AKADÉMIAI KÉZIKÖNYVEK

SPORT, ÉLETMÓD, EGÉSZSÉG
Főszerkesztő | **SZATMÁRI ZOLTÁN**

FILOZÓFIA
Főszerkesztő | **BOROS GÁBOR**

MAGYARORSZÁG TÖRTÉNETE
Főszerkesztő | **ROMSICS IGNÁC**

VILÁGTÖRTÉNET
Főszerkesztő | **SALAMON KONRÁD**

MAGYAR NYELV
Főszerkesztő | **KIEFER FERENC**

KÉMIA
Főszerkesztő | **NÁRAY-SZABÓ GÁBOR**

VILÁGIRODALOM
Főszerkesztő | **PÁL JÓZSEF**

FIZIKA

Főszerkesztő | **HOLICS LÁSZLÓ**

MJP Megyei Könyvtár
Debrecen
0000001285741

AKADÉMIAI KIADÓ

530
F62

Megjelent a Nemzeti Kulturális Alap támogatásával

nka
Nemzeti Kulturális Alap

Írták
Csákány Antal, Flórik György, Gnädig Péter, Holics László,
Juhász András, Süköd Csaba, Tasnádi Péter

Az 1–6. fejezet ábráit Flórik György, a 7–35. fejezet ábráit Holics László készítette

A 10.7.2.–10.7.6. fejezeteket lektorálta Vörös György

Méliusz Központi Könyvtár
401 751
Debrecen

ISBN 978 963 05 8487 6
ISSN 1787-4750

Kiadja az Akadémiai Kiadó,
az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők
Egyesülésének tagja.
1117 Budapest, Prielle Kornélia u. 19.
www.akademiaikiado.hu

Első magyar nyelvű kiadás: 2009
© Akadémiai Kiadó, 2009

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a nyilvános előadás,
a rádió- és televízióadás, valamint a fordítás jogát, az egyes fejezeteket illetően is.
Printed in Hungary

Tartalom

Előszó *(Holics László)* 25

I. MECHANIKA *(Flórik György)*
1. A mozgások leírása (kinematika) 29
1.1. Az anyagi pont mozgásának leírása 29
1.1.1. Alapfogalmak 29
1.1.2. A sebesség 35
1.1.2.1. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás sebessége 35
1.1.2.2. A változó mozgás sebessége 36
1.1.3. A gyorsulás 39
1.1.4. Mozgások leírása egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerekben 43
1.1.5. Néhány mozgás részletes leírása 46
1.1.5.1. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás 46
1.1.5.2. Állandó gyorsulású vagy egyenletesen változó mozgások 47
1.1.5.3. Az egyenletes körmozgás 55
1.1.5.4. Az egyenletesen változó körmozgás 57
1.1.5.5. A harmonikus rezgőmozgás 58
1.1.5.6. A harmonikus rezgések összetétele 61
1.2. A merev test kinematikája 68
1.2.1. Rögzített tengely körül forgó merev test 69
1.2.2. A merev test síkmozgása 71
1.2.3. Térbeli forgómozgás. A szögsebesség vektora 76
1.3. A folyadékok és gázok mozgásának leírása 79
2. Dinamika 83
2.1. A dinamika anyagi pontra vonatkozó törvényei 83
2.1.1. A dinamika alapfogalmai. A Newton-törvények 83
2.1.1.1. A erő fogalmára alapozó felépítés 85
2.1.1.2. Az impulzus (lendület) fogalmára alapozó felépítés 90
2.1.2. Erőtörvények, erőfajták 92

2.1.2.1. Rugalmassági erők 93
2.1.2.2. Nehézségi erő 93
2.1.2.3. Súly; súlyerő 94
2.1.2.4. Gravitációs erő. A Newton-féle gravitációs erőtörvény 97
2.1.2.5. Kényszermozgás, kényszererő 100
2.1.2.6. Súrlódási erő 103
2.1.3. A perdület (impulzusmomentum) 107
2.1.3.1. Centrális erők. A területi sebesség 107
2.1.3.2. A perdület és forgatónyomaték 110
2.1.4. A munka 115
2.1.4.1. Néhány erőfajta munkája 118
2.1.5. A teljesítmény 122
2.1.6. Mechanikai energiák 123
2.1.6.1. Munkatétel; mozgási energia 123
2.1.6.2. Helyzeti (potenciális) energiák 126
2.1.7. Mozgások dinamikai leírása inerciarendszerhez képest gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben. A tehetetlenségi erők 132
2.1.7.1. Az inerciarendszerhez képest egyenes vonalú, egyenletes, tiszta haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer 132
2.1.7.2. Az inerciarendszerhez képest egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló, nem forgó vonatkoztatási rendszer 133
2.1.7.3. Az egy helyben forgó, állandó szögsebességű vonatkoztatási rendszer 136
2.2. Pontrendszerek dinamikája 139
2.2.1. A pontrendszerek mozgásának leírása mozgásegyenletekkel 140
2.2.2. A pontrendszer impulzusa (lendülete) 140
2.2.3. A tömegközéppont. A tömegközéppont mozgásának tétele 141
2.2.3.1. A pontrendszer tömegközéppontjának meghatározása 142
2.2.3.2. Kiterjedt testek tömegközéppontja 143
2.2.3.3. A tömegközéppont mozgásának leírása 147
2.2.4. Pontrendszer perdülete 151
2.2.4.1. Pontra vonatkozó perdület .....
2.2.4.2. Pontrendszer tengelyre vonatkoztatott perdülete és a tengelyre vonatkoztatott forgatónyomaték 154
2.2.5. Pontrendszerekre vonatkozó energetikai tételek 156
2.2.6. A kiterjedt testre ható erők jellemzői. Az erő támadáspontja és hatásvonala. Pontba koncentrált, felületen eloszló és térfogati erők 159
2.3. Merev test mozgásának dinamikája 161
2.3.1. Rögzített tengely körül forgó merev test dinamikája 161
2.3.1.1. Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete 161

2.3.1.2. A testek tehetetlenségi nyomatéka 162
2.3.1.3. A forgómozgás alaptörvénye rögzített tengely körül forgó merev testre 165
2.3.2. Síkmozgást végző merev test dinamikája 165
2.3.3. Merev test mozgási energiája 166
2.3.4. Merev testre ható síkban szétszórt erők eredője 168
2.3.4.1. Két erő eredője 168
2.3.4.2. A merev testre ható több erő eredője 172
2.3.4.3. A nehézségi erő helyettesítése pontba koncentrált eredővel 173
2.4. Speciális problémák a tömegpont és a pontrendszerek mechanikájából 175
2.4.1. A bolygók mozgása. Mozgás pontszerű test gravitációs erőterében 175
2.4.2. Mesterséges holdak és bolygók; rakéták 178
2.4.3. Esés ellenálló közegben 181
2.4.4. Tehetetlenségi erők a forgó Földön 182
2.4.5. A harmonikus rezgőmozgás 185
2.4.6. A matematikai inga 188
2.4.7. A fizikai inga 189
2.4.8. Csavarási vagy torziós inga 191
2.4.9. A csillapodó rezgőmozgás 192
2.4.10. Kényszerrezgés; rezonancia 195
2.4.11. Csatolt rezgések 197
2.4.12. Az egyenletes körmozgás dinamikája 197
2.4.13. Példák kényszermozgásokra 199
2.4.14. Ütközések 208
2.4.15. A pörgettyű 215
2.5. Statika. Egyszerű gépek 217
2.5.1. Pontszerű test egyensúlyának feltétele 217
2.5.2. Merev test egyensúlyának feltétele 218
2.5.2.1. Egyszerű gépek 222
2.5.2.2. Egyensúlyi helyzetek. Állásszilárdság 231
2.6. A szilárdságtan elemei 234
2.6.1. Alakváltozások (deformációk) és rugalmas feszültségek 234
2.6.2. Igénybevételek 238
2.6.3. A rugalmassági energia 245
2.7. Folyadékok és gázok mechanikája 247
2.7.1. Folyadékok és gázok sztatikája (hidro- és aerosztatika) 247
2.7.1.1. Nyugvó folyadék szabad felszíne 247
2.7.1.2. A nyomás. A nyomás terjedése folyadékokban és gázokban Pascal törvénye 248

2.7.1.3. A hidrosztatikai nyomás ... 251
2.7.1.4. A közlekedőedények ... 254
2.7.1.5. A légnyomás ... 257
2.7.1.6. A Boyle–Mariotte-törvény ... 259
2.7.1.7. A felhajtóerő. Arkhimédész törvénye ... 260
2.7.1.8. Alkalmazások ... 266
2.7.2. Ideális folyadékok és gázok áramlása ... 273
2.7.2.1. A Bernoulli-törvény ... 273
2.7.2.2. Gyakorlati alkalmazások ... 276
2.7.3. Reális folyadékok és gázok ... 279
2.7.3.1. Felületi feszültség ... 279
2.7.3.2. Reális folyadékok és gázok áramlása. A belső súrlódás ... 286
2.7.3.3. Közegellenállás ... 288
2.8. Hullámmozgás és hangtan ... 290
2.8.1. A hullám keletkezése ... 290
2.8.1.1. Alapfogalmak ... 290
2.8.1.2. A terjedési sebesség függése a közeg tulajdonságaitól ... 295
2.8.1.3. A Doppler-effektus ... 298
2.8.1.4. A harmonikus mechanikai hullámok energiája ... 299
2.8.2. A hullámok terjedése ... 305
2.8.2.1. Terjedési tulajdonságok. A Huygens-elv ... 305
2.8.3. A hullámok szuperpozíciója ... 312
2.8.3.1. A szuperpozíció elve; interferencia ... 312
2.8.3.2. Pontszerű, koherens hullámforrások által létrehozott interferencia 313
2.8.3.3. A Huygens–Fresnel-elv ... 319
2.8.3.4. Állóhullámok ... 321
2.8.3.5. Egy irányban haladó hullámok szuperpozíciója. Diszperzió, csoportsebesség, fázissebesség. Hullámcsomag ... 328
2.8.4. A hang és jellemzői ... 331

II. TERMODINAMIKA *(Flórik György)*
3. Alapfogalmak. Az energiamegmaradás törvénye ... 337
3.1. Belső energia; hőfolyamatok; hőmérséklet ... 337
3.1.1. A térfogati munka ... 338
3.1.2. Hőfolyamatok ... 340
3.1.3. Mechanikai és hőegyensúlyi állapot ... 341
3.1.4. A hőmérséklet és mérése ... 342
3.1.4.1. A hőmérséklet fogalma ... 342
3.1.4.2. Hőmérsékleti skálák; hőmérőfajták ... 342
3.2. A termodinamika I. főtétele; az általános energiamegmaradás elve 345

3.2.1. A belső energia változásának mérése ... 345
3.2.2. A termodinamika I. főtétele ... 346
3.2.3. Az általános energiamegmaradás elve ... 346
3.3. Állapotjelzők ... 347
4. Állapotváltozások ... 349
4.1. A szilárd anyagok és folyadékok hőtágulása ... 349
4.1.1. A szilárd anyagok lineáris (vonal menti) hőtágulása ... 349
4.1.2. Szilárd anyagok térfogati hőtágulása ... 351
4.1.3. A folyadékok hőtágulása ... 353
4.2. Az ideális gázok állapotegyenletei ... 355
4.2.1. A Boyle–Mariotte-törvény ... 355
4.2.2. Gay-Lussac I. törvénye ... 356
4.2.3. Gay-Lussac II. törvénye ... 357
4.2.4. Az általános gáztörvény ... 358
4.3. Kalorimetria. Fajhő és átalakulási hő ... 361
4.3.1. A szilárd anyagok és folyadékok fajhője ... 362
4.3.2. Fázisátalakulási hők ... 363
4.3.3. Szilárd anyagok és folyadékok fajhőjének és fázisátalakulási hőjének mérése ... 365
4.3.4. Gázok fajhője ... 366
4.4. Nyílt folyamatok ideális gázokkal ... 369
4.4.1. Izoterm folyamat ... 369
4.4.2. Izobár folyamat ... 371
4.4.3. Izochor folyamat ... 372
4.4.4. Adiabatikus folyamat ... 372
4.4.5. Politrop állapotváltozás ... 374
4.5. Reális gázok. Telített és telítetlen gőzök ... 375
4.6. Halmazállapot-változások (fázisátalakulások) ... 378
4.6.1. Olvadás és fagyás ... 378
4.6.2. Párolgás ... 379
4.6.3. Forrás ... 380
4.6.4. Kristályszerkezeti átalakulások ... 381
4.6.5. Szublimáció ... 381
4.6.6. Fázisdiagram; hármaspont ... 382
4.6.7. Abszolút és relatív páratartalom ... 384
5. A természeti folyamatok iránya. A termodinamika II. főtétele ... 387
5.1. Reverzibilis és irreverzibilis folyamatok ... 387
5.2. A termodinamika II. főtétele ... 389
5.3. Hőerőgépek. A Carnot-féle körfolyamat ... 390
5.3.1. A Carnot-féle körfolyamat ... 390

5.3.2. A hőerőgépek termodinamikai hatásfoka 391
5.3.3. A termodinamikai hőmérsékleti skála 393
5.4. Az entrópia 393
5.4.1. A Clausius-féle egyenlőtlenség 393
5.4.2. A entrópia definíciója 395
5.4.3. Az entrópianövekedés és az entrópiamaximum elve 396
5.4.4. A termodinamika III. főtétele 397
5.5. Termodinamikai potenciálok 398
5.5.1. Nyílt rendszerek egyensúlyának feltétele 398
5.5.2. A kémiai potenciál 401
5.6. Hűtőgép, hőszivattyú (hőpumpa), hőerőgép 402
5.6.1. A hűtőgép és a hőpumpa elve 402
5.6.2. Hőerőgépek és hűtőgépek a gyakorlatban 403
5.6.2.1. Gőzgépek 404
5.6.2.2. Gázgépek 404
5.6.2.3. Hűtőgépek és hőszivattyúk a gyakorlatban 407
6. A hő terjedése 409
6.1. Hővezetés (kondukció) 409
6.2. Hőáramlás (konvekció) 410
6.3. Hősugárzás 410

III. ELEKTRODINAMIKA ÉS OPTIKA *(Holics László)*
7. Az időben állandó elektromos mező 413
7.1. Elektrosztatikus mező vákuumban. A forráserősség. Gauss tétele .. 413
7.1.1. Elektromos alapjelenségek 414
7.1.2. Az elektromos mező. Az elektromos térerősség 416
7.1.3. Pontszerű töltés elektromos mezejének térerőssége. Coulomb törvénye 418
7.1.4. Erővonalak 421
7.1.5. A Q töltés keltette mező teljes elektromos fluxusa 425
7.1.6. Az elektromos dipólus 426
7.1.7. Forráserősség. Gauss tétele 428
7.2. Potenciál, örvényerősség (cirkuláció) 434
7.2.1. Az elektromos mező munkája. A feszültség 434
7.2.2. A potenciál 438
7.2.3. Az örvényerősség. Maxwell II. törvénye 441
7.3. Vezetők az elektrosztatikus mezőben 443
7.3.1. Elektromos megosztás. Többlettöltés fémes vezetőn 443
7.3.2. Kapacitás 444

7.3.3. Kondenzátorok. Elektromos mező szigetelőkben. A relatív permittivitás és az elektromos eltolás vektora 446
7.3.4. Gyakorlati alkalmazások 451
7.3.4.1. A földelés 451
7.3.4.2. A potenciál mérése 451
7.3.4.3. Az árnyékolás 452
7.3.4.4. A csúcshatás 453
7.3.4.5. A van de Graaff-féle szalaggenerátor 455
7.3.4.6. Az átütési szilárdság 455
7.3.4.7. Kondenzátorfajták 456
7.3.4.8. Kondenzátorok kapcsolása 457
7.4. Az elektromos mező energiája vákuumban 460
7.4.1. A feltöltött kondenzátor energiája 460
7.4.2. Az elektromos mező energiája és energiasűrűsége 461
7.5. Az elektromos áram. Ohm törvénye 463
7.5.1. Az áramerősség 463
7.5.2. A vezető ellenállása. Ohm törvénye 465
7.5.3. Joule törvénye 469
7.5.4. Áramforrások (galvánelemek). Az áramkört jellemző feszültségek 472
7.6. Egyenáramú hálózatok. Egyszerű és összetett áramkörök 478
7.6.1. Kirchhoff törvényei 478
7.6.2. Ellenállások (fogyasztók) kapcsolása 480
7.6.3. Technikai ellenállások 487
7.6.4. Áramforrások kapcsolása 491
7.6.5. Mérőműszerek kapcsolása. Az áramerősség, a feszültség és az ellenállás mérése 496
8. Az időben állandó mágneses mező 503
8.1. A mágneses mező. Forráserősség és örvényerősség 503
8.1.1. A mágneses indukcióvektor 503
8.1.2. A mágneses fluxus. Mágneses forráserősség. Maxwell III. törvénye 509
8.1.3. A mágneses mező örvényerőssége. A gerjesztési törvény. Maxwell IV. törvénye 512
8.1.4. A Biot–Savart-törvény 517
8.1.5. Speciális áramelrendezések mágneses mezeje 520
8.1.6. A mágneses térerősség 527
8.2. Erőhatások a mágneses mezőben 529
8.2.1. Az áramjárta vezetőre ható erő. A mágneses Lorentz-erő 529
8.2.2. Szabad töltés mozgása elektromos és mágneses mezőben 532
8.2.3. Erőhatások mozgó töltések között 536
8.2.3.1. Párhuzamos áramvezetők között ható erő. μ_0 és az abszolút amper 536

8.2.3.2. Az elemi mágneses erőtörvény 537
8.3. Mozgó vezeték a mágneses mezőben 539
8.3.1. Az indukált elektromotoros erő 539
8.3.2. Váltakozó áram előállítása 545
8.3.3. A váltakozó áram effektív értéke 547
9. Az időben változó mágneses mező 551
9.1. Az elektromágneses indukció. A mágneses mező energiája 551
9.1.1. A nyugalmi indukció 551
9.1.2. A kölcsönös induktivitás és öninduktivitás 558
9.1.3. A mágneses mező energiája vákuumban 561
9.2. Az energia terjedése az áramforrástól a fogyasztóig. A Poynting-vektor 563
9.3. Az impedancia 568
9.3.1. Az ohmikus, induktív és kapacitív ellenállás 568
9.3.2. Teljesítmény és munka az RLC-körben 577
9.4. Szabad és kényszerített elektromágneses rezgések 579
9.4.1. Rezgőkörök szabad rezgései 579
9.4.2. Rezgőkörök kényszerített rezgései. Impedanciák soros és párhuzamos kapcsolása 583
9.4.2.1. Soros RLC-kör. Feszültségrezonancia 583
9.4.2.2. Párhuzamos LC- és RLC-kör. Áramrezonancia 584
9.4.2.3. Rezgőkörök csatolása 589
9.5. Gyakorlati alkalmazások 589
9.5.1. Az elektromágnes 589
9.5.2. A transzformátor. Energiaátvitel 593
9.5.3. Generátorok 596
9.5.3.1. Váltakozó áramú generátorok 596
9.5.3.2. Egyenáramú generátorok 600
9.5.4. Motorok 603
9.5.4.1. Egyenáramú motorok 603
9.5.4.2. Váltakozó áramú motorok 604
9.5.5. Mérőműszerek 606
10. Az időben változó elektromos mező. Az elektromágneses hullámok és a fény 611
10.1. Az eltolási áram. Maxwell törvényeinek rendszere 611
10.2. Gyorsan változó mezők. Elektromágneses hullámok 614
10.3. Az elektromágneses hullámok terjedési tulajdonságai 620
10.4. Az elektromágneses hullámok dinamikai tulajdonságai. A sugárzó anyag 626
10.5. Hullámoptikai jelenségek 635

10.5.1. A fény terjedése különböző közegekben 635
10.5.1.1. A fény terjedése homogén közegben 637
10.5.1.2. A fény két közeg határán. Visszaverődés, törés 639
10.5.1.3. A színek 645
10.5.2. A fény polarizációja 646
10.5.3. A fény interferenciája 649
10.5.4. A fény elhajlása (diffrakció) 653
10.5.5. Optikai színképek 658
10.5.6. A teljes elektromágneses színkép 660
10.6. Fotometriai alapfogalmak 663
10.6.1. A fotometria energetikai alapú mennyiségei (radiometria) 664
10.6.2. A fotometria vizuális alapon értelmezett mennyiségei 666
10.6.3. A fotometria két alaptörvénye 668
10.6.4. Fotométerek 669
10.7. Gyakorlati alkalmazások 671
10.7.1. Optika 671
10.7.1.1. Az optikai leképezés 671
10.7.1.2. Optikai leképezés törő közegekkel 671
10.7.1.3. Optikai leképezés visszaverő felületekkel 682
10.7.1.4. A Fermat-elv. Az optikai úthossz 687
10.7.1.5. Optikai eszközök 688
10.7.2. Hangtechnika *(Csákány Antal)* 699
10.7.2.1. Hanghullámok keltése, terjedése 700
10.7.2.2. Elektromoakusztikus átalakítók 704
10.7.2.3. Hullámok összetétele és felbontásuk 707
10.7.2.4. Hang- és beszédfelismerés 709
10.7.2.5. Hangrögzítés (CD) 712
10.7.3. Elektromágneses hullámok keltése és vétele *(Csákány Antal)* 714
10.7.3.1. Moduláció 715
10.7.3.2. Erősítők, oszcillátorok 718
10.7.3.3. Mikrohullámú rezgések 720
10.7.3.4. Adóantennák 724
10.7.3.5. Az elektromágneses hullámok terjedése 727
10.7.3.6. Vevőantennák 729
10.7.3.7. A vett jelek demodulálása 731
10.7.4. Képek előállítása és továbbítása *(Csákány Antal)* 733
10.7.4.1. Televíziózás, fogalmak, szabványok 734
10.7.4.2. A képfelvevők és képmegjelenítők újabb típusai 737
10.7.5. Mágneses lebegő rendszerek *(Csákány Antal)* 740
10.7.5.1. Látszólagos lebegések 742

10.7.5.2. Valódi lebegések 742
10.7.6. Nagy rendszerek *(Csákány Antal)* 750
10.7.6.1. Földrajzi helymeghatározás (GPS) 750
10.7.6.2. Mobil telefónia (GSM) 752

IV. RELATIVITÁSELMÉLET *(Gnädig Péter)*
11. Előzmények 755
11.1. A klasszikus mechanika és a Galilei-transzformáció 755
11.2. A Michelson–Morley-kísérlet 757
11.3. A Fizeau-kísérlet 762
12. A téridő 765
12.1. Térkép a városról, téridő-térkép a mozgásokról 766
12.2. Időmérés 769
12.3. Távolságmérés, koordináta-rendszer 772
12.4. Időtágulás 774
12.5. A Lorentz-transzformáció 776
12.6. Egyidejűség, egyhelyűség, oksági viszonyok 778
12.7. Lorentz-kontrakció 780
12.8. Relativisztikus sebesség-összetevés 782
12.9. Relativisztikus Doppler-effektus 784
12.10. Ikerparadoxon 786
13. Relativisztikus kinematika 789
13.1. Vektorok a téridőn 789
13.1.1. Négyessebesség 790
13.1.2. Négyesgyorsulás. Egyenletesen gyorsuló mozgás 791
14. Relativisztikus dinamika 793
14.1. Négyesimpulzus. Relativisztikus ütközések 793
14.2. Relativisztikus impulzus. Nyugalmi tömeg, relativisztikus tömegnövekedés 794
14.3. Relativisztikus energia. Nyugalmi energia, mozgási energia, teljes energia 795
14.4. Az energia-impulzus vektor hossza. Nulla nyugalmi tömegű részecskék 796
14.4.1. Relativisztikus mozgásegyenlet 797
14.4.2. Speciális problémák a relativisztikus dinamikában 798
14.4.2.1. A Compton-szóródás 798
14.4.2.2. Nehéz részecske bomlása 800
14.4.2.3. Rugalmatlan ütközés, tömegdefektus 801
14.4.2.4. Mozgás állandó erő hatására 801
14.4.2.5. Töltött részecske mozgása homogén mágneses mezőben 802

14.4.3. Megmaradó mennyiségek 803
15. Az általános relativitáselmélet alapgondolata 805
15.1. Az ekvivalencia-elv 805
15.2. A görbült téridő 806
15.3. Az általános relativitáselmélet kísérleti bizonyítékai 807
15.3.1. A Merkúr perihélium-elfordulása 807
15.3.2. Fénysugár elgörbülése a Nap mellett. Gravitációs lencsehatás 808
15.3.3. Gravitációs vöröseltolódás 809
15.3.4. Időkésés 810
15.3.5. Gravitációs hullámok 811
15.3.6. Geodetikus precesszió 812

V. ATOMFIZIKA ÉS KVANTUMMECHANIKA *(Tasnádi Péter–Juhász András)*
16. Az anyag atomos szerkezete 813
16.1. A súlyviszonytörvények. Avogadro törvénye 814
16.2. Az Avogadro-szám és az atomok méretének meghatározása a kinetikus gázelmélet alapján 815
16.3. Az elektromosság „atomos" szerkezete 816
16.3.1. Az elektrolízis Faraday-törvényei 816
16.3.2. Az elemi töltés meghatározása Millikan módszerével 817
16.4. Az elektron 819
16.4.1. A katódsugarak 819
16.4.2. Az elektronok fajlagos töltésének mérése 820
16.4.2.1. Az elektron mozgása egyszerre ható elektromos és mágneses térben (Thomson módszere) 822
16.4.3. Az elektronok tömegének sebességfüggése 823
17. Atommodellek 825
17.1. Az első atommodellek 825
17.1.1. Thomson atommodellje 826
17.1.2. Az atommag felfedezése. A Rutherford-kísérlet 826
17.1.3. A Rutherford-féle atommodell 829
17.2. A modern atomfizika kísérleti alapjai 829
17.2.1. A gázkisülések 829
17.2.2. A hőmérsékleti sugárzás 831
17.3. A Bohr-féle atommodell 834
17.3.1. A Bohr-féle pályafeltétel 834
17.3.2. A Bohr-féle frekvenciafeltétel 836
17.3.3. A Franck–Hertz-kísérlet 837
17.3.4. A Bohr-modell eredményei és hiányosságai 839
18. A fény részecsketermészete 841

18.1. A fotoeffektus ... 841
18.2. A Compton-jelenség ... 842
18.3. A fénynyomás ... 844
18.4. A fotonok tulajdonságai ... 845
19. Az anyaghullámok ... 847
19.1. De Broglie hipotézise ... 847
19.2. Az elektron hullámtermészetének kísérleti igazolása ... 847
19.3. Az anyaghullámok tulajdonságai ... 849
19.3.1. A hullámcsomag ... 850
19.4. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció ... 853
19.5. A hullámfüggvény fizikai értelmezése ... 858
20. Az atomok kvantummechanikai jellemzése ... 863
20.1. A Schrödinger-egyenlet ... 863
20.1.1. A Schrödinger-egyenlet elméleti alátámasztása ... 864
20.2. Kötött részecskék kvantummechanikai leírása ... 865
20.2.1. Dobozba zárt részecske leírása ... 866
20.2.1.1. A húrmodell ... 868
20.2.1.2. A membránmodell ... 870
20.2.2. Az alagúteffektus ... 871
20.2.3. A lineáris oszcillátor ... 874
20.3. A hidrogénatom ... 876
20.3.1. Az elektron energiája ... 876
20.3.2. Az állapotfüggvények ... 878
20.3.3. Az elektron pálya-impulzusmomentuma és mágneses momentuma 881
20.3.4. Az elektron saját-impulzusmomentuma, a spin ... 884
20.3.5. A hidrogénatom elektronjának jellemzése kvantumszámokkal ... 886
20.4. A Pauli-elv és a periódusos rendszer ... 887
20.5. A sokrészecske-rendszerek kvantummechanikai leírása ... 893
21. Kémiai kötések ... 897
21.1. A kovalens kötés ... 897
21.1.1. A hidrogénmolekula-ion és a hidrogénmolekula ... 898
21.2. A molekulák felépítése ... 900
21.2.1. Kötő- és lazítópályák ... 900
21.2.2. Szigma- és pi-kötés ... 903
21.2.3. A hibridizáció ... 904
21.3. Poláros molekulák. Az elektronegativitás ... 906
21.4. Az ionos kötés ... 907
21.5. A fémes kötés ... 908
21.6. Az elektronegativitás és a kötéstípus kapcsolata ... 908

VI. SOKRÉSZECSKE-RENDSZEREK VALÓSZÍNŰSÉGI LEÍRÁSA
(Tasnádi Péter–Juhász András)

22. A kinetikus gázelmélet ... 911
22.1. A kinetikus gázmodell ... 912
22.1.1. A gázok sebességeloszlása ... 912
22.1.2. Az ideális gáz kinetikus modellje ... 915
22.1.2.1. Az ideális gáz nyomása ... 916
22.1.2.2. Az ideális gáz hőmérséklete ... 918
22.1.2.3. Az ekvipartíciótétel ... 919
22.1.2.4. A kétatomos molekula szabadsági fokainak száma ... 919
22.1.2.5. A szabadsági fokok megszámlálása általános esetben ... 920
22.1.2.6. Az ideális gáz belső energiája és fajhője ... 921
22.1.2.7. Az ideális gáz belső energiájának kifejezése a nyomás és a térfogat segítségével ... 924
22.1.2.8. A gáz energiájának megváltozása munkavégzés hatására ... 925
22.1.3. A reális gázok állapotegyenlete ... 926
22.2. A gázok diffúziója ... 927
22.2.1. A molekulák mozgása a gázban. Az átlagos szabad úthossz ... 927
22.2.2. A diffúziót leíró törvények ... 928
22.3. A gázmolekulák véletlenszerű mozgásának valószínűségi leírása ... 931
22.3.1. Miért véletlenszerű a részecskék mozgása? ... 931
22.3.2. Sűrűségingadozások ... 936
22.3.3. Irreverzibilis folyamatok ... 938
22.3.4. Az energia eloszlása ... 939
23. Statisztikus fizika ... 941
23.1. Alapfogalmak ... 941
23.1.1. A makroállapot ... 941
23.1.2. A mikroállapot ... 942
23.1.2.1. A mikroállapot klasszikus fizikai meghatározása ... 942
23.1.2.2. A mikroállapot kvantummechanikai meghatározása ... 942
23.1.3. A mikroállapotok megszámlálása ... 943
23.1.3.1. A mikroállapotok megszámlálása a klasszikus fizikában. A fázistér 943
23.1.3.2. A mikroállapotok megszámlálása a kvantummechanikai leírás alapján ... 944
23.1.3.3. A klasszikus és kvantummechanikai állapotszám közötti kapcsolat 945
23.1.4. A részecskék megválasztása ... 945
23.1.5. A folyamatok leírása ... 946
23.1.6. A statisztikus leírásmód alapfeltevései ... 947
23.1.7. A lehetséges mikroállapotok száma ... 948
23.1.7.1. Dobozba zárt részecske állapotsűrűsége ... 950

Méliusz Központ Tudományos
401751
Debrecen

23.1.7.2. Az ideális gáz mikroállapotainak száma ... 952
23.1.7.3. A makroszkopikus testek mikroállapotainak száma ... 954
23.1.7.4. Az Einstein-kristály mikroállapotainak száma ... 954
23.2. A folyamatok iránya ... 955
23.2.1. Az ideális gáz szabad tágulása vákuumba ... 956
23.2.2. Irreverzibilis változások ... 957
23.2.3. Kölcsönható rendszerek ... 958
23.3. A termodinamika II. főtétele. Az entrópia ... 959
23.3.1. Az entrópia ... 959
23.3.2. A második főtétel ... 960
23.3.3. A termodinamika I. főtételének mikroszkopikus értelmezése ... 961
23.3.4. Az entrópia megváltozása hőközlés hatására. Reverzibilis folyamatok ... 963
23.4. A hőmérséklet statisztikus fizikai értelmezése ... 965
23.4.1. A hőmérséklet és az entrópia kapcsolata ... 967
23.4.1.1. Az ideális gáz hőmérséklete ... 967
23.4.1.2. Az Einstein-kristály hőmérséklete ... 969
23.5. Az energia eloszlása állandó hőmérsékletű rendszerben ... 974
23.5.1. A Boltzmann-eloszlás ... 974
23.5.2. A részecskék energia szerinti eloszlása ... 976
23.5.2.1. Az Einstein-kristály energiaeloszlása ... 977
23.5.2.2. Az egyatomos ideális gáz energiaeloszlása ... 979
23.5.2.3. A Maxwell-féle sebességeloszlás ... 980
23.6. A Gibbs-eloszlás ... 981
23.6.1. A Gibbs-eloszlás alkalmazásai ... 983
23.6.1.1. A Fermi-eloszlás ... 984
23.6.1.2. A Bose-eloszlás ... 985
23.7. Az eloszlásfüggvények közötti kapcsolat ... 986
23.7.1. A klasszikus közelítés érvényességi köre ... 986
23.7.2. A ritka gázok eloszlásfüggvénye ... 988
23.7.3. A Bose-, Fermi- és a Boltzmann-eloszlás kapcsolata ... 989

VII. AZ ANYAGOK SZERKEZETE *(Tasnádi Péter–Juhász András)*
24. Kristályok ... 992
24.1. Az ideális kristály szerkezete ... 992
24.1.1. A kristályos anyag szabályos belső szerkezetére utaló jelenségek 992
24.1.2. A rácsszerkezet közvetlen kísérleti igazolása ... 994
24.1.3. A röntgendiffrakciós szerkezetkutatás alapjai ... 995
24.1.4. A térion-mikroszkóp ... 996
24.1.5. A kristály geometriai szerkezete. A pontrács ... 997

24.2. A kristályszerkezetek jellemzése a kémiai kötés típusa alapján ... 1000
24.2.1. Atomrácsok ... 1000
24.2.2. Ionrácsok ... 1001
24.2.3. A fémek kristályszerkezete ... 1004
24.2.4. Molekularácsok ... 1007
24.2.4.1. Van der Waals-kötésű kristályok ... 1007
24.2.4.2. Hidrogénhíd-kötésű kristály. A jég szerkezete ... 1008
24.2.5. A polimorfia jelensége. A gyémánt és a grafit ... 1009
25. A kristályos anyagok fizikai tulajdonságainak értelmezése az ideális kristályszerkezet alapján ... 1013
25.1. A kristályok rugalmas tulajdonságai ... 1014
25.2. A kristályok belső energiája ... 1015
25.2.1. A szilárdtestek mólhője ... 1016
25.3. A szilárdtestek hőtágulása ... 1018
25.4. A szilárdtestek elektromos tulajdonságai. A sávszerkezet ... 1020
25.4.1. Kísérleti tapasztalatok ... 1020
25.4.2. A kristályok elektronszerkezete ... 1022
25.4.3. A kristály elektronjainak energiaspektruma. Sávszerkezet ... 1025
25.4.4. A fémek sávszerkezete ... 1027
25.4.5. A fémek fajlagos ellenállásának értelmezése ... 1029
25.4.6. A szigetelők sávszerkezete ... 1030
25.5. Félvezetők ... 1031
25.5.1. Elektroneloszlás félvezetőkben ... 1033
25.5.1.1. A lyuk fogalma ... 1033
25.5.1.2. A töltéshordozók eloszlása és a Fermi-energia ... 1033
25.5.2. A félvezetők elektromos vezetőképessége ... 1036
25.5.3. A mikroelektronika alkalmazásai ... 1039
25.5.3.1. A p–n átmenet termikus egyensúlyban ... 1040
25.5.3.2. A kristálydióda működése – egyenirányítás ... 1042
25.5.3.3. Optikailag aktív p–n átmenetek, optikai érzékelők, napelemcellák, világító diódák ... 1044
25.5.3.4. A tranzisztor ... 1047
25.5.3.5. A félvezető–fém átmenet ... 1048
25.5.3.6. Egyéb mikroelektronikai félvezető elemek ... 1049
25.6. Dielektrikumok ... 1049
25.6.1. A dielektromos polarizáció mikroszkopikus magyarázata ... 1049
25.6.1.1. A gázok permittivitása ... 1050
25.6.1.2. A folyadékok és a szilárdtestek permittivitása ... 1051
25.6.2. A permittivitás frekvenciafüggése ... 1053
26. Az anyagok mágneses tulajdonsága ... 1055

26.1. Anyagok csoportosítása mágneses tulajdonságaik alapján 1055
26.1.1. A dia- és paramágneses anyagok tulajdonságai 1057
26.1.2. A ferromágneses anyagok tulajdonságai 1057
26.2. A dia- és paramágnesség anyagszerkezeti értelmezése 1059
26.2.1. Az atomok mágneses tulajdonságai 1059
26.2.2. A diamágnesség anyagszerkezeti értelmezése 1060
26.2.3. A paramágnesség értelmezése 1063
26.2.4. Az elektrongáz paramágnessége 1066
26.3. A ferromágnesség értelmezése 1066
26.3.1. Az Einstein–de Haas-kísérlet 1066
26.3.2. Hosszú távú rend a ferromágneses anyagokban 1068
26.3.3. Antiferromágnesség 1071
26.4. A szupravezetés 1071
27. A lézer 1075
27.1. Alapfogalmak 1075
27.2. A holográfia 1078
28. Eltérések az ideális kristályszerkezettől. A kristályhibák 1081
28.1. Ponthibák 1081
28.1.1. Rácslyuk vagy vakancia 1083
28.1.1.1. A rácslyukak képződése termikus hatásra, egyensúlyi vakanciakoncentráció 1083
28.1.1.2. A rácslyukak képződése sugárzás hatására, sugárzási károsodás .. 1086
28.1.2. A rácslyukak szerepe a kristályos anyagok tulajdonságaiban 1087
28.1.2.1. Diffúzió kristályokban 1088
28.1.3. Ponthibák sókristályokban 1090
28.1.4. Ponthibák hatása a fémek (ötvözetek) tulajdonságaira 1092
28.1.5. Ponthibák atomrácsban 1092
28.2. Vonalhiba a kristályban; diszlokáció 1093
28.2.1. A kristályok képlékeny alakváltozása 1094
28.2.2. A diszlokációk tulajdonságai 1099
28.2.3. A képlékeny deformáció diszlokációs mechanizmusa és az alakítási keményedés 1099
28.2.4. A diszlokációk hatása a kristály termikus egyensúlyára 1100
28.3. Felületi hibák a kristályban 1100
28.4. A törés 1101
28.4.1. A rideg törés 1102
28.4.2. A képlékeny (szívós) törés 1104
29. A folyadékok szerkezete 1107
29.1. Az egyszerű folyadékok Bernal-féle golyómodellje 1108
29.2. A folyadékok diffrakciós szerkezetvizsgálata 1110

29.3. A víz 1112
29.3.1. A víz fizikai tulajdonságai 1112
29.3.2. A víz szerkezeti modellje 1113
29.3.3. A víz néhány jellegzetes tulajdonságának értelmezése a szerkezeti modellel 1114
29.3.3.1. A víz sűrűségváltozása a hőmérséklet függvényében 1114
29.3.3.2. A víz hőtani adatainak értelmezése 1115
29.3.3.3. A víz mint oldószer 1115
29.4. Az üvegek szerkezete 1116
29.4.1. Az üvegek fizikai tulajdonságai 1117
29.4.2. Az olvadék túlhűtése; az üvegállapot kialakulása 1118
29.4.3. A szilikátüvegek szerkezete 1119
29.4.4. Polimerüvegek 1122
29.4.5. Fémüvegek 1122
29.5. A folyadékkristályok 1122
30. Az óriásmolekulájú anyagok (műanyagok) tulajdonságai 1125
30.1. A molekulalánc tulajdonságai 1126
30.2. A láncmolekulák szerveződése 1126
30.2.1. „Kristályos" polimerek 1126
30.2.2. Óriásmolekulájú „folyadékok" 1127
30.2.3. Gumiszerűen rugalmas anyagok 1128

VIII. MAGFIZIKA *(Sükösd Csaba)*
31. Az atommagok összetétele. A radioaktivitás 1129
31.1. A radioaktív sugárzások tulajdonságai és érzékelésük 1130
31.1.1. Aktivitás, felezési idő 1130
31.1.2. Bomlási sorok, radioaktív egyensúly 1132
31.1.3. A radioaktív sugárzások terjedése vákuumban 1136
31.1.4. A sugárzás terjedése anyagban. Lineáris energiaátadás 1137
31.1.5. Az ionizáló sugárzások biológiai hatása 1140
31.1.5.1. A sugárvédelem alapelvei 1145
31.1.6. A sugárzások érzékelése, detektálása 1146
31.1.6.1. Részecskék nyomát láthatóvá tevő detektorok 1146
31.1.6.2. Részecskeszámlálók 1147
31.2. Az atommag jellemzői 1150
31.2.1. Az atommag mérete 1150
31.2.2. Az atommagok töltése 1151
31.2.3. Az atommagok tömege 1152
31.2.4. Az atommagok egyéb tulajdonságai 1153
31.3. Az atommagok kötési energiája 1154

31.3.1. Az atommag-átalakulások energiaviszonyai 1156
31.3.2. A magerők 1158
31.4. Az atommagmodellek 1158
31.4.1. A héjmodell 1158
31.4.2. A cseppmodell és az atommagok kötési energiájának általános jellegzetességei 1162
31.4.3. Az átlagos nukleonenergia-felület jellegzetességei 1164
31.5. A radioaktivitás értelmezése 1168
31.5.1. A β-bomlások 1168
31.5.2. A tömegszám csökkentése: az α-bomlás 1170
31.5.3. A γ-bomlás 1172
31.5.4. A bomlási sorok magyarázata 1173
31.5.5. Az energiaminimum elérését gátló és segítő tényezők 1173
32. Az atomenergia felszabadítása 1179
32.1. Az atomenergia felszabadításának két útja 1179
32.1.1. Az energiafelszabadítás makroszkopikus méretekben történő megvalósítása (a láncreakció) 1180
32.2. Maghasadással működő reaktorok 1183
32.2.1. A működés fizikai alapjai 1184
32.2.2. Nukleáris üzemanyagok 1190
32.2.3. A heterogén atomreaktorok felépítése 1191
32.2.4. Reaktortípusok 1195
32.2.5. A nukleáris energiatermelés járulékos problémái 1198
32.3. A fúziós energiatermelés alapjai 1200
32.3.1. Fúziós folyamatok 1201
32.3.2. Fúzió a csillagokban és a hidrogénbombában 1202
32.3.3. A szabályozott magfúzió lehetőségei 1204
32.3.3.1. A Lawson-kritérium teljesítésének két útja 1206

IX. ELEMI RÉSZEK ÉS AZ UNIVERZUM *(Gnädig Péter)*
33. Alapvető kölcsönhatások 1217
33.1. A gravitációs kölcsönhatás 1218
33.2. Az elektromágneses kölcsönhatás 1218
33.3. Az erős kölcsönhatás 1219
33.4. A gyenge kölcsönhatás 1220
34. Elemi részecskék 1221
34.1. Részecskék „születése" és „halála" 1222
34.1.1. Részecskék és antirészecskék. Lyukelmélet. Párkeltés és annihiláció 1222
34.1.2. β-bomlás és a neutrínók 1224
34.2. Részecskecsaládok 1225

34.2.1. Leptonok 1225
34.2.2. Mezonok 1226
34.2.3. Barionok 1227
34.2.4. Kvarkok 1227
34.3. Megmaradási tételek 1228
34.4. Közvetítő részecskék 1228
34.5. A kölcsönhatások egyesítése 1229
35. Az univerzum fizikai problémái 1231
35.1. A forró univerzum elmélete 1231
35.1.1. A mikrohullámú háttérsugárzás 1233
35.1.2. A könnyű elemek gyakorisága 1234
35.2. Precíziós kozmológia 1234

Név- és tárgymutató 1237
Melléklet 1289

Előszó

A fizika az egyetemes emberi kultúra részét alkotó természettudományok egyik ága. Ugyanakkor a fizika az alapja az elképesztően gyors fejlődést mutató technikának, amellyel egyre több ember kerül közvetlen kapcsolatba.

Azok a fiatalok, akik ma ismerkednek a műszaki tudományokkal, fizikával, technikával, már a harmadik évezred hajnalán, a 21. században dolgoznak, és „hasznosítják" a tanult ismereteiket. A tudományok fejlődésének egyre gyorsuló üteme azonban a technikai, technológiai ismereteket egyik napról a másikra elavulttá teheti, míg az általános természetleíró magyarázó elvek, amelyek egyúttal a műszaki tudományok alapjai is, időtállóbbak. Ez a tény hangsúlyozza az ún. alaptudományok fontosságát, és ezért kell e legalapvetőbb törvényeket feltáró tudományok ismereteit elsajátítania annak, aki ma készül olyan pályára, amely pálya műszaki, technikai eszközrendszerének legnagyobb része most még mindenki előtt ismeretlen.

A 21. század elejére a természettudományok ugrásszerű fejlődésének következtében a felhalmozott ismeretanyagot már nem képes egy ember az agyában tárolni – könyvekre, könyvtárakra van szüksége, és szükségessé válik a rendkívüli mértékű differenciálódás (széttagolódás) után elvégzendő szintézis, amely a szerteágazó jelenségek kapcsolatát néhány alapvető, közös és általános törvényre vezeti vissza. Ez napjainkban lehetséges, mert egyre világosabban látjuk, hogy a korábbi szemléletünk szerint egymástól függetlennek tűnő, egymástól távoli területek sajátosnak vélt egyedi törvényei mögött a szálak összefutnak, s egyetlen nagy törvényrendszerbe vezetnek, amely – úgy látszik – a csillagfejlődéstől a műanyagkémiáig, a farmakológiától az öröklestanig, a számítógéptől az agyműködésig, tehát a régi értelemben vett csillagászattól, mechanikától, fizikától, kémiától, biológiától, földtudományoktól a pszichológiáig változatos világunk közös alapelveken nyugvó leírását képes adni. A ma és a holnap emberének ezen átfogó elvekre, a tudományszakok közötti eligazodásra és tudásának folyamatos megújítására van szüksége. Ezért kapnak egyre nagyobb szerepet az összefoglaló jellegű kézikönyvek. Többek között ilyen céllal készült ez a könyv is.

Könyvünket elsősorban középiskolás diákoknak szánjuk, de használható összefoglalást, illetve áttekintést kívánunk nyújtani a főiskolák, egyetemek műszaki, természettudományi jellegű szakjai alsóbb évfolyamait végző hallgatóknak, középiskolai tanároknak, régebben érettségizett és fizikából felvételire készülő fiataloknak, a fizika iránt érdeklődő olvasóknak.

Munkánkat nehezítette az, hogy összefoglalást kellett adnunk a régebbi középiskolai tanterv fizikaanyagából azok számára, akik korábban érettségiztek, ugyanakkor fel kellett dolgoznunk a legújabb tantervi anyagot, amelynek szokatlan, középszinten újszerű témái és szemlélete (kvantummechanika, statisztikus fizika, magfizika, anyagfejlődés) éppen a természet változatossága mögött megbúvó közöset kívánják megragadni. Ezért az egyes fejezetek stílusa, felépítése, matematikaiapparátus-igénye némileg eltérő. Könyvünk tehát a hagyományos értelemben vett klasszikus fizikát és az ún. modern fizika alapjait öleli fel, ahol lehet részletesebben, ahol túlhaladná a könyv kereteit, kitekintésszerűen a legfontosabb témakörökre.

Az volt a célunk, hogy a fizika legfontosabb fogalmait pontosan értelmezzük, törvényeit világosan kifejtsük, és ne csak magyarázzuk tartalmukat, hanem ahol lehet, az alapul választott ún. alaptörvényekből (axiómákból) le is vezessük őket. Ez elsősorban a mechanikában, hőtanban és az elektromosságtanban vált többékevésbé teljessé.

Könyvünkben mindvégig az SI mértékrendszert használjuk.

Könyvünk fő részei :

I. Mechanika
II. Termodinamika
III. Elektrodinamika és optika
IV. Relativitáselmélet
V. Atomfizika és kvantummechanika
VI. Sokrészecske-rendszerek valószínűségi leírása
VII. Az anyagok szerkezete
VIII. Magfizika
IX. Elemi részek és az univerzum

A mechanika az erő és az impulzus (lendület) fogalmára egyaránt felépíthető. Könyvünkben mindkét utat megmutatjuk a régi és az új középiskolai tantervek koncepcióinak megfelelően. Az általános elvek után a legfontosabb gyakorlati alkalmazásokra térünk ki.

A II. részben az ún. fenomenologikus termodinamikát tárgyaljuk viszonylag röviden, mert sok tétele mélyebb magyarázattal a VI. részben újra előkerül.

A III. részben az elektromágneses alapjelenségekből kiindulva eljutunk a Maxwell-egyenletek által leírt alaptörvények teljes rendszeréig, ami lehetővé teszi a

fénytannak az elektromágnességbe való beolvasztását, azaz egyik célkitűzésünknek megfelelően két, látszólag különálló fejezet szintézisét. Az elektromágneses mező új vonása domborodik ki itt: hangsúlyossá válik anyag mivolta. Ez derül ki a részletesen tárgyalt új témakörökből, mint például az elektromágneses energia, a mező energiasűrűsége, az elektromágneses impulzus (lendület), tömeg, energiaáram-sűrűség, sugárnyomás stb. A szokásosnál nagyobb hangsúlyt helyeztünk az elektromágneses mező fogalmára, amely az információtárolás és -továbbítás leghatékonyabb „eszköze" a mai ember kezében. Ennek a fejezetnek a végén az elektromágnesség néhány gyakorlati alkalmazását találjuk.

Egészen más felépítésű és igényszintű az elektromosságtanból kifejlődött relativitáselméletet bemutató IV. rész. Abból kellett kiindulnunk, hogy a középiskolák legfeljebb szakköri szinten foglalkozhattak a témával. Ezért gyakorlatilag nincs olyan középiskolai szintű összefoglalása, amelyet mintának választhattunk volna. Ugyanakkor mindenképpen el akartuk kerülni, hogy indokolás nélkül, mintegy lexikális felsorolásban közöljük az így sehova sem kapcsolódó eredményeket. Annál is inkább hajlottunk arra, hogy mélyebb betekintést próbáljunk nyújtani a klasszikus fizika ezen betetőzésébe, mert eredményeivel és szemléletével át- meg átjárja a modernebb (20–21. századi) tárgyköröket, és főleg: mert a térről, az időről, a mozgásról szóló általános következtetéseinek világnézet-formáló szerep jutott. Ezért tartjuk indokoltnak, hogy a mélyebb bepillantás elősegítése érdekében módszeresebb kifejtésre tegyünk kísérletet, sőt olykor bizonyítsuk is állításait.

Az V. részben ismertetett atomfizika és kvantummechanika a jelenlegi középiskolai tanterv törzsanyagába tartozik. Itt találkozunk először a kvantumfizika alapfogalmaival, a kémiai anyagot alkotó részecskékre vonatkozó sajátos törvényekkel, a mindennapi szemléletünk számára idegennek tűnő, de a tények által igazolt részecske-hullámtermészet megnyilvánulásaival. Sem az atom, sem a kondenzált anyag felépítése, szerkezete, tulajdonságai nem érthetők meg a kvantumjelenségek ismerete nélkül.

Ismét új szemléletet követel a sokrészecske-rendszereknél alkalmazott valószínűségi leírás, a statisztikus fizikai módszer (VI. rész). Ennek segítségével érthetők meg az anyagszerkezettel foglalkozó VII. részben tárgyalt igen fontos témák.

A VIII. rész az atomok „egyéniségét" megszabó legbelső részének felépítésével, szerkezetével foglalkozik, amelynek felfedezése nyomán méltán nevezik a 20. századot „atomkornak". Az atommag összetételén, a radioaktivitáson túl az atomenergia hasznosításának fizikai elveivel és gyakorlati megvalósításával is megismerteti az olvasót.

Az atomfizikán túli, az anyag mikroszerkezetét felvillantó utolsó fejezet egyik feladata, hogy betekintést nyújtson a mikro- és makrokozmosz kapcsolatába. Itt talán még fokozottabban korlátoz az a tény, hogy a fogalmi apparátus rendkívül szerteágazó. Mégis, ha érzékeltetni kívánjuk, hogy milyen fontos kérdésekig jutott

a fizika fejlődése napjainkra, hogy ha a lezáratlanság benyomását (sőt: kihívását) is tolmácsolni akarjuk, ha a fizika előtt álló perspektívákat az anyag szerkezetének vizsgálatával be akarjuk mutatni, akkor minderre ebben a fejezetben különösen jó alkalom kínálkozik. Ehhez azonban olyan megoldást kellett választanunk, amely mintegy elmeséli a középfokú eszközök hatótávolságán túli modern fizikát.

Szeretnénk, ha olyan olvasók is hasznosan forgatnák kézikönyvünket, akik nem természettudományos képzettségűek, s a fizikát csak mint az egyetemes emberi kultúra egyik összetevőjét, akár a világmagyarázó, akár a természetben helyét kereső és kialakító ember egyik legnagyobb szellemi teljesítményét értékelik.

Holics László

Budapest, 2009. június hó

I. MECHANIKA

1. A mozgások leírása (kinematika)

1.1. Az anyagi pont mozgásának leírása

1.1.1. Alapfogalmak

Pontszerűnek (tömegpontnak, anyagi pontnak) mondunk egy testet, ha méretei a vizsgált problémában szereplő lényeges távolságokhoz képest elhanyagolhatóak. A pontszerű test mozgásának leírása lényegesen egyszerűbb, mint egy kiterjedt testé, hiszen az utóbbi esetben nem csak egyetlen pont mozgását kell vizsgálnunk, hanem több pontét.

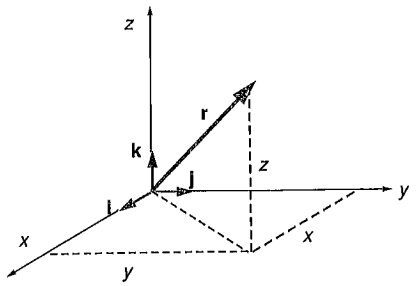
> Például a Föld pontszerűnek tekinthető, ha Nap körüli keringését vizsgáljuk, de nem tekinthető annak, ha a tengeráramlásokkal foglalkozunk.

Egy test mozgásának leírása azt jelenti, hogy minden pillanatban megadjuk egy másik testhez vagy testek rendszeréhez viszonyított helyzetét. Azt a merev vagy merev testnek tekinthető testrendszert, melyekhez viszonyítva megadjuk a test helyzetét, vonatkoztatási rendszernek nevezzük.

> Például az igen távoli csillagok egymáshoz viszonyított (a látóirányra merőleges) mozgása nem észlelhető, ezért egymáshoz képest nem mozgó „merev" testek rendszerének tekinthetők. A vonatkoztatási rendszer megválasztása ugyan önkényes, de bizonyos vonatkoztatási rendszerekhez viszonyítva a testek mozgását lényegesen könnyebb leírni: a bolygók pályája a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben bonyolult hurkos görbe, míg a Naphoz és az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszerhez képest jó közelítéssel egyszerű ellipszis.

A test helyét az adott vonatkoztatási rendszerben valamilyen számadatokkal adjuk meg. Ezeket az értékeket nevezzük a pontszerű test koordinátáinak.

A leggyakrabban használt *Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben* kijelölünk egy origónak is nevezett O kezdőpontot és három egymásra merőleges $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egységvektort. Az O pontból kiindulva felveszünk az egységvektorok irányába egy-egy egyenest, melyeket rendre x, y és z *koordinátatengelyeknek* nevezünk.



1.1. ábra

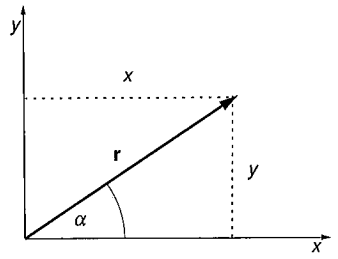
Az origóból a pontszerű testig húzott irányított szakasz, vektor az **r** *helyvektor*. A helyvektor felírható az **i, j, k** egységvektorok számszorosainak összegeként:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{1.1}$$

Az *x, y, z* számhármas a pontszerű test *Descartes-féle derékszögű koordinátái* (1.1. ábra).

Ha a test egy adott síkban mozog, akkor elegendő csak két koordinátáját megadni. Ebben a könyvben csak ritkán találkozunk térbeli mozgásokkal, ezért a továbbiakban a test *z* koordinátáját 0-nak vesszük és csak az *xy* síkbeli koordinátarendszert használjuk.

Az **r** helyvektor megadható hosszával és valamilyen vonatkoztatási iránnyal bezárt φ szög előjeles értékével is. Az így megadott koordinátákat *polárkoordinátáknak* nevezzük. Ha a szöget a vonatkoztatási irányhoz képest az óramutató járásával ellentétes irányba mérjük fel, akkor a szög pozitív, ellenkező esetben negatív (1.2. ábra).



1.2. ábra

Térben két szöget kell megadnunk, síkbeli mozgás leírásánál elegendő egy szög. Síkbeli mozgás esetén a polárkoordináták: a helyvektor abszolút értéke,

melynek jelölése *r* vagy $|\mathbf{r}|$, és a többnyire *x* tengellyel bezárt φ szög. A derékszögű koordináták és a polárkoordináták közötti összefüggés az ábra alapján:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.2}$$

Polárkoordinátákat használnak például a csillagászatban a bolygók mozgásának leírásánál vagy körmozgást végző tömegpont helyének megadásánál.

A helyvektor úgynevezett kötött vektor. Adatai még akkor is megváltoznak, ha ugyanabban a vonatkoztatási rendszerben csak a koordináta-rendszer origóját helyezzük át.

Az elmozdulásvektor és az abból származtatott fizikai mennyiségek koordinátái nem változnak, ha ugyanabban a vonatkoztatási rendszerben, változatlan tengelyirányok mellett az origót áthelyezzük. Az ilyen vektorokat *szabad vektoroknak* nevezzük.

A mozgó test tartózkodási helyei által megadott görbe a test *pályája*. A pálya megadható grafikusan egy koordináta-rendszerben, a koordináták táblázatával vagy a pálya egyenletével. A pálya egyenlete olyan egyenlet, melybe a pálya pontjainak koordinátáit behelyettesítve az egyenlőség fennáll. A valóságban a test véges ideig mozog és csak egy görbeszakaszt ír le, de a szokásos szóhasználat szerint például a ferdén elhajított testről azt mondjuk, hogy parabolapályán mozog, miközben természetesen csak parabolaívet fut be.

A pálya egyenlete megadható egy olyan egyenletrendszerrel is, melynek egyenletei az egyes koordinátákat adják meg az idő függvényében. Ezek az egyenletek a pálya *paraméteres egyenletei*. A paraméteres egyenletekből sok esetben egyszerűen megadható a pálya egyenlete (lásd 1.1.5.-ben a ferde hajítás pályája).

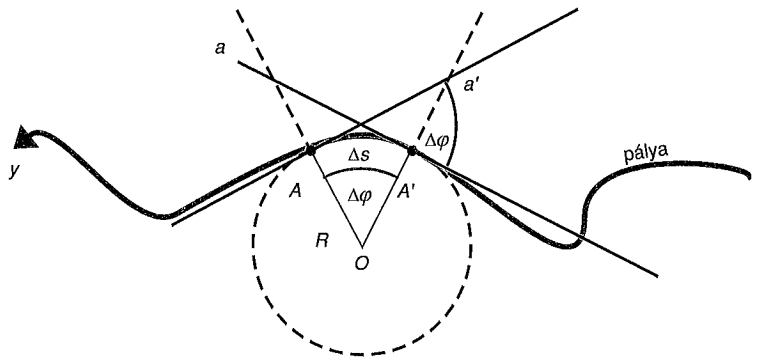
A pálya illetve pályaszakasz egyik jellemző adata a pálya mentén mért *ívhossz*. Ha adott a görbe, amely mentén a pontszerű test mozog, akkor elegendő egy tetszőleges kezdőponttól mért (esetleg előjeles) ívhosszat megadni a pont helyének egyértelmű megadásához. Ha a test a görbe mentén egy irányba mozog, akkor az ívhossz nagysága egyenlő a megtett úttal. Az út nem negatív skaláris mennyiség.

A megtett út szemléltetésére példa a kanyargó autóúton a 100-as kilométerkőtől a 250-es kilométerkőig egyirányú mozgást végző autó, melynek kilométerórája 150 km-t mutat, és ennyi a két pont közötti ívhossz is. Ha az autó ide-oda ingázik a két pont között, az út nyilván nem az ívhossz lesz, hanem annál nagyobb. A megtett utat ebben az esetben úgy határozzuk meg, hogy a mozgást felosztjuk olyan szakaszokra, melyekben a mozgás egyirányú, és ezen ívhosszak nagyságait adjuk össze. A járművek kilométerórája ezt a mennyiséget mutatja.

A pálya másik fontos jellemzője a *görbülete*. Azt a pályaszakaszt, (autóút esetén) kanyart nevezzük görbültebbnek, élesebb kanyarnak, melynek mentén gondolatban ugyanannyit autózva az autó hossztengelye jobban elfordul. Az autó hossztengelye a mozgásának irányát mutatja. Pontosabb matematikai megfogalmazásban a mozgás iránya a pálya adott pontbeli érintőjének iránya. Ott nagyobb a görbület, ahol a pályán ugyanakkora Δs ívhosszat megtéve az érintő nagyobb $\Delta\varphi$ szöggel fordul el.

Kör esetén e két mennyiség egymással egyenesen arányos, hiszen a körnél $\Delta s = R\Delta\varphi$, ahol az R sugár egy adott körnél állandó. A kör görbületén a sugár reciprokát, a $\Delta\varphi/\Delta s$ hányadost értjük: az a kör „görbültebb", annak nagyobb a görbülete, melynek sugara kisebb.

Nem körpálya esetén a görbület helyről helyre változik, ezért a görbületet mindig a pálya egy adott pontjában értelmezzük a következőképpen: Szemeljük ki a pálya egy adott A pontját (1.3. ábra)!



1.3. ábra

Ettől nem messze, Δs ívhossznyira vegyünk egy A' pontot! A pontokban felvett érintők irányának szöge legyen $\Delta\varphi$. Ez egyben az érintőkre merőleges egyenesek által bezárt szög. (Merőleges szárú szögek!) Az A' pontot közelítve az A-hoz Δs és vele $\Delta\varphi$ is változik, de nem egyenesen arányosan. Azonban ha A' elég közel van A-hoz, a két mennyiség egymással jó közelítéssel egyenesen arányos. Hányadosuk annál inkább tart egy adott számhoz, minél közelebb van A' az A-hoz. Ezt a számot nevezzük a pálya adott pontbeli görbületének:

$$g = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \qquad (1.3)$$

A fentiekből következik, hogy a pálya kis szakasza jól közelíthető egy olyan körívvel, melynek sugara a görbület reciproka. Ezt a kört a görbe adott pontbeli *görbületi* vagy *simuló* körének nevezzük, a görbület reciprokát pedig *görbületi sugárnak*. Az adott pontbeli görbületi kör középpontja az érintőre merőleges egyenesen van rajta, görbületi sugárnyira az adott ponttól. A görbületi kör a pályagörbét az adott pontban érintő végtelen sok kör közül a lehető legjobban közelíti a görbét abban az értelemben, hogy az adott pont kis környezetében a görbületi kör pontjai térnek el a legkevésbé a görbe pontjaitól.

A test mozgásának leírása akkor teljes, ha megadjuk, hogy mikor és hol tartózkodik, azaz megadjuk a helyvektorát, koordinátáit mint az idő függvényét.

A menetrendek és a csillagászati évkönyvek táblázatokban adják meg a test helyzetét megadó adatokat, melyek a menetrendnél egy megállapodás szerinti 0 km-es origótól megtett utat, a bolygóknál pedig az égbolton való megtalálásukhoz szükséges polárkoordinátáik közül csak a két szögadatot adják meg.

A helyvektor, illetve a koordináták t időpontbeli értékét a továbbiakban a jelük mellé tett t indexszel vagy zárójelbe tett t-vel jelöljük: $\mathbf{r}_t$, $\mathbf{r}(t)$, x_t, $x(t)$ stb. Miközben a test mozog pályája mentén, helyvektora folyamatosan változik. A test egy korábbi t időpillanatbeli helyzetében helyvektora legyen $\mathbf{r}(t)$, egy Δt-vel későbbi, $t + \Delta t$ pillanatban pedig $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. A korábbi helyzettől a későbbi helyzetig húzott irányított szakasz az *elmozdulásvektor*. Az ábrából látható, hogy ez a vektor a két helyvektor vektori különbsége. Mivel az elmozdulásvektor a helyvektor megváltozása, ezért jele $\Delta\mathbf{r}$.

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t). \qquad (1.4)$$

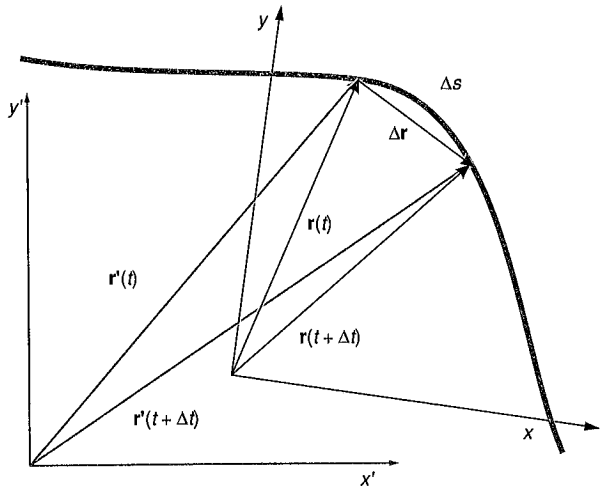
Az elmozdulásvektor koordinátái pedig $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$, $\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$. Az elmozdulásvektor koordinátái ugyanabban a vonatkoztatási rendszerben nem változnak, ha a koordinátatengelyek irányának változatlansága mellett az origót eltoljuk. Ha ugyanabban a vonatkoztatási rendszerben a koordinátatengelyeket elforgatjuk, az elmozdulásvektor koordinátái külön-külön megváltoznak. Azonban a négyzetük összegéből vont négyzetgyökös kifejezés értéke, azaz az elmozdulásvektor hossza változatlan, hiszen az elmozdulás nagysága ugyanabban a vonatkoztatási rendszerben mindig ugyanakkora (1.4. ábra).

Az elmozdulás nagysága, a vektor abszolút értéke, mindig kisebb vagy egyenlő, mint a két időpont közt megtett út. Csak abban az esetben egyenlő vele, ha a test egyenes vonalú pályán egyirányú mozgást végez:

$$|\Delta\mathbf{r}| \leq \Delta s.$$

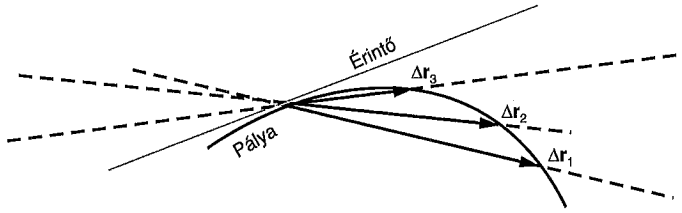
Ha a Δt idő elég kicsi, akkor a helyvektor hossza jó közelítéssel egyenlő a megtett úttal:

$$|\Delta \mathbf{r}| \approx \Delta s.$$



1.4. ábra

Az elmozdulásvektor egyenese a 1.5. ábra szerint a pálya szelője. Azonban elegendő kis Δt esetén már majdnem érintő irányú.



1.5. ábra

Ha ismerjük a pont t időpillanatbeli helyét, $\mathbf{r}(t)$-t, akkor a $t + \Delta t$-kori helye a (1.4) képlet alapján:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}.$$

1.1.2. A sebesség

1.1.2.1. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás sebessége

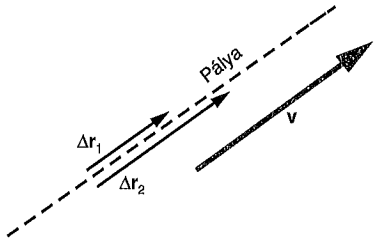
Ez a mozgás egy egyenes mentén zajlik le és a megtett út egyenesen arányos az út megtételéhez szükséges idővel, azaz hányadosuk állandó. A *sebesség* jele „v". A sebesség nagysága a Δt idő alatt megtett Δs út hányadosa:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1.5a}$$

A sebességnek irányt is tulajdonítunk: ez a „mozgás iránya", azaz az elmozdulás iránya. Azaz a sebesség $\mathbf{v}$ vektora párhuzamos és egyirányú az elmozdulás irányával. Ezt fejezi ki a

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{1.5b}$$

képlet, ahol $\Delta \mathbf{r}$ a Δt idő alatti elmozdulásvektor. Az egyenlet szerint a sebesség vektorát úgy kapjuk meg a $\Delta \mathbf{r}$ vektorból, hogy azt a pozitív Δt-vel elosztjuk, azaz irányuk megegyezik (1.6. ábra). Mivel az elmozdulásvektor nagysága megegyezik egyenes vonalú mozgás esetén a megtett úttal, ezért a sebesség nagysága az (1.5a) képlet szerint alakul.



1.6. ábra

A sebesség származtatott fizikai mennyiség, ezért az azt definiáló képletbe behelyettesítve az alapmennyiségek mértékegységeit, mértékegysége m/s. A gyakorlatban használatos még a km/h, 1 km/h = 3,6 m/s.

A sebesség szemléletes jelentése az időegység alatti elmozdulás. A sebesség számértéke szemléletesen az időegység alatt megtett út számértékét adja meg.

A sebességvektor koordinátái „előjeles" valós számok:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{1.5c}$$

Ha egyenes vonalú egyenletes mozgásnál ismerjük a t időpillanatbeli $\mathbf{r}(t)$ helyvektort és a $\mathbf{v}$ sebességvektort, akkor egy Δt idővel későbbi $t + \Delta t$ időpillanatra kiszámíthatjuk a pontszerű test helyét:

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}\Delta t.$$

1.1.2.2. A változó mozgás sebessége

Az átlagsebesség. Egy változó mozgást végző test $\bar{\mathbf{v}}$ *átlagsebességén* értjük a

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{1.6a}$$

hányadost. Egy másik értelmezés az átlagsebesség nagyságára:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1.6b}$$

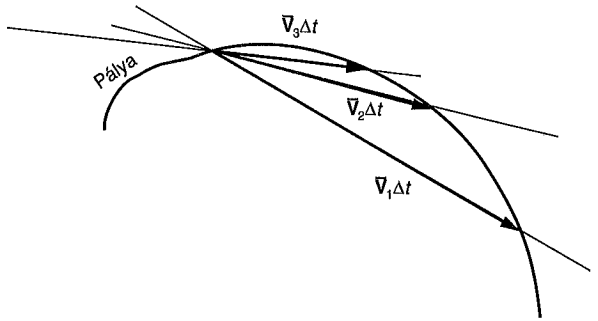
Ez csak abban az esetben egyezik meg a „vektorosan" értelmezett átlagsebesség nagyságával, ha a mozgás egyenes vonalú és egyirányú, mert csak ekkor igaz a $\Delta s = |\Delta \mathbf{r}|$.

A képletből következően $\Delta s = \bar{v}\Delta t$. Ezért *az átlagsebesség annak az egyenletesen mozgó testnek a sebességét is jelenti, amelyik ugyanannyi idő alatt ugyanannyi utat tesz meg, mint a változó mozgást végző test.* A köznyelvben és a továbbiakban ebben a könyvben az átlagsebességen a megtett úttal értelmezett képlet szerinti mennyiséget értjük.

Pillanatnyi sebesség. Szemeljünk ki egy t időpillanatot és egy Δt időtartamot! A fent említett $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ hányados a „vektoros" átlagsebességet adja csak meg. Mivel a mozgás nem egyenes vonalú és nem egyenletes, ezért a $\Delta \mathbf{r}$ elmozdulásvektor iránya változik a Δt időtartam függvényében, és az egyenes arányosság sem áll fenn $\Delta \mathbf{r}$ nagysága és Δt között. Azonban nyilvánvaló, hogy fizikai és matematikai megérzésünk alapján létezik minden pillanatban sebesség, és azért adja meg a fent említett hányados csak az átlagsebességet, mert a sebesség még a Δt időtartam alatt is változik. A sebesség nagyságának és irányának változása annál kisebb, minél kevesebb idő alatt zajlik le a változás, azaz minél kisebb Δt. Ezért a t időpillanatbeli pillanatnyi sebességet jó közelítéssel megkapjuk, ha nagyon kicsi Δt-hez tartozó $\Delta \mathbf{r}$ elmozdulást osztjuk a Δt-vel. Formulánk annál jobban megközelíti a t pillanatkori $\mathbf{v}(t)$ pillanatnyi sebességet, minél kisebb a Δt. Ezt matematikailag így fejezzük ki:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \qquad \text{ahol} \qquad \Delta t \to 0, \tag{1.6c}$$

(olv.: ahol Δt tart a nullához). Az 1.7. ábra szerint a sebesség érintőirányú és nagysága $\Delta s/\Delta t$, ahol Δt tart a 0-hoz, hiszen ebben az esetben $\Delta \mathbf{r}$ nagysága is tart Δs-hez.



1.7. ábra

A sebesség nem kötött vektor, kezdőpontját bárhol felvehetjük. Szokás a sebességet ábrázoló nyíl kezdőpontját a pontszerű testen felvenni.

Fizikai mennyiségek így értelmezett pillanatnyi értékének meghatározásával a differenciálszámítás foglalkozik. Ennek jelöléseivel:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}.$$

Sokszor a fizikai mennyiség változásának pillanatnyi értékét egy, a mennyiség fölé tett ponttal jelölik:

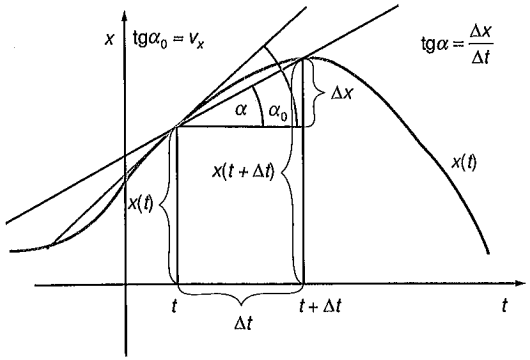
$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}.$$

A fentiek igazak a koordinátákra is:

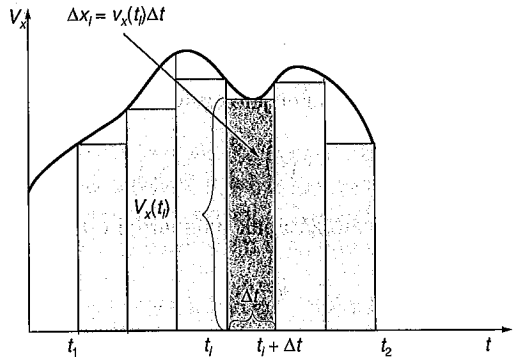
$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \qquad \text{ahol} \quad t \to 0 \tag{1.6d}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}.$$

Az elmozdulás x koordinátáját ábrázolva az idő függvényében a $\Delta x/\Delta t$ hányados a helykoordináta–idő görbe szelőjének iránytangensét jelenti, lásd az 1.8. ábrát. A Δt-t egyre kisebbnek választva a hányados a pillanatnyi sebesség x koordinátájához, a szelő pedig az érintőhöz tart. Azaz a görbe érintőjének meredeksége a pillanatnyi sebesség x koordinátája.



1.8. ábra



1.9. ábra

Ábrázoljuk a sebességkoordinátát az idő függvényében (1.9. ábra)! A grafikonon az i-edik téglalapocska területének számértéke, $v_i(t)\Delta t$ az i-edik elmozduláskoordináta x komponensének közelítő értékét jelenti. Ez a közelítés akkor elegendően pontos, ha a sebesség x koordinátája a Δt idő alatt alig változik, azaz Δt elegendően kicsiny. Megfelelően kicsiny Δt-kre osztva egy tetszőleges t_1, t_2 időintervallumot, az alábbi képlet szerint jó közelítéssel megkaphatjuk a t_1 és t_2 időpontok közötti helykoordináta-változást:

$$x\left(t_2\right)-x\left(t_1\right)\approx\sum_{i=1}^{n} v_x\left(t_i\right)\Delta t.$$

Ha Δt -vel tartunk a 0-hoz, akkor az integrálszámítást ismerők számára:

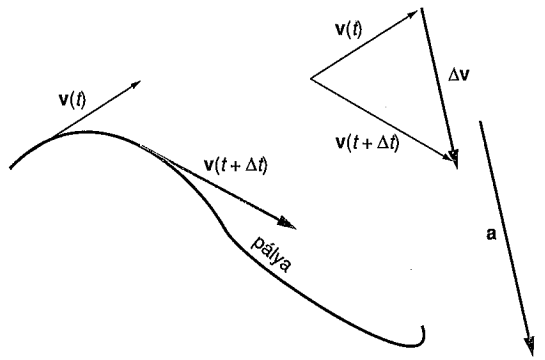
$$x\left(t_2\right)-x\left(t_1\right)=\int_{t_1}^{t_2} v\left(t\right)dt.$$

Hasonló összefüggés érvényes a többi sebességkoordinátára. A sebességnagyság–idő grafikon görbéje alatti terület számértéke a két időpont között megtett utat adja meg.

1.1.3. A gyorsulás

A nem egyenes vonalú egyenletes mozgásoknál a sebesség vektorának iránya, nagysága vagy mindkettő változik. A sebességváltozás vektora a 1.10. ábra szerint megszerkeszthető:

$$\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t).$$



1.10. ábra

Egy rögzített t időpillanatban vizsgálva Δv-t az már csak a Δt-től függ. A legegyszerűbb függvénykapcsolat Δv és Δt között az egyenes arányosság: azaz a Δv/Δt hányados irány és nagyság szerint állandó. Ilyen mozgás például a ferde hajítás vagy az egyenletesen lassuló autó mozgása. Ezt a sebesség időbeli változására jellemző vektort *gyorsulásnak* nevezzük. Jele: **a**. Az ilyen mozgásoknál a gyorsulás definíciója:

$$\mathbf{a}=\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \qquad (1.7a)$$

A gyorsulás tehát vektor, iránya a sebességváltozás iránya. Mértékegysége m/s^2. Egyenes vonalú mozgásoknál nagyságának szemléletes jelentése a sebesség időegységre eső megváltozásának nagysága. Azonban nemcsak akkor lehet egy testnek gyorsulása, ha sebességének nagysága változik, hanem akkor is van $\Delta\mathbf{v}$, ha a sebesség nagysága változatlan, miközben iránya folyamatosan változik (lásd egyenletes körmozgás). Ebben az esetben a fenti szemléletes jelentés elveszíti egyszerű tartalmát.

Az átlaggyorsulás. Általában $\Delta\mathbf{v}$ iránya egy adott időpont környezetében a Δt függvényében változik, és egyenes arányosság sem áll fenn $|\Delta\mathbf{v}|$ és Δt között. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a mozgás változó gyorsulású. Ilyenkor a két mennyiség hányadosa az $\bar{\mathbf{a}}$-val jelölt átlaggyorsulás:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{1.7b}$$

A pillanatnyi gyorsulás. Változó gyorsulású mozgásnál szemeljünk ki egy rögzített t időpontot. Ha Δt-t elegendően kicsinynek választottuk, akkor ennek további csökkentésével $\Delta\mathbf{v}$ iránya már alig változik, és $|\Delta\mathbf{v}|$ is jó közelítéssel egyenesen arányos Δt-vel. A definíció szerint a gyorsulás iránya a sebességváltozás vektorának iránya. Mint a pillanatnyi sebességnél, itt is az $\mathbf{a}$ pillanatnyi gyorsulás definíciója:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \qquad \text{ahol} \qquad t \to 0. \tag{1.7c}$$

A differenciálszámításnál használatos jelölésekkel.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{v}}.$$

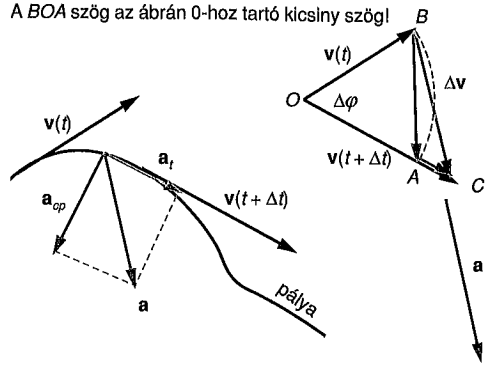
A fenti összefüggések a koordinátákra is igazak:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \qquad \text{ahol} \quad \Delta t \to 0 \tag{1.7d}$$

illetve

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_x \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_y.$$

Tangenciális (érintőleges) és normális (centripetális, illetve radiális) gyorsulás. Célszerű általános esetben felbontani a gyorsulást, és így a sebességváltozást is két komponensre bontani. A kisebbik sebességvektor hosszát körzőnyílásba véve rajzoljunk egy O középpontú körívet! A körív az A pontban metszi a hosszabb sebességvektort. Bontsuk fel a $\Delta\mathbf{v}$-t két komponensre: $\Delta\mathbf{v} = \overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$! Az $\overline{AC}$ vektor hossza megegyezik a sebesség nagyságának megváltozásával. Ezt a sebességirányú, vagyis érintőirányú sebességváltozás-vektort osztva a nagyon kis Δt-vel kapjuk a gyorsulás *tangenciális* vagy *érintőleges* komponensét. Ez a komponens tehát a sebesség nagyságának változását jellemzi. Számértéke egyenletes változásnál a sebesség időegységre eső növekedését vagy csökkenését jelenti. Jele: $\mathbf{a}_t$ vagy $\mathbf{a}_é$.



1.11. ábra

A $\overline{BA}$ sebességváltozás-vektor a pillanatnyi sebesség adott időpontbeli nagyságával és irányának változásával kapcsolatos. Elegendően kis Δt esetén a $\overline{BA}$ húr hossza jó közelítéssel egyenlő a BA ív $v\Delta\varphi$ hosszával. Ez a $\Delta\varphi$ szög egyben a görbület definíciójánál említetteknek megfelelően egyben az érintőkre emelt merőlegesek szöge, és $\Delta\varphi/\Delta s = 1/R$, ahol R a görbe adott pontbeli simuló körének sugara (lásd még 1.3. ábra). $\Delta\varphi$-t behelyettesítve:

$$\overline{BA} \text{ sebességváltozás-vektor hossza} \approx BA \text{ ív hossza} = v\Delta\varphi = \frac{v\Delta s}{R}.$$

Az $\mathbf{a}_n$-nel vagy $\mathbf{a}_{cp}$-vel (esetleg $\mathbf{a}_r$-rel) jelölt ún. normális vagy centripetális (vagy radiális) gyorsuláskomponens nagysága Δt-vel való osztás után:

$$a_n \approx \frac{v\Delta s}{R\Delta t}.$$

Δt-vel tartva a 0-hoz a $\Delta s/\Delta t$ hányados a t időpontbeli v pillanatnyi sebességet adja meg. Ezért

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{1.7e}$$

Az OBA háromszög egyenlő szárú. A szárak által bezárt $\Delta\varphi$ szög igen kicsi, hiszen igen kis Δt idő alatt a sebesség iránya alig változik. Ezért a két, alapon fekvő, egyenlő nagy szögekre majdnem 180°, egyenként pedig 90° jut. A gyorsulásnak ez a komponense tehát merőleges a sebességre, azaz a pálya adott pontbeli érintőjére, normálisára. Innen ered a „normális komponens" elnevezés. A görbe normálisán

található a simuló kör középpontja, „centruma", és ez a gyorsuláskomponens éppen errefelé mutat. Ezért nevezik ezt a komponenst *centripetális gyorsulásnak* is.

Az **a** gyorsulás tehát felírható a két komponens összegeként:

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_{cp}. \tag{1.7f}$$

Általában véve görbült pályánál a gyorsulás a pálya homorú oldala felé mutat.

Ha a görbe vonalú mozgás egyenletes, azaz sebességének nagysága állandó, akkor a gyorsulásnak nincs érintőleges komponense, tehát merőleges a sebességre. A v^2/R képlet alapján értéke csak akkor változatlan, ha a sebesség nagyságán kívül a görbületi kör R sugara is állandó, azaz a pálya kör. Ha egy autó állandó nagyságú sebességgel halad kanyargós úton, akkor centripetális gyorsulásának nagysága a kanyarok görbületi sugarának, a kanyar „élességének" függvényében változik, de végig merőleges a sebességre.

Ha egy görbe vonalú mozgás sebességének nagysága is változik, akkor van a gyorsulásnak érintőleges összetevője is. Ezért a gyorsulás a sebesség irányába, „előre dől", vele hegyesszöget zár be, ha a sebesség nagysága nő (1.11. ábra). Ellenkező esetben „hátrafelé dől", a két vektor tompaszöget zár be. Ha a mozgás pillanatnyi sebessége 0, akkor ebben a pillanatban a gyorsulás érintőirányú. (Lásd Matematikai inga.)

Ha a mozgás egyenes vonalú, akkor a centripetális gyorsulás 0, ezért a gyorsulás a sebességgel párhuzamos. Ha a sebesség nagysága nő, akkor a gyorsulás sebességirányú, csökkenő sebességű, lassuló mozgásnál pedig azzal ellentett.

> Vigyázat! Elterjedt nézet, hogy a lassulás gyorsulása negatív, aminek nincs értelme, hiszen egy vektor nem lehet negatív, legfeljebb a koordinátája. A koordináta előjele pedig attól függ, hogy mi az önkényesen megválasztható koordinátatengely iránya: ha a test lassulva mozog a „negatív" irányba, akkor gyorsulásának, „lassulásának" x koordinátája pozitív.

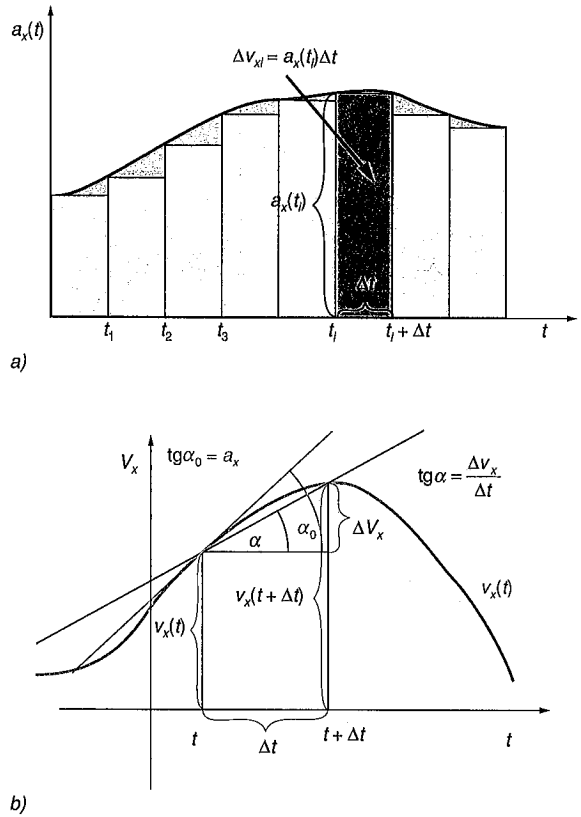
A gyorsuláskoordináta–idő, azaz $a_x(t)$, illetve $a_y(t)$, függvény ismeretében a sebességkoordináta Δv_x illetve Δv_y megváltozásának közelítő számértéke az 1.12a. ábra alapján a lépcsős görbe és a t tengely közötti terület számértéke:

$$\Delta v_x \approx \sum_{i=1}^{n} a_x\left(t_i\right)\Delta t \qquad \Delta v_y \approx \sum_{i=1}^{n} a_y\left(t_i\right)\Delta t. \tag{1.8}$$

A pontos értéket megkapjuk, ha Δt-vel tartunk a 0-hoz:

$$\Delta v_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x\left(t\right)\mathrm{d}t \qquad \Delta v_y = \int_{t_1}^{t_2} a_y\left(t\right)\mathrm{d}t\,.$$

Szemléletesen a sebességváltozás-koordináta számértéke a gyorsuláskoordináta grafikon görbéje alatti terület számértéke.

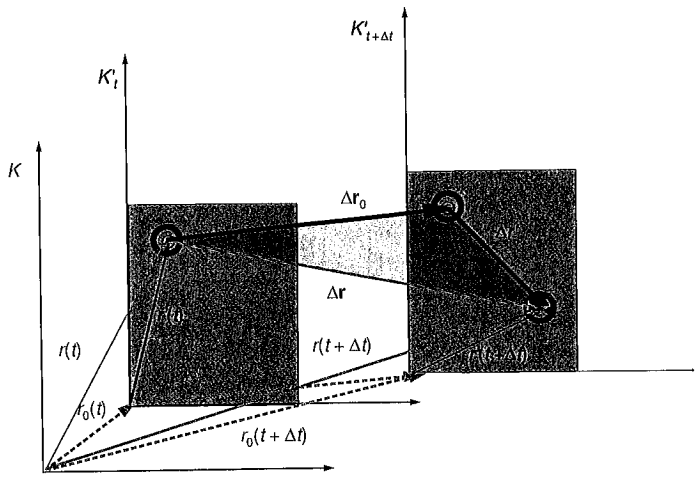


1.12. ábra

A sebességkoordináta–idő grafikonon az 1.12b. ábra szerint az átlaggyorsulás koordinátája a szelő, a pillanatnyi gyorsulásé pedig az érintő meredeksége.

1.1.4. Mozgások leírása egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerekben

Az laboratóriumhoz képest nyugvó „K" rendszerben mért illetve megfigyelt adatokat vesszőtlen mennyiségekkel, az ehhez képest mozgó „K'" rendszerben mért adatokat felső vessző indexszel jelöljük, pl. $\mathbf{r}'$ stb. A „K'" „mozgó" rendszer „K" laboratóriumi adatait „$_0$" alsó indexszel látjuk el. Pl. $\mathbf{r}_0$.



1.13. ábra

A 1.13. ábra szerint egy P pontszerű test és a mozgó rendszer adatai közti összefüggés tetszőleges t időpontban:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t), \tag{1.9}$$

ahol $\mathbf{r}(t)$ a P pont „nyugvó" rendszerbeli, $\mathbf{r}'(t)$ „mozgó" rendszerbeli helyvektora, az $\mathbf{r}_0(t)$ pedig a „mozgó" rendszer O' origójának „nyugvó" rendszerbeli helyvektora. Hasonló egyenlet érvényes egy Δt-vel későbbi, $t + \Delta t$ későbbi pillanatban:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}_0(t + \Delta t) + \mathbf{r}'(t + \Delta t). \tag{1.9a}$$

Az (1.9a) egyenletből az (1.9) egyenletet kivonva a két időpont közötti elmozdulásvektorok közti összefüggés:

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}'.$$

Ezt az egyenletet a 0-hoz tartó Δt-vel osztva kapjuk a sebességek közti összefüggést:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \tag{1.10}$$

ahol $\mathbf{v}$ a pont sebessége „nyugvó" rendszerben, $\mathbf{v}_0$ a K' „mozgó" rendszer origójának sebessége a „nyugvó" rendszerben, $\mathbf{v}'$ a pont sebessége a K' „mozgó" rendszerben.

Az (1.10) egyenlet szerint a sebességek ugyanúgy adódnak össze, mint az elmozdulásvektorok. Egy fizikai mennyiség vektorjellege nemcsak azt jelenti, hogy irányított szakasszal jellemezhető, hanem elsősorban azt jelenti, hogy úgy adódik össze, mint az elmozdulásvektorok.

Az előző gondolatmenet alapján hasonló összefüggés érvényes a gyorsulásvektorokra is

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}', \tag{1.11}$$

ahol $\mathbf{a}$ a mozgó pont gyorsulása a „nyugvó" rendszerben, $\mathbf{a}_0$ a K' „mozgó" rendszer origójának gyorsulása a „nyugvó" rendszerben, $\mathbf{a}'$ a pont gyorsulása a „mozgó" rendszerben.

Hasonló összefüggések érvényesek az említett vektorok koordinátáira is, ahol természetesen előjeles skaláris mennyiségek algebrai összeadásáról van szó.

A fentiekből látható, hogy a test helyvektora, sebessége, gyorsulása függ a vonatkoztatási rendszer megválasztásától. A pálya alakja és a mozgás „fajtája" is függ attól, hogy melyik vonatkoztatási rendszerből figyeljük meg a mozgást.

Egyszerű példa erre az az eset, amikor vízszintes, egyenes vonalú, egyenletes mozgást végző vonat belsejében kezdősebesség nélkül leejtünk egy tárgyat. A pálya paraméteres egyenlete a vonat K' vonatkoztatási rendszerében vízszintes x' és függőleges y' tengelyek esetén:

$$x' = 0 \qquad y' = h - \frac{g}{2}t^2,$$

ami egy függőleges, egyenes vonalú pálya. Itt h az ejtés magassága.

A vasúti töltéshez képest nyugvó K rendszerből megfigyelve a v_{0x} sebességű K' rendszerbeli egyenletek így módosulnak a (1.9) egyenletek alapján:

$$x = x_0 + v_{0x}t \qquad y = h - \frac{g}{2}t^2.$$

Az első egyenletből kifejezve t-t és a második egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$y = h - \frac{g}{2}\left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right)^2,$$

ami szemmel láthatóan egy parabola egyenlete.

A továbbiakban fontosak lesznek az egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszerek. A feltétel miatt a „mozgó" rendszer „nyugvóbeli" gyorsulása nulla, ezért mindkét vonatkoztatási rendszerből megfigyelve a testeket, gyorsulásuk ugyanaz, miközben sebességük és pályájuk eltérő.

Ez pl. az egyenes vonalú egyenletes, tehát nulla gyorsulású mozgásokra azt jelenti, hogy az egymáshoz képest nem gyorsuló vonatkoztatási rendszerekből megfigyelve az ilyen mozgásokat, azok mindkét rendszerben egyenes vonalú egyenletes mozgások.

Ha a „K" „nyugvónak" tekinthető rendszerről áttérünk a „K'" „mozgó" rendszerre és azt tekintjük „nyugvónak", akkor az előző kijelentések ugyanebben a formában igazak, csak a $\mathbf{v}_0$ helyébe $-\mathbf{v}_0$-t, $\mathbf{a}_0$ helyébe $-\mathbf{a}_0$-t kell írnunk.

1.1.5. Néhány mozgás részletes leírása

A mozgásokat pályájuk alakja és a sebesség–idő függvényük alapján szokás csoportosítani. A sebesség–idő függvény szerint van egyenletes, azaz állandó sebességű, és változó mozgás. A változó mozgás sebességének nagysága, iránya vagy mindkettő változik.

1.1.5.1. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás

Első pontos definíciója *Galileitől* származik:

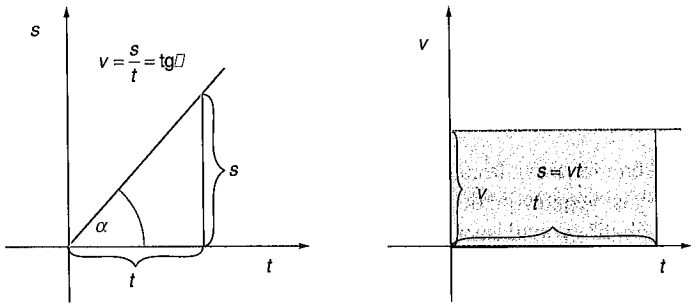
Egyenes vonalú egyenletes mozgás az olyan mozgás, melynek során az egyenes mentén mozgó test egyenlő időközök alatt egyenlő utakat fut be, bármilyen kicsinyek is ezek az egyenlő időközök.

Kétszer, háromszor, n-szer annyi Δt-t választva a megtett Δs utak is kétszer, háromszor, n-szer akkorák lesznek, mert egyenlő Δt időközökhöz egyenlő Δs utak tartoznak. Tehát a két mennyiség egyenesen arányos: $\Delta s \sim \Delta t$, ezért *a* v *sebesség nagysága állandó*. Mivel a pálya egyenes, ezért a sebesség iránya is állandó, tehát a sebesség mint vektor is állandó. A koordináta-rendszert megválaszthatjuk úgy, hogy a mozgás pályája az x tengely legyen. Ekkor $\Delta s = \Delta x$, és így Δx egyenesen arányos Δt-vel. A pálya paraméteres egyenlete

$$x = x_0 + v_x t, \tag{1.12}$$

ahol x_0 a test koordinátája a t=0 időpillanatban, az állandó sebesség koordinátája v_x. Ha a test pozitív irányba mozog, és az origóban van t = 0-kor, akkor $x = s$ és $v_x = v$:

$$s = vt, \qquad v = \text{állandó}, \qquad a = 0. \tag{1.13}$$



1.14. ábra

A mozgás grafikonjait az 1.14. ábra mutatja. Az út–idő grafikon ebben az esetben origóból kiinduló egyenes, melynek meredeksége a sebesség számértéke. A sebesség–idő grafikon görbéje alatti terület számértéke pedig a megtett út számértéke.

A koordinátákat ábrázolva a fentiekhez hasonló kijelentéseket tehetünk: x előjele azt mutatja meg, hogy az origótól merre van a test, v_x-é pedig azt, hogy merre mozog.

1.1.5.2. Állandó gyorsulású vagy egyenletesen változó mozgások

Az olyan mozgások, melyek során a *gyorsulás* irány és nagyság szerint *állandó*. Mivel $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{a}\Delta t$, ezért az *egyenlő időközök alatt bekövetkezett sebességváltozás-vektorok* irány és nagyság szerint *egyenlők*, bármilyen kicsinyek is ezek az egyenlő időközök. *Az ilyen változást, melynek során egy fizikai mennyiség egyenlő időközök alatt bekövetkező megváltozása mindig ugyanaz, bármilyen kicsinyek is ezek az egyenlő időközök, egyenletes változásnak nevezzük.*

Ilyen mozgást végeznek például a homogén gravitációs vagy elektromos térben mozgó részecskék.

Ezek a mozgások lehetnek egyenes, illetve görbe vonalúak.

Az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgások. A test sebességének nagysága egyenlő időzők alatt ugyanannyival változik, bármilyen kicsinyek is ezek az egyenlő időközök. E mozgások tovább is feloszthatók.

A növekvő sebességű, egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás. A test egyenes vonalú pályán mozog, és sebességének nagysága egyenlő időközök alatt mindig ugyanannyival változik, bármilyen kicsinyek is ezek az egyenlő időközök. (Ezt a mozgást szokás *egyenletesen gyorsuló mozgásnak* is nevezni.) Ezért a sebességváltozás nagysága egyenesen arányos a sebességváltozás idejével: $\Delta v \sim \Delta t$-vel, így a hányadosuk állandó. A $\Delta v/\Delta t$ hányados a test állandó a gyorsulása. Lásd 1.13. pont. Innen a Δt alatti sebességváltozás nagysága:

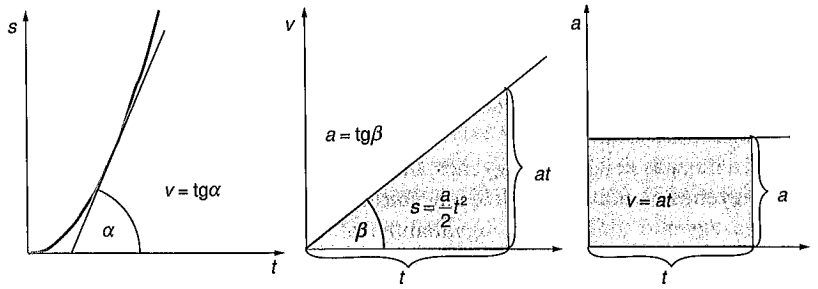
$$\Delta v = a\Delta t. \tag{1.14}$$

Mivel a test sebességváltozása egyenlő időközök alatt ugyanannyi, ezért a Δt-t egységnyinek választva, azaz helyébe 1-et írva, a gyorsulás számértéke az egységnyi idő alatt bekövetkezett sebességváltozás számértékét, azaz az 1 s alatti sebességnövekedést jelenti. (De csak az egyenes vonalú mozgásoknál jelenti a gyorsulás számértéke a sebesség nagyságának időegység alatti változását! Lásd 1.13. pontot.) E mozgás speciális esetei:

A nulla kezdősebességű, egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgás. Válasszuk az x tengelyt a mozgás egyenesén úgy, hogy t = 0 időpillanatban a test az origóból induljon pozitív irányba! Ekkor $v_x = v$, $a_x = a$, $x = s$. Az (1.14) egyenlet alapján $v_x(t) - 0 = at$. Azaz $v = at$. A sebesség egyenesen arányos az eltelt idővel, grafikonja az origóból kiinduló egyenes. A megtett út e grafikon görbéje alatti terület lásd 1.15. ábra. Függvényei:

$$a = \text{állandó}, \qquad v = at, \qquad s = \frac{a}{2}t^2. \tag{1.15}$$

A megtett út a képlet alapján egyenesen arányos az eltelt idő négyzetével, azaz kétszer, háromszor, n-szer annyi idő alatt a test négyszer, kilencszer, n^2-szer nagyobb utat tesz meg. Az út–idő grafikon olyan parabolaív, melynek $t = 0$-beli érintőjének meredeksége 0. Ilyen mozgást végez egy lejtőn nulla kezdő sebességgel elengedett golyó. Ezt a fajta mozgást először Galilei vizsgálta részletesen. Az út és idő közötti összefüggést ő a következőképpen fogalmazta meg: *Galilei-féle úttörvény: Az egymás utáni egyenlő időközök alatt megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan egészek.*



1.15. ábra

Bizonyítás:

A mozgás idejét egyenlő Δt időtartamokra osztva az n-edik Δt időtartam alatt megtett út az $n\Delta t$ és az $(n-1)\Delta t$-ig megtett utak különbsége

$$\Delta s_n = \frac{a}{2}\left(n\Delta t\right)^2 - \frac{a}{2}\left[\left(n-1\right)\Delta t\right]^2 = \frac{a}{2}\left(\Delta t^2\right)\left[n^2-\left(n-1\right)^2\right] = \frac{a}{2}\left(\Delta t\right)^2\left(2n-1\right),$$

az n helyébe az időtartamnak a mozgás elejétől vett sorszámát behelyettesítve az első Δt időtartam alatt megtett út páratlan egész számú többszörösét kapjuk.

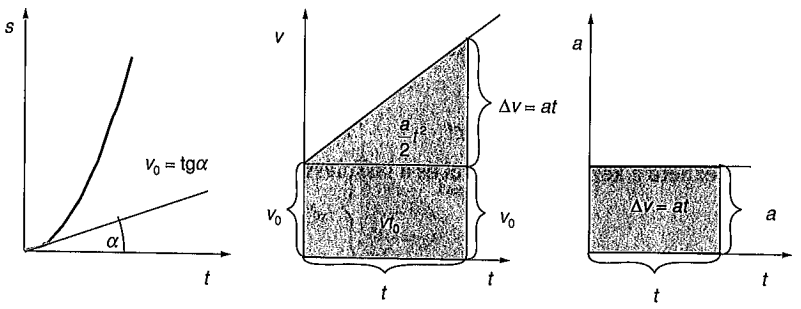
Nem nulla kezdősebességű, egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgás. A pillanatnyi sebesség $t = 0$ időpillanatbeli értéke v_0. Ehhez hozzáadva a t idő alatt bekövetkezett $\Delta v = a\Delta t$ sebességváltozást, a sebesség az idő lineáris függvénye (lásd 1.16. ábra):

$$v = v_0 + at. \tag{1.16a}$$

A megtett út a sebesség–idő grafikonon a görbe alatti trapéz területe, melyet az ábra szerint két részre osztva:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2}t^2 \tag{1.16b}$$

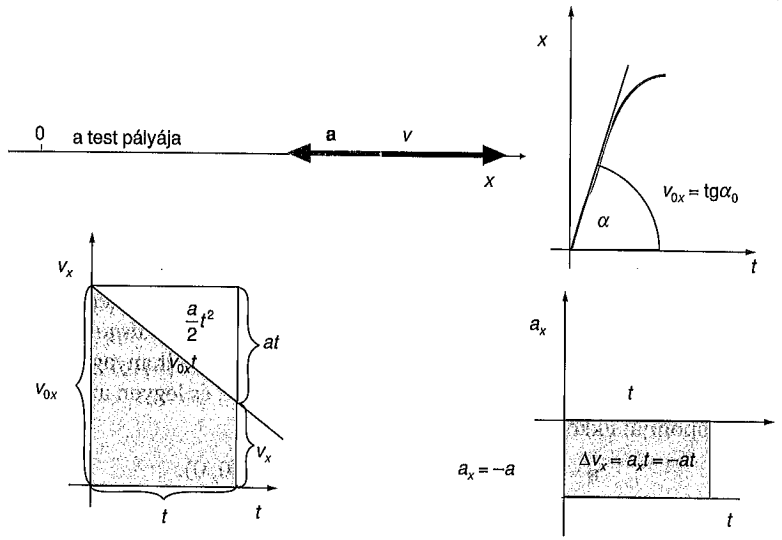
az út–idő grafikon olyan parabolaív, melynek $t = 0$-beli érintőjének meredeksége a kezdősebesség.



1.16. ábra

Az egyenes vonalú, egyenletesen lassuló mozgás. A mozgás gyorsulását szokás lassulásnak is nevezni. Az egyenletesen gyorsuló mozgástól abban különbözik csak, hogy a sebesség nagysága egyenletesen csökken, ezért a képletek csak a megfelelő előjelben különböznek (1.17. ábra):

$$v = v_0 - at, \qquad s = v_0 t - \frac{a}{2}t^2. \tag{1.16c}$$



1.17. ábra

Az út–idő függvény parabolaív, melynek $t = 0$-beli érintőjének meredeksége a kezdősebesség.

Különleges eset a teljesen megállásig tartó egyenletesen lassuló mozgás. A lefékeződés t_f idejét a fenti képletekbe helyettesítve (a megállás a pillanatában a v sebesség éppen nulla):

$$v_0 = at_f, \qquad s_f = \frac{a}{2}t_f^2. \tag{1.16d}$$

Az s_f kifejezhető a kezdősebességgel és a lassulással

$$s_f = \frac{v_0^2}{2a}. \tag{1.16e}$$

Gyakorlati jelentősége ennek a képletnek abban áll, hogy ugyanolyan körülmények között fékezve egy autót, a fékút hossza a sebességtől nem egyenesen arányosan, hanem négyzetesen függ. Például 50 km/h helyett 60 km/h-ról, azaz 20%-kal nagyobb sebességről fékezve, a fékút 44%-kal nő!

A teljes lefékeződésre vonatkozó képletek úgy is megkaphatók, hogy gondolatban videóra vesszük a fékeződést és visszafelé játsszuk le. Ekkor a mozgás nulla kezdősebességű, egyenletesen gyorsuló mozgás, melynek gyorsulása a lassulás, végsebessége a kezdősebesség, útja és ideje megegyezik a fékeződő mozgásával.

A szabadesés. Homogén gravitációs erőtérben, légüres térben, 0 kezdősebességgel elejtett test mozgása. Mérések alapján az indulástól megtett út egyenesen arányos az eltelt idő négyzetével, tehát a mozgás egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgás. Gyorsulását g-vel jelöljük, és neve *nehézségi gyorsulás.* Ennek értéke Budapesten 9,80852 m/s^2. Iránya függőleges, lásd 2.4.4 pontot. Nagysága helyről-helyre más és más, de az eltérés a Föld felszíne közelében nem nagy. A g nagysága adott helyen minden testre ugyanakkora, függetlenül annak anyagi minőségétől és tömegétől. (Lásd Galilei, Newton, Eötvös Loránd 2.1.2.4.pont.)

Az összefüggések:

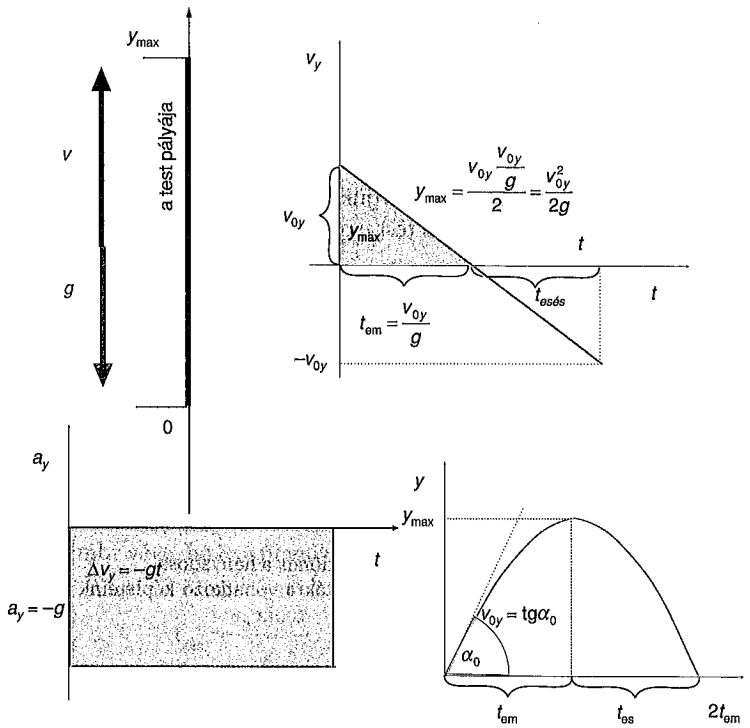
$$v = gt, \qquad s = \frac{g}{2}t^2. \tag{1.17a}$$

Függőleges hajítás. A homogén gravitációs erőtérben, légüres térben, függőleges kezdősebességgel elindított test mozgását *függőleges hajításnak* nevezzük. Képleteink csak akkor érvényesek, ha a közegellenállás elhanyagolható. Válasszuk a koordináta-rendszer y tengelyét függőlegesnek, és legyen az origó a hajítás kezdőpontja! Ekkor a kezdő koordináták:

$$\mathbf{a} = (0, -g), \qquad \mathbf{v}_0 = (0, v_{0y}), \qquad \mathbf{r}_0 = (0, 0),$$

ahol g a nehézségi gyorsulás, v_{0y} kezdősebesség nagysága. Lefelé hajításnál v_{0y} negatív. A gyorsulás, a pillanatnyi sebesség és a hely y koordinátája t időpillanatban:

$$a_y = -g, \qquad v_{ty} = v_{0y} - gt, \qquad y_t = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2. \tag{1.17b}$$



1.18. ábra

A mozgás grafikonjai az 1.18. ábrán láthatók. Az y koordináta csak a mozgás felfelé irányuló szakaszában adja meg a megtett utat. A pálya tetőpontján a pillanatnyi sebesség 0. A mozgás az emelkedés szakaszában egyenletesen lassuló mozgás, melynek „fékútja" a *hajítás y_{max} maximális magassága,* a t_{em} emelkedési idő pedig a „fékidő". Az (1.16) képleteket értelemszerűen használva

$$t_{em} = \frac{v_{0y}}{g}, \qquad y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

A pálya tetőpontját elhagyva a test szabadon esik.

Azonban nem kell kétféle képletet használni a mozgás leírására, mert az (1.17b) képletek akkor is megadják a helyes sebesség- és helykoordinátákat, ha az emelkedési időnél nagyobb értéket helyettesítünk be. A sebességkoordináta negatív értéke a lefelé mozgást, az y koordinátáé pedig a hajítás kezdőpontja alatti helyzetet jelenti.

Az y helykoordinátára vonatkozó másodfokú egyenletet t-re megoldva két megoldást kapunk, ha $y < y_{max}$. A két időpont közül a kisebb azt a pillanatot jelenti, amikor a test felfelé mentében, a nagyobbik pedig, amikor lefelé mentében tartózkodik y magasságban. Ha $y = y_{max}$, akkor épp t_{em}-t kapjuk meg egyetlen megoldásként. Ha $y > y_{max}$, akkor t-re nincs a valós számok körében megoldás, mutatva azt, hogy a test y_{max}-nál nem emelkedhet magasabbra.

A hajítás idején itt azt az időtartamot értjük, mely alatt a test visszatér a hajítás kezdőpontjába. A szimmetria miatt a test ugyanannyi ideig emelkedik, mint süllyed, ezért a hajítás teljes T ideje:

$$T = 2t_{em} = \frac{2v_{0y}}{g}.$$

Az y értéke csak abban az esetben egyenlő a test által megtett úttal, amíg az emelkedik, azaz $t < t_{em}$. Ha $t > t_{em}$, akkor a megtett s út:

$$s = y_{max} + \frac{g}{2}\left(t - t_{em}\right)^2.$$

Az átlagsebesség ennek(!) az útnak és az eltelt időnek a hányadosa.

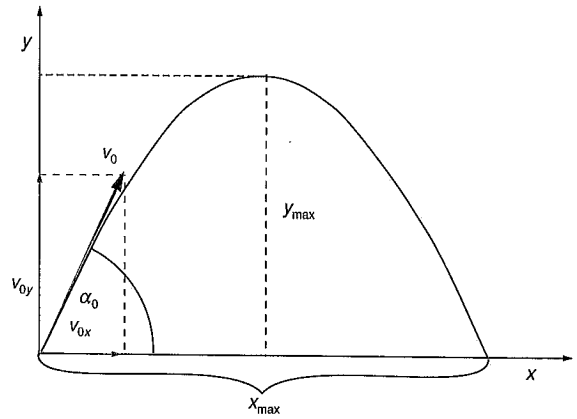
Ha a kezdősebesség lefelé mutat, koordinátákra vonatkozó képleteink értelemszerűen továbbra is érvényesek.

A fentiekhez hasonló mozgást végez az elegendően nagy homogén elektromos mezőben a térerősséggel párhuzamosan elindított töltött részecske. A képletekben csak annyi a változás, hogy a_y helyébe az elektromos mező által létrehozott gyorsuláskoordinátát kell írnunk.

A ferde hajítás. *A ferde hajítás a homogén gravitációs erőtérben, légüres térben nem függőlegesen elhajított test mozgása.* Innen ered elnevezése is: nem függőlegesen, hanem „ferdén" indítottuk el a testet. Célszerű úgy felvennünk a koordináta-rendszert, hogy a hajítás kezdőpontja, az origó és az x tengely vízszintes legyen, az y tengely pedig mutasson felfelé, **g**-vel ellentett irányba (lásd 1.19. ábra). A $\mathbf{v}_0$ kezdősebesség nagysága v_0, vízszintessel bezárt szöge α, koordinátái $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. A test koordinátái x és y. Mivel a testre mozgása során csak a függőleges gravitációs erő hat, ezért a szuperpozíció elve alapján a vízszintes irányú mozgás 0 gyorsulású egyenletes mozgás; a függőleges pedig függőleges hajítás. A test hely-, illetve sebességkoordinátái a hajítás kezdetétől számított t idő múlva:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha \qquad v_x = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} - gt \qquad x = v_{0x}t \qquad y = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2. \qquad (1.18)$$



1.19. ábra

A test emelkedési ideje és maximális magassága a függőleges mozgás képleteiből, figyelembe véve, hogy a függőleges mozgás kezdősebessége $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$:

$$t_{em} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \qquad (1.18a)$$

A hajítás T ideje és x_{max} távolsága:

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad x_{max} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (1.18b)$$

A hajítás távolsága ugyanakkora kezdősebesség esetén akkor a legnagyobb, amikor a sin 2α értéke 1, azaz, ha $2\alpha = 90°$, tehát $\alpha = 45°$. Így x_{max} legnagyobb értéke: $\frac{v_0^2}{g}$. Az ugyanakkora kezdősebességgel pótszögek alatt elhajított testek ugyanolyan messzi jutnak, mert α pótszöge a

$$\beta = 90° - \alpha \text{ és } \sin 2\alpha = \sin 2[(90° - \alpha)] = \sin(180° - 2\alpha),$$

ami ismert trigonometriai összefüggés.

A pálya egyenlete a koordinátákra vonatkozó paraméteres egyenletekből meghatározható. Ha az x koordinátát tartalmazó egyenletből kifejezzük a t időt és az y koordináta egyenletébe helyettesítjük,

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \qquad (1.18c)$$

A sebesség nagysága:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha+(v_0\sin\alpha-gt)^2}. \qquad (1.18d)$$

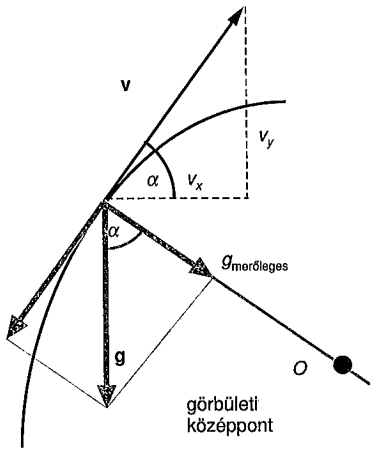
Látható, hogy a sebesség nagysága nem egyenletesen változik az idő függvényében, holott a gyorsulás állandó, miközben a függőleges mozgás sebességének koordinátái egyenletesen változnak. Azonban a sebesség mint vektormennyiség egyenletesen változik!

A vízszintes hajítás a fentiek $\alpha = 0$ speciális esete.

A pálya görbületi sugara a pálya egy adott pontjában meghatározható: bontsuk fel a **g**-t a sebességre merőleges és azzal párhuzamos komponensekre (lásd 1.20. ábra)! Így az R görbületi sugár az (1.7e) képlet alapján:

$$R=\frac{v^2}{g_{\text{mer}}}.$$

Az ábrán látható α szög tangense $\frac{v_y}{v_x}$.



1.20. ábra

A levegőben gyorsan mozgó és a mozgást jelentősen befolyásoló közegellenállási erőt elszenvedő testek, lövedékek mozgásával a ballisztika tudománya foglalkozik.

Vigyázat, a hajítás távolságára vonatkozó összefüggések csak akkor érvényesek, ha a hajítás kezdő és végpontja ugyanabban a vízszintes síkban van! Pl. egy súlylökő vagy kertben

locsoló ember már a földet érési vízszintes sík felett indítja az elhajítandó tárgyat, ezért a hajítás távolságára és idejére vonatkozó fenti képletek már módosításra szorulnak.

1.1.5.3. Az egyenletes körmozgás

Egyenletes körmozgásnak nevezzük egy pontszerű test mozgását, ha az körpályán mozogva egyenlő Δt időközök alatt egyenlő Δs íveket fut be, bármilyen kicsinyek is ezek az egyenlő időközök. A definíció alapján a Δs ívhossz egyenesen arányos a megtételéhez szükséges Δt idővel, ezért bármilyen időtartamra $\Delta s = v\Delta t$, ahol v a sebesség nagysága. A sebesség iránya változó, a mozgásnak van gyorsulása. A v állandósága miatt a gyorsulás érintőleges komponense 0, azaz a gyorsulás nagysága maga a centripetális, normális gyorsulás:

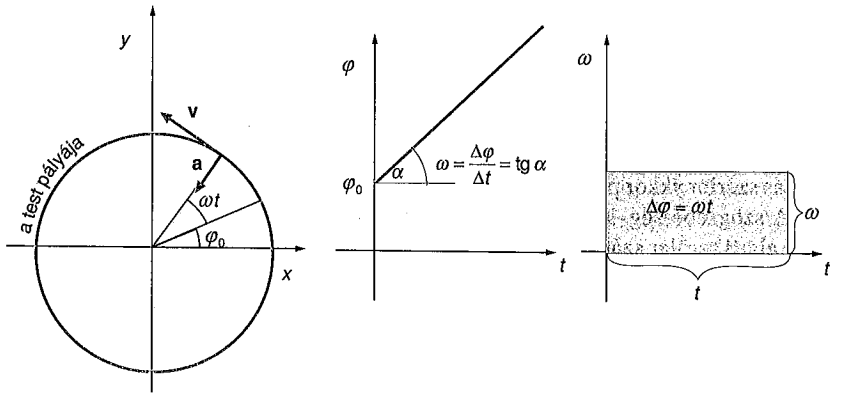
$$a=a_{\text{cp}}=\frac{v^2}{R}, \qquad (1.19)$$

és iránya merőleges a sebességre, azaz sugárirányú (lásd 1.21. ábra).

A körmozgás gyorsaságának jellemzésére a technikában a *fordulatszámot* (n) használjuk. A t idő alatt megtett fordulatok száma legyen z! Egy fordulat alatt a test megteszi a kör kerületét. Mivel a megtett út egyenesen arányos az idővel, ezért a megtett fordulatok száma is egyenesen arányos t-vel. Az

$$n=\frac{z}{t} \qquad (1.20)$$

hányadost nevezzük fordulatszámnak.



1.21. ábra

A fordulatszám skaláris mennyiség. Mértékegysége 1/s, vagy más jelöléssel s^{-1}. Technikában használatos mértékegysége 1/perc = $\frac{1}{60}\,s^{-1}$. A nemzetközi gyakorlatban az utóbbi mértékegység jele: 1/min, min^{-1}, RPM (Revolutions Per Minute). Szemléletes jelentése: számértéke az időegység alatti fordulatok számértéke.

A fenti képlet gyorsuló forgás, körmozgás esetén csak az átlagos fordulatszámot adja meg. A *periódusidő* vagy *keringési idő* (T) az egy fordulat megtételéhez szükséges idő. Nyilván $T=\frac{t}{z}$, ezért

$$\boxed{T=\frac{1}{n}}. \qquad (1.21)$$

A sebesség definíciója alapján:

$$\boxed{v=\frac{2r\pi}{T}=2r\pi n}. \qquad (1.22)$$

A mozgás leírása polárkoordinátákkal egyszerű, ha a koordináta-rendszer kezdő pontjául a kör középpontját választjuk. Polárkoordinátákkal: $|\mathbf{r}| = R$ = állandó. A megadott vonatkoztatási (referencia) irány (az ábrán az x tengely pozitív iránya) és az adott időpillanatban a testhez tartozó sugár szöge φ. Ez adott körpálya esetén egyértelműen megadja a test helyét. Mivel $\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}$, és Δs egyenesen arányos Δt-vel, ezért $\Delta\varphi$ is egyenesen arányos Δt-vel. Az állandó arányossági tényező neve *szögsebesség*, jele ω. Az

$$\boxed{\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}} \qquad (1.23a)$$

definíció alapján mértékegysége 1/s vagy s^{-1} (ha a szöget radiánban mérjük).

A szögsebesség vektor (lásd 1.2.3. pont). Azonban, ha a koordináta-rendszer egyik tengelye merőleges az *állandó síkú kör* síkjára, akkor elég, ha koordinátájával mint előjeles számmal dolgozunk. Ebben az esetben ω előjeles szám, és megállapodás szerint akkor pozitív, ha a forgásirány az óramutató járásával ellentett irányú. A szögsebesség–idő grafikonon (a sebesség–idő grafikonhoz hasonlóan) a görbe alatti terület számértéke szögelfordulás, illetve szögelfordulás–idő grafikonon a görbe meredeksége a szögsebesség számértéke.

Mivel a test T idő alatt egy teljes fordulatot tesz meg, azaz szögelfordulása 2π radián, ezért

$$\boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi n}. \qquad (1.23b)$$

A sebesség definíciója alapján: $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{R\Delta\varphi}{\Delta t}$, ahol $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\omega$. Ezért

$$\boxed{v=R\omega}. \qquad (1.24)$$

Csak akkor kapunk mértékegységre is helyes eredményt, ha a képletbe ω-t s^{-1}-ben, azaz radián/s-ban helyettesítjük be. Ezért használunk a fizikában többnyire φ-re radiánt és ω-ra s^{-1}-t, nem pedig °-ot, illetve °/s-ot.

A gyorsulás nagysága $|\mathbf{a}|=|\mathbf{a}_{cp}|=\frac{v^2}{R}=\frac{R^2\omega^2}{R}$, azaz ω-val kifejezve:

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}_{cp}| = R\omega^2. \qquad (1.25)$$

Az 1.21. ábra szerint a test helyét megadó φ szög:

$$\boxed{\varphi = \omega t + \varphi_0}.$$

ahol φ_0 a test helye $t = 0$ időpillanatban.

A test helyvektorának koordinátái:

$$x = R\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad y = R\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1.26)$$

1.1.5.4. Az egyenletesen változó körmozgás

A *körmozgás egyenletesen változó,* ha a test szögsebessége egyenlő időközök alatt mindig ugyanannyival változik, bármilyen kicsinyek is ezek az egyenlő időközök. Ezért $\Delta\omega \sim \Delta t$, a két mennyiség hányadosa állandó. Az állandó neve *szöggyorsulás,* jele β

$$\boxed{\beta=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}}. \qquad (1.27)$$

Mivel a szögsebesség vektor, ezért a szöggyorsulás is az, de a továbbiakban a szögsebességhez hasonlóan előjeles skalárként kezeljük. Mértékegysége $1/s^2$, s^{-2}. Számértéke szemléletesen az időegység alatti szögsebesség változás számértékét jelenti.

A következőkben a forgásirányt úgy választjuk meg, hogy $\omega > 0$ és $\varphi > 0$ legyen. Ekkor $\beta > 0$ növekvő, $\beta < 0$ pedig csökkenő szögsebességet jelent. Az egyenes vonalú, egyenletes változó mozgással analógiába állítva a megfelelő mennyiségek és összefüggéseik következők:

$$\varphi \leftrightarrow s \qquad \omega \leftrightarrow v \qquad \beta \leftrightarrow a$$

$$\boxed{\omega=\omega_0\pm\beta t} \qquad \boxed{\varphi=\varphi_0+\omega_0 t\pm\frac{\beta}{2}t^2}. \qquad (1.28)\ (1.29)$$

A szögsebesség itt ugyanúgy változik, mint az egyenletesen változó egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásnál stb. Az 1.1.2.2. pont analógiájára az $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ csak az átlagos szögsebességet adja meg. Az $\omega = 2\pi n$ összefüggés alapján a belőle kifejezett fordulatszám is pillanatnyi fordulatszámként értelmezendő, és a $\frac{z}{t}$ hányados is csak az átlagos fordulatszámot adja meg.

A sebesség itt is, mint minden mozgásnál, érintőirányú. Nagysága:

$$\boxed{v = R\omega = R\left(\omega_0 + \beta t\right)}$$

szerint változik. Emiatt a gyorsulás centripetális komponense, $R\omega^2$ is változó:

$$\boxed{a_{cp} = R\left(\omega_0 + \beta t\right)^2}.$$

Az érintőleges gyorsuláskomponens állandó, hiszen a szögsebesség és így a sebesség is egyenletesen változik:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(r\omega\right)}{\Delta t} = \frac{r\omega_{\text{későbbi}} - r\omega_{\text{előbbi}}}{\Delta t} = \frac{r\left(\omega_{\text{későbbi}} - \omega_{\text{előbbi}}\right)}{\Delta t} = \frac{r\Delta\omega}{\Delta t}.$$

A szöggyorsulással kifejezve:

$$a_t = R\beta. \tag{1.30}$$

Mivel a gyorsulás mindkét komponense változik, ezért a gyorsulás sugárral bezárt szöge is változó. A gyorsulás nagysága:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{\left(R\omega^2\right)^2 + \left(R\beta\right)^2} = R\sqrt{\left(\omega_0 + \beta t\right)^4 + \beta^2}.$$

A gyorsulás hegyes- vagy tompaszöget zár be a sebességgel aszerint, hogy a mozgás szögsebessége nő vagy csökken. Csak abban a pillanatban érintőirányú, amikor a pillanatnyi sebesség is 0 (pl. induláskor, vagy a megállás pillanatában).

1.1.5.5. A harmonikus rezgőmozgás

Az olyan mozgást, melynek során egy pontszerű test egyenes mentén mozog úgy, hogy a *test adott ponthoz viszonyított helye az idő szinuszos függvénye szerint változik, harmonikus rezgőmozgásnak nevezzük.* Az adott pont, mint az a mozgás dinamikai vizsgálatából kiderül, az *egyensúlyi helyzet,* azaz az a pont, ahol a test gyorsulása és így a rá *ható erők eredője* is nulla.

A mozgás jellemzői:

- *periódusidő* vagy *rezgésidő: T,* az a legrövidebb idő, amely alatt a test ugyanazon két mozgásállapota közt telik el. Ugyanazon mozgásállapoton a test azon állapotait értjük, melyekben a test minden fizikai jellemzője hely, sebesség, gyorsulás, eredő erőirány és nagyság szerint megegyezik. Periodikus jelenségeknél szokás a mozgásállapotot *fázisnak* is nevezni;
- a *frekvencia,* jele *n, f,* ν (görög kis nű): az időegység alatti rezgések száma. Mértékegysége 1/s, azaz s^{-1} = Hz (Hertz német fizikus tiszteletére);
- az *amplitúdó,* jele *A:* az egyensúlyi helyzettől számított maximális kitérés. Szokás még a *rezgés tágasságának* is nevezni. Mértékegysége hosszúság mértékegység;
- körfrekvencia, jele ω; $\omega = \frac{2\pi}{T}$;
- *kitérés:* az egyensúlyi helyzettől számított előjeles távolság. Ha a mozgás egyenesére tesszük az *y* tengelyt, és az egyensúlyi helyzet az origó, akkor a kitérés a test *y* koordinátája;

Ha a test *t* idő alatt *z* rezgést végez, akkor $f = \frac{z}{t}$. Ha a rezgések száma éppen *z* =1, akkor értelemszerűen *t* = *T,* ezért $f = \frac{1}{T}$, illetve

$$\boxed{T = \frac{1}{f}}. \tag{1.31a}$$

Ezek a fizikai jellemzők használatosak minden periodikus, nem szinuszos rezgés jellemzésére is. A fenti összefüggés érvényes ezekre a rezgésekre.

A mozgás egyenesét választva *y* tengelynek, az *y* koordináta a harmonikus rezgőmozgás definíciója szerint:

$$\boxed{y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)}. \tag{1.31b}$$

Az $\omega t + \varphi_0$ *szög* határozza meg, hogy a test mely *rezgési állapotban, fázisban* tartózkodik, ezért neve pillanatnyi *fázisszög.* A φ_0 szög a test *t* = 0-kori állapotát szabja meg, ezért neve *kezdőfázis.* Mivel a szinusz és a koszinusz függvények 2π szerint periodikusak, ezért a fázis 2π -vel vagy annak egész számú többszörösével eltérő értékeihez ugyanazon mozgásállapotok, fázisok tartoznak.

Habár a sebesség és a gyorsulás meghatározható a differenciálszámítás ismeretében, egyszerűbb és szemléletesebb, ha figyelembe vesszük, hogy az egyenletes körmozgás vetülete harmonikus rezgőmozgás. Tekintsük az origó középpontú, *A* sugarú, ω szögsebességű egyenletes körmozgást végző test mozgásának *y* tengelyre való vetületét! A vetületi mozgás egyes fizikai jellemzői a mennyiségek *y* koordinátái.

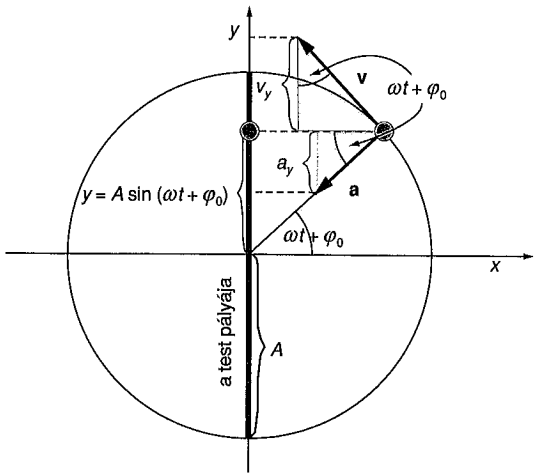
A 1.22. ábra szerint a megfelelő koordináták:

$$y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) \tag{1.32}$$

$$v_y = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) \tag{1.33}$$

$$a_y = -A\omega^2\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) \tag{1.34}$$

A kitérés- és a gyorsuláskoordináta ellentett előjelének oka az, hogy az egyensúlyi helyzettől való távolodással a sebességnek csökkennie kell, hiszen szélső helyzetben a test sebessége 0. Így a mozgás lassuló, a gyorsulás ezért a sebességgel ellentett irányú, azaz az egyensúlyi helyzet felé mutat. A szélső helyzetből az egyensúlyi helyzet felé tartó mozgás során a test sebessége nő, a gyorsulás és a sebesség egyirányú. Így a gyorsulás ebben az esetben is az egyensúlyi helyzet felé mutat. Tehát a gyorsulás mindig az egyensúlyi helyzet felé mutat, azaz a kitéréssel mindig ellentétes irányú. A mozgást leíró mennyiségek időtől való függését a 1.23. ábrán láthatjuk. (A v_y és az a_y függvények deriválással is megkaphatók az y függvényből.)

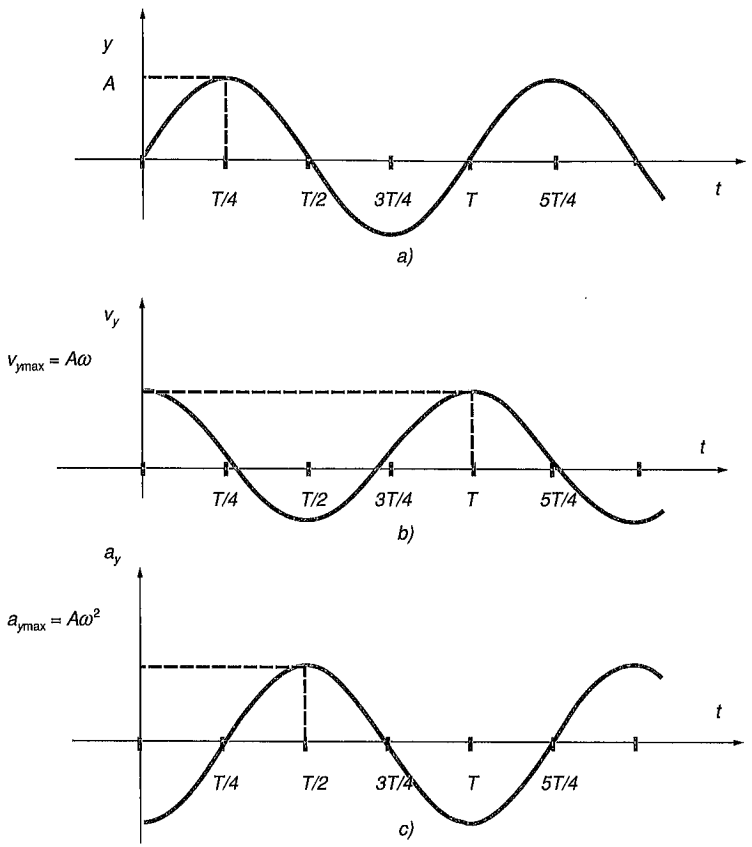


1.22. ábra

Egy egyenesbe eső, egyező frekvenciájú harmonikus rezgések összetétele. Az összetevő rezgések legyenek:

$$y_1 = A_1\sin\left(\omega t\right), \qquad y_2 = A_2\sin\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

az eredő rezgés amplitúdója A, fázisa φ.

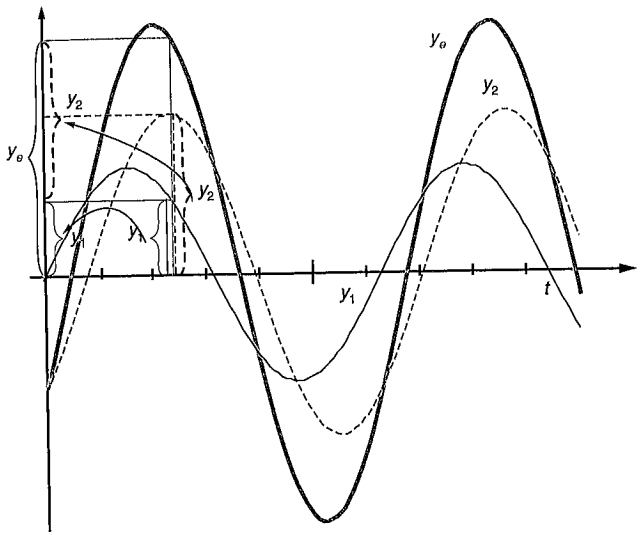


1.23. ábra

1.1.5.6. A harmonikus rezgések összetétele

Az eredő rezgés kitérés–idő függvénye grafikusan is megszerkeszthető az összetevő rezgések kitérés–idő függvényeiből (lásd 1.24. ábra).

Az eredő rezgés frekvenciája az összetevő rezgések frekvenciájával egyezik meg. Amplitúdója függ az összetevő rezgések amplitúdójától és azok fáziskülönbségétől.



1.24. ábra

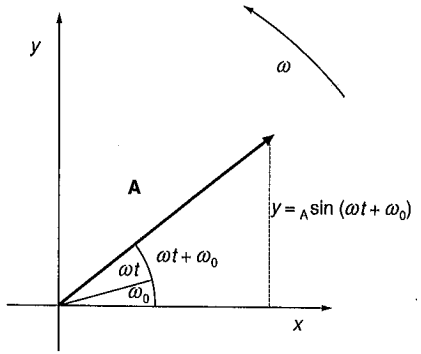
Speciális esetek:

- *azonos fázisú* (együttrezgő) rezgéseknél $A = A_1 + A_2$, és az eredő rezgés fázisa megegyezik az összetevő rezgések fázisával.
- *ellentett fázisú* rezgéseknél ($\varphi_0 = \pi$) $|A| = |A_1 - A_2|$, és az eredő rezgések amplitúdója a nagyobb amplitúdójú rezgés fázisával egyezik meg. Ha $A_1 = A_2$, akkor $A = 0$, a rezgések kioltják egymást.
- *általános esetben* az eredő rezgés amplitúdója és fázisa az alábbi:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\varphi_0} \tag{1.35}$$

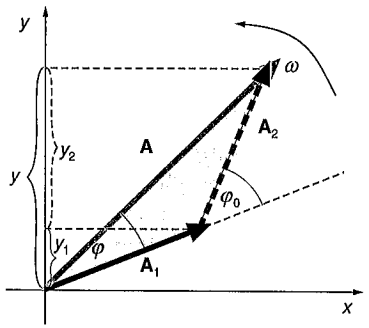
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_2 \sin\varphi_0}{A_1 + A_2 \cos\varphi_0} \tag{1.36}$$

A rezgések összetétele jól szemléltethető, ha a harmonikus rezgés kitérését egy φ szögsebességgel egyenletesen forgó **A** vektor y koordinátájaként fogjuk fel (lásd 1.25. ábra).



1.25. ábra

Az **A** vektor hossza A, irányszöge $t = 0$-kor φ_0, szögsebessége ω. Így pillanatnyi irányszöge $\omega t + \varphi_0$, és y koordinátája $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. Mivel két vektor y koordinátájának összege a két vektor vektori összegének y koordinátája, ezért az eredő rezgés kitérése a két összetevő rezgést reprezentáló vektor vektori összegének y koordinátája. Az eredő rezgés adatai [lásd (1.35), (1.36)] az (együtt forgó, egymáshoz képest nem mozgó) vektorok vektori eredőjének adataiból olvashatók le az 1.26. ábra alapján.



1.26. ábra

Ezt az eredményt az

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

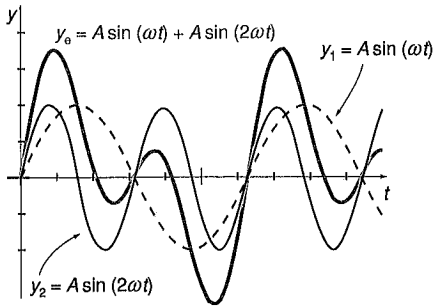
összefüggésből trigonometriai képletekből is megkaphatjuk.

Egy egyenesbe eső, eltérő frekvenciájú harmonikus rezgések összetétele. Az összetevő rezgések adatai:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t) \qquad y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0), \qquad \text{ahol } (\omega_1 \neq \omega_2) \tag{1.37}$$

Az eredő rezgés nem harmonikus, sőt általában nem periodikus.

Szigorúan matematikai értelemben véve az eredő rezgés csak akkor lesz periodikus, ha a frekvenciák, illetve a rezgésidők aránya racionális szám. Az 1.27. ábrán látható rezgés $y = A \sin(\omega t) + A \sin(2\omega t)$ periodikus, de nyilván nem szinuszrezgés.



1.27. ábra

Ilyen rezgések összetételének speciális esete a *lebegés*. Ez akkor jön létre, ha a két rezgés amplitúdója egyenlő, ω_1 és ω_2 pedig közelítőleg egyenlők:

$$y_1 = A \sin(\omega_1 t) \qquad y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t) \qquad (\omega_1 \approx \omega_2).$$

A $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ összefüggés felhasználásával:

$$y = A\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_2 t) = 2A\cos\left(\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t\right)\sin\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t\right). \tag{1.38}$$

Mivel $\omega_1 - \omega_2$ kicsi ω_1-hez és ω_2-höz képest, a rezgést felfoghatjuk úgy is, mint egy olyan $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ körfrekvenciájú szinuszrezgést, melynek amplitúdója az időben $2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$ függvény szerint változik. E lassú amplitúdóváltozás frekvenciája $\frac{f_1-f_2}{2}$. Egy periódus alatt az amplitúdó kétszer lesz 0 illetve maximális, így az előbbiek alapján a 0, illetve maximális kitérések frekvenciája $f_1 - f_2$. Ezt a frekvenciát nevezzük a „lebegés" frekvenciájának.

Periodikus, nem harmonikus rezgések felbontása harmonikus rezgések összegére. Fourier tétele. *Bármilyen periodikus rezgés előállítható olyan szinuszos és koszinuszos rezgések összegeként, melyek frekvenciája a rezgés frekvenciájának egész számú többszöröse.* Legyen a felbontandó rezgés kitérés–idő függvénye $f(t)$, periódusideje T, körfrekvenciája ω. Az összetevő rezgések körfrekvenciája a tétel szerint $k\omega$, periódusideje pedig $\frac{T}{k}$, ahol k pozitív egész szám. Ezekkel a jelölésekkel a *Fourier-tétel:*

$$f(t) = A_0 + A_1\sin(\omega t) + B_1\cos(\omega t) + A_2\sin(2\omega t) + B_2\cos(2\omega t) + \cdots$$
$$\cdots + A_k\sin(k\omega t) + B_k\cos(k\omega t) + \cdots. \tag{1.39}$$

Általános esetben az összeg tagjainak száma végtelen.

Az 1.27. ábrán látható függvény csak két szinusz összege. Nem minden függvényre érvényes a tétel, de a folytonosan differenciálhatóakra igen.

Az A_k és B_k együtthatókat *Fourier-együtthatóknak* nevezzük. A 2ω, 3ω stb. frekvenciájú rezgések a szóban forgó rezgés *felharmonikusai.*

Két, egymásra merőleges, egyező frekvenciájú harmonikus rezgés összetétele. A kitérés–idő függvények:

$$y = A_1\sin(\omega t), \qquad x = A_2\sin(\omega t + \varphi_0). \tag{1.40}$$

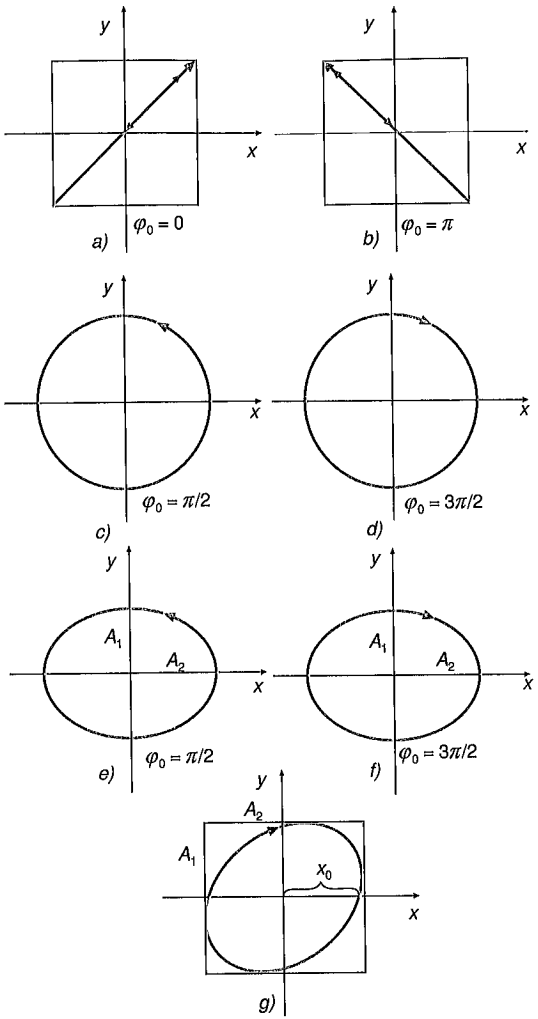
Itt $t = 0$ az a pillanat, amikor a tömegpont y koordinátája 0. A pont pályája függ az amplitúdók arányától és a rezgések közötti φ_0 fáziseltéréstől (1.28. ábra).

Speciális esetek (lásd 128a–f. ábrák):

a) $\varphi_0 = 0$, azaz a rezgések azonos fázisúak. A két egyenletet egymással elosztva és az azonos szinuszos szorzó tényezővel egyszerűsítve:

$$y = \frac{A_1}{A_2}x.$$

Ez egy origón átmenő egyenes egyenlete meredeksége $\frac{A_1}{A_2}$. A test ezen egyenes mentén végez rezgéseket ω körfrekvenciával és $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ amplitúdóval.



1.28. ábra

b) $\varphi_0 = \pi = 180°$, azaz a rezgések ellentétes fázisúak. Felhasználva, hogy $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$, és a két egyenletet elosztva, egyszerűsítve kapjuk:

$$y = -\frac{A_1}{A_2}x. \tag{1.41}$$

Ez szintén az origón átmenő egyenes egyenlete, melynek meredeksége $\frac{A_1}{A_2}$.

A test itt is ω körfrekvenciájú rezgést végez az egyenes mentén, melynek körfrekvenciája ω, amplitúdója $\sqrt{A_1^2+A_2^2}$. Lásd (1.28) ábra.

c) $\varphi_0 = \pi/2 = 90°$ és $A_1 = A_2 = A$. A kitérés–idő függvények:

$$y = A\sin(\omega t), \qquad x = A\sin(\omega t + 90°) = A\cos(\omega t).$$

Az egyenleteket négyzetre emelve, összeadva és felhasználva a pitagoraszi összefüggést:

$$y^2+x^2 = A^2. \tag{1.42}$$

Ez egy origó középpontú kör egyenlete. A test ezen a pályán végez egyenletes körmozgást állandó ω szögsebességgel és $v = A\omega$ nagyságú sebességgel az óramutató járásával ellentett irányba.

d) $\varphi_0 = 3\pi/2 = 270°$ és $A_1 = A_2 = A$. A test az előzőekből következően A sugarú, origó középpontú körpályán kering egyenletesen. Mivel, $x = A\sin(\omega t + 270°) = -A\cos(\omega t)$, ezért ugyanabban a pillanatban a test x koordinátája ellentétes előjelű a *c)* pontbeli mozgáshoz képest. Így a keringés iránya most az óramutató járásával megegyező.

e) $\varphi_0 = \pi/2 = 90°$ és $A_1 \neq A_2$. A koordináták $y = A_1\sin(\omega t)$ és $x = A_2\cos(\omega t)$ egyenleteiből a szögfüggvényeket kifejezve, négyzetüket összeadva és felhasználva, hogy összegük a pitagoraszi összefüggés szerint 1, kapjuk:

$$\frac{x^2}{A_2^2}+\frac{y^2}{A_1^2} = 1. \tag{1.43}$$

A test pályája ellipszis, tengelyei a koordinátatengelyekre esnek. A tengelyek hossza $2A_1$, illetve $2A_2$. A mozgás nem egyenletes, de periodikus mozgás. A keringés iránya az óramutató járásával megegyező.

f) $\varphi_0 = 3\pi/2 = 270°$ és $A_1 \neq A_2$. A pálya ugyanaz, mint fent azzal a különbséggel, hogy a keringés iránya az óramutató járásával egyező.

g) φ_0 nem speciális és $A_1 \neq A_2$. Az ábrán láthatóan az eredő rezgés egy ellipszispályán végbemenő, ω körfrekvenciájú periodikus mozgás. Az ellipszis középpontja az origó, tengelyei a koordinátatengelyekhez képest elforgatottak. Az ellipszis jellemzőiből az összetevő rezgések fáziseltérése meghatározható.

Az összetevő rezgések kifejezéseiből

$$\sin(\omega t) = \frac{y}{A_1} \qquad \cos(\omega t) = \sqrt{1-\sin^2(\omega t)} = \sqrt{1-\frac{y^2}{A_1^2}},$$

a $\sin(\omega t + \varphi_0) = \sin(\omega t)\cos\varphi_0 + \cos(\omega t)\sin(\varphi_0)$ trigonometriai azonosságba behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{x^2}{A_2^2} + \frac{y2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\varphi_0 = \sin^2\varphi_0.$$

Ez az egyenlet egy origó középpontú, a koordinátatengelyekhez képest elforgatott tengelyű ellipszis egyenlete.

Eltérő frekvenciájú, egymásra merőleges harmonikus rezgések összetétele. Általános esetben bonyolult, nem periodikus rezgés jön létre. Ezek az ún. Lissajous-görbék. A görbék alakja az összetevők adataitól bonyolult módon függ. Egyszerűbb esetekben a frekvenciák aránya a görbék alakjából leolvashatók.

1.2. A merev test kinematikája

A *merev test* olyan test, melynek pontjai a fellépő erők hatására egymáshoz képest elhanyagolható mértékben mozdulnak el, más szóval a test nem szenved alakváltozást.

A merev test *haladó mozgást* végez, ha pontjai „párhuzamos pályán" mozognak, azaz minden pontjának ugyanakkora és ugyanolyan irányú a sebessége.

Ilyen mozgást végeznek az egyenes pályán haladó vasúti kocsi pontjai a kerekeket és a tengelyt kivéve. Haladó mozgást végeznek az óriáskerék fülkéjének pontjai, hiszen minden pontjának a felfüggesztési ponthoz képesti sebessége ugyanaz, mégpedig a felfüggesztési pont sebessége. A fülke pontjai az óriáskerék szimmetria tengelyéhez képest eltolt középpontú körpályákon mozognak.

Ha a merev test *egy pontját rögzítjük,* akkor a többi pont pályái a rögzített pont körül írható gömbfelületeken maradnak. Ha a merev test *két pontját rögzítjük,* akkor a merev test pontjai olyan körpályákon mozognak, melyek középpontja a két ponton átfektetett egyenesen, a *tengelyen* van rajt. A körpályák síkja merőleges a tengelyre. Ezt a mozgást a két pont által *rögzített tengely körüli forgásnak, forgómozgásnak* nevezzük

A haladó mozgás és a rögzített tengely körüli forgómozgás *síkmozgás,* azaz olyan mozgás, melynek során a test minden pontja egy időben állandó helyzetű síkkal párhuzamosan mozog.

1.2.1. Rögzített tengely körül forgó merev test

Rögzített tengely körüli forgásnál a tengely pontjainak sebessége 0. A test pontjai a tengely egyenesére merőleges síkú körmozgást végeznek, mely körök középpontjai a tengelyen vannak. Mivel a test pontjai egymáshoz képest nem mozdulnak el, ezért minden pontra ugyanakkora a keringési idő, a fordulatszám, a szögelfordulás, a szögsebesség és a szöggyorsulás. A forgómozgás leírására ezeket a mennyiségeket használjuk. A sebesség és a gyorsulás nagysága azonban függ a tengelytől való r távolságtól:

$$v = r\omega \qquad a_é = r\beta \qquad a_{cp} = r\omega^2$$

képletek alapján. A merev test forgómozgásának fajtáit ugyanúgy csoportosíthatjuk, mint a körmozgásokat, hiszen a test minden pontja ugyanazon típusú körmozgást végez.

Egyenletes forgómozgásnál egyenlő időközök alatt a test egyenlő szögekkel fordul el, bármilyen kicsinyek is ezek az egyenlő időközök. Azaz $\Delta\varphi \sim \Delta t$. A mozgást leíró függvények:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$
$$\omega = \text{állandó},$$
$$\beta = 0. \qquad (1.44)$$

Egyenletesen változó forgómozgásnál egyenlő időközök alatt a szögsebesség ugyanannyival változik, bármilyen kicsinyek is ezek az egyenlő időközök. Tehát $\Delta\omega \sim \Delta t$.

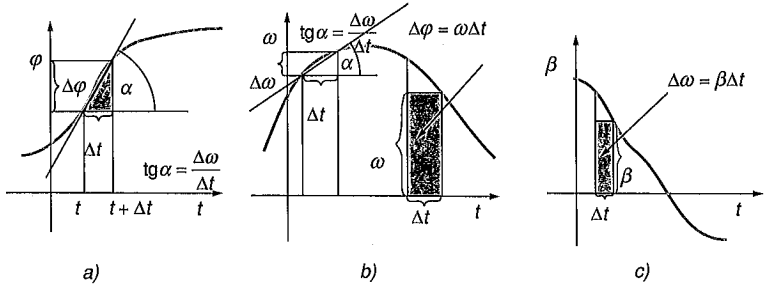
A mozgást leíró függvények:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\beta}{2} t^2,$$
$$\omega = \omega_0 \pm \beta t,$$
$$\beta = \text{állandó}. \qquad (1.45)\ (1.46)$$

ahol a + előjel a növekvő szögsebességű (gyorsuló), a – előjel a csökkenő szögsebességű (lassuló) forgómozgásnál használandó. A többi összefüggés a megfelelő körmozgásoknál található.

Nem egyenletesen változó forgómozgásnál a szögsebesség nem egyenletesen változik az idő függvényében, és az egyenes arányosság sem áll fenn $\Delta\omega$ és Δt között. A két mennyiség hányadosa csak az átlagos szögsebességet adja meg. Elég kis időtartamon belül azonban a szögsebesség változása közelítőleg egyenesen arányos annak idejével. Az arányossági tényező a *pillanatnyi szöggyorsulás:*

$\Delta\omega = \beta\Delta t$. Ezért a szöggyorsulás–idő grafikonon a szögsebesség-változás számértékét a görbe alatti terület számértéke adja meg (lásd 1.29. ábra). A szögsebesség–idő grafikonon a $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ összefüggés szerint a szöggyorsulás számértékét a görbe meredeksége adja meg. A szögelfordulás–idő grafikonon az $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ definíció alapján a görbe érintőjének meredeksége adja a pillanatnyi szögsebesség számértékét. A kis időközökre érvényes $\Delta\varphi \approx \omega\Delta t$ alapján a szögelfordulás a szögsebesség–idő grafikonon a görbe alatti terület számértéke.



1.29. ábra

Az előző összefüggéseket a differenciál- és integrálszámítás segítségével kifejezve:

$$\beta(t) = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} \qquad \omega(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \beta(t)\,\mathrm{d}t \qquad \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

A $\beta(t)$ és az ω_0, φ_0 kezdő értékek ismeretében $\omega(t)$ és $\varphi(t)$ meghatározható.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos a rögzített tengelyű fogaskerekek és az ékszíjjal meghajtott kerekek fordulatszámai közötti összefüggés: a fogaskerekek érintkezési pontjainak sebessége megegyezik. Ezért a $v = r\omega$ szerint a szögsebességek és a velük arányos fordulatszámok fordítottan arányosak a kerekek sugarával, vagy ami ezzel egyenértékű, a fogak számával. Az ékszíjhajtásnál a szíj nyújthatatlansága miatt a szíj minden pontjának a sebessége ugyanakkora, és így a kerekek peremén lévő, a szíjhoz tapadó pontok sebessége is ugyanakkora. Ezért a fordulatszámok aránya itt is a kerekek sugarának reciproka.

1.2.2. A merev test síkmozgása

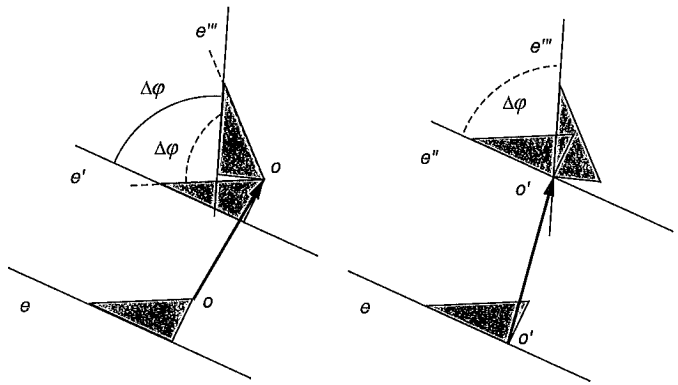
Síkmozgást végez a merev test, ha pontjai egy adott koordináta-rendszerben egy időben állandó helyzetű síkkal párhuzamosan mozognak. A síkgörbe mentén történő haladó mozgás (transzláció) és a rögzített tengely körüli forgás is ilyen mozgás.

Síkmozgást végeznek az egyenes vonalú pályán mozgó gépkocsi kerekének pontjai. (A kanyarodóé nem!) Az asztalon sikló és forgó elfektetett lapos korong pontjai is síkmozgást végeznek az asztalhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben, de az ugyanitt imbolygó búgócsiga pontjai már nem ezt a mozgást végzik.

A síkmozgást végző test bármilyen helyzete előállítható a test pontjainak párhuzamos elmozdulásából és valamilyen tengely körüli elfordulásból. Azaz egy *merev test síkmozgása összetehető egy haladó és egy forgómozgásból.*

Az 1.30. ábra szerint kijelöljük a test egy tetszőleges O pontját és az azon átmenő, a mozgás síkjára merőleges t tengelyt. A test mozduljon el úgy, hogy minden pontja az O-val párhuzamosan mozogjon! Ezután a t tengely körül elforgatva a testet a kívánt helyzetbe hozhatjuk. A tényleges mozgás az előző két mozgás egyidejű végrehajtásából származtatható.

Ha a test egy másik O' pontját szemeljük ki, akkor a másik tengely elmozdulásvektorának nagysága és iránya is más lesz, mint előbb. Az elforgatás $\Delta\varphi$ szöge azonban az előző lesz: rajzoljunk a testre gondolatban egy e egyenest! A haladó mozgás, azaz a geometriai értelemben vett eltolás nem változtatja meg az egyenesek hajlásszögét. Így az e' és az e'' egyenesek e-vel, tehát egymással is párhuzamosak. Ezért mindegyik egyenes az elforgatott e''' egyenessel ugyanazt a szöget zárja be. Tehát mindegy az, hogy melyik pont képviseli a haladó mozgást, az eltolással keletkező helyzetek mindegyikéből ugyanakkora szögű elforgatással jutunk a véghelyzetbe.



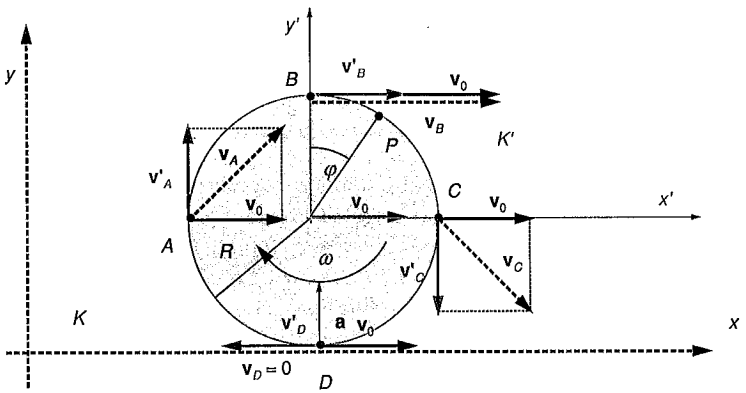
1.30. ábra

A kiszemelt tengely megválasztásától függ a haladó mozgás sebessége és gyorsulása, szögsebessége és szöggyorsulása azonban nem.

Az előzőek alapján vizsgáljunk meg egy egyszerű problémát a merev testek síkmozgásából! Elemezzük a *vízszintes síkon csúszásmentesen és egyenletesen gördülő kerék* mozgását! A *csúszásmentes,* vagy másképp *tisztán gördülés* azt jelenti, hogy a keréknek éppen a talajjal érintkező pontjának a talajhoz viszonyított sebessége 0.

Pl.: Ha egy autó homokos talajon halad, akkor bizonyos esetekben a kerékgumi mintázata éles nyomot hagy a homokban. A kerék síkjával nem párhuzamos barázdák lenyomatának láthatósága azt jelenti, hogy a kerék talajhoz érő pontjainak a talajhoz képesti sebessége 0. Az ilyen barázdák elmosódottsága, illetve nem láthatósága esetén a kerék legalsó pontjainak a talajhoz viszonyított sebessége nem 0.

