszkedik, ezért merőlegesek egymásra.

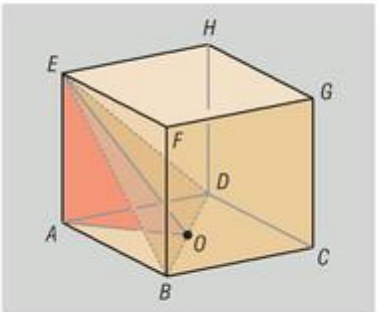
Másrészt EO az EBD szabályos háromszög egyik magassága, ezért EO is merőleges BD-re.

Összefoglalva: AO és EO egyaránt merőleges az $ABCD$ és EBD síkok metszésvonalára, ezért a két sík hajlásszöge éppen az $EOA\sphericalangle$. Az OEA derékszögű háromszögben:

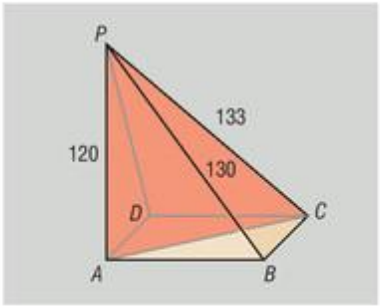
$$\operatorname{tg} EOA\sphericalangle = \frac{10}{\frac{10\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2},$$

$$EOA\sphericalangle \approx 54{,}74°.$$

Az $ABCD$ alaplap síkja az EBD síkkal 54,74°-os szöget zár be.



4194 *a)* A helikopter, amelynek helyét az ábrán P-vel jelöltük, illeszkedik az $ABCD$ téglalap síkjának A pontban emelt merőleges egyenesére. Ebből következően az AP egyenes merőleges az $ABCD$ sík minden egyenesére, így a BPA, CPA és DPA háromszögek mindegyike derékszögű. A $BPA_{\triangle}$-ből:



$$AB^2 = 130^2 - 120^2 = 2500,$$
$$AB = 50 \text{ m}.$$

A $CPA_{\triangle}$-ből:

$$AC^2 = 133^2 - 120^2 = 3289,$$
$$AC = 57{,}3 \text{ m}.$$

A szintén derékszögű $ABC_{\triangle}$-ből:

$$BC^2 = AC^2 - AB^2,$$
$$BC^2 = 3289 - 2500 = 789,$$
$$BC = 28{,}1 \text{ m}.$$

A leszállópálya oldalai 28,1 m, illetve 50 m hosszúak.

b) A $PDA_{\triangle}$-ből:

$$PD^2 = PA^2 + AD^2 = 120^2 + 789 = 15\,189,$$

amiből $PD = 123{,}2$ méter.

c) A feladat az $ACP\sphericalangle$-et kérdezi. A $CPA_{\triangle}$-ből:

$$\sin ACP\sphericalangle = \frac{120}{133},$$
$$ACP\sphericalangle \approx 64{,}5°.$$

A C pontból a helikopter körülbelül 64,5°-os emelkedési szögben látszik.

d) Tegyük fel, hogy a helikopter x méteres magasságban van, amikor a D pontból kétszer akkora szög alatt látszik, mint a C pontból. Ha a helikopter helyét ekkor is P jelöli, akkor

$$\operatorname{tg} ACP\sphericalangle = \frac{x}{AC} = \frac{x}{\sqrt{3289}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} ADP\sphericalangle = \frac{x}{AD} = \frac{x}{\sqrt{789}}.$$

Mivel a feltételek szerint $ADP\sphericalangle = 2 \cdot ACP\sphericalangle$, ezért a megfelelő addíciós összefüggés alapján:

$$\operatorname{tg} ADP\sphericalangle = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} ACP\sphericalangle}{1 - \operatorname{tg}^2 ACP\sphericalangle}.$$

A kapott értékeket behelyettesítve:

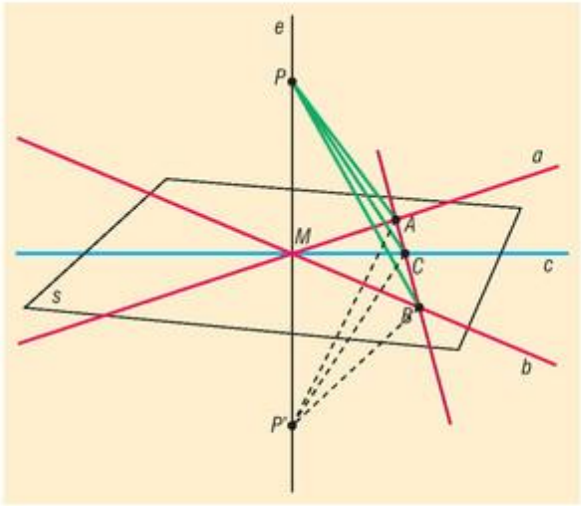
$$\frac{x}{\sqrt{789}} = \frac{2 \cdot \frac{x}{\sqrt{3289}}}{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3289}}\right)^2}.$$

Rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$x^2 = 3289 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{789}}{\sqrt{3289}}\right),$$
$$x \approx 8{,}2 \text{ m}.$$

A helikopter 8,2 méter magasan van, amikor a D pontból kétszer akkora szögben látszik, mint a C pontból.

4195 Tegyük fel, hogy az e egyenes merőleges az S sík két metsző helyzetű egyenesére. Célunk annak igazolása, hogy az e egyenes az S sík minden egyenesére merőleges.



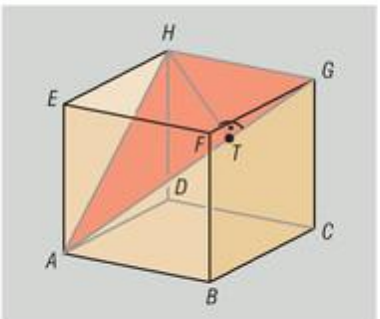
Két egyenes hajlásszöge nem változik, ha közülük az egyiket önmagával párhuzamosan eltoljuk, ezért „fogjuk meg" az S síkon azt a két egyenest, amelyre az e egyenes merőleges, majd toljuk el azokat úgy, hogy átmenjenek az S sík és az e egyenes M metszéspontján. Jelöljük az eltolt egyeneseket a-val és b-vel, ekkor az e egyenes merőleges a-ra és b-re is. Előző megjegyzésünk alapján elegendő megmutatni, hogy az e egyenes merőleges az összes olyan egyenesre, amely az S síkban halad, és átmegy az M ponton. Legyen c egy a-tól és b-től is különböző egyenes (ld. ábra). Megmutatjuk, hogy az e egyenes merőleges a c egyenesre.

Vegyünk fel az S síkban egy tetszőleges, de az M pontot nem tartalmazó egyenest, amely metszi az a, b és c egyenesek mindegyikét. A metszéspontokat jelölje rendre A, B és C. Vegyünk fel továbbá egy P (M-től különböző) pontot az e egyenesen, majd tükrözzük az M pontra, így kapjuk a P' pontot. Ekkor persze $MP = MP'$.

Vizsgáljuk meg a kialakuló ábrát. Az ábrában több egyenlő szárú háromszöget is felfedezhetünk. Mivel e és a merőlegesek egymásra, ezért a $PMA_{\triangle}$ és $P'MA_{\triangle}$ egybevágó (két-két oldal + általuk közbezárt szög), amiből adódik, hogy $PA = P'A$, így a $PP'A_{\triangle}$ valóban egyenlő szárú. Ugyanígy belátható, hogy egyenlő szárú a $PP'B_{\triangle}$ is.

Az eddigi eredményeinket összefoglalva láthatjuk, hogy $PA = P'A$ és $PB = P'B$. Ebből azonnal következik, hogy az $ABP_{\triangle}$ egybevágó az $ABP'_{\triangle}$-gel, hiszen oldalaik hossza páronként megegyezik. Az egybevágóság miatt a megfelelő szögeik is egyenlők, így például $PBC\sphericalangle = P'BC\sphericalangle$. Ebből adódóan újabb háromszögekről láthatjuk be, hogy egybevágóak: a $PBC_{\triangle}$ és $P'BC_{\triangle}$ ugyanis két-két oldalban ($PB = P'B$ és BC közös oldal), valamint az általuk bezárt szögükben megegyezik, ezért valóban egybevágóak. Ebből következik, hogy $PC = P'C$, azaz a $PP'C_{\triangle}$ egyenlő szárú. Mivel M a PP' alap felezőpontja, ezért CM a háromszög egyik magassága, amiből következik, hogy az e egyenes merőleges a c egyenesre. Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

4196 *a)* A kocka GH éle merőleges az $ADHE$ lap síkjára, ezért merőleges annak minden egyenesére, így az $AGH_{\triangle}$ derékszögű, a derékszögű csúcs a H pontnál van.



A H pont AG testátlótól való távolsága megegyezik az $AGH_{\triangle}$ AG átfogójához tartozó HT magasságának hosszával (ld. ábra).

Az $AGH_{\triangle}$ oldalai:

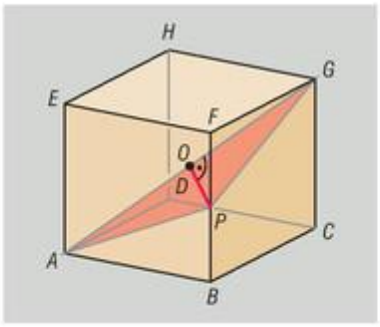
$$HG = a, \quad AH = a\sqrt{2} \quad \text{és} \quad AG = a\sqrt{3}.$$

A háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{AH \cdot HG}{2} = \frac{AG \cdot HT}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot HT}{2} \quad \Rightarrow \quad HT = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

A H pont az AG testátlótól $a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ egység távolságra van.

b) Az ABP derékszögű háromszögben:



$$AP^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad AP = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

A $GPF_\triangle$ és az $APB_\triangle$ egybevágó (két-két oldal + általuk bezárt szög), ezért átfogóik ugyanakkorák, így:

$$AP = GP = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

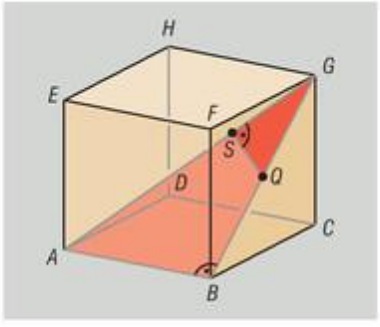
Az $AGP_\triangle$ tehát egyenlő szárú, az alaphoz tartozó magasságát (P és az AG testátló távolságát) az $APO_\triangle$-ből számíthatjuk:

$$OP^2 = AP^2 - AO^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad OP = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

A P pont az AG testátlótól $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ egység távolságra van.

Megjegyzés: Az OP szakasz hossza „ránézésre" is megmondható, hiszen OP párhuzamos a kocka HF lapátlójával, hossza pedig annak éppen fele.

c) A $BCGF$ lap középpontját Q, a Q pont merőleges vetületét az AG testátlón S jelöli az ábrán.



A Q pont AG testátlótól való távolsága megegyezik az SQ szakasz hosszával.

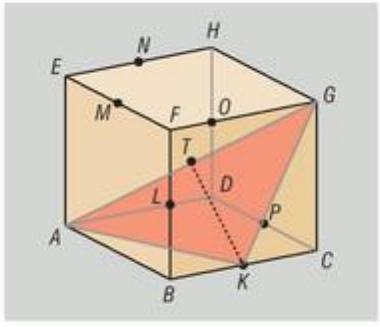
Figyeljük meg az ábra GQS és GAB háromszögeit. Mindkét háromszög derékszögű (a derékszögek S-nél, illetve B-nél vannak), továbbá a G csúcsaiknál lévő szögük közös.

Ebből következik, hogy a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalaik arányára:

$$\frac{SQ}{AB} = \frac{GQ}{AG} \quad \Rightarrow \quad \frac{SQ}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \Rightarrow \quad SQ = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

A $BCGF$ lap középpontja az AG testátlótól $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ egység távolságra van.

4197 *a)* Tekintsük az ábrán látható AGK háromszöget. A háromszög AK oldalát az AKB derékszögű háromszögből könnyen ki tudjuk számolni:



$$AK^2 = AB^2 + KB^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad AK = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Mivel az $AKB_\triangle$ és $GKC_\triangle$ egybevágó, ezért $AK = GK$, így az $AGK_\triangle$ egyenlő szárú. Ebből következik, hogy ha az AG testátló felezőpontja T, akkor a KT szakasz az AGK egyenlő szárú háromszög magassága, és így merőleges az AG alapra. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a KT szakasz hossza megegyezik a K pont AG testátlótól való távolságával.

Könnyen belátható, hogy az L, M, N, O és P pontok mindegyike egy-egy, az $AGK_\triangle$-gel egybevágó háromszöget alkot az AG testátló két végpontjával, amiből következik, hogy a felsorolt pontok mindegyike ugyanakkora távolságra található a kocka AG testátlójától. Ez a távolság éppen a KT szakasz hossza.

b) A KT szakasz hosszát az ATK derékszögű háromszögből így számíthatjuk ki:

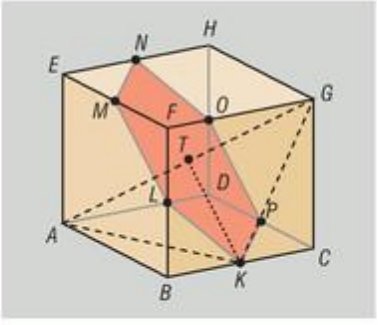
$$KT^2 = AK^2 - AT^2 = \frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad KT = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

A K, L, M, N, O, P pontok mindegyike $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ távolságra van az AG testátlótól.

Megjegyzés: A KT szakasz hosszát az ábra alapján is meghatározhatjuk. Mivel T a kocka középpontja, T a KN szakaszra esik, és azt felezi. KN hossza pedig megegyezik az $ABCD$ lapátlójának hosszával, vagyis $KN = a\sqrt{2}$. Így

$$KT = \frac{KN}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

c) Mivel a $KGT_{\triangle}$-ben a T csúcsnál derékszög van, ezért a K pont illeszkedik a T pontban az AG testátlóra emelt merőleges síkra. A $KLMNOP$ hatszög összes csúcsa derékszögű háromszöget alkot a T és a G pontokkal, ezért az összes csúcs illeszkedik az említett síkra. Ez persze azt is jelenti, hogy a hatszög csúcsai egy síkban fekszenek. Ez a sík 90°-os szöget zár be a kocka AG testátlójával.

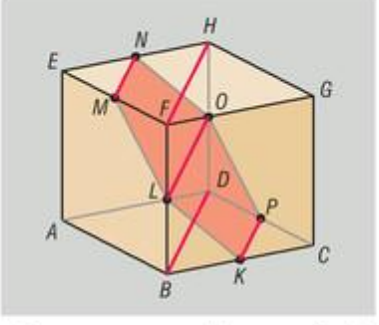


Egy másik bizonyítást is adunk arra vonatkozóan, hogy a $KLMNOP$ hatszög csúcsai egy síkban fekszenek.

Mivel az LO szakasz a $BDHF$ téglalap középvonala, ezért LO párhuzamos a kocka FH, illetve BD lapátlóival.

Az MN szakasz középvonala az $FHE_{\triangle}$-nek, ezért MN és FH szintén párhuzamos egymással.

Végül: KP a $BDC_{\triangle}$ középvonala, amiből következik, hogy KP párhuzamos a BD lapátlóval.



Összefoglalva: az LO, MN, KP szakaszok párhuzamosak egymással. Mivel két párhuzamos egyenes (szakasz) mindig egy síkban fekszik, ezért az L, O, M, N pontok, valamint az L, O, K, P pontok egy-egy síkban fekszenek. E két sík azonban megegyezik egymással, mivel a kocka, és így a $KLMNOP$ hatszög is középpontosan szimmetrikus az LO szakasz felezőpontjára, ami csak úgy lehetséges, ha a hat pont valóban egy síkon helyezkedik el.

d) Az *a)* feladatban már kiszámoltuk az AKG háromszög oldalait:

$$AK = KG = a\frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad AG = a\sqrt{3}.$$

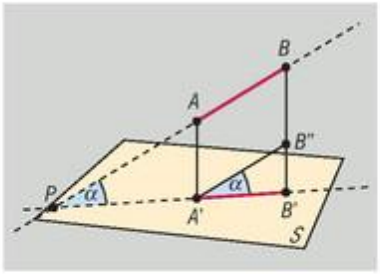
A koszinusztétel alapján:

$$3a^2 = \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - 2 \cdot \left(a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \cos AKG\sphericalangle,$$

amiből a műveletek elvégzése után:

$$\cos AKG\sphericalangle = -\frac{1}{5}.$$

4198 *a)* Ha $\alpha = 0°$, azaz az AB szakasz párhuzamos az S síkkal, akkor $A'B' = AB$, azaz $\dfrac{A'B'}{AB} = 1$. Ha $\alpha = 90°$, vagyis az AB szakasz merőleges az S síkra, akkor $A'B' = 0$, azaz $\dfrac{A'B'}{AB} = 0$.



Más esetekben húzzunk az A' ponton át párhuzamost az AB egyenessel, majd jelöljük B''-vel a BB' egyenessel való metszéspontját. Az $AA'B''B$ négyszög paralelogramma, ezért $A'B'' = AB$.

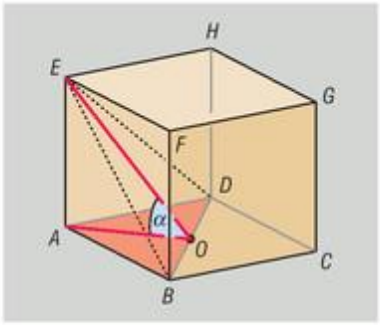
A $B''B'A'$ derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{A'B'}{A'B''}, \quad \text{amiből} \quad \frac{A'B'}{AB} = \cos\alpha.$$

A fenti összefüggés azokban az esetekben is érvényes, ha $\alpha = 0°$, vagy $\alpha = 90°$.

b) Az *a)* feladat eredménye alapján az $A'B'$ szakasz hossza akkor minimális, ha $\alpha = 90°$. Az $A'B'$ szakasz hossza akkor maximális, ha $\alpha = 0°$.

4199 *a)* Az $EBD_\triangle$ szabályos, minden oldala a megadott $ABCDEFGH$ kocka lapátlója, azaz $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm.



A háromszög EO magasságának (ld. ábra) hossza:

$$EO = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{6} \approx 12{,}25 \text{ cm}.$$

Az $EBD_\triangle$ területe:

$$T_{EBD} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{6}}{2} = 50\sqrt{3} \approx 86{,}60 \text{ cm}^2.$$

b) Az $EBD_\triangle$-nek az $ABCD$ síkra vonatkozó merőleges vetülete az $ABD_\triangle$.

c) Az ABD egyenlő szárú háromszög T területére:

$$T = \frac{BD \cdot AO}{2}.$$

Az OEA derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{AO}{EO},$$

ha ezt behelyettesítjük a területképletbe, azt kapjuk, hogy:

$$T = \frac{BD \cdot EO \cdot \cos\alpha}{2} = \frac{BD \cdot EO}{2} \cdot \cos\alpha.$$

Vegyük észre, hogy az EO szakasz az $EBD_\triangle$ BD oldalához tartozó magassága, ezért az utolsó egyenlőség jobb oldalán szereplő tört éppen az $EBD_\triangle$ területe, tehát

$$T = T_{EBD} \cdot \cos\alpha.$$

d) Az ABD egyenlő szárú derékszögű háromszög területe:

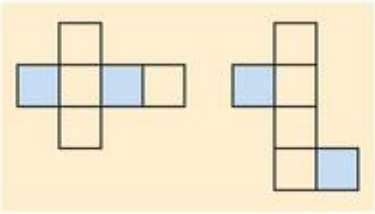
$$T = \frac{AB \cdot AD}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

Így felhasználva az *a)* és *c)* feladatok eredményeit:

$$T = T_{EBD} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 50 = 50\sqrt{3} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 54{,}74°.$$

Testek osztályozása, szabályos testek – megoldások

4200 Az alábbi 2 ábra lehet egy kocka síkbeli hálózata. A szemközti lapokat színezéssel jelöltük meg.

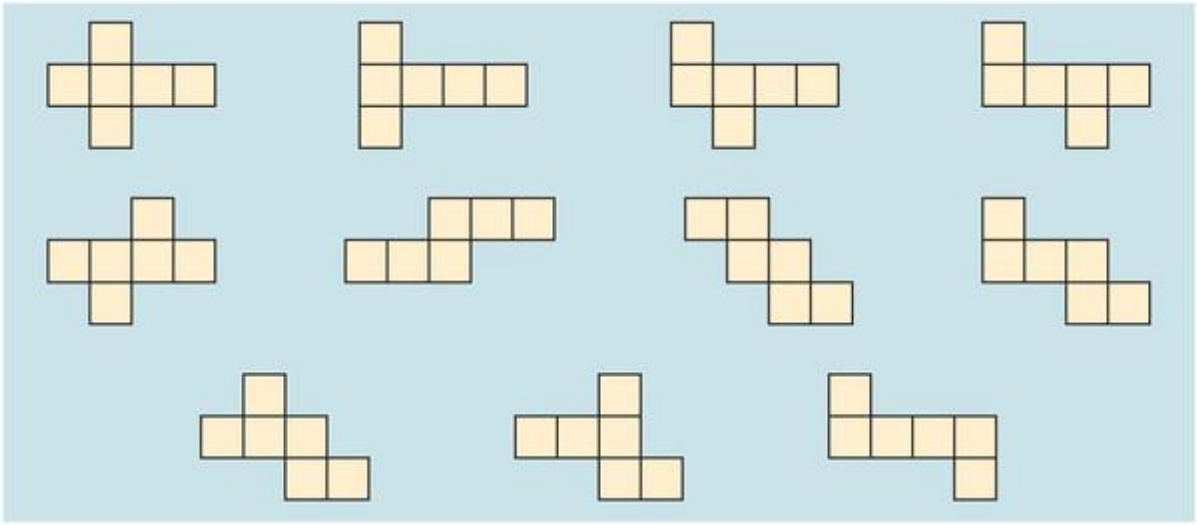


4201 *a)* 24;

b) 24;

c) 8.

4202 Összesen 11 különböző síkbeli hálója van egy kockának.



4203 *a)* Barnabás maximum 21 darab kockát használhatott fel. Az ábra a tornyot felülnézetben mutatja, az egyes négyzetekbe azt írtuk, hogy ott hány kockát helyezett egymásra.

1	1	1	1
1	3	1	2
1	1	1	1
1	2	1	2

Oldalnézet

Elölnézet

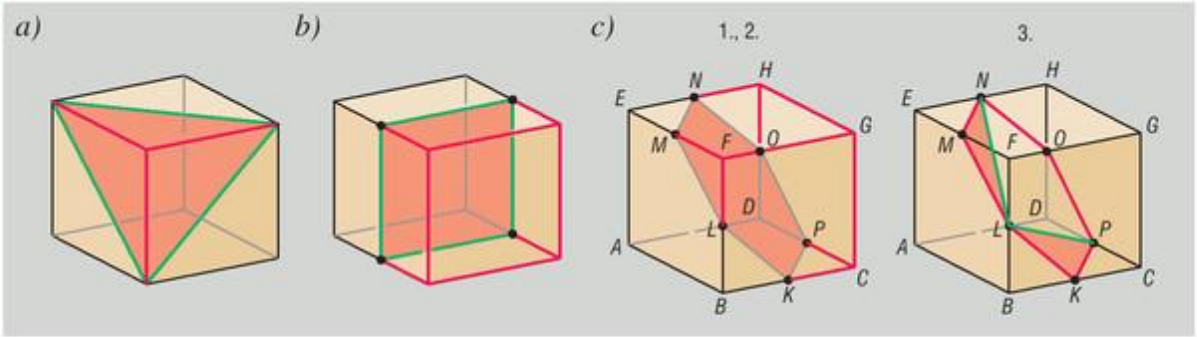
b) Lehetséges, hogy Barnabás a torony megépítéséhez pontosan 10 darab kockát használt fel. Egy ilyen torony felülnézeti képét az ábra mutatja.

			1
	3		
			1
1	1	1	2

Oldalnézet

Elölnézet

4204



a) Szabályos háromszögben lehet a kockát metszeni, amint azt az előző ábra mutatja.

b) A kocka metszhető négyzetben.

c) A kockát lehet szabályos hatszögben metszeni.

Ennek igazolásához tekintsük az ábra szerinti 6 él felezőpontját, azaz a K, L, M, N, O és P pontokat. Megmutatjuk, hogy a felsorolt pontokat tartalmazó sík szabályos hatszögben metszi a kockát. Ehhez a következőket kell igazolnunk:

1. A hat pont egy síkon fekszik. Ezt közvetlenül igazoltuk a 4197. feladatban.
2. A $KLMNOP$ hatszög minden oldala egyenlő. Ez könnyen belátható, hiszen ha a kocka élét a jelöli, akkor a $KLMNOP$ hatszög minden oldala átfogója egy-egy olyan egyenlő szárú derékszögű háromszögnek, amelynek befogói $\frac{a}{2}$ hosszúságúk. Például a KL szakasz a KLB, az LM szakasz az LMF derékszögű háromszög átfogója. Ebből következik, hogy a $KLMNOP$ hatszög minden oldala $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ hosszúságú.
3. A $KLMNOP$ hatszög minden szöge egyenlő. Megmutatjuk, hogy például a K és M csúcsoknál található szögek ugyanakkorák. Ehhez tekintsük az LPK és LNM háromszögeket. Mindkét háromszög egyenlő szárú, száraik egyenlő hosszúak, továbbá $LP = LN$, hiszen mindkét szakasz a kocka két kitérő helyzetű élének felezőpontját köti össze (ld. 4187. feladat). Ebből adódik, hogy a két háromszög egybevágó, ezért megfelelő szögeik is megegyeznek, így a $KLMNOP$ hatszögben a K és M csúcsoknál ugyanakkora szögek vannak.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $KLMNOP$ hatszög szabályos.

Megjegyzés: A 4235. feladatban egy másik módszert is találhatunk annak igazolására, hogy a hatszög szögei egyenlők.

d) A kocka szabályos nyolcszögben nem metszhető, mert csak 6 lapja van, így síkmetszeteinek legfeljebb 6 oldala lehet.

4205 22,5 cm.

4206 $6\sqrt{3} \approx 10{,}4$ cm.

4207 $\frac{12\sqrt{2}}{2} \approx 8{,}49$ cm.

4208 *a)* A levágott testet egy szabályos háromszög és 3 egyenlő szárú derékszögű háromszög határolja.

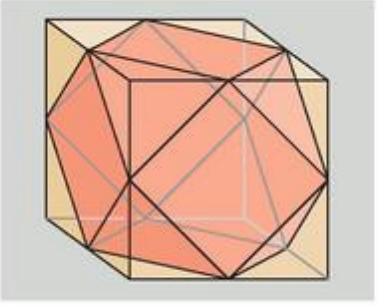
b) A levágott test egy szabályos háromoldalú gúla (tetraéder).

c) A visszamaradó testnek 7 lapja, 10 csúcsa és 15 éle van.

d) Mivel $10 + 7 = 15 + 2$, vagyis a csúcsok és lapok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál, ezért az Euler-féle poliédertétel teljesül a visszamaradó testre.

e) A testet 3 négyzet, egy szabályos háromszög, valamint 3 egybevágó ötszög határolja.

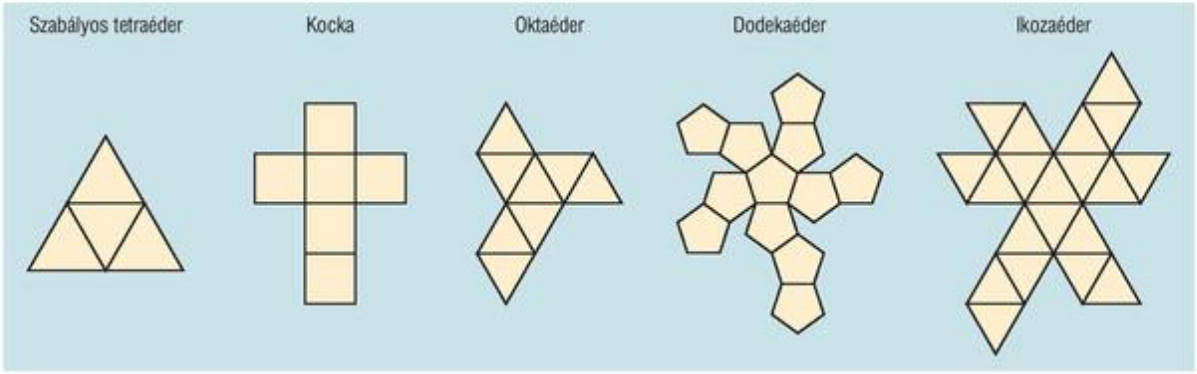
4209 *a)* A visszamaradó test az ábrán látható. A testet 6 négyzet, valamint 8 szabályos háromszög határolja.



b) A testnek 14 lapja, 12 csúcsa, valamint 24 éle van.

c) Mivel $12 + 14 = 24 + 2$, vagyis a csúcsok és lapok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál, ezért az Euler-féle poliédertétel teljesül a visszamaradó testre.

4210



4211

Test neve	Lapok száma	Csúcsok száma	Élek száma
Kocka	6	8	12
Szabályos tetraéder	4	4	6
Oktaéder	8	6	12
Háromszög alapú hasáb	5	6	9
Háromszög alapú gúla	4	4	6
Négyzet alapú hasáb	6	8	12
Négyzet alapú gúla	5	5	8
Ötszög alapú hasáb	7	10	15
Ötszög alapú gúla	6	6	10
Tizenkétszög alapú hasáb	14	24	36
Tizenkétszög alapú gúla	13	13	24

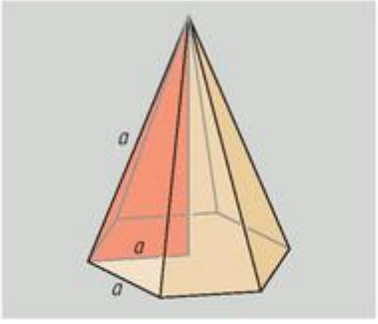
A csúcsok és lapok számának összege minden esetben 2-vel nagyobb az élek számánál.

4212 A hasábnak 6 oldallapja van.

4213 A gúlának 12 oldallapja van.

4214 *a)* $(n-1)\cdot 720°$; *b)* $(n-1)\cdot 360°$.

4215 Ha a szabályos hatoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek lennének, akkor az ábrán a-val jelölt szakaszok hossza megegyezne. Ekkor a narancssszínnel jelölt derékszögű háromszög átfogója ugyanakkora lenne, mint az egyik befogója, ami lehetetlen. Ebből következik, hogy a szabályos hatoldalú gúla oldallapjai nem lehetnek szabályos háromszögek.



4216 *a)* 73,74°; *b)* 73,74°;
c) 118,07°; *d)* 60°.

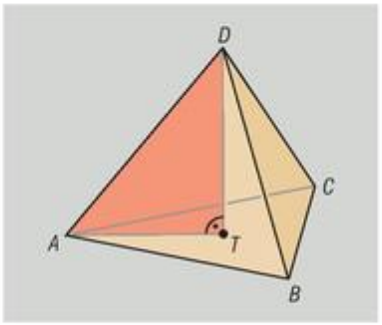
4217 Az alkotó és az alaplap síkja által bezárt szöget α, a kúp nyílásszögét φ jelöli.
a) $\alpha \approx 67{,}38°$, $\varphi \approx 45{,}24°$; *b)* $\alpha \approx 67{,}38°$, $\varphi \approx 45{,}24°$; *c)* $\alpha \approx 53{,}13°$, $\varphi \approx 73{,}74°$.

4218 60°.

4219 *a)* 54,74°; *b)* 75,04°.

4220 63,43°.

4221 Az $ABCD$ szabályos tetraéder D csúcsából induló magasságának talppontját T-vel jelöltük. Mivel a T pont egyben az $ABC_{\triangle}$ súlypontja is, ezért az AT szakasz az $ABC_{\triangle}$ súlyvonalának $\frac{2}{3}$-szorosa. A szabályos háromszög súlypontja és magasságpontja egybeesik, ezért az ABC szabályos háromszög súlyvonalának hossza megegyezik a magasságának hosszával, így:



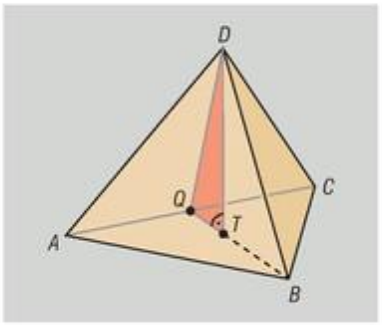
$$AT = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Az $ADT_{\triangle}$ derékszögű, hiszen DT merőleges az ABC alaplap síkjára, így merőleges annak minden egyenesére is. Pitagorasz tételéből következik, hogy:

$$DT^2 = AD^2 - AT^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3} \quad \Rightarrow \quad DT = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Az a élű szabályos tetraéder csúcsa a szemközti laptól $a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ távolságra van.

4222 Az $ABCD$ szabályos tetraéder ABC és ACD lapjainak hajlásszögét a két lap közös egyenesére (AC) a síkokon belül emelt merőlegesek hajlásszögeként számolhatjuk. Mivel az ABC és ACD háromszögek szabályosak, ezért az AC oldalhoz tartozó magasságaik az AC szakasz Q felezőpontjában metszik egymást. Ebből következik, hogy a két lap hajlásszöge megegyezik a $DQB\sphericalangle$-gel (ld. ábra).



Ha az $ABCD$ tetraéder éleinek hossza a, és a $DQB_{\triangle}$ D-ből induló magasságvonalának talppontja T, akkor a 4221. feladat eredménye alapján:

$$DT = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

A DQT derékszögű háromszögben:

$$\sin(DQB\sphericalangle) = \frac{DT}{DQ} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{DQ}.$$

A DQ szakasz a magasság az ACD szabályos háromszögben, ezért:

$$DQ = a\frac{\sqrt{3}}{2},$$

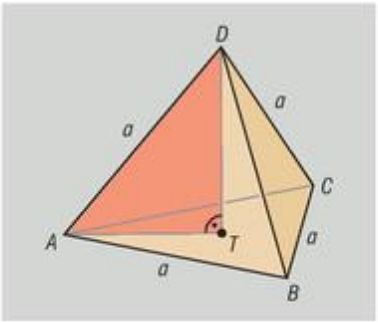
amiből következik, hogy:

$$\sin(DQB\sphericalangle) = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$DQB\sphericalangle \approx 70{,}53°.$$

A szabályos tetraéder két szomszédos lapja 70,53°-os szöget zár be egymással.

4223 Ha az $ABCD$ szabályos tetraéder éleinek hossza a, és a D csúcsából induló magasságának talppontja T, akkor az AD él és az ABC alaplap által bezárt szög megegyezik a $DAT\sphericalangle$-gel.



A 4221. feladat eredménye alapján:

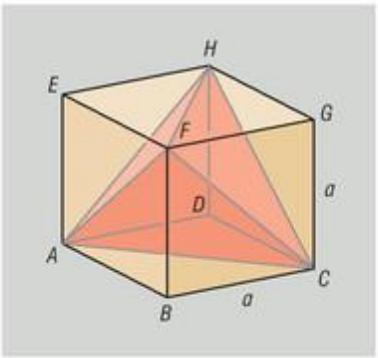
$$DT = a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

így az ADT derékszögű háromszögben:

$$\sin(DAT\sphericalangle) = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad DAT\sphericalangle \approx 54{,}74°.$$

A szabályos tetraéder éle az élt nem tartalmazó lapjával 54,74°-os szöget zár be.

4224 Az $ABCDEFGH$ kocka két kitérő helyzetű lapátlójának végpontjai egy szabályos tetraéder csúcsai. Példaként tekintsük az A, C, H és F pontokat, és húzzuk meg az ábrán is látható lapátlókat. A kialakuló $ACFH$ tetraéder minden éle a kockának egy-egy lapátlója, ezért a tetraédert négy szabályos háromszög határolja. Ebből következik, hogy az $ACFH$ tetraéder szabályos.



Ha a kocka éle a, akkor a keletkező szabályos tetraéder éleinek hossza: $a\sqrt{2}$.

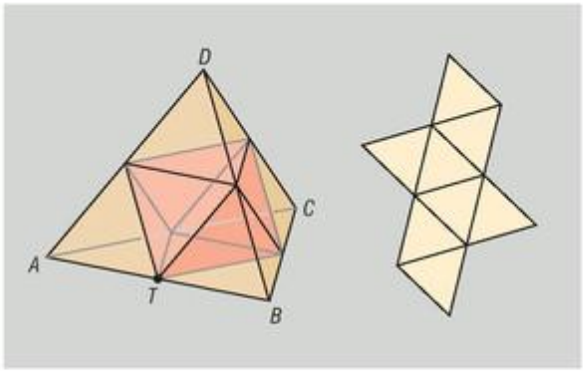
4225 A 4224. feladatban megmutattuk, hogy a szabályos tetraéder kockába foglalható (ld. 4224. feladat ábrája). Azt is beláttuk, hogy a szabályos tetraéder éle a tartalmazó kocka élének $\sqrt{2}$-szöröse, ezért ha a kocka éle x, akkor $x\sqrt{2} = a$, amiből:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Az a élű szabályos tetraédert tartalmazó kocka éle tehát $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

A 4224. feladat ábráján szereplő szabályos tetraéder AC és FH éle kitérő helyzetűek, távolságuk éppen a kocka élének hosszával egyenlő, azaz $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. A tartalmazó kocka AC és FH lapátlója merőleges egymásra, ezért a szabályos tetraéder kitérő helyzetű élei is merőlegesek egymásra.

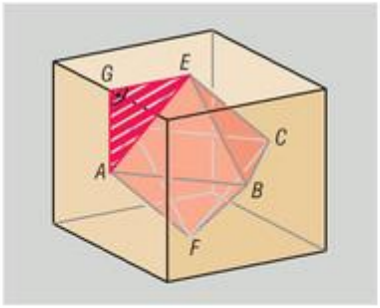
4226 *a)* A tetraéder „csonkolása" után az ábrán látható testet kapjuk. A másik ábra a test síkbeli hálóját mutatja.



b) A visszamaradó testnek 8 lapja, 6 csúcsa és 12 éle van. Megjegyezzük, hogy egy szabályos oktaéder marad vissza a tetraéderből.

c) Mivel $8 + 6 = 12 + 2$, ezért a lapok és csúcsok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál, így az Euler-féle poliédertétel teljesül a testre.

4227 *a)* A keletkező $FABCDE$ test minden éle ugyanakkora hosszúságú, hiszen bármely éle a kocka két szomszédos lapjának középpontját köti össze (ld. ábra). Ha az A és E pontokat tartalmazó lapok közös élének felezőpontja G, akkor az AEG derékszögű háromszögben:



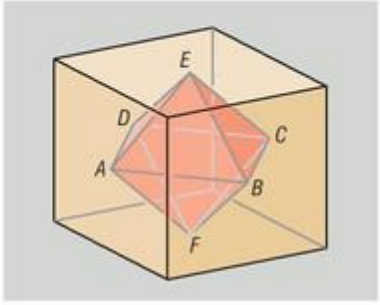
$$AE^2 = AG^2 + EG^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow AE = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}.$$

Az $FABCDE$ test minden éle 14,14 cm hosszúságú.

b) A testnek 8 lapja, 6 csúcsa és 12 éle van.

c) Az $FABCDE$ testet szabályos háromszögek határolják. A keletkező test egy szabályos oktaéder.

4228 Az ábrán látható $FABCDE$ szabályos oktaéderben példaként megvizsgáljuk, hogy az AB él a többi éllel mekkora szöget zár be. A szabályos oktaéder lapjai szabályos háromszögek, így az AB él a következő szakaszokkal 60°-os szöget zár be: AF, BF, AE, BE.

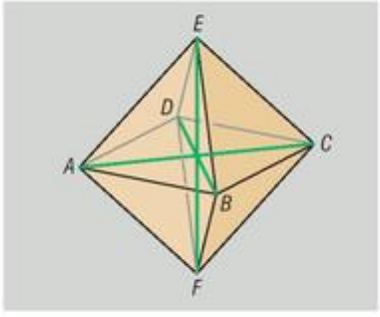


A 4227. feladatban láttuk, hogy a szabályos oktaéder csúcsai egy kocka lapjainak középpontjai (ld. ábra). Ebből adódóan az $ABCD$ négyszög négyzet, ezért az AB él a DC éllel párhuzamos (így azzal 0°-os szöget zár be), továbbá a következő élekre merőleges (így azokkal 90°-os szöget zár be): AD, BC.

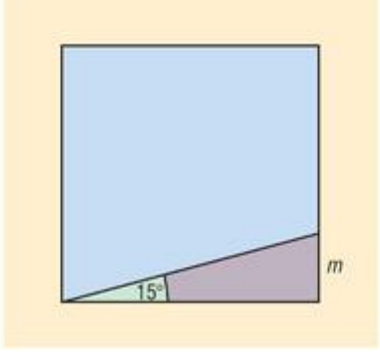
A hiányzó 4 él (DF, CF, DE, CE) mindegyike kitérő helyzetű az AB éllel. Kitérő egyenesek (szakaszok) hajlásszöge alatt a tér egy tetszőleges pontján átmenő, velük párhuzamos, metsző helyzetű egyenesek hajlásszögét értjük. Vegyük észre, hogy a DC él párhuzamos az AB éllel, ezért az AB és DE élek hajlásszöge megegyezik a DC és DE élek hajlásszögével, ami 60°. Ugyanígy belátható, hogy AB a másik 3 hiányzó éllel is 60°-os szöget zár be.

A szabályos oktaéder két éle tehát a következő szögek valamelyikét zárja be egymással: 0°, 60° és 90°.

4229 A szabályos oktaédernek 3 testátlója van, amelyeket az ábrán zölddel jelöltünk meg. Mindegyik testátló egy-egy 10 cm oldalú négyzetnek az átlója (pl. az AC testátló az $ABCD$ négyzet átlója), ezért hosszuk $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm. Bármely két testátlót is választjuk ki, azok biztosan egy négyzet átlói (pl. az AC és BD testátlók az $ABCD$ négyzet átlói), ezért a szabályos oktaéder bármely két testátlója merőleges egymásra.



4230 *a)* Az ábrán látható derékszögű háromszögben:



$$\operatorname{tg}15° = \frac{m}{5}, \quad \text{amiből} \quad m \approx 1{,}34 \text{ cm}.$$

Az ék „magassága” körülbelül 1,34 cm.

b) A kockát egy téglalapban metszettük el, melynek egyik (az ábrán látható négyzet síkjára merőleges) oldala 5 cm, a másik oldala pedig:

$$\frac{5}{\cos 15°} \approx 5{,}18 \text{ cm}.$$

A kocka síkmetszetének területe megközelítőleg 25,90 cm^2.

c) A kockából egy derékszögű háromszög, illetve egy derékszögű trapéz alapú egyenes hasáb keletkezik. Az ábra a két test alaplapját mutatja.

4231 *a)* Ági a dobótetraéderrel 4, a dobóoktaéderrel 8, a dobódodekaéderrel 12, a dobóikozaéderrel pedig 20 különböző számot dobhat. A 4 testtel összesen $4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 20 = 7680$-féle dobás végezhető.

A prímszámok 1-től 20-ig: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Ahhoz, hogy mindegyik testtel prímszámot dobjunk, a tetraéderrel 2, az oktaéderrel 4, a dodekaéderrel 5, míg az ikozaéderrel 8 számot dobhatunk. Ezért a prímszámok dobása szempontjából kedvező esetek száma $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 = 320$, annak a valószínűsége pedig, hogy mindegyik testtel prímszámot dobunk:

$$\frac{320}{7680} \approx 0{,}0417.$$

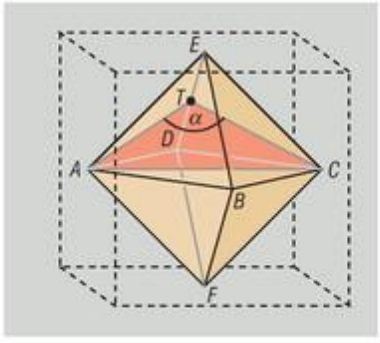
b) Mivel $4 + 8 + 12 + 20 = 44$, ezért a dobott pontok összege az alábbi esetekben lehet legalább 42.

1. A pontok összege 44. Ez csak úgy lehetséges, ha Ági mindegyik testtel a lehető legnagyobb számot dobja. A pontok összege 1 esetben lehet 44.
2. A dobott pontok összege 43. Ekkor Áginak egy kivételével mindegyik testtel a lehető legnagyobb számot kell dobnia, a maradék testtel pedig a legnagyobb számnál 1-gyel kisebbet. Attól függően, hogy melyik testtel nem dob maximális értéket, ez az eset 4-féleképpen következhet be.
3. A dobott pontok összege 42. Ekkor vagy két testtel dob 1-gyel kisebbet, mint a maximális érték, vagy egy testtel dob 2-vel kisebbet a maximumnál, míg a többi testtel a legnagyobb értéket kell dobnia. Az első változat $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen, a második pedig 4-féleképpen következhet be.

A kedvező esetek száma tehát: $1 + 4 + 10 = 15$, annak a valószínűsége pedig, hogy legalább 42 a dobott pontok összege:

$$\frac{15}{7680} \approx 0{,}00195.$$

4232 Az $FABCDE$ szabályos oktaéder ADE és CDE lapjainak hajlásszögét fogjuk kiszámolni. A térben való jobb tájékozódás érdekében az ábrán megjelenítettük azt a kockát is, amelynek középpontjai az oktaéder csúcspontjai. A két lap hajlásszöge megegyezik az ADE, valamint a CDE szabályos háromszögek AT, illetve CT magasságainak hajlásszögével. A keresett szöget például az ACT egyenlő szárú háromszög oldalaiból számolhatjuk ki. Ha az oktaéder minden éle a hosszúságú, akkor az AT, illetve CT magasság: $AT = CT = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (egy-egy a oldalú szabályos háromszög magasságai), míg $AC = a\sqrt{2}$ (az a oldalú $ABCD$ négyzet átlója). Ha a két szomszédos lap hajlásszögét α-val jelöljük, akkor az $ACT_{\triangle}$-ben a koszinusztétel alapján:



$$AC^2 = AT^2 + CT^2 - 2 \cdot AT \cdot CT \cdot \cos\alpha,$$

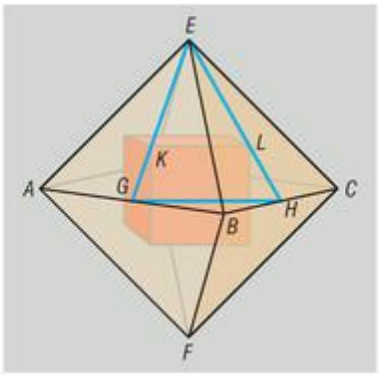
$$2a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha.$$

Rendezés után:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 109{,}47°.$$

A szabályos oktaéder két szomszédos lapja 109,47°-os szöget zár be egymással.

4233 *a)* Az $FABCDE$ szabályos oktaédert, valamint a lapjait „érintő” beírt kockát az ábra mutatja (a D pont takarás miatt nem látható). A szobor magassága megegyezik az FE szakasz hosszával. Mivel FE az $AFCE$ négyzet átlója, a négyzet oldala pedig 1 méter, ezért a szobor magassága:



$$\sqrt{2} \approx 1{,}41 \text{ m}.$$

b) Feladatunk a szabályos oktaéderbe írt kocka KL élének kiszámítása. A feltételek alapján K és L az ABE, illetve a BCE szabályos háromszögek középpontja. Az ábrán G-vel jelöltük az AB, H-val pedig a BC szakasz felezőpontját.

Vizsgáljuk meg a $GHE_{\triangle}$-et. Mivel GE és HE magasság egy-egy 1 m oldalú szabályos háromszögben, ezért:

$$GE = HE = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (m)}.$$

Ebből következik, hogy a $GHE_{\triangle}$ egyenlő szárú. A háromszög GH alapja középvonal a szintén egyenlő szárú $ACB_{\triangle}$-ben, ezért:

$$GH = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (m)},$$

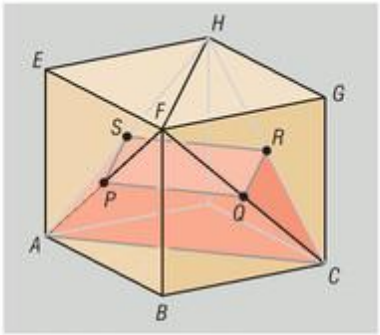
hiszen AC pedig egy 1 m oldalú négyzet átlója (természetesen az $ABCD$ négyzetről van szó).

Végül vegyük alaposan szemügyre a $KLE_{\triangle}$-et. Mivel K az $ABE_{\triangle}$, L pedig a $BCE_{\triangle}$ súlypontja, ezért e pontok 2 : 1 arányban osztják a megfelelő háromszögek EG, illetve EH súlyvonalait. Ebből azonban az is következik, hogy a $GHE_{\triangle}$-et az E középpontú $\frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság éppen a $KLE_{\triangle}$ viszi át. Az említett középpontos hasonlóság a GH szakaszt a KL szakaszba viszi, ezért:

$$KL = \frac{2}{3} \cdot GH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ (m)}.$$

Az oktaéder belsejében elhelyezett kocka éleinek hossza körülbelül 0,47 m.

4234 A jobb térbeli tájékozódás érdekében az $ACHF$ szabályos tetraédert belefoglaltuk az $ABCDEFGH$ kockába az ábrán látható módon (a D pont takarás miatt nem látszik). A tetraéder AF, CF, CH és AH éleinek felezőpontja rendre P, Q, R és S. Megmutatjuk, hogy a $PQRS$ négyszög rombusz, azaz a szabályos tetraéder metszhető rombuszban.



Mivel a PQ szakasz középvonal az $ACF_{\triangle}$-ben, ezért:

$$PQ = \frac{AC}{2}, \quad (1)$$

továbbá PQ párhuzamos AC-vel. Hasonló megfontolással láthatjuk, hogy SR középvonal az $ACH_{\triangle}$-ben, amiből következik, hogy:

$$SR = \frac{AC}{2}, \quad (2)$$

továbbá SR is párhuzamos AC-vel. Összefoglalva: PQ és SR ugyanazzal a szakasszal párhuzamos, amiből következik, hogy PQ és SR egymással is párhuzamos. Másrészt $PQ = SR$, így végül az is következik, hogy a $PQRS$ négyszög paralelogramma.

Ugyanígy belátható, hogy QR középvonal az $FHC_{\triangle}$-ben, amiből következik, hogy:

$$QR = \frac{FH}{2}, \quad (3)$$

illetve PS középvonal az $FHA_{\triangle}$-ben, amiből pedig:

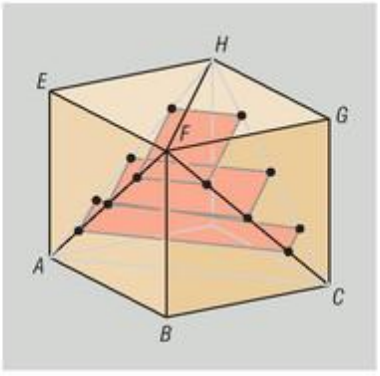
$$PS = \frac{FH}{2}. \quad (4)$$

Az (1), (2), (3) és (4) egyenlőségek alaposabb vizsgálata után megállapíthatjuk, hogy a $PQRS$ négyszög minden oldala az $ABCDEFGH$ kocka valamelyik lapátlójának a felével egyenlő hosszúságú.

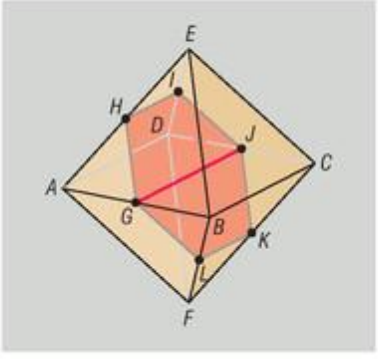
Mivel a kockának minden lapátlója ugyanakkora, ezért ugyanez érvényes a $PQRS$ négyszög oldalaira is. Ebből már következik, hogy a $PQRS$ paralelogramma valóban rombusz.

Megjegyzés: A $PQRS$ sík párhuzamos az $ABCDEFGH$ kocka $ABCD$, illetve $EFGH$ lapjaival, továbbá a tetraéder FH és AC éleivel.

Az alábbi ábra azt mutatja, hogy a szabályos tetraéder egyik élével párhuzamos síkok mind paralelogrammában metszik a tetraédert (amennyiben metszik).



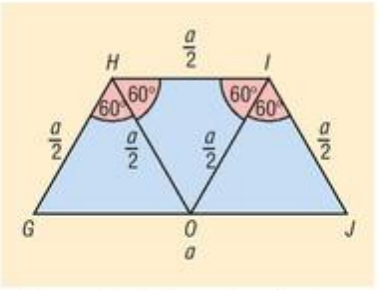
4235 Megmutatjuk, hogy a szabályos oktaédert lehet szabályos hatszögben metszeni.



Jelöljük az $FABCDE$ szabályos oktaéder AB, AE, DE, DC, CF és BF éleinek felezőpontját az ábra szerint a G, H, I, J, K, L pontokkal. A $GHIJKL$ hatszög szabályos. Ennek igazolásához az alábbiakat kell végiggondolnunk.

1. A hat pont egy síkban fekszik. A HI szakasz középvonal az ADE háromszögben, ezért HI és AD párhuzamos egymással. A GJ szakasz középvonal az $ABCD$ négyzetben, ezért GJ szintén párhuzamos AD-vel. Ez azt is jelenti, hogy GJ és HI egyaránt párhuzamos az oktaéder AD élével, amiből következik, hogy HI és GJ párhuzamos egymással. Hasonlóan mutatható meg, hogy GJ és LK szintén párhuzamos egymással. Ekkor azonban a GJ és a HI, valamint a GJ és az LK szakaszok párhuzamosak egymással, ezért végpontjaik, azaz a G, J, H, I, valamint a G, J, L, K pontok egy-egy síkra illeszkednek. E két sík azonban egybeesik egymással, hiszen a szabályos oktaéder, és így a $GHIJKL$ hatszög is középpontosan szimmetrikus a GJ szakasz felezőpontjával, ami csak úgy lehetséges, ha a $GHIJKL$ hatszög csúcsai egy síkban fekszenek.
2. A $GHIJKL$ hatszög oldalai egyenlők. Vegyük észre, hogy a hatszög minden oldala középvonal a szabályos oktaéder egy-egy lapján: például IH középvonal az ADE háromszögben, GH középvonal a BEA háromszögben és így tovább. Ebből adódik, hogy a hatszög minden oldala feleakkora, mint az $FABCDE$ szabályos oktaéder éle, így a hatszög minden oldala egyenlő hosszúságú.

3. A $GHIJKL$ hatszög minden szöge 120°-os. Példaként megmutatjuk ezt a hatszög H és I csúcsainál lévő szögekről. Ha a szabályos oktaéder éleinek hossza a, akkor a $GJIH$ trapéz oldalainak hossza (ld. ábra):

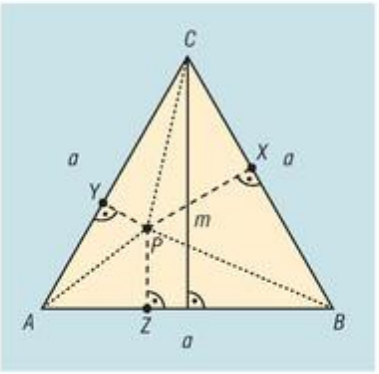


$$HI = IJ = GH = \frac{a}{2}, \quad \text{illetve} \quad GJ = a.$$

Ha a trapéz rövidebb alapjának végpontjait (H és I) összekötjük a hosszabb alap felezőpontjával (az ábrán az O pont), akkor ezzel a trapézt három szabályos háromszögre bonthatjuk fel, amiből következik, hogy a H és I csúcsoknál valóban 120°-os szögek vannak.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $GHIJKL$ sík a szabályos oktaédert valóban szabályos hatszögben metszi.

4236 *a)* Kössük össze a P pontot az ABC szabályos háromszög csúcsaival, ezzel a háromszöget három kisebb háromszögre, a BCP, CAP, illetve ABP háromszögekre bontottuk. A három keletkező háromszögnek egy-egy oldala éppen a hosszúságú. Vegyük észre még, hogy a PX, PY, PZ szakaszok mindegyike az a hosszúságú oldalhoz tartozó magasság az egyes háromszögekben. Ezek alapján az ABC háromszög területe:



$$T_{ABC} = T_{BCP} + T_{CAP} + T_{ABP},$$

$$T_{ABC} = \frac{a \cdot PX}{2} + \frac{a \cdot PY}{2} + \frac{a \cdot PZ}{2},$$

$$\frac{a \cdot m}{2} = \frac{a}{2} \cdot (PX + PY + PZ),$$

ahol m az ABC háromszög magasságának hosszát jelöli. Egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy:

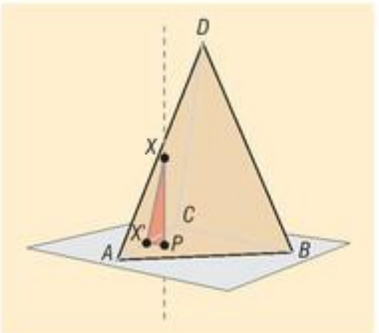
$$PX + PY + PZ = m.$$

Mivel a jobb oldal nem függ a P pont kiválasztásától, ezért bebizonyítottuk, hogy a PX, PY, PZ szakaszok hosszának összege (a P pont helyzetétől függetlenül) az ABC háromszög magasságával egyenlő.

Megjegyzés: A $PX + PY + PZ$ összeget a szabályos háromszög oldalával is kifejezhetjük. Ha a háromszög oldalainak hossza a, akkor:

$$PX + PY + PZ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) Az ábra jelöléseinek megfelelően válasszuk ki az $ABCD$ szabályos tetraéder ABC alaplapjának belsejében a P pontot. Tegyük fel, hogy a P pontban az ABC síkra emelt merőleges egyenes az ACD lap síkját az X pontban metszi. Jelöljük X'-vel az X pontnak az ACD szabályos háromszög AC oldalára eső merőleges vetületét (ld. ábra).



Ha a szabályos tetraéder két szomszédos lapjának hajlásszögét α-val jelöljük, akkor az $XX'P$ derékszögű háromszögben $XX'P\sphericalangle = \alpha$ teljesül. Az $XX'P$ derékszögű háromszögben így:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PX}{PX'}, \quad \text{amiből} \quad PX = PX' \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Előző gondolatmenetünkben nem volt lényeges szerepe annak, hogy az X pont az ACD lap síkjára illeszkedik. Ezért hasonló megfontolások után azt kapjuk, hogy ha a P pontban az ABC lap síkjára emelt merőleges egyenes a CBD, illetve ABD síkokkal való metszéspontja Y és Z, továbbá Y' és Z' e két pont merőleges vetülete az ABC háromszög megfelelő oldalára, akkor:

$$PY = PY' \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad \text{és} \quad PZ = PZ' \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Ebből következik, hogy:

$$PX + PY + PZ = \operatorname{tg}\alpha \cdot (PX' + PY' + PZ').$$

Mivel a P pont az ABC szabályos háromszög belsejében fekszik, továbbá a PX', PY' és a PZ' szakaszok merőlegesek a háromszög egy-egy oldalára, ezért az *a)* feladat eredményét felhasználva:

$$PX' + PY' + PZ' = m,$$

ahol m az ABC háromszög magassága. Összefoglalva:

$$PX + PY + PZ = m \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

így az összeg valóban független a P pont helyzetétől.

Megjegyzés: A $PX + PY + PZ$ összeget a szabályos tetraéder élével is kifejezhetjük. Ha a tetraéder minden élének hossza a, akkor az ABC háromszög magassága:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

A szabályos tetraéder két szomszédos lapjának α hajlásszögére:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$$

(ez egyszerűen következik a 4222. feladat eredményeiből).

Ebből következően:

$$PX + PY + PZ = a\sqrt{6}.$$

A terület fogalma, a sokszögek területe – megoldások

4237 *a)* 2200 cm^2; *b)* 2025 cm^2; *c)* 1450 cm^2; *d)* 6800 cm^2.

4238 *a)* 54 cm^2; *b)* 6,16 cm^2; *c)* 39,92 cm^2; *d)* 630 cm^2.

e) A beírt kör oldalakkal való érintési pontját rendre E, F, illetve G jelöli (ld. ábra). Mivel a kör egy külső pontjából a körhöz ugyanakkora érintőszakaszok húzhatók, ezért:

$$BE = BF = x, \quad CF = CG = 13 - x, \quad AE = AG = 2.$$

Az ABC derékszögű háromszög befogóira teljesül:

$$AB = x + 2, \quad AC = 15 - x,$$

ezért Pitagorasz tétele alapján:

$$(x + 2)^2 + (15 - x)^2 = 13^2.$$

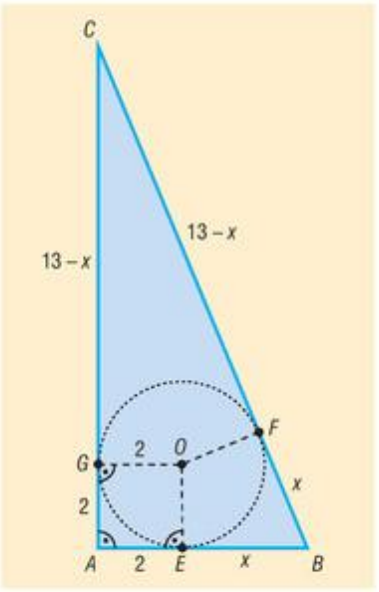
A műveletek elvégzése után:

$$2x^2 - 26x + 60 = 0,$$

$$x^2 - 13x + 30 = 0.$$

A kapott egyenlet megoldásai: $x_1 = 3$ és $x_2 = 10$. A háromszög befogói: $AB = 5$ cm és $AC = 12$ cm (vagy fordítva).

A háromszög területe: 30 cm^2.



4239 8 cm.

4240 *a)* 4 cm; *b)* 2,8 cm.

4241 A téglalap területe nagyobb. Ha a paralelogramma két szomszédos oldala a és b, az általuk bezárt szög α, akkor területe $T = a \cdot b \cdot \sin\alpha$. Rögzített oldalak mellett a terület akkor maximális, ha $\alpha = 90°$.

4242 *a)* A terület 21 cm^2. A paralelogramma magasságainak hossza 3 cm, illetve 7 cm.

b) $T = 4{,}44$ cm^2. A magasságok: 1,85 cm és 1,2 cm.

c) $T \approx 176{,}67$ cm^2. A magasságok hossza: 14,72 cm és 10,39 cm.

d) $T \approx 38{,}07$ cm^2. A magasságok hossza: 4,59 cm és 6,80 cm.

4243 *a)* $T = 10{,}5$ cm^2. A paralelogramma minden oldala 3,81 cm hosszú. A magasságok hossza: 2,76 cm.

b) $T \approx 3{,}09$ cm^2. Az oldalak hossza: 1,24 cm és 2,78 cm. A magasságok hossza: 2,49 cm és 1,11 cm.

c) $T \approx 18{,}13$ cm^2. Az oldalak hossza: 3,71 cm és 5,54 cm. A magasságok hossza: 4,89 cm és 3,27 cm.

4244 *a)* 90°; *b)* 30°; *c)* 31,86°; *d)* 60,81°.

4245 $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm^2.

4246 A trapéz területe: 36 cm^2.

4247 A trapéz területe: 35 cm^2.

4248 *a)* A szabályos hatszög területe: $216\sqrt{3} \approx 374{,}1$ cm^2.

b) A szabályos nyolcszög területe: $8 \cdot \dfrac{12 \cdot \dfrac{6}{\operatorname{tg} 22{,}5°}}{2} \approx 695{,}3$ cm^2.

c) A szabályos tízszög területe: $10 \cdot \dfrac{12 \cdot \dfrac{6}{\operatorname{tg} 18°}}{2} \approx 1108{,}0$ cm^2.

4249 Az ötszög területe körülbelül 65,71 cm^2.

4250 *a)* A hétszög területe körülbelül 30,34 cm^2.

b) A hétszög területe 24,63 cm^2.

4251 A két síkidom területének aránya: $\dfrac{3}{\operatorname{tg} 15°} \approx 11{,}20$.

4252 Ha a nagy adag ára 1400 Ft, akkor a kis adagot legfeljebb $1400 \cdot \dfrac{1}{1{,}2^2} \approx 972{,}22$ Ft-ért érdemes megrendelni. A kis adag túrós csusza megér 950 Ft-ot.

4253 A családi ház kicsinyített képének területe:

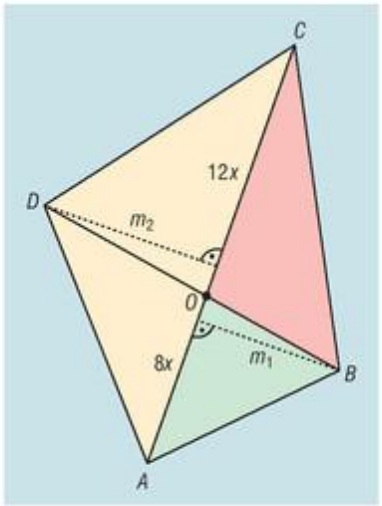
$$110 \cdot \left(\frac{1}{40}\right)^2 = 0{,}06875 \text{ m}^2, \quad \text{azaz} \quad 68750 \text{ mm}^2.$$

Az A4-es lap területe:

$$210 \cdot 297 = 62\,370 \text{ mm}^2.$$

A tervrajz nem fér el az A4-es lapon.

4254 Az ábra jelöléseinek megfelelően: az $ABCD$ négyszög átlói az O pontban metszik egymást, továbbá $T_{AOB} = 8\ \text{cm}^2$ és $T_{COB} = 12\ \text{cm}^2$. Mivel az AOB és COB háromszögekben az AO, illetve a CO alaphoz ugyanakkora magasság tartozik (az ábrán m_1), ezért a két háromszög területének aránya megegyezik az AO és CO oldalak arányával, így $AO = 8x$ és $CO = 12x$ alakban felírható. Vegyük észre, hogy az AOD és COD háromszögekben szintén ugyanakkora magasság tartozik az AO, illetve CO oldalakhoz (az ábrán m_2), ezért a két háromszög területének arányára teljesül, hogy

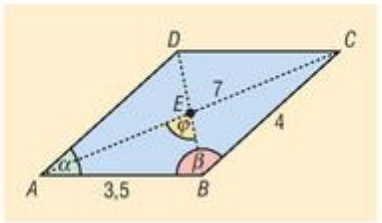


$$\frac{T_{AOD}}{T_{COD}} = \frac{\frac{8x \cdot m_2}{2}}{\frac{12x \cdot m_2}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Mivel a két háromszög területének összege $30\ \text{cm}^2$, ezért $T_{AOD} = 12\ \text{cm}^2$ és $T_{COD} = 18\ \text{cm}^2$.

Az átlók berajzolása után keletkező másik két háromszög területe $12\ \text{cm}^2$, illetve $18\ \text{cm}^2$.

4255 *a)* Az erdő kicsinyített képe az $ABCD$ paralelogramma, amelyben $AB = 3{,}5$ cm, $BC = 4$ cm és $AC = 7$ cm. Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta,$$

$$7^2 = 3{,}5^2 + 4^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 4 \cdot \cos\beta,$$

$$\cos\beta \approx -0{,}7411,$$

$$\beta \approx 137{,}83°.$$

Az $ABCD$ paralelogramma területe:

$$T = AB \cdot BC \cdot \sin\beta \approx 9{,}40\ \text{cm}^2.$$

Mivel az erdő az $ABCD$ paralelogramma 40 000-szeresére nagyított képe, ezért az erdő területe:

$$T \approx 40\,000^2 \cdot 9{,}40 = 1{,}504 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2, \quad \text{ami} \quad 150{,}4\ \text{ha}.$$

Megjegyzés: Az ABC háromszög területe Heron képletével is számolható.

b) Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsánál lévő szögre:

$$\alpha = 180° - \beta \approx 42{,}17°.$$

Az ABD háromszögben koszinusztétel segítségével kapjuk, hogy:

$$BD \approx 2{,}74\ \text{cm}.$$

Az erdőt átszelő megfelelő turistaút hossza:

$$40\,000 \cdot 2{,}74 \cdot 10^{-5}\ \text{km} \approx 1{,}1\ \text{km}.$$

c) Ha az $ABCD$ paralelogramma átlóinak hajlásszögét φ jelöli, akkor a paralelogramma területére:

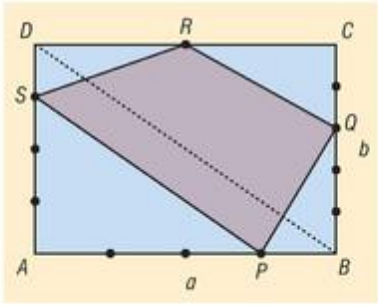
$$9{,}40 = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\varphi}{2},$$

$$\sin\varphi \approx 0{,}9802,$$

$$\varphi \approx 78{,}58°.$$

Az erdőben kijelölt turistautak 78,58°-os szögben metszik egymást.

4256 *a)* Ha az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = a$, $BC = b$, akkor az SRD derékszögű háromszög területe:



$$T_{SRD} = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{1}{4}b\right)}{2} = \frac{1}{16}ab.$$

Ehhez hasonlóan:

$$T_{RQC} = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{2}{5}b\right)}{2} = \frac{1}{10}ab,$$

$$T_{PQB} = \frac{\left(\frac{1}{4}a\right)\cdot\left(\frac{3}{5}b\right)}{2} = \frac{3}{40}ab, \qquad T_{PSA} = \frac{\left(\frac{3}{4}a\right)\cdot\left(\frac{3}{4}b\right)}{2} = \frac{9}{32}ab.$$

A derékszögű háromszögek területének összege:

$$\frac{1}{16}ab + \frac{1}{10}ab + \frac{3}{40}ab + \frac{9}{32}ab = \frac{10+16+12+45}{160}ab = \frac{83}{160}ab.$$

A $PQRS$ négyszög területe:

$$T_{PQRS} = T_{ABCD} - (T_{SRD} + T_{RQC} + T_{PQB} + T_{PSA}) =$$

$$= ab - \frac{83}{160}ab = \frac{77}{160}ab = \frac{77}{160}T_{ABCD}.$$

A $PQRS$ négyszög területe az $ABCD$ téglalap területének 48,125%-a.

b) A PS és QR szakaszok nem párhuzamosak egymással. Mivel:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AS}{AD} = \frac{3}{4},$$

ezért a PSA és BDA derékszögű háromszögek befogóinak aránya megegyezik, így a két háromszög hasonló, amiből következik, hogy PS párhuzamos a BD átlóval.

Másrészt:

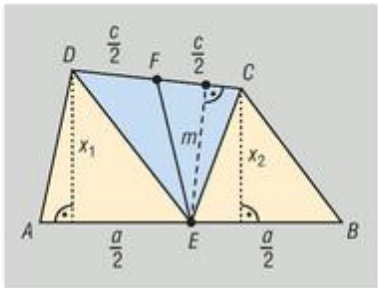
$$\frac{CR}{CD} = \frac{1}{2}, \quad \text{illetve} \quad \frac{CQ}{CB} = \frac{2}{5},$$

ezért:

$$\frac{CR}{CD} \neq \frac{CQ}{CB}.$$

Ebből következik, hogy QR nem párhuzamos BD-vel, így persze PS-sel sem.

4257 Tekintsünk egy olyan $ABCD$ négyszöget, amelynek területét az EF középvonala megfelezi (ld. ábra), azaz:



$$T_{AEFD} = T_{EBCF}. \quad (1)$$

Mivel az F pont felezi a CD oldalt, ezért a $DFE_{\triangle}$ és a $CFE_{\triangle}$ egy-egy oldala ugyanakkora, továbbá megegyezik az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságuk is (az ábrán az m-mel jelölt szakasz). Ebből következik, hogy a két háromszög területe egyenlő, azaz:

$$T_{DFE} = T_{CFE}. \quad (2)$$

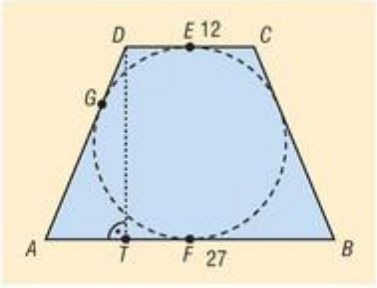
Az (1) és (2) egyenlőségek megfelelő oldalainak különbsége alapján:

$$T_{AEFD} - T_{DFE} = T_{EBCF} - T_{CFE},$$

$$T_{AED} = T_{EBC}.$$

Vegyük észre, hogy az AED és az EBC háromszögekben $AE = EB$, ezért területük csak úgy egyezhet meg, ha az ugyanakkora oldalaikhoz tartozó magasságuk is egyenlő, vagyis $x_1 = x_2$). Ekkor viszont a D és C pontok ugyanakkora távolságra vannak az AB egyenestől, amiből következik, hogy DC és AB párhuzamosak. Ez azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz.

4258 Az $ABCD$ húrtrapézba írható kör a trapéz AB alapját az F, CD alapját az E felezőpontban érinti.



A körhöz egy külső pontjából húzott érintőszakaszai egyenlő hosszúak, ezért:

$$AG = AF = 13{,}5 \text{ cm} \quad \text{és} \quad DG = DE = 6 \text{ cm}.$$

Ebből következik, hogy:

$$AD = AG + DG = 19{,}5 \text{ cm}.$$

Az ATD derékszögű háromszög AT befogójának hossza:

$$AT = \frac{27 - 12}{2} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Pitagorasz tétele alapján:

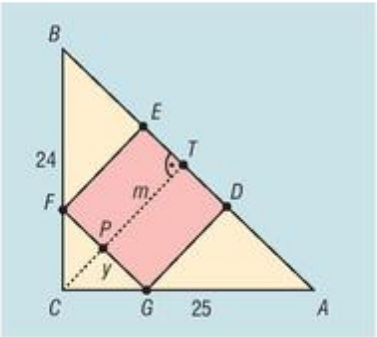
$$DT^2 = AD^2 - AT^2 \quad \Rightarrow \quad DT = \sqrt{19{,}5^2 - 7{,}5^2} \quad \Rightarrow \quad DT = 18 \text{ cm}.$$

A trapéz területe:

$$T = \frac{27 + 12}{2} \cdot 18 = 351 \text{ cm}^2.$$

Mivel DT ugyanakkora, mint EF, azaz a kör átmérője, ezért a trapézba írható kör sugara 9 cm.

4259 Vizsgáljuk meg először Csilla javaslatát. A ház sarkait jelöljük az ábrának megfelelően a D, E, F és G pontokkal, a $DEFG$ négyzet oldalát pedig y-nal. Mivel az $ABC_\triangle$ és a $GFC_\triangle$ szögei páronként megegyeznek (a derékszög közös, további megfelelő szögeik egyállású szögek), ezért a két háromszög hasonló. Ha az $ABC_\triangle$ átfogójához tartozó CT magasságának hosszát m jelöli, továbbá CT a GF szakaszt a P pontban metszi, akkor a háromszögekben az egymásnak megfelelő szakaszok arányára:



$$\frac{AB}{GF} = \frac{CT}{CP}, \quad \text{azaz} \quad \frac{AB}{y} = \frac{m}{m - y}.$$

Az egyenlőségből y értékét kifejezve:

$$y = \frac{m \cdot AB}{m + AB}.$$

Az $ABC_\triangle$ átfogója:

$$AB = \sqrt{24^2 + 25^2} = \sqrt{1201} \ (\approx 34{,}66 \text{ cm}).$$

A háromszög területét kétféleképpen felírva:

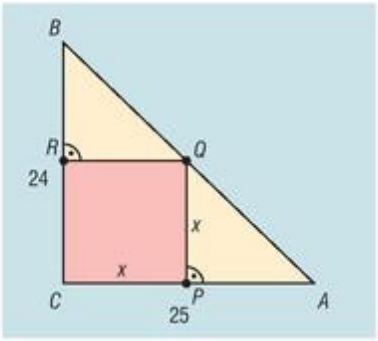
$$\frac{AB \cdot m}{2} = \frac{AC \cdot CB}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{24 \cdot 25}{\sqrt{1201}} \approx 17{,}31 \text{ m}.$$

Ebből következően:

$$y = \frac{\frac{600}{\sqrt{1201}} \cdot \sqrt{1201}}{\frac{600}{\sqrt{1201}} + \sqrt{1201}} = \frac{600\sqrt{1201}}{1801},$$

$$y \approx 11{,}55 \text{ m}.$$

Nézzük most Csaba javaslatát. Ha a ház C-től különböző sarkait az ábrának megfelelően a P, Q, R pontokkal, a $PQRC$ négyzet oldalait pedig x-szel jelöljük, akkor az $ABC_\triangle$ hasonló az $AQP_\triangle$-höz, ezért:



$$\frac{AC}{AP} = \frac{CB}{PQ},$$

$$\frac{25}{25-x} = \frac{24}{x},$$

$$x = \frac{24 \cdot 25}{49} \approx 12{,}24 \text{ m}.$$

Látható, hogy Csaba terve alapján építenének nagyobb alapterületű házat.

4260 *a)* A 4257. feladat eredménye alapján, ha az $ABCD$ négyszög területét az AB és CD oldalt összekötő középvonala megfelezi, akkor a négyszög trapéz, amelynek alapjai AB és CD. A feltételek szerint azonban a négyszög területét a BC és DA oldalakat összekötő középvonala is megfelezi, ezért BC és DA szintén párhuzamosak. Ezek alapján az örökölt telek szemközti oldalai párhuzamosak, azaz a telek paralelogramma alakú.

b) A paralelogramma átlója két egybevágó háromszögre bontja a paralelogrammát, ezért András és Béla külön-külön akkora területű részt örökölt, mint amekkora a megadott oldalak által határolt háromszög területe. A háromszög területét pl. Heron képletével számolhatjuk. Mivel:

$$s = \frac{18 + 15 + 22{,}4}{2} = 27{,}7 \text{ m},$$

ezért a terület:

$$T = \sqrt{27{,}7 \cdot (27{,}7 - 18) \cdot (27{,}7 - 15) \cdot (27{,}7 - 22{,}4)} \approx 134{,}48 \text{ m}^2.$$

András és Béla külön-külön körülbelül 134,48 m^2 területű telekrészt örököltek.

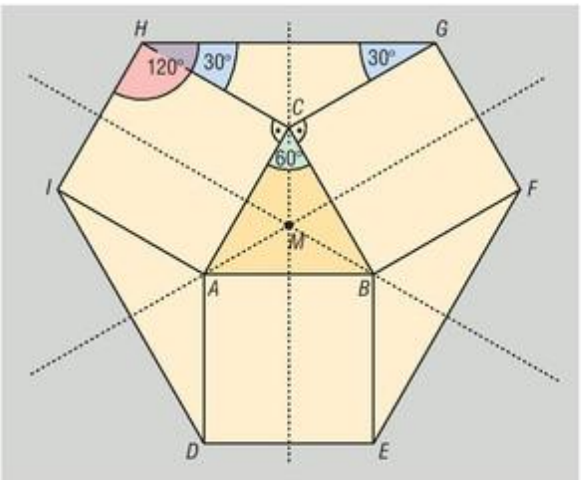
4261 *a)* Az ABC szabályos háromszög C csúcsánál 60°-os, a C csúcshoz illeszkedő négyzeteken „belül" 90°-os szögek vannak (ld. ábra). Ebből következik, hogy:

$$HCG\sphericalangle = 360° - (90° + 90° + 60°) = 120°.$$

Mivel a $HCG_\triangle$ egyenlő szárú (mivel CH és CG ugyanakkorák, mint a szabályos háromszög oldalai), ezért a HG alapon 30°-os szögek vannak, amiből következik, hogy:

$$IHG\sphericalangle = 90° + 30° = 120°.$$

Ugyanez a hatszög többi szögére is bizonyítható, tehát a $DEFGHI$ hatszög minden szöge 120°-os.



b) A $DEFGHI$ hatszög tengelyesen szimmetrikus az $ABC_\triangle$ magasságvonalaira, továbbá forgásszimmetriát mutat az $ABC_\triangle$ magasságpontja körüli, $k \cdot 120°$-os forgatásokra nézve ($k \in \mathbb{Z}$).

c) A $DEFGHI$ hatszög területe a következő síkidomok területének összege: az ABC szabályos háromszög, három darab 10 cm oldalú négyzet, valamint három darab egyenlő szárú egybevágó háromszög ($GHC_\triangle$, $IDA_\triangle$ és $EFB_\triangle$). Az ABC szabályos háromszög területe:

$$T_1 = \frac{10 \cdot \left(10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = 25\sqrt{3} \approx 43{,}30 \text{ cm}^2.$$

A háromszög oldalaira rajzolt három négyzet területének összege:

$$T_2 = 3 \cdot 10^2 = 300 \text{ cm}^2.$$

A $GHC_\triangle$ területe:

$$T_{GHC} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 120°}{2} = 25\sqrt{3} \approx 43{,}30 \text{ cm}^2.$$

Az $ABC_\triangle$ csúcsaihoz illeszkedő három egybevágó háromszög területének összege:

$$T_3 = 3 \cdot T_{GHC} = 75\sqrt{3} \approx 129{,}90 \text{ cm}^2.$$

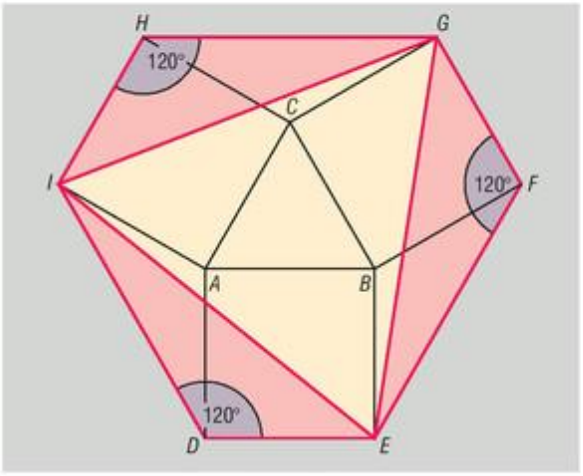
A $DEFGHI$ hatszög területe:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 100\sqrt{3} + 300 \approx 473{,}21 \text{ cm}^2.$$

Megjegyzések:

1. Ha az utolsó számításnál a korábbi közelítő értékeket adjuk össze, és nem csak a legvégén végezzük el a kerekítést, akkor 473,20 cm^2-t kapunk eredményként.
2. Vegyük észre, hogy az $ABC_\triangle$ és $GHC_\triangle$ területe megegyezik. Ez persze nyilvánvaló, ha figyelembe vesszük, hogy két-két oldaluk megegyezik, továbbá az egyenlő oldalak által bezárt szögek (60° és 120°) szinusza szintén megegyezik.

d) A $GEI_\triangle$ szabályos. Ahhoz, hogy ezt belássuk, vizsgáljuk meg a GIH, IED, EGF háromszögeket.



A háromszögekben két-két oldal, valamint az általuk közrefogott szögek egyenlők. Ebből következik, hogy az ábrán megjelölt háromszögek egybevágók, ami mutatja, hogy a $GEI_\triangle$ oldalai egyenlők, azaz valóban szabályos háromszög.

A $GEI_\triangle$ oldalának hosszát a $GIH_\triangle$-ből számíthatjuk ki. Ehhez szükségünk van a GH oldal hosszára is.

A $GHC_\triangle$-ből koszinusztétellel számolva:

$$GH^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad GH = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32 \text{ cm}.$$

Alkalmazva a koszinusztételt, ezúttal a $GHI_\triangle$-re:

$$GI^2 = 10^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \left(10\sqrt{3}\right) \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad GI = 10\sqrt{4+\sqrt{3}} \approx 23{,}94 \text{ cm}.$$

Végül a GEI szabályos háromszög területe:

$$T_{GEI} = \frac{\left(10\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \left(100 + 25\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} \approx 248{,}21 \text{cm}^2.$$

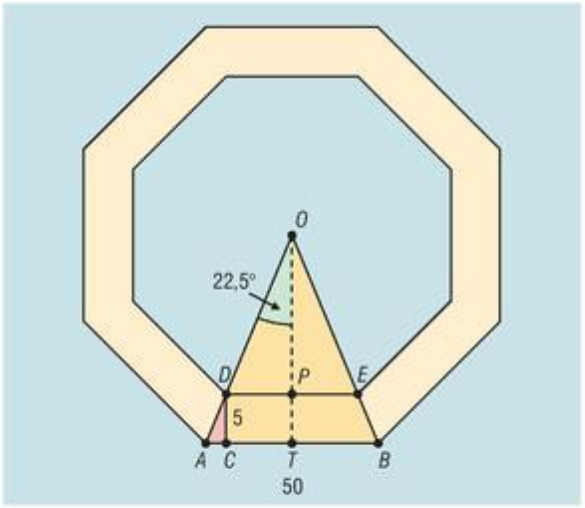
4262 Az ábra jelölései alapján:

$$AOB\sphericalangle = \frac{360°}{8} = 45°,$$

ezért az ABO egyenlő szárú háromszög OT magassága 22,5°-os szöget zár be az OA szárral. Mivel az $ADC_\triangle$ és az $AOT_\triangle$ hasonló, ezért $ADC\sphericalangle = AOT\sphericalangle = 22{,}5°$, így:

$$\operatorname{tg} 22{,}5° = \frac{AC}{CD},$$

$$AC = 5 \cdot \operatorname{tg} 22{,}5° \approx 2{,}07 \text{ cm}.$$



A képkeret belső oldala:

$$DE = AB - 2 \cdot AC \approx 45{,}86 \text{ cm}.$$

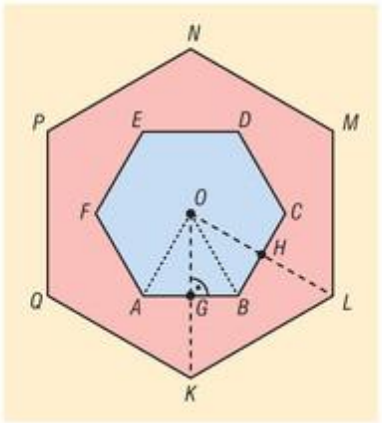
A keretbe elhelyezhető vászon területe:

$$T = 8 \cdot T_{DEO} = 8 \cdot \frac{DE \cdot OP}{2} \approx 8 \cdot \frac{45{,}86 \cdot \dfrac{45{,}86}{2 \cdot \operatorname{tg} 22{,}5°}}{2} \approx 10154{,}86 \text{ cm}^2.$$

A számolások elvégzése után azt kapjuk, hogy a vászon területe körülbelül 1,02 m^2.

4263 Az $ABCDEF$ szabályos hatszög O középpontját tükrözzük az oldalfelező pontokra, így az ábra szerinti $KLMNPQ$ szabályos hatszöget kapjuk. Ha az AB oldal felezőpontja G, akkor OG az ABO szabályos háromszög magassága, ezért:

$$OG = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93 \text{ cm}.$$



A tükrözés miatt G az OK szakasz felezőpontja, amiből:

$$OK = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ cm}.$$

Az OKL háromszög szintén szabályos, ezért a $KLMNPQ$ hatszög oldalainak hossza:

$$8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ cm}.$$

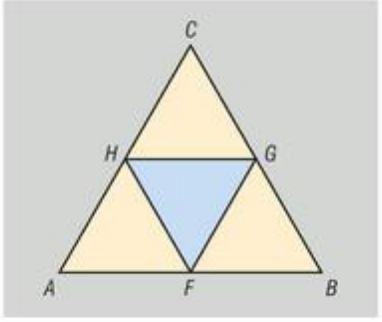
Végül a $KLMNPQ$ hatszög területe:

$$T = 6 \cdot \frac{(8\sqrt{3}) \cdot (8\sqrt{3}) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 288\sqrt{3} \approx 498{,}83 \text{ cm}^2.$$

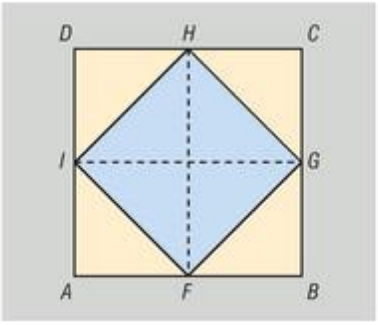
A keletkező hatszög területe körülbelül 498,83 cm^2.

4264 *a)* A háromszög középvonalai a háromszöget négy egybevágó háromszögre bontják (ld. ábra), ezért ha az oldalfelező pontok F, G és H, akkor:

$$\frac{T_{ABC}}{T_{FGH}} = 4.$$

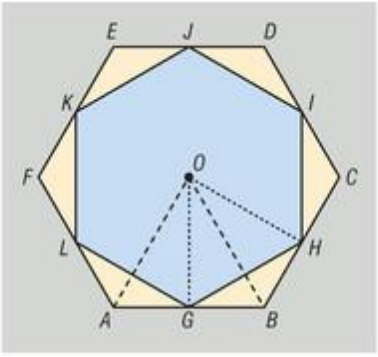


b) Ha az $ABCD$ négyzet oldalfelező pontjai F, G, H és I, akkor:



$$\frac{T_{ABCD}}{T_{FGHI}} = 2.$$

c) Ha az $ABCDEFG$ szabályos hatszög oldala a, akkor a hatszög területe:



$$T_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$

A hatszög oldalfelező pontjai által közrefogott $GHIJKL$ hatszög szintén szabályos, és O középpontja egybeesik az $ABCDEF$ hatszög középpontjával. Mivel az $OGH_{\triangle}$ is szabályos, ezért a $GHIJKL$ hatszög minden oldala ugyanakkora, mint OG.

Az OG szakasz magasság az ABO szabályos háromszögben, ezért:

$$OG = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

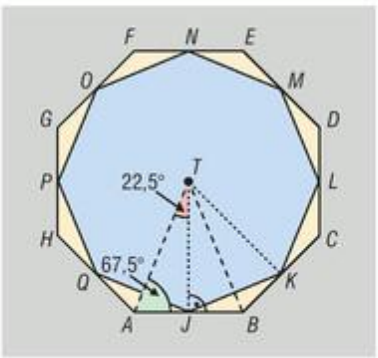
A $GHIJKL$ hatszög területe:

$$T_{GHIJKL} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8} \cdot a^2.$$

A két hatszög területének aránya:

$$\frac{T_{ABCDEF}}{T_{GHIJKL}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2}{\frac{9\sqrt{3}}{8} \cdot a^2} = \frac{4}{3}.$$

d) Az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög oldalfelező pontjai a $JKLMNOPQ$ szintén szabályos nyolcszöget fogják közre, ezért ha a nyolcszögek közös középpontja T, akkor a JKT és az ABT háromszögek hasonlók egymáshoz (ld. ábra). Ebből adódóan:



$$\frac{JK}{AB} = \frac{JT}{AT}.$$

Az ATJ derékszögű háromszögből:

$$\sin 67{,}5° = \frac{JT}{AT}.$$

Visszahelyettesítve az első egyenlőségbe:

$$\frac{JK}{AB} = \sin 67{,}5°.$$

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $ABCDEFGH$ nyolcszöget egy $\lambda = \sin 67{,}5°$ arányú hasonlósági transzformáció viszi át a $JKLMNOPQ$ nyolcszögbe. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért:

$$\frac{T_{JKLMNOPQ}}{T_{ABCDEFGH}} = \sin^2 67{,}5°,$$

azaz

$$\frac{T_{ABCDEFGH}}{T_{JKLMNOPQ}} = \frac{1}{\sin^2 67{,}5°} \approx 1{,}17.$$

e) A sorozat tagjait a_n jelöli. A *d)* feladat levezetéséből láthatjuk, hogy a két sokszög hasonló egymáshoz, a hasonlóság arányát ugyanúgy számolhatjuk ki, mint ahogy a nyolcszög esetében tettük. A sokszögek közös középpontjánál kialakuló szög ebben az esetben nem 22,5°, hanem $\frac{180°}{n}$, a hasonlóság (amelyik az eredeti sokszöget a középpontok által közrefogott sokszögbe viszi át) aránya pedig $\sin\left(90° - \frac{180°}{n}\right)$, ezért:

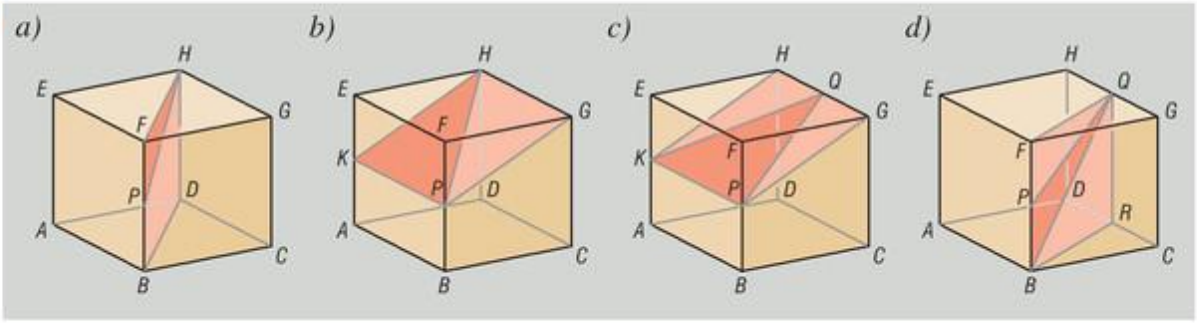
$$a_n = \frac{1}{\sin^2\left(90° - \frac{180°}{n}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{180°}{n}\right)}.$$

Ha n tart végtelenbe, akkor $\frac{180°}{n} \to 0°$, a koszinuszfüggvény folytonossága miatt pedig:

$$\cos\left(\frac{180°}{n}\right) \to 1.$$

Az a_n sorozat határértéke 1.

4265



a) A síkmetszet a $BFHD$ téglalap. A téglalap FH oldala a kocka egyik lapátlója, ezért:

$$FH = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07 \text{ cm},$$

így a síkmetszet területe körülbelül $35{,}35 \text{ cm}^2$.

b) A síkmetszet a $PKHG$ téglalap. A téglalap GP oldala a GPF derékszögű háromszögből:

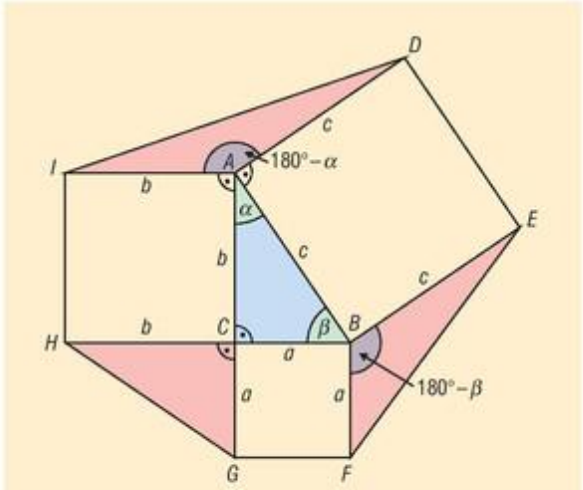
$$GP = \sqrt{5^2 + 2{,}5^2} \approx 5{,}59 \text{ cm},$$

így a síkmetszet területe körülbelül $27{,}95 \text{ cm}^2$.

c) A síkmetszet ezúttal is a $PKHG$ téglalap, amelynek területe körülbelül $27{,}95 \text{ cm}^2$.

d) A BPQ sík a kocka CD élét annak R felezőpontjában metszi, ezért a síkmetszet a $BFQR$ téglalap. A síkmetszet területe körülbelül $27{,}95 \text{ cm}^2$.

4266 *a)* Az $ABC_\triangle$ oldalait és szögeit a szokásos módon jelöljük. A $HGC_\triangle$ derékszögű, befogói a és b, így a háromszög egybevágó az $ABC_\triangle$-gel, tehát területük is megegyezik. Megmutatjuk, hogy az $ADI_\triangle$ és $FEB_\triangle$ területe is ugyanakkora, mint az $ABC_\triangle$ területe.



Az $ADI_\triangle$-ben $AI = b$ és $AD = c$, továbbá $IAD\sphericalangle = 180° - \alpha$, ezért területe:

$$T_{ADI} = \frac{bc \cdot \sin(180° - \alpha)}{2} = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{2}.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon éppen az $ABC_\triangle$ területe szerepel, ezért:

$$T_{ADI} = T_{ABC}.$$

Ugyanígy gondolkodva:

$$T_{FEB} = \frac{ac \cdot \sin(180° - \beta)}{2} = \frac{ac \cdot \sin\beta}{2},$$

azaz:

$$T_{FEB} = T_{ABC}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy a $HGC_\triangle$, $ADI_\triangle$ és $FEB_\triangle$ területe megegyezik az $ABC_\triangle$ területével.

b) A $DEFGHI$ hatszög területére:

$$T_{DEFGHI} = 4 \cdot T_{ABC} + T_{AIHC} + T_{BCGF} + T_{ABED} =$$
$$= 4 \cdot \frac{ab}{2} + b^2 + a^2 + c^2 = (a+b)^2 + c^2.$$

A feltételek szerint $a + b = 10$, ezért:

$$T_{DEFGHI} = 100 + c^2.$$

Látható, hogy a hatszög területe akkor a lehető legkisebb, ha az $ABC_\triangle$ átfogójára rajzolt c oldalú négyzet területe minimális. Pitagorasz tétele alapján azonban $c^2 = a^2 + b^2$, majd felhasználva, hogy a befogók összege állandó:

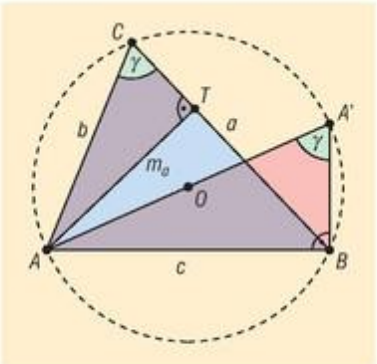
$$c^2 = a^2 + (10 - a)^2 = 2a^2 - 20a + 100 = 2 \cdot (a - 5)^2 + 50.$$

A teljes négyzetté alakított sorról leolvasható, hogy az $ABC_\triangle$ átfogójára rajzolt négyzet területe legalább $50\ \text{cm}^2$, és pontosan akkor a legkisebb, ha $a = 5$ cm, és ebből következően $b = 5$ cm.

Összefoglalva: a $DEFGHI$ hatszög területe minimális, ha az $ABC_\triangle$ egyenlő szárú, azaz befogói 5 cm hosszúak. Ekkor a hatszög területe $150\ \text{cm}^2$.

4267 *a)* Előbb az ABC hegyesszögű háromszöget vizsgáljuk. Az $ACB\sphericalangle$ a háromszög köré írható körben a C-t nem tartalmazó AB köríven nyugvó kerületi szög. Ugyanezen a köríven nyugszik az $AA'B\sphericalangle$ is, így a kerületi szögek tétele alapján:

$$ACB\sphericalangle = AA'B\sphericalangle = \gamma.$$



Thalész tétele alapján az ABA' háromszög derékszögű, ezért a $CAT_\triangle$ és az $A'AB_\triangle$ két szöge megegyezik, tehát a két háromszög valóban hasonló egymáshoz.

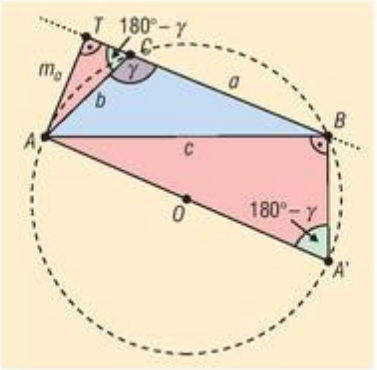
Tompaszögű háromszög esetén a T pont a BC oldalon kívül fekszik. Ebben az esetben a $CAT_\triangle$-ben:

$$ACT\sphericalangle = 180° - \gamma.$$

Az $AA'BC$ négyszög húrnégyszög, ezért szemközti szögeinek összege 180°, amiből:

$$AA'B\sphericalangle = 180° - \gamma,$$

ami mutatja, hogy a $CAT_\triangle$ és $A'AB_\triangle$ szögei ezúttal is egyenlők, így a két háromszög hasonló egymáshoz.



b) Felhasználva a $CAT_\triangle$ és $A'AB_\triangle$ hasonlóságát, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{AT}{AB} = \frac{AC}{AA'} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_a}{c} = \frac{b}{2R} \quad \Rightarrow \quad m_a = \frac{bc}{2R}.$$

Az $ABC_\triangle$ területe:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}, \quad \text{amiből} \quad T = \frac{abc}{4R}.$$

c) Derékszögű háromszögben a T pont egybeesik a C, az A' pont pedig a B csúccsal, ezért a $CAT_\triangle$ és $A'AB_\triangle$ nem jön létre. A derékszögű háromszögben $c = 2R$, ezért:

$$T = \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

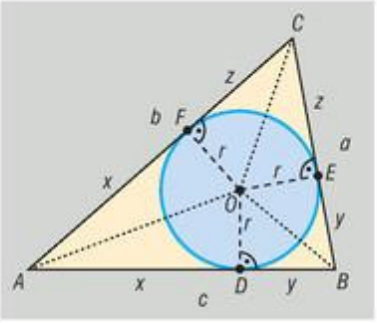
A területképlet derékszögű háromszögre is érvényes.

4268 *a)* A körhöz egy külső pontjából húzott érintőszakaszok hossza megegyezik, ezért:

$$AD = AF = x, \quad BD = BE = y \quad \text{és} \quad CE = CF = z.$$

A háromszög oldalai az érintőszakaszok segítségével:

$$y + z = a, \quad (1)$$
$$x + z = b, \quad (2)$$
$$x + y = c. \quad (3)$$



A kapott egyenlőségek megfelelő oldalainak összegéből:

$$2(x + y + z) = 2s, \quad \text{tehát} \quad x + y + z = s.$$

Ha az utolsó egyenlőségből rendre kivonjuk az (1), (2) és (3) egyenlőségek megfelelő oldalát, akkor adódik, hogy:

$$x = s - a, \quad y = s - b \quad \text{és} \quad z = s - c.$$

Éppen ezt kellett igazolnunk.

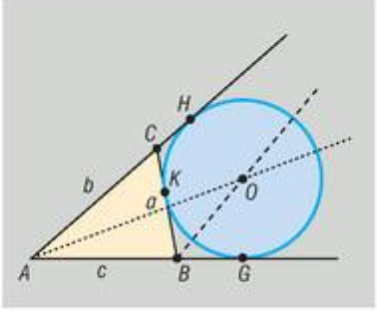
b) Ezúttal is felhasználjuk, hogy egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, ezért:

$$AG = AH, \quad BG = BK \quad \text{és} \quad CH = CK.$$

Ezek alapján:

$$2 \cdot AG = AG + AH = (c + BG) + (b + CH) =$$
$$= (c + BK) + (b + CK) = c + (BK + CK) + b =$$
$$= c + a + b = 2s,$$

tehát $AG = AH = s$, amit bizonyítani kellett.

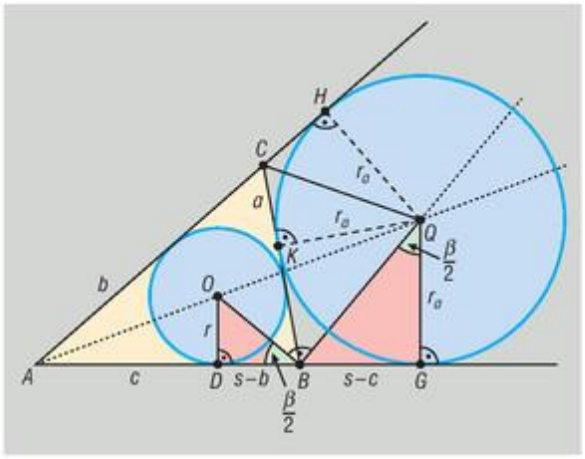


c) Az O pont a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja, ezért:

$$OBD\sphericalangle = \frac{\beta}{2}.$$

A Q pont illeszkedik a B csúcsnál található külső szög szögfelezőjére. Mivel a háromszög egy belső, valamint a mellette fekvő külső szögének szögfelezője merőleges egymásra, ezért $OBQ\sphericalangle = 90°$, amiből következik, hogy a $BQG\sphericalangle$ szárai páronként merőlegesek az $OBD\sphericalangle$ száraira, azaz a két szög merőleges szárú szögpárt alkot, ezért:

$$BQG\sphericalangle = OBD\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$$



(nyilvánvaló, hogy mindkét szög hegyesszög). Látható, hogy a $BOD_\triangle$ és a $QBG_\triangle$ szögei megegyeznek, ezért a két háromszög valóban hasonló egymáshoz.

d) Az *a)* feladat ábrája alapján:

$$T_{ABC} = T_{BCO} + T_{CAO} + T_{ABO} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{r \cdot (a+b+c)}{2} = r \cdot s.$$

e) A *c)* feladat ábrája alapján ABQC négyszög területét kétféleképpen is felírhatjuk:

$$T_{ABQC} = T_{ABQ} + T_{ACQ}, \quad \text{illetve} \quad T_{ABQC} = T_{ABC} + T_{BCQ}.$$

Mivel az $ABQ_\triangle$-ben és az $ACQ_\triangle$-ben az $AB = c$, illetve az $AC = b$ oldalakhoz tartozó magasság egyaránt r_a hosszúságú, ezért:

$$T_{ABQC} = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} = \frac{(b+c) \cdot r_a}{2}. \quad (1)$$

Mivel a $BCQ_\triangle$-ben a $BC = a$ oldalhoz szintén r_a hosszúságú magasság tartozik, ezért:

$$T_{ABQC} = T_{ABC} + \frac{a \cdot r_a}{2}. \quad (2)$$

(1) és (2) alapján:

$$\frac{(b+c) \cdot r_a}{2} = T_{ABC} + \frac{a \cdot r_a}{2},$$

majd kifejezve az $ABC_\triangle$ területét:

$$T_{ABC} = \frac{(b+c) \cdot r_a - a \cdot r_a}{2} = \frac{b+c-a}{2} \cdot r_a = \frac{a+b+c-2a}{2} \cdot r_a = (s-a) \cdot r_a.$$

f) A $BOD_\triangle$ és $QBG_\triangle$ hasonlósága alapján (lásd a *c)* feladat ábráját):

$$\frac{r}{s-c} = \frac{s-b}{r_a} \quad \Rightarrow \quad r \cdot r_a = (s-b) \cdot (s-c).$$

A *d)* feladat alapján $r = \frac{T}{s}$, míg az *e)* feladat alapján $r_a = \frac{T}{s-a}$, így:

$$\frac{T}{s} \cdot \frac{T}{s-a} = (s-b) \cdot (s-c),$$

amiből átrendezés után:

$$T^2 = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}.$$

Ezzel igazoltuk Heron képletét.

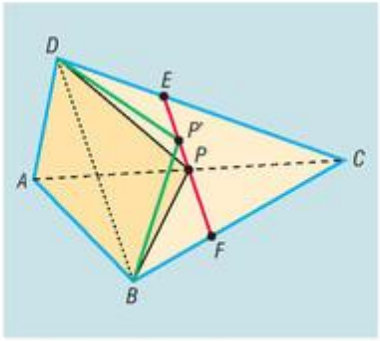
4269 Ha a P pont egybeesik az AC átló felezőpontjával, akkor DP az $ACD_\triangle$, míg BP az $ACB_\triangle$ egy-egy súlyvonala. A háromszög súlyvonala megfelezi a háromszög területét, ezért:

$$T_{APD} = T_{CPD} \quad \text{és} \quad T_{APB} = T_{CPB}.$$

A két egyenlőség megfelelő oldalainak összeadása után láthatjuk, hogy:

$$T_{ABPD} = T_{BCDP},$$

ezért az AC átló P felezőpontja megfelel a feltételeknek.



Húzzunk ezután párhuzamost az AC szakasz felezőpontján át a BD átlóval. A párhuzamos metssze a CD oldalt E-ben, a CB oldalt pedig F-ben. Legyen P' az EF szakasz egy tetszőleges pontja. Ekkor a $DBPP'$ (vagy a $DBP'P$) négyszög trapéz, így a $DBP_\triangle$ és $DBP'_\triangle$ közös DB oldalához ugyanakkora magasság tartozik, ezért a két háromszög területe is egyenlő. Ebből következik, hogy:

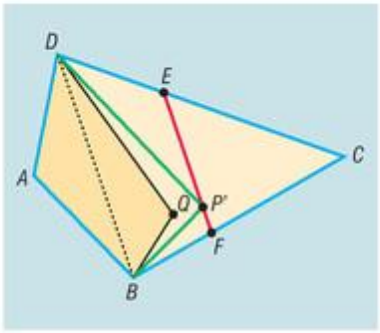
$$T_{ABP'D} = T_{DBA} + T_{DBP'} = T_{DBA} + T_{DBP} = T_{ABPD},$$

azaz ha a P' pont az EF szakaszon változik, akkor az $ABP'D$ négyszög területe állandó, így az EF szakasz minden pontja megfelel a feltételeknek.

Végül megmutatjuk, hogy az $ABCD$ négyszög belsejében nincs további olyan pont, amelyre teljesülne a feladat feltétele. Nyilvánvaló, hogy ilyen pont nem lehet az $ABD_\triangle$ belsejében.

Ha a Q pont a $DBFE$ trapéz belsejében van, akkor biztosan találunk az EF szakaszon olyan P' pontot (lásd ábra), amelyre a $DBP'_\triangle$ belsejében tartalmazza a Q pontot.

Ekkor a $DBQ_\triangle$ területe kisebb, mint a $DBP'_\triangle$ területe, így az $ABQD$ négyszög területe is kisebb, mint az $ABP'D$ négyszög területe.

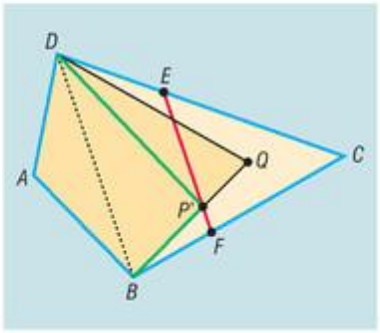


Ha viszont a Q pont az $EFC_\triangle$ belső pontja, és a BQ szakasz az EF szakaszt a P' pontban metszi, akkor látható, hogy:

$$T_{DBQ} > T_{DBP'},$$

így az $ABQD$ négyszög területe biztosan nagyobb, mint az $ABCD$ négyszög területének fele.

Ezzel megmutattuk, hogy kizárólag az EF szakasz pontjai felelnek meg a feltételnek.



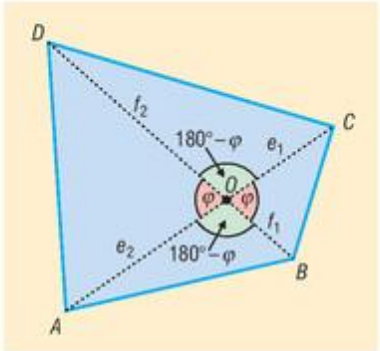
4270 Jelöljük az átlók hajlásszögét φ-vel, továbbá legyen az O pontot a csúcsokkal összekötő szakaszok hossza rendre:

$$OC = e_1, \quad OA = e_2, \quad OB = f_1 \quad \text{és} \quad OD = f_2.$$

Ekkor a megfelelő háromszögek területére igaz, hogy:

$$T_{ABO} = \frac{f_1 \cdot e_2 \cdot \sin(180^\circ - \varphi)}{2},$$

$$T_{CDO} = \frac{e_1 \cdot f_2 \cdot \sin(180^\circ - \varphi)}{2}.$$



Az $ABCD$ négyszögön belül kialakuló másik két háromszög területére igaz, hogy:

$$T_{BCO} = \frac{e_1 \cdot f_1 \cdot \sin\varphi}{2},$$

$$T_{DAO} = \frac{f_2 \cdot e_2 \cdot \sin\varphi}{2}.$$

Mivel $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$, ezért a két-két „szemközti" négyszög területének szorzata:

$$T_{ABO} \cdot T_{CDO} = \frac{f_1 \cdot e_2 \cdot \sin\varphi}{2} \cdot \frac{e_1 \cdot f_2 \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{e_1 \cdot e_2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \sin^2\varphi}{4},$$

$$T_{BCO} \cdot T_{DAO} = \frac{e_1 \cdot f_1 \cdot \sin\varphi}{2} \cdot \frac{f_2 \cdot e_2 \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{e_1 \cdot e_2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \sin^2\varphi}{4}.$$

A „szemközti" négyszögek területének szorzata valóban egyenlő.

4271 *a)* A 4270. feladat állítása alapján:

$$T_{ABO} \cdot T_{CDO} = T_{BCO} \cdot T_{DAO},$$

azaz

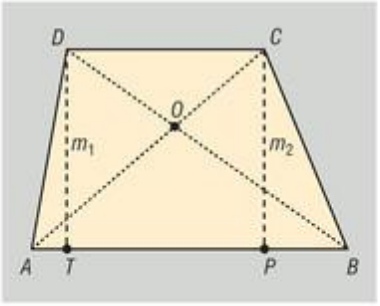
$$8 \cdot 2 = 4 \cdot T_{DAO},$$

amiből

$$T_{DAO} = 4 \text{ cm}^2.$$

Az $ABCD$ négyszög területe:

$$8 + 2 + 4 + 4 = 18 \text{ cm}^2.$$



b) Mivel

$$T_{ABD} = T_{ABO} + T_{DAO} = 8 + 4 = 12 \text{ cm}^2,$$

valamint

$$T_{ABC} = T_{ABO} + T_{BCO} = 8 + 4 = 12 \text{ cm}^2,$$

ezért

$$T_{ABD} = T_{ABC}.$$

Ha a két háromszög közös AB oldalához az $ABD_\triangle$-ben m_1, az $ABC_\triangle$-ben pedig m_2 magasság tartozik, akkor:

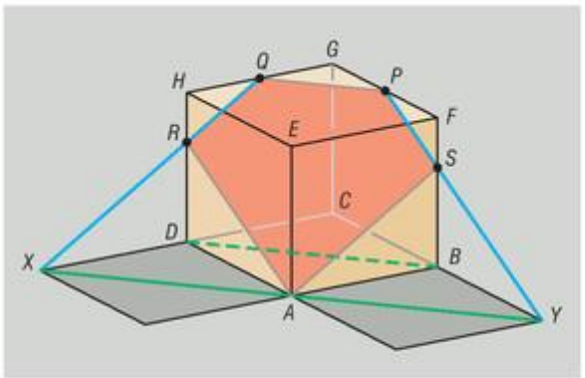
$$\frac{AB \cdot m_1}{2} = \frac{AB \cdot m_2}{2},$$

$$m_1 = m_2.$$

Ez azt is jelenti, hogy a C és D pontok ugyanakkora távolságra vannak az AB szakasztól, ezért CD párhuzamos AB-vel. Ebből következik, hogy az $ABCD$ négyszög valóban trapéz.

4272 *a)* A metsző sík az A, P és Q pontokon kívül még a kocka DH és BF éleit metszi. Ha a sík a DH élt az R, a BF élt az S pontban metszi, akkor a síkmetszet az $ASPQR$ ötszög.

b) A QP szakasz középvonala a $HFG_\triangle$-nek, ezért QP párhuzamos a kocka HF lapátlójával. Mivel egy sík párhuzamos síkokból párhuzamos egyeneseket metsz ki, ezért az APQ sík a kocka $ABCD$ alaplapjának síkját is egy HF-fel párhuzamos egyenesben metszi.



Ebből következik, hogy ha a QR egyenes a DC egyenest az X, a PS egyenes a CB egyenest pedig az Y pontban metszi, akkor XY párhuzamos HF-fel és így párhuzamos a BD lapátlóval is. Ekkor azonban az $ABDX$ négyszög paralelogramma, ezért:

$$DX = BA = 18 \text{ cm} \quad \text{és} \quad BY = DA = 18 \text{ cm}.$$

Vizsgáljuk meg az XDR és QHR háromszögeket. Mindkét háromszög derékszögű, valamint az R csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalaikra:

$$\frac{DR}{HR} = \frac{DX}{HQ} = 2,$$

ezért az R pont a DH él D-hez közelebbi harmadolópontja, így:

$$DR = 12 \text{ cm} \quad \text{és} \quad HR = 6 \text{ cm}.$$

Ugyanilyen megfontolásból:

$$BS = 12 \text{ cm} \quad \text{és} \quad FS = 6 \text{ cm}.$$

Az $ASPQR$ ötszög minden oldala átfogója egy-egy olyan derékszögű háromszögnek, amelynek befogói illeszkednek a kocka éleire, így már könnyen kiszámíthatjuk az ötszög oldalait:

$$QP = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2} \ (\approx 12{,}73 \text{ cm}),$$

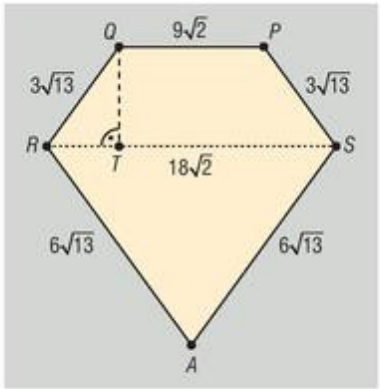
$$PS = QR = \sqrt{9^2 + 6^2} = 3\sqrt{13} \ (\approx 10{,}82 \text{ cm}),$$

$$AR = AS = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13} \ (\approx 21{,}63 \text{ cm}).$$

Mivel az $RSBD$ négyszög is paralelogramma (sőt igazából téglalap), ezért:

$$RS = 18\sqrt{2} \ (\approx 25{,}46 \text{ cm}).$$

Az ötszög területe az RSA egyenlő szárú háromszög, valamint az $RSPQ$ húrtrapéz területének összege.



Az $RSA_{\triangle}$ területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T_{RSA} = \sqrt{\left(6\sqrt{13} + 9\sqrt{2}\right) \cdot \left(9\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(6\sqrt{13} - 9\sqrt{2}\right)} =$$

$$= 54\sqrt{17} \quad \left(\approx 222{,}65 \text{ cm}^2\right).$$

Az $RSPQ$ húrtrapéz területéhez szükségünk van a trapéz QT magasságára. Az RQT derékszögű háromszögben:

$$RT = \frac{18\sqrt{2} - 9\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \ (\approx 6{,}36 \text{ cm}).$$

Pitagorasz tétele alapján:

$$QT = \sqrt{\left(3\sqrt{13}\right)^2 - \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{17}{2}} \ (\approx 8{,}75 \text{ cm}).$$

Az $RSPQ$ trapéz területe:

$$T_{RSPQ} = \frac{18\sqrt{2} + 9\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{81\sqrt{17}}{2} \quad \left(\approx 166{,}99 \text{ cm}^2\right).$$

Az $ASPQR$ ötszög területe:

$$T_{ASPQR} = 54\sqrt{17} + \frac{81\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17} \cdot \frac{189}{2} \quad \left(\approx 389{,}63 \text{ cm}^2\right).$$



A kör és részeinek területe – megoldások

4273 Az ábrák alapján egy paralelogramma területével közelíthetjük a kör területét. A paralelogramma egyik oldala r, a másik oldala a kör kerületének nyolcadrésze. Ha a körcikkek középponti szögét csökkentjük, akkor a paralelogramma szögei egyre jobban „megközelítik" a 90°-os szöget, így a paralelogramma határhelyzete egy téglalap. A fentiek alapján a kör T területére a következő becslést adhatjuk:

$$\frac{T}{4} \approx r \cdot K_{\text{nyolcadkör}}, \text{ amiből } T \approx r \cdot K_{\text{félkör}}, \text{ azaz } T \approx r \cdot r \cdot \pi = r^2 \cdot \pi.$$

4274 *a)* $t \approx 14{,}18\ \text{cm}^2$, $i \approx 5{,}67\ \text{cm}$;
b) $t \approx 169{,}65\ \text{cm}^2$, $i \approx 28{,}27\ \text{cm}$;
c) $t \approx 405{,}57\ \text{cm}^2$, $i \approx 62{,}40\ \text{cm}$;
d) $t \approx 33{,}51\ \text{cm}^2$, $i \approx 8{,}38\ \text{cm}$;
e) $t \approx 203{,}58\ \text{cm}^2$, $i \approx 22{,}62\ \text{cm}$.

4275 *a)* $\alpha \approx 85{,}94°$; *b)* $\alpha \approx 299{,}95°$; *c)* $\alpha \approx 120{,}03°$.

4276 $11{,}18\ \text{cm}^2$, illetve $67{,}36\ \text{cm}^2$.

4277 A húr hossza 12,90 cm. A nagyobb körszelet területe $435{,}96\ \text{cm}^2$.

4278 *a)* $T \approx 74{,}99\ \text{cm}^2$; *b)* $T \approx 254{,}47\ \text{cm}^2$.

4279 $111{,}33\ \text{cm}^2$.

4280 $351{,}86\ \text{cm}^2$.

4281 A kisebb körgyűrű területe $16\pi \approx 50{,}27\ \text{cm}^2$, a nagyobbé $24\pi \approx 75{,}40\ \text{cm}^2$.

4282 A motívumokat egy $115\pi \approx 361{,}28\ \text{cm}^2$ területű részen helyezték el.

4283 *a)* 125 Ft-ba; *b)* 540 Ft-ba; *c)* 160 Ft-ba; *d)* 955 Ft-ba.
Látható, hogy a gyakorlatban a pizza ára nem egyenesen arányos a területével.

4284 A háromszög köré írt kör sugara kétszer akkora, mint a beírt kör sugara, ezért területük aránya 4.

4285 Az aszfaltozásra váró terület a következő részekből tevődik össze: 8 darab téglalap alakú rész a pavilon oldalai mentén, illetve 8 darab körcikk alakú rész a pavilon sarkainál. Egy-egy téglalap alakú rész szélessége 0,5 m, hosszúsága 2 m, így a téglalap alakú részek területének összege:

$$T_1 = 8 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 8\ \text{m}^2.$$

A körcikkek sugara 0,5 m. A szabályos nyolcszög egy belső szöge 135°-os, ezért egy körcikk középponti szöge:

$$360° - (135° + 90° + 90°) = 45°.$$

Mivel $8 \cdot 45° = 360°$, ezért a pavilon nyolc sarkánál lévő körcikkekből éppen egy 0,5 m sugarú kört lehet „összeállítani". A körcikkek területösszege ennek megfelelően:

$$T_2 = 0{,}5^2 \cdot \pi \approx 0{,}8\ \text{m}^2.$$

Összesen $8{,}8\ \text{m}^2$ területű részt kell leaszfaltozni.

4286 A kisebb területű körgyűrű területe:

$$t = \left(\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 - r^2\right) \cdot \pi,$$

a nagyobb területűé:

$$T = \left(R^2 - \left(\frac{R+r}{2}\right)^2\right) \cdot \pi.$$

Felhasználva az $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$ azonosságot, a két terület aránya:

$$\frac{t}{T} = \frac{\frac{R+r-2r}{2} \cdot \frac{R+r+2r}{2}}{\frac{2R+R+r}{2} \cdot \frac{2R-R-r}{2}} = \frac{R+3r}{3R+r}.$$

4287 *a)* Ez a kör a két koncentrikus kör középköre, amelynek sugara:

$$r_1 = \frac{r+R}{2}.$$

A körgyűrű szélességét felező kör sugara a két határoló kör sugarának számtani közepe.

b) Ha a keresett kör sugara r_2, akkor:

$$\frac{r_2^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi}{R^2 \cdot \pi - r_2^2 \cdot \pi} = \frac{r}{R},$$

amiből a törtek eltüntetése és egyszerűsítés után:

$$r_2^2 \cdot R - r^2 \cdot R = r \cdot R^2 - r \cdot r_2^2.$$

Az r_2-t tartalmazó tagokat egy oldalra csoportosítva:

$$r_2^2 \cdot R + r \cdot r_2^2 = r \cdot R^2 + r^2 \cdot R,$$
$$r_2^2 \cdot (R+r) = r \cdot R \cdot (R+r),$$
$$r_2^2 = r \cdot R,$$
$$r_2 = \sqrt{r \cdot R}.$$

A körgyűrűt $r : R$ területarányú részekre osztó kör sugara a két határoló kör sugarának mértani közepe.

c) A körgyűrű területét felező kör sugarát r_3-mal jelölve:

$$R^2 \cdot \pi - r_3^2 \cdot \pi = r_3^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi,$$

amiből egyszerűsítés és rendezés után:

$$r_3^2 = \frac{R^2 + r^2}{2} \quad \Rightarrow \quad r_3 = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}.$$

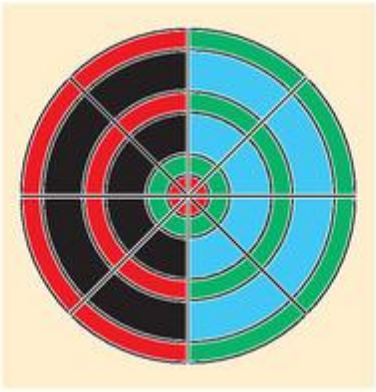
A körgyűrű területét felező kör sugara a két határoló kör sugarának négyzetes közepe.

d) Mivel a kapott közepek közül a mértani a legkisebb, annál nagyobb a számtani, végül a négyzetes a legnagyobb, ezért:

$$r_2 < r_1 < r_3.$$

Megjegyzés: A közepek között ezúttal egyenlőség nem fordulhat elő a $R > r$ feltétel miatt. A körök közül a legkisebb a „belső” körhöz van közelebb, az *a)* feladatban kapott kör a határoló köröktől egyenlő távolságra van, míg a *c)* feladat köre a „külső” határoló körhöz van közelebb.

4288 *a)* Az azonos színnel jelölt részek területösszegét könnyebb kiszámolni, ha az azonos színeket egymás mellé forgatjuk (ld. ábra). A tábla fekete része két körgyűrűcikket alkot. Mindkét rész a megfelelő körgyűrű területének fele, ezért a feketével jelölt terület:



$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(31^2 - 23^2\right) \cdot \pi + \left(18^2 - 10^2\right) \cdot \pi \right] =$$
$$= 328\pi \approx 1030{,}44 \text{ cm}^2.$$

b) A zölddel megjelölt részek területösszege:

$$T_2 = \left(10^2 - 5^2\right) \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(36^2 - 31^2\right) \cdot \pi + \left(23^2 - 18^2\right) \cdot \pi \right] =$$
$$= 345\pi \approx 1083{,}85 \text{ cm}^2.$$

c) A pirossal megjelölt részek területe közvetlenül is számolható, de akár úgy is, hogy a „legkülső" kör területéből kivonjuk a többi színnel megjelölt részek területét. A legnagyobb kör területe:

$$T = 36^2 \cdot \pi = 1296\pi \approx 4071{,}50 \text{ cm}^2.$$

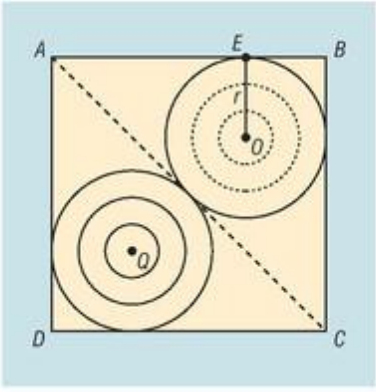
Mivel a kék és fekete részek területe megegyezik, ezért a piros területrészek összege:

$$T_3 = T - 2 \cdot T_1 - T_2 = 1296\pi - 656\pi - 345\pi = 295\pi \approx 926{,}77 \text{ cm}^2.$$

Bence a piros részt az alábbi valószínűséggel találja el:

$$\frac{T_3}{T} = \frac{295}{1296} \approx 0{,}2276.$$

4289 *a)* Jelöljük az eredeti hungarocelltábla sarkait az A, B, C és D pontokkal, a két kivágott kör középpontját O-val és Q-val. Az O középpontú kör az ACB egyenlő szárú derékszögű háromszög beírt köre. A kör r sugarát az ACB háromszög területéből számolhatjuk ki. Mivel a háromszög befogói 2 m hosszúak, ezért:



$$T_{ACB} = 2 \text{ m}^2.$$

Ha a háromszög kerületének felét s jelöli, akkor:

$$s = \frac{2 + 2 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41 \text{ m}.$$

Az ismert területképlet alapján:

$$r = \frac{T_{ACB}}{s} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59 \text{ m}.$$

Az egyik céltábla területe:

$$T = \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 1{,}08 \text{ m}^2,$$

tehát a táblának körülbelül

$$\frac{2 - 1{,}08}{2} \cdot 100 = 46\%\text{-a}$$

veszett kárba.

b) Egy céltáblán a pirosra festett rész területe:

$$\left(\frac{r}{3}\right)^2 \cdot \pi \approx 0{,}12 \text{ m}^2.$$

c) Marci a sárga részt

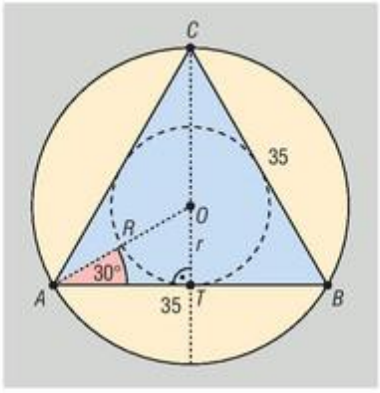
$$\frac{r^2 \cdot \pi - \left(\frac{2}{3} \cdot r\right)^2 \cdot \pi}{r^2 \cdot \pi} = \frac{5}{9}$$

valószínűséggel találja el. A legértékesebb (piros) rész találatának valószínűsége:

$$\frac{\left(\frac{r}{3}\right)^2 \cdot \pi}{r^2 \cdot \pi} = \frac{1}{9}.$$

Látható, hogy Marci a sárga részt 5-ször akkora valószínűséggel találja el, mint a pirosat.

4290 *a)* A virágtartó tetejét teljes egészében lefedő terítők közül a háromszög köré írható kör sugara a legkisebb. Az ABC szabályos háromszög köré írható kör O középpontja egybeesik a háromszög magasságpontjával, valamint beírható körének középpontjával is. Ha a C csúcsból induló magasságvonal talppontja T, akkor az AOT derékszögű háromszög A csúcsánál 30°-os szög van, ezért ha a körülírt kör sugara R, akkor:



$$\cos 30° = \frac{AT}{R},$$

$$R = \frac{35\sqrt{3}}{3} \approx 20{,}21 \text{ cm}.$$

A virágtartót lefedő legkisebb kör alakú terítő területe körülbelül 1282,82 cm^2.

b) A virágtartón elférő legnagyobb kör alapú cserép r sugara megegyezik az $ABC_{\triangle}$-be írt kör sugarával. Az AOT derékszögű háromszögből:

$$\text{tg}\, 30° = \frac{r}{AT},$$

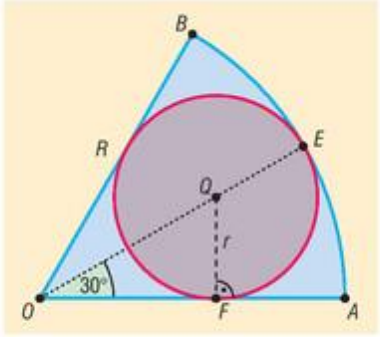
$$r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{35}{2} \approx 10{,}10 \text{ cm}.$$

A legnagyobb virágcserép alapterülete körülbelül 320,70 cm^2.

c) A terítő és a virágcserép alapköre sugarának aránya 2.

d) A terítő területe a virágcserép alapterületének 4-szerese.

4291 A körcikkből kivágható legnagyobb kör érinti a határoló körívet, valamint a körcikk két sugarát. Ebből következik, hogy a kivágandó kör Q középpontja illeszkedik a körcikk középponti szögének szögfelezőjére. Ha a körcikk sugarát R, a körét r jelöli, továbbá a körcikk határoló körívével való érintési pont E, az OA sugárral pedig F (ld. ábra), akkor az OQF derékszögű háromszögben:



$$\sin 30° = \frac{r}{OQ} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{OQ}{2}.$$

Mivel az O, Q és E pontok egy egyenesre illeszkednek, ezért:

$$OQ = OE - QE = R - r,$$

így:

$$r = \frac{R-r}{2} = \frac{R}{3}.$$

A körcikk területe:

$$T = \frac{R^2 \cdot \pi}{6},$$

a beírt kör területe:

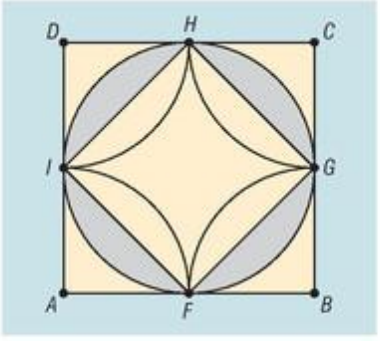
$$t = \frac{R^2 \cdot \pi}{9},$$

a hulladéké pedig:

$$T_{\text{hulladék}} = T - t = \frac{R^2 \cdot \pi}{18},$$

így a hulladék a körcikknek 33,33%-a.

