FIZIKA

Mozgások · Energiaváltozások

9

A kötet hátsó borítójának belsején egyedi kód található, melyet a **www.mozaweb.hu** *oldalon aktiválhatsz. Az aktiválás hozzáférést biztosít a kiadvány elektronikus változatához a honlapon található feltételekkel.*



Szerző: dr. Halász Tibor



A TERMÉSZETRŐL TIZENÉVESEKNEK



FIZIKA

Mozgások Energiaváltozások 9

KILENCEDIK KIADÁS

MOZAIK KIADÓ – SZEGED, 2024

Szerző:

DR. HALÁSZ TIBOR
c. főiskolai tanár

Bírálók:

DR. JURISITS JÓZSEF
középiskolai tanár
DR. MOLNÁR MIKLÓS
egyetemi docens

Felelős szerkesztő: Tóth Katalin
Borítóterv, tipográfia: Deák Ferenc, Reményfy Tamás
Fotók: Vadász Sándor, Szamódy Zsolt, képügynökségek
Ábrák: Ábrahám István, Szentirmai Péter, Horváth Péter
Műszaki szerkesztő: Horváth Péter

KERETTANTERV:
EMMI Kerettanterv 51/2012. (XII. 21.) EMMI rendelet 3. sz. melléklet (3.2.08.2), 4. sz. melléklet (4.2.09.2), 5. sz. melléklet (5.2.13.2), 6. sz. melléklet (6.3.4.2)

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, ill. rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más hordozó) nem sokszorosítható.

ISBN 978 963 697 332 2

© MOZAIK KIADÓ – SZEGED, 2001, 2013

I. fejezet
A TESTEK MOZGÁSA



II. fejezet
A NEWTONI DINAMIKA ELEMEI:
A TÖMEG ÉS AZ ERŐ



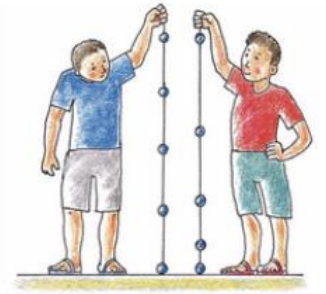
III. fejezet
FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK
MECHANIKÁJA



IV. fejezet
ENERGIA, MUNKA

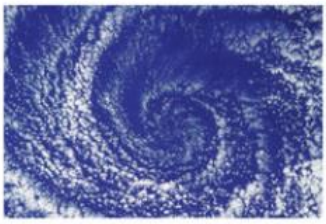












Tartalom

A TESTEK MOZGÁSA

1. Emlékeztető **10**

2. Egyenes vonalú egyenletes mozgás **13**

3. Változó mozgás **21**

3.1. A változó mozgást végző test sebessége **21**

3.2. A gyorsulás fogalma **25**

3.3. A szabadon eső test mozgása **30**

3.4. Az egyenletes körmozgás **35**

3.5. A körmozgás és forgómozgás szögjellemzői **41**

3.6. A változó forgómozgás (Kiegészítő anyag) **45**

4. A bolygók mozgása **48**

5. Kidolgozott feladatok **53**

Összefoglalás **57**

A NEWTONI DINAMIKA ELEMEI: A TÖMEG ÉS AZ ERŐ

1. Emlékeztető **60**

2. A tehetetlenség törvénye és az inerciarendszer **62**

3. A tömeg fogalma **65**

4. A sűrűség **69**

5. Lendület, lendületmegmaradás **71**

6. Erőhatás, erő **76**

6.1. Az erő fogalma **76**

6.2. Erő-ellenerő. A mechanikai kölcsönhatás **82**

6.3. Több erőhatás együttes eredménye **84**

7. Különféle mozgások dinamikai feltétele ... **88**

8. Kényszererők és meghatározásuk **91**

9. Tehetetlenségi erők (Kiegészítő anyag) **94**

10. Különféle erőhatások és erőtörvényeik **97**

10.1. Rugalmas erő. Lineáris erőtörvény **97**

10.2. Súrlódás. Közegellenállás **100**

10.3. A nehézségi erő és a gravitációs erőtörvény **106**

Tartalom

11. A forgómozgás dinamikai vizsgálata **111**

11.1. A tehetetlenségi nyomaték (Kiegészítő anyag) **111**

11.2. A perdület (Kiegészítő anyag) **114**

11.3. A forgatónyomaték **117**

12. Merev testek egyensúlya **122**

12.1. A párhuzamos hatásvonalú erők eredője **122**

12.2. Tömegközéppont és súlypont. Egyensúlyi helyzetek **126**

13. Kidolgozott feladatok **129**

Összefoglalás **133**

FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK MECHANIKÁJA

1. Emlékeztető **136**

2. A szilárd testek, a folyadékok és a gázok nyomása **137**

3. Felhajtóerő. Arkhimédész törvénye **143**

4. Közlekedőedények. Hajszálcsövek, molekuláris erők **147**

5. Gázok és folyadékok áramlása **151**

6. Kidolgozott feladatok **155**

Összefoglalás **157**

ENERGIA, MUNKA

1. Emlékeztető **160**

2. Energiaváltozás munkavégzés közben **162**

2.1. A munka kiszámítása **162**

2.2. A mozgási energia kiszámítása. A munkatétel **167**

2.3. Feszítési munka. Rugalmas energia **171**

2.4. Az emelési munka és a helyzeti (magassági) energia **174**

2.5. A mechanikai energia fogalma és megmaradási tétele **178**

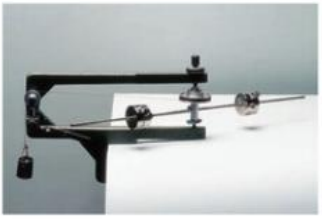
3. Teljesítmény, hatásfok **181**

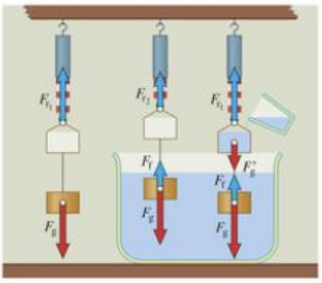
4. Kidolgozott feladatok **184**

Összefoglalás **188**

MEGOLDÁSOK **189**











A TANKÖNYV HASZNÁLATÁT SEGÍTŐ JELZÉSEK

Sárga mezőbe a legfontosabb szabályokat, törvényeket és a mennyiségi fogalmak meghatározását, illetve kiszámítási módját tettük.

Vastag betűkkel a fontos megállapításokat és az új fogalmak nevét írtuk. A közép- és emelt szintű érettségi követelményben szereplő fogalmakat *-gal jelöltük meg. A csak emelt szintű érettségi követelményben található fogalmak jele **.

Bal oldali pirosas árnyalatú sávval hívjuk fel a figyelmet azokra a kísérletekre, amelyek megismerése és megértése nélkül nem lehet feldolgozni a tananyagot.

Az egyes fejezeteket elmélyítő kisebb terjedelmű kiegészítő anyagot a bal oldali szürke sávról és a kisebb méretű betűkről ismerhetjük fel.

Az ábrák a szövegben leírtak könnyebb és jobb megértését segítik elő. Ezért célszerű együtt kezelni a szöveget és a mellette, előtte, alatta levő, hozzá tartozó ábrákat.

A *Megjegyzések* olyan gondolatok, amelyek nem tartoznak közvetlenül a tananyag logikai rendjébe, de fontos kiegészítői, értelmezői, elmélyítői annak.

A *Gondolkodtató kérdések* valójában számolás nélkül megoldható feladatok.

A *Feladatok* megoldásával elmélyíthetjük, jobban megérthetjük és alkalmazhatjuk az elméleti tananyagot.

Az *Olvasmányban* olyan érdekességek találhatók, amelyek az adott történelmi korba elhelyezve mutatják be a fizikai felfedezéseket, valamint azokat a fizikusokat, akik koruknak és a fizika tudományának szellemi óriásai voltak.

Kedves Diákok!

Az általános iskolában mindenki tanult fizikát, így ez a tantárgy nem ismeretlen a 9. tanévet most kezdők számára.

Minden eddig tanult részletre természetes, hogy nem emlékezhetünk. Az alapot jelentő lényeg azonban biztos megmaradt. Ennek ellenére érdemes elgondolkodni az *Emlékeztető* című részben összefoglaltakról. Megerősíteni, felfrissíteni az olyan felismeréseket is célszerű, mint például: *„Változás csak kölcsönhatás közben jöhet létre.”, „Az anyagnak két fajtája van, a részecskeszerkezetű és az elsősorban folytonos mezők.”, „A* ***testek,*** *anyagok, folyamatok* ***tulajdonságait mennyiségekkel*** *is lehet jellemezni, például a test tehetetlenségének mértéke, mennyiségi jellemzője a tömeg.”* stb.

A fizika alaptudomány, mert saját alapelvei és saját fogalomrendszere van, ezt a többi természettudomány és az egész társadalom átveszi. Erre építi saját ismeretrendszerét. Aki megismeri pl. a tömeg, az energia, a hő, a munka, az égés, a halmazállapotváltozások, az atom, az elektron, a gravitáció, az elektromágneses hullámok stb. fogalmát, az nem csak fizikát tanul. A fizika tanulásához tehát jó, ha tudjuk: **a fizika alapjainak ismerete nélkül nem lehet értelmesen foglalkozni a többi természettudománnyal sem.** Így nem lehet megérteni és megvédeni a körülöttünk levő természetet. Nem lehet alkalmazni a technikát, bekapcsolódni az információáramlásba, de a társadalomban sem lehet tájékozódni, tehát nem lehet megismerni a világot, amelyben élünk.

A fizika gondolatvilágát, módszereit nemcsak annak célszerű megismerni és megérteni, akinek ez a tudomány jövendő élethivatásához szakmai alapot biztosít, hanem minden törekvő, gondolkodó, értelmes embernek is. **A fizika tanulása ugyanis mindenkit felkészít az életre, mert** a fizikai jelenségek, fogalmak, törvények, módszerek megismerése, megértése, rendszerbe foglalása semmivel nem pótolható. **Ez ugyanis lehetőséget biztosít az élet minden területén alkalmazható készségek, képességek, tanulási technikák, jellembeli tulajdonságok stb. kialakítására, megerősítésére.**

Aki ebből a tankönyvből okosan tanul, az tehát nemcsak ismeretet szerezhet, hanem elsősorban pozitív személyiségjegyeit is megerősítheti, és sok más olyan általánosan alkalmazható értékre tehet szert, amellyel könnyebbé, sikeresebbé, boldogabbá teheti az életét.

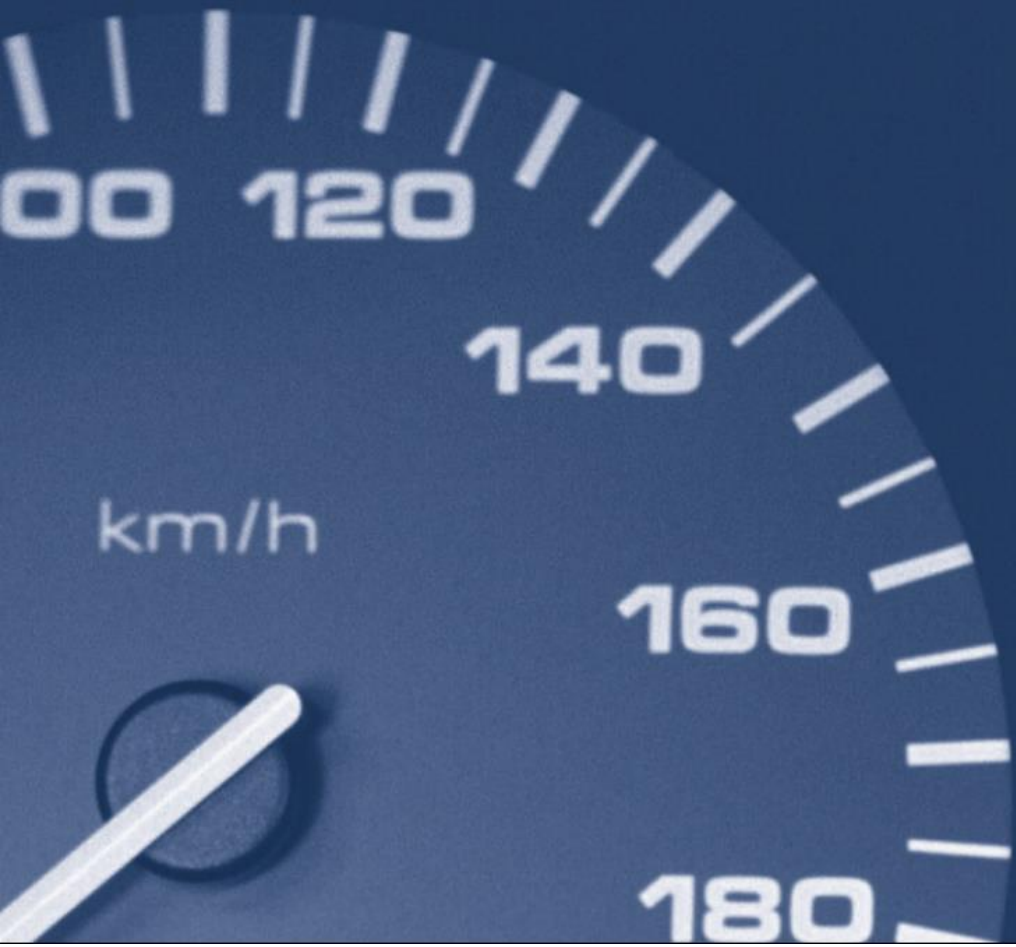
Ehhez kíván sok sikert

e tankönyv szerzője.

I. fejezet



A TESTEK MOZGÁSA



1. Emlékeztető

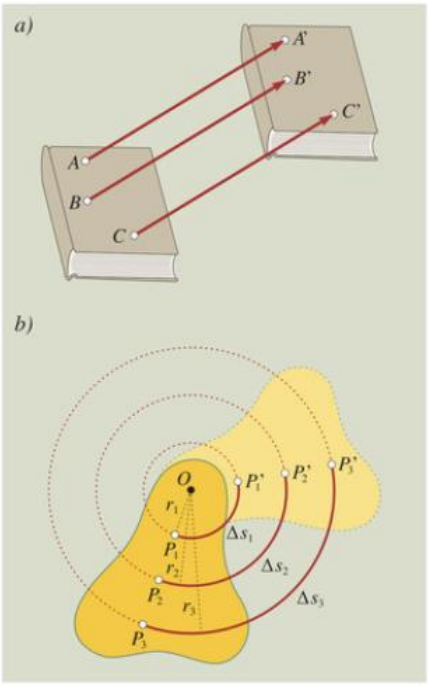
ANYAGOK, TESTEK, EZEK JELLEMZŐ TULAJDONSÁGAI ÉS A MENNYISÉGEK

Az ember és a körülöttünk létező anyagi világ is – amit a fizika a legáltalánosabban vizsgál – különféle **anyagokból** épül fel. A sokféle anyagnak alapvetően két fajtája létezik: a részecskeszerkezetű anyag (pl. vas) és a fizikai mező (pl. elektromos mező).

Az anyag elkülöníthető részeit (tárgyakat, anyagdarabokat, ha a megfigyelés szempontjából nem fontos, hogy mik azok) **testeknek** nevezzük.

Az anyagoknak, testeknek és ezek **változási folyamatainak** sokféle jellemző **tulajdonsága** van. Ezek a tulajdonságok lehetnek általánosan meglevők (pl. tehetetlenség, gravitáló-, kölcsönható képesség) és nem mindenre jellemzők (pl. szépségük, színük, területük, hőállapotuk, időtartamuk stb.). A tulajdonságok egy része csak körülírással jellemezhető (pl. a csiszolt gyémánt *szebb,* mint a csiszolatlan). Más részük (az emberek által „kitalált") **mennyiségekkel** pontosan megadható (pl. ez a kenyér 1 kg tömegű). A fizika fogalomrendszerében (szerencsére) ez utóbbiak vannak többségben.

A **mennyiség*** a **számérték*** és a **mértékegység*** szorzata (pl. 5 kg: 5-szöröse a kg-nyi mennyiségnek). A mértékegységeket a tudományos világ nemzetközi megállapodással határozta meg és foglalta rendszerbe: SI. A számérték méréssel és/vagy számítással állapítható meg. A méréshez mérőeszköz, előre meghatározott mértékegység és mérési módszer ismerete szükséges.



10.1. Minden mozgás vagy haladó vagy forgó- vagy a kettőből összetehető mozgás

HELY, HELYZET, MOZGÁS

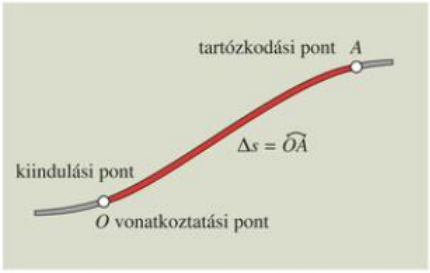
Minden test bármely pillanatban más-más **helyet** foglalhat el valahol a térben. Lehet, hogy ez a hely – a környezetéhez viszonyítva – pillanatról pillanatra változik. Egy test **helyzete** is megváltozhat anélkül, hogy helyét elhagyná (például elbillen vagy elfordul). A testek helye, helyzete gyakran változik, ilyenkor **a testek mozognak.**

A testek mozgása lehet **haladó mozgás*, forgómozgás*** vagy **a haladó és forgómozgásból összetett mozgás*.**

Haladó mozgásnál a **merev testek*** (amelyek pontjai egymáshoz viszonyítva nem mozdulnak el) minden pontja azonos módon, **párhuzamos eltolás** formájában mozog (*10.1/a) ábra*). Ilyenkor a mozgás leírásához elegendő a test egyetlen pontjának mozgását ismerni vagy meghatározni.

Haladó mozgásnál, valamint abban az esetben, ha a test méretei elhanyagolhatóan kicsik az elmozdulás nagyságához vagy a közte és más testek között levő távolsághoz viszonyítva, a testet pontszerűnek tekinthetjük. Ha ezek a feltételek teljesülnek, a testet **anyagi pontnak*** nevezzük.

Forgómozgás közben a merev test pontjai egy változatlan helyzetű egyenes – a **forgástengely** – körüli köríveken mozognak (kivéve a forgástengellyel közös pontokat). Ezek a körívek a forgástengelyre merőleges síkban vannak és középpontjuk a forgástengelybe esik. (*10.1/b) ábra*)



11.1. A test által megtett út a pálya bejárt részének hosszával egyenlő, ha a mozgásban nincs fordulópont

PÁLYA, ÚT

Az az egyenes vagy görbe vonal, amelyen az anyagi pont (pl. a haladó mozgást végző test egy kiválasztott pontja) mozgás közben végighalad, **a test pályája*.** A test által megtett **út*** a bejárt pályarész hosszával egyenlő (ha a test mozgásában nincs fordulópont).

A VONATKOZTATÁSI ÉS A KOORDINÁTA-RENDSZER

A pályán bárhol kijelölhetünk egy **vonatkoztatási pontot*,** amelyhez viszonyítva mennyiségekkel (hosszúság és idő) pontosan megadhatjuk az adott pályán levő anyagi pontok pillanatnyi helyét, és így azok mozgását.

Egy testre vonatkozóan a lent, fent, előtte, mögötte; mozog, nyugszik; gyorsul, lassul, kanyarodik fogalmak csak más testekhez viszonyítva használhatók egyértelműen. Ezek a fogalmak tehát **viszonylagos*** (relatív) fogalmak.

Azt a testet vagy testrendszert, amelyhez viszonyítva megadjuk a többi test pillanatnyi helyét, helyzetét és mozgását, **vonatkoztatási rendszernek*** nevezzük.

A vonatkoztatási rendszert úgy célszerű megválasztani, hogy hozzá viszonyítva minél egyszerűbben lehessen megadni az általunk vizsgált testre vonatkozó információkat. Ezért legtöbbször a Földet vagy a Földhöz viszonyítva nyugvó testeket, esetleg egy mozgó jármű belsejét szoktuk vonatkoztatási rendszernek kijelölni.

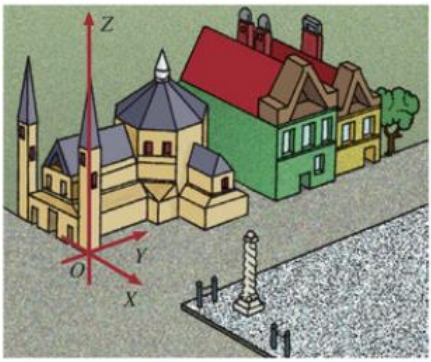
Amikor egy test helye, helyzete – a kiválasztott vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva – változik, akkor ez **a test abban a vonatkoztatási rendszerben mozog.**



11.2. A hely viszonylagos. *Adjunk erre magyarázatot az ábra alapján!*

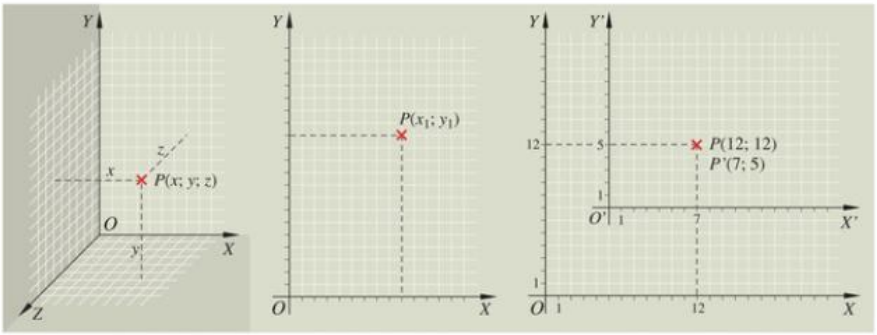


11.3. A mozgás viszonylagos. *Miért mondhatjuk a fotó alapján a csillagos égről, hogy elfordul?*



11.4. A vonatkoztatási rendszerhez tetszés szerint rögzíthető koordináta-rendszer. *Miért célszerű ez?*

3D



12.1. Egy pont helyét a térben három, a síkban két adat határozza meg. Ugyanannak a pontnak a helyét különböző koordináta-rendszerben különböző adatokkal írhatjuk le



12.2. *Ki áll és ki mozog a képen, és mihez viszonyítva?*



12.3. A testek mozgásiránya megváltozhat

A testek helyét, helyzetét és mozgását vonatkoztatási rendszer segítségével csak körülírni lehet. Pl.: „A mi házunk a templom melletti utcában balról a második". Ezért a vonatkoztatási rendszerhez gondolatban **koordináta-rendszert*** is kapcsolunk. A **koordináta-rendszerekben** ugyanis **egy pont vagy egy test – bármely pillanatban meglevő – helye, helyzete és mozgása, mennyiségek segítségével, egyértelműen meghatározható.**

Ugyanannak a pontnak a helyét különböző koordináta-rendszerekben nem ugyanazokkal a mennyiségekkel adhatjuk meg. Ez azonban nem a leírás bizonytalanságát vagy pontatlanságát jelenti, hanem annak viszonylagosságát mutatja.

A MOZGÁS JELLEMZŐ MENNYISÉGEI

A sokféle **mozgás** mindegyikéhez **idő** kell. A gyorsabban mozgó testről azt mondjuk, hogy nagyobb a **sebessége*.**

Annak a testnek nagyobb a sebessége, amelyik:
- **ugyanannyi idő alatt hosszabb utat jár végig,** vagy
- **ugyanakkora utat rövidebb idő alatt tesz meg.**

A testek sebessége sokszor változik. Amikor egy test sebessége nő, **a test gyorsul,** amikor csökken, **a test lassul.** Kanyarodás közben **a test mozgásának iránya változik.** A mozgás tehát lehet egyenes vagy görbe vonalú, egyenletes vagy változó.

2. Egyenes vonalú egyenletes mozgás

3D

A SEBESSÉG FOGALMA

A nyílt pályán egyenletesen haladó vonat ablakából kinézve megfigyelhető, hogy az egymástól egyenlő távolságra levő telefonoszlopok egyenlő időközökben maradnak el az ablak előtt. Kísérlettel megvizsgálható, hogy az ilyen mozgásokra milyen közös szabály vagy törvény jellemző.

Mikola Sándor (1871–1945) magyar fizikatanár használt először a mozgások tanulmányozására olyan – mindkét végén bedugaszolt – hosszú üvegcsövet, amely egy kis légbuboréktól eltekintve vízzel volt megtöltve.

A Mikola-féle cső egyik végét megemelve a csőben levő buborék mindig felfelé mozog. Ha például a metronóm kattanásainak megfelelően másodpercenként megjelöljük a csövön, hogy mikor hol van benne a buborék, akkor az időpillanatok és a hozzájuk tartozó távolságadatok ismeretében megvizsgálhatjuk a buborék mozgását.

Kísérlettel megállapítható: ferde helyzetű Mikola-csőben a buborék vagy pl. a vízszintesre beállított légpárnás sínen ellökött szánkó úgy mozog, hogy egyenlő időtartamok alatt egyenlő utakat fut be.

Az olyan mozgást, amely során a test egyenlő időtartamok alatt egyenlő utakat jár be – bármilyen kicsik vagy nagyok is ezek az időtartamok –, egyenletes mozgásnak* nevezzük.

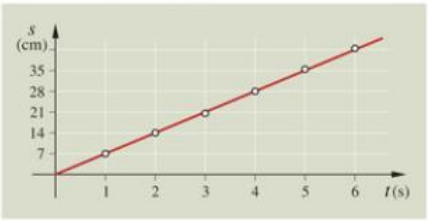
A 13.1. ábrán látható kísérletben a buborék helyét másodpercenként jelöltük. A 20-as jelű ponttól mértük és távolságukat táblázatba jegyeztük:

Idő (s)	1	2	3	4	5	6
Út (cm)	7	14	20,8	28	35,1	42,1

Az egymást követő másodpercek alatt megtett utak:

t (s)	1.	2.	3.	4.	5.	6.
s (cm)	7	7	6,8	7,2	7,1	7

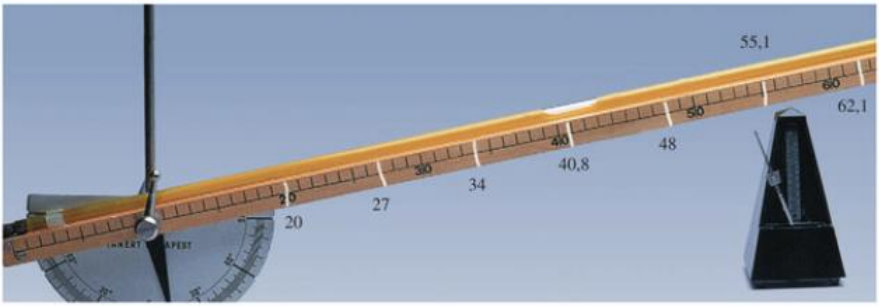
A buborék mozgását jellemző grafikon:



A méréseknél mindig adódó pontatlanságtól eltekintve megállapítható, hogy kísérleteinkben a buborék vagy a légpárnás szánkó mozgása tehát egyenletes. Így ahányszor hosszabb ideig mozognak, annyiszor hosszabb utat járnak végig.

Ez azt jelenti, hogy az általuk megtett **út egyenesen arányos az út megtételéhez szükséges idővel,** $s \sim t$, tehát hányadosuk állandó.

$$\frac{s}{t} = \text{állandó}$$



13.1. A Mikola-csőben a buborék egyenletesen mozog. Mérésünknél az $\frac{s}{t} \approx 7 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ volt!

A meredekebb helyzetű Mikola-csőben a buborék, vagy a vízszintes légpárnás sínen erősebben meglökött szánkó gyorsabban, de egyenletesen mozog.

Minden egyenletesen mozgó testnél az $\frac{s}{t}$ hányados értéke állandó, és annál nagyobb, minél sebesebben mozog a test. Ezért az $\frac{s}{t}$ hányados alkalmas mennyiség a testek egyenletes mozgásának jellemzésére.

E mennyiség neve: **sebesség,** jele: v.

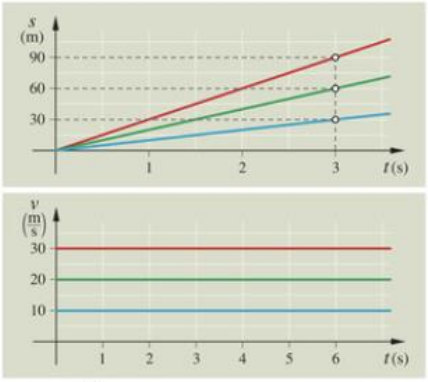
Az egyenletesen mozgó test sebessége tehát a következő módon számítható ki:

$$\text{sebesség} = \frac{\text{út}}{\text{az út megtételének időtartama}},$$

$$v = \frac{s}{t}.$$

A sebesség mértékegysége az út és az idő mértékegységének hányadosaként alkotható meg. Tehát a sebesség SI-beli mértékegysége: $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (kimondva: méter-per-másodperc). A sebesség gyakorlatban használt mértékegysége még a $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (kimondva: kilométer-per-óra).

Egyenletes mozgás esetében a sebesség számértéke megegyezik az egységnyi idő alatt megtett út számértékével. **Ezért a sebesség megmutatja, mekkora az egységnyi idő alatt megtett út.**



14.1. A $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó autó 1 másodperc alatt 10 m utat tesz meg

A SEBESSÉGVEKTOR

Egy test mozgásának leírásához nem elég, ha csak a mozgás időtartamát és az út hosszát vagy a sebesség nagyságát ismerjük. Ezekből ugyanis nem tudhatjuk meg, hogy a test mikor, merre járt. A mozgás pontos leírásához olyan mennyiségekre van tehát szükség, amelyek a mozgás irányáról is felvilágosítást adnak.

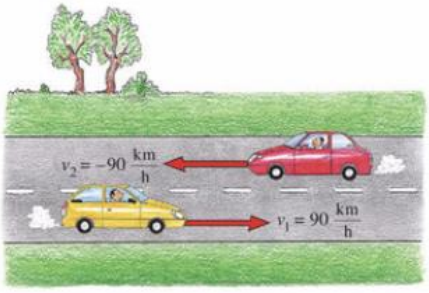
Azokat a mennyiségeket, melyeknek nemcsak nagyságuk, hanem irányuk is van, **vektormennyiségeknek,** röviden **vektoroknak*** nevezzük. **A sebesség vektormennyiség.** A test sebességvektorának nagysága a már megismert sebesség nagysága, és **iránya minden pillanatban megegyezik a test mozgásának irányával.**

A vektorokat $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{r}$ stb. vagy $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{r}$ stb. módon szokás jelölni. A sebességvektor jele tehát $\vec{v}$ vagy $\boldsymbol{v}$. (Másként: $\vec{v} \equiv \boldsymbol{v}$, ahol a $\equiv$ jelentése: azonosan egyenlő.)

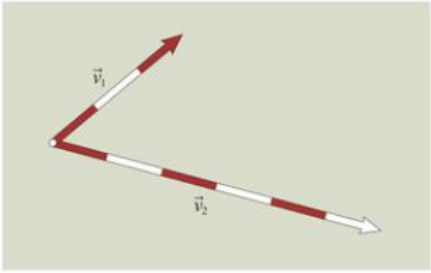
A vektorok nagyságának jele pl.: $|\vec{a}| \equiv a$; $|\vec{v}| \equiv v$ szokott lenni.

Ha ugyanazon az egyenes pályán mozgó testek mozgását vizsgáljuk, a sebességvektoraikat előjeles mennyiségként is megadhatjuk. Ez azt jelenti, hogy valamelyik test sebességét pozitívnak, a vele ellentétes irányban mozgó testét pedig negatívnak választjuk. Így az előjelekkel megadhatjuk, hogy a test az egyik vagy a másik irányban mozog-e ugyanazon az egyenes pályán.

A vektorokat rajzban irányított szakasszal, „nyíllal" ábrázoljuk. A nyíl iránya a vektormennyiség irányát, hossza pedig a nagyságát mutatja.



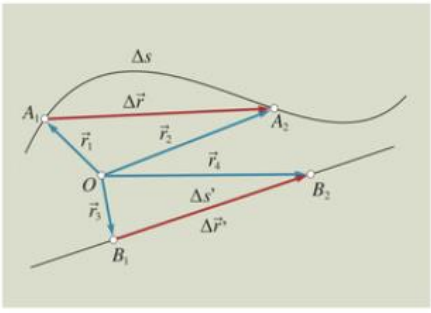
14.2. A sebességnek nemcsak nagysága, hanem iránya is van. *Milyen mennyiség a sebesség?*



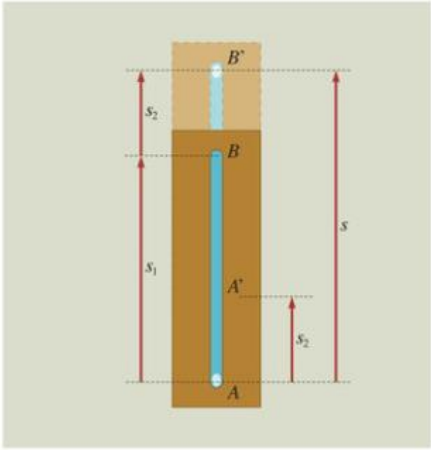
15.1. A $\vec{v}_2$ kétszerese a $\vec{v}_1$-nak, és irányuk is különböző

Egy rajzon belül az azonos fizikai mennyiségeket ábrázoló vektorok közül a nagyobb vektort arányosan hosszabb, a kisebbet arányosan rövidebb irányított szakasszal ábrázoljuk. Ahányszor nagyobb az egyik vektor a másiknál, annyiszor hosszabb az őt ábrázoló nyíl is a másik nyílnál. Ezzel a módszerrel nemcsak az egy egyenesbe eső, hanem a tetszőleges irányú és különböző nagyságú vektorokat is meg tudjuk adni.

Az anyagi pont helyét, mozgását **helyvektorral*** és annak változásával is leírhatjuk. Helyvektornak azt a vektort nevezzük, amely a koordináta-rendszer origójából (O) indul, és az anyagi pont pillanatnyi helyéig tart (A_1; A_2 és B_1; B_2). A helyvektor végpontja tehát pillanatról pillanatra nyomon követi a mozgó anyagi pontot. A pontok helyét megadó $\vec{r}_1$ és $\vec{r}_2$ helyvektorokat ismerve az A_1 kiindulási pontból a Δt idővel későbbi A_2 tartózkodási pontba mutató vektor megadja az anyagi pont **elmozdulásának*** irányát és nagyságát. Ezért ennek a vektornak **elmozdulásvektor*** a neve, és $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}$ a jele.



15.2. *Milyen feltétel esetében egyenlő az úttal az elmozdulásvektor hossza?*



15.3. A buborék egy időben itt két egyirányú mozgást végez

AZ EGYENES VONALÚ EGYENLETES MOZGÁSOK ÖSSZEGZŐDÉSE

Állítsunk egy Mikola-csövet függőleges helyzetbe egy tábla elé úgy, hogy a buborék a cső alján legyen. Miközben a buborék a csőben felfelé mozog, mozgassuk a csövet is egyenletesen, függőlegesen fölfelé. Így a buborék egyszerre kétféle mozgásban vesz részt. Mozog a csőben a csőhöz viszonyítva, és mozog a csővel együtt is.

A buborék mozgása közben:

a) az egyik megfigyelő másodpercenként jelölje meg a cső alsó végének helyét a táblán,

b) egy másik megfigyelő a buborék helyét a csőhöz viszonyítva,

c) a harmadik pedig a buborék helyét a táblához viszonyítva.

A fent leírt kísérletben (*15.3. ábra*) ha a cső nem mozogna, akkor a buborék a cső aljáról (A pont) s_1 utat megtéve a cső tetejéig (B pont) jutna el. A cső mozgása miatt a B pont a B'-be, így a buborék is s_2-vel magasabbra jut, tehát a buborék két mozgása összeadódik.

Ismételjük meg az előző kísérletet úgy, hogy a csövet most lefelé mozgatjuk. A buborék így nem jut olyan magasra, mintha a cső nyugalomban volna, mert a két elmozdulás most „kivonódik" egymásból. Az egy egyenes mentén történő ellentétes irányú elmozdulásokat ezért célszerű előjellel megkülönböztetni.

Amikor egy test egy egyenes mentén, egyidejűleg két elmozdulást végez, akkor annak közös eredménye, az ún. **eredő elmozdulás*, a két elmozdulás előjeles összege:**

$$s = s_1 + s_2.$$

A buboréknak a táblához viszonyított sebessége egyenlő a cső táblához és a buborék csőhöz viszonyított sebességének előjeles összegével. Ez az ún. **eredő sebesség*:**

$$v = v_1 + v_2.$$

Egy $20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel mozgó vonatban a kalauz $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel sétál. Ha a vonat menetirányában mozgó testek sebességét választjuk pozitívnak, akkor ott az előre haladó kalauz vonathoz viszonyított sebessége $+2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a visszafelé sétálóé pedig $-2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ lesz.

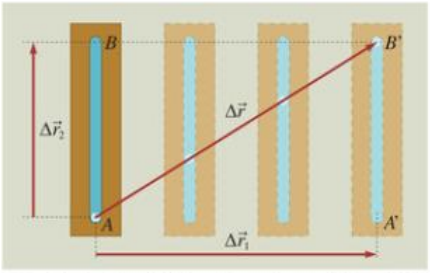
Könnyen belátható, hogy a vonatban ácsorgó kalauz sebessége a pálya menti telefonoszlopokhoz viszonyítva egyenlő a vonat sebességével, $20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-cel. A vonatban sétáló kalauzé pedig a vonat és a kalauz vonatbeli sebességének összege lesz. Így az előre haladó kalauz sebessége az oszlopokhoz viszonyítva $20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(+2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 22\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a hátrafelé sétálóé pedig $20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(-2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 18\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ha egy test egy egyenes mentén egyidejűleg két mozgást végez, akkor a mozgásainak sebessége előjelesen adódik össze, így az eredő sebessége:

$$v = v_1 + v_2.$$



16.1. A kalauz mozgása a vonathoz viszonyítva séta, a tájhoz viszonyítva száguldás. *Miért?*

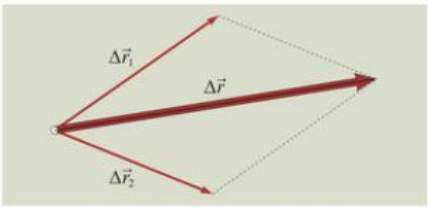


16.2. A buborék a táblához viszonyítva a téglalap átlója mentén mozog

Állítsuk ismét függőleges helyzetbe a Mikola-csövet úgy, hogy a buborék a cső alján legyen. Miközben a buborék a csőben felfelé mozog, a csövet mozgassuk egyenletesen vízszintes irányban. A buborék egyidejűleg most is kétféle mozgásban vesz részt, de a két mozgás most nem esik egy egyenesbe, hanem egymásra merőleges irányú.

A buborék két egyidejű, egymásra merőleges egyenletes mozgása közben a cső egyik alsó pontjának a táblához és a buboréknak a csőhöz viszonyított elmozdulásvektora egy téglalapot határoz meg. A buboréknak a táblához viszonyított mozgása ennek a téglalapnak az átlója mentén megy végbe. Ilyen esetben a buborék eredő elmozdulásvektorának nagysága tehát nem a két elmozdulás „algebrai összege", hanem kisebb annál.

A kísérletet elvégezhetjük úgy is, hogy a buborék mozgása közben a cső tetszőleges helyzetű, és tetszőleges irányú egyenes mentén mozgatjuk egyenletesen. Ekkor a közös pontból induló két elmozdulásvektor paralelogrammát határoz meg. Ilyen esetben a buborék eredő mozgása ennek a paralelogrammának az átlója mentén jön létre. Így a buborék táblához viszonyított elmozdulásvektorát a paralelogramma átlója határozza meg.



16.3. Az egy síkban levő, de nem egy egyenesbe eső vektorok paralelogramma módszerrel összegezhetők. *Mi a paralelogramma módszer?*

Mérések alapján megállapítható, hogy ha egy test két egyidejű mozgást végez, akkor ugyanannyival mozdul el, mintha az egyes mozgásokat külön-külön, egymástól függetlenül, tetszőleges sorrendben végezné. Természetesen mindkét esetben a test az eredeti sebességével ugyanannyi ideig mozogna, mint ameddig az együttes mozgása tartott.

Ez csak akkor lehet, ha:

Egy test egyidejűleg végzett különféle mozgásai nem befolyásolják egymást, egymástól függetlenül játszódnak le.

Ezt a jelenséget szokás a **mozgások függetlenségeként** megnevezni.

MEGJEGYZÉSEK

1. A *velocitas* – latin szó, jelentése: gyorsaság, fürgeség. Ebből származik a v jelölés.
2. A légpárnás sín olyan négyzetes vagy háromszög keresztmetszetű cső, amelynek felső oldalán nagyon sok kicsi lyuk van. A cső az egyik végén zárt, a másik végén pedig levegőt lehet belefújtatni. A légpárnás sín alakjához jól illeszkedő szánkót a kicsiny lyukakon kiáramló levegő megemeli, és az a „levegőpárnán" csúszva, gyakorlatilag súrlódástól mentesen siklik a légpárnás sín felett.
3. A mozgást úgy a legcélszerűbb leírni, hogy a vonatkoztatási pontot a pálya azon pontjához rögzítjük, ahonnan kezdve a mozgást vizsgáljuk. Ebben az esetben $s_1 = 0$, így a $\Delta s = s_2 - s_1 = s_2$, tehát nincs szükség az indexszel történő megkülönböztetésre, így $\Delta s \equiv s$ is írható. Ha az idő mérését akkor kezdjük, amikor az anyagi pont elindul vagy áthalad a vonatkoztatási ponton, akkor Δt helyett t is írható. A $v = \frac{s}{t}$ képlet tehát olyan egyenletes mozgás esetén használható, ha a test mozgását attól a pillanattól vizsgáljuk, amikor az áthalad a vonatkoztatási ponton vagy onnan indul el.
4. A közös megegyezéssel létrehozott és SI-vel jelölt nemzetközi mértékegységrendszer alkalmazását törvény írja elő. Ebben a rendszerben a hosszúságot, az időt, a tömeget és még négy másik mennyiséget **alapmennyiségnek** választották. Ezek mértékegységében (méter, másodperc, kilogramm stb.) szabadon lehetett megállapodni.

   A sebesség fogalmát a távolság (út) és az idő fogalmára visszavezetve, azok felhasználásával értelmeztük. A sebességet ilyen értelemben **származtatott mennyiségnek** tekinthetjük. A származtatott mennyiségek mértékegységei más mennyiségek mértékegységeivel alkothatók meg.
5. Két skalármennyiség – amelyeknek csak nagysága van, iránya nincsen – összeadása algebrai művelet. Két vektor összegét és különbségét, megkülönböztetendő a skalárok összegétől, **vektori összegnek,** illetve **vektori különbségnek** szokás nevezni. Vektorok összeadását most még csak szerkesztéssel, a paralelogramma szabály szerint tudjuk elvégezni. Később más lehetőséget is megismerünk majd a vektorokkal kapcsolatos műveletek elvégzésére.
6. A fizikai mennyiségeket jelölő betűk a számértéket és a mértékegységet együtt jelentik. Formailag:

   fizikai mennyiség = számérték-szorozva-mértékegységgel, pl. $v = 5 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

   Ebből következik, hogy például az $s = v \cdot t$ ***mennyiségegyenlet*** két oldalán nemcsak a számértéknek, hanem a mértékegységeknek is meg kell egyezniük. Így a felírt egyenlet matematikai átalakításainak helyességét is könnyen ellenőrizhetjük.

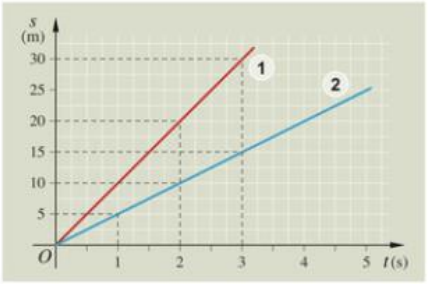
   A mennyiségegyenletekkel szemben a matematikában használt ***számértékegyenletekben*** a betűk csak számértéket jelentenek. A fizikában a számértékegyenletek használatát célszerű elkerülni.

7. A matematikai egyenletek sokkal általánosabb gondolatot fejeznek ki, mint az egy-egy területen alkalmazott fizikai képlet. Az $s = v \cdot t$ és a téglalap területének kiszámítási módját megfogalmazó $T = a \cdot b$ képletre az a jellemző, hogy mindkét esetben három különböző mennyiség között azonos kapcsolatot fejeznek ki ($A = B \cdot C$). A két egyenlet mennyiségegyenletként különböző, de számértékegyenletként megegyező. Ezért mondhatjuk azt, hogy **a sebesség–idő grafikon alatti megfelelő terület számértékileg egyenlő a test által megtett úttal.** Ez természetesen nem azt jelenti, hogy a terület egyenlő az úttal!

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Egy autó 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad. Mit tudunk az autó mozgásáról?

2. A grafikon két test mozgására vonatkozik. Ennek alapján válaszoljunk az alábbiakra!
- Melyik testnek nagyobb a sebessége?
- Mennyi utat tesznek meg két másodperc alatt?
- Mennyi utat tesznek meg a harmadik másodpercben?



3. Két kerékpáros közül az egyik n-szer nagyobb utat tett meg ugyanannyi idő alatt, mint a másik. Hasonlítsuk össze a két kerékpáros sebességét!

4. Az egyenletesen mozgó két test közül az egyik hosszabb idő alatt hosszabb utat tett meg, mint a másik. Lehetett-e egyenlő a két test sebessége? Ha igen, mi ennek a feltétele?

5. Egy jó labdarúgó-játékos az egész mérkőzés alatt kb. 12 km-t fut. Mire jellemző ez a mennyiség: a játékos által megtett útra vagy a játékos elmozdulásának nagyságára?

6. Az autóbuszok kilométer-számlálójának állását reggelenként, indulás előtt bejegyzik a garázsnaplóba. Az egyik autóbuszra vonatkozóan a következő két bejegyzés olvasható:

január 5.: 96 534 km; január 6.: 96 701 km.

Milyen nagyságú volt az autóbusz elmozdulása egy nap alatt? Mekkora utat tett meg ez az autóbusz egy nap alatt?

7. Újsághír: *„Az Európai Bizottság közlekedéspolitikáért felelős tagja levélben figyelmeztette a tagállamokat, hogy 2006 májusától a teherautókat és az autóbuszokat kötelező felszerelni digitális tachométerrel.”* Értelmezzétek ezt a hírt!

8. Függ-e a helyvektor és az elmozdulásvektor attól, hogy a vonatkoztatási rendszerben hol vettük fel a koordináta-rendszer origóját? Indokoljuk a választ!

9. A szabadon választott vonatkoztatási rendszerekben a „mozgást” gyakran szokatlan módon fogalmazhatjuk meg, például: Mit állíthatunk a víz és a part mozgásáról a folyóba dobott labdához viszonyítva?

10. Lehet-e egy testről azt mondani, hogy abszolút nyugalomban van?

11. Mit jelent az, hogy a mozgás viszonylagos?

12. Két város között hajó közlekedik egy folyón oda-vissza. Megváltozna-e a menetidő, ha ugyanez a hajó nem folyón, hanem tavon tenné meg a két város közötti utat oda-vissza?

Hogyan oldjunk meg feladatokat?

Pólya György (Budapest, 1887–Palo Alto, 1985) magyar származású matematikus, fizikus „A gondolkodás iskolája" című könyvében részletesen foglalkozik a problémamegoldások módszertanával. Alkalmazzuk gondolatainak lényegét a fizikafeladatok megoldására!

1 Értsd meg a feladatot!
- Figyelmesen olvasd el a feladatot, és fogalmazd meg a feladat lényegét!
- A megadott és keresett mennyiségekre vezess be alkalmas jelöléseket, és ezek felhasználásával jegyezd fel azokat!
- Állapítsd meg, milyen kikötések vannak!
- Ha célszerű, készíts ábrát!

2 Készíts megoldási tervet!
- Gondolkozz, oldottál-e már meg hasonló feladatot!
- Tanultál-e már olyan szabályt, törvényt, képletet, ami erre a témakörre vonatkozik?
- Elegendő ismeret áll-e rendelkezésedre a probléma megoldásához, vagy szükséged van még újabb ismeretek megszerzésére? Ha igen, akkor keress olyan, a témához kapcsolódó részfeladatot, amellyel az ismert adatok felhasználásával meghatározhatod a hiányzó információt!

3 Hajtsd végre a tervedet!
- Fogalmazd meg szóban a megoldás fizikai lényegét!
- Ha szükséges, írd fel a megoldás alapgondolatát a matematika „nyelvének" (képlet) segítségével!
- Fejezd ki az ismeretlen mennyiséget!
- Helyettesítsd be az ismert mennyiségeket (számérték és mértékegység), és számítsd ki a keresett ismeretlen mennyiséget!
- Egyeztesd a mértékegységekkel végzett műveletek eredményét a keresett mennyiség mértékegységével!

4 Elemezd a kapott eredményt!
- A kapott eredmény pontosságának megállapítása, kerekítés.
- A valóságnak megfelelő-e a megoldás eredménye?
- Válaszolj az eredetileg feltett kérdésekre!
- Teljesültek-e a kikötések?

Könyvünkben az egyes fejezetek összefoglalása előtt kidolgozott mintapéldák szerepelnek.

FELADATOK

Az egyszerűbb feladatoknál természetesen nem kell az előbb felsorolt lépések mindegyikét megtenni. Oldjunk meg közösen egy feladatot!

1. Bay Zoltán (Gyulavári, 1900–Washington, 1992) magyar fizikusnak 1946-ban az elsők között sikerült a Földről a Holdra irányított és onnan visszaverődő radarhullámokat felfogni. Mivel a radarhullám elektromágneses hullám, terjedési sebessége a fény sebességével egyenlő: $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A Föld–Hold-távolság: $3{,}84 \cdot 10^5$ km. Mennyi idő múlva érkezett vissza a „radar-visszhang”?

MEGOLDÁS:

① $v = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$s = 2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^5 \text{ km} = 7{,}68 \cdot 10^8 \text{ m}$

$t = ?$

② A fény változatlan sebességgel halad.

$$v = \frac{s}{t}$$

Az általános iskolában következtetéssel oldottunk meg ilyen feladatokat.

③ $v = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v}$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{7{,}68 \cdot 10^8 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2{,}56 \text{ s}; \quad \frac{\text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \cancel{\text{m}} \cdot \frac{\text{s}}{\cancel{\text{m}}} = \text{s}.$$

④ A „radar-visszhang” **2,56 s** múlva érkezett vissza.

Az eredmény elfogadható érték.

2. Keressünk az interneten különböző sportágakban elért és jelenleg érvényes idővel megadott világcsúcsokat! Jellemezzük ezeket a teljesítményeket sebességgel is!

3. Egy vasúti szerelvény 20 másodpercig egyenes vonalú egyenletes mozgással halad, és közben 60 méter utat tesz meg. Mennyi a sebessége? Rajzoljuk meg a mozgás sebesség–idő grafikonját!

4. Mekkora utat tesz meg 10 másodperc alatt egy madár, ha 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel repül? Rajzoljuk meg a mozgás út–idő és sebesség–idő grafikonját!

5. Mennyi idő alatt tesz meg egy autó 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ változatlan sebességgel 36 km hosszú utat?

6. Mennyi idő alatt pusztít végig egy 100 km hosszú sávot az a vihar, amelynek változatlan sebessége 42 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

7. Milyen messzire jut el a levegőben 5 másodperc alatt a hang, ha terjedési sebessége ott 340 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

8. Egy futó a 100 m-es versenyt 10,1 másodperces eredménnyel nyeri. Egy kerékpáros 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad. Melyiknek nagyobb a sebessége?

9. Egy méhecske teher nélkül 8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, mézzel és virágporral megrakodva 6,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel repül. Milyen messziről hozhat mézet 10 perc alatt, ha a „rakodási időtől” eltekintünk?

10. Egy személyvonat 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad. A szomszédos pályán egy 100 m hosszú tehervonat 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel jön a személyvonattal ellentétes irányban.

a) Mekkora a személyvonat sebessége a tehervonathoz viszonyítva?

b) Mekkora a tehervonat sebessége a személyvonathoz rögzített vonatkoztatási rendszerben?

c) Mennyi ideig látja a személyvonat ablakán merőlegesen kinéző utas a tehervonatot?

d) Mennyi ideig látja önmaga mellett a tehervonat vezetője a 200 m hosszú személyvonatot?

e) Mennyi ideig látja a személyvonatban ülő megfigyelő a tehervonatot, ha az a személyvonattal egy irányba halad 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel?

3. Változó mozgás

3.1. A változó mozgást végző test sebessége

3D

A természetben és a gyakorlatban lezajló mozgások többsége nem egyenletes mozgás. Egy autó mozgása a városi forgalomban látszólag összevissza változik. Az ilyen mozgást nehezebb leírni, mint az egyenleteset. Ezért most keresünk többféle megoldást arra, hogy a sebesség fogalmát a változó mozgások jellemzésére is alkalmassá tegyük.

AZ ÁTLAGSEBESSÉG

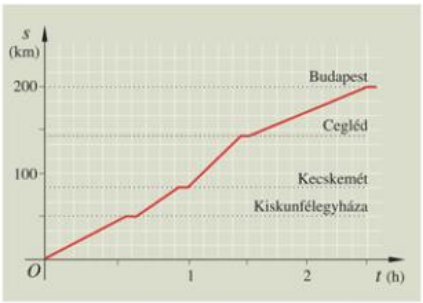
A testek mozgása általában változó mozgás. Például egy vonat a 200 km-es utat 2,5 óra alatt teszi meg. Eközben egyes szakaszokon gyorsul, majd egyenletesen halad, néhol lassul, és meg is áll.

Ha a változó mozgás esetén ugyanolyan módon számítjuk ki a sebességet, mint ahogy egyenletes mozgás esetén tettük, akkor az összes út és a megtételéhez szükséges összes idő hányadosa az **átlagsebességet*** adja meg, amelynek jele $v_{átl.}$:

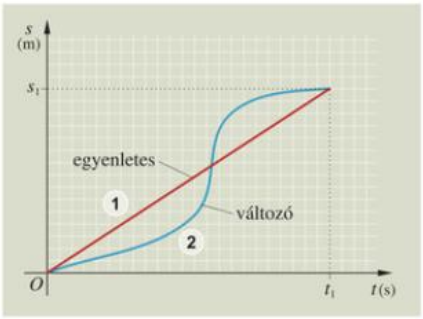
$$\text{átlagsebesség} = \frac{\text{összes megtett út}}{\text{közben eltelt idő}},$$

$$v_{átl.} = \frac{\Delta s_{ö}}{\Delta t_{ö}}.$$

Átlagsebességen azt a sebességet értjük, amellyel a test egyenletesen mozogva ugyanazt az utat ugyanannyi idő alatt tenné meg, mint változó mozgással.



21.1. A szegedi gyorsvonat út – idő grafikonja



21.2. *Jellemezzük a két test mozgását a grafikon alapján!*

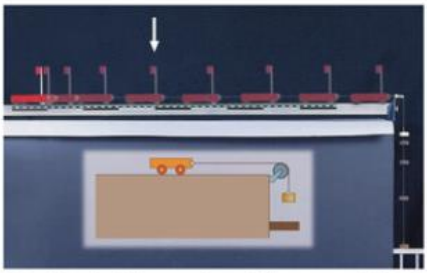
Az átlagsebesség azonban nem ad felvilágosítást arról, hogy a test útközben mikor hol volt, hogyan mozgott, és melyik pillanatban mekkora volt a sebessége. Ezek közlésére más mennyiség megalkotására van szükség.

A PILLANATNYI SEBESSÉG

Egyenletes mozgásnál a sebesség tartósan változatlan. Az autó sebessége gyorsulás vagy lassulás közben pillanatról pillanatra változik. Az autó mozgásáról a sebességmérő ad tájékoztatást, mert mindig a sebesség pillanatnyi értékét, a **pillanatnyi sebességet*** mutatja.



21.3. *Mit mutat meg a sebességmérő?*



22.1. A kocsi addig gyorsul, ameddig van gyorsító hatás (stroboszkopikus felvétel: lásd 23. oldal *„Megjegyzések"* 7. pont)

Egy légpárnás sínen levő szánkót vagy egy jól csapágyazott kiskocsit mozgassunk csigán átvetett zsineg végére erősített nehezék segítségével. Ilyenkor a szánkó, illetve a kiskocsi addig gyorsul, amíg a nehezék húzza. Amikor a nehezék pl. egy alá helyezett asztalkán fennakad, a gyorsító erőhatás megszűnik, és a „jármű" (mivel a súrlódás elhanyagolható) változatlan sebességgel halad tovább. Ez a sebesség megegyezik azzal a pillanatnyi sebességgel, amellyel a kísérleti jármű a gyorsító erőhatás megszűnésének pillanatában rendelkezett.

A pillanatnyi sebességen azt a sebességet értjük, amellyel a test egyenletesen mozogna tovább, ha az adott pillanatban megszűnnének a sebességváltozást okozó hatások.

A pillanatnyi sebesség fogalmához az átlagsebesség felhasználásával is eljuthatunk. Jelöljük ki a vizsgált test változó mozgásának azt a t időpillanatát és ezzel együtt a pillanatnyi helyét is, amelyben meg akarjuk határozni a pillanatnyi sebességet. Válasszunk ki olyan, egyre kisebb Δt időtartamokat (pl. 10 s; 5 s; 1 s; 0,5 s stb.), amelyek tartalmazzák a t időpillanatot. Az ilyen rövidülő időtartamok alatt a test által megtett út egyre kisebb lesz, és a sebesség is egyre kevesebbel változik. Képezzük rendre ezen egymáshoz tartozó útszakaszok és időtartamok hányadosait, tehát az átlagsebességek sorozatát!

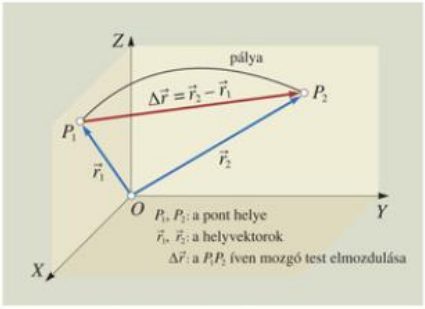
Ha ezt az eljárást – gondolatban – nagyon sok lépésben folytatjuk, akkor az egyre kisebb útszakaszokból és időtartamokból képezett átlagsebességek értéke egyre inkább azt mutatja meg, hogy a kiválasztott időpillanatban és helyen mekkora sebességgel fut a test. A nagyon rövid időtartam alatt ugyanis a test sebessége alig változik. A kijelölt időpillanatot tartalmazó **nagyon rövid időtartamhoz tartozó átlagsebesség nagysága közel egyenlő a pillanatnyi sebesség nagyságával.** Szemléletesen megfogalmazva: ha a Δt időtartam közelít a nullához, az átlagsebesség nagysága közelít a pillanatnyi sebesség nagyságához.

A PILLANATNYI SEBESSÉG MINT VEKTOR

A pillanatnyi sebesség nagysága arra jellemző, hogy az anyagi pont mekkora sebességgel halad át egy adott pillanatban egy adott ponton. Azt nem mutatja meg, hogy merről jött és merre megy, pedig a mozgásra ez is jellemző. A pillanatnyi sebességhez ezért a mozgás irányát is hozzá kell kapcsolni valamilyen módon. Az így kapott vektort **pillanatnyi sebességvektornak*** nevezzük.

A pálya két különböző pontjába mutató helyvektor ($\vec{r}_1$; $\vec{r}_2$) különbsége ($\Delta\vec{r}$) a két pont közötti **elmozdulásvektor*** ($\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$). Az elmozdulásvektor tehát az $\vec{r}$ helyvektor Δt idő alatt bekövetkezett $\Delta\vec{r}$ változása. A $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ vektormennyiség, nagysága (amit $\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$-vel jelölünk) sebesség jellegű, iránya pedig a $\Delta\vec{r}$ elmozdulásvektor irányával egyezik meg.

A pillanatnyi sebességvektort az elmozdulásvektorból és az időből ugyanazzal a módszerrel származtathatjuk, mint a sebesség nagyságát az útból és az időből. A $\frac{\Delta\vec{r}_n}{\Delta t_n}$ vektorokból alkotott



22.2. A helyvektor végpontja mindig az anyagi pont pillanatnyi helyével esik egybe

sorozat elemeinek nagysága annál jobban megközelíti a pillanatnyi sebesség nagyságát, iránya pedig a mozgás pillanatnyi irányát, minél kisebb Δt_n időtartamot veszünk figyelembe.

Az egyre kisebb elmozdulásvektorokból és időtartamokból képezett hányadosok azt mutatják meg, hogy a kiválasztott időpillanatban és helyen mekkora sebességgel és milyen irányba mozdul el az anyagi pont.

Így a nagyon rövid időtartamhoz tartozó elmozdulásvektor és az idő hányadosának a nagysága közel egyenlő a pillanatnyi sebesség nagyságával. Az elmozdulásvektor iránya a mozgás pillanatnyi irányával egyezik meg.

MEGJEGYZÉSEK

1. Az átlagsebesség fogalmából következik, hogy menet közben a pillanatnyi sebesség nagysága az átlagsebességnél kisebb, nagyobb és vele egyenlő is lehet.
2. Az átlagsebesség általában nem azonos a sebességek átlagával, hiszen a mozgás leírása szempontjából nem mindegy, hogy a test milyen sebességgel, mennyi ideig mozgott.
3. Ezután, ha sebességet mondunk vagy írunk, akkor pillanatnyi sebességre (v), esetleg pillanatnyi sebességvektorra ($\vec{v}$) gondolunk.
4. A sebességvektorok – mint minden más vektor (pl. az elmozdulások) – a paralelogramma szabály szerint összegezhetők.
5. A sebességvektor megváltozik, akár a nagysága, akár az iránya, akár egyszerre mindkettő változik is meg.
6. A pillanatnyi sebességet egy matematikai fogalom, a határérték segítségével lehet pontosan definiálni. Például az $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots$ végtelen sorozat határértéke 0 (nulla), vagyis a sorozat tetszőleges pontossággal megközelíti a 0-t. Másképpen ez azt jelenti, hogy: bármilyen kicsi számot adunk meg, a sorozatnak csak véges sok olyan eleme van, amelynek 0-tól vett távolsága nagyobb, mint a megadott szám.

   Ennek a gondolatnak megfelelően: a változó mozgás egyes pillanataira jellemző pillanatnyi sebességet a kiszemelt időpillanathoz kapcsolódó átlagsebességek sorozatának határértéke adja, ha az átlagsebességek sorozatát úgy alkotjuk meg, hogy az időtartamok minden határon túl közeledjenek a nullához.

   Az ilyen jellegű feladatok kiszámításához Newton és Leibniz [lejbnic] kidolgozott egy matematikai műveletet, a differenciálszámítást.
7. A stroboszkopikus felvételeknél egy sötétben mozgó testet világítanak meg egymást gyorsan és egyenletesen követő fényfelvillanásokkal. Közben a nyitott zárszerkezetű fényképezőgép minden felvillanáskor (ugyanarra a felvételre) egy-egy képet rögzít a mozgó, így mindig máshol levő testről. E képsor elemzésével a testek mozgása megvizsgálható.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Miből vehető észre, hogy egy test mozgása nem egyenes vonalú egyenletes mozgás?
2. Lehet-e egy test sebessége minden pillanatban kisebb, mint az átlagsebessége? Lehet-e egy változó mozgást végző test pillanatnyi sebessége nulla? Lehet-e egy változó mozgást végző test átlagsebességének és az egyik pillanatnyi sebességének a nagysága egyenlő?

3. Mit tudunk az egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test pillanatnyi sebességéről és átlagsebességéről?

4. Meghatározhatjuk-e egy adott időtartamra vonatkozó átlagsebesség ismeretében a test elmozdulását ezen időtartam bármely kisebb részére? Indokoljuk a választ!

5. Hazánkban jelenleg milyen sebességkorlátozások vannak érvényben a személyautókra? Átlag- vagy pillanatnyi sebességek ezek?

   Van más jellegű korlátozás is az autóvezetéssel kapcsolatban Magyarországon? Milyen alkoholfogyasztási korlátozások vannak más országokban?

   Vitassuk meg a magyarországi közlekedéskultúra színvonalát és a közlekedési feltételek állapotát! Nézzünk utána az interneten a különböző országok közlekedés-baleseti statisztikájának!

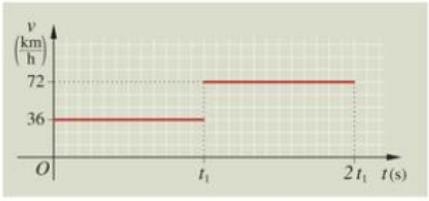
FELADATOK

1. Tájékozódjunk az interneten a légpárnás járművekről! (Mi a működési elvük, mire használhatók, milyen sebességek jellemzik ezeket?)

2. Az autó, a motorkerékpár, az autóbusz, a trolibusz, a dízel- és a villanymeghajtású vonat, a kerékpár stb. közlekedési eszközök. Mi jellemző ezekre gazdasági, környezetvédelmi és egészségi szempontból?

3. Hazánkban 1846-ban indult meg a vasúti forgalom. A Pest és Vác közötti 35 km hosszú utat 59 perc alatt tette meg ekkor a vonat. Mekkora volt az átlagsebessége? Nézzünk utána, mennyi idő alatt teszi meg a vonat ugyanezt a távot napjainkban!

4. Az ábrán egy anyagi pont sebesség–idő grafikonja látható. Mekkora a teljes időre számított átlagsebessége?



5. Egy gépkocsi sebessége 10 percig 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, azután 15 percig 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

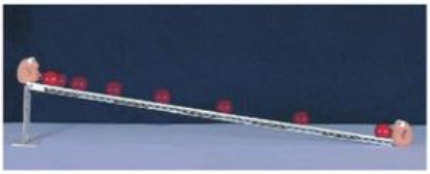
   a) Mennyi az összes megtett út?
   b) Mennyi az átlagsebesség?
   c) Rajzoljuk meg a sebesség–idő grafikont!
   d) Rajzoljuk meg az út–idő grafikont!

6. Egy vonat útjának első felét 1,5-szer nagyobb sebességgel tette meg, mint a második felét. Az egész útra vonatkozó átlagsebessége 43,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mekkora volt a vonat sebessége útjának első, illetve második részén?

7. Egy gépkocsi a céljához vezető út felén 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ állandó sebességgel halad. Mekkora legyen a sebessége az út második felén, ha azt akarja a vezető, hogy az egész utat figyelembe véve az átlagsebessége 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ legyen?

8. Egy teherautó először 3 órán át 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, azután 2 órán át 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad.
   a) Mekkora az átlagsebessége?
   b) Hol van a teherautó az indulás után 4 órával? Mekkora eddig az átlagsebessége?
   c) Mikor van az autó az indulás helyétől 310 km távolságban?
   d) Rajzoljuk meg a sebesség–idő és az út–idő grafikont!

3.2. A gyorsulás fogalma



25.1. A lejtőn guruló golyó sebessége egyenletesen változik (stroboszkopikus felvétel)

AZ EGYENLETESEN VÁLTOZÓ MOZGÁS

A lejtőn leguruló golyó vagy a csigán átvetett fonálon lógó nehezékkel vízszintes felületen mozgatott kiskocsi vagy a légpárnás sínen haladó szánkó egyenlő időtartamok alatt egyre hosszabb utakat tesz meg. Ez azt jelenti, hogy sebességük pillanatról pillanatra változik.

Ha a kiskocsit gyorsító nehezék alá – megfelelő helyre – felfogó asztalkát helyezünk, elérhető, hogy tetszőleges ideig (pl. 1; 2; 3; 4 időegységig) tartó gyorsulási szakasz után a kísérleti jármű egységnyi időtartamig egyenletesen mozogjon az ütközőig. A gyorsítás utolsó pillanatáig elért sebesség az egységnyi időtartam alatt egyenletesen befutott út hosszából kiszámítható. A mérés pontosabb lehet, ha fénykapukkal vezérelt kapcsolóórát és számítógépet alkalmazunk.

Közelítően helyes eredményt kaphatunk a pillanatnyi sebességre, ha a lejtőn lefutó golyó vízszintes kifutóban halad tovább, és ott mérjük meg az egységnyi időtartam alatt egyenletesen megtett út hosszát. Galilei (1564–1642) is lejtőn lefutó golyók megfigyelésével vizsgálta a változó mozgást.

A következő táblázat egy gyorsuló mozgást végző kiskocsi megfigyelése alapján készült, és öt mérés átlagát tartalmazza.

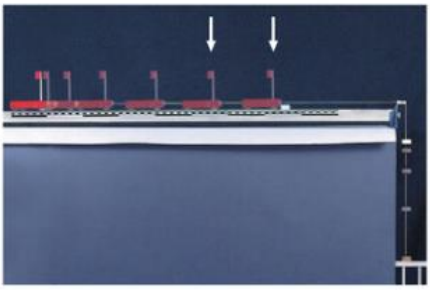
A gyorsulás időtartama	A gyorsulást követő 0,5 s alatt, egyenletesen megtett út	A gyorsulás alatt elért pillanatnyi sebesség
0,5 s	15,2 cm	30,4 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$
1,0 s	30,5 cm	61,0 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$
1,5 s	46,3 cm	92,6 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

Mérésekkel megállapítható, hogy a változatlan feltételek között gyorsuló test sebessége egyenlő időtartamok alatt ugyanannyival változik.

Ha egy test pillanatnyi sebességének nagysága egyenlő időtartamonként ugyanannyival változik – bárhogy választjuk is meg ezeket az egyenlő időtartamokat –, akkor a mozgás egyenletesen változó mozgás.

AZ EGYENLETESEN VÁLTOZÓ MOZGÁS GYORSULÁSA

Egy induló teherautó és egy versenyautó sebessége különböző módon változik. A teherautó hosszabb idő alatt, a versenyautó hamarabb éri el ugyanazt a sebességet. A sebességváltozás gyorsasága tehát különböző lehet. (Járjuk végig ismét a sebességnél már alkalmazott gondolatmenetet!)



25.2. A nehezékkel vontatott kiskocsi egyenletesen változó mozgást végez



25.3. Az induló versenyautó sebessége gyorsan változik, tehát nagy a gyorsulása

Két test közül annak változik gyorsabban a sebessége ($v_2 - v_1 = \Delta v$), amelyiknek:
- **ugyanannyi idő alatt nagyobb a sebességváltozása** ($\Delta t_1 = \Delta t_2$ és $\Delta v_1 > \Delta v_2$), vagy
- **ugyanakkora sebességváltozáshoz rövidebb időre van szüksége** ($\Delta v_1 = \Delta v_2$ és $\Delta t_1 < \Delta t_2$).

Egyenletesen változó mozgásnál egyenlő időtartamok alatt mindig ugyanannyival változik a sebesség. Ez azt jelenti, hogy ahányszor hosszabb a változás időtartama (Δt), annyiszor nagyobb a sebességváltozás (Δv), tehát a sebességváltozás nagysága egyenesen arányos a közben eltelt idővel: $\Delta v \sim \Delta t$.

Ebből következik, hogy:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{állandó}.$$

Ha kísérletünkben a lejtőt meredekebbre állítjuk (*25.1. ábra*), vagy a kiskocsit nagyobb tömegű nehezékkel gyorsítjuk (*25.2. ábra*), akkor az egyenlő időtartamok alatt bekövetkező sebességváltozás is nagyobb lesz. Ilyen esetben természetesen a $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ hányados is nagyobb. Mivel ez a hányados annál nagyobb, minél gyorsabban változik a test sebessége, ezért alkalmas az **egyenletesen változó mozgás gyorsulásának jellemzésére.**

A $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ hányados neve **gyorsulás*,** jele: a.

$$\text{gyorsulás} = \frac{\text{sebességváltozás}}{\text{a változás időtartama}},$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

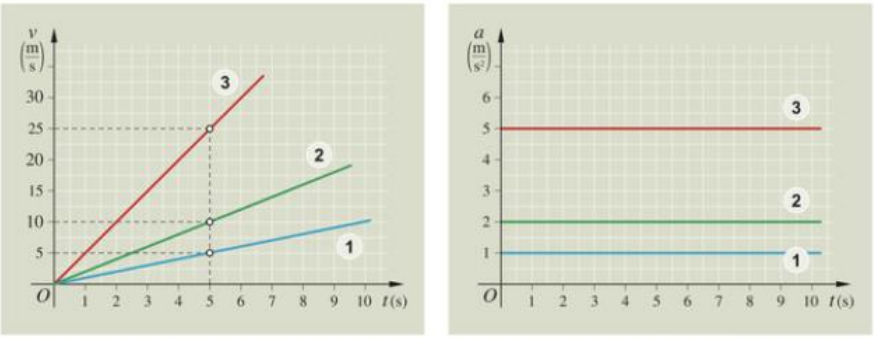
A gyorsulás mértékegysége a sebességváltozás mértékegységének és az idő mértékegységének hányadosaként adható meg. (A sebességváltozás és a sebesség mértékegysége természetesen ugyanaz: $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.) Így a gyorsulás SI-rendszerbeli mértékegysége:

$$\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Mivel az egységnyi idő alatt bekövetkező sebességváltozás és a gyorsulás számértéke egyenlő: **a gyorsulás megmutatja, hogy mekkora az egyenletesen gyorsuló test egységnyi idő alatt bekövetkező sebességváltozása.**

A sebesség vektormennyiség, így a változása ($\Delta\vec{v}$) is az. A $\Delta\vec{v}$-t az $\frac{1}{\Delta t}$ skalármennyiséggel szorozva is vektort kapunk. Az $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ **gyorsulás** tehát **vektormennyiség,** iránya a sebességváltozás irányával egyezik meg, nagysága pedig $a = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$.

Minden olyan mozgást, amelynél a sebességvektornak akár a nagysága, akár az iránya, akár mindkettő változik, gyorsuló mozgásnak* nevezünk.



26.1. *Elemezzük az egyenletesen változó mozgások sebesség–idő és gyorsulás–idő grafikonjait!*

A PILLANATNYI SEBESSÉG ÉS AZ ÚT KISZÁMÍTÁSA

Az autóban a pillanatnyi sebesség nagyságát és a megfigyelés időtartama alatt megtett utat egy műszer mutatja. Amikor a mozgást előre szeretnénk megtervezni, a sebesség és az út közvetlen mérésére legtöbbször nincs lehetőség. Ilyenkor a pillanatnyi sebességet és az utat számítással határozzuk meg.

Az álló helyzetből, tehát $v_0 = 0$ kezdősebességgel induló és egyenletesen változó mozgással (a = állandó) haladó test pillanatnyi sebessége egyenlő az adott pillanatig bekövetkező sebességváltozással (Δv). Így ilyen esetben a pillanatnyi sebesség a gyorsulás és a közben eltelt idő szorzataként számítható ki:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \Rightarrow v = a \cdot t.$$

Ha a kezdősebesség nem nulla **($v_0 \neq 0$),** akkor a sebességváltozás hozzáadódik a kezdősebességhez:

$$v = v_0 + a \cdot t.$$

Általában igaz, hogy a sebesség–idő grafikon görbéje alatti megfelelő terület számértéke egyenlő a megtett út számértékével. Az egyenletesen változó mozgást végző testnél, ha $v_0 = 0$, ez a terület egy háromszög területe.

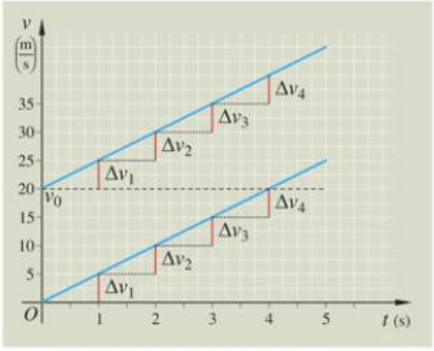
$$s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{a \cdot t \cdot t}{2} = \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Kísérlettel is megállapítható, hogy az egyenletesen gyorsuló mozgásnál az út nem az idővel, hanem az idő négyzetével arányos. Az arányossági tényező a gyorsulás fele.

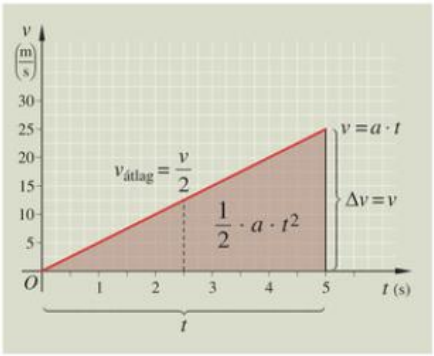
Ha az egyenletesen változó mozgásnál a kezdősebesség nem nulla **($v_0 \neq 0$),** akkor a görbe alatti megfelelő terület egy háromszög és egy téglalap területének az összege. Így az egyenletesen változó mozgás közben megtett út:

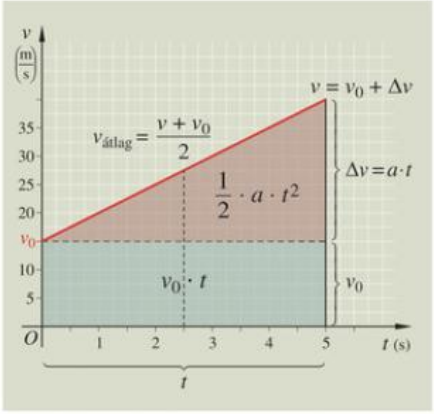
$$s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

Az egyenletesen változó mozgást végző test út–idő függvényét meghatározó képletet **négyzetes úttörvénynek*** szokás nevezni.

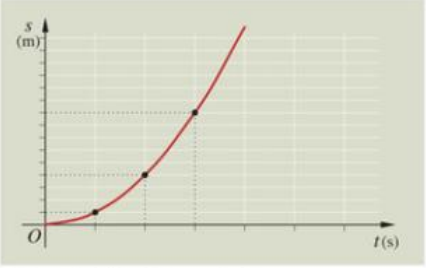


27.1. A sebességváltozás a kezdősebességhez adódik:
$\Delta v = v - v_0$; ha $v_0 = 0$, akkor $\Delta v = v$ és
$\Delta t = t - t_0$; ha $t_0 = 0$, akkor $\Delta t = t$





27.2. Mivel azonos módon lehet kiszámítani a területet és a megtett utat, így számértékük egyenlő



28.1. Az út–idő grafikon parabola

Ha a test kezdősebessége v_0 értékről egyenletesen változik egy végső v értékre, akkor az átlagsebesség e két sebesség számtani közepe lesz:

$$v_{átl} = \frac{v_0 + v}{2},$$

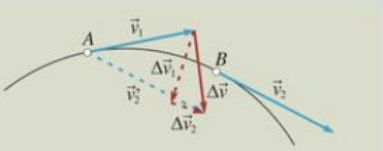
a megtett út pedig az

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

összefüggéssel is kiszámítható.

MEGJEGYZÉSEK

1. Az *acceleratio* – latin szó, jelentése: siettetés, gyorsítás, gyorsulás. Ebből származik az *a* jelölés.
2. A sebességváltozással járó, valóban lejátszódó folyamatot és jellemző mennyiségét is gyorsulásnak nevezzük. Hogy mikor mit értünk a gyorsulás szó jelentésén, azt a szövegkörnyezet teszi egyértelművé.
3. A lassuló mozgás sebességváltozásának gyorsaságát jellemző mennyiség neve is gyorsulás. Lassulásnál a gyorsulás azonban negatív előjelű, ha a mozgásirányt választottuk pozitívnak: pl. $v_1 = 20\,\frac{m}{s}$, $v_2 = 12\,\frac{m}{s}$ és $\Delta t = 2$ s, akkor $a = -4\,\frac{m}{s^2}$.
4. A pillanatnyi gyorsulásvektor mindig a pálya „belseje” (homorú oldala) felé mutat, kivéve, ha a pálya egyenes, illetve, akkor ha az adott pillanatban az anyagi pont a pálya olyan pontján fut át, amelyben a pályagörbe a homorúból domborúba vagy domborúból homorúba megy át.
5. Általános esetben, amikor a sebességvektornak mind a nagysága, mind az iránya változik, a gyorsulásvektort (a kétféle változást külön-külön véve figyelembe) felbonthatjuk a pályához érintőleges, úgynevezett **hosszgyorsulásra**** (a_h) és arra merőleges **iránygyorsulásra**** (a_i).



A sebesség nagyságának változását jellemző hosszgyorsulást a szaknyelv pálya menti vagy tangenciális gyorsulásnak nevezi. A sebesség irányváltozását jellemző iránygyorsulást pedig centripetális gyorsulásnak hívják.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Mi jellemző az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásokra?
2. Soroljunk fel környezetünkben előforduló egyenletesen változó mozgásokat!
3. Mivel egyenlő az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgást végző test átlagsebessége, ha a kezdősebessége nulla, és ha a kezdősebessége nem nulla?
4. Lehetséges-e, hogy egy test kelet felé mozog és gyorsulása abban a pillanatban északi irányú?
5. Lehet-e egy test gyorsulása különböző nullától, amikor sebessége nulla?

6. Egy autó egyszer 40 $\frac{km}{h}$, máskor pedig 120 $\frac{km}{h}$ sebességről próbál a lehető leggyorsabban megállni.
a) Hányszor több időt igényel a fékezés a második esetben? Fontos ez a közlekedésnél?
b) Hányszor nagyobb fékútra volt szüksége a második esetben? Mire figyelmeztet ez?

FELADATOK

A fejezet végén az 53. oldaltól 4 kidolgozott feladat található. Ezek átnézése segítheti a nehezebb feladatok megoldását.

1. Egy álló helyzetből induló teherautó 10 másodperc alatt éri el a 8 $\frac{m}{s}$ sebességet. Mennyi a gyorsulása? Mennyi ideig kellene gyorsulnia ennek az autónak, hogy sebessége 36 $\frac{km}{h}$ legyen?

2. Egy autó 72 $\frac{km}{h}$ sebességről 10 másodperc alatt lassult le és állt meg. Egy motorkerékpáros 5 s alatt érte el a 15 $\frac{m}{s}$ sebességet. Melyiknek nagyobb a gyorsulása?

3. Egy eredetileg 36 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladó autó 1 $\frac{m}{s^2}$ gyorsulással mozgott 10 másodpercig. Mekkora sebességet ért el?

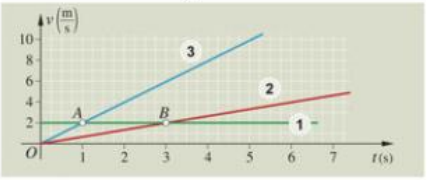
4. Mennyi ideig fékezett az az autó, amelynek sebessége $-0{,}5$ $\frac{m}{s^2}$ „gyorsulással" csökkent 72 $\frac{km}{h}$-ról 54 $\frac{km}{h}$-ra?

5. Egy álló helyzetből induló versenyautó 10 másodperc alatt 120 $\frac{km}{h}$ sebességre gyorsult fel. Mekkora utat tett meg eközben?

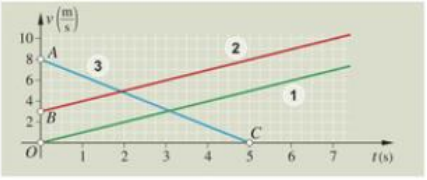
6. Nyugalomból induló és egyenletesen gyorsuló test mozgásának nyolcadik másodpercében 60 cm utat tett meg. Mekkora utat futott be a kilencedik másodperc alatt?

7. Egy 45 $\frac{m}{s^2}$ gyorsulással mozgó rakéta egy bizonyos időpontig 900 $\frac{m}{s}$ sebességet ér el. Mennyi utat tesz meg az azt követő 2,5 másodpercben?

8. Az ábrán három mozgó test sebesség–idő grafikonja látható. Mit állapíthatunk meg ezeknek a testeknek a mozgásáról és az *A* és *B* pontokkal megadott sebességéről? Határozzuk meg az egyes testek gyorsulását!

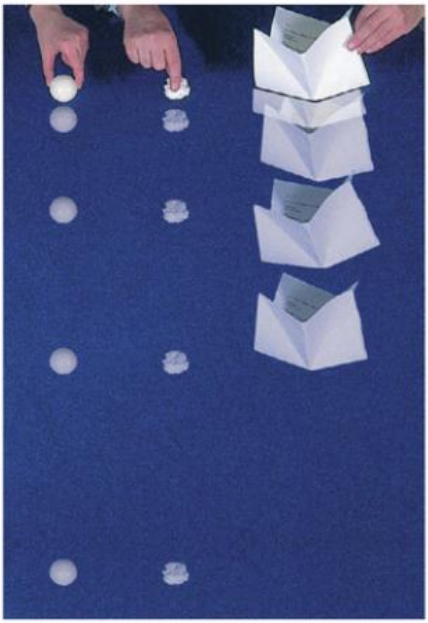


9. Az ábrán három mozgó test sebesség–idő grafikonja látható. E grafikonok alapján:
a) Állapítsuk meg, minek felelnek meg a koordinátatengelyeken levő *OA*; *OB*; *OC* szakaszok!
b) Határozzuk meg a testek gyorsulását!
c) Jellemezzük és hasonlítsuk össze az egyes testek mozgását!