Vizsgáljuk meg a kerék egy pontjának mozgását! A fentiek alapján a merev test mozgása összetehető egy haladó és egy forgómozgásból. Válasszuk tengelynek a kerék középpontját (lásd 1.31. ábra)! Ez a pont a feltételeknek megfelelően egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Ez képviseli a talajhoz képest nyugvó, *xy* koordináta-rendszerben végzett $\mathbf{v}_0$ sebességű haladó mozgást. Rögzítsük ehhez a ponthoz az *x'y', nem forgó koordináta-rendszer* origóját! Tehát az x' és y' által képviselt K' koordináta-rendszer tengelyei önmagukkal párhuzamosan tolódnak el. Ha a kerék nem forogna, akkor pontjainak sebessége a K' rendszerben 0 lenne, tehát minden pontjának a sebessége a talajhoz rögzített K vonatkoztatási rendszerben $\mathbf{v}_0$ lenne, azaz a mozgás tiszta haladó mozgás lenne. A K' mozgása képviseli a haladó mozgást. A K'-beli adatokat vesszővel látjuk el és kék színnel jelöljük. Ebben a rendszerben a kerék pontjai körmozgást végeznek ugyanolyan szögjellemzőkkel (de általában más-más sebességgel illetve gyorsulással). A talaj pontjai innen nézve a K' sebességének ellentettjével, $-\mathbf{v}_0$ sebességgel mozognak. A talajhoz rögzített K rendszerbeli adatokat vesszőtlen, fekete betűkkel jelöljük. Az ábra alapján: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$, ahol $\mathbf{r}_0$ a K' origójának, azaz a kerék középpontjának helyvektora. Ha a kerék középpontja egyenletes mozgást végez, akkor középpontjának koordinátái: $y_0 = R$ és $x_0 = v_0 t$. A kerék peremén lévő P pont koordinátái a K' rendszerben: $x' = R \sin \varphi$ és $y' = R \cos \varphi$. A tiszta gördülés feltétele, hogy a talajjal érintkező pont talajhoz viszonyított sebessége 0. Azaz K'-ből nézve ez a pont $-\mathbf{v}_0$ sebességgel mozog a talajjal együtt,

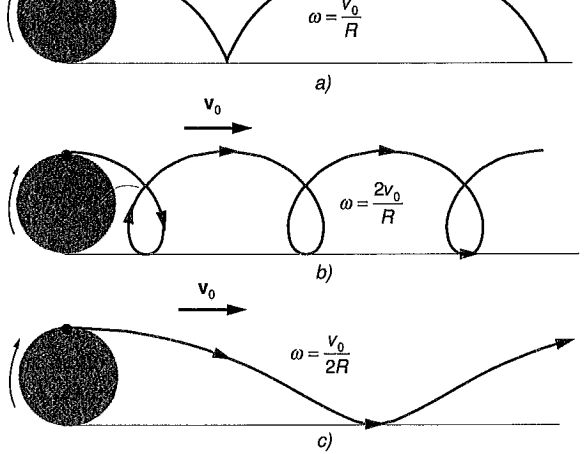


1.31. ábra

ezért szögsebessége $\omega = \frac{v_0}{R}$. Mivel a test merev, ezért minden pontjának szögsebessége ugyanekkora. Mivel a feltételek szerint a $\mathbf{v}_0$ sebesség állandó nagyságú, ezért a szögsebesség is az. Tehát a kerék egyenletes forgómozgást végez, $\varphi = \omega t$. (Ha a $\mathbf{v}_0$ változó, akkor természetesen a forgómozgás is az.) A tiszta gördülés feltételét a K-beli helyvektorra vonatkozó egyenletbe helyettesítve:

$$x = v_0 t + R \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right), \qquad y = R + R \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right).$$

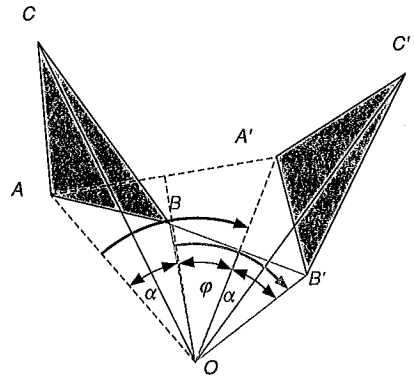
A pálya egyszerű szerkesztéssel is megadható: a tengelyt és vele együtt a kerék minden pontját $v_0 \Delta t$-vel eltoljuk a talajjal párhuzamosan, majd a kereket $\frac{v_0}{R} \Delta t$ szöggel elforgatjuk. Az így kapott görbét *cikloisnak* nevezik (lásd 1.32. ábra). A sebesség és a gyorsulás az 1.1.4. szerint: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$ és $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'$. Néhány pont sebességét ábrázoltuk a 1.31. ábrán. Mivel a kerék egyenletesen halad, ezért $\mathbf{a}_0 = 0$, és így a gyorsulások mindkét vonatkoztatási rendszerben csak a centripetális gyorsulások, és így sugárirányúak. Nagyságuk: $a_{cp} = \frac{v_0^2}{R}$. A talajjal érintkező pont pillanatnyi sebessége a talajhoz képest 0, de gyorsulása van: $|\mathbf{a}_{cp}| = \frac{v_0^2}{R}$. *Tiszta,* illetve *csúszva gördülés* esetén a kerék egy kerületi pontjának pályáját lásd az 1.32. ábrán.



1.32. ábra

A pillanatnyi forgástengely. A továbbiakban „nyugvó" rendszernek nevezzük azt a vonatkoztatási rendszert, amelyben a merev test síkmozgását vizsgáljuk.

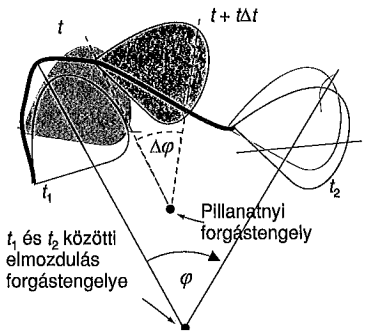
A merev testet egyik tetszőleges helyzetéből a másikba egyetlen, a nyugvó rendszerben álló tengely körüli elforgatással *is* eljuttathatjuk.



1.33. ábra

A merev test helyzetét a térbeli mozgásnál három, síkmozgásnál két pontja egyértelműen meghatározza. A továbbiakban csak síkmozgással foglalkozunk, ezért elegendő csak a merev test két pontjának helyváltozását vizsgálnunk. Legyen a merev test két kiszemelt pontja A és B! Jussanak el az A'-vel, illetve B'-vel jelölt helyzetbe! (A merev test bármely C pontjának helyét a későbbiekben meg tudjuk adni, hiszen az A-tól és B-től való távolsága változatlan lévén, az a kiszemelt pontok helyének ismeretében egyértelműen meghatározható). Húzzuk meg az AA' és a BB' szakaszok felezőmerőlegesét (1.33. ábra)! A felezőmerőlegesek az O pontban metszik egymást. (Ha nem, akkor a tengely „végtelenben" van, vagyis transzlációról van szó.) Most csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a test forog. $OA = OA'$ és $OB = OB'$, mert O a felezőmerőlegesek metszéspontja. Az OAB háromszög BA oldala is egyenlő hosszú $B'A'$-vel, mert a test merev. Ezért az OAB háromszög egybevágó $OA'B'$-vel, így az O-nál lévő szögeik megegyeznek. Az ábrából leolvashatóan: AOA' *szög* $= \alpha + \varphi$ és BOB' *szög* $= \alpha + \varphi$. Tehát A' az A-ból és B' a B-ből az O-körüli $\alpha + \varphi$ szögű elforgatással keletkezett, miközben az OA, illetve az OB sugarú körpályán mozogtak. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

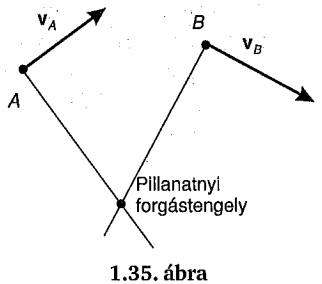
A merev test egy tetszőleges mozgásánál a t_1 és t_2 pillanatok közötti elmozdulást ugyan előállíthatjuk az előbbiekben leírtak alapján megszerkesztett egyetlen tengely körüli elforgatással, de ez nem írja le a valóságos mozgást a két pillanat között. Az O körüli elforgatás a két pillanat között egy olyan mozgást jelent, amelynek során a test pontjai az O körüli körpályán keringenek. A merev test síkmozgása folyamán általában nem ilyen mozgást végez, pontjai a nyugvó rendszerben nem körpályán mozognak. Tehát a merev test két tetszőleges pillanat közötti mozgása általában nem írható le a nyugvó rendszerben álló tengely körüli elforgatással (1.34. ábra). Azonban ha a t_1 és t_2 közötti pillanatok közötti időtartamot felosztjuk elegendően kicsiny Δt időtartamokra, akkor a test mozgása ezen kis Δt-ken belül helyettesíthető egy-egy adott t időponthoz tartozó nyugvó tengely körüli elforgatással. Ezt a tengelyt nevezzük a t pillanathoz tartozó *pillanatnyi forgástengelynek.*



1.34. ábra

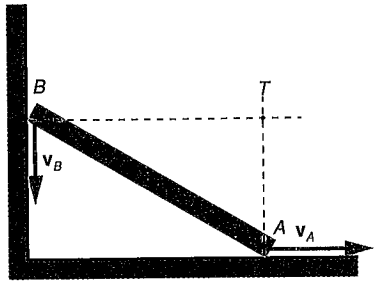
A pillanatnyi forgástengely a test mozgása során a nyugvó rendszerhez és a testhez képest is mindig más és más helyzetet vesz fel. Természetesen a pillanatnyi forgástengelynek a nyugvó rendszerhez és a testhez viszonyított pillanatnyi sebessége is 0. Tehát a *test mozgása kis időközökben helyettesíthető egy-egy „álló" tengely körüli elforgatással, melyek helye a testhez és a nyugvó rendszerhez képest is változó.*

A pillanatnyi forgástengely helyét az szabja meg, hogy a test pontjai hozzá képest köríven mozognak a nyugvó rendszerben. Ha a test két pontjának nyugvó rendszerbeli sebességének egyenesét ismerjük, akkor a pillanatnyi forgástengely helye is kitűzhető. Ugyanis a pontokban a sebességre emelt merőlegesek a pályakörívek sugarai. Ezek metszéspontja a pillanatnyi forgástengely (1.35. ábra).



1.35. ábra

A pillanatnyi forgástengelyt bizonyos esetekben onnan tudjuk felismerni, hogy van a merev testnek olyan pontja, melynek pillanatnyi sebessége 0. Például tiszta gördülésnél a kerék és a talaj érintkezési pontjának sebessége 0. A pillanatnyi forgástengely átmegy a merev test ezen pontjain. A pillanatnyi forgástengelyt itt mindig a talajnak, illetve a keréknek más-más pontjai határozzák meg. Az adott pillanathoz tartozó pillanatnyi forgástengely a kerék és a talaj érintkezési pontjain átmenő, a mozgás síkjára merőleges egyenes. A kerék pontjainak sebességvektorai merőlegesek a pillanatnyi forgástengelyből a pontig húzott sugárra.



1.36. ábra

A pillanatnyi forgástengely nem kell hogy átmenjen a merev testen. Például egy falnak támasztott, elcsúszó létra pillanatnyi forgástengelyét a létrához ragasztott síkon kereshetjük meg. Egy adott pillanathoz tartozó pillanatnyi forgástengely az 1.36. ábra szerint a létra fallal és a talajjal érintkező pontjaiból a falra, illetve a talajra emelt merőlegesek metszéspontja, mert a végpontok sebessége a fallal, illetve a talajjal párhuzamos.

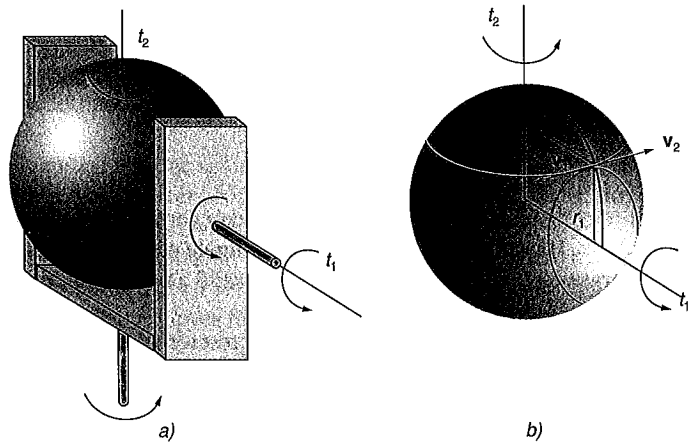
A test azon pontja (ha van ilyen), amelyiken a pillanatnyi forgástengely áthalad, gyorsul, hiszen sebessége 0-ról valamilyen értékre nő.

1.2.3. Térbeli forgómozgás. A szögsebesség vektora

Vizsgáljunk meg két, különböző tengely körüli forgást! Vegyünk egy keretet, amelybe az 1.37a. ábra szerint illesszünk be csapágyakat! A csapágyakon átfektetett, vízszintes t_1 tengely körül forgassuk meg a gömböt ω_1 szögsebességgel! Ekkor a gömb pontjai t_1-re merőleges, függőleges síkú körpályákon keringenek $v_1 = r_1\omega_1$ sebességgel, ahol $0 \le r_1 \le R$. Itt R a gömb sugara. A keretet a függőleges t_2 szimmetriatengelye körül hozzuk ω_2 szögsebességű forgásba! Ha a gömb nem forogna a t_1 körül, akkor a gömb pontjai t_2-re merőleges, vízszintes körpályákon keringenének $v_2 = r_2\omega_2$ sebességgel, $0 \le r_2 \le R$. A gömb középpontján átmenő, a t_1 és t_2 által kifeszített sík a gömböt az ábra szerinti egy körben metszi. Ennek a körnek csak a negyedét tüntettük fel az ábrán. A körön lévő pontok mindkét forgásból származó sebességei merőlegesek a szóban forgó síkra, és ezért vagy egyirányúak, vagy ellentétesek. Az 1.37b. ábrán látható negyed köríven lévő pontok két forgásból származó sebességei ellentétes irányúak. Ezen a negyed köríven van egy olyan pont, melyre $v_1 = v_2$, hiszen csak olyan r_1, illetve r_2 távolságra kell lenniük a tengelyektől, melyekre $r_1\omega_1 = r_2\omega_2$, azaz $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. A gömb átellenes, nem látható részén is van egy ilyen pont. Tehát ezen pontok eredő pillanatnyi sebessége 0 a nyugvó rendszerben. A gömb középpontjának a sebessége is 0. Sőt, még a gömb középpontján és a 0 sebességű ponton átfektetett egyenes minden pontjának pillanatnyi sebessége is 0, hiszen minden pontja távolságainak aránya a tengelyektől szintén $\frac{r_1}{r_2}$. Tehát ez az egyenes a gömb pillanatnyi forgástengelye. Ebben a pillanatban minden pont sebessége merőleges erre a pillanatnyi forgástengelyre. A Föld forgásával analóg módon a pillanatnyi fogástengely a „sarkokon" döfi a gömb felszínét. A pillanatnyi forgástengelyre merőleges sík az „egyenlítőt" metszi ki.

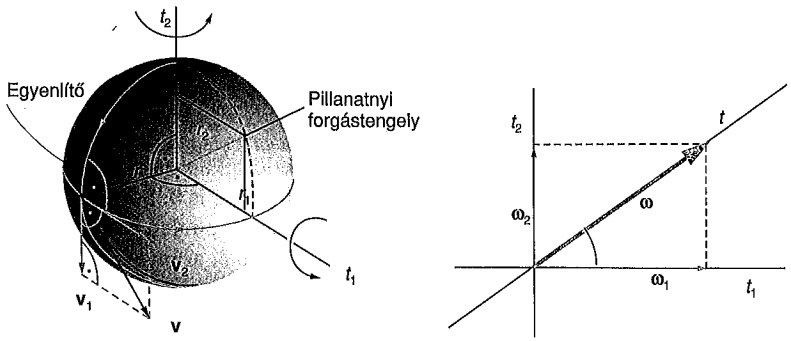
Az eredő forgás szögsebességének megállapításához vegyük a t_1, illetve t_2-re merőleges K_1 és K_2 gömbi főkörök metszéspontját! E pont R távolságra van a gömb középpontjától és a két forgásból származó $v_1 = R\omega_1$ és $v_2 = R\omega_2$ sebességei merőlegesek egymásra. Az eredő sebességet osztva a sugárral kapjuk az eredő forgás szögsebességét:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{R} = \frac{\sqrt{R^2\omega_1^2 + R^2\omega_2^2}}{R} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$



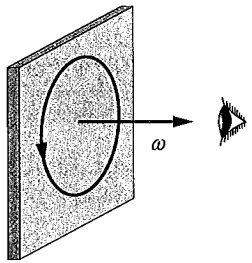
1.37. ábra

Ebből és az 1.38. ábrából láthatóan az eredő szögsebesség a vektori összeadás szabályai szerint számítható ki.



1.38. ábra

A szögsebesség vektor. Irányát a pillanatnyi forgástengelyen úgy tűzzük ki, hogy a vektor „hegye" felől nézve a forgás az óramutató járásával ellentett értelmű legyen. Nagysága a szögsebesség nagysága.



1.39. ábra

Ha a két tengely nem merőleges egymásra, akkor természetesen koszinusztétellel számolunk. Három, egymásra merőleges tengely esetén a szögsebességet a térbeli Pitagorasz-tétel alapján számítjuk ki. Az eredő a pillanatnyi forgástengely irányába mutat.

Fordítva is eljárhatunk. Felbonthatjuk a merev test térbeli forgását három, egymásra merőleges pl. a koordinátatengelyek irányába eső forgásra, melyek szögsebességeire igaz:

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2. \qquad (1.47)$$

Mivel a szögsebesség vektor, ezért belőle a

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

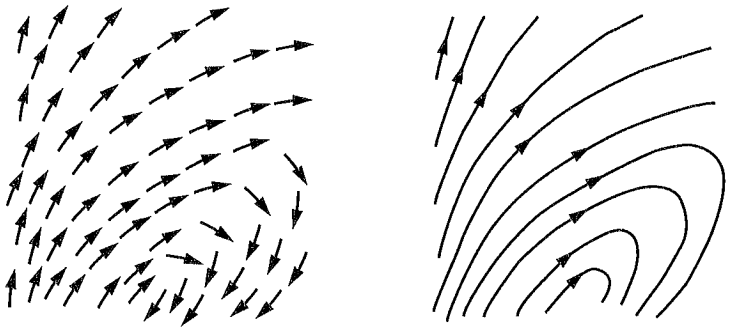
képlet alapján a szöggyorsulás is vektor. E vektor iránya a szögsebesség-változás vektorának iránya.

1.3. A folyadékok és gázok mozgásának leírása

Az áramló folyadékot és gázt osszuk fel gondolatban olyan piciny darabkákra, ún. *térfogatelemekre,* melyeken belül minden résztartomány sebességét ugyanolyan irányúnak és nagynak tekinthetünk. Adjuk meg valamely pillanatban a folyadék által elfoglalt térrészben, az *áramlási térben* minden egyes térfogatelem sebességének nagyságát és irányát! A sebesség így a hely és idő függvénye lehet. Az áramlási tér minden egyes pontjához tehát meghatározott sebesség tartozik, ezért szokás ebben az esetben *sebességtérről* beszélni.

Az áramlási tér szemléltethető úgy is, hogy egy adott időpillanatban elég sűrűn felvett pontokban ábrázoljuk a sebesség vektorának irányát és nagyságát (1.40a. ábra). Más és más pillanatokban ez az ábra más és más lehet. Egy másik szemléltetési módnál berajzoljuk azokat a görbéket, amelyeknek a sebességvektorok az érintői (1.40b. ábra). A görbéket *áramvonalaknak* nevezzük. Az áramvonalaknak irányt is tulajdonítunk, a mozgás irányát. Az áramvonalak sűrűségét a sebességgel arányosan vesszük fel, azaz az áramvonalakra merőleges egységnyi felületen az ottani sebességgel arányos számú áramvonalat rajzolunk. Az áramlási tér bármely pontjában, adott pillanatban csak egyetlen áramvonal halad át. Az áramvonalkép időben változhat.

Ha az áramlás, azaz az áramlási tér időtől független, *stacionárius áramlásról* beszélünk. Az áramlási tér időtől való függetlensége azt jelenti, hogy *egy adott pontba befutó folyadékdarabkák sebessége itt mindig ugyanaz.* Egy kiszemelt folyadékdarabka sebessége azonban változhat az idő függvényében, hisz az idő múltával más helyre kerül, ahol a sebesség már más lehet. Stacionárius áramlásnál az áramvonalak egyben az egyes folyadékdarabkák pályagörbéi is.



a) b)

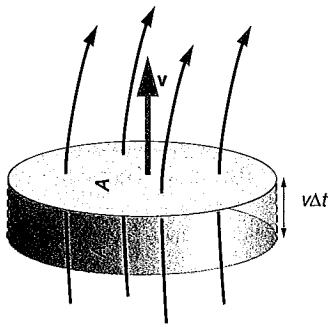
1.40. ábra

Egy felületen átáramló *folyadék, gáz áramlásának erősségén (intenzitásán, áramerősségen), az ezen a felületen időegység alatt átáramlott folyadék vagy gáz mennyiségét értjük.* Jele *I*.

A folyadékoknál és gázoknál a gyakorlatban előforduló esetekben a sűrűség alig változik, ezért az anyagmennyiséget a tömeg helyett a térfogattal is jellemezhetjük. Az áramlás erősségét a következőképpen számíthatjuk ki: A Δt idő alatt az erővonalakra merőleges, A nagyságú felületen azok a részecskék haladnak át, amelyek a felülettől legfeljebb $v\Delta t$ távolságra vannak, azaz benne vannak egy A alapú $v\Delta t$ magasságú hengerben, melynek térfogata $\Delta V = Av\Delta t$ (lásd 1.41. ábra). Ezért $I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{Av\Delta t}{\Delta t}$, azaz:

$$I = Av. \tag{1.48}$$

Ha a felület nem merőleges az áramvonalakra, akkor a sebesség felületre merőleges komponensével kell számolni. Az I mértékegysége m^3/s.

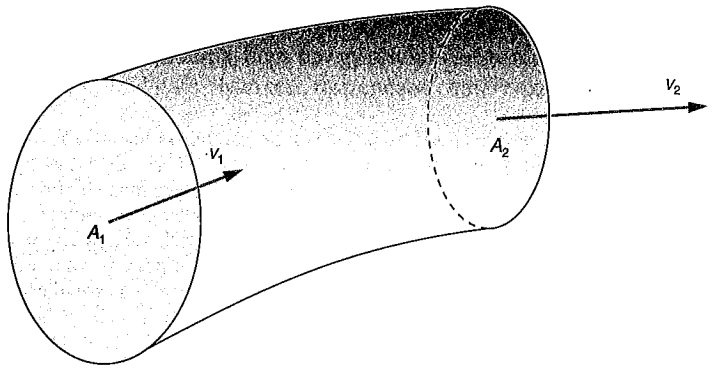


1.41. ábra

Változó keresztmetszetű (merev falú, különböző helyeken különböző keresztmetszetű) *csőben* történő áramlásnál a tetszőlegesen kiválasztott A_1 és A_2 felületeken az áramlás erőssége ugyanaz. Ugyanis az A_1 és az A_2 felületek által határolt tartományba időegység alatt ugyanannyi folyadék lép be, mint ki, lévén az ott lévő folyadék mennyisége állandó (lásd 1.42. ábra).

$$A_1 v_1 = A_2 v_2. \tag{1.49}$$

Ez a *stacionárius áramlás alaptörvénye.* A fenti egyenletet a szakirodalomban *kontinuitási (folytonosság) egyenletnek* is nevezik. Ennek következményeként csőszűkületben a folyadék vagy gáz gyorsabban áramlik mint a tágulatban.



1.42. ábra

2. Dinamika

2.1. A dinamika anyagi pontra vonatkozó törvényei

2.1.1. A dinamika alapfogalmai. A Newton-törvények

Ebben a szakaszban csak pontszerű testekkel foglalkozunk. A kijelentések azonban kiterjedt testekre is érvényesek, ha pontjaik sebessége ugyanaz: pl. haladó mozgást végző merev test esetén.

A tapasztalat azt mutatja, hogy ha egy test sebessége megváltozik, akkor környezetében mindig található olyan test, testrendszer, amely oka a sebességváltozásnak.

Ezen a következőt értjük: tegyünk egy vasdarabot az asztalra és tartsuk erősen. Három lezárt, *A, B, C* dobozok valamelyikében mágnes van. Elengedjük a vasdarabot, és az elindul, gyorsul valamerre. Mindent visszateszünk a helyére, de az *A* dobozt eltávolítjuk. Ha a vasdarabot elengedve továbbra is ugyanúgy gyorsul, mint az előbb, akkor nyilván *A* nem oka a gyorsulásnak. Akár vissza is helyezhetjük *A*-t, hiszen nem oka a vas gyorsulásának. A kísérletet megismételjük úgy, hogy a *B* dobozt messzire visszük, *A*-t és *C*-t helyükön hagyjuk és a vasdarabot újból elengedjük. Ha most azt találjuk, hogy a vas nem indul el, nem gyorsul, *B* oka a test gyorsulásának. Ha *A*-t és *B*-t visszatesszük, *C*-t messzire helyezzük és a vasdarabot visszatéve azt újból elengedjük, és ekkor a gyorsulás ugyanaz, mint az első esetben, akkor mondhatjuk, hogy *A* és *C* nem oka a test gyorsulásának, de *B* igen. A köznapi tapasztalat azt mutatja, hogy a Földhöz viszonyított vonatkoztatási rendszerből figyelve a testeket, mindig találunk a környezetben olyan más testeket, melyek a fenti értelemben okai a test gyorsulásának. Az ilyen vonatkoztatási rendszert inerciarendszernek nevezzük.

Az állomásról induló vonatból figyelve (a Földhöz képest gyorsuló vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva) az állomás mellett nőtt fát, azt találjuk, hogy az is elindul, gyorsul. A fa közelében lévő épületet lebontva és a kísérletet újra elvégezve azt találjuk, hogy a fa ugyanúgy gyorsul, tehát az épület nem oka a fa gyorsulásának. Hiába távolítanánk el a fa közeléből minden testet, a fa gyorsulását az ugyanúgy gyorsuló vonatból figyelve az ugyanúgy gyorsulna. Nem találnánk olyan testet, amelyik oka a fa gyorsulásának. Ebből arra következtetünk, hogy vannak olyan vonatkoztatási rendszerek, ahonnan megfigyelve egy testet, nem találunk olyan testet, amelyik oka a gyorsulásának.

Newton I. törvénye (a tehetetlenség törvénye): Minden test megtartja nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú, egyenletes mozgását mindaddig, amíg annak megváltoztatására egy másik test nem kényszeríti.

Mivel a sebesség függ a vonatkoztatási rendszer megválasztásától, ezért meg kell mondanunk, hogy melyik vonatkoztatási rendszerben érvényesek a Newton törvényei. A tapasztalat szerint Newton I. (és a továbbiakban említett három) törvénye nagy pontossággal igaz az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben. Az olyan vonatkoztatási rendszereket, melyekben Newton első törvénye igaz, *inerciarendszereknek* nevezzük.

Jó közelítéssel inerciarendszernek tekinthető a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszer. A megfelelő állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszer nagy pontossággal inerciarendszer.

Az inerciarendszer kiválasztása, illetve definiálása nem egyszerű dolog. A tehetetlenség törvényében ráadásul nemcsak a mozgás egyenesvonalúsága, hanem egyenletessége is szerepel. Probléma ezért az is, hogy milyen mérőeszközt, illetve időskálát használunk a mozgás egyenletességének megállapításához. Ehhez nyilván egy „egyenletesen" járó óra kell. De mihez képest járjon egyenletesen? Mit értsünk egyenlő időközök alatt? Erre adott választ a 19. században *Lange* német fizikus. A következőkben az ő definícióit, illetve axiómáit közöljük:

I. definíció: Inerciarendszernek nevezzük az olyan vonatkoztatási rendszert, amelyben egy pontból különböző irányokba (mely irányok nem eshetnek egy egyenesbe) egyidejűleg elindított és rögtön magára hagyott három pontszerű test folytonosan leírt pályái egyenesvonalúak.

I. tétel: Az így meghatározott inerciarendszerben minden magára hagyott test pályája egyenes vonalú.

A következő definíció meghatározza azt az időskálát, amelyre vonatkoztatva el tudjuk dönteni egy mozgás egyenletességét. Ezt az időskálát nevezzük inercia-időskálának.

II. definíció: Inercia-időskála az olyan időskála, amelyre vonatkoztatva valamely magára hagyott pontszerű test egyenletesen mozog tulajdon tehetetlenségi pályáján. (Itt tehetetlenségi pályán értjük a magára hagyott test mozgását az inerciarendszerhez viszonyítva.)

A következő tétel a tehetetlenség törvényének Lange-féle megfogalmazása:

II. tétel: Inercia-időskálára vonatkoztatva minden más magára hagyott pontszerű test is egyenletesen mozog tehetetlenségi pályáján (az előbb meghatározott inerciarendszerben).

Minden olyan vonatkoztatási rendszer, amelyik egy inerciarendszerhez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, szintén inerciarendszer.

A dinamika alapfogalmai

A dinamika alapvető fogalmai az erő, a tömeg, az impulzus (lendület). E fogalmakkal való megismerkedésnek, a dinamika alapjai felépítésének több útja van. A középfokú tanítási gyakorlatban két eljárás szokásos: az egyik az erő, a másik a lendület fogalmát tekinti kiinduló, központi fogalomnak. Az alábbiakban mindkét felépítési módot közöljük.

Meggondolásainkban feltételezzük, hogy a vizsgált test a vonatkoztatási rendszerben a fény sebességéhez képest kis sebességgel mozog. (Lásd IV. Relativitáselmélet.)

2.1.1.1. A erő fogalmára alapozó felépítés

A test és környezete között többféle kölcsönhatás létezik, amelyek során a test fizikai jellemzői megváltoznak. Megváltozhat sebessége, alakja, hőmérséklete, töltése stb. E kölcsönhatások közül kiemeljük azokat, amelyek során a test mozgásállapota megváltozik. Az ilyen kölcsönhatásokat szokás mechanikai kölcsönhatásnak is nevezni. Newton II. törvénye a test és környezete közötti kölcsönhatás erőssége és a test „mozgásállapot-válasza" közt állapít meg összefüggést.

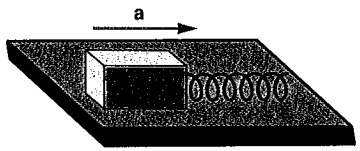
Az erő fogalma. Szubjektív erőérzetünkre támaszkodva mondhatjuk, hogy ahhoz, hogy ugyanazon testen rövidebb idő alatt érjünk el ugyanakkora sebességváltozást, nagyobb erőt kell kifejtenünk. Ezért a kölcsönhatás erősségét nem a sebesség, hanem annak változása, a gyorsulás alapján ítéljük meg.

Kísérleteket végezve azt találjuk, hogy ugyanazt a testet különböző testek különbözőképpen gyorsítják, különböző testeket ugyanazon testek különbözőképpen gyorsítanak.

Szokás azt mondani, hogy a testet valamilyen erő gyorsítja, valamilyen erő hat rá. Ez rövid kifejezése annak, hogy a test sebességét valamilyen, a környezetében lévő test (mező lásd III. rész) változtatja, és e hatás mértékéül szolgáló fizikai mennyiség az erő.

Az erő mérési utasítása. Válasszunk ki egy testet, amelyet mintatestnek nevezünk. Ha a mintatestet különböző környezetekbe helyezzük, azt találjuk, hogy gyorsulása függ a környezet fizikai jellemzőitől és a test bizonyos tulajdonságaitól (pl. elektromos töltés). Akkor mondjuk, hogy egy mechanikai kölcsönhatás kétszer-háromszor erősebb (az erő kétszer-háromszor nagyobb), ha ugyanaz a test kétszer-háromszor nagyobb gyorsulással mozog. (A test jellemzői közben nem változnak.) Az *erő irányaként* a test *gyorsulásának* irányát definiáljuk. Az erő *hatásvonala* pontszerű testek esetén a testen átmenő, erőirányú egyenes.

Ilyen méréseket például úgy végezhetünk, hogy egy rugóval gyorsítunk egy mintatestet (pl. légpárnás asztalon, hogy a súrlódás hatását kiküszöböljük) (2.1. ábra).



2.1. ábra

Erőtörvények. A mérések alapján megállapíthatjuk, hogy a környezet jellemzői (itt a rugó megnyúlása) és a mintatest gyorsulása között egyértelmű függvénykap-

csolat van. *Azokat az összefüggéseket, amelyek irány és nagyság szerint megadják az erőt a környezet és a test fizikai jellemzőinek függvényében, erőtörvényeknek nevezzük.*

Newton II. törvénye: Bármilyen test esetén az ugyanazon testre ható erő és a test gyorsulása egyenesen arányosak és egyirányúak:

$$\boxed{F \sim a.}$$

A törvény azt a tapasztalatot mondja ki, hogy egy *A* környezet ugyan más nagyságú gyorsulást hoz létre egy másik testen, mint a mintatesten, a gyorsulás iránya azonban ugyanaz. Az is tapasztalati tény, hogy *A* és *B* környezet ugyan más gyorsulásokat hoz létre egy testen, mint a mintatesten, de ha *A* kétszer nagyobb gyorsulást hoz létre a mintatesten, mint *B*, akkor minden más testre is igaz, hogy azt az *A* kétszer jobban gyorsítja, mint a *B*.

A tömeg. Mivel adott test esetén *F* és *a* egyenesen arányosak, ezért hányadosuk állandó. Ezt a testre jellemző állandót nevezzük a test tömegének. Jele: *m*. A tömeg skaláris mennyiség.

$$\boxed{m = \frac{F}{a}.}$$

Ezzel Newton II. törvénye a következő alakba is írható:

$$\boxed{F = ma.} \qquad (2.1)$$

Tömegarány mérése: ha két különböző testet ugyanakkora erővel (pl. ugyanazzal a rúgóval, melyet ugyanannyival nyújtunk meg) gyorsítunk, akkor az erők egyenlősége miatt:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2, \qquad \text{ahonnan:} \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Az m_2 helyébe a tömegegységet választva minden test tömegét megadhatjuk az általunk választott tömegegységgel kifejezve. A *tömeg egységéül* régebben az 1 liter 4 °C-os tiszta vizet választották. Jelenleg a tömeg egysége egy Párizs mellett őrzött platina–iridium-henger, melynek tömege csak nagyon kevéssé tér el az 1 liter víz tömegétől. Neve: *kilogramm*, jele *kg*, skaláris mennyiség. A tömeg ilyen mérését *dinamikai tömegmérésnek* nevezzük. A tömeg sztatikai mérése: 2.5.2.1. pont.

Ez a mérési eljárás lehetővé teszi olyan testek tömegének összehasonlítását, ahol az anyagmennyiség mértéke értelmét veszti. Pl. a proton és elektron tömegét úgy hasonlíthatjuk össze, hogy ugyanazon erő hatásának kitéve azokat, mérjük gyorsulásukat.

Noha a tehetetlenség kvalitatív fogalom, a test tömegét szokás a test „tehetetlensége mértékének" is tekinteni: az a test „tehetetlenebb", amelyik ugyanakkora erő hatására kevésbé gyorsul.

2.1. táblázat. Szilárd anyagok és folyadékok sűrűsége 18 °C-on kg/m³-ban

Alumínium	2 700
Vas	7 860
Ólom	11 340
Higany	13 600
Arany	19 320
Uránium	19 070
Fa	350–600
Jég (0 °C-on)	920
Üveg	2400–2600
Benzin	680–740

Gázok sűrűsége mormál állapotban (°C-on és 101,3 kPa nyomáson, kg/m³-ben)

Hélium	0,1786
Hidrogén	0,08987
Kripton	3,74
Levegő	1,2928
Nitrogén	1,2505
Oxigén	1,42895
Széndioxid	1,9768
Xenon	5,89

A test tömege a mérések alapján a testben foglalt anyagmennyiséggel is arányos. (A testet megduplázva a mért tömege kétszeresére nő.) Homogén testeknél a tömeg a térfogattal egyenesen arányos. Az arányossági tényező neve *sűrűség*, jele ρ:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Mértékegysége kg/m³. Szokásos mértékegységei még g/cm³, kg/dm³. 1 g/cm³ = 1 kg/dm³ = 10^3 kg/m³.

A sűrűség függ az anyagi minőségtől és mindazon tényezőktől, melyektől a térfogat is függ.

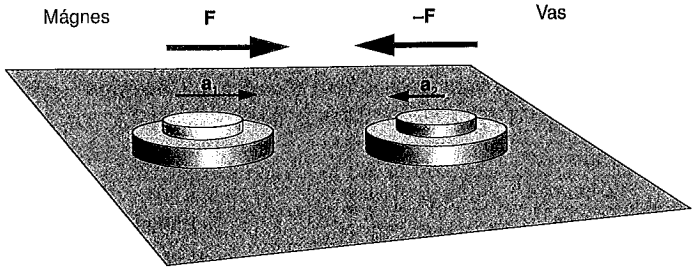
Az erő mértékegysége. Az $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenletben *m* és *a* mérhető mennyiségek, mértékegységük adott. Ezért az erő mértékegység szempontjából származtatott fizikai mennyiség:

$$[F] = [m][a] = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} = \text{N (Newton)}.$$

Az erő régebben használatos mértékegysége a *kilopond* (kp). 1 kp az 1 liter 4 °C-os tiszta vízre ható nehézségi erő 45°-os földrajzi szélességen 0 m tengerszint feletti magasságon. A Föld által itt létrehozott nehézségi gyorsulás $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Ezért $1\ \mathrm{kp} = 1\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 9{,}81\ \mathrm{N}$.

Newton III. törvénye (hatás–ellenhatás elve): Ha egy *A* test hat egy *B* testre, akkor *B* is ugyanakkora, és ellentett irányú erővel hat *A*-ra.

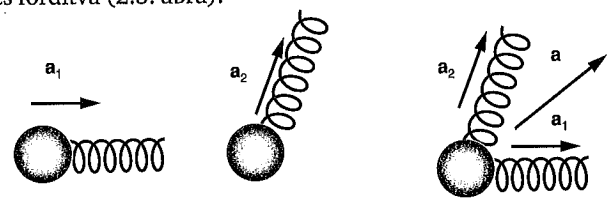
Vízen úszó parafa dugóra helyezett vas és mágnes vonzzák egymást. A tömegek és gyorsulások méréséből megállapítható, hogy az erők egyenlő nagyok és ellentétes irányúak. Az erők természetesen nem ugyanarra a testre hatnak. (2.2. ábra)



2.2. ábra

Newton IV. törvénye (szuperpozíció elve, erőhatások függetlenségének elve): ha egy testre egyidejűleg több erő hat, akkor az erőhatások egymást nem zavarva, egymástól függetlenül adódnak össze.

Ez a törvény azt jelenti, hogy ha egy m tömegű testen az $\mathbf{F}_1$ erő egymagában $\mathbf{a}_1$ gyorsulást, az $\mathbf{F}_2$ erő egymagában $\mathbf{a}_2$ gyorsulást hoz létre, akkor az $\mathbf{F}_1$ erő által létrehozott $\mathbf{a}_1$ gyorsulás ugyanaz marad, függetlenül attól, hogy az $\mathbf{F}_2$ hat-e a testre vagy sem és fordítva (2.3. ábra).



2.3. ábra

Ha egy testre $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ erő hat, akkor $\mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_1$, $\mathbf{F}_2 = m\mathbf{a}_2$. Az egyenletek (vektori) összeadásával kapott $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$ egyenletben $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ a szuperpozíció elve

alapján a testnek azt a gyorsulását jelenti, amely a két erő egyidejű hatására jön létre. Ezt a gyorsulást **a**-val jelölve: $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m\mathbf{a}$. Általában, ha n erő hat a testre:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}}\,, \tag{2.2}$$

ahol a bal oldal a testre ható összes erő vektori összegét, eredőjét jelenti.

A fenti egyenletet szokás a *dinamika alaptörvényének* vagy *mozgásegyenletnek* is nevezni.

Az egyenletet átrendezve kapjuk:

$$\mathbf{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i}{m}.$$

Az egyenlethez egy filozófiai képet rendelhetünk: jobb oldalon az erők vektori összege, a környezet hatása, az „ok"; a bal oldalon a test válasza, az „okozat" szerepel. Az egyenlet tehát filozófiai értelemben tükrözi az ok-okozat összefüggést.

Impulzus (lendület, mozgásmennyiség). Ha egy m tömegű testre $\mathbf{F}$ (állandó) erő hat Δt ideig, akkor sebessége megváltozik. A sebességváltozás:

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\Delta t = \frac{\mathbf{F}}{m}\Delta t. \tag{2.3}$$

A képletből látható, hogy ugyanazon test sebességének megváltozását nemcsak az erő, hanem az erőhatás ideje is befolyásolja. Az $\mathbf{F}\Delta t$ mennyiség neve *erőlökés*. Az erőlökést kifejezve:

$$\mathbf{F}\Delta t = m\Delta\mathbf{v}. \tag{2.4}$$

Az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés az $m\mathbf{v}$ mennyiség megváltozása.

Egy test tömegének és sebességének szorzatát *impulzusnak, lendületnek, mozgásmennyiségnek nevezzük*. Jele: **p**, esetleg **I**.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{2.5}$$

Vektor, iránya a sebesség iránya. Mértékegysége: kgm/s.

A 2.4 összefüggésbe behelyettesítve kapjuk az *impulzustételt:*

Egy test impulzusának megváltozása egyenlő a testre ható erő és az erőhatás idejének szorzatával:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t. \tag{2.6}$$

A fenti tétel ebben az alakban csak állandó erő esetén érvényes. Változó erő esetén az impulzusváltozás idejét felosztjuk olyan kis időtartamokra, melyek alatt az erők alig változnak. Ekkor:

$$\Delta\mathbf{p} \approx \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \Delta t_i, \quad \text{illetve} \quad \Delta\mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

Az erő az impulzusváltozással és nem az impulzussal egyirányú. Pl. ferde hajításnál az impulzusváltozás iránya végig függőleges, az impulzusé azonban nem.

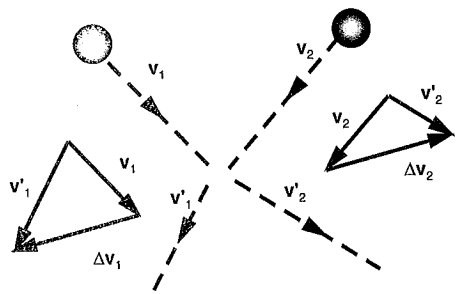
A 2.6-ból $\mathbf{F}=\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$. Ez a kifejezés csak akkor adja meg az erő irányát és nagyságát helyesen, ha a Δt idő alatt az erő állandó. Változó erő esetén a fenti formula csak egy átlagos értéket ad meg. Ha az impulzusváltozás idejét felosztjuk olyan kis időtartamokra, melyeken belül az erő állandónak tekinthető, akkor a fenti formula a kiszemelt időtartamhoz tartozó pillanatnyi erőt adja meg.

Sok esetben, például egy golyó fallal való ütközésénél alkalmazzuk a formulát. Ilyenkor azonban csak az erő időbeli átlagát határozza meg képlet. Szemléletes példa arra, hogy a formula az átlagerőt adja meg: egyenletes körmozgásnál egy periódus idő alatt $\Delta \mathbf{p} = 0$, holott itt nyilván van erőhatás. Még az is igaz, hogy az erők vektori átlaga szemléletesen szólva 0, hiszen egy periódus alatt az állandó nagyságú centripetális erő minden lehetséges irányt felvesz. Így mindegyik erőnek megvan az a vele ellentétes párja, és így adják ki a 0-t.

Impulzusmegmaradás elve párkölcsönhatásnál. Ha csak két test hat egymásra, akkor a rájuk ható erők a hatás–ellenhatás elve alapján egyenlő nagyok és ellentétes irányúak. Ezért ugyanannyi idő alatt bekövetkezett impulzusváltozásaik egyenlő nagyok és ellentétes irányúak: $\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}\Delta t$ és $\Delta \mathbf{p}_2 = -\mathbf{F}\Delta t$. Az impulzusváltozások összege 0, ezért az impulzusok vektori összege állandó.

2.1.1.2. Az impulzus (lendület) fogalmára alapozó felépítés

Olyan kölcsönhatásokat vizsgálunk, amelyekben csak két test vesz részt (párkölcsönhatás). A sebességváltozások nagyságát és irányát megmérve azt találjuk, hogy a **kölcsönhatás jellegétől függetlenül ugyanazon két test esetén a sebességváltozások iránya ellentett, aránya pedig a kölcsönhatás jellegétől függetlenül mindig ugyanaz a két testre jellemző szám** (a 2.4. ábra két golyó ütközését mutatja).



2.4. ábra

Egyforma testek esetén a sebességváltozások egyenlő nagyok. Eltérő testek esetén azt mondhatjuk, hogy annak a testnek nagyobb a „tehetetlensége", amelyiknek ugyanabban a kölcsönhatásban kisebb a sebességváltozása, és ennek mérőszáma a *tömeg*. Ebben a felépítésben a *tömeg*ek aránya a sebességváltozások arányának reciproka:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{|\Delta \mathbf{v}_2|}{|\Delta \mathbf{v}_1|}. \qquad (2.8)$$

Az m_2 helyett az egységnyi, 1 kg (1 liter 4 °C-os tiszta víz) tömegű testet használva, a tömeg mérőszáma megadható. A tömeg ilyen mérését *dinamikai tömegmérésnek* nevezzük. A tömeg ún. statikai mérését lásd 2.5.2.1. pont, „Az analitikai mérleg" szakaszában.

Ha az egyik testhez egy ugyanolyan testet erősítünk, vagy homogén testből kétszer akkora térfogatút veszünk, akkor a sebességváltozása fele a másik, feleannyi anyagot tartalmazó testének, azaz tömege kétszer akkora. Ebben az esetben is a tömeg arányos a testben foglalt anyagmennyiséggel.

Az $m\Delta \mathbf{v}$ mennyiség az $m\mathbf{v}$ vektormennyiség, az *impulzus* megváltozása. Jele: **p**, mértékegysége kgm/s. *Mivel az impulzusok megváltozása egyenlő nagy és ellentett irányú, ezért párkölcsönhatások esetén vektori összegük változatlan (impulzusmegmaradás törvénye).*

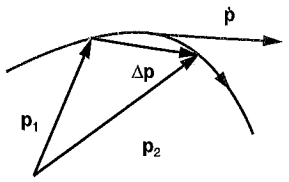
Az impulzusmegmaradás törvényének segítségével a tömeg fogalmát kiterjeszthetjük olyan esetekre is, amikor az anyagmennyiség fogalma nem használható. Pl. a proton és elektron tömegének arányát párkölcsönhatásukban mérhetjük sebességváltozásuk alapján.

Az erő fogalma. A testek impulzusa párkölcsönhatásban vagy a környezettel való kölcsönhatásban folyamatosan változhat. A test és környezete közötti kölcsönhatás intenzitását nemcsak az impulzusváltozás nagysága, hanem annak ideje is jellemzi. (Nem mindegy, hogy egy autót 10 s alatt fékezünk, vagy pedig ütközik valamivel és ugyanarról a sebességről 0,1 s alatt fékeződik le.)

Az impulzus megváltozása kis időtartamon belül egyenesen arányos a változás idejével. $\Delta \mathbf{p} \sim \Delta t$. Az arányossági tényező neve az *erő*. Ebben a felépítésben a kölcsönhatás intenzitását az erő, az impulzusváltozás sebessége méri:

$$\mathbf{F}=\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{F}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=\dot{\mathbf{p}}, \qquad (2.9)$$

iránya az impulzusváltozás iránya. Ha az impulzusokat egy közös kezdőpontból felmérjük, akkor az impulzusvektor „hegyének sebessége" éppen az impulzusváltozás sebessége, azaz az erő (lásd 2.5. ábra).



2.5. ábra

Mértékegysége: $[F]=\frac{[p]}{[t]}=\frac{\frac{\text{kgm}}{\text{s}}}{\text{s}}=\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}=\text{N}.$

A környezet és a test fizikai jellemzői egyértelműen meghatározzák a kölcsönhatás erősségét, az erőt. Az erőtörvény olyan, a tapasztalat alapján meghatározott összefüggés, melyből az erő nagysága és iránya meghatározható. Az erőtörvény ismeretében a test impulzusváltozásának sebessége meghatározható, „előre megjósolható".

A szuperpozíció elve. A tapasztalat szerint, **ha egy test két vagy több test hatása alatt áll, akkor e hatások által keltett impulzusváltozások egymást nem zavarva, egymástól függetlenül adódnak össze.** Azaz a test lendületváltozása a külön-külön létrejövő lendületváltozások vektori összege. A lendületváltozás sebessége:

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\ldots+\mathbf{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i. \qquad (2.10)$$

Ez a formula a *dinamika alaptörvényének* impulzussal kifejezett alakja.

A hatás–ellenhatás elve. Az impulzusmegmaradás elve értelmében a párkölcsönhatásban a testek impulzusváltozása egyenlő és ellentett, miközben ugyanannyi ideig tartanak. Ezért a testek impulzusváltozásának sebessége, az erők is egyenlő nagyok és ellentett irányúak. A hatás–ellenhatás elve ebben a felépítésben nem az előzőektől független tapasztalati tény, hanem az impulzusmegmaradás következménye.

Mint látható, ugyanazt a tömegegységet választva, a két felépítés ugyanazon összefüggésekre vezet.

2.1.2. Erőtörvények, erőfajták

Az erőtörvények azok az összefüggések, melyek megadják a testre ható erőt a test és a környezet adatainak függvényében.

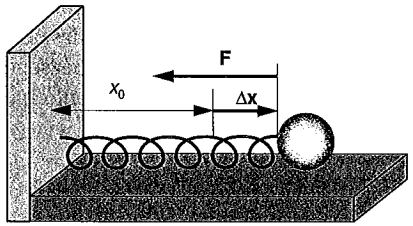
Az erőtörvények tárgyalásánál kitérünk a kiterjedt test között ható erők vizsgálatára is.

2.1.2.1. Rugalmassági erők

Itt csak a csavarrugó erőtörvényét vizsgáljuk. (A rugalmas erőkről bővebben a 2.6. szakaszban lesz szó.) A tapasztalat szerint a megfeszített rugó által kifejtett erő (mely erők a rugó mindkét végén fellépnek) ugyanazon rugó esetén csak a rugó feszítetlen, laza, x_0 hosszához képesti $\Delta\mathbf{x}$ megnyúlástól függ, és azzal ellentett irányú:

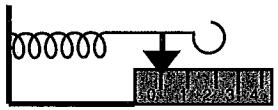
$$\mathbf{F}=-D\Delta\mathbf{x}. \qquad (2.11)$$

A skaláris arányossági tényező neve: *rugóállandó*. Jele: D, esetleg k. Mértékegysége: $\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Az „erősebb" rugó rugóállandója a nagyobb.



2.6. ábra

Ez a formula akkor is érvényes, ha a rugó mindkét vége mozog (pl. rugókkal összekötött testek, elhajított testek esetén.) A törvény alapján egyszerű *rugós erőmérőt* is készíthetünk, melynek skálája lineáris.



2.7. ábra

2.1.2.2. Nehézségi erő

Adott helyen, a (forgó) Földön, nem túl nagy térrészben, légüres térben minden szabadon eső test ugyanakkora és ugyanolyan irányú gyorsulással mozog. A gyorsulás neve *nehézségi* gyorsulás. Jele: **g**. A Föld által a testekre kifejtett **G** *nehézségi erő:*

$$\mathbf{G}=m\mathbf{g}. \qquad (2.12)$$

A Föld forgása következtében a nehézségi erő nem azonos a gravitációs erővel, bővebben lásd 2.4.4. pontot.

g nagysága és iránya helyről helyre változik, de az eltérés kicsi. Budapesten, tengerszinten $g = 9{,}80852\ m/s^2$.

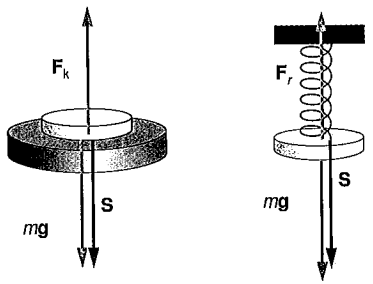
2.1.2.3. Súly; súlyerő

Egy test szűkebb, hétköznapi értelemben vett súlya az az erő, amelyet a Földön nyugalomban lévő test az alátámasztását vagy a felfüggesztését biztosító testre kifejt. (Itt feltesszük, hogy a testre csak a nehézségi erő és az alátámasztást, illetve felfüggesztést biztosító test hat. Az alátámasztás felszíne vízszintes, a felfüggesztő test által a szóban forgó testre kifejtett erőnek nincs vízszintes komponense.)

Mivel a test nyugalomban van, ezért a rá ható nehézségi erő, és az alátámasztás (illetve a felfüggesztés) által kifejtett $\mathbf{F}_k$ erő egyenlő nagy és ellentett irányú (lásd 2.8. ábra):

$$m\mathbf{g} = -\mathbf{F}_k.$$

Pl. a rugóra felfüggesztett test esetében a felfüggesztés által kifejtett erő úgy jön létre, hogy a még laza rugóra éppen felfüggesztett testre csak a nehézségi erő hat. Ezért a test lefelé gyorsul, elmozdul, a rugót nyújtani kezdi. Ennek hatására a rugóban a felfelé mutató $\mathbf{F}_r$ rugóerő ébred, mely a rugó megnyúlásával folyamatosan nő. A test mindaddig gyorsulva mozog lefelé, míg ez az erő kisebb a nehézségi erőnél. Végül ez a rugalmas erő egyenlő lesz a nehézségi erővel, a test nyugalomba kerül. (A legtöbb esetben tartós rezgés jön létre, mely idővel csillapodik. Sok esetben azonban a folyamat olyan gyorsan zajlik le, és az egyensúlyt kialakító deformációs erő már olyan kis deformációnál létrejön, hogy azt egyszerű eszközökkel nem is tudjuk kimutatni, például egy fonálra függesztett test esetében.) Hasonló rugalmas természetű erő ébred egy felületre helyezett testnél, ahol az alátámasztó test deformációja révén jön létre ez az erő.



2.8. ábra

Az **S**-sel jelölt súlyerő a test által az alátámasztásra (illetve a felfüggesztésre) kifejtett erő. Az $\mathbf{F}_k$ erő pedig az alátámasztás (illetve a felfüggesztés) által a testre kifejtett erő. Így a két erő egymás ellenereje, és a hatás–ellenhatás elve alapján e két erő egyenlő nagy és ellentett irányú:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{F}_k.$$

A két egyenletből:

$$\mathbf{S} = m\mathbf{g}.$$

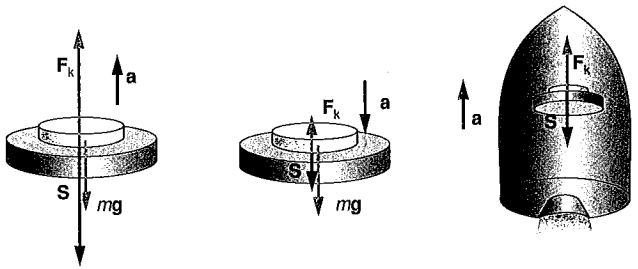
Azaz az előbbiekben értelmezett súlyerő egyenlő a nehézségi erővel. (De nem ugyanaz! Itt két különböző test, a szóban forgó test, illetve Föld által kifejtett erők összehasonlításáról van szó.)

Mint látható, a nyugalomban lévő test esetén, ugyanazon *g* mellett, a súlyerő anyagi minőségtől függetlenül arányos a test tömegével. A Föld különböző helyein a nehézségi gyorsulás gyakorlatilag ugyanakkora, ezért a köznapi gyakorlatban a tömegek összehasonlításához elegendő a súlyerőket összehasonlítani. A fürdőszobamérleg nem a tömeget, hanem a súlyt méri! Pl. a 981 N erő értékéhez 100 kg-ot írnak.

Amennyiben a test az alátámasztással (felfüggesztéssel) együtt mozog a Földhöz képest, csak egyenes vonalú, egyenletes mozgás esetén lesz az alátámasztásra kifejtett erő a nehézségi erővel egyenlő. Ha pl. az alátámasztási felület, illetve felfüggesztési pont a testtel együtt függőlegesen gyorsul, akkor a dinamika alapegyenlete szerint:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_k = m\mathbf{a}.$$

Az $\mathbf{F}_k$ erő ellenereje most is a test által az alátámasztásra, illetve a felfüggesztésre ható erő. Ez az ellenerő, a *tágabb értelemben vett* **S** *súlyerő,* tehát az $\mathbf{F}_k$ erővel egyenlő nagyságú. Az előbbi egyenlet alapján az $\mathbf{F}_k$ erő függ a gyorsulás nagyságától és irányától. Ezért a tágabb értelemben vett **S** súlyerő is függ a gyorsulás nagyságától és irányától.



2.9. ábra

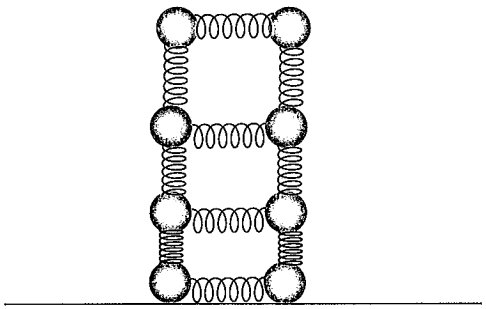
A 2.9a. ábrán az alátámasztás felfelé gyorsul a rajta lévő m tömegű testtel együtt. Mivel a test felfelé gyorsul, ezért az erők eredője felfelé mutat, azaz F_k és vele együtt ennek ellenereje, az S súlyerő is nagyobb mg-nél. A 2.9b. ábrán a gyorsulás lefelé mutat, ezért (az előbbi gondolatmenet alapján) S kisebb mg-nél.

Hasonlóképpen értelmezhetjük a súlyt egy másik égitesten, természetesen az ottani g-vel számolva.

Ha igen távol vagyunk minden égitesttől, egy gyorsuló mozgást végző űrhajóban a gyorsulás irányára merőlegesen elhelyezett felületre ható erő szintén nem 0, holott a gravitációs erő elhanyagolható. Az űrhajóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben a testek úgy viselkednek, mintha rájuk $-m\mathbf{a}$ gravitációs erő hatna, ahol $\mathbf{a}$ az űrhajó inerciarendszerhez képesti gyorsulása (2.9c. ábra). A Földön a vadászrepülők vannak kitéve igen nagy gyorsulásoknak, és így szerveik a $-m\mathbf{a}$-val megnövekedett súlyt érzékeli (lásd még 2.1.7.2. pont).

A súlytalanság állapota (feszültségmentes állapot). Minden, a Földön nyugalomban lévő (vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző) test minden részében rugalmas erők, illetve feszültségek vannak. A test modelljeként vegyük a 2.10. ábra szerinti, rugókból és golyókból álló hasábot!

A golyók a molekulákat, atomokat, a rugók a molekuláris erőket modellezik. Minden rugó összenyomott, hiszen a felette lévő golyórétegek csak úgy lehetnek egyensúlyban, ha rugalmas erejükkel kompenzálják a lefelé mutató nehézségi erőt, amely a felettük lévő golyórétegre hat. A hasáb felső lapjától lefelé menve a rugalmas feszültség nő. Ha a hasáb gravitációmentes térben van és nem gyorsul, akkor a rugók lazák (feszültségmentes állapot). Ha a hasábot 0 kezdősebességgel elejtjük (gondoskodva arról, hogy az elengedés pillanatában a rugók feszültségmentesek legyenek az indítás pillanatában), akkor, mivel a $\mathbf{g}$ minden részecskére ugyanaz, ezért sebességük és elmozdulásuk minden pillanatban megegyezik. Ez azt jelenti, hogy részecskék egymástól mért távolsága nem változik. Ezért a rugók sem deformálódnak, így az esés teljes ideje alatt a rugókban erők nem ébrednek. Ez a súlytalanság állapota. (Valóságos testeknél az elejtés pillanatában még meglévő rugalmas feszültségek néhány csillapodó rezgés után eltűnnek, és a test feszültségmentes lesz.)



2.10. ábra

A Föld körül szabadon keringő űrhajóban (vagyis, ha az űrhajó hajtóművét kikapcsolták) az emberek is tartósan a súlytalanság állapotában vannak. Ez az állapot azért érzékelhető fiziológiailag is, mert a Földön izmaikban és más szerveikben állandó rugalmas feszültség volt. Ezt nem érzékelték, a rugalmas feszültséget érzékelő sejtjeik „normális" állapotot jeleztek. A rugalmas feszültség hiányát, mint szokatlan állapotot már jelzik. A fentiek alapján nincs súlytalanságérzésük azoknak, akik megfelelő sűrűségű folyadékban lebegnek a Földön, hiszen rugalmas belső feszültségeik ugyanúgy megvannak, mintha a talajon állnának. Az űrhajósok ilyen körülmények között csak az „alátámasztással" (felhajtóerővel) „könnyített" „súlytalanított" tárgyakkal (és saját végtagjaikkal) való manipulációt gyakorolják.

2.1.2.4. Gravitációs erő. A Newton-féle gravitációs erőtörvény

Bármely két test vonzza egymást. Pontszerű testek esetén az erő nagysága egyenesen arányos a testek tömegének szorzatával és fordítottan arányos távolságuk négyzetével, azaz:

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{2.13}$$

Az erő iránya a két pontszerű testet összekötő egyenes mentén ható vonzóerő.

Itt F az erő, m_1 és m_2 a testek tömege, r a pontszerű testek távolsága, az f az úgynevezett gravitációs állandó. Értéke a tapasztalat szerint minden testre ugyanakkora:

$$f = 6,67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}.$$

Vektoriálisan:

$$\mathbf{F}_{12} = -f\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r}_{12},$$

ahol $\mathbf{F}_{12}$ jelenti az m_1 tömegű test által az m_2-re kifejtett erőt, $\mathbf{r}_{12}$ pedig az m_1-ből az m_2-be mutató helyvektor.

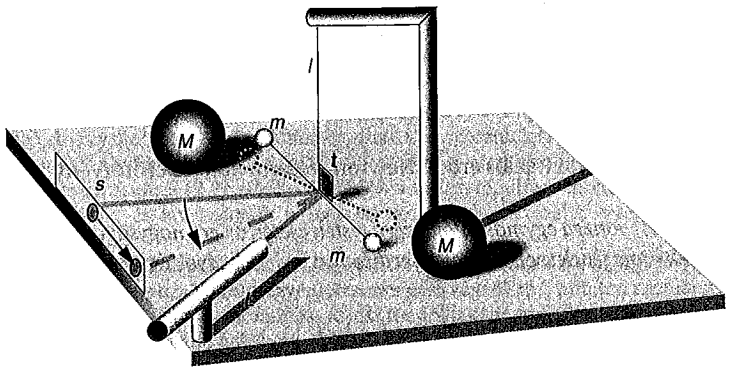
A törvényt Newton fedezte fel 1666-ban, a Hold gyorsulásának és a Föld felszínén lévő gravitációs gyorsulás vizsgálata alapján.

Cavendish később az általa szerkesztett igen érzékeny *torziós mérleggel* meg tudta mérni a köznapi méretű tárgyak között fellépő igen kis gravitációs erőt. Az arányosságok kísérleti ellenőrzésén kívül az arányossági tényezőt, az általános gravitációs állandót is meghatározta.

A torziós mérleg igen kis erők mérésére használatos eszköz. A műszer a 2.11. ábrán látható. A néhány század milliméter átmérőjű l fémhuzal (torziós szál) egyik végét rögzítik. A másik végén kisméretű rudacska van, melyen az m tömegű kis testecskék találhatók. Ha az M tömegű testeket az m tömegű testecskék közelébe hozzuk, akkor a fellépő erők hatására a torziós szál elcsavarodik. Az elcsavarodás szöge és így testecskék elmozdulása is kicsi. Ezt az elmozdulást jól mérhetővé tehetik, ha rudacskára ragasztott t tükröt egy L lámpával megvilágítják. A távoli falon megjelenő S fényfolt elmozdulása sokszoro-

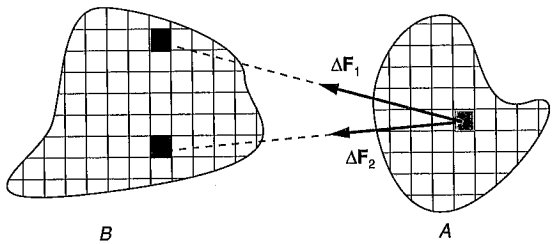
sa lehet a testek elmozdulásának. Az elcsavarodás piciny szöge így jól mérhető, és ebből következtethetünk az erő nagyságára.

Eötvös Loránd 1:200 000 pontossággal bebizonyította, hogy a gravitációs vonzóerő a testek (pl. ütközésekben mért) ún. „tehetetlen tömegével" szigorúan arányos és nem függ az anyagi minőségtől.



2.11. ábra

Tetszőleges alakú kiterjedt testek között fellépő gravitációs erő úgy határozható meg, hogy mindkét testet felosztjuk olyan pici térfogatelemekre, melyek pontszerűnek tekinthetők, azaz méreteik elhanyagolhatóak távolságukhoz képest. Az *A* testre kifejtett vonzóerő meghatározásához kiszámítjuk a *B* test összes térfogateleme által kifejtett vonzóerők eredőjét. Az eljárást az *A* test minden egyes térfogatelemére elvégezve az előbbi erőket vektorosan összeadjuk, és így megkapjuk a *B* test által az *A*-ra kifejtett gravitációs erőt (2.12. ábra).

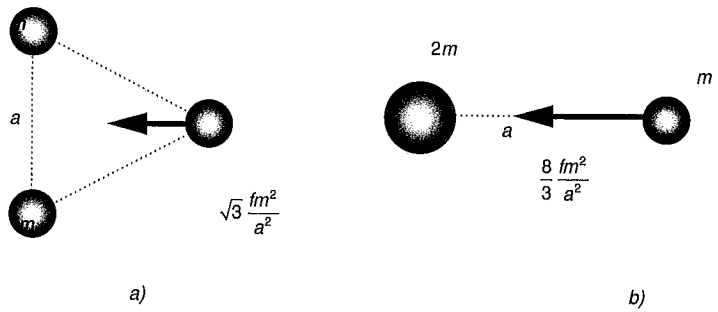


2.12. ábra

A számítások azt mutatják, hogy *homogén gömbök* vagy *homogén gömbhéjakból összetett gömbök* esetén a pontszerű testekre vonatkozó formula akkor ad helyes eredményt, ha a *gömbök középpontjainak távolságát* helyettesítjük be. Akkor is jó eredményt kapunk, ha

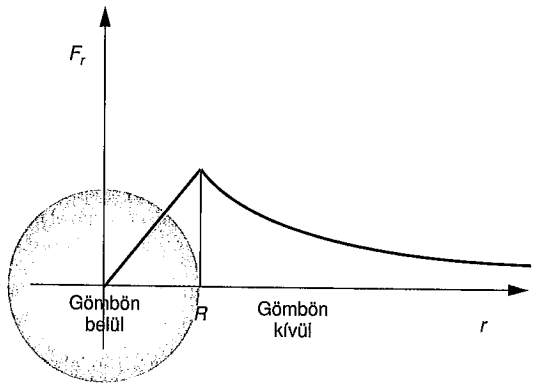
egy pontszerű test és a homogén vagy homogén gömbhéjakból álló test középpontja távolságát helyettesítjük be. (A test gömbön kívül van!) Homogén gömbhéjakból álló testnek tekinthető a Föld.

Kiterjedt testek esetén általában nem igaz, hogy a tömegközéppontok távolságát behelyettesítve a pontszerű testekre vonatkozó képletbe helyes eredményt kapunk! Pl. egy egyenlő oldalú háromszög csúcsaiba helyezett egyenlő tömegű testeknél a harmadikra a másik kettő által kifejtett erő nem helyettesíthető a két test tömegközéppontjába helyezett $2m$ tömegű test vonzóerejével (2.13. ábra).



2.13. ábra

Belátható, hogy *homogén gömbhéj* üregének bármely pontjában a gravitációs erő mindenütt 0. Ez a reciprok négyzetes törvény következménye. Nemcsak vékony, hanem vastag, homogén gömbhéj üregének minden pontjában is 0 a gravitációs erő. Egy *homogén, tömör gömb* belsejében a gravitációs gyorsulás a gömb középpontjától való távolsággal



2.14. ábra

egyenesen arányos, mert az r távolságban lévő P pontban az r sugarú gömbben lévő anyag fejti ki hatását, hiszen a P-n kívül lévő gömbhéj gravitációs hatása a fentiek értelmében 0 (2.14. ábra). Az r sugarú gömbben lévő anyag tömege r^3-nel egyenesen arányos (a gömb térfogata $\frac{4r^3\pi}{3}$). Így a reciprok négyzetes erőtörvény miatt az erő és így a gravitációs gyorsulás $\frac{r^3}{r^2}$ -tel, azaz r-rel egyenesen arányos.

2.1.2.5. Kényszermozgás, kényszererő

Sok esetben a pontszerű test egy másik, merevnek tekinthető test felszínén csúszik vagy ott nyugszik. Példa erre a nyugvó lejtőn 0 kezdősebességgel lecsúszó test, melynek pályája a lejtő síkjában lévő egyenes.

Egyik végén rögzített fonálra a másik végén erősített pontszerű testet indítsuk el a fonálra merőleges kezdősebességgel! Ha a fonál „nyújthatatlan" (azaz a fellépő erők hatására elhanyagolható mértékben nyúlik meg), akkor a test pályája egy gömbfelületre illeszkedik. A test pályája most is egy felületen van rajta anélkül, hogy egy valóságos felületen csúszna.

Fúrjunk át egy golyót és fűzzük fel egy merev huzalra! A huzalhoz képest nyugvó rendszerben a golyó pályája a kezdősebességtől és a rá ható erőktől függetlenül mindig a huzalra illeszkedő egyenes szakasz.

Ha a fenti példáknál a lejtő, a rögzítési pont, a huzal a választott vonatkoztatási rendszerben mozog, akkor a mozgásra vonatkozó feltételek megadása nem egyszerű.

Merev rudakból, fogaskerekekből álló gépezet egy-egy alkatrészének mozgása is geometriai feltételek által korlátozott. Ennek leírása bonyolult mérnöki feladat.

A fenti példákban a pontszerű test mozgását merev lejtő, nyújthatatlan fonál bizonyos értelemben korlátozzák. Ezek a feltételek geometriai jellegűek.

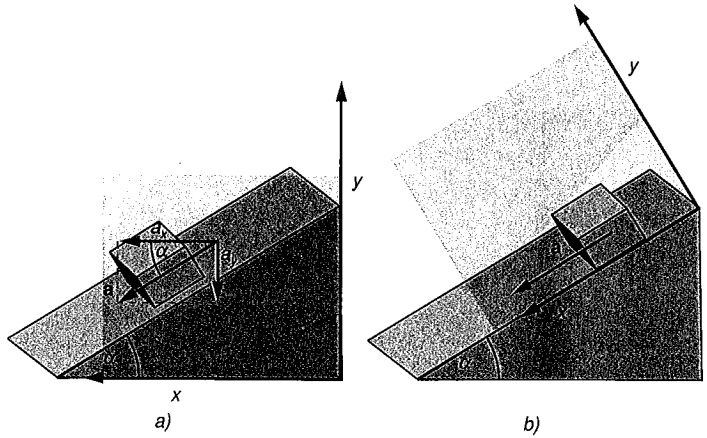
Az olyan mozgásokat, melyek során a test mozgását valamilyen geometriai feltételek korlátozzák, kényszermozgásoknak nevezzük.

A test mozgását korlátozó feltételek az ún. *kényszerfeltételek.* Ezek a kényszerfeltételek megfogalmazhatók a test helykoordinátái közötti összefüggések formájában. Pl. az ingánál, ha a koordináta-rendszer kezdőpontjául a fonál rögzítési pontját választjuk, akkor a fonálra merőleges kezdősebesség esetén a pontszerű test x, y, z koordinátái közötti összefüggés: $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$, ahol l a fonál hossza.

A test mozgását leíró többi mennyiség között is fennáll valamilyen összefüggés: pl. a nyugvó lejtőn lecsúszó test sebessége és gyorsulása is a lejtő síkjával párhuzamos. A kényszerfeltételek a gyorsulásra a 2.15a. ábra szerint az ott látható koordináta-rendszerben:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_y}{a_x}.$$

Egyszerűbben fogalmazhatjuk meg a kényszerfeltételt a 2.15b. ábra szerinti koordinátarendszerben: $a_x = 0$, $a_y = a$, ahol a a test gyorsulásának abszolút értéke.



2.15. ábra

A kényszererő. A fenti példákban a test mozgása során valamilyen pályán marad. A lejtőn lecsúszó testnél a test nyomóereje hatására a „merev" lejtő alig észrevehetően deformálódik és rugalmas jellegű erőt fejt ki, mely megakadályozza a test „lejtőbe hatolását". Ez az erő merőleges a lejtőre. Hasonlóképpen a „nyújthatatlan fonál" a mozgás során kissé megnyúlik és rugalmas jellegű erejével tartja a gömbfelületen a testet. Ez az erő fonálirányú, azaz itt is merőleges arra a képzeletbeli gömbfelületre, amelyen a test mozog.

Ha egy pontszerű test pályája egy adott felületen van rajta, akkor a felületen való áthatolást akadályozó erő lehet egy másik test felszíne által kifejtett erő. Más esetben pedig ez az erő helyettesíthető egy olyan erővel, amelyet nem egy másik test felszíne fejt ki, de megakadályozza a képzeletbeli felületen való áthatolást.

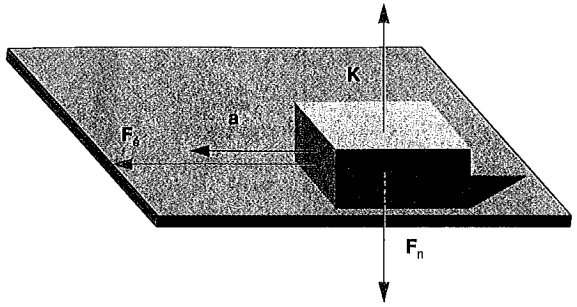
Azokat az erőket, amelyek a test mozgására vonatkozó kényszerfeltételeket biztosítják, *kényszererőknek* nevezzük. A kényszererő merőleges arra a felületre, amelyen a test kényszermozgását végzi.

A kényszermozgás során a testre a kényszererőn kívül hathatnak még az erőtörvények által meghatározott ún. *szabaderők* is. A legtöbb esetben a szabaderők és a kényszerfeltételek adottak, a kényszererő többnyire ismeretlen nagyságú.

A kényszererő nagyságát a következőképpen határozhatjuk meg: Bontsuk fel a testre ható szabaderők eredőjét a felülettel párhuzamos és merőleges komponensekre! Ha a felület görbült, akkor a felülettel párhuzamos komponens a felület érintősíkjába eső, a felületre merőleges komponens az érintősíkra merőleges egyenes irányába mutató komponens. A szabaderők felületre merőleges komponensét $\mathbf{F}_n$-el jelöljük. A kényszererő jele $\mathbf{K}$. Bontsuk fel a test gyorsulását is a felületre merőleges $\mathbf{a}_n$ és azzal párhuzamos $\mathbf{a}_p$ komponensre! A dinamika komponensekre is érvényes alaptörvénye szerint:

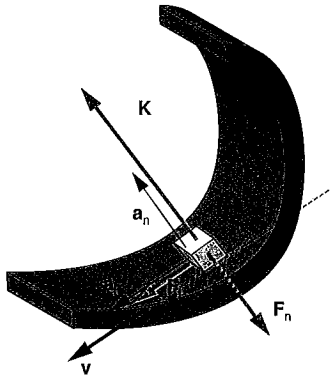
$$\mathbf{K} + \mathbf{F}_n = m\mathbf{a}_n. \qquad (2.14)$$

Inerciarendszerben nyugvó, sík felületnél a felületre merőleges gyorsuláskomponens 0, ezért $\mathbf{K} = -\mathbf{F}_n$ (lásd 2.16. ábra).



2.16. ábra

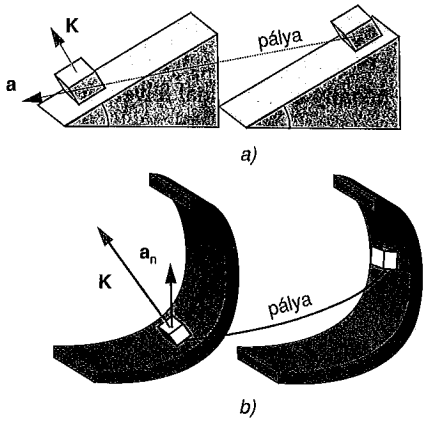
Inerciarendszerben nyugvó görbült felületnél a felületre merőleges gyorsuláskomponens merőleges egyben a sebességre, hiszen a pálya a felületen van rajta, és a felület érintője egyben a pálya érintője is (2.17. ábra). Így a felületre merőleges gyorsuláskomponens az $a_n = a_{cp} = v^2/R$ (ahol R felület görbületi sugara) (lásd az 1.1.3. pontot). Ebben az esetben $\mathbf{K}$ csak akkor egyenlő $-\mathbf{F}_n$-nel, ha $\mathbf{v} = 0$ (akár tartósan, akár csak a pillanatnyi értéke az) vagy a pályának ott inflexiós pontja van.



2.17. ábra

Inerciarendszerben mozgó felületnél az inerciarendszerhez viszonyított sebességvektor többnyire nem egyenlő a felülethez viszonyított sebességgel. Ezért a felületre merőleges gyorsuláskomponens sem egyezik meg az inercia-rendszerbeli $\mathbf{a}_n$-nel. Pl. mozgó lejtőnél a kényszererő már nem merőleges az inercia-rendszerbeli sebességre. (A lejtőre

azonban továbbra is merőleges kényszererő!) Ha a lejtő még gyorsul is, akkor a gyorsulásnak van a felületre merőleges komponense. Ezért itt $\mathbf{K} + \mathbf{F}_n \neq 0$ (2.18. ábra).



2.18. ábra

2.1.2.6. Súrlódási erő

Csúszási súrlódási erő. *Ha egy test egy másik test felületén csúszik, akkor a testre ez a másik test a kényszererőn kívül egy a felülettel párhuzamos erőt is kifejt. Ez az erő a súrlódási erő. A súrlódási erő a felülethez viszonyított mozgással ellentétes irányú, a felülethez képesti mozgást akadályozó erő.*

A csúszási súrlódási erő csak a felülethez képesti mozgást akadályozó erő, de ez nem jelenti azt, hogy nem növelheti az inerciarendszerhez képesti sebességet: pl. a kipörgetett kerékkel induló autó kerekének alsó pontja a talajhoz képest hátrafelé mozog, ezért a csúszási súrlódási erő előre mutat és növeli az autó sebességét. Ha egy téglát egy mozgó szállítószalaghoz szorítunk, akkor a Földhöz képest nyugvó téglára is hat a súrlódási erő.

A súrlódási erő nagysága ugyanolyan anyagi minőségű és simaságú felületek között közelítőleg független az érintkező felületek nagyságától valamint relatív sebességüktől, és egyenesen arányos a felületek között működő összenyomó erő nagyságával:

$$\boxed{F_s = \mu F_{ny} = \mu K}, \qquad (2.15a)$$

ahol F_{ny} a felületek között működő, a test által a felületre kifejtett nyomóerő. Mivel az F_{ny} a K kényszererő ellenereje és így vele egyenlő nagyságú, ezért mindegy, hogy a fenti képletbe melyiket írjuk be. A μ arányossági tényező neve: *csúszási súrlódási, röviden súrlódási együttható, tényező*. A súrlódási együttható dimenzió nélküli szám.

Vektoriálisan:

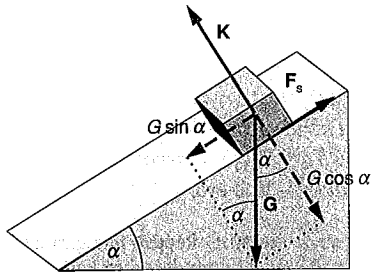
$$\boxed{\mathbf{F}_s = -\mu |K| \frac{\mathbf{v}_{rel}}{|\mathbf{v}_{rel}|}}. \qquad (2.15b)$$

A súrlódási tényező néhány anyagpárnál felvett értékeit a 2.2. táblázat tartalmazza.

2.2. táblázat. Csúszási és tapadási súrlódási együtthatók

Súrlódó anyagok	Csúszási súrlódási együttható	Tapadási súrlódási együttható
Acél acélon	0,14	0,15
Fa fán	0,2...0,4	0,4...0,6
Gumi aszfalton (száraz)	0,8	0,9
Gumi aszfalton (nedves)	0,4	

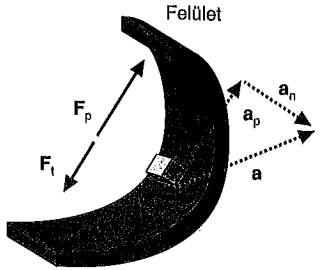
Lejtőn lecsúszó test esetén a fellépő erők a 2.19. ábrán láthatók.



2.19. ábra

Tapadási erő (tapadási súrlódási erő). A tapadási erő egy másik test felszínén nyugvó test megcsúszását akadályozó erő. Jele $\mathbf{F}_t$. A definíció értelmében a tapadási erő hatásvonala a felület érintője. Mivel a test a felülethez képest nyugalomban van, ezért (inercia-rendszerbeli) gyorsulása megegyezik a felület azon pontjának gyorsulásával, amelyhez hozzáér. Ennek a pontnak a felülettel párhuzamos gyorsuláskomponensét $\mathbf{a}_p$-vel, a testre ható többi erő felülettel párhuzamos komponensét $\mathbf{F}_p$-vel jelölve (2.20. ábra):

$$\boxed{\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_p = m\mathbf{a}_p}. \qquad (2.16.)$$



2.20. ábra

A tapadási erő irányát a gyakorlatban a következőképpen határozhatjuk meg. Gondolatban szüntessük meg a tapadási erőt (csak ezt, a többi erő, ha van, maradjon!), és vizsgáljuk meg, hogy ebben az esetben merre csúszna meg a test a felülethez képest. A tapadási erő ezt a relatív megcsúszást akadályozza meg, ha tudja. Tehát a tapadási erő ezzel az elképzelt relatív megcsúszással ellentétes irányú.

Adott test és felület esetén a tapadási erő nagyságát és irányát a többi erő (ha van) és $\mathbf{a}_p$ határozza meg. Ha a test a Földhöz képest álló, vízszintes felületen nyugszik, és a nehézségi erőn, valamint a kényszererőn kívül más erő nem hat rá, akkor a tapadási erő értéke 0. Ha ezt a testet egy vízszintes helyzetű rugós erőmérővel húzni akarjuk, akkor nem túl nagy erőt kifejtve a test nyugalomban marad. A rugós erőmérő által mutatott érték a tapadási erő. A test csak egy meghatározott erőnél nagyobb erőkifejtésnél csúszik meg a felületen. Ez az érték a tapadási erő maximuma. Ennél kisebb erőt kifejtve a test nem csúszik meg, tehát a tapadási erő értéke is ezzel az erővel egyenlő.

A *tapadási erő maximális* értéke független az érintkező felületek nagyságától, a K kényszererő, illetve a vele egyenlő értékű F_{ny} nyomóerő nagyságával jó közelítéssel egyenesen arányos.

Az érintkező felületek minőségétől függő arányossági tényező a μ_t-vel jelölt *tapadási súrlódási együttható, tényező:*

$$\boxed{F_t \le \mu_t F_{ny} = \mu_t K}. \qquad (2.17)$$

A tapadási együttható ugyanazon két felület között nagyobb, mint a csúszási súrlódási együttható.

Egy autó fékeződésénél, ha a kerekek nem csúsznak meg, a legnagyobb fékezőerő a tapadási erő maximuma, $\mu_t mg$. Erős fékezésnél a kerekek nem forognak, talajjal érintkező pontjuk megcsúszik a talajon. Ezért ebben az esetben csak a $\mu mg < \mu_t mg$ csúszási súrlódási erő fékezi az autót. Így fékútja nagyobb, mint abban az esetben, ha a tapadási erő maximuma fékezné az autót. Ráadásul a csúszó kerekekre ható súrlódási erő csak a sebességgel ellentétes irányba mutathat, a kormányzott kerekek elforgatásával nem válto-

zik az autó eredeti haladási iránya, az autó kormányozhatatlanná válik. Ennek elkerülésére vezették be az ABS (Antiblockierungssystem, magyarul blokkolásgátló rendszer) fékrendszert. Vészfékezéskor az autós ijedtében „padlóig" nyomja a fékpedált, aminek következtében a kerekek forgása megállna. Egy érzékelő rendszer azonban figyeli a kerekek szögsebességét és az autó haladási sebességét. Az autóban lévő számítógép ezek alapján csökkenti a kerekek fékezését és meggátolja, hogy azok tartósan blokkoljanak. Ezt másodpercenként kb. 10-szer megteszi, és így a fékezés ideje alatt váltakozva csúszási és tapadási erő fékezi a járművet. Ennek hatására a fékút bizonyos körülmények közt valamelyest csökken, de nem nagyon. A fékútra vonatkozó $s=\frac{v_0^2}{2a}$ formulában, $a=\mu g$, azaz s fordítottan arányos μ-vel. Mivel száraz úton a csúszási súrlódási együttható 0,8, a tapadási pedig 0,9, ezért még ideális ABS esetén is a csökkenés kb. 10%, de a valóságban ennél kevesebb. Sőt, homokos talajon, mély hóban, murvás úton esetleg nőhet is a fékút. Az ABS rendszer előnye azonban az, hogy vészfékezéskor a kocsi még az előbbi esetekben is végig irányítható, kormányozható marad.

A súrlódási erőhöz hasonlóan ez az erő is növelheti a test sebességét, hiszen talpunkra ható tapadási erő nélkül járni sem tudnánk. A járművek is így indulnak el a tapadási erő hatására. Természetesen „padlógáz" esetén is megcsúszik, csikorog a kerék, azért az autót csak a csúszási súrlódási erő gyorsítja, kevésbé gyorsul a jármű, és kopik a gumi. Ezért van újabban az autókon az ABS-hez hasonlóan működő kipörgésgátló rendszer.

A tapadási, valamint a csúszási súrlódási erő oka az, hogy a test és felület egyenetlen. Ezek az egyenetlenségek nagyjából egymásba illeszkednek, és a test mozgása során egymásnak feszülve, illetve letörve akadályozzák a felületek relatív elmozdulását. A tapadási erőnél az egyenetlenségek egymásnak feszülve megakadályozzák, ha tudják, a test felülethez képesti elmozdulását. A molekuláris (adhéziós vagy kohéziós erők) szerepét mutatja az a tapasztalati tény, hogy nagyon sima és tiszta felületek között nagy tapadási erő lép föl.

A közeg-ellenállási erő. Ha egy testnek a közeghez viszonyított $\mathbf{v}_r$ relatív sebessége nem 0, akkor rá a közeg erőt fejt ki. A közeg által kifejtett erő nagysága és iránya függ a test és közeg adataitól. Egyszerű esetekben, amikor a test szimmetrikus és így is helyezkedik el a relatív sebesség irányához képest, a közeg-ellenállási erő a relatív sebességgel ellentétes irányú. Nagysága egyenesen arányos a test áramlásra merőleges A keresztmetszetének nagyságával és a közeg ρ sűrűségével. A relatív sebesség nagyságával egyenesen arányos, ha a sebesség kicsi. Ha a sebesség 1–10 m/s nagyságrendű, már a relatív sebesség négyzetével, nagyobb sebességeknél pedig annak köbével arányos. Függ még a test alakjától és a relatív sebesség irányához képesti helyzettől, melyet a *k alak-ellenállási tényezővel* veszünk figyelembe. Gépjárművek sebességi tartományában:

$$F=kA\rho v^2. \tag{2.18a}$$

A fenti formulát vektoros alakba írva

$$\boxed{\mathbf{F}=-kA\rho v\mathbf{v}}. \tag{2.18b}$$

A (2.18b) formula bonyolultabb esetekre való alkalmazásáról bővebben a 2.4.3. pontban lesz szó.

2.1.3. A perdület (impulzusmomentum)

2.1.3.1. Centrális erők. A területi sebesség

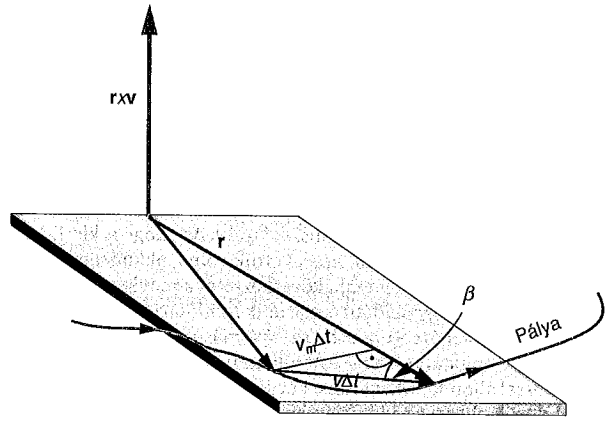
Centrális erőnek nevezzük azokat az erőket, melyek hatásvonala mindig egy adott, az inerciarendszerben nyugvó ponton megy át. Ezt a pontot az erő *centrumának* nevezzük.

Centrális erő pl. egy nyugvó, pontszerű test által a másik a pontszerűre gyakorolt gravitációs erő, a nyugvó, töltött fémgömb által a pontszerű töltésre kifejtett erő. Nem centrális erő az indukált elektromos mező által a ponttöltésre kifejtett erő.

Egy pontszerű testnek adott pontra vonatkoztatott *területi sebességén* értjük a pontból a testig mutató vektor, az $\mathbf{r}$ *rádiuszvektor* által időegység alatt súrolt területet. A Δt idő alatt súrolt területet ΔA-val jelölve az f területi sebesség (2.21. ábra):

$$f=\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{1}{2}rv_m=\frac{1}{2}rv\sin\beta, \tag{2.19a}$$

ahol v a test sebessége, a β a $\mathbf{v}$ sebességvektor és az $\mathbf{r}$ rádiuszvektor szöge.



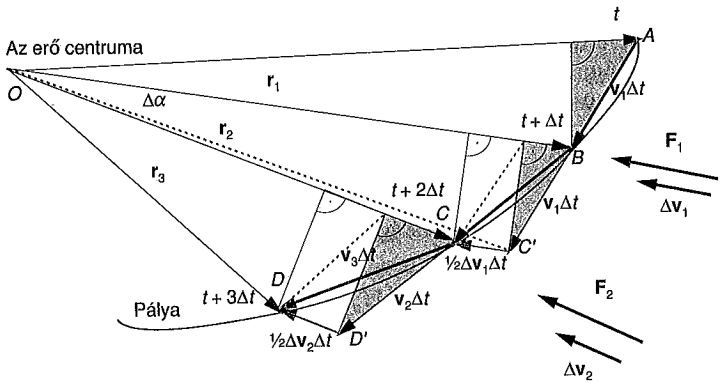
2.21. ábra

A területi sebesség vektorként is értelmezhető. Ugyanis a (2.19a) formula szerint ez az $\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ vektoriális szorzat abszolút értéke. Ilyen értelmezéssel, a vektori szorzat definíciója alapján a területi sebesség vektorának hatásvonala merőleges a rádiuszvektor és a sebességvektor által kifeszített síkra. Irányát a hatásvonalon úgy tűzhetjük ki, hogy az **f** vektor hegye felől nézve az **r** vektor az óramutató járásával ellentétes irányban forog.

Centrális erők tétele: *Ha egy tömegpontra ható erő centrális, akkor a tömegpont mozgása a centrumon átmenő állandó helyzetű síkban megy végbe úgy, hogy a tömegpontnak a centrumra vonatkoztatott területi sebessége állandó.*

Legyen ugyanis a tömegpont adott t pillanatbeli sebessége $\mathbf{v}_0$, rádiuszvektora $\mathbf{r}_0$. Mivel a centrális erőnek nincs a két vektor által kifeszített síkra merőleges komponense, ezért a test mozgása ebben a síkban zajlik le.

A területi sebesség nagyságának állandóságára vonatkozó kijelentést a 2.22. ábra segítségével látjuk be:



2.22. ábra

Az ábrán a test négy egymás utáni helyzetét láthatjuk egyenlő időközönként. Legyen a Δt időköz olyan kicsi, hogy közben az **r** rádiuszvektorok $\Delta\alpha$ szöge is kicsi. (Az ábrán ez nem érzékelhető, hiszen, ha a szögeket kicsinek vettük volna, akkor semmit sem láthatnánk. Ezért e *nem szöghű*(!) ábrából kell majd következtetni a ténylegesen kis szögű esetre vonatkozó kijelentéseinket.) Így például a második Δt időtartam alatt a testre ható erő iránya $\Delta\alpha$-val változik. Mivel $\Delta\alpha$ igen kicsi, ezért a második Δt alatt az erő iránya is kicsit változik. Ezért a $t + \Delta t$ pillanattól a $t + 2\Delta t$ pillanatig tartó mozgás során a testre ható erő iránya jó közelítéssel állandó. (Az ábrán e két pillanatban a test *B*, illetve a *C* pontban tartózkodik.) Közelítsük ebben az időtartamban a testre ható erőt az időköz elején felvett

erővel! Azaz a testre ebben időközben az állandó nagyságú és irányú erő hat. Ha a testre a második Δt időközben nem hatna erő, akkor az első Δt időközbeni sebességgel egyenes vonalú, egyenletes mozgást végezne. Elmozdulásvektora $\mathbf{v}_1\Delta t = \overrightarrow{BC'}$ lenne. Azonban hat rá az állandónak tekinthető $\mathbf{F}_1$ erő. Az $\mathbf{F}_1$ erő által létrehozott sebességváltozás $\Delta\mathbf{v}_1$. A test $\mathbf{F}_1$ irányú, azaz $\mathbf{r}_1$-gyel párhuzamos elmozdulása az $\mathbf{F}_1$ közelítő állandósága miatt egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásnak tekinthető, melynek során a test sebessége egyenletesen változik 0-ról $\Delta\mathbf{v}_1$-re. Ezért az $\mathbf{F}_1$ erő hatására bekövetkezett, $\mathbf{r}_1$-gyel párhuzamos elmozdulás $\frac{1}{2}\Delta\mathbf{v}_1\Delta t$. A 2.22 ábrán ez a $\overrightarrow{C'C}$ elmozdulás. A test elmozdulása a második Δt időtartama alatt a fenti két elmozdulás vektori eredője: $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v}_2\Delta t$.

Itt $\mathbf{v}_2$ a test sebessége a második időközben. Az egyenlő időközök alatt súrolt területek jó közelítéssel az ábrán látható háromszögek területével egyenlők. A háromszögek területe legyen *T*. A *T* után zárójelbe tett betűk a háromszög csúcsait adják meg. Az első Δt alatt súrolt terület az *OAB* háromszög *T(OAB)* területe. *T(OAB) = T(OBC')*, mert egy-egy oldaluk egyenlő nagy: *AB = BC'* és az *O* csúcshoz tartozó magasságuk ugyanaz. *T(OBC') = T(OBC)*, mert egy oldaluk, *AB*, ugyanaz és az ehhez tartozó magasságuk egyenlő, hiszen *C'C* párhuzamos *OB*-vel. Így az első Δt időtartam alatt súrolt *T(OAB)* terület egyenlő a második Δt idő alatt súrolt *T(OBC)* területtel. Tehát a test rádiuszvektora egyenlő időközök alatt egyenlő területeket súrol, miközben **r**, **v** és az általuk bezárt szög folyamatosan változik. Mivel a test egyenlő időközök alatt egyenlő területeket súrol, ezért a $\frac{T}{\Delta t} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$ hányados, azaz a területi sebesség állandó. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk. Az ábrából a fenti gondolatmenettel a második és a harmadik Δt időközre a bizonyítás megismételhető.

A tétel megfordítása is igaz: *ha egy test olyan mozgást végez, melynek során egy inerciarendszerben nyugvó O pontra vonatkoztatott területi sebessége állandó, akkor a testre centrális erő hat, melynek centruma az O pont.*

A bizonyításhoz a 2.22 ábrát és a fenti jelöléseket használva: *T(OAB) = T(OBC')*, függetlenül $\mathbf{F}_1$ irányától és nagyságától (lásd fent). A feltétel szerint *T(OAB) = T(OBC)*. Ezért *T(OBC) = T(OBC')*. Az *OBC* és az *OBC'* háromszögek egyik oldala, az *AB* oldal közös. Területük csak úgy lehet egyenlő, ha az ehhez az oldalhoz tartozó magasságuk is egyenlő. Ezek a magasságok a *C*, illetve *C'* csúcsokból az *AB*-re bocsátott merőleges szakaszok. Ezért $CC' = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{v}_1\Delta t$ párhuzamos *OB*-vel, és így $\Delta\mathbf{v}_1$, ami $\mathbf{F}_1$ irányával esik egybe *B*-nél, *O* felé mutat.

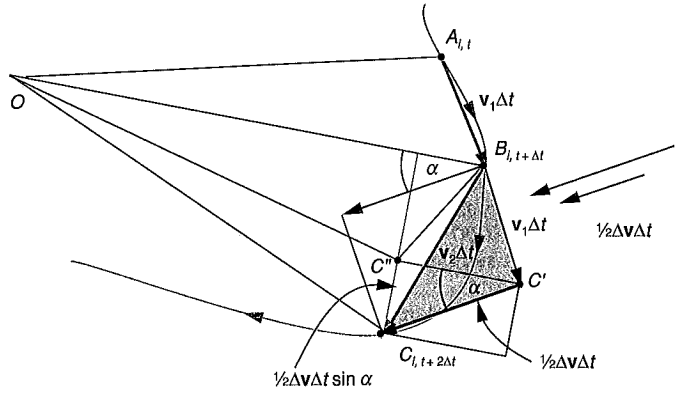
A tétel megfelelője olyan mozgásokra is kimondható, amelyeknél az erő vagy az erők eredője egy adott, az inerciarendszerben nyugvó egyenesre illeszkedik. Ekkor a mozgásnak az adott egyenesre merőleges síkra való vetülete centrális mozgás.

2.1.3.2. A perdület és forgatónyomaték

Ha a pontszerű testre mozgása közben nem centrális erők hatnak, akkor *a testnek egy adott pontra vonatkoztatott területi sebessége a*

$$\Delta f = \frac{1}{2}\frac{F}{m} r\Delta t \sin\alpha \qquad (2.19.b)$$

összefüggés szerint változik (lásd 2.23. ábra).



2.23. ábra

Az előző pont jelöléseit használva ezt a következőképpen láthatjuk be: Hasson a testre olyan erő, amelynek hatásvonala az adott *O* pontból a testig húzott rádiuszvektor és a sebességvektor által kifeszített síkban fekszik! A test mindaddig ebben a síkban végzi mozgását, amíg az erő kielégíti ezeket a feltételeket. A 2.23 ábrán a test három, egymás utáni helyzetét ábrázoltuk, amelyek között egyenlő Δ*t* időtartamok telnek el. Ezeket a helyeket *A*, *B* és *C* betűkkel jelöljük. *C'* az a hely, ahova a test jutna, ha nem hatnának rá erők. *C''*-vel jelöljük azt a helyet, ahova a test akkor jutna, ha rá csak az **F** erő „sugárirányú", *O felé* mutató komponense, azaz centrális erő hatna. Így a 2.23 ábrán használt jelölésekkel: $T(OAB) = T(OBC'')$. A második Δ*t* időközben súrolt terület a $T(OBC) > T(OBC'')$, mert az egyik oldal, az *OB* oldal, közös, és az ehhez tartozó magasságok eltérőek. Az ábrán láthatóan az *OBC* háromszög *C* csúcsból kiinduló magassága $\frac{1}{2}\Delta v\Delta t \sin\alpha$-val nagyobb az *OBC''* háromszög magasságánál. Ezért az *OBC* háromszög területe $\frac{1}{2} r \frac{r\Delta v\Delta t}{2} \sin\alpha$-val nagyobb az *OBC''* háromszög területénél (itt $r = OB$). Így a Δ*t* idő alatt súrolt terület megváltozása:

$$T(OBC) - T(OAB) = \frac{1}{4} r\Delta v\Delta t \sin\alpha. \qquad (2.20a)$$

Jelöljük Δ*f*-fel a területi sebesség megváltozását a $t+\Delta t$ és a $t+2\Delta t$ pillanatok között! Ha a területi sebesség a második Δ*t* időtartam kezdetén *f*, akkor ezen időtartam végén, a $t + 2\Delta t$ pillanatban $f + \Delta f$. Ha a Δ*t* időköz elegendően kicsi, akkor ezen belül a területi sebesség megváltozása egyenesen arányos az eltelt idővel. Azaz ezen időtartamon belül a területi sebesség egyenletesen változik. Így a második időtartam alatt súrolt terület a kezdő és „végső" területi sebesség számtani közepének és a Δ*t* időnek szorzata:

$$T(OBC) = \frac{f + f + \Delta f}{2}\Delta t = f\Delta t + \frac{1}{2}\Delta f\Delta t = T(OAB) + \frac{1}{2}\Delta f\Delta t.$$

Itt $f\Delta t = T(OAB)$, mert *f* az első Δ*t* időközhöz tartozó területi sebesség is. Innen a területi sebesség megváltozása a második Δ*t* időtartamon belül:

$$\Delta f = 2\frac{T(OBC) - T(OAB)}{\Delta t}.$$

Ide a 2.20a egyenletből behelyettesítve kapjuk:

$$\Delta f = \frac{1}{2} r\Delta v \sin\alpha.$$

Felhasználva, hogy $\Delta v = a\Delta t$ és $F = ma$, kapjuk területi sebesség megváltozására vonatkozó (2.19c) formulát.

A (2.19b) egyenlet mindkét oldalát végigszorozva $2m$-mel:

$$2m\Delta f = rF \sin\alpha\Delta t. \qquad (2.20b)$$

Mivel a $2m$ szorzótényező konstans, ezért a Δ jel mögé „bevihető". Ezért $2m\Delta f = \Delta(2mf) = \Delta(mrv\sin\beta)$ (lásd a (2.19a)) egyenletet. Így:

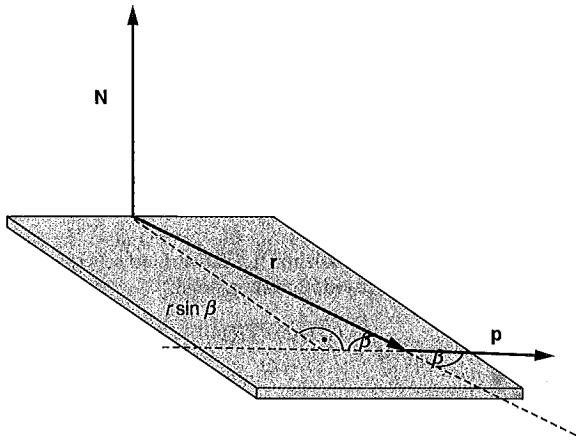
$$\Delta\left(rmv \sin\beta\right) = rF \sin\alpha\Delta t. \qquad (2.20c)$$

Az egyenlet bal oldalán álló mennyiség az $rmv\sin\beta$ megváltozása. Mivel a test **p** impulzusa *m***v** ezért ez a mennyiség $rp\sin\beta$-ként is írható Az $r\sin\beta$ mennyiség az adott *O* vonatkoztatási pontból az impulzusvektor hatásvonalára bocsátott merőleges szakasz hossza, az impulzusvektor „karja", ha az impulzusvektor kezdőpontja a pontszerű test (2.24. ábra).

(Egy vektor adott pontra vonatkozó karján az O pontból a vektor hatásvonalára bocsátott merőleges szakasz hosszát értjük.) Az $rp\sin\beta$ mennyiséget *impulzusmomentumnak, (impulzusnyomatéknak, perdületnek)* nevezzük.

Egy pontszerű test adott pontra vonatkoztatott impulzusmomentuma, perdülete az impulzus és az impulzusvektor adott pontra vonatkoztatott karjának szorzata. Jele: *N*.

$$\boxed{N = rp\sin\beta}. \qquad (2.21)$$



2.24. ábra

Az impulzusmomentum síkmozgásnál skalárként értelmezhető. Előjele pozitív, ha az impulzusvektor az óramutató járásával ellentett irányban „forog". A 2.24. ábrán az impulzusmomentum előjele pozitív. Az impulzusmomentum mértékegysége $\mathrm{kgm^2/s}$.

A (2.20c) egyenlet jobb oldalán szereplő $rF\sin\alpha$ mennyiség az úgynevezett *forgatónyomaték:*

$$\boxed{M = Fr\sin\alpha}\,. \tag{2.22}$$

Egy pontszerű testre ható erő adott pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka (az erő nyomatéka) az erőnek és az erő karjának szorzata.

A forgatónyomaték síkmozgásnál skalárként értelmezhető. Előjele pozitív, ha az erő az óramutató járásával ellentétes irányban „forgat". Jele: M, mértékegysége $\mathrm{kgm^2/s^2}$. A (2.20c) egyenletet az újonnan bevezetett mennyiségekkel felírva kapjuk a *perdülettételt.*

Egy pontszerű test adott pontra vonatkoztatott perdületének megváltozása egyenlő a testre ható erő ugyanezen pontra vonatkoztatott forgatónyomatékának és az erőhatás idejének szorzatával:

$$\boxed{\Delta N = M\Delta t}\,. \tag{2.23}$$

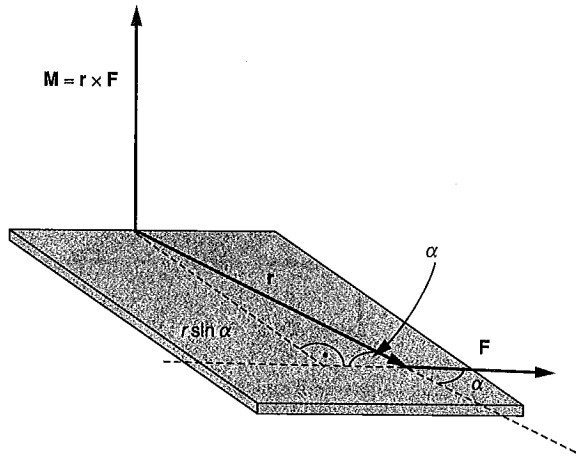
A perdület, illetve a forgatónyomaték vektor.

Az $rp\sin\alpha$ az $\mathbf{r}$ és a $\mathbf{p}$ vektor vektoriális szorzatának abszolút értéke. A perdületvektort a következőképpen értelmezzük:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}. \tag{2.24a}$$

A perdületvektor iránya a vektori szorzat definíciója szerint merőleges az $\mathbf{r}$ rádiuszvektor és a $\mathbf{p}$ impulzusvektor által kifeszített síkra (2.24. ábra). Iránya a síkra merőleges egyenesen úgy tűzhető ki, hogy a perdületvektor „hegye" felől nézve a rádiuszvektor az óramutató járásával ellentétes irányban „forog". Hasonlóképpen értelmezhető a forgatónyomaték-vektor (2.25. ábra):

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}\ . \tag{2.24b}$$



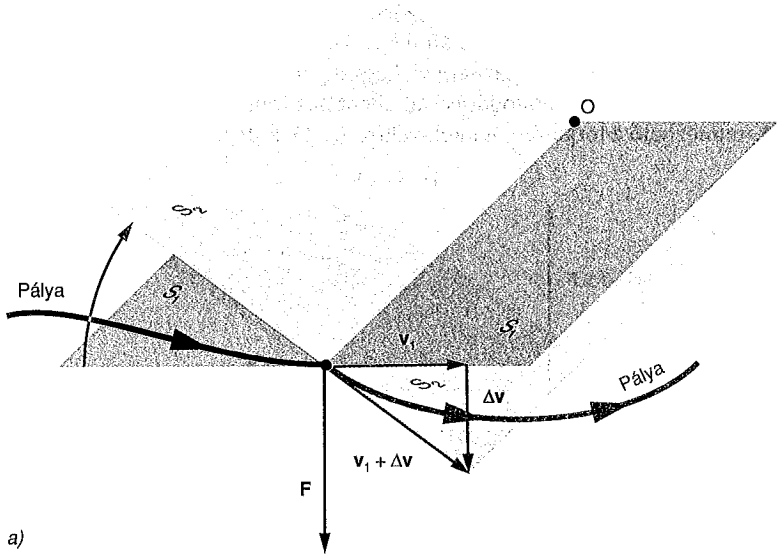
2.25. ábra

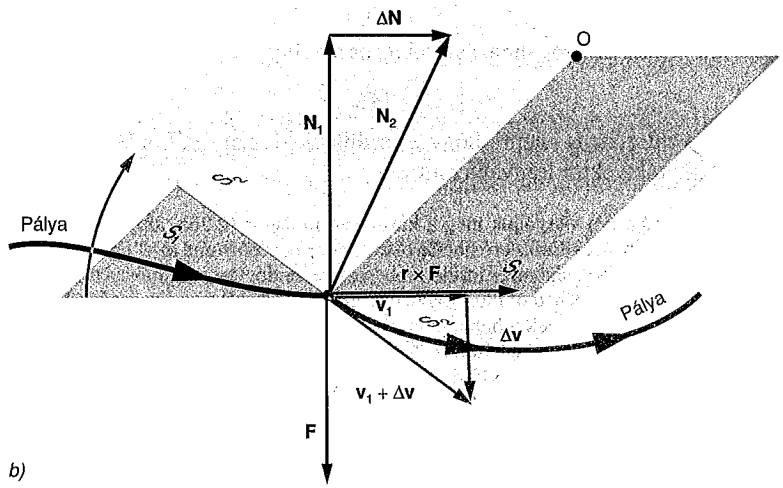
A perdülettétel megfogalmazása vektoros alakban:

$$\boxed{\Delta\mathbf{N} = \mathbf{M}\Delta t}\,. \tag{2.25}$$

Ez az egyenlet azt is jelenti, hogy a perdületvektor megváltozásának iránya a forgatónyomaték-vektor irányába mutat.

Ennek illusztrálására vizsgáljuk meg a következő mozgást (2.26a. ábra). Mozogjon egy pontszerű test olyan centrális erő hatása alatt, amelynek centruma az O pont. A test ekkor síkmozgást végez az S_1 síkban és területi sebessége állandó. Hassunk most a testre a t pillanattól kezdődően egy rövid Δt ideig olyan erővel, amely merőleges a mozgás eddigi S_1 pályasíkjára! Ennek az erőnek a hatására a test sebességének nagysága nem (pontosabban alig változik), iránya azonban változik. A erőhatás befejeztével a test sebessége most már $\mathbf{v}_1+\Delta\mathbf{v}$ lesz, ahol $\mathbf{v}_1$ az erőhatás előtti sebesség. Így a test további mozgásának S_2 pályasíkja már más lesz. Ennek a rövid ideig tartó erőnek a hatására a test területi sebessége nem változik, de a mozgás pályasíkja az ábrán jelzett irányba megdől. A perdülettétel vektoros alakja tartalmazza ezt az esetet is. A 2.26b. ábrán a 2.26a. ábrát ismételtük meg, berajzolva a vektorokat. Látható, hogy a perdületvektor és a területi sebesség nagysága nem változik. Iránya azonban változik, és ez láthatóan a pályasík megdőlését eredményezi. Látható az is, hogy a perdületvektor megváltozásának iránya, „dőlése" merőleges az erő irányára.





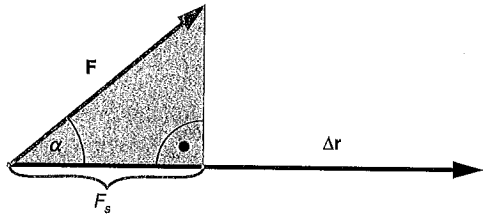
2.26. ábra

2.1.4. A munka

Egy *pontszerű, egyenes pályán mozgó testre ható állandó erő munkáján* az erő és az elmozdulás nagyságának, valamint az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük.

$$\boxed{W = F\Delta r \cos\alpha = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r}} \,. \qquad (2.26a)$$

Itt W az $\mathbf{F}$ erő munkája, $\Delta\mathbf{r}$ a test elmozdulása. ($\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$ az $\mathbf{F}$ vektor és a $\Delta\mathbf{r}$ vektorok skaláris szorzata.)



2.27. ábra

Természetesen a testre mozgása közben több erő is hathat A 2.27. ábránál biztosan hat még egy, az ábrán nem feltüntetett erő, hiszen ennek az erőnek egyedüli hatására nem mozogna a test egyenes pályán. Ilyenkor a munka jele mellett szokás feltüntetni, hogy melyik erő munkájáról van szó, például úgy, hogy alsó indexbe tesszük a szóban forgó erő jelét.

A munka előjeles skalár. Mértékegysége: $[W] = [F][r] = \mathrm{Nm} = \mathrm{kgm/s^2} = \mathrm{J}$ (joule)

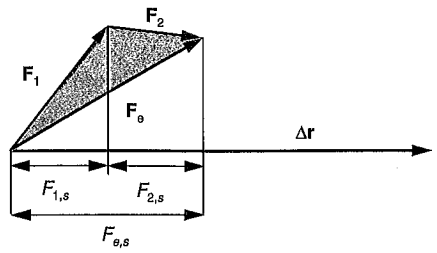
A munka előjelét a $\cos\alpha$ szorzótényező dönti el, hiszen a többi szorzótényező vektorok abszolút értéke. Ha az α hegyesszög, akkor $W > 0$, tompaszög esetén $W < 0$. A munka akkor is lehet 0, ha sem az erő, sem az elmozdulás nem nulla, de az erő merőleges az elmozdulásra, mert ekkor $\cos\alpha = 0$.

Az $F\cos\alpha = F_s$ az erőnek az elmozdulás irányára való merőleges (előjeles!) vetületét jelenti. Itt $|\Delta\mathbf{r}| = \Delta s$, mert a mozgás egyenes vonalú (2.27. ábra). Ezért a munka a definíció alapján így is írható:

$$\boxed{W = F_s \Delta s} \,. \qquad (2.26b)$$

Ha egy testre több erő hat, akkor az erő (előjeles!) vetületeinek *algebrai (!)* összege egyenlő az erők vektori eredőjének (előjeles) vetületével (2.28. ábra):

$$F_{1,s} + F_{2,s} = F_{e,s}.$$



2.28. ábra

Az egyenletet Δs-sel megszorozva:

$$\boxed{W_{F1}+W_{F2}=W_{Fe}}, \qquad (2.27)$$

tehát *egy pontszerű testre ható erők vektori eredőjének munkája egyenlő az erők munkáinak algebrai összegével.*

A munka fogalmát a következőképpen általánosíthatjuk:

Ha egy pontszerű test valamilyen nem egyenes vonalú pályán mozog és (vagy) a rá ható erő változik, akkor a test pályáját felosztjuk olyan kis ívekre, hogy $\Delta s_i = |\Delta \mathbf{r}_i|$, és ezen (a közelítőleg egyenes szakaszon), az erő irányának és nagyságának változása elhanyagolható. A pálya ilyen kis szakaszán végzett munka az *elemi munka:*

$$\boxed{\Delta W_i = F_{S,i}\Delta s_i}. \qquad (2.28)$$

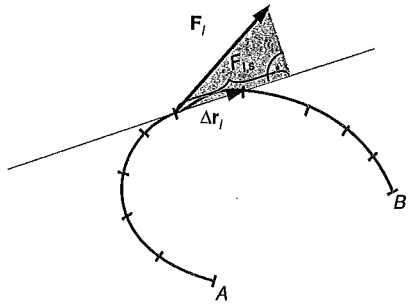
Itt $F_{S,i}$ az erőnek a Δs_i hosszúságú szakaszra való merőleges vetülete. Az **F** erő által végzett munka az *A* és *B* pontok között az adott pályán az elemi munkák összege:

$$\boxed{W \approx \sum_{i=1}^{n} F_{S,i}\Delta s_i}. \qquad (2.29a)$$

Határértékben:

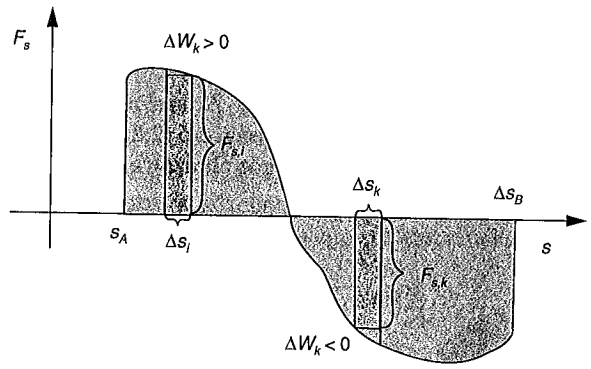
$$\boxed{W = \int_A^B F_S(s)\,\mathrm{d}s}, \qquad (2.29b)$$

ahol $F_S(s)$ az erő–út függvény, s pedig a pályán megtett út (2.29. ábra).



2.29. ábra

A munkának szemléletes jelentést is tulajdoníthatunk, ha ábrázoljuk $F_S(s)$-t a pályán megtett út függvényeként (2.30. ábra). A grafikonon az $F_{S,i}\Delta s_i$ a bejelölt téglalapocska (előjeles) területe (területének számértéke) a Δs_i szakaszon végzett munka számértékét jelenti. Ezért az F_S–s grafikonon a görbe alatti terület számértéke a végzett munka számértékével azonos.



2.30. ábra

A skaláris szorzatot koordinátákban kifejtve:

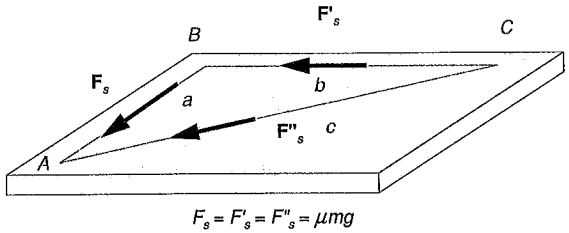
$$\boxed{\Delta W_i = F_{xi}\Delta x_i + F_{yi}\Delta y_i}. \qquad (2.30)$$

A végzett munka az F_x–x és az F_y–y grafikonon lévő görbék alatti területek összege.

Rögzített A és C pontok között az erő munkája általában különböző pályákon különböző. Pl. a súrlódási erő munkája egy vízszintes asztallapon, ugyanazon A és C pontok között a 2.31. ábra alapján a bemutatott két pályán más és más:

$$W_{AC} = -\mu mgc, \qquad W_{ABC} = -\mu mg(a+b).$$

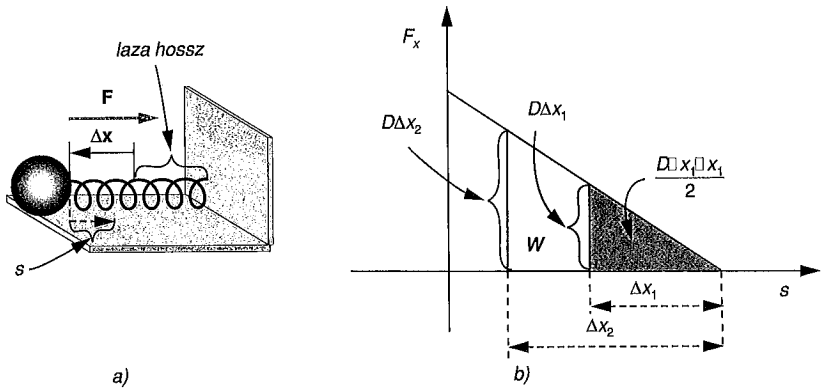
Azokat az erőket, melyek munkavégzése csak a kezdő- és végpontoktól függ, azaz független a pályától, *konzervatív erőknek* nevezzük. Ilyen erő például a gravitációs erő.



2.31. ábra.

2.1.4.1. Néhány erőfajta munkája

A rugóerő munkája. Az egyik végén rögzített, Δx-szel megnyújtott rugó által a másik végéhez erősített testre ható rugalmassági erő (2.32. ábra) változik a rugómegnyúlás függvényében: $F = -D\Delta x$. Az erőt ábrázolva az elmozdulás függvényében az F_x–s grafikonon lévő görbe alatti területből a végzett munka a Δx_2–Δx_1 úton:



2.32. ábra

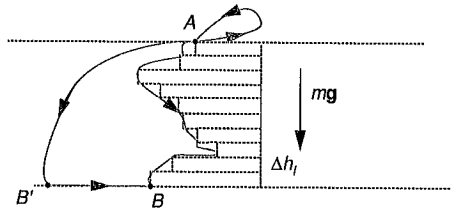
$$W = \frac{1}{2} D\left(\Delta x_2\right)^2 - \frac{1}{2} D\left(\Delta x_1\right)^2. \qquad (2.31a)$$

Ha a rugó feszítetlen állapotba kerül:

$$W = \frac{1}{2} D\left(\Delta x\right)^2. \qquad (2.31b)$$

A *rugóerő konzervatív.*

A nehézségi erő munkája. Ha a test lefelé mozog, a nehézségi erő munkája pozitív, felfelé negatív. Ha a test különböző pályákon ugyanazon A és B pontok között mozog, akkor a nehézségi erő munkája csak a kezdő- és végpontoktól függ. Ez az alábbiak szerint látható be:



2.33. ábra

Ha a testet egy tetszőleges pályán visszük A-ból B-be, akkor a pályát kis vízszintes és függőleges szakaszokkal közelítve, a vízszintes szakaszokon végzett munka $0 (\cos\alpha = 0!)$. A függőleges szakaszokon végzett elemi munkák összege:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} mg\Delta h_i = mg \sum_{i=1}^{n} \Delta h_i,$$

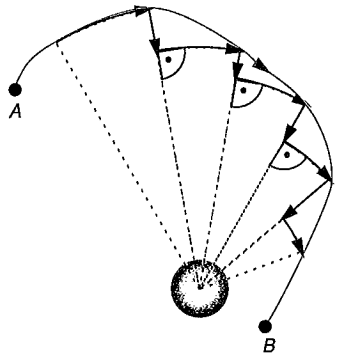
ahol $\sum_{i=1}^{n} \Delta h_i = h$ (2.33. ábra). Ezért:

$$W = mgh. \qquad (2.32)$$

A kijelentés akkor is igaz, ha a testet A fölé is visszük, mert amíg a test az A magasságig visszatér, a nehézségi erő munkája 0. Ugyanez mondható el akkor, ha a test mozgása során B alá ér. Tehát a *nehézségi erő konzervatív.*

A gravitációs erő munkája. *A gravitációs erő konzervatív.*

Ezt pontszerű, inerciarendszerben nyugvó, vonzó test esetén a következőképpen láthatjuk be: Közelítsük az *AB* pályát a 2.34. ábra szerint az *O* pontban nyugvó vonzó test körüli, *O* középpontú körívekkel és sugárirányú szakaszokkal! A köríveken a mozgó testre kifejtett erő sugárirányú lévén az itt végzett elemi munkák mindegyike 0. Az azonos távolságban lévő sugárdarabkákon, mivel *F* csak a távolságtól függ, és $\cos\alpha = 1$, az elemi munkák megegyeznek.(Munkavégzés szempontjából csak a sugárirányú elmozdulás számít, mint a nehézségi erőnél a függőleges elmozdulás) A munka tehát bármilyen *AB* pályán ugyanakkora.



2.34. ábra

Egy pontszerű testre egy másik, az inerciarendszerben nyugvó test (vagy homogén gömb, homogén gömbhéjakból álló) által kifejtett erő munkáját elemi úton is kiszámíthatjuk (2.35. ábra).

Vigyük a testet $\mathbf{r}_1$-ből $\mathbf{r}_2$-bel Az r_{i+1}–r_i szakaszon a gravitációs erő munkája:

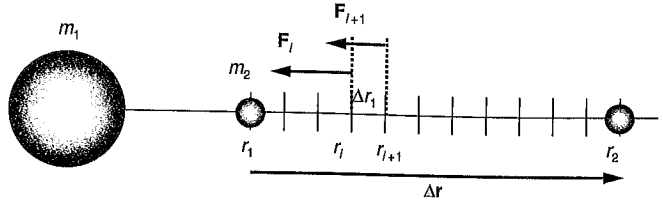
$$\Delta W_i = -\overline{F}_i\left(r_{i+1}-r_i\right) \quad \left(\cos 180^\circ = -1\right).$$

Az átlagerőt az intervallumon az intervallum elején és végén felvett értékeinek mértani közepével közelítve:

$$\overline{F}_i \cong \sqrt{\frac{fm_1m_2}{r_i^2}\,\frac{fm_1m_2}{r_{i+1}^2}} = f\,\frac{m_1m_2}{r_ir_{i+1}}.$$

Az elemi munka előbbi képletébe helyettesítve az $\overline{F}_i$ -t:

$$\Delta W_i \cong -\frac{fm_1m_2}{r_ir_{i+1}}\left(r_{i+1}-r_i\right) = -fm_1m_2\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_{i+1}}\right) = -\frac{fm_1m_2}{r_i}+\frac{fm_1m_2}{r_{i+1}}.$$



2.35. ábra

Az r_{i+2}–r_{i+1} szakaszon végzett elemi munkában az $\frac{fm_1m_2}{r_{i+1}}$ már negatív, ezért az r_{i+1}-et tartalmazó tagok összege 0. A teljes munkában, az elemi munkák összegében mindegyik eltűnik, kivéve az r_1 és r_2-höz tartozó törteket, így:

$$W = -\frac{fm_1m_2}{r_2}+\frac{fm_1m_2}{r_1} = -fm_1m_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

A *W* pontos érték, mert tetszőlegesen kis Δr-eknél is ugyanazt az értéket kapjuk.

Így a nyugvó, m_1 tömegű, pontszerű test által az m_2 pontszerű testre kifejtett gravitációs erő munkája, miközben az m_2 tömegű test az m_1 tömegűtől r_1 távolságból r_2 távolságra kerül:

$$W = -fm_1m_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right). \tag{2.33}$$

Ha a testet az *r* távolságra lévő helyről a végtelenbe távolítjuk, azaz r_2 tart a $+\infty$-hez, akkor a gravitációs erő munkája:

$$\boxed{W = -\frac{fm_1m_2}{r}}. \tag{2.34}$$

A test ellentétes irányú mozgatásakor a gravitációs erő munkája pozitív, azaz ekkor a gravitációs erő „végez" munkát.

Ha a testet egyenes vonalú, egyenletes mozgással visszük az $\mathbf{r}_1$-ből az $\mathbf{r}_2$-be, akkor az általunk kifejtett erő munkája a gravitációs erő munkájának ellentettje, hiszen az erőnk is a gravitációs erő ellentettje.

A súrlódási erő munkája. Általában $\mu K s \cos\alpha$. Nyugvó, vízszintes felületen $W = -\mu mgs$.

A kényszererő munkája. Ha a **K** kényszererő merőleges a sebességre (pl. ha kényszert jelentő felület nyugalomban van az adott vonatkoztatási rendszerben),

akkor ebben a vonatkoztatási rendszerben a kényszererő munkája 0. Ugyanis a nyugvó felületen sikló test sebességvektorának egyenese párhuzamos a felület érintőjével, így a **K** kényszererő (amely a 2.1.2.5. szerint merőleges a felületre) merőleges az adott vonatkoztatási rendszerben a test sebességvektorára (pillanatnyi elmozdulására) is.

Ha a kényszert nyugvó ponthoz rögzített nyújthatatlan kötél fejti ki, pl. az ingánál, a kényszererő munkája szintén 0.

Ha a felület egy adott vonatkoztatási rendszerben mozog, akkor ebben a rendszerben a test sebessége általában nem esik a felület érintőjének irányába. Ezért a **K** általában nem merőleges a sebességre, és ezért a munkája sem 0.

2.1.5. A teljesítmény

Valamely erő P teljesítményén az erő által végzett munkának és a munkavégzés idejének hányadosát értjük:

$$\boxed{P=\frac{W}{t}}. \qquad (2.35a)$$

A teljesítmény skaláris mennyiség, mértékegysége: J/s = W(watt) = kgm²/s³. Régebbi mértékegységei: 1 mkp/s = 9,81 W, illetve az 1 LE (lóerő) = 75 mkp/s = = 753,75 W.

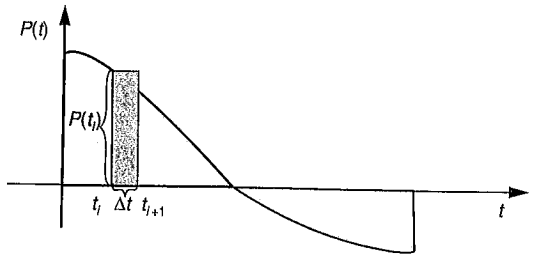
A (2.35a) képlet a teljesítményt akkor adja meg helyesen, ha *W* egyenesen arányos *t*-vel: pl. állandó sebességgel mozgó testre ható állandó erő esetén.

Ha a teljesítmény változó, akkor az ún. *átlagteljesítmény* az előző képlettel meghatározott mennyiség.

A *pillanatnyi teljesítményt* a következőképpen értelmezzük: Osszuk fel a munkavégzés idejét kis Δt időközökre! Jelöljük ezen kis időtartamok alatt végzett munkát ΔW-vel! A teljesítmény adott pillanatbeli értékén a $\frac{\Delta W}{\Delta t}$ hányadost értjük, ahol Δt olyan kicsi, hogy ezen időtartamon belül ΔW a Δt-vel egyenesen arányosnak vehető:

$$P=\frac{\Delta W}{\Delta t}. \qquad (2.35b)$$

Időben változó teljesítmény esetén a munkát a teljesítmény–idő grafikonon a görbe alatti terület adja meg. ($\Delta W = P\Delta t$ alapján a bejelölt kis téglalap területe.)



2.36. ábra

A pillanatnyi teljesítmény az erővel és a pillanatnyi sebességgel is kifejezhető, ugyanis

$$P=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{F_s\Delta s}{\Delta t}=F_s v=\mathbf{Fv}. \qquad (2.36)$$

2.1.6. Mechanikai energiák

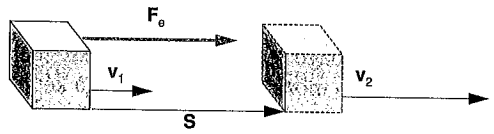
2.1.6.1. Munkatétel; mozgási energia

Mozogjon egy *m* tömegű test a 2.37. ábra szerint egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgással, miközben a rá ható erők eredője állandó! Ekkor a testre ható erők eredőjének munkája:

$$W_{F_e}=F_e s=mas=m\frac{v_2-v_1}{t}\frac{v_2+v_1}{2}t,$$

ahol *s* a test útja, v_1 és v_2 a kezdő-, illetve végsebesség, *t* a mozgás ideje.

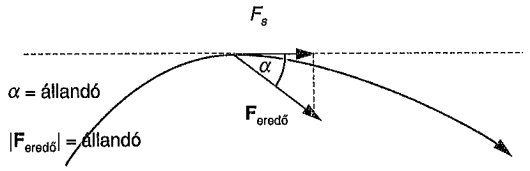
$$\boxed{W_F=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2}. \qquad (2.37a)$$



2.37. ábra

Ez a *munkatétel*. Itt F_e a testre ható erők eredője, amely a testre t ideig hatott, v_1 a test sebessége az erőhatás kezdetén, v_2 annak befejezésekor. Felhasználtuk, hogy a mozgás egyenletesen változó, ezért és $a=\frac{v_2-v_1}{t}$ és $s=\frac{v_2+v_1}{2}t$.

A munkatétel göbült pályára is belátható a 2.38. ábra feltételei esetén is.



2.38. ábra

A *munkatétel* tetszőleges mozgás esetén is érvényes:

Osszuk fel a t időtartamot nagyon kis Δt időtartamokra. Ekkor egy-egy Δt időtartamon belül a pálya ívecskéi jól közelíthetők egyenes szakaszokkal, az erő nagysága és iránya is jó közelítéssel állandónak tekinthető. Ezekre a kis szakaszokra most már felírhatjuk az állandó erőre vonatkozó munkatételt. Ezeket a munkatételeket összeadva, a jobb oldalon, a szakaszok végpontjaiban szereplő $\frac{1}{2}mv^2$ kifejezések váltakozó előjellel szerepelnek, ezért a végpontokban lévő értékek kivételével kiejtik egymást.

A (2.37a) egyenlet jobb oldalán lévő mennyiséget *mozgási energiának* nevezzük. Egy m tömegű, v sebességű pontszerű test E_m mozgási, *kinetikus energiája:*

$$\boxed{E_m=\frac{1}{2}mv^2}. \qquad (2.37b)$$

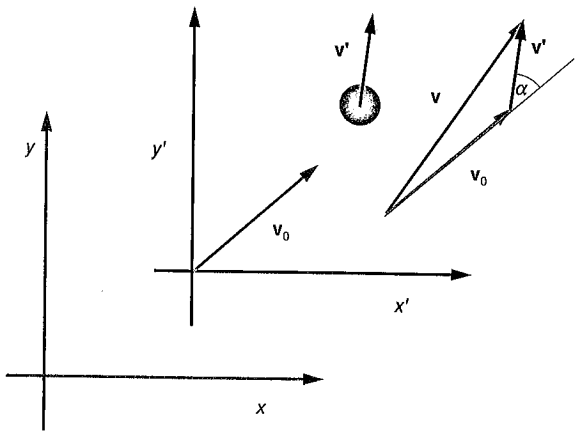
Mivel a sebesség függ a vonatkoztatási rendszer megválasztásától, ezért a mozgási energia is függ tőle.

Egymáshoz képest nem mozgó vonatkoztatási rendszerekben értéke ugyanaz.

Egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerekben a mozgási energia eltérő:

Ha egy test $\mathbf{v}_0$ sebességgel mozgó rendszerben $\mathbf{v}'$ sebességgel mozog (2.39. ábra), akkor a nyugvó rendszerbeli mozgási energiája nem a két mozgásból származó mozgási energiák összege, hanem a sebesség vektorjellegét figyelembe véve és a koszinusz tételt alkalmazva:

$$E_m=\frac{1}{2}m\left(v'^2+v_0^2+2v'v_0\cos\alpha\right)=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}mv_0^2+mv'v_0\cos\alpha. \qquad (2.38)$$



2.39. ábra

A sebességkoordináták közötti összefüggés alapján:

$$E_m=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)=\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv_y^2+\frac{1}{2}mv_z^2. \qquad (2.39)$$

A mozgási energia fenti definíciója egyenértékű a mozgási energiának a mozgó test „munkavégző képességével" kapcsolatos elemi definíciójával. Ugyanis az m tömegű, v sebességű test által az őt fékező testre kifejtett erő munkája a munkatétel alapján $\frac{1}{2}mv^2$, ha a test megáll. Ha ez az erő gépet hajt meg, akkor a szó köznapi értelmében is „munkát végez".

A *munkatételt* a mozgási energia segítségével megfogalmazva:

Egy pontszerű test mozgási energiájának megváltozása egyenlő a rá ható erők eredőjének munkájával:

$$W_{F_e}=\Delta E_m. \qquad (2.40)$$

A munkatétel nem tartalmaz semmilyen kikötést az erők jellegére vonatkozóan, tehát konzervatív és nem konzervatív erők esetén egyformán érvényes.

A munkatételt a dinamika alaptörvényeiből vezettük le, ezért az itt előforduló mennyiségeket mindig valamilyen inerciarendszerhez viszonyítjuk. Egy másik inerciarendszerre áttérve a mozgási energiák, azok megváltozásai, a munka is más lesz, de köztük az egyenlőség továbbra is fennáll.

2.1.6.2. Helyzeti (potenciális) energiák

A Föld a közelében lévő testekre erőt fejt ki. Az elektromosan töltött test a környezetébe helyezett töltött testre szintén erőt fejt ki. Mindkét esetben a tér egy bizonyos tartományában a pontszerű test gravitációs, illetve elektromos erőhatásnak van kitéve. A térnek azt a tartományát, amelyben az oda helyezett testre erő hat, *erőtérnek,* illetve *mezőnek* nevezzük. Így beszélünk elektromos, gravitációs stb. erőtérről. Ebben az alpontban csak olyan erőterekkel foglalkozunk, melyek időben változatlanok, azaz a pontszerű testre ható erő csak a helytől függ.

Egy *erőteret konzervatívnak* mondunk, ha az általa kifejtett erő konzervatív. Egy konzervatív erőtér minden pontjához rendelhetünk fizikai mennyiséget, azt a munkát, amelyet a konzervatív erő végez egy testen, miközben az egy adott pontból egy tetszőlegesen megválasztott vonatkoztatási pontba jut. Ez a munka ugyanazon pontszerű test esetén csak az erőtértől és a két pont megválasztásától, illetve a vonatkoztatási pontot rögzítve már csak az egyik ponttól függ. (Nem konzervatív erők esetén ez a hozzárendelés már nem egyértelmű, mert a munka ekkor nemcsak a két pont megválasztásától, hanem a pályától is függ.)

Valamely test adott pontbeli helyzeti, potenciális energiáján értjük azt a munkát, amelyet a testre ható konzervatív erő végez, miközben a test az adott pontból a vonatkoztatási pontba jut.

Itt nem lényeges, hogy a test hogyan jut a vonatkoztatási pontba, hatnak-e rá más erők vagy sem.

Akkor is van értelme potenciális energiáról beszélni, ha a test ténylegesen el sem jut a vonatkoztatási pontba. Sokszor úgy is fogalmaznak: A potenciális energia az a munka, amelyet az erőtér által kifejtett erő végezne a testen, ha az a vonatkoztatási pontba jutna.

Mivel a munka előjeles mennyiség, ezért a potenciális energia is az.

Ha a konzervatív erő munkája pozitív, miközben a test a vonatkoztatási pontba jut(na), potenciális energiája is az. Ha ebben az esetben a test az adott pontból úgy jut a vonatkoztatási pontba, hogy rá csak a konzervatív erő hat, potenciális energiája 0-ra csökken. Eközben mozgási energiája a munkatétel értelmében annyival nő, amennyi munkát végzett rajta a konzervatív erő, azaz amennyi a potenciális energiája volt az adott pontban. Ha a test egyenes vonalú, egyenletes mozgással jut el a vonatkoztatási pontba, akkor a mező által kifejtett konzervatív erő és a környezetben lévő valamilyen másik test által kifejtett erők egyenlő nagyok és ellentétes irányúak. (A testre ható erők kiegyenlítik egymást.) A test által a környezetben lévő másik testre kifejtett erő az utóbbi erővel egyenlő nagy és ellentétes irányú (hatás–ellenhatás elve), azaz ugyanakkora és ugyanolyan irányú, mint a konzervatív erő. Ezért a test által a környezetre kifejtett erő munkája ugyanaz, mint a konzervatív erő munkája, munkája pozitív. Azaz *ha a test potenciális energiája pozitív, akkor a test pozitív munkát végezhet a környezetén, azaz annak energiát adhat át, miközben a vonatkoztatási pontba jut.*

Az előző gondolatmenetet megismételve a negatív potenciális energia azt jelenti, hogy a test vagy mozgási energiájának csökkenése árán, vagy időben állandó mozgási energia

mellett úgy jut a vonatkoztatási pontba, hogy a környezet által kifejtett erő a testen pozitív munkát végez, azaz a környezet végez munkát a testen. Ezt röviden úgy is mondják, hogy *negatív potenciális energia esetén „nekünk kell pozitív munkát végezni", energiát adni a testnek, hogy állandó nagyságú sebességgel az adott pontból a vonatkoztatási pontba jusson.*

A potenciális energia másik definíciója:

Juttassunk el egy testet állandó sebességgel a vonatkoztatási pontból egy pozitív potenciális energiájú pontba állandó nagyságú sebességgel! A pálya egy kis szakaszán az általunk kifejtett erő elemi munkája ugyanakkora, mint itt a konzervatív erő munkája, hiszen az erők érintőirányú komponensei egyenlő nagyok, mert nincs tangenciális gyorsulás és az elmozdulások ugyanakkorák. Az általunk kifejtett erő érintőirányú komponense ellentétes irányú a konzervatív erő komponensével, ezért az általunk kifejtett erő munkája a konzervatív erő munkájának ellentettje. A konzervatív erő munkája esetünkben negatív, mert a test most „fordítva" megy: a vonatkoztatási pontból a kiszemelt pontba jut! Az általunk kifejtett erő a munkája a konzervatív erő negatív munkájának ellentettje, azaz pozitív. Ezért a *potenciális energiát úgy is szokás definiálni, hogy egy test adott pontbeli potenciális energiája annak az erőnek a munkája, amelyik a testet a konzervatív erő ellenében a vonatkoztatási pontból az adott pontba juttatja, miközben a test mozgási energiája nem változik.*

Az energiamegmaradás elvének ismeretében a fenti definíció szemléletes tartalma nyilvánvaló: a testet a vonatkoztatási pontból az adott pontba juttatva valamennyi munkát kell végeznünk. A test helyzeti energiája épp ebből a munkából adódik. Ha a test visszajut a vonatkoztatási pontba, a befektettet munkánál sem többet, sem kevesebbet nem ad le. Így a befektetett munka pontosan ugyanakkora, mint a munkavégző képesség, azaz mint a helyzeti energia. Az állandó nagyságú sebesség azért kell, hogy a befektetett munka csak a helyzeti energiát növelje. Tulajdonképpen még az állandó nagyságú sebesség sem kell, elegendő, ha a kezdő- és végsebesség nagysága megegyezik.

A potenciális energia még ugyanabban a vonatkoztatási rendszerben is függ a vonatkoztatási pont megválasztásától.

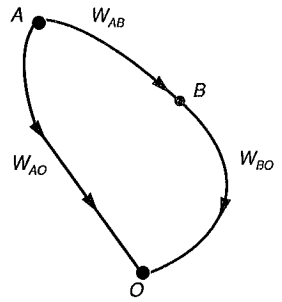
Ha egy test (konzervatív) erőtérben A-ból B-be jut, akkor az erőtér által kifejtett erő munkája egyenlő a test potenciális energiája megváltozásának ellentettjével.

$$W_{\text{erő}} = -\Delta E_p. \tag{2.41}$$

Ennek belátására jelöljük a vonatkoztatási pontot *O*-val. Jusson a test *A*-ból *B*-be egy tetszőleges pályán (2.40. ábra)! Mivel az erő konzervatív, ezért

$$W_{AO} = W_{ABO} = W_{AB} + W_{BO}. \tag{2.42}$$

De W_{AO} test potenciális energiája *A*-ban, W_{BO} a test potenciális energiája *B*-ben. (Jelölésük E_{PA} illetve E_{PB}.) Az egyenletet rendezve kapjuk a (2.41) formulát.



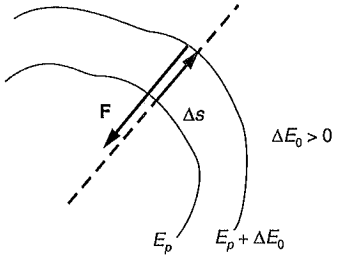
2.40. ábra

Azokat a pontokat, amelyekben ugyanazon test potenciális energiája ugyanaz, *ekvipotenciális pontoknak*, az általuk alkotott felületet szintfelületnek, *ekvipotenciális felületnek*, ha a tér egy bizonyos tartományát képezik, *ekvipotenciális tartománynak* nevezzük.

A konzervatív erőtér által kifejtett erő az ekvipotenciális felületre merőleges. Ugyanis a testet az ekvipotenciális felületen mozgatva, potenciális energiája állandó lévén, a konzervatív erő nem végez munkát. Ez csak úgy lehet, hogy az erő merőleges az elmozdulásra, a felületre. Nagyságát a (2.41) alapján a

$$\boxed{\Delta E_p = -\mathbf{F}\Delta\mathbf{s}} \qquad (2.43)$$

egyenlet adja meg. Ha $\Delta\mathbf{s}$ merőleges a felületre, akkor a 2.41. ábra szerint alakulnak az irányok.

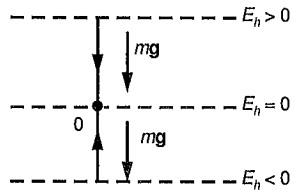


2.41. ábra

Magassági (helyzeti) energia. A nehézségi erőből származó potenciális energia a magassági, vagy közkeletű nevén a helyzeti energia. Jelöljük a vonatkoztatási pontot *O*-val! Az ezen a ponton átfektetett vízszintes sík minden pontjában a potenciális energia 0, mert síkon mozgatva egy testet a nehézségi erő munkája 0, lé-

vén az erő merőleges az elmozdulásra. Ezt a síkot szokás *vonatkoztatási síknak, szintnek* is nevezni. A vonatkoztatási síktól h magasságban lévő vízszintes sík minden pontjában az E_h-val jelölt potenciális energia mgh, mert a nehézségi erő munkája csak a magasságkülönbségtől függ (lásd a 2.1.4.1. alpontot). A vonatkoztatási szint alatt h mélységben lévő pontszerű testre $E_h = -mgh$. (A test vonatkoztatási pontba juttatásához a testet felfelé mozgatjuk, miközben a nehézségi erő lefelé mutat. Ezért $\cos\alpha = -1$)

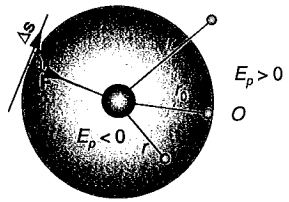
$$\boxed{E_h = mgh} \quad (h \text{ előjeles!}). \qquad (2.44)$$



2.42. ábra

Gravitációs energia. Válasszunk az M tömegű testtől (pontszerű vagy homogén gömb, illetve homogén gömbhéjakból álló test) r_0 távolságban egy O vonatkoztatási pontot! Mivel a potenciális energia az a munka, amelyet a gravitációs erő végez az m tömegű testen, miközben az a vonatkoztatási pontba jut, a 2.43. ábra jelöléseivel [lásd (2.33) képlet]:

$$E_p(r) = -fMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \qquad (2.45a)$$



2.43. ábra

Ha ($r < r_0$) azaz az m tömegű test az M köré irt r_0 sugarú gömbön belül van, akkor az $E_p < 0$, azon kívül pedig az $E_p > 0$. Szokás a vonatkoztatási pontot igen nagy távolságban, a „végtelenben" választani.

Ekkor

$$\boxed{E_p(r) = -\frac{fMm}{r}}. \qquad (2.45b)$$

Az ekvipotenciális felületek itt a pontszerű test köré írt gömbök, hiszen ezeken mozgatva a testeket a gravitációs erő nem végez munkát.

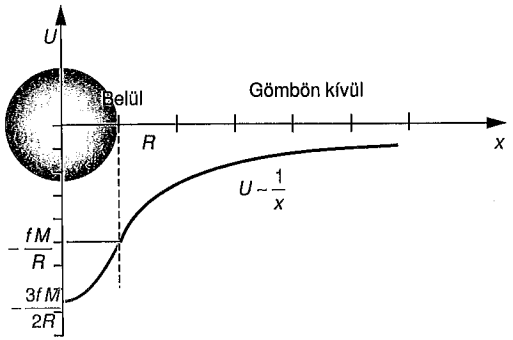
Az m tömegű test gravitációs energiája egyenesen arányos m-mel. A test energiája két, fizikailag szétválasztható tényező szorzatára bontható:

$$E_p(r) = m\left(-\frac{fM}{r}\right) = mU_p(r). \qquad (2.45c)$$

Az $U_p(r)$ mennyiség már csak a gravitációs térre jellemző és független az m tömegtől. Az $U_p(r)$ neve *gravitációs potenciál.* (Szokás Φ-vel is jelölni.)

Két pontszerű test által létrehozott gravitációs erőtérben egy harmadik pontszerű test potenciális energiája a két potenciális energia összege, hiszen a két test által kifejtett erők munkái algebrailag összegződnek.

A 2.44. ábrán egy homogén gömb gravitációs erőterének potenciálját ábrázoltuk a végtelenre vonatkoztatva. A gömb belsejében az erő a távolsággal egyenesen arányos, ezért ott a potenciál a távolság négyzetes függvénye (lásd rugó potenciális energiája).



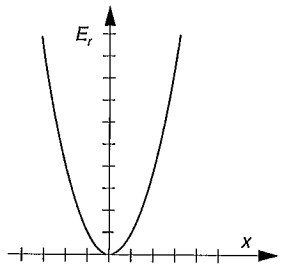
2.44. ábra

A rugó potenciális energiája. A rugalmas erők konzervatívak. Egy kifeszített rugónál – ha a laza állapotot tekintjük 0 energiájú állapotnak – a rugalmassági energia a 2.1.4.1. pont és (2.31b) képlet alapján:

$$E_R = \frac{1}{2} D(\Delta x)^2. \qquad (2.46)$$

A rugók összenyomásra is jó közelítéssel lineáris erőtörvénnyel válaszolnak, ezért (legfeljebb addig, míg a menetei össze nem érnek) energiájuk összenyomáskor is ugyanúgy változik, mint megnyúláskor.

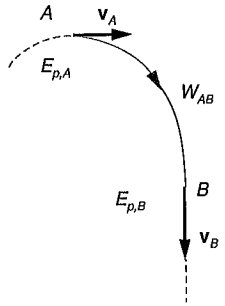
A 2.45. ábrán a rugalmassági energiát ábrázoltuk a rugó megnyúlásának függvényében. A megnyúlást tekintettük pozitívnak, az összenyomást negatívnak. A rugalmassági energia nem a test, hanem a rugó tulajdonsága. A rugalmassági energia a rugóban tárolódik.



2.45. ábra

A molekuláris erők potenciális energiájáról lásd a 21.1. és a 25.3. fejezetet.

A mechanikai enegiamegmaradás elve. *Ha egy pontszerű testre csak konzervatív erők hatnak, akkor mechanikai energiáinak összege állandó.*



2.46. ábra

Ha ugyanis a test A-ból B-be mozog bármilyen pályán, akkor a munkatétel szerint (2.46. ábra):

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A\text{-ból }B\text{-be}} = E_{P,A} - E_{P,B}.$$

Az egyenletet rendezve:

$$\boxed{E_m + E_p = \text{állandó}}. \qquad (2.47)$$

Itt E_P az összes potenciális energiát jelenti. A tétel csak akkor érvényes, ha a pontszerű testre mozgása közben csak konzervatív erők, illetve olyan erők hatnak, melyek munkája 0.

Pl. vízszintes asztallapon meglökött test mozgási energiája a súrlódás miatt csökken, magassági energiája állandó, ezért mechanikai energiáinak összege csökken.

A mechanikai energiamegmaradás elvét olyan esetekre is alkalmazhatjuk, amikor a testre a konzervatív erőkön kívül 0 munkájú erő hat. Pl. ha a testre egy nyugvó felület által kifejtett kényszererő hat. Ez az eset valósul meg egy súrlódásmentes, nyugvó lejtőn 0 kezdősebességgel elengedett test esetén. A lesikló test mozgási energiája a lejtő alján ugyanakkora, mintha a lejtő tetejéről szabadon esett volna. Az általános energiamegmaradás elvét lásd a 3.2.3. pontban.

2.1.7. Mozgások dinamikai leírása inerciarendszerhez képest gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben. A tehetetlenségi erők

Ebben a fejezetben a mozgást jellemző mennyiségeket a következőképpen különböztetjük meg:

- az mozgó vonatkoztatási rendszer inerciarendszerhez viszonyított adatait „$_0$" indexszel látjuk el,
- a mozgó rendszerhez viszonyított adatokat „′" felső vesszővel különböztetjük meg és kék színnel is jelöljük,
- az inerciarendszerhez viszonyított adatokat külön nem jelöljük.

Az 1.1.4. pont szerint [lásd az (1.9)–(1.11) képleteket]:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{r}', \qquad \mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}', \qquad \mathbf{a}=\mathbf{a}_0+\mathbf{a}'.$$

Az egyenlőségek a mennyiségek megváltozásaira igazak:

$$\Delta\mathbf{r}=\Delta\mathbf{r}_0+\Delta\mathbf{r}', \qquad \Delta\mathbf{v}=\Delta\mathbf{v}_0+\Delta\mathbf{v}', \qquad \Delta\mathbf{a}=\Delta\mathbf{a}_0+\Delta\mathbf{a}'.$$

2.1.7.1. Az inerciarendszerhez képest egyenes vonalú, egyenletes, tiszta haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer

Ebben az esetben a $\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}'$ egyenletben a $\Delta\mathbf{v}_0 = 0$, mert a mozgó rendszer és annak minden pontja állandó sebességgel mozog. Ezért ugyanazon test sebessége a két vonatkoztatási rendszerben különböző, de sebességváltozása mindkét vonatkoztatási rendszerben ugyanaz. Egy ütközést megfigyelve, mindkét vonatkoztatási rendszerben a testek sebességváltozásai ugyanazok, ezért arányuk és így tömegük aránya is ugyanaz. Ezért impulzusváltozásaik egyenlő nagyok és ellentett irányúak. A dinamika axiómái és az ebből levezetett tételek ugyanolyan alakúak mindkét vonatkoztatási rendszerben. A mozgásegyenletben szereplő mennyiségek és a közöttük lévő összefüggések is, mindkét rendszerben megfigyelve, mérve is ugyanazok. Másképp megfogalmazva:

Az egymáshoz képest egyenes vonalú, egyenletes (nem forgó) mozgást végző vonatkoztatási rendszerek teljesen egyenértékűek a mechanikai jelenségek szempontjából. Ha az egyik rendszer inerciarendszer, akkor a másik is az. Ez a Galilei-féle relativitáselv.

Ez a kijelentés egy kicsit többet is mond a fentieknél, mert azt is állítja, hogy az egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző nem inerciarendszerek is egyenértékűek.

2.1.7.2. Az inerciarendszerhez képest egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló, nem forgó vonatkoztatási rendszer

Egy magára hagyott test sebessége az inerciarendszerben nem változik. A gyorsuló K' rendszerben a magára hagyott test sebessége változik a $\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}'$ alapján, hiszen az egyenlet bal oldala 0, a jobb oldal első tagja nem 0, mert a vonatkoztatási rendszer gyorsul. Ezért a $\Delta\mathbf{v}'$ sem 0, azaz a magára hagyott test a K' rendszerben gyorsul. Tehát az *inerciarendszerhez képest gyorsuló vonatkoztatási rendszer nem inerciarendszer.* Ezért az erők vektorösszege sem egyenlő a tömeg és a gyorsuló vonatkoztatási rendszerhez viszonyított gyorsulás szorzatával. (Itt erőn a másik test gyorsító hatásának mértékét értjük, amelyet az erőtörvényekből határozhatunk meg):

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i \neq m\mathbf{a}'.$$

Hogy ez tényleg így van, azt az *inercia-rendszerbeli* gyorsulással felírt mozgásegyenletből is láthatjuk: az $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'$ felhasználásával:

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i = m\left(\mathbf{a}_0+\mathbf{a}'\right) = m\mathbf{a}_0+m\mathbf{a}'.$$

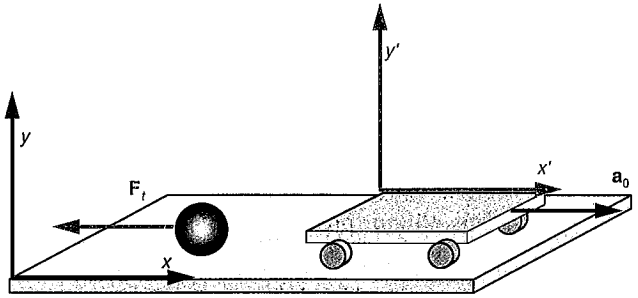
Az erő eredője és az $m\mathbf{a}'$ közötti eltérés $m\mathbf{a}_0$. Az egyenletet formálisan rendezhetjük az $m\mathbf{a}'$-re:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i+\left(-m\mathbf{a}_0\right)=m\mathbf{a}'} \qquad (2.48)$$

A $-m\mathbf{a}_0$ tagot, amely erő dimenziójú mennyiség, erőnek foghatjuk fel. A testre ható valóságos erőkhöz hozzáadva, a mozgásegyenlet alakilag megegyezik az inerciarendszerben felírtakkal és a K'-beli gyorsulással helyes eredményt ad. A $-m\mathbf{a}_0$ neve *tehetetlenségi erő.* Ez nem erő abban az értelemben, hogy nem egy másik test hatása az m tömegű testre, hanem a koordináta-rendszer „helytelen" megválasz-

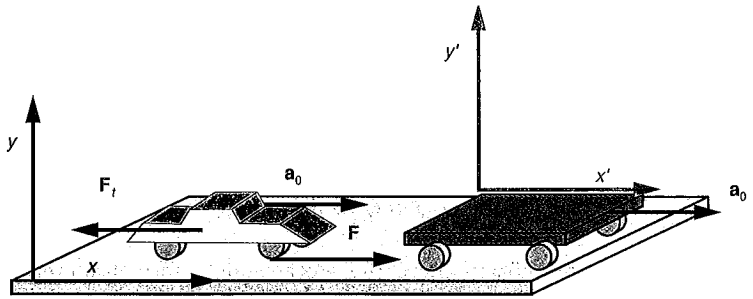
tása miatt fellépő látszólagos erő. Ennek az erőnek ellenereje sincs. A tehetetlenségi erőt még *látszaterőnek, fiktív erőnek* is nevezik.

Az egyenletesen gyorsuló egyenes vonalú pályán haladó vonathoz rögzített vonatkoztatási K' rendszerhez képest a talajon nyugvó tárgyak a vonat gyorsulásával ellentett irányba gyorsulnak (2.47. ábra). A K rendszerbeli megfigyelő szerint a test nyugalomban van, mert a rá ható erők eredője 0. A K'-beli megfigyelő szerint a testre $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_0$ erő hat, mert az ő vonatkoztatási rendszeréhez képest a test $-\mathbf{a}_0$-val gyorsul.



2.47. ábra

A K'-ből megfigyelve a vonattal együtt haladó, $\mathbf{a}_0$ gyorsulású autót, az autó $\mathbf{a}'$ gyorsulása 0 (2.48. ábra). Tehát K'-ben az autó egyensúlyban van, ezért a rá ható erők eredője 0. Az autó a talaj által kifejtett $\mathbf{F}$ valódi erő és az $\mathbf{F}_t$ tehetetlenségi erő hatására van egyensúlyban.



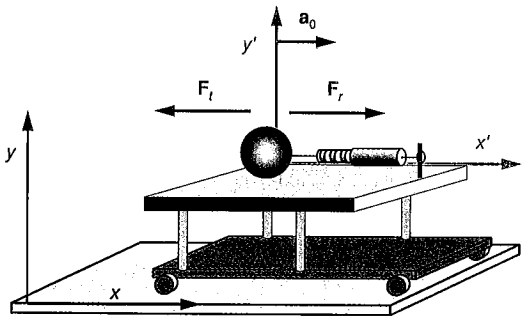
F a talaj által kifejtett tapadási erő

2.48. ábra

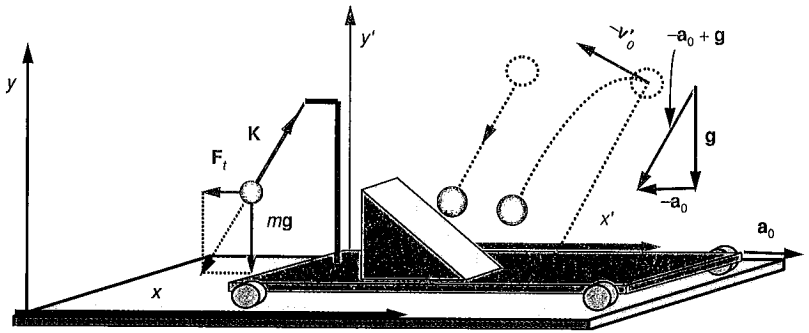
A K'-beli megfigyelő az $\mathbf{F}_t$ tehetetlenségi erőt szubjektíve is érzékelheti: ha a vonat eléggé gyorsul, akkor a figyelmetlen utast az ülés támlájának „löki, nyomja" a tehetetlenségi erő. Ebben a rendszerben a megfigyelő egyensúlyban van, mert a támla is kifejt rá egy erőt. Az erők eredője 0. Mivel az általunk gyakran használt vonatkoztatási rendszerek többnyire inerciarendszerek, ahol a testek sebességváltozását mindig egy másik testnek

tulajdonítjuk, ezért a testek sebességváltozását itt is egy másik test hatásának tulajdonítjuk. Ezért a K' rendszerben az az érzésünk, mintha „valami" az $\mathbf{a}_0$ gyorsulással ellenkező irányba nyomna, lökne. Inerciarendszerből nézve a valóságos helyzet az, hogy a támla szorul a megfigyelő testéhez, hogy a vonattal együtt gyorsuljon.