4292 *a)* Az alábbi ábrán berajzoltuk az $ABCD$ négyzet oldalfelező pontjait, valamint az így kialakult $FGHI$ négyzetet. A satírozással megjelölt rész területe jól láthatóan feleakkora, mint az eredeti ábrán megjelölt részek területösszege. Ha az $ABCD$ négyzet oldala a, akkor az ábrán szürkével jelölt körszeletek területösszege az $ABCD$ négyzetbe írt kör, valamint az $FGHI$ négyzet területének különbsége, azaz:



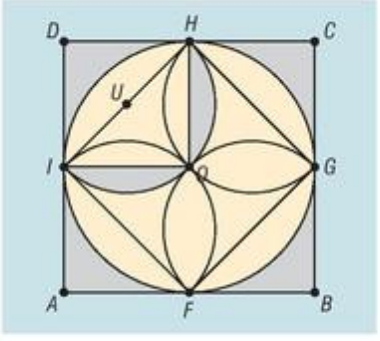
$$T = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi - \frac{a^2}{2} = a^2 \cdot \frac{\pi - 2}{4}.$$

Az eredeti ábra szürkével jelölt síkidomainak területösszege:

$$2 \cdot T = a^2 \cdot \frac{\pi - 2}{2},$$

ami a négyzet területének 57%-a.

b) Az $ABCD$ négyzetbe írt körön kívül eső részek területösszege:



$$T_1 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi = a^2 \cdot \frac{4 - \pi}{4}.$$

A körön belüli részt összesen 8 körszeletre bonthatjuk, melyek közül az ábrán szürkével jelölt 2 körszelet területösszege az IH átmérőjű, U középpontú félkör és az IHO derékszögű háromszög területének különbsége, azaz:

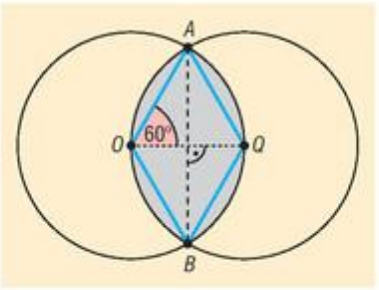
$$T_2 = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \pi}{2} - \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = a^2 \cdot \frac{\pi - 2}{16}.$$

Az eredetileg szürkével jelölt részek területösszege:

$$T = T_1 + 4 \cdot T_2 = a^2 \cdot \left(\frac{4 - \pi}{4} + 4 \cdot \frac{\pi - 2}{16}\right) = \frac{a^2}{2}.$$

A négyzetnek tehát pont a fele, azaz 50%-a van beszínezve.

4293 *a)* Az $OAQB$ négyszög minden oldala 12 cm, ezért a négyszög rombusz. A rombusz OQ átlója szintén 12 cm, AB átlója pedig az AOQ és BOQ szabályos háromszögek magasságainak összege, azaz:



$$AB = 2 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \ (\approx 20{,}78 \text{ cm}).$$

Az $OAQB$ rombusz területe:

$$T_{OAQB} = \frac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3} \ (\approx 124{,}71 \text{ cm}^2).$$

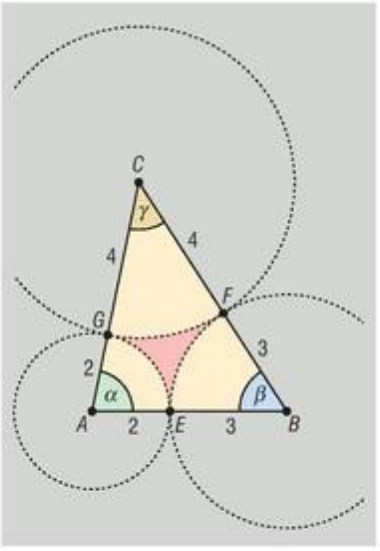
b) A szürkével megjelölt rész az $OAQB$ rombuszra, valamint 4 darab egybevágó körszeletre bontható. Egy ilyen körszelet területe kiszámolható a 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikk, valamint a 12 cm oldalú szabályos háromszög területének különbségeként, azaz:

$$t = \frac{12^2 \cdot \pi}{6} - \frac{12^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 24\pi - 36\sqrt{3} \ (\approx 13{,}04 \text{ cm}^2).$$

A szürke rész területe:

$$T = T_{OAQB} + 4 \cdot t = 72\sqrt{3} + 96\pi - 144\sqrt{3} = 96\pi - 72\sqrt{3} \approx 176{,}89 \text{ cm}^2.$$

4294 A három kör középpontja által közrefogott $ABC_\triangle$ oldalai a sugarakból adódnak: $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 6$ cm (ld. ábra). Ha az érintési pontokat E, F és G jelöli, akkor a feladat a körívek által határolt EFG síkidom területét kérdezi. E síkidom területét megkapjuk, ha az $ABC_\triangle$ területéből kivonjuk az $ABC_\triangle$ csúcsai mint középpontok köré írt körcikkek területét (az egyik ilyen körcikk például az A középpontú α középponti szögű, 2 cm sugarú körcikk).



Az $ABC_\triangle$ területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T_{ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3} = 6\sqrt{6} \ (\approx 14{,}70 \text{ cm}^2).$$

A háromszög szögeit koszinusztétellel számíthatjuk ki:

$$\cos\alpha = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 78{,}46°.$$

A háromszög további szögei: $\beta \approx 57{,}12°$, $\gamma \approx 44{,}42°$.

A háromszög csúcsai köré írt körcikkek területe:

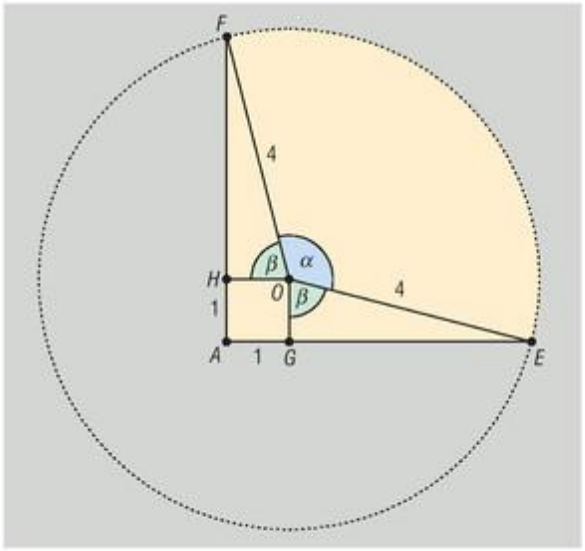
$$t_\alpha = \frac{2^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} \approx 2{,}74 \text{ cm}^2,$$

$$t_\beta = \frac{3^2 \cdot \pi \cdot \beta}{360°} \approx 4{,}49 \text{ cm}^2,$$

$$t_\gamma = \frac{4^2 \cdot \pi \cdot \gamma}{360°} \approx 6{,}20 \text{ cm}^2.$$

Ha az $ABC_\triangle$ területéből kivonjuk a körcikkek területét, a körök által határolt síkidom területére 1,27 cm^2 adódik.

4295 A telek területe 225 m^2. Az ábra jelöléseit követve tegyük fel, hogy Béla bácsi az öntözőberendezést az O pontba, a telek A csúcsához rakta legközelebb. A meglocsolt terület a következő részekre bontható: az 1 m oldalú $AGOH$ négyzet, a 4 m hosszú átfogóval rendelkező EOG és FHO egybevágó derékszögű háromszögek, valamint az O középpontú, az ábrán α-val jelölt középponti szögű, 4 m sugarú körcikk.



Az $AGOH$ négyzet területe 1 m^2.

Az EOG háromszögben:

$$\cos\beta = \frac{1}{4}, \quad \text{amiből} \quad \beta \approx 75{,}52°.$$

Az EOG (és a vele egybevágó FHO) háromszög területe:

$$T_{EOG} = \frac{1 \cdot 4 \cdot \sin\beta}{2} \approx 1{,}94 \text{ m}^2.$$

A körcikk alakú rész középponti szögére:

$$\alpha = 360° - 90° - 2\beta \approx 118{,}96°,$$

területe pedig:

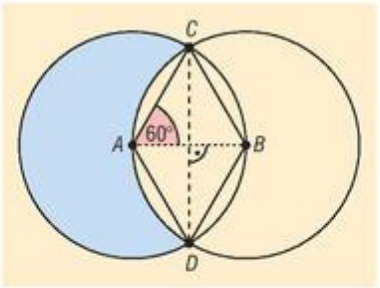
$$T_{\text{körcikk}} = \frac{4^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} \approx 16{,}61 \text{ m}^2.$$

Béla bácsi az öntözőberendezéssel körülbelül

$$1 + 2 \cdot 1{,}94 + 16{,}61 = 21{,}49 \text{ m}^2$$

területű részt tud meglocsolni a kertjéből, ami a kertnek körülbelül 9,6%-a.

4296 *a)* Egy hold alakú tészta területét úgy számolhatjuk ki, hogy a 4 cm sugarú kör területéből kivonjuk a két metsző helyzetű kör közös részének területét. A két kör közös része tovább bontható az $ADBC$ rombuszra (ld. ábra), valamint négy egybevágó körszeletre; az egyik ilyen körszeletet a BC húr vágja le az A középpontú, 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikkből. A körcikk területe:



$$T_{\text{körcikk}} = \frac{4^2 \cdot \pi}{6} \approx 8{,}38 \text{ cm}^2.$$

Az ABC szabályos háromszög területe:

$$T_{ABC} = \frac{4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93 \text{ cm}^2,$$

ezért a megfelelő körszelet területe:

$$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{ABC} \approx 1{,}45 \text{ cm}^2.$$

Az $ADBC$ rombusz területe kétszerese az ABC háromszög területének, azaz:

$$T_{ADBC} = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ cm}^2.$$

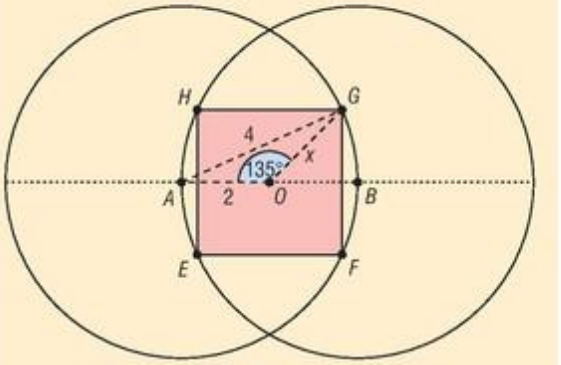
A két szomszédos kör közös részének területe:

$$T_{\text{metszet}} = T_{ADBC} + 4 \cdot T_{\text{körszelet}} \approx 19{,}66 \text{ cm}^2.$$

Egy hold alakú tészta területe:

$$4^2 \cdot \pi - 19{,}66 \approx 30{,}61 \text{ cm}^2.$$

b) A két kör közös részébe írt $EFGH$ négyzet területét kérdezi a feladat. Az ábra szimmetrikus az AB egyenesre, valamint az AB szakasz O felezőpontjára. Mindezekből következik, hogy az O pont egyben a négyzet középpontja is, ezért $AOG\sphericalangle = 135°$. Ha a GO szakasz hosszát x jelöli, akkor az AOG háromszögben a koszinusztétel alapján:



$$AG^2 = AO^2 + GO^2 - 2 \cdot AO \cdot GO \cdot \cos 135°,$$

$$4^2 = 2^2 + x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből rendezés után:

$$x^2 + 2\sqrt{2} \cdot x - 12 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \sqrt{14} - \sqrt{2} \quad \text{és} \quad x_2 = -\sqrt{14} - \sqrt{2}.$$

Mivel x_2 negatív, ezért:

$$x = \sqrt{14} - \sqrt{2} \approx 2{,}33 \text{ cm}.$$

Az $EFGH$ négyzet átlója $2x$, ezért a négyzet oldala:

$$a = x\sqrt{2} = \left(\sqrt{14} - \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{7} - 2 \approx 3{,}29 \text{ cm}.$$

A négyzet alakú tészták területe:

$$a^2 = 32 - 8\sqrt{7} \approx 10{,}83 \text{ cm}^2.$$

A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata – megoldások

4297 *a)* A kocka lapátlója: $7{,}5\sqrt{2} \approx 10{,}61$ cm.

b) A kocka testátlója: $7{,}5\sqrt{3} \approx 12{,}99$ cm.

4298 *a)* A kocka felszíne: 1200 cm^2.

b) A kocka térfogata: $2000\sqrt{2} \approx 2828{,}43 \text{ cm}^3$.

4299 *a)* A kocka felszíne: $100{,}77 \text{ cm}^2$.

b) A kocka térfogata: $68{,}82 \text{ cm}^3$.

4300 A két kocka éle 7 cm és 12 cm.

4301 A négyzetes oszlop térfogata: 250 cm^3.

4302 A téglatest felszíne: 286 cm^2.



4303 A tekercs 162 g alumíniumból készült.

4304 Egy raklapnyi tégla tömege: 1,085 tonna.

4305 *a)* A téglatest térfogata: $1080\ \text{cm}^3$.

b) A téglatest felszíne: $636\ \text{cm}^2$.

4306 *a)* A hasáb felszíne: $72\sqrt{3} + 720 \approx 844{,}71\ \text{cm}^2$.

b) A hasáb térfogata: $720\sqrt{3} \approx 1247{,}08\ \text{cm}^3$.

4307 *a)* A hasáb felszíne: $1728\sqrt{3} + 6048 \approx 9040{,}98\ \text{cm}^2$.

b) A hasáb térfogata: $36\,288\sqrt{3} \approx 62\,852{,}66\ \text{cm}^3$.

4308 *a)* A hasáb felszíne: $18\sqrt{91} + 760 \approx 931{,}71\ \text{cm}^2$.

b) A hasáb térfogata: $180\sqrt{91} \approx 1717{,}09\ \text{cm}^3$.

4309 A hasáb egy éle: 5 cm.

4310 A hasáb térfogata: $3888\ \text{cm}^3$.

4311 A ferde hasáb térfogata: $5508{,}32\ \text{cm}^3$.

4312 A forgástest térfogata: $125\pi \approx 392{,}70\ \text{cm}^3$, a felszíne: $100\pi \approx 314{,}16\ \text{cm}^2$.

4313 *a)* A forgástest térfogata: $360\pi \approx 1130{,}97\ \text{cm}^3$, a felszíne: $192\pi \approx 603{,}19\ \text{cm}^2$.

b) A forgástest térfogata: $300\pi \approx 942{,}48\ \text{cm}^3$, a felszíne: $170\pi \approx 534{,}07\ \text{cm}^2$.

4314 A pohárba megközelítőleg 1,70 dl víz fér.

4315 A körhenger térfogata: $288\pi \approx 904{,}78\ \text{cm}^3$, a felszíne: $176\pi \approx 552{,}92\ \text{cm}^2$.

4316 A körhenger térfogata lehet $1080\pi \approx 3392{,}92\ \text{cm}^3$ vagy $2700\pi \approx 8482{,}30\ \text{cm}^3$.

4317 A bögre térfogata megközelítőleg 3,85 dl, így elfér benne a kakaó.

4318 A körhenger felszíne: $231{,}83\ \text{cm}^2$, térfogata: $225{,}08\ \text{cm}^3$.

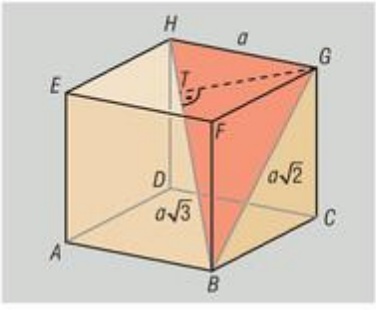
4319 A henger térfogata: $425\pi \approx 1335{,}18\ \text{cm}^3$.

4320 A henger térfogata: $1536\pi \approx 4825{,}49\ \text{cm}^3$.

4321 *a)* A test $8 \cdot 1 + 12 \cdot 3 = 44$ egységkockából áll, tehát térfogata 44 térfogategység.

b) Az eredeti kocka 6 oldallapjából $6 \cdot (5^2 - 3^2) = 96$ területegység maradt meg, ehhez még a 12 él mentén belül $12 \cdot 6 = 72$ területegység adódik, tehát a test felszíne 168 területegység.

4322 Az ábrán látható a élű kocka HB testátlójának a G csúcstól mért távolsága GT. A BGH derékszögű háromszög területét kétféleképpen felírva:



$$\frac{a\sqrt{3} \cdot GT}{2} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{a\sqrt{3} \cdot 16{,}33}{2} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2},$$

$$a \approx 20.$$

A kocka térfogata $8000\ \text{cm}^3$.

4323 Befektető Béla mobiltelefonjának térfogata:

$$V = abc = 108{,}8 \cdot 46{,}2 \cdot 11{,}7 \approx 58\,810{,}75 \text{ mm}^3 = 58{,}81075 \text{ cm}^3.$$

a) Az aranyrúd tömege:

$$m = V \cdot \rho = 1135{,}05 \text{ gramm}.$$

b) Az aranyrúd $\dfrac{1135{,}05}{31{,}103} = 36{,}49$ uncia tömegű, amelynek ára:

$$36{,}49 \cdot 1161 \cdot 182 \approx 7\,710\,410 \text{ forint}.$$

c) A 7000 tonna arany térfogata 362,69 m^3. Ha ennyi aranyat hézagmentesen elhelyeznének a 10×20 méteres medencébe, akkor „csak" 1,81 m magasan állna benne az arany, tehát a teljes mennyiség elférne az úszómedencében.

4324 A csomag hosszúsága legyen $3x$, szélessége $2x$, magassága x:

$$2 \cdot 3x + 4 \cdot 2x + 6 \cdot x + 20 = 260 \quad \Rightarrow \quad x = 12.$$

a) A csomag oldalélei: 36 cm, 24 cm és 12 cm.

b) A becsomagoláshoz szükséges papír területe:

$$\frac{A}{0{,}96} = \frac{2 \cdot (ab + ac + bc)}{0{,}96} =$$

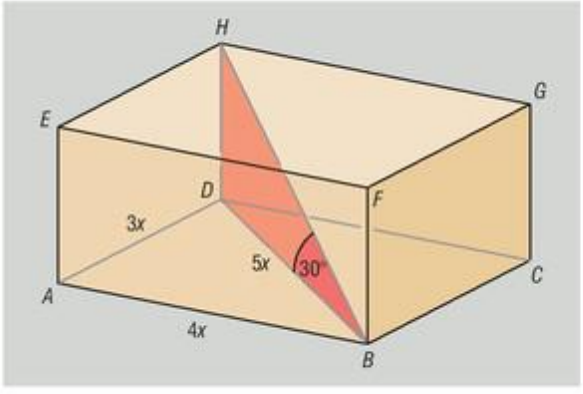
$$= \frac{2 \cdot (36 \cdot 24 + 36 \cdot 12 + 12 \cdot 24)}{0{,}96} = 3300 \text{ cm}^2 = 33 \text{ dm}^2.$$

c) A téglatest testátlója:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{36^2 + 24^2 + 12^2} \approx 44{,}90 \text{ cm},$$

tehát nem fér el a csomagban egy 50 cm hosszú rúd.

4325 Legyen a téglatest $ABCD$ lapjának két éle $3x$ és $4x$ hosszúságú. Az ábra jelöléseit használva láthatjuk, hogy a $BDH_\triangle$ egy szabályos háromszög fele. A háromszög hosszabbik befogója az $5x$ hosszúságú lapátló, a rövidebbik befogó a téglatest harmadik éle, az átfogó pedig a téglatest testátlója.



A háromszögben ismert összefüggések alapján a téglatest harmadik élének hossza:

$$HD = \frac{HB}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm},$$

illetve a téglatest 50 cm-es HB testátlójára fennáll:

$$50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5x \quad \Rightarrow \quad x = 5\sqrt{3}.$$

A téglatest éleinek hossza: $15\sqrt{3}$ cm, $20\sqrt{3}$ cm és 25 cm.

a) A téglatest felszíne:

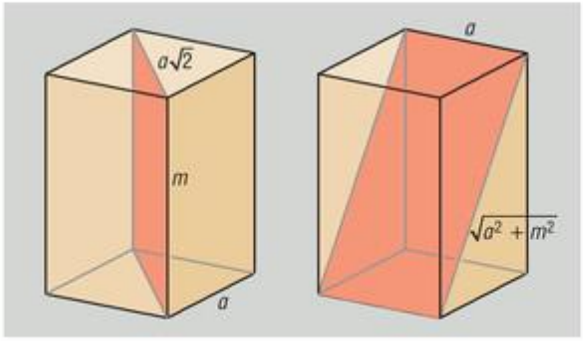
$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot \left(15\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3} + 15\sqrt{3} \cdot 25 + 20\sqrt{3} \cdot 25\right) =$$

$$= 1800 + 1750\sqrt{3} \approx 4831{,}09 \text{ cm}^2.$$

b) A téglatest térfogata:

$$V = a \cdot b \cdot c = 15\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3} \cdot 25 = 22\,500 \text{ cm}^3.$$

4326 Legyen a négyzet alapú egyenes hasáb alapéle a, oldaléle m hosszúságú.



A síkmetszetek területéből:

$$\left.\begin{aligned} a\sqrt{2}\cdot m &= 60\sqrt{2} \\ a\sqrt{a^2+m^2} &= 65 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszert megoldva: $a = 5$, $m = 12$.

a) A hasáb felszíne: $A = 2a^2 + 4am = 290\ \text{cm}^2$.

b) A hasáb térfogata: $V = a^2 \cdot m = 300\ \text{cm}^3$.

4327 Az ötszög területe: $T = 5 \cdot \dfrac{8^2 \cdot \sin^2 54°}{2 \cdot \sin 72°}$.

a) A hasáb felszíne:

$$A = 2T + k \cdot m = 2 \cdot 5 \cdot \frac{8^2 \cdot \sin^2 54°}{2 \cdot \sin 72°} + 40 \cdot 22 \approx 1100{,}22\ \text{cm}^2.$$

b) A hasáb térfogata:

$$V = T \cdot m = 5 \cdot \frac{8^2 \cdot \sin^2 54°}{2 \cdot \sin 72°} \cdot 22 \approx 2422{,}43\ \text{cm}^3.$$

4328 *a)* A szabályos nyolcszög alapú hasáb

alapéle: $a = 2 \cdot 15 \cdot \sin 22{,}5°$;

fedőlapjának területe: $T = 8 \cdot \dfrac{15^2 \cdot \sin 45°}{2}$.

A bevonandó felület:

$$T + 8 \cdot am = 8 \cdot \frac{15^2 \cdot \sin 45°}{2} + 8 \cdot 2 \cdot 15 \cdot \sin 22{,}5° \cdot 8 \approx 1371{,}15\ \text{cm}^2.$$

b) A szabályos tízszög alapú hasáb

alapéle: $b = 2 \cdot 15 \cdot \sin 18°$;

fedőlapjának területe: $T' = 10 \cdot \dfrac{15^2 \cdot \sin 36°}{2}$.

A bevonandó felület:

$$T' + 10 \cdot bm' = 10 \cdot \frac{15^2 \cdot \sin 36°}{2} + 10 \cdot 2 \cdot 15 \cdot \sin 18° \cdot 10 \approx 1588{,}31\ \text{cm}^2.$$

A Vera 10. születésnapjára készült tortán a bevonandó felület $\dfrac{1588{,}31}{1371{,}15} \cdot 100 - 100 \approx 15{,}84$ százalékkal lesz nagyobb, mint a 8. születésnapjára készített tortán.

4329 Ha a hasáb alapéle a, akkor a befestendő terület:

$$t + A_{\text{palást}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 2{,}5 \cdot 3 \cdot a = 6{,}28\ \text{m}^2.$$

Rendezés után a megoldandó másodfokú egyenlet:

$$\sqrt{3} \cdot a^2 + 30a - 25{,}12 = 0.$$

Az egyenlet pozitív megoldása 0,80. A hirdetőoszlop alapéle 80 cm.

4330 Mivel a hasáb két oldallapja 70°31'-os szöget zár be, és a területük aránya 2 : 3, az alaplap olyan háromszög, amelyben két oldal hosszát felírhatjuk $2x$ és $3x$ alakban, a két oldal által bezárt szög pedig 70°31'.

Mivel a hasáb harmadik oldallapjának területe 120 cm^2, és a hasáb magassága 20 cm, a háromszög harmadik oldala 6 cm hosszú.

A koszinusztételt felírva a háromszögben:

$$6^2 = (2x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot (3x) \cdot \cos 70°31' \quad \Rightarrow \quad x \approx 2.$$

Az alaplap oldalélei 4 cm, 6 cm és 6 cm hosszúak.

A hasáb térfogata:

$$V = T \cdot m = \frac{4 \cdot 6 \cdot \sin 70°31'}{2} \cdot 20 \approx 226{,}26 \text{ cm}^3.$$

4331 A csatorna keresztmetszetének területe:

$$T = \frac{a+c}{2} \cdot m_{\text{trapéz}} = \frac{6+8}{2} \cdot 3 = 21 \text{ m}^2.$$

a) A csatorna egy óra alatt legfeljebb annyi vizet tud elvezetni, amennyi egy 21 m^2 alapterületű és $1{,}4 \cdot 3600 = 5040$ m magasságú hasáb térfogata:

$$V = T \cdot m = 21 \cdot 5040 = 105\,840 \text{ m}^3.$$

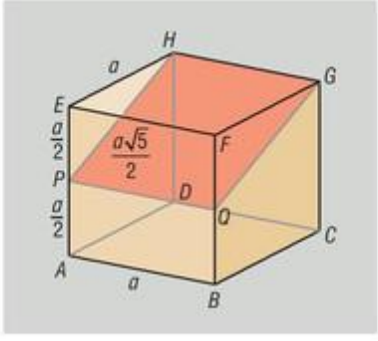
b) Ha a csatorna félig van vízzel, akkor a víz egy olyan trapéz alakú keresztmetszeten folyik le, amelynek alapjai 6 m és $\frac{6+8}{2} = 7$ m, magassága 1,5 m. A keresztmetszet területe:

$$T' = \frac{7+6}{2} \cdot 1{,}5 = 9{,}75 \text{ m}^2.$$

Így a csatorna által egy óra alatt elvezetett vízmennyiség annyi, mint egy 9,75 m^2 alapterületű és $0{,}9 \cdot 3600 = 3240$ m magasságú hasáb térfogata:

$$V = T' \cdot m = 9{,}75 \cdot 3240 = 31\,590 \text{ m}^3.$$

4332 A kocka éle $a = 10$ cm. A feladatban megadott sík az ábrán látható kockát két a magasságú hasábra vágja ketté.



A $PEHQFG$ hasáb alaplapja a PEH derékszögű háromszög, amelynek befogói a és $\frac{a}{2}$ hosszúságúak, átfogója pedig $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ hosszúságú.

A PEH háromszög területe és kerülete:

$$T_{PEH} = \frac{a^2}{4} \quad \text{és} \quad k_{PEH} = \frac{3a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

A $PEHQFG$ hasáb térfogata és felszíne:

$$V_{PEHQFG} = T_{PEH} \cdot a = \frac{a^3}{4} = 250 \text{ cm}^3,$$

$$A_{PEHQFG} = 2 \cdot T_{PEH} + k_{PEH} \cdot a = 2 \cdot \frac{a^2}{4} + \left(\frac{3a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}\right) \cdot a = \frac{4+\sqrt{5}}{2} \cdot a^2 \approx 311{,}80 \text{ cm}^3.$$

Az $ABCDPQGH$ hasáb térfogatát megkapjuk úgy, hogy a kocka térfogatából kivonjuk a $PEHQFG$ hasáb térfogatát:

$$V_{ABCDPQGH} = 1000 - 250 = 750 \text{ cm}^3.$$

Az $ABCDPQGH$ hasáb alaplapja a $PADH$ derékszögű trapéz, melynek területe és kerülete:

$$T_{PADH} = \frac{3a^2}{4} \quad \text{és} \quad k_{PADH} = \frac{5a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Az $ABCDPQGH$ hasáb felszíne:

$$A_{ABCDPQGH} = 2 \cdot T_{PADH} + k_{PADH} \cdot a = 2 \cdot \frac{3a^2}{4} + \left(\frac{5a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}\right) \cdot a =$$

$$= \frac{8+\sqrt{5}}{2} \cdot a^2 \approx 511{,}80 \text{ cm}^2.$$

4333 A paralelepipedon alaplapjának területe:

$$T = 15 \cdot 30 \cdot \sin 42°.$$

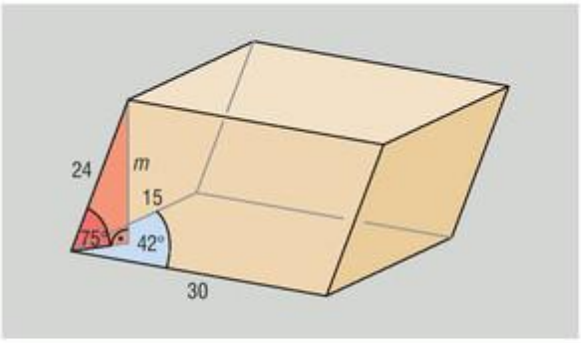
A paralelepipedon magassága:

$$m = 24 \cdot \sin 75°.$$

A paralelepipedon térfogata:

$$V = T \cdot m = 15 \cdot 30 \cdot \sin 42° \cdot 24 \cdot \sin 75° \approx$$

$$\approx 6980{,}37 \text{ cm}^3.$$



4334 Ha az úszómedencében 90 cm magasan áll a víz, akkor a benne lévő víz térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 1{,}8^2 \cdot \pi \cdot 0{,}9 \text{ m}^3.$$

a) Mivel a csapból óránként $30 \cdot 60 = 1800$ liter $= 1{,}8$ m^3 víz folyik, a medence ennyi vízzel

$$\frac{1{,}8^2 \cdot \pi \cdot 0{,}9}{1{,}8} \approx 5{,}09$$

óra alatt tölthető fel.

b) A vízdíjunk éves emelkedése:

$$6 \cdot V \cdot 542 = 6 \cdot 1{,}8^2 \cdot \pi \cdot 0{,}9 \cdot 542 = 29\,791 \text{ forint.}$$

4335 Az a élű építőkocka térfogata egyenlő egy olyan henger térfogatával, amely alapkörének sugara 11 cm, magassága 1 cm:

$$a^3 = r^2 \cdot \pi \cdot m = 11^2 \cdot \pi \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad a \approx 7{,}24.$$

Bendegúz építőkockája 7,24 cm élű.

4336 A maximálisan felfogható csapadék mennyisége:

$$V_f = T \cdot m_1 = 120 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 0{,}96 \text{ m}^3.$$

A hordó térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m_2 = 0{,}4^2 \cdot \pi \cdot 1{,}2 = 0{,}60 \text{ m}^3,$$

tehát a hordó megtelt esővízzel.

4337 A kád egyszeri festéséhez a kád palástját és alaplapját kétszer kell lefesteni. Háromszori festéshez a lefestendő terület:

$$A = 3 \cdot 2 \cdot (r^2 \cdot \pi + 2r \cdot \pi \cdot m) = 3 \cdot 2 \cdot (0{,}75^2 \cdot \pi + 1{,}5\pi \cdot 1{,}5) \approx 53{,}01 \text{ m}^2,$$

ennek lefestéséhez 2,39 kg festék szükséges.

4338 A cső külső átmérője $5{,}4 + 0{,}6 = 6$ cm, tehát az elkészítéséhez szükséges fém térfogata:

$$V = \pi \cdot \left(r_1^2 - r_2^2\right) \cdot m_{\text{test}} = \pi \cdot \left(3^2 - 2{,}7^2\right) \cdot 200 \approx 1074{,}42 \text{ cm}^3.$$

A cső tömege:

$$m = V \cdot \rho = 1074{,}42 \cdot 7{,}2 \approx 7736 \text{ g} \approx 7{,}74 \text{ kg}.$$

4339 A henger magassága:

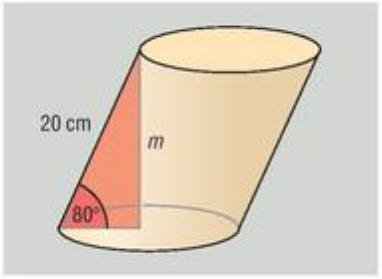
$$m = 20 \cdot \sin 80°,$$

az alapkörének sugara:

$$r = 10 \cdot \sin 80°.$$

A henger térfogata:

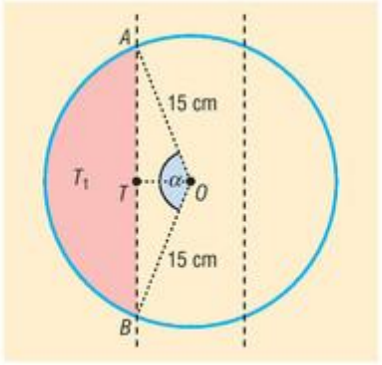
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m \approx 6001 \text{ cm}^3.$$



4340 A fahasáb alaplapját a párhuzamos síkok három részre osztják. A mellékelt ábrán látható színezett körszelet T_1 területének meghatározásához először ki kell számítanunk az $\alpha = AOB\sphericalangle$ középponti szöget.

Mivel az átmérőt az AB húr harmadolja, az AOB egyenlő szárú háromszög AB oldalához tartozó OT magassága 5 cm, így:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{15} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 141{,}06°.$$



A körszelet területe:

$$T_1 = 15^2 \cdot \pi \cdot \frac{141{,}06°}{360°} - \frac{15^2 \cdot \sin 141{,}06°}{2} \approx 206{,}26 \text{ cm}^2.$$

Az egyik levágott rész térfogata:

$$V_1 = T_1 \cdot m_{\text{test}} \approx 9281{,}7 \text{ cm}^3,$$

tömege:

$$m_1 = V_1 \cdot \rho = 9281{,}7 \cdot 0{,}71 \approx 6590 \text{ g} = 6{,}59 \text{ kg}.$$

A másik levágott rész ezzel egybevágó, tehát ugyanekkora a tömege.

Az egész hasáb térfogata:

$$V = 15^2 \cdot \pi \cdot 45 \approx 31\,808 \text{ cm}^3,$$

tömege:

$$m = V \cdot \rho = 31\,808 \cdot 0{,}71 \approx 22\,580 \text{ g} = 22{,}58 \text{ kg}.$$

A harmadik rész tömegét megkapjuk úgy, hogy az egész fahasáb tömegéből kivonjuk az m_1 tömeg kétszeresét:

$$m_2 = m - 2 \cdot m_1 \approx 9{,}40 \text{ kg}.$$

A keletkezett részek tömege: 6,59 kg, 6,59 kg és 9,40 kg.

4341 A téglatest élei legyenek a, b és c hosszúságúak. A feladat feltétele szerint:

$$a + b + c = 18, \quad \text{valamint} \quad e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{110}.$$

Mivel

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc),$$

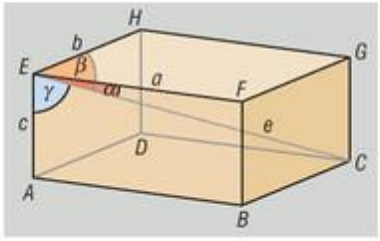
az előzőeket felhasználva:

$$18^2 = 110 + 2 \cdot (ab + ac + bc).$$

A téglatest felszíne:

$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 214 \text{ cm}^2.$$

4342 A téglatest éleinek hossza legyen a, b és c. Az e hosszúságú testátlónak az élekkel bezárt szöge legyen α, β és γ.



A szögek koszinuszai:

$$\cos\alpha = \frac{a}{e}, \quad \cos\beta = \frac{b}{e}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{e}.$$

Mivel $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, a koszinuszok négyzetösszege:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{e^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{e^2} = 1.$$

a) Az előzőek alapján:

$$\cos^2 23° + \cos^2 72° + \cos^2\gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 76{,}17°.$$

A testátlónak a harmadik éllel bezárt szöge 76,17°.

b) A téglatest éleinek hossza:

$$a = 80 \cdot \cos 23°, \quad b = 80 \cdot \cos 72° \quad \text{és} \quad c = 80 \cdot \cos 76{,}17°.$$

A téglatest térfogata:

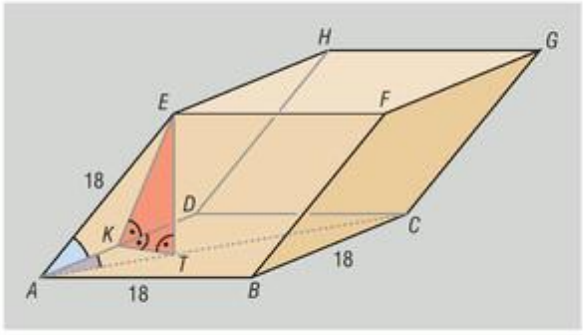
$$V = 80^3 \cdot \cos 23° \cdot \cos 72° \cdot \cos 76{,}17° \approx 34\,813{,}88 \text{ cm}^3.$$

4343 *a)* A romboédert hat egybevágó rombusz határolja. Egy rombusz területe:

$$T_{\text{rombusz}} = 18^2 \cdot \sin 60° = 162\sqrt{3},$$

tehát a romboéder felszíne:

$$A = 6 \cdot T_{\text{rombusz}} = 6 \cdot 162\sqrt{3} = 972\sqrt{3} = 1683{,}55 \text{ cm}^2.$$



b) Az ábrán látható $ABCDEFGH$ romboéder tengelyesen szimmetrikus az $ACGE$ testátló síkjára, ezért az E csúcsból az $ABCD$ alaplapra bocsátott merőleges T talppontja rajta van az AC lapátlón. Az E csúcsból az AD oldalélre bocsátott merőleges talppontja legyen K. A három merőleges egyenes tétele alapján KT egyenese is merőleges az AD oldal egyenesére.

Az AKE derékszögű háromszögben:

$$AK = 18 \cdot \cos 60°,$$
$$EK = 18 \cdot \sin 60° = 9\sqrt{3}.$$

Mivel $ABCD$ rombusz, és T pont rajta van az AC lapátlón, ezért a $KAT\sphericalangle = 30°$. Az ATK derékszögű háromszögben:

$$KT = AK \cdot \operatorname{tg} 30° = 18 \cdot \cos 60° \cdot \operatorname{tg} 30° = 3\sqrt{3}.$$

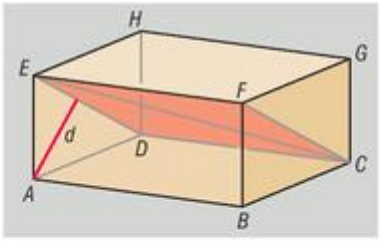
A romboéder ET magasságának hosszát a KTE derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével számolhatjuk:

$$m = ET = \sqrt{EK^2 - KT^2} = \sqrt{(9\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}.$$

A romboéder térfogata:

$$V = T_{\text{rombusz}} \cdot m = 162\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{6} = 2916\sqrt{2} \approx 4123{,}85 \text{ cm}^3.$$

4344 A téglatest EC testátlóját tartalmazza az AB éllel párhuzamos $EFCD$ sík. Az EC és AB kitérő egyenesek távolságának meghatározásához elég kiszámítani az $EFCD$ sík és az AB egyenesének d távolságát.



Az $ADHE$ sík merőleges az $EFCD$ síkra, így a d távolság a téglatest A csúcsának ED lapátlótól mért távolsága.

Legyen $AE = 3x$, $AD = 4x$ és $AB = 5x$ hosszúságú. Az ED lapátló a Pitagorasz-tétel alapján $5x$ hosszúságú. Az ADE derékszögű háromszög területét kétféleképpen számolva:

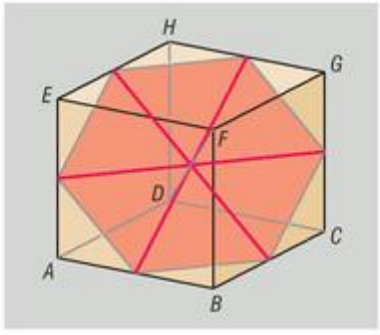
$$\frac{3x \cdot 4x}{2} = \frac{5x \cdot d}{2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{12}{5}x.$$

A feladat feltétele szerint $d = 2{,}4$ m, így $x = 1$.

A téglatest élei 3 m, 4 m és 5 m hosszúak, így a téglatest térfogata:

$$V = abc = 60 \text{ m}^3.$$

4345 Az ábrán látható kocka éle legyen a hosszúságú. Pitagorasz tétele alapján az F és D csúcsoktól a feladatban szereplő élek felezőpontjának mindegyike $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ távolságra van, tehát az FD szakasz felezőmerőleges síkja mind a hat pontot tartalmazza. A felezőpontok síkbeli hatszöget határoznak meg.

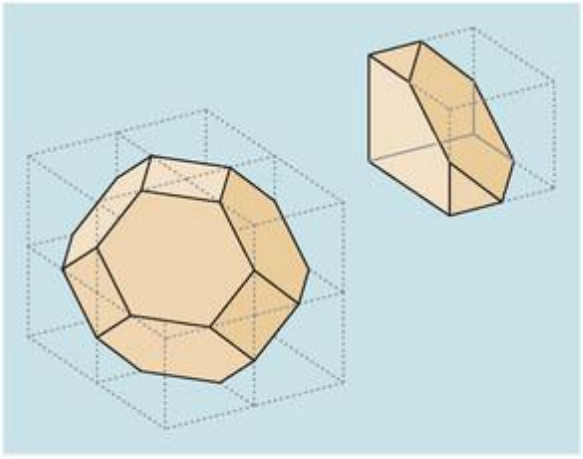


A hat felezőpontot rendre összekötő szakaszok mindegyikének hossza feleakkora, mint a kocka egy lapátlója, tehát a hatszög mindegyik oldala egyenlő hosszú.

Ezen hatszög köré kör írható, mivel a kocka éleinek felezőpontjai a kocka középpontjától feleolyan távol vannak, mint a kocka egy lapátlójának hossza.

Az a síkbeli hatszög, amely köré kör írható és oldalai egyenlő hosszúak, szabályos hatszög. Ezzel az állításunkat bebizonyítottuk.

4346 Képzeletben vágjuk a nagy a élű kockát 8 egybevágó kis kockára. A 4345. feladat alapján tudjuk, hogy az új test lapjai minden ilyen kis kockát szabályos hatszögben metszenek.



a) A kis kockát metsző sík a kis kockát két egybevágó testre vágja szét, mivel a létrejött egyik test a másiknak a kis kocka középpontjára vonatkozó tükörképe. Ebből következik, hogy a két rész térfogata is egyenlő.

Minden kis kocka térfogatának fele tartozik az új testhez, tehát a test térfogata:

$$V = \frac{a^3}{2} = \frac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3.$$

b) Az új testet határoló négyzetek átlói feleolyan hosszúak, mint a nagy kocka éle, tehát területe:

$$T_{\text{négyzet}} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{a^2}{8} = 18 \text{ cm}^2.$$

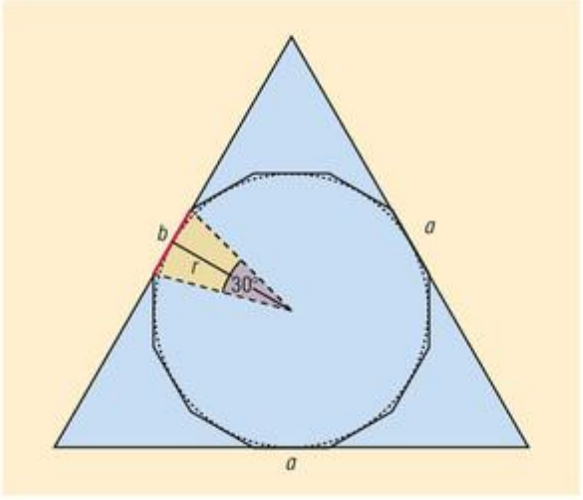
Az új testet határoló nyolc szabályos hatszög oldaléle a nagy kocka lapátlójának negyede, tehát területe:

$$T_{\text{hatszög}} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{16}.$$

A test felszíne:

$$A = 6 \cdot T_{\text{négyzet}} + 8 \cdot T_{\text{hatszög}} = 6 \cdot 18 + 8 \cdot 27\sqrt{3} =$$
$$= 108 + 216\sqrt{3} \approx 482{,}12 \text{ cm}^2.$$

4347 Legyen a hasáb alaplapja a oldalú szabályos háromszög.



Ha a háromszögből szabályos tizenkétszöget akarunk készíteni, beírható körének sugara legfeljebb akkora lehet, mint a szabályos háromszögbe írható kör sugara.

Mivel a szabályos háromszög 120°-ra nézve, a szabályos tizenkétszög pedig 30°-ra nézve forgásszimmetrikus, ezért a háromszögből ki lehet vágni egy olyan szabályos tizenkétszöget, amelynek beírható köre egyben a háromszög beírható köre is.

Ennek a körnek a sugara a szabályos háromszög magasságának harmada:

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

a) A szabályos tizenkétszög b oldaléle egy olyan egyenlő szárú háromszög alapja, amelynek szárszöge 30°, az alaphoz tartozó magassága pedig r.

Ebből következően:

$$b = 2r \cdot \text{tg}15° = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \text{tg}15° \approx 0{,}15 \text{ m}.$$

A hasáb alapéle 0,15 m.

b) Az elszállítandó hulladék térfogata a háromszög alapú és tizenkétszög alapú hasáb térfogatának a különbsége:

$$V = T_{\text{háromszög}} \cdot m - T_{\text{tizenkétszög}} \cdot m = m \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 12 \cdot \frac{b \cdot r}{2}\right) =$$

$$= m \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 12 \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \text{tg}15° \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1{,}5 \cdot 1^2}{4} \cdot \left(\sqrt{3} - 4 \cdot \text{tg}15°\right) \approx 0{,}2476 \text{ m}^3 = 247{,}6 \text{ dm}^3.$$

A hulladék tömege:

$$m_{\text{hulladék}} = V \cdot \rho = 247{,}6 \cdot 2{,}85 \approx 705{,}66 \text{ kg}.$$

4348 A téglatest élei legyenek a, b és c hosszúságúak.

Írjuk fel a számtani és mértani közép közti összefüggést az ab, ac és bc pozitív kifejezésekre:

$$\frac{ab+ac+bc}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc},$$

$$2 \cdot (ab+ac+bc) \geq 6 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2},$$

$$A \geq 6 \cdot \sqrt[3]{V^2}.$$

Egy téglatest felszíne mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a térfogata négyzetéből vont köbgyök hatszorosa.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az ab, ac és bc kifejezések számtani és mértani közepe egyenlő.

Ismert, hogy ez csak akkor teljesül, ha:

$$ab = ac = bc \iff a = b = c.$$

A 125 cm^3 térfogatú téglatestek közül az 5 cm élű kocka felszíne a legkisebb.

4349 A henger alapkörének sugara legyen r, magassága m.

A henger felszíne:

$$A = 2r \cdot \pi \cdot (r+m),$$

$$m = \frac{A}{2r \cdot \pi} - r.$$

A henger térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m.$$

A térfogat kifejezésébe helyettesítsük be m-et, így a térfogatot r függvényeként írjuk fel:

$$V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{A}{2r \cdot \pi} - r\right) = r \cdot \frac{A}{2} - r^3 \cdot \pi, \qquad r \in \mathbb{R}^+.$$

Ennek a függvénynek ott lehet maximuma, ahol az első deriváltja 0:

$$V'(r) = \frac{A}{2} - 3r^2 \cdot \pi.$$

Pozitív r-eket tekintve, ennek a függvénynek $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ helyen van zérushelye.

Az első derivált előjele, ha $0 < r < \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$, akkor pozitív, ha $\sqrt{\frac{A}{6\pi}} < r$, akkor negatív, tehát $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ esetén $V(r)$ függvénynek maximuma van.

Az egyenlő felszínű egyenes körhengerek közül annak a térfogata maximális, amely alapkörének sugara:

$$r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}},$$

magassága:

$$m = \frac{A}{2r \cdot \pi} - r = \frac{A}{2 \cdot \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \cdot \pi} - \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{6\pi}}.$$

A henger térfogata tehát akkor a legnagyobb, ha alapkörének átmérője és magassága egyenlő hosszú.



A gúla és a kúp térfogata

4350 A táblázat hiányzó adatai:

Alaplap	Alapél	Oldalél	Testmagasság	Felszín	Térfogat
négyzet	10 cm	$\sqrt{534}$ cm	22 cm	$100+20\sqrt{509}\approx 551{,}22$ cm^2	$\frac{2200}{3}\approx 733{,}33$ cm^3
négyzet	2 dm	26 cm	$2\sqrt{119}$ cm	1360 cm^2	$\frac{800\sqrt{119}}{3}\approx 2908{,}99$ cm^3
négyzet	$10\sqrt{10}\approx 31{,}62$ cm	30 cm	20 cm	$1000+200\sqrt{65}\approx 2612{,}45$ cm^2	$\frac{20000}{3}\approx 6666{,}67$ cm^3
négyzet	20 cm	$2\sqrt{491}\approx 44{,}32$ cm	42 cm	$400+80\sqrt{466}\approx 2126{,}96$ cm^2	5600 cm^3
szabályos háromszög	12 dm	$8\sqrt{7}\approx 21{,}17$ cm	20 cm	$36\sqrt{3}+36\sqrt{103}\approx 427{,}71$ cm^2	$240\sqrt{3}\approx 415{,}69$ cm^3
szabályos háromszög	18 cm	15 cm	$3\sqrt{13}\approx 10{,}82$ cm	$324+81\sqrt{3}\approx 464{,}30$ cm^2	$81\sqrt{39}\approx 505{,}84$ cm^3
szabályos hatszög	12 cm	$4\sqrt{34}\approx 23{,}32$ cm	20 cm	$216\sqrt{3}+72\sqrt{127}\approx 1185{,}52$ cm^2	$1440\sqrt{3}\approx 2494{,}15$ cm^3
szabályos hatszög	24 cm	30 cm	18 cm	$864\sqrt{3}+432\sqrt{21}\approx 3476{,}16$ cm^2	$5184\sqrt{3}\approx 8978{,}95$ cm^3

4351 *a)* A Kheopsz-piramis térfogata:

$$V=\frac{T\cdot m}{3}\approx 2655317\text{ m}^3\approx 2{,}66\text{ km}^3.$$

b) A Kheopsz-piramis alaplapjának és az oldallapjának a hajlásszöge megközelítőleg 52°.

4352 *a)* A gúla felszíne:

$$A=T_{\text{alap}}+A_{\text{palást}}=100\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\approx 241{,}42\text{ cm}^2.$$

b) A gúla térfogata:

$$V=\frac{T\cdot m}{3}=\frac{500}{3}\approx 166{,}67\text{ cm}^3.$$

4353 *a)* A gúla alapéle: 18 cm.

b) A gúla felszíne:

$$A=T_{\text{alap}}+A_{\text{palást}}=324+108\sqrt{13}\approx 713{,}40\text{ cm}^2.$$

4354 A táblázat hiányzó adatai:

Alapkör sugara	Kúp magassága	Alkotó hossza	Felszín	Térfogat
6 cm	10 cm	$2\sqrt{34}\approx 11{,}66$ cm	$12\pi\cdot\left(3+\sqrt{34}\right)\approx 332{,}92$ cm^2	$120\pi\approx 377{,}00$ cm^3
$10\sqrt{5}\approx 22{,}36$ cm	20 cm	30 cm	$100\pi\cdot\left(5+3\sqrt{5}\right)\approx 3678{,}24$ cm^2	$\frac{10000}{3}\pi\approx 10471{,}98$ cm^3
7 cm	$5\sqrt{11}\approx 16{,}58$ cm	18 cm	$175\pi\approx 549{,}78$ cm^2	$\frac{245\pi\cdot\sqrt{11}}{3}\approx 850{,}92$ cm^3
10 cm	2 dm	$10\sqrt{5}\approx 22{,}36$ cm	$100\pi\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)\approx 1016{,}64$ cm^2	$\frac{2000}{3}\pi\approx 2094{,}40$ cm^3
8 cm	6 cm	10 cm	$144\pi\approx 452{,}39$ cm^2	$128\pi\approx 402{,}12$ cm^3

4355 *a)* Az egyenes körkúp felszíne: $A \approx 163{,}30\ \text{cm}^2$.

b) Az egyenes körkúp térfogata: $V \approx 138{,}73\ \text{cm}^3$.

4356 A koktélospohárba megközelítőleg 6 dl ital tölthető.

4357 *a)* A forgástest felszíne: $A = 300\pi \approx 942{,}48\ \text{cm}^2$, térfogata: $V = 240\pi \approx 753{,}98\ \text{cm}^3$.

b) A forgástest felszíne: $A = 90\pi \approx 282{,}74\ \text{cm}^2$, térfogata: $V = 100\pi \approx 314{,}16\ \text{cm}^3$.

4358 *a)* A forgáskúp alapkörének sugara: $r = \frac{10}{3} \approx 3{,}33\ \text{cm}$.

b) A forgáskúp nyílásszöge: $\varphi \approx 49{,}25°$.

c) A forgáskúp térfogata: $V = \frac{200\sqrt{119}}{81}\pi \approx 84{,}62\ \text{cm}^3$.

d) A forgáskúp felszíne: $A = \frac{340}{9}\pi \approx 118{,}68\ \text{cm}^2$.

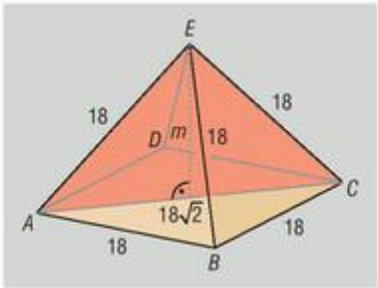
4359 A forgáskúp térfogata: $V = \frac{125\sqrt{15}}{3\sqrt{\pi}} \approx 91{,}05\ \text{cm}^3$.

4360 A forgáskúp kiterített palástjának középponti szöge 216°.

4361 *a)* Az egyenes körkúp felszíne: $A \approx 802{,}46\ \text{cm}^2$.

b) Az egyenes körkúp térfogata: $V \approx 1487{,}44\ \text{cm}^3$.

4362 Tekintsük a mellékelt ábrát. A Pitagorasz-tétel megfordítása alapján az $ACE_\triangle$ egy olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek befogói 18 cm hosszúak. A gúla testmagassága az alaplap AC átlójának a fele:



$$m = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{18\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}.$$

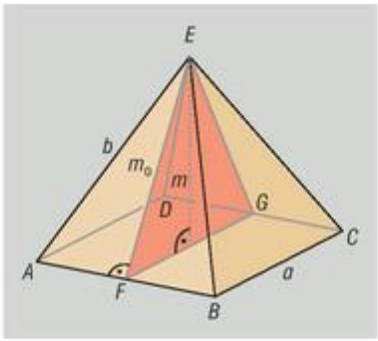
a) A gúla felszíne az alaplap és négy 18 cm oldalú szabályos háromszög területének az összege:

$$A = T + A_{\text{palást}} = 18^2 + 4 \cdot \frac{18^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 18^2 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \approx 885{,}18\ \text{cm}^2.$$

b) A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{18^2 \cdot 9 \cdot \sqrt{2}}{3} = 972\sqrt{2} \approx 1374{,}62\ \text{cm}^3.$$

4363 Tekintsük a mellékelt ábrát. Legyen a gúla alapéle a hosszúságú. Az $EFG_\triangle$ a feladat szövege szerint szabályos háromszög, így a gúla testmagassága a szabályos háromszög magassága: $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, illetve az oldallapok magassága a szabályos háromszög a oldala: $m_o = a$.



A gúla térfogatából adódóan:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} \quad \Rightarrow \quad 147{,}8 = \frac{a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad a \approx 8.$$

a) A gúla magassága:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93 \text{ cm}.$$

b) A gúla b oldaléle az AFE derékszögű háromszögből számítható:

$$b = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}94 \text{ cm}.$$

c) A gúla felszíne:

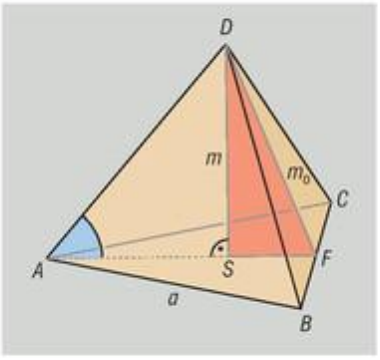
$$A = T + A_{\text{palást}} = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 8^2 + 4 \cdot \frac{8^2}{2} = 192 \text{ cm}^2.$$

4364 Ha a gúla alaplapjának területe T, akkor egy oldallap területe $\frac{3}{4}T$. Így a gúla felszíne:

$$A = T + 3 \cdot \frac{3}{4}T \quad \Rightarrow \quad 202{,}65 = \frac{13}{4}T \quad \Rightarrow \quad T \approx 62{,}35 \text{ cm}^2.$$

A gúla alaplapja a oldalú szabályos háromszög, ezért:

$$T = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad 62{,}35 = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad a \approx 12 \text{ cm}.$$



A gúla m testmagasságának meghatározásához számítsuk ki az oldallap m_o magasságát az oldallap területéből:

$$T_{\text{oldallap}} = \frac{3}{4}T, \quad \text{azaz} \quad \frac{a \cdot m_o}{2} = \frac{3}{4}T \quad \Rightarrow \quad m_o \approx 7{,}79.$$

Az ábra jelöléseit használva a gúla testmagasságának S talppontja az ABC szabályos háromszög súlypontja.

A súlypont a háromszög AF súlyvonalának a csúcstól távolabbi harmadolópontja. Az SFD derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján a gúla m testmagassága számítható:

$$m = \sqrt{DF^2 - SF^2} = \sqrt{7{,}79^2 - \left(\frac{12\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^2} \approx 6{,}98 \text{ cm}.$$

Így a gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{62{,}35 \cdot 6{,}98}{3} = 145{,}07 \text{ cm}^3.$$

4365 Az ABC alaplap egyenlő szárú derékszögű háromszög, átfogója: $AB = 10\sqrt{2}$, az átfogóhoz tartozó magassága pedig az átfogó fele: $CF = 5\sqrt{2}$.

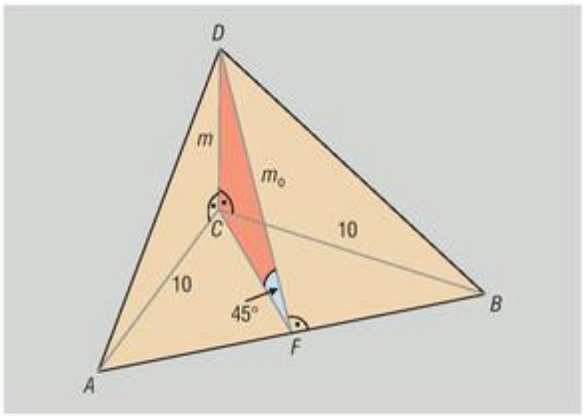
Mivel az ABC alaplap és az ABD oldallap bezárt szöge 45°, az FCD háromszög is egyenlő szárú derékszögű háromszög.

A gúla testmagassága:

$$m = CF = 5\sqrt{2}.$$

Az ABD oldallap magassága:

$$m_o = DF = CF \cdot \sqrt{2} = 10.$$



A gúla térfogata:

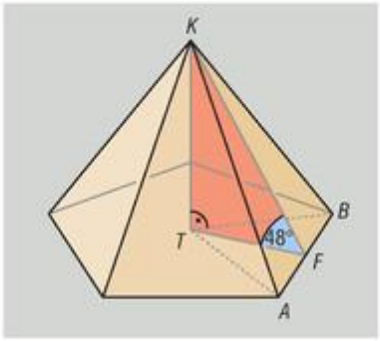
$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{10^2}{2} \cdot 5\sqrt{2}}{3} \approx 117{,}85 \text{ cm}^3.$$

A gúla felszíne:

$$A = T_{ABC} + 2 \cdot T_{ACD} + T_{ABD} = 50 + 2 \cdot \frac{10 \cdot 5\sqrt{2}}{2} + \frac{10\sqrt{2} \cdot 10}{2} =$$

$$= 50 \cdot \left(1 + 2\sqrt{2}\right) \approx 191{,}42 \text{ cm}^2.$$

4366 A befedendő felület egy olyan szabályos ötoldalú gúla palástjának a területe, amelynek az alapéle 2 m.



Használjuk az ábra jelöléseit. A gúla magasságának talppontja a szabályos ötszög körülírható körének T középpontja. Az ABT egyenlő szárú háromszög alapja $AB = 2$, a T-nél lévő szárszöge $\frac{360°}{5} = 72°$. A háromszög TF magassága: $TF = \frac{1}{\text{tg}\,36°}$.

A TFK derékszögű háromszögben ismert TF befogó, illetve az F csúcsnál lévő szög:

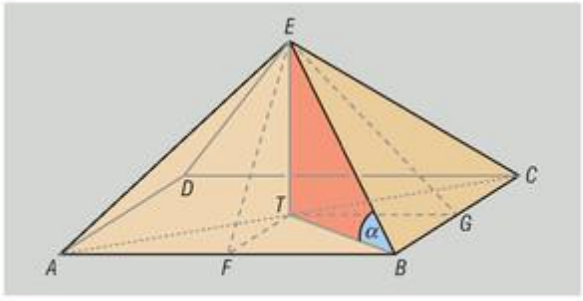
$$KF = \frac{TF}{\cos 48°} = \frac{1}{\text{tg}\,36° \cdot \cos 48°}.$$

A palást területe:

$$T_{\text{palást}} = 5 \cdot T_{ABK} = 5 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{\text{tg}\,36° \cdot \cos 48°}}{2} = \frac{5}{\text{tg}\,36° \cdot \cos 48°} \approx 10{,}28 \text{ m}^2.$$

A tető befedéséhez (a veszteséget is figyelembe véve) $\frac{10{,}28 \cdot 10}{0{,}9} \approx 115$ cserepet kell vásárolnunk.

4367 Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen $AB = 20$ cm és $BC = 12$ cm, felezőpontjaik rendre F és G, valamint a testmagasság talppontja T.



A gúla magassága a térfogatból számítható:

$$m = \frac{3 \cdot V}{T} = \frac{3 \cdot 1200}{12 \cdot 20} = 15 \text{ cm}.$$

Mivel a gúla csúcsából az alaplapra bocsátott merőleges talppontja a téglalap átlóinak metszéspontja, a gúla minden oldaléle egyenlő hosszú, vagyis az oldallap háromszögek egyenlő szárúak.

a) A felszín kiszámításához meg kell határoznunk az ABE illetve a BCE oldallapok magasságait.

Az EFT derékszögű háromszögből:

$$EF = \sqrt{ET^2 + FT^2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = 3\sqrt{29}.$$

Az EGT derékszögű háromszögből:

$$EG = \sqrt{ET^2 + GT^2} = \sqrt{15^2 + 10^2} = 5\sqrt{13}.$$

A gúla felszíne:

$$A = T_{ABCD} + 2 \cdot T_{ABE} + 2 \cdot T_{BCE} = 240 + 2 \cdot \frac{20 \cdot 3\sqrt{29}}{2} + 2 \cdot \frac{12 \cdot 5\sqrt{13}}{2} \approx 779{,}44 \text{ cm}^2.$$

b) Az oldalélnek az alaplappal bezárt α szögét a TBE derékszögű háromszögből számítjuk. A TB szakasz az $ABCD$ téglalap átlójának a fele:

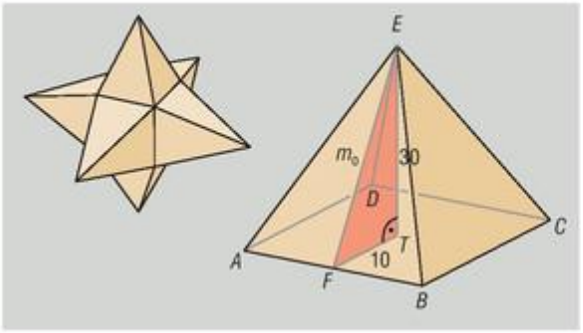
$$TB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20^2 + 12^2} = 2\sqrt{34}.$$

Az α szög meghatározása:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{TB} = \frac{15}{2\sqrt{34}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 52{,}14°.$$

A gúla oldaléleinek az alaplappal bezárt szöge 52,14°.

4368 *a)* A feladatban leírt „csillagtest" felszíne hat 20 cm alapélű, 30 cm magas szabályos négyoldalú gúla palástjának felszíne.



Az ábra alapján a fent leírt gúla egy egyenlő szárú oldallapjának alapja 20 cm. A gúla magassága Pitagorasz-tétellel az FTE derékszögű háromszögből számítható:

$$m_o = \sqrt{(ET)^2 + (FT)^2} = 10\sqrt{10}.$$

A gúla egy oldallapjának területe:

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{20 \cdot 10\sqrt{10}}{2} = 100\sqrt{10}.$$

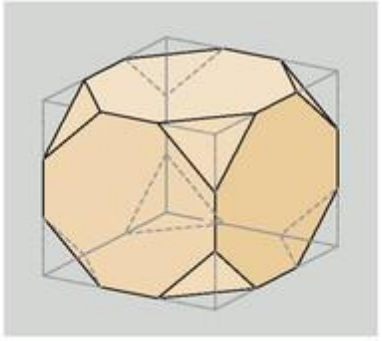
A „csillagtest" felszíne:

$$A = 24 \cdot T_{\text{háromszög}} = 24 \cdot 100\sqrt{10} \approx 7589{,}47 \text{ cm}^2.$$

b) A „csillagtest" térfogata:

$$V = V_{\text{kocka}} + 6 \cdot V_{\text{gúla}} = 20^3 + 6 \cdot \frac{20^2 \cdot 30}{3} = 32000 \text{ cm}^3.$$

4369 Legyen a kocka éle a, $a = 30$ cm.



a) A keletkezett test felszíne 6 nyolcszögből és 8 háromszögből áll.

A nyolcszög területét megkapjuk úgy, hogy az a oldalú négyzet területéből kivonjuk négy $\frac{a}{3}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területét:

$$T_{\text{nyolcszög}} = a^2 - 4 \cdot \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{2} = \frac{7a^2}{9} = \frac{7 \cdot 900}{9} = 700 \text{ cm}^2.$$

A határoló háromszögek mindegyike $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ oldalú szabályos háromszög:

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{18} = \frac{900\sqrt{3}}{18} = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

A test felszíne:

$$A = 6 \cdot T_{\text{nyolcszög}} + 8 \cdot T_{\text{háromszög}} = 6 \cdot 700 + 8 \cdot 50\sqrt{3} \approx 4892{,}82 \text{ cm}^2.$$

b) A test térfogatának meghatározásához az a élű kocka térfogatából ki kell vonni a csúcsoknál lévő nyolc tetraéder térfogatát.

A tetraéderek térfogatának meghatározásához tekintsük alapnak az $\frac{a}{3}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszöget. A tetraéder magassága $\frac{a}{3}$, térfogata:

$$V_{\text{tetraéder}} = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{2} \cdot \frac{a}{3}}{3} = \frac{a^3}{162} \quad \left(\approx 166{,}67\ \text{cm}^3\right).$$

A test térfogata:

$$V = V_{\text{kocka}} - 8 \cdot V_{\text{tetraéder}} = a^3 - 8 \cdot \frac{a^3}{162} = \frac{77a^3}{81} \approx 25666{,}67\ \text{cm}^3.$$

4370 A gúla alaplapjával párhuzamos sík a gúlából az alaplaphoz hasonló síkidomot metsz ki. A hasonlóság aránya $\frac{15-8}{15} = \frac{7}{15}$.

Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, az alaplap T területére fennáll:

$$\frac{100}{T} = \left(\frac{7}{15}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{22500}{49}.$$

A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{22500}{49} \cdot 15}{3} = \frac{112500}{49} \approx 2295{,}92\ \text{cm}^3.$$

4371 A kúp alakú tölcsér alkotója 30 cm, az alapkörének r sugarára fennáll:

$$2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ}, \quad \text{innen} \quad r = \frac{30}{3} = 10\ \text{cm}.$$

a) A kúp magassága:

$$m = \sqrt{30^2 - 10^2} = 20\sqrt{2} \approx 28{,}28\ \text{cm}.$$

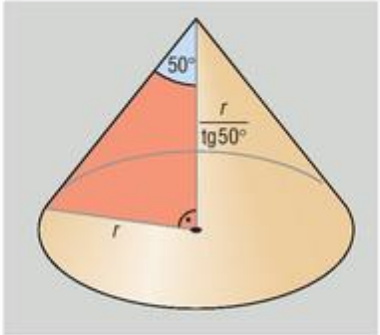
b) A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{(10)^2 \cdot \pi \cdot 20\sqrt{2}}{3} = \frac{2000\sqrt{2}}{3}\pi \approx 2961{,}92\ \text{cm}^3.$$

A tölcsérbe megközelítőleg 2,96 liter pattogatott kukorica fér.

4372 Ha a sóderkúp alapkörének sugara r, akkor a magasságát a fél nyílásszög segítségével felírhatjuk r függvényében:

$$m = \frac{r}{\text{tg}\,50^\circ}.$$



A kúp térfogatára felírhatjuk:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{r^3 \cdot \pi}{3 \cdot \text{tg}\,50^\circ} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \text{tg}\,50^\circ}{\pi}} \approx 1{,}32.$$

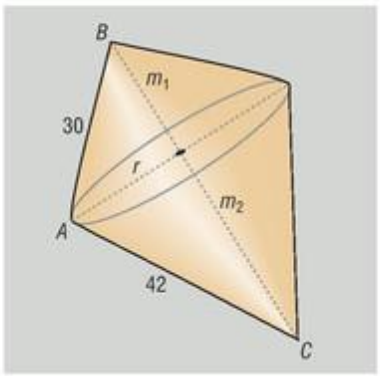
Ebből az alapkör átmérője: $d \approx 2{,}64$ m.

a) Mivel az alapkör átmérője több mint 2 méter, a sóder nem fér el a kikészített fólián.

b) A sóderkúp magassága:

$$m = \frac{r}{\operatorname{tg} 50^\circ} = \frac{\sqrt[3]{\frac{6 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ}{\pi}}}{\operatorname{tg} 50^\circ} \approx 1{,}11 \text{ m}.$$

4373 Az ábra szerint az $ABC_\triangle$-ben legyen $AB = 30$ cm, $AC = 42$ cm, és a két oldal által bezárt szög 100°.



Mivel a háromszög tompaszögű és a leghosszabb oldala körül forgatjuk meg, a keletkezett forgástest két kúpból áll. A kúpok alaplapja közös, valamint az alaplapok sugara a háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága.

A háromszög harmadik $a = m_1 + m_2$ oldalának hosszát koszinusztétellel számíthatjuk:

$$a^2 = 30^2 + 42^2 - 2 \cdot 30 \cdot 42 \cdot \cos 100^\circ \Rightarrow a \approx 55{,}69.$$

A háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \gamma}{2}.$$

Ebből kapjuk, hogy:

$$m_a = r = \frac{b \cdot c \cdot \sin \gamma}{a} = \frac{42 \cdot 30 \cdot \sin 100^\circ}{55{,}69} \approx 22{,}28.$$

A kúp alaplapjának sugara 22,28 cm.

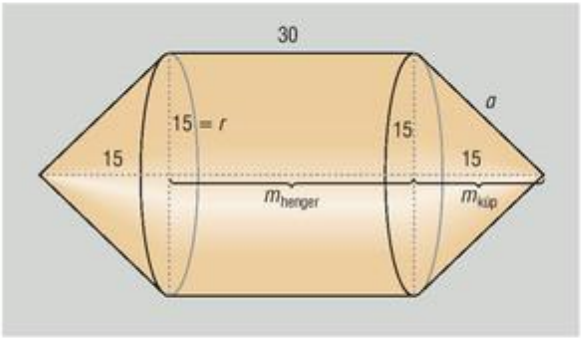
a) A forgástest felszíne a keletkezett két forgáskúp palástjából áll:

$$A = r \cdot \pi \cdot a_1 + r \cdot \pi \cdot a_2 = r \cdot \pi \cdot (a_1 + a_2) =$$
$$= 22{,}28\pi \cdot (30 + 42) \approx 5039{,}62 \text{ cm}^2.$$

b) A forgástest térfogata a keletkezett két forgáskúp térfogatának az összege. Vegyük figyelembe, hogy a magasságok összege a megforgatott háromszög a oldalának hossza:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_1}{3} + \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_2}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi}{3} \cdot (m_1 + m_2) = \frac{r^2 \cdot \pi}{3} \cdot a \approx 28949{,}18 \text{ cm}^3.$$

4374 *a)* Ha a húrtrapézt a hosszabbik alapja körül forgatjuk meg, a forgástest egy hengerből és két egybevágó kúpból áll.



A kúp alkotójának hossza:

$$a = \sqrt{15^2 + 15^2} = 15\sqrt{2} \text{ cm}.$$

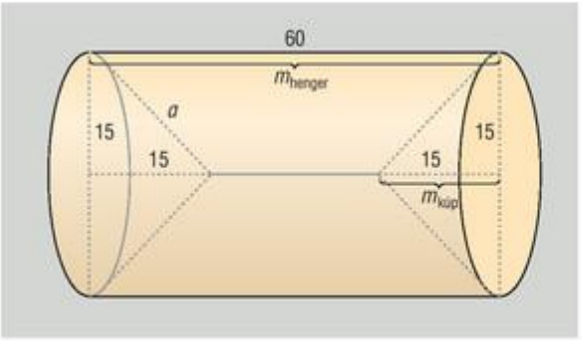
A forgástest térfogata:

$$V = V_{henger} + 2 \cdot V_{kúp} =$$
$$= r^2 \cdot \pi \cdot m_{henger} + 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_{kúp}}{3} =$$
$$= 15^2 \cdot \pi \cdot 40 \approx 28274{,}33 \text{ cm}^3.$$

A forgástest felszíne:

$$A = A_{hengerpalást} + 2 \cdot A_{kúppalást} = 2r \cdot \pi \cdot m_{henger} + 2r \cdot \pi \cdot a =$$
$$= 2r \cdot \pi \cdot (m_{henger} + a) = 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot \left(30 + 15\sqrt{2}\right) \approx 4826{,}73 \text{ cm}^2.$$

b) Ha a húrtrapézt a rövidebbik alapja körül forgatjuk meg, a forgástest egy olyan henger lesz, amelyből „kivágtuk" a két kúpot.



A forgástest térfogata:

$$V = V_{henger} - 2 \cdot V_{kúp} =$$

$$= r^2 \cdot \pi \cdot m_{henger} - 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_{kúp}}{3} =$$

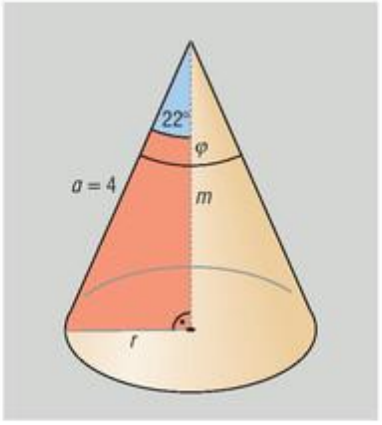
$$= 15^2 \cdot \pi \cdot 50 \approx 35342{,}92 \text{ cm}^3.$$

A forgástest felszíne:

$$A = A_{hengerpalást} + 2 \cdot A_{kúppalást} = 2r \cdot \pi \cdot m_{henger} + 2r \cdot \pi \cdot a =$$

$$= 2r \cdot \pi \cdot (m_{henger} + a) = 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot \left(60 + 15\sqrt{2}\right) \approx 7654{,}16 \text{ cm}^2.$$

4375 Ha a körkúp nyílásszöge φ, akkor a tengelymetszet területe:



$$T_{tengelymetszet} = \frac{a^2 \cdot \sin\varphi}{2},$$

$$5{,}56 = \frac{4^2 \cdot \sin\varphi}{2}, \quad \text{amiből} \quad \varphi \approx 44°.$$

Az alkotó, a testmagasság és a sugár alkotta derékszögű háromszögben:

$$r = 4 \cdot \sin 22° \approx 1{,}50 \quad \text{és} \quad m = 4 \cdot \cos 22° \approx 3{,}71.$$

A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} \approx 8{,}74 \text{ dm}^3.$$

4376 A feladatban szereplő két kúp hasonló egymáshoz, mivel nyílásszögeik egyenlők. A hasonlóság aránya a sugaraik aránya: $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Térfogataik aránya a hasonlóság arányának a köbe.

A megmaradt rész térfogata a két kúp térfogatának a különbsége:

$$V = V_1 - V_2 = V_1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot V_1 = V_1 \cdot \left(1 - \frac{27}{125}\right) = \frac{20^2 \cdot \pi \cdot 40}{3} \cdot \frac{98}{125} = \frac{12544\pi}{3} \approx 13136{,}05 \text{ cm}^3.$$

4377 *a)* Tekintsük a kúp leghosszabb és legrövidebb alkotóját tartalmazó síkmetszetét. Ez a síkmetszet egy háromszög, melynek oldalai 40 cm, 32 cm és 20 cm hosszúak. A 20 cm hosszúságú oldalhoz tartozó magasság a kúp testmagassága. Ennek meghatározásához írjuk fel a háromszögben a koszinusztételt:

$$40^2 = 32^2 + 20^2 - 2 \cdot 32 \cdot 20 \cdot \cos\alpha, \quad \text{ebből} \quad \cos\alpha = 0{,}1375 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 82{,}1°.$$

Felhasználva, hogy $m = 32 \cdot \sin\alpha$, kapjuk, hogy $m \approx 31{,}70$.

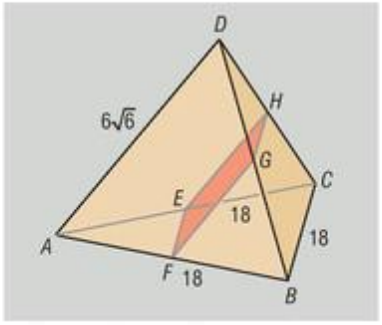
A kúp magassága megközelítőleg 31,70 cm.

Megjegyzés: m értékét közvetlenül meghatározhattuk volna a Heron-képlet alkalmazásával.

b) A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{10^2 \cdot \pi \cdot 31{,}70}{3} \approx 3319{,}62 \text{ cm}^3.$$

4378 *a)* Tekintsük a mellékelt ábrát. A gúla AC és AB élének felezőpontja legyen E és F.



Az E és F pontokon áthaladó, az AD éllel párhuzamos sík az ACD és ABD síkokat az AD éllel párhuzamos egyenesben metszi, így az EH és FG szakaszok az ACD és ABD oldallapok középvonalai.

A középvonal tulajdonsága miatt $EH = FG = 3\sqrt{6}$, valamint a H és G pontok a DC és DB élek felezőpontjai. Hasonlóan HG és EF a $BCD_{\triangle}$ és $BCA_{\triangle}$ középvonalai, ezért $HG = EF = 9$.

Tehát az $EFGH$ négyszög szemben lévő oldalai egyenlő hosszúak, vagyis a négyszög paralelogramma.

Vizsgáljuk meg a paralelogramma EG és HF átlójának hosszát.

Az FCH és EBG háromszöget vizsgálva:

1. $EB = FC$, mivel a szabályos háromszög súlyvonalai;
2. $HC = GB$, mivel mindkettő egy-egy (egyenlő hosszúságú) oldalél fele;
3. $HCF\sphericalangle = EBG\sphericalangle$, mivel ezek a teraéder egyenlő hosszúságú oldaléleinek az alaplappal bezárt szögei.

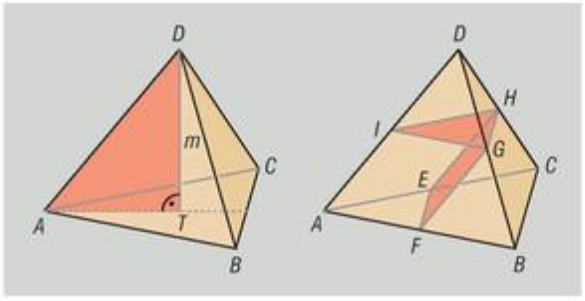
Ez alapján $FCH_{\triangle}$ és $EBG_{\triangle}$ egybevágó, tehát $HF = EG$, vagyis az $EFGH$ paralelogramma téglalap.

A téglalap alakú síkmetszet területe:

$$T = a \cdot b = 3\sqrt{6} \cdot 9 = 27\sqrt{6} \approx 66{,}14 \text{ cm}^2.$$

b) Az $ABCD$ tetraéder ABC alaplapjának területe:

$$T = \frac{18^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}.$$



Az alaplaphoz tartozó DT magassága az ábrán látható ATD derékszögű háromszögből határozható meg. A háromszög átfogója a tetraéder éle: $AD = 6\sqrt{6}$, az AT befogója az ABC szabályos háromszög magasságának a kétharmada:

$$AT = \frac{18\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = 6\sqrt{3}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{\left(6\sqrt{6}\right)^2 - \left(6\sqrt{3}\right)^2} = 6\sqrt{3}.$$

Az $ABCD$ tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{81\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}}{3} = 486 \text{ cm}^3.$$

Tekintsük az $EFGH$ sík által a tetraéderből lemetszett $AFEDGH$ testet. Ezt a gúla ABC alaplapjának síkjával párhuzamos HGI sík egy ferde hasábra és egy gúlára osztja.

Az $IGHD$ gúla hasonló az eredeti $ABCD$ gúlához, a hasonlóság aránya 1 : 2. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe:

$$V_{IGHD} = \frac{1}{8}V.$$

Az $AFEIGH$ test egy ferde hasáb, amelynek az AFE alaplapja az eredeti gúla ABC alaplapjához hasonló, a hasonlóság aránya 1 : 2. Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete:

$$T_{AFE} = \frac{1}{4}T.$$

A hasáb magassága a gúla magasságának fele, így a hasáb térfogata:

$$V_{AFEIGH} = \frac{1}{4}T \cdot \frac{m}{2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{T \cdot m}{3} = \frac{3}{8}V.$$

Az $EFGH$ sík által a tetraéderből lemetszett $AFEHGD$ test térfogata:

$$\frac{1}{8}V + \frac{3}{8}V = \frac{1}{2}V = \frac{1}{2} \cdot 486 = 243 \text{ cm}^3.$$

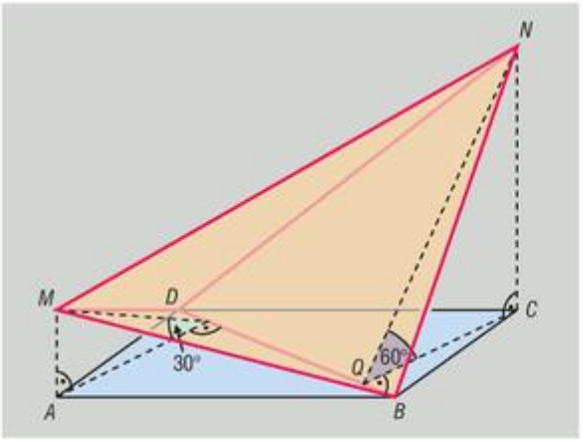
Az $EFGH$ sík az $ABCD$ tetraédert két egyenlő, 243 cm^3 térfogatú részre osztja.

4379 Az MBD és az NBD síkok merőlegesek egymásra, mert a téglalap síkjával bezárt szögük 30°, illetve 60°.

A tetraéder térfogatának kiszámításához elég meghatározni az $MBD_{\triangle}$ területét és kiszámítani a tetraéder ezen lapjához tartozó magasság hosszát.

Az $MBD_{\triangle}$ merőleges vetülete az $ABD_{\triangle}$, és a két háromszög síkja által bezárt szög 30°, ezért:

$$t_{MBD} = \frac{t_{ABD}}{\cos 30°} = \frac{\frac{12 \cdot 16}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 64\sqrt{3}.$$



Az $MNBD$ tetraéder N csúcsából induló magassága az MBD és az NBD síkok merőlegessége alapján a mellékelt ábra szerint az NQ szakasz. Mivel az NBD sík a téglalap síkjával 60° szöget zár be, $NQC\sphericalangle = 60°$.

Az NQ szakasz hosszát az NCQ fél szabályos háromszög alapján számolhatjuk:

$$NQ = 2 \cdot QC.$$

Az $ABCD$ téglalap BD átlójának hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$BD = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20.$$

A QC szakasz a BDC derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága, amelyet kiszámíthatunk úgy, hogy felírjuk a háromszög területét kétféleképpen:

$$\frac{12 \cdot 16}{2} = \frac{20 \cdot QC}{2} \quad \Rightarrow \quad QC = \frac{48}{5}.$$

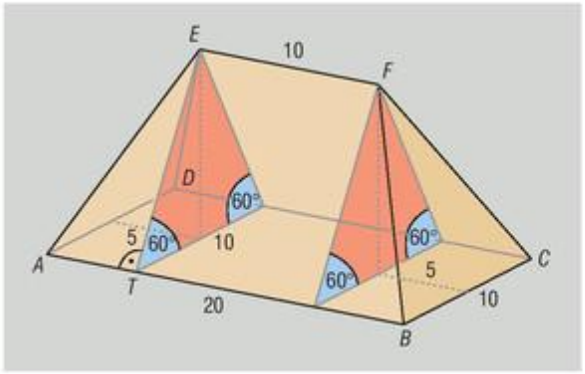
Tehát:

$$NQ = 2 \cdot QC = \frac{96}{5}.$$

A tetraéder térfogata:

$$V_{MNBD} = \frac{t_{MBD} \cdot NQ}{3} = \frac{64\sqrt{3} \cdot \frac{96}{5}}{3} = \frac{2048\sqrt{3}}{5} \approx 709{,}45 \text{ cm}^3.$$

4380 *a)* Ahhoz, hogy a padlás térfogatát meghatározzuk, vegyük az E és F pontokon áthaladó, az alaplapra merőleges síkokat. Ezek a síkok a padlás térfogatát egy háromszög alapú hasábra, valamint két téglalap alakú gúlára bontják.



Mivel a tető minden oldalról 60°-os szöget zár be a vízszintessel, a hasáb háromszög alaplapja egy 10 m oldalú szabályos háromszög, magassága pedig:

$$m_1 = 20 - 2 \cdot 5 = 10 \text{ m}.$$

A hasáb térfogata:

$$V_{\text{hasáb}} = T \cdot m_1 = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 10 = 250\sqrt{3} \text{ m}^3.$$

A két téglalap alakú gúlát összetolva egy 10 m alapélű szabályos négyoldalú gúlát kapunk. A gúla oldallapjai az alaplappal 60°-os szöget zárnak be, tehát a gúla magassága a 10 m oldalú szabályos háromszög magassága:

$$m_2 = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ m}.$$

A gúla térfogata tehát:

$$V_{\text{gúla}} = \frac{T \cdot m_2}{3} = \frac{10^2 \cdot 5\sqrt{3}}{3} = \frac{500\sqrt{3}}{3} \text{ m}^3.$$

A padlás térfogata légköbméterben:

$$V = V_{\text{hasáb}} + V_{\text{gúla}} = 250\sqrt{3} + \frac{500\sqrt{3}}{3} = \frac{1250\sqrt{3}}{3} \approx 721{,}69 \text{ m}^3.$$

b) A tető felszínét alkotó lapok síkjai 60°-os szöget zárnak be a vízszintessel, és ezeknek a vízszintesre eső merőleges vetületei a 10 m és 20 m oldalú téglalapot adják.

Így a síkidomok merőleges vetületének területére vonatkozó összefüggés alapján a tető felszíne:

$$A = \frac{T_{ABCD}}{\cos 60°} = \frac{200}{\frac{1}{2}} = 400 \text{ m}^2.$$

A tető befedéséhez a 18% hulladék miatt $\frac{400}{0{,}82} \approx 488 \text{ m}^2$ cserepet kell vásárolnunk.

c) A kúpcseréppel $4 \cdot AE + EF$ hosszúságot kell lefednünk. Az AE él hossza az ATE derékszögű háromszögből számítható:

$$AE = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}.$$

A lefedendő hosszúság:

$$4 \cdot AE + EF = 10 + 4 \cdot 5\sqrt{5} = 10 + 20\sqrt{5} \text{ m}.$$

Mivel a szükséges kúpcserepek száma:

$$\left(10 + 20\sqrt{5}\right) \cdot 5 \cdot 1{,}2 \approx 328{,}33,$$

ezért 329 darab cserepet kell megvásárolni.

4381 Legyen a gúla alakú ajándéktárgy térfogata V. Ha az alaplapjára állított gúlában fele magasságban áll a folyadék, akkor ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a gúlát elmetszettük egy, az alaplapjával párhuzamos síkkal a magasságának felénél. Mivel a lemetszett rész az eredetihez hasonló gúlát ad, és a hasonlóság aránya $1:2$, a lemetszett gúla térfogata úgy aránylik az eredeti gúla térfogatához, mint a hasonlóság arányának a köbe. A lemetszett rész térfogata tehát $\frac{1}{8}V$, a folyadék térfogata pedig $\frac{7}{8}V$.

Ha megfordítjuk a gúlát, akkor tekinthetjük úgy, hogy ismét elmetszettük az alaplap síkjával párhuzamosan, de most a lemetszett rész térfogata a $\frac{7}{8}V$. Innen a hasonlóság aránya: $\sqrt[3]{\frac{7}{8}}$. A gúlában ekkor $\sqrt[3]{\frac{7}{8}} \cdot 10 \approx 9{,}56$ cm magasan áll a folyadék.

4382 Ismert, hogy a tetraéder súlyvonalai negyedelve metszik egymást. Ez azt jelenti, hogy bármely csúcsot a szemben lévő lap súlypontjával összekötve, ennek a szakasznak a lap súlypontjához közelebbi negyedelőpontja a tetraéder S súlypontja.

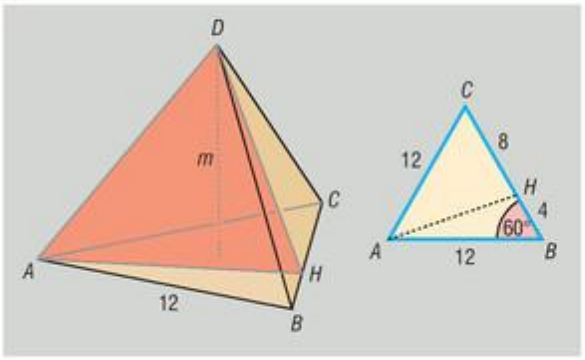
A tetraéder csúcsai és a lapok súlypontjai a tetraéder S súlypontjára vonatkozó $\lambda = -\frac{1}{3}$ arányú térbeli kicsinyítéssel feleltethetők meg egymásnak. Tehát az eredeti tetraéder és a lapjainak súlypontjai által meghatározott tetraéder hasonló egymáshoz, és a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$.

Ismert, hogy hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete, a hasonló testek térfogatának aránya pedig a hasonlóság arányának köbe.

Így a tetraéder lapjainak súlypontjai által meghatározott tetraéder felszíne az eredeti tetraéder felszínének $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$-szerese, térfogata pedig az eredeti tetraéder térfogatának $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$-szerese.

4383 Az ábrán látható $ABCD$ szabályos tetraéder BC élén lévő H pontra igaz, hogy

$$BH : HC = 1 : 2.$$



a) Az ADH sík a tetraédert két újabb tetraéderre bontja, amelyek magassága megegyezik az $ABCD$ tetraéder m magasságával.

Ha az $ABC_\triangle$ területe T, akkor az $ABH_\triangle$ területe $\frac{1}{3}T$, az $AHC_\triangle$ területe pedig $\frac{2}{3}T$.

Tehát:

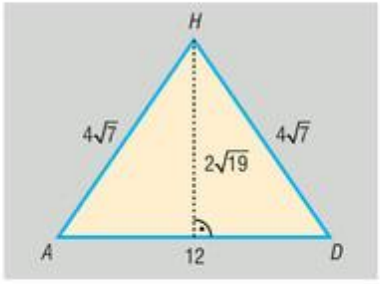
$$V_{ABHD} = \frac{\frac{1}{3}T \cdot m}{3} = \frac{1}{3}V_{ABCD}, \quad \text{valamint} \quad V_{AHCD} = \frac{\frac{2}{3}T \cdot m}{3} = \frac{2}{3}V_{ABCD}.$$

Ismert, hogy a szabályos tetraéder térfogata $V = \frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{12}$, így a két rész térfogata:

$$V_{ABHD} = \frac{1}{3}V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 12^3}{12} = 48\sqrt{2} \approx 67{,}88 \text{ cm}^3,$$

$$V_{AHCD} = \frac{2}{3}V_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 12^3}{12} = 96\sqrt{2} \approx 135{,}76 \text{ cm}^3.$$

b) A két tetraéder felszínének kiszámításához meg kell adnunk az $AHD_{\triangle}$ területét.



Ennek a háromszögnek két oldala egyenlő hosszú, mivel AH és DH egyaránt a 12 cm oldalú szabályos háromszög egyik csúcsát köti össze a szemben lévő oldal harmadolópontjával.

Az $AHB_{\triangle}$-ből koszinusztétellel számítható AH:

$$AH^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad AH = 4\sqrt{7}.$$

Az $ADH_{\triangle}$ két szára $4\sqrt{7}$ cm, alapja 12 cm hosszú. A Pitagorasz-tétellel számíthatjuk a háromszög alaphoz tartozó magasságát:

$$\sqrt{\left(4\sqrt{7}\right)^2 - 6^2} = 2\sqrt{19}.$$

Az $ADH_{\triangle}$ területe:

$$T_{ADH} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{19}}{2} = 12\sqrt{19}.$$

Használjuk ki, hogy:

$$T_{ABH} = T_{DBH} = \frac{1}{3} T_{ABC}, \quad \text{illetve} \quad T_{ACH} = T_{DCH} = \frac{2}{3} T_{ABC},$$

és írjuk fel a két tetraéder felszínét:

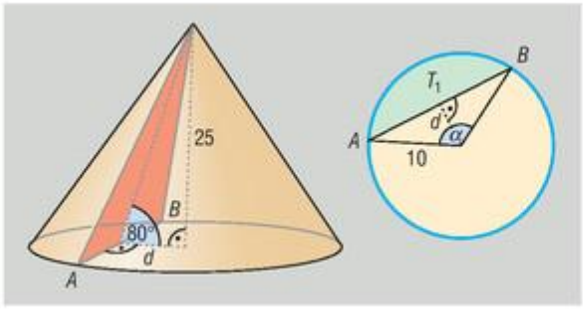
$$A_{ABHD} = T_{AHD} + T_{ABD} + 2 \cdot T_{AHB} = T_{AHD} + T_{ABC} + 2 \cdot \frac{1}{3} T_{ABC} = T_{AHD} + \frac{5}{3} T_{ABC} =$$

$$= 12\sqrt{19} + \frac{5}{3} \cdot \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{19} + 60\sqrt{3} \approx 156{,}23 \text{ cm}^2,$$

$$A_{AHCD} = T_{AHD} + T_{ACD} + 2 \cdot T_{AHC} = T_{AHD} + T_{ABC} + 2 \cdot \frac{2}{3} T_{ABC} = T_{AHD} + \frac{7}{3} T_{ABC} =$$

$$= 12\sqrt{19} + \frac{7}{3} \cdot \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{19} + 84\sqrt{3} \approx 198{,}80 \text{ cm}^2.$$

4384 Tekintsük a mellékelt ábrát. A keletkezett részek olyan kúpszerű testek, amelyek magasságai az eredeti forgáskúp m magasságával egyenlők.



A két kúpszerű test alaplapja az a két körszelet, amelyet az ábrán látható AB húr hoz létre az alapkörön. Ezek területének meghatározásához számoljuk ki az AB húr és az alapkör középpontjának d távolságát:

$$d = \frac{25}{\operatorname{tg} 80^\circ}.$$

Ez alapján számolható az ábrán látható kisebbik körszelet α középponti szöge:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{10} = \frac{\frac{25}{\operatorname{tg} 80^\circ}}{10} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 127{,}69^\circ.$$

A kisebbik körszelet területe:

$$T_1 = 10^2 \cdot \pi \cdot \frac{127{,}69^\circ}{360^\circ} - \frac{10^2 \cdot \sin 127{,}69^\circ}{2} \approx 71{,}86 \text{ cm}^2.$$

A kisebbik rész térfogata:

$$V_1 = \frac{T_1 \cdot m}{3} = \frac{71{,}86 \cdot 25}{3} \approx 598{,}83\ \text{cm}^3.$$

A nagyobbik rész térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a teljes gúla térfogatából kivonjuk a kisebbik rész térfogatát:

$$V_2 = \frac{10^2 \cdot \pi \cdot 25}{3} - 598{,}83 \approx 2019{,}16\ \text{cm}^3.$$

4385 Legyen a forgáskúp és a henger alapkörének sugara r, magassága m. Ha a forgáskúp alkotója a, akkor:

$$a = \sqrt{r^2 + m^2}.$$

A forgáshenger és a forgáskúp felszínének aránya:

$$\frac{A_{\text{henger}}}{A_{\text{kúp}}} = \frac{2r \cdot \pi \cdot (r+m)}{r \cdot \pi \cdot (r+a)} = \frac{2(r+m)}{r + \sqrt{r^2+m^2}}.$$

A feladat feltétele alapján:

$$\frac{2(r+m)}{r + \sqrt{r^2+m^2}} = \frac{8}{5}.$$

Ekvivalens átalakítások után a következő egyenletet kapjuk:

$$15r^2 - 10r \cdot m - 9m^2 = 0.$$

Mivel a forgáskúp nyílásszögére van szükségünk, elég az egyenletből $\frac{r}{m}$-et, a fél nyílásszög tangensét kifejeznünk:

$$15 \cdot \left(\frac{r}{m}\right)^2 - 10 \cdot \frac{r}{m} - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{r}{m}\right)_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{640}}{30}.$$

Mivel a hegyesszög tangense nem lehet negatív:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{m} = \frac{10 + 8\sqrt{10}}{30} = \frac{5 + 4\sqrt{10}}{15} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 99{,}28°.$$

A kúp nyílásszöge 99,28°.

4386 Legyen a forgáskúp alapkörének sugara r, magassága m, alkotója a. A feladat feltétele alapján:

$$r \cdot \pi \cdot (r+a) = 634{,}86 \quad \text{és} \quad \frac{2r \cdot m}{2} = 90.$$

Ismert, hogy $a = \sqrt{r^2+m^2}$, tehát az első egyenlet így is írható:

$$r \cdot \pi \cdot \left(r + \sqrt{r^2+m^2}\right) = 634{,}86 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r \cdot \sqrt{r^2+m^2} = \frac{634{,}86}{\pi}.$$

A második egyenletből $m = \frac{90}{r}$, amit az elsőbe behelyettesítve:

$$r^2 + r \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{90}{r}\right)^2} = \frac{634{,}86}{\pi},$$

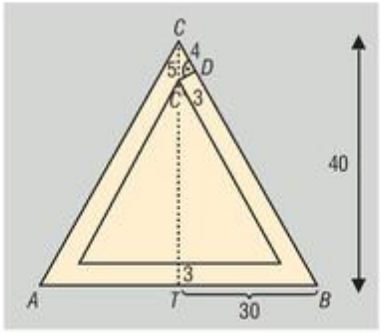
$$r \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{90}{r}\right)^2} = \frac{634{,}86}{\pi} - r^2.$$

Négyzetre emelés és rendezés után $r^2 = 81$. Mivel r pozitív, $r = 9$. A kúp magassága $m = \frac{90}{r} = 10$.

A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{9^2 \cdot \pi \cdot 10}{3} = 270\pi \approx 848{,}23\ \text{cm}^3.$$

4387 A külső kúp és a belső kúp hasonló, mivel nyílásszögük egyenlő. Tekintsük a test tengelymetszetét.



Az ábra jelöléseit használva a TBC háromszög hasonló a $DC'C$ háromszöghöz, mivel szögeik páronként egyenlők. A két háromszög megfelelő oldalai hosszának aránya egyenlő:

$$\frac{CD}{C'D}=\frac{TC}{TB} \quad \Rightarrow \quad CD=C'D\cdot\frac{TC}{TB}=3\cdot\frac{40}{30}=4.$$

A CC' szakasz hossza a Pitagorasz-tétel alapján 5 cm.

Ez alapján a belső kúp magassága: $40-3-5=32$.

A két kúp hasonlóságának aránya, a magasságaik aránya: $\frac{32}{40}=\frac{4}{5}$, tehát a térfogataik aránya: $\left(\frac{4}{5}\right)^3$.

A bakelit térfogatát a külső és belső kúpok térfogatának különbsége adja:

$$V=V_{\text{külső}}-V_{\text{belső}}=V_{\text{külső}}-\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot V_{\text{külső}}=$$

$$=\frac{61}{125}\cdot V_{\text{külső}}=\frac{61}{125}\cdot\frac{30^2\cdot\pi\cdot 40}{3}=5856\pi\approx 18397{,}17\ \text{cm}^3\approx 18{,}40\ \text{dm}^3.$$

a) A test tömege:

$$m=\rho\cdot V=1{,}3\cdot 18{,}40=23{,}92\ \text{kg}.$$

b) Arkhimédész törvénye alapján ha egy test átlagos sűrűsége kisebb, mint a vízé, akkor úgy úszik a vízen, hogy a test tömegével megegyező tömegű vizet szorít ki.

Mivel az átlagsűrűség

$$\rho_{\text{átlag}}=\frac{m}{V_{\text{külső}}}=\frac{23{,}92\ \text{kg}}{37{,}68\ \text{dm}^3}<1\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}=\rho_{\text{víz}},$$

ezért a test úszik.

A csúcsával lefelé fordított test olyan mélyen merül a vízbe, hogy a víz alatti forgáskúp térfogata $23{,}92\ \text{dm}^3=23\,920\ \text{cm}^3$. A víz alatti forgáskúp hasonló a külső forgáskúphoz. Hasonlóságuk aránya a magasságaik aránya, amelynek köbe a térfogataik aránya.

Ha a test h cm mélyen merül a vízbe, akkor:

$$\left(\frac{h}{40}\right)^3=\frac{23920}{37680} \quad \Rightarrow \quad h\approx 34{,}37.$$

A csúcsával lefelé fordított test 34,37 cm mélyre merül a vízben.

4388 Legyen a körlapból készült kúp alapkörének sugara r, alkotója $a=20$ cm.

A kivágandó körcikk ívhossza éppen a kúp alapkörének kerülete:

$$i=2r\cdot\pi \quad \Rightarrow \quad r=\frac{i}{2\pi}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján a kúp magassága:

$$m=\sqrt{a^2-r^2}=\sqrt{20^2-r^2},$$

tehát a kúp térfogata:

$$V=\frac{r^2\cdot\pi\cdot\sqrt{20^2-r^2}}{3}=\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{400r^4-r^6}.$$

Ez utóbbi pozitív kifejezés maximuma helyett elég keresni az alábbi függvény maximumát:

$$f(r) = 400r^4 - r^6 \quad (r > 0).$$

Ennek a függvénynek ott lehet maximuma, ahol az első deriváltja 0:

$$f'(r) = 1600r^3 - 6r^5 = r^3 \cdot (1600 - 6r^2).$$

Pozitív r-eket tekintve, ennek a függvénynek $r = \sqrt{\frac{1600}{6}} = \sqrt{\frac{800}{3}}$ helyen van zérushelye.

Az első derivált előjele pozitív, ha $0 < r < \sqrt{\frac{800}{3}}$, és negatív, ha $\sqrt{\frac{800}{3}} < r$, tehát $r = \sqrt{\frac{800}{3}}$ esetén $f(r)$ függvénynek maximuma van.

A kúp térfogata akkor maximális, ha $r = \sqrt{\frac{800}{3}}$, vagyis a kivágandó körcikk ívhossza:

$$i = 2r \cdot \pi = 2 \cdot \sqrt{\frac{800}{3}} \cdot \pi.$$

Ebből kiszámolható a 20 cm sugarú körcikk α középponti szöge:

$$2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} = 2 \cdot \sqrt{\frac{800}{3}} \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = 293{,}94°.$$

Egy 293,94° középponti szögű körcikket kell kivágnunk ahhoz, hogy a kúp térfogata a legnagyobb legyen.

A csonka gúla és a csonka kúp – megoldások

4389 A négyzet alapú csonka gúla térfogata: 9250 cm^3.

4390 A szabályos háromszög alapú csonka gúla térfogata: $570\sqrt{3} \approx 987{,}27$ cm^3.

4391 A csonka gúla magassága: 30 cm.

4392 A tartályba 2100 liter folyadék fér.

4393 A bura elkészítéséhez 2083,53 cm^2 vászon szükséges.

4394 *a)* A csonka gúla egy oldallapjának a magassága: 26 cm.
b) A csonka gúla oldalélének a hossza: 26,12 cm.

4395 A csonka gúla fedőlapjának éle: 7 cm.

4396 A fez 24,71 cm magas.

4397 Az egyenes csonka kúp
a) alkotója: 12,37 cm;
b) felszíne: 1128,74 cm^2;
c) térfogata: 2752,04 cm^3.

4398 Az egyenes csonka kúp
a) fedőlapjának sugara: 9 cm;
b) felszíne: $546\pi \approx 1715{,}31$ cm^2;
c) térfogata: $1176\pi \approx 3694{,}51$ cm^3.

4399 Az egyenes csonka kúp

a) magassága: 10 cm; *b)* alkotója: 16,40 cm; *c)* felszíne: 2801,67 cm^2.

4400 *a)* Az egyenes csonka körkúp felszíne: $2300\pi \approx 7225{,}66$ cm^2.

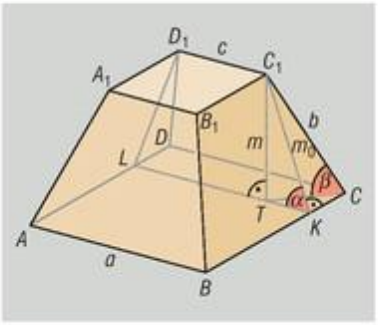
b) Az egyenes csonka körkúp térfogata: $\frac{19000\sqrt{3}}{3} \cdot \pi \approx 34462{,}19$ cm^3.

4401 A keletkezett forgástest egyenes csonka körkúp, amelynek felszíne: $98\pi \approx 307{,}88$ cm^2, térfogata pedig: $\frac{98\sqrt{15} \cdot \pi}{3} \approx 397{,}47$ cm^3.

4402 Az egyenes csonka kúp

a) alkotója: 15 cm; *b)* magassága: 13,75 cm; *c)* térfogata: 17 408,35 cm^3.

4403 Tekintsük az ábrán látható $ABCDA_1B_1C_1D_1$ négyzet alapú egyenes csonka gúlát.



Vegyük a csonka gúla C_1 és D_1 csúcsain áthaladó, az alaplapra merőleges LKC_1D_1 húrtrapéz síkmetszetét.

A trapéz alapjainak hossza $a = 12$ cm és $c = 6$ cm, valamint magassága $m = 8$ cm.

a) A csonka gúla oldallapjának magassága az LKC_1D_1 trapéz szára, amelynek hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m_o = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{12-6}{2}\right)^2} = \sqrt{73} \approx 8{,}54.$$

A csonka gúla oldallapjának a magassága: $\sqrt{73} \approx 8{,}54$ cm.

b) A csonka gúla b oldalélének hosszát a csonka gúla BCC_1B_1 oldallapjának segítségével Pitagorasz tételével számíthatjuk:

$$b = \sqrt{{m_o}^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{73}\right)^2 + \left(\frac{12-6}{2}\right)^2} = \sqrt{82} \approx 9{,}06.$$

A csonka gúla oldaléle: $\sqrt{82} \approx 9{,}06$ cm.

c) A csonka gúla oldallapjának és alaplapjának α hajlásszöge az LKC_1D_1 trapéz K csúcsánál levő szöge, amelynek nagysága a TKC_1 derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{\frac{a-c}{2}} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 69{,}44°.$$

A csonka gúla oldallapjának és alaplapjának hajlásszöge: 69,44°.

d) A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right) = \frac{8}{3} \cdot \left(12^2 + 12 \cdot 6 + 6^2\right) = 672 \text{ cm}^3.$$

e) A csonka gúla felszíne:

$$A = T + t + A_{\text{palást}} = a^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{m_o \cdot (a+c)}{2} = 12^2 + 6^2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{73} \cdot (12+6)}{2} =$$

$$= 180 + 36\sqrt{73} \approx 487{,}58 \text{ cm}^2.$$

4404 Használjuk a 4403. feladat jelöléseit: $a = 12$ cm, $c = 4$ cm és $b = 15$ cm.

a) A csonka gúla oldallapjának m_o magassága a BCC_1B_1 trapézból a Pitagorasz-tétel alapján számolható:

$$m_o = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{12-4}{2}\right)^2} = \sqrt{209} \approx 14{,}46.$$

A csonka gúla oldallapjának a magassága: 14,46 cm.

b) A csonka gúla testmagassága az LKC_1D_1 trapéz magassága. Hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{m_o^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{193} \approx 13{,}89.$$

A testmagassága: 13,89 cm.

c) A csonka gúla oldaléle és az alaplapja által bezárt β szög a TCC_1 szög, amely a TCC_1 derékszögű háromszögből szinusz szögfüggvénnyel meghatározható:

$$\sin\beta = \frac{m}{b} = \frac{\sqrt{193}}{15} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 67{,}84°.$$

A csonka gúla oldalélének az alaplappal bezárt szöge: 67,84°.

d) A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right) = \frac{208\sqrt{193}}{3} \approx 963{,}21 \text{ cm}^3.$$

e) A csonka gúla felszíne:

$$A = T + t + A_{\text{palást}} = a^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{m_o \cdot (a+c)}{2} = 160 + 32\sqrt{209} \approx 622{,}62 \text{ cm}^2.$$

4405 Legyen $a = 18$ cm, $c = 10$ cm.

A négyzet alapú egyenes csonka gúla felszíne:

$$A = T + t + A_{\text{palást}} = a^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{m_o \cdot (a+c)}{2},$$

amiből a csonka gúla oldallapjának m_o magasságára $m_o = 15$ adódik.

A 4403. feladat ábráját használva a csonka gúla testmagassága az LKC_1D_1 trapéz magassága. Hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{209} \approx 14{,}46.$$

A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right) = \frac{604\sqrt{209}}{3} \approx 2910{,}64 \text{ cm}^3.$$

4406 Mivel a szabályos négyzet alapú csonka gúla alapterülete 36 cm^2, az alapéle $a = 6$ cm. A fedőlap területe 18 cm^2, tehát a fedőlap c éle $c = 3\sqrt{2}$ cm.

Mivel ismerjük a csonka gúla térfogatát, a

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right)$$

képlet alkalmazásával a magassága kiszámítható:

$$m = \frac{30 \cdot \left(3 - \sqrt{2}\right)}{7} \approx 6{,}80 \text{ cm}.$$

A 4403. feladat ábráját használva, a csonka gúla oldallapjának magassága az LKC_1D_1 trapéz szára, amelynek hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m_o = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{6{,}80^2 + \left(\frac{6-3\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 6{,}86.$$

A szabályos négyzet alapú csonka gúla egy oldallapjának területe:

$$T_{\text{oldallap}} = \frac{m_o \cdot (a+c)}{2} \approx 35{,}13\ \text{cm}^2.$$

4407 Ha a szabályos négyzet alapú csonka gúla alapéle $a = 20$ cm, akkor az alaplap területe $T = 400\ \text{cm}^2$, a fedőlapé $t = 100\ \text{cm}^2$, ahonnan a fedőlap éle $c = 10$ cm.

A palást területe:

$$A_{\text{palást}} = 5 \cdot 100 = 500\ \text{cm}^2,$$

és mivel négy egybevágó szimmetrikus trapézból áll, ezért egy trapéz területe $125\ \text{cm}^2$.

Az oldallap m_o magassága számítható a területből:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{m_o \cdot (a+c)}{2} \quad \Rightarrow \quad m_o = \frac{2 \cdot T_{\text{trapéz}}}{(a+c)} = \frac{2 \cdot 125}{20+10} = \frac{25}{3}.$$

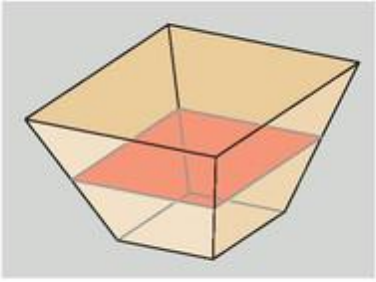
A 4403. feladat ábráját használva a csonka gúla testmagassága az LKC_1D_1 trapéz magassága. Hossza Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{m_o^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 - \left(\frac{20-10}{2}\right)^2} = \frac{20}{3}.$$

A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right) = \frac{14000}{9} \approx 1555{,}56\ \text{cm}^3.$$

4408 A félig megtöltött virágládában lévő virágföld térfogata egy olyan szabályos négyoldalú csonka gúla térfogatával egyezik meg, amelynek magassága a csonka gúla magasságának fele, $m = \frac{20}{2} = 10$ cm, az alapéle 14 cm, a fedőlap éle pedig a láda trapéz oldallapjának a középvonala $c = \frac{20+14}{2} = 17$ cm.

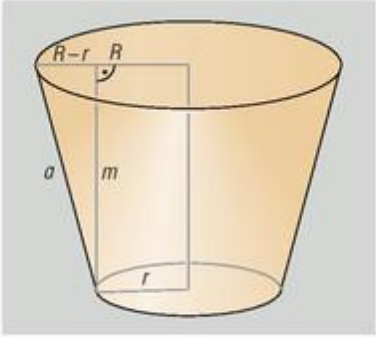


A virágföld térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + ac + c^2\right) = \frac{10}{3} \cdot \left(14^2 + 14 \cdot 17 + 17^2\right) = 2410\ \text{cm}^3.$$

A virágládában $2410\ \text{cm}^3 = 2{,}41$ liter virágföld van.

4409 Az egyenes csonka kúp alakú bádogvödör alapkörének sugara $r = 10$ cm, fedőkörének sugara $R = 13$ cm, a magassága pedig $m = 36$ cm.



a) A vödör térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) =$$

$$= \frac{36\pi}{3} \cdot \left(10^2 + 10 \cdot 13 + 13^2\right) = 4788\pi \approx 15041{,}95\ \text{cm}^3.$$

A vödörbe 15 liter víz fér.

b) A vödör a alkotójának hosszát a Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

$$a = \sqrt{m^2 + (R-r)^2} = \sqrt{1305} = 3\sqrt{145}.$$

Az egy vödör elkészítéséhez szükséges bádog mennyisége:

$$A = \left(R^2 + a \cdot (R+r)\right) \cdot \pi = \left(100 + 69\sqrt{145}\right) \cdot \pi \text{ cm}^2.$$

A többletértéket is figyelembe véve 1000 vödörhöz

$$1000 \cdot \left(100 + 69\sqrt{145}\right) \cdot \pi \cdot 1{,}18 \approx 3450809 \text{ cm}^2,$$

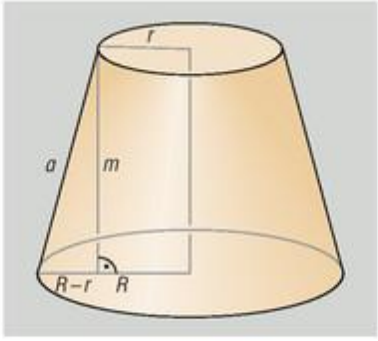
azaz 345,08 m^2 bádog szükséges.

4410 Az egyenes csonka kúp felszínét az

$$A = \left(r^2 + R^2 + a \cdot (R+r)\right) \cdot \pi$$

képlet alapján számolva a $0 = r^2 + 10r - 96$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek megoldásai:

$$r_1 = \frac{-10+22}{2} = 6 \quad \text{és} \quad r_2 = \frac{-10-22}{2} = -16.$$



a) Az fedőlap sugara csak pozitív szám lehet, így $r = 6$ cm.

b) Az egyenes csonka kúp m magasságát a Pitagorasz-tétellel meghatározhatjuk:

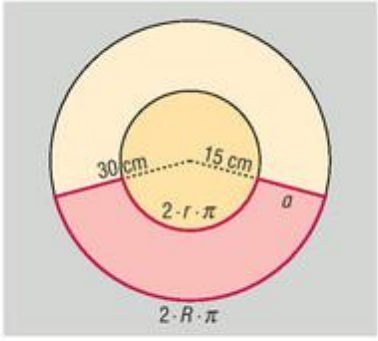
$$m = \sqrt{a^2 - (R-r)^2} = \sqrt{10^2 - (12-6)^2} = 8 \text{ cm}.$$

A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = \frac{8\pi}{3} \cdot \left(12^2 + 12 \cdot 6 + 6^2\right) = 672\pi \approx 2111{,}15 \text{ cm}^3.$$

4411 A csonka kúp alkotója a két kör sugarának a különbsége:

$$a = 30 - 15 = 15 \text{ cm}.$$



Az alapkör kerülete a 30 cm sugarú kör 150°-os középponti szögéhez tartozó ív hossza:

$$2 \cdot R \cdot \pi = 2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \frac{150^\circ}{360^\circ} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{25}{2} \text{ cm}.$$

Az fedőkör kerülete a 15 cm sugarú kör 150°-os középponti szögéhez tartozó ív hossza:

$$2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot \frac{150^\circ}{360^\circ} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{25}{4} \text{ cm}.$$

a) A csonka kúp felszíne:

$$A = \left(R^2 + r^2 + a \cdot (R+r)\right) \cdot \pi = \frac{7625}{16}\pi \approx 1497{,}17 \text{ cm}^2.$$

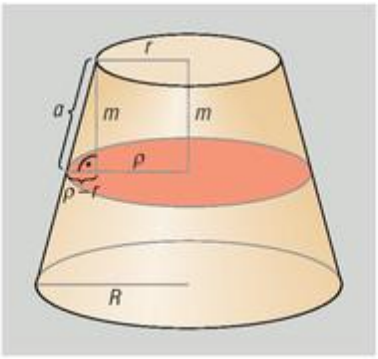
b) A térfogat meghatározásához szükségünk van a csonka gúla m magasságára. A Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{a^2 - (r-R)^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{25}{2} - \frac{25}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{119}}{4} \text{ cm}.$$

A csonka kúp térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = \frac{21875 \cdot \sqrt{119} \cdot \pi}{192} \approx 3904{,}54 \text{ cm}^3.$$

4412 Ha az egyenes csonka kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal magasságának felénél két részre vágjuk, akkor a síkmetszet egy olyan kör, amelynek sugara az alapkör és fedőkör sugarának számtani közepe. Az alapkör sugara $R = 30$ cm, a fedőlap sugara $r = 20$ cm, a síkmetszet sugara $\rho = \dfrac{R+r}{2} = 25$ cm.



A levágott felső csonka kúp alapkörének sugara $\rho = 25$ cm, fedőkörének sugara $r = 20$ cm, magassága pedig $m = 30$ cm. A felső csonka kúp a alkotójának hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$a = \sqrt{m^2 + (\rho - r)^2} = \sqrt{925} = 5\sqrt{37} \text{ cm}.$$

A levágott felső csonka kúp felszíne:

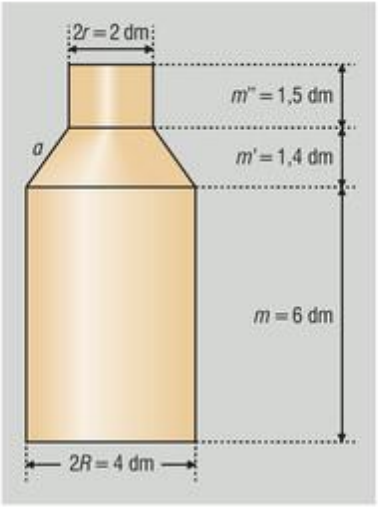
$$A = \left(\rho^2 + r^2 + a \cdot (\rho + r)\right) \cdot \pi = \left(1025 + 225\sqrt{37}\right) \cdot \pi \approx 7519{,}78 \text{ cm}^2.$$

A levágott felső csonka kúp térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right) = 15250\pi \approx 47909{,}29 \text{ cm}^3.$$

4413 *a)* Az alsó egyenes körhenger térfogata:

$$V_1 = R^2 \cdot \pi \cdot m = 24\pi \text{ dm}^3.$$



A középső egyenes csonka kúp alakú rész térfogata:

$$V_2 = \frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = \frac{49}{15}\pi \text{ dm}^3.$$

A felső hengeres részben $1{,}5 - 0{,}2 = 1{,}3$ dm magasságig állhat méz, ennek térfogata:

$$V_3 = r^2 \cdot \pi \cdot m'' = \frac{13}{10}\pi \text{ dm}^3.$$

A bödönbe önthető méz térfogata legfeljebb:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{857}{30}\pi \approx 89{,}74 \text{ dm}^3.$$

Tehát a bödönbe $m_{\text{méz}} = V \cdot \rho = 125{,}64$ kg méz fér.

b) A bödön fenekéhez, illetve az alsó hengeres rész palástjához

$$A_1 = R^2 \cdot \pi = 4\pi \text{ dm}^2, \quad \text{illetve} \quad A_2 = 2R \cdot \pi \cdot m = 24\pi \text{ dm}^2$$

bádoglemez szükséges.

A középső csonka kúp palástját az alkotó segítségével határozhatjuk meg. Az alkotó hosszát a Pitagorasz-tétellel számítjuk:

$$a = \sqrt{(m')^2 + (R - r)^2} = \sqrt{1{,}4^2 + (2-1)^2} = \frac{\sqrt{74}}{5} \text{ dm},$$

így a palást felszíne:

$$A_3 = a \cdot (R + r) \cdot \pi = \frac{\sqrt{74}}{5} \cdot (2+1) \cdot \pi = \frac{3\sqrt{74}}{5} \cdot \pi \text{ dm}^2.$$

A felső hengeres rész palástja:

$$A_4 = 2r \cdot \pi \cdot m'' = 3\pi \text{ dm}^2.$$

A bödön elkészítéséhez szükséges bádog mennyisége a 8%-os többlettel együtt:

$$A = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \cdot 1{,}08 = \frac{155 + 3\sqrt{74}}{5} \cdot \pi \cdot 1{,}08 \approx 122{,}69 \text{ dm}^2.$$

4414 Az eredeti gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = 4000\pi \text{ cm}^3.$$

A levágott gúla hasonló az eredetihez, és térfogata:

$$4000\pi - 1000\pi = 3000\pi \text{ cm}^3.$$

A levágott és eredeti gúla térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe, így:

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{3000\pi}{4000\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

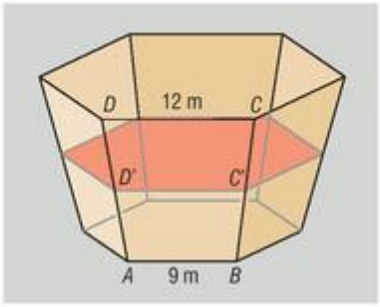
Ha a csonka gúla keresett magassága m, akkor a levágott gúla magassága $40 - m$.

A levágott és az eredeti gúla magasságának aránya:

$$\lambda = \frac{40-m}{40} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \frac{40-m}{40} \quad \Rightarrow \quad m = 40\left(1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right) \approx 3{,}66 \text{ cm}.$$

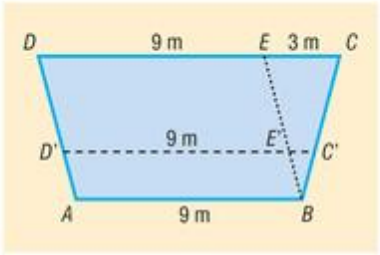
A csonka gúla magassága: 3,66 cm.

4415 *a)* A medencében lévő víz térfogatának meghatározásához ki kell számolnunk, hogy a víz felülete hány négyzetméter. Ehhez meg kell adnunk annak a szabályos hatszögnek az oldalhosszát, amelyet az alappal párhuzamos sík metsz ki a csonka gúlából.



Tekintsük a medence egy $ABCD$ húrtrapéz oldallapját, amelynek két alapja 12 m és 9 m. Az előbb említett hatszög oldala a trapéz szárainak a kisebbik alaphoz közelebbi harmadolópontjait összekötő $D'C'$ szakasz.

Húzzunk párhuzamost az AD szárral B csúcson keresztül. Ez a párhuzamos DC-t E-ben, $D'C'$-t E'-ben metszi. A létrejött $ABED$ négyszög szemben lévő oldalai párhuzamosak, tehát paralelogramma, ezért $DE = 9$ m és $EC = 3$ m.



Mivel $D'C'$ párhuzamos az alapokkal, a párhuzamos szelőszakaszok tételét felírva az EBC szögre:

$$\frac{E'C'}{EC} = \frac{BC'}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{E'C'}{3} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad E'C' = 1 \text{ m}.$$

A szabályos hatszög alakú vízfelület oldaléle:

$$D'C' = 1 + 9 = 10 \text{ m}.$$

A medencében lévő víz egy olyan csonka gúla térfogatával egyezik meg, amelynek magassága 2 m, az alaplapja 9 m oldalú, fedőlapja 10 m oldalú szabályos hatszög.

Az alaplap területe:

$$T = 6 \cdot \frac{9^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{2}.$$

A fedőlap területe:

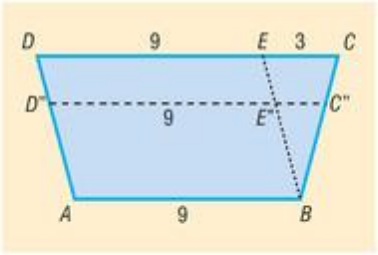
$$t = 6 \cdot \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}.$$

A medencében lévő víz térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{243\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{243\sqrt{3}}{2} \cdot 150\sqrt{3}} + 150\sqrt{3}\right) = 271\sqrt{3} \approx 469{,}39 \text{ m}^3.$$

b) Az *a)* részhez hasonló gondolatmenet alapján járunk el.

Ebben az esetben a húrtrapéz oldallapnak a szárak hosszabbik alap felé eső harmadolópontjait összekötő $D''C''$ szakasz hosszát kell meghatároznunk.



A szabályos hatszög alakú vízfelület oldaléle:

$$D''C'' = 9 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 11 \text{ m}.$$

A medencében lévő víz egy olyan csonka gúla térfogatával egyezik meg, amelynek magassága 4 m, az alaplapja 9 m oldalú, fedőlapja 11 m oldalú szabályos hatszög.

Az alaplap területe:

$$T = 6 \cdot \frac{9^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{2}.$$

A fedőlap területe:

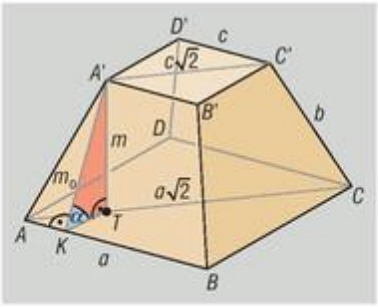
$$t = 6 \cdot \frac{11^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{363\sqrt{3}}{2}.$$

A medencében lévő víz térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{243\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{243\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{363\sqrt{3}}{2}} + \frac{363\sqrt{3}}{2}\right) = 602\sqrt{3} \approx 1042{,}69 \text{ m}^3.$$

4416 Használjuk az ábra jelöléseit.

Az egyenes csonka gúla alaplapjának éle legyen a, fedőlapjának éle c, testmagassága m, oldallapjának magassága m_o.



Mivel a palást területének harmada az $ACC'A'$ trapéz területe:

$$3 \cdot \frac{m \cdot \left(a\sqrt{2} + c\sqrt{2}\right)}{2} = 4 \cdot \frac{m_o \cdot (a + c)}{2},$$

$$m = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot m_o.$$

a) A csonka gúla A' csúcsának az $ABCD$ alaplapra eső merőleges vetülete legyen T, az AB alapélre eső merőleges vetülete pedig K.

A csonka gúla alaplapjának és az oldallapjának α hajlásszögét a KTA' derékszögű háromszögből meghatározhatjuk:

$$\sin\alpha = \frac{m}{m_o} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70{,}53°.$$

A csonka gúla alaplapjának és az oldallapjának hajlásszöge: 70,53°.

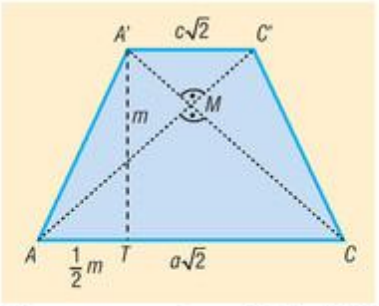
b) Az $A'TK$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$KT = \sqrt{m_o^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot m\right)^2 - m^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot m.$$

Mivel A' pont T merőleges vetülete rajta van az $ABCD$ négyzet átlóján, az AKT háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög:

$$AT = KT \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot m \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} m.$$

Tekintsük az átlós $ACC'A'$ húrtrapéz síkmetszetet.



Az $ACC'A'$ húrtrapéz AC alapján az AT szakasz hossza az alapok különbségének a fele:

$$AT = \frac{1}{2}m = \frac{a\sqrt{2} - c\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel az átlók merőlegesek egymásra, az átlók M metszéspontja az A, C illetve az A', C' pontokkal egyenlő szárú derékszögű háromszöget határoz meg. A derékszögű háromszögek átfogóhoz tartozó magassága az átfogó fele, tehát a csonka gúla m magassága AC és $A'C'$ szakaszok összegének a fele:

$$m = \frac{a\sqrt{2} + c\sqrt{2}}{2}.$$

Használjuk fel, hogy a csonka gúla testmagassága 30 cm:

$$\left.\begin{aligned} 30 &= \frac{a\sqrt{2} + c\sqrt{2}}{2} \\ 15 &= \frac{a\sqrt{2} - c\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

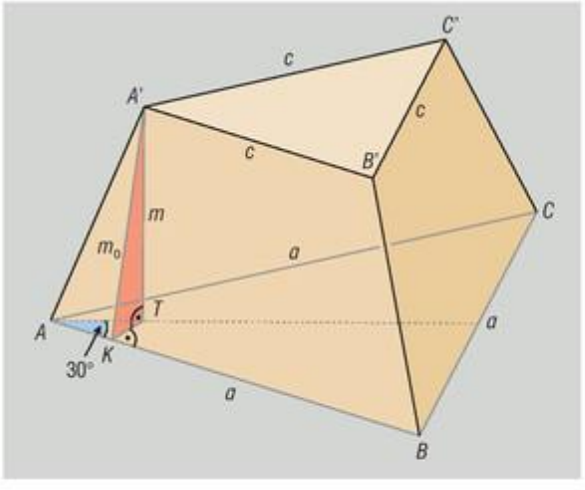
$$a = \frac{45\sqrt{2}}{2} \approx 31{,}82 \text{ cm} \quad \text{és} \quad c = \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 10{,}61 \text{ cm}.$$

A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right) =$$

$$= \frac{30}{3} \cdot \left(\left(\frac{45\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{45\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = 14625 \text{ cm}^3.$$

4417 A mellékelt ábra jelöléseit használva a csonka gúla ABC alaplapjának éle $a = 10$ cm, $A'B'C'$ fedőlapjának éle $c = 8$ cm. Az oldallap magassága legyen m_o, a testmagasság m.



a) Mivel egy oldallapjának területe az alaplap és fedőlap területének mértani közepe, felírható:

$$\frac{m_o \cdot (a+c)}{2} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}},$$

$$\frac{m_o \cdot (a+c)}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sqrt{3}}{4},$$

$$m_o = \frac{a \cdot c \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot (a+c)} = \frac{20\sqrt{3}}{9}.$$

A levélnehezék oldallapjának a magassága:

$$m_o = \frac{20\sqrt{3}}{9} \approx 3{,}85 \text{ cm}.$$

b) A csonka gúla térfogatának meghatározásához szükség van a test m magasságára. Az A' csúcs AB alapélre eső merőleges vetülete K. Az $ABB'A'$ húrtrapézból AK meghatározható:

$$AK = \frac{a-c}{2} = \frac{10-8}{2} = 1 \text{ cm}.$$

Mivel az A' csúcsnak az alaplapra eső T merőleges vetülete rajta van a szabályos háromszög alaplapjának az A csúcsából kiinduló magasságán, az AKT derékszögű háromszög egy fél szabályos háromszög, vagyis:

$$KT = \frac{AK}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}.$$

Írjuk fel Pitagorasz tételét a KTA' háromszögben. A csonka gúla testmagassága:

$$m = \sqrt{m_o^2 - KT^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{3}}{9}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1173}}{9} \approx 3{,}81 \text{ cm}.$$

A levélnehezék térfogata:

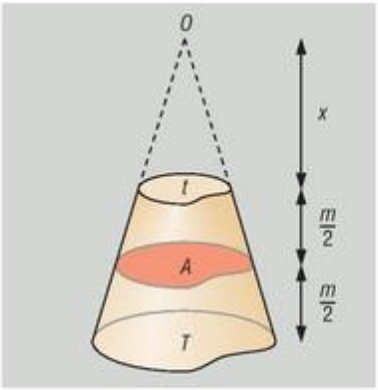
$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{\frac{\sqrt{1173}}{9}}{3} \cdot \left(\frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} + \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{61}{9} \cdot \sqrt{391} \approx 134{,}02 \text{ cm}^3 = 0{,}13402 \text{ dm}^3.$$

A levélnehezék tömege:

$$m_{\text{nehezék}} = V \cdot \rho = 0{,}13402 \cdot 8 \approx 1{,}07 \text{ kg}.$$

4418 Jelölje O annak a kúpszerű testnek a csúcsát, amelyből a csonka kúpszerű testet származtattuk. A fedőlapnak O-tól vett távolsága legyen x. Ha a csonka kúpszerű test magassága m, akkor az alaplapnak O-tól vett távolsága $m + x$, a metsző síknak pedig ugyanezen ponttól vett távolsága $\frac{m}{2} + x$.



A csonka kúpszerű test alaplapjának területe legyen T, fedőlapjáé t, a síkmetszet területe A.

