2021. évi Mikola 2. forduló megoldásai:
I. kategória, 9. gimnázium

1)

Megoldás:

Két lehetőség áll fenn.
Első eset: a $t_1 = 6$ s-nál a test a jeltől távolódik.
Második eset: a $t_1 = 6$ s-nál a test a jelhez közeledik.

Első eset.

a)

Legyen a pontszerű test gyorsulása a, sebessége a t_1 időpillanatban v_0! A megtett utakra igaz:

$$x_2 - x_1 = v_0(t_2 - t_1) + \frac{a}{2}(t_2 - t_1)^2,$$
$$x_3 - x_1 = v_0(t_3 - t_1) + \frac{a}{2}(t_3 - t_1)^2.$$

Ezekből:

$$v_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - \frac{a}{2}(t_2 - t_1),$$
$$v_0 = \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} - \frac{a}{2}(t_3 - t_1).$$
$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - \frac{a}{2}(t_2 - t_1) = \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} - \frac{a}{2}(t_3 - t_1).$$

Ebből a keresett gyorsulás:

$$a = \frac{2}{t_3 - t_2} \cdot \left(\frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right),$$
$$a = \frac{2}{5\text{ s}} \cdot \left(\frac{322\text{ cm}}{7\text{ s}} - \frac{72\text{ cm}}{2\text{ s}}\right) = 4\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

b)

$$v_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - \frac{a}{2}(t_2 - t_1) = \frac{72\text{ cm}}{2\text{ s}} - 2\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{ s} = 32\ \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$
$$v_3 = v_0 + a(t_3 - t_1) = 60\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Második eset.

a)

A megtett utakra most a következő igaz:

$$x_2 + x_1 = v_0(t_2 - t_1) + \frac{a}{2}(t_2 - t_1)^2,$$
$$x_3 + x_1 = v_0(t_3 - t_1) + \frac{a}{2}(t_3 - t_1)^2.$$

Ezekből:

$$v_0 = \frac{x_2 + x_1}{t_2 - t_1} - \frac{a}{2}(t_2 - t_1),$$

$$v_0 = \frac{x_3 + x_1}{t_3 - t_1} - \frac{a}{2}(t_3 - t_1).$$
$$\frac{x_2 + x_1}{t_2 - t_1} - \frac{a}{2}(t_2 - t_1) = \frac{x_3 + x_1}{t_3 - t_1} - \frac{a}{2}(t_3 - t_1).$$

Ebből a keresett gyorsulás:

$$a = \frac{2}{t_3 - t_2} \cdot \left(\frac{x_3 + x_1}{t_3 - t_1} - \frac{x_2 + x_1}{t_2 - t_1}\right),$$
$$a = \frac{2}{5\text{ s}} \cdot \left(\frac{378\text{ cm}}{7\text{ s}} - \frac{128\text{ cm}}{2\text{ s}}\right) = -4\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

b)

$$v_0 = \frac{x_2 + x_1}{t_2 - t_1} - \frac{a}{2}(t_2 - t_1) = \frac{128\text{ cm}}{2\text{ s}} + 2\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{ s} = 68\ \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$
$$v_3 = v_0 + a(t_3 - t_1) = 40\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

2)

Megoldás:

a)

A mozgás második szakaszán csak a súrlódási erő fékezi a testet, így annak gyorsulása:

$$a_2 = \frac{-\mu mg}{m} = -\mu g = -3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A mozgás első szakaszán ugyanekkora a gyorsulás, csak pozitív. (A sebességváltozások nagysága és az eltelt idők egyenlőek.) $a_1 = +\mu g = 3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

b)

A test $v = a_1 \cdot \Delta t = 6\text{ m/s}$ sebességre gyorsul fel.

c)

Az első esetben a test által megtett út: $s_1 = 2 \cdot \frac{v \cdot \Delta t}{2} = v \cdot \Delta t = 12\text{ m}$.

Az első eset mindkét szakaszára írjuk fel a lendülettételt:

$$(F - \mu mg) \cdot \Delta t = m \cdot v,$$
$$\mu mg \cdot \Delta t = m \cdot v.$$

A két egyenletből következik: $F = 2 \cdot \mu mg$.

A második eset gyorsítási szakaszára alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét:

$$2F - \mu mg = ma_3,$$
$$2 \cdot 2\mu mg - \mu mg = ma_3,$$
$$a_3 = 3 \cdot \mu g = 9\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A gyorsítás ideje: $\Delta t^* = \dfrac{v}{\alpha_3} = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{s}$.