10. A 25.1. ábra stroboszkópos felvétele 0,1 s-es időközönként mutatja a lejtőn leguruló golyó helyét.
a) Hányszor nagyobbak a valódi távolságok, ha a lejtő hossza 1 m?
b) Mérjük le a golyó helyének az indulási helytől 0,1 s; 0,2 s; 0,3 s stb. idő elteltével lévő távolságát! Foglaljuk táblázatba ezeket az időket és a hozzájuk tartozó valódi utakat! Ez alapján készítsük el a golyó út–idő grafikonját!
c) Az összetartozó út–idő párokból számoljuk ki a gyorsulást! A három számított gyorsulás számtani közepét fogadjuk el a gyorsulás legvalószínűbb értékének.
d) Készítsük el a golyó sebesség–idő grafikonját!

3.3. A szabadon eső test mozgása

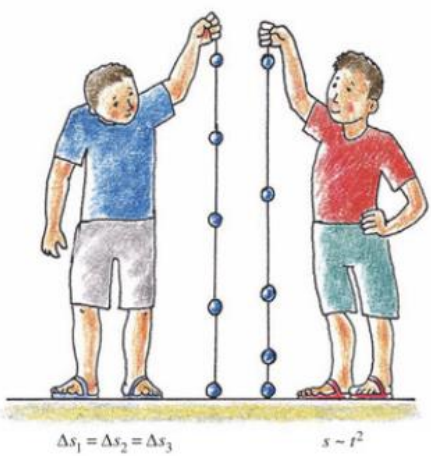


30.1. A levegő hatása a test alakjától is függ

A testek, ha nincsenek alátámasztva vagy felfüggesztve, leesnek a földre. Az elejtett tollpihe esés közben lassan libegve közeledik a földhöz, a ceruza, a radír stb. gyorsan és függőleges irányban esik. A sima és a gombócba gyűrt papírlap esése nagyon különböző. A fémgolyó és a vele azonos méretű papírgombóc közel egyformán esik. A nagy felületű papírlap mozgását a levegő jobban akadályozza, mint az összegyűrt papírgombócét és a fémgolyóét.

Megfigyelhető, hogy az elejtett testek esése annál jobban hasonlít egymáshoz, minél jobban elhanyagolható esésük közben a levegő fékező hatása. **Légüres térben minden test egyformán esik.**

A testek olyan esését, amely során csak a gravitációs hatás érvényesül (minden más, a mozgást befolyásoló hatás elhanyagolható), szabadesésnek* nevezzük.



30.2. Kísérletek ejtőzsinórral

A szabadesést legegyszerűbb ejtőzsinórokkal vizsgálni. Ezt magunk is könnyen megtehetjük. Egy körülbelül 2–2,5 m hosszú zsinegre kössünk egymástól egyenlő (például 50 centiméter) távolságra kisméretű fémdarabokat. Egy másik zsinóron a nehezékek legalsó fémdarabtól mért távolsága a számok négyzetével legyen arányos (például 1·15 cm; 4·15 cm; 9·15 cm; 16·15 cm).

Az első ejtőzsinórt addig emeljük fel egyik végénél megfogva, míg az alsó végén levő nehezék éppen csak érinti a földet. Az ejtőzsinórt elengedve a rajta egyenlő távolságban levő nehezékek földhöz koppanását gyorsuló üteműnek halljuk. A gyorsuló ütemű kopogás jelzi, hogy a szabadon eső nehezékek – az egymást követő – egyenlő hosszúságú utakat egyre rövidebb időtartamok alatt teszik meg. Ez azt igazolja, hogy a testek sebessége szabadesés közben növekszik, tehát **a szabadesés gyorsuló mozgás.**

A második ejtőzsinórt annál a végénél fogva emeljük fel, amely közelében egyre távolabb vannak felkötve rá a nehezékek. Ezt az ejtőzsinórt elengedve egyenlő időközönként halljuk a koppanásokat. Azt tapasztaljuk tehát, hogy az egymást követő időegységek alatt a nehezékek által megtett út egyszer, négyszer, kilencszer stb. akkora.

Kísérlettel megállapítható, hogy a szabadon eső testek által megtett út az idő négyzetével arányos: $s \sim t^2$. Ez, mint tudjuk, az egyenletesen változó mozgásra jellemző. **A szabadesés tehát egyenletesen változó mozgás,** ezért a

$$v = a \cdot t \quad \text{és} \quad s = \frac{a \cdot t^2}{2}$$

képletekkel írható le.

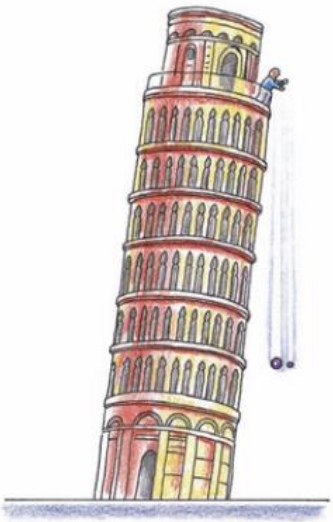
Kérdés még: Mennyi a szabadon eső testek gyorsulása? Az utat és a közben eltelt időt megmérve és a négyzetes úttörvényt felhasználva, ez kiszámítható:

$$s = \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2}.$$

Az esés közben megtett út mérése könnyen, az eltelt idő mérése nehezebben, de sokféle ügyes ötlet alapján megvalósítható.

Az egyik legegyszerűbb, és talán még elfogadható pontosságú eredményre vezető módszer a következő.

Egy csappal elzárható üvegcsőből (bürettából) vizet csepegtetnek az alatta mintegy 1,5 m-rel alacsonyabban levő edénybe. A csap segítségével úgy szabályozzák a víz csepegését, hogy mindegyik csepp akkor kezdjen esni, amikor az előző éppen belecsapódik az alul elhelyezett vízbe. Megmérve pl. 10 vízcsepp esésének együttes idejét, kiszámítható egyetlen vízcsepp szabadesésének időtartama. Így az időmérés hibája csökkenthető. A vízcsepp esésének útja könnyen megmérhető.



31.1. A szabadesést először Galilei vizsgálta (1600 körül). A legenda szerint a pisai ferde toronyból ejtett le különböző testeket

A pontos mérések szerint **a szabadesés egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás. A szabadon eső testek gyorsulásának nagysága Magyarországon, a földfelszín közelében** $9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A szabadon eső testek gyorsulását **gravitációs gyorsulásnak*** nevezzük, és g-vel jelöljük, tehát:

$g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Az összes egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás pillanatnyi sebességét és a megtett utat ugyanazokkal a függvényekkel lehet leírni. Így a szabadesés jellemző adatait is ezekkel határozhatjuk meg. Mivel azonban a szabadesés számunkra az egyik legfontosabb egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás, ezért a rá alkalmazott függvényeket a nehézségi gyorsulás jelét felhasználva szokás felírni:

$$v = g \cdot t,$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \text{és}$$

$$g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \ (= \text{állandó}).$$

Ahhoz, hogy a gravitációs gyorsulást vektorként kezelhessük, nagyságán (g) kívül az irányát is tudni kell. A $\vec{g}$ vektor iránya – természetesen – mindig függőlegesen lefelé mutat.

Mivel a szabadesés egy egyenes mentén jön létre, a gravitációs gyorsulás vektori jellege kifejezhető a pálya egyenesének és a változás irányát megmutató előjelnek a segítségével is. Így, ha a szabadesés irányát választjuk pozitívnak, akkor

$$a = g = +9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A koordináta-rendszert – amelyben leírjuk a jelenséget – úgy is megválaszthatjuk, hogy annak egyik tengelye felfelé mutasson. Ebben a koordináta-rendszerben számolva a gyorsulás

$$a = -g = -9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

3D

A FÜGGŐLEGES HAJÍTÁS

A felemelt testet nemcsak elejthetjük, hanem v_0 kezdősebességgel felfelé vagy lefelé el is hajíthatjuk. Az így létrehozott mozgást **függőleges hajításnak*** nevezzük. A függőleges hajítás tekinthető **olyan szabadesésnek,** amelynél **nem nulla a kezdősebesség.** Ezért leírásához az egyenletesen változó mozgásokat jellemző függvényeket használhatjuk fel.

A) **A függőlegesen lefelé dobott test** esetén, ha a pozitív irányt függőlegesen lefelé választjuk, akkor az $a = g$ és a $v_0 \neq 0$ figyelembevételével v_0 és g is pozitív. Ezért a mozgást leíró egyenletek a következők:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

$$v = v_0 + g \cdot t,$$

g = állandó.

B) **A függőlegesen felfelé hajított test** vizsgálatánál válasszuk pozitív iránynak a függőlegesen felfelé mutató irányt (ahogy a koordináta-rendszer Z tengelyénél szoktuk)! Így a g gravitációs gyorsulás negatív előjelű lesz ($a = -g$). A mozgás kezdőpontja legyen a földfelszínen.

A függőlegesen felfelé hajított test v_0 kezdősebessége (ebben a koordináta-rendszerben) pozitív. A t időpillanatig létrejött elmozdulása (vagyis a test földfelszín feletti tartózkodásának h magassága) és a pillanatnyi sebessége a következő:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

$$v = v_0 - g \cdot t.$$

A test által megtett út csak addig egyenlő az elmozdulással, amíg a test emelkedik. Amikor a test már visszafelé esik, az általa megtett út hosszabb, mint az elmozdulás, hiszen a pálya egy részén akkor már másodszor jár.

A függőlegesen feldobott test addig emelkedik, míg pillanatnyi sebessége nulla nem lesz. Ezt a felismerést alkalmazva meghatározható **az emelkedés t_1 időtartama:**

$$v = v_0 - g \cdot t_1 = 0 \Rightarrow v_0 = g \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g}.$$

Az emelkedés magassága az emelkedési idő ismeretében kiszámítható:

$$h_{max} = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 =$$

$$= v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}.$$

A feldobástól a földet érésig eltelt idő (t) egyenlő az emelkedés idejének és a tetőponttól a földig szabadon eső test mozgásidejének összegével. Az esés t_2 ideje:

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \Rightarrow t_2^2 = \frac{v_0^2}{g^2} \Rightarrow t_2 = \frac{v_0}{g}.$$

Tehát az esés ideje egyenlő az emelkedés idejével. Így a v_0 kezdősebességgel függőlegesen feldobott test levegőben töltött ideje:

$$t = t_1 + t_2 = 2 \cdot \frac{v_0}{g}.$$

A levegőben töltött idő ismeretében kiszámítható **a földet érés sebessége:**

$$v = v_0 - g \cdot t = v_0 - g \cdot \frac{2 \cdot v_0}{g} = v_0 - 2 \cdot v_0 = -v_0.$$

A függőlegesen felhajított test ugyanakkora sebességgel érkezik vissza a földre, mint amekkorával felhajították, de iránya ellentétes azzal.

A VÍZSZINTES HAJÍTÁS

A vízszintes hajítás* tanulmányozása érdekében lökjünk el egy golyót vízszintes irányban úgy, hogy az szabadon repülhessen. Az első golyó ellökésével egyidejűleg ugyanabból a magasságból ejtsünk el egy másik golyót is. Ezt könnyen megvalósíthatjuk az ún. Lőwy-féle ejtőgéppel.

Ez a szerkezet egy golyót rugalmas lemezzel, ütközőnek szorítva tart meg. Egy másik golyót pedig vízszintes „asztalkára" a lemez külső oldala elé helyezhetünk. A kitérített lengő karon levő kalapácsot elengedve az megüti a lemezt, ami az előtte levő golyót vízszintesen ellöki, az ütközőnek szorítottat pedig ugyanakkor elejti. (Lásd *33.1. ábra.*)

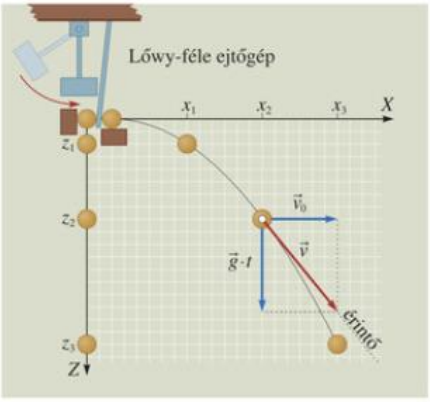
A kísérlet tanúsága szerint a vízszintesen ellökött golyó ugyanakkor ér a padlóra, mint a szabadon eső. Az ellökött golyót felülről nézve úgy tűnik, mintha vízszintes irányú, egyenes vonalú

egyenletes mozgást végezne. Ezek szerint a vízszintesen elhajított test mozgása gondolatban összetehető egy vízszintes egyenes menti egyenletes mozgásból és a szabadesésből (a mozgások függetlensége). A vízszintesen elhajított test helyét bármely időpillanatban (az ábrán látható koordináta-rendszerben) a következő függvények adják meg:

$$x = v_0 \cdot t \quad \text{és} \quad z = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

A sebességvektort mindig a vízszintes irányú és állandó nagyságú $\vec{v}_0$ kezdősebesség-vektor, valamint a $\vec{v} = \vec{g} \cdot t$ szerint változó nagyságú és a Z tengellyel azonos irányú vektor felhasználásával határozhatjuk meg:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t.$$



33.1. *Milyen irányú a pillanatnyisebesség-vektor vízszintes hajításnál?*

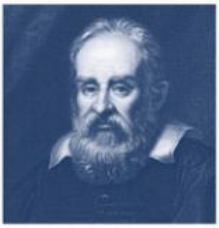
MEGJEGYZÉSEK

1. A mozgások függetlenségének elve szerint, ha egy test egyszerre több mozgásban vesz részt, és ezek a mozgások külön-külön pl. $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ pillanatnyi sebességgel írhatók le, akkor az eredő mozgás $\vec{v}$ sebessége a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sebességvektorok vektori eredője ($\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$).
2. A feldobott test emelkedés közben azért tartozhat a szabadon eső testek csoportjába, mert mozgása úgy is értelmezhető, mint összetett mozgás: az egyik összetevő mozgás a szabadesés, a másik a kezdősebességgel végzett egyenes vonalú egyenletes mozgás.
3. A testek ferdén is elhajíthatók. Az ilyen mozgások vizsgálatához szükséges matematikai ismeretekkel azonban most, a 9. évfolyamon még nem rendelkezünk.
4. A *gravitas* – latin szó, jelentése: súly, teher. Ebből származik a gravitáció szó és a g jelölés.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

3D

1. Mit tudunk a szabadon eső test mozgásáról? A gyakorlatban milyen megszorítások mellett tekinthető egy leejtett test mozgása szabadesésnek?
2. Egy szabadon eső test először egy, majd két, végül három másodpercig esik.
   a) Mit állíthatunk a gyorsulásról a három különböző esetben?
   b) Az első, második vagy harmadik másodpercben teszi-e meg a leghosszabb utat? Miért?
3. Sötét háttér előtt egy v_0 kezdősebességgel feldobott fehér golyó emelkedéséről (stroboszkópos megvilágítással) ún. nyomképsort készítünk. Ezt követően a fehér golyó szabadeséséről is hasonló felvételsort csinálunk. Meg lehet-e különböztetni egymástól a két nyomképsort?
4. A szabadesésről *Galileo Galilei* olasz fizikus állapította meg, hogy egyenletesen gyorsuló mozgás. *Párbeszédek* (1636) című művében ezt írta: *„az eső test szabad mozgása állandóan gyorsul […] a távolságok, melyeket egy nyugvó állapotból induló test egyenlő időközönként befut, úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan egész számok, kezdve az egyessel”*. Hogyan lehet ellenőrizni, hogy Galilei nem tévedett-e?



Galileo Galilei (1564–1642)

FELADATOK

1. Egy golyó 5 másodpercig esik szabadon. Mekkora sebességgel érkezik a földre? Mennyi utat tett meg esése közben?

2. Mennyi idő áll rendelkezésére a 10 m magas toronyból elhanyagolható kezdősebességgel vízbe ugró versenyzőnek, hogy a gyakorlatát bemutassa? Mekkora sebességgel érkezik a vízbe? Mekkora volt az átlagsebessége?



3. Mennyi ideig és milyen magasról esett le a fáról az az alma, amelyik $v = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$-cel ütközött a földnek?

4. Mekkora távolságot tesz meg a nyugalomból induló és szabadon eső test esése során a $t_1 = 6$ s és $t_2 = 8$ s közötti időben? Mekkora ebben az időtartamban a gyorsulása?

5. Szabadon eső test egy bizonyos szintre $20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, egy másikra $40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel érkezik. Mennyi idő alatt esik a test a felső szinttől az alsó szintig? Mennyi a két szint közötti távolság?

6. Egy test szabadon esik 50 m magasból. Mennyi idő alatt futja be útjának első és utolsó méterét? Mekkora utat tesz meg esésének első és utolsó másodpercében?

7. Az $50\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel függőlegesen felfelé lőtt lövedék milyen magasan van, mennyi utat tett meg, mekkora és milyen irányú a sebessége a kilövéstől számított 2., 4., 5., 6., 8. és 10. másodperc végén? Készítsük el a magasság–idő, út–idő, sebesség–idő és gyorsulás–idő grafikonokat!

8. Egy kavicsot $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel függőlegesen lefelé dobunk. Mekkora a kavics sebessége az elhajítás után 3 másodperccel? Mennyi utat tett meg a kavics 3 másodperc alatt? Miért egy kavics mozgására kérdeztünk rá, és nem általánosítva testet mondtunk?

9. Hasonlítsuk össze kinek jobb a reflexe! Társunk tartson függőleges helyzetben egy olyan rudat (pl. egy seprű nyelét), amelyre középtájon egy vízszintes jelet rajzoltunk, vagy egy befőttesüvegnél használt gumigyűrűt feszítettünk körül. Ezután kezünket a rúdhoz egészen közel, közvetlenül a jel alatt, a rúd elkapására alkalmas helyzetben tartsuk.

   Amint észleljük, hogy társunk elejtette a rudat, azonnal kapjuk el azt. Kezünk helyét a rúdon megjelölve megmérhetjük, hogy mennyit esett a rúd szabadon a reakcióidőnk alatt.

   a) Az útból és a gravitációs gyorsulásból számítsuk ki a reakcióidőt!
   b) Végezzünk több mérést, és átlagoljunk!
   c) Mérjük meg reakcióidőnket, amikor frissek (pl. reggel a tanórák előtt) és amikor fáradtak vagyunk (pl. az órák után)!

10. A földi légkör fékező hatása miatt légritkított üvegcsőben megfigyelhetjük, hogy a tollpihe és a vasgolyó hogyan esik, ha szabadon esik. Ilyen kísérleti eszköz viszont nincs minden iskolában. Az internet azonban most is segíthet.

    A Holdnak nincs légköre, így ott a szabadesés közvetlenül is megfigyelhető. 1971-ben az amerikai Apollo–15 űrhajósai elvégezték és filmre vették ezt a kísérletet, amit pl. a Google keresőn az „apollo 15 gravity experiment" begépelésével megnézhetünk.

3.4. Az egyenletes körmozgás

A PERIODIKUS MOZGÁS

A mozgásokat többféle szempont szerint csoportosíthatjuk. Leggyakrabban a pálya alakját és a sebesség változását vagy változatlanságát vesszük figyelembe. Ezért beszéltünk eddig egyenes vonalú egyenletes mozgásról, egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásról, nem egyenletesen változó mozgásról stb.

A csoportosítás egy másik szempontja lehet az, hogy van-e valamilyen szabályos ismétlődés a mozgásban, állapotváltozásban. Az olyan mozgást, amelyben a test ugyanazt a mozgásszakaszt folyamatosan, ugyanúgy ismételgeti, **periodikus mozgásnak*** nevezzük.

Az ingaóra „sétálója" ugyanazt a pályaszakaszt sokszor bejárja, az oda-vissza mozgást ismételgeti. Egy ismétlődő mozgásszakasz alatt az inga kétszer járja végig a pályát, amíg visszajut kiindulópontjába.

A rugóra felfüggesztett test – ha nyugalmi helyzetéből függőleges irányban kitérítjük és elengedjük – tartósan rezeg, a le-fel mozgást ismételgeti. A rezgő test is kétszer járja végig a pályát egy-egy megismételt mozgásszakasz alatt.



35.1. A „sétáló" ingamozgást végez. (A képen a Galilei által készített ingaóra másolata látható)



35.2. A Föld képzeletbeli tengelyén 24 óra alatt fordul körbe egyszer. *Mennyi a Föld periódusidője?*

A Föld mozgására jellemző, hogy egy nap alatt fordul meg a „tengelye" körül, és egy év alatt járja körül a Napot. Az inga egyenlő időtartamok alatt lendül eredeti, kiinduló helyére. A periodikus mozgások egyik jellemzője a **periódusidő*, amely alatt egyszer játszódik le az ismétlődő mozgásszakasz.** A periódusidő jele: T.

Az is jellemző a periodikus mozgásra, hogy a test egységnyi idő alatt hányszor járja végig az ismétlődő mozgásszakaszt. **Azt a mennyiséget, amely megmutatja a periodikus mozgás egységnyi idő alatt bekövetkező ismétlődéseinek a számát, frekvenciának* nevezzük.** Jele: f. A frekvencia kiszámítható az ismétlődések száma (Z) és a közben eltelt idő (Δt) hányadosaként:

$$f = \frac{Z}{\Delta t}.$$

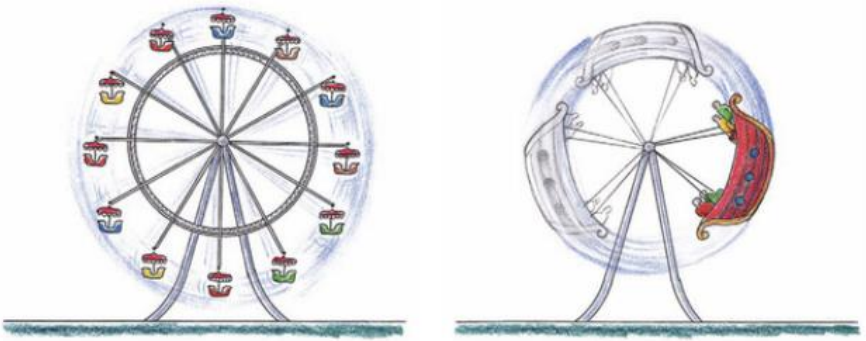
Ha a $Z = 1$, akkor a $\Delta t = T$, és így:

$$f = \frac{1}{T}.$$

A frekvencia tehát megadható a periódusidő reciprokaként is.

Mivel az ismétlődések számának nincs mértékegysége, a frekvencia mértékegységei:

$$\frac{1}{\text{s}} (\equiv \text{hertz, jele: Hz}) \text{ és } \frac{1}{\text{min}}.$$



36.1. Az óriáskerék kosara haladó mozgást végez, mert bármely helyzetéből párhuzamos eltolással átvihető egy másikba. Az átfordulós hajóhinta forgómozgást végez, mert minden pontja egy tengely körüli körpályán mozog

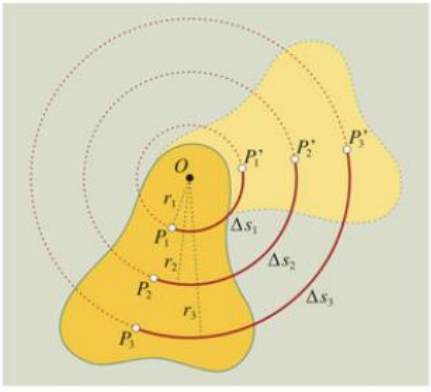
A FORGÓMOZGÁS

Eddig a mozgások egyik fontos alaptípusát, a **haladó mozgást** vizsgáltuk.

A mozgás másik fontos alaptípusa a **forgás***. A forgómozgás legegyszerűbb esete az, amikor a merev test rögzített merev tengelyen forog.

> Egy test akkor tekinthető merevnek, ha pontjainak egymáshoz viszonyított távolsága vizsgálat közben nem, vagy csak elhanyagolható mértékben változik meg. A rögzített tengelynek sem a helye, sem a helyzete nem változhat.

A rögzített tengelyen forgó merev test minden anyagi pontnak tekinthető része (kivéve a tengely pontjait) körpályán mozog. Minden ilyen körpálya síkja merőleges a tengelyre, és középpontja a tengely egy-egy pontja. Az egyes pontok körpályáinak sugara különböző hosszúságú lehet.



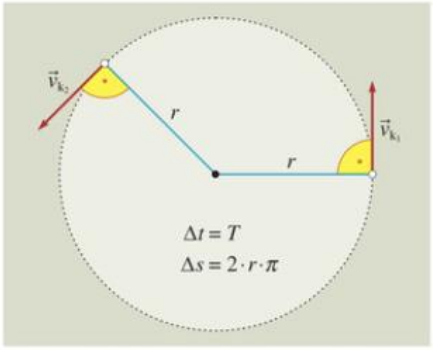
36.2. A rögzített tengelyen forgó merev test minden pontja (kivéve a tengely pontjait) körpályán mozog

A forgómozgásnak azt a sajátos, legegyszerűbb változatát, amikor a test anyagi pontnak tekinthető, és így csak egyetlen körpálya van, **körmozgásnak*** nevezzük. A körmozgás párhuzamos eltolásként is kezelhető, hiszen az anyagi pont forgásának, pörgésének nincs értelme. Így a körmozgás tárgyalható haladó mozgásként, és természetesen leírható forgómozgásként is. Mi mind a két leírási módot megismerjük.

AZ EGYENLETES KÖRMOZGÁS MINT HALADÓ MOZGÁS

Az egyenletes haladó mozgásnak megfelelően: **a körmozgás akkor egyenletes, ha az anyagi pont egyenlő idők alatt – bármilyen kicsik vagy nagyok is ezek az időközök – egyenlő íveket fut be.** Ilyen esetben az anyagi pont sebességének nagysága tehát állandó.

Mivel az egyenletes körmozgást végző anyagi pont egy-egy teljes kört mindig változatlan nagyságú sebességgel, ugyanannyi idő alatt jár végig, **az egyenletes körmozgás periodikus mozgás.** Ezért jellemző rá a periódusidő és a frekvencia is. Körmozgásnál a periódusidőt **keringési időnek*** (T), a frekvenciát pedig **fordulatszámnak*** szokás nevezni. A fordulatszám jele: n vagy f. A fordulatszám megmutatja az egységnyi idő alatti fordulatok számát.



37.1. Egyenletes körmozgásnál a kerületi sebesség nagysága állandó



37.2. Az elengedés pillanatában a kalapács mindig kerületi sebességének irányában indul el. *Milyen irány ez?*

Az egyenletes körmozgást végző testek keringési ideje és fordulatszáma állandó.

A körmozgást végző anyagi pont mindig egy kör kerületén mozog, ezért pillanatnyi sebességét **kerületi sebességnek*** nevezzük, és $\vec{v}_k$-val jelöljük.

Amikor az egyenletes körmozgást haladó mozgásként kezeljük, akkor az anyagi pont sebességének nagyságát ugyanúgy számíthatjuk ki, mint az egyenes vonalú egyenletes mozgásnál. Ehhez azonban tudnunk kell az anyagi pont által megtett utat és a közben eltelt időt. A kerületi sebességet legegyszerűbben akkor számíthatjuk ki, ha ismerjük a körpálya r sugarát és a T keringési időt vagy az n fordulatszámot. Ha $\Delta s = 2 \cdot r \cdot \pi$, akkor $\Delta t = T$, és:

$$v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}.$$

Mivel $n = \frac{1}{T}$, a kerületi sebesség

$$v_k = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot n$$

formában is kiszámítható. Kérdés még: milyen irányú az egyenletes körmozgás kerületi sebessége?

A kalapácsvető a dobás előtt jól megforgatja a kalapácsot. Amikor elengedi az acélsodrony fogóját, a kalapács a pillanatnyi sebességének irányában, tehát a körpálya érintőjének irányában repül el. A versenyzőnek ezt az irányt – az elengedés pillanatának megválasztásával – jól kell meghatároznia, ha nem akarja a kalapácsot a védőhálóba vágni.



37.3. A kerületi sebesség mindig érintő irányú

Köszörülés közben a leváló izzó részecskék is jól mutatják a leválás pillanatában meglevő sebességük irányát. Ez az irány mindig a körpálya érintőjének iránya.

A pillanatnyi sebességvektor iránya körmozgásnál is mindig a körpálya érintőjének irányába esik, és a mozgásnak megfelelő irányítású. Így **a kerületi sebesség iránya pillanatról pillanatra változik.** Ezért **az egyenletes körmozgás változó mozgás.** Annak ellenére van gyorsulása, hogy a kerületi sebesség nagysága ilyen esetben állandó.

Az egyenletes elnevezés a kerületi sebesség nagyságának állandóságára utal, az egyenletes körmozgás változása pedig a sebesség irányának változása miatt jön létre.

AZ EGYENLETES KÖRMOZGÁS GYORSULÁSA

Amikor egy test sebességvektorának a nagysága vagy az iránya (esetleg mindkettő) változik, a test mozgása változó mozgás, tehát van gyorsulása. Egyenletes körmozgásnál a kerületi sebesség nagysága változatlan, de iránya pillanatról pillanatra változik. Ez azt jelenti, hogy **az egyenletes körmozgást végző anyagi pontnak van gyorsulása.**

Az egyenletes körmozgást végző anyagi pont gyorsulását két lépésben vizsgáljuk meg. Előbb meghatározzuk a **gyorsulásvektor irányát,** majd nagyságának kiszámítási módját.

Az egyenletes körmozgás kerületi sebességének nagysága állandó, ezért a pillanatnyi gyorsulásának nem lehet a kerületi sebességgel párhuzamos összetevője. Ha volna, akkor a sebesség nagysága is változna. Ez azt jelenti, hogy **az egyenletes körmozgásnál a gyorsulás merőleges a kerületi sebességre.** A kerületi sebesség azonban érintő irányú, így a rá merőleges **gyorsulásvektor a körpálya középpontja felé mutat.** Az egyenletes körmozgás gyorsulásának **centripetális** (középpontba mutató) **gyorsulás*** a neve, jele: a_{cp}.

Az előbbi megállapításhoz más módon is eljuthatunk, de ehhez ismerni kell az ívmértéket (lásd *Megjegyzések 39. oldal 1.* és a *38.1. ábrát*).

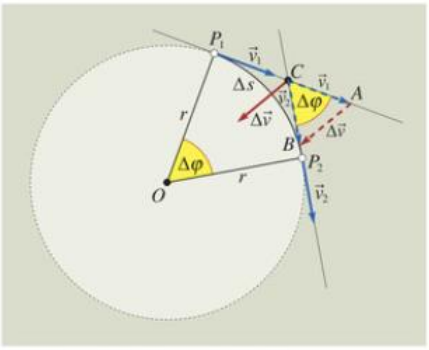
A t_1 időpillanatban a P_1 pontban levő anyagi pont sebessége $\vec{v}_1$. A $\overset{\frown}{P_1P_2}$ íven befutott $\Delta s = r \cdot \Delta\varphi$ út megtétele után a $t_2 = t_1 + \Delta t$ pillanatban pedig: $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$. Ez könnyen belátható, ha a $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ vektorokat „tartó egyeneseiken" eltoljuk a közös C pontba, hogy alkalmazhassuk rájuk a paralelogramma módszert.

Az elcsúsztatott $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ és $\Delta\vec{v}$ vektorok által alkotott CAB egyenlő szárú háromszög C csúcsánál levő szög egyenlő az O pontnál levő $\Delta\varphi$ szöggel, mert merőleges szárúak és hegyesszögek. Így a CAB szög egyenlő:

$$\frac{180^\circ - \Delta\varphi}{2} = 90^\circ - \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Ha Δt-t csökkentjük, $\Delta\varphi$ is egyre kisebb lesz (tart nullához), a CAB szög tart a 90°-hoz, vagyis **a pillanatnyi gyorsulásvektor** merőleges az érintőre, tehát **a körpálya középpontja felé mutat.**

Az **egyenletes körmozgás gyorsulásának nagysága** többféle módon is kiszámítható és az eredmény a következő:



38.1. A gyorsulásvektor meghatározása

Az egyenletes körmozgás centripetális gyorsulásvektora mindig a körpálya középpontja felé mutat, és nagysága:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}.$$

Kiegészítő tananyagként itt is megismerhető egy lehetőség. A 38.1. ábrán látható P_1OP_2 és az ACB háromszög egyenlő szárú ($OP_1 = OP_2 = r$, valamint $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \equiv v$), továbbá a száraik által bezárt szögek egyenlők (mert merőleges szárú szögek). A $|\Delta\vec{v}|$ az ACB háromszög $\Delta\varphi$-vel szemben fekvő oldalával egyenlő.

Igen kicsi $\Delta\varphi$ esetében a $|\Delta\vec{v}|$ közel egyenlő az AB ívvel (lásd a *Megjegyzésekben* leírt ívmértéket), így:

$$|\Delta\vec{v}| \approx v \cdot \Delta\varphi.$$

Figyelembe véve, hogy a P_1OP_2 háromszögben $\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$, a $|\Delta\vec{v}| \approx v \cdot \frac{\Delta s}{r}$, így az átlaggyorsulás a következőképpen számítható ki:

$$a = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \approx \frac{v \cdot \frac{\Delta s}{r}}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Mivel a test mozgása egyenletes, ezért $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$, és ha Δt közelít nullához, akkor a $|\Delta\vec{v}| \approx v \cdot \Delta\varphi$ egyre jobb közelítés, ezért az átlaggyorsulások sorozata tart a $\frac{v}{r} \cdot v = \frac{v^2}{r}$ pillanatnyi gyorsuláshoz.

Az előzőekből az következik, hogy:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}.$$

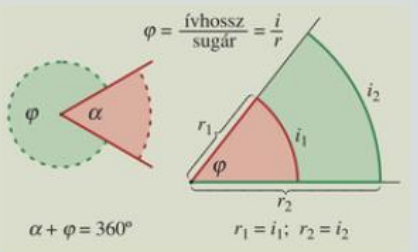
MEGJEGYZÉSEK

1. Az egy pontból kiinduló két félegyenes az általuk meghatározott síkot két tartományra osztja. Ezeket a tartományokat **síkszögekkel,** röviden **szögekkel** jellemezzük. A szöget a gyakorlati életben **fokmértékben** mérik. Ilyenkor a szög mértékegysége a **fok,** ami a teljes szög 360-ad része: 1 fok egyenlő 60 szögperc ($1^\circ = 60'$).

A fizikában a szöget – az SI-nek megfelelően – **ívmértékben** mérik. Ívmértékben a szög mértékegysége a **radián.** A szög akkor 1 radián, ha egyenlő egy olyan körív középponti szögével, melynek ívhossza megegyezik a kör sugarával.

Ez azt jelenti, hogy a szöget radiánban kapjuk, ha a hozzá tartozó ívet elosztjuk a körív sugarával:

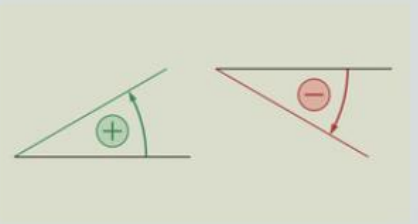
$$\varphi(\text{rad}) = \frac{\text{ívhossz}}{\text{sugár}} = \frac{i}{r}.$$



A radiánban mért szög tehát egy arányszámmal adható meg. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a szög nagyságát kifejező szám után nem írunk semmilyen jelet, pl : $\varphi = 3$. Ha ez valahol félreérthető volna, akkor a radián rövidítését, a rad-ot használjuk jelölésre, pl.: $\varphi = 3$ (rad). Mivel a kör kerülete $2 \cdot r \cdot \pi$ hosszú, így a teljes szög $\frac{2 \cdot r \cdot \pi}{r} = 2 \cdot \pi$ (rad), ebből az következik, hogy $360^\circ = 2 \cdot \pi$ (rad), tehát 1 rad = 57,296° = 57°17'45".

2. Ha a szög egyik szárát kijelöljük nyugvó szárnak és a másikat mozgó szárnak, akkor irányított szöget kapunk.

Amikor a mozgó szár az óramutató járásával ellentétes irányban fordul el, a szöget pozitív (+), amikor megegyezően, akkor negatív (–) jellel különböztetjük meg. Így a rögzített tengelyű testek forgásának iránya is megadható.



GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Soroljunk fel a természetben és a technikai környezetünkben lezajló periodikus folyamatokat! Mennyi ezeknél a periódusidő?

2. Mi változik és mi állandó az egyenletes körmozgást jellemző mennyiségeknél?

3. Hogyan változik a körmozgást végző anyagi pont kerületi sebessége és centripetális gyorsulása, ha nő a fordulatszám, vagy ha csökken a keringési idő?

4. Hogyan változik a körmozgást végző anyagi pont keringési ideje, fordulatszáma és centripetális gyorsulása, ha nő a kerületi sebessége?

5. Egy traktor úgy halad, hogy kerekei nem csúsznak és nincs túlpörgésük sem.

Hasonlítsuk össze a traktor haladási sebességét és kerekei legkülső pontjainak kerületi sebességét!

6. Egy traktor első kerekeinek kisebb a sugara, mint a hátsó kerekeké.

Hasonlítsuk össze az első és hátsó kerekek legkülső pontjainak keringési idejét, fordulatszámát, kerületi sebességét és centripetális gyorsulását, ha a traktor egyenletesen halad!



FELADATOK

1. Mennyi egy karóra másodpercmutatójának keringési ideje és fordulatszáma? Mennyi a másodpercmutató végpontjának kerületi sebessége és centripetális gyorsulása, ha a mutató hossza 1 cm?

2. Egy játékmozdony 1 m sugarú körpályán változatlan nagyságú sebességgel mozog, és minden teljes kört 20 másodperc alatt fut végig. Mennyi a keringési ideje, a fordulatszáma, a kerületi sebessége és a centripetális gyorsulása?

3. Mekkora lehet a percenként 4200 fordulatot megtevő ventilátor sugara, ha a legnagyobb kerületi sebessége 88 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ lehet?

4. Egy gépkocsi 200 m sugarú útkanyarban 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad. Mekkora a centripetális gyorsulása?

5. Egy mesterséges űrállomás közel kör alakú pályájának 6600 km a sugara. Egy teljes körpályát 1,5 óra alatt jár végig egyenletesnek tekinthető mozgással.

Hol van a pálya középpontja? Mennyi a kerületi sebességvektorának, illetve gyorsulásvektorának nagysága, és milyen az iránya?

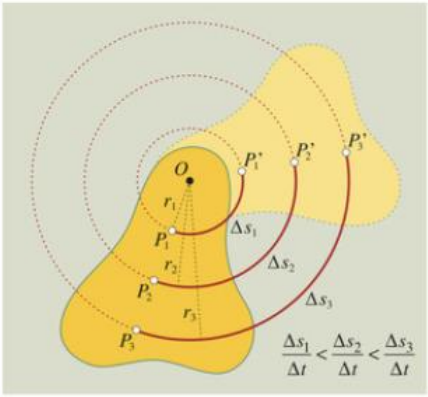
6. A Hold Földtől számított közepes távolsága 384 400 km, átmérője 3 476 km, (sziderikus) keringési ideje 27,32 nap, és ezzel pontosan egyenlő a tengelyforgás ideje is.

Mennyi a Hold Föld körüli forgásának fordulatszáma, átlagos kerületi sebessége és centripetális gyorsulása?

Mennyi a Hold saját tengelye körüli forgásának fordulatszáma, legkülső pontjainak kerületi sebessége és centripetális gyorsulása?



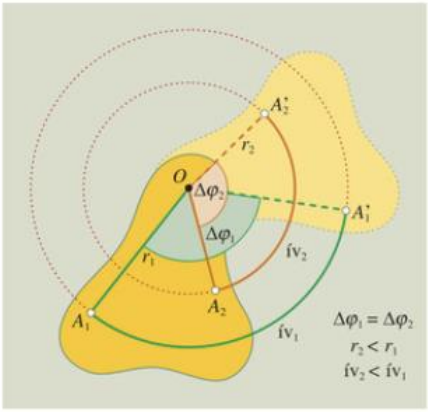
3.5. A körmozgás és forgómozgás szögjellemzői



41.1. *Mit tudunk egy forgó test rögzített tengelyétől különböző távolságra lévő pontjainak kerületi sebességéről?*

Mint tudjuk, a rögzített tengelyen forgó kiterjedt merev test pontjai körmozgást végeznek. Ugyanazon forgó test minden pontjának – a test fordulatszámán kívül – attól függ a kerületi sebessége, hogy milyen távol van a tengelytől. **A kiterjedt merev test forgómozgása** tehát **nem jellemezhető egyetlen pontjának kerületi sebességével.**

A rögzített tengelyen forgó merev test bármely pontjához tartozó sugár azonban **ugyanakkora szöggel fordul el.** Ezért az egész test elfordulása jellemezhető ezzel az egyetlen szöggel, amelyet **szögelfordulásnak*** nevezünk, és $\Delta\varphi$-vel jelölünk.



41.2. A szögelfordulással ($\Delta\varphi$) az egész test és bármely pontjának elfordulása jellemezhető: $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi$

AZ EGYENLETES FORGÓMOZGÁS

A már többször alkalmazott gondolatnak megfelelően: **a forgómozgás akkor egyenletes, ha egyenlő idők alatt – bármilyen kicsik vagy nagyok is ezek az időtartamok – egyenlő a test szögelfordulása.**

Két egyenletesen forgó test közül az forog gyorsabban, amelyiknél:

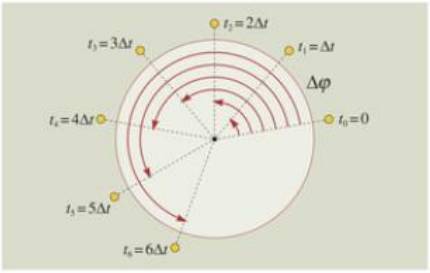
- **ugyanannyi idő alatt nagyobb a szögelfordulás** ($\Delta t_1 = \Delta t_2$ és $\Delta\varphi_1 > \Delta\varphi_2$), vagy
- **ugyanakkora szögelfordulás rövidebb idő alatt jön létre** ($\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$ és $\Delta t_1 < \Delta t_2$).

A testek forgásának jellemzéséhez tehát ismerni kell a $\Delta\varphi$ szögelfordulásukat és az elfordulásuk Δt időtartamát.

A szögelfordulás és a közben eltelt idő kapcsolatát legegyszerűbben például egy lemezjátszó segítségével vizsgálhatjuk meg. A lemez helyére tegyünk egy papírlapot, és a lemezjátszó tányérjának forgása közben egyenlő időközönként csepegtessünk rá megfestett vízcseppeket. Így meghatározható a két cseppentés között eltelt idő, valamint a forgástengelyt és a vízcseppek helyét összekötő félegyenesek által bezárt szög. (Lásd *42.1. ábra.*)



41.3. A szögelfordulás és az idő kapcsolata régi típusú lemezjátszóval is vizsgálható



42.1. A lemezjátszó tányérja egyenlő idők alatt egyenlő szöggel fordul el

Kísérlettel megállapítható, hogy a lemezjátszó tányérja egyenlő idők alatt egyenlő szöggel fordul el, tehát forgása egyenletes. Egyenletes forgómozgásnál ahányszor hosszabb a forgás időtartama, annyiszor nagyobb a szögelfordulás. Ez azt jelenti, hogy **egyenletes forgásnál a szögelfordulás egyenesen arányos az elfordulás időtartamával, hányadosuk tehát állandó:**

$$\Delta\varphi \sim \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \text{állandó}.$$

A lemezjátszó fordulatszáma változtatható. Nagyobb fordulatszámmal megismételve az előző kísérletet, azt tapasztaljuk, hogy az előzővel megegyező csöpögési időtartamok alatt nagyobb a szögelfordulás, mint a lassabban forgónál volt. A $\Delta\varphi \sim \Delta t$ megállapítás most is igaz. A gyorsabban forgó lemezjátszónál a $\Delta\varphi$ és Δt hányadosa nagyobb, mint a lassabban forgónál volt.

A $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ hányados értéke minden egyenletes forgómozgásnál állandó, és annál nagyobb, minél gyorsabban forog a test. Ez a hányados tehát alkalmas mennyiség az egyenletes forgómozgás jellemzésére.

A $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ hányados neve **szögsebesség*,** jele: ω (omega: görög kisbetű).

$$\text{szögsebesség} = \frac{\text{szögelfordulás}}{\text{az elfordulás időtartama}},$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

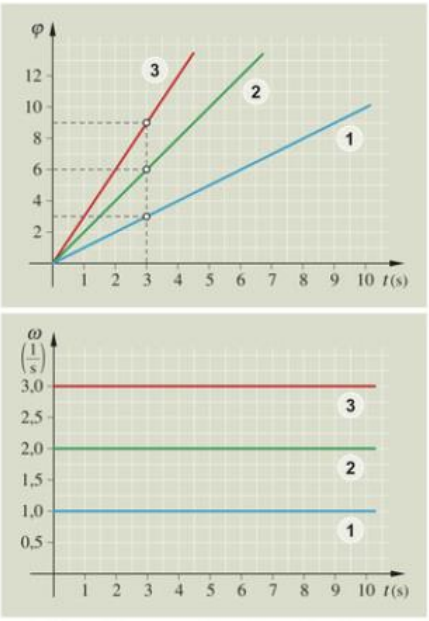
Amennyiben $\Delta\varphi = 2 \cdot \pi$ (egy teljes körülfordulás), akkor $\Delta t = T$, és így

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}.$$

A szögsebesség SI-beli mértékegysége az $\frac{1}{\text{s}}$, mert a $\Delta\varphi$ mértékegysége radián, aminek nincs mértékegysége, hiszen egy arányszám.

Egy forgó merev test szögsebessége egyben minden pontjának szögsebessége is. **Egy különálló anyagi pont körmozgása is jellemezhető tehát szögsebességgel.**

Az egyenletes forgómozgás szögsebessége állandó, és számértéke megegyezik az egységnyi idő alatt létrejött szögelfordulás számértékével. A szögsebesség számértéke tehát megmutatja, hogy a test egységnyi idő alatt mekkora (radiánban mért) szöggel fordul el. Ez fordítva is igaz, az egységnyi idő alatti elfordulás szögéből következtetni tudunk a szögsebességre.



42.2. *Elemezzük az egyenletes körmozgást végző testek φ–t és ω–t grafikonjait, és hasonlítsuk össze a haladómozgás megfelelő grafikonjaival!*

KAPCSOLAT A KÖRMOZGÁS KÉTFÉLE LEÍRÁSA KÖZÖTT

Ugyanazt a jelenséget – mint például a körmozgásnál tettük – leírhatjuk különböző mennyiségekkel is (pl. sebesség; szögsebesség). Az így kapott kétféle eredmény között azonban természetes, hogy egyértelmű kapcsolat van.

Körmozgásnál az út egy befutott ívvel egyenlő:

$$s = i = r \cdot \varphi = r \cdot \omega \cdot t.$$

Az $s = v \cdot t$ és az $s = r \cdot \omega \cdot t$ függvények összehasonlításából is felismerhető a kétféle leírásban alkalmazott mennyiségek kapcsolata:

$$v = r \cdot \omega.$$

Felhasználva a $v = r \cdot \omega$ összefüggést, a centripetális gyorsulás nagysága többféle alakban is felírható:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{v \cdot r \cdot \omega}{r} = v \cdot \omega,$$

$$a_{cp} = v \cdot \omega = \omega^2 \cdot r.$$

A szögsebesség, mint tudjuk: $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$, így a centripetális gyorsulás a következő formában is kiszámítható:

$$a_{cp} = \omega^2 \cdot r = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot r.$$

MEGJEGYZÉS

A körmozgás és forgómozgás szögjellemzőinek bevezetése közben ugyanazokat a gondolatokat alkalmaztuk, mint a haladó mozgásnál. Így a Δs, a $\Delta\varphi$ és a Δt között jellemző kapcsolatok felismerését elősegítő kísérletek gondolati lényege, valamint a sebességek matematikai megfogalmazásai formailag megegyeznek.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Miért kell a *rögzített tengelyen forgó* és a *merev test* kikötéseket hangsúlyozni ahhoz, hogy a forgómozgásra tett megállapításaink igazak legyenek?
2. Keressünk gondolati, illetve módszerbeli hasonlóságokat és eltéréseket az egyenes vonalú egyenletes mozgás sebességének, valamint az egyenletes körmozgás szögsebességének:
   a) mint fogalomnak a megalkotása; *b)* a kiszámítás módja;
   c) grafikonjai; *d)* a mértékegységek megválasztása között!
3. Miért lehet a forgómozgás szögjellemzőihez is eljutni a haladó mozgásnál alkalmazott gondolatmenetekkel? Állítsuk párokba azokat a mennyiségeket, amelyek hasonló szerepet töltenek be a haladó mozgás és a forgómozgás jellemzésében!
4. Hogyan változik a kiterjedt merev test forgómozgásának periódusideje és fordulatszáma, ha nő a szögsebessége?
5. Hogyan változik a forgómozgást végző merev test egy meghatározott pontjának kerületi sebessége, gyorsulása és szögsebessége, ha:
   a) nő a test fordulatszáma? *b)* csökken a periódusideje?
6. Egy traktor első kerekeinek kisebb a sugara, mint a hátsóknak. Hasonlítsuk össze az első és hátsó kerekek periódusidejét, fordulatszámát, szögsebességét, a kerekek legkülső pontjainak kerületi sebességét és centripetális gyorsulását, ha a traktor egyenletesen halad!
7. Egy meghajtókereket csúszásmentes szíjáttétel kapcsol össze egy 2-szer akkora átmérőjű lendítőkerékkel. Hasonlítsuk össze a két kerék kerületi és szögjellemzőit!
8. Egy fogaskerék kétszer nagyobb sugarú másik fogaskereket hajt meg. Hasonlítsuk össze a két fogaskerék kerületi és szögjellemzőit!

FELADATOK

1. Mennyi a szögsebessége annak az egyenletesen forgó lendítőkeréknek, amelynél a szögelfordulás másodpercenként 8 radián? Mennyi a periódusidő, illetve a fordulatszám?

2. Mennyi a Föld tengely körüli forgásának szögsebessége és periódusideje? Mekkora a földfelszín egy, az Egyenlítőn levő pontjának kerületi sebessége? (Nézzünk utána a szükséges adatoknak!)

3. Egy repülőgép 500 m sugarú körpályán $360\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad. Mekkora a körmozgásának periódusideje, fordulatszáma, szögsebessége és centripetális gyorsulása?

4. Egy gép 0,3 m sugarú egyenletesen forgó kereke 1000 fordulatot tesz meg percenként. Határozzuk meg a periódusidejét, fordulatszámát, szögsebességét, a legnagyobb kerületi sebességét és a centripetális gyorsulását!

5. Egy centrifuga fordulatszáma $2850\ \frac{1}{\text{min}}$. A forgó henger belső átmérője 0,4 m. Mennyi a szögsebessége? Hányszorosa a henger falához tapadó inggomb centripetális gyorsulása a nehézségi gyorsulásnak?

6. Egy kerék 6 másodperc alatt 12-szer fordul körbe. Mekkora a kerék szögsebessége, fordulatszáma és periódusideje? Mekkora a külső pontjainak kerületi sebessége, ha a kerék sugara 1 m? Mekkora a tengelytől 0,5 m távolságra levő pontok kerületi sebessége, fordulatszáma, periódusideje és szögsebessége?

7. Mekkora kerületi sebességű pontjai vannak annak a keréknek, amelynek sugara 60 cm és a szögsebessége $4\ \frac{1}{\text{s}}$?

8. Mekkora a szögsebessége, a fordulatszáma és a periódusideje annak a keréknek, amelynél a tengelytől 30 cm távolságra levő pontok kerületi sebessége $72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

9. Mekkora sebességgel halad az a teherautó, amelynek 40 cm sugarú kerekei (csúszás nélküli gördüléssel) hármat fordulnak másodpercenként? Mekkora a kerék szögsebessége?



10. A megismert különféle mozgások jobb megértése érdekében célszerű keresni mozgóképes, animációs és szimulációs felvételeket ezekről.

    Például: a Google „Földkelte a Holdon"; mozaweb.hu filmjei stb.

3.6. A változó forgómozgás (Kiegészítő anyag)

A kikapcsolt gép lendítőkereke a súrlódás és a közegellenállás miatt egyre lassabban forog, szögsebessége csökken, végül megáll. A gyakorlati életben a testek forgása legtöbbször változó forgómozgás. A változó forgómozgást jellemző mennyiségeket ugyanazzal a gondolatmenettel vezetjük be, mint amit a változó haladó mozgásnál követtünk.

Ha a változó forgómozgást végző testek szögsebességét is a szögelfordulás és a közben eltelt idő hányadosaként számítjuk ki, akkor **átlagszögsebességet**** kapunk.

Az átlagszögsebességen azt a szögsebességet értjük, amellyel a test egyenletesen forogva ugyanannyi idő alatt ugyanakkora szöggel fordulna el, mint a változó forgómozgással.

A változó forgómozgást végző test lassulhat vagy gyorsulhat, de az is lehet, hogy egyenletesen forog. Ezért az átlagszögsebesség ismeretében nem tudjuk, hogy a forgó test mikor milyen helyzetben van és mit csinál. A változó forgómozgásnál is szükség van tehát a forgást bármely adott pillanatában jellemző mennyiségre, a **pillanatnyi szögsebességre**.**

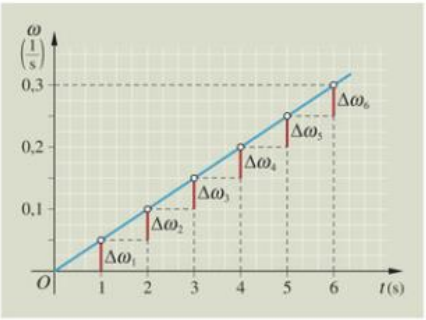
A pillanatnyi szögsebességen azt a szögsebességet értjük, amellyel a test tovább forogna, ha megszűnne valamennyi olyan hatás, amely addig a forgását változtatta.

A forgómozgás változhat lassan, mint a lendítőkerék, vagy gyorsan, mint például az induló repülőgép légcsavarjának mozgása.

Annak a testnek változik gyorsabban a szögsebessége, amelynek:

- **ugyanannyi idő alatt nagyobb a szögsebesség-változása** ($\Delta t_1 = \Delta t_2$ és $\Delta\omega_1 > \Delta\omega_2$), vagy
- **ugyanakkora szögsebesség-változáshoz rövidebb időre van szüksége** ($\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2$ és $\Delta t_1 < \Delta t_2$).

Ha egy test szögsebessége egyenlő időtartamok alatt mindig ugyanannyival változik – bármilyen kicsik vagy nagyok is ezek az időtartamok –, akkor forgása egyenletesen változó forgómozgás.**



45.1. *Jellemezzük az ábra alapján az egyenletesen változó forgást!*

Az egyenletesen változó forgómozgásnál tehát ahányszor nagyobb a változás időtartama, annyiszor nagyobb a szögsebesség-változás. Ez itt is azt jelenti, hogy **a szögsebesség-változás egyenesen arányos a változás időtartamával,** és így a két mennyiség hányadosa állandó:

$$\Delta\omega \sim \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{állandó}.$$

A $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ hányados minden egyenletesen változó forgómozgásnál állandó, és annál nagyobb, minél gyorsabban változik a test szögsebessége. Ez a hányados tehát alkalmas mennyiség az egyenletesen változó forgómozgás gyorsulásának jellemzésére.

A $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ hányados neve **szöggyorsulás**, jele: β.

$$\text{szöggyorsulás} = \frac{\text{szögsebesség-változás}}{\text{a változás időtartama}},$$

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

A szöggyorsulás mértékegysége a szögsebesség-változás és az idő mértékegységeinek hányadosaként határozható meg.

A szöggyorsulás SI-beli mértékegysége:

$$\frac{\frac{1}{\text{s}}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}^2}.$$

Az egyenletesen változó forgómozgás szöggyorsulása állandó nagyságú, számértéke egyenlő az egységnyi idő alatt bekövetkező szögsebességváltozás számértékével. A szöggyorsulás tehát megmutatja, hogy egységnyi idő alatt mennyivel változik a szögsebesség.

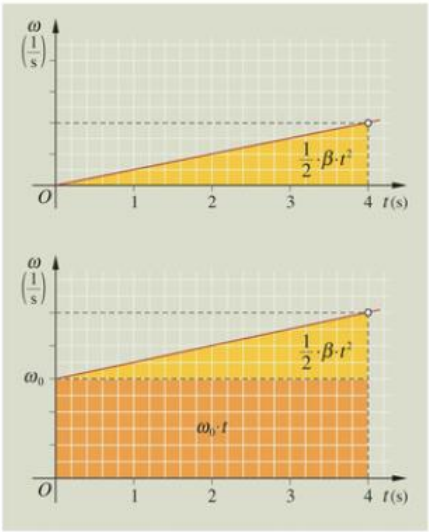
A pillanatnyi szögsebességet és a szögelfordulást az egyenletesen változó haladó mozgásnál (lásd 27. oldal) megismert gondolatoknak megfelelően a következő módon számíthatjuk ki:

Ha $\omega_0 = 0$, akkor

$$\omega = \beta \cdot t, \quad \varphi = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot t^2.$$

Ha $\omega_0 \neq 0$, akkor

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot t, \quad \varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot t^2.$$



46.1. Mivel azonos módon lehet kiszámítani a területet és a szögelfordulást, így számértékük egyenlő

Változó körmozgásnál a gyorsulásvektor ($\vec{a}$) a kör belseje felé, de nem a kör középpontjának irányába mutat (lásd *46.2. ábra*). A gyorsulásvektor felbontható az ismert $a_{cp} = r \cdot \omega^2$ nagyságú centripetális gyorsulásvektorra és az erre merőleges érintő irányú, vagyis a kerületi sebesség irányával azonos irányú a_t **pálya menti gyorsulásvektorra**.** Az átlag pálya menti gyorsulásvektor nagysága:

$$a_t = \frac{\Delta v_k}{\Delta t} = \frac{\Delta(r \cdot \omega)}{\Delta t},$$

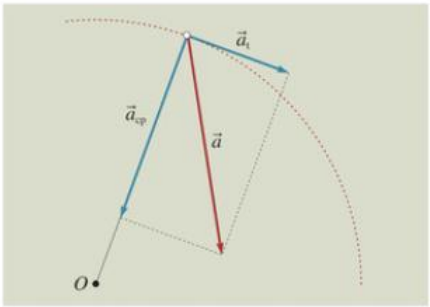
$$\text{mivel } r = \text{állandó}, \quad a_t = r \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t}.$$

Ha Δt egyre kisebb lesz (tart a nullához), akkor a $\frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ egyre jobban megközelíti a β pillanatnyi szöggyorsulást, az átlag pálya menti gyorsulásvektor nagysága pedig az a_t pillanatnyi pálya menti gyorsulásvektor nagyságát. Így:

$$a_t = r \cdot \beta.$$

Az előzőek alapján a változó körmozgás $\vec{a}$ gyorsulásvektora az $\vec{a}_{cp}$ centripetális gyorsulásvektor és az $\vec{a}_t$ pálya menti gyorsulásvektor vektori összege:

$$\vec{a} = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_t.$$



46.2. A változó körmozgás a sebesség nagyságának és irányának változása miatt is változó mozgás

MEGJEGYZÉSEK

1. A pillanatnyi szögsebesség és a pillanatnyi szöggyorsulás pontos meghatározásához is a határérték fogalmának alkalmazásával juthatunk el.

2. A változó forgómozgásnál megismert szöggyorsulással, átlagszögsebességgel és pillanatnyi szögsebességgel természetesen a változó körmozgás is jellemezhető, hiszen a körmozgás az anyagi pont forgómozgása.
3. A változó forgómozgásnál a keringési idő és a fordulatszám mint átlagos és pillanatnyi keringési idő, valamint átlag- és pillanatnyi fordulatszám alkalmazható. Ezek kiszámíthatók pl. az átlagszögsebesség, illetve a pillanatnyi szögsebesség ismeretében.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Miről ismerhető fel:
   a) hogy az egyenletes körmozgás változó mozgás?
   b) a változó körmozgás?
   Mi a különbség az egyenletes körmozgás és a változó körmozgás között?
2. Mi jellemző az egyenletesen változó körmozgásra és a forgómozgásra?
3. Miért elegendő a szöggyorsulás mértékegységének meghatározásához csak az idő mértékegysége?
4. Igaz-e a következő két kijelentés?
   a) Minden körmozgás változó mozgás.
   b) A változó körmozgás két ok miatt is változó mozgás.
5. Lehet-e változó körmozgás az olyan mozgás, amelynek gyorsulásvektora mindig egy kör középpontja felé mutat?
6. Hogyan változik az egyenletesen változó körmozgás keringési ideje, illetve fordulatszáma, ha a körmozgás lassuló mozgás?
7. Rajzoljuk meg az egyenletesen változó forgómozgást végző test szögsebesség–idő és szöggyorsulás–idő grafikonjait!

FELADATOK

1. Mekkora a szöggyorsulása annak az álló helyzetből induló keréknek, amelynek szögsebessége egyenletes változással 10 másodperc alatt éri el az $5\,\frac{1}{s}$ értéket?
2. Egy nyugalomból induló lendítőkerék $0{,}1\,\frac{1}{s^2}$ szöggyorsulással forog 3 percig, majd egyenletesen mozog tovább. Mekkora szögsebességet ér el a kerék, és mekkora eközben a szögelfordulása?
3. Egy rögzített tengelyen levő merev test álló helyzetből indul, és egyenletesen gyorsuló forgással 20 másodperc alatt 5 teljes fordulatot tesz meg. Mekkora a szöggyorsulása és a szögsebessége a 20. másodperc végén?
4. Az egyik kerék álló helyzetből 8 másodperc alatt egyenletesen gyorsul fel $24\,\frac{1}{s}$, a másik pedig 5 másodperc alatt $18\,\frac{1}{s}$ szögsebességre. Melyiknek nagyobb a szöggyorsulása? Mekkora az első kerék szögelfordulása 8 másodperc, illetve a másodiké 5 másodperc alatt?
5. Egy teherautó $0{,}5\,\frac{m}{s^2}$ gyorsulással mozog az indulástól mért 20 másodpercig. Mekkora sebességet ér el, és mekkora utat tesz meg gyorsulása közben? Mekkora lesz ilyen esetben a teherautó 0,5 m sugarú kerekének a szögsebessége és szögelfordulása? Mekkora a kerék szöggyorsulása? Hányat fordul közben a teherautó kereke? Mekkora a pillanatnyi fordulatszáma?

4. A bolygók mozgása

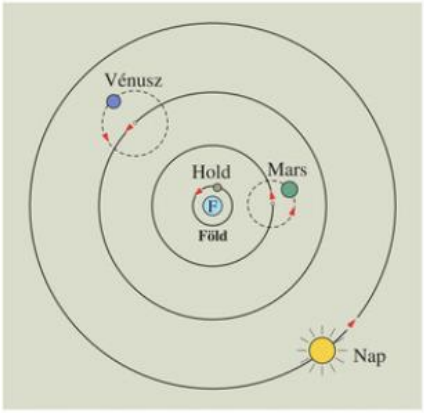
3D

Már az ősi pásztornépek is figyelték az égbolt jelenségeit, változásait. Élénk képzelettel megszemélyesítették a csillagképeket, és igyekeztek magyarázatot találni azok elhelyezkedésének megváltozására. Ezekben sok volt a meseszerű elem.

A hajózás fejlődése tájékozódási pontokat igényelt a parttól távoli utak alatt is. A csak fantáziára épülő elképzeléseket olyan világképek megfogalmazása követte, amellyel valóságosnak gondolt magyarázatokat lehetett adni az égitestek mozgására.

Az első, később az egyház által is elfogadott és sokáig védett világkép ***Klaudiosz Ptolemaiosz*** [ptolemájosz] (85?–165?) nevéhez kapcsolódik. Az ő alapgondolata az volt, hogy a világmindenség középpontjában a Föld áll, és körülötte kering az összes égitest, amelyeket a különböző távolságra levő kristályszférák hordoznak. Egy másik lényeges eleme ennek a világképnek az, hogy a földi életre a keletkezés, változás és az elmúlás, az égi világra viszont a változatlan öröklét a jellemző.

A Föld központi szerepe miatt ezeket a ptolemaioszi gondolatokat **geocentrikus világképnek*** nevezzük. Ez a leíró jellegű világkép az okokra meg sem kísérel magyarázatot adni.



48.1. A geocentrikus elképzelés szerint a Hold és a Nap egyszerű körmozgást végez a Föld körül, a bolygók mozgása összetettebb

Az 1500 évig igaznak hitt geocentrikus világképről – a méréstechnika fejlődésével – kiderült, hogy hibás, mert alapfeltevése téves. A Föld ugyanis nem a világ közepe, hanem „csak" egy bolygó a sok közül.



48.2. Nikolausz Kopernikusz lengyel csillagász

A fejlődés következő állomása a **heliocentrikus** (Nap középpontú) **világkép*** volt, amelynek megfogalmazása a lengyel ***Nikolaus Kopernikusz*** (1473–1543) nevéhez kapcsolódik.

Kopernikusz elképzelése szerint:

- A Nap foglalja el a központi helyet a világban, és körülötte körpályán keringenek a bolygók.
- Az állócsillagok mozdulatlanok, napi mozgásuk látszólagos, és csak a Föld forgásának következménye.

A heliocentrikus világképet és annak hirdetőit kemény támadások érték (pl. Galilei inkvizíciós pere). Ennek oka a látszat (felkel a Nap), a megszokás és főként az volt, hogy ez az elképzelés megszüntette az éles különbséget a földi és az égi jelenségek között.

A fejlődés következő átmeneti elemét a dán ***Tycho de Brahe*** [tüko bráe] (1546–1601) gondolatai adták. Az 1572-ben általa észlelt nóva (mint új állócsillag), illetve az 1576-ban megfigyelt üstökös meggyőzték őt arról, hogy nem csak a földi világ változik. Mivel az üstökös pályája keresztezte a bolygók pályáját, rájött arra, hogy nem létezhetnek az égitesteket hordozó kristályszférák.

Tycho de Brahe igen jó megfigyelő és pontosan (2 szögperc hibával) mérő csillagász volt, ezért észrevette, hogy egyre több adat cáfolja a geocentrikus gondolati rendszert és azon belül a ptolemaioszi világképet. Megalkotott egy kompromisszumos világképet, amelyben meghagyta a Föld központi helyét. Így ez a rendszer lényegében a ptolemaioszinak egy változata volt. Ezzel elhárította azokat a támadásokat, amelyek a nyugalomban levőnek gondolt Föld „tapasztalata" és az egyházi tanítások alapján érhették volna. Mérési eredményei alapján viszont úgy gondolta, az összes bolygó a Nap körül kering, és a Nap ezekkel együtt kering a Föld körül.

Giordano Bruno [dzsordánó brúnó] (1548–1600) olasz filozófus nem fogadta el a Nap „világközpont" szerepét. Felismerte, hogy számtalan, a Naphoz hasonló csillag van, amelyek körül bolygók keringhetnek. Nézeteiért az inkvizíció máglyahalálra ítélte, és Rómában megégette.

A heliocentrikus világkép leírását – Tycho de Brahe mérési eredményeinek felhasználásával – ***Johannes*** [johannesz] ***Kepler*** (1571–1630) német csillagász három törvénybe foglalva fejlesztette tovább.

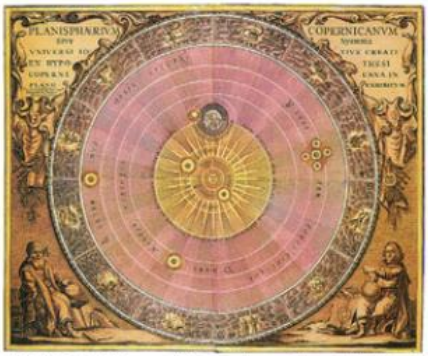
Kepler I. törvénye: A bolygók olyan ellipszispályákon keringenek, amelyek egyik gyújtópontja a Nap középpontjában van.

Kepler II. törvénye: A bolygók vezérsugara (a bolygó és a Nap közötti szakasz) egyenlő idők alatt egyenlő területeket „súrol". Ez azt jelenti, hogy a bolygók napközelben gyorsabban mozognak, mint a Naptól távolabb.

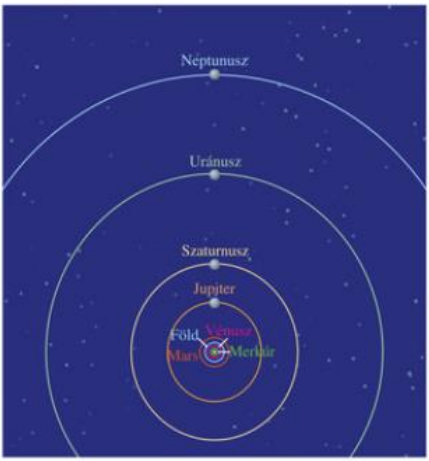
Kepler III. törvénye: A bolygók keringési idõinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az ellipszispályáik félnagytengelyének köbei:

$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3.$$

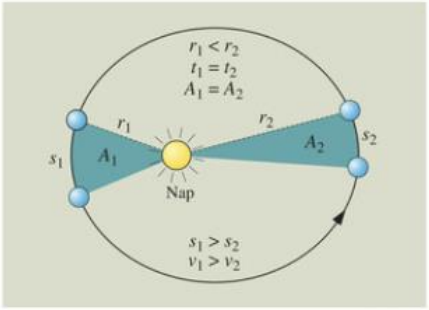
Kepler azt írta le három törvényével, hogyan mozognak a bolygók. Arra, hogy miért így mozognak, ***Isaac Newton*** [ájszek nyúton] (1643–1727) angol fizikus adott magyarázatot. Kijelentette, hogy a bolygók és a Nap között vonzóhatás van, és ennek az erőhatásnak az iránya mindig a bolygót és a Napot összekötő egyenesbe esik. Kimutatta, hogy az égitestek, pl. a Hold és a Föld közötti vonzás is gravitációs jelenség, úgy mint a Föld és a közelében levő testek közötti vonzás.



49.1. *Mi fejezi ki ezen a képen a kopernikuszi világképet?*

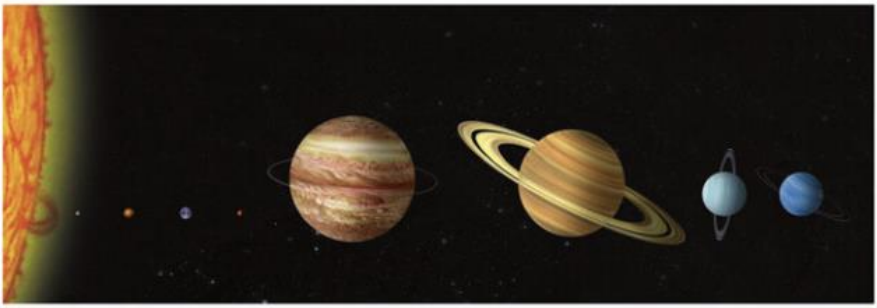


49.2. A bolygók mozgása a Nap körül



49.3. A bolygók napközelben gyorsabban, távolabb lassabban mozognak

3D



	Föld típusú bolygók				Jupiter típusú óriásbolygók			
1.	Merkúr	Vénusz	Föld	Mars	Jupiter	Szaturnusz	Uránusz	Neptunusz
2.	0,39	0,72	1	1,52	5,2	9,54	19,22	30,11
3.	0,24	0,62	1	1,88	11,86	29,46	84,01	161,70

1: a bolygó neve; 2: a bolygó távolsága a Naptól, Nap–Föld-távolságban; 3: a bolygó keringési ideje földi évben

50.1. A bolygók és a Nap méretarányai, valamint a bolygók összehasonlító adatai

A MESTERSÉGES ÉGITESTEK

Az emberi tudás lehetővé tette, hogy a 20. század ötvenes éveiben mesterséges égitesteket juttassanak a Föld köré, a Nap köré, majd a Naprendszeren kívülre. Az ember eljutott a Holdra is.

A mesterséges égitestek pályája és mozgása attól függ, hogy milyen magasra juttatták fel, és itt milyen irányú és nagyságú sebességgel indították el az égitest mozgását.

Ezek megválasztásával elérhető, hogy a fellőtt űrhajó:

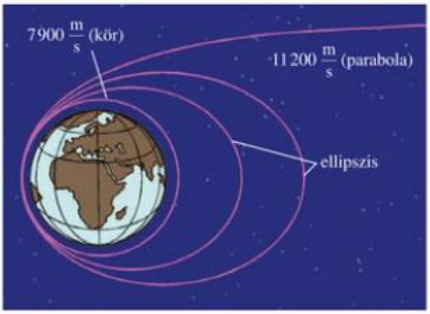
- mesterséges holdként (műholdként) keringjen a Föld körül,
- mesterséges bolygóként a Nap körüli pályán mozogjon, vagy
- csillagközi szondaként elhagyja Naprendszerünket.

Úgy is Föld körüli pályára lehet juttatni a műholdat, hogy a Földnek mindig egy meghatározott pontja felett legyen, vagyis együtt forogjon a Földdel. Az ilyen műholdaknak a hírközlésben van szerepük, mert a földi tv-, rádió- és telefonadókból érkező elektromágneses hullámokat felfogják, felerősítik, majd visszaküldik a Föld általuk „látott" részére. Ilyen műhold pl. az Astra, az Eutelsat, a Hot Bird stb.

3D

3D

3D



50.2. A mesterséges égitest pályája a fellövés magasságától, a pálya menti sebesség nagyságától és irányától függ



50.3. A Föld körül keringő Hubble-űrteleszkóp háttérben a Földdel

A GPS (helymeghatározó rendszer) működéséhez is műholdakra van szükség. Ahhoz, hogy a Földön egy időben mindenhol lehessen alkalmazni a rendszert, 24–30 műhold kell. Egy test helyének meghatározásához ugyanis legalább 3, de a pontosság növelése érdekében 4 olyan műholdra van szükség, amelyik egyszerre „látja" a keresett testet.

3D

MEGJEGYZÉSEK

1. A *geo* – görög eredetű előtag a Földdel kapcsolatos fogalmakban.

A *helio* – görög eredetű előtag a Nappal kapcsolatos fogalmakban.

A *centrum* – latin szó, jelentése: közép, középpont.

Az *inquisitio* – latin szó, jelentése: kutatás, (bírósági) vizsgálat. A középkorban inkvizíciónak a katolikus egyház eretnekeket üldöző intézményét nevezték.

A *nóva* olyan új csillag, melynek fénye rövid idő alatt megnő, majd fényessége csökken.

2. Az égitestek különféle módon csoportosíthatók:

– A **csillag** olyan világító, forró gázgömb, amelyet anyagának gravitációs mezője tart össze. (A köznyelvben ettől eltérően minden olyan égitestet – a Hold kivételével – csillagnak neveznek, ami éjjel világít. A meteorokat is hullócsillagnak mondják.)

3D

– A **bolygók** azok az önmaguktól nem világító égitestek, amelyek valamelyik csillag körül keringenek, és annak fényét verik vissza.

– A **hold,** másként mellékbolygó, olyan égitest amely egy bolygó körül kering, és kíséri azt.

A Nap tehát csillag, a Föld egy bolygó, a Hold pedig mellékbolygó, vagyis hold.



Johannes Kepler (1571–1630)

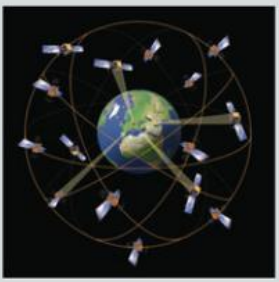
3. Kepler III. törvényét különböző könyvek eltérő fogalmazással írják le. Van, ahol a „nagytengelyének" köbével, máshol a „félnagytengelyének" köbével, előfordul, hogy a „Naptól mért középtávolságának" köbével olvasható. A különböző megfogalmazások között nincs érdemi eltérés!

4. A mesterséges és a természetes égitestek mozgását ugyanazon – egyetemes – szabályok és törvények határozzák meg.

5. A GPS (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem, Globális Helymeghatározó Rendszer) lényege a műholdas távolságmeghatározás. Ha ismerjük ugyanis néhány műhold helyét, azoktól mért pontos távolságunkat, saját helyünket is megállapíthatjuk.

3D

Egy műholdtól való távolságunk ismerete alapján ugyanis azt tudjuk, hogy e műhold körüli milyen sugarú **gömbfelszínen** vagyunk. Egy másik műholdtól mért távolságunk ismerete megad egy másik gömbfelszínt, amelynek ugyancsak valamelyik pontjában vagyunk. E két távolság alapján kiszámítható a két műhold körüli, ismert sugarú, gömbfelszínek **kör** alakú metszésvonala, amelynek valamelyik pontjában vagyunk. A harmadik műholdtól mért távolság ismerete egy olyan gömbfelszínt határoz meg, amellyel két pontra szűkíthetjük a lehetséges tartózkodási helyünket. Ez a két pont az előző körnek és ennek a gömbfelületnek a **két metszéspontja.**



E két lehetséges pont közül a tényleges tartózkodási helyünket többféle módon is ki lehet választani. Például:

- Általában e két pont közül az egyik a földfelszíntől – tartózkodásunk szempontjából – legtöbbször valószerűtlenül távol van.
- Egy negyedik műhold tőlünk mért távolságának meghatározásával megismerhetünk egy újabb olyan gömbfelszínt, amelyen mi rajta vagyunk, de az előző két pont közül csak egy, a valódi tartózkodási helyünk van rajta.

A távolságok meghatározását visszavezetik időmérésre ($s = v \cdot t$). Ismerve a rádióhullámok nagyon nagy terjedési sebességét, belátható, hogy kb. 0,000 000 001 másodperc pontosságú időmérésre van szükség. Ezért a rendszer minden műholdján „atomóra" működik. (Az atomóra és a mérés technikai részleteit csak a 11. évfolyamon ismerhetjük meg.)

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

3D

1. A világképek megfogalmazói anélkül, hogy ismerték volna a vonatkozási rendszer fogalmát, valamihez viszonyították az égitestek mozgását. Mi volt a vonatkoztatási rendszere Ptolemaiosznak és Kopernikusznak?
2. Milyen elven működik az űrhajókat pályára juttató rakéta? Miért működik a világűrben is, ahol nincs levegő? Hogyan változtatják meg a rakéta haladási irányát?
3. Miért mozog az űrállomás azt követően is, hogy leállították a rakétáit? Miért marad tartósan Föld körüli pályán az űrállomás?



FELADATOK

1. A Föld és a Nap átlagos távolsága $1{,}5 \cdot 10^8$ km. A Mars keringési ideje 1,881 év. Mennyi a Mars átlagos távolsága a Naptól?
2. A Merkúr átlagos távolsága a Naptól $5{,}785 \cdot 10^7$ km. Mennyi idő alatt kerüli meg a Merkúr a Napot?
3. Milyen sebességgel mozog a Föld a Naphoz viszonyítva? Nyomozz a válaszok után!
4. Gyűjtsön mindenki híreket, ismereteket az űrkutatásról, és egy kiselőadás meghallgatása után egészítsük ki azt, alakítsuk ki véleményünket a témáról!
   - Mik voltak az űrkutatás legfontosabb „lépcsői"?
   - Milyen elméleti és műszaki fejlesztések alapozták meg az űrbejutás lehetőségét?
   - Milyen tudományos és gyakorlati eredményeket hozott az űrkutatás?
   - Milyen emberi és anyagi áldozatokkal járt eddig?
   - Mit lehet magyar eredményként elkönyvelni?
   - Hogyan ítéljük meg az űrkutatás jövőjét?

5. Kidolgozott feladatok

1. A 22.1. ábra stroboszkópos felvétele 0,1 s időközönként rögzíti egy nehezékkel vontatott, zászlós kiskocsi helyét. Elemezzük a mozgást, amiről a felvétel készült!

MEGOLDÁS:

A képen egy rögzített méterrúd is látható, melynek hossza itt 53 mm. A valóságos méretek a képen mérhetőkhöz képest $n = \frac{1000\text{ mm}}{53\text{ mm}} = 18{,}87$-szer lesznek tehát nagyobbak.

Mérjük meg és foglaljuk táblázatba a kocsi egymás utáni 0,1 s időközönként megtett útjait! (Legpontosabban a zászlórudakon mérhetünk. A tizedmillimétereket becsüljük.)

0,1 s időközök	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**
Út a képen (mm)	1,2	3,5	6,0	8,3	9,5	9,5	9,5	8,7
Út a valóságban (cm)	2,3	6,6	11,3	15,7	17,9	17,9	17,9	16,4

Látható, hogy az első négy időközben (amíg a kocsit húzó nehezék akadályba nem ütközött) gyorsult a kocsi, hiszen egyenlő időközönként egyre nagyobb utakat tett meg. Ezután három időközben egyenletesen mozgott, a negyedik végén már valószínűleg akadályba ütközött.

Készítsünk táblázatot, majd ábrázoljuk a kocsi útját az indulástól eltelt idő függvényében a 7. időköz végéig!

t **(s)**	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
s **(cm)**	2,3	8,9	20,2	35,9	53,8	71,7	89,6	106,0

Az első négy időközben egyenletesen gyorsuló mozgást sejtünk. Ellenőrizzük, hogy az út arányos-e az idő négyzetével!

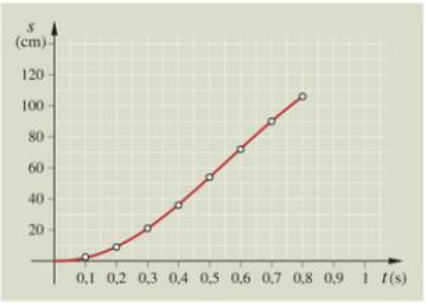
Az $\frac{s}{t^2}$ hányadosok:

$$\frac{2{,}3\text{ cm}}{0{,}01\text{ s}^2} = 230\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2};$$

$$\frac{8{,}9\text{ cm}}{0{,}04\text{ s}^2} = 223\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2};$$

$$\frac{20{,}2\text{ cm}}{0{,}09\text{ s}^2} = 224\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2};$$

$$\frac{35{,}9\text{ cm}}{0{,}16\text{ s}^2} = 224\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$



A kezdeti kis távolságokat csak viszonylag nagy hibával tudtuk leolvasni, a későbbi értékek relatív hibája kisebb. Így a hányadost állandónak tekinthetjük, melynek értéke:

$$\frac{s}{t^2} = 224\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

A mozgás egyenletesen gyorsuló, a számított hányados a négyzetes úttörvény szerint megegyezik a gyorsulás felével:

$$\frac{a}{2} = 224\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}, \quad \text{amiből a gyorsulás:} \quad a = 448\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

A végsebesség kétféleképpen is kiszámítható.

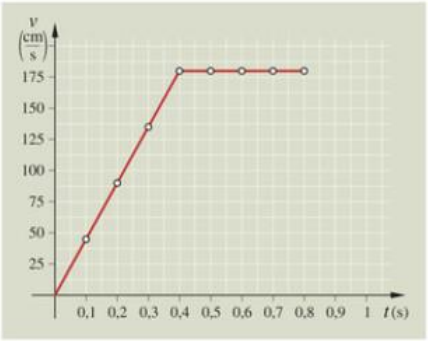
A gyorsuló mozgásból:

$$v = a \cdot t = 448 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}4\ \text{s} = 179 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

A gyorsító hatás megszűnte utáni egyenletes mozgásból:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{17{,}9\ \text{cm}}{0{,}1\ \text{s}} = 179 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Ábrázoljuk a sebességet az idő függvényében a 7. időköz végéig!



2. Száraz betonúton, jó műszaki állapotú autóval (jó gumiabroncsok) a fékezési gyorsulás elérheti a $-8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ értéket. Az akadály észlelése és a cselekvés közötti reakcióidő átlagosan 0,6 s. Milyen távolságú akadály esetén tudjuk elkerülni az ütközést, ha

a) a lakott területeken belül még megengedett 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladunk?

b) 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a sebességünk?

MEGOLDÁS:

a) $t_1 = 0{,}6\ \text{s}$

$a = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$v_0 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 13{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$s_{\text{akadály}} = ?$

A reakcióidő alatt a kocsi még egyenletes mozgással halad. Ezalatt a megtett út:

$$s_1 = v_0 \cdot t_1 = 13{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}6\ \text{s} = 8{,}34\ \text{m}.$$

Mivel a végsebesség $v = 0$, a lassítás ideje:

$$t_2 = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-v_0}{a} = \frac{-13{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1{,}7\ \text{s}.$$

A fékút:

$$s_2 = \frac{v + v_0}{2} \cdot t_2 = \frac{v_0}{2} \cdot t_2 = \frac{13{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 1{,}7\ \text{s} = 11{,}82\ \text{m}.$$

A kikerülhető akadály minimális távolsága:

$$s_{\text{akadály}} = s_1 + s_2 = 8{,}34\ \text{m} + 11{,}82\ \text{m} = \mathbf{20{,}16\ m \approx 20\ m}.$$

Havas, jeges úton a csúszásmentes fékezésnél $-1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással lehet számolni!

b) Ugyanúgy számolhatunk, mint az *a)* részben, csak az előbbinél 2-szer nagyobb kezdősebességgel.