Az O pontra vonatkozó térbeli középpontos hasonlósággal a fent említett síkidomok egymásba vihetők. A területük aránya az O-tól vett távolságuk négyzetével egyenesen arányos, így felírható:

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{T}} = \frac{x}{x+m} \quad \text{és} \quad \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{t}} = \frac{x+\frac{m}{2}}{x}.$$

Az első egyenletből $x = \frac{\sqrt{t} \cdot m}{\sqrt{T} - \sqrt{t}}$, ezt a második egyenletbe behelyettesítve:

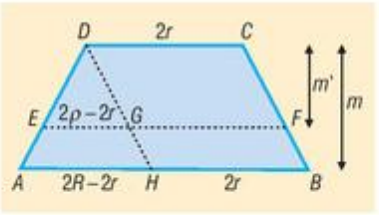
$$\sqrt{A} = \sqrt{t} + \sqrt{t} \cdot \frac{m}{2x} = \sqrt{t} + \sqrt{t} \cdot \frac{m}{2 \cdot \frac{\sqrt{t} \cdot m}{\sqrt{T} - \sqrt{t}}} = \sqrt{t} + \frac{\sqrt{T} - \sqrt{t}}{2} = \frac{\sqrt{T} + \sqrt{t}}{2}.$$

Tehát:

$$A = \left(\frac{\sqrt{T} + \sqrt{t}}{2}\right)^2 = \frac{T + t + 2\sqrt{T \cdot t}}{4} = \frac{\frac{T+t}{2} + \sqrt{T \cdot t}}{2},$$

amit bizonyítani kellett.

4419 A csonka kúp térfogatát felező kör síkmetszetnek a sugara legyen ρ, a csonka kúp magassága m, a felső csonka kúp magassága m'.



Tekintsük a csonka kúp alap-, illetve fedőköre középpontjára illeszkedő, az alaplap síkjára merőleges síkmetszetet. Ez trapéz alakú.

Az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = 2R$, illetve $CD = 2r$. A csonka kúp alapokkal párhuzamos kör síkmetszetének átmérője a trapéz alapjaival párhuzamos $EF = 2\rho$ szakasz.

Húzzunk párhuzamost a D csúcson keresztül a CB szárral. Ez a párhuzamos AB oldalt H, az EF szakaszt G pontban metszi.

Az $AHD_{\triangle}$ és az $EGD_{\triangle}$ hasonló, mivel szögei páronként egyenlők. A hasonlóság aránya:

$$\frac{m'}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{m'}{m} = \frac{2\rho - 2r}{2R - 2r} = \frac{\rho - r}{R - r}.$$

A felső csonka kúp térfogata az egész csonka kúp térfogatának fele, tehát:

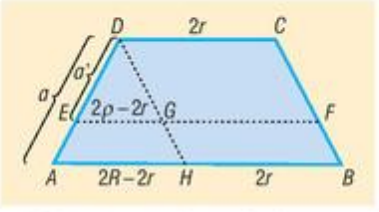
$$\frac{\frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right)}{\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{1}{2}, \quad \text{amiből} \quad \frac{m'}{m} \cdot \frac{\left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right)}{\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{1}{2}.$$

Az utóbbi egyenletbe behelyettesítve az $\frac{m'}{m} = \frac{\rho - r}{R - r}$ arányt:

$$\frac{\rho - r}{R - r} \cdot \frac{\left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right)}{\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho^3 - r^3}{R^3 - r^3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}.$$

A csonka kúp térfogatát felező sík körmetszetének a sugara: $\rho = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}$.

4420 Az egyenes csonka kúp palástjának területét felező kör síkmetszetnek a sugara legyen ρ, a csonka kúp alkotója a, és a felső csonka kúp alkotója a'.



A 4419. feladat megoldásához hasonlóan tekintsük a csonka kúp alap-, illetve fedőköre középpontjára illeszkedő, az alaplap síkjára merőleges $ABCD$ húrtrapéz síkmetszetet.

A már említett feladat megoldásában leírtak alapján az $AHD_{\triangle}$ és az $EGD_{\triangle}$ hasonló, mivel szögei páronként egyenlők. A hasonlóság aránya:

$$\frac{a'}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{a'}{a} = \frac{2\rho - 2r}{2R - 2r} = \frac{\rho - r}{R - r}.$$

A felső csonka kúp palástjának területe feleakkora, mint az egész csonka kúp palástja, tehát:

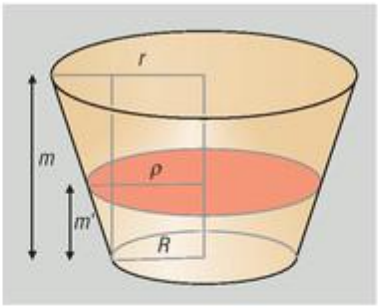
$$\frac{a' \cdot (\rho + r) \cdot \pi}{a \cdot (R + r) \cdot \pi} = \frac{1}{2}.$$

Az utóbbi egyenletbe behelyettesítve az $\frac{a'}{a} = \frac{\rho - r}{R - r}$ arányt:

$$\frac{\rho - r}{R - r} \cdot \frac{(\rho + r)}{(R + r)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}.$$

A csonka kúp palástjának területét felező sík síkmetszetének a sugara: $\rho = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$.

4421 A tál alapkörének sugara $R = 10$ cm, a fedőkör sugara $r = 15$ cm, magassága $m = 9$ cm.



Az üvegtál térfogata:

$$V_{tál} = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = 1425\pi \approx 4476{,}77 \text{ cm}^3.$$

A tálban a tej m' cm magasan áll, és szintje ρ cm sugarú körlapot határoz meg. A tej térfogata:

$$V_{tej} = \frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot \rho + \rho^2\right) = 2000 \text{ cm}^3.$$

A két térfogat hányadosát felírva:

$$\frac{V_{tej}}{V_{tál}} = \frac{\frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot \rho + \rho^2\right)}{\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)}, \quad \text{amiből} \quad \frac{2000}{1425\pi} = \frac{m'}{m} \cdot \frac{\left(10^2 + 10\rho + \rho^2\right)}{\left(10^2 + 10 \cdot 15 + 15^2\right)}.$$

A 4419. feladat alapján:

$$\frac{m'}{m} = \frac{\rho - R}{r - R} = \frac{\rho - 10}{15 - 10}.$$

Behelyettesítve a kapott arányt:

$$\frac{2000}{1425\pi} = \frac{\rho - 10}{15 - 10} \cdot \frac{\left(10^2 + 10\rho + \rho^2\right)}{\left(10^2 + 10 \cdot 15 + 15^2\right)} = \frac{\rho^3 - 10^3}{15^3 - 10^3} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[3]{\frac{4750000}{1425\pi} + 1000} \approx 12{,}73 \text{ cm}.$$

A két liter tej a tálban

$$m' = m \cdot \frac{\rho - R}{r - R} = 9 \cdot \frac{12{,}73 - 10}{15 - 10} \approx 4{,}91 \text{ cm}$$

magasan áll.

A gömb térfogata és felszíne – megoldások

4422 A gömb térfogata: 22 449,30 cm^3.

4423 A gömb felszíne:

a) 165,39 cm^2; *b)* 605,21 cm^2.

4424 A gömb térfogata:

a) 3908,82 cm^3; *b)* 1486,91 cm^3.

4425 A gömb felszíne 9-szeresére, térfogata 27-szeresére nőtt, ha a sugarát háromszorosára növeltük.

4426 Az ejtőernyő 282,74 m^2 szövetből készült.

4427 A három gömb felszínének az összege $\frac{3}{\sqrt[3]{9}} \approx 1{,}44$-szorosa az eredeti gömb felszínének.

4428 Zoli zsebét húzza le jobban a benne levő üveggolyó.

4429 Az ágyúgolyó térfogata 82,30 cm^3-rel csökkent.

4430 A vízfelszín területe megközelítőleg $3{,}408 \cdot 10^8$ km^2.

4431 A megtett távolság: 204,26 km.

4432 *a)* A Vénusz sugara: 6051 km.

b) A Vénusz térfogata a Föld térfogatának 0,85-szorosa.

4433 A hengeres rész 3,43 m magas.

4434 A hidroglóbusz belső átmérőjének 8,74 m-nek kell lennie.

4435 A sík 24 cm távolságra halad a gömb középpontjától.

4436 *a)* A gömb térfogata: $\frac{500\pi}{3}$ cm^3, felszíne: 100π cm^2.

b) A gömb térfogata: 153 849,31 cm^3, felszíne: 13 885,06 cm^2.

4437 A két gömb sugara legyen R és $R + 2$.

Felszíneik összege:

$$4 \cdot R^2 \cdot \pi + 4 \cdot (R + 2)^2 \cdot \pi = 2060{,}88.$$

Az egyenletet rendezve az $R^2 + 2R - 80 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai: $R_1 = 8$ és $R_2 = -10$. Ez utóbbi nem lehet kör sugara.

A két gömb sugara 8 és 10 cm.

4438 A két gömb sugara legyen R és $R + 2$.

Térfogataik különbsége:

$$\frac{4 \cdot (R + 2)^3 \cdot \pi}{3} - \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = 4255{,}81.$$

Az egyenletet rendezve az $R^2 + 2R - 168 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai: $R_1 = 12$ és $R_2 = -14$. Utóbbi nem lehet kör sugara.

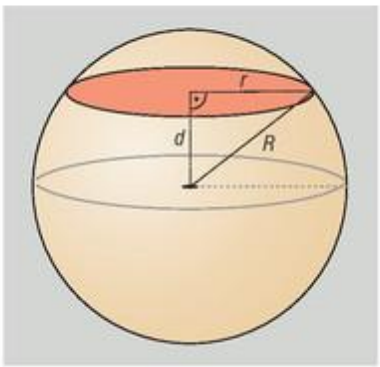
A két gömb sugara 12 cm és 14 cm.

4439 A téglatest csúcsai körül szerkesztett gömböknek a téglatest belsejébe eső részei együtt egy 3 cm sugarú gömböt adnak ki.

A megmaradt test térfogata:

$$V = a \cdot b \cdot c - \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = 8 \cdot 10 \cdot 12 - \frac{4 \cdot 3^3 \cdot \pi}{3} = 960 - 36\pi \approx 846{,}90 \text{ cm}^3.$$

4440 A gömb sugara legyen R, a síkmetszet sugara r. Keressük a gömb középpontjának a síktól való d távolságát.



A gömb R sugarát a térfogatából meghatározhatjuk:

$$\frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = 1000 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}.$$

Az r sugarú kör területe fele a főgömb területének, tehát:

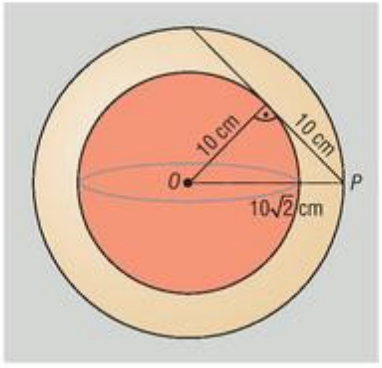
$$r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} R^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{1}{2} R^2.$$

Mivel R, r és d derékszögű háromszöget határoznak meg:

$$d^2 = R^2 - r^2 = R^2 - \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{750}{\pi}} \right)^2, \quad \text{amiből} \quad d = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}} \approx 4{,}39.$$

A gömb középpontjától a sík 4,39 cm-re van.

4441 Tekintsük a 10 cm sugarú gömb főkörét egy ilyen tulajdonságú P ponttal.



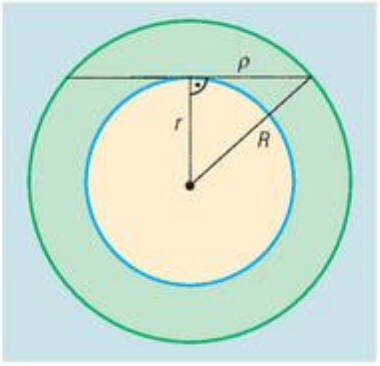
A feladat feltétele alapján a P pontból a főkörhöz húzott érintőszakasz hossza 10 cm. A P pont a gömb középpontjával és az érintési ponttal egy 10 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszöget határoz meg. A háromszög átfogója $10\sqrt{2}$ cm, ami a P pontnak a gömb középpontjától vett távolsága.

A P pont rajta van az adott gömbbel koncentrikus $10\sqrt{2}$ cm sugarú gömbön.

Hasonló megfontolásból ez utóbbi gömb minden pontjából 10 cm sugarú érintőszakasz húzható az eredeti gömbhöz.

Az adott tulajdonságú pontok halmaza a 10 cm sugarú gömbbel koncentrikus $10\sqrt{2}$ cm sugarú gömb.

4442 Legyen a nagyobb gömb sugara R, a kisebbé r. A kör síkmetszet sugara ρ.



A három sugár derékszögű háromszöget határoz meg, ezért:

$$\rho^2 = R^2 - r^2.$$

Annak a gömbnek a felszíne, amelyiknek a sugara ρ:

$$4 \cdot \rho^2 \cdot \pi = 4 \cdot (R^2 - r^2) \cdot \pi = 4 \cdot R^2 \cdot \pi - 4 \cdot r^2 \cdot \pi.$$

Ez éppen a bizonyítandó állítás.

4443 A külső gömb sugara 5 cm, a belső gömbé 4,4 cm.

a) Az alumínium térfogatát megkapjuk, ha a külső gömb térfogatából kivonjuk a belső gömb térfogatát:

$$V = \frac{4 \cdot 5^3 \cdot \pi}{3} - \frac{4 \cdot (4{,}4)^3 \cdot \pi}{3} \approx 166{,}78 \text{ cm}^3.$$

Az üreges gömb tömege:

$$m = V \cdot \rho = 166{,}78 \cdot 2{,}7 \approx 450{,}31 \text{ g}.$$

b) A külső gömbfelszín a belsőnek

$$\frac{4 \cdot 5^2 \cdot \pi}{4 \cdot (4{,}4)^2 \cdot \pi} \cdot 100\% \approx 129{,}13\%\text{-a}.$$

A külső gömbfelszín 29,13%-kal nagyobb, mint a belső.

4444 Ha a tekegolyó tömege 2,8 kg, akkor a térfogata:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{2{,}8}{1{,}4} = 2 \text{ dm}^3.$$

A golyó térfogatából R sugarára felírható:

$$\frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}} \text{ dm}.$$

A tekegolyó az $s = 16{,}5$ m $= 165$ dm hosszú pályán

$$n = \frac{s}{2 \cdot R \cdot \pi} = \frac{165}{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}\,\pi} \approx 33{,}60,$$

azaz közel 34-szer fordul meg.

4445 A szilvás gombócok sugara $R = 2$ cm, a fazék alapkörének sugara $r = 10$ cm, a fazék magassága $m = 28$ cm. A 20 darab szilvás gombóc térfogata:

$$V = 20 \cdot \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3}.$$

Ha vízbe tesszük mind a húszat, és a fazékban levő víz szintje h cm-rel megemelkedik, akkor:

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = 20 \cdot \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} \quad \Rightarrow \quad h = 20 \cdot \frac{4 \cdot R^3}{3 \cdot r^2} = 20 \cdot \frac{4 \cdot 2^3}{3 \cdot 10^2} \approx 2{,}13.$$

A fazekat $28 - 4 - 2{,}13 = 21{,}87$ cm magasan töltsük meg vízzel.

4446 Tekintsük az R sugarú gömbnek egy olyan főkörét, amelyik merőleges a metsző síkokra.

A síkoknak a főkörrel való közös pontjai az $AB = 2 \cdot 12$ cm és $DC = 2 \cdot 5$ cm párhuzamos húrok.

Bocsássunk merőlegeseket a kör O középpontjából a húrokra, ezeknek a talppontjai T_1 és T_2, amelyek távolsága 17 cm.

Írjuk fel Pitagorasz tételét az OAT_2 és ODT_1 derékszögű háromszögekben. Két eset lehetséges:

I. eset: Ha a kör középpontja a két húr között van:

$$R^2 = 12^2 + T_2O^2,$$
$$R^2 = 5^2 + (17 - T_2O)^2.$$

A két egyenletet kivonva egymásból $T_2O = 5$, ezt valamelyik egyenletbe visszahelyettesítve $R = 13$ adódik.

II. eset: Ha a kör középpontja nincs a két húr között:

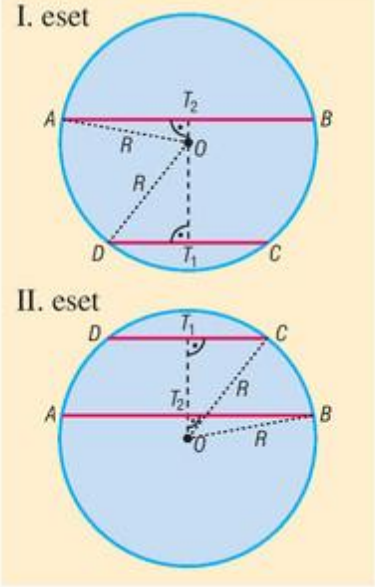
$$R^2 = 12^2 + T_2O^2,$$
$$R^2 = 5^2 + (17 + T_2O)^2.$$

A két egyenletet kivonva egymásból a T_2O távolságra -5-öt kapunk, ami nem lehetséges.

A gömb sugara tehát 13 cm.

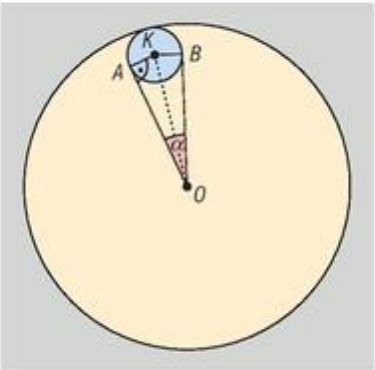
A gömb térfogata:

$$V = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = \frac{8788\pi}{3} \approx 9202{,}77 \text{ cm}^3.$$



4447 *a)* Tekintsünk egy csapágygolyót, amely a csapágy külső gyűrűjét belülről érinti.

A középpontokat tartalmazó síkmetszeten O legyen a csapágygyűrű, K a csapágygolyó középpontja. Az O pontból a golyó főköréhez húzott érintők érintési pontjai A és B.



Az AOK derékszögű háromszögben:

$$OK = \frac{54}{2} - \frac{5}{2} = 24{,}5 \quad \text{és} \quad AK = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Az O pontnál levő α középponti szög nagysága számolható:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2{,}5}{24{,}5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 11{,}71°.$$

Mivel $\frac{360°}{11{,}71°} \approx 30{,}74$, a teljes szög kisebb, mint 31α, de nagyobb, mint 30α, tehát a csapágyba elhelyezhető golyók száma legfeljebb 30.

b) A csapágygolyók térfogatainak összege:

$$V = 30 \cdot \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = 30 \cdot \frac{4 \cdot 2{,}5^3 \cdot \pi}{3} \approx 1963{,}50 \text{ mm}^3 = 1{,}96 \text{ cm}^3.$$

A csapágygolyók tömegének az összege:

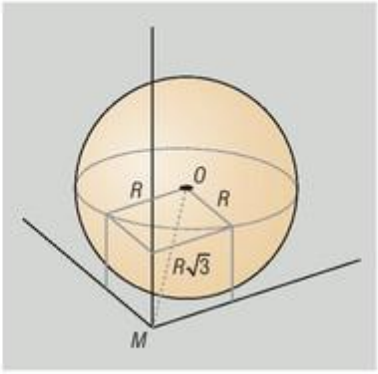
$$m = V \cdot \rho = 1{,}96 \cdot 7{,}14 \approx 13{,}99 \text{ g}.$$

4448 A biliárdgolyó sugara $r = 26{,}2$ mm. A négy golyó középpontja egy $2r$ oldalú szabályos tetraédert határoz meg, amelynek magassága $2r \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Az építmény magasságát úgy kaphatjuk meg, hogy a tetraéder magasságához még hozzáadjuk az alsó golyók középpontjának az asztal lapjától mért r távolságát, valamint a felső golyó középpontjának a golyó legmagasabb pontjától vett r távolságát. Az építmény magassága:

$$2r \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + 1\right) \approx 95{,}18 \text{ mm} \approx 9{,}52 \text{ cm}.$$

4449 Ha egy R sugarú gömb érint három egymásra merőleges síkot, akkor a gömb középpontjának a három síktól vett távolsága R. Tehát a gömb O középpontja egy R oldalélű kocka csúcsa, amelynek a síkok közös M pontjától vett távolsága a kocka átlójának a hossza, vagyis $OM = R\sqrt{3}$.



Ez alapján mind a teniszlabda, mind a golyó középpontja rajta van egy, a fiók sarkába képzeletben elhelyezett kocka testátlójának az egyenesén.

A teniszlabda középpontjának ezen az átlón a saroktól vett távolsága $\frac{7}{2} \cdot \sqrt{3}$, az r sugarú golyó középpontjának ugyanettől a ponttól vett távolsága $r\sqrt{3}$.

A golyó és a teniszlabda érintik egymást, tehát a középpontjaik távolsága a sugaraik hosszának az összege:

$$\frac{7}{2} \cdot \sqrt{3} - r\sqrt{3} = \frac{7}{2} + r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{7}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1} = \frac{7}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1)^2 \approx 0{,}94.$$

A golyó sugara 0,94 cm.

Egymásba írt testek (kiegészítő anyag) – megoldások

4450 *a)* A gömb felszíne: $144\pi \approx 452{,}39 \text{ cm}^2$.

b) A gömb térfogata: $288\pi \approx 904{,}78 \text{ cm}^3$.

4451 *a)* A gömb felszíne: $432\pi \approx 1357{,}17 \text{ cm}^2$.

b) A gömb térfogata: $864 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \approx 4701{,}37 \text{ cm}^3$.

4452 A téglatest éleinek hossza: 22,28 cm, 33,43 cm és 44,57 cm.

4453 A négyzetes oszlop térfogata: 87 655,23 cm^3.

4454 A doboz palástjának a felszíne: $48\pi \approx 150{,}80 \text{ cm}^2$.

4455 A doboz felszíne: 608 cm^2.

4456 *a)* A kúp felszíne: $100 \cdot (1+\sqrt{5}) \cdot \pi \approx 1016{,}64\ \text{cm}^2$.

b) A kúp térfogata: $\frac{2000}{3}\pi \approx 2094{,}40\ \text{cm}^3$.

4457 *a)* A gúla felszíne: $1440\ \text{cm}^2$.

b) A gúla térfogata: $1920\ \text{cm}^3$.

4458 *a)* A körkúp felszíne: $90\pi \approx 282{,}74\ \text{cm}^2$.

b) A körkúp térfogata: $100\pi \approx 314{,}16\ \text{cm}^3$.

4459 A hasáb magassága a beírt gömb átmérőjével egyenlő.

Mivel a beírt gömb érinti az oldallapokat, a gömb középpontján áthaladó, az alapokkal párhuzamos síkmetszet egy 24 cm oldalú szabályos háromszög. A beírt gömb sugara ebbe a háromszögbe írható kör sugarával egyenlő.

A szabályos háromszög beírt körének sugara a háromszög magasságának a harmada:

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{24\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

A hasáb magassága:

$$2r = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86\ \text{cm}.$$

4460 A kockába írt gömb sugara a kocka élének a fele: $\frac{a}{2}$.

A kocka köré írt gömb sugara a kocka testátlójának a fele: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A kocka éleit érintő gömb sugara a lapátló hosszának a fele: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

A három gömb hasonló egymáshoz, és hasonlóságuk aránya a sugaraik hosszának aránya.

a) Hasonló testek felszínének az aránya a hasonlóság arányának a négyzete, tehát a három gömb felszínének az aránya:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 : \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1:3:2.$$

b) Hasonló testek térfogatának az aránya a hasonlóság arányának a köbe, tehát a három gömb térfogatának az aránya:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^3 : \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 1 : \sqrt{3^3} : \sqrt{2^3}.$$

4461 A téglatest élei legyenek a, b és c hosszúságúak. Két lapjának a területe:

$$a \cdot b = 48 \ \Rightarrow\ b = \frac{48}{a} \quad \text{és} \quad a \cdot c = 60 \ \Rightarrow\ c = \frac{60}{a}.$$

A téglatest köré írt gömb sugara a testátló fele, tehát:

$$5\sqrt{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} \ \Rightarrow\ a^2 + b^2 + c^2 = 200.$$

Az egyenletbe b és c helyére az előző összefüggéseket helyettesítve:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 200 \ \Rightarrow\ a^2 + \left(\frac{48}{a}\right)^2 + \left(\frac{60}{a}\right)^2 = 200 \ \Rightarrow\ a^4 - 200a^2 + 5904 = 0.$$

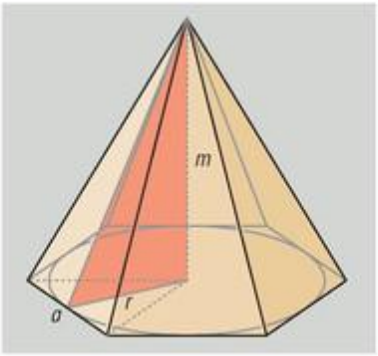
A kapott másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletből a pozitív értékei: $a = 6$ és $a = 2\sqrt{41}$.

Az első esetben a téglatest éleinek hossza: 6 cm, 8 cm és 10 cm, a térfogata: 480 cm^3.

A második esetben a téglatest éleinek hossza: $2\sqrt{41}$ cm, $\frac{24\sqrt{41}}{41}$ cm és $\frac{30\sqrt{41}}{41}$ cm, a térfogata pedig $\frac{1440\sqrt{41}}{41}$ cm^3.

A téglatest térfogata lehet 480 cm^3 vagy $\frac{1440\sqrt{41}}{41} \approx 224{,}89$ cm^3.

4462 Legyen a szabályos hatszög alapú gúla alapéle a, magassága m.



A gúla térfogata:

$$V_{\text{gúla}} = \frac{T_{\text{hatszög}} \cdot m}{3} = \frac{6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m}{3} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot m.$$

A gúlából csiszolható legnagyobb térfogatú kúp magassága a gúla m magasságával egyezik meg. A kúp alapkörének a sugara a szabályos hatszög beírt körének a sugara.

Egy a oldalú szabályos hatszög beírt körének a sugara egy a oldalú szabályos háromszög magassága: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A kúp térfogata:

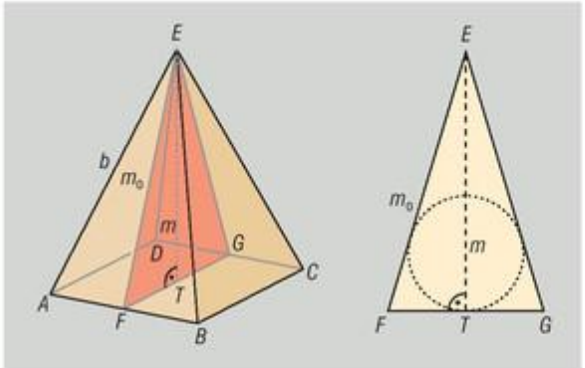
$$V_{\text{kúp}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{a^2 \cdot \pi \cdot m}{4}.$$

A kúp a gúla térfogatának

$$\frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gúla}}} = \frac{\frac{a^2 \cdot \pi \cdot m}{4}}{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot m} \cdot 100 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot 100 \approx 90{,}69\%\text{-a.}$$

A csiszoláskor keletkezett hulladék 9,31%.

4463 *a)* Vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap középvonalát tartalmazó síkot.



Ez a sík a gúlából egy egyenlő szárú háromszöget, a beírt gömbből egy főkört metsz ki, amely a háromszög beírt köre.

A háromszög alapja $a = 12$ cm, magassága $m = 30$ cm, szára a gúla oldallapjának m_o magassága.

Az FTE derékszögű háromszögből:

$$m_o = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{936} = 6\sqrt{26}.$$

Jelölje a háromszög beírt körének sugarát r. A háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{a \cdot m}{2} = r \cdot s = r \cdot \frac{a + 2 \cdot m_o}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{12 \cdot 30}{2} = r \cdot \frac{12 + 2 \cdot 6\sqrt{26}}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{30}{1 + \sqrt{26}}.$$

A gúlába írható gömb sugara: $r = \frac{30}{1 + \sqrt{26}} \approx 4{,}92$ cm.

b) Vegyük az alaplap átlóját tartalmazó, az alaplapra merőleges síkot.

Ez a sík a gúlából egy egyenlő szárú háromszöget, a körülírt gömbből pedig egy főkört metsz ki, amely az említett háromszög körülírt köre.

A háromszög alapja $a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ cm, magassága $m = 30$ cm, és a szár hossza a gúla b oldalélének a hosszúsága.

Legyen a háromszög köré írt kör sugara R, középpontja O.

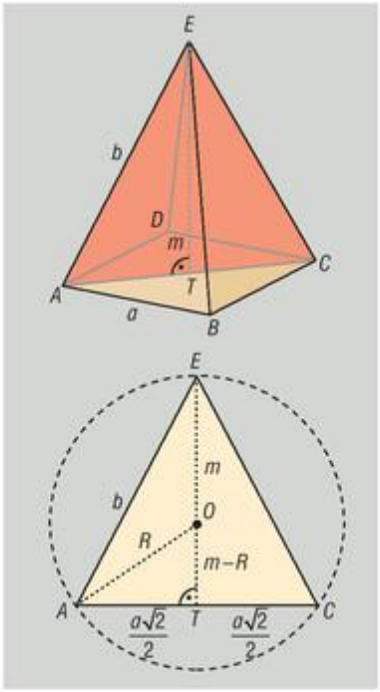
Az ábra jelöléseit használva az AOT derékszögű háromszög átfogója R, egyik befogója az alaplap átlójának a fele, másik befogója $m - R$.

A Pitagorasz-tétel alapján:

$$R^2 = (m-R)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (30-R)^2 + \left(\frac{12\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$R = \frac{81}{5}.$$

A gúla köré írt gömb sugara $R = \frac{81}{5} = 16{,}2$ cm.



4464 *a)* A 4463. feladat *a)* részének megoldása alapján vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap középvonalát tartalmazó síkot. A síkmetszet egy egyenlő oldalú háromszög, amelynek beírható köre a gúlába írható gömb főköre.

Mivel egy szabályos háromszög beírt körének a sugara a magasságának harmada, a beírt kör sugara 10 cm.

b) A gúla alapéle az *a)* részben említett szabályos háromszög oldala, amely a magasság hosszának ismeretében kiszámítható:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad 30 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 20\sqrt{3} \text{ cm}.$$

A 4463. feladat *b)* részének megoldása alapján a körülírt gömb R sugarára:

$$R^2 = (m-R)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (30-R)^2 + \left(\frac{20\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$R = 25.$$

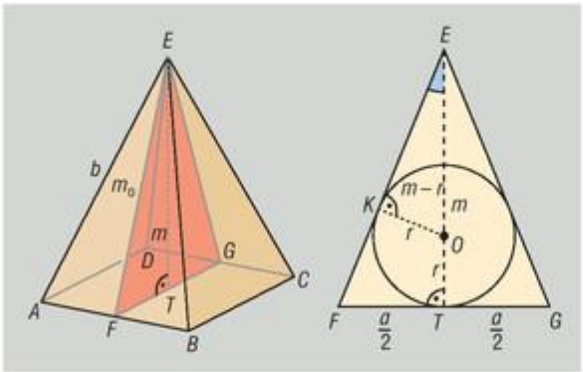
A gúla köré írt gömb sugara: $R = 25$ cm.

4465 Jelölje a gúla alapélét a, magasságát m, a beírt gömb sugarát r.

Vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap középvonalát tartalmazó síkot.

Ez a sík a gúlából egy egyenlő szárú háromszöget, a beírt gömbből pedig egy főkört metsz ki, amely az említett háromszög beírt köre.

Az ábra jelöléseit használva az egyenlő szárú háromszög magassága $m = 32$ cm, alapja a, a beírt körének sugara $r = 8$ cm.



A háromszög szárának hossza:

$$FE = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

A síkmetszetben az FTE derékszögű háromszög hasonló az OKE derékszögű háromszöghöz, mivel FET hegyesszögük közös. A háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő:

$$\frac{FE}{OE} = \frac{FT}{OK} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{m - r} = \frac{\frac{a}{2}}{r},$$

amiből kapjuk, hogy:

$$\frac{\sqrt{32^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{32 - 8} = \frac{\frac{a}{2}}{8} \quad \Rightarrow \quad a = 16\sqrt{2}.$$

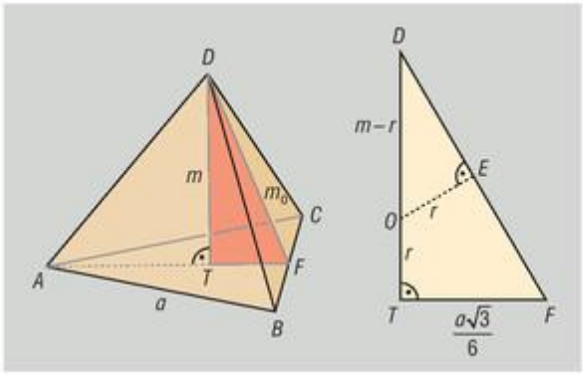
A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{a^2 \cdot m}{3} = \frac{\left(16\sqrt{2}\right)^2 \cdot 32}{3} = \frac{16384}{3} \approx 5461{,}33 \text{ cm}^3.$$

4466 Vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap magasságát tartalmazó síkot. A gúla alapéle legyen a, magassága m.

a) A gúlába írt r sugarú gömb O középpontja rajta van a gúla magasságán, és az alaplapot a gúla magasságának talppontjában, az oldallapokat az oldallapok magasságain érinti.

Az ábra jelöléseit használva tekintsük az FTD derékszögű háromszöget. A háromszög T csúcsa az a oldalú szabályos háromszög súlypontja. A súlypont harmadolja a súlyvonalat, amely (szabályos háromszögről lévén szó) a magasság is egyben, tehát:



$$TF = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{18\sqrt{3}}{6} = 3\sqrt{3}.$$

A beírt gömb középpontja minden oldallaptól r távolságra van, tehát $OE = r$ és $OT = r$, ezért $OD = m - r$.

A háromszög FD átfogója a Pitagorasz-tétel alapján:

$$FD = \sqrt{m^2 + TF^2} = \sqrt{20^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{427}.$$

Az FTD derékszögű háromszög hasonló az OED derékszögű háromszöghöz, mivel FDT hegyesszögük közös. A háromszögek megfelelő oldalai hosszának aránya egyenlő:

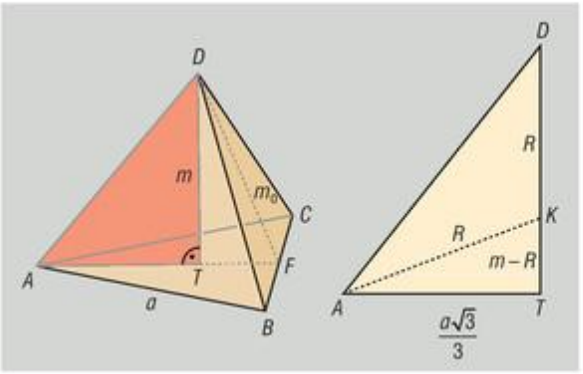
$$\frac{TF}{OE} = \frac{FD}{OD} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{427}}{20 - r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{60\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + \sqrt{427}}.$$

A gúlába írható gömb sugara: $r = \dfrac{60\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + \sqrt{427}} \approx 4{,}02$ cm.

b) A gúla köré írt R sugarú gömb K középpontja rajta van a gúla magasságán.

Az ábra jelöléseit használva tekintsük az ATD derékszögű háromszöget. A háromszög T csúcsa az a oldalú szabályos háromszög súlypontja. A súlypont harmadolja a súlyvonalat, amely (szabályos háromszögről lévén szó) a magasság is egyben, tehát:

$$AT = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}.$$

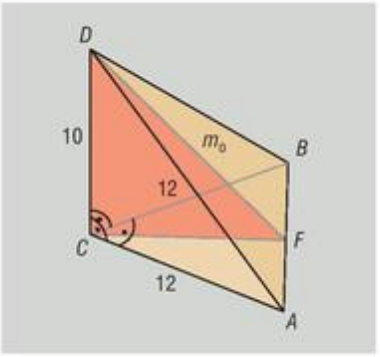


A gömb K középpontja a gúla minden csúcsától R távolságra van, tehát $AK = R$ és $KD = R$, ezért $KT = m - R$. Az AKT derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$R^2 = (m - R)^2 + AT^2 = (20 - R)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{508}{40}.$$

A gúla köré írt gömb sugara: $R = \frac{508}{40} = 12{,}7$ cm.

4467 Ismert, hogy ha egy poliéderbe gömb írható, akkor a gömb r sugara a poliéder térfogatának és felszínének ismeretében kiszámítható: $r = \frac{3 \cdot V}{A}$.



Mivel tetraéderbe írható gömb, elég a tetraéder térfogatát és felszínét kiszámítani.

A tetraéder ABC alaplapjának területe:

$$T_{ABC} = \frac{12^2}{2} = 72 \text{ cm}^2,$$

a tetraéder magassága $m = 10$ cm, így a tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T_{ABC} \cdot m}{3} = \frac{72 \cdot 10}{3} = 240 \text{ cm}^3.$$

Az ADC és BDC derékszögű háromszögek területe a befogók szorzatának fele, ezért:

$$T_{ADC} = T_{BDC} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$

Az $ABD_\triangle$-ben a szimmetria miatt: $AF = BF = 6\sqrt{2}$ cm.

Az alaphoz tartozó m_o magasság Pitagorasz tétele alapján: $m_o = \sqrt{172} = 2\sqrt{43}$ cm.

Az $ABD_\triangle$ területe:

$$T_{ABD} = \frac{12\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{43}}{2} = 12\sqrt{86} \text{ cm}^2.$$

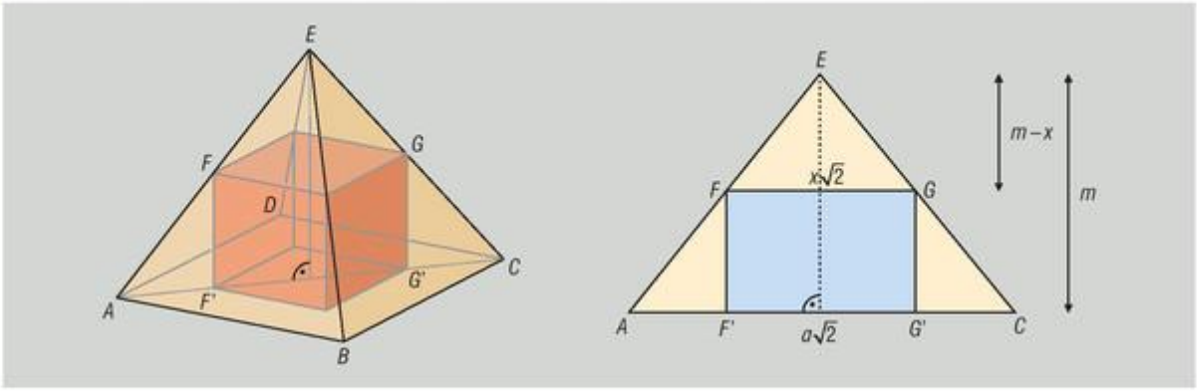
A gúla felszíne:

$$A = T_{ABC} + 2 \cdot T_{ACD} + T_{ABD} = 72 + 2 \cdot 60 + 12\sqrt{86} = 192 + 12\sqrt{86} \text{ cm}^2.$$

A gúlába írható gömb sugara:

$$r = \frac{3 \cdot V}{A} = \frac{3 \cdot 240}{192 + 12\sqrt{86}} = \frac{3 \cdot 20}{16 + \sqrt{86}} \approx 2{,}37 \text{ cm}.$$

4468 A gúla alapéle legyen a, magassága m hosszúságú. Használjuk az ábrák jelöléseit.



a) Vegyük a gúla ACE egyenlő szárú háromszög síkmetszetét. A háromszög alapja a gúla alaplapjának az átlója, vagyis $a\sqrt{2}$ hosszúságú. A háromszög magassága a gúla m magassága. Az oldalél és az alaplap EAC szögére felírhatjuk:

$$\operatorname{tg} EAC\sphericalangle = \frac{m}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} EAC\sphericalangle = \frac{10}{\frac{15\sqrt{2}}{2}} \quad \Rightarrow \quad EAC\sphericalangle \approx 43{,}31°.$$

A gúla oldalélének az alaplappal bezárt szöge 43,31°.

b) A gúlába írt kocka élének hossza legyen x.

Ismét vegyük a gúla ACE egyenlő szárú háromszög síkmetszetét. A kockából ez a síkmetszet egy olyan $FGG'F'$ téglalapot metsz ki, amelyiknek az $FG = x\sqrt{2}$ hosszúságú oldala párhuzamos az $ACE_{\triangle}$ AC alapjával.

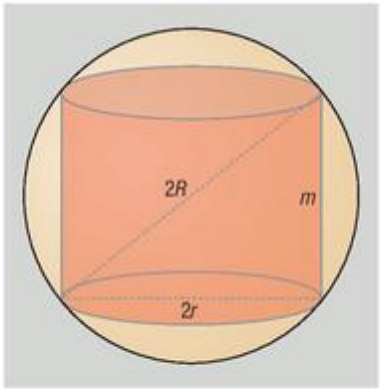
Az $ACE_{\triangle}$ és az $FGE_{\triangle}$ hasonló, mivel szögeik páronként egyenlők.

Felírhatjuk a két háromszögben, hogy az alapok hosszának aránya egyenlő a magasságok hosszának arányával:

$$\frac{m-x}{m} = \frac{x\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{10-x}{10} = \frac{x}{15} \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

A gúlába írt kocka éle 6 cm.

4469 Az R sugarú gömbbe írt henger alapkörének sugara legyen r, magassága m.



A feltétel szerint a henger palástjának területe kétszerese az alaplap területének, tehát:

$$2 \cdot r^2 \cdot \pi = 2r \cdot \pi \cdot m \quad \Rightarrow \quad r = m.$$

Vegyük a henger tengelymetszetét. Ez a tengelymetszet egy téglalap, amelynek egyik oldala $2r$, a másik m hosszúságú, és a téglalap átlója kétszer akkora, mint a gömb R sugara.

A Pitagorasz-tételt felírva:

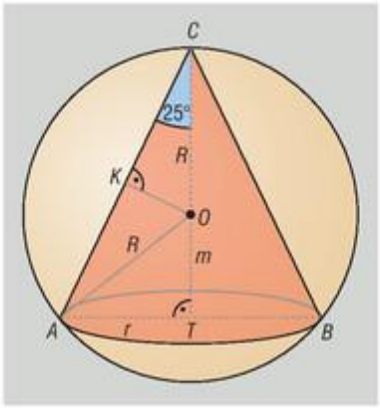
$$(2R)^2 = (2r)^2 + m^2,$$
$$(2 \cdot 10)^2 = (2r)^2 + r^2,$$
$$r = 4\sqrt{5}.$$

A henger alapkörének sugara és magassága: $r = m = 4\sqrt{5}$ cm.

A henger térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = \left(4\sqrt{5}\right)^2 \cdot \pi \cdot 4\sqrt{5} = 320\sqrt{5} \cdot \pi \approx 2247{,}94 \text{ cm}^3.$$

4470 Mivel a gömb felszíne 400π cm^2, a gömb R sugara 10 cm.



Az ábra jelöléseit használva azt látjuk, hogy az $ABC_\triangle$ köré írható körének sugara R, középpontja O, valamint a háromszög szárszöge 50°. Az O középpontból az AC szárra bocsátott merőleges talppontja K.

Az OKC derékszögű háromszögből kifejezhető a kúp alkotójának hossza:

$$\cos 25° = \frac{\frac{AC}{2}}{R} \quad \Rightarrow \quad a = AC = 2R \cdot \cos 25° \approx 18{,}13 \text{ cm}.$$

Az ATC derékszögű háromszögben:

$$\cos 25° = \frac{CT}{AC} = \frac{CT}{2R \cdot \cos 25°},$$

amiből megkaphatjuk a kúp m magasságát:

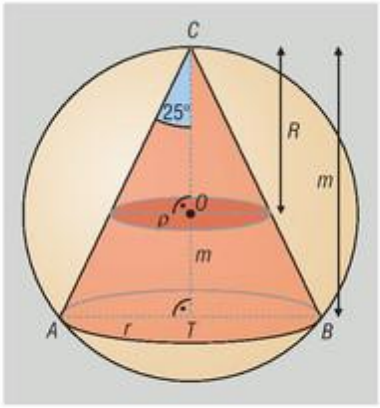
$$m = CT = 2R \cdot \cos^2 25° \approx 16{,}43 \text{ cm}.$$

Az ATC derékszögű háromszög

$$\frac{AT}{AC} = \sin 25° \quad \Rightarrow \quad AT = AC \cdot \sin 25°,$$

amiből a kúp alapkörének r sugara:

$$r = AT = 2R \cdot \cos 25° \cdot \sin 25° \approx 7{,}66 \text{ cm}.$$



a) A kúp felszíne:

$$A = r \cdot \pi \cdot (r + a) \approx 7{,}66\pi \cdot (7{,}66 + 18{,}13) \approx 620{,}63 \text{ cm}^2.$$

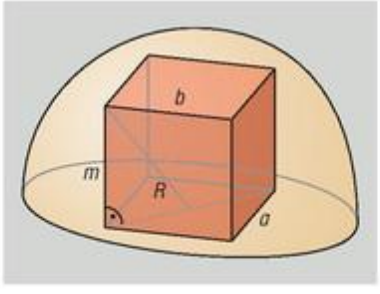
b) A gömb középpontján áthaladó, a kúp alaplapjával párhuzamos sík a kúpból az eredetihez hasonló kúpot metsz le. Legyen a hasonló kúp alapkörének sugara ρ. A hasonló kúpok magasságainak és az alapkörök sugarának a hosszára felírható:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{R}{m} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{r \cdot R}{m} \quad \Rightarrow \quad \rho \approx \frac{7{,}66 \cdot 10}{16{,}43} \approx 4{,}66.$$

A sík által a kúpból kimetszett kör területe:

$$T = \rho^2 \cdot \pi \approx 4{,}66^2 \cdot \pi \approx 68{,}22 \text{ cm}^2.$$

4471 A félgömb alakú üvegfedő középpontja az $a = 8$ cm és $b = 10$ cm oldalú téglalap átlóinak metszéspontja. Ha a sajt legnagyobb m magasságát keressük, akkor a téglalap átlójának a fele és az m magasság egy olyan derékszögű háromszög befogói, amelynek átfogója a gömb $R = 15$ cm hosszú sugara. A Pitagorasz-tétel alapján:

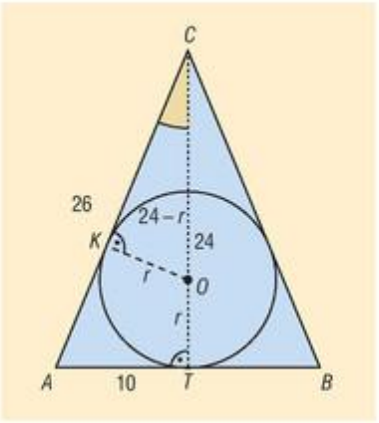


$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2 + m^2 \quad \Rightarrow \quad 15^2 = \left(\frac{\sqrt{8^2 + 10^2}}{2}\right)^2 + m^2,$$

amiből a magasságra kapjuk, hogy $m = 2\sqrt{46}$.

A sajt magassága legfeljebb $2\sqrt{46} \approx 13{,}56$ cm lehet.

4472 A pontszerű fényforrás és a golyó kör alakú árnyéka egy olyan forgáskúpot határoz meg, amelybe a golyó sugarával azonos sugarú gömb írható.



Vegyük a kúp ábrán látható tengelymetszetét.

A tengelymetszet olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek magassága $CT = 24$ cm, alapja $AB = 2 \cdot 10 = 20$ cm, a beírt körének sugara r. A háromszög szárának hossza:

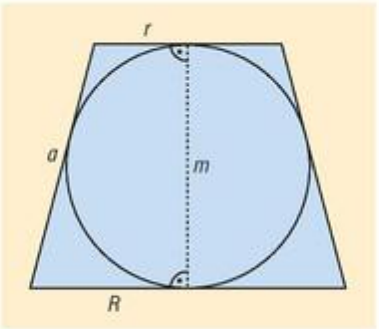
$$AC = \sqrt{CT^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 \text{ cm}.$$

A síkmetszetben az ATC derékszögű háromszög hasonló az OKC derékszögű háromszöghöz, mivel ACT hegyesszögük közös. A háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{AT}{OK} \quad \Rightarrow \quad \frac{26}{24 - r} = \frac{10}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{20}{3}.$$

A golyó átmérője $2r = \frac{40}{3} \approx 13{,}33$ cm.

4473 Legyen a csonka kúp alapkörének sugara R, fedőkörének sugara r, alkotója a, magassága m.



A csonka kúp tengelymetszete egy húrtrapéz, amely egyben érintőnégyszög is. A húrtrapéz alapjai $2R$, illetve $2r$ hosszúságúak. A trapéz magassága, ami a csonka kúp magassága is, a beírható kör sugarának a kétszeresével egyenlő: $m = 2\rho$. A húrtrapéz szárai a csonka kúp alkotói.

Az érintőnégyszögek tétele alapján:

$$2a = 2R + 2r \quad \Rightarrow \quad a = R + r.$$

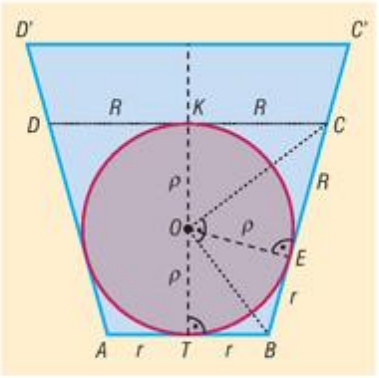
Írjuk fel a csonka kúp felszínének és térfogatának a hányadosát:

$$\frac{A}{V} = \frac{\pi \cdot \left(R^2 + r^2 + a \cdot (R + r)\right)}{\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{3 \cdot \left(R^2 + r^2 + (R + r) \cdot (R + r)\right)}{2\rho \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} =$$

$$= \frac{3 \cdot (2 \cdot R^2 + 2 \cdot r^2 + 2 \cdot R \cdot r)}{2\rho \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{3}{\rho}.$$

A csonka kúp felszínének és térfogatának hányadosa $\frac{3}{\rho}$.

4474 A vödör alapkörének sugara $r = 5$ cm, fedőkörének sugara $R' = 8$ cm, magassága m.



Vegyünk egy olyan síkot, amely metszi a vödröt, párhuzamos az alaplappal, és érinti a vödörbe tett labdát.

Ennek a síknak a vödörrel vett síkmetszete egy R sugarú kör.

Tekintsük a vödör ábrán látható $ABC'D'$ húrtrapéz alakú tengelymetszetét.

Az ábrán látható $ABCD$ húrtrapéz egyben érintőtrapéz is. A beírt kör sugara $\rho = 6$ cm, az alapok hossza $2r$, illetve $2R$, magassága pedig 2ρ.

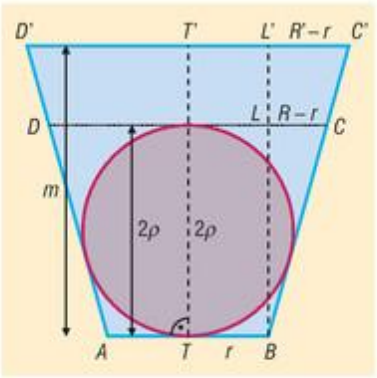
A beírt kör O középpontja a húrtrapéz B és C csúcsoknál levő szögek felezőinek metszéspontja. Ez a két szögfelező, mivel a trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180°, derékszöget zár be.

A külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlősége alapján $KC = CE = R$, illetve $TB = BE = r$.

Az OBC derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság $OE = \rho$, amely a BC átfogón R és r hosszúságú szeleteket hoz létre. A magasságtétel alapján:

$$\rho = \sqrt{R \cdot r} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\rho^2}{r} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{6^2}{5} = \frac{36}{5}.$$

A vödör m magasságának kiszámításához az $ABC'D'$ tengelymetszet B csúcsán keresztül állítsunk merőlegest a trapéz alapjára. Az így létrejött $BLC_{\triangle}$ és $BL'C'_{\triangle}$ hasonló, mivel szögeik páronként egyenlők. A két háromszög megfelelő oldalai hosszának aránya egyenlő:



$$\frac{m}{2\rho} = \frac{R' - r}{R - r} \quad \Rightarrow \quad m = 2\rho \cdot \frac{R' - r}{R - r} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{8 - 5}{\frac{36}{5} - 5} = \frac{180}{11}.$$

A vödör magassága: $m = \frac{180}{11} \approx 16{,}36$ cm.

4475 A kúp alapkörének sugara legyen r, magassága m, alkotója a, a beírt gömb sugara R.

A feladat feltétele szerint:

$$A_{\text{kúp}} = 2 \cdot A_{\text{gömb}} \quad \Rightarrow \quad r \cdot \pi \cdot (r + a) = 2 \cdot 4 \cdot R^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad r \cdot (r + a) = 8 \cdot R^2.$$

Tekintsük a kúp tengelymetszetét.

A tengelymetszet egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja $2r$, magassága m, szárainak hossza a, és a háromszögbe írt kör sugara R.

Számítsuk ki a háromszög területét kétféleképpen:

$$\frac{2 \cdot r \cdot m}{2} = R \cdot \frac{2 \cdot a + 2 \cdot r}{2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{r \cdot m}{a + r}.$$

Ezt beírva az $r \cdot (r + a) = 8 \cdot R^2$ összefüggésbe:

$$r \cdot (r + a) = 8 \cdot \left(\frac{r \cdot m}{a + r}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r + a = 8 \cdot \frac{r \cdot m^2}{(r + a)^2}.$$

Mivel $m^2 = a^2 - r^2$:

$$r + a = 8 \cdot \frac{r \cdot (a^2 - r^2)}{(r + a)^2} = 8 \cdot \frac{r \cdot (a + r) \cdot (a - r)}{(r + a)^2},$$

amiből kapjuk:

$$(r + a)^2 = 8 \cdot r \cdot (a - r),$$
$$9 \cdot r^2 - 6 \cdot r \cdot a + a^2 = 0,$$
$$(3 \cdot r - a)^2 = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az alkotó hossza a sugár háromszorosa, vagyis a fél nyílásszög szinusza $\frac{1}{3}$. Mivel ez a szög csak hegyesszög lehet, a fél nyílásszög 19,47°.

A kúp nyílásszöge 38,94°.

4476 A kúp alapkörének sugara legyen r, magassága m, alkotója a, a beírt gömb sugara R.

A 4475. feladat megoldása alapján:

$$m = \frac{(a+r)\cdot R}{r}.$$

A gömb és a kúp térfogatának aránya:

$$\frac{V_{\text{gömb}}}{V_{\text{kúp}}} = \frac{\frac{4\cdot R^3\cdot\pi}{3}}{\frac{r^2\cdot\pi\cdot m}{3}} = \frac{4\cdot R^3}{r^2\cdot m} = \frac{4\cdot R^3}{r^2\cdot\frac{R\cdot(a+r)}{r}} = \frac{4\cdot R^2}{r\cdot(a+r)}.$$

A gömb és a kúp felszínének aránya:

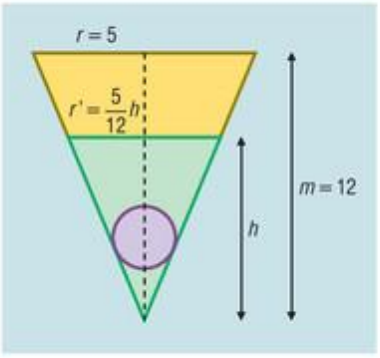
$$\frac{A_{\text{gömb}}}{A_{\text{kúp}}} = \frac{4\cdot R^2\cdot\pi}{r\cdot\pi\cdot(a+r)} = \frac{4\cdot R^2}{r\cdot(a+r)}.$$

Ez alapján egy tetszőleges forgáskúpba írt gömb térfogatának és a kúp térfogatának aránya egyenlő a gömb felszínének és a kúp felszínének az arányával.

A gömb felszíne a kúp felszínének harmada.

4477 A pohár egy $m = 12$ cm magasságú, $a = 13$ cm alkotójú kúp. A kúp alapkörének sugara:

$$r = \sqrt{a^2 - m^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$



A pohár térfogata:

$$V_{\text{pohár}} = \frac{r^2\cdot\pi\cdot m}{3} = \frac{5^2\cdot\pi\cdot 12}{3} = 100\pi.$$

A pohárban levő koktél térfogatát egy, a pohárhoz hasonló kúp térfogata adja meg. A hasonlóság aránya a kúpok magasságainak aránya: $\lambda = \frac{7{,}5}{12} = \frac{5}{8}$.

Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe:

$$\frac{V_{\text{koktél}}}{V_{\text{pohár}}} = \lambda^3 \quad \Rightarrow \quad V_{\text{koktél}} = \lambda^3\cdot V_{\text{pohár}} = \left(\frac{5}{8}\right)^3\cdot 100\pi = \frac{3125}{128}\pi.$$

A pohár által meghatározott kúpba írható gömb sugarát a 4475. feladat alapján az $R = \frac{r\cdot m}{a+r}$ összefüggéssel számolhatjuk:

$$R = \frac{5\cdot 12}{13+5} = \frac{10}{3}\text{ cm}.$$

A koktél kúpjába írható gömb sugara:

$$\lambda\cdot R = \frac{5}{8}\cdot\frac{10}{3} = \frac{50}{24} > 1\text{ cm},$$

tehát a beletett 2 cm átmérőjű ringlót a koktél teljesen ellepi.

A ringlószilva térfogata:

$$V_{\text{szilva}} = \frac{4\cdot 1^3\cdot\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Ha a pohárba beletesszük a szilvát, akkor a pohárban levő koktél a szilvával együtt egy h magasságú kúpot alkot. A kúp alapkörének sugara legyen r'. Ez a kúp hasonló a pohár kúpjához, tehát megfelelő adatai hosszának hányadosára egyenlő:

$$\frac{r'}{h}=\frac{r}{m} \quad \Rightarrow \quad r'=h\cdot\frac{r}{m}=h\cdot\frac{5}{12}.$$

A h magasság kiszámítása:

$$V_{\text{koktél}}+V_{\text{szilva}}=\frac{(r')^2\cdot\pi\cdot h}{3},$$

$$\frac{3125}{128}\pi+\frac{4\pi}{3}=\frac{\left(\frac{5}{12}h\right)^2\cdot\pi\cdot h}{3},$$

$$h\approx 7{,}63.$$

A pohárban a koktél szintjének emelkedése:

$$h-7{,}5=7{,}63-7{,}5=0{,}13\text{ cm}=1{,}3\text{ mm}.$$

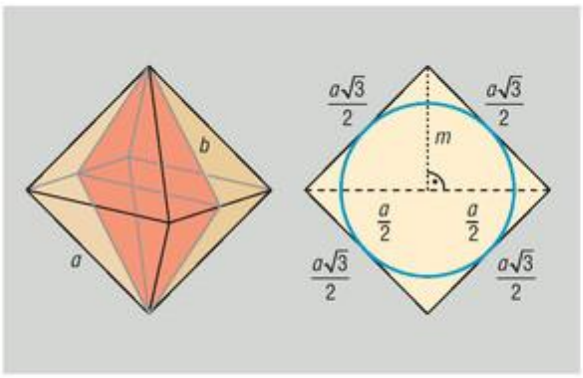
4478 Jelölje az oktaéder élének hosszúságát a, $a=30$ cm.

a) Vegyük az oktaéder két szemközti párhuzamos élének felezőpontján áthaladó, ezen élekre merőleges síkmetszetét.

A rombusz alakú síkmetszet tartalmazza a beírt gömb középpontját, és a gömb főköre érinti a rombusz oldalait.

A rombusz oldalának hossza az a oldalú szabályos háromszög magassága:

$$b=\frac{a\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}.$$



A rombusz egyik átlója az oktaéder a élével egyenlő hosszú.

Keressük a rombuszba írt kör sugarának r hosszát.

A rombusz területét egyrészt felírhatjuk r segítségével:

$$T_{\text{rombusz}}=r\cdot\frac{k}{2}=r\cdot\frac{4b}{2}=2r\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=r\cdot a\sqrt{3}=30\sqrt{3}\cdot r.$$

Másrészt a rombusz területe egyenlő két a alapú és b szárú egyenlő szárú háromszög területével. A háromszög alaphoz tartozó magassága:

$$m=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(15\sqrt{3}\right)^2-15^2}=15\sqrt{2},$$

amiből a rombusz területére kapjuk, hogy

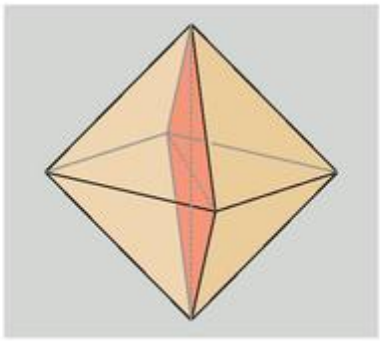
$$T_{\text{rombusz}}=2\cdot\frac{a\cdot m}{2}=30\cdot 15\sqrt{2}=450\sqrt{2}.$$

A két kifejezés egyenlőségéből:

$$30\sqrt{3}\cdot r=450\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{450\sqrt{2}}{30\sqrt{3}}=5\sqrt{6}.$$

Az oktaéderbe írt gömb sugara: $r=5\sqrt{6}\approx 12{,}25$ cm.

b) Vegyük az oktaéder két-két szemközti csúcsán áthaladó síkmetszetét. Ennek a négyszög alakú síkmetszetnek minden oldala a hosszúságú, átlóinak hossza $a\sqrt{2}$, a síkmetszet tehát négyzet.



A négyzet átlóinak metszéspontjától a szabályos oktaéder minden csúcsa $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ távolságra van.

Tehát a szabályos oktaéder köré írható gömb sugara:

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} \approx 21{,}21 \text{ cm}.$$

Vegyes feladatok I. – megoldások

4479 A visszamaradó testnek 56 csúcsa, 84 éle és 30 lapja van.

4480 A síkmetszet területe: $\frac{27\sqrt{3}}{8} \approx 5{,}85 \text{ cm}^2$.

4481 *a)* $\gamma = 90°$, $\beta \approx 33{,}69°$, $\alpha \approx 56{,}31°$. A háromszög c oldala: $2\sqrt{13} \approx 7{,}21$ cm.

b) Két ilyen háromszög van.

Az egyikben $\gamma = 30°$, a harmadik oldal hossza pedig körülbelül 3,23 cm. A háromszög másik két szöge: $\alpha \approx 111{,}73°$ és $\beta \approx 38{,}27°$.

A másik háromszögben $\gamma = 150°$, a harmadik oldal hossza körülbelül 9,67 cm. A háromszög további szögei: $\alpha \approx 18{,}15°$ és $\beta \approx 11{,}85°$.

4482 *a)* Mivel a megadott paralelogramma négyzet, bármely két szomszédos oldala 90°-os szöget zár be egymással.

b) A megadott paralelogramma két szomszédos oldala 11,54°-os vagy 168,46°-os szöget zár be egymással.

4483 A körgyűrűcikk szélessége 4,75 cm. A középponti szöge $\alpha = \frac{14}{7} = 2$ radián, azaz $\alpha \approx 114{,}59°$.

4484 *a)* A háromszög területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ cm}^2.$$

b) A legkisebb kör alakú kartonlapnak a sugara, amelyből a háromszöget kivághattuk, éppen a háromszög körülírt körének sugara. Ha a körülírt kör sugara R, akkor:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot T} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8{,}125 \text{ cm}.$$

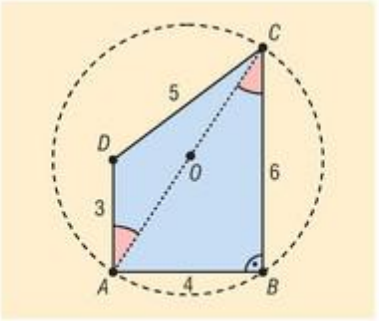
A körülírt kör területe körülbelül 207,39 cm^2.

c) A háromszöglapból kivágható legnagyobb kör a háromszögbe írható kör. Ennek r sugarára:

$$r = \frac{T}{s} = \frac{84}{21} = 4 \text{ cm}.$$

A legnagyobb kivágható kör területe körülbelül 50,27 cm^2.

4485 *a)* Mivel $AB^2 + BC^2 = AC^2$ teljesül, ezért az $ABC_\triangle$ derékszögű, amelyben az AC oldal az átfogó.



Az $ABCD$ négyszög területére teljesül:

$$T_{ABCD} = T_{ABC} + T_{ACD}.$$

Az ABC derékszögű háromszög területe:

$$T_{ABC} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

Az $ACD_\triangle$ területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T_{ACD} = \sqrt{\left(4+\sqrt{13}\right)\cdot\left(4-\sqrt{13}\right)\cdot\left(\sqrt{13}+1\right)\cdot\left(\sqrt{13}-1\right)} = \sqrt{3\cdot 12} = 6 \text{ cm}^2.$$

Az $ABCD$ négyszög területe:

$$T_{ABCD} = 12 + 6 = 18 \text{ cm}^2.$$

b) Mivel az $ABC_\triangle$ derékszögű, ezért ha létezik olyan kör, amelyre a négyszög összes csúcsa illeszkedik, akkor a húrnégyszögek tétele alapján az $ACD_\triangle$-ben a D csúcsnál szintén 90°-os szögnek kellene lennie. Mivel:

$$3^2 + 5^2 < \left(2\sqrt{13}\right)^2,$$

ezért az $ACD_\triangle$ tompaszögű, vagyis az $ABCD$ négyszögnek nem létezik körülírt köre (azaz nem húrnégyszög).

c) A *b)* részben láttuk, hogy az $ACD_\triangle$ tompaszögű, vagyis az AC átló a D pontból 90°-nál nagyobb szög alatt látszik, tehát a D pont az $ABC_\triangle$ Thalész-körének belső pontja. Az $ABCD$ négyszöget teljes egészében lefedő kör legalább akkora sugarú, mint az $ABC_\triangle$ köré írt kör sugara, ezért a legkisebb sugarú kör, amely lefedi a négyszöget, éppen az AC szakasz Thalész-köre. Ennek sugara $\sqrt{13}$ cm, területe pedig $13\pi \approx 40{,}84 \text{ cm}^2$.

d) A $DAC_\triangle$-ben a koszinusztétel alapján:

$$\cos DAC\sphericalangle = \frac{3^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2 - 5^2}{2\cdot 3\cdot\left(2\sqrt{13}\right)} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Az ABC derékszögű háromszögben:

$$\cos ACB\sphericalangle = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

A kapott eredményeket összehasonlítva láthatjuk, hogy $DAC\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, ezért az AD és CB szakaszok párhuzamosak egymással, így az $ABCD$ négyszög trapéz.

4486 *a)* A legbelső futósáv középkörének sugara:

$$r = \frac{400}{2\pi} \approx 63{,}66 \text{ m}.$$

Belülről kifelé haladva a következő futósáv középkörének sugara 64,66 m, hossza 406,3 méter. A következő sáv középkörének sugara 65,66 m, hossza 412,6 méter. A legkülső sáv középkörének sugara 66,66 méter, hossza 418,8 méter.

b) A körgyűrű területe:

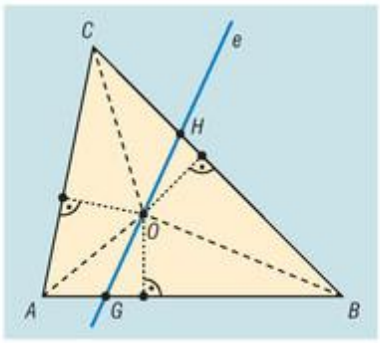
$$2 \cdot \rho \cdot m \cdot \pi,$$

ahol ρ a középkörének sugara, m pedig a szélessége.

A képlet alkalmazásával az egyes futósávokra a következő területeket kapjuk:

$$400{,}0 \text{ m}^2,\quad 406{,}3 \text{ m}^2,\quad 412{,}6 \text{ m}^2,\quad 418{,}8 \text{ m}^2.$$

4487 Tegyük fel, hogy az e egyenes megfelezi az $ABC_\triangle$ kerületét és területét. Ha az e egyenes az $ABC_\triangle$-et két másik háromszögre bontja, azaz átmegy a háromszög egyik csúcsán, akkor a két részháromszög területének egyenlőségéből következik, hogy az e egyenes a háromszög egyik súlyvonala, a kerületek egyenlőségéből pedig az következik, hogy a háromszög egyenlő szárú. Mivel az egyenlő szárú háromszög csúcsából induló súlyvonal egyben szögfelező is, ezért az e egyenes valóban tartalmaz olyan pontot, amely a háromszög oldalaitól egyenlő távolságra található, ugyanis a beírt kör középpontja megfelel a feltételeknek.



Ha az e egyenes nem megy át a háromszög egyetlen csúcsán sem, akkor a háromszöget egy négyszögre és egy másik háromszögre bontja. Tegyük fel, hogy az egyenes a háromszögnek az AB és BC oldalait metszi, AB-t G-ben és BC-t H-ban. Legyen $AG = x$, $CH = y$, továbbá ebből adódóan $GB = c - x$ és $HB = a - y$. Legyen továbbá O a B csúcsból induló szögfelező és az e egyenes metszéspontja. Ekkor persze az O pont az AB és BC oldalaktól egyforma távolságra található, amit r-rel jelöltünk. A $GHB_\triangle$ területe:

$$T_{GHB} = \frac{(c-x)r}{2} + \frac{(a-y)r}{2}.$$

Az $AGHC$ négyszög területe:

$$T_{AGHC} = T_{AGO} + T_{HCO} + T_{CAO} = \frac{xr}{2} + \frac{yr}{2} + \frac{br'}{2},$$

ahol r' az O pont AC oldaltól mért távolsága.

Mivel az e egyenes megfelezi az $ABC_\triangle$ területét, ezért:

$$\frac{(c-x)r}{2} + \frac{(a-y)r}{2} = \frac{xr}{2} + \frac{yr}{2} + \frac{br'}{2},$$

$$(c-x)r + (a-y)r = xr + yr + br'. \quad (1)$$

Vegyük figyelembe, hogy az e egyenes megfelezi az $ABC_\triangle$ kerületét is, ezért:

$$c - x + a - y = x + y + b,$$

amiből r-rel való szorzás után:

$$(c-x)r + (a-y)r = xr + yr + br. \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőségek bal oldalán ugyanaz a kifejezés áll, ezért a bal oldalon álló mennyiségek is megegyeznek, azaz:

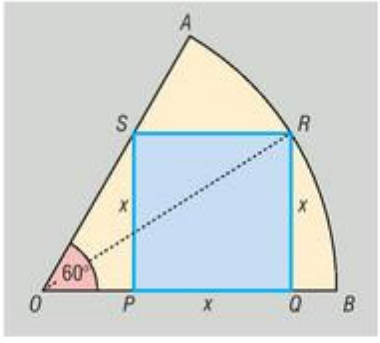
$$xr + yr + br' = xr + yr + br,$$

amiből következik, hogy $r = r'$. Ez azt jelenti, hogy az O pont a háromszög mindhárom oldalától egyenlő távolságra található, amit éppen bizonyítanunk kellett.

Megjegyzés: Az O pont éppen a háromszög beírt körének középpontja.

4488 A körcikkben az ábra szerint elhelyezett $PQRS$ négyzet oldalát jelöljük x-szel. Az OPS derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{OP} \quad \Rightarrow \quad OP = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$



Ebből következik, hogy az ORQ derékszögű háromszög oldalai:

$$OQ = x + \frac{x\sqrt{3}}{3} = x \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad RQ = x, \quad OR = 12 \text{ cm}.$$

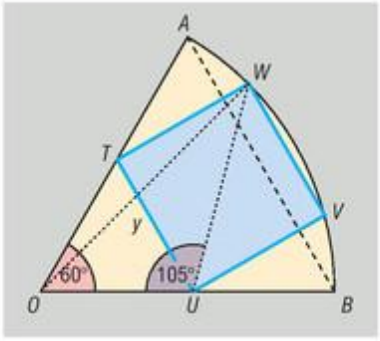
Az $ORQ_{\triangle}$-ben felírhatjuk Pitagorasz tételét:

$$x^2 \cdot \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + x^2 = 12^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot \frac{7+2\sqrt{3}}{3} = 144,$$

amiből a $PQRS$ négyzet területe:

$$x^2 = \frac{432}{7+2\sqrt{3}} \approx 41{,}28\ \text{cm}^2.$$

A körcikkben az ábra szerint elhelyezett $TUVW$ négyzet oldalát y-nal jelöltük. A feltételek szerint az UT szakasz párhuzamos az AB húrral, amiből következik, hogy az $OUT_{\triangle}$ szögei páronként megegyeznek az $OBA_{\triangle}$ szögeivel, azaz a két háromszög hasonló. Mivel az $OBA_{\triangle}$ szabályos ($OA = OB$ és a két oldal 60°-os szöget fog közre), ezért a hozzá hasonló $OUT_{\triangle}$ is szabályos, így $OU = y$.



Tekintsük ezután az $OUW_{\triangle}$-et. A háromszög oldalai:

$$OU = y, \quad UW = y\sqrt{2} \quad \text{és} \quad OW = 12\ \text{cm}.$$

A háromszög megfelelő szögére:

$$OUW\sphericalangle = OUT\sphericalangle + TUW\sphericalangle = 60° + 45° = 105°.$$

A koszinusztétel alapján:

$$OW^2 = OU^2 + UW^2 - 2 \cdot OU \cdot UW \cdot \cos 105°,$$

$$144 = y^2 + 2y^2 - 2y\sqrt{2} \cdot y \cdot \cos 105°,$$

amiből a műveletek elvégzése után a $TUVW$ négyzet területére adódik, hogy:

$$y^2 = \frac{144}{3 - 2\sqrt{2} \cdot \cos 105°} \approx 38{,}58\ \text{cm}^2.$$

Eredményeink alapján az első esetben kapunk nagyobb területű négyzetet.

4489 Ha a fából készült kocka éleinek hossza x cm, valamint a darabolás után keletkező kisebb kocka éleinek hossza y cm ($x > y$), akkor a feltételek szerint a nagyobb kocka és a darabolás után keletkező kisebb kocka térfogatának különbségére teljesül, hogy: $x^3 - y^3 = 152$.

Az ismert nevezetes azonosság alkalmazásával szorzattá alakítva kapjuk, hogy:

$$(x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = 152.$$

A bal oldalon szereplő szorzat tényezői pozitív egész számok, továbbá látható, hogy a második tényező határozottan nagyobb, mint az első, ezért a következő esetek lehetségesek.

I. eset: $x - y = 1$ és $x^2 + xy + y^2 = 152$. Az első egyenletből $x^2 - 2xy + y^2 = 1$, amit a második egyenletből kivonva kapjuk, hogy $3xy = 151$. Mivel a 151 nem osztható 3-mal, ezért ez az eset nem teljesülhet.

II. eset: $x - y = 2$ és $x^2 + xy + y^2 = 76$. A második egyenletből kivonva az első egyenlet négyzetét: $3xy = 72$, azaz $xy = 24$. Tekintettel arra, hogy x pontosan 2-vel nagyobb y-nál, könnyen belátható, hogy $x = 6$, $y = 4$.

III. eset: $x - y = 4$ és $x^2 + xy + y^2 = 38$. A már kétszer alkalmazott módszer most a $3xy = 22$ egyenletre vezet. Mivel a 22 nem osztható 3-mal, ezért ez az eset nem teljesülhet.

IV. eset: $x - y = 8$ és $x^2 + xy + y^2 = 19$. Ezúttal $3xy = -45$. Mivel a bal oldalon pozitív számok állnak, amelyek szorzata nem lehet negatív szám, ezért ez az eset sem teljesülhet.

A feltételeknek egyetlen kocka tesz eleget, amelynek élei 6 cm hosszúak. Az ellenőrzés mutatja, hogy a 6 cm élű kocka valóban feldarabolható az ismertetett módon.

Vegyes feladatok II. – megoldások

4490 *a)* A téglatest felszíne: $2248\ \text{cm}^2$.

b) A téglatest térfogata: $6240\ \text{cm}^3$.

4491 A négyzetes hasáb térfogata: $1685{,}11\ \text{cm}^3$.

4492 A padlástér legnagyobb magassága: 8 m.

4493 *a)* A sajtból megközelítőleg 592 darab szokásos méretű sajtot lehetett volna készíteni.

b) Egy ilyen minőségű 1,4 kg tömegű sajt elkészítéséhez megközelítőleg 10 liter tej kellene.

c) Megközelítőleg 183 napra lenne elegendő.

4494 A hangyaleső lárvájának megközelítőleg $84\ \text{cm}^3$ térfogatú homokot kellett megmozgatnia.

4495 Egy liter aszúból körülbelül 242 borbonbont lehet készíteni.

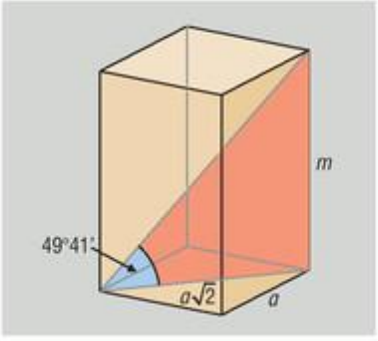
4496 *a)* A keletkezett forgástest felszíne: $300\pi \approx 942{,}48\ \text{cm}^2$.

b) A keletkezett forgástest térfogata: $240\pi \approx 753{,}98\ \text{cm}^3$.

4497 A lavórba megközelítőleg 22 liter víz fér.

4498 A golyók felületének az összege: $130{,}46\ \text{cm}^2$.

4499 A négyzetes oszlop alapéle legyen a, oldaléle m hosszúságú.



A feladat feltételei alapján:

$$\frac{m}{a\sqrt{2}} = \operatorname{tg} 49°41',$$

$$a^2 \cdot m = 2880.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $a = 12$ és $m = 20$.

A négyzetes oszlop felszíne:

$$2 \cdot 12^2 + 48 \cdot 20 = 1248\ \text{cm}^2.$$

4500 A feladat szövege alapján egy átlagos testalkatú ember térfogata:

$$V_1 = 1{,}5 \cdot 0{,}08 = 0{,}12\ \text{m}^3.$$

A földön élő 6,9 milliárd ember térfogata:

$$V = 6{,}9 \cdot 10^9 \cdot 0{,}12 = 0{,}828 \cdot 10^9\ \text{m}^3 = 0{,}828\ \text{km}^3.$$

A Balaton vízszintjének h emelkedésére felírhatjuk, hogy:

$$0{,}828 = h \cdot 594 \quad \Rightarrow \quad h \approx 0{,}0014\ \text{km}.$$

A Balaton vízszintje 1,4 m-rel emelkedne.

4501 *a)* Az UTP kábel keresztmetszete $T = 2{,}75^2 \cdot \pi\ \text{mm}^2$, tehát kétszer 20 méter térfogata:

$$V = 2{,}75^2 \cdot \pi \cdot 40\,000 \approx 950\,332\ \text{mm}^3 \approx 950{,}33\ \text{cm}^3.$$

A kábel tömege:

$$m_1 = V \cdot \rho = 950{,}33 \cdot 0{,}8 \approx 760\ \text{g}.$$

A cső tömege:

$$m_2 = 20 \cdot 0{,}5 = 10\ \text{dkg} = 100\ \text{g}.$$

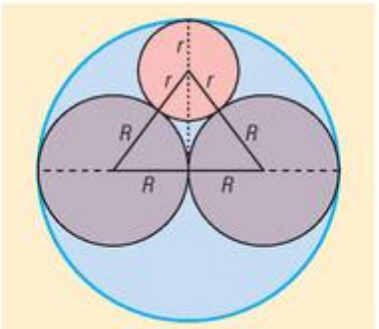
A cső és a kábel együttes tömege:

$$m = m_1 + m_2 = 860\ \text{g} = 86\ \text{dkg}.$$

b) Az UTP kábel sugara $R = 2{,}75$ mm, a csőbe még behúzható legnagyobb sugarú kábel sugara legyen r.

Vegyük a bekábelezett cső ábrán látható keresztmetszetét.

A három kábel kör keresztmetszetének középpontjai egy olyan egyenlő szárú háromszöget határoznak meg, amelynek alapja $2R$, szárai $R + r$, az alaphoz tartozó magassága pedig $2R - r$ hosszúságúak. Írjuk fel Pitagorasz tételét a magasság által létrehozott egyik derékszögű háromszögben:

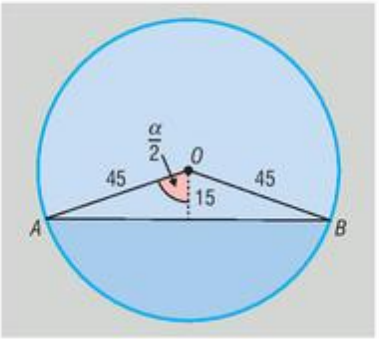


$$(R + r)^2 = R^2 + (2R - r)^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{3}R.$$

A csőbe legfeljebb $2r = \frac{4}{3}R = \frac{4}{3} \cdot 2{,}75 \approx 3{,}67$ mm külső átmérőjű kábel húzható.

4502 Tekintsük a csatorna ábrán látható keresztmetszetét.

Számoljuk ki, hogy a keresztmetszetben mekkora területű részt foglal el az átfolyó víz. Ez egy 45 cm sugarú körszelet, amelyet az AB húr határol. A húrnak a kör középpontjától vett távolsága a sugár harmadrésze, azaz 15 cm. Ez alapján az α középponti szögre felírható:



$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{45} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 141{,}06°.$$

A körszelet területe:

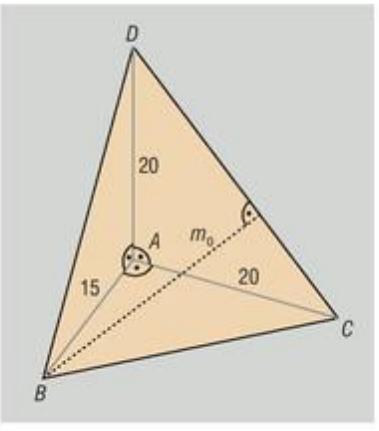
$$T = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} = 45^2 \cdot \pi \cdot \frac{141{,}06°}{360°} - \frac{45^2 \cdot \sin 141{,}06°}{2} \approx$$

$$\approx 1856{,}37 \text{ cm}^2 \approx 0{,}19 \text{ m}^2.$$

A csatorna óránként annyi vizet enged át, amekkora egy T alapterületű $m = 0{,}8 \cdot 3600 = 2880$ m magasságú hengerszerű test térfogata.

Óránként a csatorna $V = T \cdot m = 547{,}2 \text{ m}^3$ vizet enged át.

4503 A tetraéder magassága legyen $m = AD = 20$ cm, az alaplapja az $ABC_\triangle$, melynek területe:



$$T_{ABC} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2.$$

a) A tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{15 \cdot 20}{2} \cdot 20}{3} = 1000 \text{ cm}^3.$$

b) A felszín kiszámításához szükségünk van az oldallapok területére.

Az ABC derékszögű háromszögből:

$$BC = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ cm}.$$

Mivel az $ABC_\triangle$ és az $ABD_\triangle$ egybevágó: $DB = 25$ cm.

Az ACD derékszögű háromszögből: $DC = 20\sqrt{2}$ cm.

A tetraéder BCD oldallapja egyenlő szárú háromszög. Szárainak hossza 25 cm, alapja $20\sqrt{2}$ cm hosszú, így az alaphoz tartozó magassága:

$$m_o = \sqrt{25^2 - \left(\frac{20\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17} \quad \Rightarrow \quad T_{BCD} = \frac{20\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{17}}{2} = 50\sqrt{34}\ \text{cm}^2.$$

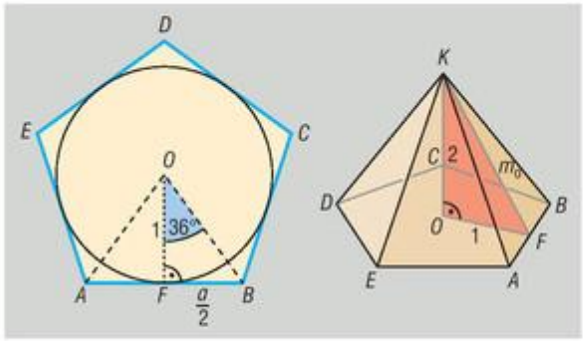
A tetraéder másik három oldallapjának területe:

$$T_{ABC} = T_{ABD} = 150\ \text{cm}^2 \quad \text{és} \quad T_{ACD} = 200\ \text{cm}^2.$$

A tetraéder felszíne:

$$A = 2 \cdot T_{ABC} + T_{ACD} + T_{BCD} = 2 \cdot 150 + 200 + 50\sqrt{34} = 500 + 50\sqrt{34} \approx 791{,}55\ \text{cm}^2.$$

4504 Az ábrák jelöléseinek megfelelően a gúla magassága $m = 2$ m, az alaplap beírt körének sugara $r = 1$ m, alapéle pedig a. Az alaplap beírt köre az alapélt az él F felezőpontjánál érinti.



A BFO derékszögű háromszög O csúcsánál lévő szöge: $\frac{360°}{5} \cdot \frac{1}{2} = 36°$, amiből:

$$\text{tg}\,36° = \frac{\frac{a}{2}}{1} \quad \Rightarrow \quad a \approx 2 \cdot \text{tg}\,36°\ \text{m}.$$

a) A gúla alaplapjának területe:

$$T = 5 \cdot \frac{a \cdot r}{2} \approx 5 \cdot \text{tg}\,36°\ \text{m}^2 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{5 \cdot \text{tg}\,36° \cdot 2}{3} \approx 4{,}42\ \text{m}^3.$$

A gúla térfogata $4{,}42\ \text{m}^3$.

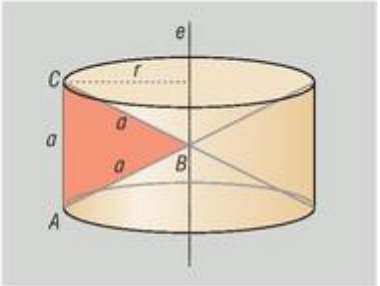
b) A palást felszínének kiszámításához szükség van az oldallap m_o magasságára. Az OFK derékszögű háromszögben ismerjük az OK és OF befogókat, így az m_o átfogó:

$$m_o = \sqrt{OK^2 + OF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\ \text{m}.$$

A gúla palástjának felszíne:

$$A_{\text{palást}} = 5 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 5 \cdot \text{tg}\,36° \cdot \sqrt{5} \approx 8{,}12\ \text{m}^2.$$

4505 Az $a = 12$ cm oldalú szabályos ABC háromszöget e egyenes körül megforgatva egy olyan körhengert kapunk, amelyből két egybevágó körkúpot kivágtunk.



A két kúp és a körhenger alapkörének a sugara a szabályos háromszög magassága: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A henger magassága a háromszög oldalának az a hossza, a kúpok magassága pedig $\frac{a}{2}$.

A kúpok alkotóinak hossza a háromszög a oldalának a hossza.

a) A henger és a két kúp palástjának területét összeadva megkapjuk a forgástest felszínét:

$$A = A_{\text{hengerpalást}} + 2 \cdot A_{\text{kúppalást}} = 2r \cdot \pi \cdot a + 2r \cdot \pi \cdot a = 4r \cdot \pi \cdot a = 4 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \cdot a =$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot \pi \cdot a^2 = 2\sqrt{3} \cdot \pi \cdot 144 \approx 1567{,}12\ \text{cm}^2.$$

A forgástest felszíne: $A \approx 1567{,}12\ \text{cm}^2$.

b) A forgástest térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a henger térfogatából kivonjuk a két kúp térfogatát:

$$V = V_{\text{henger}} - 2 \cdot V_{\text{kúp}} = r^2 \cdot \pi \cdot m_{\text{henger}} - 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_{\text{kúp}}}{3} = r^2 \cdot \pi \cdot \left(m_{\text{henger}} - \frac{2}{3} m_{\text{kúp}} \right) =$$

$$= \left(\frac{12\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \pi \cdot \left(12 - \frac{2}{3} \cdot 6 \right) = 864\pi \approx 2714{,}34 \text{ cm}^3.$$

A forgástest térfogata: $V \approx 2714{,}34 \text{ cm}^3$.

4506 A csonka kúp alakú tejfölös doboz fedőkörének sugara $R = 4{,}25$ cm, az alapkör sugara $r = 3{,}25$ cm, az alkotója $a = 12$ cm.

A csonka kúp m magassága az $a^2 = m^2 + (R - r)^2$ összefüggés alapján:

$$m = \sqrt{a^2 - (R - r)^2} = \sqrt{12^2 - 1^2} = \sqrt{143} \text{ cm}.$$

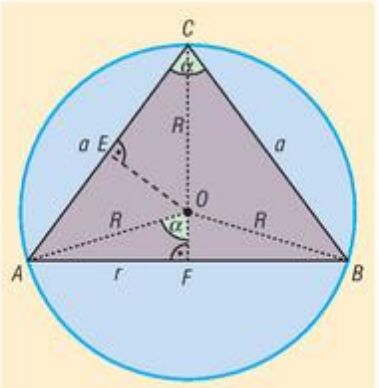
A doboz térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2 \right) = \frac{\sqrt{143} \cdot \pi}{3} \cdot \left(4{,}25^2 + 4{,}25 \cdot 3{,}25 + 3{,}25^2 \right) \approx 531{,}43 \text{ cm}^3.$$

A tejföl sűrűsége:

$$\rho = \frac{m_{\text{tejföl}}}{V} = \frac{450}{531{,}43} \approx 0{,}85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

4507 Az ábra jelölései szerint a gömbbe írt kúp tengelymetszete az $ABC_{\triangle}$. A háromszög körülírható körének sugara $R = 20$ cm, a háromszög szárának a hossza $a = \frac{3}{4} \cdot 2R = 30$ cm, ami a kúp a alkotójának hossza is egyben.



Az AOC egyenlő szárú háromszögben az AC oldalhoz tartozó EO magasság behúzásával kiszámítható az ABC egyenlő szárú háromszög C csúcsánál levő α szárszöge:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{EC}{OC} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{20} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 82{,}82°.$$

A kerületi és középponti szögek tétele alapján:

$$AOB\sphericalangle = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad AOF\sphericalangle = \alpha.$$

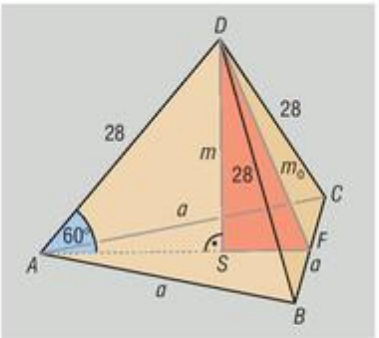
Az AOF derékszögű háromszögből meghatározható a kúp alapkörének sugara:

$$\sin\alpha = \frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad \sin 82{,}82° = \frac{r}{20} \quad \Rightarrow \quad r \approx 19{,}84 \text{ cm}.$$

A gömbbe írt kúp felszíne:

$$A = \pi \cdot r \cdot (r + a) = \pi \cdot 19{,}84 \cdot (19{,}84 + 30) \approx 3106{,}49 \text{ cm}^2.$$

4508 Tekintsük a mellékelt ábrát. Legyen a gúla alapéle a.



Mivel szabályos háromszög alapú gúláról van szó, a D csúcsnak az alaplapra eső merőleges vetülete az ABC szabályos háromszög S súlypontja.

Egy háromszögben a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja, tehát:

$$AS = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Az ASD fél szabályos háromszögben:

$$SD = AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}, \quad \text{tehát a gúla testmagassága: } m = 14\sqrt{3}\ \text{cm},$$

valamint:

$$AS = \frac{AD}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a\sqrt{3}}{3} = 14, \quad \text{tehát a gúla alapéle: } a = 14\sqrt{3}.$$

A gúla oldallapjának magassága a DBC egyenlő szárú háromszögből számítható:

$$m_o = DF = \sqrt{BD^2 - BF^2} = \sqrt{28^2 - \left(\frac{14\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 7\sqrt{13}\ \text{cm}.$$

a) A gúla felszíne:

$$A = T + 3 \cdot T_{\triangle} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 147\sqrt{3} + 147\sqrt{39} \approx 1172{,}63\ \text{cm}^2.$$

b) A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m}{3} = 2058\ \text{cm}^3.$$

4509 A süvegcukor alapkörének sugara $r = 6$ cm, magassága $m = 30$ cm.

A kúp alkotójának hossza:

$$a = \sqrt{m^2 + r^2} = \sqrt{30^2 + 6^2} = \sqrt{936} = 6\sqrt{26}\ \text{cm}.$$

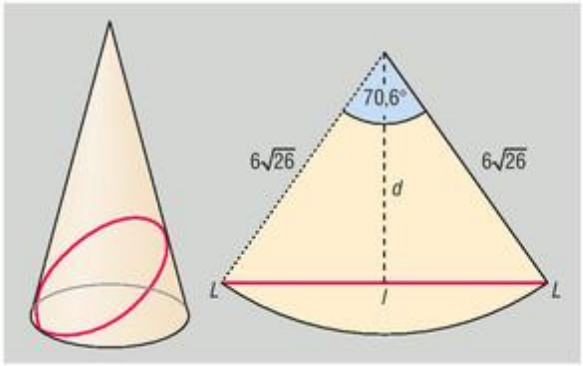
A kúp palástja egy a sugarú körcikk, amelynek középponti szögét jelölje α. A körcikk ívhossza az alaplap kerületével egyenlő:

$$2 \cdot a \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot r \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{26} \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot 6 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70{,}60^\circ.$$

a) A kúp palástját az L ponton áthaladó alkotója mentén felvágjuk, és síkba kiterítjük. A légy által megtett legrövidebb út az így kapott körcikk l hosszúságú húrja. A húr hossza annak az egyenlő szárú háromszögnek az alapja, amelynek szárszöge 70,60°, szára $6\sqrt{26}$:

$$l = 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{26} \cdot \sin\frac{70{,}60^\circ}{2} \approx 35{,}36.$$

A légy által megtett út 35,36 cm.



b) Tekintsük a kúp P ponton áthaladó tengelymetszetét az ábrán látható jelölésekkel.

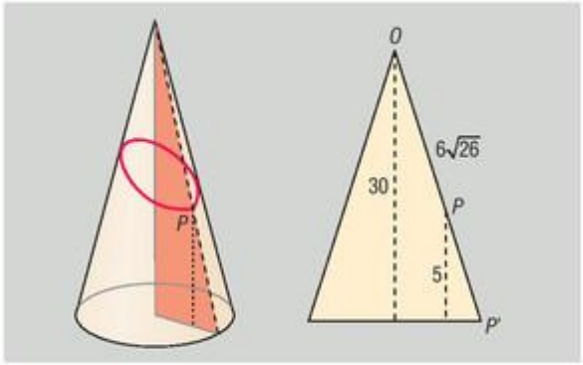
A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján:

$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{5}{30},$$

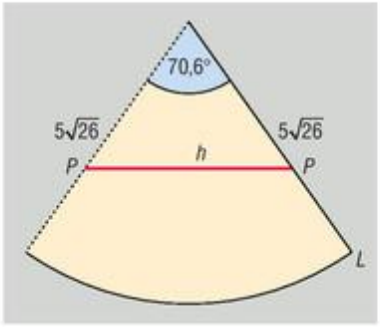
$$PP' = 6\sqrt{26} \cdot \frac{1}{6} = \sqrt{26}.$$

A P pontnak a kúp csúcsától vett távolsága:

$$OP = 6\sqrt{26} - \sqrt{26} = 5\sqrt{26}\ \text{cm}.$$



A kúp palástját a P ponton áthaladó alkotója mentén felvágjuk, és síkba kiterítjük. A hangya által megtett legrövidebb út az így kapott körcikk azon h húrjának a hosszúsága, amelynek végpontjai a határoló sugarakon a kúp csúcsától $5\sqrt{26}$ cm távolságra vannak:



$$l = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{26} \cdot \sin\frac{70{,}60^\circ}{2} \approx 29{,}47.$$

A hangya által megtett út 29,47 cm.

c) A légy akkor kerül a legközelebb a kúp csúcsához, amikor az út felét megtette. Ekkor a csúcstól vett távolság:

$$d = 6\sqrt{26} \cdot \cos\frac{70{,}60^\circ}{2} \approx 24{,}97 \text{ cm}.$$

A hangya a kiinduló helyzetében van legtávolabb a kúp csúcsától. Ez a távolság:

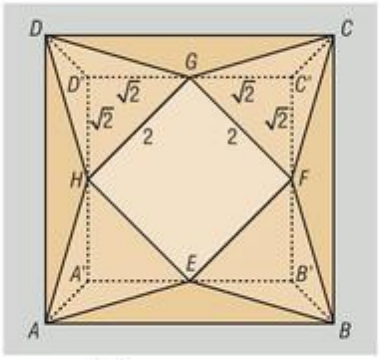
$$OP = 5\sqrt{26} \approx 25{,}50 \text{ cm}.$$

Mivel $OP > d$, a hangya és a légy találkozhat a süvegcukor felületén.

4510 Tekintsünk egy olyan szabályos négyoldalú csonka gúlát, amelynek az alapéle 4 dm, a fedőlapjának felezőpontjai által meghatározott négyzet oldala 2 dm, magassága pedig 1,5 dm.

Az emlékmű talapzatát ennek a testnek a csonkolásával kapjuk úgy, hogy a fedőlap minden csúcsánál levágunk egy-egy tetraédert.

A felülnézeti ábrán az emlékmű talapzata az $ABCDEFGH$ test. Ha az $ABCDA'B'C'D'$ csonka gúla A', B', C' és D' csúcsainál levágjuk az $EHA'A$, az $EFB'B$, az $FGC'C$ és a $HGD'D$ egybevágó tetraédereket, akkor éppen a talapzatot kapjuk meg.



A HGD' egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója 2, így befogói $\sqrt{2}$ hosszúságúak, ezért az $A'B'C'D'$ négyzet oldalának a hossza $2\sqrt{2}$.

$$V_{ABCDA'B'C'D'} = V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) =$$

$$= \frac{1{,}5}{3} \cdot \left(4^2 + 4 \cdot 2\sqrt{2} + \left(2\sqrt{2}\right)^2\right) = 12 + 4\sqrt{2}.$$

A levágandó egybevágó tetraéderek (pl. $HGD'D$) alaplapjának területe a $\sqrt{2}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területe, magassága $m = 1{,}5$, így:

$$T' = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = 1 \quad \text{és} \quad V_{\text{tetraéder}} = \frac{T' \cdot m}{3} = \frac{1}{2}.$$

Az emlékmű térfogata:

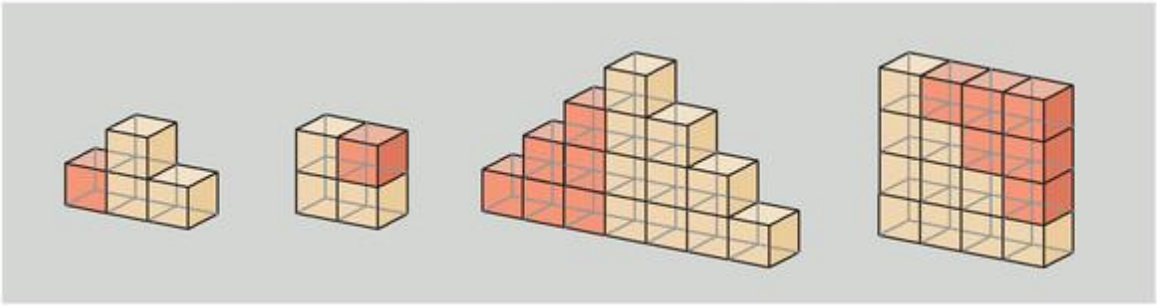
$$V = V_{ABCDA'B'C'D'} - 4 \cdot V_{\text{tetraéder}} = 12 + 4\sqrt{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 10 + 4\sqrt{2} \approx 15{,}66 \text{ dm}^3.$$

A talapzat tömege:

$$m_{\text{talapzat}} = V \cdot \rho = 15{,}66 \cdot 2{,}7 = 42{,}28 \text{ kg}.$$

4511 *a)* Észrevehető, hogy minden függőleges réteg átdarabolható egy négyzetes elrendezésbe:



Mivel a rétegek magassága mindig kettővel nő, ezért a páros négyzetszámok adják meg a szomszédos rétegekben levő kockák darabszámát.

Az építményben a kis kockák száma:

$$4 + 16 + 36 + 64 + 100 + 144 + 100 + 64 + 36 + 16 + 4 = 584.$$

b) Az építmény elölnézetének területe megegyezik a legmagasabb függőleges réteg területével. Ezt a felületet elöl és hátul is le kell festeni. Az előzőek alapján ez a két felület:

$$2 \cdot 12^2 = 288 \text{ cm}^2.$$

Az építmény oldalnézetben kétkockányi magasságról indul, és mindig újabb két kockával növekszik, amíg el nem éri a 12 kockányi magasságot, majd onnan az előző szabály alapján kétkockányi magasságig csökken. Két oldalról a lefestendő felület:

$$2 \cdot (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2) = 144 \text{ cm}^2.$$

Felülről az építmény alapjának megfelelő területet kell lefesteni:

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 19 + 15 + 11 + 7 + 3 = 133 \text{ cm}^2.$$

A befestendő felület összesen:

$$288 + 144 + 133 = 565 \text{ cm}^2.$$

c) Az első függőleges réteg 2^2 darab kockából áll, és ennyit takar el a második függőleges réteg nem szélső kockáiból, így ezeket nem kell befesteni.

A második függőleges réteg 4^2 darabot takar el, a harmadik 6^2-t, és így tovább egészen az ötödik függőleges rétegig, ami 10^2 kocka festését nem engedi meg a hatodik legmagasabb rétegből.

Ettől kezdve a csökkenő magasságú oldalon az előzőkhöz hasonlóan gondolkodhatunk.

Az építményben így

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 = 340$$

kockának nem lesz egy oldala sem befestve.

12.4. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Geometriai valószínűség – megoldások

4512 *a)* $p=\frac{4}{10}=0,4$.

b) Nem, a végpont nem befolyásolja az intervallum hosszát.

4513 –

4514 *a)* $p=\frac{4}{9}\approx 0,44$; *b)* $p=\frac{5}{8}=0,625$; *c)* $p=\frac{1+1}{6}\approx 0,33$.

4515 *a)* $p=\frac{4}{9}\approx 0,44$; *b)* $p=\frac{5}{9}\approx 0,56$.

4516 $p=0,7=\frac{x}{7}$, így $x=4,9$. I-nek 4,9 hosszú intervallumnak kell lennie. Pl. $[8; 12,9]$.

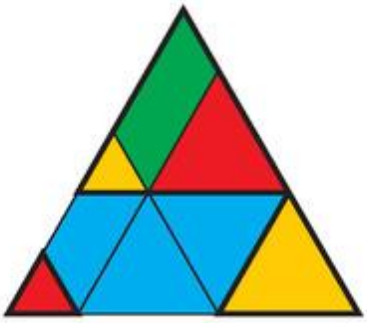
4517 $p=\frac{18}{19}-\frac{11}{20}=\frac{151}{380}\approx 0,3974$.

4518 $p=\frac{12-5\cdot 0,8}{12}=\frac{2}{3}\approx 0,67$.

4519 $p=\frac{5\cdot 15-2\cdot 3^2}{5\cdot 15}=\frac{57}{75}=0,76$.

4520 *a)* $P_{\text{bull}}=\frac{1,5^2\cdot\pi}{16,75^2\cdot\pi}\approx 0,008$; *b)* $P_{\text{bull's eye}}=\frac{0,75^2\cdot\pi}{16,75^2\cdot\pi}\approx 0,002$.

4521 Tekintsük az ablak nyitott (kék) részén kívüli darabokat.



I. megoldás: Ezek három, az eredetihez hasonló háromszöget alkotnak. A szöveg alapján tudjuk, hogy a kis háromszögek oldalai feleakkorák, mint egy nagyobb háromszög oldala. Mivel két nagyobb és egy pici háromszög oldala kiadja az ablak alsó oldalát, így a kis piros háromszög oldala éppen $\frac{1}{5}$-e, a sárga nagyobb háromszög oldala $\frac{2}{5}$-e, míg a felső színes háromszög oldala $\frac{3}{5}$-e az ablak oldalának. A hasonlóságnál igazoltak alapján (hasonló alakzatok területei a hasonlósági arány négyzetével arányosak):

$$P_{\text{(betöri az ablakot)}}=\frac{T_{\text{nem kék}}}{T_{\text{ablak}}}=\frac{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}+\frac{9}{25}}{1}=\frac{14}{25}=0,56.$$

II. megoldás: A feladatot átdarabolással is megoldhatjuk. Számoljuk össze, hogy a bal alsó kis piros háromszöget hányszor mérhetjük fel az ábra többi alkotóelemére. (A hasonlóság miatt ezt megtehetjük.)



4522 Gyakorlatilag nyolc sávot látunk a táblán a középkört is beleértve, így a tábla sugara 16 cm. Bármely sáv területét megkapjuk, ha a külső határoló kör területéből kivonjuk a belső határoló kör területét.

a) $p=\dfrac{2^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}015625;$

b) $p=\dfrac{4^2\cdot\pi-2^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}046875;$

c) $p=\dfrac{8^2\cdot\pi-6^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}109375;$

d) $p=\dfrac{12^2\cdot\pi-10^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}171875;$

e) $p=\dfrac{6^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}140625;$

f) $p=1-\dfrac{10^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}609375;$

g) $p=\dfrac{12^2\cdot\pi-4^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}5.$

h) Két dobásból 15 pontot úgy érhetünk el, ha 9-et és 6-ot, vagy 6-ot és 9-et, vagy 8-at és 7-et, vagy 7-et és 8-at dobunk:

$$P(9\text{ és }6\ \text{ vagy }\ 6\text{ és }9)=2\cdot\frac{4^2\cdot\pi-2^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}\cdot\frac{10^2\cdot\pi-8^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}\approx 0{,}01318,$$

$$P(8\text{ és }7\ \text{ vagy }\ 7\text{ és }8)=2\cdot\frac{6^2\cdot\pi-4^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}\cdot\frac{8^2\cdot\pi-6^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}\approx 0{,}01708.$$

A két eredmény összege adja a kérdésre a választ: $p\approx 0{,}03$.

4523 Először számítsuk ki a dupla 20 és a tripla 20 pontszámot adó részek területeit:

$$T_{\mathrm{D20}}=\frac{16{,}75^2\cdot\pi-15{,}75^2\cdot\pi}{20}\approx 5{,}105\ \mathrm{cm}^2,$$

$$T_{\mathrm{T20}}=\frac{10{,}75^2\cdot\pi-9{,}75^2\cdot\pi}{20}\approx 3{,}22\ \mathrm{cm}^2.$$

Ezek után könnyebb kiszámítani a sima 20 pontot érő területet:

$$T_{20}=\frac{15{,}75^2\cdot\pi-1{,}5^2\cdot\pi}{20}-T_{\mathrm{T20}}\approx 38{,}61-3{,}22=35{,}39\ \mathrm{cm}^2.$$

Fel vagyunk vértezve a valószínűségek kiszámításához szükséges adatokkal.

a) $P(\mathrm{D20})=\dfrac{T_{\mathrm{D20}}}{T_{20}+T_{\mathrm{D20}}+T_{\mathrm{T20}}}\approx 0{,}1168;$

b) $P(\mathrm{T20})=\dfrac{T_{\mathrm{T20}}}{T_{20}+T_{\mathrm{D20}}+T_{\mathrm{T20}}}\approx 0{,}0737.$

c) Az előző pontból:

$$P(20)=1-P(\mathrm{D20})-P(\mathrm{T20})\approx 0{,}8096.$$

Két nyíllal 80 pontot úgy szerezhet Dávid, ha két dupla 20-at, vagy egy tripla és egy sima 20-at, vagy egy sima és egy tripla 20-at dob. Valószínűségeik összege:

$$P(80\text{ pont})=P(\mathrm{D20})\cdot P(\mathrm{D20})+2\cdot P(20)\cdot P(\mathrm{T20})\approx 0{,}1328.$$

4524 Írjuk fel a valószínűséget. Jelölje a kis kör sugarát r, a nagy körét R. Ekkor:

$$P=\frac{r^2\cdot\pi}{R^2\cdot\pi}=0{,}01,$$

innen $r=0{,}1\cdot R$.

Tehát a középkör sugara 10%-a kell, hogy legyen a tábla sugarának.

4525 Írjuk fel a másodfokú egyenlet megoldóképletét, egyszerűsítsünk 2-vel:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4c}}{2}=2\pm\sqrt{4-c}.$$

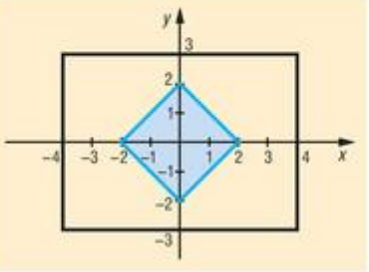
Természetesen akkor lesz mindkét megoldás 1-nél nagyobb, ha a kisebb gyök is nagyobb 1-nél:

$$2-\sqrt{4-c}>1.$$

Megoldását a $c>3$ valós számok adják. Így a keresett valószínűség:

$$p=\frac{1}{6}.$$

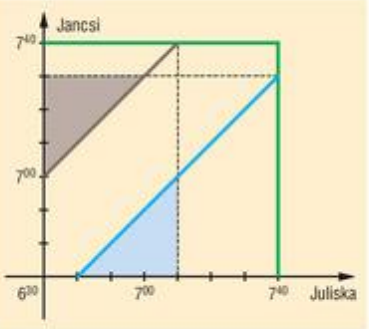
4526 Keressük meg azokat a pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek kielégítik az egyenlőtlenséget. Az ábrán ezeket a pontokat látjuk a téglalappal együtt.



A valószínűséget a területek mértékéből meghatározhatjuk:

$$p=\frac{4\cdot 2}{8\cdot 6}=\frac{1}{6}.$$

4527 Képzeljük el egy koordináta-rendszerben a fürdőbe lépések lehetséges időpontjait. Jancsi és Juliska 6^{30}-kor kelnek és 7^{40}-kor hagyják el a házat. Tehát e két időpont között tartózkodhatnak a fürdőszobában (ábrán zöld négyzet). Mivel Juliskának 30 perc szükséges, hogy elkészüljön, legkésőbb 7^{10}-kor meg kell kezdenie a szépítkezést (függőleges szaggatott vonal és attól balra). Jancsinál ez az idő 10 perc, így ő ráér akár még 7^{30}-kor is bemenni a fürdőbe (vízszintes szaggatott vonal és attól lefelé). Így az eseménytér a tengelyek és a szaggatott vonalak közé eső téglalap alakú terület.



Ha Jancsi 6^{30}-kor megy a fürdőbe, akkor Julisnak 6^{40}-től szabad a pálya. Ha Jancsi 6^{40}-kor lép be, akkor Julis 6^{50}-től mehet, stb. Ezeket a belépési pontokat a kék terület mutatja. Ha Julis lép be először rögtön ébredés után, akkor Jancsi csak 7^{00}-től mehet be. Ha Julis csak 6^{40}-kor megy be, akkor Jancsinak várnia kell 7^{10}-ig stb. Ezt a barna részen látjuk.

Örömmel akkor vesznek búcsút, ha a fürdőre nem kellett várniuk. Ennek a valószínűségét a háromszögek területeinek összege és a téglalap területének aránya adja meg. A két háromszögből készíthetünk egy négyzetet:

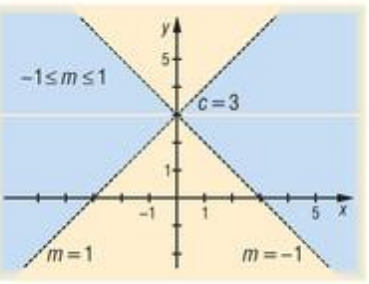
$$P(\text{öröm és boldogság})=\frac{3\cdot 3}{6\cdot 4}=0{,}375.$$

Hát ez bizony nem túl sok… Érdemes lenne valami rendszert vinniük a reggeli készülődésbe.

4528 Az egyenletben m jelöli az egyenes meredekségét, c pedig a függőleges eltolás mértékét.

Keressünk olyan egyeneseket, melyek kielégítik a metszésre kapott feltételt.

Például ha $c=3$ lenne, akkor m értékét a $[-1;1]$ intervallumból választhatnánk tetszőlegesen. (Ez azonban nem felel meg a feladat megoldásának, hiszen c értéke nem lehet 2-nél nagyobb.)

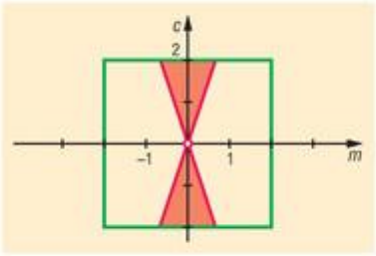




Ha $c = 2$, akkor m legalább $-\frac{2}{3}$, legfeljebb $\frac{2}{3}$ lehet.

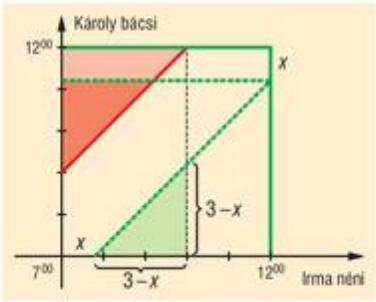
Ha $c = 1$, akkor m legalább $-\frac{1}{3}$, legfeljebb $\frac{1}{3}$ lehet. Hasonlóan kapjuk a negatív c-re adódó értékeket. Érdekes módon, ha $c = 0$, akkor m nem vehet fel értéket, hiszen bárhogy is adjuk meg, az egyenes metszeni fogja a $[-3; 3]$ intervallumon az x tengelyt.

Ábrázoljuk egy m–c koordináta-rendszerben a lehetséges és a feltételeknek megfelelő paramétereket. Ezt látjuk a jobb oldali ábrán, a piros színű rész a számunkra kedvező. A kérdezett valószínűség:



$$p = \frac{4 \cdot \frac{2}{3}}{4 \cdot 4} = \frac{1}{6}.$$

4529 Képzeljük el a konyhába való belépési időpontokat egy derékszögű koordináta-rendszerben. Jelöljük az abszcisszatengelyen Irma néni, az ordinátatengelyen Károly bácsi belépésének idejét. A tengelyeken mérjük az egységet órában. Irma néniről ismert, hogy 2 órát tölt a konyhában, Károly bácsi ottlétének hosszát jelölje x. x nem lehet kisebb 0-nál és nem lehet nagyobb 3-nál, hiszen akkor már biztosan rányit egyikük a másikra. Azt is tudjuk, hogy Irma néninek legkésőbb 10^{00}-kor el kell kezdeni a főzést (függőleges szaggatott vonal).



A piros színű rész azokat a pontokat jelöli, amikor Károly bácsi beléphet a konyhába Irma néni után. Ezt biztosan ismerjük. Nem ismerjük x értékét. Annyit tudunk, hogy x befolyásolja az alsó zöld háromszög területét, illetve magát az eseményteret is (a tengelyek és a velük párhuzamos szaggatott vonalak által határolt téglalap). A zöld háromszögből és a piros háromszögnek az eseménytérbe eső részéből össze tudunk állítani egy $(3 - x)$ oldalú négyzetet. Az eseménytér egyik oldala biztosan 3 (Irma néni konyhában töltött ideje miatt). Írjuk fel a területegységek hányadosát x függvényében:

$$P(\text{nem zavarják egymást}) = \frac{(3-x)^2}{3 \cdot (5-x)}.$$

Most próbáljunk meg válaszolni a kérdésekre.

a) Ha azt szeretnénk, hogy az ebédfőzés megzavarásának valószínűsége 0,5 alatt maradjon, akkor 0,5-nél nagyobbá kell tenni az előző valószínűséget. Szorozzunk a nevezővel (mivel $0 \le x < 3$, az egyenlőtlenség iránya nem változik), majd rendezzünk egy oldalra:

$$\frac{(3-x)^2}{3 \cdot (5-x)} > 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad (3-x)^2 > 1{,}5 \cdot (5-x) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4{,}5x + 1{,}5 > 0.$$

Innen:

$$x_{1,2} = \frac{4{,}5 \pm \sqrt{4{,}5^2 - 4 \cdot 1{,}5}}{2}, \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 0{,}36 \quad \text{és} \quad x_2 \approx 4{,}14.$$

Feltételeinknek csak a kisebb érték felel meg. Mivel a másodfokú kifejezés egy felfelé nyíló parabola, így az egyenlőtlenség megoldása:

$$0 \le x < 0{,}36.$$

Azaz ha Károly bácsi 0,36 óránál (kb. 21 perc és 36 másodpercnél) kevesebb időt tölt el a konyhában, akkor 50%-nál nagyobb a valószínűsége, hogy nem akadályozza az ebédfőzést.



b) Annál kisebb a másik megzavarásának valószínűsége, minél nagyobb a $p=\frac{(3-x)^2}{3\cdot(5-x)}$ kifejezés értéke. Vizsgáljuk a kifejezést a $0\le x<3$ intervallumon. Néhány érték behelyettesítése után azt sejtjük, hogy $x=0$-ra kapjuk a legnagyobb értéket, mégpedig $p_{max}=\frac{3}{5}$. Hogyan igazolhatnánk ezt?

Azt mutatjuk meg, hogy p a p_{max} értéknél csak kisebb lehet minden $0<x<3$ esetén:

$$\frac{(3-x)^2}{3\cdot(5-x)}<\frac{3}{5}.$$

Tüntessük el a törteket, majd fejtsük ki a zárójelet, és rendezzük az egyenlőtlenséget egy oldalra (pozitív számmal szorzunk):

$$5\cdot(3-x)^2<9\cdot(5-x),$$
$$45-30x+5x^2<45-9x,$$
$$5x^2-21x<0,$$
$$x\cdot(5x-21)<0.$$

Megoldása:

$$0<x<4{,}2 \quad \text{(egyenes állású parabola)}.$$

Mivel $]0;3[\subset]0;4{,}2[$, ezért valóban teljesülnek a fenti egyenlőtlenségek.

Végeztünk: Károly bácsi akkor akadályozza a legkisebb,

$$1-p_{max}=\frac{2}{5}$$

valószínűséggel az ebéd elkészítését, ha 0 órát tölt el a konyhában, azaz a közelébe sem megy.

Megjegyzés: Ezt Irma néni a fenti példa megoldása nélkül is nagyon jól tudja.

Várható érték (emelt szintű tananyag) – megoldások

4530 $M=0{,}1\cdot1+0{,}2\cdot(-2)+0{,}3\cdot3+0{,}4\cdot(-4)=-1$. Nem érdemes a játékban részt venni.

4531 $M=0{,}4\cdot1+0{,}3\cdot(-2)+0{,}2\cdot3+0{,}1\cdot(-4)=0$. Igen, érdemes a játékban részt venni.

4532 $M=\frac{1}{6}\cdot1+\frac{1}{6}\cdot2+\frac{1}{6}\cdot3+\frac{1}{6}\cdot4+\frac{1}{6}\cdot5+\frac{1}{6}\cdot6=\frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=3{,}5.$

4533 *a)* $M_A=\frac{1}{2}\cdot(-10)+\frac{1}{2}\cdot8=-1$; *b)* $M_B=\frac{1}{2}\cdot10+\frac{1}{2}\cdot(-8)=1$.

4534 $M=\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}\cdot1145+\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\cdot17690+\frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}\cdot2127600+\frac{\binom{5}{5}\cdot\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}\cdot675000000\approx75{,}5$ Ft.

$75{,}5-225=-149{,}5$. Nem érte meg.



4535 *a)* Az első pörgetéskor akkor éri el a legnagyobb pontnövekedést, ha 3000-et forgat. Ezután viszont mindig kétszer a duplázót kell kiforgatnia, azaz maximum 20 000 pontot érhet el.

b) A kerék nyolc mező van és feltételezzük, hogy nem csalnak a játékban, azaz minden mezőnek ugyanakkora a valószínűsége. A duplázó 2000-rel növeli, a felező 1000-rel, a negyedelő 1500-zal, a nullázó 2000-rel csökkenti a pontszámot, ezért a pörgetéskor várhatóan kapható pontszám:

$$M = \frac{1}{8}\cdot(-2000) + \frac{1}{8}\cdot(-1500) + \frac{1}{8}\cdot(-1000) + \frac{1}{8}\cdot(-1000) +$$
$$+ \frac{1}{8}\cdot 1000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 + \frac{1}{8}\cdot 3000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 = 312{,}5.$$

A forgatás után a játékosnak sok ilyen helyzetet tekintve átlagosan

$$2000 + 312{,}5 = 2312{,}5$$

pontja lesz.

c) Ha lenullázta magát, akkor a számára negatív mezőket nem kell figyelembe venni, hiszen ennél kevesebb pontja nem lehet. Hasonló a helyzet a duplázóval is. Így:

$$M = \frac{1}{8}\cdot 1000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 + \frac{1}{8}\cdot 3000 = 750.$$

Sok ilyen szituáció után körülbelül 750 pont lesz a pontjainak átlaga.

d) 10 000 pont esetén a duplázó ugyanennyivel növeli a pontok számát, illetve a felező 5000-rel, a negyedelő 7500-zal, a nullázó 10 000-rel csökkenti a pontokat. Tehát:

$$M = \frac{1}{8}\cdot(-10000) + \frac{1}{8}\cdot(-7500) + \frac{1}{8}\cdot(-5000) + \frac{1}{8}\cdot(-1000) +$$
$$+ \frac{1}{8}\cdot 1000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 + \frac{1}{8}\cdot 3000 + \frac{1}{8}\cdot 10000 = -937{,}5.$$

Ebben a szituációban (sok játék átlagát tekintve) a játékos pontszáma $10000 - 937{,}5 = 9062{,}5$ pontra csökken. Úgy tűnik, hogy minél több pontja van egy játékosnak, az arányosan csökkentő és a nullázó mezők annál jobban csökkentik a pontjait.

4536 A játékos nyereményét a játék árának kell egyensúlyba hozni. Azaz akár a játékos, akár a játékot szervező Dani várható nyereménye 0 kell, hogy legyen. Mivel a játékos nyereménye $\frac{1}{3}\cdot 6 = 2$ játékeuró, ezért a játék árának is 2 eurót kell választani. (Az egyiket minden fordulóban „megnyeri" valamelyik fél, a másikat „elveszíti".)

4537 Tekintsük Balázs szempontjából a bevételeket és a kiadásokat. A játék ára (2 euró) Balázsnál marad, ha a játékra befizető veszít. Ha a játékos nyer, akkor 6 eurót fizet neki Balázs. Ez csak 4 euró veszteség Balázsnak, hiszen előtte 2 euróért a játékos megvette a játékot. A két esemény közül az egyik biztosan bekövetkezik: ha egyiknek x valószínűséget tulajdonítunk, akkor a másik $(1 - x)$ valószínűséggel következik be.

A kérdés: hogyan válasszuk meg a valószínűségeket, hogy a játék várható értéke Balázs szempontjából 1 legyen?

Írjuk fel a várható értéket:

$$(1 - x)\cdot 2 + x\cdot(-4) = 1, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{1}{6}.$$

Tehát Balázsnak úgy kell meghirdetnie a játékot, hogy a játékos csak egy dobott szám esetén nyerjen. Például a hatos dobásra fizet nyereményt, a többire nem.



4538 Tegyük fel, hogy a kezdőcsapat 10 tagjából x fő rutinos. Ekkor $(10-x)$ fő tapasztalatlan. Azt szeretnénk, ha várhatóan legalább hat fő berúgná a tizenegyest:

$$0{,}8x + 0{,}25 \cdot (10 - x) \geq 6,$$
$$0{,}55x \geq 3{,}5,$$
$$x \geq 6{,}36.$$

Ezek szerint legalább hét tapasztalt játékosnak kell lennie a csapatban.

4539 *a)* Nyilván akkor éri meg a játékosnak, ha a játék várható értéke pozitív. A várható értéket növeljük, ha a játékos számára kedvezőtlen (negatív) nyereményeket a kisebb valószínűségű, a kedvező (pozitív) nyereményeket a nagyobb valószínűségű esetekhez rendeljük. Például:

$$P(-4) = 0{,}2; \quad P(-2) = 0{,}1; \quad P(3) = 0{,}3; \quad P(1) = 0{,}4$$

esetén a várható érték már pozitív:

$$M = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot (-2) + 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot (-4) = 0{,}3.$$

b) A legnagyobb várható érték akkor lehetséges, ha a legkedvezőtlenebb esethez (-4) rendeljük a legkisebb valószínűséget, majd a következőhöz a következőt stb.:

$$P(-4) = 0{,}1; \quad P(-2) = 0{,}2 \quad \text{és} \quad P(3) = 0{,}4; \quad P(1) = 0{,}3.$$

Ekkor a várható nyeremény:

$$M = 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot (-2) + 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot (-4) = 0{,}7.$$

4540 *a)* Egy vaníliás krémtúrót a visszatevés nélküli esetet tekintve legalább elsőre vagy legfeljebb hetedikre vehetünk ki a dobozból. Annak a valószínűsége, hogy elsőre ilyen kerül a kezünkbe, 0,4. Tekintsünk egy közbülső esetet, például azt, ha negyedikre vesszük ki a vaníliást: ebben az esetben elsőre, másodikra, harmadikra meggyest vagy kekszest kell kivennünk:

$$P(\text{negyedik a vaníliás}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \approx 0{,}0952.$$

Összesen hét eset lehet, valószínűségeik az előzőhöz hasonlóan írhatók fel. A várható érték:

$$M = \frac{4}{10} \cdot 1 + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2 + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot 3 + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot 4 + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot 5 +$$
$$+ \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot 6 + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot 7 \approx 2{,}2.$$

Ha a dobozban 4 vaníliás, 2 meggyes és 4 kekszes krémtúró van, akkor visszatevés nélkül várhatóan másodikra veszünk ki vaníliást.

b) Ha visszatesszük a kivett krémtúrókat, akkor a húzások között nem változnak a valószínűségek értékei. Vagyis a vaníliás kivételének valószínűsége 0,4; a nem vaníliásé minden esetben 0,6. Rossz hír, hogy húzhatunk folyamatosan nem vaníliásat, tehát akár végtelen sok esetünk is lehetséges. Annak a valószínűsége, hogy csak negyedikre vesszük ki kedvencünket:

$$P(\text{negyedik a vaníliás}) = 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 = 0{,}0864.$$

Az első 10 tagot kiszámítva a várható érték:

$$M = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 \cdot 4 + 0{,}6^4 \cdot 0{,}4 \cdot 5 +$$
$$+ 0{,}6^5 \cdot 0{,}4 \cdot 6 + \ldots + 0{,}6^9 \cdot 0{,}4 \cdot 10 \approx 2{,}42.$$

(Ha az első 200 tagot írjuk fel, a várható érték akkor is csak 2,5-nek adódik.) Várhatóan másodikra vagy harmadikra fogjuk kivenni kedvenc krémtúrónkat.

Megjegyzés: Bizonyítható, hogy minden tagot számba véve az összeg 2,5-nek adódik.



4541 *a)* Jelölje x a játékos éppen aktuális pontszámát ($0 \le x$). Ekkor a duplázó x, a nullázó $-x$, a negyedelő $\left(-\frac{3x}{4}\right)$, a felező $\left(-\frac{x}{2}\right)$ „megnyert” pontot jelent. A várható érték x függvényében:

$$M(x) = \frac{1}{8}\cdot(-x) + \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{3\cdot x}{4}\right) + \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right) +$$
$$+\frac{1}{8}\cdot(-1000) + \frac{1}{8}\cdot 1000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 + \frac{1}{8}\cdot 3000 + \frac{1}{8}\cdot x =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\left(5000 - \frac{5}{4}\cdot x\right) = 625 - \frac{5}{32}\cdot x.$$

Ez a várható érték azonban csak akkor számítható, ha a játékosnak van pontja. Ugyanis 0 pont esetén az előző szerencsekerekes feladat *c)* pontjában kiszámított 750 pont várható.

A játékosnak eredetileg x pontja volt, ezt növelte/csökkentette a fenti értékkel. Így most pontjainak száma:

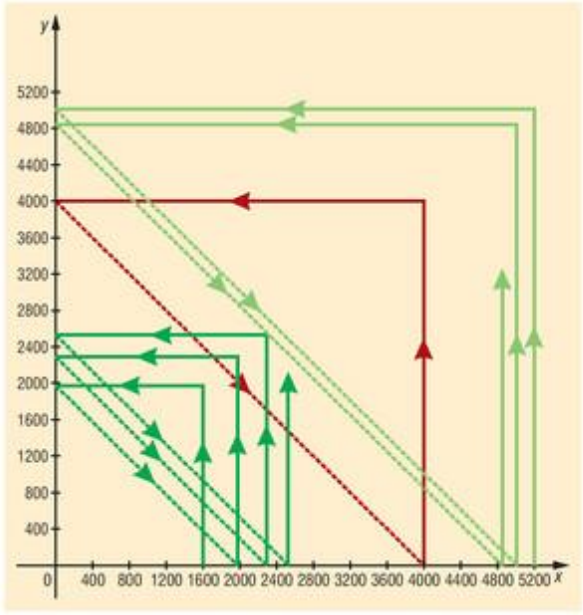
$$\text{összpontszám} = \begin{cases} x + 625 - \frac{5}{32}\cdot x = \frac{27}{32}\cdot x + 625, & \text{ha } x > 0, \\ 750, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ez nem befolyásolja nagymértékben a játék kimenetelét, hiszen ha $x = 1$, akkor várhatóan 626 pont lesz a kerék megforgatása után.

b) Az előző pontban kiszámolt $M(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő lineáris függvény, zérushelye $x = 4000$. Ez az a pontszám, amellyel ha rendelkezik a játékos, akkor a játék igazságos.

Ha ennél több ponttal rendelkezik, akkor a játék a játékos számára kedvezőtlen, hiszen nagy átlagban levonnak tőle valamennyi pontot.

Ha 4000 pontnál kevesebbet gyűjt, akkor a játék kedvező a játékos számára, hiszen a várható érték pozitív. Sőt: minél jobban eltérünk ettől az értéktől, annál többet nyer vagy veszít.



Így már az is világos, hogy

– a legnagyobb várható nyereménye miért akkor van a játékosnak, amikor éppen lenullázta magát;

– ha elég sokáig játszik a játékos, akkor a nyereménye 4000 pont körül lesz. Ezt a várható értékből megállapított függvény alapján szemléltethetjük is. Az x tengelyen az aktuális pontszámot, az y tengelyen a forgatás utáni (várható) pontszámot jelöljük.

Ha például 1600 pontja van, akkor várhatóan 1975 pontja lesz. Az 1975 pontról újra forgatva 2291,4. Erről 2258,4 stb. Mindig közelebb kerül a 4000 ponthoz (sötétzöld töröttvonal, a haladási irányt a nyilak mutatják). Ha azonban 5200 pontja van, akkor várhatóan 5012,5 pontja lesz a kerék pörgetése után. Újra forgatva már csak 4854,3 stb. (világoszöld vonalak). Az egyetlen stabil helyzet az ábrán is 4000 pont (önmagába visszatérő bordó töröttvonal).



Statisztika – megoldások

4542 95 fő.

4543 Legalább az 5. helyre.

4544 5,5.

4545 *a)* 20 euró. *b)* 3 darab.

4546 5 percet.

4547 *a)* 50; *b)* 51.

4548 *a)* Jeles. *b)* Jó.

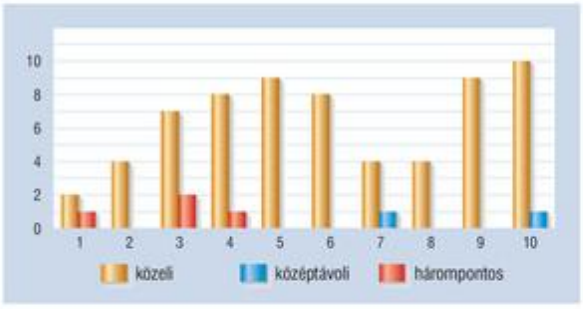
4549 65,4 m^3.

4550 *a)* 9 mm; *b)* 3 mm.

4551 9.

4552 $\frac{4+4+7+x+11}{5}=7$, ahonnan $x=9$. A keresett minta: 4, 4, 7, 9, 11.

4553 A keresett oszlopdiagram:



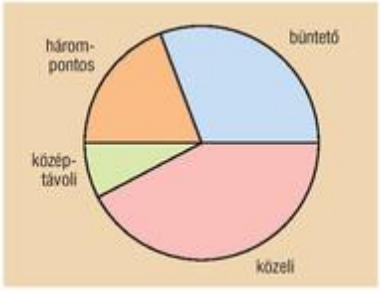
4554 Mivel 2ZK + 2KK + 3PK + BDK = 360°, így:

$2ZK \approx 152{,}3°$;

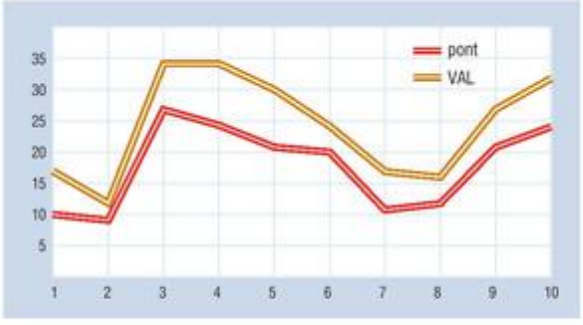
$2KK \approx 27{,}7°$;

$3PK \approx 69{,}2°$;

$BDK \approx 110{,}8°$.