A K' rendszerben nyugvó, súrlódásmentes asztallapon lévő testek nem maradnak nyugalomban, hanem $-\mathbf{a}_0$ gyorsulással mozognak. Az egyensúly fenntartásához az $\mathbf{F}$ erőt kezünkkel vagy rugós erőmérővel kompenzálnunk kell (2.49. ábra). Az itt felfüggesztett inga egyensúlyi helyzete nem függőleges, hiszen a testre az $m\mathbf{g}$ és a $\mathbf{K}$ erőn kívül még az $\mathbf{F}_t$ tehetetlenségi erő is hat. Az itt 0 kezdősebességgel elengedett test nem függőlegesen, hanem ferdén „esik". Az eső testre ható erők eredője $\mathbf{F}_t + m\mathbf{g} = -m\mathbf{a}_0 + m\mathbf{g}$. Ezt az erőt a tömeggel osztva minden „eső" test gyorsulása $-\mathbf{a}_0 + \mathbf{g}$ lesz. A tehetetlenségi erők a tömeggel arányos erők és nem függenek az anyagi minőségtől, ugyanúgy, mint a gravitációs erők. Minden elhajított test ennek az „álgravitációs" térnek a hatására $-\mathbf{a}_0 + \mathbf{g}$-vel gyorsul a gyorsuló vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva. Az „álgravitációs tér függőlegese" a $-\mathbf{a}_0 + \mathbf{g}$ vektor iránya, „vízszintese" az erre merőleges sík. Itt minden jelenséget úgy írhatunk le, mintha a test egy $-\mathbf{a}_0 + \mathbf{g}$ gravitációs térben lenne (2.49b. ábra).



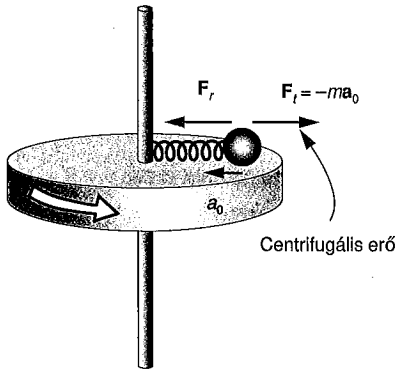
2.49a. ábra



2.49b. ábra

2.1.7.3. Az egy helyben forgó, állandó szögsebességű vonatkoztatási rendszer

Ilyen vonatkoztatási rendszer pl. egy egyenletesen forgó korong. Legyen a test a K' rendszerben nyugalomban (2.50. ábra). Azaz a test a K inerciarendszerben egyenletes körmozgást végez a K' rendszer ω_0 szögsebességével. Az inercia-rendszerbeli megfigyelő szerint a test $r\omega_0^2$-vel gyorsul a tengely felé, ezért – ha pl. egy rugóra kötöttük – a rugóerő nagysága $mr\omega_0^2$. A forgó, K'-beli megfigyelő szerint a test nyugalomban van, $\mathbf{a}' = 0$. Szerinte a test azért nem gyorsul, mert a testre ható erők kiegyenlítik egymást. A testre két erő hat: a (valódi) rugóerő és az ellentétes irányú $mr\omega_0^2$ tehetetlenségi erő, hiszen az a pont, amelyikhez képest a test a K'-ben nem gyorsul, az inerciarendszerhez képest $r\omega_0^2$-vel gyorsul. A fellépő tehetetlenségi erőt *centrifugális erőnek* nevezik. A centrifugális erő nagysága $mr\omega_0^2$, és iránya a tengelytől kifelé mutat. A leírás ebben a rendszerben bonyolultabb, mert a tehetetlenségi erő nagysága és iránya a korong különböző pontjaiban különböző, lévén az $\mathbf{a}_0$ is az.

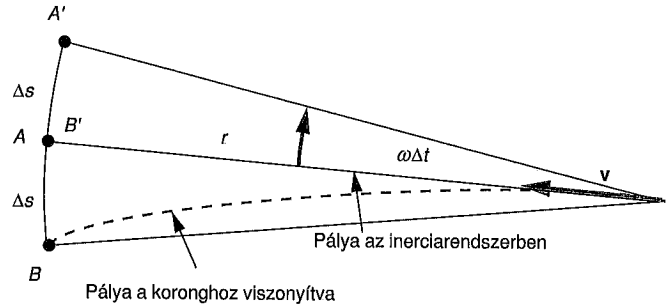


2.50. ábra

A koronghoz képest mozgó testre nemcsak a centrifugális erő hat, hanem fellép egy másik tehetetlenségi erő is. A koronghoz képesti mozgásból származó erőt *Coriolis-erőnek* nevezzük.

A Coriolis-erőt egy kísérlet elemzése alapján vizsgáljuk meg egy eléggé speciális esetben. Vegyünk egy ω szögsebességgel forgó korongot. A korong forgástengelye az inerciarendszerben nyugalomban van. Helyezzünk el a korong közepén egy puskát úgy, hogy torkolata a forgástengelyen legyen és csövének hossztengelye a koronghoz erősített céltábla A pontja felé mutasson (2.51. ábra). A kísérleti körülményeket úgy választjuk meg, hogy közegellenállási és a nehézségi erő pályamódosító és sebességváltoztató hatásától a lövedék mozgása alatt eltekinthetünk. Ez elérhető, ha a lövedék nagy sűrűségű anyagból készült és sebessége elég nagy. A puskát elsütve a forgó korongon lévő megfigyelő

azt várja, hogy lövedéke egyenes vonalú, egyenletes mozgással a céltábla A pontjába csapódik. Ezzel szemben a lövedék eltér az általa jósolt pályától és a B pontba csapódik. Az eltérés az egyenes vonalú pályától az ő számára azt jelenti, hogy a mozgó testre egy, a sebességre merőleges erő hat. Ez az erő a Coriolis-erő.



2.51. ábra

Az inercia-rendszerbeli megfigyelő a jelenséget a következőképpen írja le: A lövedék a tengely egy pontjából $\mathbf{v}$ sebességgel indult. A körülmények megválasztása miatt a lövedék egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez. A lövedék azért nem csapódik a céltábla A pontjába, mert az a lövedék repülési ideje alatt elmozdult. A tábla és így az A pont által megtett út a lövedék mozgásának Δt ideje alatt:

$$\Delta s = r\omega\Delta t, \tag{2.49a}$$

ahol r az A pont távolsága a forgástengelytől. A B becsapódási pont tehát A-tól Δs távolságra van. A lövedék mozgásának ideje:

$$\Delta t = \frac{r}{v}, \tag{2.49b}$$

ahol v a lövedék sebessége. Ha a lövedék inercia-rendszerbeli sebessége lényegesen nagyobb a céltábla sebességénél, a lövedék két rendszerben mért sebessége jó közelítéssel egyenlő. A szögelfordulás is kicsi, ezért az AB ív hossza jó közelítéssel egyenlő az AB szakasszal.

Visszatérve a forgó rendszerbeli megfigyelőre, ő azt észleli, hogy a lövedék a sebességre merőleges irányba elmozdult Δs-el. Bontsuk fel a mozgást sugárirányú és arra merőleges mozgásra! A merőleges mozgás nulla kezdősebességű egyenletesen változó mozgás, hiszen a rövid Δt idő alatt a Coriolis-erő jó közelítéssel állandó. A lövedék forgó rendszerhez viszonyított gyorsulása, melyet a'-vel jelölünk:

$$a' = \frac{2\Delta s}{(\Delta t)^2}. \tag{2.49c}$$

A (2.49a) és a (2.49b) egyenletekből (2.49c)-be helyettesítve kapjuk:

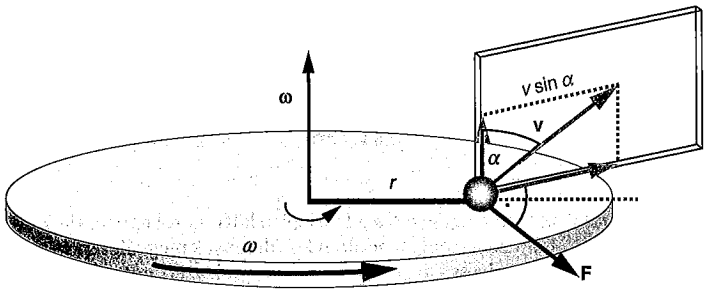
$$a' = 2v\omega. \tag{2.49d}$$

A forgó rendszerhez viszonyított a' gyorsulást a lövedék m tömegével szorozva megkapjuk a Coriolis-erő nagyságát.

A Coriolis-erő értéke:

$$F_C = 2mv\omega. \tag{2.50a}$$

Általános esetben a mozgó test nem a tengelyből kiinduló egyenesen mozog, és sebessége sincs a tengelyre merőleges síkban. A Coriolis-erőre vonatkozó formulába ekkor a forgó rendszerhez viszonyított sebességnek a tengelyre merőleges komponensét kell behelyettesítenünk (2.52. ábra). Ez a sebességkomponens $v\sin\alpha$, ahol α a tengely és a sebességvektor által bezárt szög.



2.52. ábra

A Coriolis-erő általános esetben is merőleges a tengelyre, azaz hatásvonala a tengelyre merőleges síkban fekszik, és ebben a síkban merőleges a sebességre is. Irányát abból tudjuk megállapítani, hogy a test „lemarad" vagy „előre siet" a koronghoz képest.

Általános esetben a Coriolis-erő nagysága:

$$\boxed{F_C = 2mv\omega\sin\alpha}, \tag{2.50b}$$

ahol v az ω szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerhez viszonyított sebesség, és α ennek a sebességnek a forgástengellyel bezárt szöge.

Coriolis-erőre vonatkozó, irányt is meghatározó formulát a vektori szorzat segítségével írhatunk fel. A szögsebesség vektormennyiség (lásd az 1.2.3. pontot). A $v\omega\sin\alpha$ a $\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}$ vektor abszolút értéke. Az erő pedig merőleges mind a $\mathbf{v}$, mind pedig a $\boldsymbol{\omega}$ vektorokra. Ezért:

$$\boxed{\mathbf{F}_c = 2m\left[\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}\right]}. \tag{2.51}$$

Általános esetben az ω szögsebességgel egyenletesen forgó, gyorsuló vonatkoztatási rendszerhez képest $\mathbf{a}'$ gyorsulással mozgó testre ható valódi erőkön kívül hatnak még a tehetetlenségi erők is. Így mozgásegyenlet ebben a rendszerben:

$$\boxed{\mathbf{F}_v + \mathbf{F}_{cf} + \mathbf{F}_C = m\mathbf{a}'}, \tag{2.52}$$

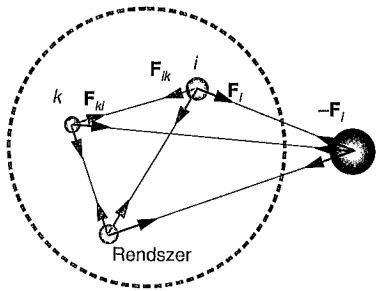
ahol $\mathbf{F}_v$ az m tömegű testre ható valódi erők eredője, $\mathbf{F}_{cf}$ a centrifugális erő, $\mathbf{F}_C$ a Coriolis-erő.

Ha a vonatkoztatási rendszer nem egyenletesen forog, akkor fellép még egy harmadik tehetetlenségi erő is, mellyel itt nem foglalkozunk.

2.2. Pontrendszerek dinamikája

Pontrendszeren tömegpontok tetszőlegesen kiválasztott rendszerét értjük. A pontrendszer tagjaira ható erőket célszerű felosztani belső erőkre és külső erőkre. *Belső erők* a pontrendszer tagjai által egymásra kifejtett erők. Az i-edik tömegpontra a rendszerhez tartozó k-adik tömegpont által kifejtett erőt a továbbiakban $\mathbf{F}_{ik}$-val, a k-adikra az i-edik által kifejtett erőt $\mathbf{F}_{ki}$-vel jelöljük (2.53. ábra).

Külső erők a rendszer tagjaira a rendszerhez nem tartozó testek által kifejtett erők. Az i-edik tömegpontra ható külső erők eredőjét $\mathbf{F}_i$-vel jelöljük.



2.53. ábra

Zárt rendszernek nevezzük az olyan pontrendszert, amelynek tagjaira nem hatnak külső erők, vagy a külső erők vektori eredője 0. (Külső erők eredőjén egy pontrendszer esetén az összes külső erő vektori eredőjét, azaz az egyes tömegpontokra ható külső erők eredőjének az eredőjét értjük.)

Pontosabban a fenti zárt rendszereket *mechanikailag* zárt rendszereknek nevezzük. Az ilyen rendszer például energia szempontjából nem biztosan zárt, hiszen a rendszer tagjai nemcsak munkavégzés, hanem hőfolyamat során is felvehetnek energiát.

2.2.1. A pontrendszerek mozgásának leírása mozgásegyenletekkel

Legyen adva N pontszerű test. A pontszerű testekre hatnak külső és belső erők. Az i-edik, m_i-re ható külső erők eredőjét $\mathbf{F}_i$-vel, a k-adik test által az m_i-re kifejtett belső erőt $\mathbf{F}_{ik}$-val jelöljük. Az i-edik testre a mozgásegyenlet:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_{ik} = m_i \mathbf{a}_i. \tag{2.53}$$

Ha ismerjük az összes külső és belső erőt, akkor az N tömegpontra felírt N számú lineáris egyenletrendszer a gyorsulásokra megoldható. Mivel az erők a sebesség, hely és idő függvényei lehetnek, a kapott gyorsulások is azok. Elegendően kis időtartamon belül a gyorsulás nagysága és iránya nem nagyon változik. Ezért a sebességváltozás e kis időtartam alatt $\Delta\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \Delta t$. A kezdő pillanatban a testek sebességét ismerve, a későbbi sebesség $\mathbf{v}_{i,t+\Delta t} = \mathbf{v}_{i,t} + \Delta\mathbf{v}_i$. A $\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i \Delta t$ alapján az elmozdulásvektort, és a kezdeti helyvektor $\mathbf{r}_{i,t}$ ismeretében a későbbi $t + \Delta t$, pillanatbeli helyvektort az $\mathbf{r}_{i,t+\Delta t} = \mathbf{r}_{i,t} + \Delta\mathbf{r}_i$ egyenlet alapján kaphatjuk meg. Az eljárás bonyolult, számítógépekkel történő megoldása sem könnyű. Ilyen híres feladat az ún. háromtest-probléma, ahol három test kölcsönös gravitációs ereje esetén kell leírni a testek mozgását.

Sok esetben a belső erőket nem ismerjük. Így N egyenletünk van N-nél több ismeretlennel. Ilyenkor azonban többnyire mindig van valamilyen többletinformációnk. Bizonyos esetekben a testek egymáshoz és/vagy a vonatkoztatási rendszerhez viszonyított elmozdulásai közt áll fenn valamilyen kapcsolat. Például két testből álló rendszer tagjai közé nyújthatatlan fonalat erősítünk. Az olyan feltételeket, amelyek a testek egymáshoz vagy a vonatkoztatási rendszerhez viszonyított elmozdulásaira jelentenek valamilyen kikötést, *kényszerfeltételeknek* nevezzük. Az elmozdulásokra vonatkozó összefüggés egyben a sebességekre és így a gyorsulásokra vonatkozó összefüggést is jelenti. Így az N darab mozgásegyenletünk kiegészül még a kényszerfeltételeket jelentő egyenletekkel. Ezért néhány egyszerű esetben a probléma viszonylag könnyen megoldható.

2.2.2. A pontrendszer impulzusa (lendülete)

Egy *pontrendszer impulzusa* (lendülete) a rendszert alkotó tömegpontok impulzusainak vektori összege:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i. \tag{2.54}$$

Az egyes tömegpontok impulzusváltozásai:

$$\Delta\mathbf{p}_i = \mathbf{F}_i \Delta t + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_{k,i} \Delta t.$$

Az impulzusváltozásokat összeadva a pontrendszer impulzusának megváltozását kapjuk meg. A jobb oldali összegben az i-edik tömegpont egyenletében az $\mathbf{F}_{ik}$, a k-adik tömegpont egyenletében az $\mathbf{F}_{ki}$ erő szerepel. Ezek az erők a hatás–ellenhatás elve szerint egyenlő nagyok és ellentétes irányúak, ezért a teljes impulzusváltozás meghatározásakor (az i szerinti összegzéskor) eredőjük $\mathbf{0}$, tehát a belső erők vektori összege $\mathbf{0}$. Ezért a jobb oldalak összegében csak a külső erők vektori eredője szerepel (a külső erők ellenerői nem fordulnak elő a rendszer tagjaira vonatkozó mozgásegyenletekben, hiszen azok a rendszerhez nem tartozó testekre hatnak.)

$$\Delta\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \Delta\mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \Delta t,$$

az egyenlet mindkét oldalát Δt-vel osztva:

$$\boxed{\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i}, \tag{2.55}$$

azaz *egy pontrendszer impulzusának időegységre eső megváltozása, impulzusváltozásának sebessége egyenlő a rendszer összes tagjára – vagy egyszerűen: a rendszerre – ható külső erők eredőjével.* A fenti tétel az *impulzustétel.*

Az impulzustételből következik, hogy a belső erők a pontrendszer egyes tagjainak impulzusát ugyan megváltoztathatják, de a rendszer összimpulzusát nem. Ha tehát a rendszerre külső erők nem hatnak, vagy azok vektori összege 0, akkor a rendszer impulzusváltozása is 0. Ezt fejezi ki az *impulzusmegmaradás elve: zárt rendszer esetén az impulzusok vektori összege állandó.*

A fenti kijelentések csak akkor igazak pontosan, ha az impulzusváltozás ideje alatt az erők állandóak. Ha Δt alatt az erők változnak, akkor az egyenlet bal oldalán az erők átlaga szerepel. Ha Δt-vel tartunk a 0-hoz, akkor:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i.$$

2.2.3. A tömegközéppont. A tömegközéppont mozgásának tétele

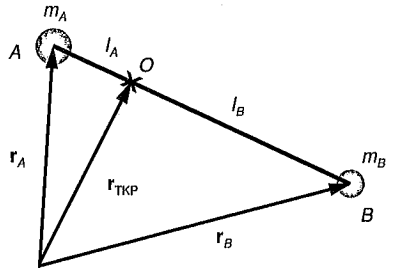
Egy pontrendszer tömegközéppontján azt a pontot értjük, melynek helyvektora:

$$\boxed{\mathbf{r}_{\mathrm{TKP}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}. \tag{2.56}$$

2.2.3.1. A pontrendszer tömegközéppontjának meghatározása

Ebben a pontban olyan tételeket adunk meg, amelyek segítenek a tömegközéppont meghatározásában.

Két tömegpontból álló pontrendszer tömegközéppontja a két tömegpontot összekötő szakaszon van, és ezt a szakaszt a tömegekkel fordított arányban osztja.



2.54. ábra

Legyen a 2.54. ábra szerint az A-ba, illetve B-be helyezett tömegpontok tömege m_A és m_B, helyvektora $\mathbf{r}_A$ és $\mathbf{r}_B$! Az A-ból az O tömegközéppontba mutató vektor:

$$\mathbf{r}_{TKP}-\mathbf{r}_A=\frac{m_A\mathbf{r}_A+m_B\mathbf{r}_B}{m_A+m_B}-\mathbf{r}_A=\frac{m_B\left(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A\right)}{m_A+m_B}.$$

Tehát a vektor ugyanabból a pontból indul ki és ugyanabba az irányba mutat, mint a két tömegpontot összekötő $\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A$ vektor, mert annak számszorosa. Ezért az O tömegközéppont rajta van a két pontot összekötő szakaszon. Az O-ból a B-be mutató vektor:

$$\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_{TKP}=\mathbf{r}_B-\frac{m_A\mathbf{r}_A+m_B\mathbf{r}_B}{m_A+m_B}=\frac{m_A\left(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A\right)}{m_A+m_B}.$$

A két formulát összehasonlítva látható, hogy a vektorok hosszának aránya a tömegek arányának reciproka:

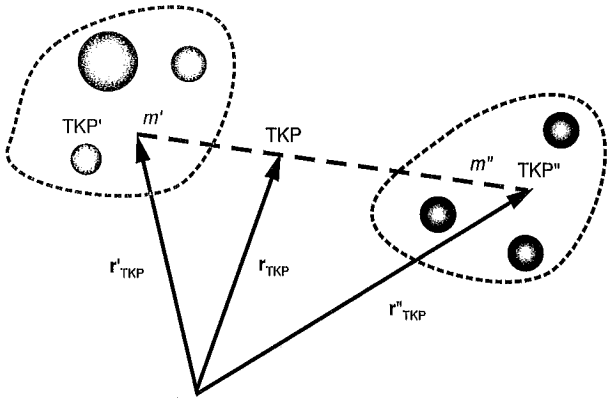
$$\frac{\left|\mathbf{r}_{TKP}-\mathbf{r}_A\right|}{\left|\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_{TKP}\right|}=\frac{l_A}{l_B}=\frac{m_B}{m_A}.$$

Ha a két tömegpont tömege egyenlő, akkor tömegközéppontjuk a két tömegpontot összekötő szakasz felező pontja.

Ha egy pontrendszert két részre osztunk akkor – a részek tömegét m'-vel és m''-vel, tömegközéppontjuk helyvektorát $\mathbf{r}'_{TKP}$-vel és $\mathbf{r}''_{TKP}$-vel jelölve – a rendszer tömegközéppontjának helyvektora:

$$\mathbf{r}_{TKP}=\frac{m'\mathbf{r}'_{TKP}+m''\mathbf{r}''_{TKP}}{m'+m''}.$$

Ennek igazságáról egyszerű behelyettesítéssel győződhetünk meg. Az előző kijelentés nemcsak két, hanem akárhány részrendszer esetén is igaz. Szemléletesen megfogalmazva: *egy pontrendszer tömegközéppontjának helyvektorát úgy is meghatározhatjuk, hogy a pontrendszert alkotó részrendszerek tömegközéppontjába „gyűjtjük" a részrendszer tömegét, és ezen egyszerűsített pontrendszer tömegközéppontja a teljes rendszer tömegközéppontja* (2.55. ábra).



2.55. ábra

2.2.3.2. Kiterjedt testek tömegközéppontja

A tömegközéppont (2.56) definíciója szerint kiterjedt testek tömegközéppontját a következőképp értelmezhetjük:

A kiterjedt testet osszuk fel igen kis ΔV_i térfogatelemekre. Az ezekben lévő tömeg $\rho_i\Delta V_i$. A $\Delta m_i=\rho_i\Delta V_i$ pontszerű testdarabkák pontrendszert alkotnak, mely tömegközéppontjának helyvektora:

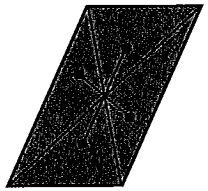
$$\mathbf{r}_{TKP}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\rho_i\Delta V_i\mathbf{r}_i}{m}.$$

Az $\mathbf{r}_{TKP}$ függ a test alakjától és a sűrűség eloszlásától. Kiszámítása általános esetben bonyolult. Közelítő eljárásokat alkalmazó számítógépes programok vannak forgalomban, melyek kielégítik a tervezés megkövetelte pontosságot.

A következőben megmutatjuk, hogy néhány speciális esetben hol helyezkedik el néhány homogén test tömegközéppontja:

– *középpontosan szimmetrikus, homogén testek és síkidomok tömegközéppontja a szimmetriacentrum.*

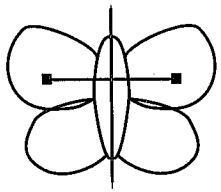
A centrálisan szimmetria miatt ugyanis a test tetszőleges térfogatelemének van ugyanolyan, ugyanakkora tömegű szimmetrikus párja (2.57. ábra). Ezeknek a pároknak a tömegközéppontja a szimmetriacentrum, és így a rendszer tömegközéppontja a szimmetriacentrum.



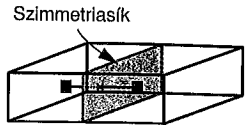
2.56. ábra

– *tengelyesen szimmetrikus, homogén síkidomok tömegközéppontja a szimmetriatengelyen helyezkedik el.*

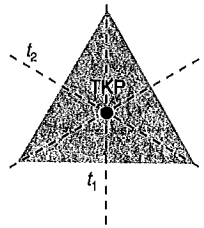
A tengelyes szimmetria miatt ugyanis a test tetszőleges térfogatelemének van ugyanolyan tömegű szimmetrikus párja, mely a szimmetriatengelytől ugyanakkora távolságra helyezkedik el, és tömegközéppontja a szimmetriatengelyen helyezkedik el. Ilyen párokból álló rendszerekkel helyettesítve a testet, olyan pontrendszert kapunk, melynek tömegközéppontjai egy egyenesen, a szimmetriatengelyen helyezkednek el. Mivel a tömegközéppont a tömegpontokat összekötő szakaszon van rajta, ezért a teljes rendszer tömegközéppontja is ezen az egyenesen helyezkedik el (2.57. ábra).



2.57. ábra



2.58. ábra

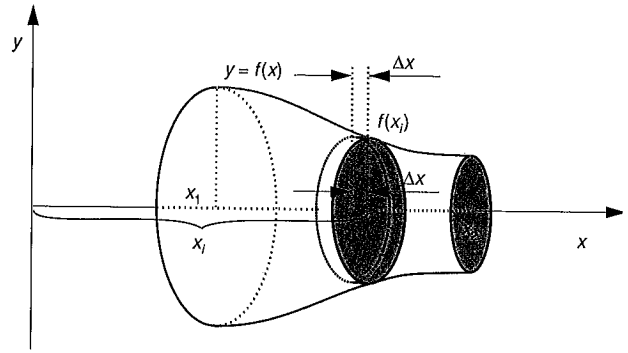


2.59. ábra

– *síkra szimmetrikus homogén testek tömegközéppontja a szimmetriasíkban van.*

Indoklása ugyanolyan, mint az előbbi esetben (2.58. ábra).

– *forgásszimmetrikus testek tömegközéppontja a forgástengelyen van. Homogén forgástestek tömegközéppontjának meghatározása.*



2.60. ábra

Származtassuk a m tömegű, ρ sűrűségű testet az $f(x)$ görbe x tengely körüli megforgatásával (2.60. ábra)! Az x tengelyt osszuk fel egyenlő Δx távolságokra! Az osztópontokban vegyünk fel az x tengelyre merőleges síkokat! A testből a síkok által kivágott alakzatokat közelítsük Δx magasságú, $f(x_i)$ hengerekkel! Egy henger térfogata $\pi f^2(x_i)\Delta x$ tömege $\rho\pi f^2(x_i)\Delta x$. A test tömegének közelítő értéke:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho\pi f^2(x_i)\Delta x.$$

A tömegközéppont közelítő x koordinátája:

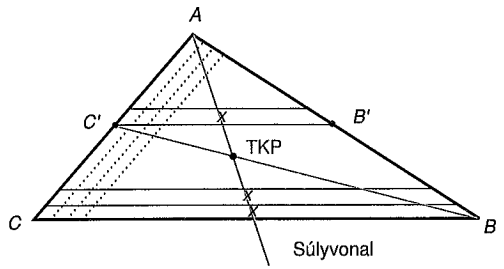
$$x_{\text{TKP}} \approx \frac{\sum_{i=1}^{N} \rho\pi f^2\left(x_i\right)\Delta x x_i}{\sum_{i=1}^{N} \rho\pi f^2\left(x_i\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i f^2\left(x_i\right)\Delta x}{\sum_{i=1}^{N} f^2\left(x_i\right)}.$$

A Δx-el 0-hoz tartva kapjuk:

$$x_{\text{TKP}} = \frac{\int_{x1}^{x2} x f^2\left(x\right)\mathrm{d}x}{\int_{x1}^{x2} f^2\left(x\right)\mathrm{d}x}.$$

A fentiek alapján az *egyenes kúp tömegközéppontja* magasságának az alaplaptól számított egynegyedében van. Hasonló meggondolások alapján a szabályos sokszög alapú, egyenes gúlák tömegközéppontja is magasságuk negyedében van.

– *szimmetrikus testekből összerakható testeknél a testet felosztjuk olyan részekre, melyek tömegét és tömegközéppontját ismerjük, és az így kapott rendszer tömegközéppontját határozzuk meg.*



2.61. ábra

Például egy egyenletes vastagságú homogén háromszöglemez tömegközéppontját úgy határozhatjuk meg, hogy gondolatban az egyik oldallal párhuzamos egyenesekkel igen kis magasságú trapézokra vágjuk (2.61. ábra). Mivel a trapézok magassága kicsi, ezért jó közelítéssel téglalapoknak foghatók fel, melyek tömegközéppontja a hosszabbik oldal felezőpontja. A majdnem egyenes szakasszá olvadó téglalapok, immár szakaszok, felezőpontjai a háromszög oldalának felezőpontját és a szemközti csúcsot összekötő szakaszon vannak rajta. (Az ABC háromszög és bármelyik $A'B'C'$ háromszög hasonlóak, a hasonlóság centruma A. Ezért a felezőpontok a szóban forgó egyenesen vannak rajta.) Így a háromszöglemezt helyettesíthetjük az ezen az egyenesen lévő tömegközéppontok halmazával, ezért a tömegközéppont ezen az egyenesen van. Ezt az egyenest a geometriában súlyvonalnak is nevezik. A másik oldallal párhuzamos felbontáskor a tömegközéppont a másik súlyvonalon is rajta van. Ezért a *homogén háromszöglemez tömegközéppontja a geometriai értelemen vett súlypont.*

2.2.3.3. A tömegközéppont mozgásának leírása

A tömegközéppontot definiáló (2.56) egyenlet alapján a *tömegközéppont sebessége:*

$$\mathbf{v}_{\text{TKP}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i},$$

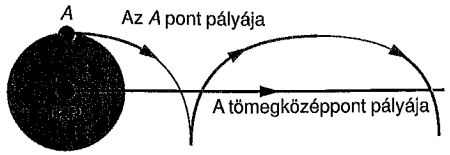
azaz

$$\boxed{\mathbf{v}_{\text{TKP}} = \frac{\mathbf{p}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}. \qquad (2.57)$$

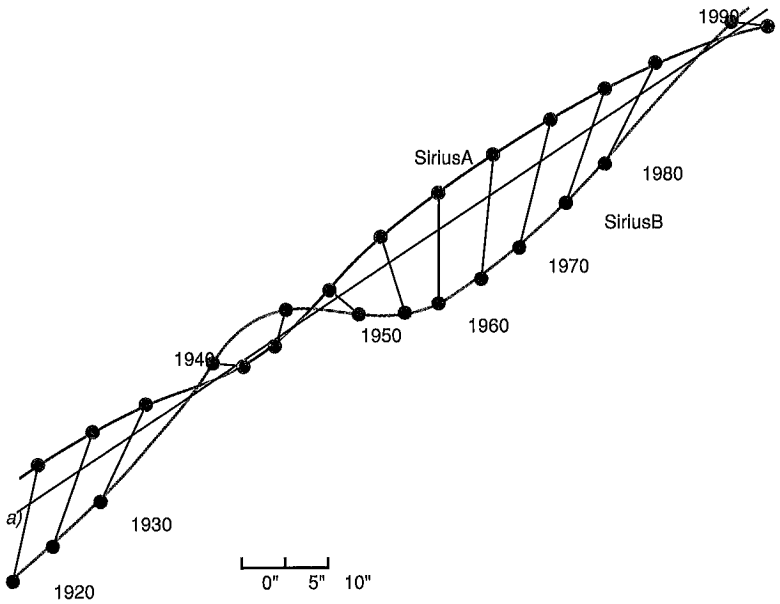
Látható, hogy ha a pontrendszer zárt, a tömegközéppont sebessége nem változik, mivel az impulzusmegmaradás tétele értelmében a rendszer teljes impulzusa sem változik. Ha a zárt rendszer tömegközéppontja nyugalomban volt, akkor a belső erők hatására a rendszert alkotó tömegpontok gyorsulhatnak, helyüket változtathatják, de a rendszer tömegközéppontja nyugalomban marad.

Zárt rendszer tömegközéppontja nyugalomban van vagy egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez.

A tapasztalat szerint a magukra hagyott testek pontjai általában bonyolult mozgást végeznek. Például egy légpárnás asztalon elfektetett, sikló és forgó homogén korongra ható erők eredője 0. A test pontjai bonyolult, görbült pályán mozognak, tehát gyorsulnak (2.62a. ábra). Az előző tétel alapján azonban itt is van olyan pont, amelyik egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez: a tömegközéppont. *Kiterjedt test esetén a test tömegközéppontja az a pont, amelyik minden esetben egyenes vonalú egyenletes mozgást végez vagy nyugalomban van, ha a testre nem hatnak erők vagy a rá ható erők eredője 0. A tömegközéppont tételének ez a megfogalmazása Newton I. törvényének általánosítása kiterjedt testekre.*



2.62a. ábra

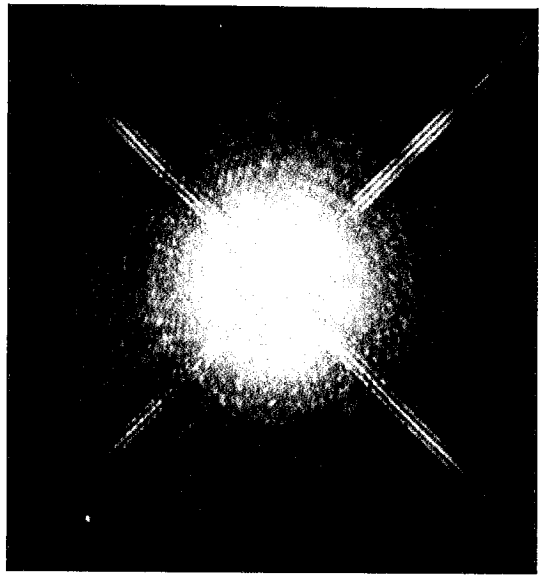


2.62b. ábra

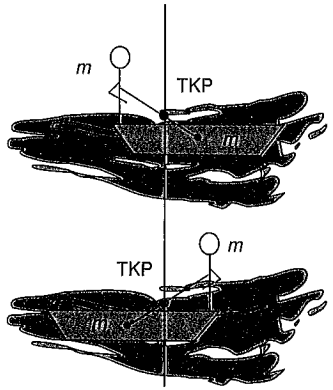
Másik példa a tömegközéppont tételének alkalmazására a Sirius csillag esete. Nagyobb távcsővel megfigyelve ez a csillag egymás körül keringő, két csillagból álló rendszer, *kettős csillag* (lásd 2.62c. ábra). A 2.62b. ábrán feltüntettük a két csillag pályáját 1920-tól 1990-ig. Látható, hogy a csillagok görbült pályán haladnak. Azonban ha a mindenkori helyzetüket összekötő szakasz *A*-hoz közelebbi harmadoló pontját berajzoljuk, akkor az egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Ez azt is bizonyítja, hogy a Földön felfedezett törvények a tőlünk távoli égitestekre is érvényesek, másrészt segítségükkel a két csillag tömegaránya is meghatározható. Néhány további adat ismeretében a csillagok tömege is megadható (lásd 2.4.1. pont).

Ha egy csendes tó vizén álló csónak egyik végéből a másikba megyünk, akkor a csónak elmozdul, de a rendszer tömegközéppontja helyben marad (2.63 ábra). Ez a rendszer jó közelítéssel zártnak tekinthető, hiszen a rendszerre ható külső erők eredője 0. (A rendszerre mozgás közben csak a kis sebesség miatt elhanyagolható közegellenállási erő hat, a nehézségi erőt pedig a felhajtóerő kompenzálja.)

Földi járművek esetén a motor és a jármű részei által egymásra kifejtett erők; ha a jármű egészét tekintjük rendszernek, ezek belső erők. Ezért a jármű elindulásának, lassulásának, kanyarodásának, azaz gyorsulásának nem a motor a közvetlen oka, hiszen belső erők a rendszer tömegközéppontját nem tudják gyorsítani. A jármű azonban nem zárt rendszer, ezért gyorsulhat a talaj általi kifejtett súrlódási erő (ez a külső erő) hatására.



2.62c. ábra



2.63. ábra

A tömegközéppont sebességét meghatározó (2.57) egyenlet rendezéséből következik, hogy egy *pontrendszer impulzusa a rendszer össztömegének és a tömegközéppont sebességének szorzata.*

Egy pontrendszer impulzusa függ a vonatkoztatási rendszer megválasztásától, hiszen a sebességek is függenek attól. A (2.57) egyenletből következik, hogy a *tömegközépponttal együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben a pontrendszer impulzusa* 0.

Ha párkölcsönhatásban részt vevő testek impulzusát a tömegközépponttal együtt mozgó vonatkoztatási rendszerhez viszonyítjuk, akkor a két test (változó) impulzusa minden pillanatban egyenlő nagy és ellentett irányú. Más vonatkoztatási rendszert választva csak az impulzusváltozásokra igazak a fentiek.

A tömegközéppont sebességét meghatározó (2.57) egyenletből meghatározhatjuk a tömegközéppont gyorsulását:

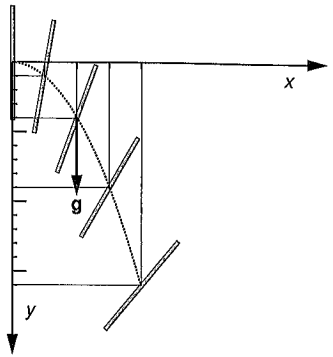
$$\mathbf{a}_{\mathrm{TKP}} = \frac{\Delta \mathbf{v}_{\mathrm{TKP}}}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (2.58)$$

Egy pontrendszer tömegközéppontjának gyorsulása egyenlő a külső erők vektori eredőjének és a rendszer tömegének hányadosával. Ez a *tömegközéppont mozgásának tétele.*

A tételt szemléletesen úgy is fogalmazhatjuk, hogy a *pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer tömegét a tömegközéppontba gyűjtenénk és erre a pontszerű testre a külső erők eredője hatna.*

Kiterjedt test tömegközéppontja a testre ható külső erők által megszabott mozgást végzi. A légüres térben pörögve repülő pálca részecskéi bonyolult mozgást végeznek a gravitációs erőtérben a gravitációs és a belső (molekuláris) erők hatására. A pálca tömegközéppontja azonban az előző tétel alapján parabolapályán mozog, **g** gyorsulással. (A pálcára ható erők eredője $m\mathbf{g}$, a pálca tömege m, ezért tömegközéppontjának gyorsulása **g** (2.64. ábra).

A motorokat úgy tervezik meg, hogy mozgó alkatrészeinek tömegközéppontja a felerősítő szerkezethez képest ne mozogjon. Amennyiben a tömegközéppont mégis mozog a rögzítő szerkezethez képest, akkor a rögzítő szerkezet fejti ki a tömegközéppont gyorsulásához szükséges erőt. Ennek az erőnek az ellenereje terheli a rögzítő rendszert. Mivel a tömegközéppont ebben az esetben általában periodikusan mozog, ezért a rögzítésre periodikus erő hat. Ez okozza a szerkezet periodikus terhelését, mely annak rezgéséhez, illetve rossz esetben töréséhez vezethet (lásd még a 2.4.10. pontot).



2.64. ábra

2.2.4. Pontrendszer perdülete

Pontrendszer adott pontra vonatkozó perdületén a rendszert alkotó tömegpontok ugyanerre a pontra vonatkoztatott perdületének vektori eredőjét értjük (lásd a 2.1.3. pontot):

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i.$$

A perdület még ugyanazon vonatkoztatási rendszerben is függ a vonatkoztatási pont megválasztásától, hiszen $\mathbf{r}_i$ is függ attól (lásd 2.1.3. pont).

Pontrendszer *saját perdülete* a rendszernek a saját tömegközéppontjára vonatkoztatott perdülete. Jele $\mathbf{N}_s$.

Pontrendszer *pályaperdülete (impulzusnyomatéka)* a rendszer tömegközéppontjába képzelt, a rendszer tömegével egyenlő tömegű pontszerű test perdülete a választott vonatkoztatási pontra vonatkoztatva. Jele: $\mathbf{N}_p$.

Egy pontrendszer perdülete a pályaperdület és a saját perdület vektori eredője:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_p + \mathbf{N}_s. \qquad (2.59)$$

Ugyanis: legyen a rendszer tömegközéppontjának helyvektora $\mathbf{r}_{\mathrm{TKP}}$, sebessége $\mathbf{v}_{\mathrm{TKP}}$ egy általunk választott „nyugvó" rendszerben! A „mozgó" rendszer origója legyen a tömegközéppont, sebessége pedig a tömegközéppont sebessége! A „nyugvó" rendszerbeli adatokat vesszőtlen, a „mozgó" rendszerbelieket vesszővel indexelt betűkkel jelöljük. Az (1.9) és az (1.10.) képletek alapján:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\mathrm{TKP}} + \mathbf{r}'_i, \qquad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\mathrm{TKP}} + \mathbf{v}'_i.$$

A perdület definíciója (lásd 2.1.3.2. alpontot) alapján a pontrendszer perdülete:

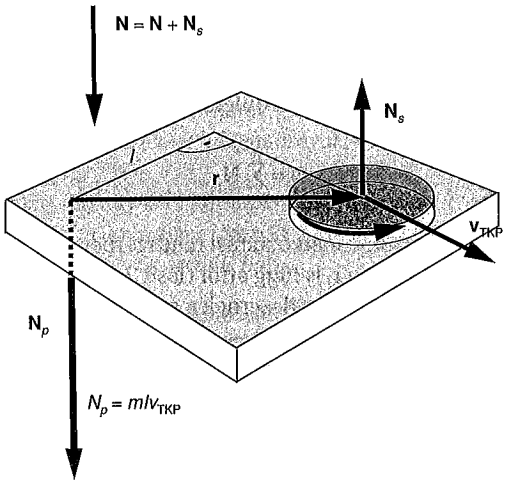
$$\mathbf{N}=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\mathbf{r}_{\mathrm{TKP}}+\mathbf{r}_i'\right)\times m_i\left(\mathbf{v}_{\mathrm{TKP}}+\mathbf{v}_i'\right)\right].$$

A kijelölt műveleteket elvégezve és a megfelelő tényezőket kiemelve:

$$\mathbf{N}=\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_i'\right)\times\mathbf{v}_{\mathrm{TKP}}+\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{r}_i'\times m_i\mathbf{v}_i'\right)+\mathbf{r}_{\mathrm{TKP}}\times\mathbf{v}_{\mathrm{TKP}}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)+\mathbf{r}_{\mathrm{TKP}}\times\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}_i'\right).$$

Az összeg első tagja 0, mert első szorzótényezője a tömegközéppont helyvektorának m-szerese, ami a tömegközépponti origójú vonatkoztatási rendszerben nyilván 0. Az összeg második tagja a saját perdület, harmadik tagja a pályaperdület. Az összeg utolsó tagja 0, mert második szorzótényezője a tömegközéppont sebességének m-szerese, ami a tömegközépponthoz rögzített vonatkoztatási rendszerben 0.

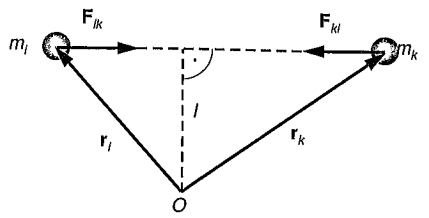
A 2.65. ábrán ezek a vektorok egyező vagy ellentétes irányúak, ezért ebben az esetben a vektori összeadás előjeles számok algebrai összegeként jelentkezik.



2.65. ábra

A perdületmegmaradás elve. *Ha egy pontrendszerre nem hatnak külső erők vagy külső erők forgatónyomatékainak eredője 0, akkor a rendszer ugyanezen pontra vonatkoztatott perdülete nem változik.*

Ha a belső erők centrálisak, akkor a 2.66. ábra szerint az $\mathbf{F}_{ik}$ és az $\mathbf{F}_{ki}$ erők forgatónyomatékai egyenlő nagyok és ellentettek, mert az erők és az erőkarok nagysága megegyezik, és az erők ellentétes irányba hatnak, „perdítenek".



2.66. ábra

Összegezve a forgatónyomatékokat, a belső erők forgatónyomatékainak összege és ezzel együtt az általuk létrehozott perdületváltozások összege is 0.

Általában nem mondhatjuk biztosan, hogy a rendszer részecskéi között centrális erők hatnak. Ennek ellenére a tapasztalat szerint a perdületmegmaradás elve bármilyen testre, testrendszerre igaz, függetlenül a kölcsönhatás jellegétől. Ez a kijelentés nem vezethető le a dinamika alaptörvényeiből, azoktól független tapasztalati tény. A perdület megmaradása ugyanolyan alapvető tapasztalati törvény, mint az impulzus megmaradása.

A tétel kiterjedt testekre is érvényes. A testet felosztjuk pontszerű darabkákra és ezek perdületét összegezzük.

A perdületmegmaradás tétele elektromágneses erők esetén is érvényes azzal a megszorítással, hogy a mező perdületét is számításba kell vennünk. (A mozgó töltések között fellépő erők általában nem centrálisak [lásd (8.30b) képlet].

Pontrendszer perdületének megváltozása. A perdületmegmaradás elve alapján a pontrendszer perdületét belső erők nem tudják megváltoztatni. Az i-edik tömegpont perdületének változása:

$$\Delta\mathbf{N}_i=\left(\mathbf{M}_i+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}_{ik}\right)\Delta t,$$

ahol $\Delta\mathbf{N}_i$ az i-edik tömegpont perdületének megváltozása, $\mathbf{M}_i$ az i-edik tömegpontra ható külső erők eredő forgatónyomatéka, $\mathbf{M}_{ik}$ az i-edik tömegpontra a rendszer k-dik tömegpontja által kifejtett belső erő forgatónyomatéka. Az n számú egyenletet összeadva a jobb oldalon a belső és a külső erők forgatónyomatékainak összege szerepel. A belső erők forgatónyomatékainak eredője 0, hiszen nem változtatják a rendszer perdületét. A jobb oldalon csak a külső erők forgatónyomatékainak eredője áll, a bal oldal pedig a rendszer perdületének megváltozása:

$$\frac{\Delta\mathbf{N}}{\Delta t}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}_{i,\ \text{külső}},\qquad(2.60a)$$

azaz *a pontrendszer perdületének időegységre eső megváltozása, változási sebessége a külső erők forgatónyomatékainak összegével egyenlő.* Ez az úgynevezett perdülettétel. Hasonló összefüggés írható fel a saját perdületre is. *Egy pontrendszer saját perdületének időegységre eső változása, változásának sebessége egyenlő a külső erők tömegközéppontra vonatkoztatott forgatónyomatékainak eredőjével:*

$$\frac{\Delta \mathbf{N}_S}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{i,\,\text{kül, TKPre}}. \qquad (2.60b)$$

Ez a sajátperdület-tétel.

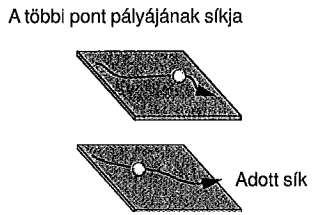
2.2.4.2. Pontrendszer tengelyre vonatkoztatott perdülete és a tengelyre vonatkoztatott forgatónyomaték

Az alapfokú fizikában a perdület és a forgatónyomaték tengelyre vonatkoztatott értékeit használjuk, mivel főként olyan problémákkal foglalkozunk, amelyeknél a tömegpontok vagy kiterjedt test részecskéi olyan síkmozgást végeznek, amelynek síkjai párhuzamosak egy időben állandó helyzetű síkkal (2.67. ábra). A tengely erre a síkra merőleges (lásd még a 2.1.3. pontot). A koordináta-rendszert vegyük fel úgy, hogy az x és y tengelyek síkja az időben állandó helyzetű síkkal legyen párhuzamos!

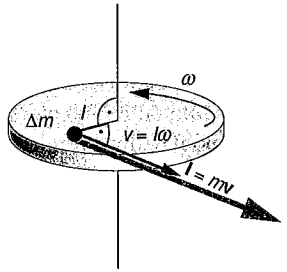
A *perdület tengelyre vonatkoztatott értéke előjeles skalár.* Nagysága az impulzusnak és az impulzusvektor „karjának" szorzata [lásd (2.21) képlet].

A 2.68. ábrán látható merev, forgó korong egy kiszemelt, Δm tömegű részecskéje a tengelyre merőleges síkú körpályán kering v sebességgel. Sebessége és így impulzusa is merőleges körpályájának l sugarára. Impulzusának tengelyre vonatkoztatott „karja" az ábra szerint a tengely és a pályasík O döféspontjából az impulzusvektor egyenesére bocsátott merőleges szakasz hossza, azaz a körpálya l sugara. Az N előjele pozitív, ha a pont az óramutató járásával ellentett irányban forog. Az ábra jelöléseivel és a minden részecskére azonos szögsebességgel is kifejezve a kiszemelt részecske tengelyre *vonatkoztatott* ΔN *perdülete:*

$$\boxed{\Delta N = l\Delta m v = \Delta m l^2 \omega}. \qquad (2.61)$$



2.67. ábra



2.68. ábra

Az ábrán látható forgó korong minden egyes részecskéjének ugyanolyan előjelű a perdülete. A korong részecskéinek tengelyre vonatkoztatott össszperdülete az egyes részecskék tengelyre vonatkoztatott perdületeinek algebrai összege.

Az *erő tengelyre vonatkoztatott forgatónyomatékán* hasonlóképpen az erő nagyságának és az erő karjának szorzatát értjük. Ez szintén előjeles skaláris mennyiség, amely pozitív, ha a tengely irányából nézve az óramutató járásával ellentett irányban „forgat".

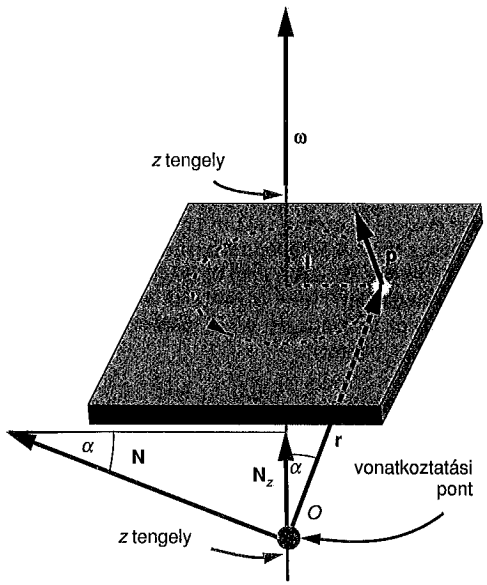
$$\boxed{M = Fl}. \qquad (2.62)$$

Itt olyan erőről van szó, amelynek vektora a mozgás síkjában van. Amennyiben az erő nem a mozgás síkjában van, akkor a képletbe a síkra merőleges vetületét helyettesítjük be. A (2.59)–(2.60b) tételek a tengelyre vonatkoztatott perdületekre és forgatónyomatékra is igazak, azzal a különbséggel, hogy vektori összegzés helyett itt előjeles skalárok algebrai összeadásával dolgozhatunk.

A pontra és a tengelyre vonatkoztatott mennyiségek kapcsolata.

Válasszuk a koordináta-rendszer z tengelyéül a kiszemelt tengelyt és az O vonatkoztatási pont legyen rajta a tengelyen! A 2.69. ábra az m tömegű test tengelyre vonatkoztatott perdülete:

$$N = mlv = mvr\sin\alpha = |\mathbf{N}|\sin\alpha = N_z. \qquad (2.63)$$



2.69. ábra

Ilyen választással tehát a perdület és a forgatónyomaték tengelyre vonatkoztatott értékei a vektorok z koordinátái. Ezért igazak a vektorokra kimondott tételek a tengelyre vonatkoztatott mennyiségekre.

2.2.5. Pontrendszerekre vonatkozó energetikai tételek

Pontrendszer mozgási energiája a tömegpontok mozgási energiáinak összege:

$$E_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2. \tag{2.64}$$

Egy pontrendszer mozgási energiája felírható a következőképpen is:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{\text{TKP}}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2, \tag{2.65}$$

ahol m a rendszer össztömege, v_{TKP} a tömegközéppontjának sebessége, v'_i az i-edik tömegpont tömegközépponthoz rögzített vonatkoztatási rendszerhez viszonyított sebességének nagysága. Szemléletesen fogalmazva *a pontrendszer mozgási energiája a tömegközéppont mozgásából és a tömegközépponthoz viszonyított mozgásokból származó mozgási energiák összege.*

Bizonyítás: A 2.1.6. jelöléseit és a mozgási energiára vonatkozó (2.38) képletet használva $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{\text{TKP}}$, és $\mathbf{v}'_i$ a tömegközépponttal együtt mozgó vonatkoztatási rendszerhez képesti sebesség. Ezzel:

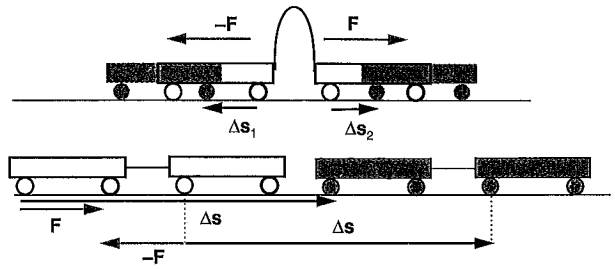
$$E_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{TKP}}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i v'_i v_{\text{TKP}} \cos\alpha_i.$$

Az $m_i v'_i \cos\alpha_i$ az i-edik tömegpont impulzusának $\mathbf{v}_{\text{TKP}}$ irányú komponense. Legyen például az x' tengely $\mathbf{v}_{\text{TKP}}$ irányú. A 2.2.3.pont alapján a tömegközéppontra vonatkoztatott impulzusok vektori eredője 0, ezért a vektori eredő x' komponense is 0. Így az összeg utolsó tagja 0. Ha nem a tömegközépponttal együtt mozgó vonatkoztatási rendszert veszünk, akkor a harmadik tag általában nem 0, és így a rendszer mozgási energiája nem két, hanem három (!) tagból áll.

E tételt alkalmazzuk pl. a síkmozgást végző merev testek mozgási energiájának meghatározására (lásd a 2.3.3. pontot).

Az egyes tömegpontokra felírt munkatételek összeadásával kapjuk a *pontrendszerre vonatkozó munkatételt: pontrendszer mozgási energiájának megváltozása egyenlő a rendszer tagjaira ható külső és belső erők munkáinak (algebrai) összegével.*

A tétel szerint a *belső erők munkája is megváltoztathatja* a rendszer mozgási energiáját. A belső erők munkája nem „esik" ki, mint az $\mathbf{F}\Delta t$ szorzatok az impulzustételnél. Például vegyünk két, nyugalomban lévő kiskocsit, melyek közé egy összenyomott rugót helyeztünk (2.70. ábra). A rugó rögzítését feloldva mindkét kiskocsi a tömegével fordított arányos sebességre tesz szert. A rugó általa kifejtett belső erők munkái egyező előjelűek, pozitívak. A két erő a hatás–ellenhatás elve alapján egyenlő, de az elmozdulások nagysága is különböző (a tömegekkel fordítottan arányosak) ezért még a két munka nagysága sem egyenlő.



2.70. ábra

A belső erők munkái kikompenzálják egymást, ha az elmozdulások egyenlő nagyok és egyező irányúak. Pl. ha a vízszintes asztallapon nyújthatatlan fonállal összekötött kiskocsikat gyorsítunk egy $\mathbf{F}$ erővel, akkor a fonálerő munkája $F_f \Delta s$, illetve $-F_f \Delta s$ (2.70. ábra). A rendszer mozgási energiájának megváltozása ebben az esetben a külső erő munkájával egyenlő.

Mechanikai energiák megmaradásnak elve a pontrendszerre.
Ha egy rendszerre ható külső és belső erők konzervatívak, akkor a rendszer mechanikai energiáinak összege állandó.

Itt is hathatnak olyan külső vagy belső erők, melyek munkája nulla.

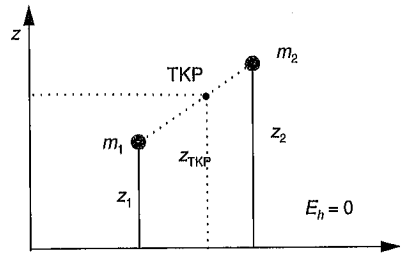
Bizonyítás: A rendszerre felírhatjuk a munkatételt:

$$E_{m_2} - E_{m_1} = \sum_{i=1}^{n} W_{i,\text{belső}} + \sum_{i=1}^{n} W_{i,\text{külső}}.$$

Mivel a belső és a külső erők konzervatívak, ezért az általuk végzett munka a belőlük származtatható potenciális energiák megváltozásával egyenlő. Az egyenletet átírva [lásd 2.1.6. fejezet és (2.47) képlet]:

$$E_m + E_{P,\text{belső}} + E_{P,\text{külső}} = \text{állandó}. \tag{2.66}$$

Egy *pontrendszer gravitációs helyzeti energiája homogén gravitációs erőtérben* a tömegpontok helyzeti energiáinak összege. Feltesszük, hogy testek tömege olyan kicsi, hogy az általuk létrehozott gravitációs erőtér a külső, homogén erőtérhez képest elhanyagolható.



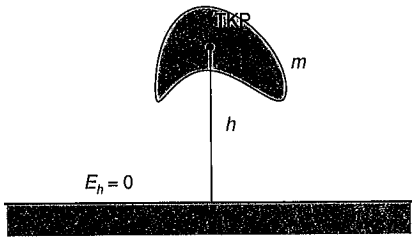
2.71. ábra

Válasszuk meg úgy a koordináta-rendszert, hogy vízszintes *xy* síkja egyben a vonatkoztatási sík legyen! Az *i*-edik pont magassága z_i (2.71. ábra). Ekkor:

$$E_h = \sum_{i=1}^{n} m_i g z_i = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = m g z_{TKP} . \qquad (2.67)$$

Tehát egy *pontrendszer helyzeti energiája a homogén gravitációs erőtérben úgy is kiszámítható, hogy képezzük a pontrendszer tömegének, gravitációs gyorsulásának és tömegközéppontja magasságának szorzatát.*

A kijelentés kiterjedt, folytonos eloszlású testekre is érvényes (2.72. ábra).



2.72. ábra

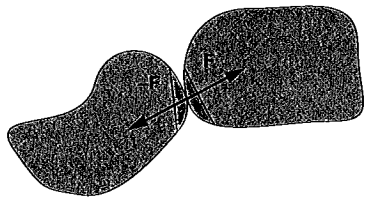
Ha az erőtér nem homogén, akkor a gravitációs energiát nem számíthatjuk ki ilyen egyszerűen, hiszen ekkor **g** a hely függvénye.

2.2.6. A kiterjedt testre ható erők jellemzői. Az erő támadáspontja és hatásvonala. Pontba koncentrált, felületen eloszló és térfogati erők

A testre ható erő lehet nagy hatótávolságú erő, amely a test minden részecskéjére hat. Ilyen erő például gravitációs erő vagy elektromos mezőbe helyezett szigetelőanyagra ható erő.

Azokat az erőket, amelyek a test teljes térfogatában a test minden egyes részecskéjére (térfogatelemében lévő anyagra) hatnak, *térfogati erőknek* nevezzük. A homogén erőtérben lévő homogén testre ható térfogati erő a test térfogatával egyenesen arányos.

Ha két test úgy fejt ki erőt egymásra, hogy igen kis, pontszerű felületen érintkeznek, akkor ezt az erőt *pontba koncentrált erőnek* nevezzük (2.73. ábra).

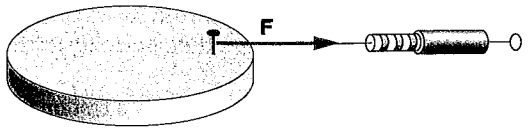


2.73. ábra

Ilyenkor a két test érintkezési pontjában, egy pontszerű tartományban csak molekuláris erők hatnak az érintkezési ponthoz közeli részecskék között. A test távolabbi részecskéire már nem hatnak a másik test részecskéi, hiszen a molekuláris erők rövid hatótávolságúak. A testnek azok a részecskéi, amelyek az érintkezési ponttól távol vannak, a következő okok miatt gyorsulnak: Az érintkezési pont kis környezetében lévő részecskék gyorsulni kezdenek a másik test részecskéinek hatására. Ezért ezek a részecskék a test velük szomszédos részecskéitől távolodni (vagy hozzájuk közeledni) fognak. Így közöttük vonzó- vagy (taszító-) erő ébred. Ennek hatására ezek a részecskék is távolodnak a velük szomszédos, de az érintkezési ponttól távolabbi részecskéktől (vagy közelednek hozzájuk). Így ezek a részecskék is gyorsítják a velük szomszédosakat, majd azok a további szomszédokat és így tovább. Így a test minden részecskéje gyorsulhat.

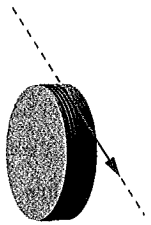
Tehát a külső erő most csak a pontrendszer egy jól körülhatárolt kis tartományára hat, csak azt gyorsítja közvetlenül. Ezt a pontszerű tartományt nevezzük az erő *támadáspontjának.* Az erő iránya az ebben tartományban lévő részecskékre ható erők eredőjének iránya. A *hatásvonal* a támadásponton átmenő, az erő vektorával párhuzamos egyenes.

Természetesen a test tömegközéppontja gyorsulásának iránya a testre ható erő irányával egyezik meg (ha nem hat a testre más erő).



2.74. ábra

Kísérletekben jól meghatározott támadáspontú és hatásvonalú erőt a 2.74. ábra szerint hozhatunk létre. A hajlékony fonalak a hozzájuk erősített pontszerű testet a megfeszült fonál egyenesének irányába gyorsítják. Egy ilyen hajlékony fonalat erősítünk a testhez. A fonál és a test pontszerű érintkezési tartománya a támadáspont. A kifeszített fonál egyenese a testre ható fonálerő *hatásvonalát* tűzi ki. A fonál másik végéhez rugós erőmérőt erősítve az erőmérő a fonál által kifejtett erő nagyságát is mutatja. Ezt csak akkor mutatja elegendő pontossággal, ha a fonál tömege elhanyagolható a test tömegéhez képest (l. 2.4.13. pontot).



2.75. ábra

Egy hengerre csavart vékony fonál által kifejtett erőnek is jól meghatározott a támadáspontja és hatásvonala (2.75. ábra). A hengeren még rajta lévő, a hengerhez képest elhanyagolható tömegű fonalat „hozzászámítjuk" a testhez. Mivel a fonál tömege elhanyagolható, ezért az a tömegközéppont gyorsulását és a perdületváltozását nem befolyásolja. Itt a támadáspont az a pont, ahol a fonál éppen elválik a hengertől, a hatásvonal pedig a letekeredő fonál egyenese, a henger érintője.

Felületen eloszló erőről, felületi erőről beszélünk akkor, ha a kölcsönható testek egy nem pontszerű felületen érintkezve fejtenek ki erőt egymásra. Ilyen erők például a súrlódási és a testek felszíne által kifejtett erők.

Példák a felületi erőkre: a vízszintes felületen nyugvó testre ható kényszererő, amely merőleges a felületre. Ha a test az asztalon csúszik, akkor a kényszererő és a súrlódási erő eredője, azaz az asztal által kifejtett felületi erő nem merőleges a felületre. A folyadékokban fellépő nyomóerők is felületi erők, amelyek merőlegesek a felületre. A folyadékhoz képest mozgó testeknél már a felülettel párhuzamos erők is felléphetnek.

A térfogati és felületi erők bizonyos esetekben helyettesíthetők pontba koncentrált erővel. Pl. a merev testre ható nehézségi erő helyettesíthető pontba koncentrált eredővel (lásd 2.3.4.3. alpontot).

2.3. Merev test mozgásának dinamikája

A továbbiakban a 2.1.3. pont jelöléseit és elnevezéseit fogjuk használni.

2.3.1. Rögzített tengely körül forgó merev test dinamikája

Ha a merev test rögzített tengely körül forog, akkor pontjai síkmozgást végeznek, a pályasíkok merőlegesek a tengelyre. Ezért ebben a fejezetben a tengelyre vonatkoztatott perdület és forgatónyomaték fogalmát használjuk.

2.3.1.1. Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete

Osszuk fel a merev testet igen kis pontszerű, Δm_i tömegű térfogatelemekre! Legyen az i-edik térfogatelem forgástengelytől való távolsága l_i, az i-edik térfogatelem perdülete a tengelyre vonatkoztatva N_i (lásd 2.2.4 pont). A merev test perdülete:

$$N=\sum_{i=1}^{n} N_i=\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i l_i=\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i l_i^2 \omega=\omega \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i l_i^2 \qquad (2.68a)$$

Itt ω azért emelhető ki, mert értéke merev test esetén minden pontra ugyanaz.

A $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i l_i^2$ skaláris mennyiség neve *tehetetlenségi nyomaték*. Jele: Θ (esetleg J). mértékegysége: kgm².

$$\boxed{\Theta=\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i l_i^2}. \qquad (2.68b)$$

Ezzel a jelöléssel a perdület:

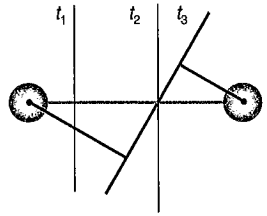
$$\boxed{N=\Theta\omega}. \qquad (2.69)$$

2.3.1.2. A testek tehetetlenségi nyomatéka

Pontszerű test tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = ml^2. \tag{2.70}$$

A test adott tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka a (2.68b) képlet szerint függ a test tömegétől, a test méreteitől, tömegeloszlásától. Adott test tehetetlenségi nyomatéka függ még a tengely testhez viszonyított helyzetétől: a tengely párhuzamos eltolásakor, illetve elforgatásakor a tehetetlenségi nyomaték más és más lehet.



2.76. ábra

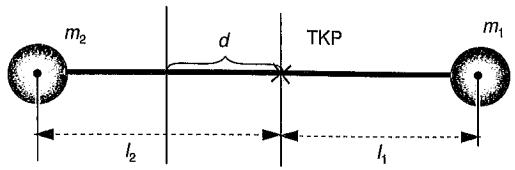
Pl. a 2.76. ábrán látható, hogy a két pontszerű testből álló testnél a t_1, t_2, és t_3 tengelyekre a tehetetlenségi nyomatékok eltérőek, hiszen a tengelytől való merőleges távolságuk is megváltozik más tengelyre való áttérésnél.

Egy pontrendszer tehetetlenségi nyomatéka nem változik, ha pontjait a tengellyel párhuzamosan eltoljuk. Még akkor sem változik a tehetetlenségi nyomaték, ha a pontrendszert egy a tengelyre merőleges síkba „összenyomjuk". Ezért pl. egy hengerpalást, illetve henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyre vonatkoztatva egyenlő a vele egyező tömegű és sugarú karika, illetve körlap tehetetlenségi nyomatékával.

A tehetetlenségi nyomaték megváltozik, ha a tengelyt önmagával párhuzamosan (de nem önmagában) eltoljuk.

Legyen Θ_{TKP} a tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték! A tömegközépponton átmenő tengellyel párhuzamos, attól d távolságra lévő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték pedig Θ_d, m a test tömege. A két tehetetlenségi nyomaték közötti összefüggést adja meg a *Steiner-tétel.*

$$\Theta_d = \Theta_{TKP} + md^2. \tag{2.71}$$



2.77. ábra

A tételt a 2.77. ábra szerinti elhanyagolható tömegű rúddal összekötött két pontszerű test esetére látjuk be.

$$\Theta_{TKP} = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$$

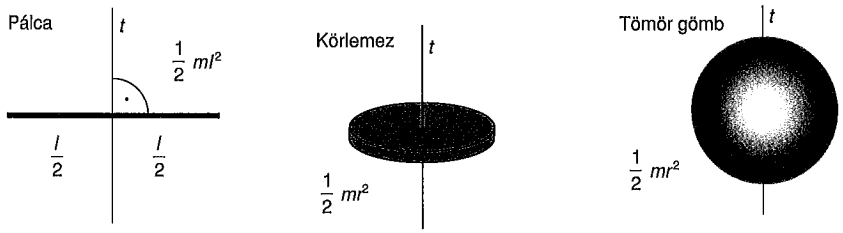
$$\Theta_d = m_1 \left(l_1 + d\right)^2 + m_2 \left(l_2 - d\right)^2 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + \left(m_1 + m_2\right) d^2 + 2d\left(m_1 l_1 - m_2 l_2\right).$$

Az utolsó tag a tömegközéppont definíciója értelmében 0.

A tételből következik, hogy az egymással párhuzamos tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok közül a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatott a legkisebb.

Az adott ponton átmenő különböző irányú tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékoknak helyi szélsőértéke van három, a testre jellemző, egymásra merőleges tengely esetén. A tömegközépponton átmenő olyan tengelyeket, amelyekre a tehetetlenségi nyomatéknak helyi szélsőértéke van, *főtengelyeknek,* az ezekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékokat *fő tehetetlenségi nyomatékoknak* nevezzük.

A tehetetlenségi nyomaték kiszámítása egyszerűbb esetekben az integrálszámítás segítségével lehetséges a definiáló képlet alapján. A 2.78. ábra néhány test tehetetlenségi nyomatékát tartalmazza tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatva.



2.78. ábra

Ha a testet több testre osztjuk fel, akkor az adott tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok összeadódnak. Pl. a 2.79. ábra szerinti rendszer tehetetlenségi nyomatéka a két test t tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékainak összege.

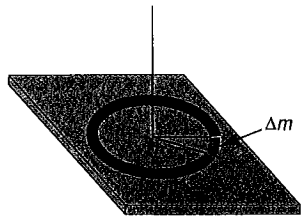


2.79. ábra

Egy elhanyagolható vastagságú, m tömegű karika tehetetlenségi nyomatéka a középpontján átmenő, a karika síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatva:

$$\Theta = mr^2, \tag{2.72}$$

ahol r a karika sugara.



2.80. ábra

Ezt az alábbiakban láthatjuk be: osszuk fel a karikát a sugarához képest kicsiny hosszúságú ívekre, amelyek tömegét Δm_i-vel jelöljük (2.80. ábra)! A kapott pontrendszer tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r^2 = r^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = r^2 m.$$

2.3.1.3. A forgómozgás alaptörvénye rögzített tengely körül forgó merev testre

A testet pontrendszernek felfogva a testre ható erő a pontrendszerre ható külső erő. Erre a pontrendszerre alkalmazva a (2.59) perdülettételt:

$$M = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Theta\omega_{\text{később}} - \Theta\omega_{\text{előbb}}}{\Delta t} = \Theta\frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

vagy behelyettesítve a szöggyorsulást:

$$\boxed{M = \Theta\beta}. \tag{2.73}$$

A tétel inerciarendszerben nyugvó vagy egyenes vonalú, egyenletes mozgást végző tengelyre vonatkozik.

A Θ-t azért emelhettük ki a számlálóban, mert a merev test pontjainak a forgástengelytől való távolsága, és így a tehetetlenségi nyomatéka sem változik a szöggyorsulás során.

A (2.73) összefüggésnek Newton II. törvényével való hasonlatossága alapján e törvényt gyakran *a forgómozgás alaptörvényének* is nevezik. A tehetetlenségi nyomatéknak az előbbiek alapján szemléletes jelentést tulajdoníthatunk: a tehetetlenségi nyomaték a „forgási tehetetlenség" mértéke abban az értelemben, hogy annak a testnek nagyobb a „forgási tehetetlensége", amelyik ugyanakkora forgatónyomaték hatására kevésbé „szöggyorsul".

Ha a testre ható erők forgatónyomatékainak algebrai összege nulla, akkor a test vagy nem forog, vagy egyenletes forgómozgást végez. Ez a kijelentés a pontszerű testekre vonatkozó tehetetlenség törvényének felel meg.

Egy merev testre ható, pontba koncentrált erő forgatónyomatéka nem változik, ha az erőt a hatásvonala mentén eltoljuk. A hatásvonal mentén történő eltolás nem változtatja meg az erőkart, hiszen az erőkar a tengelyből a hatásvonalra bocsátott merőleges szakasz hossza, így a forgatónyomaték és ezzel együtt szöggyorsulás sem változik.

2.3.2. Síkmozgást végző merev test dinamikája

A síkmozgást végző merev test mozgását az 1.2.2. szerint felbonthatjuk egy pontjának haladó mozgására és egy, ehhez a ponthoz rögzített (nem forgó) koordináta-rendszerben történő forgásra.

A tömegközéppont gyorsulását egyszerűen meghatározhatjuk a tömegközéppont tételének segítségével.

A forgás szögjellemzői és így a szöggyorsulás sem függ a forgástengely megválasztásától. Azonban a tehetetlenségi nyomaték és a forgatónyomaték már igen! Ha egy, a testtel együtt mozgó, gyorsuló tengelyre alkalmazzuk a forgómozgás (2.73) alaptörvényét (erre a tengelyre vonatkoztatjuk a tehetetlenségi nyomatékot és innen számítjuk az erőkart), a szöggyorsulásra többnyire hibás eredményt kapunk. Azonban a tömegközépponton átmenő tengelyre érvényes a (2.60b) sajátperdület-tétel. A tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatott mennyiségeket TKP indexszel jelölve [lásd még (2.68) és (2.69) képletek]:

$$\sum_{i=1}^{m} M_{i,\mathrm{TKP}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_{i,\mathrm{TKP}}^2 \omega_2 - \sum_{i=1}^{n} m_i r_{i,\mathrm{TKP}}^2 \omega_1}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_{i,\mathrm{TKP}}^2 \left(\omega_2 - \omega_1\right)}{\Delta t} = \frac{\Theta_{\mathrm{TKP}} \Delta\omega}{\Delta t} = \Theta_{\mathrm{TKP}} \beta.$$

Tehát szöggyorsulásra helyes eredményt kapunk, ha a tömegközépponton átmenő tengelyre írjuk fel a forgómozgás alapegyenletét.

Vigyázat! A forgómozgás alapegyenlete gyorsuló tengelyekre általában nem érvényes. A tömegközépponton átmenőre azonban még akkor is igaz, ha a tömegközéppont gyorsul!

A fenti két tétel alapján a síkmozgást végző merev test mozgásegyenletei:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_{\mathrm{TKP}}}, \tag{2.74}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} M_{i,\mathrm{TKP}} = \Theta_{\mathrm{TKP}} \beta}. \tag{2.75}$$

2.3.3. Merev test mozgási energiája

Mivel a merev test olyan pontrendszer, amelynek tagjai egymáshoz képest nem mozdulnak el, a belső erők munkáinak összege 0. Ezért a merev test mozgási energiájának megváltozása egyenlő a merev testre ható erők munkájával.

Rögzített tengely körül forgó merev test mozgási energiája. A merev testet osszuk fel pontszerű, Δm_i darabkákra, melyek a tengelytől l_i távolságra vannak és sebességük v_i! Egy darabka mozgási energiája $\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$. De $v_i = l_i\omega$, ahol az ω szögsebesség minden pontra ugyanaz, hiszen a merev test minden pontjának szögsebessége ugyanakkora. A rendszer teljes mozgási energiája:

$$E_{\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i l_i^2,$$

azaz

$$\boxed{E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2}. \tag{2.76}$$

Ezt a mozgási energiát *forgási energiának* is hívják.

Síkmozgást végző merev test mozgási energiája. A testet pontrendszernek tekintve a rendszer mozgási energiája (2.65) alapján (annak jelöléseit használva) felírható a következőképpen:

$$\boxed{E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{TKP}}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{TKP}}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{\mathrm{TKP}}\omega^2}, \tag{2.77}$$

ahol v'_i tömegközépponti rendszerhez viszonyított sebesség, és ezért a második tagban a tehetetlenségi nyomaték a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozik. A fenti formula szemléletesen: *egy síkmozgást végző merev test teljes mozgási energiája a tömegközéppont mozgásából „származó" haladó és (a tömegközépponton átmenő tengely körüli) forgómozgásból adódó mozgási energiák összege.*

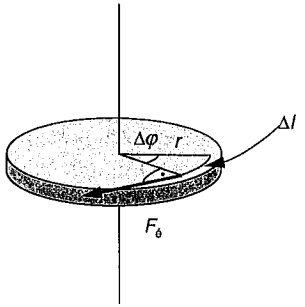
Vigyázat! Tetszőlegesen mozgó tengelyre a fenti összeg többnyire három tagból áll [lásd (2.66) *képlet bizonyítása]!*

A síkmozgást végző merev test teljes mozgási energiáját felírhatjuk úgy is, mint a pillanatnyi forgástengely körüli forgásból származó mozgási energiát:

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\Theta_{\substack{\text{pillanatnyi}\\ \text{tengelyre}}}\omega^2. \tag{2.78}$$

A forgatónyomaték munkája. Ha a rögzített tengely körül forgó merev testre az A pontban F erő hat, akkor annak munkája, azaz az erő érintőirányú komponensének és az A pont által befutott ívnek a szorzata: $W = F_{\text{érintő}}\Delta r = F_{\text{érintő}} r\Delta\varphi$ (2.81. ábra). Az $F_{\text{érintő}} r$ a forgatónyomaték definíciója szerint maga a forgatónyomaték. Ezért a forgatónyomaték munkája:

$$W = M\Delta\varphi. \tag{2.79}$$



2.81. ábra

2.3.4. Merev testre ható síkban szétszórt erők eredője

Itt csak olyan erőkkel foglalkozunk, amelyek egy síkban hatnak. Az alábbiakban felhasználjuk, hogy a merev testre ható, pontba koncentrált erő hatása nem változik, ha azt a hatásvonala mentén eltoljuk (lásd a 2.3.1.3. alpontot).

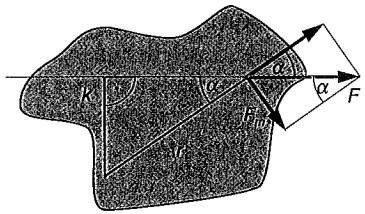
A merev testre ható két vagy több erő eredőjén értjük azt az egyetlen erőt, melynek egyedüli hatása ugyanaz, mint a két vagy több erőnek együttesen. Az erő „hatásán" itt a tömegközéppont gyorsulását és a szöggyorsulást értjük.

2.3.4.1. Két erő eredője

Nem párhuzamos, pontba koncentrált két erő eredője.

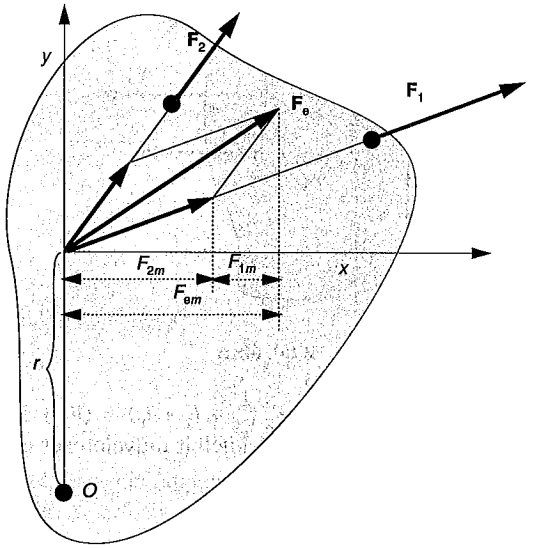
Az eredő nagysága és iránya a két erő vektori eredőjének nagysága és iránya. Az eredő hatásvonala két erő hatásvonalának metszéspontján megy át.

A tömegközéppont mozgásának tétele alapján a két erő vektori eredője a tömegközéppontot ugyanúgy gyorsítja, mint a két erő egyidejűleg.



2.82. ábra

Az azonos szöggyorsulás bizonyításához fogalmazzuk át a forgatónyomaték definícióját! A 2.82. ábra alapján, $M = Fk = Fr\sin\alpha$, ahol r az $\mathbf{F}$ erő támadáspontja és a t tengely távolságát mutató szakasz. Az erőt felbontva r irányú és arra merőleges komponensre, az $F\sin\alpha$ az erőnek F_m-mel jelölt merőleges komponense. Ezért M így is írható: $M = F_m r$.



2.83. ábra

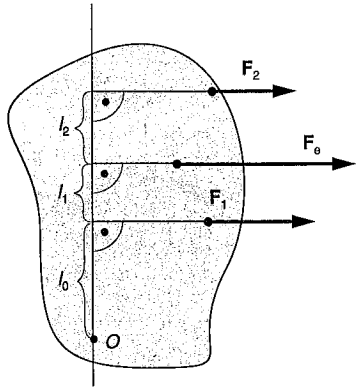
Eltolva a két erőt hatásvonalaik metszéspontjába, a két erő hatása nem változik. Ebben a pontban szerkesszük meg $\mathbf{F}_e$ eredőt (2.83. ábra) Az eredő forgatónyomatéka $F_{e,m}r$. Az ábra szerint felvett koordináta-rendszerben a merőleges komponensek az x irányú komponenseket jelentik. Az $\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ egyenlőség a komponensekre is igaz: $F_{e,m} = F_{1,m} + F_{2,m}$. Az egyenlőséget r-rel szorozva: $F_{e,m}r = F_{1,m}r + F_{2,m}r$. Tehát az így megszerkesztett eredő forgatónyomatéka az összetevő erők forgatónyomatékainak összege, szöggyorsító hatása is ugyanaz. A 2.83. ábra egyúttal a két erő eredőjének szerkesztési utasítása is.

Párhuzamos hatásvonalú, egyirányú erők eredője.

Az eredő nagysága a két erő nagyságának algebrai összege, iránya a két erő közös iránya. Az eredő hatásvonala az összetevő erők hatásvonala között helyezkedik el, velük párhuzamos és a közöttük lévő távolságot az erők nagyságával fordított arányban osztja.

Az eredő így meghatározott nagysága és iránya a tömegközéppontot ugyanúgy gyorsítja, mint a két erő együttesen.

Az eredő hatásvonalának olyan távolságra kell lennie a (tetszőlegesen megválasztott) forgástengelytől, hogy forgatónyomatéka a két erő forgatónyomatékának összege legyen.



2.84. ábra

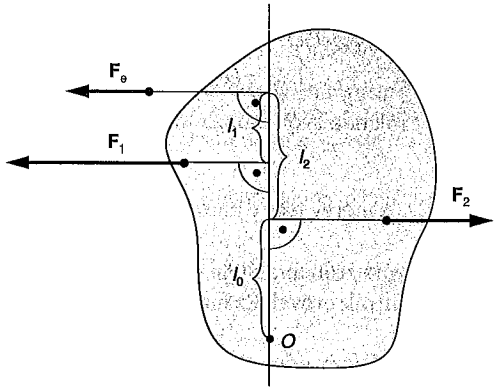
A 2.84. ábra jelöléseivel: $F_1 l_0 + F_2 (l_1 + l_2 + l_0) = (F_1 + F_2)(l_0 + l_1)$, ahol $F_1 + F_2$ a két erő eredőjének nagysága. A kijelölt műveleteket elvégezve kapjuk:

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}}. \qquad (2.80)$$

Párhuzamos hatásvonalú, ellentétes irányú erők eredője. *Az eredő nagysága a két erő nagyságának különbsége, iránya a nagyobbik erő iránya. Az eredő hatásvonala a két erő hatásvonalán kívül helyezkedik el, a nagyobbik erő hatásvonalához közelebb. Az eredő hatásvonalának a másik két erő hatásvonalától való távolsága fordítottan arányos a két erő nagyságával.*

Az eredő nagysága és iránya a két erő vektori eredőjének nagysága és iránya, ezért a tömegközéppont gyorsulása ugyanaz, mint a két erőnek együttesen. A (tetszőleges tengelyre vonatkoztatott) forgatónyomatékok egyenlőségére vonatkozó feltétel a 2.85. ábra szerint, figyelembe véve, hogy a forgatónyomatékoknak előjelük van:

$$F_1 (l_2 + l_0 - l_1) - F_2 l_0 = (F_1 - F_2)(l_0 + l_2).$$

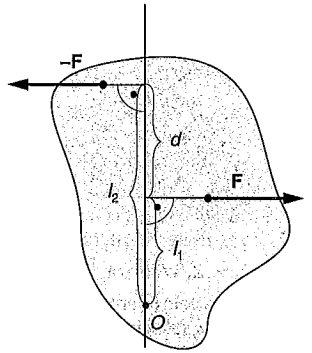


2.85. ábra

A kijelölt műveleteket elvégezve:

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}}. \qquad (2.81)$$

Az erőpár. A két, *egyenlő nagyságú és ellentett irányú erőből álló erőrendszert erőpárnak* nevezzük. Az erőpár vektori eredője 0, ezért a tömegközéppontot nem gyorsítja. *Egyetlen erővel nem helyettesíthető,* hiszen egyetlen erő a tömegközéppontot mindenképpen gyorsítja. Az erőpár által létrehozott szöggyorsulás azonban semmilyen tengelyre sem 0. A 2.86. ábra alapján az *erőpár forgatónyomatéka*: $M = Fl_2 - Fl_1 = F(l_2 - l_1)$. Az erőpár bármely tengelyre vonatkoztatva ugyanolyan irányú forgást eredményez.



2.86. ábra

Az *erőpár forgatónyomatékának nagysága is független a forgástengely* megválasztásától

$$\boxed{M = Fd}, \tag{2.82}$$

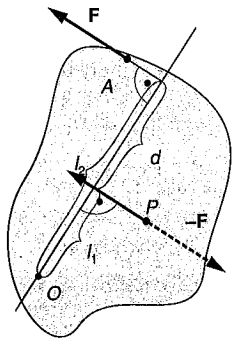
ahol d az erőpárt alkotó erők hatásvonalainak távolsága.

2.3.4.2. A merev testre ható több erő eredője

A merev testre ható szétszórt erők általában csak speciális esetben helyettesíthetők egyetlen pontba koncentrált erővel. Ez már két erő esetén sem lehetséges mindig, mint pl. az erőpárnál.

A merev testre ható tetszőleges erőrendszer helyettesíthető egyetlen pontba koncentrált eredővel és egy erőpárral.

Szemeljünk ki a merev test egy tetszőleges A pontjában támadó **F** erőt! Támadáspontját helyezzük át a tetszőlegesen kiválasztott P pontba úgy, hogy az új hatásvonal az előzővel párhuzamos legyen! Ezzel a tömegközéppont gyorsulása nem változott, a szöggyorsulás azonban igen, hiszen az **F** erő O pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka is megváltozott. A forgatónyomaték megváltozását kompenzálhatjuk egy másik forgatónyomatékkal, de úgy, hogy a tömegközéppont gyorsulása eközben ne változzék. Erre egy erőpár éppen megfelel, mert annak hozzáadása az **F** erőhöz, nem változtatja meg a tömegközéppont gyorsulását, de van forgatónyomatéka. Minden olyan erőpár megfelel, amelynek forgatónyomatéka az **F** erő forgatónyomatékának megváltozásával egyenlő nagyságú és ellentétes irányú (vagy előjelű). Ilyen erőpár végtelen sok van.



2.87. ábra

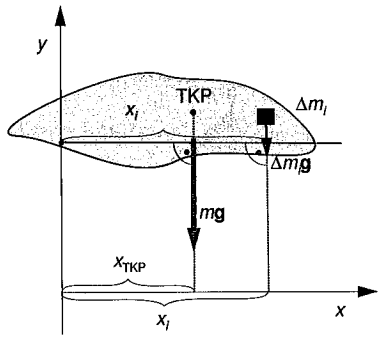
A legegyszerűbb az, ha az eredeti **F** és vele ellentett **–F** erőből álló erőpárt vesszük fel (lásd 2.87. ábra). Az így kapott erőpár forgatónyomatéka Fd. Az **F** erő, amelyiknek támadáspontját eltoltuk, forgatónyomatékának megváltozása az O-ra vonatkozóan: $F(l_2 - l_1) = Fd$.

A formulából látható, hogy bármely tengelyre vonatkoztatva ennyi a megváltozás. Ezért az A pontban támadó **F** erő helyettesíthető egy tetszőleges P pontban támadó **F** erővel és egy fenti erőpárral.

Több erő esetén az erőrendszer minden egyes tagjának támadáspontját áthelyezzük egy tetszőlegesen kiválasztott P pontba, felveszünk egy-egy, az előzőekben megállapított erőpárt. Ezáltal az erőrendszert helyettesítettük egyetlen, a P-be koncentrált eredővel, $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ és egyetlen erőpárral, amelynek forgatónyomatéka a felvett erőpárok forgatónyomatékainak algebrai összege, $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$. Ha az erők nem síkban szétszórtak, akkor M_i-ket vektorosan kell összeadni.

2.3.4.3. A nehézségi erő helyettesítése pontba koncentrált eredővel

Helyezzük a testet a 2.88. ábra szerinti koordináta-rendszerbe. Az y tengelyen lévő O ponton menjen át a forgástengely! Osszuk fel a testet Δm_i tömegű pontszerű darabkákra! Az egy darabkára ható nehézségi erő $\Delta m_i \mathbf{g}$.



2.88. ábra

Az erre a pontrendszerre ható külső erő eredője $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \mathbf{g} = m\mathbf{g}$. Ez a tömegközéppontot ugyanúgy gyorsítja, mint a kis nehézségi erők külön-külön. A O pontra vonatkoztatott forgatónyomaték a testdarabkákra ható forgatónyomatékok algebrai összege:

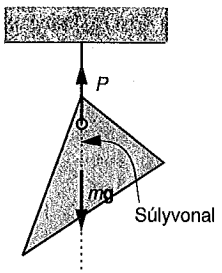
$$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i g x_i = g \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i x_i = mg \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i x_i}{m} = mg x_{TKP}$$

Levezetésünk szerint a test részecskéire ható nehézségi erők forgatónyomatékai helyettesíthetők egy olyan *mg* nagyságú erő forgatónyomatékával, melynek hatásvonala a tömegközépponton megy keresztül. Itt a tetszőleges erőrendszerrel ellentétben nem kell felvennünk egy külön erőpárt. A kiterjedt merev testre ható *nehézségi erő* tehát mind a tömegközéppont gyorsulása, mind a tetszőleges *O* pontra vonatkoztatott forgatónyomaték szempontjából *egyetlen, tömegközépponton átmenő függőleges erővel helyettesíthető, amelynek nagysága mg.* Ezért mondjuk, hogy a térfogati nehézségi erő helyettesíthető egyetlen pontba koncentrált eredővel.

Figyeljük meg, hogy a levezetésben erősen kihasználtuk a gravitációs erőtér homogén voltát! Inhomogén erőtérben a gravitációs erő nem helyettesíthető egyetlen erővel, hanem csak egy erővel és egy erőpárral.

A nehézségi erő koncentrált eredője a tömegközépponton megy át. A tömegközéppontot súlypontnak *is nevezzük. A súlypont elnevezés a súlyerőből származik.*

A súlypont meghatározása. Ha egy testet egy pontjában felfüggesztünk, akkor egy bizonyos idő múlva lengése megáll, a test egyensúlyba kerül. Tömegközéppontjának gyorsulása és szöggyorsulása 0 lesz. Ezért a rá ható erők eredője és a forgatónyomatékok algebrai összege is 0.



2.89. ábra

A felfüggesztés a 2.89. ábra szerinti *P* pontban az *m***g**-vel egyező nagyságú és azzal ellentétes irányú $-m\mathbf{g}$ erőt fejt ki. A *P*-ben ható $-m\mathbf{g}$ forgatónyomatéka 0, mert a tengelyen hat. Az eredő forgatónyomaték csak úgy lehet 0, hogy az *m***g** erőé is az. Azaz nehézségi erő erőkarja 0, azaz függőleges hatásvonala átmegy a *P* ponton. Így a tömegközéppont és ezzel a súlypont is rajta van a *P*-ből kiinduló függőleges egyenesen. Ezt a felfüggesztési ponton átmenő, függőleges egyenest *súlyvonalnak* nevezzük. Egy síklapszerű testet több pontban felfüggesztve meghatározhatjuk annak több súlyvonalát, azok metszéspontját, azaz a súlypontját, illetve a tömegközéppontját.

2.4. Speciális problémák a tömegpont és a pontrendszerek mechanikájából

2.4.1. A bolygók mozgása. Mozgás pontszerű test gravitációs erőterében

Kepler-törvények. Kepler a bolygók mozgásának elemzéséből tapasztalati úton három törvényt állapított meg:

I. törvény: *A bolygók ellipszis alakú pályán keringenek, amelynek egyik gyújtópontjában a Nap áll.*

II. törvény: *A Naptól a bolygóig húzott szakasz, a vezérsugár (rádiuszvektor) egyenlő időközök alatt egyenlő területeket súrol.*

III. törvény: *A bolygók keringési idejének négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint Naptól mért középtávolságuk köbei:*

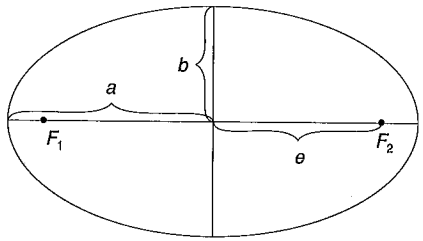
$$T_1^2 : T_2^2 : \ldots = a_1^3 : a_2^3 : \ldots \tag{2.83}$$

Az aránypárokat átrendezve:

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \text{állandó}} \,. \tag{2.84}$$

Középtávolságon a Naptól mért legkisebb távolság *(perihélium)* és a legnagyobb távolság *(afélium)* számtani közepét értjük. A középtávolság egyben az ellipszis fél nagytengelye.

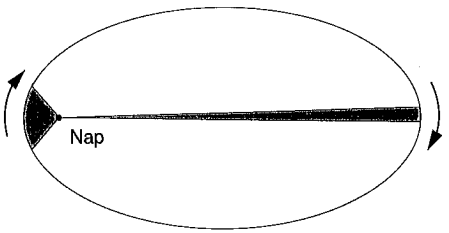
Az *első törvény* a bolygók pályájának alakjára vonatkozik. A pálya a legtöbb bolygónál alig tér el a körtől.



2.90. ábra

Az ellipszis olyan görbe, melynek pontjainak két adott ponttól (az ún. fókuszpontoktól) mért távolságainak összege állandó. Középpontosan és tengelyesen szimmetrikus alakzat (2.90. ábra). A két szimmetriatengely ellipszisben lévő szakaszát *kis-*, illetve *nagytengelynek* nevezik. A tengelyek felének hossza *b,* illetve *a*. A középpont és az egyik fókuszpont távolsága az *e lineáris excentricitás,* az *e/a* hányados a *numerikus excentricitás*. A numerikus excentricitás az ellipszis körtől való eltérését jellemzi. A körnél a két fókuszpont

a középponttal esik egybe, ezért numerikus és lineáris excentricitása 0. Ez a szám annál nagyobb, minél jobban eltér az ellipszis a körtől. A Nap körül keringő bolygóknál a numerikus excentricitás elég kicsi. Pl. a Föld pályájánál 0,017 és csak a Plútónál éri el a 0,25-öt.



2.91. ábra

A *második törvény* a *területi sebesség* állandóságát mondja ki (2.91. ábra). Ez pedig azt jelenti, hogy a gravitációs erő centrális erő, melynek centruma a Nap (lásd a 2.1.3. pontot).

A *harmadik törvényt* körpályára látjuk be. Indítsunk el egy testet a Napot és a testet összekötő szakaszra merőlegesen, akkora v_I sebességgel, hogy a test körpályán keringjen a Nap körül! Mivel a gravitációs erőnek kell biztosítania az egyenletes körmozgás gyorsulását, ezért:

$$\frac{fMm}{a^2} = ma\omega^2 = ma\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Ebből az egyenletből:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{fM} \quad \text{és} \quad v_I = \sqrt{\frac{fM}{a}}. \tag{2.85}$$

Látható, hogy a Kepler-törvényben szereplő állandó csak annak a testnek az M tömegétől függ, amelyik körül az m tömegű test kering. Az állandó az m-től független. A Kepler-törvények nemcsak a Nap és a bolygók vonatkozásában igazak, hanem érvényesek a bolygók és holdjaik esetén is (ahol M a bolygó tömegét jelenti). Ezért a holddal rendelkező bolygók tömege régóta ismert.

A v_I sebesség az ún. *körsebesség* vagy *első kozmikus sebesség,* mellyel a testet elindítva az körpályán kering a vonzó centrum körül.

A levezetésben a Napot (illetve a holddal rendelkező bolygót) az inerciarendszerben nyugvó testnek tekintettük, holott rá is hat a másik testre ható erő ellenereje, ezért az az inerciarendszerben gyorsul. Ha azonban a keringő test tömege elhanyagolható a vonzó centrum szerepét ellátó test tömegéhez képest, akkor gyorsulása és így a helyváltozás is elhanyagolható. *(Ez az ún. egycentrum-probléma.)* Nem tekinthetünk el ettől a Föld–Hold rendszer, és a két csillagból álló rendszerek, a kettőscsillagok, pl. Sirius esetén. Az utóbbi esetben a keringési időből, távolságukból és a tömegarányból a csillagok tömege meghatározható (lásd TKP tétele).

A gravitációs erő konzervatív. A 2.1.6. alapján a mechanikai energiamegmaradás elvét alkalmazva:

$$-\frac{fMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = \text{állandó}. \tag{2.86}$$

Körpályánál r és v állandó. Ha egy testet az M-től a távolságban az őket összekötő egyenesre merőlegesen indítunk el a v_I *„körsebességnél”* (első kozmikus sebesség) kisebb sebességgel, akkor a test olyan ellipszispályán fog mozogni, melynek távolabbi fókuszpontja M. A körsebességnél nagyobb sebességű indítás esetén, a sebesség nagyságától függően a test ellipszis- (melynek közelebbi fókuszpontja M), parabola-, illetve hiperbolapályán fog mozogni. Azt a minimális sebességet, amellyel indítva az m tömegű test már nem tér vissza kiindulási helyére, az M tömegű testhez és az a távolsághoz tartozó *szökési sebességnek, második kozmikus sebességnek, parabolasebességnek* nevezzük. Azt, hogy a test éppen nem tér vissza, azt jelenti, hogy a végtelen távoli pontba érve a test sebessége 0-vá válik. Itt választva a potenciális energia 0 pontját, az összenergia 0 lesz:

$$\frac{1}{2}mv_{II}^2 + \left(-\frac{fmM}{a}\right) = 0.$$

Az egyenletet rendezve a második kozmikus sebesség:

$$v_{II} = \sqrt{2\frac{fM}{a}} = \sqrt{2}v_I. \tag{2.87}$$

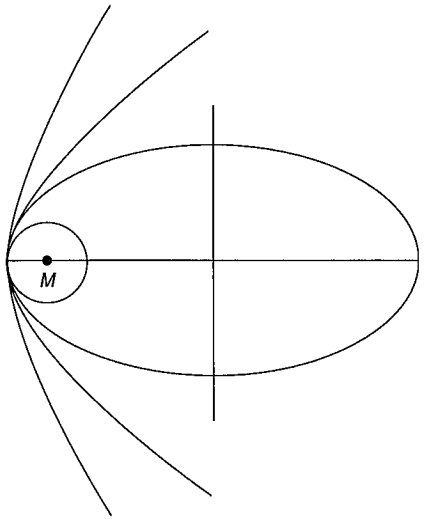
Ekkora sebességnél *parabolapálya* jön létre, ennél nagyobbnál pedig *hiperbolapálya.* Hiperbolapályánál a test végtelen távolbeli sebessége nagyobb mint 0.

Az első kozmikus sebességnél nagyobb sebességgel indított testek pályáit a 2.92. ábra szemlélteti.

Tehát a v_{II} szökési sebességnél kisebb sebességű test a Nap körül fog keringeni kör vagy ellipszis alakú pályán, azaz mintegy „kötve marad a Naphoz”. A „kötve maradás” feltételét a (2.86) egyenlet alapján megfogalmazhatjuk energetikai szempontból is: Ha a (2.86) egyenletbe a v_{II} szökési sebességnél kisebb sebességet helyettesítünk be, azaz a test kötött állapotban van, akkor a *test teljes mechanikai energiája negatív.* A ilyen rendszereket *kötött rendszereknek* nevezzük.

A fizika más területein is előfordulnak kötött rendszerek. Kötött rendszerben a mozgási energia és valamilyen erőből származó potenciális energia (kölcsönhatá-

si energia) összege negatív. (Természetesen kötött állapot csak akkor lehetséges, ha a rendszer potenciális energiája negatív. A potenciális energia 0 szintjét a rendszer azon állapotára szokás vonatkoztatni, amelyben a rendszert alkotó részek olyan messze vannak egymástól, hogy köztük a kölcsönhatás elhanyagolható.)



2.92. ábra

A bolygókra nemcsak a Nap hat, hanem a többi bolygó is, azonban az általuk kifejtett erők a Napénál lényegesen kisebbek. Ezért a bolygók pályái olyan ellipszisek, melyek adatai az idő függvényében igen lassan változnak. Ezt a gyenge, „zavaró hatást" nevezzük *perturbációnak*. A perturbáló hatásokat csak bonyolult közelítő eljárásokkal vehetjük számításba.

2.4.2. Mesterséges holdak és bolygók; rakéták

Mesterséges holdaknak nevezzük a Föld körül keringő mesterséges égitesteket. Ha egy lövedéknek a Föld felszíne közelében megfelelő sebességet adunk, akkor olyan nagy tartományban mozoghat, amelyben a gravitációs erőtér már nem tekinthető homogénnek. A pálya tehát nem parabola (kivéve a szökési sebességet), hanem egy ellipszispálya lesz, melynek egyik gyújtópontja a Föld középpontja. Ha a sebesség nem éri el a v_{I} első kozmikus sebességet, akkor lövedék olyan ellipszispályán mozog, hogy becsapódik a Földbe.

A Föld felszíne közelében mozgó lövedékre (közegellenállási erőtől eltekintve) az mg erő hat. Ezért a centripetális gyorsulás g. A $\frac{v^2}{R}=g$ egyenletből a Föld felszíne közelében a körsebesség:

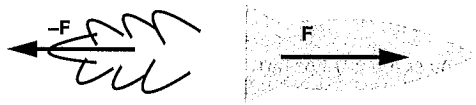
$$v^2=\sqrt{Rg}\approx 7,9\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}. \tag{2.88}$$

A szökési sebesség, vagy másképpen a v_{II} *második kozmikus sebesség a* Föld felszíne közelében (2.87) alapján:

$$v_{\mathrm{II}}=\sqrt{2}v_{\mathrm{I}}\approx 11,2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}. \tag{2.89}$$

Amennyiben az indítás nem a Föld felszínének közvetlen közelében, hanem attól h magasságban történik, akkor a földfelszíni gravitációs gyorsulás $\frac{R^2}{(R+h)^2}$ -szorosával kell számolnunk.

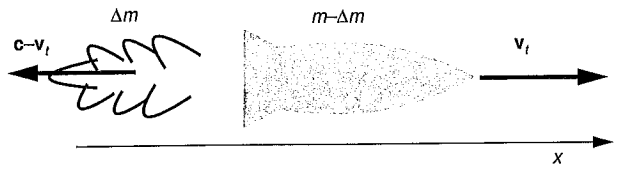
A mesterséges holdakat és űrhajókat *rakétákkal* juttatjuk pályájukra. A rakéta tartályaiban valamilyen tüzelőanyagot (kerozin, hidrogén) és az égéshez szükséges oxidálószert visz magával. Ezért légüres térben is működik. A rakéta fúvókájából kiáramló forró gázkeverék sebessége nagy, elérheti a $4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ körüli értéket is. Ennek a nagy sebességgel kiáramló gáznak a reakcióereje gyorsítja fel a rakétát (2.93 ábra).



2.93. ábra

A rakéta *működése*. Tegyük fel, hogy a rakétára nem hatnak külső erők. Jelöljük a rakéta teljes indulási tömegét m_0-val! A rakéta tömege az üzemanyag kiáramlása következtében folyamatosan csökken. Az indítás pillanatától eltelt t idő múlva a rakéta tömege legyen m_t, valamilyen inerciarendszerhez viszonyított sebessége v_t, a gázkiáramlási sebesség a rakétához viszonyítva c! A továbbiakban a sebességet jelölő betűk a sebességek abszolút értékét jelentik. Az x tengely a rakéta haladásának irányába mutat. A t és $t+\Delta t$ közötti igen kis Δt idő alatt a rakétából kis tömegű gáz áramlik ki a rakétához viszonyított c nagyságú sebességgel. A kiáramló gáz inerciarendszerhez viszonyított sebességének nagysága $c-v$. Mivel a gáz az x tengely negatív irányába mozog, ezért a kiáramlási sebesség koordinátája $-(c-v_t)$. Ekkor a rakéta tömege a kiáramló gáz tömegével kisebb. A rakéta tömege csökken, annak Δm megváltozása negatív. A szokásos jelölésekkel a $t+\Delta t$ időpillanatbe-

li tömeg: $m_t + \Delta m$. Sebessége $v_t + \Delta v$, ahol Δv a Δt idő alatti sebességváltozás. Így a rakéta impulzusa a $t + \Delta t$ időpillanatban: $(m_t + \Delta m)(v_t + \Delta v)$. A kiáramló gáz impulzusának x koordinátája a $t + \Delta t$ időpillanatban $-(c - v_t)|\Delta m|$. Itt $|\Delta m|$ a kilőtt gáz tömege. Mivel Δm negatív, ezért $|\Delta m| = -\Delta m$. Így a kifúvott gáz impulzusának x koordinátája a $t + \Delta t$ időpillanatban: $-(c - v_t)(-\Delta m) = \Delta m(c - v_t)$. Ha nem hatnak külső erők, akkor a rendszer impulzusa az impulzusmegmaradás miatt t a $t + \Delta t$ és pillanatokban ugyanaz.



2.94. ábra

$$m_t v_t = \Delta m\left(c - v_t\right) + \left(m_t + \Delta m\right)\left(v_t + \Delta v\right).$$

A műveleteket elvégezve és figyelembe véve, hogy a $\Delta m \Delta v$ kifejezés értéke a többi taghoz képest elhanyagolható:

$$\Delta v = -\frac{\Delta m}{m_t} c.$$

A Δv pozitív, hiszen Δm negatív! Feltételezzük, hogy a kiáramlási sebesség állandó. Ha a 0-tól t-ig tartó időtartamot n egyenlő részre osztjuk, akkor n számú ilyen egyenletet felírva és összeadva:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = -c \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m}{m_i}.$$

Δt-vel 0-hoz tartva Δv és Δm is 0-hoz tart. Határértékben:

$$\int_0^{v_t} \mathrm{d}v = -c \int_{m_0}^{m_t} \frac{\mathrm{d}m}{m}.$$

Az integrálást elvégezve kapjuk a rakéta sebességét az indítástól eltelt t idő múlva:

$$v_t = c \ln \frac{m_0}{m_t}. \tag{2.90a}$$

A rakéta v_{max} végsebességét úgy kapjuk meg, hogy a fenti egyenletbe a rakéta üzemanyag nélküli tömegét, $m_ü$-t helyettesítjük be. Az $\frac{m_0}{m_ü}$ hányadost *tömegaránynak* nevezzük, és k-val jelöljük. Így a rakéta végsebessége:

$$v_{max} = c \ln k. \tag{2.90b}$$

A c kiáramlási sebesség nemigen lépi túl a 4 km/s sebesség körüli értéket, a tömegarány is legfeljebb 4–5. Ezért az egyfokozatú rakétákkal elérhető végsebesség legfeljebb 6–7 km/s lehet csak.

A végsebesség az ún. *többfokozatú rakétákkal* növelhető. Ezeknél az első fokozat tartálya leválik és javítja a tömegarányt. Ugyanez érvényes a többi fokozatra, és így már a második kozmikus sebesség is elérhető.

2.4.3. Esés ellenálló közegben

A nem légüres térben mozgó testre a nehézségi erőn kívül a *közegellenállási erő* hat. Ha a test szimmetrikus és a közeghez viszonyított sebesség irányára szimmetrikusan helyezkedik el, akkor a rá ható közegellenállási erő bizonyos feltételek esetén (lásd 2.7.3.3. pont) a relatív sebességgel ellentétes irányú, és nagysága:

$$\boxed{F_k = cA\rho v^2}.$$

Vektoros alakban:

$$\mathbf{F}_k = -cA\rho v\mathbf{v},$$

ahol ρ a közeg sűrűsége, A a test relatív sebességre merőleges keresztmetszete, $\mathbf{v}$ a test közeghez viszonyított sebessége, c pedig a test alakjától függő ún. alakellenállási tényező.

Ejtsünk le 0 kezdősebességgel egy m tömegű testet! A testre felírva a mozgásegyenletet:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_k = m\mathbf{g} - cA\rho v\mathbf{v} = m\mathbf{a}.$$

Válasszuk meg az x tengelyt úgy, hogy függőlegesen lefelé mutasson! Az előző vektoregyenletet koordinátás alakba írva:

$$mg - cA\rho v^2 = ma. \tag{2.91a}$$

Az utolsó egyenletben a betűk már csak a mennyiségek abszolút értékét jelentik. A $t = 0$ időpillanatban, mivel a kezdősebesség 0, az F_k közegellenállási erő is 0. A test gyorsulása ekkor g. Tehát a test gyorsul, sebessége és így a közegellenállási erő is nő, a gyorsulás csökken. Ha a test sebessége elérte azt az értéket, amelynél a közegellenállási erő egyenlő lett a nehézségi erővel, az erők eredője és így a gyorsulás is 0, azaz a sebesség nem nő tovább, a test a továbbiakban egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, melynek sebessége:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{cA\rho}}. \tag{2.91b}$$

2.4.4. Tehetetlenségi erők a forgó Földön

A Föld tömegközéppontja és így a vele együtt mozgó forgástengelye az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben gyorsul. Tekintsünk el ettől! Vizsgáljuk meg a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben a testre ható erőket! A koordináta-rendszer kezdőpontja a Föld tömegközéppontja, a tengelyek pedig a Földhöz rögzítettek. Ez a vonatkoztatási rendszer tehát az álló csillagok inerciarendszeréhez képest egyenletesen forog. Az ilyen rendszerekben a testre ható valódi erőkön kívül hatnak még a tehetetlenségi erők is, a centrifugális és a Coriolis-erők (lásd 2.1.7.3.). A Földdel együtt forgó vonatkoztatási rendszer keringési ideje az állócsillagok rendszeréhez képest a két csillagdelelés közt eltelt idő. Ez a csillagnap, melynek értéke 23 óra 56 perc. A vonatkoztatási rendszer szögsebessége:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,29 \cdot 10^{-5} \mathrm{s}^{-1}.$$

A Föld felszínén *nyugalomban lévő testre* nem hat a Coriolis-erő. Ezért ekkor a tehetetlenségi erők közül csak a centrifugális erővel kell számolnunk. A Föld forgástengelyétől kifelé mutató centrifugális erő nagysága:

$$F_{cf} = mr\omega^2 = mR\cos\varphi\omega^2.$$

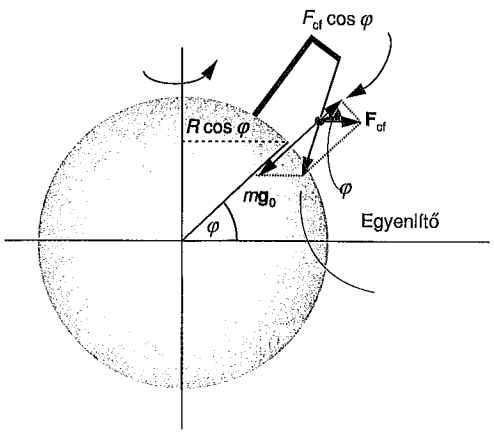
A 2.95. ábra szerint a φ a földrajzi szélesség az R sugarú (gömb alakúnak képzelt) Földön. A testre hat még a gravitációs erő. Az általa létrehozott gyorsulást jelöljük $\mathbf{g}_0$-val. A nyugvó testre kell hogy hasson még egy harmadik erő is, amelyik a gravitációs és a centrifugális erő eredőjével egyensúlyt tart:

$$\mathbf{F} = -\left(m\mathbf{g} + m\mathbf{a}_{cf}\right).$$

A test egyensúlyban tartásához tehát nem a gravitációs erővel egyenlő nagy és azzal ellentett irányú erőt kell kifejteni, hanem az attól $\mathbf{F}_{cf}$-fel eltérőt.

A 2.95. ábrán látható, hogy a Föld felszínén nyugvó testre ható $m\mathbf{g}_0 + m\mathbf{a}_{cf}$ erő a sarkok és az Egyenlítő kivételével nem a Föld középpontja felé mutat. Mivel a sarkokon az $\mathbf{a}_{cf} = 0$, ezért itt $\mathbf{F} = -m\mathbf{g}_0$. Az Egyenlítőn $m\mathbf{g}_0$ és $m\mathbf{a}_{cf}$ ellentétes irányúak, ezért itt $F = mg_0 - mR\omega^2$. Egy φ földrajzi szélességű helyen az F erő nagyságát jó közelítéssel úgy is megkaphatjuk, ha az mg_0-ból a centrifugális erő sugárirányú komponensét kivonjuk (lásd 2.95. ábra).

$$F = mg_0 - F_{cf}\cos\varphi = mg_0 - mR\omega^2\cos^2\varphi. \qquad (2.92a)$$



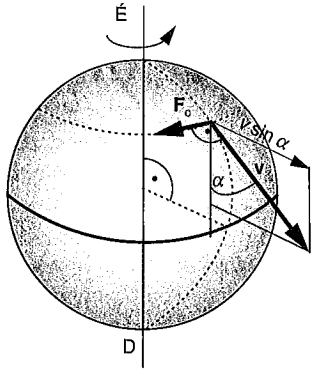
2.95. ábra

Itt $g_0 = 9,832 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a sarkokon mért gravitációs gyorsulás. Az egyenlítői sugár $R = 6387$ km. Az adatokat behelyettesítve: $F = m \cdot 9,832 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 0,034 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cos^2\varphi$.

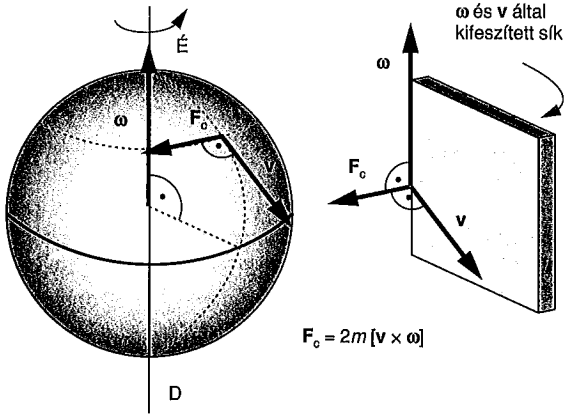
A mérések alapján a $\cos^2\varphi$ együtthatója nem a számított érték, hanem 0,052 m/s^2. Ennek oka, hogy a Föld nem teljesen gömb alakú, a sarkoknál kissé lapult, ezért az mg_0 is változik a φ függvényében.

Az $m\mathbf{g}_0 + m\mathbf{a}_{cf}$ erőt *nehézségi erőnek,* az általa létrehozott gyorsulást *nehézségi gyorsulásnak* nevezzük. Mivel kis sebességeknél a Coriolis-erő elhanyagolható, ez az a gyorsulás, amellyel a szabadesésnél és a ferde hajításnál számolunk. A nehézségi gyorsulás gravitációs összetevője a magasságtól, mélységtől, a környezet tömegeloszlásától is függ.

A Földhöz képest **v** sebességgel mozgó testre a centrifugális erőn kívül még a Coriolis-erő hat. A 2.1.7.3. alpont szerint ez az erő merőleges mind a forgástengelyre, mind a **v** vektorra. Ezért a Coriolis-erő merőleges a forgástengelyre, azaz párhuzamos az Egyenlítő síkjával. A Föld az Északi-sark felől nézve az óramutató járásával ellentett irányban, azaz pozitív irányban forog. Mint a 2.1.7.3.-ban láttuk, $F_c = 2mv\omega\sin\alpha$. Itt $v\sin\alpha$ a sebesség Egyenlítővel párhuzamos komponense. Ez a sebességkomponens határozza meg a Coriolis-erő nagyságát és irányát. A Föld forgástengelyével párhuzamos sebességkomponens nem befolyásolja a Coriolis-erőt.



2.96. ábra



2.97. ábra

Haladjon egy test egy földrajzi hosszúsági kör mentén északról délre! Bontsuk fel a sebességét a Föld forgástengelyére merőleges és azzal párhuzamos komponensre! Ha a test az északi féltekén van, akkor a sebesség forgástengelyre merőleges komponense a forgástengelytől kifelé mutat (2.96. ábra). A testre a 2.1.7.3. szerint a „forgással ellentett irányú" erő, azaz nyugati irányú erő hat. Ha itt délről észak felé mozog, akkor a Coriolis-erő keleti irányú. Mindkét esetben a Coriolis-erő a testet az egyenes vonalú mozgástól jobbra téríti el. A déli féltekén a helyzet fordított, a testek itt az egyenes vonalú mozgástól balra térnek el. Ennek következtében az északi féltekén lengő ingára ható Coriolis-erő következtében az inga lengési síkja a Földhöz képest elfordul „jobbra", azaz az óramutató járásával egyező irányba. Az ún. *Foucault-ingával,* mely igen hosszú, sokáig lengő, nagy amplitúdójú matematikai inga, ez az elfordulás ki is mutatható.

Az Egyenlítőn vízszintesen mozgó testnél a Coriolis-erő függőleges irányú. Ha a test nyugatról keletre mozog, akkor felfelé, ellenkező esetben lefelé mutat a Coriolis-erő.

A 2.97. ábrán berajzoltuk a Föld szögsebességvektorát és a sebességvektort is. A vektoriális szorzat értelmezése alapján a Coriolis-erő iránya ennek segítségével minden esetben leolvasható.

2.4.5. A harmonikus rezgőmozgás

Harmonikus rezgőmozgásnak nevezzük az olyan periodikus mozgást, melynél a kitérés az idő szinuszával egyenesen arányos. A mozgás kinematikai leírását az 1.1.5.5. alpontban adtuk meg.

Az egyszerűbb tárgyalás kedvéért legyen a test pályája az y tengelyen, egyensúlyi helyzete az origóban! A választott koordináta-rendszerben a mozgást jellemző mennyiségek koordinátái az idő függvényében:

$$y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

$$v_y = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

$$a_y = -A\omega^2\sin\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

A harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltételét a következőképpen állapíthatjuk meg: Helyettesítsük be a mozgásegyenletbe a gyorsulás–idő függvényt:

$$F_y = ma_y = -mA\omega^2\sin\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

azaz

$$\boxed{F_y = -m\omega^2 y}, \qquad (2.93)$$

hiszen $y = A\sin(\omega + \varphi_0)$. Mivel m és ω állandó, ezért *az erők eredőjének nagysága egyenesen arányos a kitéréssel.* A negatív előjel azt jelenti, hogy az eredő erő és a kitérés ellentett irányúak, azaz az *eredő erő mindig az egyensúlyi helyzet felé mutat.* Az olyan erők, amelyek mindig az egyensúlyi helyzet felé mutatnak, rezgőmozgást hoznak létre. A fentiek szerint azonban csak akkor hoznak létre harmonikus rezgőmozgást, ha még az egyenes arányosság is teljesül.

Harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltétele: a testre ható erők eredője mindig az egyensúlyi helyzet felé mutat, és nagysága egyenesen arányos a kitéréssel.

Ha egy test stabilis egyensúlyi helyzetben van, akkor ebből a helyzetből kimozdítva a rá ható erők eredőjének hatására visszatér egyensúlyi helyzetébe, meglehetős sebességgel. Az egyensúlyi helyzeten tovább lendülve az egyensúlyi helyzet felé mutató „visszahúzó erő" hatására lefékeződik, majd visszarántódik stb., azaz rezgőmozgás jön létre. Ha a kitérés elég kicsi, akkor az az erők eredőjével közelítőleg egyenesen arányos. Tehát elég kis kitéréseknél jó közelítéssel harmonikus rezgőmozgás jön létre.

Az erő (2.93) kifejezésében lévő arányossági tényezőt D-vel jelölve:

$$D = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2. \tag{2.94a}$$

Innen a harmonikus rezgőmozgás rezgésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}, \tag{2.94b}$$

ahol m a test tömege és D az erő és a kitérés közötti arányossági tényező.

Az előbb említett általános esetben kis kitéréseknél D az erő hely szerinti deriváltját jelenti. A képletből látható, hogy a rezgésidő független az amplitúdótól: nagyobb kitérések esetén a test nagyobb utakat tesz meg, de nagyobb átlagsebességgel, hiszen az erő és ezzel a gyorsulás átlagos értéke is nő.

A képlet szerint T egyenesen arányos $\sqrt{m}$ -mel, ha D állandó, és fordítottan arányos $\sqrt{D}$ -vel, ha m állandó.

A harmonikus rezgőmozgást végző test energiája. A harmonikus rezgőmozgást végző testre ható erő ugyanolyan tulajdonságú, mint a rugóerő, tehát ez az erő is többnyire konzervatív. E konzervatív erőhöz a 2.1.6.2. szerint ehhez az $\frac{1}{2}Dy^2$ potenciális energia kapcsolódik. Mivel konzervatív erők esetén érvényes a mechanikai energiák megmaradásának elve:

$$\frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \text{állandó} = E_{\text{összes}}. \tag{2.95}$$

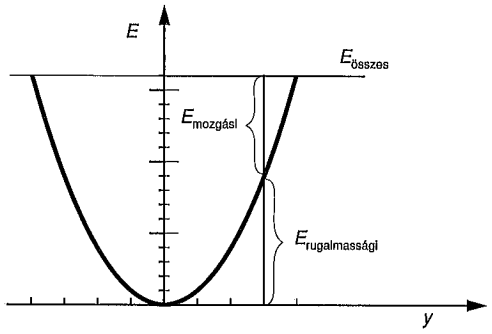
Ha a kitérés 0, a test potenciális energiája is az, azaz ebben az esetben a test teljes mechanikai energiája mozgási energia. A mozgási energia és vele együtt a sebesség itt maximális:

$$E_{\text{összes}} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2. \tag{2.96}$$

Amikor a test szélső helyzetben van, akkor a mozgási energiája 0, és a potenciális energiája a kitéréssel együtt maximális:

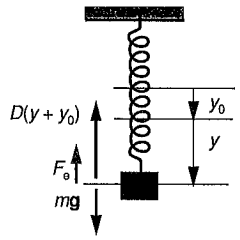
$$E_{\text{összes}} = \frac{1}{2}DA^2. \tag{2.97}$$

Ha derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk a potenciális energiát a hely függvényében, parabolaívet kapunk (2.98. ábra).



2.98. ábra

Harmonikus rezgőmozgás előállítása. Mivel a csavarrugó húzásra és összenyomásra is a hosszváltozással egyenesen arányos erőt fejt ki, és ez az erő mindig az egyensúlyi, azaz a rugó nyújtatlan állapota felé téríti vissza a testet, ezért a súrlódásmentes, vízszintes asztallapra helyezett, rugóhoz erősített test harmonikus rezgőmozgást végez. (Természetesen csak akkora lehet az amplitúdó, ameddig a lineáris erőtörvény fennáll, mert ha pl. a rugó menetei összeérnek, akkor a rezgés nem lesz harmonikus rezgőmozgás.)



2.99. ábra

A 2.99. ábra szerint rugóra függesztett test is harmonikus rezgőmozgást végez. Ha a test nyugalomban van, a rá ható erők eredője 0. Ebben az állapotban a rugó megnyúlását feszítetlen állapotához képest y_0-val jelöljük. Az erő–megnyúlás [lásd (2.11) képlet] összefüggés alapján $mg = Dy_0$, azaz $y_0 = \frac{mg}{D}$. A testet egyensúlyi helyzetéből lefelé y-nal elmozdítva, a rugó megnyúlása $y_0 + y$, a rugóerő $D(y_0 + y)$. A rugóerő nőtt, az mg változatlan maradt, az erők eredője az egyensúlyi helyzet felé mutat. Az eredő nagysága:

$$\left|\sum \mathbf{F}\right| = D\left(y_0 + y\right) - mg = Dy_0 + Dy - mg = Dy$$

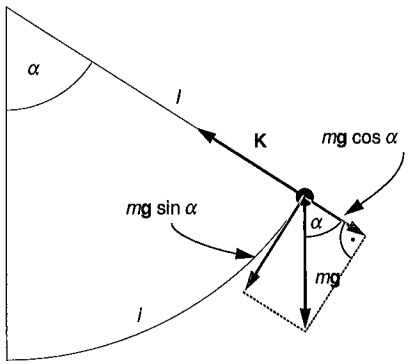
a $Dy_0 = mg$ miatt. Az állandó nagyságú és irányú nehézségi erő csak az egyensúlyi helyzetet tolja el, de a rezgőmozgás harmonikusságát és a rezgésidőt nem befolyásolja.

2.4.6. A matematikai inga

A *matematikai inga* elhanyagolható tömegű fonálra függesztett, pontszerű test.

A testet kitérítve egyensúlyi helyzetéből és 0 kezdősebességgel elengedve, rá csak az **mg** nehézségi erő és a **K** fonálerő hat. A test változó sebességű körmozgást végez egy körív mentén. Gyorsulása a pálya homorú oldala felé mutat. A gyorsulást felbontva az $a_é$ érintőirányú, és az a_{cp} sugár, illetve fonál irányú komponensekre:

$$ma_{cp} = K - mg\cos\alpha, \qquad ma_é = mg\sin\alpha.$$



2.100. ábra

Az $a_{cp} = \frac{v^2}{l}$ változik, mert a mechanikai energiamegmaradás értelmében a sebesség is változik, hiszen mozgás közben a magassági és vele együtt a mozgási

energia is változik. Az a_{cp} akkor 0, amikor a test szélső helyzetben van, és akkor a legnagyobb, amikor a test egyensúlyi helyzetén halad át. Az $a_é$ is változik, hiszen az mg érintő irányú összetevője is változik, ezért a mozgás nem egyenletesen változó. Értéke szélső helyzetben maximális, és az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor 0. Tehát a gyorsulás iránya még a fonálhoz képest is változik: szélső helyzetben érintőirányú, egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor fonáliránya.

A test sebességének nagyságát és ezzel együtt a pálya mentén történő elmozdulást, a test helyét az $a_é$ szabja meg.

Jelöljük i-vel a testnek az egyensúlyi helyzettől „a pálya mentén mért" távolságát! Ez legyen előjeles mennyiség, és annak az ívnek az előjeles hosszát jelenti, amely az egyensúlyi helyzettől a testig tart. Az érintőirányú erő $mg\sin\alpha$, nem egyenesen arányos az i kitéréssel, mert $i = l\alpha$. Ha azonban az i kitérések kicsik az inga l hosszához képest, akkor az α is kicsi. Ha az $\alpha < 5°$, akkor a szög radiánban mért értéke és szinusza között az eltérés kisebb, mint 1%. Ezért jó közelítéssel igaz, hogy $F_é = mg\alpha$. Így

$$\frac{F_é}{i} = \frac{mg\alpha}{i} = \frac{mg}{l} = \text{állandó}.$$

Tehát az ív mentén történő mozgás harmonikus rezgőmozgás, ha i-nek y-t és $F_é$-nek F_y-t feleltetünk meg. Az ív mentén történő mozgásra alkalmazva az egyenes vonalú harmonikus rezgőmozgásra mondottakat

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

A matematikai inga lengésideje:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}. \qquad (2.98)$$

2.4.7. A fizikai inga

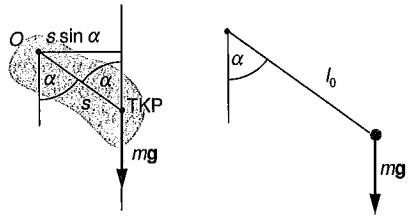
A fizikai inga vízszintes tengely körül lengő merev test. A 2.101. ábrán a lengés síkjában ábrázoltuk a testet. A tengely e síkra való merőleges vetülete az O pont, amelyet a továbbiakban felfüggesztési pontnak nevezünk. Az mg gravitációs erő pontba koncentrált eredője a TKP tömegközépponton megy át. Az ingát térítsük ki α_0 szöggel, majd 0 kezdősebességgel engedjük el! A testre ható forgatónyomaték az O tengelyre vonatkozóan:

$$M = mgs\sin\alpha,$$

ahol s a TKP és a felfüggesztési pont távolsága. A test szöggyorsulása:

$$\beta = \frac{mgs \sin \alpha}{\Theta},$$

ahol Θ a testnek az O ponton átmenő, a lengés síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka.



2.101. ábra

Vegyünk egy l hosszúságú, m tömegű matematikai ingát (l. 2.4.6. alpont), amelyet szintén α_0 szöggel térítünk ki és 0 kezdősebességgel elengedünk. A nehézségi erő forgatónyomatéka az α pillanatnyi szögkitéréskor:

$$M = mgl \sin \alpha.$$

Mivel a fonálinga tehetetlenségi nyomatéka az O-ra vonatkoztatva ml^2, ezért szöggyorsulása:

$$\beta = \frac{mgl \sin \alpha}{ml^2} = \frac{g \sin \alpha}{l}.$$

A szöggyorsulásra vonatkozó formulák alapján mindig találunk egy adott fizikai ingához egy olyan matematikai ingát, amelyiknek szöggyorsulása minden egyes szöghelyzetben megegyezik a fizikai ingáéval. Így azonos α_0 szöghelyzetből 0 kezdősebességgel elengedve a két ingát, a feltételek alapján együtt lengenek. Annak a matematikai ingának a hosszát, amelyik az adott fizikai ingával együtt leng, az adott fizikai inga l_0-val jelölt *redukált hosszának* nevezzük. A szöggyorsulások egyenlőségéből a redukált hossz:

$$l_0 = \frac{\Theta}{ms}.$$

Kis szögkitérések esetén a matematikai és a fizikai inga harmonikus rezgőmozgást végez. A fizikai inga lengésideje megegyezik a matematikai lengésidejével:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}. \tag{2.99}$$

A képlet lehetőséget ad arra, hogy egy test adott tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát viszonylag pontosan mérhető mennyiségekből meghatározzuk.

2.4.8. Csavarási vagy torziós inga

Mind a spirálrugó, mind a huzalok α szöggel végzett megcsavarásához szükséges M forgatónyomaték egymással egyenesen arányosak. A D^* arányossági tényező neve: *direkciós (torziós) nyomaték.* A szögelfordulásnak és a forgatónyomatéknak a szokásos előjelet adva a spirálrugó, illetve a huzal által kifejtett forgatónyomaték a szögelfordulással ellentétes (lásd a 2.6.2. fejezetet):

$$M = -D^*\alpha. \tag{2.100a}$$

Itt a rezgőmozgás jellemzésére az y helyett az α szögkitérést használjuk. A torziós rezgést akkor nevezzük harmonikusnak, ha a szögkitérés az idő szinuszával egyenesen arányos:

$$\alpha = \alpha_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Az egyenes vonalú harmonikus rezgőmozgással analógiába állítva:

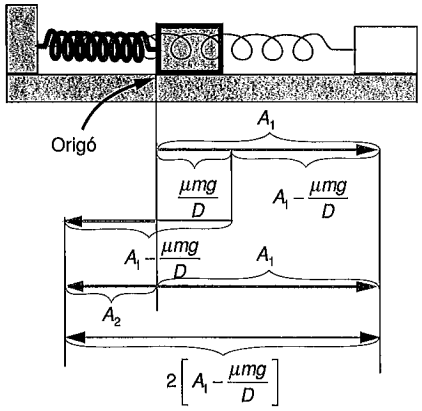
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}. \tag{2.100b}$$

A csavarási ingát is felhasználhatjuk a tehetetlenségi nyomaték meghatározására. A torziós ingánál a képletet sokszor az ismeretlen D^* megmérésére használjuk.

2.4.9. A csillapodó rezgőmozgás

Az olyan rezgőmozgást, melynek során a *rezgés amplitúdója csökken, csillapodó rezgőmozgásnak nevezzük.*

A gyakorlatban nem tudunk olyan körülményeket biztosítani, hogy a testre csak konzervatív erők hassanak. A fellépő nem konzervatív erő lehet például súrlódási vagy közegellenállási erő.



2.102. ábra

Súrlódási erő hatására csillapodó rezgés jön létre a 2.102. ábra szerinti elrendezésben. Legyen az egyszerűség kedvéért a μ csúszási súrlódási együttható egyenlő a μ_t tapadási együtthatóval. A koordináta-rendszer origója legyen az a pont, ahol a test laza rugó esetén tartózkodik. A test akkor van egyensúlyban, ha $|Dy| = |F_t| \leq \mu_0 mg$. Ezt az egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy a test olyan y_0 helyeken lesz egyensúlyban, ahol $|y_0| \leq \frac{\mu_t mg}{D}$, azaz a $\left[-\frac{\mu_t mg}{D}; \frac{\mu_t mg}{D}\right]$ zárt intervallum. Ha a test ebben az intervallumban fékeződik le 0 sebességre, akkor a rá ható erők eredője 0 lesz, nem gyorsulhat fel 0 sebességről, azaz állva marad.

A testet jobbra kitérítve és elengedve, mozgása közben rá két vízszintes erő hat: a balra mutató változó rugóerő és a jobbra mutató, állandó μmg csúszási súrlódási erő. A súrlódási erő iránya és nagysága változatlan mindaddig, amíg a test a bal szélső helyzetébe nem ér. A rugóra függesztett test esetéhez hasonlóan a mozgás félperiódus ideje a tiszta harmonikus rezgés félperiódus ideje, $\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ (lásd

2.4.6. pont). „Egyensúlyi helyzete", azaz az a hely, ahol az erők eredője 0, a $\frac{\mu mg}{D}$ koordinátájú pont. A félrezgés erre a pontra nézve szimmetrikus. A félrezgés amplitúdója innen számítva $A_1 - \frac{\mu mg}{D}$, ahol A_1 az induló amplitúdó, jobbra. Az origótól számított bal oldali amplitúdó:

$$A_2 = 2\left(A_1 - \frac{\mu mg}{D}\right) - A_1 = A_1 - \frac{2\mu mg}{D}.$$

A következő és minden további amplitúdó ugyanannyival, $\frac{2\mu mg}{D}$ -vel csökken. A rezgés addig folytatódik, amíg valamelyik szélső helyzet a $\left[-\frac{\mu_t mg}{D}; \frac{\mu_t mg}{D}\right]$ intervallumba nem esik. A megállás helyét az indítás adataiból egyértelműen meghatározhatjuk, ha grafikusan nyomon követjük a test mozgását és megkeressük az intervallumba eső első szélső helyzetet. Ebből látható, hogy a megállás helye a szóban forgó intervallumban a rezgés indítási feltételeitől függ.

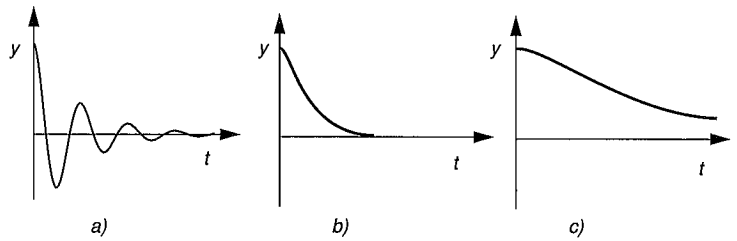
Energetikai szempontból vizsgálva a rezgést, a rendszer mechanikai energiája folyamatosan csökken, hiszen a súrlódási erő munkája negatív. Ezt figyelembe véve is kiszámíthatjuk az amplitúdókat.

A gyakorlatban sokszor találkozunk olyan eszközökkel, melyek lengését, rezgését a súrlódási erő csillapítja. Ez a helyzet pl. a *mérlegeknél.* Ha a mérlegre súlyt helyezünk, akkor előbb-utóbb a lengése megáll, egyensúlyi helyzetbe kerül, mutat valamekkora értéket. Ezt az értéket nemcsak a súly, hanem a lengés, a ráhelyezés kezdeti feltételei határozzák meg. Ha a mérést megismételjük, nem tudjuk biztosítani ugyanazokat a kezdeti feltételeket, a mérleg máshol kerül egyensúlyi állapotba, más értéket fog mutatni, mint előbb.

A sebességgel arányos fékezőerő. Ilyen csillapított rezgőmozgást végez egy folyadékban (nem túl gyorsan) lengő inga [lásd a (2.162) képletet]. A rendszer teljes mechanikai energiája folyamatosan csökken a közeg-ellenállási erő hatására. Ha a sebesség nem túl nagy, akkor a közeg-ellenállási erő a sebesség első hatványával egyenesen arányos: $F_k = Cv$ (lásd 2.7.3.3). A közeg-ellenállási erő által kicsiny Δt idő alatt végzett munka: $-Cv\Delta s = -cv^2\Delta t$. Ezt a pillanatnyi mozgási energiával osztva:

$$\frac{-Cv^2\Delta t}{\frac{1}{2}mv^2} = -\frac{2C\Delta t}{m} = \text{állandó}.$$

A rendszer tehát az egymás utáni egyenlő időközökben mozgási energiájának mindig ugyanannyiad részét veszíti el. Ezért a mozgási energia változása a közegellenállási erő okozta változás miatt az időnek (csökkenő) exponenciális függvénye. A rendszer mechanikai energiája az egyensúlyi helyzeteken való áthaladáskor mindig az előző egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor meglévő energiának ugyanannyiad része.



2.103. ábra

A 2.103a. ábrán a sebességgel arányos erő hatására csillapodó rezgőmozgás kitérés–idő függvénye látható. Ha a rendszer csillapítását növeljük, eljutunk egy olyan határhelyzethez, amelynél a szélső helyzetből induló test nem halad át az egyensúlyi helyzetén, hanem ott megáll. Ez az ún. *aperiodikus* határeset (2.103b. ábra). Lengő alkatrészeket tartalmazó műszereknél ezt az aperiodikus határesetet igyekeznek elérni, mert ekkor a műszer mutatója lengések nélkül viszonylag hamar eléri egyensúlyi helyzetét. Ha a csillapítást tovább növeljük, akkor a test viszonylag hosszú idő múlva áll meg (2.03c. ábra).

A gyakorlatban a közegellenállási erőt használják műszerek lengő alkatrészeinek csillapítására. Ha csak a közegellenállási erő hat, akkor az egyensúlyi helyzet jól meghatározott, és nem függ a kezdeti feltételektől. Például egy folyadékban lengő inga egyensúlyi helyzete az a függőleges helyzet, ami csillapítás nélkül lenne.

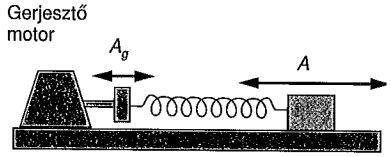
Csillapítatlan rezgőmozgást úgy állítunk elő, hogy a nem konzervatív erők által disszipált energiát – azaz az eltűnt mechanikai energiát – folyamatosan pótoljuk.

Ez a helyzet a régebben használt mechanikus óráknál, ahol energiaforrásként megcsavart spirálrugó vagy egy felemelt súly szerepel. Egy megfelelő szerkezet minden egyes periódusban annyi energiát ad át a rezgő rendszernek, hogy az amplitúdó állandó maradjon.

2.4.10. Kényszerrezgés; rezonancia

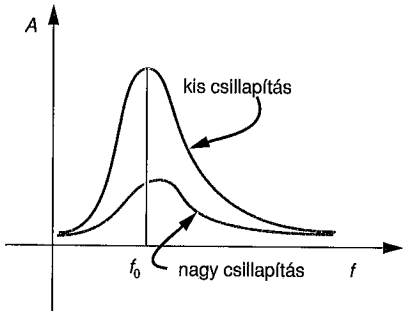
Ha egy rezegni képes rendszert egyetlen lökéssel elindítunk és magára hagyunk, akkor csillapodó rezgést végez. Az így létrejött rezgést *sajátrezgésnek* nevezzük. A sajátrezgés frekvenciáját, periódusidejét, melyet a rendszer fizikai jellemzői egyértelműen meghatároznak, *sajátfrekvenciának, saját periódusidőnek nevezzük.*

Ha egy rezgő rendszerre valamilyen periodikus gerjesztő erő hat, akkor a rendszer rezgésbe jön. Néhány rezgés után a rendszer állandó periódusú rezgést végez a gerjesztő rezgés frekvenciájával és a stabilizálódott amplitúdóval. Az ilyen rezgés a *kényszerrezgés.*



2.104. ábra

A 2.104. ábra szerinti összeállítással tanulmányozhatjuk a jelenséget. A gerjesztő rezgés A_0 amplitúdóját változatlannak tartva változtatjuk a gerjesztő rezgés f frekvenciáját. A létrejött rezgés amplitúdója A. Ha az f–A koordináta-rendszerben ábrázoljuk a gerjesztett amplitúdót a gerjesztő frekvencia függvényében, akkor az ún. *rezonanciagörbét* kapjuk (2.105. ábra).



2.105. ábra

Azt találjuk, hogy a gerjesztő frekvencia függvényében változik a gerjesztett rezgés amplitúdója. A saját frekvenciánál kisebb, illetve nagyobb frekvenciákon a rezgés amplitúdója kicsi. A görbének ott van maximuma, ahol a gerjesztő frekven-

cia megegyezik a sajátfrekvenciával. (A pontos megfigyelések és az elmélet azt mutatja, hogy a maximum nem pontosan ott van. Minél kisebb a rendszer csillapítása, annál kisebb az eltolódás.) Azt a jelenséget, amikor a gerjesztett rendszer amplitúdója maximális, *rezonanciának* nevezzük. A rezonanciaamplitúdó a gerjesztő rezgés amplitúdójának sokszorosa lehet.

Ha a rezgés amplitúdója túl nagy, akkor a rendszer tönkre is mehet. Ez a *rezonanciakatasztrófa.* Ilyen jelenségek jöhetnek létre hidaknál, épületeknél, ha erős szélben a periodikusan leszakadó légörvények hatására rezgésbe jönnek. Ha a gerjesztő frekvencia megegyezik a sajátfrekvenciával, akkor a híd le is szakadhat. A mozgó alkatrészeket tartalmazó gépeknél a nem kiegyensúlyozott részek periodikus mozgása miatt rezonancia állhat elő.

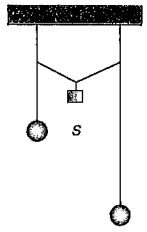
A fizikában a mechanikai jelenségek körétől a kvantummechanikáig nagyon sok jelenség van, amely rezonanciaként értelmezhető.

A rezonancia hozzávetőleges magyarázata a következő: kényszerrezgés során a testre három erő hat. Az egyik erő az, amelyik a rendszer rezgését eredményezi a sajátrezgés folyamán (pl. rugóra függesztett testnél a rugóerő). Ez konzervatív. A másik erő a csillapító erő, amelyik nem konzervatív és a rendszer energiáját disszipálja. Egy teljes rezgés alatt a csillapító erő munkája miatt bekövetkező mechanikai energiaveszteség az amplitúdótól függ, minél nagyobb az amplitúdó, annál több a mechanikai energiaveszteség. A harmadik erő, a külső, gerjesztő erő is munkát végez a testen. Munkája akkor pozitív, ha a gerjesztő erő sebességirányú. A gerjesztő rendszer egy rezgés alatt csak meghatározott energiát tud átadni. Ha a gerjesztő erő frekvenciája, periódusa megegyezik a sajátrezgésével, akkor a gerjesztő erő mindig sebességirányú lehet a rezgés minden pillanatában. Ezért az pozitív munkát végez. A gerjesztő erő tehát növeli a rendszer energiáját. Így az amplitúdó is nő egészen addig, amíg az amplitúdónövekedés miatti energiaveszteség el nem éri a gerjesztő erő által közölt energiát. Ha a rendszer csillapítása kicsi, akkor igen nagy amplitúdó jöhet létre, a rezonanciagörbe „éles". Nagyobb csillapításnál és ugyanakkora gerjesztő teljesítmény esetén kisebb amplitúdó jön létre, hiszen már kis amplitúdónál is akkora energiaveszteség jön létre, hogy a gerjesztő erő munkája csak ezt tudja fedezni. Ilyenkor a rezonanciagörbe „lapos". Ha a gerjesztő erő frekvenciája eltér a sajátfrekvenciától, akkor a sebesség iránya hamarabb vagy később fordul, mint a gerjesztő erő, ezért a gerjesztő erő nem a teljes periódus alatt végez pozitív munkát. Sőt, a rezgés bizonyos szakaszában korlátozza a mozgást (amikor a munkája negatív). Így nem tudja teljes energiáját átadni.

A nagy rezonanciaamplitúdók kis gerjesztő teljesítmények esetén csak igen kis csillapítású rendszereknél jönnek létre. Szokásos probléma: ha az Erzsébet-hídra rászáll egy szúnyog és lábával a rezonancia frekvenciájával ütögeti a hidat, vajon leszakad-e? Nem fog leszakadni, hiszen egy periódus alatt a gerjesztő erő olyan kis energiát tud adni a rendszernek, amely csak igen kis amplitúdójú rezgések fenntartására elegendő. Az igazsághoz tartozik, hogy ilyen kis energiától még rezgésbe sem tud jönni az egész híd, hiszen annak energiája mechanikai hullám formájában terjed tova a hídon. Mivel a hullámok csillapodnak, és a híd nagy, ezért a hullámok a híd jó részét el sem érik.

2.4.11. Csatolt rezgések

Ha két vagy több rezgő rendszer között energia átadása lehetséges, akkor *csatolt rendszerekről* beszélünk. Ilyen csatolt rezgéseket állíthatunk elő a 2.106. ábra szerinti elrendezésben.



2.106. ábra

A két inga fonalát egy harmadik fonállal kötjük össze, amelyen egy kis súly lóg. Az egyik ingát lengésbe hozva a súllyal megfeszített fonál révén a másik inga is lengésbe jön, miközben az előző inga lengései csökkennek. Később az energiaátadás iránya megfordul és így tovább. Mindkét inga bonyolult rezgőmozgást végez. Ha a két rezgő rendszer sajátfrekvenciája megegyezik, akkor az egyik rendszer teljes egészében átadhatja energiáját a másik rendszernek, majd visszakapja stb. Esetünkben a két inga hosszát egyenlőnek véve és az egyik ingát lengésbe hozva, az teljes energiáját átadja a másik ingának, megáll. Majd ez az inga áll meg és adja át energiáját a másiknak. Az energia a két rezgő rendszer között ide-oda „vándorol". A *csatolást szorosnak,* illetve *lazának* mondjuk, ha az időegység alatt átadott energia nagy, illetve kicsi. Esetünkben nagyobb súly szorosabb csatolást jelent.

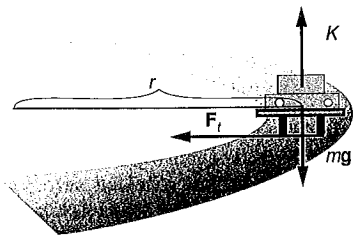
2.4.12. Az egyenletes körmozgás dinamikája

Az egyenletes körmozgást végző testek gyorsulásának nagysága állandó: $a = r\omega^2$. A gyorsulás sugárirányú. Ebből következően az *egyenletes körmozgás dinamikai feltétele: a testre ható erők eredőjének nagysága állandó és merőleges a sebességre.*

Szokás az egyenletes körmozgás gyorsulását centripetális gyorsulásnak, a testre ható erők eredőjét centripetális erőnek nevezni. Fizikailag itt nem indokoltak a jelzők, csak akkor érdemes ezeket használni, ha a körmozgás változó.

Egyenletes körmozgásnál a testre ható erő eredőjének nagysága: $ma = mr\omega^2$. Mivel az erők eredője merőleges a sebességre, ezért munkája 0, ezért nem változik a

test mozgási energiája és így sebességének nagysága sem. Az egyenletes körmozgás dinamikai tárgyalásának alkalmazásaként nézzük meg a *járművek kanyarodását:*



2.107. ábra

Legyen a jármű mérete kicsi a pálya sugarához képest! Ekkor a jármű az adott problémában pontszerűnek tekinthető (lásd az alpont végén az apró betűs megjegyzést).

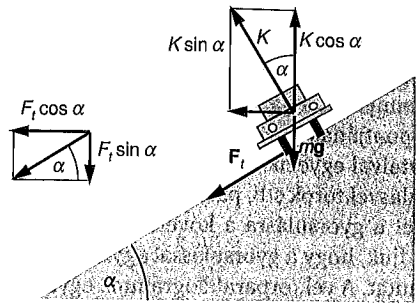
Először vízszintes úton állandó nagyságú sebességgel haladó járművet vizsgálunk (2.107. ábra). Az r görbületi sugarú kanyarban v sebességgel haladó jármű a kanyar görbületi középpontja felé gyorsul $a=\frac{v^2}{r}$ gyorsulással. A jármű akkor marad az úttesten, akkor nem csúszik meg, ha a kerekekre ható tapadási súrlódási erők, melyek eredője F_t, biztosítani tudja ezt a gyorsulást. A tapadási erő maximális értéke $\mu_t mg$, ahol (μ_t a tapadási együttható):

$$m\frac{v^2}{r}=F_t\le\mu_t mg, \qquad \text{azaz} \qquad v\le v_{max}=\sqrt{\mu_t gr}.$$

Tehát egy adott görbületi sugarú kanyarban, adott útviszonyok (adott μ_t) esetén legfeljebb a fent megadott sebességgel lehet haladni a megcsúszás veszélye nélkül. Figyeljük meg, hogy az úttesten tartáshoz szükséges erő a sebesség négyzetével arányos, azaz kétszer akkora sebességnél négyszer akkora tapadási erő kell.

A helyzetet bonyolítja még az is, hogy a kerekek nem egyforma erővel nyomódnak a talajhoz.

Kanyarban a sebesség nagyságának megváltoztatásakor fellép még az érintőirányú gyorsulás is. Ezért ebben az esetben akár gyorsítunk, akár fékezünk, a gyorsulás és ezzel együtt az íven maradáshoz szükséges erő is nő. Ha tehát valaki épp v_{max}-szal érkezik a kanyarba és ijedtében fékezni kezd, akkor biztosan kicsúszik, hiszen a fékezés kezdetén a sebesség még alig csökken, de az érintőirányú gyorsulás nagy lehet, ezért az erőszükséglet jelentősen megnőhet. *Ezért nem kell nagy sebességgel behajtani egy szűk kanyarba, mert ott már nemigen tudunk korrigálni.* Ha az úttestet, illetve vasúti sínt megdöntjük, akkor a jármű pályán maradásához szükséges gyorsulást a tapadási erő és a kényszererő vízszintes komponense hozza létre (2.108. ábra).



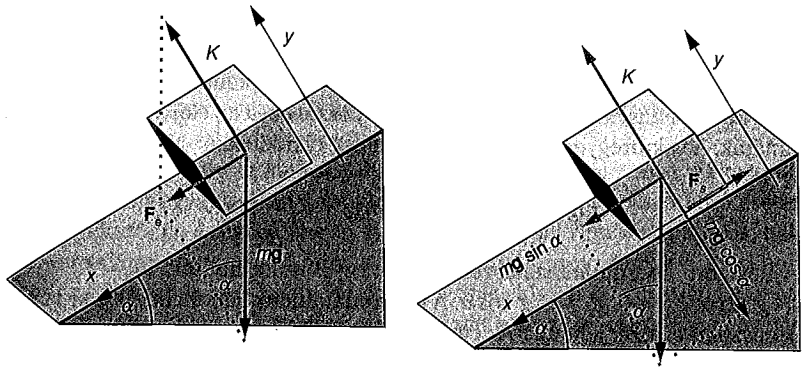
2.108. ábra

Bármely szög esetén van olyan sebesség, amelynél még 0 tapadási erő esetén sem csúszik ki a jármű. Ennél kisebb vagy nagyobb sebességek esetén fellépő tapadási erő felfelé vagy lefelé mutatván segít a testet körpályán tartani (egy bizonyos határig).

2.4.13. Példák kényszermozgásokra

Súrlódásmentes lejtőn lecsúszó test. A test két másik testtel van kölcsönhatásban, a Földdel és a lejtővel. A 2.109. ábra jelöléseit alkalmazva a testre ható erők: $m\mathbf{g}$ és a $\mathbf{K}$ kényszererő. A test mozgásegyenlete:

$$m\mathbf{g}+\mathbf{K}=m\mathbf{a}.$$



2.109. ábra

A vektoregyenletben ismert az $m\mathbf{g}$ iránya és nagysága, valamint $\mathbf{K}$ iránya (merőleges a felületre). A keresett gyorsulás irányát is tudjuk, hiszen a lejtő a testet olyan

mozgásra kényszeríti, melynek pályája párhuzamos a lejtő síkjával. Ha pontszerű testről van szó, akkor a test a lejtő síkjában mozog. Ha a test kiterjedt, pl. egy hasáb, akkor a fenti egyenlet a tömegközéppont tétele, és a gyorsulás a tömegközéppont gyorsulása. Amennyiben a hasáb 0 kezdősebességgel indul, haladó mozgást végez, ezért minden pontjának gyorsulása, sebessége, elmozdulása ugyanaz, és a tömegközéppont adataival egyezik meg. (Mivel a pálya párhuzamos a lejtő síkjával, ezért az elmozdulásvektorok stb. párhuzamosak a lejtő síkjával.)

A vektoregyenletet a gyorsulásra a következőképpen oldjuk meg: A két erő vektori összegéről tudjuk, hogy a gyorsulással egyirányú, tehát párhuzamos a lejtő síkjával és lefelé mutat. A vektorparalelogramma egyik oldala, az $m\mathbf{g}$ nehézségi erő, irány és nagyság szerint ismert. A másik oldal, a $\mathbf{K}$ erő iránya és az átló, vagyis az eredő iránya szintén ismert. Ezért a vektorparalelogramma megszerkeszthető. Az ábrából leolvasható, hogy $K = mg\cos\alpha$, és az eredő nagysága $mg\sin\alpha$. Innen a test gyorsulása:

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha.$$

A nehézségi erő helyettesíthető pontba koncentrált eredővel. A kényszererő felületi erő. A két erő eredő forgatónyomatékát a sajátperdület szabja meg, ami haladó mozgás esetén 0. Mivel az $m\mathbf{g}$ forgatónyomatéka a tömegközéppontra vonatkoztatva 0, ezért az eredő forgatónyomaték csak úgy lehet 0, ha a kényszererőé is az. Ez pedig csak úgy lehet, hogy a $\mathbf{K}$ erő hatásvonala is átmegy a tömegközépponton.

A feladat másik megoldásánál a szuperpozíció elvét alkalmazzuk visszafelé: a gyorsulást és az erőket felbontjuk (lásd 2.109. ábra). Az adott irányú gyorsuláskomponensért az adott irányú erőkomponensek a „felelősek". A koordinátatengelyek irányába történő felbontásoknál a komponensek a tengelyek irányába vagy azzal ellentétes irányba mutatnak, ezért előjeles skalárként kezelhetők. Az adott irányú komponensek algebrai úton adódnak össze. Ezek az előjeles skalárok a koordináták. A vektoregyenlet átírása koordinátaegyenletekké:

$$mg_x + K_x = ma_x, \qquad mg_y + K_y = ma_y.$$

A választott koordináta-rendszerben az egyes koordináták: $K_x = 0$, $a_x = a$, $g_x = g\sin\alpha, K_y = 0, g_x = -g\cos\alpha$. A koordinátaindex nélküli betűk a mennyiségek abszolút értékét jelentik. Az egyenletekbe helyettesítve:

$$mg\sin\alpha = ma, \qquad -mg\,\mathrm{cosin}\,\alpha + K = 0.$$

A test pályáját, sebesség–idő függvényét a kezdősebesség nagysága és iránya határozza meg. Ha a kezdősebesség 0, akkor a test mozgása egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás. Sebesség–idő függvénye:

$$v = gt\sin\alpha.$$

Út–idő függvénye:

$$s = \frac{g\sin\alpha}{2}t^2.$$

Ha a test h magasságból indult, akkor megtett útja $s = \frac{h}{\sin\alpha}$. A leérési idő és a lejtő alján a végsebesség:

$$t = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad v = \sqrt{2gh}.$$

Tehát a lejtő aljára akkora végsebességgel ér le a test, mintha h magasságból szabadon esett volna.

Mivel a mozgás súrlódásmentes és a kényszererő munkája 0, ezért itt a mechanikai energiák összege állandó. Felírva a mechanikai energiák összegét a lejtő tetején és a lejtő alján:

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0,$$

ahol a helyzeti energia 0 szintjét a lejtő alján választottuk. Innen is $v = \sqrt{2gh}$.

Ha a test kezdősebessége nem 0, és a kezdősebesség vektora nem a $\mathbf{K}$ *és* $m\mathbf{g}$ *által kifeszített síkban van* (azaz $\mathbf{v}_0$-nak van az ábra síkjára merőleges komponense), a test gyorsulásvektora továbbra is ugyanaz, mint előbb kiszámítottuk. A pálya a lejtő síkjában fekvő parabolapálya lesz.

Ha a kezdősebesség az ábra síkjában felfelé mutat, akkor a mozgás kezdetben egyenes vonalú egyenletesen lassuló mozgás. Elegendően hosszú lejtő esetén a test 0-ra fékeződik, és egyenletesen gyorsuló mozgással visszaér kiindulási helyére ugyanakkora sebességgel, mint amennyivel indítottuk. Ennek a mechanikai energiamegmaradás elve miatt is így kell lennie, hiszen a test indulási helyére visszaérve ugyanakkora helyzeti energiájú. Ezért a mozgási energiája, vele együtt a sebessége is ugyanakkora lesz, hiszen összegük is változatlan.

Súrlódásos lejtőn csúszó test. A 2.109. ábra szerinti jelöléseket használjuk. A csúszási súrlódási együttható legyen μ, legyen kisebb, mint a μ_t tapadási együttható. A súrlódási, illetve tapadási erők a lejtővel párhuzamosak.

A csúszási súrlódási erő a lejtőhöz viszonyított relatív sebességgel ellentett irányú.

Ha a test áll a lejtőn, akkor a tapadási erő irányát a következőképpen határozzuk meg: gondolatban megszüntetjük a tapadási erőt, és megvizsgáljuk, hogy annak hiányában a test merre csúszna meg a lejtőhöz képest. Ezzel az elképzelt relatív megcsúszással ellentett irányú a tapadási erő.

Ha a test lejtőn *nyugalomban* van, akkor az $m\mathbf{g}$ lejtővel párhuzamos komponensét egyenlíti ki az $\mathbf{F}_t$ tapadási erő:

$$mg \sin \alpha = F_t \leq \mu_t mg \cos \alpha.$$

A egyenlőtlenséget rendezve az egyensúly feltétele:

$$\mu_t \geq \operatorname{tg} \alpha.$$

Határesetben az egyenlőtlenség helyett egyenlőség áll fenn. Ezt a *tapadási együttható mérésére* is felhasználhatjuk a következőképp: Vegyünk egy állítható hajlásszögű lejtőt, melyet vízszintesre állítunk, és helyezzük rá a testet! A hajlásszöget fokozatosan növelve elérjük azt a szöget, melynél a test a megcsúszás határán van. Ennek a szögnek a tangense lesz a tapadási együttható.

Ha a test lefelé mozog a lejtőn, akkor felbontjuk az erőket a lejtővel párhuzamos és rá merőleges komponensekre. A koordinátaindex nélküli betűkkel a mennyiségek abszolút értékét jelölve:

$$K = mg \cos \alpha, \qquad a = \frac{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{m} = g\left(\sin \alpha - \mu \cos \alpha\right).$$

Mivel az a a gyorsulás abszolút értéke, ezért a megoldásnak csak akkor van értelme, ha $a \geq 0$. Ez pedig akkor áll fenn, ha $\mu \leq \operatorname{tg} \alpha$.

Határesetben a test gyorsulása 0, azaz:

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha.$$

Ekkor a test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, ha már eleve mozgott. Ha a test áll, akkor állva is marad, hiszen a tapadási erő maximuma mindig nagyobb a csúszási súrlódási erőnél. Ezt az egyenlőséget a μ mérésére is felhasználhatjuk, ha a testet a kezdetben vízszintesre állított állítható hajlásszögű lejtőre helyezzük. A hajlásszöget fokozatosan növelve és a testet kissé „megkocogtatva" (ami azt biztosítja, hogy legyen a testnek kis kezdősebessége) figyeljük a mozgást. Amikor azt látjuk, hogy a test egyenletesen csúszik lefelé, akkor a hajlásszög tangense épp egyenlő a csúszási súrlódási együtthatóval.