De a numerikus számolás helyett most inkább arányos következtetéssel keressük a választ!

$$s_1 = v_0 \cdot t_1.$$

A reakcióidő változatlansága miatt a reakcióidő közben megtett út egyenesen arányos a kezdősebességgel. 2-szer nagyobb kezdősebességnél 2-szer lesz nagyobb az út is:

$$s_1 = 2 \cdot 8{,}34 \text{ m} = 16{,}68 \text{ m}.$$

A fékezés alatt megtett útra:

$$t_2 = \frac{-v_0}{a} \quad \text{és} \quad s_2 = \frac{v_0}{2} \cdot t_2.$$

Az elsőt a másodikba helyettesítve:

$$s_2 = \frac{-v_0^2}{2a}.$$

Eszerint ugyanolyan fékezési lassulásnál a fékút a kezdősebesség négyzetével arányos. 2-szer nagyobb kezdeti sebességnél tehát 4-szer nagyobb fékutat kapunk:

$$s_2 = 4 \cdot 11{,}82 \text{ m} = 47{,}28 \text{ m}.$$

A teljes út:

$$s_{\text{akadály}} = s_1 + s_2 = 16{,}68 \text{ m} + 47{,}28 \text{ m} = \mathbf{63{,}96 \text{ m} \approx 64 \text{ m}}.$$

Jegyezzük meg, hogy a sebesség nagysága **nagyon** befolyásolja a fékutat!

3. Egy autó az útja első részét 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a második részét 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tette meg. 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ lesz-e az egész útra vonatkozó átlagsebesség, ha az autó mindegyik sebességgel

a) ugyanakkora útszakaszon haladt?

b) ugyanannyi ideig haladt?

MEGOLDÁS:

Oldjuk meg a feladatot általánosan!

a) Jelölések:

	Első szakaszra	Második szakaszra	Egész útra
Út	s	s	$2s$
Idő	t_1	t_2	t
Sebesség	v_1	v_2	$v_{\text{átl.}}$

Összefüggések:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2};$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = \frac{s \cdot v_2 + s \cdot v_1}{v_1 \cdot v_2} = \frac{s \cdot (v_2 + v_1)}{v_1 \cdot v_2};$$

$$v_{\text{átl.}} = \frac{2s}{t} = \frac{2s}{\frac{s \cdot (v_2 + v_1)}{v_1 \cdot v_2}} = \frac{2s \cdot v_1 \cdot v_2}{s \cdot (v_2 + v_1)} = \frac{2v_1 \cdot v_2}{v_2 + v_1}.$$

A konkrét értékeket behelyettesítve:

$$v_{\text{átl.}} = \frac{2 \cdot 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{60 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 48 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

b) Jelölések:

	Első szakaszra	Második szakaszra	Egész útra
Út	s_1	s_2	s
Idő	t	t	$2t$
Sebesség	v_1	v_2	$v_{\text{átl.}}$

Összefüggések:

$$s_1 = v_1 \cdot t, \quad s_2 = v_2 \cdot t;$$

$$s = s_1 + s_2 = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = (v_1 + v_2) \cdot t;$$

$$v_{\text{átl.}} = \frac{s}{2t} = \frac{(v_1 + v_2) \cdot t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

A konkrét értékeket behelyettesítve:

$$v_{\text{átl.}} = \frac{40 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{2} = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

A két átlagsebesség tehát nem egyenlő!

4. Egy pilóta egyenletesen gyorsuló mozgással akarja elérni a gép felszállási sebességét. A kifutópálya felén már elérte a felszállási sebesség $\frac{2}{3}$-át. Elég hosszú lesz-e a kifutópálya a felszálláshoz?

MEGOLDÁS:

$v_0 = 0$ kezdősebességű egyenletesen gyorsuló mozgásról van szó. Érvényesek a következő összefüggések:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \text{és} \quad t = \frac{v}{a}.$$

A második összefüggésből a t időt az elsőbe helyettesítve és egyszerűsítve az a gyorsulással:

$$s = \frac{v^2}{2a}.$$

A gyorsulás állandósága miatt a megtett út és az elért pillanatnyi sebesség négyzete egyenes arányban változik. A felszállási sebesség és a pálya felén elért sebesség aránya:

$$\frac{v}{\frac{2}{3}v} = \frac{3}{2}.$$

A felszálláshoz szükséges s út $\left(\frac{3}{2}\right)^2$-szer, azaz $\frac{9}{4}$-szer nagyobb az ℓ hosszúságú pálya felénél, $\frac{\ell}{2}$-nél:

$$s = \frac{9}{4} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{9}{8}\ell.$$

A kifutópálya tehát nem elég hosszú. A baleset csak a gyorsulás növelésével kerülhető el.

Összefoglalás: A mozgások jellemzése

A testek helye, helyzete, pályája, mozgása, sebessége viszonylagos.
A mozgások jellemzésére használt segédfogalmak: vonatkoztatási rendszer; koordináta-rendszer; haladó és forgómozgás; anyagi pont; pálya; út; elmozdulás, elfordulás.

HALADÓ MOZGÁS

EGYENLETES MOZGÁS

– A test egyenlő időtartamok alatt egyenlő utakat tesz meg, bármilyen kicsik vagy nagyok is ezek az időtartamok (a test sebességének nagysága állandó).
– Az ilyen mozgás **sebessége** a megtett út és a közben eltelt idő hányadosaként számítható ki:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

– **A sebesség vektormennyiség,** iránya minden pillanatban a test mozgásának iránya.
Az egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test sebességvektora állandó nagyságú és változatlan irányú.

VÁLTOZÓ MOZGÁS

– Jellemzői: **átlagsebesség** $\left(v_{\text{átl.}} = \frac{s_{\text{ö}}}{t_{\text{ö}}}\right)$,
pillanatnyi sebesség (v) és **gyorsulás** (a).
– **Egyenletesen változó a mozgás,** ha a sebességváltozás egyenesen arányos az eltelt idővel:

$$\Delta v \sim \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{állandó} \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

– Ha $v_0 = 0$, akkor:

$$v = a \cdot t \text{ és } s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \text{ (négyzetes úttörvény).}$$

– Ha $v_0 \neq 0$, akkor:

$$v = v_0 + a \cdot t \text{ és } s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

SZABADESÉS, HAJÍTÁS

– A **szabadesés** egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás, melynek gyorsulása (Magyarországon a föld közelében) $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
– Leíró egyenletei ($v_0 = 0$):

$$v = g \cdot t \text{ és } s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

– A **függőleges hajítás** ($v_0 \neq 0$) leíró egyenletei:

$$v = v_0 \pm g \cdot t \text{ és } s = v_0 \cdot t \pm \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

– Az emelkedés időtartama és magassága:

$$t_1 = t_2 = \frac{v_0}{g}; \quad h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

PERIODIKUS MOZGÁS, VÁLTOZÁS

A periodikus mozgás időben ismétlődést mutat. Jellemzői: periódusidő (T), frekvencia (f); $f = \frac{1}{T}$.

EGYENLETES KÖRMOZGÁS

Leírása anyagi pontra, a haladó mozgás jellemzőivel:

$$v_{\text{k}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}; \quad a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{r}.$$

$\vec{v}_{\text{k}}$ érintő irányú a mozgás irányának megfelelően.
$\vec{a}_{\text{cp}}$ mindig a körpálya középpontja felé irányul.

Leírása szögjellemzőkkel:

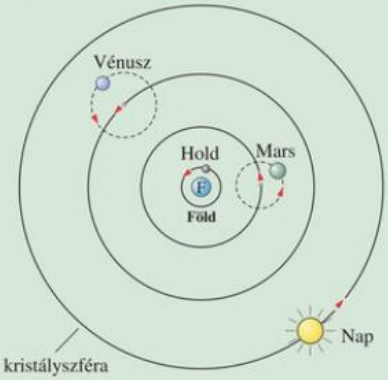
$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}; \quad a = r \cdot \omega^2.$$

Kapcsolat a kétféle leírás között: $v = r \cdot \omega$ és $a = v \cdot \omega$.

A BOLYGÓK MOZGÁSA

GEOCENTRIKUS VILÁGKÉP
(Ptolemaiosz: 85?–165?)

- A Föld áll a világmindenség középpontjában, és körülötte kering az összes égitest.
- Az égitesteket a különböző távolságban levő kristályszférák hordozzák.
- A földi világ keletkezik, változik, elmúlik, az égi világra viszont a változatlan öröklét a jellemző.

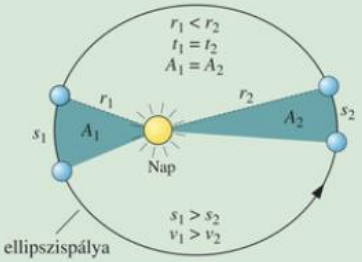


HELIOCENTRIKUS VILÁGKÉP
(Kopernikusz: 1473–1543)

- A Nap foglalja el a központi helyet a világban, és körülötte körpályán keringenek a bolygók.
- Az állócsillagok mozdulatlanok, napi mozgásuk látszólagos, csak a Föld forgásának következménye.
- A heliocentrikus világkép leírását Kepler három törvénybe foglalva fejlesztette tovább:

I. A bolygók olyan ellipszispályákon keringenek, amelyek egyik gyújtópontja a Nap középpontjában van.

II. Ha $r_1 < r_2$, $v_1 > v_2$; III. $T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3$.



A két világkép megfogalmazói és későbbi hívei között az a kérdés, hogy miért van így, vagy fel sem vetődött, vagy meseszerű indokot fogalmaztak meg (pl. kristályszféra). Newton volt az első, aki tudományos igényű indoklást fogalmazott meg: a Nap és a bolygók között vonzóhatás van és ennek az erőhatásnak az iránya mindig a Nap és a bolygó középpontján átmenő egyenesbe esik.

ÉGITESTEK

TERMÉSZETES ÉGITESTEK
A Föld légkörén kívül levő, vagy kívülről a Föld légkörébe bekerülő anyagi testek.

Csillag: saját fényét kibocsátó égitest.

Bolygó: olyan nagyobb, önmagától nem világító égitest, amely egy csillag körül kering és fényét is a csillagtól kapja.

Hold: anyabolygója körül keringő égitest, ami fényét a bolygórendszer csillagától kapja.

Nap: a mi bolygórendszerünk csillaga.

MESTERSÉGES ÉGITESTEK
A Földről kozmikus sebességgel felbocsátott és a Föld légköréből kilépő szerkezetek.

Műhold: olyan szerkezet, amely holdként kering a Föld körül.

Mesterséges bolygó: olyan szerkezet, amely bolygóként kering a Nap körül.

Csillagközi szonda: elhagyja a Naprendszerünket.

II. fejezet

A NEWTONI DINAMIKA ELEMEI: A TÖMEG ÉS AZ ERŐ



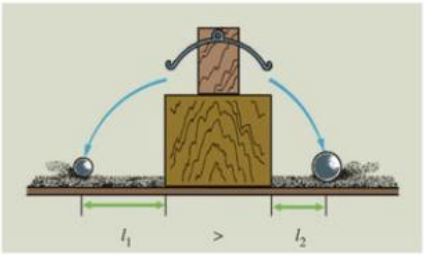
1. Emlékeztető

3D



60.1. *Mi szükséges a sebességváltozáshoz?*

A *massa* (massza) – latin szó, jelentése: tömeg. Ebből származik az *m* jelölés.



60.2. A két golyó tehetetlensége, és így tömege is különböző. *Miből állapítható meg ez?*

3D



60.3. Isaac Newton (1643–1727)

Minden test nyugalomban marad vagy egyenes pályán egyenletesen mozog mindaddig, míg közvetlen környezete meg nem változtatja a mozgásállapotát. Ez a **tehetetlenség törvénye*,** vagy másként Newton I. törvénye.

Egyes testeknek nehezebb megváltoztatni a sebességét, mint másokét. A testeknek ezt a tulajdonságát **tehetetlenségnek*** nevezzük. Arról a testről mondjuk, hogy nagyobb a tehetetlensége, amelyiknek nehezebb megváltoztatni a sebességét.

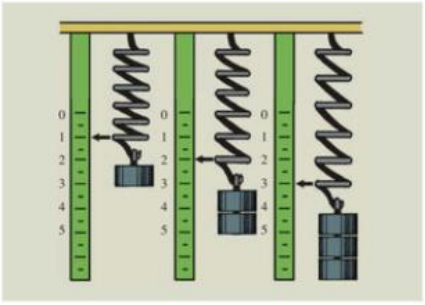
A **tömeg*** a test tehetetlenségének mértéke (mennyiségi jellemzője). A tömeg jele m, SI-beli mértékegysége a **kilogramm** (kg). A gyakorlatban használatos mértékegységek még a gramm (g) és a tonna (t).

A testek tömegét eddig – a test súlyából következtetve – statikai módszerekkel (pl. rugós erőmérővel és egyenlő karú mérleg segítségével) határoztuk meg.

A testek mozgásállapotát megváltoztató hatások neve **erőhatás*.** Azt a vektormennyiséget, amely megadja az erőhatás nagyságát és irányát, **erőnek*** nevezzük. Az erővektor jele $\vec{F}$, az erővektor nagyságáé pedig $|\vec{F}| \equiv F$. Az erő SI-beli mértékegysége a **newton** (N)*. Egy newton nagyságú az az erőhatás, amely a Föld felszínének közelében levő 102 g tömegű testeknek, például 102 cm^3 4 °C-os desztillált víznek a súlya.

A test súlya azt az erőhatást jellemzi, amellyel a test – a gravitációs vonzás miatt – nyomja az alátámasztást, vagy húzza a felfüggesztést.

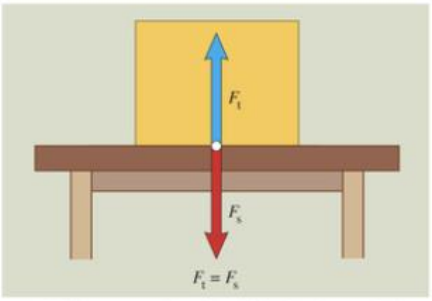
Az erőt legtöbbször rugós erőmérővel mérjük.



60.4. A rugót megnyújtó erőhatás nagyságának mérése



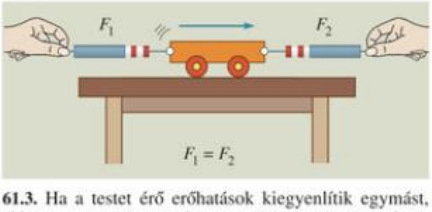
61.1. *Miért mozdul el mindkét görkorcsolyás gyerek, ha meglökik egymást?*



61.2. *Miben azonos és miben különböző az erő és az ellenerő?*

Amikor egy test erőhatást fejt ki egy másikra, akkor ez a másik test is erőhatást gyakorol az előbbire. Két test kölcsönhatásánál fellépő egyik erőhatás mennyiségi jellemzőjét **erőnek,** a másikét **ellenerőnek*** szokás nevezni. **Ugyanabban a kölcsönhatásban az erő és az ellenerő:**

- **egyenlő nagyságú;**
- **közös hatásvonalú és ellentétes irányú;**
- **egyik az egyik testet, másik a másik testet érő hatás jellemzője.**

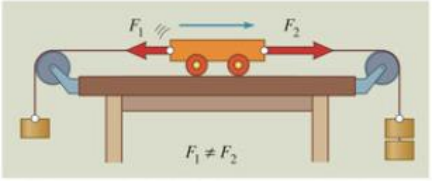


61.3. Ha a testet érő erőhatások kiegyenlítik egymást, akkor a test vagy egyenletesen mozog, vagy nyugalomban van

Ezt a felismerést szokás a **hatás-ellenhatás törvényének*** vagy Newton III. törvényének nevezni.

Egy test akkor van egyensúlyban, ha mozgásállapota nem változik, tehát amikor a test vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

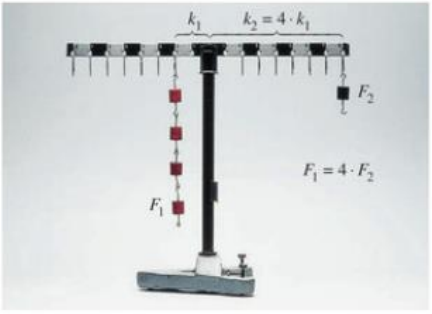
Két erőhatás akkor van egyensúlyban, ha ugyanazt az anyagi pontot vagy testet érik, egyenlő nagyságúak, közös a hatásvonaluk és ellentétes az irányuk.



61.4. Ha a testet érő erőhatások nem egyenlítik ki egymást, akkor a test gyorsul

Ha a testet érő erőhatások nincsenek egyensúlyban (nem egyenlítik ki egymás dinamikai következményét), akkor a test mozgásállapota változik. **Egy test mozgásállapota a testet érő erőhatások együttes eredményeként változik meg.**

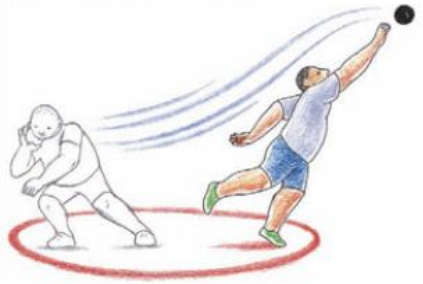
A testek **forgásállapota*** is csak környezetük hatására változhat meg. Ilyen változást azonban csak olyan erőhatás hozhat létre, amelynek hatásvonala nem megy át a test forgástengelyén, és nem is párhuzamos azzal. Az erőhatás forgásállapotváltoztató képességének mennyiségi jellemzője a **forgatónyomaték*** (M), ami – a legegyszerűbb esetben – az erő és az erőkar szorzataként számítható ki: $M = F \cdot k$.



61.5. Ha a k_2 erőkar hossza 4-szerese a k_1 erőkarnak, akkor egyensúly esetén az F_2 erő negyede az F_1-nek

2. A tehetetlenség törvénye és az inerciarendszer

Atlétikai versenyen a súlygolyót a súlylökő gyorsítja fel, hogy az minél messzebb repüljön. A szabadon eső testek a gravitációs mező hatására gyorsulnak. A lovas kocsi mozgásállapotát az elé fogott lovak változtatják meg.



62.1. A súlylökő a golyót nagy erővel, hosszú úton gyorsítja

A testek mozgásállapota csak a velük kölcsönhatásban levő más testek vagy mezők hatására változhat meg.

Minden test nyugalomban marad vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez mindaddig, míg mozgásállapotát a környezete meg nem változtatja.
Ez a tehetetlenség törvénye, vagy másként Newton I. törvénye.

Az erősen fékező vagy kanyarodó autóbuszban az utasok kibillennek nyugalmi helyzetükből. A vészfék használata közben a vonat csomagtartójáról leesnek a csomagok, pedig a környezetük újabb hatást nem fejt ki rájuk. Ilyen esetekben úgy látszik, mintha nem volna érvényes a tehetetlenség törvénye.

A valóság azonban az, hogy az előbb leírtak csak a változó sebességű járműveken belül tapasztalt jelenségekre hívták fel a figyelmet. Ezek a jelenségek a járműveken kívülről nézve és a földhöz viszonyítva másként írhatók le.

Kívülről nézve az emberek és a csomagok megtartják mozgásállapotukat, csak a fékező, induló, illetve kanyarodó jármű lemarad, vagy „kimegy" alóluk. Egy test mozgásának leírása tehát különböző lehet, ha máshoz, más **vonatkoztatási rendszerhez*** viszonyítva írjuk le azt. A vonatkoztatási rendszerek két csoportba sorolhatók:

Az olyan vonatkoztatási rendszereket, amelyekben teljesül a tehetetlenség törvénye, tehetetlenségi rendszernek, másként inerciarendszernek* nevezzük.

Azok a vonatkoztatási rendszerek, amelyekhez viszonyítva a testek mozgásállapota a környezet hatása nélkül is megváltozhat, a gyorsuló vonatkoztatási rendszerek*.



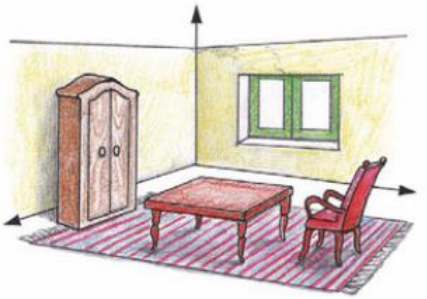
62.2. A gyorsuló, lassuló, kanyarodó vonatban a testek mozgásállapota – látszólag külső hatás nélkül – megváltozik



62.3. *Miért tekinthető inerciarendszernek az egyenes pályán egyenletesen mozgó vonat?*

A gyorsuló vonatkoztatási rendszerben a nyugalomhoz és az egyenes vonalú egyenletes mozgáshoz kell erőhatás. A testünk csak erőhatás (kapaszkodás) következtében mozoghat együtt pl. az induló, fékező, kanyarodó járművekkel. Ezért szokás azt mondani, hogy a gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben nem érvényes a tehetetlenség törvénye.

Mi a jelenségeket mindig inerciarendszerre vonatkozóan vizsgáljuk és írjuk le. Vizsgálatainknál ezért legtöbbször a Föld felületéhez viszonyítva nyugalomban levő, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző testeket választjuk vonatkoztatási rendszernek.



63.1. Környezetünk nyugvó tárgyai inerciarendszernek tekinthetők

OLVASMÁNY

Fizikatörténeti érdekesség

A fizika történetében kevés olyan ötlet van, amely a fizikával foglalkozók között ismertebb, mint a Galilei által 1632-ben megírt *Párbeszédek a két legnagyobb világrendszerről, a ptolemaiosziról és a kopernikuszról* című könyvében leírt gondolati kísérlet:

„Zárkózzál be barátod társaságában egy nagy hajó fedélzete alatt egy meglehetősen nagy terembe. Vigyél oda szúnyogokat, lepkéket és egyéb röpködő állatokat, gondoskodjál egy apró halakkal teli vizesedényről is, azonkívül akassz fel egy kis vödröt, amelyből a víz egy alája helyezett szűk nyakú edénybe csöpög. Most figyeld meg gondosan, hogy a repülő állatok milyen sebességgel röpködnek a szoba minden irányába, míg a hajó áll. Meglátod azt is, hogy a halak egyformán úszkálnak minden irányban, a lehulló vízcseppek mind a vödör alatt álló edénybe esnek. Ha társad felé hajítasz egy tárgyat, mind az egyik, mind a másik irányba egyforma erővel kell hajítanod, feltéve, hogy azonos távolságról van szó. Ha, mint mondani szokás, páros lábbal ugrasz minden irányba, ugyanolyan messzire jutsz. Jól vigyázz, hogy mindezt gondosan megfigyeld, nehogy bármi kétely származhasson abból, hogy az álló hajón mindez így történik.

Most mozogjon a hajó tetszés szerinti sebességgel: azt fogod tapasztalni – ha a mozgás egyenletes és nem ide-oda ingadozó –, hogy az említett jelenségekben semmiféle változás nem következik be. Azoknak egyikéből sem tudsz arra következtetni, hogy mozog-e a hajó vagy sem."

MEGJEGYZÉSEK

1. Az inertia (inercia) latin szó, jelentése: ügyetlenség, lomhaság, tétlenség.
2. Vonatkoztatási rendszernek legtöbbször a Föld felszínének egy részét vagy a rajta nyugalomban levő tárgyakat szoktuk választani. Ezek azonban csak közelítőleg és rövid ideig tekinthetők inerciarendszernek, hiszen a Föld forog. Tartósan és nagy pontossággal az állócsillagokhoz rögzített rendszer tekinthető inerciarendszernek.
3. A Galilei-féle gondolati kísérlet is igazolja az ún. klasszikus mechanika relativitási elvét, mely szerint egy inerciarendszerhez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerek mind inerciarendszerek, és a mechanikai jelenségek leírása szempontjából teljesen egyenértékűek. Inerciarendszer tehát végtelen sok van, és mind egyenértékű. Ez azt jelenti, hogy az inerciarendszerek közül nem lehet kijelölni egy olyat, amit nyugvónak tekintünk, és amelyhez a többi mozgását viszonyítani kellene. **Abszolút nyugalom tehát nincs.**

4. Az inerciarendszer szerepe a fizikában alapvető jelentőségű, mert a természet jelenségeit legtöbbször inerciarendszerben lehet legegyszerűbben vizsgálni, és az így felismert törvényeket, törvényszerűségeket bármely inerciarendszerben azonos formában leírni.
5. A gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben nemcsak a tehetetlenség törvénye nem igaz, hanem a fizika legtöbb megállapítását az inerciarendszerekben megismerttől eltérőnek tapasztaljuk, és így másként kell, hogy leírjuk azokat, pl.: ahhoz, hogy (az induló vonatban) egy test nyugalomban maradjon, a testet érő erők eredője nem lehet nulla. (Erről a 94. oldalon további részleteket lehet olvasni.)

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Egy járműben hosszú zsineget erősítettek a mennyezethez. A zsineg másik végére egy nehezéket akasztottak. Mi történik az ilyen ingával, ha a jármű elindul, fékez vagy kanyarodik? Mi állításaink fizikai magyarázata?
2. Miért kell kapaszkodni a mozgó járművekben álló utasoknak?
3. Hogyan szokták a kalapács és a balta fejét rászorítani a nyelére? Miért?
4. A szőnyegből a port ütögetéssel vagy rázással is eltávolíthatjuk. Mi ennek a fizikai magyarázata?
5. Inerciarendszernek tekinthető-e az álló, illetve induló jármű; a tanterem; az egyenletesen haladó autó kanyarodás közben?
6. Mi történik az utasok szerint, ha egy egyenletesen haladó vonat kocsijában egy labdát függőlegesen feldobunk? Hogyan mozog a labda a földön álló megfigyelő szerint?
7. A Föld körül nagy sebességgel mozgó űrhajóból „űrsétára" indul egy űrhajós. Kell-e tartania attól, hogy lemarad az űrhajótól? Miért?
8. A kanyarodás irányához képest merre dőlnek a hirtelen kanyarodó járművek utasai?
9. Milyen fizikai törvényt használunk fel tudatosan vagy ösztönösen, amikor a higanyos lázmérőt lerázzuk? Indokoljuk meg az állítást!
10. Miért lehet a gyümölcsöt lerázni a fáról? Soroljunk fel olyan jelenségeket, amelyeket a tehetetlenség törvénye alapján lehet megmagyarázni!
11. Miért veszélyes lelépni a mozgó járműről?
12. Indokoljuk a tehetetlenségi törvény segítségével a biztonsági öv használatának fontosságát!
13. Az állandó v_0 sebességgel süllyedő lift aljától mért 2 m magasságból elejtünk egy golyót. Ugyanannyi idő múlva ütközik-e a golyó a lift aljához, mint az álló liftben? Mekkora a golyó sebessége az ütközés pillanatában a nyugalomban levő liftben mért azonos esethez viszonyítva, ha
    a) a liftből nézzük az esést,
    b) a lépcsőház folyosójáról figyeljük a golyó mozgását?
    Milyen jelenségnek látható ez az esemény a lépcsőházból megfigyelve?
14. Válaszoljunk az előző feladat kérdéseire, ha a lift egyenletesen emelkedik!
15. Képzeljük el a következő kísérletet! Az Északi-sarkponton (ahol a Föld „forgástengelye" találkozik a földfelszínnel) elhelyezett, légmentesen zárható fülkében függesszünk fel egy fonálingát. Az ingát térítsük ki egyensúlyi helyzetéből, majd engedjük el, hogy szabad lengéseket végezhessen. Szivattyúzzuk ki a levegőt, hogy még az se fékezze az inga lengését.
    – Milyen irányú lengéseket látunk, ha 6 órával később benézünk a fülkébe?
    – Tekinthető-e inerciarendszernek a fülkéhez rögzített vonatkoztatási rendszer?
16. Nézzünk utána az 1851-ben, a párizsi Pantheonban végzett híres Foucault-féle ingakísérletnek!

3. A tömeg fogalma



65.1. Rugalmas ütközés (biliárdgolyók között) és rugalmatlan ütközés (gépjármű)

A RUGALMAS ÜTKÖZÉS

A gumiból készült testek alakját könnyű megváltoztatni. Amikor megszüntetjük az alakváltozást előidéző erőhatást, a gumitest visszanyeri eredeti alakját.

A gyurmagolyó alakja is könnyen megváltoztatható, de a deformáló erőhatás megszűnte után a gyurmagolyó nem nyeri vissza eredeti alakját. Az anyagokat ilyen szempontból két csoportra lehet osztani:

- A **rugalmas anyagokra** az a jellemző, hogy a belőlük készült testek az alakjukat megváltoztató erőhatások megszűnte után visszanyerik eredeti alakjukat.
- A **rugalmatlan anyagból** készült testek az alakváltoztató erőhatás megszűnése után nem nyerik vissza eredeti alakjukat.

Ha két rugalmas anyagból készült testet egymáshoz nyomunk vagy azok egymáshoz ütköznek, mindkét test alakja megváltozik. A benyomódás miatt bennük rugalmas erőhatások „lépnek fel". Ezért az összenyomódott testek szétlökik egymást. A rugalmas testek ütközését és szétpattanását **rugalmas ütközésnek*** nevezzük.

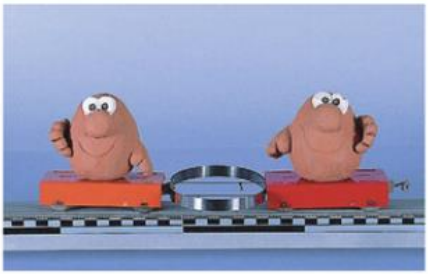
A rugalmas ütközés modellezhető két bármilyen test közé helyezett rugó megfeszítésével is. Az ütközés közben megfeszülő vagy általunk megfeszített rugó ugyanis képes szétlökni még a rugalmatlan anyagból készült testeket is.

Ha két test rugalmasan ütközik, vagy ha őket a közéjük tett rugó szétlöki, akkor a két testet egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erőhatás egyenlő ideig éri. Ilyenkor a két test mozgásállapota egyenlő feltételek között változik.

A TÖMEG FOGALMA ÉS DINAMIKAI MÉRÉSE

Előző tanulmányaink alapján tudjuk, hogy a tehetetlenség a testek egyik legfontosabb tulajdonsága. **A test tehetetlenségének mértéke a tömeg.** A testek tömegét eddig a nyugalmi helyzetükben (egyenlő karú mérleg vagy rugós erőmérő segítségével) határoztuk meg.

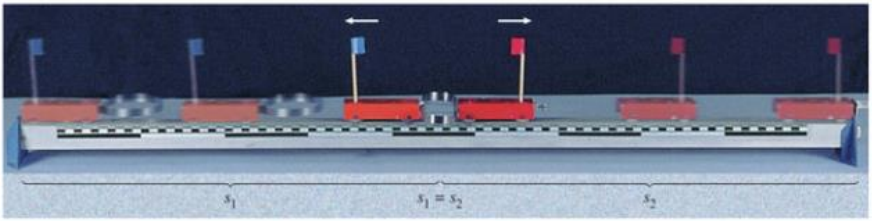
A tehetetlenség fogalma azonban a testek sebességváltozásával kapcsolatos: **annak a testnek nagyobb a tehetetlensége, amelyiknek nehezebb megváltoztatni a sebességét.** Ha egyformán nehéz két test sebességét megváltoztatni, akkor természetesen egyenlő a két test tehetetlensége. A következőkben bemutatunk egy olyan módszert, amellyel a testek tehetetlenségét, és így tömegét sebességváltozásaik alapján hasonlíthatjuk össze.



65.2. Két test rugalmas szétlökése megvalósítható egy közéjük helyezett rugóval is



65.3. A testek tömegét eddig rugós erőmérővel vagy kétkarú mérleggel határoztuk meg



66.1. Egyenlő tömegű kocsik szétlökése rugó segítségével (stroboszkopikus felvétel). *Mi állapítható meg a felvétel elemzése alapján?*

Egy vízszintes sínre helyezzünk két egyforma kiskocsit, közéjük pedig egy könnyű acélrugót. A két kocsit toljuk egymás felé úgy, hogy a rugó összenyomódjon és külső végeik egyenlő távolságra legyenek a sín végeinél levő ütközőktől. Majd engedjük el, és figyeljük meg, hogy a kocsik mikor koppannak a sín végén lévő ütközőknek. (*66.1. ábra*)

Azt tapasztaljuk, hogy a két egyforma, rugóval szétlökött kiskocsi egyenlő idő alatt egyenlő utakat tesz meg, vagyis azonos sebességre tesznek szert. Ez azt jelenti, hogy a megfeszített rugó által közvetített kölcsönhatásuk közben a kocsik sebességváltozása egyenlő, mert egyenlő nagyságú sebességre gyorsultak fel szétlökés közben.

Ismételjük meg az előbbi kísérletet úgy, hogy az egyik kocsira egy újabbat teszünk, így az összenyomott rugó egyik oldalán egy, a másikon két ugyanolyan kiskocsi van.

Ezúttal azt tapasztaljuk, hogy csak akkor koppannak egyszerre, ha az elengedés pillanatától a koppanásig a két egymásra tett kiskocsi feleakkora távolságot tesz meg, vagyis feleakkorára nő a sebessége, mint az egymagában lévőé. (*66.2. ábra*)

Ahhoz, hogy többször is szétlökethessük a kiskocsikat, többször kell megfeszíteni a közéjük tett rugót. A rugót nehéz volna mindig egyformán megfeszíteni. Erre azonban nincs is szükség, mert az erősebben megfeszített rugó mindkét kocsin nagyobb sebességváltozást hoz ugyan létre, de a két vagy három egymáshoz erősített kocsi sebességváltozása mindig fele, harmada a vele kölcsönhatásban levő egyetlen kiskocsinak. Ez alapján azt mondhatjuk, hogy:

Kísérlettel igazolható, hogy két test kölcsönhatása közben bekövetkező sebességváltozások nagysága fordítottan arányos a testek tömegével:

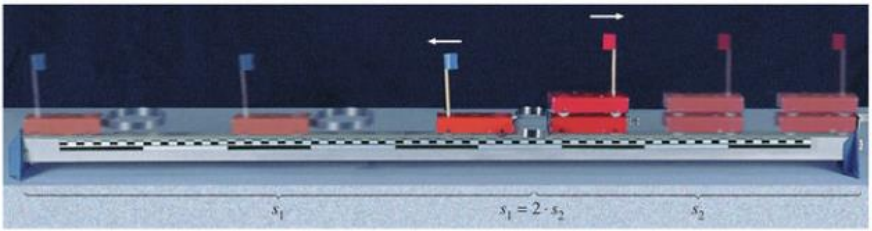
$$m_2 : m_1 = \Delta v_1 : \Delta v_2,$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2}.$$

Ha az egyik test tömegét (pl. az m_1-et) egységnyinek választjuk, akkor a másik test tömege – ebben az egységben – a sebességváltozások alapján megadható:

$$m_2 = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} \cdot m_1.$$

Ez a felismerés a tömegmérés dinamikai módszerének az alapja. Így a gravitációs mezőtől függetlenül is lehet tömeget mérni.



66.2. Különböző tömegű kocsik szétlökése rugó segítségével

Az $m_2 = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} \cdot m_1$ összefüggésből felismerhető, hogy a tömeg mértékegységét szabadon lehet megválasztani. A $\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2}$ hányados ugyanis egy arányszám. Ez azt jelenti, hogy a tömeg alapmennyiség, mert fogalmát nem más mennyiségekből származtattuk.

Régen az 1 liter 4 °C-os desztillált víz tehetetlenségét és így tömegét választották egységnyinek.

A jelenlegi megállapodás szerint a tömeg SI-beli mértékegysége a kg, ami annak a platina-irídium hengernek a tömege, amelyet Párizs mellett, Sèvres-ben [szevr], a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban őriznek.

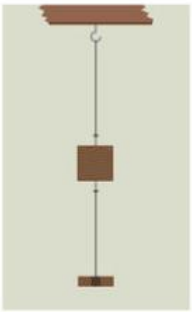
MEGJEGYZÉSEK

1. Van, aki a tehetetlenséget a test gyorsulásával értelmezi. Ebben a megfogalmazásban annak a testnek nagyobb a tehetetlensége, amelyiket ugyanaz az erőhatás kisebb gyorsulással mozgat. Ez a gondolat elvileg nem különbözik az általunk alkalmazottól, hiszen a gyorsulás számértékileg egyenlő az egységnyi idő alatt létrejött sebességváltozással.
2. A tömeg fogalmát lehet és szokták is különböző módon bevezetni, definiálni, pl.: A tömeg a testben levő anyag mennyiségének mértéke. Ez azt fejezi ki, hogy annak a testnek nagyobb a tehetetlensége, amelynek több az anyaga. A testben levő anyag mennyiségét azonban az SI-ben nem a tömeggel, hanem egy másik, a részecskék számára utaló alapmennyiséggel mérik, amit anyagmennyiségnek neveznek. Mértékegysége a mól. Erről a mennyiségről a kémiában már tanultunk.
3. A tehetetlenség a testek egyik elidegeníthetetlen tulajdonsága. Mindennapi megfigyeléseink szerint minden testnek van tehetetlensége, ami nem függ a helytől, pl.: egy test tehetetlensége a Földön, a Holdon, kinn a világűrben ugyanakkora tömeggel jellemezhető. A hozzánk képest nagy – a fény sebességét megközelítő – sebességgel mozgó testek tömege azonban észrevehetően nagyobb, mint amit nyugalmi helyzetükben mértek. Ezzel a kérdéssel a relativitáselmélet foglalkozik.
4. *A testnek tömege van* és más hasonló kijelentés csak a szóhasználat egyszerűsítését jelenti és nem azt, hogy a tömeg valóban létezik. A tömeg egyike az emberek által kitalált mennyiségeknek. A *test – tulajdonság – mennyiség* olyan fogalmi hármas, amelynek tagjai összetartoznak ugyan, de mégis különböznek egymástól.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Asztalon csúsztatva pöcköljünk egymásnak különböző pénzérméket! Hasonlítsuk össze az érmék ütközés előtti, illetve ütközés utáni mozgását, és magyarázzuk meg a tapasztaltakat!
2. Azonos vagy eltérő eredményt kapunk-e, ha egy test tömegét a Földön, egy űrállomáson a súlytalanság körülményei között és a Holdon mérjük meg dinamikai módszerrel?
3. A dinamikai tömegmérésre általunk alkalmazott képletben mi adja meg a meghatározandó tömeg számértékét, és melyik (1-es vagy 2-es) test tömegét tekintjük egységnyinek?
4. Az asztal széléhez közel fekvő gyufásdobozra helyezzünk egy vízzel félig megtöltött poharat. Az asztal lapján gyorsan csúsztatott vonalzóval üssünk rá a gyufásdobozra. Magyarázzuk meg a tapasztaltakat!
5. Az asztalon fekvő papírlapra állítsunk egy vízzel félig töltött poharat. Előbb húzzuk lassan, majd rántsuk meg gyorsan a papírlapot. Mit tapasztalunk? Adjunk magyarázatot a különbségre!

6. Kössünk egy legalább 0,5 kg tömegű nehezék (pl. egy fahasáb, amelynek mindkét végébe egy-egy szöget félig beütöttünk) mindkét oldalára ugyanolyan vékony fonalat! Ezután az egyik fonállal függesszük fel a nehezéket. Az alsó fonalra kössünk egy kisebb fadarabot, hogy jobban meg tudjuk fogni a fonalat. Tőlünk függ, hogy az alsó fonalat húzva, melyik fonál fog elszakadni. Lassú húzásnál a felső, gyors rántásnál az alsó. Mivel magyarázható ez az eredmény?
7. Gyűjtsünk anyagot, és állítsunk össze kiselőadást Galilei életéről és munkásságáról!



FELADATOK

1. Egy test tömege 2 kg. Mekkora a másik test tömege, ha a közéjük tett összenyomott rugó a két testet úgy löki szét, hogy a második test sebességváltozása négyszer akkora lesz, mint az elsőé?
2. Az 1 m magasan levő állványról, a közéjük helyezett rugóval, szétlöktek két testet. Földet érésükig az egyik test – a szétlökés miatt – 50 cm-rel, a másik 75 cm-rel távolodott el vízszintes irányban. Mit tudunk a két test egymáshoz viszonyított tömegéről?

4. A sűrűség

Egyenlő térfogatú réz-, alumínium- és fahenger tömegét megmérve azt tapasztaljuk, hogy közülük a rézhenger tömege a legnagyobb. Ha ezekből az anyagokból egyenlő tömegű testeket készítünk, szemmel látható, hogy térfogatuk jelentősen különböző. A fahenger térfogata a legnagyobb, a rézhengeré a legkisebb. Ezeknek a tapasztalatoknak az a magyarázata, hogy a különféle anyagoknak ez a tulajdonsága – amit **sűrűségnek*** nevezünk – különböző lehet.

- **Egyenlő térfogatú testek közül annak nagyobb sűrűségű az anyaga, amelyiknek nagyobb a tömege.**
- **Egyenlő tömegű testek közül annak nagyobb sűrűségű az anyaga, amelyiknek kisebb a térfogata.**

Ha azonos anyagú, de kétszer, háromszor nagyobb térfogatú tömör testek tömegét megmérjük, azt vesszük észre, hogy az is kétszerese, háromszorosa az eredetinek. Minden mérés és minden tapasztalat azt igazolja, hogy **a megegyező anyagú, homogén, tömör testek tömege és térfogata egyenesen arányos:** $m \sim V$.

Ebből az következik, hogy az ilyen testek tömegének és térfogatának hányadosa állandó:

$$\frac{m}{V} = \text{állandó}.$$

A különféle anyagú testeknél ez a hányados különböző, de a nagyobb sűrűségű anyagoknál mindig nagyobb, a kisebb sűrűségűeknél pedig mindig kisebb. Az $\frac{m}{V}$ hányados tehát alkalmas mennyiség az anyagok egy tulajdonságának, a sűrűségnek a jellemzésére.

A sűrűség jele: ρ (görög betű, olvasd: ró).

$$\text{sűrűség} = \frac{\text{tömeg}}{\text{térfogat}},$$

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

A sűrűség mértékegységét – mint a származtatott mennyiségeknél általában – az új mennyiséget meghatározó, már ismert mennyiségek mértékegységeinek felhasználásával alkotjuk meg. A sűrűség mértékegységeit a tömeg és a térfogat mértékegységeinek hányadosaként határozzuk meg.

A sűrűség SI-beli mértékegysége a $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, engedélyezett még a $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ és a $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Sokszor a testek többféle anyagból vannak (pl. a kés pengéje acél, a nyele pedig fa; a parafa dugóval bedugott palack félig van vízzel stb.). Ha a sűrűséget ekkor is úgy számítjuk ki, mint a homogén anyagú testeknél, akkor a test **átlagsűrűségét** kapjuk:

$$\rho_{\text{átl.}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{m_{\text{összes}}}{V_{\text{összes}}}.$$

Ugyanannak az anyagnak megváltozik a sűrűsége, ha megváltoztatjuk a hőmérsékletét, mert megváltozik a térfogata, de a tömege változatlan marad. A bezárt gázok térfogatát és így sűrűségét könnyű megváltoztatni összenyomással vagy tágítással.



69.1. A megegyező anyagú, homogén testek tömege és térfogata egyenesen arányos

MEGJEGYZÉSEK

1. A $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ kisebb mértékegység, mint a $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, hiszen $1\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{1000\ \text{g}}{1000000\ \text{cm}^3} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, vagyis az $1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ezredrésze egyenlő az $1\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$-rel.
2. A *homogén* görög szó, jelentése: egynemű, egyöntetű.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Egyenlő térfogatú testek közül az egyik anyaga alumínium, a másiké üveg, a harmadiké vörösréz. Melyiknek a legkisebb és melyiknek a legnagyobb a tömege? (Használjunk táblázatot!)
2. Fogalmazzuk át az előző (1-es) feladatot egyenlő tömegű testekre! A kérdés a térfogatra vonatkozzon! Válaszoljunk az így feltett kérdésre!

FELADATOK

1. Egy kis szabálytalan alakú tárgyról meg kellene tudni, hogy milyen anyagból készült. Rendelkezésünkre áll egy konyhai mérleg és természetesen minden más a konyhából: pl. pohár és víz. Ezek felhasználásával határozzuk meg a vizsgálandó tárgy anyagának sűrűségét!

MEGOLDÁS:

A sűrűség meghatározásához tudnunk kell a test tömegét és a térfogatát. A tömeget a mérleggel meg tudjuk mérni. A mérés eredménye: $m = 65$ g.

Arkhimédész törvénye alapján a teljesen elmerülő test esetében, a felhajtóerő ismeretében a test egészének térfogata is kiszámítható.

Ennek érdekében egy háromnegyedéig vízzel töltött poharat a mérlegen kiegyensúlyozunk és belelógatjuk a fonálra felerősített testet úgy, hogy teljesen benne legyen a vízben és ne érjen a pohárhoz. A test vízbe lógatásakor a mérlegnek a poharat tartó serpenyője lebillen. Az egyensúly helyreállítása érdekében a másik serpenyőbe $\Delta m = 7{,}3$ g tömegű mérőtestet kellett tenni.

Miért billent meg a mérleg egyensúlya a test belelógatásakor? A testet érő felhajtóerő ellenereje hozzáadódott a víz és a pohár súlyához. Ezzel a többlettel egyenlő nagyságú, mind a felhajtóerő, mind a test által kiszorított víz súlya és a 7,3 g tömegű mérőtestek súlya is. Tehát a kiszorított víz tömege 7,3 g, így: $V = 7{,}3\ \text{cm}^3$.

A kiszorított víz térfogata egyben a vízbe merített test térfogata is, így:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{65\ \text{g}}{7{,}3\ \text{cm}^3} = 8{,}9\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Ellenőrizzük táblázatban, hogy lehet-e ez a test **rézből!**

2. Egy 180 tonnás jéghegy térfogata 200 m^3. Mekkora a jég sűrűsége?
3. A vörösréz sűrűsége $8900\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Mekkora a tömege az 1 dm^3 térfogatú vörösréz tömbnek?
4. Mekkora a térfogata egy 100 kg tömegű alumíniumhengernek? (Használjunk táblázatot!)
5. A sárgaréz vörösréz és cink ötvözete. A 39%-nál kevesebb cinket tartalmazó sárgaréz jól önthető, és hidegen is megmunkálható. Legfeljebb mekkora az ilyen sárgaréz sűrűsége, ha a cinké $7{,}14\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, a vörösrézé pedig $8930\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

5. Lendület, lendületmegmaradás



71.1. Egy labda nagyobbat üt, ha nagyobb a tömege vagy gyorsabban mozog

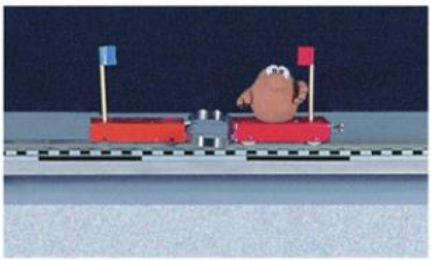
A LENDÜLET FOGALMA

A mozgások jellemzése csak annak leírására szorítkozik, hogy hogyan mozognak a testek, és nem foglalkozik azzal, milyen az a test, amelyik mozog. Ezért lehet egy labdának és egy autónak is pl. $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel jellemezni a mozgását.

Nem mindegy azonban, hogy egy labda vagy egy autó ütközik nekünk ugyanakkora sebességgel, hiszen a két esetnek más lesz a következménye. A **mozgásállapot*** vizsgálatánál tehát – a sebességen kívül – fontos figyelembe venni azt is, milyen az a test, amelyik mozog.

Egy labda erősebben ütközik nekünk, ha nagyobb sebességgel érkezik hozzánk.

A nagy tömegű medicinlabda nagyobbat lök azon, aki elkapja, mint a vele egyenlő sebességgel érkező futball-labda.



71.2. Két test kölcsönhatásánál: $\Delta v_1 : \Delta v_2 = m_2 : m_1$

A testek mozgásállapotának dinamikai szempontból történő jellemzéséhez tehát ismerni kell a testeknek mind a tömegét, mind a sebességét.

A dinamikai tömegmérésnél megállapítottuk, hogy bármely két test mechanikai kölcsönhatása közben bekövetkező sebességváltozások fordítottan arányosak a testek tömegével:

$$\Delta v_1 : \Delta v_2 = m_2 : m_1,$$

tehát tömegük és sebességváltozásuk szorzata állandó:

$$m_1 \cdot \Delta v_1 = m_2 \cdot \Delta v_2.$$

Mivel párkölcsönhatás közben a két testet egyenlő nagyságú és időtartamú erőhatás éri, joggal tételezhetjük fel, hogy mozgásállapotuk is egyenlő mértékben változik. Az $m_1 \cdot \Delta v_1 = m_2 \cdot \Delta v_2$ összefüggés tehát a két test mozgásállapotának változására jellemző.

Mivel az $m \cdot \Delta v$ szorzat egy test mozgásállapotának megváltozására jellemző, az $m \cdot v$ szorzat az m tömegű és v sebességű test mozgásállapotát jellemzi dinamikai szempontból.

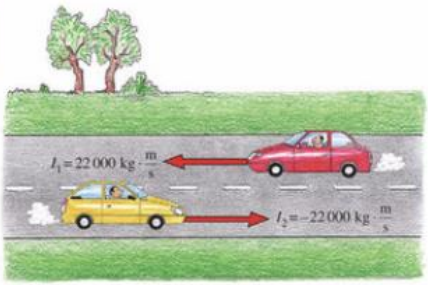
A tömeg és sebesség szorzata tehát a test mozgásállapotát dinamikai szempontból jellemző mennyiség, amit lendületnek* (vagy impulzusnak) szokás nevezni. Jelölése: I vagy p.

$$\textbf{Lendület} = \textbf{tömeg} \cdot \textbf{sebesség},$$
$$I = m \cdot v.$$

A lendület mértékegysége a tömeg és a sebesség mértékegységének szorzata, vagyis: $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A lendület **vektormennyiség,** nagysága $m \cdot v$, iránya pedig megegyezik a test pillanatnyi sebességének irányával. A sebesség- és a lendületvektor iránya tehát azonos. Ez formailag is belátható, mert ha egy vektort ($\vec{v}$) megszorzunk egy olyan pozitív skalármennyiséggel, mint a tömeg (m), akkor az új vektor ($\vec{I} = m \cdot \vec{v}$) nagysága változik, de iránya a régiével megegyező lesz.

Ha két, egy egyenesbe eső lendületvektor irányának ellentétes, akkor az irány megadására alkalmas a pozitív és negatív előjel.



72.1. *Milyen mennyiség a lendület?*

Amikor egy több testből álló rendszer elemei csak egyetlen egyenes mentén mozoghatnak (pl. egy légpárnás sínen), lendületük vektorjellege – mint tudjuk – előjellel is kifejezhető. Így a rendszer lendülete (I) a rendszert alkotó testek lendületének előjeles összege:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n.$$

Ez röviden a következő jelöléssel is felírható:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i.$$

A ZÁRT RENDSZER

A vízszintes felületen rugalmasan ütköző testek mozgásállapotát csak a rugalmas hatás változtatja meg. A testeket érő többi erőhatás (például F_{g_1} és F_{t_1}, illetve F_{g_2} és F_{t_2}) vagy kiegyenlíti egymást, vagy – mint a súrlódás és a közegellenállás – elhanyagolható. Ebben az esetben tehát csak a két test egymásra gyakorolt hatása okoz lendületváltozást, a környezet nem. Ilyen esetben a testekről azt mondjuk, **zárt rendszert*** alkotnak.

A zárt rendszert alkotó testek állapotának vizsgálatánál csak a rendszert alkotó testek egymásra gyakorolt hatását kell figyelembe venni.

A LENDÜLETMEGMARADÁS TÖRVÉNYE

A vízszintes légpárnás sínen levő két szánkó rugóval történő szétlökés közben zárt rendszernek tekinthető. Párkölcsönhatásoknál megfigyeltük:

$$m_1 \cdot \Delta v_1 = m_2 \cdot \Delta v_2, \quad \text{azaz} \quad \Delta I_1 = \Delta I_2.$$

Ha a tapasztalatot előjelesen vesszük figyelembe, tehát:

$$\Delta I_1 = -\Delta I_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta I_1 + \Delta I_2 = 0,$$

akkor belátható, hogy itt a zárt rendszer lendülete nem változott.

Vajon igaz-e ez általánosan is?

Erősítsük meg sejtésünket kísérletekkel! Hasonlítsuk össze a két egyenlő tömegű kísérleti jármű lendületének összegét szétlökés előtt és szétlökés után!

Szétlökés előtt mindkét kiskocsi nyugalomban van, tehát sebességük és így lendületük is nulla. Ebből következik, hogy a két kocsi lendületének összege is nulla.

A dinamikai tömegmérésnél láttuk, hogy a rugóval szétlökött két, egyenlő tömegű kiskocsi egyszerre érkezik a nyugalmi helyüktől egyenlő távolságra elhelyezett ütközőkhöz. Ebből következik, hogy a kocsik az egyenlő hosszúságú utakat egyenlő időtartamok alatt tették meg, tehát a szétlökés utáni sebességük egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú ($v_1 = -v_2$) volt.

Mivel a kocsik tömege egyenlő ($m_1 = m_2$):

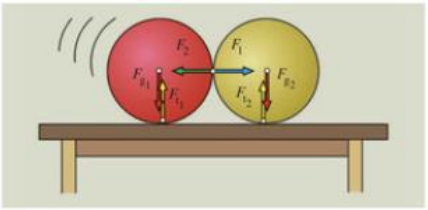
$$m_1 \cdot v_1 = -m_2 \cdot v_2.$$

Ez azt jelenti, hogy:

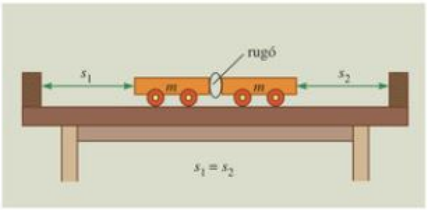
$$I_1 = -I_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 + I_2 = 0.$$

Két egyenlő tömegű nyugvó kiskocsi lendületének összege szétlökés után is nulla.

A két kiskocsi által alkotott zárt rendszer lendülete tehát szétlökés közben nem változott.

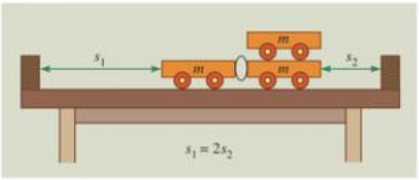


72.2. A rugalmas ütközésnél mozgásállapot-változást csak a rugalmas erők hoznak létre



72.3. *Mekkora a rugóval szétlökött kiskocsik lendülete szétlökés előtt és után?*

Vizsgáljuk meg, igaz-e az előbbi megállapítás általánosabb esetben is, amikor a testek tömege nem egyenlő.



73.1. *Mekkora a rugóval szétlökött kiskocsik lendülete szétlökés előtt és után?*

Rugóval lökessünk szét egy m tömegű kiskocsit előbb egy $2m$, majd egy $3m$ tömegű kocsival. Az egyidejű koppanások érdekében jól elhelyezett ütközők távolságát megmérve azt tapasztaljuk, hogy:

- a $2m$, $3m$ tömegű kiskocsik felőli ütközőt (a kocsik nyugalmi helyétől) fele, illetve harmada távolságra kell elhelyezni, mint az m tömegű kocsi felőlit.
- szétlökés közben a $2m$, $3m$ tömegű kocsi fele, illetve harmada sebességre gyorsult fel, mint az m tömegű.

Kiszámítva a kocsik szétlökés utáni lendületét:

$$I_1 = m \cdot v;\ I_2 = -2 \cdot m \cdot \frac{v}{2} = -m \cdot v,$$

illetve $I_1' = m \cdot v';\ I_2' = -3 \cdot m \cdot \frac{v'}{3} = -m \cdot v',$

$$I_1 = -I_2 \ \Rightarrow\ I_1 + I_2 = 0,$$

illetve $I_1' = -I_2' \ \Rightarrow\ I_1' + I_2' = 0.$

Megállapíthatjuk, hogy az m és $2m$, illetve az m és $3m$ tömegű kocsikból álló rendszer lendülete szétlökés előtt és szétlökés után is nulla volt.

Az eddig vizsgált három esetben azt tapasztaltuk tehát, hogy a két-két kocsiból álló zárt rendszer lendülete a rugóval történő szétlökés közben nem változott.

Lökjünk álló kocsinak egy vele megegyező tömegű másik kocsit (lásd *73.2. ábra*) úgy, hogy a két kocsi rugalmasan ütközzön. Ütközés közben az eddig mozgó kocsi megáll, az álló pedig mozgásba jön.

Jelöljük meg, pl. másodpercenként a mozgó kocsik helyét. Ha lemérjük a jelölések távolságát, megállapíthatjuk, hogy a v sebességgel haladó kocsi megállása közben úgy lökte meg az eredetileg álló másikat, hogy az az ütközés közben v sebességre gyorsulva haladt a lökésnek megfelelő irányban.

Így a két kocsi alkotta zárt rendszer lendülete ütközés előtt:

$$m \cdot v + 0 = m \cdot v,$$

ütközés után pedig

$$0 + m \cdot v = m \cdot v.$$

Az a megállapítás tehát, hogy a zárt rendszer lendülete nem változik, akkor is igaz, ha a rendszer lendülete nem nulla.

Minden tapasztalat és mérés azt igazolja, hogy a zárt rendszert alkotó testek lendületének összege állandó:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i = \text{állandó}.$$

Ez a megállapítás a **lendületmegmaradás törvénye*.**

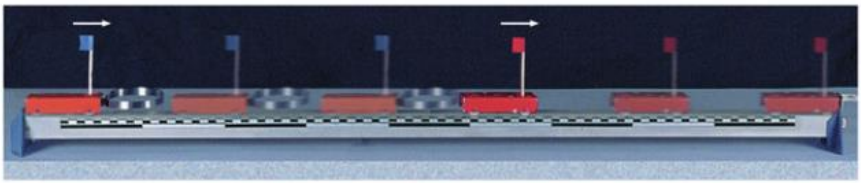
A lendületmegmaradás törvénye nem azt jelenti, hogy a zárt rendszerben levő testek lendülete nem változhat meg.

A zárt rendszerben levő testek lendülete egymás hatására csak úgy változhat meg, hogy az egyes testek lendületváltozásainak összege nulla legyen:

$$\Delta\vec{I}_1 + \Delta\vec{I}_2 + \Delta\vec{I}_3 + \ldots + \Delta\vec{I}_n = \Delta\vec{I} = 0,$$

$$\Delta\vec{I} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{I}_i = 0.$$

A lendületmegmaradás törvényét tehát két módon is meg lehet fogalmazni.



73.2. Az egyenlő tömegű kocsik rugalmas ütközés közben sebességet „cserélnek"

MEGJEGYZÉSEK

1. Az *impulzus* latin szó, jelentése: lökés, ösztönzés. Ebből származik az I jelölés.
2. A fizikában gyakran alkalmazzák azt a módszert, hogy meglevő ismeretek alapján következtetnek egy új jelenségre és annak jellemzési módjára. Az ilyen elképzelésre alapozott állítást, feltevést hipotézisnek nevezik, és csak azt követően fogadják el igaznak, ha kísérlettel is bizonyították. A lendület fogalmának bevezetésénél és a lendület megmaradásának felismerésénél mi is alkalmaztuk ezt a módszert.
3. A lendület mértékegységének nincs külön neve, mert – bár már Newton is nagy jelentőségűnek tekintette ezt a fogalmat – az elmúlt két évszázadban indokolatlanul háttérbe szorult az alkalmazása. A lendületnek csak a modern fizika mutatta meg ismét igazi fontosságát. **Minden olyan mennyiség, amelyre megmaradási törvény írható fel, kiemelt fontosságú a fizikában.**
4. Az $m \cdot v$-ként meghatározott mennyiség elnevezése és jelölése nem egységes a fizikában. Mi lendületnek nevezzük és $\vec{I}$ vektorral, nagyságát pedig I-vel jelöljük. Van olyan tankönyv és szakkönyv, amelyben impulzusnak vagy mozgásmennyiségnek nevezik és $\vec{p}$ vektorral, nagyságát pedig p-vel jelölik.
5. A *szumma* latin szó, jelentése összeg. Több tag összegzését a Σ görög nagybetűvel szokás jelölni. A $\sum_{i=1}^{n}$ (olvasd szumma i megy 1-től n-ig) jelentése: össze kell adni a Σ jel után írt mennyiségből n tagot.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Egy locsolóautó változatlan sebességgel mozog, miközben portalanítja az úttestet. Változik-e a lendülete? Miért? Mit tapasztalhat a sofőr vezetés közben?
2. Egy mozgó vasúti szerelvényben az egyik kocsi üres, a másik fával van megrakva, a harmadik pedig kővel. Mit állíthatunk a kocsik egymáshoz viszonyított lendületéről?
3. Egy gyerek és a papája kézen fogva sétálnak. A papa súlya háromszorosa a gyerek súlyának. Mit tudunk a tömegükről és a lendületükről?
4. Egy teherautó tömege négyszer nagyobb, sebessége pedig harmada egy másik autóénak. Mit tudunk a lendületükről?
5. Lehet-e egyenlő egy futball- és egy teniszlabda lendülete? Ha igen, mi ennek a feltétele? Ha nem, akkor miért?
6. Két test tömege és sebessége is egyenlő nagyságú. Lehet-e eltérő a lendületük?
7. Két test tömege és sebessége is különböző nagyságú. Lehet-e egyenlő a lendületük? Ha igen, mi ennek a feltétele?
8. Megváltozik-e a Föld lendülete egy magasugró elrugaszkodása közben? Ha igen, miért nem vehető észre?
9. Egy tóban levő nyugvó ladik végében egy ember áll. Mi történik a ladikkal, ha az ember elindul előre?

10. Zárt rendszert alkot-e a Földről felemelkedő rakéta a kiáramló égéstermékkel?

11. Egy kiskocsira állványt erősítettek, és erre fonálon függő – a kocsival közel egyenlő tömegű – testet kötöttek.

Mi történik az asztalra helyezett, nyugalomban levő kocsival, ha az ingatestet kitérítés után elengedjük? Mi történik az egyenletesen mozgó kocsival, ha a mozgásának irányában kitérített ingát engedik szabadon lengeni? Miért?

FELADATOK

1. Tömegünk ismeretében számítsuk ki, mekkora a lendületünk, amikor 0,5 $\frac{m}{s}$ sebességgel sétálunk!

2. Egy autó tömege 1000 kg, sebessége 72 $\frac{km}{h}$. Mekkora a lendülete?

3. Egy 2 kg tömegű test szabadon esik 4 m magasról. Mekkora a lendülete az elejtés és a földet érés pillanatában? Mi okozta a lendületváltozást?

4. Egy 250 g és egy 500 g tömegű álló kiskocsit rugóval szétlökettünk. A kisebb tömegű kocsi szétlökés utáni sebessége 1 $\frac{m}{s}$. Mekkora a nagyobb tömegű kocsi sebessége szétlökés után?

5. A 30 kg tömegű álló kiskocsin egy 45 kg tömegű gyerek áll. Milyen irányú és mekkora lesz a kocsi sebessége, ha a gyerek 2 $\frac{m}{s}$ sebességgel hátra leugrik a kocsiról?

6. Egy puska 800 $\frac{m}{s}$ sebességgel lő ki egy 30 g tömegű lövedéket. Mekkora sebességgel rúg vissza a puska, ha tömege a lövedék nélkül 6 kg?

7. Az összesen 100 kg tömegű kocsi 15 $\frac{m}{s}$ sebességgel halad. A kocsiból menetirányban kilőnek egy 30 kg tömegű testet a Földhöz viszonyítva 28 $\frac{m}{s}$ sebességgel. Mekkora a kocsi sebessége a kilövés után?

8. Mekkora sebességre gyorsul fel az 50 kg tömegű rakéta, ha belőle 1 kg tömegű üzemanyag 25 000 $\frac{m}{s}$ sebességgel áramlik ki?

9. A tavon nyugalomban levő 200 kg tömegű csónak orrából egy 50 kg tömegű gyerek 4 $\frac{m}{s}$ sebességgel ugrik ki előre, a csónak hosszának irányában. Milyen irányban és milyen sebességgel mozdul el a csónak?

Jellemezzük mennyiségileg ugyanennek a csónaknak és gyereknek a kiugrás utáni mozgását a parthoz viszonyítva, ha a csónak a folyóban van, és a parttal párhuzamos helyzetben 2 $\frac{m}{s}$ sebességgel sodródik, a gyerek pedig a csónakhoz viszonyítva 4 $\frac{m}{s}$ sebességgel ugrik ki:

a) előre, illetve *b)* hátra.

6. Erőhatás, erő

6.1. Az erő fogalma



76.1. Az erőhatások különböző nagyságúak lehetnek

A rugó, a mozgó golyó, a gravitációs mező hatásával megváltoztathatja a vele kölcsönhatásban levő test mozgásállapotát. Ezek a hatások különböző nagyságúak lehetnek. **A mozgásállapot-változtató hatást erőhatásnak*, mennyiségi jellemzőjét pedig erőnek* nevezték el.** Az erő jele: F.

Egy hatás nagysága a következménye alapján is jellemezhető. Egy párkölcsönhatás két résztvevőjének változása ugyanis egyenlő nagyságú és ellentétes értelmű. Az erő pontosabb fogalmának meghatározása érdekében alkalmazzuk ezt a megoldást.

A) Először vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van egy test lendületváltozása és a testet érő gyorsító erő nagysága között.

Vízszintes pályán gyorsítsunk változatlan m tömegű kiskocsit csigán átvetett fonálra erősített nehezékkel. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora lendületváltozást hoz létre ugyanannyi idő (pl. 1 másodperc) alatt ugyanazon a kocsin az F, $2F$, illetve $3F$ nagyságú erőhatás, amit a nehezékek változtatásával hozhatunk létre!

Az álló helyzetből induló kiskocsi lendületváltozásának kiszámításához mérni kell a sebességváltozást. Az egyenlő időközöket célszerű egységnyi időnek választani, amit az indítási hely megválasztásával érhetünk el. Ilyenkor ugyanis az indulástól számított 1 s alatt megtett utat megmérve (mivel a mozgás egyenletesen változó) könnyen kiszámítható a kocsi végsebessége. Ez egyenlő a keresett sebességváltozással:

$$s = a \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2},$$

ezt behelyettesítve és mivel $v_0 = 0$:

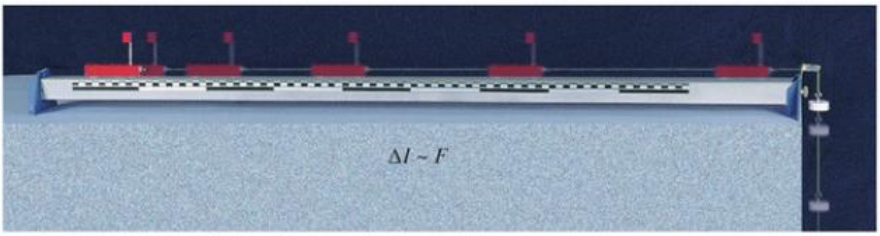
$$\Delta v = v = a \cdot t = \frac{2 \cdot s}{t^2} \cdot t = \frac{2 \cdot s}{t}.$$

Ha m = állandó és Δt = állandó, de F változik, akkor:

Erő	Időtartam	Tömeg	Sebességváltozás	Lendületváltozás
F	Δt	m	Δv	$m\Delta v$
$2F$	Δt	m	$2\Delta v$	$2m\Delta v$
$3F$	Δt	m	$3\Delta v$	$3m\Delta v$

A mérések eredményéből megállapítható, hogy a test lendületváltozása egyenesen arányos az erővel:

$$\Delta I \sim F.$$



76.2. Álló helyzetből induló kiskocsi lendületváltozásának mérése

B) Másodszor vizsgáljuk meg, hogy egy test lendületének megváltozása függ-e attól, hogy a változatlan nagyságú erőhatás mennyi ideig tart. Az egyszerűsítés érdekében most is nyugalomból ($v_0 = 0$) induló testtel végezzük a sebességváltozást meghatározó kísérletet. Ekkor $\Delta v = v$ végsebességgel.

A változatlan nagyságú erő feltétele legegyszerűbben úgy valósítható meg, hogy a vízszintes felületen mozgó kiskocsit egy csigán átvetett fonálon függő nehezékkel mozgatjuk (vontatjuk).

A kísérletsor eredményeit – általános megfogalmazásban – a következő táblázat tartalmazza.

Ha F = állandó és m = állandó, de az erőhatás időtartama változik, akkor:

Erő	Időtartam	Tömeg	Sebességváltozás	Lendületváltozás
F	Δt	m	Δv	$m\Delta v$
F	$2\Delta t$	m	$2\Delta v$	$2m\Delta v$
F	$3\Delta t$	m	$3\Delta v$	$3m\Delta v$

Méréssel megállapítható, hogy ahányszor hosszabb ideig gyorsít egy testet a változatlan erőhatás, a testnek annyiszor lesz nagyobb a sebesség-, és így a lendületváltozása. Ez azt jelenti, hogy **változatlan erőhatás esetében egy test lendületváltozása egyenesen arányos az erőhatás időtartamával:**

$$\Delta I \sim \Delta t.$$

C) Könnyen belátható, hogy a lendületváltozás nem függ a test színétől, hőmérsékletétől és sok más hasonló tulajdonságától. Az azonban vizsgálatra szorul, hogy a lendületváltozás függ-e a test tömegétől.

A következő kísérleteknél a test tömegét úgy kell változtatni, hogy a testet érő erőhatás és annak időtartama változatlan maradjon.

Most is egy vízszintes pályán mozgó, csigán átvetett fonálon levő nehezékkel vontatott kiskocsival végezzük a kísérleteket.

A sebességméréseket ezúttal is az előző oldalon, az *A)* részben olvasható módon végezhetjük.

Ha F = állandó és Δt = állandó, de a tömeg változik, akkor:

Erő	Időtartam	Tömeg	Sebességváltozás	Lendületváltozás
F	Δt	m	Δv	$m\Delta v$
F	Δt	$2m$	$\frac{\Delta v}{2}$	$2m\frac{\Delta v}{2} = m\Delta v$
F	Δt	$3m$	$\frac{\Delta v}{3}$	$3m\frac{\Delta v}{3} = m\Delta v$

Méréssel megállapítható, hogy amikor ugyanakkora erőhatás ugyanannyi ideig gyorsított m, $2m$, $3m$ tömegű kiskocsikat, a kocsik sebességváltozása fele, harmada volt az m tömegű kocsi sebességváltozásának. A kocsik tömegének és sebességváltozásának szorzata tehát egyenlő volt. Általában igaz, hogy:

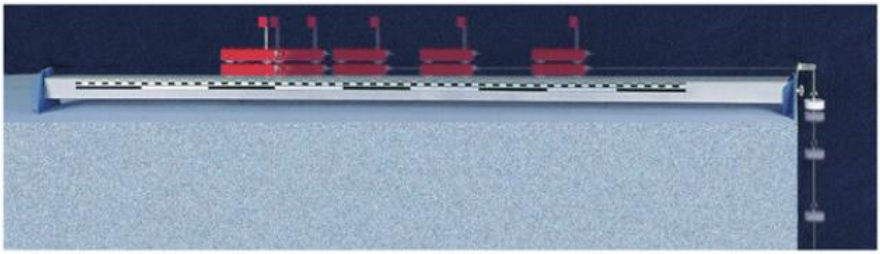
Ugyanakkora erőhatás ugyanannyi idő alatt – a test tömegétől függetlenül – mindig ugyanakkora lendületváltozást hoz létre bármely testen.

D) Tapasztalatainkat összefoglalva:

Bármely test lendületváltozása csak a testet érő erőhatástól és annak időtartamától függ. Így:

$$\Delta I \sim F \cdot \Delta t, \quad \text{azaz} \quad F \sim \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

függetlenül attól, hogy mekkora tömegű testet, mennyi ideig érte ugyanaz a változatlan erőhatás.



77.1. A lendületváltozás nem függ a test tömegétől. *Mit jelent ez a kijelentés?*

Ez összhangban van tapasztalatainkkal, melyeknek megfelelően:

Az az erőhatás nagyobb, amely bármely testen
- **ugyanannyi idő alatt nagyobb lendületváltozást hoz létre** (ha $\Delta t_1 = \Delta t_2$ és $\Delta I_1 > \Delta I_2$, akkor $F_1 > F_2$), vagy
- **ugyanakkora lendületváltozást rövidebb idő alatt eredményez** (ha $\Delta I_1 = \Delta I_2$ és $\Delta t_1 < \Delta t_2$, akkor $F_1 > F_2$).

Megállapítottuk, hogy **az erő egyenesen arányos az egységnyi idő alatt létrejött lendületváltozással:**

$$F \sim \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow F = k \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

A „k" arányossági tényezőt szabadon választhatjuk (lásd *79. oldal Megjegyzések 2. pont*). Az egyszerűség érdekében legyen $k = 1$, így az erő kiszámításának módja a következő:

$$\text{erő} = \frac{\text{lendületváltozás}}{\text{a közben eltelt idő}},$$

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

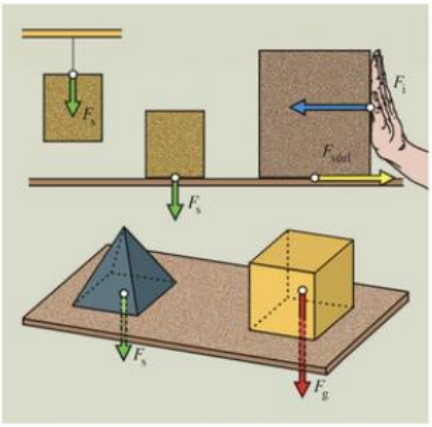
Az erő mértékegysége a lendület és az idő mértékegységének hányadosaként adható meg. Az erő SI-beli mértékegységének neve newton, jele N:

$$1\ \text{N} = 1\frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}} = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Az az erőhatás egységnyi nagyságú, amely másodpercenként bármely testen egységnyi lendületváltozást hoz létre.

Vagyis az erőhatás egységnyi nagyságú, ha pl. az 1 kg tömegű test sebességét másodpercenként $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-cel változtatja meg.

A különféle erőket az alapján szokás elnevezni, hogy mi fejti ki az erőhatásokat, vagy milyen feladatot „lát el" az erőhatás. Ezért beszélünk pl. izomerőről (F_i), rugó- vagy rugalmas erőről (F_r), mágneses erőről (F_m), elektromos erőről (F_e), gravitációs erőről (F_g) vagy tartóerőről (F_t), húzóerőről (F_h), súlyról (F_s vagy G) stb.



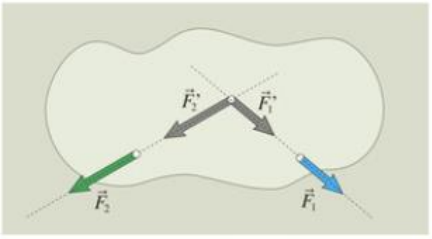
78.1. Az erővektornak iránya, nagysága, támadáspontja van

Mint azt már korábban megtanultuk, az erő vektormennyiség. A vektorokat – és így az **erővektort*** is – irányított szakasszal (nyíllal) ábrázoljuk. Azt a pontot, ahol az erőhatás a testet éri, **támadáspontnak*** nevezzük.

Ha az erőhatás egy felületen éri a testet, akkor egyenletes erőelosztás esetén támadáspontnak az érintkező felületek középpontját tekintjük.

A gravitációs mező a testet minden pontjában vonzza a Föld felé. A gravitációs erő támadáspontját ezért – homogén test esetén – a test középpontjába szokás felvenni.

Az az egyenes, amely átmegy az erő támadáspontján és egybeesik az erővektor irányával, az erő **hatásvonala***. Az erő támadáspontja áthelyezhető a hatásvonal bármely pontjába anélkül, hogy az erőhatás következménye megváltozna. Pl. hosszabb vagy rövidebb kötéllel is ugyanúgy húzható egy kocsi.



78.2. Az erőhatás támadáspontja áthelyezhető a hatásvonal bármely pontjába

Mint tudjuk, az erő és a lendület is vektormennyiség. A lendületváltozás iránya mindig megegyezik az őt létrehozó erőhatás irányával. Így a sebességváltozás-vektor ($\Delta\vec{v}$), a gyorsulásvektor ($\vec{a}$), a lendületváltozás-vektor ($\Delta\vec{I}$) és az (ezeket létrehozó erőhatást jellemző) erővektor ($\vec{F}$) iránya azonos. A sebességvektor ($\vec{v}$) és a lendületvektor ($\vec{I}$) iránya eltérhet ezeknek a vektoroknak az irányától. Ez azt is jelenti, hogy **egy test pályája csak akkor lehet egyenes, ha a testet érő erők eredőjének nagysága nulla, vagy hatásvonala megegyezik a pálya egyenesével.**

Az erő nem csak a lendületváltozás sebességeként számítható ki. Ha a test tömege lendületváltozás közben nem változik, $\Delta\vec{I} = m \cdot \Delta\vec{v}$, így:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{I}}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta\vec{v}}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m \cdot \vec{a}.$$

A változatlan tömegű testet gyorsító erőhatás nagysága a test tömegének és gyorsulásának szorzata.

Ha az erővektort az

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

alakban írjuk fel, akkor az nemcsak az erő nagyságát, hanem az erő irányát és a gyorsulásvektorral való kapcsolatát is megadja.

Az erő kiszámításának ezt a módját szokás **Newton II. törvényének*,** vagy másként a **dinamika II. axiómájának*** is nevezni, mely a mozgásállapot-változás és az erőhatás kapcsolatát fejezi ki.

Ha az erőhatás időben változó, akkor az $F = \frac{\Delta I}{\Delta t}$ hányados az átlagos erőt adja meg:

$$F_{\text{átl.}} = \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Az igen rövid időtartamhoz tartozó átlagerő annál jobban megközelíti a pillanatnyi erőt, minél kisebb a Δt.

MEGJEGYZÉSEK

1. Az erőhatás mozgásállapot-változást eredményező hatás, aminek mennyiségi jellemzője az erő. Az egyszerűbb szóhasználat érdekében azonban nem mindig teszünk éles különbséget a két elnevezés között.

   Ezért mondjuk néha – ha ez nem érthető félre –, hogy „A test az erő hatására gyorsul", vagy: „A testet érő erők eredőjének hatására" … stb.

2. Az $F \sim \frac{\Delta I}{\Delta t}$ felírható az $F = k \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$ alakban is. Ebben az egyenletben két mennyiségnek (ΔI és Δt) a jelentését már régebben megismertük. A másik kettő (F és k) közül az egyiket szabadon adhatjuk meg, de akkor a negyedik csak az egyenletnek megfelelően értelmezhető. Ebben a fejezetben az F-nek úgy adtunk értelmet, hogy – élve a szabad meghatározás lehetőségével, a képlet egyszerűsége érdekében – k-t egynek vettük ($k = 1$). Ezért írhattuk fel az $F = \frac{\Delta I}{\Delta t}$ képletet. Régen a szabad választás lehetőségét arra használták fel, hogy a testek súlya alapján önkényesen értelmezték az erőt és annak mértékegységét. Az 1 kg tömegű nyugvó test súlyát választották egységnyinek, és 1 kilopondnak (1 kp) nevezték. Az 1 kp nagyságú erőhatás (Magyarországon, földközelben) 9,81 N. A kp használata azonban nem volt célszerű, mert akkor $k = \frac{1}{9{,}81} \frac{\text{kp}}{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$-tel kellett számolni.

3. Az erő származtatott mennyiség, hiszen a lendülettel és az idő fogalmának felhasználásával értelmeztük.

4. Az $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta \vec{v}}{\Delta t}$ összefüggésből felírható, hogy $\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$. Az $\vec{F} \cdot \Delta t$ szorzat az erőhatásra jellemző, és erőlökésnek szokás nevezni. Az $m \cdot \Delta \vec{v}$ lendületváltozás az erőhatás következményére, a mozgásállapot-változásra jellemző. Az $\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$ felírásával tehát a hatás és a következménye kapcsolható össze. Ez a felismerés egyes feladatok megoldását egyszerűbbé teheti.

5. Az erővektorral kapcsolatos elnevezések tekintetében némi eltérés van a fizikai és műszaki könyvek szóhasználatában. A mérnöki gyakorlatban az erő irányán csak a hatásvonalnak mint egyenesnek a geometriai helyzetét értik. Azt, hogy a közös hatásvonalú erők jobbra vagy balra mutatnak, ellentétes értelműnek nevezik.

6. Eddig a lendületváltozásnak csak olyan eseteit vizsgáltuk, amelyeknél az erőhatás érvényesülése közben a test tömege állandó volt. A test lendülete nemcsak sebességváltozással, hanem a test tömegének megváltozása miatt is változhat (pl. az öntözőkocsinál): $\Delta I = (\Delta m) \cdot v$.

7. Az eddig megoldott feladatok legtöbbször vagy csak a mozgásra vonatkoztak (kinematikai feladatok), vagy csak a dinamikai fogalmakat erősítették. A következőkben olyan feladatokat is megoldunk, amelyekben a mozgások leírása és a mozgásállapot megváltozását előidéző kölcsönhatások jellemzői együtt szerepelnek.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Fel lehet-e gyorsítani ugyanakkora sebességre egy testet két különböző nagyságú erőhatással? Indokoljuk meg válaszunkat!

2. Egy ablaknak ugyanaz a labda kétszer ütközik merőlegesen. Először nem törik be az ablak, másodszor azonban betörik. Hogyan lehetséges ez?

3. Egy futball-labda és egy medicinlabda ugyanakkora sebességgel ütközik valakinek. Melyik löki meg nagyobb erővel az illetőt? Indokoljuk meg a választ! Gondolatban (tudatosan vagy ösztönösen) mit lehet feltételezni a két labda lefékeződésének időtartamáról?

4. Hasonlítsuk össze a $2F$ nagyságú erőhatás által a $2m$ tömegű testen létrehozott lendületváltozást az F nagyságú által az m tömegű testen ugyanannyi (Δt) idő alatt létrehozott lendületváltozással! Van-e felesleges adat a feladatban?

5. Ugyanazon a testen hozhat-e létre:

   a) két különböző nagyságú erőhatás ugyanakkora lendületváltozást;
   b) két egyenlő nagyságú erőhatás különböző nagyságú lendületváltozást?

   Csak ugyanarra a testre érvényesek ezek a megállapítások?

6. Két különböző tömegű testen hozhat-e létre:
   - két egyenlő nagyságú erőhatás egyenlő nagyságú lendületváltozást;
   - két egyenlő nagyságú erőhatás különböző nagyságú lendületváltozást?

   Az egyértelmű válaszhoz szükséges-e a testek tömegéről bármit is mondani az 5. és 6. kérdésben?

7. Egyenlő nagyságú erőhatások ugyanannyi ideig gyorsítanak egy testet és a nála kétszer, háromszor nagyobb tömegű másik két testet. Hasonlítsuk össze a lendületváltozásaikat! Hasonlítsuk össze a sebességváltozásaikat!

FELADATOK

1. Mekkora változatlan erőhatás hozhat létre 10 másodperc alatt egy 4 kg tömegű testen 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességváltozást? Oldjuk meg a feladatot kétféle módon!

MEGOLDÁS:

$\Delta t = 10\ \text{s}$
$m = 4\ \text{kg}$
$\Delta v = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$F = ?$

a) $F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \frac{4\ \text{kg} \cdot 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\ \text{s}} = \mathbf{6\ N.}$

b) Ha 10 s alatt 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ a sebességváltozás, akkor 1 s alatt 1,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, tehát a gyorsulás: $a = 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. $F = m \cdot a = 4\ \text{kg} \cdot 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{6\ N.}$

2. Mekkora a lendületváltozása annak a testnek, amelyet 20 N nagyságú erőhatás 5 másodpercig gyorsított? Miért nem hiányzik itt a feladat megoldásához a test tömegének ismerete?

3. Mennyi ideig gyorsította a 10 N nagyságú erőhatás azt a 20 kg tömegű, nyugalomból induló testet, amelynek végsebessége 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

4. A 0,5 kg tömegű labdát 0,04 s-ig tartó rúgás gyorsítja fel 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességre. Mekkora a rúgás átlagereje? Miért átlagerőt kérdezünk?