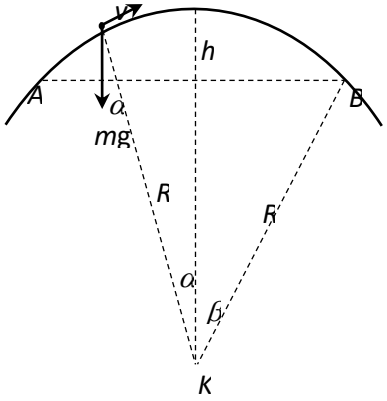
Az második esetben a test által megtett út:

$$s_2 = \frac{v\cdot\Delta t^*}{2} + \frac{v\cdot\Delta t}{2} = \frac{v}{2}\cdot\left(\Delta t^* + \Delta t\right) = \frac{6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\,\mathrm{s} + 2\,\mathrm{s}\right) = 8\,\mathrm{m}.$$

3)

Megoldás:

Adatok: $\beta = 30°$, $R = 0{,}1$ m.



A szükséges minimális sebesség a mechanikai energia megmaradásából határozható meg:

$$\frac{1}{2}mv_{min}^2 = mgh = mgR\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \rightarrow \quad v_{min} = \sqrt{gR\left(2-\sqrt{3}\right)} \approx 1{,}64\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

A feltétel szerint a test nem válhat el a pályától, ezért minden helyzethez tartozik egy maximális sebesség, amellyel az adott pontban mozoghat. Az α szöggel jellemzett helyen ez a maximális sebesség a következőképpen határozható meg:

$$m\frac{v_\alpha^2}{R} = mg\cos\alpha \quad \rightarrow \quad v_\alpha = \sqrt{gR\cos\alpha}.$$

Mivel a koszinusz szögfüggvény értéke a szög csökkenésével növekszik, ezért

$$v_{max} = \sqrt{gR\cos\alpha_{max}} = \sqrt{gR\cos\beta} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 2{,}94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ekkora kezdősebesség esetén még végigcsúszhat a pályán, mivel a pálya tetőpontja felé haladva az adott pontban megengedett maximális sebesség növekszik, ugyanakkor a test sebessége csökken.

$$1{,}64\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} < v < 2{,}94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

4)

Megoldás:

A korong mozgására alkalmazzuk a munkatételt:

$$\sum W = \Delta E_{\text{mozgási}},$$

$$-\mu_1 mg \cdot s_1 - \mu_2 mg \cdot s_2 = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 .$$

a)

Kisebb átalakítás után kapjuk:

$$2\mu_1 g \cdot s_1 + 2\mu_2 g \cdot s_2 = v_0^2 .$$

A második adatsor értékeit behelyettesítve kapjuk:

$$v_0 = \sqrt{2\mu_1 g \cdot s_1} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

b)

A munkatétel alkalmazásaként kapott egyenletből fejezzük ki μ_2 –t, majd az első adatsor értékeit helyettesítsük be:

$$\mu_2 = \frac{v_0^2 - 2\mu_1 g \cdot s_1}{2 g \cdot s_2} = \frac{v_0^2}{2 g \cdot s_2} - \frac{s_1}{s_2} \cdot \mu_1 = \frac{\left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}00\ \text{m}} - \frac{0{,}75\ \text{m}}{1{,}00\ \text{m}} \cdot 0{,}2 = 0{,}3 .$$

c)

Alkalmazzuk a munkatételt csak az s_1 útra:

$$-\mu_1 mg \cdot s_1 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 .$$

Fejezzük ki határvonalon áthaladó korong v sebességét, majd helyettesítsük be az ismert értékeket:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_1 g \cdot s_1} = \sqrt{\left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 2 \cdot 0{,}2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}75\ \text{m}} \approx 2{,}45 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

II. kategória, 10. gimnázium

1)

Megoldás:

A versenybizottság ennek a feladatnak a kitűzésével köszönti a 2021-ben 90 esztendős Wiedemann László Tanár Urat.

A felső holtponton való áthaladáskor a testre csak a nehézségi erő hat, az okozza a test centripetális gyorsulását:

$$F_{\text{neh}} = m \cdot a_{\text{cp}},$$

$$m \cdot g = m \cdot \frac{v_0^2}{R},$$

$$g = \frac{v_0^2}{R}. \qquad (1)$$

Legyen a test sebessége a körpálya centrumának R magasságában v. Erre a helyzetre és a felső holtpontra alkalmazzuk az energiamegmaradás törvényét:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR.$$

Rendezés után:

$$v^2 = v_0^2 + 2gR. \qquad (2)$$

Amikor a test a körpálya centrumának R magasságában halad, két erő hat rá.

Sugár irányban (vízszintes irányban): $F_{\text{x}} = F_{\text{ny}} = ma_{\text{cp}} = m \cdot \frac{v^2}{R}$.

Az (1) és (2) felhasználásával:

$$F_{\text{ny}} = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot \frac{v_0^2 + 2gR}{R} = m \cdot \frac{gR + 2gR}{R} = 3mg.$$

Érintő irányban (függőlegesen lefelé): $F_{\text{y}} = F_{\text{neh}} = m \cdot g$.

