2020. évi Mikola 2. forduló megoldásai:
I. kategória, 9. gimnázium

1)
Megoldás:

a)
Vízszintes irányban nincsenek a rendszerre ható külső erők, ezért a rendszer lendülete mindvégig állandó. Csak konzervatív erők hatnak, ezért mechanikai energiák összege mindvégig megmarad, azaz állandó. A csavarrugó abban a pillanatban a legrövidebb, amikor a két kocsi sebessége (u) egy pillanatra azonos. Erre a pillanatra felírva a lendület-, és energiamegmaradás tételét, a következő egyenleteket kapjuk:

$$mv = (m+m)u \quad \rightarrow \quad u = \frac{v}{2},$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m+m)u^2 + \frac{1}{2}D(\Delta l)^2 \quad \rightarrow \quad mv^2 = 2mu^2 + D(\Delta l)^2.$$

A közös pillanatnyi sebesség beírása és rendezés után a rugó rövidülése kifejezhető:

$$mv^2 = 2m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + D(\Delta l)^2 \quad \rightarrow \quad mv^2 = m\frac{v^2}{2} + D(\Delta l)^2,$$

ahonnan

$$\Delta l = \sqrt{\frac{m\frac{v^2}{2}}{D}} = v\sqrt{\frac{m}{2D}} = 0,25\ \text{m}.$$

A rugó legrövidebb hossza l_0-Δl = 0,15 m.

b)
A rugóban tárolt energia akkor a legnagyobb:

$$E_{\text{rug.}max.} = \frac{1}{2}D\Delta l_{max}^2 = \frac{1}{2}Dv^2\,\frac{m}{2D} = \frac{1}{4}mv^2 = 12,5\ \text{J}.$$

2)
Megoldás:

a)
Jelölje s a lejtő hosszát! Először határozzuk meg a test gyorsulását:

$$ma = F - mgsin\alpha = mg(1 - sin\alpha),$$

$$a = g(1 - sin\alpha) = g\left(1 - \frac{h}{s}\right).$$

b)
A test feljuttatásához szükséges idő:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot\text{s}}{g\cdot\left(1-\frac{h}{s}\right)}} = \sqrt{\frac{2}{g\cdot\left(\frac{1}{\text{s}}-\frac{h}{s^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2}{g}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\text{s}}-\frac{h}{s^2}\right)}}.$$

c)
Ez az időtartam akkor minimális, ha a nevezőben lévő *f(s)* függvény értéke maximális:

$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{h}{s^2} = -\left(\frac{\sqrt{h}}{s} - \frac{1}{2\sqrt{h}}\right)^2 + \frac{1}{4h}.$$

Az *f(s)* másodfokú függvény maximumhelyén a zárójeles tag értéke nulla, ezért:

$$\frac{\sqrt{h}}{s} = \frac{1}{2\sqrt{h}}$$

Tehát az időtartam minimális, ha $s = 2h$.

3)

Megoldás:

a)

A körpályán való végighaladás szükséges feltétele a legfelső ponton való átmenet. A testre ható erőket (F fonálerő, mg nehézségi erő és K a lejtő kényszerereje) lejtővel párhuzamos és arra merőleges összetevőkre bontjuk, majd felírjuk a mozgásegyenletet a lejtő menti irányra, vagyis

$$F + \frac{1}{2}mg = ma_{\text{cp}}. \qquad (1)$$

Mivel $a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{R}$, és a fonál csak húzni tud, vagyis $F \geq 0$, ezzel (1)

$$F = m\left(\frac{v^2}{R} - \frac{1}{2}g\right) \geq 0, \quad \text{azaz} \quad v^2 \geq \frac{1}{2}gR. \qquad (2)$$

A sebességre a mechanikai energia megmaradás törvényéből következtethetünk.
A mozgási energia csökkenése (indításhoz képest) megegyezik a helyzeti energia növekedésével. Legyen a keresett sebesség nagysága v_0, ezzel