5. Egy nyugalomból induló, 800 kg tömegű személyautót 1000 N nagyságú erőhatás 10 s-ig gyorsít. Mekkora lesz az autó sebessége és lendülete? Mekkora utat tesz meg az autó gyorsulása közben?

6. Mennyi ideig gyorsult az a 100 g tömegű kavics, amelyet 10 N átlagerővel úgy dobtak el, hogy sebessége az eldobás pillanatában 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ volt? Mennyi a kavics lendülete az eldobáskor? Ezt milyen átlaggyorsulással érte el?

7. Egy nyugalomból induló, 120 kg tömegű motorkerékpárt 550 N nagyságú erőhatás 8 s-ig gyorsít. A motorkerékpár sebessége 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ lesz. Mekkora a motort vezető személy tömege?

8. Az 1500 kg tömegű test 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ állandó gyorsulással mozog. Mekkora a gyorsító erő nagysága?

9. Egy 2 kg tömegű, nyugalomból induló testet 60 N nagyságú erőhatás 10 másodpercig gyorsít. Mennyi lesz a test sebessége, és mekkora utat tesz meg gyorsulás közben?

10. Egy testet 20 N nagyságú erőhatás 5 másodpercig gyorsít. Eközben nyugalmi helyzetéből a test 3 méterrel mozdult el. Mennyi a test tömege, gyorsulása, és mennyi lesz a sebessége az 5. másodperc végén?

11. Mekkora állandó nagyságú fékezőerő éri a 1,5 kg tömegű és 6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel mozgó testet, ha az 9 másodperc alatt áll meg?

12. Álló helyzetéből mekkora állandó nagyságú erővel lehet 2 s alatt 10 m magasra emelni egy 50 kg tömegű testet?

13. Egy lift tömege 2000 kg. Mekkora erőhatással húzza ez a lift a tartókábelt, ha:

a) nyugalomban van?

b) 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással emelkedik?

c) 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással süllyed?

d) 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ változatlan sebességgel süllyed?

e) 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ változatlan sebességgel emelkedik?

f) Mekkora erőhatással húzza a kábel a liftet az előző (*a*–*e*) esetekben?

6.2. Erő-ellenerő. A mechanikai kölcsönhatás



82.1. *Miért mozdul el mindkét csónak?*

Amikor kezünkkel nyomjuk az asztal szélét, érezzük, hogy az is nyomja a kezünket. A jégen vagy görkorcsolyán álló két gyerek közül bármelyikük löki is meg a másikat, mindketten elmozdulnak. Abból, hogy mindkettőjüknek megváltozott a mozgásállapota, arra lehet következtetni, hogy mindkettőt érte erőhatás, tehát kölcsönhatásban voltak egymással. Az ilyen jelenségeket **mechanikai kölcsönhatásnak*** nevezzük.

Ha a felfújt, de be nem kötött léggömböt elengedjük, akkor az elrepül az egyik irányba, és közben a másik irányba kiáramlik belőle a levegő. A léggömb erőhatást fejt ki a benne levő gázra, a kiáramló gáz pedig azzal ellentétes irányú erőhatást a léggömbre. Így működnek a rakéták is.

Általánosan igaz az, hogy **amikor egy test erőhatást fejt ki egy másikra, akkor ez a másik test is erőhatást gyakorol az elsőre.** Két test kölcsönhatásánál fellépő egyik erőhatás jellemzőjét **erőnek***, a másikét **ellenerőnek*** nevezzük. (Az erő, ellenerő elnevezés szabadon választható.)

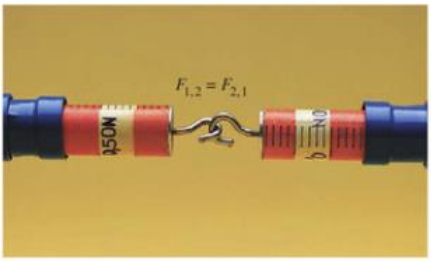
Ha két összeakasztott rugós erőmérőt széthúzunk, akkor azok egyenlő nagyságú erőket jeleznek. Az erők iránya ellentétes, mert az erőmérőket is ellentétes irányba húzzuk:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}.$$

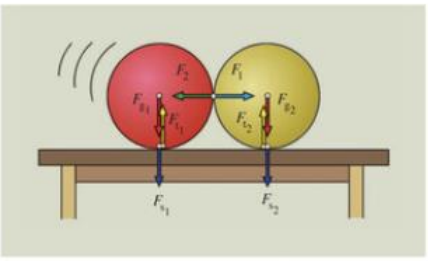
Ugyanabban a mechanikai kölcsönhatásban két erőhatás lép fel, ezek:
- **egyenlő nagyságúak;**
- **közös hatásvonalúak és ellentétes irányúak;**
- **egyik az egyik testre, másik a másik testre hat.**

Ez a hatás-ellenhatás törvénye*, amit másként Newton harmadik törvényének is szokás nevezni.

Eddigi tapasztalataink és tanulmányaink alapján kimondhatjuk, hogy egy test mozgásállapota csak egy (a közvetlen környezetében lévő) másik test vagy mező hatására változhat meg. Ilyenkor ugyanannyi ideig erre a másik testre vagy mezőre az első test visszahat, és így annak is megváltozik az állapota. Mechanikai kölcsönhatások vizsgálatánál nagyon fontos tisztázni, hogy melyik erőhatás melyik testet éri. **Egy test mozgásállapotát ugyanis csak az „őt" érő erőhatások változtathatják meg.** A test által kifejtett erőhatás nem a saját, hanem a másik test mozgásállapotát változtatja meg.



82.2. A kölcsönhatásban a két erőmérő egyenlő nagyságú erőt jelez



82.3. *Hány összetartozó erő és ellenerő ismerhető fel ezen az ábrán?*

MEGJEGYZÉSEK

1. A kölcsönhatást sok könyvben leszűkítve értelmezik, és csak az erőre és ellenerőre vonatkozó hatást-ellenhatást értik alatta. Általánosan igaz, hogy bármilyen változás csak kölcsönhatás közben jöhet létre. Párkölcsönhatás közben a két résztvevő állapotának megváltozása egyenlő mértékű és ellentétes értelmű.
2. A változásokról mindig azt mondtuk, hogy a közvetlen környezet hatására jöhetnek létre. Ez pontosabb megfogalmazásban azt jelenti, hogy kölcsönhatás csak érintkező testek és mezők között jöhet létre. Egy test távolról csak valamilyen közvetítő segítségével fejthet ki hatást egy másikra. **Közvetlen – közvetítő nélküli – távolhatás tehát nincs.** Ez jól kimutatható és jól értelmezhető a részecskeszerkezetű anyagnál, valamint a mágneses és elektromos jelenségeknél, amikor a hatást közvetítő szerepet a mezők töltik be.

   Mivel a gravitációs mező létezésének kísérleti fizikai bizonyítása eddig csak közvetett formában történt meg (Russel A. Hulse [rászl hálsz] és Joseph H. Taylor [dzsozef téjlor] 1974; felfedezésükért 1993-ban Nobel-díjat kaptak), a gravitációs jelenségeknél nem ennyire elfogadott a közelhatás ténye. Ezért van, aki pl. azt mondja: „A szabadon eső testeket a Föld vonzza".

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Ha az érett magrugó uborka kocsánya letörik, akkor abból messze kirepülnek a magok. Mi történik az uborkával?
2. Miért rúg hátra elsütésekor a puska? Mit tudunk a lövedék és a puska – elsütés utáni – sebességéről?
3. A személygépkocsi és a teherautó frontális ütközésekor a személyautó szokott jobban megrongálódni. Miért? Mit tudunk a két autót – az ütközés miatt – érő erőhatásokról?
4. Milyen erők lépnek fel a katedrán álló tanár és a katedra közötti kölcsönhatásban? Meg lehet-e mondani egyértelműen, hogy melyik hatást jellemzi itt az erő és melyiket az ellenerő?
5. Két ember 50-50 N erővel ellentétes irányba húzza ugyanazt a kötelet. Soroljuk fel az itt fellépő kölcsönhatásokat! Elszakad-e a kötél, ha csak 80 N terhelést bír el?
6. Egy falba vert szeghez erősített rugót valaki megnyújtva tart. Milyen kölcsönhatásokban vesz részt a rugó és a szeg? Mi az izomerő ellenereje? Mi a rugalmas erő ellenereje a rugó egyik, illetve másik végén? Kölcsönhatásban van-e egymással a szeg és az ember?

   Készítsünk rajzot erről az esetről, rajzoljuk be és nevezzük meg az erővektorokat!
7. Végezzünk el egy egyszerű rakétakísérleteket! Fújjunk fel egy luftballont, majd bekötés nélkül engedjük el! Mi az oka a látottaknak?
8. Egy „bordázott" aljú ásványvizes műanyag palack 3-4 bordájának mindig ugyanazon az oldalán (pl. mindegyik jobb oldalán) fúrjunk kis lyukat! Kössünk a palack nyakára zsineget! Az udvaron vagy a fürdőkád felett töltsünk néhány pohár vizet a palackba és a zsinegnél fogva emeljük fel! Figyeljük meg, mi történik a palackkal! Magyarázzuk meg a jelenséget!

   A gyakorlatban gyakran használnak ilyen elven működő öntözőfejeket (úgynevezett Segner-kerék). Nézzünk utána pl. az interneten, hogy ki volt Segner János András!

6.3. Több erőhatás együttes eredménye



84.1. Több erőhatás eggyel is helyettesíthető

Falun vagy fogathajtóversenyen még ma is látható lovas kocsi, amely lehet egy-, két-, három- (trojka) vagy négylovas fogat. Északon a szánkót sok kutya, esetleg helyettük egy rénszarvas húzza.

Tapasztalatból tudjuk, hogy – az ugyanazt a testet egyszerre érő – **több erőhatás helyettesíthető egyetlen olyan erőhatással, amelynek ugyanaz a következménye.** Az ilyen **helyettesítő erőhatást*** jellemző erőt **eredő erőnek*** szokás nevezni.

A több erőhatás következménye egyszerűbben vizsgálható, ha a több erőt egy eredő erővel helyettesítjük. Ezért célszerű megállapítani, hogy különböző esetekben hogyan határozható meg az eredő erő.

Amikor egy anyagi pontnak tekinthető testet csak egyetlen erőhatás ér (pl. szabadesés közben), akkor az anyagi pont mozgásállapota biztosan megváltozik.

Az asztalra helyezett könyvet egyszerre két erőhatás éri (a gravitációs és a tartóerő), mégis nyugalomban marad. Ez csak úgy lehet, ha a testet érő erőhatások kiegyenlítik egymás hatását.

Ha a testet érő erőhatások kiegyenlítik egymást, úgy tűnik, mintha nem is érné erőhatás a testet, vagyis az eredőjük nagysága nulla. Ilyen esetre azt szokás mondani, hogy a test a haladó mozgás szempontjából **egyensúlyban*** van.

Az egyensúlyban levő anyagi pont mozgásállapota változatlan, tehát vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

A KÖZÖS HATÁSVONALÚ ERŐK EREDŐJE

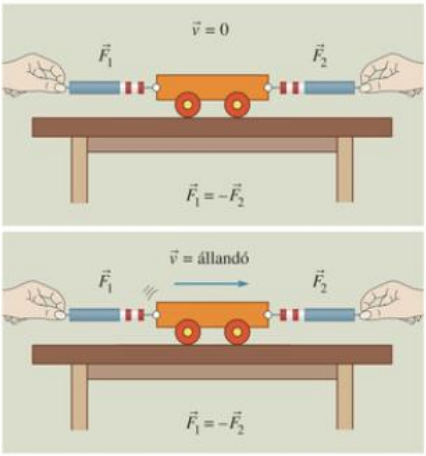
A) Egyenlő nagyságú, ellentétes irányú erők

Egy kiskocsit két rugós erőmérővel lehet úgy is húzni, hogy a kocsi nyugalomban maradjon. Ilyen esetben – ha a kocsi vízszintes felületen van – az erőmérőket egy vízszintes egyenes mentén ellentétes irányban úgy kell húzni, hogy azok egyenlő nagyságú erőket jelezzenek.

Egy jól csapágyazott kocsit két erőmérővel úgy is lehet ellentétes irányban húzni, hogy az egyenletesen mozogjon, tehát mozgás közben ne változzon a mozgásállapota. A két erőmérő ilyenkor is egyenlő nagyságú, közös hatásvonalú és ellentétes irányú erőket jelez.

Két erőhatás – a haladó mozgás szempontjából – **akkor egyenlíti ki egymást, ha:**

- **ugyanazt a testet érik;**
- **egyenlő nagyságúak;**
- **közös a hatásvonaluk, de irányuk ellentétes.**



84.2. *Mit tudunk a testet érő erőhatásokról, ha egy test nyugalomban van vagy egyenes mentén egyenletesen mozog?*

B) Nem egyenlő nagyságú, ellentétes irányú erők

Lehet egy kiskocsit két különböző nagyságú és ellentétes irányú erőhatással is húzni. Ilyen esetben a kocsi gyorsulva mozog a nagyobb erőhatás irányában. Ekkor a kocsi mozgásállapota változik, tehát a két erő eredője nem nulla.

Tapasztalat szerint: a két, közös hatásvonalú, ellentétes irányú és nem egyenlő nagyságú erő eredőjének:
- nagysága a két erő különbségének a nagysága ($F_e = |F_1 - F_2|$),
- iránya a nagyobb erő iránya,
- hatásvonala a közös hatásvonal.

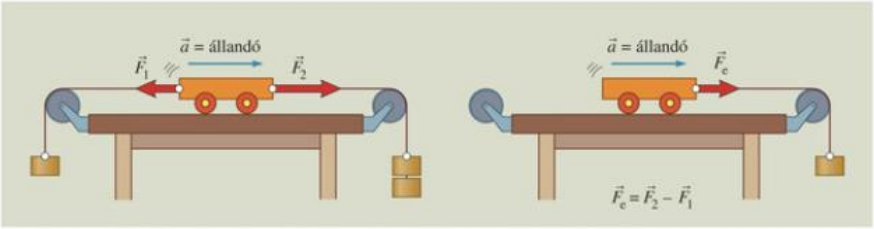
C) **Az egyirányú erőhatások** a tapasztalat szerint erősítik egymást.

Ilyen esetben az eredő erő:
- nagysága az egyes erők nagyságának összege,
- iránya a közös irány,
- hatásvonala a közös hatásvonal.

D) Több ellentétes irányú erőhatás

Kötélhúzásnál a kötelet gyakran többen is húzzák, tehát a kötelet több, közös hatásvonalú erőhatás éri. Ilyen esetben célszerű az egyik irányba mutató erőket pozitív, az ezzel ellentétes irányúakat negatív előjellel megkülönböztetni.

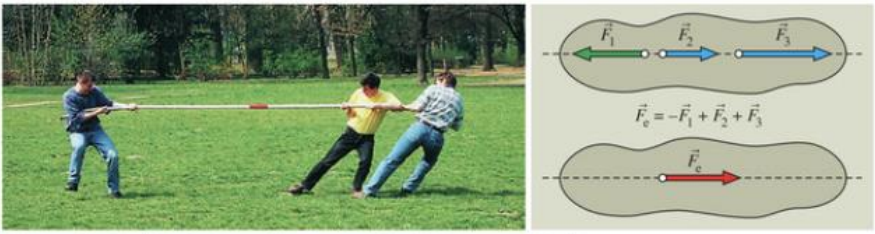
A közös hatásvonalú erők eredőjének:
- **nagysága az egyes összetevő erők (előjeles) összege,**
- **irányát az erők összegének előjele mutatja meg,**
- **hatásvonala a közös hatásvonal.**



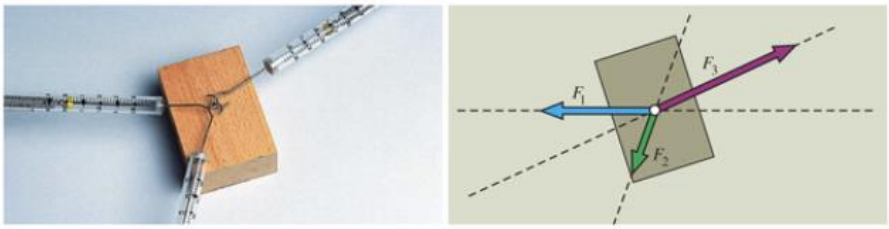
85.1. A testet érő erőhatások helyettesíthetők egyetlen erővel, az eredő erővel (*B* rész)



85.2. Az egyirányú erők összeadódnak (*C* rész)



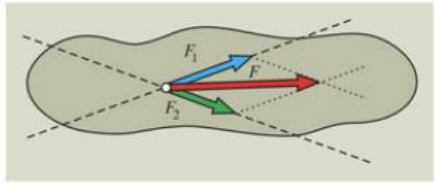
85.3. Az ellentétes irányú erők eredője az összetevők előjeles összege (*D* rész)



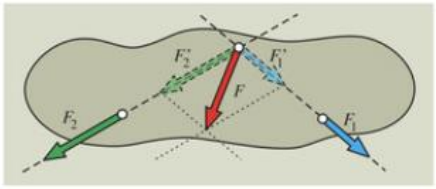
86.1. Ez a három erőhatás kiegyenlíti egymást: bármely kettő eredője egyenlő nagyságú és ellentétes irányú a harmadikkal



86.2. Két, egymást metsző hatásvonalú erőhatás megváltoztatja a test mozgásállapotát. *Ilyenkor merre gyorsul a test?*



86.3. Két, egymást metsző hatásvonalú erő eredője a paralelogramma módszerrel megszerkeszthető



86.4. Az egymást metsző hatásvonalú erők közös támadáspontba tolhatók, és ott összegezhetők

AZ EGYMÁST METSZŐ HATÁSVONALÚ ERŐK EREDŐJE

Ha két gyerek – egyetlen rúdjánál fogva – húz egy kézikocsit, az általuk kifejtett erőhatások iránya széttartó. Ilyen esetben az erők hatásvonalai metszik egymást. Az egymást metsző hatásvonalú erők is helyettesíthetők egyetlen erővel, tehát ezeknek is van eredőjük.

Tudjuk, hogy két, egymást metsző irányú vektor vektori összege paralelogramma módszerrel meghatározható. Mivel az erő is vektormennyiség, az eredő vektor is megszerkeszthető ezzel a módszerrel. Ez az állítás kísérletekkel is igazolható.

A több, közös támadáspontú erő eredője a paralelogramma módszer – páronként ismétlődő – többszöri alkalmazásával szerkeszthető meg. Ez **a dinamika IV. axiómájának** is nevezett tétel azt jelenti, **hogy ha egy anyagi pontot egyidejűleg több erőhatás ér, ezek együttes hatása egyenértékű a vektori eredőjüknek megfelelő hatással:**

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Ez formailag a II. és IV. axióma egyesítése, amit a **dinamika alapegyenletének*** szokás nevezni. Az előzőekből az is következik, hogy **az anyagi pontot egy időben érő erőhatások egymást nem befolyásolják, következményük zavartalanul érvényesül.** Ez a megállapítás az **erőhatások függetlenségének elve*.**

MEGJEGYZÉSEK

1. Az egymást kiegyenlítő erőhatásoknál azért mondtuk, hogy mozgás szempontjából úgy tűnik, mintha nem érné a testet erőhatás, mert ilyen esetben a testek mozgásállapota ugyan nem változik, de megnyúlásuk vagy összenyomódásuk jelezheti az erőhatások létezését.

2. Ha az egy testet érő több erő vektori összege nulla, akkor csak az anyagi pontnak tekinthető test van biztosan egyensúlyban, ugyanis – mint később látni fogjuk – a kiterjedt test forgásállapota ilyen erők esetében is megváltozhat.
3. A nyugalom és az egyensúly nem azonos jelentésű (szinonim) fogalom, mert egy test lehet nyugalmi és (egyenes vonalú egyenletes) mozgási egyensúlyban is.
4. Az erőhatások következményeinek vizsgálatakor (pl. feladatok megoldásakor) vagy csak a valóban meglevő erőket, vagy csak az ezeket helyettesítő eredő erőt szabad figyelembe venni. Mindkettőt figyelembe véve megduplázzuk a tényleges hatásokat.
5. *Az egyensúlyban van* megállapítást testre és erőhatásokra is szoktuk használni attól függően, hogy a test állapotát vagy az erőhatások viszonyát akarjuk-e hangsúlyozni.
6. Az egy kölcsönhatásban fellépő két erőhatás és az egymást kiegyenlítő, egymással egyensúlyban levő két erőhatás könnyen összetéveszthető, mert több meghatározójuk azonos (egyenlő nagyságú, ellentétes irányú, közös hatásvonalú). A közöttük levő lényeges eltérés – hogy két különböző vagy egy azonos testet érnek-e – biztos alap a megkülönböztetésükre.
7. Newton I., valamint II. és III. törvényét a dinamika I., II. és III. axiómájának is szokás nevezni. Ebben az elnevezési rendszerben az erőhatások függetlenségének elve a IV. axióma.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Kiegyenlíthetik-e egymást a két test kölcsönhatásakor fellépő erőhatások? Miért?
2. Az egyik végén felerősített csavarrugó hossza megváltozik, ha egy testet erősítenek az alsó végére. Ábrázoljunk egy ilyen esetet! Rajzoljuk be az ábrába és nevezzük meg a rugó, illetve a test kölcsönhatásában fellépő erőket, valamint (más színnel) a testet érő összes erőt!
3. Merre indul el egy kézikocsi, ha két ember széttartó irányba húzza?
4. Mi a feltétele annak, hogy az anyagi pontnak tekinthető test egyensúlyban legyen? Mit tudunk az egyensúlyban levő anyagi pont mozgásállapotáról?
5. Mozoghat-e egy test gyorsulás nélkül, ha erőhatások érik? Lehet-e nyugalomban az a test, amelyet erőhatás ér?
6. Helyes-e ez a kijelentés? A test mozgása mindig olyan irányú, mint a testet érő erők eredője.
7. Egy test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Hogyan mozog attól a pillanattól kezdve, hogy két újabb erőhatás éri, ha ezek egyenlő nagyságúak, ellentétes irányúak és közös hatásvonalúak? Megváltozik e két újabb erő miatt a testet érő erők eredője?
8. Egy test kelet felé mozog és nyugat felé gyorsul. Lehetséges ez? Ha igen, milyen irányú a testet érő erőhatás? Hogyan fogalmazhatnánk meg közérthetőbben ezt a kérdést?
9. Vigyázzunk, a következő kérdés félrevezető! Miért tudja megindítani a ló a szánkót (hiszen amekkora erővel húzza a ló előre a szánkót, ugyanakkora erővel húzza vissza a szánkó a lovat)? Miért tud a ló előre haladni, hiszen a szánkó visszafelé húzza?

FELADATOK

1. Két, egymásra merőleges erőhatás közül az egyik 4 N, a másik 3 N nagyságú. Mekkora az eredőjük? (Szerkesztéssel, és ha tudjuk, számolással is határozzuk meg az eredő nagyságát.)
2. Egy 2 N és egy 5 N nagyságú erő hatásvonala 60 fokos szöget zár be egymással. Szerkesszük meg az eredő erőt, és mérjük meg a nagyságát!
3. Két 10 N nagyságú erő hatásvonala 120°-os szöget zár be egymással. Mekkora az eredőjük?
4. Lehet-e két erő eredőjének nagysága kisebb, mint bármely összetevőjének a nagysága? Miért?

7. Különféle mozgások dinamikai feltétele

Eddig azt tapasztaltuk, hogy a mozgó testek (anyagi pontok) mozgása sokféle lehet (egyenes és görbe vonalú; egyenletes és változó stb.). Azt azonban mindig igaznak találtuk, hogy mozgásállapot-változás csak mechanikai kölcsönhatás eredménye lehet. Ez azt jelenti, hogy egy test mozgása és mozgásállapota csak a környezete által kifejtett, közvetlen erőhatás vagy erőhatások következtében változhat meg. Foglaljuk össze, hogy a különböző mozgásokat és mozgásállapot-változásokat milyen erőhatások változtatnak meg, hoznak létre.

A) **A testek csak akkor maradhatnak egyenes pályán, ha az őket érő erők eredőjének hatásvonala egybeesik a pálya egyenesével, vagy az eredő erő nagysága nulla.**

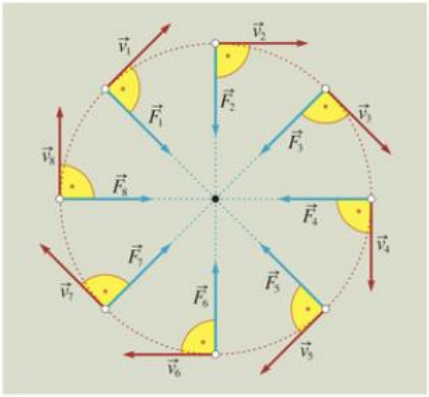
B) A nyugalomnak és az egyenes vonalú egyenletes mozgásnak az a (dinamikai) feltétele, hogy **a testet érő erők eredőjének nagysága nulla** legyen. Ez azt jelenti, hogy ilyen esetben a testet érő erőhatások kiegyenlítik egymást, mivel az úgynevezett „magára hagyott test" – amit semmilyen erőhatás sem ér – a valóságban nem létezik.

C) **A testek mozgása akkor egyenes vonalú és egyenletesen változó, ha a testet érő erők eredőjének nagysága változatlan, és hatásvonala megegyezik a pálya egyenesével.**

D) Az **egyenletes körmozgásról** tudjuk, hogy változó mozgás, tehát van gyorsulása, mert kerületi sebességének iránya pillanatról pillanatra változik. Az egyenletes körmozgás centripetális gyorsulása változatlan nagyságú, és mindig a körpálya középpontja felé mutat, tehát merőleges a kerületi sebességre. Ezt a gyorsulást is természetesen valamilyen erőhatás hozza létre.



88.1. Dávid parittyával forgatta meg a követ



88.2. Centripetális erő

A parittya bőrszíjai forgatás közben körpályára kényszerítik a bele helyezett kavicsot. Amikor a kalapácsvető a kalapácsot forgatja, a vasgolyót – egy acélsodrony segítségével – a körpálya középpontja felé húzza.

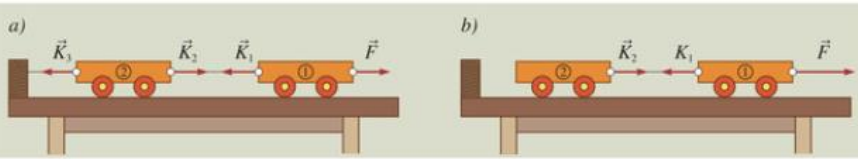
Az egyenletes körmozgást fenntartó erőhatások eredője állandó nagyságú és a körpálya középpontja felé mutat. Ezért az ilyen erőhatásokat jellemző erőt **centripetális erőnek*** nevezzük, és F_{cp}-vel jelöljük.

A centripetális erő nagysága – a centripetális gyorsulás ($a_{cp} = \frac{v^2}{r}$) ismeretében – Newton II. törvénye alapján kiszámítható:

$$F_{cp} = m \cdot a_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

Az anyagi pont akkor végez egyenletes körmozgást, ha az őt érő erők eredője változatlan nagyságú, és mindig a körpálya középpontja felé mutat, tehát merőleges a kerületi sebességre.

E) Az előzőekben egyetlen olyan anyagi pontnak tekinthető test mozgását vizsgáltuk, amelyet egy vagy több erőhatás is érhetett. Előfordulhat azonban olyan feladat is, amelyben – egymással kölcsönhatásban levő – több testből álló rendszer egészének vagy egyes elemeinek kell megvizsgálni a mozgását. Nézzünk meg egy ilyen esetet!



89.1. Kikötött kocsisornál (*a)* eset): $K_1 = K_2 = K_3 = F$. Mozgó kocsiknál (*b)* eset) a $K_1 = K_2 < F$

Vízszintes sima felületen egy m_1 és egy m_2 tömegű kiskocsit egymás után sorba állítottunk. A kiskocsikat – hozzájuk képest elhanyagolható tömegű és nyújthatatlan fonállal – összekötöttük. Az első kocsit F erővel húzzuk a fonalak irányának megfelelően. Vizsgáljuk meg – elhanyagolható súrlódás esetében – a kocsikat érő erőhatásokat, és a kocsik mozgását két különböző esetben! Mivel a tartóerő és gravitációs erő összege kocsinként nulla ($F_{\text{tart}_1} - m_1 \cdot g = 0$ és $F_{\text{tart}_2} - m_2 \cdot g = 0$), ezek az erőhatások a kocsik mozgását nem befolyásolják. A mozgást befolyásoló erőhatások erővektorai egy vízszintes egyenesbe esnek, irányuk – a pozitívnak választott mozgásirányhoz viszonyítva – előjellel megadható.

a) A hátsó kocsit kössük ki egy olyan testhez, amely nem mozdulhat el! Ebben az esetben a két kocsi természetesen nyugalomban marad. A két kocsira külön-külön igaz, hogy az őt érő erőhatások kiegyenlítik egymást. Ez csak úgy lehet, ha a kötelekben „ébredő erők" ($\vec{K}_1$, $\vec{K}_2$, $\vec{K}_3$) mindegyike egyenlő nagyságú az $\vec{F}$ húzóerővel.

Ez a megállapítás matematikai meggondolás alapján is belátható. Mindkét kocsira felírva a dinamika alaptörvényét azt kapjuk, hogy: $F - K_1 = m_1 \cdot a$, illetve $K_2 - K_3 = m_2 \cdot a$. Mivel $a = 0$, ezért $F = K_1$, illetve $K_2 = K_3$. Az elhanyagolható tömegű kötélben csak egyenlő nagyságú erők léphetnek fel, így $K_1 = K_2$, tehát $K_1 = K_2 = K_3 = F$.

b) Oldjuk el a hátsó kocsit tartó fonalat! Így a két kocsi egyenlő gyorsulással mozoghat ($a_1 = a_2 = a$), hiszen az összekötő fonál nyújthatatlan. Mivel az F húzóerőnek mind a két kocsit gyorsítania kell, a K_2 kötélerőnek viszont csak a hátsót, így a húzóerő és a kötélerő nem lehet egyenlő nagyságú. A kocsikra most is külön-külön felírva a dinamika alaptörvényét: $F - K_1 = m_1 \cdot a_1$, illetve $K_2 = m_2 \cdot a_2$, és $K_1 = K_2$; $a_1 = a_2$. Figyelembe véve, hogy az m_1 és m_2 ismert (előre megmérhető), a $K_1 = K_2 = K$, illetve az $a_1 = a_2 = a$ jelölések bevezetésével felírható:

$$F - K = m_1 \cdot a, \quad K = m_2 \cdot a.$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy:

$$F = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

A tömegek és az a ismeretében F és K is kiszámítható.

MEGJEGYZÉSEK

1. Ha egy mozgásról azt akarjuk megtudni, milyen erőhatások hozzák létre, a kérdést úgy szokás feltenni: „Mi a dinamikai feltétele annak, hogy … mozgás jöjjön létre?"
2. A kötelet csak húzni lehet, így vele csak kötélirányú erőt lehet kifejteni. Ha pl. egy csigán átvetett fonálra vonatkozó erőket írunk be a két egymás után kötött test alaptörvényébe, akkor – bár a fonal két végén ezek az erők lehet, hogy merőlegesek egymásra – egy egyenesbe eső erőként irányukat előjellel adhatjuk meg.
3. A kézi meghajtású köszörűhöz gyártott követ nem szabad a gyorsan forgó elektromos készülékre felerősítve használni. Az ilyen kő ugyanis nem bírja ki a gyors forgatást és szétrobban, mert a részecskéi közötti vonzóerő nem elég nagy a gyors forgáshoz szükséges centripetális erő biztosításához.
4. Láttuk, hogy a centripetális gyorsulást többféle módon is ki lehet számítani. Ezt és az $F = m \cdot a$ összefüggést felhasználva a centripetális erő is többféle módon számítható, pl.:

$$F_{\text{cp}} = \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot v \cdot \omega = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r.$$

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Hogyan változik a körmozgást végző anyagi pont keringési ideje, fordulatszáma, centripetális gyorsulása és a centripetális erő, ha nő az anyagi pont kerületi sebessége?
2. Hogyan változik a körmozgást végző anyagi pont kerületi sebessége, centripetális gyorsulása és a centripetális erő, ha:
   a) nő a fordulatszám? *c)* csökken a fordulatszám?
   b) nő a keringési idő? *d)* csökken a keringési idő?
3. Amikor a sáros útról betonútra felhajtó autó gyorsul – egy meghatározott sebességnél –, a kerekeiről elkezdenek lerepülni a sárdarabok. Miért, és miért csak akkor?
4. „Csapós" játéknál az egymás kezét megfogva összekapaszkodó gyerekek közül az első helyre beállt legerősebb elkezd futni és magával húzza a többit, majd hirtelen bekanyarodik. A sorban egymás után következő gyerekek egyre nagyobb sugarú pályán körmozgásra kényszerülnek. A sor előbb-utóbb vagy elszakad valahol, vagy a sor másik végén levő (csapónak nevezett) gyerek elesik. Miért?

FELADATOK

1. Egy gyerek 10 dkg tömegű kavicsot helyezett a 30 cm-es szárú parittyájába. Az ujja körül 2 másodperc alatt négyszer forgatta meg vízszintes síkban a parittyát, mielőtt kilőtte belőle a követ. Mekkora erővel tartotta a parittya szárát a gyerek?
2. Egy 0,5 kg tömegű játék villanymozdony az 1 m sugarú körpályán változatlan nagyságú sebességgel mozog, és minden teljes kört 10 másodperc alatt fut végig. Mekkora erőhatással kényszeríti körpályára a sín a mozdonyt?
3. Mekkora lehet az a legnagyobb fordulatszám, amellyel az 1 kg tömegű testet 50 cm hosszú zsinegen vízszintes, síkos felületű asztalon forgathatunk, ha a zsineg 20 N nagyságú feszítőerőt bír ki?
4. Egy vízszintes síkban mozgó testet érő erők eredője állandó nagyságú, de sebességének nagysága mégsem változik. Milyen pályán és hogyan mozog ez a test? Mit tudunk a mozgásról, ha a sebesség iránya 2 másodpercenként azonos?
5. Vízszintes sima felületen (nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű) fonállal két egymáshoz kötött hasábot 10 N nagyságú erővel húznak. Az első hasáb tömege 2 kg, a másodiké 3 kg. Mekkora erővel húzza a fonál a második hasábot, és mekkora gyorsulással mozog ez a rendszer, ha a súrlódástól eltekinthetünk?
6. Sima, vízszintes felületű asztalon egymás mellé helyeztek egy 3 kg és egy 5 kg tömegű kockát. A hátul levő 3 kg-os testet 40 N nagyságú erővel tolják. Mekkora gyorsulással mozog a két egymáshoz nyomódó test, ha a súrlódástól eltekintünk? Ebben az esetben mekkora erővel nyomják egymást a testek?
7. Állócsigán átvetett kötél egyik végén 8 kg, a másik végén 10 kg tömegű test van. Hogyan mozog ez a két testből álló rendszer, ha a súrlódás, illetve a csiga és a kötél tömege elhanyagolható? Mekkora erőhatás feszíti a kötelet?
8. Állócsigán átvetett kötél két végén két különböző tömegű test van. A két test tömege együtt 60 kg. A magára hagyott rendszer egyik eleme 24 m magasról 8 másodperc alatt ér le a földre. Melyik test mozog a föld felé? Mekkora tömegű külön-külön a két test? Mekkora mozgásuk közben a kötélerő? Mekkora a rendszer gyorsulása és pillanatnyi sebessége az egyik test földet érésekor? Mekkora a kisebb tömegű testet érő erők eredője, amikor a rendszer nyugalomban van? Mekkora volt ekkor a kötélerő?

8. Kényszererők és meghatározásuk

Az elhajított testek vagy a bolygók **szabad mozgást**** végeznek, mert lehetséges pályájukat nem korlátozzák az őket érő erőhatások, amelyek jellemzői az ún. **szabaderők**.** A fonálinga lengése vagy az asztalon guruló golyó mozgása azonban **kényszermozgás**.** A nyújthatatlan fonál, illetve a merev asztallap ugyanis adott görbén, illetve felületen való mozgásra kényszeríti a testet.

A kényszerítő hatást kifejtő testet (pl. fonalat, asztallapot stb.) kényszerítőnek, röviden **kényszernek**,** az általa kifejtett erőt pedig **kényszererőnek**** szokás nevezni.

A kényszererő mindig a szabaderő által a kényszeren létrehozott kicsiny, alig érzékelhető alakváltozás, deformáció miatt lép fel. **A kényszer mindig alkalmazkodik a külső szabaderőkhöz.** Az asztal például mindig akkora erőhatást fejt ki a ráhelyezett testre, amekkora a test egyensúlyának biztosításához szükséges.

Mivel a kényszer a testnek csak a „kijelölt" pályagörbe elhagyását, vagy a felületen való áthatolását akadályozza meg, nincs szerepe a pályagörbén, illetve a felületen történő mozgásban. Ez azt jelenti, hogy **a kényszererő mindig merőleges a kényszer görbéjére vagy felületére.**

A KÉNYSZERERŐK MEGHATÁROZÁSA

A kényszer elképzelhető úgy is, mintha a testet érő szabaderőkön kívül egy tetszőleges eredetű $\vec{K}$ erő is érné a testet. Így a dinamika alapegyenlete a következő formában írható fel:

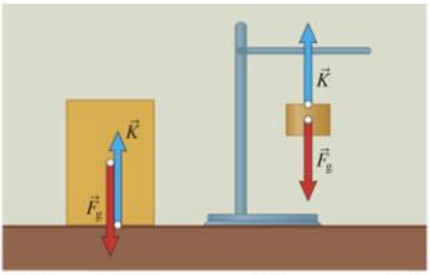
$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n + \vec{K}.$$

Az egyes esetekben fellépő kényszererő nagyságát tehát a kényszer által meghatározott feltételek és az ismert szabaderők segítségével meg lehet határozni. Ezt felhasználva állapítsuk meg néhány egyszerű, de gyakran előforduló, és ezért fontos kényszererő nagyságát!

***A)* A vízszintes felületre helyezett, nyugalomban levő testet** két erő éri, a gravitációs erő ($\vec{F}_g$) és a vele ellentétes irányú tartóerő, ami kényszererő ($\vec{K}$).

Felírva a dinamika alapegyenletét a testre:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_g + \vec{K}.$$



91.1. A nyugvó, alátámasztott vagy felfüggesztett testeknél: $\vec{F}_g = -\vec{K} = -m \cdot \vec{g}$

Mivel $a = 0$, az $\vec{F}_g + \vec{K} = 0$, amiből következik, hogy:

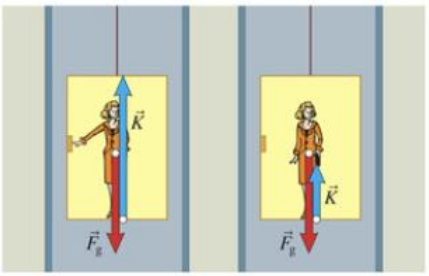
$$\vec{K} = -\vec{F}_g = -m \cdot \vec{g}.$$

A vízszintes felületre helyezett, nyugalomban levő testet érő kényszererő nagysága tehát megegyezik a gravitációs erő nagyságával, iránya ellentétes annak irányával.

A nyújthatatlan fonálon függő testet érő kényszererő is hasonló módon számítható ki, mint azt a nyugalomban levő, vízszintes lappal alátámasztott testnél láttuk. E két esetben a kényszererő a test súlyának az ellenereje.

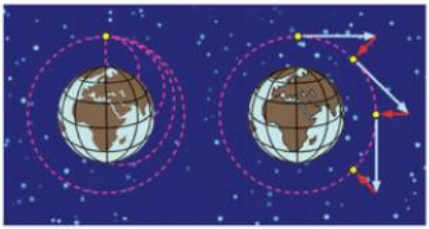
***B)* A gyorsulva mozgó liftben levő testet,** pl. egy embert is ér olyan hatás, amelynek jellemzője a kényszererő, ennek nagysága attól is függ, hogy a lift gyorsulva emelkedik vagy süllyed. Ilyen esetben is igaz, hogy a testet két erőhatás éri, így:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_g + \vec{K}.$$

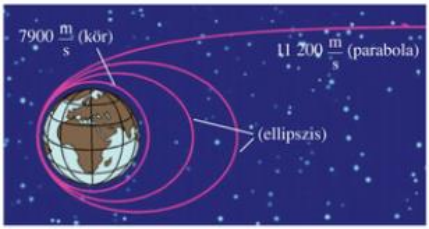


91.2. *Állapítsuk meg a berajzolt erők alapján, hogy merre gyorsul a lift!*

3D



92.1. Az űrhajó szabadeséssel „körbe esi" a Földet



92.2. A Földről kilőtt rakéta pályája a kilövés irányától és sebességétől függ

Mivel a liftben levő testek mozgása egy függőleges egyenes mentén történik, a leírásnál felhasznált vektorok ($\vec{K}, \vec{F}_g, \vec{a}, \vec{g}$) előjeles mennyiségekként is kezelhetők. Vizsgálatunkban a mozgás irányát válasszuk pozitív iránynak!

1. A lift felfelé mozog. A dinamika alapegyenlete:

$$m \cdot a = K - F_g \rightarrow K = F_g + m \cdot a = m \cdot (g + a).$$

A test súlya, mint a K kényszererő ellenereje ugyanilyen nagyságú:

$$G = m \cdot (g + a).$$

A gyorsulva haladó test gyorsulása pozitív, a lassulóé negatív. Így a test súlya a felfelé gyorsuló testnél nagyobb, a felfelé lassuló testnél pedig kisebb, mint a gravitációs erő.

2. A lift lefelé mozog. A dinamika alapegyenlete:

$$m \cdot a = F_g - K \rightarrow K = F_g - m \cdot a = m \cdot (g - a).$$

Ebből következik, hogy a test súlya a lefelé irányuló gyorsuló mozgásnál kisebb, a lefelé irányuló lassuló mozgásnál nagyobb, mint a gravitációs erő.

Ha a lefelé mozgó test gyorsulása eléri a g értéket, akkor:

$$K = G = m \cdot (g - g) = 0,$$

tehát nincs kényszererő, és így a testnek nincs súlya (pl. elszakad a lift kötele). Ezt nevezzük súlytalansági állapotnak.

A súlytalanság nem csak függőleges irányú mozgásnál következhet be. A bármilyen irányba elhajított test is súlytalansági állapotban van, mert közben szabadon is esik. A Föld körüli pályán keringő űrhajó mozgását is felfoghatjuk vízszintes hajításként, amelynél az űrhajó folyton szabadeséssel mozog a Föld felé. A Föld gömb alakja miatt azonban nem csapódik a földfelszínbe, hanem „körbe esi" a Földet.

MEGJEGYZÉSEK

1. A kényszer(erő) létezése esetében a szabaderők nem fejthetik ki zavartalanul a hatásukat. Ez azt jelenti, hogy a kényszer miatt a test állapotának (egyébként lehetséges) megváltozásai közül csak bizonyosak jöhetnek létre. Pl. egy ℓ hosszúságú fonálon függő golyó csak az $r = \ell$ sugarú gömbhéjon vagy annak belsejében mozoghat.
2. A kényszererők meghatározásánál a kényszer sajátos tulajdonságát, az ún. kényszerfeltételeket vettük figyelembe (pl. a merev síkok a szabaderők rájuk merőleges összetevőit nem engedik érvényesülni).

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Mire kényszeríti az üres félgömb a benne mozgó golyót?
2. Mire kényszeríti a „V" alakban felkötött két fonal azt a mozgó testet, amelyet a két fonal közös pontjára erősítettek?

3. Hogyan változik a lejtőn leguruló golyót érő kényszererő, ha a lejtő hajlásszögét növeljük, illetve akkor, ha csökkentjük?

4. Súlytalansági állapotban vannak-e a vízben lebegő testek?

FELADATOK

1. Egy testnek 100 g a tömege. Mennyi lesz a test súlya, ha a $g \approx 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulás negyedével

a) gyorsul felfelé?

b) gyorsul lefelé?

2. Egy űrhajós tömege 80 kg.

a) Mennyi a nyugalmi súlya a Földön?

b) Mennyi lesz a súlya, ha kilövés közben $3g$ gyorsulással emelkedik fölfelé?

c) Az űrhajóst kiképzése közben, vízszintes síkban, 5,8 m sugarú körpályán forgó centrifugával edzették. Milyen fordulatszámmal érték el a kilövésnél fellépő $3g$ terhelést?

d) Ugyanekkora fordulatszámnál mekkora lenne a terhelés a legalsó és a legfelső pontban, ha a centrifuga függőleges síkban forogna?

9. Tehetetlenségi erők (Kiegészítő anyag)

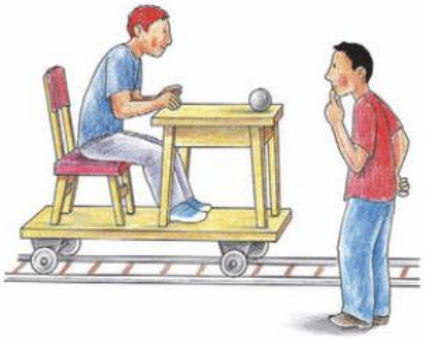
Ha egy vonat indul, fékez vagy kanyarodik, azt az utas magában a fülkében tapasztalt jelenségek alapján észreveszi és megkülönbözteti. **A gyorsuló vonatkoztatási rendszerek** tehát **nem egyenértékűek egymással,** hiszen **az inerciarendszerektől és egymástól is megkülönböztethetők.**

Mi eddig a jelenségeket, folyamatokat, változásokat mindig inerciarendszerre vonatkozóan vizsgáltuk. Így az ezekkel kapcsolatos megállapításaink is csak ilyen vonatkoztatási rendszerben érvényesek. A következőkben nézzük meg, hogy milyen változást okoz az események értelmezésében és leírásában, ha vonatkoztatási rendszernek valamilyen gyorsuló rendszert választunk.

A gyorsuló rendszerek közül az egyenes pályán, haladó mozgást végző gyorsuló vonatkoztatási rendszerek a legegyszerűbbek. Ezért mi is ezek vizsgálatával kezdjük.

A) **Az a_0 gyorsulással egyenes pályán mozgó vonatkoztatási rendszerek.** Az induló vonat mellett álló fizikus úgy látja, hogy a vonat asztalkáján levő golyó – amely súrlódás nélkül mozoghat – nyugalomban van. Az asztalka megy ki alóla a_0 gyorsulással. Ez így természetes – nyugtatja meg magát az állomáson álló megfigyelő –, hiszen a golyót érő erőhatások kiegyenlítik egymást. A golyó sebessége tehát nem változhat.

Ugyanezt az eseményt a vonatban, a menetiránnyal azonos irányba néző másik fizikus másként látja. Az előtte levő asztalkára helyezett m tömegű golyóról megállapítja, hogy $-a_0$ gyorsulással gurul felé. Mivel a megfigyelő inerciarendszerre vonatkozó fizikát tanult – és a vonat mozgásának irányát tekinti pozitívnak –, azt mondja: ezt a golyót $F_t = -m \cdot a_0$ erőhatás éri, ezért gyorsul így felém.



94.1. *Mikor lehet ugyanazt az eseményt másként látni?*

Az utazó fizikus meg akar bizonyosodni arról, hogy az előbb nem tévedett. Ezért kitámasztja a golyót egy rugós erőmérővel úgy, hogy a golyó nyugalomban maradjon. Az erőmérő $F = m \cdot a_0$ erőt mért, ami kiegyenlíti a testet érő – előbb feltételezett – ismeretlen erőt, tehát megerősíti az előző tapasztalatot.

A gond azonban az, hogy nem lehet megnevezni olyan testet vagy mezőt, amely ezt a feltételezett erőhatást fejtené ki a golyóra. Az ilyen tapasztalat csak a testek tehetetlensége miatt észlelhető a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben.

A jelenségek gyorsuló rendszerhez viszonyított leírásának két lehetősége van. Vagy „új fizikát alkotunk" a gyorsuló rendszerekre, amelyben más törvények lennének. Például ilyen: „Egy test akkor van nyugalomban, ha a testet érő erők eredője $F_e = m \cdot a_0$" (tehát nem nulla). Egyszerűbb azonban, ha úgy értelmezzük a jelenséget, mintha – a környezettel kölcsönhatásban fellépő valódi erőhatásokon kívül – egy feltételezett (fiktív), ún. **tehetetlenségi erővel** (F_t) jellemzett hatás is érné a testet:

$$\vec{F}_t = -m \cdot \vec{a}_0.$$

A jelenség leírásánál ezt figyelembe véve határozzuk meg pl. a testet érő erők eredőjét, vagy írjuk fel a dinamika alapegyenletét:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n + \vec{F}_t.$$

A tehetetlenségi erő – a különböző gyorsuló vonatkoztatási rendszerben – természetesen másmás formában írható fel.

A tehetetlenségi erő, mint láttuk, **nem valódi erő,** hisz nincs olyan test, ami kifejti, **nem kölcsönhatásban lép fel,** ezért **nincs ellenereje.** A tehetetlenségi erő csak egy számolási segédeszköz, amivel alkalmanként – az ilyen vonatkoztatási rendszerekkel kapcsolatos feladatoknál – könnyebben juthatunk az eredményhez. Alkalmazása

annak ellenére célszerű, hogy minden mechanikai feladatot meg lehet oldani tehetetlenségi erők nélkül is. (Lásd: a gyorsuló liftben fellépő kényszererők kiszámítását.)

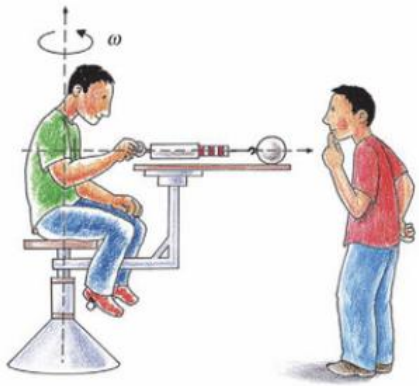
B) **Az egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszer** is gyorsuló rendszer. Vizsgáljuk meg, hogyan értelmezhető az ilyen rendszerhez viszonyítva nyugalomban levő test mozgásállapota. Rendeljünk a forgó rendszerhez egy olyan koordinátarendszert, amelynek egyik tengelye a függőleges helyzetű forgástengellyel egybeesik és felfelé mutat. A másik két, kifelé mutató vízszintes koordinátatengely közül az egyik menjen át a vizsgált testen.

A két megfigyelő közül az egyik most olyan forgózsámolyon ül, amely előtt egy asztal is van. Az asztalon egy rugós erőmérőhöz erősített golyó nyugszik. Az erőmérő másik végét a forgó rendszerben ülő megfigyelő tartja.

Az ω szögsebességgel forgó rendszer mellett álló másik megfigyelő az általa látott jelenséget a következő módon írja le.

A golyó egyenletes körmozgást végez, az ehhez szükséges centripetális erőhatást ($\vec{F}_r = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$) az erőmérő megnyújtott rugója fejti ki a golyóra.

A forgózsámolyon ülő megfigyelő szerint a golyó nyugalomban van, de ehhez az erőmérő által jelzett $m \cdot \omega^2 \cdot r$ nagyságú és a forgástengely felé irányuló erőhatásra van szükség. Ez azonban – a megfigyelő inerciarendszerre vonatkozó fizikai ismeretei szerint – csak úgy lehet, ha a golyót egy sugárirányú, kifelé mutató és $m \cdot \omega^2 \cdot r$ nagyságú (ismeretlen eredetű) erőhatás éri. Ez számára annál inkább hihető, mert – az erőmérő jelzésén kívül – izmaival is érzi, hogy vissza kell tartania a golyót.



95.1. A forgó rendszerben is fellép tehetetlenségi erő

Az egyenletesen forgó rendszerben levő megfigyelő most is két megoldás közül választhat a jelenség leírásában. Vagy ismét egy – az előzőtől is eltérő – „új" fizikát vezet be, vagy feltételezi, hogy egy ismeretlen eredetű, úgynevezett **centrifugális erő**

$$\vec{F}_{cf} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$$

éri az általa megfigyelt testet. Most is ezt az utóbbi megoldást célszerű választani, az előbb megismert okok miatt.

A centrifugális erő is tehetetlenségi erő, nem kölcsönhatásban lép fel, így nincs ellenereje. Csak akkor szabad számolási segédletként felhasználni, ha a jelenséget egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva akarjuk leírni.

MEGJEGYZÉSEK

1. A *centrifugális* latin eredetű szó, jelentése: középponttól távolító, középpontot elhagyó.
2. A tehetetlenségi erőkről eddig azt hangsúlyoztuk, hogy feltételezett erők, és csak számolási segédeszközt jelentenek. A teljességhez azonban hozzátartozik, hogy amennyiben gyorsuló rendszerben vagyunk, és abban figyeljük a jelenségeket, a tehetetlenségi erőknek megfelelő hatásokat ténylegesen érezzük. Amikor pl. autóbuszon utazunk, indulásnál, fékezésnél, kanyarodásnál úgy érezzük, mintha egy valóságos erőhatás igyekezne bennünket kibillenteni egyensúlyi helyzetünkből. Valójában az történik, hogy a testünk – tehetetlensége miatt – nem akarja követni az autóbusz mozgásának változását, ezt csak egy erőhatás következményeként hajlandó megtenni. Ezért az ilyen érzés nem jelenthet érvet a tehetetlenségi erők fiktív jellege ellen.

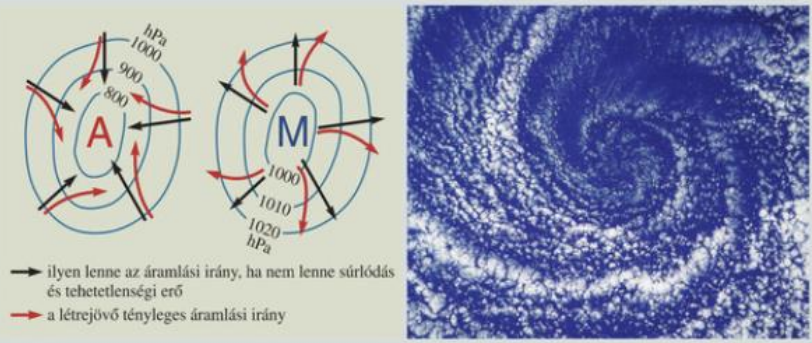
3. A tehetetlenségi erők térfogati vagy másként tömegerők, mert velük kapcsolatban olyan hatás érvényesül, mint pl. a gravitációs erőnél, amikor a test minden részecskéjénél fellép ez az erőhatás, így támadáspontjukat a test középpontjába szokás rajzolni.

4. Gyakran előfordul, hogy – a két erő elnevezésbeli hasonlósága miatt – egyesek tévesen azt hiszik, a centripetális és a centrifugális erő egymással erő-ellenerő viszonyban van.

5. Az egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerekben van olyan jelenség, amelynek értelmezéséhez egy másik tehetetlenségi erő – az ún. Coriolis-erő [korjolisz] – feltételezése is szükséges. A földrajzból megismert ciklonok és anticiklonok létrejötténél is szerepe van a Coriolis-erőnek. Hasonló ok miatt jön létre pl. a fürdőkádból kifolyó víz örvénylő mozgása is.

   A nem egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerekben számolni kell még egy negyedik tehetetlenségi erővel is.

3D



96.1. A légkörben kialakuló ciklonokat és anticiklonokat is a Föld forgása miatt fellépő tehetetlenségi erő okozza

6. A Föld egyenletesen forogva halad, így a rajta lezajló jelenségek pontos leírásánál figyelembe kell venni a centrifugális erőt is. Ennek ismeretében tudunk csak különbséget tenni a Földön levő testet érő gravitációs erő és a ténylegesen érvényesülő nehézségi erő között. (Ezt a kérdést később megvizsgáljuk.)

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Egy zsinegre erősített golyót vízszintes síkban egyenletesen forgatunk. Mi itt a centripetális erő ellenereje? Mi a válasz erre a kérdésre a forgó vonatkoztatási rendszerben?

2. Egy műrepülést végző pilóta függőleges síkban levő szabályos körpályán vezeti végig a gépét úgy, hogy feje mindig a kör középpontja felől van. A pálya melyik részén nyomódik a pilóta legjobban és legkevésbé az ülésbe? Miért?

3. Hogyan működnek a centrifugák és a mézpörgetők?

4. Keressünk az interneten olyan filmeket, amelyek a tehetetlenségi erőket szemléltetik vagy gyorsuló koordináta-rendszerben lezajló jelenségeket mutatnak be! Próbáljunk hasonló filmet készíteni!

10. Különféle erőhatások és erőtörvényeik

Az erő fogalmát az erőhatás következményéből alkottuk meg, ezért az erőt a lendületváltozás sebességének tekintjük, és legegyszerűbb esetben $F = \frac{\Delta I}{\Delta t}$, és ha m = állandó, akkor $F = m \cdot a$ képletekkel számíthatjuk ki. De az erő megadható az erőhatást kifejtő környezet fizikai sajátosságaira jellemző mennyiségekkel is. Ilyen pl. a rugalmas alakváltozás mértéke, az érintkező felületek minősége, a közeg és a test egymáshoz viszonyított sebessége stb. Az erővektort így meghatározó egyenletet **erőtörvénynek*** nevezzük. Az erőtörvények felismerése csak tapasztalat alapján lehetséges.

10.1. Rugalmas erő. Lineáris erőtörvény

A megfeszített rugók által kifejtett rugalmas erőhatás nagyságára eddig az általuk ellökött test mozgásállapot-változásából, vagy a rájuk akasztott test súlyából következtettünk.

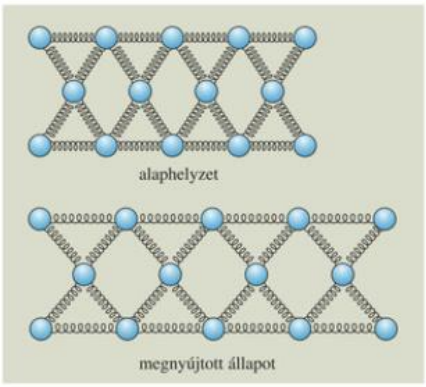
Most keressünk olyan megoldást, amely erőtörvény felírására alkalmas!

Rugalmas erőhatás rugalmas testek alakváltozása közben lép föl. A rugalmas erőt ezért a legegyszerűbben rugalmas testek (pl. csavarrugó) alkalmazásával célszerű vizsgálni.

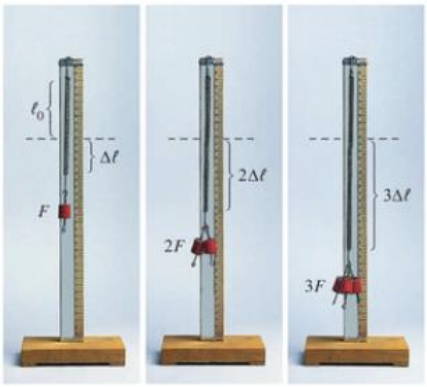
A szilárd halmazállapotú testek részecskéit – egy-egy hely közelében – a közöttük levő vonzó és taszító erőhatások tartják egyensúlyban. Amikor egy rugalmas testre kívülről erőhatást fejtünk ki, akkor az megnyúlik vagy összenyomódik (röviden: deformálódik). Részecskéi közben elmozdulnak eredeti helyükről. Ilyenkor a rugalmas anyag részecskéi közötti vonzó- és taszítóerők nem egyenlítik ki egymást. Ezeknek az alakváltozás miatt fellépő belső erőhatásoknak az eredője a rugalmas erőhatás, amellyel egyensúlyt tart az alakváltozást okozó külső erőhatás.

A külső erőhatást megszüntetve a rugalmas test részecskéi önmaguktól visszatérnek eredeti helyükre. Miközben megszűnik az alakváltozás, vele együtt megszűnik a rugalmas erőhatás is. Megfigyeléseinket szűkítsük le a hosszúságváltozásnál fellépő rugalmas erők vizsgálatára.

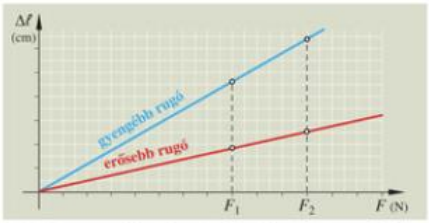
A rugós erőmérő készítésénél már láttuk, hogy egy rugó kétszer, háromszor nagyobb megnyújtásához vagy összenyomásához kétszer, háromszor nagyobb külső erőhatás kell.



97.1. A megnyújtott test részecskéi távolabb kerülnek egymástól. (szemléltető modell)



97.2. Minél nagyobb a megnyúlás, annál nagyobb a rugalmas erő



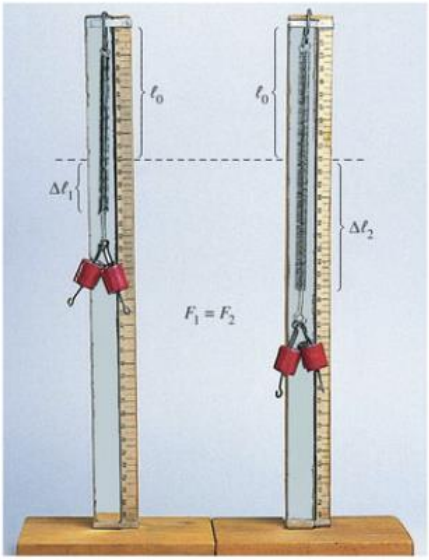
98.1. A megnyúlást okozó erőhatás egyenesen arányos a megnyúlással

A rugalmas erő nagysága egyenesen arányos a rugalmas test méretváltozásával.

$$F_r \sim \Delta\ell \Rightarrow \frac{F_r}{\Delta\ell} = \text{állandó}.$$

Különböző erősségű rugók esetén az erőhatásokat vizsgálva megállapítható, hogy:

Két rugó közül az az erősebb, amelyen:
- **ugyanakkora méretváltozást nagyobb külső erőhatás hoz létre,** vagy
- **ugyanakkora külső erőhatás kisebb mértékű alakváltozással jár együtt.**



98.2. *Melyik rugó az erősebb?*

Az $\frac{F_r}{\Delta\ell}$ hányados az egyes rugókra nézve állandó, és annál nagyobb, minél erősebb a rugó. Ezért alkalmas a rugó erősségének jellemzésére. Nevezzük ezt a hányadost **rugóállandónak*,** és jelöljük D-vel:

$$D = \frac{F_r}{\Delta\ell}.$$

A rugóállandó mértékegysége az erő és az alakváltozás (itt hosszúság) mértékegységének hányadosaként alkotható meg. Ez a mértékegység SI-ben $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ (alkalmazható még a $\frac{\text{N}}{\text{cm}}$ is).

Egy rugó rugóállandója számértékileg egyenlő annak az erőhatásnak a nagyságával, amely a rugón egységnyi hosszúságváltozást hoz létre.

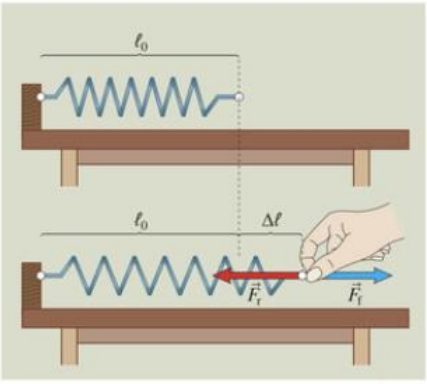
A rugóállandót meghatározó egyenletből kifejezhető a rugalmas erő nagysága:

$$F_r = D \cdot \Delta\ell.$$

A rugó által kifejtett rugalmas hatás nyújtásnál visszahúzó, összenyomásnál pedig taszító, tehát mindig ellentétes irányú a hosszúságváltozással, ezért:

$$F_r = -D \cdot \Delta\ell.$$

Mivel itt a rugalmas erő nagyságát az erőhatást kifejtő rugó adataival határoztuk meg (D és $\Delta\ell$), az $F_r = -D \cdot \Delta\ell$ egyenlet erőtörvény. A rugalmas erő nagysága a méretváltozás első hatványával arányos, ezért ezt az erőtörvényt **lineáris erőtörvénynek*** szokás nevezni.



98.3. A feszítő- és a rugalmas erő iránya ellentétes: $\vec{F}_r = -\vec{F}_f$

MEGJEGYZÉSEK

1. Ha a testet érő külső erőhatások kiegyenlítik egymást, tehát az eredő erő nagysága nulla, a test mozgásállapota nem változik. Ez azonban nem jelenti azt, hogy az erőhatások megszűntek, „kioltották egymást", hiszen ezek az egyensúlyban levő külső erőhatások tartják fenn az alakváltozást a belső erőkkel szemben.
2. A rugóállandót a fizikában régebben *direkciós állandónak* vagy *direkciós erőnek* hívták, ebből az elnevezésből ered a D rövidítés.
3. A lecke tárgyalásakor azt feltételeztük, hogy a testet érő erőhatás nagysága és az általa okozott alakváltozás (deformáció) mértéke között egyenes arányosság van (erre utal a lineáris erőtörvény elnevezés). Ez azonban csak „elég kicsi" erők esetén van így. Ha az erőhatás nagysága meghalad egy bizonyos határértéket – az ún. rugalmassági határt –, akkor az alakváltozás már nem egyenesen arányos az erővel. Ekkor a test elveszíti rugalmasságát, vagyis maradandó alakváltozást szenved.
4. A lineáris erőtörvényt *Robert Hooke* [huk] (1635–1703) angol fizikus ismerte fel. Ezért ezt az erőtörvényt szokás Hooke-törvénynek is nevezni.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Milyen kapcsolat van egy rugalmas test alakváltozása és a rugalmas erő között?
2. Egy rugó nagyobb erőhatást fejt ki, mint egy másik. Mi a feltétele ennek?
3. Soroljunk fel rugalmas anyagokat és belőlük készített testeket!
4. Egy D rugóállandójú rugót két egyenlő részre vágtak. Mennyi lesz a két rugódarab rugóállandója külön-külön? Mennyi lesz annak a rugónak a rugóállandója, amit úgy kapunk, hogy az előbbi két rugódarabot párhuzamosan tartjuk, és végeit összeerősítjük?
5. Nézzünk utána a szakirodalomban vagy az interneten, hogy a leckében tárgyalt rugalmas megnyúláson kívül milyen rugalmas alakváltozások vannak, és azokat milyen erőtörvény írja le!

FELADATOK

1. Mekkora és milyen irányú a rugalmas erő, ha egy $D = 4\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ rugóállandójú rugó hosszát 8 cm-rel megváltoztattuk? Írjuk fel a rugalmas erőt és a feszítőerőt, ha ezt a rugót 3 cm-rel nyújtottuk meg!
2. Mekkora egy rugó rugóállandója, ha a rugót 10 N nagyságú erőhatás 6 cm-rel nyújtja meg?
3. 50 N nagyságú erőhatással nyomnak össze egy $10\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ állandójú rugót. Mennyivel lesz rövidebb a rugó?
4. Két $10\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ rugóállandójú rugót először sorba kapcsolunk egymáshoz, majd egymás mellé párhuzamosan. Mekkora lesz a két rugóból álló rendszer rugóállandója az egyik, illetve a másik esetben?
5. Egy 10 N nagyságú erőhatással megfeszített rugó nyugalomban van. Mekkora erővel húzza (vagy tolja) annak középső menetét az előtte levő és az utána levő menet? Mire következtethetünk abból, hogy a rugó minden menete nyugalomban van?

10.2. Súrlódás. Közegellenállás

A gyakorlatban ahhoz, hogy vízszintes felületen egyenletesen lehessen csúsztatni egy testet, erőhatás kell. Az ellökött test sebessége csúszás közben csökken. A csúszó testet tehát mindkét esetben valamilyen, a mozgásával ellentétes irányú erőhatás kell hogy érje.

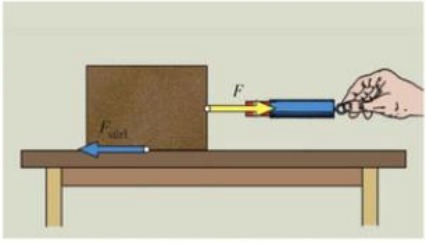
A **súrlódás*** közben fellépő erőhatás azért jön létre, mert a testek felülete soha sem tökéletesen sima. Az egymáson csúszó testek érintkező felületeinek kiemelkedései és bemélyedései egymásba akadnak, és **nehezítik a testek egymáshoz viszonyított mozgását.**

Ha az érintkező felületek nagyon simák, akkor a két felület részecskéi közül sok kerül olyan közel egymáshoz, hogy a közöttük levő vonzóerők együttes hatása már érezhetően érvényesülhet.

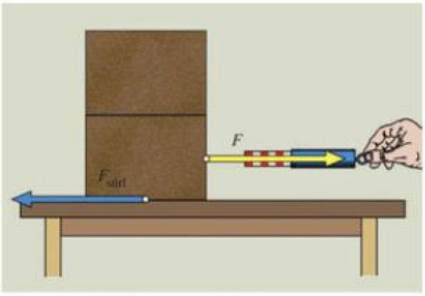
Az egymáson csúszó felületek között e két ok miatt léphet fel erőhatás, amelyet az ún. **csúszási súrlódási erő*** jellemez, ennek nagyságát $F_{súrl}$-lal szokás jelölni.

A csúszási súrlódási erőt közvetlenül mérni nem lehet, de a vele egyensúlyt tartó erő ismeretében következtetni tudunk a nagyságára és az irányára. **A csúszási súrlódási erő a két érintkező test egymáshoz viszonyított mozgásával ellentétes irányú.**

A vízszintes felületen erőmérővel egyenletesen vontatott hasábnál fellépő csúszási súrlódási erő nagyságát és irányát a vontató erő ismeretében meghatározhatjuk. Határozzuk meg a csúszási súrlódási erő nagyságát több esetben úgy, hogy a változatlan érdességű felületeket összenyomó erőhatás az egyes esetekben különböző nagyságú legyen!



100.1. Egyenletes mozgásnál a súrlódási erő egyenlő nagyságú és ellentétes irányú a húzóerővel



100.2. A súrlódási erő a felületeket összenyomó erő nagyságától is függ

Ha az érintkező felületek érdessége ugyanolyan, akkor a kétszer, háromszor nagyobb erővel összenyomódó testeket kétszer, háromszor nagyobb erővel lehet egyenletesen mozgatni egymáson. **A súrlódási erő nagysága egyenesen arányos a nyomóerő nagyságával:**

$$F_{súrl} \sim F_{ny} \Rightarrow \frac{F_{súrl}}{F_{ny}} = \text{állandó}.$$

Kísérleti eszközeink között van olyan hasáb, amelynél a különböző oldalak érdessége különböző. Az ilyen hasábot bármely oldalán csúszva vontatjuk egyenletesen, a felületeket összenyomó erőhatások egyenlők. Így a különböző érdességű oldalán csúszó hasábnál könnyen megmérhető – az egyenlő nyomóerőhöz tartozó – a különböző súrlódási erők nagysága.

Az $\frac{F_{súrl}}{F_{ny}}$ annál nagyobb, minél érdesebb a két egymáson csúszó felület. Ezért ez a hányados, amit **csúszási súrlódási együtthatónak** nevezünk és μ-vel jelölünk (μ görög betű, kiejtése: mű), alkalmas a felületek érdességének jellemzésére.

$$\mu = \frac{F_{súrl}}{F_{ny}}.$$

A μ – két erő jellegű mennyiség hányadosa, tehát – viszonyszám. Ez azt jelenti, hogy a csúszási súrlódási együtthatónak nincs mértékegysége, és így százalékban is megadható.

Az előzőek alapján a csúszási súrlódási erő nagysága kiszámítható:

$$F_{súrl} = \mu \cdot F_{ny}.$$

Ez a képlet a **csúszási súrlódási erőtörvény*** matematikai megfogalmazása. A csúszási súrlódási erőtörvény csak az erő nagyságát adja meg, irányát nem, ezért ebben a formájában hiányos erőtörvénynek mondjuk.

A csúszási súrlódási erő a felületek simításával csak egy bizonyos mértékig csökkenthető, mert az egyre simább felületeknél egyre jobban érvényesül a két felület részecskéi közötti vonzás.

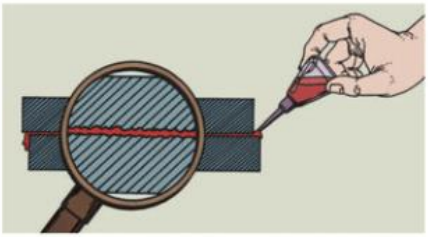
Ha az érintkező felületek nem nagyon simák, a két felület részecskéinek többsége – amelyek száma függ a felület nagyságától – nem kerül olyan közel egymáshoz, hogy az egymást vonzó hatásuk észrevehető legyen. Ez az oka annak, hogy a **gyakorlatban a csúszási súrlódási erő legtöbbször nem függ az érintkező felületek nagyságától.**

A súrlódási erőt úgy szokták csökkenteni, hogy az érintkező felületek közé kenőanyagot, például olajat, zsírt, grafitot tesznek. A kenőanyag kitölti a felületek egyenetlenségeit, és távol tartja egymástól a mozgó szilárd testeket. Így a testek mozgásuk közben a kenőanyagon csúsznak.

A csúszási súrlódási erőtörvényt *Charles Augustin de Coulomb* [sárl ogüszten dö kulón] (1736–1806) francia fizikus ismerte fel először.

Vizsgálatainál változtatta az érintkező felületek nagyságát; az érintkező testek egymáshoz viszonyított sebességét; az egymáshoz nyomódás mértékét; az érintkező felületek simaságát. Megállapításait így fogalmazta meg:

„A sebességgel mindig ellentétes irányú súrlódási erő nagysága – első közelítésben – független az érintkező felületnek és a sebességnek a nagyságától, és arányos a nyomóerővel. Az arányossági tényező a felületek simaságától függő csúszási súrlódási együttható."



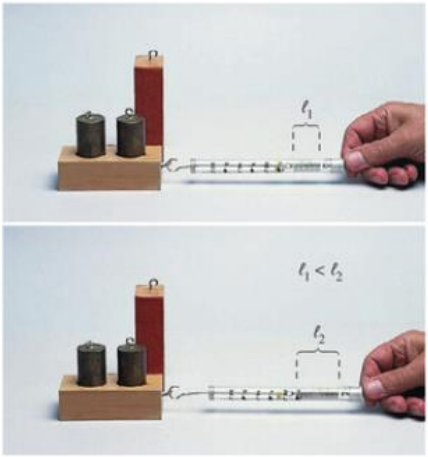
101.1. A kenőanyagok részecskéi könnyen elmozdulnak egymáson. *Miért lehet így csökkenteni a súrlódást?*

A TAPADÁSI SÚRLÓDÁS

Tegyünk vízszintes asztalra egy hasáb alakú testet, és erőmérővel húzzuk az asztal lapjával párhuzamosan, egyre nagyobb erővel. A húzóerőt (F_h) egy bizonyos határig növelve a test nyugalomban marad, nem mozdul el. Ez az állapot csak úgy jöhet létre, ha a mindenkori húzóerőt valamilyen másik erő kiegyenlíti.

A felületek egymásra gyakorolt ilyen hatása csak egy bizonyos nagyságú húzó- vagy tolóerőt tud kiegyenlíteni. Az ennél nagyobb húzóerő megmozdítja a testet. Ennek az erőnek a nagyságát – a csúszási súrlódási erőnél végzett kísérletekhez hasonló – kísérletekkel vizsgálhatjuk meg.

Az egymáshoz nyomódó és nyugalomban levő testek között is fellép egy – a súrlódáshoz hasonló – erőhatás, ha azokat el akarjuk mozdítani egymáson. Ez a jelenség a **tapadási súrlódás***, amit a **tapadási súrlódási erővel*** (F_{ts}) jellemezhetünk. A tapadási súrlódási erő nagysága különböző lehet, attól függ, hogy mekkora erővel kíséreljük meg elmozdítani a testeket egymáson.



101.2. Ha nem túl nagy erővel húzzuk a hasábot, akkor az egy bizonyos erőhatárig nyugalomban marad

A tapadási súrlódási erőhatás mindig (aktuálisan) akkora, amekkora a test elmozdulásának megakadályozásához szükséges.

Ez az erőhatás is az egymáshoz nyomódó felületek egyenetlenségei és a részecskéik közötti vonzás miatt jön létre.

Növelve a húzóerőt, a tapadási súrlódási erő csak egy, esetenként meghatározott nagyságig növekedhet, az ennél nagyobb húzóerő esetén a test elindul.

A tapadási súrlódási erőnek ez **a legnagyobb értéke*** ($F_{ts_{max}}$) – hasonlóan a csúszási súrlódási erő nagyságához – **a felületek simaságától és a testeket egymáshoz szorító erőhatások nagyságától függ:**

$$F_{ts_{max}} = \mu_0 \cdot F_{ny},$$

ahol μ_0 az érintkező felületek érdességétől (simaságától) függő **tapadási súrlódási együttható*.**

A tapadási súrlódási erő nagyságáról tehát megállapítottuk, hogy

$$0 < F_{ts} \le F_{ts_{max}} = \mu_0 \cdot F_{ny}.$$

Méréssel megállapítható, hogy a tapadási súrlódási erő legnagyobb értéke nagyobb a már elindított test egyenletes mozgásban tartásához szükséges erőnél ($F_{ts_{max}} > F_s$). Ez csak úgy lehet, ha **a tapadási súrlódási együttható nagyobb a csúszási súrlódási együtthatónál** ($\mu_0 > \mu$).

A tapadási súrlódás teszi lehetővé a járást, az autók elindulását, a változó mozgást, a gyapot-, illetve gyapjúszálak fonallá sodrását stb.



102.1. A láb hátranyomja a Földet, a Föld előre a lábat (hatás-ellenhatás; $\vec{F}_{ts} = -\vec{F}$), ezért tudunk elmozdulni



102.2. A kerék az egyik leghasznosabb találmány, mert lecsökkenti a relatív mozgást befolyásoló erőhatásokat. *Miért?*

A GÖRDÜLÉSI SÚRLÓDÁS

A testek könnyebben mozgathatók, ha közéjük henger alakú görgőket helyezünk, vagy a testek gömb, illetve henger alakúak, és így maguk gördülnek el egy felületen. Ilyenkor a testek felületének egyenetlenségei – mint a fogaskerekek fogai – kiemelkednek egymásból anélkül, hogy letörnének vagy az egész testnek meg kellene emelkednie. Ez az oka annak, hogy vízszintes felületen **a gördülő testet könnyebb egyenletesen mozgatni, mint ugyanazt a testet egyenletesen csúsztatni.** Ez azt jelenti, hogy a **gördülési súrlódási erő*** ($F_{gör}$) – azonos feltételek között – kisebb, mint a csúszási súrlódási erő:

$$F_{gör} < F_s.$$

A csúszási súrlódás vizsgálatánál elvégzett kísérletekhez hasonló mérésekkel megállapítható, hogy a gördülési súrlódási erő nagysága (egyszerűsített formában és közelítő pontossággal) a súrlódási erőkhöz hasonló módon számítható ki:

$$F_{gör} = \mu_g \cdot F_{ny},$$

ahol μ_g a **gördülési súrlódási együttható*,** ami természetesen mindig kisebb, mint a csúszási súrlódási együttható ($\mu_g < \mu$).



103.1. A szél magával akarja vinni, a nyugvó víz meg akarja állítani a vitorlás hajót. *Miben azonos a két közeg hatása?*

A KÖZEGELLENÁLLÁS

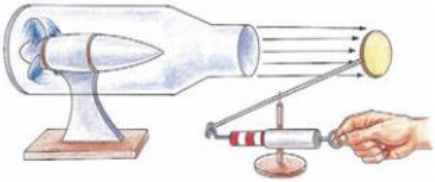
Erős szélben jól észrevehető, hogy az áramló levegő – mozgásának irányától függően – segítheti és akadályozhatja is mozgásunkat. Mindenki tapasztalta már, hogy vízben futni nehezebb, mint a szárazföldön. A fáról nem egyformán esik le az alma és a falevél.

A vitorlás hajót annál jobban magával ragadja a szél, minél nagyobb a vitorlája. A nyugvó víz fékezi a hajó mozgását. Az ejtőernyős gyorsulása a kiugrás után egyre csökken, majd mozgása egyenletessé válik. Az ejtőernyő kinyitása új helyzetet hoz létre, mert az egyenletes mozgás sebessége olyan mértékben lecsökken, hogy azzal a sebességgel már veszély nélkül lehet földet érni. Mindennapi tapasztalatainkból tudjuk:

A közeg (pl. levegő, víz) **olyan erőhatást fejt ki a hozzá viszonyítva mozgó testre, amely csökkenteni „igyekszik" a test és közeg egymáshoz viszonyított sebességét.**

Ez a jelenség a **közegellenállás***, amelyet a **közegellenállási erővel*** ($F_{kö}$) jellemezhetünk.

A légcsatorna (pl. erős, szabályozható fordulatszámú hajszárító) légáramába helyezett különféle testeknél a különböző feltételek között fellépő közegellenállási erők megmérhetők.



103.2. Az áramló levegő magával akarja vinni a benne levő testet

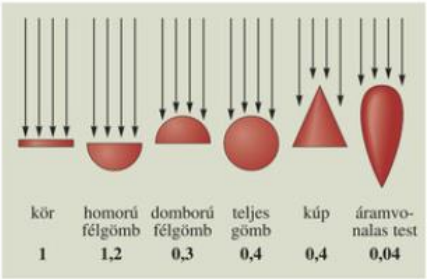
Mérések és tapasztalatok alapján megállapítható, hogy – a gyakorlatban legtöbbször előforduló örvényes áramlásoknál – **a közegellenállási erő függ:**

- **a test és a közeg egymáshoz viszonyított (relatív) sebességének négyzetétől,** $F_{kö} \sim v^2$;
- **a közeg sűrűségétől,** $F_{kö} \sim \rho$;
- **a test homlokfelületétől,** $F_{kö} \sim A$ (ami a test – relatív mozgására merőleges – legnagyobb keresztmetszetének nagysága);
- **a test alakjától,** $F_{kö} \sim c_1$.

$$F_{kö} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot A \cdot \rho \cdot v^2,$$

ahol a c_1 **közegellenállási tényező*** egy mértékegység nélküli viszonyszám, amely **a négyzetes közegellenállási erőtörvény** érvényességi körében csak a test alakjától függ (és pl. a táblázatban feltüntetett értékekkel egyenlő). Ezt a képletet szokás az $\frac{1}{2} \cdot c_1 = k$ jelölést alkalmazva vektoregyenlet formájában is felírni:

$$\vec{F}_{kö} = -k \cdot \rho \cdot A \cdot |v| \cdot \vec{v}.$$



103.3. Különböző alakú testek c_1 értéke

MEGJEGYZÉSEK

1. Sokan azt hiszik – néha még tankönyvekben is úgy fogalmaznak –, mintha a súrlódás és a közegellenállás mindig mozgást akadályozó hatás volna. Ez tévedés, hiszen pl.
   – a teherautóra feltett láda induláskor azért marad az autón, mert a tapadási súrlódási erőhatás együtt gyorsítja az autóval;
   – a vitorlás hajó azért halad, mert a szél magával viszi stb.

   A súrlódás és a közegellenállás tehát a testek vagy a közeg és a test relatív sebességét csökkenti, de lehet, hogy ezt a test mozgásba hozásával éri el.
2. A súrlódási erők nagysága azoknak az erőknek az ismeretében számítható ki, amelyekkel az egyik test ténylegesen nekinyomódik a másiknak. Ez gyakran nem a test súlya, de mindig egyenlő a két test között fellépő kényszererővel, függetlenül attól, hogy mi váltja ki a kényszererőt.
3. A gördülési súrlódást csak első megközelítésben lehet úgy kezelni, mint a csúszó súrlódást. Pontosabb vizsgálatra a forgómozgás keretei között kerülhet sor, ahol a kétféle tárgyalás megkülönböztetése érdekében gördülési ellenállásról szokás beszélni.
4. Az autó azért indul el, mert:
   – a motor megforgatja az úttal érintkező kerekeit, és azok a tapadási súrlódás miatt tolják hátrafelé a Földet;
   – a hatás-ellenhatás törvényének megfelelően a Föld tolja előre az autót, amely ennek hatására gyorsul.
5. Az autók blokkolás nélküli fékezésénél a tapadási súrlódás érvényesül. Mivel annak maximuma nagyobb, mint a csúszási súrlódási erő, a blokkolás nélküli fékezésnél kisebb a fékút.
6. A közegellenállási erő nagysága a relatív sebesség nagyságától függ, tehát nem függ attól, hogy:
   – a test a nyugalomban levő közegben mozog, vagy
   – a mozgó közegben áll, esetleg
   – a test és a közeg sebessége különböző.
7. Olyan (pl. kis sebességű) áramlásoknál, amikor a test körül nem jön létre örvény, a közegellenállási erő nagysága a relatív sebesség első hatványával (tehát nem a sebesség négyzetével) arányos $F_{kö} \sim v$. Az örvényes áramlásnál azért nagyobb a közegellenállási erő, mint a sima áramlásnál, mert ott többlet energiaváltozást kell létrehozni ahhoz, hogy örvények keletkezzenek a közegben. Például a 45–50°-os helyzetű Mikola-féle csőben örvényessé válik a víz áramlása. Ezért csak eddig nő folyamatosan a buborék sebessége a csővég emelése miatt.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Miért szórnak homokot a jeges járdára?
2. Miért kell zsírozni vagy olajozni a gépek csapágyait?
3. Milyen jelenségeken alapul a kerékpár fékezése?
4. Milyen jelenségeknél tapasztalhatjuk a súrlódás előnyeit vagy hátrányait?
5. Mondjunk példát a súrlódás szándékos növelésére és csökkentésére!
6. Miért nagy jelentőségű találmány a kerék?
7. Miért eltérő mozgással esik le a fáról még az egyenlő homlokfelületű levél és alma is?
8. Hogyan csökkentik a tervezők az autókat érő közegellenállási erőt?
9. Miért nehezebb a vízben futni, mint a parton?
10. Miért nehezebb a megrakott uszályokat egyenletesen vontatni, mint üresen?