A vizsgált helyzetben a testre ható eredő erő:

$$\sum F = \sqrt{F_{\text{x}}^2 + F_{\text{y}}^2} = \sqrt{10} \cdot mg.$$

2)

Megoldás:

a)

A hidrosztatikai nyomás a kád oldallapja mentén lefelé haladva lineárisan nő.

A víz tetején $p_{\text{fent}} = 0$ Pa, a lap legaljánál $p_{\text{lent}} = \rho hg = 1000$ Pa. Az oldallapra ható erőt kiszámíthatjuk a két nyomás számtani közepét véve.

Ez a nyomás éppen az oldallap középvonalánál ható nyomás:

$$p_{\text{átlag}} = \frac{p_{\text{lent}} + p_{\text{fent}}}{2} = 500 \text{ Pa}.$$

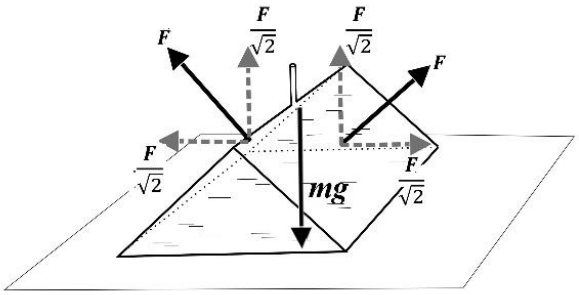
Az oldallap területe: $A = 0{,}1 \text{ m} \cdot \sqrt{2} \cdot 0{,}4 \text{ m} = 0{,}05657 \text{m}^2$.

A nyomóerő: $F = p_{\text{átlag}} \cdot A = 28{,}29$ N.

b)

Ennél a jelenségnél a levegő nyomásától ismét eltekinthetünk, hisz az kívülről közvetlenül, belülről pedig a vízen keresztül fejti ki hatását. A lap tetejénél ismét $p_{\text{fent}} = 0$ Pa, az aljánál $p_{\text{lent}} = \rho h g = 1000$ Pa lesz a nyomás.

$p_{\text{átlag}} = \frac{p_{\text{lent}} + p_{\text{fent}}}{2} = 500$ Pa.



Az egyik oldallapra ható nyomóerő: $F = p_{\text{átlag}} \cdot A = 28{,}285$ N.

Amikor a két lapra ható nyomóerő függőleges komponenseinek összege megegyezik a nehézségi erővel, az edény már nem nyomódik a talajhoz, a víz kifolyik az edény alól.

Tehát

$$mg = 2\frac{F}{\sqrt{2}} = 40 \text{ N}.$$

Az edény tömege 4 kg.

c)

Ha az edénybe olajat töltünk, akkor fog a kád megemelkedni, amikor az oldallapokra ható nyomóerő ismét $F = p_{\text{átlag}} \cdot A = 28{,}29$ N nagyságú lesz. Ez akkor következik be, amikor a lapokra ható átlagos nyomás, ami a lapok középvonalának magasságában, a kifolyónyílás alatt 5 cm mélységben uralkodik, 500 Pa nagyságú lesz. Ehhez az kell, hogy e fölött a szint fölött $h = \frac{p}{\rho g}$ magasságú folyadékoszlop legyen, azaz

$$h = \frac{500 \text{ Pa}}{800\text{kg/m}^3 \cdot 10\text{m/s}^2} = 0{,}0625 \text{ m}$$

magasan álljon a folyadék.

Vagyis a csőben a kifolyónyílás fölött még 1,25 cm magas folyadékoszlop lesz.

3)

Megoldás:

Legyen a gáz térfogata a *C* állapotban $V_C = xV_0$, ekkor a nyomása a feltételek miatt $p_C = xp_0$.

Az egyesített gáztörvényből:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{xp_0 \cdot xV_0}{9T_0},$$

$$x = 3.$$

Ennek felhasználásával:

$$V_B = V_0 + (3V_0 - 2{,}5V_0) = 1{,}5V_0.$$

Gay-Lussac I. törvényéből:

$$\frac{1{,}5V_0}{T_B} = \frac{3V_0}{9T_0},$$

$$T_B = 4{,}5T_0 = 900\ \text{K}.$$

Gay-Lussac I. törvényéből:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{2{,}5V_0}{T_D},$$

$$T_D = 2{,}5T_0 = 500\ \text{K}.$$

A gáz térfogata és nyomása paralelogramma átlóinak metszéspontjához tartozó állapotban:

$$p_O = \frac{p_0 + 3p_0}{2} = 2p_0,$$

$$V_O = \frac{V_0 + 3V_0}{2} = 2V_0,$$

Az egyesített gáztörvényből:

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{2p_0 \cdot 2V_0}{T_O},$$

$$T_O = 4T_0 = 800\ \text{K}.$$

4)

Megoldás:

a)

1. módszer:

A vizsgált P pont a két lemez közötti tér szimmetria középpontja. A két lemezen lévő elemi ponttöltések közül választhatunk egyet-egyet úgy, hogy azok helyei a P pontra nézve középpontosan szimmetrikusan helyezkednek el. Így egy ilyen töltéspár által okozott elektromos térerősség a P pontban nulla. Ebből következik, hogy az összes ilyen töltéspár által okozott térerősség is nulla.