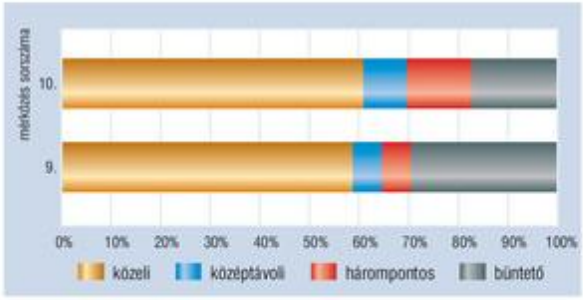


4555 Látható, hogy Roland értékét elsősorban a dobott pontok száma határozza meg, ez teszi ki a VAL-pontszám legnagyobb részét.





4556 Roland a 10. mérkőzésen az előzőhöz viszonyítva bátrabban próbálkozott a középtávoli, és méginkább a távoli dobásokkal.



4557 *a)* A legnagyobb és legkisebb érték alapján az osztályköz:

$$\frac{27-9}{3}=6.$$

Nagyon jó mérkőzés	(22–28)	3
Jó mérkőzés	(15–21)	3
Közepes mérkőzés	(8–14)	4

b) $A=\dfrac{10+9+27+24\cdot 2+21\cdot 2+20+11+12}{10}=17{,}9.$

c) $A_{\text{gyt}}=\dfrac{4\cdot 11+3\cdot 18+3\cdot 25}{10}=17{,}3.$

d) Az eltérés 0,6. Oka, hogy több érték is felső kategóriahatár közelébe esik (21, 27).

4558 *a)* A legnagyobb és legkisebb érték alapján az osztályköz:

$$\frac{100-50}{4}=12{,}5.$$

I. kategória	(88–100,5)	2
II. kategória	(75–87,5)	2
III. kategória	(62–74,5)	0
IV. kategória	(49–61,5)	6

b) $A=\dfrac{75+3\cdot 50+88+83+2\cdot 60+57+100}{10}=67{,}3\%.$

c) $A_{\text{gyt}}=\dfrac{2\cdot 94{,}25+2\cdot 81{,}25+6\cdot 55{,}25}{10}=68{,}25\%.$

d) Az eltérés minimális: 0,95%. Mivel több volt a kategória, kisebbek lettek az eltérések a kategóriaközepektől.

4559 *a)* Jelölje R a terjedelmet:

$$R_{\text{Kb}}=1-0=1 \quad \text{és} \quad R_{\text{3P\%}}=100-0=100\%.$$

Nem tudtunk meg fontos adatot.

b) Első minta:

0%, 0%, 0%, 0%, 0%, 0%, 0%, 0%, 0%, 100%.

$A_{\text{első}}=10\%.$

Második minta:

0%, 100%, 100%, 100%, 100%, 100%, 100%, 100%, 100%, 100%.

$A_{\text{második}}=90\%.$

4560 *a)* $A_{\text{idő}}=\dfrac{18+27+29+31+40+30+23+22+35+36}{10}=29{,}1$ perc.

b) $s_{\text{idő}}=\sqrt{\dfrac{(18-A)^2+(27-A)^2+(29-A)^2+(31-A)^2+(40-A)^2+(30-A)^2+(23-A)^2+(22-A)^2+(35-A)^2+(36-A)^2}{10}}\approx 6{,}49.$

c) $I=\,]29{,}1-6{,}49;\,29{,}1+6{,}49[\,=\,]22{,}61;\,35{,}59[$. Az intervallumba hat érték esik.



4561 *a)* A rangsorba rendezett adatok:

9, 10, 11, 12, 20, 21, 21, 24, 24, 27.

$Me_{Pt} = 20{,}5$.

b) $AE_{Pt} = \dfrac{|9-Me|+|10-Me|+|11-Me|+|12-Me|+|20-Me|+2\cdot|21-Me|+2\cdot|24-Me|+|27-Me|}{10} = 5{,}5$.

c) $I =]20{,}5 - 5{,}5;\ 20{,}5 + 5{,}5[=]15;\ 26[$. Az adatok közül öt esik a megadott intervallumba.

4562 *a)* Az eladott labdák, a kapott blokkok és a faultok a csapat szempontjából rosszak. Így ezeknél minél kisebb mutatót kell keresni, a többinél minél nagyobbat.

b) Az egyszerűbb döntés kedvéért készítsünk a rangsorokról is táblázatot. Mindegyik esetben adjuk meg mindhárom mutatót (A = átlag, Me = medián, Mo = módusz). A vastagon szedett mutatót választjuk.

Tám	1	1	2	3	3	3	4	4	4	4
Véd	2	2	3	4	4	4	5	5	6	7
ÖL	1	3	4	7	7	7	7	9	9	10
F	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
KF	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5
Bl	1	1	1	2	2	2	2	4	4	5
Kb	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
El	0	0	0	0	1	1	3	3	5	5
Sz	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3
Gp	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2

Támadólepattanók:	$A = 2{,}9$;	$Me = 3$;	$\mathbf{Mo = 4.}$
Védőlepattanók:	$\mathbf{A = 4{,}2;}$	$Me = 4$;	$Mo = 4$.
Összes lepattanó:	$\mathbf{A = 6{,}4;}$	$\mathbf{Me = 7;}$	$\mathbf{Mo = 7.}$
Faultok:	$A = 3$;	$Me = 3$;	$\mathbf{Mo = 2.}$
Kiharcolt faultok:	$A = 3{,}2$;	$Me = 3{,}5$;	$\mathbf{Mo = 4.}$
Blokkok:	$\mathbf{A = 2{,}4;}$	$Me = 2$;	$Mo = 2$.
Kapott blokkok:	$A = 0{,}3$;	$\mathbf{Me = 0;}$	$\mathbf{Mo = 0.}$
Eladott labdák:	$A = 1{,}8$;	$Me = 1$;	$\mathbf{Mo = 0.}$
Szerzett labdák:	$A = 1{,}8$;	$\mathbf{Me = 2;}$	$Mo = 2$.
Gólpasszok:	$A = 0{,}9$;	$\mathbf{Me = 1;}$	$Mo = 0$.

4563 Készítsünk rangsort.

2Z%	64	67	67	67	71	80	80	90	90	100
2K%	0	0	0	0	0	0	0	0	50	100
3P%	0	0	0	0	0	0	0	33	40	100
BD%	50	50	50	57	60	60	75	83	88	100



2Z%:	$A = \mathbf{77{,}6\%}$;	$Me = 75{,}5\%$;	$Mo = 67\%$.
2K%:	$A = \mathbf{15\%}$;	$Me = 0\%$;	$Mo = 0\%$.
3P%:	$A = \mathbf{17{,}3\%}$;	$Me = 0\%$;	$Mo = 0\%$.
BD%:	$A = \mathbf{67{,}3\%}$;	$Me = 60\%$;	$Mo = 50\%$.

Bármelyik dobószázalékot is tekintjük, a számtani átlagot érdemes közzétenni. Mindegyik esetben ez a legnagyobb érték, majd ennél kisebb a medián, végül a módusz.

4564 *a)* A számtani átlag 85,25, ez kerekítve 85 pont.

b) A minta módusza a leggyakoribb elem: 83. A rangsorba rendezett minta mediánja a két középső elem átlaga, ez 84,5. A minta terjedelme: $94 - 76 = 18$.

c) Az osztályközt válasszuk $18:3 = 6$-nak. Így az ábrán látható gyakorisági táblát kapjuk.

A kategória felső határa nem tartozik a kategóriához, kivéve a C kategóriát.

***A* kategória**	(76–82)	2
***B* kategória**	(82–88)	3
***C* kategória**	(88–94)	3

d) A keresett diagram az ábrán látható.



4565 Alkossák az n elemű mintát az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatok. Ekkor a minta átlaga:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

a) Ha az elemeket kicseréljük $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_n + b$-re, akkor A' átlaguk:

$$A' = \frac{x_1 + b + x_2 + b + \ldots + x_n + b}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + n \cdot b}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + b = A + b.$$

b) Ha az elemeket kicseréljük $c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n$-re, akkor A'' átlaguk:

$$A'' = \frac{c \cdot x_1 + c \cdot x_2 + \ldots + c \cdot x_n}{n} = \frac{c \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} = c \cdot \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = c \cdot A.$$

4566 Tételezzük fel, hogy az eredeti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatokból álló n elemű rangsor módusza $Mo = x_m$ $(1 \le m \le n)$, mediánja Me.

Vegyük észre, hogy a módusz nem az elemek nagyságához, hanem az elemek előfordulásához kapcsolódik, a medián pedig az elem rangsorban elfoglalt helyzetéhez! A medián páratlan sok elem esetén $(n = 2k + 1)$ a „középső" elem $(Me = x_{k+1})$, páros sok szám esetén a „középső kettő" elem átlaga $\left(Me = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$.

a) Legyen az új minta $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_n + b$. Az elemekhez hozzáadott b valós szám sem a gyakoriságukon, sem a rangsorban elfoglalt helyzetükön nem változtat. Így az új módusz:

$$Mo' = x_m + b = Mo + b.$$



Páratlan elemszámú minta esetén ($n = 2k + 1$) az eltolt minta Me' mediánja:

$$Me' = x_{k+1} + b = Me + b.$$

Páros elemszámú mintában ($n = 2k$) az új minta Me' mediánja:

$$Me' = \frac{x_k + b + x_{k+1} + b}{2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + b = Me + b.$$

b) Hasonló a helyzet, ha c valós számmal szorozzuk a minta összes elemét:

$$Mo'' = c \cdot x_k = c \cdot Mo.$$

Páratlan elemszámú mintára:

$$Me'' = c \cdot x_{k+1} = c \cdot Me,$$

illetve páros elemszámú mintára:

$$Me'' = \frac{c \cdot x_k + c \cdot x_{k+1}}{2} = c \cdot \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = c \cdot Me.$$

Ez akkor is így van, ha $c = 0$ vagy $c < 0$. Utóbbi esetben a rangsor megfordul, a maximális elem a minimális lesz, és előre kerül.

4567 Legyen az n elemű $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatokból álló minta terjedelme R, szórása s, abszolút átlagos eltérése AE.

a) Legyenek az új minta elemei $x_1 + b$, $x_2 + b$, …, $x_n + b$. Ekkor a terjedelem nem változik:

$$R' = x_{\max} + b - (x_{\min} + b) = x_{\max} - x_{\min} = R.$$

A szórás esetén használjuk ki, hogy a számtani átlag $A + b$-re változik:

$$s' = \sqrt{\frac{\big(x_1 + b - (A + b)\big)^2 + \ldots + \big(x_n + b - (A + b)\big)^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2}{n}} = s.$$

Az abszolút átlagos eltérésben is használjuk ki, hogy a medián $Me + b$-re változik:

$$AE' = \frac{\big|x_1 + b - (Me + b)\big| + \ldots + \big|x_n + b - (Me + b)\big|}{n} = \frac{\big|x_1 - Me\big| + \ldots + \big|x_n - Me\big|}{n} = AE.$$

b) Legyenek az új minta elemei $c \cdot x_1$, $c \cdot x_2$, …, $c \cdot x_n$. Ekkor a terjedelem:

$$R' = c \cdot x_{\max} - c \cdot x_{\min} = |c| \cdot (x_{\max} - x_{\min}) = |c| \cdot R.$$

Az abszolút értéket használnunk kell, $c < 0$ esetben a mintában ugyanis a maximális és a minimális elem felcserélődik.

A szórás esetén használjuk ki, hogy a számtani átlag $c \cdot A$-ra változik:

$$s' = \sqrt{\frac{(c \cdot x_1 - c \cdot A)^2 + \ldots + (c \cdot x_n - c \cdot A)^2}{n}} = \sqrt{c^2 \cdot \frac{(x_1 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2}{n}} = |c| \cdot s.$$

Az abszolút átlagos eltérésben is használjuk ki, hogy a medián $c \cdot Me$-re változik:

$$AE' = \frac{\big|c \cdot x_1 - c \cdot Me\big| + \ldots + \big|c \cdot x_n - c \cdot Me\big|}{n} = |c| \cdot \frac{\big|x_1 - Me\big| + \ldots + \big|x_n - Me\big|}{n} = |c| \cdot AE.$$

4568 Legyen a t elemű minta rangsorba rendezve $x_1, x_2, \ldots, x_t$. Csoportosítsuk őket n darab osztályba, legyen az osztályköz $\frac{x_{\max} - x_{\min}}{n} = d > 0$, és jelölje az osztályközepeket $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Essen az egyes osztályokba rendre $r_1, r_2, \ldots, r_n$ darab adat ($r_1 + r_2 + \ldots + r_n = t$).



Vizsgáljuk meg a minta elemeiből számított A és a gyakorisági táblázatból számított A' átlag eltérését:

$$|A-A'|=\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_t}{t}-\frac{r_1\cdot K_1+r_2\cdot K_2+\ldots+r_n\cdot K_n}{t}\right|=$$

Párosítsuk a minta elemeit a megfelelő osztályközepekkel (az első r_1 darab elemet K_1-gyel stb.):

$$=\left|\frac{(x_1-K_1)+\ldots+(x_{r_1}-K_1)+(x_{r_1+1}-K_2)+\ldots+(x_t-K_n)}{t}\right|\leq$$

Kihasználjuk, hogy $|a+b|\leq|a|+|b|$ háromszög-egyenlőtlenség teljesül akármennyi értékre:

$$\leq\frac{|x_1-K_1|+\ldots+|x_{r_1}-K_1|+|x_{r_1+1}-K_2|+\ldots+|x_t-K_n|}{t}\leq$$

Kihasználjuk, hogy az adott kategóriába eső elemek maximum az osztályköz felével térhetnek el az osztályközéptől:

$$\leq\frac{t\cdot\frac{d}{2}}{t}=\frac{d}{2}.$$

Tehát a gyakorisági táblázatból számított és a valódi átlag legfeljebb az osztályköz felével térhet el egymástól.

4569 Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ minta n elemű, számtani átlaga:

$$A=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

szórása pedig

$$s=\sqrt{\frac{(x_1-A)^2+\ldots+(x_n-A)^2}{n}}.$$

Azt akarjuk bizonyítani, hogy ha s képletében bármely X-re cseréljük A-t, akkor nem kaphatunk kisebb számot az eredeti s-nél. Ehhez megvizsgáljuk az X-től függő (a többi adat rögzített)

$$\sqrt{\frac{(x_1-X)^2+\ldots+(x_n-X)^2}{n}}$$

kifejezést, hogy mely X-re van minimuma. Mivel nemnegatív mennyiség, ott van minimuma, ahol a négyzetének is minimuma van:

$$\frac{(x_1-X)^2+\ldots+(x_n-X)^2}{n}.$$

A nevezőt sem kell figyelembe vennünk, hiszen a minimumot csak a számláló befolyásolja. Így elegendő a négyzeteket megvizsgálni:

$$(x_1-X)^2+\ldots+(x_n-X)^2=x_1^2-2x_1X+X^2+\ldots+x_n^2-2x_nX+X^2=$$
$$=nX^2-2X\cdot(x_1+\ldots+x_n)+x_1^2+\ldots+x_n^2.$$

A kifejezés X-ben másodfokú, mégpedig egy felfelé nyíló parabola ($n>0$).

Tudjuk, hogy az ax^2+bx+c $(a>0)$ kifejezésnek $x_{\min}=-\frac{b}{2\cdot a}$ helyen van minimuma. Jelen esetben $a=n$, $b=-2\cdot(x_1+\ldots+x_n)$. Így:

$$X_{\min}=-\frac{-2\cdot(x_1+\ldots+x_n)}{2\cdot n}=A.$$

Azaz a szórás a számtani átlagra minimális.

4570 Legyen az n elemű rangsor $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mediánját jelölje Me, abszolút átlagos eltérését pedig

$$AE = \frac{|x_1 - Me| + \ldots + |x_n - Me|}{n}.$$

Két lépésben bizonyítjuk az állítást. Először megvizsgáljuk páratlan sok, majd páros sok elemű mintára. Mindkétszer belátjuk, hogy az abszolút átlagos eltérésben Me helyére más számot írva, nem kaphatunk AE-nél kisebb értéket.

I. eset: Ha n páratlan, akkor a medián a minta középső eleme:

$$Me = x_k, \quad \text{ahol} \quad k = \frac{n+1}{2}.$$

Lehetséges, hogy a mintának több eleme is megegyezik a mediánnal. Legyen az első ilyen elem indexe e, az utolsóé u. Így $(u - e + 1)$ darab elemre: $x_e = \ldots = x_k = \ldots = x_u = Me$. (Akár $e = k$ vagy $k = u$.)

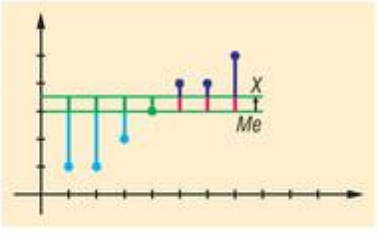
A rangsorban az x_e előtti elemek kisebbek, az x_u után levők nagyobbak a mediánnál. Figyelembe véve a nagyságrendi viszonyokat, az abszolút átlagos eltérés abszolút érték nélküli alakban is írható:

$$AE = \frac{(Me - x_1) + \ldots + (Me - x_{e-1}) + (u - e + 1) \cdot (Me - x_k) + (x_{u+1} - Me) + \ldots + (x_n - Me)}{n}$$

Cseréljük ki a kifejezésben Me-t X-re. AE nagysága csak a számlálóban található X-től függ:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_{e-1}) + (u - e + 1) \cdot (X - x_k) + (x_{u+1} - X) + \ldots + (x_n - X).$$

Növeljük X értékét. Legyen kicsit nagyobb a mediánnál, de még $X < x_{u+1}$. Ekkor az első u tag növekedni fog pontosan $X - x_k$ értékkel, a maradék tagok pedig pontosan ennyivel csökkennek. Mivel $k = \frac{n+1}{2} < u + 1$, több tag fog növekedni, mint amennyi csökken. Így az összeg csak növekedhet, mégpedig $(2u - n) \cdot (X - x_k)$ értékkel. (Az ábrán $e = k = u$. A piros vonalak AE csökkenését, a vastag zöldek a növekedését jelzik.)



Ha X eléri x_{u+1} értékét, akkor az $(u + 1)$-edik zárójelben és mindazokban, ahol x_{u+1}-gyel egyenlő értékek állnak, meg kell fordítani a különbséget:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_{e-1}) + (u - e + 1) \cdot (X - x_k) + (X - x_{u+1}) + \ldots + (x_n - X).$$

Innentől kezdve ezek a tagok az eddigi csökkenés helyett már növekedni fognak. Tehát még több tag növekedik és kevesebb csökken, mint eddig. Így tovább, minél inkább $Me < X$, annál inkább $AE < AE(X)$.

II. eset: Ha n páros, akkor a medián a két középső elem átlaga:

$$Me = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad \text{ahol} \quad k = \frac{n}{2}.$$

Ha a két középső elem egyenlő, akkor az I. esetnél leírtakat szóról szóra alkalmazhatjuk. Ha különbözőek, akkor a mintában nincs olyan elem, amely megegyezne a mediánnal. Sőt, az elemek pontosan fele kisebb és fele nagyobb Me-nél. Abszolút értékek nélkül írva:

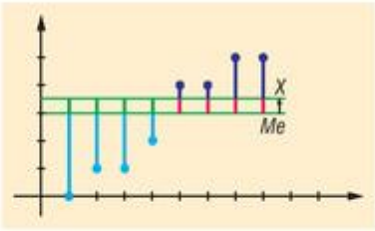
$$AE = \frac{(Me - x_1) + \ldots + (Me - x_k) + (x_{k+1} - Me) + \ldots + (x_n - Me)}{n}.$$

Ismét cseréljük ki a kifejezésben Me-t X-re. AE nagysága csak a számlálótól függ:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_k) + (x_{k+1} - X) + \ldots + (x_n - X).$$



Változtassunk X értékén. Válasszuk nagyobbnak a mediánnál, de még $X < x_{k+1}$ legyen. Ekkor a tagok első fele növekedni, második fele csökkenni fog ugyanazon $X - Me$ értékkel, azaz az összeg nem változik.



Amint $X = x_{k+1}$, a $(k+1)$-edik zárójelben és mindazokban, ahol x_{k+1}-gyel egyenlő értékek állnak, megfordítjuk a különbséget:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_k) + (X - x_{k+1}) + \ldots + (x_n - X).$$

Tovább növelve X-et, az imént megfordított tagok már nem csökkenni, hanem növekedni fognak. Mivel így több tag nő, mint csökken, az összeg is növekedni fog. A gondolatmenet hasonlóan folytatódik, ha $X > x_{k+1}$.

Megjegyzés: Mindkét gondolatmenet hasonlóan végigvihető, ha X értékét csökkentjük Me-ről.

Vegyes feladatok – megoldások

4571 $|J| = 10$, $|I| = x$, $p = 0{,}5 = \frac{x}{10}$. Ebből $x = 5$, ezért csak $I =]1; 6[$ lehet.

4572 $P = \frac{5 \cdot 7}{15 \cdot 35} = \frac{1}{15}$.

4573 $M = 0{,}02 \cdot 1 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}24 \cdot 3 + 0{,}6 \cdot 4 + 0{,}11 \cdot 5 = 3{,}75$ év.

4574 *a)* A csoportba 12-en járnak.

b) $A_{\text{kisc.}} = \frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 17}{12} = 7$; $\quad A_{\text{nagyc.}} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 12 + 3 \cdot 17}{12} = 10{,}75 \approx 11$.

4575 *a)* Igen, $Mo = 2$ és $Me = 3$.

b) Nem.

c) $A = \frac{4 \cdot 4{,}5 + 9 \cdot 12{,}5 + 6 \cdot 20{,}5 + 8 \cdot 28{,}5 + 3 \cdot 36{,}5}{30} = 19{,}7$;

$$s = \sqrt{\frac{4 \cdot (4{,}5 - 19{,}7)^2 + 9 \cdot (12{,}5 - 19{,}7)^2 + 6 \cdot (20{,}5 - 19{,}7)^2 + 8 \cdot (28{,}5 - 19{,}7)^2 + 3 \cdot (36{,}5 - 19{,}7)^2}{30}} \approx 9{,}77;$$

$I =]9{,}93; 29{,}47[$.

d) $AE = \frac{4 \cdot |1 - 3| + 9 \cdot |2 - 3| + 6 \cdot |3 - 3| + 8 \cdot |4 - 3| + 3 \cdot |5 - 3|}{30} \approx 1$;

$I =]2; 4[$.

4576 Ha a korong ($r = 1{,}5$ cm) teljes egészében egy négyzetbe esik, akkor a riasztó csendben marad. Elég egy négyzetet tekintenünk. Ehhez a korong középpontjának egy $(10 - 2 \cdot 1{,}5)$ oldalú négyzetbe kell esnie. (Feltehetjük, hogy érintésre még nem riaszt.) Tehát annak a valószínűsége, hogy nem szólal meg a riasztó, illetve annak a valószínűsége, hogy megszólal:

$$P(\text{csend}) = \frac{49}{100}, \quad \text{illetve} \quad P(\text{riaszt}) = \frac{51}{100}.$$

A válasz a kérdésre igen, a riasztó nagyobb valószínűséggel kezd szirénázni.



4577 A várható érték:

$$M = \binom{7}{0} \cdot 0{,}36^0 \cdot 0{,}64^7 \cdot 0 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}36^1 \cdot 0{,}64^6 \cdot 1 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}36^2 \cdot 0{,}64^5 \cdot 2 +$$

$$+ \binom{7}{3} \cdot 0{,}36^3 \cdot 0{,}64^4 \cdot 3 + \binom{7}{4} \cdot 0{,}36^4 \cdot 0{,}64^3 \cdot 4 + \binom{7}{5} \cdot 0{,}36^5 \cdot 0{,}64^2 \cdot 5 +$$

$$+ \binom{7}{6} \cdot 0{,}36^6 \cdot 0{,}64^1 \cdot 6 + \binom{7}{7} \cdot 0{,}36^7 \cdot 0{,}64^0 \cdot 7 \approx 2{,}52.$$

Tehát várhatóan két vagy három saját számot fog hallani Zsófi.

Készüljünk az érettségire!

Megoldások

Rendszerező összefoglalás 338

Gondolkodási módszerek
Algebra és számelmélet
Függvények
Geometria

Érettségi gyakorló feladatsorok 478



12.5. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – ÖSSZEFOGLALÁS

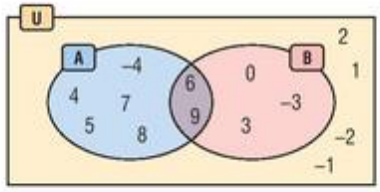
Halmazok – megoldások

5001 *a)* Igen, $|A| = 0$, $A = \emptyset$;
b) Igen, $|B| = \infty$;
c) Igen, $|C| = 3$, $C = \{\{2; 3\}, \{1; 2; 3\}, \{2; 3; 4\}\}$;
d) Nem.

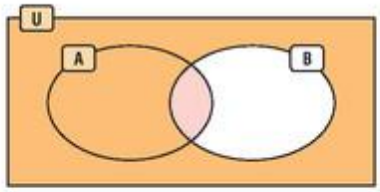
5002 *a)* $\emptyset$, {a}, {b}, {c}, {a; b}, {a; c}, {b; c}, {a; b; c}.
$\emptyset$ diszjunkt minden más részhalmazzal, rajta kívül {a} és {b; c}, {b} és {a; c}, {c} és {a; b} diszjunktak.
b) $|B| = 6$, $|\{B \text{ összes részhalmaza}\}| = 2^6 = 64$.

5003 $A = \{2; 3; 5; 7\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.
a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 9\}$; $A \cap B = \{3; 5; 7\}$; $A \setminus B = \{2\}$; $B \setminus A = \{1; 9\}$;
b) $\overline{A} = \{1; 9\}$, $\overline{B} = \{2\}$;
c) $C = \{1; 2; 4; 6; 8; 9\}$.

5004 $U = \{-4; -3; \ldots; 8; 9\}$, $A = \{-4; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
$B = \{-3; 0; 3; 6; 9\}$.
a) A Venn-diagram az ábrán látható.
b) $\overline{A} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $\overline{B} = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 8\}$.
c) $A \cup B = \{-4; -3; 0; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $A \cap B = \{6; 9\}$,
$A \setminus B = \{-4; 4; 5; 7; 8\}$, $B \setminus A = \{-3; 0; 3\}$.

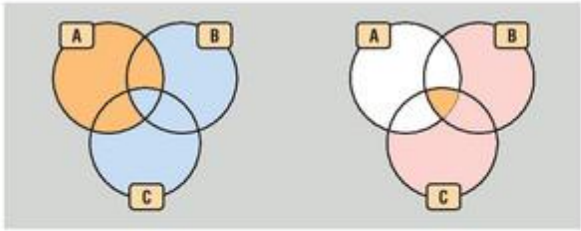


5005 $A \setminus \overline{B} = A \cap B$.



5006 *a)* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5007 A Venn-diagram az ábrán látható.



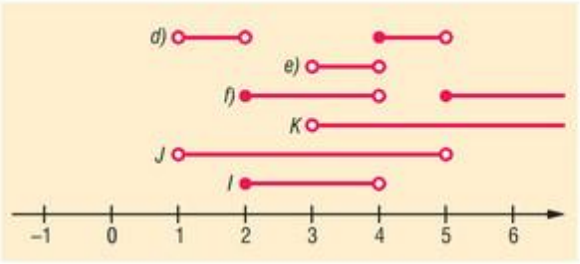
5008 $|U| = |A \cup B| + |\overline{A \cup B}| = |A| + |B| - |A \cap B| + |\overline{A \cup B}| = 6 + 8 - 3 + 13 = 24$.

5009 $|U| = |A| + |B| - |A \cap B| + |\overline{A \cup B}|$; $12 = 4 + 5 - x + 3$; $x = 0$.

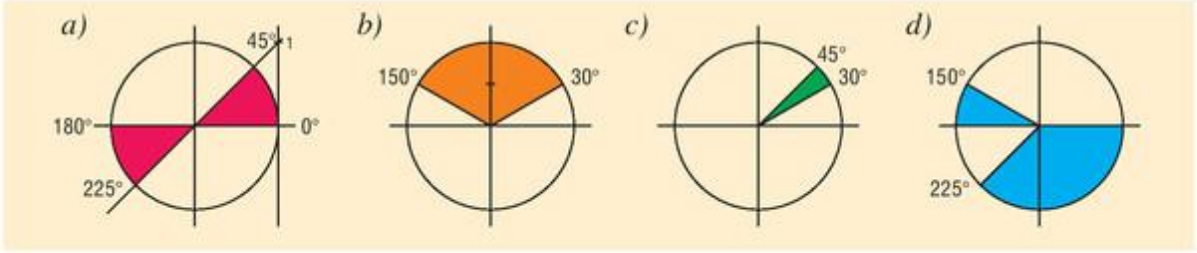
5010 $|U| = |A| + |B \setminus A| + |\overline{A \cup B}|$; $30 = 15 + 7 + x$; $x = 8$.

5011 *a)* $\overline{I} =]2; 5]$;
b) $\overline{I} =]-2; 0]$;
c) $\overline{I} = \{0\} \cup]2; 7]$;
d) $\overline{I} =]-\infty; 0] \cup]2; \infty[$.

5012 *a)* $I = [2; 4[$;
b) $J =]1; 5[$;
c) $K =]3; \infty[$;
d) $J \setminus I =]1; 2[\cup [4; 5[$;
e) $I \cap K =]3; 4[$;
f) $(K \setminus J) \cup I = [2; 4[\cup [5; \infty[$.



5013 *a)* $I = [0°; 45°] \cup [180°; 225°]$;
b) $J = [30°; 150°]$;
c) $J \cap I = [30°; 45°]$;
d) $\overline{I} \setminus J =]150°; 180°[\cup]225°; 360°]$.



5014 *a)* Nullaelemű részhalmaz csak az üres halmaz lehet, tehát a válasz 1. Kilenceleműek azok a részhalmazok, melyeket úgy kapunk, hogy egy elemet elhagyunk A-ból. Mivel 10-féleképpen tehetjük ezt meg, a válasz 10.

b) Annyi k-elemű részhalmaza van, ahányféleképpen a 10 elemből ki tudunk választani ismétlés nélkül k darabot. Tehát $\binom{10}{2} = 45$, $\binom{10}{4} = 210$, $\binom{10}{5} = 252$, $\binom{10}{8} = 45$.

c) $\binom{10}{k} = 120$. Próbálkozással, vagy az előző kérdésre adott válaszok figyelembevételével $k = 3$, illetve $k = 7$.

5015 Például ilyen a következő 4 halmaz: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 4\}$, $C = \{1; 3; 4\}$, $D = \{2; 3; 4\}$.

5016 *a)* Mindkét halmazt többféleképpen is felírhatjuk, például

$$P = (A \setminus C) \cup (B \cap C) \setminus A \quad \text{és} \quad Q = (B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C).$$

b) Azt kell biztosítanunk, hogy a két halmaz közös része üres halmaz legyen:

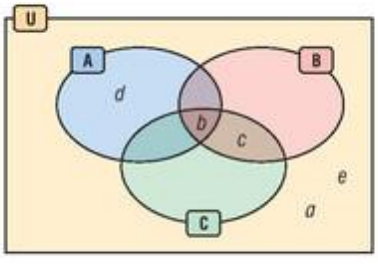
$$[B \cap (A \cup C)] \setminus (A \cap B \cap C) = \varnothing.$$

c) Azt kell biztosítanunk, hogy a P Q-n kívül eső része üres halmaz legyen:

$$A \setminus (B \cup C) = \varnothing.$$

5017 Írjuk b-t a hármas metszetbe. Ekkor c-t B és C kettős metszetbe kell helyeznünk, így d csak A metszeteken kívüli részébe kerülhet. (Közben figyelembe vettük, hogy az elemszámok egyenlők.) Ezek szerint:

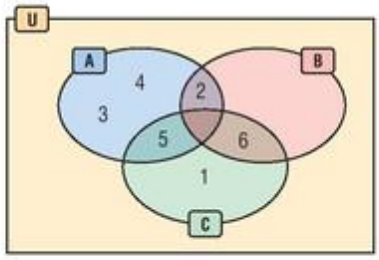
$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{a; e\}.$$



5018 A megoldáshoz töltsünk ki egy Venn-diagramot. A 2-t két helyre írhatjuk, de a második feltétel a hármas metszetet kizárja. A 3-at és a 4-et csak egy helyre írhatjuk ezek után. Az 5 két feltételben is szerepel, így csak egy helyre kerülhet. Végül a 6-ot sem írhatjuk középre.

A megoldás a diagramról leolvasható:

$$A = \{2; 3; 4; 5\},\quad B = \{2; 6\},\quad C = \{1; 5; 6\}.$$

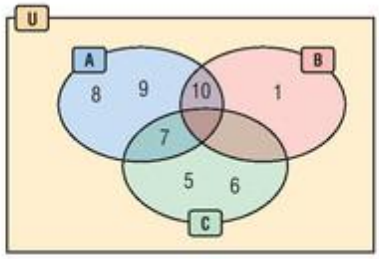


5019 *a)* $A = \{7; 8; 9; 10\}$, $B = \{1; 10\}$, $C = \{5; 6; 7\}$.

b) A Venn-diagram az ábrán látható.

c) Üres halmaz.

d) $|(A \cup B) \cap C| = 1$, egyelemű $\{7\}$.



5020 *a)* Ha C üres halmaz, akkor:

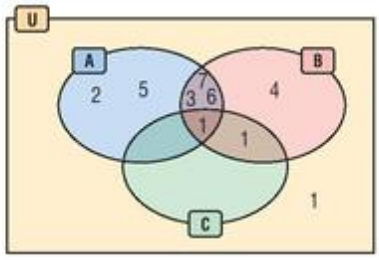
$$A = \{2; 3; 5; 6; 7\},\quad B = \{3; 4; 6; 7\}.$$

b) C eleme csak az 1 lehet. Ezt rögtön két helyre is írhatjuk: vagy a hármas metszetbe, vagy B és C kettős metszetbe. Így:

$$C = \{1\},\quad B = \{1; 3; 4; 6; 7\}$$

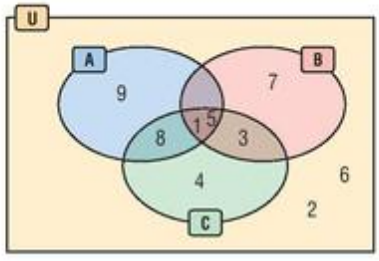
és

$$A = \{1; 2; 3; 5; 6; 7\} \quad \text{vagy} \quad A' = \{2; 3; 5; 6; 7\}.$$



5021 *a)* A Venn-diagram az ábrán látható.

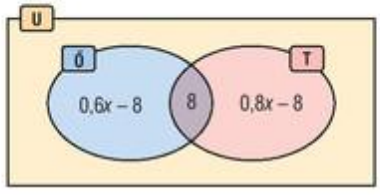
b) A-ba eső elemek összege 23, B-be 16, C-be 21.



5022 *a)*

$$0{,}6x - 8 + 8 + 0{,}8x - 8 = x,$$
$$1{,}4x - 8 = x,$$
$$0{,}4x = 8,$$
$$x = 20.$$

20 fő dolgozik a Kiskunsági Nemzeti Parkban.



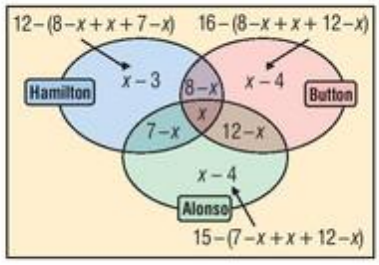
b) $|\acute{O} \setminus T| = 4$ fő.

5023 *a)*

$$x - 3 + 8 - x + x + 7 - x + 12 - x + x - 4 + x - 4 = 20,$$
$$4 = x.$$

4 tanuló gyűjtött eddig mindhárom versenyzőtől dedikált emléket.

b) 0 fő. Nekik már vagy mindhárom versenyzőtől, vagy a másik két említett egyikétől van autogramja.



5024 A szöveg szerint a törpéken kívül még $5 \cdot 7 = 35$ fő jött el a mulatságra, azaz bányászok összesen 42-en voltak. A szita-formula így alakul, ha x-szel a narancssárga sapkás telepvezető vájárok számát jelöljük:

$$42 = 21 + 21 + 20 - (7 + 7 + 6) + x.$$

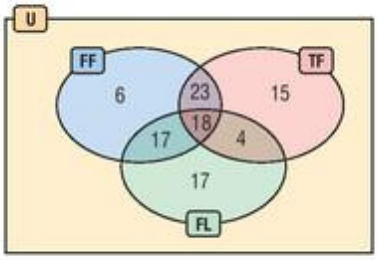
Innen $x = 0$. Tehát ilyen bányász nem vett részt a bulin.

5025 *a)* Alkalmazzuk a szita-formulát. A számba vett kutyák száma 100, hiszen egy megszökött:

$$100 = 64 + 60 + 56 - (41 + 22 + 35) + x,$$

ahol x jelöli a hármas metszet elemszámát. Innen $x = 18$.

b) Belülről kifelé haladva töltsük ki az elemszámokkal a Venn-diagramot, amelyből leolvasható a kérdezett érték: 17 ilyen kutya van. (Az elmenekült jószágról nincs információnk.)



5026 *a)* Lehetséges, hogy senki sem kért egyszerre mindkét ételfajtából (0). Maximum pedig a kisebb elemszámú halmaz elemszámával egyenlő lehet a számuk (8). Tehát 0 és 8 közötti a számuk.

b) Ha senki sem kérte együtt a levest és a főételt, akkor $8 + 10 = 18$ fő ült asztalhoz. Ha minden levest evő rendelt főételt is, akkor $8 + 10 - 8 = 10$ fő ült le ebédelni a panzióban.

5027 $|C| = 13$. A szöveg alapján ismertek a következők:

$$|A| = 14, \quad |B| = 9, \quad |A \cap C| = 7, \quad |A \cap B| = 6, \quad |B \cap C| = 4,$$
$$|A \cap B \cap C| = 2, \quad |\overline{A \cup B \cup C}| = 3.$$

Írjuk fel a logikai szita-formulát az alaphalmazra kiegészítve:

$$|U| = |A \cup B \cup C| + |\overline{A \cup B \cup C}| = |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| - |B \cap C| +$$
$$+ |A \cap B \cap C| + |\overline{A \cup B \cup C}| = 13 + 14 + 9 - 7 - 6 - 4 + 2 + 3 = 24.$$

5028 *a)* Helyettesítsünk be $x = 1$-et: $\frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} < 1$. Nem megoldás az $x = 1$.

b) Találgatás helyett oldjuk meg a feladatot. A közös nevező $2x + 8$, átrendezve a $\frac{x-6}{2x+8} \geq 0$ törtet kapjuk. Egy tört akkor nemnegatív, ha számlálójának és nevezőjének azonos az előjele (a számlálója lehet nulla is). Ez két esetben lehetséges:

$x - 6 \geq 0$ $(x \geq 6)$ és $2x + 8 > 0$ $(x > -4)$, ekkor a megoldás $x \geq 6$;

$x - 6 \leq 0$ $(x \leq 6)$ és $2x + 8 < 0$ $(x < -4)$, ekkor a megoldás $x < -4$.

Ebből látható, hogy a legkisebb pozitív megoldás az $x = 6$. Legnagyobb negatív megoldás nincs.

c) A páros számlálójú törtek egyszerűsíthetők, így nem valódiak. A törtek a $[4, 6[$-ból valók:

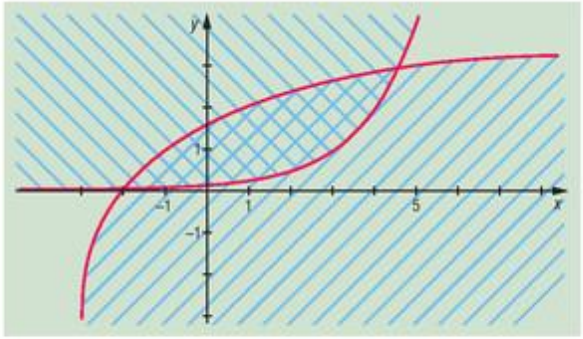
$$\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}.$$

5029 Rajzoljuk meg a transzformált függvényeket közös koordináta-rendszerben.

a) $L = ///$;

b) $M = \backslash\backslash\backslash$;

c) $L \cap M = XXX$.



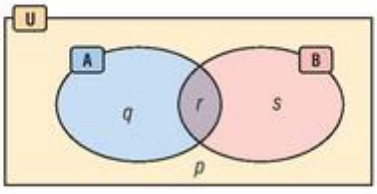
5030 Képzeljünk el egy táblázatot, melynek felső sorában felsoroljuk az U halmaz elemeit, első oszlopában pedig a feladat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazait. Az adott elem oszlopának és az adott halmaz sorának metszetében egy X-szel jelöljük, hogy az elem beletartozik a halmazba.

Úgy kell elhelyeznünk az X jeleket, hogy pl. az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ halmazok mindegyikében szerepeljen az n elem. Ugyanakkor $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}, A_n$ halmazok mindegyikének eleme legyen $(n-1)$, továbbá $A_1, A_2, \ldots, A_{n-3}, A_{n-1}, A_n$ halmazoknak eleme legyen $(n-2)$ stb. Így tulajdonképpen ismerjük az A_1 halmaz elemeit. Minden U-beli elem eleme, csak az 1 nem: $A_1 = \{2; 3; \ldots, n\}$.

Hasonlóan adódik ez így a többi halmazra is.

Halmaz\Elem	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
A_1		X	X		X	X	X
A_2	X		X		X	X	X
...							
A_{n-1}	X	X	X		X		X
A_n	X	X	X		X	X	

5031 Tekintsük a halmazábrát.



Írjuk fel a megadott feltételeket p, q, r, s segítségével.

$$\left.\begin{aligned} 2(q+r) &= p+q+r+s \\ 3r &= r+s \\ 10(q+r+s) &= 9(p+q+r+s) \end{aligned}\right\}$$

Ez négy ismeretlen, de csak három egyenlet. Nem tudjuk egyértelműen megoldani, de azért próbáljuk meg. Alakítsuk át az egyenleteket, a középsőből már ki van fejezve s.

$$\left.\begin{aligned} q+r &= p+s \\ 2r &= s \\ q+r+s &= 9\mathrm{p} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} q &= p+r \\ q+3r &= 9\mathrm{p} \end{aligned}\right\}$$

A q ismeretlen is ki van már fejezve az első egyenletből:

$$p + 4r = 9p,$$

ahonnan $r = 2p$. Ekkor viszont $q = 3p$, $s = 4p$. Mivel A, B, U egyike sem üres, a legkisebb pozitív szám, amit p helyére helyettesíthetünk, $p = 1$. Így $|A| = 5$, $|B| = 6$, $|U| = 10$.

5032 *a)* Gondoljuk meg, hogy bármely J_i halmaznak eleme a 0, de minden más elemről ki lehet mutatni, hogy előbb-utóbb már nem esnek az intervallumokba: $J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap \ldots = \{0\}$.

Ugyanis tételezzük fel, hogy valamely i-re $p\ (p > 0) \in J_i$. Bármely pozitív p-hez találunk olyan m pozitív egész értéket, amelyre $\frac{1}{m} \le p$. Ha $n > m$, akkor $p \notin J_n$. Hasonló a meggondolás, ha $p < 0$.

b) Az I_n sorozat összes eleméből alkotott metszetnek nincs közös eleme.

c) Először is $J_n \setminus I_n = \left]-\frac{1}{n}; 0\right]$. Ezen halmazoknak egyetlen közös eleme a 0, azonban más ilyen elem nincs. Ezért $J_1 \setminus I_1 \cap J_2 \setminus I_2 \cap J_3 \setminus I_3 \cap \ldots = \{0\}$.

Kijelentések, események – megoldások

5033 *a)* $A + B$ = Szép idő lesz vagy kirándulni megyek. $A \cdot B$ = Szép idő lesz és kirándulni megyek.

b) $\overline{A} \cdot B$.

c) Bármilyen, ugyanis szép idő esetén egyszerűen teljesült az implikáció. Rossz idő esetére pedig nem állítottam semmit, tehát bármit csinálhatok – kirándulhatok is – szószegés vétsége nélkül.

5034 *a)* $|A| = 10$, $|B| = 6$, $|C| = 4$.

b) $A \cdot B = \{6; 12; 18\}$ = hattal osztható számok;

$B + C = \{3; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20\}$ = hárommal vagy öttel osztható számok;

$\overline{A} \cdot C = \{5; 15\}$ = öttel osztható páratlan számok.

c) $D = \{5\}$ = (olyan páratlan szám, ami hárommal nem, de öttel osztható) = $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$.

5035 *a)* $A + B + C = \{2; 4; 6; 8\}$, $A \cdot B \cdot C = A \cdot B \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot B \cdot C = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = \varnothing$, $B \cdot \overline{A} \cdot \overline{C} = \{6\}$.

b) $\{10\} = \overline{A + B + C}$.

5036 A helyesen kitöltött táblázat:

	A	B	C	D
Kijelentés	H	I	I	H
Megfordítása	I	H	I	H

5037 *a)* Igen. A „minden ember fenség" egy következtetés: Ha ember vagyok, akkor fenség vagyok. A második kijelentés szerint ember vagyok, így a feltétel teljesül. Amiből valóban következik, hogy fenség vagyok.

b) Nem. Példaként építsünk nádfedelet egy tízemeletes házra. Nyilván ez az épület nádfedeles, de nem tanya.

5038 *a)* Tagadás: Van olyan deltoid, amelynek átlói nem merőlegesek egymásra. Ilyen deltoid nincs, tehát az állítás igaz, a tagadás hamis.

b) Tagadás: Bármely háromszög legkisebb szöge legfeljebb 60°-os. Ez igaz, a háromszög legkisebb szöge nem lehet nagyobb, mint 60°. Ugyanis az állítás igazságát feltételezve:

$$60° < \alpha < \beta < \gamma, \quad \text{így} \quad 180° = 3 \cdot 60° < \alpha + \beta + \gamma,$$

ami (legalábbis az euklideszi geometriai rendszerben) nem igaz, hiszen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Tehát az állítás hamis, a tagadás igaz.

c) Tagadás: Van olyan hattal osztható szám, amely nem osztható kilenccel. A tagadás igaz, például maga a 6 ilyen szám. Az állítás hamis.

d) Tagadás: Bármely pozitív egész prímtényezős felbontásában szerepel a 17. Az állítás igaz, a tagadás hamis.

e) Tagadás: Volt olyan törpe, aki magasabb volt Hófehérkénél. Bár nem tudjuk pontosan a történelmi igazságot, feltételezzük, hogy minden törpe jóval alacsonyabb volt az illető hölgynél. Tehát az állítás igaz, a tagadás hamis.

f) Tagadás: Van alkalom, hogy leírom azt: soha. Aki ezt a feladatot írásban megoldja, arra a tagadás biztosan teljesül. (Nagy valószínűséggel a többiekre is.)

g) Az állítás tagadását úgy tudjuk meggondolni, ha átfogalmazzuk: A 7-nek minden hatványa osztható 3-mal. Így már világos a tagadás: Van olyan szám, amely 7-nek hatványa és nem osztható 3-mal. Utóbbi kijelentés igaz (pl. 49) és az állítás hamis.

h) Először értelmezzük az eredeti mondatot.

Adjunk meg egy pozitív α szöget (pl. $\alpha = 1°$) és vizsgáljuk meg, mely szabályos sokszögek külső szögei kisebbek α-nál.

Bármely konvex n-szög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$. A szabályos n-szög egy belső szögének nagysága: $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. A külső szög mértéke $180° - \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = \frac{360°}{n}$.

Ha most azt akarjuk, hogy ez a szám 1°-nál kisebb legyen, akkor legyen $n > 360$. Tehát pl. a 361 oldalú szabályos sokszög minden külső szöge kisebb, mint 1°. (Az $n = 360$ még éppen nem megfelelő, hiszen az állítás teljesüléséhez szigorúan kisebb kell.)

Hasonlóan általában: ha $\frac{360°}{n} < \alpha$, akkor $n > \frac{360°}{\alpha}$. Így biztosan tudunk bármely szöghöz olyan n egész számot mondani, amelynél több oldalú sokszögek külső szögei kisebbek, mint a megadott szög. Tehát az állítás igaz.

Tagadás: Létezik olyan α ($\alpha > 0$) szög, amelyhez bárhogy is adunk meg pozitív egész n-t, van olyan n-nél több csúcsú szabályos sokszög, melynek külső szöge nagyobb vagy egyenlő, mint α.

Mivel az állítás igaz, a tagadás hamis.

Kombinatorika – megoldások

5039 $5! = 120$.

5040 $4! = 24$.

5041 $2 \cdot 4! - 1 = 47$.

5042 $6 \cdot 2 \cdot 3! = 5! - 2 \cdot 4! = 72$.

5043 $6! = 720$.

5044 $3 \cdot 2 = 6$.

5045 $4 \cdot 5^3 = 500$ közül $4 \cdot 5^2 = 100$ osztható 5-tel.

5046 $6^3 \cdot 9 = 1944$.

5047 $5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$.

5048 $\frac{30!}{(30-5)!} = 17100720$.

5049 $\binom{7}{3} = 35$.

5050 $\binom{11}{2} = 55$.

5051 $\frac{12!}{7! \cdot 4! \cdot 1!} = 3960$.

5052 $\dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$

5053 *a)* $5! = 120$; *b)* $5! \cdot 2^5 = 3840$; *c)* $10! = 3\,628\,800.$

5054 *a)* $8! = 40\,320$; *b)* $\binom{90}{8} \cdot 8! \approx 3{,}13 \cdot 10^{15}.$

5055 $\dfrac{24!}{8! \cdot 8! \cdot 8!} = 9\,465\,511\,770.$

5056 *a)* $\dfrac{20!}{5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 2!} = 2\,793\,510\,720.$

b) A nevező csökken: $5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 2! > 5! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 4!$

Így az érték nő $\dfrac{5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 2!}{5! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 4!} = \dfrac{42}{12} = 3{,}5$-szeresére.

5057 $\dfrac{12!}{(12-7)!} = 3\,991\,680.$

5058 *a)* $\dfrac{20!}{(20-12)!} \approx 6 \cdot 10^{13}$; *b)* $3 \cdot \dfrac{19!}{(19-11)!} \approx 9 \cdot 10^{12}.$

5059 $\dfrac{4^{11}}{8 \cdot 365 \cdot 1000} \approx 1{,}44.$

5060 *a)* $10^6 = 1\,000\,000$; *b)* $3^6 = 729$; *c)* $3^4 \cdot 4^2 = 1296$;

d) $\binom{6}{4} \cdot 3^4 \cdot 4^2 = 19\,440.$

5061 $(2-a)^5 = \binom{5}{0} \cdot 2^5 \cdot a^0 - \binom{5}{1} \cdot 2^4 \cdot a^1 + \binom{5}{2} \cdot 2^3 \cdot a^2 - \binom{5}{3} \cdot 2^2 \cdot a^3 + \binom{5}{4} \cdot 2^1 \cdot a^4 - \binom{5}{5} \cdot 2^0 \cdot a^5 =$

$= 32 - 80 \cdot a + 80 \cdot a^2 - 40 \cdot a^3 + 10 \cdot a^4 - a^5.$

5062 Csoportosítsuk az utakat a hosszuk szerint.

a) Bármerre is megyünk az A-ból, minden út 3 hosszú, és összesen $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ darab van belőle.

b) A közvetlen levelekbe 1 hosszú út visz, ebből 3 van. A következő legközelebbi levelek 3 hosszú úton érhetők el, ebből van $2 \cdot 3 = 6$. A legtávolabbi levelek 5 élre vannak, hozzájuk $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$-féleképpen juthatunk el.

c) Ebből a pontból 2, 4 vagy 6 „élnyire" találunk leveleket, rendre 2, $2 \cdot 3 = 6$ és $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ úton érhetjük el őket.

5063 A számokat az 1, 2, 3, 5, 7, 9 jegyekből állíthatjuk össze.

a) A jegyek csak úgy növekedhetnek, ha a fenti sorban írjuk őket, és az egyik számot elhagyjuk. Összesen 6 ilyen szám van.

b) Két nem prím szám van a felsoroltak között, az 1 és a 9. Kössük őket egybe, mostantól kezeljük az 19-et egyetlen számjegynek. Így 5 jegyből kell 4-jegyű számot kreálni, ráadásul úgy, hogy az 19 biztosan benne legyen. Ezt 4 helyre írhatjuk, a többi 3 helyre 4, 3, 2-féle jegyet tehetünk a maradékból. Végül az 1-et és 9-et megcserélhetjük. Tehát a lehetőségek száma $4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 192$.

c) A fentiek közül minden 2-re végződő szám osztható 4-gyel. Azaz $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

5064 *a)* Ekkor nagyon egyszerű dolgunk van, hiszen a 4 közül bármelyik helyre bármelyik karaktert írhatjuk a 15 lehetőségből: $15^4 = 50\,625$.

b) Vegyük az ellentétes esetet, amikor nincsenek betűk, csak az 5 számjegy szerepelhet: 5^4. Ezt kell kivonnunk az összes lehetőségből: $15^4 - 5^4 = 50\,000$.

c) Ebben az esetben egyszerűen az történik, hogy megduplázzuk a betűk számát. Azaz nem 15, hanem 25 lehetőségből választhatunk egy-egy karaktert. Az eredmény $25^4 = 390\,625$.

5065 Az adott függvény értékkészlete három érték: 0, 1 és (–1).

a) A három érték mindegyike szerepelhet a négy hely bármelyikén: 3^4.

b) Tételezzük fel, hogy a 0 szerepel kétszer, az 1 és a (–1) csupán egyszer-egyszer. A lehetőségek száma ekkor $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}$. Mivel a három érték mindegyike előfordulhat kétszer a négy helyen, ezért az eredményt meg kell szoroznunk 3-mal: $3\cdot\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 36$.

c) A szinuszfüggvényre hagyatkozva négy helyből kettőn szerepel 0, de egymás mellett nem lehetnek. Négy lehetőségünk van:

0, 1, 0, (–1); 0, (–1), 0, 1; 1, 0, (–1), 0; (–1), 0, 1, 0.

5066 *a)* Ha sorba mentek a tanárok képein, akkor

$$22\cdot 21\cdot\ldots\cdot 11 = \frac{22!}{(22-12)!}\text{-féleképpen}$$

választhattak közülük.

b) A 14 lány mellé 8 fiúnak kellett az osztályba járnia, és a 6 férfi tanár mellett 6 nő kolléga került a tablóra. Az előző rész alapján a keresett érték:

$$\frac{14!}{(14-6)!}\cdot\frac{8!}{(8-6)!} = 4{,}36\cdot 10^{10}.$$

c) Most csak az érdekel minket, melyik tanár melyik három diákot választotta. Képzeljük úgy, hogy a tanárok sorban egymás után a tortához mennek és kiválasztanak 3-3, illetve 2-2 szeletet. Ezt összesen

$$\binom{22}{3}\cdot\binom{19}{3}\cdot\binom{16}{3}\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}\approx 6\cdot 10^{15}$$

különböző módon tehetik meg.

5067 Az 500-as készlet 30%-a, azaz 150 darab plüssmaci selejtes. Jó közülük $500 - 150 = 350$ darab.

a) Ha nincs köztük selejtes, akkor mind a 20-at a jó macik közül sikerült kiválasztani $\binom{350}{20}$-féleképp.

b) A két selejtest 150 darabból, a 18 jót 350 közül választhatták az ellenőrök $\binom{150}{2}\cdot\binom{350}{18}$ különböző módon.

c) Ha legalább három selejtes van, akkor lehet 3, 4, …, 20 is. Ez elég sok eset, térjünk át a komplementer halmazra: nézzük azt, amikor csak 0, 1 vagy 2 selejt van a kiválasztott mintában. Ezt kell kivonnunk az összes lehetséges választások számából, $\binom{500}{20}$-ból. Az eredmény:

$$\binom{500}{20} - \binom{150}{0}\cdot\binom{350}{20} - \binom{150}{1}\cdot\binom{350}{19} - \binom{150}{2}\cdot\binom{350}{18}.$$

5068 *a)* Miután bárki bármikor felelhet, akár az is előfordulhat, hogy ugyanaz az óráról órára készülő diák felel 10-szer: 21^{10} a lehetőségek száma.

b) A feleletek időrendben követik egymást, így először is ki kell választanunka 10-ből azt a 4 feleletet, amelyet a nem készülő diákoktól hallunk. Ezt $\binom{10}{4}$ módon tehetjük meg. A 4 rossz feleletet 9 fő produkálhatja, a 6 szépet pedig 21. Azaz az eredmény:

$$\binom{10}{4} \cdot 9^4 \cdot 21^6.$$

c) „Legfeljebb hétszer" jelentése 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 alkalommal. Ilyen sok eseményt nem szerencsés elkezdeni összeírni, térjünk át a komplementerre: 8, 9, 10 gyenge felelőnk van. Utóbbi eset 9^{10}, előbbiek pedig *b)* esethez hasonlóan adódnak: $\binom{10}{9} \cdot 9^9 \cdot 21^1$ és $\binom{10}{8} \cdot 9^8 \cdot 21^2$. Ki kell vonnunk az összes esetből, azaz ha bárki akárhányszor felelhet: 30^{10} -ből.

$$30^{10} - 9^{10} - \binom{10}{9} \cdot 9^9 \cdot 21^1 + \binom{10}{8} \cdot 9^8 \cdot 21^2.$$

5069 *a)* Két szoknyát, inget és kabátot $\binom{5}{2}$, $\binom{8}{2}$, $\binom{4}{2}$-féle módon választhat Eszti. Minden ruhafélét kétféleképpen adhat a babákra: vagy az egyikre, vagy a másikra adja:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2^3 = 13440.$$

b) Állítsuk sorba a babákat, legyen egy A, egy B és egy C baba. Először is Eszti kiválaszt három szoknyát, három inget és három kabátot. Ezeket $\binom{5}{3}$, $\binom{8}{3}$, $\binom{4}{3}$-féleképpen veheti ki. Sorba rakva a három szoknyát, az A, B, C babákkal $3! = 6$-féleképp párosíthatja őket. Hasonló a helyzet a többi ruhafélével is. Az eredmény:

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot (3!)^3 = 483\,840.$$

5070 *a)* Ha bármelyik jelentkező reklámfilmbe kerülhet, akkor $58 + 42 = 100$ főből választunk 12-t:

$$\binom{100}{12} \approx 10^{15}.$$

b) A lányok közül kell kiválasztanunk 7-et és a fiúk közül 5-öt:

$$\binom{58}{7} \cdot \binom{42}{5} \approx 2{,}56 \cdot 10^{14}.$$

c) Ha párban szerepel egy fiú és egy lány, akkor mindkét nemből ugyanannyi szereplő van, azaz 6. Az eredmény:

$$\binom{58}{6} \cdot \binom{42}{6} \approx 2{,}12 \cdot 10^{14}.$$

d) Ha hármasával mutatják be a jelentkezőket, akkor 4 filmet fognak készíteni. Így vagy 4 fiú és 0 lánycsapat lesz, vagy 3 és 1, vagy 2 és 2, 3 és 1, 4 és 0. Az egyes eseteket az előzőkhöz hasonlóan számítjuk, de végül össze kell őket adnunk:

$$\binom{58}{12} \cdot \binom{42}{0} + \binom{58}{9} \cdot \binom{42}{3} + \binom{58}{6} \cdot \binom{42}{6} + \binom{58}{3} \cdot \binom{42}{9} + \binom{58}{0} \cdot \binom{42}{12} \approx 3{,}49 \cdot 10^{14}.$$

5071 Téma szerint rendezni a könyveket $\frac{(15+n)!}{13!\cdot 2!\cdot n!} = 406980$-féle módon lehet. Egyszerűsítsünk, majd szorozzunk fel a maradék nevezővel:

$$14\cdot 15\cdot \ldots \cdot (15+n) = 813960\cdot n!$$

Egyszerűsítsünk újra $14\cdot 15$-tel:

$$16\cdot 17\cdot \ldots \cdot (15+n) = 3876\cdot n!$$

Mindkét oldalon szorzatok szerepelnek, bontsuk fel a 3876-ot prímtényezőkre: $3876 = 2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 19$.

$$16\cdot 17\cdot \ldots \cdot (15+n) = 2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 19\cdot n!$$

Hogy a $16 = 2^4$-t megkapjuk, $n > 3$ kell legyen. Ugyanakkor a bal oldalon is szerepelnie kell a 19 prímnek, ez éppen $15 + 4$. Ellenőrizzük le, valóban $16\cdot 17\cdot 18\cdot 19 = 3876\cdot 24$.

Tehát 4 Távol-Keletről szóló regényt kap Jani.

5072 Páratlan jegyek az 1, 3, 5, 7 és 9. Mivel hárommal osztható számokat keresünk, megkönnyíti az esetek összegyűjtését, ha nem a számokkal, hanem a 3-mal vett osztási maradékaikkal számolunk. Ezek sorban: 1, 0, 2, 1, 0.

a) Ha minden szám különböző kell legyen, akkor a négy maradék között csak egy 2-es, legfeljebb két 1-es és legfeljebb két 0 lehet. (Például 0-0-0-0 vagy 1-1-1-0 nem lehet.) A 2-es maradéknak mindenképpen szerepelnie kell, hiszen a 0-0-1-1 nem osztható 3-mal. A 2 mellé tenni kell 1-et is, a maradék kettő helyen viszont csak 0 maradék lehet. Tehát azt kell összeszámolni, hány esetet írhatunk fel a 0-0-1-2 maradékokból. A 3, 9 és 5 biztosan a számjegyek közé kerül. 1 maradékot adhat az 1 és a 7 is, itt tehát választhatunk. Vagyis ezen számok száma $2\cdot 4! = 48$.

b) Az előző gondolatot folytatva: öt lehetőségünk van a maradékokat felírni úgy, hogy a szám osztható legyen 3-mal: 0-0-0-0, 0-0-1-2, 0-1-1-1, 0-2-2-2, 1-1-2-2. Nézzük sorban az öt esetet.

0-0-0-0: Minden helyre két számjegyet, 3-at vagy 9-et írhatunk, ez $2^4 = 16$ lehetőséget jelent.

0-0-1-2: A 0 maradékok helyére a 3 vagy a 9, az 1 helyére az 1 vagy a 7 kerülhet. A 2 maradék fixen az 5 számjegyet jelenti. A maradékokat egymás között $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 12$-féleképpen permutálhatjuk. Azon belül $2^2\cdot 2 = 8$ lehetőség van a számjegyek beírására. Összesen $12\cdot 8 = 96$.

0-1-1-1: A 0 maradék (3 vagy 9) négy helyre kerülhet (az 1 helyére továbbra is 1 vagy 7 kerül). Ezért a lehetőségek száma ebben az esetben $4\cdot 2^4 = 64$.

0-2-2-2: A 0 megint négy helyen állhat (3 vagy 9), a 2 helyére csak 5-öt írhatunk. Így $4\cdot 2 = 8$ ilyen esetünk van.

1-1-2-2: A maradékokat $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$-féleképpen írhatjuk fel. A lehetőségek száma $6\cdot 2^2 = 24$.

A kérdésre a válasz a fenti esetek összege: $16 + 96 + 64 + 8 + 24 = 208$.

5073 *a)* Jelölje a három szobát A, B, C. Mivel megkülönböztetjük őket, nem mindegy, hogy az A-ban vannak 6-an, B-ben 2-en és C-ben senki, vagy A-ban senki, B-ben 6-an és C-ben 2-en. A legegyszerűbb, ha az A-ban levők száma alapján írjuk össze a lehetőségeket.

A	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
B	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	6	5	4	3	2
C	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6

Ez harminchat lehetőség.

b) Most csak azt kell összeszámolnunk, a 8-at hányféleképp bonthatjuk három, hatnál nem nagyobb nemnegatív egész összegére.

$$8=6+2+0=6+1+1=5+3+0=5+2+1=4+4+0=$$
$$=4+3+1=4+2+2=3+3+2$$

Ez nyolc lehetőség.

Megjegyzés. Az *a)* és *b)* kérdést megválaszolhatjuk az alapján is, ha észrevesszük: a három különböző számot tartalmazó (pl. 6-2-0) formák $3!=6$ helyen fordulnak elő, a két különbözőt tartalmazókat 3 helyen találjuk meg (pl. 6-1-1), míg három egyforma nem lehet. Mindkét típusból van 4 összeg, amely kiadja az összesen $24+12=36$ oszlopot.

c) Az előző kérdésben tárgyalt esetekből indulunk ki.

Például az 5-2-1 esetben a nyolc főből ki kell választanunk ötöt az egyik, a még így nélkül maradt három főből kettőt a másik szobába. A harmadik szobába maradt egy fő már nem változtat a lehetőségek számán. Az összes esetet tekintve a lehetőségek száma:

$$\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{0}{0}+\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}+\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{0}{0}+\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1}+$$
$$+\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{0}{0}+\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{1}{1}+\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}+\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=$$
$$=28+56+56+168+70+280+420+560=1638.$$

d) Ha megkülönböztetjük a személyeket és a szobákat is, akkor az *a)* részben felírt táblázatot kell segítségül hívnunk. Azonban nem írjuk fel mind a 36 lehetőséget!

Vegyük észre, hogy bármelyik esetet tekintjük is, az egyszerűsítések miatt felírható ismétléses permutációként. Pl. a 4-3-1:

$$\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{1}{1}=\frac{8!}{4!\cdot4!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot1!}\cdot\frac{1!}{1!\cdot0!}=\frac{8!}{4!\cdot3!\cdot1!}.$$

Mivel nem számít a 4-3-1 sorrend, így a *c)* esetből és a megjegyzésben említett különböző sorrendekből megadhatjuk a megoldást:

$$3!\cdot\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{0}{0}+3\cdot\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}+3!\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{0}{0}+3!\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1}+$$
$$+3\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{0}{0}+3!\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{1}{1}+3\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}+3\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=$$
$$=3!\cdot(28+56+168+280)+3\cdot(56+70+420+560)=6510.$$

5074 *a)* Képzeljük el, ahogyan sorban sétálnak el a hat szoba mellett és véletlenszerűen kiválasztják a szobák lakóit. A megoldás ekkor:

$$\binom{23}{8}\cdot\binom{15}{4}\cdot\binom{11}{3}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}.$$

Ha úgy képzeljük el a dolgot, hogy a diákokat sorba állítjuk és minden szobának készítünk egy címkét annyi példányban, ahány fő befogadására képes, akkor a megoldás:

$$\frac{23!}{8!\cdot4!\cdot(3!)^3\cdot2!}$$

A két érték természetesen egyenlő. (Ezt beláthatjuk, ha kifejtjük az első formában felírtakat, majd elvégezzük az egyszerűsítéseket.)

b) Amennyiben az egyes szobákon belül megkülönböztetjük az ágyakat, akkor az első szobába betérő 8 diák 8!, a 4 ágyasba betérők 4! stb. különböző módon osztozhatnak. Tehát a megoldás:

$$\frac{23!}{8!\cdot 4!\cdot (3!)^3\cdot 2!}\cdot 8!\cdot 4!\cdot (3!)^3\cdot 2! = 23!$$

c) A 10 lány mellé nem kerülhetnek fiúk, így nekik külön szobák járnak. Kétféleképpen felelhetünk meg ezen feltételnek. Vagy a 8 és a 2 ágyas szoba a lányoké, vagy két 3 és a 4 ágyas.

Ha az első verzió valósul meg, akkor a lányok $\frac{10!}{8!\cdot 2!}$ módon költözhetnek be. Ha a második, akkor $\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}$. A fiúk az első lehetőség esetén $\frac{13!}{4!\cdot (3!)^3}$, a második esetben $\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}$ különböző úton foglalhatják el a szobákat. Az összesített eredmény:

$$\frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot\frac{13!}{4!\cdot (3!)^3}+\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}\cdot\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}.$$

Arra nem tértünk ki, hogy a szobákat megkülönböztetjük-e egymástól. Az ágyak számát tekintve biztos. Ha ugyanis különbséget teszünk köztük, akkor a második esetben a lányok háromféleképpen kaphatnak meg három háromágyas szoba közül kettőt (1.-2., 1.-3., 2.-3.).

Az eredmény eképpen módosul:

$$\frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot\frac{13!}{4!\cdot (3!)^3}+3\cdot\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}\cdot\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}.$$

d) A *b)* pont alapján $10!\cdot 13!+3\cdot 10!\cdot 13! = 4\cdot 10!\cdot 13!$ eredményt kapunk az egyszerűsítéseket elvégezve.

Valószínűség-számítás – megoldások

5075 Biztos esemény: az összeg nemnegatív.

Lehetetlen esemény: a szorzat 11-gyel osztható.

5076 *a)* A komplementere 10 elemi eseményből tevődik össze. Pl.: FFFI vagy IIII.

b) $AB = \{\text{IFFI; IIFF}\}$,

$\overline{A+B} = \{\text{FFFF; FFFI; FFIF; FIFF; IIIF; IFII; FIII; IIII}\}$.

c) Az eseménytér $2^4 = 16$ elemi eseményből áll.

$P(A) = 0{,}375$; $P(AB) = 0{,}125$; $P\left(\overline{A+B}\right) = 0{,}5$.

5077 *a)* Hétfőn $\frac{8}{10} = 0{,}8$; kedden $\frac{9}{12} = 0{,}75$; szerdán $\frac{4}{7} \approx 0{,}571$; csütörtökön $\frac{15}{18} \approx 0{,}833$; pénteken pedig ismét $\frac{20}{24} \approx 0{,}833$.

b) A valószínűséget nem tudjuk pontosan megadni, úgy 0,7–0,8 körül lehet. (A relatív gyakoriságok számtani átlaga 0,75, mediánjuk 0,8.)

5078 *a)* $P = 0{,}15$; *b)* $P = 0{,}15^5 \approx 0{,}000076$.

5079 $\frac{1}{10} = 0{,}1$.



5080 $\frac{3}{10} = 0{,}3.$

5081 $\frac{1}{6}.$

5082 $\frac{2}{5!} = \frac{1}{60}.$

5083 0,35.

5084 $\frac{7}{12}.$

5085 $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$

5086 $\frac{2}{17}.$

5087 $\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}.$

5088 $\frac{1}{7!}.$

5089 $\frac{1}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}.$

5090 $\frac{1}{2^5}.$

5091 $1 - \frac{2}{\pi} \approx 0{,}36.$

5092 $1 - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 0{,}4.$

5093 $\frac{14}{x} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7; \quad x = 20.$

5094 $\frac{x}{12 + x} = 0{,}4; \quad x = 8.$

5095 $\frac{x}{12 + x} = 0{,}25; \quad x = 4.$

5096 9.

5097 A kedvező esetek száma 6!, ennyiféleképpen következhet egymás után a kockával dobható hat darab szám.

Az összes esetek száma 6^6, hiszen bármelyik dobásra bármilyen értéket kaphatunk.

$$P = \frac{6!}{6^6} \approx 0{,}015.$$

5098 Az első helyre 9, a másodikra 8 és így tovább, a hetedikre 3 lehetőségünk van számjegyet írni. A kedvező esetek száma $\frac{9!}{(9-2)!}$. Az összes eseteket megkapjuk, ha bármelyik helyre bármelyik számjegyet írhatjuk: 9^7. Az eredmény:

$$P = \frac{\frac{9!}{(9-2)!}}{9^7} \approx 0{,}000015.$$

5099 *a)* $\frac{x}{5+3+4+x} = \frac{1}{3}$, ebből $x = 6$. Az üres cellába 6-ot kell írni.



b) Az összes érmék száma 18, így egy érmére 20°-os középponti szög jut. Azaz az aranyakra 100°, a garasokra 60°, a krajcárokra 80° és a tallérokra 120°.

c) Az azonos érméket egymás között permutálva nem kapunk más elrendezést, így ismétléses permutációt kell számolnunk:

$$\frac{18!}{5! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 6!} = 514594080.$$

d) $\frac{6}{18+x} < 0{,}3$; innen $2 < x$. Ernőnek legalább három Lajos-aranyra kell még szert tennie.

5100 *a)* 4 € veszteség úgy keletkezhet, ha a játékban nem nyernek semmit. Ez pedig akkor következik be, ha egy fejet és egy írást dobnak. Négy lehetőség van (piros, kék) érme sorrendben: (F; F), (F; I), (F; I), (I; I). Közülük kettő nem fizet semmit, tehát 0,5 valószínűséggel bukják el a játék 4 €-s árát.

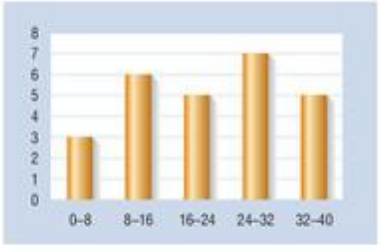
b) 4 €-t akkor keresnek, ha a játékban 8 €-t nyernek. Ezt kétféleképpen érhetik el: ha Petra a két érmével (F; F)-et dob és Karola 4-est a kockával; illetve ha Petra két írást dob az érmékkel és Karola 5-öst. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

c)

Piros	Kék	1	2	3	4	5	6
fej	fej	2	4	6	8	10	12
fej	írás	0	0	0	0	0	0
írás	fej	0	0	0	0	0	0
írás	írás	4	5	6	7	8	9

d) A táblázatot átnézve a felső sorban a 6, 8, 10, 12; illetve az alsó sorban az 5, 6, 7, 8, 9 esetek azok, melyekben a lányok többet nyernek, mint a játék 4 €-s ára. Ez kilenc lehetőség, az összes esetek száma pedig 24. Azaz $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

5101 *a)* Az oszlopdiagram az ábrán látható.



b) A tanulók által átlagosan gyűjtött pontok száma:

$$\frac{3 \cdot 4 + 6 \cdot 12{,}5 + 5 \cdot 20{,}5 + 7 \cdot 28{,}5 + 5 \cdot 36{,}5}{26} \approx 21{,}9807,$$

tehát kerekítve 22.

c) Tizenketten írtak jó vagy jeles dolgozatot a 26 főből. A keresett valószínűség $\frac{12}{26}$.

d) Az osztály tanulói közül $\binom{26}{5}$-féleképpen lehet kiválasztani öt főt. $\binom{5}{2}$ lehetőségünk van két jeles és $\binom{7}{3}$ jó dolgozatot író tanuló kiválasztására. Az eredmény:

$$P = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{26}{5}} = 0{,}00532.$$

5102 *a)* Az azonos jegyből álló számok $q = 1$ kvóciensű sorozatok: 111, 222, …, 999. Ha az első két jegy különböző, akkor a harmadik is. Ilyen szám hat darab van:

124, 139, 248, 421, 842, 931.

A mértani sorozatot alkotó jegyekből álló számok száma tehát 15.

b) Az előbbiekhez vegyük hozzá a következőket, illetve a fordítottjukat

123, 135, 147, 159, 234, 246, 258, 345, 357, 369, 456, 468, 567, 579, 678, 789.

A fentieken kívül lehetnek még 0-ra végződő számok is: 210, 420, 630, 840. Így a számtani vagy mértani sorozatot alkotó jegyekből álló háromjegyű számok száma $15 + 2 \cdot 16 + 4 = 51$. Számtani sorozatot pedig $9 + 2 \cdot 16 + 4 = 45$ szám számjegyei alkotnak.

$$P = \frac{45}{51} \approx 0{,}882.$$

c) Csupa különböző jegyből álló háromjegyű számok száma $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ (az első helyre nem írhatunk 0-t, utána azt azonban már igen, de az első helyre írt számot már nem). A különböző, de számtani vagy mértani sorozatot adó jegyekből álló háromjegyű számok száma $51 - 9 = 42$.

$$P = 1 - \frac{42}{648} \approx 0{,}935.$$

5103 *a)* Ha mindkét fordulóban háromszorozunk 4-es dobással, akkor $10\ € \cdot 3^2 = 90\ €$.

b) Legkevesebb pénzünk akkor lesz, ha minden alkalommal elveszítjük a pénzünk háromnegyedét. Egy-egy fordulóban ennek valószínűsége $\frac{1}{4}$, így három forduló alatt $\left(\frac{1}{4}\right)^3$.

c) 10 €-ból 15 € csak úgy keletkezhet, ha egyszer háromszorozunk, egyszer felezünk és egyszer nem történik a pénzzel semmi. Azonban mindegy, hogy melyik történés melyik körben esik meg. A három különböző lehetőséget $3! = 6$-féleképpen permutálhatjuk. Mivel mindegyik valószínűsége $\frac{1}{4}$, ezért a kérdezett valószínűség: $P = 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0{,}09375$.

5104 A „legalább ötször dobunk” végtelen sok esetből áll, foglalkozzunk a komplementerével: ha vagy elsőre, vagy másodikra, harmadikra vagy negyedikre hatost dobunk. Nézzük sorban.

Elsőre dobtunk hatost:

$$P(\text{elsőre hatos}) = \frac{1}{6}.$$

Másodikra úgy dobhatunk hatost, ha elsőre mást dobtunk:

$$P(\text{másodikra hatos}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Harmadikra úgy, ha az első kettő nem hatos volt:

$$P(\text{harmadikra hatos}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}.$$

Végül negyedikre úgy, ha előtte háromszor nem találtuk el a hatost:

$$P(\text{negyedikre hatos}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}.$$

A keresett valószínűség ezek összege:

$$P = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}5177.$$

Tehát annak nagyobb a valószínűsége, hogy az első négy dobásra sikerül a hatos.

5105 *a)* $P = \dfrac{\binom{10}{5}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}0047;$ *b)* $P = \dfrac{\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}056;$

c) Figyeljük meg, hogy a csupa epres, csupa meggyes és a vegyes esetek kiadnak minden lehetséges esetet, ráadásul kizárják egymást. Így a vegyes valószínűségét megkapjuk a másik kettő összegének komplementereként:

$P(\text{vegyesen van epres és meggyes}) = 1 - [P(\text{csak epres}) + P(\text{csak meggyes})] \approx 0{,}9393.$

Megjegyzés: Más módon is számolhatunk, összegezve az 1 eper – 4 meggy, 2 eper – 3 meggy, 3 eper – 2 meggy, 4 eper – 1 meggy eseteket.

5106 Alkalmazzuk a valószínűség-számítás szita-formuláját a K: Kati nyer, J: Jani nyer eseményekre. A szöveg alapján $P(K) = 0{,}6$; $P(J) = 0{,}5$ és $P(KJ) = 0{,}25$. Így:

$$P(K + J) = P(K) + P(J) - P(KJ) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}85.$$

5107 A dobozban volt 50 zöld és 30 kék gyöngy. Ha legalább kettő kék, akkor lehet 2, 3, 4, 5, 6, 7 vagy 8 kék. Ez elég sok eset, lássuk a komplementerét. Ez csak két eset: 0 vagy 1 kék (és 8 vagy 7 zöld). Az összes esetek száma mindkét esetben $\binom{6}{4}$. Így a keresett valószínűség:

$$1 - \left(\frac{\binom{30}{0}\cdot\binom{50}{8}}{\binom{80}{8}} + \frac{\binom{30}{1}\cdot\binom{50}{7}}{\binom{80}{8}}\right) \approx 0{,}88.$$

5108 *a)* $P = 0{,}25.$ *b)* $P = 0{,}25^3 = 0{,}015625.$

c) $P = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25 = (0{,}25 \cdot 0{,}75)^3 \approx 0{,}0066.$

d) Sajnos nem tudjuk, melyik négy kérdésre ismeri a helyes választ Károly, így elsőnek ki kell választanunk a hat kérdésből ezt a négyet $\binom{6}{4}$-féleképp (vagy éppen a kettő rosszat). Tudjuk, hogy minden jó válasznak 0,25 a valószínűsége és minden rossz válasznak 0,75. A négy helyes és kettő helytelen valószínűsége így $0{,}25^4 \cdot 0{,}75^2$. Összesen:

$$P(\text{négy jó, kettő rossz}) = \binom{6}{4} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^2 \approx 0{,}033.$$

Megjegyzés: A feladatban visszatevéses mintavételt alkalmazunk. A „visszatevés" itt azt jelenti, hogy többször adhat jó és rossz választ is Károly.

5109 A szabályos háromszög azonos oldalhoz tartozó nevezetes vonalai (súlyvonal, magasság, szögfelező) egybeesnek. Így beírt körének sugara megegyezik a magasság harmadával, amit Pitagorasz tételéből ki tudunk számítani: $m = \sqrt{300}$, $r = \frac{10}{\sqrt{3}}$. A valószínűségek meghatározásához a területeket kell kiszámítanunk: $T_{\triangle} = \frac{20\sqrt{300}}{2} = 100\sqrt{3}$, $T_{\bigcirc} = \frac{100\pi}{3}$.

a) $p = \frac{T_{\bigcirc}}{T_{\triangle}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}6046.$

b) Annak a valószínűsége, hogy nem találják el a számlapot, komplementere az előbb kapott értéknek:

$$p = \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}1445.$$

c) Már mindent tudunk, csak azt nem, hányféleképpen rakhatjuk sorba a kettő lecsúszó és a három ott ragadó dobást:

$$p = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2 \approx 0{,}3455.$$

5110 *a)* Minden pakliban minden típusú lapból (ász, király, hetes stb.) négy darab van. Így egy kihúzott figurás lap valószínűsége $\frac{16}{32} = 0{,}5$ és egy hetes valószínűsége $\frac{4}{32} = 0{,}125$. Mivel nem tudjuk, mely lapokon szerepelnek figurák, ezért a kihúzott 7-ből válasszunk ki erre a célra négyet $\binom{7}{4}$-féleképpen.

A keresett valószínűség: $P = \binom{7}{4} \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}125^3 \approx 0{,}0043.$

b) Legfeljebb öt figura jelenthet 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 lapot. Térjünk át a komplementer „mind a hét figurás vagy egy nem az" esemény valószínűségére:

$$P(\text{legfeljebb öt}) = 1 - [P(\text{hét}) + P(\text{egy nem})] =$$

$$= 1 - \binom{7}{0} \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}125^0 - \binom{7}{1} \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}125^1 \approx 0{,}9785.$$

5111 A szöveg szerint A-ba 12 fiú és 12 lány jár, a B-be 16 fiú és 8 lány.

a) $\frac{8}{20} = 0{,}4;$ *b)* $\frac{\binom{12}{2}}{\binom{20}{2}} \approx 0{,}35;$ *c)* $\frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{12}{1}}{\binom{20}{3}} \approx 0{,}29;$

d) $\frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{16}{1}}{\binom{28}{4}} + \frac{\binom{12}{1} \cdot \binom{16}{3}}{\binom{28}{4}} \approx 0{,}5;$

e) A következő esetek lehetségesek: 4 fő az A-ból, 3 a B-ből; 5 fő az A-ból, 2 fő a B-ből; 6 fő az A-ból, 1 fő a B-ből. (A komplementerre nem érdemes áttérni.)

$$P = \frac{\binom{24}{4} \cdot \binom{24}{3}}{\binom{48}{7}} + \frac{\binom{24}{5} \cdot \binom{24}{2}}{\binom{48}{7}} + \frac{\binom{24}{6} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{48}{7}} + \frac{\binom{24}{7} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{48}{7}} = 0{,}5.$$

5112 *a)* Ha minden kérdést passzol valaki és még szerencséje sincs, akkor négy alkalommal osztják el hattal az éppen aktuális pontjainak számát. $1296 : 6^4 = 1$, azaz egyetlen pont a megszerezhető legkevesebb. A maximális pontszámot akkor éri el a játékos, ha minden esetben meg tudja háromszorozni pontjainak számát: $1296 \cdot 3^4 = 104\,976$. Ehhez szerencsésen kell dobnia, és a választ is tudnia kell mind a négy kérdésre.

b) A maximális ponthoz ismerni kell a helyes válaszokat, és négy alkalommal kell dobni 5-öst vagy 6-ost. Ennek valószínűsége $\left(\frac{2}{6}\right)^4 \approx 0{,}0123$. A minimális pontszámhoz $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}482$ valószínűséggel jutunk, ha mindig passzolunk, és nem dobunk 6-ost.

c) 5832 pontot akkor ér el egy játékos, amennyiben kiinduló pontszámát 4,5-del szorozza meg, $5832 : 1296 = 4{,}5$. Gondoljuk át, milyen együtthatók módosíthatják a pontszámokat!

Ha tudja a választ, akkor az *A* vagy *B* lehetőséget választhatja. A dobástól függően 3, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{1}{2}$ a szorzótényező. Amennyiben kihagyja a kérdést, akkor vagy nem változik a pont, vagy hatoda lesz: 1, $\frac{1}{6}$ a szorzó.

A 4,5 szorzótényezőt ezekből kétféleképpen kaphatjuk meg: $4{,}5 = 3^3 \cdot \frac{1}{6} = 3^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$. (A feltétel szerint ha megpróbál válaszolni a kérdésre a játékos, tudja a választ.) Azaz vagy

– három *A* lehetőséget választ, dobása 5 vagy 6 és egy kérdést passzol, de nem dob 6-ost, vagy

– kétszer választ *A*-t (dobása 5 vagy 6), egyszer *B*-t (dobása 1, 2 vagy 3), és egy kérdést nem tud, de 6-ost dob.

Az első változat négyféleképp történhet meg attól függően, melyik kérdést passzolja. Ennek valószínűsége a feltételek mellett:

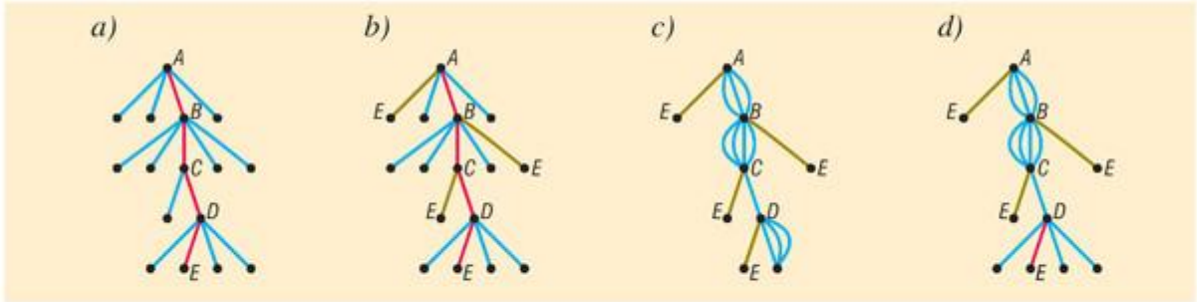
$$4 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \approx 0{,}123.$$

A második eset $\frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12$-féleképp valósulhat meg:

$$12 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \approx 0{,}111.$$

Az eredmény a kettő összege, $p = 0{,}234$.

5113 A legjobb, ha gráfok segítségével tekintjük át Kornélia barangolását az egyes esetekben.



a) Az első esetben az *A* oldal négy hiperhivatkozásából egy mutat *B*-re, *B* öt linkjéből egy mutat *C*-re és így tovább egészen *E*-ig. A Nelli által bejárt utat a piros vonal mutatja. A keresett valószínűség az egyes lapok választási valószínűségeinek szorzata, vagyis

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}00625.$$

b) Ebben az esetben A-ról közvetlenül is elérheti E-t $\frac{1}{4}$ valószínűséggel, illetve ugyanekkora valószínűséggel továbbléphet B-re. B-ről $\frac{1}{5}$ valószínűséggel jut E-re vagy ugyanennyi eséllyel megy tovább C-re és így tovább. A keresett valószínűség pedig

$$P=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=0{,}33125.$$

c) Az előző esethez képest annyi változást tapasztalunk, hogy az A oldalról ugyan most is $\frac{1}{4}$ valószínűséggel jut Kornélia E-re, ám minden más utat választva B-re jut $\frac{3}{4}$ valószínűséggel. Hasonló a helyzet a B lapon: $\frac{1}{5}$ valószínűséggel kattint E-re és $\frac{4}{5}$ valószínűséggel C-re. A valószínűség:

$$P=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=0{,}775.$$

d) A kérdés ebben az esetben az, hogy mekkora valószínűséggel nem talál Kornélia a női magazin E oldalára. Az A oldalon három, B-n négy, C-n egy és D-n három hiperhivatkozásra is kattinthatunk, hogy elkerüljük E-t. Tehát

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=0{,}225.$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a *c)* és *d)* eset gráfjában látható különbség a kérdések megválaszolásában nem jelent eltérést. Mindegy, hogy a D oldalról mennyi „nem E" helyre juthat. Így világos, hogy a *c)* és *d)* részben kapott valószínűségek összege miért 1 (komplementer események).

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET – ÖSSZEFOGLALÁS

Számok és műveletek – megoldások

5114 Egy lehetséges megoldás:

a) $20 + 7 - 3 - 4 - 11 = 9$;
b) $13 + 9 + 6 - 5 - 13 = 10$;
c) $1 + 2 \cdot 3 + 4 - 5 = 6$;
d) $5 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 15$;
e) $5 \cdot 6 - 7 \cdot 8 - 9 = -35$;
f) $10 \cdot 3 : 6 + 4 \cdot 5 = 25$.

5115 *a)* $[1; 2]$; *b)* $]-2; 3[$; *c)* $[-4; 2]$; *d)* $]2; 4]$;
e) $\{\}$; *f)* $[1; 8[$; *g)* $]-2; 3[$; *h)* $]-3; 7]$;
i) $[-3; 5]$; *j)* $\{\}$; *k)* $[2; 4] \cup]7; 12]$; *l)* $[-4; 2[$.

5116 Például: $\frac{1}{33} = \frac{4}{132} < \frac{5}{132} < \frac{6}{132} < \frac{7}{132} < \frac{8}{132} = \frac{2}{33}$.

5117 Mivel $\frac{1}{33} = 0{,}03030303\ldots$ és $\frac{1}{32} = 0{,}03125$, megfelel például:

$a = 0{,}0304050607\ldots$, $b = 0{,}03040040004\ldots$, $c = 0{,}0306789101112\ldots$

5118 A gondolt számok legyenek x és y, ahol $x > y$. Felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 8 \\ x &= 2y + 2 \end{aligned}\right\}, \quad \text{amiből} \quad y = 6 \quad \text{és} \quad x = 14.$$

A két szám összege: 20.

5119 *a)* Számtani közép: $\frac{2+8}{2} = 5$, mértani közép: $\sqrt{2 \cdot 8} = 4$.

b) Számtani közép: $\frac{17}{2}$, mértani közép: 4.

c) Számtani közép: 10, mértani közép: 8.

d) Számtani közép: 2, mértani közép: 2.

5120 *a)* $\frac{4+b}{2} = 6$, $b = 8$; *b)* $b = 6$; *c)* $b = 20$; *d)* $b = 9$;

e) $b = \frac{25}{4}$; *f)* $b = 36$.

5121 *a)* $\frac{21}{5} = 4{,}2$, a keresett jegy 0; *b)* $\frac{35}{6} = 5{,}8\dot{3}$, a keresett jegy 3;

c) $\frac{13}{7} = 1{,}\dot{8}57142\dot{}$, és $2010 = 6 \cdot 335$, a keresett jegy 2;

d) $\frac{7}{17} = 0{,}\dot{4}1176470588235294\dot{}$, és $2010 = 16 \cdot 125 + 10$, a keresett jegy 8.

5122 *a)* 12 csomag.

b) 6 napra elegendő.

5123 $4 + 90 \cdot 2 + 288 \cdot 3 = 1048$ számjegyet írtak le.

Első jegyként 10 db, második jegyként $9 + 10 + 10 = 29$ db, harmadik jegyként $10 + 9 = 19$, tehát összesen 58-szor írták le az 5-öst.

5124 *a)* Hamis, például $15 : 5 = 3$.

b) Hamis, a 0-nak nem létezik reciproka.

c) Igaz, például $(-5) \cdot (-7) = 35$.

d) Hamis, gondoljunk a tizedes tört alakra.

e) Igaz, például π.

f) Hamis, például $\sqrt{64} = 8$ és $\sqrt[3]{64} = 4$.

5125 Mivel minden második szám páros, a nullák számát a számok prímtényezős felbontásában szereplő ötösök száma határozza meg:

$$5, \quad 10 = 5 \cdot 2, \quad 15 = 5 \cdot 3, \quad 20 = 5 \cdot 2^2, \quad 25 = 5^2, \quad 30 = 5 \cdot 3 \cdot 2,$$
$$35 = 5 \cdot 7, \quad 40 = 5 \cdot 2^3, \quad 45 = 5 \cdot 3^2, \quad 50 = 5^2 \cdot 2, \quad 55 = 5 \cdot 11.$$

Mivel a szorzat prímtényezőként 13 darab ötöst tartalmaz, ezért 13 nullára végződik.

5126 Akkor tartalmazza a legkevesebb jegyet, ha a lehető legtöbb 9-es szerepel benne. A keresett szám 39999…99, tehát összesen 223 darab 9-est tartalmaz.

5127 Ha a lehető legkevesebb jegyet akarjuk felhasználni:

$$2000 = 2^4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5,$$

a másodikból adódik a kisebb szám: 25 558.

5128 *a)* $\frac{100}{73} = 1{,}3698$, tehát 37%-kal kell felemelni az árat.

b) $0{,}73 \cdot 0{,}7 = 0{,}511$, tehát 51,1% lesz.

c) $0{,}73 \cdot 1{,}45 = 1{,}0585$, tehát 105,85%-a lesz az ár az akció előtti árnak.

5129 Mindkét alkalommal a $75 + 60 - 100 = 35\%$ volt jelen.

Csak az első színházlátogatáson 40%, csak a másodikon 25% vett részt.



5130 36% az 54 ember, a teljes létszám 150 fő.

5131 *a)* 198 400 Ft; *b)* 61,29%; *c)* 163,16%.

5132 *a)* $\frac{11}{9}$; *b)* 2; *c)* $\frac{215}{99}$; *d)* $\frac{593}{1110}$.

5133 *a)* $1623 \cdot 623 - 623^2 = 623 \cdot (1623 - 623) = 623\,000$;

b) $1956^2 - 956^2 = (1956 - 956) \cdot (1956 + 956) = 2\,912\,000$;

c) $\frac{314^2 - 196}{328} = \frac{(314 + 14) \cdot (314 - 14)}{328} = 300$.

Számelmélet, oszthatóság – megoldások

5134 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Igaz.

5135 *a)* 15-tel való oszthatóság:

(1) szükséges, de nem elegendő feltétel például:

– a számjegyek összege osztható legyen 3-mal;

– 0-ra vagy 5-re végződjön az adott szám.

(2) elegendő, de nem szükséges feltétel: az adott szám osztható legyen 30-cal.

(3) szükséges és elegendő feltétel: osztható legyen 3-mal és 5-tel is.

b) 45-tel való oszthatóság:

(1) szükséges, de nem elegendő feltétel: az adott szám 0-ra vagy 5-re végződjön.

(2) elegendő, de nem szükséges feltétel: az adott szám osztható legyen 90-nel.

(3) szükséges és elegendő feltétel: a számjegyek összege osztható legyen 9-cel, és 0-ra vagy 5-re végződjön az adott szám.

c) 12-vel való oszthatóság:

(1) szükséges, de nem elegendő feltétel: az utolsó 2 számjegyből álló kétjegyű szám osztható legyen 4-gyel.

(2) elegendő, de nem szükséges feltétel: az adott szám osztható legyen 36-tal.

(3) szükséges és elegendő feltétel: a számjegyek összege osztható legyen 3-mal, és az utolsó 2 számjegyből álló kétjegyű szám osztható legyen 4-gyel.

5136 *a)* Minden olyan pozitív egész, mely a 15-höz relatív prím: $a \neq 3k$, $a \neq 5l$, $k, l \in \mathbb{Z}^+$.

b) $a = 24; 72; 120; \ldots$ 24 páratlan számú pozitív többszöröse.

c) $a = 20$ vagy $a = 60$.

d) $a = 3; 6; 12; 24; 48$.

5137 Határozzuk meg a számláló és a nevező legnagyobb közös osztóját.

a) $(126; 294) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $\dfrac{126}{294} = \dfrac{(2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot 3}{(2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot 7} = \dfrac{3}{7}$;

b) $\dfrac{30}{49}$; *c)* $\dfrac{19}{23}$; *d)* $\dfrac{9}{64}$; *e)* $\dfrac{5}{6}$; *f)* $\dfrac{128}{3}$.

5138 *a)* Keressük $[60; 72]$ legkisebb közös többszörösét, ezért prímtényezős bontásukat alkalmazzuk:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 72 = 3^2 \cdot 2^3, \quad [60; 72] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

Így az eredeti kifejezés átalakítható:

$$\frac{7}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{5}{3^2 \cdot 2^3} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} - \frac{5 \cdot 5}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{42}{360} - \frac{25}{360} = \frac{17}{360}.$$

b) Az *a)* feladathoz hasonló eljárással: $[14; 5; 21] = 210$.

Az eredeti kifejezés átalakítása:

$$\frac{3}{2 \cdot 7} - \frac{2}{5} + \frac{8}{3 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{8 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{41}{210}.$$

5139 *a)* *A* esetén: □ bármilyen természetes szám.

B esetén: Az egyik jel helyére pl. □ 2 többszörösei kell, hogy kerüljenek, így a másik jel helyére bármely természetes szám kerülhet.

C esetén: Az egyik jel (pl. △) helyére 3 többszörösei kerülnek, a másik jel helyére bármilyen természetes szám kerülhet.

b) *A* esetén: □ helyére 5 többszörösei kell, hogy kerüljenek.

B esetén: Az egyik jel helyére 2 többszörösei, a másik jel helyére bármely természetes szám kerülhet.

C esetén: Mindkét jel helyére bármely természetes szám írható.

5140 *a)* $11 \cdot 2 \cdot 5$-szöröse; *b)* $2 \cdot 13 \cdot 5$-szöröse; *c)* $11 \cdot 2$-szerese; *d)* $2 \cdot 5$-szöröse;
e) 11-szerese; *f)* 1-szerese; *g)* $11 \cdot 5$-szöröse; *h)* $13 \cdot 5$-szöröse.

5141 Prímtényezős bontásból eredve: $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, a kitevők eggyel növelt szorzata adja a pozitív osztók számát: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ pozitív osztója van a 60-nak.

Ellenőrzés felsorolással: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60.

5142 *a)* 39; *b)* 46; *c)* 322.

5143 *a)* 10111101100_2; *b)* 113230_4; *c)* 22031_5.

5144 *a)* $a = 0$ vagy $a = 8$;

b) Ha $x = 0$, akkor y lehetséges értékei: $y = 1; 4; 7$.

Ha $x = 5$, akkor y lehetséges értékei: $y = 2; 5; 8$.

c) Ha $a = 0$, akkor b lehetséges értékei: $b = 0; 3; 6; 9$.

Ha $a = 4$, akkor b lehetséges értékei: $b = 2; 5; 8$.

Ha $a = 8$, akkor b lehetséges értékei: $b = 1; 4; 7$.

5145 Mivel a legkisebb ötjegyű szám: $10\,000 = 19 \cdot 526 + 6$, ezért a megfelelő szám a 10 005.

5146 Relatív prímek: 297 és 800, illetve 297 és 560.

Van három olyan szám, például: $(210; 297; 560) = 1$; $(210; 297; 800) = 1$; $(297; 560; 800) = 1$.

5147 Minden más prím ötszöröse páratlan, ahhoz egyet adva páros, összetett számot kapunk, tehát nincs más a feltételnek megfelelő prímszám.

5148 A 28-nak a 28-adik hatványával osztható.

5149 *a)* A kitevők párosak, tehát négyzetszám.

b) Van páratlan kitevő, tehát nem négyzetszám.

c) $8^{42} \cdot 9^7 \cdot 25^9 = 2^{126} \cdot 3^{14} \cdot 5^{18}$, tehát négyzetszám.

5150 *a)* A szám osztható 3-mal.

b) A szám osztható 3-mal.

c) A szám osztható 5-tel.

5151 *a)* A szám páros és osztható 5-tel, tehát 0-ra végződik.

b) A szorzat páratlan és osztható 5-tel, tehát 5-re végződik.

c) Az első hét prímszám között a 2 és az 5 is szerepel, tehát 0-ra végződik.

5152 Ha $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 51$, akkor $a_1 + d = 17$. Mivel mindhárom tag prímszám, a következő megoldások lehetségesek:

$a_1 = 11$, ekkor $d = 6$, vagy $a_1 = 5$, ekkor $d = 12$, vagy $a_1 = 3$, ekkor $d = 14$.

5153 *a)* $10^{53} + 8 = 1\underbrace{0000\ldots0}_{53\text{ db}} + 8 = 1\underbrace{000\ldots08}_{53\text{ db}}$. A számjegyek összege 9, tehát osztható 9-cel.

b) $10^{10} - 4 = 1\underbrace{000\ldots0}_{10\text{ db}}$

$\underline{\quad - \quad 4}$

$\underbrace{99\ldots996}_{9\text{ db}}$. A számjegyek összege osztható 3-mal, tehát $10^{10} - 4$ osztható 3-mal.

c) lásd a *b)* feladatot: $10^{10} - 4$ osztható 3-mal és $10^{10} - 4$ páros, ezért osztható 2-vel is. Ebből következik, hogy a szám osztható 6-tal.

5154 *a)* Az utolsó jegy 0, a szám osztható 5-tel és 2-vel.

b) A szám csak 9-es és 3-as jegyeket tartalmaz, összegük osztható 3-mal, a szám is osztható 3-mal.

c) A szám utolsó három jegye 872, ezért osztható 8-cal.

5155 Anna 20 percenként, Bea 25 percenként ér fel. Mivel $[20; 25] = 100$, ezért legközelebb 10 óra 10 perckor fognak találkozni.

5156 Mivel $15 = 3 \cdot 5$ és $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, a következő számpárok felelnek meg:

a	$3 \cdot 5 = 15$	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	$3^3 \cdot 5 = 135$	$2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$
b	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 1350$	$3^3 \cdot 5^2 = 675$	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$	$3 \cdot 5^2 = 75$

5157 Jövőre Félix $3p$ éves lesz, és tudjuk, hogy $21 \le 3p \le 71$, ezért $7 \le p \le 23$. A szóba jöhető prímek háromszorosait vizsgálva Félix életkora idén 38 év lehet.

5158 Az első szám az adott időszakban 10, a második pedig 01-től 59-ig bármi lehet. A 10-hez relatív prím minden olyan szám, amely nem osztható sem 2-vel sem 5-tel, ezek második jegye 1; 3; 7 vagy 9.

1-től 59-ig 24 ilyen szám van. Tehát a valószínűség: $\frac{24}{59} \approx 0{,}4$.

5159 Ha a szám osztható 10-zel, akkor osztható 2-vel és 5-tel. Ha 10 darab osztója van, a prímtényezős felbontása lehet p_1^9 vagy $p_1 \cdot p_2^4$. Az első típus nem jöhet szóba, mert 2 és 5 is osztója.

A második típusból a legkisebb: $5 \cdot 2^4 = 80$.

5160 $302 = 6 + 5a + 4a^2$ egyenlet pozitív egész megoldása: $a = 8$.

5161 $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$.

5162 Az átalakítást a következő módon végezzük:

$$A = \frac{n-2}{n+3} = \frac{n+3-5}{n+3} = 1 - \frac{5}{n+3}.$$

5 osztói: ± 1 és ± 5, így

$n + 3 = 1$ esetén: $n = -2$ és $A = -4$;

$n + 3 = 5$ esetén: $n = 2$ és $A = 0$;

$n + 3 = -1$ esetén: $n = -4$ és $A = 6$;

$n + 3 = -5$ esetén: $n = -8$ és $A = 2$.

5163 *a)* $\dfrac{2n+10}{n+1}=\dfrac{2\cdot(n+1)+8}{n+1}=2+\dfrac{8}{n+1}$, n lehetséges értékei: $n=0;\ 1;\ 3;\ 7$.

b) $\dfrac{3n+5}{n-5}=\dfrac{3\cdot(n-5)+20}{n-5}=3+\dfrac{20}{n-5}$, n lehetséges értékei: $n=6;\ 7;\ 9;\ 10;\ 15;\ 25$.

5164 $11a-12b=4(2a-5b)+3a+8b$, ezért osztható 29-cel.

5165 Mivel $(x;\ y)=5$, ezért $x=5m$ és $y=5n$, ahol $(m;\ n)=1$. Így $x+y=5m+5n=200$, amiből $m+n=40$.

Mivel $(m;\ n)=1$, ezért a megfelelő számpárok:

$(1;\ 39)$, $(3;\ 37)$, $(7;\ 33)$, $(9;\ 31)$, $(11;\ 29)$, $(13;\ 27)$, $(17;\ 23)$, $(19;\ 21)$, $(21;\ 19)$, $(23;\ 17)$, $(27;\ 13)$, $(29;\ 11)$, $(31;\ 9)$, $(33;\ 7)$, $(37;\ 3)$ és $(39;\ 1)$.

Tehát 16 megfelelő számpár van.

5166 Ha $x=0$, nem lehet, mert $2^5=32$ nem felel meg.

Ha $x\geq 1$, a bal oldal osztható 9-cel, tehát $\overline{259x}$ is osztható 9-cel, ez csak $x=2$ esetén teljesül. Ez valóban megoldás, mert $2^5\cdot 9^2=2592$.

5167 Legyen a 2^{2010} számjegyeinek száma x, az 5^{2010} számjegyeinek száma y, ami azt jelenti, hogy:

$$10^{x-1}<2^{2010}<10^x-1,\quad \text{illetve}\quad 10^{y-1}<5^{2010}<10^y-1.$$

Összeszorozva a két egyenlőtlenséget:

$$10^{x+y-2}<2^{2010}\cdot 5^{2010}<(10^x-1)(10^y-1).$$

A jobb oldal:

$$(10^x-1)(10^y-1)=10^{x+y}-10^x-10^y+1<10^{x+y}-1.$$

Tehát:

$$10^{x+y-2}<10^{2010}<10^{x+y}-1,$$

az első tag $x+y-1$ jegyű, a harmadik tag $x+y$ jegyű, amiből következik, hogy $x+y-1=2010$, tehát $x+y=2011$.

A számjegyek számának összege 2011.

5168 Akkor kapunk prímszámot, ha az egyik tényező 1, a másik pedig prím.

I. eset:

$|n^3-63|=1$, ha $n^3-63=-1$, akkor n nem egész,

ha $n^3-63=1$, akkor $n=4$, de $|n^2-65|=49$ nem prím.

II. eset:

$|n^2-65|=1$, ha $n^2-65=1$, akkor n nem egész,

ha $n^2-65=-1$, akkor $n=8$, ekkor $|n^3-63|=449$ prím,

$n=-8$, ekkor $|n^3-63|=575$ nem prím.

Tehát $n=8$ esetén lesz a szorzat értéke prímszám.

5169 Használjuk fel, hogy

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)\left(a^{2k}-a^{2k-1}b+a^{2k-2}b^2+\ldots+b^{2k}\right).$$

Állítsuk párokba az összeg tagjait:

$$1^{2011}+2010^{2011},\quad 2^{2011}+2009^{2011},\quad \ldots \text{ és így tovább.}$$

Mivel az alapok összegével, 2011-gyel minden összeg, valamint a kimaradó, utolsó tag is osztható, ezért az állítás igaz.

Hatvány, gyök, logaritmus – megoldások

5170 *a)* $16^{-2}\cdot 128^3 = 2^{-8}\cdot 2^{21} = 2^{13}$;

b) $\sqrt{1024}\cdot 64^{-\frac{1}{3}} = 2^5\cdot 2^{-2} = 2^3$;

c) $\dfrac{32^3}{\sqrt[3]{512^5}} = \dfrac{2^{15}}{2^{15}} = 1 = 2^0$;

d) $\dfrac{\sqrt[4]{256^{-3}}\cdot 4^{-1}}{\sqrt[3]{8^{-7}}\cdot 2^{-5}} = \dfrac{2^{-6}\cdot 2^{-2}}{2^{-7}\cdot 2^{-5}} = 2^4$.

5171 *a)* $2^{27}\cdot 5^5\cdot 7^4$; *b)* $2^7\cdot 7^{-2}\cdot 5^{-7}$; *c)* 3; *d)* $5^3\cdot 3^8\cdot 2^{-2}$.

5172 *a)* 2; *b)* 7^6; *c)* 1; *d)* $\dfrac{5}{2}$.

5173 *a)* $\dfrac{4+6}{2^4}\cdot\dfrac{2^6}{5} = 2^3 = 8$; *b)* 54; *c)* 3; *d)* 2;

e) 35.

5174 *a)* $\sqrt[24]{a^{29}}$; *b)* $\sqrt[30]{\dfrac{a^9}{b^8}}$; *c)* $\sqrt[30]{\dfrac{2}{5}}$; *d)* 3.

5175 *a)* $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; *b)* $21+9\sqrt{7}$; *c)* 10.

d) Egyszerűsítés, a nevezők gyöktelenítése, összevonás és a nevezetes azonosságok alkalmazása után:

$$\left[7\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)+6\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\right]\cdot\left(13\sqrt{7}+\sqrt{6}\right) = 1177.$$

e) A *d)* feladathoz hasonlóan:

$$\left(\frac{13}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}-\frac{6}{2\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)}\right)\cdot\left(5\sqrt{8}-8\sqrt{7}\right) = 2\left(5\sqrt{8}+8\sqrt{7}\right)\cdot\left(5\sqrt{8}-8\sqrt{7}\right) = -496.$$

5176 *a)* $x>\dfrac{3}{4}$; *b)* $-\dfrac{1}{5}<x<\dfrac{2}{3}$; *c)* $x<-3$ vagy $\dfrac{5}{2}<x$;

d) $x>\dfrac{3}{7}$, $x\neq 1$; *e)* $3<x<7$, $x\neq 4$; *f)* $\{\}$.

5177 *a)* $\log_{25}\left(\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{1}{2} < 3^{-\log_3 7} = \dfrac{1}{7} < \log_6\sqrt[3]{6} = \dfrac{1}{3} < 4^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$;

b) $\sqrt[5]{-32} = -2 < 5^{1-\log_5 8} = \dfrac{5}{8} < 9^{\sin\frac{\pi}{6}} = 3 < \log_3 81 = 4$;

c) $\log_{11}\left(\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt[4]{11}}\right) = \dfrac{1}{4} < \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{3} < 13^{\log_5 1} = 1 < 100^{\lg 2} = 4$.

5178 *a)* $-\dfrac{4}{3}$; *b)* -12; *c)* $-\dfrac{24}{5}$; *d)* -2; *e)* -2; *f)* $-\dfrac{1}{2}$;

g) -6; *h)* $\dfrac{5}{2}$; *i)* $\dfrac{4}{3}$; *j)* -3; *k)* -10; *l)* 9;

m) 0; *n)* $-\frac{1}{42}$; *o)* -3; *p)* $-\frac{2}{7}$; *q)* $-\frac{3}{40}$; *r)* $-\frac{1}{4}$;

s) $-\frac{7}{6}$; *t)* $\frac{5}{12}$; *u)* 0.

5179 *a)* $x=\sqrt{8}$; *b)* $x=64$; *c)* $x=\frac{1}{3}$; *d)* $x=3^{-5}$;

e) $x=3^{-5}$; *f)* 2^{-36}; *g)* 5; *h)* $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\sqrt{\frac{1}{5}}$;

i) $2^{-5}=\frac{1}{32}$; *j)* 3; *k)* $2^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; *l)* 3.

5180 *a)* $2^{-11}\cdot 5^{-5}\cdot a^{28}\cdot b^{-9}$; *b)* $a^{\frac{83}{24}}$.

5181 *a)* 3;

b) $\sqrt{\left(\sqrt{57}+\sqrt{48}\right)\cdot\left(\sqrt{57}-\sqrt{48}\right)}=\sqrt{9}=3$;

c) 2;

d) $10\sqrt{2}+14$;

e) $\sqrt{27}-\sqrt{2}+\sqrt{27}+\sqrt{2}+2\sqrt{\left(\sqrt{27}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{27}+\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{27}+2\sqrt{25}=6\sqrt{3}+10$;

f) 7;

g) $\left(9\sqrt{3}-15\sqrt{2}+10\sqrt{2}+16\sqrt{3}\right)\cdot\left(15\sqrt{3}+14\sqrt{2}+12\sqrt{3}-9\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=$
$=\left(25\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)\cdot\left(25\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)=625\cdot 3-25\cdot 2=1825$;

h) $8\sqrt{3x}+20\sqrt{3x}-10\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}=14\sqrt{3x}$;

i) $\left(7\sqrt{5}+7\sqrt{5}+7\sqrt{7}-5\sqrt{5}\right)\cdot\left(9\sqrt{5}-7\sqrt{7}\right)=\left(9\sqrt{5}+7\sqrt{7}\right)\cdot\left(9\sqrt{5}-7\sqrt{7}\right)=81\cdot 5-49\cdot 7=62$;

j) $\left(4\sqrt[4]{5}-3\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{2}+3\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(5\sqrt[4]{5}-4\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=$
$=\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt[4]{25}-\sqrt[4]{4}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)=3$;

k) $\left(3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{5}+4\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}\right)=\left(7\sqrt[3]{3}-7\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}\right)=$
$=7\cdot\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2}\right)$;
a^3-b^3 azonossággal: $7(3-5)=7(-2)=-14$.

5182 *a)* $\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}=|1+\sqrt{5}|+|1-\sqrt{5}|=2\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=|1+\sqrt{3}|-|1-\sqrt{3}|=2$.

5183 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis.

5184 *a)* $\log_{64}(\log_2 16\cdot\log_5 25)=\log_{64}(4\cdot 2)=\frac{1}{2}$; *b)* $\lg\left(25^{\log_5 2}\cdot 4^{\log_2 5}\right)=\lg(4\cdot 25)=2$;

c) $\log_9\left(4^{\log_{16}25}-7^{\log_{49}16}\right)=\log_9(5-4)=0$;

d) $(\log_{20}4+\log_{20}5)^{\log_4 27}=(\log_{20}20)^{\log_4 27}=1^{\log_4 27}=1$.

5185 *a)* 135; *b)* 30; *c)* 20; *d)* $\frac{9}{4}$;

e) $16^{\log_4 2} = \left(4^{\log_4 2}\right)^2 = 2^2 = 4$;

f) $2^{3-\log_2 3} = \frac{2^3}{2^{\log_2 3}} = \frac{8}{3}$;

g) $5^{3-\log_5 4} = \frac{5^3}{5^{\log_5 4}} = \frac{125}{4}$;

h) $10^{1-\lg 3} = \frac{10}{10^{\lg 3}} = \frac{10}{3}$;

i) $16^{\log_4 5} = \left(4^2\right)^{\log_4 5} = \left(4^{\log_4 5}\right)^2 = 5^2 = 25$;

j) $\sqrt{7}^{\log_{49} 2} = \sqrt[4]{\left[\left(\sqrt{7}\right)^4\right]^{\log_{49} 2}} = \sqrt[4]{49^{\log_{49} 2}} = \sqrt[4]{2}$;

k) $16^{\log_2 3} = \left(2^4\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^4 = 3^4 = 81$;

l) $64^{\log_{\sqrt{2}} 2} = \left(\sqrt{2}^{12}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 2} = \left(\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 2}\right)^{12} = 2^{12} = 4096$;

m) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5} = \left(2^{-3}\right)^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{-3} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$;

n) $\frac{1}{10^{\lg 2}} + 2^2 \cdot 2^{\log_4 9} = \frac{1}{2} + 4\sqrt{4^{\log_4 9}} = \frac{1}{2} + 4\sqrt{9} = \frac{1}{2} + 12 = \frac{25}{2}$;

o) $\frac{\left(2^3\right)^{\log_4 3}}{\left(2^3\right)^{\log_2 3}} = \frac{\left(2^{\log_4 3}\right)^3}{\left(2^{\log_2 3}\right)^3} = \frac{\left(\sqrt{4^{\log_4 3}}\right)^3}{3^3} = \frac{\sqrt{3}^3}{27} = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{9}$;

p) $\frac{8^{\log_{64} 9}}{8^{\log_{\sqrt{8}} 5}} = \frac{\sqrt{64^{\log_{64} 9}}}{\left(\sqrt{8}^{\log_{\sqrt{8}} 5}\right)^2} = \frac{\sqrt{9}}{5^2} = \frac{3}{25}$;

q) $\sqrt{10^{6+\lg 36}} = \sqrt{10^6} \cdot \sqrt{10^{\lg 36}} = 10^3 \cdot \sqrt{36} = 6000$;

r) $19 \cdot 19^{\frac{1}{2}\log_{19} 36} = 19 \cdot \left(19^{\log_{19} 36}\right)^{\frac{1}{2}} = 19 \cdot 36^{\frac{1}{2}} = 19\sqrt{36} = 114$;

s) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10^3} = 20$;

t) $\left(5^2\right)^{\log_5 2} \cdot 25 = \left(5^{\log_5 2}\right)^2 \cdot 25 = 4 \cdot 25 = 100$;

u) Az értelmezési tartományon: $\frac{\sqrt[3]{p^9}}{\sqrt[3]{p^{\log_p 8}}} = \frac{p^3}{2}$;

v) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{\log_2 5}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(2^{\log_2 5}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$;

w) $\frac{1}{10^{\lg 2}} + \sqrt{9}^{\log_9 16} - \left(3^{\log_3 2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(9^{\log_9 16}\right)^{\frac{1}{2}} - 2^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{16} - 4 = \frac{1}{2}$.

5186 *a)* $\left(16^{\log_2 3}\right)^{15} = 81^{15} = 3^{60} = \underline{9^{30}}$ $\boxed{<}$ $4^{15} \cdot 5^{30} = \underline{10^{30}}$;

b) $(\log_8 2)^{60} = \left(\frac{1}{3}\right)^{60} = \underline{3^{-60}}$ $\boxed{=}$ $32^{-12 \cdot \log_2 3} = 2^{-60 \cdot \log_2 3} = \underline{3^{-60}}$;

c) $7 \cdot (\lg 2 - \lg 5) = 7 \cdot \lg\left(\frac{2}{5}\right) = \underline{\lg\left(\frac{2^7}{5^7}\right)}$ $\boxed{<}$ $\lg 128 + \lg 5^{-5} = \lg\left(2^7 \cdot 5^{-5}\right) = \underline{\lg\left(\frac{2^7}{5^5}\right)}$;

d) $\sqrt{48} = 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \underline{\sqrt{12} + 2\sqrt{3}}$ $\boxed{<}$ $-\dfrac{5}{\sqrt{12} - \sqrt{17}} = \sqrt{17} + \sqrt{12} = \underline{\sqrt{17} + 2\sqrt{3}}$;

e) a bal oldal: $\dfrac{60}{3\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \dfrac{60 \cdot (3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{18 - 3} = 12\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = \underline{7\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}$,

a jobb oldal: $\dfrac{50}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \dfrac{50 \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{12 - 2} = 10\sqrt{3} + 5\sqrt{2} = \underline{6\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}$, ez a nagyobb;

f) $\dfrac{1}{2^{10}} + \dfrac{1}{3^5 \cdot 2^9} = \dfrac{245}{2^{10} \cdot 3^5} = \underline{\dfrac{490}{2^{11} \cdot 3^5}}$ $\boxed{<}$ $\dfrac{1}{3^4 \cdot 2^3} - \dfrac{1}{2^{11} \cdot 3^4} = \dfrac{255}{2^{11} \cdot 3^4} = \underline{\dfrac{765}{2^{11} \cdot 3^5}}$;

g) $\dfrac{10^{-6} : 10^{10}}{10^3 : 10^4} = \dfrac{10^{-16}}{10^{-1}} = \underline{10^{-15}}$ $\boxed{>}$ $\dfrac{1}{\dfrac{1}{10^{-3} \cdot 10^{-20}}} = \underline{10^{-23}}$.

5187 *a)* $3{,}5 \cdot 10^{-1}$; *b)* $2{,}79 \cdot 10^3$.

5188 *a)* $\dfrac{\sqrt{a}(2\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(2\sqrt{b} - \sqrt{a})(2\sqrt{b} + \sqrt{a})} \cdot \dfrac{3(2\sqrt{b} - \sqrt{a})}{2\sqrt{a}} = \dfrac{3}{2}$; *b)* $\dfrac{5}{5(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})} \cdot \dfrac{(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})}{10(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})} = \dfrac{1}{10}$;

c) $\dfrac{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 6)}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} : \dfrac{2\sqrt{x} + 12}{\sqrt{x} + 5} = \dfrac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 5} \cdot \dfrac{\sqrt{x} + 5}{2(\sqrt{x} + 6)} = \dfrac{1}{2}$.

5189 *a)* A teljes lakosság éves energiaszükséglete $8{,}5 \cdot 10^{15}$ J, ennek 1%-a: $8{,}5 \cdot 10^{13}$ J. Egy turbina 365 nap alatt $40000 \cdot 9 \cdot 3600 \cdot 365 = 4{,}73 \cdot 10^{11}$ J energiát ad. A két érték hányadosa: 179,7, tehát 180 szélturbina megépítésére van szükség.

b) A teljes lakosság éves energiaszükséglete $8{,}5 \cdot 10^{15}$ J, ennek 82%-a: $6{,}97 \cdot 10^{15}$ J.

Mivel egy 1 m^2 területű napkollektor $1800 \cdot 0{,}70 = 1260$ W teljesítményt nyújt, ezért 365 nap alatt $1260 \cdot 11 \cdot 3600 \cdot 365 = 1{,}82 \cdot 10^{10}$ J energiát ad. A két érték hányadosa: $3{,}83 \cdot 10^5$ m^2, tehát ekkora területű napkollektorokra van szükség. ($3{,}83 \cdot 10^5$ $m^2 = 0{,}383$ km^2.)

5190 Az $1\,000\,000 = 100\,000 \cdot 1{,}06^x$ egyenlet megoldása: $x = \dfrac{1}{\lg 1{,}06} \approx 39{,}5$. A gyermek 40 éves korára éri el a betét az 1 000 000 forintot.

5191 Átírva 10-es alapú logaritmusra:

$$\frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 4} \cdot \ldots \cdot \frac{\lg(n+1)}{\lg n} = 7,$$

egyszerűsítések után: $\dfrac{\lg(n+1)}{\lg 2} = 7$, amiből $\lg(n+1) = \lg 2^7$, tehát $n = 127$.

5192 Írjuk át a gyököket törtkitevős hatványra, majd alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt[5^n]{5^{n-1}\sqrt{\ldots \sqrt[25]{5\sqrt{5}}}} = \log_{\frac{1}{5}} \log_5 \left[\left(\left(\left(5^{\frac{1}{25}}\right)^{\ldots}\right)^{\frac{1}{5^{n-1}}}\right)^{\frac{1}{5^n}}\right] = \log_{\frac{1}{5}} \log_5 5^{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{25} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{1}{5^n}} =$$

$$= \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{25} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{1}{5^n}\right) = \log_{\frac{1}{5}} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Műveletek racionális kifejezésekkel – megoldások

5193 *a)* $f(x) = -30x - 34$, behelyettesítve: $f\left(-\frac{7}{3}\right) = 36$;

b) $f(x) = -24x + 120$, behelyettesítve: $f\left(-\frac{7}{3}\right) = 176$;

c) $f(x) = 102x + 5$, behelyettesítve: $f\left(-\frac{7}{3}\right) = -233$.

5194 *a)* Igaz, mert $16a^2 - 24ab + 9b^2 = (4a - 3b)^2$.

b) Nem, mert $4a - 3b = -5$ is lehet.

5195 *a)* $(7 - 5a)(7 + 5a)$;

b) $b(10b + 9)(10b - 9)$;

c) $(c - 12)^2$;

d) $(20 - d)^2$;

e) $5(e - 6)^2$;

f) $f(7 - 4f)^2$.

5196 *a)* $\left(6p^2 + q^2\right)^2$;

b) $(p - q)^2$ vagy $(q - p)^2$;

c) $-(p + 1)^2$;

d) $-(a + 3)^2$;

e) $3a(b + 1)^2$;

f) $(a - 2b)^3$;

g) $(9m + z)(-m - 9z)$;

h) $(m + z - p)(m + z + p)$;

i) $-2m^3z^3(z + 2m)$;

j) $(b - m)(a + k)$;

k) $(m - k)(5a + 1)$.

5197 *a)* $(a - 3)(a + 7)$;

b) $(2b + 5)(b + 3)$;

c) $(4c - 1)(5c - 2)$;

d) $d(6d + 7)(7d + 6)$.

5198 Használjuk a gyöktényezős összefüggést: $a(x - x_1)(x - x_2)$.

a) $\dfrac{2\left(a + \frac{3}{2}\right) \cdot (a + 2)}{-2\left(a + \frac{3}{2}\right) \cdot (a - 4)} = \dfrac{a + 2}{4 - a}$;

b) $\dfrac{(b - 7) \cdot (b - 2)}{6(b + 1) \cdot (b - 2)} = \dfrac{b - 7}{6(b + 1)}$.

5199 *a)* Értelmezés: $a \neq 0$, egyszerűsítés után: $a - 4$;

b) Értelmezés: $b \neq 2$, egyszerűsítés után: $2b$;

c) Értelmezés: $c \neq 4$, egyszerűsítés után: c^3;

d) Értelmezés: $d \neq -7$, egyszerűsítés után: $d - 7$;

e) Értelmezés: $e \neq 12$ és $e \neq -12$, egyszerűsítés után: $\dfrac{1}{e + 12}$;

f) Értelmezés: $f \neq 10$, egyszerűsítés után: $\dfrac{f}{f - 10}$;

g) Értelmezés: $g \neq -6$, egyszerűsítés után: $\dfrac{g - 6}{g + 6}$.

5200 $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \dfrac{1}{x} = 47$.

5201

	Értelmezési tartomány	A művelet eredménye
a)	$a \in \mathbb{R},\ a \neq -\frac{1}{3},\ a \neq \frac{1}{3}$	$\frac{a}{3a-1}$
b)	$b \in \mathbb{R},\ b \neq -\frac{3}{2},\ b \neq 0,\ b \neq \frac{3}{2}$	$\frac{2b+3}{5b}$
c)	$c \in \mathbb{R},\ c \neq -5,\ c \neq 0,\ c \neq 5$	1
d)	$d \in \mathbb{R},\ d \neq -2,\ d \neq 0$	$d-2$
e)	$e \in \mathbb{R},\ e \neq -3,\ e \neq -2,\ e \neq -\frac{3}{2},\ e \neq 0,\ e \neq \frac{4}{3}$	$\frac{(e-1)\cdot(e+2)}{e^2\cdot(e+3)}$
f)	$f \in \mathbb{R},\ f \neq -\frac{1}{2},\ f \neq 4$	$3\cdot\left(\frac{2f+1}{f-4}\right)^2$
g)	$g \in \mathbb{R},\ g \neq 3,\ g \neq -3,\ g \neq 0,\ g \neq 5,\ g \neq -5$	$\frac{g^2}{(g+3)(g-5)}$
h)	$g, h \in \mathbb{R},\ g, h \neq 0,\ h \neq -g$	$\frac{g-h}{2}$
i)	$i \in \mathbb{R},\ i \neq -3,\ i \neq -\frac{3}{4}$	$\frac{2(i+3)}{3(i^2-3i+9)}$
j)	$i, j \in \mathbb{R},\ i \neq -j$	$\frac{5(i-j)}{4(i+j)}$

5202

	Értelmezési tartomány	A művelet eredménye
a)	$x \in \mathbb{R},\ x \neq -\frac{3}{2},\ x \neq \frac{3}{2}$	$\frac{6}{9-4x^2}$
b)	$x \in \mathbb{R},\ x \neq -2,\ x \neq 2$	$\frac{8x}{4-x^2}$
c)	$a \in \mathbb{R},\ a \neq \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
d)	$b \in \mathbb{R},\ b \neq -\frac{5}{2}$	$\frac{b}{10b+25}$
e)	$c \in \mathbb{R},\ c \neq -6,\ c \neq 6$	$\frac{2}{c-6}$

	Értelmezési tartomány	A művelet eredménye
f)	$d \in \mathbb{R},\ d \neq -10,\ d \neq 10$	-1
g)	$e \in \mathbb{R},\ e \neq -3,\ e \neq 3$	$\frac{5\left(e+\frac{16}{5}\right)(e-3)}{2(e+3)(e-3)} = \frac{5e+16}{2e+6}$
h)	$f \in \mathbb{R},\ f \neq -3$	$\frac{-5}{(f+3)^2}$
i)	$g \in \mathbb{R},\ g \neq -5,\ g \neq 2$	$\frac{1}{2-g}$
j)	$j \in \mathbb{R},\ j \neq -2,\ j \neq 2$	$\frac{j^2-20j+8}{(2-j)^2 \cdot (2+j)}$

5203 *a)* $\frac{9a^2-4b^2}{30a+20b} = \frac{(3a+2b)(3a-2b)}{10(3a+2b)} = \frac{1}{2}$;

b) $\frac{15a^3}{9a^5-12a^4b+4a^3b^2} = \frac{15a^3}{a^3 \cdot \left(9a^2-12 \cdot ab+4b^2\right)} = \frac{15a^3}{a^3 \cdot (3a-2b)^2} = \frac{3}{5}$.

5204 *a)* $\frac{16-2x}{(2-x)(2+x)} = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7}$; *b)* $\frac{6x-2}{5x-2} = \frac{28}{23}$.

5205 Ha $a+b+c=0$, akkor $c=-a-b$. Írjuk ezt be a kifejezésbe:

$$a^3+a^2 \cdot (-a-b)-ab(-a-b)+b^2 \cdot (-a-b)+b^3 =$$
$$= a^3-a^3-a^2b+a^2b+ab^2-ab^2-b^3+b^3 = 0.$$

5206 A feltételből: $x^2z+y^2z=y^2x+z^2x$, átrendezve: $xz(x-z)=y^2 \cdot (x-z)$, mivel $x \neq z$, ezért $xz=y^2$, ami annyit jelent, hogy $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$.

5207 Alakítsuk át a kifejezést:

$$\left(\frac{k}{3}-\frac{9}{k^2}\right):\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{k^2}+\frac{1}{k}\right) = \frac{k^3-27}{3k^2}:\frac{k^2+9+3k}{3k^2} = \frac{k^3-27}{k^2+3k+9} = \frac{(k-3)(k^2+3k+9)}{k^2+3k+9} = k-3,$$

ezért ha $k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow (k-3) \in \mathbb{Z}$.

Egyenletek, egyenlőtlenségek – megoldások

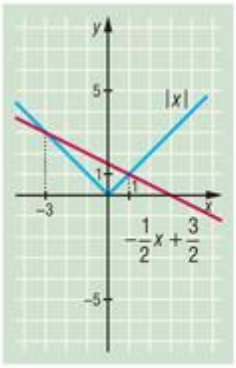
5208 *a)* $x=26$; *b)* $x=65$; *c)* $x=\frac{27}{11}$; *d)* nincs megoldás;

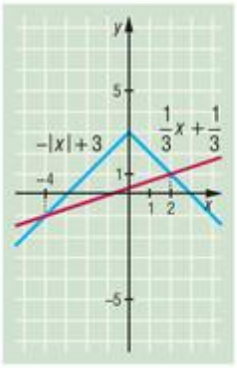
e) $x=\frac{6}{25}$; *f)* $x=\frac{3}{8}$; *g)* -22; *h)* $\frac{25}{12}$;

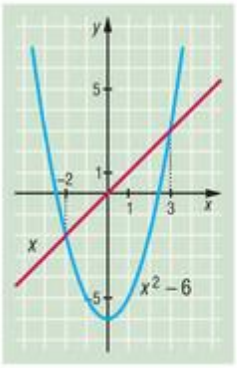
i) $x_1 = 0$ vagy $x_2 = -1$ vagy $x_3 = \frac{2}{3}$ vagy $x_4 = 4$; *j)* $x = \frac{16}{25}$;

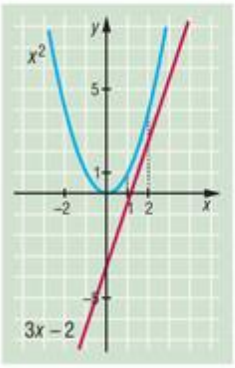
k) $x_1 = -4$ vagy $x_2 = -2$; *l)* $x \neq 15$; $x_1 = 0$ vagy $x_2 = -7$ vagy $x_3 = \frac{1}{2}$.

5209 *a)* $x_1 = -3$, $x_2 = 1$; *b)* $x_1 = -4$, $x_2 = 2$; *c)* $x_1 = -2$, $x_2 = 3$; *d)* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.









5210 *a)* $x_1 = -3$, $x_2 = 4$; *b)* $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{6}{5}$; *c)* $x_1 = \frac{68}{21}$, $x_2 = \frac{46}{21}$.