11. Kinyitott ejtőernyővel már egyenletesen mozogva ereszkedik le az ejtőernyős. Mit tudunk ebben az esetben a közegellenállási erő nagyságáról és irányáról?

12. Soroljunk fel olyan folyamatokat (pl. sportolással kapcsolatban), amelyek során különösen fontos a közegellenállás csökkentése vagy növelése!

13. Mi történik a kerékpár gumijával a sokszori fékezés miatt? Miért káros a környezetre a kerekek és a fékbetétek súrlódása?

14. Miért fontos a járművek formatervezése?

15. A vasúti kocsikon fékezés közben öntöttvas féktuskók szorulnak a kerekekhez. Fékezés közben mit változtatnak annak érdekében, hogy nagyobb legyen a súrlódási erő?

16. Esőben hosszabb úton lehet lefékezni az autót, mint száraz úton. Miért?

17. Nagy sebességű repülőgépeknél földet érés után fékezőernyőt használnak. Miért? Mit változtat meg ez a lehetőség a kifutópályák tervezésénél?

18. A következő mozdonyvezetői fogást a túlzottan nagy terhet jelentő – egymáshoz kapcsolt kocsikból álló – szerelvények megindításánál alkalmazzák. Ha a vonat nem indul el, kissé visszatolatnak, majd újból próbálkoznak az indítással, rendszerint sikerrel. Magyarázzuk meg, miért!

FELADATOK

1. Amikor egy szánkót a havon húznak, 0,02 a csúszási súrlódási együttható. Mekkora erővel lehet ezt a szánkót egyenletesen húzni, ha tömege a rajta ülő gyerek tömegével együtt 75 kg? Mekkora súrlódási erő fékezi ezt a szánkót, ha nem sétálva, hanem futva húzzák?

2. Mekkora a csúszási súrlódási együttható, ha egy 400 kg tömegű ládát 1000 N nagyságú erővel lehet vízszintes talajon egyenletesen tolni?

3. Egy 6 tonna tömegű teherautó 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad. Hirtelen erősen fékez, és ezért megcsúsznak a megállított kerekei. Mekkora a fékútja, ha a csúszási súrlódási együttható 0,4? Az autó blokkolás nélküli fékútja 40 m. Mennyi a tapadási súrlódási együttható?

4. Egy 50 kg tömegű ládát 100 N nagyságú erővel húzunk a padlón, de az nem mozdul. Mekkora a tapadási súrlódási erő? Ezt a ládát 200 N nagyságú erőhatás mozdítja meg. Mekkora a tapadási súrlódási együttható?

5. Mekkora a közegellenállási erő egy autónál, ha az 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad, az autó közegellenállási tényezője 0,3, homlokfelülete 1 m^2 és a levegő sűrűsége 1,29 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$? Mekkora a közegellenállási erő, ha az autó 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, illetve 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad?

6. Mekkora sebességgel süllyed az az ejtőernyős, akinek tömege – a felszereléssel együtt – 80 kg, ha a közegellenállási tényező 1,2, a homlokfelület 25 m^2 és a levegő sűrűsége 1,29 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

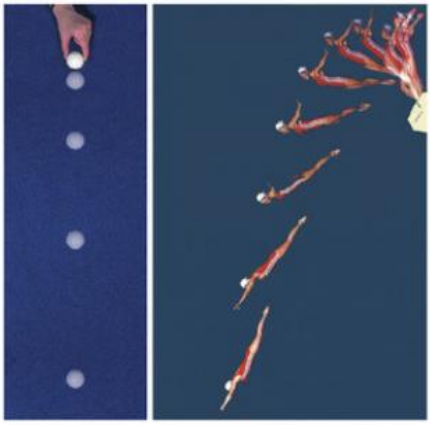
7. Ugyanolyan papírból (pl. újság- vagy gépírópapírból) vágjunk ki 4 db kb. 10 cm sugarú körlapot! Mindegyikből vágjunk ki egy-egy 120°-os középponti szögű körcikket! Meghajlítva celluxszal ragasszunk össze a 4 nagyobból és egy kisebből összesen 5 db küppalástot! Mérjük meg a kétféle kúp legnagyobb körének átmérőjét és így hasonlítsuk össze a homlokfelületüket! A kúpok elejtéskor gyakorlatilag azonnal egyenletesen mozognak, ilyenkor a gravitációs erő és a közegellenállási erő egyenlő. A küppalástok leejtésével ellenőrizhetjük a közegellenállási törvény arányosságait.

a) Ejtsünk le csúcsával lefelé egyszerre egy nagyobb és a kisebb küppalástot! Hasonlítsuk össze az esési idejüket és ebből a sebességüket! Mire lehet következtetni a tapasztaltakból?

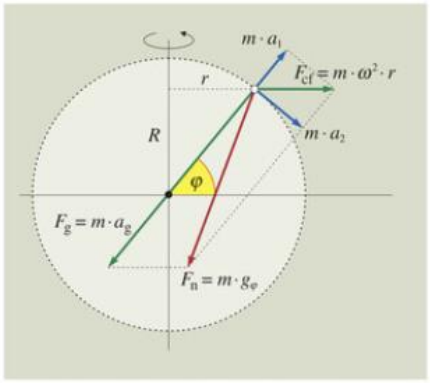
b) Ejtsünk le két egymásba helyezett és csak egy nagyobb küppalástot! Mi a tapasztalat?

8. Nyomozzunk utána, hogy mit jelentenek és hogyan működnek a gépkocsik ütközésének megelőzését szolgáló berendezések (ABS, tempomat, tolatóradar, távolságtartó radar)!

10.3. A nehézségi erő és a gravitációs erőtörvény



106.1. A szabadon eső test a gravitációs mező hatására gyorsul



106.2. Az F_n nehézségi erő $\vec{F}_g$ és $\vec{F}_{cf}$ eredője

Tengerszint feletti magasság	F_g Magyarországon, ha $m = 1$ kg
0 km	9,810 N
10 km	9,779 N
50 km	9,655 N
100 km	9,500 N

106.3. A Föld környezetében a testet érő nehézségi erő függ a testek tengerszint feletti magasságától

Az elejtett testek, a toronyugró, a fáról lehulló alma gyorsulva esik a Föld felé. A függőlegesen feldobott kavics sebessége is folyamatosan változik, lassulva emelkedik, egy pillanatra megáll, majd növekvő sebességgel esik vissza a Föld felé. Erről a gyorsulásról eddig azt gondoltuk, hogy csak a gravitációs mező hatására jön létre és a Föld középpontja felé irányul. Ezért gravitációs gyorsulásnak neveztük, és g-vel jelöltük.

Megismerve a tehetetlenségi erőket, valamint figyelembe véve a Föld forgását, pontosítani kell a g-re vonatkozó ismereteinket.

A gravitációs erő iránya a Föld középpontja felé mutat. A Föld forgása miatt a szabadon eső testek azonban nem pontosan a Föld közepe felé esnek. Esés közben ugyanis a Föld kifordul a szabadon eső testek alól.

Ezt – a nyugvónak gondolt Földön – úgy szoktuk figyelembe venni, hogy feltételezzük egy olyan erő létezését is (F_{cf} centrifugális erő), amely a gravitációs erővel együtt gyorsítja a testeket a szabadesés valódi irányában.

A gravitációs és a centrifugális erő eredőjét nehézségi erőnek nevezzük. Ha a g és az azt okozó erőhatások pontos fogalmára akarunk utalni, **nehézségi gyorsulásról*** és **nehézségi erőről*** beszélünk. A nehézségi erő, amelynek F_n a jele, a gravitációs mező vonzása és a Föld forgása miatt „jön létre".

Az m tömegű testre ható F_n nehézségi erő a g nehézségi gyorsulás felhasználásával kiszámítható:

$$\vec{F}_n = m \cdot \vec{g}.$$

Mivel g-vel a szabadon eső testek gyorsulását jelöltük, ezt a jelölést a fogalom pontosítása után is megtartjuk.

Ez az összefüggés a **nehézségi erőtörvény***.

A Föld körüli gravitációs mező gyengül, ha távolodunk a Földtől. Ezt az bizonyítja, hogy ugyanazt a testet távolabb kisebb gravitációs erőhatás éri, mint a földfelszínen.

Az ugyanakkora tömegű testet érő nehézségi erő nagysága más lehet attól függően is,

Az 1 kg tömegű testet érő nehézségi erő a tengerszinten	
Szélességi fok	F_g
0°	9,7805 N
20°	9,7865 N
40°	9,8018 N
50°	9,8108 N
70°	9,8261 N
90°	9,8322 N

107.1. A testet érő nehézségi erő függ a testek földrajzi helyétől

hogy a Föld felszínének melyik részén van a test. Ennek egyik oka az, hogy a Föld lapultsága miatt az Északi-sark és a Déli-sark közelebb van a Föld középpontjához, mint az Egyenlítő pontjai. Egy másik ok az, hogy a testek különböző sugarú körpályán foroghatnak a földrajzi helytől függően, és így más lehet a centrifugális erő.

A gravitációs mező a tér különböző pontjaiban különböző erősségű lehet. Ezt egy mennyiséggel, a **gravitációs térerősséggel**** ($\vec{E}$) szokás jellemezni. A gravitációs térerősség azt mutatja meg, hogy mekkora gravitációs erőhatás éri az 1 kg tömegű (anyagi pontnak tekinthető) testet a tér egy adott pontjában.

A gravitációs térerősség a következő módon számítható ki:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_g}{m} = \frac{m \cdot \vec{g}}{m} = \vec{g}.$$

A gravitációs mezőt jellemző $\vec{E}$ gravitációs térerősség vektormennyiség. A földi nehézségi erőtérben érvényes (a térnek abban a részében, ahol a nehézségi erő érvényesül) és a centrifugális erőt is magába foglaló $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ erőtörvény alapján belátható, hogy

$$\vec{E} = \vec{g}.$$

Az $\vec{E}$ és a $\vec{g}$ a gravitációs mezőnek ugyanazt a képességét jellemzi, csak más megközelítésben. A két mennyiség azonosságát mutatja mértékegységük azonossága is:

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

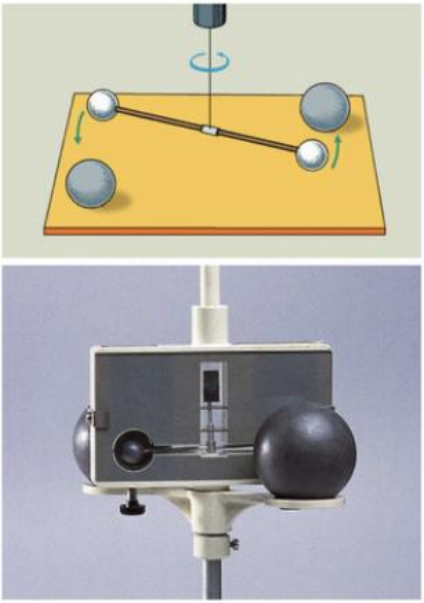
A NEWTON-FÉLE GRAVITÁCIÓS ERŐTÖRVÉNY

Minden szabadon eső test – ugyanazon a helyen – ugyanakkora g gyorsulással mozog. Ez csak úgy lehet, ha a gravitációs mezőben (ugyanazon a helyen) ahányszor nagyobb az ott levő test tömege, annyiszor nagyobb a testet érő gravitációs erőhatás, vagyis a tömeg egyenesen arányos a gravitációs erővel: $F_g \sim m$.

Ezért lehet a test tömegéből a testet érő gravitációs erő nagyságára és a test súlyára következtetni, a súlyából pedig a testet érő gravitációs erőt és a test tömegét kiszámítani.

Érzékeny műszerrel kimutatható, hogy nemcsak a Földnek, hanem minden testnek van gravitációs mezője, így **bármely két test között van gravitációs vonzás.**

A Cavendish-féle torziós (csavarási) ingával nagyon kicsi erőhatások is kimutathatók. A torziós inga fő alkatrésze egy rugalmas drótszál, amelynek egyik végét felerősítették, a másik végére pedig egy könnyű pálcát kötöttek. A pálca két végén egy-egy golyót úgy helyeztek el, hogy azok egyensúlyban legyenek.



107.2. Cavendish-féle torziós inga

3D

Ha a golyók közelében két nagy tömegű testet helyeznek el szimmetrikusan, akkor a rendszer elfordul a nagy tömegű testek felé. Kimutatható, hogy ilyen esetben a golyókat a gravitációs erőhatás forgatta el.

A Cavendish-féle torziós inga annál jobban elfordul, minél nagyobb az elfordító erőhatás. Változtatva a testek tömegét és a golyóktól való távolságát, meghatározható, hogy mitől függ a gravitációs erő nagysága.

A két test között fellépő gravitációs erő nagysága egyenesen arányos a testek tömegével és fordítottan arányos a közöttük levő távolság négyzetével:

$$F_g = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Ez az összefüggés az ún. **Newton-féle gravitációs erőtörvény*,** amelyben az f **gravitációs állandó*,** az m_1 és m_2 a testek tömege, r a közöttük levő távolság. Mivel a gravitációs vonzás bármely két test között fellép, és a testek tömegével arányos, ezért ezt a megállapítást szokták **általános tömegvonzási törvénynek*** is nevezni.

A **gravitációs állandó** értékét először *Henry Cavendish* (olvasd kevendis, 1731–1810) angol fizikus mérte meg:

$$f = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}.$$

A Newton-féle gravitációs erőtörvény és a dinamika alaptörvényének alkalmazásával kiszámítható a Föld és a Nap tömege is.

A Föld tömege. A gömb alakúnak tekintett, M_F tömegű Földön, az Északi-sarkon (R = 6378 km) ejtsünk el egy m tömegű testet. Itt a gravitációs erő megegyezik a nehézségi erővel, így alkalmazhatjuk a Newton-féle gravitációs erőtörvényt, amit összekapcsolhatunk Newton II. törvényével:

$$m \cdot a = m \cdot g = f \cdot \frac{m \cdot M_F}{R^2}.$$

Egyszerűsítéssel és átrendezéssel kifejezhetjük a Föld tömegét:

$$M_F = \frac{g \cdot R^2}{f}.$$

Az ismert adatokat behelyettesítve megkapjuk a Föld tömegét, ami kb.:

$$M_F \approx 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}.$$

A Nap tömege. Tekintsük úgy, mintha a Föld egyenletes körmozgást végezne az M_N tömegű Nap körül, ami elég jó közelítéssel elfogadható egyszerűsítés. Csillagászati megfigyelések és mérések alapján tudjuk, hogy a Föld középtávolsága a Naptól kb. r = 150 000 000 km, keringési ideje T = 1 év, ami kb. 31,6 millió másodperc. Írjuk fel Newton II. törvényét és a Newton-féle gravitációs erőtörvényt úgy, hogy a gyorsulás most centripetális gyorsulás:

$$a = r \cdot \omega^2 = \frac{r \cdot 4 \cdot \pi^2}{T^2},$$

$$M_F \cdot a = f \cdot \frac{M_F \cdot M_N}{r^2},$$

$$M_F \cdot \frac{r \cdot 4 \cdot \pi^2}{T^2} = f \cdot \frac{M_F \cdot M_N}{r^2}.$$

Egyszerűsítve a Föld tömegével, majd a Nap tömegét kifejezve, és behelyettesítve az ismert adatokat, azt kapjuk, hogy:

$$M_N = \frac{r^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{f \cdot T^2} \approx 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}.$$

A Nap tömege tehát a Föld tömegének kb. 300 000-szerese.

OLVASMÁNY

Eötvös Loránd (1848–1919)

Eötvös Loránd, Eötvös József írónak, az 1848-as első felelős magyar kormány vallás- és közoktatásügyi miniszterének fia. Egyetemi tanulmányait Heidelbergben folytatta, ahol világhírű tudósok (Bunsen, Helmholtz, Kirchhoff) tanítványaként szerzett fizikai doktorátust.

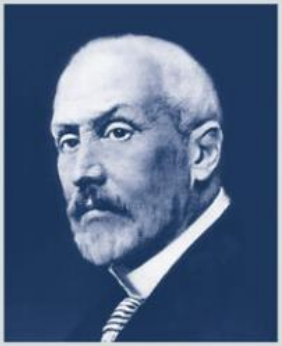
Hazatérve az egyetemi laboratóriumban folytatta a már korábban elkezdett kutatásait. 1878-ban, Jedlik Ányos nyugalomba vonulása után elvállalta a kísérleti fizika tanszék, majd az összevont Fizikai Intézet vezetését.

Első kutatásai a folyadékok kapilláris jelenségeire irányultak. Felfedezte a róla elnevezett *Eötvös-szabályt,* amely a felületi feszültség hőmérsékletfüggésére vonatkozik.

3D

Ezután a gravitáció felé fordult az érdeklődése. A gravitációs mező változásának mérésére szerkesztett torziós ingája (1891) *Eötvös-ingaként* vált világhírűvé. A műszer elvi lényege a következő: a környezeti zavaroktól elszigetelten, zárt térben egy vízszintes rúd függ vékony platinaszálon. A rúd egyik végére platinasúly van erősítve, a másik végén platinahenger függ fémszálon. Ha a két testre ható vonzóerő nagyságban vagy irányban eltér, akkor a rúd elfordul, és a felfüggesztő platinaszál megcsavarodik. A műszerrel a nehézségi gyorsulás olyan kismértékű változásai is kimutathatók, amit a földfelszín alatti rétegek sűrűségváltozása, így például ásványi kincsek jelenléte okoz.

Az ingával több föld alatti ásványmezőt is felfedeztek Magyarországon. Az Eötvös-inga évtizedekig a nyersanyagkutató geofizika fő eszköze lett az egész világon. Például Amerika legnagyobb kőolajforrásait is Eötvös-ingával tárták fel. Magyarországon 65 Eötvös-ingát gyártottak külföldiek számára. Mivel Eötvös tudományt is teletből nem védette le találmányát, külföldön is sok Eötvös-inga készült.



Eötvös Loránd (1848–1919)

A gazdasági hasznosítás mellett nagy jelentőségű tudományos vizsgálatok is kapcsolódnak az ingához. Newton a gravitációs erőtörvényében kimondta, hogy a testek gravitációs vonzóképessége arányos a tömegükkel (a tehetetlenségük mértékével), és független az anyagi minőségtől. Ezt röviden a *tehetetlen és a súlyos tömeg arányosságaként* szokták megfogalmazni. Egyáltalán nem természetes megállapításról van szó, amit pontos mérések nem támasztottak alá, és amiről azóta is vitatkoztak a fizikusok. 1906-ban a Göttingeni Egyetem pályadíjat tűzött ki ennek a kérdésnek pontos mérésekkel való eldöntésére. Eötvös Loránd a torziós inga egyik változatával végezte azokat a méréseit, melyekkel igen nagy pontossággal igazolta, hogy a kétféle tömeg arányos egymással és független az anyagi minőségtől. Ezzel elnyerte a kitűzött pályadíjat. Einstein híres általános relativitáselméletének kimondásakor is hivatkozott Eötvös mérésére. Eötvös Lorándnak ezt a mérését a magyar kísérleti fizika mindeddig legnagyobb teljesítményének tekintik. Eötvös mérési pontosságát csak a közelmúltban sikerült túlszárnyalni.

Eötvös-effektusként tartják számon azt a jelenséget, hogy a kelet felé mozgó testeknek csökken, a nyugat felé mozgóknak nő a súlya. A jelenség azzal magyarázható, hogy a keleti irányú mozgás sebessége hozzáadódik a földfelszín kerületi sebességéhez, ezáltal nő a centrifugális erő és csökken a nehézségi erő. A nyugati irányú mozgás éppen fordítva a nehézségi erő növekedését eredményezi. Eötvös a magyarázaton túl egy általa szerkesztett mérleggel ki is mutatta ezt a jelenséget. Miközben az egyenletesen forgatható mérleg egyik karján a súly éppen nyugat felé mozgott, a másikon a súly kelet felé haladt. Közben pedig kimutatható volt, hogy megszűnt a mérleg egyensúlya.

MEGJEGYZÉSEK

1. A gravitációs erőtörvényben szereplő g nehézségi gyorsulás (ami a gravitációs mezőtől függően különböző helyeken más és más lehet, pl. a Holdon $1{,}57\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) megegyezik egy másik mennyiséggel, a térerősséggel: $E = \frac{F_\mathrm{n}}{m}$.
2. A súly (jele G) függ attól, hogy a test milyen gyorsulással emelkedik ($G = m \cdot (g + a)$) vagy süllyed ($G = m \cdot (g - a)$). Az elhajított vagy szabadon eső testnek nincs súlya. Az $F_\mathrm{n} = G$ megállapítás tehát csak az inerciarendszerhez viszonyítva nyugalomban levő vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző testeknél igaz.
3. Elméletileg, valamint pontos számításoknál természetesen fontos a gravitációs és nehézségi erő, illetve a gravitációs és nehézségi gyorsulás megkülönböztetése. Mivel a kétféle mennyiség földi értékének eltérése nagyságra az 1%-ot sem éri el, irányban pedig legfeljebb 0,2°-ot jelent, mi ezt a különbséget elhanyagolhatjuk. Nagyobb hibát követünk el ugyanis, amikor a g-nél a 9,81-et 10-re kerekítjük.

4. A gravitációs állandó számértékileg egyenlő azzal az erővel, amellyel két 1-1 kg tömegű test 1 m távolságban levő gravitációs vonzását jellemezzük. Mint látjuk, ez az érték nagyon kicsi. Ezért nem észleljük a környezetünkben levő testek gravitációs vonzását a mindennapi életben.
5. A gravitációs hatás általános jellege abból is látszik, hogy ez a kölcsönhatás az egész világmindenségben érvényesül. Ez határozza meg a természetes és mesterséges égitestek mozgását is.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

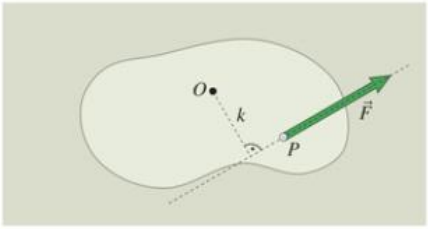
1. Változott-e a holdjáró autó tömege és súlya azáltal, hogy felvitték a Holdra?
2. Lehet-e két egyenlő tömegű testnek különböző a súlya? Lehet-e két különböző súlyú testnek egyenlő a tömege?
3. A tömege vagy a súlya alapján érdemes Norvégiában vagy Egyiptomban eladni a Budapesten vásárolt aranytömböt?
4. Lehet-e a súlytalanság állapotában tömeget mérni? Ha igen, hogyan?
5. A tömeg vagy a súly jellemző igazán a testre?
6. Hogyan változik a két test közötti gravitációs vonzás nagysága, ha
   a) a változatlan távolságú testek közül az egyiket kétszer akkora tömegűre cseréljük?
   b) mindkét testet kétszer akkora tömegűre cseréljük?
   c) a változatlan tömegű testek távolságát megduplázzuk?
7. Az asztalra helyezett testek kölcsönösen vonzzák egymást. Miért nem közelednek egymáshoz?
8. A két tégla közé helyezett papírlapot nem lehet kihúzni, mert a papír elszakad. Ha ez a két tégla szabadon esik, könnyű sértetlenül kihúzni a két tégla között levő papírlapot. Miért?
9. A fürdőszobai mérlegen, amikor gyorsan leguggolunk, a mérleg kevesebbet mutat, mint amikor nyugodtan álltunk rajta. Miért? Mit mutat a mérleg guggolásból gyors felegyenesedésünk közben?
10. Megváltozik-e a test súlya, ha vízszintes irányban gyorsulva mozog? Miért?
11. Egyenletesen gyorsuló mozgással esnének-e a 10 000 km magasból elejtett testek? Függene-e a gyorsulás ekkor a testek tömegétől?

FELADATOK

1. Két űrállomás tömege 100-100 tonna. Mekkora gravitációs erőhatással vonzzák egymást 1 km távolságból? Mekkora gyorsulással indulnának emiatt egymás felé?
2. Határozzuk meg a Föld és a Hold közötti vonzóerőt, ha a Föld tömege kb. $6 \cdot 10^{24}$ kg, a Hold tömege kb. $7 \cdot 10^{22}$ kg és a közöttük levő távolság 384 000 km!
3. Milyen irányú és milyen nagyságú a Föld körül $T = 27{,}3$ nap keringési idővel keringő Hold gyorsulása, ha mozgását egyenletes körmozgásnak tekintjük? (A szükséges adatok megkereshetők az eddig tanult részekben.)
4. Mekkora a Hold miatti erőhatás a Föld felszínén levő 1 m^3-nyi 1030 $\frac{kg}{m^3}$ sűrűségű tengervízre? Milyen jelenségben nyilvánul meg ez a hatás?
5. A Hold tömege 81,3-szor kisebb a Föld tömegénél, átmérője 3,7-szer kisebb a Föld átmérőjénél.
   a) Hányszor kisebb a holdi szabadesésnél a gyorsulás a földinél?
   b) Keressünk az interneten a Holdra történő leszállásról készült felvételeket, és figyeljük meg, mi igazolja a kisebb gravitációs vonzást!

11. A forgómozgás dinamikai vizsgálata

11.1. A tehetetlenségi nyomaték (Kiegészítő anyag)



111.1. Az erőkar a tengelynek az erő hatásvonalától mért távolsága

Mint előző tanulmányainkból tudjuk, a testek forgásállapota is csak környezetük hatására változhat meg. **Forgásállapot-változást csak olyan erőhatás hozhat létre, amelynek hatásvonala nem megy át a forgástengelyen, és nem is párhuzamos azzal.** Az erőhatás tehát a testeknek nemcsak a haladó, hanem a forgómozgását is megváltoztathatja.

Egy testet (pl. egy ajtót) annál kisebb erővel lehet elfordítani, minél távolabb van az erő hatásvonala a test forgástengelyétől. A testek forgásállapotát megváltoztató hatásoknál ezért nemcsak az erő nagyságát, hanem hatásvonalának a tengelytől mért távolságát, az ún. **erőkart*** is figyelembe kell venni (jele: k).



111.2. A teherautó kerekét nehéz megforgatni, mert nagy a tehetetlenségi nyomatéka

Ha különböző testek forgásállapotát azonos feltételek között akarjuk megváltoztatni, akkor tehát mind az erőkarnak, mind az erő nagyságának egyenlőnek kell lenni.

A FORGÓ TEST TEHETETLENSÉGE

Azt könnyű belátni, hogy egy adott test forgásállapot-változásának gyorsasága a testet érő külső hatásoktól függ. Azon viszont érdemes elgondolkodni, hogy a test valamilyen jellemzője befolyásolja-e saját forgásállapota megváltozásának gyorsaságát.

A felemelt teherautó kerekét nehezebb megforgatni, mint a személyautóét. Az üres játszótéri forgót könnyebb felgyorsítani vagy lefékezni, mint amelyen ülnek. Különböző testeknél azt tapasztaljuk, hogy az egyiknek könnyebb, a másiknak nehezebb megváltoztatni a szögsebességét.

A különböző testek **szögsebesség-változással szembeni tehetetlensége** különböző lehet.

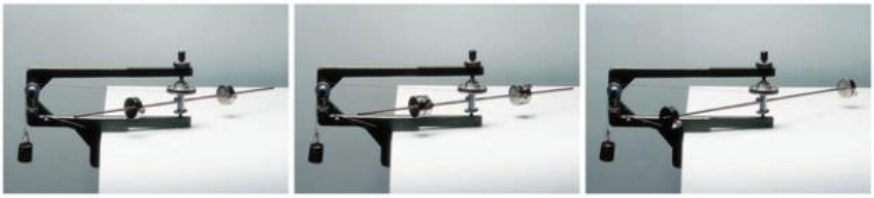
A testeknek ezt a tulajdonságát egy mennyiséggel, a **tehetetlenségi nyomatékkal**** jellemezzük. (A már többször is alkalmazott gondolatmenetnek megfelelően alkossuk meg ezt a mennyiséget!)

A tehetetlenségi nyomaték a testek szögsebesség-változással szembeni tehetetlenségének mennyiségi jellemzője. Jele: Θ (théta görög betű).

Annak a testnek nagyobb a tehetetlenségi nyomatéka, amelyen ugyanaz a forgató hatás:

- **ugyanakkora időtartam alatt kisebb szögsebesség-változást hoz létre** (ha $\Delta t_1 = \Delta t_2$ és $\Delta\omega_1 < \Delta\omega_2$, akkor $\Theta_1 > \Theta_2$), vagy
- **ugyanakkora szögsebesség-változást hosszabb időtartam alatt hoz létre** (ha $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2$ és $\Delta t_1 > \Delta t_2$, akkor $\Theta_1 > \Theta_2$).

Legegyszerűbben az anyagi pontnak tekinthető testek tehetetlenségi nyomatékát lehet meghatározni.



112.1. Az anyagi pont tehetetlensége nem csak a tömegétől függ

Ezt a következő eszközökkel végezhetjük el. Vegyünk egy elhanyagolható tömegű vízszintes helyzetű rudat, amely a rá merőleges tengely körül súrlódás nélkül foroghat. A rúd különböző helyeire erősítsünk nehezékeket. (Lásd *112.1. ábra.*)

A rúd és a rá erősített pontszerű testek legegyszerűbben a tengelyre csévélt zsineg segítségével hozhatók forgásba. Vizsgálataink közben a csigán átvetett zsinegen függő test és a tengelyre erősített henger sugara minden esetben legyen azonos. A rendszer forgását így közel azonos külső hatás változtatja.

Megfigyelhető, hogy ahányszor nagyobb a pontszerű testek tömege, annyiad része az ugyanakkora időtartamok alatt bekövetkező szögsebesség-változásuk. Ez azt jelenti, hogy az anyagi pont tehetetlenségi nyomatéka függ az anyagi pont tömegétől, mégpedig azzal egyenesen arányos:

$$\Theta \sim m.$$

Amikor ugyanazt a pontszerű testet a rúd forgástengelyétől távolabb rögzítjük, azt tapasztaljuk, hogy a forgás sokkal lassabban változik. Ha a pontszerű test a forgástengelytől kétszer, háromszor olyan távolságra van, akkor az ugyanannyi idő alatt bekövetkező szögsebesség-változása negyede, kilencede. Ez azt jelenti, hogy az anyagi pontok tehetetlenségi nyomatéka nagymértékben függ azok forgástengelytől mért távolságától, annak négyzetével egyenesen arányos:

$$\Theta \sim \ell^2.$$

Pontos méréssel megállapítható, hogy az anyagi pont tehetetlenségi nyomatéka egyenesen arányos az anyagi pont tömegével és a forgástengelytől mért távolságának négyzetével:

$$\Theta \sim m \quad \text{és} \quad \Theta \sim \ell^2.$$

Mindezek alapján belátható, hogy az anyagi pont tehetetlenségi nyomatéka (az egyszerűség érdekében, az erőnél már alkalmazott gondolatoknak megfelelően $k = 1$ legyen) a következő összefüggés alapján számítható ki:

$$\Theta = m \cdot \ell^2.$$

A tehetetlenségi nyomaték SI-beli mértékegysége: $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

A kiterjedt merev testek tehetetlenségi nyomatékát meghatározhatjuk kísérlettel vagy számolással. Számoláskor a testet gondolatban felosztjuk anyagi pontnak tekinthető részekre. Ezeknek kiszámítjuk a tehetetlenségi nyomatékát, és az így kapott értékeket összeadjuk. Az utóbbi **matematikai módszer az ún. integrálszámítás, amely sok esetben pontosabb és egyszerűbb, mint a mérés** (pl. ha a test alakja szabályos, anyaga pedig homogén).

MEGJEGYZÉSEK

1. A tehetetlenségi nyomaték a tengely körül forgó testeknél ugyanazt a szerepet tölti be, mint haladó mozgásnál a tömeg (a tehetetlenség mennyiségi jellemzője).
2. A testek tehetetlenségi nyomatéka a tömegüktől, valamint a forgástengelyhez viszonyított helyüktől és helyzetüktől (alakjuktól) függ. Ezért a testek tehetetlenségi nyomatékát mindig egy meghatározott forgástengelyre vonatkozóan kell megadni. Ugyanannak a testnek a tehetetlenségi nyomatéka ugyanis különböző tengelyekre más és más lehet (lásd a 198. oldal 2. táblázatának 1. és 2., valamint 5. és 6. sorát).

3. Néhány szabályos alakú, homogén test tehetetlenségi nyomatéka megtalálható a 157. oldalon a táblázatok között.

4. Az anyagi pontok tehetetlenségi nyomatékainak vizsgálatánál a külső hatások a különböző esetekben – elhanyagolható mértékben ugyan, de – különböztek egymástól. Ennek pl. az az oka, hogy a testek súlyát függőleges irányú gyorsulásuk nagysága és iránya befolyásolja, pl. $G = m \cdot (g - a)$, illetve $G = m \cdot (g + a)$. Mivel a nagyobb tehetetlenségi nyomatékú anyagi pontokat tartó kar kisebb szöggyorsulással forgott, a zsineg végén levő nehezék süllyedésének gyorsulása is kisebb volt. Így az $M = G \cdot r$ forgatónyomaték a különböző esetekben (*106.1. ábra*) kismértékben ugyan ($a << g$), de különbözött egymástól.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Függ-e egy test tehetetlenségi nyomatéka attól, hogy nyugalomban van, egyenletesen vagy változva forog?

2. Miért nehezebb a játszótéri forgót felgyorsítani, ha több gyerek ül a székekben? Mi tapasztalható, ha az egyik gyerek bemászik a függőleges tengely közelébe? Miért?

3. Az úgynevezett botos táncnál a legények hol a végén, hol a közepén fogva forgatják a botot. Melyik esetben könnyebb megforgatni ugyanazt a botot? Miért?

4. Lehet-e egy testnek különböző körülmények között különböző nagyságú a tehetetlenségi nyomatéka? Mit jelent itt a különböző körülmény?

5. Lehet-e két különböző tömegű köszörűkőnek egyenlő a tehetetlenségi nyomatéka? Lehet-e két egyenlő sugarú köszörűkőnek különböző a tehetetlenségi nyomatéka? Mindkét választ indokoljuk meg!

6. Miért lehet egy vékony, r sugarú és m tömegű gyűrű tehetetlenségi nyomatékát a $\Theta = m \cdot r^2$ összefüggéssel kiszámítani?

FELADATOK

1. Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka annak az 1 m sugarú körpályán keringő pontszerű testnek, amelynek tömege

   a) 1 kg, *b)* 2 kg, *c)* 10 kg?

2. Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka annak az 1 kg tömegű pontszerű testnek, amely

   a) 1 m, *b)* 2 m, *c)* 10 m

   sugarú körpályán kering?

3. Az 1 m hosszú, elhanyagolható tömegű léc közepén szöget ütöttünk át. A szög lesz a tengely. A léc egyik végére 1 kg, a másikra 2 kg tömegű pontszerű testet erősítettünk. Mennyi ennek a rendszernek a tehetetlenségi nyomatéka?

4. Mennyi egy kisautó lendkerekének tehetetlenségi nyomatéka, ha tömege 10 dkg és sugara 2 cm?

5. Egy 0,5 kg tömegű és 1 m hosszú pálcát az egyik végén átmenő, rá merőleges tengely körül forgatunk. Mennyi a pálca tehetetlenségi nyomatéka? Mekkora ugyanennek a pálcának a tehetetlenségi nyomatéka, ha a rá merőleges forgástengely a pálca közepén megy át?

11.2. A perdület (Kiegészítő anyag)

A mozgás és a mozgásállapot különböző fogalom, a forgás és a forgásállapot sem ugyanazt jelenti. Haladó mozgásnál a testek mozgásállapotát – dinamikai szempontból – a lendülettel jellemeztük. A lendületet a test tömegének és sebességének szorzataként számítottuk ki ($\vec{I} = m \cdot \vec{v}$). Ennek mintájára vizsgáljuk meg, milyen mennyiséggel lehet dinamikailag jellemezni a testek forgásállapotát.

Legegyszerűbben a rögzített tengely körül forgó merev testek forgásállapotát lehet vizsgálni. Ehhez (hasonlóan, mint a lendületnél) ismerni kell, hogy

- milyen szögsebességgel (ω) forog a test,
- mekkora a forgó test adott tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka (Θ).

Különböző testek foroghatnak egyformán, de forgásállapotuk mégis lehet különböző. Ennek a különböző állapotnak a dinamikai jellemzéséhez egy mennyiségre van szükség. Ezt a mennyiséget a haladó mozgásnál hasonló célból bevezetett mennyiségnek (lendület) formailag is megfelelően vezetjük be.

A rögzített tengely körül forgó merev testek forgásállapotát dinamikai szempontból a tehetetlenségi nyomaték és a szögsebesség szorzatával jellemezhetjük. Ezt a mennyiséget **perdületnek**** nevezzük, és N-nel jelöljük:

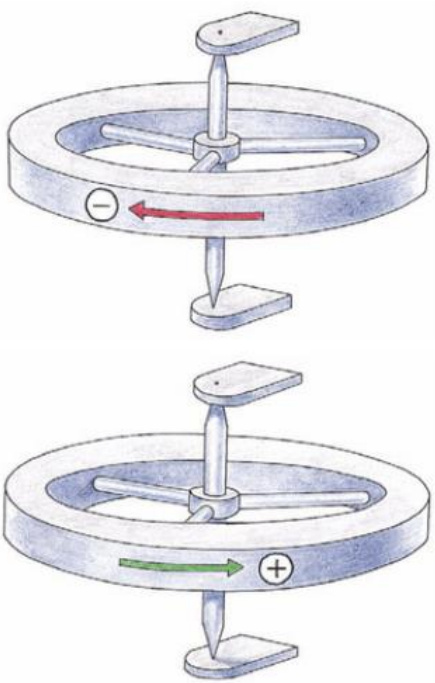
$$\text{perdület} = \text{tehetetlenségi nyomaték} \cdot \text{szögsebesség},$$

$$N = \Theta \cdot \omega.$$

A perdület mértékegysége a tehetetlenségi nyomaték és a szögsebesség mértékegységének szorzata:

$$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{1}{\text{s}}.$$

Egy rögzített tengely körül forgó test csak az óramutató járásával megegyező vagy azzal ellentétes irányban foroghat. Az egymással ellentétesen forgó testek perdülete között – a szokott módon – úgy tehetünk legegyszerűbben különbséget, ha az egyik irányba forgó testek perdületét pozitívnak, a vele ellentétesen forgóét negatívnak vesszük.



114.1. A rögzített tengelyen ellentétes irányban forgó testek perdülete között a pozitív (+) és negatív (–) előjel segítségével teszünk különbséget

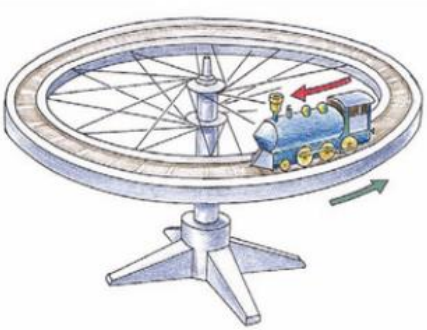
Az óra mutatóival ellentétesen forgó testek perdületét pozitívnak szokás választani.

ZÁRT RENDSZER PERDÜLETE

Egy függőleges tengelyű korongra (pl. kivett biciklikerékre) erősített kör alakú pályán egy játékmozdony áll (lásd *115.1. ábra*). A mozdony elindulásakor a korong is elkezd forogni a mozdony mozgásával ellentétes irányban.

Az elektromos kávédaráló bekapcsolásakor a villanymotor forgó része megperdül, a kávédaráló többi része pedig – ha nem fognánk erősen – ellentétes irányba fordulna el.

Ha két test csak egymással áll kölcsönhatásban, akkor az, amelyik megperdíti a másikat,



115.1. Párkölcsönhatás közben ami perdít, az az ellentétes irányba perdül is



115.2. A perdületmegmaradás törvénye a háztartásban is tapasztalható, amikor a centrifuga bekapcsoláskor „eltáncol"

maga is forgásba jön, az általa létrehozott forgással ellentétes irányba. Röviden, **ami perdít, az maga is (az ellentétes irányba) perdül.**

Ez a felismerés hasonló a két kiskocsi szétlökésénél tapasztaltakhoz. Erre a hasonlóságra építve (vagy mérőkísérlet alapján) meg lehet határozni az egymással párkölcsönhatásban levő testek perdületváltozását.

Az egymást megperdítő testek szögsebességváltozása fordítottan arányos a testek tehetetlenségi nyomatékával:

$$\Delta\omega_1 : \Delta\omega_2 = \Theta_2 : \Theta_1.$$

Ez alapján a perdületváltozások nagyságára felírható:

$$\Theta_1 \cdot \Delta\omega_1 = \Theta_2 \cdot \Delta\omega_2 \;\Rightarrow\; \Delta N_1 = \Delta N_2.$$

Az egymást megperdítő testek perdületváltozása egyenlő nagyságú. Mivel ezeknek a testeknek a forgása ellentétes irányban változik, a perdületváltozásuk ellentétes előjelű. Az irányt is figyelembe véve:

$$\Theta_1 \cdot \Delta\omega_1 = -\Theta_2 \cdot \Delta\omega_2 \Rightarrow \Theta_1 \cdot \Delta\omega_1 + \Theta_2 \cdot \Delta\omega_2 = 0.$$

$$\Delta N_1 = -\Delta N_2 \;\Rightarrow\; \Delta N_1 + \Delta N_2 = 0.$$

Minden tapasztalat és mérés azt igazolja, hogy **zárt rendszeren belül** a testek forgásállapota egymás hatására megváltozhat, de csak úgy, hogy **a perdületváltozások összege nulla** legyen. Ez azt jelenti, **a zárt rendszerek perdülete állandó:**

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i = 0.$$

Másként megfogalmazva:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = \text{állandó}.$$

Ez a megállapítás a **perdületmegmaradás törvénye****.

MEGJEGYZÉSEK

1. A *perdület* elnevezés helyett a szakirodalom az *impulzusmomentum* vagy *impulzusnyomaték* elnevezést is használja.
2. A perdülettel kapcsolatos kísérleteket csak rögzített tengelyek körül forgó merev testekkel végeztük. Ezért megállapításaink ($N = \Theta \cdot \omega$, illetve $\Delta N_1 + \Delta N_2 = 0$) ebben a formában csak ilyen feltételek között igazak.
3. A perdület fogalmát és a perdületmegmaradás törvényét a haladó mozgásnál megismertekre építve analógia (görög szó, jelentése: hasonló) alapján határoztuk meg. Ugyanerre az eredményre jutottunk volna akkor is, ha kísérleti mérésre alapozzuk felismeréseinket.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Az elektromos kávédarálóban levő villanymotor kapcsolója csak úgy működik, ha alul és felül megfogva a darálót, nyomjuk a daráló fedelét. Mi történne a kávédarálóval, ha magára hagyva is be lehetne kapcsolni a benne levő villanymotort? Mit igazol ez a tény? Mi a különbség a szabadon hagyott és a megfogott elektromos kávédaráló – mint rendszer – között?

2. A műkorcsolyázók egyik kedvenc gyakorlata a piruett, amikor a versenyzők – a korcsolya hegyén állva – testük hossztengelye körül pörögnek.
   - Milyen rendszernek tekinthető ilyenkor a korcsolyázó?
   - Mit tesz a versenyző, ha piruett közben növelni vagy csökkenteni akarja a szögsebességét?
   - Valójában a korcsolyázónak – mint forgó testnek – milyen tulajdonsága változik meg ilyenkor? Milyen mennyiséggel jellemezhető ez a tulajdonság?
   - Milyen törvényt igazol az így létrejött változás?

3. Egy forgózsámolyon ülő gyereket megforgatnak, és magára hagynak.
   - Milyen rendszernek tekinthető a zsámoly forgó része és a gyerek együttesen?
   - Milyen tulajdonsága változik a rendszernek, ha a gyerek kitárja a karját? Miért?
   - A kitárt vagy a testhez szorított kar esetén nagyobb-e a szögsebesség? Miért?

4. Milyen megmaradási törvényeket ismertünk meg eddig? Milyen rendszerre érvényesek ezek a megmaradási törvények?

5. Az automata mosógépek forgódobjának tengelye általában vízszintes. Miért előnyösebb ez, mintha függőleges lenne a tengely?



FELADATOK

1. Mekkora a perdülete annak a merev testnek, amelyik $4\,\frac{1}{s}$ szögsebességgel forog, valamint $3\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$ a tehetetlenségi nyomatéka?

2. Mekkora a perdülete annak az 1 m sugarú körpályán keringő, 2 kg tömegű ólomgolyónak, amelyik 1 másodperc alatt kétszer futja végig a körpályát?

3. Az 1 m hosszú (elhanyagolható tömegű) léc közepén egy szöget ütöttek át. A léc egyik végére 1 kg, a másik végére 2 kg tömegű golyót erősítettek. Ez a rendszer a függőleges helyzetű szög mint forgástengely körül másodpercenként 3 radiánnal fordul el egyenletesen. Mennyi a rendszer perdülete?

4. Mekkora a perdülete a 11.1.-es fejezet 5. feladatában szereplő pálcának, ha mindkét esetben $5\,\frac{1}{s}$ szögsebességgel forgatják?

11.3. A forgatónyomaték



117.1. A forgó csak külső erőhatásra indul el

A játszótéri forgót megindítani és felgyorsítani az szokta, aki nincs a forgón. A test forgásállapota, és így az azt jellemző perdület is csak külső erőhatásra változhat meg. Mint tudjuk, csak olyan erőhatásnak van forgásállapot-változtató képessége, amelynek a hatásvonala nem megy át a forgástengelyen és nem is párhuzamos azzal.

Két gyerek közös erővel hamarabb hozza ugyanolyan forgásba a forgót, mint egy gyerek. Az erősebb villanymotor gyorsabban változtatja egy lendítőkerék forgását, mint – az ugyanolyan kerékét – egy gyengébb.

Az erő forgásállapot-változtató hatásának nagysága különböző lehet. Így célszerű egy mennyiséggel jellemezni, amit **forgatónyomatéknak*** nevezünk, és M-mel jelölünk.

Az erőhatáshoz hasonlóan a forgásállapot-változást eredményező hatás is jellemezhető a következménye alapján. A testek forgásállapotát a perdülettel (N), a forgásállapot-változását pedig a perdületváltozással (ΔN) jellemeztük. Ezt a mennyiséget ($N = \Theta \cdot \omega$) és az erő fogalmának bevezetésénél alkalmazott gondolatmenetet felhasználva kimondhatjuk, hogy **változatlan feltételek között:**

Az a forgásállapot-változtató hatás a nagyobb, amelyik ugyanazon a testen:

- **ugyanannyi idő alatt nagyobb perdületváltozást eredményez** (ha $\Delta t_1 = \Delta t_2$, valamint $\Delta N_1 > \Delta N_2$, akkor $M_1 > M_2$), vagy
- **ugyanakkora perdület-változást rövidebb idő alatt hoz létre** (ha $\Delta N_1 = \Delta N_2$, valamint $\Delta t_1 < \Delta t_2$, akkor $M_1 > M_2$).

A hasonlóság alapján továbblépve az erőnél megismert gondolatsoron ($F \sim \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{\Delta I}{\Delta t}$), vagy kísérlettel megvizsgálva változatlan forgatónyomaték esetében a jelenséget és felismerve az $M \sim \frac{\Delta N}{\Delta t}$ összefüggést, felírható, hogy:

$$\text{forgatónyomaték} = \frac{\text{perdületváltozás}}{\text{a közben eltelt idő}},$$

$$M = \frac{\Delta N}{\Delta t}.$$

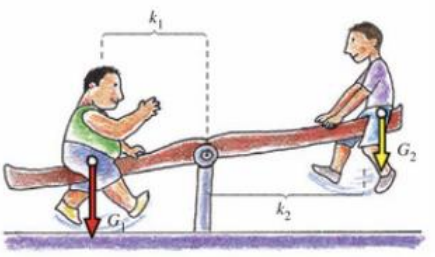
Ez azt jelenti, hogy a forgatónyomaték a perdületváltozás sebességeként értelmezhető mennyiség, amely megmutatja az egységnyi idő alatt bekövetkező perdületváltozás nagyságát.

Mértékegységei a perdület és az idő mértékegységének hányadosaként alkothatók meg. Az SI-beli mértékegysége tehát:

$$\frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{\text{s}} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Az erőhatás forgásállapot-változtató képességének mértékét, a forgatónyomatékot már az általános iskolában megismertük. Gondoljuk át ezt a fogalmat és kiszámítási módját a legegyszerűbb esetben, amikor az erővektor a rögzített forgástengelyre merőleges síkban van.

Egy rögzített tengelyen levő merev testet egyszerre több erőhatás is érhet. Ezek forgásállapot-változtató hatása erősítheti, gyengítheti vagy ki is egyenlítheti egymást. Amikor a testet érő ilyen hatások kiegyenlítik egymást, a test forgásállapota nem változik. A testek ilyen állapotát **forgási egyensúlynak*** nevezzük. Forgási egyensúlyban a test vagy tartósan nem forog (de attól még haladó mozgással mozoghat), vagy egyenletes forgómozgást végez.



117.2. Egyensúly esetén a súlyosabb gyerek közelebb ül a tengelyhez ($G_1 > G_2$; $k_1 < k_2$), mint a könnyebb

A mérleghintán két különböző súlyú gyerek úgy tud hintázni, ha a súlyosabb gyerek közelebb van a forgástengelyhez, mint a könnyebb. Így elérhető, hogy a két gyerek súlyának forgatónyomatéka egyenlő nagyságú és ellentétes irányú legyen. (Lásd *117.2. ábra.*)

A forgatónyomaték nagysága az erőhatás nagyságától és az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolságától is függ. Az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolságát **erőkarnak*** nevezzük, és k-val jelöljük.

Egy vékony, könnyű rúddal – amelynek közepén vízszintes helyzetű forgástengely van – megvizsgálható, hogyan függ a forgatónyomaték nagysága az erő és az erőkar nagyságától.

Akasszunk a rúd egyik oldalán a forgástengelytől k_1 távolságra (teherkar) egy G_1 súlyú nehezéket (teher). Vizsgáljuk meg, hogy a rúd másik oldalán mekkora k_2 távolságra (erőkar) és milyen nagyságú G_2 erővel tudjuk kiegyensúlyozni a teher forgató hatását. Válasszuk az erőkart a teherkar 1-; 2-; 3-; 4-szeresének. Készítsünk táblázatot, amelybe írjuk be a $G_1 \cdot k_1$ és $G_2 \cdot k_2$ szorzatokat is!

G_1	k_1	$M_1 = G_1 \cdot k_1$	G_2	k_2	$M_2 = G_2 \cdot k_2$
1 N	0,08 m	0,08 N·m	4 N	0,02 m	0,08 N·m
			2 N	0,04 m	0,08 N·m
			1 N	0,08 m	0,08 N·m

Kísérlet alapján megfigyelhető, hogy forgási egyensúly esetén a rúd két oldalára vonatkozó $G \cdot k$ szorzatok minden esetben egyenlők:

$$G_1 : G_2 = k_2 : k_1 \quad \Rightarrow \quad G_1 \cdot k_1 = G_2 \cdot k_2.$$

A $G \cdot k$ szorzat a forgásállapot-változtató hatásra jellemző mennyiség, így alkalmas a forgatónyomaték nagyságának kiszámítására.

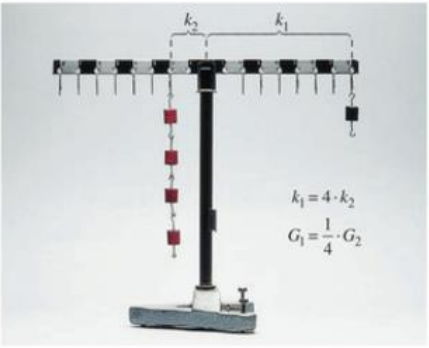
Nemcsak a testek súlyára, hanem bármilyen erőre általánosítható a

forgatónyomaték = erő · erőkar,

$$M = F \cdot k.$$

A forgatónyomaték mértékegysége az erő és az erőkar mértékegységének szorzata, így az SI-beli mértékegysége a N·m, aminek sem külön neve, sem külön jele nincs.

A rögzített tengelyen forgó test csak az óramutató járásával ellentétes (+), vagy azzal



118.1. Ha az erőkar hossza négyszerese a teherének, akkor az egyensúlyt biztosító erő negyede a tehernek

megegyező (–) irányban foroghat. Ez összhangban van a szögelfordulásnál, a szögsebességnél és a szöggyorsulásnál alkalmazott jelölésekkel. Így ha az erőhatás pozitív irányú forgásállapot-változást hoz létre, a forgatónyomaték is pozitív, ellentétes esetben negatív előjelű.

Két erőhatás forgási egyensúlya esetében a forgatónyomatékok egyenlő nagyságúak és ellentétes előjelűek. A forgatás irányát is figyelembe véve:

$$F_1 \cdot k_1 = -F_2 \cdot k_2,$$

illetve

$$M_1 = -M_2.$$

Az egyenleteket átrendezve:

$$F_1 \cdot k_1 + F_2 \cdot k_2 = 0,$$

illetve

$$M_1 + M_2 = 0.$$

Általánosan igaz, hogy **a rögzített tengelyen forgó merev test akkor van forgási egyensúlyban, ha a testet érő erőhatások forgatónyomatékainak** (előjeles) **összege nulla:**

$$M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n = 0.$$

Egyszerűbb jelöléssel felírva:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0.$$

Ilyen esetben a rögzített tengelyen levő test vagy nyugalomban van, tehát nem forog, vagy egyenletesen forog.

MEGJEGYZÉSEK

1. Vizsgálatainknál az erők hatásvonalai a rögzített forgástengelyre merőleges síkban voltak. Ezért megállapításaink ($M = F \cdot k$, és forgási egyensúlynál $M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0$) is csak ilyen esetekre érvényesek.
2. A forgatónyomatékot minden esetben egy meghatározott forgástengelyre kell kiszámítani, hiszen ugyanannak az erőhatásnak más és más a forgató hatása, ha a forgástengely és az erővektor egymáshoz viszonyított helye vagy helyzete különböző.
3. A forgatónyomaték valójában vektormennyiség, de mi csak rögzített tengelyen levő merev testek forgását vizsgáltuk, ahol a forgástengely sem helyét, sem helyzetét nem változtathatta meg. Ilyen esetben a test csak az óramutató járásával megegyező vagy ellentétes irányban foroghat, így a vektori tulajdonságot itt is ki lehet fejezni előjelekkel. Ezért alkalmazhattunk a szögelfordulásnál, szögsebességnél, a szöggyorsulásnál és a közös hatásvonalú erőknél már megismert megoldást.
4. Ha az erő hatásvonala átmegy a forgástengelyen, akkor az erőkar hossza és így a forgatónyomaték is nulla, vagyis az erőhatásnak nincs forgásállapot-változtató képessége. A forgást megváltoztató hatásra vonatkozó megállapításunk matematikai megfogalmazása ($M = F \cdot k$) és a gyakorlati tapasztalatunk tehát összhangban van.
5. A mozgásállapot – mivel a forgás is mozgás – valójában a haladó és forgómozgást végző test mozgásállapotát együttesen jelentené. A mozgásállapot szó jelentését azonban gyakran leszűkítjük a haladó mozgást végző test mozgásállapotára, hogy ne kelljen ilyen hosszan mondani, amikor meg akarjuk különböztetni a forgásállapottól.
6. Hasonlóság a haladó és a rögzített tengelyű forgómozgás között:

Haladó mozgás	**Forgómozgás**	**Kapcsolat közöttük**
út, s	szögelfordulás, φ	$s = r \cdot \varphi$
sebesség, $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$	szögsebesség, $\omega = \dfrac{\Delta \varphi}{\Delta t}$	$v = r \cdot \omega$
gyorsulás, $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$, ha $F =$ áll.	szöggyorsulás, $\beta = \dfrac{\Delta \omega}{\Delta t}$, ha $M =$ áll.	$a = r \cdot \beta$
tömeg, m	anyagi pont tehetetlenségi nyomatéka, $\Theta = m \cdot \ell^2$	$\Theta = m \cdot \ell^2$
lendület, $I = m \cdot v$	perdület, $N = \Theta \cdot \omega$	$N = r \cdot I$
erő, $F = \dfrac{\Delta I}{\Delta t}$; $F = m \cdot a$	forgatónyomaték, $M = \dfrac{\Delta N}{\Delta t}$; $M = \Theta \cdot \beta$	$M = F \cdot k$

   A táblázatba beírt összefüggések egy része csak a legegyszerűbb vagy csak speciális esetekben (egyenletes mozgás, változatlan tömeg, anyagi pont, változatlan tehetetlenségi nyomaték, merőlegesség stb.) érvényes.
7. A tanulás könnyítése érdekében a perdület és a forgatónyomaték fogalmának kialakításánál és kiszámításánál felhasználtuk a haladó és forgómozgás közötti hasonlóságot. Valójában az volna a természetes, hogy amikor mérések alapján megalkottuk mind a haladó, mind a forgómozgást jellemző mennyiségeket, azt követően vennénk észre a közöttük levő hasonlóságokat.

8. A forgatónyomatékot többféle módon határoztuk meg, és többféle módon számítottuk ki.

- Az $M = F \cdot k$ kiszámítási mód a forgásállapot-változást okozó hatás adataival (erő, erőkar) határozza meg a forgatónyomatékot.
- Az $M = \frac{\Delta N}{\Delta t}$ a forgásállapot-változtató hatás következménye alapján adja meg a forgatónyomatékot.
- A változatlan tehetetlenségi nyomatékú test forgásállapotát és így perdületét megváltoztató erőhatás forgatónyomatéka is kiszámítható (az $F = m \cdot a$-hoz hasonlóan) a következő módon:

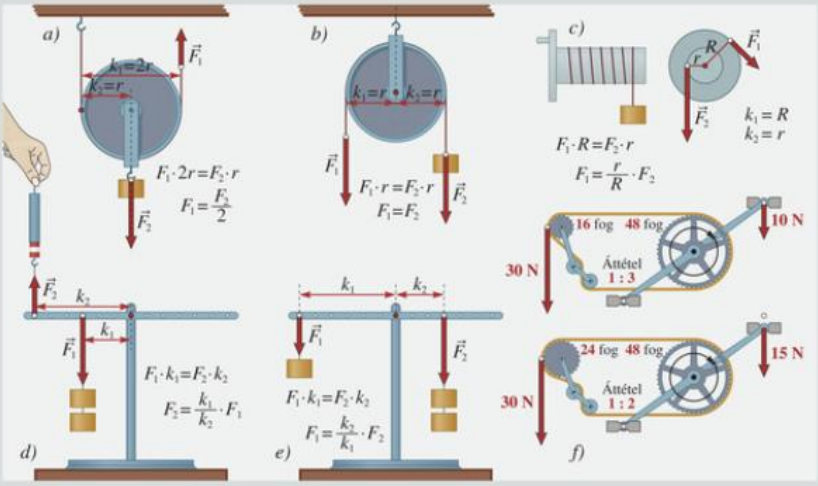
$$M = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Theta \cdot \Delta\omega}{\Delta t} = \Theta \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \Theta \cdot \beta.$$

A forgatónyomatékot tehát három módon tudjuk kiszámítani attól függően, hogy milyen adatokat ismerünk:

$$M = \frac{\Delta N}{\Delta t}; \qquad M = \Theta \cdot \beta; \qquad M = F \cdot k.$$

A három meghatározás és kiszámítási mód természetesen ugyanazt a mennyiséget jelenti, csak az értelmezési módjuk és az érvényességi határaik különböznek. Ezt erősíthetjük meg a forgatónyomaték kétféle módon felírt mértékegységének ($\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$, illetve a $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$) összehasonlításával. Mivel az $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, amit méterrel megszorozva a perdület felől megközelített forgatónyomaték mértékegységét kapjuk. A két mértékegység tehát csak formailag különbözik egymástól.

9. Az emelők és az emelő típusú egyszerű gépek egyensúlyának feltétele a forgatónyomaték alapján állapítható meg. (*a)* mozgócsiga; *b)* állócsiga; *c)* hengerkerék; *d)* egyoldalú emelő; *e)* kétoldalú emelő; *f)* fogaskerék.)



GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Miért nehéz és bizonytalan a kerékpárt irányítani, ha a kormányt a forgástengelyéhez közel fogjuk?

2. *„Azzal a nehéz fát könnyedén forgatja,*
Mint csekély botocskát, véginél ragadja;
Hosszan, egyenesen tartja félkezével,
Mutatván az utat, hol Budára tér el."
(Részlet Arany János *Toldi* c. művéből.)

Miért ámult el Laczfi nádor mind egész hadával, hiszen egy „vendégoldalt" bárki könnyen felemelhet?



3. A villanyoszlopokat szűk, mély gödörbe állítják. Felállítás közben az oszlop függőleges síkban fordul el. Elforgatás közben hol van az oszlop forgástengelye? Felállításkor miért és hol tolják rudakkal is a villanyoszlopokat?

4. Megváltozhat-e a forgatónyomaték, ha az erőhatás nagysága változatlan, de iránya változik a tengelyhez viszonyítva?

5. Miért használnak hosszú nyelű csavarkulcsot az anyacsavarok megszorításához vagy kilazításához?

6. Mire következtethetünk abból, ha egy rögzített tengelyen forgó test szögsebessége változik?

7. Változhat-e a rögzített tengelyen magára hagyott merev test szögsebessége, ha a súrlódástól és a közegellenállástól eltekinthetünk? Fogalmazzuk meg a tehetetlenség törvényének forgómozgásra vonatkozó változatát!

FELADATOK

1. Mekkora a 10 N nagyságú erőhatás forgatónyomatéka, ha hatásvonala a tengelyre merőleges síkban van és távolsága a forgástengelytől 0,5 m? Hogyan változik ez a forgatónyomaték, ha
   - az erőkart felére csökkentjük?
   - az erőhatás nagyságát megháromszorozzuk?
   - az erőhatás nagyságát felezzük, és az erőkart négyszeresére növeljük?

2. Egy rögzített tengelyre erősített testet olyan 4 N nagyságú erőhatás hoz forgásba, amelynek hatásvonala a tengelyre merőleges síkban van, és a tengelytől mért távolsága 25 cm.
   - Mekkora legyen annak a 2 N nagyságú erőhatásnak az erőkarja, amely forgási egyensúlyt hoz létre az előző erőhatással szemben?
   - A tengely melyik oldalán legyen az egyensúlyt létrehozó erőhatás hatásvonala, ha az erőhatás iránya:
     a) megegyezik az első erőhatás irányával?
     b) ellentétes az első erőhatás irányával?

3. Egy 6 m hosszú gerenda tömege 40 kg. A gerendát egyik végétől 1 m-re ékre fektetjük. Mekkora erővel lehet ezen a végén egyensúlyban tartani?

4. Egy csípőfogó vágóél felé eső hossza 12 mm, a kézzel szorított végének a tengelytől mért távolsága a tenyér közepéig 8 cm. A kezünkkel 150 N nagyságú erőhatást fejtünk ki a fogóra. Mekkora erő éri a drótot elvágás közben?

12. Merev testek egyensúlya

12.1. A párhuzamos hatásvonalú erők eredője

A lovas kocsit sokszor két ló húzza. Ilyen esetben a lovak párhuzamos és megegyező irányú erőhatást fejtenek ki a kocsira. A kerékpár és az autó kormányát két párhuzamos és ellentétes irányú erőhatással célszerű elfordítani. A gyakorlati életben sokszor előfordul, hogy egy testet párhuzamos hatásvonalú erőhatások érnek, így ezek eredőjének meghatározására is szükség lehet.

Mivel **a párhuzamos hatásvonalú erők támadáspontját a hatásvonaluk mentén nem lehet egy közös pontba áthelyezni** (mert hatásvonaluk nem metszi egymást), **így eredőjük nem határozható meg a paralelogramma módszerrel.** A feladat megoldására más lehetőséget kell keresni. A párhuzamos hatásvonalú erők eredőjének meghatározási módja legegyszerűbben kísérlettel ismerhető fel.

A) Két párhuzamos, egyirányú erő eredője

Két párhuzamos erőmérővel azonos irányba húzzunk egy fahasábot olyan vízszintes, sima felületen, amelyen a súrlódás elhanyagolható (vagy golyókat teszünk a fahasáb alá). Ha a két erőmérő egyirányú erőhatást fejt ki a fahasábra, akkor az legtöbbször gyorsulva mozog az erőhatások irányában.

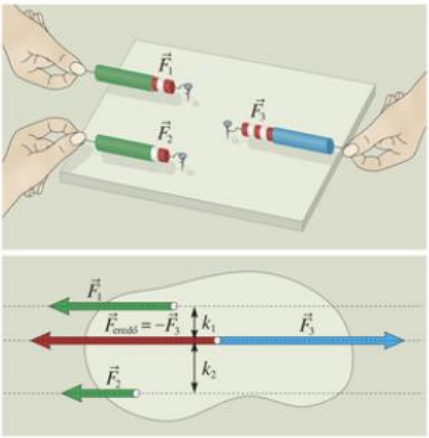
Ezt a hasábot egy harmadik erőmérővel egyensúlyban lehet tartani úgy, hogy ne mozduljon és ne forduljon el (*122.1. ábra*). A harmadik erőmérő által jelzett erő ilyenkor egyenlő nagyságú és ellentétes irányú a másik két erő eredőjével.

A harmadik erőmérő helyzetéből és az általa mért erő nagyságából tehát következtetni lehet az eredő erő irányára, nagyságára és hatásvonalának helyére.

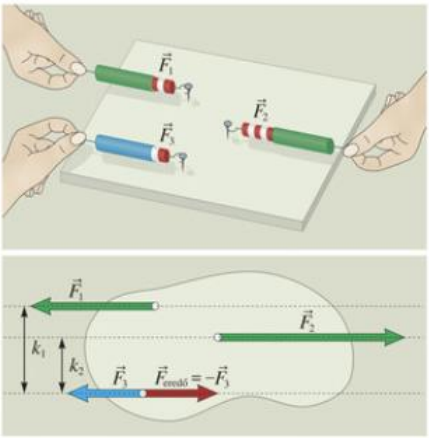
Kísérlettel megállapítható, hogy **két párhuzamos hatásvonalú és megegyező irányú erő eredőjének**

- **nagysága** a két összetevő erő nagyságának összege ($F_{\text{eredő}} = F_1 + F_2$);
- **iránya** a két összetevő erő közös irányával egyezik meg;
- **hatásvonala** a két összetevő erő hatásvonalával párhuzamos, és azok között, a nagyobb erő hatásvonalához közelebb helyezkedik el. Az eredő erő hatásvonalának az összetevő erők hatásvonalától mért távolsága (k_1 és k_2) fordítottan arányos az összetevő erők nagyságával:

$$k_1 : k_2 = F_2 : F_1.$$



122.1. A két párhuzamos, megegyező irányú erő egy harmadik, párhuzamos és ellentétes irányú erővel kiegyenlíthető



122.2. A két párhuzamos ellentétes irányú erő is kiegyenlíthető egy harmadikkal

B) Két párhuzamos, ellentétes irányú erő eredője

Két párhuzamos helyzetű rugós erőmérővel ellentétes irányba húzott fahasáb legtöbbször elfordulva mozdul el eredeti helyéről. A hasáb ilyen esetben is egyensúlyban tartható egy harmadik erőmérővel.

A harmadik erőmérő helyzetéből és az általa mért erő nagyságából most is következtetni lehet az első két erő eredőjének irányára, nagyságára és hatásvonalának a helyére. (*122.2. ábra*)

Kísérlettel megállapítható, hogy **két párhuzamos hatásvonalú és ellentétes irányú erő eredőjének**

- **nagysága** a két összetevő erő nagyságának különbsége ($F_{\text{eredő}} = |F_2 - F_1|$);
- **iránya** a nagyobb összetevő erő irányával egyezik meg;
- **hatásvonala** a két összetevő erő hatásvonalával párhuzamos, azokon kívül, a nagyobb erő felől helyezkedik el. Az eredő erő hatásvonalának az összetevő erők hatásvonalától mért távolsága (k_1 és k_2) fordítottan arányos az összetevő erők nagyságával:

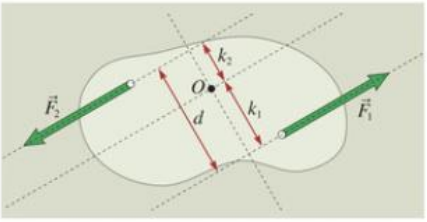
$$k_1 : k_2 = F_2 : F_1.$$

AZ ERŐPÁR

A fahasábot úgy is húzhatjuk ellentétes irányba két párhuzamos helyzetű erőmérővel, hogy az erőmérők egyenlő nagyságú erőhatásokat jelezzenek. Ilyenkor a hasáb elkezd forogni egy tengely körül anélkül, hogy ez a tengely elmozdulna eredeti helyéről. Ebben az esetben egy harmadik erőmérővel nem lehet egyensúlyban tartani a hasábot.

Két erőt, ha hatásvonaluk párhuzamos, irányuk ellentétes, nagyságuk egyenlő és ugyanarra a testre „hatnak", erőpárnak* nevezzük.

Ha egy merev testet csak erőpárral jellemezhető erőhatások érnek, a két erőhatás nem helyettesíthető egyetlen erővel. Ez belátható, mert ha az ismert módon akarnánk az eredő erőt meghatározni, akkor az $F_1 = F_2$ miatt az eredő erő nagysága nulla lenne ($|F_1 - F_2| = 0$). Ezért ilyen esetben a test haladó mozgása nem változik. A test forgásállapota azonban megváltozik, ezért nem mondhatjuk, hogy az erőpár erői kiegyenlítik egymást.



123.1. Az erőpár nem helyettesíthető egyetlen erővel

A párhuzamos hatásvonalú, ellentétes irányú és egyenlő nagyságú erőhatások nem egyenlítik ki egymást, hiszen van forgásállapot-változtató képességük, ami forgatónyomatékkal jellemezhető.

Az erőpár forgatónyomatéka nem függ attól, hogy az általuk meghatározott síkra merőleges forgástengely hol van.

Ez a meglepő állítás kísérlettel és a következő gondolatsorral is belátható.

Ha az erőpár által meghatározott síkra merőleges forgástengely a két erő hatásvonala között van (lásd *123.1. ábra*), akkor az erőpárt alkotó két erőhatás ugyanabba az irányba forgatja a testet, tehát azonos előjelűek, és így forgatónyomatékaik összeadódnak:

$$M = M_1 + M_2 = F_1 \cdot k_1 + F_2 \cdot k_2.$$

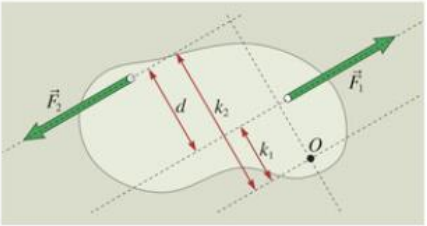
Mivel F_1 és F_2 egyenlő nagyságú ($F_1 = F_2 = F$):

$$M = F \cdot k_1 + F \cdot k_2 =$$
$$= F \cdot (k_1 + k_2) = F \cdot d,$$

ahol d a két erő hatásvonalának távolsága.

Ha a forgástengely a hatásvonalakon kívül helyezkedik el (lásd *123.2. ábra*), a két erőhatás ellentétes irányba forgat, ezért a forgatónyomatékaik nagysága kivonódik egymásból:

$$|M| = |M_2| - |M_1| = F_2 \cdot k_2 - F_1 \cdot k_1 =$$
$$= F \cdot (k_2 - k_1) = F \cdot d.$$



123.2. Az erőpár forgatónyomatéka $M = F \cdot d$, függetlenül a forgástengely helyétől

Az erőpár forgatónyomatékának nagysága tehát – a forgástengely helyétől függetlenül –

$$M = F \cdot d,$$

ahol F az erők nagysága, d a hatásvonalaik közötti távolság.

Az erőpár forgatónyomatéka vagy a két erő forgatónyomatékának előjeles összegeként, vagy az $F \cdot d$ szorzattal számítható ki.

A MEREV TESTEK EGYENSÚLYÁNAK FELTÉTELEI

A testek két alapvető mozgása a haladó és a forgómozgás. **A csak haladó mozgást végző test** (pl. anyagi pont) **egyensúlyának az a feltétele, hogy a testet érő erők eredője nulla legyen:**

$$\vec{F}_{\text{eredő}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = 0.$$

Más jelöléssel:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0.$$

Ilyen esetben a test vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

A csak forgómozgást végző test, ha nem változik a forgásállapota, forgási egyensúlyban van. **A forgási egyensúlynak az a feltétele, hogy a testet érő erők** (bármely tengelyre vonatkozó) **forgatónyomatékainak összege nulla legyen.** Változatlan forgástengely esetében ez azt jelenti, hogy a forgatónyomatékok (előjeles) összege nulla:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n = 0.$$

Más jelöléssel:

$$M_e = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0.$$

Az a test, amely haladó és forgómozgást is végezhet, csak akkor lehet egyensúlyban, ha az előző két feltétel – rájuk vonatkozóan – egyidejűleg teljesül.

A merev test akkor van egyensúlyban, ha a testre ható erők eredője és ezen erők forgatónyomatékainak összege is nulla:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \quad \text{és} \quad M_e = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0.$$

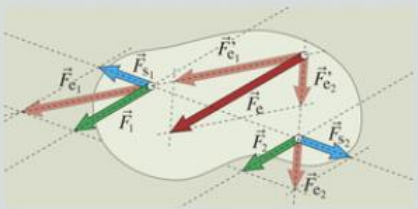
MEGJEGYZÉSEK

1. A nyugalomban levő test egyensúlyban van. Az egyensúlyban levő test nem biztos, hogy nyugalomban van, hiszen egyenes vonalú egyenletes mozgást is végezhet. A nyugalom és az egyensúly tehát nem azonos fogalom.

2. Az erők összegén mindig az erővektorok eredőjét értjük, amelynek meghatározását a közös síkban levő erők minden változatára megismertük már. A forgatónyomatékok összegét mi csak – a párhuzamos és rögzített helyzetű tengelyek esetében alkalmazható – előjeles összeadás formájában ismertük meg, és csak ilyen esetekben alkalmazhatjuk.

3. A közös hatásvonalú, ellentétes irányú és egyenlő nagyságú erők nem alkotnak erőpárt, hiszen ezek forgatónyomatékának összege nulla. Az erőpár meghatározásában tehát a hatásvonalak párhuzamosságát csak szűken értelmezve (euklideszi módon) használtuk. Tágabb értelemben (a matematikában) ugyanis egy egyenest önmagával és így az egybeeső egyeneseket is párhuzamosnak szokás tekinteni.

4. A párhuzamos hatásvonalú erők eredője két egymást kiegyenlítő segéderő ($F_{s_1} = -F_{s_2}$) felvételével megszerkeszthető a paralelogramma módszer háromszori alkalmazásával.



GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Soroljunk fel a gyakorlati életből olyan jelenségeket, amelyeknél a testet érő erőhatások párhuzamosak és megegyező irányúak, illetve párhuzamosak és ellentétes irányúak!
2. Miért nem lehet a párhuzamos hatásvonalú erők eredőjét paralelogramma módszerrel meghatározni anélkül, hogy segéderőket alkalmaznánk?
3. Miben tér el és miben egyezik meg két párhuzamos erő eredője, ha azok megegyező, illetve ellentétes irányúak?
4. Miért nem változtatja meg a testek haladó mozgását az erőpárral jellemezhető két erőhatás? Kiegyenlítik-e egymást az ilyen erőhatások? Miért?

FELADATOK

1. Egy testet két párhuzamos hatásvonalú és megegyező irányú erőhatás ér, amelynek nagysága 80 N, illetve 20 N. Hatásvonalaik távolsága 100 cm. Számítsuk ki az eredő erő nagyságát, és határozzuk meg hatásvonalának a helyét!
2. Egy testet két párhuzamos hatásvonalú és megegyező irányú erőhatás ér. Mekkora az egyik erőhatás, ha az eredő erő 120 N nagyságú és a másik összetevő 40 N? Milyen távol van az eredő erő hatásvonala a nagyobb összetevő erő hatásvonalától, ha a két összetevő erő hatásvonala 60 cm távolságra van egymástól?
3. Egy testet két párhuzamos hatásvonalú és megegyező irányú erőhatás ér. Az egyik erőhatás nagysága 55 N. A forgástengely az egymástól 160 cm távolságban levő hatásvonalak által meghatározott síkra merőleges, és az ismert erőhatás hatásvonalától 60 cm távolságra van. Forgási egyensúly esetén
   - mekkora a másik erőhatás?
   - a két erő hatásvonalához viszonyítva hol helyezkedik el a forgástengely?
4. Egy 40 cm hosszú, elhanyagolható súlyú bot egyik végére 30 N, a másik végére 20 N súlyú terhet erősítettek. Hol és mekkora erővel kell tartani a botot, hogy az vízszintes helyzetében nyugalomban maradjon?
5. Egy 3,2 m hosszú, elhanyagolható súlyú rúdon 900 N súlyú terhet visznek ketten. A teher a rúd egyik végétől 2 m távolságra van. Mekkora erővel nyomja a rúd az egyik, illetve a másik munkás vállát?
6. Egy testet két párhuzamos hatásvonalú és ellentétes irányú erőhatás ér, amelyek nagysága 80 N, illetve 20 N. Hatásvonalaik távolsága 100 cm. Számítsuk ki az eredő erő nagyságát, és határozzuk meg hatásvonalának a helyét!
7. Egy homokkal megrakott lapátot két kézzel tartunk egyensúlyban. A lapáton levő homok tömege 10 kg. Melyik kezünkkel mekkora és milyen irányú erőhatást kell kifejtenünk a lapát 140 cm hosszú nyelére, ha a két kezünk távolsága 100 cm, és az egyik kezünk a 140 cm hosszú nyél végén van, a nyél másik vége a lapát fejének közepéig ér? (A lapát súlyát ne vegyük figyelembe.)



12.2. Tömegközéppont és súlypont. Egyensúlyi helyzetek

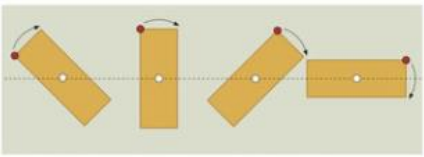


126.1. Szaltó közben a test a tömegközéppontja körül forog

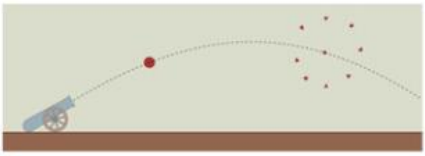
Bármely szabadon forgó test (pl. szaltózás közben a műugró vagy a tornász) mindig ugyanazon pontja körül pörög. **A testeknél azt a pontot, amely körül szabad mozgásuk közben forognak, a test tömegközéppontjának* nevezzük.**

Amikor a sima felületen ellökött hasáb súrlódása elhanyagolható és a többi külső erő (F_g és $F_{tartó}$) kiegyenlíti egymást, a hasáb zárt rendszernek tekinthető. A pörögve ellökött hasábnál megfigyelhető, hogy tömegközéppontja (forgáspontja) egyenes vonalon egyenletesen mozog. Minden más tapasztalat is azt igazolja, hogy:

A zárt rendszer tömegközéppontja vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.



126.2. A zárt rendszerek tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez



126.3. A tömegközéppont a pályán marad

Ez a megállapítás összhangban van a lendületmegmaradás törvényével.

A tűzijáték ferdén kilőtt rakétája parabola alakú pályán mozog. A rakéta szétrobbanása után jól megfigyelhető, hogy a világító részecskékből kialakuló tűzgömb középpontja – a rendszer tömegközéppontja – is ezen a parabola alakú pályán halad tovább. A robbanáskor fellépő belső erőhatások tehát nem változtatják meg a rendszer tömegközéppontjának mozgását. Mindig igaz, hogy **a testek (pontrendszerek) tömegközéppontjának mozgását csak külső erőhatások változtathatják meg.**

Minden test (anyagi rendszer) tömegközéppontja úgy mozog, mintha a test összes anyaga ebbe volna sűrítve, és a testet érő külső erők támadáspontja a tömegközéppont volna. Ezt a megállapítást szokás **tömegközéppont-tételnek*** nevezni.

A tömegközéppont-tétel alapján belátható, hogy a testek haladó mozgásának egyszerűsített leírásánál miért célszerű anyagi pontnak a test tömegközéppontját választani.

A TÖMEGKÖZÉPPONT HELYÉNEK MEGHATÁROZÁSA

Bármely pontjánál fogva felemelt testet két külső erőhatás ér, amit a nehézségi erő és a tartóerő jellemez. Ezek hatásvonalai függőlegesek és nyugalom esetében egybeesnek. Így mindkettőnek és az eredőjüknek is ugyanezen a függőleges egyenesen van a támadáspontja, tehát a test tömegközéppontja is. Ezért ha egy testet más-más pontjánál fogva tartunk, és minden ilyen esetben megjelöljük rajta a **felfüggesztési pontokon átmenő függőleges egyeneseket,** akkor ezek közös **metszéspontja kijelöli a test tömegközéppontjának a helyét.**

A SÚLYPONT

Az egyensúlyban levő, alátámasztott vagy felfüggesztett testek súlyának hatásvonala is egybeesik a nehézségi erő és a tartóerő közös hatásvonalával. E három erő közös hatásvonalát ezért **súlyvonalnak*** is szokás nevezni. A testek különböző

helyzetéhez tartozó súlyvonalak közös metszéspontját – a tömegközéppontot – **súlypontnak*** is mondják. A súlypont és a tömegközéppont tehát a testnek ugyanaz a pontja.

A tömegközéppont, és így a súlypont helyét a test anyagának elhelyezkedése határozza meg. Ezért a szabályos, homogén testek tömegközéppontja egybeesik az ilyen testek szimmetriaközéppontjával.

MEREV TESTEK EGYENSÚLYI HELYZETE

Környezetünkben a testek többsége nyugalomban, tehát egyensúlyi helyzetben van. Ennek az az oka, hogy az őket érő külső erőhatások előbb-utóbb kiegyenlítik egymást.

Ha a felfüggesztett, vagy alátámasztott merev testeket kissé kimozdítjuk egyensúlyi helyzetükből, akkor ebben az új helyzetben a külső erők eredője és ennek forgatónyomatéka általában nem nulla.

Van olyan eset, amelynél az egyensúlyi helyzetéből kitérített test – néhány billegés vagy lengés után – a külső erőhatások miatt visszatér eredeti egyensúlyi helyzetébe. Az ilyen helyzetet a test **biztos** (stabilis) **egyensúlyi helyzetének*** nevezzük.

Más esetben a kitérítés miatt érvényesülő erőhatások a testet még jobban eltávolítják, átbillentik eredeti egyensúlyi helyzetétől. Ez a **bizonytalan** (labilis) **egyensúlyi helyzet*.**

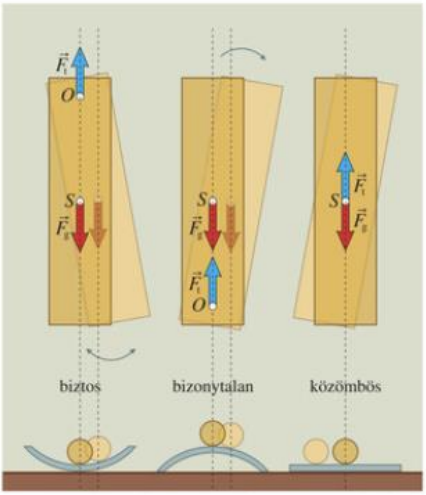
Közömbös (indifferens) **az egyensúlyi helyzet*,** ha kitérítés után – az új helyzetében – is egyensúlyban van a test.

Mindhárom egyensúlyi helyzetben a felfüggesztési vagy alátámasztási pont és a súlypont ugyanazon a függőleges egyenesen van.