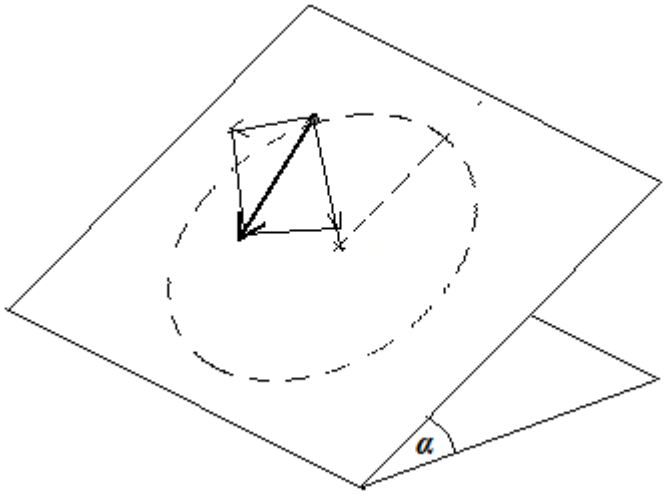
$$mg \cdot \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{vagyis} \quad v^2 = v_0^2 - gR.$$

Ezt (2)-be helyettesítve $v_0^2 - gR \geq \frac{1}{2}gR$, tehát $v_0^2 \geq \frac{3}{2}gR$, amiből megállapíthatjuk, hogy a felső ponton való áthaladás szükséges feltétele az, hogy a kezdősebesség nagysága legalább $\sqrt{\frac{3}{2}gR}$ legyen.

Megmutatjuk, hogy ez a feltétel egyben elégséges is.

A nehézségi erő lejtő irányú összetevőjét ($\frac{1}{2}mg$) sugárirányú és érintőirányú összetevőkre bontjuk.

Az (1)-nek megfelelő egyenletben, az alacsonyabb magasságbeli nagyobb sebesség miatt a jobb oldal nagyobb, mint a tetőponton, vagyis nagyobb (sugár irányú) eredőre van szükség. A nehézségi erő középpont felé mutató összetevője csökkent, így nagyobb fonálerőre van szükség, mint a tetőponton. Ez pedig akkor is teljesül, ha ott a fonál épp laza volt.



b)

Az (1)-nek megfelelő egyenlet ebben az esetben $F-\frac{1}{2}mg=ma_{\text{cp}}$. (3)

(A korábbi jelek használata nem okozhat félreértést.)

Most a mozgási energia növekedése (indításhoz képest) megegyezik a helyzeti energia csökkenésével, vagyis $mg\cdot\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}mu^2-\frac{1}{2}mv_0^2$, vagyis $u^2=gR+v_0^2$.

(Az alsó pontbeli sebességet *u*-val jelölve.)

Ezzel (3) $F=ma_{\text{cp}}+\frac{1}{2}mg=m\left(\frac{u^2}{R}+\frac{1}{2}g\right)=m\left(\frac{gR+v_0^2}{R}+\frac{1}{2}g\right)=m\left(\frac{v_0^2}{R}+\frac{3}{2}g\right)$.

Viszont $v_0^2\geq\frac{3}{2}gR$ miatt $\underline{F\geq 3mg}$.

4)
Megoldás:

a)
A mozgás kezdőpillanatában a labdára vízszintes irányban csak a közegellenállási erő hat, függőlegesen csak a nehézségi erő. A közegellenállási erő vízszintes komponense folyamatosan csökken nullára, a függőlegesen felfelé mutató komponens folyamatosan nő *mg* nagyságúra. Amikor a labda már állandó sebességű mozgást végez, vízszintes sebességkomponense eléri a szélsebességet, a ráható közegellenállási erő nagysága *mg* lesz. Innentől a labdára ható **eredő erő nulla**.