5211 *a)* $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{7}$;

b) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = -1$;

c) $x_1 = \frac{11}{10}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$;

d) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{7}{5}$;

e) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R}\setminus\{5\}$; $x_1 = 7$, $x_2 = 3$;

f) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R}\setminus\{-6\}$; $x_1 = 0$, $x_2 = -4$;

g) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$; $x_1 = 2$, $x_2 = -6$;

h) $x_1 = 0$, $x_2 = 9$;

i) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{4}$;

j) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$;

k) $x_1 = 0$, $x_2 = -10$;

l) $x_1 = 2$, $x_2 = -4$;

m) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$; azonosság;

n) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R}\setminus\{-5\}$; $x = 5$;

o) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R}\setminus\{-4\}$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

5212 *a)* Például: $x^2 - 2x - 15 = 0$;

b) például: $15x^2 + 7x - 2 = 0$;

c) a két gyök 2 és 8, tehát például: $x^2 - 10x + 16 = 0$;

d) a másik gyök: $x_2 = 3 + \sqrt{7}$, tehát például: $x^2 - 6x + 2 = 0$.

5213

	Az egyenlet	
	alaphalmaza	megoldása
a)	$x \geq \frac{3}{5}$	$x = \frac{7}{5}$
b)	$x \leq \frac{8}{3}$	$x = -\frac{8}{3}$
c)	$x < 0$ vagy $x \geq \frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{7}$
d)	$\varnothing$	nincs
e)	$x \geq \frac{5}{7}$	$x = 4$
f)	$x \geq \frac{1}{2}$	nincs
g)	$x \in \mathbb{R}$	$x_1 = 6,\ x_2 = -6$
h)	$x \geq \frac{3}{8}$	$x = \frac{5}{8}$
i)	$x \in \mathbb{R}$	$x = -4$
j)	$\varnothing$	nincs
k)	$x \leq 20$	$x = 20$
l)	$x \in \mathbb{R}$	$x = -2$ és $y = -\frac{2}{3}$
m)	$y \geq 1$	$x = \frac{5}{3}$
n)	$-5 \leq x \leq 5$	$x = 4$

5214 *a)* $x = 5$; *b)* $x = \frac{11}{4}$; *c)* $x = \frac{18}{13}$; *d)* 26; *e)* $x = \frac{2}{5}$; *f)* $x = 3$; *g)* $x = 1$; *h)* $x = \frac{9}{2}$; *i)* $x = \frac{16}{5}$; *j)* $x = -3$; *k)* $x = -\frac{1}{6}$; *l)* $x = 4$; *m)* $x = \frac{7}{2}$.

5215

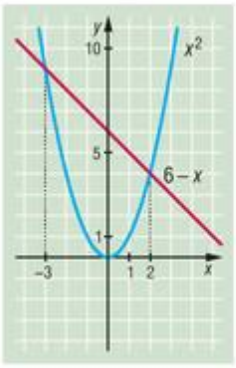
	Az egyenlet		
	alaphalmaza	kapott gyök(ök)	megoldása
a)	$x > -\frac{1}{2}$	$x = 40$	$x = 40$
b)	$x > -\frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{5}$	$x = -\frac{1}{5}$
c)	$\varnothing$	nincs	nincs
d)	$x > 4$	$x > 4$	$x > 4$
e)	$x > \frac{1}{2},\ x \neq 1$	$x = 3$	$x = 3$

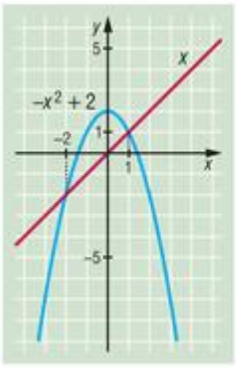
	Az egyenlet		
	alaphalmaza	**kapott gyök(ök)**	**megoldása**
f)	$x > 2,\ \ x \neq 3$	$x_1 = 0,\ \ x_2 = 5$	$x = 5$
g)	$x > \frac{2}{3}$	$x_1 = 2,\ \ x_2 = 1$	$x_1 = 2,\ \ x_2 = 1$
h)	$x > 4$	$x_1 = 7,\ \ x_2 = -1$	$x = 7$
i)	$x > \frac{2}{7}$	$x = 6$	$x = 6$

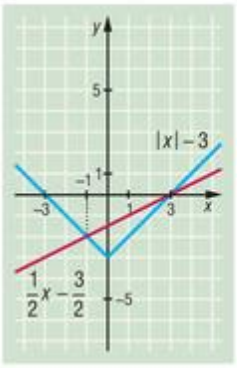
5216 *a)* $x_1 = \frac{4\pi}{3},\ \ x_2 = \frac{5\pi}{3}$; *b)* $x_1 = \frac{2\pi}{3},\ \ x_2 = \frac{4\pi}{3}$; *c)* $x_1 = \frac{\pi}{4},\ \ x_2 = \frac{5\pi}{4}$;

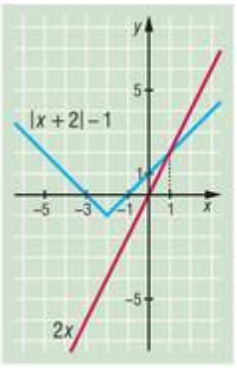
d) $x_1 = \frac{\pi}{6},\ \ x_2 = \frac{7\pi}{6}$; *e)* $x_1 = \frac{\pi}{32},\ \ x_2 = \frac{3\pi}{32}$; *f)* $x_1 = \frac{\pi}{6},\ \ x_2 = \frac{7\pi}{30}$.

5217 *a)* $x \leq -3$ vagy $2 \leq x$; *b)* $-2 \leq x \leq 1$; *c)* $-1 < x < 3$; *d)* $x \leq 1$.









5218 *a)* $[-2; \infty[$; *b)* $\left]-\infty; -\frac{11}{9}\right]$; *c)* $\left]\frac{19}{4}; \infty\right[$;

d) $\left]-\infty; -\frac{13}{8}\right[$; *e)* $\left]-\infty; \frac{1}{6}\right[$; *f)* $\left]-\frac{7}{13}; \infty\right[$;

g) $]-1; 4[$; *h)* $\left]-\infty; -\frac{8}{7}\right] \cup \left[\frac{10}{7}; \infty\right[$.

5219 *a)* $x \geq \frac{11}{3}$; *b)* $x > -\frac{2}{5}$; *c)* $x \leq \frac{17}{8}$;

d) $x < -\frac{3}{2}$; *e)* $x \leq \frac{5}{2}$; *f)* $x > \frac{2}{3}$;

g) $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$; *h)* $x \geq -2$; *i)* $x < 1$.

5220

	Az egyenlőtlenség			Az egyenlőtlenség	
	alaphalmaza	megoldása		alaphalmaza	megoldása
a)	$x > 0$	$x \geq 10000$	*b)*	$x > 0$	$x > \frac{1}{5}$
c)	$x > 0$	$0 < x \leq \sqrt{7}$	*d)*	$x < 10$	$x < 9{,}5$
e)	$x < -5$ vagy $x > 5$	$x \geq \sqrt{26}$ vagy $x \leq -\sqrt{26}$	*f)*	$x > \frac{3}{5}$	$x \geq 6$
g)	$x > \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} < x < \frac{6}{5}$	*h)*	$x > \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} < x \leq \frac{6}{5}$
i)	$x < -3$ vagy $x > 3$	$-2 < x < -\sqrt{3}$ vagy $\sqrt{3} < x < 2$			

5221 *a)* Eredetileg 36 darabot vitt ki a piacra.

b) 5 darabot adott Mari néninek.

5222 A gondolt szám legyen x. Ekkor a kapott számok: $8 + x$, $5 + x$, $3 + x$. A gondolt szám az 1.

5223 A $3x + 5x = 200$ egyenlet alapján a számok: 75 és 125.

5224 A $7(x - 6) = 4x - 6$ egyenlet alapján a fiú 12 éves, az apa pedig 48.

5225 A táblázat segítségével a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} x - 4 &= 6(y - 4) \\ x + 5 &= 3(y + 5) \end{aligned}\right\},$$

amiből kapjuk, hogy $x = 40$ és $y = 10$.

Tehát Szonja most 10 éves, az anyukája pedig 40.

Időpont	Anya	Szonja
4 éve	$x - 4$	$y - 4$
most	x	y
5 év múlva	$x + 5$	$y + 5$

5226 *a)* 4 évvel ezelőtt volt Móricka anyukája 4-szer annyi idős, mint ő (mert ekkor ő 8, anyukája pedig 32 éves volt).

b) 12 év múlva lesz Móricka anyukája 2-szer annyi idős, mint a fia. Ekkor életkoruk 24 és 48 év lesz.

5227 Ha a számjegyek x és $10 - x$, a $10x + (10 - x) - 72 = 10(10 - x) + x$ egyenlet alapján a keresett szám 91.

5228 A gondolt szám a 63.

5229 A $31x + 12 = 32(x - 1) - 4$ egyenlet megoldásából: 48 sort jelölt ki, és 1500 facsemetét fog elültetni.

5230 Ha a számok $x + 100$ és x, akkor a $4 = \frac{x + 100 - 4}{x}$ egyenlet alapján a két szám 132 és 32.

5231 48 nap alatt végez 5 munkás napi 3 óra munkával.

5232 Még 5 órát kell Andrásnak egyedül dolgoznia.

5233 2 g szükséges a 92%-os kénsavból.

5234 *a)* 17 órakor találkoznak.

b) Bálint 8 km-t, Gábor 4 km-t tett meg a találkozásukig.

5235 *a)* Mivel a tehervonat 5 órakor indult, és 4 óra 48 percet töltött úton, 9 óra 48 perckor érte utol az IC, mert az 8 órakor indult, de csak 1 óra 48 percet töltött úton.

b) 144 km-t tettek meg találkozásukig.

5236 Ha tegnap x km-t futott: $x-7=\frac{x+3}{3}$, amiből adódik, hogy tegnap 12 km-t, ma 15 km-t futott.

5237 *a)* Az $\frac{x}{5}+\frac{x}{8}=1$ egyenlet megoldása: $x=\frac{40}{13}$. Körülbelül 9 óra 5 perckor végeznek.

b) Az $\frac{1{,}5}{8}+\frac{x}{5}=1$ egyenlet megoldása: $x=\frac{32{,}5}{8}$. Körülbelül 10 óra 4 perckor végez az újabb gép a takarítással.

c) Az $\frac{2}{5}+\frac{x}{8}=1$ egyenlet megoldása: $x=4{,}8$. Pontosan 10 óra 48 perckor végeznek.

5238 *a)* 40 km.

b) A kerékpárosoknak elég délután fél háromkor elindulni.

5239 *a)* Az $52x=28(x+3)$ egyenlet megoldásából: 3,5 liter alkoholra van szükség. (➡)

b) Az $52\cdot 3=(x+3)\cdot 30$ egyenlet megoldásából: 2,2 liter tiszta víz kell.

c) Az $52x=3\cdot 28$ egyenlet megoldásából: 1,62 liter alkohol és 1,38 liter víz összekeverése lesz megfelelő.

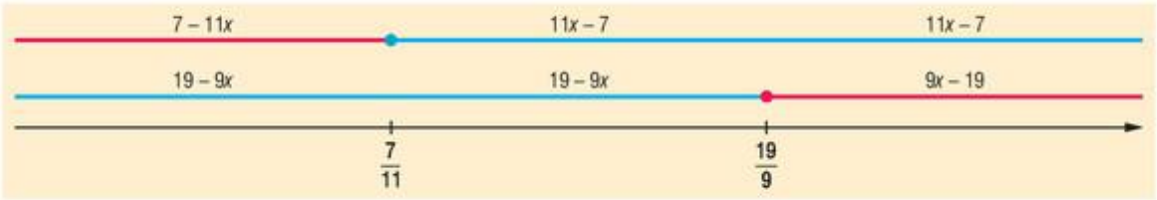
	%	Liter	Σ
Alkohol	52	x	$52x$
Víz	0	3	0
Keverék	28	$x+3$	$28(x+3)$

5240 Csak az lehet, hogy az alap $3x$, a szár $7x$, ekkor a kerület $17x=221$. Innen a háromszög alapja 39 cm, a szára 91 cm.

5241 *a)* Az abszolút érték értelmezése alapján:

$$|11x-7|=\begin{cases}11x-7, & \text{ha } 11x-7\geq 0, \text{ azaz } x\geq\frac{7}{11},\\ 7-11x, & \text{ha } 11x-7<0, \text{ azaz } x<\frac{7}{11};\end{cases}$$

$$|19-9x|=\begin{cases}19-9x, & \text{ha } 19-9x\geq 0, \text{ azaz } \frac{19}{9}>x,\\ 9x-19, & \text{ha } 19-9x<0, \text{ azaz } \frac{19}{9}\leq x.\end{cases}$$



Ha $x < \frac{7}{11}$, akkor $7 - 11x = 19 - 9x \Rightarrow x = -6$;

Ha $\frac{7}{11} \le x < \frac{19}{9}$, akkor $11x - 7 = 19 - 9x \Rightarrow x = 1{,}3$;

Ha $x \ge \frac{19}{9}$, akkor $11x - 7 = 9x - 19 \Rightarrow x = -6$, ami nem felel meg a feltételnek.

Az egyenlet megoldása: $x_1 = -6$, $x_2 = 1{,}3$.

	A vizsgált tartomány	Az egyenlet	
		alakja, gyöke	megoldása
b)	$x < -\frac{26}{3}$	$14 - 3x = -3x - 26$, nincs gyök	nincs
	$-\frac{26}{3} \le x < \frac{14}{3}$	$14 - 3x = 3x + 26 \Rightarrow x = -2$	$x = -2$
	$x \ge \frac{14}{3}$	$3x - 14 = 3x + 26$, nincs gyök	nincs
c)	$x \ge -\frac{13}{5}$	$5x + 13 = \frac{x + 65}{5} \Rightarrow x = 0$	$x_1 = 0$
	$x < -\frac{13}{5}$	$-5x - 13 = \frac{x + 65}{5} \Rightarrow x = -5$	$x_2 = -5$
d)	$x \ge \frac{3}{2}$	$2x - 3 = -9 - 8x \Rightarrow x = -0{,}6$	nincs
	$x < \frac{3}{2}$	$-2x + 3 = -9 - 8x \Rightarrow x = -2$	$x = -2$
e)	$x \ge \frac{11}{4}$	$4x - 11 = 2x - 7 \Rightarrow x = 2$	nincs
	$x < \frac{11}{4}$	$-4x + 11 = 2x - 7 \Rightarrow x = 3$	nincs
f)	$x < -\frac{1}{3}$	$-x + 2 - 3x - 1 = 5 \Rightarrow x = -1$	$x_1 = -1$
	$-\frac{1}{3} \le x < 2$	$-x + 2 + 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = 1$	$x_2 = 1$
	$2 \le x$	$x - 2 + 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = 1{,}5$	nincs

	A vizsgált tartomány	Az egyenlet	
		alakja, gyöke	megoldása
g)	$x < -2$	$-x - 2 + 5 - x = 10 \Rightarrow x = -3{,}5$	$x_1 = -3{,}5$
	$-2 \le x < 5$	$x + 2 + 5 - x = 10$, nincs gyök	nincs
	$x \ge 5$	$x + 2 + x - 5 = 10 \Rightarrow x = 6{,}5$	$x_2 = 6{,}5$
h)	$x < 3$	$3 - x - (4 - x) = 2x + 1 \Rightarrow x = -1$	$x = -1$
	$3 \le x < 4$	$x - 3 - (4 - x) = 2x + 1$, nincs gyök	nincs
	$x \ge 4$	$x - 3 - (x - 4) = 2x + 1 \Rightarrow x = 0$	nincs
i)	$x \ge 0$	$5x + 13 = \frac{x + 65}{5} \Rightarrow x = 0$	$x = 0$
	$x < 0$	$5x + 13 = \frac{-x + 65}{5} \Rightarrow x = 0$	nincs
j)	$x \ge 0$	$5x + 13 = \frac{x + 89}{5} \Rightarrow x = 1$	$x = 1$
	$x < 0$	$5x + 13 = \frac{-x + 89}{5} \Rightarrow x = \frac{12}{13}$	nincs
k)	$x < 0$	$3(5 - x) + (-x) = 25 \Rightarrow x = -2{,}5$	$x_1 = -2{,}5$
	$0 \le x < 5$	$3(5 - x) + x = 25 \Rightarrow x = -5$	nincs
	$x \ge 5$	$3(x - 5) + x = 25 \Rightarrow x = 10$	$x_2 = 10$
l)	$\lvert x - 1 \rvert - 6 = 5$	$\lvert x - 1 \rvert = 11 \Rightarrow x = 12$ vagy $x = -10$	$x_1 = 12$, $x_2 = -10$
	$\lvert x - 1 \rvert - 6 = -5$	$\lvert x - 1 \rvert = 1 \Rightarrow x = 2$ vagy $x = 0$	$x_3 = 2$, $x_4 = 0$

5242 *a)* Behelyettesítve x értékét, a $2a^2 - 16a + 24 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai: $a_1 = 2$, $a_2 = 6$.

b) Az egyenlet diszkriminánsa: $D = 9a^2 - 4(2a^2 - a - 1) = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2 \geq 0$. Tehát minden valós paraméter érték esetén lesz valós megoldása az egyenletnek.

5243 *a)* Egy oldalra rendezve és kiemelve: $(x + 1)[2(2x + 1)(2x + 3) - (x + 2)(x + 3)] = 0$.

Ebből $(x + 1)(7x^2 + 11x) = 0$, megoldásai: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -\frac{11}{7}$.

b) Az egyenlet alaphalmaza: $x \leq -8$ vagy $x \geq 4$.

Megoldások: $x_1 = -8$, $x_2 = 4$, illetve az $x^2 - 3x - 10 = 0$ egyenletből: $x_3 = 5$ (az $x_4 = -2$ nem felel meg a feltételeknek).

c) Az $x - 2 = a$ jelölést bevezetve az $a^2 - 5a + 6 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei: $a_1 = 3$, $a_2 = 2$. Ebből: $x_1 = 5$, $x_2 = 4$.

d) A *c)* feladathoz hasonlóan az $x^2 + x = a$ jelölést bevezetve: $a^2 - 2a - 24 = 0$. Ennek gyökei: $a_1 = 6$, $a_2 = -4$. Ebből:

$$\text{vagy } x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -3,$$

$$\text{vagy } x^2 + x + 4 = 0, \text{ nincs megoldás.}$$

e) Az $x^2 + x + 1 = a$ jelölést bevezetve: $a(a + 1) - 30 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 30 = 0$. Az egyenlet gyökei: $a_1 = 5$, $a_2 = -6$, amiből:

$$\text{vagy } x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$$\text{vagy } x^2 + x + 7 = 0, \text{ nincs megoldás.}$$

5244 *a)* Az $\frac{n(n-3)}{2} = 252$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 24$, $n_2 = -21$. A sokszögnek 24 oldala van.

b) Az $\frac{n(n-3)}{2} = n + 250$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 25$, $n_2 = -20$. A sokszögnek 25 oldala van.

c) Az $\frac{n(n-1)}{2} = 465$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 31$, $n_2 = -30$. A sokszögnek 31 oldala van.

5245

	A vizsgált tartomány	Az egyenlet	
		átrendezésének módja, gyöke	megoldása
a)	$x \geq -\frac{3}{2}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$	$x = 3$
b)	$x \leq \frac{4}{5}$	négyzetre emelés után: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{9}$	$x = \frac{4}{9}$
c)	$x \geq \frac{4}{13}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 8$, $x_2 = 1$	$x_1 = 8$, $x_2 = 1$
d)	$x \geq -\frac{9}{7}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 0$, $x_2 = 4{,}75$	$x = 4{,}75$
e)	$x \geq \frac{7}{4}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$	nincs

	A vizsgált tartomány	Az egyenlet	
		átrendezésének módja, gyöke	megoldása
f)	$x \geq -\frac{1}{8}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 0,\ x_2 = 3$	$x = 0$
g)	$x > 3$	beszorzás és négyzetre emelés után: $x_1 = 4,\ x_2 = 12$	$x = 12$
h)	$x \leq -3$ vagy $x \geq \frac{1}{2}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 1,\ x_2 = -4$	$x = 1$
i)	$x \in \mathbb{R}$	a gyökvonások elvégzése után: $\lvert x-3\rvert + \lvert x+4\rvert = 11$, amiből $x_1 = -6,\ x_2 = 5$	$x_1 = -6,\ x_2 = 5$
j)	$x \geq 4$	két négyzetre emelés után: $x_1 = 5,\ x_2 = -\frac{13}{3}$	$x = 5$
k)	$x \geq 0$	átszorozva és rendezve: $x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = -1$	nincs
l)	$x > 3$	beszorzás és rendezés után: $x_1 = 7,\ x_2 = -1$	$x = 7$
m)	$x \geq 0$	a $\sqrt{x} = a$ új változó bevezetésével: $x = 16$	$x = 16$
n)	$-5 < x \leq 4$	átszorzás és négyzetre emelés után: $x_1 = 3,\ x_2 = -4$	$x_1 = 3,\ x_2 = -4$

5246 *a)* $x = 0$;

b) $x = 4$;

c) $x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = -4$;

d) $x_1 = -\frac{1}{4},\ x_2 = 3$;

e) $x_1 = 0,\ x_2 = -2$;

f) $x_1 = 2;\ x_2 = -4$;

g) $x = \frac{1}{2}$;

h) $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{3}{2}$;

i) $x = \frac{1}{6}$;

j) $x = \frac{1}{3}$;

k) $x = 1$;

l) alaphalmaz: $x \geq 0$; $x_1 = 0,\ x_2 \approx 0{,}4$;

m) alaphalmaz: $x \geq 0$; $x_1 = \frac{1}{16},\ x_2 = 0$;

n) $x = \frac{7}{2}$;

o) alaphalmaz: $x \geq -1$; $x = -\frac{8}{9}$;

p) $x = 2$.

5247 *a)* Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{7}{5}$. Az $\frac{5x-7}{3x+9} = 9$ egyenlet gyöke: $x = -4$, ez nem megoldás.

b) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{1}{2}$. A $\frac{3x^2+8}{2x-1} = 5x+6$ egyenlet gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Csak az $x = 1$ megoldása az eredeti egyenletnek.

c) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{3}{2}$. A $(2x+3)^2 = (4x+1)(2x-3)$ egyenlet gyökei: $x_1 = 6$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Csak az $x = 6$ megoldása az eredeti egyenletnek.

d) Az egyenlet alaphalmaza: $\frac{11}{3} < x < 14$. A $14 - x = \frac{(2x-4)^2}{3x-11}$ egyenlet gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{34}{7}$. Mindkettő megoldása az eredeti egyenletnek.

e) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{14}{9}$. A $(9x-14)(3x+10) = 100$ egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{20}{9}$, $x_2 = -4$. Csak az $x = \frac{20}{9}$ megoldása az eredeti egyenletnek.

f) Az egyenlet alaphalmaza: $x > -\frac{8}{23}$. A $\frac{23x+8}{(4x+4)^2} = \frac{1}{4}$ egyenlet gyökei: $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{4}$. Mindkettő megoldása az eredeti egyenletnek.

g) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 0$. A $\lg x$-re másodfokú egyenletből $\lg x_1 = 3$, $\lg x_2 = -1$, a megoldások: $x_1 = 1000$, $x_2 = 0{,}1$.

h) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 0$, $x \neq 0{,}1$, $x \neq 10^5$. A $\lg x$-re másodfokú egyenletből $\lg x_1 = 3$, $\lg x_2 = 2$, a megoldások: $x_1 = 1000$, $x_2 = 100$.

i) Az egyenlet alaphalmaza: $x > -1$; $x \neq 0$. A logaritmus definíciója alapján $2x^2 + 1 = (x+1)^2$, aminek gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$. Csak az $x = 2$ megoldás.

j) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$. A logaritmus azonosságait felhasználva kapjuk a $6x^2 - 23x - 35 = 0$ egyenletet, amelynek gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{7}{6}$. Csak az $x = 5$ megoldás.

k) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 2$. A megoldás $x = 4$.

l) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 0$, $x \neq 1$. A megoldás $x = 2$.

m) Az egyenlet alaphalmaza: $x > -2$. A megoldás $x = 1$.

n) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 4$. A megoldás $x = 8$.

5248 *a)* Az első egyenlet gyökei: $x_1 = 8$, $x_2 = 2$; a második egyenleté: $x_1 = 8$, $x_2 = -3$. Mindkét egyenletnek megoldása: $x = 8$.

b) Az első egyenlet értelmezési tartománya: $x > 0$, gyökei: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, de csak az első felel meg. A második egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Mindkét egyenlet megoldása: $x = \frac{3}{2}$.

5249 *a)* $x_1 = \pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$;

b) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$;

c) $x_1 = \frac{5\pi}{12}$, $x_2 = -\frac{7\pi}{12}$;

d) $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = -\frac{\pi}{3}$, $x_4 = -\frac{5\pi}{6}$;

e) $x_1 = \frac{\pi}{12}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $x_3 = \frac{3\pi}{4}$;

f) $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{18}$;

g) $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{12}$;

h) $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{9}$.

5250 *a)* $x_1 = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{2\pi}{9} + l \cdot \frac{2\pi}{3}$, $k, l \in \mathbb{Z}$;

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x_2 = \frac{7\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{2}$, $k, l \in \mathbb{Z}$;

c) $x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

d) $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

e) $x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

f) $x_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$;

g) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$;

h) $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5251 *a)* A másodfokú egyenletből $\sin x = 1$, azaz $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

vagy $\sin x = -\frac{1}{2}$, amiből $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

b) A másodfokú egyenletből $\cos x = \sqrt{3}$, aminek nincs megoldása;

vagy $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

c) Mivel $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, a másodfokú egyenletből $\cos x = 1$, azaz $x_1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

vagy $\cos x = \frac{1}{2}$, amiből $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

d) Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, a másodfokú egyenletből $\sin x = 4$, aminek nincs megoldása;

vagy $\sin x = \frac{1}{2}$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

e) Az egyenlet alaphalmaza: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Beszorzás és szorzattá alakítás után $\sin x = 0$, amiből $x_1 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

vagy $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, amiből $x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

f) Az egyenlet alaphalmaza: $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Beszorzás és szorzattá alakítás után $\sin x = 0$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

vagy $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

g) Az egyenlet alaphalmaza: $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Átszorzás és az $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ helyettesítés után $\cos^2 x - \cos x = 0$, amiből $\cos x \cdot (\cos x - 1) = 0$.
Ez két esetben teljesül: ha $\cos x = 0$ vagy $\cos x = 1$.

Ha $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, de az értelmezési tartomány miatt $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ha $\cos x = 1 \Rightarrow x_2 = 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

h) A $\cos^3 x - \cos^2 x = 0$ egyenletből kiemeléssel kapjuk: $\cos^2 x \cdot (\cos x - 1) = 0$, ami teljesül, ha $\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vagy $\cos x = 1 \Rightarrow x_2 = 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

i) Ha $\cos x \neq 0$, leoszthatunk vele, így:

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{3} = \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = |\operatorname{tg} x|,$$

ami csak akkor teljesül, ha $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vagy $x_2 = \frac{5\pi}{6} + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

Megjegyzés: Ha $\cos x = 0$, akkor $\sin x = 0$-nak is teljesülni kellene, ez pedig nem lehetséges.

j) Kéttényezős szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Ekkor $\cos x = 0$ vagy $\operatorname{tg} x = 0$. A $\operatorname{tg} x$ miatt az alaphalmaz: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ha $\cos x = 0$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nem teljesülhet, ha $\operatorname{tg} x = 0$, akkor $x = l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, ez jó megoldás.

k) Mivel $\cos x \neq 0$, mert ekkor $\sin x = 0$ kellene, hogy legyen, de ez nem lehetséges, ezért: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Osszuk el az egyenletet $\cos^2 x$-szel: $\operatorname{tg}^2 x + 3 \cdot \operatorname{tg} x - 4 = 0$ egyenletet kapjuk, amiből $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vagy $\operatorname{tg} x = -4 \Rightarrow x_2 \approx -1{,}33 + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

l) Az egyenlet alaphalmaza: $\operatorname{ctg} x$ miatt $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
A bal oldalon a $\operatorname{ctg}^2 x$, a jobb oldalon pedig a 3 kiemelése után: $\operatorname{ctg}^2 x(1 + \operatorname{ctg} x) = 3(1 + \operatorname{ctg} x)$. Szorzattá alakítás után: $(\operatorname{ctg}^2 x - 3)(1 + \operatorname{ctg} x) = 0$. Ha a szorzat első tagja 0, akkor:

$$\operatorname{ctg} x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ és } x_2 = \frac{5\pi}{6} + l\pi, \quad l \in \mathbb{Z};$$

ha a második tagja 0, akkor:

$$\operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow x_3 = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5252 *a)* $x \in \,]3; +\infty]$;

b) $x \in \left]-\frac{1}{2}; \infty\right[$;

c) $x \in \left]-\frac{7}{2}; \frac{3}{5}\right[$;

d) $x \in \left]-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup \left]\frac{3}{8}; \infty\right[$;

e) $x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup \,]3; \infty[$;

f) $x \in \left[-10; \frac{3}{2}\right[$;

g) $x \in \,]-\infty; -9[\cup \left]-\frac{1}{2}; \infty\right[$;

h) $x \in \left]-1; \frac{1}{3}\right[$.

5253 *a)* $x \in \left]-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{3}; \infty\right[$;

b) $x \in \left[\frac{6}{11}; \frac{4}{5}\right]$;

c) $x \in \left]-\infty; \frac{16}{7}\right]$;

d) $x \in \mathbb{R}$.

5254 *a)* $x \in]-\infty; -3[\cup]2; \infty[$;

b) $x \in \left]-\frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right[$;

c) $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{4}; \infty\right[$;

d) $x \in]-\infty; -1[\cup \left]\frac{1}{2}; 3\right[$;

e) $x \in]-4; 1[$;

f) $x \in \left]-2; -\frac{2}{3}\right] \cup \left]\frac{5}{2}; \infty\right[$;

g) $x \in \left[-\frac{5}{3}; -1\right[\cup]7; \infty[$;

h) $x \in [-2; 0[\cup [6; \infty[$;

i) $x \in]-\infty; -4[\cup]-4; 4[$;

j) $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [2; 3[\cup]5; \infty[$;

k) $x \in [-5; -3[\cup]4; 6]$;

l) $x \in]-\infty; -3] \cup \left]-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \cup]5; \infty[$;

m) $x \in]-\infty; 1[\cup \left[\frac{7}{3}; 3\right[$;

n) $x \in]-\infty; -4[\cup [-1; 1[\cup [2; \infty]$;

o) $x \in \left]1; \frac{5}{3}\right[\cup]2; 3[$;

5255 *a)* Az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{1}{4} < x < \frac{11}{3}$, a keresett halmaz: $\{0; 1; 2; 3\}$.

b) Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{3}{4} \le x \le 8$, a keresett halmaz: $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

5256 A $100 < \frac{n(n-3)}{2} < 200$ egyenlőtlenség-rendszer első része: $0 < n^2 - 3n - 200$, ennek megoldása:

$n < -12{,}72$ vagy $n > 15{,}72$.

A második egyenlőtlenség: $n^2 - 3n - 400 < 0$, ennek megoldása: $-18{,}56 < n < 21{,}56$.

A pozitív számok halmazán az egyenlőtlenségek közös megoldása: $15{,}72 < n < 21{,}56$.

A lehetséges sokszögek és a keresett szögek nagysága:

Oldalszám	16	17	18	19	20	21
Szögek nagysága	157,5°	≈ 158,82°	160°	≈ 161,05°	162°	≈ 162,86°

5257 *a)* $x \in \left[\frac{9}{5}; \infty\right[$;

b) $x \in [-19; \infty[$;

c) $x \in]-\infty; -2] \cup \left[\frac{5}{2}; \infty\right[$;

d) $x \in \left]\frac{3+\lg 5}{7}; \infty\right[$.

e) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > \frac{3}{7}$. A megoldás: $\frac{3}{7} < x < \frac{8}{3}$.

f) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 1$. A megoldás: $x > 1$.

g) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > \frac{4}{3}$. A megoldás: $\frac{4}{3} < x \le 2$.

h) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 2$. A megoldás: $x \ge 3$.

i) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 4\frac{1}{4}$. A megoldás: $x > 6$.

j) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 4$, $x \neq 5$. A megoldás: $x > 5$.

k) Megoldás: $-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$.

l) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $\frac{1}{3} < x < 3$. A megoldás: $\frac{1}{3} < x \leq 1$.

m) Megoldás: $x > -1$.

n) Megoldás: $0 < x < 1$.

5258 *a)* Az egyenlőtlenség megoldása $-\frac{1}{3} \leq x \leq 4$, az adott intervallumon: $2 \leq x \leq 4$.

b) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x > \frac{7}{5}$. A logaritmus azonosságait felhasználva a $2x^2 - 17x + 21 < 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, ennek megoldása: $\frac{3}{2} < x < 7$, ami benne van az értelmezési tartományban. Az adott intervallumon a megoldás: $2 \leq x \leq 5$.

5259 *a)* $x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$;

b) $x \in \left[0; \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$;

c) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$;

d) $x \in \left[0; \frac{19\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{23\pi}{24}; \frac{43\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{47\pi}{24}; 2\pi\right]$;

5260 Minden feladatnál használjuk a Viète-formulákat.

a) Kérdés $x_1^2 + x_2^2$ értéke. Használjuk fel, hogy $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Ekkor a Viète-formulákkal nyert $x_1 + x_2 = 11$ és $x_1x_2 = 3$ helyettesítése után $121 - 2 \cdot 3 = 115$-öt kapunk eredményül.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$ és $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$. Az $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ szorzattá alakítása után helyettesítéssel kapjuk az eredményt:

$$x_1x_2(x_1 + x_2) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{15}{4}.$$

c) Kérdés $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ értéke. Ezt átalakítva kapjuk (lásd *b)* feladat):

$$\frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{5}{2} : \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{5}{7}.$$

d) Alkalmasan válasszuk másik gyökként az első konjugáltját: $x_2 = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$. Ekkor:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{6}{2} \quad \text{és} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2},$$

amiből leolvashatjuk, hogy $a = 2$, $b = -6$, $c = 1$.

Helyettesítés után a keresett másodfokú egyenlet: $2x^2 - 6x + 1 = 0$.



5261 *a)* Legyen $a = x^2 - 3x - 15$, az $a + 2 - \frac{15}{a} = 0$ egyenlet megoldásai: $a_1 = -5$, $a_2 = 3$.

Visszahelyettesítve az $x^2 - 3x - 10 = 0$ és $x^2 - 3x - 18 = 0$ egyenleteket kapjuk. Ezek megoldásai: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ és $x_3 = 6$, $x_4 = -3$.

b) Csoportosítsuk a tagokat:

$$\left(x - 2 \cdot \sqrt{x-1}\right) + \left(2y - 2 \cdot \sqrt{2y-1}\right) + \left(3z - 2 \cdot \sqrt{3z-1}\right) = 0.$$

Mindegyik zárójelben egy-egy teljes négyzet áll:

$$\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{2y-1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{3z-1} - 1\right)^2 = 0.$$

A bal oldal értékkészlete miatt a megoldás: $x = 2$, $y = 1$, $z = \frac{2}{3}$.

c) Értelmezés: $-1 \le x \le 1$, $x \neq 0$. A jobb oldal ilyen x-ek esetén: $13 \le 14 - \sqrt{1 - x^2} \le 14$.

A bal oldal $7\left(x + \frac{1}{x}\right)$, csak akkor van megoldás, ha $x > 0$. Ekkor viszont $7\left(x + \frac{1}{x}\right) \ge 14$.

Csak akkor van megoldás, ha mindkét oldal 14-gyel egyenlő, tehát $x = 1$.

d) Értelmezés: $x < 3$ vagy $x > 5$. Vezessünk be új változót, legyen $y = \log_3(x^2 - 8x + 15)$. Ekkor az egyenlet: $y^2 - (\log_3 35 + 1)y + \log_3 35 = 0$, megoldásai: $y_1 = 1$, $y_2 = \log_3 35$. Ezekből $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ és $x_3 = -2$, $x_4 = 10$. Mindegyik megoldása az egyenletnek.

5262 Ha $x = 1$, akkor $y = 1$. Ha $x = 2$, nincs megoldás. Ha $x = 3$, akkor $y = 3$. Ha $x = 4$, nincs megoldás. Ha $x \ge 5$, akkor $x!$ nullára végződik, tehát az $1! + 2! + 3! + \ldots + x!$ összeg 3-ra végződik, ami nem lehet egy négyzetszám utolsó jegye.

Tehát a megoldás: $x = 1$, $y = 1$ és $x = 3$, $y = 3$.

Egyenletrendszerek – megoldások

5263 A keresett számok: 33; 8; 14. Segítségül:

5264 *a)* $x = -2$, $y = -7$;

b) $x = 5$, $y = \frac{1}{3}$;

c) $x = \frac{2}{5}$, $y = -3$;

d) $x = \frac{5}{2}$, $y = -\frac{7}{3}$;

e) $x = -\frac{1}{5}$, $y = -\frac{9}{5}$;

f) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$;

g) $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{2}$;

h) $x = 0$, $y = \frac{5}{3}$;

i) $x_1 = 4$, $y_1 = 8$, $x_2 = 8$, $y_2 = 4$;

j) $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $x_2 = \frac{11}{5}$, $y_2 = -\frac{2}{5}$;

k) $x = 1$, $y = 2$;

l) $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = 4$;

m) $x = 4$, $y = \frac{1}{2}$;

n) $x = 10$, $y = 100$;

o) $x = 4$, $y = 8$.

5265 Ha a meggy ára x, a cseresznye ára y, akkor a $\left.\begin{aligned}3x+5y&=1980\\5x+3y&=1860\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszert kell megoldanunk: $x=210$, $y=270$.

Tehát a meggy ára 210 Ft/kg, a cseresznye ára 270 Ft/kg.

5266 A következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned}x&=y+40\\\frac{1}{5}\cdot(x+y)&=40\end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldásából a személyautó sebessége 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a kamioné 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

5267 Az $\left.\begin{aligned}y&=19x+5\\y+30&=21x+9\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszert megoldva: $x=13$, $y=252$.

Tehát a 252-t és a 282-t osztottuk, és a hányados mindkét esetben 13.

5268 *a)* Az első egyenletet szorzattá alakítjuk:

$$(x+y)(x-y)+(x-y)=20 \;\Rightarrow\; (x-y)(x+y+1)=20 \;\Rightarrow\; x-y=4.$$

Ezt megoldva az $x+y=4$ egyenlettel, adódik a megoldás: $x=4$ és $y=0$.

b) $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=-3$ és $x_2=-1$, $y_2=\frac{3}{2}$.

c) $x_1=17$, $y_1=2$ és $x_2=-39{,}4$, $y_2=-35{,}6$.

d) A második egyenletet 2-vel szorozva, majd hozzáadva az első egyenlethez:

$$(x+y)^2=9, \text{ amiből } |x+y|=3.$$

Ebből a következő egyenletrendszerekhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned}x+y&=3\\xy&=2\end{aligned}\right\} \quad \text{és} \quad \left.\begin{aligned}x+y&=-3\\xy&=2\end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletrendszerből: $x_1=1$, $y_1=2$ és $x_2=2$, $y_2=1$; a második egyenletrendszerből: $x_3=-2$, $y_3=-1$ és $x_4=-1$, $y_4=-2$.

e) $x_1=3$, $y_1=12$, $x_2=-3$, $y_2=-12$, $x_3=6\sqrt{2}$, $y_3=3\sqrt{2}$, $x_4=-6\sqrt{2}$, $y_4=-3\sqrt{2}$.

f) Helyettesítsük az $y-4=a$ és $x+1=b$ változókat. Az így kapott

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{b}&=3\\ab&=12\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai: $a_1=6$, $b_1=2$ és $a_2=-6$, $b_2=-2$. Ebből a megoldásokra adódik: $x_1=1$, $y_1=10$ és $x_2=-3$, $y_2=-2$.

g) $x_1=7$, $y_1=-5$, $x_2=\frac{4}{3}$, $y_2=-\frac{11}{9}$.

h) Átalakítva az egyenleteket, azt kapjuk, hogy:

$$\left.\begin{aligned}xy(x-y)&=-12\\xy+(x-y)&=4\end{aligned}\right\}.$$

Vezessük be az $xy = a$ és $x - y = b$ változókat. Ekkor:

$$\left.\begin{aligned} ab &= -12 \\ a + b &= 4 \end{aligned}\right\},$$

ennek a megoldásai: $a_1 = 6$, $b_1 = -2$ és $a_2 = -2$, $b_2 = 6$. Ebből a megoldásokra adódik:

$$x_1 = \sqrt{7} - 1, \quad y_1 = \sqrt{7} + 1; \qquad x_2 = -1 - \sqrt{7}, \quad y_2 = 1 - \sqrt{7};$$
$$x_3 = \sqrt{7} + 3, \quad y_3 = \sqrt{7} - 3; \qquad x_4 = 3 - \sqrt{7}, \quad y_4 = -3 - \sqrt{7}.$$

5269 *a)* $x = 5, \quad y = -1$.

b) $x = 3, \quad y = 5$.

c) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > -1$, $y > 3$. Gyökei: $x_1 = 2$, $y_1 = 7$; $x_2 = -3{,}4$, $y_2 = -2$, de csak az első számpár a megoldás.

d) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > 0$, $y > 0$. Megoldás: $x = 27$, $y = 512$.

e) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > 0$, $y > 0$, $x + y > 1$. Megoldás: $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$.

f) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > y$ és $x > -y$ és $x^2 + y^2 > 13$. Megoldás: $x = 8$, $y = 7$.

g) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $3x > y$. Megoldás: $x_1 = \frac{2}{3}$, $y_1 = -8$; $x_2 = -3$, $y_2 = -19$.

h) Megoldás: $x = -2$, $y_1 = \frac{1}{400}$.

5270 Legyenek a befogók a és b. A következő egyenletrendszer írható fel:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 39^2 \\ \frac{ab}{2} &= 270 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek pozitív megoldásai a befogók: 15 cm és 36 cm.

5271 Ha a négyzetek oldala x és y, akkor az $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 724 \\ 3x + 3y + x - y &= 116 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer írható fel.

A megoldások: $x_1 = 26{,}4$, $y_1 = 5{,}2$ és $x_2 = 20$, $y_2 = 18$, az első esetben nem érdemes földterületekről beszélni.

5272 *a)* Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = 7$, $y_1 = 1$ és $x_2 = 3$, $y_2 = 4$.

A két pont: $A(7; 1)$, $B(3; 4)$, távolságuk 5 egység.

b) Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = 4$, $y_1 = 1$ és $x_2 = 6$, $y_2 = -3$.

A két pont: $P(4; 1)$, $Q(6; -3)$, távolságuk $PQ = \sqrt{20}$ egység.

5273 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2010 \\ x &= 9y + 9 \\ z &= 9y + 82 \end{aligned}\right\}.$$

A keresett számok: $x = 918$, $y = 101$ és $z = 991$.

5274 Összeadva a két egyenletet: $(x+y)^2 = 16$. Ha $x+y=4$, akkor az $x(x+6y)=27$ egyenletbe helyettesítve az $5x^2-24x+27=0$ egyenletet kapjuk, hogy $x_1=3$, $y_1=1$ és $x_2=\frac{9}{5}$, $y_2=\frac{11}{5}$.

Ha $x+y=-4$, akkor az $5x^2+24x+27=0$ egyenlethez jutunk, amiből $x_1=-3$, $y_1=-1$ és $x_2=-\frac{9}{5}$, $y_2=-\frac{11}{5}$.

5275 Ha a fiúk száma x és a lábméretük átlaga y, akkor $xy+(x+8)(y-4)=39{,}5(2x+8)$, átrendezve és szorzattá alakítva:

$$2xy+8y-83x-348=0,$$
$$2y(x+4)-83(x+4)=16,$$
$$(2y-83)(x+4)=16.$$

Mivel az első tényező páratlan, csak a $2y-83=1$, $x+4=16$ ad megoldást: $x=12$ és $y=42$.
Tehát 20 lány és 12 fiú jár az osztályba.

5276 Értelmezés: $y,\ z\neq 0$. Kivonva egymásból a két egyenletet: $-\frac{2}{y}+\frac{2x}{z}=0$, amiből $z=xy$ $(x\neq 0)$.
Visszahelyettesítve: $\frac{x-1}{y}+\frac{x+1}{xy}=1$. Átalakítás és rendezés után $x^2+1=xy$, amiből $y=x+\frac{1}{x}$.
Mivel az egész számok halmazán keressük, a megoldás: $x_1=1$ vagy $x_2=-1$.
A megoldások: $(1;2;2)$ és $(-1;-2;2)$.

5277 Értelmezés: $x,\ y,\ z\neq 0$. A harmadik egyenlet a közös nevezőre hozás után:

$$\frac{x^2+xy+xz+yz}{xyz}=0,$$
$$\frac{(x+y)\cdot(x+z)}{xyz}=0.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha a számláló 0, amiből két eset adódik.

I. eset: $x=-y$.

A második egyenletbe helyettesítve: $z^{2011}=2^{2011}$, tehát $z=2$. Az első egyenletbe mindkét eredményt beírva: $2y^4+2^4=178$, amiből $y_1=3$, $y_2=-3$ és $x_1=-3$, $x_2=3$.

II. eset: $x=-z$.

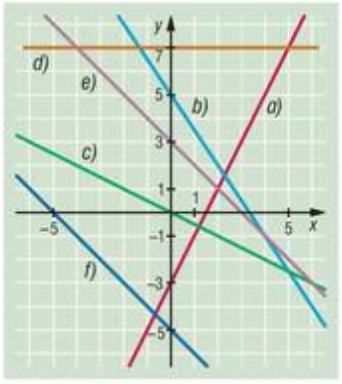
A fenti módszert alkalmazva ezúttal azt kapjuk, hogy $y=2$. Ekkor a megoldások: $z_1=3$, $z_2=-3$ és $x_1=-3$, $x_2=3$.

Tehát az egyenletrendszer megoldásai a $(-3;3;2)$, $(3;-3;2)$, $(-3;2;3)$, $(3;2;-3)$ számhármasok.

FÜGGVÉNYEK – ÖSSZEFOGLALÁS

A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai – megoldások

5278 A függvények grafikonjai az ábrán láthatóak. (➡)



Megjegyzés: Az *e)* feladatban előbb átalakítást végzünk:

$$x \mapsto \frac{6}{2} - \frac{2x}{2} \quad \Rightarrow \quad x \mapsto 3 - x \quad \Rightarrow \quad x \mapsto -x + 3.$$

5279 *a)* c;
b) d;
c) $e \parallel f$;
d) d.

5280 *a)* A lineáris egyenletek általános hozzárendelési szabálya: $x \mapsto mx + b$, vagy másként: $y = mx + b$.
Behelyettesítve az $A(3; 1)$, $B(-1; 3)$ koordinátákat x, y helyére:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 3m + b \\ 3 &= -m + b \end{aligned}\right\}, \text{ amiből } b = \frac{5}{2} \text{ és } m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{a hozzárendelési szabály: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

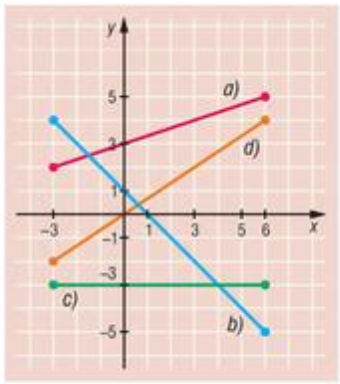
b) Az *a)* feladathoz hasonlóan:

$$b = -2 \text{ és } m = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x - 2.$$

c) $y = 3$; *d)* $y = -3x$; *e)* c; *f)* d; *g)* b; *h)* a, d.

5281 *a)* $x \mapsto 5x + 2$; *b)* $x = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$; *c)* $x = -\frac{1}{4}x + 4$; *d)* $x \mapsto 5$.

5282 *a)* Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$, $y \in [2; 5]$.
Zérushely: nincs.
Monotonitás: $m > 0$, $m = \frac{1}{3}$, szigorúan monoton növekvő.



b) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$, $y \in [-5; 4]$.
Zérushely: $x = 1$.
Monotonitás: $m < 0$, $m = -1$ szigorúan monoton csökkenő.

c) Értékkészlet: $y = -3$.
Zérushely: nincs.
Monotonitás: $m = 0$, konstans.

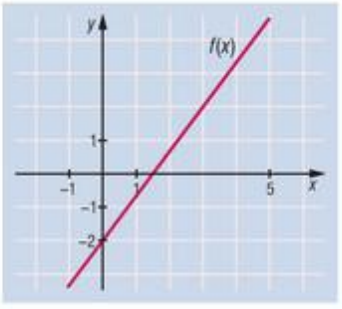
d) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$, $y \in [-2; 4]$.
Zérushely: $x = 0$, egyenes arányosság függvény.
Monotonitás: $m > 0$ $\left(m = \frac{2}{3}\right)$, szigorúan monoton növekvő.

5283 *a)* $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$; *b)* $\frac{8+12}{-4} = -5$; *c)* $x = 3$, mert: $-\frac{4}{3} \cdot 3 + 4 = 0$.

5284 $f(x) = \frac{4}{3}x - 2$.

Az y tengelyt a $\frac{4}{3} \cdot 0 - 2 = -2$-ből eredő $(0; -2)$ pontban;

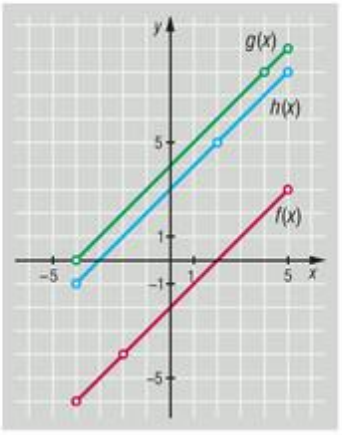
az x tengelyt pedig a $\frac{4}{3}x - 2 = 0$-ból eredő $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ pontban metszi a függvény. (➡)



5285 A, D és E illeszkedik $f(x)$-re;
B, C, D és F illeszkedik $g(x)$-re.

5286 $f(x) = x - 2$, ha $x \neq -2$;
$g(x) = x + 4$, ha $x \neq 4$;
$h(x) = x + 3$, ha $x \neq 2$.

$f(x) > 0$, ha $x \in]2; 5[$;
$g(x) > 0$, ha $x \in]-4; 4[\cup]4; 5[$;
$h(x) > 0$, ha $x \in]-3; 2[\cup]2; 5[$.



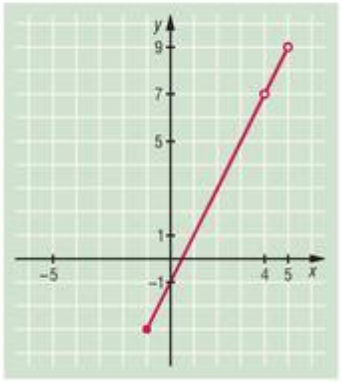
5287 *a)* $x \neq 4$.
Értelmezési tartomány:
$x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

b) Értelmezési tartomány:
$x \in \mathbb{R}$.

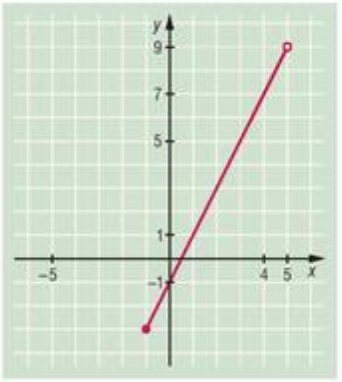
c) Értékkészlet $(y \in \mathbb{R})$:
$y \in [-3; 7[\cup]7; 9[$.

d) Értékkészlet $(y \in \mathbb{R})$:
$y \in [-3; 9[$.

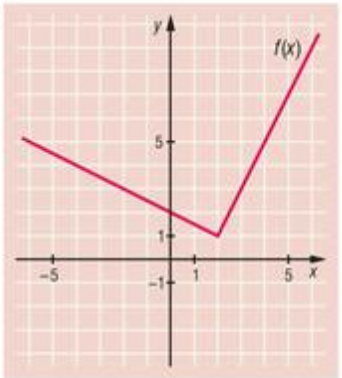
c)



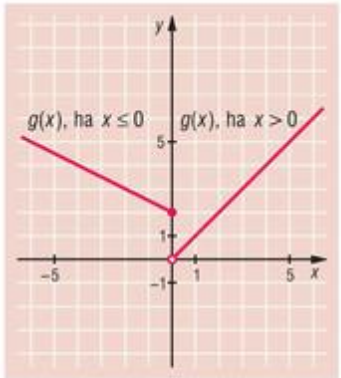
d)



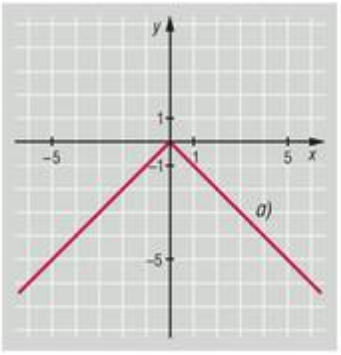
5288 *a)*



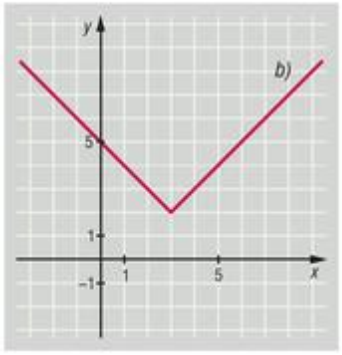
b)



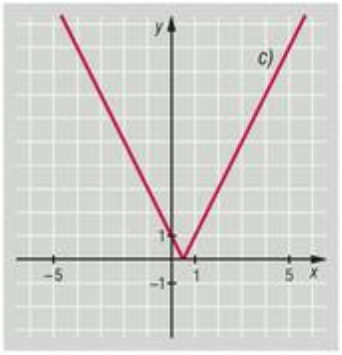
5289 *a)*



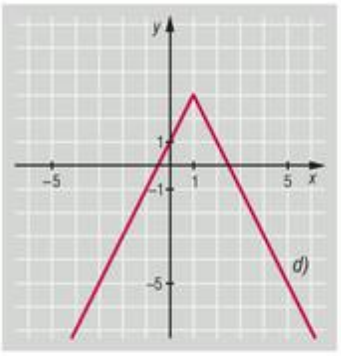
b)



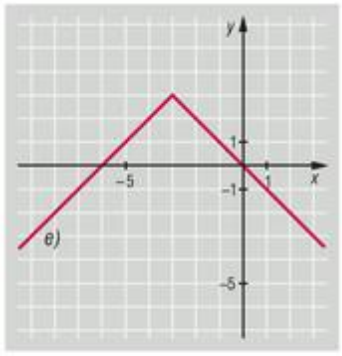
c)



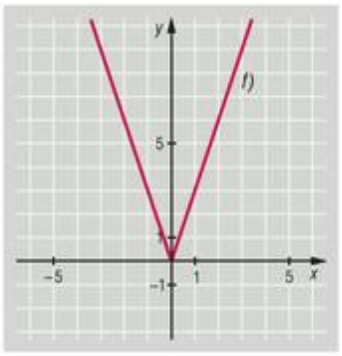
d)



e)



f)



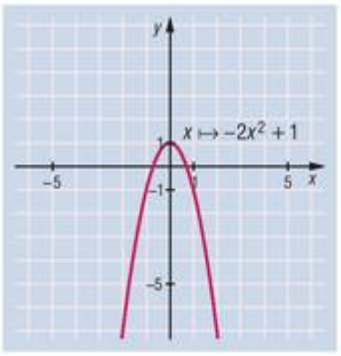
5290 *a)* $f\colon [-3; 5[\to \mathbb{R}$ $\quad f\colon x \mapsto -|x-2|+2$;

b) $y \in [-3; 0[\cup]4; 5[$;

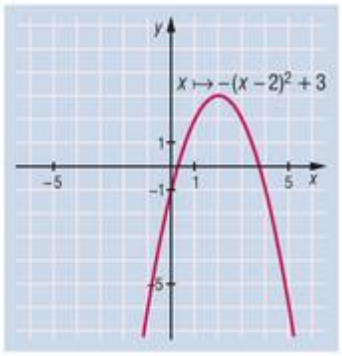
c) $x \in [-3; 2]$;

d) 2 zérushelye van $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$ helyeken.

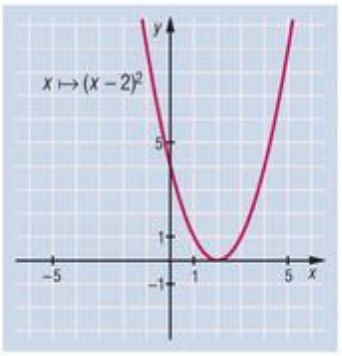
5291 *a)*



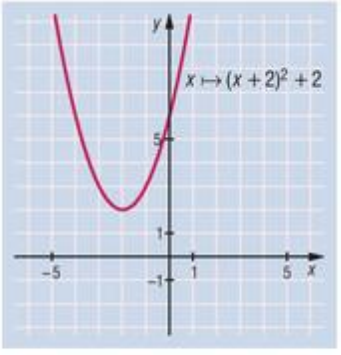
b)



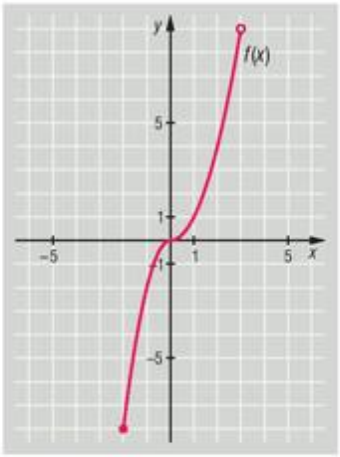
c)



d)



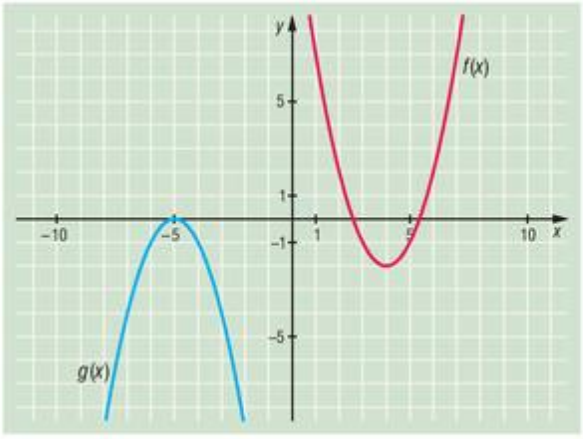
5292 Értékkészlet: $y \in [-8; 9[$.
Zérushely: $x = 0$.
Az értelmezési tartományon szigorúan monoton növekvő.



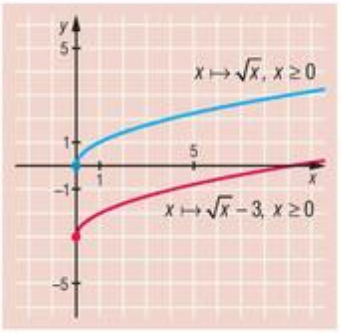
5293 *a)* $f(x) = -1$ akkor, ha
$-1 = (x-4)^2 - 2 \Rightarrow 1 = (x-4)^2$,
amiből $x_1 = 5$, $x_2 = 3$.
Tehát $f(5) = -1$ és $f(3) = -1$.

$g(x) = -1$ akkor, ha
$-1 = -(x+5)^2 \Rightarrow x_1 = -4$, $x_2 = -6$.
Tehát $g(-4) = -1$ és $g(-6) = -1$.

b) A, C és D illeszkedik $f(x)$-re;
B és E illeszkedik $g(x)$-re;
F egyik említett függvényre sem illeszkedik.

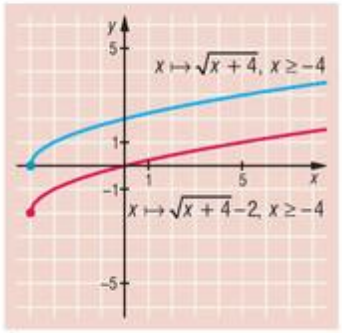


5294 *a)*



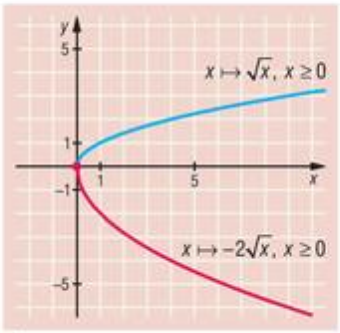
Ért. tartomány: $x \geq 0$.

b)



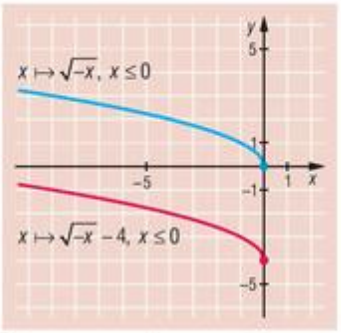
Ért. tartomány: $x \geq -4$.

c)



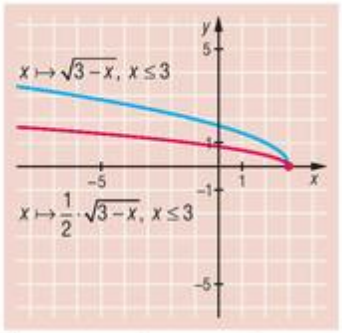
Ért. tartomány: $x \geq 0$.

d)



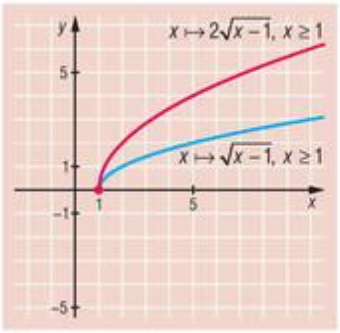
Ért. tartomány: $x \leq 0$.

e)



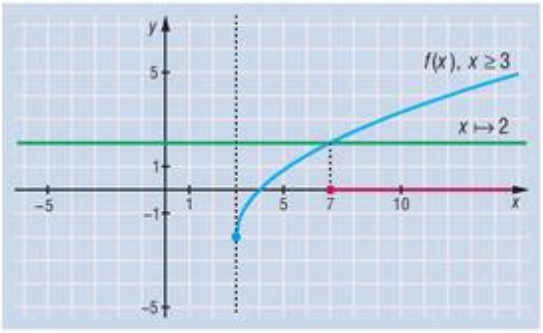
Ért. tartomány: $x \leq 3$.

f)



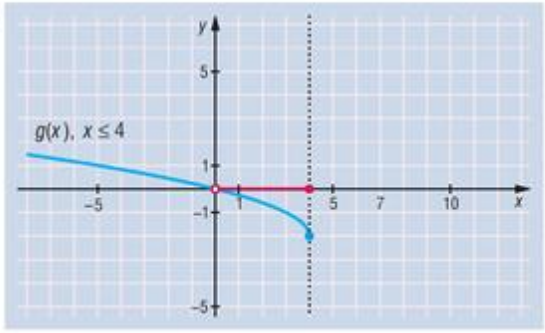
Ért. tartomány: $x \geq 1$.

5295 *a)*



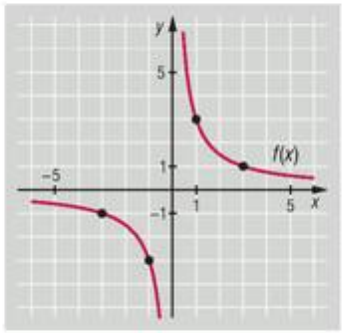
$f(x) \geq 2 \Rightarrow x \in [7; \infty]$.

b)



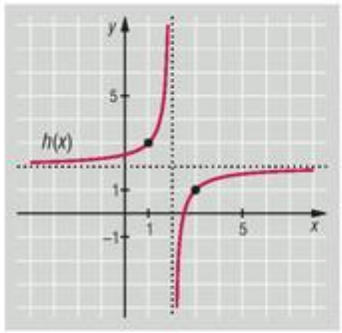
$g(x) < 0 \Rightarrow x \in]0; 4]$.

5296 *a)* $f(x) = 3 \cdot \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$; igen, fordított arányosság.



b) $g(x) = \frac{5}{2} - x$; lineáris függvény.

c) $h(x) = -\frac{1}{x-2} + 2$ $(x \neq 2)$; igen, fordított arányosság.



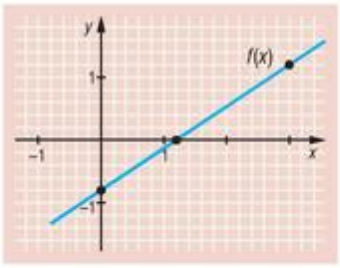
d) $i(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$; ha $x \neq -3 \Rightarrow i(x) = x - 3$; lineáris függvény $(x \neq -3)$.

e) $j(x) = \frac{2(x-2)}{3(x-2)}$; ha $x \neq 2 \Rightarrow j(x) = \frac{2}{3}$; lineáris függvény, konstans $(x \neq 2)$.

5297 *a)* (4); maximum helye: $x = 2$; maximum értéke: $y = 3$;
b) (4); minimum helye: $x = -1$; minimum értéke: $y = -1$;
c) (3); minimum helye: $x = 2$; minimum értéke: $y = 0$.

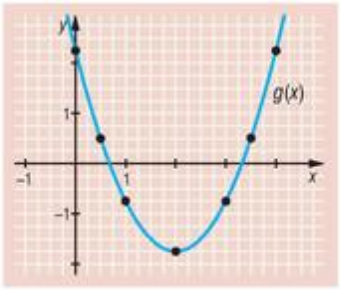
5298 *a)* $(-3; 2)$, $(-6; 4)$, $(0; 0)$;
b) $(2; 6)$, $(0; 0)$, $(4; 4)$;
c) $(7; 6)$, $(0; 1)$, $(21; 16)$;
d) $(12; 3)$, $(4; 1)$, $(39; 6)$.

5299 *a)* $A\left(\frac{1}{5};-\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right)$, $C\left(\frac{6}{5};0\right)$;



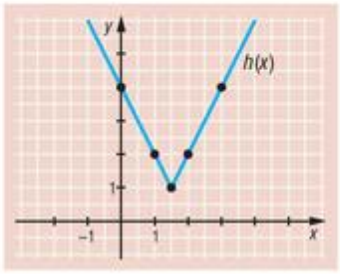
b) $A_1\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$, $B_1\left(4;\frac{9}{4}\right)$, $C\left(-1;\frac{29}{4}\right)$,

$A_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $B_2\left(0;\frac{9}{4}\right)$;

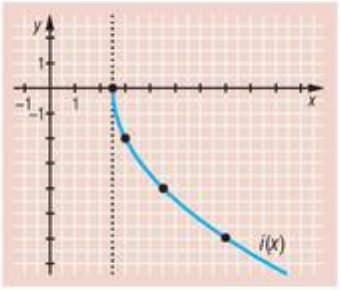


c) $A\left(-\frac{1}{2};5\right)$, $B_1\left(-\frac{1}{2};5\right)$, $C\left(\frac{3}{2};1\right)$,

$B_2\left(\frac{7}{2};5\right)$;



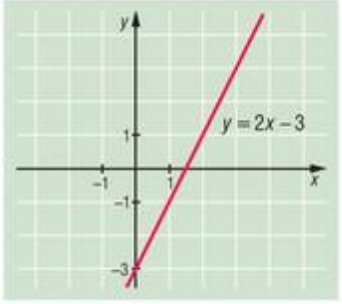
d) $A\left(\frac{1}{2};\text{nincs megoldás}\right)$, $B(7;-6)$, $C\left(\frac{9}{2};-4\right)$.



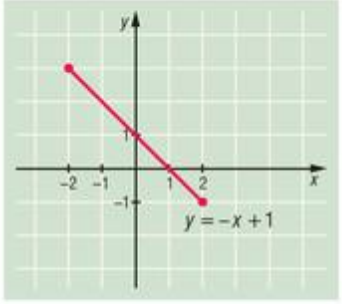
5300 *a)* g; *b)* i; *c)* h; *d)* f.

5301 *a)* g; *b)* f; *c)* h; *d)* i.

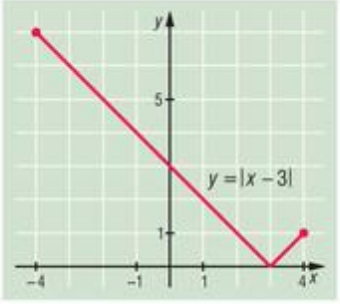
5302 *a)*



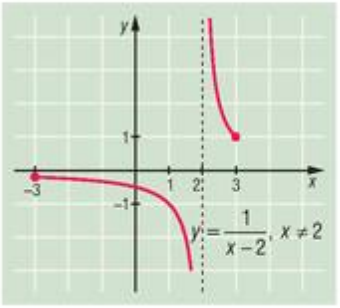
b)



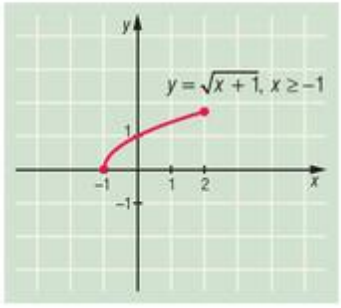
c)



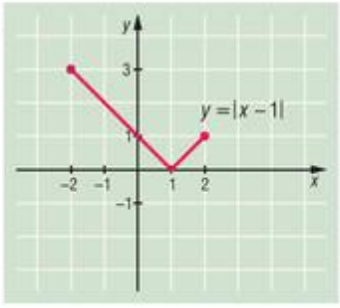
d)



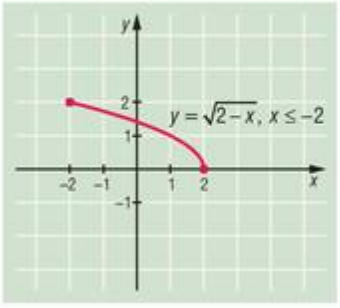
e)



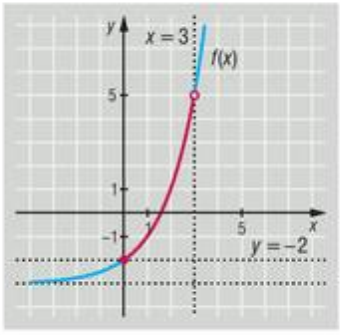
f)



g)



5303 Megoldás: $0 \leq x < 3$; $-2 \leq y < 5$.



5304 *a)* Mivel:

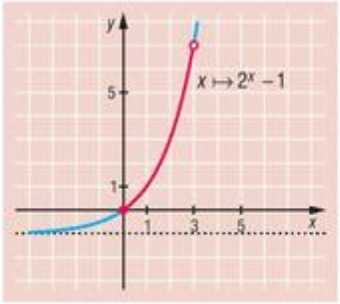
$$x = 3,\ y = 7 \ \Rightarrow\ y = a^x - 1 \ \Rightarrow\ 7 = a^3 - 1 \ \Rightarrow\ a = 2,$$

a függvény hozzárendelési szabálya:

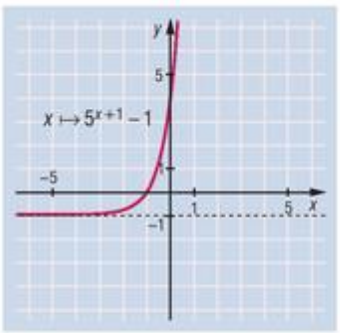
$$x \mapsto 2^x - 1.$$

b) Értékkészlet: $y \in [0; 7[$.

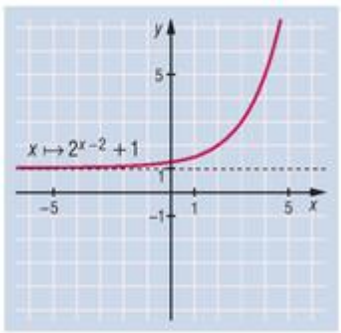
c) Értékkészlet: $y \in [1; 7]$.



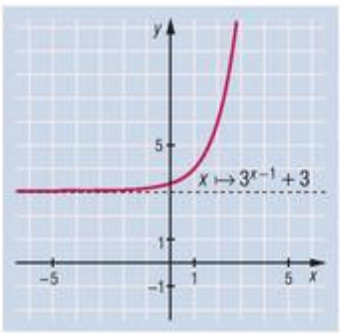
5305 *a)*



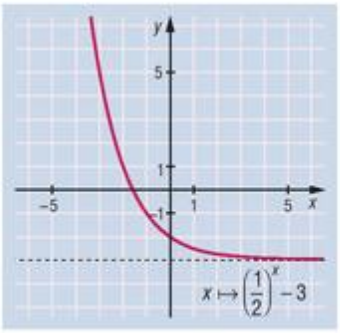
b)



c)



d)



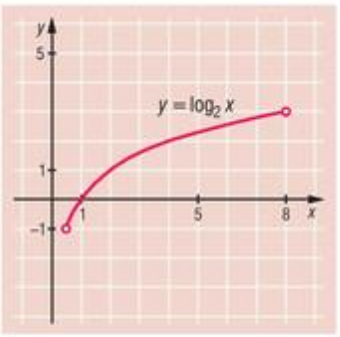
5306 *a)* Behelyettesítve a (9; 2) pontpárt az $y = \log_a x$ hozzárendelésbe, mivel $a > 0$, ezért $a = 3$ adódik. A keresett hozzárendelési szabály: $x \mapsto \log_3 x$.

b) $f(3) = 1$;

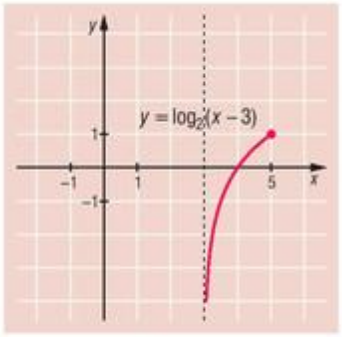
$f(-1)$ nincs értelmezve;

$f(1) = 0$.

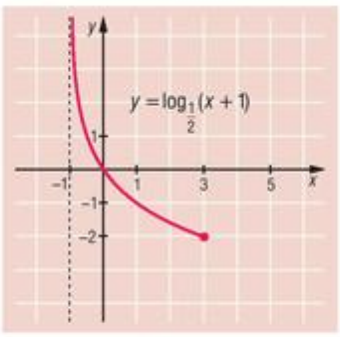
5307 *a)*



b)

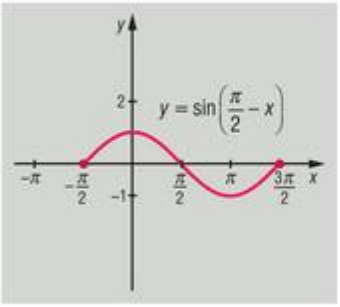


c)

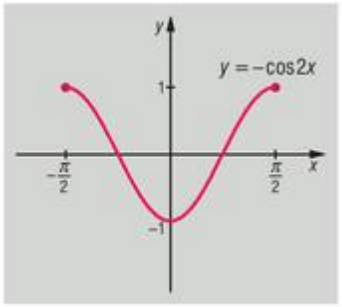


5308 *a)* *i*; *b)* *h*; *c)* *g*; *d)* *f*.

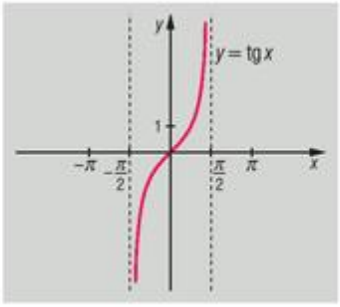
5309 *a)*



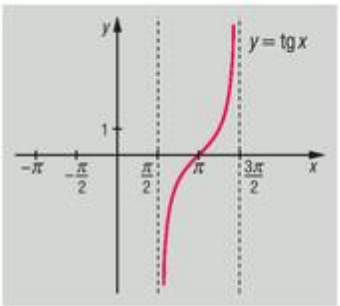
b)



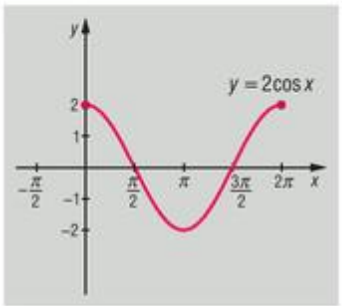
c)



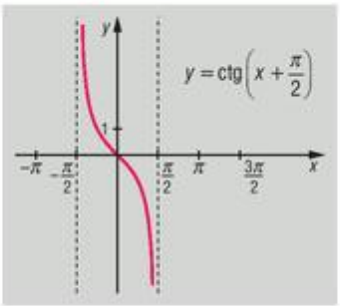
d)



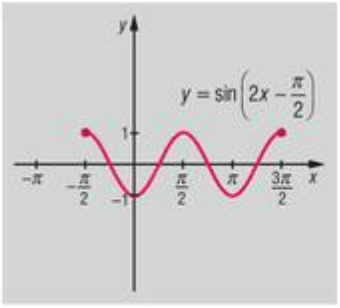
e)



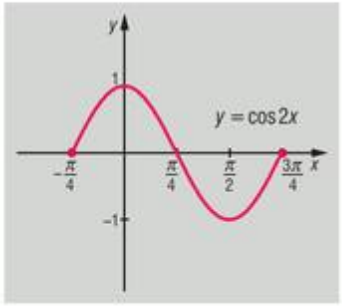
f)



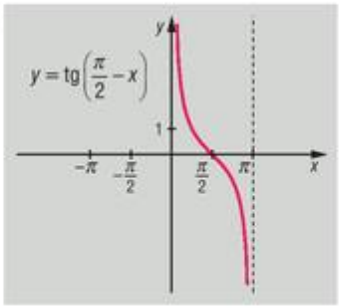
g)



h)



i)



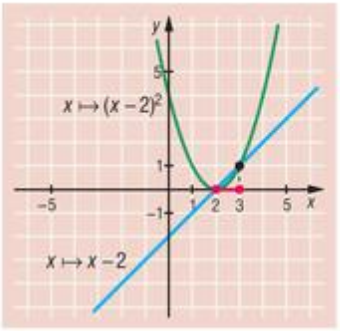
5310 $f\colon x \mapsto -\cos x, \quad x \in [-\pi; \pi];$

$g\colon x \mapsto -\sin x, \quad x \in [-\pi; \pi];$

$h\colon x \mapsto |2\sin x|, \quad x \in [-\pi; \pi].$

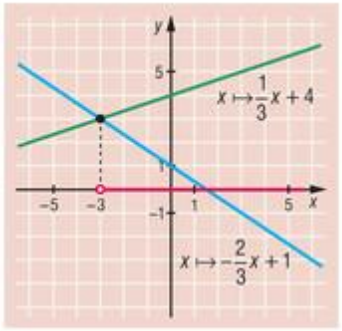
5311 Az *a)* feladat egyenlőtlenségének bal oldalát átalakíthatjuk: $3x - 6 - 2x + 4 = x - 2$.

a)



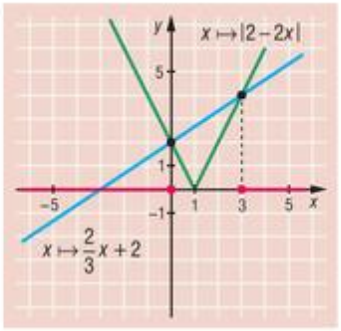
$x \in [2; 3]$;

b)



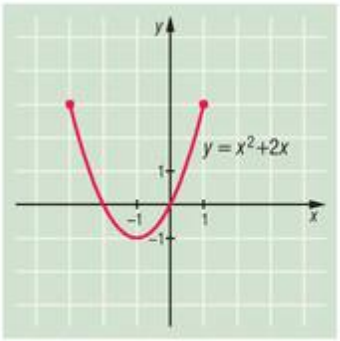
$x \in]-3; \infty[$;

c)

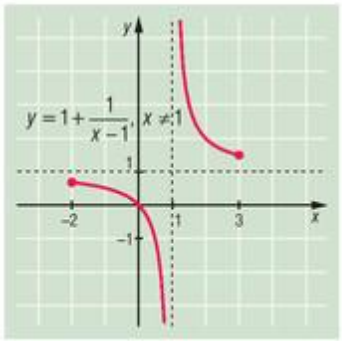


c) $x \in]-\infty; 0] \cup [3. \infty[$.

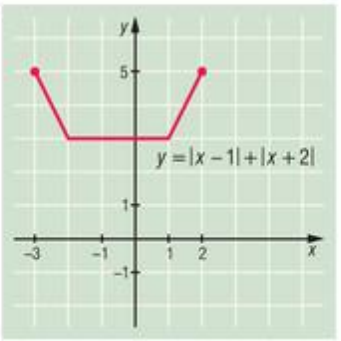
5312 *a)*



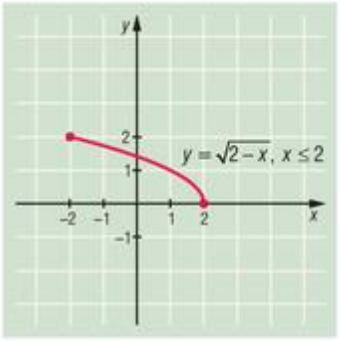
b)



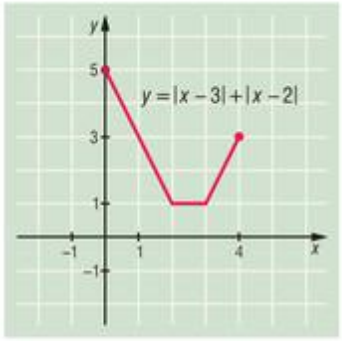
c)



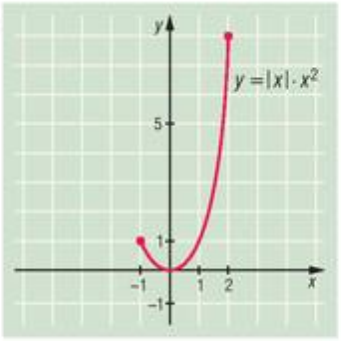
d)



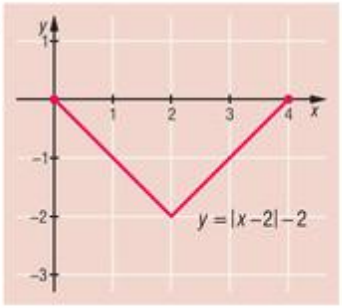
e)



f)

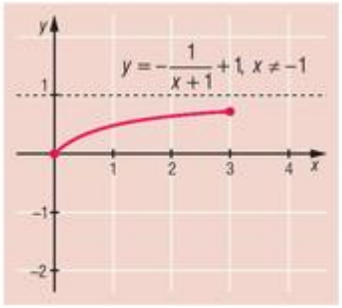


5313 *a)*



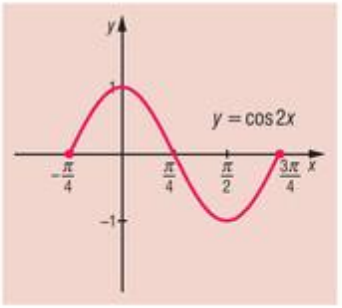
$x_1 = 0, \quad x_2 = 4;$

b)



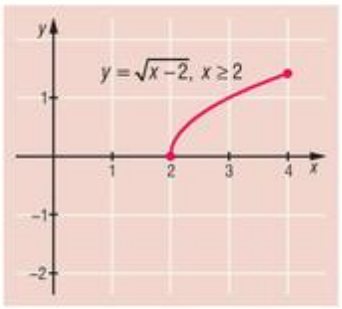
$x = 0;$

c)



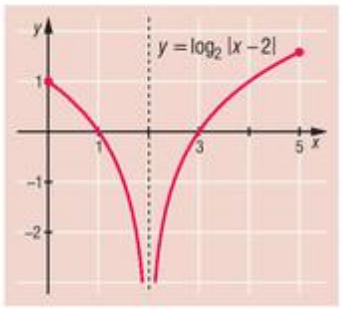
$x_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{3\pi}{4};$

d)



$x = 2;$

e)



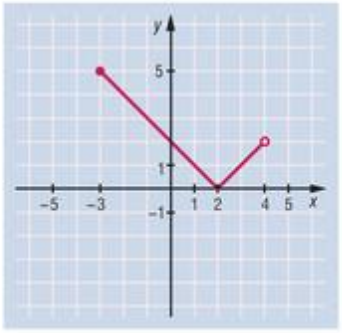
$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$

5314 *a)* f; *b)* h; *c)* g; *d)* i.

5315 *a)* h; *b)* f; *c)* i; *d)* g.

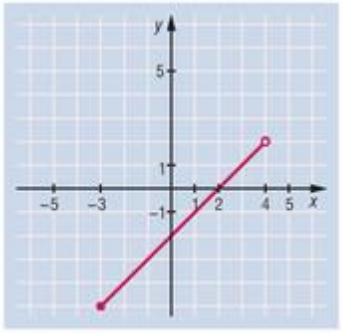
5316 Az *a)* feladat kifejezését átalakíthatjuk: $\left(\sqrt{x-2}\right)^2 = |x-2|$.

a) Ért. tartomány: $x \in \mathbb{R}$.



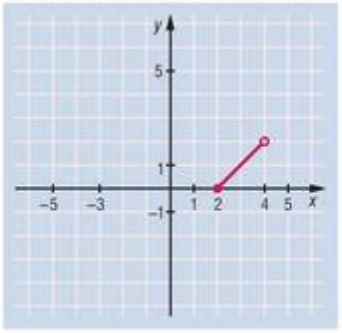
Értékkészlet: $y \in [0; 5]$.

b) Ért. tartomány: $x \in \mathbb{R}$.



Értékkészlet: $y \in [-5; 2[$.

c) Ért. tartomány: $x \geq 2, x \in \mathbb{R}$.

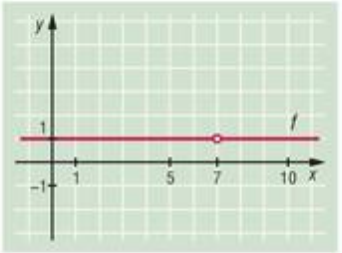


Értékkészlet: $y \in [0; 2[$.

5317 *a)* $x \neq 7$.

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

Értékkészlet: $y = 1$.

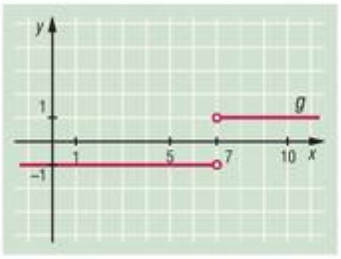


b) $x \neq 7$.

$$|x-7| = \begin{cases} x-7, & \text{ha} \quad x \geq 7, \\ 7-x, & \text{ha} \quad x < 7, \end{cases}$$

ezért

$$g\colon \frac{|x-7|}{x-7} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x > 7, \\ -1, & \text{ha} \quad x < 7. \end{cases}$$



Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

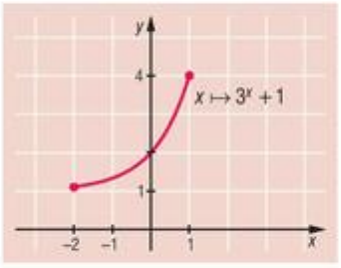
Értékkészlet: $y = 1$ és $y = -1$.

5318 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) Mivel $3^x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$. Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

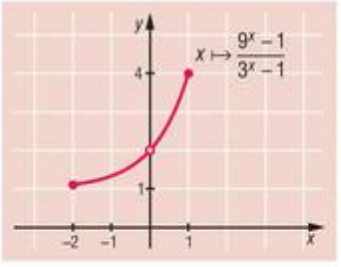
c) Értékkészlet:

$$y \in \left[\frac{10}{9}; 4\right].$$



d) Értékkészlet:

$$y \in \left[\frac{10}{9}; 2\right[\cup]2; 4].$$



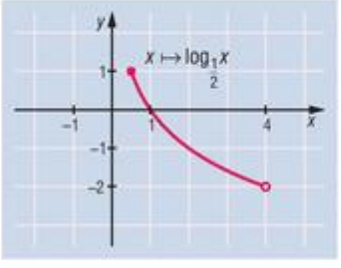
Ez felírható a következő alakban is:

$$y \in \left[\frac{10}{9}; 4\right] \setminus \{2\}.$$

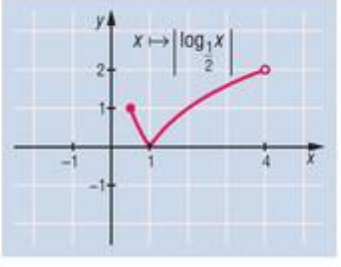
5319 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

c) Értékkészlet: $y \in]-2; 1]$.



d) Értékkészlet: $y \in [0; 2[$.

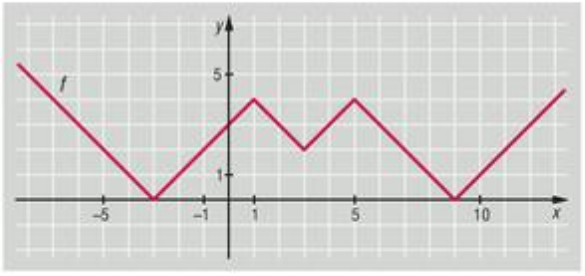


5320 *a)* Zérushelyek: $x_1 = -3$ és $x_2 = 9$.

b) $x = -4$, $x = -2$, $x = 8$, $x = 10$.

Másként jelölve:

$f(-4) = 1$, $f(-2) = 1$, $f(8) = 1$, $f(10) = 1$.



5321 *a)* $f\colon x \mapsto \sin x$, $g\colon x \mapsto \cos x$;

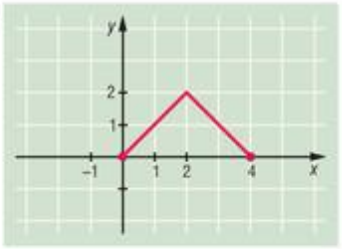
b) $$\frac{\frac{1}{2}+0+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2};$$

c) $$\frac{1+1}{\frac{1}{2}} = 2\cdot 2 = 4;$$

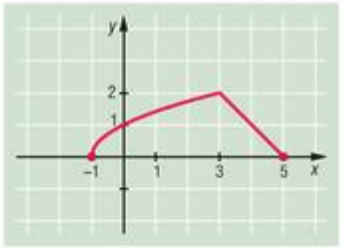
d) $$\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

e) $$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

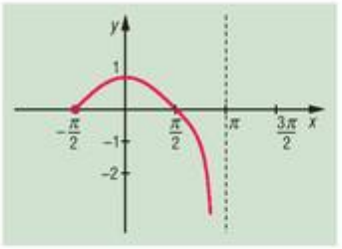
5322 *a)*



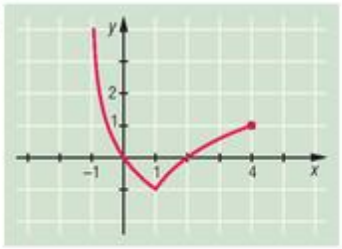
b)



c)



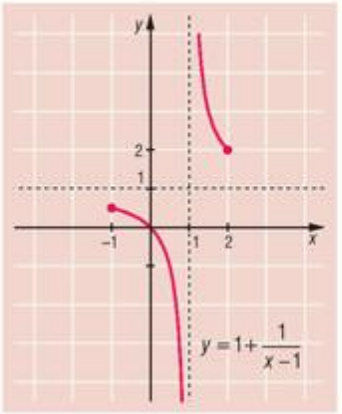
d)



5323 *a)* Az f függvény hozzárendelését írjuk így:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1},$$

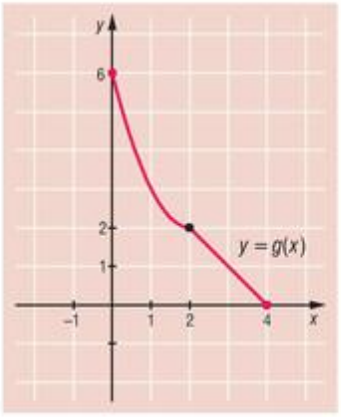
így már könnyű ábrázolni a grafikonját.



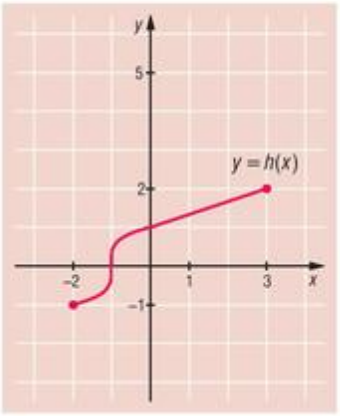
b) A függvény grafikonját egy paraboladarab és egy egyenes szakasz egymáshoz fűzése adja.

A g függvény hozzárendelési szabályát így írhatjuk át:

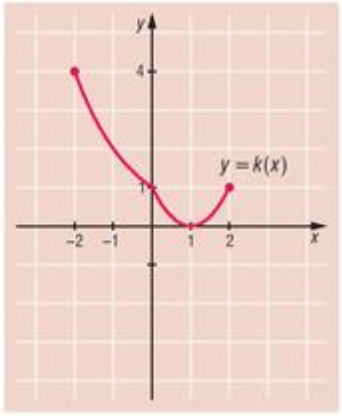
$$g(x)=\begin{cases}(x-2)^2+2, & \text{ha} \quad 0\le x\le 2,\\ -x+4, & \text{ha} \quad 2<x\le 4.\end{cases}$$



c)



d)



5324 *a)* A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f\colon\ ]-3;9]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{ha} \quad -3<x\le 0,\\ x^2-1, & \text{ha} \quad 0<x\le 3,\\ \dfrac{1}{3}x+7, & \text{ha} \quad 3<x\le 9;\end{cases}$$

b) Értékkészlet: $y\in[-1;10]$;

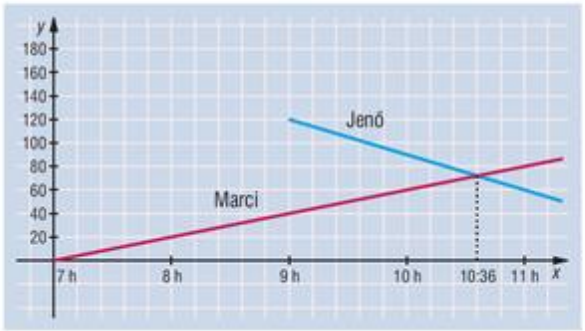
c) $-3<x\le 2$, másként $x\in\,]-3;2]$.

5325 *a)* Az út–idő grafikon az ábrán látható.

b) Marci útja reggel 7 órától az $y=20x$ függvénnyel írható le. Jenő útja reggel 7 órától (ha ekkor indult volna) az $y=-30x+180$ függvénnyel jellemezhető. Ebből:

$$20x=-30x+180 \ \Rightarrow\ x=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}.$$

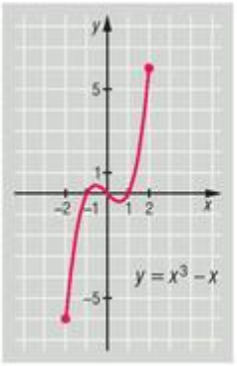
Reggel 7 órától számítva 3 óra 36 perc múlva találkoznak, azaz 10 óra 36 perckor.



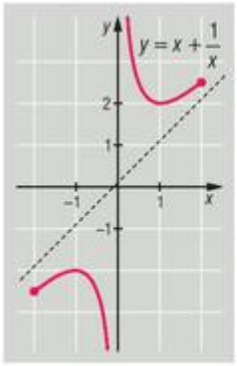
c) Marci 1 óra alatt 20 kilométert tesz meg, így mivel ő 3 óra 36 percet biciklizett 7 órától, egyenes arányossággal számolva 72 kilométert tett meg.

Jenő 9 órakor indult, ő 10 óra 36 percig csak 1 óra 36 percet töltött úton. Mivel 1 óra alatt 30 kilométert tesz meg, ezért 1 óra 36 perc alatt 48 kilométert tett meg.

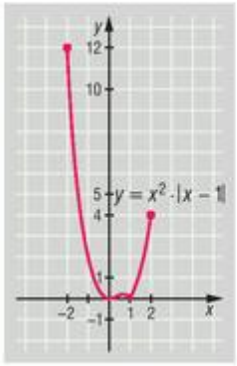
5326 *a)*



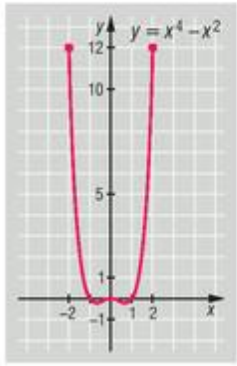
b)



c)



d)



5327 *a)* A közös értelmezési tartomány: $x > 1$. Az egyenlet bal oldalát alakítsuk át:

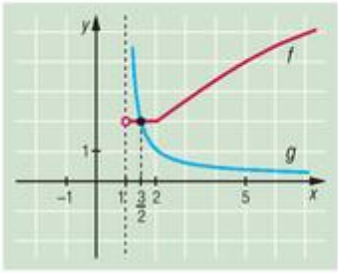
$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x-1} + 1 + \left|\sqrt{x-1} - 1\right| = \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & \text{ha} \quad x \geq 2, \\ 2, & \text{ha} \quad 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Ezután ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

$$f\colon x \mapsto \sqrt{x-1} + 1 + \left|\sqrt{x-1} - 1\right|, \quad 1 < x,$$

$$g\colon x \mapsto \frac{1}{x-1}, \quad 1 < x.$$

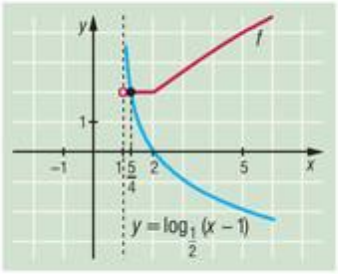


Az f és g függvény értéke csak az $x = \frac{3}{2}$ helyen egyenlő, itt mindkét függvény értéke 2.

b) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az *a)* feladatban szereplő f függvényt és a

$$h\colon x \mapsto \log_{0,5}(x-1), \quad x > 1$$

függvényt.



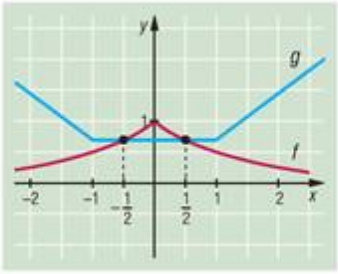
A h függvény $x > 1$ esetén csökken, az f függvény először konstans, majd 2-től nő, így legfeljebb egy közös pontja van a két grafikonnak.

Ez az $x = \frac{5}{4}$-nél van, itt mindkét függvény értéke 2.

c) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket:

$$f\colon x \mapsto 2^{-|x|},$$

$$g\colon x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(|x+1| + |x-1|\right).$$



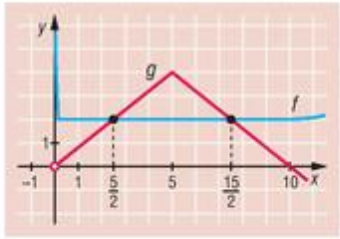
Mivel mindkét függvény páros, az ábra szimmetrikus az y tengelyre. $0 \leq x \leq 2$-re f csökken, így itt legfeljebb egy közös pontja van a nem csökkenő g függvény grafikonjával.

Ez $x = \frac{1}{2}$ esetén teljesül. Az egyenlet gyökei tehát $-\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2}$.

5328 Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

$$f(x)=|1-\lg x|+|1+\lg x|,\quad 0<x,$$

$$g(x)=4\cdot\left(1-\frac{|x-5|}{5}\right),\quad 0<x.$$



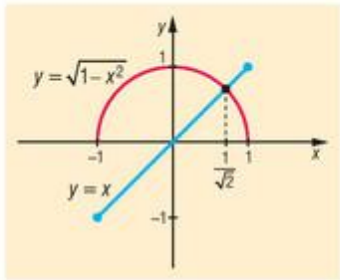
A függvények tulajdonságaiból következik, hogy a két grafikonnak két metszéspontja van: $x=\frac{5}{2}$ és $x=\frac{15}{2}$ értéknél.

Mindkét helyen mindkét függvény értéke 2.

5329 Ábrázoljuk az alábbi függvényeket egy koordináta-rendszerben:

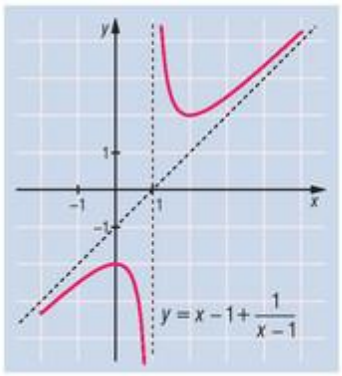
$$f(x)=\sqrt{1-x^2},\quad -1\le x\le 1,$$

$$g(x)=x,\quad -1\le x\le 1.$$

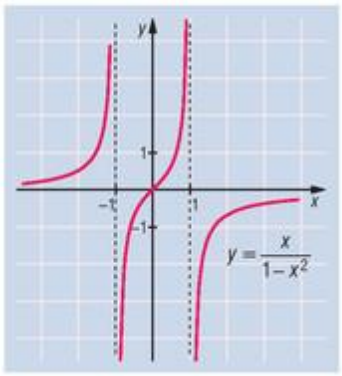


A két grafikon az $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ helyen metszi egymást, tehát az egyenlőtlenség $-1\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén teljesül.

5330 *a)*

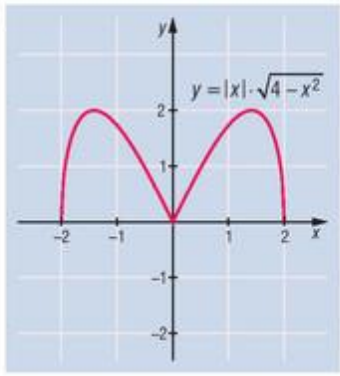


b)



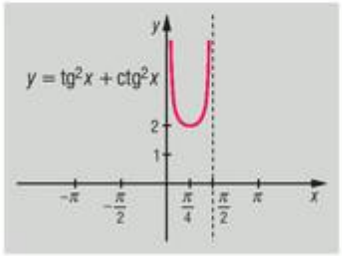
Megj.: A függvény páratlan.

c)

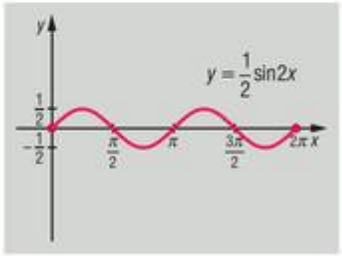


Megj.: A függvény páros.

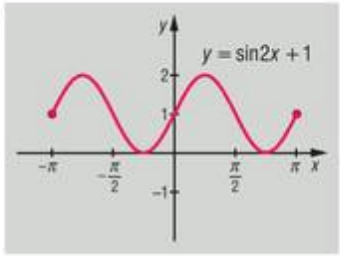
5331 *a)*



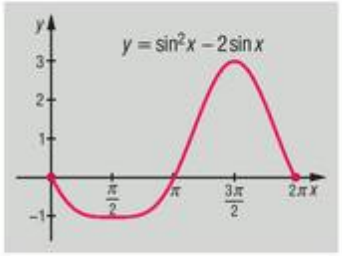
b)



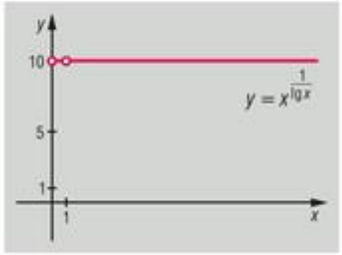
c)



d)



e)

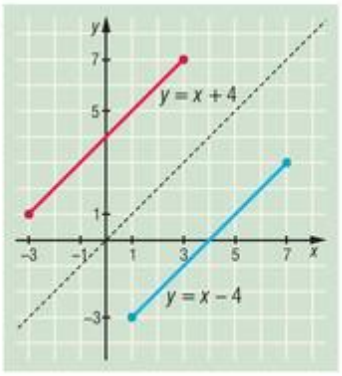


Műveletek függvényekkel (kiegészítő anyag) – megoldások

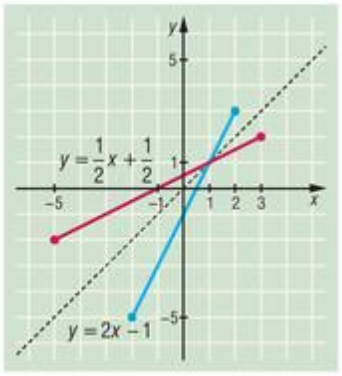
5332 A függvény és inverzének grafikonja az $y = x$ egyenletű egyenesre nézve egymás tükörképei.

A dolog természetéből következik, hogy a függvény és inverze esetén az értékkészlet és az értelmezési tartomány helyet cserél: a függvény értelmezési tartománya az inverz függvény értékkészlete, és a függvény értékkészlete az inverz függvény értelmezési tartománya.

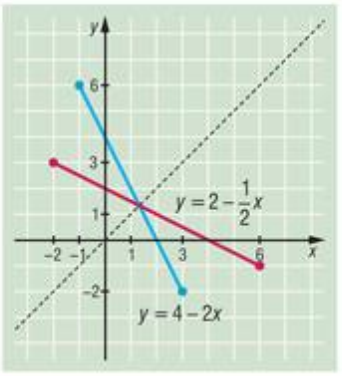
a)



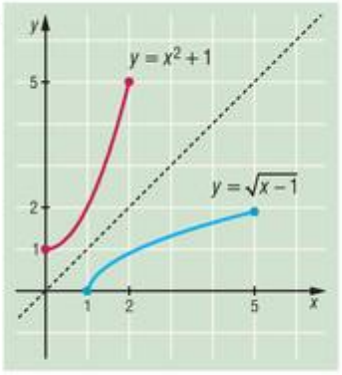
b)



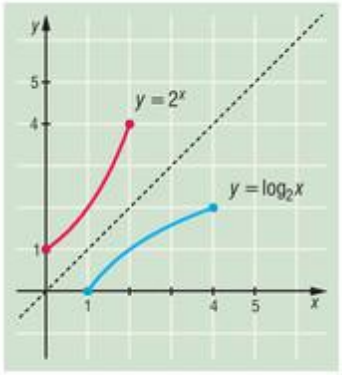
c)



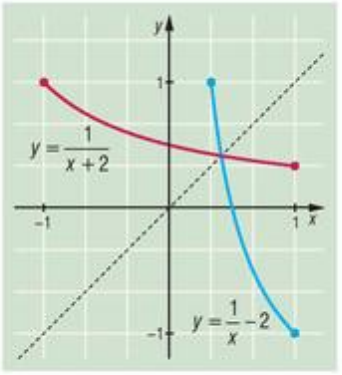
d)



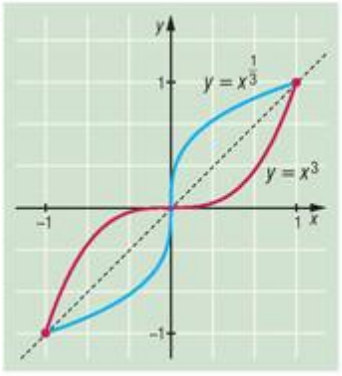
e)



f)



g)

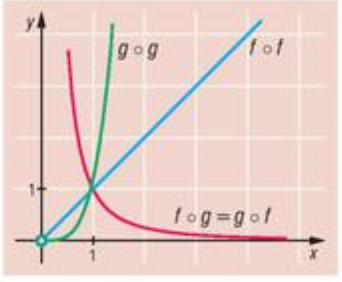


5333 $f \circ g$: $f(g(x)) = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$;

$g \circ f$: $g(f(x)) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$,

$f \circ f$: $f(f(x)) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} = x$, $x > 0$;

$g \circ g$: $g(g(x)) = \left(x^2\right)^2 = x^4$, $x > 0$.



5334 Az első három függvény a következő:

$$f_2(x)=f\big(f(x)\big)=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x},\quad x\ge 0;$$

$$f_3(x)=f_2\big(f(x)\big)=\frac{1+\frac{1}{1+x}}{2+\frac{1}{1+x}}=\frac{2+x}{3+2x},\quad x\ge 0;$$

$$f_4(x)=f_3\big(f(x)\big)=\frac{2+\frac{1}{1+x}}{3+\frac{2}{1+x}}=\frac{3+2x}{5+3x},\quad x\ge 0.$$

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy ha $n\ge 2$, akkor $f_n(x)=\dfrac{f_n+f_{n-1}\cdot x}{f_{n+1}+f_n\cdot x}$, ahol f_n a Fibonacci-sorozat n-edik tagja.

Az állítás $n=2$-re igaz, tegyük fel, hogy n-re is igaz. Lássuk be, hogy ebből következik, hogy $n+1$-re is igaz:

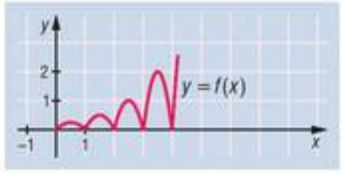
$$f_{n+1}(x)=f_n\big(f(x)\big)=\frac{f_n+f_{n-1}\cdot\frac{1}{1+x}}{f_{n+1}+f_n\cdot\frac{1}{1+x}}=\frac{f_n+f_{n-1}+f_n\cdot x}{f_{n+1}+f_n+f_{n+1}\cdot x}=\frac{f_{n+1}+f_n\cdot x}{f_{n+2}+f_{n+1}\cdot x},$$

azaz az állítás $n+1$-re is igaz.

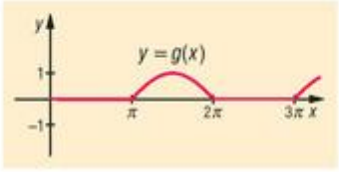
Megjegyzés: Közben felhasználtuk a Fibonacci-sorozat definícióját:

$$f_1=f_2=1\quad\text{és}\quad f_{n+2}=f_n+f_{n+1}.$$

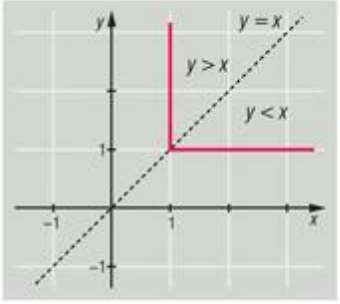
5335 A függvény definíciója alapján a vázlatos grafikon:



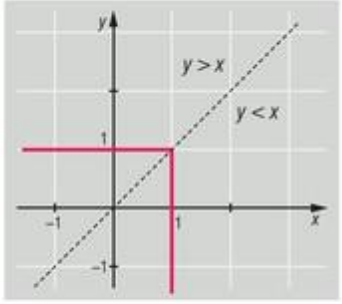
5336 A g függvényt a definíció alapján így rajzolhatjuk meg:



5337 *a)*



b)



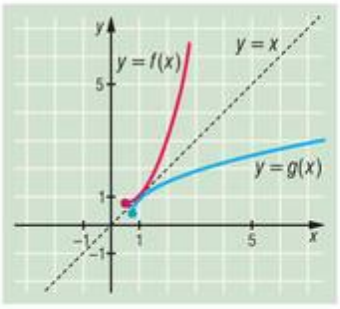
5338 Oldjuk meg x-re a következő egyenletet:

$$y = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$
$$2^y = x + \sqrt{x^2+1},$$
$$2^y - x = \sqrt{x^2+1},$$
$$2^{2y} - 2\cdot 2^y \cdot x + x^2 = x^2 + 1,$$
$$x = \frac{2^{2y}-1}{2\cdot 2^y} = \frac{2^y - 2^{-y}}{2}.$$

Az inverz függvény tehát:

$$f^{-1}(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5339 Vázoljuk először egy koordináta-rendszerben az f és g függvények grafikonját.



Az 5338. feladat megoldásában követett módszert célszerű alkalmazni annak igazolására, hogy a két függvény egymás inverze. Oldjuk meg x-re az $y = x^2 - x + 1$ másodfokú egyenletet.

Mivel $x \geq \frac{1}{2}$, $y \geq \frac{3}{4}$, ezért:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 + 4y}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{y - \frac{3}{4}},$$

és itt csak a + előjel jó, tehát $x = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$.

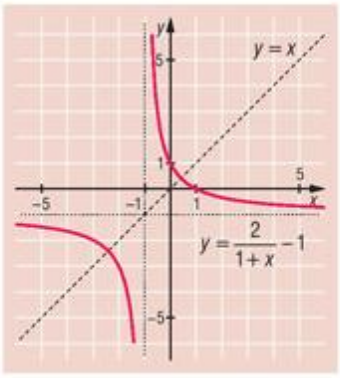
Az f inverze tehát a

$$g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}, \quad x \geq \frac{3}{4}$$

függvény. A lépések megfordíthatók, így g inverze f.

5340 Mivel a függvény és inverzének grafikonja az $y = x$ egyenletű egyenesre szimmetrikus, elég az $x^2 - x + 1 = x$ egyenletet megoldani, ebből $x = 1$. Ez jó gyök, mert $f(1) = g(1) = 1$.

5341 Oldjuk meg x-re az $y = \frac{1-x}{1+x}$ egyenletet:



$$y + xy = 1 - x,$$
$$x(1+y) = 1 - y,$$
$$x = \frac{1-y}{1+y}, \quad y \neq -1.$$

Az f inverze tehát az

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

függvény.

Az f grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenletű egyenesre.

Függvénytulajdonságok – megoldások

5342 Legnagyobb érték: $y = 8$ az $x = 0$ helyen.

5343 $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$, másként $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -4$, $x \neq 4$.

5344 Bármilyen helyes megoldás jó, például: $[-4; 0]$, $[3; 9]$, $[5; 7]$ stb.

5345 *a)* Maximuma van az $x = 2$ helyen, értéke: $y = 3$.
b) Minimuma van az $x = 0$ helyen, értéke: $y = -5$.
c) Maximuma van az $x = -2$ helyen, értéke: $y = 0$.
d) Maximuma van az $x = 5$ helyen, értéke: $y = 0$.
e) Minimuma van az $x = 0$ helyen, értéke: $y = 4$.
f) Minimuma van az $x = 0$ helyen, értéke: $y = -3$.

5346 $3 = \sqrt{2 - x} \Rightarrow x = -7$.

5347 A pozitív osztók számát foglaljuk táblázatba:

Szám	1	2	3	4	5	6
Pozitív osztók száma	1	2	2	3	2	4

a) Értékkészlet: $\{1; 2; 3; 4\}$.
b) Minimuma van az $x = 1$ helyen, értéke: $y = 1$; maximuma van az $x = 6$ helyen, értéke: $y = 4$.
c) Nincs zérushelye a függvénynek.

5348 *a)* Értékkészlete: $y \in [0; 2]$.
b) Értékkészlete: $y \in [-4; 0]$.
c) Értékkészlete: $y \in [0; 1]$.
d) Értékkészlete: $[1; 3]$.

5349 Például:
a) $x \mapsto x^2 + 4$, $x \mapsto |x - 3| + 7$, $x \mapsto \sqrt{3 - x} + 5$;
b) $x \mapsto -x^2 - 3$, $x \mapsto -|x - 2| - 5$, $x \mapsto -|x| - 1$;
c) $x \mapsto \sqrt{x - 5}$, $x \mapsto (x - 3)^2$, $x \mapsto |x + 7|$;
d) $x \mapsto (x - 2)^2 - 5$, $x \mapsto |x + 7| - 5$;
e) $x \mapsto -x^2 + 6$, $x \mapsto -|x - 1| + 6$.

5350 *a)* $\frac{x - 3}{x + 1} \geq 0$ és $x \neq -1$.

A hányados akkor 0, ha $x = 3$, akkor pozitív, ha $x - 3 > 0$ és $x + 1 > 0 \Rightarrow x > 3$ vagy $x - 3 < 0$ és $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$.

Értelmezési tartomány: $x \in]-\infty; -1[\cup [3; \infty[$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $\sqrt{x}$ miatt: $x \geq 0$, valamint $4 - \sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 16$.

Értelmezési tartomány: $x \in [0; \infty[\setminus \{16\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Zérushely: $\sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow x = 9$.

c) $x-2>0 \Rightarrow x>2$. Értelmezési tartomány: $x \in]2; \infty[$, $x \in \mathbb{R}$.
Zérushely: $x=-2$.

d) $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Értelmezési tartomány: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Zérushely: $x=-3$.

e) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{7}{2}$.
Zérushely: nincs, mert $\frac{2x-7}{4x-14}=\frac{2x-7}{2(2x-7)}=\frac{1}{2}$ konstans függvény.

f) $x>0$ és $\lg x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Tehát az értelmezési tartomány: $x \in]0; \infty[\setminus \{1\}$.
Zérushely: $x=9$.

g) Értelmezési tartomány: $x>0$ és $x>-1$ miatt $x \in]0; \infty[$.
Zérushely: $x=1$.

h) $x>0$, $x \neq 1$, $4x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{4}$. Értelmezési tartomány: $x \in \left]\frac{1}{4}; \infty\right[\setminus \{1\}$.
Zérushely: $x=\frac{1}{2}$.

5351 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in]-4; 4]$; $(x \in \mathbb{R})$.
Értékkészlet: $y \in [-2; 4]$.

b) Zérushely: $x_1=-2$ és $x_2=1$.

c) Minimuma van a függvénynek az $x=0$ helyen, értéke $y=-2$.
Maximuma van az $x=3$ helyen, értéke $y=4$.

d) $f>0 \Rightarrow x \in]-4; -2[\cup]1; 4]$.

e) $f<0 \Rightarrow x \in]-2; 1[$.

f) Szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-4; 0] \cup [3; 4]$.

5352 Egy adott függvény x tengelymetszetét az $y=0$-val, az y tengelymetszetét az $x=0$ behelyettesítésével kapjuk.

a) Az x tengelyt $\frac{5}{3}$-nál, az y tengelyt -5-nél metszi.

b) Az x tengelyt 3-nál metszi, az y tengelyt nem metszi.

c) A függvény az origón halad át.

d) Az x tengelyt 1-nél, az y tengelyt -1-nél metszi.

e) Az x tengelyt az 1 helyen metszi, az y tengelyt nem metszi.

f) Az x tengelyt a -2 helyen, az y tengelyt -3-nál metszi.

5353 Mivel a tört nevezője nem lehet 0, ezért a

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}.$$

A periódus 180°, mert a szinuszfüggvény a 0 értékét 180°-ként veszi fel; a $k \cdot 180°$-kal $(k \in \mathbb{Z})$ minden forgásszöget megadtunk (fokokban).

5354 *a)* $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)=1$ $\boxed{=}$ $g(2)=1$;

b) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ $\boxed{>}$ $g\left(\frac{1}{8}\right)=-3$;

c) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{>}$ $g\left(\frac{1}{4}\right)=-2$;

d) $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ $\boxed{<}$ $g(4)=2$.

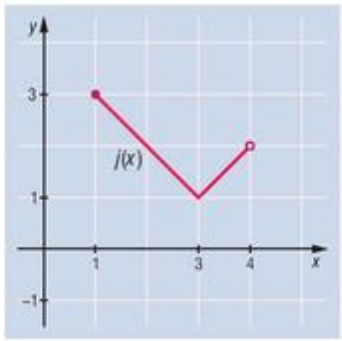
5355 *a)* $x\mapsto x^2-2x$ zérushelyei $x_1=0$, $x_2=2$, mert $x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0$.
$f(1,3)=1{,}3^2-2\cdot 1{,}3=1{,}69-2{,}6=-0{,}91$.

b) $g(x)=-|x|+7$ maximum értéke: $y=7$, amit az $x=0$ helyen vesz fel. Jelölése: $g(0)=7$.

c) Mivel a szinuszfüggvény korlátos, a $\sin x$ értékkészlete $y\in[-1;1]$.
A -2 transzformáció az y tengely mentén 2 egységgel lefelé tolja el a $\sin x$ függvényt, ezért $\sin x-2$ értékkészlete: $[-3;-1]$.

d) $\log_2(2x-20)-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 11$ esetén. (Értelmezési tartomány: $x>10$.)

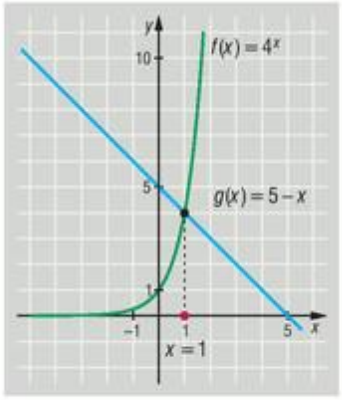
e) Átalakítás után:
$$j(x)=|x-3|+1.$$
A keresett függvényérték:
$$\frac{j(1)-j(3)}{j(2)}=\frac{3-1}{2}=1.$$



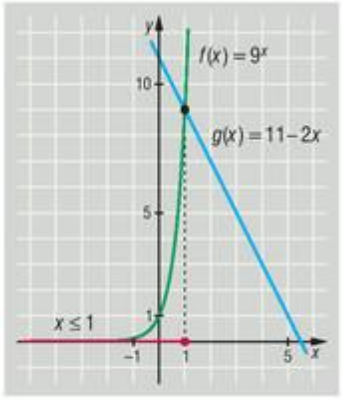
5356 $-x^2+18x-17>0 \Rightarrow x^2-18x+17<0 \Rightarrow 1<x<17$.
1 és 17 között 6 db prímszám van: 2; 3; 5; 7; 11; 13.

5357 A *c)* a helyes válasz, mert:
$$\log_{15}^2 3-\log_{15}^2 5=(\log_{15}3+\log_{15}5)(\log_{15}3-\log_{15}5)=\log_{15}15\cdot\log_{15}\frac{3}{5}=1\cdot\log_{15}\frac{3}{5}.$$

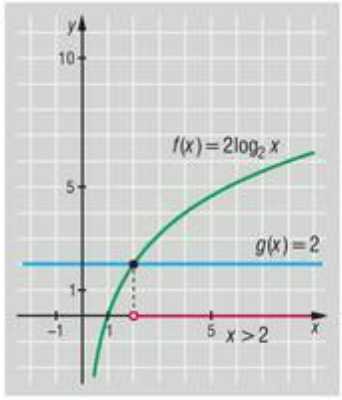
5358 *a)*



b)



c)

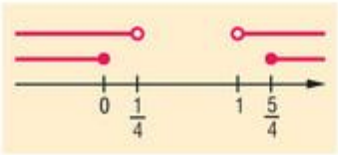


5359 *a)* $f(2)=9+2\cdot 3^4=9+162=171$, $\quad g(32)=32\cdot\log_2 32=32\cdot 5=160$.
$f(2)>g(32)$.

b) A diszkrimináns 0 $\Rightarrow$ érinti x tengelyt a parabola (1 zérushely van).
$f(2010)=2010$ miatt felfelé nyíló a parabola, s mert van pozitív értéke a parabolának, kizárólag a (4) lehet a megoldás.

5360 *a)* A logaritmus miatt:

$$4x^2 - 5x + 1 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{4} \text{ vagy } x > 1.$$



A négyzetgyök miatt:

$$\lg(4x^2 - 5x + 1) \geq 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 \geq 1.$$

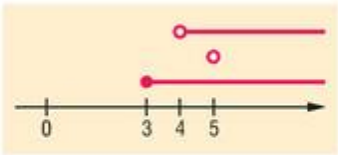
Ebből:

$$4x^2 - 5x \geq 0 \Rightarrow x(4x - 5) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ vagy } x \geq \frac{5}{4}.$$

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, $x \in]-\infty; 0] \cup \left[\frac{5}{4}; \infty\right[$.

b) A logaritmus miatt:

$$x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4.$$



A tört miatt:

$$\lg(x - 4) \neq 0 \Rightarrow x \neq 5.$$

A négyzetgyök miatt:

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3.$$

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, $x \in]4; 5[\cup]5; \infty[$.

5361 *a)* $x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0$, tehát a zérushelyek: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ és $x_3 = 1$.

b) $(x - 2) \cdot \log_2 x = 0$, ha $x - 2 = 0$, azaz $x_1 = 2$, vagy $\log_2 x = 0$, azaz $x_2 = 1$.

c) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = 0$, ha $x = 2$.

d) $x^2 - 5 \cdot |x| + 6 = 0$, zérushelyek: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = -3$.

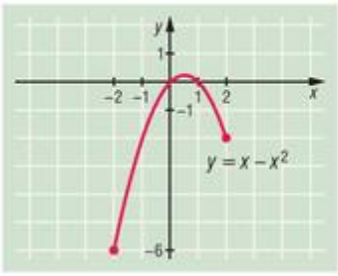
e) $\sqrt{4x - x^2} = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

f) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$, $0 < x < \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$.

g) $\frac{x^3 - x}{x - 1} = x(x + 1)$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

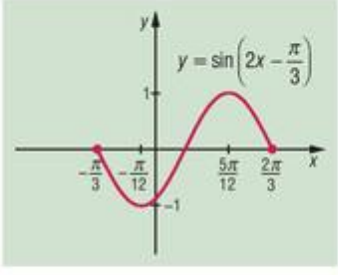
5362 *a)* Ábrázoljuk az $f(x) = x - x^2$, $-2 \leq x \leq 2$ függvényt:

A függvény képe egy parabola darabja, tengelypontja $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$-ban van, lefelé „nyílik”. Így a függvény $[-2; 0{,}5]$-ban nő, $[0{,}5; 2]$-ban csökken. A 0,5 helyen maximuma van, a maximum értéke 0,25, a -2 helyen minimuma van, a minimum értéke -6.

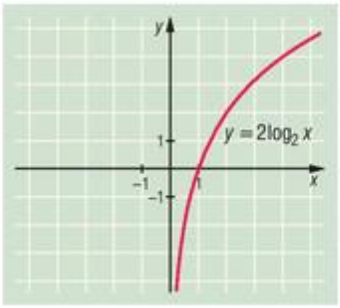


b) Ábrázoljuk a $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ függvényt:

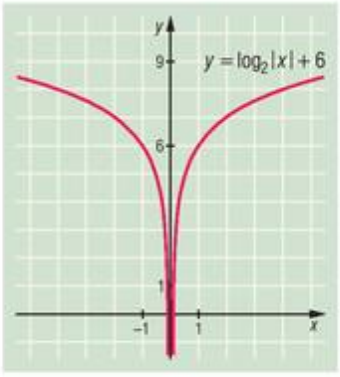
A függvény $\left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{12}\right]$-ban, valamint $\left[\frac{5\pi}{12}; \frac{2\pi}{3}\right]$-ban csökken, $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right]$-ban nő. Maximuma van az $\frac{5\pi}{12}$ helyen, itt értéke 1, minimuma van a $-\frac{\pi}{12}$ helyen, itt értéke -1.



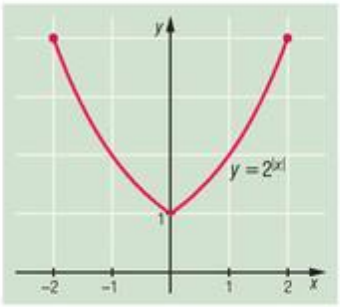
c) A függvény a teljes értelmezési tartományában szigorúan nő, szélsőértéke nincs.



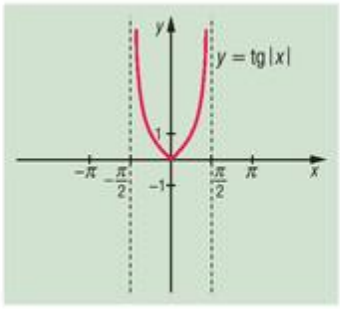
d) A függvény $]-\infty; 0[$-ban csökken, $]0; +\infty[$-ban nő. Szélsőértéke nincs.



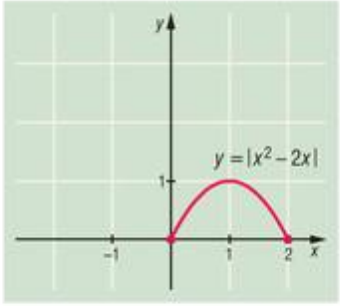
e) A függvény $[-2; 0]$-ban csökken, $[0; 2]$-ban nő, az $x = 0$ helyen minimuma van, itt az értéke $y = 1$, az $x = -2$ és $x = 2$ helyen maximuma van, itt az értéke $y = 4$.



f) A függvény $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ban csökken, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$-ban nő. Az $x = 0$ helyen minimuma van, itt az értéke $y = 0$. Maximuma nincs a függvénynek.

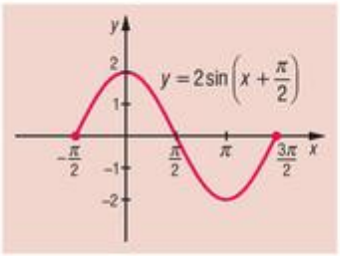


g) A függvény $[0; 1]$-ban nő, $[1; 2]$-ban csökken, az $x = 1$ helyen maximuma van, itt az értéke $y = 1$, az $x = 0$ és $x = 2$ helyen minimuma van, értéke ezeken a helyeken $y = 0$.

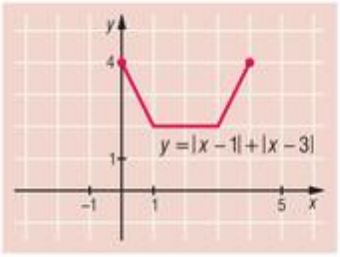


5363 *a)* páratlan függvény;
b) páratlan függvény;
c) se nem páros, se nem páratlan;
d) páratlan függvény;
e) páros függvény;
f) páros függvény;
g) páratlan fügvény;
h) a függvény se nem páros, se nem páratlan.

5364 *a)* A függvény legnagyobb értéke $f(0) = 2$, legkisebb értéke $f(\pi) = -2$.



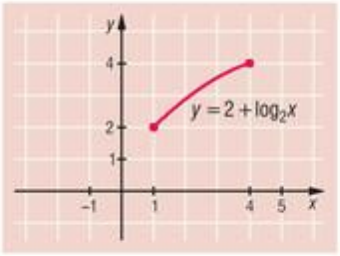
b) A függvény legnagyobb értéke $f(0) = f(4) = 4$, legkisebb értéke $f(x) = 2$, ha $1 \le x \le 3$.



c) A logaritmus azonosságát felhasználva $h(x)$ így írható:

$$h(x) = 2 + \log_2 x, \quad 1 \le x \le 4.$$

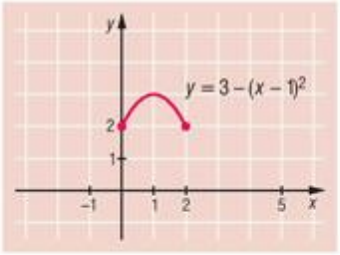
A függvény legnagyobb értéke $h(4) = 4$, legkisebb értéke $h(1) = 2$.



d) A $k(x)$ így írható:

$$k(x) = 3 - (x - 1)^2, \quad 0 \le x \le 2.$$

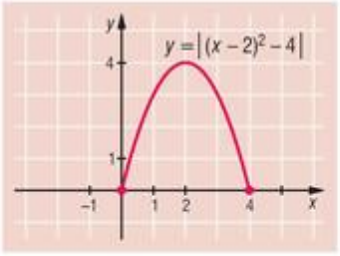
A függvény legnagyobb értéke $k(1) = 3$, legkisebb értéke $k(0) = k(2) = 2$.



e) A $j(x)$ így írható:

$$j(x) = \left|(x - 2)^2 - 4\right|.$$

A függvény legnagyobb értéke $j(2) = 4$, legkisebb értéke $j(0) = j(4) = 0$.

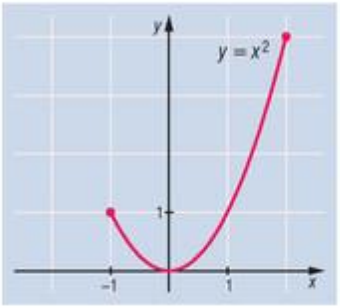


f) A függvény szigorúan csökken az értelmezési tartományban, így legnagyobb értéke 0, legkisebb értéke -2.

g) A függvény $[0; 2]$-ban csökken, legnagyobb értéke 0, legkisebb értéke -4.

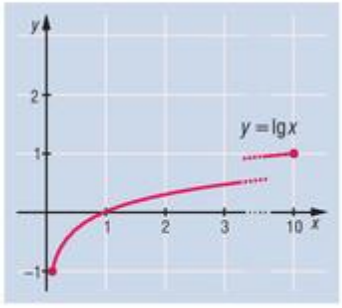
h) A függvény legnagyobb értéke 1, legkisebb értéke 0.

5365 *a)*



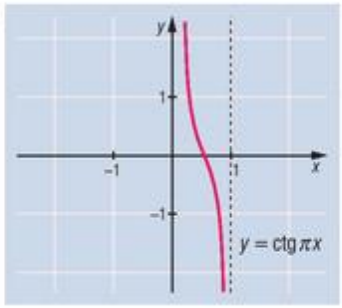
$y \in [0; 4]$;

b)



$y \in [-1; 1]$;

c)



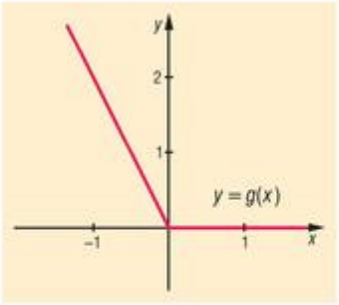
$y \in \mathbb{R}$.