Amennyiben a lejtő hajlásszöge elég nagy, akkor 0 kezdősebességgel elengedett test egyenletesen gyorsulva csúszik lefelé. Ekkor a h magasságú lejtő aljára érve:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{\sin \alpha g\left(\sin \alpha - \mu \cos \alpha\right)}} \qquad v = \sqrt{2hg\left(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha\right)}.$$

A testre mozgás közben hat a csúszási súrlódási erő, ezért itt a mechanikai energiák összege csökken. A munkatétel azonban alkalmazható:

$$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = W_{mg} + W_K + W_{\text{súrlódás}} = mgh + 0 - \mu mg \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha}.$$

A sebességet kifejezve ugyanazt kapjuk, mint előbb.

A lejtőn felfelé indított test esetén lefelé hat a súrlódási erő, ezért a gyorsulás nagysága $g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$. A test mozgása egyenes vonalú, egyenletesen lassuló mozgás lesz. Ha $\mu < \operatorname{tg} \alpha$, akkor megállás után a test biztosan visszacsúszik, ha pedig $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$, akkor ott marad, és a tapadási erő tartja egyensúlyban.

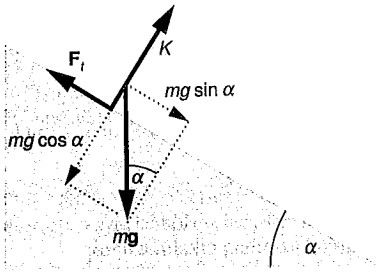
Ha a test visszacsúszik, helyzeti energiája ugyanaz lesz, mint kiinduláskor. A súrlódás következtében a test és a lejtő melegszik, belső energiájuk nő, ezért az általános energiamegmaradás elve értelmében mechanikai energiáik összege csökken. Ezért a test mozgási energiája és így sebessége is kisebb lesz, mint induláskor.

A lecsúszó hasáb sajátperdülete itt is 0. Az $m\mathbf{g}$ tömegközéppontra vonatkoztatott forgatónyomatéka 0, de a súrlódási erőé nyilván nem az. Ha a $\mathbf{K}$ kényszererőt pontba koncentrált erővel szeretnénk helyettesíteni, akkor hatásvonala nem mehet át a tömegközépponton, mert akkor forgatónyomatéka 0 lenne, és így az eredő forgatónyomaték nem lehetne 0. Az eredő forgatónyomaték úgy lehet 0, hogy a $\mathbf{K}$ erő hatásvonala átmegy a pontba koncentrált nehézségi erő és a lejtő síkjának (súrlódási erő hatásvonala) metszéspontján.

Lejtőn csúszásmentesen gördülő henger. Legyen az a hajlásszögű lejtőn a tapadási együttható elég nagy, hogy a lejtőn legördülő henger ne csússzon meg. Ekkor a henger lejtővel érintkező pontjának lejtőhöz viszonyított sebessége 0. A testre hat az $m\mathbf{g}$ nehézségi erő, a lejtő a $\mathbf{K}$ kényszererővel és az $\mathbf{F}_t$ tapadási erővel. Alkalmazva a 2.3.2. pontban elmondottakat:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{K} + \mathbf{F}_t = m\mathbf{a}_{TKP},$$

$$M_{mg} + M_K + M_{F_t} = \Theta_{TKP}\beta. \qquad (2.101a)$$



2.110. ábra

Az mg-t a 2.110. ábra szerint felbontva és a mennyiségek abszolút értékét használva:

$$K = mg\cos\alpha, \qquad mg\sin\alpha - F_t = ma_{\text{TKP}}. \tag{2.101b}$$

Itt felhasználjuk, hogy a homogén henger tömegközéppontja a szimmetriatengelyen van rajta. (Amennyiben a henger inhomogén, ezek az egyenletek nem igazak, mert ekkor a tömegközéppont görbült pályán mozog, és gyorsulásának lejtőre merőleges komponense csak kivételes pillanatokban lehet 0.) A szimmetriatengely és vele együtt a tömegközéppont gyorsulása is a lejtővel párhuzamos: lejtőre merőleges komponense 0, párhuzamos komponense pedig maga az $\mathbf{a}_{\text{TKP}}$. Az $m\mathbf{g}$ erő pontba koncentrált eredője átmegy a tömegközépponton, és ezért forgatónyomatéka a tömegközéppontra vonatkoztatva 0. A $\mathbf{K}$ erő hatásvonala átmegy a tömegközépponttal egybeeső szimmetriatengelyen, ezért ennek is 0 a forgatónyomatéka a tömegközéppontra vonatkoztatva. Egyedül az $\mathbf{F}_t$ erőnek van a tömegközéppontra vonatkoztatva nem 0 forgatónyomatéka. Ennek nagysága $F_t r$, ahol r a henger sugara. Így (2.101a) alapján:

$$F_t r = \Theta_{\text{TKP}}\beta. \tag{2.101c}$$

A (2.101a), (2.101b) és (2.101c) három egyenlete négy ismeretlent tartalmaz. A negyedik egyenlet a tiszta gördülés egyenlete az 1.2.2. alapján $v_{\text{TKP}} = r\omega$, illetve t-vel osztva:

$$a_{\text{TKP}} = r\beta.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$K = mg\cos\alpha, \qquad F_t = \frac{\Theta g\sin\alpha}{r^2 + \frac{\Theta}{m}},$$

$$\beta = \frac{g\sin\alpha}{r}\,\frac{1}{1+\frac{\Theta}{mr^2}}, \qquad a_{\text{TKP}} = g\sin\alpha\,\frac{1}{1+\frac{\Theta}{mr^2}}.$$

Látható, hogy a tömegközéppont gyorsulása kisebb a súrlódásmentes lejtőn lesikló hasábénál. A gyorsulások eltérésének nagysága a $\frac{\Theta}{mr^2}$ hányadostól függ. A tömegközéppont végsebességet az a_{TKP}-ből és a lejtő h magasságából kiszámítva:

$$v_{\text{TKP}} = \sqrt{2gh\,\frac{1}{1+\frac{\Theta}{mr^2}}}.$$

Ebben az esetben a mechanikai energiamegmaradás elve érvényes, hiszen a tapadási erő révén nem változik a rendszer belső energiája (semmi sem melegszik). Alkalmazva a merev test mozgási energiájáról mondottakat (l. 2.3.3.) és felírva az energiákat:

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_{\text{TKP}}^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega_{\text{TKP}}^2.$$

Behelyettesítve a tiszta gördülés feltételét, $v_{\text{TKP}} = r\omega$, és megoldva az egyenletet, ugyanazt kapjuk, mint fent.

Amennyiben a tiszta gördülés feltételei nem teljesülnek, akkor a csúszási súrlódási erő munkája sem 0, és a kényszerfeltétel sem áll fenn.

A lejtő hajlásszögének növelésével a tiszta gördülés F_t erőszükséglete nő, a K erő pedig csökken. Ezért egy bizonyos α_0 szögnél az F_t erő éppen akkora, hogy még biztosítani tudja a tiszta gördülést. Ekkor $F_t = \mu_t K$. Az előző kifejezésekbe behelyettesítve kapjuk a tiszta gördülés feltételét:

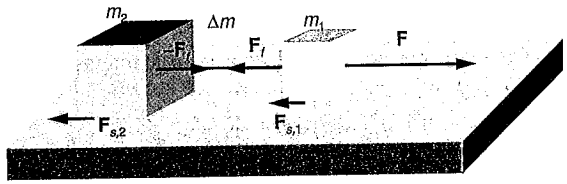
$$\operatorname{tg}\alpha \le \frac{\mu_t\left(1+\frac{\Theta}{mr^2}\right)}{\frac{\Theta}{mr^2}}.$$

Fonállal összekötött testek mozgása. Egy m_1 és egy m_2 tömegű test vízszintes asztallapon nyugszik (2.111. ábra). Az asztal és a testek között a súrlódási együtthatók μ_1, illetve μ_2. Az őket összekötő fonál vízszintes, nyújthatatlan, tömege elhanyagolható.

Hassunk olyan **F** erővel az m_1 tömegű testre, amely a fonál egyenesében működik! Ha az **F** erő állandó, akkor a testek egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végeznek. A gyorsulások vízszintesek. Bontsuk fel a gyorsulásokat és az erőket vízszintes és függőleges összetevőkre! Mivel a gyorsulások és az erők csak vízszintesek vagy csak függőlegesek, ezért a komponensek közül az egyik 0, a másik pedig maga az erő, illetve gyorsulás. A gyorsulások vízszintesek, ezért a függőleges erők eredője 0:

$$m_1\mathbf{g}+\mathbf{K}_1=0, \qquad m_2\mathbf{g}+\mathbf{K}_2=0,$$

ahol $\mathbf{K}_1$ és $\mathbf{K}_2$ asztallap által kifejtett kényszererők.



2.111. ábra

Az m_1-re ható vízszintes erők az általunk kifejtett **F** erő, az $F_{s,1} = \mu_1 m_1 g$ súrlódási erő és az $\mathbf{F}_f$ fonálerő.

Az m_2-re ható erők a fonál által kifejtett $-\mathbf{F}_f$ fonálerő és az $F_{s,2} = \mu_2 m_2 g$ súrlódási erő.

Hogy *az elhanyagolható tömegű fonál két vége által kifejtett erők egyenlő nagyok és ellentétes irányúak,* az alábbiakban látjuk be.

Jelöljük a fonál tömegét Δm-mel! Mivel a fonál tömegközéppontja együtt gyorsul a rendszerrel, ezért a rá ható erők eredője nem 0. Az m_1 által a fonálra kifejtett erőt most $\mathbf{F}_f'$-vel, az m_2 által kifejtettet $\mathbf{F}_f$-fel jelölve, a fonálra ható erők eredőjének nagysága: $|\mathbf{F}_f' - \mathbf{F}_f|$. A fonál mozgásegyenlete:

$$\left|\mathbf{F}_f'-\mathbf{F}_f\right|=\Delta m a.$$

Ha Δm közelítőleg 0, akkor $|\mathbf{F}_f' - \mathbf{F}_f|$ is az. Tehát $|\mathbf{F}_f'| = |\mathbf{F}_f|$. A hatás–ellenhatás elve alapján a fonál is ugyanekkora, de ellentétes értelmű erőket fejt ki a testekre. Ezért a fonál által kifejtett erők egyenlő nagyok. Általában is igaz, hogy az elhanyagolható tömegű fonál két vége által kifejtett erők egyenlő nagyok még akkor is, ha a fonál gyorsul.

A mozgásegyenleteket vektoros alakba írva:

$$\mathbf{F}+\mathbf{F}_f+\mathbf{F}_{s.1}=m_1\mathbf{a}_1 \qquad -\mathbf{F}_f+\mathbf{F}_{s.2}=m_2\mathbf{a}_2.$$

Az egyenletrendszerben ismeretlenek $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{F}_f$. Mivel a testek egyenes vonalú pályán mozognak és a fonál nyújthatatlan, a két test elmozdulása, sebessége és így gyorsulása is minden pillanatban ugyanaz:

$$\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2.$$

Skaláregyenletekre áttérve és a mennyiségek abszolút értékeit behelyettesítve:

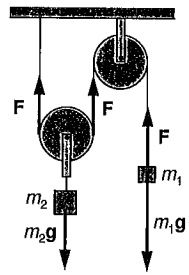
$$F-F_f-\mu_1 m_1 g=m_1 a_1 \qquad F_f-\mu_2 m_2 g=m_2 a_2 \qquad a_1=a_2.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$a=\frac{F-\mu_1 m_1 g-\mu_2 m_2 g}{m_1+m_2} \qquad F_f=\frac{m_2 F+m_1 m_2 g\left(\mu_2-\mu_1\right)}{m_1+m_2}.$$

A tömegközéppont gyorsulását is kiszámíthatjuk a tömegközéppont tétele alapján: mivel a rendszer minden pontjának gyorsulása ugyanaz, ezért a tömegközéppont gyorsulása is egyben a fentiekben említett *a* gyorsulás. A rendszerre ható külső erők közül a nehézségi és a kényszererők kiegyenlítik egymást. További külső erők még az **F** és a súrlódási erők, melyek vektori összege a fenti kifejezés számlálója. A tömegközéppont tétele értelmében a rendszerre ható külső erők eredőjét az össztömeggel osztva kapjuk a gyorsulásra vonatkozó kifejezést.

Más típusú kényszerfeltételt láthatunk a 2.112. ábrán.



2.112. ábra

Legyen a csigák tömege és tehetetlenségi nyomatéka elhanyagolható, és legyenek súrlódásmentesek! Ha a fonál tömege elhanyagolható, akkor a fonál által kifejtett erők is mindenütt egyenlő nagyok. A mozgásegyenletek:

$$\mathbf{F}+m_1\mathbf{g}=m_1\mathbf{a}_1, \qquad m_2\mathbf{g}+2\mathbf{F}=m_2\mathbf{a}_2.$$

Itt még a gyorsulások nagyságai sem egyenlők, mert ha m_2 Δs-sel süllyed, akkor m_1 $2\Delta s$-sel emelkedik, hiszen m_2 ekkora süllyedéséhez m_1-nek $2\Delta s$ hosszúságú fonalat kell utána engedni. Ezért $\mathbf{a}_1$ kétszer akkora, mint $\mathbf{a}_2$, és ellentett irányúak:

$$\mathbf{a}_1 = -2\mathbf{a}_2.$$

A vektoregyenleteket koordinátákra átírva az ábra szerinti koordináta-rendszerben $F_y = F$ és $g_y = -g$, ahol F és g a vektorok abszolút értékei:

$$F_y - m_1 g = m_1 a_{1,y}, \qquad 2F_y - m_2 g = m_2 a_{2,y}, \qquad a_{1,y} = -2a_{2,y}.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$a_{1,y} = -2\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\,g, \qquad a_{2,y} = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\,g, \qquad F_y = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2}\,g.$$

2.4.14. Ütközések

Testek ütközéséről akkor beszélünk, amikor a testek igen rövid ideig tartó érintkezés folytán fejtenek ki egymásra nagy erőket.

A továbbiakban feltesszük, hogy az ütközés folytán a testek kis felületen érintkeznek.

Az érintkezési felületre állított merőleges az *ütközés normálisa.*

Centrálisnak nevezzük azokat az ütközéseket, amelyeknél az ütközés normálisa átmegy mindkét test tömegközéppontján.

Egyenes ütközésnek nevezzük az ütközést, ha a sebességvektorok az ütközés normálisával párhuzamosak.

Centrális, egyenes ütközéskor az ütközés utáni sebességek ugyanabba az egyenesbe esnek, mint az ütközés előttiek. Ennél az ütközésnél a fellépő erők hatásvonalai átmennek a tömegközépponton, és ezért az ütköző testek sajátperdületei nem változnak. Ha a testek ütközés előtt nem forogtak, akkor az ütközés során sem jönnek forgásba. Ilyenkor az ütközés leírására elegendő a tömegközéppont mozgását figyelnünk, és mindegy, hogy melyik pont sebességéről beszélünk, minden pontnak ugyanaz a sebessége. Röviden azt mondjuk, hogy a test sebessége.

A mozgási energia is egyszerűen számítható: $\frac{1}{2}mv_{\text{TKP}}^2$. A kiterjedt testek ilyen ütközését pontszerű testek ütközésének is felfoghatjuk a leírás szempontjából, hiszen csak egyetlen pontjuk mozgását kell figyelemmel kísérnünk. Az ilyen ütközéseknél a kiterjedt test tömegközéppontjának sebességét a továbbiakban **v**-vel jelöljük.

Az ütközéseket a mechanikai energia megmaradása szempontjából két csoportra osztjuk. *Tökéletesen rugalmas*nak nevezzük azokat az ütközéseket, amelyeknél a mechanikai energiák nem alakulnak át másfajta energiákká. Ezek az ütközések megfordítható folyamatok. *Rugalmatlan ütközéseknél* a mechanikai energiák egy része vagy a teljes energia más típusú energiákká alakul át. Ennek egy speciális fajtája a *tökéletesen rugalmatlan ütközés,* amelynek során a testek ütközés utáni sebessége megegyezik. (pl. összeragadnak, valamilyen szerkezettel összekapcsolódnak).

Tökéletesen rugalmas, centrális, egyenes ütközések. Jó közelítéssel tökéletesen rugalmas ütközést valósíthatunk meg rugóval ellátott kiskocsikkal. Megfigyelhetjük, hogy az ütközés alatt a rugók deformálódnak egészen addig, amíg a kocsik egy közös sebességre nem tesznek szert. Mozgási energiájuk egy része átalakult rugalmassági energiává. Majd a rugók deformációja megszűnik, és a rugalmassági energiák visszaalakulnak mozgási energiákká. Ha biztosítottuk a rendszer zártságát, akkor érvényes az impulzus megmaradásának elve és a feltételek miatt a mechanikai energiamegmaradás elve is.

A mechanikai energiák az ütközés előtt és után csak mozgási energiák. A mechanikai energiák megmaradása a fentiek alapján a mozgási energiák megmaradását jelenti. Így a két megmaradási törvény:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2, \tag{2.102a}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2. \tag{2.102b}$$

Mivel az ütközés előtti **v** és az ütközés utáni **u** sebességek egy egyenesbe esnek, ezért válasszuk az ütközés egyenesét a vonatkoztatási rendszer x tengelyéül. Így a vektoregyenlet helyett csak egyetlen skaláris egyenletünk lesz az x koordinátákra. A **v** és **u** helyébe a (2.102a és b) képletekben is írhatunk koordinátákat:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x},$$
$$m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2 = m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2.$$

Az egyenleteket átrendezve:

$$m_1\left(v_{1x} - u_{1x}\right) = m_2\left(u_{2x} - v_{2x}\right), \tag{2.102c}$$

$$m_1\left(v_{1x}^2 - u_{1x}^2\right) = m_2\left(u_{2x}^2 - v_{2x}^2\right). \tag{2.102d}$$

A (2.102d) egyenletet a (2.102c)-vel elosztva kapjuk:

$$v_{1x}+u_{1x}=u_{2x}+v_{2x},$$

innen kifejezzük u_{2x}-t, és a (2.102c)-vel visszahelyettesítve kapjuk:

$$u_{1x}=\frac{(m_1-m_2)v_{1x}+2m_2v_{2x}}{m_1+m_2}, \qquad (2.102e)$$

$$u_{2x}=\frac{(m_2-m_1)v_{2x}+2m_1v_{1x}}{m_1+m_2}. \qquad (2.102f)$$

Speciális esetek:

– *egyenlő tömegű testek ütközésekor* a testek „sebességet cserélnek". Az $m_1 = m_2 = m$ behelyettesítéssel $u_{1x} = v_{2x}$ és $u_{2x} = v_{1x}$. Ebből következik, hogy az álló m tömegű testnek ütköző v sebességű test megáll, és az eredetileg álló test v sebességgel halad tovább.

– *végtelen nagy tömegű, nyugvó testnek ütköző, merőlegesen becsapódó test* ugyanakkora és ellentétes irányú sebességgel pattan vissza, mint amellyel becsapódott. Legyen m_1 sokkal nagyobb m_2-nél és $v_{1x} = 0$! Az u_{2x} képletébe $m_2 = 0$ és $v_{1x} = 0$ behelyettesítésével kapjuk, hogy $u_{2x} = -v_{2x}$ és $u_{1x} = 0$. Azaz, a test ugyanakkora sebességgel pattan vissza, mint amennyivel becsapódott, és a végtelen nagy tömegű test sebessége az ütközés után 0.

Tökéletesen, teljesen rugalmatlan, egyenes vonalú, centrális ütközések. Tökéletesen rugalmatlan ütközést valósíthatunk meg összekapcsoló szerkezettel ellátott vagy puha ütközőjű kiskocsik ütköztetésekor.

Az előzőekben használt jelölésekkel az impulzusmegmaradás tétele:

$$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=(m_1+m_2)u_x. \qquad (2.103)$$

Itt u_x az ütközés utáni közös sebesség. Innen a közös sebesség meghatározható. Az ütközés folyamán a mechanikai energiák összege csökken, és egy részük átalakul másfajta energiákká.

Valódi ütközések. Általános esetben a centrális, egyenes ütközéseket a következőképpen jellemezhetjük.

Az ütközéseket a tömegközépponttal együtt mozgó vonatkoztatási rendszerből megfigyelve az ütköző testek impulzusa egyenlő nagy és ellentett irányú. (A teljes impulzus ebben a rendszerben nulla, lásd a 2.2.3.pontot.) Ez az ütközés után is így van.

A (nem létező) tökéletesen rugalmas ütközésnél nem változik ebben a rendszerben a sebességek nagysága, csak irányuk lesz az ütközés előttivel ellentett, az ütközés „megfordítható".

A teljesen rugalmatlan ütközésnél az összetapadt testek ebben a rendszerben nyugalomba kerülnek.

Valóságos ütközéseknél a tömegközépponti rendszerben az egyes testek impulzusa csökken. Az ütközések előtti és utáni impulzusok hányadosa közelítőleg független a sebességek nagyságától és csak a testek anyagi minőségétől függ. A tömegközépponti rendszerben mért ütközés utáni p_1' és az ütközés előtti p_1 nagyságának hányadosa a *k ütközési szám:* $k=\frac{p_1'}{p_1}$ természetesen $k=\frac{p_2'}{p_2}$ is, mert az impulzusok egyenlő nagyok.

Az ütközési számot nem tömegközépponti rendszerbeli sebességekkel is kifejezhetjük. A tömegközépponti rendszerben a sebességek $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{TKP}$ és $\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_{TKP}$,

$$k=\frac{p_2'}{p_2}=\frac{p_2'}{p_1}=\frac{m_2\left(u_{2x}-\frac{m_1u_{1x}+m_2u_{2x}}{m_1+m_2}\right)}{m_1\left(v_{1x}-\frac{m_1v_{1x}+m_2v_{2x}}{m_1+m_2}\right)}=\frac{u_{2x}-u_{1x}}{v_{1x}-v_{2x}}.$$

A k tehát a testek ütközés utáni és előtti relatív sebességeinek hányadosa. Tökéletesen rugalmas ütközéseknél $k = 1$, teljesen rugalmatlannál $k = 0$. Elefántcsont golyóknál $k = 0{,}9$, acélgolyóknál $k = 0{,}6$.

Az ütközésekre vonatkozó formulákat az alábbiak alapján is megkaphatjuk.

Figyeljük meg az ütközést egy a tömegközépponttal együtt mozgó rendszerből. Innen nézve a „nyugvó" rendszer $-\mathbf{v}_{TKP}$ sebességgel megy „hátrafelé". Ezért ebben a rendszerben a testek ütközés előtti impulzusai $m_1(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_{TKP})$ és $m_2(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_{TKP})$, melyek egyenlő nagyok és ellentett irányúak. Ütközés után mindkét test impulzusa k-ad részére csökken és megfordul. Az ütközés utáni sebességek a TKP rendszerben: $-k(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_{TKP})$ és $-k(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_{TKP})$. A testek sebességei a nyugvó rendszerből megfigyelve: $\mathbf{u}_1 = -k(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_{TKP})+\mathbf{v}_{TKP}$ és $\mathbf{u}_2 = -k(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_{TKP})+\mathbf{v}_{TKP}$. A vektoregyenleteket koordinátákra átírva:

$$u_{1x}=(1+k)\frac{m_1v_{1x}+m_2v_{2x}}{m_1+m_2}-kv_{1x}, \qquad u_{2x}=(1+k)\frac{m_1v_{1x}+m_2v_{2x}}{m_1+m_2}-kv_{2x}. \qquad (2.104)$$

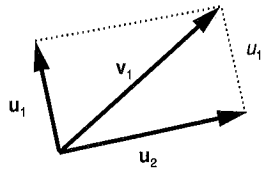
A fenti képletek $k = 1$ esetén megadják a tökéletesen rugalmas ütközésre vonatkozó formulákat is.

Ferde ütközések. Ha az ütköző test sebessége az ütközés normálisával nem párhuzamos, akkor ferde ütközésről beszélünk. A ferde ütközéseknél az ütközés előtti sebességeken kívül az ütközés utáni sebességek valamilyen jellemzőjét és az ütközés bizonyos körülményeit is ismernünk kell (pl. azt, hogy megpörgetik-e egymást az ütköző testek).

A problémát csak speciális esetekben tudjuk megoldani további információk hiányában.

Speciális esetek:

Egy pontszerű test ferdén, tökéletesen rugalmasan ütközik egy vele egyenlő tömegű, nyugvó pontszerű testtel.



2.113. ábra

A 2.113. ábra szerint az impulzusmegmaradás alapján: $m\mathbf{v} = m\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2$, azaz $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

A tömegek egyenlősége miatt a mozgási energiákra vonatkozó egyenlet is egyszerűsíthető a tömeggel. Így $v^2 = u_1^2 + u_2^2$. A Pitagorasz-tétel megfordítását alkalmazva a *testek ütközés utáni sebességei merőlegesek egymásra.*

Pontszerű test tökéletesen rugalmas ütközése álló fallal. Ha az ütközés tökéletesen rugalmas, akkor a testből és a falból álló rendszer mechanikai energiája nem változik. Feltételezzük, hogy a fal tömege „végtelen" (a fal tömege sokkal nagyobb a vele ütköző pontszerű testénél). Ütközés előtt a rendszer teljes mechanikai energiája a pontszerű test mozgási energiája. Az ütközés folyamán a mechanikai energia részben a test csökkent mozgási energiájából és a test és a fal deformálódásából származó rugalmassági energiából áll. Ütközés után a deformáció megszűnik. A rendszer teljes mechanikai energiája ismét a visszapattanó test mozgási energiája. Mivel a ütközés tökéletesen rugalmas, az ütközés előtti és utáni mozgási energiák és így a sebességek nagysága is megegyezik:

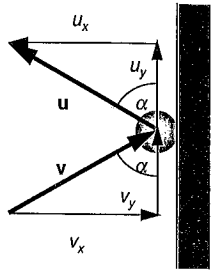
$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|.$$

Ha az ütközés *merőleges,* akkor a test a falra merőlegesen pattan vissza, ezért $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$. Az ütközés alatt a testre kifejtett erő átlagértéke:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{m\mathbf{u} - m\mathbf{v}}{\Delta t} = -\frac{2m\mathbf{v}}{\Delta t}, \qquad (2.105)$$

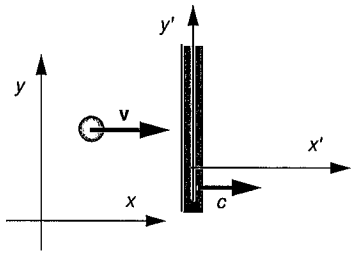
ahol Δt az ütközés időtartama. A hatás–ellenhatás elve értelmében a test a falra ugyanekkora, de ellentétes erőt fejt ki.

Ferde ütközésnél is érvényes az előbbiek szerinti $|\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|$ összefüggés. Ha a fal teljesen sima (nem lép fel a fallal párhuzamos erőkomponens), akkor a test sebességének fallal párhuzamos komponense az ütközés ideje alatt is változatlan marad.



2.114. ábra

A 2.114. ábra szerinti, az ütközés előtti és utáni sebességkomponensekből álló háromszögek egybevágóak, mert derékszögűek és két oldaluk megegyezik ($v = u$ és $v_y = u_y$). Ezért a bejelölt szögek egyenlők. Az ütközés utáni sebesség nemcsak egyenlő szöget zár be a fal normálisával, hanem abban a síkban is van, amelyet a normális és az ütközés előtti sebesség vektora feszít ki.



2.115. ábra

Ha a falon a test megcsúszik és közben rá csúszási súrlódási erő hat, akkor az ütközés nem tökéletesen rugalmas. Ha a testre ütközés közben a fal kifejt a fallal párhuzamos erőt is, de a test nem csúszik meg, csak megperdül, akkor viszont a mechanikai energiák összege nem változik. Mindkét esetben a test haladó mozgásából származó mozgási energia átalakul a test belső, illetve forgási mozgási energiájává. Ezért a test nem akkora sebességgel pattan vissza, mint amennyivel becsapódott. Többnyire nem akkora szögben pattan vissza, mint amennyivel becsapódott, hiszen mind a sebesség, mind annak fallal párhuzamos komponense csökken.

Pontszerű test tökéletesen rugalmas ütközése állandó sebességgel mozgó fallal. A test–fal rendszer nem lehet zárt rendszer, mert a fal végig egyenletesen mozog, és az őt ért ütést egy harmadik testnek kompenzálnia kell. A harmadik test által a falon végzett munka nem 0, hiszen az előzőekkel ellentétben a fal elmozdul. Ezért a test–fal rendszer energiája változik. Tökéletesen rugalmas ütközés itt azt jelenti, hogy a rendszer által felvett energia nem disszipálódik nem mechanikai energiává. Mivel a fal mozgási energiája nem változik, és a feltételek szerint deformációja teljes egészében eltűnik az ütközés

után, ezért a rendszer mechanikai energiájának megváltozása a test mozgási energiájának megváltozásában jelentkezik. Az ütközés során a külső erő munkája egyenlő a test mozgási energiájának megváltozásával.

A visszapattanó test sebességének megállapítása végett térjünk át a fallal együtt mozgó vonatkoztatási rendszerre. Mivel a fal egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, ezért a vele együtt haladó vonatkoztatási rendszer is inerciarendszer. Ezért a mechanika törvényei ebben a vonatkoztatási rendszerben is ugyanolyanok, mint az eredetiben. Ebben a rendszerben a fal nyugalomban van, így az álló fallal történő ütközés leírásakor kapott eredmények változtatás nélkül alkalmazhatók. A test sebessége az „álló" rendszerben **v**, a fal sebessége az „álló" rendszerben **c**, a test sebessége a fallal együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben **v'**. A test sebessége az álló rendszerben

$$\mathbf{v} = \mathbf{c} + \mathbf{v}'.$$

Az előző egyenletből a test sebessége a fallal együtt mozgó rendszerben:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{c}.$$

Merőleges ütközésnél ebben a rendszerben $\mathbf{u}' = -\mathbf{v}' = \mathbf{c} - \mathbf{v}$.
A test sebessége a „nyugvó" rendszerben:

$$\mathbf{u} = \mathbf{c} + \mathbf{u}' = 2\mathbf{c} - \mathbf{v}.$$

Ha egy dugattyú vagy fal a testtel szemben mozog, akkor **c** ellentétes irányú **v**-vel, azaz **–v** egyező irányú **c**-vel. Az egyirányú vektorok összeadása folytán a test sebességének nagysága a visszapattanás után

$$u = v + 2c \geq v, \tag{2.106a}$$

azaz a test nagyobb sebességgel pattan vissza, mint amellyel a falnak ment.

Ha a test és fal vagy a dugattyú egy irányban mozog, akkor **c** és **–v** ellentétes irányúak. Ha $c<v$, akkor a test a falat utoléri és ütköznek. A sebesség nagysága a visszapattanás után:

$$u = 2c - v < 2v - v = v. \tag{2.106b}$$

Azaz a test kisebb sebességgel pattan vissza, mint amennyivel a fal felé ment.

Ferde ütközésnél még sima fal esetén sem lesz egyszerű az eredmény. Az előbbi kijelentések a sebesség falra merőleges komponensére továbbra is igazak. A sebesség fallal párhuzamos komponense mindkét vonatkoztatási rendszerben ugyanaz, és az ütközésben nem változik. A becsapódás szöge sem lesz egyenlő a visszapattanás szögével.

Nem tökéletesen rugalmas ütközésnél a sebesség nagysága kisebb az előbb meghatározottaknál.

A tárgyalt ütközésekben az ütközések rövid ideig tartanak, nagy erők lépnek fel a testek között. Ezért a környezet által kifejtett lényegesen kisebb erők impulzus változtató hatásától az ütközés rövid ideje alatt sok esetben eltekinthetünk. Így sok esetben a rendszer zártnak tekinthetők. Ezért vizsgálhatjuk pl. pénzérmék, kiskocsik ütközésével a megmaradási tételeket.

2.4.15. A pörgettyű

A fizikában pörgettyűnek nevezünk minden olyan testet, amelyik egy rögzített pont körül foroghat. A köznyelvben pörgettyűn a forgásszimmetrikus alakú és tömegeloszlású *szimmetrikus pörgettyűt* értik.

Ilyen szimmetrikus pörgettyű pl. egy gyufaszállal áttűzött papírkorong, búgócsiga, sok játék. Ezeket a testeket megpörgetve helyezzük egy sima vízszintes lapra. A pörgettyű lappal érintkező része forgás közben súrlódik és nem marad egy helyben, a test kis súrlódás esetén lassan vándorol, „majdnem áll". Ezért a lappal érintkező pontot tekinthetjük a pörgettyű „rögzített" pontjának. Így ezek a kis játékszerek is mutatják a pörgettyű mozgásának lényeges tulajdonságait.

Az erőmentes pörgettyű. Olyan pörgettyű, amelyre nem hatnak erők, vagy a ható erőknek a rögzített pontra vonatkoztatott eredő forgatónyomatéka 0.

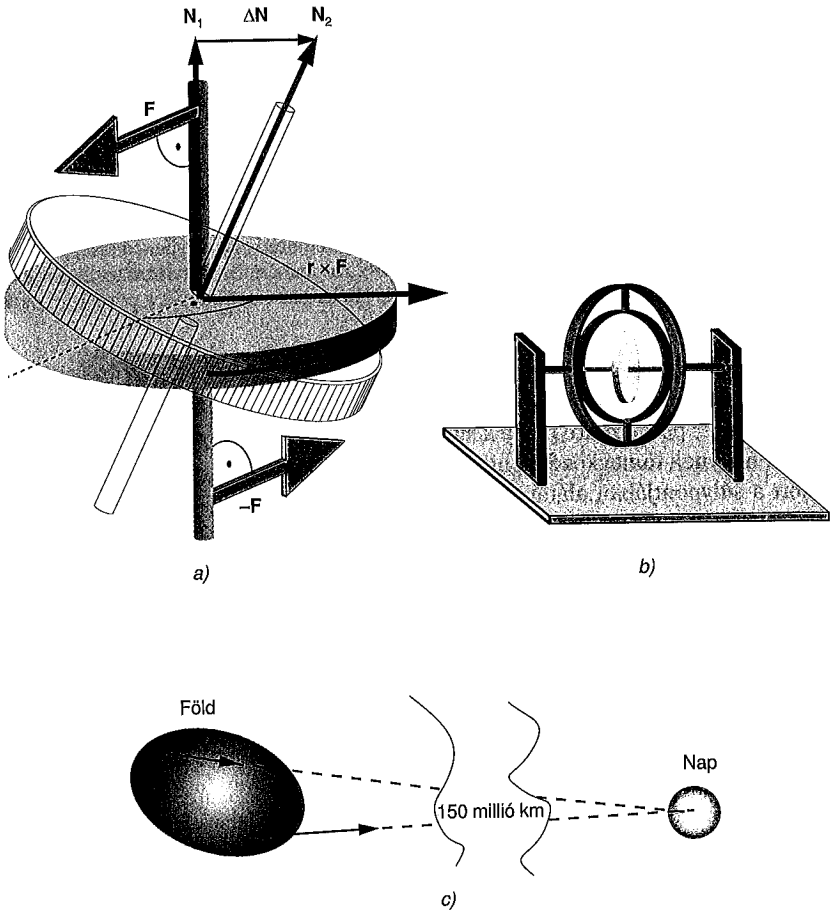
Erőmentes pörgettyűre példa a súlytalanság közepette egy helyben forgó pörgettyű, melynek tömegközéppontja éppen áll (2.116a. ábra), Földi körülmények között a súlypontjában alátámasztott vagy az ún. Cardano-féle felfüggesztéssel rögzített pörgettyű (2.116b. ábra).

Pörgessünk meg jól egy erőmentes, szimmetrikus pörgettyűt szimmetriatengelye körül és lökésmentesen hagyjuk magára! Azt tapasztaljuk, hogy a pörgettyű továbbra is a szimmetriatengelye körül forog. Ez a szimmetriatengely most az egy helyben álló pillanatnyi forgástengely és a perdületvektor is. Mivel a pörgettyű erőmentes, ezért a perdületmegmaradás értelmében perdületvektorának iránya nem változik. Ez azt is jelenti, hogy a vele egybeeső pillanatnyi forgástengely és szimmetriatengely is megtartja irányát.

Az erőmentes pörgettyűnek ezt a tulajdonságát használják például a repülőgépek „mesterséges horizontnak" nevezett műszerében, ahol egy megfelelően felfüggesztett, gyorsan forgó pörgettyű mutatja a „helyes vízszintet". Ha egy pörgettyű nagy tehetetlenségi nyomatékú és elég gyorsan forog, akkor „meglehetősen ellenáll" a tengely iránya megváltoztatásának, ezért ez a hatás felhasználható stabilizálásra is. A mesterséges holdak is össze-vissza imbolyognának, ha nem használnák fel a pörgettyűhatást.

Ha az erőmentes pörgettyű tengelyét egy erőpár rövid ideig tartó ütése éri, akkor a tengely nem az erőhatás irányába, hanem arra merőlegesen tér ki (2.116a.). A pörgettyű pillanatnyi és szimmetriatengelye a megváltozott irányú, de a továbbiakban már változatlan perdületvektor körül kering, „imbolyog". Ez a nutáció jelensége.

A súlyos pörgettyű. Nem a súlypontjában alátámasztott pörgettyű. Az így alátámasztott pörgettyű tengelye a ráható gravitációs erő forgatónyomatékának irányába, azaz vízszintes irányba tér ki. (Bővebben lásd még 2.1.3. fejezet.) Ez a precesszió jelensége.



2.116. ábra

A Nap körül keringő és forgó Föld is egy, a tömegközéppontja körül forgó pörgettyű. Ez a pörgettyű a sajátperdület-tétel értelmében megtartja tengelyének irányát. A Föld forgástengelye jelenleg a Sarkcsillag irányába mutat. Azonban a Nap körül keringő Föld nem teljesen erőmentes pörgettyű. A Nap által kifejtett gravitációs erőnek van forgatónyomatéka a Föld tömegközéppontjára vonatkozóan: osszuk fel a 2.116c. ábra szerint a kissé lapult Földet két részre. A Naphoz közelebb eső részre ható gravitációs erő kissé nagyobb a távolságfüggés miatt, mint a Naptól távolabbi részre ható erő. Ezért a két erőnek a Föld tömegközéppontjára vontakoztatott forgatónyomatéka nem egyenlíti egymást. Ennek az állandó forgatónyomatéknak a hatására a Föld forgástengelye lassú precessziós mozgást végez 25 800 éves periódussal.

2.5. Statika. Egyszerű gépek

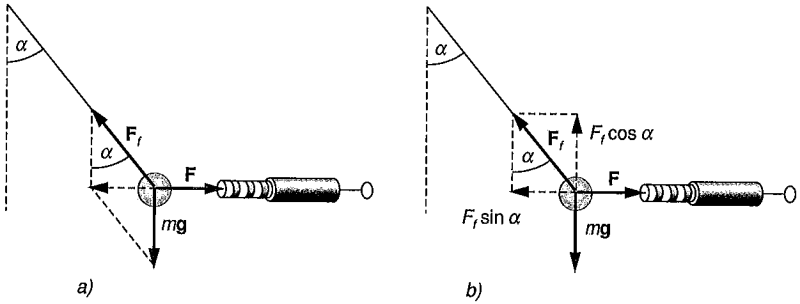
A statika feladata annak vizsgálata, hogy milyen feltételek mellett vannak a testek *egyensúlyban.*

A továbbiakban inerciarendszert használunk vonatkoztatási rendszerként.

2.5.1. Pontszerű test egyensúlyának feltétele

Mivel a test egyensúlyban van, gyorsulása 0. Ezért a rá ható erők eredője 0.

Például egy fonálra függesztett pontszerű testet térítsünk ki α szöggel a 2.116. ábra szerint. A pontszerű testre az $m\mathbf{g}$ nehézségi erő, a felfüggesztő fonál által kifejtett $\mathbf{F}_f$ fonálerő, valamint a vízszintesen elhelyezett rugós erőmérő által kifejtett $\mathbf{F}$ erő hat. A három erő vektori összege 0.



2.117. ábra

Ez azt jelenti, hogy bármelyik két erő vektori összege a harmadik erő ellentettje, azaz a két erő vektori eredője ellentétes irányú és egyenlő nagyságú a harmadik erővel. Például az $m\mathbf{g}$ és az $\mathbf{F}_f$ eredője vízszintes, mert az $\mathbf{F}$ erővel ellentett irányú. Így tehát ismerjük az $m\mathbf{g}$ és $\mathbf{F}_f$ által alkotott erőparalelogramma egyik oldalát irány és nagyság szerint, a másik oldal, $\mathbf{F}_f$ irányát és az eredő irányát. Ebből a vektorparalelogramma megszerkeszthető. Másik megoldásnál az erőket felbontjuk vízszintes és függőleges komponensekre, és ezek nyilván külön-külön kiegyenlítik egymást. A 2.117b. ábra szerint $F_f \cos \alpha = mg$, $F_f \sin \alpha = F$.

Az egyenletrendszert megoldva: $F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$ és $F_f = \dfrac{mg}{\cos \alpha}$.

2.5.2. Merev test egyensúlyának feltétele

Ha a merev test nyugalomban van, akkor minden pontjának sebessége és így gyorsulása is 0. Szükséges feltétel ehhez az, hogy a merev test tömegközéppontjának gyorsulása és a szöggyorsulás is 0 legyen: $\mathbf{a}_{TKP} = 0$ és $\beta = 0$.

A tömegközéppontra vonatkozó feltételt felírva:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0.$$

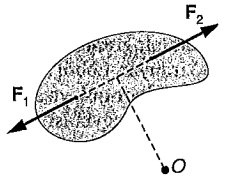
A forgómozgás alaptörvényét alkalmazva:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0.$$

A forgatónyomatékok összegére vonatkozó feltételt a $\sum \mathbf{F}_i = 0$ *teljesülése esetén bármely, az inerciarendszerben nyugvó tengelyre felírhatjuk.*

A továbbiakban csak olyan esetekkel foglalkozunk, amelyekben az erők egy síkban hatnak. Szokás ezekre az erőkre használni a *„síkban szétszórt erők"* kifejezést. Természetesen ebben a speciális esetben is érvényesek az egyensúly feltételei azzal a könnyebbséggel, hogy a forgatónyomatékoknak csak a síkra merőleges komponensével kell számolnunk, mert a többi komponens 0. Így a forgatónyomaték előjeles számként kezelhető. Előjele akkor pozitív, ha az egyedülinek képzelt erő a kiszemelt tengely körül az óramutató járásával ellentett irányban forgat.

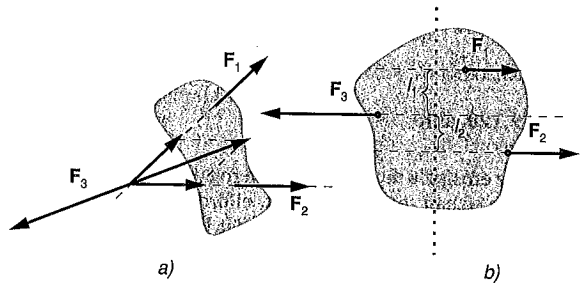
Merev test egyensúlya két erő esetén. A merev test két erő hatására akkor van egyensúlyban, ha az erők egyenlő nagyok, ellentett irányúak és hatásvonaluk közös. Mivel a két erő egyenlő nagy és ellentett irányú, ezért vektori eredőjük 0. Az azonos hatásvonal miatt a két erő karja is ugyanaz az inerciarendszerben nyugvó bármely tengelyre vonatkoztatva, ezért a két erő eredő forgatónyomatéka az inerciarendszerben nyugvó bármely tengelyre vonatkoztatva 0 (2.118. ábra).



2.118. ábra

Merev test egyensúlya három, egy síkban ható erő esetén. Mint a 2.3.4. pontban láttuk, a merev testre ható két erő az erőpár esetének kivételével mindig helyettesíthető egyetlen harmadik erővel, amelynek hatása ugyanaz, mint a két erőnek együttesen. Egyensúly nyilván akkor áll fenn, ha a két erő eredője a harmadik erővel egyenlő nagyságú és ellentett irányú, valamint azzal közös hatásvonalú.

Ha a két erő egymással nem párhuzamos, akkor hatásvonalaik egy pontban metszik egymást. Ezen a ponton kell átmennie a harmadik erő hatásvonalának is, hiszen az eredő és a harmadik erő forgatónyomatékai akkor egyenlítik ki egymást, ha hatásvonaluk egybeesik. Az egyensúly feltételét ebben az esetben átfogalmazva: A három erő vektori eredője 0, és hatásvonalaik egy pontban metszik egymást. Ez a pont nem kell hogy a merev test pontja legyen.



2.119. ábra

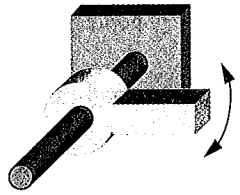
A 2.119a. ábrán alapján megszerkeszthetjük két erő esetén a velük egyensúlyt tartó harmadik erőt. A két erőt hatásvonalaik metszéspontjába toljuk. Itt megszerkesztjük a vektori eredőjüket. Az egyensúlyt tartó harmadik erő a vektori eredő ellentettje lesz, és hatásvonala az eredő hatásvonala. Mivel merev testről van szó, ezért a harmadik erő támadáspontját hatásvonalán bárhol felvehetjük, és így a hatásvonala mentén akár a merev testbe is eltolhatjuk.

Ha a három erő közül kettő párhuzamos, akkor a harmadik, velük egyensúlyt tartó erő nagysága a két erő nagyságának összege vagy különbsége aszerint, hogy a két erő azonos vagy ellentétes irányú. Iránya az összetevők irányával, illetve a nagyobbik erő irányával ellentett. Hatásvonala a két erő eredőjének hatásvonala (2.119b. ábra); lásd 2.3.4. pont.

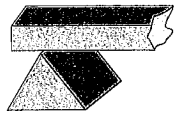
Ha a merev testre ható három erő közül kettő erőpárt alkot, akkor a merev test nem lehet egyensúlyban. Ennek oka az, hogy az erőpár nem helyettesíthető egyetlen erővel. A forgatónyomatékok eredője nem lehet 0, mert a 0 vektori eredőjű erőpárt egyensúlyozó harmadik erőnek 0-nak kellene lennie, de forgatónyomatéka nem lehet 0. Ezt a feltételt egyetlen erővel nem lehet teljesíteni. Ezért egy erőpárt csak másik, ugyanolyan forgatónyomatékú erőpárral tudunk egyensúlyozni.

A merev test egyensúlyának feltételét tehát ezekben az esetekben is két feltételre vezettük vissza. A $\sum M_i = 0$ feltételt helyettesíthettük azzal, hogy az erők hatásvonalai egy pontban metszik egymást.

A merev testek statikájában sokszor előfordul a *csuklós rögzítés*. A csukló 2.120. ábra szerint egy rögzített tengelyre erősített, többnyire elhanyagolható súrlódású csapágy.



2.120. ábra



2.121. ábra

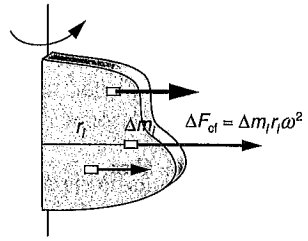
Ehhez a csapágyhoz erősítik a merev testet. Ez a rögzítés lehetővé teszi a merev testnek a tengelyre merőleges síkban történő lengését, elfordulását. A pontszerű csuklós felfüggesztés által a testre kifejtett erő támadáspontját ismerjük, hatásvonalának irányát és nagyságát a többi erő határozza meg. Feladatokban legtöbbször éppen ilyen felfüggesztésekkel találkozunk. Az *ékekkel történő alátámasztás* is hasonló tulajdonságú, mint a csuklós felfüggesztés (2.121. ábra).

Az ék körül hasonló lengéseket végezhet a test, mint előbb, azzal a különbséggel, hogy ez az alátámasztási mód nem alkalmas arra, hogy a testre kifejtett erőnek legyen függőlegesen lefelé mutató komponense. Az ék által kifejtett erő is csak a támadáspont helyének erejéig meghatározott. Ez a felfüggesztési mód kisebb súrlódási forgatónyomaték elérését teszi lehetővé, mint a csuklós felfüggesztés. Ezért ott alkalmazzák, ahol a kis súrlódás a cél, pl. mérlegeknél.

A merev testek gyorsuló koordináta-rendszerbeli egyensúlya sok problémában visszavezethető egyensúlyi feladatok megoldására. Ha a merev test egy egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgást végző vasúti kocsiban nyugalomban van, akkor az inerciarendszerben gyorsul. A kocsihoz rögzített, gyorsuló, tehát nem inerciarendszerben a test egyensúlyban van a ráható valódi és a $-m\mathbf{a}$ tehetetlenségi erők hatására. A tehetetlenségi erő ugyanúgy, mint a gravitációs erő, a tömeggel arányos. Tehát ebben a vonatkoztatási rendszerben a test térfogatelemeire a tömegükkel arányos tehetetlenségi erő hat, az arányossági tényező a nehézségi erőéhez hasonlóan egy állandó vektor. A $\mathbf{g}$ helyébe $-\mathbf{a}$-t írva ugyanazok a levezetések végezhetők el, mint a nehézségi erő esetén, a tételek is hasonlóak. Pl. a tehetetlenségi erő is helyettesíthető pontba koncentrált eredővel. A pontba koncentrált eredő nagysága és iránya a $-m\mathbf{a}$ vektor, hatásvonala a tömegközépponton megy át.

Egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerben nyugvó testeknél is hasonlóan járhatunk el, azonban itt lényeges különbség van az egyenes vonalban haladó, gyorsuló vonatkoztatási rendszerhez képest. Itt a test térfogatelemeire ható tehetetlenségi erők arányossági tényező vektora a centrifugális gyorsulás. Ennek nagysága azonban függ a tengelytől való távolságtól, és ráadásul iránya is helyfüggő. Ezért, néhány kivételes esettől eltekintve, általában nem lehet a centrifugális erőt egyetlen, pontba koncentrált eredővel helyettesíteni.

Ha a merev test egy olyan elhanyagolható vastagságú lap, amelynek síkja a forgástengelyre illeszkedik, akkor a térfogatelemekre ható centrifugális erők párhuzamosak (2.122. ábra).



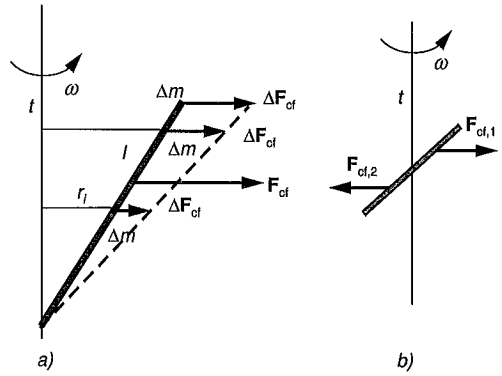
2.122. ábra

Az eredő nagysága a párhuzamos hatásvonalú erőkre vonatkozóak alapján egyszerűen ezen erők nagyságainak algebrai összege:

$$F_{cf} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i \omega^2 = m\omega^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i}{m} = m r_{TKP} \omega^2,$$

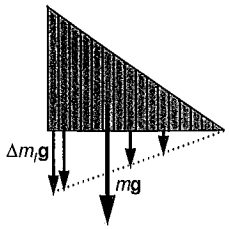
azonban hatásvonala nem megy át a tömegközépponton. Itt r_{TKP} a tömegközéppont távolsága a tengelytől, ω a vonatkoztatási rendszer szögsebessége.

Példaként vizsgáljuk meg a 2.123. ábra szerinti m tömegű és l hosszúságú rúdra ható centrifugális erő pontba koncentrált eredőjét. Az eredő nagysága az előzőek alapján $mr_{TKP}\omega^2$.



2.123. ábra

Az egyes, egyenlő térfogatelemekre ható centrifugális erők nem egyenlők, mert nagyságuk a távolsággal egyenesen arányosan nő. Ilyen párhuzamos hatásvonalú, lineárisan növekvő erőrendszert alkotnak pl. egy, a 2.124. ábra szerinti homogén, derékszögű háromszöglemezre ható nehézségi erők, ha a lemezt az ábra alapján az egyik befogóval párhuzamos csíkokra osztjuk.



2.124. ábra

Ezen erők koncentrált eredője átmegy a háromszöglemez tömegközéppontján. Tehát harmadolja a háromszöglemez befogóját. Ezért a hasonló erőrendszert alkotó centrifugális erők koncentrált eredője is átmegy a pálca harmadolópontján. Látható, hogy ugyan a centrifugális erő itt helyettesíthető pontba koncentrált eredővel, de hatásvonala nem megy át test tömegközéppontján.

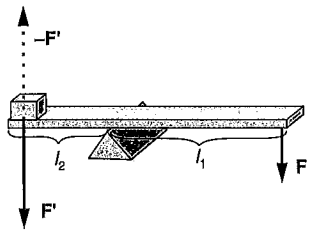
A 2.123b. ábrán egy olyan esetet láthatunk, ahol a centrifugális erők erőpárt alkotnak és így nem is helyettesíthetők egyetlen erővel.

2.5.2.1. Egyszerű gépek

Az egyszerű gépek energiaforrással nem rendelkező szerkezetek. Lényegében olyan „erősítők", melyek az általunk kifejtett erőt megsokszorozzák. Az általunk kifejtett „bemenő" erőt a továbbiakban **F**-fel, az egyszerű gép által kifejtett „kimenő" erőt **–F'**-vel fogjuk jelölni. A **–F'** ellentettjét szokás **G**-vel jelölni és tehernek nevezni, mert a gyakorlatban az egyszerű gépeket sokszor terhek emelésére használjuk.

A kétoldalú emelő (2.125. ábra). Az emelőt pl. arra használjuk, hogy egy **G** súlyú terhet felemeljünk a *G*-nél kisebb erővel. Az emelőt a testhez szorítva éppen annyi erőt fejtünk ki az emelő hosszabbik karjára, hagy a test egyensúlyban legyen. Ekkor rúdra ható erők forgatónyomatékai kiegyenlítik egymást:

$$Fl_1 = F'l_2 \qquad F' = F\frac{l_1}{l_2}. \tag{2.107}$$

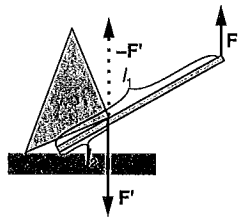


2.125. ábra

Az **F'** a rúdra ható erő. Ellenereje hat a rúd rövidebbik végénél lévő testre, teherre. Ha ez az erő picivel nagyobb, mint a teher súlya, akkor a terhet fel is tudjuk emelni. Tehát az emelő a másik végén annyiszor nagyobb erő fejt ki, ahányszor nagyobb az általunk kifejtett erő karja a „teher" karjánál.

Itt feltételeztük, hogy a rúd tömege elhanyagolható, ezért a saját súlyából származó forgatónyomatékot nem kell figyelembe venni. A végeredmény akkor is ugyanez lesz, ha az erők párhuzamosak, de nem merőlegesek a rúdra. A erőkarok aránya a párhuzamos szelők tétele értelmében ekkor is $\frac{l_1}{l_2}$ marad.

Az egyoldalú emelő (2.126. ábra). Abban különbözik az előzőtől, hogy **F** és **F'** a forgástengely ugyanazon oldalán helyezkednek el. Itt is érvényes az előzőekben felírt egyenlet.



2.126. ábra

Az emelőket a gyakorlatban sok helyen alkalmazzák: harapófogó, olló, feszítővas stb.

Az analitikai mérleg. Az analitikai mérleg egyenlő karú emelő. A mérlegkarra ható erők forgatónyomatékai egyensúly esetén egyenlők. Ha a mérleg két karja egyelő hosszúságú, akkor az egyforma serpenyőben lévő testek súlya is megegyezik. Mivel a nehézségi erő nem függ a testek anyagi minőségétől és a testek tömegével egyenesen arányos, ezért a mérleg serpenyőiben lévő tömegek is egyenlők. Az eszköz tehát a tömegek egyenlőségének kimutatására szolgál. Ezért a Holdon és más égitesteken is megtartja egyensúlyát, ha a Földön is egyensúlyban volt. A mérleg ékeinél fellépő súrlódás miatt az egyensúlyi helyzet bizonytalan abban az értelemben, hogy az egyensúlyi helyzet nem a mérlegkar egy szöghelyzetében, hanem a változó körülményektől függően egy szögintervallumban áll be (lásd a 2.4.9. pontot).

A gyakorlatban nem sikerül a mérleg karjait pontosan egyenlő hosszúságúra készíteni. Ezért a mérendő m tömeget egyszer a bal oldali, egyszer pedig a jobb oldali serpenyőbe helyezve két mérést végzünk m', illetve m'' eredménnyel. Az egyensúlyi feltételek:

$$mgl_1 = m'gl_2 \qquad m''gl_1 = mgl_2.$$

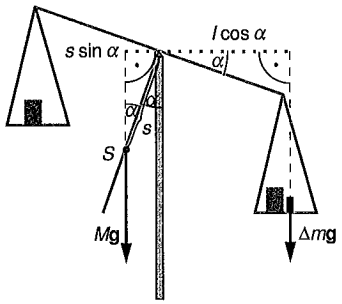
Az egyenleteket egymással elosztva, az l_1 és l_2 erőkarokkal egyszerűsítve és m-et kifejezve:

$$m = \sqrt{m'm''}.$$

Az eljárást *Gauss-féle módszernek* nevezik.

A mérlegek olyan rendszerek, amelyeknél a súlypont az alátámasztási pont alatt van (2.127. ábra). Ezért a mérleg az egyik oldalon elhelyezett többletsúly hatására egy új egyensúlyi helyzetet vesz fel, a mérlegkar-mutató rendszer α szöggel elfordul. A kibillenő mérleg súlypontja is elmozdul eredeti helyéről. A Δm tömegű többletsúly forgatónyomatéka a mérlegre ható nehézségi erők koncentrált eredőjével tart egyensúlyt. Ez utóbbi erőkarja $s \sin \alpha$, a többletsúlyé pedig $s \cos \alpha$. A mérleg mozgó részeinek össztömegét M-el jelölve:

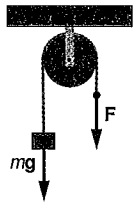
$$\Delta m g l \cos \alpha = M g s \sin \alpha.$$



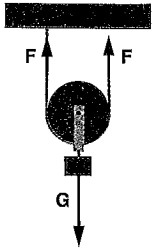
2.127. ábra

Ha α kicsi, akkor tg $\alpha \approx \alpha$, tehát $\alpha = \frac{\Delta m l}{M s}$. Látható, hogy minden Δm tömeghez egy meghatározott α szög tartozik. A mérleg érzékenységét az $\frac{\alpha}{\Delta m}$ hányadossal jellemezhetjük, mert az a mérleg érzékenyebb, amelyik ugyanakkora többletsúly hatására jobban kitér. A gyakorlatban nem a szögelfordulást használják a mutató helyzetének jellemzésére, hanem a mutató mögötti skálabeosztást. Az érzékenységet skálaegység/milligrammban adják meg. Az érzékenység függ a terheléstől is, annak növekedésével romlik (a mérlegelés légüres térre való redukálását lásd a 2.7.1.7. alpontban). A digitális gyorsmérlegek nem a tömeget, hanem a súlyt mérik egy érzékeny és pontos digitális erőmérővel.

Az állócsiga (2.128. ábra). A csigát és a hozzátapadó kötelet egy rendszernek véve, a kötélerőknek a csiga tengelyére vonatkoztatott forgatónyomatékai egyenlők. Az érintőirányban elváló kötelek által kifejtett erők erőkarja a csiga sugara. Ezért az F és G erők egyenlő nagyok még akkor is, ha a kötelek nem párhuzamosak.



2.128. ábra



2.129. ábra

Ez a berendezés nem „sokszorozza" meg az erőt. Arra használják, hogy az erő irányát kedvezően változtassák meg. Függőleges köteleknél a felfüggesztést húzó erő $2mg$. Ha a kötelek nem párhuzamosak, akkor ez az erő kisebb.

A mozgócsiga (2.129. ábra). Az előzőekhez hasonlóan elhanyagolható tengelysúrlódásnál a kötelet feszítő erők mindenhol egyenlők. Függőleges köteleknél és elhanyagolható tömegű csigánál a csigára ható erők párhuzamossága miatt $2F = G$. Így az egyensúlyban tartáshoz szükséges erő:

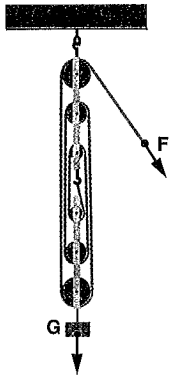
$$F = \frac{G}{2}. \tag{2.108}$$

A csigasor (2.130. ábra). Az n mereven összeerősített állócsigához szintén mereven összeerősített n mozgócsiga csatlakozik $2n$ darab, közelítőleg párhuzamos kötéllel. Az előzőekben említett feltételek mellett minden kötélszárban F erő ébred. Mivel az erők közelítőleg párhuzamosak és egyenlők, ezért:

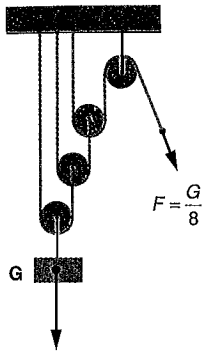
$$F \approx \frac{G}{2n}. \tag{2.109}$$

Az archimedesi vagy hatványcsigasor. A 2.131. ábra szerint összeállított, egymáshoz erősített mozgócsigákból és egy állócsigából áll. Az első mozgócsigánál a kötélerő $G/2$. Ez a $G/2$ erő húzza a következő csigát lefelé. Az ezt a csigát megtartó kötélnek már csak $G/4$ erőt kell kifejtenie. Minden újabb mozgócsiga beiktatásakor a kötélerők feleződnek. Ezért az n mozgócsigából álló csigasornál:

$$F = \frac{G}{2^n}. \tag{2.110}$$



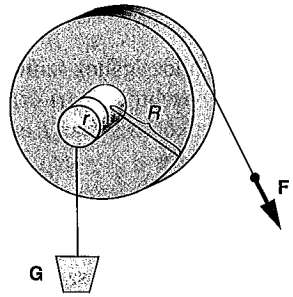
2.130. ábra



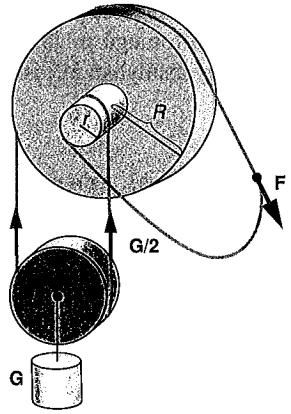
2.131. ábra

A hengerkerék (2.132. ábra). A hengerkerék egyensúlyának feltétele: $Gr = FR$. Az erőkarok a sugarak, mert merőlegesek az érintőirányú kötelekre.

$$F = G\frac{r}{R}. \tag{2.11}$$



2.132. ábra



2.133. ábra

A differenciálcsiga. Egy kötél helyett lánccal ellátott hengerkerékből és egy mozgócsigából áll (2.133. ábra). A hengerkerék peremein fogak vannak, amelyekbe a lánc szemei belekapaszkodnak. Ezért a lánc sem a kis, sem a nagy sugarú kerék peremén nem tud megcsúszni. A mozgócsigát tartó két láncdarabban a feszítő erők egyenlő nagyok, $G/2$. A hengerkeréken lévő darabokat a kerékhez számítva, a három láncdarab F, illetve $G/2$ erővel hat. A negyedik láncdarab lelóg, nem fejt ki erőt. A hengerkerékre felírva a forgatónyomatékok egyenlőségét:

$$FR + \frac{G}{2}r = \frac{G}{2}R.$$

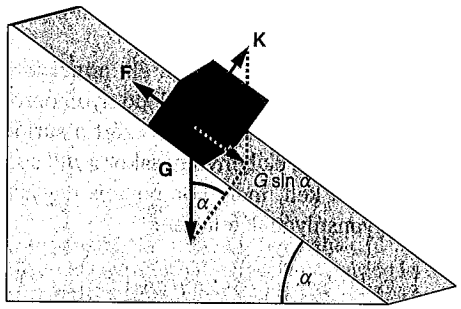
Az egyenleteket F-re megoldva:

$$F = \frac{G}{2}\frac{R-r}{R}. \tag{2.112}$$

Látható, hogy a G teher egyensúlyban tartásához igen kis erő is elegendő, ha a sugarak eltérése kicsi az R-hez képest.

A lejtő. Arra használják, hogy segítségével kis erő kifejtésével „emeljünk" fel testeket. Ha a lejtő és a test között a súrlódás elhanyagolható, akkor a testet a lejtővel párhuzamosan egyensúlyban tartó, illetve a felfelé toláshoz szükséges erő a 2.134. ábra alapján:

$$F = G\sin\alpha. \tag{2.113a}$$



2.134. ábra

Súrlódás esetén a felfelé toláshoz szükséges erő:

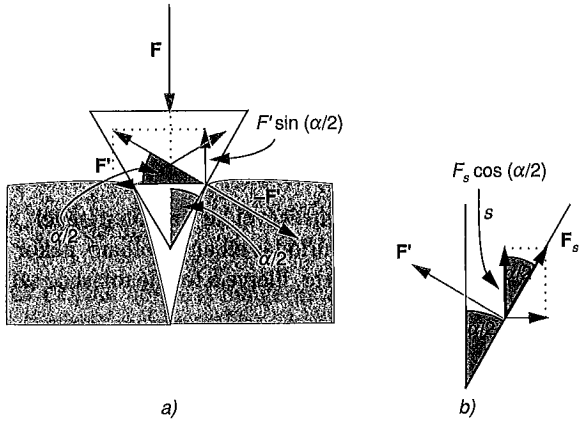
$$F = G\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right). \tag{2.113b}$$

Az ék. Az α szögű éket két felület közé F erővel benyomva, a felületek F' erőket fejtenek ki az ékre. Az ék egyensúlyának feltétele a 2.135. ábra alapján:

$$2F'\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F.$$

Innen a felületeket szétfeszítő erő, az ékre ható nyomóerők ellenereje, melyek nagysága szintén F':

$$F' = \frac{F}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \qquad (2.114a)$$



2.135. ábra

A képletből látható, hogy minél hegyesebb az ék, annál kisebb erővel tudunk ugyanakkora szétfeszítő erőt elérni. Mivel a fellépő nyomóerők az ék és a szétfeszítendő felület között igen nagyok is lehetnek, ezért a súrlódási erőt a legtöbb esetben nem hanyagolhatjuk el. Az ék benyomásakor a $\mu F'$ súrlódási erő F irányú komponensével is számolnunk kell, mely komponens nagysága a súrlódási erő cos $(\alpha/2)$-szerese. Az ék egyensúlyának feltétele:

$$F = 2F'\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2F'\mu\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

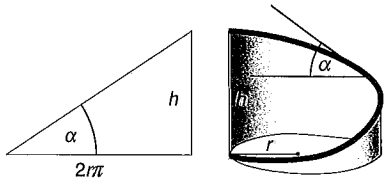
Innen:

$$F' = \frac{F}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\mu\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \qquad (2.114b)$$

Az éket nemcsak a felületek szétfeszítésére használják, hanem rögzítésre is. Az ék akkor rögzít, ha a tapadási súrlódási erőnek az ék tengelyével párhuzamos komponense nagyobb, mint az éket kifelé nyomó F' erő tengellyel párhuzamos komponense, azaz

$F'\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \mu_t F'\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Ebből az ék szögére vonatkozó feltétel: $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \mu_t$.

A csavar. Szokás hengerre csavart lejtőnek felfogni (2.136. ábra). A csavar menetemelkedését h-val, sugarát r-rel jelölve a menet görbéjének érintője α szöget zár be a tengelyre merőleges síkkal. Tangense $\frac{h}{2r\pi}$.



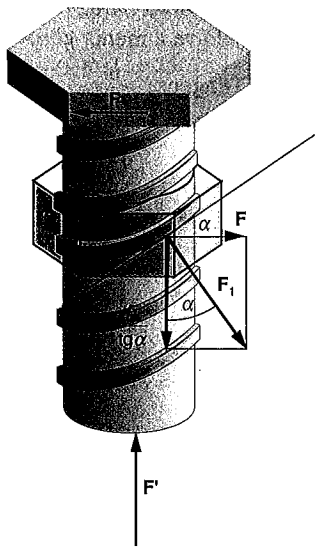
2.136. ábra

A csavartok (anya) legyen rögzített, a súrlódástól eltekintünk. A csavar peremén hassunk egy érintőirányú, a tengelyre merőleges **F** erővel. Az anya a menetekre merőleges $\mathbf{F}_1$ erőt fejt ki. A csavar egyensúlyban tartásához még egy tengelyirányú **F'** erőt is ki kell fejteni. Ennek az erőnek az ellenerejével nyomja a rögzített anyájú csavar az alatta lévő felületet (2.137. ábra). Az egyensúlyból következően az $\mathbf{F}_1$ erő tengelyirányú komponense egyenlő nagy és ellentétes irányú a **F'**-vel.

Az F_1-nek ez a komponense $\frac{F}{\operatorname{tg}\alpha}$ -val egyenlő, azaz

$$F' = \frac{F}{\operatorname{tg}\alpha} = F\frac{2r\pi}{h}. \qquad (2.115)$$

A csavarokat nagy nyomóerők kifejtésére is használják, pl. szorítókban, satukban. Itt az anya és a csavar között fellépő erők hatására jelentős súrlódási erők jönnek létre. Amikor a csavarokat rögzítésre használjuk, olyan nagy F erőt fejtünk ki a csavar peremén („húzzuk meg a csavart"), hogy a csavar feje nagy erővel szoruljon a felületre (vagy anyával történő rögzítés esetén a csavar feje és az anya között lép fel nagy feszítő erő. Ez a nagy, tengelyirányú feszítő erő akkora érintőleges tapadási erőt hoz létre, hogy a csavart csak nagy forgatónyomatékkal tudjuk oldani. Ezek együttes hatása teszi a csavart nehezen oldhatóvá. Tengelyirányú és érintőleges rezgések hatására a csavarban lévő rugalmas feszültségek lecsökkenhetnek, a csavar kilazulhat. Ennek megakadályozására az ún. rugós alátétet használják, amely állandó tengelyirányú feszültséget hoz létre. Az ún. önzáró csavaroknál a csavart és az anyát enyhén kúposra készítik. Az anya menetei az első becsavaráskor belevágódnak a csavar meneteibe. Az anyát a csavaroknál puhább anyagból készítik. Ezért a menetei még erősebb tengelyirányú rezgéseknél sem válnak el a csavar meneteitől, mindenhol szorosan egymásra simulnak, nagy lesz a mindenütt fellépő tapadási erő. Ezért csak nehezen oldhatók. A facsavarok éles meneteinél is ez a helyzet.

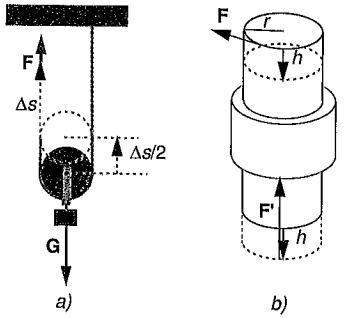


2.137. ábra

Az egyszerű gépek és az energiamegmaradás. Az egyszerű gépekkel csak erőt tudunk sokszorozni, energiát nem, mert az egyszerű gépek nem tartalmaznak energiaforrást.

Ideális esetben eltekintünk az egyszerű gép alkatrészei közötti (csúszó) súrlódástól és feltesszük, hogy a mozgás lassú, a gép merev testnek fogható fel. Így az egyszerű gépbe „befektetett" munka nem disszipálódik, nincs számottevő mozgásienergia-növekedés, az egyszerű gép nem alakít át mechanikai energiát belső energiává. Azaz az ideális egyszerű gépen végzett munka egyenlő az egyszerű gép által kifejtett F' erő munkájával. Ez lehetőséget ad az egyszerű gép által kifejtett F' erő meghatározására.

Például a mozgócsigánál az egyensúlyt tartó F erő munkája $F\Delta s$ (2.138a. ábra). A csiga által kifejtett $-\mathbf{G}$ erő munkája $G\frac{\Delta s}{2}$, mert a kötél A pontjának Δs-sel való felhúzásakor a mozgócsiga csak $\frac{\Delta s}{2}$-vel emelkedik. Így, $F\Delta s = G\frac{\Delta s}{2}$, ahonnan $F=\frac{G}{2}$. Csavarnál a tengelyirányú F' erő munkája egy teljes körülforduláskor $F'h$ (2.138b. ábra). Az érintőirányú erő F erő munkája $F2r\pi$. A két munka egyenlőségéből kifejezve kapjuk F'-re a már ismert összefüggést.



2.138. ábra

Egyszerű gépek hatásfoka. Az egyszerű gépeknél fellépő súrlódási erők miatt a befektetett energia egy része disszipálódik. Az egyszerű gép *energetikai hatásfokán* értjük a hasznos munkának (a gép által kifejtett erő munkája) és a befektetett munkának (az általunk kifejtett erő munkája) a hányadosát:

$$\eta=\frac{W_{\text{hasznos}}}{W_{\text{befektetett}}}. \qquad (2.116)$$

Csigánál és más hasonló szerkezeteknél nem csak a disszipáció rontja a hatásfokot. A csiga emeléséhez szükséges munka is növeli a befektetett energiát, de az számunkra nem hasznos.

Például egy α hajlásszögű, l hosszúságú, h magasságú és μ súrlódási együtthatójú lejtőn a test egyenletes felhúzásához szükséges munka az $\mathbf{F}$ erő munkája.

$$\left(mg\sin\alpha+\mu mg\cos\alpha\right)l=mg\sin\alpha\left(1+\frac{\mu\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\frac{h}{\sin\alpha}=mgh\left(1+\mu\operatorname{ctg}\alpha\right)$$

a hasznos munka pedig mgh. Innen a hatásfok:

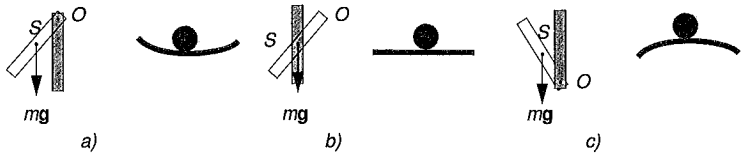
$$\eta=\frac{1}{1+\mu\operatorname{ctg}\alpha}.$$

2.5.2.2. Egyensúlyi helyzetek. Állásszilárdság

Egyensúlyban lévő testek, rendszerek egyensúlyi helyzeteit aszerint osztályozzuk, hogy hogyan reagálnak egy nem túl nagy külső zavarra.

Stabilis (biztos) egyensúlyi helyzet. Ha ilyen helyzetben egy külső erő kitéríti a rendszert egyensúlyi helyzetéből, akkor a kitérítő erő megszűnte után a rendszer magától visszatér egyensúlyi helyzetébe.

Például a 2.139. ábrasorban az *a)* jelűeknél a testek stabilis egyensúlyi helyzetben vannak. Ha ugyanis a felfüggesztett pálcát kitérítjük egyensúlyi helyzetéből, a pálcára ható nehézségi erő forgatónyomatéka a felfüggesztési pontra vonatkozóan nem lesz 0. A forgatónyomaték olyan értelmű, hogy a testet visszabillenti eredeti egyensúlyi helyzetébe. Általában is igaz, hogy ha a felfüggesztett test súlypontja a felfüggesztési pont alatt van, akkor a test stabilis egyensúlyi helyzetben van. A homorú tányérban lévő golyónál a súlypont ugyan az alátámasztási pont felett van, a golyó egyensúlyi helyzete mégis stabilis. Azonban mindkét esetben a test súlypontja a lehető legmélyebben helyezkedik el, azaz adott kényszerfeltételek mellett a test helyzeti, potenciális energiája minimális. Általában is igaz, hogy ha egy rendszerre a kényszererőkön kívül csak konzervatív erők hatnak, akkor *stabilis egyensúlyi helyzetben a testnek a konzervatív erőkből származó potenciális energiája minimális.*



2.139. ábra

Labilis (bizonytalan) egyensúlyi helyzet. Az ilyen helyzetben lévő rendszer a kis zavar megszűnte után nem tér vissza egyensúlyi helyzetébe. Ilyen egyensúlyi helyzeteket láthatunk a 2.139. ábrasor *c)* jelű ábráin. A rúdnál a súlypont a felfüggesztési pont felett van. Ha a rudat kis vízszintes erőhatás éri, akkor a test kitér egyensúlyi helyzetéből. Most a nehézségi erő forgatónyomatéka olyan értelmű, hogy a testet eredeti egyensúlyi helyzetébe nem vissza viszi, hanem attól eltávolítja, és a test átlendül másik, stabilis egyensúlyi helyzetébe. A domború tányéron lévő golyó sem tér vissza magától eredeti helyzetébe, ha kis zavar éri.

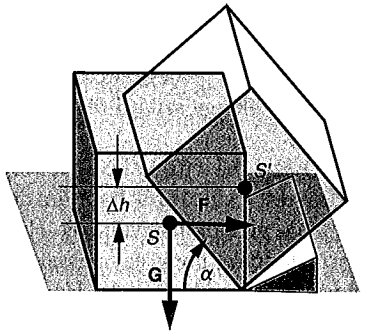
Indifferens (közömbös) egyensúlyi helyzet. A ilyen helyzetben lévő test zavar hatására kitérve eredeti egyensúlyi helyzetéből továbbra is egyensúlyi helyzetben marad.

Ilyen egyensúlyi helyzeteket láthatunk a 2.139. ábrasor *b)* jelű ábráin. A súlypontjában felfüggesztett pálca minden helyzetében egyensúlyban marad, mert bármilyen helyzetben a nehézségi erő felfüggesztési pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka 0. A vízszintes síkon levő golyó is bármilyen zavar esetén odébb gurul, de továbbra is egyensúlyban van.

Vannak olyan egyensúlyi helyzetek, amelyek bizonyos irányú elmozdulásokra stabilak, más elmozdulásokra labilisak. Például egy nyeregfelületen lévő golyó ilyen egyensúlyi helyzetű. Ezek az egyensúlyi helyzetek egy tetszőleges zavar esetén nagy valószínűséggel labilisak, mert csak néhány kitüntetett zavarra stabilisak.

Állásszilárdság. A stabilis egyensúlyi helyzet definíciójában szerepel az a kikötés, hogy a zavar ne legyen túl nagy. Az egyik élénél megtámasztott hasáb egyensúlyi helyzete stabilis, ha a ható zavaró erőnek – a billentő erőnek – a megtámasztott élre vonatkozó forgatónyomatéka kisebb, mint a nehézségi erő ugyanezen élre vonatkoztatott forgatónyomatéka. Ha a billentőerő forgatónyomatéka elég nagy, akkor a test eljut labilis egyensúlyi helyzetébe és eldől. A billentőerő forgatónyomatékának nem kell a labilis egyensúlyi helyzet eléréséig hatni. Elegendő, ha munkavégzése fedezi a labilis egyensúlyi helyzetbe jutás energiáját. Azaz annyi mozgási energiára tesz szert a test a billentőerő megszűnéséig, hogy már csak (forgási) tehetetlensége folytán továbbmozogva eléri a labilis egyensúlyi helyzetet.

A stabilitás mértékét az *állásszilárdsággal* szokás jellemezni. A 2.140. ábra szerinti hasábnál ennek az ún. geometriai mértéke az α szög, amellyel a hasábot meg kell dönteni, hogy lebillenjen. Az *állásszilárdság energetikai mértéke* az a munka, ami a hasáb labilis egyensúlyi helyzetbe hozásához szükséges: $mg\Delta h$. Az *állásszilárdság dinamikai mértéke a* súlypontjában támadó vízszintes F erő, amely a hasáb eldöntéséhez szükséges.



2.140. ábra

Akármelyik mértékét is választjuk az állásszilárdságnak, az annál nagyobb, minél mélyebben van a súlypont és minél nagyobb az alátámasztási felület.

Az eddig bemutatott problémamegoldási eljárások sokszor nem elegendőek a feladat egyértelmű megoldásához. Például egy mindkét végén alátámasztott rúdnál még az eddigiek keretén belül meghatározható az mg ismeretében a két támasztóerő. Három alá-

támasztás esetén csak a merev testekre érvényes egyenleteket felírva, több ismeretlenünk van, mint ahány egyenletünk. Az ilyen jellegű feladatokat *statikailag határozatlan* feladatoknak szokás nevezni. Nem arról van szó, hogy a feladat egyáltalán nem oldható meg, hanem arról, hogy itt már számításba kell venni a rúd deformációját és az emiatt fellépő rugalmas erőket.

2.6. A szilárdságtan elemei

A szilárdságtan feladata, hogy megvizsgálja szilárd testekre ható erők és az általuk létrehozott alakváltozás közötti kapcsolatot.

A testeket *homogénnek* nevezzük, ha tulajdonságaik mindenütt ugyanazok. Az *inhomogén* testek tulajdonságai helyfüggőek. Az *izotrop* testek tulajdonságai nem függenek az iránytól, az *anizotropok* bizonyos tulajdonságai irányfüggőek. Bizonyos kristályok anizotrópiája abban nyilvánul meg, hogy bizonyos irányokban könnyen hasíthatók, jobban vezetik a hőt stb.

Ebben a szakaszban csak homogén és izotrop testekkel foglalkozunk.

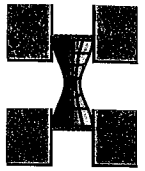
A mikrofizikai jellemzők és a makroszkopikus tulajdonságok közötti kapcsolatot a szilárdtestfizika vizsgálja (lásd a VII. részt).

2.6.1. Alakváltozások (deformációk) és rugalmas feszültségek

Külső erők hatására a szilárd test alakja megváltozhat, a test deformálódik. (Nem minden erő hatására deformálódik egy szilárd test: lásd a 2.1.2.3. állapotáról a súlytalanságról mondottakat.)

Homogén deformáció. Osszuk fel a testet kis egybevágó térfogatelemekre, pl. egybevágó kis kockákra! Ha a test a külső erők hatására deformálódik, akkor a térfogatelemek is deformálódnak, alakjuk megváltozik. Ha a kezdetben egybevágó térfogatelemek úgy deformálódnak, hogy egymással továbbra is egybevágóak lesznek, akkor *homogén deformációról* beszélünk. Ha a test nem homogén deformációt szenved, azaz a deformáció során a térfogatelemek nem mind egybevágó térfogatelemekké torzulnak, akkor is a test elegendően kis tartománya homogén deformációt szenved. Homogén deformáció jön létre pl. egy állandó keresztmetszetű rúd nyújtásakor.

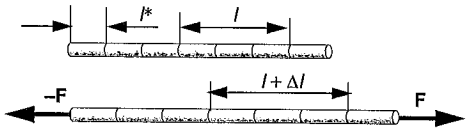
Inhomogén deformációra példa egy, a két végén befogott, vastag rúd nyújtása. A 2.141. ábrán egy eredetileg állandó keresztmetszetű rúd látható, erősen deformált állapotban. A deformálatlan rúdra eredetileg egy négyzetháló volt rajzolva. Az ábrán jól látható, hogy a négyzetek különbözőképpen torzulnak.



2.141. ábra

A szilárd test alakváltozásának leírása általános esetben bonyolult feladat. Az alábbiakban olyan egyszerű deformációkkal foglalkozunk, amelyek segítségével a később tárgyalandó igénybevételeknél fellépő deformációk leírhatók.

Nyújtás. Egy hosszú, vékony, mindenütt ugyanolyan keresztmetszetű rúd nyújtása homogén deformáció. Ez azt jelenti, hogy a 2.142. ábra szerint a rudat egyenlő, l^* hosszúságú hengerkékre osztva, mindegyik hengerke hossza Δl^*-gal nő, átmérője is egyformán csökken a deformáció során.



2.142. ábra

Szemeljük ki a rúd egy tetszőleges, $l = kl^*$ hosszúságú darabját! A deformáció során ennek hossza $k(l^* + \Delta l^*)$-ra nő. A rúd hosszváltozása a két mennyiség különbsége: $\Delta l = k\Delta l^*$. Adott rúd és adott deformáció esetén a két mennyiség hányadosa állandó:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{k\Delta l^*}{kl^*} = \frac{\Delta l^*}{l^*}.$$

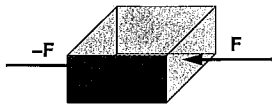
Ez a hányados független attól, hogy a rúd milyen hosszúságú darabját szemeltük ki és hogy ez a szakasz a rúdon hol helyezkedik el. Ezt a fizikai mennyiséget *fajlagos (vagy relatív) hosszváltozásnak, nyúlásnak vagy relatív megnyúlásnak nevezzük.* Jele: ε (epszilon),

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{2.117}$$

A relatív hosszváltozás dimenzió nélküli szám. Százalékban kifejezve azt mutatja meg, hogy eredeti hosszának hány százalékával nyúlik meg a rúd. A hosszegységre eső hosszúságváltozás számértékét is megadja.

Összenyomás. Az összenyomás két fajtáját szokás megkülönböztetni. Az ún. *egyoldalú összenyomásnál* csak a hasáb két szemközti lapjára fejtünk ki a lapokra merőleges erőt. Hasonló kijelentéseket tehetünk itt is, mint a nyújtásnál. Az összenyomás jel-

lemzésére itt is a relatív hosszváltozást használjuk. (A deformáció csak akkor tekinthető tiszta összenyomásnak és homogén deformációnak, ha a hasáb nem hajlik ki.)

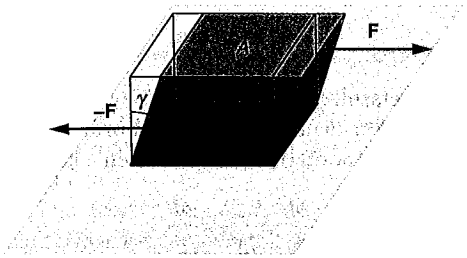


2.143. ábra

Az ún. *mindenoldalú, egyenletes* vagy *hidrosztatikai összenyomást* úgy hozhatjuk létre, hogy a szilárd testet valamilyen folyadékba vagy gázba tesszük, amelyet nyomás alá helyezünk. Ennek a deformációnak a jellemzésére a *fajlagos* vagy *relatív térfogatváltozást* használjuk, amely a térfogatváltozás és a deformálatlan térfogat hányadosa. Jele: ϑ (teta):

$$\vartheta = \frac{\Delta V}{V}.$$

Nyírás. Nyírási igénybevétel jön létre, ha egy hasáb alakú szilárd test két szemközti lapjára a lapokkal párhuzamos erőket fejtünk ki (2.144. ábra). A nyírási deformáció jellemzésére az ábra szerinti γ szöget használjuk.



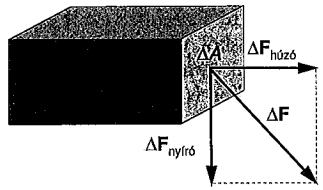
2.144. ábra

Tetszőleges deformáció. A szilárd test tetszőleges deformációjának a leírásához már nem elegendő egyetlen adat. Ennek belátására szemeljünk ki egy kis gömb alakú tartományt a szilárd test belsejében! Ha a gömb sugara eléggé kicsi, akkor a deformáció során a gömb ellipszoiddá torzul. Az ellipszoid megadásához meg kell adnunk három tengelyének nagyságát és irányát. A tengelyeket megadhatjuk például úgy, hogy megadjuk azon vektorok koordinátáit, amelyek az ellipszoid középpontjából az egyes tengelyek irányába mutatnak és hosszúságuk a szóban forgó tengely hosszának a fele. Így egy tengely megadásához három, a három tengely megadásához kilenc adat szükséges. Ezek közül csak hat független egymástól, hiszen az ellipszoid tengelyei merőlegesek egymásra. A szilárd test deformációja itt nem részletezett módon kilenc adattal jellemezhető. Ez a kilenc számból álló fizikai mennyiség az ún. *deformációs tenzor.*

A fentieket két dimenzióban jól szemléltethetjük, ha egy feszítetlen gumilapra egy kört rajzolunk. A lapot megnyújtva a kör ellipszissé torzul.

A (mechanikai) feszültség. A külső, alakváltoztató erők hatására a testben rugalmas természetű reakcióerők ébrednek, amelyek a deformáló hatás ellen működnek.

Ezek az erők a test belsejében is fellépnek. Ennek belátása végett szemeljük ki a test egy térfogatelemét! A test deformációja során a térfogatelem is deformálódik. A deformáció közvetlen oka most nyilván nem a testre ható külső erő, hanem a térfogatelem határfelületén fellépő felületi erők. Ezeket a belső erőket a test határfelülettel határos tartománya fejti ki a térfogatelemre.



2.145. ábra

A 2.145. ábrán a hasáb alakú térfogatelem egy lapján fellépő ΔF erőt tüntettük fel. A ΔA nagyságú felületre ható erő általában nem merőleges a felületre. Az erő felületre merőleges komponensét normális, illetve *nyomó-* vagy *húzóerőnek* nevezzük aszerint, hogy a merőleges komponens a térfogatelem belseje vagy abból kifelé mutat. A felülettel párhuzamos erőkomponens a *nyíróerő.* A szilárd test egy adott helyén a felületen fellépő ΔF erő és komponensei a felület nagyságától és állásától függenek. Elegendően kis tartományt véve ugyanazon állású ΔA nagyságú felületnél mind a húzó-nyomó erő, mind a nyíróerő egyenesen arányos a felület nagyságával.

Homogén deformáció esetén az egyenes arányosság a szilárd test belsejében, annak egész térfogatában is fennáll. Az erők és a felületek nagysága közötti arányossági tényezőt *(mechanikai) feszültségnek* nevezzük.

Nyomófeszültség a nyomóerő és a nyomott felület hányadosa. Jele: σ (szigma):

$$\sigma = \frac{\Delta F_{\text{nyomó}}}{\Delta A}, \qquad (2.118)$$

ahol $\Delta F_{\text{nyomó}}$ a ΔA nagyságú felületre ható erő merőleges komponense. Mértékegysége $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ (pascal). Szemléletes jelentése az egységnyi felületre jutó húzóerő számértéke.

A *húzófeszültség* jele, mértékegysége, definíciója is ugyanaz, mint a nyomófeszültségé azzal a különbséggel, itt húzó- és nem nyomóerőről van szó. A nyomó- és húzófeszültséget közös névvel *normális feszültségnek* is nevezik.

A *nyírófeszültség, csúsztató feszültség* a felülettel párhuzamos erőkomponens, a nyíróerő és a felület nagyságának hányadosa. Jele: τ (tau):

$$\tau = \frac{\Delta F_{\text{nyíró}}}{\Delta A}, \tag{2.119}$$

ahol $\Delta F_{\text{nyíró}}$ a ΔA nagyságú felületre ható erő felülettel párhuzamos komponense.

A legáltalánosabb esetben a szilárd test adott helyén fellépő erőviszonyok megadásához nem elegendő egy adat, egyetlen feszültség. A szilárd test deformációjának leírásánál láttuk, hogy a test belsejében felvett kis gömb ellipszoiddá torzul. Matematikából ismeretes, hogy az ellipszoid úgy származtatható egy gömbből, hogy a gömböt a tengelyek irányába „megnyújtjuk", illetve „összenyomjuk", azaz három, egymásra merőleges affin transzformációt hajtunk végre. Ez egyben azt is jelenti, hogy a deformáció három, egymásra merőleges összenyomásból, illetve húzásból tehető össze. Ezek a nyújtások, illetve összenyomások a tengelyek irányába mutatnak. Vegyünk fel egy olyan kockát, melynek élei párhuzamosak az ellipszis tengelyeivel! A kocka lapjai a deformáció során a tengelyekre merőlegesen mozdulnak el. A szemben lévő lapok egymáshoz közelednek vagy távolodnak aszerint, hogy nyomó- vagy húzóerők lépnek fel. Mivel a kockának hat lapja van, ezért hat erő lép fel, melyek közül a szemben lévő lapokon fellépő erők egyenlő nagyok és ellentétes irányúak (ha a térfogatelem egyensúlyban van és térfogati erők nem hatnak).

Így az erőviszonyok megadásához három vektor adataira van szükség, Ez kilenc adatot jelent, amelyek közül csak hat független egymástól, mert az erők merőlegesek egymásra. Az erőket a felületek nagyságával osztva jutunk el az ún. *feszültségi tenzor* komponenseihez.

A továbbiakban szereplő problémák tárgyalásánál a rugalmas feszültségeket skalárként fogjuk kezelni.

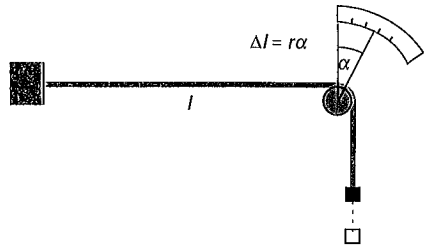
2.6.2. Igénybevételek

Az alakváltozást rugalmas nevezzük, ha az erőhatás megszűnte után a test visszanyeri eredeti alakját és energiadisszipáció nem lép föl. Azt a rugalmas feszültséget, amelynél az alakváltozás még rugalmas, de ennél nagyobb feszültség hatására már nem az, a *rugalmasság határának* nevezzük.

Rugalmas alakváltozásnál az alakváltoztató erőt folyamatosan csökkentve, a test ugyanazon állapotokon keresztül jut vissza a feszültségmentes állapotába, mint amelyeken keresztül jutott a feszültségmentes állapotából a deformált állapotába. Ez a folyamat tehát időben megfordítható folyamat. Tökéletesen rugalmas anyag nincs. Bizonyos anyagok azonban jó közelítéssel teljesítik a fenti kritériumokat.

Nyújtás. A 2.146. ábra szerinti összeállításban terheljünk meg egy huzalt! A huzal feszültségmentes hosszát l-lel, megnyúlását Δl-lel, keresztmetszetét (pontosabban: a huzalt hosszára merőlegesen síkban elvágjuk, és az így kapott síkidom

területe a keresztmetszet) A-val és a húzóerőt F-fel jelölve, a relatív megnyúlás: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, a húzófeszültség $\sigma = \frac{F}{A}$.



2.146. ábra

Nem túl nagy rugalmas feszültségnél σ és ε egyenesen arányosak egymással. Más típusú igénybevételekre is igaz a *Hooke-törvény:*

A test deformációja és az azt létrehozó erő közelítőleg egyenesen arányosak, ha az erő nem túl nagy.

Mivel a σ egyenesen arányos ε-nal, ezért a hányadosuk ugyanazon anyagi minőségű huzalok esetén állandó. Az arányossági tényező, amely csak az anyagi minőségtől függ, a (nyújtási) *rugalmassági modulus* (régebbi nevén Young-modulus). Jele E, mértékegysége N/m²,

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{2.120}$$

A huzal adataival kifejezve:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{A}. \tag{2.121}$$

A deformáció során nemcsak a huzal hossza változik, hanem átmérője is csökken. Az átmérő relatív csökkenése:

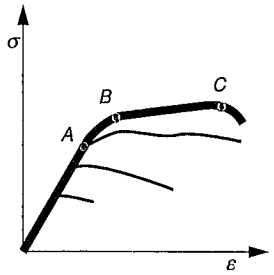
$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu\frac{\Delta l}{l}. \tag{2.122}$$

Itt μ az anyagi minőségtől függő *Poisson-szám (harántösszehúzódási együttható)*. Értéke a gyakorlatban fontos fémeknél 0,3 és 0,4 közé esik, de mindig kisebb 0,5-nél.

A hosszúság növekedéséből és az átmérő csökkenésből adódó térfogatváltozások nem egyenlítik egymást, a térfogat nyújtáskor nő.

Nyújtási diagram. A szilárd testek viselkedése a Hooke-törvény érvényességi határán kívül. A huzalt nyújtó erőt növelve azt találjuk, hogy az egyenes arányosság megszűnik. A relatív megnyúlás függvényében ábrázolva a névleges feszültséget, a 2.147. ábrán látható görbét kapjuk. (A névleges feszültség az F/A há-

nyados, ahol A a huzal feszültségmentes állapotbeli keresztmetszete. A tényleges feszültség ennél nagyobb, mert nyújtáskor a huzal keresztmetszete csökken.) A vastagon kihúzott görbe egy rézhuzalra vonatkozik. A görbe A-ig terjedő szakasza a Hooke-törvény érvényességi tartománya.



2.147. ábra

Az A-tól B-ig terjedő részben az anyag még visszanyeri eredeti alakját az erőhatás megszűnése után, de σ a ε és közötti egyenes arányosság már nem áll fenn. B után az alakváltozás már maradandó, a feszültség megszűntével a huzal nem nyeri vissza eredeti hosszát. A görbe meredekségének csökkenése azt jelenti, hogy a feszültség egyenlő értékekkel történő növelésével a huzal egyre nagyobb mértékben nyúlik meg. Ha a feszültség elért egy bizonyos, σ_B-vel jelölt értéket, az ún. *folyáshatárt,* akkor a feszültség további növelésekor a huzal jelentősen megnyúlhat. Ez a *folyás (képlékenység)* jelensége. Ezt a feszültségtartományt használják a fémek „hidegalakítására". A folyási tartomány C pontján túl a huzal keresztmetszete egy bizonyos helyen lecsökken, és egy bizonyos feszültségnél elszakad. Ezt a rugalmas (nyújtó) feszültséget nevezzük *szakítószilárdságnak.*

A görbe alakja függ az anyagi minőségtől és a hőmérséklettől.

A rézéhez hasonlít pl. az alumínium, egyes acélok diagramja. A *rideg* anyagoknál a szakadás a rugalmassági határ után közvetlenül következik be, a folyás jelensége nem jön létre, képlékenységi tartomány nincs (öntöttvas).

Összenyomás. Ha a nyomófeszültség nem túl nagy, egyoldalú összenyomás esetén a relatív összenyomásra ugyanazok a képletek alkalmazhatók, mint a relatív megnyúlásnál, ugyanazon anyagi állandókkal. A Hooke-törvény érvényességi határán felüli nyomófeszültségeknél azonban a rövidülés–nyomófeszültség diagram eltér a megnyúlás–húzófeszültség diagramtól (részletesen lásd a 2.6.3. pontot, 2.154. ábrát).

„Egyoldalú" összenyomásnál ugyanúgy, mint a nyújtásnál csak az összenyomás irányában lépnek föl feszültségek.

Ilyen „egyoldalú" összenyomásnak vannak kitéve az épületeket tartó függőleges oszlopok gerendák is. Ha az erő eltér egy kritikus értéktől, akkor a rúd *kihajlik.*

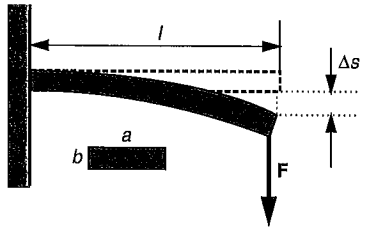
A *mindenoldalú (hidrosztatikai) összenyomásnál* a test térfogata csökken a nyomás növelésével. Ezért a V-vel jelölt térfogat ΔV megváltozása negatív. A nyomófeszültség abszolút értékét, a nyomást p-vel jelölve:

$$\frac{\Delta V}{V} = -Kp, \tag{2.123}$$

azaz a relatív térfogatváltozás egyenesen arányos a nyomással és függ az anyagi minőségtől. A K anyagi minőségre jellemző állandó a *kompresszió modulus.* Ez nagyon kis szám. Pl. a vas térfogata a normál légköri nyomás ezerszeresének hatására csak 0,6 ezrelékkel csökken.

Hajlítás. A 2.148. ábra szerint befogott rúdra fejtsünk ki F erőt! A tapasztalat és számítások szerint a homogén, téglalap keresztmetszetű rúd *lehajlása:*

$$s = \frac{4}{E}\frac{l^3}{ab^3}F. \tag{2.124}$$



2.148. ábra

Más keresztmetszetű rudaknál az F és l^3-nel való egyenes arányosság és a nyújtási rugalmassági modulusszal való fordított arányosság megmarad, csak az arányossági tényező lesz más:

$$s = \frac{1}{3E}\frac{l^3}{I}F.$$

Az I mennyiség neve *másodrendű (felületi) nyomaték.* Értéke a téglalap, kör, körgyűrű keresztmetszetű rudaknál rendre:

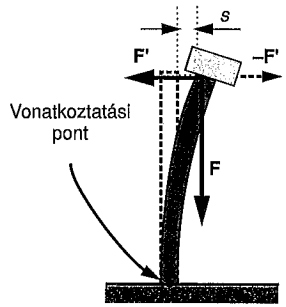
$$\frac{ab^3}{12}, \quad \frac{R^4\pi}{4}, \quad \frac{\left(R_2^4 - R_1^4\right)\pi}{4}.$$

Az azonos keresztmetszetű, azaz azonos anyagmennyiség felhasználásával készített cső lényegesen kevésbé hajlik le, mint a tömör, kör keresztmetszetű rúd.

Közelebbről megvizsgálva a lehajló rudat, azt találjuk, hogy pl. a téglalap keresztmetszetű rúd középső, ún. *neutrális* rétege nem változtatja meg a hosszát.

Az e réteg feletti rétegek megnyúlnak, az alatta lévők összenyomódnak, bennük húzó-, illetve nyomófeszültség ébred. A feszültségek a neutrális rétegtől való távolsággal egyenes arányban nőnek. Azonos rudak és azonos terhelés esetén a lehajlított rúdban lényegesen nagyobb feszültségek ébrednek, mint a húzott rúdban. A hajlított rúd nem körív alakú, hanem görbületi sugara a befogástól való távolsággal csökken.

A kihajlás a következőképpen magyarázható: Helyezzünk az alul befogott rúd végére egy *F* súlyú testet! A rúd kezd kihajlani és (ha bírja), akkor egy idő múlva elhajolt állapotában egyensúlyban tartja az F súlyú testet.

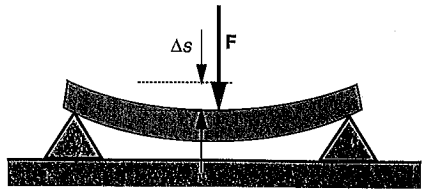


2.149. ábra

Egyensúly esetén a rúdra ható erők forgatónyomatékai egyenlő nagyok, amennyiben a rúd tömegétől eltekintünk. Válasszuk tengelynek, vonatkoztatási pontnak a rúd legalsó, befogott pontját. A rúd felső végén lévő testre ható két erő forgatónyomatékával kell számolnunk. Ezek a forgatónyomatékok: 1. a súly által kifejtett *F* erő, melynek erőkarja *s*, ezért forgatónyomatéka *s*-sel egyenesen arányos. 2. A rúd *s*-sel való kihajlításához *F'* erő kell. Ennek az ellenereje hat a súlyra. Ez az erő az előző (2.124) pont szerint egyenesen arányos *s*-sel, erőkarja pedig kis kihajlás esetén jó közelítéssel állandó és majdnem a rúd hossza. Ezért ennek az erőnek a forgatónyomatéka is *s*-sel egyenesen arányos.

Az arányossági tényezőt a rúd adatai egyértelműen meghatározzák. Ha az F erő forgatónyomatékában szereplő arányossági tényező, azaz maga az F kisebb, mint a rúd forgatónyomatékában lévő arányossági tényező, akkor a test stabilis egyensúlyi helyzetben van. A rúd kis zavarok hatására kitér, de az általa kifejtett erő forgatónyomatéka minden helyzetben nagyobb lévén, mint az F erő forgatónyomatéka, a testet visszatéríti eredeti helyzetébe. Amennyiben az F meghaladja a rúdra jellemző arányossági tényezőt, a rúd kis zavar hatására kitér, és az F erő forgatónyomatéka minden helyzetben nagyobb lévén, a kihajlás folytatódik addig, míg a rúd maradandóan elgörbül, illetve eltörik.

A két végén alátámasztott rúd, amelyet középen terhelünk *F* erővel, annyit süllyed le (hajlik le) középen, mintha egy feleakkora rudat *F*/2 erővel hajlítanánk (2.150. ábra). A rúd lényegesen nagyobb feszültségnek van itt is kitéve, mint ugyanolyan terhelésű nyomásnál, illetve húzásnál.



2.150. ábra

Nyírás (csúsztatás). A 2.144. ábra (lásd előbb) szerint egy síklapra ragasztott testet a felső lapján a síkkal párhuzamosan terhelve a test síkkal párhuzamos lapjai, rétegei „elcsúsznak" egymáson, mint egy kártyacsomag lapjai hasonló terheléskor. Itt a rugalmas deformációt az erőre merőleges élek elfordulási szögével jellemezzük.

Kis erőknél itt is érvényes a Hooke-törvény, amely a 2.144. ábra alapján így írható fel:

$$\tau = G\gamma. \tag{2.125}$$

Itt γ a nyírási alakváltozás vagy nyírási deformáció, és τ a nyírási feszültség. A *G* arányossági tényező a *nyírási (csúsztatási) rugalmasság modulus.*

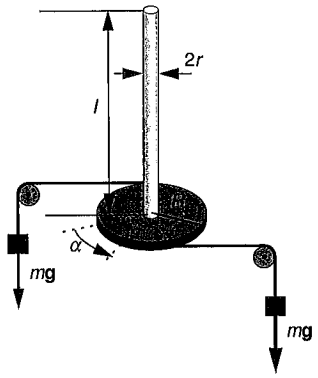
Ilyen terhelésnek vannak kitéve pl. a lemezeket összetartó szegecsek, csavarok (2.151. ábra). Hosszabb, magasabb hasábok nyíró igénybevételénél az oldalél nem marad egyenes, görbül.



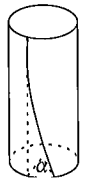
2.151. ábra

Csavarás (torzió) Egyik végén befogott huzalt vagy rudat terheljük meg a 2.152. ábra szerint egy *M* forgatónyomatékú erőpárral (esetünkben $M = 2mgR$)! A rúd alsó végének α szögelfordulása nem túl nagy erőknél, illetve forgatónyomatékoknál egyenesen arányos a forgatónyomaték nagyságával. Az arányossági tényező függ a huzal *l* hosszától, keresztmetszetének alakjától, nagyságától és az anyagi minőségre jellemző *G* nyírási modulustól. A kör keresztmetszetű rúd szabad végének szögelfordulása és a forgatónyomaték kapcsolata:

$$\alpha = \frac{2}{\pi G}\frac{l}{r^4}M. \tag{2.126}$$



2.152. ábra



2.153. ábra

Ezt a formulát a torziós rezgéseknél, spirálrugónál ismert alakba írva:

$$M = D^*\alpha = \frac{\pi G r^4}{2l}\alpha.$$

Látható, hogy pl. ugyanazon szögelforduláshoz tízszer kisebb huzalátmérő esetén tízezerszer kisebb forgatónyomaték szükséges. Ezért használnak „torziós" mérleget igen kis erők mérésére.

Az, hogy csavarásnál a G nyírási modulus lép be, mint az anyagi minőségre jellemző állandó, annak a következménye, hogy a csavarás nyírási alakváltozás, mint azt a 2.153. ábra mutatja.

Ilyen igénybevételnek vannak kitéve a torziós mérlegek szálain kívül a gépek tengelyei. A spirálrugóknál nem nyírási, hanem hajlítási igénybevételt hozunk létre.

Izotrop testek *rugalmassági állandói* közül csak kettő független egymástól. Ezért az eddig megismert négy állandó között az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$K = 3\frac{1-2\mu}{E}, \qquad (2.127)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (2.128)$$

Keménység. Az anyagok *keménységét* azzal mérik, hogy adott nyomás hatása alatt egy próbatest milyen mélyen tud „behatolni" az anyagba. Az így definiált keménység a mérési eljárásoktól is függ. Pl. egy adott sugarú golyót nyomnak a különböző anyagokba, és mérik az egyenlő nyomóerők által létrehozott benyomódások területét. Az ún. *karcolási keménységnél* az anyagokat a *Mosh-skála* szerint sorba rendezik: ha az adott anyaggal a 3-as fokozatú még karcolható, de azt a 4-es karcolja, akkor keménységi foka 3 és 4 közé esik.

A 2.3. táblázatban megadtuk néhány anyagra E, G és a szakítószilárdság értékét.

2.3. táblázat. Szilárd testek rugalmassági adatai

Anyagok	Rugalmassági mudulus, Pa	Nyírási modulus, Pa	Szakítószilárdság, Pa
Acél	$21{,}5 \times 10^{10}$	$8{,}14 \times 10^{10}$	$372...1863 \times 10^6$
Alumínium	$6{,}86 \times 10^{10}$	$2{,}64 \times 10^{10}$	$117...313 \times 10^6$
Ezüst	$7{,}84 \times 10^{10}$	$2{,}84 \times 10^{10}$	$284{,}4 \times 10^6$
Fa (hosszirányban)	$0{,}88...1{,}27 \times 10^{10}$	$0{,}98...1{,}5 \times 10^{10}$	$68{,}6...127 \times 10^6$
Fa (keresztirányban)	$0{,}039...0{,}11 \times 10^{10}$		$7{,}36...14{,}7 \times 10^6$
Ólom	$1{,}47...1{,}96 \times 10^{10}$	$0{,}54...0{,}64 \times 10^{10}$	$16{,}6...21{,}5 \times 10^6$
Vörösréz	$8{,}04...8{,}14 \times 10^{10}$	$2{,}94 \times 10^{10}$	$392...446 \times 10^6$

2.6.3. A rugalmassági energia

Ha a testeket a Hooke-törvény érvényességi határain belül terheljük, akkor amiatt, hogy az erő, illetve a feszültség és a deformáció mértéke között egyenes arányosság áll fenn, a deformációhoz szükséges munka egyenesen arányos a deformáció mértékének négyzetével. Ezt a rugóra talált feszítési munka (2.31b) képletével igazolhatjuk (lásd a 2.1.4.1. alpontot). A rugalmasság definíciója értelmében mondhatjuk, hogy a rugalmassági erők konzervatívak. Ezért a rugalmasan alakított testhez potenciális energiát rendelhetünk. Ez a rugalmassági energia. Az előbbiek alapján *a rugalmassági deformációkból származó potenciális energia egyenesen arányos a feszültségmentes állapothoz képesti deformáció négyzetével.*

Megfeszített rúd rugalmassági energiája. A rugalmassági energia sűrűsége. Egy homogén, l hosszúságú, A keresztmetszetű, E rugalmassági modulusú rudat nyújtsunk meg Δl-lel! A feszítőerő a Hooke-törvény értelmében egyenesen arányos Δl-lel. Az eredetileg feszültségmentes rúd Δl-lel megnyújtásához szükséges munka: $\frac{1}{2}F_{max}\Delta l$, ahol F_{max} a Δl-lel való megnyújtásnál fellépő maximális erő. Az erőt a (2.121) formulából kifejezve és a munka képletébe beírva a rugalmassági energia:

$$E_{\text{rugalmassági}} = \frac{1}{2}F_{max}\Delta l = \frac{1}{2}\frac{EA(\Delta l)^2}{l}.$$

Mivel a rúd térfogata $V = Al$, ezért

$$E_{\text{rugalamassági}} = \frac{1}{2} E \frac{V}{l^2} (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} EV\varepsilon^2. \tag{2.129}$$

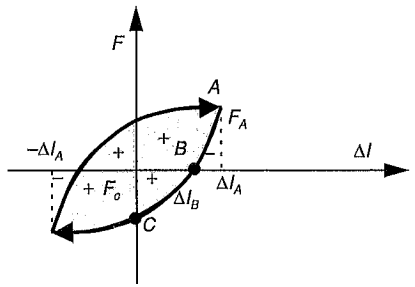
A térfogategységben tárolt energia, az ún. *energiasűrűség*. Jele: w.

$$w = \frac{E_{\text{rugalmassági}}}{V}, \tag{2.130}$$

ahol a w skaláris mennyiség, mértékegysége J/m^3.
A rúdban tárolt rugalmassági energia sűrűsége:

$$w = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{1}{2E} \sigma^2. \tag{2.131}$$

A rugalmas alakváltozástól való eltérést mutatja a hiszterézis jelensége: A rugalmassági határon túl megfeszített rúdra ható feszítőerőt megszüntetve nem áll vissza a rúd eredeti feszültségmentes hossza. Ennek eléréséhez egy bizonyos nyomóerőt is ki kell fejtenünk. A 2.154. ábrán egy rúd hosszváltozását ábrázoltuk a nyomó-, illetve húzóerő függvényében.



2.154. ábra

Az ábrán egy rúd F_A erővel megnyújtott állapotából indultunk ki. A pozitív Δl a megnyúlást, a negatív az összenyomódást, pozitív F húzó-, negatív F nyomóerőt jelent. Az F_A-hoz tartozó Δl_A megnyújtott állapotból kiindulva csökkentsük a húzóerőt. A 0 húzóerőnél a rúd hossza még mindig Δl_B-vel nagyobb feszültségmentes hosszánál. Ezt csak nyomóerővel tudjuk 0-ra csökkenteni, melynek értéke F_C. Ez nyomóerő, tehát negatív. A nyomóerőt tovább növelve elérhetjük a Δl_A-nak megfelelő összenyomott állapotot. Ezután csökkentve a nyomóerőt, nulla nyomóerőnél itt sem érjük el a feszültségmentes állapotot, ehhez húzóerőt kell kifejtenünk. Ezt egészen addig folytatjuk, amíg vissza nem térünk a Δl_A-val megnyújtott eredeti állapothoz. Az így kapott görbét *hiszterézishuroknak*, a jelenséget *hiszterézisnek* nevezzük. Az egyes szakaszokon kifejtett erők munkái a görbeszakaszok és a megnyúlástengely közötti területek nagyságával egyenlők. Az előjeleket az dönti el, hogy az erő és elmozdulás milyen irányú egymáshoz képest. A 2.154. ábrán bejelöltük a munkák előjelét. Az előjeleket figyelembe véve a huzalra ható (külső erő) munkája egy ciklus alatt a hiszterézishurok által körbeölelt terület számértéke. Egy ciklus alatt a külső erő által végzett munka pozitív, tehát a befektetett energiát nem kapjuk vissza, a rúd energiát vesz fel, amelyet nem ad vissza mechanikai energia formájában a környezetnek. Ezért itt mechanikai energia disszipálódik.

2.7. Folyadékok és gázok mechanikája

2.7.1. Folyadékok és gázok sztatikája (hidro- és aerosztatika)

Ha a folyadékokat edénybe töltjük, akkor felveszik annak alakját. Általában a folyadékok alakja könnyen változtatható. A gázok hasonlóan viselkednek, azzal a különbséggel, hogy kitöltik a rendelkezésükre álló teljes térfogatot is. Az előbbi jelenségeket azzal magyarázhatjuk, hogy alakváltozás során sem a folyadékrétegek, sem a folyadékot határoló felületek mentén nyíróerők nem lépnek fel (amennyiben a folyadékrétegek egymáshoz képest elmozdulnak, nyíróerők is fellépnek, lásd a 2.7.3.2. pontot).

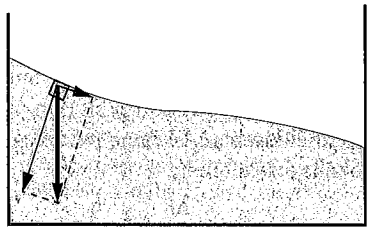
Nyugvó folyadék vagy gáz határfelületén és belsejében alakváltoztató hatással szemben nyírófeszültségek nem ébrednek.

A folyadékok és gázok összenyomhatóság szempontjából eltérő módon viselkednek. A folyadékok igen nehezen összenyomhatók, a gázok nagymértékben összenyomhatók.

A víz térfogata pl. a normális légköri nyomás százszorosán a normális nyomáson (100 kPa) felvett eredeti térfogatának csak ötezred részével csökken, míg a gázok térfogata ugyanilyen körülmények között századrészére csökken.

2.7.1.1. Nyugvó folyadék szabad felszíne

A folyadékra hathat felületi és térfogati erő is. Felületi erő az edény fala által kifejtett kényszererő. Térfogati erő pl. a gravitációs erő. Ha a folyadék gyorsul, akkor a vele együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben fellépő tehetetlenségi erők is térfogati erők. A folyadék szabad felszíne (az edény falától eltekintve lásd a 2.7.3.1. és 2.205. ábra) merőleges a folyadékra ható térfogati erőkre. Amennyiben a folyadék felülete nem lenne merőleges a térfogati erőre, illetve a térfogati erők eredőjére, akkor lenne a térfogati erőnek a felülettel párhuzamos komponense (2.155. ábra).



2.155. ábra

Ez pedig a szabad felülettel párhuzamos erőt jelentene a felülettel párhuzamos rétegek között. Ez egyensúlyi állapotban nem lehetséges, hiszen ekkor a felülettel párhuzamos rétegek közt nyíró erőknek kellene fellépniük, amely nyíró erők nyugvó folyadékban nem lépnek fel. Ha ilyen helyzet mégis fennállna, akkor az nem lehet egyensúlyi állapot, mert a térfogati erő felülettel párhuzamos komponensét semmi sem kompenzálná, ezért a felülettel párhuzamosan kijelölt folyadékhasáb gyorsulna. Ezért a Föld felszínén a nyugvó folyadék felülete merőleges a helybeli nehézségi gyorsulásra.

2.7.1.2. A nyomás. A nyomás terjedése folyadékokban és gázokban. Pascal törvénye

Ebben az alpontban eltekintünk a folyadékra vagy gázra ható térfogati erőktől. Ezt megtehetjük a súlytalanság állapotában vagy abban az esetben, ha a térfogati erők elhanyagolhatóak a felületi erőkhöz képest.

Egy felületre ható merőleges F nyomóerő és a felület nagyságának hányadosa a nyomás. Jele: p,

$$p=\frac{F}{A}. \tag{2.132}$$

Mértékegysége: N/m^2 = Pa (pascal). Gyakorlati mértékegysége folyadékok és gázok esetén a bar. 1 bar = 10^5 Pa. Szokásos mértékegységei még 1 mbar(milibar) = 100 Pa, 1 hPa (hektopascal) = 100 Pa, 1 MPa = 10^6 Pa.

Régebbi mértékegységek:
1 kp/cm^2 (technikai atmoszféra) = 98,0665 kPa
1 atm (fizikai atmoszféra) = 101,325 kPa
1 Hgmm (higanymilliméter) = 133,322 Pa
1 Torr = 1/760 atm = 133,3 Pa

Ha a felületen az erő nem egyenesen arányos a területtel, akkor az $\frac{F}{A}$ hányados csak a nyomás átlagértékét adja meg. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a nyomás a felület pontjaiban különböző. Ebben az esetben adott pontban a nyomást a következőképpen értelmezzük: Felveszünk az adott pont környezetében egy akkora ΔA nagyságú felületet, hogy ennél kisebb ΔA-kra ΔF már elegendő pontossággal arányos ΔA-val. A nyomás lokális érték, tehát:

$$p=\frac{\Delta F}{\Delta A}, \tag{2.133}$$

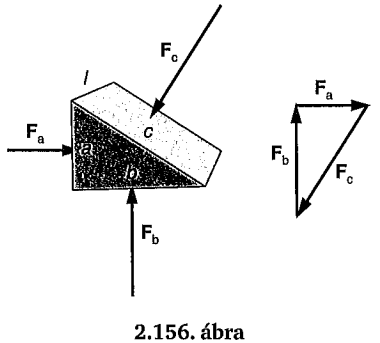
ahol ΔA az előző feltételeknek megfelelően elegendő kicsiny.

A *nyugvó folyadék vagy gáz által bármely felületre kifejtett nyomóerő merőleges a felületre,* mert nyíróerő nem lévén, az erőnek nincs a felülettel párhuzamos komponense.

Mivel a nyomás nem függ a felület irányításától, ezért a nyomás skaláris mennyiség.

Ez érvényes nyilván a folyadékban vagy gázban lévő tetszőleges test vagy csak gondolatban kiválasztott térfogatelem határára és a folyadékot vagy gázt tartalmazó edény falára kifejtett erőre is. Az erő a folyadék vagy gáz belsejéből mutat a nyomott felület, test belseje felé. Az erő „összenyomó" erő. Gázokban húzófeszültségek nem ébrednek, folyadékokban is csak különleges körülmények között (lásd „szivornya").

A nyíróerők hiányának további következménye a *Pascal-törvény:*
Folyadékokra vagy gázra ható külső, felületi erő által létrehozott nyomás a folyadékban vagy gázban minden irányba gyengítetlenül tovaterjed.



2.156. ábra

Ezt a következőképpen láthatjuk be: Határoljunk el gondolatban a folyadék vagy gáz belsejében a 2.156. ábra szerint egy háromszög alapú, igen kicsiny magasságú, hasáb alakú térfogatrészt! A hasáb belsejében lévő folyadék vagy gáz egyensúlyban van. Ezért a hasáb felületdarabjaira ható erők eredője 0. Az ábrán feltüntetett, a hasáb oldallapjaira merőleges erők zárt vektorháromszöget alkotnak. A szögek egyenlősége miatt a vektorháromszög és a hasáb alapháromszöge hasonló. Ezért a megfelelő oldalak aránya is megegyezik. A háromszög alakú lap oldalainak aránya egyben a hozzájuk csatlakozó oldallapok területének aránya is. Tehát $\frac{F_a}{al}=\frac{F_b}{bl}=\frac{F_c}{cl}$. Ez pedig éppen a nyomások egyenlőségét jelenti a hasáb oldallapjain. A folyadék vagy gáz bármely két tetszőleges pontját összeköthetjük ilyen kis hasábok sorozatával, melyek oldallapjain a nyomások egyenlők. Igaz ez annak a felületnek egy tetszőleges pontjára is, ahol a külső felületi erő hat. Így a folyadék vagy gáz tetszőleges pontjában a nyomás akkora, mint amennyit egy felületi erő létrehozott.

A bizonyításnál lényeges volt az a kikötés, hogy a felületi erőkön kívül az egyensúlyban lévő folyadékra vagy gázra más, térfogati erő nem hat.

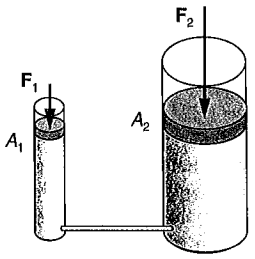
Amennyiben hat a folyadékra még a tömeggel arányos térfogati erő is, akkor a szuperpozíció elvét alkalmazzuk. A hasábra ható térfogati erőt kompenzálják a hasáb oldallapjain fellépő felületi erők. Ha van még külső felületi erő is, akkor a hasáb oldallapjain

többletnyomóerők lépnek fel. E többletnyomóerők egyensúlyát, arányát a szuperpozíció elve alapján nem zavarják a térfogati erővel egyensúlyt tartó nyomóerők. Ezért Pascal törvénye ebben az esetben is érvényes.

A Pascal-törvény gyakorlati alkalmazásával a *hidraulikus sajtónál és fékeknél* találkozunk.

A hidraulikus sajtó egy kis keresztmetszetű munkahengerből és egy nagyobb keresztmetszetű nyomóhengerből áll, amelyeket egy cső köt össze. A munkahengerben lévő dugattyúra erőt F_1 kifejtve a nyomás $\frac{F_1}{A_1}$ lesz. Ugyanekkora a nyomás a Pascal-törvény miatt a folyadék minden pontjában, tehát a nyomóhenger felületén is. Itt a nyomás ugyanakkora: $\frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2}$. Másképpen:

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{A_2}{A_1}.$$



2.157. ábra

Tehát az egyik hengernél fellépő erő annyiszorosa a másikénak, ahányszorosa az egyik dugattyú felszíne a másikénak. Ha a dugattyúk átmérőjének aránya pl. 1:10, akkor az erő aránya 1:100.

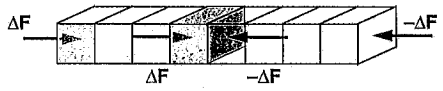
Járművek hidraulikus, illetve légfékjeinél a fékpedál lenyomásával egy dugattyút hozunk működésbe. Ez a dugattyú egy olyan hengerben mozog, amelyik csövekkel csatlakozik a kerekeknél lévő hengerekhez, amelyekben szintén egy-egy dugattyú van. A rendszer a „fékfolyadékkal" van feltöltve. A kerekek fékdugattyúi szorítják a „fékpofákat" a súrlódó felülethez. A fékdugattyúk átmérőjét egyenlőnek választva, a fékpofákat a súrlódó felületekhez nyomó erők egyenlők lesznek, egyidejűleg hatnak. Rudakkal, huzalokkal ez nem érhető el, mert az erők itt a rugalmas feszültségekkel kapcsolatosak, amelyek nem biztosan egyenlők.

2.7.1.3. A hidrosztatikai nyomás

A nyugvó folyadékban vagy gázban a külső erők hatására ébredő belső erőkből származó nyomást *hidrosztatikai nyomásnak* nevezzük.

A Föld felszínén nyugalomban lévő folyadékra vagy gázra külső felületi erőkön kívül a térfogati nehézségi erő is hat. A folyadék vagy gáz belsejében kiszemelt térfogatelemre ható felületi nyomóerők eredője most nem 0, hanem a térfogatelemre ható nehézségi erő ellentettje.

Szemeljünk ki a nyugvó folyadék vagy gáz belsejében a 2.158. ábra szerint egy olyan hasáb alakú térfogatelemet, melynek alaplapjai merőlegesek a térfogati erő irányára, oldallapjai párhuzamosak a térfogati erő irányával! A hasáb belsejében lévő folyadék- vagy gázmennyiség nyugalomban van. Ezért a felületén ható, a környező folyadék vagy gáz által kifejtett felületi nyomóerők eredője a térfogati erő ellentettje. A hasáb lapjainak irányítása miatt az oldallapokra ható (merőleges) nyomóerők eredője 0, mert a térfogati erőnek nincs az oldallapokra merőleges komponense. Ezért az oldallapokon fellépő nyomások is egyenlők, mert a nyomott felületek is azok.



2.158. ábra

A térfogati erőre merőleges sík pontjai közé ilyen kis hasábokat iktatva, az érintkező lapokon a nyomások egyenlők, mert a nyomóerők is egyenlők a hatás–ellenhatás elve alapján. Ezért a térfogati erőre merőleges sík pontjaiban a nyomások egyenlők. Speciálisan a *Földön nyugvó folyadék vagy gáz belsejében egy vízszintes síkban a nyomás mindenütt ugyanakkora.* Ha a sík két pontja nem köthető össze ilyen kis hasábok sorozatával, akkor a kijelentés nem mindig igaz: lásd a 2.7.1.4. alpontot.

Ha a folyadék vagy gáz a Földön állandó **a** gyorsulású haladó mozgást végez, akkor a folyadékkal vagy gázzal együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben az egyensúly a kis hasábra ható felületi nyomóerők és a nehézségi, valamint a tehetetlenségi erők eredőjéből jön létre. *Itt a térfogati erő az* $m[\mathbf{g}+(-\mathbf{a})]$. *Az erre merőleges síkokban lesz a nyomás egyenlő.* A folyadék felszíne is egy ilyen sík lesz (lásd a 2.1.7.2. pontot).

A térfogati erő irányában a nyomás értéke változik.

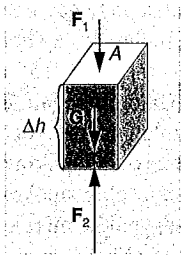
A folyadékokra, illetve gázokra ható nehézségi erőből származó hidrosztatikai nyomás. E nyomás szokásos elnevezése még: *A folyadék vagy gáz súlyából származó hidrosztatikai nyomás.* Ha a térfogati erő most csak a nehézségi erő, akkor az

egyensúly feltétele az, hogy a vízszintes lapokra ható nyomóerők különbsége egyenlő legyen a nehézségi erővel (2.159. ábra):

$$p_2A - p_1A = A\rho\Delta hg.$$

Az alaplap A területével egyszerűsítve:

$$\Delta p = \rho g \Delta h. \tag{2.134}$$



2.159. ábra

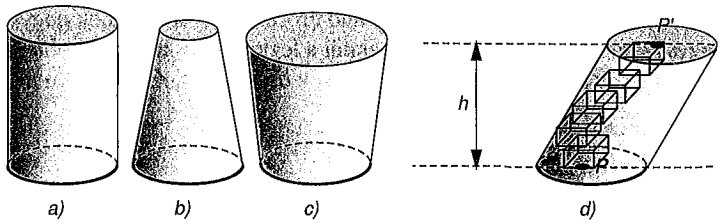
A nyomás felfelé haladva csökken, lefelé haladva nő. A nyomásváltozás csak akkor egyenesen arányos a magasság vagy mélység megváltozásával, ha a sűrűség változatlan, azaz nem függ a h-tól. Gázoknál a sűrűség változatlan hőmérsékleten a nyomástól is függ. Ezért itt a nyomásváltozás csak akkor vehető egyenes arányosnak a Δh-val, ha a nyomás oly kis mértékben változik, hogy a sűrűség gyakorlatilag állandó (általánosabb esetben lásd a 2.7.1.5. alpontot). Ezért a homogén folyadék belsejében a nyomásváltozás egyenesen arányos a Δh magasság-, illetve mélységváltozással. Ha a folyadék felszínén nem hat felületi nyomerő, akkor a *folyadék szabad felületétől mért h mélységben a nyomás:*

$$p = \rho g h. \tag{2.135}$$

Földi körülmények között a folyadék szabad felületén többnyire hat a levegő súlyából származó légnyomás is. Ez a nyomás hozzáadódik az előbbi nyomáshoz. Sok esetben csak a szabad felülethez képesti nyomás növekedése érdekel minket. A formulát akkor is az előbbi alakban használjuk, és kissé pongyolán azt mondjuk, hogy a nyomás a folyadékban ρgh. A tényleges teljes nyomás, ha a külső nyomás p_0:

$$p = p_0 + \rho g h. \tag{2.136a}$$

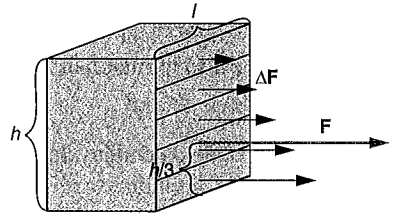
A tartály falára kifejtett nyomóerők. Egy hasáb alakú edény aljára és oldallapjaira a nyugvó folyadék vagy gáz erőt fejt ki, mely erő merőleges a nyomott felületre. Ha a tartályt az alsó, vízszintes lapjától h magasságig megtöltjük folyadékkal, akkor ezen a lapon a nyomás mindenütt ρgh lesz, hiszen ugyanabban a vízszintes síkban vagyunk. Így a nyomóerő $F = \rho ghA$. A kijelentés akkor is igaz, ha az edény a 2.160. ábra szerinti alakú. Az edény alján a nyomóerő lényegesen nagyobb vagy kisebb lehet a benne lévő folyadék súlyánál. Ez a *hidrosztatikai paradoxon.*



2.160. ábra

A 2.160d ábrán látható alakú edény aljának P *pontjában* ρgh a nyomás, holott nincs is fölötte h magasságú folyadék. A folyadék szabad felületének egy P' pontját kössük össze kis hasábokkal! Egy hasáb két vízszintes lapja között a nyomásnövekedés $\rho g\Delta h$. A teljes nyomásnövekedés e nyomásnövekedések összege, amely összegből a ρg kiemelhető. Így a teljes nyomásnövekedés a P és P' közötti magasságkülönbségből adódóan ρgh. Ez azt is jelenti, hogy ugyanakkora nyomóerő mellett az edényben lévő folyadék súlya nagyobb, illetve kisebb az ugyanolyan alapterületű edények esetén, mint a függőleges falú edényénél. Azaz a folyadék a súlyánál kisebb vagy nagyobb erővel nyomja az edény alját. Ez annak a következménye, hogy az edények oldalfalaira ható nyomóerők ellenerői szolgáltatják azokat a lefelé, illetve felfelé ható erőket, melyek az edény alján fellépő felfelé ható, egyenlő nagy erővel együtt egyensúlyban tartják a folyadékot.

Függőleges, sík oldallapra ható nyomóerőt nem számíthatjuk ki a pA formula alapján, mert nyomás a mélység függvénye.



2.161. ábra

A 2.161. ábra alapján a téglalap alakú nyomott területet osszuk fel kis, Δh magasságú és l hosszúságú csíkokra! Ha Δh elegendően kicsiny, akkor a nyomás a Δh

mélységen belül alig változik. Egy ilyen kis csíkra kifejtett nyomóerő merőleges a nyomott felületre és nagysága $\rho g h l \Delta l$. Itt a nyomás a h mélységben lévő nyomás. Az egyes csíkokon ható erők a h mélységgel lineárisan nőnek. Ilyen lineárisan növekvő, párhuzamos hatásvonalú erőket összegezünk pl. egy derékszögű háromszöglemezre ható nehézségi erő koncentrált eredőjének kiszámításánál, ha a háromszöglemezt a függőleges befogóval párhuzamos csíkokra osztjuk. Egy ilyen lineárisan növekvő, párhuzamos erőkből álló erőrendszer eredőjének nagysága az erők nagyságának algebrai összege. Ezeknél a legkisebb és a legnagyobb erő összege megegyezik a szimmetrikusan vett párok összegével. n erő esetén $n/2$ ilyen pár van. Az összeg $\frac{n}{2}\left(F_{\min}+F_{\max}\right)$.

Itt $F_{\min}=0$, $\frac{h}{n}=\Delta h$ és $F_{\max}=\frac{n}{2}\rho g h \frac{h}{n} l=\frac{1}{2}\rho g h^2 l$.

Az edény alján uralkodó $\rho g h$ nyomással és a lap $A = hl$ területével a nyomóerő:

$$F=\frac{p_{\max}A}{2}. \tag{2.137}$$

Mivel a háromszöglapra ható nehézségi erők eredője átmegy a lap tömegközéppontján, ezért az eredő hatásvonala harmadolja a súlyvonalat és a párhuzamos szelők tétele miatt a vízszintes befogót is. Ezt a nyomóerőkre alkalmazva, koncentrált eredőjük hatásvonala az edény aljától számított $\frac{h}{3}$ magasságban van (lásd még a 2.123. ábrát).

Ha nem az egész lapra ható oldalnyomóerőre vagyunk kíváncsiak, hanem csak egy h_2-h_1 magasságú téglalapra ható erőre, akkor az előzőek alapján nem a $p_{\max}$ felével, hanem a legkisebb és legnagyobb nyomás számtani közepével kell számolnunk:

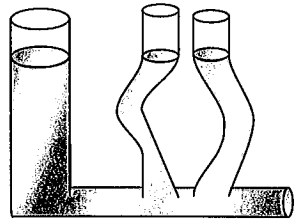
$$F=\frac{p_1+p_2}{2}A. \tag{2.138}$$

A koncentrált eredő most már nem az alsó harmadban lesz.

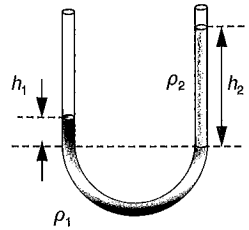
2.7.1.4. A közlekedőedények

A *közlekedőedények* olyan edények, edényrendszerek, amelyek között a folyadék vagy gáz szabadon áramolhat.

A 2.162. ábra szerinti közlekedőedényt folyadékkal megtöltve a közlekedőedény mindegyik szárában a folyadék ugyanabban a magasságban van. A 2.7.1.3. alpontban a 2.160d ábráról mondottak szerint a nyomás ugyanabban a vízszintes síkban ugyanaz. Tehát a külső légnyomással egyenlő nyomású helyeken a folyadékoszlopok egyenlő magasságúak.



2.162. ábra



2.163. ábra

A 2.163. ábrán látható közlekedőedény két különböző folyadékkal, pl. vízzel és higannyal van megtöltve. A higannyal telt alsó rész legmélyebb pontjában van valamekkora nyomás. Ettől a ponttól számítva emelkedjünk mindkét szárban ugyanannyit! Mivel ugyanannyit emelkedtünk ugyanabban a folyadékban, ezért a nyomás ugyanarról az értékről ugyanannyival csökkent. Így a nyomás mindkét pontban ugyanaz. Kijelentésünk csak addig igaz, amíg ugyanabban a folyadékban vagyunk. A két folyadék határfelülete által kijelölt vízszintes síkban a nyomások még egyenlők. Ezután mindkét szárban ugyanannyit emelkedve a nyomások nem egyenlő mértékben csökkennek, mert nagyobb sűrűségű folyadékban a nyomás jobban csökken. Ezért a közös szint feletti vízszintes síkokban a két szárban a nyomások már nem egyenlők.

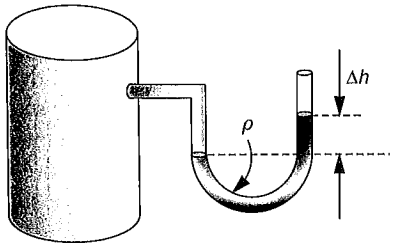
Közlekedőedények száraiban az edény aljától számított ugyanazon magasságban a nyomások egyenlők, ha az egyenlő magasságban lévő pontok még ugyanabban a folyadékban vannak.

A közlekedőedények felhasználhatók egymással nem keverődő folyadékok sűrűségének meghatározására. A 2.163. ábra szerinti közlekedőedényben a két folyadék közös határfelülete által kijelölt vízszintes síkban az egyes folyadékoszlopok nyomásai egyenlők:

$$h_1\rho_1 g h_1 = h_2\rho_2 g. \tag{2.139}$$

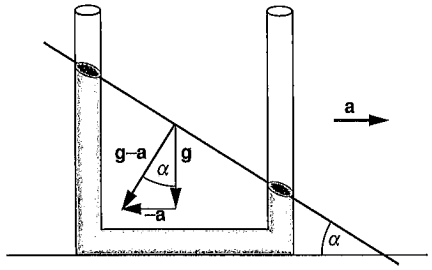
Innen pl. ρ_1 meghatározható.

A közlekedőedényt felhasználhatjuk nyomáskülönbségek mérésére is. Pl. a 2.164. ábra szerinti tartályban nagyobb a nyomás, mint a kinti térben. A bejelölt közös határfelületen a nyomások mindkét szárban egyenlők. Ezért a benti gáz nyomása egyenlő a kinti levegő nyomásának és a folyadékoszlop nyomásának összegével. A nyomáskülönbség tehát a Δh magasságú folyadékoszlop nyomása.



2.164. ábra

Ha a közlekedőedény vízszintes állandó gyorsulású, haladó mozgást végez, akkor az azonos nyomású helyek itt is a térfogati erőkre merőleges „vízszintes" síkok lesznek, mely síkok a valódi vízszintessel $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}$ szöget zárnak be (2.165. ábra). A térfogati erő itt az $m[\mathbf{g}+(-\mathbf{a})]$ erő.



2.165. ábra

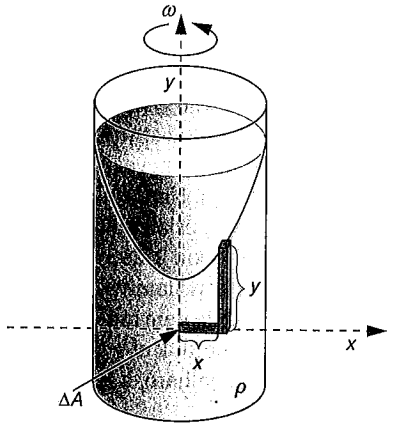
Egy állandó ω szögsebességgel forgó edényben a folyadék felülete nem sík, hanem *forgási paraboloid* alakú (2.166. ábra). Egy, a forgástengelyen átmenő síkmetszetet vizsgálva, vágjuk ki belőle gondolatban az ábra szerinti alakzatot!

A jelenséget inerciarendszerben írjuk le. Az x hosszúságú vízszintes, ΔA keresztmetszetű folyadékhengerkére az x helyen a folyadék által $-x$ irányba kifejtett erő hat. Ennek nagysága az ott uralkodó $p = \rho gy$-nal kifejezve $\rho gy\Delta A$. Ez az erő hozza létre az x hosszúságú, vízszintes folyadékhengerke centripetális gyorsulását. A tömegközéppont tételét alkalmazva:

$$\rho gy\Delta A = ma_{\text{TKP}} = \rho x\Delta A\frac{x}{2}\omega^2. \qquad (2.140)$$

A egyenletet rendezve a felület metszetének egyenlete:

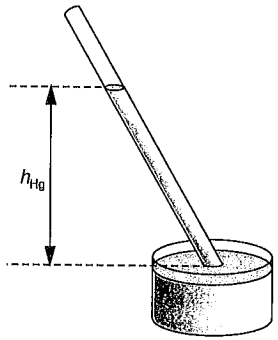
$$y = \frac{x^2\omega^2}{2g}. \qquad (2.141)$$



2.166. ábra

2.7.1.5. A légnyomás

A levegő nyomását kimutató kísérletet először Torricelli végezte el 1643-ban. Egyik végén zárt üvegcsövet teljesen megtöltött higannyal. A csövet nyitott végénél ujjával befogta, megfordította és a 2.167. ábra szerint egy higannyal teli edénykébe süllyesztette. Itt elvette az ujját, és a csőből a higany egy része kifolyt.



2.167. ábra

A bent maradó higanyoszlop felett légüres tér keletkezett. Az edényben a higany felszíne által kijelölt sík minden pontjában a nyomás ugyanakkora. A csövön kívül ugyanezen a szinten a nyomás a kinti levegő nyomása. A cső belsejében, ebben a síkban a nyomás csak a higany súlyából származó nyomás, hiszen a higany fölött légüres tér van. Tehát a levegő nyomása: $h_0\rho_{Hg}g$. Itt h_0 a higanyszintek különbsé-

ge, és csak abban az esetben egyezik meg a higanyoszlop hosszával, ha a higanyoszlop függőleges.

h_0 értéke tengerszinten átlagosan 760 mm. Ez Pa-ban számolva 101,325 kPa = $= 1{,}01325\times10^5$ Pa, ami kb. 1 bar. Értéke ugyanazon a helyen is változik az időjárás függvényében. Innen származik a fizikai atmoszféra, amely 760 mm magas higanyoszlop nyomása. Ennek 760-ad részét nevezik 1 Hgmm-nek.

A légnyomás a magassággal csökken. Nem túl nagy magasságkülönbségeknél a levegő sűrűsége nem nagyon változik, és alkalmazható a (2.134) formula. A levegő sűrűsége 0 °C-on és 1 bar nyomáson 1,293 kg/m³. Így a nyomáscsökkenés ilyen körülmények között méterenként valamivel több, mint 10 Pa (természetesen csak addig, amíg a nyomás annyira le nem csökken, hogy az emiatt bekövetkező sűrűségváltozástól már nem tekinthetünk el.)

Ha a sűrűségváltozás nem elhanyagolható, a levegő nyomását az ún. *barometrikus magasságformula adja meg:*

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} h}. \tag{2.142}$$

A formula csak akkor érvényes, ha a levegő hőmérséklete és összetétele a magasság függvényében nem változik. Ha ez a feltétel fennáll, mint arról a következő alpontban lesz szó, a nyomás és a sűrűség egyenesen arányosak.

A barometrikus magasságformula elemi bizonyítása:

Legyen egy általunk kiválasztott tetszőleges pontban a nyomás p_0, a sűrűség ρ_0. Bármilyen más pontban a nyomásra és sűrűségre: $\frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0}{p_0}$, ahonnan $\rho = \frac{p\rho_0}{p_0}$. A kiválasztott ponttól h magasságban keressük a nyomást. Osszuk fel a magasságot olyan kis $\Delta h = \frac{h}{n}$ rétegekre, hogy ezen rétegeken belül a nyomás és így a sűrűség is elhanyagolható mértékben változzék! A nyomás értéke a kezdő szinten p_0. Az első, $\frac{h}{n}$ magasságú szinten a nyomást p_1-gyel, a második szinten p_2-vel, az i-edik szinten p_i-vel jelöljük. A továbbiakban $\frac{\rho_i}{p_i} = \frac{\rho_0}{p_0}$. A nyomásokat rendre felírva:

$$p_1 = p_0 - \rho_0 g\frac{h}{n} = p_0\left(1-\frac{\rho_0}{p_0}g\frac{h}{n}\right),$$

$$p_2 = p_1 - \rho_1 g\frac{h}{n} = p_1\left(1-\frac{\rho_1}{p_1}g\frac{h}{n}\right) = p_1\left(1-\frac{\rho_0}{p_0}g\frac{h}{n}\right).$$

Az előző, p_1-re kapott kifejezést behelyettesítve:

$$p_2 = p_0\left(1-\frac{\rho_0}{p_0}g\frac{h}{n}\right)\left(1-\frac{\rho_0}{p_0}g\frac{h}{n}\right) = p_0\left(1-\frac{\rho_0}{p_0}g\frac{h}{n}\right)^2.$$

Látható, hogy az egymás után következő nyomások mértani sorozatot alkotnak. Az i-edik szinten a nyomás:

$$p_i = p_0\left(1-\frac{\rho_0}{p_0}g\frac{h}{n}\right)^i.$$

A h magasságban lévő pontban a nyomás $p_n = p$:

$$p = p_0\left(1-\frac{\rho_0}{p_0}g\frac{h}{n}\right)^n = p_0\left(1+\frac{1}{-\frac{p_0 n}{\rho_0 g h}}\right)^n = p_0\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{p_0 n}{\rho_0 g h}}\right)^{n\left(-\frac{p_0}{\rho_0 g h}\right)}\right)^{\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right)}.$$

Itt a kitevőt 1-gyel egyenlő kifejezéssel szoroztuk. Az első kitevőben a két tényezőt összeszorozva és a $-\frac{p_0 n}{\rho_0 g h}$ kifejezést x-szel jelölve:

$$p = p_0\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right)}.$$

A közelítés annál pontosabb, minél nagyobb az n értéke. Ha az n-nel tartunk a végtelenhez, akkor az x a $-\infty$-hez tart. Mint a matematikából ismeretes, az $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ határértéke mind +, mind a – végtelenben létezik. Ezt a határértéket e-vel jelölik, értéke 2,71..., jele e, neve *a természetes alapú logaritmus alapszáma.* (Az e közelítő értékét egy számológép segítségével könnyen kiszámíthatjuk.) A e-t beírva kapjuk a barometrikus magasságformulát.

2.7.1.6. A Boyle–Mariotte-törvény

Ez a törvény összefüggést ad meg az állandó hőmérsékletű gázok nyomása és térfogata között.

Állandó hőmérsékletű, ugyanazon gázmennyiség nyomása fordítottan arányos térfogatával:

$$\boxed{pV = \text{állandó}}, \tag{2.143}$$

ahol p a nyomás, V a térfogat.

A kijelentés nagy pontossággal igaz megfelelő hőmérsékleti tartományban. A törvény érvényességi körére vonatkozóan lásd a „Termodinamika" c. rész 4.2.1. alpontját.

A gáz két, azonos hőmérsékletű állapotára felírva a Boyle–Mariotte-törvényt:

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Az egyenlet mindkét oldalát a gáz tömegével elosztva kapjuk:

$$p_1\frac{V_1}{m_1} = p_2\frac{V_2}{m_2},$$

ahonnan:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2}. \tag{2.144}$$

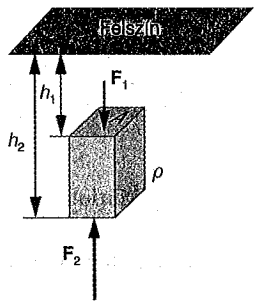
Eredményünk szerint *állandó hőmérsékleten a gáz nyomása egyenesen arányos sűrűségével.*

A pV szorzat értéke a bezárt gáz mennyiségétől és hőmérsékletétől függ.

2.7.1.7. A felhajtóerő. Arkhimédész törvénye

A folyadékba vagy gázba merülő testre ható, a folyadék vagy gáz által kifejtett nyomóerők eredőjét *felhajtóerőnek* nevezzük. A felhajtóerő felületi erő.

Egy teljesen folyadékba vagy gázba merülő hasábra ható felhajtóerőt mint a testre ható nyomóerők eredőjét a 2.168. ábra alapján és annak jelöléseivel a következőképpen számíthatjuk ki.



2.168. ábra

A testre ható nyomóerők „összenyomó" erők, a folyadékból a test felé mutatnak. A testre ható oldalnyomó erők kiegyenlítik egymást, mert az ábrán bemutatott kis hasáb oldallapjaira kifejtett erők egyenlő nagyok és ellentett irányúak, hiszen az egyenlő magasságban lévő kis vízszintes csíkokra ható nyomóerők egyenlők. A felső vízszintes lapra ható nyomóerő (h_1 magasságú folyadékoszlop súlyából származó nyomás) a h_1 mélységben uralkodó nyomás és a felület szorzata: $Ah_1\rho_{\text{folyadék}}g$ és lefelé mutat. Az alsó lapra ható, felfelé ható nyomóerő $Ah_2\rho_{\text{folyadék}}g$, amely nyilván nagyobb, mint a lefelé mutató erő. A testre ható nyomóerők eredője felfelé mutat és nagysága:

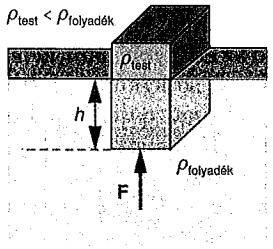
$$F_{\text{felhajtó}} = F_2 - F_1 = Ah_2\rho_{\text{folyadék}}g - Ah_1\rho_{\text{folyadék}}g = A\left(h_2 - h_1\right)\rho_{\text{folyadék}}g,$$

azaz:

$$\boxed{F_{\text{felhajtóerő}} = V_{\text{test}}\rho_{\text{folyadék}}g}. \tag{2.145}$$

Ha a test nem merül teljesen a folyadékba, akkor a 2.169. ábra alapján csak a hasáb alját felfelé nyomó erő hat, melynek nagysága:

$$F_{\text{felhajtóerő}} = Ah\rho_{\text{folyadék}}g = V_{\text{folyadékba merülő rész}}\rho_{\text{folyadék}}g. \tag{2.146a}$$



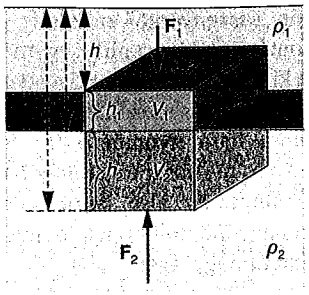
2.169. ábra

Arkhimédész törvénye. Minden folyadékba vagy gázba merülő testre felhajtóerő hat, amelynek nagysága a test folyadékban (vagy gázban) lévő térfogatának, a folyadék (vagy gáz) sűrűségének és a nehézségi gyorsulásnak a szorzata.

Ha a test két része két különböző sűrűségű folyadékban vagy gázban van, akkor a felhajtóerő:

$$F_{\text{felhajtóerő}} = V_1\rho_1g + V_2\rho_2g, \tag{2.146b}$$

ahol V_1, illetve V_2 az *1*-gyel, illetve *2*-vel jelölt folyadékban vagy gázban lévő térfogatrészt, ρ_1, illetve ρ_2-vel az *1*-gyel, illetve *2*-vel jelölt folyadék vagy gáz sűrűsége.



2.170. ábra

Ugyanis a 2.170. ábra jelöléseivel a hasáb felső lapján a nyomóerő:

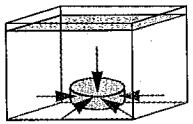
$$F_1 = Ah\rho_1.$$

A hasáb $h+h_1+h_2$ mélységben lévő alsó lapjára ható, felfelé mutató nyomóerő:

$$F_2 = A\left[\left(h+h_1\right)\rho_1 g + h_2\rho_2 g\right].$$

Az $F_{\text{Felhajtóerő}} = F_2 - F_1$ képletébe helyettesítve kapjuk az összefüggést.

Ha a testet nem minden oldaláról veszi körül a folyadék vagy gáz, akkor a nyomóerők eredője nem feltétlenül mutat felfelé: ha egy edény aljára simára csiszolt parafa dugót szorítunk, majd az edényt higannyal megtöltjük, akkor a dugó nem jön föl.

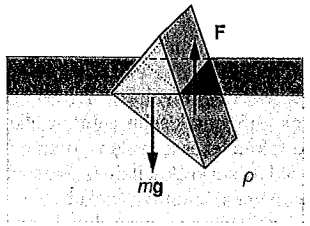


2.171. ábra

A 2.171. ábra szerint a folyadék által kifejtett nyomóerők eredője a felső lapra ható, lefelé ható nyomóerő. Ennek nagysága $Ah\rho_f g$.

A felhajtóerő felületi erő. Ez a felületi erő általában helyettesíthető pontba koncentrált erővel. A teljesen folyadékba merülő test által elfoglalt térrészből gondolatban vegyük ki a testet! Az így képződött üreget töltsük meg a folyadékkal! Az üregbe töltött folyadék a vele azonos folyadékban helyezkedik el, és nyilván egyensúlyban van. Az egyensúlyt a folyadék térfogatra ható nehézségi erő és a folyadéktérfogat határfelületén fellépő nyomóerők eredője hozza létre. A nyomóerők eredőjének nagysága az egyensúly miatt nyilván egyenlő a folyadéktérfogatra ható nehézségi erővel és nagysága: $m_{\text{folyadék}}\, g = V\rho_{\text{folyadék}} g$. Mivel a folyadéktérfogat egyensúlyban van, ezért a rá ható erők forgatónyomatékai is kiegyenlítik egymást. A nehézségi erő helyettesíthető egyetlen pontba koncentrált erővel, melynek hatásvonala átmegy a tömegközépponton. A nehézségi erővel egyenlő nagyságú nyomóerők eredőjének forgatónyomatéka csak akkor lehet egyenlő a nehézségi erő forgatónyomatékával, ha erőkarja is ugyanaz tetszőleges tengelyre vonatkoztatva. Ez pedig csak úgy lehetséges, hogy a két erő hatásvonala egybeesik. *Ezért a felhajtóerő hatásvonala átmegy a test folyadékba (vagy gázba) merülő részének helyébe képzelt folyadék (vagy gáz) tömegközéppontján.*

Ha a test homogén és teljesen a folyadékba merül, akkor a két erő hatásvonala egybeesik, az eredő forgatónyomaték bármilyen helyzetben 0. Más a helyzet akkor, ha a test nem merül teljesen a folyadékba.



2.172. ábra

A 2.172. ábra szerinti testre ható nehézségi erő és a felhajtóerő forgatónyomatékai nem egyenlítik ki egymást, a test forgásba jön. *Úszó testek egyensúlyának stabilitása* attól függ, hogy a test tömegközéppontja hogyan helyezkedik el a test folyadékba merülő részének helyébe képzelt folyadék tömegközéppontjához képest. A helyzetet bonyolítja az a tény, hogy az úszó test dőlésekor a folyadéktérfogat tömegközéppontjának helye a testhez képest is változik, miközben a felhajtóerő nagysága sem marad változatlan. A hajókat úgy tervezik, hogy a fellépő dőlések során a hajó tömegközéppontja lejjebb legyen az eldőlt hajótest folyadékban lévő részének helyébe képzelt folyadék tömegközéppontjánál.

A felhajtóerő értéke a folyadékba merülő, összenyomhatatlan testeknél nem függ a mélységtől. Ennek oka az, hogy a folyadékok gyakorlatilag összenyomhatatlanok, ezért a nyomásnövekedés miatti sűrűségváltozástól eltekinthetünk. Gázok esetén nagyobb nyomásváltozásnál már tekintettel kell lennünk a sűrűségváltozásra. Pl. a léggömbökre ható felhajtóerő (izotermikus légkörnél) exponenciálisan csökken, ha a térfogat változatlan (lásd 2.142. képlet). Egy fix térfogatú, zárt léggömböt felengedve az addig emelkedik, míg a rá ható, csökkenő felhajtóerő egyenlő nem lesz a nehézségi erővel. Ebben a magasságban a léggömb lebegni fog.

Ha egy edényt színültig megtöltünk folyadékkal, és egy testet belemerítünk, akkor az folyadékot nyom ki, „szorít ki" az edényből. A kiszorított folyadék térfo-

gata annyi, amennyi a test folyadékba merülő részének térfogata. A kiszorított folyadékra ható nehézségi erő $V_{test}\,\rho_{folyadék}\,g$. Ez éppen a felhajtóerő nagyságú. Ezért szokás az Arkhimédész-törvényt úgy is megfogalmazni, hogy a *testre ható felhajtóerő nagysága a test által kiszorított folyadék vagy gáz súlyával egyenlő.*

Testek úszása, lebegése, elmerülése. A teljes térfogatukban folyadékba vagy gázba merülő testekre két erő hat: a nehézségi erő és a felhajtóerő. Homogén testeknél a nehézségi erő $V_{test}\,\rho_{test}\,g$, a felhajtóerő $V_{test}\,\rho_{folyadék}\,g$. A test aszerint lebeg, merül el vagy indul felfelé, hogy a nehézségi erő egyenlő, nagyobb vagy kisebb a felhajtóerőnél. A két erő közötti egyenlőséget vagy egyenlőtlenséget a $V_{test}\,g$-vel egyszerűsíthetjük. Így homogén testek esetén azok lebegnek, merülnek el, illetve emelkednek, melyeknek sűrűsége egyenlő, nagyobb, illetve kisebb az őt körülvevő folyadék vagy gáz sűrűségénél. Inhomogén testeknél lehet az átlagsűrűséggel számolni.

Az *átlagsűrűségen* az inhomogén test tömegének és térfogatának hányadosát értjük.

Folyadékok keverésénél szokásos feltételezés az, hogy az alkotórészek térfogatának összege megegyezik a keverék térfogatával. Ez a feltevés nem mindig jogos. Pl. víz és alkohol keverésénél a keverék térfogata kisebb, mint az alkotórészek térfogatainak összege. Sok esetben azonban a feltételezés a gyakorlatnak megfelelő pontossággal teljesül.

Két alkotórészből álló oldat, keverék jellemzésére használják a térfogatszázalék, illetve tömegszázalék (súlyszázalék) mennyiségeket. Az 1-es számú alkotórész tömegét m_1-gyel, a 2-es számúét m_2-vel jelölve azt mondjuk, hogy az 1-es számú *X tömegszázalékos (súlyszázalékos) keverékéről, oldatáról* van szó, ha

$$X=\frac{100m_1}{m_1+m_2}.$$

Térfogatszázalékon az

$$Y=\frac{100V_1}{V_1+V_2}$$

mennyiséget értjük. Ha keveréskor az össztérfogat nem változik, a két mennyiséggel az átlagsűrűség kifejezhető:

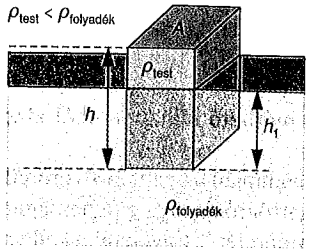
$$\frac{1}{\bar{\rho}}=\frac{V_1+V_2}{m_1+m_2}=\frac{\frac{m_1}{\rho_1}+\frac{m_2}{\rho_2}}{m_1+m_2}=\frac{m_1}{\rho_1\left(m_1+m_2\right)}+\frac{m_2}{\rho_2\left(m_1+m_2\right)}=\frac{X}{100\rho_1}+\frac{100-X}{100\rho_2}, \quad (2.147)$$

illetve

$$\bar{\rho}=\frac{m_1+m_2}{V_1+V_2}=\frac{\rho_1V_1+\rho_2V_2}{V_1+V_2}=\rho_1\frac{V_1}{V_1+V_2}+\rho_2\frac{V_2}{V_1+V_2}=\frac{\rho_1Y}{100}+\frac{\rho_2\left(100-Y\right)}{100}. \quad (2.148)$$

Az oldatok, keverékek keverési aránya térfogatszázalékban kifejezve nem ugyanannyi, mint tömegszázalékban. Ezt könnyen beláthatjuk úgy is, hogy az 50 térfogatszázalékos arány a részt vevő anyagok egyenlő térfogatát jelenti, ami eltérő sűrűségű anyagok keverésénél nem egyenlő tömegeket és így nem 50 tömegszázalékot jelent.

A fenti kijelentések ötvözetekre is teljesülnek, amennyiben az össztérfogat jó közelítéssel megegyezik alkotórészek térfogatainak összegével.



2.173. ábra

Testek úszása. Homogén, állandó keresztmetszetű testek addig merülnek a folyadékba, míg a bemerülő rész térfogata olyan nagy nem lesz, hogy a felhajtóerő eléri a testre ható nehézségi erőt. A 2.173. ábra jelöléseivel:

$$F_{felhajtóerő}=G_{test}, \qquad Ah\rho_{test}g=Ah_{folyadékba\ merülő\ rész\ magassága}g.$$

Innen

$$\frac{h}{h_{folyadékba\ merülő\ rész\ magassága}}=\frac{\rho_{folyadék}}{\rho_{test}}.$$

Az ábrán a folyadékba merülő rész magassága h_1.