b)
A labda sebessége az egyenes vonalú egyenletes mozgása során:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{4\,\text{m}}{0{,}4\,\text{s}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ennek vízszintes komponense lesz a szél sebessége: $c = v \cdot \cos 60^\circ = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

c)
Az egyenes vonalú egyenletes mozgás során nem változik a labda mozgási energiája, ezért a munkatétel szerint: $W_{\text{köz}} + W_{\text{neh}} = 0$,

$$W_{\text{köz}} = -W_{\text{neh}} = -mg \cdot s \cdot \sin\alpha = -1{,}04\ \text{J}.$$

d)
Ismét alkalmazzuk a munkatételt, de most a teljes folyamatra: $\sum W = \Delta E_{\text{mozg}}$,

$$W^*_{\text{köz}} + W^*_{\text{neh}} = \frac{1}{2}\text{m}v^2 - 0,$$

$$W^*_{\text{köz}} = -W^*_{\text{neh}} + \frac{1}{2}\text{m}v^2 = -0{,}03\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8\,\text{m} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}03\,\text{kg} \cdot \left(10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = -2{,}4\,\text{J} + 1{,}5\,\text{J} = -0{,}9\,\text{J}.$$

II. kategória, 10. gimnázium

1)

Megoldás:

a)

A munkatételt írjuk fel indulástól megállásig: $\sum W = \Delta E_{\text{mozg}}$

$$mg(h+\Delta l_{\max}) - \frac{1}{2}D(\Delta l_{\max})^2 = 0.$$

Rendezés után: $D\left(\Delta l_{max}\right)^2 - 2mg\Delta l_{max} - 2mgh = 0.$

Ennek megoldása:

$$\Delta l_{max} = \frac{2mg \pm \sqrt{4m^2g^2 + 8mgDh}}{2D} = \frac{mg \pm mg\sqrt{1+\frac{2hD}{mg}}}{D} = \frac{mg}{D}\left(1+\sqrt{1+\frac{2Dh}{mg}}\right).$$

A keresett út:

$$s = h + \Delta l_{max} = 0{,}7\ \text{m} + \frac{0{,}5\ \text{kg}\cdot 10\ \text{m/s}^2}{25\ \text{N/m}}\left(1+\sqrt{1+\frac{2\cdot 25\ \text{Nm}^{-1}\cdot 0{,}7\ \text{m}}{0{,}5\ \text{kg}\cdot 10\ \text{m/s}^2}}\right) = 1{,}466\ \text{m}.$$

b)

A munkatétel szerint: $mg(h+\Delta l) - \frac{1}{2}D(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$,

ahol a rugó megnyúlását addig számítjuk, amíg a nehézségi erő és a rugóerő éppen egyenlővé válik:

$$D\Delta l = mg \quad \rightarrow \quad \Delta l = \frac{mg}{D}.$$

Ezt a munkatételbe írva: $mgh + \frac{m^2g^2}{D} - \frac{1}{2}D\frac{m^2g^2}{D^2} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$.

Egyszerűsítés és összevonás után: $gh + \frac{1}{2}\frac{mg^2}{D} = \frac{1}{2}v_{max}^2$.

Innen a maximális sebesség:

$$v_{max} = \sqrt{2gh + \frac{mg^2}{D}} = \sqrt{2\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}7\ \text{m} + \frac{0{,}5\ \text{kg}\cdot 100\ \text{m/s}^2}{25\ \text{N/m}}} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c)

A maximális gyorsulás a legalsó pontban van és felfelé mutat:

$$a_{max} = \frac{\sum F}{m} = \frac{D\Delta l_{max} - mg}{m} = \frac{D\Delta l_{max}}{m} - g = \frac{25\ \text{Nm}^{-1}\cdot(1{,}466-0{,}7)\ \text{m}}{0{,}5\ \text{kg}} - 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 28{,}28\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A felső fordulópontban is maximális a gyorsulás ugyanekkora értékkel, és lefelé mutat.