2. módszer:

Az elektromosan töltött lemez terének elektromos térerősségét a Gauss-étellel (Maxwell I. tv.) határozhatjuk meg az ismert módon. A lemezek közötti tartományban a szuperpozíciót alkalmazva:

$$\text{a lapok között } \Sigma E = E - E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} = 0\ \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

b)

1. módszer: (munkatétel használatával)

A lapok között akkor lesz a távolság minimális, amikor a sebességük egy pillanatra egyenlővé válik. A lendület megmaradásának törvényét alkalmazva:

$$\boldsymbol{\Sigma I} = \text{áll.},$$

$$m_1\, v_0 = (m_1 + m_2)v_k\ ,$$

$$\frac{m_1 v_0}{m_1+m_2} = v_\mathrm{k}\ ,$$

$$0{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = v_\mathrm{k}\ .$$

A lapok mozgására alkalmazva a munkatételt:

$$\Sigma W = \Delta E_{\mathrm{kin.}}.$$

A bal oldali lap esetén: $$-EQ\Delta s_1 = \frac{1}{2}\, m_1 v_\mathrm{k}^2 - \frac{1}{2}\, m_1 v_0^2.$$

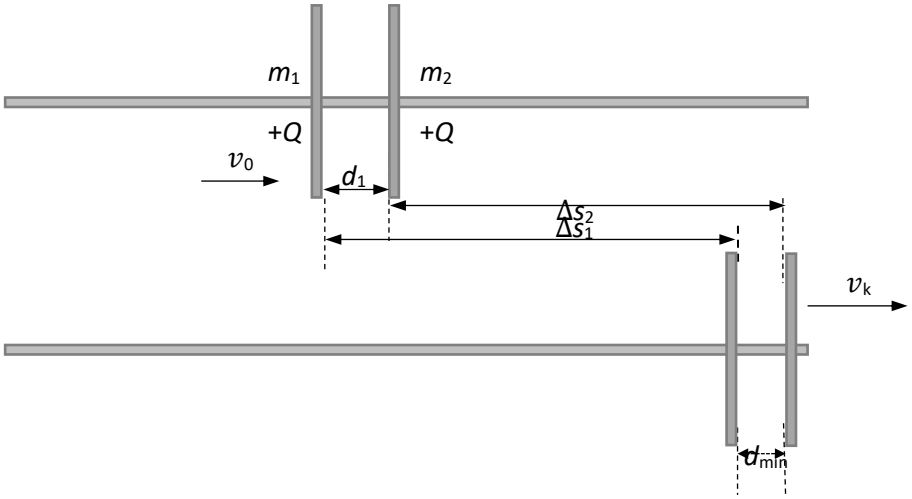
A jobb oldali lap esetén: $$EQ\Delta s_2 = \frac{1}{2}\, m_2 v_\mathrm{k}^2 - 0.$$

A két egyenletet összeadva és a v_k eredményét behelyettesítve:

$$EQ\Delta s_2 - EQ\Delta s_1 = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_0}{m_1+m_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\, m_1 v_0^2,$$

$$EQ(\Delta s_2 - \Delta s_1) = \frac{1}{2}\, v_0^2\ \frac{(-m_1 m_2)}{m_1+m_2}\ .$$

Felhasználva az ábráról leolvasható geometriai feltételt:



$\Delta s_2 + d_1 = \Delta s_1 + d_{\mathrm{min.}}$, vagyis

$\Delta s_2 - \Delta s_1 = d_{\mathrm{min}} - d_1$, így adódik,

$$d_{\mathrm{min}} = d_1 - \frac{v_0^2}{2EQ}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\ .$$

$d_{\mathrm{min}} = 5{,}2\cdot 10^{-2}$ m.

2. módszer: (energia-megmaradás törvényének felhasználásával)

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 (2E)^2 A (d_1 - d_{\min}),$$

ahol az egyenlet jobb oldalán szereplő második tag a mező energia növekedése, ami a mező térfogatának növekedésével magyarázható. A továbbiakban felhasználva:

$$\varepsilon_0 2E A = Q, \text{ adódik az}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{1}{2} 2QE(d_1 - d_{\min}) \text{ egyenlet.}$$

Az egyenletet tovább alakítva:

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_0)^2}{m_1 + m_2} + QE(d_1 - d_{\min}),$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = QE(d_1 - d_{\min}),$$

$$d_{\min} = d_1 - \frac{v_0^2}{2EQ} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

$$d_{\min} = 5{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Az eredmény az előző megoldás eredményével egyezik.

3. módszer (Dinamikai, kinematikai vizsgálattal)

A lapok között akkor lesz a távolság minimális, amikor a sebességük egy pillanatra egyenlővé válik.