5366 *a)* Az f definícióját így érdemes átalakítani: $f(x) = (x+1)^2 + 4$. A függvény képe egy parabola, amelynek tengelypontja a $(-1; 4)$ pontban van, és „felfelé nyílik", tehát $]-\infty; -1]$-ban csökken, $[-1; +\infty[$-ban nő.

b) A függvény definíciója így írható:

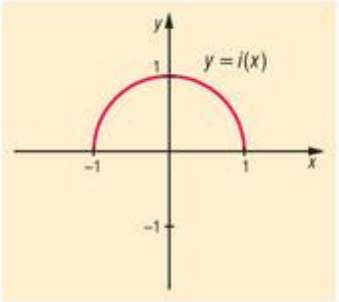
$$g(x) = |x| - x = \begin{cases} -2x, & \text{ha} \quad x < 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

A függvény $]-\infty; 0]$-ban csökken, $[0; +\infty[$-ban konstans, tágabb értelemben nevezhetjük növekvőnek és csökkenőnek is.



c) Az 1-nél nagyobb alapú exponenciális függvény a teljes értelmezési tartományában nő.

d) A függvény $[-1; 0]$-ban nő, $[0; 1]$-ban csökken.



5367 *a)* Az f függvény páratlan, mert a logaritmus azonosságait használva kapjuk, hogy:

$$f(-x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x} = -\log_2 \frac{1-x}{1+x} = -f(x).$$

b) A g függvény páros, mert

$$g(-x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = g(x).$$

c) Azonos átalakításokat is végzünk:

$$h(-x) = \log_2\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \log_2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = -\log_2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = -h(x),$$

tehát a h függvény páratlan.

d) A függvény se nem páratlan, se nem páros, mert

$$i(-x) = x^3 - 2x + 1 \neq -i(x) \quad \text{és} \quad i(-x) \neq i(x).$$

5368 *a)* 4.; *b)* 1.; *c)* 1.; *d)* 4.;
e) 2.; *f)* 4.; *g)* 2.; *h)* 3.

5369 *a)* π; *b)* 4π; *c)* 2π; *d)* $\frac{2\pi}{3}$;
e) $\frac{\pi}{2}$; *f)* $\frac{\pi}{3}$.

5370 *a)* Páros, periodikus 2π szerint. *b)* Páratlan, periodikus 2π szerint.
c) Páros, periodikus bármely pozitív valós szám szerint.
d) Páratlan, periodikus $\frac{\pi}{3}$ szerint. *e)* Nem páros, nem páratlan, nem periodikus.
f) Páratlan, nem periodikus. *g)* Páratlan, periodikus $\frac{2\pi}{3}$ szerint.
h) Páros, periodikus 4π szerint. *i)* Páros, nem periodikus.

5371 *a)* $f(x) = 10(x^2 - 2x + 1) = 10(x-1)^2$.
Zérushely: $x = 1$ helyen.
Minimum helye: $x = 1$, értéke: $y = 0$.

b) $g(x) = (x-7)^2$.
Zérushely: $x = 7$ helyen.
Minimum helye: $x = 7$, értéke: $y = 0$.

c) $h(x) = -(x^2 + 5x - 6) = -\left[\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \frac{24}{4}\right] = -\left[\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right] = -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$.

Zérushely: $x_1 = 1$ és $x_2 = -6$.

Maximum helye: $x = -\frac{5}{2}$, értéke: $\frac{49}{4}$.

d) $i(x) = 3\left[x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}\right] = 3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{12}{36}\right] = 3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{36}\right] = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{12}$.

Zérushely: $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$, $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$.

Minimum helye: $x = \frac{5}{6}$, értéke: $-\frac{13}{12}$.

e) $j(x) = 4\left[x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right] = 4\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{24}{16}\right] = 4\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{4}$.

Zérushely: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

Minimum helye: $x = \frac{1}{4}$ értéke: $-\frac{25}{4}$.

f) $k(x)=-5\left[x^2-\frac{16}{5}x+\frac{3}{5}\right]=-5\left[\left(x-\frac{8}{5}\right)^2-\frac{64}{25}+\frac{15}{25}\right]=-5\left[\left(x-\frac{8}{5}\right)^2-\frac{49}{25}\right]=-5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{49}{5}$.

Zérushely: $x_1=\frac{1}{5}$, $x_2=3$.

Maximum helye: $x=\frac{8}{5}$, értéke: $\frac{49}{5}$.

5372 *a)* Értelmezési tartomány: $x\in\,]-3;\,11]$.

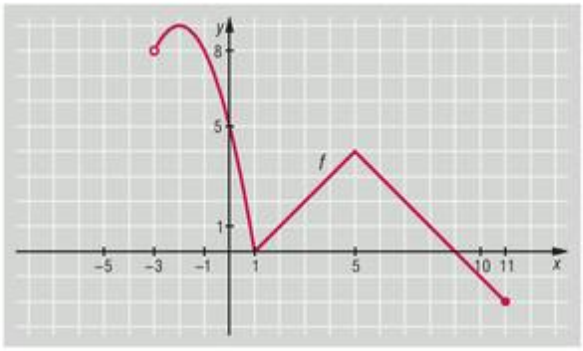
Értékkészlet: $y\in[-2;\,9]$.

Zérushely: $x_1=1$ és $x_2=9$.

Minimum helye: $x=11$, értéke: $y=-2$.

Maximum helye: $x=-2$, értéke: $y=9$.

A függvény szigorúan monoton növekvő a $]-3;-2]$ és $[1;5]$-on, szigorúan monoton csökkenő a $[-2;1]$ és $[5;11]$-on.



b) $f(-1)=8$; $f(1)=0$; $f(3)=2$; $f(-4)$-nek nincs értelme, mert $x=-4$, ami nem esik az értelmezési tartományba; $f(10)=-1$.

c) $f(x)<0 \;\Rightarrow\; x\in\,]9;\,11]$.

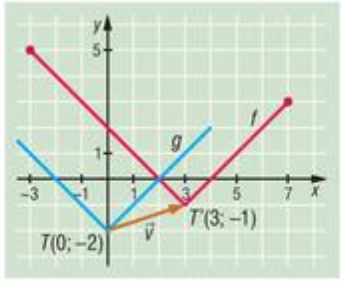
5373 *a)* $f\colon x\mapsto|x-3|-1$.

b) Zérushelyek: f-nél: $x_1=2$ és $x_2=4$,

g-nél: $x_1=-2$ és $x_2=2$.

c) $y\in[-1;\,5]$. Lásd ábra.

d) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $x_5=6$, $x_6=7$.



5374 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz. *e)* Igaz. *f)* Igaz.

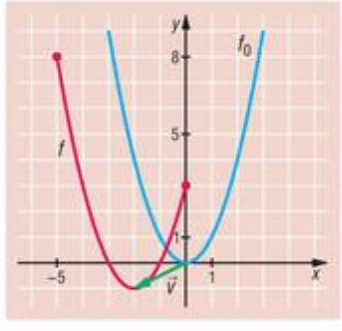
5375 Az f_0-ból az f függvény grafikonját egy $\vec{v}(-2;-1)$ vektorral való eltolással kaptuk. Az eredeti függvény tengelypontja $T(0;0)$, az f függvényé $T'(-2;-1)$.

a) $y\in[-1;\,8]$.

b) Pozitív az adott függvény, ha $x\in[-5;-3[\,\cup\,]-1;\,0]$.

c) $f(-1)=0$, $f(-2)=-1$, $f(-4)=3$.

d) $f(-4)=3$ és $f(0)=3$, vagyis a függvény az $x=-4$ és az $x=0$ helyen veszi fel a 3 értéket.



5376 *a)* Értelmezési tartomány: $x>0$.

Kéttényezős szorzat akkor 0, ha (legalább) az egyik tényezője 0. Tehát:

$$\log_2 x=1 \;\Rightarrow\; x=2 \quad\text{vagy}\quad \log_2 x^2=-6 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{1}{64} \;\Rightarrow\; x=\pm\frac{1}{8}.$$

Megoldás: $x_1=2$ és $x_2=\frac{1}{8}$.

b) $\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\frac{1}{2}$ esetén teljesül, vagyis:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}, \qquad x_2=\frac{11\pi}{6}+2l\pi,\ l\in\mathbb{Z},$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_3=\frac{5\pi}{6}+2m\pi,\ m\in\mathbb{Z}, \qquad x_4=\frac{3\pi}{2}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Eredmény: x_1 és x_4 egybeírva: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; x_2 és x_3 egybeírva: $x=\frac{5\pi}{6}+l\pi,\ l\in\mathbb{Z}$.

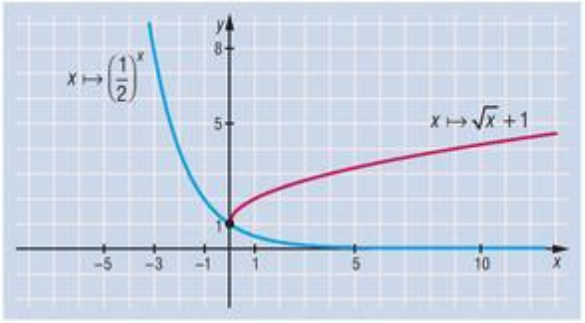
5377 *a)* Értelmezési tartomány: $x\geq 0$.

Átalakítva az egyenletet:

$$2^{-x}=\sqrt{x}+1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x=\sqrt{x}+1.$$

Ábrázoljuk a két oldalt függvényként, majd olvassuk le az eredményt.

Megoldás: $x=0$.



b) Értelmezési tartomány: $x>0$.

Átalakítva az egyenletet, valamint felhasználva, hogy $a^{\log_a b}=b$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-\log_2 x}=5,$$

$$2^{\log_2 x-2}=5,$$

$$\frac{2^{\log_2 x}}{4}=5,$$

$$2^{\log_2 x}=20,$$

$$x=20.$$

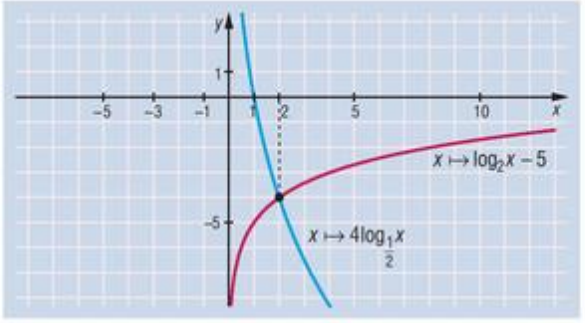
c) Értelmezési tartomány: $x>0$.

Átalakítva az egyenletet:

$$4\cdot\log_{\frac{1}{2}}x=\log_2 x-5.$$

Ábrázoljuk a két oldalt függvényként.

Megoldás: $x=2$.



5378 Értelmezési tartomány: $x+y>0$. Átalakítva az első egyenletet:

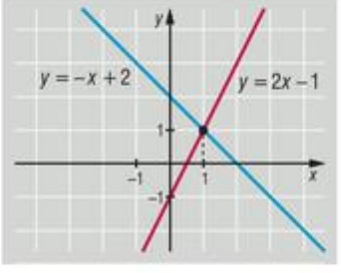
$$\lg[5(x+y)]=\lg 10 \quad \Rightarrow \quad 5x+5y=10 \quad \Rightarrow \quad x+y=2.$$

Az első egyenletből: $y=-x+2$.

A második egyenletből: $y=2x-1$.

Ábrázoljuk a két függvényt, és olvassuk le az eredményt:

$x=1$, $y=1$, $(1;1)$ számpár.



5379 A négyzetgyök miatt:

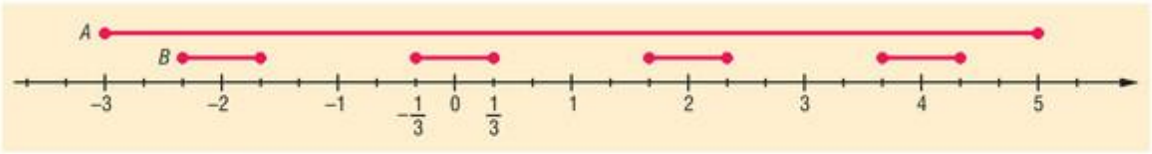
$$-x^2+2x+15\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2-2x-15\leq 0 \;\Rightarrow\; \text{ha } -3\leq x\leq 5.$$

Szintén a négyzetgyök miatt:

$$2\cos\pi x-1\geq 0 \Rightarrow \cos\pi x\geq\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi x\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow -\frac{1}{3}+2k\leq x\leq\frac{1}{3}+2k.$$

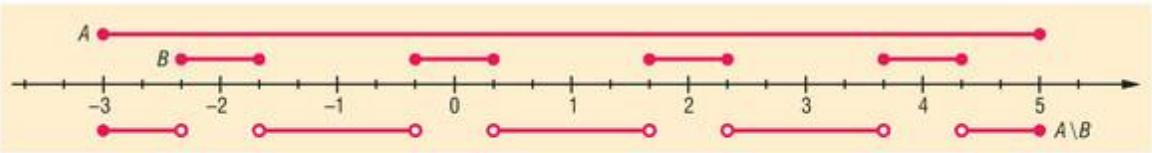
a) A halmaz elemei: $-3\leq x\leq 5$, B halmaz elemei: $-\frac{1}{3}+2k\leq x\leq\frac{1}{3}+2k,\ k\in\mathbb{Z}$.

b)



$A\cap B$ elemei: $-\frac{7}{3}\leq x\leq-\frac{5}{3}\ \cup\ -\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{3}\ \cup\ \frac{5}{3}\leq x\leq\frac{7}{3}\ \cup\ \frac{11}{3}\leq x\leq\frac{13}{3}$.

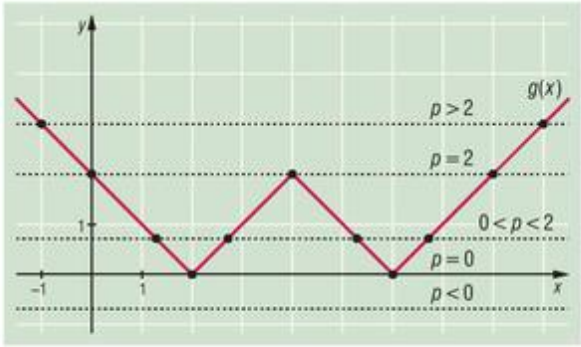
c)



$A\setminus B$ elemei: $-3\leq x<-\frac{7}{3}\ \cup\ -\frac{5}{3}<x<-\frac{1}{3}\ \cup\ \frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}\ \cup\ \frac{7}{3}<x<\frac{11}{3}\ \cup\ \frac{13}{3}<x\leq 5$.

5380 *a)* $g(x)=\left|\sqrt{(x-4)^2}-2\right|=\left||x-4|-2\right|$.

b) Ha $p<0$, akkor a $g(x)=p$ egyenletnek nincs megoldása.
Ha $p=0$, akkor 2 megoldás van.
Ha $0<p<2$, akkor 4 megoldás van.
Ha $p=2$, akkor 3 megoldás létezik.
Ha $p>2$, akkor 2 megoldás van.



5381 Az x^2+bx+c teljes négyzetté alakítását elvégezve:

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c.$$

Mivel a szélsőérték az $a=1$ $(a>0)$ miatt kizárólag minimum lehet, ezért csak ezt kell vizsgálnunk. Így a felfelé nyíló parabola tengelypontja $C(-2;4)$. Tehát az eredeti $x\mapsto x^2$ parabolát az x tengely mentén balra 2 egységgel és az y tengely mentén fel 4 egységgel toltuk el, ezért a teljes négyzet $y=(x+2)^2+4$ alakú:

$$\frac{b}{2}=2 \;\Rightarrow\; b=4, \quad \text{valamint} \quad -\frac{b^2}{4}+c=4 \;\Rightarrow\; c=8.$$

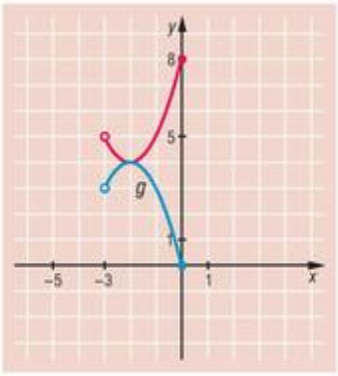
Tehát az adott f függvény hozzárendelési szabálya:

$$x\mapsto x^2+4x+8, \quad \text{vagyis} \quad x\mapsto(x+2)^2+4.$$

a) Értékkészlet: $y \in [4; 8]$.

b) $g\colon\ ]-3; 0] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -(x+2)^2 + 4$.

Ekkor az értékkészlet: $y \in [0; 4]$, $y \in \mathbb{R}$ (ld. ábra: *g*).



5382 *a)* $f(x) = (x^4 + x^2) + (3x^3 - 4x),\ x \in \mathbb{R}$;

$f_1(x) = x^4 + x^2,\ x \in \mathbb{R}$, páros függvény;

$f_2(x) = 3x^3 - 4x,\ x \in \mathbb{R}$, páratlan függvény;

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

b) $g(x) = x^2 + \sin x + x,\ x \in \mathbb{R}$;

$g_1(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$, páros függvény;

$g_2(x) = \sin x + x,\ x \in \mathbb{R}$, páratlan függvény;

$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$.

c) $h(x) = 2^x + 2^{-x} + x^3,\ x \in \mathbb{R}$;

$h_1(x) = 2^x + 2^{-x},\ x \in \mathbb{R}$, páros függvény;

$h_2(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$, páratlan függvény;

$h(x) = h_1(x) + h_2(x)$.

5383 Az f definícióját írjuk át így:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1 + 1}{\sqrt{(x^2+1)\cdot 1}},\quad x \in \mathbb{R}.$$

Mivel $x^2 + 1 \geq 1$ bármely $x \in \mathbb{R}$-re, a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján:

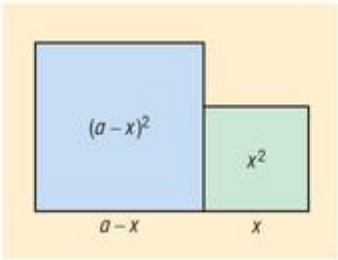
$$0 < \sqrt{(x^2+1)\cdot 1} \leq \frac{x^2+1+1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \leq \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Az egyenlőség csak akkor lehet igaz, ha $x^2 + 1 = 1$, azaz $x = 0$. Az f függvény legkisebb értéke tehát 2, és ezt az $x = 0$ helyen veszi fel.

5384 Az ábra jelöléseit használjuk:

$$\frac{(a-x)^2 + x^2}{2} \geq \left(\frac{a - x + x}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség alapján. Itt egyenlőség csak akkor van, ha a két szám egyenlő, azaz $a - x = x$, tehát $x = \frac{a}{2}$. Azt kaptuk, hogy a két részre rajzolt négyzetek területének összege akkor a legkisebb, ha a részek egyenlők, tehát mindegyik $\frac{a}{2}$ hosszúságú. Ekkor a két terület összege $\frac{a^2}{2}$.



5385 Tegyük fel, hogy $x_1 < x_2$. Mutassuk meg, hogy ekkor $f(x_1) < f(x_2)$. Ez teljesül, mert

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2^3 - x_1^3) + 3(x_2 - x_1) > 0,$$

hiszen az összeg mindkét tagja pozitív.

5386 Legyen $1 \le x_1 < x_2$, ekkor $0 < x_2 - x_1$. Mutassuk meg, hogy $g(x_1) > g(x_2)$. Tehát igazolni kell, hogy $g(x_1) - g(x_2) > 0$:

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_1x_2 - 1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

A nevező pozitív, a számlálóban mindkét tényező pozitív, tehát a tört értéke pozitív. Ezzel az állítást igazoltuk.

5387 Azonos átalakítással az f definícióját így írhatjuk:

$$f(x) = x^2 \cdot (x^4 - 6x^2 + 12) = x^2 \cdot ((x^2 - 3)^2 + 3) \ge 0.$$

Ez nyilván igaz, hiszen $x^2 \ge 0$, $(x^2 - 3)^2 \ge 0$, $(x^2 - 3)^2 + 3 > 0$. Az is látható, hogy $f(x) = 0$ csak akkor teljesül, ha $x = 0$. A függvény legkisebb értéke tehát 0, és ezt a 0 helyen veszi fel a függvény.

5388 A függvényt definiáló kifejezést alakítsuk át:

$$f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Mivel a számláló állandó, a nevező pedig $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$-ban nő, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$-ban csökken, ezért $f(x)$ a $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$-ban csökken, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$-ban nő.

5389 Itt is alakítsuk át a függvényt megadó kifejezést:

$$f(x) = 3x^2 - 2(a+b+c) \cdot x + a^2 + b^2 + c^2 =$$

$$= 3\left(x - \frac{a+b+c}{3}\right)^2 + a^2 + b^2 + c^2 - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2.$$

A kapott alakból világos, hogy a függvény a legkisebb értékét az $x = \frac{a+b+c}{3}$ helyen veszi fel.

5390 *a)* Mivel $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$, ha $x \in \mathbb{R}$, az f függvény $\frac{\pi}{2}$ szerint periodikus.

b) Jól ismert azonosság, hogy $\cos(x + \pi) = -\cos x$, ezért $g(x + \pi) = g(x)$, ha $x \in \mathbb{R}$. A g függvény tehát π szerint periodikus.

5391 Tegyük fel, hogy p $(p > 0)$ a periódusa az $f(x) = \cos x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvénynek. Azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re

$$\cos(x + p)^2 = \cos x^2.$$

Ekkor viszont

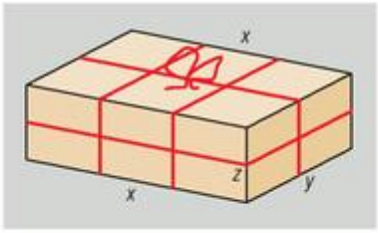
$$(x + p)^2 - x^2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

azaz

$$p(2x + p) = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k\pi}{p} - \frac{1}{2}p \text{ minden } x\text{-re},$$

ami ellentmondás. A feltevés tehát ellentmondásra vezetett, az f függvény nem periodikus.

5392 A dobozt az ábrán látható módon akarjuk átkötni.



A szalag hossza (a csomózás nélkül): $4x + 6z + 6y$, a doboz térfogata $xyz = 12$.

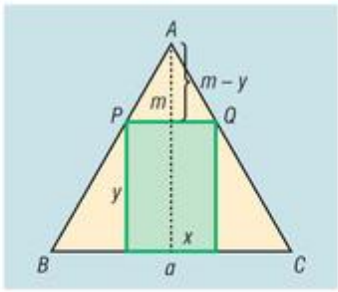
Ebből $x = \frac{12}{zy}$, nyilván $z, y > 0$. A szalag hossza tehát:

$$\frac{48}{zy} + 6z + 6y \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{48}{zy} \cdot 6z \cdot 6y} = 36$$

a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint. Mivel az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\frac{48}{zy} = 6z = 6y$, azaz $z = y$, és így $8 = z^3$, $z = 2$.

A doboz méreteit tehát úgy célszerű választani, hogy $x = 3$ dm, $y = z = 2$ dm legyen. Ekkor lesz szükség a legkevesebb szalagra, a csomózás nélkül 36 dm-re.

5393 A beírt téglalap oldalai legyenek x és y. Az ábra jelölései szerint az $ABC_{\triangle}$ és az $APQ_{\triangle}$ hasonló. Ennek alapján:



$$\frac{m-y}{x} = \frac{m}{a}, \quad \text{azaz} \quad y = m - \frac{m}{a}x = \frac{m}{a}(a-x).$$

A téglalap területe:

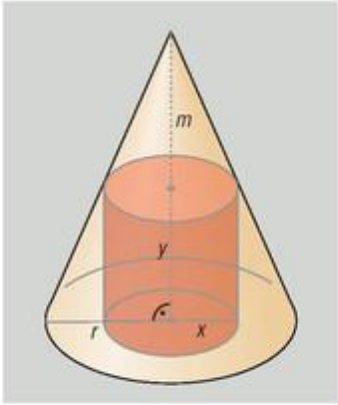
$$xy = \frac{m}{a}x \cdot (a-x), \quad \text{ahol} \quad 0 < x < a.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$\frac{m}{a}x \cdot (a-x) \leq \frac{m}{a}\left(\frac{x+a-x}{2}\right)^2 = \frac{ma}{4},$$

és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x = a - x$, azaz $x = \frac{a}{2}$, és ekkor $y = \frac{m}{2}$.

5394 Legyen a beírt henger alapkörének sugara x, magassága y.



A megfelelő háromszögek hasonlósága miatt:

$$\frac{m-y}{x} = \frac{m}{r}, \quad \text{amiből} \quad y = m - \frac{m}{r}x = \frac{m}{r}(r-x).$$

A henger térfogata:

$$x^2 \cdot \pi \cdot y = \frac{m}{r}\pi \cdot x^2 \cdot (r-x), \quad \text{ahol} \quad 0 < x < r.$$

A térfogatot kissé más alakban írva alkalmazhatjuk a három számra vonatkozó számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{m\pi}{2r} \cdot x^2 \cdot (2r-2x) \leq \frac{m\pi}{2r} \cdot \left(\frac{x+x+2r-2x}{3}\right)^3 = \frac{m\pi \cdot 4r^2}{27},$$

és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x = 2r - 2x$, azaz $x = \frac{2r}{3}$, $y = \frac{m}{3}$.

A maximális térfogatú hengert tehát akkor kapjuk, ha a magasságát a kúp magassága egyharmadának, az alapkör sugarát a kúp alapköre sugara kétharmadának választjuk. Ekkor a henger térfogata a kúp térfogatának négykilenced része.

5395 Mivel $0 \le \sin^2 x \le 1$, $\sin^4 x \le \sin^2 x$, hasonlóan kapjuk, hogy $\cos^6 x \le \cos^2 x$, tehát

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^6 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Az 1 értéket az f függvény akkor veheti fel, ha

I. eset: $\sin^4 x = 1$, azaz $\sin^2 x = 1$, tehát $|\sin x| = 1$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, ekkor $\cos x = 0$;

II. eset: $\cos^6 x = 1$, ekkor $|\cos x| = 1$, amiből $x_3 = 0$, $x_4 = \pi$, $x_5 = 2\pi$.

5396 Írjuk át $f(x)$-et a következő alakba:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-3} = x - 3 + \frac{1}{x-3} + 2.$$

Mivel $x > 3$, $x - 3 > 0$, és ismert egyenlőtlenség, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, csak akkor 2, ha a szám 1. Ezért $f(x) \ge 4$, és $x - 3 = 1$, $x = 4$ esetén lesz az értéke 4.

5397 Az $f(x; y)$ definícióját írjuk át így:

$$f(x;y) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2 \cdot y^2} = \left(x^2 - y^2\right)^2 + 2x^2 \cdot y^2 + \frac{2}{x^2 \cdot y^2} = \left(x^2 - y^2\right)^2 + 2\left(x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{x^2 \cdot y^2}\right).$$

Az összeg első tagja nemnegatív, így értéke akkor a legkisebb, ha 0, azaz $x^2 = y^2$.

A második tag a kétszerese $\left(x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{x^2 \cdot y^2}\right)$-nek, ahol $x^2 \cdot y^2 > 0$, ez legalább 2, és csak akkor 2, ha $x^2 \cdot y^2 = 1$. Így azt kaptuk, hogy $f(x; y) \ge 4$, és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x^2 = y^2$ és $x^2 \cdot y^2 = 1$. Ebből az egyenletrendszerből következik, hogy $x = y = 1$, mivel $x, y > 0$.

5398 Írjuk f definícióját a következő alakba:

$$f(x) = \frac{16x^4 + 3}{16x} = x^3 + \frac{3}{16x} = x^3 + \frac{1}{16x} + \frac{1}{16x} + \frac{1}{16x}.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget most négy számra alkalmazzuk ($x > 0$), ezért:

$$f(x) \ge 4 \cdot \sqrt[4]{x^3 \cdot \frac{1}{16^3 \cdot x^3}} = \frac{1}{2},$$

és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x^3 = \frac{1}{16x}$, azaz $x = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2} \le f(x)\right)$.

Az f legkisebb értéke tehát $\frac{1}{2}$, és ezt az $\frac{1}{2}$ helyen veszi fel.

5399 Az f-et definiáló kifejezést most így célszerű átírni:

$$f(x) = \frac{729}{16} \cdot x^4 \cdot (1-x)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot x^4 \cdot (2-2x) \cdot (2-2x) \le \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{x + x + x + x + 2 - 2x + 2 - 2x}{6}\right)^6.$$

Mivel $0 \le x \le 1$, $2 - 2x \ge 0$, most hat nemnegatív számra alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget. Ennek alapján:

$$f(x) \le \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^6 = 1.$$

Az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x = 2 - 2x$, azaz $x = \frac{2}{3}$. Az f legnagyobb értéke tehát 1, és ezt az $x = \frac{2}{3}$ helyen veszi fel.

5400 Mivel $\cos x, \sin x > 0$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, használjuk fel, hogy két pozitív szám harmonikus közepe nem nagyobb, mint a négyzetes közepük:

$$\frac{2}{\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}} \le \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ebből következik, hogy:

$$2\sqrt{2} \le \frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x},$$

$$8 \le \left(\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}\right)^2.$$

Itt az egyenlőség akkor igaz, ha $\cos x = \sin x$, ami $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $x = \frac{\pi}{4}$-re teljesül.

A függvény tehát csak 8-nál nagyobb egyenlő értéket vehet fel. Ugyanakkor tetszőlegesen nagy értéket is felvehet, mert ha $0 < x$, de közel van 0-hoz, akkor $\sin x > 0$, de kicsi, így a reciproka nagy lesz. A függvény értékkészlete a $[8; +\infty[$ intervallum.

5401 Először írjuk fel az f definícióját így:

$$f(x) = \sqrt{-x^2+4x+12} - \sqrt{-x^2+2x+3} =$$
$$= \sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)}.$$

Ebből látható, hogy az f függvény $-1 \le x \le 3$ esetén értelmezve van, és itt pozitív, mert

$$\sqrt{-x^2+4x+12} > \sqrt{-x^2+2x+3} \ge 0,$$
$$-x^2+4x+12 > -x^2+2x+3 \ge 0,$$
$$x \ge -4{,}5.$$

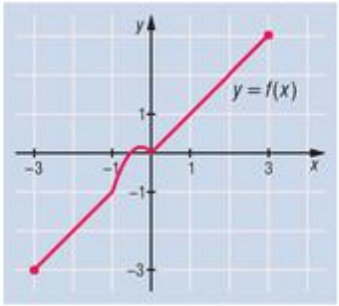
A lépések megfordíthatók. Az f^2 értéke így is előállítható:

$$f^2(x) = \left(\sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{(x+2)(3-x)}\right)^2 + 3.$$

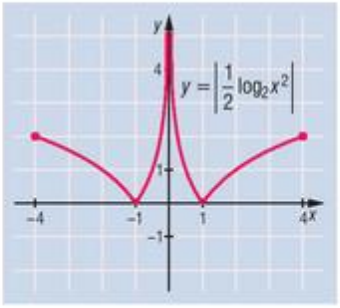
Ebből látható, hogy $f^2(x) \ge 3$. Egyenlőség csak $x = 0$ esetén igaz. Tehát $f(x) \ge \sqrt{3}$, azaz f legkisebb értéke $\sqrt{3}$, és ezt $x = 0$-nál veszi fel.

5402 *a)* Az f függvény definíciója így is írható:

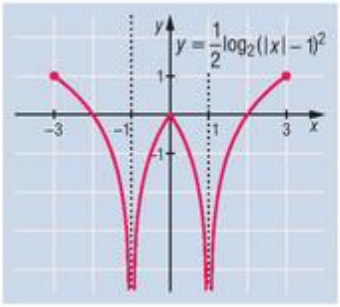
$$f(x) = |x^2+x| - x^2 = \begin{cases} x, & \text{ha } -3 \le x \le -1,\ 0 \le x \le 3, \\ -2x^2 - x, & \text{ha } -1 \le x \le 0. \end{cases}$$



b) A függvény páros, ábrája szimmetrikus az y tengelyre.



c) Ez is páros függvény, grafikonja szimmetrikus az y tengelyre.

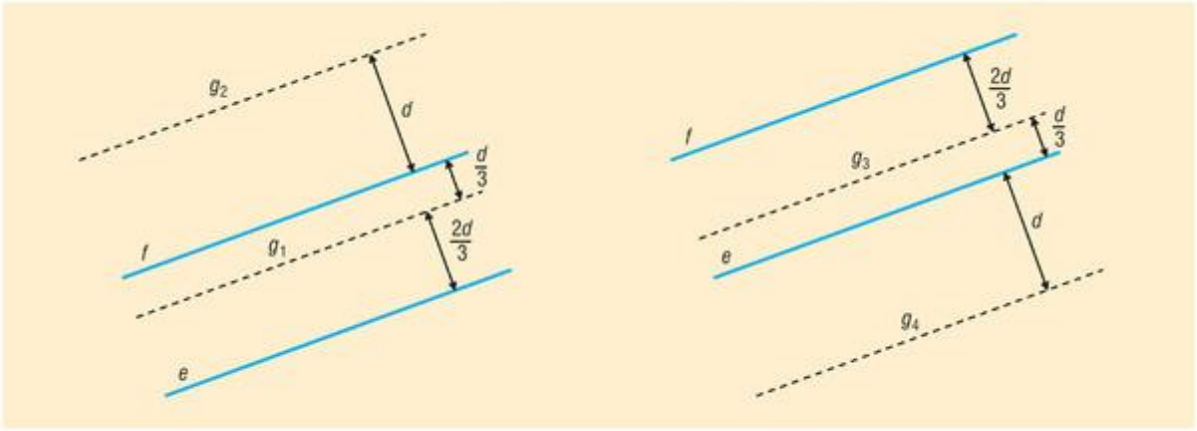


GEOMETRIA – ÖSSZEFOGLALÁS

Alapvető fogalmak – megoldások

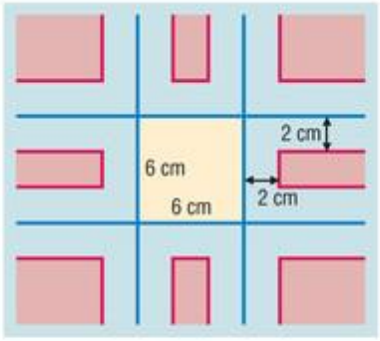
5403 Legyen a két út az e és az f egyenes. Azon pontok, amelyek e-től kétszer akkora távolságra vannak, mint f-től, lehetnek a két egyenes között, és lehetnek f által meghatározott azon félsíkban, amelyik nem tartalmazza e-t.

Ezek a pontok az ábrán látható e-vel és f-fel párhuzamos g_1 és g_2 egyenesek pontjai.

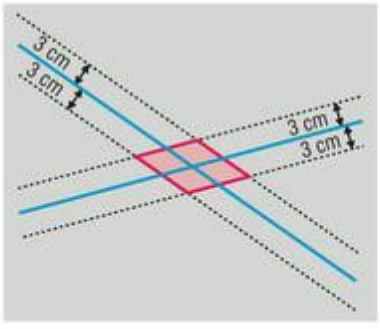


Hasonlóan azon pontok, amelyek f-től kétszer akkora távolságra vannak, mint e-től, az e-vel és f-fel párhuzamos g_3 és g_4 egyenesek pontjai.

5404 Az adott tulajdonságú pontok az ábrán pirossal jelölt pontok.



5405 Az adott tulajdonságú pontok az ábrán pirossal jelölt pontok.



5406 A 2010 pontot úgy kell megadni, hogy egy gömb felületén helyezkedjenek el.

5407 A térben ezek a pontok egy hengerpaláston, vagy az azt lezáró két félgömbön helyezkedhetnek el.

5408 *a)* A 10 pont a térben $\binom{10}{2}$ egyenest határoz meg.

b) A 10 pont a térben $\binom{10}{3}$ háromszöget határoz meg.

5409 Egy tetraéder lapjainak síkjai 15 részre osztják a teret.

5410 *a)* A szög nagysága: 100°.

b) A szög nagysága: 130°.

5411 *a)* A keresett szögek: 36° és 54°.

b) A keresett szögek: 60° és 30°.

5412 A 48°-os szögnek a szögfelezője a másik párhuzamos egyenest 24°-os szögben metszi.

5413 A szögek nagysága: 75° és 105°.

5414 A négy szögfelező egyenes téglalapot határoz meg.

5415 A visszavert fénysugár 40°-os szögben fordul el.

5416 Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja éppen a 10 cm-es oldal felezőpontja, tehát a távolság 0.

5417 A BC oldal a metszéspontból 125°-os szögben látszik.

5418 A háromszög oldalainak hossza:

$$a = \frac{6}{\operatorname{tg} 35^\circ} + \frac{6}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx 15{,}72 \text{ cm},$$

$$b = \frac{6}{\operatorname{tg} 15^\circ} + \frac{6}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx 29{,}54 \text{ cm},$$

$$c = \frac{6}{\operatorname{tg} 15^\circ} + \frac{6}{\operatorname{tg} 35^\circ} \approx 30{,}96 \text{ cm}.$$

5419 A telek negyedik oldala 30 m.

5420 A négyzetes oszlop alaplapja a testátlójával 54,74°-os szöget zár be.

5421 A szabályos négyoldalú gúla

a) alaplapja az oldaléllel 79,98°; *b)* alaplapja az oldallappal 82,87°;

c) két szemben levő oldallapja 14,26° szöget zár be.

5422 A szabályos oktaéder csúcsainak száma hat, ezért a csúcsokon áthaladó egyenesek száma: $\binom{6}{2}$.

Az összes eset száma:

$$\binom{\binom{6}{2}}{2} = \binom{15}{2} = 105.$$

Az A csúcson áthaladó 5 egyenes közül kettőt $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen választhatunk. A kedvező esetek száma 10.

Így annak a valószínűsége, hogy mind a két kiválasztott egyenes áthalad az oktaéder A csúcsán:

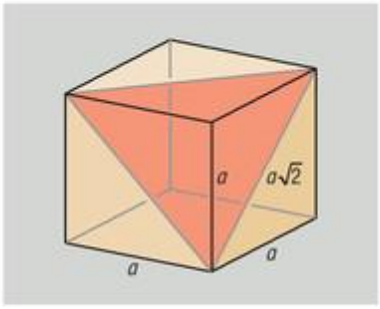
$$\frac{10}{105} = \frac{2}{21} \approx 0{,}096.$$

5423 Egy a élű kocka nyolc csúcsa közül hármat $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen választhatunk ki.

Egy kocka csúcsai 56 háromszöget határoznak meg.

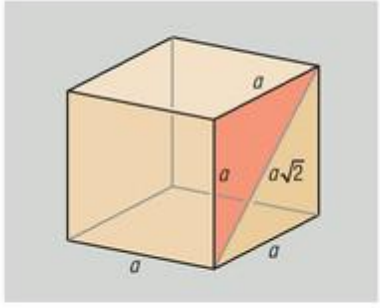
Ezek között a háromszögek között azok száma, amelyeknek minden oldala $a\sqrt{2}$ hosszúságú, a kocka csúcsainak számával egyezik meg, azaz 8 darab ilyen háromszög van. Területük összege:

$$8 \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4a^2 \cdot \sqrt{3}.$$



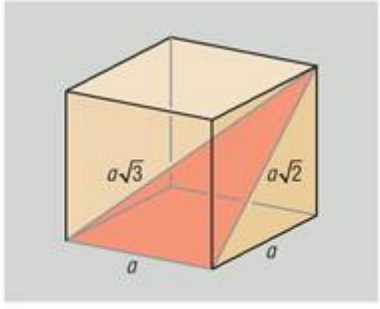
Azon háromszögek száma, amelyeknek két oldala a, egy pedig $a\sqrt{2}$ hosszúságú, a lapok számának a négyszeresese, azaz 24. Területük összege:

$$24 \cdot \frac{a^2}{2} = 12a^2.$$



Azon háromszögek száma, amelyeknek oldalai a, $a\sqrt{2}$ és $a\sqrt{3}$ hosszúságúak, az élek számának a kétszerese, azaz 24. Területük összege:

$$24 \cdot \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = 12a^2 \cdot \sqrt{2}.$$



A háromszögek területeinek az összege:

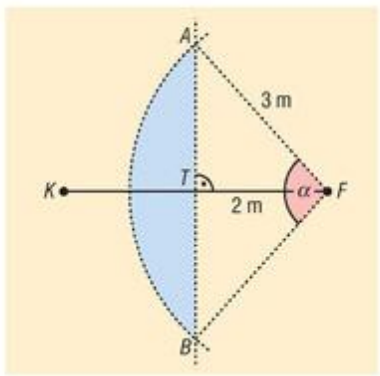
$$4a^2 \cdot \sqrt{3} + 12a^2 + 12a^2 \cdot \sqrt{2} = 4a^2 \cdot \left(\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{2}\right) =$$
$$= 400 \cdot \left(\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{2}\right) \approx 3589{,}88 \text{ cm}^2.$$

5424 Jelölje a mellékelt ábrán a kút helyét K, a fa helyét F.

A virágágyás pontjai az F középpontú 3 méter sugarú körön belül azok a pontok, amelyek a KF szakasz felezőmerőlegesének K pontot tartalmazó félsíkjában vannak.

A virágágyás egy $r = 3$ m sugarú körszelet területe. A körszelet α középponti szögét a TFA derékszögű háromszögből számíthatjuk:

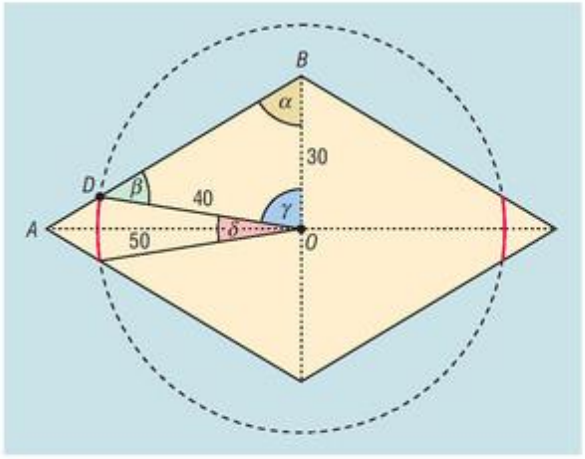
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 96{,}38°.$$



A virágágyás területe úgy számolható, hogy az α középponti szögű körcikk területéből kivonjuk az ABF háromszög területét:

$$T = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} = 3^2 \cdot \pi \cdot \frac{96{,}38°}{360°} - \frac{3^2 \cdot \sin 96{,}38°}{2} \approx 3{,}10 \text{ m}^2.$$

5425 A park középpontja legyen O, egy oldala AB. Az ABO derékszögű háromszög befogóinak hossza 30 m, illetve 50 m.



Mivel O ponttól a sétány 40 méterre halad, az O középpontú, 40 m sugarú kör az AB oldalt egy belső D pontban metszi, így a sétány két körív.

A körív hosszának kiszámításához szükség van az ív δ középponti szögére.

Az ábra jelölései alapján az α szöget az AOB derékszögű háromszögből számolhatjuk:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{50}{30} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 59{,}04°.$$

A BOD háromszögben ismert két oldal és a hosszabbikkal szemben levő szög. A szinusztétel alapján a β szög számolható:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 59{,}04°} = \frac{30}{40} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{30}{40}\cdot\sin 59{,}04° \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 40{,}03°.$$

(A β tompaszög nem lehet, mert nem a leghosszabb oldallal szemközti szög.)

A BOD háromszög γ szöge:

$$180° - 59{,}04° - 40{,}03° = 80{,}93°.$$

Mivel a rombusz átlói merőlegesen metszik egymást:

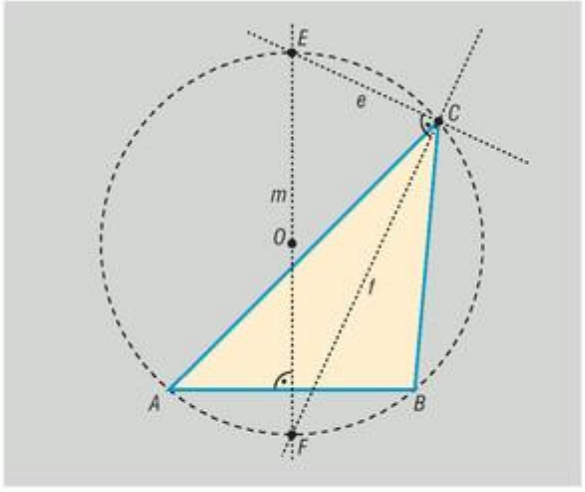
$$\frac{\delta}{2} = 90° - 80{,}93° = 9{,}07° \quad \Rightarrow \quad \delta = 18{,}14°.$$

Az egyik sétány hossza:

$$l = 2\cdot r\cdot\pi\cdot\frac{\delta}{360°} = 2\cdot 40\cdot\pi\cdot\frac{18{,}14°}{360°} \approx 12{,}66 \text{ m}.$$

A tengelyes szimmetria miatt a másik sétány hossza is 12,66 m.

5426 Az AC és BC oldalegyenesektől egyenlő távol lévő pontok halmaza a háromszög C csúcsánál lévő külső és belső szögfelezők. A külső szögfelező egyenese legyen e, a belső szögfelező egyenese f.



Az A és B csúcsoktól egyenlő távol lévő pontok halmaza az AB oldal m oldalfelező merőlegese.

a) Mivel $AC \neq BC$, a belső szögfelező nem eshet egybe az oldalfelező merőlegessel. Ez azt jelenti, hogy a két szögfelezőnek az oldalfelező merőlegessel egy-egy metszéspontja van, tehát két olyan pont van, amely a háromszög AC és BC oldalegyeneseitől, valamint az A és a B csúcstól is egyenlő távol van.

Az m-nek f-fel vett metszéspontja legyen F, e-vel vett metszéspontja E.

b) Ismert, hogy egy háromszög belső szögfelezője és a szemben lévő oldal felezőmerőlegese a háromszög köré írható körön metszik egymást, vagyis az F pont rajta van a háromszög köré írható körön.

A kör AB húrjának m felezőmerőlegesére illeszkedik a kör egyik átmérője.

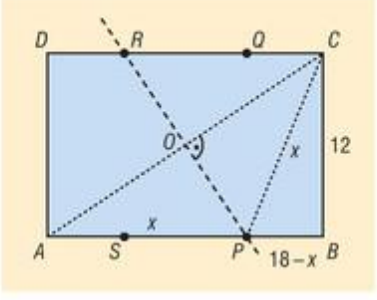
Egy szögnek és mellékszögének felezője merőleges egymásra, tehát e merőleges f-re.

Ezek alapján az m, f és e egyenesek derékszögű háromszöget határoznak meg. Ennek a derékszögű háromszögnek a C-nél van derékszöge, amely az átfogó F csúcsával együtt rajta van az ABC háromszög köré írható körén.

A Thalész-tétel megfordítása értelmében a háromszög E csúcsa is pontja ennek a körnek, és az FE távolság az ABC háromszög köré írható körének átmérője.

A két metszéspont távolsága 20 cm.

5427 Az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = 18$ m és $BC = 12$ m, és az átlók metszéspontja O.



A téglalap síkjában a szemben levő A és C csúcsoktól egyenlő távol lévő pontok halmaza az AC átló felezőmerőlegese. Ez az egyenes az AB oldalt egy P pontban metszi. Legyen $AP = PC = x$.

A PBC derékszögű háromszög átfogója x, egyik befogója $18 - x$, másik befogója 12. A háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

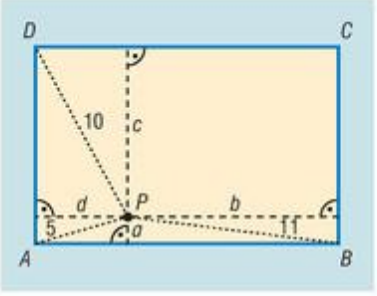
$$x^2 = (18 - x)^2 + 12^2 \quad \Rightarrow \quad x = 13.$$

Az AB oldalon a B csúcstól $18 - 13 = 5$ méter távolságra található egy, a feladat feltételeit kielégítő pont.

A tengelyes és középpontos szimmetria miatt a telek határán négy pont van (P, Q, R és S), amelyek a telek valamely két szemközti sarkától egyenlő távol vannak.

A négy pont közül kettő-kettő a telek hosszabbik oldalán helyezkedik el, a sarkoktól 5 m távolságra.

5428 A P pontnak a téglalap AB, BC, CD és AD oldalától vett távolsága rendre legyen a, b, c és d.



A téglalap csúcsainak P ponttól vett távolságai a Pitagorasz-tétellel a, b, c és d segítségével megadhatók:

$$10^2 = c^2 + d^2,$$
$$5^2 = a^2 + d^2,$$
$$11^2 = a^2 + b^2.$$

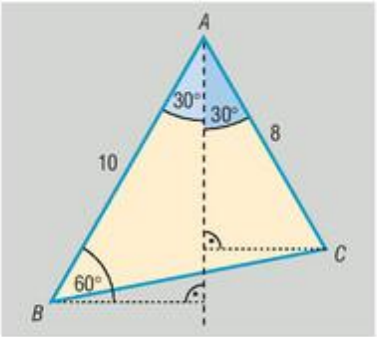
A $PC = \sqrt{b^2 + c^2}$ távolságot kell meghatároznunk.

Az előbbi egyenletek közül az elsőt és harmadikat adjuk össze, majd az összegből vonjuk ki a másodikat.

A $196 = b^2 + c^2$ összefüggéshez jutunk, ahonnan $PC = 14$ adódik.

A téglalap C csúcsa a P ponttól 14 cm távolságra van.

5429 *a)* A háromszög AB oldala, a háromszög A csúcsából kiinduló belső szögfelezője és a B csúcsból a belső szögfelezőre bocsátott merőleges egy fél szabályos háromszöget határoz meg. A fél szabályos háromszög rövidebbik befogója az AB átfogó fele, ami a B csúcsnak a szögfelezőtől vett távolsága, vagyis 5 cm.



Hasonlóan adódik, hogy C csúcsnak a szögfelezőtől vett távolsága 4 cm.

b) Az ABC háromszög harmadik oldala koszinusztétellel számolható:

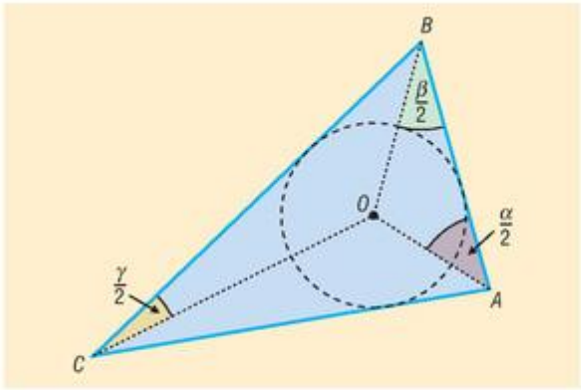
$$BC^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 60° \quad \Rightarrow \quad BC = 2\sqrt{21} \ (\approx 9{,}17).$$

Egy háromszög belső szögfelezője a szemben levő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. Tehát az A csúcsból kiinduló belső szögfelező a BC oldalt

$$2\sqrt{21} \cdot \frac{10}{10+8} = \frac{10\sqrt{21}}{9} \approx 5{,}09 \text{ cm-es} \quad \text{és} \quad 2\sqrt{21} \cdot \frac{8}{10+8} = \frac{8\sqrt{21}}{9} \approx 4{,}07 \text{ cm-es}$$

részekre osztja.

5430 Az ABC háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja a háromszög beírt körének O középpontja. A háromszög szögei α, β és γ, továbbá legyen $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.



Egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

A BOC háromszögben:

$$\frac{\beta}{2} \geq \frac{\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad OC \geq OB.$$

Az AOB háromszögben:

$$\frac{\alpha}{2} \geq \frac{\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad OB \geq OA.$$

Tehát az O középponttól mért távolságokra fennáll:

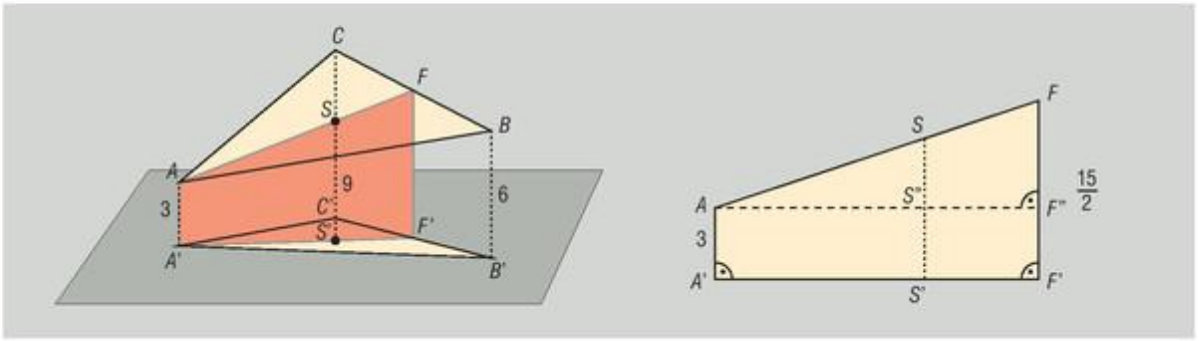
$$OC \geq OB \geq OA.$$

Egy háromszög beírt körének középpontja attól a csúcstól van a legtávolabb, amelyik csúcsnál a legkisebb szög van.

5431 A háromszög A, B és C csúcsainak a síkra eső merőleges vetülete legyen rendre A', B' és C'. A háromszög BC oldalának felezőpontja F, a háromszög súlypontja S, és ezek merőleges vetületei F' és S'.

A $BB'C'C$ négyszög trapéz, amelynek középvonala FF', így hossza az alapok számtani közepe:

$$FF' = \frac{6+9}{2} = \frac{15}{2}.$$



Az $AA'F'F$ négyszög szintén egy trapéz, az alapjainak hossza 3 cm és $\frac{15}{2}$ cm.

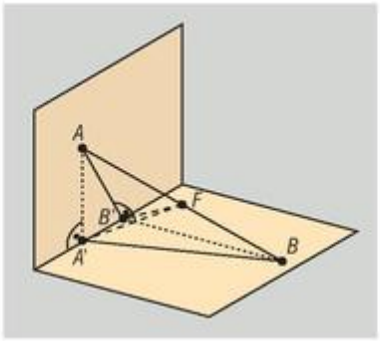
Egy háromszög súlypontja a súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadolópontja. Tehát az $AA'F'F$ trapéz szárainak a hosszabbik alaphoz közelebbi harmadolópontjait összekötő szakasz hosszát

keressük. A trapézban húzzunk párhuzamost az A csúcson keresztül az $A'F'$ szárral. Ez a párhuzamos az SS' szakaszt S'', az FF' szakaszt F'' pontokban metszi. Az $AS''S$ és $AF''F$ háromszögek hasonlóak, mivel szögeik páronként egyenlők. A megfelelő oldalak hosszának arányát felírva:

$$\frac{SS''}{FF''}=\frac{AS}{AF} \quad \Rightarrow \quad SS''=\frac{AS}{AF}\cdot FF''=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{15}{2}-3\right)=3 \quad \Rightarrow \quad SS'=SS''+S''S'=3+3=6.$$

A háromszög súlypontjának a síktól vett távolsága 6 cm.

5432 Az A, illetve B pontoknak a két sík metszésvonalára eső merőleges vetülete legyen A', illetve B'.



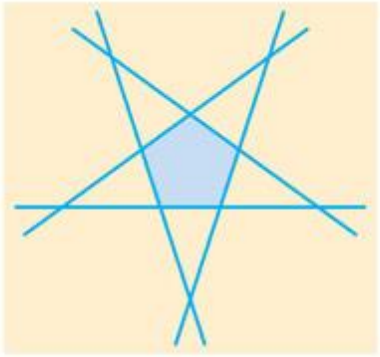
Mivel az AA' egyenes merőleges a B-t tartalmazó síkra, tehát merőleges a sík összes egyenesére, így $A'B$-re is. Ez alapján az $AA'B$ háromszögnek az A'-nél lévő szöge derékszög. Thalész tételének megfordítása alapján a derékszögű csúcs rajta van AB Thalész-körén. Tehát az A' pontnak az AB szakasz F felezőpontjától vett távolsága:

$$\frac{AB}{2}=10 \text{ cm}.$$

Hasonlóan a BB' merőleges az A-t tartalmazó síkra, tehát merőleges a sík összes egyenesére, így AB'-re is. Tehát a $BB'A$ derékszögű háromszögben a B' csúcsnak az AB szakasz F felezőpontjától vett távolsága szintén

$$\frac{AB}{2}=10 \text{ cm}.$$

5433 Egy szabályos ötszög oldalegyenesei a síkot $1+3\cdot 5=16$ részre osztják.



Az ötszög alapú egyenes hasáb alap- és fedőlapjának síkjai párhuzamosak egymással, így a térben ez a két sík az oldallapok síkjaival $3\cdot 16=48$ térrészt hoz létre.

5434 Az a oldalú szabályos tetraéder magasságának hossza $m=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

A szabályos tetraéder magasságai egyben a súlyvonalai is, amelyek negyedelve, a súlypontban metszik egymást. A szabályos tetraéder súlypontja a tetraéder minden csúcsától

$$\frac{3}{4}\cdot m=\frac{3}{4}\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}=a\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}$$

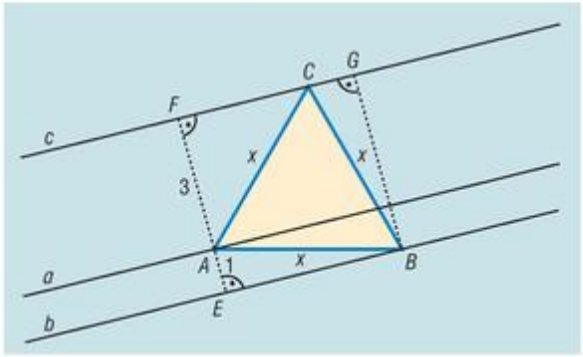
távolságra van.

Mivel $a=12$, ez a távolság: $3\sqrt{6}$ (cm).

Egy 12 cm élű szabályos tetraéder súlypontja a tetraéder minden csúcsától $3\sqrt{6}$ cm távolságra van.

5435 Egy időpillanatban a labda középpontjának a távolsága a pad élétől a labda aktuális sugarának hossza. A középpontnak a faltól vett távolsága ekkor szintén sugárnyi. Ezért a középpont egy olyan parabolaíven mozgott, amelynek vezéregyenese a fal egyenese, fókuszpontja a pad élének pontja.

5436 Az x oldalú ABC szabályos háromszög A, B és C csúcsán áthaladó egyenesek legyenek rendre a, b és c úgy, hogy az a egyenes b és c között halad. Az A csúcsnak b és c egyenesre vonatkozó merőleges vetületei legyenek E és F, a B csúcsnak c egyenesre vonatkozó merőleges vetülete G.



Az AFC derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján:

$$FC = \sqrt{x^2 - 3^2}.$$

Ugyanígy az AEB, illetve a BGC háromszögből:

$$EB = \sqrt{x^2 - 1^2} \quad \text{és} \quad CG = \sqrt{x^2 - 4^2}.$$

Mivel $EB = FC + CG$, x-re a következő összefüggést kapjuk:

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 16}.$$

Négyzetre emelések és rendezések után:

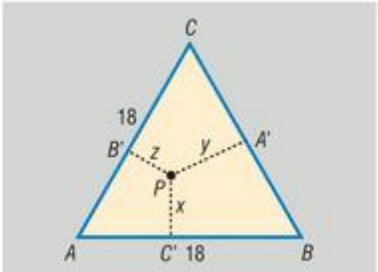
$$0 = x^2 \cdot (3x^2 - 52).$$

Mivel x háromszög oldala, így csak pozitív érték lehet:

$$x = \sqrt{\frac{52}{3}} = \frac{\sqrt{156}}{3}.$$

A háromszög oldala $\frac{\sqrt{156}}{3} \approx 4{,}16$ cm.

5437 Egy a oldalú szabályos ABC háromszög P belső pontjának az oldalaktól vett távolsága legyen x, y és z.

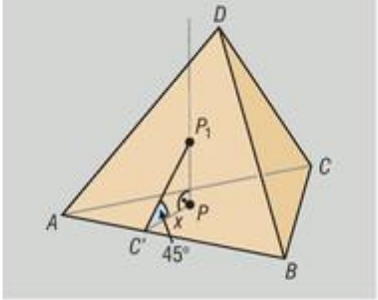


A háromszög területe felírható az ABP, BCP, illetve ACP háromszögek területének összegeként és az $\frac{a \cdot a \cdot \sin 60°}{2}$ összefüggéssel:

$$\frac{a \cdot x}{2} + \frac{a \cdot y}{2} + \frac{a \cdot z}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4},$$

$$x + y + z = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ (\text{cm}).$$

Az $ABCD$ szabályos háromoldalú gúla ABC alaplapjának egy belső P pontjában az alaplapra állított merőlegesnek az ABD síkkal vett P_1 metszéspontjából állítsunk merőlegest az AB alapélre. A merőleges talppontja legyen C'. A három merőleges egyenes tétele alapján $C'P$ egyenes is merőleges AB-re, tehát a $P_1C'P$ szög a gúla alaplapjának és oldallapjának bezárt szöge, vagyis 45°. A $P_1C'P$ derékszögű háromszögben:



$$\frac{PP_1}{PC'} = \operatorname{tg} 45° \quad \Rightarrow \quad PP_1 = PC' \cdot \operatorname{tg} 45° = PC' = x.$$

Hasonlóan: $PP_2 = y$ és $PP_3 = z$. A PP_1, PP_2 és PP_3 szakaszok hosszának összege:

$$PP_1 + PP_2 + PP_3 = x + y + z = 9\sqrt{3}.$$

A PP_1, PP_2 és PP_3 szakaszok hosszának összege $9\sqrt{3}$ cm.

Geometriai transzformációk – megoldások

5438 A kitöltött táblázat:

	Identikus transzformáció	Tengelyes tükrözés	Forgatás (mely nem identitás)	Eltolás (mely nem identitás)
Fixpontok	minden pont	a tengely pontjai	a forgatás középpontja	nincsen
Fixegyenesek	minden egyenes	a tengely	nincsen	nincsen
Invariáns egyenesek	minden egyenes	a tengely és a rá merőleges egyenesek	$\alpha = k \cdot 180°$ (k egész szám) esetén a centrumot tartalmazó egyenesek, különben nincsen	az eltolás vektorával párhuzamos egyenesek
Példa invariáns körre	minden kör	kör, melynek középpontja a tengelyre illeszkedik	a centrum középpontú körök	nincsen
Szögtartó	igen	igen	igen	igen
Távolságtartó	igen	igen	igen	igen
Egyenes és képe párhuzamos?	igen	nem feltétlenül	nem feltétlenül	igen
Körüljárási irányt megtartja?	igen	nem	igen	igen

5439 Megfelelő egybevágósági transzformációk például:

1. A két kör középpontját összekötő szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tengelyes tükrözés.
2. A két kör középpontját összekötő szakasz F felezőpontjára vonatkozó középpontos tükrözés.
3. Az egyik kör középpontjából a másik kör középpontjába mutató vektorral történő eltolás.

5440 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis.
e) Igaz. *f)* Hamis. *g)* Igaz. *h)* Igaz.

5441 *a)* A szabályos 13 oldalú sokszögnek 13 szimmetriatengelye van. Ezek között egyetlen olyan sincsen, amely tartalmazza a sokszög valamelyik átlóját.

b) A szabályos 14 oldalú sokszögnek 14 szimmetriatengelye van. Ezek között 7 olyan van, amelyik a sokszög valamelyik átlóját tartalmazza.

5442 A paralelogrammák közül a téglalapok és a rombuszok tengelyesen szimmetrikusak.

5443 A deltoidok közül a rombuszok középpontosan szimmetrikusak.

5444 *a)* Igen. Ha a trapéz téglalap, akkor bármelyik oldalegyenesére is tükrözzük, szintén téglalapot, így persze paralelogrammát kapunk.

b) Igen. A trapézt a rövidebb alap egyenesére tükrözve konkáv hatszöget kapunk.

c) Igen.

d) Igen.

e) Nem. Egy ilyen rombusznak csak két szimmetriatengelye van, a két átlót tartalmazó egyenes. Ezek viszont a rombuszt nem trapézokra, hanem háromszögekre bontják.

5445 *a)* Igen. Ha az egyik szár felezőpontjára tükrözünk, akkor paralelogrammát kapunk.

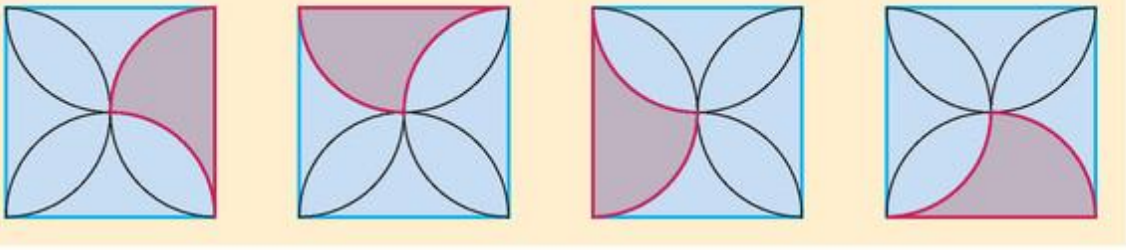
b) Igen. Konkáv hatszöget kapunk, ha a rövidebb alap felezőpontjára tükrözünk.

c) Igen. *d)* Igen. *e)* Igen.

5446 A kialakuló nyolcszögnek két, egymásra merőleges szimmetriatengelye van, ezek a téglalapnak is szimmetriatengelyei.

A nyolcszög középpontosan is szimmetrikus (ezért persze forgásszimmetriát is mutat), középpontja a téglalap középpontjával egybeesik.

5447 *a)* Az egyes forgatások a kiindulási alakzatot a következő helyzetbe viszik.



b) Az ábrákról leolvasható, hogy a lila síkidom a négyzet területének 25%-a.

5448 *a)* Az x tengely mentén 2 egységgel történő eltolás, majd az x tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés, végül az y tengely mentén 1 egységgel történő eltolás.

b) A hozzárendelési szabály: $x \mapsto |x+2|-1$.

c) A hozzárendelési szabály: $x \mapsto -|x+1|-1$.

5449 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis. *d)* Hamis.
e) Igaz. *f)* Igaz. *g)* Hamis.

5450 Az átfogó hossza 17 cm, a befogók hossza 2,6 cm és 16,8 cm ($\lambda = 0{,}2$).

5451 *a)* Belső hasonlósági középpontú kicsinyítés. (A pontot és a képét a hasonlósági középpont elválasztja, $|\lambda| < 1$.)

b) Külső hasonlósági középpontú nagyítás. (A pontot és a képét a hasonlósági középpont nem választja el, $\lambda > 1$.)

c) Belső hasonlósági középpontú nagyítás.

5452 Az eredeti ötszög legkisebb oldala 14 cm, ezért $\lambda = \frac{1}{2}$.

A kérdezett ötszög többi oldala: 15 cm, 14 cm, 10 cm, 21 cm.

5453 *a)* Igen, $\lambda = \frac{1}{3}$. *b)* Nem.

5454 $K_{\triangle} = 12$ cm, ezért $\lambda = 2$. A keresett háromszög oldalai: $a' = 8$ cm, $b' = 10$ cm, $c' = 6$ cm.

5455 A négyzetek oldalait jelölje a és a'.

a) $a = 9$ cm, $a' = 18$ cm; *b)* $a = 12$ cm, $a' = 15$ cm.

5456 A hasonlósági arány és a felszínek aránya:

$$\frac{V'}{V} = \frac{27}{8} = \lambda^3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{2}, \quad \text{így} \quad \frac{A'}{A} = \lambda^2 = \frac{9}{4}.$$

5457 A kitöltött táblázat:

a	b	c	d	x	y
3 cm	5 cm	4 cm	$\frac{20}{3} = 6{,}67$ cm	$\frac{45}{8} = 5{,}625$ cm	15 cm
$\frac{20}{9} = 2{,}22$ cm	4 cm	3,5 cm	6,3 cm	2,5 cm	7 cm
2 cm	4 cm	2,15 cm	4,3 cm	3 cm	9 cm
3,2 cm	5,6 cm	4 cm	7 cm	4 cm	11 cm

5458 Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét:

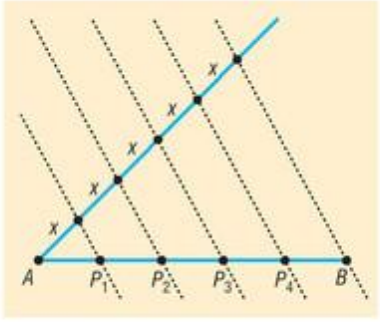
$$\frac{BP}{BE} = \frac{AD}{AE} \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{BE} = \frac{7x}{1{,}2 + BE}.$$

A keresett szakasz hossza: $BE = 0{,}9$ dm $= 9$ cm.

5459 Alkalmazzuk a szögfelezőtételt:

$a_1 \approx 3{,}33$ cm, $a_2 \approx 2{,}67$ cm; $b_1 \approx 3$ cm, $b_2 \approx 5$ cm; $c_1 \approx 4{,}29$ cm, $c_2 \approx 5{,}71$ cm.

5460 Az AB szakaszt öt egyenlő részre kell osztani. A szerkesztés menete az ábrán nyomon követhető. A szabályos ötszög oldala az AP_1 szakasz hosszával egyezik meg.

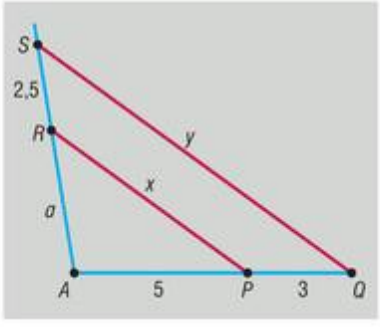


5461 *a)* A feladathoz készített ábra:

b) A 13-as úton az első útkereszteződés távolsága a településközpontjától:

$$\frac{a}{5} = \frac{2{,}5}{3}, \quad \text{ebből} \quad a \approx 4{,}17 \text{ km}.$$

c) A feltételek szerint $x = 7$ km. Ebből következik, hogy $\frac{y}{7} = \frac{8}{5}$, amiből $y = 11{,}2$ km. A két út között tehát 11,2 km a távolság a hosszabb összekötő úton.



5462 *a)* A kiegészítő háromszög egyenlő szárú, alapja 6 cm, szárainak hossza $\frac{14}{3} \approx 4{,}67$ cm.

b) A trapéz átlói 2 : 5 arányban osztják egymást.

5463 *a)* A tó területe a valóságban 0,14 km^2.

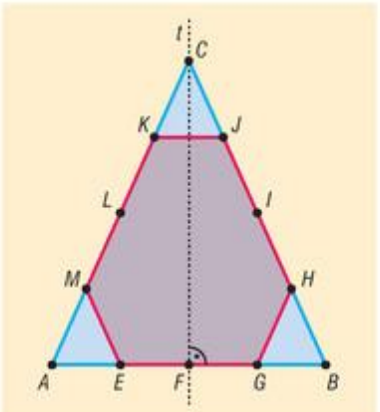
b) A tó területe a térképen 0,875 cm^2.

5464 A tejföl ára körülbelül 0,69 €.

5465 *a)* A négyzetek oldala 6 m, 10 m, illetve 14 m.

b) A kockák élének hossza 3 m, 9 m és 24 m.

5466 *a)* Az $EGHJKM$ hatszög tengelyesen szimmetrikus, tengelye az ABC háromszög t tengelyével esik egybe.



b) A CKJ háromszög hasonló a CAB háromszöghöz (szögeik megegyeznek), a hasonlóság aránya $\frac{1}{4}$, ezért:

$$KJ = \frac{1}{4} \cdot AB.$$

A szögek egyenlősége okán az MAE és HGB háromszögek is hasonlók a CAB háromszöghöz, amiből:

$$ME = \frac{1}{4} \cdot BC \quad \text{és} \quad HG = \frac{1}{4} \cdot AC.$$

Az $EGHJKM$ hatszög kerülete:

$$K_{EGHJKM} = MK + KJ + JH + HG + GE + EM =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot AB + \frac{3}{4} \cdot AC + \frac{3}{4} \cdot BC = \frac{3}{4} \cdot (AB + AC + BC).$$

Ez utóbbi mutatja, hogy a hatszög kerülete az ABC háromszög kerületének $\frac{3}{4}$-szerese.

c) Mivel a hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért:

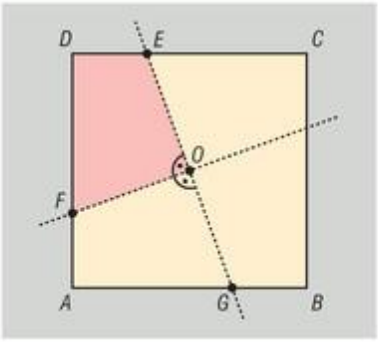
$$T_{CKJ} = \frac{1}{16} \cdot T_{ABC}, \quad T_{MAE} = \frac{1}{16} \cdot T_{ABC} \quad \text{és} \quad T_{HGB} = \frac{1}{16} \cdot T_{ABC}.$$

A kiszámolt területek összegét az ABC háromszög területéből kivonva azt kapjuk, hogy:

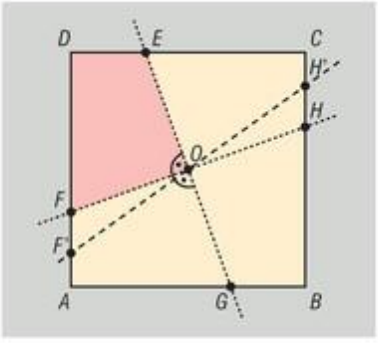
$$T_{EGHJKM} = \frac{13}{16} \cdot T_{ABC}.$$

A hatszög területe az ABC háromszög területének $\frac{13}{16}$-szorosa.

5467 *a)* Ha a két vágás merőleges egymásra és mindkettő átmegy a négyzet O középpontján, akkor az ábra az O középpontú $k \cdot 90°$-os (k egész szám) forgatásokra nézve invariáns, így például a $DFOE$ négyszöget az O pont körüli 90°-os forgatás az $AGOF$ négyszögbe viszi át, ezért a két négyszög területe megegyezik. Nyilvánvalóan a többi keletkező négyszög területe is ugyanakkora, mint a $DFOE$ négyszögé.



b) Tegyük fel, hogy az EG és FH egyenesek (melyeket az ábrán szaggatott vonalak jelölnek) egyenlő területű részekre bontják az $ABCD$ négyzetet. Ebből következik, hogy az $EDAG$ és $GBCE$ trapézok területe megegyezik (épp az $ABCD$ négyzet területének fele). Ha a négyzet oldala a, akkor a területek egyenlőségéből:



$$\frac{ED + AG}{2} \cdot a = \frac{GB + CE}{2} \cdot a,$$

$$ED + AG = GB + CE.$$

Mivel az utolsó egyenlőségben szereplő négy szakasz hosszának összege $2a$, ezért:

$$ED + AG = GB + CE = a.$$

Azonban az is teljesül, hogy:

$$ED + EC = GB + AG = a,$$

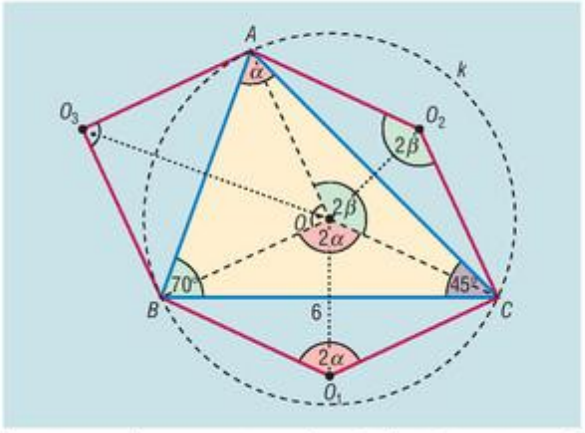
így:

$$AG = EC \quad \text{és} \quad ED = GB.$$

Ebből azonnal következik, hogy GB az ED (továbbá AG az EC) szakasz O pontra vonatkozó tükörképe, ezért EG szükségképpen áthalad a négyzet O középpontján. Hasonlóan bizonyítható az FH egyenesre is.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy az EG egyenes merőleges az FH egyenesre. Ha ez nem teljesülne, akkor az O pontban az EG egyenesre emelt merőleges az F-től különböző F', illetve a H-tól különböző H' pontokban metszené az $ABCD$ négyzet oldalait. Az *a)* feladat eredménye alapján az $EDF'O$ négyszög területe az $ABCD$ négyzet területének negyedrészével lenne egyenlő. Ekkor azonban az $EDFO$ négyszög területe szemlátomást nagyobb lenne (vagy ha F a DF' szakasz belső pontja, akkor kisebb), mint az $EDF'O$ négyszög területe, de azzal semmiképpen nem lehetne egyenlő, ezért az EG és FH egyenesek nem oszthatják egyenlő területű részekre az $ABCD$ négyzetet. Ez mutatja, hogy EG és FH valóban merőlegesek egymásra.

5468 *a)* A tükörképek az ábra jelöléseinek megfelelően O_1, O_2 és O_3. A tükrözés távolságtartó, ezért a $BO_1CO_2AO_3$ hatszög minden oldala a BO, CO vagy az AO szakaszok valamelyikével egyenlő hosszúságú. Mivel a felsorolt szakaszok mindegyike az ABC háromszög köré írható kör egy-egy sugara, ezért a kapott hatszög minden oldala egyenlő hosszú.



b) Az *a)* feladat eredményei alapján a BO_1CO, CO_2AO és AO_3BO négyszögek oldalai megegyeznek, ezért mindegyik rombusz.

c) Az $AOC\sphericalangle$ az ABC háromszög köré írható körben a B-t nem tartalmazó köríven nyugvó középponti szög, ezért a kerületi és középponti szögek tétele alapján:

$$AOC\sphericalangle = 2\beta = 140°.$$

Ugyanilyen megfontolások alapján:

$$BOC\sphericalangle = 2\alpha = 130° \quad \text{és} \quad AOB\sphericalangle = 2\gamma = 90°.$$

A tükrözés szögtartó tulajdonsága alapján:

$$BO_1C\sphericalangle = BOC\sphericalangle = 130°, \quad AO_2C\sphericalangle = AOC\sphericalangle = 140° \quad \text{és} \quad AO_3B\sphericalangle = AOB\sphericalangle = 90°.$$

Az $OBC\sphericalangle$ tükörképe a BC egyenesre vonatkozóan az $O_1BC\sphericalangle$, továbbá az $OBA\sphericalangle$ tükörképe az AB egyenesre vonatkozóan az $O_3BA\sphericalangle$, ezért:

$$O_3BO_1\sphericalangle = O_3BA\sphericalangle + \beta + O_1BC\sphericalangle \quad \text{miatt} \quad O_3BO_1\sphericalangle = OBA\sphericalangle + \beta + OBC\sphericalangle = 2\beta = 140°.$$

Ugyanígy:

$$O_1CO_2\sphericalangle = 2\gamma = 90° \quad \text{és} \quad O_2AO_3\sphericalangle = 2\alpha = 130°.$$

A kialakuló hatszög szemközti szögei megegyeznek, a különböző szögek nagysága 90°, 130°, illetve 140°.

d) A kialakuló hatszög területe kétszerese az ABC háromszög területének. Az ABC háromszögben a szinusztétel alapján: $AC \approx 6{,}22$ cm.

Az ABC háromszög területe:

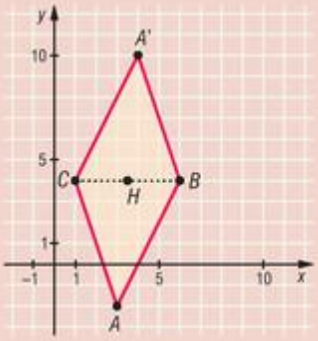
$$T_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin 45°}{2} \approx 13{,}19 \text{ cm}^2.$$

A kialakuló hatszög területe körülbelül $26{,}38$ cm^2.

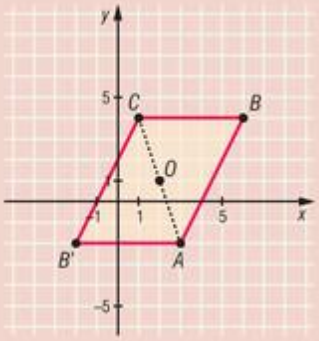
5469 *a)* A megadott pontokat paralelogrammává kell kiegészíteni. Ezt 3 különböző módon tehetjük meg attól függően, hogy az ABC háromszög melyik oldala lesz a paralelogramma átlója.

Ha a paralelogrammának BC az egyik átlója, akkor a BC szakasz $H(3{,}5; 4)$ felezőpontja a paralelogramma középpontja, ezért negyedik csúcsa az A pont H-ra vonatkozó tükörképe (1. ábra). Ebből következik, hogy a paralelogramma hiányzó csúcsa $A'(4; 10)$.

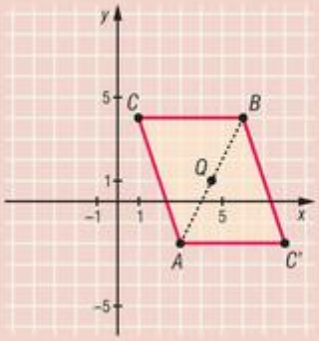
A 2. és a 3. ábra a másik két paralelogrammát mutatja. Ezek negyedik csúcsa $B'(-2; -2)$, illetve $C'(8; -2)$.



1. ábra



2. ábra

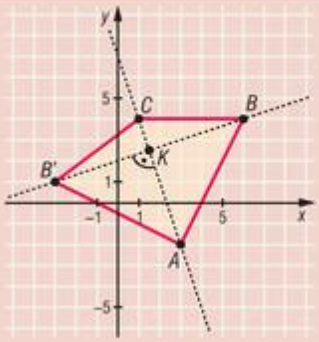


3. ábra

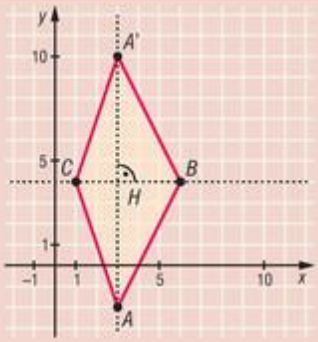
b) A megadott pontokat összesen 6 különböző módon egészíthetjük ki tengelyesen szimmetrikus négyszöggé.

Deltoidot háromféleképpen kaphatunk attól függően, hogy az ABC háromszög melyik oldalegyenese tartalmazza a deltoid szimmetriaátlóját. Ha az AC szakasz a deltoid szimmetriaátlója, akkor a hiányzó csúcs éppen a B pont AC egyenesre vonatkozó tükörképe (4. ábra). Az AC egyenes egyenlete $3x + y = 7$, a B ponton átmenő, AC-re merőleges egyenes egyenlete pedig $x - 3y = -6$. A két egyenes metszéspontja $K(1{,}5; 2{,}5)$. A deltoid negyedik csúcsa a B pont K-ra vonatkozó tükörképe, azaz $B'(-3; 1)$.

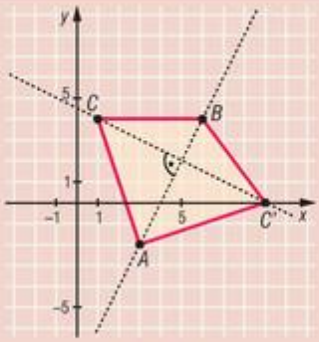
A másik két deltoidot az 5. és a 6. ábrák mutatják. A hiányzó csúcsok koordinátái $A'(3; 10)$ és $C'(9; 0)$.



4. ábra

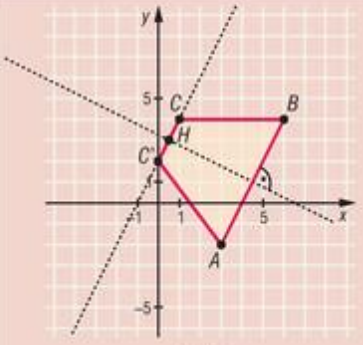


5. ábra

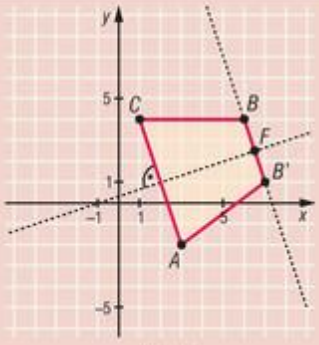


6. ábra

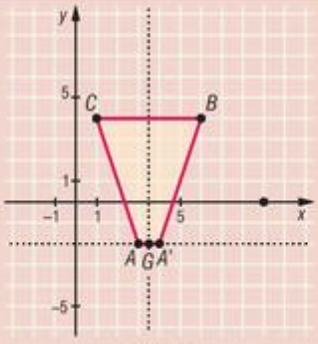
Húrtrapézokból szintén 3 található attól függően, hogy az ABC háromszög melyik oldala az egyik alapja. Ha az AB szakasz, akkor a trapéz szimmetriatengelye az AB szakasz felezőmerőlegese: $x + 2y = 6{,}5$. A másik alapot tartalmazó egyenes átmegy a C ponton és párhuzamos az AB szakasszal, ezért egyenlete $y = 2x + 2$. A kapott két egyenes metszéspontja, azaz a $H(0{,}5;\ 3)$ pont, a rövidebb alap felezőpontja (7. ábra). A húrtrapéz hiányzó csúcsa $C'(0;\ 2)$. A további húrtrapézokat a 8. és a 9. ábrák mutatják. Ezek hiányzó csúcsa $B'(7;\ 1)$ és $A'(4;\ -2)$.



7. ábra



8. ábra



9. ábra

5470 *a)* Az $ABDB'$ négyszög tengelyesen szimmetrikus, szimmetriatengelye az AD átlót tartalmazó egyenes.

b) Mivel a szimmetriatengely tartalmazza a négyszög egyik átlóját, ezért az $ABDB'$ négyszög deltoid.

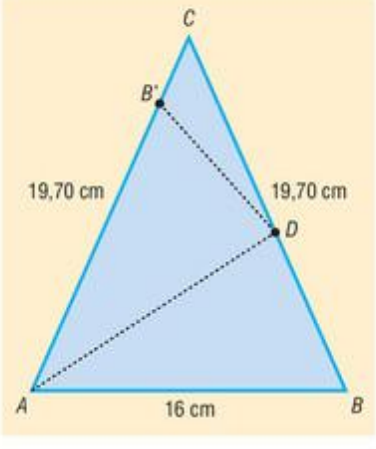
c) Az első hajtogatás az ABC háromszög AD szögfelezője mentén történt.

d) A feladathoz tartozó 1. ábra alapján:

$$AC = \sqrt{18^2 + 8^2} = 2 \cdot \sqrt{97} \approx 19{,}70 \text{ cm},$$

valamint

$$\operatorname{tg} ABC\sphericalangle = \frac{18}{8} = 2{,}25 \quad \Rightarrow \quad ABC\sphericalangle \approx 66{,}04°.$$



Az ABC háromszögben a szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{16}{19{,}70} \quad \Rightarrow \quad BD \approx 8{,}83 \text{ cm}.$$

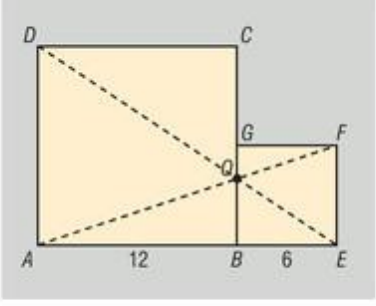
Az $ABDB'$ deltoid területe kétszer akkora, mint az ABD háromszög területe, ezért:

$$T_{ABDB'} = 2 \cdot \frac{AB \cdot BD \cdot \sin ABD\sphericalangle}{2} \approx 16 \cdot 8{,}83 \cdot \sin 66{,}04° \approx 129{,}11 \text{ cm}^2.$$

A madártörzs területe körülbelül $129{,}11 \text{ cm}^2$.

5471 *a)* Az ABO és FGO háromszögek hasonlóak, mert mindkettő derékszögű, és az O csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek

b) Mivel az $ABCD$ négyzet területe négyszer akkora, mint a $BEFG$ négyzet területe, továbbá hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért az $ABCD$ négyzet oldala 12 cm. Ekkor az ABO és FGO háromszögek hasonlóságának aránya 2 : 1, ezért az O pont a BG szakasz G-hez közelebbi harmadolópontja. Ebből következik, hogy $OB = 4$ cm, $OG = 2$ cm és $OC = 8$ cm.



Az O pontnak a négyzetek további csúcsaitól mért távolságát Pitagorasz tételével számolhatjuk:

$$OA = 4\sqrt{10} \approx 12{,}65 \text{ cm}, \quad OE = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21 \text{ cm},$$
$$OF = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32 \text{ cm}, \quad OD = 4\sqrt{13} \approx 14{,}42 \text{ cm}.$$

c) A kis négyzetet az O pontra vonatkozó $\lambda = -2$ arányú középpontos hasonlósággal lehet a nagy négyzetbe átvinni.

5472 *a)* Mivel ismert, hogy

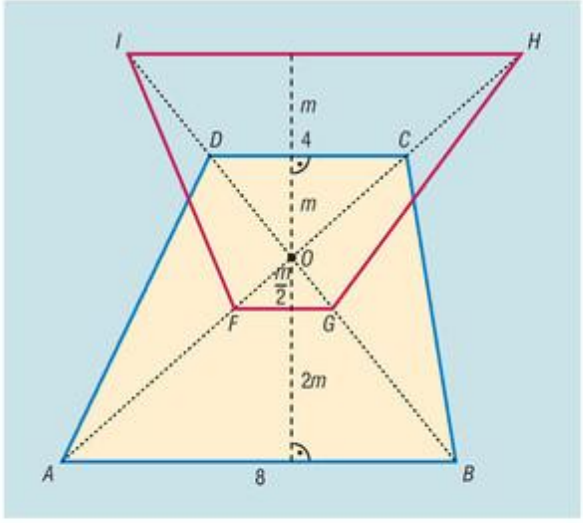
$$\frac{OF}{OA} = \frac{OG}{OB} = \frac{1}{4},$$

ezért a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján $FG \parallel AB$-vel. Hasonlóan:

$$\frac{OC}{OH} = \frac{OD}{OI} = \frac{1}{2},$$

ebből következik, hogy $HI \parallel CD$.

Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, ezért FG és HI egymással párhuzamos szakaszokkal párhuzamos, amiből persze azonnal következik, hogy $FG \parallel HI$, így az $FGHI$ négyszög valóban trapéz.



Megjegyzés: A párhuzamos szelők tételének megfordítása helyett hivatkozhatunk az OFG és OAB, illetve az OCD és OHI háromszögek hasonlóságára is (egy szög közös, és a szöget közrefogó oldalak aránya egyenlő).

b) Az OCD és OAB háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként egyenlők), továbbá $AB = 2 \cdot CD$, ezért ha az OCD háromszög CD oldalához tartozó magasság m, akkor az OAB háromszög AB oldalához tartozó magasság $2m$ (ld. ábra).

Ebből adódóan az $ABCD$ trapéz területe:

$$T_{ABCD} = \frac{8+4}{2} \cdot (m + 2m) = 18m.$$

A párhuzamos szelőszakaszok tételéből (vagy az OFG és OAB háromszögek hasonlóságából) adódik, hogy:

$$FG = \frac{1}{4} \cdot AB = 2 \text{ cm},$$

ezért az OFG háromszög FG oldalához tartozó magasság az OAB háromszög megfelelő magasságának (azaz $2m$-nek) a negyede, vagyis $\frac{m}{2}$.

Hasonlóan igazolható, hogy $HI = 8$ cm, és az OHI háromszögben a HI oldalhoz $2m$ hosszú magasság tartozik.

Az $FGHI$ trapéz magassága:

$$\frac{m}{2} + 2m = \frac{5}{2}m,$$

területe pedig:

$$T_{FGHI} = \frac{8+2}{2} \cdot \frac{5}{2}m = \frac{25}{2}m.$$

Az $FGHI$ és $ABCD$ trapézok területének aránya:

$$\frac{T_{FGHI}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{25}{2}m}{18m} = \frac{25}{36}.$$

c) Ha az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = a$ és $CD = c$, akkor $FG = \frac{a}{4}$ és $HI = 2c$. Ha az OCD háromszög CD oldalához tartozó magassága ezúttal is m, akkor az OAB háromszög AB oldalához $\frac{a}{c} \cdot m$ hosszú magasság tartozik, ezért az $ABCD$ trapéz magassága $\left(1 + \frac{a}{c}\right) \cdot m$. Az $FGHI$ trapéz magassága:

$$2m + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{c} \cdot m\right) = \frac{8c + a}{4c} \cdot m.$$

A két trapéz területének egyenlőségéből:

$$\frac{a + c}{2} \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right) \cdot m = \frac{\frac{a}{4} + 2c}{2} \cdot \frac{8c + a}{4c} \cdot m.$$

Az egyszerűsítések elvégzése, valamint mindkét oldal 4-gyel való szorzása után:

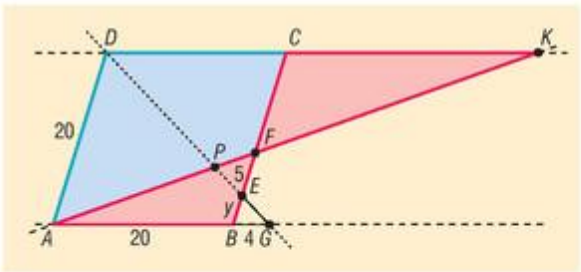
$$16(a + c)^2 = (a + 8c)^2.$$

Az alapok pozitívak, mindkét oldalból gyököt vonhatunk az abszolút érték megjelenése nélkül, így:

$$4(a + c) = a + 8c.$$

A zárójel felbontása után végül pedig $\frac{a}{c} = \frac{4}{3}$ adódik. Ahhoz, hogy a két trapéz területe megegyezzen, szükséges, hogy az $ABCD$ trapéz alapjainak aránya $\frac{4}{3}$ legyen. Beláthatjuk, hogy feltételünk elegendő is egyben.

5473 Ha a DP egyenes az AB egyenest a G pontban metszi és $BE = y$, akkor a párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva az $AGD\sphericalangle$-re azt kapjuk, hogy:



$$\frac{y}{20} = \frac{4}{24},$$

$$y = \frac{10}{3} \approx 3{,}33 \text{ cm}.$$

Ekkor:

$$BF = BE + EF = \frac{10}{3} + 5 = \frac{25}{3} \ (\approx 8{,}33 \text{ cm}),$$

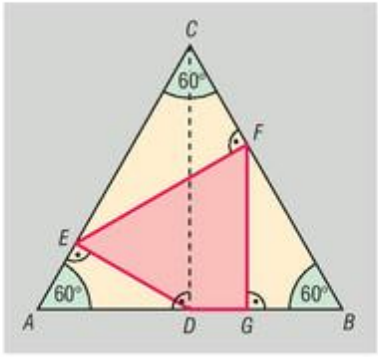
$$FC = 20 - BF = \frac{35}{3} \ (\approx 11{,}67 \text{ cm}).$$

Az ABF és KCF háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként megegyeznek), ezért:

$$\frac{AB}{BF} = \frac{KC}{CF}, \quad \text{azaz} \quad \frac{20}{\frac{25}{3}} = \frac{KC}{\frac{35}{3}},$$

amiből $KC = 28$ cm.

5474 *a)* Az *ADE*, *CEF* és *FBG* háromszögek mindegyike derékszögű és rendelkezik 60°-os szöggel csakúgy, mint az *ACD* háromszög. Ebből következik, hogy a felsorolt háromszögek mindegyike hasonló a többihez.



b) Az *ADE* derékszögű háromszög átfogója feleakkora, mint a hozzá hasonló *ACD* háromszögé, ezért hasonlóságuk aránya $\frac{1}{2}$, amiből:

$$T_{ADE} = \frac{1}{4} \cdot T_{ACD} = \frac{1}{8} \cdot T_{ABC}.$$

A két háromszög hasonlóságából az is következik, hogy:

$$AE = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{4} \cdot AC,$$

tehát:

$$CE = \frac{3}{4} \cdot AC.$$

Ez azt is jelenti, hogy a *CEF* háromszög átfogója $\frac{3}{4}$-szerese az *ACD* háromszög átfogójának.

Mivel a két háromszög hasonló egymáshoz, ezért:

$$T_{CEF} = \frac{9}{16} \cdot T_{ACD} = \frac{9}{32} \cdot T_{ABC}.$$

A két háromszög hasonlóságából továbbá:

$$CF = \frac{3}{4} \cdot AD = \frac{3}{8} \cdot CB,$$

ezért:

$$FB = \frac{5}{8} \cdot CB = \frac{5}{8} \cdot AC.$$

Ekkor viszont az *ACD* és *FBG* háromszögek hasonlóságának aránya $\frac{5}{8}$, amiből következik, hogy:

$$T_{FBG} = \frac{25}{64} \cdot T_{ACD} = \frac{25}{128} \cdot T_{ABC}.$$

Az *ABC* háromszög csúcsainál „kimaradó" részek területösszege:

$$T_{ADE} + T_{CEF} + T_{FBG} = \left(\frac{1}{8} + \frac{9}{32} + \frac{25}{128}\right) \cdot T_{ABC} = \frac{77}{128} \cdot T_{ABC}.$$

A tervek szerint a tulipánnal teleültetett rész területe:

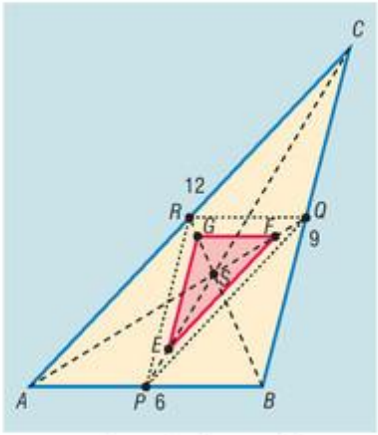
$$T_{DEFG} = \frac{51}{128} \cdot T_{ABC},$$

azaz a teljes virágágyásnak körülbelül 39,84%-a borul tulipánba.



5475 *a)* Ha az ABC háromszög oldalfelező pontjait P, Q és R jelöli, akkor az ABS háromszög E súlypontja 2 : 1 arányban osztja az SP szakaszt. Ugyanígy 2 : 1 arányban osztja az F pont az SQ, illetve a G pont az SR szakaszokat. Mivel ekkor

$$\frac{SE}{SP}=\frac{SF}{SQ}=\frac{2}{3},$$

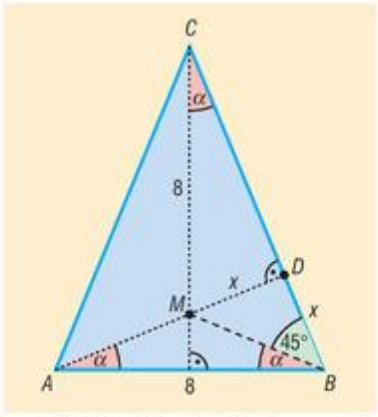


így a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján EF és PQ párhuzamos, és ugyanígy GF párhuzamos RQ-val, illetve GE párhuzamos RP-vel. Ebből azonnal következik, hogy az EFG háromszög szögei páronként megegyeznek a PQR háromszög szögeivel, így a két háromszög hasonló egymáshoz. Mivel a PQR háromszög oldalai a CAB háromszög középvonalai, így e két háromszög megfelelő oldalai páronként párhuzamosak, ezért hasonlók egymáshoz. Ebből adódóan az EFG háromszög is hasonló a CAB háromszöghöz.

b) Az EFG háromszög oldalai: $GF = 2$ cm, $GE = 3$ cm és $EF = 4$ cm.

c) Az EFG háromszöget az S középpontú $\lambda_1=\frac{3}{2}$ arányú középpontos hasonlósággal lehet a PQR háromszögbe átvinni. A PQR háromszöget szintén S középpontú, $\lambda_2 = -2$ arányú középpontos hasonlóság viszi át a CAB háromszögbe. Ebből adódóan az EFG háromszöget az S középpontú, $\lambda = -3$ arányú középpontos hasonlósággal lehet a CAB háromszögbe vinni.

5476 *a)* Mivel a $DAB\sphericalangle$ és a $DCM\sphericalangle$ szárai páronként merőlegesek egymásra, ezért merőleges szárú szögpárt alkotnak, így egyenlő nagyságúak (az ábrán α jelöli). Ebből következik, hogy az ABD és a CMD háromszögekben két-két szög megegyezik, így a két háromszög hasonló. Mivel mindkét háromszög átfogója 8 cm, ezért a két háromszög egybevágó egymással.



b) Az ABD és a CMD háromszögek egybevágóságából következik, hogy az α szöggel szemközti befogóik is megegyeznek, azaz $BD = MD = x$. Ez azt is jelenti, hogy az MBD derékszögű háromszög egyenlő szárú, azaz $MBD\sphericalangle = 45°$. Vegyük még észre, hogy az ABM háromszög AB oldalához tartozó magasságvonala megfelezi az AB oldalt, ezért az ABM háromszög is egyenlő szárú, amiből adódik, hogy $ABM\sphericalangle = \alpha$. Az ABD derékszögű háromszög hegyesszögeinek összegére:

$$\alpha + \alpha + 45° = 90°,$$

ahonnan $\alpha = 22{,}5°$. Az ABC háromszög szögei ezért 67,5°, 67,5° és 45°.

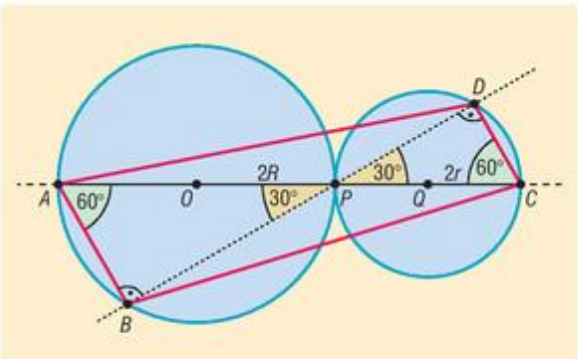
5477 *a)* Az $ABCD$ négyszög trapéz, melynek alapjai AB és CD. A forgatás miatt ugyanis:

$$APB\sphericalangle = CPD\sphericalangle = 30°.$$

Thalész tétele alapján az APB és CPD háromszögek derékszögűek, ebből következik, hogy

$$PAB\sphericalangle = PCD\sphericalangle = 60°,$$

amit úgy is értelmezhetünk, hogy AB és CD 60°-os szöget zárnak be ugyanazzal az egyenessel, ezért párhuzamosak. Az $ABCD$ négyszög tehát trapéz.

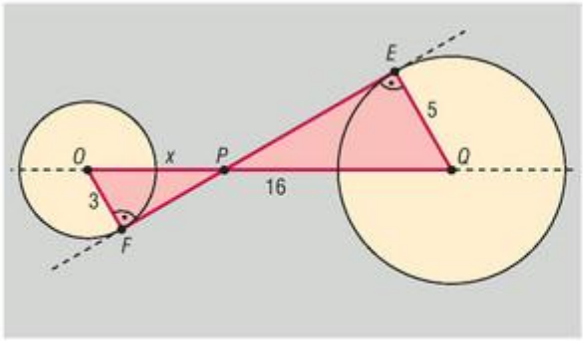


b) Az APB és CPD derékszögű háromszögek egyik hegyesszöge 30°, ezért „félszabályos" háromszögek. Az ilyen háromszögeket a hosszabb befogót tartalmazó egyenesre vonatkozó tükrözéssel szabályos háromszöggé egészíthetjük ki. Ennek megfelelően:

$$AB = R, \quad DC = r, \quad m = BD = \sqrt{3} \cdot (R + r),$$

$$T_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (R + r)^2.$$

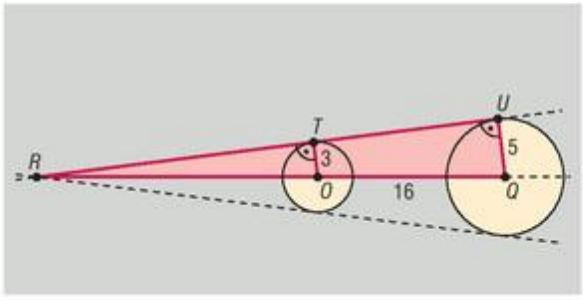
5478 *a)* A középpontokat összekötő OQ egyenesen két olyan pont van, amelyekből közös érintő húzható a körökhöz. Ha az ábra jelöléseit követve a belső érintők metszéspontja P, akkor az OPF háromszög hasonló QPE háromszöghöz, hiszen mindkét háromszög derékszögű, továbbá a P csúcsnál csúcsszögek alakulnak ki. A megfelelő oldalaik arányára:



$$\frac{PO}{PQ} = \frac{OF}{QE}, \quad \text{azaz} \quad \frac{PO}{16 - PO} = \frac{3}{5},$$

amiből $PO = 6$ cm. A belső hasonlósági pont a kisebb kör középpontjától 6 cm távolságra található.

A közös külső érintőket az alábbi ábra mutatja. Az ROT és RQU háromszögek hasonlósága alapján:



$$\frac{RO}{RQ} = \frac{OT}{QU}, \quad \text{azaz} \quad \frac{RO}{16 + RO} = \frac{3}{5}.$$

A kapott egyenletből $RO = 24$ cm. A két kör külső hasonlósági pontja a kisebb kör középpontjától 24 cm távolságra található.

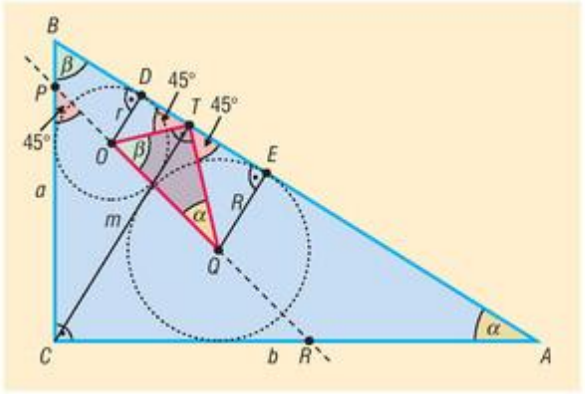
b) A közös belső érintőket tartalmazó ábra EF szakaszának hosszát kérdezi a feladat. Pitagorasz tételét alkalmazva a POF és PQE háromszögekben kapjuk, hogy:

$$PF = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \ (\approx 5{,}20 \text{ cm}),$$

$$PE = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \ (\approx 8{,}66 \text{ cm}).$$

Az EF szakasz hossza $8\sqrt{3} \approx 13{,}86$ cm.

5479 *a)* A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a háromszöget két hasonló háromszögre bontja, amelyek az eredeti háromszöghöz is hasonlók. Ha $BC = a$ és $AC = b$, továbbá a BCT háromszögbe írt kör sugara r, az ACT háromszögbe írté pedig R, akkor a részháromszögek hasonlósága alapján:



$$\frac{r}{R} = \frac{a}{b}. \quad (1)$$

A Q pont illeszkedik a derékszögű $CTA\sphericalangle$ szögfelezőjére, ezért $CTQ\sphericalangle = 45°$. Ehhez hasonlóan persze $CTO\sphericalangle = 45°$ is teljesül, ezért $QTO\sphericalangle = 45° + 45° = 90°$, így a QOT háromszög derékszögű.

Az OTD és QTE egyenlő szárú derékszögű háromszögek hasonlók, ezért megfelelő oldalaik arányára:

$$\frac{r}{R}=\frac{OT}{QT}. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőségek bal oldala megegyezik, ezért jobb oldalaik is egyenlők, így:

$$\frac{OT}{QT}=\frac{a}{b}.$$

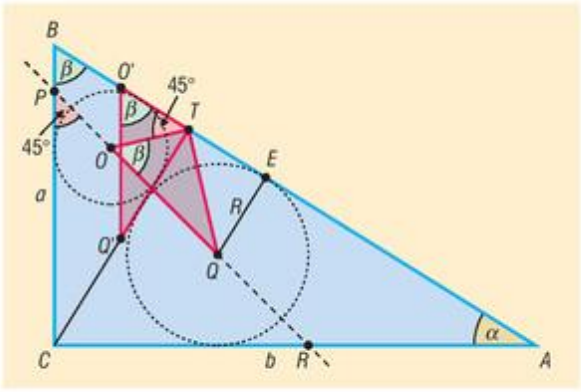
Ez azt jelenti, hogy a QOT és ABC háromszögekben egy-egy szög, valamint a szöget közrefogó oldalak aránya megegyezik, és így a háromszögek valóban hasonlók.

b) Forgassuk el a QOT háromszöget a T pont körül $-45°$-kal. Ekkor a T pont helyben marad, $OTB\sphericalangle = 45°$ miatt pedig az O pont képe illeszkedik a BC szakaszra.

Mivel

$$TOQ\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta,$$

ezért az OQ szakasz elforgatott képe párhuzamos a BC szakasszal. Ekkor viszont az OQ egyenes az OQ szakasz elforgatott képével és a BC szakasszal ugyanazt a szöget, éppen a forgatás $45°$-os szögét zárja be.



Összefoglalva, ha az OQ egyenes a BC szakaszt P-ben, az AC szakaszt pedig R-ben metszi, akkor $CPR\sphericalangle = 45°$, ezért a PRC háromszög valóban egyenlő szárú derékszögű háromszög.

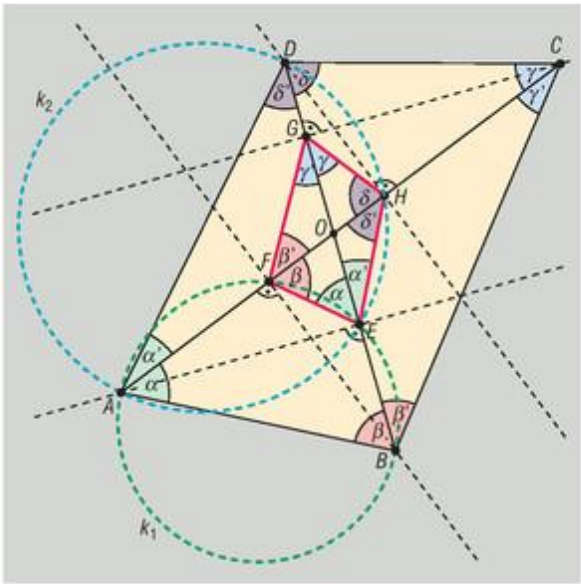
5480 Vizsgáljuk meg először az $ABEF$ négyszöget. Mivel $AEB\sphericalangle = AFB\sphericalangle = 90°$, ezért az E és F pontok illeszkednek az AB átmérőjű Thalész-körre (k_1), vagyis az $ABEF$ négyszög húrnégyszög. Mivel a húrnégyszög belső szöge megegyezik a vele szemközti szög külső szögével, ezért az ábra jelöléseit követve:

$$BAF\sphericalangle = OEF\sphericalangle = \alpha, \qquad ABE\sphericalangle = OFE\sphericalangle = \beta.$$

Ha most megnézzük az ABO és EFO háromszögeket, akkor láthatjuk, hogy bennük a szögek páronként megegyeznek, ezért a háromszögek hasonlók egymáshoz. Pontosan ugyanígy igazolható, hogy a $CDGH$ húrnégyszögben:

$$CDG\sphericalangle = GHO\sphericalangle = \delta, \qquad DCH\sphericalangle = OGH\sphericalangle = \gamma,$$

így $GHO_\triangle \sim CDO_\triangle$.



Az ábra további húrnégyszögeket rejt. Ilyen például az $ADHE$ négyszög. Az ADE és ADH derékszögű háromszögek derékszögű csúcsai illeszkednek az AD szakasz Thalész-körére (k_2). Ekkor a $DAH\sphericalangle$ és a $DEH\sphericalangle$ egyaránt a Thalész-kör DH körívén nyugszanak, így a kerületi szögek tétele alapján $DAH\sphericalangle = DEH\sphericalangle = \alpha'$. Pontosan ugyanígy igazolható, hogy az ábrán azonos módon megjelölt további szögpárok is megegyeznek.

Az $ABCD$ és $EFGH$ négyszögeket páronként hasonló háromszögekre bonthatjuk: $EFO_\triangle \sim ABO_\triangle$; $FGO_\triangle \sim BCO_\triangle$; $GHO_\triangle \sim CDO_\triangle$; $HEO_\triangle \sim DAO_\triangle$.

Ezek alapján az $EFGH$ és $ABCD$ négyszögek valóban hasonlók egymáshoz.

Vektorok. Szögfüggvények – megoldások

5481 *a)* $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB}$; *b)* $\overrightarrow{IF} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$;

c) $\overrightarrow{ED} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; *d)* $\overrightarrow{IF} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$.

5482 *a)* $|\overrightarrow{AC}| = 10\sqrt{2}$ cm;

b) Az A csúcsból a CD oldal felezőpontjába mutató vektor hossza $5\sqrt{5}$ cm.

5483 Igaz állítás: C, D. Hamis állítás: A és B.

5484 Egy szabályos tízszög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege nullvektor.

5485 Az E csúcsból a gúla magasságának talppontjába mutató vektor $\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$.

5486 Az $\vec{a} - \vec{b}$ és az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor derékszöget zár be.

5487 A $\vec{v} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ vektor a végpontja a paralelogramma DC oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja.

5488 A csónak $\sqrt{241} \approx 15{,}52 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel mozog.

5489 Az erők eredője $4\sqrt{19} \approx 17{,}44$ N.

5490 A két egységvektor által bezárt szög

a) 30°; *b)* 120°; *c)* 90°.

5491 A kifejezések pontos értéke:

a) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$; *b)* 0; *c)* $\frac{1}{16}$.

5492 Az α konkáv szög többi szögfüggvényének értéke:

a) $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{3}$;

b) $\sin\alpha = -0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$;

c) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$;

d) $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

5493 A kifejezések növekvő sorrendje:

$$\sqrt{3}\cos 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \lg(\cos 8\pi) = 0 < \operatorname{tg} 2010° = \frac{\sqrt{3}}{3} < \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{\operatorname{ctg} 390° - 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

5494 A kifejezések értelmezési tartománya:

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$; *b)* $x \in \mathbb{R}$;

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$; *d)* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A kifejezések egyszerűbb alakja:

a) $\frac{1}{\sin x}$; *b)* $\cos x$; *c)* 0; *d)* 0.

5495 $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5496 *a)* $S_{100} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $S_{2010} = 0$.

5497 A Nap sugarai a Földre 55,56° szögben esnek.

5498 A 828 m magas épületet 83,11° szögben látjuk.

5499 *a)* Az emelkedő 4,37%-os. *b)* A hegy 349 m magas.

5500 A két épület egymástól 34,87 m-re van.

5501 A létrával a maximális szerelési magasság 3,84 m, tehát fel tudja szerelni a mester a csillárt.

5502 A hordó 1,75-szor fordul meg a tengelye körül.

5503 A szögek szárai a szabályos háromszög szemközti oldalát két $9\sqrt{3} \cdot \text{tg}15° \approx 4{,}18$ cm, továbbá két $9 - 9\sqrt{3} \cdot \text{tg}15° \approx 4{,}82$ cm hosszú részekre osztják.

5504 A rombusz

a) tompaszöge 126,87°; *b)* átlóinak hossza 8,95 cm és 17,88 cm.

5505 *a)* kerülete 79,22 cm; *b)* területe 334,42 cm^2;

c) beírható körének sugara 8,44 cm.

5506 *a)* kerülete 122,46 cm; *b)* területe 1131,38 cm^2.

5507 Ha egyenes mentén gyalogolunk, 0,66%-kal rövidebb utat tettünk volna meg.

5508 A háromszög 10 cm-es oldalával szemben levő szög 14,48°.

5509 Az asztronauták a Földet 2,28°-os szögben látták.

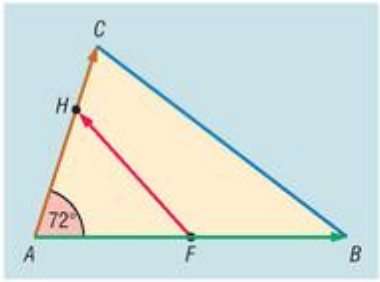
5510 A hegy legalább 3149 m magas.

5511 A két kör közös

a) külső érintői 15,32°; *b)* belső érintői 83,62° szöget zárnak be.

5512 Mivel az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ vektor $\vec{a}$ vektorral megegyező irányú egységvektor, és $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektor $\vec{b}$ vektorral megegyező irányú egységvektor, a két vektor rombuszt feszít ki. Mivel a rombusz átlója felezi a rombusz szögét, az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektor 15°-os szöget zár be $\vec{a}$ vektorral.

5513 Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F, AC oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja H.



$$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Az $\overrightarrow{FH}$ vektor hossza koszinusztétellel az AFH háromszögben számolható:

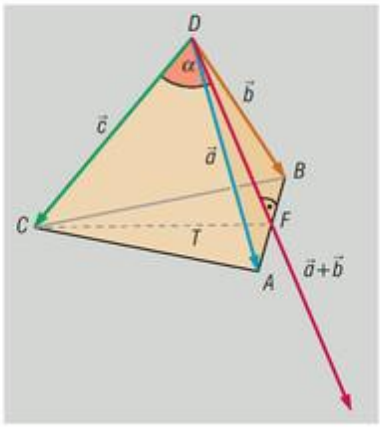
$$FH^2 = AF^2 + AH^2 - 2\cdot AF\cdot AH\cdot\cos 72° \;\Rightarrow\; FH \approx 7{,}68.$$

Az AB oldal felezőpontjából az AC oldal C-hez közelebbi harmadolópontjába mutató vektor hossza 7,68 cm.

5514 *a)* A $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok által bezárt szög 60°. Tehát $\vec{b}\cdot\vec{c} = 1\cdot 1\cdot\cos 60° = \frac{1}{2}$.

b) Az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor hossza kétszer akkora, mint az egységoldalú szabályos háromszög magassága,

$$|\vec{a}+\vec{b}| = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$



Az ábrán látható $ABCD$ szabályos tetraéderben az AB él felezőpontja F.

Az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor $\vec{c}$ vektorral bezárt szöge az $\alpha = CDF\sphericalangle$.

A CDF háromszög CD oldala egységnyi, a másik két oldala az egységnyi oldalú szabályos háromszög magassága:

$$CF = DF = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ennek az egyenlő szárú háromszögnek az alaphoz tartozó magasságát behúzva az α szögre felírható:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Így a művelet eredménye:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = |\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\alpha = \sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1.$$

c) Mivel egy szabályos tetraéder kitérő élei merőlegesek egymásra, az $\vec{a}-\vec{b}$ vektor merőleges a $\vec{c}$ vektorra, tehát $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = 0$.

5515 *a)* A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya miatt:

$$\sin x > 0 \quad\Rightarrow\quad 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

A tört nevezőjében nem állhat 0, ezért:

$$\cos x \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+l\pi\right\},\quad l\in\mathbb{Z}.$$

A kifejezés értelmezési tartománya a két halmaz metszete:

$$x\in\left]2n\pi;\frac{\pi}{2}+2n\pi\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}+2n\pi;\pi+2n\pi\right[,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

A kifejezés egyszerűbb alakja: $\dfrac{2^{\log_2\sin x}}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$.

b) A négyzetgyökjel alatt álló tört mindig pozitív értéket vesz fel. A tört nevezőjében nem állhat 0, ezért $x \neq 0$, és a ctg miatt $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. A kifejezés értelmezési tartománya:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}.$$

A kifejezés egyszerűbb alakja:

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x^2}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot x^2}} = \frac{1}{|\cos x| \cdot |x|}.$$

5516 Mivel $\cos x$ nem 0, a kifejezés átírható a következő alakba:

$$\frac{2\sin x+3\cos x}{5\cos x-2\sin x} = \frac{2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}+3}{5-2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2\operatorname{tg} x+3}{5-2\operatorname{tg} x}.$$

Mivel $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, a kifejezés tovább alakítható:

$$\frac{2\operatorname{tg} x+3}{5-2\operatorname{tg} x} = \frac{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+3}{5-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+4}{4-\sqrt{3}} = \frac{19+8\sqrt{3}}{13}.$$

A kifejezés értéke $\dfrac{19+8\sqrt{3}}{13}$.

5517 Az $\dfrac{1}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{9}$ összefüggés bal oldalát alakítva:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \cos^2\alpha.$$

Ez alapján $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{9}$, amiből $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{3}$.

Ha α hegyesszög, akkor $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, ez esetben:

$$a^2 = 10^2+22^2-2\cdot10\cdot22\cdot\cos\alpha = 10^2+22^2-2\cdot10\cdot22\cdot\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad a \approx 20{,}91\text{ cm}.$$

Ha α tompaszög, akkor $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$, ez esetben:

$$a^2 = 10^2+22^2-2\cdot10\cdot22\cdot\cos\alpha = 10^2+22^2-2\cdot10\cdot22\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \quad\Rightarrow\quad a \approx 27{,}03\text{ cm}.$$

A háromszög harmadik oldala 20,91 cm vagy 27,03 cm.

5518 Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x) = -\cos^2 x+2\sin x-1 = -(1-\sin^2 x)+2\sin x-1 = \sin^2 x+2\sin x-2 = (\sin x+1)^2-3.$$

Induljunk ki a szinuszfüggvény értékkészletéből: $-1 \le \sin x \le 1$, vagyis $0 \le \sin x+1 \le 2$.

A másodfokú függvény a nemnegatív valós számok halmazán szigorúan monoton növekvő, tehát $0 \le (\sin x+1)^2 \le 4$, amiből $-3 \le (\sin x+1)^2-3 \le 1$.

Az $f(x) = -\cos^2 x+2\sin x-1$ függvény értékkészlete a $[-3;\ 1]$ intervallum.

5519 Mivel a koszinuszfüggvény 2π szerint periodikus, így az $a_n = \cos n \cdot \frac{\pi}{6}$ sorozat tagjai is periodikusan ismétlődnek:

$$a_n = \cos n \cdot \frac{\pi}{6} = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \cos(n+12k) \cdot \frac{\pi}{6} = a_{n+12k}, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

A sorozat periódusa 12:

$a_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $a_2 = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $a_3 = \cos 3 \cdot \frac{\pi}{6} = 0$; $a_4 = \cos 4 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

$a_5 = \cos 5 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $a_6 = \cos 6 \cdot \frac{\pi}{6} = -1$; $a_7 = \cos 7 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $a_8 = \cos 8 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

$a_9 = \cos 9 \cdot \frac{\pi}{6} = 0$; $a_{10} = \cos 10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $a_{11} = \cos 11 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $a_{12} = \cos 12 \cdot \frac{\pi}{6} = 1$.

Egy periódusban belül a 12 tag közül 4 irracionális.

Mivel $200 = 16 \cdot 12 + 8$, az irracionális tagok számát megkapjuk úgy, hogy vesszük a 16 periódus $4 \cdot 16$ számú irracionális tagját, és ehhez még hozzávesszük a soron következő $a_{193} = a_1$, $a_{197} = a_5$ és $a_{199} = a_7$ irracionális tagokat.

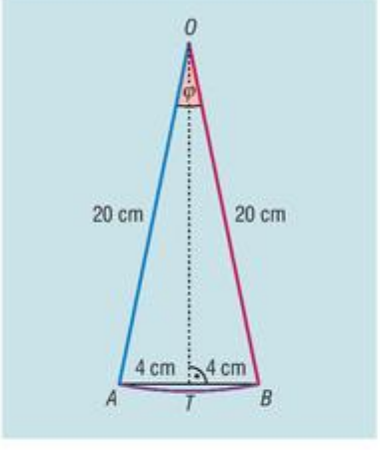
A sorozat első 200 tagja között tehát $4 \cdot 16 + 3 = 67$ irracionális szám van.

A 200 tag közül kettőt $\binom{200}{2}$-féleképpen választhatunk ki. Az összes eset száma $\binom{200}{2}$. A kedvező esetek száma $\binom{67}{2}$.

Annak a valószínűsége, hogy mind a két kiválasztott szám irracionális lesz:

$$\frac{\binom{67}{2}}{\binom{200}{2}} = \frac{\frac{67 \cdot 66}{2}}{\frac{200 \cdot 199}{2}} = \frac{2211}{19900} \approx 0{,}11.$$

5520 *a)* Az inga két szélső helyzete közti elfordulás szöge egy 20 cm sugarú kör 8 cm hosszú húrjához tartozó φ középponti szög.



Az ábra jelöléseit használva az ATO derékszögű háromszögből:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{AT}{AO} = \frac{4}{20} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 23{,}07°.$$

Az inga végpontja egy lengés alatt a kör AB ívhosszának megfelelő utat tesz meg:

$$i_{AB} = 2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot \frac{\varphi}{360°} = 40 \cdot \pi \cdot \frac{23{,}07°}{360°} \approx 8{,}05 \text{ cm}.$$

Huszonnégy óra alatt az inga végpontja

$$s = 24 \cdot 60 \cdot 50 \cdot i_{AB} = 579\,600 \text{ cm},$$

azaz megközelítőleg 5,8 km utat tesz meg.

b) A nagymutató 2 óra 20 perc alatt kétszer körbefordult, majd a 12 órás helyzetéhez képest még $360° \cdot \frac{20}{60} = 120°$-ot fordult el.

A kismutató óránként 30°-ot fordul el, így a kismutató 2 óra 20 perc alatt $60° + 30° \cdot \frac{20}{60} = 70°$-os szöggel fordul el a 12 órás helyzetéhez képest.

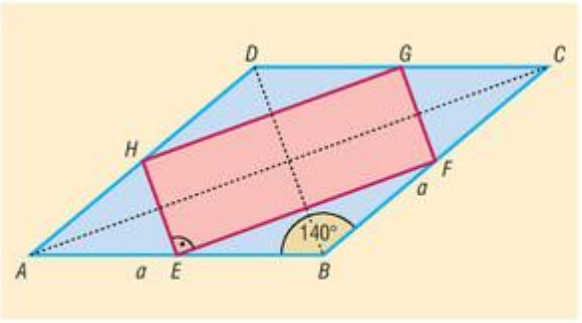
A kis- és nagymutató 2 óra 20 perckor $120° - 70° = 50°$ szöget zár be.

A két mutató végpontjának d távolságát koszinusztétellel határozhatjuk meg:

$$d^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 50° \Rightarrow d \approx 5{,}39 \text{ cm}.$$

A két mutató végpontja 2 óra 20 perckor 5,39 cm távolságra van egymástól.

5521 Az ábrán látható $ABCD$ rombusz oldalainak felezőpontjai által meghatározott négyszög $EFGH$.



Az ABC háromszögben EF középvonal, tehát $EF = \frac{AC}{2}$, és $EF \| AC$. Az ABC háromszög hasonló az EBF háromszöghöz, és a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete, ezért: $T_{EBF} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABC}$. Ugyanilyen megfontolással az ADC háromszögben: $T_{HDG} = \frac{1}{4} \cdot T_{ADC}$.

Ezek alapján:

$$T_{EBF} + T_{HDG} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABC} + \frac{1}{4} \cdot T_{ADC} = \frac{1}{4} \cdot (T_{ABC} + T_{ADC}) = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}.$$

Hasonlóan belátható, hogy $T_{EHA} + T_{FCG} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}$.

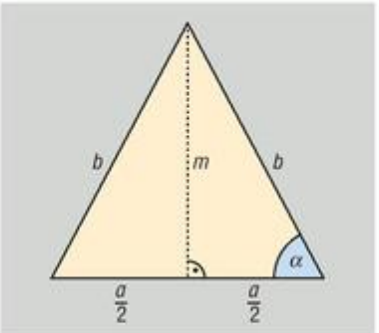
Ezzel bebizonyítottuk, hogy egy négyszög oldalfelezőpontjai által meghatározott négyszög területe fele az eredeti négyszög területének.

A rombusz oldalának hossza legyen a. Területe:

$$a^2 \cdot \sin 140° = 2 \cdot 100 \Rightarrow a \approx 17{,}64.$$

A rombusz oldalának hossza 17,64 cm.

5522 Az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága m, szára b, az alapja pedig a hosszúságú. Ha a számtani sorozat differenciája d, akkor $m = a - d$ és $b = a + d$.



Az alaphoz tartozó magasság két egybevágó derékszögű háromszögre bontja az egyenlő szárú háromszöget.

Felírva a Pitagorasz-tételt:

$$b^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Mivel a nem lehet 0, az egyenletet rendezve az $a = 16d$ összefüggéshez jutunk.

A háromszög alapon fekvő α szögére felírható:

$$\sin\alpha = \frac{m}{b} = \frac{a-d}{a+d} = \frac{16d-d}{16d+d} = \frac{15}{17} \Rightarrow \alpha \approx 61{,}93°.$$

A háromszög szögei 61,93°, 61,93° és 56,14°.

5523 A szabályos sokszög beírt körének sugara legyen r, köré írt körének sugara R.

$$r^2 \cdot \pi = 108\pi \quad \Rightarrow \quad r = 6\sqrt{3},$$
$$R^2 \cdot \pi = 144\pi \quad \Rightarrow \quad R = 12.$$

A szabályos sokszög két szomszédos A és B csúcsát a sokszög O középpontjával összekötve olyan egyenlő szárú háromszöget kapunk, amelynek szára R, magassága r. A háromszög α szárszögére felírható:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°.$$

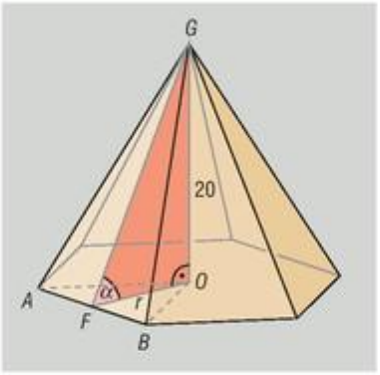
a) A szabályos sokszög $\frac{360°}{60°} = 6$ oldalú.

b) A szabályos hatszög oldala a köré írható körének sugara, azaz 12 cm.

c) Az ábrán látható egyenes gúla alaplapjának az oldallapjával bezárt α szöge az FOG derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{GO}{FO} = \frac{20}{6\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 62{,}54°.$$

A gúla alaplapja az oldallapjával 62,54°-os szöget zár be.

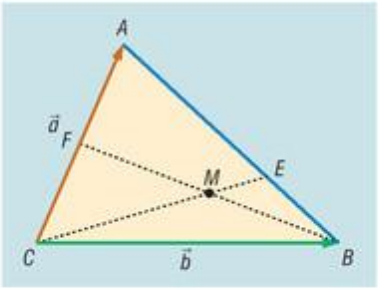


5524 A feltétel szerint:

$$\overrightarrow{CF} = \frac{\vec{a}}{2}, \quad \overrightarrow{CE} = \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3}.$$

Mivel $\overrightarrow{CM}$ és $\overrightarrow{CE}$ vektorok egyirányúak, létezik olyan α valós szám, hogy:

$$\overrightarrow{CM} = \alpha \cdot \overrightarrow{CE} = \alpha \cdot \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3}.$$



A $\overrightarrow{BF} = \frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}$, és mivel $\overrightarrow{BM}$ és $\overrightarrow{BF}$ vektorok egyirányúak, létezik olyan β valós szám, hogy:

$$\overrightarrow{BM} = \beta \cdot \overrightarrow{BF} = \beta \cdot \left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}\right).$$

Ugyanakkor igaz, hogy $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}$, tehát:

$$\beta \cdot \left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}\right) = \alpha \cdot \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3} - \vec{b}, \quad \text{amiből átrendezés után} \quad \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{3}\right) \cdot \vec{a} = \left(\beta - 1 + \frac{2\alpha}{3}\right) \cdot \vec{b}.$$

Mivel $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem párhuzamos vektorok, ez utóbbi egyenlőség csak akkor áll fenn, ha:

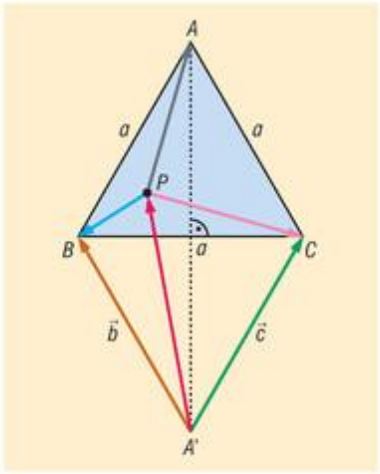
$$\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{3} = 0 \quad \text{és} \quad \beta - 1 + \frac{2\alpha}{3} = 0.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\beta = \frac{1}{2}$ és $\alpha = \frac{3}{4}$.