2)

Megoldás:

a)

Jelölje v_0 az áramlási sebességet, s pedig a rövidebb OP ív hosszát. Egyszerre érnek P pontba, ha

$$\frac{s}{v_\mathrm{A}-v_0}=\frac{3s}{v_\mathrm{B}+v_0},$$
$$v_B+v_0=3(v_\mathrm{A}-v_0),$$
$$4v_0=3v_\mathrm{A}-v_\mathrm{B},$$
$$v_0=\frac{3v_\mathrm{A}-v_\mathrm{B}}{4},$$
$$v_0=0{,}75\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Egyszerre érnek a P pontba, ha $v_0=0{,}75\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

b)

Mivel a két esetben Aladár ugyanúgy úszik, ezért a vízhez viszonyított sebessége és így a közegellenállási erő is ugyanakkora, az áramló vízhez képest megtett utak azonban nem. A közegellenállás leküzdésére fordított munkák aránya tehát:

$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{F_\mathrm{k}\cdot s_1}{F_\mathrm{k}\cdot s_2}=\frac{v_\mathrm{A}\cdot t_1}{v_\mathrm{A}\cdot t_2}=\frac{\frac{s}{v_\mathrm{A}-v_0}}{\frac{3s}{v_\mathrm{A}+v_0}}=\frac{v_\mathrm{A}+v_0}{3(v_\mathrm{A}-v_0)}=\frac{7}{3}.$$

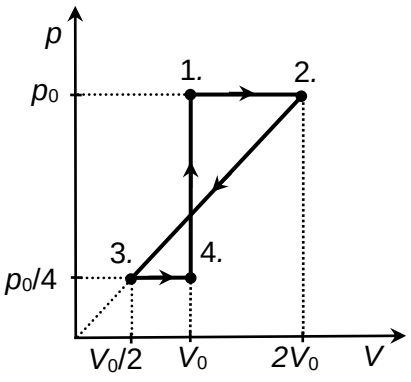
3)

Megoldás:

a)

Az ábra szerint az egyes állapotokban a gáz állapotjelzői (nyomás, térfogat):

1. állapot (p_0, V_0), 2. állapot $(p_0, 2\,V_0)$,
3. állapot $(\frac{1}{4}p_0, \frac{1}{2}V_0)$, 4. állapot $(\frac{1}{4}p_0, V_0)$.



b)

A keresett hő a termodinamika első főtétele alapján számolható, figyelembe véve, hogy a végzett munka zérus.

$$Q_{41}=E_1-E_4=\frac{5}{2}\left(p_0V_0-\frac{1}{4}p_0V_0\right),$$
$$Q_{41}=\frac{15}{8}p_0V_0.$$

Alkalmazzuk a 2.→ 3. folyamatra a termodinamika első főtételét!

$$E_3-E_2=Q_{23}+W_{23},$$
$$Q_{23}=E_3-E_2-W_{23},$$
$$Q_{23}=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{8}p_0V_0-2p_0V_0\right)-\frac{p_0+\frac{1}{4}p_0}{2}\cdot\left(2V_0-\frac{1}{2}V_0\right),$$
$$Q_{23}=-Q_0=-\frac{45}{8}p_0V_0.$$

Ezekből:

$$\frac{Q_{41}}{Q_0} = \frac{1}{3},$$

$$\boxed{Q_{41} = \frac{1}{3}Q_0 = 5\ \text{kJ}.}$$

Második megoldás:

A gáz hőmérséklete az egyes állapotokban:

1. állapot (T_0), 2. állapot ($2T_0$),

3. állapot ($\frac{1}{8}T_0$), 4. állapot ($\frac{1}{4}T_0$).