Tehát:

$$\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = v_k,$$

$$0{,}2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = v_k.$$

Valamint: $a_2 = \frac{EQ}{m_2} = \frac{5}{4} \frac{m}{s^2}$, $\Delta t = \frac{v_k}{a_2} = 0{,}16\text{s}$, $\Delta s_2 = \frac{a_2}{2} (\Delta t)^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\text{m}$,

$a_1 = \frac{EQ}{m_1} = \frac{5}{2} \frac{m}{s^2}$, $\Delta s_1 = \frac{v_0 + v_k}{2} \Delta t = 6{,}4 \cdot 10^{-2}\text{m}$,

$\Delta s_2 + d_1 = \Delta s_1 + d_{\min.}$, $d_{\min.} = \Delta s_2 + d_1 - \Delta s_1$, tehát $d_{\min.} = 5{,}2 \cdot 10^{-2}\text{m}$.

Az eredmény az előző megoldások eredményével egyezik.

c)

1. módszer:

A b) feladatrész 1., 2. módszerrel való megoldásban elért eredményét használva:

$$d_{\min} = d_1 - \frac{v_0^2}{2EQ}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$, ahol most $m_2 = m - m_1$ a feltétel alapján.

Az m_2 kifejezését behelyettesítve:

$$d_{\min} = d_1 - \frac{v_0^2}{2EQ}\frac{m_1(m - m_1)}{m}.$$

A $d_{\min}$ akkor lesz a legkisebb, ha a második tag a legnagyobb értékét veszi fel, ez akkor következik be, amikor az m_1 függvényében parabolikusan változó számláló a legnagyobb. A szorzatalakból látszik, a parabola zérushelyei $m_1 = 0$ és az $m_1 = m$ helyeken következik be. Felhasználva a parabola szimmetriáját, a parabola maximuma az $m_1 = \frac{m}{2}$ helyen van. Tehát a $d_{\min}$ akkor a legkisebb, ha $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$, tehát a tömegek aránya egy.

2. módszer:

A b) feladatrész 3. megoldásának gondolatait folytatva:

$$d_{\min.} = d_1 + \Delta s_2 - \Delta s_1,$$

$$d_{\min.} = d_1 + \frac{v_k}{2}\Delta t - \frac{v_0+v_k}{2}\Delta t,$$

$$d_{\min.} = d_1 - \frac{v_0}{2}\Delta t.$$

A dinamika alapegyenletét felírva az m_2 tömegre:

$$EQ = m_2\frac{v_k}{\Delta t},$$

$$\Delta t = \frac{m_2 v_k}{EQ}.$$

Ezt az előző egyenletbe írva:

$$d_{\min.} = d_1 - \frac{v_0}{2}\frac{m_2 v_k}{EQ}.$$

A v_k eredményét felhasználva:

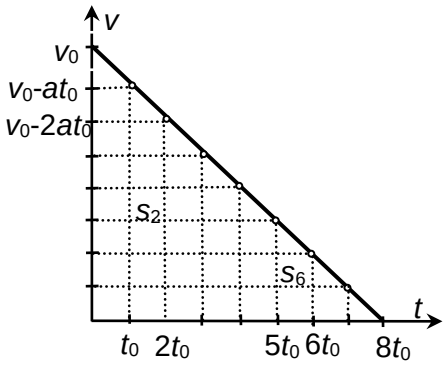
$$d_{\min} = d_1 - \frac{v_0^2}{2EQ}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}.$$

Innen a megoldás már ugyanaz, ami már az 1. módszernél megismertünk.

III. kategória,
akik ebben a tanévben kezdték tanulni a fizikát technikumban

1)
Megoldás:

a) Legyen az autó állandó sebessége v_0, a lassulás a, t_0 = 1 s. Ábrázoljuk az autó mozgását sebesség-idő grafikonon! A lassulást és kezdősebességet egyszerűbben megkaphatjuk, ha a mozgást visszafelé úgy vizsgáljuk, mintha álló helyzetből indult volna az autó a_0 gyorsulással. Ekkor



$$s_6 = \frac{1}{2}a_0(3t_0)^2 - \frac{1}{2}a_0(2t_0)^2,$$

$$a_0 = \frac{2s_6}{5t_0^2} = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Az autó lassulása:

$$a = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) A fékezés előtti állandó sebesség:

$$v_0 = a_0 t = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A megállásig megtett út:

$$s = \frac{1}{2}v_0 t = 80\ \mathrm{m}.$$

c) A második másodpercben megtett út:

$$s_2 = \frac{v_0 - at_0 + v_0 - 2at_0}{2} \cdot t_0,$$

$$s_2 = v_0 t_0 - \frac{3}{2}at_0^2 = 16{,}25\ \mathrm{m}.$$

2)
Megoldás:

a)
A vízszintes szakaszon a gyorsulás:

$$\mu mg = ma,$$
$$\mu g = a,$$
$$a = 1\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A lejtő felületén a gyorsulás:

$$mg\ \sin\alpha = ma,$$
$$g\ \sin\alpha = a,$$

$$a = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b)