Biztos egyensúlyi helyzetben a test súlypontja alacsonyabban van, mint bármely szomszédos helyzetben. Kimozdításkor a test súlypontját tehát emelni kell. Ez munkavégzéssel és a gravitációs mező energianövekedésével jár együtt.

Bizonytalan egyensúlyi helyzetben a test súlypontja magasabban van, mint bármely szomszédos helyzetben. Így a kimozdításkor alacsonyabbra kerül, közben a gravitációs mező munkát végez a testen, így a gravitációs mező energiája csökken.

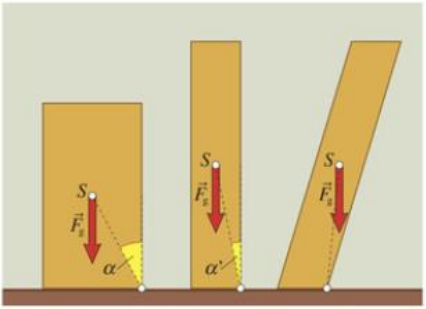
Közömbös egyensúlyi helyzetben a test kimozdítása közben a súlypont változatlan magasságban marad, így a gravitációs mező energiája sem változik.



127.1. *Miről ismerhetők fel a különféle egyensúlyi helyzetek?*

Az egyensúlyi helyzetéből kitérített test mindig olyan helyzetbe kerül, amelynél a gravitációs mező energiája – az adott feltételek mellett – a legkisebb lesz.

Egy test (például autó) annál nehezebben borítható fel, minél nagyobb szöggel kell kibillenteni ahhoz, hogy a súlypontján átmenő függőleges egyenes kívül kerüljön az alátámasztási felületen. Egy testnek ez az úgynevezett **állásszilárdsága*** annál nagyobb, minél alacsonyabban van a test súlypontja és minél szélesebb az alátámasztási felülete.



127.2. Egy test akkor billen át, ha a nehézségi erő hatásvonala kívül esik az alátámasztási felületen

MEGJEGYZÉSEK

1. Mivel a súly, a súlypont és a súlyvonal például a súlytalanság állapotában elveszti értelmét, ugyanakkor a tömegközéppont fogalma nem, így a tömegközéppont általánosabb fogalom, mint a súlypont.
2. A gravitációs mező a testek minden anyagi pontnak tekinthető részecskéjét vonzza. Ezeknek a párhuzamos vonzóerőknek az eredőjét nevezzük a testet érő gravitációs erőnek. A gravitációs erő függőleges hatásvonala – a test bármilyen helyzetében – átmegy a test tömegközéppontján. Ezért tekinthető **a testet érő gravitációs erő támadáspontjának a test tömegközéppontja.**

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Van-e forgató hatása a szabadon mozgó testet érő erőhatásnak, ha hatásvonala átmegy a test tömegközéppontján?
2. Hogyan kell meglökni egy nyugalomban levő testet, ha azt akarjuk, hogy csúszás közben ne forogjon?
3. Megváltozik-e egy test tömegközéppontjának helye, ha a test egyik oldalára gyurmadarabot ragasztunk? Ha igen, merre tolódik el?
4. Lehet-e gyurmadarabokat úgy ragasztani egy testre, hogy a tömegközéppont helye ne változzon meg? Hogyan?
5. Lehet-e egy test tömegközéppontja a testen kívül? Több példával igazoljuk az állítást!
6. Hol van a tömegközéppontja:
   – a tömör homogén gömbnek, kockának, téglatestnek, egyenes hengernek?
   – az azonos vastagságú fémlemezből készült gömbnek, kockának, téglatestnek, egyenes hengernek?
   – a jegygyűrűnek; az ellipszis keresztmetszetű csődarabnak; az egyenlő vastag és széles fémlemezből készült L alakú idomnak, ha szárai egyenlő hosszúak, illetve ha egyik szára kétszer olyan hosszú, mint a másik; az egy- és kétméteres rudakból összeállított T betűnek?
   – bármely háromszög alakú lapnak?
7. Egy négyzet alakú drótkeret mindkét átlóját beforrasztották. Az oldalak és az átlók is ugyanolyan huzalból vannak. Az átlók metszéspontjába kötött zsineggel felfüggesztették a keretet. Egyensúlyban van-e a keret, ha
   – mind a négy csúcsára egy-egy 20 Ft-os érmét helyezünk?
   – az egyik átló mindkét végére még egy-egy 20 Ft-ost teszünk?
   – a másik átló végeire egy-egy 10 Ft-os, illetve egy 20 Ft-os érmét helyezünk?
   – a keret egyik csúcsára egy 50 Ft-os pénzérmét teszünk?

   Minden esetben indokoljuk meg a választ!
8. Nézzünk utána, mi a különbség a különböző magasugró stílusok (ollózó, hasmánt, Fosbury flop) között! Melyik a „legeredményesebb"? Miért?
9. Keressünk képeket olyan markológépekről vagy darukról, amelyekkel nagy tömegű anyagot mozgatnak meg! Hogyan érik el, hogy emelés közben is egyensúlyban maradjanak?
10. Hogyan működik a „keljfeljancsi" nevű játék?
11. Egy seprűt tartsunk vízszintes helyzetben úgy, hogy két kezünk mutatóujjaival támasszuk alá két távoli pontban! Közelítsük ujjainkat egymás felé, de úgy, hogy ne billenjen le a seprű! Bárhonnan indítottuk az ujjainkat, a seprűnek mindig ugyanabban a pontjában érnek össze. Miért?

13. Kidolgozott feladatok

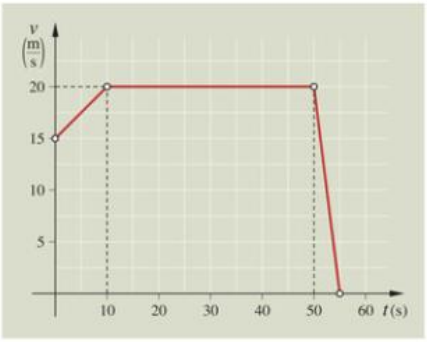
1. Az ábra egy 1200 kg tömegű, előzésbe kezdő gépkocsi sebesség–idő grafikonját mutatja.

a) Jellemezzük a test mozgását, és ábrázoljuk az utat az idő függvényében!

b) Készítsük el a gyorsulás–idő és az eredő erő–idő függvényt!

c) A gépkocsi a nedves úttesten a lehető legrövidebb idő alatt fékezett le. Mennyi itt a tapadási súrlódási tényező? ($g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

d) Lehetséges-e, hogy a gépkocsi egyenletes mozgása folyamán 80 m sugarú kanyaron is áthaladt?



MEGOLDÁS:

a) Az első 10 s alatt egyenletesen gyorsult a jármű. Útját a grafikon alatti területtel vagy átlagsebességgel számíthatjuk:

$$s_1 = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t_1 = \frac{15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 10\,\text{s} = 175\,\text{m}.$$

A második szakasz egyenletes mozgással megtett útja:

$$s_2 = v \cdot t_2 = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 40\,\text{s} = 800\,\text{m}.$$

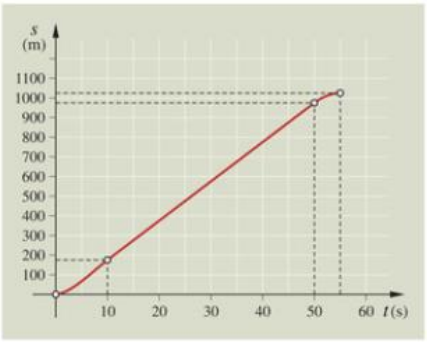
A harmadik szakaszban erős fékezéssel, de egyenletesen lassulva állt meg a gépkocsi. Útja eközben:

$$s_3 = \frac{v}{2} \cdot t_3 = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 5\,\text{s} = 50\,\text{m}.$$

A teljes megtett út:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 1025\,\text{m}.$$

Az út–idő grafikon az ábrán látható.



b) Az első szakaszon a gyorsulás és az eredő erő:

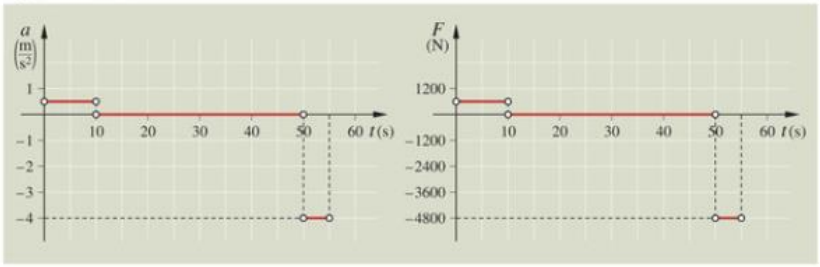
$$a = \frac{v - v_0}{t_1} = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\,\text{s}} = 0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \qquad F_e = m \cdot a = 1200\,\text{kg} \cdot 0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 600\,\text{N}.$$

A második szakaszon $a = 0$ és $F_e = 0$.

A harmadik szakaszon a gyorsulás és az eredő erő:

$$a = \frac{0 - v}{t_3} = \frac{-20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\,\text{s}} = -4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \qquad F_e = m \cdot a = 1200\,\text{kg} \cdot \left(-4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = -4800\,\text{N}.$$

A grafikonok:



c) Fékezésnél a maximális tapadási súrlódási erő adja az eredő erőt:

$$-\mu_0 \cdot m \cdot g = m \cdot a \quad \rightarrow \quad \mu_0 = -\frac{a}{g} = -\frac{-4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \mathbf{0,4.}$$

d) Kanyarodásnál a tapadási súrlódási erő egyenlő a centripetális eredővel. Maximális tapadási súrlódás esetén a dinamika alaptörvényének felhasználásával:

$$\mu_0 \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad r = \frac{v^2}{\mu_0 \cdot g} = \frac{\left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0{,}4 \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \mathbf{100\ m.}$$

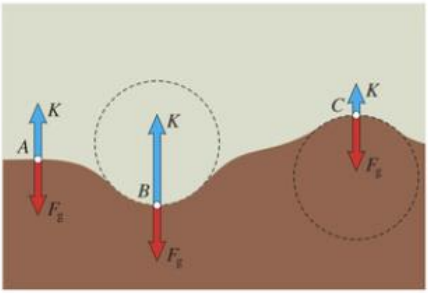
100 m-nél kisebb sugarú pálya csak nagyobb μ_0 esetén jöhetne létre.

2. Egy bukkanós útvonalon állandó $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad egy személygépkocsi. A vezető tömege 80 kg. Mennyi a vezető súlya, ha $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

a) a vízszintes pályaszakaszon (*A*)?

b) a 100 m sugarú kör részét képező alsó, homorú ív közepén (*B*)?

c) a 100 m sugarú kör részét képező felső, domború ív közepén (*C*)? Hogyan válhatna súlytalanná?



MEGOLDÁS:

$g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$v = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$m = 80\ \text{kg}$

$r = 100\ \text{m}$

A testre két erő hat: a gravitációs erő (F_g) lefelé és az alátámasztás kényszerereje (K) felfelé. K erő ellenereje a súly (G).

a) Nincs függőleges gyorsulás, ezért az eredő erő zérus:

$$G = K = F_g = m \cdot g = 80\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{800\ N.}$$

b) A test a_{cp} gyorsulása a középpont felé, vagyis felfelé irányul. Erre mutat az eredő erő is. Tehát $K > F_g$. A dinamika alaptörvénye alapján:

$$K - F_g = m \cdot a_{cp},$$

$$K - m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

$$K = m \cdot \left(g + \frac{v^2}{r}\right) = 80\ \text{kg} \cdot \left[10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{\left(25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{100\ \text{m}}\right] = \mathbf{1300\ N.}$$

Mivel $G = K$, ezért $G = 1300$ N.

c) A kör középpontja alul van. Lefelé irányul a_{cp} és az eredő erő is. Most $F_g > K$. A dinamika alaptörvénye alapján:

$$F_g - K = m \cdot a_{cp},$$

$$m \cdot g - K = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$K = m \cdot \left(g - \frac{v^2}{r}\right) = 80\ \text{kg} \cdot \left[10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \frac{\left(25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{100\ \text{m}}\right] = \mathbf{300\ N.}$$

Mivel $G = K$, ezért $G = 300$ N.

A C pontban akkor válhat súlytalanná, azaz $G = 0$, ha $\frac{v^2}{r} = g$. Ebből:

$$v = \sqrt{r \cdot g} = \sqrt{100\ \text{m} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 31{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 113{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ennél nagyobb sebességnél az autó elválik a pályától és hajításos mozgásba kezd, ezért szintén súlytalanná válik. A súlytalanság feltétele tehát a C pontban:

$$v \geq \sqrt{r \cdot g} = \mathbf{113{,}8\ \frac{km}{h}}.$$

3. Egy 30 cm hosszú, vékony fonálra nehezéket kötöttünk. Felfüggesztés után az ingát kitérítettük függőleges helyzetéből, majd a nehezéket úgy löktük meg oldalirányban, hogy az vízszintes síkú körmozgást végezzen. A kör sugarát 18 cm-nek mértük.

a) Számítsuk ki ennek a kúpingának a periódusidejét! (Lehet méterrúddal időt mérni?)

b) Ismételjük meg a kísérletet, és időméréssel ellenőrizzük az eredményt! (Pontosabb eredményt kapunk, ha egy periódus helyett 10 periódus idejét mérjük, majd ezt 10-zel elosztjuk.)

MEGOLDÁS:

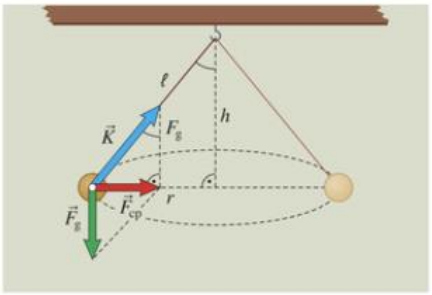
a) $\ell = 30$ cm

$r = 18$ cm

A Pitagorasz-tételből a kúpinga magassága:

$$h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = 24 \text{ cm}$$

$T = ?$



A nehezék egyenletes körmozgást végez, tehát az eredő erő ($\vec{F}_{cp}$) a kör középpontja felé irányul. A centripetális eredő erő a nehezékre vonatkozó $\vec{F}_g$ gravitációs erő és a fonal $\vec{K}$ kényszererejének eredője.

Az ábrán megfigyelhetünk két hasonló derékszögű háromszöget. Az egyiknek az oldalai: ℓ, r, h, a másiké: K, F_{cp}, F_g. A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya megegyezik:

$$\frac{F_{cp}}{r} = \frac{F_g}{h},$$

$$\frac{m \cdot r \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}{r} = \frac{m \cdot g}{h}.$$

Egyszerűsítések után ebből kifejezve a periódusidőt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}24 \text{ m}}{9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0{,}98 \text{ s} \approx \mathbf{1 \text{ s}}.$$

Valóban itt csak hosszúságokat mértünk, és időt tudtunk belőle számolni. De ne felejtsük el, hogy közben felhasználtuk g értékét, aminek a meghatározásához viszont időmérésre is szükség volt.

4. Az Egyenlítő fölött milyen magasságban vannak azok a távközlési vagy meteorológiai célú geostacionárius műholdak, amelyek állandóan a Föld ugyanazon pontja felett tartózkodnak?

MEGOLDÁS:

Csak látszólag vannak nyugalomban, valójában a Föld középpontja körül egyenletes körmozgást végeznek, a Földével megegyező periódusidővel. A körmozgáshoz a centripetális eredő erőt a gravitációs erő biztosítja:

$$m \cdot r \cdot \omega^2 = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{\gamma \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}}.$$

Behelyettesítve a γ gravitációs állandót, a M földtömeget és a T földi periódusidőt, a pályasugárra adódó érték:

$$r = 42\,150 \text{ km}.$$

Ebből kivonva a Föld sugarát, a felszíntől mért magasság:

$$\boldsymbol{h = 35\,780 \text{ km}}.$$

Összefoglalás

ALAPISMERETEK

TEHETETLENSÉG

– **A tehetetlenség** (Newton I.) **törvénye:** Minden test nyugalomban marad vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez mindaddig, míg mozgásállapotát a környezete meg nem változtatja.

– **Inerciarendszer:** olyan vonatkoztatási rendszer, melyben igaz a tehetetlenség törvénye.

– **A tehetetlenség** a testek egyik megszüntethetetlen tulajdonsága, ami különböző testeknél különböző lehet. Annak a testnek nagyobb, amelynek nehezebb megváltoztatni a mozgásállapotát.

– A testek tehetetlenségének mértéke a **tömeg.** Jele: m, mértékegységei: kg; g; t.
Azonos feltételek között ($F_1 = F_2$; $\Delta t_1 = \Delta t_2$):

$$m_2 : m_1 = \Delta v_1 : \Delta v_2 \implies m_2 = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} \cdot m_1.$$

– **A sűrűség** az anyag tulajdonsága. Jele: ρ.

$$\rho = \frac{m}{V},$$

ahol m a test tömege, V a térfogata.
Mértékegységei: $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

MOZGÁSÁLLAPOT

– **Lendület** (impulzus): a test mozásállapotának dinamikai jellemzője. Jele I vagy p.

$$\vec{I} = m \cdot \vec{v}. \quad \text{Mértékegysége: } \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}.$$

Zárt rendszer teljes lendülete állandó:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i = \text{áll.}, \text{ másként } \Delta\vec{I} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{I}_i = 0.$$

– Az **erőhatás** a testek mozgásállapotát megváltoztató hatás. Jellemző mennyisége az **erő.** Jele: $\vec{F}$. Ha az erőhatás nem változik, akkor:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{I}}{\Delta t}, \text{ ha } m = \text{állandó, akkor } \vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

– Két test között fellépő erőhatás mindig kölcsönös, tehát az erők párosával lépnek fel:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}. \text{ (Newton III. törvénye).}$$

– Ugyanazon testre ható több erőhatás helyettesíthető egyetlen erőhatással:

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

– Ha az egy testre ható erők eredője nulla, akkor a test **egyensúly**ban van.

ERŐTÖRVÉNYEK

MEGFOGALMAZÁSA

– A **rugalmas erő** (F_r) a rugalmas test alakváltozása miatt fellépő erőhatás jellemzője.

– A **súrlódás** olyan hatás, amely az érintkező szilárd testek egymáshoz viszonyított sebességét csökkenteni „igyekszik".

– A **közegellenállás** olyan hatás, amely a test és a közeg egymáshoz viszonyított sebességét csökkenteni „igyekszik".

– A **nehézségi erő** (F_n): a gravitációs mező g térerősségű helyén kifejtett erőhatása a forgó Földön az m tömegű testre.

– A **gravitációs erő** (F_g): két vagy több test között mindig meglevő vonzóerő, amit a gravitációs mező fejt ki a testekre.

MEGADÁSA KÉPLETTEL

$F_r = -D \cdot \Delta\ell$, ahol D az ún. rugóállandó.

– **Csúszási súrlódás:** $F_{súrl} = \mu \cdot F_{ny}$.

– **Tapadási súrlódás:** $0 < F_{ts} < F_{ts_{max.}} = \mu_0 \cdot F_{ny}$.

– **Gördülési ellenállás:** $F_{gör} = \mu_g \cdot F_{ny}$.

$$F_{kö} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot A \cdot \rho \cdot v^2.$$

$$F_n = m \cdot g.$$

$$F_g = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \text{ ahol } f = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}.$$

A FORGÓMOZGÁS DINAMIKAI JELLEMZŐI

TEHETETLENSÉG

– A testek egyik tulajdonsága a forgásállapot-változással szembeni tehetetlenség.

– Jellemző mennyisége a **tehetetlenségi nyomaték.** Jele: Θ.

– Az anyagi pont tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = m \cdot \ell^2,$$

ahol m a tömeg, ℓ a forgástengelytől mért távolság. Mértékegysége: $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

FORGÁSÁLLAPOT

– A rögzített tengely körül forgó test forgásállapotát dinamikai szempontból a tehetetlenségi nyomaték és a szögsebesség szorzatával, a **perdület**tel (impulzusmomentummal) jellemezzük. Jele: N.

$$N = \Theta \cdot \omega, \quad \text{mértékegysége: } \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}.$$

– Zárt rendszer teljes perdülete állandó:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = \text{áll.}, \text{ másként } \sum_{i=1}^{n} \Delta N_i = 0.$$

FORGATÓNYOMATÉK

– A forgatónyomaték a forgásállapot-változtató hatások mennyiségi jellemzője. Jele: M.

– A rögzített tengelyen forgó testnél: $M = F \cdot k$, ahol F az erő és k az erőkar, és mindkettő a tengelyre merőleges síkban van.

– A forgatónyomaték kiszámítható még: $M = \dfrac{\Delta N}{\Delta t}$ és $M = \Theta \cdot \beta$ formában is, ahol ΔN a perdületváltozás, Δt a változás időtartama, illetve Θ a megforgatott test tehetetlenségi nyomatéka és β a test szöggyorsulása. Mértékegysége: $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.

– A rögzített tengelyen forgó merev test akkor van egyensúlyban, ha a testet érő erőhatások forgatónyomatékainak előjeles összege nulla: $\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$. Ilyen esetben a test nem forog vagy egyenletesen forog.

MEREV TESTEK

EGYENSÚLYI FELTÉTELEI

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \quad \text{és} \quad M_e = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0.$$

Ilyenkor a test:
– nyugalomban van vagy egyenes vonalú mozgást végez, és közben
– nem forog vagy egyenletesen forog.

EGYENSÚLYI HELYZETEI

– **Biztos:** a test súlypontja alacsonyabban van, mint bármely szomszédos helyzetben.

– **Bizonytalan:** a test súlypontja magasabban van, mint bármely szomszédos helyzetben.

– **Közömbös:** a test kimozdítása közben a súlypont változatlan magasságban marad.

III. fejezet

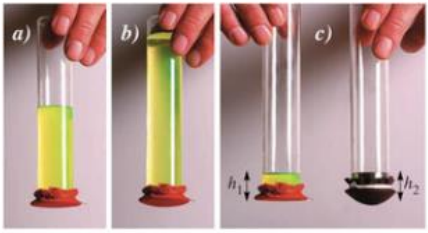


FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK MECHANIKÁJA

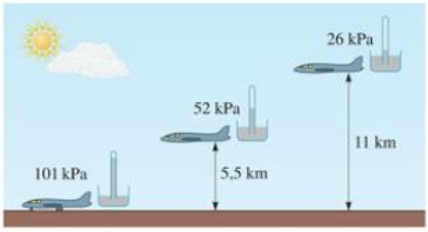
1. Emlékeztető



136.1. Az egyenlő alaplapon álló hengerek közül a legsúlyosabb nyomódik legmélyebben a homokba



136.2. A vastagabb vízréteg (*a–b*) és a vízzel azonos rétegvastagságú higany (*c*) jobban megnyújtja a gumilemezt



136.3. A légnyomás függ a tengerszint feletti magasságtól



136.4. Az üvegkancsó is közlekedőedény

Két test legtöbbször úgy fejt ki egymásra erőhatást, hogy egy közös felületen nyomják egymást.

A testek egymáshoz nyomódásának nagysága a nyomott felületre merőleges **nyomóerő** (F_{ny}) és a **nyomott felület*** (A) nagyságától függ.

Azt a fizikai mennyiséget, amely megmutatja, hogy mekkora az egységnyi felületre jutó nyomóerő, nyomásnak* nevezzük.

A nyomás jele: p.

A nyomást a nyomóerő és a nyomott felület hányadosával számíthatjuk ki: $p = \frac{F_{ny}}{A}$.

A nyomás mértékegysége: pascal. Jele: Pa. Az $1\ \text{Pa} = 1\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

A nyomóerő leggyakrabban a testek súlya, függetlenül attól, hogy milyen a halmazállapotuk.

A folyadék súlyából származó nyomást **hidrosztatikai nyomásnak*** nevezzük.

Egy folyadékréteg hidrosztatikai nyomása annál nagyobb, minél nagyobb a rétegvastagság és a folyadék sűrűsége. (*136.2. ábra*)

A hidrosztatikai nyomás egy adott folyadékban ugyanolyan mélységben minden irányban egyenlő nagyságú. (*138.3. ábra*)

Nyugvó folyadékban a külső nyomás a folyadék belsejében mindenhol ugyanannyival növeli a hidrosztatikai nyomást. Ez **Pascal törvénye.**

A levegőnek van tömege, és így van súlya is. Ezért a levegő a benne levő minden testre nyomást gyakorol. Ez a nyomás a **légnyomás*,** amely a levegő súlya miatt van.

A légnyomás átlagos értéke a tengerszint magasságában közelítőleg 100 kPa. A magasság növekedésével (vékonyabb légréteg, kisebb sűrűség) a légnyomás nagysága csökken.

A **közlekedőedény*** olyan felül nyitott edény, amelynek „szárai" úgy vannak alul összekötve, hogy egyikből a másikba a folyadék szabadon áramolhat. A közlekedőedények minden szárában a nyugvó folyadék felszíne ugyanabban a vízszintes síkban van.

A folyadék és a gáz a benne levő testre felfelé irányuló erőhatást fejt ki. Ezt a hatást a **felhajtóerő*** jellemzi. A felhajtóerő egyenlő nagyságú a test által kiszorított folyadék vagy gáz súlyával. Ez **Arkhimédész törvénye.**

2. A szilárd testek, a folyadékok és a gázok nyomása

A SZILÁRD TESTEK NYOMÁSA

A lábnyom, az autókerék nyoma azt mutatja, hogy az alátámasztott szilárd testek és az alátámasztás nyomják egymást. A munkadarab felülete megsérülhet, ha erősen szorítják a satuba. Sok más jel alapján megállapítható, hogy bármilyen erőhatás szorít egy testet egy másikhoz, akkor azok az érintkező közös felületen kölcsönösen nyomják egymást.

A rajzszeg hegye, ha erősen nyomjuk, behatol a rajztáblába, de az ujjunk sértetlen marad. Az építkezéseknél az állványok csőlába alá deszkadarabot, a csavar alá alátétet tesznek, hogy kisebb legyen alattuk a nyomás.

Gyakorlati példákból tudjuk, hogy az egymáshoz nyomódás erőssége a közös felületre mindig merőleges **nyomóerő** és a **nyomott felület** nagyságától függ. A nyomást növelhetjük a nyomóerő növelésével, vagy a nyomott felület csökkentésével.

Az egymáshoz nyomódás mértékét egy fizikai mennyiséggel, a **nyomással** (jele: p) jellemezzük.

A nyomást a nyomóerő (F_{ny}) és a nyomott felület (A) hányadosaként számíthatjuk ki:

$$p = \frac{F_{ny}}{A}.$$

A nyomás mértékegysége: pascal. Jele: Pa.

Az $1\ \text{Pa} = 1\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

A nyomás számértéke egyenlő az egységnyi felületre jutó nyomóerő számértékével.

A FOLYADÉKOK NYOMÁSA

A búvárok merülési mélységét korlátozza a felettük levő víz nyomása, ami a rétegvastagságtól függ. A mélytengeri merülésekhez ezért nagy teherbírású búvárhajókat használnak. Az árvízvédelmi töltések építésénél is figyelembe kell venni, hogy minél magasabban van a víz, annál nagyobb nyomás nehezedik a töltésre.



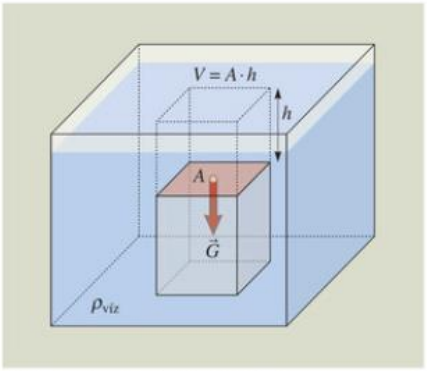
137.1. A nagyobb súlyú test jobban nyomja a földet



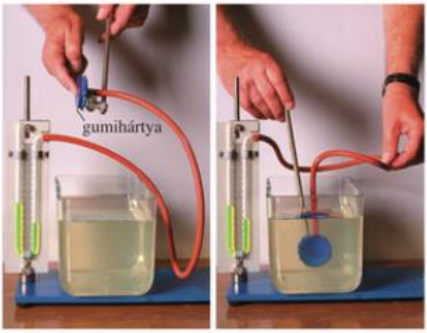
137.2. A nyomást a nyomott felület növelésével csökkenthetjük



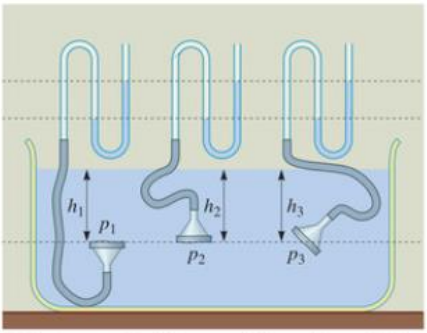
137.3. A felette levő víz nyomja a búvárt



138.1. A rajz alapján ellenőrizzük, hogy a $p = \rho \cdot g \cdot h$ képlet helyes-e!



138.2. Az U alakú cső két szárában a folyadékszint helyzete attól függ, hogy melyik szárban mennyivel nagyobb felszínükön a nyomás



138.3. Azonos mélységben a gumihártya, helyzetétől függetlenül, egyenlő mértékben nyomódik be

A folyadékok súlyából származó nyomást **hidrosztatikai nyomásnak** nevezzük, és ugyanúgy számíthatjuk ki, mint a szilárd testek súlyából származó nyomást:

$$p = \frac{F_{ny}}{A}.$$

Egy függőleges helyzetű hasáb h mélységben levő felső lapjának A a területe. A felette levő víz – ami súlyával nyomja a hasáb felületét – térfogata:

$$V = h \cdot A;$$

tömege:

$$m = \rho \cdot V;$$

a súlya:

$$G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g.$$

Mindezt figyelembe véve:

$$p = \frac{F_{ny}}{A} = \frac{\rho \cdot h \cdot A \cdot g}{A} = \rho \cdot h \cdot g.$$

A hidrosztatikai nyomás úgynevezett manométerrel mérhető. Ennek legegyszerűbb változata a gumihártyás nyomásmérő. (*138.2. ábra*)

Egy U alakú cső egyik szára legyen nyitott, a másik rugalmas csővel csatlakozzon egy gumihártyával lezárt tölcsérhez. Ha a hártyát bármi megnyomja, akkor az behorpad, és kisebb lesz az általa bezárt térfogat. Ezért nagyobb lesz a bezárt levegő nyomása. Ennek következtében a tölcsérhez csatlakozó csőben lejjebb, a nyitott csőben magasabban lesz a folyadék szintje. A szintkülönbség arányos a nyomáskülönbséggel. Ezért alkalmas ez a berendezés a hidrosztatikai nyomás mérésére.

Amikor a manométer gumihártyás tölcsérét egyre mélyebbre helyezzük a folyadékban, egyre nagyobb nyomást jelez. Az előbbi elméleti gondolatmenetünket és megállapításunkat tehát kísérlettel igazolni lehet. Ha a manométer vízbe süllyesztett gumihártyáját ugyanabban a mélységben különböző irányokba fordítjuk, megmérhetjük a lefelé irányuló fenéknyomás (p_1), az oldalnyomás, a felfelé irányuló nyomás (p_2), vagy bármilyen irányú nyomás (p_3) nagyságát. (*138.3. ábra*)

Kísérlettel megállapítható, hogy:

A hidrosztatikai nyomás egy adott folyadékban a mélységgel egyenesen arányos, de ugyanolyan mélységben minden irányban egyenlő nagyságú.

A vízibuzogány dugattyúját befelé mozgatva erősebben lövell ki a víz, mint a dugattyú mozgatása előtt. A dugattyú nyomóhatását ugyanis a víz részecskéi továbbítják. Ez a nyomás hozzáadódik a hidrosztatikai nyomáshoz, és ezért lövell ki erősebben a víz a vízibuzogányból. (*139.1. ábra*)

A külső nyomás a folyadék belsejében mindenhol ugyanannyival növeli meg a hidrosztatikai nyomást. Ez Pascal törvénye.

A hidraulikus emelő lényege két, alul egy csővel összekötött különböző keresztmetszetű, folyadékkal töltött henger, amelyeket egy-egy dugattyú zár le.

A kisebb keresztmetszetű (A_1) henger dugattyúját befelé nyomó erőhatás (F_1), a folyadék minden pontjában ugyanakkora nyomást (p) hoz létre, így a nagyobb dugattyú (A_2) felületén is. Mivel: $F_1 = p \cdot A_1$ és $F_2 = p \cdot A_2$, valamint $A_1 < A_2$ belátható, hogy $F_1 < F_2$.

Az autóemelő is legtöbbször hidraulikus rendszerrel működik. (*139.2. ábra*)



139.1. A külső nyomás hozzáadódik a hidrosztatikai nyomáshoz, amit az erőteljesebb vízsugarak bizonyítanak

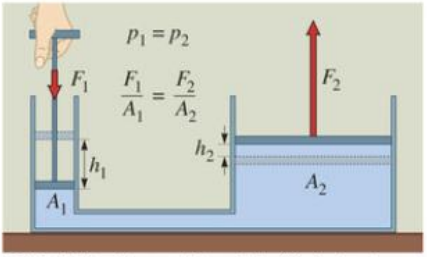
A GÁZOK NYOMÁSA

Ha egy felfújt futball-labdából kiengedjük a levegő egy részét, méréssel megállapíthatjuk, hogy a labda tömege kisebb lesz. Ez azt bizonyítja, hogy a levegőnek is van tömege és így súlya is. Ezért a levegő a benne levő minden testre nyomást gyakorol. Ez a nyomás a **légnyomás,** ami a levegő súlyából származik és hatása minden irányban tapasztalható.

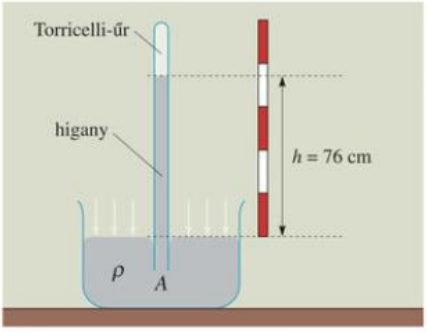
A levegő nyomását Torricelli [toricselli] (1608–1647) olasz tudós mérte meg először (1643-ban).

Egy 1 m hosszú, egyik végén zárt üvegcsövet teletöltött higannyal, azután a cső nyitott végét befogva, nyílásával lefelé higanyba állította. A nyílás szabaddá tétele után a csőből a higany egy része kiömlött, de 76 cm magas higanyoszlop benne maradt. (A higanyoszlop felett keletkezett légüres teret később róla nevezték el Torricelli-űrnek.) A csőben maradt higanyoszlop hidrosztatikai nyomásával a szabad higanyfelszínt érő légnyomás tart egyensúlyt.

A légköri nyomás átlagos értéke a tengerszint magasságában a 76 cm magas higanyoszlop nyomásával egyenlő. Értéke közelítőleg 100 kPa.



139.2. A hidraulikus emelő modellje. Ha pl. A_2 négyszer akkora, mint A_1, akkor F_2 is négyszer akkora, mint F_1



139.3. A Torricelli-féle kísérlet vázlata



140.1. Barométer

A légnyomást barométerrel mérhetjük. A barométerek egyik fajtája a higanyos barométer, működésének alapja a Torricelli-kísérlet.

A tengerszint feletti magasság növekedésével a légnyomás nagysága csökken. Ennek az az oka, hogy a légtérben fölfelé haladva a levegőoszlop rétegvastagsága és átlagsűrűsége is egyre kisebb lesz. (*126.3. ábra*)

A légnyomás a levegő páratartalmától is függ. A páratartalom növekedésével a légnyomás csökken. A légnyomás csökkenéséből arra lehet következtetni, hogy esős idő várható.



140.2. A felhő sűrűsége kisebb, mint a száraz levegőé

A nagyobb páratartalmú levegőnek kisebb a sűrűsége, mint a száraz levegőnek, amit az is bizonyít, hogy a felhők magasan lebegnek.

A sűrűség azért csökken, mert a levegő egy részének helyét vízgőz foglalja el. Mivel a vízrészecske (H_2O) tömege kisebb, mint a levegő többi alkotórészeié (például O_2, N_2), ezért csökken az átlagsűrűség.

A ZÁRT TÉRBEN LEVŐ GÁZOK NYOMÁSA

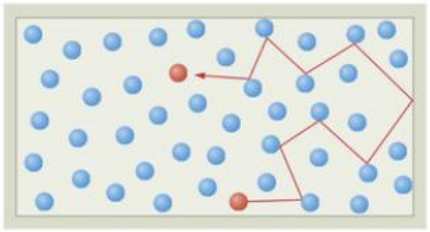
A gázoknak nem csak a súlyuk miatt lehet nyomásuk. A labdában vagy a gázpalackban lévő gázrészecskék rendezetlenül mozognak. Mozgásuk közben ütköznek egymással és az edény falával. **Ütközéskor a részecskék erőhatást gyakorolnak az edény falára.**

Egy-egy részecske ütközése a falra gyenge ugyan, de mivel a gázban nagyon sok részecske van, a falat érő ütések száma nagyon nagy. A részecskék nagyszámú ütése a falat szakadatlanul, mindenütt egyformán éri, ilyenkor lendületük megváltozik. Az ütések együttesen állandó nyomóerőt jelentenek a fal minden részére ($F = \frac{\Delta I}{\Delta t}$).

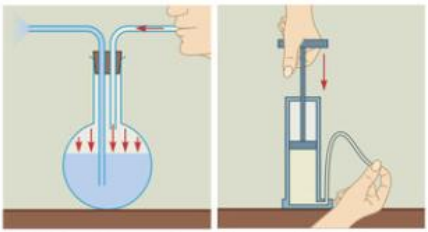
Zárt térben a gázok nyomása annál nagyobb, minél több részecske ütközik másodpercenként az edény falához.

Zárt edényben a gáz nyomását úgy növelhetjük, hogy állandó térfogatú tartály esetén **növeljük a részecskék számát** (pl. autótömlő felpumpálása), **vagy csökkentjük a gáz térfogatát,** miközben a gázrészecskék száma állandó (pl. kerékpárpumpában a dugattyú lenyomásakor).

Növelhető a gáz nyomása a hőmérséklet emelésével is. Ilyenkor élénkül a részecskék mozgása, ezért többször és erősebben ütköznek az edény falának.



140.3. Egy gázrészecske útjának, valamint ütközéseinek szemléltetése



140.4. Zárt térbern a gáz nyomása növelhető a részecskeszám növelésével és a térfogat csökkentésével

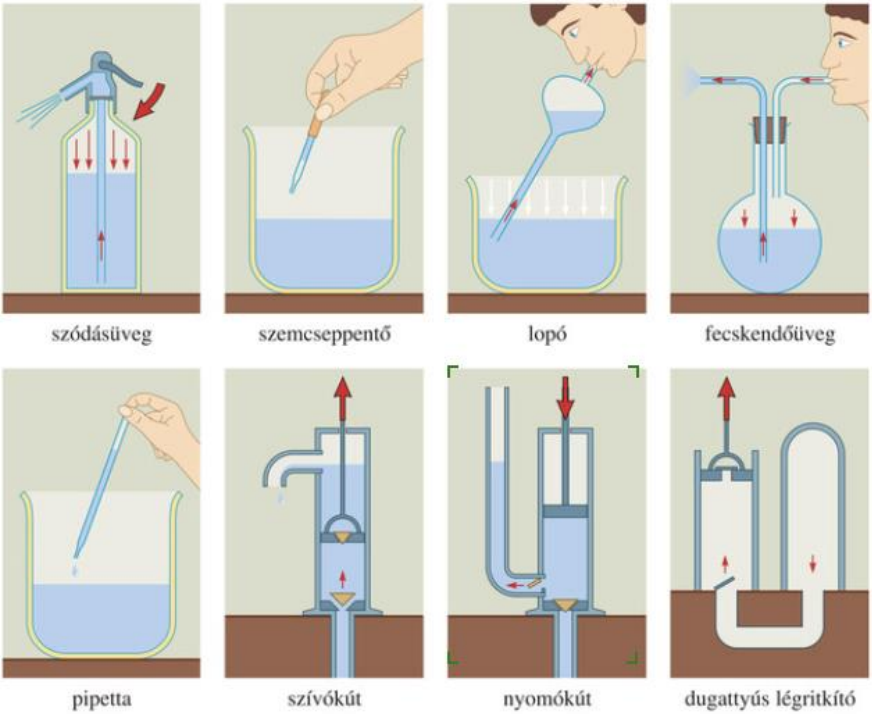
NYOMÁSKÜLÖNBSÉGEN ALAPULÓ ESZKÖZÖK

A mindennapi életben gyakran alkalmazunk olyan eszközöket, melyeknek működése nyomáskülönbségen alapul. Ezeknél a légköri nyomáshoz képest csökkentjük vagy növeljük az eszköz zárt terében a nyomást.

Az injekciós fecskendő működtetésekor például nyomáscsökkenést hozunk létre úgy, hogy a dugattyú felhúzásával megnöveljük a zárt térfogatot. Ilyenkor a nagyobb külső nyomás a kisebb nyomású helyre nyomja a folyadékot. A pipetta vagy a lopó használatakor úgy csökkentjük a nyomást, hogy szívással eltávolítjuk a bennük lévő gáz egy részét.

A kerékpárpumpánál a térfogat csökkentésével, a szódásüvegnél a gázrészecskék számának növelésével érünk el nyomásnövekedést.

3D 3D



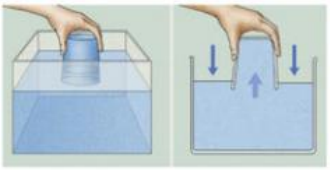
141.1. Figyeljük meg a rajzokat, és magyarázzuk meg az eszközök működését!

OLVASMÁNY

Blaise Pascal [blez paszkál] (1623–1662) francia matematikus, fizikus és filozófus a tudomány számos területén ért el maradandó eredményt. Fizikai kísérletei során felismerte, hogy egy edény alján a hidrosztatikai nyomás, ugyanannál a folyadéknál, csak a folyadék rétegvastagságától függ, még az edény alakjától is független. Ő fogalmazta meg a külső nyomás érvényesülését leíró törvényt is. Megállapította a légnyomás magasságtól függő csökkenését, értelmezte a közlekedőedények törvényszerűségeit; általában a folyadékok és a levegő vizsgálatában volt a legsikeresebb.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Hogyan változik a nyomás egy autó kerekei alatt, ha egy ember helyett négyen ülnek az autóban?
2. Melyik lapjára fektetve legkisebb egy tégla által kifejtett nyomás?
3. Miért lehet ugyanazt a húst éles késsel kisebb erővel elvágni, mint életlennel?
4. Miért lánctalpas a földmunkagép és a harckocsi?
5. Miért csökkenti autóbaleseteknél az utas sérülését a légzsák, és miért a „gyűrődő" karosszéria?
6. A víz alól szájával lefelé emeljük ki a vízzel megtelt poharat. Emelés közben a pohár egészen addig tele marad vízzel, míg a szája a víz alatt van. Miért? Végezzük el ezt a kísérletet, és figyeljük meg, mekkora erővel lehet emelni a poharat!



7. Miért építik a folyók gátját alul sokkal szélesebbre, mint felül?
8. Van-e hidrosztatikai nyomás egy szabadon eső edényben lévő folyadékban?
9. A hegy lábánál vagy a hegytetőn nagyobb a légnyomás? Miért?
10. A Holdnak nincs légköre. A Torricelli-féle kísérletnél mekkora lenne a két higanyszint közötti különbség?
11. A légszivattyú burája alá egy lazán felfújt és bekötött léggömböt tettek. A bura alól kiszivattyúzták a levegőt. A léggömb erősen megfeszült. Miért?
12. Miért nem préseli össze mellkasunkat nyomásával a levegő?
13. Miért nem sűrűsödik a levegő a gravitációs mező hatására a Föld felszínén vékony réteggé?
14. Miért tárolják a sűrített gázt acélpalackban?

FELADATOK

1. Egy kocsi súlya 2000 N. Kerekeinek a talajjal érintkező felülete 100 cm^2. Mekkora nyomást fejt ki a kocsi a talajra?
2. Egy téglarakás nyomása a talajra 20 kPa. A nyomott felület 6000 cm^2. Mennyi a téglarakás súlya?
3. Egy szeget 10 N erővel nyomunk egy falaphoz úgy, hogy a hegye alatt 10 000 kPa a nyomás. Mekkora a nyomott felület?
4. Mekkora nyomást fejt ki egy 400 N súlyú gyerek a jégre, ha egy lábon egyenletesen siklik, és a korcsolyája 10 cm^2-es felületen érintkezik a jéggel? Hogyan változik a nyomás, ha egy helyett két élen siklik? (A két korcsolya egyforma.)
5. Egy 30 m^2 területű járdát lebetonoztak. A betonréteg nyomása a talajra 3000 Pa. Hányszor fordult az a 3 tonnával terhelhető teherautó, amelyik a betont szállította?
6. Egy úszómedence méretei: 25 m × 12 m × 2 m. Mekkora a medence alján a nyomás, ha a medencében 1,6 m magasan áll a víz? (A válaszhoz szükség van-e itt minden adatra?)
7. Egy 4 m magas és 2 m átmérőjű, henger alakú tartályt háromnegyed részéig töltünk meg vízzel. Mekkora a nyomás és a nyomóerő az edény alján?
8. Fúrjunk 2-3 mm átmérőjű lyukat egy merevebb falú műanyag palack aljába. A lyukat befogva töltsük tele vízzel a palackot.
   a) Ha a kupak rácsavarása után szabaddá tesszük a lyukat, nem folyik ki rajta a víz. Lecsavart kupaknál természetesen kifolyik.
   b) Megfelelő helyen (pl. udvaron) leejtett palacknál figyeljük meg, hogy esés közben a kupak nélküli palackból sem folyik ki a víz!

   Adjunk magyarázatot ezekre a tapasztalatokra!



3. Felhajtóerő. Arkhimédész törvénye

A FELHAJTÓERŐ

A *143.1. ábrán* egy rugóra akasztott test nyugalomban van (*a*), mert a gravitációs erőhatás és a rugalmas erőhatás kiegyenlíti egymást.

Ha a rugós erőmérőre akasztott testet alulról megemeljük (*b*), akkor a rugós erőmérő a test súlyánál kisebb erőt jelez. Ekkor a változatlan nagyságú gravitációs erőt a kisebb rugalmas erő és az izomerő együttesen egyenlíti ki.

Megfigyelhető, hogy a rugalmas erő akkor is kisebb lesz (*c*), ha a rugón levő testet vízbe süllyesztjük.

A kísérletből arra következtetünk, hogy:

A folyadékban lévő testet felfelé irányuló erőhatás éri.

Ezt az erőhatást jellemző erőt (mivel a folyadék és a test egymáshoz viszonyítva mozdulatlan, *hidrosztatikai* felhajtóerőnek, vagy egyszerűen **felhajtóerőnek** nevezzük, és F_f-fel jelöljük.

A felhajtóerő létezését Arkhimédész (kb. Kr. e. 287–212) görög természettudós fedezte fel. A felhajtóerő a hidrosztatikai nyomásból származtatható.

AKHIMÉDÉSZ TÖRVÉNYE

Vizsgáljuk meg, hogy mekkora a felhajtóerő nagysága!

A mérést elősegíti egy felakasztható, henger alakú edény és egy ebbe pontosan beleillő tömör henger, amely az edény aljára akasztható: ez az úgynevezett **arkhimédészi hengerpár.**

Mérjük meg a levegőben levő hengerpár súlyát (*a*), ami egyenlő nagyságú a nehézségi és a tartóerővel.

Ha az alsó, tömör hengert fokozatosan vízbe süllyesztjük (*b*), az erőmérő egyre kisebb erőt jelez. A tartóerő ugyanis a hengerpárra ható nehézségi erő és a felhajtóerő különbsége.

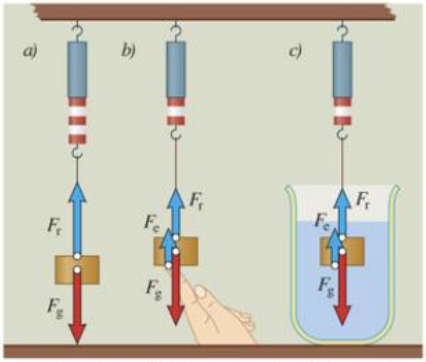
Amikor az alsó henger teljesen vízbe merül és a felső, üres hengert teletöltjük vízzel (*c*), az erőmérő ugyanakkora erőt jelez, mint (*a*) esetben, amikor mindkét henger a levegőben volt. Ilyenkor a hengerbe öntött vizet érő gravitációs erő kiegyenlíti a felhajtóerőt.

Tehát **a testet érő felhajtóerő egyenlő nagyságú** az üres hengerbe öntött víz súlyával, vagyis **a test által kiszorított víz súlyával** (de iránya ellentétes azzal).

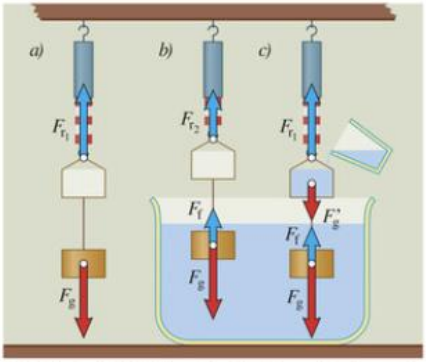
Megállapítható, hogy **emelő hatás nemcsak a folyadékokban, hanem a gázba merülő testeknél is van.**

Minden folyadékba vagy gázba merülő testre felhajtóerő hat, amely egyenlő nagyságú a test által kiszorított folyadék vagy gáz súlyával.

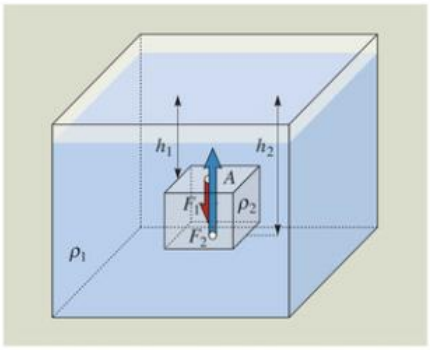
Ez Arkhimédész törvénye.



143.1. Az erőmérőnkön levő egyenlő súlyú testek, az ábrán látható mindhárom esetben, egyensúlyban vannak



143.2. A víz által kifejtett felhajtóerő egyenlő a hengerbe töltött víz súlyával



144.1. A felhajtóerő nagysága a közeg sűrűségének és a test térfogatának ismeretében kiszámítható

A felhajtóerő nagyságát a kiszorított folyadék vagy gáz térfogatának és sűrűségének ismeretében is kiszámíthatjuk.

A felhajtóerő, előző ismereteink alapján, mérőkísérlet nélkül is kiszámítható. A hasáb A területű felső lapja h_1 vastagságú és ρ sűrűségű vízréteg alatt van (*144.1. ábra*), ahol a nyomás:

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1,$$

a lefelé irányuló nyomóerő pedig:

$$F_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot A.$$

Mivel a test alsó lapja h_2 mélységben van a vízben, ott a nyomás:

$$p_2 = \rho \cdot g \cdot h_2,$$

a felfelé irányuló nyomóerő pedig:

$$F_2 = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot A.$$

A hasábot érő F_f felhajtóerő:

$$F_f = F_2 - F_1 = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot A - \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot A = \\ = \rho \cdot g \cdot A \cdot (h_2 - h_1).$$

Mivel az $A \cdot (h_2 - h_1)$ a hasáb térfogata, ρ a víz sűrűsége, „elméleti" úton is eljutottunk Arkhimédész törvényéhez.

Az ókori elbeszélések szerint Szirakuza királya aranyat adott az ötvösöknek, hogy készítsenek belőle koronát. Az ötvösök azonban becsapták a királyt, az arany egy részét ezüstre cserélték. A király Arkhimédészhez fordult segítségért, hogy a korona sérülése nélkül leplezze le a csalást. (Érdemes végiggondolni, hogyan oldhatta meg Arkhimédész a feladatot.)

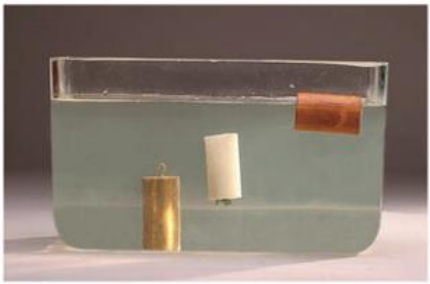
A MOZDULATLAN TESTEK ÚSZÁSA, LEBEGÉS, ELMERÜLÉS

A parafa dugó fennmarad a vízen, a rézhenger elsüllyed, a gyertya pedig lebeg benne.

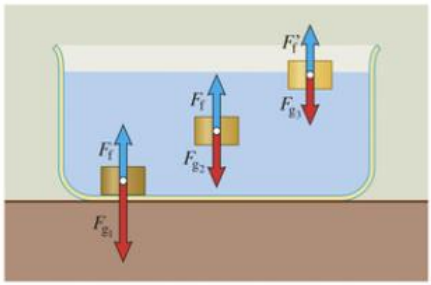
Azt, hogy egy test úszik, lebeg vagy elmerül a folyadékban, a test és a folyadék sűrűségének egymáshoz viszonyított nagysága határozza meg.

Egy test akkor merül el egy folyadékban, ha a testre ható gravitációs erő nagyobb, mint a felhajtóerő. Ez akkor teljesül, **ha a test sűrűsége nagyobb, mint a folyadék sűrűsége.**

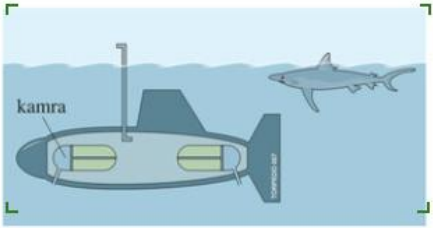
A vízben feloldott só mennyiségének változtatásával elérhető, hogy a beletett tojás nem emelkedik és nem is süllyed, hanem bárhol nyugalomban marad, **lebeg** a folyadékban. Ilyenkor a folyadékban teljesen elmerülő testre ható gravitációs erő egyenlő nagyságú a felhajtóerővel. Ez akkor teljesül, **ha a test sűrűsége egyenlő a folyadék sűrűségével.**



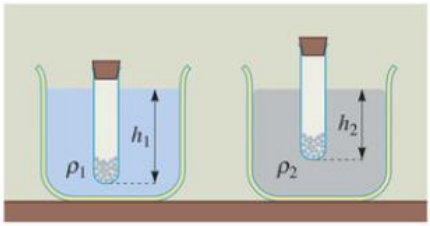
144.2. A kisebb sűrűségű fadarab fennmarad, úszik a víz felszínén, a rézhenger elsüllyed, a nehezékkel ellátott gyertya pedig lebeg a vízben



144.3. A test és a folyadék sűrűségétől függ, hogy a felhajtóerő vagy a nehézségi erő a nagyobb, tehát úszik, lebeg vagy elmerül a test



145.1. A búvárhajó átlagsűrűsége változhat



145.3. A sűrűségmérő merülése

Ha a víz alá nyomott fadarabot elengedjük, felemelkedik a vízben, mert a felhajtóerő nagyobb, mint a nehézségi erő. Az emelkedés addig tart, míg a felhajtóerő egyenlő nem lesz a nehézségi erővel. A vízre helyezett fadarab tehát csak részben merül el, azt mondjuk, úszik.

A nyugalomban levő tömör test csak akkor **úszik** egy folyadék felszínén, **ha sűrűsége kisebb, mint a folyadék sűrűsége.**

Úszáskor a test a térfogatának csak egy részével merül a folyadékba. A nagyobb sűrűségű folyadékból ugyanis a test térfogatánál kisebb térfogatnyit kell kiszorítani ahhoz, hogy a test egyensúlyban legyen.

A vasból készült hajó azért úszhat a vízen, mert üreges, és így képes annyi vizet kiszorítani, amennyinek a súlya és így a felhajtóerő egyenlő a hajót érő nehézségi erővel.

Ilyenkor a hajótest, a rakomány és az üregek átlagos sűrűsége kisebb, mint a víz sűrűsége. A hajó átlagos sűrűségét úgy számíthatjuk ki, hogy a hajó és a rakomány együttes tömegét elosztjuk a hajótest térfogatával.

Ha a hajóra terhet raknak, akkor merülési mélysége nő. A hajó oldalán a „vízvonal" jelzi a megengedett legnagyobb merülési mélységet.

A búvárhajó átlagos sűrűsége a kamráiban lévő víz mennyiségével szabályozható. Ily módon a búvárhajó a vízben úszik, lesüllyed vagy lebeg.

A folyadékok sűrűsége úszó sűrűségmérővel mérhető meg. A folyadék sűrűségére a folyadékban úszó sűrűségmérő merülési mélységéből lehet következtetni. A nagyobb sűrűségű folyadékból pl. kisebb térfogatút kell „kiszorítani" ahhoz, hogy a sűrűségmérő ússzon a folyadékban.

A testekre a levegőben is van felhajtóerő. Ennek hatására emelkedik a léggömb vagy a léghajó mindaddig, míg olyan légrétegbe nem jut, amelynek sűrűsége megegyezik átlagos sűrűségével. Ebben a légrétegben a léggömb vagy a léghajó lebeg. Ezért olyan gázzal töltik meg őket, vagy úgy felmelegítik kupolájukban a levegőt (hőlégballon), hogy az átlagsűrűségük kisebb legyen a földközeli levegő sűrűségénél.



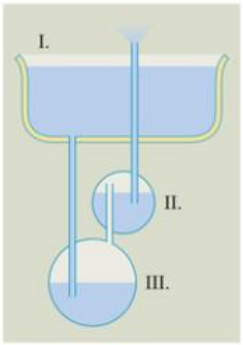
145.2. A hajók átlagsűrűsége kisebb a víz sűrűségénél. A merülési mélységet a vízvonal jelzi a hajó oldalán



145.4. A hőlégballonokat is a sűrűségkülönbség miatt fellépő erőhatás emeli fel

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Egy testet ugyanazon folyadékba először félig, majd teljesen belelógatunk. Melyik esetben kell nagyobb erővel tartani a testet? Miért? Hasonlítsuk össze a felhajtóerőket!
2. Egy test először olajban, majd vízben merül el teljesen. Melyik folyadékban nagyobb a felhajtóerő? Miért? Hasonlítsuk össze a tartóerőket! Mi a különbség magyarázata?
3. Hogyan lehet készíteni hurkapálcából sűrűségmérőt?
4. Egyenlő térfogatú tömör vas-, illetve alumíniumtest teljesen elmerült a vízben. Hasonlítsuk össze a felhajtóerőket! Függ-e a felhajtóerő az egyenlő térfogatú test anyagától?
5. Egyenlő tömegű tömör vas- és alumíniumtestet benzinbe merítünk. Mit tudunk a felhajtóerőkről? Ha van, mi a különbség oka?
6. A vízen 100 g tömegű fadarab úszik. Mekkora a felhajtóerő? Változik-e a felhajtóerő, ha a fadarab a Holt-tenger vizében úszik? Melyik folyadékban nagyobb a fadarab merülési mélysége? Milyen irányú erőhatással tudnánk a fadarabot víz alá nyomni? Hogy számítható ki ennek a nyomóerőnek a nagysága?
7. Egy tengeralattjáró tartályaiból vizet távolítanak el. Változik-e a gravitációs mező hatása a tengeralattjáróra? Miből lehet erre következtetni? Változik-e a felhajtóerő? (Feltételezzük, hogy a tengeralattjáró teljesen a víz alatt van.)
8. A mellékelt ábra Heron szökőkútjának vázlatos rajza. Működhetett-e ez a berendezés? Ha igen, akkor miért és meddig?
9. Hogyan változik az édes vizű folyóról a sós vizű tengerre úszó hajó merülése?
10. Milyen sorrendben helyezkedik el egy edényben az egymással nem keveredő víz, olaj és higany?
11. Egy fa- és egy vashordó színültig van töltve vízzel. Elsüllyednek-e, ha vízbe helyezzük őket?
12. Vizet tartalmazó edénybe egy fadarabot teszünk. Változik-e ekkor az edény alján a nyomás, ha víz nem ömlött ki közben az edényből? Mi a magyarázata az állításunknak?
13. Vizet tartalmazó edényben, a víz tetején egy jégdarab úszik, ami lassan elolvad. Változik-e közben az edény alján a nyomás? Miért?
14. Mi a felhajtóerő ellenereje? Hogyan lehetne ezt kísérlettel kimutatni?



FELADATOK

1. Egy acélgerenda súlya 20000 N. Vízbe merítve a tartóerő 16000 N. Mekkora a felhajtóerő?
2. Mekkora erővel tarthatunk víz alatt egy 5 dm^3 térfogatú és 2,5 $\frac{kg}{m^3}$ sűrűségű követ?
3. Egy 20 dm^3 térfogatú alumíniumtest elmerült a vízben. Mennyi az alumínium sűrűsége, ha a tartóerő 340 N?
4. A 4 m magas és 2 m átmérőjű henger alakú tartályt $\frac{3}{4}$ részéig töltötték meg vízzel. Mekkora az oldalnyomás 1 m-rel az edény alja fölött? Mekkora az oldalnyomás átlaga?
5. Tömör vagy üreges az a rézgolyó, amelynek súlya 1780 N, vízbe süllyesztve pedig 1240 N a tartóerő? A réz sűrűsége 8,9 $\frac{g}{cm^3}$.

4. Közlekedőedények. Hajszálcsövek, molekuláris erők

KÖZLEKEDŐEDÉNYEK

A locsoló, a teáskanna, az U alakú cső, az építkezéseknél használt „vízszintező" olyan edény, amelynek alján a folyadék szabadon áramolhat oda és vissza.

Azokat a felül nyitott edényeket, amelyeknek „szárai" úgy vannak alul összekötve, hogy egyikből a másikba a folyadék szabadon átáramolhat, **közlekedőedényeknek*** nevezzük.

Az ilyen edényekben, tartós nyugalom esetén, ugyanabban a vízszintes síkban nincs nyomáskülönbség. Ilyenkor a nyugvó folyadék felszíne a közlekedőedény minden szárában ugyanabban a vízszintes síkban van. Ha egy közlekedőedényben a folyadék nincs egyensúlyban, akkor arra áramlik, ahol ugyanabban a vízszintes síkban kisebb a hidrosztatikai nyomás.

Két egymással nem keveredő folyadékot (pl. vizet és higanyt) is lehet egyszerre egy U alakú közlekedőedénybe tölteni, vagy a keveredőket a *147.3. ábrán* látható U alakú csőbe felszívni. Az ilyen kétfolyadékos közlekedőedényben a két különböző sűrűségű folyadék külső felszíne nincs azonos vízszintes síkban.

A folyadékok külső felszíneinek a közös, érintkező felszínektől mért távolságai (h_1 és h_2) fordítottan arányosak a sűrűségekkel:

$$h_1 : h_2 = \rho_2 : \rho_1.$$

Az egyik folyadék sűrűségének ismeretében, valamint h_1 és h_2 mérésével kiszámítható a másik folyadék sűrűsége.

A fenti összefüggés a már ismert, $p = \rho \cdot g \cdot h$ összefüggésből következik. Az érintkező közös felületeken a nyomás felülről: $p_1 = \rho_1 \cdot g \cdot h_1$, az alsó nyomás, ami egyenlő nagyságú a felsővel: $p_2 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$. Ebből következik, hogy

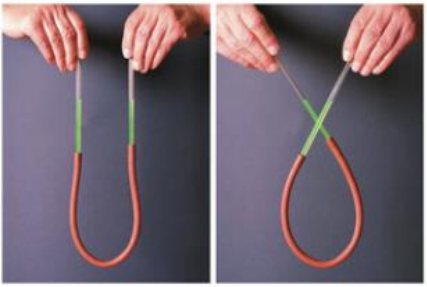
$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2,$$

és g-vel egyszerűsítve:

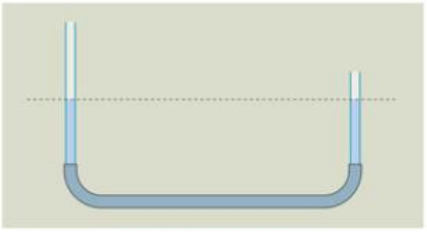
$$\rho_1 \cdot h_1 = \rho_2 \cdot h_2,$$

ahonnan:

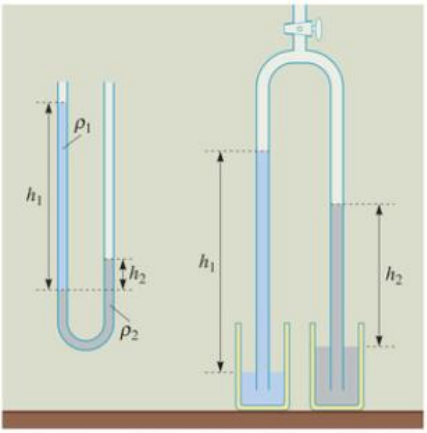
$$h_1 : h_2 = \rho_2 : \rho_1.$$



147.1. A legegyszerűbb közlekedőedény



147.2. A vízszintező két üvegcsövét egy rugalmas műanyag cső köti össze

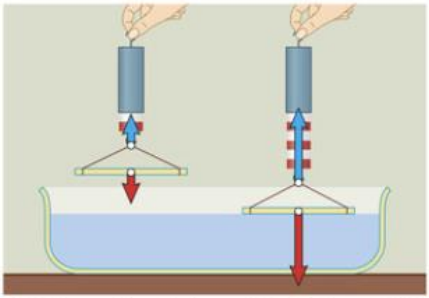


147.3. A keveredő folyadékok sűrűsége a jobb oldali eszközzel mérhető meg

3D



148.1. A hajók átzsilipezésekor a közlekedőedények elvét használjuk ki



148.3. Ez a módszer alkalmas a kohéziós és az adhéziós erők nagyságának összehasonlítására

A mindennapi életben sok helyen találkozunk közlekedőedényekkel. Például közlekedőedényt alkot a települések vízvezetékrendszere. Amilyen magasan van a víz a víztoronyban, olyan magasra jut fel a házak csőrendszerében is.

A duzzasztóművek hajóátemelő zsiliprendszere is a közlekedőedények elvén működik.

A patakok, folyók, tavak, föld alatti víztárolók egy, a természet alkotta közlekedőedény-rendszer részei.

A patakok, folyók szennyezése ebben a közlekedőedény-rendszerben előbb-utóbb a talajvizekhez is eljut, szennyezve ezzel az élővilág fenntartásához nélkülözhetetlen tiszta vízforrásokat.

MOLEKULÁRIS ERŐK

A zsineget elszakítani, a fapálcát eltörni nehéz. A szilárd testek anyagának részecskéit egymástól eltávolítani csak nagy erőhatással lehet. A részecskék között ugyanis erős vonzás van. Ezt igazolja az is, hogy a frissen reszelt és erősen összenyomott ólomfelületek összetapadnak.



148.2. Ólomcső összetapadása

Azért kell a két ólomfelületet erősen egymáshoz szorítani, hogy az egyenetlenségek lelapuljanak, és így sok részecske kerüljön nagyon közel egymáshoz. A részecskék ugyanis csak nagyon közelről képesek vonzani egymást.

A kilöttyent folyadékok cseppekké összeállva gurulnak szét a sima felületen. Ezeket a cseppeket a részecskék közötti vonzás tartja össze.

A kísérletek azt bizonyítják, hogy **az azonos anyag részecskéi között vonzás van.** A jelenséget **kohéziónak*,** a jelenséget jellemző erőt **kohéziós erőnek*** nevezzük.

Mosakodás után a kezünk vizes marad. A vízből kivett üvegpohár vízcseppeket visz magával.

A víz felületéről nehezebb levenni a rugós erőmérőn levő üveglapot, mint azt a levegőben megtartani (*148.3. ábra*).

Mindez azt bizonyítja, hogy **nemcsak az azonos, hanem a különféle anyagok részecskéi között is van vonzás.** A különféle anyagok részecskéi közötti vonzás jelenségét **adhéziónak*,** az ilyen vonzást jellemző erőt **adhéziós erőnek*** szokás nevezni.

A kohéziós és az adhéziós erőket közös néven **molekuláris erőnek*** nevezzük.

A vízről az üvegre vonatkoztatva azt mondjuk, **nedvesítő folyadék.** Az üveg részecskéi ugyanis jobban vonzzák a víz részecskéit, mint azok egymást.

A higany az üveggel érintkezve **nem nedvesítő folyadék.** A higany részecskéi jobban vonzzák egymást, mint az üveg a higany részecskéit.



149.1. A vizek olajszennyezése a madarak pusztulását okozza, mert az olaj a tollukra tapad



149.3. A cérna amiatt feszül meg, mert a szappanhártya összehúzódik

A zsíros vagy olajos kezünkről is azért pereg le a víz, mert az olajjal érintkezve a víz nem nedvesítő folyadék.

A víz az egyik anyagra nézve nedvesítő, egy másikra nem nedvesítő folyadék. A nedvesítő, illetve a nem nedvesítő jelző tehát két különféle anyagú test viszonyára vonatkozik.

A FELÜLETI FESZÜLTSÉG

A molnárka nevű rovar vidáman futkározik a víz felületén, melynek alakja megváltozik a rovar súlya alatt. (*149.2. ábra*)

Helyezzünk egy borotvapengét, egy gemkapcsot vagy egy alumíniumfóliát óvatosan a víz felszínére úgy, hogy ne süllyedjen el. Figyeljük meg a penge vagy a gemkapocs pereménél a víz felületét! Az ujjunkkal nyomjuk meg a pengét anélkül, hogy elsüllyedne!

A vízfelület másként viselkedik, mint ahogyan az eddig megismert hidrosztatikai törvények alapján várni lehetne. Olyan, mint egy rugalmas hártya, amit nem szakít át sem a molnárka, sem az alumíniumfólia stb.

Ezt a jelenséget **felületi feszültségnek*** nevezzük.

Különösen feltűnő a felületi feszültség az úgynevezett kétoldalú folyadékhártyáknál.

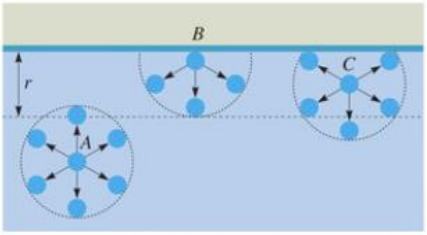
A drótkeretre lazán kötött cérnát a – csak egyik oldalán levő – szappanhártya körív alakúra feszíti meg. A folyadék részecskéi ugyanis vonzzák egymást, közel „akarnak" lenni egymáshoz.

A vékony szívószálon fújt „szappanbuborékot" függőleges szívószálon lógatva, a buborék összehúzódik, kifújja magából a levegőt.

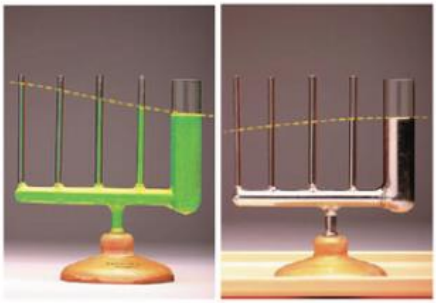
A felületi feszültség a molekuláris erőkkel értelmezhető (*149.4. ábra*). Az *A*-val jelölt molekulát a szomszédjai minden irányból vonzzák. Ezek a hatások kiegyenlítik egymást és a molekula könnyen elmozdulhat. A *B* molekulát magukra húzzák a körülötte levők, de mivel nincs, ami felfelé is húzza, a molekuláris erők eredője a folyadék belseje felé irányul. A hártya felületét növelni, csak ez ellen az erőhatás ellenében lehet.



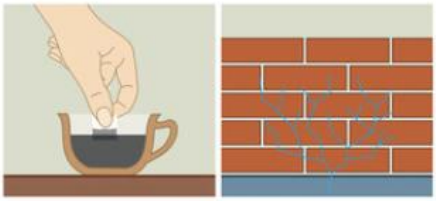
149.2. Molnárka „pihen" a víz felszínén. A vízfelület olyan, mint egy rugalmas hártya



149.4. A felületi feszültség („rugalmas hártyája") a kohéziós erőhatás miatt jön létre



150.1. Az üvegből készült közlekedőedényben a víz esetén a kisebb, a higany esetén a nagyobb keresztmetszetű csőben áll magasabban a folyadék



150.2. A molekuláris erőhatások létezése gyakran tapasztalható környezetünkben is

HAJSZÁLCSÖVEK

A kis belső átmérőjű csöveket **hajszálcsöveknek** nevezzük. Ha egy közlekedőedény ágai között hajszálcsövek is vannak, a folyadékfelszínek nem ugyanabban a vízszintes síkban helyezkednek el. Ezt a jelenséget **hajszálcsövességnek** nevezzük.

Megfigyelhető, hogy pl. az üveg hajszálcsövekben annál magasabbra emelkedik a vízfelszín, minél kisebb a cső belső átmérője. A higanyfelszín viszont annál alacsonyabbra süllyed, minél vékonyabb a cső. Ennek oka az, hogy nemcsak az azonos, hanem a különféle anyag részecskéi között is van vonzóerő:

– Ha a folyadék részecskéi között kisebb a vonzóerő, mint a folyadék és a hajszálcső részecskéi között, akkor a folyadék a hajszálcsőben feljebb emelkedik.

– Ha a vonzóerő a folyadék részecskéi között nagyobb, mint a folyadék és a hajszálcső részecskéi között, akkor a folyadék alacsonyabban marad.

A hajszálcsövesség jelensége alapján magyarázható, hogy a szivacsba, itatóspapírba, lámpabélbe, kockacukorba „felszívódik" a folyadék, vagy hogy a föld mélyebb rétegeiből a talajvíz eljut a termőrétegekbe is.

Házak falának vizesedésekor a talaj nedvessége a fal anyagának hajszálcsövein szivárog fel. Ilyenkor szigeteléssel zárják el a hajszálcsöveket.

A termőföld felszínén kapálással szüntetik meg a hajszálcsöveket. Így akadályozzák meg, hogy a talaj kiszáradjon.

Figyelem! A közlekedőedények törvényéről kiderült, hogy nem mindig igaz, pl. hajszálcsövek esetében nem igaz. Ez arra hívja fel a figyelmünket, hogy még a tudományos megállapításoknak is van **érvényességi határa.** Tudásunk alkalmazása közben emlékezni és figyelni kell ismereteink érvényességi határaira is.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Miért a felső emeleteken tapasztalható először vízhiány?
2. Az ugyanúgy kinyitott vízcsapból azonos erősséggel jön-e ki a víz az emeleten és a földszinten? Miért?
3. Hogyan lehet megváltoztatni a közlekedőedény egyik szárában a víz felső szintjének a helyzetét?
4. Mindenütt vízszintes-e a nyugvó üvegpohárban levő víz? Figyeljük meg, és adjunk rá magyarázatot!
5. Miért nem lehet zsíros papírra tintával írni? Miért fut szét a vízfesték az újságpapíron?
6. Miért fektetnek kátrányréteget a házak alapozása után a legalsó téglasor alá?
7. A kapával történő gyomirtás egyik előnye, hogy nem kell vegyszert használni. Milyen további előnyöket tudunk felsorolni?
8. Kis nyíláson miért távozik csepegve a víz a lyukas edényből?
9. A vízimadarak, pl. a kacsák tolla nem marad vizes a felszállásuk után. Miért? Tesznek-e valamit a kacsák ennek érdekében?

5. Gázok és folyadékok áramlása

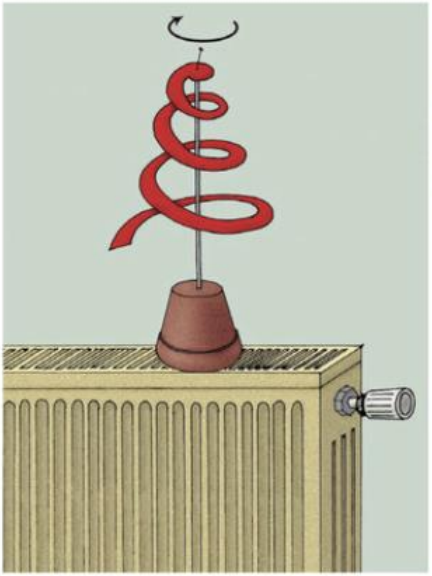
GÁZOK ÉS FOLYADÉKOK ÁRAMLÁSA

A meleg fűtőtest vagy a rezsó felett a levegő felmelegszik és kitágul, sűrűsége kisebb lesz, mint a környezetéé, ezért felemelkedik.

A folyadékok és gázok ilyen egyirányú, rendezett mozgását **áramlásnak*** nevezzük.

Nyáron a beton süti a talpunkat, a tó vize ugyanakkor kellemesen langyos, pedig ugyanúgy éri mindkettőt a napsütés. A napsugarakat a föld-, illetve a vízfelület eltérő módon „nyeli el" és veri vissza, ezért eltérő mértékben melegíti fel a szárazföldi részeket és a vizet. A talaj nappal jobban felmelegszik, mint a víz. Éjjel különböző mértékben bocsátanak ki hősugarakat, és ezért a szárazföld jobban lehűl, mint a víz.

A melegebb felületek a közelükben levő levegőt felmelegítik, a hidegek pedig lehűtik. A levegő a melegebb felületnél jobban kitágul és felszáll, így ott kisebb lesz a légnyomás. **A légnyomáskülönbség miatt a felemelkedő, melegebb levegő helyére oldalról hidegebb levegő áramlik.** (*151.2. ábra*)



151.1. A papírkígyó forgása a meleg levegő felfelé áramlását jelzi

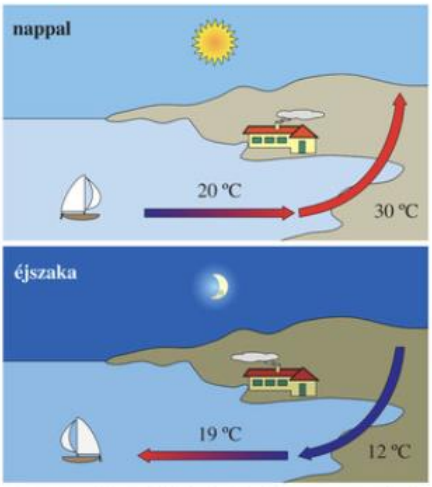
A levegőnek a földfelszínnel párhuzamos áramlását szélnek nevezzük.

A szélnek jelentős hatása van az életünkre. A szél hozza az esőfelhőket, magával viszi a virágport, hajtja a szélerőművek vitorláit, stb.

Ha sokáig nem fúj a szél, akkor a por, a füst, a korom és a légnemű halmazállapotban levő vegyi anyagok felhalmozódnak a települések – főként a városok – levegőjében.

Az ilyen szennyezett levegő az ember és minden más élőlény számára egészségtelen, betegséget okozhat.

A légáramlásokhoz hasonlóan a tengeráramlások is az eltérő hőmérsékletű részek sűrűségkülönbsége, illetve az abból adódó nyomáskülönbség miatt jönnek létre. Ilyen például a Golf-áramlat, amely erőteljesen befolyásolja Északnyugat-Európa éghajlatát. Norvégia tengerparti területei ezért melegebbek télen, mint az azonos szélességi fokon fekvő észak-kanadai kontinentális területek.



151.2. A szél: a földfelszínnel párhuzamosan, mindig a melegebb területek felé mozgó levegő



3D



152.1. A szél által forgatott szélerőmű úgy ad áramot, hogy közben nem szennyezi a környezetét!

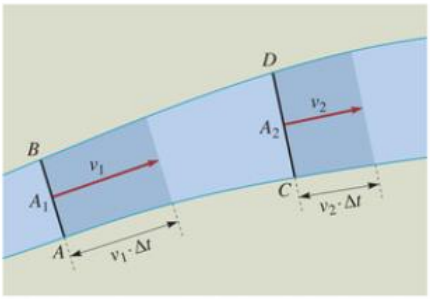
Áramlása közben megváltozhat a levegő sebessége, nyomása, de közönséges sebességeknél és magasságkülönbségeknél nem változik meg a térfogata és így a sűrűsége sem. Ezért tehát áramláskor a levegő kis sűrűségű, összenyomhatatlan folyadéknak tekinthető. Így a folyadékok és gázok áramlását együtt lehet vizsgálni és folyadékok áramlásaként beszélni róla.

A folyadékok és gázok áramlását létrehozó hatások lehetnek külső erőhatások – elsősorban a gravitációs mező hatása – és nyomáskülönbségben megnyilvánuló belső hatás.

3D



152.2. A víz a gravitációs mező hatására folyik le a folyókban, patakokban



152.3. Vázlatrajz egy változó keresztmetszetű áramlási csőről

A folyadéknak az edény nyílásán történő kiáramlása, vagy a folyókban a víz áramlása a gravitációs mező hatására, a gázoknak a tartályból való kiáramlása viszont elsősorban belső túlnyomásra vezethető vissza.

Közismert tapasztalat, hogy a folyó medrének szűkebb keresztmetszetű helyén nagyobb sebességgel áramlik a víz.

Mivel az általunk vizsgált közeg (pl. a víz vagy a levegő) térfogata áramlás közben nem változik, ahhoz, hogy ugyanannyi jusson át a szűkebb keresztmetszetű részen, mint a tágabbon, **a szűkebb részen nagyobb sebességgel kell, hogy áramoljon.**

Az A_1 felületen, Δt idő alatt, $V_1 = A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$ térfogatú folyadék lép be az A_1 és A_2 közötti térrészbe.

Ugyanonnan az A_2 felületen $V_2 = A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$ térfogatú távozik el.

Mivel:

$$V_1 = V_2 \rightarrow A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = V_2 = A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t.$$

Egyszerűsítve Δt-vel:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2, \quad \text{tehát} \quad A \cdot v = \text{állandó}.$$

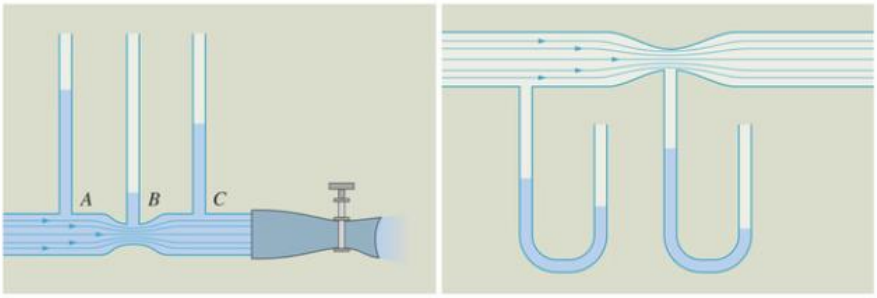
Az áramlási csőben a cső keresztmetszetének és az áramlás sebességének a szorzata minden helyen ugyanannyi:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2;$$

vagy másként:

$$A \cdot v = \text{állandó}.$$

Ezt az összefüggést szokás **kontinuitási egyenletnek*** nevezni.



153.1. Áramló folyadékok és gázok sebességének és nyomásának kapcsolatát igazoló kísérletek

A DINAMIKAI FELHAJTÓERŐ ÉS A REPÜLÉS

Egyszerű kísérletek azt bizonyítják, hogy az áramló folyadék sebessége és nyomása között kapcsolat van.

Ha pl. víz áramlik egy változó keresztmetszetű, vízszintes csőben – amelyből három nyomásmérőként használható oldalcső nyúlik ki függőlegesen –, a nagyobb áramlási sebességű szűkületnél (*B* helyen) kisebb a nyomás, mint a nagyobb keresztmetszetű és így kisebb sebességű (*A* és *C*) helyeken. (*153.1. ábra*)

A kísérletek azt igazolják, hogy ahol az áramlási sebesség nagyobb, ott a nyomás kisebb, és fordítva.

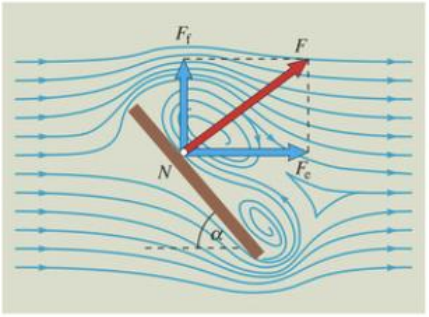
A magunk előtt vízszintesen tartott alkarunkra fektessünk rá egy – gépelésnél használt – papírlapot, amelynek a felőlünk levő szélét fogjuk meg.

Fújjunk el a papírlap felett, és figyeljük meg, mi történik a lappal!

A lap felett áramló levegőnek nagyobb a sebessége, mint a lap alatt álló levegőé. A lap felett tehát kisebb a nyomás, mint a lap alatt, ezért a lap szabadon mozgó része megemelkedik.

Általában igaz, hogy amikor a közeg áramlásába a mozgásirányhoz viszonyítva egy lapot ferdén helyezünk el, vagy a lapot ilyen helyzetében mozgatjuk a közeghez viszonyítva, a lapot emelőhatás éri.