Üreges testeknél a test által „kiszorított" folyadéktérfogat és így a felhajtóerő is elég nagy. Ez a felhajtóerő kompenzálhatja a test falának súlyát. Az üreget határoló fal ezért a folyadékénál lényegesen nagyobb sűrűségű, erős anyagból (pl. vízen úszó testeknél acélból) is készíthető. Ezt a levegőben fellépő felhajtóerőre is elmondhatjuk.

A *léggömbök* falát vékony, könnyű anyagból készítik. Belsejüket a környező levegőnél kisebb sűrűségű gázzal töltik meg. Ez lehet a környezetnél forróbb, a környezetével azonos nyomású levegő is, hiszen azonos nyomáson és magasabb hőmérsékleten ugyanazon gáz sűrűsége kisebb. (lásd a 4.2.4. pont) Elég nagy térfogatot választva a ballon és a teher súlyát meghaladhatja a felhajtóerő: hőlégballon.

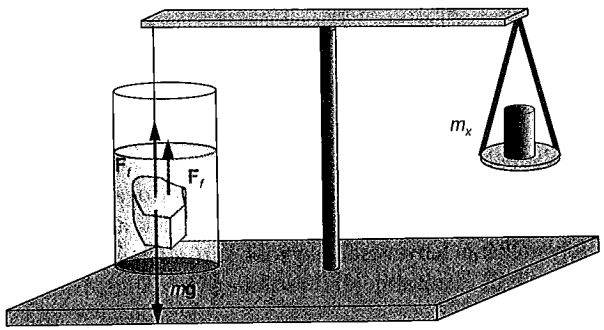
Az igen pontos analitikai mérlegekkel való mérésnél az egyenlő tömegű, de különböző sűrűségű testek térfogata és így a rájuk ható felhajtóerők is különbözők lévén, a mérleg tányérjait nyomó erők is eltérők. Ezért egyenlő tömegű testeknél a mérleg nem mutat egyenlő tömegeket. A mérleghez tartozó súlysorozatra a légüres térben mért tömegeket vésik rá. Ezért a mérlegelésnél az egyik mérlegtányérba helyezett súlysorozatról leolvasott súlyhoz hozzá kell adnunk, vagy le kell vonnunk a felhajtóerők különbségét aszerint, hogy a mért test térfogata kisebb vagy nagyobb a mérősúlyok térfogatánál. Ezt a számolási eljárást nevezik *légüres térre való redukálásnak.*

2.7.1.8. Alkalmazások

Szilárd testek sűrűségének meghatározása Arkhimédész törvénye alapján. A testek sűrűsége tömegük és térfogatuk hányadosa. Tömeget nagyon pontosan tudunk mérni analitikai mérleggel. A test térfogata a folyadék sűrűségének ismeretében az igen pontosan mérhető felhajtóerőből kiszámítható: $V_{test} = \frac{F_{felhajtóerő}}{g\rho_{folyadék}}$.

A felhajtóerőt a 2.174. ábra alapján a testet tartó erőből határozzuk meg: ha a test a levegőben van, akkor a tartóerő az $m_{test}\,g$ nehézségi erővel egyenlő (pontosabb méréseknél a levegő felhajtóerejét is figyelembe kell venni). A testet ismert sűrűségű folyadékba merítve a tartóerő és a felhajtóerő összege kompenzálja a nehézségi erőt. Ezért a $F_{felhajtóerő} = m_{test}\,g - F_{tartó}$. A V-re kapott képletbe helyettesítve:

$$V_{test} = \frac{F_{felhajtóerő}}{g\rho_{folyadék}} = \frac{m_{test}g - F_{tartó}}{\rho_{folyadék}g}.$$



2.174. ábra

A sűrűség a tömeg és térfogat hányadosa:

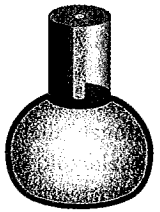
$$\rho_{test} = \frac{m_{test}}{V_{test}} = \frac{m_{test}\rho_{folyadék}g}{m_{test}g - F_{tartó}} = \frac{m_{test}g\rho_{folyadék}}{m_{test}g - m_x g} = \frac{m_{test}}{m_{test} - m_x}\rho_{folyadék}. \quad (2.149)$$

Itt $F_{tartó} = m_x g$, ahol m_x jelenti a mérleg jobb oldali serpenyőjébe helyezett „súlyok" tömegét a folyadékba merülés után. Látható a képletből, hogy a végeredmény független a g értékétől. Még a Holdon is ugyanezt kapnánk.

Folyadékok sűrűségének mérése. A térfogat mérésére szolgáló eszköz az ún. *piknométer*. Ez egy gondosan hitelesített térfogatú, vékony csőben végződő

edény. Az edényt a csőbe karcolt jelig kell megtölteni. Ekkor az edényben lévő folyadék térfogata az edény falára mart érték. (Többnyire a hőmérsékletet is ráírják, hiszen az edény űrtartalma függ a hőmérséklettől.)

Megmérve a folyadék tömegét és térfogatát, a sűrűség számítható.

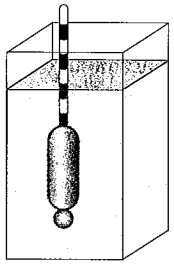


2.175. ábra

A sűrűségmérés másik módszere az Arkhimédész-törvény felhasználásán alapul. Vegyünk egy m tömegű testet és függesszük fel egy mérleg egyik karjára! Lógassuk bele a testet egy ρ_1, ismert sűrűségű folyadékba! A mérleg kiegyensúlyozásához szükséges tömeg m_{1x}. A mérést egy másik, ρ_2 sűrűségű folyadékkal megismételve a kiegyensúlyozáshoz szükséges tömeg m_{2x}. Mindkét esetben a testet teljesen bemerítjük a folyadékba. Az előző alpontban szereplő (2.149) képletbe behelyettesítve két egyenletet kapunk. A két egyenletet elosztva kifejezhetjük a folyadékok sűrűségének hányadosát:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m - m_{2x}}{m - m_{1x}}. \quad (2.150)$$

Folyadékok sűrűségének gyors mérésére szolgál az *úszó sűrűségmérő* (helytelen szóhasználattal *fajsúlymérő*).



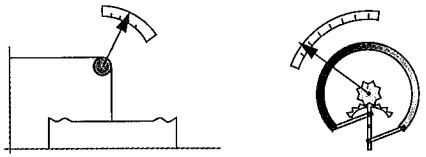
2.176. ábra

A 2.176. ábra szerinti sűrűségmérő belül üreges, felül vékony csőben végződő eszköz, amelybe alul sörétszemeket tesznek a megfelelő stabilitás eléréséhez.

Különböző sűrűségű folyadékokba helyezve az eszközt, a mindig ugyanakkora nehézségi erővel egyenlő a felhajtóerő. Mivel a felhajtóerő minden esetben ugyanakkora, ezért a különböző sűrűségű folyadékokba merülő részének térfogata is különböző. A folyadékba merülő rész térfogatának változása *Ah*, *A* a cső keresztmetszete, *h* a süllyedés. Ugyanakkora térfogatnövekedés kétszer kisebb átmérőjű csőnél négyszer nagyobb süllyedést hoz létre, ezért készítik az eszköz folyadékból kiálló részét kis átmérőjűre.

Az igen pontos sűrűségmérésekkel keverékekben, oldatokban a keverési arány pontosan meghatározható (lásd térfogat-, illetve tömegszázalék).

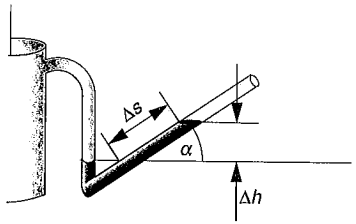
Nyomáskülönbségen alapuló eszközök, nyomásmérők. A *légnyomás mérése* történhet a Torricelli-kísérletben megismert eszközzel (lásd a 2.7.1.5. alpontot). A légnyomás mérésére szolgáló eszközöket *barométereknek* is nevezik.



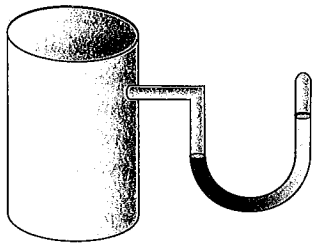
2.177. ábra

Az *aneroid barométer* egy szelencéből áll, amelynek egyik fala rugalmas (2.177. ábra). A szelence belsejében légüres tér van. A rugalmas fal a légnyomás következtében deformálódik. A deformáció mértéke, azaz a doboztető süppedése egy mechanikai áttétel segítségével, mutatóval kijelezhető. Újabban ezt a süppedést elektromos mennyiséggé, feszültséggé alakítják és digitális feszültségmérővel mérve azt, digitális formában kijelzik. Hasonló elven működik a *Bourdon-csöves* manométer, amelynél a hajlított cső görbülete a nyomáskülönbségtől függ. Egyszerűsége és olcsósága miatt a köznapi életben leggyakrabban használt nyomásmérő. Mindkét nyomásmérő használható nyomáskülönbségek mérésére is, ha a szelence, illetve a cső belsejét összekötjük egy gáz-, illetve folyadéktartállyal. Ekkor a manométer a nyomáskülönbséget méri.

A közlekedőedények elvén működik a 2.1.7.4. alpontban már említett nyitott, *folyadékos* manométer. Érzékenységét növelhetjük, ha higany helyett kisebb sűrűségű folyadékkal töltjük meg, és szárait a 2.178. ábra alapján megdöntjük. Kis nyomáskülönbségnél a folyadékoszlop elmozdulása lényegesen nagyobb lehet a magasságkülönbségnél, mert: $\Delta s = \frac{\Delta h}{\sin \alpha}$.



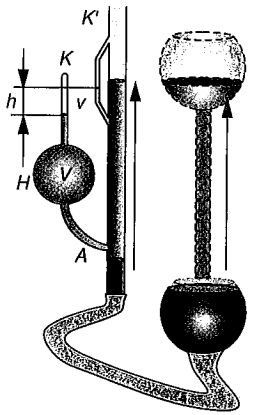
2.178. ábra



2.179. ábra

Ha a manométer eddig nyitott végét lezárjuk, akkor az itt lévő összenyomott gáz nyomása és a folyadékoszlop magasságkülönbségéből adódó nyomás tart egyensúlyt a tartályban uralkodó nyomással (2.179. ábra). Mivel a gáz nyomása a térfogattal fordítottan arányos, az eszköz skálája nem lineáris (ráadásul a gáz nyomása a hőmérséklettől is függ, ezért annak változásánál még azt is figyelembe kell venni).

Egészen kis nyomások mérésére szolgál a *McLeod-féle kompressziós manométer* (vákuummérő). A 2.180. ábrán a sötétre színezett részben higany van. A jobb oldali edényt hajlékony, higannyal teli gumicső köti össze a függőleges, vastag üvegcsővel, melynek fölső vége a légszivattyúval leszívott, kisnyomású gázt tartalmazó tartályhoz csatlakozik. A jobb oldali edényt megemelve a vastag szárban a higany eljut *A*-ig. Ezzel elzárja a *H* edényben lévő gázt a tartály (recipiens) *p* nyomású gázától.



2.180. ábra

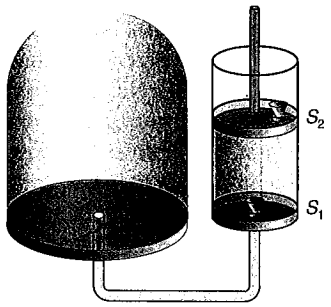
A jobb oldali edény további emelésekor a *H*-ban lévő gázt a higany összenyomja. Az emelést addig folytatjuk, amíg a higanyszint túl nem haladja a *K* kapilláris-

cső és H csatlakozását. (Azért van szükség az egyforma átmérőjű kapillárisokra, hogy elkerüljük a különböző átmérőjű csövekben fellépő kapilláris nyomások különbözőségét.) A vastag csőhöz csatlakozó, ugyanolyan belső átmérőjű K' kapillárisban és a K kapillárisban lévő higanyszintek különbségéből származó nyomás p_x. A H edény térfogatát V-vel, a K-ban lévő összenyomott gáz térfogatát v-el jelöljük. Az eredetileg a V-ben lévő, a recipiensben lévő gáz nyomása p. A Boyle–Mariotte-törvény értelmében $p = p_x \frac{v}{V-v} \approx p_x \frac{v}{V}$, mert adott esetben v sokkal kisebb, mint V.

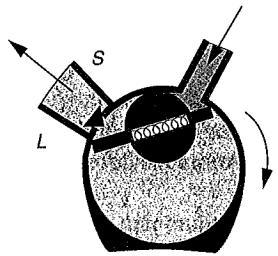
Ezzel az eszközzel kb. 100 Pa-tól 10^{-3} Pa-ig tudunk mérni (a higanygőzök összenyomáskor lecsapódnak, ezért azok nyomását nem méri).

Az előbbieknél kisebb nyomások mérésére az *ionizációs manométereket* használják. Ezek működése azon alapszik, hogy a gázt ionizálják, és mérik az ionok áramát. Az ionáram nagysága erősen függ az eredetileg semleges részecskék térfogati sűrűségétől és így a nyomástól is.

Légszivattyúk, kompresszorok. A legrégibb fajta a *dugattyús légszivattyú*. Ma már csak az oktatásban használják egyszerű és könnyen érthető szerkezete miatt. Mind a dugattyún, mind a hengeren egy-egy szelep található. A dugattyú lefelé mozgásakor az S_1 szelep zár, az S_2 kinyit. Így a hengerben lévő levegő kipréselődik a szabadba. Felhúzáskor az S_2 zár és az S_1 nyit. Ekkor a légritkítandó térből a keletkező légüres (kisnyomású) térbe áramlik a levegő. Ezért nyomása a térfogatnövekedés miatt csökken. A csökkent nyomású levegő a henger újbóli lenyomásakor kiáramlik a szabadba, miközben S_1 zár. Az elérhető legkisebb nyomás kb. 100 Pa.



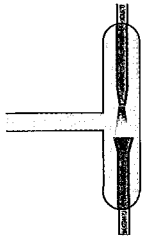
2.181. ábra



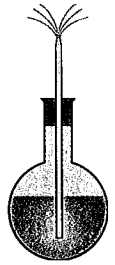
2.182. ábra

A *rotációs légszivattyú* egy henger alakú dobozból és egy benne excentrikusan elhelyezett forgó hengerből áll, amelyből kinyúló lapátokat egy rugó szorítja a henger falához (2.182. ábra).

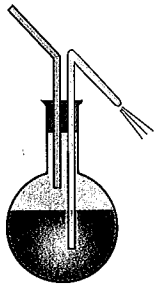
A leszívandó térhez csatlakozó csövön keresztül onnan levegő áramlik a szürkével jelölt részbe, hiszen ott a térfogat nő. A kék részben a levegő sűrűsödik. A megadott forgásiránynál végül a levegő az S szelepen kiáramlik. Miután az L lap elhaladt az S előtt, a folyamat újra kezdődik. A olajjal tömített, többfokozatú szivattyúkkal kb. 10^{-2} Pa (10^{-4} torr) érhető el.



2.183. ábra



2.184. ábra



2.185. ábra



2.186. ábra

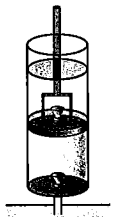
A *vízlégsugár-szivattyú* a Bernoulli-törvény (lásd a 2.7.2.1. alpontot) alapján működik (2.183. ábra). A szűkülő csőből nagy sebességgel kiáramló vízsugár nyomása kicsi. Az ide áramló levegőt a vízsugár magával ragadja. Az elérhető vákuum legfeljebb 1000–2000 Pa (kb. 10–20 torr). Ennek oka az, hogy a leszívandó térbe bekerül a vízgőz, amelynek nyomása szobahőmérséklet táján kb. 10–20 torr.

A *diffúziós légszivattyú* azt a jelenséget használja fel, hogy egy megfelelően méretezett lyukon kiáramló higanygőzbe a környező levegőmolekulák bediffundálnak. Ez a szivattyú csak akkor működik, ha a nyomás elég kicsi. (A leszívandó térben eleve egy rotációs szivattyú hoz létre kb. 1–2 Pa nyomást.) Mivel higanygőzök nyomása szobahőmérsékleten kb.0,1–0,2 Pa, ezért a leszívandó tér és a vákuumszivattyú közé „kifagyasztó" edényt iktatnak be. Az így elérhető vákuum kb. 10^{-3} Pa. A modern vákuumtechnika ma már ennél lényegesen kisebb vákuumokat tud létrehozni.

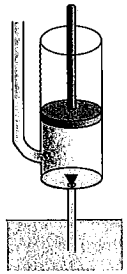
A levegő nyomásán alapuló eszközök. A *Heron-labdába* levegőt befújva a bent keletkező nagyobb nyomású levegő a folyadékot a csövön keresztül kispricceli (2.184. ábra). A *fecskendőüveg* hasonló elven működik (2.185. ábra). A *pipetta* végét megszíva a benti nyomás csökken. A kinti levegő nyomása nyomja fel a folyadékot egészen addig, amíg a külső folyadékszinten uralkodó légnyomás egyenlő nem lesz a benti levegő és a folyadékoszlop nyomásának összegével (2.186. ábra).

Ezen az elven működik a *szívókút* is (2.187. ábra). A szelepek csak felfelé nyílnak. A benti nyomás legfeljebb 0 lehet. Ezért a szívókút legfeljebb olyan magasságba tudja a folyadékot felszívni, hogy a felszívott folyadék nyomása egyenlő

a külső levegő nyomásával. Víznél a $p = \rho gh$ összefüggés alapján és figyelembe véve, hogy légnyomás kb. 10^5 Pa, ez a magasság legfeljebb 10 m lehet. A *szívónyomó kútnál* akármilyen magasra fel tudjuk nyomni folyadékot, ha megfelelő nyomóerőt gyakorolunk a dugattyúra (2.188. ábra).

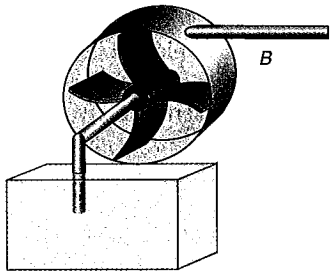


2.187. ábra

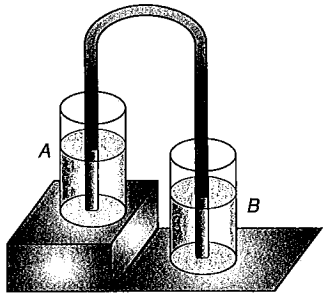


2.188. ábra

A *centrifugális szivattyúban* (2.189. ábra) folyadékkal megtöltve a forgó lapátok közötti folyadék körmozgásra kényszerül, és a házon lévő *B* nyíláson kivágódik. Helyébe az axiálisan elhelyezett csövön külső levegő folyadékot nyom be. Ez a szivattyú is csak korlátozott mélységből tudja felszívni a vizet. A kivágódó folyadékot azonban teljesítményétől függően már jelentős magasságig tudja felnyomni.



2.189. ábra



2.190. ábra

A *szivornya* (2.190. ábra) egy hajlékony cső, amelyet folyadékkal megtöltünk és a két végét az *A* és az alacsonyabban fekvő *B* edénybe merítjük, vigyázva, hogy a csőbe ne jusson levegő. A hosszabb folyadékoszlop nagyobb súlya miatt a csőben lévő folyadék nincs egyensúlyban. A magasabban lévő edényből áramlik a folyadék az alacsonyabban lévőbe, míg a folyadékszintek ki nem egyenlítődnek. Az

egész olyan, mintha egy álló csigára láncot függesztenénk úgy, hogy az egyik lelógó darab hosszabb legyen a másiknál. Így a hosszabb darab „lehúzza" a rövidebbet. A szivornya levegőnél sűrűbb gázokkal is ugyanígy működik. A folyadék, illetve gázoszlop azért nem szakad szét, mert a szétszakadás esetén az oszlopban légüres tér lenne. Ezt a külső légnyomás megakadályozza. Azonban a folyadékos szivornya légüres térben is működik. Ez arra utal, hogy a folyadékrészecskék között húzófeszültségek ébrednek, a részecskék közötti kohéziós erők nem engedik a folyadékoszlopot szétszakadni. Pl. víz esetén 1 cm² keresztmetszetű vízoszlop szétszakításához kb. 300 N erő szükséges.

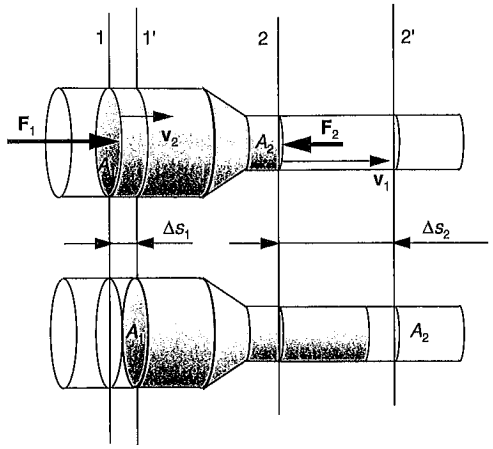
2.7.2. Ideális folyadékok és gázok áramlása

A folyadékok vagy gázok mozgásának leírását a 1.3. alpontban találhatjuk meg. A gyakorlatban előforduló áramlások jelentős részénél a nyomás értéke az áramlás folyamán olyan kis mértékben változik, hogy a gázok sűrűségváltozásától el is tekinthetünk. Ezért a folyadékok áramlásáról mondottak az (itt állandó sűrűségűnek tekinthető) gázokra is érvényesek. A folyadék- és gázrétegek között, amint azt a hidrosztatikában láttuk, nyírófeszültségek nem lépnek fel, ha azok egymáshoz képest nem mozognak. Amennyiben a folyadék- vagy gázrétegek az edény falához és egymáshoz képest mozognak, közöttük nyíróerők ébrednek. Ez a *belső súrlódás* jelensége. A nyírófeszültségek bizonyos körülmények között kicsik a nyomáshoz képest. Azokat a folyadékokat, melyeknél az adott körülmények között fellépő nyírófeszültségek elhanyagolhatóak, *ideális folyadékoknak* nevezzük.

Ebben a pontban *ideális folyadékok stacionárius* (lásd az 1.3. szakaszban) *áramlásával* foglalkozunk. Kijelentéseink annyira lesznek igazak, amennyire a belső súrlódástól eltekinthetünk.

2.7.2.1. A Bernoulli-törvény

Áramlási csőben áramló folyadék vagy gáz nyomása függ a sebességtől. Tekintsük a 2.191. ábra szerinti szűkülő, vízszintes csőben áramló folyadékot vagy gázt! A 2.191. ábra felső része egy *t* időpillanatban az *1*-gyel és *2*-vel jelölt síkok közötti folyadéktérfogatot ábrázolja. Egy későbbi, $t + \Delta t$ pillanatban, ennek a folyadéktérfogatnak a helyzetét a 2.191. ábra alsó része mutatja. A folyadéktérfogatot közrefogó síkok, *1* és *2* eltolódtak az *1'* és a *2'* helyzetbe. A nagyobb keresztmetszetet A_1-gyel, kisebbiket A_2-vel jelölve a kontinuitás egyenlet: $A_1 v_1 = A_2 v_2$ (lásd az 1.3. szakaszt). Tehát a szűkebb csőben az áramlás folyamán a folyadék sebessége nőtt, jobbra gyorsult, tehát a folyadéktérfogatra ható erők eredője jobbra mutat.



2.191. ábra

A folyamatot a munkatétel segítségével követjük nyomon. Eszerint a folyadéktérfogat teljes mozgási energiájának megváltozása egyenlő a rá ható erők eredőjének munkájával. Mivel a folyadék, illetve gáz nem nyomódik össze, és feltételeink szerint belső súrlódás sincs, ezért a külső erők munkája teljes egészében a mozgási energiát növeli. A kiszemelt folyadéktérfogatra ható külső erők: csőfal által kifejtett erő, valamint a környező folyadék által kifejtett F_1 és F_2 nyomóerők, amelyek az *1,* illetve *2* síkon hatnak. Az F_1 erő munkája $F_1\Delta s_1$, az F_2 erőé $-F_2\Delta s_2$. Az utóbbi erő munkája azért negatív, mert az erő és elmozdulás ellentétes irányúak. A erők munkáinak összege:

$$F_1\Delta s_1+\left(-F_2\Delta s_2\right)=p_1A_1\Delta s_1-p_2A_2\Delta s_2=p_1\Delta V-p_2\Delta V. \qquad (2.151a)$$

Itt $A_1\Delta s_1$ az *1'* és a *2* síkok által határolt tartományba befolyó, $A_2\Delta s_2$ az ugyanennen kifolyó folyadék, illetve gázmennyiség térfogatát jelenti. Mivel a feltételeink szerint a nyomásváltozások olyan kicsik, hogy a folyadék, illetve gáz összenyomhatatlannak tekinthető, ezért a tartományba egyidejűleg be-, illetve kifolyó folyadék vagy gáz ΔV térfogata megegyezik.

A mozgási energia megváltozásának kiszámításához a folyadéktérfogatot osszuk két részre! A 2.191 ábra felső részén az *1* és *1'* síkok eső térfogatrész mozgási energiája $\frac{1}{2}\Delta mv_1^2$, hiszen minden v_1 pont sebességgel mozog, mert a cső keresztmetszete itt nem változik. Az *1'* és *2* közé eső térfogatrész mozgási energiája legyen E_m. Erről sokat nem tudunk mondani, mert a cső keresztmetszete ebben a tartományban változó, ezért a sebesség a térfogatrész különböző pontjaiban eltérő. A $t+\Delta t$ pillanatban a folyadéktérfogatot osszuk a *2* síkkal két részre! Az *1'* és a *2* síkok közé eső rész mozgási energiája ugyanaz, mint előbb, hiszen az áramlás stacionárius, ezért a két esetben az itt lévő folyadékrészecskék mozgási energiája helyről helyre megegyezik. A *2* és *2'* közé eső rész mozgási energiája $\frac{1}{2}\Delta mv_2^2$. Az anyagmegmaradás miatt a tömeg ugyanaz, mint az *1* és *1'* síkok között. Így a mozgási energia megváltozása:

$$E_m+\frac{1}{2}\Delta mv_2^2-\left(E_m+\frac{1}{2}\Delta mv_1^2\right)=\frac{1}{2}\Delta mv_2^2-\frac{1}{2}\Delta mv_1^2. \qquad (2.151b)$$

A munkatétel alapján a mozgási energia megváltozása egyenlő az erők eredőjének munkájával:

$$\frac{1}{2}\Delta mv_2^2-\frac{1}{2}\Delta mv_1^2=p_1\Delta V-p_2\Delta V.$$

Az egyenletet ΔV-vel osztva és rendezve:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2+p_2=\frac{1}{2}\rho v_1^2+p_1. \qquad (2.151c)$$

Súrlódásmentes stacionárius áramlásnál egy csőben az $\frac{1}{2}\rho v^2+p$ kifejezés értéke változatlan a cső bármely helyén.

Ha a cső nem vízszintes, akkor a gravitációs erő munkáját is figyelembe kell venni. Ez $mg(h_1-h_2)$. Ezt a nyomóerők munkájához hozzáadva megkapjuk a *Bernoulli-törvény* általános alakját:

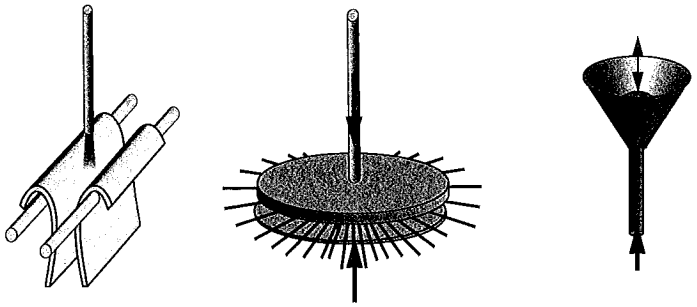
$$\boxed{p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=\text{állandó}}. \qquad (2.152)$$

A Bernoulli-törvény nemcsak egy merev falú csőben történő áramlás esetén érvényes, hanem az ún. áramlási csőre is, melynek definícióját az 1.3. szakaszban találhatjuk meg. A Bernoulli-törvény szerint tehát *az ideális, összenyomhatatlannak tekinthető folyadék vagy gáz súrlódásmentes, stacionárius áramlása esetén az áramlási térben kiszemelt tetszőleges áramlási cső mentén a* $p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh$ *kifejezés értéke mindenütt ugyanakkora.*

2.7.2.2. Gyakorlati alkalmazások

A Bernoulli-törvényen alapuló eszközök, kísérletek. A Bernoulli-törvény értelmében a gyorsabban áramló folyadék vagy gáz nyomása kisebb a lassabban áramlóénál. A mozgó folyadék vagy gáz nyomása pedig mindig kisebb az állóénál.

Néhány ilyen jelenséget látunk a 2.192. ábrasoron.



2.192. ábra

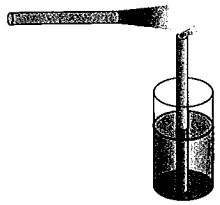
Két felfüggesztett papírlap közé fújva azok nem szét-, hanem összemennek, mert a közöttük áramló levegő nyomása kisebb a környező, nyugvó levegőénél.

Egy korongban végződő csőbe fújva az alatta lévő könnyű korong felemelkedik, hiszen a két korong között áramló levegő nyomása kisebb, mint a környezőé. Ha azonban a korong elzárja az áramló levegő útját, akkor már nincs a korongok közt levegőáramlás és a csőből kiáramló levegő lefelé löki a korongot. A korong eltávolodása után a két korong között ismét lesz áramló levegő és az alsó korong ismét felemelkedik, periodikus mozgás jön létre.

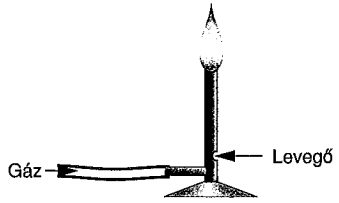
Hasonló okok miatt nem tudjuk a függőlegesen állított tölcsérből a könnyű pingponglabdát kifújni.

Nagy szélviharban a háztető felett áramló levegő nyomása jelentősen kisebb lehet, mint a padlástérben nyugvóé. Ezért a belső levegő nyomása nagyobb lévén, fel is emelheti a cserepeket, és így a szél már beléjük is tud kapni. Erős szél a könnyebb háztetőket akár fel is emelheti.

A *porlasztó* működése azon alapul, hogy a függőleges cső feletti gyors légáramban a nyomás kisebb, mint az edényben lévő folyadékszint felett (2.193. ábra). Ezért a nyugvó levegő felnyomja a függőleges cső tetejéig a folyadékot, ahol azt a gyors levegőáram szétporlasztja.



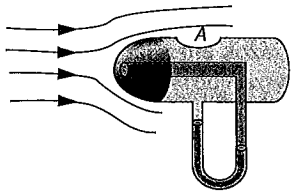
2.193. ábra



2.194. ábra

A *Bunsen-égőben* (2.194. ábra) a beáramló, mozgó gáz nyomása kisebb, mint a körülette lévő nyugvó levegőé. Ezért az ábrán látható lyukon levegőt szív magához az áramló gáz. A gáz–levegő keverékben a levegő arányát a lyukak méretének változtatásával szabályozhatjuk.

A 2.195. ábrán látható eszköz az *áramló gáz sebességének mérésére* szolgál. A középső csőben a gáz nem mozog, ott a nyomás p_0, a sebesség 0. A nagyobb átmérőjű csövön az ábrán *A*-val jelölt nyílás található.



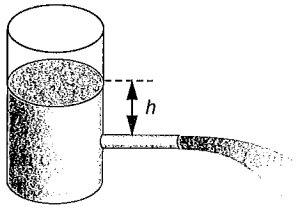
2.195. ábra

A nyílás felett a gáz v sebességgel áramlik, ezért a nagyobb átmérőjű cső belsejében a kinti, gyorsan áramló gáz p nyomásával egyezik meg a nyomás. Így az ide csatlakozó manométerszárban is a folyadék felett a nyomás az áramló gáz nyomása lesz. A manométer másik szára a kisebb átmérőjű csőhöz csatlakozik, ezért ott a folyadék felett a nyomás a nyugvó gáz nyomása lesz. A Bernoulli-törvény értelmében:

$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho_{\text{gáz}} v^2. \qquad (2.153)$$

A p_0–p nyomáskülönbséget a folyadékmanométer által mutatott Δh nyomáskülönbségből és a folyadék sűrűségéből számíthatjuk. A formulából így v meghatározható. Repülőgépek levegőhöz képesti sebességét még ma is a fenti elven működő eszközzel mérik.

Egy edény oldalába vágott szűk nyíláson a folyadék akkora sebességgel áramlik a szabadba, mintha a felszíntől a nyílásig szabadon esett volna (Torricelli tétele). A 2.196. ábra jelöléseivel a felszínen a sebesség közelítőleg 0, a nyomás p_0. A nyílásnál, illetve annak közvetlen közelében kívül és belül szintén p_0.

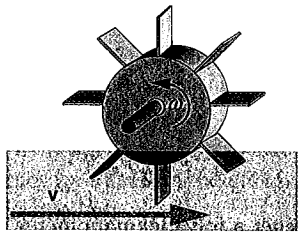


2.196. ábra

A nem vízszintes áramlási csőre vonatkozó Bernoulli-törvényt alkalmazva:

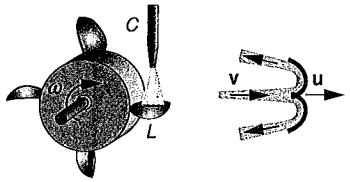
$$p_0+\rho gh=p_0+\frac{1}{2}\rho v^2, \text{ ahonnan } \quad v=\sqrt{2gh}. \qquad (2.154)$$

Áramló folyadékok és gázok energiájának hasznosítása. A folyók és a szél energiáját hasznosító legegyszerűbb szerkezet a *vízikerék*. Az áramló víz kinetikus energiáját alakítja át forgási energiává, mely energiát munkagépek meghajtására lehet használni. A vízikerék az áramló víz energiájának viszonylag kis részét alakítja át forgási energiává. Ennek oka elsősorban nem az, hogy a belépő mechanikai energia egy része disszipálódik, hanem az, hogy a vízikereket elhagyó víz még mozog. A vízikerék által felvett mechanikai energiának és a belépő víz mechanikai energiájának hányadosát *az átalakítás hatásfokának* nevezzük. Ez az alulcsapott vízikeréknél kb. 30%.



2.197. ábra

A folyadék vagy gáz mechanikai energiájának nagyobb részét alakítják át a szerkezet energiájává a *turbinák*. A hatásfokot azzal növelik, hogy a turbina szerkezetét úgy alakítják ki, hogy a kilépő folyadék vagy gáz sebessége a lehető legkisebb legyen. Közepes vagy nagy vízszintkülönbségeknél használják a *Pelton-kereket*. A *C* szűkülő csőből a víz nagy sebességgel áramlik a kettős kanál keresztmetszetű *L* lapátra (2.198. ábra). A víz közel 180°-os irányt változtatva hagyja el a lapátot. A vízsugár visszacsapódását rugalmas ütközéssel közelítve a kanalakról visszacsapódó vízsugár földhöz viszonyított sebessége $v-2u$, ahol v a belépő vízsugár földhöz viszonyított sebessége, u pedig a lapát sebessége. A kilépő vízsugár sebessége akkor lesz 0, ha $v-2u=0$, azaz $u=\frac{v}{2}$. Így a belépő vízsugár mozgási energiáját csaknem teljes egészében átadja a turbinakeréknek. Ismeretesek másfajta turbinák is, melyek bizonyos körülmények között gazdaságosabbak a Pelton-keréknél.



2.198. ábra

A modern turbinák hatásfoka már 90% körüli. A mostanában újra divatos szélerőműveknél is fontos a jó hatásfok. A problémát nehezíti, hogy változó szélsebesség és szélirány mellett kell viszonylag jó hatásfokot elérni.

A *gőzturbináknál, gázturbináknál* a nagy nyomású vagy nagy sebességű forró gőz vagy gáz jut a turbina lapátjaira. Előnyük nagy hatásfokuk. Ráadásul ugyanakkora tömeg mellett teljesítményük lényegesen nagyobb a dugattyús motorokénál.

A *torlósugár-meghajtásról* és a *rakétameghajtásról a* 2.4.2. pontban olvashatunk.

2.7.3. Reális folyadékok és gázok

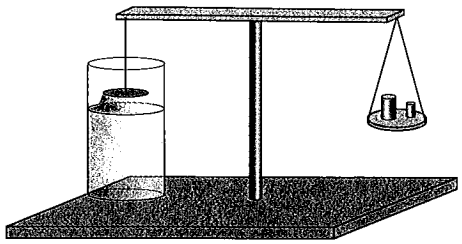
2.7.3.1. Felületi feszültség

Már az egyszerű megfigyelések is mutatják, hogy a valóságos folyadék felszíne nem olyan, mint az a hidrosztatika törvényeiből következik. A víz felszínére helyezett vékony zsilettpenge nem merül el, holott sűrűsége nagyobb, mint a vízé. Vékony csövekben (kapillárisok) a folyadék szintje alacsonyabban vagy magasabban van, mint azt egy ideális folyadéktól várnánk a közlekedőedények törvénye alapján. A folyadék felszíne különleges viselkedést mutat.

Kohéziós és adhéziós erők. A folyadékmolekulák között vonzóerő működik. Ezt bizonyítja a vákuumban is működő folyadékszivornya, valamint az a tény,

hogy nem túl magas hőmérsékleten egyidejűleg csak a folyadékrészecskék kis hányada párolog el, a párolgás lassú. Az azonos részecskék között fellépő erőket *kohéziós erőnek,* különböző anyagi minőségű részecskék között fellépő erőket *adhéziós erőnek* nevezzük.

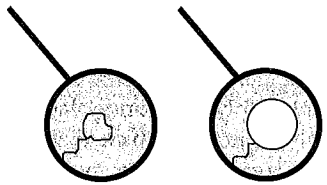
Üveglapot vízbe mártva és kiemelve, rajta vízmolekulák tapadnak meg. Ez azt jelenti, hogy víz- és üvegrészecskék között fellépő adhéziós erők nagyok a vízrészecskék között fellépő kohéziós erőkhöz képest. Az ilyen tulajdonságú folyadékokat az üveget *„nedvesítő" folyadékoknak* mondjuk. A kísérletet higannyal megismételve, az nem tapad az üveghez. A higany *nem nedvesíti* az üveget. A rézlemezzel elvégzett hasonló kísérletnél a higany rátapad a lemezre, „nedvesíti" a rezet.



2.199. ábra

A folyadékban fellépő kohéziós erők a 2.199. ábra szerinti összeállításban megmérhetők. A mérlegre függesztett vízszintes lapot, melyet a folyadék nedvesít, az edény megemelésével teljesen a folyadékba merítjük és kiegyensúlyozzuk. Az edény süllyesztésével a lap lassan kiemelkedik a folyadékból, maga után húzva az alatta lévő folyadékot. Az edényt rögzítve a jobb oldali serpenyőbe többletsúlyt kell helyeznünk, hogy a lemez a folyadéktól elszakadjon.

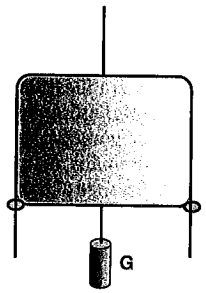
A (szappanos) vízbe mártott drótkarikán vékony hártya képződik. A 2.200. ábra szerinti fonálhurok belsejében a hártyát átlyukasztva, a fonálhurkot a folyadékhártya szétfeszíti. A hurok kör alakjából arra következtetünk, hogy a folyadékhártyában a határgörbére merőleges, a hártyát összehúzó erők működnek.



2.200. ábra

A 2.201. ábra szerinti összeállításban ez az erő mérhető. A felület mentén a hártya által kifejtett összehúzó erő a huzal és a nehezék súlyával tart egyensúlyt. Mivel a hártya körülöleli a huzalt, ezért a felület menti húzóerő két, a hosszúságú határgörbe mentén jelenik meg. A $2a = l$ hosszúságú szakasz mentén működő erő egyenesen arányos l-lel, és függ a folyadék anyagi minőségétől (és kismértékben a hőmérséklettől):

$$F = \alpha l. \tag{2.155}$$



2.201. ábra

Az α arányossági tényező neve: *felületi feszültség.* Skalár, mértékegysége N/m. Szemléletes jelentése az egységnyi hosszú határvonal mentén fellépő erő számértéke.

Porral beszórt vízfelületre olajat cseppentve, a cseppet a vízfelületi hártya szétrántja vékony réteggé. Elegendő hely esetén egy molekularéteg vastagságúvá, mert a két folyadék határgörbéjén fellépő erők nem tartanak egyensúlyt, lévén az olaj felületi feszültsége kisebb a vízénél. A por csak arra való, hogy megfigyelhessük az olajcsepp szétterülését. Ez egyben azt is mutatja, hogy az „egyoldalú" folyadék-határfelület mentén is megvannak a vékony hártyákon kimutatott tulajdonságok.

A felületi energia. A 2.201. ábrán mutatott összeállításban a mozgatható huzalt Δs-sel elmozdítva $F\Delta s$ munkát végzünk. A terhelést csökkentve a folyadékhártya a súlyt felrántja. Ez azt jelenti, hogy a folyadék munkavégző képességgel rendelkezik, energiája van. A *felületi energia* a folyadék határfelületének kialakulásából származó energia. A felületi energia megváltozása:

$$\Delta E_{\text{felületi}} = F\Delta s = \alpha l \Delta s,$$

azaz

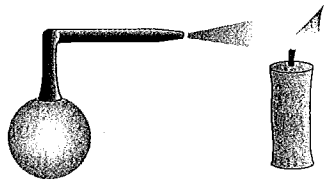
$$\Delta E_{\text{felületi}} = \alpha \Delta A, \tag{2.156}$$

ahol ΔA a felület megváltozása. A fenti képlet alapján α-nak egy másik szemléletes jelentést is tulajdoníthatunk. A felületi feszültség számértéke a folyadékfelület egységnyi területtel való megnöveléséhez szükséges munka számértéke. A felületi energia annál kisebb, minél kisebb a felület. Mivel stabilis egyensúlyi helyzetben a potenciális energia minimális (lásd a 2.5.2.2. alpontot), ezért adott körülmények között a folyadék felszíne a lehető legkisebb (ha más erők nem hatnak, mert különben csak az ezek figyelembevételével számított teljes potenciális energia a minimális).

A súlytalanság állapotában lebegő folyadék adott térfogata mellett a lehető legkisebb felületet veszi fel, a gömb alakot. A szappanoldatba merített és onnan kivett drótvázakon olyan felületek alakulnak ki, hogy a vázra illeszkedő felület a lehető legkisebb legyen. Ezek az ún. *minimálfelületek*. A nehézségi erőtérben, a nem nedvesítő, vízszintes lapon szétguruló folyadékcseppecskék lapult gömböcskék. Ennek oka az, hogy teljes gömb alak esetén ugyan a felületi energia minimális, azonban a magassági energia maximális. Egyensúly úgy jön létre, a két energia összege akkor minimális, ha a súlypont kismértékű süllyedésével csökken a magassági energia, miközben a lapultsággal kisebb mértékben nő a felületi energia.

Görbületi nyomás. A 2.202. ábra szerinti kísérlet mutatja, hogy a szappanbuborék belsejében a nyomás nagyobb a kinti nyomásnál. Ennek oka, hogy az összehúzódó hártya nyomást fejt ki a benne lévő gázra. Az egyensúly itt úgy alakul ki, hogy az átmérő csökkenésével növekvő nyomás tart egyensúlyt a külső levegő és a hártya által kifejtett nyomással, melynek nagysága

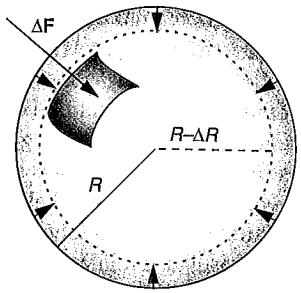
$$p=\frac{4\alpha}{R}. \qquad (2.157)$$



2.202. ábra

Ezt a következőképpen láthatjuk be: Az egyensúlyi állapot elérése előtt igen kicsivel a nyomás már elhanyagolható mértékben változik. A felületi energia megváltozása egyenlő a folyadékra ható külső erők munkájával. A gömbhéj középpontját rögzítettnek véve a felület egy kis darabkájára ható, merőleges kinti és belső erők munkája: $p_{\text{kint}}\Delta A\Delta R - p_{\text{bent}}\Delta A\Delta R$ (2.203. ábra). Az egész felületen a munkavégzés:

$$p_{\text{kint}}4\pi R^2\Delta R - p_{\text{bent}}4\pi R^2\Delta R = -4\pi R^2 p\Delta R.$$



2.203. ábra

Itt a munka negatív, mert a benti nyomás p-vel nagyobb a kintinél. Ennek megfelelően a felszíncsökkenéssel együtt járó felületienergia-változás (két gömbfelület!)

$$\alpha\cdot 2\cdot 4\pi\left[\left(R+\Delta R\right)^2-R^2\right]=\alpha 8\pi\left(2R+\Delta R\right)\Delta R\approx-\alpha\cdot 16\pi R\Delta R.$$

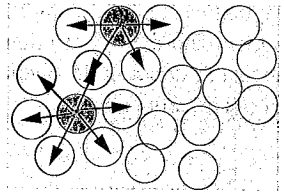
Mivel ΔR sokkal kisebb R-nél, a fenti közelítés jogos. A két egyenletből:

$$p=\frac{4\alpha}{R}.$$

A buborékban uralkodó túlnyomás a két felülettől származik, ezért egyetlen R sugarú gömbfelületen a görbületi nyomás:

$$p=\frac{2\alpha}{R}. \qquad (2.158)$$

A felületi feszültség molekuláris magyarázata. A folyadék molekulákból áll, melyek között vonzó kohéziós erők működnek. Ezen erők hatótávolsága kicsi, néhány molekulaátmérőnyi (kb. 10^{-8} cm). A folyadék belsejében lévő molekulákat minden oldalról körülveszik társaik, míg a határfelületen lévőket nem (lásd 2.204. ábra).

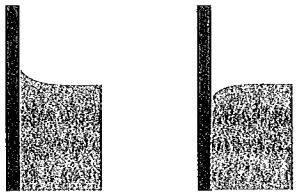


2.204. ábra

Ezért a határfelületen lévő molekulák kisebb energiával kötődnek a folyadékhoz. Így ahhoz, hogy egy molekula a felszínre jusson, munkát kell végeznünk.

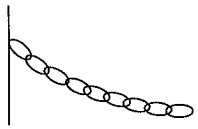
A felület növelése a felszínen lévő molekulák számának növekedésével jár. A felületnövekedés egyenesen arányos a felületre jutott molekulák számával, mert minden felszíni molekula által elfoglalt terület azonos. Tehát a felület növekedése egyenesen arányos a befektetett munkával, a felületi energiával. Ebből már következik, hogy a határgörbe mentén kifejtett erő csak a görbe hosszától és a folyadék anyagi minőségétől függ, és független a felület más adataitól. Ennek megértéséhez csak a felületi energiára vonatkozó levezetést kell visszafelé olvasnunk. (A valóságban a folyadék felett valamilyen gáz és a folyadék telített gőze van. Az ezek által kifejtett vonzóerők is befolyásolják a felületi energiát, ezért a felületi feszültség attól is függ, hogy mi van a folyadék felszíne felett.)

Folyadékfelszín az edény fala közelében. Az edény falának közvetlen közelében a falat nedvesítő folyadék felszíne homorú, a falat nem nedvesítőé pedig domború (2.205. ábra). A görbült felszínű tartomány a faltól kb. mm-es távolságig tart.



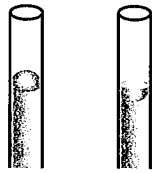
2.205. ábra

A jelenséget nedvesítő folyadéknál azzal magyarázhatjuk, hogy az edény falától néhány molekulaátmérőnyi távolságra lévő részecskékre a falra merőleges, a kohéziós erőnél lényegesen nagyobb adhéziós erő hat. Ez az erő a már a fal közelében lévő molekulák közé újabb és újabb molekulákat présel be. Ezért a legfelső részecske elkezd felfelé tolódni. Azonban ez a felfelé tolódás nem vég nélküli, mert a részecske kohéziós ereje folytán „magával cipeli" a hozzá közel lévő részecskéket. Az, hogy görbület nemcsak néhányszor 10^{-8} cm-ig tart, hanem mm-es nagyságrendig van, azzal magyarázható, hogy az edény fala közelében levő molekulák a kohéziós erőkkel hozzájuk kapcsolódó távolabbi molekulákat mint egy lánc szemeit viszik magukkal (lásd 2.206. ábra).



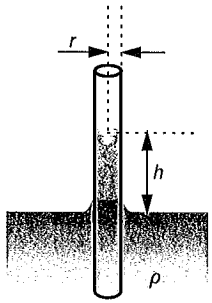
2.206. ábra

Hajszálcsövesség. Vékony csövekben (ún. kapillárisokban) a folyadék felszíne a cső peremére illeszkedő homorú vagy domború felület aszerint, hogy a folyadék a cső falát nedvesíti vagy nem. A folyadék szintje itt magasabban, illetve mélyebben van, mint nagy szabad felület esetén lenne (2.207. ábra).



2.207. ábra

Nedvesítő folyadéknál a cső falánál lévő részecskék a falhoz préselődnek a nagy adhéziós erő miatt. A folyadék elkezd felfelé futni a kapilláris belsejében (lásd előbb). Mivel az adhéziós erők csak néhány molekulavastagságú rétegekre hatnak, ezért csak egy vékony réteg kezd el felfelé kúszni, amely a kohéziós erővel a többi molekulát is magával ragadja. Így a fal mentén felfelé kúszó molekulák a kohéziós erő segítségével a cső belsejében lévő összes többi részecskét magukkal ragadják.



2.208. ábra

A cső fala mentén lévő részecskék erősen a falhoz tapadnak. A távolabbiak a folyadék felszínén a felületi feszültségből meghatározható $2\pi r\alpha$ erővel kapcsolódnak a falon tapadó többi molekulához. A felületen lévő molekulákhoz a csőben lévő, $\pi r^2\rho gh$ súlyú folyadékoszlop csatlakozik. Az egyensúly akkor áll fenn, ha a felületi feszültségből származó erő még meg tudja tartani a folyadékoszlopot:

$$\pi r^2\rho gh = 2\pi r\alpha.$$

Innen az ún. *kapilláris emelkedés* magassága:

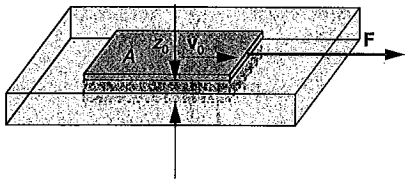
$$h=\frac{2\alpha}{\rho g r}. \tag{2.159}$$

Ismert átmérőjű kapillárisban az emelkedés megméréséből a felületi feszültség számítható.

Süllyedésnél a számítások ugyanerre az eredményre vezetnek.

2.7.3.2. Reális folyadékok és gázok áramlása. A belső súrlódás

Vékony folyadékrétegen, melynek magassága, z_0 csúsztassunk egy A felületű síklapot (2.209. ábra)! A felület v_0-val való állandó sebességű vontatásához F erőt kell kifejtenünk. Az alsó lapon, a folyadékot tartalmazó edény alján a folyadék sebessége 0, a lappal párhuzamos rétegek sebessége fokozatosan nő az alsó laptól való távolsággal. A legfelső réteg a felső, vontatott laphoz tapad, sebessége tehát v_0. A jelenséget úgy értelmezhetjük, hogy az egymáson elcsúszó folyadékrétegek között a csúszással ellentétes irányú érintőleges erők, nyírófeszültségek lépnek fel. Ez a *belső súrlódás* jelensége.



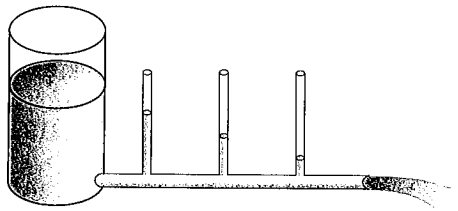
2.209. ábra

Az ilyen és az ehhez hasonló kísérletek alapján az F erő egyenesen arányos A-val, a lapok egymáshoz v_0 viszonyított sebességével, és fordítottan arányos a lapok z_0 távolságával. Az arányossági tényező függ a folyadék vagy gáz anyagi minőségétől, állapotától (hőmérsékletétől). Neve *dinamikai viszkozitás* (vagy *belső súrlódási együttható*). Skalár, mértékegysége: $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\mathrm{s}=\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$. Régebbi mértékegysége 1 P (poise) = 0,1 Pas. Jele: η.

$$F=\eta A\frac{v_0}{z_0}. \tag{2.160}$$

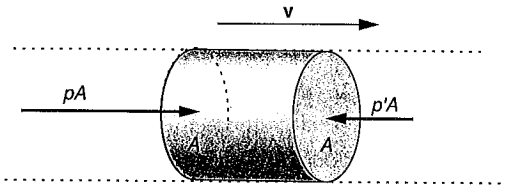
Amennyiben a z_0 távolság nagy, akkor két, egymáson csúszó folyadékréteg között fellépő erő a rétegek Δv relatív sebességével egyenesen és „középvonaluk" z távolságával fordítottan arányos. Az erő iránya mindig olyan, hogy a relatív megcsúszást akadályozni igyekszik.

A belső súrlódás befolyása csövekben végbemenő áramlásokra. A 2.210. ábra szerinti kísérletben azt találjuk, hogy egy vízszintes, állandó keresztmetszetű cső mentén az áramlás irányában a folyadék nyomása – a Bernoulli-törvénnyel ellentétben – csökken.



2.210. ábra

A jelenség hozzávetőleges magyarázata: Tegyük fel, hogy az áramlás az állandó keresztmetszetű csőben stacionárius. Ez azt jelenti, hogy egy kiszemelt folyadékhengerke mozgási energiája a cső mentén történő mozgása közben változatlan (2.211. ábra).



2.211. ábra

A folyadékban fellépő belső súrlódási erők a mozgási energiát disszipálják. A mozgási energia csak úgy lehet változatlan, ha valamilyen más erők a disszipatív belső erők negatív munkáját kompenzálják. Ilyen erők a folyadékhengerke alapjainál fellépő, a környező folyadék által kifejtett nyomóerők. A folyadékhengerkére hat balról a mögötte lévő folyadék pA, míg jobbról az előtt lévő folyadék $p'A$ nyomóereje. A két nyomóerő együttes munkavégzése akkor lesz pozitív, ha $p' < p$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a nyomás az áramlás irányában csökken.

Az áramlási viszonyokat számszerűen jellemzi kör keresztmetszetű csőben a *Hagen–Poiseuille-törvény:*

$$\boxed{I=\frac{V}{t}=\frac{\pi}{8}\frac{1}{\eta}\frac{p_1-p_2}{l}r^4}, \tag{2.161}$$

ahol I az áramlás erőssége, V a cső keresztmetszetén t idő alatt átáramló folyadék vagy gáz térfogata, η a viszkozitás, p_1 és p_2 a nyomás értéke azokban a pontokban, amelyek a cső mentén egymástól l távolságra vannak. A törvény ebben a formában vízszintes csőre, stacionárius réteges áramlásra érvényes.

Réteges (lamináris) és gomolygó (turbulens) áramlás. Csőben áramló folyadékot megfigyelve azt tapasztaljuk, hogy egy bizonyos (a csőre és a folyadékra jellemző) *kritikus sebesség* alatt az áramló folyadék „szabályos", egymással párhuzamos, eltérő sebességű rétegekre bontható. Ez a *réteges* vagy *lamináris* áramlás. E kritikus sebesség felett az áramlás *nemstacionáriussá* válik, az áramvonalak időben változó görbék lesznek. A csőben, illetve az ilyen áramló folyadék vagy gáz útjába tett akadályok környezetében örvények keletkeznek (2.212. ábra).



2.212. ábra

Ezek elég stabil képződmények, amelyek sokszor helyüket változtatják, megszűnnek és újabbak keletkeznek. Az ilyen áramlásokat nevezzük *gomolygó (turbulens) áramlásoknak.*

2.7.3.3. Közegellenállás

A közegellenállás oka a belső súrlódás és a turbulens áramlásoknál fellépő örvények.

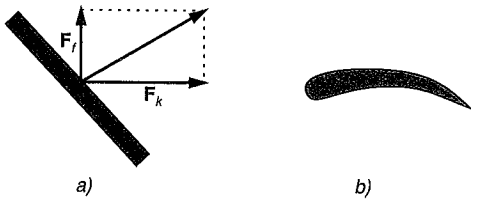
Lamináris áramlásnál a közegellenállás a sebességgel egyenesen arányos. Pl. η viszkozitású közeghez képest v sebességgel mozgó, r sugarú gömbre ható közegellenállási erő:

$$F = 6\pi\eta r v. \tag{2.162}$$

Ez a *Stokes-törvény.*

Turbulens áramlásnál az erő a sebesség négyzetével vagy annak magasabb hatványával arányos a sebesség nagyságától függően. A lamináris áramlásnál tapasztalhatóénál erősebb sebességfüggés érthetővé válik, ha arra gondolunk, hogy turbulens áramlásoknál a test mögött nagy sebességű örvények keletkeznek, ezért ott a nyomás kisebb, mint a test előtt, hiszen ott a folyadék vagy gáz csaknem „áll". Így az állandó sebességű mozgatásnál nemcsak a belső súrlódási erőt, hanem az örvények keletkezése miatt fellépő nyomáskülönbségből származó erőt is kompenzálnunk kell (lásd 2.212. ábra).

A repülés alapelve. Ferdén tartott síklap mögötti térrészben örvények keletkeznek. Ennek következtében az áramló közeg a sebességgel nem egyező hatásvonalú, „ferdén felfelé" mutató erőt fejt ki a lapra (2.213a ábra). A erő többnyire nem merőleges a lapra, és koncentrált eredője nem is a lap középpontján megy át. Az erő függőlegesen felfelé mutató komponensét *hidrodinamikai felhajtóerőnek* nevezzük.



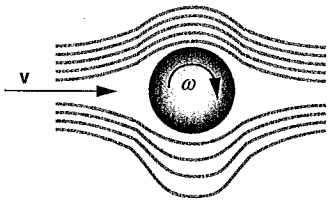
2.213. ábra

A teljes erő, valamint a hidrodinamikai felhajtóerőnek a teljes erő vízszintes komponenséhez való aránya függ a lap *állásszögétől.* A repülés szempontjából nyilván az a kedvező, ha a felhajtóerő minél nagyobb a vízszintes komponenshez képest. Az ún. Zsukovszkij-profil keresztmetszetű szárnyaknál ez az arány különösen kedvező. A hangsebességet meghaladó sebességeknél a gépek szárnyai különleges alakúak.

A repülőgép légcsavarja is „megcsavart", Zsukovszkij-profilú szárny, A motoros repülőgépeknél a légcsavar húzóereje kompenzálja a szárnyra ható közegellenállási erő vízszintes komponensét.

A *vitorlázó repülőgépek* a nyugvó levegőben süllyednek. Akkor emelkedhetnek felfelé, ha olyan felfelé irányuló légáramba kerülnek, melynek talajhoz képesti emelkedési sebessége nagyobb, mint a gép nyugvó levegőhöz képesti süllyedési sebessége.

A Magnus-effektus. Áramló közegbe helyezett forgó hengerre is hat „felhajtóerő" (2.214. ábra). A henger körül kialakuló örvényes áramlási képből következően a henger azon oldalán lesznek sűrűbbek az áramvonalak, lesz nagyobb a sebesség, és a Bernoulli-törvény értelmében kisebb a nyomás, ahol a hengerfelület sebességének iránya a közeg hengerhez viszonyított sebességének irányával megegyező.



2.214. ábra

Ez magyarázza a „nyesett" labdának (megpörgetett labda) a „normális" pályától való eltérését. A régi ágyúknál a lövedék pörgési iránya az ágyúcső elhagyásának pillanatában véletlenszerű volt. Ezért a Magnus-hatás következtében a lövedék minden egyes kilövéskor más és más irányba tért el pályájától. A *„huzagolt"* csövű fegyvereknél a fegyver csövében nagy menetemelkedésű csavarmenet van, amely a lövedéket mindig ugyanabba az irányba pörgeti meg, így az eltérés mindig ugyanolyan.

Igen nagy, hangsebességnél nagyobb sebességek esetén az áramlás igen bonyolult lesz.

2.8. Hullámmozgás és hangtan

2.8.1. A hullám keletkezése

A rugalmas közegekben létrehozott deformáció a térben tovaterjed. Ezt a jelenséget *mechanikai hullámnak* nevezik.

A rugalmas közeg egy pontjában létrehozott rugalmas deformáció ebben a pontban egy idő múlva eltűnik és egy másik helyen jelentkezik, egy bizonyos idővel később.

A rugalmas közeget sok esetben modellezhetjük az ún. *rugalmas pontsorral,* amely rugókkal összekötött pontszerű testek összessége.

2.8.1.1. Alapfogalmak

A hullámok a közeg kiterjedése szerint feloszthatók egy-, két- és háromdimenziós hullámokra. Egydimenziós hullám pl. kötélen létrehozott deformációk tovaterjedése, kétdimenziós pl. a vízhullám, háromdimenziós pl. a hanghullám.

A felületen vagy térben terjedő hullámoknál az azonos rezgési állapotú, fázisú pontok alkotta görbét, illetve felületet *hullámfrontnak* nevezzük. Homogén, izotrop közegben *pontszerű hullámforrások* által kibocsátott hullámok hullámfrontjai felületi hullámoknál (pl. vízhullámoknál) körök *(körhullám)*, térben terjedőknél (pl. hanghullámoknál) gömbfelületek *(gömbhullám)*. A *síkhullám* olyan térben terjedő hullám, melynek hullámfrontjai párhuzamos síkok. A hullámforrástól elegendően nagy távolságban a közeg kis tartományán áthaladó hullám jó közelítéssel síkhullámnak tekinthető. A *hullám terjedési iránya* a hullámfrontra merőleges egyenes, a hullámfront normálisa.

A hullámforrás egy bizonyos rezgési állapota a hullámforrástól x távolságra lévő pontban csak t idő múlva jelenik meg. Ennek a távolságnak és az időnek a hányadosa a hullám *terjedési sebessége.* Jele: c.

Periodikus hullámok. Periodikus egy hullám, ha a hullámforrás rezgése periodikus. Jellemző mennyiségei: *terjedési sebesség, amplitúdó, frekvencia, periódusidő, körfrekvencia, hullámhossz, kitérés–idő függvény.*

A hullám *amplitúdója* adott helyen a közeg részecskéjének, térfogatelemének amplitúdója. Az ún. csillapítatlan, egydimenziós hullámban a hullám amplitúdója független a helytől, és a hullámforrás amplitúdójával egyezik meg.

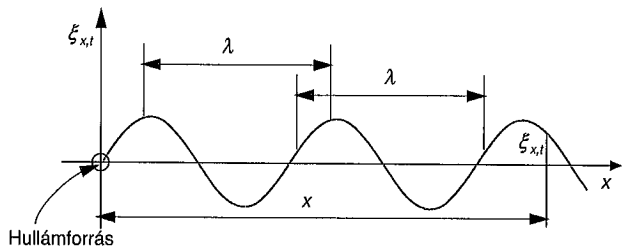
A hullám frekvenciája közeghez képest nyugvó hullámforrás és megfigyelő esetén a hullámforrás frekvenciája. (Mozgó hullámforrás és/vagy megfigyelő esetével a 2.8.1.3. alpontban foglalkozunk.)

Mint minden hullámban, a periodikus hullámban is a közeg részecskéi a hullámforrás rezgéseit ismétlik, de a hullámforrástól való távolság függvényében bizonyos késéssel. A legközelebbi azonos rezgési állapotú pontok távolsága a λ-val jelölt *hullámhossz* (2.215. ábra).

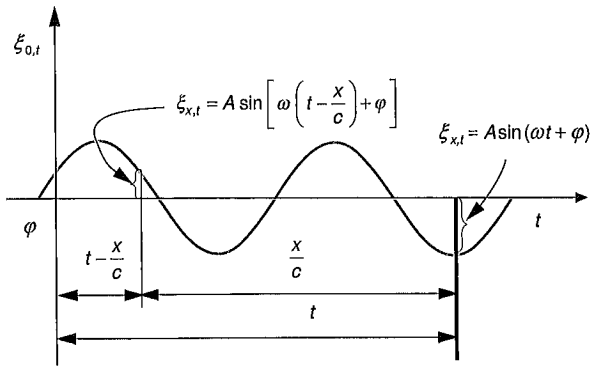
Harmonikus (szinuszos) hullámok. Ha a hullámforrás kitérés–idő függvénye szinuszos, akkor a hullámot harmonikus (szinuszos) hullámnak nevezzük. Az alábbiakban megadjuk a közeg egy térfogatelemének (vagy részecskéjének) kitérését az idő és a hely függvényében, feltéve, hogy a hullám homogén és izotrop közegben terjed.

A kitérést ξ-vel jelöljük és t, illetve x alsó indexszel látjuk el (2.215. ábra). Az ábrán egy t időpillanatbeli „pillanatfelvétel" látható egy x tengely mentén terjedő szinuszhullámról. A $\xi_{x,t}$ jelenti a hullámforrástól x távolságra lévő részecske kitérését a t pillanatban. A hullámforrás kitérése $\xi_{0,t}$. Kitérés–idő függvénye legyen:

$$\xi_{0,t} = A\sin(\omega t + \varphi). \qquad (2.163)$$



2.215. ábra



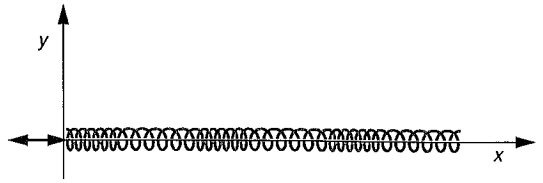
2.216. ábra

Itt φ a kezdőfázis. A hullámforrás kitérés–idő függvénye a 2.216. ábrán látható. Egy tetszőleges t pillanatban a hullámforrás kitérése innen leolvasható. A hullámforrástól x távolságra lévő részecskéhez a mostani, t-kori rezgési állapot még nem ért el. Ott a rezgésnek egy korábbi állapota található. A t pillanatban itt található kitérés $\frac{x}{c}$ -vel hamarabb, azaz $t-\frac{x}{c}$ -kor indult a hullámforrástól (c a hullám terjedési sebessége). A $t-\frac{x}{c}$ pillanatban a hullámforrás kitérése $A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]$ volt. Ennyi most, t pillanatban, a hullámforrástól x távolságra a közeg részecskéjének kitérése:

$$\boxed{\xi_{x,t} = A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]}. \qquad (2.164)$$

A közeg egy részecskéjének rezgési állapotát a fenti formulában a szinuszfüggvény argumentuma (a szögletes zárójelben lévő kifejezés) szabja meg. Ez a hullám *fázisszöge, fázisa.* A közeg két részecskéjének rezgési állapota akkor egyezik meg, *azonos fázisú,* ha fázisszögük egyenlő vagy egymástól 2π egész számú többszörösével térnek el. A fázis terjedési sebessége a *fázissebesség.*

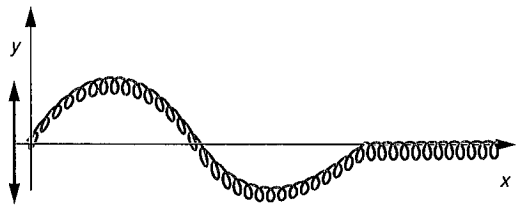
Transzverzális és longitudinális hullámok. A hullámokat feloszthatjuk aszerint is, hogy a közeg részecskéi milyen irányú mozgást végeznek a hullám terjedési irányához képest. *Transzverzálisnak* nevezzük azokat a hullámokat, amelyeknél a közeg részecskéi a deformáció során a terjedés irányára merőlegesen, *longitudinálisnak* pedig azokat, amelyeknél a terjedési iránnyal párhuzamosan térnek ki.



2.217. ábra

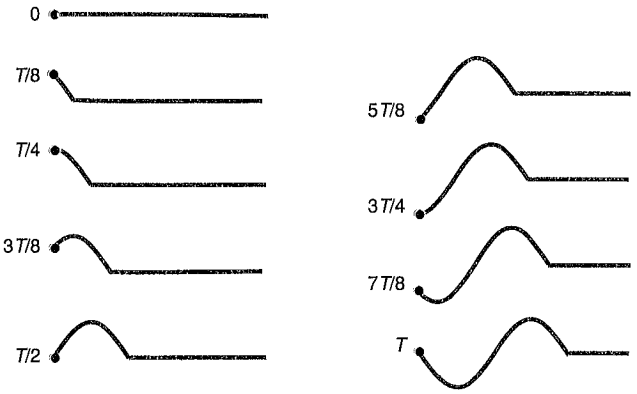
Longitudinális hullámot állíthatunk elő egy hosszú rugón, amelynek egyik végét hosszirányba rángatjuk (2.217. ábra). Azt látjuk, hogy a rugó menetei sűrűsödnek, illetve ritkulnak a rezegtetés helyén. Ezek a sűrűsödések és ritkulások terjednek tova a longitudinális hullámban. A részecskék, menetek egy egyensúlyi helyzet környezetében mozognak, akörül rezegnek. A hullámban nem a részecske, hanem a rezgési állapot terjed tova!

Transzverzális hullámokat állíthatunk elő egy rugalmas kötél, rugó végének a kötélre merőleges irányú rángatásával. Itt a részecskék a terjedés irányára merőlegesen végeznek egyensúlyi helyzetük körül rezgéseket (2.218. ábra).

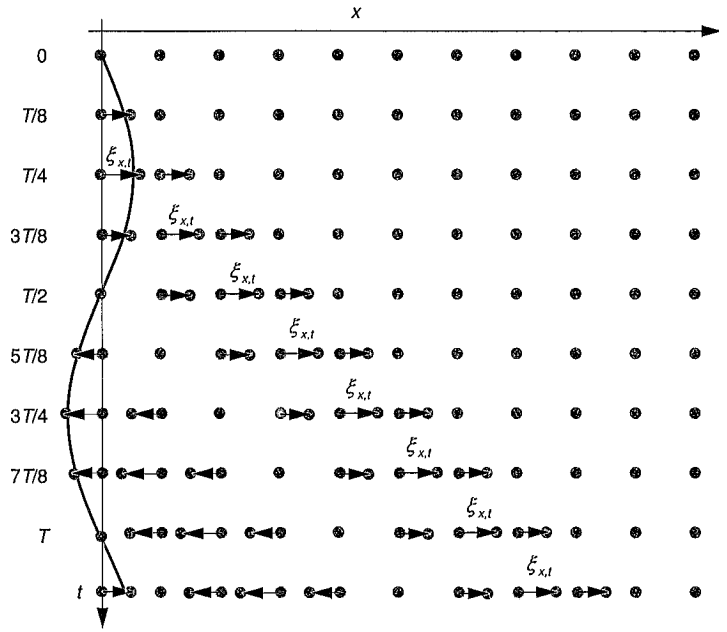


2.218. ábra

A 2.219. és a 2.220. ábrán egy transzverzális és egy longitudinális hullámról készített pillanatképek sorozatát láthatjuk $T/8$ időközönként. Transzverzális hullámokban hullámhegyek és hullámvölgyek, longitudinálisban sűrűsödések és ritkulások terjednek tova. Az azonos fázisú, szomszédos pontok például a hullámhegyek csúcsai, illetve a sűrűsödési helyek. A hullámhossz szemléletesen a szomszédos hullámhegyek, illetve sűrűsödések távolsága. Az ábrákból egy másik szemléletes jelentés is leolvasható: a hullámhossz egy hullámhegy és egy hullámvölgy, illetve egy sűrűsödés és egy ritkulás hosszainak összege.



219. ábra



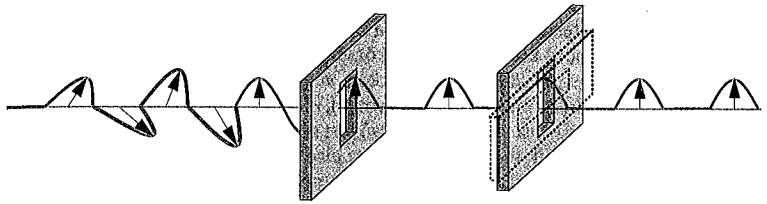
2.220. ábra

Egy periódus alatt a hullámforrás egy teljes hullámhegyet és hullámvölgyet bocsát ki. Egy adott fázisú rezgési állapot ezalatt cT utat tesz meg. Az azonos fázisú, szomszédos rezgési állapotok távolsága éppen a hullámhossz.

Ezért

$$\boxed{\lambda = cT = \frac{c}{f}}. \qquad (2.165)$$

Polarizáció. Ha egy transzverzális hullámokat keltő hullámforrás kitérései mindig ugyanazon egyenes mentén mennek végbe, akkor a hullámban a kitérések egy síkban, az ún. rezgési síkban mennek végbe. Ha a hullámban a közeg részecskéinek rezgési síkja időben változatlan, *síkban polarizált hullámról* beszélünk. Kötélen terjedő hullámnál az időben változó rezgési síkú, *polarizálatlan hullámokat* az 2.211. ábra szerint *polarizálhatjuk* egy réssel ellátott lemezzel.



2.221. ábra

A rés csak a vele párhuzamos síkú hullámokat engedi át változatlanul, a rá merőleges rezgési síkúakat teljesen kioltja, a közbenső rezgési síkúakat részben (a réssel párhuzamos összetevőt) átengedi. A lemez után a hullám rezgési síkjai a réssel párhuzamosak. Az ilyen, változó rezgési síkú hullámokból polarizált hullámokat előállító eszközöket *polarizátornak* nevezzük. A polarizátor után még egy polarizátort (analizátort) elhelyezve és azt forgatva tapasztaljuk, hogy párhuzamos állásnál a második polarizátor után van hullámzás, míg merőleges, „keresztezett" állásnál nincs. Ha egy hullámnál ilyen jelenséget tapasztalunk, akkor az transzverzális hullám.

A kötél végénél a rezgési síkot egyenletesen körbeforgatva kapjuk az ún. *cirkulárisan polarizált hullámot.* Ilyen hullámot egyező frekvenciájú, egyenlő amplitúdójú, $\pi/2$ fáziseltolódású, egymásra merőleges rezgési síkú harmonikus hullámok összetételéből is kaphatunk. Ha a hullámok amplitúdója eltérő, akkor az ún. *elliptikusan polarizált* hullámot kapjuk. Az amplitúdókat egy pontból felmérve ellipszist kapunk (innen van az elnevezés is), lásd a merőleges rezgések összetételéről az 1.1.5.6. alpontot.

2.8.1.2. A terjedési sebesség függése a közeg tulajdonságaitól

A következőkben a terjedési sebességen a fázissebességet értjük (lásd a 2.8.3.5. pontot).

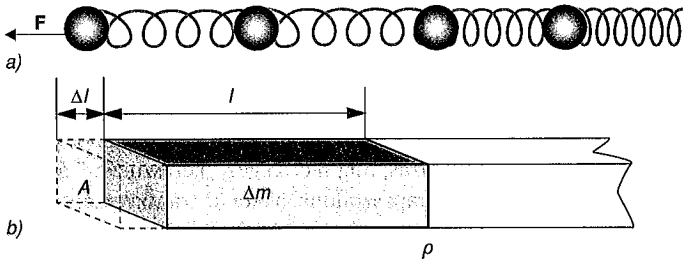
A terjedési sebesség függ a közeg tulajdonságaitól. Az alábbiakban néhány egyszerű esetben megvizsgáljuk, hogy hogyan és a közeg milyen tulajdonságaitól függ a hullám terjedési sebessége.

Longitudinális hullám terjedési sebessége E rugalmassági modulusú, ρ sűrűségű közegben:

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad 2.166)$$

A képlet érvényességét egy rúdban terjedő hullám esetén az alábbiakban látjuk be.

Ehhez előbb nézzük meg a hullám terjedésének mechanizmusát az alábbi modellen! Igen hosszú, rugalmas pontsor végén lévő testet állandó erővel húzva az távolodni kezd a második testtől. Mivel a testre kezdetben csak a kezünk hat, ezért gyorsulása nagy lesz. A másik testtől való távolodás következtében a köztük lévő rugó megfeszül, aminek következtében az első testre ható erők eredője csökken, végül 0 lesz, és az első test egyenletesen mozog tovább. Eközben a második test is gyorsul, eltávolodik eredeti helyétől és a harmadik testtől. Eközben ez a test is felveszi az első test sebességét és megfeszíti a harmadik rugót, miközben a harmadik test is felgyorsul az első és a második test közös sebességére. A rugók egymás után egyenlő feszítettségű állapotba kerülnek. Ez a feszítettségi állapot, illetve a v sebességű mozgás állapota terjed tova a pontsoron. Ha az erő elegendően nagy, akkor a mozgás elhanyagolható része lesz változó, így jó közelítéssel számolhatunk az egyenletes mozgás képletével. Az erő hatása itt abban áll, hogy a (végtelennek képzelt) pontsor részecskéi egymás után állandó, v sebességű mozgásba jönnek.



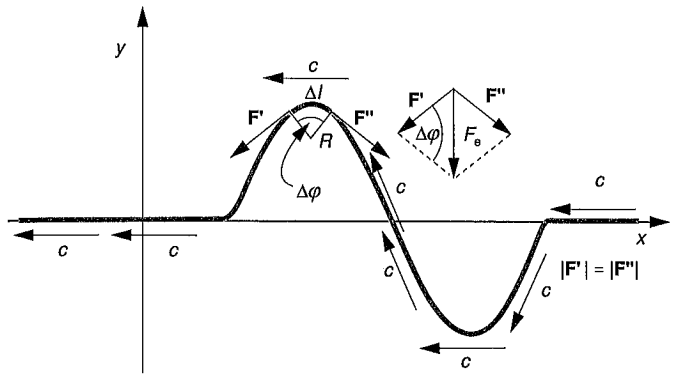
2.222. ábra

Egy valóságos, A keresztmetszetű, ρ sűrűségű, E rugalmassági modulusú rúdra Δt ideig F erővel hatva a rúd impulzusváltozása Δmv, ahol Δm a v sebességre gyorsított részecskék össztömege (2.222. ábra). Jelöljük l-lel azt a távolságot, amelyen belül a részecskék mozgásba jöttek! A deformáció által megtett út l, $\Delta m = Al\rho$. Felhasználva a Hooke-törvény huzalra kimondott alakját és az $F=\frac{v\Delta m}{\Delta t}$ impulzustételt: $\frac{\Delta l}{l}EA=\frac{(l+\Delta l)A\rho v}{\Delta t}$, de $l+\Delta l\approx l$ és $v\approx\frac{\Delta l}{\Delta t}$, valamint $c=\frac{l}{\Delta t}$, kapjuk a terjedési sebességre vonatkozó formulát.

Transzverzális hullám terjedési sebessége F erővel megfeszített, A keresztmetszetű, ρ sűrűségű húron, kötélen:

$$c=\sqrt{\frac{F}{A\rho}}. \qquad (2.167)$$

Válasszunk egy, a hullámmal együtt mozgó, c állandó sebességű vonatkoztatási rendszert!



2.223. ábra

Ebből a rendszerből leírva a jelenséget, azt mondhatjuk, hogy a kötél pontjai c sebességgel haladnak hátrafelé. Pályájuk görbült. A maximális kitérésnél lévő, Δl hosszúságú, Δm tömegű darabka éppen a pálya R görbületi sugarú részén mozog (2.223. ábra). Tömege $\Delta m = A\rho\Delta l = R\Delta\varphi A\rho$, centripetális gyorsulása $\frac{c^2}{R}$. A kötél másik két darabja által kifejtett erők eredője $2F\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\approx F\Delta\varphi$ (itt felhasználtuk, hogy kis szögek esetén $\sin\Delta\varphi\approx\Delta\varphi$). Mivel ez a mozgó rendszer inerciarendszer, az itt is érvényes mozgásegyenletet felírva:

$$F\Delta\varphi=\frac{\Delta mc^2}{R}=\frac{\rho AR\Delta\varphi c^2}{R}.$$

Az egyenletet rendezve kapjuk a (2.167) formulát.

A fenti két esetben a hullámok terjedési tulajdonságai csak a közegtől függenek. A víz felszínén terjedő hullámok terjedési sebessége már függ a hullámok jellemzőitől is. *Folyadék* felszínén a terjedési sebesség:

$$c=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}, \qquad (2.168)$$

ahol λ a hullámhossz, ρ a folyadék sűrűsége és α a felületi feszültség. Víznél az 1,7 cm-es hullámok terjednek a leglassabban, 23 cm/s sebességgel.

Mélyebb vízfelületeknél a víz hullámzása már nem egyszerű hullámmozgás (a tenger hullámai pl. tárgyakat sodornak ki a partra). Itt is függ a terjedési sebesség a vízmélységtől, minél sekélyebb a víz, annál kisebb a sebesség.

A fenti okokra vezethető vissza, hogy a part felé száguldó vízhullám eleje „lelassul" a sekély vízbe érve, miközben a még mély vízben haladó hullámrész beéri a sekélyben haladót. Így a hullám „torlódik", az induló hulláménál lényegesen magasabb hullámhegy jöhet létre.

Azt, hogy a hullámok terjedési sebessége függ hullámhossztól, *diszperziónak* nevezzük.

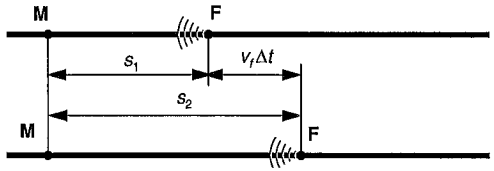
2.8.1.3. A Doppler-effektus

A közeghez képest mozgó hullámforrás vagy észlelő esetén az észlelt frekvencia megváltozik és nagysága a következő lesz:

$$f = f_0 \frac{c \pm v_m}{c \pm v_f}, \tag{2.169}$$

ahol f_0 a hullámforrás frekvenciája, c a hullám terjedési sebessége, v_m a megfigyelő, v_f a hullámforrás közeghez viszonyított sebessége, f a megfigyelő által észlelt frekvencia. A nevezőben a műveleti jel negatív, ha a hullámforrás közeledik, pozitív, ha távolodik. A számlálóban pedig akkor pozitív, ha a megfigyelő a hullámforráshoz közeledik.

A formula helyességét a közeghez képest nyugvó ($v_m = 0$) megfigyelő és a tőle v_f sebességgel távolodó hullámforrás esetére látjuk be (2.224. ábra). A $t = 0$ pillanatban a megfigyelőtől s_1 távolságra lévő hullámforrás



2.224. ábra

f_0 frekvenciájú hullámokat kezd el kibocsátani. A hullámvonulat elejét a megfigyelő csak a $t_1 = \frac{s_1}{c}$ pillanatban észleli, hiszen a hullámvonulat elejének s_1 utat kell megtennie c sebességgel a hullámforrástól a megfigyelőig. A Δt ideig tartó hullámkibocsátást a hullámforrás Δt pillanatban fejezi be. Ennyi idő alatt a hullámforrás $z_0 = \Delta t f_0$ teljes rezgést végez, illetve ennyi hullámvölgyet, illetve hullámhegyet bocsát ki. A hullámvonulat végét a megfigyelő a kibocsátás Δt pillanatától számítva $\frac{s_2}{c}$ idővel később észleli, a $t_2 = \Delta t + \frac{s_2}{c}$ pillanatban. A megfigyelés vége és kezdete között eltelt idő $t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s_2 - s_1}{c}$. Az s_2–s_1 a hullámforrás által v_f sebességgel megtett út Δt idő alatt. Ezért $s_2 - s_1 = v_f \Delta t$. A megfigyelő nyilván a z_0 teljes rezgést, illetve hullámhegyet és hullámvölgyet észleli, de nem Δt, hanem a t_2–t_1 idő alatt. Az általa észlelt frekvencia kisebb lesz:

$$f = \frac{z_0}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta t f_0}{\Delta t + \frac{v_f \Delta t}{c}} = f_0 \frac{1}{1 + \frac{v_f}{c}} = \frac{c}{c + v_f}.$$

2.8.1.4. A harmonikus mechanikai hullámok energiája

A közeget a tovahaladó hullám deformálja és részeit mozgásba hozza. A közegnek a hullám által átjárt tartománya rugalmassági és mozgási energiára tesz szert. Ez az energia a hullám tovahaladtával ebben a tartományban eltűnik, hiszen a közeg nyugalmi állapotba kerül. Az „eltűnt" energia abban a tartományban található, ahová a hullám eljutott. Tehát a hullám energiát tartalmaz, vele együtt energia terjed. Egy hullámvonulat energiája a közeg azon tartományának (mozgási és rugalmassági) energiája, amelyben a hullámvonulat tartózkodik.

A közeg kis térfogatelemének energiája. A közeg pontjai eltérő sebességgel mozognak. A közeget olyan kis ΔV térfogatelemekre bontjuk, amelyeken belül a sebességek jó közelítéssel egyenlőnek vehetők. A térfogatelem mozgási energiája $\frac{1}{2}\Delta m v^2$. A térfogatelem deformációjából származó rugalmassági energia $\frac{1}{2} D \left(\Delta\xi\right)^2$, ahol $\Delta\xi$ a térfogatelem rugalmas deformációja és $D = \frac{F}{\Delta\xi}$ a direkciós erő.

A közeg térfogatelemének teljes mechanikai energiája:

$$E = \frac{1}{2}\Delta m v^2 + \frac{1}{2} D \left(\Delta\xi\right)^2.$$

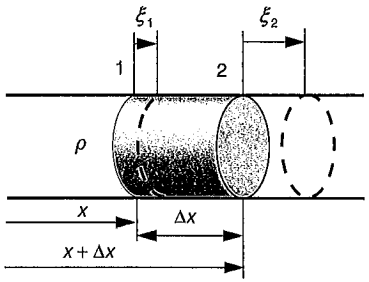
Ez az idő függvényében változó. Belátható, hogy időbeli átlaga:

$$E = \frac{1}{2}\rho \Delta V A^2 \omega^2. \tag{2.170}$$

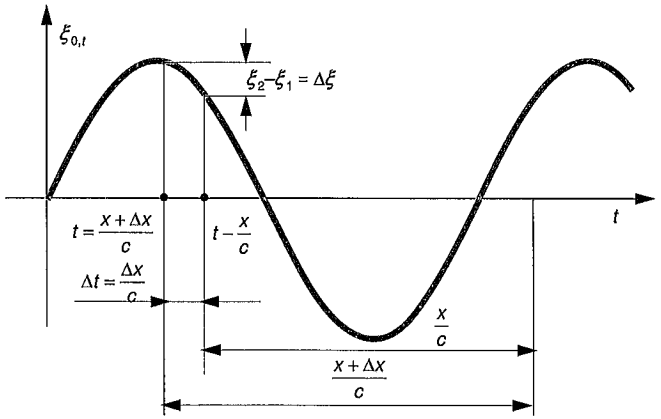
Harmonikus rezgőmozgásnál a teljes mechanikai energia időben állandó. A hullámmozgásnál a közegben lévő térfogatelem mechanikai energiája azonban változik! Az alábbiakban longitudinális hullám esetére látjuk be a (2.170) formulát.

Egy q keresztmetszetű, ρ sűrűségű és E^* rugalmassági modulusú rúdban longitudinális hullám terjed. A hullámforrás és a rúd pontjainak amplitúdója A. A hullámforrástól x és $x + \Delta x$ távolságra jelöljük ki a rúdon az *1* és *2* síkokat (2.225. ábra)! Az *1* és *2* síkok egyensúlyi helyzetük körül A amplitúdóval rezegnek, eltérő fázisban. (Nem egyenlő távolságra vannak a hullámforrástól, és feltételeink szerint távolságuk lényegesen kisebb, mint a hullámhossz. A hullámforrás kitérés–idő grafikonjáról (2.226. ábra) leolvashatjuk az *1* és *2* síkok kitérését a t pillanatban:

$$\xi_1 = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \qquad \text{és} \qquad \xi_2 = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x+\Delta x}{c}\right)\right].$$



2.225. ábra



2.226. ábra

Az *1* és *2* által közrefogott közegdarabka mozgási energiája t pillanatban:

$$E_{m,t} = \frac{1}{2}\rho q \Delta x A^2 \omega^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right). \qquad (2.171a)$$

A közegdarabka Δx feszültségmentes hossza megváltozik, hiszen az *1* és *2* síkok elmozdulásai különbözőek. A Δx megváltozása a kitérések eltérése: $\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$. A hullámforrás kitérés–idő grafikonján a $\frac{\Delta\xi}{\Delta t}$ hányados $t - \frac{x}{c}$ -kori v sebességet jelenti, $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$ (2.226. ábra!). Ezért $\Delta\xi = v\Delta t = A\omega \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$. A D direkciós erő pedig (itt E^* a rugalmassági modulus):

$$D = \frac{F}{\Delta\xi} = \frac{\sigma q}{\Delta\xi} = \frac{\varepsilon E^* q}{\Delta\xi} = \frac{\frac{\Delta\xi}{\Delta x} E^* q}{\Delta\xi} = \frac{E^* q}{\Delta x} \quad \text{(lásd 2.121. képlet).}$$

A rugalmassági energia a t pillanatban:

$$E_{r,t} = \frac{1}{2}\frac{E^* q}{\Delta x} A^2 \omega^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Felhasználva, hogy (2.116) alapján $c^2 = \frac{E^*}{\rho}$:

$$E_{r,t} = \frac{1}{2}\rho q \Delta x A^2 \omega^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right). \qquad (2.171b)$$

A mozgási és a rugalmassági energiára vonatkozó képletekből látható, hogy fázisuk ugyanaz. Ellentétben az egyetlen, különálló, harmonikus rezgőmozgást végző test esetével, itt a rugalmassági és a mozgási energia egyszerre veszi fel a maximumát, és így összegük változik az idő függvényében. A teljes, időben változó energia tehát a (2.171b) kétszerese. Mivel a $\cos^2$ függvény átlaga egy periódusra ½, kapjuk a (2.170) összefüggést.

A hullám energiasűrűsége. Szemeljük ki a térnek egy olyan, V térfogatú tartományát, amelyet hullám jár át! Legyen egy adott pillanatban az ebben a tartományban tartózkodó hullám energiája E. A hullám w energiasűrűségén értjük a térfogategységben lévő hullámenergiát:

$$w = \frac{E}{V}.$$

Az energiasűrűség skalár, mértékegysége J/m³.

Mivel harmonikus hullámban a ΔV térfogatelem energiája az idő függvényében változik [lásd a (2.171a–b) képleteket], ezért az energiasűrűség is változik az idő függvényében. Az *energiasűrűség* $\overline{w}$ (olv. w átlag) *időbeli átlagán* a ΔV nagyságú térfogatelem energiája időbeli átlagának és a ΔV térfogatának hányadosát értjük:

$$\overline{w} = \frac{E_{\text{átlag}}}{\Delta V}. \tag{2.172}$$

Harmonikus hullám energiasűrűségének időbeli átlaga:

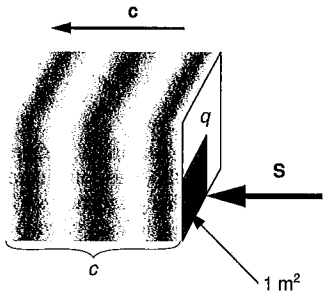
$$\boxed{\overline{w} = \frac{\frac{1}{2}\Delta m A^2 \omega^2}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2}. \tag{2.173}$$

Sugárzási teljesítmény (adott felületre vonatkoztatva). Valamely q nagyságú felületre vonatkoztatott sugárzási teljesítményen a felületen átáramló energia és az átáramlási idő hányadosát értjük:

$$P = \frac{E_q}{t}, \tag{2.174}$$

ahol E_q a felületen t idő átáramlott energia.

A sugárzási teljesítményt kifejezhetjük az energiasűrűséggel is következőképpen: Kiterjedt közegben síkhullámot veszünk. Energiasűrűségének időbeli átlaga $\overline{w}$. Legyen a q nagyságú felület merőleges a hullám terjedési irányára (2.227. ábra),



2.227. ábra

és $t = 0$-kor a hullámfront éppen a felületen haladjon át! 1 s múlva a hullámfront a felülettől c távolságra lesz. A hullám a felületen áthaladva qc térfogatot tölt meg, térfogategységenként átlagosan $\overline{w}$ energiával. Azaz a hullám a qc nagyságú hasábba $\overline{w}qc$ energiát vitt be 1 s alatt. Ez az energia áramlott át a q nagyságú felületen 1 s alatt. Így a sugárzási teljesítmény a hullám terjedési irányára merőleges q nagyságú felületen:

$$P = \overline{w}qc. \tag{2.175}$$

Ha a szóban forgó felület nem merőleges a terjedési irányra, akkor a q a felület hullámfrontra való merőleges vetületét jelenti.

Nem síkhullámoknál a felületet olyan kicsiny darabokra osztjuk, hogy a hullámfront-darabka jó közelítéssel sík legyen. Az ezeken a felületeken mért sugárzási teljesítmények összege a teljes felületre vonatkoztatott sugárzási teljesítmény.

A fentiekben definiált sugárzási teljesítmény az ún. *átlagos sugárzási teljesítmény*. Mivel a felület pontjaiban az energiasűrűség változik, ezért a sugárzási teljesítmény is változik. A *pillanatnyi sugárzási teljesítményt* úgy kapjuk, hogy a (2.175) képletbe $\overline{w}$ a helyébe az energiasűrűség pillanatnyi értékét írjuk. Az így kapott teljesítmény időátlaga adja meg az átlagos sugárzási teljesítményt.

Intenzitás (energiaáram-sűrűség, teljesítménysűrűség). Egy hullám teljesítménysűrűsége a hullám terjedési irányára merőleges egységnyi felületen időegység alatt átáramlott energia:

$$S = \frac{P}{q} = \overline{w}c, \tag{2.176}$$

ahol P a sugárzási teljesítmény a terjedés irányára merőleges q nagyságú felületen. A teljesítménysűrűség vektor, iránya a hullám terjedési sebességének iránya. A teljesítménysűrűség abszolút értékét szokás *intenzitásnak* is nevezni.

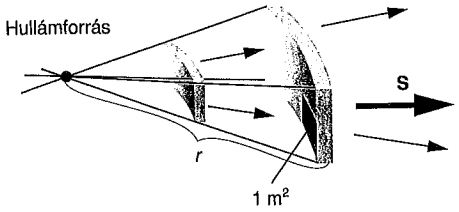
Az előzőekben definiált teljesítménysűrűség az átlagos teljesítménysűrűség. Az ún. *pillanatnyi teljesítménysűrűséget* úgy kapjuk, hogy a (2.176) képletben a $\overline{w}$ helyébe w pillanatnyi teljesítménysűrűséget írjuk.

A teljesítménysűrűség, azaz az intenzitás mértékegysége $J/sm^2 = W/m^2$.

A teljesítménysűrűség helyről helyre jellemzi az energiaáramlás erősségét. A felület nagyságával való szorzata adja meg a felületen időegység alatt átáramló energiát. (Ha a felület normálisa nem a teljesítménysűrűség-vektor irányába mutat, akkor a két vektor által közbezárt szög koszinuszával is meg kell szoroznunk.)

Az intenzitás távolságfüggése. *Pontszerű hullámforrás* esetén (homogén, izotrop közegben) a hullámfrontok a forrással koncentrikus gömbök (gömbhullámok) (2.228. ábra). A hullámforrás által időegység alatt kisugárzott energia, P egyenlő a $4\pi r^2$ nagyságú gömbfelületen időegység alatt átáramlott energiával. Az intenzitás definíciója alapján a felületen 1 s alatt $4\pi r^2 S_g$ energia áramlik át, így:

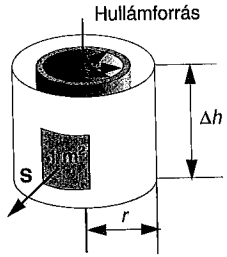
$$S_g = \frac{P}{4\pi r^2}. \tag{2.177}$$



2.228. ábra

Vonalszerű hullámforrás esetén koncentrikus hengerhullámok (2.229. ábra):

$$S_h = \frac{P}{2\pi r \Delta h}. \tag{2.178}$$

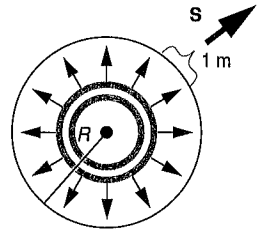


2.229. ábra

A *felületi hullámok* lényegében nagyon vékony rétegben terjedő hullámok. Pontszerű hullámforrás (igen kis magasságú és sugarú hengerke) ebben a közegben hengerhullámokat hoz létre. A hullámfrontok olyan hengerpalástok, amelyeknek tengelye merőleges a felületre, és magassága a réteg Δh vastagsága. Ezért a teljesítménysűrűségre vonatkozó képlet itt ugyanaz, mint a térben terjedő hullámoknál. A (2.178) egyenlet mindkét oldalát szorozzuk be Δh-val! Az $S_f = S_h \Delta h$ mennyiség szemléletes jelentése a hullám terjedési irányára merőleges, egységnyi hosszúságú és Δh magasságú téglalapocskán időegység alatt átáramlott energia. A felületen terjedő hullám jellemzésére elegendő ezt az S_f mennyiséget használni, hiszen a réteg vastagsága mindenütt ugyanaz. Az S_f szemléletesen a hullám terjedési irányára merőleges „egységnyi hosszúságú szakaszon" időegység alatt áthaladt energiát jelenti (2.230. ábra):

$$S_f = \frac{P}{2\pi r}. \tag{2.179}$$

Mértékegysége W/m.



2.230. ábra

Az amplitúdó távolságfüggése. A (2.173) és a (2.176) képlet alapján harmonikus hullámnál:

$$S = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 c.$$

Innen A-t kifejezve látható, hogy a harmonikus hullám amplitúdója egyenesen arányos az intenzitás négyzetgyökével.

Ennek alapján (2.117) felhasználásával térben terjedő hullámoknál pontszerű hullámforrás esetén:

$$A \sim \frac{1}{r}. \tag{2.180}$$

Felületi hullámoknál pontszerű hullámforrás esetén:

$$A \sim \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

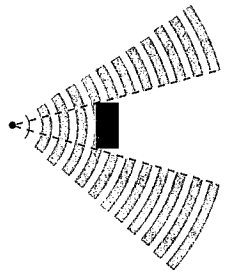
A hullámban terjedő mechanikai energia egy része a belső súrlódás vagy más hatások következtében disszipálódik (nem mechanikai energiává alakul át). Ezért a hullámok intenzitása és amplitúdója jobban csökken, mint a fentiekben vázolt ideális esetekben. Hanghullámoknál még a hullámhossztól is függ a csökkenés: távoli hangszóróból jövő zenéből csak a mély hangok hallhatók, mert a magas hangok jobban csillapodnak. Sok esetben a mechanikai energiának mindig ugyanannyiad része nyelődik el egyenlő távolságokon. Ezekben az esetekben a hullám disszipálódás miatt bekövetkező energia- és amplitúdócsökkenése exponenciális.

2.8.2. A hullámok terjedése

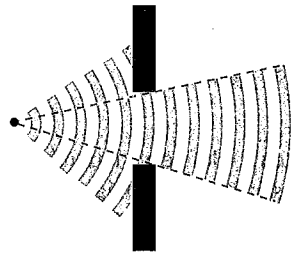
2.8.2.1. Terjedési tulajdonságok. A Huygens-elv

Egyenesvonalú terjedés. Homogén izotrop közegben a terjedés iránya nem változik, a hullám egyenes vonalban terjed. A hullám útjába a hullámhosszhoz képest

nagy akadályt helyezve a 2.231. ábra szerint az akadály széle és a hullám terjedési iránya által meghatározott tartományban hullámzást nem tapasztalunk. A hullámzástól mentes tartomány az *árnyéktér*. Hasonló jelenség lép fel a nyíláson áthaladó hullám esetében (2.232. ábra). Egyetlen, pontszerű hullámforrás esetén az árnyéktér határa éles. Két pontszerű hullámforrás esetén van olyan tartomány, ahova csak az egyik forrásból jut hullám. Itt van hullám, de gyengébb, mint azokban a tartományokban, ahol mindkét hullámforrás hoz létre hullámzást. Ez a *félárnyék*. Kiterjedt hullámforrások által létrehozott árnyéktér határa elmosódott (ha a források rezgései egymástól függetlenek! Lásd még a 2.8.3. szakaszt).

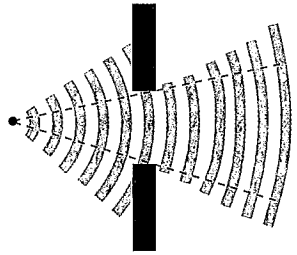


2.231. ábra

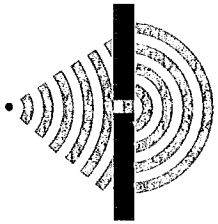


2.232. ábra

Elhajlás. A hullámhosszal összemérhető nagyságrendű akadályokba ütköző vagy ilyen méretű nyílásokon áthaladó hullám árnyékhatára még egyetlen pontszerű hullámforrás esetén sem lesz éles (2.233. ábra).



2.233. ábra



2.234. ábra

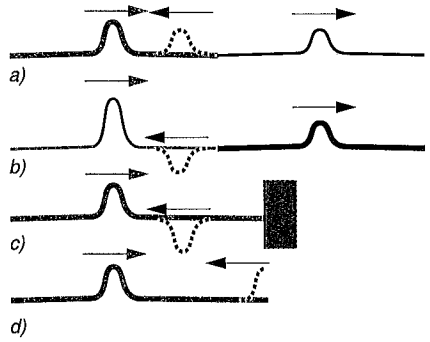
A hullámok olyan helyekre is eljutnak, ahol az egyenes vonalú terjedés miatt különben nem lenne hullám. Ez az elhajlás jelensége. (Magyarázatát lásd 2.8.3.3. alpontban.) A hullámhossz nagyságrendjébe eső vagy annál kisebb akadályokat a hullám alig kerüli meg, mintegy körülfolyja. A hullámhosszhoz képest kicsiny nyíláson

áthaladó hullám szétterül. A nyílás után kialakuló kép olyan, mintha a hullám egy, a nyílás helyén lévő pontszerű hullámforrásból kiinduló hullám lenne (2.234. ábra).

Elhajlás mindig van, a hullámhosszhoz képest nagy akadályok és nyílások esetén is. Az a tartomány, amelyben ilyenkor az elhajlási jelenségek létrejönnek, nem számottevő, csak hullámhossz nagyságrendű. Ezért nagy nyílásokon, illetve akadályokon fellépő elhajlások nem szembetűnők. Bizonyos esetekben azonban fontosak lehetnek (lásd a 10.7.4. pontban a felbontóképességről mondottakat).

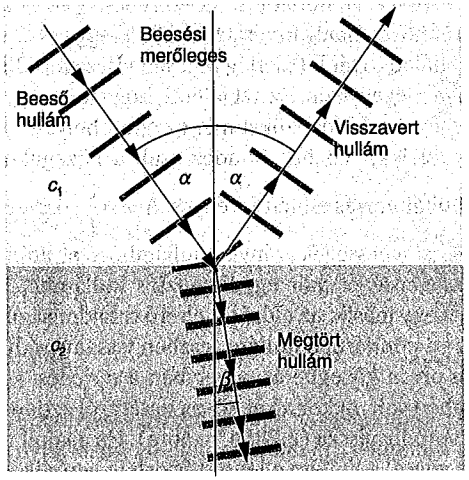
Visszaverődés, törés. Ha a hullám terjedési sebessége két közegben különböző, akkor az ilyen két közeg határára érkező hullám egy része visszaverődik, más része irányváltással halad tovább (esetleg teljesen visszaverődik). A két közegben a hullám frekvenciája megegyezik. Ez azt jelenti, hogy mind az 1. mind a 2. közegben lévő megfigyelő egyenlő időközöket mér az adott helyen egymás után áthaladó hullámhegyek észlelései között. Mindez csak a közegekhez képest nyugvó megfigyelő, illetve hullámforrás esetén érvényes. A $\lambda = \frac{c}{f}$ összefüggés alapján a közegekben mért terjedési sebességek aránya a hullámhosszak arányával egyezik meg.

A visszaverődés jelenségét már egydimenziós hullámnál is tapasztaljuk, ha például egy kötélhez egy másik, az előzőtől eltérő tulajdonságú kötelet erősítünk. A két kötél találkozási pontjáról a hullám részben visszaverődik, részben továbbhalad. Ha a hullám olyan közegbe ér, amelyben a terjedési sebessége nagyobb, mint az előző közegben volt, akkor a két közeg határáról azonos, fordított esetben ellentétes fázisban verődik vissza (2.235a, b. ábra). Ha a kötél végét rögzítjük, akkor erről a rögzített végről a hullám ellentett fázisban verődik vissza. Rögzítetlen, szabad végről pedig azonos fázisban verődik vissza. Szemléletesen megfogalmazva, ellentett fázisú visszaverődésnél hullámhegy hullámvölgyként, azonos fázisú visszaverődésnél hullámhegy hullámhegyként verődik vissza (2.235c, d. ábra).



2.235. ábra

Két-, illetve *háromdimenziós hullámok* visszaverődésénél és törésénél a visszavert, valamint a másik közegben tovahaladó hullám irányt változtat. A két közeg határára emelt merőleges a *beesési merőleges.* A beeső hullám és a beesési merőleges szöge a *beesési szög;* a beesési merőleges és a visszavert hullám szöge a *visszaverődési szög;* a megtört, tovahaladó hullám és a beesési merőleges szöge a *törési szög. Térben terjedő hullámoknál* a beeső hullámnyaláb, a beesési merőleges, a visszavert és a megtört hullámnyaláb *egy síkban vannak* (2.236. ábra).



2.236. ábra

Visszaverődés törvénye: a beesési szög és a visszaverődési szög egyenlő.

A merőlegesen beeső hullám törés nélkül halad tova.

Törés törvénye: a beesési szög szinusza egyenesen arányos a törési szög szinuszával. Az arányossági tényező a két közegben mért terjedési sebességek hányadosa:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c_1}{c_2}=\text{állandó}}\,. \qquad (2.181)$$

Az állandó neve: *törésmutató.* A törésmutató értéke attól függ, hogy melyik közegből melyikbe érkezik a hullám, azaz a két közegtől függ. A 2. közeg, ahol a törés történik, ahova a hullám beérkezik, a *törő közeg.* A 2. törő közegnek arra az 1. közegre vonatkoztatott törésmutatója, ahonnan a hullám a törő közegbe érkezik *a 2. közeg 1-re vonatkoztatott törésmutatója.* Jele: $n_{2,1}$,

$$n_{2,1}=\frac{c_1}{c_2}\,. \qquad (2.182)$$

Az olyan közeget, amelyben a mechanikai hullámok sebessége nagyobb, *akusztikailag ritkább,* amelyben kisebb, *akusztikailag sűrűbb* közegnek nevezzük. A 2.166 képlet alapján a nagyobb mechanikai sűrűség még nem jelenti a nagyobb akusztikai sűrűséget, csak egyenlő E esetén. Kisebb mechanikai sűrűségű közeg lehet akusztikailag sűrűbb, ha rugalmassági modulusa megfelelően nagyobb. Ha a hullám kisebb akusztikai sűrűségű közegből érkezik nagyobb akusztikai sűrűségű közegbe, akkor a (2.182) alapján a törésmutató egynél nagyobb, ha sűrűbből megy ritkábba, akkor egynél kisebb.

A *visszavert és a megtört hullám amplitúdójának aránya és intenzitásának aránya* a beesési szögtől és a törésmutatótól függ. A beesési szöget növelve a visszavert hullám intenzitása nő, a megtörté csökken.

Teljes visszaverődés. Ha a hullám akusztikailag sűrűbb közegből érkezik ritkább közegbe, akkor nem túl nagy beesési szögek esetén egy része visszaverődik, másik része tovahalad a törő közegben. Mivel $n_{2,1} < 1$, $\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n_{2,1}}>\sin\alpha$. Azaz $\beta > \alpha$. Ezért van olyan α_0 határszög, melynél $\beta = 90°$.

A törés törvényébe a $\beta = 90°$ feltételt behelyettesítve:

$$\sin\alpha_0=n_{2,1}. \qquad (2.183)$$

Az α_0-nál nagyobb szögekre a törés törvény matematikailag értelmetlenné válik, hiszen a határszögnél beesési szögek esetén a törési szög szinuszára egynél nagyobb értéket kapunk. A tapasztalat szerint a beesés szögét 0-ról fokozatosan növelve a visszavert hullám intenzitása nő, a megtörté csökken. A határszöget elérő és annál nagyobb beesési szögek esetén a megtört nyaláb eltűnik, és csak visszavert nyaláb lesz, amelynek intenzitása megegyezik a beeső hulláméval. Ez a *teljes visszaverődés* jelensége.

Az előzőek szerint a törő közegbe nem jut hullám a határszögnél nagyobb beesési szögek esetén. Gondosabb vizsgálatok azt mutatják, hogy a hullám néhány hullámhossznyi mélységig behatol a második közegbe és onnan visszafordul. (Ennek így is kell lennie, hiszen ha a hullám nem hozná rezgésbe a törő közeg pontjait a határfelület környékén, akkor honnan „tudná", hogy vissza kell verődnie.)

A jelenséget vízfelszíni hullámokkal ki is mutathatjuk, ha egy hullámtálban a sekélyebb, kisebb terjedési sebességű közegből indítunk hullámokat a mélyebb víz felé a határszögnél nagyobb beesési szöggel. Ekkor a mélyebb vízrétegben is tapasztalhatunk a határfelülettől néhány hullámhossznyi távolságban enyhe hullámzást.

A Huygens-elv. A Huygens-elv két tapasztalati tényre vezeti vissza (ezek segítségével magyarázza) a hullámok terjedési tulajdonságait:

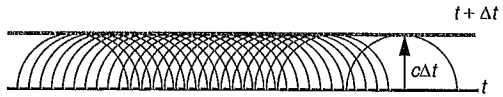
– a hullámfrontból egy szűk nyílással kivágott rész úgy viselkedik, mintha pontszerű hullámforrás lenne;

– pontszerű hullámforrások sorozata által kibocsátott kör- (ill. térben gömb-) hullámok a forrásoktól elég távol egyetlen hullámfronttá olvadnak össze.

Huygens-elve: A hullámfront pontjai elemi (kör-, illetve gömb-) hullámok kiindulópontjainak tekinthetők. A tovahaladó új hullámfront ezen elemi hullámok közös érintője, burkoló görbéje.

A továbbiakban kétdimenziós hullámokra mutatjuk meg, hogy hogyan lehet a hullámok terjedési tulajdonságait megmagyarázni a Huygens-elv segítségével.

Egyenes vonalú terjedés homogén, izotrop közegben: A t pillanatbeli hullámfrontot osszuk fel elemi hullámforrásokra! Minden egyes kis hullámfront-darabka mint elemi hullámforrás, a t pillanatban elemi körhullámokat bocsát ki. Δt idő alatt a körhullámok sugara $c\Delta t$ lesz (2.237. ábra). Esetünkben egyenes hullámfrontot véve az elemi körhullámok középpontjai egy egyenes mentén helyezkednek el és sugaraik egyenlők. Közös érintőjük az eredeti hullámfronttal párhuzamos egyenes. Az így kapott új hullámfront terjedési iránya, a hullámfront normálisa egyirányú lesz az eredeti hullámfront normálisával. Tehát beláttuk, hogy homogén, izotrop közegben a hullámok terjedési iránya nem változik, azaz egyenes vonalban terjednek.

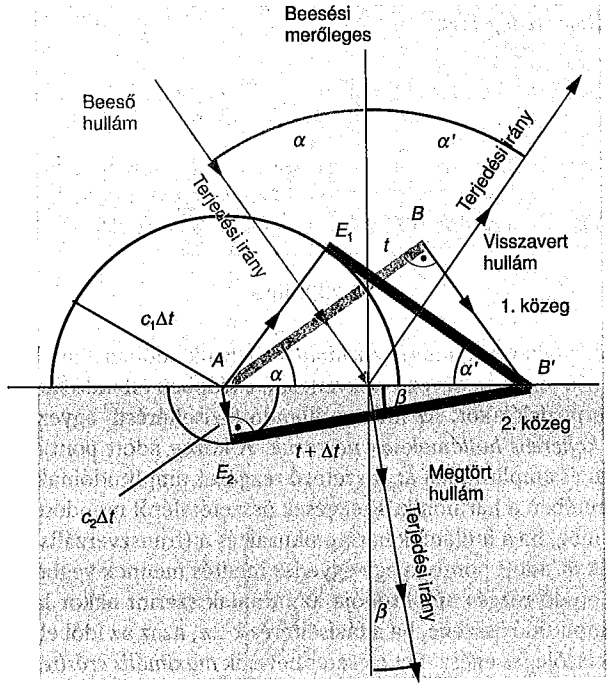


2.237. ábra

Visszaverődés és törés. A 2.238. ábrán a hullám két olyan közeg határára érkezik, melyekben a terjedési sebesség eltérő. Legyen c_1 a terjedési sebesség az *1*-gyel jelölt közegben, c_2 a *2*-vel jelölt közegben! A hullám az *1*-gyel jelölt közegből lép a *2*-vel jelölt közegbe.

Szemeljük ki a hullámfrontot a t pillanatban és osszuk fel kis, elemi hullámforrásokra! A két, A-val és B-vel jelölt hullámfront-darabka közül t pillanatban A van a két közeg határán, $t + \Delta t$ pillanatban pedig B. A t és $t + \Delta t$ között eltelt időtartam alatt az A által kibocsátott elemi körhullámok sugarai $c_1\Delta t$ és $c_2\Delta t$, a B által megtett út $c_1\Delta t$. A megtett utak, illetve sugarak azért különbözőek, mert a két közegben a terjedési sebességek is eltérőek. Esetünkben a *2* közegben a terjedési sebesség kisebb, mint az *1*-ben. A hullámfront B pontjának helyét $t + \Delta t$ pillanatban B'-vel jelöljük. A $t + \Delta t$ pillanatban ismerjük a hullámfront egy pontját (B') és az elemi körhullámot, amely A-ból indult ki. A $t + \Delta t$ pillanatbeli hullámfront-darabkát megszerkeszthetjük, hiszen tudjuk, hogy átmegy B'-n, és érinti az elemi körhullámot, melynek sugarai $c_1\Delta t$, illetve $c_2\Delta t$. Az érintési pontokat E_1-gyel, illetve E_2-vel jelöljük. A kör érintője merőleges a sugarára, ezért az $AB'E_1$ és az $AB'E_2$ háromszögek derékszögűek. Az ABB' háromszög B-nél lévő szöge is derékszög, mert a hullám terjedési irány merőleges a hullámfrontra. Az ABB' és az AE_1B' háromszögek egybevágóak, mert mindkettő derékszögű, AB' átfogójuk közös, és $BB' = AE_1 = c_1\Delta t$. Így a megfelelő szögek is egyenlők, a beeső hullámfront A-nál lévő α szöge megegyezik a visszavert hullámfront B'-nél lévő α' szögével. Mivel az ábrából leolvashatóan a hullámfrontok közeghatárral bezárt szöge és a terjedési iránynak a beesési merőlegessel bezárt szögének szárai merőlegesek egymásra, ezért egyenlők. Így a beesési és a visszaverődési szög egyenlő. A törés törvénye abból következik, hogy az A-nál lévő α szögre az ABB' háromszögből $\sin\alpha = \frac{c_1\Delta t}{AB'}$, a B'-nél lévő β szögre az AE_2B' háromszögből $\sin\beta = \frac{c_2\Delta t}{AB'}$.

A két egyenlet hányadosa adja a törés törvényét.



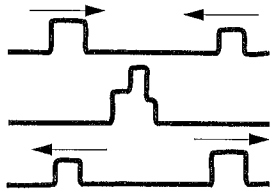
2.238. ábra

2.8.3. A hullámok szuperpozíciója

2.8.3.1. A szuperpozíció elve; interferencia

Rugalmas kötél két végéről indított hullámhegyek vagy hullámvölgyek zavartalanul áthaladnak egymáson. Találkozásuk pillanatában az eredő kitérés a két hullám által létrehozott kitérések vektori eredője lesz (2.239. ábra).

Szuperpozíció elve: Hullámtalálkozásnál az eredő kitérés mindenütt és minden pillanatban az egyedül jelenlévőnek képzelt egyik, illetve *másik hullám által okozott kitérések vektori eredője lesz.*



2.239. ábra

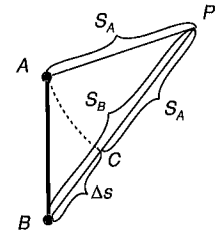
Hullámok találkozását *interferenciának* nevezzük. Időben állandó, jól észlelhető interferencia jön létre egyező frekvenciájú és időben állandó fáziseltérésű hullámok szuperpozíciójakor. Az időben állandó fáziseltérésű, egyező frekvenciájú hullámokat *koherens hullámoknak nevezzük.* A közeg adott pontjában kialakuló rezgés fázisát és amplitúdóját az összetevő rezgések amplitúdóinak és fáziseltéréseinek ismeretében a harmonikus rezgések összetételéről mondottak alapján határozhatjuk meg, ha a hullámok harmonikusak és a (transzverzális hullámok esetén) rezgések az adott pontban egy egyenes mentés mennek végbe (lásd 1.1.5.6. alpont). Az eredő rezgés amplitúdója az ottaniak szerint akkor lesz maximális, azaz a két amplitúdó összege, ha a fáziseltérés $k \cdot 2\pi$, azaz az időbeli eltérés kT. Itt $k = 0$ vagy tetszőleges egész. Ezt a esetet nevezik *maximális erősítésnek,* a k egész pedig az *erősítés rendje.* Ha a fáziseltérés $(2k + 1)\pi$, azaz az időbeli eltérés $\left(2k+1\right)\frac{T}{2}$, akkor az eredő amplitúdó a két amplitúdó különbségének abszolút értéke. Ez a *maximális gyengítés.* Ha a két hullám amplitúdója megegyezik, akkor maximális gyengítés esetén az eredő amplitúdó és így minden egyes pillanatban a kitérés is 0, ez a *kioltás.* Az eredő kitérés más fáziseltérések esetén a két amplitúdó összege és különbsége közé esik.

2.8.3.2. Pontszerű, koherens hullámforrások által létrehozott interferencia

Rezegtessük meg a víz felszínét két pontban, egyező frekvenciával és időben állandó fázis eltéréssel! Az A hullámforrás kitérés–idő függvénye $y_A = A_A \sin(\omega t + \varphi_A)$, a B hullámforrásé $y_B = A_B \sin(\omega t + \varphi_B)$, ahol φ_A és φ_B a hullámforrások kezdő fázisai. Szemeljük ki a hullámtér egy tetszőleges P pontját, mely pont A-tól, s_A, B-től s_B távolságra van! Ebben a pontban, a kiszemelt t pillanatban, a hullámforrások t-nél korábbi rezgési állapotai találkoznak. Az A-ból ideérkező rezgésállapot $\frac{s_A}{c}$ -vel, a B-ből ideérkező rezgésállapot pedig $\frac{s_B}{c}$ -vel korábban indult el. Tehát a kiszemelt pontban és t pillanatban az A hullámforrás $t-\frac{s_A}{c}$, a B hullámforrás $t-\frac{s_B}{c}$ pillanatbeli rezgésállapotai szuperponálódnak.

A hullámok fáziseltérése, azaz a szinuszok argumentumának eltérése a P pontban:

$$\Delta\varphi = \omega\frac{s_A - s_B}{c} + \varphi_A - \varphi_B = \frac{2\pi\left(s_A - s_B\right)}{Tc} + \varphi_A - \varphi_B = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \varphi_A - \varphi_B, \quad (2.184)$$



2.240. ábra

mivel $cT = \lambda$. Itt Δs a P pont hullámforrásoktól való távolságainak különbsége (2.240. ábra).

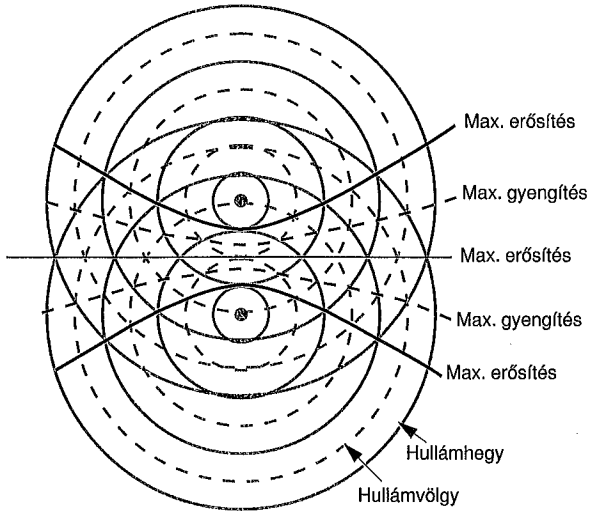
Azonos fázisú (együtt rezgő) hullámforrások hullámainak interferenciája. Azokban a pontokban, ahol a hullámok maximálisan erősítik egymást, a fáziseltérés $0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2k\pi$ (ahol k nem negatív egész). A hullámok fáziseltéréseire vonatkozó (2.184) egyenletbe behelyettesítve – figyelembe véve, hogy a hullámfor-

rások azonos fázisúak, azaz $\varphi_A - \varphi_B = 0$ – kapjuk a *maximális erősítés feltételét azonos fázisú hullámforrások esetén:*

$$\Delta s = 2k\frac{\lambda}{2}. \tag{2.185}$$

A k értékétől függően a $k = 0, 1, 2$ stb. helyeket rendre nullad-, első-, másod-, ..., *k-ad rendű erősítési helyeknek* nevezzük. Síkbeli hullámoknál azon pontok halmaza, ahol a hullámok nulladrendben erősítik egymást a hullámforrásokat összekötő szakasz felező merőlegese. Az elsőrendű erősítési helyek azon pontok halmaza, amelynek az A és B pontoktól mért távolságainak különbsége $\Delta s = \lambda$. Ez pedig a hiperbola definíciója alapján egy A és B fókuszú hiperbolaív. Hasonlóképpen a magasabb rendű erősítési helyek egy-egy hiperbolaívet képeznek A és B fókuszpontokkal (2.241. ábra).

A 2.240. ábrából láthatóan a PAC háromszög egyenlőszárú. Ezért a C-nél lévő szöge hegyesszög. (Ha tompaszög lenne, akkor az A-nál lévő, vele egyenlő szöggel, 180°-nál nagyobb lenne az összegük, ez pedig nem lehet, hiszen a háromszög szögeinek összege 180°.) Ezért az ACB háromszög C-nél lévő szöge tompaszög. Mivel a legnagyobb szöggel szemközt van a legnagyobb oldal, ezért az ACB háromszögben az AB távolság a legnagyobb. Így a Δs útkülönbség *bármelyik P esetén kisebb, mint a hullámforrások távolsága.* Ezért adott hullámforrások esetén nem jöhet létre akárhányad rendű erősítés, illetve kioltás. *A* és *B* akármilyen távolságánál van azonban legalább egy erősítési hely: a hullámforrásokat összekötő szakasz felező merőlegese nulladrendű erősítési hely.



2.241. ábra

Az eredő amplitúdó nem a hullámforrások amplitúdóinak összege, hiszen az amplitúdók a hullámforrásoktól való távolsággal csökkennek.

Azokban a pontokban, ahol a hullámok a legjobban gyengítik egymást, azaz az eredő amplitúdó a találkozó hullámok amplitúdóinak algebrai különbsége, a hullámok fáziseltérése π, 3π, 5π, ..., $(2k + 1)\pi$ (k nem negatív egész). A maximális erősítés helyeinek megállapításánál használt eljárással kapjuk a különböző rendű *maximális gyengítések* helyeit:

$$\Delta s = \left(2k+1\right)\frac{\lambda}{2}. \tag{2.186}$$

Az azonos rendű gyengítési helyek szintén hiperbolaíveket alkotnak. A hullám eredő amplitúdója a két hullám amplitúdóinak algebrai különbsége. Mivel a pontok eltérő távolságra vannak a hullámforrásoktól, ezért azonos amplitúdójú hullámforrások esetén sehol sem lesz teljes kioltás az amplitúdók távolságfüggése miatt. Az egyenlő amplitúdójú hullámforrásoktól távol, akkora távolságban, ahol az útkülönbség elhanyagolható a hullámforrások távolságához képest, a hullámok amplitúdója jó közelítéssel egyenlő, ezért itt közelítőleg teljes kioltás van.

Sehol sincs maximális gyengítés, ha a hullámforrások távolsága kisebb, mint a hullámhossz fele (lásd az AB szakaszról és a Δs-ről írtakat ebben a pontban).

Ellentett fázisú (ellentetten rezgő) hullámforrások hullámainak interferenciája. Az ellentetten rezgő hullámforrások kitérései ellentett előjelűek és egyenlő nagyok is, ha a hullámforrások amplitúdói is egyenlők. A fáziskülönbség $\varphi_A - \varphi_B = \pi$.

Azokban a pontokban, ahol a hullámforrások fáziseltérése $0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2k\pi$, a hullámok amplitúdói algebrailag összeadódnak. A hullámok fáziseltérésére vonatkozó egyenletbe behelyettesítve, figyelembe véve, hogy $\varphi_A - \varphi_B = \pi$, a *maximális erősítés feltétele ellentétes fázisú hullámforrások esetén:*

$$\Delta s = \left(2k+1\right)\frac{\lambda}{2}, \tag{2.187}$$

ahol k nem negatív egész. Ezek a pontok hiperbolaíveket alkotnak, melyek fókuszai a hullámforrások.

Az előzőekhez hasonlóan a hullámok fáziseltérésére vonatkozó egyenletbe helyettesítve, a maximális gyengítés feltétele:

$$\Delta s = 2k\frac{\lambda}{2}. \tag{2.188}$$

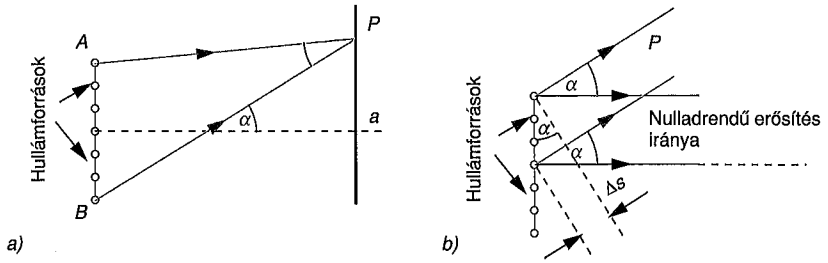
Ha a hullámforrások amplitúdói egyenlők, akkor az őket összekötő szakasz felező merőlegesének pontjaiban teljes kioltást tapasztalunk. Ugyanis a felező merőleges egy pontja a hullámforrásoktól egyenlő távolságra van. Az ide befutó hullámok amplitúdói az egyenlő távolságok befutása miatt egyenlő mértékben csökkennek, azaz egyenlők lesznek, és így itt az azonos amplitúdójú hullámok pontosan kioltják egymást.

Az észlelhető interferencia feltétele. Az eddigiekből látható, hogy egy adott pontba két adott hullámforrásból érkező hullámok amplitúdója nemcsak az útkülönbségtől, hanem a hullámforrások fáziseltérésétől is függ. Pl. ha a hullámforrások azonos fázisúak, akkor a felező merőleges pontjaiban maximális erősítés, ha ellentétes fázisúak, akkor maximális gyengítés jön létre. Általában is igaz, hogy ha a hullámforrások fázisa azonosról ellentétesre változik, akkor az erősítési és kioltási helyek felcserélődnek. Amennyiben az azonos frekvenciájú hullámforrások szakaszosan működnek és fázisuk hol egyező, hol ellentétes, akkor a hullámzási tér egy adott pontjában hol erősítést, hol gyengítést tapasztalunk. Ha a fázisváltások nagyon gyorsan követik egymást, akkor a hullámzási tér minden pontjában olyan gyorsan váltják egymást a gyengítési és kioltási helyek, hogy nem is észleljük az interferenciát (pontosabban nem vesszük észre a gyengítést, mindenhol egyforma hullámzást észlelünk). A szakaszosan működő hullámforrásoknál van igazi jelentősége a források közötti fáziseltérések időbeli állandóságának. Ezért *az interferencia észlelésének feltétele a koherens hullámforrások használata.*

Egy dolog hullámtermészetének kísérleti bizonyítéka az a tény, hogy interferenciát tudunk vele létrehozni. Ezt sok esetben nem könnyű megtenni, mert a hullámforrások frekvenciája ugyan megegyezik, de fáziseltérésük folyamatosan és gyorsan változik, és így annak ellenére nem észlelünk tartós, jól kivehető interferenciaképet, hogy hullámjelenséggel van dolgunk.

Az előzőekben feltételeztük, hogy a hullámok homogén izotrop közegben terjednek. Amennyiben ez nem áll fenn, az útkülönbségek és erősítési, illetve gyengítési helyek fenti egyszerű összefüggése érvényét veszti. Vissza kell térnünk az út hossza és a terjedési sebesség következtében létrejövő fáziseltérések, futási idők kiszámításához.

Egyenes szakasz mentén sűrűn elhelyezkedő, azonos fázisú hullámforrások hullámainak interferenciája. Itt csak a hullámforrásoktól igen távoli, a szakasz hosszához képest sokkal nagyobb távolságban lévő, a szakasszal párhuzamos a egyenes mentén keressük az erősítési és kioltási helyeket (2.242a ábra).



2.242. ábra

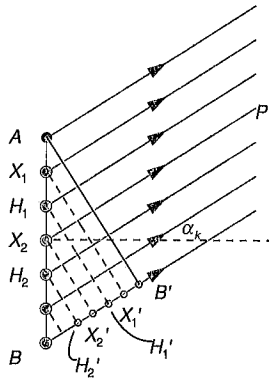
Az a egyenes egy tetszőleges P pontját a két legszélső hullámforrással összekötő szakaszok általa bezárt APB szög közelítőleg 0 a fenti feltétel miatt. A P pont helyét az AB szakaszra emelt merőleges egyenes és a P-be mutató egyenesek által bezárt szög adja meg. A P-be jutó hullámok egy keskeny nyalábot alkotnak. Az ide jutó hullámok által bezárt szög jó közelítéssel 0. (A 2.242a. ábrán a jobb megértés kedvéért az a egyenest közel rajzoltuk a hullámforrásokhoz, ezért az ábra nem szöghű, a valóságban igen kis APB szög az ábrán meglehetősen nagy!) Így a P-be jutó hullámok közelítőleg párhuzamos utat futnak be. Útkülönbségük a 2.240., 2.242a–b. ábra alapján szerkeszthető meg: Mérjük rá a PA szakaszt a PB szakaszra! A szélső források útkülönbsége a CB szakasz (lásd 2.240. ábra). A kapott PAC háromszög egyenlő szárú, az A-nál és C-nél lévő szögek egyenlők és összegük majdnem 180°, hiszen a P-nél lévő szög elhanyagolhatóan kicsi. Ezért az A-nál, illetve C-nél lévő szögek jó közelítéssel derékszögek. Így egy méretarányos, szöghű ábrán (2.242b. ábra) a CB útkülönbség úgy is megszerkeszthető, hogy A-ból merőlegest bocsátunk a BP szakaszra. Ezt alkalmazzuk a 2.242b. ábrán szélén, illetve közepén lévő hullámforrások hullámaira, ahol csak a hullámforrásokat és a P-be tartó hullámok terjedési irányait ábrázoltuk. Az AB felező merőlegesének az a egyenessel való metszéspontjába futó hullámok útkülönbsége 0. Ebben az irányban maximális erősítést tapasztalunk. Ez a *nulladrendű erősítés iránya.*

A *k-ad rendű erősítés* helyeit olyan α_k irányokban találjuk, amelyekre:

$$\sin \alpha_k = \left(2k+1\right)\frac{\lambda}{2d}, \tag{2.189}$$

ahol d a két legszélső hullámforrás távolsága.

Ezt az alábbiakban látjuk be: A 2.243. ábra jelöléseivel a képlet szerint az elsőrendű erősítést abban az α_1 irányban találjuk, amelynél a BB' útkülönbség $\frac{3}{2}\lambda$. Legyenek H_2' és H_1' B-től $\frac{\lambda}{2}$, illetve $\frac{2\lambda}{2}$ távolságra! Az ezekből indított merőlegesek AB-t három szakaszra, ún. zónákra osztják: az AH_1, a H_1H_2 és a H_2B zónákra. Az AH_1 bármelyik X_1 hullámforrásához találunk olyan X_2 hullámforrást a H_1H_2-ban, amelyek hullámai között az útkülönbség $\frac{\lambda}{2}$.



2.243. ábra

Ezt az X_2-t a következőképpen kereshetjük meg: X_1-ből BB'-re emelt merőleges X_1' talppontjától $\frac{\lambda}{2}$ távolságot felmérve a BB' mentén kapjuk az X_2' pontot. E pontból indítunk BB'-re merőlegest. Ez metszi ki AB-ből az X_2 hullámforrást. Ezért az AH_1 zóna minden hullámforrásához találunk H_1H_2-ben olyan hullámforrást, amelyek által kibocsátott hullámok közötti útkülönbség a végtelen távoli pontban $\frac{\lambda}{2}$. Ezért a két zónából kiinduló hullámok biztosan kioltják egymást. A harmadik zónából kiinduló hullámok biztosan erősítik egymást, mert útkülönbségük biztosan kisebb, mint $\frac{\lambda}{2}$. (Nem adódnak össze az amplitúdók, mert van fáziseltérés! Csak erősítés van!) Mivel csak a hullámforrások harmadrésze erősíti egymást, ezért az első- (és még inkább a magasabb) rendű maximumok intenzitása lényegesen gyengébb, mint a nulladrendűeké. Az ilyen jellegű erősítésre az ábrából leolvashatóan:

$$\overline{AB}\sin\alpha_1 = \frac{3}{2}\lambda.$$

Figyelembe véve, hogy $\overline{AB} = d$, kapjuk (2.189)-t.

Kioltás azokban a pontokban van az a egyenesen, amelyekre:

$$\sin\alpha_k = 2k\frac{\lambda}{2d}. \qquad (2.190)$$

Az első minimum abban az irányban van, amelyre $BB' = \lambda$. A B-től $\frac{\lambda}{2}$ távolságban lévő

B'-ből induló merőleges AB-t az AH_1 és H_1B zónákra osztja. A maximális erősítéseknél mondottak alapján a két zónából kiinduló hullámok páronként kioltják egymást. Ezért ebben az irányban teljes kioltást találunk.

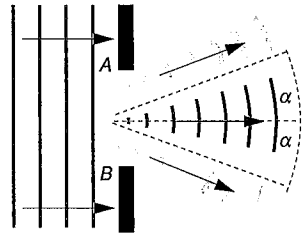
2.8.3.3. A Huygens–Fresnel-elv

A Huygens–Fresnel-elv szerint a *hullámtérben felvett felület pontjai elemi hullámforrásoknak tekinthetők. A hullámtér egy tetszőleges pontjának rezgési állapotát a felület pontjaiból ideérkező elemi hullámok szuperpozíciója (interferenciája) adja meg.*

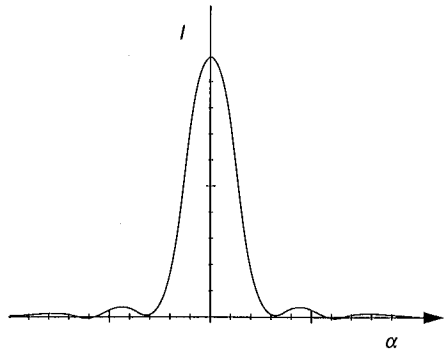
A Huygens–Fresnel-elv a hullámterjedés jelenségeit pontosabban írja le, mint a Huygens-elv: nemcsak a terjedési irányokat magyarázza meg, hanem pontosan leírja a hullámteret, hiszen az amplitúdók a hullámtér minden egyes pontjában a szuperpozíció elvével kiszámíthatók. Az alábbiakban *kétdimenziós hullámok terjedési tulajdonságainak magyarázatára alkalmazzuk a Huygens–Fresnel-elvet.*

Egyenes vonalú terjedés; elhajlás. Tekintsük az AB rést, amelyre merőlegesen esik be egy síkhullám! A Huygens–Fresnel-elvben szereplő felületnek válasszuk a rést lefedő AB felületet. Az AB felület pontjai azonos fázisú, sűrűn elhelyezkedő hullámforrásoknak tekinthetők. Ilyen sűrűn elhelyezkedő hullámforrások által létrehozott hullámok interferenciájával foglalkoztunk az előző pontban. Ennek alapján mondhatjuk, hogy a legerősebb hullámzás a résre merőleges irányban található. Ez a jelenség az egyenes vonalú terjedés. Ettől az iránytól jobbra és balra is haladnak hullámok, de ezek intenzitása elenyésző (2.244. ábra).

Tehát a hullámok az árnyéktérbe is behatolnak. Ez az elhajlás jelensége. Sőt, az árnyéktérben bonyolult kioltási és erősítési helyeket is találunk a (2.189) és (2.190) képleteknek megfelelően! A réstől nagy távolságban a tapasztalattal megegyezően az intenzitás eloszlása a 2.245. ábra szerint változik az α szög függvényében.



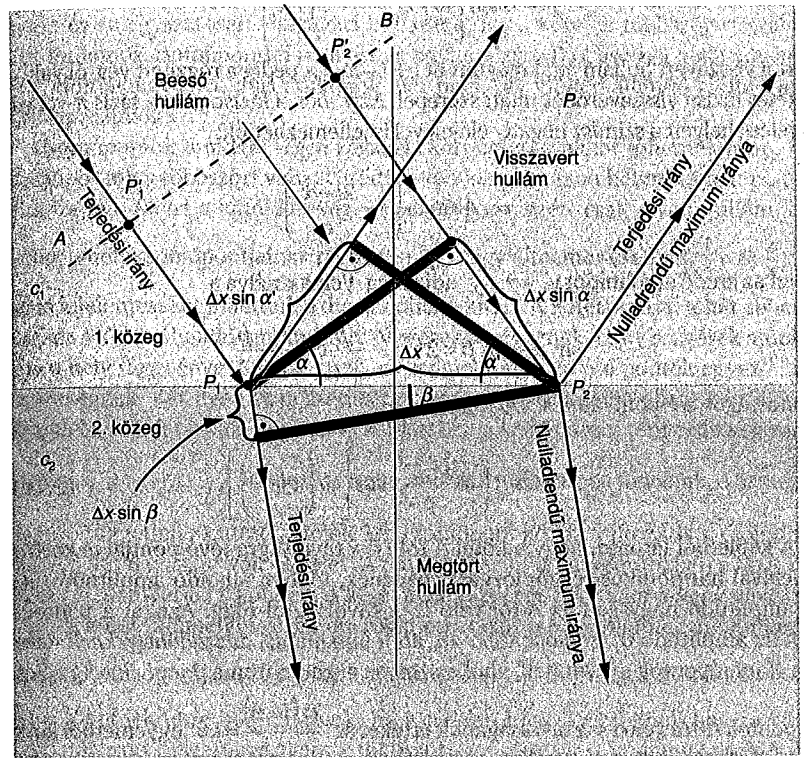
2.244. ábra



2.245. ábra

Visszaverődés, törés két közeg határán. Essék be az *1* és *2* közegek sík határfelületére α szöggel egy síkhullám! A 2.246. ábra a hullámtér olyan síkkal való metszetét mutatja, amely sík merőleges a két közeg határfelületére. A határfelület egyenese és a hullámfront egyenese alkotta szög szárai merőlegesek a beesési merőleges és a hullám terjedési iránya alkotta szög száraira, ezért a két szög egyenlő. Válasszuk ki a Huygens–Fresnel-elvben szereplő felületnek a két közeg határfelületét! A felületen Δx távolságra lévő P_1 és P_2 hullámforrások nem azonos fázisban rezegnek: szemeljük ki a bejövő síkhullám egy *AB* hullámfontját! E hullámfront minden egyes pontja, és így egy szakaszának P_1' és P_2' pontjai is azonos fázisban rezegnek. A P_1'-ből és P_2'-ből a P_1 és P_2 érkező hullámok futási ideje $\frac{\Delta x \sin \alpha}{c_1}$ értékkel tér el egymástól.

A P_2-be érkező hullám fázisban késik a P_1-hez képest. Tehát a közeg határfelületen lévő pontjai eltérő fázisban rezegnek. Egy igen távoli *P* pontban a visszaverődő hullámokra akkor lesz erősítés, nulladrendű maximum, ha a hullámoknak P_1'-től és P_2'-től a távoli pontig számított futási idői egyenlők. Mivel a P_2-ből induló hullám késve indul a P_1-ből indulóhoz képest, ezért a P_1-ből indulónak pontosan annyival kell több ideig futnia, amennyivel a P_2-ből induló hullám késve indul. Tehát a hullámforrások fáziseltérését a megtett utak különbségéből adódó fáziseltérések egyenlítik ki. Az 1 közegben a hullámok végtelen távoli pontig terjedő útjainak megtételéből származó időkülönbsége $\frac{\Delta x \sin \alpha'}{c_1}$. Ezt a hullámforrások fáziseltéréseiből származó időeltéréssel egyenlővé téve kapjuk a visszaverődés $\alpha = \alpha'$ törvényét. A törő közegben, ahol a terjedési sebesség c_2, a megtört hullámokra a közeghatár pontjaitól a távoli pontig számított futási idők különbsége $\frac{\Delta x \sin \beta}{c_2}$. Ezt egyenlővé téve a hullámforrások fáziseltéréséből adódó időkéséssel kapjuk a törés törvényét: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$.



2.246. ábra

2.8.3.4. Állóhullámok

Egydimenziós állóhullámok. Egy *l* hosszúságú kötél *A* végét a falhoz rögzítjük (2.247. *a–g* ábra). A másik, *O* pontjából szinuszhullámot indítunk el. Az *O*-ból folyamatosan indított hullámok a kötél *O*-tól *x* távolságra lévő pontjában szuperpo-

nálódnak az A-ból ellentétes fázisban visszaverődött hullámokkal. Ebben a P pontban az O-ból direkt indított hullám kitérés–idő függvénye

$$y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

a visszaverté pedig

$$y' = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{2l - x}{c} \right) + \pi \right],$$

mert a visszavert hullám által megtett út $l + l - x$, a π pedig a rögzített végről való ellentétes fázisú visszaverődés miatt szerepel. Az y'-ben a fázisugrást a fázis π-vel való növelése helyett a szinusz negatív előjelével is jellemezhetjük:

$$y' = -A \sin \omega \left(t - \frac{2l - x}{c} \right).$$

P-ben az eredő amplitúdót $y_e = y + y'$ adja meg. Felhasználva a

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

azonosságot, a P pont kitérés–idő függvénye:

$$y_e = 2A \sin \left(\omega \frac{l - x}{c} \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{l}{c} \right) \right]. \qquad (2.191)$$

A képletből látható, hogy a kötél A-tól $l - x$ távolságra lévő pontjai ω körfrekvenciával harmonikus rezgőmozgást végeznek, időben állandó amplitúdóval(!). Az amplitúdó nagysága az A-tól való $l - x$ távolságtól függ. Azokat a pontokat, ahol az amplitúdó 0, *csomópontoknak,* ahol maximális, *duzzadóhelyeknek* nevezzük. Csomópontok ott vannak, ahol a szinusz argumentuma $0, \pi, \ldots k\pi$. Így a csomópontok A-tól való $l - x$ távolságának értékei az $\frac{\omega(l-x)}{c} = k\pi$ egyenletből következően: $l - x = \frac{ck\pi}{\omega}$. Mivel $\omega = \frac{2\pi}{T}$ és $\lambda = cT$, ezért $l - x = k\frac{\lambda}{2} = 2k\frac{\lambda}{4}$. A csomópontok egymástól való távolsága $\frac{\lambda}{2}$. A duzzadóhelyeket az előzőek szerint kapjuk meg, figyelembe véve, hogy a szinusz akkor maximális, ha argumentuma $\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, \ldots (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

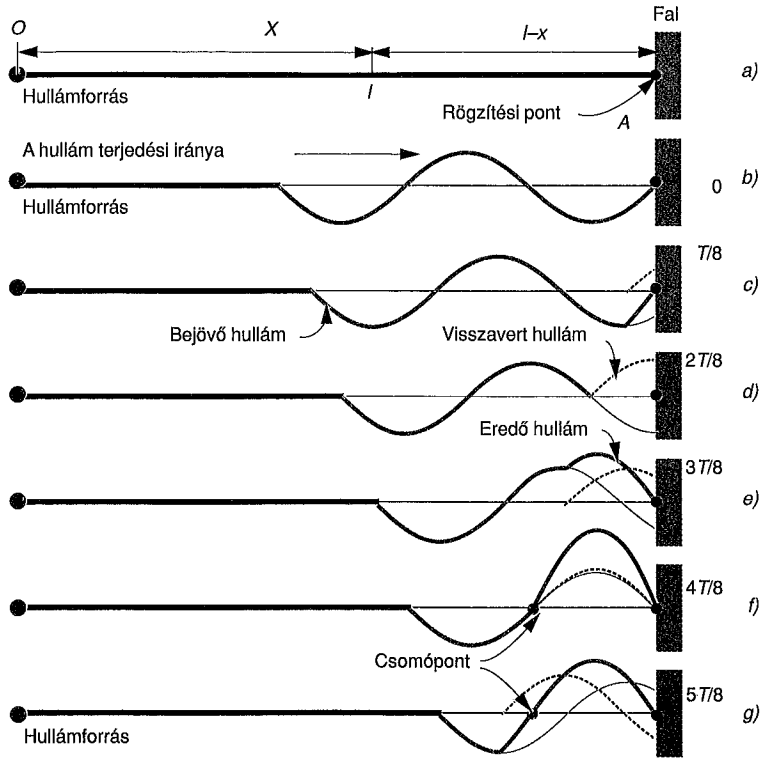
Innen a duzzadóhelyek rögzített végtől való távolsága: $(2k+1)\frac{\lambda}{4}$. A képletből láthatóan a szomszédos duzzadóhelyek távolsága is $\frac{\lambda}{2}$.

Ha a hullámok az O pontról is visszaverődnek ellentett fázissal, az O-ból visszavert hullámok interferálnak az A-ból visszavertekkel. Az egyszeresen és kétszeresen visszavert hullámok általában nem ott hozzák létre csomópontjaikat, ahol a direkt és az egyszeresen visszavert hullámok. Így a kötélen többször visszaverődött hullámok csomópontjai nem esnek egybe. Ezért ahol esetleg bizonyos hullámok kioltják egymást, más hullámok már nem. Így időben állandó kioltást sehol sem tapasztalunk.

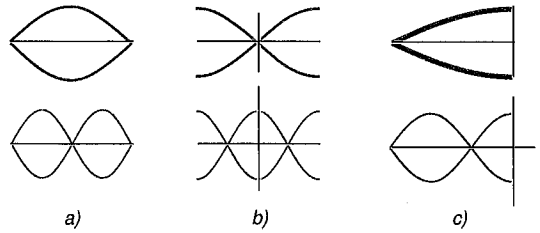
Csomópontok *mindkét végén rögzített kötélen* csak akkor jöhetnek létre, ha a csomópontok a többszöri visszaverődés után is ugyanazon helyre esnek: pl. a kötél közepén. Mivel a kötél két vége is csomópont, ezért csak olyan hullám jöhet szóba, amely csomópontjainak távolsága $\frac{l}{2}$, vagy általános esetben $\frac{l}{2} = 2k\frac{\lambda}{4}$. Hasonló kijelentéseket tehetünk a duzzadóhelyekre is. A kötél pontjai tehát ebben az esetben időben állandó amplitúdójú rezgéseket végeznek, mely rezgések amplitúdója a hely függvénye. Két szomszédos csomópont közé eső pontok egyező fázisban rezegnek. Két ilyen szomszédos tartomány pontjai pedig ellentétes fázisban rezegnek. Ennek oka az, hogy az y_e képletében a koszinuszos tényezőben a rezgések fázisa, az $\omega \left(t - \frac{l}{c} \right)$ kifejezés értéke, minden pillanatban ugyanaz. A szinuszos tényező független az időtől, előjele két csomópont között változatlan, csomóponton való áthaladáskor vált előjelet. A fentiek szerint tehát esetünkben a fázis nem vándorol, nem terjed a kötélen. A kötél ilyen rezgéseit *állóhullámoknak* nevezzük.

Ha a kötél valamelyik vége nem rögzített, akkor is létrejöhetnek állóhullámok, amelyek csomópontjai a rögzítetlen végtől $(2k+1)\frac{\lambda}{4}$ távolságra vannak. Itt is csak akkor jöhetnek létre állóhullámok, ha a hullám hossza és a kötél hossza között meghatározott összefüggés van: a többszörösen visszavert hullámok csomópontjainak és duzzadóhelyeinek egybe kell esniük.

A fentiek alapján egy adott hosszúságú kötélen nem csak egy hullámhosszúságú hullám hozhat létre állóhullámokat. A 2.248. ábrán a mindkét végén rögzített kötélen kialakuló rezgési lehetőségeket, *módusokat* láthatjuk. Az egyes lehetséges hullámhosszakhoz a terjedési sebesség által meghatározott frekvenciák tartoznak. A legkisebb rezgés frekvenciája az *alapfrekvencia,* a többit az első, második stb. *felharmonikusnak* nevezik. A rezgések frekvenciáit a kötél *sajátfrekvenciáinak* is mondják.



2.247. ábra



2.248. ábra

A 2.248. ábrán láthatók a különbözőképpen rögzített kötelek alaprezgései és első felharmonikusai.

Az egyes esetekben a kötelek lehetséges rezgési módusaihoz tartozó hullámhosszak és frekvenciák l hosszúságú és c terjedési sebességű kötelek esetén:

– mindkét végén szabad kötélnél (2.248b. ábra):

$$\lambda_k = \frac{2l}{k}, \qquad f_k = k\frac{c}{2l}, \tag{2.192a}$$

– mindkét végén rögzített kötélnél (2.248a. ábra):

$$\lambda_k = \frac{2l}{k}, \qquad f_k = k\frac{c}{2l}, \tag{2.192b}$$

– egyik végén rögzített kötélnél (2.248c. ábra):

$$\lambda_k = \frac{4l}{2k+1}, \qquad f_k = (2k+1)\frac{c}{4l}. \tag{2.192c}$$

Látható, hogy a sajátfrekvenciák az alapfrekvencia egész számú többszörösei.

Sok esetben a kötél egyik végét kezünkkel vagy más hullámforrással kis amplitúdóval rezegtetjük. Ha a hullámforrás és a hullámok nem befolyásolják egymást, akkor ebben az esetben a rezegtetett kötélvég rögzített kötélvégnek számít. Azt is megfigyelhetjük, hogy a sajátfrekvenciával rezegtetett kötélen kialakuló állóhullám amplitúdója lényegesen nagyobb lehet, mint a „rezegtető" hullámforrás amplitúdója. Ezt úgy is szokás értelmezni, hogy a kifeszített kötél olyan rezegni képes rendszer, melynek nagyon sok rezonanciafrekvenciája van.

Két-, illetve háromdimenziós állóhullámok. Kétdimenziós állóhullámokat hozhatunk létre egy merev, téglalap alakú keretre kifeszített gumihártyán vagy a felületi feszültség miatt létrejövő folyadékhártyán. Itt nem különálló csomópontok, hanem *csomóvonalak* jönnek létre. A merev drótból készült keret pontjai csomóvonalaknak tekinthetők. *Téglalap alakú, minden oldalán rögzített hártya sajátrezgéseinek frekvenciája:*

$$f_{n,m} = \frac{c}{2}\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.193a}$$

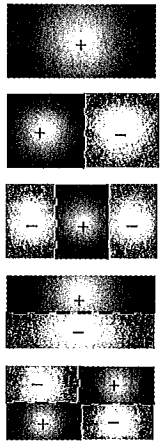
hullámhossza:

$$\frac{1}{\lambda_{n,m}} = \left(\frac{n^2}{4a^2}+\frac{m^2}{4b^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.193b}$$

Itt a és b a téglalap oldalai, m és n tetszőleges egész számok.

A 2.249. ábrán egy olyan téglalap alakú lemez lehetséges modusait láthatjuk, amelynek egyik oldala kétszer hosszabb a másiknál. Az ábrán a szaggatott vonalak a csomóvonalakat jelentik, amelyek a legegyszerűbb esetekben egyenesek. A csomóvonalak által határolt területeken belül a rezgések azonos fázisúak. Az egyes tartományokba beírt előjelek egy tetszőleges pillanatban adják meg a kitérések

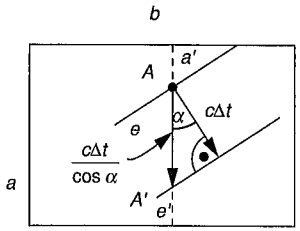
előjelét. Az egyes rezgési módokat, módusokat itt két egész szám jellemzi. Frekvenciáik itt már nem az alaprezgés egész számszorosai (az ábra 3. oszlopa).



m	n	f/f_0
1	1	1,00
1	2	1,09
1	3	2,75
2	1	1,34
2	2	1,549

2.249. ábra

Ha a kétdimenziós felület alakja kör, akkor a csomóvonalak egyszerűbb esetekben egyenesek és körök, a sajátfrekvenciák és hullámhosszak a sugár és a terjedési sebesség bonyolult függvényei.



2.250. ábra

Az alábbiakban a *téglalap alakú hártya* sajátrezgéseire vonatkozó (2.193a és b) képleteket látjuk be. Indítsunk el a hártyán egy olyan (transzverzális) hullámot, amelyek hullámfrontjai egymással párhuzamos egyenesek! A hullám terjedési iránya az a éllel valamilyen α szöget zár be, sebessége c, frekvenciája f (2.250. ábra). Szemeljük ki a hártyának azon pontjait, amelyek az a oldallal párhuzamos a' egyenesen vannak rajta! Az a' egyenes pontjai is hullámmozgást végeznek. Ez a tényleges hullám „metszete". E „metszeti hullám" frekvenciája a tényleges hullám frekvenciája. A metszeti hullámban a rezgésállapot nem c sebességgel terjed. Ugyanis szemeljük ki a hullám egy e hullámfrontját egy bizonyos t pillanatban! Az a' egyenes A pontjában a rezgésállapot a hullámfrontbeli rezgési állapot. Δt idő alatt a szóban forgó hullámfront, illetve rezgési állapot $c\Delta t$ utat tesz meg. A hullámfront helyzetét a 2.250. ábrán az e' egyenes jelzi a $t + \Delta t$ pillanatban. A szóban forgó rezgési állapot az a' egyenes A' pontjába került. A rezgési állapot az a' egyenes mentén AA' távolságot tett meg. A rezgési állapot terjedési sebessége az a' egyenes mentén – azaz a metszeti hullám sebessége – $\frac{AA'}{\Delta t} = \frac{c\Delta t}{\Delta t \cos\alpha} = \frac{c}{\cos\alpha}$. A visszaverődés a metszeti hullám terjedési sebességét nem változtatja meg, mert a tényleges hullám szintén α szögben verődik vissza.

Hasonlóképpen látható be, hogy a b oldallal párhuzamosan terjedő „metszeti" hullám terjedési sebessége $\frac{c}{\sin\alpha}$.

Ha a hártyán állóhullám alakul ki, akkor mind az a oldallal, mind a b oldallal párhuzamos metszeti hullámok is állóhullámok lesznek. Figyelembe véve, hogy a metszeti hullámok sebességei a fentiekben megállapított értékek, alkalmazhatjuk az egydimenziós állóhullámokra kapott eredményeket (lásd 2.192a):

$$f_{n,m} = \frac{cn}{2a\cos\alpha},$$

$$f_{n,m} = \frac{cm}{2b\sin\alpha}.$$

A sajátfrekvenciára vonatkozó mindkét feltételnek teljesülnie kell. A két egyenletből kifejezve a szögfüggvényeket és behelyettesítve a püthagoraszi összefüggésbe, kapjuk a (2.193a) képletet.

Háromdimenziós állóhullámok jöhetnek létre például egy merev falú, téglatest alakú tartományban lévő rugalmas közegben. A frekvenciára, illetve a hullámhosszra vonatkozó feltétel hasonló a téglalapra vonatkozóakhoz, azzal a különbséggel, hogy itt már három egész szám adja meg a rezgési lehetőségeket. Ennek oka az, hogy itt a téglatest éleivel párhuzamos irányban futó metszeti hullámok száma három. Így három egyenletet kapunk a frekvenciára, amelyben három tetszőleges pozitív egész szám szerepel.

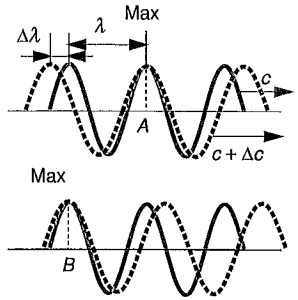
A csomópontok összességei itt síkfelületet is alkotnak. Merev falú gömbbel határolt rugalmas közegben létrejövő állóhullám csomófelületei síkok és gömbök is lehetnek. A sajátfrekvenciák itt is három egész számmal adhatók meg.

Kétdimenziós sajátrezgésekre példák a *Chladni-féle* ábrák. Középen befogott kör vagy téglalap alakú lemezre finomszemcsés homokot szórnak. A lemez szélén egy hegedűvonót végighúzva gerjeszthetjük az állóhullámokat. A rezgésbe jött lemeznek csak azon pontjain maradnak nyugalomban a homokszemcsék, ahol csomóvonalak vannak. Ha a lemez bizonyos pontjait lefogjuk, e pontokban csomópontokat alakíthatunk ki. A csomóvonalak ezeken a pontokon mennek át (megfelelő gerjesztés esetén).

2.8.3.5. Egy irányban haladó hullámok szuperpozíciója. Diszperzió, csoportsebesség, fázissebesség. Hullámcsomag

Egyirányú, eltérő frekvenciájú hullámok szuperpozíciója a hullámokkal együtt haladó vonatkoztatási rendszerből kényelmesen leírható. Egy adott t_0 pillanatban a hullámok kitérései csak az x helykoordinátától függenek. Szinuszhullámok esetén a kitérés–helykoordináta függvény egy szinuszfüggvény, melynek periódusa a hullámhossz. Ha a frekvenciák alig térnek el egymástól, akkor a hullámhosszak is közelítőleg egyenlők. Az eredő hullám a két hullám kitéréseinek összegzéséből állítható elő. Egy egyenesbe eső, kevéssé eltérő frekvenciájú rezgések összegzésénél találkozhatunk hasonló problémával. Ez a lebegés (lásd 1.1.5.6. pont). A különbség itt most csak annyi, hogy a lebegés nem az idő, hanem a távolság függvényében vizsgálandó. Ahol a maximumok egybeesnek, ott lesz az eredő hullám amplitúdója maximális. Az egyenlő sebességű hullámokat velük egyező sebességű vonatkoztatási rendszerből megfigyelve, mindkét hullám képe mozdulatlannak látszik. Így az eredő hullám amplitúdója tehát együtt halad az összetevőkkel, sebessége a hullámok sebességével egyezik meg.

Egyirányú, eltérő frekvenciájú hullámok szuperpozíciója olyan közegben, amelyben diszperzió lép fel. Diszperzió esetén a hullámok terjedési sebessége függ a hullám frekvenciájától. Ezért egy adott pillanatban a szinuszos hullámokról készített pillanatfelvételen ugyan lebegést láthatunk, de az eredő hullám maximuma már mozog az összetevő hullámokhoz képest. A két hullámot a kisebb, c sebességű hullámmal együtt haladó vonatkoztatási rendszerből nézve azt találjuk, hogy a gyorsabb hullám amplitúdója ebben a vonatkoztatási rendszerben Δc-vel halad előre.



2.251. ábra

A 2.251. ábrán ezt a nyugvó rendszerben $c + \Delta c$-vel haladó hullámot pontozott vonallal ábrázoltuk. $t = 0$ pillanatban a mozgó rendszerben az eredő hullám maximuma az A helyen található. Egy bizonyos idő, Δt idő múlva a gyorsabb hullám hullámhegye előremegy, az A helyen az eredő hullám maximuma eltűnik. Az eredő maximuma az A hely előtt jelenik meg a B helyen, ahol az összetevő hullámok amplitúdói egybeesnek. Így az eredő maximuma λ utat tesz meg a mozgó rendszerben visszafelé $\frac{\lambda}{\Delta t}$ sebességgel.