Tehát a $\overrightarrow{CM}$ vektor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével kifejezve:

$$\overrightarrow{CM} = \alpha \cdot \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3} = \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{4}.$$

5525 Az ABC szabályos háromszög oldalának hossza legyen a. Az A csúcsnak a BC oldal egyenesére vonatkozó tükörképe A'.



Legyen $\overrightarrow{A'B} = \vec{b}$ és $\overrightarrow{A'C} = \vec{c}$, valamint P a sík egy tetszőleges pontja. Ekkor:

$$\overrightarrow{PB} = \vec{b} - \overrightarrow{A'P}, \quad \overrightarrow{PC} = \vec{c} - \overrightarrow{A'P},$$

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{A'A} - \overrightarrow{A'P} = \vec{b} + \vec{c} - \overrightarrow{A'P}.$$

Azokat a P pontokat keressük, amelyekre:

$$PA^2 = PB^2 + PC^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PA}\right)^2 = \left(\overrightarrow{PB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{PC}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{b} + \vec{c} - \overrightarrow{A'P}\right)^2 = \left(\vec{b} - \overrightarrow{A'P}\right)^2 + \left(\vec{c} - \overrightarrow{A'P}\right)^2.$$

Felhasználva a skaláris szorzás disztributív tulajdonságát:

$$\left(\vec{b} + \vec{c} - \overrightarrow{A'P}\right)^2 = \left(\vec{b} - \overrightarrow{A'P}\right)^2 + \left(\vec{c} - \overrightarrow{A'P}\right)^2,$$

$$\left(\vec{b}\right)^2 + \left(\vec{c}\right)^2 + \left(\overrightarrow{A'P}\right)^2 + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\overrightarrow{A'P} - 2\vec{c}\cdot\overrightarrow{A'P} = \left(\vec{b}\right)^2 - 2\vec{b}\cdot\overrightarrow{A'P} + \left(\overrightarrow{A'P}\right)^2 + \left(\vec{c}\right)^2 - 2\vec{c}\cdot\overrightarrow{A'P} + \left(\overrightarrow{A'P}\right)^2,$$

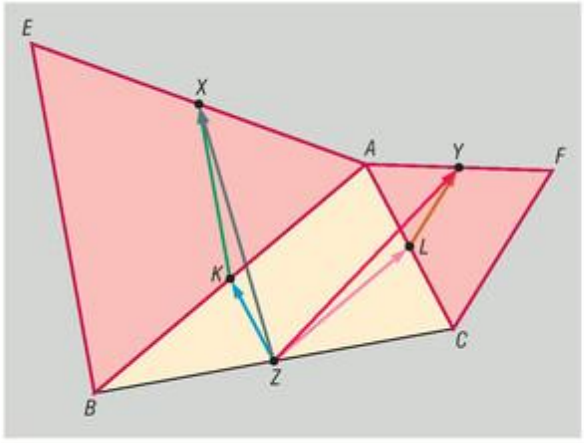
$$2\vec{b}\vec{c} = \left(\overrightarrow{A'P}\right)^2.$$

A $2\vec{b}\cdot\vec{c}$ skaláris szorzat értéke:

$$2\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 2\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos 60^\circ = 2\cdot a\cdot a\cdot\frac{1}{2} = a^2.$$

Ez utóbbi eredményünk azt jelenti, hogy az adott tulajdonságú P pontok halmaza az A' pont köré írt a sugarú kör.

5526 A BC oldal felezőpontja legyen Z, az AE oldalé X és az AF oldalé Y.



Elég belátni, hogy a $\overrightarrow{ZX}$ vektor a $\overrightarrow{ZY}$ vektor +60°-os forgatottja.

Legyen AB oldal felezőpontja K, AC oldal felezőpontja L. Ekkor

$$\overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{ZK} + \overrightarrow{KX}, \quad \text{illetve} \quad \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{ZL} + \overrightarrow{LY}.$$

Mivel a KAX háromszög szabályos háromszög, $\overrightarrow{KX}$ vektor $\overrightarrow{KA}$ vektor +60°-os forgatottja.

Az ABC háromszög középvonala ZL, tehát $\overrightarrow{ZL} = \overrightarrow{KA}$, amiből adódik, hogy a $\overrightarrow{KX}$ vektor a $\overrightarrow{ZL}$ vektor +60°-os forgatottja.

Hasonlóan belátható, hogy $\overrightarrow{ZK}$ vektor a $\overrightarrow{LY}$ vektor +60°-os forgatottja.

Tehát a $\overrightarrow{ZX}$ vektor $\overrightarrow{ZK}$ és $\overrightarrow{KX}$ összetevői a $\overrightarrow{ZY}$ vektor $\overrightarrow{LY}$ és $\overrightarrow{ZL}$ összetevőinek +60°-os forgatottjai.

Ez azt jelenti, hogy a $\overrightarrow{ZX}$ vektor a $\overrightarrow{ZY}$ vektor +60°-os forgatottja.

5527 Alakítsuk át a kifejezést:

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} =$$

$$= \sqrt{(1-\cos^2 x)^2 + 4\cos^2 x} + \sqrt{(1-\sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x} =$$

$$= \sqrt{(1+\cos^2 x)^2} + \sqrt{(1+\sin^2 x)^2} = 1 + \cos^2 x + 1 + \sin^2 x = 3.$$

5528 Alkalmazzuk a megfelelő trigonometrikus összefüggéseket:

$$a)\ 4\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=4\cdot\left(\frac{\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]-\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{2}\right)=$$

$$=4\cdot\frac{\cos\frac{2\pi}{3}-\cos 2x}{2}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}-\cos 2x\right)=-1-2\cdot(1-2\cdot\sin^2 x)=4\cdot\sin^2 x-3;$$

$$b)\ \operatorname{tg}2x+\frac{1}{\cos 2x}=\frac{\sin 2x+1}{\cos 2x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\cos x+\sin x)\cdot(\cos x-\sin x)}=$$

$$=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}.$$

5529 Használjuk fel a két tag összegének négyzetére és köbére vonatkozó nevezetes azonosságot, valamint a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ összefüggést:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x,$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^4 x\cdot\cos^2 x-3\sin^2 x\cdot\cos^4 x=$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)=1-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x.$$

Ez alapján a kifejezés átalakítható:

$$(\sin^6 x+\cos^6 x)\cdot p^2+(\sin^4 x+\cos^4 x)\cdot p-4(\sin^4 x+\cos^4 x)=$$

$$=(1-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x)\cdot p^2+(1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x)\cdot p-4(1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x)=$$

$$=p^2+p-4-(3p^2+2p-8)\cdot(\sin^2 x\cdot\cos^2 x).$$

Ez a kifejezés akkor lesz x-től független, ha $3p^2+2p-8=0$.

Az egyenlet gyökei: $p_2=-2$ és $p_2=\frac{4}{3}$.

Ha a p paraméter értéke -2 vagy $\frac{4}{3}$, akkor a kifejezés értéke x-től független állandó.

5530 Az egyenlőség igazolásához elég belátni, hogy:

$$4\cdot t\cdot\operatorname{ctg}\alpha+4\cdot t\cdot\operatorname{ctg}\beta+4\cdot t\cdot\operatorname{ctg}\gamma=a^2+b^2+c^2.$$

A kotangens szögfüggvény definícióját és a háromszög területére vonatkozó trigonometrikus összefüggéseket használva a bal oldal tovább alakítható:

$$4t\cdot\operatorname{ctg}\alpha+4t\cdot\operatorname{ctg}\beta+4t\cdot\operatorname{ctg}\gamma=$$

$$=4\cdot\frac{bc\cdot\sin\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+4\cdot\frac{ac\cdot\sin\beta}{2}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+4\cdot\frac{ab\cdot\sin\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}=$$

$$=2bc\cdot\cos\alpha+2ac\cdot\cos\beta+2ab\cdot\cos\gamma.$$

A koszinusztétel alapján:

$$2bc\cdot\cos\alpha+2ac\cdot\cos\beta+2ab\cdot\cos\gamma=$$

$$=\left(b^2+c^2-a^2\right)+\left(a^2+c^2-b^2\right)+\left(a^2+b^2-c^2\right)=a^2+b^2+c^2.$$

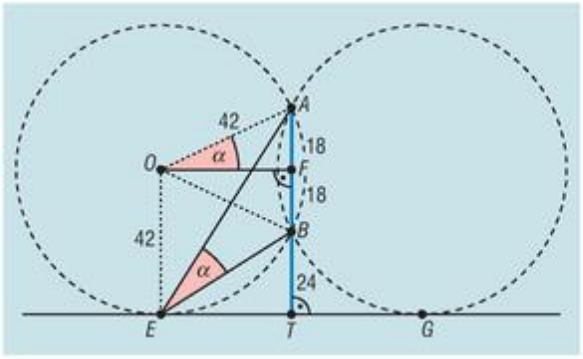
Ezzel a bizonyítandó egyenlőséget beláttuk.

5531 Tekintsük a mellékelt ábra jelöléseit. A torony teteje legyen A, talppontja T, a felső $\frac{3}{5}$ része AB.

Tekintsünk egy a tornyot tartalmazó, a talaj síkjára merőleges síkot.

Vegyük AB szakasz azon látószögkörívét, amelyik érinti a talaj egyenesét.

Ha az AB szakasz az E és G érintési pontból α szög alatt látszik, akkor a látszögköríven kívül lévő minden pontból α-nál kisebb szög alatt látszik.



Tehát az AB szakasz a talaj egyenesének E és G érintési pontjából látszik a legnagyobb szög alatt.

Ennek a látószögkörívnek a sugara az AB szakasz F felezőpontjának T ponttól vett távolsága:

$$\frac{2}{5}\cdot 60+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot 60=42\text{ m}.$$

Az $ET=OF$ távolságot az OAF derékszögű háromszögből határozhatjuk meg:

$$OF=ET=\sqrt{42^2-18^2}=12\sqrt{10}.$$

A torony felső $\frac{3}{5}$ része a vízszintes síkon egy olyan kör kerületének pontjaiból látszik a legnagyobb szögben, amelynek sugara $12\sqrt{10}\approx 37{,}95$ m, és középpontja a torony talppontja.

Az α szög a kerületi és középponti szögek tétele alapján egyenlő az $AOF\sphericalangle$-gel, amely az AOF háromszögből számítható:

$$\sin\alpha=\frac{FA}{OA}=\frac{18}{42}\quad\Rightarrow\quad\alpha\approx 25{,}38°.$$

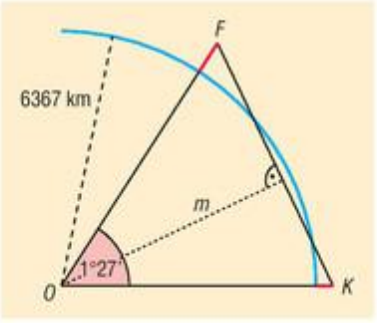
A torony felső $\frac{3}{5}$ része a vízszintes síkon legfeljebb 25,38° szög alatt látszik.

5532 Tekintsük a mellékelt sematikus ábrát. A Föld középpontja legyen az O pont, a Fogadalmi templom tornyának a teteje az F, a kilátó a K pont.

A két város megközelítőleg azonos szélességi fokon van, az $FOK\sphericalangle$ nagysága: 20°09' – 18°42' = 1°27'.

A kilátó és a templom tengerszint feletti magasságát is figyelembe véve $OK=6367{,}136$ km és $OF=6367{,}165$ km.

Azt kell megvizsgálni, hogy a Fogadalmi templom tornyának a teteje a kilátóhelyről nézve a látóhatár felett van-e.



Ehhez arra a kérdésre kell válaszolnunk, hogy a Föld középpontjának a KF egyenestől mért m távolsága a Föld sugaránál kisebb vagy nagyobb.

Számítsuk ki a KOF háromszög KF oldalának hosszát koszinusztétellel: $KF\approx 161{,}13$ km.

A háromszög $KF=161{,}13$ km hosszú oldalához tartozó m magasságának meghatározásához a háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{6367{,}136\cdot 6367{,}165\cdot\sin 1°27'}{2}=\frac{161{,}13\cdot m}{2}\quad\Rightarrow\quad m\approx 6366{,}68\text{ km}.$$

Mivel $m<6367$ km, a KF egyenesnek a Föld O középpontjától való távolsága kisebb, mint a Föld sugara, tehát biztosan nem lehet látni a templom tornyát a kilátóhelyről.

Nevezetes síkidomok tulajdonságai – megoldások

5533 A háromszög-egyenlőtlenségből: $4 < c < 18$. Lehetséges értékek c-re: 5, 7, 11, 13, 17 (cm).

5534 90°, 45° és 45°.

5535 A két szögfelező 62,5°-os szöget zár be egymással.

5536 A két magasságvonal 55°-os szöget zár be egymással.

5537 70°.

5538 Nem lehetnek. A középvonalak hossza nem elégíti ki a háromszög-egyenlőtlenséget.

5539 Az AB távolság lehetséges értékei: 9 km, 10 km, 11 km, 12 km és 13 km.

5540 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Igaz. *d)* Hamis. *e)* Hamis. *f)* Igaz.
g) Hamis. *h)* Hamis. *i)* Igaz.

5541 Ha a kerületi szöget α, akkor a hozzá tartozó középponti szöget 2α jelöli, tehát $3\alpha = 22{,}5°$. A keresett szögek:

$$\alpha = 7{,}5° = \frac{\pi}{24}\,(\text{rad}), \qquad 2\alpha = 15° = \frac{\pi}{12}\,(\text{rad}).$$

5542 A háromszög belső szögei: 70°, 65°, 45°.

5543 *a)* $R = 8$ cm; *b)* $R = 6{,}5$ cm; *c)* $R \approx 4{,}58$ cm.

5544 *a)* derékszögű; *b)* tompaszögű; *c)* hegyesszögű; *d)* derékszögű.

5545 *a)* A másik befogó hossza körülbelül 71,69 cm, az átfogó 96,77 cm.
b) A körülírt kör sugara kb. 48,39 cm.
c) A beírt kör sugara kb. 19,96 cm.
d) Az AB oldalhoz tartozó súlyvonal 48,39 cm, a BC oldalhoz tartozó 78,71 cm, az AC oldalhoz tartozó 74,23 cm.

5546

a	b	c	m	p	q
28	45	53	$\frac{1260}{53} \approx 23{,}77$	$\frac{784}{53} \approx 14{,}79$	$\frac{2025}{53} \approx 38{,}21$
$24\sqrt{5} \approx 53{,}67$	$12\sqrt{5} \approx 26{,}83$	60	24	48	12
25	$\frac{175}{24} \approx 7{,}29$	$\frac{625}{24} \approx 26{,}04$	7	24	$\frac{49}{24} \approx 2{,}04$
48 (vagy 55)	55 (vagy 48)	73	$\frac{2640}{73}$	$\frac{2304}{73}$, $\left(\frac{3025}{73}\right)$	$\frac{3025}{73}$, $\left(\frac{2304}{73}\right)$

5547 Először alkalmazva a magasságtételt, ered, hogy az átfogó: $c = 10$ cm. Majd például befogótételekkel számolva: $a = 2\sqrt{5}$ cm, $b = 4\sqrt{5}$ cm.

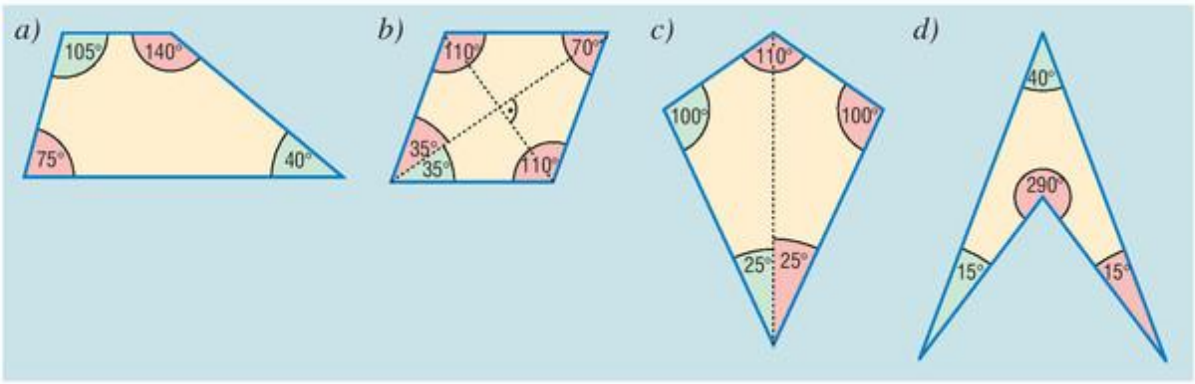
5548 *a)* A szinusztétel alapján $\sin\alpha \approx 0{,}7329$. Két ilyen háromszög van. Az egyikben $\alpha \approx 47{,}13°$, $\gamma \approx 112{,}87°$ és $AB \approx 18{,}86$ cm. A másik háromszögben $\alpha \approx 132{,}87°$, $\gamma \approx 27{,}13°$ és $AB \approx 9{,}33$ cm.
b) A szinusztétel alapján $\sin\alpha \approx 1{,}0004$. Mivel $\sin\alpha \le 1$ mindig teljesül, ezért nincsen ilyen háromszög. Ha valaki két tizedesjegyre kerekít, akkor $\sin\alpha \approx 1{,}00$, ezáltal α-ra 90° adódna. A hiba az, hogy a $\sin\alpha$ maximumát a közelítő érték lefelé kerekítése után kaptuk, így természetesen nem létezik ilyen háromszög.

5549 *a)* Az Andrásfalva és Csabaháza közti út hossza pontosan $\sqrt{3}$-szorosa a Barnabásfalva és Csabaháza közti út hosszának.

b) A két út 30°-os szöget zár be egymással.

5550 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis. *d)* Hamis. *e)* Hamis. *f)* Hamis.
g) Igaz. *h)* Igaz. *i)* Hamis.

5551



5552 A deltoid két oldalának hossza 61 cm, másik két oldala $\sqrt{521} \approx 22{,}83$ cm. A deltoid szögei 140,80°, 140,80°, 57,62°, 20,78°. A deltoid területe 880 cm^2.

5553 A rombusz átlóinak hossza 8 cm és 12 cm, területe 48 cm^2, különböző szögei 112,62° és 67,38°.

5554 A paralelogramma területe 75 cm^2. A középvonalak hossza 5,13 cm és 16,92 cm. A paralelogramma különböző szögei 59,78° és 120,22°.

5555 *a)* Igen, a 27 oldalú sokszögek. *b)* Nincs ilyen sokszög.

5556 A sokszögnek 12 oldala van. A belső szögek összege 1800°, a külső szögek összege 360°.

5557 A szabályos sokszögnek 8 oldala, és így 8 szimmetriatengelye van. A sokszög belső szöge 135°.

5558 A sokszögnek 6 oldala van.

5559 A húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180°. Mivel a deltoidnak biztosan van két egyenlő nagyságú szemközti szöge, ezért ezek csak 90°-osak lehetnek. Ha egy deltoid húrnégyszög, akkor a szimmetriaátlójával szemközti szögek 90°-osak. Ebből az is következik, hogy a négyszög köré írt kör középpontja a szimmetriaátló felezőpontja.

5560 *a)* A téglalapok; *b)* a rombuszok.

5561 Három ilyen deltoid van. Ezekben a másik két szög: 25° és 200°, 110° és 115°, illetve 112,5° és 112,5°.

5562 A további belső szögek: 105°, 125° és 55°.

5563 Az érintőszakaszok hossza 16 cm. A két érintő hajlásszöge 73,74°.

5564 *a)* A húr a kör középpontjából 38,94°-os szögben látszik. A szög mértéke radiánban 0,68.

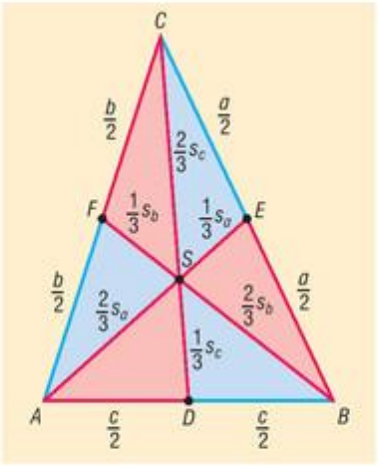
b) A húr a hosszabb körív pontjaiból 19,47° (0,34 radián), a rövidebb körív pontjaiból pedig 160,53° (2,80 radián) szög alatt látszik.

c) A kisebb körcikk területe 12,23 cm^2, a nagyobbé 100,86 cm^2.

d) A kisebb körív hossza 4,08 cm, a nagyobbé 33,62 cm.

e) A kisebb körszelet területe 0,92 cm^2, a nagyobbé 112,18 cm^2.

5565 A háromszög S súlypontja 2 : 1 arányban osztja fel a súlyvonalakat, amit az ábrán is bejelöltünk. A pirossal megjelölt háromszögekben a háromszög-egyenlőtlenség alapján:



$$\text{az } ADS \text{ háromszögben} \quad \frac{2}{3}s_a + \frac{1}{3}s_c > \frac{c}{2},$$

$$\text{a } BES \text{ háromszögben} \quad \frac{2}{3}s_b + \frac{1}{3}s_a > \frac{a}{2},$$

$$\text{a } CFS \text{ háromszögben} \quad \frac{2}{3}s_c + \frac{1}{3}s_b > \frac{b}{2}.$$

A három egyenlőtlenség megfelelő oldalainak összege

$$s_a + s_b + s_c > \frac{1}{2}\cdot(a+b+c),$$

ez éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség első fele.

Alkalmazzuk ismét a háromszög-egyenlőtlenséget, ezúttal:

$$\left.\begin{aligned} &\text{az } ADC \text{ háromszögben} \quad b + \frac{c}{2} > s_c,\\ &\text{az } ABE \text{ háromszögben} \quad c + \frac{a}{2} > s_a,\\ &\text{a } BCF \text{ háromszögben} \quad a + \frac{b}{2} > s_b. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\cdot(a+b+c) > s_a + s_b + s_c,$$

ami éppen a második bizonyítandó egyenlőtlenség.

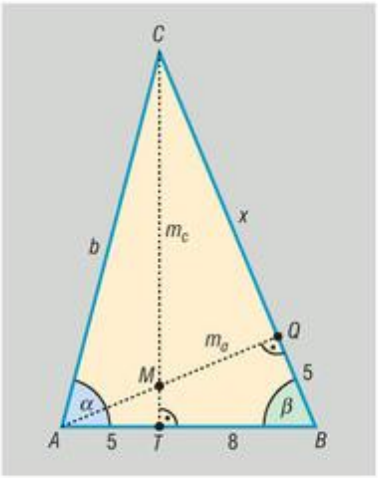
5566 A háromszög két külső szögét $3x$, illetve $4x$ alakban kereshetjük. Három eset lehetséges.

I. Ha a háromszög 65°-os szöge a $3x$ nagyságú szög mellékszöge, akkor $3x = 180° - 65° = 115°$, ebből $x \approx 38{,}33°$. A háromszög egy további külső szöge $4x \approx 153{,}33°$, a mellette fekvő belső szög pedig 26,67°. A háromszög belső szögei 65°, 26,67° és 88,33°.

II. Ha a háromszög 65°-os szöge a $4x$ nagyságú külső szög mellékszöge, akkor $4x = 115°$, $x = 28{,}75°$. A háromszög egy további külső szöge 86,25°. A háromszög belső szögei 65°, 93,75° és 21,25°.

III. Ha az adott arányú külső szögek egyike sem mellékszöge a 65°-os szögnek, akkor a másik két belső szög $180° - 3x$ és $180° - 4x$, így a belső szögekre: $180° - 3x + 180° - 4x + 65° = 180°$. Az egyenlet megoldása $x = 35°$, a háromszög belső szögei pedig 65°, 75° és 40°.

5567 *a)* Az ábra jelöléseit követve $AT = 5$ cm, $BT = 8$ cm, $BQ = 5$ cm. Az ABQ derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján:



$$m_a^2 = 13^2 - 5^2 \quad \Rightarrow \quad m_a = 12 \text{ cm}.$$

Ha $CQ = x$, akkor a háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{13\cdot m_c}{2} = \frac{(x+5)\cdot 12}{2} \quad \Rightarrow \quad m_c = \frac{12}{13}\cdot(x+5).$$

Pitagorasz tételét alkalmazva, ezúttal a BCT háromszögben:

$$m_c^2 + 8^2 = (x+5)^2,$$

$$\frac{144}{169}\cdot(x+5)^2 + 8^2 = (x+5)^2,$$

$$(x+5)^2 = \frac{169\cdot 64}{25}.$$

Felhasználva, hogy a bal oldalon álló hatvány alapja pozitív:

$$x+5=\frac{13\cdot 8}{5}=20{,}8\text{ cm}.$$

A háromszög BC oldala 20,8 cm.

A háromszög AB oldalához tartozó magassága:

$$m_c=\frac{12}{13}\cdot(x+5)=19{,}2\text{ cm}.$$

Az AC oldalt az ACT háromszögre felírt Pitagorasz-tétellel számolhatjuk: $b^2=5^2+19{,}2^2$. A háromszög AC oldala 19,84 cm hosszúságú.

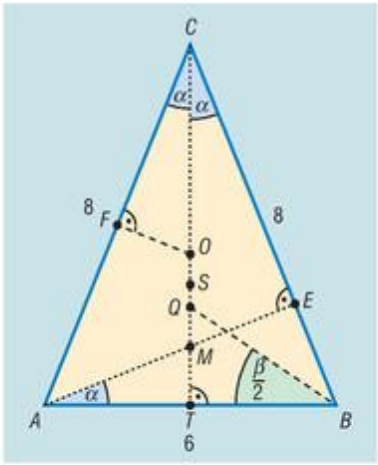
b) A háromszög szögeit szögfüggvények segítségével célszerű kiszámolni. Az ACT háromszögben $\operatorname{tg}\alpha=\frac{19{,}2}{5}$, amiből $\alpha\approx 75{,}40°$. A BCT háromszögben $\operatorname{tg}\beta=\frac{19{,}2}{8}$, tehát $\beta\approx 67{,}38°$.

A háromszög szögei 75,40°, 67,38° és 37,22°.

5568 *a)* Az ABC háromszög S súlypontja a súlyvonalakat a csúcstól számítva 2:1 arányban osztja. Mivel a CT súlyvonal hossza $CT=\sqrt{55}\approx 7{,}42$ cm, ezért:

$$CS=\frac{2}{3}\cdot CT=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{55}\approx 4{,}94\text{ cm}.$$

A súlypont a C csúcstól 4,94 cm távolságra található.



b) Az $MAT\sphericalangle$ és az $MCE\sphericalangle$ szögek szárai páronként merőlegesek egymásra, ezért a két szög ugyanakkora, az ábra jelöléseivel: $MAT\sphericalangle=MCE\sphericalangle=\alpha$. Ekkor viszont az MAT és BCT háromszögek szögei páronként megegyeznek, ezért a háromszögek hasonlók. A megfelelő oldalaik arányára:

$$\frac{MT}{AT}=\frac{BT}{CT}\quad\Rightarrow\quad\frac{MT}{3}=\frac{3}{\sqrt{55}}.$$

Az MT távolságra $MT\approx 1{,}21$ cm adódik, ezért az ABC háromszög magasságpontja a C csúcstól $7{,}42-1{,}21=6{,}21$ cm távolságra van.

c) Az ABC háromszögbe írt kör Q középpontja illeszkedik a belső szögfelezőkre. Az ABC háromszög B csúcsánál lévő β szögre:

$$\cos\beta=\frac{BT}{BC}=\frac{3}{8}\quad\Rightarrow\quad\beta\approx 67{,}98°.$$

Ha a háromszögbe írt kör sugara $QT=r$, akkor a QBT derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{3},\quad\text{így}\quad r\approx 2{,}02\text{ cm}.$$

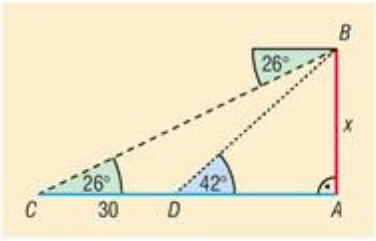
A Q pont a C csúcstól $7{,}42-2{,}02=5{,}40$ cm távolságra van.

d) A háromszög köré írt kör O középpontja illeszkedik az oldalfelező merőlegesekre. Ha az AC oldal felezőpontja F, akkor a COF háromszög derékszögű, és α hegyesszöge megegyezik a CAT háromszög megfelelő hegyesszögével. A két háromszög így hasonló, amiből:

$$\frac{CO}{CF}=\frac{CA}{CT}\quad\Rightarrow\quad\frac{CO}{4}=\frac{8}{\sqrt{55}}\quad\Rightarrow\quad CO\approx 4{,}31\text{ cm}.$$

A körülírt kör középpontja 4,31 cm távolságra található a C csúcstól.

5569 Az épület tetejét B, talppontját A, az első megfigyelési pontot D jelöli az ábrán. Ha a D ponttól számítva még 30 métert távolodunk az épülettől, akkor olyan C pontba jutunk, ahonnan a B ponthoz tartozó emelkedési szög (amely váltószöge a hozzá tartozó depressziós szögnek) 26°. Ha az épület magassága x, akkor az ADB és ACB derékszögű háromszögekből:



$$\operatorname{tg}42° = \frac{x}{AD} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}26° = \frac{x}{AD+30}.$$

Mindkét egyenletből kifejezve AD-t, azt kapjuk, hogy:

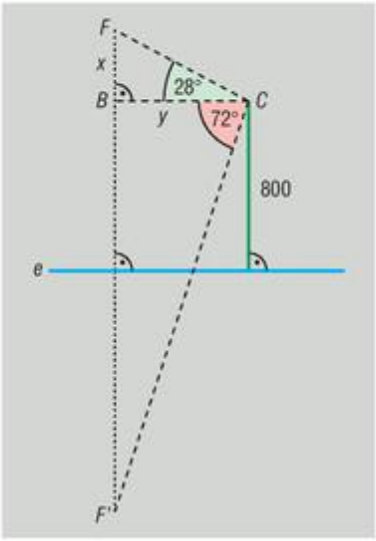
$$\frac{x}{\operatorname{tg}42°} = \frac{x}{\operatorname{tg}26°} - 30.$$

A kapott egyenlet megoldása:

$$x = \frac{30 \cdot \operatorname{tg}26° \cdot \operatorname{tg}42°}{\operatorname{tg}42° - \operatorname{tg}26°} \approx 31{,}93 \text{ m}.$$

Az épület magassága 31,93 méter.

5570 Az ábrán a hegy csúcsát C, a felhő helyét F, a felhő tükörképét a tóban F' jelöli. A tó tükrének szintje legyen az e egyenes, amely az FF' szakasz felezőmerőlegese.



Az FBC háromszögben:

$$\operatorname{tg}28° = \frac{x}{y}.$$

Az $F'BC$ háromszögben:

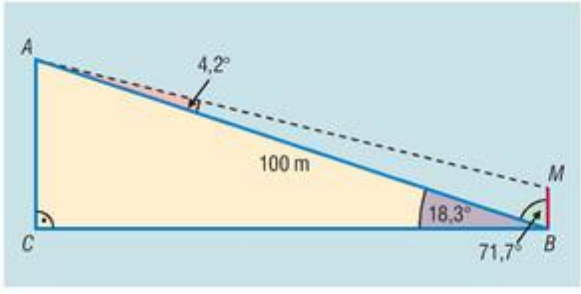
$$\operatorname{tg}72° = \frac{x+1600}{y}.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$x = \frac{1600 \cdot \operatorname{tg}28°}{\operatorname{tg}72° - \operatorname{tg}28°} \approx 334{,}15.$$

A felhő a hegycsúcs felett 334 méterre van.

5571 Tekintsük az ábra jelöléseit. A lejtős út elejét jelölje A, a végét B, az emlékoszlop tetejét az M pont.



Az ABM háromszögben ismert az AB oldal: $AB = 100$ m, és a rajta levő két szög:

$BAM\sphericalangle = 4{,}2°$,

$ABM\sphericalangle = 90° - 18{,}3° = 71{,}7°$.

A háromszög harmadik szöge:

$$180° - 4{,}2° - 71{,}7° = 104{,}1°.$$

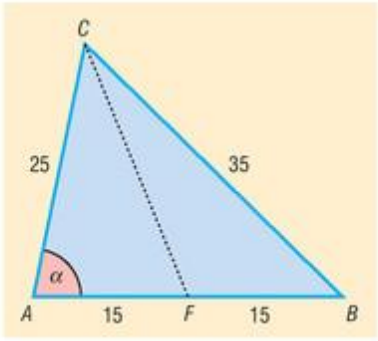
Az ABM háromszögben felírva a szinusztételt, az emlékoszlop MB magassága meghatározható:

$$\frac{MB}{100} = \frac{\sin 4{,}2°}{\sin 104{,}1°} \quad \Rightarrow \quad MB \approx 7{,}55 \text{ m}.$$

Az emlékoszlop 7,55 m magas.

5572 Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$35^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot \cos\alpha,$$
$$\cos\alpha = 0{,}2,$$
$$\alpha \approx 78{,}46°.$$



Az élményfürdő az AB oldal F felezőpontjába kerül, ezért a feladat az ABC háromszög CF súlyvonalának hosszát kérdezi. Az ACF háromszögben ismét a koszinusztétel alapján:

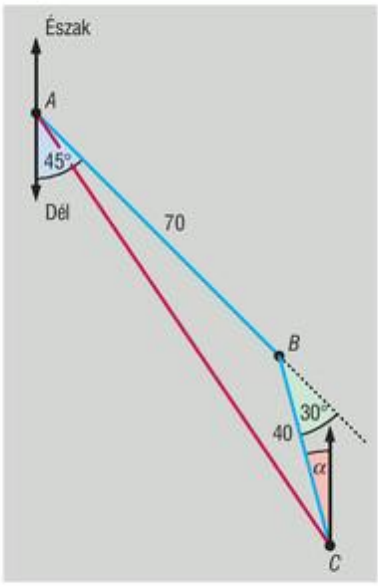
$$CF^2 = 25^2 + 15^2 - 2 \cdot 25 \cdot 15 \cdot \cos 78{,}46°,$$
$$CF \approx 26{,}5 \text{ km}.$$

A tervezett útszakasz hossza 26,5 km.

5573 *a)* A társaság útját az ábra mutatja. A B pontban a fordulás szöge az ABC háromszög külső szöge. Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$AC^2 = 70^2 + 40^2 - 2 \cdot 70 \cdot 40 \cdot \cos 150°.$$

A műveletek elvégzése után $AC \approx 106{,}5$, azaz a társaság a kiinduló helyétől légvonalban 106,5 km távolságra került.



b) Az ABC háromszögben ezúttal a szinusztétel alapján:

$$\frac{\sin BAC\sphericalangle}{\sin 150°} = \frac{40}{106{,}5} \quad \Rightarrow \quad \sin BAC\sphericalangle \approx 0{,}1878.$$

Mivel a $BAC\sphericalangle$ egészen biztosan hegyesszög, ezért:

$$BAC\sphericalangle \approx 10{,}82°.$$

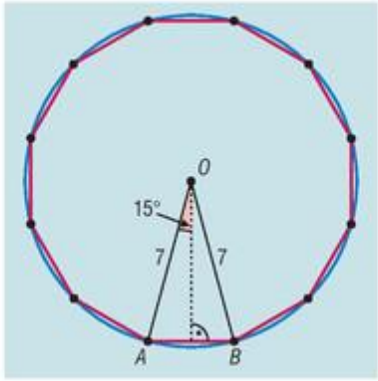
A pihenőhelyet a kiindulási hellyel összekötő egyenes út

$$\alpha = 45° - 10{,}82° = 34{,}18°\text{-os}$$

szöget zárna be az északi iránnyal.

5574 *a)* A 14 cm oldalú négyzetből kivágható legnagyobb kör sugara 7 cm. A szabályos tizenkétszög egy oldalához tartozó középponti szög 30°. Ebből következik, hogy az ábra jelölései alapján:

$$\sin 15° = \frac{\frac{AB}{2}}{7} = \frac{AB}{14}, \quad \text{ahonnan} \quad AB \approx 3{,}62 \text{ cm}.$$



A legnagyobb kivágható szabályos tizenkétszög oldala 3,62 cm.

b) A kör alakú kartonlap területe:

$$T_{\text{kör}} = 49\pi \approx 153{,}94 \text{ cm}^2.$$

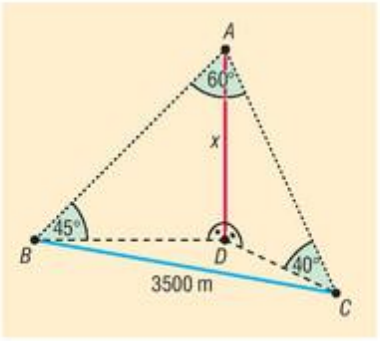
A tizenkétszög területe az ABO háromszög területének 12-szerese, azaz:

$$T_{12} = 12 \cdot \frac{7 \cdot 7 \cdot \sin 30°}{2} = 147 \text{ cm}^2.$$

Mivel $\frac{T_{12}}{T_{\text{kör}}} \approx 0{,}9549$, ezért a kör alakú kartonnak $100 - 95{,}49 = 4{,}51\%$-a vész kárba.

c) A négyzet területe 196 cm^2, ezért $\frac{196 - 147}{196} = \frac{1}{4}$-ed része, azaz 25%-a vész kárba.

5575 Jelölje a hegy csúcsát A, az A pontnak az autóút síkjára eső vetületét D, a településeket B és C. Ha a hegy magassága x, akkor az ABD derékszögű háromszögben $\sin 45° = \frac{x}{AB}$, ebből $AB = x\sqrt{2}$. Az ACD derékszögű háromszögben $\sin 40° = \frac{x}{AC}$, amiből pedig $AC = \frac{x}{\sin 40°}$.



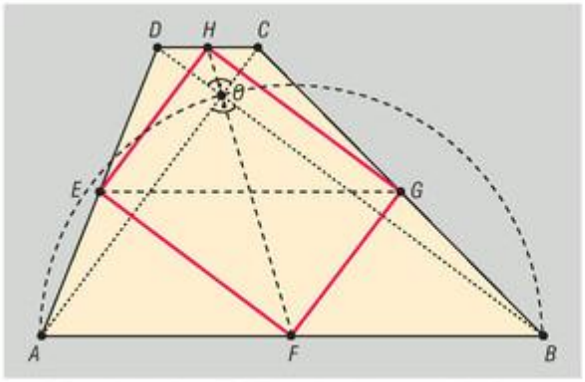
Végül az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$BC^2 = \left(x\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sin 40°}\right)^2 - 2 \cdot \left(x\sqrt{2}\right) \cdot \frac{x}{\sin 40°} \cdot \cos 60°.$$

Felhasználva, hogy $BC = 3500$ m, a műveletek elvégzése után $x \approx 2349$ m adódik.

A hegy csúcsa az út síkja felett 2349 m magasságban van.

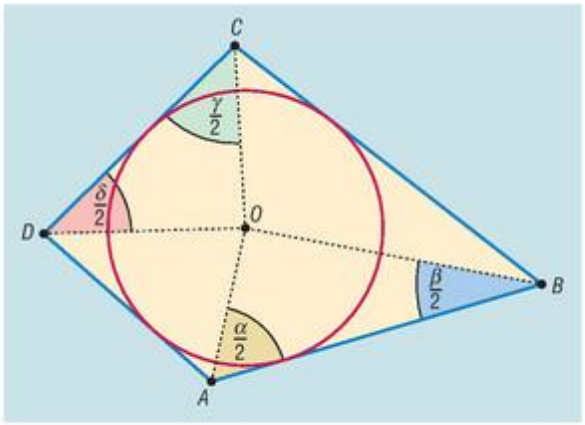
5576 *a)* A hosszabb alap 10 cm, a szárakat összekötő középvonal (az ábrán EG) hossza 6 cm.



b) Thalész tételének megfordítása alapján az O pont illeszkedik az AB szakasz fölé emelt Thalész-körre, ezért ha F az AB szakasz felezőpontja, akkor FO a kör sugara, azaz $FO = 5$ cm. Ugyanígy látható, hogy HO a CD alap felével egyenlő: $HO = 1$ cm. Az ABO és CDO derékszögű háromszögek hasonlók, az O pontra vonatkozó középpontos hasonlósággal egymásba vihetők, amiből következik, hogy az F, O és H pontok egy egyenesre illeszkednek. Ebből adódóan az FH középvonal hossza: $FH = FO + HO = 6$ cm.

c) A középvonalak végpontjai az $EFGH$ paralelogrammát fogják közre. Mivel EF a $BDA_{\triangle}$, GH pedig a $BDC_{\triangle}$ középvonala, ezért mindkét szakasz párhuzamos a BD átlóval. Hasonlóan igazolható, hogy az EH és FG szakaszok párhuzamosak az AC átlóval. A feltételek alapján a trapéz átlói merőlegesek egymásra, ezért az $EFGH$ négyszög oldalai is, azaz $EFGH$ téglalap.

5577 *a)* A szögfelezők közös pontja a négyszög mind a négy oldalától ugyanakkora távolságra van, ezért a négyszögnek van beírt köre, vagyis érintőnégyszögről van szó.



b) Az $ABCD$ négyszög szögeit a szokásos módon jelöljük. Az ABO háromszögben:

$$AOB\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right),$$

valamint a CDO háromszögben:

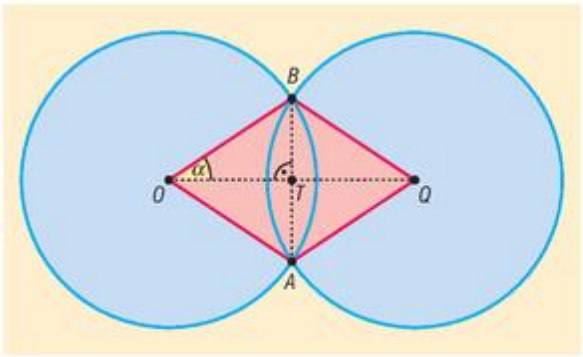
$$COD\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right).$$

A két szöget összeadva, és felhasználva, hogy a négyszög belső szögeinek összege 360°:

$$AOB\sphericalangle + COD\sphericalangle = 360° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = 360° - \frac{360°}{2} = 180°.$$

Megjegyzés: Az érintőnégyszögben természetesen $BOC\sphericalangle + DOA\sphericalangle = 180°$ is teljesül.

5578 *a)* Az $OAQB$ négyszög minden oldala 3 cm, ezért a négyszög rombusz. Az ábra jelöléseit követve az OTB derékszögű háromszögben:



$$BT^2 = OB^2 - OT^2 = 3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{11}{4},$$

ebből $BT = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1{,}66$ cm.

Az $OAQB$ rombusz területe:

$$\frac{5 \cdot 3{,}32}{2} = 8{,}29 \text{ cm}^2.$$

b) Az $OTB_\triangle$-ben $\cos\alpha = \frac{2{,}5}{3}$, amiből $\alpha = 33{,}56°$. A körök közös része két olyan 3 cm sugarú körszelet egyesítéséből áll, amelyekhez $2\alpha = 67{,}12°$ középponti szög tartozik. Az OA és OB sugarak által határolt körcikk területe:

$$t = \frac{3^2 \cdot \pi}{360°} \cdot 2\alpha \approx 5{,}27 \text{ cm}^2.$$

A megfelelő körszelet területe:

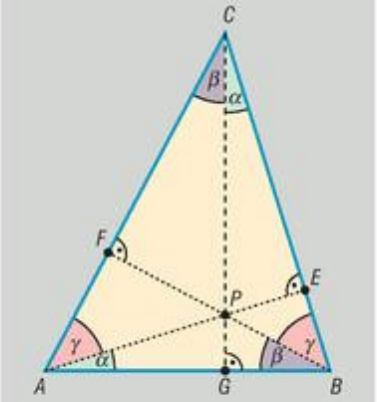
$$t - t_{OAB} \approx 5{,}27 - \frac{8{,}29}{2} = 1{,}125 \text{ cm}^2.$$

A két kör közös részének területe $2{,}25$ cm^2.

A közös rész kerülete két egybevágó körív hosszából áll: $K \approx 2 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{360°} \cdot 67{,}12° \approx 7{,}03$ cm.

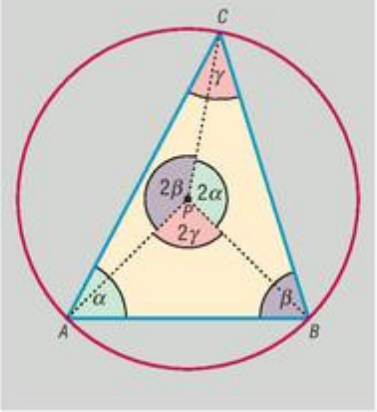
c) A megfelelő látószög $180° - \alpha \approx 146{,}44°$.

5579 *a)* A feltételek szerint az ábrán azonos módon megjelölt szögek megegyeznek. Az $ABC_\triangle$ belső szögeinek összegére felírható: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, amiből $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Ha a P ponton és a háromszög egy-egy csúcsán átmenő egyenesek a háromszög oldalait az E, F és G pontokban metszik (ld. ábra), akkor például az $ACG_\triangle$-ben az A és C csúcsoknál lévő szögek összege $\gamma + \alpha + \beta = 90°$, ezért a háromszög derékszögű, és a CP egyenes merőleges AB-re. Ugyanígy látható, hogy AP merőleges BC-re, és BP merőleges AC-re. A P pont tehát az $ABC_\triangle$ magasságpontja. Fordítva: az $ABC_\triangle$ magasságpontja nyilván mindhárom feltételt kielégíti.



b) Ha a P pont az $ABC_\triangle$ köré írt kör középpontja, akkor a kerületi és középponti szögek tétele értelmében a szögekre vonatkozó összes feltétel teljesül. Megmutatjuk, hogy a körülírt kör középpontján kívül más pont nem tehet eleget egyidejűleg mindhárom feltételnek.

Az első feltétel alapján ugyanis a P pont illeszkedik az AB szakasz 2γ szögű látószögkörívére (pontosabban a háromszög belsejébe eső körívre). A második feltétel szerint a P pont rajta van a BC szakasz 2α szögű látószögkörívén is. A két körívnek a B pont közös pontja, így ezen kívül már csak egy közös pontjuk lehet, ez pedig éppen a P pont. Ugyanakkor korábbi megjegyzésünk alapján a körülírt kör középpontja szintén rajta van mindkét körön, ezért P és a középpont szükségképpen megegyezik. Nyilvánvaló, hogy ekkor P a harmadik oldal megfelelő látószögkörívén is rajta van.

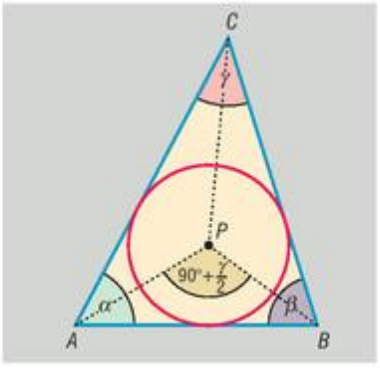


c) A P pont egybeesik az $ABC_\triangle$ beírt körének középpontjával. Előbb megmutatjuk, hogy a beírt kör középpontja eleget tesz a feltételeknek. Valóban, ha P a beírt kör középpontja, akkor az $ABP_\triangle$ szögeinek összege

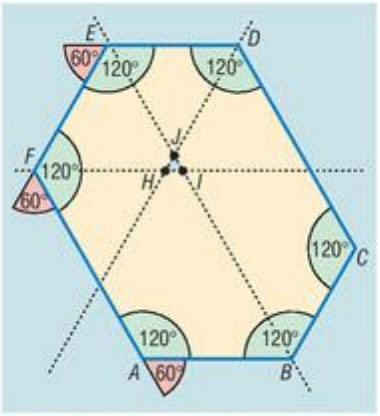
$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+APB\sphericalangle=180^\circ \quad \Rightarrow \quad APB\sphericalangle=90^\circ+\frac{\gamma}{2}.$$

A másik két feltétel teljesülése hasonló módszerrel igazolható.

A *b)* feladatban ismertetett módszer értelemszerű módosításával igazolható, hogy a beírt kör középpontján kívül más pont nem tehet egyidejűleg eleget mindhárom feltételnek.



5580 *a)* A hatszög minden szöge 120°, külső szögei 60°-osak, ezért az ábra jelölései alapján az ED és AB oldalegyenesek egymással $60^\circ+60^\circ+60^\circ=180^\circ$-os szöget zárnak be, ezért $ED \parallel AB$. Ugyanígy bizonyítható, hogy $EF \parallel BC$, és $FA \parallel CD$.



b) Húzzunk párhuzamost az F ponton keresztül AB-vel (és így persze ED-vel is), a B ponton át FA-val (és CD-vel), végül a D ponton át EF-fel (és BC-vel). A keletkező egyenesek a $HIJ_\triangle$-et fogják közre (ld. ábra). Ebben a háromszögben a H csúcsnál lévő belső szög szárai páronként ellentétes irányúak az $ABCDEF$ hatszög E csúcsánál lévő, az ábrán megjelölt külső szög száraival, így a két szög váltószög. Ebből következik, hogy a $HIJ_\triangle$ H csúcsánál 60°-os szög található. A háromszög J csúcsánál található belső szög, valamint a hatszög F csúcsánál lévő külső szög egyállású, ezért a $HIJ_\triangle$ J csúcsánál is 60°-os szög van. Ebből már következik, hogy a $HIJ_\triangle$ szabályos. Látható, hogy az $ABCDEF$ hatszög az $ABIF$, $BCDJ$, $DEFH$ paralelogrammákra, valamint a HIJ szabályos háromszögre bontható.

c) A paralelogramma szemközti oldalai egyenlők, ezért $FI=AB$ és $FH=ED$, amiből következik, hogy $HI=FI-FH=AB-ED$. Hasonlóan: $JI=BJ-BI=CD-AF$ és $JH=HD-JD=FE-BC$. Mivel a $HIJ_\triangle$ oldalai egyenlők, ezért $AB-ED=CD-AF=FE-BC$, így az $ABCDEF$ hatszög szemközti oldalai hosszának különbsége megegyezik.

5581 Az $E'F'C'$, $F'D'A$ és $D'E'B_\triangle$-ekben a koszinusztétel alapján:

$$x^2=\frac{9}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2-2\cdot\frac{3}{2}b\cdot\frac{1}{2}a\cdot\cos(180^\circ-\gamma),$$

$$y^2=\frac{9}{4}c^2+\frac{1}{4}b^2-2\cdot\frac{3}{2}c\cdot\frac{1}{2}b\cdot\cos(180^\circ-\alpha),$$

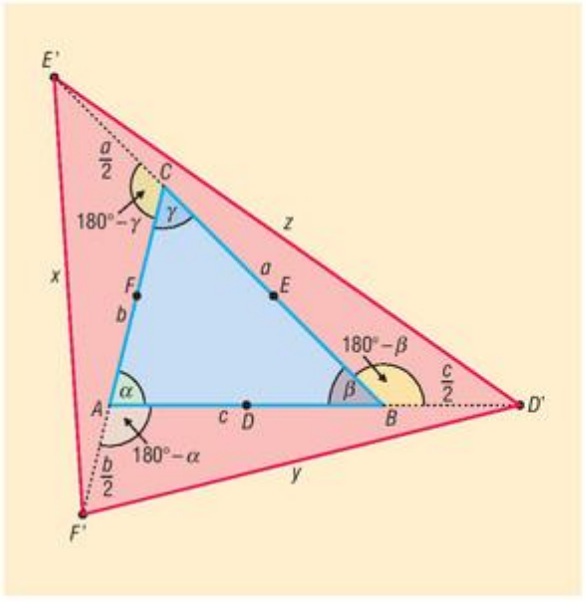
$$z^2=\frac{9}{4}a^2+\frac{1}{4}c^2-2\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2}c\cdot\cos(180^\circ-\beta).$$

Mivel $\cos(180^\circ-x)=-\cos x$, ezért:

$$x^2=\frac{9}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{2}ba\cdot\cos\gamma,$$

$$y^2=\frac{9}{4}c^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{2}cb\cdot\cos\alpha,$$

$$z^2=\frac{9}{4}a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{3}{2}ac\cdot\cos\beta.$$



Ha az $ABC_{\triangle}$ a megfelelő oldalra felírt koszinusztételből kifejezzük az utolsó tagokban szereplő szorzatokat, akkor kapjuk, hogy:

$$ba\cdot\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2},\quad cb\cdot\cos\alpha=\frac{c^2+b^2-a^2}{2},\quad ac\cdot\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}.$$

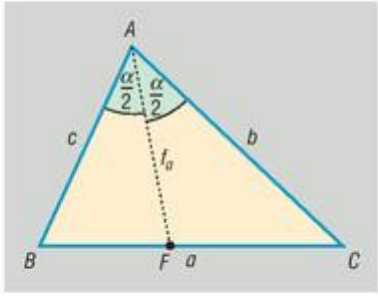
A kapott összefüggéseket visszahelyettesítve az x, y, z oldalak négyzetét tartalmazó sorokba:

$$x^2=3b^2+a^2-\frac{3}{4}c^2,\quad y^2=3c^2+b^2-\frac{3}{4}a^2,\quad z^2=3a^2+c^2-\frac{3}{4}b^2.$$

A megfelelő oldalak összege:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{13}{4}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{13}{4}.$$

5582 *a)* Az A csúcsból induló szögfelező a BC oldalt az F pontban metszi (ld. ábra). Az $ABC_{\triangle}$ területére:



$$T_{ABC}=T_{ABF}+T_{CAF},$$

$$\frac{b\cdot c\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{c\cdot f_a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}+\frac{b\cdot f_a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Mivel $\sin\alpha=2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$, ezért $\sin\frac{\alpha}{2}$-vel történő egyszerűsítés után:

$$bc\cdot 2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=c\cdot f_a+b\cdot f_a,\quad\text{ebből}\quad f_a=\frac{2bc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c},$$

tehát éppen a bizonyítandó összefüggést kapjuk.

b) Az *a)* feladat ábrájának jelöléseit követve a szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{BF}{FC}=\frac{c}{b}\quad\Rightarrow\quad\frac{BF}{a-BF}=\frac{c}{b}\quad\Rightarrow\quad BF=\frac{ac}{b+c}.$$

Az $ABF_{\triangle}$-ben a koszinusztétel alapján:

$$f_a^2=c^2+\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2-2\cdot c\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot\cos ABF\sphericalangle.$$

A fenti összefüggésben szereplő $ABF\sphericalangle$ koszinuszát kifejezhetjük az $ABC_{\triangle}$ oldalai segítségével. Ennek érdekében a koszinusztételt ezúttal az $ABC_{\triangle}$-ben is felírjuk:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos ABF\sphericalangle\quad\Rightarrow\quad\cos ABF\sphericalangle=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Ha a kapott összefüggést a szögfelező négyzetét tartalmazó egyenlőségbe visszahelyettesítjük, akkor:

$$f_a^2=c^2+\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2-2c\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Az egyszerűsítések elvégzése és közös nevezőre hozás után:

$$f_a^2=\frac{c^2\cdot(b+c)^2+a^2c^2-c\cdot(b+c)\cdot\left(a^2+c^2-b^2\right)}{(b+c)^2}.$$

A számlálóban végezzük el a kijelölt műveleteket:

$$f_a^2 = \frac{b^2c^2 + 2bc^3 + c^4 + a^2c^2 - a^2bc - a^2c^2 - c^3b - c^4 + b^3c + b^2c^2}{(b+c)^2} =$$

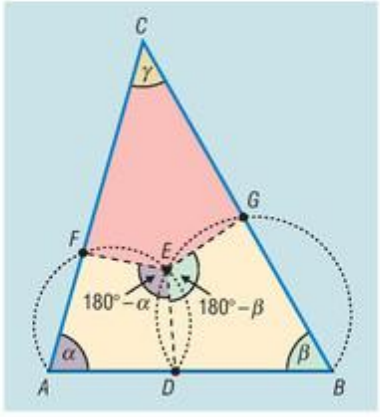
$$= \frac{2b^2c^2 + bc^3 - a^2bc + b^3c}{(b+c)^2}.$$

Vegyük észre, hogy a számlálóban bc kiemelhető, így kapjuk, hogy:

$$f_a^2 = \frac{bc \cdot (2bc + c^2 - a^2 + b^2)}{(b+c)^2} = \frac{bc \cdot ((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2}.$$

Éppen ezt kellett igazolnunk.

5583 Az $EGCF$ négyszög húrnégyszög. Mivel az F pont az ADE háromszög köré írt kör egy pontja, ezért az $ADEF$ négyszög húrnégyszög, így követve az ábra jelöléseit:



$$DEF\sphericalangle = 180° - \alpha.$$

Ugyanígy húrnégyszög a $BDEG$ négyszög is, így:

$$DEG\sphericalangle = 180° - \beta.$$

Ekkor az $EGCF$ négyszögben az E csúcsnál lévő szög:

$$FEG\sphericalangle = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta.$$

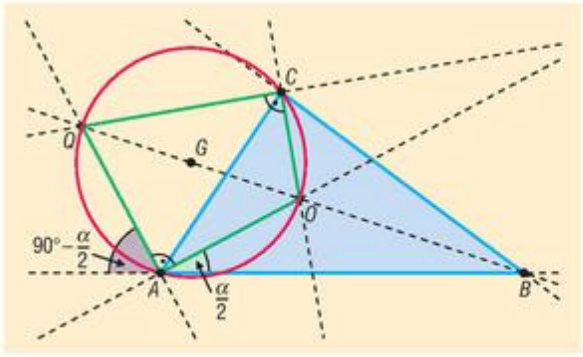
Az $EGCF$ négyszög E és C csúcsainál lévő szögek összege:

$$FEG\sphericalangle + FCG\sphericalangle = \alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

hiszen éppen az ABC háromszög szögeinek összegét kapjuk.

A húrnégyszögek tételének megfordítása alapján az $EGCF$ négyszög valóban húrnégyszög.

5584 *a)* A háromszögbe írt kör O középpontja illeszkedik az A és B csúcsokból induló szögfelezőre, ezért például:



$$OAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

Az AC oldalhoz írható kör Q középpontja illeszkedik a B csúcsnál található belső szög szögfelezőjére, valamint az A és C csúcsoknál található külső szögek szögfelezőjére. Ezért a QA egyenes az AB oldalegyenessel $90° - \frac{\alpha}{2}$ szöget zár be. Ekkor viszont $QAO = 90°$.

Ugyanígy látható be, hogy az $AOCQ$ négyszög C csúcsánál is 90°-os szög van.

A húrnégyszögek tételének megfordítása alapján az $AOCQ$ négyszög húrnégyszög.

Megjegyzés: A háromszög egy belső szögének felezője mindig merőleges a szomszédos külső szög felezőjére.

b) Az $AOCQ$ négyszög köré írt kör egybeesik az OQ szakasz Thalész-körével, ezért G középpontja az OQ szakasz felezőpontja.

Koordináta-geometria – megoldások

5585 *a)* $(27; -14)$; *b)* $\vec{a} \cdot \vec{b} = -29$; *c)* $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{53}$.

d) A két vektor hajlásszöge 142,82°.

e) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$, és $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$. Mindkét vektor hossza 1.

5586 A $\vec{v}$ vektorral párhuzamos vektorok: $\vec{a}$, $\vec{c}$. A $\vec{v}$ vektorra merőleges vektorok: $\vec{b}$, $\vec{d}$.

5587 *a)* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, a két vektor merőleges egymásra.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 13$, a két vektor hegyesszöget zár be egymással.

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$, a két vektor tompaszöget zár be egymással.

5588 *a)* $AB = 4\sqrt{10} \approx 12{,}65$. A felezőpont $F(-1; 1)$, a harmadolópontok pedig $\left(-3; \frac{5}{3}\right)$ és $\left(1; \frac{1}{3}\right)$.

b) $AB = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$. A felezőpont $F(6; 2)$, a harmadolópontok pedig $\left(\frac{16}{3}; 1\right)$ és $\left(\frac{20}{3}; 3\right)$.

5589 *a)* Mivel $AB = 5\sqrt{2}$, $AC = BC = 5$, ezért a háromszög egyenlő szárú. Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű, mivel $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

b) A háromszög súlypontja $S\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

c) Az ABC háromszög köré írt kör egyenlete $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

5590 A keresett pont a háromszög súlypontja, melynek koordinátái $S(3; 2)$.

5591 *a)* A két falu távolsága 7,62 km.

b) A buszmegálló a $\left(-\frac{5}{3}; -1\right)$ koordinátájú pontban található.

c) Az összekötő út egyenlete $-3x + 7y = -2$.

d) Az út csak a C pontban található településen halad keresztül.

e) 23,20°-ot.

5592 *a)* $x + 7y = 11$; *b)* $y + 2 = \sqrt{3}(x - 7)$; *c)* $3x + 4y = -17$; *d)* $2x + 5y = 11$;
e) $y = \frac{7}{3}x$; *f)* $x = -6$; *g)* $3x - 2y = 3$; *h)* $x + 4y = 18$.

5593 *a)* $x + y = 1$; *b)* $y = 3x - 1$; *c)* $y = 1$; *d)* $x - 5y = 13$.

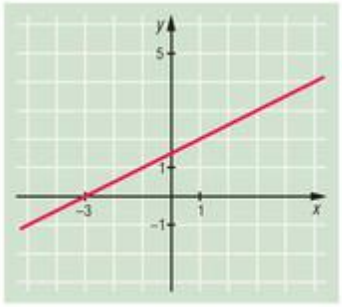
5594 Két ilyen egyenes van. Ezek egyenlete $y = x - 3$, illetve $y = -x - 1$.

5595 *a)* $x + 5y = 22$, illetve $y = 5x + 20$; *b)* $y = 5$, illetve $x = -3$;
c) $x = -3$, illetve $y = 5$; *d)* $y = 4x + 17$, illetve $x + 4y = 17$.

5596 Az adott egyenletű egyenesre merőleges egyenesek: a és b. Az egyenessel csak a d egyenes párhuzamos.

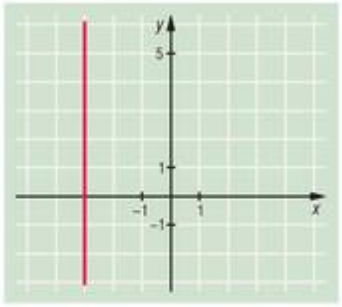
5597 *a)* $(-2; 0)$ és $(5; 0)$; *b)* $(0; -10)$ és $(0; 1)$; *c)* $(-4; -3)$ és $(7; -6)$.

5598 *a)*



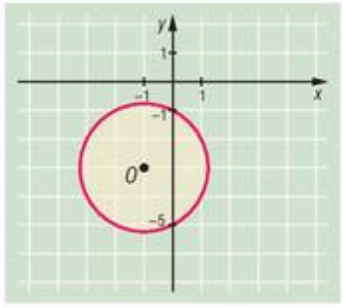
$\vec{v}(2; 1)$, $\vec{n}(1; -2)$,
$m = \frac{1}{2}$, $\alpha \approx 26{,}57°$;

b)



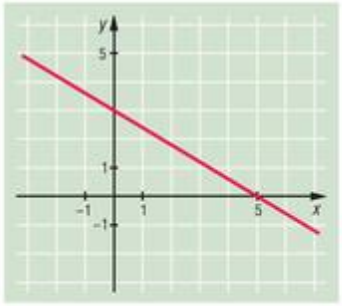
$\vec{v}(0; 1)$, $\vec{n}(1; 0)$,
nincs meredekség, $\alpha = 90°$;

c)



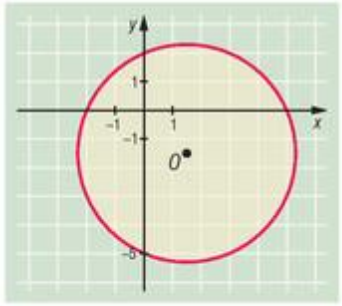
$O(-1; -3)$, $r = \sqrt{5}$;

d)



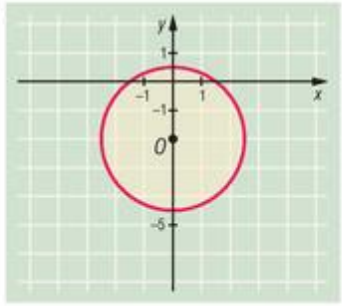
$\vec{v}(5; -3)$, $\vec{n}(3; 5)$,
$m = -\frac{3}{5}$, $\alpha \approx -30{,}96°$;

e)



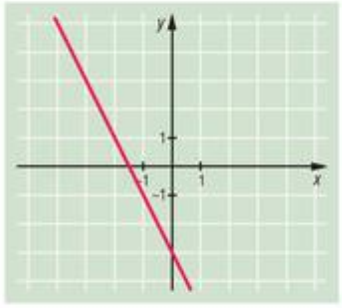
$O\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $r = \sqrt{\frac{29}{2}}$;

f)



$O(0; -2)$, $r = \frac{5}{2}$;

g)



$\vec{v}(1; -2)$, $\vec{n}(2; 1)$,
$m = -2$, $\alpha \approx -63{,}43°$.

5599 *a)* $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$; *b)* $(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 82$; *c)* $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = \frac{41}{4}$;
d) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 52$; *e)* $x^2 + (y + 2)^2 = 10$.

5600 *a)* Az AC és BD átlók felezőpontja egybeesik az origóval, ezért az $ABCD$ négyszög paralelogramma. Az $\overrightarrow{AB}(5; 1)$ és az $\overrightarrow{AD}(-1; 5)$ vektorok skaláris szorzata $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = 0$, ezért a négyszög AB és AD oldalai merőlegesek egymásra, így az $ABCD$ négyszög téglalap. Végül $AB = AD = \sqrt{26}$, így a négyszög valóban négyzet.

b) $(2; 3)$.

c) $5x + y = 0$; $x - 5y = 0$; $2x + 3y = 0$; $-3x + 2y = 0$.

d) A beírt kör egyenlete $x^2 + y^2 = \frac{13}{2}$, a négyzet köré írható kör egyenlete $x^2 + y^2 = 13$.

e) Az adott egyenes áthalad a négyzet középpontján, így annak területét megfelezi. Ebből következően mindkét keletkező trapéz területe 13 egység.

5601 *a)* A test egy körbefordulás alkalmával $10\pi \approx 31{,}42$ egység utat tesz meg.

b) A test C pont kivételével az összes többi ponton áthalad.

c) A test a kört az E pontban érintő egyenesen haladna tovább. Ennek egyenlete $4x - 3y = -16$.

5602 Meghatározzuk mindkét egyenes iránytangensét:

$$4x + ky = 30 \quad \text{esetén} \quad \vec{n}(4; k) \Rightarrow \vec{v}(k; -4) \Rightarrow m = -\frac{4}{k},$$

$$kx + 16y = 28 \quad \text{esetén} \quad \vec{n}(k; 16) \Rightarrow \vec{v}(16; -k) \Rightarrow m = -\frac{k}{16}.$$

Két párhuzamos egyenes iránytangense megegyezik:

$$-\frac{4}{k} = -\frac{k}{16} \Rightarrow k = \pm 8.$$

5603 Meghatározzuk mindkét egyenes iránytangensét:

$$mx - y = 2 \quad \text{esetén} \quad \vec{n}(m; -1) \Rightarrow \vec{v}(1; m) \Rightarrow m = \frac{m}{1},$$

$$5x - 7y = 12 \quad \text{esetén} \quad \vec{n}(5; -7) \Rightarrow \vec{v}(7; 5) \Rightarrow m = \frac{5}{7}.$$

Két merőleges egyenes iránytangensének szorzata –1:

$$m \cdot \frac{5}{7} = -1 \Rightarrow m = -\frac{7}{5}.$$

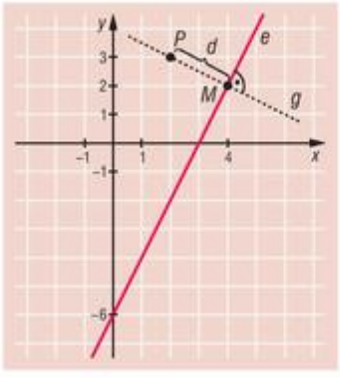
5604 Az ábra jelöléseit használva P pontból merőlegest állítunk az adott e: $2x - y = 6$ egyenesre. Ennek az egyenesnek az egyenlete:

$$g: \; x + 2y = 8.$$

A két egyenes metszéspontja $M(4; 2)$ pont. M és az adott $P(2; 3)$ pont távolsága a kérdés:

$$|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{(4-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}.$$

A pont és az adott egyenes távolsága $\sqrt{5}$ egység.



5605 *a)* Az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása után kapjuk, hogy a két egyenes az $A(4; -2)$ pontban metszi egymást.

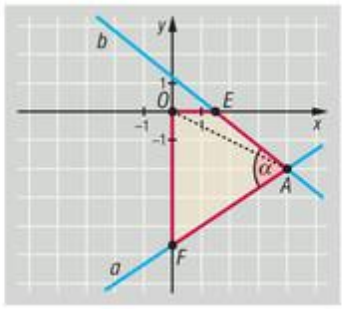
b) Az a egyenes egy normálvektora $\vec{n}_a(-2; 3)$, a b egyenesé $\vec{n}_b(4; 5)$.

A két vektor hossza $|\vec{n}_a| = \sqrt{13}$ és $|\vec{n}_b| = \sqrt{41}$, skaláris szorzatuk $\vec{n}_a \cdot \vec{n}_b = 7$. Ha a két egyenes által bezárt szög α, akkor:

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 72{,}3°.$$

A két egyenes 72,3°-os szöget zár be egymással.

c) Az a egyenes az y tengelyt az $F\left(0;-\frac{14}{3}\right)$ pontban, a b egyenes az x tengelyt az $E\left(\frac{3}{2};0\right)$ pontban metszi. Ha az origót O jelöli, akkor a feladat az $OEAF$ négyszög területét kérdezi. Az OEA háromszög OE oldala $\frac{3}{2}$, az ehhez tartozó magasság 2, ezért:



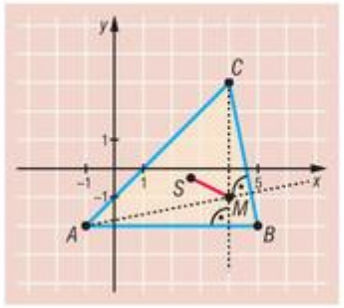
$$T_{OEA}=\frac{\frac{3}{2}\cdot 2}{2}=\frac{3}{2}.$$

Az OFA háromszögben $OF=\frac{14}{3}$, az ehhez tartozó magasság 4, ezért $T_{OFA}=\frac{28}{3}$.

Az $OEAF$ négyszög területe:

$$T_{OEAF}=\frac{3}{2}+\frac{28}{3}=\frac{65}{6}.$$

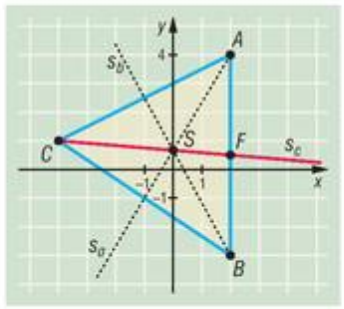
5606 Az $ABC_\triangle$ súlypontja $S\left(\frac{8}{3};-\frac{1}{3}\right)$. Az M magasságpont koordinátáit két magasságvonal metszéspontjaként kereshetjük. Mivel az AB oldal párhuzamos az x tengellyel, ezért a hozzá tartozó magasságvonal egyenlete $x=4$. A BC oldalhoz tartozó magasságvonal egy normálvektora $\overrightarrow{CB}(1;-5)$, egy pontja pedig A, ezért egyenlete $x-5y=9$. A két magasságvonal metszéspontja $M(4;-1)$.



A súlypont és a magasságpont távolsága:

$$SM=\sqrt{\left(4-\frac{8}{3}\right)^2+\left(-1+\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}\quad(\approx 1{,}49).$$

5607 *a)* Vegyük észre, hogy a megadott csúcs koordinátái kielégítik az s_a egyenes egyenletét, ezért az csak a háromszög A csúcsa lehet, így $A(2;4)$. A háromszög S súlypontjának koordinátáit a súlyvonalak egyenletéből álló



$$\left.\begin{aligned} s_a\colon\ -5x+3y&=2\\ s_b\colon\ 11x+6y&=4\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása $x=0$, $y=\frac{2}{3}$, ezért a háromszög S súlypontja $S\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

Mivel az F felezőpont nem illeszkedik az s_a súlyvonalra, ezért biztosan valamelyik A csúcsot is tartalmazó oldal felezőpontja. Az A pont F pontra vonatkozó tükörképének koordinátái $(2;-3)$, erről látható, hogy illeszkedik az s_b súlyvonalra, ezért csak a B pont lehet, tehát $B(2;-3)$.

Ha a C csúcs koordinátái $C(c_1;c_2)$, akkor a súlypont koordinátáira:

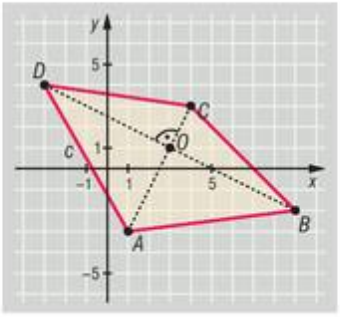
$$\frac{2+2+c_1}{3}=0\quad\text{és}\quad\frac{4+(-3)+c_2}{3}=\frac{2}{3},$$

amiből $C(-4;1)$.

A háromszög csúcsai tehát $A(2;4)$, $B(2;-3)$, $C(-4;1)$.

b) A harmadik súlyvonal egyenlete s_c: $x+12y=8$.

5608 *a)* Az AC egyenes egyenlete $y = 2x - 5$.



b) A deltoid tulajdonságai alapján a hiányzó B csúcs illeszkedik a D ponton átmenő, AC egyenesre merőleges egyenesre, továbbá az átlók O metszéspontja éppen a BD átló felezőpontja.

A D pontból az AC egyenesre állított merőleges egyenes egyenlete $x + 2y = 5$. Az O pont koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5 &= y \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása után $O(3; 1)$ adódik. Korábbi megjegyzésünk alapján az O pont a BD szakasz felezőpontja, ezért ha $B(x; y)$, akkor:

$$\frac{x + (-3)}{2} = 3 \quad \text{és} \quad \frac{y + 4}{2} = 1,$$

ahonnan $B(9; -2)$.

c) A deltoid területe az átlók szorzatának fele, azaz:

$$T_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}.$$

Mivel

$$AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \quad \text{és} \quad BD = \sqrt{180} = 6\sqrt{5},$$

ezért:

$$T_{ABCD} = \frac{3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{2} = 45 \text{ területegység.}$$

5609 A helyesen kitöltött táblázat:

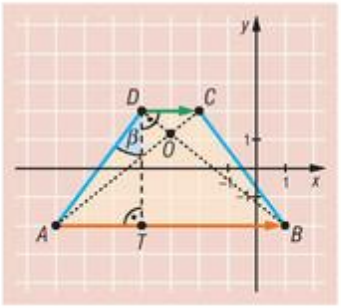
Állítás	Igaz	Hamis
Az $ABCD$ négyszög trapéz.	X	
Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög.	X	
Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.	X	
Az $ABCD$ négyszögnek minden szöge kisebb, mint 120°.		X
A négyszög átlói a $\left(-3; \frac{3}{2}\right)$ pontban metszik egymást.		X
Az átlók metszéspontja az AC átló C-hez közelebbi negyedelőpontja.		X

- Az $ABCD$ négyszög trapéz, mert $\overrightarrow{AB}(8; 0)$ és $\overrightarrow{DC}(2; 0)$, vagyis $\overrightarrow{AB} = 4 \cdot \overrightarrow{DC}$. Mivel ez azt is jelenti, hogy a két vektor párhuzamos egymással, ezért a négyszög valóban trapéz, amelyben AB és CD az alapok.
- Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, hiszen $AD = BC = 5$, ezért a trapéz szárai egyenlő hosszúak (és nem paralelogramma), így húrtrapézról van szó.
- Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.

  Mivel

  $$AD + BC = 5 + 5 = 10, \quad \text{valamint} \quad AB + CD = 8 + 2 = 10,$$

  ezért a négyszög szemközti oldalainak összege megegyezik. Az érintőnégyszögek tételének megfordítása alapján $ABCD$ valóban érintőnégyszög.



- Az $ABCD$ négyszögnek van 120°-nál nagyobb szöge. Ha a trapéz D csúcsából induló magasságának talppontja T, akkor az ATD derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{AT}{TD} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 36{,}87°.$$

Az $ABCD$ trapéz D csúcsánál lévő szög:

$$ADC\sphericalangle = \beta + 90° \geq 36{,}87° + 90° = 126{,}87°,$$

valóban 120°-nál nagyobb. Megjegyezzük, hogy a kerekítés miatt használtunk egyenlőtlenséget.

- A négyszög átlói nem a $\left(-3; \frac{3}{2}\right)$ pontban metszik egymást. Az $ABO_\triangle$ és a $COD_\triangle$ hasonló, hasonlóságuk aránya a trapéz alapjainak aránya, azaz $\lambda = \frac{1}{4}$.

Ebből következik, hogy a trapéz átlói 1 : 4 arányban osztják egymást, azaz az átlók metszéspontja éppen a CA szakasz C-hez közelebbi ötödölőpontja.

Az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggés alapján:

$$O\left(\frac{1\cdot(-7)+4\cdot(-2)}{5}; \frac{1\cdot(-2)+4\cdot 2}{5}\right), \quad \text{azaz} \quad O\left(-3; \frac{6}{5}\right).$$

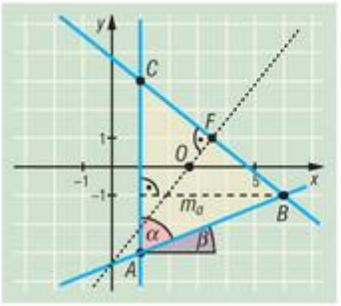
A kapott pont nem egyezik meg a $\left(-3; \frac{3}{2}\right)$ ponttal.

- Az elmondottakból következik, hogy az O pont nem negyedelőpontja az AC átlónak.

5610 *a)* Az AC és BC egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása után kapjuk, hogy $C(1; 3)$. Az AC és AB egyenesek metszéspontja $A(1; -3)$. Végül a BC és AB egyenesek közös pontja $B(6; -1)$.

Az $ABC_\triangle$ csúcsainak ismeretében a távolságok már könnyen kiszámolhatók:

$$AC = 6 \text{ km}, \quad AB = \sqrt{29} \approx 5{,}4 \text{ km}, \quad BC = \sqrt{41} \approx 6{,}4 \text{ km}.$$



b) A feladat az $ABC_\triangle$ A csúcsánál található α szöget kérdezi. Az AB egyenes egyenletéből leolvasható az egyenes meredeksége: $m_{AB} = \frac{2}{5}$, azaz az ábra jelölései alapján $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{5}$.

Az AB egyenes irányszöge ebből következően $\beta = 21{,}8°$.

Mivel a háromszög AC oldalegyenese az x tengellyel 90°-os szöget zár be, ezért $\alpha = 90° - \beta \approx 68{,}2°$.

Az A településen találkozó utak 68,2°-os szögben metszik egymást.

c) Az $ABC_\triangle$ területét legkönnyebb a b oldal, valamint a hozzá tartozó magasság segítségével kiszámolni. Mivel $b = 6$ km és $m_b = 5$ km, ezért a három útszakasz által közrefogott terület 15 km^2.

d) A keresett pont az $ABC_\triangle$ köré írható kör O középpontja. Az O pont koordinátáit az oldalfelező merőlegesek metszéspontjaként számolhatjuk ki.

Az AC oldalfelező merőlegese egybeesik az x tengellyel, ezért egyenlete $y = 0$.

A BC oldal felezőpontja $F\left(\frac{7}{2};1\right)$. Az oldalfelező merőleges egy normálvektora $\overrightarrow{BC}(-5;4)$, így egyenlete:

$$-5x+4y=-\frac{27}{2}.$$

A megfelelő egyenletrendszer megoldása után $O\left(\frac{27}{10};0\right)$.

A szeméttelep helyét az $O\left(\frac{27}{10};0\right)$ pont jelöli ki a koordináta-rendszerben.

5611 Az elsőként adott kör egyenlete:

$$(x+2)^2+(y+3)^2=32,$$

ezért középpontja az $O_1(-2;-3)$ pont, sugara $r_1=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

A másodikként adott kör egyenlete:

$$(x-4)^2+(y-3)^2=8,$$

ezért középpontja az $O_2(4;3)$ pont, sugara $r_2=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Mivel a két kör középpontjának távolságára $O_1O_2=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ teljesül, ezért $O_1O_2=r_1+r_2$, amiből következik, hogy a két kör érinti egymást.

A két kör E érintési pontja az O_1O_2 szakaszt a sugarak arányában osztja, azaz:

$$\frac{O_1E}{EO_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2.$$

Ez azt jelenti, hogy az E pont az O_1O_2 szakasz O_2-höz közelebbi harmadolópontja, ezért:

$$E\left(\frac{1\cdot(-2)+2\cdot4}{3};\frac{1\cdot(-3)+2\cdot3}{3}\right).$$

A két kör közös pontja az $E(2;1)$ pont.

5612 *a)* Az egyenes egyenletéből $y=x+1$, amit a kör egyenletébe visszahelyettesítve:

$$x^2+(x+1)^2-2x-2(x+1)=11.$$

A műveletek elvégzése után: $2x^2-2x-12=0$. Az egyenlet megoldásai: $x_1=3$ és $x_2=-2$.

A metszéspontok $A(3;4)$ és $B(-2;-1)$.

b) A k kör egyenlete $(x+1)^2+(y+4)^2=25$, az e egyenesé $x+7y=-4$.

Az egyenes egyenletéből $x+1=-3-7y$, amit a kör egyenletébe helyettesítve:

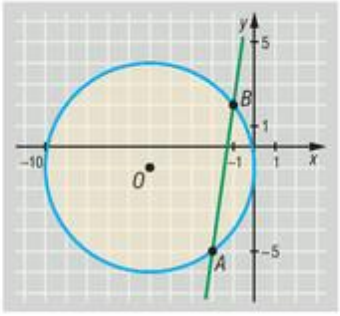
$$(-3-7y)^2+(y+4)^2=25.$$

A műveletek elvégzése után: $50y^2+50y=0$. Az egyenlet megoldása után kapjuk a metszéspontok koordinátáit: $A(-4;0)$ és $B(3;-1)$.

5613 *a)* A kör egyenletét átalakítva:

$$(x+5)^2+(y+1)^2=25,$$

ezért középpontja az $O(-5;-1)$ pont, sugara $r=5$.



b) A metszéspontok koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned}(x+5)^2+(y+1)^2&=25\\7x+9&=y\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják.

Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve a következő egyenlethez jutunk:

$$(x+5)^2+(7x+10)^2=25,$$
$$x^2+3x+2=0.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1=-1$ és $x_2=-2$. Az egyenes a kört az $A(-2;-5)$ és a $B(-1;2)$ pontokban metszi.

c) A kör sugara merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra. Ebből következik, hogy az A pontbeli érintőnek az $\overrightarrow{OA}(3;-4)$ vektor egy normálvektora, így az érintő egyenes egyenlete:

$$3x-4y=14.$$

A B pontbeli érintő egy normálvektora az $\overrightarrow{OB}(4;3)$ vektor, egyenlete pedig $4x-3y=2$.

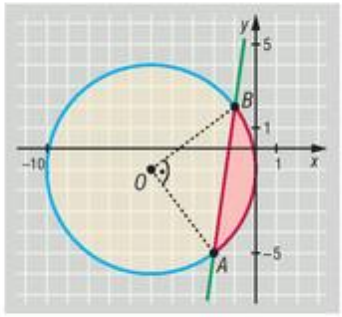
d) Az AB húr hossza $AB=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. Az $OAB_\triangle$-ben:

$$OA^2+OB^2=5^2+5^2=50, \quad \text{ezért} \quad OA^2+OB^2=AB^2.$$

Pitagorasz tételének megfordítása alapján az $OAB_\triangle$ derékszögű. Megjegyezzük, hogy ezt onnan is láthatjuk, hogy $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, ezért a két vektor merőleges egymásra.

Ennek megfelelően a kérdéses körszelet területe egy negyedkör és egy derékszögű háromszög területének különbsége, azaz:

$$T_{\text{körszelet}}=\frac{5^2\cdot\pi}{4}-\frac{5\cdot5}{2}=\frac{25}{4}\cdot(\pi-2)\approx 7{,}13.$$

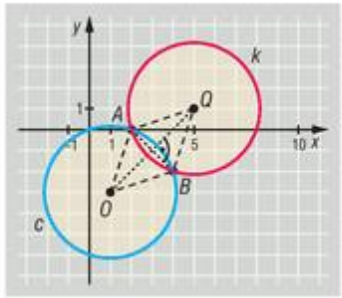


5614 *a)* A c kör egyenletét átalakítva $(x-1)^2+(y+3)^2=10$, amiből a kör középpontja $O(1;-3)$, sugara $r=\sqrt{10}$. Ha az O pontot a megadott vektorral eltoljuk, akkor a $Q(5;1)$ pontot kapjuk, és mivel az eltolás a kör sugarát nem változtatja meg, ezért a k kör egyenlete $(x-5)^2+(y-1)^2=10$. A két kör metszéspontjait a körök egyenletéből álló

$$\left.\begin{aligned}(x-1)^2+(y+3)^2&=10\\(x-5)^2+(y-1)^2&=10\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják. A megfelelő oldalak különbsége $8x+8y-16=0$, amiből $y=2-x$. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=2$, $y_1=0$ és $x_2=4$, $y_2=-2$.

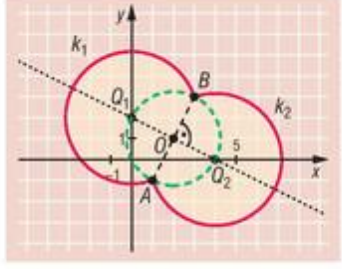
A két kör közös pontjai $A(2;0)$ és $B(4;-2)$.



b) Az $AOBQ$ négyszög minden oldala $r=\sqrt{10}$, ezért a négyszög rombusz. Az átlók hossza $OQ=4\sqrt{2}$ és $AB=2\sqrt{2}$. Az $AOBQ$ rombusz területe az átlók szorzatának a fele, azaz:

$$T=\frac{4\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}{2}=8.$$

5615 A látószögkörívekre vonatkozó tétel alapján az ilyen tulajdonságú pontok halmaza két, az AB szakaszra nézve szimmetrikusan elhelyezkedő körív (melyeket az ábrán pirossal jelöltünk). Ha a látókörívek pontjaiból az AB szakasz 45°-os szög alatt látszik, akkor a középponti és kerületi szögek tétele alapján a látókörívek középpontjából az AB szakasz 90°-os szög alatt látszik. Ezért a keresett körívek középpontja illeszkedik az AB szakasz Thalész-körére, valamint természetesen a szakaszfelező merőlegesére is.



A körívek középpontjának koordinátáit (az ábrán Q_1 és Q_2) a két említett alakzat metszéspontjaként számolhatjuk ki.

Az AB szakasz felezőpontja (egyben Thalész-körének középpontja) $O(2; 1)$. A szakaszfelező merőleges egyenlete $x + 2y = 4$.

A megfelelő Thalész-kör egyenlete $OA = \sqrt{5}$ miatt $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$. A szakaszfelező merőleges egyenletéből $x = 4 - 2y$, amit a Thalész-kör egyenletébe helyettesítve, majd az első tagból 4-et kiemelve adódik, hogy:

$$(2-2y)^2 + (y-1)^2 = 5,$$
$$4 \cdot (1-y)^2 + (y-1)^2 = 5,$$
$$5 \cdot (y-1)^2 = 5.$$

A kapott egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $y = 2$ vagy $y = 0$. A két látószögkörív középpontja tehát $Q_1(0; 2)$ és $Q_2(4; 0)$.

A látószögkörívek sugara ugyanakkora: $r = Q_1A = Q_2A = \sqrt{10}$, egyenletük:

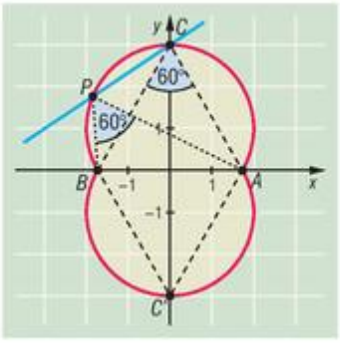
$$k_1\colon\ x^2 + (y-2)^2 = 10, \qquad k_2\colon\ (x-4)^2 + y^2 = 10.$$

A feladat feltételeinek a k_1 körvonalnak azok a pontjai felelnek meg, amelyek az AB egyenes „felett" vannak. Mivel az AB egyenes egyenlete $y = 2x - 3$, ezért a k_1 körnek azok a pontjai tartoznak a látószögkörívhez, amelyek koordinátáira $y > 2x - 3$ teljesül.

A k_2 körnek azok a pontjai felelnek meg, amelyek az AB egyenes „alatt" vannak, azaz amelyek koordinátáira $y < 2x - 3$ teljesül.

Megjegyzés: A piros látókörívek kiegészítő köríveiből az AB szakasz 135°-os szög alatt látszik.

5616 Ha egy P pontból az AB szakasz 60°-os szög alatt látszik, akkor P illeszkedik az AB szakaszhoz tartozó 60°-os látószögkörívek valamelyikére.



Ha a C pont az AB szakasz végpontjaival szabályos háromszöget alkot, akkor a C pontból az AB szakasz biztosan 60°-os szög alatt látszik.

E két megállapításból következik, hogy az AB szakasz 60°-os látószögkörívei megegyeznek a szabályos $ABC_\triangle$ köré írható körök megfelelő köríveivel. Két olyan pont van, amelyek az A és B pontokkal szabályos háromszöget fognak közre. Mindkettő illeszkedik az y tengelyre, továbbá a két pont egymás tükörképe az x tengelyre vonatkozóan. Az y tengely pozitív felére illeszkedő megfelelő pont második koordinátája éppen a szabályos háromszög magasságával egyenlő.

Mivel $AB = 2\sqrt{3}$, amiből a háromszög magassága $m = \dfrac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$, ezért a megfelelő szabályos háromszög harmadik csúcsa $C(0; 3)$. Az y tengely negatív felére illeszkedő csúcs koordinátái $C'(0; -3)$ (ld. ábra).

A szabályos háromszög köré írható kör középpontja egybeesik súlypontjával, sugara pedig a magasság $\dfrac{2}{3}$ része, ezért az $ABC_\triangle$ köré írható kör középpontja $O(0; 1)$, sugara 2, egyenlete:

$$k_1\colon\ x^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Hasonlóan az $ABC'_\triangle$ köré írt kör egyenlete:

$$k_2\colon\ x^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Az AB szakasz 60°-os látószögkörívei: a k_1 kör x tengely „feletti" íve, illetve a k_2 kör x tengely „alatti" íve.

Világos, hogy ez utóbbi nem metszi az adott $-2x + 3y = 9$ egyenletű egyenest, ezért az egyenes azon pontjai, amelyekből az AB szakasz 60°-os szög alatt látszik, csakis a k_1 körön lehetnek. Az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáit ennek megfelelően az

$$\left.\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= 4 \\ -2x + 3y &= 9 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják: $x_1 = 0$, $y_1 = 3$ és $x_2 = -\frac{24}{13}$, $y_2 = \frac{23}{13}$.

Két olyan pont van az adott egyenletű egyenesen, amelyekből az AB szakasz 60°-os szög alatt látszik, ezek koordinátái: $C(0; 3)$ és $P\left(-\frac{24}{13}; \frac{23}{13}\right)$.

5617 *a)* A k kör egyenlete $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$, tehát a kör középpontja $O(2; -2)$, sugara pedig 1.

Az érintők egyenletét $y = mx - 4$, illetve a kényelmesebb $mx - y - 4 = 0$ alakban kereshetjük. Mindkét érintő $r = 1$ egység távolságra halad a kör O középpontjától, ezért a pont és egyenes távolságára vonatkozó formula alapján:

$$\left|\frac{2m + 2 - 4}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 1, \quad \text{azaz} \quad \left|\frac{2m-2}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 1.$$

Ha mindkét oldalt négyzetre emeljük, akkor:

$$\frac{(2m-2)^2}{m^2+1} = 1, \quad \text{ebből} \quad 3m^2 - 8m + 3 = 0.$$

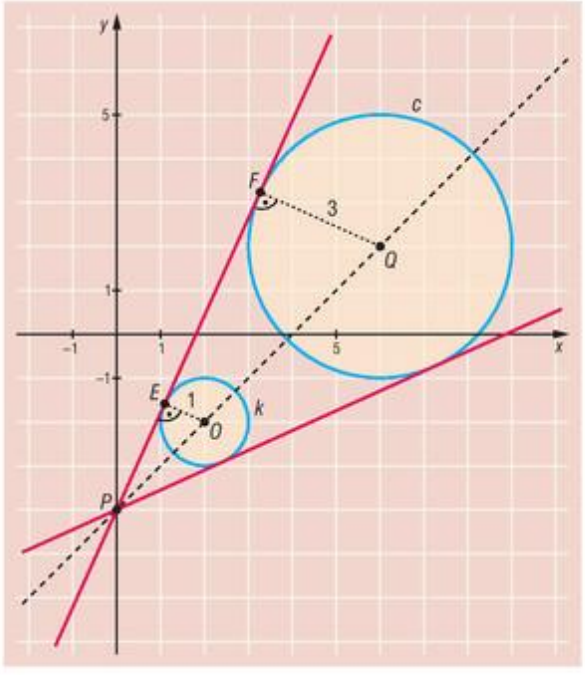
Az egyenlet megoldásai: $m_1 = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ és $m_2 = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$.

A P pontból a k körhöz húzható érintők egyenlete:

$$y = \frac{4+\sqrt{7}}{3} \cdot x - 4 \quad \text{és} \quad y = \frac{4-\sqrt{7}}{3} \cdot x - 4.$$

b) A feltételek alapján a c kör sugara 3. A két kört és közös érintőiket az ábra mutatja. Ha az egyik érintő érintési pontjait E és F, a c kör középpontját pedig Q jelöli, akkor a $POE_\triangle$ és $PQF_\triangle$ hasonló, megfelelő oldalaik arányára pedig:

$$\frac{PO}{PQ} = \frac{1}{3}.$$



A kapott egyenlőségből leolvasható, hogy az O pont éppen a PQ szakasz P-hez közelebbi harmadolópontja, ezért ha $Q(x; y)$, akkor az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggés alapján:

$$\frac{2\cdot 0 + 1\cdot x}{3} = 2 \quad \text{és} \quad \frac{2\cdot(-4) + 1\cdot y}{3} = -2.$$

Az egyenletek megoldása után a Q pontra $Q(6; 2)$ adódik. A c kör egyenlete:

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

c) A két kört és a közös belső érintőket az ábra mutatja. Ha az ábra jelöléseit követve a kialakuló érintési pontokat ezúttal is E és F jelöli, akkor a $POE_{\triangle}$ és $PQF_{\triangle}$ ismét hasonló, a megfelelő oldalaik arányára ezúttal is:

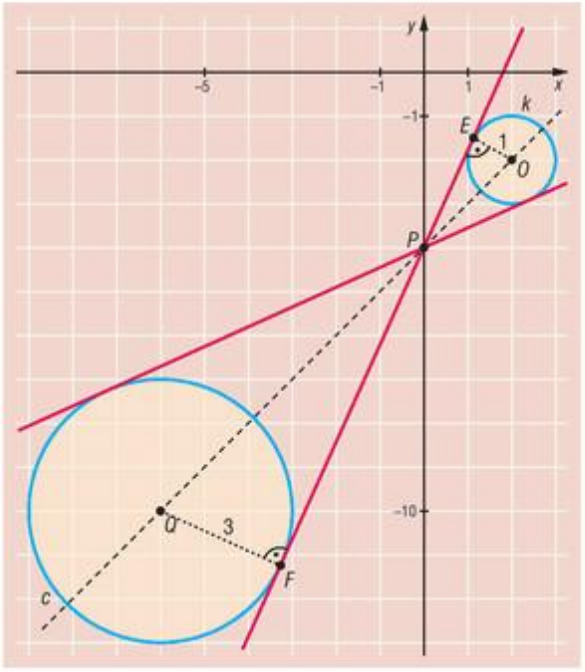
$$\frac{PO}{PQ}=\frac{1}{3}.$$

Ezúttal azonban a P pont elválasztja az O és Q pontokat, ezért P az OQ szakasz O-hoz közelebbi negyedelőpontja. Ha a Q pont koordinátái ismét $Q(x; y)$, akkor:

$$\frac{1\cdot x+3\cdot 2}{4}=0 \quad \text{és} \quad \frac{1\cdot y+3\cdot(-2)}{4}=-4.$$

Az egyenletek megoldása után a Q pontra $Q(-6; -10)$ adódik. A c kör egyenlete:

$$(x+6)^2+(y+10)^2=9.$$



5618 *a)* A parabola egyenletét átalakítva $y=(x-3)^2-2$. Az egyenletből leolvasható, hogy a parabola tengelypontja a $C(3; -2)$ pont, paramétere $p=\frac{1}{2}$, fókuszpontjának koordinátái $F\left(3; -\frac{7}{4}\right)$.

b) A parabola vezéregyenesének egyenlete v: $y=-\frac{9}{4}$.

c) Az A pont illeszkedik a parabolára, ezért az érintő meredeksége az f: $x\mapsto x^2-6x+7$ függvény deriváltjának $x_0=1$ helyen vett helyettesítési értéke. Mivel $f'(x)=2x-6$, ezért az érintő meredeksége -4, egyenlete: $y-2=-4(x-1)$, vagy átrendezve: $y=-4x+6$.

d) Az origó körül +90°-kal elforgatott parabola tengelypontját úgy kapjuk, hogy a C pontot +90°-kal elforgatjuk az origó körül. A elforgatott parabola tengelypontja $C'(2; 3)$. A kapott parabola paramétere nem változik, tengelye viszont az x tengellyel párhuzamos („balra nyílik"), ezért egyenlete: $x-2=-(y-3)^2$, vagy átrendezve: $x=-y^2+6y-7$.

Az origó körül −90°-kal elforgatott parabola tengelypontja $C''(2; 3)$. A kapott parabola (mely „jobbra nyílik") egyenlete: $x+2=(y+3)^2$, vagy átrendezve: $x=y^2+6y+7$.

5619 *a)* A mozgó test pályájának egyenletét $y=m(x-1)-6$ alakban kereshetjük. A feltételek szerint az egyenes a parabola egyik érintője, ezért az

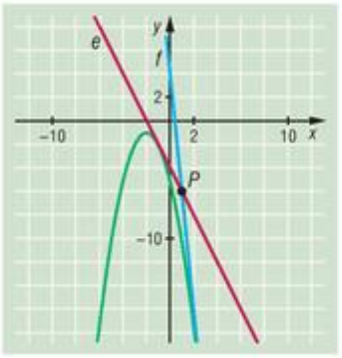
$$\left.\begin{aligned} y&=-x^2-4x-5\\ y&=m\cdot(x-1)-6\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer diszkriminánsa 0. Az y változót kiküszöbölve $m(x-1)-6=-x^2-4x-5$, majd rendezve kapjuk, hogy:

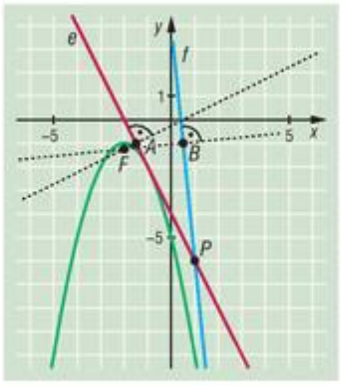
$$x^2+(4+m)x-(1+m)=0.$$

A kapott egyenlet diszkriminánsa $(4+m)^2+4(1+m)=0$. A műveletek elvégzése után az $m^2+12m+20=0$ egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai: $m_1=-2$ és $m_2=-10$. Eredményeink alapján két olyan egyenes van, amelyeken a test mozoghat. Ezeket az ábrán pirossal, illetve kékkel jelöltük, egyenletük pedig:

$$e\colon\ y=-2x-4, \quad \text{illetve} \quad f\colon\ y=-10x+4.$$



b) A parabola egyenletét átalakítva $y=-(x+2)^2-1$, amiből látható, hogy a fókuszpont $F\left(-2;-\frac{5}{4}\right)$.

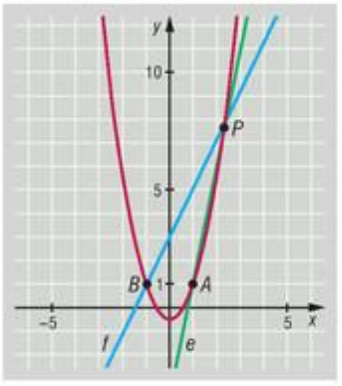


Amikor a P pont a legközelebb volt az F fókuszponthoz, akkor rajta volt az F-ből a megfelelő érintőre emelt merőlegesen.

Az F pontból az e érintőre emelt merőleges egyenes egyenlete $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$. A merőleges az érintőből az $A\left(-\frac{3}{2};-1\right)$ pontot metszi ki, ezért ha a test az e érintőn mozog, akkor az A pontban volt a fókuszponthoz a legközelebb.

Az F pontból az f érintőre emelt merőleges egyenes egyenlete $y=\frac{1}{10}x-\frac{21}{20}$. A merőleges az f érintőből a $B\left(\frac{1}{2};-1\right)$ pontot metszi ki, ezért amennyiben a test az f érintőn mozog, akkor a B pontban volt a fókuszponthoz a legközelebb.

5620 Ha az ábrának megfelelően az e egyenes meredekségét m jelöli, akkor egyenlete: $y-1=m(x-1)$. Mivel az f egyenes meredeksége $m-3$, ezért egyenlete: $y-1=(m-3)(x+1)$. A két egyenes metszéspontjának koordinátáit az



$$\left.\begin{aligned} y-1&=m\cdot(x-1)\\ y-1&=(m-3)\cdot(x+1)\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Mivel a két egyenlet bal oldalán ugyanaz a kifejezés áll, ezért a jobb oldalak is megegyeznek, így $m(x-1)=(m-3)(x+1)$.

A műveletek elvégzése, valamint rendezés után: $x=\frac{2m-3}{3}$.

A kapott értéket az első egyenletbe visszaírva, majd y értékét kifejezve kapjuk, hogy

$$y=\frac{2m^2-6m+3}{3},$$

ezért az e és f egyenesek P metszéspontjának koordinátái:

$$P\left(\frac{2m-3}{3};\frac{2m^2-6m+3}{3}\right).$$

A P pont első koordinátájából a meredekséget kifejezve $m=\frac{3x+3}{2}$, tehát a P pont második koordinátája:

$$y=\frac{2\cdot\left(\frac{3x+3}{2}\right)^2-6\cdot\frac{3x+3}{2}+3}{3}.$$

A műveletek elvégzése után $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$ adódik.

Eredményünk alapján az e és f egyenesek P metszéspontja illeszkedik az $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$ egyenletű parabolára.

Számításaink „megfordíthatók”, ezért a parabola minden pontja egy-egy e, illetve f egyenes metszéspontja.

12.6. ÉRETTSÉGI GYAKORLÓ FELADATSOROK

KÖZÉPSZINTŰ FELADATSOROK

1. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $x(x+2)$.
2. A háromszög köré írható kör sugara 2,6 cm.
3. Körtéből 9 kg-ot, almából 18 kg-ot, banánból pedig 54 kg-ot adott el.
4. A hűtőszekrény 52,5 literes.
5. A bank 3000 Ft kamatadót vont le.
6. 100100101001_2.
7. $x \mapsto -(x-2)^2+3$.
8. $(x-1)^2+(y-1)^2=10$.
9. $\frac{70}{200}=0{,}35$.
10. A nagyváros lakossága 4 év eltelte után haladja meg a 210000 főt.
11. *a)* Nem. *b)* Igen. *c)* Igen.
12. $\alpha = 2$ radián vagy $\alpha \approx 114{,}59°$.

1. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. *a)* A $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ behelyettesítéssel $\sin x$-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$\sin^2 x = 1-\sin^2 x+5\sin x+2, \quad \text{ahonnan} \quad \sin x = 3 \quad \text{vagy} \quad \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Mivel $-1 \le \sin x \le 1$ minden x-re teljesül, ezért a $\sin x = 3$ egyenletnek nincsen megoldása.

A $\sin x = -\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai: $x_1 = \frac{7\pi}{6}+2k\pi$ és $x_2 = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A kapott megoldások kielégítik az egyenletet.

b) Látható, hogy az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Mivel egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

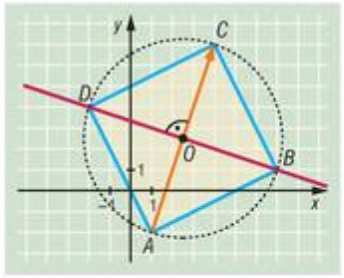
$$\sqrt{x^2+5}=3, \quad \text{illetve} \quad \sqrt{x^2+5}=-\frac{1}{2}.$$

A második egyenlet azonban egyetlen x-re sem teljesül, mivel a bal oldalon egy nemnegatív, míg a jobb oldalon egy negatív szám áll. Ebből adódóan

$$\sqrt{x^2+5}=3 \Rightarrow x^2=4, \quad \text{ennek megoldásai:} \quad x_1=2 \text{ és } x_2=-2.$$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy mindkét szám megoldása az egyenletnek.

14. *a)* A négyzet középpontja az AC szakasz O felezőpontja, melynek koordinátái az A és C pontok ismeretében könnyen számolhatók: $O\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$.



A BD átlót tartalmazó egyenes merőleges az $\overrightarrow{AC}(3;9)$ vektorra, továbbá tartalmazza az O pontot, így normálvektoros egyenlete:

$$3x+9y=3\cdot\frac{5}{2}+9\cdot\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad x+3y=10.$$

b) A négyzet hiányzó csúcsai illeszkednek a BD egyenesre, valamint az O középpontú,

$$OA=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2+\left(\frac{5}{2}+2\right)^2}=\sqrt{\frac{90}{4}} \text{ sugarú körre.}$$

A négyzet köré írt kör egyenlete:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{45}{2}.$$

A BD egyenes egyenletéből $x=10-3y$, amit a kör egyenletébe helyettesítve:

$$\left(\frac{15}{2}-3y\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{45}{2} \quad\Rightarrow\quad y^2-5y+4=0.$$

A fenti egyenlet megoldásai: $y_1=4$ és $y_2=1$, ebből pedig $x_1=-2$ és $x_2=7$.

A négyzet hiányzó csúcsainak koordinátái $B(7;1)$ és $D(-2;4)$.

15. *a)* A szépirodalmi könyvek számát $7x$, az albumok számát $5x$ alakban kereshetjük.

A feltételek alapján a műszaki könyvek száma $1{,}8\cdot(5x)=9x$.

Ha a 15 könyvből minden polcra ugyanannyit helyezünk, akkor a polcokon rendre $7x+5$, $5x+5$, illetve $9x+5$ könyv lesz, továbbá például $(7x+5):(5x+5)=4:3$.

A felírt arányból $x=5$. Eszerint Kristófnak összesen 35 szépirodalmi könyve, 25 albuma és 45 műszaki könyve van.

Az ellenőrzés mutatja, hogy ekkor műszaki könyvből valóban 1,8-szer annyi van, mint albumból, továbbá ha minden polcra 5 könyvet helyezünk, akkor a könyvek számának aránya $4:3:5$ lesz.

b) Kristóf $\binom{25}{3}=2300$-féleképpen tud három albumot kölcsönadni Károlynak.

c) Ha Kristóf valóban megveszi a 15 kiszemelt könyvet, akkor összesen 120 könyvet tárol majd a polcokon.

1. Feladatsor II. rész /*B* – megoldások

16. *a)* Az 5 doboz $5!=120$-féleképpen helyezhető egymás mellé.

b) Az első gyermek 5-féle, a második 4-féle, a harmadik 3-féle színű lufit kaphat. Az esetek száma $5\cdot4\cdot3=60$.

c) Az árus az első órában összesen 14 lufit adott el. A lufik átlagára euróban:

$$\frac{3\cdot1+3\cdot1{,}2+2\cdot1{,}4+4\cdot1{,}5+2\cdot2}{14}=\frac{19{,}4}{14}\approx1{,}39.$$

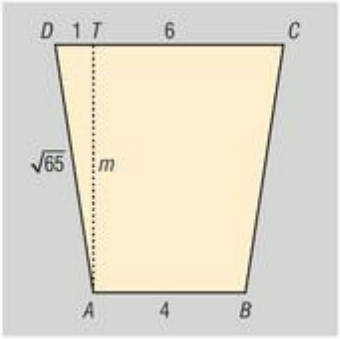
Az árus átlagosan 139 centért adta a lufikat az első órában.

d) A lufikból 19,4 € az árus bevétele. A lufi beszerzési ára 0,4 €, ez 14 lufi esetén 5,6 €, ezért a lufis haszna 13,8 €. Ez körülbelül 246,4%-os haszonnak felel meg.

e) Az eladott 14 lufi között vannak olyanok, amelyeket nem tudunk megkülönböztetni (az azonos színűek), így a lufik ismétléses permutációjáról van szó. Az esetek száma:

$$\frac{14!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 2!} = 25\,225\,200.$$

17. *a)* A gyertya tengelymetszetét az ábra mutatja. A csonka kúp m magasságát az ATD derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével számolhatjuk: $m = 8$ cm.

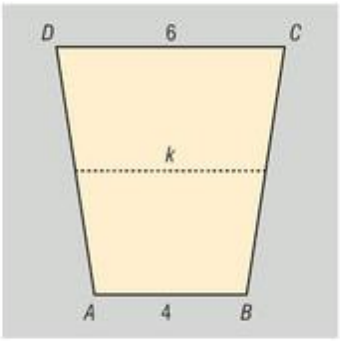


Mivel a csonka kúp alapkörének sugara 2 cm, fedőkörének sugara pedig 3 cm, ezért térfogata:

$$V = \frac{8\pi}{3}\cdot\left(2^2 + 2\cdot 3 + 3^2\right) \approx 159{,}17.$$

A gyertya térfogata 159,17 cm^3.

b) Ha a gyertyát az alapokkal párhuzamos síkkal két részre vágjuk, akkor két csonka kúp alakú rész keletkezik, ahol mindkét keletkező trapéz magassága 4 cm, k éppen az $ABCD$ trapéz középvonala, így hossza a két alap számtani közepe, azaz $k = 5$ cm.



Ha V_1 a kisebb, V_2 a nagyobb rész térfogatát jelöli, akkor arányukra:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4\pi}{3}\cdot\left(2^2 + 2\cdot\frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)}{\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}\cdot 3 + 3^2\right)} = \frac{61}{91} \approx 0{,}67.$$

A keletkező két rész térfogatának aránya $\frac{61}{91}$.

18. *a)* A 15 szintes lépcső egyes szintjeit alkotó kockák száma felülről lefelé haladva számtani sorozatot alkot, amelynek első tagja 1, különbsége 2. Ebből következik, hogy a legalsó, 15. szinten található kockák száma $1 + 14\cdot 2 = 29$.

b) Az n szintből álló lépcső legfelső szintjén 1, legalsó szintjén pedig $1 + 2(n-1) = 2n - 1$ kocka található, ezért megépítéséhez összesen

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1$$

kocka szükséges. Az S összegben éppen az első n páratlan szám összege áll, amit a számtani sorozat összegképletének alkalmazásával számíthatunk ki:

$$S = \frac{1 + 2n - 1}{2}\cdot n = n^2.$$

Az n szintből álló lépcső megépítéséhez n^2 darab kocka szükséges. Mivel Aladárnak 150 darab építőkockája van, ezért a legnagyobb olyan n egész számot keressük, amelyre $n^2 \le 150$ teljesül, azaz $n \approx 12{,}25$, vagyis Aladár építőkockáiból maximum 12 szintes lépcsőt építhet.

c) Aladár a következő számú építőkockákat használhatja fel a lépcsők építéséhez: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144. Ha Aladár épít egy kétszintes, egy ötszintes, továbbá egy tizenegy szintes lépcsőt, akkor mind a 150 kockát felhasználja, így egy sem marad felhasználatlan.



2. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $5{,}325 \cdot 10^{-18}$.

2. Összesen 6 dolgozó volt már mindkét városban.

3. *c)*.

4. $\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} = 6 \cdot 3 = 18$ utazó csapat alakítható ki.

5. $f(-3) = -3$, $f(0) = 0$, $f(3) = 0$.

6. A 4 ismert szám összege 177, amihez ha még 70-et adunk, akkor 247-et kapunk. Ehhez az ismeretlen számjegyet hozzáadva 9-cel osztható számot kell kapnunk. Mivel a 247-nek a 9-cel való osztás során fellépő maradéka 4, ezért még 5-öt kell hozzáadni, hogy 9-cel osztható számot kapjunk, ezért az 5. nyertes szám a 75.

7. *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz.

8. A tört nem értelmezhető, ha nevezője 0, azaz ha $2\sin x - 1 = 0$, vagyis $\sin x = \frac{1}{2}$. Az adott intervallumban ez az $x_1 = \frac{\pi}{6}$-ra és az $x_2 = \frac{5\pi}{6}$-ra teljesül. Erre a két értékre a tört nem értelmezhető.

9. Az akváriumhoz $3 \cdot 80 \cdot 60 + 2 \cdot 60 \cdot 60 = 21\,600\ \text{cm}^2 = 2{,}16\ \text{m}^2$ üveget használtak fel.

10. A két térkép hasonló egymáshoz, az 1 : 2 300 000 méretarányú térképet $\lambda = \frac{2\,300\,000}{1\,200\,000} = \frac{23}{12}$ arányú hasonlósági transzformációval lehet átvinni az 1:1 200000 méretarányú térképbe. Ebből következik, hogy az utóbbi térképen a Cegléd–Szeged távolság $4{,}5 \cdot \frac{23}{12} \approx 8{,}6$ cm.

    Kiszámolhatjuk a két város valóságban mért távolságát is:

    $$4{,}5 \cdot 2\,300\,000 = 10\,350\,000\ \text{cm},$$

    majd kiszámoljuk, hogy ennek mekkora távolság felel meg az 1 : 1 200 000 méretarányú térképen:

    $$10\,350\,000 : 1\,200\,000 \approx 8{,}6\ \text{cm}.$$

11. $x + 3y = 10$.

12. A módusz és a medián egyaránt 3.

2. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. *a)* A négyzetgyökvonás miatt $x \geq -\frac{1}{2}$. A logaritmus értelmezése miatt $5 - \sqrt{2x+1} > 0$, amiből $12 > x$. Az egyenlet értelmezési tartománya $12 > x \geq -\frac{1}{2}$. Mivel $\log_3 9 = 2$, valamint $\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$, ezért egyenletünk $\log_2\left(5 - \sqrt{2x+1}\right) = 3$ alakban írható.

    A logaritmus definíciójának alkalmazása, majd rendezés után a $\sqrt{2x+1} = -3$ egyenletet kapjuk. Mivel a jobb oldalán negatív, bal oldalán nemnegatív szám áll, így az egyenletnek nincs megoldása.

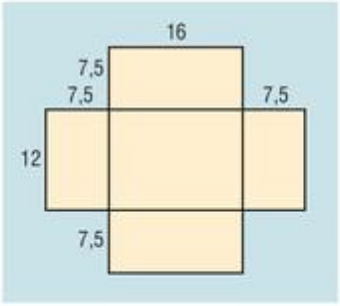
b) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A hatványozás azonosságait használva $3^{x^2} = 3^{12+4x}$. Mindkét oldalon 3-as alapú hatványok állnak, amelyek csak úgy egyezhetnek meg, ha kitevőik is egyenlők, ezért $x^2 - 4x - 12 = 0$.

A kapott másodfokú egyenletből: $x_1 = 6$ és $x_2 = -2$. Mindkét szám megoldása az egyenletnek.

14. *a)* A befőttesüveg alapkörének sugara $r = 4$ cm, magassága $m = 15$ cm.

Egy üveg térfogata: $V = r^2\pi m \approx 753{,}98\ \text{cm}^3$, azaz közelítően 7,5 dl.

b) Az üvegek tárolására szolgáló kartondoboz felül nyitott téglatest, amely alaplapjának oldalai 24 cm és 32 cm, magassága 15 cm. A doboz hálójának kicsinyített képe az ábrán látható (az adatok centiméterben vannak megadva).



c) Mivel 1 dobozba 12 üveg fér, ezért nagymamának összesen 4 dobozra van szüksége.

Egy doboz térfogata $V = 24 \cdot 32 \cdot 15 = 11\,520\ \text{cm}^3$, így a 4 doboz összesen $46\,080\ \text{cm}^3 = 46{,}08\ \text{dm}^3$ helyet foglal el.

15. *a)* Az 1500 €-ból 200 € 1%-os kamatlábbal kamatozik, így erre a részre a bank 2 € kamatot fizet. A maradék 1300 € után 4% kamat jár, azaz $1300 \cdot 0{,}04 = 52$ €. A bank a lekötött összeg után 54 € kamatot fizet.

b) Mivel $\frac{54}{1500} = 0{,}036$, ezért a bank által ténylegesen kifizetett kamat 3,6%.

c) Ha x eurós betétnél legalább 3,8%-os kamatot fizet a bank, akkor

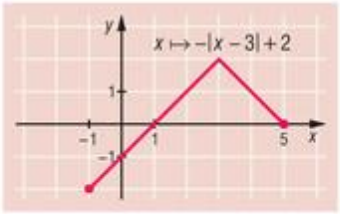
$$2 + (x - 200) \cdot 0{,}04 \geq x \cdot 0{,}038, \quad \text{vagyis} \quad x \geq 3000.$$

Legalább 3000 €-t kell lekötnünk ahhoz, hogy arra a bank legalább 3,8%-os kamatot fizessen.

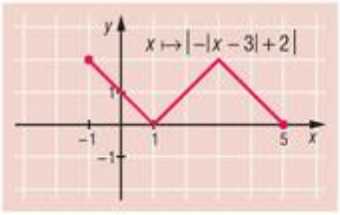
2. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* A függvény értékkészlete a $[-2; 2]$ intervallum. A függvény a maximumát az $x = 3$ helyen veszi fel, a maximum értéke 2; a minimumát az $x = -1$ helyen veszi fel, a minimum értéke -2.

b) A függvény grafikonjáról leolvasható, hogy az egyenlőtlenséget a $[2; 4]$ intervallum számai elégítik ki.



c) Az $x \mapsto -|x - 3| + 2$ szabállyal megadott függvény grafikonjának x tengely alatti negatív részét tükrözzük az x tengelyre.



17. *a)* Anna a három kockával összesen $6^3 = 216$-féleképpen dobhat. A kedvező esetek számbavételénél hasznos lehet azokat a következő módon csoportosítani:

- A dobott pontok száma 18, ha Anna minden kockával 6-ost dob.
- A dobott pontok száma 17, ha két 6-ost és egy 5-öst dob. Attól függően, hogy a piros, zöld vagy kék kockával dobja az 5-öst, ez az eset 3-féleképpen következhet be.

- A dobott pontok összege 16, ha két 5-ös mellett egy 6-ost dobott (összesen 3 eset), vagy két 6-os mellett egy 4-est (szintén 3 eset). A pontok száma 6-féleképpen lehet 16.
- A dobott pontok összege 15. A lehetséges dobások: két 6-os mellett egy 3-as (3 eset), egy 6-os, egy 5-ös és egy 4-es ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eset), illetve három 5-ös (1 eset). Ez összesen 10 eset.

Anna tehát összesen $1 + 3 + 6 + 10 = 20$-féleképpen dobhat úgy, hogy azzal a játékot megnyerje, ezért nyerésének valószínűsége $\frac{20}{216} \approx 0{,}0926$.

b) Anna a zöld és kék kockákkal összesen 36 különböző eredményt dobhat. Ha a piros kockával 6-ost dobott, akkor ahhoz, hogy a játékot megnyerje, a másik két kockával összesen legalább 9-et kell dobnia. A következő esetek lehetségesek:

- A dobott pontok összege 12, ha a zöld és a kék kockával egyaránt 6-ost dob.
- A dobott pontok összege 11. Ez kétféleképpen következhet be: zöld 6-os és kék 5-ös, vagy fordítva.
- A dobott pontok összege 10. Ekkor vagy két 5-öst dob (1 eset), vagy egy 6-ost és egy 4-est (2 eset). A pontok összege 3-féleképpen lehet 10.
- A dobott pontok összege 9. Ekkor vagy egy 6-ost és egy 3-ast dob (2 eset), vagy egy 5-öst és egy 4-est (2 eset). Összesen 4 esetben lehet a dobott pontok összege 9.

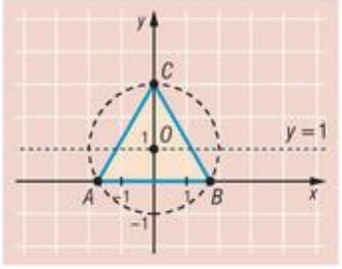
Anna legalább 9-et $1 + 2 + 3 + 4 = 10$-féleképpen dobhat, ezért nyerésének valószínűsége: $\frac{10}{36} \approx 0{,}2778$.

18. *a)* Az ABC háromszög szabályos. Számoljuk ki oldalainak hosszát:

$$AB = 2\sqrt{3}, \quad AC = \sqrt{(0+\sqrt{3})^2 + (3-0)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \text{hasonlóan} \quad BC = 2\sqrt{3}.$$

Mivel a három oldal hossza megegyezik, ezért az ABC háromszög valóban szabályos.

b) A szabályos háromszög köré írt kör középpontja egybeesik a háromszög súlypontjával, sugara pedig a súlyvonal hosszának kétharmada (ld. ábra). A C csúcsot az origóval összekötő szakasz az $ABC_{\triangle}$-nek egyben súlyvonala is, ezért a körülírt kör középpontja e szakasznak az origóhoz közelebbi harmadolópontja. Vagyis: $O(0; 1)$, sugara pedig $OC = 2$. A háromszög köré írt kör egyenlete: $x^2 + (y-1)^2 = 4$.



c) Két metszéspont van, ezek koordinátái: $(-2; 1)$, illetve $(2; 1)$.

3. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Van, aki nem kiváló matematikából.
Nem mindenki kiváló matematikából.

2. $\frac{1}{12}$-dik hatvány.

3. 1 mérföld = 63 360 inch.

4. $a \neq 2$, $a \neq -2$, a tört: $\frac{3}{a-2}$.

5. $A \cup B = [-6; 4[$ és $A \cap B = [-3; 2]$.

6. $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

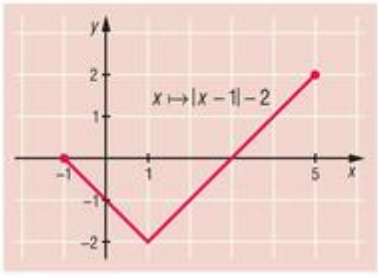
7. $x \in \left]\frac{2}{5}; \infty\right[$.

8. $x = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

9. 66°, 66°, 48° vagy 54°, 54°, 72°.

10. Mindkét nyelvet beszéli: $0{,}85 + 0{,}75 - 1 = 0{,}6$, a lakosok 60%-a. A keresett valószínűség 0,6.

11. Értékkészlet: $[-2; 2]$.



12. Koszinusztétellel számolva a legnagyobb oldallal szemközti szöget: $\gamma = 97{,}98°$.

3. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. *a)* Az értelmezési tartomány: $x \geq \frac{13}{7}$, négyzetre emelés után: $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, mindkettő megoldás.

b) Az egyenletet 3-as alapú hatványra átírva, majd rendezve: $27 \cdot 3^{2x} - 244 \cdot 3^x + 9 = 0$.

Az egyenlet 3^x-re másodfokú, megoldásai: $3^x = 9$ és $3^x = \frac{1}{27}$, amiből az eredeti egyenlet gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

14. *a)* A kamatozott összeg mértani sorozatot alkot: $x = 150\,000 \cdot 1{,}05^{12} = 269\,378$ Ft lesz a felvehető összeg. A haszon 119 378 Ft lesz.

b) A kivehető összeg:

$$150\,000 \cdot 1{,}05^{12} + 150\,000 \cdot 1{,}05^{11} + 150\,000 \cdot 1{,}05^{10} + \ldots + 50\,000 \cdot 1{,}05.$$

Ebből:

$$150\,000(1{,}05^{12} + 1{,}05^{11} + \ldots + 1{,}05) = 150\,000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{12} - 1}{1{,}05 - 1} = 2\,506\,947 \text{ Ft}.$$

Mivel összesen $12 \cdot 150\,000 = 1\,800\,000$ Ft-ot fektetett be, a haszon 706 947 Ft.

15. *a)* A teljes gráfhoz 8 él hiányzik, ennyi kézfogás lesz.

b) Nem, mert Antinak csak egy ismerőse van.

c) Tibi két oldalára $3 \cdot 2$ féle módon kerülhet egy-egy lány, a kimaradó 3 emberrel együtt 4! a leülések lehetséges száma, tehát:

$$p = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{5}.$$

3. Feladatsor II. rész / B – megoldások

16. 1 csepp víz térfogata: $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 1{,}5^3}{3} \approx 14{,}14 \text{ mm}^3$.

a) 2 dl = 200000 mm^3, ez 14144,27 csepp víz, ennyi csepp ≈ 3536 perc ≈ 58 óra 56 perc alatt csöpög le.

b) 1 év alatt $4 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 2102400$ csepp esik le, ennek a térfogata kb. 29,7 liter.

c) 1 évben 52 dl tisztítószer fogy el, ehhez 11 flakont kell megvenni, amelynek az ára: 9020 Ft.

17. *a)* A piros, a zöld és a citromsárga részek területe:

$$T_{\text{piros}} = r^2 \cdot \pi = 113{,}10 \text{ cm}^2,$$

$$T_{\text{zöld}} = T_{\text{citrom}} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 93{,}53 \text{ cm}^2.$$

A narancssárga szabályos sokszög 12 darab egyenlő szárú háromszögre bontható, a háromszög magassága:

$$m = \frac{a}{2 \cdot \text{tg}15°} \approx 11{,}2.$$

Ebből adódik:

$$T_{\text{narancs}} = 12 \cdot \frac{a \cdot m}{2} - r^2 \cdot \pi = 289{,}96 \text{ cm}^2.$$

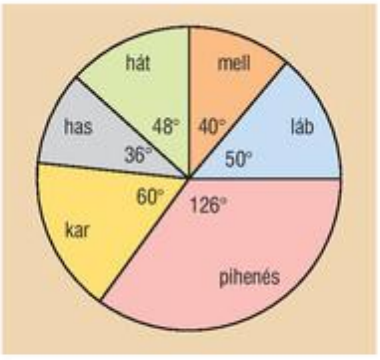
b) A $12 \cdot \frac{a \cdot m}{2} - x^2 \cdot \pi = x^2 \cdot \pi$ egyenletből $x \approx 8$ cm.

c) A belső kör színezésére 4 lehetőség van, a körülötte levő részre 3 színből választhatunk, és a külső háromszögeket a maradék két színnel csak egyféleképpen színezhetjük ki.

Tehát $4 \cdot 3 = 12$ különböző, a feltételeknek megfelelő színezés lehetséges.

18. *a)* Az edzésformák heti összesítése:

	Összes idő (perc)	Középponti szög (fok)
Lábizom-erősítés	75	50
Mellizom-erősítés	60	40
Hátizom-erősítés	72	48
Hasizom-erősítés	54	36
Karizom-erősítés	90	60
Pihenés (összesen)	189	126



b) $\frac{189}{540} = 0{,}35$, tehát az idő 35%-ában pihen.

c) A négyféle edzéstípus lehetséges sorrendje 4!, amikor két kiválasztott egymás után van, a lehetőségek száma $2 \cdot 3!$.

A feltételnek megfelelő esetek száma a kettő különbsége: $4! - 2 \cdot 3! = 12$.

4. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $A \cap B = \{36; 81\}$.

2. 50°, 50°, 80° vagy 50°, 65°, 65°.

3. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

4. A tagadás a *c)*.

5. $36^{3\cdot\log_6 2} = 2^6 = 64$.

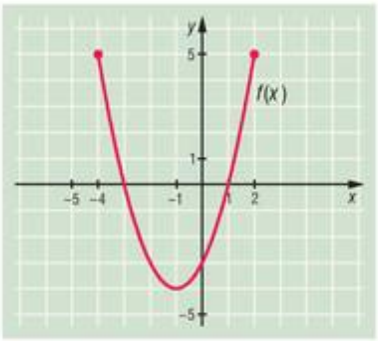
6. Az első szám a 63, a második a 64, ez a nagyobb.

7. $\frac{3\cdot 0{,}88 + 9\cdot 0{,}44}{12} = 0{,}55$, az éves kihasználtság 55%-os.

8. 4,8 m, 6,4 m, 3,2 m.

9. Egy 0-ra, hiszen csak egy darab 2-es és 5-ös van a szorzatban.

10. $x \in \left]\frac{11}{8}; \infty\right[$.



11. A függvény átalakításával: (➡)
$$f(x) = (x+1)^2 - 4.$$

12. Szinusztétellel számolva a 28°-kal szemközti oldalt:
$$b = 14{,}63 \text{ cm}.$$

4. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. *a)* A $3\cdot\frac{x}{100} = 0{,}5\cdot\frac{10}{100}$ egyenletből $x = \frac{5}{3}$, tehát 1,67%-os oldatot kapunk.

b) A $3\cdot\frac{2}{100} = x\cdot\frac{10}{100}$ egyenletből $x = 0{,}6$, tehát 0,6 liter ecethez 2,4 liter vizet kell öntenünk.

14. A naponta elolvasott oldalak száma számtani sorozatot alkot, amelyben $a_1 = 15$.

a) Az $S_n = \frac{30 + 12d}{2}\cdot 13 \geq 413$ egyenlőtlenség megoldása: $d \geq 2{,}79$.

Tehát ha naponta legalább 3 oldallal növeli az elolvasott mennyiséget, be tudja fejezni a könyvet a határidőre.

b) Ha $d = 4$, $S_{12} = 444$, tehát az utolsó napra már nem marad olvasni való. Mivel $S_{11} = 385$, már a tizenkettedik napon is csak 28 oldalt kell elolvasnia.

15. *a)* Egyetlen pontra teljesül: $P(5; -8)$.

b) Az A középpontú 5 egység sugarú kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Az AB szakasz felezőpontja: $F(4{,}5; 1{,}5)$, az AB szakaszfelező merőlegese: $7x - y = 30$.

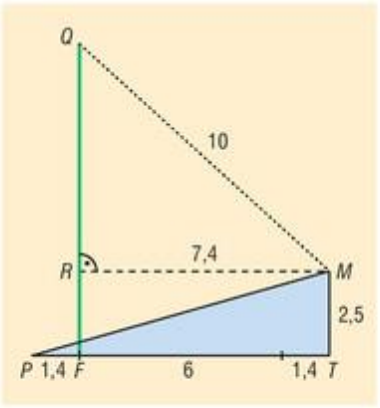
A keresett pontok az egyenes és kör metszéspontjai: $P(5; 5)$ és $Q(4; -2)$.

4. Feladatsor II. rész / B – megoldások

16. *a)* Az ábra alapján számolható a PM távolság. Az $MTP_{\triangle}$-ben, Pitagorasz-tétellel:

$$PM^2 = 2{,}5^2 + 8{,}8^2, \quad \text{ebből} \quad PM \approx 9{,}15 \text{ m}.$$

Tehát a készülék érzékeli a macska mozgását.



b) Az MRQ háromszögben szintén Pitagorasz-tétellel számítható az RQ szakasz hossza:

$$RQ^2 = 10^2 - 7{,}4^2, \quad \text{ebből} \quad RQ \approx 6{,}73 \text{ m}.$$

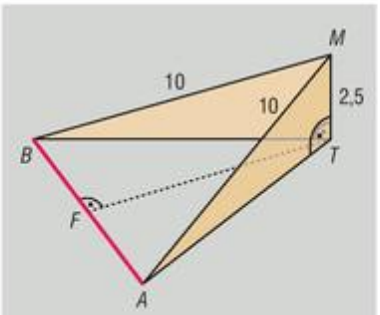
Az $FQ = 2{,}5 + 6{,}73 = 9{,}23$ m.

Tehát ha a szemközti fára 9,23 méternél magasabb helyre száll a bagoly, akkor a készülék nem érzékeli.

c) Készítsünk új ábrát. A keresett AB szakasz az ABT egyenlő szárú háromszögben található, melynek magassága $FT = 7{,}4$ m.

A BT hossza az $MTB_{\triangle}$-ben Pitagorasz-tétellel számítható:

$$BT^2 = 10^2 - 2{,}5^2, \quad \text{ebből} \quad AT = BT = 9{,}68 \text{ m}.$$

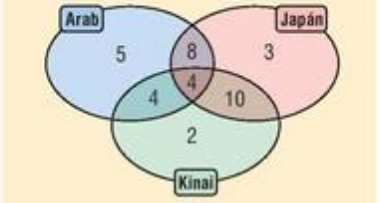


Az $ABT_{\triangle}$ alapja, szintén Pitagorasz-tétellel:

$$BF^2 = 9{,}68^2 - 7{,}4^2, \quad BF = 6{,}24 \text{ m}, \quad AB = 2BF = 12{,}48 \text{ m}.$$

Tehát a készülék a járda szélén egy 12,48 m hosszú szakaszt „tart megfigyelés alatt".

17. A szöveg alapján a következő halmazábra készíthető el:



a) $p = \dfrac{16}{36} = 0{,}44$; *b)* $p = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{36}{2}} = \dfrac{1}{105} = 0{,}0095$.

c) Az ábra alapján 10 olyan tanuló jár az osztályba, aki csak egy nyelvet tanul a fentiek közül.

18. A vásárolt edény térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \approx 89{,}6 \text{ liter}.$$

Ebbe az edénybe

$$\frac{89{,}6 - 17}{0{,}90} \approx 80{,}7 \text{ liter}$$

földet kell vásárolni.

a) Több megoldás is lehetséges, például egy 50 literes, egy 20 literes, egy 10 literes és egy 5 literes csomag megfelel.

b) Az előbbiek ára összesen: 1477 Ft, a legolcsóbb a két darab 50 literes virágföld, 1450 Ft.

c) Ebben az esetben 89,6 liter földet kell vásárolni, s ez most is többféleképpen lehetséges. Például négy 20 literes és egy 10 literes csomag.