Ennek az az oka, hogy amikor a levegő a ferde helyzetű lapot fölül megkerüli, felgyorsul, és ott kisebb lesz a nyomása. Az alul áramló levegő a lapnál feltorlódik, lelassul, és megnő a nyomása. Tehát mindkét helyen emelőhatás jön létre.

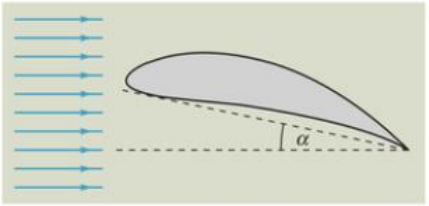


153.2. A közeghez viszonyítva mozgó ferde lapot – a gravitációs hatáson kívül – még két erőhatás éri

Ezt az erőhatást a **dinamikai felhajtóerő*** (F_f) jellemzi.

Ilyenkor a lapot a közegellenállás miatt fékező erőhatás (F_e) is éri.

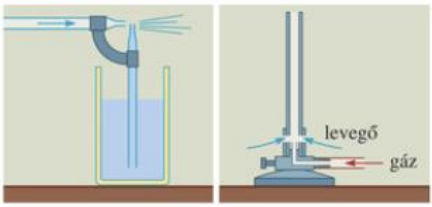
A repülőgépeknél a test és a szárnyfelületek alakításával növelik a dinamikai felhajtóerőt és csökkentik a légellenállást. Ezek kialakításánál legelőnyösebbnek a Zsukovszkij-profil bizonyult.



153.3. A legnagyobb emelőhatást és a legkisebb közegellenállást a Zsukovszkij-profilú szárnyfelületek biztosítják

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Milyen változások miatt kezd el fújni a szél?
2. Milyen irányba fúj a szél? Határozzuk meg ezt az irányt a légnyomás segítségével!
3. Milyen tartós lég- és tengeráramlat volt tananyag az általános iskolában?
4. Mire használható fel a levegő és a víz áramlása?
5. Mi történik, ha locsoláskor szűkítjük a cső nyílását?
6. Mi az oka annak, hogy a szélvihar ledobálhatja a házakról a tetőcserepeket?
7. Mi a különbség a közegben nyugalomban is fellépő és a csak áramlásban tapasztalható emelőhatás között?
8. Mi a magyarázata a benzinmotor porlasztója, a kölniszóró, valamint a Bunsen-égő működésének?
9. A repülőgépek sebességének növeléséhez meg kellett változtatni azok szárnyfelületének alakját. Miért, és milyen formára? (Ez a kérdés önálló kutatást, tájékozódást igényel!)



10. Helyezzünk pingponglabdát egy csövével lefelé tartott tölcsérbe! Ebben a helyzetben tartva a tölcsért, kíséreljük meg kifújni belőle a labdát! Mit tapasztalunk? Miért?
11. Helyezzünk pingponglabdát hajszárító légáramába! A labda nem esik le, sőt követi a hajszárító légáramát. Adjunk magyarázatot!

FELADATOK

3D

1. Gyűjtsünk anyagot és tartsunk kiselőadást a szélerőművekről és a vízerőművekről!

6. Kidolgozott feladatok

1. Egy 1,6 m magasan végződő locsolócsőből vízszintes irányban kilépő vízsugár 4 m távolságra éri el a sima földfelszínt.

a) Milyen sebességgel folyik ki a csőből?

b) Milyen távolságra ér talajt a vízsugár, ha a cső átmérőjét felére csökkentjük?

MEGOLDÁS:

a) A víz mozgása vízszintes hajítás. A függőleges elmozdulás tehát szabadesés, melyre az $y = \frac{g}{2} \cdot t^2$ alkalmazható. Ebből:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6\ \text{m}}{9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0{,}57\ \text{s}.$$

Vízszintes irányban a mozgás egyenletes, ennek sebessége (v_1) megegyezik a kezdősebességgel:

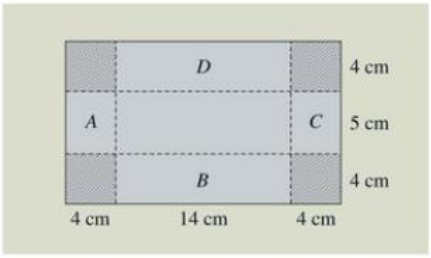
$$v_1 = \frac{x_1}{t} = \frac{4\ \text{m}}{0{,}57\ \text{s}} = \mathbf{7\ \frac{m}{s}}.$$

b) A 2-szer kisebb átmérő 4-szer kisebb keresztmetszetet, ez pedig 4-szer nagyobb ármalási sebességet jelent.

Mivel az esési idő változatlan, a 4-szer nagyobb kezdősebesség 4-szer nagyobb „hajítási" távolságot eredményez:

$$x_2 = 4 \cdot 4\ \text{m} = \mathbf{16\ m}.$$

2. Az ábrának megfelelő méretű, téglalap alakú, 2 mm vastag alumíniumlemez mind a négy sarkából 4 cm oldalú négyzeteket vágtunk le. A kiálló (A, B, C, D) részek felhajtásával, majd a rések tömítésével téglatest formájú kis játékcsónakot kaptunk. Az alumínium sűrűsége $\rho_{Al} = 2{,}7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, a vízé $\rho_{víz} = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. A tömítés elhanyagolható tömegű.



a) Mennyi lehet a vízre helyezett kis csónak maximális terhelése?

b) Mennyire merül vízbe az üres csónak?

c) Készítsünk ilyen csónakot, és vizsgáljuk meg a stabilitását!

MEGOLDÁS:

a) Maximális terhelésnél a csónak úgy úszik, hogy közelítően a saját térfogatával egyenlő térfogatú vizet szorít ki. Ez a térfogat:

$$V_{víz} = 14\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} = 280\ \text{cm}^3.$$

Ennyi víznek a tömege:

$$m_{víz} = \rho_{víz} \cdot V_{víz} = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 280\ \text{cm}^3 = 280\ \text{g}.$$

A csónak anyagának térfogatát megkaphatjuk, ha az eredeti lap térfogatából kivonjuk a levágott sarkok térfogatát:

$$V_{Al} = 22\ \text{cm} \cdot 13\ \text{cm} \cdot 0{,}2\ \text{cm} - 4\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} \cdot 0{,}2\ \text{cm} \cdot 4 = 44{,}4\ \text{cm}^3.$$

A csónak anyagának tömege:

$$m_{Al} = \rho_{Al} \cdot V_{Al} = 2{,}7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 44{,}4\ \text{cm}^3 = 120\ \text{g}.$$

Az úszás feltétele, hogy a csónak anyagának és terhelésének együttes súlya egyenlő a kiszorított víz súlyával:

$$(m_{Al} + m_t) \cdot g = m_{víz} \cdot g.$$

A maximális terhelés tömege ebből:

$$m_t = m_{víz} - m_{Al} = 280\ \text{g} - 120\ \text{g} = \mathbf{160\ g = 0{,}16\ kg.}$$

b) Jelöljük x-szel a merülési mélységet! A kiszorított víz és az üres csónak súlya egyenlő, így tömegük is egyenlőnek vehető:

$$14\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} \cdot x \cdot 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 120\ \text{g}.$$

Ebből az üres csónak merülési mélysége: $x = \mathbf{1{,}7\ cm.}$

Összefoglalás

A NYOMÁS

$$p = \frac{F_{ny}}{A} = \frac{\text{nyomóerő}}{\text{nyomottfelület}}; \quad 1\ \text{pascal} = 1\ \text{Pa} = 1\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

A nyomóerő mindig merőleges a nyomott felületre!

SZILÁRD TESTEK

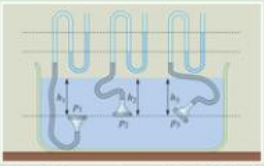
$$p = \frac{F_{ny}}{A}$$



A nyomóerő nemcsak a test súlya, hanem bármilyen erő lehet!

FOLYADÉKOK

$$p = \frac{F_{ny}}{A} = \rho \cdot g \cdot h$$



A külső nyomás a folyadék belsejében mindenhol ugyanannyival növeli meg a hidrosztatikai nyomást. Ez **Pascal törvénye.**

GÁZOK

$$p = \frac{F_{ny}}{A} = \rho \cdot g \cdot h$$



A gázoknak nem csak a súlyuk miatt lehet nyomásuk.

A FELHAJTÓERŐ

A közeg a benne levő testekre emelőhatást gyakorol.

Minden folyadékba vagy gázba merülő testnél a felhajtóerő egyenlő nagyságú a test által kiszorított folyadék vagy gáz súlyával.

HIDROSZTATIKAI

A nyugvó közegben levő testet felfelé irányuló erőhatás éri. (F_f).

A test, ha:

$\rho_{test} > \rho_{közeg}$, **elmerül;**

$\rho_{test} = \rho_{közeg}$, **lebeg;**

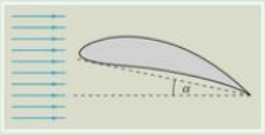
$\rho_{test} < \rho_{közeg}$, **úszik.**



Az egyfolyadékos közlekedőedény minden szárában a nyugvó folyadék felszíne ugyanabban a vízszintes síkban van.

HIDRODINAMIKAI

Amikor egy közeg és egy lapos test egymáshoz viszonyítva (az ábrának megfelelően) mozog, a testet emelőhatás éri.



A legnagyobb emelőhatást és a legkisebb közegellenállást a Zsukovszkij-profilú szárnyfelületek biztosítanak.

MOLEKULÁRIS ERŐK

KOHÉZIÓ

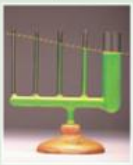
Az azonos anyag részecskéi között – nagyon kis távolságban – kohéziós vonzó hatás van, amit a **kohéziós erő** jellemez.



A **felületi feszültség** („rugalmas hártyája") a kohéziós erőhatás miatt jön létre.

ADHÉZIÓ

A különféle anyagok részecskéi között – nagyon kis távolságban – adhéziós vonzó hatás van, amit az **adhéziós erő** jellemez.



A **hajszálcsövesség** jelensége az adhéziós erőhatás miatt jön létre.

A FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK (A KÖZEGEK) ÁRAMLÁSA

Az áramlás **nyomáskülönbség** esetében jön létre.

A szél a levegőnek a földfelszínnel párhuzamos áramlása. A tengeráramlások is – a légáramlásokhoz hasonlóan – az eltérő hőmérsékletű részek sűrűség- és az így létrejött nyomáskülönbségek miatt jönnek létre.

A közeg áramlását létrehozó hatások lehetnek külső erőhatások – pl. a gravitációs mező hatása – és a nyomáskülönbségben megnyilvánuló belső hatás, mint ami a zárt térből kiáramló gázoknál van.

Ahol az áramlási sebesség nagyobb, ott a nyomás kisebb, és fordítva.

A közeg áramlása hasznosítható az emberiség érdekében.





IV. fejezet



ENERGIA, MUNKA

1. Emlékeztető



160.1. A testeknek sokféle okból van energiája (melegítés, megfeszítés stb.)

ENERGIA

Az anyagoknak, testeknek, folyamatoknak sokféle tulajdonsága van, amelyeket vagy körülírással, vagy egy-egy mennyiséggel szoktunk jellemezni. Például annak a testnek nagyobb a tehetetlensége, amelynek nehezebb megváltoztatni a sebességét, vagy: a test tehetetlenségének mértéke a tömeg.

A testeknek és mezőknek van olyan képessége, hogy más testeket melegíthetnek, megfeszíthetnek, sebességüket növelhetik, állapotukat sokféle módon megváltoztathatják. Ezt tömören úgy mondhatjuk, hogy a testeknek egyik elidegeníthetetlen tulajdonsága az, hogy van kölcsönható, másként **változtató képességük.**

A testeknek és mezőknek a változtató képességét is egy mennyiséggel, az energiával jellemezzük.

Az **energia*** az anyagi rendszerek állapotára jellemző **skalármennyiség,** amely zárt rendszer esetén bármely állapotváltozásnál időben állandó marad. **Az energiára** tehát **megmaradási törvény írható fel.** Az energia jele: E.

A testek, illetve mezők állapota, és így energiája sokféle módon változhat, ezért megkülönböztetünk mozgási energiát, rugalmas energiát, belső energiát stb.

Az egyenlő sebességű testek közül pl. annak nagyobb a mozgási energiája, amelyiknek nagyobb a tömege, az egyenlő tömegűek közül pedig annak, amelyiknek nagyobb a sebessége.

A testek energiaváltozásai alapvetően két csoportra oszthatók. A test energiája megváltozhat, ha

a) a test állapota mechanikai kölcsönhatás eredményeként változik (munkavégzés közben: $\Delta E = W$), vagy

b) ha a test részecskéinek rendezetlen mozgása változik meg (például termikus kölcsönhatás: $\Delta E_b = Q = c \cdot m \cdot \Delta T$, hősugárzás stb. közben).

MUNKAVÉGZÉS, MUNKA

Fizikai értelemben azokat a folyamatokat nevezzük **munkavégzésnek*,** amelyekben a testet erőhatás éri, és a test ennek következtében elmozdul.

Munkavégzés közben energiaváltozás jön létre, amit munkának nevezünk, és W-vel jelölünk. A **munka** olyan energiaváltozás, amely erőhatás



160.2. Bármilyen irányból érkezik az autó, a „vár" összedől. *Ezt figyelembe véve milyen mennyiség az energia?*



160.3. A súlylökő a golyót nagy erővel és hosszú úton gyorsítja

és az erőhatás következtében létrejött elmozdulás miatt következett be. A munkavégzés tehát egy folyamat, a munka pedig ennek a folyamatnak a mennyiségi jellemzője. Jele: W.

Akkor végzünk nagyobb munkát, ha annak nagyobb energiaváltozás a következménye. Kísérlettel megállapítható, hogy amennyiben az erő állandó, valamint hatásvonala és a mozgás pályája egybeesik, akkor $W \sim F$; $W \sim s$, és

$$\Delta E = W = F \cdot s.$$

A munka, és így az energia mértékegysége is joule (J). $1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot 1\ \text{m}$.

AZ ENERGIAVÁLTOZÁSSAL JÁRÓ FOLYAMATOK JELLEMZŐI

Minden tapasztalat azt igazolja, hogy párkölcsönhatás közben amennyivel nő az egyik résztvevő energiája, ugyanannyival csökken a másiké. Ez a megállapítás az **energiamegmaradás törvénye*.**

A **teljesítmény*** az energiaváltozással járó folyamatokat gyorsaságuk szempontjából jellemzi. A teljesítmény jele: P.

A teljesítmény – ha a változás egyenletes – az energiaváltozás és a változás időtartamának hányadosaként számítható ki :

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

A teljesítmény mértékegysége a watt, jele: W.

$$1\ \text{W} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{s}}.$$



161.2. A gépkocsik motorjainak teljesítményét lóerőben (LE) és SI-mértékegységben: kilowattban (kW) is meg szokták adni. *Hány lóerő 1 kilowatt?*

A **hatásfok** gazdaságossági szempontból jellemzi az energiaváltozással járó folyamatokat. A hatásfok jele: η (éta – görög betű).

A hatásfok a hasznos energiaváltozás (ΔE_h) és az összes „befektetett" energiaváltozás ($\Delta E_\text{ö}$) hányadosaként számítható ki:

$$\eta = \frac{\Delta E_\text{h}}{\Delta E_\text{ö}}.$$

Mivel a hatásfok arányszám, így mértékegysége nincs.

A hasznos energiaváltozás soha nem lehet nagyobb a befektetett energiaváltozásnál, tehát a hatásfok:

$$\eta \leq 1.$$



161.1. A merülőforraló gyorsabban melegít, mint a borszeszégő



161.3. Csak a malter emelése hasznos, a többi emelési munka kárba vész. *Melyik munkás dolgozik jobb hatásfokkal?*

2. Energiaváltozás munkavégzés közben

Az **energia*** olyan általános fogalom, amelynek pontos értelmezése elemi szinten nem lehetséges. Ezért még a középiskolákban is meg kell elégedni olyan energiafogalommal, amelyet jellemzőinek bemutatásával, tehát a fogalom közelítő körülírásával fokozatosan bővítve értelmezhetünk. **Az energia bármely zárt anyagi rendszer állapotának egyik legfontosabb tulajdonságát, a kölcsönható képességet jellemző skalármennyiség. Az energia a zárt rendszerben lejátszódó tetszőleges állapotváltozásnál időben állandó marad, tehát megmaradási törvény érvényes rá.**

A testek állapota sokféle módon változhat, így az energiaváltozás is sokféle folyamatot jellemezhet. Az energiafogalom mennyiségi bevezetését – a mi tudásunk szintjén – az állapotváltozások valamelyikéhez kell kapcsolni.

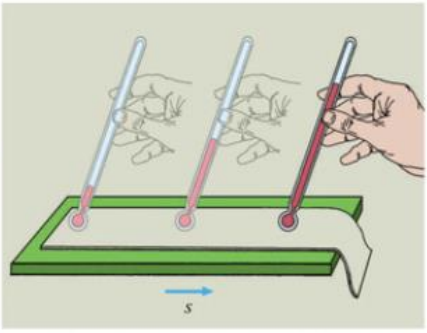
Mivel az általánosan elfogadott SI-mértékrendszer megalkotásakor az energia fogalmát és mértékegységét a **munka*** (jele: W) felől közelítették meg, így nekünk sem célszerű más állapotváltozást felhasználni erre (bár lehetne).

2.1. A munka kiszámítása

A munka kiszámítási módjának felismeréséhez vegyük figyelembe azt, hogy munkavégzés közben **akkor nagyobb a munka, ha nagyobb az energiaváltozás.**

Válasszunk egy olyan folyamatot, amelyet előző tanulmányainkból már jól ismerünk. Súrlódásnál például könnyen megállapítható, hogy mikor nagyobb a súrlódási munka. Meg lehet mérni a rendszer hőmérséklet-változását, és így felismerhető, mikor nagyobb a belső energia megváltozása.

Először csak olyan munkavégzést vizsgáljunk, amelynél a változatlan nagyságú erő hatásvonala és a test mozgásának egyenes pályája egybeesik.



162.1. *Miért melegszik fel a hőmérő súrlódás közben?*

Ha egy hőmérő tartályát puha textilanyaghoz szorítva mozgatjuk, akkor a hőmérő a súrlódás miatt felmelegszik, és eközben méri is a felmelegedés mértékét. Ha többször is végighúzzuk a hőmérőt a textilanyagon, megállapíthatjuk, hogy ahányszor hosszabb úton mozgatjuk a hőmérőt ugyanakkora erővel, a hőmérséklet-változás is annyiszor nagyobb lesz.

Ha F = állandó:

s	$2s$	$3s$	$4s$	
ΔT	$2\Delta T$	$3\Delta T$	$4\Delta T$	$\Delta T \sim s$
ΔE	$2\Delta E$	$3\Delta E$	$4\Delta E$	$\Delta E \sim \Delta T$
W	$2W$	$3W$	$4W$	$W = \Delta E$

Pontos méréssel megállapítható, hogy ha az erőhatás nagysága állandó, és a hatásvonala mentén megtett út kétszer, háromszor stb. nagyobb, akkor a hőmérséklet-változás és így az energiaváltozás is kétszer, háromszor stb. nagyobb. Ebből arra következtethetünk, hogy **ha az erőhatás állandó,** a belsőenergia-változás és így **a munka** is **egyenesen arányos az úttal:**

$$W \sim s.$$

Ha a hőmérőt úgy mozgatjuk ugyanakkora úton, hogy jobban odaszorítjuk a textilanyaghoz (vagyis nagyobb erővel mozgatjuk), akkor a hőmérő nagyobb hőmérséklet-változást, tehát nagyobb energiaváltozást jelez.

Ha s = állandó:

F	$2F$	$3F$	$4F$	
ΔT	$2\Delta T$	$3\Delta T$	$4\Delta T$	$\Delta T \sim F$
ΔE	$2\Delta E$	$3\Delta E$	$4\Delta E$	$\Delta E \sim \Delta T$
W	$2W$	$3W$	$4W$	$W = \Delta E$

Pontos méréssel megállapítható: ha az erő hatásvonala mentén megtett út ugyanakkora, de az erő kétszer, háromszor stb. nagyobb, akkor az energiaváltozás is kétszer, háromszor stb. nagyobb. Ebből arra következtethetünk, hogy a belsőenergia-változás és így **a munka** is **egyenesen arányos az erővel, ha az út állandó:**

$$W \sim F.$$

Kísérlettel tehát megállapítható, hogy a munka az erő és az erő hatásvonala mentén történő elmozdulás szorzatával egyenesen arányos:

$$W = k \cdot F \cdot s.$$

Mivel k arányossági tényező szabadon megválasztható, legyen $k = 1$. Így:

munka = erő · út,

$$W = F \cdot s.$$

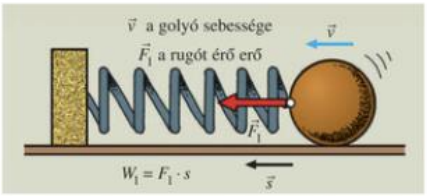
Ismerjük az erő és az út mértékegységét, a kettő szorzataként meghatározható **a munka és az energia mértékegysége, a joule** (J): 1 J = 1 N · 1 m.

AZ ENERGIA NÖVEKEDÉSE ÉS CSÖKKENÉSE MUNKAVÉGZÉS KÖZBEN

Eddigi tapasztalataink szerint: ha kölcsönhatás közben az egyik résztvevő energiája nő, a másiké csökken. Azt viszont még nem vizsgáltuk meg, hogy a munkavégzés eredménye mikor lesz energianövekedés, és mikor energiacsökkenés.

A laza rugónak ütköző golyó összenyomja a rugót (*163.1. ábra*). Összenyomás közben a rugó rugalmas energiája nő. Ilyenkor a golyó által a rugóra kifejtett erőhatás iránya megegyezik a rugóvég elmozdulásának irányával. A rugó megnyújtása esetén is igaz, hogy az elmozdulással megegyező irányú erőhatás növeli a rugó energiáját.

Általában igaz, hogy amikor a testet érő erőhatás iránya megegyezik a test mozgásának irányával, a test energiája nő. Az energianövekedést



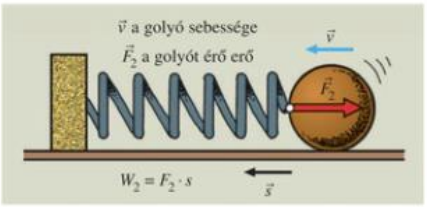
163.1. A rugó végének elmozdulása és a rugót érő erőhatás azonos irányú, a rugó energiája nő

jelöljük pozitív (+) előjellel. Az előző megállapítás úgy is megfogalmazható, hogy **a test mozgásával megegyező irányú erőhatás munkája pozitív.**

Most figyeljük meg a rugónak ütköző golyót érő erőhatás irányát, és a golyó ütközés közben bekövetkező energiaváltozását.

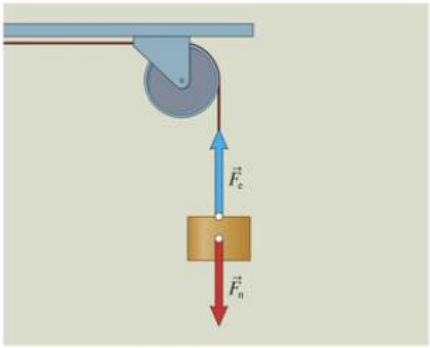
A laza rugó lefékezi a nekiütköző golyót. Ilyenkor a golyó mozgási energiája csökken. Ütközés közben a rugó által a golyóra kifejtett erőhatás iránya ellentétes a golyó elmozdulásával. Ebben az esetben belátható, hogy az elmozdulással ellentétes irányú erőhatás csökkenti a test energiáját.

Általában igaz, hogy amikor a testet érő erőhatás iránya ellentétes a test elmozdulásával, a test energiája csökken. Az energiacsökkenést jelöljük negatív (–) előjellel. Másként megfogalmazva ezt a megállapítást: **a test mozgásával ellentétes irányú erőhatás munkája negatív.**



163.2. A golyó elmozdulása és a golyót érő erőhatás ellentétes irányú, a golyó energiája csökken

Mindkét megállapítás összhangban van az energiamegmaradás törvényével. A mechanikai kölcsönhatásban levő két érintkező test elmozdulása ugyanis egyenlő nagyságú és irányú. A közöttük fellépő két erőhatás viszont egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú. A két test energiaváltozása tehát egyenlő nagyságú, de ellentétes értelmű (az egyiké pozitív, a másiké negatív).



164.1. $F_e = F_n$, de irányuk ellentétes

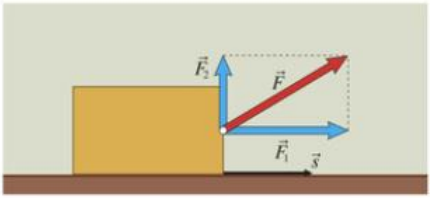
Eddig olyan eseteket vizsgáltunk, amikor a testen egyszerre csak egy erőhatás végzett munkát. Most vizsgáljuk meg, hogy mi történik munkavégzés közben, amikor egy testet egyidejűleg több erőhatás ér.

Ha daruval egyenletesen emelnek egy ládát, a testet egyszerre két erőhatás éri: a kötél felfelé irányuló emelőerője ($\vec{F}_e$) és a nehézségi erő ($\vec{F}_n$), amely lefelé mutat. A testet érő két erőhatás egyenlő nagyságú és ellentétes irányú, ezért kiegyenlítik egymást, így eredőjük nulla. Az általuk külön-külön végzett munka egyenlő nagyságú. Mivel a teher fölfelé mozog, az emelőerő munkája pozitív, a nehézségi erőé pedig negatív, tehát előjeles összegük szintén nulla. Ez azt jelenti, hogy **a teher mozgási energiája egyenletes emelés közben nem változik.** Az így felemelt testnek tehát nem az állapota, hanem a helyzete változik. Ebből és sok más tapasztalatból megállapítható:

Ha egy testet egy időben több erőhatás ér, akkor azok együttes munkája két módon is kiszámítható: az egyes erők munkájának előjeles összegeként, vagy úgy, mint az erők eredőjének munkája.

Gyakran előfordul, hogy az erő hatásvonala és a pálya egyenese nem esik egybe, hanem metszi egymást. Példa lehet erre az az eset, amikor egy hasábot az asztalon nem vízszintes irányú erővel vontatunk (*164.2. ábra*).

A paralelogramma szabály alapján meghatározható két olyan tetszőleges (de egymással nem párhuzamos) irányú erő, amelynek eredője egy előre megadott erő. Ezt a két erőt összetevő erőnek (másként erőkomponenseknek) szokás nevezni.



164.2. Az elmozdulásra merőleges erőhatás nem végez munkát

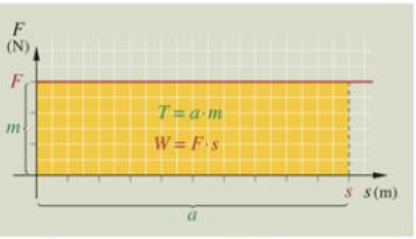
Gondolatban helyettesítsük a pályához viszonyítva ferde $\vec{F}$ erőt egy, az elmozdulással párhuzamos $\vec{F}_1$, és egy másik, az elmozdulásra merőleges $\vec{F}_2$ erővel.

Az s elmozdulásra merőleges $\vec{F}_2$ erő munkája nulla, hiszen a neki megfelelő irányban nem mozdul el a test. Így az $\vec{F}$ eredő erő munkája a pálya egyenesébe eső $\vec{F}_1$ összetevő erő munkájával egyenlő.

Ha a test egyenes pályája és a változatlan nagyságú és irányú erő hatásvonala metszi egymást, akkor az erő munkája az erő pályaegyenesre eső összetevőjének és az elmozdulásnak a szorzata.

$$W = F_1 \cdot s$$

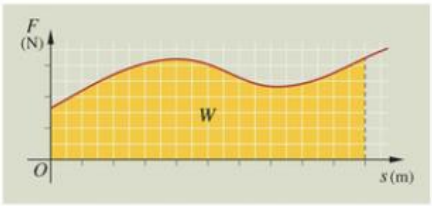
A munka fogalmát eddig csak egyenes pályán, állandó nagyságú és irányú erőhatások következtében mozgó testekre értelmeztük. Ilyen esetben az erőt az út függvényében ábrázolva a kapott grafikon egy egyenes, amely alatti terület számértéke (egy téglalap területe) az $F \cdot s$ szorzat számértékével egyenlő.



164.3. *Állandó irányú és nagyságú erő munkája egyenes pálya esetében számértékileg mivel egyezik meg?*

A valóságban lezajló folyamatoknál azonban lehet, hogy a mozgás közben az erő nagysága, esetleg iránya is változik. Lehet, hogy a pálya nem egyenes, sőt lehetséges, hogy mindhárom egyszerre teljesül.

Ha az erőnek a pályaérintő irányába eső összetevőjét ábrázoljuk az út függvényében, akkor a már többször alkalmazott gondolatoknak megfelelően könnyen belátható, hogy a munka számértéke a görbe alatti terület megfelelő részének számértékével egyezik meg.



165.1. Az erő–út grafikon megfelelő rajza alatti terület számértéke egyenlő a munka számértékével

MEGJEGYZÉSEK

1. A munkavégzést, mint cselekedetet, célszerű a pozitív irányú erőhatást kifejtő testhez kötni az elnevezésben, pl.: a súlylökő atléta munkát végez a súlygolyón. A kölcsönhatás másik oldaláról azt mondjuk, hogy a súlygolyón munkát végeztek. Így azt is kifejezzük, hogy melyik kölcsönható partnernek nő, és melyiknek csökken az energiája, mert amin munkát végeznek, annak nő, ami végzi a munkát, annak csökken az energiája.
2. Amikor azt közöljük, hogy a végzett munka 10 J, akkor nemcsak az energiaváltozás nagyságáról, hanem annak módjáról, a mechanikai kölcsönhatásról is felvilágosítást adtunk.
3. Az erő elmozdulás irányú összetevőjét most még csak szerkesztéssel tudjuk meghatározni, de matematikából a 10. évfolyamon egyszerűbb és pontosabb módszereket is megismerünk majd a feladat megoldására (trigonometria).
4. A munka kiszámításánál mindegy, hogy az erő pályaegyenesbe eső vetületét szorozzuk az úttal, vagy az utat jelentő szakasznak az erő hatásvonalára eső vetületét az erővel. E két lehetőség egyenértékűségére később tudunk matematikai magyarázatot adni.
5. Az energia és így az energiaváltozások mértékegységét *James Prescott Joule* (1818–1889) angol fizikus tiszteletére nevezték el.



GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Végzünk-e munkát, ha a csomagot – álló helyzetben – a kezünkben tartjuk?
2. Egy súrlódás nélkül mozgó test vízszintes felületen változatlan sebességgel halad. Végez-e rajta valami munkát?
3. Függ-e a végzett munka attól, hogy az F erő az s úton mennyi idő alatt hozta létre az elmozdulást?
4. Milyen erőhatások érik az asztalon guruló golyót, ha a súrlódástól eltekinthetünk? Végez-e közülük valamelyik munkát a golyón? Miért?

5. Végez-e munkát az egyenletes körmozgást végző anyagi ponton a rá ható erők eredője, vagyis a centripetális erő? Miért? Egyenletes körmozgás közben változik-e az anyagi pont mozgási energiája, változik-e a mozgásállapota? Változik-e az anyagi pont lendülete egyenletes körmozgás közben? Miért?

6. Egy fahasábot vízszintes felületen egyenletesen vontatunk. Milyen erőhatások érik a hasábot? Az erőhatások közül melyek végeznek munkát a hasábon? Melyik erőhatásnak pozitív és melyiknek negatív a munkája? Miért nem változik a hasáb mozgásállapota? Változik-e vontatás közben valaminek az energiája? Hogyan érvényesül itt az energiamegmaradás törvénye?

7. Egy lejtőn lecsúszó hasábon – ha a súrlódástól eltekintünk – végez-e munkát a lejtő?

8. Milyen előjelű munkát végez a nehézségi erő a vízszintesen elhajított testen?

9. Egy testet feldobtak. Mi a kölcsönhatás két résztvevője a már mozgó testnél? Milyen előjelű a nehézségi erő munkája, és hogyan változik a test mozgási energiája emelkedés és esés közben? Minek csökken és minek nő az energiája emelkedés, illetve esés közben? Függ-e a nehézségi erő munkája az emelkedés közben attól, hogy függőlegesen vagy ferdén dobták el a testet, ha az emelkedés magassága ugyanakkora volt?

10. Hogyan valósul meg munkavégzés közben az azonos testet érő erőhatások függetlenségének elve?

11. Az evezősöknek minden erőfeszítése ellenére sem sikerül a vízfolyás ellen haladni a csónakukkal. A csónak a parthoz viszonyítva a vízfolyás irányában sem mozdul el. Végeznek-e munkát az evezősök a vízhez, illetve a parthoz viszonyítva? Lehet-e viszonylagos mennyiségnek tekinteni az energiát?



FELADATOK

1. Egy ló 300 N erővel 100 m távolra vontat el egy farönköt. Mekkora munkát végez?

2. Szántás közben egy traktor 2500 N erővel húzta az ekét. Milyen hosszú úton végzett 500 kJ munkát?

3. Mekkora erővel tolta az asztalos a gyalut, ha egy mozdulat 50 cm távolságán 30 J munkát végzett?

4. Fűrészeléskor egy húzás 40 cm elmozdulással jár. A fűrészt 70 N nagyságú erővel lehet húzni, és 50 N nagyságúval tolni. Mennyi a végzett munka egy farönk átvágása közben, ha ahhoz 100 húzásra van szükség?



5. Számítsuk ki azt a munkát, amelyet a súlyemelő a 150 kg tömegű súly 2,2 m magasra emelése közben végez!

6. Egy emelődaru 3 m hosszú, 1 m széles és 10 cm vastag tömör betonelemet 5 m magasra emel. Mennyi munkát végez a betonelem felemelése közben, ha a beton sűrűsége 2400 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

7. A földön öt tégla hever. Minden tégla 10 cm vastag és 4 kg tömegű. Mekkora munkát kell végezni az öt tégla egymásra rakásához?

8. Tájékozódjunk pl. az interneten Joule életéről és munkásságáról!

2.2. A mozgási energia kiszámítása. A munkatétel

Előző tanulmányaink során megállapítottuk, hogy annak a haladó mozgást végző testnek nagyobb a **mozgási energiája***, amelyiknek megegyező sebesség mellett nagyobb a tömege, az egyenlő tömegűek közül pedig annak, amelyiknek nagyobb a sebessége. Most nézzük meg, hogyan számítható ki egy test mozgási energiája. Ennek érdekében gondoljuk végig a következőket.

Az anyagi pontnak tekinthető nyugvó testnek nincs mozgási energiája. Álló helyzetből állandó nagyságú erőhatás s úton egyenletesen gyorsítson fel v sebességre egy m tömegű anyagi pontot. **A gyorsítási munka*:** $W_{gy} = F \cdot s$.

Ha a mozgás egyenletesen változó, az erő $F = m \cdot a$, az út $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$, és $v = a \cdot t$.

Így:

$$W_{gy} = F \cdot s = (m \cdot a) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \underbrace{a^2 \cdot t^2}_{v^2},$$

$$W_{gy} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Mivel ez a munka a nyugalomból induló test energiáját növelte, így a v sebességgel mozgó, m tömegű testnek mozgása révén $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ az energiája. Ezért ezt az energiát a **test mozgási energiájának*** (jele: E_m) nevezzük.

A mozgási energia a test mozgásállapotát változtató képesség szempontjából jellemző mennyiség:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

A gondolati úton felismert eredményünk megerősíthető mérőkísérlettel is.

Amikor egy mozgó test a súrlódás miatt áll meg, a súrlódási erő munkája egyenlő a test mozgási energiájának csökkenésével. Ezért a lejtőről – egy elhanyagolható tömegű – csúszópapucsba futó golyó mozgási energiájára következtetni tudunk a csúszópapucson végzett súrlódási munkából.

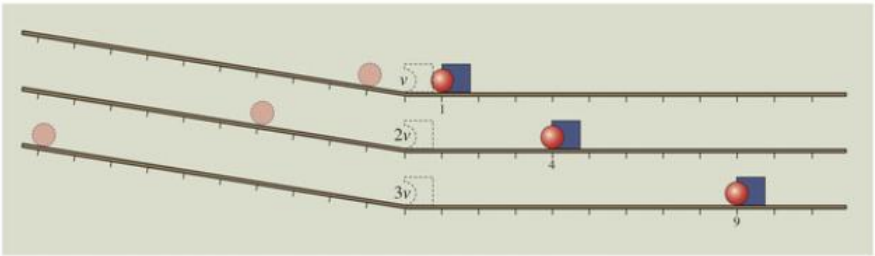
Ugyanannál a golyónál a súrlódó felületek simasága és a nyomóerő változatlan, függetlenül attól, hogy mekkora sebességgel érkezik a lejtőről. Így a golyó mozgási energiájára a fékútból tudunk következtetni.

Ha a golyót 4-szer, 9-szer magasabbról indítjuk a lejtőn, akkor a lejtőn kétszer, háromszor annyi ideig gyorsul. Ezért a sebessége a lejtő alján kétszer, háromszor akkora lesz, mint az első alkalommal volt. Ezért könnyű megvalósítani, hogy egy golyó kétszer, háromszor nagyobb sebességgel érkezzen a lejtő aljára, mint először.

Méréssel kimutatható, hogy amikor egy test kétszer, háromszor nagyobb sebességgel fut bele egy csúszópapucsba, akkor a fékút négyszer, kilencszer akkora lesz, mint egyszeres sebesség esetén. Ez azt jelenti, hogy **az egyenlő tömegű testek mozgási energiája egyenesen arányos sebességük négyzetével:**

$$E_m \sim v^2.$$

A lejtő ugyanazon pontjáról indított golyók – tömegüktől függetlenül – ugyanakkora sebességgel érkeznek a lejtő aljára. Ezért könnyű megvalósítani, hogy a különböző tömegű golyók egyenlő sebességgel érkezzenek a csúszópapucsba. Meglepő, de a csúszópapucsba egyenlő sebességgel érkező golyók fékútja – a golyók tömegétől függetlenül – egyenlő, ha változatlan a felület simasága.



167.1. A csúszópapucs fékútja s; $4s$; $9s$, ha a belefutó golyó sebessége v; $2v$; $3v$

Mivel a $2m$, $3m$ tömegű golyóknál a nyomóerő is kétszeres, háromszoros, a súrlódási erő is kétszer, háromszor akkora lesz, mint az m tömegűnél volt. Ezért a súrlódási munkára és így a golyó mozgási energiájára most a súrlódási erőből tudunk következtetni. Ez azonban egyenesen arányos a nyomóerővel és így a tömeggel.

Az egyenlő nagyságú sebességgel mozgó testek mozgási energiája egyenesen arányos a tömegükkel:

$$E_m \sim m.$$

Pontos méréssel kimutatható, hogy a v sebességgel mozgó m tömegű test mozgási energiája:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Eddig a nyugalomból induló testeken végzett gyorsítási munkát vizsgáltuk. Megállapítottuk, hogy miközben a test sebessége nulláról v-re nőtt, mozgási energiája nulláról $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$-re változott.

A v sebességgel mozgó test mozgási energiája is megváltoztatható gyorsítási munkával (a lassítás negatív gyorsítás). Ilyen esetben a test mozgási energiája akkor nő, ha a gyorsítási munka pozitív. Ilyenkor a testet érő erők eredőjének a pálya egyenesére eső vetülete a mozgás irányába mutat. Ellenkező esetben a test mozgási energiája csökken. Másként fogalmazva:

Egy test mozgási energiájának megváltozása egyenlő a testet érő összes erő munkájának előjeles összegével, vagyis az eredő erő munkájával:

$$\Delta E_m = W_{gy} = \sum_{i=1}^{n} W_i.$$

A gyorsítási munka és a mozgási energia kapcsolatát kifejező megállapítást szokás **munkatételnek*** is nevezni.

A FORGÁSI ENERGIA

A haladó mozgást végző testek mozgásállapotát két különböző szempont szerint, két különböző mennyiséggel, a lendülettel ($I = m \cdot v$) és a mozgási energiával ($E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$) jellemezzük. A testek forgásállapotát is két eltérő szempontból jellemzi a perdület ($N = \Theta \cdot \omega$) és a **forgási energia****. A forgási energia a forgó test adataival és a forgást leíró mennyiségekkel adható meg. Legegyszerűbben az anyagi pont forgási energiája számítható ki.

Az anyagi pontok körmozgása leírható a kerületi sebességgel (v) és a szögsebességgel (ω) is. A kétféle sebesség közötti kapcsolat a $v = r \cdot \omega$ képlettel fejezhető ki. Ezt a kapcsolatot és az anyagi pont mozgási energiájának kiszámítási módját ismerve felírható az anyagi pont forgási energiájának kiszámítási módja is:

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \omega)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2,$$

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot (m \cdot r^2) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2,$$

ahol Θ a tehetetlenségi nyomaték.

A forgó merev test forgási energiája kiszámítható mint az anyagi pontnak tekinthető részek forgási energiájának összege:

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot \Theta_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \Theta_2 \cdot \omega_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} \cdot \Theta_n \cdot \omega_n^2.$$

Mivel egy merev test minden pontja azonos szögsebességgel forog, az ω^2 kiemelhető:

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot (\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_n) \cdot \omega^2.$$

Az egyes anyagi pontok tehetetlenségi nyomatékának összege pedig a test tehetetlenségi nyomatéka. Így:

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2.$$

A forgási energia a test forgásállapotát változtató képesség szempontjából jellemző mennyiség.

MEGJEGYZÉSEK

1. Amikor a mozgási energia kiszámításának módját kerestük, először a már meglevő általános ismereteinket felhasználva, a matematika segítségével logikai úton jutottunk el az eredményig. A megismerésnek ezt a módját – amikor a már ismert általános törvényekből és szabályokból logikai úton speciális területre vonunk le megállapítást – a tudomány is alkalmazza, és **deduktív módszernek** nevezik. Az így kapott eredményt azonban csak akkor fogadják el igaznak, ha kísérletekkel is ellenőrizték.

2. Az egyenlő tömegű és egyenlő sebességű járművek fékezése közben a fékek felmelegedése nem függ attól, hogy milyen irányban halad a jármű. A testek mozgási energiája nem függ a mozgás irányától. Az energia skalármennyiség. A különböző irányban haladó testek lendülete még akkor is különböző, ha tömegük és sebességük egyenlő. Nézzük meg, mi azonos és mi eltérő ennél a test állapotát a két különböző szempontból jellemző mennyiségnél!

Mozgási energia	**Lendület**
A test mozgásállapotát változtató képesség szempontjából jellemző mennyiség. Jele: E_m.	A test mozgásállapotának dinamikai jellemzője. Jele: $\vec{I}$.
$E_m \sim m$	$I \sim m$
$E_m \sim v^2$	$I \sim v$
$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	$\vec{I} = m \cdot \vec{v}$
$1\ \text{J} = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ a mértékegysége	$1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a mértékegysége
skalármennyiség	vektormennyiség

3. Ahhoz, hogy a csúszópapucsos kísérlet elfogadható eredményre vezessen, sok feltételnek kell teljesülnie:

- A papucs tömege elhanyagolható legyen a golyó tömegéhez viszonyítva.
- A golyó forgási energiája elhanyagolható legyen a mozgási energiájához viszonyítva (kicsi sugár, nagy tömeg).
- A papucs és a hozzá forogva érkező golyó ütközésében elhanyagolható legyen a belsőenergia-változásuk.
- A lejtő hajlásszöge kicsi legyen.

4. A munkatétel csak az anyagi pontnak tekinthető testekre igaz, mert a kiterjedt testet érő erők a test forgási energiáját is megváltoztathatják.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Hogyan változik a feldobott kő mozgási energiája emelkedés, illetve esés közben? Milyen előjelű a nehézségi erőnek a feldobott kövön végzett munkája a mozgás két szakaszában? Miért?

2. Hogyan változik a test mozgási energiája, ha a gyorsítási munka negatív, illetve akkor, ha pozitív?

3. Megváltozik-e egy mozgó test mozgási energiája, ha sebességvektorának iránya megváltozik, de nagysága nem (pl. az anyagi pont egyenletes körmozgása közben)?

4. Lehet-e a mozgási energia negatív? Miért?

5. Hányszorosa a $2m$ tömegű test lendülete és mozgási energiája az m tömegű testének, ha egyenlő sebességgel mozognak?

6. Hányszorosa a $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel mozgó test lendülete és mozgási energiája az $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességűnek, ha tömegük egyenlő?

7. Hasonlítsuk össze a rugóval szétlökött m és $2m$ tömegű kiskocsik mozgási energiáját, illetve a két kocsi lendületét! Hogyan érvényesül itt a lendület- illetve az energiamegmaradás törvénye?

8. A falba csapódó lövedék sebessége fokozatosan csökken, majd a lövedék megáll. Hogyan változik közben a lövedék mozgási energiája? Milyen energia nő a fékeződés közben? Magyarázzuk meg az energiaváltozások előjelét! Értelmezzük az energiamegmaradás törvényét!

9. Két egymáshoz viszonyítva mozgó inerciarendszerben megállapítva egyenlő vagy különböző egy test mozgási energiája? Miért?

FELADATOK

1. Egy nyugalomból induló testet 20 N nagyságú erőhatás 5 m hosszú úton gyorsít. (A pálya egyenes és egybeesik az erő hatásvonalával.)
   a) Mennyi a testen végzett munka? Mennyivel változott közben a test mozgási energiája? Függ-e ez a test tömegétől? Miért?
   b) Függ-e attól a testen végzett munka, és így a mozgási energia megváltozása, ha a test nyugalomból indult vagy már mozgott?
   c) Mekkora a test sebessége és lendülete a gyorsítás végén, ha nyugalomból indult és tömege 1 kg? Mennyi a mozgási energiája, mennyi a sebessége és mennyi a lendülete, ha a test tömege 4 kg?

2. Oldjuk meg az előző feladat *a)* részét azzal a változtatással, hogy az 1 kg tömegű testet a 20 N nagyságú erőhatás nem 5 m-en, hanem 5 másodpercig gyorsította!

3. Egy mozgó testet 10 N nagyságú erőhatás 5 m hosszú úton lassít. Milyen irányú az erő a mozgás irányához viszonyítva? Mennyi a testen végzett munka? Mennyivel változott a test mozgási energiája?

4. Egy 600 kg tömegű versenyautó álló helyzetből 400 m hosszú úton gyorsult fel 180 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességre. Mekkora lett a mozgási energiája? Mekkora volt a gyorsító erő?

5. Egy puskagolyó tömege 50 g, sebessége a kilövés pillanatában 800 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mekkora a lövedék mozgási energiája? Mekkora az átlagos gyorsító erő, ha a puskacső hossza 80 cm?



   Ez a lövedék 40 cm mélyen fúródott bele egy közeli fába, és ott megállt. Mekkora volt a súrlódási munka? Mekkora volt a fékezőerő?

6. Az előző feladat puskagolyóját kilövő fegyver 5 kg tömegű. Mekkora sebességgel rúgott hátra a puska az elsütés pillanatában? Mekkora volt a puska mozgási energiája ekkor? Mekkora volt a lendülete? Mekkora volt a puskagolyó lendülete a kilövés pillanatában? Érvényesült-e a lendület megmaradásának törvénye a puska elsütésekor? Hogyan érvényesült az energiamegmaradás törvénye? Minek a rovására nőtt a lövedék és a puska mozgási energiája?

7. Mennyi munkát kell végezni ahhoz, hogy egy 4 kg tömegű testet vízszintes felületen 3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességre 2 m úton gyorsítsunk fel, ha a felület és a test közötti súrlódás együtthatója 0,3?

2.3. Feszítési munka. Rugalmas energia

Rugók megfeszítésekor magunk is érezhetjük, hogy egyre nagyobb erőhatást kell kifejteni a rugóra. A laza rugó, pl. egy expander megfeszítése közben van erő irányú elmozdulás, tehát feszítésnél munkát végzünk a rugón. Így jogosan vetődik fel a kérdés, hogyan számítható ki a rugón végzett **feszítési munka*** (W_f).

A rugók egyenletes feszítéséhez a – rugóban „ébredő", $F_r = -D \cdot \Delta\ell$ – rugalmas erővel ellentétes irányú és egyenlő nagyságú erőhatás kell:

$$F_f = -F_r = -(-D \cdot \Delta\ell) = D \cdot \Delta\ell.$$

A feszítőerő változó nagyságú, hiszen a feszítés mértékével egyenes arányban nő. A változó nagyságú erő munkáját legegyszerűbb az erő–út függvény megfelelő része alatti terület kiszámítása alapján meghatározni.

A rugalmas erőt és így a feszítőerőt is a lineáris erőtörvény adja meg. Ezeknek a képe az origóból kiinduló félegyenes. Így a feszítési munka meghatározásához egy derékszögű háromszög területét kell kiszámítani. Annak számértéke megegyezik a rugón végzett feszítési munka számértékével.

Az egyszerűség érdekében jelöljük a rugó megnyúlását az ábrának megfelelően x-szel, tehát: $\Delta\ell \equiv x$,

$$W_f = \frac{D \cdot x \cdot x}{2} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2.$$

A rugón végzett feszítési munka miatt a rugó energiája $\frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$ értékkel nőtt. Azt az energiát,



171.2. Az expander megnyújtásához munkát kell végezni

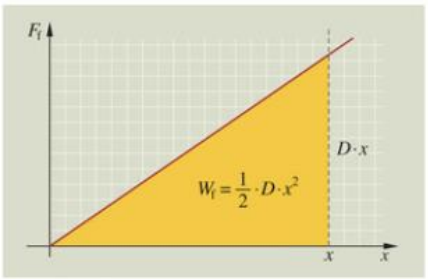
amivel a rugalmas testek feszítettségük miatt rendelkeznek, **rugalmas energiának*** (E_r) nevezzük, és így a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$E_r = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2.$$

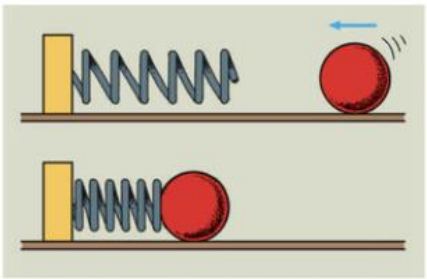
A rugónak futó golyó esetére alkalmazva a munkatételt, megfigyelhetjük a golyó mozgási energiája és a rugó rugalmas energiája közötti kapcsolatot. A rugó rugalmas energiaváltozása (ΔE_r) a rajta végzett feszítési munkával egyenlő: $\Delta E_r = W_f$. A golyó mozgási energiájának megváltozása (ΔE_m) a rugóerő golyón végzett munkájával egyenlő: $\Delta E_m = W_r$. Mivel a feszítési munka és a rugóerő munkája egyenlő nagyságú, de ellentétes előjelű, a

$$\Delta E_r = -\Delta E_m \Rightarrow \Delta E_r + \Delta E_m = 0,$$

tehát a rugóból és golyóból álló zárt rendszer energiája nem változik. Ez a megállapítás az energiamegmaradás törvényének megfogalmazása a vizsgált folyamatra.



171.1. *Mi a kapcsolat a feszítési munka és az erő–út grafikon alatti terület között?*



171.3. A rugót megfeszíti a nekiütköző golyó. *Min végez munkát a kölcsönható partnere?*

MEGJEGYZÉSEK

1. A rugalmas alakváltozást, a rugalmas erő és a feszítési munka fogalmát csavarrugóval vizsgáltuk. Ez nem jelenti azt, hogy megállapításaink csak a csavarrugóra igazak. A kísérleteket pl. lemezrugóval is végezhettük volna. Megállapításaink tehát minden rugalmas testre érvényesek.

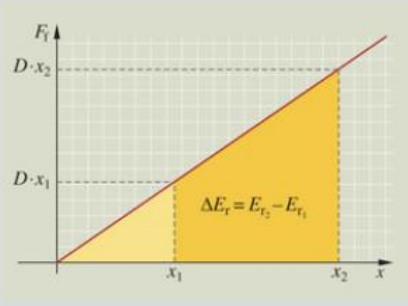
2. Amikor olyan megállapításokat fogalmazunk meg, amelyek a rugalmas testek összenyomására és megnyújtására egyaránt igazak, a test megfeszítéséről beszélünk.

3. A feszítési munka és a rugalmas energia kiszámítására felírt $E_r = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$ képletben a $\Delta \ell \equiv x$ méretváltozást a rugó feszítetlen állapotához viszonyítva kell mérni.

   A rugó továbbfeszítése közben bekövetkező energiaváltozást

   $$\Delta E_r = E_{r_2} - E_{r_1} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_2^2 - \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_1^2$$

   formában lehet kiszámítani.



GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Egy acéldrót hajlítgatása közben észrevehetjük, hogy az felmelegszik. Tudjuk, ha egy test melegebb, akkor részecskéi élénkebben mozognak, mint ha hidegebb. Ezeket figyelembe véve igaz-e, hogy az összenyomott rugó rugalmas energiája a valóságban is pontosan egyenlő a feszítési munkával? Hogyan érvényesül itt az energiamegmaradás törvénye?

2. A laza rugót megfeszíteni úgy lehet, hogy az egyik végéhez viszonyítva a rugó többi részének mozgásállapotát – ha eltérő mértékben is, de – megváltoztatjuk, tehát feszítés közben a rugó egyes részeinek is lesz mozgási energiája. A megfeszített rugó végül nyugalomban marad.

   Befolyásolja-e a rugó feszítés közbeni mozgása azt az állítást, hogy a rugó rugalmas energiája egyenlő a rajta végzett munkával? A választ a feszítés folyamatára és a végső nyugalmi állapotra is fogalmazzuk meg! Mit kellene feltételezni a rugóról, hogy az előző állítás a feszítés folyamata alatt is igaz legyen?

3. Milyen összefüggés van a feszítőerő munkája és a rugalmas energia megváltozása között? Milyen kapcsolat van a rugalmas erő munkája és a rugalmas energia megváltozása között?

4. Egy D rugóállandójú rugót két egyenlő részre vágunk, és azokat párhuzamosan kötjük. Hasonlítsuk össze az eredeti rugón végzett feszítési munkát azzal a munkával, amit a két párhuzamosan kötött rugó feleolyan hosszú megnyújtása közben kell végezni! Mi a magyarázata ennek?

5. Hasonlítsuk össze azt a munkát, amelynél két egyforma rugót külön-külön 10-10 cm-rel, vagy ezeket a rugókat sorba összekapcsolva együttesen 20 cm-rel nyújtanak meg! Magyarázzuk meg a tapasztaltakat!

6. Egy erősebb és egy lágyabb rugót ($D_1 > D_2$) ugyanannyival nyomtunk össze. Mit tudunk a két rugón végzett feszítési munkáról? Indokoljuk meg az állítást!

7. Két egyforma erősségű ($D_1 = D_2$) rugónk van. Az egyiket úgy nyomjuk össze, hogy eredeti hosszánál 5 cm-rel rövidebb legyen. A másik rugót úgy húzzuk szét, hogy feszítetlen hosszánál 5 cm-rel nagyobb legyen. Írjuk le pontosan a rugók alakváltozását és rugalmas energiáját jellemző adatokat!

8. Lehet-e a rugalmas energia negatív? Miért?

9. Egy rugót feszítetlen állapotából W munkával lehet $\Delta\ell$-lel megnyújtani. Mennyi munkával lehet tovább nyújtani egy újabb $\Delta\ell$-lel, hogy a rugó hossza $\ell_2 = \ell_0 + 2 \cdot \Delta\ell$ legyen?

f FELADATOK

1. Egy erőmérő rugóját 5 cm-rel megnyújtottuk. Mekkora munkát végeztünk közben, ha a nyújtás végén az erőmérő 50 N nagyságú erőt jelzett?



2. Egy fiú megmérte, hogy maximum 800 N nagyságú erővel képes megnyújtani egy expandert. Mekkora munkát végzett a fiú, ha az expander rugóállandója $4000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$?

3. Az egyik végénél felerősített rugó alsó végére 2 kg tömegű testet akasztottak. Ekkor a rugó hossza 22 cm volt. Amikor egy 3 kg tömegű testet függesztettek erre a rugóra, akkor annak hossza 24 cm lett. Mennyi munkát kell végezni a laza rugón ahhoz, hogy ez a rugó 25 cm hosszú legyen?

4. Egy $5000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ állandójú rugót 400 N nagyságú erővel nyomtak össze. Mennyivel lett rövidebb a rugó? Mennyi munkát végeztek a rugón? Mekkora az így összenyomott rugó rugalmas energiája? Mennyi munkát képes végezni a rugó, ha lehetőséget adunk teljes kitágulására?

5. Az egyik végén rögzített, D állandójú csavarrugó ellazulásig 2 J mozgási energiaváltozást hozott létre a szabad végével érintkező kiskocsin. Mennyivel változna meg a kiskocsi mozgási energiája, ha a rugóállandó $2D$ volna és a rugót feleannyival nyomnák össze?

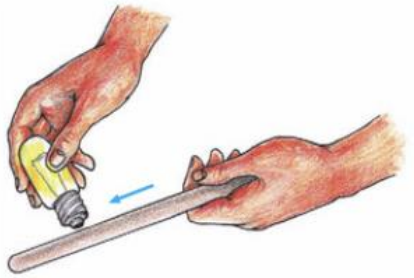
6. Két kiskocsi tömege 0,3 kg, illetve 0,6 kg. A kezdetben nyugvó kiskocsikat egy közéjük helyezett, összenyomott rugó úgy lökte szét, hogy az egymáshoz viszonyított sebességük nagysága $3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ lett. Hány cm-rel volt összenyomva a közéjük helyezett $D = 800\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ rugóállandójú rugó?

7. Egy $1000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ rugóállandójú csavarrugót már megnyújtottuk 10 cm-rel. Mennyi munkával lehet újabb 10 cm-rel megnyújtani ezt a rugót?

2.4. Az emelési munka és a helyzeti (magassági) energia

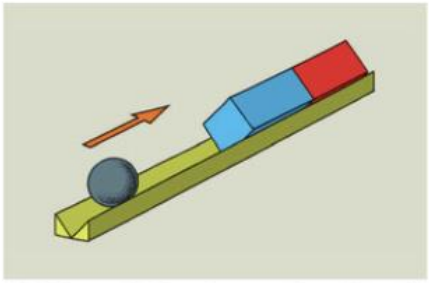
Előző tanulmányaink közben felismerhettük, hogy a testeknek és mezőknek van olyan képessége, hogy más testek állapotát meg tudják változtatni. Ezt a változtató, másként kölcsönható képességet egy mennyiséggel, az energiával jellemeztük.

Az előző gondolatot röviden úgy szoktuk mondani, hogy a testeknek és mezőknek energiája van. A testek olyan állapotát (pl. mozgás, feszítettség stb.), amit energiával is lehet jellemezni, legtöbbször könnyű felismerni. A mezőknél azonban ezt nehezebb észrevenni. Ezért nézzünk erre néhány egyszerű példát!



174.2. A lámpa villogása közben az elektromos mezőnek hogyan változik az energiája?

A) A vonzás miatt a mágnes felé mozgó vasgolyónak nő, a tőle távolodónak csökken a sebessége, és így a mozgási energiája. Mivel a vasgolyóval közvetlenül a mágneses mező van kölcsönhatásban, így az képes a benne levő vasgolyó sebességét és mozgási energiáját megváltoztatni. A mágneses mezőnek tehát van energiája, amely csökkenhet vagy nőhet attól függően, hogy a benne mozgó kölcsönható partnernek hogyan változik az energiája.



174.1. *Hogyan változik a mágneses mező energiája a golyó felgyorsításakor?*

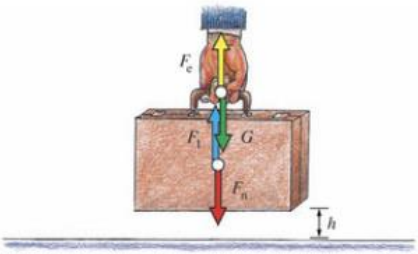




B) A megdörzsölt, és így elektromos állapotba hozott műanyag rúd közelében a papírdarabkák, tollpihék és más könnyű testek elmozdulnak eredeti helyükről. Ezekkel a testecskékkel az elektromos mező van kölcsönhatásban. Az elektromos mezőnek is van változtató képessége. Ezt igazolja az is, hogy az elektromos állapotban levő műanyag rúd elektromos mezője a közelében levő ködfénylámpát felvillantja. Eközben az elektromos mező legyöngül, ezért másodszor már nem képes felvillantani a ködfénylámpát. Az elektromos mezőnek is van tehát energiája, amely a vele kölcsönhatásban levő testek hatására megváltozhat.

Amikor a mágneses vagy elektromos mezővel kölcsönhatásban levő test energiája nő vagy csökken, a mező energiája ugyanannyival, de ellentétesen változik. **A mezők energiaváltozását legkönnyebben a velük kölcsönhatásban levő testek energiaváltozása alapján tudjuk meghatározni.**

C) Amikor felállunk, felmegyünk az emeletre, vagy egy testet magasabbra emelünk, munkát végzünk. Általánosan fogalmazva: amikor a testek tömegközéppontját magasabbra juttatjuk, a nehézségi erő ellenében munkát kell végezzünk. Ezért célszerű tisztázni, hogy a testek emelkedése vagy süllyedése, vagyis magassági szintjük változása közben minek és hogyan változik az energiája.



174.3. Az egyenletes emelés közben végzett munka kiszámítása: $W_e = F_e \cdot h = m \cdot g \cdot h$

Egy test h-val magasabbra történő egyenletes emelése közben az emelőerő munkája: $W_e = F_e \cdot h = m \cdot g \cdot h$. Az emelést végző testnek tehát ennyivel csökken az energiája. Kérdés, mi az, aminek nő.

Ha egy testet **egyenletesen emelünk,** akkor az két kölcsönhatásban vesz részt. Kölcsönhatásban van az emelést végző testtel és a gravitációs mezővel. Ezekben a kölcsönhatásokban egy-egy erő-ellenerő van (*174.3. ábra*). Ebből a négy egyenlő nagyságú ($m \cdot g$) erőből kettő ($\vec{F}_e$ és $\vec{F}_n$) a testre, a test súlya ($\vec{G}$) az emelést végzőre, a negyedik erő pedig ($\vec{F}_1$) a gravitációs mezőre hat. Mivel ezeknek az erőknek a támadáspontja egyenlő mértékben emelkedik (h), így munkájuk nagysága is egyenlő. Kettőé ($\vec{F}_e$ és $\vec{F}_1$) pozitív, hiszen irányuk az elmozdulással megegyező, az ellentétes irányú kettőé ($\vec{G}$ és $\vec{F}_n$) pedig negatív:

- Két erő ($\vec{F}_e$ és $\vec{F}_n$) a testen végez munkát. Ezek munkájának előjeles összege nulla. A test állapota és így energiája ezért nem változik.
- A test súlya ($\vec{G}$) által végzett munka az emelést végző test energiáját csökkenti.
- A negyedik erő ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_n$) a gravitációs erő ellenereje, ennek munkája a gravitációs mező energiáját növeli.

Ezek alapján megállapítható, hogy:

Egyenletes emelés közben a felemelt test energiája nem változik, de amennyivel csökken az emelést végző test energiája, ugyanannyival nő a gravitációs mezőé.



175.1. *Hogyan változik a gravitációs mező energiája a labda emelkedése, illetve esése közben?*

A gravitációs mezőnek – egy test emelkedése vagy süllyedése miatt – bekövetkező ΔE_g energiaváltozását (hogy ne kelljen ilyen hosszadalmasan megnevezni) **helyzeti energiának*,** vagy másként **magassági energiának*** szokás nevezni, és E_h-val jelölni.

A gravitációs mező energiaváltozása a testek egyenletes emelése vagy süllyesztése közben végzett munka kiszámításával határozható meg legegyszerűbben:

$$\Delta E_g \equiv E_h = W_e = F_e \cdot h = m \cdot g \cdot h.$$

Mivel egyenletes emeléskor az emelőerő egyenlő nagyságú a test súlyával, az pedig a nehézségi erővel, így ezek közül bármelyik ismeretében az emelési munka, illetve a helyzeti energia kiszámítható.

MEGJEGYZÉSEK

1. A magassági energia elnevezése nem egységes a fizikában:

- Ezt az energiát – talán még ma is legtöbben – helyzeti energiának nevezik, és a felemelt testhez **a test helyzeti energiája** kifejezéssel kapcsolják.
- Van olyan könyv, amelyben ennek az energiának **a test potenciális energiája** a neve.
- A fogalmak pontosságára jobban figyelő szaktudományi munkákban **konfigurációs energiaként** beszélnek róla, és pl. a Földnek, a gravitációs mezőnek, valamint a felemelt testnek mint rendszernek az energiájaként kezelik.
- Aki a helyzeti energia létezésének feltételét – a kölcsönhatást – és a „tulajdonosát" is hangsúlyozni akarja, az **gravitációs kölcsönhatási energiának** nevezi.

Az elnevezés lehet különböző, de a lényeget nem befolyásolhatja, valójában minden elnevezésnél **a gravitációs mező energiaváltozásáról** van szó.

2. Azért kellett eddig az egyenletes emelést vizsgálni, hogy megfigyeléseinket a legegyszerűbb feltételek között tudjuk végezni. Egy testet gyorsítva emelni ugyanis csak a rá ható nehézségi erőnél nagyobb erővel lehet, és ilyen esetben az emelőerő munkája egyrészt a helyzeti energiát, másrészt a test mozgási energiáját növeli.

3. A mezők energiája is csak a velük kölcsönhatásban levő más testek hatására változhat meg. Ez azt jelenti, hogy pl. a mágneses mező energiája egy benne levő fadarab mozgatása közben – mivel azzal nincs kölcsönhatásban – nem változik.

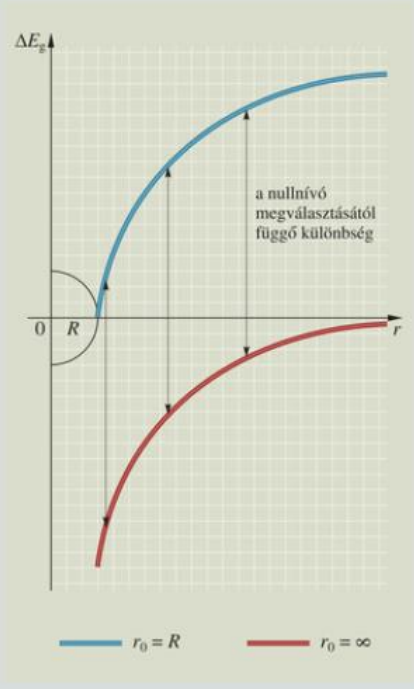
4. Az egyszerűbb szóhasználat érdekében – annak megnevezésére, hogy egy adott test tömegközéppontjának a nullszinthez viszonyított emelkedése vagy süllyedése közben mennyivel változott a gravitációs mező energiája – mi is a helyzeti energia elnevezést fogjuk használni, de azt lehetőleg nem kötjük birtokviszonnyal a testhez.

5. Ha a fizika tanterem pl. az első emeleten van, és a helyzeti energia szempontjából a padlóját tekintjük nullszintnek, akkor más értéket kapunk az ott felemelt testek helyzeti energiájára, mint ha az udvar szintjéhez viszonyítanánk. A nullszint alatti testek helyzeti energiája negatív.

6. **A nullszint szabadon választható,** ezért úgy szokás dönteni ebben a kérdésben, hogy az adott jelenség vizsgálata a legcélszerűbb legyen. A Föld körüli gravitációs mező energiaváltozásait kétféle nullszinthez viszonyítva szokták meghatározni a fizikában:

   a) a Föld felszínéhez, tehát olyan gömbfelülethez, amelynek középpontja a Föld középpontjában van, és sugara a Föld sugara, $r_0 = R$.

   b) olyan gömbfelülethez, amelynek középpontja a Föld középpontjában van, de sugara végtelen nagy, $r_0 = \infty$. Ilyen rendszerben minden helyzeti energia negatív. Ez a meglepő állítás úgy látható be legkönnyebben, ha arra gondolunk, hogy amikor a nullszinten ($r_0 = \infty$) levő testet elengedjük és az szabadon esik a Föld felé, annak mozgási energiája egyre jobban nő, ugyanakkor a gravitációs mező energiája ennek megfelelően csökken. Ebben a képzeletbeli esetben a gravitációs mező energiája nulla értékről csökken, tehát csak negatív lehet. Ezt a gondolatot alkalmazni fogjuk a mezők energiaviszonyainak leírásánál az elektromosságtanban és az atomfizikában is.



7. Azt, hogy **az energia egy mennyiség, és nagysága viszonylagos** lehet, a fenti példákon bemutatott gondolatok is bizonyítják. Ezek szerint a helyzeti energia nagysága függ a nullszint, tehát a vonatkoztatási rendszer megválasztásától.

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Elemezzük energiaváltozás szempontjából azt a folyamatot, amikor egy gumilabda szabadon esik, majd földhöz ütközve felpattan. Miért csökken fokozatosan az egymást követő felugrások magassága?

2. Egy test h magasságból szabadon esik a földre. Számolás nélkül hasonlítsuk össze helyzeti és mozgási energiáját, ha a test $h_1 = \frac{1}{2} \cdot h$ magasságban van.

3. Miért nem mindegy munkavégzés és így energiaváltozás szempontjából, hogy vízszintes talajon sétálunk 10 métert, vagy lépcsőn megyünk fel 10 m magasra?



4. Hasonlítsuk össze a hegymászás közben végzett munkát, ha valaki a szerpentinen sétál fel a kilátóba, vagy irányváltozás nélkül a legrövidebb úton éri el a kilátót! Mi az, aminek nő, és mi az, aminek csökken az energiája hegymászás közben?

FELADATOK

1. Emelődaruval egy 2000 kg tömegű testet 10 m magasra emeltek. Mekkora az emelési munka? Mennyi a helyzeti energia megváltozása?



2. Mennyi munkát végez a gravitációs mező egy 600 N súlyú szikladarabon, miközben az 10 métert szabadon esik? Milyen energiaváltozások nagyságát tudjuk ezekkel az adatokkal megadni?

3D

3. Egy 20 kg tömegű test felemelése közben 400 J munkát végeztek. Milyen magasra emelték fel a testet?

4. Egy 2 kg tömegű vödröt felhúztak a 10 m magas állványra. Mennyi homok volt a vödörben, ha az emelés közben végzett munka 1400 J?

5. Mekkora húzóerőt kell kibírnia annak a kötélnek, amellyel egy testet 10 m magasról 10 kJ munkával lehet leengedni a földre, ha a kötél tömegétől eltekinthetünk? Mekkora erőt bírjon ki a kötél, ha annak egyméteres darabja 0,5 kg tömegű?

6. A 30°-os hajlásszögű lejtők magassága feleakkora, mint a lejtő hossza. Az ilyen lejtőn milyen hosszú úton áll meg az a test, amelyet $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel löktek felfelé a lejtőn, ha a súrlódástól eltekintünk?

7. A 30°-os lejtőn legalább mekkora sebességgel kell felfelé indítani egy 2 kg tömegű testet, hogy az a 4 m hosszú lejtő tetejéig feljusson, ha:

   a) a súrlódástól eltekinthetünk?

   b) a lejtő és a test közötti súrlódás együtthatója 0,3?

2.5. A mechanikai energia fogalma és megmaradási tétele

Egy testtel kapcsolatban többfajta energiát is megismertünk már:

- a test tömegközéppontjának mozgásával kapcsolatos **mozgási energiát,**
- a rugalmas anyagú test egy részének a többi részéhez viszonyított elmozdulása miatti **rugalmas energiát,**
- a **helyzeti energiát,**
- a kiegészítő anyagban megismerhettük a merev testek forgásával kapcsolatos **forgási energiát.**

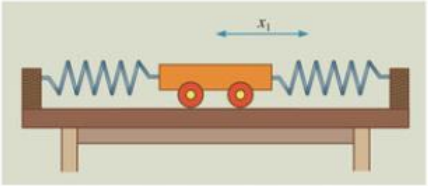
Ezen – mechanikai adatokkal jellemezhető – energiáknak a közös neve **mechanikai energia*.** A mechanikai energiák „létrejötte" és megváltozása a testet alkotó részecskék együttes, rendezett mozgására, tehát munkavégzésre vezethető vissza.

A test mechanikai adataival nem jellemezhető, a test mechanikai mozgása nélkül is megváltoztatható energiákat **belső energiának*** szokás nevezni. Ez az energia a testet alkotó részecskék egyedi, rendezetlen mozgásával kapcsolatos. (A belső energiáról majd a 10. évfolyamon fogunk tanulni.)

Kölcsönhatások közben gyakran előfordul, hogy egyszerre nemcsak egyfajta, hanem különféle energia is megváltozik. Természetesen ilyen esetben is igaz az energiamegmaradás törvénye.

Nézzünk erre néhány példát!

A) Egy vízszintes, sima lapon levő, könnyen guruló kiskocsi – a mozgásának irányában – úgy van kikötve két rugóval, hogy a rugók még éppen feszítetlenek maradtak. (Mindkét rugó összenyomáskor és megnyújtáskor is megfeszül, együttes rugóállandójuk legyen $D_1 + D_2 = D$.) Ha a kocsit



178.1. A kocsi mozgási energiája és a rugók rugalmas energiája „felcserélődik"

ebből az egyensúlyi helyzetéből x_1 távolságra kimozdítjuk és magára hagyjuk, a kocsi rezgőmozgást végez.

A kocsi nyugalmi helyzetétől x_1 távolságra (a rezgés szélső helyzetében) egy pillanatra megáll, így itt mozgási energiája nulla: $E_{m_1} = 0$. Mint tudjuk, a megfeszített rugók rugalmas energiája ebben a helyzetben:

$$E_{r_1} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_1^2.$$

E két energia összege tehát:

$$E_{ö} = E_{m_1} + E_{r_1} = 0 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_1^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_1^2.$$

Miközben a rugók visszaviszik a kocsit az eredeti egyensúlyi helyzetéig, munkát végeznek rajta. Ez a munka egyenlő nagyságú a rugók energiacsökkenésével, valamint a kocsi mozgási energiájának növekedésével is. Mivel itt a feszítetlen rugóknak nincs rugalmas energiájuk ($E_{r_2} = 0$, hiszen $x_2 = 0$), a kocsi mozgási energiája:

$$E_{m_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_1^2.$$

A két energia összege az egyensúlyi helyzeten történő átfutás pillanatában:

$$E_{ö} = E_{m_2} + E_{r_2} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_1^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_1^2.$$

Kiszámítható az is, hogy rezgés közben a kocsi mozgási energiájának és a rugók rugalmas energiájának összege bármely x_k és x_n helyen egyenlő, és ez az összeg megegyezik az $E_{r_1} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_1^2$-tel:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_k^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_k^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_n^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_n^2.$$

Ez a megállapítás valójában az energiamegmaradás törvényének megfogalmazása az ilyen folyamatokra.

B) A v_0 kezdősebességgel $h_0 = 0$ szintről függőlegesen feldobott testnek az indulás pillanatában $E_{m_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$ a mozgási energiája, de helyzeti energia nincsen ($E_{h_1} = 0$, hiszen $h_1 = 0$). E két energia összege:

$$E_{ö} = E_{m_1} + E_{h_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2.$$

Tudjuk, hogy az így feldobott test $h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$ magasra emelkedik, ahol egy pillanatra megáll. Itt a helyzeti energia:

$$E_h = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2,$$

és a test mozgási energiája nulla ($E_{m_2} = 0$, hiszen $v_2 = 0$). A két energia összege tehát itt is:

$$E_0 = E_{m_2} + E_{h_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2.$$

Kiszámítható az is, hogy emelkedés vagy esés közben a feldobott test mozgási energiájának és a helyzeti energiának összege a pálya bármely pontjában egyenlő:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_k^2 + m \cdot g \cdot h_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_n^2 + m \cdot g \cdot h_n.$$

Ez a megállapítás lényegében az energiamegmaradás törvényének kimondása az ilyen folyamatokra.

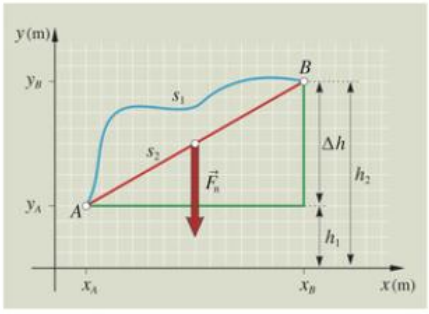
Egy test adott helyen történő emelési (vagy süllyesztési) munkája, és az így létrehozott energiaváltozás nagysága csak a test helyének függőleges irányú változásától függ:

$$W_e = \Delta E_g = E_{h_2} - E_{h_1} = m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1,$$

$$W_e = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) = m \cdot g \cdot \Delta h.$$

Ez azt jelenti, hogy az emelési munka és így a helyzeti energia is független attól, hogy milyen alakú pályán jutott a test tömegközéppontja az A pontból a B pontba.

Ugyanez megállapítható a rugalmas erő által végzett munkánál is. Amikor egy testre a rugó fejt ki erőhatást, a test mozoghat az erőhatással ellentétes, illetve megegyező irányban is. A rugókkal kétfelé kikötött mozgó kiskocsi (rugón végzett) munkája lehet pozitív (például amikor megfeszíti a rugót, és abban „konzerválódik" az energianövekedés). Az oda és vissza azonos módon végzett összes munka pedig nullával egyenlő, mert a folyamat ellentétes részében a rugó „visszaadja" a konzervált energiát a kocsinak.



179.1. *Mennyi az s_1 és s_2 úton (zárt görbén) a konzervatív erők munkája?*

Azokat az erőhatásokat jellemző erőket, amelyeknél a két pont között végzett munka nem függ a pályagörbe alakjától, hanem csak a két pont helyétől, **konzervatív erőknek*** nevezzük. Az általunk megismert erők közül konzervatív a nehézségi erő, a gravitációs erő és a rugalmas erő.

A mozgási, a forgási, a rugalmas és a helyzeti energiát közös néven **mechanikai energiának*** nevezték el. Ezt az elnevezést felhasználva, az előző folyamatokra tett megállapításaink általánosan így fogalmazhatók meg:

Egy olyan rendszerben, ahol csak konzervatív erők érvényesülnek, a mechanikai energiák összege állandó:

$$E_m + E_f + E_r + E_h = \text{állandó}.$$

Ez **a mechanikai energia megmaradásának törvénye*.**

E törvény lényegét akkor érthetjük meg igazán, ha olyan folyamatokat is megvizsgálunk, amelyeknél nem csak a mechanikai energia változik.

A csúszási és gördülési súrlódási erő mindig ellentétes irányú a test mozgásának irányával, tehát munkája mindig negatív. Ezért az összes munka akkor sem lehet nulla, ha a test zárt görbe alakú pályán mozogva visszajut kiindulási pontjába. A súrlódási munka mindig a súrlódási erő nagyságától és az út hosszától – tehát a pálya alakjától is – függő negatív mennyiség.

A csúszási és gördülési súrlódás ugyanis mindig az – egymással érintkezve – elmozduló testek felmelegedésével jár, tehát a test **belső energiája** is megnő. A magasabb hőmérséklet azt jelenti, hogy a test részecskéi élénkebben mozognak, mint alacsonyabb hőmérsékleten, vagyis a kapott energia „szétosztódik" a részecskék és az őket összetartó környezetük között. Ezért nem indul meg visszafelé az ellökött és súrlódás miatt megállt test, mint ezt, pl. a rugóra kötött testnél tapasztaltuk.

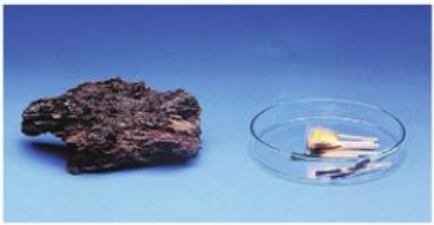
GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Számítsuk ki a v_0 kezdősebességgel függőlegesen felhajított test emelkedésének nagyságát az energiaváltozások alapján! Miért nem szerepel az eredményben a test tömege?
2. Egy emelődaru gyorsítva emel fel a földről egy m tömegű testet. Az emelés első h szakaszában a test sebessége v-re nőtt. Mennyi az emelési munka? Mennyi itt a helyzeti energia?
3. A magasugrók nekifutásból ugorják át a lécet. Miért?
4. Egy felfelé haladó mozgólépcsőn valaki a menetirányban egyenletesen fut felfelé. Változik-e a mozgólépcső motorja által végzett munka emiatt? Van-e különbség a motor munkavégzése szempontjából aközött, hogy egyenletesen vagy egyre nagyobb sebességgel fut-e az illető felfelé a mozgólépcsőn? Elemezzük azt az esetet is, amikor lefelé mennek a mozgólépcsőn!
5. Van-e különbség a rugón végzett munka nagyságában, ha nem feszítetlen állapotából, hanem már egy előre megfeszített helyzetéből nyújtjuk tovább ugyanannyival ugyanazt a rugót?
6. Igaz-e, hogy egy test kétszer akkora kezdősebességgel ($2v_0$) történő feldobása közben kétszer annyi munkát kell végezni, mint amikor csak v_0-lal dobták? Igaz-e, hogy ilyenkor a test kétszer olyan magasra emelkedik, mint a v_0 sebességű feldobás után?
7. Egy m tömegű golyó h magasságból ráesik egy függőleges helyzetében alátámasztott, D rugóállandójú csavarrugóra, amit összenyom. Mit tudunk a közben létrejött energiaváltozásokról? Írjuk fel az állítást matematikai formában is arra a pillanatra, amikor a golyó sebessége nulla és h_1 magasan van!
8. A súrlódási erők nem konzervatív erők. Miért?
9. Hogyan változik egy mozgó test mechanikai energiáinak összege súrlódás közben?

FELADATOK

1. Egy test szabadon esett, és földet érésekor 30 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ volt a sebessége. Milyen magasról esett? Miért nincs szükség a test tömegére a magasság kiszámításához? A mozgási energia kiszámításához kellene-e tudni a test tömegét? Miért?
2. Egy kavicsot $v_0 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel dobtak el függőlegesen felfelé. Milyen magasan lesz a kavics az eldobás helyéhez viszonyítva abban a pillanatban, amikor mozgási energiája egyenlő a helyzeti energiával?
3. Egy 25 kg tömegű test 20 m magasról szabadon esett. Számítsuk ki a test mozgási energiáját és sebességét arra a pillanatra vonatkozóan, amikor a test 10 m magasan van!
4. Egy sima, vízszintes felületű asztalra 2 kg tömegű, könnyen mozgó kiskocsit helyeztünk. A kocsit – mozgásának irányában – két egyforma csavarrugóval kikötöttük (*166.1. ábra*). A rugók rugóállandója 50 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$, és mindkét rugó összenyomáskor és megnyújtáskor is feszített állapotba kerül. A kocsi nyugalmi helyzetében a rugók feszítetlen állapotban vannak. A kiskocsit 10 cm-rel kitérítjük, majd elengedjük. Mekkora lesz a kocsi legnagyobb mozgási energiája és legnagyobb sebessége?
5. Milyen szintkülönbséggel tud magasabbra jutni a lejtős úton az a kerékpáros, aki a lejtő aljához 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel érkezik és ott abbahagyja a hajtást?
6. Egy 2 m hosszú és 1 m magas lejtő tetejéről 2 kg tömegű test csúszik le. Mekkora sebességgel érkezik a lejtő aljához, ha *a)* a súrlódás elhanyagolható; *b)* a súrlódási együttható 0,2?

3. Teljesítmény, hatásfok

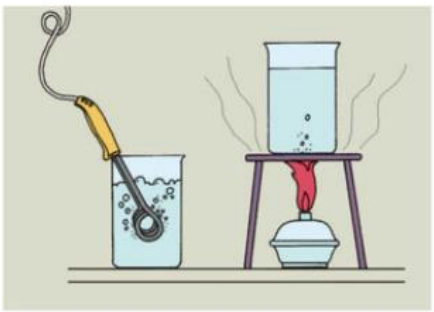


181.1. A fa lassan korhad, de gyorsan ég el

Előző tanulmányaink során megfigyelhettük, hogy a fa lassan korhad, de gyorsan ég el. A merülőforraló gyorsabban melegít, mint a borszeszégő. A szorgalmasabb kőműves magasabb falat épít egy nap alatt, mint a lusta stb. **Az energiaváltozással járó folyamatok** tehát **gyorsaság szempontjából különbözhetnek egymástól.**

Az okos ember ésszerűen dolgozik, és így kevesebb munkával végzi el ugyanazt a feladatot, mint az ügyetlen. Vízmelegítéskor pl. a merülőforraló elsősorban a vizet melegíti, és nem az edény körüli levegőt. Ezzel szemben a gázláng legalább annyira a levegőt melegíti, mint a vizet, ezért nem annyira gazdaságos. **Az energiaváltozással járó folyamatok gazdaságosság szempontjából is különböznek egymástól.**

Az energiaváltozással járó folyamatoknak ezt a két különböző tulajdonságát – a gyorsaságot és a gazdaságosságot – egy-egy mennyiség: a **teljesítmény*** és a **hatásfok*** jellemzi. Ezt a két mennyiségi fogalmat már korábban megismertük, és az *Emlékeztető* feldolgozása közben fel is frissítettük. Így most csak tudásunk megerősítésére, bővítésére és a fogalmakkal kapcsolatos feladatok gyakorlására van szükség.