Az eredő hullám maximumának nyugvó rendszerbeli sebessége a *csoportsebesség* (jele c_{cs}). Mivel a c-vel mozgó rendszerben az eredő maximuma visszafelé halad, ezért a csoportsebesség $c_{cs} = c - \frac{\lambda}{\Delta t}$.

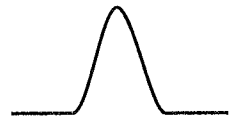
A szinuszhullámok terjedési sebessége a *fázissebesség*. A mozgó rendszerben a gyorsabb hullám hullámhegye Δc sebességgel halad előre, miközben Δt idő alatt $\Delta\lambda$ utat tesz meg. Ezért $\Delta t = \frac{\Delta\lambda}{\Delta c}$.

A csoportsebességre kapott képletbe helyettesítve:

$$\boxed{c_{cs} = c - \lambda \frac{\Delta c}{\Delta\lambda}}. \qquad (2.194)$$

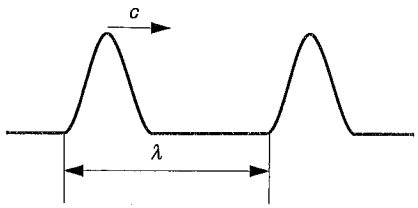
Látható, hogy a c_{cs} *csoportsebesség kisebb a fázissebességnél, ha a c fázissebesség a hullámhossz növekedésével nő* $\left(\frac{\Delta c}{\Delta\lambda} \text{ pozitív}\right)$, és nagyobb, ha a fázissebesség a hullámhossz növekedésével csökken $\left(\frac{\Delta c}{\Delta\lambda} \text{ negatív}\right)$.

Hullámcsomag. A hullámcsomag egyetlen, rövidebb-hosszabb ideig tartó hullámvonulat. A 2.252. ábrán egy hullámcsomagban lévő kitéréseket ábrázoltunk a hely függvényében egy adott t pillanatban.



2.252. ábra

A hullámcsomag mindig előállítható végtelen sok szinuszhullám összegeként. Az x helyébe t-t, λ helyébe T-t helyettesítve láthatjuk az analógiát a függvények (rezgések) Fourier-féle összetételével. A hullámcsomag a 2.253. ábra szerinti periodikus hullám határesetének fogható fel, ahol ez a térbeli periódus, a λ tart a végtelenhez.

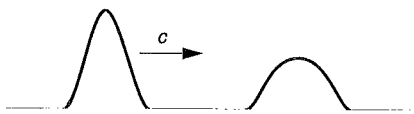


2.253. ábra

A Fourier-tétel alapján ez a periodikus függvény előállítható az $n\frac{1}{T}$ (az $\frac{1}{T}$ egész számú többszörösei) frekvenciájú hullámok összegeként. Itt T a λ hullámhossznak, $\frac{1}{T}$ a $k=\frac{1}{\lambda}$ ún. hullámszámnak felel meg. Így azt mondhatjuk, hogy a periodikus hullám mindig előállítható $n\frac{1}{\lambda}$ hullámszámú ($\frac{\lambda}{n}$ hullámhosszú) hullámok szuperpozíciójaként. Mivel λ tart a végtelenhez, ezért $\frac{1}{\lambda}$ tart a 0-hoz. A hullámszámok ezen kis mennyiségek egész számú többszörösei. A hullámszámokat számegyenesen ábrázolva, azok egymástól az igen kis $\frac{1}{\lambda}$ távolságra helyezkednek el. Így azt mondhatjuk, hogy a hullámcsomag kialakításában részt vevő hullámok hullámszámai, illetve hullámhosszai 0-tól kezdve minden lehetséges értéket felvesznek.

Az összetevő hullámok amplitúdója adott hullámcsomag esetén függ a hullámszámtól, illetve hullámhossztól. Hogy milyen hullámhosszú hullámok amplitúdója a legnagyobb, illetve a legkisebb, milyen az egyes összetevő hullámok amplitúdóinak egymáshoz viszonyított aránya, az a hullámcsomag alakjától függ. Keskeny, éles hullámcsomagban több nagyobb hullámszámú, azaz rövidebb hullámhosszú hullám van, mint a „laposban".

Hullámcsomag szétfolyása. A hullámcsomagot alkotó szinuszhullámok diszperzió esetén a hullámhossztól függően eltérő sebességgel mozognak. Ezért az idő múlásával a szinuszhullámok egymáshoz képest eltolódnak, egymáshoz viszonyított fázisuk megváltozik. Így egy közepes hullámsebességgel haladó vonatkoztatási rendszerből nézve a hullámcsomag alakja is változik. Ahol eddig a hullámok kioltották egymást, most a megváltozott fáziseltérés miatt már nem biztos, hogy az eredő amplitúdó 0. Ez azt jelenti, hogy a hullámcsomag „szétfolyik", kiszélesedik (2.254. ábra).



2.254. ábra

Rakjunk össze egy hullámcsomagot úgy, hogy az A helyen az összes hullámnak maximuma legyen! Itt a hullámcsomagnak is maximuma van, amely az összetevő hullámok amplitúdóinak összege. Kis idő múlva az eltérő fázissebességek miatt a maximumok eltolódnak, de nem egyenlő mértékben. Ezért a hullámcsomag maximuma már nem az összetevő hullámok amplitúdóinak összege, hanem annál kisebb. Az eredő hullám maximuma, a hullámcsomag maximuma csökken. A nullahelyekről is hasonlókat mondhatunk, az eddig nulla kitérésű helyek már nem lesznek nulla kitérésűek.

2.8.4. A hang és jellemzői

Hangnak a szubjektív hangérzetet keltő, levegőben terjedő longitudinális hullámokat nevezzük. Általánosabb értelemben a bármilyen rugalmas közegben terjedő longitudinális hullám a hanghullám.

Mivel a hang mechanikai hullám, ezért légüres térben nem terjed. Ha a légszivattyú burája alól kiszívjuk a levegőt, az ott lévő villanycsengő hangját nem halljuk.

A *hallható hang frekvenciája* 16 Hz és 16 000 Hz között van. A frekvenciahatárok az egyéntől is függenek. A hallhatóság felső határa az életkor növekedésével csökken. (A 20 Hz-nél kisebb frekvenciájú hangok az *infrahangok,* a 20 000 Hz-nél nagyobb frekvenciájúak az *ultrahangok.*)

A hang terjedési sebessége a levegőben csak a hőmérséklettől függ: 0 °C-on 331,5 m/s. t °C-os hőmérsékleten:

$$c=331,5\frac{m}{s}\sqrt{1+\frac{t}{273\ °C}}.$$

Általában a terjedési sebesség függ az anyagi minőségtől. Folyadékokban a hang többnyire gyorsabban terjed, mint gázokban. Szilárd testekben terjedő hanghullámok sebessége a longitudinális hullámokra vonatkozó (2.166) összefüggés alapján számítható. A sebesség többnyire nem függ a frekvenciától.

A hanghullámokban sűrűsödések és ritkulások terjednek tova. A sűrűségnövekedés nyomásnövekedéssel jár együtt. A nyomásnövekedésből származó rugalmassági energia és a térfogatelem mozgási energiájának összege adja a hanghullám energiáját.

A *hangintenzitás* egységnyi felületen időegység alatt merőlegesen áthaladó energia. Mértékegysége $\frac{W}{m^2}$: A még éppen hallható erősségű 1000 Hz frekvenciájú hang intenzitása $I_0=10^{-12}\frac{W}{m^2}$. A nyomásváltozás legnagyobb értéke, a nyomás amplitúdója. Ebben az esetben csak $3\cdot10^{-5}$ Pa, a normál légnyomás $3\cdot10^{-10}$ része.

A *hangteljesítmény* a hangforrás által időegység alatt kisugárzott hangenergia. Mértékegysége természetesen W. Néhány hangforrás teljesítménye:

normális beszéd	10^{-5}	W
kiáltás	10^{-3}	W
autókürt	5	W
légoltalmi sziréna	10^{3}	W.

A hang szubjektív jellemzői. Azt, hogy egy hangot milyen magasnak hallunk, elsősorban a frekvenciája szabja meg. A magasság a frekvenciával nő. A szinuszos hanghullám az ún. *tiszta hang*. A hangvilla és a megfelelő elektromos generátorral működtetett hangszóró hangja tiszta hang („üres hang"). A zenei hang periodikus, de nem szinuszos. A hangmagasság érzetét itt is elsősorban (de nem mindig!) a periodikus rezgés frekvenciája határozza meg. A rezgés 2.8.3.5. pont alapján felbontható szinuszos hullámok összegére (Fourier-felbontás). A *hangszín érzetét* a zenei hangban előforduló felharmonikusok adják. Az ún. *alaphang* a hang frekvenciájával megegyező szinuszos összetevő. A zenei hang Fourier-felbontásában szereplő, az alaphang frekvenciájánál nagyobb frekvenciájú hullámokat *felharmonikusoknak* nevezzük. Szigorúan periodikus hang felharmonikusainak frekvenciája az alaphang frekvenciájának egész számú többszöröse. A felharmonikusok amplitúdóinak az alaphang amplitúdóihoz viszonyított arányai szabják meg a *hangszín érzetét*. Egyenlő magasságúnak észlelt hegedű- és trombitahangban az alaphangok frekvenciája megegyezik, míg a hangszínek eltérését a felharmonikusok erősségének aránya határozza meg. Ha a felharmonikusok egy részét kiszűrjük, a hang eredete esetleg nem is ismerhető fel. A jó hangrögzítő készülékek és erősítők nem, vagy alig változtatják a felharmonikusok egymáshoz való viszonyát (minden frekvencián egyformán erősítenek a hangrezgések tartományában) (lásd a 10.7.1.3. alpontot).

A szubjektív hangerősség, a *hangosság* nem arányos a hangintenzitással. Valamely hangnál 10-szer, 100-szor nagyobb intenzitású hangot nem 10-szer, 100-szor erősebbnek, hanem csak 2-szer, 3-szor erősebbnek halljuk. A *Weber–Fechner-féle* pszichofizikai törvény értelmében az érzet (hangosság) az inger (intenzitás) logaritmusával arányos. Mivel a fül az egyező intenzitású, de eltérő frekvenciájú hangokat eltérő erősségűnek érzékeli, ezért egy tetszőleges frekvenciájú hangnál a hangosságot a következőképpen állapítjuk meg: Ha a tetszőleges frekvenciájú vagy frekvencia-összetételű hang erőssége hallás útján megítélve annyi, mint az I intenzitású 1000 Hz-es hangé, akkor

$$\boxed{H = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ phon (ejtsd: fón)}}. \qquad (2.195)$$

Itt I_0 annak az 1000 Hz-es hangnak az intenzitása, amelyet fülünk még érzékelni képes (10^{-12} W/m^2). Ennek az éppen hallható hangnak a hangossága a *hallásküszöb*, mely egyénenként változó. A fájdalomérzetet keltő hang erőssége a *fájdalomküszöb*, 130 phon.

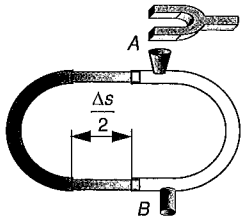
A hang terjedési tulajdonságai. Hullámtani jelenségek hanggal. A hanghullámok rezgésszáma kb. 16 Hz-től 16000 Hz-ig terjed. Ezért a hanghullámok hullámhossza kb. 20 m-től 2 cm-ig terjed. A tipikus hullámterjedési tulajdonságokból a néhány méteres méretű tárgyaknál az elhajlási jelenséget vesszük észre. Egyenes vonalú terjedés ilyen méretű tárgyaknál csak a magas hangok tartományában szembetűnő. A néhány cm-es hullámhosszú hanghullámokat kisebb méretű felületekkel is visszaverethetjük, parabolatükörrel összegyűjthetjük. Nagyméretű felületekről való visszaverődésnél, ha a felület elég távol van, képesek vagyunk megkülönböztetni a hullámforrásból kiinduló és a visszavert hangjelet *(visszhang)*. Fülünk csak legalább kb. tizedmásodperces időközzel érkező hangjeleket tud egymástól megkülönböztetni. Ezért a visszhang érzékeléséhez a hangforrás (amely többnyire mi magunk vagyunk) és a felület távolsága legalább 17 m kell hogy legyen.

Nagyon nagy frekvenciájú hangokkal a réseken, illetve réssorozaton történő *elhajlás és interferencia* is jól kimutatható.

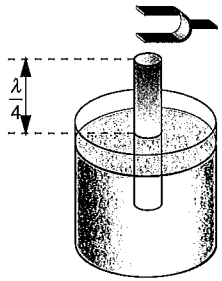
Az emberi test szerveiben, szöveteiben különböző sebességgel terjed a hang. A két közeg határán a hang egy része visszaverődik, a többi tovahalad. Nagyon nagy frekvenciájú (igen kis hullámhosszú) ultrahangot használnak az orvosi diagnosztikában (a köznyelv csak ultrahangnak nevezi). Itt egyetlen fejben van az ultrahang adója és vevője. Az adó által kibocsátott és a szövetekről, szervekről visszavert hullámokat a vevő érzékeli, és egy számítógép dolgozza fel értékelhető képpé. Előnye, hogy a lágy szövetekről is elég jól értékelhető képet ad mindenféle festési eljárás nélkül, és annyira ártalmatlan, hogy magzatok is vizsgálhatók vele. Hátránya, hogy a röntgenfelvételekhez képest nem ad elég részletdús képet, lévén a hullámhossza lényegesen nagyobb annak hullámhosszánál.

Hanghullámok interferenciáját a 2.255. ábra szerinti *Quincke-féle interferenciacsővel* tudjuk kimutatni. Ez két U alakú csőből áll, amelyek egymásba tolhatóak. Teljes összetolásnál hosszaik egyenlők. Az A toldathoz egy hangforrást helyezünk, és a B toldatnál figyeljük az intenzitást. A mozgatható részt kijjebb húzva az egyik hullám nagyobb utat tesz meg a másiknál. Az utak különbsége az ábrán bejelölt távolság kétszerese. Ha ez az útkülönbség fél hullámhossznyi, akkor nem hallunk hangot. A cső további kihúzásával növelve az útkülönbséget, elérhetjük a teljes hullámhossznyi stb. útkülönbséget. Így erősítési stb. helyeket találhatunk, és a hullámhossz közvetlenül mérhető.

Állóhullámokat kelthetünk egy hangvillával és egy vízbe merített, mindkét végén nyitott csővel (2.256. ábra). A hangvillát megütve és a csövet a vízből fokozatosan kiemelve, egy bizonyos helyzetben a hangvilla hangja rezonanciaszerűen felerősödik. A cső nyitott vége duzzadóhely, zárt vége, a vízfelszín csomópont. Így a csőből kiálló rész, a levegőoszlop hossza a hullámhossz egynegyede. A csövet tovább emelve ismét találunk maximumokat a negyed hullámhossz páratlan számú többszöröseinél.



2.255. ábra



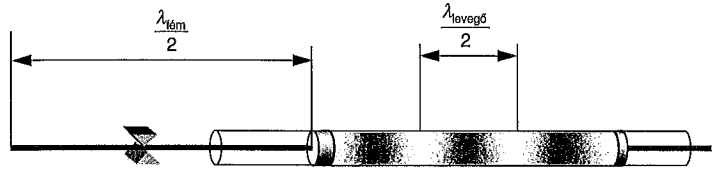
2.256. ábra

Állóhullámokat hozhatunk létre és még „láthatóvá" is tehetjük az ún. *Kundt-féle csővel* (2.257. ábra). A hangforrás lehet egy hangszóró vagy egy középen befogott fém vagy üvegrúd, melyet hosszirányú dörzsöléssel hozhatunk rezgésbe. A rúd végén dugattyú van, amely a csőbe nyúlva az ott lévő levegőoszlopot rezgésbe hozza. A csőbe nyúló másik, mozgatható dugattyúról a hanghullámok visszaverődnek, és megfelelő beállításnál a levegőoszlop „rezonál", erős hangot hallunk. Ekkor nemcsak a levegőoszlopban, hanem a rúdban is állóhullámok jönnek létre. Mivel a rúd közepe be van fogva, ezért a befogás helye csomópont, két vége duzzadóhely. Így a benne kialakuló állóhullám fél hullámhossza a rúd hossza. A csőbe finom parafareszeléket szórva, az a csomópontokban nyugalomban marad, míg a duzzadóhelyeken heves mozgást végez. A duzzadóhelyek távolsága a levegőben mért hullámhossz fele. Mivel a rúdban és a levegőben kialakuló állóhullámok frekvenciája megegyezik, ezért a könnyen mérhető hullámhosszak aránya egyben a terjedési sebességek aránya is. A csőbe különböző gázokat és különböző anyagú rudakat téve, ezzel az eljárással bennük a terjedési sebesség meghatározható.

Kifeszített *húrokat* megpendítve, azokon állóhullámok jönnek létre. Ha a húrt például egy szinuszgörbe alakú vonalzóval feszítenénk ki úgy, hogy a húr alakja szabályos szinuszgörbe legyen, a két végén csomóponttal, akkor a vonalzó elvételekor a húron egyetlen szinuszos állóhullám alakulna ki, amelyet mint tiszta szinuszos hangot hallanánk. A csak egy pontjában kifeszített húr már törtvonal alakú. Az elengedés után így létrejött rezgés a húron lehetséges szinuszos állóhullámokból tehető össze. A hang összetett lesz, benne az alaphang mellett a felhangok is megszólalnak, melyek frekvenciája az alaphang frekvenciájának egész számú többszöröse. A létrejött felhangok száma és amplitúdója, azaz a hang színe függ a rezgés milyenségétől, hol és hogyan hoztuk rezgésbe a húrt. A mindkét végén rögzített húr közepén az alaphangnak duzzadóhelye, az első felhangnak csomópontja van. A rezgő húrt középen óvatosan megérintve az alaphang kioltódik, és csak a felhangok hallhatóak. (Azok, amelyeknek itt csomópontja van.) Az első felhang különösen erős, ha a húrt negyedében pendítve hozzuk rezgésbe. A többi felhang hasonlóképpen megszólaltatható, de hangerősségük kisebb lesz.

Hangszerek. *Húros* hangszereknél a kifeszített húron pengetéssel vagy vonóval állóhullámokat keltünk. Az alaphang fél hullámhossza a húr hossza. Ez a húr szabad hossza. Az ugyanolyan anyagból készített, ugyanolyan hosszú húrokon ugyanakkora hullámhosszú állóhullámok alakulnak ki A hullámhosszat és vele

együtt a frekvenciát a húr hosszának a változtatásával, a húr „lefogásával" szabályozzák (pl. gitár, hegedű). A húron a terjedési sebesség a húrt feszítő erőtől és a húr jellemzőitől függ [lásd (2.167)]. Ezért, az $f=\frac{c}{\lambda}$ összefüggés alapján, még az ugyanolyan hosszú, átmérőjű és ugyanazon anyagú húrokon is a feszítés mértékétől függően, különböző frekvenciájú hullámok jönnek létre (hangolás). A húros hangszerek hangszínét erősen befolyásolja a hangszer üreges teste, mert a benne lévő levegő és a fal rezonancia útján a felhangok egy részét felerősíti, megváltoztatja amplitúdóik arányát. Így még két hegedű hangja is megkülönböztethető.



2.257. ábrán

A *fúvós hangszereknél* a levegőt szűk nyíláson átengedve vagy rezgő nyelven átfújva rezgésbe hozzuk. A hangszerben lévő levegőoszlop ebből a keverékrezgésből a sajátfrekvenciáinak megfelelőeket felerősíti. A levegőoszlop hosszának változtatásával szabályozzák az alaphang frekvenciáját (pl. furulya, síp, harsona stb.). Az orgona fúvós hangszer, amelyben sok különböző hosszúságú síp van. A billentyűk lenyomásával egy szerkezetet hozunk működésbe, amely a megfelelő sípot „megfújja".

Az *ütős* hangszereknél egyetlen ütés viszonylag hosszú ideig tartó hangot hoz létre, amelynek sajátos színezete van (pl. harangok, dobok stb.).

Konszonancia, disszonancia. Hangsorok. Konszonanciáról beszélünk, ha két vagy több zenei hangot egyszerre hallva azokat kellemesnek találjuk. Az ellenkező eset a disszonancia. Két hang konszonanciája szempontjából csak a hangok frekvenciáinak aránya érdekes. Az alaphangok frekvenciáinak aránya, $\frac{f_1}{f_2}$, a *hangköz* (itt f_1 a magasabb hang frekvenciája). Egy hangköz annál inkább tűnik konszonánsnak, minél kisebb egész számok aránya a frekvenciák aránya. Az egyes hangközöknek külön nevük van. Az alábbiakban a konszonancia mértékének megfelelően csoportosítva láthatók a hangközök nevei és frekvenciájuk arányai:

Abszolút konszonancia:
Uniszónó 1:1
Oktáv 2:1
Duodecima 3:1
Teljes konszonancia:
Kvint 3:2
Kvart 4:3
Közepes konszonancia
Nagy terc 5:4
Nagy szext 5:3
Tökéletlen konszonancia
Kis terc 6:5
Kis szext 8:5

A konszonancia nem objektív fogalom. Megítélése függ a zenei kultúrkörtől és az egyéntől.

Az egymást meghatározott hangközökkel követő hangok sorozata a *hangskála, hangsor.*

A hangszerek hangolásához használt *normálhang* az *normál zenei hang,* melynek frekvenciája 440 Hz.

II. TERMODINAMIKA

3. Alapfogalmak. Az energiamegmaradás törvénye

A termodinamika (hőtan) a fizika hőjelenségekkel foglalkozó területe. Az ebben a részben tárgyalt fenomenologikus termodinamika a hőfolyamatokra vonatkozó legáltalánosabb törvényeket fogalmazza meg. A hőjelenségek molekuláris magyarázatával a statisztikus fizika foglalkozik (lásd a VI. részt).

3.1. Belső energia; hőfolyamatok; hőmérséklet

A mechanikai energiamegmaradás elve korlátozott érvényű. Csak akkor érvényes, ha a rendszerben kizárólag konzervatív erők, illetve a konzervatív erőkön kívül olyan erők hatnak, melyek munkája nulla. Sok esetben egy mechanikailag zárt rendszer mechanikai energiája növekedhet vagy csökkenhet.

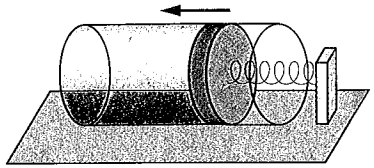
Egy nyugalomban lévő puska elsütésekor mind a lövedék, mind a puska mozgási energiája nő, annak ellenére, hogy a rendszert alkotó testek valamilyen másfajta mechanikai energiája, pl. potenciális energiája nem csökken. Esetünkben a rendszer teljes mechanikai energiája nő.

Rugalmatlanul ütköző, zárt rendszert alkotó testeknél a mozgási energiák összege csökken anélkül, hogy a rendszer másfajta mechanikai energiája növekedne.

Mindkét esetben azt találjuk, hogy a rendszert alkotó testek vagy egy részük fizikai jellemzői megváltoznak. Példáinkban a szilárd robbanóanyag kémiailag is más tulajdonságú gázzá alakult; az ütköző testek felmelegedtek. Ezek a fizikai jellemzők nem a mechanikai energiával kapcsolatosak, hanem a test belső szerkezetében, belső tulajdonságaiban végbemenő változásokkal. Azt is mondhatjuk, hogy a „keletkezett" mechanikai energia a robbanóanyag belső szerkezetéből adódó energiából jött létre, az ütköző testek pedig belső szerkezetükkel kapcsolatos energia formájában vették fel az „eltűnt" mechanikai energiát. Minden eddigi tapasztalat azt mutatja, hogy a zárt rendszer mechanikai energiájának megváltozása mindig együtt jár a rendszert alkotó testek valamilyen fizikai jellemzőinek megváltozásával.

Egy test belső szerkezetével, belső tulajdonságaival összefüggő, a testben tárolt energia a *belső energia.*

Egy rugós puskából kilőtt golyó mozgási energiája az összenyomott rugóból származik. Az összenyomott rugó energiájának csökkenése egyenlő a golyó mozgási energiájának növekedésével. A golyó mozgási energiájának megváltozását a golyóra ható, a rugó által kifejtett erő munkájából is meghatározhatjuk. Az összenyomott rugó munkavégzése a golyó mozgási energiájának megváltozásával egyenlő.



3.1. ábra

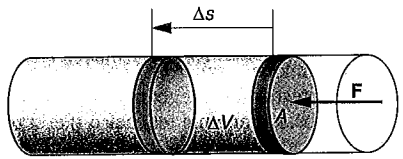
A 3.1. ábra szerinti elrendezésben az összenyomott rugó rögzítését kioldva a tartályban lévő gázt a dugattyú összenyomja. A rugó rugalmassági energiája csökken. Mint előző példánkban, itt is mondhatjuk, hogy az „eltűnt" rugalmassági energiát a másik test, az összenyomódó gáz vette fel. Tehát a gáz belső energiája megváltozott. A gáz által felvett mechanikai eredetű energiát a rugó által a gázra kifejtett erő munkájából meghatározhatjuk.

Ha egy testre ható erők a test mechanikai energiáját nem változtatják meg, akkor az erők munkája a belső energiát változtatja meg.

3.1.1. A térfogati munka

E pontban kiszámítjuk a belső energia megváltozását okozó munka nagyságát.

A 3.2. ábra szerinti összeállításban súrlódásmentesen mozgó dugattyú zár el a külvilágtól gázt, folyadékot vagy szilárd testet. Rögzítsük le a tartályt! Mivel a tartály nyugalomban van, ezért a falak által kifejtett erők munkája nulla. Toljuk beljebb a dugattyút F erővel!



3.2. ábra

Válasszuk a dugattyú Δs elmozdulását olyan kicsinek, hogy az elmozdulás közben az F erő elhanyagolható mértékben változzon, azaz jó közelítéssel állandónak tekinthető! Ekkor a tartályban lévő testre ható erő munkája: $F\Delta s$. Ha a tartályban folyadék vagy gáz van, akkor $F = pA$. Így $W = pA\Delta s$. Itt $A\Delta s$ a test térfogatváltozását jelenti. A konvenció alapján a $\Delta V = V_{\text{késő}} - V_{\text{korábbi}}$ mennyiség most negatív, hiszen a test térfogata csökken. Ezért a $p\Delta V$ előjele is negatív. A gázra ható erő munkája a munka definíciója következtében pozitív, hiszen az erő és elmozdulása egyirányúak. Ezért, hogy a W munkára helyes előjelet kapjunk, a szorzat elé még egy negatív előjelet kell tennünk. Ha a térfogatváltozás közben a nyomás nem változik, vagy változása elhanyagolható, a testre ható erő munkája, a térfogati munka:

$$\boxed{W = -p\Delta V}. \tag{3.1}$$

A térfogati munka összenyomásnál pozitív, azaz a környezet a test belső energiáját munkavégzés útján növeli. Ezt úgy is szokás mondani, hogy környezet munkát végez a testen. Tágulásnál a térfogati munka előjele negatív. Ekkor a test belső energiája munkavégzés során csökken, a környezetnek energiát ad át. Ezt úgy is szokták mondani, hogy ekkor a test végez munkát a környezetén belső energiájának rovására. Pl. ha a gáz tágul, és a dugattyút csak a külső légnyomás nyomóereje tartja a bezárt gáz nyomása ellenében, akkor a gáz a környező levegőnek ad át energiát munkavégzés útján.

Az utóbbi esetben szemléletes példán mutathatjuk be, hogy a „külső légnyomás ellenében végzett munka" a környező levegő energiáját növeli: ha egy vízzel telt akváriumba helyezünk el egy gázzal teli dugattyús hengert és hagyjuk a gázt tágulni, akkor jól láthatóan a vízszint emelkedik, a víz helyzeti energiája nő. Ha most ugyanezt a kísérletet a „levegőóceán" alján végezzük el, akkor annak „szintje megemelkedik", helyzeti energiája nő. Az más kérdés, hogy ez nemigen mutatható ki, mert a legtöbb esetben az általunk elképzelt vagy ténylegesen elvégzett kísérletekben a külső légnyomás ellenében végzett munka sokkal kisebb a levegőóceán helyzeti energiájánál.

Amennyiben a nyomás változik a térfogatváltozás közben, akkor a térfogati munka közelítő értékét a következőképpen határozhatjuk meg: osszuk fel a térfogatváltozást olyan kicsi térfogatváltozásokra, melyek során a nyomás jó közelítéssel alig változik. Az i-edik lépésben legyen a nyomás p_i, a térfogatváltozás ΔV_i. Ebben a lépésben az elemi térfogati munka $-p_i\Delta V_i$. A térfogati munka közelítő értéke az elemi térfogati munkák összege:

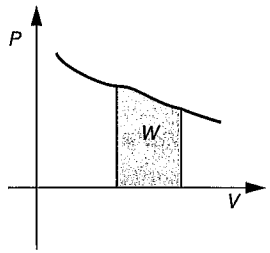
$$W \approx -\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta V_i.$$

A térfogati munka pontos értékét úgy kapjuk mg, hogy a ΔV_i elemi térfogatváltozással tartunk a nullához:

$$W = \lim_{\Delta V_i \to 0} -\sum p_i \Delta V_i = -\int_{V_1}^{V_2} p\left(V\right) \mathrm{d}V. \tag{3.2}$$

Ábrázoljuk a p nyomást a V térfogat függvényében a p–V koordináta-rendszerben! Ha a térfogatváltozás folyamán a nyomás állandó, akkor a 3.3 ábra szerint a $p\Delta V$ számértéke a p „magasságú" és ΔV „szélességű" téglalap területének számértékét jelenti, azaz a p–V görbe alatti területet. Általában is igaz, hogy a térfogati munka számértéke a p–V grafikonon a görbe alatti terület számértéke. Előjelét az

dönti el, hogy a térfogat nő-e vagy csökken. Szokás a folyamatot jellemző görbére nyilat rajzolni, mely a folyamat irányát mutatja.



3.3. ábra

3.1.2. Hőfolyamatok

A hő. A tapasztalat szerint a rugalmatlanul ütköző golyók felmelegednek, miközben belső energiájuk nő. A dugattyúval összenyomott gáz belső energiájának növekedésével együtt jár melegedése, nyomásnövekedése. A testek fizikai jellemzőinek ugyanilyen megváltozását nemcsak a testen végzett munkával, hanem egy melegebb testtel való érintkezéssel is elérhetjük. A belső energia változhat munkavégzés nélkül is, pusztán úgy, hogy egy másik testtel érintkezik a szóban forgó test. Az ilyen folyamatokat *hőfolyamatoknak* nevezzük. Eközben a melegebb test lehűl, belső energiája csökken.

A hőfolyamatok során átadott energiát mérő mennyiség a *hőmennyiség*. Jele Q. Skalár. Mértékegysége az energia mértékegysége. A munkával analóg fogalom; munkavégzés során átadott vagy felvett energiát a munka, hőfolyamat során felvett, illetve leadott energiát a hőmennyiség méri. A hőfolyamat közben történő energiafelvétel, illetve -leadás esetén azt is szokás mondani, hogy a test hőt, hőmennyiséget vesz fel, illetve ad le.

A hőmennyiség, illetve hőfelvétel kifejezés abból az időből származik, amikor a hőfolyamatok magyarázatára az ún. *„hőanyag-elméletet"* használták. Ennek lényege az az elképzelés volt, hogy hőfolyamatok során az egyik testből a másikba egy különleges anyag, a *hőanyag* megy át, és a testek hőmérséklete hőanyag-tartalmukkal egyenesen arányos. Ezek szerint ha egy test egy hidegebbel érintkezik, akkor hőanyagot ad át. Ezzel hőanyag-tartalma csökken, ezért lehűl, a hidegebb test hőanyagot vesz fel, ezért felmelegszik. A felvett és leadott hőanyag-mennyiségek, hőmennyiségek egyenlők. Ez burkoltan azt is jelenti, hogy zárt rendszerben a hőanyag-mennyisége változatlan, azaz megmaradó mennyiség. Ez az elmélet csak addig állja ki a tapasztalat próbáját, amíg a testek között munkavégzés nincs. Ugyanis a *„hőanyag"* munkavégzéssel együtt járó folyamatokban nem marad meg. Pl. egy gázt összenyomva, az felmelegszik, *„hőanyag-tartalma"* nő anélkül, hogy környezetében bármelyik test „hőanyag-tartalma" csökkent volna.

Szigetelők. Két test közé különböző anyagokból készült falakat helyezve az energiaátadást megakadályozhatjuk, illetve nagymértékben lelassíthatjuk. Merev fal akadályozza a munkavégzéssel történő energiaátadást. A két test közé tett bizonyos (fából, azbesztből, üveggyapotból stb.) készített falak a hőfolyamattal járó energiaátadást nagymértékben lassítják, ideális esetben lehetetlenné teszik.

A hőfolyamatokat kizáró szigetelőket *hőszigetelőknek* nevezzük.

A testek közötti energiacsere módját megfelelő szigetelőkkel szabályozhatjuk, lehetővé tehetjük, illetve megakadályozhatjuk. Pl. egy gáztartályt dugattyúval kettéválasztva, és a dugattyú tulajdonságait megfelelően megválasztva, kizárhatjuk az energiacserét vagy csak az energiacsere egyik módját. Példánkban a rögzített hőszigetelőből készített merev dugattyú kizárja az energiacserét. A nem rögzített, hőszigetelő dugattyú lehetővé teszi a munkavégzéssel járó energiacserét, de a hőfolyamatot kizárja. A rögzített, nem hőszigetelő, azaz hővezető dugattyú megengedi a hőfolyamat útján történő energiacserét, a munkavégzéssel járót azonban kizárja. A hőáteresztő és nem rögzített dugattyú az energiaátadás mindkét módját megengedi. Azokat a rendszereket, amelyeket olyan szigetelőkkel veszünk körül, amelyek az energiacsere minden lehetséges módját kizárják, (energetikai szempontból) *zárt rendszereknek* nevezzük.

3.1.3. Mechanikai és hőegyensúlyi állapot

Ha két test között megengedjük a munkavégzéssel vagy hőfolyamattal járó energiaátadást, akkor egy idő múlva az energiacsere megszűnik, a testek fizikai jellemzői nem változnak tovább, *a testek egyensúlyi állapotba* kerülnek.

Ha a két test között csak mechanikai úton, munkavégzéssel történő energiaátadás jöhet létre, mint pl. hőszigetelő, nem rögzített dugattyúval elválasztott gázok között, akkor a folyamat addig tart, amíg a nyomások ki nem egyenlítődnek. A két gáz között egyensúly jön létre, a gázok egyetlen fizikai jellemzője sem változik a továbbiakban. Az így létrejött egyensúlyi állapot *a mechanikai egyensúly*. Ennek az egyensúlynak szükséges és elegendő feltétele a *nyomások egyenlősége*. A mechanikai munkavégzéssel történő folyamatok kiegyenlítődési folyamatok, amelyek a nyomások kiegyenlítődéséig tartanak.

Ha két test között hőfolyamat lehetséges is, akkor a hőfolyamat során történő energiaátadás is megszűnik egy bizonyos idő múlva, a testek fizikai jellemzői tovább már nem változnak, a testek hőegyensúlyi állapotba kerülnek. A tapasztalat szerint a hőfolyamat is kiegyenlítődési folyamat.

Ha a két test között hőegyensúlyi állapot jön létre, akkor nem biztos, hogy mechanikai egyensúlyban is vannak: pl. hőáteresztő, rögzített dugattyúval elválasztott gázok nyomása eltérő lehet.

3.1.4. A hőmérséklet és mérése

3.1.4.1. A hőmérséklet fogalma

A szubjektív hőérzet. Kezünkkel megérintve hőfolyamatban részt vevő testeket, azt találjuk, hogy eltérő „melegek". A hőegyensúlyi állapotban lévő testeket egyforma „melegnek" érezzük.

A testeket érzeteink alapján különböző „melegségűnek" érezzük. A testeknek ez a jellemzője a *szubjektív hőmérséklet.* Tapasztalataink alapján ez az a mennyiség, jellemző, amelyik a hőegyensúlyi állapot esetén egyenlő, hőátadásnál eltérő. Ez a szubjektív, érzeteinken alapuló fogalom nem elegendő a pontos megállapításokra. (Pl. nagy hidegben még a langyos vizet is forrónak érezzük.) A *hőmérséklet mikrofizikai definícióját* lásd még 22.1.2.2. Az ideális gáz hőmérséklete

Az egyenlő hőmérséklet definíciója. *Két test hőmérsékletét egyenlőnek mondjuk, ha hőegyensúlyi állapotban vannak.*

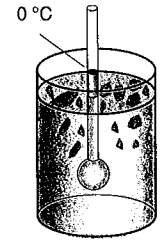
Vegyünk két testet, *A*-t és *B*-t, amelyek hőegyensúlyi állapotban vannak! Szemeljünk ki egy harmadik, *C* testet, és hozzuk érintkezésbe egyszer *A*-val, illetve *B*-vel úgy, hogy velük külön-külön hőegyensúlyi állapotba kerüljön. Megmérve mindkét esetben a *C* test fizikai jellemzőit (térfogat, elektromos ellenállás, szín stb.), azokat egyenlőnek találjuk. (Olyan kisméretű testet válasszunk, amely nem befolyásolja számottevően egyik test állapotát sem.) Ezt az általános tapasztalati tényt a *termodinamika nulladik főtételének* is szokás nevezni.

Ezzel a *C* testtel el tudjuk dönteni, hogy két test egyenlő hőmérsékletű-e a definíció értelmében. Ha az *A* és *B* testek nem voltak hőegyensúlyi állapotban, azaz a definíció szerint eltérő hőmérsékletűek voltak, akkor a *C* test fizikai jellemzői az *A*-val, illetve *B*-vel beállt hőegyensúlyi állapotokban eltérőek lesznek. A *C* testet különböző testekkel külön-külön hőegyensúlyi állapotba hozva és ezekben az esetekben fizikai jellemzőit megmérve, el tudjuk dönteni, hogy mely testek egyenlő, illetve eltérő hőmérsékletűek. Ez a kiszemelt test alkalmas a fenti eljárással a hőmérsékletek összehasonlítására. Az megállapodás kérdése, hogy milyen test melyik fizikai tulajdonságát használjuk fel a hőmérsékletek összehasonlítására, illetve mérésére. Szintén megállapodás kérdése az is, hogy valamely mért fizikai jellemző adott értékéhez mekkora hőmérsékletértéket rendelünk hozzá.

3.1.4.2. Hőmérsékleti skálák; hőmérőfajták

A köznapi életben többnyire elegendő a higanyos (vagy más folyadékos) hőmérő pontossága és méréshatára.

A *Celsius-féle* hőmérsékleti skálát 1742-ben vezette be Anders Celsius (1701–1744) svéd természettudós. E hőmérsékleti skálánál a folyékony higany hőtágulását használják a hőmérséklet mérésére. A hőmérő egy üvegből készült, higannyal telt tartály, mely vékony csőben folytatódik (3.4. ábra).



3.4. ábra

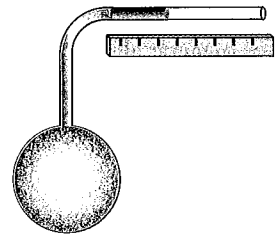
A hőmérőt olvadó jégbe mártva bejelöljük a higanyszintet. Ez a Celsius-féle hőmérsékleti skála alappontja, a 0 °C (0 Celsius-fok). A másik alappontot úgy kapjuk meg, hogy a hőmérőt 100 kPa nyomáson forrásban lévő vízbe mártjuk. Ezt 100 °C-nak választjuk. A két higanyszint közötti távolságot 100 egyenlő részre osztva kapjuk az 1 °C-ot.

A fenti eljárásnál figyelembe kell vennünk az alkalmazott üveg tulajdonságait is.

Az angolszász országokban ma is használt hőmérsékleti skála a *Fahrenheit-féle hőmérsékleti skála.* 1720-ban vezette be Daniel Gabriel Fahrenheit német fizikus (1686–1736). E skála nullpontja az ammóniumklorid és víz oldatával akkoriban előállított legalacsonyabb hőmérséklet –17,8 °C, 100 fokja pedig a fizikus akkori testhőmérséklete: 37,8 °C. A skálán a víz fagyáspontja 32 °F, forráspontja 212 °F. Átszámítási formulák: [°C] = ([°F]–32) × 5/9; [°F] = [°C] × 9/5+32.

Ez a hőmérséklet-mérési eljárás magas és alacsony hőmérsékletek mérésére nem alkalmas, mert alacsony hőmérsékleten a higany megfagy, magas hőmérsékleten felforr, elpárolog.

A *gázhőmérő* lényegesen nagyobb hőmérsékleti tartományban használható, egészen addig, amíg a tartály elviseli a magas hőmérsékletet (3.5. ábra). Itt is a térfogatváltozást használjuk a hőmérséklet mérésére úgy, hogy a gáz nyomását állandónak tartjuk. A beskálázási eljárás ugyanaz, mint a higanyos hőmérőnél. Ezért a gázhőmérő alkalmas a Celsius-skála kiterjesztésére alacsony és magas hőmérsékleten (lásd bővebben a 4.2.4. pontot).



3.5. ábra

A termodinamika II. főtétele lehetővé teszi, hogy konkrét testek anyagi tulajdonságaitól független hőmérsékleti skálát definiáljunk (lásd még 23.4. A hőmérséklet statisztikus fizikai értelmezése). Ez a hőmérsékleti skála a *termodinamikai* vagy *abszolút hőmérsékleti skála*. Ezen a hőmérsékleti skálán az olvadó jég hőmérséklete kereken 273°, a 100 kPa-on forrásban lévő víz hőmérséklete 373°. A két alappont távolságát most is 100 egyenlő részre osztjuk. Az egy osztásrész felel meg az abszolút hőmérsékleti skála egységének, 1 kelvinnek (1 K). A definícióból látható, hogy 1 K-es hőmérséklet-változás egyenlő 1 °C-kal. A Celsius-fokokban mért t hőmérséklet és a Kelvin-fokokban mért hőmérséklet közötti összefüggés:

$$T = t + 273°.$$

Hőmérőfajták. Nagyon alacsony hőmérsékletek mérésére higany helyett más folyadékok hőtágulását használják. Pl. az izopentánnal töltött folyadékos hőmérő –195 °C-ig használható. A higannyal töltött hőmérő kb. 800 °C-ig használható, ha fölötte nagynyomású gáz van. A *bimetálszalagos* hőmérő két, eltérő hőtágulási együtthatójú fémcsíkból összeszegecselt csík, melynek görbülete függ a hőmérséklettől. A számítógépes adatfeldolgozás megkívánja olyan hőmérők használatát, melyek a könnyen digitalizálható elektromos jellemzőik alapján mérik a hőmérsékletet. Ilyenek pl. az *ellenállás-hőmérők* és a *termoelemek*. Ezek ráadásul igen kicsire is készíthetők, és igen pontosak is lehetnek.

A *maximum- és minimumhőmérők* egy adott időintervallumon belül mérik a maximális, illetve a minimális hőmérsékletet. Maximumhőmérő a még ma is használatos higanyos *lázmérő*, amely egy viszonylag nagy higanytartályból és egy hozzá csatlakozó vékony kapilláriscsőből áll. A kapillárist a tartályhoz közeli részén erősen beszűkítik. Lázméréskor a higany a hőtágulás miatt ezen a szűk részen kipréselődik a kapillárisba. Ha a hőmérő lehűl, a higanyszál a szűkületnél megszakad, és így nem folyik vissza a tartályba. A maradék higanyszál hossza a lehűlés hatására alig csökken, és így a maximális hőmérsékletet mutatja. A kapillárisban lévő higanyt rázással juttatjuk vissza a tartályba. Az *elektromos lázmérők* nem tartalmaznak higanyt, és elektronikus úton határozzák meg és jelzik ki a maximális hőmérsékletet.

Igen magas hőmérsékletek mérésére a test által kibocsátott elektromágneses hullámok tulajdonságait használjuk fel (lásd a 6.3. szakaszt). Az *infrahőmérők* a test által kibocsátott infravörös sugárzás alapján határozzák meg a hőmérsékletet anélkül, hogy a testhez hozzáérnének.

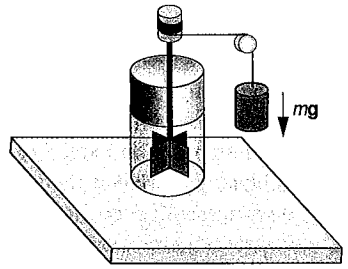
3.2. A termodinamika I. főtétele; az általános energiamegmaradás elve

3.2.1. A belső energia változásának mérése

Ha egy test és környezete között nincs hőfolyamat során energiacsere, a testen történő munkavégzést *adiabatikusnak* mondjuk. *Egy test két állapota közötti belső energiájának megváltozását azzal az adiabatikus munkavégzéssel mérjük, amely ahhoz szükséges, hogy a testet egyik állapotából a másikba jutassuk.*

A munkavégzés során a test fizikai jellemzői megváltoznak. Kísérletekkel meghatározható, hogy a belső energia változása a testek milyen fizikai jellemzőinek mekkora változásával jár együtt. Így a test fizikai jellemzőinek méréséből meg tudjuk határozni a belső energiájának változását. A test belső energiája a tapasztalat szerint függ a hőmérséklettől, halmazállapottól és még más fizikai jellemzőktől. A belső energia és a részecskék energiájának kapcsolatát a gázoknál a 22.1. fejezetben, szilárd testeknél és folyadékoknál a 25.2., 29.3. fejezetekben találhatjuk meg.

Ilyen méréseket végezhetünk pl. folyadékokkal vagy gázzal, ha összenyomjuk őket egy jól hőszigetelt edényben. *Joule kísérletében* egy süllyedő súly munkavégzése szolgáltatja az adiabatikus munkavégzést úgy, hogy a 3.6. ábra szerint a súlyhoz erősített fonalat a keverőlapát tengelyére erősítjük.



3.6. ábra

A süllyedő súly forgásba hozza a lapátokat. A súly megállítása után a folyadék nyugalomba kerül. A súly *mgh* munkája megnövelte a folyadék belső energiáját. A folyadék jellemzőinek változását, pl. hőmérsékletének változását megmérhetjük. Ha pl. 0 °C-os víz–jég keverékét helyezzük az edénybe, akkor esetleg nem tapasztalunk hőmérséklet-változást, csak halmazállapot-változást. Tehát a belső energia megváltozása nem jár mindig együtt hőmérséklet-változással.

3.2.2. A termodinamika I. főtétele

Egy test belső energiájának megváltozása egyenlő a testtel hőfolyamat során közölt energia és a munkavégzés összegével:

$$\boxed{\Delta U = Q + W}. \tag{3.3}$$

Itt W a testre ható olyan erők munkavégzésével egyenlő, amelyek nem változtatják meg a test potenciális vagy mozgási energiáját. Ilyen például a térfogati munka.

A termodinamika I. főtétele semmiből le nem vezethető tapasztalati törvény. Érvényességét az bizonyítja, hogy soha nem találtak olyan jelenséget, mely e törvénynek ellentmondana. Pl. zárt rendszert alkotó két test között megengedve akár a hőfolyamatot, akár a munkavégzést vagy mindkettőt, a testek fizikai jellemzőinek méréséből meghatározott belsőenergia-változásokat mindig egyenlő nagynak és ellentett értelműnek találták.

3.2.3. Az általános energiamegmaradás elve

A mechanikai és a nemmechanikai (pl. elektromágneses) energiákhoz hozzávéve a belső energiákat, a termodinamika I. főtételénél általánosabb kijelentést tehetünk:

Zárt rendszerben, bármilyen folyamatok mennek is végbe a rendszeren belül, az energiák összege változatlan.

Az általános energiamegmaradás elve szintén *tapasztalati tény.* Ha a rendszer nem zárt, akkor az energiamegmaradás elve azt jelenti, hogy rendszer energiája pontosan annyival változik meg, amennyit a környezettől felvett, illetve annak leadott. Egy rendszer összenergiája csak a környezettel történő energiacsere révén változhat meg, a rendszeren belül energia nem keletkezhet, és nem is tűnhet el. Ebből következik, hogy *nincsen olyan gép* (fizikai rendszer), *amely környezetének energiát adna le anélkül, hogy a környezettől energiát venne fel, vagy saját energiája nem csökkenne.* Azt, hogy a gép energiája nem csökkenne, úgy is fogalmazhatjuk, hogy fizikai jellemzői változatlanok maradnak. (Legalábbis az energialeadás előtti és utáni állapota ugyanaz lenne.) Az ilyen, a környezetnek csak energiát leadó, de közben változatlanul maradó (nem csökkenő energiájú) képzeletbeli gépet *elsőfajú perpetuum mobilének* nevezzük. (Az ilyen gép magyar neve *„örökmozgó".* Nem találó elnevezés, mert nem az örökké mozgás a lényege, hanem inkább az „örökké történő munkavégzés" anélkül, hogy a környezettől energiát venne fel, illetve saját energiája csökkenne.)

A általános energiamegmaradás elve az *elsőfajú perpetuum mobile létezésének lehetetlenségét* mondja ki.

3.3. Állapotjelzők

A rendszer egyensúlyi állapotát *egyértelműen meghatározó fizikai mennyiségeket állapotjelzőnek* nevezzük. Pl. egy gáz állapotjelzői a nyomás, térfogat, hőmérséklet stb. Az állapotjelzők lényeges tulajdonsága, hogy ha a rendszer egy A egyensúlyi állapotából egy másik, B állapotába kerül, akkor az *állapotjelző megváltozása független attól,* hogy a rendszer az A állapotából *milyen állapotok sorozatán* keresztül jutott a B állapotba. Így egy újonnan bevezetett fizikai mennyiségről el tudjuk dönteni, hogy állapotjelző-e. Pl. a belső energia állapotjelző. Állapotjelző még pl. ebben az értelemben a közelítőleg egyensúlyi állapotok sorozatán történő adiabatikus munkavégzés is. Nem állapotjelző a hőfolyamat során felvett energia vagy a (nem adiabatikus!) munka, mert egy testet egy A állapotából egy másik, B állapotba el tudunk juttatni eltérő hőmennyiségekkel és munkákkal (lásd a 4.3.4. pontot).

Extenzív állapotjelzők. Azokat az állapotjelzőket nevezzük extenzívnek, amelyek a rendszerek egyesítésekor összeadódnak. Ilyen állapotjelzők pl. a tömeg, belső energia, térfogat stb. Az extenzív állapotjelzők lehetnek megmaradók és nem megmaradó mennyiségek egy adott folyamatban. Pl. zárt rendszerben a belső energiák összege változatlan. A térfogat ellenben zárt rendszerekben bizonyos esetekben megmarad, más esetekben viszont nem. Pl. szilárd testek termikus kölcsönhatásakor a felmelegedéssel és lehűléssel együtt járó térfogatváltozások általában nem egyenlítik egymást, az össztérfogat változik. Egy zárt, merev falú tartályban dugattyúval elválasztott gázoknál a térfogatváltozások kiegyenlítik egymást, az össztérfogat változatlan.

Intenzív állapotjelzők. Az olyan állapotjelzőket, amelyek egyensúlyi állapotba kerülő részrendszerek egyesítésekor kiegyenlítődnek, intenzív állapotjelzőnek nevezzük. Intenzív állapotjelző pl. a nyomás és a hőmérséklet. A mechanikai kölcsönhatás jellemző intenzív mennyisége a nyomás, a hőfolyamat jellemző intenzív mennyisége pedig a hőmérséklet. Az intenzív állapotjelzőket a rendszer jellemzésére csak akkor használjuk, ha a rendszer minden része a többivel egyensúlyban van. Általában az állapotjelzőket csak egyensúlyi állapotokban van értelme a rendszer jellemzésére használni.

Az egyfázisú, egykomponensű rendszerek állapotát három állapotjelzővel jellemezhetjük. Az *állapotjelzők között fennálló összefüggés: az állapotegyenlet* miatt csak kettő független egymástól. Így a rendszer állapotának megadására elegendő két állapotjelző. Pl. gázoknál p, V, T.

4. Állapotváltozások

4.1. A szilárd anyagok és folyadékok hőtágulása

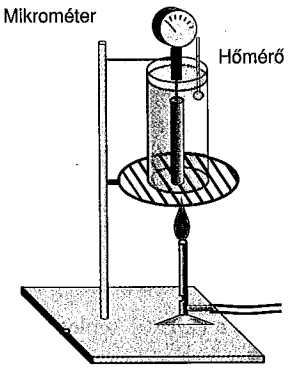
4.1.1. A szilárd anyagok lineáris (vonal menti) hőtágulása

Szilárd anyagok lineáris méreteinek változását a hőmérséklet függvényében a 4.1. ábra szerinti összeállításban vizsgálhatjuk. A hosszához képest kis átmérőjű rudat különböző hőmérsékletű folyadékfürdőkbe helyezzük. A mérések alapján a *rúd Δl hosszváltozása elegendő pontossággal egyenesen arányos a Δt hőmérséklet-változással, a rúd valamilyen t_0 hőmérsékleten mért l_0 hosszával és függ az anyagi minőségtől:*

$$\boxed{\Delta l = \alpha l_0 \Delta t} \,. \tag{4.1}$$

Az $\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta t}$ arányossági tényező a *lineáris hőtágulási együttható.* Mértékegysége $\frac{1}{°C} = \frac{1}{K}$.

Számértéke az illető anyagból készített rúd 1 K hőmérséklet-változás hatására bekövetkezett relatív hosszváltozását adja meg. Nagyságrendje kb. 10^{-5} 1/K.



4.1. ábra

A mérések alapján nem túl nagy hőmérsékleti intervallumban (kb. 100 °C-on belül) egyenlő hőmérséklet-változásokhoz egyenlő hosszváltozások tartoznak. A hosszváltozás tehát adott rúd esetén ugyanakkora hőmérséklet-változásra ugyanakkora, függetlenül attól, hogy mekkora hőmérsékletről indult a Δt-vel történő melegítés. Pl. 10 °C-ról 11 °C-ra való melegítésnél a hosszváltozás ugyanakkora, mint 80 °C-ról 81 °C-ra való melegítésnél. Az α-t meghatározó $\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta t}$ kifejezésben a $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ hányados nem túl nagy hőmérsékleti intervallumon belül független a hőmérséklettől. Az α értéke láthatóan csak attól függ már, hogy mekkora t_0 hőmérsékleten mértük meg a kezdeti l_0 hosszt. A táblázatokban megadják ezt a hőmérsékletet, többnyire 0 °C-t vagy 18 °C-t. Mivel a hőtágulás többnyire kis érték, ezért nem követünk el túl nagy hibát, ha a képletben a 0 °C-os (18 °C-os) hossz helyett az éppen aktuális, pl. 50 °C-os hosszal számolunk. Pontosabb számításoknál, ha a rúd hossza nem a t_0 hőmérsékleten van megadva, akkor ki kell számítanunk a t_0 hőmérsékleten mért hosszat.

Több száz °C-os hőmérséklet-különbségeknél a pontos mérések azt mutatják, hogy a $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ már függ a hőmérséklettől, a hőmérséklet növelésével többnyire nő.

A rúd hosszát t hőmérsékleten l_t-vel jelölve

$$l_t = l_{t_0} + \Delta l = l_{t_0} + \alpha l_{t_0} \left(t - t_0\right),$$

azaz

$$\boxed{l_t = l_{t_0} \left(1 + \alpha \left(t - t_0\right)\right)}. \qquad (4.2)$$

Szilárd anyagok lineáris méretei nemcsak a hőmérsékletüktől függenek, hanem a külső hatásra bennük ébredő rugalmas feszültségtől is. A (4.1), (4.2) képletek arra az esetre vonatkoznak, amikor a test feszültségmentes.

A lineáris hőtágulás a gyakorlatban. Egy rudat melegítve, hossza Δl-lel megnő, a magasabb hőmérsékleten feszültségmentes hossza $l + \Delta l$ lesz. Amennyiben ezt a hosszváltozást a rúd végeinek rögzítésével megakadályozzuk, akkor a rúd ezen a hőmérsékleten mért feszültségmentes hosszához képest Δl-lel rövidebb lesz. Így a támaszoknak a rúdra nyomóerőt kell kifejteniük, a rúdban nyomófeszültség ébred. Ezért a rúd a hatás–ellenhatás értelmében a szükséges nyomóerővel egyenlő nagy és vele ellentétes erőket fejt ki a támaszokra. Ez az erő igen nagy lehet. Ezért előfordulhat, hogy a rúd kihajlik, esetleg el is törik vagy szétzúzza a támasztást. A fellépő rugalmas feszültség nagysága nem függ l-től. Felhasználva a $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$ [lásd 2.6.2.pont és a (2.120) képlet jelölései] és $\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t$ összefüggéseket:

$$\sigma = E\varepsilon = E\alpha\Delta t.$$

Ha a támasztószerkezet is tágul a hőmérséklet-változás hatására, akkor egyenlő hőtágulási együtthatók esetén nem lép fel rugalmas feszültség, hiszen a hosszváltozások egyenlők lesznek. Ha azonban a hőtágulási együtthatók eltérőek, a rúdban akkor is ébred feszültség, ha a hőmérséklet-változások egyenlők.

A hőtágulás miatt nem lehet akármilyen fémet üvegbe forrasztani, csak olyat, amelyiknek hőtágulási együtthatója jó közelítéssel egyenlő az üvegével. Vasbeton készítése is azért lehetséges, mert a betonvas és a beton hőtágulási együtthatója csak elhanyagolható mértékben térnek el egymástól. Eltérő hőtágulási együtthatójú, rideg anyagokat (pl. üvegeket) összeforrasztva lehűlés után a forrasztási hely megreped. Rideg anyagokat egy helyen melegítve, illetve hűtve a hőtágulás hatására bennük olyan rugalmas feszültség ébredhet, melynek hatására az anyag megreped vagy eltörik. Olyan csővezetékekbe, melyek változó hőmérsékletnek vannak kitéve, rugalmas hajlatot, „lírát" iktatnak be, hogy ez a szakasz deformálódjék, ne a vezeték. Hidaknál hasonló okok miatt van a „fésűs" kiegyenlítő szerkezet. Sínéknél régebben réseket hagytak a hőtágulás kiegyenlítésére stb. (Ma már a síneket sok esetben sűrűn, erős talapzatra rögzítik, így a talapzat fel tudja venni a fellépő erőket, és így csak rövid szakaszok kis deformációjával kell számolni.) A távvezetékek huzaljainak hosszát is úgy kell megállapítani, hogy még a legnagyobb hidegben is „belógjanak".

4.1.2. Szilárd anyagok térfogati hőtágulása

A szilárd testeket melegítve minden lineáris méretük nő. Ezért térfogatuk is változik. A tapasztalat szerint a ΔV térfogatváltozás

$$\boxed{\Delta V = \beta V_0 \Delta t}, \qquad (4.3a)$$

ahol V_0 valamilyen t_0 hőmérsékleten mért térfogat, β pedig a *térfogati hőtágulási együttható:*

$$\beta = 3\alpha. \qquad (4.3b)$$

A térfogati hőtágulási együttható mértékegysége $\frac{1}{°C} = \frac{1}{K}$, számértéke megadja az 1 K-re jutó relatív térfogatváltozást.

Mivel $\beta = 3\alpha$, ezért β ugyanúgy függ a t_0 hőmérséklet megválasztásától és hőmérséklettől, mint az α.

A tapasztalatokkal megerősített (4.3a, b) képlet levezethető a lineáris hőtágulási törvényből:

Válasszunk egy t_0 hőmérsékleten egy l_0 élhosszúságú kockát!

Térfogatváltozása t-re melegítve:

$$\Delta V = V_t - V_0 = l_t^3 - l_0^3 = l_0^3\left[1+\alpha\Delta t\right]^3 - l_0^3 = l_0^3\left[\left(1+\alpha\Delta t\right)^3 - 1\right] =$$

$$= l_0^3\left[1+3\left(\alpha\Delta t\right)^2 + 3\alpha\Delta t + \left(\alpha\Delta t\right)^3 - 1\right].$$

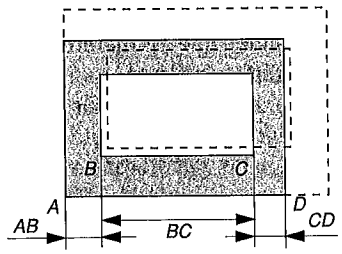
Figyelembe véve, hogy α nagyságrendje 10^{-5}, Δt-é pedig a legtöbb esetben 10^2, ezért az $\alpha\Delta t$ nagyságrendje 10^{-3}. Így a zárójeles összegben csak néhány ezrelék nagyságrendű hibát követünk el, ha magasabb hatványait elhagyjuk. Így $\Delta V = 3\alpha V_0\Delta t$.

Melegítés hatására a testek belsejében lévő üregek is kitágulnak térfogatuk megnő:

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta t,$$

ahol β az üreg falának térfogati hőtágulási együtthatója. Ezért az edények, mérőhengerek, lombikok falára írt térfogatértékekhez mindig feltüntetik azt a hőmérsékletet, amelyen az edényt hitelesítették. Ha nem ezen a hőmérsékleten végzünk mérést az edénnyel, akkor a fenti képlet alapján a leolvasott értéket korrigálni kell.

A melegítéskor bekövetkező térfogatváltozás oka egyszerűen az, hogy az üreg lineáris méretei növekednek. A 4.2. ábra szerinti, lemezbe vágott, téglalap alakú lyuk BC mérete melegítéskor nő: A lyuk B pontja A-tól távolodik, „befelé" megy.



4.2. ábra

A lyuk szélének másik, C pontja is a hőtágulás miatt D-től szintén távolodik, szintén „befelé" megy. Ettől azonban az AC távolság nem csökken, sőt nő, mert a C pont a D-hez képest ugyan „befelé" mozdult el $\alpha\overline{CD}\Delta t$ -vel, de a D pont az AD szakasz hőtágulása miatt ellenkező irányba mozdult el $\alpha\overline{AD}\Delta t$ -vel. Mivel $\overline{AD} > \overline{CD}$, ezért a C végül is távolodott A-tól. Elmozdulása A-hoz képest a két elmozdulás különbsége, $\alpha\left(\overline{AD}-\overline{CD}\right)\Delta t$. A B pont is elmozdult A-hoz képest $\alpha\overline{AB}\Delta t$ -vel, jobbra. Mivel $\overline{AD}-\overline{CD} > \overline{AB}$, ezért a C jobban távolodott A-tól, mint a B. B és C távolságának megváltozása az A-tól való távolodásuk mértékének különbsége: $\alpha\left(\overline{AD}-\overline{CD}\right)\Delta t - \alpha\overline{AB}\Delta t = \alpha\overline{BC}\Delta t$. Egy kocka alakú üregre elvégezve a köbre emelést, kapjuk a térfogatváltozásra vonatkozó formulát.

Csak elméleti jelentősége van az ún. *felületi hőtágulásnak*. Itt azt vizsgálják, hogy hogyan változik hőmérséklet-változás következtében a test felszínén lévő A területű rész területe. A fentiekhez hasonlóan, négyzetre emeléssel levezethető a következő formula:

$$\Delta A = 2\alpha A\Delta t.$$

A térfogat hőmérsékletfüggésére a hossz (4.2) hőmérsékletfüggéséhez hasonló összefüggés vezethető le a $V_t = V_0 + \Delta V$ alapján:

$$V_t = V_0(1+\beta\Delta t). \tag{4.4}$$

A térfogat hőmérsékletfüggése miatt a sűrűség is függ a hőmérséklettől, azaz:

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1+\beta\left(t-t_0\right)}. \tag{4.5}$$

A sűrűség definíciója ugyanis

$$\rho_t = \frac{m}{V_t} = \frac{m}{V_0\left[1+\beta\left(t-t_0\right)\right]} = \frac{m}{V_0}\frac{1}{1+\beta\left(t-t_0\right)},$$

ahol $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$ a t_0 hőmérsékleten mért sűrűség.

4.1.3. A folyadékok hőtágulása

Folyadékok hőtágulásánál csak a térfogati hőtágulásról beszélhetünk. Folyadékok hőtágulására is jó közelítéssel érvényesek a szilárd testek esetére felírt (4.3), illetve (4.4) összefüggések:

$$\Delta V = \beta V_0\left(t-t_0\right), \quad \text{illetve} \quad V_t = V_0\left(1+\beta\left(t-t_0\right)\right).$$

Folyadékoknál a β térfogati hőtágulási együttható 10^{-3} nagyságrendű. Ezért pontosabb számolásoknál itt is figyelembe kell vennünk a szilárd testek hőtágulásáról mondottakat a hőtágulási együttható t_0 függéséről.

A *folyadékok sűrűsége is hőmérsékletfüggő* ugyanúgy, mint a szilárd testeknél [lásd (4.5) képlet levezetése]:

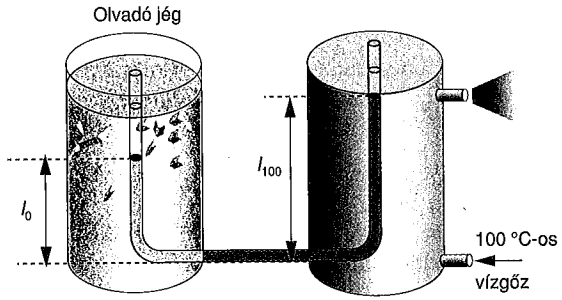
$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1+\beta\left(t-t_0\right)}.$$

A folyadékok hőtágulási együtthatója ismert hőtágulási együtthatójú, térfogatra kalibrált edényben lévő folyadék melegítésével mérhető. Az edény hőtágulási együtthatóját ismernünk kell a mérési eredmények kiértékeléséhez, hiszen az edény térfogata is változik a melegítés közben. Természetesen az edényre karcolt térfogatértékek is hőmérsékletfüggők.

Az edény hőtágulását nem kell figyelembe venni a Dulong–Petit-féle eljárásnál (4.3. ábra). A mérendő folyadékot az U alakú közlekedőedénybe töltjük. Az edény egyik szárát olvadó jéggel, a másikat 100 kPa nyomáson forró víz gőzével vesszük körül. A közlekedőedények törvénye alapján az edény alján a nyomások egyenlők. Megmérve a hűtött és a melegített szárban az l_0, illetve l_{100} hosszúságokat, felírhatjuk a nyomások egyenlőségét:

$$l_0\rho_0 g = l_{100}\rho_{100} g = l_{100}\frac{1}{1+\beta 100\ °\mathrm{C}}\rho_0.$$

Innen β kifejezhető.



4.3. ábra

Folyadékok térfogata melegítéskor általában nő. Fontos kivétel ez alól a víz. A víz térfogata 0 °C és 4 °C között melegítéskor csökken, majd 4 °C fölött nő. Ebből következően a víz térfogata 4 °C-on minimális. Mivel a sűrűség a térfogattal fordítottan arányos, ezért a víz sűrűsége 0 °C-tól 4 °C-ig nő, majd e hőmérséklet felett a többi folyadékhoz hasonlóan csökken.

Ennek a ténynek nagy jelentősége van a természetben. Ha a víz felszíne egy tóban 4 °C-ra lehűl, akkor az ott lévő víz a nagyobb sűrűsége miatt a tó aljára kerül. A víz így egészen lehűlhet mindenütt 4 °C-ra. A levegő hőmérsékletének további csökkenésével a felszínen lévő víz tovább hűlvén már kisebb sűrűségű lesz, mint az alatta lévő 4 °C-os víz. Így a hidegebb víz nem tud a tó aljára kerülni, és a továbbiakban a tó alján lévő víz csak hővezetéssel hűlhet. Ez viszonylag lassú folyamat, mert a víz rossz hővezető. Ezért mérsékelt égövön a nem túl sekély tavak nem fagynak be a tél folyamán fenékig, az aljukon megmaradhat egy tetemes vastagságú 4 °C-os folyékony víz az ott lévő élőlényeknek.

4.2. Az ideális gázok állapotegyenletei

Az állapotegyenlet az illető anyag állapotjelzői közötti összefüggés. Az állapotegyenlet minden anyagra nézve más és más alakú lehet. Az ideális gázok állapotegyenletei minden gázra nézve ugyanolyan alakúak.

Ideális gáznak nevezzük azokat a gázokat, amelyek nyomásának és térfogatának szorzata állandó hőmérsékleten állandó.

Azaz azok a gázok ideális gázok, amelyekre a Boyle–Mariotte-törvény (lásd 2.7.1.6.) érvényes. (Az ideális gáz mikrofizikai definícióját és az állapotjelzők molekuláris értelmezését lásd a 22.1. pontban)

A köznapi életben közönséges körülmények között gyakrabban előforduló gázok jó közelítéssel ideális gázként viselkednek (lásd 4.5. pont).

A továbbiakban néhány állapotváltozást ismerünk meg.

Gázok állapotváltozásait ábrázolhatjuk egy olyan koordináta-rendszerben, melynek egyik tengelyére a nyomás, a másik tengelyére a térfogat értékeit mérjük fel. Ez az ún. *p–V diagram,* a *p–V* sík. A gáz minden egyes állapota a *p–V* sík egy-egy pontjának felel meg.

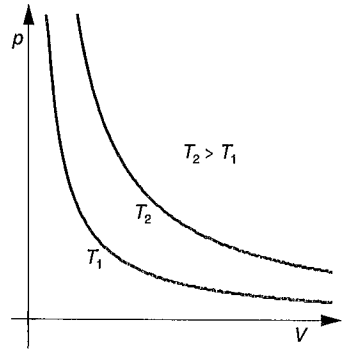
4.2.1. A Boyle–Mariotte-törvény

Az állandó hőmérsékleten végbemenő folyamatokat *izoterm* folyamatoknak nevezzük. Az ideális gáz izoterm állapotváltozása során definíció szerint az *adott gázmennyiség nyomásának és térfogatának szorzata állandó:*

$$\boxed{pV = \text{állandó}}. \qquad (4.6)$$

Ez a *Boyle–Mariotte-törvény.*

Az állandó értéke függ a gáz anyagi minőségétől, tömegétől és hőmérsékletétől. Az állapotváltozást a *p–V* síkon ábrázolva hiperbolaívet kapunk (4.4. ábra).



4.4. ábra

Az adott gáz azonos hőmérsékletű állapotait ábrázoló pontok összessége az *izoterma*. Az izotermák nem metszik egymást. Magasabb hőmérséklethez tartozó izotermák az origótól „távolabb" vannak.

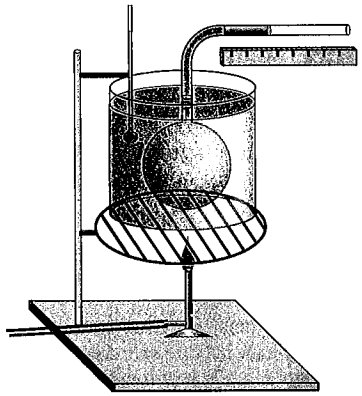
4.2.2. Gay-Lussac I. törvénye

Az állandó nyomáson történő állapotváltozást *izobár* állapotváltozásnak nevezzük.

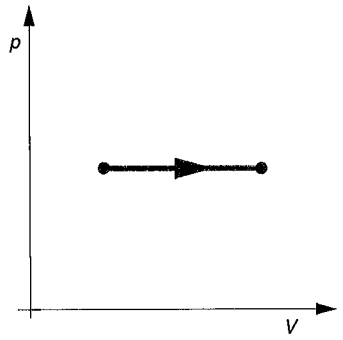
Adott mennyiségű ideális gáz *térfogatváltozása állandó nyomáson egyenesen arányos a hőmérséklet-változással és a gáz* 0 °C*-on mért térfogatával.* Az arányossági tényező ekkor minden gázra ugyanaz, kereken $\frac{1}{273\ °C}$. (Az arányossági tényező a levegőre és a levegőt alkotó gázokra köznapi körülmények között nagy pontossággal ugyanaz. Lásd még 4.5.-ben a kritikus hőmérsékletet.)
Ezzel

$$\Delta V = \frac{1}{273\ °C} V_0 \Delta t \qquad \text{vagy} \qquad V_t = V_0 \left(1 + \frac{t}{273\ °C} \right). \tag{4.7}$$

Ez Gay-Lussac I. törvénye. (Az arányossági tényező számértéke más lesz, ha V_0 nem a 0 °C-on mért térfogatot jelenti.)



4.5. ábra



4.6. ábra

Gay-Lussac törvényét kísérletileg a 4.5. ábra szerinti összeállítással igazolhatjuk. A folyadékfürdőben elhelyezkedő lombikban lévő gázt higanyoszlop zárja el az állandó nyomású külső levegőtől. A gázt lassan melegítve a nyomása kissé megnövekszik, ezért a gáz nyomásából származó, balról ható nyomóerő nagyobb lesz, mint a külső levegő nyomásából származó, jobbról ható nyomóerő. Mivel a higanyoszlop alig súrlódik az üvegcsőhöz, a higanyoszlopra balról ható erőnek alig kell nagyobbnak lennie, mint a jobbról hatónak. Ha

a melegítés lassú, akkor a higanyoszlop majdnem egyenletesen mozog és súrlódás is alig van, ezért a rá ható nyomóerők majdnem kiegyenlítik egymást. Ezért a gáz nyomása tágulás közben nagyon jó közelítéssel egyenlő a külső légnyomással, ezért az állandó. A hőmérsékletet higanyos hőmérővel mérjük. A törvény itt egyrészt azt jelenti, hogy a gázok a higanyhoz hasonlóan tágulnak melegítés hatására. Másrészt az a tény, hogy az ideálisnak tekinthető gázok térfogati hőtágulási együtthatója megegyezik, azt a mélyebb állítást tartalmazza, hogy bármilyen más hőmérővel és hőmérsékleti skálán vizsgálva a gázok hőtágulását, azok anyagi minőségtől függetlenül egyenlő mértékben tágulnak ki, ha kezdeti térfogatuk és az adott hőmérsékleti skálán hőmérséklet-változásuk egyenlő.

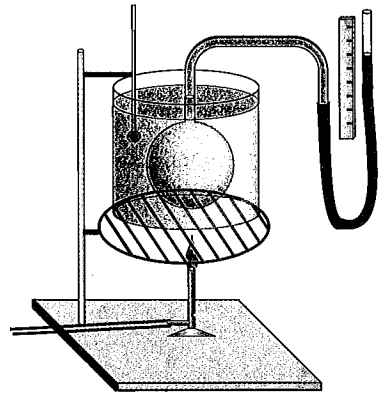
A folyamatot a *p–V* síkon ábrázolva kapjuk az *izobárt,* amely a *V* tengellyel párhuzamos egyenes szakasz (4.6. ábra).

4.2.3. Gay-Lussac II. törvénye

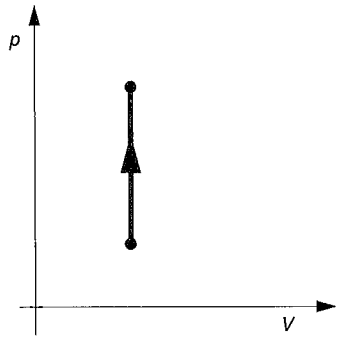
A gáz állandó térfogaton vett állapotváltozását *izochor* állapotváltozásnak nevezzük. Az *adott mennyiségű ideális gáz nyomásváltozása állandó térfogaton egyenesen arányos a hőmérséklet-változással és a* 0 °C*-on mért nyomással.* Az arányossági tényező az anyagi minőségtől függetlenül minden gázra $\frac{1}{273\ °C}$, azaz

$$\boxed{\Delta p = \frac{1}{273\ °C} p_0 \Delta t} \qquad \text{vagy} \qquad \boxed{p = p_0 \left(1 + \frac{t}{273\ °C} \right)} \tag{4.8}$$

Ez Gay-Lussac II. törvénye. (Itt p_0 a 0 °C-on mért nyomás. Az arányossági tényező értéke itt is attól függ, hogy t_0-t milyen hőmérsékleten mérjük.)



4.7. ábra



4.8. ábra

A törvény kísérletileg a 4.7. ábra szerinti elrendezéssel igazolható. A folyadékfürdőben lévő gázt környezetétől hajlékony, átlátszó műanyag csőben lévő higanyoszlop zárja el. A hőmérséklet növelésekor a gáz nyomásával együtt térfogata is nő. A jobb oldali szárat felemelve a gázt visszaszorítjuk a kezdeti térfogatára. A gáz nyomása a higanyoszlop nyomásának és a külső légnyomásnak az összege.

A folyamatot a p–V síkon ábrázolva kapjuk az ideális gáz izochor állapotváltozásának görbéjét, mely a p tengellyel párhuzamos egyenes szakasz (4.8. ábra).

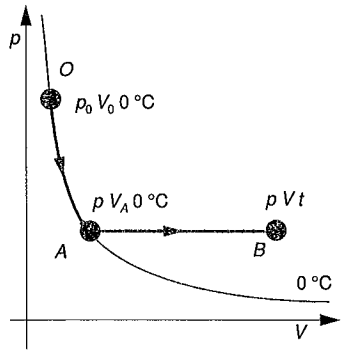
4.2.4. Az általános gáztörvény

Adott mennyiségű ideális gázra a $\frac{pV}{T}$ kifejezés állandó, függetlenül attól, hogy a gáz milyen folyamatokban vett részt a fenti mennyiségek változásakor, azaz:

$$\boxed{\frac{pV}{T} = \text{állandó}}. \qquad (4.9a)$$

Itt a T a kelvinben mért abszolút hőmérséklet. (Az állandó csak a gáz tömegétől és anyagi minőségétől függ.)

A törvény a Boyle–Mariotte-törvényből (4.7 képlet) és pl. Gay-Lussac I. törvényéből (4.8 képlet) is levezethető. Juttassuk a gázt egy 0 °C-os, p_0, V_0 állapotából egy tetszőleges p, V, t állapotba az OAB folyamattal (4.9. ábra).



4.9. ábra

Az OA folyamat legyen izoterm, ezért $p_0V_0 = pV_A$. Mivel V_A a 0 °C-on mért térfogat, ezért az AB izobár folyamatban:

$$V = V_A + \Delta V = V_A + \frac{1}{273\ °C} V_A t = V_A \left(1 + \frac{t}{273\ °C}\right),$$

innen V_A-t kifejezve és a Boyle–Mariotte-törvénybe behelyettesítve:

$$p_0V_0 = p \frac{V}{1 + \frac{t}{273\ °C}}.$$

Az egyenlet jobb oldalán szereplő tört nevezőjében elvégezve a közös nevezőre hozást, majd az egyenletet rendezve, kapjuk:

$$\frac{p_0V_0}{273\ °C} = \frac{pV}{273\ °C + t}.$$

A $T = 273\ °C + t$ jelölést bevezetve, kapjuk:

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}, \qquad \text{ahol} \qquad T_0 = 273\ °C.$$

Az általános gáztörvény tömeggel kifejezett alakja. Egy anyag relatív móltömegén, mólsúlyán azt az M számot értjük, mely megmutatja, hogy az illető anyag egy részecskéjének tömege hányszorosa a 12-es szénizotóp egy részecskéje tömegének 1/12 részénél. A legkisebb tömegű részecske a H-atom. A H kétatomos gáz, ezért relatív móltömege a H-atom móltömegének kétszerese. A mérések alapján a H_2 gáz relatív móltömege elég nagy pontossággal 2. Ha az illető anyagból annyi grammot, illetve kilogrammot veszünk, mint a relatív móltömeg, akkor ezt a mennyiséget mólnyi vagy kilomólnyi mennyiségnek nevezzük. Ha valamilyen (ideálisnak tekinthető) gáz mólnyi mennyiségének megmérjük normál állapotban (101,3 kPa, 0 °C) a térfogatát, akkor azt az Avogadro-törvény értelmében az anyagi minőségtől függetlenül mindig ugyanannyinak, 22,41 liternek találjuk. Az értékét behelyettesítve az 1 mólnyi gázra:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{K}} = R.$$

Nem mólnyi mennyiséget véve a 273 K-en mért térfogat a $22,41 \cdot 10^{-3}$ m³-nek annyiszorosa lesz, ahány mólnyi mennyiséget vettünk, azaz $n = \frac{m}{M}$-szerese, ahol M a mólnyi mennyiség tömege, az ún. moláris tömeg és n a mólok száma. V_0-lal jelölve az m tömegű, M moláris tömegű gáz normál állapotú térfogatát:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5\ \text{Pa}\ \frac{m}{M}\ 22,41 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3}{273\ \text{K}} = \frac{m}{M} 8,31 \frac{\text{J}}{\text{molK}},$$

azaz rendezve:

$$\boxed{pV = nRT}. \qquad (4.9b)$$

Az általános gáztörvény tömeggel kifejezett alakja:

$$\boxed{pV = \frac{m}{M} RT}. \qquad (4.9c)$$

A fenti formulából a $\rho = \frac{m}{V}$ sűrűséget kifejezve kapjuk meg az ideális gáz sűrűségét:

$$\rho = \frac{Mp}{RT}. \qquad (4.9d)$$

A 4.9d képlet szerint az ideális gázok sűrűsége függ az anyagi minőségtől, a nyomással egyenesen, az abszolút hőmérséklettel fordítottan arányos. (Nem ideális gázokra, telített és telítetlen gőzökre a formula nem érvényes!)

Az általános gáztörvényben szereplő állandó a gázt alkotó részecskék számával, N-nel is kifejezhető:

$$pV = NkT, \qquad (4.9e)$$

ahol $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K, lásd a 22.1. fejezetet. Látható, hogy nem számít az egyes részecskék tömege, alakja, kémiai minősége. Kizárólag a „darabszám" számít!

Parciális nyomások. Legyen egy V térfogatban, T hőmérsékleten N_1 részecskéből álló gáz, melynek nyomása p_1! Egy másik fajta gázból ugyanakkora V térfogatban, T hőmérsékleten N_2 számú részecske van, a nyomása p_2. Vegyünk egy V térfogatú üres tartályt és juttassuk bele az első gázt! Ekkor a tartály falán a részecskék ütögetéséből származó nyomás nyilván p_1. Juttassuk be az első gázzal teli tartályba a második gázt! Ha a gázok ideálisak (itt: a részecskék pontok, azonos hőmérséklet miatt mozgási energiájuk átlaga is megegyezik), akkor az első gáz részecskéinek fallal való ütközését nem befolyásolja a második gáz részecskéinek jelenléte. Ez kölcsönös. Ezért a tartály falán a nyomás az egyes gázok részleges, parciális nyomásának összege.

$$p_1 V = N_1 kT, \qquad p_2 V = N_2 kT.$$

A két egyenletet összeadva, a teljes p nyomás:

$$p = p_1 + p_2 = (N_1 + N_2)kT = NkT.$$

Általában is igaz: ha egy V térfogatú tartályban T hőmérsékletű különböző gázok keveréke van, akkor az egyes összetevő gázok nyomásai egymást nem zavarják. Ez azt jelenti, hogy az egyes összetevő gázok által keltett nyomásokat kiszámíthatjuk úgy, mintha a többi gáz ott sem lenne. A teljes nyomás az egyes összetevők így kiszámított nyomásainak összege. A tétel valóságos gázoknál annál inkább igaz, minél közelebb vannak az összetevők az ideális gázokhoz.

A köznapi körülmények között ideális gáznak tekinthető levegő nyomása is az azt alkotó gázok parciális nyomásainak összege. A tapasztalat szerint, ha a levegő valamilyen folyadék gőzét is tartalmazza, akkor a teljes nyomás jó közelítéssel a levegő és a gőz parciális nyomásainak összege.

4.3. Kalorimetria. Fajhő és átalakulási hő

A kalorimetria feladata megvizsgálni a test által felvett vagy leadott hőmennyiség és az állapotjelzők megváltozásának kapcsolatát. (Ilyen állapotjelzők például a belső energia, hőmérséklet, tömeg stb., lásd 3.1. fejezet.)

Egy test által felvett hőmennyiséget megmérhetjük pl. úgy, hogy a testet egy hőszigetelt edénybe *(kaloriméterbe)* helyezzük és elektromos merülőforralóval melegítjük. Ha ismerjük a merülőforraló P teljesítményét és a τ melegítési időt, akkor a hőfolyamat során felvett energia $P\tau$.

Megmérhetjük még egy adott test által felvett hőt úgy is, hogy egy olyan másik testtel hozzuk hőkicserélő kapcsolatba, amelynek belső energiaváltozását az állapotjelzők függvényében ismerjük. Ekkor a másik test állapotjelzőinek változásából az általa leadott energiát meghatározhatjuk. Ha a rendszer hőszigetelt és munkavégzés nem történt, akkor a két test által leadott, illetve felvett hők egyenlők.

Ha a test A egyensúlyi állapotából a B egyensúlyi állapotába kerül, akkor belső energiájának megváltozása a közbenső állapotoktól, állapotváltozásoktól függetlenül mindig ugyanaz. A munkavégzés azonban függ a közbenső állapotok sorozatától, így a termodinamika I. főtétele értelmében a felvett vagy leadott hőmennyiség is. Például egy testtel közölhetünk hőt úgy, hogy közben munkavégzés nem történik. Ugyanekkora belső energiaváltozást azonban csak több hő közlésével hozhatunk létre, ha közben a test munkavégzés során energiát ad le a környezetének. Hogy mennyi a munkavégzés, azt pl. előírhatjuk azáltal, hogy mennyi a térfogatváltozás. Kevesebb hő közlésével is elérhetjük ugyanazt a belső energiaváltozást, ha a környezet végez a testen munkát (lásd 3.2.2. alpont).

Általában a munkavégzés két állapot között attól függ, hogy milyen állapotok sorozatán, milyen állapotváltozásokkal jutott a test egyik állapotából a másik állapotba. Így természetesen a két állapot között felvett vagy leadott hő nagysága is függ attól, hogy milyen állapotokon keresztül jutott a test egyik állapotából a másik állapotába.

Két állapot között felvett hő mennyisége nemcsak a testre és két állapotára jellemző, hanem a két állapot közötti folyamatra is.

4.3.1. A szilárd anyagok és folyadékok fajhője

A szilárd anyagokat és folyadékokat a szokásos körülmények között normál légköri nyomáson melegítjük pl. merülőforralóval. A merülőforraló a testnek $P\tau$ energiát ad át. A testek térfogata a hőmérséklettel együtt változik. Ha a test melegszik, akkor a környező levegő munkát végez rajta. Így a közölt hőnek nemcsak a test belső energiájának növekedését, hanem a légköri nyomás ellenében végzett munkát is fedeznie kell. A legtöbb esetben azonban ez a munkavégzés szilárd testeknél és folyadékoknál elhanyagolható, mivel a térfogatváltozás kicsi. Így itt jó közelítéssel $\Delta U = Q$.

Különböző testeket merülőforralóval melegítve azt találjuk, hogy a felvett hő jó közelítéssel egyenesen arányos a hőmérséklet-változással:

$$\boxed{Q = C\Delta t}. \qquad (4.10)$$

Az arányossági tényező neve a *C hőkapacitás*. Mértékegysége $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{J}}{^\circ\mathrm{C}}$. Számértéke szemléletesen azt a hőmennyiséget jelenti, amennyi ahhoz kell, hogy a test hőmérsékletét 1 K-nel megváltoztassuk.

A mérések alapján a hőkapacitás egyenesen arányos a test tömegével, és függ az anyagi minőségtől:

$$\boxed{C = cm}. \qquad (4.11)$$

A c arányossági tényező neve *fajhő*. Mértékegysége $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}^\circ\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$. Számértéke megadja azt a hőmennyiséget, amely ahhoz kell, hagy az adott anyagi minőségű test 1 kg-jának hőmérsékletét 1 °C-kal, illetve 1 K-nel megváltoztassuk. A fajhő az egységnyi tömegű anyag hőkapacitása.

Néhány anyag fajhőjét a 4.1. táblázat mutatja

A szilárd anyagok és folyadékok fajhője szobahőmérséklet táján jó közelítéssel független a hőmérséklettől. Ugyanazon anyag esetén függ a halmazállapottól is. Pl. a jég fajhője kb. fele a folyékony víz fajhőjének.

Nagyobb hőmérsékleti intervallumokban a fajhő már észrevehetően hőmérsékletfüggő. Alacsony hőmérsékletek felé közeledve a fajhő csökken (lásd 25.2.1. pontot). Minden anyag fajhője az abszolút 0 fok felé közeledve nullához tart.

A *mólhő* a test mólnyi mennyiségének hőkapacitása. Mértékegysége J/molK. A szilárd testek mólhője egy bizonyos (az anyagi minőségre jellemző hőmérséklet), az ún. *karakterisztikus hőmérséklet* felett az anyagi minőségtől függetlenül ugyanaz. Sok köznapi anyag karakterisztikus hőmérséklete lényegesen kisebb a szobahőmérsékletnél. Ezeknél az anyagoknál a mérések alapján a szilárd testek mólhője kereken 25 J/K (Dulong–Petit-szabály). Molekuláris értelmezése: 25.2.1.pont.

4.1. táblázat. Néhány anyag fajhője

Anyag	Fajhő, J/kgK
Alumínium	900
Vas	464
Réz	385
Üveg	837
Jég (0 °C-on)	2093
Víz	4193
Benzol	1741
Hélium állandó térfogaton	3161
Hélium állandó nyomáson	5234
Oxigén állandó térfogaton	653
Oxigén állandó nyomáson	916

4.3.2. Fázisátalakulási hők

Ugyanannak a testnek különböző halmazállapotai lehetnek. Ugyanazon szilárd testnek is lehetnek szerkezetileg különböző állapotai: pl. a kén szilárd halmazállapotában kétféle kristályszerkezetet vehet fel a hőmérséklettől függően. A halmazállapotban, illetve a szerkezetben végbemenő változásokat *fázisátalakulásoknak* nevezzük. *A fázisátalakulások állandó hőmérsékleten történő hőfelvétellel vagy hőleadással járnak.* Az átalakulási hők szigorúan arányosak a tömeggel:

$$\boxed{Q = Lm}, \qquad (4.12)$$

ahol L a tömegegységnyi anyag fázisátalakulásához szükséges hőmennyiség. Mértékegysége: $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$. Halmazállapot-változáskor L neve utal a fázisátalakulás jellegére: *olvadási, fagyási, párolgási, forrás-,* illetve *lecsapódási hő stb.*

A halmazállapot-változási hő függ az anyagi minőségtől és attól is, hogy milyen halmazállapot-változásról van szó (lásd a 4.2. táblázatot).

Folyadékok párolgása, gőzzé alakítása minden hőmérsékleten lehetséges. A tapasztalat szerint a párolgáshő jó közelítéssel független a hőmérséklettől.

Olvadásnál és párolgásnál a test felvesz hőt, míg fordított irányú változásnál leadja azt.

4.2. táblázat. Anyagok átalakulási hőmérsékletei °C-ban (100 kPa nyomáson) és hői J/kg-ban

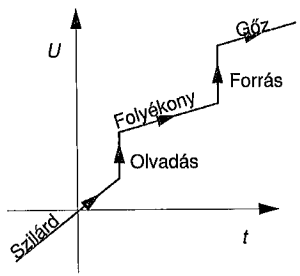
Anyag	Olvadáspont	Olvadáshő	Forráspont	Forráshő
Alumínium	660	360 501	2450	10 886 200
Víz	0	333 703	100	2 256 374
Benzol	5,5	127 284	80,09	395 671
Hélium			–268,9	25122
Oxigén	–218,8	13 817	–182,9	213 118

Olvadásnál és forrásnál a testek belső energiája úgy nő, hogy közben hőmérsékletük nem változik. A külső légnyomás által végzett munka csak párolgásnál, illetve forrásnál számottevő, hiszen csak itt van jelentős térfogatváltozás. Ilyen esetekben a táblázatokban megadott forráshő nem a belső energiával egyenlő, hanem attól $p\Delta V$-vel eltér, ahol p a nyomás és ΔV a térfogatváltozás.

Pl. 1 kg 100 °C-os víz 101,3 kPa nyomáson történő elpárologtatásához, elforralásához szükséges hő 2 256 374 J. A víz sűrűsége ezen a hőmérsékleten 958, 38 kg/m^3, a vízgőzé 0,5977 kg/m^3. A $\rho = \frac{m}{V}$ alapján a víz térfogata 1,043 m^3, a gőzé 1,673 m^3. A térfogatváltozás pozitív, $\Delta V = 1{,}672$ m^3. A táguló gőz környezetén munkát végez. A felvett energia nem fordítódik teljes egészében a belső energia növelésére, hanem munkavégzés útján egy része térfogati munka formájában a környezetbe áramlik:

$$\Delta U = 2\,256\,374\ \text{J} - 167\,200\ \text{J} = 2\,098\,174\ \text{J}.$$

Kristályos szilárd testeknél, például 0 °C-nál hidegebb jeget melegítve először csak hőmérséklet-emelkedést, majd 0 °C-on hőfelvételt hőmérséklet-emelkedés nélkül, majd újabb hőmérséklet-emelkedést tapasztalunk a felvett hő függvényében egészen a forráspontig. Ha a hőfelvételből leszámítjuk a térfogatváltozással együtt járó térfogati munkát, és ezt a hőmérséklet függvényében ábrázoljuk, a 4.10. ábra szerinti függvényt kapjuk.



4.10. ábra

4.3.3. Szilárd anyagok és folyadékok fajhőjének és fázisátalakulási hőjének mérése

Elektromos kaloriméterrel történő mérés. A testet hőszigetelt edénybe (kaloriméterbe) helyezzük és P teljesítményű merülőforralóval τ ideig melegítjük. Megmérve a test m tömegét és Δt hőmérsékletváltozását, a $Q = P\tau = cm\Delta t$ alapján:

$$c = \frac{P\tau}{m\Delta t}.$$

Ezzel a módszerrel halmazállapot-változási hőt is mérhetünk. A testet kaloriméterbe helyezzük és felmelegítjük az átalakulási hőmérsékletre. Megmérjük, hogy τ idő alatt a P teljesítményű merülőforraló mekkora m tömegen hozott létre halmazállapot-változást. A $Q = P\tau = Lm$ alapján

$$L = \frac{P\tau}{m}.$$

Ismert fajhőjű testtel történő mérés. A kaloriméterbe tett ismert c_1 fajhőjű, m_1 *tömegű*, t_1 hőmérsékletű testhez betesszük a kaloriméterbe az ismeretlen c fajhőjű, ismert m tömegű és ismert $t_2 > t_1$ hőmérsékletű testet. A hőegyensúly beállta után megmérjük a közös t hőmérsékletet. Mivel folyadékoknál és szilárd testeknél a $W \approx 0$, ezért a belső energiák megváltozásai egyenlő nagyságúak és ellentettek. A felvett és a leadott hők egyenlők: $|Q_{\text{fel}}| = |Q_{\text{le}}|$.
Azaz

$$c_1 m_1 (t - t_1) = cm(t_2 - t),$$

ahonnan

$$c = \frac{c_1 m_1 (t - t_1)}{m(t_2 - t)}.$$

Mivel itt a hőmennyiségek abszolút értékének egyenlőségét írtuk fel, ezért a kivonás műveletét úgy jelöljük ki, hogy a hőmérséklet-változások mindkét oldalon pozitívak legyenek. Azt is megtehetjük, hogy a hőmérséklet-változást, a Δt-t, a szokásoknak megfelelően a későbbi és a korábbi értékek különbségeként írjuk fel: $\Delta t = t_{\text{késő}} - t_{\text{korábbi}}$. Ekkor Δt és így a Q előjeles mennyiség. Pozitív, ha a t nő, ha a test hőt vesz fel; negatív, ha t csökken, a test hőt ad le. Ezzel a megállapodással a Q előjele a belső energia változásával egyező előjelű. Mivel zárt rendszernél $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$, ezért az „előjeles" hőmennyiségek összege is nulla. Ezt a felírási módot akkor érdemes alkalmazni, ha a kaloriméterben több mint két test van.

Halmazállapot-változási hőt úgy mérünk ezzel a módszerrel, hogy az ismert c_1, m_1, t_1 adatokkal rendelkező testhez betesszük az ismert tömegű, t_2 hőmérsékletű

testet. Ha gondoskodunk arról, hogy a halmazállapot-változás teljesen végbemenjen, akkor

$$c_1 m_1 (t_1 - t) = c_2^x m_2 (t_0 - t_2) + L m_2 + c_2 m_2 (t - t_0).$$

Itt c_2^x a halmazállapot-változás előtti, c_2 a halmazállapot-változás utáni fajhő. t_0 a halmazállapot-változás hőmérséklete, amely példánkban kisebb t_1-nél és nagyobb t_2-nél. Az adatok ismeretében L kiszámítható.

Nem kell ismernünk a jég olvadáshőjének mérésénél a jég fajhőjét, ha 0 °C-os olvadó jég–víz keverékből jégdarabokat teszünk a kaloriméterbe.

Pontosabb méréseknél, a mérés módjától függetlenül figyelembe kell vennünk a kaloriméter hőkapacitását is. Ezt úgy mérjük meg, hogy a t_1 hőmérsékletű (célszerűen szobahőmérsékletű) kaloriméterbe nagyobb, t_2 hőmérsékletű, m tömegű vizet öntünk. A közös t hőmérsékletet megmérve, a C hőkapacitás a

$$c_{víz} m (t_2 - t) = C (t - t_1)$$

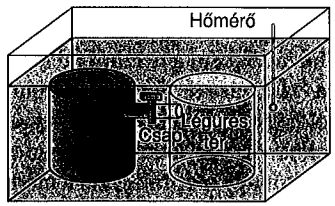
egyenlet alapján számítható. A kaloriméter hőkapacitását a fenti eljárás miatt szokás vízértéknek is nevezni. A kaloriméteres mérési eljárásokban a kaloriméter hőfelvevő vagy hőleadó testként szerepel.

Például fajhőméréseknél a kaloriméterbe az ismert fajhőjű testet (vizet vagy valamilyen más folyadékot) eleve bele szokás tenni és megvárják, amíg hőmérsékletük ki nem egyenlítődik, amit t_1-gyel jelölünk. Ha az ismeretlen fajhőjű test hőmérséklete magasabb, akkor az előző egyenlet adatait használva:

$$c_1 m_1 (t - t_1) + C (t - t_1) = c m (t_2 - t).$$

4.3.4. Gázok fajhője

Ideális gázok belső energiája. Az ideális gáz belső energiája csak a hőmérséklettől függ. Ez azt jelenti, hogy ugyanazon gáznak ugyanakkora a belső energiája egyenlő hőmérsékletű, de eltérő nyomású és térfogatú állapotokban.



4.11. ábra

Ezt a tényt először Gay-Lussac igazolta. A 4.11. ábra szerint csappal összekötött két edény egyikébe nagy nyomású gázt tett, a másikból kiszivattyúzta a levegőt. A két edényt egy vízzel teli kaloriméterbe helyezte. A csapot kinyitva a gáz egy része átáramlott a másik edénybe, míg a nyomások ki nem egyenlítődtek. A merev falú edény által kifejtett nyomóerők nem végeztek munkát a gázon. A tapasztalat szerint a folyadék hőmérséklete nem változott. ezért a gázé sem. Mivel a folyadék hőmérséklete nem változott, ezért a gáz nem adott le és nem is vett fel energiát a folyadéktól. A gáz belső energiája változatlan hőmérsékleten tehát nem változott, holott térfogata megnőtt és nyomása lecsökkent.

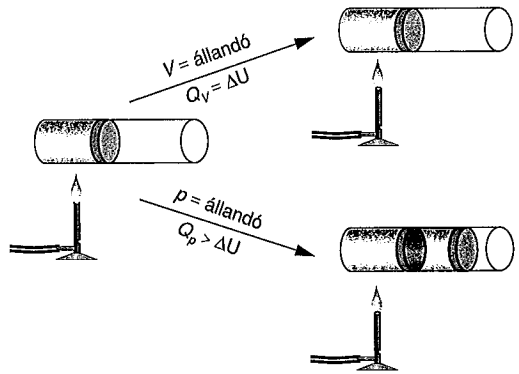
Ma már ennél pontosabb kísérletek vannak az állítás igazolására, és a valóságos gázoknál a nagyon pontos mérések azt mutatják, hogy belső energiájuk nem csak a hőmérséklettől függ.

Az ideális gáz állandó térfogaton és nyomáson vett fajhői. Gázoknál a térfogati munka már jelentős lehet. Ezért a belső energia változása csak akkor egyenlő a közölt hővel, ha a munkavégzés 0, azaz a gáz térfogata állandó.

Nem csak térfogati munka lehetséges gázoknál. Pl. a folyadékkal végzett Joule-kísérlethez hasonlóan elképzelhető a gázok keverése, és így van munka, de térfogatváltozás nincs.

Melegítsük fel a gázt először t_1 hőmérsékletről t_2 hőmérsékletre állandó térfogaton pl. úgy, hogy ismert, P teljesítményű kis fűtőszállal vagy más hőforrással adott, τ ideig melegítjük! Így a közölt hő $P\tau$. Ekkor a térfogati munka 0. Ezért a belső energia változása egyenlő a gáz által állandó térfogaton felvett Q_V hővel:

$$\Delta U = Q_V.$$



4.12. ábra

Vigyük vissza másodszor ugyanezt a gázt ugyanabba a kiinduló állapotba, mint amilyenbe az előbb volt. Erről a t_1 hőmérsékletről melegítsük fel most ismét t_2 hőmérsékletre úgy, hogy közben a gáz térfogat állandó nyomáson növekedjék (lásd 4.2. ábra). Mivel a kezdő és végső hőmérsékletek ugyanazok, mint az állan-

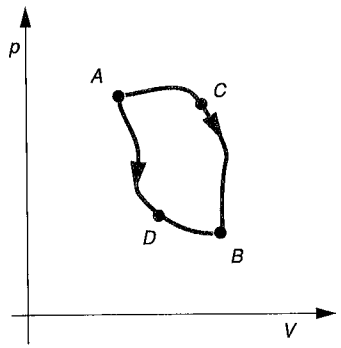
dó térfogatú melegítésnél voltak, és a gáz belső energiájának változása csak a hőmérséklettől függ, ezért a belső energia változása ebben az esetben is ugyanaz, mint előbb. Azonban most a közölt Q_p hő nemcsak a belső energiát, hanem a munkavégzés útján a környezet energiáját is növeli. Ezért

$$Q_p > Q_V.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát az ugyanazon tömeggel és hőmérséklet-változással osztva kapjuk a fajhők közötti relációt:

$$\boxed{c_p > c_V}.$$

Egy gáznak nem csak kétféle fajhője lehet. Pl. a gázt a t_1 hőmérsékletű állapotából eljuttathatjuk egy másik, t_2 hőmérsékletű nemcsak állandó, hanem változó nyomáson is. Pl. ha a 4.12. ábra szerinti összeállításban egyik végén rögzített, a kezdő helyzetben még laza rugót erősítünk a dugattyúhoz, akkor a t_2 hőmérséklet eléréséig a gázra ható nyomóerő változó, és így a térfogati munka sem az előbbi érték lesz. Ezért a munka és így a felvett hő, illetve fajhő is más lehet.



4.13. ábra

A gáz által felvett hő, illetve fajhő még akkor is két különböző érték lehet, ha mindkét esetben a kezdő- és a végállapotok is megegyeznek, de a folyamatok eltérőek. (Nemcsak a hőmérsékletek, hanem minden állapotjelző megegyezik!) Pl. a 4.13. ábra szerinti *A* és *B* állapotok között a gáz egyszer az *ACB*, másszor az *ADB* állapotokon keresztül jut *A*-ból *B*-be. Mivel az *ACB* folyamatban a munkavégzés abszolút értéke nagyobb (a *p*–*V* grafikonon a görbe alatti terület számértéke), mint az *ADB* folyamatban, ezért itt a felvet hő és így a fajhő is nagyobb. ($\Delta U = Q + W$ ahol most a tágulás miatt W negatív!)

Az adiabatikus folyamat fajhője, lévén $Q = 0$, nulla. Az izotermikusé „végtelen".

Az ideális gáz kétféle fajhője közötti összefüggés (Robert–Mayer-egyenlet). Ha az m tömegű ideális gázt állandó nyomáson melegítjük, akkor a felvett hő $c_p m\Delta t$. Mivel a gáz belső energiája csak a hőmérséklettől függ (nem számít, hogy térfogata változott), ezért $\Delta U = c_V m\Delta t$. A gázra ható erő munkája $-p\Delta V$. Az m tömegű, M moláris tömegű ideális gázra vonatkozó állapotegyenletből, $pV = \frac{m}{m} RT$-ből,

$$p\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T.$$

Az előző mennyiségeket a $\Delta U = Q + W$ I. főtételbe helyettesítve:

$$c_V m\Delta T = c_p m\Delta T - \frac{m}{M} R\Delta T.$$

Itt $\Delta t = \Delta T$, mert a hőmérséklet-változás °C-ban és K-ben mérve is ugyanakkora. Az egyenletet rendezve:

$$\boxed{c_p - c_V = \frac{R}{M}}, \qquad (4.13)$$

az egyenlőség mindkét oldalát *M*-mel megszorozva kapjuk a molhők közötti összefüggést. Mivel az R általános gázállandó az anyagi minőségtől függetlenül minden gázra ugyanaz, ezért minden ideálisnak tekinthető gázra a *kétféle mólhő eltérése az anyagi minőségtől függetlenül ugyanaz az érték, az általános gázállandó.*

Ideális gáz mólhőiről, belső energiájáról, azok molekuláris értelmezéséről lásd 22.1.2.4. fejezet.

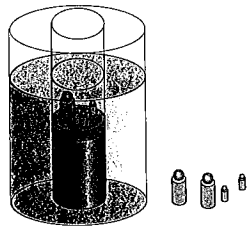
4.4. Nyílt folyamatok ideális gázokkal

Az olyan folyamatot, amelynek során a rendszer visszatér eredeti állapotába, *körfolyamatnak* nevezzük. *Nyílt folyamat* során a rendszer kezdeti állapotából attól eltérő állapotba megy át. Az alábbiakban energetikai szempontból vizsgáljuk az ideális gázok nyílt folyamatait.

4.4.1. Izoterm folyamat

A gázt jó hővezető anyagból készített edénybe helyezzük. Az edényt olyan nagyméretű, folyadékkal telt kádba helyezzük, melynek hőkapacitása igen nagy. Olyan nagy, hogy a gáz által leadott vagy felvett hő elhanyagolható mértékben változtat-

ja meg a hőmérsékletét. Az olyan testeket, amelyek a vizsgált testekkel kialakult hőcsere hatására csak elhanyagolható mértékben változtatják meg hőmérsékletüket, *hőtartályoknak* nevezzük. Az izoterm folyamatokat hőtartályok segítségével valósíthatjuk meg.



4.14. ábra

Zárjuk el a gázt a környezetétől egy súlyos dugattyúval! Egyszerűség kedvéért legyen a külső légnyomás nulla! Helyezzünk a dugattyúra olyan kis súlyokat, melyek súlyai a dugattyúéhoz képest külön-külön elhanyagolhatóak, de együttesen már tetemes értéket képviselnek (4.14. ábra)! Egy ilyen kis súlyt levéve a nyomás csökken, a dugattyú feljebb emelkedik, a gáz kissé lehűl. Mivel a súly igen kicsi volt, ezért a nyomás csökkenése és a hőmérséklet süllyedése is igen kicsi lesz. Mivel a gáz hőmérséklete kisebb, mint a hőtartályé, ezért onnan hőt vesz fel, és rövid időn belül hőmérséklete annyi lesz, mint a hőtartályé. Az apró súlyokat egymás után leemeljük. Az emelések között mindig hagyunk annyi időt, hogy a gáz és a hőtartály közötti igen kis hőmérséklet-különbség kiegyenlítődjék. Így a folyamat közben a gáz hőmérséklete jó közelítéssel állandó, és csak elhanyagolható mértékben tér el (jelen esetben kisebb) a hőtartály hőmérsékletétől. Minden egyes lépésben a gáz hőt vesz fel a hőtartálytól, miközben munkát végez a környezetén, a súlyos dugattyút felemeli a még rajta lévő súlyokkal együtt.

Elvileg is kiváló hőtartály például a véges mennyiségű olvadó jég–víz keveréke.

A p–V síkon a görbe alatti terület a gáz által végzett munka nagysága. Ez másképp az elemi munkák összege (a gáz tágulása közben a nyomás csökken).

Ha a gáz állandó T hőmérsékleten V_1 térfogatról V_2-re tágul, akkor a térfogati munka:

$$W = -\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (4.13)$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a gázra ható erő munkája negatív, azaz ennek ellenereje, vagyis a gáz által kifejtett erő munkája pozitív. Tehát ebben az esetben a gáz „végez" munkát a környezeten, példánkban növelte a dugattyú és a súlyok helyzeti energiáját.

A 4.14. formulát a (3.2) formula alapján az integrálszámítás segítségével láthatjuk be, felhasználva az általános gáztörvényt:

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = -\frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V}\,\mathrm{d}V = -\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = -\frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

A folyamat közben a gáz belső energiája nem változik, mert az ideális gáz belső energiája csak a hőmérséklettől függ (lásd a 4.3.4. pontot) $\Delta U = 0$. Ebből a termodinamika I. főtétele alapján következik, hogy $Q + W = 0$, azaz $Q = -W$. *Izotermikus tágulás során felvett hő teljes egészében a környezetnek adódik át mechanikai munkavégzés formájában.* A gáz a hőtartály belső energiájának egy részét mechanikai energiává alakította át.

A folyamatban a gáz fajhője a $c = \frac{Q}{m\Delta t}$ alapján nincs értelmezve, illetve „végtelen nagy" a $\Delta T = 0$ miatt.

4.4.2. Izobár folyamat

Ilyen folyamatot az izoterm folyamatnál szereplő szerkezettel hozhatunk létre. A dugattyún lévő súlyokat nem változtatjuk. A gázt tartalmazó edényt áthelyezzük egy, az előző hőtartálynál igen kicsivel magasabb hőmérsékletű hőtartályba. A gáz nyomása egy kissé megnő, a dugattyú feljebb emelkedik, majd a gáz nyomása visszaáll az eredeti értékre, miközben felveszi a magasabb hőmérsékletű hőtartály hőmérsékletét. Ezalatt a gáz a magasabb hőmérsékletű hőtartályból hőt vesz fel, miközben környezetén munkát végez. A folyamatot addig ismételjük egyre magasabb hőmérsékletű hőtartályokkal, míg a kívánt hőmérsékletet el nem érjük. A folyamat közben a gáz nyomása jó közelítéssel állandó, a hőtartályok hőmérséklet-különbsége kicsi. A gáz munkát végez a környezetén, miközben a hőtartályok sorozatától hőt vesz fel.

Mivel az izobár folyamat során a nyomás állandó, ezért a térfogati munka:

$$W = -p\left(V_2 - V_1\right) = -\frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right).$$

A negatív érték itt is azt jelenti, hogy a „gáz végez munkát" a környezetén.

A gáz belső energiája a folyamat közben változik, mert a hőmérséklete is változik. Mivel az ideális gáz belső energiája csak a hőmérséklet függvénye, ezért a belső energia megváltozása:

$$\Delta U = c_V m \Delta T.$$

A hőtartályok sorozatától hőfolyamatok során felvett hő:

$$Q = c_p m \Delta T.$$

Az I. főtétel értelmében $\Delta U = Q + W$, így

$$c_V m \Delta T = c_p m \Delta T + \left(-p \Delta V\right)$$

(lásd még a 3.1.1. pontot).

4.4.3. Izochor folyamat

A gázt tartalmazó edényt állandó térfogat mellett melegítjük, azaz egyre magasabb és magasabb hőmérsékletű hőtartályokkal hozzuk kapcsolatba. Mivel a térfogatváltozás 0, ezért a munka is az.

A belső energia változása:

$$\Delta U = Q_V = c_V m \Delta T.$$

A gáz által felvett hő itt teljes egészében a gáz belső energiáját növeli.

4.4.4. Adiabatikus folyamat

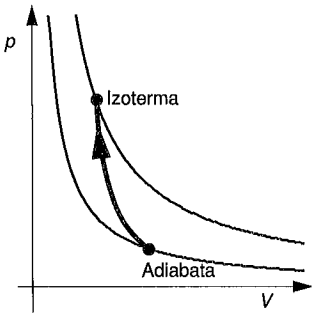
A gázt hőszigetelő edényben nyomjuk össze. A gáz tehát nem vesz fel hőt, $Q = 0$.

A gázra ható erő munkája összenyomás esetén pozitív. A munkavégzés a gáz belső energiáját növeli. Ezért a gáz hőmérséklete a térfogat csökkenésével nő, hiszen belső energiája is nő. A nyomás is nő a térfogat csökkenésével. Ha a hőmérséklet állandó maradna, akkor a nyomás fordítottan arányosan növekedne a térfogattal. A hőmérséklet azonban nő, ezért a nyomás az adiabatikus állapotváltozásnál a térfogat csökkenésével jobban nő, mint az izoterm folyamatban. Az adiabatikus folyamatot a p–V síkon ábrázolva az ún. *adiabatát* kapjuk, mely a térfogat csökkenésével az előzőek szerint az izotermánál „jobban emelkedő görbe". Az ugyanazon a ponton áthaladó izoterma és adiabata közül az adiabata a meredekebb (lásd 4.15. ábra).

A belső energia megváltozása az adiabatikus folyamat során is

$$\Delta U = c_V m \Delta T,$$

mint az egy ideális gáznál lenni szokott.



4.15. ábra

A munkavégzés nagysága csak ΔU, így

$$W = \Delta U = c_V m \Delta T = c_V m \left[\frac{M p_2 V_2}{mR} - \frac{M p_1 V_1}{mR} \right] = \frac{c_V M}{R} \left(p_2 V_2 - p_1 V_1 \right).$$

Az adiabatikus folyamatban a nyomás és a térfogat közti összefüggés:

$$\boxed{pV^\kappa = \text{állandó}, \qquad \kappa = \frac{c_p}{c_V}}. \tag{4.15}$$

Ezt az összefüggést az integrálszámítás alkalmazásával láthatjuk be.

Vegyünk olyan kis térfogatváltozást, melynek során a nyomás legyen állandónak tekinthető! Ekkor a gázra ható erő munkája $-p\Delta V = \Delta U = c_V m \Delta T$. A nyomást az általános gáztörvényből kifejezve és az előbbi egyenletbe helyettesítve:

$$c_V m \Delta T = -\frac{m}{M} RT \frac{1}{V} \Delta V.$$

Ebben a differenciaegyenletben változók a V és a T. A ΔV-vel és ezzel együtt a ΔT-vel 0-hoz tartva differenciálegyenletet kapunk. A változókat szétválasztva:

$$c_V \frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{R}{M} \frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Felhasználva, hogy ideális gázra $c_p - c_V = \frac{R}{M}$ [lásd a (4.13) képletet)]:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = \left(1 - \frac{c_p}{c_V} \right) \frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát integrálva:

$$\ln T = \left(1-\kappa\right)\ln V + \ln C, \qquad \text{ahol} \qquad C = \text{állandó},$$

$$\ln T = \ln CV^{1-\kappa}.$$

Innen

$$T = CV^{1-\kappa}, \quad TV^{\kappa-1} = C = \text{állandó}.$$

Az általános gáztörvényből T-t kifejezve és ide helyettesítve kapjuk (4.15)-öt.

4.4.5. Politrop állapotváltozás

A gyakorlatban nemigen tudjuk megoldani a tökéletes hőszigetelést. A gázra ható erő munkája nem alakul át teljes egészében a gáz belső energiájává, hanem egy része hőfolyamat során a környezetbe távozik. Ha a munkának mindig ugyanannyiad része távozik hőfolyamat során a rendszerből, akkor *politrop* állapotváltozásról beszélünk. Ebben az esetben $W \neq \Delta U$, hanem $\Delta U = \alpha W$, ahol α abszolút értéke kisebb egynél, és értéke a folyamat során egy adott rendszernél állandó. Szemléletesen α azt jelenti, hogy a gázon végzett munka hányad része alakult át a gáz belső energiájává, $1-\alpha$ pedig azt, hogy a munka hányadrésze távozott a rendszerből hő formájában. Az egyenlet megoldható az adiabatikus folyamatnál tárgyalt módon. A politrop állapotváltozásnál a nyomás és a térfogat közötti összefüggés:

$$pV^n = \text{állandó}.$$

Itt n az ún. *politrop kitevő, politrop index.* Az α-val kifejezve:

$$n = 1 - \frac{1-\kappa}{\alpha}.$$

A politrop állapotváltozást leíró görbe meredeksége az ugyanazon a ponton áthaladó izoterma és adiabata közé esik.

4.5. Reális gázok. Telített és telítetlen gőzök

Minden gáz elég magas hőmérsékleten jó közelítéssel ideális gáznak tekinthető, azaz állandó hőmérsékleten nyomásának és térfogatának szorzata állandó. A p–V síkon ábrázolva az állandó hőmérsékleten történő állapotváltozást esetünkben hiperbolaívet kapunk. Ha a gázzal egyre alacsonyabb hőmérsékleten végeztetünk izoterm folyamatot, akkor ettől a törvénytől egyre nagyobb eltéréseket találunk. Hogy mekkora hőmérsékleten lesz ez az eltérés jól érzékelhető, az az illető gáz anyagi minőségétől függ. Az eltérés ugyanazon gáznál adott hőmérsékleten a nyomás növekedtével nő. Abban a hőmérséklet- és nyomástartományban, melyben az ideális gázokra vonatkozó általános gáztörvény pontatlan, illetve érvényét veszti, a legtöbb gáz állapotváltozását a tapasztalattal jó egyezésben írja le a *van der Waals-féle állapotegyenlet:*

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)\left(V - nb\right) = nRT. \tag{4.16}$$

Itt a és b a gáz anyagi minőségére jellemző állandó, n a mólszám (bővebben lásd a 22.1.3. pontot).

Kritikus hőmérséklet és kritikus nyomás. Gázok cseppfolyósítása. Egy adott gázzal egyre alacsonyabb hőmérsékleten végeztessünk izoterm folyamatot! Az általános gáztörvénytől egyre nagyobb eltéréseket találunk. Egy bizonyos hőmérsékleten és nyomáson a gáz cseppfolyósodni kezd.

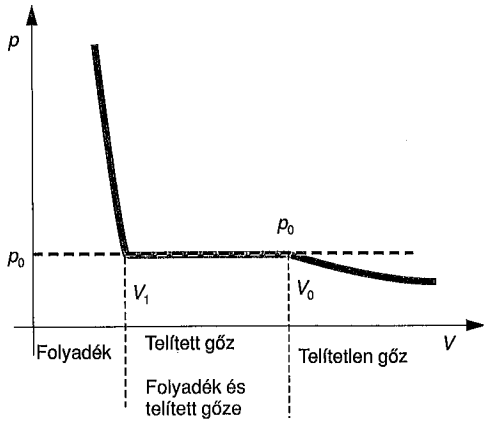
Azt a hőmérsékletet, amely alatt a gáz cseppfolyósodni kezd, de felette semmilyen nagy nyomáson nem, kritikus hőmérsékletnek nevezzük.

A kritikus hőmérséklet alatti gázt szokás *gőznek* is nevezni.

Azt a nyomást, melynél a gáz a kritikus hőmérsékleten már cseppfolyósítható, kritikus nyomásnak nevezzük.

Telítetlen és telített gőzök. Vegyünk egy adott mennyiségű, ideális gázt, amelyet jó hővezető anyagból készült, mozgatható dugattyúval ellátott edénybe helyezünk! Tegyük a gázt tartalmazó edényt egy olyan hőtartályba, amelynek hőmérséklete kisebb a kritikus hőmérsékletnél! Így a dugattyú elmozdulásával állandó hőmérsékleten tudjuk változtatni a bezárt gáz, illetve gőz térfogatát. Induljunk ki egy olyan térfogatról, illetve olyan alacsony nyomásról, hogy az edényben lévő anyag teljes egészében gázhalmazállapotú legyen! A bezárt gáz térfogatát csökkentve a nyomás az állandó hőmérsékleten nő. A nyomás–térfogat összefüggés nem követi az ideális gázoknál érvényes Boyle–Mariotte-törvényt. Ezt az izoterm folyamatot ábrázoltuk a 4.16. ábrán. A térfogat csökkenésével a nyomás elér egy, az ábrán p_0-val jelölt értéket, amelynél a gázban megjelennek az első folyadék-

cseppek. A 4.16. ábrán ezt a térfogatot V_0-val jelöltük. Az edényben tehát egyidejűleg kétféle halmazállapot található, a cseppfolyós és a légnemű.



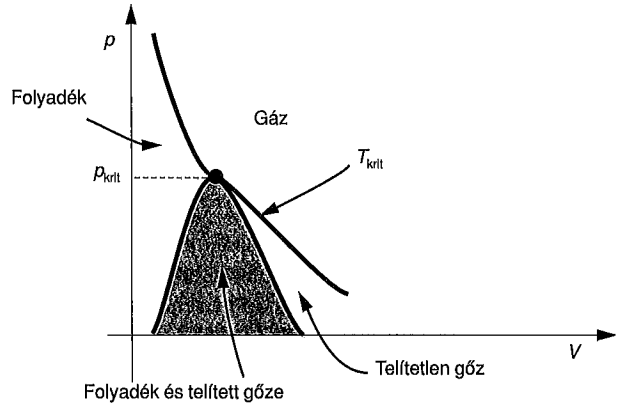
4.16. ábra

Ha a térfogat hosszabb ideje állandó ebben a tartományban, akkor a folyadék-, illetve gázállapotban lévő anyagmennyiségek aránya változatlan. Azt mondjuk, hogy a kétféle fázis, illetve halmazállapot egyensúlyban van. Ez az egyensúly *dinamikus egyensúly,* mert az edényben időegység alatt elpárolgott folyadék mennyisége egyenlő az időegység alatt lecsapódó gőz mennyiségével. A folyadékával egyensúlyban lévő gőzt *telített gőznek* nevezzük. A telített gőz nyomása csak az anyagi minőségtől és a hőmérséklettől függ. Ebben az ún. *telítési tartományban* a térfogat csökkentésével p_0 nem változik, hanem a folyadék mennyisége nő a gőz mennyiségének rovására. Tehát a *telített gőz nyomása állandó hőmérsékleten állandó.* A térfogat csökkentésével együtt végül elérhetjük azt az állapotot, amikor a gőz teljes egészében lecsapódik, teljes egészében folyadékká alakul át. Az ábrán ezt a térfogatot V_1-gyel jelöltük. További jelentősebb térfogatcsökkenést csak igen nagy nyomásokkal tudunk elérni. (A p–V görbe V_1-nél igen meredekké válik.)

Az eddigiek alapján tehát a kritikus hőmérsékletnél hidegebb anyag izoterm állapotait három csoportra oszthatjuk: cseppfolyós állapot, telített gőz és ún. *telítetlen gőz* állapota. Telítetlen gőzről beszélünk, ha a kritikus hőmérsékletnél hidegebb gáz teljes egészében gáz halmazállapotú, és a nyomás kisebb, mint az adott anyagi minőséghez és hőmérséklethez tartozó telítési gőznyomás.

A 4.17. ábrán a kritikus hőmérséklethez tartozó izoterma a p–V síkot két részre osztja: a görbe feletti tartományt nevezzük gázállapotnak. A görbe alatti tartományban találhatók a telített és telítetlen gőz-, valamint a folyadékállapotok.

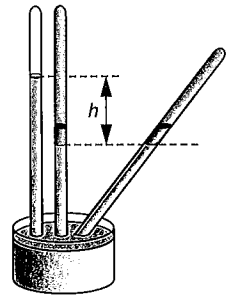
A kritikus hőmérséklet alatt a különböző izotermákon kijelölhetjük a cseppfolyósodás kezdeti és befejeződési állapotait, pontjait. A pontokat összekötve kapjuk a telített gőz tartományát. Ettől jobbra, a kritikus hőmérséklethez tartozó izoterma alatt van a telítetlen gőz, balra pedig a folyadék tartománya.



4.17. ábra

A kritikus hőmérséklettől távol az általános gáztörvény már nagy pontossággal írja le a gázok viselkedését. A kritikus hőmérséklethez közeledve egyre pontatlanabbul írja le az általános gáztörvény a gáz viselkedését, egyre kevésbé tekinthető ideális gáznak. Ebben a tartományban a van der Waals-, vagy ahhoz hasonló félempirikus egyenletek írják le többé-kevésbé jól az állapotváltozásokat.

Szobahőmérséklet környékén a telített gőz nyomását a 4.18. ábra szerinti összeállításban mérhetjük meg. Itt a Torricelli-féle kísérletben használt eszközben a higany fölé a vizsgálandó folyadékból annyit juttatunk, hogy annak elpárolgása után még maradjon ott kis mennyiségű folyadék.



4.18. ábra

Ekkor a higany feletti, eredetileg légüres térben az illető folyadék telített gőze keletkezik. A higanyoszlop lejjebb süllyed annyival, amennyi a telített gőz nyomásának felel meg. A telített gőz nyomása $h\rho_{Hg}g$, ahol h a süllyedés mértéke. (Pontosabb méréseknél figyelembe vesszük a higany felett lévő folyadékoszlop nyomását is. Ez azonban a legtöbb esetben elhanyagolható.) Az eszközt vízfürdőbe helyezve és melegítve a nyomás–hőmérséklet kapcsolat is megfigyelhető, illetve mérhető. Állandó hőmérsékleten emelve, süllyesztve, illetve megdöntve a csövet, a higanyoszlop magassága nem változik, mutatva azt, hogy a térfogat változásával a nyomás értéke változatlan, csak lecsapódás, illetve párolgás jön létre.

4.6. Halmazállapot-változások (fázisátalakulások)

Ugyanazon kémiai anyagnak különböző halmazállapotú vagy eltérő kristályszerkezetű szilárd állapotai lehetségesek. A különböző halmazállapotú (vagy szerkezetű) állapotokat *fázisoknak* nevezzük. Egy adott rendszerben az eltérő fázisok egyensúlyban is lehetnek. Az eltérő anyagi minőségű, kémiai összetételű testekből álló rendszert *többkomponensűnek* nevezik. Az egyfajta kémiai anyagból álló rendszer az *egykomponensű rendszer*. Az olvadó jég és víz keveréke egykomponensű és kétfázisú rendszer.

4.6.1. Olvadás és fagyás

Ha *kristályos szilárd testet* állandó nyomáson melegítünk, akkor a test egy bizonyos hőmérsékleten megolvad. A hőmérséklet egészen addig állandó marad, míg az egész anyag meg nem olvad, teljes egészében át nem alakul folyadékká.

Az *olvadáspont (fagyáspont)* az a hőmérséklet, amelyen az adott test olvadása megindul. Értéke függ az anyagi minőségtől és nyomástól. Azoknál az anyagoknál, amelyeknél a folyadék sűrűsége kisebb, mint az olvadásponton lévő szilárd testé, a nyomás növekedtével az olvadáspont nő. A legtöbb kristályos anyag így viselkedik: a folyadék sűrűsége kisebb, mint a szilárd testé, azaz a szilárd testből keletkezett folyadék térfogata nagyobb, mint szilárd állapotban volt. Az ilyen olvadékot megfigyelve azt találjuk, hogy a szilárd test lesüllyed a saját olvadékában. A víz és még néhány anyag ellentétesen viselkedik. A jég úszik a 0 °C-os vízen. Az ilyen anyagoknál a nyomás növekedésével az olvadáspont csökken.

Ezzel kapcsolatos az újrafagyás jelensége. Egy jégtömbön súlyokkal terhelt vékony huzalt általvetve a huzal alatti nagy nyomás hatására ott a jég megolvad. A drót lejjebb süllyed a jégben, miközben a felette lévő víz nyomása lecsökken az eredeti értékére, és ezen a nyomáson újra megfagy.

Az olvadáspont függ a szennyező anyagoktól. Vízben sót oldva fagyáspontja csökken.

A fagyás az olvadás fordítottja: ha a folyadékot hűtve elérjük a fagyáspontot, akkor addig nem csökken tovább a hőmérséklete, amíg az egész folyadék meg nem fagy. Míg a szilárd testet adott nyomáson melegítve az olvadáspont hőmérsékletén az olvadás mindenképpen bekövetkezik, addig fagyásnál megfigyelhetjük a *túlhűtés* jelenségét. Ez abban áll, hogy a folyadék rázkódásmentesen lényegesen fagyáspontja alá hűthető. Ha a túlhűtött folyadékba egy kis kristálydarabkát dobunk vagy erősen megrázzuk, akkor a folyadék fagyása megindul és felmelegszik fagyáspontjára. Ez a jelenség jól szemléltethető az ún. fixírsónál.

Az olvadáshoz az állandó hőmérsékleten hőt kell közölnünk (lásd a 4.3.2. pontot).

A *nem kristályos szilárd testnek nincs határozott olvadáspontja.* Melegítéskor fokozatosan lágyul meg, mint például az üveg. Ezeket az anyagokat nagy viszkozitású folyadéknak foghatjuk fel, amelyek viszkozitása a hőmérséklet növelésével csökken, és egy bizonyos hőmérsékleti intervallumban kezdenek lágyulni, majd cseppfolyósodni (lásd 29.4.1. pont).

4.6.2. Párolgás

A folyadékok minden hőmérsékleten párolognak. Ez a jelenség tulajdonképpen a folyadék gáznemű állapotba való átalakulása. Ez az átalakulás is a belső energia változásával jár együtt (lásd a 4.3.2. pontot).

A párolgás jelensége nem magyarázható a statisztikus fizika elemi kijelentéseinek ismerete nélkül. A folyadékrészecskék kinetikus energiája eltérő és átlagenergiájuk határozza meg a hőmérsékletet. A folyadék párolgását úgy képzelhetjük el, hogy a felület közelében lévő, az átlagosnál nagyobb mozgási energiájú részecskék energiája elegendő ahhoz, hogy legyőzve a többi molekula kohéziós erejét, a folyadékból eltávozzanak. Mivel az átlagosnál nagyobb energiájú részecskék hagyták el a folyadékot, ezért a visszamaradó folyadékrészecskék átlagos mozgási energiája és így a folyadék hőmérséklete is csökken. Ha a folyadékot teljes egészében elpárologtattuk, akkor a kohéziós erők ellenében végeztünk munkát, a rendszer belső energiája nőtt a részecskék kölcsönhatási energiáinak összegével (annak abszolút értékével).

Állandó hőmérsékleten a párolgási sebesség függ a hőmérséklettől és a párolgási felület nagyságától. Ha a folyadék felszíne közeléből a kilépő részecskéket eltávolítjuk, akkor a párolgási sebesség nő. Ezért például ugyanolyan hőmérsékleten a nedves ruha gyorsabban szárad szeles, mint szélcsendes időben.

Ha a párolgás sebessége nagy, pl. a folyadék légüres vagy alacsony nyomású térbe párolog, akkor annyira lehűlhet, hogy meg is fagyhat.

4.6.3. Forrás

A folyadékokban normális körülmények közt mindig találunk apró buborékokat, melyek a felületi feszültség következtében az edény falához tapadnak. A buborékokban levegő és a folyadék telített gőze van. A buborékokra hat a környező folyadék által kifejtett hidrosztatikai felhajtóerő. Ez általában nem elegendő arra, hogy a buborék az edény faláról leszakadjon és a felszínre jöjjön, mert térfogata nem elég nagy. A buborékban a nyomás a bent lévő levegő és a folyadék telített gőze nyomásának összege. Ez a nyomás tart egyensúlyt a külső levegő nyomásával és a legtöbb esetben elhanyagolható kapilláris-, illetve hidrosztatikai nyomással. Melegítsük fel a folyadékot egy magasabb hőmérsékletre! Ezen a magasabb hőmérsékleten a buborék tágulni kezd, mert a benne lévő levegő és telített gőz nyomása együttesen nagyobb, mint a nyomás. A benne lévő levegő nyomása ezen a magasabb hőmérsékleten a tágulás következtében csökken, míg a telített gőz nyomása a magasabb hőmérsékletnek megfelelő állandó értéken marad. Ha ez a hőmérséklet nem túl magas, akkor elegendő nagy buborék térfogatnál a tágulás megáll, mert a levegő nyomása a tágulás következtében annyira lecsökken, hogy csökkenése fedezi a telített gőz nyomásának növekedését. Amennyiben a hőmérséklet eléri azt az értéket, melynél a telített gőz nyomása eléri a kinti légnyomást, a buborék tágulásával csökkenő, de mindig meglévő levegőnyomás és a tágulással nem csökkenő telített gőznyomás összege meghaladja a kinti nyomást. Ezért a buborék tágulása nem áll meg, hanem rohamosan tágul, és végül a nagy felhajtóerő hatására leszakad az edény faláról és a folyadék felszínére tör. Ez a *forrás* jelensége. A fentiek alapján egy folyadék *adott nyomás mellett azon a hőmérsékleten forr, melyen telített gőzének nyomása eléri a külső légnyomást.*

A forráspont tehát függ a folyadék anyagi minőségétől és a külső légnyomástól. A forráspont a nyomás csökkenésével csökken, mert a buborékban lévő telített gőz nyomása a kisebb nyomást alacsonyabb hőmérsékleten éri el. Az 1 bar nyomáson mért forráspont a normális forráspont.

Adott folyadék adott nyomáshoz tartozó forráspontját a telített gőz nyomás–hőmérséklet táblázatból határozhatjuk meg. Az előzőek alapján az adott nyomáshoz megkeressük a hozzá tartozó hőmérsékletet. Ez lesz ezen a nyomáson a forráspont.

A folyadékok hőmérséklete a forrás közben addig nem változik, míg az egész folyadék el nem párolgott. Ezért alkalmas hőmérők hitelesítésére.

A folyadékok forráshője adott nyomáson megegyezik párolgási hőjével.

Ha a folyadék teljesen buborékmentes, és nem tartalmaz semmiféle szilárd testecskét, amelyeken buborékok megtapadhatnak, akkor jóval forráspontja fölé hevíthető. A forráspontja fölé hevített folyadék a *túlhevített* folyadék. Kis rázkódás vagy más zavar hatására a folyadék robbanásszerűen forrni kezd. Ennek elkerülésére szokás pl. a forralandó folyadékba horzsakövet tenni, melyben a lyukacsos szerkezet miatt sok buborék van.

A vízben lévő étel nem fő meg hamarabb, ha nagyobbra vesszük a gázlángot, csak gyorsabban forr el a víz, hiszen a normál légköri nyomáson forrásban lévő víz hőmérséklete 100 °C lévén, a benne lévő étel hőmérséklete sem emelkedhet 100 °C fölé. A *kuktaedény* működése azon alapul, hogy nagyobb nyomáson a forráspont magasabb. A zárt térben a folyadék felett a gőz és a felmelegedett levegő nyomása akkora lesz, hogy forráspontja 120...150 °C-ra emelkedik.

4.6.4. Kristályszerkezeti átalakulások

Egyes anyagok, pl. a kén, ón stb. szilárd halmazállapotban kétféle kristályszerkezetben létezhetnek. A kristályszerkezeti átalakulás adott hőmérsékleten megy végbe. A testeket a fázisátalakulás hőmérséklete alá is lehet hűteni anélkül, hogy a fázisátalakulás végbemenne. A fázisátalakulás hőmérséklete ugyanolyan jól meghatározott érték, mint az olvadáspont. A fázisátalakuláshoz szükséges Q hő egyenesen arányos a test m tömegével

$$Q = Lm. \tag{4.17}$$

Az L arányossági tényező a tömegegység fázisátalakulásához szükséges hő, az ún. *fázisátalakulási hő.* Mértékegysége: J/kg.

4.6.5. Szublimáció

A szublimáció jelensége abban áll, hogy a szilárd test a folyadékállapot kimaradásával alakul át gőzzé. Ez a jelenség a köznapi életben pl. a kámfornál, naftalinnál figyelhető meg.

Általában megfelelő nyomáson és hőmérsékleten minden anyag szublimál. A jelenséget pl. úgy mutathatjuk ki, hogy a megfelelő hőmérsékletű anyagot olyan edénybe helyezzük, melyből a levegőt kiszivattyúzzuk. A test párologni, szublimálni kezd. Az adott térfogatú edényben szilárd anyag és gőz lesz. Ha a szilárd anyag mennyisége elég volt, akkor nem fog az egész szilárd fázis átalakulni. Egy bizonyos idő múltán a két fázis aránya állandósul. Azt mondjuk, hogy a két fázis egyensúlyban van. Minden ilyen egyensúlyi állapothoz tartozik adott hőmérsékleten egy gőznyomás, más néven szublimációs nyomás (szilárd fázissal egyensúlyban lévő telített gőz nyomása). Ezt a p–T görbét ábrázolva kapjuk az ún. szublimációs görbét. A nyomás ugyanúgy, mint a gőzével egyensúlyban lévő folyadék esetén, az anyagi minőségtől és a hőmérséklettől függ.

A szublimációhoz szükséges hő a szublimáció adott hőmérsékletén egyenesen arányos a tömeggel: $Q = Lm$. Itt is L az anyag (fajlagos) szublimációs hője: a tömegegységnyi anyag szilárdból gőzzé alakulásához szükséges hő.

A szublimáció fordítottja a gőzfázisból a szilárd fázisba való átalakulás, a folyadékfázis kihagyásával. A levegőben lévő vízgőz közvetlen szilárd fázissá alakulása a *dér*.

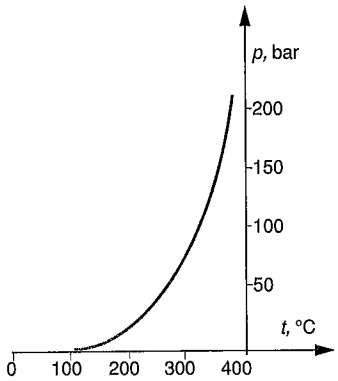
4.6.6. Fázisdiagram; hármaspont

A kémiailag homogén, azaz egykomponensű rendszerben egy vagy több fázis lehet egyidejűleg jelen.

Meghatározott nyomáson és hőmérsékleten a két fázis egyensúlyban lehet. Két fázis egyensúlyán azt az állapotot értjük, amikor adott nyomáson és hőmérsékleten valamilyen zárt térfogatban a két fázis tömegének aránya időben változatlan. Ez nem azt jelenti, hogy molekuláris méretekben megszűnt a fázisátalakulás, hanem azt, hogy az egyik fázisból a másikba időegység alatt ugyanannyi részecske megy át, mint fordítva.

Mivel egy kémiailag homogén anyagnak a legtöbb esetben csak három fázisa lehetséges (kivéve az allotrop módosulatok fázisait) ezért a kétfázisú egyensúlyi állapotok száma három: gőz–folyadék, gőz–szilárd, folyadék–szilárd.

A gőz–folyadék egyensúlyi állapot a telített gőz állapot (lásd bővebben 4.5. szakasz). A 4.16. ábrához hasonló ábrát víz esetére elkészítve az izotermák adataiból leolvashatjuk azokat az összetartozó p és T értékeket, melyeken a vízgőz–folyadék egyensúlyi állapot lehetséges. Ezeket a pontokat összekötve kapjuk a telített vízgőz nyomás–hőmérséklet görbéjét (4.19. ábra).

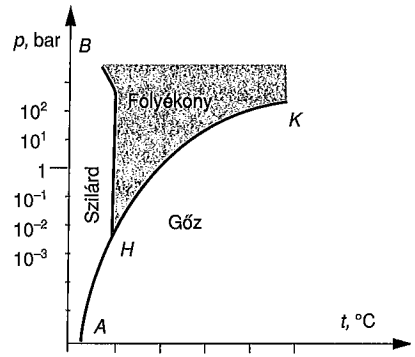


4.19. ábra

A folyékony–szilárd állapotok is egyensúlyban lehetnek. A nyomás–olvadáspont grafikon itt is felvehető.

A gőz–szilárd fázis egyensúly a szublimációnál említett egyensúlyi állapot. A megfelelő p–T grafikon a *szublimációs görbe*.

A három görbét egyetlen p–T grafikonon ábrázolva kapjuk a *fázisdiagramot*. A 4.20. ábrán a víz fázisdiagramja látható. A három görbe egyetlen pontban metszi egymást. Ebben az állapotban, ezen a nyomáson és hőmérsékleten mindhárom fázis egyensúlyban van. Ez a pont a H által jelölt *hármaspont*. Víznél ez az állapot 0,01 °C-on és 610,1 Pa-on következik be. A három görbe a p–T síkot a három fázisnak megfelelő tartományokra osztja. Csak a tartományok határán, a görbék pontjaiban lehet két-két fázis egyensúlyban.



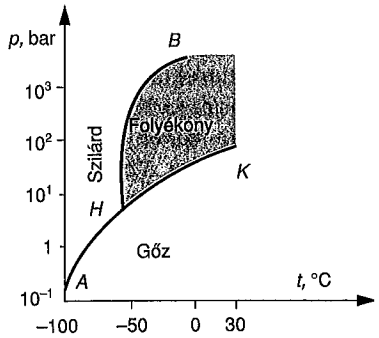
4.20. ábra

A 4.20. ábrán a H hármasponttól a K kritikus pontig terjedő görbe telített gőz nyomásának nyomás–hőmérséklet görbéje. HA a szublimációs, HB a nyomás–olvadáspont görbe.

Az ábrából pl. az is leolvasható, hogy a vízjeget a H hármasponthoz tartozó 610,1 Pa nyomásnál kisebb nyomáson melegítve az nem olvad meg, hanem szublimál. Nagyobb nyomáson a szilárd és folyadék- vagy a folyadék- és gőzfázis lehet egyensúlyban a hőmérséklettől függően. Ha a hőmérséklet meghaladja a víz kritikus hőmérsékletét, akkor bármilyen nyomáson csak gázhalmazállapot lehetséges.

A 4.21. ábrán a CO_2 fázisdiagramja látható. Hármaspontjának adatai: –56,6 °C és 5,3 bar. A grafikonról az is leolvasható, hogy a szilárd CO_2 normál légköri nyomáson nem alakul át folyékony halmazállapotúvá, hanem szublimál.

A több módosulattal rendelkező anyagok fázisdiagramja bonyolultabb. Pl. a kénnél több hármaspont van. Mint az elméletileg kimutatható, az egykomponensű rendszereknél „négyespont" nem lehetséges.



4.21. ábra

4.6.7. Abszolút és relatív páratartalom

A levegő különböző gázok keveréke. Átlagos körülmények között mindig található benne molekuláris állapotú vízgőz, pára. Az 1 m^3 levegőben lévő vízgőz tömege az *abszolút páratartalom.* Komfortérzetünket azonban elsősorban nem az abszolút páratartalom határozza meg.

Ennek hozzávetőleges magyarázata a következő: Nagy melegben az emberek izzadással hűtik le magukat. Ugyanis a test felületén kialakult vízréteg párolgás közben lehűl, hűti bőrünket, véd a szervezet túlhevülése ellen. Minél gyorsabb a párolgás, annál nagyobb az időegység alatt elvont hő. Pl. ezért hűsít nagy melegben a ventilátor légáramlata, mert a párolgás sebességét megnöveli. Ha egy szoba levegőjében annyi vízgőz van, hogy az már telített, akkor hiába izzadunk. Ekkor a kétféle fázis dinamikus egyensúlyban van (ezt jelenti a telített vízgőzállapot). Testünkről hiába párolog el víz, a kialakult dinamikus egyensúly miatt pontosan ugyanannyi víz csapódik le, mint amennyi víz elpárolgott, a rajtunk lévő vízréteg mennyisége nem változik, az izzadás nem hűt! Ezért van az, hogy az ugyanolyan hőmérsékletű, „párás, fülledt" meleget, a telített vízgőzállapotú levegőt nehezebben viseljük el, mint a száraz meleg levegőt. Tehát az izzadással való hűtés szempontjából nem az a fontos, hogy mennyi vízgőz van a levegő 1 köbméterében, hanem az, hogy az adott hőmérsékleten mennyire telített.

Különböző hőmérsékleteken a telített vízgőz sűrűsége, az abszolút páratartalom különböző. Ez a hőmérséklet növelésével rohamosan nő, csökkenésével rohamosan csökken. Ugyanaz az abszolút páratartalom magas hőmérsékleten még nem jelentheti a telített gőzállapotot, de alacsonyabb hőmérsékleten már igen. Pl. ha hideg levegőről jövünk be egy meleg szobába, akkor hideg szemüvegünk lehűti maga körül a levegőt, és a környezetben lévő vízgőz lehűl olyan alacsony hőmérsékletre, hogy a vízgőz már nemcsak telített lesz, hanem egy része ki is csapódik.

A fentiek alapján komfortérzetünket nem az abszolút páratartalom határozza meg, hanem az, hogy adott hőmérsékleten a levegőben lévő vízgőz milyen távol van a telített állapottól. Ezért vezették be a *relatív páratartalmat.*

$$\text{relatív páratartalom} = \frac{\rho_A}{\rho_t},$$

ahol ρ_A az adott hőmérsékleten vízgőz sűrűsége, azaz az 1 m^3 levegőben lévő vízgőz tömege, az abszolút páratartalom; ρ_t a telített vízgőz sűrűsége ugyanezen hőmérsékleten. Adott állapotú levegő *harmatpontja* az a hőmérséklet, amelyre az adott levegőt lehűtve, az éppen telítetté válik. Az elnevezés onnan ered, hogy a nyáresti meleg levegő vízgőze még telítetlen. Éjszaka azonban a levegő lehűl, és hajnalra hőmérséklete a harmatpont alá süllyed, és a fölös víz a hűvösebb tárgyakra kicsapódik, ez a harmat. A köd a levegőben lévő porszemcsékre, füstszemcsékre kicsapódó víz. Ha a levegőt a harmatpont alá hűtjük, nem biztos, hogy kicsapódik. Ahhoz, hogy folyadékállapotban, folyadékcseppként jelenjen meg, ún. ködképző magvacskák szükségesek. Ilyen ködképző magvacskák pl. a levegőben lebegő finom szemcsék, füstrészecskék, sőt ionok is (lásd Wilson-féle ködkamra).

5. A természeti folyamatok iránya. A termodinamika II. főtétele

5.1. Reverzibilis és irreverzibilis folyamatok

A természetben lejátszódó folyamatoknál a kezdeti állapotba való visszajutás többnyire nem valósulhat meg anélkül, hogy a rendszer környezetében ne maradna vissza valamilyen változás. Az ilyen folyamatokat megfordíthatatlan, *irreverzibilis folyamatoknak* nevezzük.

Itt nem arról van szó, hogy a folyamatot nem tudjuk visszafelé lejátszani, hanem arról, hogy ezt a környezet változása nélkül nem tudjuk megtenni. Például a só oldódását vízben meg tudjuk fordítani abban az értelemben, hogy vissza tudjuk állítani a kezdeti állapotot bepárlással. A környezetben végül is maradandó állapotváltozás jön létre, hiszen a bepárláshoz valamilyen mennyiségű tüzelőanyagot felhasználtunk. A súrlódásos asztalon végighúzott test és az asztallap felmelegszik. Hogy a kezdeti állapotot visszaállítsuk, a testet vissza kell tolnunk eredeti helyére, és végül le kell hűtenünk a rendszert. E folyamatok közben a környezet hőt vesz fel, és változás megy végbe benne. A földre zuhanó test becsapódáskor felmelegszik, de sohasem tapasztaljuk azt, hogy a kő lehűl és visszaugrik eredeti helyére, holott ezt az energiamegmaradás megengedné.

Azokat az egyensúlyi állapotokon keresztülmenő folyamatokat, amelyeket visszafelé végrehajtva a vizsgált test visszavihető eredeti állapotába anélkül, hogy a környezetben maradandó változás lépne fel, *megfordítható* vagy *reverzibilis folyamatoknak* nevezzük.

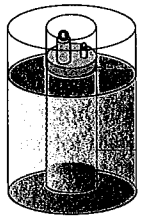
Az ideális körülmények között végbemenő, disszipatív erők nélkül lezajló folyamatok is megfordíthatóak a fenti értelemben.

Ebben a fejezetben azonban csak olyan termodinamikai folyamatokkal foglalkozunk, amelyeknél a folyamatok jó közelítéssel egyensúlyi folyamatok vagy ilyen folyamatokból tevődnek össze. Az ilyen folyamatokat kvázistatikus folyamatoknak nevezzük. Nem egyensúlyi termodinamikával itt nem foglalkozunk.

Reverzibilis folyamat például egy gáz lassú, izotermikus állapotváltozása egyensúlyi állapotokon keresztül stb.

A reverzibilis folyamatok idealizált folyamatok, amelyeket jó közelítéssel megvalósíthatunk.

Az 5.1. ábrán egy egyszerűen leírható, jó közelítéssel reverzibilis folyamatot mutatunk be. Egy jó hővezető edényben lévő folyadékot és telített gőzét környezetétől súrlódásmenetes dugattyú zár el. Az edény egy olyan hőmérsékletű hőtartályban van, amelynek hőmérséklete akkora, hogy a folyadék és gőze egyensúlyban van. Legyen a kinti légnyomás nulla, így a dugattyúra súlyokat kell helyeznünk, hogy a telített gőz nyomása ne vágja ki a dugattyút. Helyezzünk a dugattyúra annyi súlyt, hogy dugattyú súlyából és a súlyokból származó nyomás legyen egyenlő a telített gőz nyomásával! Tegyük fel, hogy a dugattyú jó közelítéssel súrlódásmentesen mozoghat és az edényben elegendő sok folyadék van! Legyen a kiindulási állapot az ábrán folytonos vonallal kihúzott helyzet!



5.1. ábra

Emeljünk le egy igen kis súlyt a dugattyúról! Ekkor a nyomás kismértékben csökken, a dugattyú feljebb emelkedik, miközben a folyadék egy része elpárolog, kismértékben lehűl, picivel kisebb a hőmérséklete a hőtartályénál, onnan hőt vesz fel. A dugattyú igen lassan a szaggatott vonallal jelölt helyzetbe jut. Eközben az edény–folyadék–gőz rendszer jelentős hőt vesz fel a hőtartálytól és a dugattyú, valamint a súlyok helyzeti energiája megnő. Ha a most már egyensúlyi helyzetben lévő dugattyúra egy piciny súlyt helyezünk, akkor a folyadék–gőz rendszer a súlyokkal együtt visszajut kezdeti állapotába. Eközben az előzőekben elvont hőt visszaadja a hőtartálynak. Így az edény–folyadék–gőz–súly rendszer visszaállt eredeti állapotába, miközben végül a környezetben elhanyagolható mértékű változás jött létre a teljes folyamat alatt. Ezért ez a folyamat jó közelítéssel reverzibilis folyamat, mert egyensúlyi állapotokon keresztül ment végbe, és a folyamat oda-vissza végrehajtásakor a környezetben elhanyagolható változás ment végbe.

Nem reverzibilis folyamat például egy hideg és forró test közötti, hőcsere útján történő energiaátadás. Ugyanis legyen a kezdeti A állapot az az állapot, amikor a két test hőmérséklete t_1, illetve t_2. A két testet összeérintve a környezetben történő változás nélkül végbemehet a hőmérséklet-kiegyenlítődés, pl. egy merev falú hőszigetelt tartályban. Az így létrejött B állapotból csak a környezetben létrejövő jelentős változás árán – pl. egy hűtőgép működtetésével – juttathatjuk vissza a rendszert a kezdeti állapotába. Ha a hűtőgép elektromos árammal működik, az elektromos energiát előállító erőműben pl. egy bizonyos mennyiségű szén fogyott el.

5.2. A termodinamika II. főtétele

Ha egy rendszert környezetétől elszigetelünk, akkor a benne spontán végbemenő folyamatok időben egy meghatározott irányban zajlanak le. Az ellentétes irányú folyamat csak a szigetelés megbontásával, külső hatásra, a környezet nem elhanyagolható változása mellett mehet végbe. A II. főtétel a folyamatok irányára tesz kijelentést. Ez a tétel egyszerű tapasztalati ténynek látszik, de belőle bonyolultabb folyamatok irányára is levonhatók következtetések.

A II. főtétel többféleképpen megfogalmazható. Ezek a megfogalmazások egyenértékűek, mindegyik más-más tapasztalati tényt fogad el axiómaként. Az egyikből a másik levezethető.

A *Clausius-féle* megfogalmazás szerint:

– *Hő magától csak melegebb helyről hidegebbre mehet át, azaz a természetben a hőmérséklet-különbségek kiegyenlítődésre törekszenek.*

A megfogalmazásban lényeges a „magától" kifejezés, amely arra utal, hogy a két test között fordított irányú folyamat csak külső hatás következtében jöhet létre. Például a hűtőgép éppen hidegebb helyről szállít hőt melegebb helyre, azonban ez a folyamat a környezet jelentős változásával jár. A hűtőgép a környezetet fűti, és a hozzá csatlakozó hálózatból energiát fogyaszt.

A II. főtétel *Planck-féle* megfogalmazása:

– *Nem lehet olyan, periodikusan működő hőerőgépet készíteni, amely egyetlen hőtartály lehűlése árán munkát végez a környezetén.*

Itt az a lényeges, hogy periodikusan működő gépről van szó. Periodikus gépen olyan gépet értünk, amely egy bizonyos állapotból kiindulva visszatér kiindulási állapotába, miközben munkát végez, mechanikai energiát ad át környezetének. Ha ilyen gép lenne, akkor a rendelkezésre álló hőtartály energiáját periodikus üzemben át tudná alakítani mechanikai energiává (pl. egy hajó a tengervízben tárolt energiát alakítaná át folyamatos periodikus üzemben, miközben jeget dobálna ki magából). Az ilyen nem létező gépet nevezik másodfajú perpetuum mobilének.

A II. főtétel nem tiltja az olyan gép létezését, amelyik nem periodikusan, hanem egy irányban működve a hőtartály által leadott energiát teljes egészében átalakítja munkává, mechanikai energiává. Ilyen gép például az izotermikusan táguló gáz esetén említett dugattyús „hőerőgép". Az ilyen gépnek azonban nem vesszük hasznát, mert egyetlen löket után megáll, nem tud a hőtartály energiájának rovására folyamatosan munkát végezni.

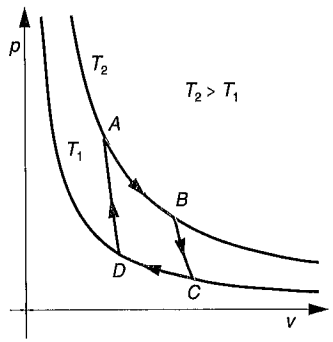
A két megfogalmazás egyenértékű, az egyikből következik a másik.

5.3. Hőerőgépek. A Carnot-féle körfolyamat

Hőerőgépen a továbbiakban mindig periodikusan működő gépet értünk. A Planck-féle megfogalmazásból következik, hogy a periodikusan működő hőerőgép működtetéséhez legalább két hőtartály szükséges. A forró hőtartály hőmérsékletét T_2-vel, a hidegebb hőtartályét pedig T_1-gyel jelöljük. A gép egy dugattyúval ellátott henger, amelybe gázt, gőzt, folyadékot vagy akármilyen más munkavégző közeget teszünk. A gyakorlatban pl. forró hőtartály lehet a kazán, a hideg a hűtőközeg, a munkavégző közeg pedig a vízgőz.

5.3.1. A Carnot-féle körfolyamat

A Carnot-féle körfolyamat egy valóságos hőerőgép idealizált modellje. Egy ciklusát az 5.2. ábrán láthatjuk. A folyamat négy lépésből áll, a munkavégző közeg ideális gáz. A jó hővezető hengert a T_2 hőmérsékletű forró hőtartályba helyezzük. A munkavégző közeget hagyjuk izotermikusan kitágulni úgy, hogy a folyamatot kvázisztatikusan vezetjük. Eközben a tágúló gáz W_{AB} munkát végez, mialatt a forró hőtartályból Q_2 hőt vesz fel. Ez az *AB* folyamat. Mivel a gáz ideális, azaz belső energiája csak a hőmérséklettől függ, ezért ebben a folyamatban a hőtartály által leadott energia teljes egészében mechanikai energiává alakul.



5.2. ábra

A gázt hagyjuk adiabatikusan tovább tágulni, miközben nem vesz fel hőt sehonnan, és saját belső energiájának rovására munkát végez. Addig hagyjuk a gázt tágulni, míg le nem hűl a hideg hőtartály hőmérsékletére. Ezalatt a gáz W_{BC} munkát végez. Ez a munka a gáz belső energiájának változásával egyenlő, miközben T_2-ről T_1-re hűl le. A gázt a hideg hőtartályban W_{CD} munkával addig nyomjuk össze, hogy a gáz állapotát ábrázoló pont rákerüljön az *A*-ból kiinduló adiabatára. A összenyomáshoz szükséges munka kisebb, mint a forró hőtartályban a táguláskor végzett munka, hiszen itt a gáz hidegebb, ezért nyomása kisebb, így kisebb erővel kell összenyomni. Az összenyomódó gáz hőt ad le a hideg hőtartálynak. Mivel az állandó hőmérséklet miatt nem változik a gáz belső energiája, ezért a Q_{le} leadott hő nagysága megegyezik W_{CD} nagyságával. A gázt a *D*-ből *A*-ba tartó adiabatikus folyamatban összenyomjuk. Az ehhez szükséges munka megváltoztatja a gáz belső energiáját, miközben T_1-ről T_2-re melegszik. Az ideális gáz belső energiája csak a hőmérséklettől függ. Ezért a T_1-ről T_2-re, illetve T_2-ről T_1-re történő hőmérsékletváltozásnál a belső energia változásának abszolút értéke ugyanaz. Így az adiabatikus összenyomáshoz szükséges munka nagysága megegyezik az adiabatikus táguláskor végzettel.

Végül is a körfolyamat végére mechanikai energia áll rendelkezésünkre. Pl. ha táguláskor a gázzal egy lendkereket pörgetünk fel, akkor forgási energiájának csak egy részét kell a gáz visszanyomására fordítanunk.

A továbbiakban csak a munkák és a hőmennyiségek abszolút értékével számolunk. A lendkerék mozgási energiája a körfolyamat *ABC* része végén:

$$|W_{AB}|+|W_{BC}|=|Q_{fel}|+|W_{BC}| \qquad \left(\text{mert } |Q_{fel}|=|W_{AB}|!\right).$$

A lendkerék által a gáz összenyomásakor a *CDA* folyamatban végzett munka:

$$|W_{CD}|+|W_{DA}|=|Q_{le}|+|W_{BC}| \qquad \left(\text{mert } |W_{CD}|=|Q_{le}| \text{ és } |W_{BC}|=|W_{DA}|\right).$$

A folyamat végén a lendkerék mozgási energiája:

$$W=|W_{AB}|+|W_{BC}|-\left(|W_{CD}|+|W_{DA}|\right)=$$
$$=|Q_{fel}|+|W_{BC}|-\left(|Q_{le}|+|W_{BC}|\right)=|Q_{fel}|-|Q_{le}|.$$

Tehát a gép nem a forró hőtartály által leadott teljes hőt alakította át mechanikai energiává, hanem annak csak egy részét, a többit a hideg hőtartálynak adta le.

5.3.2. A hőerőgépek termodinamikai hatásfoka

A forró hőtartályból felvett hő a gyakorlatban a kazántól felvett hő. Ennek pótlására égetik el a tüzelőanyagot a kazánban. Ezért a felvett hő az elégetett tüzelőanyagból származik. Nyilván az a jobb, gazdaságosabb hőerőgép, amelyik a felhasznált tüzelőanyag energiájának nagyobb hányadát alakítja át mechanikai energiává.

Egy hőerőgép termodinamikai hatásfoka azt mutatja meg, hogy a forró hőtartályból felvett hő (amely a felhasznált tüzelő anyag mennyiségével arányos) hányad részét alakítja át munkává:

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{fel}}} = \frac{Q_{\text{fel}} - Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}} = 1 - \frac{Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}}. \qquad (5.1)$$

A II. főtétel felhasználásával igazolható, hogy a *Carnot-féle körfolyamat hatásfoka független a munkavégző közeg anyagi minőségétől, és adott hőtartályoknál csak a hőtartályok hőmérsékletétől függ.* Igazolható az is, hogy a két hőtartálynak megfelelő hőmérsékleti határok között működtetett hőerőgépek közül a *Carnot-féle körfolyamattal működő hatásfoka legnagyobb.*

Carnot-féle körfolyamat hatásfokát ideális gázra meghatározva:

$$\eta_{\text{ideális gáz}} = 1 - \frac{T_{\text{hideg}}}{T_{\text{forró}}}. \qquad (5.2)$$

A (4.14) szerint ugyanis az izotermikus folyamat alatt végzett munka, amely egyenlő a felvett vagy leadott hővel, a $\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ kifejezéssel adható meg. Így

$$\frac{Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}} = \frac{\frac{m}{M} RT_{\text{hideg}} \ln \frac{V_D}{V_C}}{\frac{m}{M} RT_{\text{forró}} \ln \frac{V_B}{V_A}}. \qquad (5.3)$$

Mivel adiabatikus folyamatoknál (4.15) szerint $TV^{\kappa-1}$ = állandó,

$$T_{\text{forró}} V_B^{\kappa-1} = T_{\text{hideg}} V_C^{\kappa-1} \qquad \text{és} \qquad T_{\text{forró}} V_A^{\kappa-1} = T_{\text{hideg}} V_D^{\kappa-1}.$$

A két egyenletet elosztva egymással és κ–1-edik gyököt vonva: $\frac{V_D}{V_C} = \frac{V_B}{V_A}$. Ezt (5.3)-ba majd (5.1)-be helyettesítve kapjuk az (5.2) összefüggést.