A legolcsóbb ebben az esetben is a két 50 literes csomag.

5. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Normálalakban:
   a) $A \cdot B = 1 \cdot 10^{24}$; *b)* $A + B = 5{,}2 \cdot 10^{12}$.
2. A síkon 8 különböző pont legfeljebb $\binom{8}{2}$, azaz 28 egyenest határoz meg.
3. A függvény
   a) értelmezési tartománya: $x \in [-4; 4]$; *b)* értékkészlete: $y \in [-1; 4]$.
4. Az eredeti háromszög kerülete 30 cm.
5. A túra teljes hossza 30 km.
6. Az ábrán jelölt tartomány: $C \cup (B \setminus A)$ vagy $(A \cup B \cup C) \setminus (A \setminus C)$.
7. A paralelogramma átlóinak metszéspontjából a csúcsokba mutató vektorok:
$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad -\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}.$$
8. A háromszög két adott oldala által bezárt szög lehet 30° vagy 150°.
9. A mondat tagadása B: „Van olyan erdész, akinek nincs zöld kalapja.”
10. Az egyenlőtlenség megoldása: $x \in]-\infty; -2[\cup]5; \infty[$.
11. A háromszög C csúcsának koordinátái $C(-2; 1)$.
12. A valószínűség:
$$P(\text{30-cal osztható}) = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}, \quad P(\text{30-cal nem osztható}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

5. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. *a)* Az egyenlet bal és jobb oldala minden valós x helyen értelmezve van. A hatványozás azonosságait alkalmazva, valamint az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt:
$$3^{-1} \cdot 3^{-\frac{3}{2}\cdot x - 3} = 3^{2x-2} \cdot 3, \quad \text{amiből} \quad x = -\frac{6}{7}.$$
Ez valóban gyöke az eredeti egyenletnek.

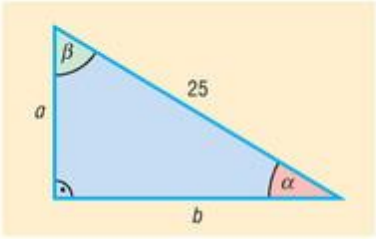
b) A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, ezért:
$$x^2 + 5x + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty; \frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\frac{-5+\sqrt{13}}{2}; \infty\right[,$$
$$4x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]\frac{1}{4}; \infty\right[.$$
Az egyenlet alaphalmaza: $x \in \left]\frac{1}{4}; \infty\right[$.

A logaritmus azonosságai és a logaritmusfüggvény kölcsönös egyértelműsége miatt:

$$\sqrt{x^2+5x+3}=4x-1 \quad \Rightarrow \quad 15x^2-13x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \text{ és } x_2=-\frac{2}{15}.$$

Az egyenlet alaphalmazába csak $x=1$ tartozik bele, és ez megoldása is az eredeti egyenletnek.

14. Legyen a derékszögű háromszög két befogójának hossza a és b.



a) A szokásos jelölésekkel a hegyesszögek koszinuszainak aránya:

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{\frac{a}{25}}{\frac{b}{25}}=\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{3}{4}.$$

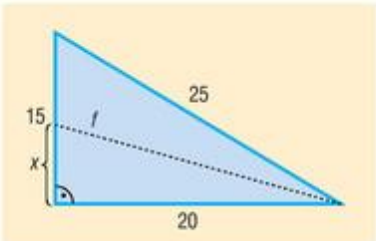
A Pitagorasz-tétel alapján $a^2+b^2=25^2$. A két összefüggésből $a=15$ és $b=20$. A háromszög befogói 15 cm és 20 cm hosszúak.

b) Legyen a háromszög beírt körének sugara r. A háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{a\cdot b}{2}=r\cdot\frac{a+b+c}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{15\cdot 20}{2}=r\cdot\frac{15+20+25}{2} \quad \Rightarrow \quad r=5.$$

A háromszög beírt körének sugara $r=5$ cm.

c) Egy háromszög belső szögfelezője a szemben levő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. A kisebbik hegyesszöggel szemben levő oldal 15 cm hosszú, és ezt a szögfelező 20:25 arányban osztja. Az ábrán az x szakasz hossza: $\frac{20}{3}$.



A szögfelező f hosszára felírható Pitagorasz-tétel:

$$f^2=20^2+\left(\frac{20}{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad f=\frac{20}{3}\cdot\sqrt{10}\approx 21{,}08.$$

A kisebb hegyesszög felezőjének a háromszög belsejébe eső szakasza $\frac{20}{3}\cdot\sqrt{10}\approx 21{,}08$ cm hosszú.

15. *a)* Számítsuk ki 8, 12 és 14 legkisebb közös többszörösét: [8; 12; 14] = 168.

A buszok a megállóból 168 percenként indulnak egyszerre. Reggel 5-től délelőtt 10-ig 300 perc, 11-ig 360 perc telik el. Mivel $2\cdot 168=336$, 10 és 11 óra között van olyan időpont, amikor a megállóból egyszerre indul mind a három járat, és ez az időpont 10 óra 36 perc.

b) Minden várakozó 3-féle buszra szállhat fel, ezért 3^{35}-féleképpen szállhatnak fel a buszokra.

c) A 70-es buszra $35\cdot 0{,}2=7$ ember, a 71-esre $35\cdot\frac{2}{7}=10$, a 72-esre $35-7=18$ utas száll fel.

A kedvező esetek száma $\binom{35}{7}\cdot\binom{28}{10}\cdot\binom{18}{18}$, az összes eset a *b)* rész alapján 3^{35}.

A keresett valószínűség $\dfrac{\binom{35}{7}\cdot\binom{28}{10}\cdot\binom{18}{18}}{3^{35}}\approx 0{,}0018.$

d) A kiindulási pont $K(0;0)$, az első megálló $E(-2;3)$, a második megálló $M(2;5)$, a harmadik $H(3;3)$. A kiindulási helyétől a harmadik megállóig megtett út:

$$s=KE+EM+MH=\sqrt{(-2)^2+3^2}+\sqrt{(2-(-2))^2+(5-3)^2}+\sqrt{(3-2)^2+(3-5)^2}=$$
$$=\sqrt{13}+\sqrt{20}+\sqrt{5}=\sqrt{13}+3\sqrt{5}\approx 10{,}31 \text{ km}.$$

5. Feladatsor II. rész / B – megoldások

16. A befektetni kívánt pénz legyen a forint.

a) Az (1) lehetőség szerint három év múlva $a \cdot 1{,}08^3 \approx 1{,}2597a$ forintot kapunk.
A (2) lehetőség szerint három év múlva $a \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}15 \approx 1{,}2544a$ forintot kapunk.
Takarékos Oszkár az első befektetési forma esetén jut több pénzhez 3 év letelte után.

b) Ha a bank negyedévenként p százalékkal növeli a pénzünket, akkor 3 év után $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12}$ forinthoz jutunk. Legyen $1 + \frac{p}{100} = x$.

$$a \cdot x^{12} = a \cdot 1{,}08^3, \quad / : a \neq 0$$
$$x = \sqrt[4]{1{,}08} \approx 1{,}0194.$$

Negyedévenkénti 1,94%-os kamat esetén kapunk annyi pénzt, mint az (1) befektetési mód esetén.

c) Tegyük fel, hogy n év múlva legalább 5 000 000 forint áll majd rendelkezésére. Ez akkor következik be, ha

$$2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}08^n + 10^6 \cdot 1{,}08^{n-1} \geq 5 \cdot 10^6.$$

Osztva mindkét oldalt 10^6-nal és az egyenlőtlenséget rendezve:

$$2 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08^{n-1} + 1{,}08^{n-1} \geq 5,$$
$$3{,}16 \cdot 1{,}08^{n-1} \geq 5,$$
$$1{,}08^{n-1} \geq \frac{5}{3{,}16}.$$

Mindkét oldal pozitív, így vehetjük a tízes alapú logaritmusát:

$$\lg 1{,}08^{n-1} \geq \lg \frac{5}{3{,}16}, \quad \text{amiből} \quad n \geq 6{,}96.$$

Takarékos Oszkárnak hét évet kell várni hogy év végén legalább 5 000 000 forintot vehessen fel.

17. *a)* A stadion egyes soraiban levő ülőhelyek számai olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első eleme 200, differenciája 4. Tegyük fel, hogy n sor van a stadionban. A számtani sorozat első n elemének összegére vonatkozó összefüggés alapján:

$$11500 < n \cdot \frac{400 + (n-1) \cdot 4}{2} < 12000.$$

Az egyenlőtlenség-rendszert rendezve:

$$11500 < n \cdot (200 + (n-1) \cdot 2) < 12000,$$
$$5750 < n^2 + 99n < 6000.$$

A sorok n számára teljesülnie kell, hogy (1) $0 < n^2 + 99n - 5750$ és (2) $n^2 + 99n - 6000 < 0$.
Az (1) egyenlőtlenség megoldása:

$$n < \frac{-99 - \sqrt{32\,801}}{2} \approx -140{,}06 \quad \text{vagy} \quad n > \frac{-99 + \sqrt{32\,801}}{2} \approx 41{,}06.$$

A (2) egyenlőtlenség megoldása:

$$-141{,}43 \approx \frac{-99 - \sqrt{33\,801}}{2} < n < \frac{-99 + \sqrt{33\,801}}{2} \approx 42{,}43.$$

Mivel n pozitív egész, a két feltételt csak $n = 42$ teljesíti, tehát a stadionban 42 sor van.

b) Az összes lehetőség száma $\binom{8}{3}$.

Ha az első három között nincs angol versenyző, akkor 5 versenyző közül került ki a három dobogós helyezett. A kedvezőtlen esetek száma $\binom{5}{3}$.

Annak a valószínűsége, hogy valamelyik dobogós helyre angol futó került:

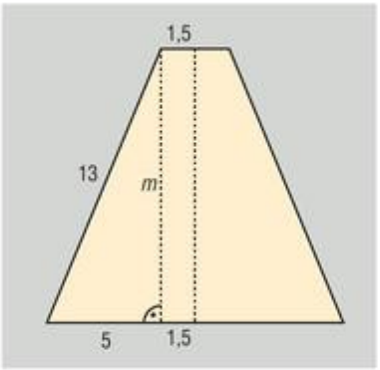
$$p = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{23}{28} \approx 0{,}82.$$

c) Az eladott jegyek árainak átlaga:

$$\frac{4740 \cdot 0{,}4 \cdot 3200 + 4740 \cdot 0{,}3 \cdot 4000 + 4740 \cdot 0{,}3 \cdot 4700}{4740} = 3890 \text{ forint.}$$

Az eladott jegyek árainak módusza 3200 forint, mediánja pedig 4000 forint.

18. *a)* Először az alsó egyenes csonka kúp alakú rész térfogatát számítjuk ki először.



A csonka kúp alapkörének sugara $R = 6{,}5$ cm, fedőkörének sugara $r = 1{,}5$ cm. A kúp magasságát a tengelymetszetből számíthatjuk:

$$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}.$$

A csonka kúp térfogata:

$$V_{\text{csonka kúp}} = \frac{m \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \cdot \pi}{3} = 217\pi.$$

A felső hengeres rész térfogata:

$$V_{\text{henger}} = r^2 \cdot \pi \cdot m' = 27\pi.$$

A flaska teljes űrtartalma:

$$V = V_{\text{csonkakúp}} + V_{\text{henger}} = 244\pi \approx 766{,}55 \text{ cm}^3.$$

A 7,5 dl = 750 cm^3 bort beleöntve a flaskába: $766{,}55 - 750 = 16{,}55$ cm^3 térfogatnyi hely marad. Mivel ez kisebb, mint a felső hengeres rész térfogata, az üvegben a bor szintje a felső hengeres résznél van, felülről számítva a következő magasságban:

$$h = \frac{V_{\text{hiány}}}{r^2 \cdot \pi} = \frac{16{,}55}{1{,}5^2 \cdot \pi} \approx 2{,}34 \text{ cm}.$$

b) Ha az üvegből annyit kiöntünk, hogy a bor szintje 3 centiméterrel csökkenjen, akkor ez

$$V^* = 1{,}5^2 \cdot \pi \cdot 3 \approx 21{,}21 \text{ cm}^3$$

bor kiöntését jelenti. A bor alkoholtartalma eredetileg $750 \cdot 0{,}125$ cm^3. Az alkoholtartalom minden kiöntés után $\frac{750 - 21{,}21}{750} = \frac{728{,}79}{750}$-szeresére változik.

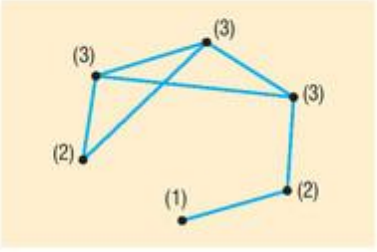
A kínált bor alkoholtartalma végül $750 \cdot 0{,}125 \cdot \left(\frac{728{,}79}{750}\right)^4$ cm^3.

A vendégeket Vendel $\frac{750 \cdot 0{,}125 \cdot \left(\frac{728{,}79}{750}\right)^4}{750} \cdot 100 \approx 11{,}14\%$-os borral kínálta.

6. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Az egyszerűsített tört: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+1)\cdot n$.

2. Kössük össze a haragosokat éllel. Az ábrán egy lehetséges megoldást látunk.



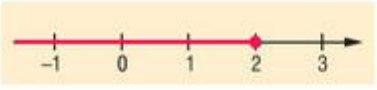
3. A szavazáson 7 530 000 fő vehetett volna részt.

4. A sorozat első 5 elemének összege $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Igaz.

6. A focilabdát 5,73°-ban látjuk.

7. Az egyenlet valós megoldásai a számegyenesen láthatók.

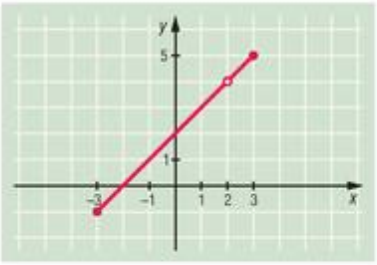


8. Az $ABC\sphericalangle = 21°$.

9. A fizetések átlaga 126 571 forint, módusza 90 000 forint, mediánja pedig 105 000 forint.

10. Az egyenlet diszkriminánsa $4\sqrt{2}$.

11. A függvény grafikonja az ábrán látható.



12. Annak a valószínűsége, hogy Ambrus Adri mellett ül:

$$\frac{2\cdot 5!}{6!} = \frac{1}{3}.$$

6. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. *a)* Használjuk fel, hogy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$2\cdot(1-\sin^2 x)+1 = 5\cdot\sin x,$$

$$0 = 2\cdot\sin^2 x + 5\cdot\sin x - 3.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$\sin x = -3$, ami nem lehet a szinuszfüggvény értékkészlete miatt,

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

amelyek kielégítik az eredeti egyenletet.

b) Írjuk fel az egyenlet jobb és bal oldalát 2 hatványaként.

$$2^{2x+2\cdot|x+1|} = 2^5.$$

Mivel az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, a $2x + 2|x+1| = 5$ egyenletet kell megoldanunk.

Ha $x \geq -1$, akkor $2x + 2(x+1) = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$.

Ha $x < -1$, akkor $2x + 2(-x-1) = 5$, nincs megoldás.

Tehát $x = \frac{3}{4}$, ami az eredeti egyenletnek valóban gyöke.

14. Az első nap a kutya $2(20 + 60) = 160$ m utat tesz meg.

A második nap $2(20 + 50) + 160 = 300$ m utat tesz meg, mivel az első háztömb szélességét, és még két háztömb közti távot kétszer kell megtennie az előző napihoz képest.

A harmadik nap $2(20 + 50 + 20 + 50) + 160 = 440$ m utat tesz meg, az előző napinál ismét $2(20 + 50) = 140$ méterrel többet.

A kutya által naponként megtett távolságok egy számtani sorozat tagjai. A sorozat első tagja 160, differenciája 140.

a) A kutya a hetedik napon $a_7 = a_1 + 6d = 160 + 6 \cdot 140 = 1000$ méter utat tesz meg.

b) Húsz nap alatt a kutya összesen $S_{20} = 20 \cdot \frac{2a_1 + 19d}{2} = 29800$ métert, azaz 29,8 km-t fut.

15. Az első kép alapján az első fájl 25%-a az összes másolás 7%-a, tehát az első fájl az összes másolandónak $\frac{7}{25} \cdot 100 = 28\%$-a.

Ezért és a második kép alapján a második fájl 15%-a az összes másolás $37\% - 28\% = 9\%$-a.

A második fájl az összes másolandó anyagnak $\frac{9}{15} \cdot 100 = 60\%$-a.

A harmadik fájl mérete tehát az összesnek $100\% - 28\% - 60\% = 12\%$-a.

Ha a teljes másolás a 91%-ánál tart, akkor a harmadik fájlból akkora rész másolása történt meg, amennyi az összes másolandónak $91\% - 28\% - 60\% = 3\%$-a.

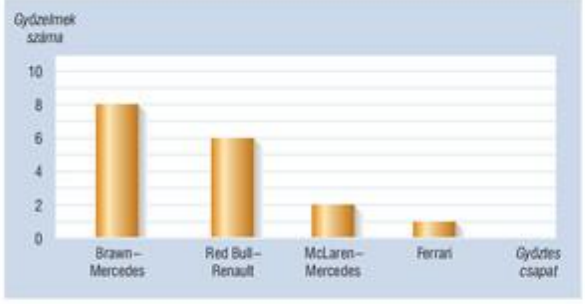
A 3% a 12%-nak $\frac{3}{12} \cdot 100 = 25\%$-a.

A harmadik fájl másolása során, ha a felső sávban 91% látható, akkor az alsó sávban 25%-ot láthatunk.

6. Feladatsor II. rész / B – megoldások

16. *a)* Az átlagpontszám 53,95. Az átlagpontszámhoz Lewis Hamilton pontszáma van a legközelebb.

b) Az adatsor módusza a Brawn–Mercedes csapata, ők nyertek legtöbbször futamot.



c) Az összes helyszín száma 17, ebből a két megszüntetendő helyszínt $\binom{17}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani, tehát az összes esetek száma $\binom{17}{2}$.

Ha Magyarországot kiválasztanák, akkor a másik helyszín a fennmaradó 16 másik közül kerülne ki, tehát a kedvező esetek száma 16.

Annak a valószínűsége, hogy Magyarország a két kiválasztott közt lenne:

$$\frac{16}{\binom{17}{2}} = \frac{2}{17} \approx 0{,}12.$$

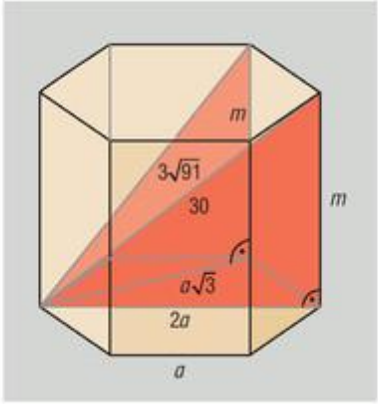
d) Mivel Schumacher 3 perc 20 másodpercenként körözi le a másik autót, ennyi idő alatt Schumacher a pálya hosszával, azaz 4381 méterrel több utat tesz meg.

Legyen az autó sebessége v. Mivel 3 perc 20 másodperc az $\frac{1}{18}$ óra, az $s = v \cdot t$ összefüggés alapján a megtett utak különbsége:

$$199 \cdot \frac{1}{18} - v \cdot \frac{1}{18} = 4{,}381, \quad \text{ebből} \quad v = 120{,}142.$$

A másik autó sebessége megközelítőleg $120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

17. Legyen a szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alaplapjának éle a, magassága m hosszúságú.



A szabályos hatszög hosszabb átlója az alapél kétszerese: $2a$, rövidebb átlója egy a oldalú szabályos háromszög magasságának a kétszerese: $a\sqrt{3}$.

Pitagorasz tételét felírva a testátlókat tartalmazó derékszögű háromszögekben:

$$\left.\begin{aligned} \left(a\sqrt{3}\right)^2 + m^2 &= \left(3\sqrt{91}\right)^2 \\ (2a)^2 + m^2 &= 30^2 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer pozitív megoldásai: $a = 9$ és $m = 24$.

A hasáb alapéle 9 cm, magassága 24 cm.

a) A hasáb térfogata:

$$V = T_{\text{alap}} \cdot m = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m = 2916 \cdot \sqrt{3} \approx 5050{,}66\ \text{cm}^3.$$

b) A hasáb felszíne:

$$A = 2 \cdot T + 6 \cdot a \cdot m = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot a \cdot m = 243\sqrt{3} + 1296 \approx 1716{,}89\ \text{cm}^2.$$

18. Thalész tétele értelmében a derékszögű csúcs rajta van az átfogó mint átmérő fölé írt körön.

A kör középpontja AB felezőpontja, vagyis $O(3;1)$, sugara:

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(8-(-2))^2 + (-11-13)^2}}{2} = \frac{26}{2} = 13.$$

A kör egyenlete:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 169.$$

a) A körnek az y tengellyel való metszéspontját a $(0-3)^2+(y-1)^2=169$ egyenlet megoldása adja:

$$(y-1)^2=160,$$
$$|y-1|=\sqrt{160}.$$

Ebből a háromszög derékszögű csúcsának koordinátái lehetnek:

$$C_1\left(0;1+4\sqrt{10}\right) \quad \text{vagy} \quad C_2\left(0;1-4\sqrt{10}\right).$$

b) A kör kerületén keressük meg azokat a pontokat, amelyeknek első koordinátája 15. Ehhez oldjuk meg a $(15-3)^2+(y-1)^2=169$ egyenletet:

$$144+(y-1)^2=169,$$
$$|y-1|=5.$$

Az egyenlet megoldásai: $y_1=6$ és $y_2=-4$.

Az $E_1(15;6)$ és $E_2(15;-4)$ érintési pontokban kell a körhöz érintőket húznunk. Mivel egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, az érintők normálvektorait a kör középpontjából az érintési pontokba húzott vektorokkal adhatjuk meg.

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{OE_1}(12;5) \quad \Rightarrow \quad e_1\colon\ 12x+5y=12\cdot 15+5\cdot 6 \quad \Rightarrow \quad 12x+5y=210,$$
$$\vec{n}_2=\overrightarrow{OE_2}(12;-5) \quad \Rightarrow \quad e_2\colon\ 12x+5y=12\cdot 15-5\cdot(-4) \quad \Rightarrow \quad 12x-5y=200.$$

Az érintők egyenletei: $12x+5y=210$ és $12x-5y=200$.

Az érintők hajlásszögét normálvektoraik hajlásszögének segítségével adhatjuk meg, amelyet a skaláris szorzatukkal számolhatunk:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{119}{13^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi\approx 45{,}24^\circ.$$

Mivel a φ szög hegyesszög, az érintők hajlásszöge $45{,}24^\circ$.

7. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $\dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}=\dfrac{x-y}{x+y}$.

2. $\dfrac{n}{50+n}<0{,}25$; $0{,}75n<12{,}5$; $n<16{,}\dot{6}$. Legfeljebb 16 marcipános kerülhet bele.

3. Két nem egybe eső kör két pontban metszheti egymást. Minden újabb kör metszheti már az összes korábbit 2-2 pontban, így a lehetséges metszéspontok száma $1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 2+4\cdot 2=20$.

4. Nyolc elem mediánja a két középső elem számtani közepe. Ha X és Y is kisebb, mint 4, akkor a medián pontosan 3,5. Ha csak X kisebb 4-nél, akkor a medián maximum 5,5. Így $X, Y>4$, és $X=5$, $Y=7$. (Feltettük, hogy X kisebb Y-nál, és a számok mind különbözők.)

5. $T=5^2\cdot\sin 60^\circ\approx 21{,}65\ \text{cm}^2$.

6. Az ötpontú teljes gráf éleinek száma $\dfrac{5\cdot 4}{2}=10$, az adott gráfnak $\dfrac{2+2+2+2+4}{2}=6$ éle van. Így még 4 élt kell berajzolni.

7. A keresett egyenes egyenlete e: $-3x+2y=1$.

8. Az egyenlet két gyöke: $x_1=0$ és $x_2=-9$. A megoldás: $x=-9$.

9. A megoldás: *c)*, azaz $y = 2^{x+1} - 1$.

10. 0° és 360° között két szög van, melyekre $\sin 240° = \sin 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Közülük $\cos 240° < 0$, ezért $\cos 240° = -\frac{1}{2}$.

11. Jelölje n a Berlinben jártakat. Ekkor $10 + \frac{n}{2} = 14$, ebből $n = 8$. Tehát 4 fő járt mindkét városban.

12. A logaritmus definíciója miatt $2x - 4 > 0$, azaz $x > 2$, és $x \in \mathbb{N}$.

7. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. *a)* $\frac{6+9+10+8+X}{5} = 8$, vagyis $X = 7$.

b) Az egyes napokon 5, 10, 9, 11 autó érkezett, a változások (+5, –1, +2) átlaga: $\frac{5-1+2}{3} = 2$. Ennek alapján péntekre $11 + 2 = 13$ autó várható.

c) Ha egyik napon sem érkezett olyan jármű, amelyen egyszerre végzik el a kétfajta beavatkozást, akkor a valószínűség 1. A legkisebb értéket pedig akkor kapjuk, ha minden nap a lehető legtöbb jármű vesz részt mindkét típusú beavatkozásban, azaz hétfőn 5 (1), kedden 9 (1), szerdán 9 (1), csütörtökön 8 (3). Zárójelben azon járművek száma szerepel, amelyeken csak az egyik beavatkozást végzik el. Így a kérdéses valószínűség:

$$\frac{1+1+1+3}{37} \approx 0{,}16.$$

14. *a)* $\left(2^x\right)^2 - 8 \cdot 2^x + 12 = 0$, $(2^x)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$, ahonnan $(2^x)_1 = 6$ és $(2^x)_2 = 2$.

A két megoldás: $x_1 = \log_2 6 \approx 2{,}585$ és $x_2 = 1$.

b) A feladat értelmezési tartománya: $x > 0$. Rendezve az egyenlőtlenséget:

$$\frac{x}{x+3} - 9 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-8x - 27}{x+3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{27}{8} \text{ vagy } x > -3.$$

Az értelmezési tartomány miatt az egyenlőtlenség megoldása: $x > 0$.

15. *a)* Az egyre növekvő kerületű körök sugarai: r, $2r$, $3r$, …, nr, … $(n \in \mathbb{Z}^+)$.

A körök kerülete: $K_1 = 2r \cdot \pi$, $K_2 = 2 \cdot (2r) \cdot \pi$, $K_3 = 2 \cdot (3r) \cdot \pi$, …, $K_n = 2 \cdot (nr) \cdot \pi$, …

Számtani a sorozat, ha a szomszédos elemek különbsége állandó. Ez teljesül a kerületekre:

$$K_{n+1} - K_n = 2 \cdot [(n+1) \cdot r] \cdot \pi - 2 \cdot (nr) \cdot \pi = 2r \cdot \pi = K_1 = \text{állandó}.$$

b) Jelölje a_n az n-edik körgyűrűbe került darabkák számát, ami arányos a kerülettel.

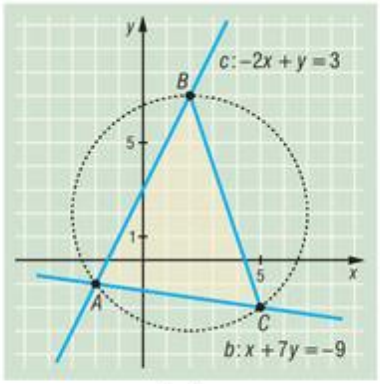
Mivel $K_n = K_{n-1} + K_1$, ezért $a_n = a_{n-1} + a_1$ (ahol $a_1 = 4$), tehát:

$$a_1 + (n-1)d = a_1 + (n-2)d + a_1,$$
$$nd - d = nd - 2d + 4,$$
$$d = 4.$$

Így a darabkák száma: $S_{20} = 840$. Ha egy járólap 6 darabkát adott ki, akkor 140 járólapot kellett miszlikbe aprítaniuk.

7. Feladatsor II. rész / B – megoldások

16. Ábrázoljuk a megadott alakzatokat. Látjuk, hogy ezek metszéspontjai adják a háromszög csúcsait. Két alakzat metszéspontját pedig a koordináta-geometriában egyenletrendszerek megoldásaként kapjuk.



a) $A = b \cap c$: $\left.\begin{matrix} -2x + y = 3 \\ x + 7y = -9 \end{matrix}\right\}$, a megoldás: $x = -2$, $y = -1$.

Tehát $A(-2; -1)$.

$B = c \cap k$: $\left.\begin{matrix} -2x + y = 3 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{matrix}\right\}$.

Fejezzük ki c egyenletéből y-t, kapjuk az $5x^2 - 20 = 0$ egyenletet, ahonnan $|x| = 2$. Az egyik megoldás éppen A, a másik: $x = 2$, $y = 7$. Tehát $B(2; 7)$.

$C = b \cap k$: $\left.\begin{matrix} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ x + 7y = -9 \end{matrix}\right\}$, a megoldás: $x = 5$, $y = -2$. Tehát $C(5; -2)$.

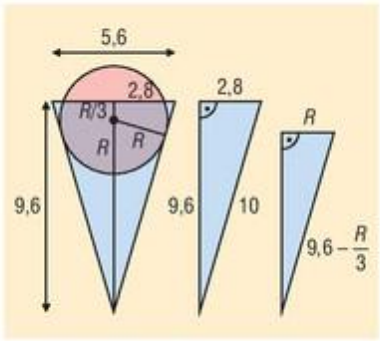
b) $K = d(AB) + d(AC) + d(BC) = \sqrt{80} + \sqrt{50} + \sqrt{90} \approx 25{,}5$ egység.

c) Mivel BC a legnagyobb oldal, a vele szemben levő α szög a legnagyobb. Például a koszinusztételt felírva:

$$90 = 80 + 50 - 2 \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{50} \cdot \cos\alpha, \quad \text{ebből} \quad \alpha \approx 71{,}56°.$$

17. Képzeletben vágjuk el a tölcsért és a fagyit középen egy függőleges síkkal. A metszetet rajzoljuk le.

a) A rajzon kiemelt két háromszög hasonló. (A tölcsér alkotójának hosszát kiszámíthatjuk a Pitagorasz-tétellel, értéke 10 cm.) Felírva az arányokat:



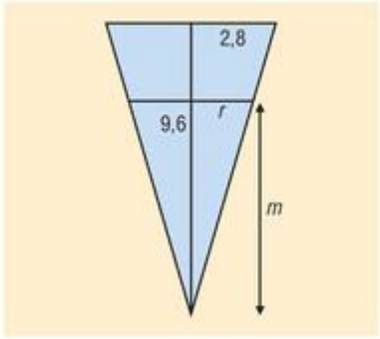
$$\frac{9{,}6 - \frac{R}{3}}{R} = \frac{10}{2{,}8}, \quad \text{ahonnan} \quad R \approx 2{,}4585 \text{ cm}.$$

Így a fagyi térfogata:

$$V_{\text{fagyi}} = \frac{4}{3} R^3 \cdot \pi \approx 62{,}24 \text{ cm}^3.$$

Kerekítve, a gombóc térfogata 62 cm^3.

b) Ha elolvad a fagyi, és az olvadt csoki „kitölti” a kúp alakú tölcsért, akkor szintén találunk két hasonló háromszöget:



$$\frac{m}{r} = \frac{9{,}6}{2{,}8} = \frac{24}{7}, \quad \text{innen} \quad m = \frac{24}{7} r.$$

Feltételezzük, hogy a fagyi térfogata nem változott (illetve a változástól eltekintünk), ezért:

$$V_{\text{olvadt csoki}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \frac{24}{7} r}{3} = \frac{8r^3 \cdot \pi}{7} = 62,$$

amiből $r \approx 2{,}58$ cm és $m \approx 8{,}86$ cm.

18. Minden esetben megfelelő módon kell behelyettesítenünk a megadott képletbe.

a) $L = 25\text{ cm} = 0{,}25\text{ m}$, $a = 0{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}25}{9{,}81 - 0{,}81}} = \frac{\pi}{3}\,(\text{s})$.

b) $T = 2\,(\text{s})$, $a = 8{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{9{,}81 - 8{,}81}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{\pi^2} \approx 0{,}1013\,(\text{m})$.

c) $T = 3\,\text{s}$, $L = 1\,\text{m}$. $3 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{9{,}81 - a}} \quad \Rightarrow \quad a = 9{,}81 - \frac{4\pi^2}{9} \approx 5{,}42\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

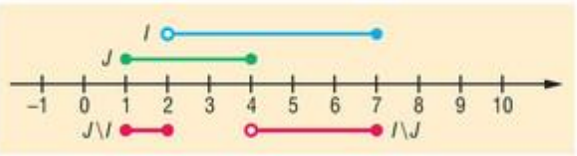
8. Feladatsor I. rész – megoldások

1. A végződés lehet 12, 32, 52, 72, 92, tehát X lehet 1, 3, 5, 7, 9.

2. A külső pontból a körhöz húzott érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. A Pitagorasz-tételből $x^2 + 6^2 = 10^2$, ebből $x = 8$.

3. Az első állítás megfordítása igaz. A második állítás megfordítása igaz. A harmadik állítás megfordítása hamis, mert az 1 önmagával és 1-gyel is osztható, mégsem prím.

4. Az intervallumok az ábrán láthatók.



5. $\binom{10}{4} \cdot 4! = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

6. $\frac{\frac{15}{100} + \frac{62}{80} + \frac{58}{100} + \frac{n}{80}}{4} = \frac{15 + 77{,}5 + 58 + 1{,}25n}{400} \geq 0{,}6$, innen $n \geq 71{,}6$.

Ha a tanár csak egész pontokat ad, akkor legalább 72 pontost.

7. Mivel egymás reciprokai, a kotangens értéke is negatív.

8. $]-\infty; -4]$-on monoton növő az $f(x)$.

9. Ha eredetileg x árú az áru, akkor a vásárt követő csökkentés után $x \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}6 = x \cdot 0{,}84$ az ára, s ez az eredeti árnál kisebb. Mégpedig 16%-kal.

10. Az egyenletből a k kör középpontja $O_k(-2; 1)$, sugara $r = 3$. A két kör középpontjának távolsága:

$$d(OK) = \sqrt{(2+2)^2 + (4-1)^2} = 5.$$

Ha nincs közös pont, akkor:

$$R < d(OK) - r = 5 - 3 = 2 \quad \text{vagy} \quad R > d(OK) + r = 5 + 3 = 8.$$

11. $\log_2 12 = \log_2(2^2 \cdot 3) = \log_2 2^2 + \log_2 3 = 2\log_2 2 + p = 2 + p$.

12. A valószínűség a területek aránya. A keret és a kép konkrét nagysága nem számít, tekintsük a kör sugarát egynek, így:

$$T_{\text{képkeret}} = 4 \quad \text{és} \quad T_{\text{körkép}} = 1^2 \cdot \pi.$$

A találati valószínűség:

$$p = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$$

8. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. Az értelmezési tartomány: $y^2 + 2x - 5 \geq 0$. A második egyenletből $y = 3 - x$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe, egy várhatóan másodfokú egyismeretlenes egyenlethez jutunk:

$$\sqrt{(3-x)^2 + 2x - 5} = 2x + 3.$$

A gyökjel alatt nevezetes szorzatot találunk, mégpedig $(x-2)^2$-t, ezért az egyenlet:

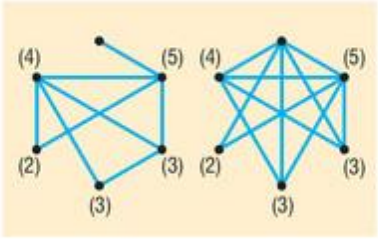
$$|x - 2| = 2x + 3.$$

Az abszolút értékes egyenletnek egy megoldása van, $x = -\frac{1}{3}$, így $y = \frac{10}{3}$. Ellenőrizzük.

14. *a)* A három házaspár összesen hat fő. Ha valakinél elvágjuk a kört és „kiterítjük" az ülésrendet, akkor az eredmény $5! = 120$.

b) Most az egyik pár első tagjánál vágjuk el a sort és kiterítjük az ülésrendet, akkor 2-féle módon lehet a másik két párt leültetni, illetve minden páron belül 2-2-féleképpen a házastársakat. Így az eredmény $2 \cdot 2^3 = 16$.

c) Képzeljük el a hat személyt, mint egy gráf hat pontját. A gráf élei azt reprezentálják, hogy két személy egymás között kicserélte a salátástálat (az mindegy, hogy ki kinek adta). Ekkor az 5 fokú pont minden más ponttal szomszédos, tehát a hatodik pont fokszáma is legalább 1.



A 4 fokú pontból tudunk éleket rajzolni csak a többi ponthoz, illetve a leendő két 3 fokú pontot összekötve fokszámuk 3 lesz. Tehát az utolsó pont minimális fokszáma 1.

Másodszorra kössük össze a 4 fokú pontot a hatodik ponttal és a két 3 fokú ponttal. Végül kössük össze a 2 fokú pontot is a hatodik ponttal. Így a hatodik pont fokszáma 5 lesz. Tehát ennyi információ birtokában csak annyit állíthatunk, hogy a hatodik személy az asztalnál legalább egyszer, legfeljebb ötször adta-vette a salátástálat.

15. *a)* Ha egy $y = f(x)$ függvény áthalad az $(x'; y')$ ponton, akkor teljesül rá, hogy $f(x') = y'$. Azaz $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + c = 16$, innen $c = 4$.

b) Az $f(x)$ függvény pontosan ott metszi az x tengelyt, ahol $y = f(x) = 0$. Azaz $2x^2 - 5x + 4 = 0$.

A másodfokú egyenletnek nincs megoldása, hiszen $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 25 - 32 = -7 < 0$.

Mivel normál állású parabola, eszerint végig az x tengely felett halad, nem metszi azt.

c) Ha az x tengely felett halad, akkor függőlegesen lefelé kell elmozgatni, hogy érintse a tengelyt. Ezt pozitív konstans elvételével érhetjük el.

I. megoldás.

Az érintéshez a diszkriminánsnak 0-vá kell válnia:

$$D = 25 - 8(4 - p) = -7 + 8p = 0, \quad \text{ahonnan} \quad p = \frac{7}{8} = 0{,}875.$$

II. megoldás.

Alakítsuk a függvényt teljes négyzetté:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 4 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} + 4 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}.$$

Innen látható, hogy az utolsó tag elhagyása, azaz a görbe 0,875 egységgel való lefelé mozdítása után már érinti az x tengelyt.

8. Feladatsor II. rész / B – megoldások

16. Készítsünk a hotelszobákról egy összefoglaló táblázatot.

	Egy szinten található azonos típusú		Összesen a hotelben	
	szobák	közülük konyhával rendelkezik	szoba	konyhával
2 személyes	7	2	91	26
4 személyes	8	2	104	26
6 személyes	5	2	65	26
Összesen	20	6	260	78

a) A 8 párnak kétszemélyes szobákat utalnak ki a hotel 91 szobájából valamilyen sorrendben. Erre $\frac{91!}{(91-8)!}$-féleképpen kerülhet sor. A kétgyermekes pároknak négyszemélyes szobákra van szükségük, ezért számukra $\frac{104!}{(104-3)!}$ lehetőség adódik. (A szobákat és a párokat is megkülönböztetjük.) A kérdésre a válasz ezek szorzata, hiszen függetlenek: $\frac{91!}{(91-8)!}\cdot\frac{104!}{(104-3)!}$.

b) A felső öt emeleten összesen $5\cdot 8=40$ négyszemélyes szoba van. Hogy pont ilyenbe kopog be az illető, annak valószínűsége $P_1=\frac{40}{260}$. Az alsó nyolc emeleten $8\cdot 5=40$ hatszemélyes szoba van, így utóbbi $P_2=\frac{40}{260}$ valószínűsége megegyezik az előbbivel.

c) Mivel a feladat szövege tartalmazza a „legalább" szót, érdemes megvizsgálni a komplementer eseményre való áttérés lehetőségét. 39 szobát választunk ki összesen, közülük legalább egy konyhával rendelkezik: akkor rendelkezhet azzal 1, 2, 3, 4 stb. Ez nagyon sok lehetőség, megéri áttérni a komplementer eseményre!

Ha a kiválasztás után nincs konyhás szoba, akkor szintenként a kétszemélyesek közül 5, a háromszemélyesek közül 6, a hatszemélyesek közül 3 szoba jöhet szóba $\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{5}$ valószínűséggel. Ugyanez érvényes mind a 13 szintre, tehát az ellentett esemény valószínűsége $\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{5}\right)^{13}$.

Magának a kérdezett eseménynek pedig $1-\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{5}\right)^{13}$ a valószínűsége.

17. Jelölje S a szépirodalmat, K a képregényeket, U az újságot olvasó tanulók halmazát. A feladat szövege szerint:

(1) $|S|+|K|-|S\cap K|=15$;

(2) $|K|+|U|-|K\cap U|=17$;

(3) $|S|+|U|-|S\cap U|=18$;

(4) $\frac{1}{2}\cdot|S|=|S\cap K|$;

(5) $|K|-6=|K\cap U|$;

(6) $|S\cap U|=3$;

(7) $|S\cap U\cap K|=1$.

(4)-et (1)-be helyettesítve: $\frac{1}{2}\cdot|S|+|K|=15$.

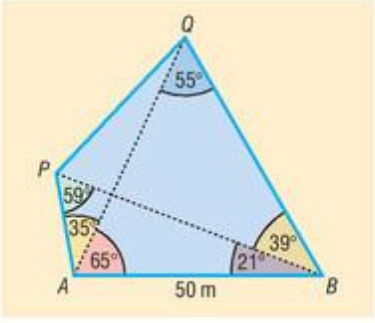
(5)-öt (2)-be helyettesítve: $|U|=11$.

(6)-ot (3)-ba helyettesítve: $|S|+|U|=21$, ebből $|S|=10$, és így $|K|=10$.
Ekkor (4)-ből $|S\cap K|=5$, (5)-ből $|K\cap U|=4$.
Tehát

$$30-(|S|+|K|+|U|-|S\cap K|-|S\cap U|-|K\cap U|+|S\cap U\cap K|)=$$
$$=30-(10+10+11-5-3-4+1)=10,$$

azaz 10-en nem olvassák egyiket sem. Mivel $10:30\approx 0{,}333$, ez a tanulók 33,3%-át jelenti.

18. A következő ábrát rajzolhatjuk fel:



Felírva a szinusztételt az APB és QAB háromszögekben, kiszámíthatjuk AP és AQ hosszát:

$$\frac{AP}{50}=\frac{\sin 21^\circ}{\sin 59^\circ} \quad \text{és} \quad \frac{AQ}{50}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 55^\circ},$$

ahonnan $AP\approx 20{,}9$ m és $AQ\approx 52{,}861$ m.

Alkalmazzuk a koszinusztételt APQ háromszögben:

$$PQ^2=AP^2+AQ^2-2AP\cdot AQ\cdot\cos 35^\circ\approx 1421{,}1$$

amiből $PQ\approx 37{,}7$ m.

Nagy Papucsnak közelítőleg 37,7 m hosszú szárogatókötelet kell sodornia.

9. Feladatsor I. rész – megoldások

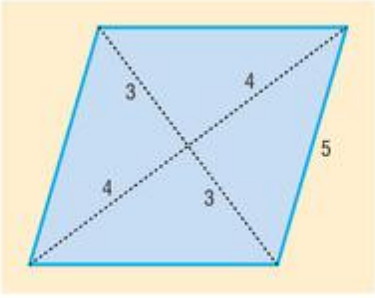
1. $3+x\geq 0$, azaz $x\geq -3$. Négyzetre emelve, s rendezve az egyenlőtlenséget:

$$x^2+x-2>0, \quad \text{amiből} \quad x>1 \quad \text{vagy} \quad x<-2.$$

Mivel a jobb oldalon nemnegatív szám áll, ezért a bal oldalon is annak kell (sőt pozitívnak a > jel miatt), tehát a megoldás: $x>1$.

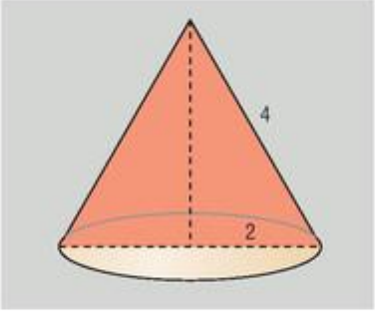
2. $\log_2 80-\log_2 10+\log_3 81=\log_2\frac{80}{10}+4=\log_2 8+4=3+4=7.$

3. A rombusz átlói felezik egymást, és merőlegesek is egymásra. Pitagorasz tétele szerint a rombusz oldala 5 egység, így kerülete 20 egység.



4. A forgáskúp tengelymetszete az ábrán látható. (➡)
A kúp felszíne:

$$A=2^2\cdot\pi+2\pi\cdot 4=12\pi.$$



5. A β szög a következő négy érték lehet: 31°, 329°, 391°, 689°.

6. A kedvező esetek száma 3 (prímszámok: 2, 3, 5), az összes esetek száma 6, így a prímszám dobásának valószínűsége:

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

7. Ha a sorozat ötödik tagja a_5 és a differencia d, akkor a következő összeget kell kiszámítanunk:

$$3-4d+3-3d+3-2d+3-d+3+3+d+3+2d+3+3d+3+4d=9\cdot 3=27.$$

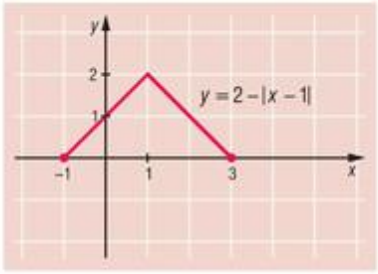
8. Az $y=2x+1$ egyenletű egyenes meredeksége 2, ezért a rá merőleges egyenes meredeksége $-\frac{1}{2}$, így az egyenlete: $y-2=-\frac{1}{2}\cdot(x-1)$, vagy más alakban: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

9. Az első egyenletből $y=3-x$, ezt a másodikba helyettesítve, majd rendezve az egyenletet, kapjuk, hogy:

$$x^2-3x+2=0.$$

Ennek gyökei: $x_1=1$, $x_2=2$, a megfelelő y értékek: $y_1=2$, $y_2=1$.

10. A függvény legnagyobb értéke 2, ezt az $x=1$ helyen, a legkisebb értéke pedig 0, ezt az $x=-1$ és az $x=3$ helyeken veszi fel. (➡)



11. Az 1-től 100-ig terjedő egész számok között 50 db osztható 2-vel, 33 db osztható 3-mal, és 16 db osztható 2-vel is meg 3-mal is, tehát 6-tal.

Így $50+33-16=67$ olyan szám van, amely vagy 2-vel, vagy 3-mal osztható, tehát 33 olyan van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal.

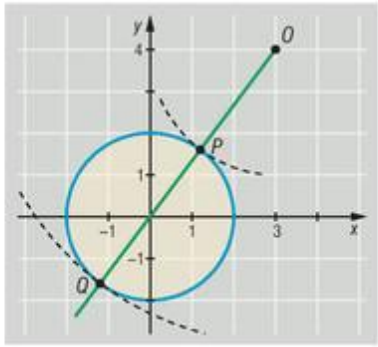
12. Alkalmazzuk azt a területképletet, amely szerint a háromszög területe két oldalának és a közbezárt szög szinuszának szorzata osztva 2-vel:

$$t=\frac{3\cdot 8\cdot \sin 120^\circ}{2}=6\sqrt{3}.$$

9. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. Az ábrán a 2 sugarú, origó középpontú kört és a másik kör középpontját $O(3;4)$ rajzoltuk meg. Az O és az origó távolsága 5, így r lehetséges értékei:

$$5-2=3 \quad \text{és} \quad 5+2=7.$$



A két kör érintési pontjain a középpontjukat összekötő egyenes halad át, ennek egyenlete: $y=\frac{4}{3}x$. Az egyenes és az origó középpontú 2 sugarú kör metszéspontjai:

$$P\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right), \quad \text{illetve} \quad Q\left(-\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right).$$

Ezek lesznek az érintési pontok.

14. A háromszög területe:

$$t=\frac{10\cdot 24\cdot \sin\alpha}{2}=120\cdot \sin\alpha,$$

ahol $\sin\alpha$ a két oldal által bezárt szög.

Mivel $0<\alpha<180^\circ$, $\sin\alpha$, és vele együtt t is akkor a legnagyobb, ha $\alpha=90^\circ$, azaz a közbezárt szög derékszög. Ekkor $\sin\alpha=1$, tehát a terület 120 cm^2.

15. Jelölje x az A-ból B-be induló gyalogos emelkedőn megtett útját kilométerben, y a vízszintes utat, z a lejtőn megtett utat kilométerben mérve. Visszafelé természetesen z km lesz az emelkedő és x km a lejtő hossza. Így a következő egyenleteket írhatjuk fel:

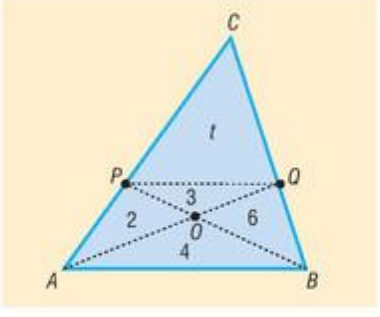
$$(1)\quad x+y+z=11{,}5; \qquad (2)\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=2{,}9; \qquad (3)\quad \frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=3{,}1.$$

A (2) és (3) megfelelő oldalait összeadva kapjuk: $\frac{8x}{15}+\frac{8z}{15}+\frac{y}{2}=6.$

Az (1)-ből $x+z=11{,}5-y$, ezt az előző egyenletbe helyettesítve y-ra egyismeretlenes egyenletet kapunk. Ebből $y=4$ km, tehát a vízszintes út 4 km hosszú volt.

9. Feladatsor II. rész / B – megoldások

16. Az ábrán az egyes háromszögek területét tüntettük fel. Használjuk fel, hogy ha két háromszög magassága egyenlő, akkor területük aránya az alapok arányával egyenlő. Ezek szerint a $POQ_{\triangle}$ területe 3 egység.

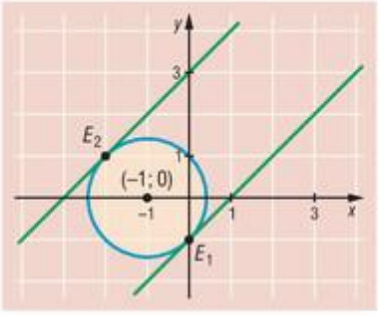


Hasonlóan adódik, hogy az $ABP_{\triangle}$ és a $PBC_{\triangle}$ területének aránya ugyanannyi, mint az $AQP_{\triangle}$ és a $PQC_{\triangle}$ területének aránya:

$$\frac{t+9}{6}=\frac{t}{5}, \quad \text{ebből} \quad t=45\ \text{cm}^2.$$

17. Az egyenlőtlenséget így írhatjuk:

$$(x+1)^2+y^2\le 2.$$



Azok a $P(x;y)$ pontok, amelyek ezt az egyenlőtlenséget kielégítik, egy $(-1;0)$ középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú körlemezt alkotnak. Az $y=x+a$ egyenlet egy egyenes egyenlete. Akkor lesz egy megoldás, ha az egyenes érinti a kört.

Ez $a=-1$ és $a=3$ esetben következik be.

Megoldások tehát: az $E_1(0;-1)$ és $E_2(-2;1)$ pontpár.

18. Az összes kétjegyű szám összege:

$$10+11+12+\ldots+99=\frac{10+99}{2}\cdot 90=4905.$$

Ebből kell kivonni a 3-mal vagy 5-tel osztható kétjegyű számok összegét.

A 3-mal oszthatók összege:

$$12+15+\ldots+99=30\cdot\frac{12+99}{2}=1665.$$

Az 5-tel oszthatók összege:

$$10+15+\ldots+95=18\cdot\frac{10+95}{2}=945.$$

A 3-mal és 5-tel, azaz 15-tel oszthatók összege (ezek mindkét utóbbi összegben szerepelnek):

$$15+30+45+60+75+90=315.$$

Tehát a keresett összeg: $4905-(1665+945-315)=2610.$

10. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Az egyenlet így írható: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát a megoldások:

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

2. A logaritmus azonosságait és a definíciókat felhasználva:

$$\log_7 196 - \log_7 4 - \sin 270^\circ = \log_7 \frac{196}{4} - (-1) = \log_7 49 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

3. A négyzetgyöknek csak akkor van értelme a valós számok körében, ha $5x - 4 \geq 0$, azaz $x \geq \frac{4}{5}$. Mivel a bal oldalon nemnegatív kifejezés áll, a jobb oldalon is annak kell állnia, sőt pozitívnak, hiszen ez az oldal a nagyobb. Ezért $x > 0$, ebből az értelmezési tartomány: $x > \frac{4}{5}$. Az átalakítás után kapott $x^2 - 5x + 4 > 0$ egyenlőtlenség akkor igaz, ha $x < 1$ vagy $x > 4$, tehát a megoldás:

$$\frac{4}{5} < x < 1 \quad \text{vagy} \quad x > 4.$$

4. A dobott számok összege 11 vagy 12 lehet. 11-et úgy lehet dobni, hogy egyik kockán 5-öst, a másikon 6-ost dobunk, ennek valószínűsége $\frac{2}{36}$. 12-t csak úgy, hogy mindkét kockán 6-ost dobunk, ennek valószínűsége $\frac{1}{36}$, tehát a keresett valószínűség: $\frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

5. A két keresett szög mértéke $6x$ és $7x$, ezek összege: $6x + 7x = 130^\circ$. Ebből $x = 10$, tehát a két szög nagysága 60° és 70°.

6. A gömb sugarát jelölje r, akkor a térfogata:

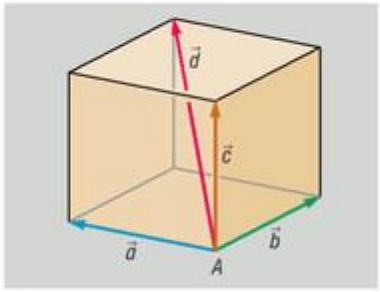
$$\frac{4r^3\pi}{3} = \frac{9}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{27}{8} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2}.$$

A gömb felszíne:

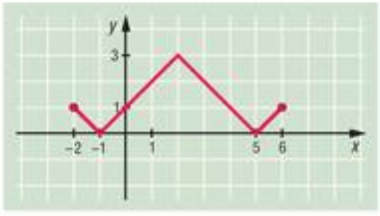
$$4r^2\pi = 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot \pi = 9\pi.$$

7. Az ábrán az adott három vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. A keresett testátló vektor:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$



8. A függvény grafikonja az ábrán látható.



9. A 784 prímtényezős felbontása:

$$784 = 2^4 \cdot 7^2.$$

A pozitív osztók száma:

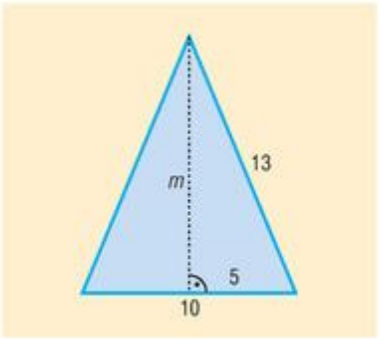
$$(4 + 1) \cdot (2 + 1) = 15.$$

10. A háromszög magassága Pitagorasz tételével kiszámítható:

$$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}.$$

A háromszög területe:

$$t = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$

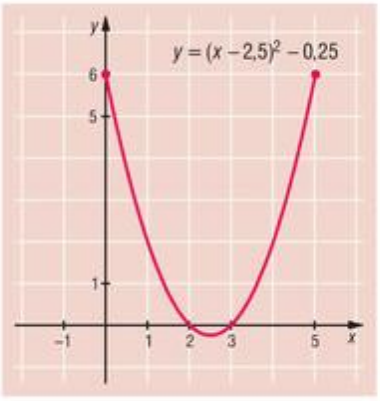


11. A szám 70%-a a szám 0,7-szerese, tehát $0{,}7 \cdot \frac{a}{5} = 35$, amiből $a = 250$.

12. Átalakítva a hozzárendelési szabályt:

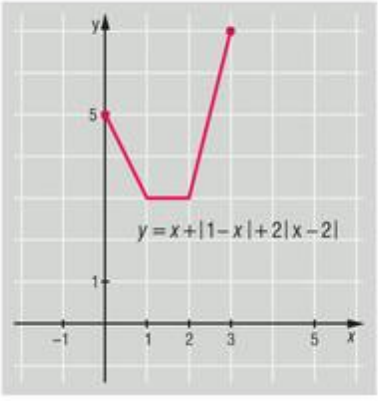
$$x \mapsto \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

A függvény legnagyobb értéke 6, ezt a 0 és a 6 helyen veszi fel. A legkisebb értéke a parabola tengelypontjában, $x = 2{,}5$-nél van, ez $y = -0{,}25$.



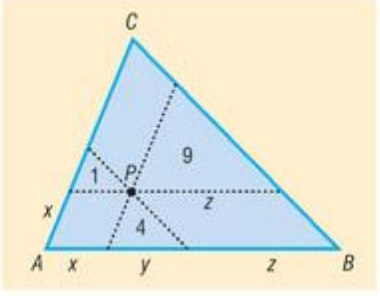
10. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. A függvény legnagyobb értéke 7, ezt az $x = 3$-nál, a legkisebb értéke 3, ezt $1 \le x \le 2$ esetén veszi fel.



14. Azt használjuk fel, hogy hasonló háromszögek területének aránya a megfelelő oldalak arányának négyzetével egyenlő. A „kis" háromszögek mindegyike hasonló az ABC eredeti háromszöghöz, így ha az $ABC_{\triangle}$ területe t, akkor:

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \frac{y}{x+y+z} = \frac{2}{\sqrt{t}}, \quad \frac{z}{x+y+z} = \frac{3}{\sqrt{t}}.$$



A három egyenletet összeadva ezt kapjuk:

$$1 = \frac{6}{\sqrt{t}}, \quad \text{tehát} \quad t = 36 \text{ területegység}.$$

15. Az $n \neq -1$, $\frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$ átalakítás mutatja, hogy a tört csak akkor lehet egész, ha $n+1$ osztója 2-nek, azaz $n+1$ értéke -2, -1, 1, 2 lehet. Így n értéke -3, -2, 0, 1 lehet.

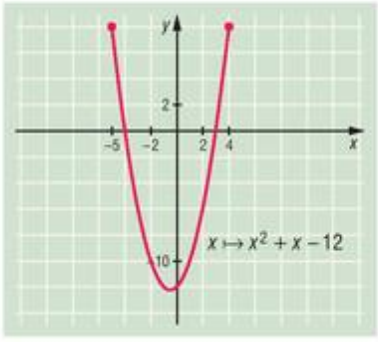
A másik törtből $n \neq -4$, $\frac{2n+15}{n+4} = 2 + \frac{7}{n+4}$, azaz $n+4$ osztója 7-nek, vagyis $n+4$ értéke -7, -1, 1, 7 lehet. Így n értékére ezt kapjuk: -11, -5, -3, 3.

A két szóba jöhető n értékrendszerben $n = -3$ a közös. Ez jó is, mert ekkor az első tört értéke 0, a másodiké 9, mindkettő egész szám.

10. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. Az $x \mapsto x^2 + x - 12$ átalakítása után:

$$x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}.$$



Az első egyenlőtlenségből $5^{3x-1} \leq 5^2$. Mivel az 5 alapú exponenciális függvény szigorúan nő, ebből $3x - 1 \leq 2$, azaz $x \leq 1$.

A második egyenlőtlenség így írható: $x^2 + x - 12 \leq 0$, ez pedig $-4 \leq x \leq 3$ esetén teljesül.

Mindkét egyenlőtlenséget a $-4 \leq x \leq 1$ valós számok elégítik ki.

17. Az *A* csap egy óra alatt a medence egyötöd részét, a *B* csap egy óra alatt az egy tizenötöd részét tölti meg. Így egy óra alatt a két csap együtt $\frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$ részét tölti meg a medencének.

Tehát összesen $\frac{15}{4}$ óra, azaz 3 óra 45 perc alatt tölti meg a két csap együtt a medencét.

18. Jelölje s az *A* és *B* közti távolságot kilométerben mérve. Ekkor a teherautó útja *A*-ból *B*-be $\frac{s}{60}$ óráig, *B*-ből *A*-ba $\frac{s}{100}$ óráig tartott, így az átlagsebessége:

$$\frac{2s}{\frac{s}{60} + \frac{s}{100}} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{100}} = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ volt.}$$

EMELT SZINTŰ FELADATSOROK

1. Feladatsor / A – megoldások

1. A bal oldalon álló tört értelmezési tartománya : $1-4x^2 \geq 0$, $x \neq 0$, azaz $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$.
Bővítjük a törtet az $1+\sqrt{1-4x^2}$ összeggel:

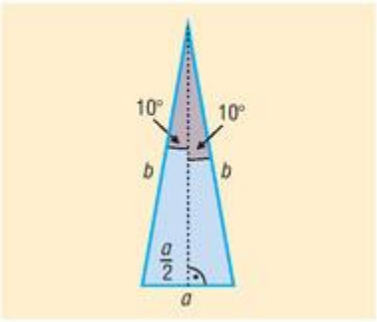
$$\frac{4x^2}{x\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)} = \frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}} < 3.$$

Ha $-0{,}5 \leq x < 0$, akkor $4x < 0$ és $1+\sqrt{1-4x^2} > 0$, így hányadosuk negatív, azaz kisebb 3-nál.

Ha $0 \leq x < 0$, akkor $0 < 4x \leq 2$, $1+\sqrt{1-4x^2} \geq 1$, tehát a tört értéke ≤ 2.

Tehát az egyenlőtlenség az összes, az értelmezési tartományba tartozó x valós számra teljesül: $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$.

2. Az ábráról leolvasható, hogy $\sin 10° = \frac{a}{2b}$.



A $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ azonosságot $\alpha = 10°$-ra alkalmazva:

$$\sin 30° = 0{,}5 = 3\cdot\sin 10° - 4\cdot\sin^3 10° = 3\cdot\frac{a}{2b} - 4\cdot\left(\frac{a}{2b}\right)^3.$$

Átrendezve:

$$0{,}5 = 1{,}5\cdot\frac{a}{b} - 0{,}5\cdot\frac{a^3}{b^3}, \quad \text{amiből} \quad a^3 + b^3 = 3ab^2,$$

és ezt kellett igazolni.

3. Mivel a logaritmus alapja csak 1-től különböző pozitív szám lehet, $0 < x$, $x \neq 1$, $x \neq 16$, $x \neq 64$.
A megfelelő logaritmus azonosságok felhasználásával az egyenlet így írható:

$$\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2 x - 4} = \frac{1}{\log_2 x - 6}.$$

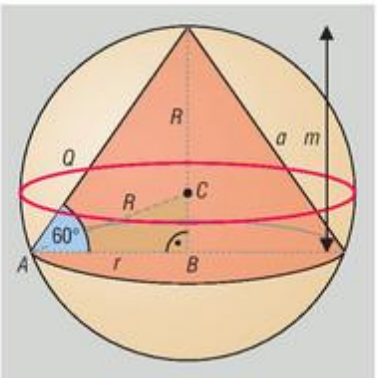
Ha a $\log_2 x = z$ jelölést használjuk, akkor a kapott egyenlet így alakítható át:

$$z(z-4) = z-6, \quad \text{azaz} \quad z^2 - 5z + 6 = 0.$$

Innen $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, és így $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. A kapott gyökök kielégítik az egyenletet.

4. Jelölje a kúp alapkörének sugarát r, alkotóját a, így a palást felszíne: $A_p = ra\pi$, $t_{kör} = r^2\pi$. A feltétel szerint $ra\pi = 2r^2\pi$, tehát $a = 2r$, azaz egyenlő oldalú kúpot kaptunk. Ennek magassága $m = r\sqrt{3}$, tehát a térfogata:

$$V = r^3\cdot\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$



Mivel a kúp alapköre és csúcsa a gömbfelületre illeszkedik, az ábrán látható ABC derékszögű háromszögből:

$$\left(r\sqrt{3} - R\right)^2 + r^2 = R^2, \quad \text{innen} \quad r = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

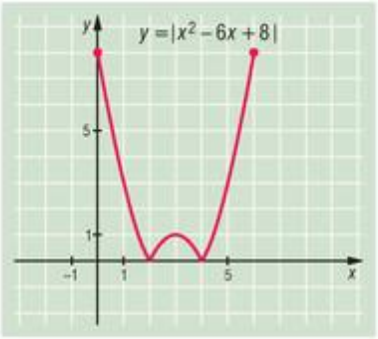
A kúp térfogata tehát: $V = R^3\cdot\frac{3\pi}{8}$.

1. Feladatsor / B – megoldások

5. *a)* Az f függvény grafikonja az ábrán látható.

A függvény átalakítható:

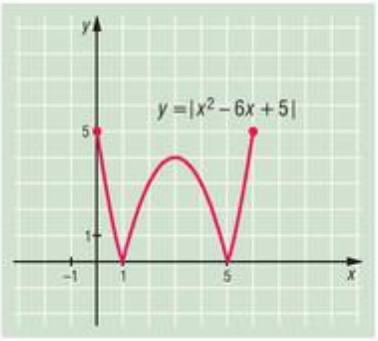
$$f(x) = |x^2 - 6x + 8| = |(x-3)^2 - 1|.$$



b) A g függvény grafikonja az ábrán látható.

A függvény átalakítható:

$$g(x) = |x^2 - 6x + 5| = |(x-3)^2 - 4|.$$

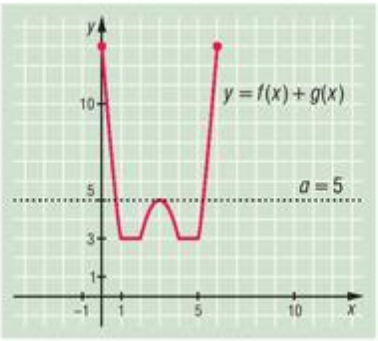


Ábrázoljuk a

$$h(x) = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|, \quad 0 \le x \le 6$$

függvényt, amelyre $h(x) = f(x) + g(x)$.

Az ábráról leolvasható, hogy $3 \le a < 5$ esetén van az egyenletnek 3-nál több megoldása a valós számok körében.



6. Az $y = x^2 + ax + b$ egyenletű parabola tengelypontjának koordinátái: $x = -\frac{a}{2}$ és $y = b - \frac{a^2}{4}$. Ezért az $y = x^2 + (2p+1)x + p^2 - 1$ egyenletű parabola tengelypontjának koordinátái: $x = -p - 0{,}5$, illetve $y = -p - 1{,}25$.

Innen látható, hogy a tengelypontok koordinátái kielégítik az $y - x = -0{,}75$, azaz az $y = x - 0{,}75$ egyenletet, amely egyenes egyenlete. A tengelypontok tehát illeszkednek az $y = x - 0{,}75$ egyenesre.

7. Rendezzük át az egyenlőtlenséget, és használjuk fel, hogy a háromszögben $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, ezért $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta > 2 - \sin^2(\alpha + \beta),$$
$$\sin^2(\alpha + \beta) > 2 - (1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta),$$
$$\sin^2(\alpha + \beta) > \cos^2\alpha + \cos^2\beta. \quad (1)$$

Használjuk fel a szinuszfüggvény addíciós tételét, és végezzük el a négyzetre emelést:

$$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta > \cos^2\alpha + \cos^2\beta. \quad (2)$$

Ezután újra rendezzük át az egyenlőtlenséget, és használjuk az ismert azonosságokat:

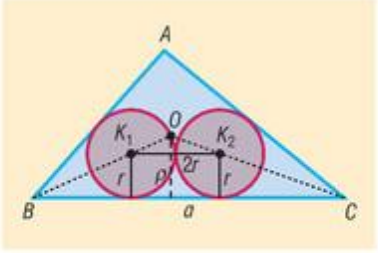
$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta > 2\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta. \quad (3)$$

Mivel $\cos\alpha$, $\cos\beta > 0$ (α és β hegyesszögek), oszthatunk ezekkel és 2-vel, majd átrendezve:

$$0 > \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha+\beta). \quad (4)$$

A (4) egyenlőtlenség igaz, mert $90° < \alpha+\beta < 180°$, hiszen γ is hegyesszög. A (4) egyenlőtlenségből következik a (3), ebből a (2) és végül az (1), mert a lépések megfordíthatók. Így igazoltuk az egyenlőtlenséget.

8. Az ábra jelöléseit használjuk. A két kör érinti egymást, és a háromszög két oldalát, ellenkező esetben sugaruk növelhető lenne. Jelölje az ABC háromszögbe írt kör sugarát ρ, a két egybevágó kör sugarát r. Mivel BO és CO szögfelezők, O a beírt kör középpontja, ennek az a oldaltól való távolsága ρ. Ha K_1 és K_2 a két egyenlő sugarú kör középpontja, akkor a BCO és K_1K_2O háromszögek hasonlók, így a megfelelő szakaszaik aránya egyenlő: $\frac{\rho}{a} = \frac{\rho - r}{2r}$.



Ebből

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\rho}{2r} - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{a} + \frac{1}{2} = \frac{\rho}{2r} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2\rho + a} = \frac{r}{\rho},$$

így a kivágandó kör sugara:

$$r = \frac{a\cdot\rho}{2\rho + a} = \frac{a\cdot\rho + 2\rho^2 - 2\rho^2}{2\rho + a} = \rho - \frac{2\rho^2}{2\rho + a}.$$

Leolvasható, hogy r annál nagyobb, minél nagyobb az a, azaz akkor a legnagyobb, ha a a legnagyobb oldal.

9. Az egyenletesen gyorsuló test útját a következő képlet adja meg: $s = v_0\cdot t + \frac{a\cdot t^2}{2}$.

A hátrább lévő test esetén ha $t = 1$ s, akkor $s = 25$ m, tehát:

$$25 = v_0 + \frac{a}{2}, \quad (1)$$

ha $t = 2$s, akkor $s = 50\frac{1}{3}$ m, tehát

$$50\frac{1}{3} = 2v_0 + 2a. \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből $a = \frac{1}{3}$ és $v_0 = 25 - \frac{1}{6} = 24\frac{5}{6}$. Tehát $s_1 = 24\frac{5}{6}\cdot t + \frac{t^2}{6}$.

A másik test esetén ha $t = 1$ s, akkor $s = 30$ m, tehát:

$$30 = v_0 + \frac{a}{2}, \quad (3)$$

ha $t = 2$s, akkor $s = 59\frac{1}{2}$ m, tehát

$$59\frac{1}{2} = 2v_0 + 2a. \quad (4)$$

A (3) és (4) egyenletekből $a = -\frac{1}{2}$ és $v_0 = 30\frac{1}{4}$. Tehát $s_2 = 30\frac{1}{4}\cdot t - \frac{t^2}{4}$.

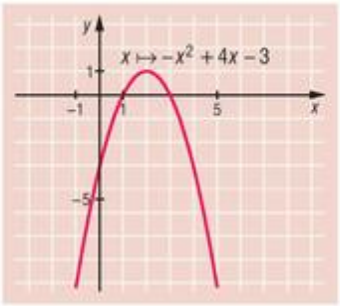
Az első test akkor éri utol a másodikat, ha $s_1 = s_2 + 20$. Ebből t-re a következő egyenletet kapjuk:

$$t^2 - 13t - 48 = 0.$$

Ennek gyökei 16 és -3. Nyilván csak a pozitív gyök jó, tehát 16 másodperc múlva éri utol az első test a másodikat.

2. Feladatsor / A – megoldások

1. *a)* A logaritmus értelmezése alapján $-x^2+4x-3>0$, valamint $x-1>0$. Az utóbbi egyenlőtlenség megoldása $x>1$, míg az első egyenlőtlenség bal oldalán álló másodfokú kifejezés két zérushelye: $x_1=1$ és $x_2=3$. Az $x\mapsto -x^2+4x-3$ másodfokú függvény grafikonjáról (ld. ábra) leolvasható, hogy az első egyenlőtlenség megoldása $1<x<3$.



A kifejezés értelmezési tartománya az $]1;3[$ intervallum.

b) A logaritmus azonosságai és definíciója alapján az egyenlet a következő alakokban is felírható:

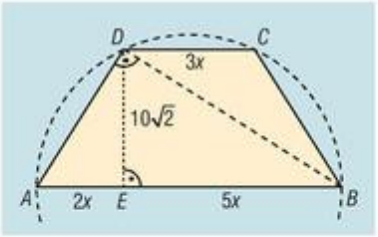
$$\log_2\frac{-x^2+4x-3}{(x-1)^2}=1, \quad \text{amiből} \quad \frac{-x^2+4x-3}{(x-1)^2}=2.$$

Az *a)* feladatban kiszámoltuk a számláló gyökeit. A gyöktényezős alak alkalmazásával kapjuk, hogy $-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3)$, és ezért a bal oldalon álló tört egyszerűsítése után:

$$\frac{-(x-3)}{x-1}=2, \quad \text{amiből} \quad x=\frac{5}{3}.$$

A kapott szám eleme az értelmezési tartománynak, és ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy megoldása az egyenletnek.

2. *a)* A feltételek alapján a trapéz nem téglalap. Ekkor az ábra jelöléseit használva a trapéz alapjai $AB=7x$, $CD=3x$, a D csúcsból induló magasság talppontja E, továbbá az ABD háromszög derékszögű. Az ABD háromszögben a magasságtétel alapján adódik: $DE^2=2x\cdot 5x=10x^2$, ebből következik, hogy $200=10x^2$, végül $x=2\sqrt{5}$.



A trapéz alapjai:

$$AB=14\sqrt{5}\approx 31{,}30\text{ cm}, \quad CD=6\sqrt{5}\approx 13{,}42\text{ cm}.$$

A trapéz területe:

$$T=\frac{AB+CD}{2}\cdot DE=\frac{14\sqrt{5}+6\sqrt{5}}{2}\cdot 10\sqrt{2}=100\sqrt{10}\approx 316{,}23\text{ cm}^2.$$

b) Thalész tételének megfordítása alapján az ABD derékszögű háromszög köré írt kör középpontja éppen az AB átfogó felezőpontja. Természetesen a C csúcs szintén illeszkedik az AB átmérőjű körre, így a trapéz köré írt kör sugara az AB átfogó fele, azaz $r=7\sqrt{5}\approx 15{,}65$ cm.

A kör területe:

$$T=r^2\pi=245\pi\approx 769{,}69\text{ cm}^2.$$

3. *a)* Jelöljük p-vel annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott tanuló mekkora valószínűséggel oldja meg egyedül a házi feladatát, azaz $p=0{,}65$.

Mivel független eseményekről van szó, ezért a keresett valószínűség $p^{15}\approx 0{,}0016$. Sajnálattal állapítjuk meg, hogy ez elkeserítően kicsi érték.

b) Azt a 10 diákot, aki nem önállóan dolgozott, $\binom{15}{10}=3003$-féleképpen választhatjuk ki. A binomiális eloszlás alapján annak a valószínűsége, hogy éppen 10 diák készítette el segítséggel a házi feladatát:

$$\binom{15}{10}\cdot p^5\cdot(1-p)^{10}\approx 0{,}0096.$$

4. *a)* A holtverseny az 1., 2., 3., 4., illetve 5. hely valamelyikén lehetett. A hat versenyző közül $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen választhatjuk ki azt a kettőt, akik holtversenyt értek el. A maradék négy helyen a többi versenyző $4! = 24$-féleképpen érhetett célba. Így összesen $5 \cdot 15 \cdot 24 = 1800$ különböző sorrendben érhettek célba a versenyzők.

b) Mivel a versenyt Andor egyedül nyerte meg, ezért az 1. helyen nem alakulhatott ki holtverseny.

I. eset: Fábián az 5. helyen holtversennyel ért célba. Ekkor Fábián mellé 4-féleképpen választhatunk 5. helyezettet. A 2., 3., 4. helyen a maradék 3 versenyző $3! = 6$-féleképpen érhetett célba, ezért az 1. eset összesen $4 \cdot 6 = 24$-féleképpen valósulhatott meg.

II. eset: Fábián egyedül ért célba az utolsó helyen. Ekkor a holtverseny a 2., a 3. vagy a 4. helyen következhetett be. Az együtt célba érkezőket $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen választhatjuk ki. A maradék két helyezésen kétféleképpen alakulhatott a sorrend, ezért a 2. eset összesen $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$-féleképpen valósulhatott meg.

A verseny végeredménye összesen $24 + 36 = 60$-féleképpen alakulhatott.

2. Feladatsor / *B* – megoldások

5. *a)* Anna a 4 év alatt 48 alkalommal fizet be 10 000 Ft-ot, ezért összesen 480 000 Ft-ot fizet be.

b) Anna az 1. évben összesen 12-szer fizet be 10 000 Ft-ot. Az első összeg 12 hónapig kamatozik, a második 11 hónapig, és így tovább; a december 1-jén befizetett 10 000 Ft után a bank már csak 1 havi kamatot fizet. Így december 31-én az Anna számláján lévő összeg:

$$10\,000 \cdot 1{,}003^{12} + 10\,000 \cdot 1{,}003^{11} + \ldots + 10\,000 \cdot 1{,}003.$$

A fenti összeg egy mértani sorozat első 12 tagjának összege. A sorozat első tagja $10\,000 \cdot 1{,}003$, hányadosa 1,003, így az összeg:

$$10\,000 \cdot 1{,}003 \cdot \frac{1{,}003^{12} - 1}{1{,}003 - 1} \approx 122\,365{,}93,$$

vagyis Anna számláján hozzávetőlegesen 122 366 Ft lesz.

c) A megtakarítás összegét két részre bonthatjuk.

I. rész: Anna befizetései, valamint annak kamata. Az első hónapban befizetett összeg 48 hónapig, a második hónapban befizetett összeg 47 hónapig és így tovább; az utolsó befizetett összeg már csak 1 hónapig kamatozik. Ennek megfelelően a befizetésekből, valamint annak kamataiból Anna számláján a következő összeg íródik jóvá:

$$10\,000 \cdot 1{,}003^{48} + 10\,000 \cdot 1{,}003^{47} + \ldots + 10\,000 \cdot 1{,}003 =$$

$$= 10\,000 \cdot 1{,}003 \cdot \frac{1{,}003^{48} - 1}{1{,}003 - 1} \approx 516\,996{,}95 \text{ Ft}.$$

II. rész: az állami támogatás, valamint annak kamatai. Az első év után az állam 36 000 Ft-ot utal a számlára. Ez az összeg 36 hónapig kamatozik. A második év után kapott 36 000 Ft 24 hónapig, míg a harmadik év után járó 36 000 Ft csak 12 hónapig kamatozik. A negyedik év után járó állami támogatás jóváíródik a számlán az 5. év első napján, de kamat már nem jár utána. Ezek alapján az állami támogatás, valamint az utána járó kamat összege:

$$36\,000 \cdot 1{,}003^{36} + 36\,000 \cdot 1{,}003^{24} + 36\,000 \cdot 1{,}003^{12} + 36\,000 \approx 152\,100{,}26 \text{ Ft}.$$

Anna a takarékoskodási időszak letelte után összesen $516\,996{,}95 + 152\,100{,}26 \approx 669\,097$ Ft összeget vehet fel.

6. *a)* Közepest a 20 diák 60%-a (12 fő), illetve a 40 diák 50%-a (20 fő) kapott, tehát összesen 32-en. Jót, azaz 4-est a 20 diák 25%-a (5 tanuló), valamint a 40 diák 37,5%-a (15 tanuló), összesen 20-an kaptak. A maradék 8 tanuló jelesre érettségizett. Az adatok szemléltetésére oszlopdiagram a legmegfelelőbb.



b) A matematikaérettségi jegyek átlaga:

$$\frac{12\cdot 3+5\cdot 4+3\cdot 5}{20}=3{,}55.$$

A történelemérettségi jegyek átlaga:

$$\frac{20\cdot 3+15\cdot 4+5\cdot 5}{40}\approx 3{,}63.$$

c) Tegyük fel, hogy legalább n diáknak kellett volna 4-est szereznie a jobb átlaghoz. Ekkor:

$$\frac{(12-n)\cdot 3+(5+n)\cdot 4+3\cdot 5}{20}\geq 3{,}75.$$

A műveletek elvégzése után $n\geq 4$ adódik, azaz legalább 4 embernek kellett volna 4-est elérnie a közepesre érettségizők közül a jobb átlaghoz.

d) Az átlag csak a következő esetekben nagyobb vagy egyenlő, mint 4,20:

I. eset: két ötös; II. eset: egy ötös és egy négyes tanulót választunk ki.

Az I. eset bekövetkezésének valószínűsége:

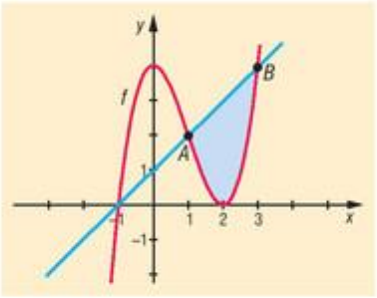
$$P(\text{két 5-ös tanulót választunk})=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{10}{780}\approx 0{,}0128,$$

a II. eset bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(\text{egy 5-ös és egy 4-es tanulót választunk})=\frac{5\cdot 15}{\binom{40}{2}}=\frac{75}{780}\approx 0{,}0962.$$

A keresett valószínűség $\approx 0{,}1090$.

7. *a)* Mivel $1^3-3\cdot 1^2+4=2$, valamint $3^3-3\cdot 3^2+4=4$, ezért A és B egyaránt illeszkednek az f függvény grafikonjára.



b) Az AB egyenes egyenlete: $y=x+1$.

c) Az AB egyenes az x tengelyt a $(-1;0)$ pontban metszi. Egyszerű számolás mutatja, hogy $(-1)^3-3\cdot(-1)^2+4=0$, így a $(-1;0)$ pont illeszkedik az f függvény grafikonjára is.

d) A zérushelyeket az $x^3-3x^2+4=0$ egyenlet megoldásai adják. A *c)* feladat eredménye alapján az AB egyenes zérushelye $x=-1$. Az egyenlet bal oldalán szorzattá alakítunk:

$$x^3-3x^2+4=x^3+1-3x^2+3=(x+1)(x^2-x+1)-3(x^2-1)=$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)(x-1)=(x+1)(x^2-x+1-3x+3)=$$
$$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2.$$

A szorzattá bontásból leolvasható, hogy az egyenlet megoldásai: $x_1=-1$ és $x_2=2$.

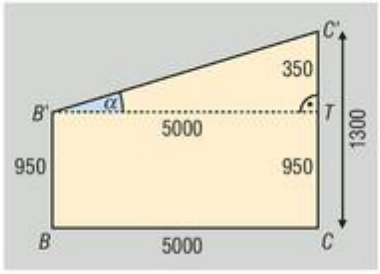
e) Az f függvény deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. A derivált előjelének vizsgálatából látható, hogy a függvény az $[1; 2]$-on csökken, a $[2; 3]$-on pedig növekszik. Ebből adódik, hogy az AB szakasz és a függvény grafikonja által közrefogott síkidom területe:

$$T = \int_1^3 (x+1) - (x^3 - 3x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 -x^3 + 3x^2 + x - 3\,\mathrm{d}x.$$

A Newton–Leibniz-formula alapján:

$$T = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x\right]_{x=1}^{x=3} = 4.$$

8. *a)* Ha a Tündér-hegy csúcsát B', a Magas-hegyét pedig C' jelöli, akkor a $BCC'B'$ derékszögű trapéz alapjai $BB' = 950$ m, $CC' = 1300$ m, míg egyik szára $BC = 5000$ m (ld. ábra).



A $B'TC'$ derékszögű háromszögben:

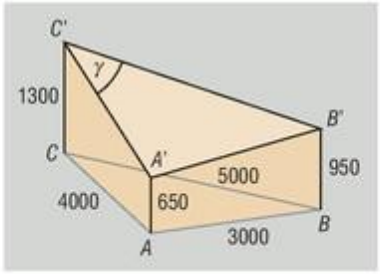
$$C'T = 1300 - 950 = 350 \text{ m},$$

így a keresett $C'B'T\sphericalangle = \alpha$ szögre:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{350}{5000}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 4{,}00°.$$

A Tündér-hegy csúcsáról a Magas-hegy csúcsa 4,00°-os emelkedési szögben látszik.

b) Ha a Pokol-hegy csúcsát A' jelöli, akkor az $A'C'B' = \gamma$ szög nagyságát keressük.



A γ szöget az $A'C'B'$ háromszög oldalaiból például a koszinusztétel segítségével számolhatjuk ki. Az *a)* feladat ábráján szereplő $B'C'T$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével $B'C' \approx 5012{,}24$ m adódik. Hasonló számolások után:

$$A'B' = \sqrt{3000^2 + (950 - 650)^2} \approx 3014{,}96 \text{ m},$$

$$A'C' = \sqrt{4000^2 + (1300 - 650)^2} \approx 4052{,}47 \text{ m}.$$

Az $A'C'B'$ háromszögre felírva a koszinusztételt kapjuk, hogy:

$$A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2 - 2 \cdot A'C' \cdot B'C' \cdot \cos\gamma, \quad \text{ahonnan} \quad \gamma \approx 36{,}97°.$$

A Magas-hegy csúcsáról a másik két hegycsúcsot összekötő szakasz körülbelül 36,97°-os szögben látszik.

9. A második feltétel alapján a parabola áthalad a (0; 1) ponton, ezért:

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1, \quad \text{amiből} \quad c = 1.$$

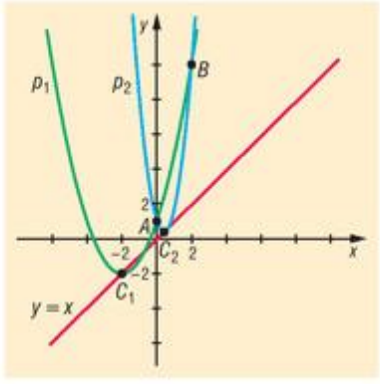
Mivel a parabola illeszkedik a (2; 10) pontra is, ezért:

$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1 = 10 \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b = 9. \quad (1)$$

A parabola egyenletének jobb oldalát teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + 1,$$

$$y - \left(-\frac{b^2}{4a} + 1\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$



A fenti egyenletből leolvasható, hogy a parabola tengelypontjának koordinátái:

$$C\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}+1\right).$$

Ha a tengelypont illeszkedik az $y = x$ egyenletű egyenesre, akkor koordinátái kielégítik az egyenletet, azaz:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{b^2}{4a}+1, \quad / \cdot 4a$$

$$-2b = -b^2 + 4a.$$

Felhasználva, hogy (1) alapján $4a = 9 - 2b$, adódik, hogy:

$$-2b = -b^2 + 9 - 2b, \quad \text{innen} \quad b_1 = 3 \quad \text{és} \quad b_2 = -3.$$

Ha $b_1 = 3$, akkor $a_1 = \frac{3}{4}$, míg ha $b_2 = -3$, akkor $a_2 = \frac{15}{4}$.

A feltételeknek két parabola tesz eleget, ezek egyenlete:

$$p_1: \ y = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 1 \quad \text{és} \quad p_2: \ y = \frac{15}{4}x^2 - 3x + 1.$$

A két parabolát és a feltételek teljesülését az ábra szemlélteti.

3. Feladatsor / A – megoldások

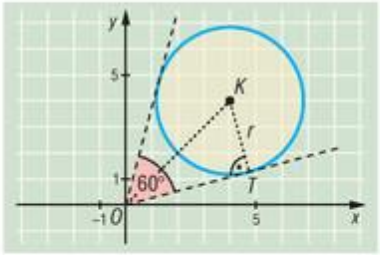
1. Legyen x a hajó sebessége állóvízben, y pedig a folyó sebessége:

$$AB = 5 \cdot (x + y), \quad BA = \frac{17}{3} \cdot (x - y).$$

A két út egyenlőségéből: $x = 16y$.

Azaz $AB = 5 \cdot 17y = 85y$, tehát a tutaj 85 óra alatt teszi meg az AB utat.

2. A kör egyenlete $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 32 - p^2$, középpontja $K(4; 4)$.



$OK = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Az OTK derékszögű háromszögben:

$$\sin 30° = \frac{r}{4\sqrt{2}}, \quad \text{ebből} \quad r = 2\sqrt{2}.$$

Mivel $r^2 = 32 - p^2$, adódik, hogy $p^2 = 24$.

Tehát $p_1 = 2\sqrt{6}$ és $p_2 = -2\sqrt{6}$ értékei esetén látszik 60°-os szögben az origóból a kör.

3. Számítsuk ki a játékosok nyerési esélyeit.

Attila: az ellentett esemény alapján $1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{16}{36} \left(= \frac{4}{9} = 0,\dot{4}\right)$.

Balázs: a kedvező számhármasok:

(1; 2; 3), (1; 2; 5), (1; 3; 4), (1; 3; 5), (1; 4; 5), (1; 5; 6), (2; 3; 5), (3; 4; 5),

a nyerés esélye: $\frac{8 \cdot 3!}{6^3} = \frac{8}{36}$.

Csanád esélye pedig a maradék $\frac{12}{36}$.

A játék akkor igazságos, ha a tétek a nyerési esélyekkel arányosak, tehát Attila tétje 20 zseton, Csanádé pedig 15 zseton.

4. Oldjuk meg az első egyenletet:

$$\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x,$$
$$0 = \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x,$$
$$0 = \cos x \cdot (\cos x - \sin x).$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát $\cos x = 0$, vagy $\cos x - \sin x = 0$.

A $\cos x = 0$ megoldásai a $[0; 2\pi]$-ban: $x_1 = \frac{\pi}{2}$ vagy $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. A $\cos x - \sin x = 0$-ból $\sin x = \cos x$.

Az egyenletet $\cos x$-szel osztva (a $\cos x = 0$ nem megoldás, mivel ilyen x-ekre $\sin x$ nem lehet 0) $\operatorname{tg} x = 1$ egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai a $[0; 2\pi]$-ban: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ vagy $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.

Tehát $A = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

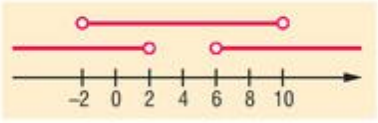
Oldjuk meg a második egyenlőtlenséget.

Mivel $-5 = \log_{\frac{1}{2}} 32$, elég a $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 12) > \log_{\frac{1}{2}} 32$ egyenlőtlenséggel foglalkoznunk.

Figyelembe véve az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény értelmezési tartományát és szigorú monoton csökkenését, x-re a következő feltételeket kapjuk: $0 < x^2 - 8x + 12 < 32$.

A bal oldali $0 < x^2 - 8x + 12$ egyenlőtlenség megoldásai:

$$x \in]-\infty; 2[\cup]6; \infty[.$$



A jobb oldali $x^2 - 8x + 12 < 32$ egyenlőtlenséget rendezve kapjuk: $x^2 - 8x - 20 < 0$, ennek megoldásai: $x \in]-2; 10[$.

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $B =]-2; 2[\cup]6; 10[$.

A π közelítő értékét felhasználva:

$$A \cap B = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}, \quad A \cup B =]-2; 2[\cup]6; 10[\cup \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

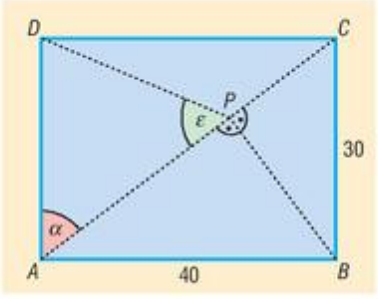
3. Feladatsor / *B* – megoldások

5. A keresett pont a téglalap átlóján található.

a) Az ABC derékszögű háromszög, átfogója $AC = 50$ m, átfogóhoz tartozó magassága: $PB = 24$ m. A Pitagorasz-tétellel számolható $AP = 32$ m és $PC = 18$ m.

A PD szakasz koszinusztétellel számítható az APD háromszögből, ha ismernénk a $DAP\sphericalangle$-et. Ez viszont a CDA derékszögű háromszögből: $\alpha = 53{,}13°$.

Ezt felhasználva: $PD = 27{,}78$ m.



b) Az ADP háromszög P-nél lévő szöge szinusztétellel számítható: $\varepsilon = 59{,}76°$, ekkora szögben látszik az AD oldal. A CD oldal pedig $180° - \varepsilon = 120{,}24°$ szögben látszik P-ből.

6. *a)* Az átlag alapján $S_{11} = 154$, ebből $a_1 = 4$ és $a_{11} = 24$. A mért legnagyobb csapadékmennyiség 24 mm volt.

b) A számtani sorozat 11 eleme és a 10 darab 0 lehetséges sorrendje:

$$21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 11 = \frac{21!}{10!} = 42325920.$$

c) Az a_1 helyzete és a sorban mögötte található 0-ák elhelyezkedése egyértelműen adja a sorozat elemeinek helyét. Az a_1 csak a hiányzó első 10 helyre kerülhet.

Ha a_1 november 1-jén van, mögötte a 10 darab 0 helyét $\binom{20}{10}$-féleképpen választhatjuk ki.

Ha a_1 november 2-án van, a mögötte lévő 9 darab 0 helyét $\binom{19}{9}$-féleképpen adhatjuk meg.

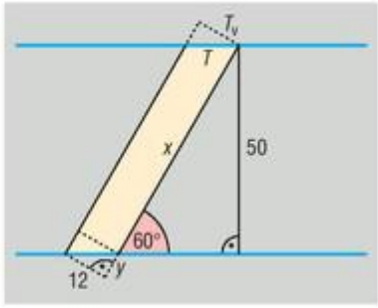
És így tovább, összesen:

$$\binom{20}{10}+\binom{19}{9}+\binom{18}{8}+\binom{17}{7}+\binom{16}{6}+\binom{15}{5}+\binom{14}{4}+\binom{13}{3}+\binom{12}{2}+\binom{11}{1}+\binom{10}{0}=352716.$$

7. *a)* A cső teljes hossza két részből tevődik össze, az ábra alapján:

$$x=\frac{50}{\sin 60^\circ}=57{,}74\text{ cm},\qquad y=12\cdot \operatorname{tg}30^\circ=6{,}93\text{ cm},$$

tehát $x+y=64{,}67$ cm hosszú csőre van szükség.



b) A keletkező lyuk területének vetülete a fúrás irányára merőleges síkra: $T_v=6^2\cdot\pi\approx 113\text{ cm}^2$. A két sík szöge 30°, tehát:

$$T_v=T\cdot\cos 30^\circ,\text{ ahonnan } T=130{,}6\text{ cm}^2.$$

c) Az egyenes henger térfogata:

$$V_e=6^2\cdot\pi\cdot 50=5654{,}9\text{ cm}^3.$$

A ferde henger egy x magasságú egyenes hengerré darabolható át, térfogata:

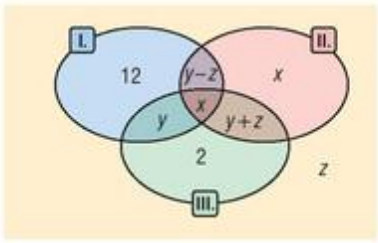
$$V_f=6^2\cdot\pi\cdot 57{,}74=6530{,}2\text{ cm}^3,$$

ami 15,5%-kal több, mint az egyenes hengeré.

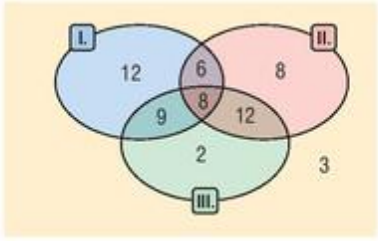
8. *a)* Szemléltessük az igennel szavazók halmazát.

A feltételek szerint:

$$\left.\begin{aligned}12+2y+x-z&=35\\14+z+y&=26\\x+2y+z+2&=31\end{aligned}\right\}.$$



Az első és harmadik egyenlet kivonásából $z=3$, ezt a másodikba helyettesítve: $y=9$. Mindkettőt az elsőbe helyettesítve: $x=8$. A kapott értékeket beírva a halmazábrába kiderül, hogy 60 fő vett részt a szavazáson.



b) A lehetséges eredmények száma: $\binom{35}{7}=6\,724\,520$.

c) A keresett valószínűség: $\dfrac{\dfrac{30!}{10!\cdot 10!\cdot 10!}}{3^{30}}=0{,}02696.$

9. Az autónak 100 km úton a literekben mért fogyasztását keressük $f(v)=av^2+bv+c$ alakban v sebességének függvényeként. A megadott táblázat alapján a sebességet $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban mérve:

$$\begin{aligned}f(50)=5{,}5 &\Rightarrow 5{,}5=a\cdot 50^2+b\cdot 50+c &\Rightarrow 5{,}5=a\cdot 2500+b\cdot 50+c,\\ f(100)=7 &\Rightarrow 7=a\cdot 100^2+b\cdot 100+c &\Rightarrow 7=a\cdot 10000+b\cdot 100+c,\\ f(150)=9{,}5 &\Rightarrow 9{,}5=a\cdot 150^2+b\cdot 150+c &\Rightarrow 9{,}5=a\cdot 22500+b\cdot 150+c.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva $a=\dfrac{1}{5000}$, $b=0$, $c=5$ adódik, vagyis $f(v)=\dfrac{1}{5000}\cdot v^2+5$.

a) Az autó fogyasztása 100 kilométeren $90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességnél:

$$f(90) = \frac{1}{5000} \cdot 90^2 + 5 = 6{,}62 \text{ liter.}$$

b) A 300 km-es utazás $\frac{300}{v}$ óra időt vesz igénybe v sebesség esetén, tehát a sofőrnek kifizetett költség $\frac{300}{v} \cdot 2000$ forint. A 300 km megtételéhez szükséges benzin mennyisége literben:

$$\frac{300}{100} \cdot \left(\frac{1}{5000} \cdot v^2 + 5\right) = \frac{3}{5000} \cdot v^2 + 15.$$

Mivel a benzin literenkénti ára 320 Ft, az üzemanyag $320 \cdot \left(\frac{3}{5000} \cdot v^2 + 15\right)$ forintba kerül.

Az összköltség a sebesség függvényében:

$$k(v) = \frac{300}{v} \cdot 2000 + 320 \cdot \left(\frac{3}{5000} \cdot v^2 + 15\right) = \frac{600\,000}{v} + \frac{96}{500} \cdot v^2 + 4800.$$

A $k(v)$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol az első deriváltja 0:

$$k'(v) = -\frac{600\,000}{v^2} + \frac{96}{250} \cdot v \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{600\,000}{v^2} + \frac{96}{250} \cdot v \quad \Rightarrow \quad v \approx 116.$$

Ha $v < 116$, akkor $k'(v) < 0$, ha $v > 16$, akkor $k'(v) > 0$, tehát a függvénynek $v = 116$ helyen minimuma van.

Az utazás költsége $116\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebesség esetén lesz minimális.

4. Feladatsor /*A* – megoldások

1. Az egyenletrendszer az $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $y > -1$ számokon van értelmezve.

A második egyenlet alapján $y + 1 = 3^x$.

Ezt felhasználva, az első egyenlet:

$$3 \cdot (y+1)^3 = 3y^3 + 8y^2 + 8y + 9,$$
$$3y^3 + 9y^2 + 9y + 3 = 3y^3 + 8y^2 + 8y + 9,$$
$$y^2 + y - 6 = 0,$$
$$(y+3) \cdot (y-2) = 0.$$

Az egyenlet megoldása: $y_1 = 2$ és $y_2 = -3$. Ez utóbbi nem eleme az értelmezési tartománynak.

Az $y = 2$ értéket a második egyenletbe helyettesítve $x = 1$ adódik.

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1$ és $y = 2$.

2. Mivel $a_n = 2a_{n+1} - a_{n+2}$, ebből $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

Az a sorozat, amelynek bármely tagja (a másodiktól kezdve) előáll a két szomszédos tag számtani közepeként, számtani sorozat.

Ha a sorozat első eleme a_1, differenciája d, akkor:

$$a_3 + a_7 = a_1 + 2d + a_9 - 2d = a_1 + a_9 = 12.$$

A sorozat első 9 tagjának összege:

$$S_9 = 9 \cdot \frac{a_1 + a_9}{2} = 54.$$

3. A szekszárdi borászok száma legyen s, a villányiaké v, az egrieké e.

a) A feladat szövege szerint:

$$5s + 4v + 2e = 25 \quad \text{és} \quad s + v + e = 8.$$

A második egyenletből e-t kifejezve és beírva az elsőbe:

$$3s + 2v = 9, \quad \text{ebből} \quad v = \frac{9 - 3s}{2},$$

vagyis $9 - 3s$ páros és pozitív, tehát $9 - 3s > 0$, azaz $3 > s$. Tehát s lehet 1 vagy 2, de csak 1 esetén lesz a $9 - 3s$ páros. Így $s = 1 \Rightarrow v = 3$ és $e = 4$.

A borversenyen 1 szekszárdi, 3 villányi és 4 egri borász vett részt.

b) A binomiális eloszlás alapján annak a valószínűsége, hogy 10 ember közül 7-en mondják, hogy a vörösbort jobban szeretik:

$$p = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \binom{10}{7} \cdot \frac{2^7}{3^{10}} \approx 0{,}26.$$

4. A keresett egyenesnek az x tengellyel való metszéspontja legyen $(a; 0)$, az y tengellyel pedig $(0; b)$.

Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor az egyenes áthalad az origón, és egyenlete: $y = \frac{7}{2}x$.

Ha a és b közül egyik sem 0, az egyenes tengelymetszetes alakjából következően egyenlete:

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad (a, b \neq 0).$$

Az egyenes illeszkedik az $A(2; 7)$ pontra, ezért $1 = \frac{2}{a} + \frac{7}{b}$.

Alakítsuk át az egyenlet:

$ab = 2b + 7a$, átalakítás után $ab - 2b - 7a + 14 - 14 = 0$, vagyis $(a - 2)(b - 7) = 14$.

Mivel a és b egész számok, 14-et kell egész számok szorzataként felírnunk.

Ezeket a lehetőségeket a következő táblázat mutatja:

$a-2$	1	14	2	7	–1	–14	–2	–7
$b-7$	14	1	7	2	–14	–1	–7	–2
a	3	16	4	9	1	–12	0	–5
b	21	8	14	9	–7	6	0	5

Nyolc egyenes tesz eleget a feltételeknek, ezek egyenletei:

$$y = \frac{7}{2}x, \quad 1 = \frac{x}{3} + \frac{y}{21}, \quad 1 = \frac{x}{16} + \frac{y}{8}, \quad 1 = \frac{x}{4} + \frac{y}{14},$$

$$1 = \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \quad 1 = x - \frac{y}{7}, \quad 1 = -\frac{x}{12} + \frac{y}{6}, \quad 1 = -\frac{x}{5} + \frac{y}{5}.$$

4. Feladatsor / *B* – megoldások

5. Mivel a nevező minden x-re pozitív értéket vesz fel, a függvény az intervallum minden pontjában értelmezve van.

Ha $2 \leq x \leq 5$, akkor:

$$f(x) = \frac{x + x + 2}{x + x - 2} = \frac{x + 1}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő, ebből következik, hogy

$$f(5) = \frac{3}{2} \leq f(x) \leq 3 = f(2).$$

Ha $0 \le x < 2$, akkor:

$$f(x) = \frac{x + x + 2}{x - x + 2} = x + 1.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő, ebből következik, hogy

$$f(0) = 1 \le f(x) < 3 = f(2).$$

Ha $-2 \le x < 0$, akkor:

$$f(x) = \frac{-x + x + 2}{-x - x + 2} = \frac{2}{-2x + 2} = -\frac{1}{x - 1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő, ebből következik, hogy

$$f(-2) = \frac{1}{3} \le f(x) < 1 = f(0).$$

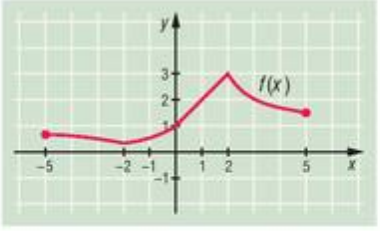
Ha $-5 \le x < -2$, akkor:

$$f(x) = \frac{-x - x - 2}{-x - x + 2} = \frac{-2x - 2}{-2x + 2} = \frac{x + 1}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő, ebből következik, hogy

$$f(-2) = \frac{1}{3} < f(x) \le \frac{2}{3} = f(-5).$$

A függvény minimuma $\frac{1}{3}$, az $x = -2$ helyen, maximuma pedig 3, az $x = 2$ helyen.



6. A motor sebessége legyen $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$, az autóé $y \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Bélatelep és Andrásfalva közti távolság s km.

a) Míg az autó visszaér Andrásfalvára, $2s$ utat tesz meg, ha pedig onnan visszafordulna, akkor a motorral való találkozásig újabb $\frac{2s}{3}$ utat tenne meg, azaz összesen $2s + \frac{2s}{3} = \frac{8s}{3}$ km-t haladna. Ez idő alatt a motor által megtett út $s + \frac{s}{3} = \frac{4s}{3}$ km, vagyis feleannyi, mint az autósé.

Mivel az út és a sebesség egyenesen arányos, az autó sebessége kétszerese a motorénak, vagyis $y = 2x$.

b) Az első találkozásig az autó a két helység közti távolságnál 5 kilométerrel többet, a motor 5 kilométerrel kevesebbet tesz meg. Mivel az első találkozásig ugyanannyi ideig mozogtak, a $t = \frac{s}{v}$ összefüggés alapján felírható: $\frac{s - 5}{x} = \frac{s + 5}{y}$. Felhasználva, hogy $y = 2x$:

$$\frac{s - 5}{x} = \frac{s + 5}{2x} \quad \Rightarrow \quad 2s - 10 = s + 5 \quad \Rightarrow \quad s = 15.$$

Az Andrásfalva és Bélatelep közti távolság 15 km.

c) Mivel a két helység közti kétszeres $2s = 30$ km távolságot az autó 20 perccel, azaz $\frac{1}{3}$ órával rövidebb idő alatt teszi meg, mint a motor, a mozgásuk idejére a $t = \frac{s}{v}$ összefüggés alapján felírható:

$$\frac{30}{x} = \frac{30}{y} + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{x} = \frac{30}{2x} + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 45.$$

A motor sebessége 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, az autó sebessége 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

7. Alkalmazva a megfelelő trigonometrikus összefüggéseket, a feladat másodfokú egyenletre vezet:

$$\sin 2x - 2\cdot\sin x - 2\cdot\cos x - 2 = 0,$$
$$2\cdot\sin x\cdot\cos x - 2\cdot(\sin x + \cos x) - 2 = 0,$$
$$\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x - 2\cdot(\sin x + \cos x) - 3 = 0,$$
$$(\sin x + \cos x)^2 - 2\cdot(\sin x + \cos x) - 3 = 0.$$

A $(\sin x + \cos x)$-re másodfokú egyenlet megoldásai: $\sin x + \cos x = -1$ vagy $\sin x + \cos x = 3$.

Ha $\sin x + \cos x = -1$, akkor mindkét oldalt $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel beszorozva:

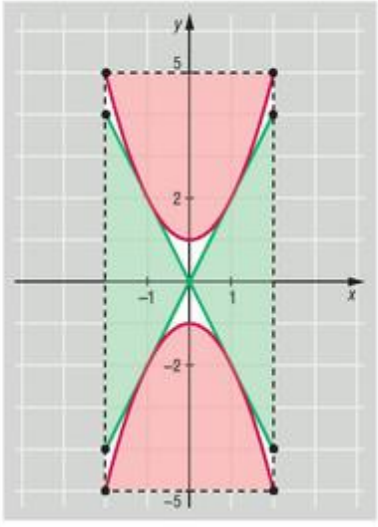
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad x_1 = \pi + 2k\pi,\quad x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

$\sin x + \cos x = 3$ nem lehet, mert $\sin x + \cos x$ kifejezés értéke legfeljebb $\sqrt{2}$.

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \pi + 2k\pi,\quad x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

8. Helyezzük el a céltáblát egy olyan koordináta-rendszerbe, amelyben 1 egység 10 centiméternek felel meg, és a koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a céltábla középpontja.



A két parabolaív egyenlete: $y = x^2 + 1$, illetve $y = -x^2 - 1$.

A parabolaívekhez az origóból húzott érintők egyenleteit keressük $y = mx$ alakban. Az érintés feltétele, hogy a parabola és az érintő egyenletéből alkotott egyenletrendszernek egy megoldása legyen.

Az első és második síknegyedben levő parabola esetén az

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 + 1 \\ y &= mx \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell vizsgálni. Az egyenletrendszerből y-t kiküszöbölve, az $x^2 - mx + 1 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa 0, vagyis:

$$m^2 - 4 = 0 \quad\Rightarrow\quad m = \pm 2.$$

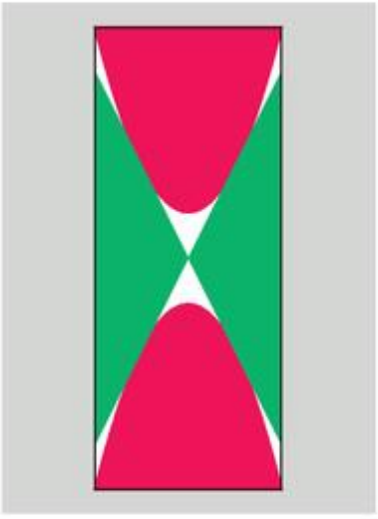
A tengelyes szimmetria miatt a két parabolaív érintőinek egyenletei: $y = 2x$, illetve $y = -2x$.

- Először számítsuk ki a zöld terület nagyságát. Az első síknegyedbe eső területrész olyan derékszögű háromszög, amelynek befogói 2 és 4, területe tehát 4 egység. Az egész céltáblán a zöld terület nagysága: $T_{\text{zöld}} = 4\cdot 4 = 16$ területegység.
- Az első síknegyedbe eső piros területrészt megkapjuk úgy, hogy egy 2 és 5 egység oldalú téglalap területéből kivonjuk a $[0; 2]$-on a parabolaív alatti területet:

$$2\cdot 5 - \int_0^2 (x^2 + 1)\,dx = 10 - \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = 10 - \frac{14}{3} = \frac{16}{3}.$$

A piros terület nagysága a tengelyes szimmetria miatt: $T_{\text{piros}} = 4\cdot\frac{16}{3} = \frac{64}{3}$ területegység.

- A fehér terület nagyságát megkapjuk úgy, hogy a céltábla teljes területéből kivonjuk a piros és zöld területek nagyságát: $T_{\text{fehér}} = 10\cdot 4 - 16 - \frac{64}{3} = \frac{8}{3}$ területegység.



a) A geometriai valószínűség fogalmából adódóan a céltáblára véletlenszerűen érkező lövések akkora valószínűséggel érkeznek a zöldre festett területre, amekkora része a zöld rész területe az egész céltábla területének, tehát:

$$P(\text{zöld}) = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}.$$

Hasonlóan:

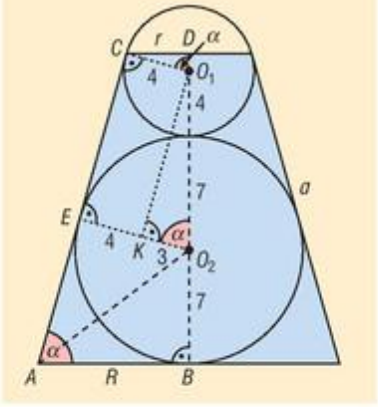
$$P(\text{piros}) = \frac{\frac{64}{3}}{40} = \frac{8}{15}, \quad \text{illetve} \quad P(\text{fehér}) = \frac{\frac{8}{3}}{40} = \frac{1}{15}.$$

b) Az egy lövésért kapható pont várható értéke:

$$4 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{8}{15} + 6 \cdot \frac{1}{15} = \frac{70}{15} \approx 4{,}67.$$

9. A szoknya felszínének kiszámításához egy csonka kúp palástjának felszínét kell meghatároznunk.

Tekintsük a csonka kúp ábrán látható tengelymetszetét, és használjuk az ábra jelöléseit. A csonka kúp fedőlapjának sugara $r = CD$, az alaplapjának sugara $R = AB$, valamint a csonka kúp alkotójának hossza $a = AC$.



Húzzunk EC-vel párhuzamost a középső gömb O_1 középpontján keresztül. Mivel egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, az EKO_1C négyszög téglalap.

A KO_1O_2 derékszögű háromszög átfogója a két érintő gömb középpontjának távolsága $O_1O_2 = 7 + 4 = 11$. A háromszög KO_2 befogója pedig a gömbök sugarainak különbsége $KO_2 = 7 - 4 = 3$.

A Pitagorasz-tétel alapján a másik befogó:

$$KO_1 = EC = \sqrt{11^2 - 3^2} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}.$$

Az ábrán a $KO_2O_1\sphericalangle = CO_1D\sphericalangle$, mivel egyállású szögek, valamint $KO_2O_1\sphericalangle = EAB\sphericalangle$, mivel hegyesszögű merőleges szárú szögek. Jelöljük ezeket a szögeket α-val.

A KO_1O_2 derékszögű háromszögből $\cos\alpha = \frac{3}{11}$, és $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{7}}{11}$.

A csonka kúp fedőlapjának r sugarát az O_1DC derékszögű háromszögből számíthatjuk:

$$r = CD = 4 \cdot \sin\alpha = 4 \cdot \frac{4\sqrt{7}}{11} = \frac{16\sqrt{7}}{11}.$$

Mivel az AB, illetve az AE egyenesek érintik az O_2 középpontú kört, az AO_2 egyenes az A csúcsnál lévő α szög felezője. Az ABO_2 derékszögű háromszögből $AB = O_2B \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Ismert, hogy $\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, és mivel $\frac{\alpha}{2}$ hegyesszög, és $\cos\alpha = \frac{3}{11}$, ezért:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{11}}{1-\frac{3}{11}}} = \sqrt{\frac{14}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \text{amit felhasználva} \quad R = AB = O_2B \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 7 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{7\sqrt{7}}{2}.$$

Az AE és az AB érintőszakaszok egyenlősége alapján a csonka kúp alkotójának hossza:

$$a = AC = AE + EC = AB + EC = \frac{7\sqrt{7}}{2} + 4\sqrt{7} = \frac{15\sqrt{7}}{2}.$$

A csonka kúp palástjának felszíne:

$$A = (R + r) \cdot a \cdot \pi = \left(\frac{7\sqrt{7}}{2} + \frac{16\sqrt{7}}{11}\right) \cdot \frac{15\sqrt{7}}{2} \cdot \pi = \frac{11445}{44} \cdot \pi \approx 817{,}17 \text{ cm}^2.$$

A szoknya elkészítéséhez $817{,}17$ cm^2 területű karton szükséges.

5. Feladatsor / *A* – megoldások

1. Az egyenlet értelmezési tartománya $x^2 - 1$ miatt: $-1 \le x \le 1$.

Figyeljük meg, hogy két gyökjel alatt is nevezetes szorzat áll:

$$\sqrt{(x-1)(x+1)} + \sqrt{x+1} = \sqrt{(x+1)^2}.$$

Mivel minden tagban megtaláljuk az $x + 1$ tényezőt, ezért az egyenlet egyik megoldása $x_1 = -1$.

Így akár le is oszthatunk $\sqrt{x+1}$-gyel (feltesszük, hogy $x \neq -1$):

$$\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x+1}.$$

Mindkét oldal négyzetre emelése, majd az egyenlet rendezése után:

$$2\sqrt{x-1} = 1, \quad \text{ahonnan} \quad x_2 = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Ellenőrzés:

$$\sqrt{1{,}25^2 - 1} + \sqrt{1{,}25 + 1} = 0{,}75 + 1{,}5 = \sqrt{1{,}25^2 + 2 \cdot 1{,}25 + 1} = 2{,}25.$$

Az egyenletnek nincs más megoldása.

2. A körök elhelyezkedése miatt két közös belső érintőt keresünk.

Az ábra alapján azt sejtjük, hogy az e: $y = 2$ egyenes egyike a két keresett belső érintőnek. Behelyettesítve a körök egyenleteibe, a következő egyenleteket kapjuk:

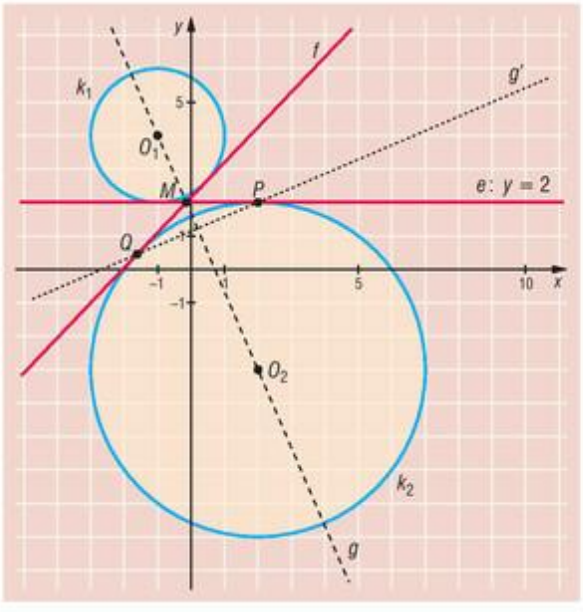
$$(x+1)^2 = 0 \quad \text{és} \quad (x-2)^2 = 0.$$

Mindkettőnek csak 1-1 megoldása van, tehát e valóban közös belső érintő, k_2-vel vett érintési pontja $P(2; 2)$.

Az ábra szimmetrikus a körök középpontjain áthaladó g egyenesre. Ezért g és e olyan M pontban metszik egymást, amely rajta van f-en is.

Írjuk fel g egyenletét:

$$O_1O_2(3; -7) = \vec{v}_g \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_g(7; 3),$$
$$g\colon\ 7x + 3y = 5,$$



ebből (y helyére 2-t írva): $x = -\frac{1}{7}$. A három egyenes közös metszéspontja: $M\left(-\frac{1}{7}; 2\right)$.

Ismét használjuk ki a szimmetriát! P és Q érintési pontok is szimmetrikusak g-re, ezért ha P-ből g' merőlegest állítunk g-re, az Q-ban fogja metszeni k_2-t. g'-t g-ből könnyen megkapjuk:

$$g': \ 3x - 7y = -8.$$

Meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{ll} g': & 3x - 7y = -8 \\ k_2: & (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2 \ \text{ és } \ y_2 = \frac{13}{29}.$$

Az első megoldás a már ismert P pontot adja vissza, a második pedig $Q\left(-\frac{47}{29}; \frac{13}{29}\right)$-t.

Két pontból (M és Q) már fel tudjuk írni a keresett f egyenes egyenletét:

$$f: \ -21x + 20y = 43.$$

Megjegyzés: A feladatot más úton is megoldhatjuk, például MO_2 fölé írt Thalész-körrel.

3. *a)* (3; 4; 3) típusú ismétléses permutációt kell elszámolnunk: $\frac{10!}{3! \cdot 4! \cdot 3!} = 4200$.

b) A 10 papírdarabkából három magyar zászlót rakhatunk ki, és marad egy fehér lapocska. Ezt a lapot vagy az első zászló elé, vagy az első után a második elé, vagy a második után a harmadik elé, vagy a harmadik után a negyedik elé, vagy a negyedik után húzhatjuk. Ez összesen 4 lehetőség.

c) Ha csupán 2 piros-fehér-zöld zászlónk van, akkor a maradék 1 piros, 2 fehér, 1 zöld lapot majdnem bármelyik helyre húzhatjuk. Ez majdnem (2; 1; 2; 1)-tagú ismétléses permutáció, azaz $\frac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!} = 180$. Azért csak majdnem, mert ebben benne van annak a lehetősége, hogy létrejön egy harmadik zászló is, amit ebben az esetben ki kell zárnunk. Mivel arra 4 lehetőség volt, a megoldás: $180 - 4 = 176$.

d) Ha csak 1 trikolórt látunk, akkor ez és a maradék 2 piros, 3 fehér és 2 zöld lap majdnem (1; 2; 3; 2)-tagú ismétléses permutációt ad: $\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2!} = 1680$. Ebből el kell vennünk azokat az eseteket, amikor három vagy kettő trikolór alakul ki, azaz 180-at.

Az eredmény $1680 - 180 = 1500$.

4. *a)* A függvény az $x = -1$ helyen metszi az x tengelyt, azaz:

$$f(-1) = -a + b - c + d = 0.$$

Ahol szélsőértéke van, ott az $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ deriváltja 0, vagyis

$$f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \ \text{ és } \ f'(3) = 27a + 6b + c = 0.$$

Más információnk nincs a függvényről. Ha négy ismeretlen és három egyenlet áll csak rendelkezésünkre, akkor csak valamelyik paraméter függvényében tudunk nyilatkozni a többiről.

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & -a + b - c + d = 0 \\ (2) & 3a + 2b + c = 0 \\ (3) & 27a + 6b + c = 0 \end{array}\right\}.$$

Vonjuk ki a (2)-t a (3)-ból: $24a + 4b = 0$, így $b = -6a$.

Helyettesítsünk vissza (2)-be: $3a - 12a + c = 0$, így $c = 9a$.

Végül helyettesítsünk vissza (1)-be: $-a - 6a - 9a + d = 0$, így $d = 16a$.

Tehát $f(x)$ függvényünk a következő:

$$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9ax + 16a = a(x^3 - 6x^2 + 9x + 16).$$

b) $a = 1$ esetén $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$. Azt már tudjuk, hogy a függvény szélsőértékei az $x = 1$ és $x = 3$ helyeken vannak. Tekintsük a deriváltat:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3).$$

Mivel a derivált felfelé nyíló parabola, ezért előjelviszonyai a következők:

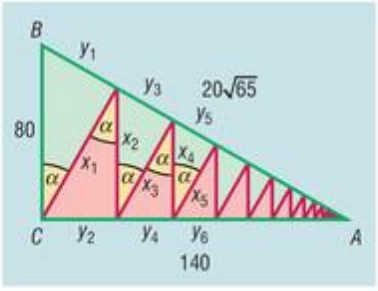
	$x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x$
$f'(x)$	pozitív	0	negatív	0	pozitív
$f(x)$	monoton növő	MAXIMUM	monoton csökkenő	MINIMUM	monoton növő

Innen leolvasható, hogy a függvénynek $x = 3$ helyen van a lokális minimuma.

5. Feladatsor / *B* – megoldások

5. *a)* Sorban véve a kis háromszögekben az x_1, x_2, … szakaszokat, kapjuk:

$$x_1 = 80 \cdot \cos\alpha,$$
$$x_2 = x_1 \cdot \cos\alpha = 80 \cdot \cos^2\alpha,$$
$$x_3 = x_2 \cdot \cos\alpha = 80 \cdot \cos^3\alpha,$$
$$x_4 = x_3 \cdot \cos\alpha = 80 \cdot \cos^4\alpha \text{ stb.}$$



A töröttvonal hossza a mértani sorozatot alkotó szakaszok összege (mértani sor):

$$80 \cdot \cos\alpha(1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \ldots) = 80 \cdot \cos\alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \cos^i\alpha = \frac{80 \cdot \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Mivel a nagy háromszögben az átfogó $20\sqrt{65}$, így

$$\cos\alpha = \frac{140}{20\sqrt{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}}.$$

Behelyettesítve, a vonal hosszára kapjuk:

$$\frac{7 \cdot 80}{\sqrt{65} - 7} = 35\left(\sqrt{65} + 7\right) \approx 527{,}18 \text{ cm}.$$

b) Tudjuk, hogy a derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának fele. Vegyük sorban az y_1, y_2, … szakaszok hosszait a kis háromszögekben:

$$y_1 = 80 \cdot \sin\alpha;$$
$$y_2 = x_1 \cdot \sin\alpha = 80 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha;$$
$$y_3 = x_2 \cdot \sin\alpha = 80 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha;$$
$$y_4 = x_3 \cdot \sin\alpha = 80 \cdot \cos^3\alpha \cdot \sin\alpha \text{ stb.}$$

A zöld háromszögek területei a páratlan sorszámú x-ek és y-ok szorzatai felének az összege (mértani sor):

$$T_{\text{zöld}} = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} \cdot (1 + \cos^4\alpha + \cos^8\alpha + \ldots) =$$

$$= \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\cos^4\alpha)^i = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2(1 - \cos^4\alpha)}.$$

A piros háromszögek területei a páros sorszámú x-ek és y-ok szorzatai felének az összege (mértani sor):

$$T_{\text{piros}} = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha}{2} \cdot (1 + \cos^4\alpha + \cos^8\alpha + \ldots) =$$

$$= \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\cos^4\alpha)^i = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha}{2(1 - \cos^4\alpha)}.$$

A hányadosuk pedig:

$$\frac{T_{\text{zöld}}}{T_{\text{piros}}} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{65}{49}.$$

6. *a)* Az n pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$, az n pontú fának pedig $(n-1)$ éle van. Hányadosuk $\frac{n}{2}$.

b) Mivel a teljes gráfban bármely két pont szomszédos, így az őket összekötő utak hosszának minimuma mindig 1. A teljes gráfok átmérőinek maximuma 1. Az n pontú fagráfok lehetnek teljesen különbözőek is. A legszélesebb fákat akkor kapjuk, ha a pontokat egyetlen vonalra fűzzük fel (lánc). Ekkor a legtávolabbi pontok között $(n-1)$ él fut, azaz az ilyen gráfok átmérőinek maximuma $(n-1)$.

c) Tudjuk, hogy minden pont foka kettő, továbbá a gráf egyszerű és összefüggő. Vegyük észre, hogy az ilyen gráf „kör" alakú! A 8 pontú körben a szemközti pontok legkisebb távolsága 4, azaz a gráf átmérője is 4.

A „kör" alak igazolásához válasszuk ki az egyik pontot és annak egyik élét. A pontot satírozzuk be, és induljunk el az élen. A következő pontba jutva satírozzuk be azt is, majd menjünk tovább a másik élen. Ismételjük ezt addig, míg satírozott pontba nem érünk. Belátjuk, hogy ekkor minden pontot érintettünk: a satírozott pontok összefüggő gráfot alkotnak és ha lenne satírozatlan pont, akkor az eredeti gráfunk nem lenne összefüggő.

d) Ha minden pont foka 6, akkor bármely pontot is tekintve, van pontosan egy olyan, amellyel nem szomszédos. Azonban a többi hat ponttal ez is szomszédos, azaz a két említett pont távolsága 2. Ilyen feltételek mellett bármely két pont távolsága vagy 1, vagy 2. A gráfok átmérője 2.

e) A gondolatmenet nagyon hasonló a *d)* ponthoz, kis különbséggel. Induljunk ki pl. az A pontból, 4 szomszédos pontját jelölje S_A. B jelöljön olyan pontot, amely nem szomszédos A-val (három ilyen is van). Mivel B foka is 4, ezért maximum 2 olyan pont lehet vele szomszédos, amely nincs S_A-ban. Tehát B legalább két olyan ponttal szomszédos, amelyek A-val szomszédosak. Így most is bármely két pont távolsága vagy 1, vagy 2. Az ilyen gráfok átmérője is 2.

Megjegyzés: Ha minden pont foka 3, akkor nehezebb a helyzet. Lehetséges, hogy S_A egyik pontja sem szomszédos S_B egyik pontjával sem. Nem összefüggő gráfnak pedig nincs átmérője.

7. Jelölje a két ismeretlen értéket x és y. Az $]A-s; A+s[=]2{,}5941; 9{,}4059[$-ból kiindulva használjuk ki, hogy az intervallum középpontja a számtani átlag. Tehát:

$$A = \frac{A - s + A + s}{2} = 6.$$

Ebből négy tizedesjegyre megadhatjuk a szórást is:

$$6 + s = 9{,}4059 \quad \Rightarrow \quad s = 3{,}4059.$$

Ennyi információ már elegendő egy kétismeretlenes egyenletrendszer felírásához:

$$\left.\begin{aligned} 6 &= \frac{1+2+4+5+8+9+9+10+x+y}{10} \\ 3{,}4059 &= \sqrt{\frac{5^2+4^2+2^2+1^2+(-2)^2+(-3)^2+(-3)^2+(-4)^2+(6-x)^2+(6-y)^2}{10}} \end{aligned}\right\}.$$

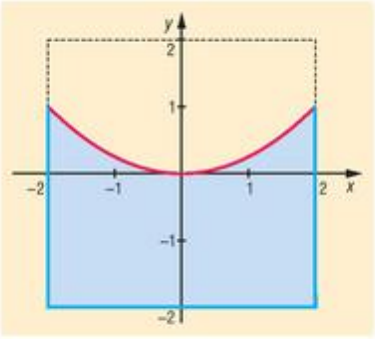
Rendezzük mindkét sort. Mivel tudjuk, hogy x és y egészek, ezért 3,4059 négyzetét kerekítjük:

$$\left.\begin{aligned} 12 &= x+y \\ 32 &= (6-x)^2+(6-y)^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_1=10,\ x_2=2,\ y_1=2,\ y_2=10.$$

A minta hiányzó két eleme tehát a 10 és a 2.

8. Egy másodfokú függvénynek pontosan akkor van két zérushelye, ha a polinomból alkotott másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív szám:

$$D=p^2-4q>0, \quad \text{azaz} \quad q<\frac{p^2}{4}.$$



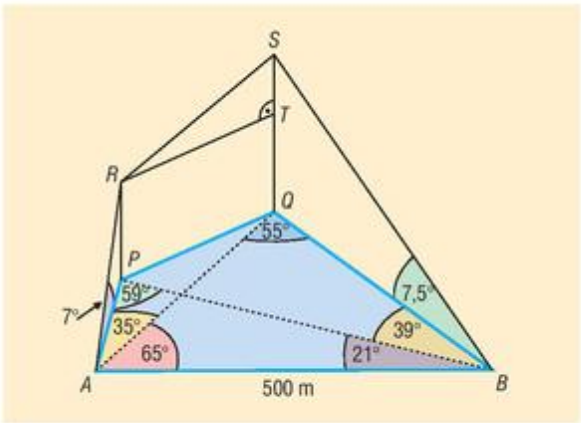
Tudjuk, hogy $(p;q)\in I^2$, ahol $I=[-2;2]$. A $(p;q)$ rendezett párt és a fenti feltételt legegyszerűbben koordináta-rendszerben ábrázolhatjuk. A kék színű rész jelenti azokat a pontokat, melyekre a kérdéses $g(x)$ függvénynek két különböző zérushelye van. A valószínűség a kék színű terület és a négyzet területének aránya. A parabolagörbe és az x tengely közötti terület:

$$\int_{-2}^{2}\frac{p^2}{4}\,\mathrm{d}p=\left[\frac{p^3}{12}\right]_{-2}^{2}=\frac{8}{12}+\frac{8}{12}=\frac{4}{3}.$$

A valószínűség:

$$\frac{T_{\text{kék}}}{T_{\text{négyzet}}}=\frac{8+\frac{4}{3}}{16}=\frac{7}{12}.$$

9. Feltételezhetjük, hogy a fák függőlegesen nőttek, ezért $RPQT$ négyszög téglalap, és RTS háromszög derékszögű. $APB\sphericalangle$ és $AQB\sphericalangle$ szögeket az adatokból kiszámíthatjuk. Mivel ismertek a szögek, $APB_\triangle$ és $AQB_\triangle$ oldalait kiszámíthatjuk szinusztétellel:



$$\frac{PA}{500}=\frac{\sin 21^\circ}{\sin 59^\circ} \quad \Rightarrow \quad PA\approx 209{,}04\ \text{m},$$

$$\frac{PB}{500}=\frac{\sin 100^\circ}{\sin 59^\circ} \quad \Rightarrow \quad PB\approx 574{,}45\ \text{m},$$

$$\frac{BQ}{500}=\frac{\sin 65^\circ}{\sin 55^\circ} \quad \Rightarrow \quad BQ\approx 553{,}2\ \text{m}.$$

Trigonometrikus összefüggések alapján:

$$\frac{PR}{PA}=\operatorname{tg}7^\circ \ \Rightarrow\ PR\approx 25{,}67\ \text{m}, \quad \text{illetve} \quad \frac{QS}{QB}=\operatorname{tg}7{,}5^\circ \ \Rightarrow\ QS\approx 72{,}83\ \text{m}.$$

Ekkor $ST = QS - PR = 47{,}16$ m. A $PQB_{\triangle}$-ben koszinusztétellel kiszámítható PQ:

$$PQ^2 = PB^2 + QB^2 - 2PB \cdot QB \cdot \cos 39° \quad \Rightarrow \quad PQ \approx 376{,}95 \text{ m}.$$

Végül egy Pitagorasz-tétellel megadhatjuk RS értékét:

$$RS^2 = RT^2 + ST^2 = PQ^2 + (QS - PR)^2 \quad \Rightarrow \quad RS \approx 379{,}89 \text{ m}.$$

Ahhoz, hogy a kötélre rögzített tárgy a pálya egyik végpontjából a másikba jusson, a kötélnek legalább kétszer olyan hosszúnak kell lennie, mint a pálya hossza. Azaz a kérdésre a válasz:

$$2RS \approx 759{,}78 \text{ m}.$$



Kiadja a Mozaik Kiadó, 6723 Szeged, Debreceni u. 3/B., Telefon: (62) 470-101, 554-664
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Kovács János
Terjedelem: 47,19 (A/5) ív • 2011. május • Tömeg: 920 g • Raktári szám: MS-2325