Minden folyamat politrop, minden folyamatban állandó a fajhő, így a hőmennyiségek könnyen számolhatók.

$$Q_{41} = c_V m\left(T_0 - \frac{1}{4}T_0\right) = \frac{5}{2}\frac{R}{M}m \cdot \frac{3}{4}T_0,$$

$$Q_{41} = \frac{15}{8}\frac{R}{M}mT_0.$$

$$Q_{23} = -Q_0 = \frac{c_V + c_p}{2} \cdot m\left(\frac{1}{8}T_0 - 2T_0\right),$$

$$Q_{23} = -Q_0 = -3\frac{R}{M}m \cdot \frac{15}{8}T_0 = -\frac{45}{8}\frac{R}{M}mT_0.$$

$$\frac{Q_{41}}{Q_0} = \frac{1}{3},$$

$$\boxed{Q_{41} = \frac{1}{3}Q_0 = 5\ \text{kJ}.}$$

4)

Megoldás:

a)

A középső lapra alkalmazva a dinamika alapegyenletét:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

$$E_{\text{kon}} \cdot q - Mg = Ma, \text{ ahol } E_{\text{kon}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = 0{,}8 \cdot 10^6\ \frac{\text{N}}{\text{C}},$$

$$a = \frac{Eq - Mg}{M} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A mérleg által mutatott érték meghatározható analógiával is (liftes feladat):

$$F_{\text{k}} = 2mg + M\left(g + a\right),$$

ahol a második tag a gyorsuló középső lap megnövekedett súlya, így $F_{\text{k}} = 3{,}6\text{N}$.

A kérdés úgy is megválaszolható, hogy az összekötött lapok rendszerére alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét:

$$E_{\text{q}} \cdot 2Q + 2mg - F_{\text{k}} = 0, \text{ ahol } E_{\text{q}} = \frac{q}{2\varepsilon_0 A} = 0{,}2 \cdot 10^6\ \frac{\text{N}}{\text{C}},$$

esetleg felhasználható, hogy Newton 3. törvénye alapján $E_q \cdot 2Q = E_{\text{kon}} \cdot q$, így

$$F_k = 2mg + E_{kon.} \cdot q,$$

$$F_k = 3{,}6 \text{ N}.$$

b)

A tömegközéppont-tételt alkalmazva:

$$\sum \vec{F}_{\text{külső}} = m_{\text{összes}} \vec{a}_{TKP},$$

$$F_k - 2mg - Mg = (2m + M) \cdot a_{TKP},$$

$$a_{TKP} = \frac{F_k - 2mg - Mg}{(2m + M)} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Másik megoldás: $a_{TKP} = \frac{0 \cdot 2m + a \cdot M}{2m + M} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

c)

Ebben az esetben az összekötött lapok is mozgásba jönnek, azaz felemelkednek, miközben a közbenső lap is mozog lefelé. A dinamika alapegyenletét felírhatjuk a mozgó elemekre.

A közbenső lap esetén:

$$E_{kon} \cdot q + Mg = Ma_{le}, \text{ ahol } E_{kon} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = 0{,}8 \cdot 10^6 \ \frac{\text{N}}{\text{C}},$$

$$a_{le} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Az összekötött lapok esetén:

$$E_q \cdot 2Q - 2mg = 2ma_{fel}, \text{ ahol } E_q = \frac{q}{2\varepsilon_0 A} = 0{,}2 \cdot 10^6 \ \frac{\text{N}}{\text{C}},$$

$$a_{fel} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Az utak és gyorsulások kapcsolatát felhasználva:

$$\Delta s_{\text{összes}} = \frac{a_{fel} + a_{le}}{2} \cdot \Delta t^2,$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta s_{\text{összes}}}{a_{fel} + a_{le}}} = 0{,}1 \text{ s}.$$

III. kategória,
akik ebben a tanévben kezdték tanulni a fizikát szakgimnáziumban

1)

Megoldás:

a)

A test sebessége akkor lesz maximális, amikor a gyorsulás nullára csökken, amikor az eredő erő nulla: $\frac{mg - D\Delta l}{m} = 0$,

$$\Delta l = \frac{mg}{D} = 0{,}1\,\text{m}.$$

A test sebessége 0,1 m összenyomódásnál, az asztal felett 30 cm-re, illetve az elengedés helye alatt 70 cm-re lesz.