1. megoldás (kinematikai)
A függvénytáblázatokban is szerepel, de könnyen levezethető az alapösszefüggésekből is, hogy a konstans gyorsulással mozgó testek út végéhez tartozó sebessége:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g \Delta s_1} \qquad \text{és} \qquad 0 = \sqrt{v^2 - 2g\sin\alpha \Delta s_2}.$$

Az előző egyenletek alapján:

$$v_0^2 - 2\mu g \Delta s_1 = 2g\sin\alpha \Delta s_2,$$
$$\Delta s_1 = \Delta s_2,$$
$$\Delta s = \frac{v_0^2}{2\mu g + 2g\sin\alpha},$$
$$\Delta s = \frac{v_0^2}{2\mu g + g} = \frac{1}{3}\,\mathrm{m}..$$

2. megoldás (energetikai)

$$\Sigma W = \Delta E_{\mathrm{kin.}},$$

$-\mu mg\Delta s = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ és $-mg\frac{\Delta s}{2} = 0 - \frac{1}{2}mv^2$, ezekből $\Delta s = \frac{v_0^2}{g + 2\mu g} = \frac{1}{3}\,\mathrm{m}$.

3)

Megoldás:

a)

A mozgás második szakaszán csak a súrlódási erő fékezi a testet, így annak gyorsulása:

$$a_2 = \frac{-\mu mg}{m} = -\mu g = -3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A mozgás első szakaszán ugyanekkora a gyorsulás, csak pozitív. (A sebességváltozások nagysága és az eltelt idők egyenlőek.) $a_1 = +\mu g = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

b)

A test $v = a_1 \cdot \Delta t = 6\ \mathrm{m/s}$ sebességre gyorsul fel.

c)

Az első esetben a test által megtett út:

$$s_1 = 2 \cdot \frac{v \cdot \Delta t}{2} = v \cdot \Delta t = 12\ \mathrm{m}.$$

Az első eset mindkét szakaszára írjuk fel a lendülettételt:

$$\left(F - \mu mg\right) \cdot \Delta t = m \cdot v,$$
$$\mu mg \cdot \Delta t = m \cdot v.$$

A két egyenletből következik: $F = 2 \cdot \mu mg$.

A második eset gyorsítási szakaszára alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét:

$$2F - \mu mg = ma_3,$$

$$2 \cdot 2\mu mg - \mu mg = ma_3,$$

$$a_3 = 3 \cdot \mu g = 9 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A gyorsítás ideje: $\Delta t^* = \frac{v}{a_3} = \frac{2}{3}\,\mathrm{s}$.

Az második esetben a test által megtett út:

$$s_2 = \frac{v \cdot \Delta t^*}{2} + \frac{v \cdot \Delta t}{2} = \frac{v}{2} \cdot \left(\Delta t^* + \Delta t\right) = \frac{6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\,\mathrm{s} + 2\,\mathrm{s}\right) = 8\,\mathrm{m}.$$

4)

Megoldás:

A versenybizottság ennek a feladatnak a kitűzésével köszönti a 2021-ben 90 esztendős Holics László Tanár Urat.

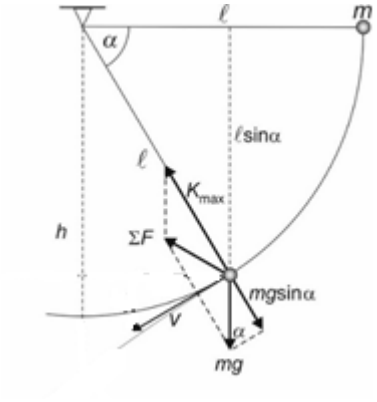
a)

Írjuk fel a golyó mozgásegyenletét a fonál pillanatnyi irányára:

$$K - mg\sin\alpha = m\frac{v^2}{l}, \qquad (1)$$

ahol α jelenti a fonálnak a vízszintessel bezárt szögét az elszakadás pillanatában. $\alpha = 45^\circ$. $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A mozgásegyenletet újra felírhatjuk:

$$K - mg\frac{\sqrt{2}}{2} = m\frac{v^2}{l}.$$



Alkalmazzuk az energiatételt erre a helyzetre:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl\sin\alpha, \quad \text{ahonnan}$$

$$m\frac{v^2}{l} = 2mg\sin\alpha = 2mg\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\cdot mg. \qquad (2)$$

(2)-t (1)-be helyettesítve mozgásegyenletünk:

$$K - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot mg = \sqrt{2}\cdot mg.$$

ahonnan a maximális fonálerő az elszakadás előtti pillanatban: $K = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}mg$.

b)