181.2. A merülőforralónál kisebb az energiaveszteség

A) Tudjuk, hogy a **teljesítmény** (P) **az energiaváltozás sebessége,** tehát az energiaváltozás gyorsasága szempontjából jellemzi a változási folyamatokat.

Ha a változás egyenletes, akkor $\Delta E \sim \Delta t$. A szokásos fogalomalkotás alapján:

$$\text{teljesítmény} = \frac{\text{energiaváltozás}}{\text{a közben eltelt idő}},$$

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

A teljesítmény SI-beli mértékegysége a watt. Jele: W. Az $1\ \text{W} = 1\ \frac{\text{J}}{\text{s}}$.

Ha az energiaváltozás egyenletes mozgás közben történik, akkor a teljesítményt gyakran célszerű másként kiszámolni:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta s}{\Delta t} = F \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = F \cdot v.$$

Az energiaváltozással járó folyamatok teljesítménye a gyakorlatban legtöbbször időben változik. Ha az ilyen folyamatoknak is úgy számítjuk ki a teljesítményét, mint ahogyan azt az egyenletes változásnál tettük, **átlagteljesítményt** kapunk:

$$P_{\text{átl.}} = \frac{\Delta E_{\text{ö}}}{\Delta t}.$$

Az igen rövid időtartamokra kiszámított átlagteljesítmény annál inkább megközelíti a **pillanatnyi teljesítményt,** minél kisebb a Δt. (A pillanatnyi teljesítmény pontos fogalmát is a határérték segítségével értelmezhetjük.)

B) A **hatásfok** (η) a **valóságos folyamatokat** (ahol pl. a súrlódás, a közegellenállás, a hőveszteség stb. nem hanyagolható el) **jellemzi gazdaságosság szempontjából.**

Mivel a gyakorlatban a hasznos energiaváltozás mindig kisebb az összes energiaváltozásnál, a hatásfok csak idealizált esetben lehet 100%-os, tehát $\eta \leq 1$.



182.1. Csak a malter emelése hasznos, a többi emelőmunka kárba vész. *Mi itt a felesleges munka?*

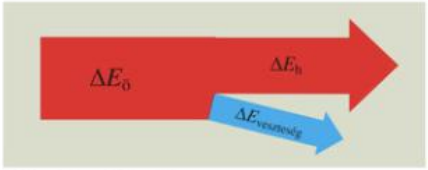
A hatásfok megmutatja, hogy a hasznos energiaváltozás hányad része a változás közben „befektetett" összes energiaváltozásnak.

$$\text{hatásfok} = \frac{\text{hasznos energiaváltozás}}{\text{összes energiaváltozás}},$$

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{h}}}{\Delta E_{\text{ö}}} \leq 1.$$

A hatásfok tehát arányszám, és ezért nincs mértékegysége.

A hatásfok különféle folyamatoknál különböző jellemzőkkel is kiszámítható.



182.2. $\Delta E_{\text{ö}} = \Delta E_{\text{h}} + \Delta E_{\text{veszteség}}$

Ha a változás munkavégzés közben jött létre, akkor a hatásfok a hasznos munka és az összes elvégzett munka hányadosa:

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{h}}}{\Delta E_{\text{ö}}} = \frac{W_{\text{h}}}{W_{\text{ö}}}.$$

Gyorsításkor, ha a súrlódás nem hanyagolható el, a hatásfok a mozgási energiaváltozás és az összes munka hányadosa:

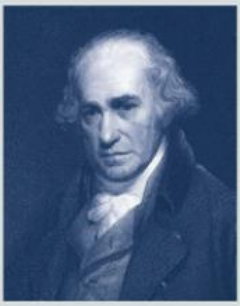
$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{h}}}{\Delta E_{\text{ö}}} = \frac{\Delta E_{\text{m}}}{W_{\text{ö}}}.$$

Mivel a teljesítmény számértékileg egyenlő az egységnyi idő alatt bekövetkező energiaváltozással, a hatásfok a hasznos és az összes teljesítmény hányadosaként is kiszámítható:

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{h}}}{\Delta E_{\text{ö}}} = \frac{\frac{\Delta E_{\text{h}}}{\Delta t}}{\frac{\Delta E_{\text{ö}}}{\Delta t}} = \frac{P_{\text{h}}}{P_{\text{ö}}}.$$

MEGJEGYZÉSEK

1. A teljesítmény mértékegységét *James Watt* (1736–1819) angol feltaláló tiszteletére nevezték el.



2. A munkának és a wattnak mint mértékegységnek is „W" a jele. A kétféle alkalmazás mégsem téveszthető össze, ha figyelünk a következőkre:
- A szövegből legtöbbször kiderül, mit jelöltek W-vel.
- A munka jelölésénél a W mindig egyedül áll vagy a szövegben, vagy az egyenlőség egyik oldalán, pl. $W = 5$ J. A watt jeleként használt W előtt mindig ott van a számérték, pl. $P = 9$ W.
- A könyvekben a fizikai mennyiségek jelét, így a munkáét is dőlt betűvel szokták nyomtatni, a mértékegységek jele viszont álló betű, pl. „Egy gép teljesítménye $P = 3$ kW, az általa végzett munka $W = 10$ kJ. Mennyi ideig dolgozott a gép?"

3. A villanyszámlát az elektromos fogyasztás alapján kell fizetni. Ez alatt azt értik, hogy elektromos berendezéseinken az adott idő alatt mennyi energiaváltozás jött létre.

A számlán ezt az energiamennyiséget egy különös mértékegységben, a kilowattórában mérik. A $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$-ből kifejezve az energiaváltozást, a következőt kapjuk: $\Delta E = P \cdot \Delta t$. Ez alapján megalkotható a kilowattóra (kWh), az energia mértékegysége. Ez egyenlő azzal az energiaváltozással, amit az egy kW-os berendezés egy óra alatt létrehoz.

g GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Két gép közül az első kétszer annyi munkát végez ugyanannyi idő alatt, mint a második. Mit tudunk a két gép teljesítményéről? Két motor közül az első ötször annyi munkát végzett, mint a második. Milyen feltétellel igaz az az állítás, hogy a két motor teljesítménye egyenlő?
2. Szemléltessük legalább három példával, hogy mit jelent az 1 W teljesítmény!
3. A $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ képlet elemzésével adjuk meg, hogy ha a három mennyiség közül az egyik állandó, akkor melyik
   a) két mennyiség között van egyenes arányosság! Mi ennek a fizikai tartalma? Mondjunk rá gyakorlati példát is!
   b) két mennyiség között van fordított arányosság! Mi ennek a fizikai tartalma? Mondjunk rá gyakorlati példát is!
4. Mit jelent az, hogy egy folyamat hatásfoka 75%? Mit jelent az $\eta = 0{,}3$?
5. Két gép közül az egyik teljesítménye kétszerese a másikénak. Lehet-e a két gép hatásfoka egyenlő? A választ indokoljuk is meg!
6. Miért lehet kerékpáron ugyanakkora utat kisebb fáradsággal megtenni, mint gyalog?

f FELADATOK

1. Egy gép motorjának teljesítménye 25 kW. Mennyi munkát végez 1 perc alatt?
2. Mennyi idő alatt végez egy ló 6 kJ munkát, ha teljesítménye 300 W?
3. Egy 75 kg tömegű ember 30 perc alatt megy fel a 300 m magas dombra. Tömegközéppontjának emelésére munkájának 75%-a fordítódik. Mennyi a teljesítménye? Mekkora a hatásfoka?
4. Egy 1000 kg tömegű repülőgép motorja 60 m változatlan sebességű emelkedés közben 30 másodperc alatt 1800 kJ munkát végzett. Mennyi a teljesítménye? Mennyi a hatásfoka?
5. Egy bekapcsolt villanyvasaló 600 W teljesítményű. Mennyivel változtatja meg vasalás közben környezetének belső energiáját 30 perc alatt?



6. Egy 60 kg tömegű ember teljesítménye 100 W. Mennyi idő alatt megy fel a 10 m magasan levő harmadik emeletre, ha hatásfoka 0,7?
7. Egy 73 kg tömegű munkás kézben visz fel 10 m magasra 25 kg tömegű homokot egy 2 kg tömegű vödörben. Mekkora a hatásfoka az így végzett munkának? Milyen hatásfokkal dolgozna, ha csigán húzná fel ezt a vödör homokot?
8. Egy vízkerékre 5 m magasról 10 000 kg tömegű víz esik. A vízkerék ez alatt 120 kJ munkát végez. Mekkora a folyamat hatásfoka?
9. Egy 1200 kg tömegű gépkocsi 15 másodperc alatt gyorsult fel 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességre. Mennyi volt a motor átlagos teljesítménye?
10. Nézzünk utána James Watt életének és munkásságának!

3D

4. Kidolgozott feladatok

1. Egy 1000 kg tömegű, 126 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű autó egy vele szemben haladó 1700 kg tömegű, 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű autóval frontálisan ütközik. A két gépkocsi ütközés után összetapadva, 0,5-es súrlódási tényezővel együtt csúszik a talajon. ($g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

a) Milyen nagyságú és irányú kezdősebességgel és mekkora úton csúszik együtt a két autó?

b) Hogyan teljesül itt az energiamegmaradás törvénye?

c) Melyik gépkocsi roncsolódik össze jobban?

Megoldás:

$m_1 = 1000\ \text{kg}, \quad v_1 = 126\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 35\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$m_2 = 1700\ \text{kg}, \quad v_2 = -54\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = -15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\mu = 0{,}5$

a) A lendületmegmaradás törvénye szerint:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v,$$

$$1000\ \text{kg} \cdot 35\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 1700\ \text{kg} \cdot 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2700\ \text{kg} \cdot v.$$

Ebből a közös kezdősebesség: $v = \mathbf{3{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}$. A sebesség pozitív előjele azt jelenti, hogy az **első gépkocsi haladási irányában** csúsztak tovább.

A csúszásra a dinamika alaptörvénye, majd abból a gyorsulást kifejezve:

$$-\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \quad \rightarrow \quad a = -\mu \cdot g = -0{,}5 \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A lefékeződés ideje:

$$t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{-v}{a} = \frac{-3{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}7\ \text{s}.$$

A megtett út:

$$s = v_{\text{átl.}} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{3{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 0{,}7\ \text{s} = \mathbf{1{,}2\ m}.$$

b) Az ütközés folyamán a mozgási energia változása:

$$\Delta E_{\text{m}} = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1000\ \text{kg} + 1700\ \text{kg}) \cdot \left(3{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1000\ \text{kg} \cdot \left(35\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1700\ \text{kg} \cdot \left(-15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 =$$

$$= -787212\ \text{J}.$$

A mozgási energia csökkenése és a kocsik deformációja és csúszása közben bekövetkezett belső energia növekedése egyenlő.

c) Az adatokból nem dönthető el. A két autó ugyanannyi ideig és ugyanakkora erőt fejtett ki egymásra. Az erő a gyengébb karosszérián okozott nagyobb alakváltozást.

2. Egy kétkerék-meghajtású, 1000 kg tömegű személygépkocsi teljesítménye 50 kW. A gépkocsi 0,6 tapadási súrlódási tényezőjű úton halad. ($g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

a) Mennyi lehet a legnagyobb gyorsulása?

b) Mekkora sebességnél jöhet létre ez a gyorsulás?

c) Mennyi idő alatt képes az autó $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ról $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra növelni a sebességét?

d) Mennyi idő kellene ehhez a sebességnöveléshez, ha az autó mindvégig kihasználhatná a maximális tapadási súrlódási erőt?

MEGOLDÁS:

$m = 1000\ \text{kg}$

$P_{\text{max}} = 50\ \text{kW} = 50\,000\ \text{W}$

$v_0 = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 16{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_1 = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\mu_0 = 0{,}6$

a) A motor által forgásba hozott két kerék megcsúszását a talaj előre mutató tapadási súrlódása akadályozza meg. Ez a tapadási súrlódási erőhatás gyorsítja a kocsit. A teher egyenletes eloszlását feltételezve, a két kerék együttes nyomóereje, majd abból a maximális gyorsító erőt kifejezve:

$$F_{\text{ny}} = \frac{m \cdot g}{2} \quad \rightarrow \quad F_{\text{max}} = \mu_0 \cdot F_{\text{ny}} = \mu_0 \cdot \frac{m \cdot g}{2}.$$

A dinamika alaptörvénye a maximális gyorsulásra:

$$m \cdot a_{\text{max}} = \mu_0 \cdot \frac{m \cdot g}{2} \quad \rightarrow \quad a_{\text{max}} = \mu_0 \cdot \frac{g}{2} = 0{,}6 \cdot 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{3\,\frac{m}{s^2}}.$$

b) A teljesítmény (P), az eredő erő (F) és a sebesség (v) kapcsolata: $P = F \cdot v$. A legnagyobb gyorsulás esetén itt F_{max} szerepel, amiből a legnagyobb sebesség, melynél az összefüggés teljesül:

$$v = \frac{P}{F_{\text{max}}} \quad \rightarrow \quad v_{\text{max}} = \frac{P_{\text{max}}}{F_{\text{max}}} = \frac{50\,000\ \text{W}}{3000\ \text{N}} = 16{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Kisebb motorteljesítmény igénybevételénél kisebb sebesség mellett is lehet maximális az erő és gyorsulás. Tehát a megoldás:

$$v \le 16{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \mathbf{60\,\frac{km}{h}}.$$

c) Ebben a sebességtartományban az autó maximális teljesítménye mellett végzett munka és a létrehozott mozgásienergia-változás egyenlőségéből számolhatunk, majd abból az időt kifejezve:

$$P_{\text{max}} \cdot t = \frac{m \cdot v_1^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} \quad \rightarrow \quad t = \frac{m}{2} \cdot \frac{v_1^2 - v_0^2}{P_{\text{max}}} = \frac{1000\ \text{kg}}{2} \cdot \frac{\left(25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(16{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{50\,000\ \text{W}} = \mathbf{3{,}46\ s}.$$

d) F_{max} mellett az egyenletesen változó mozgás gyorsulása az *a)* pontban kiszámolt $3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Az idő:

$$t = \frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 16{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \mathbf{2{,}77\ s}.$$

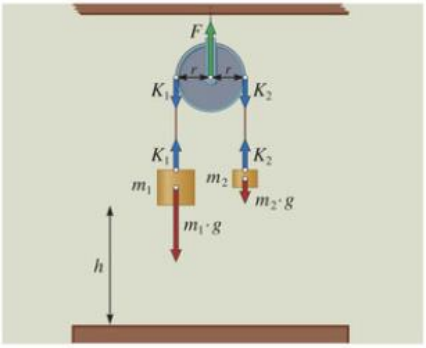
Ez akkor valósulhatna meg, ha az autó teljesítménye legalább a következő lenne:

$$P = F_{\text{max}} \cdot v_1 = 3000\ \text{N} \cdot 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 75\,000\ \text{W} = \mathbf{75\ kW}.$$

3. Állócsigán átvetett fonálon az egyik oldalon $m_1 = 3$ kg, a másik oldalon $m_2 = 1$ kg tömegű test függ. A testek a talajtól $h = 1$ m magasan helyezkednek el. A csiga tömege és a súrlódás elhanyagolható, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Ha elengedjük a testeket, mekkora sebességgel érkezik a nagyobb tömegű test a talajra?

b) Mekkora erő feszíti a fonalakat?



MEGOLDÁS:

$m_1 = 3$ kg

$m_2 = 1$ kg

$h = 1$ m

$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$v, K = ?$

a) Elhanyagolható tömegű csigánál a gyorsuló forgáshoz szükséges forgatónyomaték is elhanyagolható. Ezért $K_1 = K_2 = K$ írható.

Mindegyik testre felírjuk a dinamika alaptörvényét:

$$m_1 \cdot g - K = m_1 \cdot a \quad \text{és} \quad K - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a.$$

Az egyenletek bal és jobb oldalát is összeadva:

$$m_1 \cdot g - m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a.$$

Ebből a testek egyenlő nagyságú gyorsulása:

$$a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{m_1 + m_2} = \frac{(3\text{ kg} - 1\text{ kg}) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{3\text{ kg} + 1\text{ kg}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A $v = a \cdot t$ és $h = \frac{a}{2} \cdot t^2$ összefüggésekből az idő kiküszöbölésével:

$$h = \frac{v^2}{2a}.$$

A test sebessége:

$$v = \sqrt{2a \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\text{ m}} = \sqrt{10 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \mathbf{3{,}16 \frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

b) A K fonálerő a dinamika alaptörvényéből kifejezhető:

$$K = m_1 \cdot g - m_1 \cdot a = m_1 \cdot (g - a) = 3\text{ kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \mathbf{15\text{ N}},$$

vagy

$$K = m_2 \cdot g + m_2 \cdot a = m_2 \cdot (g + a) = 1\text{ kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \mathbf{15\text{ N}}.$$

A csigát tartó fonálnak – a csiga elhanyagolható tömege miatt – a két fonálerőt kell ellensúlyoznia:

$$F = 2K = 2 \cdot 15\text{ N} = \mathbf{30\text{ N}}.$$

Figyeljük meg, hogy a felfüggesztett testek nyugalmi súlya:

$$G = (m_1 + m_2) \cdot g = (3\,\text{kg} + 1\,\text{kg}) \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 40\,\text{N},$$

tehát $F \neq G$.

Miért csökkent a testek együttes súlya? Azért, mert a lefelé gyorsuló, nagyobb tömegű testnek több a súlycsökkenése, mint a felfelé gyorsuló kisebb tömegűnek a súlynövekedése: $3\,\text{kg} \cdot (\vec{g} - \vec{a})$, illetve $1\,\text{kg} \cdot (\vec{g} - \vec{a})$.

4. Adjunk energetikai megoldást az előző kidolgozott feladatra.

MEGOLDÁS:

$m_1 = 3\,\text{kg}$
$m_2 = 1\,\text{kg}$
$h = 1\,\text{m}$
$g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$v, K = ?$

a) Csak konzervatív erőhatások érvényesülnek, ezért alkalmazható a mechanikai energia megmaradásának törvénye. A rendszer kezdeti helyzeti energiája egyenlő a végső helyzeti és mozgási energia összegével:

$$m_1 \cdot g \cdot h + m_2 \cdot g \cdot h = m_2 \cdot g \cdot 2h + \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2.$$

Ebből:

$$v = \sqrt{\frac{g \cdot h \cdot (m_1 - m_2)}{\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\,\text{m} \cdot (3\,\text{kg} - 1\,\text{kg})}{\frac{1}{2} \cdot (3\,\text{kg} + 1\,\text{kg})}} = \sqrt{10}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \mathbf{3{,}16\,\frac{m}{s}}.$$

b) Alkalmazzuk a munkatételt az m_1 tömegű test mozgására:

$$(m_1 \cdot g - K) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2.$$

Ebből:

$$K = m_1 \cdot g - \frac{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2}{h} = 3\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 3\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{1\,\text{m}} = \mathbf{15\,N}.$$

Összefoglalás

AZ ENERGIA

FOGALMA

– Az **energia** az anyagi rendszerek állapotára változtató képesség szempontjából jellemző skalármennyiség, amely zárt rendszer esetén bármilyen állapotváltozásnál állandó marad (tehát megmaradási törvény írható fel rá). Jele: E. Mértékegysége: joule, jele J. $1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot 1\ \text{m}$.

– **Energiaváltozás** alapvetően két különböző típusú folyamat eredményeként jöhet létre:

a) a test állapota mechanikai kölcsönhatás eredményeként változik (munkavégzés). Munkavégzés következtében az anyagi rendszer (test, mező) bármely fajta energiája megváltozhat.

b) a test részecskéinek rendezetlen mozgása változik (pl. termikus kölcsönhatás, elektromágneses sugárzás). Ennek közvetlen eredménye csak belsőenergia-változás lehet.

FAJTÁI

– **A mozgási energia** a test tömegétől és sebességétől függ: $E_\text{m} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$.

– **A forgási energia** a test tehetetlenségi nyomatékától és szögsebességétől függ:

$$E_\text{f} = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2.$$

– **A rugalmas energia** a test rugóállandójától és feszítettségének mértékétől függ: $E = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$.

– **A helyzeti energia** a test m tömegétől, a gravitációs mező g térerősségétől és a mezőben szabadon megválasztott nullszinthez viszonyított h szintváltozástól függ: $E_\text{h} = m \cdot g \cdot h$.

– A fenti energiafajtákat közös néven **mechanikai energiának** nevezzük. Az olyan zárt rendszerekben, ahol csak konzervatív erők hatnak, a mechanikai energiák összege állandó:

$$E_\text{m} + E_\text{f} + E_\text{r} + E_\text{h} = \text{áll.}$$

AZ ENERGIAVÁLTOZÁSSAL JÁRÓ FOLYAMATOK JELLEMZŐINEK

FOGALMA

– **Munka:** munkavégzés közben bekövetkező energiaváltozás. Jele: W. Mértékegysége: joule, jele: J.

– **A teljesítmény** az energiaváltozás sebessége, vagyis az energiaváltozás gyorsasága szempontjából jellemzi a folyamatokat. Jele: P. Mértékegysége: watt. $1\ \text{W} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{s}}$.

– **A hatásfok** gazdaságosság szempontjából jellemzi a folyamatokat. Jele: η. Mivel viszonyszám, mértékegysége nincs.

– **Munkatétel:** Egy test mozgási energiájának megváltozása egyenlő a testet érő összes erő munkájának előjeles összegével, vagyis az eredő erő munkájával.

MATEMATIKAI MEGFOGALMAZÁSA

– Változatlan erőnél, ha a pálya egyenes: $W = F_1 \cdot s$, ahol F_1 a testre ható F erő pályaegyenesbe eső összetevőjének nagysága és s a test elmozdulása.

– Általános esetben a munka számértékileg egyenlő az erő–út grafikon alatti megfelelő terület számértékével.

– Egyenletes változásnál:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t};\ \text{munkavégzésnél}\ W = \Delta E,\ P = \frac{W}{t}.$$

$$\eta = \frac{\Delta E_\text{h}}{\Delta E_\text{ö}},\ \eta \le 1.$$

$$\Delta E_\text{m} = W_\text{gy} = \sum_{i=1}^{n} W_i.$$

Megoldások

(A terjedelem csökkentése érdekében a megoldásokat gyakran nem teljes mondatban fogalmaztuk meg.)

I. A TESTEK MOZGÁSA

2. EGYENES VONALÚ EGYENLETES MOZGÁS (18. o.)

G.k.: 2. $v_1 > v_2$; 20 m, 10 m; 10 m, 5 m; **3.** $v_1 = n \cdot v_2$; **4.** Igen. Ha az első ugyanannyiszor hosszabb ideig mozgott, mint ahányszor hosszabb utat tett meg. **5.** A megtett útra, hiszen az elmozdulása nulla, mert az öltözőből indult, és oda is ment vissza. **6.** Az elmozdulás nulla, a megtett út 167 km. **7.** Sebességmérő és feljegyző. A sofőr terhelését ellenőrzi. **8.** A helyvektor igen, az elmozdulásvektor nem. **9.** A part mozog, a víz áll. **10.** Nem. **11.** Lásd a tankönyvben, a 11. oldalon. **12.** Igen, mert a folyó hosszabb ideig nehezíti a hajó haladását visszafelé, mint ameddig segítette lefelé.

F.: 3. $v = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; **4.** $s = 100$ m; **5.** $t = 30$ min; **6.** $t = 2381$ s ≈ 40 min; **7.** $s = 1700$ m; **8.** A futó sebessége a nagyobb. **9.** 10 perc $= \frac{1}{6}$ h; $s = s_1 = s_2$; $t_1 = \frac{s}{v_1}$, $t_2 = \frac{s}{v_2}$; $t_1 + t_2 = \frac{1}{6}\text{ h} \Rightarrow \frac{s}{8} + \frac{s}{6{,}5} = \frac{1}{6} \Rightarrow s \approx 598$ m. **10.** Vigyázat, itt nem egy test vesz részt két egyidejű mozgásban, hanem két test külön-külön mozog! *a)* A két vonat egymáshoz viszonyított sebessége $30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú. *b)* Az egymáshoz viszonyított sebesség most is $30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. *c)* A 100 m-t ezzel a viszonylagos sebességgel 3,33 s alatt teszik meg, tehát ennyi ideig látja az utas a tehervonatot. *d)* Az út 200 m, így az idő 6,66 s. *e)* A relatív sebesség most $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Így a 100 m hosszú tehervonat mellett 10 s alatt halad el a személyvonat.

3. VÁLTOZÓ MOZGÁS

3.1. A változó mozgást végző test sebessége (23. o.)

G.k.: 1. Pl.: Egyenlő időtartamok alatt nem egyenlő utakat tesz meg. Változik a sebesség nagysága. Változik a test mozgásának iránya. A pálya nem egyenes. **2.** Nem. Igen. Igen. **3.** Egyenlő nagyságú. **4.** Nem. **5.** Pillanatnyi.

F.: 3. $v = 9{,}89\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 35{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **4.** $s_{\text{ö}} = 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t_1 + 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t_1 = v_{\text{átl.}} \cdot 2t_1 \Rightarrow v_{\text{átl.}} = 54\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **5.** *a)* $s_{\text{ö}} = 21$ km; *b)* $v_{\text{átl.}} = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **6.** Könnyebben felismerhetjük a megoldást, ha megrajzoljuk a sebesség–idő grafikont. Vezessük be a $t_{\text{ö}} = t_1 + t_2$ jelölést, így $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$ és $v_1 = 1{,}5v_2 \Rightarrow t_2 = 1{,}5t_1$. Mivel $\frac{v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = 43{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_1 = 54\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $v_2 = 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **7.** A sebesség–idő grafikon megrajzolása ebben az esetben is segíti a megoldást. $v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = v_{\text{átl.}} \cdot (t_1 + t_2)$ és $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$; $t_1 = \frac{5}{3} \cdot t_2$; $v_2 = 66{,}7\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **8.** $v_{\text{átl.}} = 68\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $s = 290$ km; $t = 4{,}4$ óra.

3.2. A gyorsulás fogalma (28. o.)

G.k.: 1. A pálya egyenes. A sebességvektor a pálya egyenesébe esik, és iránya nem változik. Egyenlő időtartamok alatt egyenlő a sebességváltozás nagysága. A gyorsulás nagysága és iránya állandó. **3.** Az adott időpontig elért pillanatnyi sebesség felével, illetve a kezdősebesség és az adott időpontig elért pillanatnyi sebesség számtani közepével. **4.** Igen, de akkor a pálya nem egyenes. **5.** Igen. **6.** *a)* 3-szor. Igen, figyelmeztet a nagy sebesség veszélyeire! *b)* 9-szer. A követési távolság fontosságára.

F.: 1. $a = 0{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $t = 12{,}5$ s; **2.** $|a_{\text{a}}| < |a_{\text{m}}|$; **3.** $v_2 = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; **4.** $\Delta t = 10$ s; **5.** $s = 167$ m; **6.** $s_8 - s_7 = 0{,}6$ m; $a = 0{,}08\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $s_9 - s_8 = 0{,}68$ m; **7.** $t_1 = 20$ s; $t_2 = 22{,}5$ s; $s_2 - s_1 = 2390{,}6$ m; **8.** Az 1-es grafikon olyan egyenletes mozgást jellemez ($a = 0$), amelynek sebessége $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ez a sebesség megegyezik a 3-as mozgás 1. másodperc és a 2-es mozgás 3. másodperc végére elért sebességével. A 2-es és a 3-as mozgás gyorsuló mozgás: $a_2 = \frac{2}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_3 = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; **9.** *a)* Az *OA* szakasz a 3-as, az *OB* pedig a 2-es mozgás kezdősebességét adja meg számértékileg. Az *OC* szakasz a 3-as mozgás mozgásidejét határozza meg. *b)* $a_1 = a_2 = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és $a_3 = -1{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; *c)* Az 1-es és 2-es mozgás gyorsuló, megegyező gyorsulással. A 3-as lassuló mozgás. A $v_{0_1} = 0$; $v_{0_2} = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{0_3} = 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3.3. A szabadon eső test mozgása (33. o.)

G.k.: 1. Egyenletesen gyorsuló mozgás, Magyarországon, földközelben $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Ha csak a nehézségi erő hatása érvényesül, minden más hatás elhanyagolható. **2.** *a)* A gyorsulás egyenlő. *b)* A harmadik másodpercben, mert ebben az időtartamban indul a legnagyobb kezdősebességgel. **3.** Nem, csak akkor, ha a „lent-fent" helyzet valami másból kiderül. **4.** Kiszámolva csak néhány Δs-re ellenőrizhető a szabályszerűség, tehát általánosan kell igazolni. A $\Delta s_{n+1} = s_{n+1} - s_n = \frac{a}{2} \cdot (n+1)^2 - \frac{a}{2} \cdot n^2 = \frac{a}{2} \cdot (2n+1)$, ezért a szabályszerűség minden egyenletesen változó mozgásra igaz.

F.: ($g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, de mi $g \approx 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$-tel számolunk.) **1.** $v = 50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $s = 125$ m **2.** $t = 1{,}41$ s; $v = 14{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{\text{átl.}} = 7{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; **3.** $t = 0{,}4$ s; $s = 0{,}8$ m. **4.** $s_8 - s_6 = 140$ m; természetesen $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, hiszen szabadon esik. **5.** $\Delta t = 2$ s. Mivel $t_1 = 2$ s és $t_2 = 4$ s, $\Delta s = s_4 - s_2 = 60$ m. **6.** $\Delta t_{1\,\text{m}} = 0{,}447$ s; $t_{50\,\text{m}} = 3{,}16$ s; $t_{49\,\text{m}} = 3{,}13$ s; $\Delta t_{\text{u.m}} = 0{,}03$ s; $s_1 = 5$ m; $\Delta s_{\text{u.s}} = s_{3{,}16} - s_{2{,}16} = 26{,}6$ m. **7.** $s_2 = h_2 = 80$ m; $s_4 = h_4 = 120$ m; $s_5 = h_5 = 125$ m; $s_6 = 130$ m, $h_6 = 120$ m; $s_8 = 170$ m, $h_8 = 80$ m; $s_{10} = 250$ m, $h_{10} = 0$ m; $v_2 = 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_4 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_5 = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_6 = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_8 = -30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_{10} = -50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **8.** Legyen a koordinátatengely lefelé irányított, és az origó az eldobás pontjában. $v = v_0 + g \cdot t = 45\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $s = v \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 90\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Azért, hogy a mozgást v_0 kezdősebességű szabadesésnek tekinthessük.

3.4. Az egyenletes körmozgás (39. o.)

G.k.: 3. Mindkettő nő. **4.** T csökken, n nő, a_{cp} nő. **5.** Egyenlők. **6.** $T_e < T_h$, $n_e > n_h$, $v_{k_e} = v_{k_h}$, $a_{\text{cp}_e} > a_{\text{cp}_h}$.

F.: 1. $T = 60$ s; $n = \frac{1}{60}\ \frac{1}{\text{s}}$; $v_k = 1{,}05 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $a_{\text{cp}} = 1{,}1 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. **2.** $T = 20$ s; $n = 0{,}05\ \frac{1}{\text{s}}$; $v_k = 0{,}314\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $a_{\text{cp}} = 0{,}0986\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; **3.** $r \le 0{,}2$ m. **4.** $a_{\text{cp}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; **5.** A Föld középpontjában. $v_k = 7676\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $a_{\text{cp}} = 8{,}93\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. A sebességvektor minden pillanatban érintő irányú, a gyorsulásvektor közelítőleg a Föld középpontja felé mutat. **6.** $T = 655{,}68$ h; $n_1 = 0{,}001525\ \frac{1}{\text{h}} = 4{,}23 \cdot 10^{-7}\ \frac{1}{\text{s}}$; $v_k = 1021\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3676\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $a_{\text{cp}} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $n_2 = n_1$; $v_{k_H} = 4{,}62\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a_{\text{cp}_H} = 1{,}23 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

3.5. A körmozgás és forgómozgás szögjellemzői (43. o.)

G.k.: 1. Mert ezekkel a feltételekkel vizsgáltuk a jelenségeket, és a tengely helyzetének, vagy a test alakjának megváltozása befolyásolja a mozgást. **3.** Mert azonos függvénykapcsolatokra építhettünk, pl. $\Delta s \sim \Delta t$ és $\Delta\varphi \sim \Delta t$, illetve $\Delta v \sim \Delta t$ és $\Delta\omega \sim \Delta t$ stb. $s \sim \varphi$; $v \sim \omega$. **4.** T csökken, n nő. **5.** Mivel *a)* és *b)* azonos jellegű változás, együtt válaszolható meg: v és ω nő. **6.** Mivel $r_e < r_h$ és $v = v_{k_e} = v_{k_h}$, $T_e < T_h$; így $n_e > n_h$; $\omega_e > \omega_h$; $a_{\text{cp}_e} > a_{\text{cp}_h}$. **7.** $v_{k_1} = v_{k_2}$, $\omega_1 = 2\omega_2$. **8.** Azonos a 7. feladat megoldásával.

F.: 1. $\omega = 8\ \frac{1}{\text{s}}$; $T = 0{,}785$ s; $n = 1{,}274\ \frac{1}{\text{s}}$. **2.** $T = 86\,400$ s; $\omega = 0{,}0000726\ \frac{1}{\text{s}}$; $v_k = 463\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **3.** $\omega = 0{,}2\ \frac{1}{\text{s}}$; $T = 31{,}4$ s; $f = 0{,}032\ \frac{1}{\text{s}}$; $v = 100\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $a_{\text{cp}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. **4.** $f = 16{,}67\ \frac{1}{\text{s}}$; $T = 0{,}06$ s; $\omega = 104{,}7\ \frac{1}{\text{s}}$; $v_{\text{max.}} = 31{,}41\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $a_{\text{cp}} = 3286\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. **5.** $f = 47{,}5\ \frac{1}{\text{s}}$; $\omega = 298{,}3\ \frac{1}{\text{s}}$; $v = 59{,}66\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $a_{\text{cp}} = 17\,796{,}58\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_{\text{cp}} : g = 1814{,}13$. **6.** $n_1 = n_{0{,}5} = 2$; $\omega_1 = \omega_{0{,}5} = 12{,}56\ \frac{1}{\text{s}}$; $T_1 = T_{0{,}5} = 0{,}5$ s; $v_{k_1} = 12{,}56\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{k_{0{,}5}} = 6{,}28\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **7.** $v_k \le 2{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **8.** $\omega = 66{,}67\ \frac{1}{\text{s}}$; $n = 10{,}62\ \frac{1}{\text{s}}$; $T = 0{,}094$ s. **9.** $v = v_k = 7{,}54\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3.6. A változó forgómozgás (Kiegészítő anyag – 47. o.)

G.k.: 1. *a)* Változik a mozgásának iránya (a sebességvektor iránya). *b)* Változik a keringési ideje, a fordulatszáma, a sebességvektor nagysága, a szögsebessége stb. A változó körmozgásnál nemcsak a sebesség iránya, hanem a nagysága is változik. **2.** Az anyagi pont pályája kör, sebességének nagysága változik, a sebesség mindig érintő irányú. A szöggyorsulás állandó. Az egyenletes forgómozgásnál a test minden pontja egyenletesen változó körmozgást végez. **3.** Mivel a szögelfordulást radiánban mérjük és az egy viszonyszám, a szögsebesség

és annak változása is $\frac{1}{s}$-ben mérhető. **4.** *a)* Igen! *b)* Igen! **5.** Nem, mert nem változik a sebességének nagysága, hiszen nincs iránygyorsulása. **6.** T növekszik; f csökken.

F.: 1. $\beta = 0{,}5\ \frac{1}{s^2}$; **2.** $\omega = 18\ \frac{1}{s}$; $\varphi = 1620$ (rad). **3.** $\omega = 3{,}14\ \frac{1}{s}$; $\beta = 0{,}157\ \frac{1}{s^2}$. **4.** $\beta_1 < \beta_2$; $\varphi_1 = 96$ (rad); $\varphi_2 = 45$ (rad). **5.** $v = 10\ \frac{m}{s}$; $s = 100$ m; $\omega = 20\ \frac{1}{s}$; $\beta = 1\ \frac{1}{s^2}$; $\varphi = 200$ (rad); $n = 31{,}84$.

4. A BOLYGÓK MOZGÁSA (52. o.)

G.k.: 1. A Föld, illetve a Nap. **2.** A hatás-ellenhatás elvén. Mert a rakéta nem a levegőtől „rugaszkodik" el, nem a levegővel, hanem az általa kilövellt gázzal van kölcsönhatásban. **3.** A tehetetlensége miatt. A gravitációs vonzás miatt.

F.: 1. $r = 2{,}28 \cdot 10^8$ km. **2.** $T = 0{,}241$ év. **3.** $v_{min.} = 29\,291\ \frac{km}{s}$, $v_{max.} = 30\,287\ \frac{km}{s}$, $v_{átl.} = 29\,783\ \frac{km}{s}$.

II. A TÖMEG ÉS AZ ERŐ

2. A TEHETETLENSÉG TÖRVÉNYE ÉS AZ INERCIARENDSZER (64. o.)

G.k.: 1. A nehezék a vonathoz viszonyítva kimozdul egyensúlyi helyzetéből. Kívülről nézve – a tehetetlensége miatt – egyensúlyi helyzetében marad, a vonat mozdul el hozzá viszonyítva. **2.** Mert erőhatás kell ahhoz, hogy a vonat mozgásállapotának megváltozásakor – ami bármikor bekövetkezhet – az utas együtt mozogjon a környezetével. **3.** A függőleges helyzetben levő kalapács nyelét földhöz ütögetik, hogy gyorsan lefékeződjön, és a kalapács feje – a tehetetlensége miatt – tovább mozogva rászoruljon a nyélre. **4.** A porszemcsék tehetetlensége. **5.** Az álló és az egyenletesen mozgó jármű, amíg nem kanyarodik, illetve a tanterem igen. Az induló és kanyarodó jármű nem. **6.** Az utasok szerint függőleges hajítás. A földi megfigyelők ferde hajításnak látják. **7.** Nem, mert kilépéskor azonos a sebessége az űrhajóéval, és tehetetlenségük miatt együtt mozognak tovább. **8.** A kanyarodással ellentétes irányban. **9.** A tehetetlenség törvényét. Kellő sebességű rázásnál a cső szűk része nem képes megakadályozni, hogy a higany átpréselődjön rajta. **10.** Rázáskor a gyümölcs – tehetetlensége miatt – nyugalomban marad, így az elmozduló ágról leválik a kocsány. **11.** Mert földet éréskor a lábunk hirtelen lefékeződik és a mozgó testünk a tehetetlensége miatt tovább halad, ezért eleshetünk. **12.** A biztonsági öv az autóhoz „rögzíti" a testünket, és így nem engedi előre vágódni azt. **13.** Igen. *a)* Egyenlő. *b)* $v = v_0 + g \cdot t$. Lefelé irányuló v_0 kezdősebességű függőleges hajításnak. **14.** Igen. *a)* Egyenlő. *b)* $v = v_0 - g \cdot t$. Egy v_0 kezdősebességű, felfelé irányuló függőleges hajításnak. **15.** A kezdeti irányra merőleges. Nem tekinthető inerciarendszernek.

3. A TÖMEG FOGALMA (67. o.)

G.k.: 2. Azonos. **3.** A sebességváltozások $\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2}$ hányadosa. m_1. **4.** és **5.** A pohár tehetetlensége, és mivel a súrlódás nem volt elég nagy a gyors sebességváltozáshoz. **6.** A nehezék tehetetlensége.

F.: 1. $m_2 = 0{,}5$ kg. **2.** $m_2 = \frac{2}{3} \cdot m_1$.

4. A SŰRŰSÉG (70. o.)

G.k.: 1. $m_{üveg} < m_{Al} < m_{réz}$. **3.** $V_{réz} < V_{Al} < V_{üveg}$.

F.: 2. $\rho_{jég} = 900\ \frac{kg}{m^3}$. **3.** $m_{réz} = 8{,}9$ kg. **4.** $V = 0{,}037\ m^3$. **5.** $\rho_{s.r.} \geq 8135\ \frac{kg}{m^3}$.

5. LENDÜLET, LENDÜLETMEGMARADÁS (74. o.)

G.k.: 1. Igen, mert csökken a tömege. Ha nem csökkenti a gázt, felgyorsul az autó. **2.** Az üres tömege és lendülete a legkisebb, a kővel megrakotté a legnagyobb. **3.** A papa tömege és így lendülete is háromszorosa a gyerekének. **4.** $I_2 = 0{,}75 \cdot I_1$. **5.** Igen, ha a teniszlabda sebessége annyiszor nagyobb a futball-labdáénál, ahányszor kisebb a tömege. **6.** Igen, ha mozgásuk nem egyirányú (vektor). **7.** Igen, ha tömegeik fordítottan arányosak a sebességeikkel ($m_1 : m_2 = v_2 : v_1$). **8.** Elvileg igen. A tömegeik aránya miatt. **9.** A ladik elindul hátra. **10.** Nem, a gravitációs hatás és a közegellenállás nem hanyagolható el. **11.** Előre-hátra mozog. Növekvő, illetve csökkenő sebességgel halad, attól függően, hogy merre lendül az ingája.

F.: 1. $I = 0{,}5 \cdot m$. **2.** $I = 2 \cdot 10^4\ kg \cdot \frac{m}{s}$. **3.** $I_0 = 0$; $I = 17{,}9\ kg \cdot \frac{m}{s}$. **4.** $v_2 = 0{,}5\ \frac{m}{s}$. **5.** $v_{kocsi} = 3\ \frac{m}{s}$, előre. **6.** $v_p = 4\ \frac{m}{s}$. **7.** $v = 9{,}43\ \frac{m}{s}$. **8.** $v = -500\ \frac{m}{s}$. **9.** Hátra $v_{cs} = 1\ \frac{m}{s}$; *a)* $v_{cs} = 1\ \frac{m}{s}$; $v_{gy} = 6\ \frac{m}{s}$; *b)* $v_{cs} = 3\ \frac{m}{s}$; $v_{gy} = -2\ \frac{m}{s}$.

6. ERŐHATÁS, ERŐ

6.1. Az erő fogalma (80. o.)

G.k.: 1. Igen. Az erőhatás időtartamának jó megválasztásával. **2.** Különböző volt a sebességük, így a lendületük, és kb. egyenlő a lefékeződésük időtartama alatti lendületváltozásuk. **3.** A nagyobb tömegű medicinlabda. Egyenlő. **4.** Feleakkorát. Igen, a testek tömege. **5.** *a)* Igen, ha Δt megfelelően különböző. *b)* Igen, ha Δt megfelelően különböző. Bármely testre igaz a két megállapítás. **6.** Igen, ha Δt megfelelően különböző. Igen, ha Δt megfelelően különböző. Nem. **7.** A lendületváltozás mindhárom testnél ugyanannyi. A sebességváltozások fordítottan arányosak a testek tömegével.

F.: 2. $\Delta I = 100\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mert ennyi idő alatt, bármely testen ugyanekkora lendületváltozást hozna létre ez az erőhatás. **3.** $\Delta t = 20$ s. **4.** $F = 250$ N. **5.** $v = 12{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $I = 10\,000\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $s = 62{,}5$ m. **6.** $\Delta t = 0{,}1$ s; $I = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $a = 100\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. **7.** $m = 220\ \text{kg} - 120\ \text{kg} = 100\ \text{kg}$. **8.** $F = 15\,000$ N. **9.** $v = 300\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $s = 1500$ m. **10.** $m = 83{,}3$ kg; $\Delta v = v = 1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $a = 0{,}24\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. **11.** $F = 1$ N. **12.** $F = F_\text{n} + F_\text{gy} = 500\ \text{N} + 250\ \text{N} = 750$ N. **13.** *a)* 20 000 N; *b)* 24 000N; *c)* 16 000 N; *d)* 20 000 N; *e)* 20 000 N; *f)* Ugyanakkora erővel, mint az egyes esetekben a lift húzza a tartókábelt, de az erőhatás iránya ellentétes azokkal.

6.2. Erő-ellenerő. A mechanikai kölcsönhatás (83. o.)

G.k.: 1. A lé kilövellésével ellentétes irányban „elugrik". **2.** Mert a lövedék a puskától „rugaszkodik" el, amit ezért visszalök (hatás-ellenhatás). Mivel lendületük egyenlő, a sebességük fordítottan arányos a tömegükkel. **3.** Mert gyengébb a karosszériája. A két autó kölcsönhatásában egyenlők az erőhatások. **4.** A tanár súlya és a katedra által kifejtett tartóerő, ami kényszererő. Nem, ez csak elnevezés kérdése. **5.** Az egyik ember és a kötél, illetve a másik ember és a kötél. Nem. **6.** A rugó három kölcsönhatásban vesz részt: a gravitációs mezővel (ezért egy kicsit lehajlik a közepe), a szeggel és az emberrel. A rugó által kifejtett rugalmas erő. Az izomerő és a szeg által kifejtett kényszererő. Nincs.

6.3. Több erőhatás együttes eredménye (87. o.)

G.k.: 1. Nem, mert nem ugyanazt a testet érik. **2.** A rugalmas erő és a test súlya, valamint a nehézségi erő és a rugalmas erő. **3.** A két erő eredőjének irányában. **4.** Ne érje erőhatás (ilyen a valóságban nincs), vagy az őt érő erők eredőjének nagysága nulla legyen. Nem változik. **5.** Igen. Igen. **6.** Nem. **7.** Ugyanúgy, mint azt megelőzően. Nem. **8.** Igen. Nyugati irányba mutat. Mi a feltétele annak, hogy az egyenes vonalú mozgást végző test lassulása közben pályája továbbra is ugyanaz az egyenes maradjon. **9.** A szánkó mozgását nem befolyásolja az az erőhatás, ami a lovat éri. Ezért félrevezető a kérdés. A szánkó elmozdításának az a feltétele, hogy a ló nagyobb erővel húzza, mint amekkora a maximális tapadási súrlódási erő. A ló akkor tud előre haladni, ha nagyobb az izomerő ellenerejének (ami a talaj által a lóra kifejtett erőhatás) vízszintes összetevője, mint a szánkó által, a lóra kifejtett visszahúzó erő.

F.: 1. $F_\text{e} = 5$ N. **2.** $F_\text{e} \approx 6{,}3$ N. **3.** $F_\text{e} = 10$ N. **4.** Igen.

7. KÜLÖNFÉLE MOZGÁSOK DINAMIKAI FELTÉTELE (90. o.)

G.k.: 1. Csökken; nő; nő; nő. **2.** *a)* Nő; nő; nő. *b)* Csökken; csökken; csökken. *c)* Csökken; csökken; csökken. *d)* Nő; nő; nő. **3.** Minél nagyobb a kerületi sebesség, annál nagyobb erő kell ahhoz, hogy a sárdarabok együtt forogjanak a kerékkel. A sár felragadásának erőssége azonban csak egy meghatározott nagyságú erővel képes megakadályozni azt, hogy a sárdarabok tehetetlenségük miatt lerepüljenek a kerékről. **4.** A nagyobb sugarú körön azonos szögsebességgel futó gyereknek egyre gyorsabban kell futni, és egyre nagyobb erővel kell őt a kör közepe felé húzni. A játék vége az, hogy vagy nem bírják tartani a „csapót", vagy ő nem bír kellő gyorsan futni, és elesik.

F.: 1. $F = 4{,}74$ N. **2.** $F = 0{,}2$ N. **3.** $n = 1\ \frac{1}{\text{s}}$. **4.** Körpályán és egyenletesen. $T = 2$ s. **5.** $a = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $K = 6$ N. **6.** $a = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $K = 25$ N. **7.** $a = 1{,}11\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $K = 88{,}88$ N. **8.** A nagyobb tömegű test. $m_1 = 27{,}75$ kg; $m_2 = 32{,}25$ kg; mozgás közben a kötélerő: $K_\text{gyors.} = 298{,}31$ N; $a = 0{,}75\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $v = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $F_\text{e} = 0$; $K_\text{nyugalomban} = 277{,}5$ N.

8. KÉNYSZERERŐK ÉS MEGHATÁROZÁSUK (92. o.)

G.k.: 1. Egy homorú félgömb alakú felületen történő mozgásra. **2.** Egy függőleges síkú körpályára. **3.** A hajlásszög növelésével csökken, a csökkentésével nő (de nem a változással egyenes arányban). **4.** Nem, de a biológiai hatás hasonló.

F.: 1. *a)* 1,25 N; *b)* 0,75 N; **2.** *a)* 800 N; *b)* 3200 N; *c)* $f = 0{,}42\ \frac{1}{s}$; *d)* $4g$, illetve $2g$.

9. TEHETETLENSÉGI ERŐK (KIEGÉSZÍTŐ ANYAG – 96. o.)

G.k.: 1. Inerciarendszerben a golyó által a zsinegre kifejtett erő, ami feszíti a zsineget. Forgó rendszerben a centrifugális erő. **2.** A pálya legalacsonyabban levő pontjában nyomódik a pilóta legjobban az ülésbe, mert itt a legnagyobb a repülőgép sebessége, valamint a nehézségi erő és a centrifugális erő egyirányú, tehát összeadódik. Legkevésbé a pálya legmagasabb pontján nyomódik a pilóta az ülésbe. **3.** A fordulatszám növelésével nőni kell a centripetális erőnek is, hogy az anyag körpályára kényszerüljön. Mivel ez a tömegtől is függ, a nagyobb sűrűségű anyagoknál hamarabb következik be az, hogy a rendszer nem képes megfelelő nagyságú centripetális erőt kifejteni, és az anyag sűrűség szerint szétválik.

10. KÜLÖNFÉLE ERŐHATÁSOK ÉS ERŐTÖRVÉNYEIK

10.1. Rugalmas erő. Lineáris erőtörvény (99. o.)

G.k.: 1. Egyenes arány. **2.** Ha $D_1 = D_2$, akkor nagyobb legyen a megnyúlása, vagy azonos megnyúlásnál nagyobb legyen a rugóállandója, általános esetben nagyobb legyen a $D \cdot \Delta\ell$ szorzat. **4.** $2D$; $4D$.

F.: 1. $F_{r_1} = -32$ N; $F_{r_2} = -12$ N, $F_{f_2} = 12$ N. **2.** $D = 1{,}67\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. **3.** $\Delta\ell = 5$ cm. **4.** Sorba kapcsolásnál: $D_1 = 5\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ párhuzamos kapcsolásnál: $D_2 = 20\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. **5.** A nyugalomban levő megfeszített rugó minden menetére – így a középsőre is – a két szomszédja egyenlő (itt 10 N) nagyságú és ellentétes irányú erőhatást fejt ki.

10.2. Súrlódás. Közegellenállás (104. o.)

G.k.: 1. Azért, hogy nagyobb legyen a súrlódás. **2.** Így csökkentik a súrlódást. **3.** A kerékpár fékezése a kerék és a fék között csúszási, a kerék és az út között tapadási, vagy túlzott fékezésnél csúszási súrlódáson alapul. **6.** Mert a gördülésnél fellépő gördülési súrlódás sokkal kisebb, mint a csúszási súrlódás. **7.** Mert eltérő az alakjuk és így a közegellenállási tényezőjük. **8.** Csökkentik a homlokfelületet és a közegellenállási tényezőt az autó formatervezésével. **9.** Mert a víz sűrűsége nagyobb, mint a levegőé. **10.** Mert jobban elmerül, és így nagyobb a vízben levő rész homlokfelülete. **11.** Nagysága megegyezik a testet érő nehézségi erő nagyságával, iránya ellentétes annak irányával. **13.** Elkopik. A fékezés közben levált részecskék szennyezik a levegőt. **14.** A formatervezett járművek – azonos körülmények között – kevesebbet fogyasztanak, és ez kisebb környezetszennyezéssel jár. **15.** A nyomóerőt. **16.** A vizes útnak kisebb a tapadási súrlódási együtthatója, és így azonos körülmények között kisebb a tapadási súrlódási erő. **17.** Ezzel növelik a homlokfelületet és a közegellenállási tényezőt, tehát a (fékező) közegellenállási erőt. Rövidebb lehet a kifutó, vagy ugyanarra a kifutóra nagyobb sebességű gépek is leszállhatnak. **18.** Tolatáskor meglazulnak az összekapcsoló rugók és így a kocsikat egyenként indítja meg. Kihasználva a gördülési súrlódás kisebb voltát.

F.: 1. $F_1 = 15$ N; $F_2 = 15$ N. **2.** $\mu = 0{,}25$. **3.** $s = 50$ m; $\mu_0 = 0{,}5$. **4.** $F_{ts_1} = 100$ N; $\mu_0 = 0{,}4$. **5.** $F_{kö_1} = 19{,}35$ N; $F_{kö_2} = 77{,}4$ N; $F_{kö_3} = 252{,}3$ N. **6.** $v = 6{,}43\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

10.3. A nehézségi erő és a gravitációs erőtörvény (110. o.)

G.k.: 1. A tömege nem, a súlya igen. **2.** Azonos feltételek között nem, de ha az egyiknek függőleges irányú gyorsulása van, akkor igen. A válasz azonos az első kérdésre adottal. **3.** Norvégiában a súlya, Egyiptomban a tömege alapján érdemes eladni. **4.** Igen, dinamikai módszerrel. **5.** A tömege. **6.** *a)* kétszereződik, *b)* négyszereződik, *c)* negyedelődik. **7.** Mert a súrlódási erő sokkal nagyobb, mint a közöttük levő gravitációs erő. **8.** Mert a szabadon eső testeknek nincs súlya, és így a felső tégla nem nyomja az alsót. **9.** A függőleges irányban lefelé gyorsuló testnek kisebb a súlya, mint a nyugalomban lévőé. Nagyobb súlyt, mint nyugalomban. **10.** Nem, mert a súly csak a függőleges irányú gyorsulásnál változik. **11.** Nem, növekvő gyorsulással esnének. Nem.

F.: 1. $F = 6{,}67 \cdot 10^{-7}$ N; $a = 6{,}67 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. **2.** $F = 1{,}91 \cdot 10^{20}$ N. **3.** A Föld felé irányul és $a = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. **4.** $F = 0{,}033$ N. Ez a hatás az árapályjelenségben nyilvánul meg. **5.** $g_F = 6{,}25 \cdot g_H$.

11. A FORGÓMOZGÁS DINAMIKAI VIZSGÁLATA

11.1. A tehetetlenségi nyomaték (Kiegészítő anyag – 113. o.)

G.k.: 1. Nem. **2.** Amennyiben nagyobb a forgó tömege, nagyobb a tehetetlenségi nyomatéka is. Könnyebb lesz gyorsítani a forgót, mert kisebb lesz a tehetetlenségi nyomatéka. **3.** A közepén fogva, mert úgy kisebb a tehetetlenségi nyomatéka. **4.** Igen. Különböző helyen levő forgástengelyt. **5.** Igen, ha eltérő a vastagságuk és így a sugaruk. Igen, ha eltérő a tömegük. **6.** Mert olyan $\Sigma m_i = m$ tömegű anyagi pontokra bontható, melyeknek r a tengelytől mért távolsága, és ezek tehetetlenségi nyomatékainak összege a gyűrű tehetetlenségi nyomatéka: $\Sigma(m_i \cdot r^2) = r^2 \cdot \Sigma m_i = m \cdot r^2$.

F.: 1. *a)* $\Theta = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; *b)* $\Theta = 2\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; *c)* $\Theta = 10\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. **2.** *a)* $\Theta = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; *b)* $\Theta = 4\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; *c)* $\Theta = 100\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. **3.** $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = 0{,}75\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. **4.** $\Theta = m \cdot r^2 = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. **5.** $\Theta_1 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \ell^2 = 0{,}167\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; $\Theta_2 = \frac{1}{12} \cdot m \cdot \ell^2 = 0{,}042\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

11.2. A perdület (Kiegészítő anyag – 116. o.)

G.k.: 1. Induláskor megperdülne a benne levő villanymotor forgásával ellentétes irányban. A perdületmegmaradás törvényét. A szabadon hagyott daráló – a súrlódástól eltekintve – zárt rendszer, megfogva nem az. **2.** Zárt rendszernek. Növeléskor összehúzza a végtagjait, csökkentéskor kitárja azokat. A forgásállapot-változással szembeni tehetetlensége. A tehetetlenségi nyomatékkal. A perdületmegmaradás törvényét. **3.** Zárt rendszernek. A forgásállapot-változással szembeni tehetetlensége, mert a forgástengelytől távolabb került a test egy része. A testhez szorított esetben, mert így kisebb a tehetetlenségi nyomaték. **4.** Lendület- és perdületmegaradási törvényeket. Zárt rendszerekre. **5.** Centrifugálás indulásakor a dob forgásával ellentétes irányban kezdene forogni a mosógépház. De a ház alakja miatt a mosógép nem tud felborulni.

F.: 1. $N = 12\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. **2.** $N = 25{,}12\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. **3.** $N = 2{,}25\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. **4.** $N_1 = 0{,}83\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$; $N_2 = 0{,}21\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

11.3. A forgatónyomaték (121. o.)

G.k.: 1. A kormány elfordításához nagy erő kell, ha kicsi az erőkar, és kicsi úton nagy erővel könnyen elrántjuk a kormányt. **2.** Mert Toldi a vendégoldalt a végén fogta, és így nagy a nehézségi erő erőkarja, az izomerőé pedig kicsi. **3.** Az oszlop alsó végén. Az oszlop felső végéhez közel, hogy nagy legyen az erőkar. **4.** Igen. **5.** Azért, hogy nagy legyen az erőkar, és így kisebb erővel lehessen ugyanakkora forgatónyomatékot létrehozni. **6.** Olyan erőhatás éri, amelynek van forgatónyomatéka, vagy megváltozott a test tehetetlenségi nyomatéka. **7.** Nem. Minden test megtartja változatlan tengelyű, egyenletes forgó mozgását mindaddig, míg környezete forgásállapotának megváltoztatására nem kényszeríti.

F.: 1. $M = 5$ N. Feleződik. Háromszor akkora lesz. Kétszer akkora lesz. **2.** $M_1 = 1$ N; $k_2 = 0{,}5$ m; *a)* Az ellentétes oldalon; *b)* Az azonos oldalon. **3.** 800 N. **4.** 1000 N.

12. MEREV TESTEK EGYENSÚLYA

12.1. A párhuzamos hatásvonalú erők eredője (125. o.)

G.k.: 2. Mert a párhuzamos egyeneseknek nincs közös pontja (ha az egyenest nem tekintjük önmagával párhuzamosnak), ahova eltolhatnánk a két erő támadáspontját. A két párhuzamos erő támadáspontjain átmenő egyenesen felvéve két egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú segéderőt. (Ezek nem változtatják meg a test mozgásállapotát, mert kiegyenlítik egymást és háromszor alkalmazva a paralelogramma módszert, az eredő erő megszerkeszthető.) (Kíséreljük meg!) **3.** Nagyságban és a hatásvonal helyében eltér, de mindkét esetben az eredő hatásvonala párhuzamos az összetevőkével. **4.** Mert a két erő nagyságának előjeles összege nulla. Nem, mert van forgatónyomatékuk.

F.: 1. $F = 100$ N; A nagyobb erő hatásvonalától 20 cm-re, a két összetevő erő hatásvonala között. **2.** $F_1 = 80$ N; $k_1 = 20$ cm. **3.** $F_2 = 33$ N. A két összetevő erő hatásvonala között. **4.** A nagyobb erő hatásvonalától 16 cm-re; $F_1 = 50$ N. **5.** $F_1 = 562{,}5$ N; $F_2 = 337{,}5$ N. **6.** $F = 60$ N; A nagyobb erő hatásvonalán kívül 33,33 cm-rel. **7.** $F_{\text{vég}} = 40$ N; $F = 140$ N.

12.2.Tömegközéppont és súlypont. Egyensúlyi helyzetek (128. o.)

G.k.: 1. Nincs. **2.** Úgy, hogy az erő hatásvonala menjen át a tömegközépponton. **3.** Igen, a gyurma felé tolódik el. **4.** Igen, a tömegközéppontra szimmetrikusan. **5.** Igen, pl. a gyűrűnél. **6.** A gömb középpontjában, a kocka és a téglatest testátlóinak metszéspontjában, a henger szimmetriatengelyeinek metszéspontjában. Mint az előbb

felsorolt tömör testeknél. A gyűrűn kívül, a külső vagy belső kör középpontjában, a csőhossz felénél levő kis- és nagytengely metszéspontjában, a téglalap alakú darabokra bontott részek tömegközéppontjai közötti szakaszon, a tömegek arányában, a nagyobb tömegű részhez közelebb. A súlyvonalak metszéspontjában, a rétegvastagság felénél. **7.** Igen. Igen. Nem. Nem. **8.** Az ív alakúra meghajlított test tömegközéppontja az ív belseje felé tolódik el. Így magasugrás közben a versenyző tömegközéppontja a léc alatt megy át. **9.** Az emelőkarral ellentétes oldalra nagy tömegű vas- vagy betonhasábokat erősítenek. **10.** Az üres, gömb alakú „hasának" alsó részébe belülre nehezéket ragasztanak. **11.** Mert ott van a seprű tömegközéppontja.

III. FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK MECHANIKÁJA

2. A SZILÁRD TESTEK, A FOLYADÉKOK ÉS A GÁZOK NYOMÁSA (142. o.)

G.k.: 1. Nő. **2.** A legnagyobbra. **3.** Mert az éles késnél kisebb a nyomott felület. **4.** Azért, hogy nagyobb legyen a nyomott felület és ne süllyedjenek el még a laza talajba sem. **5.** Mert így a test lassítása hosszabb ideig tart és kisebb lesz a nyomóerő. **6.** A külső légnyomás miatti erőhatás kiegyenlíti a pohárban lévő vizet érő gravitációs hatást. Ez addig tart, míg a pohárba levegő nem jut be. Egyre nehezebben lehet emelni a poharat. **7.** Mert ott nagyobb nyomóhatást kell, hogy kibírjanak. **8.** Nincs. **9.** A hegy lábánál, mert ott nagyobb a levegő rétegvastagsága és a sűrűsége is. **10.** Nulla. **11.** Azért, mert csökken a bura alatti nyomás és így a léggömbben levő levegő változatlan nyomással addig növeli a léggömb térfogatát, míg a két nyomás ismét egyenlő nem lesz. **12.** Mert a belső nyomás egyensúlyt tart a külső légnyomással. **13.** A levegő részecskéinek állandó, megállíthatatlan nyüzsgése, mozgása miatt. **14.** A nagy nyomás miatt.

F.: 1. 20 Pa; **2.** 12 000 N; **3.** 0,001 m^2 = 1 mm^2. **4.** 40 000 Pa; 20 000 Pa. **5.** Háromszor. **6.** 16 000 Pa. Nem, csak a rétegvastagság kellett volna. **7.** 30 000 Pa; 94 000 N. **8.** A külső légnyomás miatt, ha nincs levegő a palackban. A súlytalanság miatt.

3. FELHAJTÓERŐ. ARKHIMÉDÉSZ TÖRVÉNYE (146. o.)

G.k.: 1. Az első esetben. A második esetben kétszer akkora, mint az elsőben. **2.** A vízben. A víz sűrűsége nagyobb, mint az olajé. Az olajban kell nagyobb tartóerő, mert kisebb a felhajtóerő. **3.** Az egyik végére nehezéket erősítve és egyenlő távolságban jeleket rajzolni rá. **4.** Egyenlők. Nem. **5.** A vasból készült testnél, mert kisebb a térfogata. **6.** 1 N. Nem, csak kevésbé merül el a sós vízben. Lefelé irányulóval. A teljes merülésnél fellépő felhajtóerő és a test súlyának különbségeként. **7.** Igen, csökken. Felemelkedik. Nem. **8.** Igen, amíg a gömbökben levegő van. **9.** Csökken. **10.** Alulról felfelé a sorrend: higany, víz, olaj. **11.** A vas igen, a fa nem. **12.** Igen, mert megemelkedik a víz felszíne. **13.** Nem, mert nem változik a víz és a jég együttes tömege és így a súlya. **14.** Az elmerülő test által a vízre kifejtett erőhatás. A kiegyensúlyozott mérlegen levő, vizet tartalmazó pohárba lógatni a rugós erőmérőre akasztott testet.

F.: 1. 4000 N; **2.** 75 N; $\rho = 2{,}7\ \frac{kg}{dm^3}$. **4.** p = 10 kPa; 15 kPa. **5.** Üreges.

4. KÖZLEKEDŐEDÉNYEK. HAJSZÁLCSÖVEK, MOLEKULÁRIS ERŐK (150. o.)

G.k.: 1. Mert az alá csökken először a vízszint, ha nem pótolják a fogyasztást. **2.** Nem, mert a földszinten nagyobb a rétegvastagság és így a nyomás is. **3.** Pl. a másik szárba belefújunk. **4.** Nem, a pohár falánál körben egy kis távolságig felemelkedik a molekuláris vonzás miatt. **5.** Mert a zsíros felület nem tartja magánál és nem szívja be a hajszálcsöveibe a tintát (molekuláris erőviszonyok). **6.** Azért, hogy elzárják a hajszálcsöveket és ne tudjon felszivárogni a víz a falban. **7.** Nehezíti a talaj kiszáradását, mert csökkenti a hajszálcsövességet. **8.** Azért, mert csak akkor cseppen le, ha a súlya nagyobbra növekszik, mint a molekuláris tartóerő. **9.** Azért, mert a tollaik zsírosak és lepereg róluk a víz. A vízimadarak a farkuknál levő zsírmirigyből csőrükkel átkenik tollukra a zsírt.

5. GÁZOK ÉS FOLYADÉKOK ÁRAMLÁSA (154. o.)

G.k.: 1. A nyomáskülönbség miatt. **2.** A kisebb nyomású hely felé. **4.** Felhők, friss levegő elmozgatására, erőművek meghajtására stb. **5.** A felgyorsuló víz messzebbre jut el. **6.** A tető felett gyorsabb a levegő áramlása, mint a padláson állóé. Ezért, ha elég nagy a szél sebessége, a cserepek egyik vége megemelkedik, és a szél lesodorja azokat. **7.** Más ok miatt jönnek létre (sűrűségkülönbség, nyomáskülönbség). **8.** Nagyobb sebességű áramlás, kisebb nyomás következtében a folyadék felemelkedik és az áramló levegő lesodorja, porlasztja is azt. **9.** Nagyobb legyen a felhajtóerő és kisebb a közegellenállás. Zsukovszkij-profil. **10.** Nem lehet, mert a kiáramló levegő miatt a tölcsér belsejében kisebb lesz a nyomás, mint kívül. **11.** A légáramlatban kisebb a nyomás, mint a nyugvó környezetben, és így a labda a légáramlatban marad (érdemes kipróbálni).

IV. ENERGIA, MUNKA

2. ENERGIAVÁLTOZÁS MUNKAVÉGZÉS KÖZBEN

2.1. A munka kiszámítása (165. o.)

G.k.: 1. Nem. **2.** Nem. **3.** Nem. **4.** A nehézségi erő és a tartóerő. Nem, mert merőlegesek az elmozdulás irányára. **5.** Nem, mert merőleges a mozgás irányára. Nem, mert sem a tömeg, sem a sebesség nagysága nem változik. Mind a lendület, mind a mozgásállapot változik, mert változik a sebességvektor iránya. **6.** A húzó-, nehézségi, a tartó- és a súrlódási erő. A húzó- és a súrlódási erő. A húzóerő munkája pozitív, a súrlódásié negatív. Mert a testet érő erők munkájának összege nulla. Igen, a vontatónak csökken, és a súrlódás miatt, a két érintkező test belső energiája pedig nő. **7.** Nem. **8.** Pozitív. **9.** A feldobott test és a gravitációs mező. Emelkedés közben a nehézségi erő munkája negatív, és így a test mozgási energiája csökken. Esésnél a nehézségi erő munkája pozitív, így a test mozgási energiája nő. Emelkedéskor a test mozgási energiája csökken, a gravitációs mezőjé nő. Eséskor fordítva. Nem. **10.** Tömegpont esetén az egyes erőhatások által végzett munka összege egyenlő az eredő erő munkájával. **11.** A vízhez igen, a parthoz nem. Igen.

F.: 1. $W = 30\,000$ J. **2.** $s = 200$ m. **3.** $F = 60$ N. **4.** $W = 4800$ J. **5.** $W = 3300$ J. **6.** $W = 36$ kJ. **7.** $W = 40$ J.

2.2. A mozgási energia kiszámítása. A munkatétel (169. o.)

G.k.: 1. Emelkedés közben csökken, esésnél nő. Emelkedésnél negatív, mert az erő iránya ellentétes a mozgás irányával. Esés közben pozitív, mert a két irány megegyezik. **2.** Csökken, illetve nő. **3.** Nem. **4.** Nem, mert a tömeg és a sebesség négyzete is mindig pozitív. **5.** Mindkettő kétszeres. **6.** A lendület kétszeres, a mozgási energia négyszeres. **7.** A két kocsi lendülete egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú. A $2m$ tömegű kocsi mozgási energiája fele az m tömegűnek. A két kocsi mozgási energiájának összege egyenlő a rugó rugalmas energiájának csökkenésével. **8.** Csökken. A golyó és a fal belső energiája. A golyó mozgási energiájának változása negatív, a belső energiáké pozitív. A mozgási energia csökkenésének nagysága egyenlő a belső energiák növekedésének összegével. **9.** Különböző. Más a vonatkoztatási rendszer, így ott más a test sebessége.

F.: 1. *a)* $W = 100$ J; $\Delta E_{m_1} = 100$ J; Nem. *b)* Nem, hiszen az inerciarendszer megválasztásától függ, hogy a testet nyugvónak, vagy egyenes vonalon egyenletesen mozgónak tekintjük-e. *c)* $v_1 = 14{,}14\ \frac{m}{s}$; $I_1 = 14{,}14\ \text{kg} \cdot \frac{m}{s}$; $\Delta E_{m_2} = \Delta E_{m_1} = 100$ J; $v_2 = 7{,}07\ \frac{m}{s}$; $I_2 = 28{,}28\ \text{kg} \cdot \frac{m}{s}$. **2.** $W = 5000$ J; $\Delta E = 5000$ J. Igen, mert az 5 másodperc alatt megtett út hossza függ a gyorsulástól, ami azonos erőhatás esetén függ a test tömegétől. **3.** Ellentétes. $W = -50$ J; $\Delta E_m = -50$ J. **4.** $E_m = 750$ kJ; $F = 1875$ N. **5.** $E_m = 16\,000$ J; $F_{gy} = 20\,000$ N; $W_s = 16\,000$ J; $F_{fék} = 40\,000$ N. **6.** $v = -8\ \frac{m}{s}$; $E_{m_p} = 160$ J; Igen, mert az $I_{golyó} = 40\ \text{kg} \cdot \frac{m}{s}$ és az $I_p = -40\ \text{kg} \cdot \frac{m}{s}$, tehát az összegük nulla, mint az elsütés előtt. A lőpor kémiai változása közben annyival csökkent a lőpor energiája, mint amennyivel nőtt a golyó és a puska mozgási energiájának összege. **7.** $W = 42$ J.

2.3. Feszítési munka. Rugalmas energia (172. o.)

G.k.: 1. Nem. A feszítési munka a rugalmas és a belsőenergia-növekedés összegével egyenlő. **2.** A feszítés folyamatában nem, a feszítés befejeztével igen. Elhanyagolható a tömege. **3.** Nagyságban és előjelben is egyenlő. Nagyságban egyenlő, de előjelében ellentétes. **4.** Egyenlő, mert az elvágáskor kapott rugók rugóállandója kétszer akkora, mint az eredeti rugóé. **5.** A két rugó megnyújtásánál külön végzett munkák összege egyenlő a sorba akasztott két rugó 20 cm-es megnyújtásánál végzett munkával. A sorba kötött két egyforma rugó rugóállandója fele az egyikének, így 20 cm-rel lehet ugyanakkora erővel megnyújtani, mint az egyik rugót 10 cm-rel. A 20 cm-es együttes megnyújtásnál mindkét rugó 10 cm-rel nyúlik meg. **6.** Az erősebb rugón végzett feszítési munka nagyobb, mert nagyobb erővel lehetett ugyanannyival összenyomni. **7.** $\Delta\ell_1 = -5$ cm; $\Delta\ell = 5$ cm; A rugalmas energia mindkét rugónál egyenlő nagyságú és pozitív előjelű. **8.** Nem, mert a rugóállandó is és a megnyúlás négyzete is mindig pozitív. **9.** $W_2 = 3W$.

F.: 1. $W = 1{,}25$ J. **2.** $W = 80$ J. **3.** $W = 1{,}225$ J. **4.** $\Delta\ell = 0{,}08$ m; $W = 16$ J; $E_r = 16$ J; $W_r = 16$ J. **5.** $\Delta E_{m_2} = 1$ J. **6.** $E_r = E_{m_1} + E_{m_2}$; $\Delta\ell = 4{,}74$ cm. **7.** $\Delta E_r = 15$ J.

2.4. Az emelési munka és a helyzeti (magassági) energia (177. o.)

G.k.: 1. Eséskor a helyzeti energia csökken, a mozgási energia nő. Ütközés közben a rugalmas energia és a belső energia nő, a mozgási energia csökken. A belső energia növekedése a rugalmas és mozgási energia összegét csökkenti. **2.** Egyenlő. **3.** Gyalogláskor – minden lépésnél – csak néhány centiméterrel emelkedik meg a testünk, így

a méterenként végzett munka csak tized-, huszadrésze az emelési munkának. **4.** Egyenlő. A gyaloglóé csökken, a gravitációs mezőé (a helyzeti energia) pedig nő.

F.: 1. $W_e = 200$ kJ; $E_h = 200$ kJ. **2.** $W = 6$ kJ; E_h; E_m. **3.** $h = 2$ m. **4.** $m = 12$ kg. **5.** $F_1 = 1000$ N; $F_2 = 1050$ N. **6.** $s = \frac{v_0^2}{g} = 10$ m. **7.** *a)* $v_{0_1} = 6{,}32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; *b)* $v_{0_2} = 7{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2.5. A mechanikai energia fogalma és megmaradási tétele (180. o.)

G.k.: 1. $\frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_0}^2 = m \cdot g \cdot h$, amiből adódik: $h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$. A mozgási és a helyzeti energia is egyenesen arányos a tömeggel. **2.** $W_e = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$; $E_h = m \cdot g \cdot h$. **3.** Azért, hogy ne csak az izomerejük munkájával növekedjen a helyzeti energia, hanem a mozgási energiájukkal is. **4.** Igen, mert a mozgólépcső ferdén emelkedik, és így a rajta felfutó egyre magasabbra kerül, tehát nő a rendszer helyzeti energiája. Igen, mert ez gyorsítási munkával jár. **5.** Igen, mert a már feszülő rugót csak nagyobb erővel lehet tovább nyújtani, mint a lazát. **6.** Nem, négyszer annyit. Nem, négyszer annyira. **7.** Az $m \cdot g \cdot (h - h_1)$ helyzeti energia előbb „átalakul" a test mozgási energiájává, majd a rugó rugalmas energiájává. Amikor $v = 0$, akkor $E_m = 0$, és $E_r = m \cdot g \cdot (h - h_1)$. **8.** Azért, mert a súrlódási munka eredménye mint belső energia „szétszóródik" a súrlódó testek részecskéi között, ezért önként nem adódhat vissza. **9.** Csökken.

F.: 1. $h = 45$ m. A mozgási és helyzeti energia is egyenesen arányos a tömeggel, és így az egyenlőségüket leíró egyenlet osztható a tömeggel. Igen. **2.** $h_1 = 2{,}5$ m. **3.** $E_{m_1} = 2500$ J; $v = 14{,}14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **4.** $E_m = 0{,}5$ J; $v = 0{,}71 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **5.** $h = 5$ m. **6.** *a)* $v_1 = 4{,}47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; *b)* $v_2 = 3{,}62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3. TELJESÍTMÉNY, HATÁSFOK (183. o.)

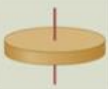
G.k.: 1. $P_1 = 2P_2$. Az első motor ötször annyi ideig dolgozott, mint a második. **3.** *a)* Ha P = állandó, akkor $\Delta E \sim \Delta t$; ha Δt = állandó, akkor $P \sim \Delta E$; *b)* amikor ΔE = állandó, akkor $P \sim \frac{1}{\Delta t}$. **4.** A hasznos energiaváltozás az összes energiaváltozás: *a)* 0,75-szorosa, vagyis 75%; *b)* 0,3-szerese, vagyis 30%. **5.** Igen. A teljesítmény és a hatásfok két különböző szempontból jellemzi a folyamatokat és nem függenek egymástól. **6.** Mert a kerékpározásnak sok ok miatt jobb a hatásfoka, mint a gyaloglásnak. A kerékpározásnál pl: csak a lábak tömegközéppontját kell emelgetni, nem az egész testet; a lábak egyenletesen mozognak, míg a gyaloglásnál lépésenként fel kell gyorsítani és le kell lassítani a lábakat; meghajolva kisebb a közegellenállási erő, mint egyenes járásnál, stb.

F.: 1. $W = 1{,}5$ MJ. **2.** $t = 20$ s. **3.** $P = 166{,}67$ W; $\eta = 0{,}75$. **4.** $P = 60$ kW; $\eta = 0{,}33$. **5.** $\Delta E_b = 1{,}08$ MJ. **6.** $t = 85{,}7$ s. **7.** $\eta_1 = 0{,}25$; $\eta_2 = 0{,}93$. **8.** $\eta = 0{,}24$. **9.** $P = 44{,}44$ kW.

FONTOS FIZIKAI MENNYISÉGEK

Név	Jel	Mértékegység	Név	Jel	Mértékegység
Hosszúság	l	méter (m)	Erő	F	newton (N)
Terület	A	négyzetméter (m^2)	Szögsebesség	ω	$\frac{\text{egy}}{\text{másodperc}}$ $\left(\frac{1}{s}\right)$
Térfogat	V	köbméter (m^3)	Szöggyorsulás	β	$\frac{\text{egy}}{\text{másodpercnégyzet}}$ $\left(\frac{1}{s^2}\right)$
Tömeg	m	kilogramm (kg)	Forgatónyomaték	M	newton · méter (N · m)
Sűrűség	ρ	$\frac{\text{kilogramm}}{\text{köbméter}}$ $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	Energia	E	joule (J)
Idő	t	másodperc (s)	Mozgási energia	E_m	
Hőmérséklet	T	Celsius-fok (°C)	Helyzeti energia	E_h	
Út	s	méter (m)	Rugalmas energia	E_r	
Szögelfordulás	$\Delta\varphi$	radián (rad)	Munka	W	
Sebesség	v	$\frac{\text{méter}}{\text{másodperc}}$ $\left(\frac{m}{s}\right)$	Hő	Q	
Gyorsulás	a	$\frac{\text{méter}}{\text{másodpercnégyzet}}$ $\left(\frac{m}{s^2}\right)$	Teljesítmény	P	watt (W)
Lendület	I	kilogramm $\cdot \frac{\text{méter}}{\text{másodperc}}$ $\left(kg \cdot \frac{m}{s}\right)$	Hatásfok	η	–

NÉHÁNY SZABÁLYOS ALAKÚ, HOMOGÉN TEST TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKA

Test	Tengely	Tehetetlenségi nyomaték	Test	Tengely	Tehetetlenségi nyomaték
m tömegű, r sugarú **gyűrű** (vagy vékony falú cső)		$\Theta = m \cdot r^2$	m tömegű, l hosszúságú vékony **pálca**		$\Theta_1 = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
m tömegű, r sugarú **gyűrű** (vagy vékony falú cső)		$\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r^2$	m tömegű, l hosszúságú vékony **pálca**		$\Theta_2 = \frac{1}{3} m \cdot l^2$
m tömegű, r sugarú tömör **henger**		$\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r^2$	m tömegű, a élű **kocka** középpontján átmenő bármely tengelyen		$\Theta = \frac{1}{6} m \cdot a^2$
m tömegű, r sugarú tömör **gömb**		$\Theta = \frac{2}{5} m \cdot r^2$	m tömegű egyenes **kúp** alaplapjának r sugara		$\Theta = \frac{3}{10} m \cdot r^2$

Új szakszavak jegyzéke

Középszint

adhézió, adhéziós erő 148
állásszilárdság 127
általános tömegvonzási törvény 108
anyagi pont 10
áramlás 151
átlagsebesség 21
belső energia 178
bizonytalan egyensúlyi helyzet 127
biztos egyensúlyi helyzet 127
centripetális erő 88
centripetális gyorsulás 38
csúszási súrlódási erő 100
csúszási súrlódási erőtörvény 101
dinamika alapegyenlete 86
dinamika II. axiómája 79
dinamikai felhajtóerő 153
egyenletes mozgás 13
egyensúly 84
ellenerő 82
elmozdulás 15
elmozdulásvektor 15, 22
energia 162
energiamegmaradás törvénye 161
eredő elmozdulás 16
eredő erő 84
eredő sebesség 16
erő 76, 82
erőhatás 76
erőhatások függetlenségének elve 86
erőkar 111, 118
erőpár 123
erőtörvény 97
erővektor 78
felületi feszültség 149
feszítési munka 171
fordulatszám 36
forgás 36
forgásállapot 61
forgási egyensúly 117
forgatónyomaték 117
forgómozgás 10
frekvencia 35
függőleges hajítás 32
geocentrikus világkép 48
gördülési súrlódási együttható 102
gördülési súrlódási erő 102
gravitációs állandó 108
gyorsítási munka 167
gyorsulás 26
gyorsuló mozgás 26
gyorsuló vonatkoztatási rendszer 62
haladó mozgás 10
hatás-ellenhatás törvénye 82
hatásfok 181
hatásvonal 78
heliocentrikus világkép 48
helyettesítő erőhatás 84
helyvektor 15
helyzeti energia 175
inerciarendszer 62
keringési idő 36
kerületi sebesség 37
kohézió, kohéziós erő 148
kontinuitási egyenlet 152
konzervatív erő 179
koordináta-rendszer 12
körmozgás 36
közegellenállás, közegellenállási erő, közegellenállási tényező 103
közömbös egyensúlyi helyzet 127
lendület 71
lendületmegmaradás törvénye 73
lineáris erőtörvény 98
magassági energia 175
mechanikai energia 178
mechanikai energia megmaradásának törvénye 179
mechanikai kölcsönhatás 82
mennyiség 10
merev test 10
mértékegység 10
molekuláris erő 148
mozgásállapot 71
mozgási energia 167
munka 162
munkatétel 168
munkavégzés 160
négyzetes úttörvény 27
nehézségi erő és erőtörvény 106
nehézségi gyorsulás 31, 106
Newton II. törvénye 79
newton (N) 60
Newton-féle gravitációs erőtörvény 108
összetett mozgás 10
pálya 11
periodikus mozgás 35
periódusidő 35
pillanatnyi sebesség 21
pillanatnyi sebességvektor 22
rugalmas energia 171
rugalmas ütközés 65
rugóállandó 98
sebesség 12
súlypont 127
súlyvonal 126
súrlódás 100
sűrűség 69
szabadesés 30
számérték 10
szögelfordulás 41
szögsebesség 42
támadáspont 78
tapadási súrlódás 101
tapadási súrlódási együttható 102
tapadási súrlódási erő 101
tapadási súrlódási erő legnagyobb értéke 102
tehetetlenség és törvénye 60
teljesítmény 161, 181
tömeg 60
tömegközéppont és tétele 126
út 11
vektor 14
viszonylagos 11
vízszintes hajítás 32
vonatkoztatási pont 11
vonatkoztatási rendszer 11, 62
zárt rendszer 72

Emelt szint

átlagszögsebesség 45
forgási energia 168
gravitációs térerősség 107
hosszgyorsulás 28
iránygyorsulás 28
kényszererő 91
kényszer és kényszermozgás 91
pálya menti gyorsulásvektor 46
perdület 114
perdületmegmaradás törvénye 115
pillanatnyi szögsebesség 45
szabad mozgás és szabaderő 91
szöggyorsulás 45
tehetetlenségi nyomaték 111
változó forgómozgás 45

Kiadja a Mozaik Kiadó, Szeged • Telefon: (62) 470-101, (62) 554-660
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Aggod István
Terjedelem: 17,88 (A/5) ív • 2024. április • Tömeg: 346 g • Raktári szám: MS-2615U