b)

A test maximális sebességét az energia-megmaradás törvényével kaphatjuk meg:

$$mg \cdot (h - l_0 + \Delta l) = \frac{1}{2} m v_{max}^2 + \frac{1}{2} D \Delta l^2,$$

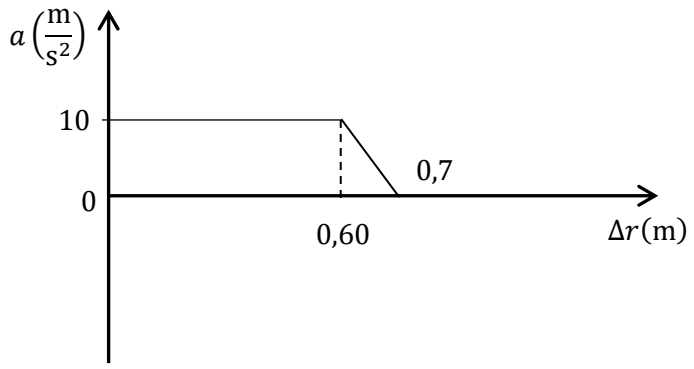
$$v_{max} = \sqrt{2g \cdot (h - l_0 + \Delta l) - \frac{D}{m} \Delta l^2} = 3{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c)

A gyorsulás a dinamika alaptörvénye szerint az eredőerővel egyenesen arányos (a lefelé mutató irányt pozitívnak választva):

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F_{\text{neh}} - F_{\text{rugó}}}{m} = \frac{m \cdot g - D \cdot \Delta l}{m}$$

Ez a gyorsulás a rugó eléréséig állandó (éppen a nehézségi gyorsulással egyenlő), utána pedig az állandó nehézségi erő és az elmozdulással lineárisan változó rugóerő különbségével együtt egyenletesen csökkenő értékű. Az egyensúlyi helyzetben nullává válik. A gyorsulás-elmozdulás grafikon:



2)

Megoldás:

a)

Newton II. törvénye szerint a test gyorsulása Délre, és Nyugatra is

$$a_{\mathrm{D}} = a_{\mathrm{Ny}} = \frac{F}{m} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4\ \mathrm{N}}{\sqrt{2}\ \mathrm{kg}} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A sebességkomponensek az erő megszűnése pillanatában:

$$v_{\mathrm{x}} = a_{\mathrm{Ny}}\cdot\Delta t = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$v_{\mathrm{y}} = v_0 \text{ - } a_{\mathrm{Ny}}\cdot\Delta t = -3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Így a test sebessége az erő megszűnésekor:

$$v = \sqrt{v_{\mathrm{x}}^2 + v_{\mathrm{y}}^2} = \sqrt{25}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b)

A test elmozdulásának koordinátái:

$$x = \frac{1}{2}a_{\mathrm{Ny}}\cdot\Delta t^2 = 4\ \mathrm{m},\ y = v_0\cdot\Delta t - \frac{1}{2}a_{\mathrm{D}}\cdot\Delta t^2 = -2\ \mathrm{m}.$$

Így az elmozdulás: $\Delta r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{20}\ \mathrm{m} \approx 4{,}47\ \mathrm{m}$.

3)

Megoldás:

II. kategória 2. feladata.

4)

Megoldás:

I. kategória 3. feladata.

IV. kategória,
akik ebben a tanévben második éve tanulják a fizikát szakgimnáziumban

1)

Megoldás:

Adatok: $a = 0$, $v_0 = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $r = 20$ m.