Határozzuk meg a golyóra ható eredő erő nagyságát közvetlenül az elszakadás előtti pillanatban

$$\sum F = \sqrt{\left(K_{\max y} - mg\right)^2 + K_{\max x}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}K_{\max} - mg\right)^2 + K_{\max x}^2},$$

$$\sum F = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}mg - mg\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}mg\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}\cdot mg \approx 1{,}58\cdot mg.$$

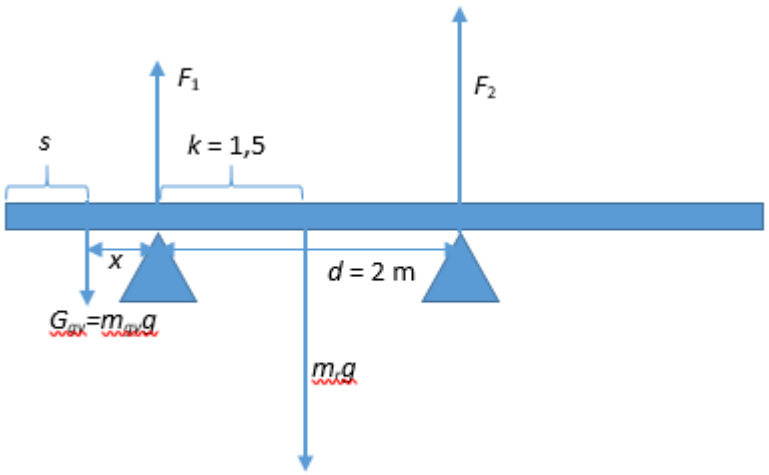
IV. kategória,
akik ebben a tanévben második éve tanulják a fizikát technikumban

1)

Megoldás:

Adatok: $m_{\mathrm{gy}} = 15\ \mathrm{kg};\ m_{\mathrm{r}} = 36\ \mathrm{kg}; v = 10\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = 0{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

A rúdra ható erők:



a)

A két alátámasztásnál az egyensúly miatt akkor ébred egyenlő nagyságú erő, ha

$$(1)\quad F_1 = F_2 = \frac{m_{\mathrm{r}}g + m_{\mathrm{gy}}g}{2}.$$

Feltételezhető, hogy a kívánt egyensúly úgy jön létre, hogy a gyermek a jobb oldali alátámasztástól jobbra helyezkedik el.

A gerenda forgási egyensúlyát leíró egyenletet ($\Sigma M = 0$) fogalmazzuk meg úgy, hogy a bal oldali alátámasztást tekintjük vonatkoztatási pontnak. Írjuk fel az ellentétes irányú forgatónyomatékok egyenlőségét:

$$(2)\quad m_{\mathrm{gy}}g \cdot x + F_2 \cdot d = m_{\mathrm{r}}g \cdot k.$$

(1) és (2) egyesítésével kapjuk, hogy $m_{\mathrm{gy}}g \cdot x + \frac{m_{\mathrm{r}}g + m_{\mathrm{gy}}g}{2} \cdot d = m_{\mathrm{r}}g \cdot k$, g-vel való egyszerűsítést és rendezést követően:

$$x = \frac{2m_{\mathrm{r}} \cdot k - (m_{\mathrm{r}} + m_{\mathrm{gy}}) \cdot d}{2m_{\mathrm{gy}}} = \frac{2 \cdot 36\ \mathrm{kg} \cdot 1{,}5\ \mathrm{m} - (36\ \mathrm{kg} + 15\ \mathrm{kg}) \cdot 2\ m}{2 \cdot 15\ \mathrm{kg}} = 0{,}2\ \mathrm{m}.$$

A mozgás kezdetétől az erők egyenlőségéig eltelt idő: $t = \frac{s}{v} = \frac{1\ \mathrm{m} - x}{v} = \frac{1\ \mathrm{m} - 0{,}2\ \mathrm{m}}{0{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 8\ \mathrm{s}.$

b)

Most a gyermeknek egészen biztos, hogy a jobb oldali alátámasztástól jobbra, y távolságnyira kell lennie. A gerenda forgási egyensúlyát leíró egyenletet most fogalmazzuk meg úgy, hogy a jobb oldali alátámasztást tekintjük vonatkoztatási pontnak. Írjuk fel az ellentétes irányú forgatónyomatékok egyenlőségét:

$$m_{\mathrm{gy}}g \cdot y = m_{\mathrm{r}}g \cdot (d - k).$$

Az y távolság könnyen számolható: $y = \frac{m_r}{m_{gy}} \cdot (d - k) = 1{,}2\ \mathrm{m}.$

A keresett időtartam: $\Delta t = \frac{s}{v} = \frac{1\,\text{m} + 2\,\text{m} + 1{,}2\,\text{m}}{0{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 42\,\text{s}$.

A gyermek elindulása után 42 másodperc múlva a bal oldali alátámasztásnál nullára csökken a bal oldali alátámasztásnál ébredő erő.