Mivel a *Carnot-féle körfolyamat hatásfoka független a munkavégző közeg anyagi minőségétől, és az adott hőmérsékleti határok esetén ez a maximális hatásfokú körfolyamat, ezért bármilyen munkavégző közeggel dolgozó, bármilyen hőerőgépre a termodinamikai hatásfok:*

$$\eta \le 1 - \frac{T_{\text{hideg}}}{T_{\text{forró}}}. \qquad (5.4)$$

5.3.3. A termodinamikai hőmérsékleti skála

Az a tény, hogy a Carnot-féle körfolyamat hatásfoka független a munkavégző közeg anyagi minőségétől és csak a hőtartályok hőmérsékletétől függ, lehetőséget ad egy olyan hőmérsékleti skála definíciójára, amely nem kötődik egy konkrét anyagi minőséghez, hiszen a hőtartályok által leadott, illetve felvett hő mérhető.

Ennek alapján egy hőtartály hőmérsékletét a következőképpen mérjük: kiválasztunk egy tetszőleges hőtartályt. Ennek hőmérsékletét önkényesen választjuk T_0-nak! Pl. az olvadó jég hőmérsékletét válasszuk 273,16-nak. Ez megállapodás kérdése. Az ismeretlen hőmérsékletű hőtartály és a T_0 hőmérsékletű között tetszőleges anyaggal Carnot-féle körfolyamatot végzünk. Megmérjük a $\frac{Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}}$ hányadost. A hőtartály hőmérsékletén a $T = T_0 \frac{Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}}$ hányadost értjük.

Az ideális gázzal töltött gázhőmérő megfelelő alappontokkal éppen erre a hőmérsékleti skálára „hibázik" rá. Az ideális (vagy annak tekinthető) gázzal töltött gázhőmérő tehát a termodinamikai hőmérsékletet mutatja (megfelelő skálázás esetén).

A fenti eljárással bármilyen anyagból készült hőmérőt, illetve hőmérséklet-mérési eljárást hitelesíteni tudunk termodinamikai (abszolút) hőmérsékleti skálában, ha a mért T hőmérsékletű hőtartállyal hozzuk hőegyensúlyi állapotba.

5.4. Az entrópia

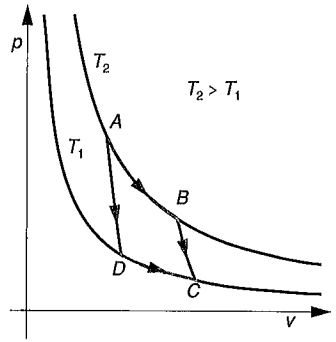
5.4.1. A Clausius-féle egyenlőtlenség

Legyen $Q_{\text{le}} = Q_1$, $Q_{\text{fel}} = Q_2$, akkor az előző pont alapján $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$. Tehát az *(ABC)* és az *(ADC)* reverzibilis folyamatokban felvett hők nem egyenlő nagyságúak, de a $\frac{Q}{T}$ hányadosok igen (5.3. ábra).

Ha az *A*-ból Carnot-féle körfolyamattal visszajutunk az *A*-ba, és figyelembe vesszük, hogy a test által felvett hő a test belső energiáját növeli, azaz pozitív, a leadott hő pedig negatív, akkor az előzőeket a következőképpen is írhatjuk:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy *reverzibilis körfolyamatban a* $\frac{Q}{T}$ *hányadosok összege nulla.*



5.3. ábra

Amennyiben a körfolyamat nem reverzibilis, akkor megmutatható, hogy

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}\le 0,$$

azaz irreverzibilis körfolyamatban a $\frac{Q}{T}$ hányadosok összege negatív.

Pl. ha a dugattyú súrlódik a henger falához, azaz a folyamat irreverzibilis, akkor, mind a dugattyú, mind a henger felmelegszik. Ezért hőt adnak le a hőtartálynak függetlenül attól, hogy a gáz tágul, illetve összenyomódik. Ez a hő formájában történő energiaátadás a gáz belső energiájának rovására történik, azaz az ezzel kapcsolatos hők negatívak. Ezt beszámítva a hőtartályokkal történő hőcserébe, az összeg negatív lesz.

Az előzőek egy test tetszőleges körfolyamatára is igazak még akkor is, ha a test a folyamat során nem csak két hőtartállyal van kapcsolatban:

Reverzibilis körfolyamatban a T_i hőmérsékletű hőtartályoktól felvett (előjeles!) ΔQ_i hőmennyiségek és a hőmérsékletek hányadosának összege nulla:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{T_i}=0 \quad \textit{reverzibilis körfolyamatokra.} \qquad (5.5a)$$

Irreverzibilis körfolyamatban a T_i hőmérsékletű hőtartályoktól felvett (előjeles!) hők és a hőmérsékletek hányadosának összege negatív:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{T_i}\le 0} \quad \textit{irreverzibilis folyamatokra.} \qquad (5.5b)$$

Ez a *Clausius-féle egyenlőtlenség.*

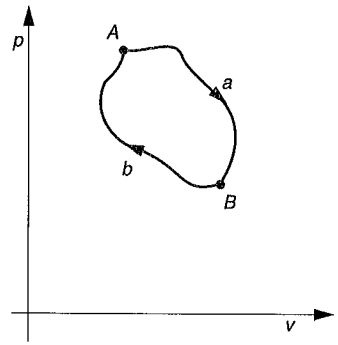
5.4.2. A entrópia definíciója

Juttassunk el egy rendszert reverzibilis úton egy *A* állapotából egy másik, *B* állapotába, majd juttassuk vissza *B*-ből ugyancsak reverzibilisen *A*-ba! Ekkor az 5.4. ábrán *a*, illetve *b* görbével jelzett állapotsorozatokra, az 5.4. ábrán bejelölt irányokra

$$0=\sum_{\substack{A\to B\\ a\\ \text{görbén}}}\frac{\Delta Q_i}{T_i}+\sum_{\substack{B\to A\\ b\\ \text{görbén}}}\frac{\Delta Q_i}{T_i}=\sum_{\substack{A\to B\\ a\\ \text{görbén}}}\frac{\Delta Q_i}{T_i}+\left[-\sum_{\substack{A\to B\\ b\\ \text{görbén}}}\frac{\Delta Q_i}{T_i}\right].$$

A fenti egyenletben a $\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{T_i}$ összeg a *b* görbe mentén ugyanolyan nagy, ha *A*-ból *B*-be vagy *B*-ből *A*-ba jut a test, csak ellentett előjelű, hiszen a fordított irányú folyamatnál a hőfelvételből hőleadás lesz és viszont. A fenti egyenlőségből következik, hogy

$$\sum_{\substack{A\to B\\ a\\ \text{görbén}}}\frac{\Delta Q_i}{T_i}=\sum_{\substack{A\to B\\ b\\ \text{görbén}}}\frac{\Delta Q_i}{T_i} \quad \text{reverzibilis folyamatokra.}$$



5.4. ábra

Azaz bármilyen reverzibilis úton-módon jutunk el egy test egyik állapotából egy másik állapotába, a $\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{T_i}$ értéke mindig ugyanakkora. Tehát ennek a kifejezésnek az értéke független attól, hogy milyen állapotok sorozatán át jutott a test egyik állapotából a másik állapotába, azaz csak a két állapottól függ. Éppen az ilyen mennyiségeket nevezzük állapotjelzőnek. Mint a belső energiánál, itt sem tudjuk meg-

mondani a mennyiségek nagyságát, csak a megváltozásukat. A most felismert állapotjelzőt S-sel jelöljük és *entrópiának* nevezzük. Egy test két állapota közötti entrópiaváltozás:

$$\Delta S = \left(\sum \frac{\Delta Q_i}{T_i} \right)_{\text{reverzibilis}}.$$

Az entrópiaváltozást tehát úgy határoztuk meg, hogy a testet reverzibilis úton elvisszük az egyik állapotból a másik állapotba. Meghatározzuk az egyes részfolyamatokban (amelyek mind reverzibilisek) a kifejezések értékeit, és ezek összege lesz az entrópiaváltozás.

Az entrópia skaláris mennyiség. Mértékegysége: $\frac{\text{J}}{\text{K}}$. Extenzív mennyiség, mint pl. a térfogat vagy a belső energia. Mikrofizikai jelentésére lásd a 23.3.1. pontot.

Ha a rendszer két állapota közötti tényleges állapotváltozás irreverzibilis, entrópiáját akkor is a fentiek szerint értelmezzük: a rendszert gondolatban egy tetszőleges reverzibilis úton végig visszük az előző két állapot között és kiszámítjuk $\frac{\Delta Q_i}{T_i}$ (elképzelt) értékek összegét. Azaz irreverzibilis folyamatban is ugyanannyi az entrópiaváltozás, mintha a rendszer ugyanazon két állapot között reverzibilis folyamatban venne részt.

5.4.3. Az entrópianövekedés és az entrópiamaximum elve

Ha a rendszer állapotváltozása irreverzibilis, akkor ezen irreverzibilis folyamat során meghatározott $\sum_{A \to B} \frac{\Delta Q_i}{T_i}$ tagok összege az előző pont szerint nem egyenlő az entrópiaváltozással. Az előző összeg és az entrópiaváltozás közötti összefüggés megállapításához járjunk el a következőképp: juttassuk a testet A állapotából egy B állapotába az a görbe mentén reverzibilis, illetve a b görbén irreverzibilis módon! A $\sum \frac{\Delta Q_i}{T_i}$ kifejezések értékei a két folyamatban nem lesznek egyenlők. Ugyanis az ABA irreverzibilis körfolyamat, amelyre a $\frac{\Delta Q_i}{T_i}$-k összege negatív [lásd az (5.5) összefüggést].

Részletesen kiírva:

$$\sum_{\substack{A \to B \\ \text{irreverzibilis}}} \frac{\Delta Q_i}{T_i} + \sum_{\substack{B \to A \\ \text{reverzibilis}}} \frac{\Delta Q_i}{T_i} < 0.$$

Az egyenlőtlenséget rendezve:

$$\sum_{\substack{A \to B \\ \text{irreverzibilis}}} \frac{\Delta Q_i}{T_i} < - \sum_{\substack{A \to B \\ \text{irreverzibilis}}} \frac{\Delta Q_i}{T_i} = \sum_{\substack{A \to B \\ \text{reverzibilis}}} \frac{\Delta Q_i}{T_i} = S_B - S_A.$$

Egy rendszer $A \to B$ irreverzibilis állapotváltozása során entrópiaváltozása mindig nagyobb a környezettel cserélt hőmennyiségekből számított $\sum \frac{\Delta Q_i}{T_i}$ kifejezésnél.

Ha a rendszer zárt, azaz a környezetétől az állapotváltozás során nem vesz fel hőt, azaz a $\sum \frac{\Delta Q_i}{T_i}$ kifejezésben a számlálók nullák, a fenti egyenlőtlenség bal oldala 0, azaz az entrópiaváltozás nagyobb, mint nulla, azaz az entrópia csak nőhet. (A gyakorlatban tökéletesen meg nem valósítható, reverzibilis folyamatok során állandó marad.) *Zárt rendszerben a valóságban végbemenő irreverzibilis folyamatok során az entrópia csak nőhet.* Ez az *entrópianövekedés elve.* Ameddig a zárt rendszer nem kerül egyensúlyi állapotba, addig entrópiája csak nőhet. Tehát *egyensúlyi állapotban a rendszer entrópiája maximális.* Ez az *entrópiamaximum elve.*

Zárt rendszerekre az entrópiamaximum-elv a termodinamika II. főtételének egyik megfogalmazása.

5.4.4. A termodinamika III. főtétele

A termodinamika eddig megismert alaptörvényeihez még egy tapasztalati törvény járul: a termodinamika III. főtétele (Nernst tétele).

Az abszolút zérus fokhoz (0 K) *való közeledésnél a kémiailag egységes anyagok entrópiája zérushoz tart:*

$$\lim_{T \to 0} S = 0.$$

A III. főtétel alapján bebizonyítható, hogy az abszolút nulla fokhoz közeledve az anyagok fajhője nullához tart:

$$\lim_{T \to 0} c(T) = 0.$$

Ebből következik, hogy az *abszolút nulla fok tetszőlegesen megközelíthető, de nem érhető el.*

Ez a következőképp érzékelhető: 0 K közelében a testek fajhője rendkívül kicsi, s így már a legtökéletesebb hőszigetelés ellenére felvett ΔQ hő is aránylag nagy ΔT-vel emeli a test hőmérsékletét.

5.5. Termodinamikai potenciálok

Sok esetben az általunk vizsgált rendszer nyílt rendszer. *Nyílt* rendszernek nevezzük azokat a rendszereket, melyeket környezetüktől nem választ el semmiféle szigetelő, vagy csak olyan szigetelő választ el, amely legalább egyféle kölcsönhatást megenged.

A nyílt rendszer entrópiájának megváltozását a rendszeren belül végbemenő folyamatok és a rendszer és környezete közötti hőfolyamatok befolyásolhatják. A nyílt rendszer belső folyamataiból származó entrópiaváltozást a továbbiakban σ-val jelöljük. Ez a σ-val jelölt entrópiaváltozás a II. főtétel értelmében csak akkor nulla, ha a rendszerben végbemenő folyamatok reverzibilisek, különben pedig pozitív. A környezettel való kölcsönhatásból származó entrópiaváltozás $\frac{Q}{T}$, ahol Q a rendszer által felvett ($Q > 0$), illetve leadott ($Q < 0$) hő, T a rendszer hőmérséklete (lásd az 5.4. szakaszt). Így egy nyílt rendszer teljes entrópiaváltozása:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} + \sigma. \tag{5.6}$$

Egy nyílt rendszer entrópiaváltozása a fenti formula alapján lehet negatív is, ha a környezetnek leadott hővel „túlkompenzálja" a belső folyamatok okozta entrópianövekedést. Ezért egy nyílt rendszerben általában nem az entrópiamaximum a rendszer egyensúlyi állapotának feltétele, hanem csak abban az esetben, ha a rendszer hőszigetelt (a munkavégzésre nincs semmilyen kikötés).

5.5.1. Nyílt rendszerek egyensúlyának feltétele

Sok esetben az általunk vizsgált rendszer és környezete eleget tesz bizonyos feltételeknek. (Pl. egy nyitott edényben végrehajtott kísérletnél a környezet hőmérséklete és nyomása állandó.) Bizonyos feltételek teljesülése esetén találhatók olyan fizikai mennyiségek, melyek szélsőértéke jelzi a rendszer egyensúlyi állapotát.

A következőkben ilyen fizikai mennyiségek meghatározásával és e mennyiségek tulajdonságaival foglalkozunk.

Legyen egy olyan nyílt rendszerünk, amely környezetének csak hőfolyamat és térfogati munkavégzés útján tud energiát átadni (pl. elektromos úton nem). Legyen a környezet nyomása és hőmérséklete állandó. Ekkor az I. főtétel értelmében a rendszer belső energiájának változása:

$$\Delta U = Q - p\Delta V, \tag{5.7}$$

ahol Q a rendszer által leadott vagy felvett (előjeles!) hőmennyiség, $-p\Delta V$ a térfogati munka. Az (5.7) egyenletből fejezzük ki Q-t és helyettesítsük az (5.6) egyenletbe, majd fejezzük ki a $-\sigma T$ mennyiséget! Ekkor a következő egyenlőséget kapjuk:

$$-\sigma T = \Delta U + p\Delta V - T\Delta S. \tag{5.8}$$

A $p\Delta V$ és a $T\Delta S$ mennyiségek a feltételek miatt a pV, illetve a TS mennyiségek megváltozásai, $p\Delta V = \Delta(pV)$ és $T\Delta S = \Delta(TS)$. Így egyenletünket a következő alakba írhatjuk:

$$-\sigma T = \Delta\left(U + pV - TS\right)$$

Ha valamilyen folyamat zajlik le, akkor a II. főtétel értelmében a belső folyamatokból származó σ entrópiaváltozás mindenképpen pozitív (csak abban a kivételes esetben nulla, ha ez a folyamat reverzibilis). A T termodinamikai hőmérséklet is pozitív, ezért az egyenlet bal és így a jobb oldala is negatív. Az egyenlet jobb oldalán szereplő fizikai mennyiség neve *szabad entalpia,* jele G:

$$G = U + pV - TS.$$

Az előbb mondottak alapján a folyamatok során ΔG negatív, vagyis a szabad entalpia csak csökkenhet. Ezek szerint *állandó nyomású és hőmérsékletű környezetben csak olyan folyamatok mehetnek végbe, melyek során a szabad entalpia csökken (legalábbis nem nő). A kialakuló egyensúlyi állapotban a rendszer szabad entalpiája minimális,* hiszen egyensúlyban már a rendszer semmilyen jellemzője sem változik, így G sem csökkenhet.

A szabad entalpiához hasonlóan viselkedő mennyiséghez jutunk az alábbiakban: legyen a nyílt rendszerünk olyan, hogy térfogatváltozása elhanyagolható, környezetének hőmérséklete állandó. Az (5.8) egyenletbe a $p\Delta V$ helyébe nullát írva a levezetést megismételhetjük. Ekkor egy új mennyiséghez jutunk, melyet a következőkben F-fel jelölünk és *szabad energiának* nevezünk:

$$F = U - TS.$$

Az előzőek alapján a szabad energiára is hasonló kijelentést tehetünk, mint a szabad entalpiára:

Állandó hőmérsékletű környezetben és rögzített térfogatban végbemenő folyamatok során a nyílt rendszer szabad energiája csak csökkenhet. A kialakuló egyensúlyi állapotban a rendszer szabad energiája minimális.

A szabad energiával kapcsolatos még egy fontos kijelentés. Vegyünk egy olyan nyílt rendszert, mely környezetétől akár hőfolyamat során, akár valamilyen munkavégzés során energiát tud felvenni, illetve leadni! Legyen a környezet hőmérséklete állandó! Az I. főtételből és a II. főtétel (5.8) alakjából fejezzük ki a rendszer ΔS entrópiaváltozását! Ekkor kapjuk:

$$\Delta S = \frac{\Delta U - W}{T} + \sigma.$$

Mivel σ pozitív, ezért

$$\Delta S > \frac{\Delta U - W}{T}.$$

Az egyenletet átrendezve és figyelembe véve, hogy T állandó,

$$W > \Delta\left(U - TS\right). \tag{5.9}$$

Mivel W a rendszerre ható erők munkája, ezért a rendszer által a környezetre kifejtett erők W^* munkájára igaz: $W^* = -W$. Az (5.9) egyenlet mindkét oldalát -1-gyel megszorozva és a W^* és F jelöléseket használva kapjuk, hogy

$$W^* < -\Delta F.$$

Ez azt jelenti, hogy *változatlan hőmérsékleten a rendszer által végzett munka nem lehet nagyobb, mint amennyivel a rendszer szabad energiája csökken.*

Ilyen, állandó hőmérsékleten történő munkavégzésre példa egy gáz izotermikus tágulása vagy egy állandó hőmérsékletű galvánelem elektromos munkája.

Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy a rendszer belső energiája mikor rendelkezik az egyensúly szempontjából olyan tulajdonságokkal, mint a szabad entalpia, illetve szabad energia. Vizsgáljuk meg az (5.8) egyenletet! *Amennyiben a rendszer térfogata és entrópiája állandó, az egyenlet szerint a rendszerben csak olyan folyamatok mehetnek végbe, melyek során a rendszer belső energiája csökken. Egyensúlyi állapotban a rendszer energiája minimális. Ez a tétel az energiaminimum elve.*

Itt nem kötöttük ki, hogy a környezet hőmérséklete vagy nyomása állandó legyen. A környezetnek itt az a szerepe, hogy a rendszeren belül, az ott végbemenő entrópianövekedést okozó folyamatok által „termelt" entrópiát a környezet hőfolyamat során kompenzálja. Amennyiben a rendszeren belül nem történik entrópiaváltozás, azaz ott reverzibilis folyamatok mennek végbe, akkor a környezetnek nem kell hőfolyamatok során kompenzálnia semmit.

Az előbb tárgyalt mennyiségek, *U, F, G, S állapotjelzők*. Mindegyik extenzív mennyiség. Az S kivételével energiadimenziójú mennyiségek. Mindegyikük rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bizonyos megszorító feltételek mellett a nyílt rendszer akkor van egyensúlyban, ha feltételeknek megfelelő fizikai mennyiségnek szélsőértéke van. A mechanikában a potenciális energia szélsőértéke jelzi az egyensúly feltételét, ezért az *U, S, F, G* mennyiségeket *termodinamikai potenciáloknak* nevezzük. Megjegyezzük, hogy vannak más termodinamikai potenciálok is.

5.5.2. A kémiai potenciál

A termodinamika eddigi tárgyalásában az egyszerűség kedvéért eltekintettünk a bonyolultabb rendszerek tárgyalásától. Az eddig megismert tételek bonyolultabb rendszerekre is igazak némi kiegészítéssel.

Egy zárt edényben lévő héliumgáz ún. egykomponensű, egyfázisú rendszer. Egy rendszer azonban nemcsak egy, hanem több kémiai összetevőből is állhat. Ráadásul egy rendszerben egy-egy kémiai anyagnak különböző halmazállapot-változásai, fázisai fordulhatnak elő.

Az ilyen rendszerek még akkor is lehetnek nem egyensúlyi állapotban, ha a hőmérséklet és a nyomás mindenütt állandó.

Például egy vízből és vízgőzből álló (kétfázisú, egykomponensű rendszer) két fázisa még akkor sincs okvetlenül egyensúlyi állapotban, ha a nyomás és a hőmérséklet mindenütt ugyanaz. (Itt eltekintünk a gravitációs erő hatására fellépő hidrosztatikai nyomástól.) Egyensúly csak akkor jön létre, amikor a vízgőz nyomása eléri a hőmérsékletnek megfelelő értéket. Ha ez még nem történt meg, akkor a víz egy része lecsapódik vagy elpárolog, a körülményektől függően. Ebben a folyamatban mindkét fázis részecskeszáma megváltozik. E folyamat jellemző extenzív mennyisége az N részecskeszám, jellemző intenzív mennyisége a μ *kémiai potenciál*. A folyamat addig tart, míg a két fázisban a kémiai potenciálok egyenlők nem lesznek. Kimutatható, hogy esetünkben a víz (a folyadékállapotban lévő!) belső energiájának változása nem csak a hőfelvétel, illetve munkavégzés útján történt, hanem a másik fázisba átment részecskék számának megfelelően változott. Az emiatt bekövetkező energiaváltozás nagysága $\mu\Delta N$ az ún. *kémiai munka*. Így az I. főtétel kiegészített megfogalmazása

$$\Delta U = Q + W - \mu\Delta N. \tag{5.10}$$

Az eddig használt megfogalmazás csak abban az esetben érvényes, ha a rendszer nem vesz részt ilyen, ún. anyagi kölcsönhatásokban ($\Delta N = 0$).

Ha egy rendszeren belül kémiai folyamatok mennek végbe, akkor a kémiai komponensek részecskeszámai is megváltoznak. A részecskeszámmal együtt változik az egyes komponensek energiája is a fenti egyenletnek megfelelően. Az egyensúly akkor jön létre, ha egy-egy komponensen belül esetleg előforduló különböző fázisokban a kémiai potenciálok megegyeznek.

Kimutatható továbbá az is, hogy ha egy rendszer környezetével csak hőfolyamat, mechanikai (térfogati munkavégzés) és az előbbiekben említett anyagi kölcsönhatás révén tud energiát cserélni, akkor a rendszer belső energiája a következőképp írható fel:

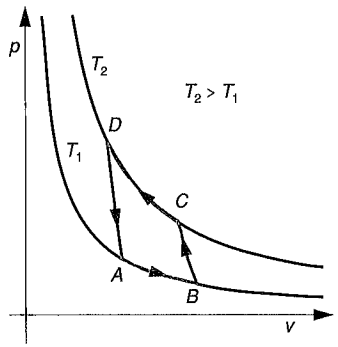
$$U = TS + pV - \mu N. \tag{5.11}$$

5.6. Hűtőgép, hőszivattyú (hőpumpa), hőerőgép

5.6.1. A hűtőgép és a hőpumpa elve

Ha két hőtartály között fordított irányú Carnot-féle körfolyamatot végzünk, akkor az *AB* folyamatban a hideg hőtartályban táguló gáz a hőtartályból hőt vesz fel (5.5. ábra). A hideg hőtartálytól felvett hő nagysága egyenlő a táguló gáz által végzett munkával. A gázt a *BC* folyamatban adiabatikusan összenyomjuk, majd a *CD* folyamatban a meleg hőtartályban izotermikusan addig nyomjuk össze, míg az állapotát ábrázoló pont nem kerül az *A*-n átmenő adiabatára. Ezután a gázt hagyjuk adiabatikusan tágulni, míg vissza nem tér a kezdeti, *A* állapotába. A gáz összenyomásakor nagyobb munkát végzünk, mint táguláskor, ezért a hideg hőtartály hűtéséhez munkavégzés formájában energiát kell befektetnünk. (A görbe alatti terület nagyobb.) A befektetett munka a hőerőgépekhez hasonló gondolatmenettel a két hőmennyiség különbsége:

$$W = Q_{\text{melegnek}} - Q_{\text{hidegtől}}.$$



5.5. ábra

Egy hűtőgép hatékonyságán azt a számot értjük, amelyik megmutatja, hogy a hideg hőtartálytól elvont hő hányszorosa a befektetett munkának.

$$\eta = \frac{Q_{\text{hideg}}}{W} = \frac{Q_{\text{hideg}}}{Q_{\text{meleg}} - Q_{\text{hideg}}} = \frac{T_{\text{hideg}}}{T_{\text{meleg}} - T_{\text{hideg}}} = \frac{1}{\frac{T_{\text{meleg}}}{T_{\text{hideg}}} - 1}. \tag{5.12}$$

A *hőszivattyú* vagy *hőpumpa* lényegében egy hűtőgép, amelynek hideg hőtartálya a kinti, hideg környezet (pl. egy folyó vize, talajvíz, levegő stb.), és meleg hőtartálya a fűtendő szoba meleg levegője. A gép a hideg környezettől hőt von el, és a meleg környezetben lévő gázt összenyomva hőt ad le. A hideg hőtartálytól elvont hő, a Q_{hideg} és a W befektetett munka összege adja a meleg hőtartálynak átadott hőt. A hőszivattyú hatékonysága azt mutatja meg, hogy a befektetett mechanikai munkánál hányszor több hőt tudunk a meleg hőtartálynak átadni:

$$\eta = \frac{Q_{\text{meleg}}}{W} = \frac{Q_{\text{meleg}}}{Q_{\text{meleg}} - Q_{\text{hideg}}} = \frac{T_{\text{meleg}}}{T_{\text{meleg}} - T_{\text{hideg}}}. \tag{5.13}$$

A fenti hasznosítási tényezők Carnot-ciklusra vonatkoznak.

Az üzleti szakzsargonban nálunk a fenti hatásfokot COP (Coefficient of performance)-vel jelölik. A képletből látható, hogy a hideg hőtartályból elvont hő lényegesen nagyobb lehet a befektetett munkánál. Ez igen gazdaságos fűtési eljárás, hiszen ugyanannyi elektromos energiával működtetve egy hőszivattyút, az lényegesen több hőt tud átadni a meleg szobának, mintha ugyanezt az energiát villanykályha által keltett hővel állítanánk elő.

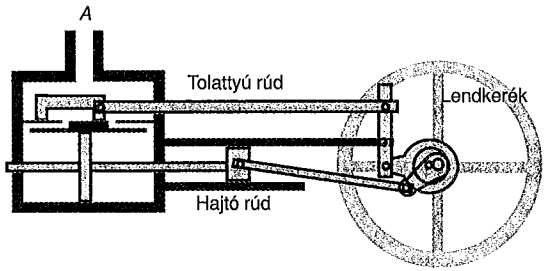
5.6.2. Hőerőgépek és hűtőgépek a gyakorlatban

A gyakorlatban működő hőerőgépek és hűtőgépek nem Carnot-féle körfolyamattal működnek. Ezért termodinamikai, azaz tüzelőanyag-hasznosítási hatásfokuk kisebb, mint a Carnot-gépé. Itt is igaz azonban az, hogy a termodinamikai hatásfok annál nagyobb, minél melegebb a forró hőtartály, és minél hidegebb a hideg hőtartály. A forró hőtartály hőmérsékletének felső határt szab az alkatrészek hőtűrő képessége. A hatásfok tovább növelhető, ha hidegebb hideg hőtartályt használunk. A hideg hőtartály hőmérséklete adva van, ez a környezet hőmérséklete. A hideg hőtartály hőmérséklete valamelyest csökkenthető, ha egy folyó vagy nagyobb tó vizét használjuk hűtésre. Ezzel tüzelőanyagot takarítunk meg. Ezért építik nagy folyók mellé a nagy teljesítményű hőerőműveket (lásd Paksi Atomerőmű).

A hőerőgépeket két csoportra oszthatjuk: gőzgépek és gázgépek.

5.6.2.1. Gőzgépek

A gőzgépek munkavégző közege a vízgőz. Régebben elterjedt a *dugattyús gőzgép* (5.6. ábra). A forró kazánból a vízgőz az *A* nyíláson keresztül a hengerbe jut.) A nagynyomású gőz a hengerben lévő dugattyút balra tolja. Eközben lehűl és nyomása csökken. Ezt a „fáradt" gőzt a kondenzorba vezetik, ahol a gőz tovább hűl, nyomása csökken és végül lecsapódik. Ezt újból felmelegítik és a folyamat kezdődik elölről.



5.6. ábra

A dugattyú egyenes vonalú mozgását az egymáshoz csuklósan rögzített hajtórúd és forgatókar alakítja át forgó mozgássá. A főtengelyen lévő lendkerék feladata a táguláskor létrejött mechanikai energia tárolása és annak egy részével a gőz összenyomása, illetve a forgás egyenletesebbé tétele. A főtengelyre erősített tolattyúrúd mozgatja a tolattyút, amely szabályozza a gőz ki- és beáramlását. Ezt a gépet rossz hatásfoka miatt ma már nem nagyon alkalmazzák.

Lényegesen jobb hatásfokú gőzgép a *gőzturbina,* amelyet a nagy sebességgel áramló túlhevített vízgőz működtet. Működési elve lényegében megegyezik a vízturbináéval. Manapság főként hőerőművekben alkalmazzák. Itt ugyanis megvan a lehetőség a vízgőz nagyfokú túlhevítésére és intenzív hűtésére. A nukleáris reaktorokban keletkezett hőt is gőzturbinák alakítják át mechanikai energiává, majd pedig a turbinákkal hajtott generátorok elektromos energiává. Termikus hatásfokuk elérheti a 40%-ot is.

5.6.2.2. Gázgépek

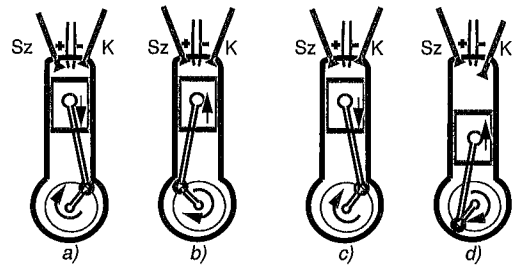
Ide sorolják a belső égésű motorokat, gázturbinákat, a gázsugaras és a rakétameghajtású gépeket.

Belső égésű motorok. A dugattyús, benzinnel hajtott motorok közül a legelterjedtebb az *Otto-féle négyütemű benzinmotor* (5.7. ábra).

Működési fázisai:

a) Szívó ütem. A dugattyú lefelé mozog és finom cseppekre porlasztott benzin-levegő keveréket szív be. A beszívás az *Sz* szívószelepen történik, amelyet a vezérműtengely automatikusan kinyit.

b) Sűrítő ütem. Mindkét szelep zárva, a dugattyú felfelé mozog. A hőmérséklet kb. 600 °C-ra emelkedik, a nyomás kb. 1 Mpa.



5.7. ábra

c) Munkaütem. A felső holtpont közelében (egy kicsit annak elérése előtt) a gyújtógyertya elektromos szikrája a keveréket felrobbantja. A dugattyú lefelé mozog zárt szelepek mellett. A nyomás kb. 3 MPa. A hőmérséklet 1500 °C körüli érték.

d) Kipufogó ütem. A vezérműtengely a *K* kipufogószelepet kinyitja és az égéstermék a szabadba áramlik.

Mivel a négy ütem alatt csak egy ütemben van munkavégzés, ezért a motor járása nem egyenletes. Ezen úgy segítenek, hogy ugyanarra a tengelyre egyidejűleg több hengert kapcsolnak. A hengerek felváltva végeznek munkaütemet. Négyhengeres motornál minden ütemben van valamilyen munkavégzés, így a motor járása egyenletesebb. A benzint finom cseppekre porlasztó karburátor a Bernoulli-törvény által leírt nyomáscsökkenésen alapul.

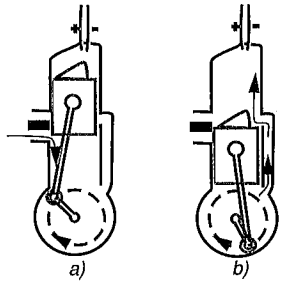
Manapság már külön fedélzeti számítógép irányítja a motor működését, és sok esetben benzinfecskendező működik.

A *kétütemű motorban* nincsenek szelepek. Ezért szerkezete egyszerűbb, mint a négyüteműeké (5.8. ábra).

Működése:

a) Szívó és sűrítő ütem. A dugattyú felfelé mozog, miközben a forgattyúházba benzin–levegő keveréket szív be és egyidejűleg a dugattyú felett lévő gázt sűríti.

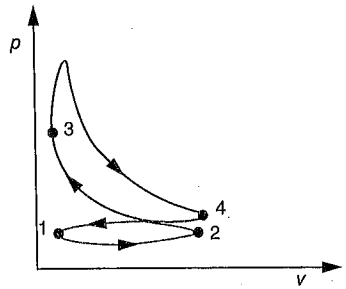
b) Munka- és kipufogó ütem. A dugattyú felső holtpontjának környékén a keveréket a gyújtógyertya elektromos szikrája felrobbantja. A felfelé mozgó dugattyú a keveréket elősűríti. A lefelé mozgó dugattyú szabaddá teszi az áteresztő csatorna felső nyílását, és a dugattyú fölé betódul az elősűrített gázkeverék. Ez a közben szabaddá váló kipufogónyíláson keresztül az égésterméket a szabadba fújja.



5.8. ábra

A benzinmotorok termodinamikai hatásfoka a két szélsőséges hőmérséklettel számolva 80% lenne, ha Carnot-féle körfolyamattal működnének. Az 5.9. ábra mutatja a valóságos körfolyamatot. A körfolyamat tényleges termodinamikai hatásfoka és a fellépő veszteségek miatt a motor főtengelyén mérhető munkából számított hatásfok csak 20–30%.

A dízelmotorok az olcsóbb nyersolajjal működnek. Lehetnek két-, illetve négyüteműek. Az összenyomott levegőbe nagynyomású szivattyú préseli be az olajat, mely itt külön gyújtás nélkül meggyullad. Olcsóbb üzemanyaguk és nagyobb hatásfokuk miatt (35–45%) gazdaságosabb hőerőgépek, mint az Ottó-motorok. Az utóbbi években elterjedtek a személygépkocsikban is.



5.9. ábra

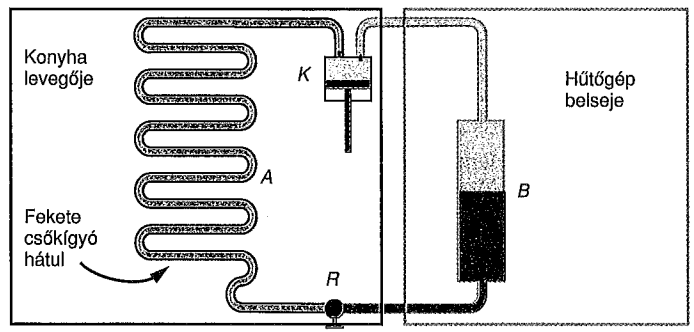
Gázturbinás motorok. Lényegében a vízturbinákhoz hasonlóan működnek. A sűrítő levegőt szív be, amelyet nagy nyomásra présel össze. Eközben a levegő annyira felmelegszik, hogy a befecskendezett üzemanyag magától meggyullad. Az ilyen motoroknál folyamatos üzem esetén az égéstér fala is melegíti a beszívott levegőt, ott magas hőmérséklet alakul ki, amelyen az égés folyamatosan végbemegy. Ezért a motort indítás előtt elő kell melegíteni. A felforrósodott levegő a kompresszorral egy tengelyen lévő turbinát hajtja meg. Hatásfokuk 15–35%. Előnyük a teljesítményükhöz viszonyított kis súlyuk. Ezért főként repülőgépeken alkalmazzák.

Gázsugaras motorok (torlósugármotorok). A gázturbinákból fejlesztették ki. A turbinát csak arra használják, hogy a levegőt sűrítő kompresszort meghajtsa. A nagy sebességgel kiáramló égéstermékek tolóereje, mint egy rakétánál, viszi előre a motort. Ezért ezt a motort nyilván nem helyhez kötötten használják, hanem repülőgépeket hajtanak meg vele.

Rakétameghajtású motorok. Ezek nem a környező levegőből veszik fel az égéshez szükséges oxigént, hanem magukkal viszik. A gáz energiájának nagy részét mozgási energiává alakítják. A kiáramló, nagy sebességű gáz tolóereje gyorsítja a rakétát. Ezért légüres térben is működnek az űrrakéták (lásd 2.4.2. pont).

5.6.2.3. Hűtőgépek és hőszivattyúk a gyakorlatban

A gyakorlatban kétféle hűtőgép terjedt el. A *kompresszoros hűtőgép* (5.10. ábra) munkavégző közege könnyen párolgó folyadék: régebben NH_3 vagy freon. Az NH_3 mérgező, a freon pedig a légkörbe jutva jelentősen hozzájárul az üvegházhatáshoz. Ezért ma már más, környezetkímélőbb folyadékokat használnak. A kompresszor a gőzt nagy nyomással a sűrítőbe (a hűtőgép hátulján lévő meleg csőkígyó) nyomja, ahol az cseppfolyósodik. A közben felmelegedett gőzt, illetve már folyadékot a környezet lehűti majdnem a saját hőmérsékletére. Egy nyomáscsökkentő *R* fojtószelepen keresztül a *B* párologtatóba jut a folyadék. Ez a párologtató tartály van a hűtendő térben. A kompresszor által csökkentett nyomáson a folyadék elpárolog, és a hűtendő térből hőt von el. A *K* kompresszor innen kiszívja a gőzt és átnyomja a sűrítőbe, ahol az újra cseppfolyósodik, és a környezet lehűti. Eközben a fojtószelepen át újabb folyadék áramlik a párologtatóba stb. Ezek a hűtőgépek szakaszosan is működtethetők.



5.10. ábra

Az *abszorpciós hűtőgépben* ammónia vizes oldata van. Ezt felmelegítve az oldatból ammónia távozik, melyet nagy nyomással cseppfolyósítanak, és elpárolgó gőze a hűtendő térből hőt von el. Előnye, hogy nem kell hozzá kompresszor, csak valamilyen hőforrás. Ezért ezeket a gépeket ott is lehet használni, ahol nincs elektromos áram, mivel gázpalackról vagy esetleg a Nap hőjével is működtethető.

A *Peltier-elemmel* működő hűtők nem tartalmaznak sem mozgó alkatrészt, sem pedig hűtőközeget. Megfelelő félvezetők p-n átmeneteiből összeállított oszlop, melynek egyik oldala fűt, a másik hűt. Rossz hatásfoka és viszonylag magas ára miatt csak különleges esetekben használják, ott ahol fontos a zajtalan működés, megbízhatóság, pl. processzorok hűtése.

Ma már széles választékban kaphatók a kereskedelemben *hőszivattyúk*. Főként abban különböznek egymástól, hogy a külső levegőt, a talajvizet, felszíni vizet vagy egyszerűen a talajt tekintik hideg hőforrásnak, amelynek hőjével a helységeket fűtik. Elérhető áron kaphatók olyan légkondicionáló berendezések, melyek nem csak hűtőként, hanem hőszivattyúként is használhatók. Ezek a külső levegőt használják hideg hőtartályként. A külső levegővel működő hőszivattyúk csak viszonylag kis hőmérséklet-különbség esetén megfelelő hatásfokúak [lásd (5.13) képlet]. A többinél a hideg hőtartály viszonylag állandó hőmérséklete nagyobb hidegeknél is elég jó hatásfokú.

A gyakorlatban működő hőszivattyúk „COP-je", hatásfoka 3, illetve 5 is lehet. A $\mu = 3$ például azt jelenti, hogy bizonyos hőmérséklet-különbség esetén (ami nem túl nagy!) az 1 kW elektromos teljesítménnyel működtetett hőszivattyú a 3 kW hőteljesítménnyel fűti a helységet. Magánházak egész télen történő hőszivattyús fűtésére is vannak bevált, kereskedelmi forgalomban kapható hőszivattyúk. Az ezredforduló táján a hőszivattyús fűtés már olcsóbb volt, mint a gázfűtés. Sajnos a berendezés költséges, megtérülési ideje hosszú.

6. A hő terjedése

Hő egyik testből a másikba háromféle úton terjedhet.

Hővezetés. Szilárd testekben a hő úgy terjed, hogy az anyag részecskéi nem mozdulnak el, csak átadják egymásnak az energiát. Szemléletes modell: a gyorsabban mozgó, nagyobb átlagos amplitúdóval rezgő „forróbb" részecskék lökdösik meg a lassabb, kisebb amplitúdóval rezgő „hidegebb" részecskéket.

Hőáramlás. A folyadékokban és gázokban a felmelegedett térfogatelemek megváltoztatják helyüket, és így a forróbb térfogatelemek a folyadék vagy gáz belsejében vándorolnak, miközben hőt szállítanak magukkal.

Hősugárzás. Ha egy hideg és egy forró test között légüres tér van, akkor is tapasztalunk hőmérséklet-kiegyenlítődést. Ez a hőátadás az elektromágneses hullámok segítségével történik: a forró test elektromágneses sugárzást bocsát ki, amelyet elnyelve a másik test felmelegszik.

6.1. Hővezetés (kondukció)

Egy testen, pl. egy szilárd rúdon áramló hőáramlás erősségét a *hőárammal* mérjük. A hőáram a rúdon időegység alatt átáramlott hő:

$$\Phi = \frac{Q}{t}.$$

Mértékegysége J/s = watt (W). Ha az A keresztmetszetű rúd két vége között állandó hőmérséklet-különbséget tartunk, akkor a mérések alapján:

$$\Phi = \alpha \frac{A\Delta T}{l}.$$

Itt l a rúd hossza, A keresztmetszete, ΔT a hőmérséklet-különbség és α az anyagi minőségtől függő állandó, a *hővezetési tényező*. Mértékegysége W/mK. A hőve-

zetési tényező megmutatja, hogy mennyi hőmennyiség halad át időegység alatt egységnyi vastagságú, az áramlásra merőleges, egységnyi felületű rétegen, egységnyi hőmérséklet-különbség esetén. A fémek jó hővezetők. A folyadékok és gázok (ha bennük a hőáramlást megakadályozzuk), a fa, az azbeszt, üveggyapot stb. jó hőszigetelők.

6.2. Hőáramlás (konvekció)

Folyadékokban vagy gázokban jön létre, ha az áramlást nem akadályozzuk meg. Az alulról melegített folyadék vagy gáz sűrűsége kisebb lesz, mint a felette lévőé, ezért a felhajtóerő hatására a melegebb folyadék vagy gáz felfelé áramlik, magával hőt szállít. Megfelelő körülmények között a folyadék vagy gáz körbe-körbe áramlik és folyamatosan szállítja a hőt. A lakóhelységek levegője elsősorban ilyen hőáramlás útján melegszik fel.

Pl. egy szobában a cserépkályha vagy a 100 °C-ot is el sem érő, vízzel működő fűtőtest esetén. A kandalló és hősugárzó nemcsak áramlással, hanem elsősorban hősugárzással melegíti fel a falakat és bútorokat, és ezek melegítik hőáramlással a levegőt. Hőáramlás alapján működik a központi fűtés (ha nem használnak kompresszort).

6.3. Hősugárzás

Minden test elektromágneses hullámokat bocsát ki. Ez energiaveszteséggel jár. Ha egy másik test ezt a sugárzást elnyeli, akkor energiát vesz fel, és felmelegszik. A Földre a Nap energiája ezen az úton jut el.

Tapasztalati tény, hogy az a test, amelyik a ráeső sugárzásból többet nyel el (abszorbeál), az erősen is sugároz (sokat emittál). A hősugárzást leíró Kirchhoff-törvény szerint: ugyanazon test által időegységenként kibocsátott, illetve elnyelt energia aránya csak a hőmérséklet és a hullámhossz függvénye.

Az abszolút fekete test sugárzása. A legjobb sugárzó az ún. *„abszolút fekete test”,* amelyre az is jellemző, hogy a ráeső sugárzást 100%-osan elnyeli. Ilyen ideális test a valóságban nincs. Jól közelíti az abszolút fekete testet egy belső felületén kormozott doboz falán lévő kis lyuk: ugyanis a lyukon beeső sugárzás a kormozott falú üregben többszörösen ide-oda verődik, és gyakorlatilag nem jut ki a dobozból, üregből. A lyuk azonban nemcsak elnyeli a sugarakat, hanem az üregben kialakuló (a falból kiinduló) sugárzás egy része a lyukon át távozik. Ez olybá vehető, mintha a lyuk önmaga is sugározna.

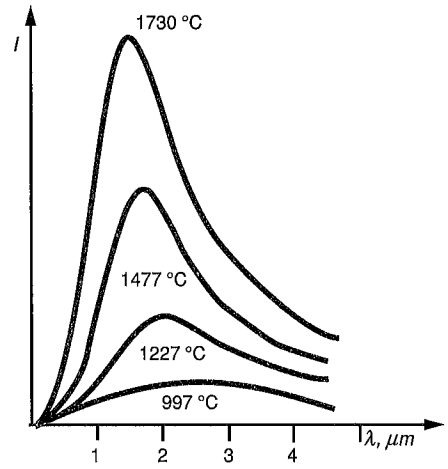
Kísérletileg kimutatható, hogy *az abszolút fekete test egységnyi felülete által egységnyi idő alatt kisugárzott összes energia az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával arányos:*

$$E = \sigma T^4 \qquad \text{és} \qquad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}.$$

Ez a *Stefan–Boltzmann-törvény.*

Az abszolút fekete test által kibocsátott sugárzás erőssége változik a hullámhossz függvényében, és függ a hőmérséklettől.

A kisugárzott energia erős hőmérsékletfüggése magyarázza azt, hogy az ilyen sugárzás csak magasabb hőmérsékleten számottevő, ezért nevezik gyakran *hőmérsékleti sugárzásnak.* A különböző λ hullámhosszúságú hősugarak intenzitása egy-egy hőmérsékleten a 6.1. ábrán alapján hasonlítható össze.



6.1. ábra

Eszerint a sugárzás intenzitása változik hullámhossz függvényében. Adott hőmérsékleten a sugárzás intenzitásának egyetlen maximuma van. A hőmérséklet növelésével ez a maximum a kisebb hullámhosszak felé tolódik el. A tapasztalat szerint a maximumhoz tartozó λ_{max} és a T abszolút hőmérséklet pontosan fordítottan arányosak. Ezt fejezi ki a *Wien-törvény,* amely szerint:

$$\lambda_{max} T = \text{állandó} = 2,896 \cdot 10^{-3}\,\text{mK}.$$

Hősugárzás és anyag kölcsönhatása. A hősugarakat a különböző anyagi minőségű valóságos testek különbözőképpen nyelik el, illetve verik vissza. A világos, sima felületek jól verik vissza és rosszul sugározzák ki a hőt. A sötét érdes felületű testek jó hőelnyelők, és jól is sugároznak. A fentiek figyelembe vételével lehet a sugárzás okozta hőveszteséget csökkenteni, illetve a hősugárzást növelni: termosz falának „tükör" alumíniumbevonata, illetve fekete színű kályhák.

III. ELEKTRODINAMIKA ÉS OPTIKA

7. Az időben állandó elektromos mező[1]

7.1. Elektrosztatikus mező vákuumban. A forráserősség. Gauss tétele

Az általunk ma ismert négy, ún. alapvető kölcsönhatás[2] egyike az elektromágneses kölcsönhatás, amelynek megnyilvánulása sokféle változatban jelentkezik. Ezen változatok között az a legegyszerűbb, amely során a kölcsönhatásban részt vevő testek nyugalomban vannak. Ezzel az esettel foglalkozik az *elektrosztatika.*

Bármely típusú, tehát nem csak az elektromágneses kölcsönhatás az anyagot alkotó ún. elemi részecskék sajátos, „velük született" tulajdonságaira vezethető vissza. Így az elektrosztatikus kölcsönhatás a protonok, elektronok és más elemi részecskék egymást vonzó, illetve taszító sajátságának következménye. Ezt a sajátságot úgy fejezzük ki, hogy e részecskéknek *elektromos töltésük* van (lásd alább). Noha a makroszkopikus testek elektromágneses kölcsönhatásaiért az őket alkotó elemi részecskék felelősek, e kölcsönhatások alaptörvényeit e részecskék figyelmen kívül hagyásával is felismerhetjük és megfogalmazhatjuk. Ebben a részben mi ezt az utat követjük. Most csak annyit jegyzünk meg, hogy a testek elektromos tulajdonságait végső soron a testeken keletkező elektrontöbblet vagy elektronhiány okozza.

[1] Az elektromos töltésre erőt kifejtő „objektum" megnevezésére a magyar nyelvű szakirodalomban korábban főleg az elektromos, illetve mágneses *tér* kifejezést használták. Újabban elterjedőben van az elektromos, illetve mágneses *mező* elnevezés. Ennek (a külföldi szakirodalomban régóta követett) szóhasználatnak az a nyilvánvaló előnye, hogy éles különbséget tesz a *geometriai tér* és az *anyag* egy sajátos, folytonos eloszlású (ún. végtelen sok szabadsági fokú) fajtája, a fizikai mező között. Lásd: space – field (angol), Raum – Feld (német), пространство – поле (orosz).

[2] A négy alapvető kölcsönhatás az ún. erős, az elektromágneses, a gyenge és a gravitációs kölcsönhatás. Ezeket hosszú ideig egymástól függetlennek tartották (erre utal az „alapvető" jelző). Megjegyezzük, hogy a legújabb időkben e különállónak tartott kölcsönhatások egyesítésén (egységes elméletbe foglalásán) sokan fáradoznak, s az elmélet az első három kölcsönhatás egyesítésében jelentős sikereket ért el.

7.1.1. Elektromos alapjelenségek

Már az ókorban felfigyeltek arra, hogy megdörzsölés után a borostyánkő (görögül elektron) és sok más test sajátos állapotot alakít ki maga körül: a környezetébe kerülő anyagokra vonzó- vagy taszítóerő hat. Az ilyen testre azt mondjuk, hogy *elektromos állapotban* van; ha egy test nem ilyen, akkor elektromosan *semlegesnek* nevezzük.

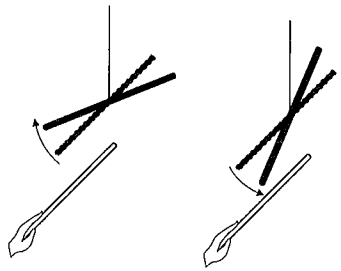
Az elektromosságtan alaptörvényeinek felismeréséhez az elektromos alapjelenségek megfigyelése és elemzése vezetett. Ezek a következő kísérleti tények:

a) Két, azonos módon elektromos állapotba hozott, azonos anyagú test (pl. két, bőrrel egyforma erősen megdörzsölt üvegrúd) mindig taszítja egymást.

b) Más esetekben az elektromos állapotban levő testek vagy vonzzák vagy taszítják egymást (7.1. ábra).

c) Ha egy test dörzsöléssel elektromos állapotba kerül, akkor a dörzsölő anyag is elektromos állapotot mutat, és e két test mindig vonzza egymást.

d) Az elektromos állapot az egyik testről a másikra átvihető, mértéke fokozható, csökkenthető, megszüntethető.



7.1. ábra

Az elektromos alapjelenségeket jól le tudjuk írni a következő *modellel:*

1. A testek elektromos állapotát valamilyen – közvetlenül nem érzékelhető – anyag jelenléte okozza. Ezt az anyagot *elektromos töltésnek*[3] nevezzük. (A továbbiakban az „elektromos töltéssel ellátott test" helyett legtöbbször röviden csak „töltést" mondunk.)
2. Egy környezetétől elszigetelt, elektromosan töltött rendszerben a testek össztöltése állandó *(töltésmegmaradás elve)*. Ez csak úgy értelmezhető, ha feltételezzük, hogy:

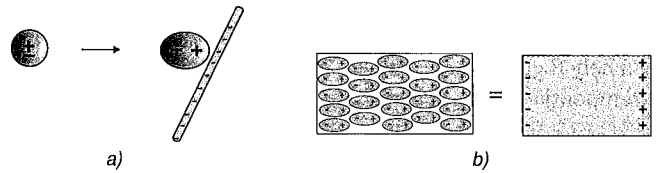
[3] Valójában nem létezik külön, önállóan elektromos töltés, hanem az mindig valamilyen anyagnak elválaszthatatlan tulajdonsága. A töltéssel rendelkező elemi anyagdarabot töltéshordozónak nevezzük.

3. *Kétféle elektromos töltés van,* és ennek megfelelően kétféle elektromos állapot létezik. Az egyik töltést *pozitívnak,* a másikat *negatívnak* nevezzük, vagyis a töltés mértékét algebrai mennyiségnek tekintjük. (Megállapodás szerint a bőrrel megdörzsölt üveg elektromos töltését nevezzük pozitívnak.)
4. *Az azonos (egynemű) töltések között „taszítóerők", az ellentétes (különnemű) töltések között „vonzóerők" hatnak.* (Kísérletileg megállapítható, hogy pl. a szőrmével megdörzsölt ebonit negatív töltésű.)
5. *Két* (elhanyagolható méretű, ún. pontszerű) *töltés akkor egyenlő, ha egy harmadik testre ugyanabból a távolságból ugyanakkora és azonos irányú erővel hat.*
6. *Két töltés „ellentetten egyenlő", ha egy harmadik töltésre ugyanarról a helyről ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú erőt fejt ki.*
7. *Ha két egyenlő töltést egyesítünk, a kapott töltés kétszer akkora, mint az egyes töltések külön-külön.* (Az elektromos töltés additív, összeadódó mennyiség. Két, ellentetten egyenlő töltés nem ad elektromos állapotot.)
8. *A semleges test mindkét fajta töltést egyenlő mértékben tartalmazza.* (A testek elektromos állapota úgy jön létre, hogy az egyik fajta töltésből többlet keletkezik a testen.)
9. Egyes anyagokban az elektromos töltés könnyen és az anyag határoló felületén belül tetszőleges mértékben elmozdulhat. Az ilyen anyagokat *vezetőknek* nevezzük (7.2a. ábra). Amely anyagok nem vezetik a töltést, azok az ún. *szigetelők* (7.2b. ábra). (Jó vezetők pl. a fémek és a szén grafitmódosulata, szigetelő pl. a selyem, a porcelán, az üveg, a gumi, a szén gyémánt módosulata. A vezetés és szigetelés mechanizmusát lásd bővebben a 25.4.5. pontban és a 25.6. szakaszban.)



7.2. ábra

10. A szigetelők töltése csak kicsiny (molekuláris) méretben képes elmozdulni, ezért egy külső, elektromos állapotban levő test hatására az anyagot alkotó molekulák, illetve atomok negatív és pozitív töltéseinek súlypontja kissé eltolódik egymáshoz képest: *elemi dipólusok* (kettős pólusok) alakulnak ki (7.3a. ábra). Ennek hatására maga a test is nagyméretű dipólussá válik *(dielektromos polarizáció)* (7.3b. ábra).



7.3. ábra

7.1.2. Az elektromos mező. Az elektromos térerősség

Az elektromos állapotban levő testek erőt fejtenek ki egymásra anélkül, hogy egymáshoz érnének. Ezt a tényt már a 19. század elején Faraday (1791–1867) úgy magyarázta, hogy noha az elektromos töltésű testek között nem látható semmi, a töltések nem közvetlenül egymásra hatnak, hanem a közöttük levő térben is van valami, ami az erőhatást közvetíti. Ez a feltételezés az elektromágneses kölcsönhatás leírásában nagyon gyümölcsözőnek bizonyult. Faraday gondolatát úgy fogalmazta meg, hogy *az elektromos állapotban levő test maga körül ún. elektromos mezőt (erőteret) kelt, amely a benne levő elektromosan töltött testekre erőt fejt ki.* Ily módon tehát a mező mintegy „közvetíti" az erőhatást töltés és töltés között.

A töltésnek tehát kettős, egy „aktív" és egy „passzív" szerepe van: egyrészt elektromos mezőt kelt, másrészt másik töltés által keltett elektromos mezőbe kerülve abból impulzust (lendületet) vesz fel: másik töltés mezejétől erőhatást „szenved el".

Az elektromosságtan fejlődése is akkor gyorsult fel, amikor a vizsgálatok a töltött testekről áttevődtek a töltéseket körülvevő mezőkre. Az elektromágnesség alaptörvényei az elektromos és mágneses mezők alaptörvényei.

Az elektromos térerősség. Az elektromos mező vizsgálata elektromos töltéssel ellátott pontszerű, ún. *próbatest,* közelebbről *próbatöltés* segítségével történik, amelyet kiteszünk a mező hatásának, és meghatározzuk a rá ható elektromos erőt. A próbatesttel szerzett tapasztalatok így összegezhetők:

1. *A mezőnek ugyanabban a pontjában a különböző töltésű próbatestekre ható erő hatásvonala mindig ugyanaz, vagyis a mező minden pontjában van egy* (a próbatesttől független) *jellemző irány, amelyet a mező által azon a helyen kifejtett erő jelöl ki.*

2. *A próbatestre ható erő egyenesen arányos a test töltésével, és függ a testnek a mezőben elfoglalt helyétől.*

Mindezt a következő vektoregyenletbe sűríthetjük:

$$\boxed{\mathbf{F}=Q\mathbf{E}} \,. \tag{7.1}$$

Ez az egyenlet a mező próbatestre gyakorolt hatásának azt a fontos vonását fejezi ki, hogy a mező által kifejtett erő mindig két olyan tényező szorzataként írható fel, amelyek közül az egyik (függetlenül a mezőtől) csak a próbatestre, a másik (függetlenül a próbatesttől) a mezőre jellemző. A testet jellemző Q skaláris mennyiség a *test töltése* (aminél fogva „megragadja" a mező a testet), az $\mathbf{E}$ vektormennyiség a hely függvénye, és a mezőt pontonként jellemzi erőkifejtő (lendítő-) képesség szempontjából. Neve: *térerősség.*

A térerősség tehát a mezőbe helyezett pontszerű testre ható elektromos erőnek és a test töltésének a hányadosa:

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}}{Q}} \,. \tag{7.2}$$

Ez az egyenlet két új mennyiséget tartalmaz. Ezek közül bármelyik egységét önkényesen rögzíthetjük. Történetesen történetileg először a töltés egységét választották meg a következőképpen:

Egységnyi legyen az a töltés, amely egy pontszerű próbatesten felhalmozva egy másik, ugyanakkora töltésű pontszerű testen 1 m *távolságból* $9\cdot10^9$ N *erőhatást okoz.* A töltés SI-egységének a neve *coulomb*[4], jele C.

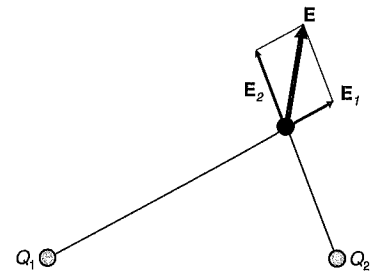
(Az egységválasztás később kissé módosult, lásd a 8.2.3.1. alpontot.)

Ezzel az elektromos térerősség egysége az $E = F/Q$ összefüggés alapján az 1 N/C (külön neve nincs). Egységnyi tehát a térerősség a mező azon pontjában, amelyben az 1 C pontszerű töltésre 1 N elektromos erő hat. (Az $E = F/Q$ összefüggésből látszik, hogy a térerősség mérőszáma megadja a mező vizsgált pontjába helyezett pozitív egységnyi töltésre ható erő nagyságát.)

A térerősség vektorjellege azt a kísérleti tényt fejezi ki, hogy az elektromos mezőre érvényes a szuperpozíció törvénye (7.4. ábra):

Ha két vagy több töltés hoz létre egy közös elektromos mezőt, az együttes mező térerőssége mindenütt az egyedül jelenlevőnek képzelt egyik, illetve másik mező térerősségének vektori összege:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2. \tag{7.3}$$



7.4. ábra

[4] Ez természetesen csak elméleti definíció, hiszen ennyi többlettöltést pontszerű testre felhalmozni nem lehet. Gondoljuk meg, 9 milliárd N erő szerepel a definícióban! Ennek a látszólag ésszerűtlen töltésegységnek az elektromos áramoknál mutatkozik meg a gyakorlati haszna. A töltésegység korszerű definíciójával is ott találkozunk.

7.1.3. Pontszerű töltés elektromos mezejének térerőssége. Coulomb törvénye

Az elektrosztatika alapjelenségeinek vizsgálatában fontos szerepet játszik a legegyszerűbb „töltéseloszlás", az elhanyagolható méretű gömbön koncentrált, ún. pontszerű töltés, amelynek mezeje gömbszimmetriát mutat. (Kölcsönhatás szempontjából pontszerűnek tekinthető minden olyan test, amelynek legnagyobb mérete is elhanyagolható a vele kölcsönhatásban levő testektől mért távolságokhoz képest.)

Coulomb 1785-ben torziós mérleggel meghatározta, hogy egy pontszerű töltés elektromos terében egy másik pontszerű töltésre ható elektrosztatikus erő a két töltés távolságának négyzetével fordítottan arányos:

$$F \sim \frac{1}{r^2}.$$

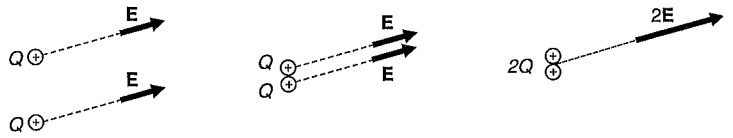
Az $E = F/Q$ összefüggésből következik, hogy a mező vizsgált pontjában (a Q próbatöltéstől független) elektromos *térerősség* is ugyanúgy függ a mezőt keltő töltéstől való távolságtól, vagyis a távolság négyzetével fordítottan arányosan csökken:

$$E \sim \frac{1}{r^2}.$$

A mezők szuperpozíciójára gondolva azonnal beláthatjuk, hogy a mező bármely helyén a térerősség a mezőt *keltő* töltéssel egyenesen arányos:

$$E \sim Q^*,$$

ahol megkülönböztetésül Q^*-gal jelöltük a mezőt keltő ponttöltést, vagyis a mező *forrását* (7.5. ábra).



7.5. ábra

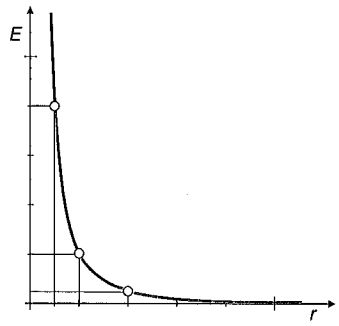
Összefoglalva: *a pontszerű töltés által keltett elektromos mezőben a térerősség egyenesen arányos a mezőt keltő töltéssel, és fordítottan arányos a tőle mért távolság négyzetével:*

$$E \sim \frac{Q^*}{r^2}.$$

Ezt az arányosságot jobban kezelhető egyenlet formájában is felírhatjuk, ha egy arányossági tényezőt bevezetünk. Ekkor azt kapjuk, hogy a térerősség a mező forrásától bármely irányban mért r távolságban levő pontban:

$$E = k\frac{Q^*}{r^2} \tag{7.4a}$$

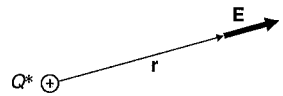
nagyságú (7.6. ábra), ahol k egy arányossági tényező. Ennek értékét a töltésegység megválasztásával már közvetve meg is határoztuk (lásd alább).



7.6. ábra

A térerősség a gömbszimmetria miatt sugárirányú, tehát vektoriálisan is könnyen felírható, ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk az $\frac{\mathbf{r}}{r}$ egységvektorral, ahol $\mathbf{r}$ az origóba képzelt (mezőt keltő) ponttöltéstől a vizsgált $\mathbf{E}$ térerősségű pontba mutató helyvektor (7.7. ábra):

$$\mathbf{E} = k\frac{Q^*}{r^3}\mathbf{r}. \tag{7.4b}$$



7.7. ábra

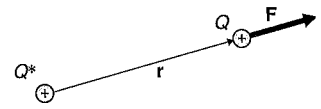
(Vegyük észre, hogy ha a Q^* töltés negatív, az $\mathbf{E}$ térerősségvektor a Q^* forrástöltés felé irányul.)

Coulomb törvénye. Az $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ összefüggés alapján már meghatározhatjuk, hogy mekkora erőt fejt ki egy Q^* pontszerű töltés mezeje a töltéstől adott távol-

ságra levő másik, Q ponttöltésre. A ható erő nagysága, illetve az erővektor így írható fel:

$$F = k\frac{Q^*}{r^2}\cdot Q, \qquad \text{illetve} \qquad \mathbf{F} = k\frac{Q^*}{r^3}\mathbf{r}\cdot Q, \tag{7.5a, b}$$

ahol $\mathbf{F}$ a Q töltésre ható erő, Q^* a mező forrástöltése, és $\mathbf{r}$ a Q^*-tól a Q töltésbe mutató helyvektor (7.8. ábra).



7.8. ábra

A töltések szimmetrikus szerepe miatt (lásd a 7.5a, b formulát) mindegy, hogy melyik töltést tekintjük a „mezőt keltő" töltésnek, és melyiket a „próbatestnek", a kölcsönhatás törvénye szerint a két töltésre ható két (egymással ellentétes irányú, de egyenlő nagyságú) erőt megadó összefüggés így is írható:

$$\mathbf{F}_{12} = k\frac{Q_1Q_2}{r^3}\mathbf{r}_{12}, \qquad \mathbf{F}_{21} = k\frac{Q_1Q_2}{r^3}\mathbf{r}_{21}. \tag{7.5c, d}$$

Ez Coulomb törvénye, az ún. elemi elektrosztatikai erőtörvény, amely pontosan *vákuumban* (közelítőleg levegőben is) érvényes. A két egyenlet a Q_2, illetve Q_1 töltésre ható erőt adja meg irány és nagyság szerint: *pontszerű töltés keltette mező másik pontszerű töltésre mindkét töltéssel egyenesen, a két töltés egymástól mért távolságának négyzetével fordítottan arányos erőt fejt ki.* Az erő vektora a két töltést összekötő egyenesbe esik.

Ha a töltések előjele különböző, $\mathbf{r}_{12}$-vel, illetve $\mathbf{r}_{21}$-gyel ellentétes irányú erőt kapunk (az egyenlet jobb oldalán negatív előjel van), vagyis a töltések (az elektromos alapjelenségekben megismert módon) *vonzzák* egymást, ha a két töltés előjele megegyezik, akkor $\mathbf{r}_{12}$-vel, illetve $\mathbf{r}_{21}$-gyel egyenlő irányú erőt ad az egyenlet, vagyis a két töltés *taszítja* egymást.

A k arányossági tényező nagyságát a töltésegység rögzítése a következőképpen határozza meg (lásd a 7.1.2. alpontot):

$$F(\mathrm{N}) = 9\cdot10^9\left(\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\right)\cdot\frac{Q_1(\mathrm{C})\cdot Q_2(\mathrm{C})}{r^2(\mathrm{m}^2)},$$

ui. ha pl. $Q_1 = Q_2 = 1$ C, és $r = 1$ m, az erőtörvénynek – a 7.1.2. pont alapján – $F = 9\cdot10^9$ N nagyságú erőt kell adnia, vagyis valóban

$$9\cdot10^9\left(\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\right)\cdot\frac{1(\mathrm{C})\cdot1(\mathrm{C})}{1(\mathrm{m}^2)}\mathrm{N} = 9\cdot10^9\mathrm{N}.$$

Így tehát a k arányossági tényező

$$k = 9\cdot10^9\left(\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\right).$$

Az SI mértékegység-rendszerben a k arányossági tényező helyett a vele egyenlőnek választott $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ alakban felírt tényezőt használjuk (ennek célszerűsége Maxwell egyenleteinek felírásánál látszik majd, lásd a 7.1.6. alfejezetet), ahol az ε_0 mennyiséget *vákuumpermittivitásnak* (régebbi nevén a *vákuum dielektromos állandójának*) nevezik. Értelmezéséből következik, hogy

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\cdot9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}} \approx 8,85\cdot10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}.$$

(ε_0 pontosabb értelmezése és értéke a 10.2. alpontban található.)

Ezzel a ponttöltés körül kialakuló mező térerőssége és Coulomb törvénye a következőképpen írható:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \tag{7.6a}$$

és

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}}, \tag{7.6b}$$

illetve vektoriálisan:

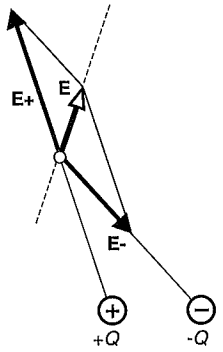
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^3}\mathbf{r}_{12}. \tag{7.6c, d}$$

7.1.4. Erővonalak

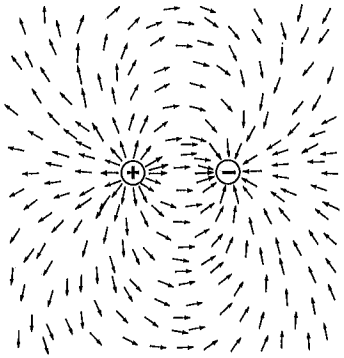
Mint láttuk, a mező minden pontjához tartozik egy jellemző irány: a mező ottani térerősségvektorának az iránya. A térerősségvektorokat helyről helyre a szuperpozíció elve alapján szerkeszthetjük meg (7.9a. ábra).

Ezeket (a mező pontjaira jellemző) irányokat mutató térerősségvektorok nem rendszertelenül helyezkednek el a térben, hanem a mező egyik pontjáról áttérve annak egy közeli másik pontjára, a térerősségvektor iránya és nagysága csak egy kicsit változik meg (7.9. ábra).

A tapasztalat azt mutatja, hogy *a mezőben olyan folytonos görbék húzhatók, amelyek érintői éppen az érintési pontokhoz tartozó elektromos térerősségvektorok tartóegyenesei.* Ezeket a görbéket *elektromos erővonalaknak* nevezzük.

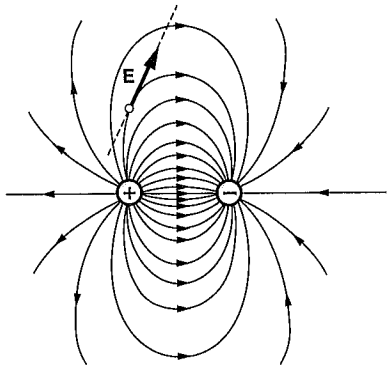


7.9a. ábra

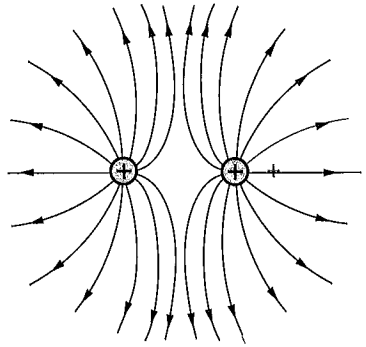


7.9b. ábra

Az erővonalaknak irányítást is adunk: nyílheggyel jelöljük rajtuk az **E** térerősségvektor irányát. A mellékelt ábrák két pontszerű, azonos abszolút értékű töltés keltette mező erővonalképét mutatják,[5] az első esetben a töltések ellentétes, a második estben azonos előjelűek.



7.10a. ábra



7.10b. ábra

Az erővonalak hasznos segédeszközt jelentenek az elektromos mező leírásában. Velük mintegy „térképet" kapunk az elektromos mezőről. Lehetséges azonban olyan „térképet" is készíteni, amely nemcsak a térerősség *irányát* mutatja helyről helyre, hanem annak *nagyságát* is jellemzi.

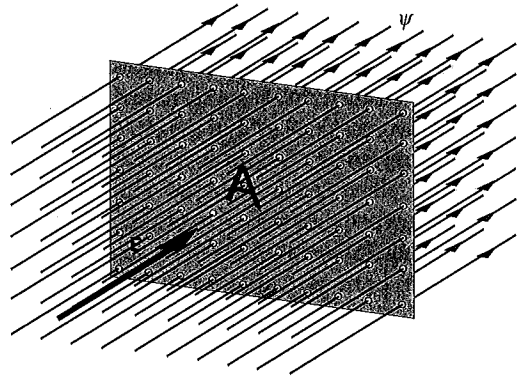
Erre a célra felhasználhatjuk a megrajzolt (illetve elképzelt) erővonalak számát, pontosabban *sűrűségét.*

[5] Az erővonalkép valójában térbeli ábrázolást igényel, síkban ennek csak metszete jeleníthető meg. Ezért a kétdimenziós kép eleve szegényes. Az erővonalak nem „anyagi szálak", hanem csak a mező tulajdonságait jól jellemző elképzelt vonalak.

Megállapodunk abban, hogy – noha a tér minden pontján át húzható erővonal – csak véges számú vonalat rajzolunk meg (illetve gondolunk el), mégpedig annyit, hogy *az erővonalak sűrűsége* (a rájuk merőleges felület egységnyi területén áthaladó erővonalak száma) *megegyezzék az ottani térerősségvektor nagyságával:*

$$\boxed{E=\frac{\Psi}{A}}, \qquad (7.7a)$$

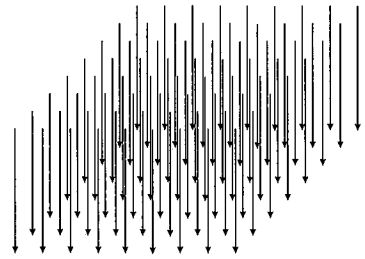
ahol Ψ az erővonalakra merőleges A területű felületen áthaladó erővonalak száma (7.11. ábra).



7.11. ábra

A $\Psi = EA$ mennyiséget az A területen áthaladó *elektromos erővonalfluxusnak* – röviden *elektromos fluxusnak* – nevezzük. Mértékegysége az $1\frac{N}{C}\cdot m^2$.

Az olyan elektromos mezőt, amelynek minden pontjában azonos nagyságú és irányú a térerősség, *homogén elektromos mezőnek* nevezzük. Ezt a mezőt egyenletes sűrűséggel rajzolt párhuzamos egyenes erővonalak jellemzik (7.12. ábra). Jó közelítéssel homogén mező alakul ki két, ellentetten feltöltött párhuzamos, nagy kiterjedésű fém síklap között. A nem homogén mezőt *inhomogénnek* nevezzük.



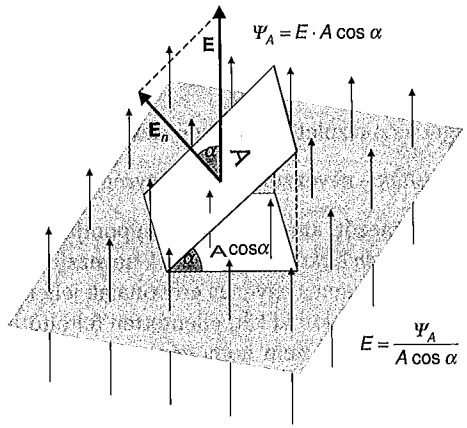
7.12. ábra

Míg a *homogén* mezőben az erővonalakra merőleges, A területű síkfelület nagyságától *függetlenül* fennáll, hogy az $\Psi = EA$ állandó mennyiség, az *inhomogén* mezőben a Ψ/A hányados csak *átlagos* térerősséget jelent. A helyi (lokális) térerősséget azonban egyre pontosabban megkapjuk, ha egyre kisebb ΔA területű felületdarabra számítjuk az erővonal-sűrűséget:[6]

$$\frac{\Delta\Psi}{\Delta A} \to E, \qquad \text{ha} \qquad \Delta A \to 0.$$

Az elektromos fluxus homogén mezőben is csak akkor számítható a $\Psi = EA$ alapján egyszerű szorzással, ha a felület merőleges az erővonalakra. Ha (a homogén mezőben) az erővonalakra nem merőleges, A területű síkfelületen áthaladó fluxust akarjuk meghatározni, akkor ismernünk kell a sík normálisának (a síkra állított merőleges egyenesnek) az erővonalakkal bezárt α szögét. A „ferde" síkidomon áthaladó erővonalszám (fluxus) ugyanis megegyezik az eredeti A területű felületnek az erővonalakra merőlegesen elhelyezkedő síkra eső *vetületén* áthaladó erővonalak számával. A vetület nagysága pedig $A_n = A\cos\alpha$. (Az n index itt és a következőkben mindig a merőleges (normális) irányt jelenti.) Ezzel a keresett fluxus (7.13. ábra):

$$\Psi_A = EA\cos\alpha.$$



7.13. ábra

[6] A ΔA „felületelemnek" a tér vizsgált pontjára zsugorítása során hamar elérjük, hogy az adott erővonal-sűrűséggel ábrázolt mezőben egyetlen erővonal se messe a felületet, s így látszólag értelmét veszti az erővonal-sűrűség–térerősségnagyság egymásnak való megfeleltetése. Ilyenkor úgy járhatunk el, hogy minden korábbi erővonal helyett (finomabb eloszlásban) pl. 100 erővonalat húzunk ki, azonban egy ilyen erővonal 1/100-ad „annyit ér", mint egyetlen eredeti erővonal. (Hasonló a helyzet, amikor a kis távolságok mérésére a méterrudat 1000 részre osztjuk, amelyből több is elfér a mérendő szakaszon, de egy-egy beosztás ezredannyit ér, mint a méter.)

Az ábra alapján a fluxus kifejezhető az *eredeti* felület A területének és a térerősség *felületre merőleges összetevőjének* segítségével is az alábbiak szerint:

$$\Psi = EA_n = E\left(A\cos\alpha\right) = \left(E\cos\alpha\right)A = E_nA,$$

ahol E_n a térerősségnek az erővonalakkal α szöget bezáró, A területű síkfelületre merőleges komponense.

Ha a mező inhomogén, vagy a felület nem sík, akkor a fluxust úgy határozhatjuk meg, hogy olyan kicsiny, ΔA területű felületelemekre bontjuk a teljes felületet, amelyeken belül már homogénnek tekinthető az elektromos mező. Ezekre különkülön kiszámítjuk a fluxus rájuk eső részét, majd ezeket összegezzük. Képletben:

$$\Psi = \sum_A E_n\Delta A. \tag{7.7b}$$

7.1.5. A Q töltés keltette mező teljes elektromos fluxusa

Bármilyen töltéseloszlás elektromos mezejének erővonalképét megszerkesztve azt tapasztaljuk, hogy az erővonalak töltésből indulnak ki és oda futnak be, sohasem kezdődnek vagy végződnek üres térben. Ezért mondjuk azt, hogy *a töltések a mező forrásai.*

A forrás „erősségére" az jellemző, hogy adott helyen mekkora térerősséget gerjeszt, vagyis, hogy hány erővonalat kell indítanunk a töltésből ahhoz, hogy az $E = \Delta\Psi/\Delta A$ megállapodást minden helyen teljesítsük. Ezt – a „teljes fluxust" – a ponttöltés által keltett mezőben határozzuk meg először. Ezt a következőképpen tehetjük.

Vegyük körül a Q ponttöltést egy r sugarú, a töltéssel koncentrikus gömbfelülettel! A gömbfelület mentén mérhető térerősség nagysága (7.6a) szerint:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Az erővonal-sűrűség pedig (a teljes gömbfelületre számolt fluxussal kifejezve) a Q töltéstől r távolságban $\Psi_ö/A = \Psi_ö/4r^2\pi$, ahol $\Psi_ö$ a Q töltést elhagyó *összes* erővonalak száma.

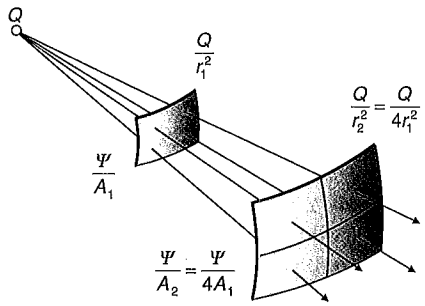
A térerősség–erővonal-sűrűség megfeleltetése ($E = \Psi/A$) alapján:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{\Psi_ö}{4\pi r^2},$$

és innen a Q töltésből kiindítandó összes erővonalak összes száma (vagyis a teljes fluxus):

$$\boxed{\Psi_ö = \frac{1}{\varepsilon_0}Q} \tag{7.8}$$

függetlenül a töltéstől mért r távolságtól! (7.14. ábra).



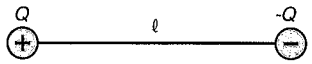
7.14. ábra

Ebből az is következik, hogy ha egy r sugarú gömbfelület mentén összehangoltuk az erővonalszámot a térerősséggel, akkor már a mező *minden más pontjában* összehangoltuk, vagyis a már megrajzolt erővonalak puszta folytatásával az erővonal-sűrűség–térerősség megfeleltetés automatikusan teljesül. (U.i. a térerősség is és az erővonal-sűrűség is a ponttöltéstől távolodva *egyformán* rohamosan csökken.)

A szuperpozíció törvénye alapján bebizonyítható, hogy ez a megfeleltetés tetszőleges töltéseloszlás keltette mezőre is fennáll (lásd a 7.1.7. pontot).

7.1.6. Az elektromos dipólus

Ha két ellentétes előjelű, azonos abszolút értékű töltéssel ellátott pontszerű testet merev szigetelőrúddal összekötünk, (makroszkopikus) elektromos *dipólust* (kettőspólust) kapunk (7.15. ábra).



7.15. ábra

Vegyük észre, hogy az elektromos dipólusra a *homogén* elektromos mező csak *forgatónyomatékot* fejt ki, mert *erőpár* hat rá. A homogén mező által a dipólusra ható eredő erő nulla:

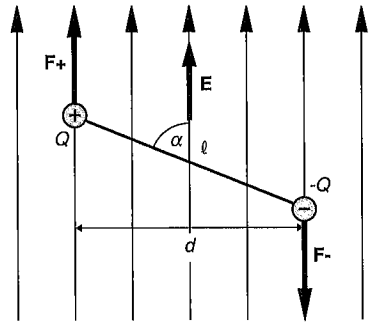
$$\mathbf{F}=+Q\mathbf{E}-Q\mathbf{E}=0,$$

vagyis a dipólus tömegközéppontja homogén elektromos mezőben nem gyorsul.

Az elektromos dipólusra ható forgatónyomaték nagysága a 7.16. ábra alapján:

$$M=Fd=QEl\sin\alpha,$$

ahol l a dipólus hossza.



7.16. ábra

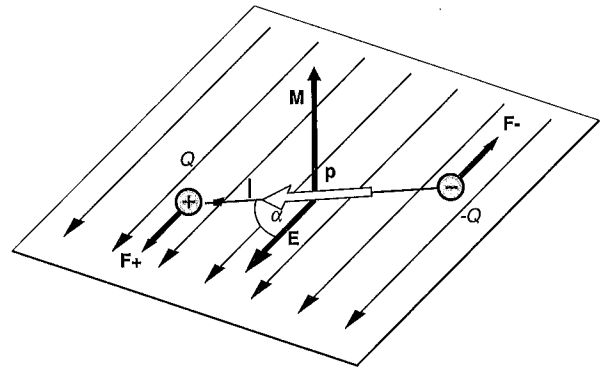
Maximális értékét akkor veszi fel, ha a két töltést összekötő szakasz merőleges a térerősségre:

$$M_{\max}=QEl.$$

Mint látjuk, a maximális forgatónyomaték két tényező szorzataként írható fel, amelyek közül az egyik független a dipólustól, és az elektromos mezőre jellemző, ez az **E** térerősség; a másik tényező független a mezőtől, és a dipólusra jellemző. Ez a *Ql elektromos dipólusnyomaték* vagy *dipólmomentum*.

Ha a dipólmomentumot vektornak tekintjük, mégpedig a

$$\mathbf{p}=Q\mathbf{l} \qquad (7.9.)$$



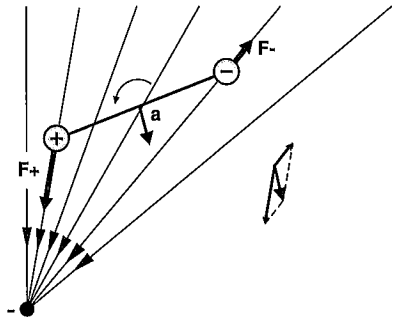
7.17. ábra

értelmezés szerint, ahol Q a pozitív töltés és l a negatív töltésből a pozitív töltésig húzott vektor, akkor a forgatónyomatékot vektoriálisan is felírhatjuk (lásd a 2.1.3.2. alpontot):

$$\boxed{\mathbf{M}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}}, \quad \text{illetve} \quad \boxed{\mathbf{M}=Q\mathbf{l}\times\mathbf{E}}. \tag{7.10}$$

Ezt a forgatónyomatékot a dipólus pontszerű töltéseire ható erők alkotta erőpár hozza létre. A forgatónyomaték-vektor, a dipólusnyomaték és a térerősség ebben a sorrendben jobbrendszert alkot (7.17. ábra).

Inhomogén mezőben már a dipólus tömegközéppontja is gyorsul, mert a rá ható erők eredője általában már nem zérus. Ha a dipólus szabadon elfordulhat – mint a 7.18. ábrán látható –, végül mindig a nagyobb erővonal-sűrűségű (térerősségű) hely felé gyorsul.



7.18. ábra

7.1.7. Forráserősség. Gauss tétele

A töltésből kiinduló összes erővonalak számát találóan *forráserősségnek* nevezzük, és a következőkben a $\Psi_{\ddot{o}}$ helyett N_E-vel jelöljük (N a darabszámra, E az elektromosra utal). A forráserősség azonban nem puszta szám, hanem fluxus dimenziója van. Mértékegysége: Nm^2/C^2.

Az előzőek szerint valamely Q *pontszerű töltés forráserőssége:*

$$\boxed{N_E=\frac{1}{\varepsilon_0}Q}. \tag{7.11}$$

Ha térben eloszló több töltés kelt elektromos mezőt, beszélhetünk az együttes forráserősségükről, vagyis a térrész tetszőleges, zárt felülettel körülhatárolt V térfogatának (vagyis a térfogatban levő össztöltésnek) a forráserősségéről is.

Ha valamennyi töltést egy *zárt felülettel* körülveszünk, a töltésrendszerből kiinduló erővonalak között lehetnek olyanok, amelyek végig a felületen belül maradnak, egy részük azonban kilép a felületből, a kilépők közül ismét egy rész visszatérhet a felület belsejébe. A töltésrendszer forráserősségére az a rész jellemző, amelyet a vissza nem térő erővonalak jelentenek. Ezek az erővonalak árulkodnak a felület *belsejében* levő össztöltés nagyságáról.

A tér V térfogatának forráserősségén értjük a térrészt elhagyó vagy oda kívülről befutó (tehát nem kilépő, majd visszatérő) *erővonalak számát. Ez a térrészt körülhatároló zárt felületen áthaladó teljes fluxus.* (Ha az erővonalak többsége a külső térből fut a felület által határolt térrész t belsejébe, akkor a forráserősség negatív.)

Mint könnyen belátható, érvényes a következő általánosabb tétel:

Ha a térfogat pozitív és negatív töltéseket egyaránt tartalmaz, a forráserősséget e töltések algebrai összegének $1/\varepsilon_0$-szorosa adja meg (ennyi erővonal hagyja el a töltésrendszert):

$$\boxed{N_E(V)=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_V Q}, \tag{7.12}$$

ahol $\sum_V Q$ a V térfogat belsejében levő töltések algebrai összegét jelenti. Ez az elektrosztatika egyik általános alaptörvényének, az ún. *Gauss-tételnek* a vákuumra érvényes alakja (7.19. ábra).

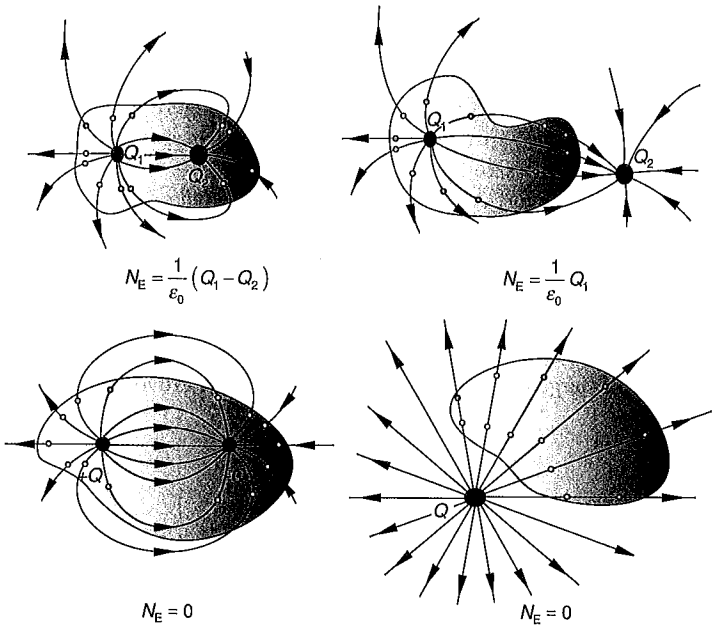
Az ábrán a felületből *kilépő* erővonal-döféspontokat kék, a felületbe *belépés* helyén keletkező döféspontokat fehér körökkel jelöltük.

Megállapításunkat egészen általánosan és igen szemléletesen is megfogalmazhatjuk:

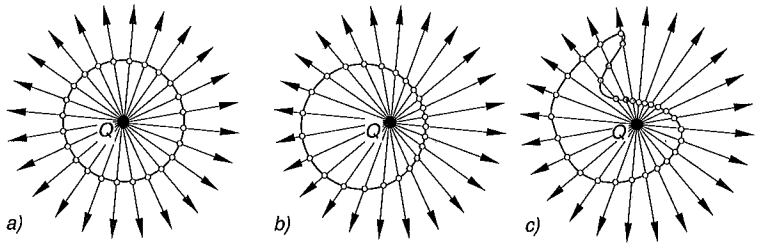
Akárhogyan veszünk fel egy zárt felületet, ha az erővonal-kilépéseknél keletkező döféspontok számából kivonjuk a belépéseknél keletkező döféspontok számát, a felület alakjától függetlenül mindenkor a felület által körülvett töltések előjelles összegének $1/\varepsilon_0$-szorosát kapjuk.

A felület alakjától való függetlenség belátható az alábbi ábrasorozat alapján (7.20. ábra):

Az a) ábrán a töltéssel koncentrikusan felvett gömbfelületen minden erővonal csak kilép a felületen, a döféspontok egyenletesen oszlanak el. A b) ábrán ugyanezek a döféspontok a töltés eltolása miatt változó sűrűséggel oszlanak el, de összes számuk nem változott meg. A c) ábrán a felületet annyira deformáltuk, hogy újabb döféspontok keletkeztek, de minden egyes új kilépéshez (kékkel jelölve) egy új belépés is tartozik (szürkével jelölve), vagyis az újonnan kapott döféspontok számának előjeles összege 0, így *nem változott meg* a zárt felület teljes fluxusa.



7.19. ábra



7.20. ábra

A 7.1.5. alfejezetben beláttuk, hogy egyetlen *pontszerű* töltés által keltett mező forráserőssége:

$$\Psi_{\ddot{o}} = N_E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q.$$

A ponttöltésről *tetszőleges töltésrendszerre* való általánosítás a következőképpen látható be. Használjuk fel a (7.7b) összefüggést, és alkalmazzuk a zárt felület egy „elegendően kicsiny" ΔA területű darabjára! („Elegendően kicsiny a felületdarab, ha közelítőleg

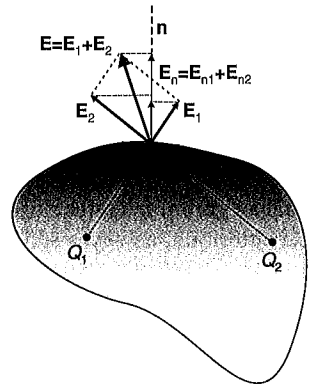
síkidommal helyettesíthető, valamint a rajta áthaladó fluxus homogén eloszlásúnak tekinthető.)

Helyezzünk a zárt felületbe *két* pontszerű töltést, és határozzuk meg a felület egy kiválasztott darabjának $\Delta\Psi$ fluxusát!

Legyen a Q_1 töltéstől származó „elemi fluxus" (7.7b) szerint $\Delta\Psi_1 = E_{n1}\Delta A$, a Q_2 töltéstől származó pedig $\Delta\Psi_2 = E_{n2}\Delta A$, és a két töltés eredő mezőjének a fluxusa ugyanott $E_n\Delta A$!

Ismeretes, hogy két vektor összegének vetülete egyenlő a két vektor vetületének összegével. Mivel nekünk a térerősségeknek a felület normálisára eső vetületeivel kell dolgoznunk (lásd a 7.21. ábrát), ezt felhasználva az eredő fluxusra írhatjuk:

$$\Delta\Psi = E_n\Delta A = \left(E_{n1} + E_{n2}\right)\Delta A = E_{n1}\Delta A + E_{n2}\Delta A = \Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_2.$$



7.21. ábra

Mivel ez bármelyik kis felületelemre érvényes összefüggés, mindegyik ΔA felületelemre való *összegezéssel is érvényben marad,* tehát a teljes felület fluxusa:

$$\Psi_{\ddot{o}} = N_E = \sum \Delta\Psi = \sum\left(\Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_2\right) = \sum \Delta\Psi_1 + \sum \Delta\Psi_2.$$

Mivel azonban

$$\sum \Psi_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_1 \qquad \text{és} \qquad \sum \Psi_2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_2,$$

valóban igaz, hogy

$$\Psi_{\ddot{o}} = N_E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_1 + \frac{1}{\varepsilon_0} Q_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q_1 + Q_2\right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_V Q,$$

ahol $\sum_V Q$ a zárt felület által körülvett V térfogatú térrészben levő (tetszőleges eloszlású) töltések algebrai összege.

Gauss tétele a *térrész határfelülete mentén mérhető* térerősségértékekkel is kifejezhető:

$$\sum_{A}^{\circ} E_n \Delta A = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{V} Q. \tag{7.13}$$

ahol E_n pozitív, ha **E** a felületből *kifelé* mutató vektor, ellenkező esetben negatív.

Ebben a jelölésben és a továbbiakban is az szummázás (összegezés) jelének alsó indexében a *felületre* (*A*), illetve a *térfogatra* (*V*) utalunk, a felső indexben megjelenő karika pedig a felület *zártságára* utal. (Nyitott felület esetén számolatlanul „megszökhetnének" erővonalak, ezért fontos kiemelni azt, hogy a szóban forgó felület *zárt*.)

Gauss tétele egy általános matematikai tétel fizikai mezőkre való alkalmazását *Maxwell* szerepeltette az elektrodinamikát leíró egyenletei között. Ezt a törvényt *Maxwell I. törvényének*[7] is nevezik.

Gauss tétele *térerősségvektorokkal* is kifejezhető, ha bevezetjük az ún. *területvektor* fogalmát a következő értelmezéssel:

Egy irányított *g* körvonalú síkidomhoz tartozó területvektoron értjük az olyan **A** vektort, amelynek hossza arányos a síkidom területével, merőleges e síkra és iránya a határgörbe irányításával jobbsodrású rendszert alkot.[8]

Ha ezek után a zárt (általában görbe) felületet elegendően kicsiny méretű síklapokból álló poliéderrel helyettesítjük, az egyes síklapocskákhoz tartozó elemi fluxus így írható:

$$\Delta\Psi_i = |\mathbf{E}_i| \cdot |\Delta\mathbf{A}_i| \cdot \cos\alpha_i = \mathbf{E}_i \Delta\mathbf{A}_i,$$

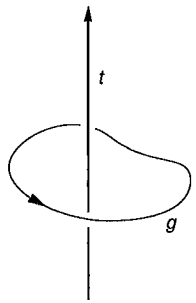
vagyis az *i*-edik felületelem fluxusa a felületelem területvektorának és a felület közepén mérhető (tehát átlagos) térerősségvektornak a skaláris szorzata. A zárt felület teljes fluxusa ezen elemi fluxusok összege:

$$N_E = \sum_{i=1}^{n} \Delta\Psi_i = \sum_{A}^{\circ} \mathbf{E}_i \Delta\mathbf{A}_i.$$

Ez a kifejezés előjeles a cos α miatt.

[7] Maxwell eredeti műve (A treatise on electricity and magnetism, 1873) és az elméleti szakkönyvek egy része az elektromágneses mező alapvető egyenleteit (amelyeket azóta Maxwell-egyenleteknek nevez a tudomány) némileg eltérő módon számozza.

[8] Általában jobbrendszernek (jobbsodrású rendszernek) mondunk minden olyan tengelyirány–forgásirány kapcsolatot, ha azok úgy vannak egymáshoz rendelve, hogy az *irányított tengely* nyílhegyével szembe nézve a *forgásirányt* pozitívnak (óramutató járásával ellentétesnek) lássuk. (Forgásirányt kitűzhet pl. egy irányított *g* görbére rajzolt nyílhegy is, lásd a 7.22. ábrát.)



7.22. ábra

Gauss tétele (Maxwell I. törvénye) tehát a felület pontjaiban mérhető térerősségekkel kifejezve (7.13) alapján:

$$\boxed{\sum_{A}^{\circ} \mathbf{E}\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{V} Q}. \tag{7.14a}$$

A forráserősség értékét egyre pontosabban megkapjuk, ha az elemi fluxusokat egyre kisebb területű felületelemekre képezzük, és az így kapott elemi fluxusokat összeadjuk.

Ez a „képlet" egy bonyolult összegező eljárásnak tömör kifejezése, amely túlságosan általános ahhoz, hogy könnyedén számoljunk vele. A mező *globális* (nagy térrészre jellemző) szerkezeti tulajdonsága fejeződik ki benne, és nem mond semmit a mező *lokális* (helyi) jellemzőiről. Ennek ellenére homogén vagy szimmetriákkal rendelkező esetekben a zárt felület ügyes megválasztásával ebből a mező egyes pontjainak térerősségére is tudunk következtetni.

Ha a töltéseloszlást nem diszkrét töltéscsomók (ponttöltések) alkotják, hanem (makroszkopikus értelemben) folytonosan oszlik el a töltés a *V* térfogatban, akkor (ismerve helyről helyre a töltéssűrűség $\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ értékét) összefüggésünk így is írható:

$$\boxed{N_E = \sum_{A}^{\circ} \mathbf{E}\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{V} \rho\Delta V}, \tag{7.14b}$$

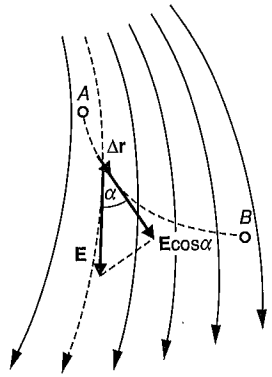
ahol a $\Delta\mathbf{A}$ területvektorokat a zárt felület belsejétől *kifelé* irányítjuk, és ΔV a térrész olyan kis térfogateleme, amelyen belül a töltéssűrűség állandónak tekinthető.

7.2. Potenciál, örvényerősség (cirkuláció)

7.2.1. Az elektromos mező munkája. A feszültség

Az elektromos mező $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ erőt fejt ki a benne tartózkodó töltésre, ezért ha a töltés elmozdul, azon a mező általában munkát végez. Mint a mechanikából ismeretes, a munka értékét egyre pontosabban megkapjuk, minél rövidebb pályaszakaszokra számítjuk a $\Delta W = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$ skaláris szorzatokat, vagyis az elemi munkákat, és összegezzük azokat a megtett útra (lásd a 2.1.4. alpontot). Így a pálya A kezdőpontjától a B végpontjáig (7.23. ábra):

$$W_{AB} = \sum_{A}^{B} \mathbf{F}\Delta\mathbf{r} = \sum_{A}^{B} Q\mathbf{E}\Delta\mathbf{r} \,. \qquad (7.15)$$



7.23. ábra

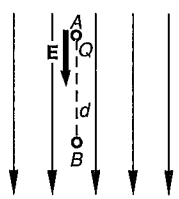
(Mivel a pályagörbe elemi szakaszának hossza közelítőleg a szakasz kezdő- és végpontját összekötő elemi *elmozdulásvektor* hosszával egyenlő, a skaláris szorzatban $|\Delta\mathbf{r}|$ helyett Δs elemi utat is írhatunk.)

Az összegezés néhány esetben könnyen elvégezhető:

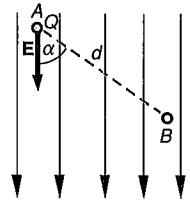
1. Ha a mező *homogén,* és a töltés erővonal mentén mozog, mivel QE kiemelhető (7.24. ábra):

a) a térerősség irányában $W = \sum QE\Delta s = QE\sum \Delta s = QEd$,

b) a térerősséggel ellentétesen: $W = -QEd$.



7.24. ábra



7.25. ábra

2. Ha a mező *homogén,* és a töltés a térerősséggel (erővonalakkal) állandó α szöget bezáró irányban mozog (7.25. ábra):

$$W = \sum QE\Delta s \cos\alpha = QE\cos\alpha \sum \Delta s = QEd\cos\alpha.$$

3. Ha bármilyen elektromos mezőben a töltés az erővonalakra minden pillanatban merőlegesen mozog ($\cos\alpha = \cos 90° = 0$):

$$W = 0.$$

4. Ha a töltés valamely pontszerű töltés keltette (centrális) mezőben mozog, miközben a forrástól r_A távolságból r_B távolságra kerül:

$$W_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_1 Q_2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right). \qquad (7.16)$$

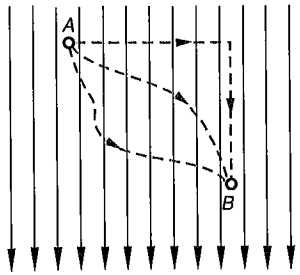
Ez az összefüggés azonos gondolatmenettel igazolható, mint a gravitációs tér munkájára kapott

$$W_{AB} = -fm_1 m_2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

egyenlet [lásd a (2.33) képletet].

A munka értelmezéséből következik, hogy $W_{A\to B} = -W_{B\to A}$.

A *nyugvó töltéseloszlás* elektromos mezejének figyelemre méltó tulajdonsága, hogy ugyanazon két pont között különböző pályákon haladó azonos töltésen a mező ugyanakkora munkát végez, vagyis *a mező munkája független a pályagörbétől (és így az úttól), csak a kezdő- és végpont helyétől függ* (7.26. ábra).



7.26. ábra

Ez a tény az energiamegmaradás törvényének kifejeződése, az elektrosztatikus mezőnek a perpetuum mobile lehetetlenségét garantáló tulajdonsága. Ha ui. *A*-tól *B*-ig az egyik pályán nagyobb munkát végezne a mező, mint a másikon, akkor a töltést az utóbbin visszajuttatva az *A* pontba, azon kisebb munkát kellene végeznünk, mint amennyit a mező végzett az első pályán, s így nettó energiánk maradna anélkül, hogy a mezőt keltő töltés bárhogyan átrendeződne.

Ezt – a gravitációs térrel analóg módon – úgy is megfogalmazhatjuk, hogy *az elektrosztatikus mező bármely zárt görbén végigvezetett töltésen végzett összes munkája zérus.* Az elektrosztatikus mező tehát *konzervatív* (lásd a 2.1.4. pontot).

Mindebből az a fontos megállapítás következik, hogy *az elektrosztatikus mezőnek a tér A és B pontjai között mozgó töltésen végzett munkája két olyan tényező szorzataként írható fel,* (lásd 7.15.), *amelyek közül az egyik (Q) függetlenül a mezőtől csak a próbatestre, a másik,* $\left(\sum_A^B \mathbf{E}\Delta\mathbf{r}\right)$ *függetlenül a próbatesttől és az A-t B-vel összekötő pálya alakjától csak a mezőre, pontosabban a mező kiválasztott AB pontpárjára jellemző:*

$$W_{AB} = Q \cdot \sum_A^B \mathbf{E}\Delta\mathbf{r}, \tag{7.17}$$

azaz, ha rögzítjük a pálya kezdő- és végpontját, az elektrosztatikus mező munkája egyenesen arányos a mozgatott töltéssel, vagyis a pálya alakjától függetlenül hányadosuk állandó:

$$\frac{W_{AB}}{Q} = \sum_A^B \mathbf{E}\Delta\mathbf{r} = \text{állandó}.$$

Ezt az állandót, amely a mező *pontpárjaira* jellemző, *elektromos feszültségnek* nevezzük, és általában *U*-val jelöljük. (Ha fontos megjelölni, hogy mely két pont közötti feszültséget kívánjuk megadni, ezt kettős indexszel tehetjük meg. Ha a szövegkörnyezetből kiderül, az indexek elhagyhatók.) A feszültség pontos értelmezése:

Az A pontnak B ponthoz viszonyított feszültségén az elektromos mező A-ból B-be mozgó elektromos töltésű testen végzett munkájának és a test töltésének hányadosát értjük:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q} = \sum_A^B \mathbf{E}\Delta\mathbf{r}. \tag{7.18}$$

(A feszültség a mezőt pontpáronként jellemzi munkavégzés szempontjából: minél nagyobb munkát képes végezni ugyanazon a pozitív töltésen a mező, midőn a töltés *A*-tól *B*-ig mozog, annál nagyobb az *A* pont feszültsége a *B* ponthoz viszonyítva.)

Az értelmezésből következik, hogy *a feszültség mérőszáma a pozitív egységnyi töltésen végzett munka mérőszámával egyenlő.*

Egységnyi a feszültség a mező két pontja között, ha a két pont között mozgó 1 C töltésű testen 1 J munkát végez. A feszültség egysége tehát joule/coulomb. Az 1 J/C egység neve *volt,* jele: V.

Fontos megjegyezni, hogy a feszültség csak *konzervatív mezőben* értelmezhető. Nem konzervatív mezőben ui. két pont között a töltéssel különböző pályákon haladva más-más munkát végezhet a mező, vagyis nem lenne egyértelmű a munka és töltés hányadosának értéke.

A feszültség előjeles skaláris mennyiség. Az, hogy az *A* pontnak *B* ponthoz viszonyított feszültsége *pozitív,* azt jelenti, hogy az *A* pontból a *B* pontba mozgatott *pozitív* töltésen a mező *pozitív* munkát végez. (Természetesen a 7.18. képletből látszik, hogy a feszültség nem függ attól, hogy a próbatest töltése pozitív vagy negatív.)

Az előzőekből következik, hogy $U_{AB} = -U_{BA}$.

A feszültség fogalmát felhasználva a mező munkája így is felírható:

$$W_{AB} = QU_{AB}. \tag{7.19}$$

Néhány egyszerű, de gyakorlatban fontos esetben a mező két pontja közötti feszültség meghatározása, vagyis az $U_{AB} = \sum_A^B \mathbf{E}\Delta\mathbf{r}$ összegezés könnyen elvégezhető.

1. *Homogén mezőben az erővonalak mentén* elhelyezkedő *A* és *B* pontok között, ha a térerősségvektor *A*-tól *B* felé mutat, a feszültség (7.24. ábra)

$$U_{AB}=\sum_{A}^{B}\mathbf{E}\Delta\mathbf{r}=\sum_{A}^{B}|\mathbf{E}|\cdot|\Delta\mathbf{r}|\cos\alpha=E\sum_{A}^{B}\Delta s=Ed,$$

ahol d az A és B pontok egymástól mért távolsága. (Ha a térerősségvektor B felől mutat A felé, a $\cos\alpha=-1$ miatt $U_{AB}=-Ed$.) Itt ui. az állandó térerősségérték kiemelhető az összegből. Innen a térerősség nagysága:

$$\boxed{E=\frac{|U_{AB}|}{d}}, \qquad (7.20)$$

szemléletesen: a térerősség – mérőszámban – a „hosszegységre eső feszültséggel" egyenlő. Ezen összefüggés alapján a térerősség egységének más kifejezése is használatos: 1 N/C = 1 V/m;

A fluxusé pedig 1 V·m.

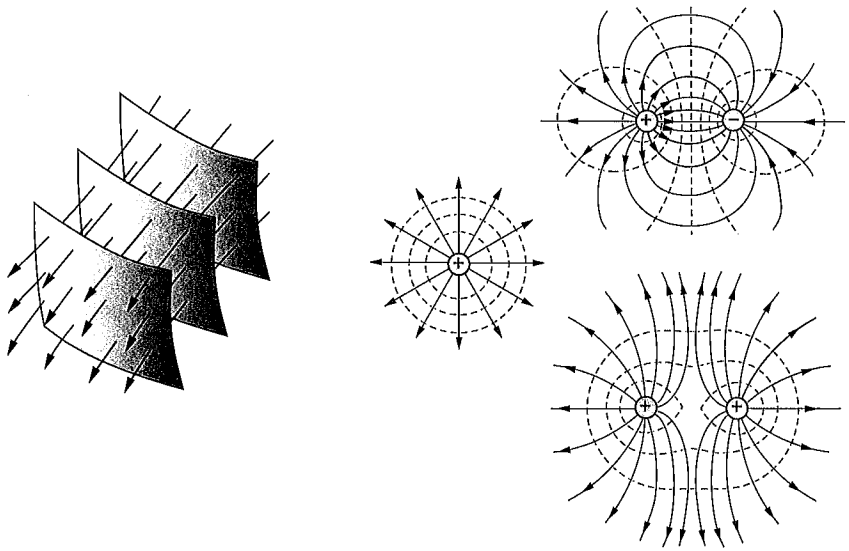
2. Ha a két pont *homogén mezőben* az erővonalakkal tetszőleges α *szöget bezáró* egyenes mentén helyezkedik el: $U_{AB}=Ed\cos\alpha$ (7.25. ábra).
3. Ha a két pont úgy helyezkedik el *tetszőleges* mezőben, hogy az egyikből a másikba úgy is eljuthatunk, hogy mindvégig az *erővonalakra merőlegesen* haladunk, $\cos\alpha=0$ miatt a feszültség is $U_{AB}=0$ (7.26. ábra).
4. Ponttöltés által keltett (vagyis centrális) erőtérben, ha az A pont r_A, a B pont pedig r_B távolságra van a mező forrásától [(7.16) és (7.18) alapján]:

$$\boxed{U_{AB}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)}. \qquad (7.21)$$

7.2.2. A potenciál

A mezőt a térerősség *erőkifejtő képesség* szempontjából *pontonként* jellemzi az $\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}}{Q}$ értelmezés szerint. Célszerű egy, a munkavégzés szempontjából is *pontonként* (és nem pontpáronként) jellemző mennyiséget értelmeznünk. Ezt a következő „csalással" tehetjük meg.

Nyilvánvaló, hogy a mezőben végtelen sok olyan felület található, amely minden pontjában *merőleges* az éppen ott áthaladó erővonalra (7.27a. ábra). Az előzőek szerint az ilyen felületek mentén mozgó töltésen a mező nem végez munkát. Ezeket a felületeket *konzervatív mezők esetén*[9] (a gravitációs térhez hasonló módon) *szintfelületeknek* vagy *nívófelületeknek* nevezzük (7.27b. ábra). Az ábrán a folytonos vonalak az elektromos erővonalakat, a szaggatottak a szintfelületek (metszeteit) jelentik. Egy szintfelület különböző pontjai között nincs feszültség.



a) b)

7.27. ábra

Mivel az elektromos mező munkát képes végezni az elektromosan töltött testeken, ezért azoknak – helyzetüknél fogva – *elektromos helyzeti* (potenciális) *energiájuk* van. A helyzeti energiát valamilyen *alapszinttől* kell számítani (lásd a 2.1.6.2. alpontot!). Ezért kiválaszthatunk és rögzíthetünk egy szintfelületet (ezt nevezzük nullszintnek), és a térnek valamely pontjában elhelyezkedő testnek az *elektromos helyzeti energiáját azzal a munkával jellemezzük, amelyet a mező végez a testen, miközben a test az eredeti helyéről a nullaszintfelületre kerül.* A test helyzeti energiája tehát így írható le:

$$E_{\text{pot}}=QU_{A0},$$

[9] Nem konzervatív mezők (lásd a 9. fejezetet) esetén is találhatók az erővonalakra minden pontjukban merőleges felületek, ám két ilyen felület között a $\sum_{A}^{B}\mathbf{E}\Delta\mathbf{s}$ szorzatösszeg nem egyértelmű, függ a mérőgörbe A-tól B-ig tartó menetétől.

ahol U_{A0} az A pontnak a *nulla- (0) szinthez viszonyított feszültsége,* más szóval az A pont *potenciálja.* (A továbbiakban U_{A0} helyett csak U_A-t írunk. Megjegyezzük, hogy a szakirodalomban a potenciált gyakran Φ-vel vagy V-vel jelölik.) A mező A pontjának potenciálja tehát:

$$\boxed{U_A = \frac{E_{\text{pot}}}{Q}}, \tag{7.22}$$

vagyis *a potenciál mérőszáma a pozitív egységnyi töltés helyzeti energiájának mérőszámával egyezik meg.*

(Ezzel a mezőt *pontonként* jellemezzük munkavégzés, illetve energia kialakítása szempontjából. A „csalás" abban rejlik, hogy valójában itt is *két pont* között értelmezett fogalommal, a feszültséggel dolgozunk, ám az egyik pont – a rögzített nullaszint bármely pontja – a folyamatok leírása során változatlan marad, azaz csak egyetlen pont helyzete változhat, azé, amelyet jellemzünk.)

A fentiek miatt a szintfelületeket másként *ekvipotenciális* (egyenlő potenciálú) *felületeknek* is nevezik.

A fizikában (elsősorban az ún. elméleti fizikában) *a végtelen távoli pontban választjuk nullának a potenciált,* vagyis a végtelen távoli pontok halmaza a 0 szint (lásd még a 7.3.4.1. alpontot). Ennek előnyét a későbbiekben látjuk.

A feszültség értelmezéséből következik, hogy *két pont között levő feszültség egyenlő a két pont potenciáljának különbségével* (7.28. ábra):

$$U_{AB} = U_A - U_B. \tag{7.23}$$

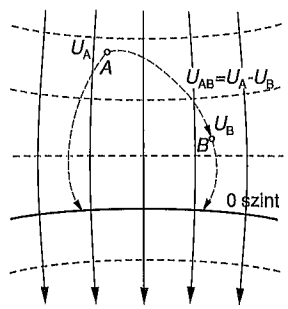
A magányos *pontszerű töltés* által keltett mezőben a forrástól r távolságra levő pont potenciálja (ha a potenciált a végtelenben választjuk nullának):

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}}, \tag{7.24}$$

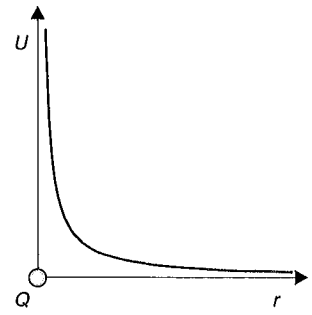
ui. az $U_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$ kifejezésben az $r_B \to \infty$ határátmenetben $\frac{1}{r_B} \to 0$.

Pontszerű töltés mezejében tehát a potenciál egyenesen arányos a forráserősséggel és fordítottan arányos a forrástól mért távolság első hatványával (7.29. ábra).

A potenciál nullaszintjének a gyakorlatban a föld potenciálját választják (lásd a 7.3.4.1. alpontot).



7.28. ábra



7.29. ábra

7.2.3. Az örvényerősség. Maxwell II. törvénye

Azt, hogy az elektrosztatikus mező konzervatív, matematikailag könnyen kifejezhetjük a helyről helyre mért térerősség segítségével is. A konzervatív tulajdonság azt jelenti, hogy a *zárt görbén* végigvezetett töltésen a mező nulla munkát végez (7.30. ábra), tehát:

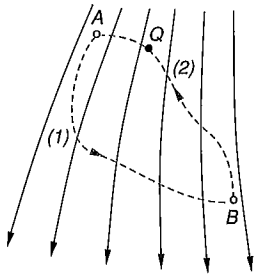
$$\overset{\circ}{\sum_g} Q\mathbf{E}\Delta\mathbf{r} = 0.$$

Mivel a próbatest töltése állandó, az összeg minden tagjából kiemelhető:

$$Q\overset{\circ}{\sum_g} \mathbf{E}\Delta\mathbf{r} = 0.$$

Tekintve, hogy $Q \neq 0$, a szorzat második tényezőjének kell nullának lennie minden esetben, méghozzá függetlenül attól, hogy milyen alakú zárt g görbén számítjuk a szorzatösszeget. Így tehát egyedül a mezőre jellemző $\overset{\circ}{\sum_g} \mathbf{E}\Delta\mathbf{r}$ kifejezés perdöntő abból a szempontból, hogy valamely elektromos mező konzervatív-e vagy sem[10]. Ezt a kifejezést találóan *örvényerősségnek* (másként körfeszültségnek, vagy idegen szóval *cirkulációnak*) nevezik.

[10] A későbbiekben találkozunk nem konzervatív elektromos mezőkkel is. Ezeket azonban nem nyugvó elektromos töltések keltik.

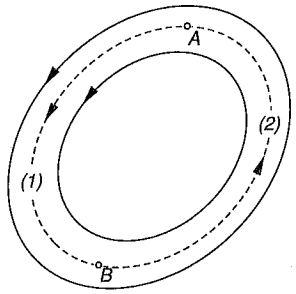


7.30. ábra

Pontosabban: *az elektromos mező egy tetszőleges, nyílt A felület menti örvényerősségén értjük a felület határgörbéjére számított* $\ddot{O}_E = \overset{\circ}{\sum_g} \mathbf{E}\Delta\mathbf{r}$ *szorzatösszeget, vagyis* (konzervatív mezőben) *a zárt görbe mentén mérhető potenciálesések és -emelkedések összegét.*

Az örvényerősség tehát a zárt görbén egyszer végigvezetett töltésen végzett elektromos munka osztva a töltéssel.

Az elnevezés kifejező, mert ha egy mezőben pl. önmagukba visszatérő (záródó) erővonalak vannak, ez a mező a benne eredetileg nyugvó töltéseket éppúgy örvénylő mozgásba hozza, mint az örvénylő víz a rászórt porszemeket (7.31. ábra). Ilyenkor $\overset{\circ}{\sum_g} \mathbf{E}\Delta\mathbf{r}$ eltér 0-tól, éspedig annál jobban, minél erősebben „örvénylik" a mező.



7.31. ábra

Az elektrosztatika II. alaptörvénye az örvényerősséggel a következőképpen fogalmazható meg:

Nyugvó töltések által keltett mezőben nincsenek örvények, vagyis az örvényerősség bármely zárt görbére zérus:

$$\boxed{\overset{\circ}{\sum_g} \mathbf{E}\Delta\mathbf{r} = 0}, \quad \text{röviden} \quad \boxed{\ddot{O}_E = 0}, \tag{7.25}$$

részletesen kiírva:

$$\overset{\circ}{\sum_g} |\mathbf{E}| \cdot |\Delta\mathbf{r}| \cdot \cos\alpha = \overset{\circ}{\sum_g} \mathbf{E}\Delta s \cos\alpha = 0$$

minden zárt görbére. Ez *Maxwell II. törvényének* az elektrosztatikus mezőre érvényes alakja.

(*Megjegyzés:* Ez a törvény is globális, a mező általános *szerkezetét* jellemzi, nem mond semmit a potenciál vagy a térerősség helyi értékeiről. Maga az összegezés is bonyolult egy inhomogén mezőben, azonban homogenitást vagy szimmetriákat kihasználva lokális adatok is nyerhetők belőle konkrét esetekben.)

7.3. Vezetők az elektrosztatikus mezőben

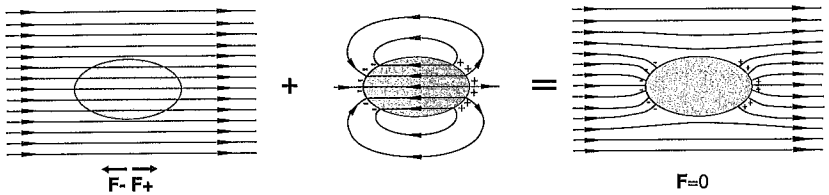
7.3.1. Elektromos megosztás. Többlettöltés fémes vezetőn

Ha fémes vezető kerül elektromos mezőbe, abba a mező behatol. Ezért a semleges vezető belsejében levő pozitív és negatív töltéshordozókra egymással ellentétes irányú elektromos erő hat. Így a vezető könnyen elmozduló töltései nem maradnak nyugalomban, hanem a felület felé áramlanak, s ezért a fém átellenes *felületelemein* pozitív és negatív töltés halmozódik fel. Ezek a töltések új elektromos mezőt hoznak létre, amely szuperponálódik a külső elektromos mezővel. A töltésszétválás addig tart, amíg a fém belsejében (az eredő) elektromos mező meg nem szűnik. A tapasztalat szerint ui. a felületre kihajtott töltések rövid idő alatt olyan saját mezőt hoznak létre, amely az eredeti mezőre szuperponálódva a fém körüli mezőt módosítja, míg a *fémbe hatoló mezőt pontosan kioltja.* Ily módon új egyensúlyi állapot jön létre (7.32. ábra).

A semleges vezető töltéseinek a külső mező hatására való szétválását *elektromos megosztásnak* (vagy elektromos *influenciának*) nevezzük. Az eredetileg semleges fémtest össztöltése természetesen zérus marad.

A külső mező erővonalai a fém felületén levő töltésekbe futnak, illetve onnan indulnak ki, mindenütt *merőlegesen a fém felületére,* hiszen a fém felülete egyen-

súlyban ekvipotenciális felület (a fém belseje pedig ekvipotenciális térrész). Az előzőek alapján ugyanis *elektrosztatikus állapotban a fém belsejében a térerősség* 0, *tehát a potenciál a fém egész térfogatában (és így a határfelületén is) állandó, helyről helyre megegyezik* ($U_1 - U_2 = Ed = 0$, tehát $U_1 = U_2$ = állandó).



7.32. ábra

Ha fémes vezetőre elektromos töltést viszünk, *a többlettöltés is kizárólag a külső felületen helyezkedik el.* Egyensúlyban a fém belsejében ui. nem lehet többlettöltés, mert az általa keltett elektromos mező azt szétoszlatná, a vezető külső felületére hajtva a töltéseket.[11]

A vezető felületén nem egyenletes a töltés eloszlása. Kísérletileg kimutatható – és elméletileg is belátható –, hogy *a nagy görbületű helyeken nagyobb a töltéssűrűség, mint a kis görbületűeken.* Így pl. fémcsúcsokon extrém nagy töltéssűrűség, tehát fluxussűrűség (és ezért térerősség) alakul ki (*csúcshatás,* lásd a 7.3.4.4. alpontot).

7.3.2. Kapacitás

A fémre vitt pozitív többlettöltés növeli a fém elektromos potenciálját: minél több töltést adunk a (környezetétől elszigetelt) vezetőnek, annál nagyobb lesz a felhalmozott töltés helyzeti energiája és így a vezető potenciálja is. Ez a potenciál azonban nemcsak a fémre vitt töltéstől függ, hanem a fém méreteitől, alakjától, a nullaszint megválasztásától is. Példánkban válasszuk nulla potenciálnak a föld potenciálját!

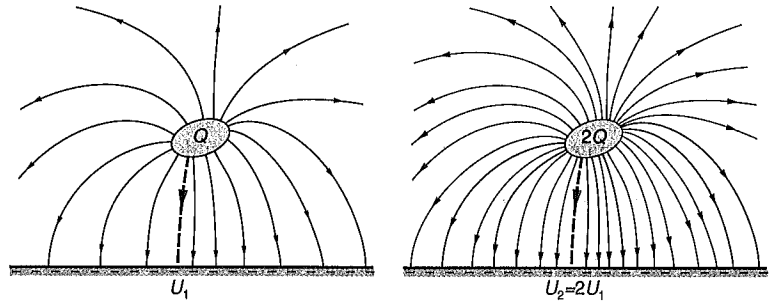
A potenciál $U = \sum_{A}^{B} \mathbf{E}\Delta\mathbf{r}$ értelmezéséből (ahol most A a fémtest, B a nullaszint egy pontja, amely lehet végtelen távoli pont, vagy pl. a földfelület egy pontja) és a

[11] Ez a tény a Coulomb-törvény következménye. Ha ui. a ponttöltések közötti erő nem a távolság négyzetével csökkenne, hanem valamilyen más hatvány szerint – mint matematikailag kimutatható –, a fém belsejében fellépő elektromos mezőt nem lehetne pusztán felületi töltéssel kioltani. A Coulomb-törvénytől eltérő esetben a fém belsejében is kellene többlettöltésnek felhalmozódnia, és ezek együttes hatása volna csak képes a mező kioltására (azaz egyensúlyi állapot létrehozására).

szuperpozíció törvényéből következik, hogy ha a fémre kétszer, háromszor stb. több töltést viszünk, a fém potenciálja is kétszeresére, háromszorosára stb. nő, tehát *a potenciál a fémre vitt töltéssel egyenesen arányos,* azaz:

$$\frac{Q}{U} = \text{állandó}.$$

Ha ui. a szorzatösszeg minden tagjában (A-tól B-ig minden pontban) az $\mathbf{E}$ térerősség Q-val arányosan nő, maga a szorzatösszeg is arányosan nő vele. Pl. a föld felületétől adott távolságra elhelyezett, elektromos töltéssel ellátott (más fémtestektől távol levő) test elektromos mezeje megosztás révén a föld felületén ellentétes töltéseket influál, erővonalai ott végződnek (7.33. ábra), és sűrűségük (tehát a térerősség) Maxwell I. törvénye értelmében mindenhol arányos a forrás töltésével.



7.33. ábra

Ezt a fémtestre jellemző, alakja, mérete és a potenciál nullaszintjétől mért távolsága által meghatározott állandót a fémtest *kapacitásának* nevezzük és C-vel jelöljük. Így tehát *a kapacitás a fémre vitt töltés és a létrejött potenciál hányadosa:*

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}. \qquad (7.26)$$

Számértékileg (dimenziótól eltekintve) a kapacitás megadja, hogy a vezető mekkora töltést képes befogadni (felületére felvenni) egységnyi potenciálemelkedés mellett.

A kapacitás egysége a coulomb/volt. Neve *farad,* jele F. (Ez igen nagy érték. A gyakorlatban a 10^{-6} F = μF és ennél kisebb egységek használatosak.)

Magában álló fémgömb kapacitása a gömb sugarával arányos (nullaszint a végtelenben). A Q töltésű fémgömb felületén a potenciál ui.

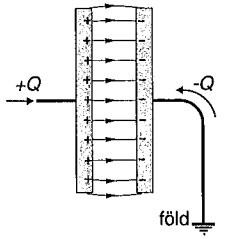
$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R},$$

ahol R a gömb sugara. (A gömbön kívül és a felületénél éppen olyan a mező erővonalrendszere, mintha a gömb középpontjában koncentrált Q töltés hozta volna azt létre!) Ha ezzel a feszültséggel osztjuk a gömb Q töltését, akkor a $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ értéket kapjuk. (A Föld kapacitása 0,000708 F = 708 μF-nak adódik.)

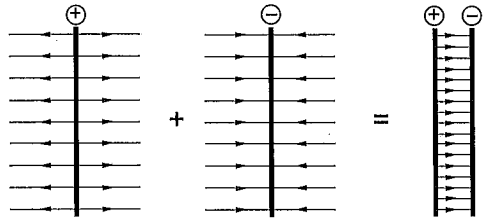
7.3.3. Kondenzátorok. Elektromos mező szigetelőkben. A relatív permittivitás és az elektromos eltolás vektora

A kondenzátorok (sűrítők) általában arra a célra szolgálnak, hogy minél több töltést tároljanak minél kisebb feszültségen, vagyis nagy legyen a kapacitásuk. Hogyan lehet ezt elérni?

Tekintsünk egy nagy kiterjedésű fémlemezt, és helyezzük el párhuzamosan a föld felületével! A fémre vitt töltésből Gauss tétele szerint kiinduló $N_E = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$ számú erővonal mind a földben influált töltésen végződik, ha elegendően közel van a lemez a földhöz. Közelítőleg homogén elektromos mező alakul ki a lemez és a föld között. Így a lemez $U = \sum \mathbf{E}\Delta\mathbf{r} = Ed$ potenciálja annál kisebb, minél közelebb visszük a földhöz. A lemez kapacitása tehát ekkor megnő. Ugyanez történik akkor is, ha egy feltöltött sík fémlemezhez igen közel viszünk egy vele párhuzamos, a földdel fémesen összekötött (leföldelt, lásd 7.3.4.1. alpontot) fémlemezt. Ezzel ugyanis a földpotenciált (a választott nullaszintet) a feltöltött fémlemezhez közel vittük, így d csökkenésével a C kapacitás megnőtt. Ezt az elrendezést *síkkondenzátornak* nevezzük (7.34. ábra).



7.34. ábra

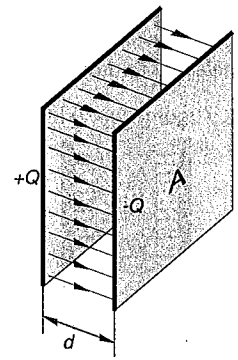


7.35. ábra

A földeletlen lemez Q töltése a másik lemezen megosztással – Q töltést hoz létre (amely a földből áramlik a lemezre). A földelt lemez töltése tehát – Q, és a lemez 0 potenciálon van (a föld és a vele fémesen összekötött lemez ekvipotenciális). Így tehát a feltöltött kondenzátor feszültsége $U = Q/C$.

A nagy kiterjedésű, ellentétes töltésű, egymáshoz igen közel levő párhuzamos, azonos méretű síklemezek között a szuperpozíció törvényének megfelelően *homogén* mező alakul ki (7.35. ábra), míg a lemezeken *kívül,* az ún. *szórt mező* a számításoknál[12] elhanyagolható.

Ebben a mezőben a térerősség az $E = U/d$ összefüggéssel adható meg, ahol d a lemezek közötti távolság. Az E térerősség viszont az erővonal-sűrűséggel egyenlő, vagyis $E = \Psi/A$, ahol A a szemben álló felületek (bármelyikének) területe.



7.36. ábra

Mivel minden erővonal a földelt lemezbe fut be (7.36. ábra), Ψ egyben az N_E összes erővonalszámot (forráserősséget) is jelenti, amely Gauss tétele szerint Q/ε_0-val egyenlő, tehát a térerősség:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}. \qquad (7.27)$$

[12] Bár a számításokban jogos az a közelítés, hogy (esetünkben) a szórt elektromos mező elhanyagolható, nem jelenti azt, hogy elméleti szempontból ne lenne *lényeges* szerepe. Ez a mező biztosítja ui. az energiamegmaradás elvének teljesülését. Ha nem lenne ott a szórt mező, lehetne olyan zárt görbét találni a mezőben, amelynél a $\sum_{g}^{o} \mathbf{E}\Delta\mathbf{r}$ szorzatösszeg, vagyis az örvényerősség eltérne 0-tól (7.37. ábra)! Ebből is következik, hogy nem létezhet olyan véges térrész, amely tisztán homogén elektrosztatikus mezővel lenne kitöltve.

A lemezek között tehát

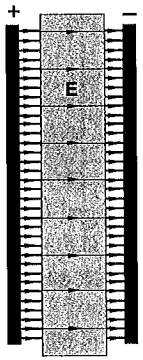
$$U = Ed = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{Q}{A}\,d$$

feszültség alakul ki. A *síkkondenzátor kapacitása* a $C = Q/U$ értelmezése alapján:

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}, \tag{7.28}$$

vagyis *a síkkondenzátor kapacitása egyenesen arányos a szemben álló lemezek területével, és fordítottan arányos a köztük levő távolsággal.*

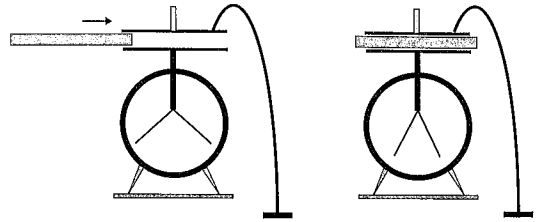
A szigetelő szerepe. Ha a kondenzátorlemezek közötti teret *szigetelőanyag (dielektrikum)* tölti ki, a kondenzátor kapacitása megnő. A szigetelőanyag molekulái ui. a mező erővonalainak irányában *rendezett dipólusokká* válnak, s így a szigetelőlemez átellenes felületein ellentétes többlettöltés jelenik meg (7.38. ábra). Ezt a jelenséget *dielektromos polarizációnak* nevezzük. Elektromos szempontból szigetelőanyagot másképpen *dielektrikumnak*[13] hívják.



7.37. ábra

Az eredeti és a polarizációs töltések mezeje szuperponálódik, és így a szigetelőben a térerősség *lecsökken*. Ezzel a lemezek közti feszültség is lecsökken, vagyis a kondenzátor kapacitása *megnő*. Ezt a 7.38. ábra elektroszkópszálainak (lásd a 7.3.4.2. alpontot) összeesése jól mutatja.

[13] Az elnevezésben a *dia* (gör. át, keresztül) és *elektron* (gör. borostyánkő) szavak utalnak arra, hogy a szigetelő „átengedi az elektromos mezőt" ellentétben a fémes vezetőkkel, amely „leárnyékolhatja" azt (lásd a 7.3.4.3. alpontot).



7.38. ábra

Azt a számot, amely megadja, hogy hányszorosára nő egy kondenzátor kapacitása, ha a lemezei közti teret vákuum helyett szigetelővel töltjük ki, az illető szigetelőanyag relatív permittivitásának[14] *(vagy relatív dielektromos állandójának) nevezzük, és ε_r-rel jelöljük:*

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0}, \tag{7.29}$$

ahol C_0 a kapacitás szigetelő nélkül (vákuumban), ε_r dimenzió nélküli szám. A légüres tér és a levegő permittivitása gyakorlatilag megegyezik. A vákuum relatív permittivitása nyilván 1.

7.1. táblázat. Néhány anyag relatív permittivitása

Az anyag megnevezése	ε_r	Az anyag megnevezése	ε_r
Bakelit	3...8	Mikanit	3,5...6
Borostyán	2,8	Papiros	2,1...3,5
Celluloid	3...6,9	Paraffinolaj	2,2
Csillám	5...8	Polisztirol	2,5
Ebonit	2,5...3,5	Plexiüveg	3...3,6
Gumi	2,5...2,8	Porcelán	4...6,5
Kén	3,6...4,3	Prespán	2...4
Kvarc	3,8...4,7	Üveg	6...12
Márvány	8,5	Víz	80

A szigetelővel kitöltött kondenzátor kapacitása tehát

$$C = \varepsilon_r C_0,$$

[14] *Permitto* (lat. átenged)

vagyis síkkondenzátor esetén a kapacitás

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}. \tag{7.30}$$

A kondenzátor kapacitásának képletében is szereplő $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ szorzat a szigetelőanyag *abszolút permittivitása (abszolút dielektromos állandója).*

A D elektromos eltolásvektor. Mint látható, ha a kondenzátort teljesen kitöltjük dielektrikummal, a (7.27) képlet alapján lemezei között a térerősség $\mathbf{E}_0$-ról

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon_r}$$

értékre csökken, ahol $\mathbf{E}_0$ a vákuumbeli térerősség.

Ez a megállapítás általában is igaz: *a vákuumban bárhogyan eloszló Q töltésrendszer keltette elektromos mező térerőssége a tér minden pontjában ε_r-ed részére csökken, ha az egész elektromos mezőt ε_r relatív permittivitású homogén, izotrop szigetelővel töltjük ki.*

Így Maxwell I. törvényének vákuumra érvényes

$$\overset{\circ}{\sum_A} \mathbf{E}\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_V Q$$

alakja dielektrikumban

$$\overset{\circ}{\sum_A} \mathbf{E}\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \sum_V Q$$

formában érvényes, amelyben figyelembe vettük, hogy a vákuumbelinél ε_r-szer kisebb lett a térerősség.

Formálisan egyszerűbbé válik Maxwell I. törvénye (a Gauss-tétel), ha **E** térerősség mellé bevezetjük az $\varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D}$, ún. *elektromos eltolásvektort,* ekkor ugyanis Gauss tétele így írható fel:

$$\overset{\circ}{\sum_A} \mathbf{D}\Delta\mathbf{A} = \sum_V Q. \tag{7.31}$$

A $\overset{\circ}{\sum_A} \mathbf{D}\Delta\mathbf{A}$ szorzatösszeg neve Maxwell nyomán *elektromos eltolódási fluxus,* vagy *elektromos eltolási fluxus.* (Kapcsolata a dielektrikum töltéseinek eltolódásával nyilvánvaló.) Egysége (7.31) alapján a C (coulomb), míg a **D** elektromos eltolásvektoré a C/m^2.

Az elektromos eltolási vektor anyagszerkezeti jelentéséről bővebben a 25.6. szakaszban olvashatunk.

7.3.4. Gyakorlati alkalmazások

7.3.4.1. A földelés

Mivel az elektromos mezők alakulását nem a potenciálok, hanem a potenciálkülönbségek (feszültségek) határozzák meg, közömbös, hogy melyik szintet választjuk nullapotenciálúnak, hiszen a potenciálkülönbségek a nullaszint megváltoztatásakor változatlanok maradnak. Ezért rendszerint nem is a végtelen távoli ponthoz (felülethez) viszonyított „abszolút potenciált" akarjuk ismerni. Gyakorlati szempontból sokkal alkalmasabb valamely, a végesben fekvő (tehát „kézzel elérhető") szintfelületet alapul választani.

A föld nedvességtartalma miatt jó vezető, így felülete gyakorlatilag nívófelület. Mivel a földet méréseink során berendezéseinkkel könnyen össze tudjuk kötni, ezért gyakran a föld potenciálját vesszük nullának.

Fémtárgyak földdel való fémes összeköttetését *földelésnek* nevezzük. Ekkor a fémtárgy is földpotenciálon (nullszinten) van.

Megjegyezzük, hogy a Föld kérge nem semleges, hanem negatív többlettöltése van. Ezért a felső légrétegekig *átlagosan* $E = 100$ V/m lefelé mutató térerősség mérhető. A *földfelszín közelében* felfelé haladva méterenként kb. 130 V-tal nő a potenciál. Azonban ez a mintegy 1...1,3 V/cm térerősség a laboratóriumban előálló térerősségek mellett elhanyagolható (pl. fésülködésnél is legalább 10 000 V/cm erősségű terek alakulnak ki dörzselektromosság keletkezése során).

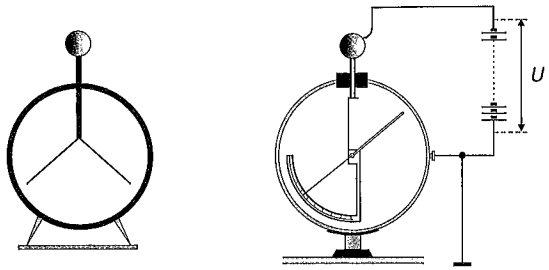
7.3.4.2. A potenciál mérése

A testek földhöz viszonyított potenciálját – és egymáshoz viszonyított feszültségét – ún. *elektrométerekkel* (elektrosztatikus feszültségmérőkkel) mérhetjük. Ezek az *elektroszkópoknak* skálával ellátott, mérésre alkalmas változatai.

A *lemezes elektroszkópban* az üvegburába nyúló fémrúd végére aranyfüst vagy selyempapír csíkok vannak felfüggesztve, amelyek töltésfelvételkor a taszítóerők hatására szétágaznak (7.39a. ábra).

Az ún. *Braun-féle elektrométer* külső háza fémből készült, amelyet méréskor leföldelünk. Az elektrométer gömbjét a mérendő testtel összekapcsolva a könnyű alumíniummutató – amely súlypontjához közeli tengelyre van felfüggesztve – kilendül, s (alkalmas skálázás esetén) a test földhöz viszonyított potenciálját mutatja (7.39b. ábra). (Skálázni etalon feszültségforrásokkal lehet.)

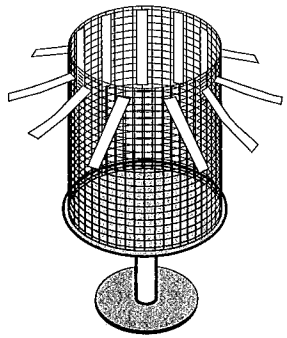
Az ilyen elektrométerek általában 100...10 000 V közötti feszültségeket mérnek.



7.39. ábra

7.3.4.3. Az árnyékolás

Ha egy fémdarabban üreget képezünk ki, a fémburok megvédi a belsejében levő üreget és az ebben elhelyezett tárgyakat a külső elektromos mezőktől. Ha ui. a tömör vezetőben a külső elektromos mező olyan új töltéselrendezést hoz létre, amely a vezető külső felületén helyezkedik el és a vezető belsejében kioltja az elektromos mezőt, akkor a vezető belsejéből kivájhatunk és eltávolíthatunk bármekkora darabot, ezzel nem befolyásoljuk a felületi töltéseloszlást, mert az elektromos mező szempontjából közömbös részt távolítottunk el.



7.40. ábra

Ennek felhasználásával védhetjük meg kényes műszereinket is a zavaró elektromos mezőktől. E célra vékony falú fémdoboz vagy akár fémháló is megfelel, amelyet a 7.40. ábrán a fémhálóra helyezett papírcsíkok is mutatnak. A fémhálót

rendszerint leföldelik. A fémburoknak ezt a hatását *elektromos árnyékolásnak* nevezzük. Az árnyékolás védi meg a repülőgépek és gépkocsik utasait viharban a villámcsapásoktól. Sűrű szövésű fémharisnya védi a mikrofonok, erősítők, rádiók vezetékeit az elektromos zavaroktól.

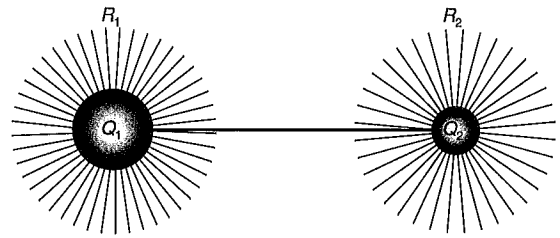
7.3.4.4. A csúcshatás

Ha egy fémes vezetőn éles kiszögellések, csúcsok vannak, a rá vitt többlettöltés ezeken a helyeken sokkal nagyobb sűrűséggel helyezkedik el, mint az enyhébb görbületű részeken. Ennek következtében a csúcsok körül rendkívül nagy fluxussűrűség, vagyis elektromos térerősség jöhet létre. A csúcsoknak ezt a töltéssűrítő hatását *csúcshatásnak* nevezzük.

A fémcsúcsokon levő töltés olyan nagy elektromos térerőt kelthet, hogy a levegő molekuláit és a benne levő apró porszemeket erősen polarizálja, aminek következtében a csúcs körüli erősen inhomogén mezőben azok a csúcsokhoz vándorolnak, majd azzal érintkezve átvesznek annak töltéséből. Ekkor már a „taszítóerő" lép túlsúlyba, és a csúcsokról nagy sebességgel leáramló részecskék ún. „elektromos szelet" hoznak létre. Az igen nagy térerősség hatására a fém elveszítheti töltését (kisülések jöhetnek létre). A csúcshatást használják fel az elektrosztatikus légtisztító berendezésekben és a szalaggenerátorok (lásd a következő alpontot), villámhárítók töltéselszívó rendszerében is.

Az a paradoxon, hogy az egynemű töltések egymást taszító hatása ellenére a csúcsokon összezsúfolódnak, könnyen belátható a következő egyszerű példa gondolatmenetével.

Vegyünk egy nagy és egy kis sugarú fémgömböt egymástól elegendő távolságra, és kössük össze őket vékony fémszállal (7.41. ábra)! Azt bizonyítjuk be, hogy ha Q töltést viszünk a rendszerre, akkor az olyan arányban oszlik el a gömbökön, hogy a kis gömb felületi töltéssűrűsége lesz a nagyobb, a nagyé kisebb.



7.41. ábra

A felületi töltéssűrűséget a felületre vitt töltés és a felületdarab felszínének a hányadosával értelmezzük:

$\sigma = \frac{Q}{A}$, illetve inhomogén eloszlásnál a lokális töltéssűrűség $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$.

Egysége a C/m^2.

A két gömb fémes összekötés után ekvipotenciális felületet alkot, így az egyes gömbök potenciálja[15] egyenlő:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2},$$

ahonnan

$$Q_1 : Q_2 = R_1 : R_2,$$

(tehát a nagyobb gömbön több töltés van, mint a kisebben).

A felületi töltéssűrűség viszont a töltés és a felszín hányadosa. A két gömb töltéssűrűségének az aránya ezek szerint:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{Q_1}{A_1}}{\frac{Q_2}{A_2}} = \frac{\frac{Q_1}{4R_1^2\pi}}{\frac{Q_2}{4R_2^2\pi}} = \frac{Q_1}{Q_2}\frac{R_2^2}{R_1^2},$$

ahol a gömbök felszíne $4R^2\pi$. Ha $\frac{Q_1}{Q_2}$ helyébe a fentiek szerinti $\frac{R_1}{R_2}$-t írunk, az arány megfordul, és a *töltéssűrűségre* a következőt kapjuk:

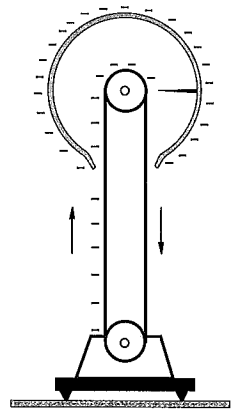
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1}{Q_2}\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_1}{R_2}\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2}{R_1},$$

vagyis a felületi töltéssűrűség valóban fordítottan arányos a görbületi sugarakkal.

[15] Amikor a két gömb potenciáljaként a magányos gömbök potenciáljának képletét alkalmaztuk, kihasználtuk azt, hogy a két gömb egymástól igen távol van, tereik egymást elhanyagolható mértékben befolyásolják.

7.3.4.5. A Van de Graaff-féle szalaggenerátor

Igen nagy sztatikus feszültségek előállítására alkalmas berendezés, amelyet főleg atomfizikai kísérletekhez használnak, az ún. Van de Graaff-féle szalaggenerátor (7.42. ábra). A motorral hajtott végtelenített gumi-, selyem- vagy műanyagszalagon pl. dörzsölési elektromosság töltéseit szállítja egy nagyméretű, belül üres fémgömb belsejébe, amelyben a fémgömbbel összeköttetésben levő fémcsúcsok sorozata „szívja le" a szigetelőszalagról a töltéseket. Ezek azonban a gömb *külső felületére* áramlanak. A szalag folyamatosan munkát végez, ami a töltések elektrosztatikai energiáját, vagyis a gömb potenciálját növeli. A gömb töltése szinte „korlátlanul" növelhető, mert a fémgömb a töltések számára csapdaként, egyirányú utcaként viselkedik (lásd a 7.3.1. alpontot).



7.42. ábra

Ezzel a módszerrel kb. $10^6 - 10^7$ V feszültség állítható elő. A töltés felhalmozásának, illetve a kialakult feszültségnek csak a levegő átütési szilárdsága szab határt (lásd a következő alpontot).

7.3.4.6. Az átütési szilárdság

Szikra formájában akkor történik kisülés, ha a térerősség egy meghatározott értéket meghalad. Ekkor képes a mező a fémből töltéseket kitépni (lásd még: kilépési munka, 18.1. szakasz). Így pl. normál állapotú száraz levegőben tapasztalat sze-

rint 10 cm átmérőjű fémgömb esetén 30 000 V/cm = 3.10^6 V/m térerősség szükséges a szikra keletkezéséhez.

Azt a térerősséget, amely adott elektródaelrendezés esetén valamely anyagrétegen „átüt" (elektromos kisülést hoz létre), *átütési szilárdságnak* nevezzük.

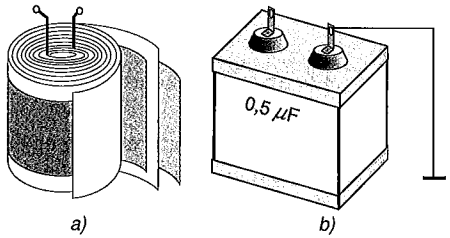
A kondenzátoroknál fontos adat a szigetelőréteg átütési szilárdsága is, hiszen az szabja meg, hogy mennyire tölthető fel tönkremenés nélkül. Az ún. elektromos igénybevételnek mindig kisebbnek kell lennie az átütési szilárdságnál. (Tekercsek, kábelek szigetelése, kondenzátorok dielektrikumai stb.) Néhány anyag átütési szilárdságát az alábbi (7.2.) táblázatban adjuk meg.

7.2. táblázat. Néhány anyag átütési szilárdsága

Az anyag megnevezése	Átütési szilárdság (E) $10^5 \frac{V}{m}$
Bakelit	100
Csillám	550...900
Porcelán	200...300
Száraz papír	50...100
Transzformátorolaj	200...250
Üveg	100...450

7.3.4.7. Kondenzátorfajták

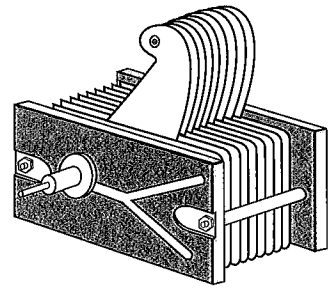
A kondenzátorok gyakorlati kivitelei közül legegyszerűbbek az ún. *blokk-* vagy *tömbkondenzátorok.* Fegyverzetük (lemezeik) rendszerint két hosszú alumíniumfólia-csík, szigetelőanyaguk paraffinnal átitatott papírszalag (7.43a. ábra). Az így összeállított négyrétegű szalagszendvicset feltekercselik, és fém- vagy papírházban helyezik el, majd szigetelőanyaggal kiöntik (7.43b. ábra). Kapacitásuk leggyakrabban 1 μF – 20 μF.



7.43. ábra

Viszonylag nagy kapacitás érhető el az ún. *elektrolitkondenzátorokkal.* Fegyverzetei szintén alumíniumfóliák, azonban szigetelő rétege a pozitív fegyverzeten létesített igen vékony, kb. 10^{-4} mm vastag alumínium-oxid-réteg. A fegyverzetek közti távolság ilyen mértékű lecsökkentése nagy kapacitást eredményez, azonban a réteg elektromos igénybe vehetősége kicsi. Bekötésnél ügyelni kell a megfelelő polaritásra (amit ezeken a típusokon jelölnek), különben a kondenzátor tönkremegy. Elektrolitkondenzátorokkal 500 μF – 1000 μF kapacitás érhető el igen kis feszültségeken.

Az ún. *forgókondenzátorok* kapacitása változtatható. Fegyverzeteik egymásba forgatható, egymástól elszigetelt párhuzamos lemezrendszerek (7.44. ábra).



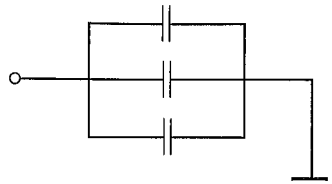
7.44. ábra

A lemezek elforgatásával a felületek szemben álló részeinek nagysága változik, ezzel a kapacitás mértéke befolyásolható.

7.3.4.8. Kondenzátorok kapcsolása

Több, meghatározott módon összekapcsolt kondenzátor *eredő kapacitásán* értjük annak az egyetlen kondenzátornak a kapacitását, amely az összekapcsolt rendszert helyettesíti, vagyis amelyre ugyanakkora töltést adva, mint a rendszerre, fegyverzetei között ugyanakkora feszültség alakul ki, mint az összekapcsolt kondenzátorok rendszerén.

Ha a kondenzátorokat a 7.45. ábra szerint úgy kapcsoljuk össze, hogy mindegyiknek egyik lemezét egy, a másik lemezét egy másik közös pontra kötjük, az ún. *párhuzamos kapcsoláshoz* jutunk.



7.45. ábra

A párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása az egyes kondenzátorok kapacitásának összegével egyenlő:

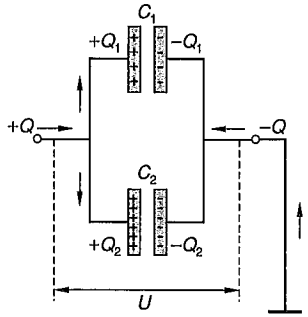
$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n,$$

illetve tömören felírva:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i. \tag{7.32}$$

Ez könnyen belátható. A rendszerre adott Q töltés ui. olyan $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ részekre oszlik el az egyes kondenzátorokon, hogy az összekötött lemezek azonos potenciálon legyenek, és összegük kiadja a teljes Q töltést, vagyis

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$$



7.46. ábra

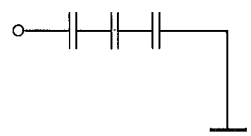
(7.46. ábra). Fejezzük ki a töltéseket a közös feszültséggel és a kondenzátorok kapacitásaival:

$$CU = C_1U + C_2U + \cdots + C_nU,$$

és innen az eredő kapacitás:

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n. \tag{7.33}$$

Ha a kondenzátorokat a 7.47. ábra szerint úgy kapcsoljuk össze, hogy mindegyik kondenzátor bármelyik kivezetése egyszerre csak egy másik kondenzátor egyik kivezetésével legyen összekapcsolva, az ún. *soros kapcsoláshoz* jutunk. Az egyik szélső kondenzátor külső fegyverzetét leföldeljük.



7.47. ábra

A sorosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitásának reciproka az egyes kondenzátorkapacitások reciprokainak összegével egyenlő:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}, \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_1}, \tag{7.34}$$

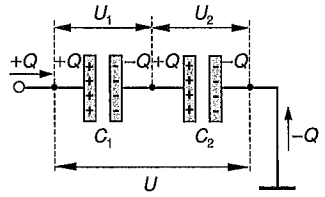
vagy

$$C = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} C_i}.$$

Ez a képlet pl. két kondenzátor esetén

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

alakra egyszerűsödik.



7.48. ábra

Mindez egyszerűen belátható. A földeletlen szélső kondenzátor szabad lemezére adott töltés – a megosztás jelensége miatt – minden kondenzátorlemezen töltést hoz létre (7.48. ábra). A másik szélső kondenzátor földelt lemezére a földből áramlik a megosztással meghatározott töltés. Mivel két összekötött kondenzátorlemez a többitől el van szigetelve, nem juthat többettöltéshez, így az egyes lemezek megosztott töltései egyenlő

abszolút értékűek. Ugyanakkor az egyes kondenzátorok feszültségeinek összege Maxwell II. törvénye szerint megegyezik a két szabad vég között kialakult feszültséggel, ui. az *A* és *B* pont között a lemezeken keresztül vezető és az azokat megkerülő úton ugyanakkora a potenciálesés. Így tehát

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n.$$

A feszültségeket a töltésekkel és a kapacitásokkal kifejezve:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n},$$

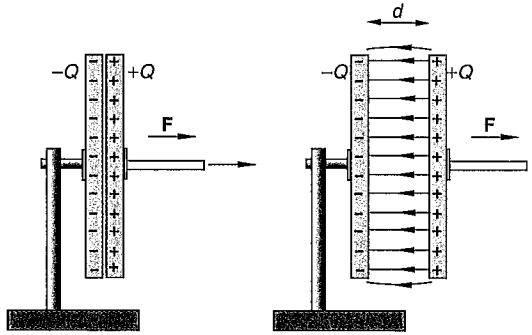
azaz valóban

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_1}.$$

7.4. Az elektromos mező energiája vákuumban

7.4.1. A feltöltött kondenzátor energiája

Az elektromos mező a töltés mozgatása során munkát képes végezni, tehát benne *energia* van felhalmozva. Amikor a töltések összegyűjtésével elektromos mezőt hozunk létre, munkát kell végeznünk az azonos előjelű töltések között fellépő taszítóerő miatt. Ez a munka szolgáltatja a felépülő mező energiáját. Határozzuk meg a mezőben felhalmozott energiát!



7.49. ábra

Építsünk fel elektromos mezőt oly módon, hogy két, ellentétesen feltöltött, egymásra simuló fémlapot egymástól (0 távolságról) *d* távolságra széthúzunk úgy

hogy az egyiket rögzítjük, a másikat mozgatjuk (7.49. ábra). (Ezt megvalósíthatjuk úgy, hogy a két lemez közé kezdetben elhanyagolható vastagságú szigetelőfóliát helyezünk, majd azt a lemezek széthúzásakor eltávolítjuk.) Mozgatás közben állandó $\mathbf{F} = \mathbf{E}Q$ erőt kell kifejtenünk, ahol $\mathbf{E}$ a lemezek között kialakuló homogén mező (lásd a 7.3.3. alpontot) térerőssége. Ezzel az erővel a *d* úton munkát végzünk, ennek megfelelő energiával „töltjük meg" a keletkező elektromos mezőt. (Az energia ekkor belőlünk áramlik a mezőbe.) Ezt a munkát képes a rendszer visszaadni, ha az elhúzott lemezt elengedjük, annak ugyanakkora mozgási energiát ad át, amennyi munkát mi befektettünk. Ezt a munkát határozzuk meg a feltöltött kondenzátor jellemzőinek függvényében.

Az általunk befektetett munka: $W = Fd \cos\alpha = Fd = EQd$ ahol Q az *egyik* lemez töltésének abszolút értéke, E a *másik* lemez keltette mező térerősségének nagysága, amely nyílván a lemezek közti eredő térerősség fele. Így a térerősség a (7.27) képlet alapján:

$$E = \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A},$$

és a végzett munka:

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}Qd = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}, \qquad (7.35a)$$

hiszen $\frac{d}{\varepsilon_0 A}$ éppen a síkkondenzátor kapacitásának a reciproka!

Ez a kifejezés adja meg a feltöltött kondenzátor elektromos energiáját. Más adatokkal kifejezve a $C = Q/U$ összefüggés alapján:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}QU}, \quad \text{illetve} \quad \boxed{W = \frac{1}{2}CU^2}. \qquad 7.35b, c)$$

Ez az összefüggés nemcsak a síkkondenzátor, hanem bármilyen C kapacitású, Q töltésű (illetve U potenciálú) rendszer energiáját is megadja.

7.4.2. Az elektromos mező energiája és energiasűrűsége

A feltöltött kondenzátor energiával rendelkezik. Feltehető a kérdés: ezt az energiát a lemezen levő töltések helyzeti energiájaként kell felfognunk, vagy netán ott is van energia a térben, ahol egyáltalán nem tartózkodik töltés? A válasz nem csak filozófiai természetű!

Már Faraday is úgy gondolta, hogy *ez az energia nem a lemezekre vitt töltésekben halmozódik fel, hanem a lemezek közötti teret kitöltő mezőben.* A mezőt kell te-

hát energiatárolónak tekinteni, hiszen az erőhatásokat is – mint egy feszülő rugó – a mező közvetíti. Fejezzük ki tehát a mező energiáját a rá jellemző adatokkal (térerősség, kiterjedés)!

Mivel $W = CU^2/2$ és $U = Ed$, valamint $C = \varepsilon_0 A/d$, a lemezek közét kitöltő mező energiája így írható:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 AdE^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V,$$

ahol W a mező energiája,[16] $V = Ad$ az a térfogat, amelyet a homogén mező kitölt.