Az elmozdulásvektor hosszának négyzete a két koordinátájának négyzetösszegével egyenlő:

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 = x^2 + y^2,$$

ha az origóból dobtuk el a testet. Ezek a koordináták az idő függvényében felírhatók:

$$r^2 = \left(v_0 t\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g t^2\right)^2.$$

Rendezés után: $$g^2 t^4 + 4v_0^2 t^2 - 4r^2 = 0.$$

Ennek megoldása t^2-re:

$$t^2 = \frac{-4v_0^2 \pm \sqrt{16v_0^4 + 16g^2 r^2}}{2g^2} = \frac{-2v_0^2}{g^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{g^2 r^2}{v_0^4}}\right).$$

Innen az eltelt idő:

$$t = \frac{v_0}{g}\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(-1 \mp \sqrt{1 + \frac{g^2 r^2}{v_0^4}}\right)} = \frac{5\frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(-1 \mp \sqrt{1 + \frac{100\ \text{m}^2\text{s}^{-4} \cdot 400\ \text{m}^2}{625\ \text{m}^4\text{s}^{-4}}}\right)} = 1{,}88\ \text{s}.$$

Ellenőrzés:

$$x = 5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1{,}88\ s = 9{,}4\ \text{m},$$

$$y = 5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}88^2\,\text{s}^2 = 17{,}67\ \text{m},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9{,}4^2\,\text{m}^2 + 17{,}67^2\,\text{m}^2} = \sqrt{400{,}59\ \text{m}^2} = 20{,}01\,\text{m} \approx 20\ \text{m}.$$

2)

Megoldás:

a)

Az átlagsebesség 2,5 m/s, a leérkezési idő 4 s, tehát a lejtő hossza **10 m**. Az érdes és a csúszós szakaszok váltakozva $x = 2{,}5$ m hosszúak.

b)

A csúszós szakaszokon a gyorsulás

$$a_1 = g(\sin 45° - \mu_1 \cos 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} g(1 - \mu_1),$$

ahol $a_1 = 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ és $g = 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, tehát $\frac{a_1}{g} = \frac{1}{2}$. Ennek alapján

$$\mu_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{0,293}.$$

Az érdes szakaszokon a gyorsulás $a_2 = -5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, ami így írható fel:

$$a_2 = g(\sin 45° - \mu_2 \cos 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} g(1 - \mu_2).$$

Ennek alapján

$$\mu_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{1,707}.$$

c)

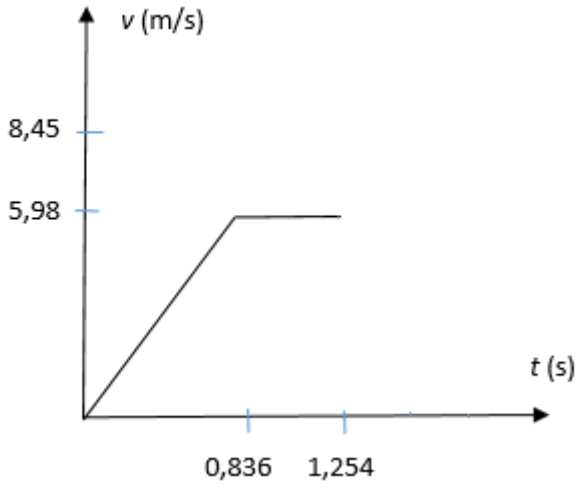
Ha teljesül a $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu_2 = 1{,}707$ összefüggés, akkor a lejtő hajlásszöge 59,64°. Ekkor a csúszós szakaszokon a gyorsulás

$$a = g(\sin 59{,}64° - \mu_1 \cos 59{,}64°) = 7{,}15 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

míg az érdes szakaszokon nulla. Az első csúszós szakaszt a hasáb

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x}{a}} = 0{,}836\ \mathrm{s}$$

alatt teszi meg, és így a test $v_1 = at_1 = 5{,}98\ \mathrm{m/s}$ sebességre tesz szert. Az érdes szakaszon ez a sebesség állandó, tehát ennek megtételéhez fele akkora idő kell, mint az első gyorsuló szakaszhoz. Tehát a második csúszós szakaszt $t_2 = \frac{3t_1}{2} = 1{,}254$ s-nál éri el a hasáb.