2)

Megoldás:

Ferdén fölfelé hajítjuk el a testet, így az elhajítás sebessége (v_0) a maximális sebesség, a pálya legmagasabb pontján pedig a függőleges sebességkomponens nullává válik, tehát minimális lesz a sebesség ($v_{\text{min}} = v_{0x}$).

A megadott időtartam éppen az emelkedési idő (t_{em}). Ebből a gyorsulás definíciója alapján kiszámítható a kezdősebesség függőleges komponense:

$$-g = \frac{0 - v_{0y}}{t_{\text{em}}} \;\rightarrow\; v_{0y} = g \cdot t_{\text{em}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Könnyen meghatározható az emelkedési magasság: $y_{\text{max}} = \frac{v_{0y}}{2} \cdot t_{em} = 20\ \text{m}$.

A két állapot közötti távolságból és az emelkedési magasságból számítható a közben létrejött vízszintes elmozdulás-komponens: $x = \sqrt{d^2 - {y_{\text{max}}}^2} = 19{,}24\ \text{m}$.

A vízszintes elmozdulás-komponensből az idő ismeretében számíthatjuk a kezdősebesség vízszintes komponensét: $v_{0x} = \frac{x}{t_{\text{em}}} = 9{,}62\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Az elhajítás sebességének nagysága a két komponensből: $v_0 = \sqrt{{v_{0y}}^2 + {v_{0x}}^2} = 22{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A kezdősebesség iránya (vízszintessel bezárt $\propto$ szöge) valamelyik szögfüggvény segítségével:

$$tg \propto = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = 2{,}08 \;\rightarrow\; \alpha = 64{,}3\ °.$$

3)

Megoldás:

Adatok: A állapot: $V_A = 2\ \text{m}^3$, $p_A = 1{,}3 \cdot 10^5\ \text{Pa}$, $T_A = 280\ \text{K}$.

B állapot: $V_B = 5{,}2\ \text{m}^3$, $p_B = 0{,}5 \cdot 10^5\ \text{Pa}$.

a)

A középső (C) állapot adatai a kezdő és végállapot adatainak számtani közepe:

$$V_C = 3{,}6\ \text{m}^3 \quad p_C = 0{,}9 \cdot 10^5\ \text{Pa}\ .$$

Az egyesített gáztörvény alapján: $\frac{p_C \cdot V_C}{T_C} = \frac{p_A \cdot V_A}{T_A}$ ebből $T_C = 349\ \text{K}$.

b)

Adatok: $P = 600\ \text{W}$, $t = 10\ \text{min} = 600\ \text{s}$.

A hő: $Q = \Delta E + W_{\text{gáz}}$, ebből

$$\Delta E = \frac{f}{2}(p_B \cdot V_B - p_A \cdot V_A) = \frac{f}{2}(0{,}5 \cdot 10^5 \cdot 5{,}2 - 1{,}3 \cdot 10^5 \cdot 2)\ \text{J} = 0$$

A felvett hő a gáz munkájával egyenlő, amit az AB szakasz alatti terület mérőszámával számolhatjuk.

$$W_{\text{gáz}} = \frac{p_A + p_B}{2} \cdot (V_B - V_A) = 288\,000\ \text{J}.$$

A másik tartályban zajló folyamat hőigénye is ennyi.

A Q = 288 000 J hő biztosítására szükséges idő: $t = \frac{Q}{P} = \frac{288\,000\ \text{J}}{600\ \text{W}} = 480\ \text{s}$. Tehát a melegítés 480 másodpercig tartott.

4)
Megoldás:

a)

Adatok: E = 130 V/m; $m = 10^{-10}$ kg.
A felfelé mozgás feltétele, hogy a elektromos erő nagyobb legyen a nehézségi erőnél. Mivel az erővonalak lefelé mutatnak, ezért a <u>töltés előjele negatív</u> kell legyen.

$$|E|q > mg,$$
$$\text{ebből } |q| > \frac{mg}{E} = 7{,}7 \cdot 10^{-12}\text{C}.$$

b)

Adatok: v = 5 m/s; Δt = 0,1s.

Függőleges hajításnál a levegőben töltött idő $t_1 = 2\frac{v}{g}$. Ebből t_1=1 s-nak adódik. Az új idő a feltétel szerint $t_2 = 1{,}1\ s$ kell, hogy legyen. Számoljuk ki, hogy ez mekkora gyorsulás esetén valósul meg:

$$g' = 2\frac{v}{t_2} = 9{,}09\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ezt a gyorsuláscsökkentést az okozza, hogy az mg-vel ellentétes irányú EQ erő hat a golyóra az alábbi egyenlet szerint:

$$mg - EQ = mg'.$$

Ebből $\frac{m(g-g')}{E} = Q = 6{,}993 \cdot 10^{-13}$ C.

c)

A hajítás magassága $h = \frac{v^2}{2g} = 1{,}25$ m. Az „új” g’-vel kiszámolt érték $h' = 1{,}375$ m, ami 12,5 cm-rel magasabb, mint az elektromos töltés nélküli esetben.