3)

Megoldás:

a)

Amikor a cső vízszintes, az elzárt levegő nyomása $p_1 = p_k = 76$ Hgcm, térfogata $V_1 = A \cdot \frac{L}{3}$.

Amikor a cső függőlegesen áll, az elzárt levegő nyomása $p_1 = p_k - p_{Hg} = 76$ Hgcm, térfogata $V_2 = 1{,}2 \cdot A \cdot \frac{L}{3}$.

A Boyle-Mariotte törvény szerint: $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$,

$$p_k \cdot A \cdot \frac{L}{3} = \left(p_k - p_{Hg}\right) \cdot 1{,}2 \cdot A \cdot \frac{L}{3},$$

$$p_{Hg} = \frac{1}{6} \cdot p_k .$$

Ebből következik, hogy $\frac{L}{3} = \frac{76 \text{ cm}}{6} \rightarrow L = 38 \text{ cm}$.

b)

A Boyle-Mariotte törvény ismételt alkalmazásával meghatározhatjuk az elzárt gáz nyomásának legkisebb értékét:

$$p_3 \cdot \frac{2}{3} AL = p_1 \cdot \frac{1}{3} AL \rightarrow p_3 = \frac{1}{2} p_1 = \frac{1}{2} p_k .$$

Most alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét: $\sum F = m \cdot a$,

$$\left(p_k - p_3\right) \cdot A - mg = ma, \text{ ahol } m = \frac{l}{3} \cdot AL \cdot \rho_{Hg} .$$

Így: $\frac{1}{2} p_k \cdot A - \frac{l}{3} \cdot AL \cdot \rho_{Hg} \cdot g = \frac{l}{3} \cdot AL \cdot \rho_{Hg} \cdot a$,

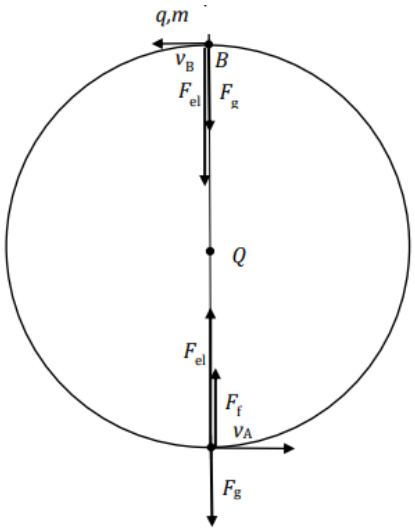
$$\frac{1}{2} p_k - p_{Hg} = \frac{a}{g} p_{Hg},$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 p_{Hg} - p_{Hg} = \frac{a}{g} p_{Hg},$$

$$a = 2g = 10 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4)

Megoldás:



a)

A *B* pontban a mozgásegyenlet:

$$F_{\mathrm{el}} + F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{cpB}},$$

$$k\frac{Qq}{r^2} + mg = m\frac{v_{\mathrm{B}}^2}{r},$$

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{k\frac{Qq}{rm} + gr} = \sqrt{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Konzervatív erők hatása alatt mozog a test, így az energia-megmaradás törvény alkalmazásával:

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + k\frac{Qq}{r} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 + mg2r + k\frac{Qq}{r},$$

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{v_{\mathrm{B}}^2 + 4gr} = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b)

Az *A* pontban a testre alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét:

$$F_{\mathrm{el}} + F_{\mathrm{f}} - F_{\mathrm{g}} = ma_{\mathrm{cp}},$$

$$k\frac{Qq}{r^2} + F_{\mathrm{f}} - mg = m\frac{v_{\mathrm{A}}^2}{r},$$

Innen $F_{\mathrm{f}} = m\left(\frac{v_{\mathrm{A}}^2}{r} + g\right) - k\frac{Qq}{r^2} = 0{,}06\ \mathrm{N}.$