Homogén elektromos mező teljes energiája arányos a térerősség négyzetével és a mező által kitöltött térfogattal.

Ha a mező inhomogén, a térerősség helyről helyre változik. Ezért célszerű a mező egységnyi térfogatban levő részének energiáját kifejező *energiasűrűség* fogalmát bevezetni a következő értelmezéssel:

$$w_{\text{el}} = \frac{\Delta W}{\Delta V}, \qquad \text{ha} \qquad \Delta V \to 0.$$

Az elektromos mező energiasűrűsége ezek alapján:

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2. \tag{7.36}$$

Az *inhomogén mező energiája* a tér kis, homogénnek tekinthető tartományokra való osztásával az energiasűrűségből összegezéssel számítható:

$$\boxed{W = \sum_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \Delta V}. \tag{7.37}$$

Meggondolásainkból következik, hogy *ahol elektromos mező van, ott mindig van energia is!*

Így például az R sugarú, Q töltésű magában álló fémgömb inhomogén elektromos mezejének teljes energiája:

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R},$$

és energiasűrűsége a középpontjától r távolságú pontban:

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^4}.$$

[16] Ebben a szövegkörnyezetben a térerősséggel való összetéveszthetőség miatt az energia jelölésére nem a szokásos E betűt, hanem annak a munkának a W jelét használjuk, amely befektetésével a mező létrejött.

Ezzel az erőkifejtő képessége mellett az elektromos mező egy újabb fontos anyagi tulajdonságát írtuk le: az energiahordozását.

Megjegyezzük, ha vákuum helyett dielektrikum tölti ki a teret, az E térerősségű helyen az energiasűrűség a dielektrikum permittivitásától is függ, a következőképpen:

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\, AdE^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V = \frac{1}{2}\varepsilon EEV = \frac{1}{2}DEV,$$

és az energiasűrűség:

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2}ED.$$

Itt D a mező eltolásvektorának nagysága.

7.5. Az elektromos áram. Ohm törvénye

7.5.1. Az áramerősség

Egészen általánosan véve elektromos áram minden töltésmozgás. A technikai gyakorlatban azonban *töltéshordozók sokaságának rendezett mozgását nevezzük elektromos áramnak.* Ebben a pontban a *fémes vezetékekben* létrejövő elektromos áramokkal foglalkozunk.

A fémek könnyen elmozduló (helyhez nem kötött) töltéshordozókat tartalmaznak (ún. vezetési vagy szabad elektronokat). Ha egy fémtest két pontja között potenciálkülönbséget tartunk fenn, szabad töltései nem maradnak egyensúlyban, a két pont között elektromos áram jön létre.

Kézenfekvő lenne az áram irányát a töltések mozgásának irányával azonosítani. Térjünk ki azonban egy meggondolás erejéig a folyadékokban vagy gázokban kialakuló elektromos áramokra. Ott általában egyszerre kétféle töltés egyidejű és egymással ellentétes mozgása hozza létre az elektromos áramot (pozitív és negatív ionok, illetve elektronok). Az áramot tehát egyszerre kétféle mechanikai mozgás képviseli. Döntenünk kell, hogy ezek közül melyiket tekintsük „áramiránynak", hogy egységesen tudjunk fogalmazni. A fizikatörténet során abban állapodtak meg, hogy a pozitív töltések mozgásának irányát tekintik áramiránynak. (Ezzel a választással szemléletünknek megfelelően az áram mindig az alacsonyabb potenciálú hely felé folyik, akár a hegyoldalon lefolyó víz. Elektronok esetén egyenértékű azzal, hogy azok a kisebb helyzeti energiájú pontok felé áramlanak.) Ezt általánosabban kell megfogalmaznunk, hiszen pl. fémekben csak a negatív elektronok al-

kotják az áramot. Helyesen azt kell mondanunk, hogy *az áram irányán a pozitív töltéshordozás irányát értjük.* Ez azt jelenti, hogy fémek esetében a – negatív töltésű – elektronok mechanikai mozgásával ellentétes az elektromos áram iránya.

Mit értünk „pozitív töltéshordozáson"? Ha egy síkkal kettéosztunk egy térrészt, és pl. a bal oldali térrészből pozitív töltéseket viszünk át a jobb oldali részbe, a bal oldalon negatív, a jobb oldalon pedig pozitív töltéstöbblet jelenik meg. Ha a jobb oldali térrészből elektronokat viszünk (ellentétes mozgással!) a bal oldali részbe, akkor ugyanaz áll elő: a jobb oldali térrészben elektronhiány miatt pozitív, a bal oldali térrészben negatív töltéstöbblet jelenik meg, tehát mindkét töltésmozgás ugyanazt eredményezte: a bal oldali részből pozitív töltéshordozás történt a jobb oldali felé.

Az áram *erősségét* (intenzitását) a vezeték keresztmetszetén időegység alatt áramló töltéssel mérjük. Ez állandó áramerősség esetén a

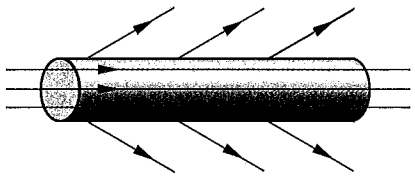
$$\boxed{I=\frac{Q}{t}} \tag{7.38}$$

formulával adható meg. Az áramerősség egysége a $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$, neve: *amper,* jele: A. (Az amper korszerű definíciójával a 8.2.3.1. alpontban foglalkozunk.)

Ha az áramerősség időben nem változik, *stacionárius* vagy *egyenáramról* beszélünk. (Általánosabb értelemben egyenáramnak mondunk minden olyan áramot, amelynek az iránya nem változik, noha erőssége változhat, pl. lüktető egyenáram, lásd a 9.5.3.2. alpontot.)

Az időben változó áram pillanatnyi erősségét közelítőleg az $I = \Delta Q/\Delta t$ hányadossal számítjuk, ahol Δt „igen kicsiny" időtartam, pontosabban a $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ differenciálhányadossal értelmezzük.

Az egyenáramot a fém belsejében fenntartott, időben állandó elektromos mező hozza létre és tartja fenn (7.50. ábra).



7.50. ábra

A fém kristályrácsa ui. a rácsrezgések és rácshibák miatt nem engedi teljesen akadálytalanul mozogni a vezetési elektronokat, ezért azok egyirányú (rendezett) mozgásának fenntartásához vezetékirányú *erőre* van szükség. A fém elektronjai

természetesen akkor is mozgásban vannak, amikor nem képviselnek makroszkopikus értelemben vett áramot: rendezetlen, ún. hőmozgásban vesznek részt. A vezeték belsejében fenntartott elektromos mező hatására e mozgásra egy térerősséggel párhuzamos irányú rendezett mozgás szuperponálódik. Így az elektronok mozgása $\mathbf{a} = e\mathbf{E}/m$ gyorsulású szakaszokból áll, amely szakaszok között az elektron az ionráccsal „ütközik". Ez az ütközés szórja az elektronokat: mozgásuk rendezett összetevőjét egy pillanatra megszünteti. Ezután ismét érvényesül a mező rendezetten gyorsító hatása.

Levezethető, hogy *az áram erőssége egyenesen arányos a fém egységnyi térfogatában levő szabad elemi töltéshordozók számával* (n), *azok töltésével* (e), *a vezeték keresztmetszetével* (A) *és az átlagos rendezett sebességgel* ($\overline{v}$) *(driftsebesség, sodródási sebesség):*

$$I = neA\overline{v}. \tag{7.39}$$

(A vezetés pontosabb mechanizmusát a 25.4.5. pontban tárgyaljuk.)

7.5.2. A vezető ellenállása. Ohm törvénye

A fémes vezetékben mozgó töltésekkel szemben mutatott, a közegellenálláshoz hasonlítható viselkedését a fém *elektromos* ellenállásának nevezzük. *Ohm* állapította meg kísérletileg, hogy *az áramerősség a vezeték két rögzített pontja között mérhető feszültséggel egyenesen arányos,* vagyis

$$\boxed{\frac{U}{I}=\text{állandó}}. \tag{7.40}$$

Ez Ohm törvénye.

Látható, hogy éppen ez az állandó alkalmas a vezetékszakasz árammal szembeni ellenállásának jellemzésére. Így tehát az AB vezetékszakasz R_{AB} *ellenállása (rezisztencia)* az ezen a szakaszon eső U_{AB} feszültség hatására létrejövő áram I erősségének a hányadosa:

$$\boxed{R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}}. \tag{7.41}$$

Az ellenállás egysége a $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$, neve ohm, jele Ω.

Mérésekből – és egyszerű gondolatmenetből – következik (lásd alább), hogy egy adott *hengeres, A keresztmetszetű homogén anyagú fémes vezeték l hosszúságú*

szakaszának ellenállása egyenesen arányos a vezeték hosszával és fordítottan arányos a vezeték keresztmetszetével:

$$\boxed{R=\rho\frac{l}{A}}, \tag{7.42}$$

ahol a ρ arányossági tényező a vezeték anyagára jellemző ún. fajlagos ellenállás (rezisztivitás):

$$\rho=\frac{RA}{l},$$

amelynek mérőszáma egyenlő az egységnyi keresztmetszetű, egységnyi hosszúságú vezeték ellenállásának számértékével.

A fajlagos ellenállás SI egysége az $1\ \frac{\Omega m^2}{m}=1\,\Omega m$. Azonban ez igen-igen nagy egység (1 m hosszú, 1 m^2 keresztmetszetű olyan „vezeték" – pl. 1 m^3-es kocka – ellenállása lenne, amelyre 1 V feszültséget kapcsolva mindössze 1 A erősségű áramot engedne át). Ezért az SI egység mellett megengedett a gyakorlatban az 1 m hosszú, 1 mm^2 keresztmetszetű vezeték ellenállását alapul venni, s így az $1\ \frac{\Omega mm^2}{m}$-t használni.

Mint a kísérletek mutatják, a fajlagos ellenállás függ a vezeték hőmérsékletétől is az alábbi függvény szerint:

$$\rho=\rho_{20}\left(1+\alpha_{20}\Delta t\right), \tag{7.43}$$

ahol α_{20} a 20 °C-hoz tartozó *hőmérsékleti együttható* (hőfoktényező) és $\Delta t = t - 20$ °C.

A hőfoktényező dimenziója 1/K.

7.3. táblázat. Néhány vezetőanyag fajlagos ellenállása szobahőmérsékleten és hőfoktényezője

Az anyag megnevezése	ρ (Ω·m)	α_{20} (K^{-1})
Alumínium	$0{,}028\cdot10^{-6}$	$4{,}1\cdot10^{-3}$
Ezüst	$0{,}01629\cdot10^{-6}$	$3{,}61\cdot10^{-3}$
Cink	$0{,}63\cdot10^{-6}$	$3{,}7\cdot10^{-3}$
Higany	$0{,}9578\cdot10^{-6}$	$0{,}89\cdot10^{-3}$
Réz, vezetékanyag	$0{,}01695\cdot10^{-6}$	$4{,}3\cdot10^{-3}$
Volfrám	$0{,}0551\cdot10^{-6}$	$4{,}4\cdot10^{-3}$
Kantál	$1{,}3\ldots1{,}4\cdot10^{-6}$	$0{,}09\cdot10^{-3}$
Króm-nikkel	$1{,}1\cdot10^{-6}$	$0{,}25\cdot10^{-3}$

A technikában gyakran használatos még az ellenállás reciproka: $G = 1/R$, amit *vezetésnek (konduktivitásnak, vezetőképességnek),* és a fajlagos ellenállás reciproka: $1/\rho = \sigma$, amit *fajlagos vezetésnek (fajlagos vezetőképességnek)* nevezünk.

Ohm törvénye még a vezetékben kialakuló mező térerősségével is kifejezhető. Ugyanis az $I = U/R$ egyenletben az ellenállást a fajlagos ellenállással és a vezeték geometriai adataival kifejezve:

$$I=\frac{A}{\rho l}U.$$

Ezt átrendezve:

$$\frac{I}{A}=\frac{U}{\rho l},$$

ahol $I/A = J$ az egységnyi keresztmetszeten áthaladó áram erősségét adja meg, amit *áramsűrűségnek* nevezünk. (Ez számértékben az egységnyi idő alatt az egységnyi területű felületen merőlegesen átáramló töltés mérőszámával egyezik, egysége az A/m^2.) Az $U/l = E$ a térerősség a fém belsejében, és $1/\rho = \sigma$ a fajlagos vezetés, tehát:

$$J=\sigma E,$$

ami vektoriális formában is érvényes:

$$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E},$$

ahol **J** a töltésmozgás pályájának érintőjébe mutató, áramirányú vektor.

(Mivel a lokális E térerősség, pontosabban $\frac{\Delta U}{\Delta l}$ – „hosszegységre eső feszültség" – két mennyiség különbségének, differenciájának hányadosa, az Ohm-törvénynek ezt az alakját *differenciális Ohm-törvénynek* nevezzük.)

Elemi meggondolás az Ohm-törvény és a fajlagos ellenállás értelmezéséhez. Vizsgáljuk meg az áramvezetés mechanizmusát!

A fémes vezetőt az ionrácshoz kötött nagy tömegű ionok és a köztük szabadon mozgó vezetési elektronok alkotják. E részecskék rendezetlen hőmozgást végeznek. Nem járunk messze a valóságtól, ha a szabad elektronokat mozgásuk szempontjából a kristályrács közeit kitöltő gázzal modellezzük.

A vezetési elektronok több atomnyi távolságot is megtesznek az ionokkal való két egymás utáni ütközésük között. Jelöljük $\bar{\lambda}$-sal az ütközések közötti átlagos távolságot, az ún. *szabad úthosszat*! Ekkor két ütközés között eltelt átlagos idő $\bar{\tau}=\frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}_0}$, ahol $\bar{v}_0$ a vezetési elektronok átlagos sebességének nagysága. (Mivel a $\mathbf{v}_0$ sebességvektor iránya teljesen véletlenszerű – „hőmozgásról" van szó –, ezért nem is eredményez eredő áramot.)

Ha a fémes vezetékben tartósan (vezetékirányú) elektromos mezőt hozunk létre, az a benne mozgó elektronok mindegyikére *azonos irányban* $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ erőt fejt ki, s ennek hatására $\bar{\tau}$ idő alatt mindegyikük *rendezett irányban* $\Delta\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{a}\bar{\tau} = \frac{e}{m}\mathbf{E}\bar{\tau}$ többletsebességhez jut (a többletsebesség a térerősséggel ellentétes irányú, hiszen $e < 0$). A rendezett átlagos sebességtöbblet a fémrácsra jellemző szabad úthosszal kifejezve:

$$\Delta\bar{v} = \frac{eE}{m}\,\frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}_0},$$

(itt $v_0 \gg \Delta\bar{v}$).

Mivel $\Delta\mathbf{v}$ iránya *minden elektronra azonos,* ezért eredő áramot kapunk: a rendezetlen hőmozgáson felül a vezeték mentén egy irányban „sodródnak" is az elektronok. (A rendezetlen mozgásra szuperponálódik egy rendezett mozgás.)

Természetesen az elektronok minden egyes ütközés után elvesztik a mezőtől nyert $\Delta\mathbf{v}$ sebességtöbbletüket, hiszen minden egyes újabb ütközés *irány szerint* is véletlenszerűen szórja az elektronokat. Így minden ütközés után elölről kezdődik a rendezett sebesség-összetevő megszerzése.

Mekkora az elektronok átlagos vándorlási („drift")-sebessége? Mivel az ütközések közötti szabad repülés közben $\mathbf{a} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$ = állandó, ezért a teljes $\bar{\tau}$ időre számított átlagos eltolódási sebesség a maximális érték fele: $\frac{\Delta\bar{v}}{2}$.

Ezek után könnyen megkapjuk a kapcsolatot a vezetéken eső feszültség és a kialakuló áram erőssége között. Jelöljük a fém egységnyi térfogatában levő vezetési elektronok számát n-nel. Ekkor az A keresztmetszeten t idő alatt áthaladó összes töltés $Q = neA\bar{v}t$, hiszen mindazok az elektronok átjutnak a keresztmetszeten, amelyek a $V = A{\cdot}s = A\bar{v}t$ térfogatú hasábban voltak. Így az áramerősség $I = \frac{Q}{t}$ értelmezése alapján a következőt kapjuk:

$$I = \frac{neA\bar{v}t}{t} = neA\bar{v}.$$

Ha beírjuk a $\bar{v} = \frac{\Delta\bar{v}}{2}$ értéket (ez a fémen belüli „rákapcsolt térerősségtől" és a szabad úthossztól függ), az

$$I = \frac{ne^2A\bar{\lambda}}{2m\bar{v}_0}E$$

kifejezéshez jutunk. Az áram erőssége tehát a térerősséggel egyenesen arányos. A műszereinkkel könnyebben mérhető feszültséggel kifejezve ($U = El$):

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{ne^2\bar{\lambda}}{m\bar{v}_0}\right)\frac{A}{l}U,$$

vagyis az áram erőssége egyenesen arányos a feszültséggel. Ez Ohm törvénye!

A zárójeles tényező csak az anyag atomi jellemzőitől és a hőmérséklettől függ. (Ha az utóbbi állandó, akkor $\bar{v}_0$ és $\bar{\lambda}$ is az, tehát a teljes zárójeles kifejezés is állandó.) $\frac{A}{l}$ a vezeték geometriai méreteire jellemző. Ha a fenti összefüggést $U = RI$ alakban írjuk fel, megkapjuk a vezetékszakaszra jellemző ellenállás anyagszerkezeti jelentését:

$$R = \left(\frac{2m\bar{v}_0}{ne^2\bar{\lambda}}\right)\frac{l}{A} = \rho\frac{l}{A},$$

ahol ρ a fajlagos ellenállás. Ennek reciproka a fajlagos vezetőképesség.

Ezzel megmagyarázható egyes anyagok negatív hőmérsékleti tényezője is: melegítés során a térfogategységben több elektron válik szabaddá, a nevezőben n nő, az ellenállás kisebb lesz.

Megjegyzés: Gondolatmenetünkben az elektronokat gázfelhővel modelleztük. Az elektronokat azonban csak kevés jelenségben lehet kis részecskével modellezni. A kvantummechanikából tudjuk (lásd a 19. fejezetet), hogy az elektron hullámtulajdonságokkal is rendelkezik, *kiterjedt felhőként fogja körül az atommagot.* Ezt haladó mozgás közben is képes megtenni, mintegy „átfolyik" a fémrács ionjain. A mechanikai hullámokhoz hasonlóan a közeghatárokon vagy más, hasonló rendellenességeken visszaverődnek. Az elektron hullámtermészete a fémekben is hasonlóképpen nyilvánul meg: a teljesen szabályos fémrács nem jelent akadályt az elektron útjában. Az ionok rendezetlen termikus mozgása miatt azonban a kristályrács minden pillanatban kissé torz, mintegy inhomogenitást tartalmaz. Hasonló szerepet játszanak a szennyező atomok és a kristályhibák. *Az ellenállást nem maga a kristályrács, hanem a szabálytalanságok okozzák!* A tapasztalat szerint teljesen tiszta fémekben az abszolút hőmérséklettel a 0 felé tartva az R ellenállás is a nullához tart!

7.5.3. Joule törvénye

Ha egy Q töltésű test U feszültségű pontok között elmozdul, akkor a mező rajta $W = QU$ munkát végez. Ez a munka a vákuumban a töltéshordozó $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási

energiáját növeli. Nyugalomból indulva így az $v=\sqrt{2\frac{Q}{m}U}$ sebességre tesz szert. Ha viszont a töltéshordozók valamely fémben vannak, azok „rendezett" sebessége (driftsebessége) rendkívül kicsiny marad (nagyságrendben 10^{-2} mm/s!) *Az áramló töltéshordozók tehát a mezőből folyamatosan felvett energiáját folyamatosan le is adják a fém ionrácsának, aminek következtében a fém felmelegszik,* vagyis *a belső energiája megnő.* Ezt az energianövekedést nevezzük *Joule-hőnek.*

A driftsebesség adott áramerősség és vezeték-keresztmetszet esetén megbecsülhető az Avogadro-szám (16.2. szakasz), a fém sűrűsége, móltömege és az elemi töltés (16.3.1. szakasz) nagyságának ismeretében, feltételezve, hogy egy fémion átlagosan egy vezetési elektront „ad a közösbe". (7.39) alapján ui

$$\overline{v}=\frac{I}{neA}.$$

ρ sűrűségű, V térfogatú fém tömege $m=\rho V$, mólszáma $\frac{m}{M_A}$, a benne levő atomok (ionok), tehát vezetési elektronok száma $N=\frac{m}{M_A}N_A$, az egységnyi térfogatban levő vezetési elektronok száma pedig $n=\frac{N}{V}=\frac{m}{M_A}\frac{N_A}{V}=\frac{\rho V}{M_A}\frac{N_A}{V}=\frac{\rho N_A}{M_A}$. Így a rendezett mozgás sebességére a következőt kapjuk:

$$\overline{v}=\frac{I}{neA}=\frac{IM_A}{\rho N_A eA}.$$

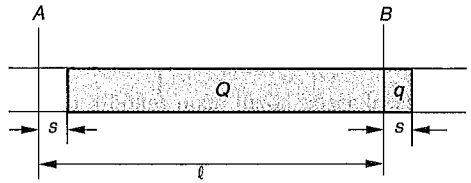
Pl. 1 mm^2 keresztmetszetű rézvezetékben folyó 1 A erősségű áram esetén:

$$\overline{v}=\frac{1A\cdot 0,0635\frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8920\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 6,02\cdot 10^{23}\frac{1}{\text{mol}}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\text{C}\cdot 10^{-6}\text{m}^2}=0,000074\frac{\text{m}}{\text{s}}=0,074\frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

A Joule-hőt megkapjuk, ha meghatározzuk azt a munkát, amelyet a mező a vezeték vizsgált szakaszán t idő alatt végez, ha a végpontok között U a feszültség, és a vezetékben I erősségű áram folyik.

Legyen az A és a B határfelületek között összesen Q szabad töltés, amely a vezeték mentén homogén térerősség hatására eltolódik (7.51. ábra)! Jelöljük a t idő alatti eltolódás mértékét s-sel és az AB vezetékszakasz hosszát l-lel! A mező a (tel-

jes l hosszúságú szakaszon eloszló) Q töltésen $W=QEs$ munkát végez. Ezt a munkát kell az áramerősséggel kifejeznünk.



7.51. ábra

E célból meghatározzuk azt a q töltésmennyiséget, amely a vezeték keresztmetszetén t idő alatt átáramlik. Ez nyilvánvalóan az s magasságú oszlopocskában elférő szabad töltés. Ha a vezetékszakasz l hosszán Q töltés helyezkedik el, s hosszon $q=\frac{Q}{l}\cdot s$ szabad töltés van. Így az áram erőssége:

$$I=\frac{q}{t}=\frac{Qs}{lt}.$$

Innen $Qs=Ilt$, amit a munka kifejezésébe írva a következőt kapjuk:

$$W=QEs=IElt,$$

ahol El a teljes AB hosszon eső feszültség. Tehát a Joule-hő:

$$W=IUt.$$

Ohm törvényének felhasználásával a vezeték A és B pontjai közötti szakaszán végzett munka még így is felírható:

$$\boxed{W_{AB}=IU_{AB}t=I^2R_{AB}t=\frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}t}. \qquad (7.44)$$

Ha a szövegkörnyezetből kiderül, az AB-indexet elhagyjuk. Összefoglalva:

Az R ellenállású vezetékszakaszon leadott energia egyenesen arányos a szakasz ellenállásával, az áramerősség négyzetével és az eltelt idővel. Ez *Joule törvénye.*

Az áramkör részeinek (pl. az izzólámpának) a hőmérséklete nem növekszik korlátlanul az idő múlásával, mert folyamatos hősugárzással a környezetének adja át a felvett energiát. A vezeték és környezete között ún. *dinamikus hőegyensúly* alakul ki: egységnyi idő alatt felvett és kisugárzott energia mennyisége megegyezik.

Gyakorlati fontossága van a fogyasztók időegység alatt felvett energiájának, más szóval a felvett (a mező által leadott) *teljesítmény* ismeretének. Az előzőek

alapján a vezetékszakaszon felvett (leadott) teljesítmény a $P = W/t$ értelmezés szerint:

$$P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}. \qquad (7.45)$$

(Sorba kapcsolt vezetékszakaszok közül azon fejlődik több hő, amelyiknek nagyobb az ellenállása.)

7.5.4. Áramforrások (galvánelemek). Az áramkört jellemző feszültségek

Az egyenáramú körben akkor folyik áram, ha az *zárt* kört alkot. A vezetékben az elektromos mező tartja mozgásban a töltéseket, sőt, mint láttuk, azokon pozitív munkát is végez (energiát ad le). *Az időben állandó elektromos mező azonban konzervatív, zárt görbén mozgatott töltésen végzett összes munkája 0:*

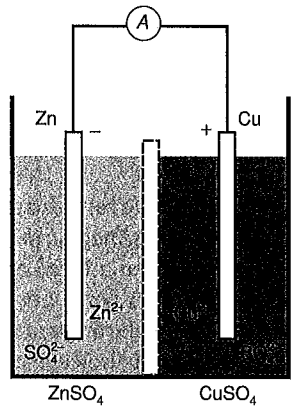
$$\sum_g^{\mathrm{O}} \Delta W = Q \sum_g^{\mathrm{O}} \mathbf{E}\Delta\mathbf{s} = 0,$$

tehát a zárt kör egy szakaszán ugyanakkor negatív munkát is kell végeznie (ez a szakasz az áramforráson belül található meg). *Kell tehát lennie egy külső, nem elektrosztatikai eredetű forrásnak, amely szolgáltatja az áramkörből kivett energiát, és fenntartja az elektromos mezőt.* Egyenáramú körökben ilyen *áramforrások* pl. a *galvánelemek.*

Ez a nem elektrosztatikai energia „kémiai energia" formájában áll rendelkezésre. Mivel az elektrokémiai folyamatok magyarázata igen bonyolult, itt megelégszünk fenomenológiai (jelenség*leíró*) modell alkalmazásával. Hogyan lehet „kémiai energiát" elektromos energiává „alakítani"? Erre példa az ún. *Daniell-féle elem.*

Cink-szulfát-oldatba helyezett cinklemez és réz-szulfát-oldatba helyezett rézlemez Daniell-féle elemet alkot, ha a két oldatot likacsos (porózus) fallal választjuk el egymástól (7.52. ábra).

Ebben a berendezésben a fémcink felületéről (némileg hasonlatosan a párolgás jelenségéhez) fémionok válnak le, pozitív ionok formájában oldatba mennek. Ezzel a fémcinken atomonként 2 elektront hagynak hátra. Az oldat pozitív, a fémcink negatív többlettöltésűvé válik. Így a fémcink felülete mentén egy ún. *elektromos kettős réteg* alakul ki: a fémen negatív töltés és vele szemben a cinkionok pozitív töltése helyezkedik el. (Az $Zn^{++} + SO_4^{--}$ oldatban a koncentráció a Zn^{++} irányában eltolódik.) A kialakuló kép hasonlatos egy feltöltött kondenzátor fegyverzetein levő töltésrendszerhez. Az oldódás folyamata addig tart, míg az egyre jobban felhalmozódó ellentétes töltések közötti Coulomb-vonzás meg nem akadályozza a további töltésszétválással járó oldódást, vagyis ún. dinamikus egyensúly áll be.



7.52. ábra

Hasonló átalakulás megy végbe a réz-szulfát-oldatba merülő rézlemez esetén, azzal a különbséggel, hogy az oldatban levő pozitív rézionok *kiválni* igyekeznek a rézlemezre, magukkal vive az atomonkénti két pozitív töltésüket. Itt az oldat a negatív szulfátion töltéstöbblete miatt negatívvá, a fémcink pozitív töltésűvé válik. (Az oldat $Cu^{++} + SO_4^{--}$ ionkoncentrációja az SO_4^{--} szulfátion javára tolódik el.) A folyamat itt is addig tart, míg a pozitív és negatív többlettöltések Coulomb-tere meg nem akadályozza a további ionkiválást. (Annak oka, hogy a különböző fémek saját sóinak oldataiban oldatba mennek-e, vagy éppen hogy kiválnak abból, bonyolult kémiai okokra vezethető vissza. Itt tényként elfogadva megérthetjük a Daniell-elem működését.)

Ha ezután a cinklemezt és a rézlemezt fémhuzallal összekötjük, a cink fölös elektronjai a kialakuló elektromos mező hatására) a vezetéken át a rézlemezbe vándorolnak, amelytől a réz-szulfát-oldatban levő pozitív rézionok azonnal átveszik a negatív töltést, és semlegesítődve kiválnak a rézlemezen. Eközben a cinklemez csökkenő negatív töltése újabb cinkionok oldatba vándorlását teszi lehetővé. Így a folyamat tartósan fennmaradhat. A kémiai folyamat energiafelszabadulással jár, amit a vezetékben (hő, vagy mechanikai munka formájában) hasznosíthatunk.

A két fémlemezt *elektródoknak* nevezzük. A cink a negatív, a réz a pozitív elektród (vagy sarok, vagy pólus). Közöttük 1,1 V feszültség alakul ki.

A *Volta-elem* egyelektrolitos: hígított kénsavba (H_2SO_4) merülő cink- és rézlemezzel. Az oldódó cinklemezen a hátramaradó elektronok negatív töltést hoznak

létre, míg a rézlemez körül a H^+ ionok attól elektront elvéve semleges H_2 molekulákká alakulnak, és gázbuborékok formájában körülveszik azt. Az ily módon pozitívvá váló rézlemez és a negatív töltésű cinklemez között a feszültség kb. 1 V.

A *Leclanché-elem* elektrolitja szalmiáksó (NH_4Cl) vizes oldata; pozitív sarka barnakőbe (mangán-dioxid, MnO_2) ágyazott szénrúd, negatív sarka cinklemez. A két elektród között kb. 1,5 V feszültség jön létre.

A *szárazelemek* Leclanché-elemek, amelyek negatív elektródja cinkhenger, elektrolitja keményítővel van kocsonyásítva, vagy szűrőpapírba van szívatva, pozitív elektródja pedig szénrúd, amely köré mangán-oxid és azt vezetővé tevő korom keveréke van sajtolva.

A galvánelemekben tehát *kémiai energia rovására elektromos mező épül fel:* töltések térbeli szétválásával *a pozitív töltés magasabb potenciálú helyre kerül!* Az áramkör zárásakor ezek a töltések részben a külső áramkörön keresztül haladó elektronok, részben az elektrolitban levő pozitív és negatív ionok formájában megindulnak egymás felé, s létrejön az elektromos áram.

Az áramforráson belül a kettősrétegek belsejében a kémiai energia rovására folyik az áram a magasabb potenciálú hely felé, a kettősrétegeken kívül – vagyis az áramforrás többi részén és a fémes vezetékekben – a kettősrétegekből kiinduló és a vezetékekben kialakuló elektromos mező hajtja a töltéseket az alacsonyabb potenciálú hely felé, és így zárul a kör. Mindeközben az elektrosztatikus mező teljes munkája a zárt körön valóban nulla maradt. (*Pozitív* munkát végzett a vezetékekben és az áramforrásban a kettősrétegek között, és ugyanakkora abszolút értékű *negatív* munkát a kettősrétegeken belül, ahol a kémiai hatás emelte a töltéseket a magasabb elektromos potenciálú helyre.)

Az áramkört jellemző feszültségek. A nyitott és zárt áramkör egyes részeire eső feszültségek a technikában külön nevet is kaptak.

A belső feszültség. A fémek és az elektrolitok határán az elektromos kettősrétegek által fenntartott potenciálkülönbséget (a két potenciálkülönbség összegét) a telep *belső feszültségének* nevezzük, és U_0-val jelöljük. Zárt áramkörben ez a potenciálesés a keletkező áram irányával ellentétes irányú[17] (7.53. ábra).

Az elektromotoros erő. A *kémiai töltésszétválasztó hatást* azzal a munkával mérjük, amelyet a kémiai erők végeznek a pozitív egységnyi töltésen, miközben a töltés a kettősréteg alacsonyabb potenciálú helyétől a magasabb potenciálú helyére kerül. Ezt a feszültség jellegű V-ban mért mennyiséget *elektromotoros erőnek* nevezzük, és általában írott $\mathscr{E}$ betűvel jelöljük. Nagysága megegyezik a hatására létrejövő U_0 belső feszültséggel, de „esése" azzal ellentétes, vagyis áramirányú.[18]

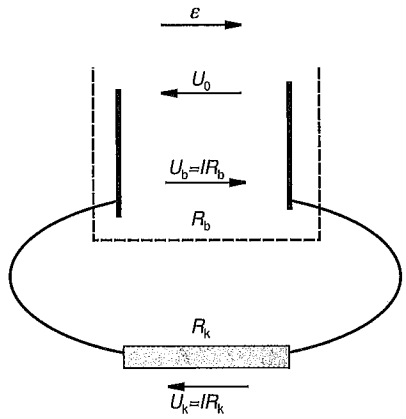
[17] Ha egy áramkörben több áramforrás is van, akkor a kisebb belső feszültségű telep belső feszültsége a telepek ellenkapcsolása esetén áramirányú is lehet.

[18] Kivétel: ha a telep egy másik, nagyobb elektromotoros erejű teleppel van szembekapcsolva.

(Az oldatba mártott fémlemezről az elektromotoros erő addig választ le töltéseket, amíg a szétvált töltések keltette elektromos mező ellentétes irányú feszültsége akkorára nem nő, mint maga az elektromotoros erő.)

Írható tehát:

$$|\mathscr{E}| = |U_0|.$$



7.53. ábra

Az áramforrás elektromotoros ereje csak a kémiai komponensektől függ, az elektródok méretétől független.

A belső és külső ellenállás. Zárt áramkörben az áram magán a telepen is keresztülfolyik. Ugyanakkor a telep elektrolitja is képvisel valamekkora ellenállást. Az áramforrásnak ezt a saját ellenállását *belső ellenállásnak* nevezzük, és R_b-vel jelöljük, míg az áramforrás kivezetéseire kapcsolt fogyasztók összes ellenállása a *külső ellenállás,* amelynek jele R_k. Természetesen a zárt kör teljes elenállása

$$R = R_b + R_k \tag{7.46}$$

A belső feszültségesés.[19] Zárt áramkörben az elektrolitoldat mentén kialakuló potenciálesést a technikában *belső feszültségesésnek* nevezik. Jele U_b. (Nem tévesztendő össze a belső feszültséggel!) Ez nem egyéb, mint az R_b belső ellenálláson kialakuló feszültség, Ohm törvénye értelmében

$$U_b = IR_b. \tag{7.47}$$

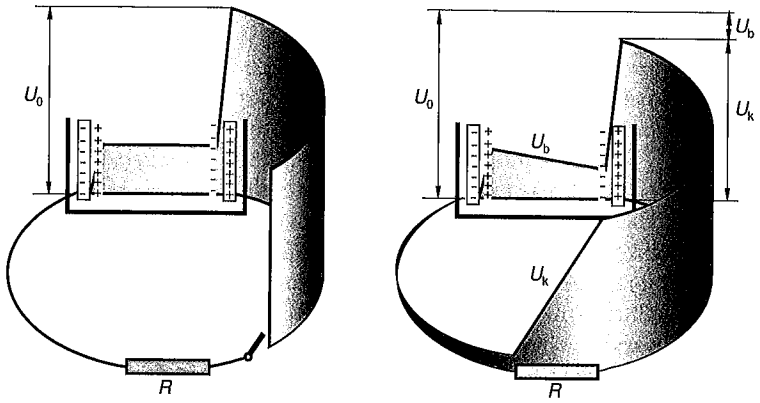
[19] A technikában elterjedt „feszültségesés" szó pontatlan kifejezés, a feszültség maga is potenciálesést (potenciálkülönbséget) jelent. Nem használatos, de helyesebb lenne „belső potenciálesésnek" nevezni az U_b feszültséget.

A kapocsfeszültség. Az áramkör áramforráson kívüli részén, vagyis a külső ellenálláson

$$U_k = IR_k \tag{7.48}$$

nagyságú feszültség esik, amelyet – mivel a telep kapcsain jelentkezik – *kapocsfeszültségnek* nevezünk.

A 7.54. ábrán a kördiagram magassága arányos az áramkör adott helyén a negatív pólushoz viszonyított potenciállal. A bal oldali ábra a nyitott (terheletlen), a jobb oldali ábra a zárt (fogyasztóval terhelt) áramforrás potenciál-kördiagramját mutatja.



7.54. ábra

Maxwell II. törvényéből és a belső feszültség fogalmából következik, hogy

$$U_0 = U_b + U_k, \tag{7.49}$$

ami Ohm törvényével felírva:

$$U_0 = I\left(R_b + R_k\right), \tag{7.50}$$

ui. a potenciáleséseket pozitív, az emelkedéseket negatív előjellel véve a rézelektródától a cinkelektródáig a teljes potenciálesés az áramforráson *belül haladva* $U_{01} - U_b + U_{02}$, ahol $U_{01} + U_{02} = U_0$ vagyis erre írható: $U_0 - U_b$, az áramforráson *kívül haladva* pedig U_k. Mivel két pont között a különböző utakon mért potenciálesés megegyezik, írható, hogy $U_0 - U_b = U_k$, amiből (7.49) és (7.50) következik (lásd a 7.54. ábra jobb oldalát!).

Mivel az elektromotoros erő abszolút értéke megegyezik a belső feszültségével, az egyenletet így is fel szokták írni:

$$\mathcal{E} = I(R_b + R_k). \tag{7.51}$$

A rövidzárási áram. Ha az áramforrást (telepet) egyre jobban terheljük (vagyis egyre *kisebb* ellenállású fogyasztó rákapcsolásával egyre nagyobb áramot veszünk ki belőle), az áramerősség a következő függvény szerint nő:

$$\boxed{I = \frac{U_0}{R_b + R_k}}, \tag{7.52}$$

ahol U_0 és R_b állandó mennyiségek. Ha a külső ellenállást gyakorlatilag nullává tesszük, vagyis nulla ellenállású (vastag, rövid) vezetékkel kapcsoljuk össze (rövidzár), akkor az áramerősség növekedését már csak a telep belső ellenállása korlátozza. Az így kialakult maximális áramot *rövidzárási áramnak* nevezzük, nagysága:

$$I_{max} = I_r = \frac{U_0}{R_b}. \tag{7.53}$$

Az áramerősség növekedésével viszont a kapocsfeszültségnek csökkennie kell, hiszen

$$U_k = U_0 - IR_b,$$

vagyis

$$U_k = U_0 \frac{R_k}{R_b + R_k}. \tag{7.54}$$

Így a kapocsfeszültségnek zérusra kell csökkennie rövidzár kialakulása esetén, és maximális lesz az értéke, ha „végtelen nagy ellenállást" kapcsolunk rá (vagyis megszakítjuk, más szóval nyitjuk az áramkört).

Az üresjárási feszültség. A kapocsfeszültség legnagyobb értékét *üresjárási feszültségnek* nevezzük. Ez a nyitott áramforrás sarkain (elektrosztatikus, tehát áramot nem felvevő) műszerrel mérhető feszültség. Nagysága éppen U_0-val egyenlő, hiszen $U_0 = IR_b + U_k$, ahol $I = 0$ miatt $IR_b = 0$. Az üresjárási feszültséget U_e-vel jelölik, vagyis nagyságra igaz, hogy

$$U_{k\,max} = U_e = U_0 = \mathcal{E}. \tag{7.55}$$

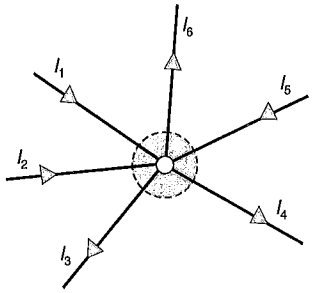
7.6. Egyenáramú hálózatok. Egyszerű és összetett áramkörök

7.6.1. Kirchhoff törvényei

Kirchhoff I. törvénye. Maxwell I. törvényének (Gauss-tétel) folyománya, hogy időben állandó elektromos mező esetén a vezetőn kialakuló töltéseloszlás is állandó kell hogy legyen. Ennek az elektromos egyenáramokra nézve fontos következménye van: *egy vezetékszakasz bármely keresztmetszetén azonos az áramerősség értéke.* Ha ui. két ilyen keresztmetszet közötti térfogatba azonos idő alatt belépő, illetve onnan kilépő töltés nem lenne egyenlő, akkor ebben a térrészben idővel egyre több töltés halmozódna fel, az elektromos mező nem lenne időben állandó. (Egy ilyen töltéscsomó olyan újabb mezőt hozna létre, amely a keletkező töltéstöbbletet, vagyis saját magát feloszlatja: a túl gyorsan érkező töltéseket fékezné, a túl lassan távozókat siettetné.) Ez az állítás nemcsak vezetékszakaszra, hanem értelemszerűen *áramelágazásokra* is érvényes.

Ha egy áramkörben *elágazások* is vannak, *összetett áramkörről* beszélünk. Összetett áramkörre az előbbiek megfogalmazását Kirchhoff adta meg. Ezt a törvényt *csomóponti törvénynek* nevezzük.

Kirchhoff I. törvénye: Bármely elágazási pontba befolyó áramok erősségének összege egyenlő az onnan kifolyó áramok erősségének összegével, vagyis $\sum I_{be} = \sum I_{ki}$ (7.55. ábra).



7.55. ábra

Ha megállapodunk abban, hogy a csomópont felé folyó áramok erősségét pozitív, az onnan elfolyókét pedig negatív mérőszámmal jellemezzük, akkor így is fogalmazhatunk:

A csomópontba befolyó és onnan elfolyó áramok erősségének algebrai összege zérus, vagyis

$$\sum_{cs} I = 0. \tag{7.56}$$

Kirchhoff II. törvénye. Kirchhoff II. törvénye tulajdonképpen Maxwell II. törvényének az egyenáramú hálózatokra való megfogalmazása. A vezetékek belsejében ui. időben állandó töltéseloszlás keltette, tehát konzervatív elektromos mező van, vagyis bármely zárt görbére számított örvényerősség zérus.

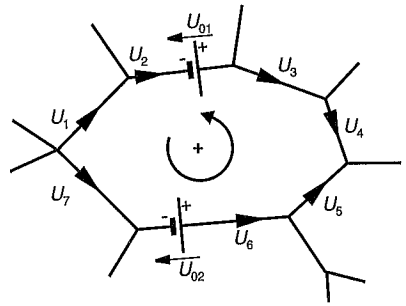
A hálózatban akárhogyan kijelölhetünk ágakból álló zárt vonalat, ún. *hurkot.* Erre mint zárt görbére számított $\sum \mathbf{E}\Delta\mathbf{r}$ szorzatösszeg, vagyis az örvényerősség (más néven körfeszültség) az egyes vezetékszakaszok IR feszültségeiből, valamint az (esetleges) áramforrások U_0 belső feszültségeiből tevődnek össze. Maxwell II. törvényét tömören felírhatjuk, ha választunk egy tetszőleges *körüljárási irányt* (mérőirány), és azokat a feszültségeket, amelyek a vezeték mentén a körüljárási irányban haladva *esnek* (a potenciál csökken) pozitív, a körüljárási iránnyal ellenkezőket pedig negatív előjellel látjuk el.[20] Ekkor Maxwell II. törvényét

$$\sum_{g}^{\circ} IR + \sum_{g}^{\circ} U_0 = 0 \tag{7.57a}$$

alakban írhatjuk fel (7.56. ábra). Ez tehát *Kirchhoff II. törvénye: Elágazásos vagy egyszerű áramkörben bármely irányított hurok mentén az egyes szakaszok IR feszültségeinek és a hurkon elhelyezett áramforrások U_0 belső feszültségeinek algebrai összege zérus,* vagyis

$$\sum_{h} U = 0. \tag{7.57b}$$

Megjegyzés: Olyan hurokra, amelyben nincs telep, $\sum_h IR = 0$, és abban a hurokban, amelyben telep működik, nyilván az is igaz, hogy $\sum_h IR = \mathscr{E}$, hiszen a kémiai munka nem nulla a zárt görbén, tehát az ún. ohmikus feszültségesések összege az elektromotoros erővel egyenlő.



7.56. ábra

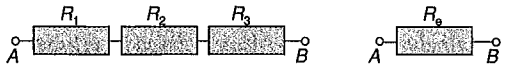
[20] Az IR feszültségek „esése" mindig áramirányú, és (ha csak egyetlen áramforrás van a körben) az U_0 belső feszültség egyszerű áramkörben az áram irányával ellentétesen esik.

7.6.2. Ellenállások (fogyasztók) kapcsolása

Ha a fogyasztók csak abból a szempontból érdekelnek, hogy mekkora ellenállást képviselnek, összekapcsolásukkor szokás röviden csak ellenállások kapcsolásáról beszélni.

Bárhogyan kapcsolunk össze ellenállásokat, mindig található egyetlen olyan ellenállás, amely a rendszert adott két pontjára nézve helyettesíti, vagyis ugyanakkora feszültség hatására ugyanakkora áram folyik rajta, mint az eredeti rendszer adott két pontja között. Ezt a helyettesítő ellenállást az adott kapcsolásban szereplő ellenállások *eredő ellenállásának* nevezzük.

Soros kapcsolás. Ha több ellenállást úgy kapcsolunk az A és B pontra, hogy mindegyik ellenállás kivezetéséhez csak egyetlen másik ellenállás kivezetése csatlakozzék, és végül a szabadon maradó egy-egy kivezetés az A, illetve B ponthoz csatlakozzék, akkor az így nyert rendszert A és B-re nézve *soros kapcsolásúnak* nevezzük (7.57. ábra).



7.57. ábra

A sorosan kapcsolt ellenállások eredője egyenlő az egyes ellenállások összegével:

$$R_{e,s} = \sum_{i=1}^{n} R_i. \tag{7.58}$$

Ha ui. a feszültséget A-tól B-ig a sorba kapcsolt $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ellenállásokon keresztül vezető úton mérjük, Maxwell II. törvénye szerint ugyanezt az értéket kell kapnunk, mint A-tól B-ig közvetlenül a levegőben haladva:

$$U_{AB} = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

és Ohm törvénye, valamint Kirchhoff I. törvénye alapján:

$$U_{AB} = IR_1 + IR_2 + \cdots + IR_n.$$

Az eredő ellenállás értelmezése szerint $U_{AB} = IR_e$, az áramerősséggel való egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy valóban

$$R_{e,s} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n.$$

(A soros kapcsolásnál a *vezetőképességekre* természetesen a következő érvényes:

$$\frac{1}{G_{e,s}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \cdots + \frac{1}{G_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{G_i}. \tag{7.59}$$

Pl. két fogyasztó esetére:

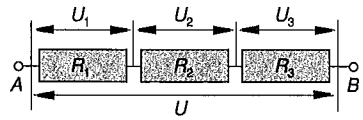
$$G_{e,s} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Mivel az áramerősség minden sorba kapcsolt fogyasztón azonos, azaz

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \cdots = \frac{U_n}{R_n} = I = \text{állandó},$$

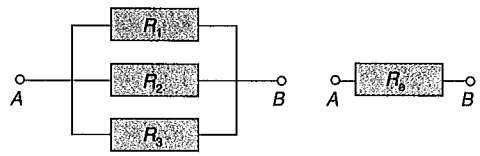
a sorba kapcsolt ellenállásokon eső feszültségek aránya megegyezik az ellenállások arányával (7.58. ábra):

$$U_1 : U_2 : \cdots : U_n = R_1 : R_2 : \cdots : R_n. \tag{7.60}$$



7.58. ábra

Párhuzamos kapcsolás. Ha az A és B pontokra több fogyasztó úgy csatlakozik, hogy mindegyik fogyasztó egyik kivezetése az A, másik kivezetése a B ponthoz van kötve, akkor ezek az A és B pontra nézve *párhuzamosan* vannak kapcsolva (7.59. ábra)



7.59. ábra

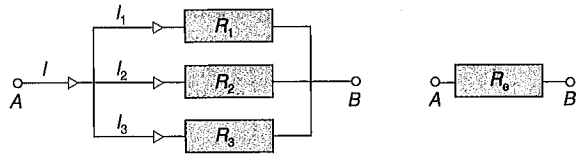
Párhuzamosan kapcsolt rendszerre érvényes:

Párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjének reciproka egyenlő az egyes ellenállások reciprokainak összegével:

$$\frac{1}{R_{e,p}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}, \quad \text{illetve} \quad R_{e,p}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}}. \tag{7.61}$$

Ha ui. az A és a B pontra párhuzamosan kapcsoljuk az $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ellenállásokat, akkor azok kivezetései között azonos a feszültség (Maxwell II. törvénye), és az A ponthoz folyó áram erőssége megegyezik az egyes ellenállásokon folyó áramok erősségének összegével (7.60. ábra) (Kirchhoff I. törvénye):

$$I=I_1+I_2+\cdots+I_n.$$



7.60. ábra

Ohm törvénye alapján:

$$I=\frac{U}{R_1}+\frac{U}{R_2}+\cdots+\frac{U}{R_n}.$$

Az eredő ellenállás értelmezése szerint azonban $I=\frac{U}{R_e}$. Az U feszültséggel való egyszerűsítés után valóban azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{R_{e,p}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_n}.$$

(A vezetőképességek között párhuzamos kapcsolásnál a $G = 1/R$ értelmezés szerint a

$$G_{e,p}=G_1+G_2+\cdots+G_n=\sum_{i=1}^{n}G_i \tag{7.62}$$

érvényes.)

Mivel a párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon a feszültségek megegyeznek, érvényes, hogy

$$I_1R_1=I_2R_2=\cdots=I_nR_n=U=\text{állandó},$$

az egyes ágakban folyó áramok erőssége úgy aránylik egymáshoz, mint az ágak ellenállásainak reciprokai:

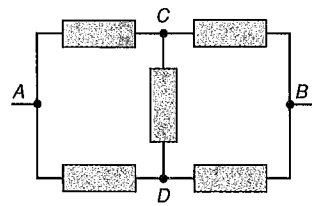
$$I_1:I_2:\cdots:I_n=\frac{1}{R_1}:\frac{1}{R_2}:\cdots:\frac{1}{R_n}, \tag{7.63}$$

vagyis úgy, mint a vezetőképességek:

$$I_1:I_2:\cdots:I_n=G_1:G_2:\cdots:G_n. \tag{7.64}$$

Vegyes kapcsolás. Ha az áramkör soros és párhuzamos kapcsolású ellenállásrendszereket egyaránt tartalmaz, *vegyes kapcsolásról* beszélünk. A vegyes kapcsolású rendszerek eredő ellenállását a soros, illetve párhuzamos részrendszerek eredőinek meghatározása útján fokozatos összevonásokkal határozhatjuk meg.

Hídkapcsolás. Vannak sem nem soros, sem nem párhuzamos kapcsolású rendszerek is. Ilyen pl. az A és B pontra nézve a 7.61. ábrán látható, ún. *hídkapcsolás.* Az ilyen rendszer soros, illetve párhuzamos ellenállások összevonásával nem redukálható egyetlen ellenállásra.



7.61. ábra

Egyszerű esetben segít, ha találunk *ekvipotenciális pontokat.* Ezek akár – végtelen jó vezetővel – összeköthetők („egyesíthetők"), akár – a köztük levő ellenállások kiiktatásával – elválaszthatók. Ilyen esetekben nagymértékben leegyszerűsödhet a hálózat.

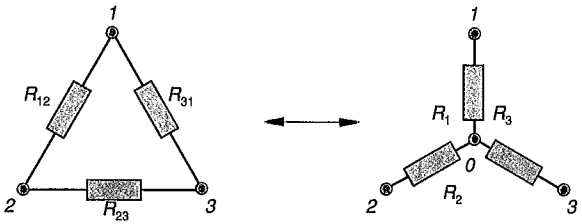
Ha erre nincs lehetőség, a Kirchhoff-egyenletek felírásával juthatunk eredményre. Felveszünk valamekkora feszültséget az A és B pontok között, majd a

Kirchhoff-egyenletekkel meghatározzuk az egyes ágak áramait. Az eredő ellenállást az U_{AB} feszültség és az A-ba (vagy B-be) befolyó áramok összegének hányadosa adja.

Minden hálózatra annyi Kirchhoff-egyenlet írható fel, ahány ismeretlen van. Az egymástól *független csomóponti egyenletek* száma eggyel kevesebb, mint az összes csomópontok száma. Annyi hurokegyenlet írható fel, ahány *független hurok* van a rendszerben. Független egy hurok a többitől, ha legalább egy olyan ágat tartalmaz, amely a többiek egyikében sem szerepel.

A Kirchhoff-egyenletek rendszere általában bonyolult lineáris egyenletrendszert alkot, megoldásuk körülményes. Megoldást jelenthet az ellenállásrendszer egyenértékű átalakítása nem soros, illetve párhuzamos részek összevonásával.

Háromszög–csillag átalakítás ($\Delta - Y$ *átalakítás*). Sok esetben a bonyolultabb ellenálláshálózat egyszerű soros és párhuzamos kapcsolásra vezethető vissza, ha a hálózat egy részét kicseréljük más ellenállás-kombinációra, de olyan módon, hogy a hálózat *többi részében semmilyen változást ne okozzon:* sem az ágak áramai, sem a feszültségek értékei ne változzanak meg. Ezt a hálózat *ellenálláshű átalakításának* nevezzük. Ilyen a *háromszög–csillag,* vagy másképpen *delta–ipszilon* átalakítás is, amelyben egy háromszög alakban összekapcsolódó ellenállásrendszert a háromszög csúcspontjai között 3 ágú csillag alakú rendszerrel helyettesítünk (egy újabb csomópont beiktatásával) (7.62. ábra).



7.62. ábra

Szemeljünk ki a hálózatból egy R_{12}, R_{23}, R_{31} ellenállású ágakból álló háromszöget, amelynek a hálózat többi részével való csatlakozási pontjait 1, 2, illetve 3-mal jelöljük. Iktassuk ki a hálózatból ezt a három ellenállást, és kapcsoljuk helyébe az R_1, R_2, R_3 ellenállású ágakat, amelyek egy-egy kivezetése a közös új, O pontba, másik kivezetése pedig az 1, 2, illetve 3 pontokhoz csatlakozik. Ismerjük a kétindexes (Δ) ellenállásértéket, és ezek segítségével ki akarjuk fejezni az egyindexes (Y) ellenállásokat. E célból felírjuk azt a követelményt, hogy bármelyik pontpárra nézve ugyanakkora legyen a két rendszer ellenállása.

A háromszögkapcsolásban az 1-es és 2-es pontok között az R_{31} és R_{23} van sorba kapcsolva, ezek eredője $R_{31}+R_{23}$. Ezzel van párhuzamosan kapcsolva az R_{12} ellenállás, így a három ellenállás eredője

$$R_{e12\Delta} = \frac{R_{12}\left(R_{31}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}.$$

A csillagkapcsolásban az 1-es és 2-es pontok közötti eredő ellenállás $R_1 + R_2$. A két eredő ellenállásnak egymással egyenlőnek kell lennie, vagyis az 12 pontpárra (és a 23, 31 pontpárokra nézve hasonlóan):

$$R_{e12\Delta} = \frac{R_{12}\left(R_{31}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = R_1+R_2 = R_{e12Y},$$

$$R_{e23\Delta} = \frac{R_{23}\left(R_{31}+R_{12}\right)}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = R_2+R_3 = R_{e23Y},$$

$$R_{e31\Delta} = \frac{R_{31}\left(R_{12}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = R_3+R_1 = R_{e31Y}.$$

Ha az első és harmadik egyenlet összegéből kivonjuk a második egyenletet, egyszerűsítés után R_1-re a következőt kapjuk:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}. \qquad (7.65a)$$

Hasonló módon (vagy az indexek értelemszerű cseréjével) a másik két helyettesítő ellenállás:

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad (7.65b)$$

és

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}. \qquad (7.65c)$$

Szavakkal: *A csillagkapcsolásban az eredeti hálózat valamelyik pontjához csatlakozó ellenállásértékét megkapjuk, ha a háromszögkapcsolásban ugyanezen ponthoz kapcsolódó két ellenállás szorzatát osztjuk az eredeti háromszögkapcsolás ellenállásainak összegével.*

Csillag–háromszög átalakítás ($Y - \Delta$ *átalakítás*). Más esetekben ennek az átalakításnak a fordítottja, a *csillag–háromszög* átalakítás vezet célhoz. Előző egyen-

letrendszerünkből most a kétindexes mennyiségeket kell kifejezni az egyindexesekkel.

E célból osszuk el a (7.65a) egyenletet a (7.65b), majd a (7.65b) egyenletet a (7.65c) egyenlettel, és fejezzük ki R_{31} értékével a másik két ismeretlen ellenállást!

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_{31}}{R_{23}} \quad \rightarrow \quad R_{23}=R_{31}\frac{R_2}{R_1},$$

$$\frac{R_2}{R_3}=\frac{R_{12}}{R_{31}} \quad \rightarrow \quad R_{12}=R_{31}\frac{R_2}{R_3}.$$

A kapott kifejezéseket helyettesítsük be a (7.65a) egyenletbe, és fejezzük ki az R_{31} ismeretlen ellenállást:

$$R_1=\frac{R_{31}\cdot R_{31}\frac{R_2}{R_3}}{R_{31}\frac{R_2}{R_3}+R_{31}\frac{R_2}{R_1}+R_{31}}=\frac{R_{31}\frac{R_2}{R_3}}{\frac{R_2}{R_3}+\frac{R_2}{R_1}+1}=\frac{R_{31}\frac{R_2}{R_3}}{\frac{R_2}{R_3}+\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_2}{R_2}}=\frac{R_{31}\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}.$$

Innen az első kétindexes (háromszög-) ellenállás az egyindexes (csillag-) ellenállásokkal kifejezve:

$$R_{31}=R_1R_3\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

vagy tömören az $\frac{1}{R_0}=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$ jelölés bevezetésével:

$$R_{31}=\frac{R_1R_3}{R_0}. \qquad (7.66a)$$

Hasonlóképpen a többi háromszög-ellenállás:

$$R_{12}=\frac{R_1R_2}{R_0}, \qquad (7.66b)$$

$$R_{23}=\frac{R_2R_3}{R_0}. \qquad (7.66c)$$

Szavakkal: *Háromszögkapcsolásban a hálózat két pontjához csatlakozó (háromszög-) ellenállás értékét megkapjuk, ha a csillagkapcsolásban szereplő, ugyanezen két ponthoz csatlakozó két ellenállás szorzatát szorozzuk a három (csillag-) ellenállás reciprok értékének összegével.*

Érdekességként megemlítjük, hogy a vezetőképességek csillag–delta átalakításának formulái hasonlítanak a delta–csillag átalakítás ellenállás-formuláihoz:

$$G_{12}=\frac{G_1G_2}{G_1+G_2+G_3},$$

$$G_{23}=\frac{G_2G_3}{G_1+G_2+G_3},$$

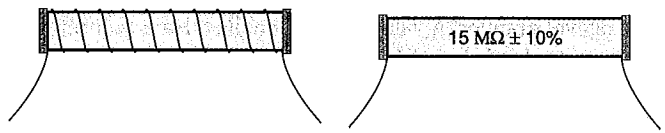
$$G_{31}=\frac{G_3G_1}{G_1+G_2+G_3}.$$

Szavakkal: *Háromszögkapcsolásban a hálózat két pontjához csatlakozó vezetés értékét megkapjuk, ha a csillagkapcsolásbeli, ugyanezen két ponthoz csatlakozó két vezetésszorzatát osztjuk a csillagkapcsolás vezetéseinek összegével.*

7.6.3. Technikai ellenállások

A gyenge- és erősáramú technikában szükség van a feszültség, az áramerősség szabályozására, rögzített feszültségértékek beállítására. E célokra többek között különféle kivitelű ellenállásokat használnak.

Huzalellenállás. Szigetelő- (rendszerint kerámia-) hengerre felcsévélt, nagy fajlagos ellenállású vékony huzalból (ún. „ellenálláshuzalból") készülnek (7.63. ábra). (Ezek anyaga többnyire cekasz, nikkelin, manganin, újezüst, konstantán, krómnikkel, kantál nevű ötvözetanyagok.) Végeiken bilincses kivezetések vannak, felületüket szigetelőanyaggal vonják be.



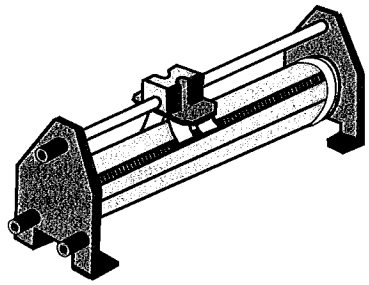
7.63. ábra

Rétegellenállás. Szigetelő kerámiahengerre vagy bakelitlemezre nagy fajlagos ellenállású réteget csapatnak, végeire fém kivezetéseket erősítenek. A réteg vastagságától függ az ellenállásérték. Hengeres kivitelnél az ellenállás úgy növelhető meg adott réteg esetén, hogy a hengerpalást alakú réteget csavarvonal mentén beköszörülik. A menetemelkedésnek megfelelően alakíthatják ki a kívánt hosszúságú és szélességű vezető szalagot (7.64. ábra).



7.64. ábra

Csúszóellenállások. Az állandó értékű ellenállások mellett gyakran szükség van változtatható ellenállásokra. Mind *huzal-*, mind *rétegellenállásokból* készülhetnek. A huzalellenállást egyenes hengerre vagy hengerpalástszerűen körbehajtott szigetelőlemezre felcsévélt szigeteletlen, egymással nem érintkező menetek alkotják, amelyeken egy *csúszóérintkezővel* ellátott szán, illetve kar mozoghat (7.65. ábra). Az ellenállás értéke egy-egy menet ellenállásának megfelelő lépésekben változtatható.



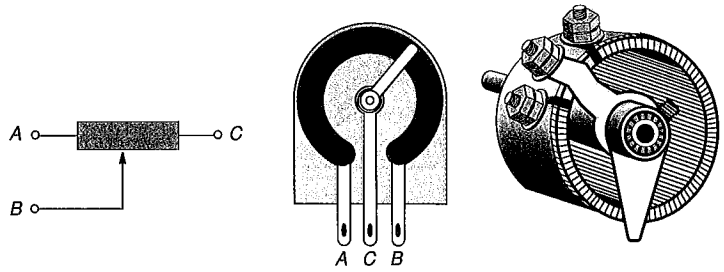
7.65. ábra

A rétegellenállás folyamatos szabályozásra alkalmas. Úgy készül, hogy szigetelőtárcsára szénemulziót visznek fel. A tengellyel ellátott csúszóérintkező a tengely szögelfordulásának függvényében állítja be a kívánt ellenállásértéket. A tengely elfordulási szögével arányosan változik az ellenállás. Ha a szénréteg vastagsága változó, ún. „nemlineáris" ellenállást kapunk. Akusztikai berendezésekhez készülnek pl. logaritmikus ellenállások. Ezeknél az ellenállás a tengely elfordulási szögének logaritmusával arányosan változik.

Potenciométer (feszültségosztó). A változtatható ellenállás olyan kapcsolását nevezzük *potenciométeres kapcsolásnak,* amelynél a forrás feszültsége a teljes vezetékhosszra van kapcsolva, és a kívánt feszültséget az egyik szélső kivezetés és a csúszóérintkezős kivezetés között vesszük le (7.66. ábra). Ha a feszültségosztó nincs terhelve (vagy a terhelő ellenállás igen nagy), akkor a szabályozott feszültség (u) és a forrásfeszültség között

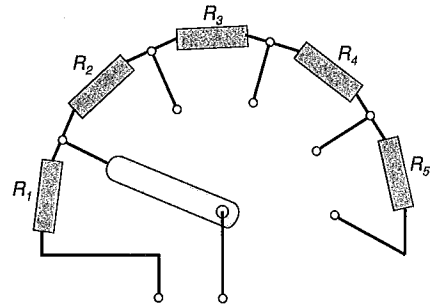
$$u = U\frac{r}{R}$$

kapcsolat van, ahol U a forrás feszültsége, R a huzal (réteg) teljes hosszának ellenállása, r pedig a csúszóérintkező és az egyik huzalvég közötti szakasz ellenállása.



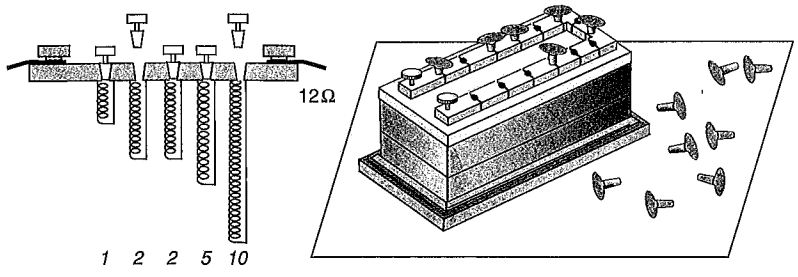
7.66. ábra

Karos ellenállás. A fokozatonként változtatható ellenállások egyik fajtája. Az egymással sorba kapcsolt ellenállások csatlakozópontjait körív mentén elhelyezett érintkezőkhöz kapcsolják. Forgókaros átkapcsoló állítja be a kívánt ellenállásértéket (7.67. ábra).



7.67. ábra

Ellenállásszekrény. Mérésre, hitelesítésre igen pontosan kivitelezett, kevéssé hőérzékeny huzalellenállásokból összeállított szekrény (7.68. ábra). Vastag fémsín kettéfűrészelt darabjait kötik össze felcsévélt, szigetelt ellenálláshuzalok. A fémsín közei kúpos fémdugók befogadására vannak kiképezve. Ha minden dugó szorosan illeszkedik, a fémsín két vége között nulla az ellenállás. Minden egyes dugó kihúzásával a kívánt értékű ellenállás kapcsolódik be (amely eddig a fémdugóval rövidre volt zárva).



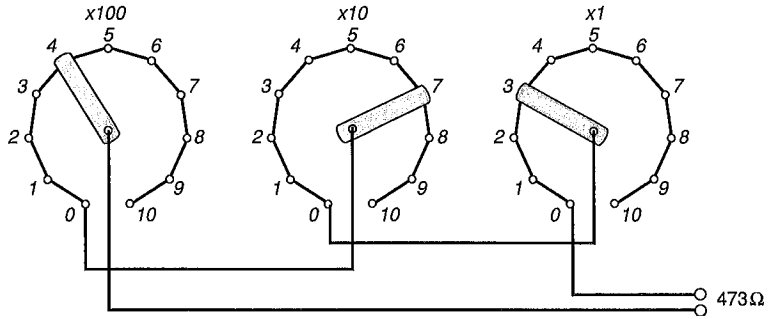
7.68. ábra

Fokozatai:

1, 2, 2, 5, 10, 20, 20, 50, 100, 200, 200, 500, 1000, 2000, 2000,... Ω.

Ezekből példánkban 1 Ω ugrásonként minden ellenállásérték kirakható 0-tól 6110 Ω-ig.

Dekadikus ellenállás. Ha pl. három karos ellenállást sorba kapcsolunk, a tízes számrendszernek megfelelő ellenállásérték-beállítás válik lehetővé. Minden karos ellenállás 10 egyenlő ellenállásértéket tartalmaz, az egyik sorba kapcsolt 1–1 Ω-os, a következő 10–10 Ω-os, az utolsó pedig 100–100 Ω-os értékeket. A 7.69. ábra szerint 0-tól 1110 Ω-ig bármely egész érték könnyen beállítható. (Ábránkon éppen 473 Ω van beállítva.)

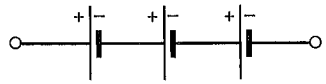


7.69. ábra

7.6.4. Áramforrások kapcsolása

Ha nagyobb feszültségre vagy áramerősségre van szükségünk, mint amit egyetlen áramforrás képes szolgáltatni, akkor több áramforrást kapcsolunk össze.

Soros kapcsolás. Áramforrások soros kapcsolása úgy jön létre, hogy az egyik áramforrás negatív pólusához a másik áramforrás pozitív pólusát kapcsoljuk (7.70. ábra). A sorosan kapcsolt áramforrásokat helyettesítő egyetlen áramforrás elektromotoros ereje (eredő e.m.e.) és belső ellenállása (eredő belső ellenállás) könnyen meghatározható.



7.70. ábra

A belső feszültségekre a huroktörvény szerint érvényes:

$$U_{0e} = U_{01} + U_{02} + \cdots + U_{0n} = \sum_{i=1}^{n} U_{0i}, \tag{7.67a}$$

vagyis *a sorba kapcsolt áramforrások eredő belső feszültsége az egyes áramforrások belső feszültségeinek összegével egyenlő.*

Mivel az elektromotoros erő a belső feszültséggel tart egyensúlyt, ugyanez érvényes az elektromotoros erőkre:

$$\mathscr{E}_e = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}_i. \tag{7.67b}$$

Sorba kapcsolt áramforrások *eredő belső ellenállása – mivel az áramforrások belső ellenállásai is sorba vannak kapcsolva – az egyes áramforrások belső ellenállásának összegével egyenlő:*

$$R_{be} = R_{b1} + R_{b2} + \cdots + R_{bn} = \sum_{i=1}^{n} R_{bi}. \tag{7.68a}$$

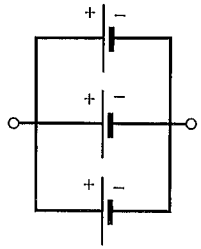
A gyakorlatban legtöbbször egyenlő belső feszültségű és belső ellenállású áramforrásokat kapcsolnak össze. Így n darab egyenlő feszültségű és belső ellenállású áramforrás soros kapcsolása esetén az eredő belső feszültség és belső ellenállás:

$$U_{0e} = nU_{0_1} \quad \text{és} \quad R_{be} = nR_{b_1}. \tag{7.68b}$$

(Ha valamelyik áramforrás pólusait felcseréljük, ennek belső feszültsége „levonódik" a többiek összegéből.)

Soros kapcsolásnál tehát a rendelkezésre álló feszültséget növelhetjük meg.

Párhuzamos kapcsolás. Áramforrások párhuzamos kapcsolása úgy jön létre, hogy több áramforrás azonos sarkait kapcsoljuk egymáshoz (7.71. ábra). Az áramforrások párhuzamos kapcsolásának gyakorlati feltétele, hogy belső feszültségeik megegyezzenek, ellenkező esetben nemkívánatos belső, ún. kiegyenlítő áram indul meg, feleslegesen terhelve a telepet (a kisebb belső feszültségű elem fogyasztóvá válik).



7.71. ábra

Ha az egyes áramforrások belső feszültségei megegyeznek, akkor az általuk alkotott körben nem folyik áram. *Az eredő belső feszültség megegyezik egyetlen áramforrás belső feszültségével:*

$$U_{0e} = U_{0_1}. \tag{7.69}$$

Mivel az áramforrások párhuzamosan vannak kapcsolva, így belső ellenállásaik is. Ezért *a párhuzamosan kapcsolt áramforrások eredő belső ellenállásának reciproka az egyes áramforrások belső ellenállása reciprokainak összegével egyenlő.* Ha minden áramforrás belső ellenállása egyenlő, akkor az n számú, párhuzamosan kapcsolt áramforrás eredő belső ellenállása egyetlen áramforrás belső ellenállásának n-ed része:

$$R_{be} = \frac{R_{b_1}}{n}. \tag{7.70}$$

Az egyes áramforrásokon átfolyó áramok erősségére érvényes Kirchhoff I. törvénye alapján:

$$I_e = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \sum_{i=1}^{n} I_i, \tag{7.71a}$$

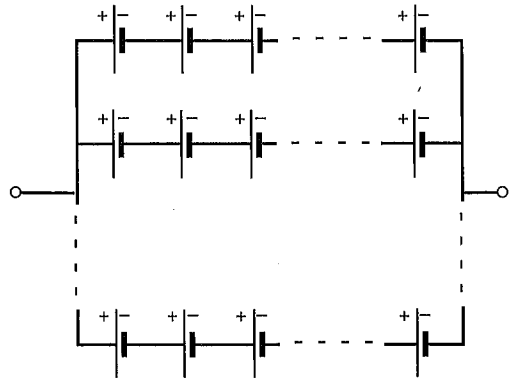
n darab azonos áramforrás esetén:

$$I_e = nI_1, \tag{7.71b}$$

ahol I_e a terhelt rendszer kapcsai között folyó áram erőssége.

Párhuzamos kapcsolással tehát az áramforrásból (telepből) kivehető áram erőssége növelhető az egyetlen áramforrás szolgáltatta áramerősséghez képest.

Vegyes kapcsolás. Áramforrások vegyes kapcsolásával mindkét kapcsolási mód előnyeit felhasználhatjuk (7.72. ábra). Legyen a sorba kapcsolt áramforrások száma egy-egy egységben n_s és a párhuzamosan kapcsolt egységek száma n_p! Az összes áramforrások száma tehát $n = n_s \cdot n_p$.



7.72. ábra

A vegyes kapcsolású áramforrások eredő belső feszültsége:

$$U_{0e} = n_s U_{0_1}, \tag{7.72}$$

belső ellenállása:

$$R_{be} = \frac{n_s}{n_p} R_{b_1}, \tag{7.73}$$

a kivehető áram és az egyes áramforrásokon átfolyó áram közötti kapcsolat:

$$I_e = n_p I_1. \tag{7.74}$$

Áramfelvétel. A teljes áramfelvételt bármilyen kapcsolásnál a terhelés szabja meg. Így tehát a kialakuló áram erőssége az R_k külső, terhelő ellenállástól függ. A kivett áram erőssége:

a) soros kapcsolásnál

$$I = \frac{sU_{0_1}}{sR_{b_1} + R_k},$$

b) párhuzamos kapcsolásnál:

$$I=\frac{U_{0_1}}{\frac{R_{b_1}}{p}+R_k},$$

c) vegyes kapcsolásnál:

$$I=\frac{sU_{0_1}}{\frac{sR_{b_1}}{p}+R_k},$$

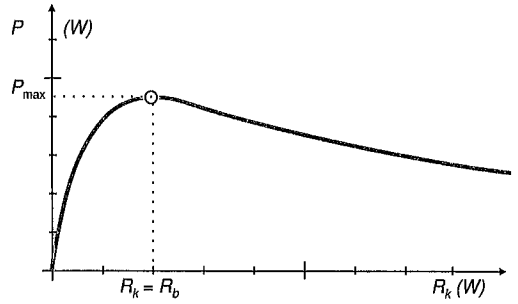
ahol s a sorosan, p a párhuzamosan kapcsolt egységek száma.

Illesztés. Ha az áramforrásra különböző ellenállású fogyasztókat kapcsolunk, különböző erősségű áram alakul ki a körben. Az áram minden esetben melegíti a fogyasztót is és az áramforrást is, hiszen annak R_b belső ellenállásán felvett teljesítmény is képződik. Bár az összteljesítmény a kezdetben nagy külső R_k ellenállás csökkentésével

$$P_{ö}=\frac{U_0^2}{R_b+R_k}$$

összefüggésből láthatóan folyamatosan növekszik, s tart egy maximális értékig $\left(P_{max}=\frac{U_0^2}{R_b}\right)$, az összteljesítménynek a *fogyasztóra eső értéke* nem nő állandóan, hanem egy meghatározott R_k értéknél *maximumot* ér el, s ezután csökken. A fogyasztóra (külső ellenállásra) jutó teljesítmény nagysága a külső ellenállás függvényében (7.73. ábra):

$$P_k=I^2R_k=\frac{U_0^2}{\left(R_b+R_k\right)^2}\cdot R_k.$$



7.73. ábra

A terhelő ellenállás változtatásával elérhető az az állapot, amelynél a legnagyobb teljesítményt lehet kivenni az áramforrásból. Ilyenkor a fogyasztó teljesítménye maximális. A fogyasztó ilyen méretezését *illesztésnek* nevezzük. Ez akkor áll elő, ha az áramforrás belső ellenállása és a terhelő ellenállás megegyezik.

Határozzuk meg a maximális fogyasztóteljesítmény feltételét, nagyságát és egyben a teljesítményátalakítás hatásfokát!

Adott U_0 belső feszültségű (illetve $\mathcal{E}$ elektromotoros erejű) és R_b belső ellenállású áramforrásunk van, egyedül az R_k külső ellenállás változtatható, amivel megszabhatjuk R_b és R_k arányát is. Keressük azt az esetet, amikor P_k maximális.

A külső áramköri rész felvett teljesítménye $P_k = I^2R_k$. Ennek maximális értékét keressük rögzített R_b és U_0 mellett.

Fejezzük ki a külső teljesítményt a belső ellenállással! $P_k = IU_k$, ahol az áramerősség a belső ellenállású szakasz adataival $I=\frac{U_b}{R_b}$. Így a fogyasztó által felvett teljesítmény:

$$P_k=IU_k=\frac{U_bU_k}{R_b},$$

vagyis a fogyasztó számára kivehető legnagyobb teljesítmény értékét az

$$\frac{1}{R_b}U_bU_k$$

kifejezés maximumának meghatározásával kereshetjük meg. (Elegendő az $U_b U_k$ szorzat maximumát meghatározni, mert $1/R_b$ állandó, nem befolyásolja a szorzat értékét.)

Az U_b és U_k külön-külön tetszőleges értéket vehet fel bizonyos határok között, de *nem függetlenek* egymástól, hanem összegük állandó kell hogy maradjon, hiszen $U_b + U_k = U_0 =$ állandó.

Meghatározandó tehát az $U_b U_k$ szorzat maximuma olyan feltétellel, hogy $U_b + U_k$ állandó. A számtani és mértani középértékeket összehasonlítva:

$$\sqrt{U_b U_k} \le \frac{U_b + U_k}{2} = \frac{U_0}{2} = \text{állandó}.$$

Az $U_b U_k$ szorzat akkor a legnagyobb, amikor az egyenlőség teljesül, ez pedig csak akkor teljesül, amikor $U_b = U_k$-val.

Ezek szerint *az áramforrásból akkor vehető ki a legnagyobb teljesítmény, ha a fogyasztó ellenállása megegyezik az áramforrás belső ellenállásával. Ez az illesztés feltétele.*

Ennek a maximális teljesítménynek az értéke tehát:

$$P_{max} = \left(I^2 R_k\right)_{max} = \left(\frac{U_0}{R_b + R_k}\right)^2 R_k = \frac{U_0^2}{4R_b^2} R_b = \frac{U_0^2}{4R_b}.$$

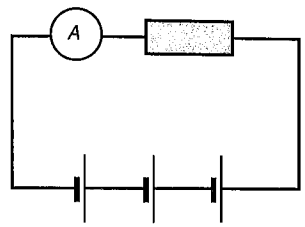
Az illesztett áramkör hatásfoka. Az illesztésnél a belső és külső ellenálláson azonos feszültség esik, $U_b = U_k$, valamint az áramerősség is megegyezik, ezért a hasznos $U_k I$ teljesítmény és a káros $U_b I$ teljesítmény is egyenlő, így a hatásfok:

$$\eta = \frac{P_h}{P_ö} = \frac{U_k}{2U_k} = 0,5, \qquad \text{vagyis } 50\%.$$

7.6.5. Mérőműszerek kapcsolása. Az áramerősség, a feszültség és az ellenállás mérése

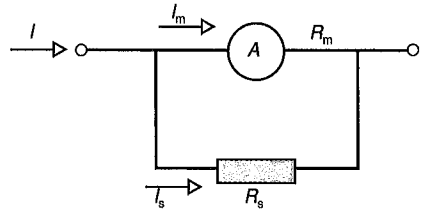
Az áramerősség- és feszültségmérő műszerek legáltalánosabban elterjedt formái az elektromos áram és a mágneses mező kölcsönhatásán alapulnak (lásd a 8. fejezetet).

Az áramerősség mérése. Az *áramerősség-mérő* (ampermérő) kicsiny belső ellenállású műszer, amelyet a mérendő ágba a fogyasztóval *sorba* kell kapcsolni, hogy a fogyasztó árama teljes egészében átfolyjék a műszeren is (7.74. ábra). Minél kisebb a műszer R_m belső ellenállása, annál kevésbé zavarja meg a mérés az áramkör áram- és feszültségviszonyait.



7.74. ábra

Ha az áramkörben az áramerősség várhatóan nagyobb, mint amennyit a műszer károsodás nélkül elvisel (a mutató csak a *végkitérésig* lendülhet ki), akkor célszerű a műszerek *méréshatárát* (a végkitéréshez tartozó áramerősséget) megnövelni. A *méréshatár kiterjesztése* az áram útjának kettéválasztásával, vagyis a műszerrel párhuzamosan kapcsolt kis értékű ellenállással, az ún. *söntellenállással* oldható meg (7.75. ábra).



7.75. ábra

Ha a műszer méréshatárát az eredetinek n-szeresére kívánjuk kiterjeszteni, akkor vele *párhuzamosan*

$$R_s = \frac{R_m}{n-1} \tag{7.75}$$

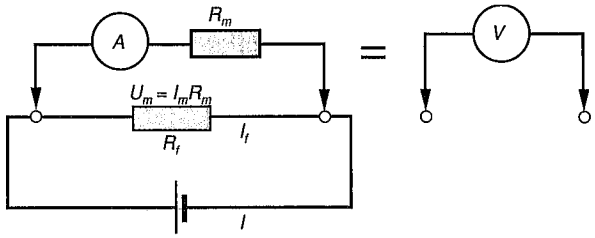
nagyságú ellenállást kell kapcsolnunk, vagyis a műszer ellenállásának n–1-ed részét.

Ha ui. a mérendő áram erőssége $I = nI_m$, Kirchhoff I. törvénye szerint viszont a fogyasztón átfolyó áram erőssége $I = I_s + I_m$, a két egyenletből $nI_m = I_s + I_m$, ahonnan a söntön átfolyó áram erőssége $I_s = (n–1)I_m$. Mivel a párhuzamos ágakban folyó áramok erőssége fordítottan arányos az ágak ellenállásával,

$$\frac{I_s}{I_m} = \frac{R_m}{R_s} = n-1,$$

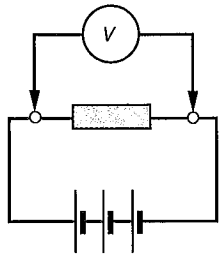
tehát valóban, $R_s = \frac{R_m}{n-1}$.

A feszültség mérése. A *feszültségmérő* (voltmérő) igen nagy belső ellenállású műszer, amely a rajta átfolyó áram erősségének függvényében tér ki. Mivel a belső ellenállása állandó, így a kapcsaira jutó feszültség ezzel az áramerősséggel egyenesen arányos, ezért skáláját feszültségre is lehet kalibrálni (7.76. ábra).



7.76. ábra

A feszültségmérőt a fogyasztóval *párhuzamosan* kell kapcsolni, hogy a műszerre is ugyanakkora feszültség essék, mint a mérendő ágra (7.77. ábra).

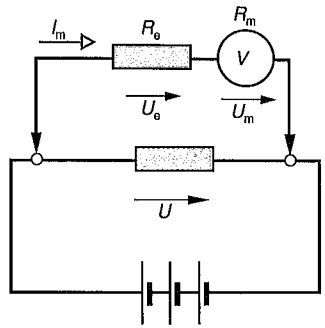


7.77. ábra

Ha a feszültség várhatóan nagyobb, mint a műszer méréshatára, akkor célszerű azt kiterjeszteni. A feszültségmérő *méréshatárának kiterjesztése* egyszerűen megoldható ún. *előtét-ellenállás* segítségével. Ha a voltmérő méréshatárát az eredetinek az n-szeresére kívánjuk kiterjeszteni, akkor a műszerrel *sorba* a műszer ellenállásának n–1-szeresét, azaz

$$R_e = (n-1)R_m$$

értékű előtét-ellenállást kell kapcsolnunk (7.78. ábra).



7.78. ábra

Ha ui. a mérendő feszültség $U = nU_m$, és a mérőműszert tartalmazó ágra jutó feszültség $U = U_e + U_m$, a két egyenletből $nU_m = U_e + U_m$, ahonnan $U_e = (n–1)U_m$ következik. Mivel a soros ellenállásokon eső feszültségek az ellenállásokkal egyenesen arányosak,

$$\frac{U_e}{U_m} = \frac{R_e}{R_m} = (n-1),$$

tehát valóban, $R_e = (n–1)R_m$.

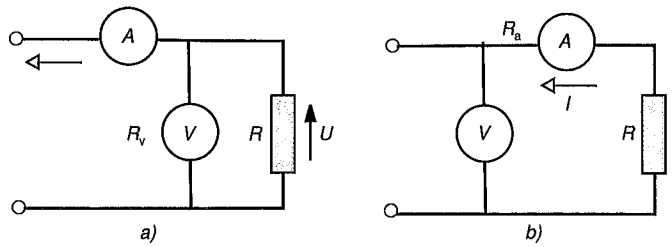
Az ellenállás mérése. Az ellenállásmérésre legelterjedtebben a következő három eljárást alkalmazzák:[21]

a) Ellenállásmérés áramerősség és feszültség egyidejű mérésével (ellenállásmérés Ohm törvénye alapján). Ez a mérés a 7.79a–b. ábrán látható kapcsolások alapján történhet. Megmérjük a fogyasztón átfolyó áram erősségét és a végpontjaira jutó feszültséget. A két összetartozó értéket elosztjuk egymással, és megkapjuk a keresett ellenállást:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Itt U és I a műszerek által mutatott feszültség- és áramerősség-értékek.

[21] Ebben a részben nem foglalkozunk a korszerű digitális mérőműszerek működésével, amelyek közvetlenül ellenállásmérésre is alkalmasak.



7.79a–b. ábra

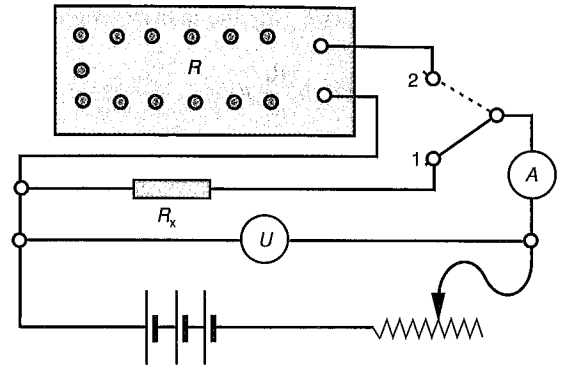
Ha a feszültségmérő ellenállása sokkal nagyobb, mint a mérendő ellenállás, a 7.79a. ábra szerinti kapcsolást alkalmazzuk. Ekkor ui. az ampermérőn a voltmérő árama is átfolyik, ami ilyenkor általában elhanyagolható hibát okoz. Ha mégsem, és ismerjük a voltmérő R_v belső ellenállását, a hiba kiigazítását a következő formulával végezhetjük el:

$$R_x = \frac{U}{I - I_v} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_v}}.$$

Ha a feszültségmérő ellenállása közel akkora, mint a mérendő ellenállás, a feszültségmérő árama már nagy hibát okozna. Ezért a 7.79b. ábra szerint járunk el. Ekkor igaz ugyan, hogy a voltmérő az ellenálláson eső feszültséghez az ampermérőn eső feszültséget is hozzáméri, ez azonban rendszerint elhanyagolható. Ha mégsem, és ismerjük az ampermérő R_a belső ellenállását, akkor a hibát a következő formulával igazíthatjuk ki:

$$R_x = \frac{U - U_a}{I} = \frac{U - IR_a}{I} = \frac{U}{I} - R_a.$$

b) Ellenállásmérés helyettesítéssel. A méréshez ampermérő és *ellenállásszekrény* szükséges. Az áramkörbe először a mérendő ismeretlen ellenállást kapcsoljuk, és megmérjük a körben az áramerősséget (7.80. ábra). Ezután az ismeretlen ellenállás helyett az ellenállásszekrény ismert ellenállásait iktatjuk a körbe mindaddig, amíg az ampermérő az előzővel azonos kitérést nem mutat. Ekkor az ismert ellenállások leolvasásával és összegezésével megkapjuk a mérendő ismeretlen ellenállás értékét. (A csúszóérintkezéssel ellátott változtatható ellenállás a méréshez legalkalmasabb, de a mérések alatt rögzített feszültség beállítását szolgálja.)



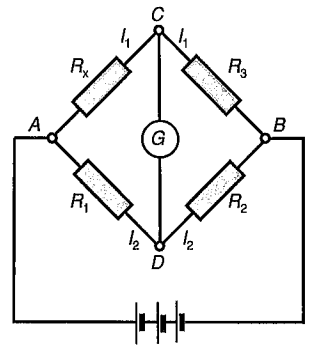
7.80. ábra

c) Ellenállásmérés Wheatstone-híddal (7.81. ábra) Ha mérendő R_x ellenállással zárt körben sorba kapcsolt R_1, R_2, R_3 változtatható ellenállásokat kapcsolunk, majd az ábra szerinti két átellenes csomópont közé érzékeny áramerősség-mérőt (galvanométer) csatlakoztatunk, Wheatstone-híd-kapcsoláshoz jutunk. Ha a galvanométeren áram folyik, akkor a híd kiegyenlítetlen. A változtatható ellenállások megfelelő értékeivel elérhetjük, hogy a hídban (a műszeren át) ne folyjon áram. Ekkor a híd *kiegyenlített,* és a *C* és *D* pontok ekvipotenciálisak, tehát az egyes szakaszokra eső feszültségekre érvényes, hogy

$$I_1 R_x = I_2 R_1,$$

és

$$I_1 R_3 = I_2 R_2.$$



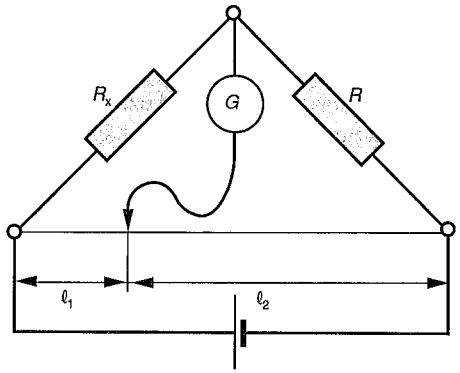
7.81. ábra

A két egyenlet osztásával: $R_x/R_3 = R_1/R_2$, ahonnan az ismeretlen ellenállás már megkapható:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_3.$$

Ha az R_1 és R_2 ellenállásokat vékony, kifeszített ellenálláshuzal szakaszainak ellenállásával állítjuk elő, és a galvanométer kivezetéseit csúszkával látjuk el (7.82. ábra), akkor a csúszka eltolásával is kiegyensúlyozhatjuk a hidat. Ebben az esetben a huzaldarabok hosszaránya helyettesíti az ellenállások arányát:

$$R_x = \frac{l_1}{l_2} R_3.$$



7.82. ábra

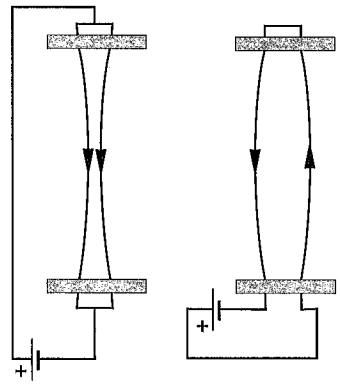
R_3 értékét célszerű úgy megválasztani, hogy a kiegyenlített híd csúszkája a huzal közepe tájékára essék. Ez a módszer igen pontos, mert a hosszúságmérés kis hibával végezhető. Galvanométer helyett fejhallgatót is kapcsolhatunk, amelynek kivezetését a huzalhoz érintgetve sercegő hangot hallunk, ha a híd nem kiegyenlített. A pontos kiegyenlítés e hang elmaradásával igen jól beállítható.

8. Az időben állandó mágneses mező

8.1. A mágneses mező. Forráserősség és örvényerősség

8.1.1. A mágneses indukcióvektor

Ha két, egymás mellett lazán felfüggesztett hajlékony vezetékben (pl. alufólia csíkban) áramot indítunk (8.1. ábra), a két vezeték összerándul vagy elhajlik egymástól attól függően, hogy egyenlő vagy ellentétes a bennük folyó áram iránya. Más kísérletekkel is kimutatható, hogy árammal átjárt vezetékek között erőhatások lépnek fel. Mivel számottevő többlettöltés az áramvezetőkön nem halmozódik fel, nyilvánvaló, hogy az elektrosztatikai kölcsönhatásoktól eltérő eredetű jelenséggel állunk szemben. Tekintettel arra, hogy e kölcsönhatás közben mindkét vezetékben áramnak kellett folynia, a hatás feltehetően *töltésmozgásra* vezethető vissza.

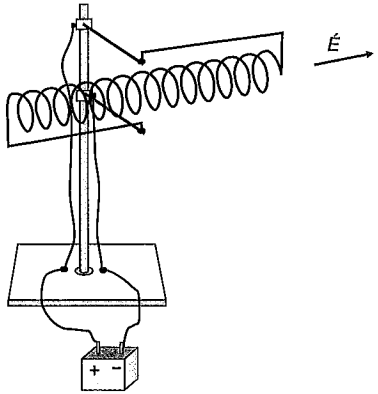


8.1. ábra

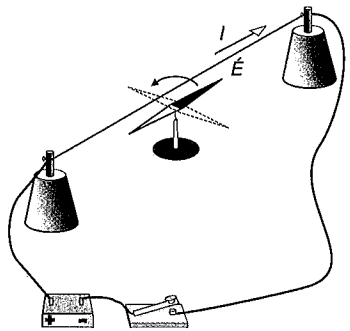
Ha hosszú, egyenes tekercset súlypontjában felfüggesztünk, és egyenáramot hajtunk át rajta, az beáll a mágneses É–D irányba, akár egy iránytű (8.2. ábra).

Az áramnak a mágnességgel más kapcsolata is van. Ha hosszú, egyenes vezetéket É–D irányban kifeszítünk, és alatta iránytűt helyezünk el, az az eredeti helyzetéből arra közel merőlegesen új helyzetbe lendül, mihelyt áramot bocsátunk a vezetékbe (8.3. ábra).

Két, áramjárta tekercs ugyanúgy fejt ki egymásra erőt, mint két acélmágnes.

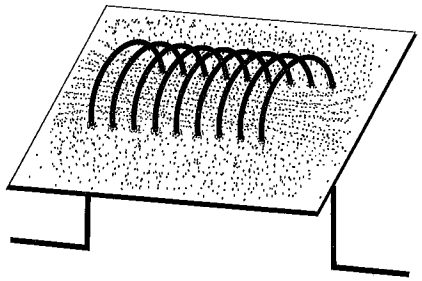


8.2. ábra



8.3. ábra

Ha kartonlemezen átfűzött huzalból készített áramjárta tekercs köré és menetei közé vasport szórunk, az ugyanúgy vonalakba rendeződik, mintha papírlapra helyezett mágnesrúd köré szórtuk volna (8.4. ábra). A látvány *fizikai mező* jelenlétére utal.



8.4. ábra

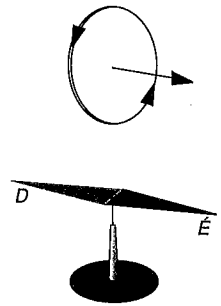
Az áramjárta vezetékek kölcsönhatását egy újfajta mező létrejöttével írhatjuk le, amelyet mozgó töltések keltenek, és amely nyugvó töltésre nem, csak mozgó töltésre hat. Mivel az áramok a közelükben levő iránytűkre, mágneses anyagokra is erőt fejtenek ki, feltesszük, hogy az áramvezetők körül kialakuló mező ugyanolyan eredetű, mint a mágnesek körül kialakuló. Ezért *az áramok közötti kölcsönhatást mágneses kölcsönhatásnak* nevezzük. (Mint később kiderül, az acél mágnessége is a benne levő elektromos töltések mozgására vezethető vissza.)

Az olyan mezőt, amelyet mozgó töltések keltenek, és amely csak mozgó töltésre fejt ki erőt, **mágneses mezőnek** *nevezzük.*

A mágneses mező vizsgálatára – mint azt az elektrosztatikus mezőnél is tettük – próbatestet választunk, és helyről helyre megmérjük a mezőnek arra gyakorolt hatását. A próbatestként kínálkozó iránytűt helyettesítsük kis méretű *körárammal* (vagy lapos tekerccsel), mert ennek erősségét, méreteit ismert módon változtatni tudjuk.[1] Ezt a mágneses próbatestet *magnetométernek* nevezzük. Ha ez a köráram, (vagy a lapos tekercs) eléggé kis méretű, jó közelítéssel pontjaiban „tapogatja le" a mágneses mezőt: a tér pontjainak kis környezetét méri ki.

Ha a minden irányban könnyen elforduló magnetométert tetszőleges eredetű mágneses mező különböző pontjaiba helyezzük, a következő tapasztalatokat szerezhetjük:

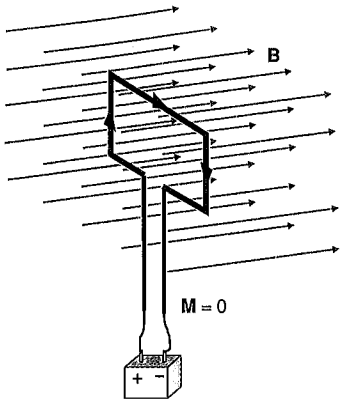
1. A mágneses mező adott erősségű árammal átjárt magnetométerre *forgatónyomatékot* fejt ki, amelynek nagysága függ a helytől és a magnetométer síkjának helyzetétől (irányától) is.
2. A mező bármely pontjában van egy és csak egy olyan irány, amelybe a szabadon forogni képes magnetométer tengelye beáll, akár az iránytű. Az ilyen helyzetű magnetométerre nem hat forgatónyomaték (egyensúlyi helyzet) (8.5. ábra).



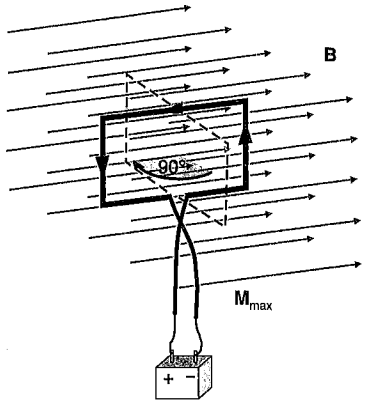
8.5. ábra

3. Ha az egyensúlyi helyzetében levő magnetométer áramának irányát megfordítjuk, annak síkja ellentétes irányba fordul át, stabilis egyensúlyi helyzetet felvéve.
4. A mező ugyanazon helyén mérhető *maximális forgatónyomaték* az egyensúlyi helyzetéből 90°-kal elforgatott helyzetekben hat a magnetométerre (8.6. és 8.7. ábra).

[1] Próbatestként az iránytű, acélmágnes nem felel meg, mert – amint az elemi tapasztalatok mutatják – ezek a külső mágneses mező hatására többé-kevésbé átmágneseződnek, így a mérendő mágneses mező ellenőrizhetetlenül befolyásolja a mérőeszközt. Ehelyett kisméretű köráramot, illetve lapos, áramjárta tekercset használunk, amelynek geometriai méreteit és a benne folyó áram erősségét *mi* szabjuk meg, tehát független a mérendő mágneses mezőtől.



8.6. ábra



8.7. ábra

5. A mező adott pontjában ható maximális forgatónyomaték egyenesen arányos a magnetométer áramának erősségével és a vezetéke által körülhatárolt területtel, és független a magnetométer (keret) alakjától:

$$M_{\max} = BI_{\mathrm{m}}A_{\mathrm{m}},$$

ahol I_{m} a magnetométerben folyó áram erőssége (megkülönböztetendő a mérendő mágneses mezőt keltő áram erősségétől!), A_{m} a köráram, vagy többmenetes lapos tekercs esetén az a tekercs „effektív" területe, amely az egyetlen menet területének és a menetek számának szorzata.

A magnetométerre ható (maximális) forgatónyomaték tehát két tényező szorzataként írható fel, az egyik független a próbatesttől, ez a mezőre jellemző B mágneses indukció, a másik független a mezőtől, a magnetométer m mágneses nyomatéka.

A próbatestre jellemző $m = I_{\mathrm{m}}A_{\mathrm{m}}$ mennyiséget a magnetométer *mágneses nyomatékának,* a mező pontjait jellemző B mennyiséget a mező – adott pontbeli – *mágneses indukciójának* nevezzük.

A magnetométerre ható (maximális) forgatónyomaték tehát két tényező szorzataként írható fel, az egyik független a próbatesttől, ez a mezőre jellemző B mágneses indukció, a másik független a mezőtől, a magnetométer m mágneses nyomatéka:

$$M_{\max} = B \cdot m.$$

A mágneses nyomaték mértékegysége az Am^2, az indukcióé pedig a $\mathrm{J/(Am^2)} = \mathrm{Vs/m^2}$. Ennek az egységnek a neve *tesla,* jele T.

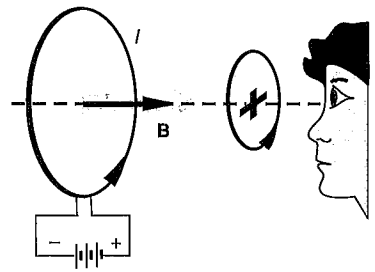
A mező vizsgált pontjára jellemző mágneses indukció nagysága tehát:

$$B = \frac{M_{\max}}{I_{\mathrm{m}}A_{\mathrm{m}}}, \qquad (8.1)$$

vagyis *a mérőkeretre (magnetométerre) ható maximális forgatónyomatéknak és a keret mágneses nyomatékának hányadosa.*

(Ebből következik, hogy B mérőszáma megegyezik a mágneses mező adott pontjába helyezett egységnyi mágneses nyomatékú magnetométerre ható maximális forgatónyomaték mérőszámával.)

A B mágneses indukciót *vektornak* tekintjük, mert érvényes rá a szuperpozíció (vektoriális összegeződés). Megállapodunk abban, hogy legyen a mező adott pontjában a **B** vektor az odahelyezett és egyensúlyi helyzetébe befordult *magnetométer tengelyével párhuzamos,* és a két lehetséges irány közül mutasson arra, amerről visszatekintve a magnetométer áramiránya a *pozitív* (az óramutató járásával ellentétes) forgásiránnyal egyezik meg (8.8. ábra).



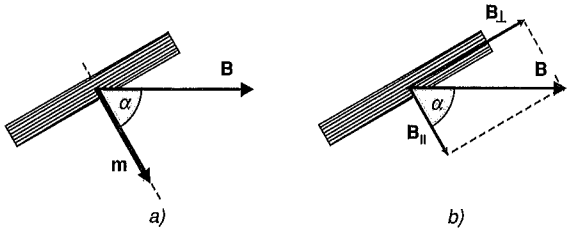
8.8. ábra

Ezzel – az elektromos mező **E** térerősségéhez hasonló módon – a mágneses mezőt is pontonként jellemezhetjük egy-egy vektorral, amely ez esetben a mezőt a köráramra kifejtett *forgató hatása* szempontjából írja le.

A mágneses nyomatékvektor. A mágneses mező által kifejtett forgatónyomatékot könnyen felírhatjuk *általános esetben is,* tehát ha a mérőkeret síkja nem párhuzamos az indukcióvektorral. Bontsuk fel ui. a **B** mezőt a köráram *tengelyével* párhuzamos és arra merőleges indukciójú mezők összegére! Mivel a tengellyel párhuzamos összetevő nem fejt ki forgatónyomatékot, a tengelyre merőleges pedig éppen a maximális nyomatékot fejti ki, írható, hogy $M = IAB_{\perp}$. A 8.9. ábra szerint azonban a tengelyre merőleges $B_{\perp}$ az eredeti indukcióval kifejezve $B_{\perp} = B \sin \alpha$, így a keresett forgatónyomaték

$$M = BIA \sin \alpha \qquad (8.2)$$

nagyságú, ahol α az indukcióvektornak a magnetométer (köráram) tengelyével bezárt szöge.

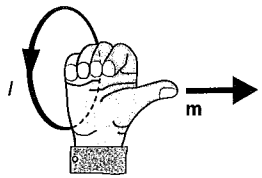


8.9. ábra

A tömör írásmód kedvéért megállapodunk abban, hogy a magnetométer (köráram) *mágneses nyomatékát is vektornak* tekintjük. Ekkor a köráram „erősségét" és síkjának térbeli irányát *egyetlen mennyiséggel* tudjuk jellemezni. A mágnesesnyomaték-vektor *nagysága*

$$m = IA,$$

állása merőleges a köráram síkjára (vagyis a köráram tengelyébe esik), és *iránya* a köráram irányával olyan kapcsolatban van, mint a jobbcsavar előrehaladásának iránya a forgásának irányával. Másképpen szemléltetve: ha a jobb kezünk begörbített ujjai a köráram irányába mutatnak, akkor kinyújtott hüvelykujjunk éppen az **m** vektor irányát jelzi: **m** irányából visszatekintve I az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányban folyik (8.10. ábra).



8.10. ábra

Ezt a *vektort* a magnetométer jellemzőivel is felírhatjuk, ha felhasználjuk a 7.1.7. pontban bevezetett **A** *területvektort*. Ezzel a köráram mágneses nyomatéka így írható:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A}, \tag{8.3}$$

az N menetszámú magnetométer (lapos tekercs) mágneses nyomatéka pedig

$$\mathbf{m} = NI\mathbf{A}.$$

A mágneses mező által kifejtett forgatónyomaték általános esetben vektoriálisan a (8.2) egyenlet alapján tömören így írható:

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}}, \tag{8.4}$$

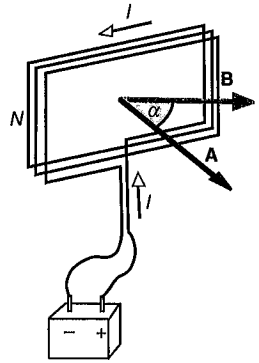
vagy részletezve:

$$\mathbf{M} = NI\mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

ahonnan a forgatónyomaték-vektor nagysága (abszolút értéke):

$$|\mathbf{M}| = NI\,|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \sin\alpha,$$

ahol α az **A** és **B** vektorok által bezárt szög (8.11. ábra).



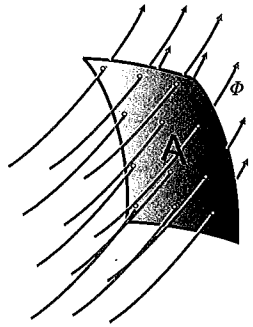
8.11. ábra

8.1.2. A mágneses fluxus. Mágneses forráserősség. Maxwell III. törvénye

Akármilyen alakú áramjárta vezető mágneses mezejét vizsgálva a következő általános tapasztalatot szűrhetjük le. Ha mindig a szabadon beálló magnetométer pillanatnyi **m** nyomatékvektorának irányában – tehát a mező ottani **B** vektorának irányában – haladunk magnetométerünkkel, olyan görbék mentén mozgunk, amelyeknek nincs sehol kezdetük és végük: önmagukba záródnak (ellentétben a nyugvó töltések keltette elektromos erővonalakkal, amelyek töltésből indulnak és töltésen végződnek, vagy a végtelenbe futnak). A **B** vektorok (értelemszerűen) mindenütt ezen vonalak érintőibe esnek.

A mező azon vonalait, amelyek érintői az adott pontbeli mágneses indukció **B** *vektorának tartóegyenesei, a mágneses mező* **indukcióvonalainak,** *vagy röviden „***B***-vonalaknak" nevezzük.*

A tapasztalat azt mutatja, hogy hasonló megállapodással jellemezhető a **B** vektor nagysága a mágneses mezőben, mint az **E** vektor nagysága az elektromos térben: indukció-, illetve erővonal-sűrűséggel. A mágneses mezőben is rajzolhatjuk (vagy elképzelhetjük) úgy az indukcióvonalakat, hogy „sűrűségük", vagyis az e vonalakra merőleges felület egységnyi területén áthaladó indukcióvonalak száma mindenütt a **B** mágneses indukcióvektor nagyságával (abszolút értékével) egyezzék meg. (8.12. ábra). Ehhez az indukcióvonalakat sehol sem kell megszakítani.



8.12. ábra

Az A felszínű felületen merőlegesen áthaladó (merőlegesen metsző) indukcióvonalszámot **mágneses fluxusnak** *(indukciófluxusnak) nevezzük és Φ-vel jelöljük.* Megállapodásunk szerint

$$B = \frac{\Phi_A}{A_n}, \tag{8.5}$$

ahol Φ_A a fluxusnak az a része, amely az A_n felszínű felületen áthalad. Az n index a felület indukcióvonalakra való merőlegességét jelzi. (Ha a szövegkörnyezetből kiderül, miről van szó, röviden csak $B = \Phi/A$-t írunk.) Ebből az összefüggésből az adott felület indukciófluxusa és annak a mértékegysége meghatározható:

$$\Phi = BA,$$

egysége a $\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{m}^2 = \mathrm{Vs} = \mathrm{Wb}$ (weber).

Inhomogén mezőben – hasonlóan az elektromos fluxus számításához, lásd a 7.1.4. alpontot – az *A* felületen áthaladó mágneses fluxust a

$$\boxed{\Phi = \sum B_n \Delta A} \tag{8.6a}$$

összeggel kell kiszámítanunk, ahol B_n a felület megfelelően kicsiny ΔA területű darabjának érintősíkjára merőleges indukcióvektor-komponens előjeles nagysága. Pozitív az értéke akkor, ha a ΔA területű felületelem irányított határgörbéjével a $\mathbf{B}_n$ vektor *jobbsodrású rendszert* alkot.

A területvektor fogalmának felhasználásával a fluxus tömören így írható:

$$\boxed{\Phi = \sum_A \mathbf{B}\Delta\mathbf{A}}. \tag{8.6b}$$

Azt a tényt, hogy a mágneses mező *zárt* indukcióvonal szerkezetű, úgy is kifejezhetjük, hogy *a mágneses mező forrásmentes,* vagyis *nincsenek mágneses töltések, amelyekből az indukcióvonalak kiindulnának.* Ez egyenértékű azzal a kijelentéssel, hogy **bármely zárt felületen áthaladó teljes mágneses fluxus zérus, vagyis bármely térfogat mágneses forráserőssége nulla:**

$$\boxed{N_B = 0}, \tag{8.7a}$$

vagy részletezve:

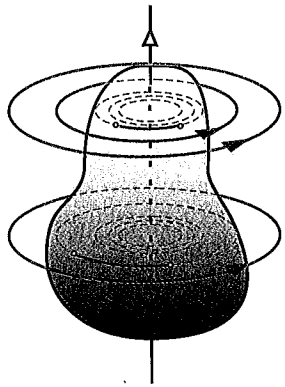
$$\boxed{\sum_{\substack{\text{zárt}\\ \text{felületre}}} \mathbf{B}\Delta\mathbf{A} = 0}, \tag{8.7b}$$

vagy szokásos jelöléssel az összegezési jel fölött írt kis karikával jelezve a felület zártságát:

$$\boxed{\overset{\circ}{\sum_A} \mathbf{B}\Delta\mathbf{A} = 0}. \tag{8.7c}$$

Könyvünkben ez utóbbi jelölést használjuk. A (8.7) képletekkel megfogalmazott állítás *Maxwell III. törvénye.* Szemléletes jelentése: ha bármilyen alakú zárt felületből indukcióvonalak lépnek ki, akkor ugyanannyi indukcióvonalnak is kell belépnie e felületen át annak belsejébe (8.13. ábra).

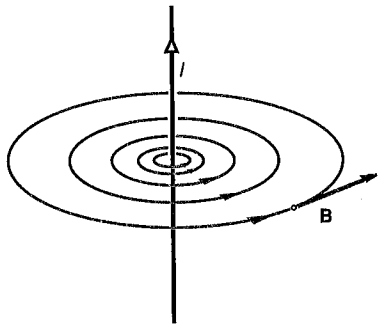
Ebből az alaptörvényből látjuk, hogy a mágneses mező szerkezete alapvetően eltér az elektrosztatikai mező szerkezetétől. Azt, hogy az indukcióvonalak önmagukba visszatérő görbék, hasonlatosan egy örvénylő folyadék részecskéinek pályáihoz, úgy fejezzük ki, hogy a mágneses mező *örvényes mező.* A mágneses mező tehát nemcsak forrásmentes, hanem örvényes is.



8.13. ábra

8.1.3. A mágneses mező örvényerőssége. A gerjesztési törvény. Maxwell IV. törvénye

Ha a legkülönbözőbb alakú vezetékekben folyó, bármilyen erősségű áramok által keltett mágneses mező indukcióvonalait magnetométeres mérésekkel meghatározzuk, azt tapasztaljuk, hogy e vonalak hurokszerűen körülveszik az áramokat vagy azok egy részét, vagyis az indukcióvonalak nemcsak zártak, hanem *áramokat is kerülnek meg*. Ezt úgy fejezzük ki, hogy *a mágneses mező örvényeit az áramok keltik* (8.14. ábra).



8.14. ábra

A mágneses mezőben felvett zárt g görbére vonatkozó **örvényerősség** értelmezése az elektromos mező mintájára történik:

$$\boxed{\ddot{O}_B = \overset{\circ}{\sum_g} \mathbf{B}\Delta\mathbf{r}} \qquad (8.8)$$

(lásd a 7.2.3. alpontot).[2]

Kapcsolat az áram erőssége és az örvényerősség között. Keressük az örvénykeltő áramok és a mező örvényerőssége közötti kapcsolatot! A legegyszerűbb esetből induljunk ki. Mérjük meg a magnetométerrel az igen hosszú (ún. „végtelen") egyenes vezető közelében kialakuló mágneses mező indukcióját! A pontos mérések azt mutatják, hogy *az indukció nagysága egyenesen arányos a vezetékben folyó áram erősségével, és fordítottan arányos a vezetéktől mért távolsággal:*

$$B \sim \frac{I}{r}.$$

Vegyünk fel átmenetileg egy arányossági tényezőt! Ezzel a következő egyenlethez jutunk:

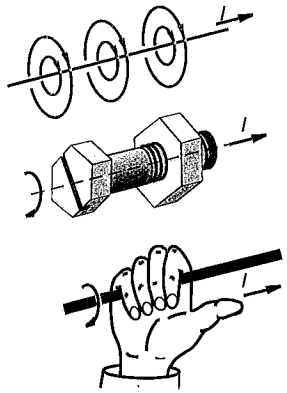
$$B = k' \frac{I}{r}. \qquad (8.9)$$

Az egyenes vezetékben folyó áram által keltett mágneses mező indukcióvonalai – mint az a szimmetria miatt belátható – a vezetékre merőleges síkú körök, tehát a **B** indukcióvektorok tartóegyenesei mindenütt merőlegesek a vezetékre. Az indukcióvektorok *irányát* (és ezzel az indukcióvonalak irányítását is) az áramvezetőt körülfogó *jobb kezünk* begörbített ujjainak iránya mutatja, ha a kinyújtott hüvelykujjunkat az áram irányába állítjuk be. Megjegyezhetjük az indukcióvonalak irányítását a jobbmenetű csavar forgatásának és előrehaladási irányának összehasonlításával is (8.15. ábra).

Ez a kapcsolat adja meg a mezőt keltő áram és a létrejött mező indukciója közötti alapvető összefüggést. Most már a korábban értelmezett örvényerősséget a keltő áramokkal matematikailag könnyen kifejezhetjük!

Számítsuk az örvényerősséget először egy olyan görbére, amely az egyszerűség kedvéért a hosszú egyenes vezető körül felvett koncentrikus kör, vagyis amelyet „ráültettünk" egy indukcióvonalra! Ebben az esetben a (8.8) szorzatösszegből

[2] Míg az elektromos mező örvényerőssége a zárt görbén végigvezetett töltésen végzett munkával kapcsolatos, addig a mágneses örvényerősségnek – miután nincsenek mágneses töltések – nincsen ilyenféle jelentése. Az értelmezés pusztán analógia alapján történik. Mégis, e fogalom haszna a mező szerkezetének leírásában és bizonyos számítások egyszerűségében mutatkozik meg.



8.15. ábra

az indukcióvektor abszolút értéke kiemelhető, mert a vezetéktől azonos távolságra minden irányban azonos nagyságú indukció keletkezik, így (8.8)-ra az

$$\Phi_B = \sum_g \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} = \sum_g |\mathbf{B}||\Delta\mathbf{r}|\cos\alpha = B\sum_g |\Delta\mathbf{r}| = B2r\pi \qquad (8.10)$$

egyszerű kifejezést kapjuk, ugyanis $\Delta\mathbf{r}$ csökkentésével a $\mathbf{B}$ és $\Delta\mathbf{r}$ közötti α szög nullához, és így $\cos\alpha$ + 1-hez tart, ha a g görbét úgy irányítjuk, hogy az indukcióvonal irányával azonos legyen, egyúttal a Δr húr nagysága minden határon túl közelít a Δs ívhosszhoz. Ez utóbbi pedig azt jelenti, hogy $\sum_g |\Delta\mathbf{r}| \to \sum_g \Delta s = 2r\pi$ éppen a körvonal hossza.

Az örvényerősség és az azt keltő áram közötti kapcsolatot a (8.9) összefüggésből nyerjük, ugyanis átrendezéssel $Br = k'I$, amit az g görbére számított örvényerősség kifejezésének jobb oldalába írva azt kapjuk, hogy

$$\Phi_B = 2\pi k'I,$$

vagyis az örvényerősség egyenesen arányos az azt keltő áram erősségével.

Ezt az összefüggést az áramerősséget szorzó háromtényezős konstans egybefoglalásával a következőképpen írhatjuk fel egyszerűen:

$$\boxed{\Phi_B = \mu_0 I} \qquad (8.11)$$

ahol a $2\pi k'$ értékét μ_0-val rövidítettük. A nulla index arra utal, hogy az összefüggés vákuumra vonatkozik.

Ezzel a vezetéktől mért r távolságra keltett B indukció nagysága is megkapható, ha (8.10)-et (8.11)-be írjuk:

$$B \cdot 2r\pi = \mu_0 I,$$

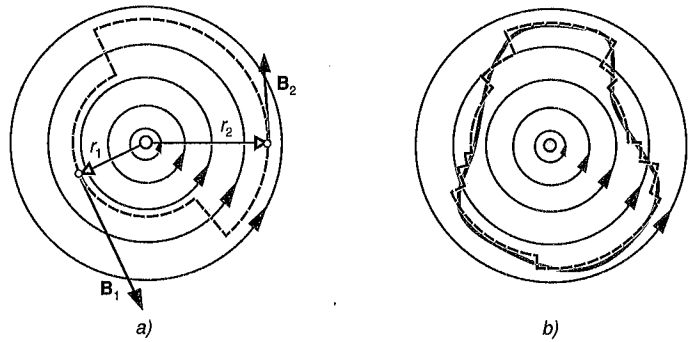
ahonnan

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}. \qquad (8.12)$$

A μ_0 együttható neve *vákuumpermeabilitás* vagy *mágneses vákuumállandó*. Nagyságát először B, r, I mérésével határozták meg. Értéke $1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Vs/(Am)-nek adódott.

(Korszerű definícióját a 8.2.3.1. alpontban találjuk meg.)

Mivel a körvonal ívhosszának és a vonal mentén mért indukció nagyságának szorzata állandó, ezért az örvényerősség független a mérőgörbe (esetünkben koncentrikus kör) nagyságától (vagyis a sugarától). A 8.16a,b ábrák alapján az is belátható, hogy a mérőgörbe

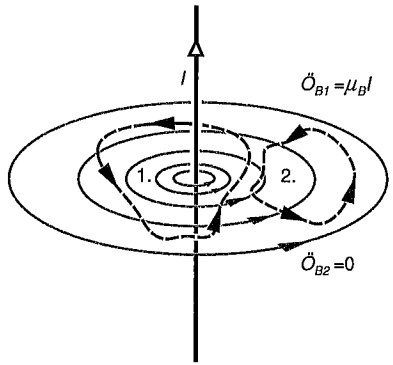


8.16. ábra

alakjától is független, csak az általa körülhatárolt áram erősségétől függ! Zérus az örvényerősség minden olyan görbére számítva, amely nem vesz körül áramot (8.17. ábra).

(Vegyük észre, hogy a sugár irányában – vagyis a vezeték felé, és így az indukcióvonalra merőlegesen – haladva a $\cos\alpha = 0$ miatt a $\sum \mathbf{B}\Delta\mathbf{r}$ részletösszeg 0!)

Maxwell feltételezte, hogy *bármely* alakú vezetékekben folyó áramok keltette mágneses mezőre általánosan érvényes, hogy **bármely (irányított) zárt görbére**

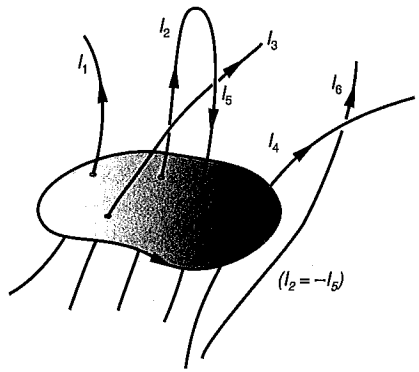


8.17. ábra

számított örvényerősség független a görbe alakjától, és a görbe által körülvett áramok algebrai összegével arányos:

$$\boxed{\overset{\circ}{\sum_g} \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} = \mu_0 \sum_A I}. \qquad (8.13)$$

Ebben a megfogalmazásban a g görbére feszített A felületet átdöfő áramokról van szó, amelyeket akkor veszünk pozitívnak, ha az áramirány és a görbe irányítása jobbrendszert alkot, ellenkező esetben az áramerősség negatív (8.18. ábra).



8.18. ábra

A (8.11) törvényt *Amper-féle gerjesztési törvénynek* nevezzük, amely egyben *Maxwell IV. törvénye.* [Ennek a törvénynek a legáltalánosabb alakját a 10.1. szakasz (10.3) képlete adja meg.]

Ha az áramok nem huzalokban, hanem térben eloszolva (pl. elektrolitban, gázokban) folynak, bevezetve az áramlási tér pontjaira jellemző, lokális áramsűrűség fogalmát az áramlásra merőleges felületen átfolyó áramerősség és a felület területének hányadosával:

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta A}$$

(egysége az A/m^2), akkor a (8.11) törvény a következő kifejezésbe megy át:

$$\boxed{\overset{\circ}{\sum_g} \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} = \mu_0 \sum_A \Delta I = \mu_0 \sum_A j\Delta A}.$$

Ha az áramsűrűséget áramirányú vektornak tekintjük, akkor a skaláris szorzat értelmében az áramerősség a $\Delta\mathbf{A}$ területvektor és a $\mathbf{j}$ áramsűrűség szorzata, vagyis Maxwell törvénye így írható:

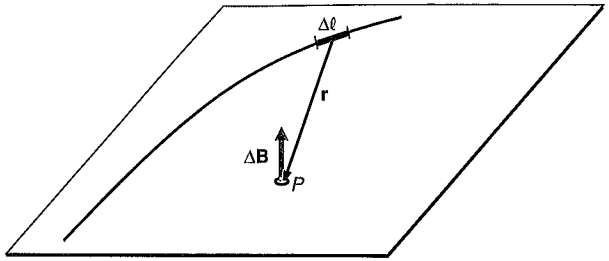
$$\overset{\circ}{\sum_g} \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} = \mu_0 \sum_A \mathbf{j}\Delta\mathbf{A}.$$

8.1.4. A Biot–Savart-törvény

A gerjesztési törvényben az áramok keltette mágneses mező szerkezetének egy *általános* tulajdonságát fogalmaztuk meg, amely egy-egy kiszemelt pontbeli mágneses indukcióról nem mond semmit, csak egy zárt görbe *egészére* számolt mágneses örvényerősségről tesz általános kijelentést. Mégis, bizonyos szimmetriák kihasználásával ezen általános törvény alkalmas arra, hogy a mező egyes pontjaiban mérhető indukciók értékét is meghatározhassuk (lásd a 8.1.5. alpontot!).

Most olyan törvényt keresünk, amely a gerjesztési törvénnyel egyenértékűen írja le a mágneses mezőt azzal, hogy *pontonként* jellemzi az áram keltette mágneses tér indukcióját.

Biot és *Savart* foglalták össze az erre vonatkozó kísérleti eredményeket a róluk elnevezett *Biot–Savart-törvényben,* amely szerint **egy árammal átjárt vezeték elegendően rövid** (egyenesnek vehető) Δl **hosszú szakasza által, a tőle** r **távolságban levő** P **pontban keltett** ΔB **mágneses indukció** ΔB **nagysága egyenesen arányos az** I **áramerősséggel, a vezetékszakasz** Δl **hosszával és a** Δl **és** r **szakaszok között mért** α **szög szinuszával, és fordítottan arányos az** r **távolság négyzetével.** ΔB **merőleges** Δl **és** r **síkjára, és a jobbkéz-szabálynak megfelelő irányú** (lásd 8.13. alpont 8.15. ábráját!) (8.19. ábra):



8.19. ábra

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta l}{r^2}\sin\alpha \,. \qquad (8.14a)$$

Bevezetve az *áramelem-vektor* fogalmát az áramirányú $\Delta\mathbf{l}$ *vezetékelem-vektor* és a benne folyó áram erősségének szorzatával, akkor az áramelem keltette mágneses indukcióvektor a vektoriális szorzat értelmezése alapján így írható fel:

$$\Delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}\,, \qquad (8.14b)$$

ahol az $\mathbf{r}$ vektor az áramelem közepétől a vizsgált pontba mutat.

A teljes áramkör (zárt vezeték) által ugyanabban a P pontban létrehozott mágneses indukcióvektor az elemi áramok keltette indukcióvektorok vektori összege:

$$\mathbf{B} = \sum_{\text{vez}} \Delta\mathbf{B} = \sum_{\text{vez}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{\text{vez}}\frac{\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}. \qquad (8.14c)$$

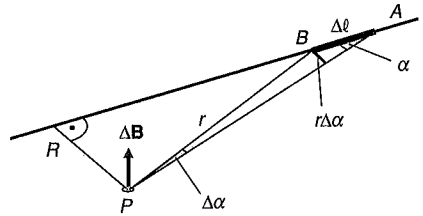
(Az eredményt annál pontosabban megkapjuk, minél rövidebb szakaszokra osztjuk a vezetéket.)

A $\frac{\mu_0}{4\pi}$ tényezőben a *gerjesztési törvényben* is szereplő vákuumpermeabilitás szerepel. Ez nem véletlen, a Biot–Savart-törvény csak akkor ad a gerjesztési törvénnyel összhangban levő eredményt, ha az arányossági tényező éppen $\frac{\mu_0}{4\pi}$. Így tehát a mágneses mezőt ez a két törvény egyenértékűen írja le. Ezt az egyenes vezető mágneses mezejének példáján láthatjuk be.

Alkalmazzuk a Biot–Savart-törvényt igen hosszú (ún. „végtelen") egyenes vezetőre! Az ilyen vezeték esetén a mező P pontjában keltett $\Delta\mathbf{B}$ vektorok merőlegesek a vezeték és a P pont közös síkjára, tehát egy egyenesbe esnek, így a vektorösszegezés skalárösszegezésbe megy át:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta l}{r^2}\sin\alpha, \qquad (8.15a)$$

ahol az összegezést a vezeték teljes hosszára kell elvégezni[3]



8.20. ábra

Az hosszúság szerinti összegezést vezessük vissza *irányszög* szerinti összegezésre! A 8.20. ábra szerint a Δl ívelem helyett írható:

$$\Delta l = \frac{\overline{AB}}{\sin\alpha} = \frac{r\Delta\alpha}{\sin\alpha},$$

ahol $\sin\alpha = R/r$, és így

$$\Delta l = \frac{r\Delta\alpha}{\sin\alpha} = \frac{r\Delta\alpha}{\frac{R}{r}} = \frac{r^2\Delta\alpha}{R}.$$

Ezt (8.15a)-ba helyettesítve az indukció nagyságára a következő összefüggést kapjuk:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\sum_0^{\pi}\sin\alpha\Delta\alpha, \qquad (8.15b)$$

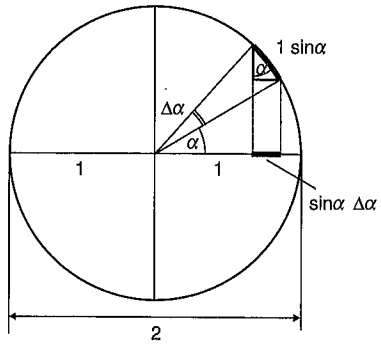
[3] Az ábrán látható R szakasz talppontjától jobbra-balra haladva a Δl ívelemek keltette ΔB elemi indukció egyre rohamosabban csökken, hiszen az r távolság *négyzetével* fordítottan arányos, és ugyanakkor a 0-hoz tartó $\sin\alpha$-val egyenesen arányos. Így tehát „végtelennek" tekinthető akár egy 1 m hosszú vezetékszakasz is a közepe táján felvett $R \ll 1$ m távolságból. Ez azt jelenti, hogy ha elméletileg egzakt pontossággal végtelen hosszú vezetékre számítjuk az indukció nagyságát, elhanyagolható eltérést kapunk a véges vezeték esetén kialakuló indukció nagyságától, vagyis a vezeték távoli szakaszai már elhanyagolható mértékben járulnak hozzá az összeghez. (Két végtelen félegyenes hatását hagyhatjuk el!)

miután a P pontnak a vezetéktől való R távolság reciproka kiemelhető. Ezt az összegezést α szerint 0-tól π-ig kell elvégezni. A 8.21. ábráról leolvasható, hogy

$$\sum_0^{\pi} \sin\alpha\,\Delta\alpha = 2,$$

tehát az indukció nagysága P-ben valóban

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R},$$



8.21. ábra

azaz megkapjuk a gerjesztési törvénnyel meghatározott indukcióértéket [lásd a (8.12) képletet!].

8.1.5. Speciális áramelrendezések mágneses mezeje

A gerjesztési és a Biot–Savart-törvény alkalmazásával különféle alakú vezetékek áramának mágneses mezejét le tudjuk írni. Ezt néhány egyszerű és a gyakorlat szempontjából fontos példán mutatjuk be.

Mozgó ponttöltés mágneses tere. A 7.5.1. pontban láttuk, hogy az áramerősség és az azt képviselő v sebességű ponttöltések közötti kapcsolat $I = nev\,A$. Ezt a Biot–Savart-törvénybe írva az áramelem keltette indukció nagyságára kapjuk:

$$\Delta B_{\Delta l} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{nevA\Delta l}{r^2}\sin\alpha,$$

ahol $nA\Delta l = nV = N$ azon összes ponttöltések száma, amelyek a vezeték Δl hosszú szakaszán mozognak. Ebből egyetlen elemi töltés által keltett mező indukciója a szuperpozíció törvénye szerint $\Delta B_{\Delta l}$-nek N-edrésze, tehát:

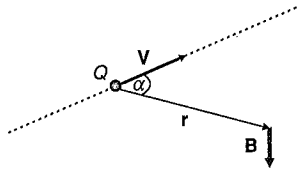
$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ev}{r^2}\sin\alpha}, \tag{8.16a}$$

vagy vektoriálisan (8.22. ábra):

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^3}}, \tag{8.16b}$$

a szuperpozíció miatt ($Q = Ne$) általában:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^3}}.$$



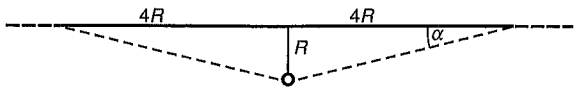
8.22. ábra

Végtelen hosszú egyenes áramvezető. A gerjesztési törvényből könnyen megkaptuk, hogy az ideális (végtelen) egyenes vezető hengerszimmetrikus mágneses terének indukciója a vezetéktől R távolságra milyen nagyságú (8.12):

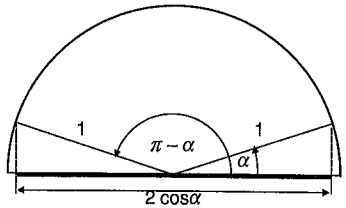
$$B = \mu_0\frac{I}{2\pi R}. \tag{8.17}$$

A **B** vektor merőleges a vezeték és a vizsgált pont közös síkjára, és az áramiránnyal jobbkéz-szabály szerint veszi fel irányát.

Itt meg kell jegyezni, hogy ez elméleti érték, hiszen végtelen hosszú egyenes vezető nincsen. A (8.12) képlettel megadott indukciót pedig csak a végtelen hosszú egyenes vezető árama keltene. A gyakorlatban azonban igen jó közelítése ez a véges hosszúságú egyenes vezetőszakasz keltette indukciónak, ha relatíve közel vagyunk a vezetékhez és távol a végeitől (vagyis a közepe táján). Ugyanakkor, ha az eredő mágneses indukciót keressük, az áramkör zárásához szükséges vezetékrészek távol húzódjanak a vizsgált pont környezetétől.



8.23a. ábra



8.23b. ábra

Ennek belátására alkalmazzuk a Biot–Savart-törvényt egy olyan egyenes vezetőszakaszra, amelynek teljes hossza csak $l = 8R$, vagyis végtelen félegyenesek helyett csak $4R$-rel tér el balra és jobbra a vezeték a vizsgált pontnak a vezetékre eső vetületétől (8.23a ábra). Ekkor a vezeték egyik végpontjához tartozó α szögre $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, illetve $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}25 = 14{,}036°$. Tehát a (8.15b) összegezést nem 0-tól π-ig (illetve 0-tól 180°–ig), hanem mindössze 14,036°-tól 180° – 14,036°-ig kell elvégezni.

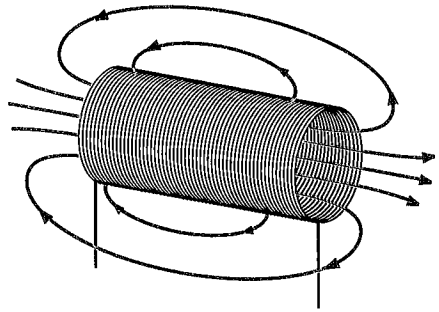
Ennek az összegnek az értéke a 8.22b. ábra szerint $2\cdot\cos 14{,}036° = 1{,}9403$. Így tehát az ideális (végtelen hosszú) és a valóságos vezeték keltette B-nek a $\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}$ szorzójába (8.15b) nem 2, hanem 1,9403 kerül, vagyis az indukció nagyságára

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\sum_0^{\pi}\sin\alpha\Delta\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\cdot 1{,}9403 = \frac{\mu_0}{2{,}0615\pi}\frac{I}{R}$$

értéket kapunk. Az eltérés a két szorzó között 2–1,9403 = 0,0597, ami mindössze 0,0597/2 = 0,02985 = 2,985%, ami kisebb, mint 3%!

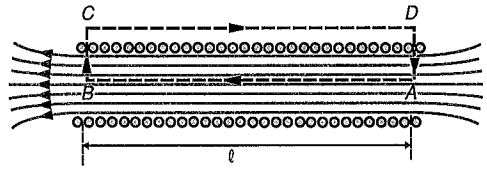
Ez azt jelenti, hogy ha $l = 8R$ hosszúságú vezeték két végét egy-egy végtelen hosszú félegyenessel megtoldjuk, az azokban folyó áram okozta mágneses indukció járuléka kevesebb mint 3%-kal változtatja meg annak az indukciónak az értékét, amelyet e vezeték $l = 8R$ hosszúságú része kelt a P pontban. Ez az eltérés pl. $l = 24\,R$ esetén már csak 2 – 1,9931 = 0,0069, azaz 0,345%!

Hosszú egyenes tekercs (szolenoid). Készítsünk egy sűrűn csévélt, átmérőjéhez képest hosszú egyenes tekercset! A menetszám legyen N, a tekercs hossza l, keresztmetszetének területe A, a benne folyó áram erőssége I. A szimmetriából következik, hogy a keletkező mágneses mező indukcióvonalai párhuzamosak a tekercs tengelyével, amiből következik, hogy a tekercsen belül a mező homogén (8.24. ábra). (Ellenkező esetben ui. fel lehetne venni olyan görbéket, amelyekre számított örvényerősség nem nulla, de a görbe mégsem vesz körül áramot.)



8.24. ábra

Számítsuk az örvényerősséget a 8.25. ábra szerinti $ABCDA$ téglalap kerülete mentén:



8.25. ábra

$$\ddot{O}_B = \sum_{ABCDA}^{O}\mathbf{B}\Delta\mathbf{r} = \sum_A^B\mathbf{B}\Delta\mathbf{r} + \sum_B^C\mathbf{B}\Delta\mathbf{r} + \sum_C^D\mathbf{B}\Delta\mathbf{r} + \sum_D^A\mathbf{B}\Delta\mathbf{r}.$$

Az ábrából látható, hogy az összeg első tagja $B\cdot l$ nagyságú, hiszen B állandó, így kiemelhető, $\cos\alpha = 1$, és $\sum_A^B \Delta r = l$. A második és negyedik tag értéke 0, mert a **B**-re merőleges szakaszokon $\cos\alpha = 0$, végül pedig a harmadik tag is nulla, mert a CD szakaszon elhanyagolhatóan kicsiny a B indukció („végtelen hosszú tekercs esetén a tengellyel párhuzamos indukció 0). Így az örvényerősség az első taggal egyezik meg. Maxwell IV. törvénye alapján ennek értéke az $ABCDA$ zárt görbére kifeszített felületet átdöfő áramok algebrai összegének μ_0-szorosával egyenlő, tehát

$$Bl = \mu_0 NI,$$

hiszen mint az N menet árama egy irányban átdöfi az $ABCDA$ felületet.

Így tehát a hosszú egyenes tekercs belsejében kialakuló mágneses mező indukciója:

$$B=\mu_0\frac{IN}{l}. \tag{8.18}$$

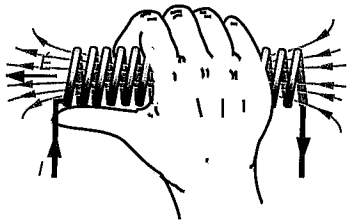
Ez az összefüggés annál pontosabban adja meg a tekercs belsejében az indukció értékét, minél hosszabb az átmérőjéhez képest, és a végeitől messze vizsgáljuk a mezőt. A tekercs végeinél az indukció a közepén mért indukciónak kb. a fele.

A tekercs által keltett mágneses fluxus pedig a $\Phi = BA$ összefüggés alapján:

$$\Phi=\mu_0\frac{INA}{l}. \tag{8.19}$$

(Ennyi indukcióvonalat lehet kelteni egy tekerccsel.)

Az indukció (és indukcióvonalak) iránya az ún. „marokszabállyal" jegyezhető meg: ha jobb kezünkkel megfogva a tekercset, és az áram a begörbített ujjaink irányában folyik, akkor a kinyújtott hüvelykujjunk éppen az indukcióvektorok irányába mutatnak (8.26. ábra).



8.26. ábra

Körtekercs (toroid). Gyakorlati szempontból igen fontos az olyan tekercsnek a mágneses mezeje, amelynek két vége önmagához csatlakozik (8.27a–b. ábra). Itt a keletkező mágneses mező teljes egészében a tekercs véges belső térfogatába van bezárva.[4] Számítsuk az örvényerősséget a körtekercs középköre (tehát egy indukcióvonala) mentén!

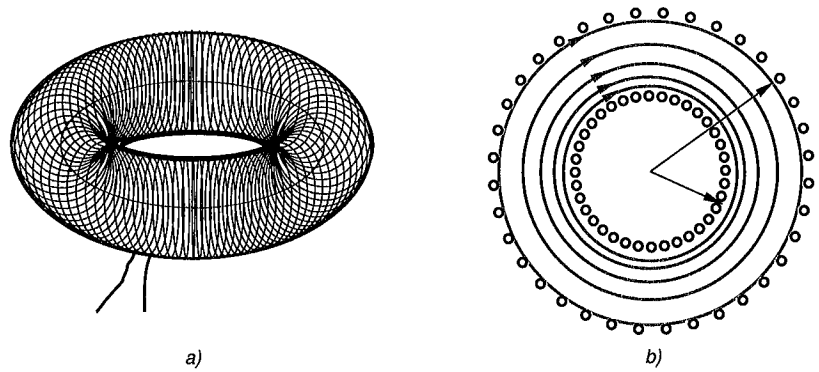
A szimmetria miatt ezen görbe minden pontjában azonos a B indukció nagysága, tehát az összegezésből kiemelhető, és cos $\alpha = 1$ figyelembevételével a gerjesztési törvény így írható:

$$B\cdot 2R_k\pi=\mu_0 NI,$$

[4] Eltekintve attól az igen gyenge mezőtől, amelyet a körtekercs mint egyetlen körvezető kelt, és amely indukcióvektorai minden pontban merőlegesek a tekercs belsejében kialakuló indukcióvektorok irányára.

ahonnan *a toroid középköre mentén* a mágneses indukció nagysága

$$B=\mu_0\frac{IN}{2R_k\pi}. \tag{8.20a}$$



a) b)

8.27. ábra

A körtekercs elsejében, a középponttól tetszőleges $r_{min} < r < r_{max}$ távolságban (mivel a mérőgörbének csak a hossza változik, de a rajta kifeszített felületen ugyanannyi áram folyik keresztül)

$$B=\mu_0\frac{IN}{2r\pi}. \tag{8.20b}$$

(Látható, hogy a körtekercs belsejében keletkező indukció nagysága éppen N-szerese az azonos áramtól átfolyt egyenes vezetőtől r távolságban keletkezett indukció nagyságának.)

Körvezető. Határozzuk meg a körvezető *középpontjában* a mágneses indukció nagyságát! Osszuk fel a vezetéket igen rövid, Δl hosszúságú szakaszokra (8.28. ábra)!

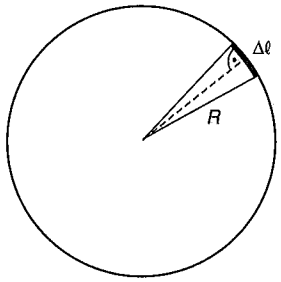
Mivel minden $I\Delta l$ áramelem azonos R távolságra van a kör középpontjától, és R minden áramelemre merőleges, a Biot–Savart-törvényben szereplő összeg minden tagjából kiemelhető az I/R^2 hányados, és sin α minden tagban 1, a következőt kapjuk:

$$B=\sum_g^{\circ}\Delta B=\sum_g^{\circ}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta l}{r^2}\sin\alpha=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\sum_g^{\circ}\Delta l=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}2R\pi,$$

egyszerűsítés után

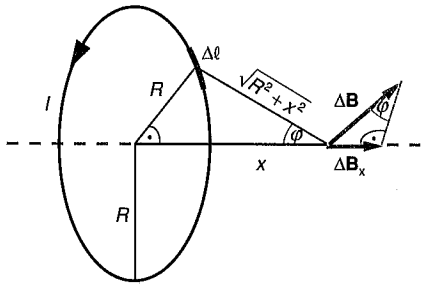
$$\boxed{B=\mu_0\frac{I}{2R}}, \tag{8.21}$$

és az indukcióvektor iránya merőleges a körvezető síkjára a jobbkéz-szabály szerint.



8.28. ábra

Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk meg az R sugarú körvezető *tengelyén* a kör síkjától x távolságra levő pontban a mágneses indukció értékét (8.29. ábra).



8.29. ábra

Az $I\Delta l$ áramelem által létrehozott B_1 indukcióösszetevő-nagyság a Biot–Savart-törvény szerint

$$\Delta B_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta l}{r^2}\sin\alpha=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta l}{\left(R^2+x^2\right)},$$

mert $\sin\alpha=1$ minden helyen. Ennek a tengelyre merőleges komponensei kioltják egymást, az x irányú vetülete pedig

$$\Delta B_x=\Delta B_1\sin\varphi=\Delta B_1\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\Delta l.$$

Ezeket az egy egyenesbe eső komponenseket kell összeadni:

$$\Delta B_x=\sum_0^{2R\pi}\Delta B_x=\sum_0^{2R\pi}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\Delta l=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\sum_0^{2R\pi}\Delta l=$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}2R\pi,$$

ahonnan a tengelyirányú eredő indukció nagysága

$$\boxed{B=\mu_0\frac{IR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}}. \tag{8.22}$$

8.1.6. A mágneses térerősség

A gerjesztési törvény a **B** mágneses indukcióvektor és a mezőt gerjesztő áramok közötti kapcsolatot adja meg:

$$\overset{\circ}{\sum_g}\mathbf{B}\Delta\mathbf{r}=\mu_0\sum_A I.$$

Bevezetve a $\sum_A I=\Theta$ és a $\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$ jelöléseket, a gerjesztési törvény *vákuumban* egy g zárt görbére így írható:

$$\boxed{\overset{\circ}{\sum_g}\mathbf{H}\Delta\mathbf{r}=\Theta}, \tag{8.23}$$

ahol Θ a vezetési áramokra jellemző ún. **gerjesztés,** a $\mathbf{B}/\mu_0=\mathbf{H}$ vektor pedig az ún. **mágneses térerősség** (mágneses gerjesztettség) vektora.

A definícióból következik, hogy *vákuumban* ugyanazon pontban **B** és **H** iránya megegyezik. A mágneses térerősség egysége az $1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}:\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}=1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\cdot\frac{\mathrm{Am}}{\mathrm{Vs}}=1\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$.

A tapasztalat azt mutatja, hogy ha a teljes mágneses mezőt homogén izotróp anyag tölti ki, általában megnő az ugyanazon áramelrendezés (gerjesztés) keltette indukció a vákuumbelihez képest, mégpedig a közeg anyagi minőségétől függően, a vákuumban mért indukcióval egyenesen arányosan:

$$\boxed{\mathbf{B}=\mu_r\mathbf{B}_0}, \tag{8.24}$$

ahol $\mathbf{B}_0$ ugyanazon gerjesztés okozta vákuumbeli indukció, és μ_r az illető közegre jellemző ún. *relatív permeabilitás*. (Természetesen vákuumban $\mu_r = 1$. A tapasztalat szerint a levegő és a vákuum relatív permeabilitása igen jó közelítéssel egyenlő.) A relatív permeabilitás dimenzió nélküli szám, $\mu_r = \frac{B}{B_0}$.

A **B** és **H** vektorok közötti kapcsolat vákuumban, vagy ha a teljes teret homogén, izotróp dia-, para- vagy lágy ferromágneses anyag tölti ki:

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \tag{8.25}$$

ahol $\mu = \mu_r \mu_0$ az illető anyag ún. *(abszolút) permeabilitása.*

A mágneses térerősség tehát *a mezőt keltő áramok* hatását jellemzi; más szóval a **B** mágneses indukció (egyszerű esetben) két tényező szorzataként írható fel, az egyik, amely a gerjesztő áramoktól függ, és független a környezettől, a másik, amelyik független az áramoktól, csak a mezőt kitöltő anyagtól függ.

Ha a mágneses teret nem tölti ki teljesen a homogén izotróp közeg, vagy pedig ún. kemény ferromágneses anyag van a térben, a kapcsolat **B** és **H** között nem ilyen egyszerű. Ennek – és a jelenségkörnek – molekuláris magyarázata van, amelyet az anyagszerkezeti rész mágnességgel foglalkozó 26. fejezetében tárgyalunk meg.

A mágneses térerősséggel az áramkeltette mezők a következőképpen jellemezhetők:

Biot–Savart-törvény:

$$\Delta H = \frac{1}{4\pi} \frac{I \Delta l}{r^2} \sin \alpha, \qquad \text{illetve} \qquad \Delta \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Végtelen egyenes vezető:

$$H = \frac{I}{2R\pi}.$$

Vékony, hosszú egyenes tekercs (szolenoid):

$$H = \frac{IN}{l}.$$

Körtekercs (toroid):

$$H = \frac{IN}{2r\pi} \qquad (r_{\min} < r < r_{\max}).$$

Körvezető középpontjában:

$$H = \frac{I}{2R}.$$

Körvezető tengelyében, a kör középpontjától x távolságban:

$$H = \frac{IR^2}{2\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

v *sebességgel mozgó, Q töltésű, pontszerű test:*

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{Qv}{r^2} \sin \alpha,$$

illetve

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

8.2. Erőhatások a mágneses mezőben

8.2.1. Az áramjárta vezetőre ható erő. A mágneses Lorentz-erő

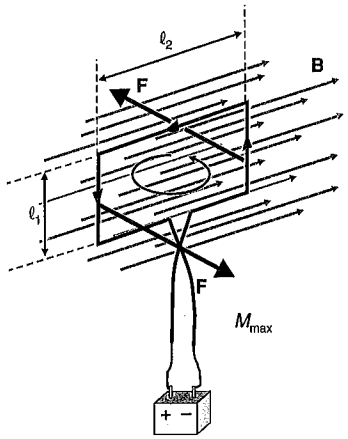
Az áramjárta vezetőre a mágneses mező erőt fejt ki. Ezt az erőt vizsgáljuk ebben a pontban.

Egyenes vezetékre ható erő. Induljunk ki az alapkísérletünkből, amelyben homogén mágneses mezőt vizsgáltunk magnetométerrel (8.1.1. pont). Azt tapasztaltuk, hogy a mágneses mező a magnetométerre forgatónyomatékot fejt ki. Az egyszerűség kedvéért válasszunk egy téglalap alakú vezetőkeretet magnetométernek, és helyezzük el a 8.30. ábra szerint úgy, hogy az l_1 hosszúságú oldala legyen merőleges az indukcióvonalakra, az l_2 oldala pedig párhuzamos azokkal! Ebben az esetben a az összes többi lehetséges helyzetben hatóhoz viszonyítva a maximális forgatónyomaték hat a keretre, amelynek nagysága:

$$M_{\max} = IAB. \tag{8.26}$$

Ez a forgatónyomaték felfogható úgy is, mint a keret *egyes szakaszaira ható erők* eredő forgatónyomatéka. A magnetométer jelen helyzetében az indukcióvonalakkal párhuzamos l_2 vezetőszakaszokra a fennálló szimmetria miatt nem hat erő (nincsen olyan kitüntetett irány, amely indokolna egy erőirányt), a rájuk merőleges l_1 vezetékszakaszokra pedig a **B** indukcióvektorra és a vezetékre merőleges erők hatnak, ui. ebben az esetben a legnagyobb az erőpár forgatónyomatéka (lásd az ábrát). Úgy is fogalmazhatunk, a **B** és l_2 közös síkjára merőleges az egyetlen kitüntetett irány, ami nem indokol magyarázatot. Az imént felírt maximális forgatónyomaték nagyságát a vezetékszakaszokra ható erőkkel kifejezve (az erőpárra vonatkozó összefüggés alapján, lásd a 2.3.4.1. alpontot!) a következő összefüggést kapjuk:

$$M_{\max} = Fl_2. \tag{8.27a}$$



8.30. ábra

A kétféleképpen kifejezett forgatónyomaték összehasonlításával (8.26) és (8.27a)-ból kapjuk:

$$BIl_1l_2 = Fl_2,$$

ui. l_1l_2 a magnetométer területe.

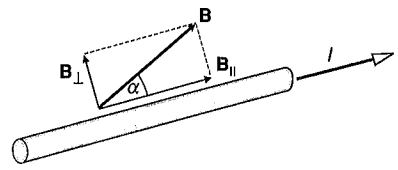
Innen az indukcióra merőleges, l hosszúságú egyenes vezetőszakaszra ható erő nagysága:

$$F = BIl,$$

vagyis *a homogén,* **B** *indukciójú mágneses mező a benne, az indukcióvonalakra merőlegesen elhelyezett, egyenes vezető* l *hosszúságú szakaszára a vezetőszakasz hosszával és a benne folyó áram* I *erősségével egyenesen arányos erőt fejt ki (Lorentz-erő). Az erő* **B**-re és a vezetékre merőleges. Az áramirány, a **B** indukcióvektor és az **F** erővektor ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot.

Ha az egyenes vezeték nem merőleges a homogén mező indukcióvonalaira, akkor a mező **B** indukcióvektorát a vezetékkel párhuzamos ($\mathbf{B}_{||}$) és arra merőleges ($\mathbf{B}_{\perp}$) komponensekre bontva egy, a vezetékre erőt nem kifejtő és egy, a vezetékre maximális erőt kifejtő mezőt kapunk (8.31. ábra). A szuperpozíció tétele alapján a vezetékre $F = B_{\perp}Il$ nagyságú erő hat. Ezt az erőt az eredő (vagyis a teljes) **B** indukcióvektor nagyságával kifejezve az

$$\boxed{F = BIl\sin\alpha} \qquad (8.27b)$$



8.31. ábra

összefüggést kapjuk, ahol α a vezeték és az indukcióvektor által bezárt szög. A vektoriális szorzat segítségével a homogén mező által az egyenes vezetőszakaszra kifejtett erő vektori alakban is kifejezhető:

$$\boxed{\mathbf{F} = I\cdot\mathbf{l}\times\mathbf{B}}. \qquad (8.27c)$$

Itt az $\mathbf{l}$ vektor az áramelem-vektorhoz hasonló módon áramirányú.

Inhomogén mezőben, vagy ha a vezeték *görbe,* az eredő mágneses erőt a kicsiny áramelemekre ható erők vektori összege adja:

$$\boxed{\mathbf{F} = I\cdot\sum\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{B}}. \qquad (8.27d)$$

Mozgó elemi töltésre ható Lorentz-erő. Az áramelemre ható mágneses erő kifejezéséből a mozgó elemi töltéshordozóra ható erőre is következtethetünk. Az áram erőssége ui. (7.39) szerint $I = nev\,A$, amit az áramelemre ható erő (8.25d) kifejezésébe írva az

$$\mathbf{F}_{\Delta l} = nevA\Delta\mathbf{l}\times B$$

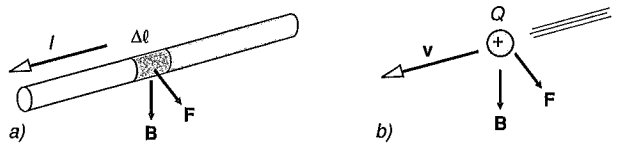
értéket kapjuk (8.32a ábra). Mivel $nA\Delta l$ az A keresztmetszetű, Δl hosszúságú vezetődarabban levő összes szabad töltéshordozó N száma, ebből az egyetlen mozgó elemi töltésre ható erő *(elemi mágneses Lorentz-erő)* nagysága ($F = F_{\Delta l}/N$ alapján) adódik:

$$\boxed{F = evB\sin\alpha}, \qquad (8.28a)$$

vagy vektoriálisan:

$$\boxed{\mathbf{F} = e\mathbf{v}\times\mathbf{B}} \qquad (8.28b)$$

erő jut, ahol $\mathbf{v}$ az áramot alkotó pontszerű töltéshordozó *driftsebessége* (8.32b. ábra).



8.32. ábra

Mozgó ponttöltésre ható erő. Ha egy pontszerű test össztöltése Q, akkor a szuperpozíció törvénye alapján a Q töltést alkotó elemi töltések összegére ható erővel kell számolnunk:

$$\boxed{\mathbf{F}=Q\mathbf{v}\times\mathbf{B}}\,. \tag{8.28c}$$

Erő a keresztezett elektromos és mágneses mezőben. Ha a **v** sebességgel mozgó Q töltés egyszerre elektromos és mágneses mezőben mozog, a *teljes Lorentz-erő* nagyság és irány szerint az erők független szuperpozíciója alapján:

$$\boxed{\mathbf{F}=Q\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)}\,. \tag{8.29}$$

Ki kell emelni, hogy a mágneses Lorentz-erő mindig merőleges a sebességre és a mágneses indukcióra, az elektromos erő pedig térerősség tartóegyenesébe esik (pozitív töltés esetén térerősség-irányú). Az előbbi miatt *a mágneses Lorentz-erő nem végez munkát!*

8.2.2. Szabad töltés mozgása elektromos és mágneses mezőben

Fémből igen nagy feszültséggel vagy a fém izzításával kiszakíthatók bizonyos számban elektronok. Ritkított gázban ionizációval pozitív és negatív ionok hozhatók létre, amelyek szabadon mozoghatnak a kis nyomású edényben. Radioaktív bomlás során pozitív és negatív töltésű, nagy sebességű részecskék keletkeznek. A kozmikus térben elektromos töltésű részecskék zápora képez szabadon mozgó töltéseket. Ha elektronok, protonok, ionok elektromos vagy mágneses mezőbe kerülnek, általában megváltozik a sebességük, sajátos pályákra kényszerülnek.

Nyugvó töltésre a mágneses mező nem hat, azt csak elektromos mezővel tudjuk mozgásba hozni. Ha q töltésű, m tömegű részecske **E** térerősségű elektromos mezőbe kerül, gyorsulása

$$\mathbf{a}=\frac{q\mathbf{E}}{m}$$

lesz, és sebessége (függetlenül a pálya görbétől),

$$v=\sqrt{2\frac{q}{m}U+v_0^2}\,,$$

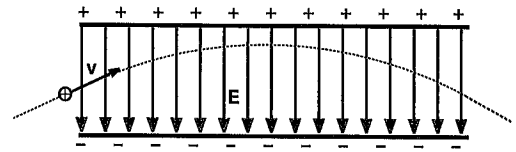
vagy zérus kezdősebesség esetén

$$v=\sqrt{2\frac{q}{m}U}$$

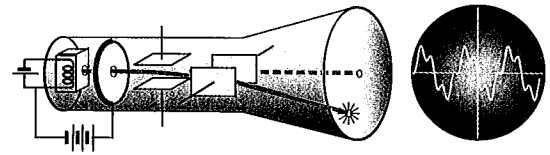
értéket vesz fel, ahol q/m az ún. *fajlagos töltés*, U pedig a pálya kezdőpontjának a végpontjához viszonyított feszültsége.

Megjegyezzük, hogy az elektromos mezőben a q töltésű pontszerű test mozgási energiája a munkatétel szerint $\Delta E_{\text{kin}} = qU$-val változik.

Ha egy pontszerű töltés homogén elektromos mezőben mozog, az erőviszonyok analógiája miatt pályája olyan, mint egy homogén gravitációs térben ferde hajítással mozgó test pályája (parabola). Így pl. kondenzátorlemezek között mozgó pozitív töltésű részecske pályáját a 8.33. ábra, gyakorlati felhasználását katódsugárcsőben a 8.34. ábra szemlélteti.



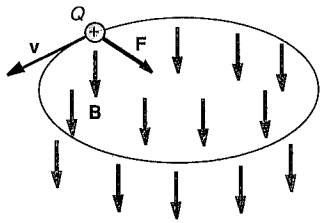
8.33. ábra



8.34. ábra

Ha a pontszerű töltés mágneses mezőben mozog, általában erő hat rá. (Ha a mágneses mező indukcióvonalaival párhuzamosan mozog, nem hat rá mágneses Lorentz-erő.)

Mozogjon a pontszerű q töltés homogén mágneses mezőben *az indukcióvonalakra merőleges* irányú **v** sebességgel! Ebben az esetben a testre ható Lorentz-erő qvB nagyságú, és minden pillanatban a sebességre merőleges irányú. Mivel ez az erő (merőleges lévén a mozgás irányára) nem végez munkát, a sebesség abszolút értéke és így az erő nagysága is állandó. A test pályája tehát kör (8.35. ábra).



8.35. ábra

A mozgásegyenlet szerint

$$F = m\frac{v^2}{R}.$$

A Lorentz-erőtörvény alapján $F = qvB$, amit ha a mozgásegyenletbe írunk, a körpálya sugara meghatározható:

$$qvB = m\frac{v^2}{R},$$

ahonnan a pályasugár:

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

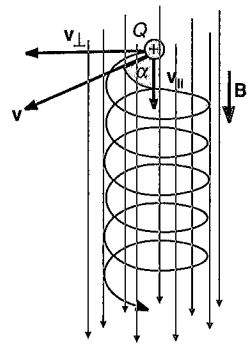
Egy körülfordulás ideje:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

függetlenül a sebességtől, fordulatszáma és szögsebessége:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}.$$

Ha a részecske a homogén mágneses mező indukcióvonalával α szöget bezáró irányban indul **v** sebességgel, mozgása egyenletes menetemelkedésű csavarvonalpályán történik, állandó nagyságú sebességgel (8.36. ábra). A **v** sebességvektor ui. felbontható egy $\mathbf{v}_{\parallel}$ és egy $\mathbf{v}_{\perp}$ komponensre.



8.36. ábra

Az indukcióval párhuzamos sebességkomponens erőmentes mozgást, a merőleges komponens pedig maximális erőhatás alatt történő mozgást eredményez. Így tehát a szuperpozíció miatt a ponttöltésre ható erő

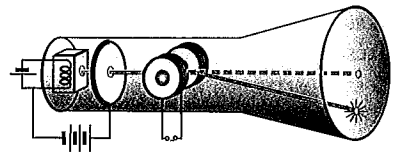
$$F = qv_{\perp}B = qvB\sin\alpha$$

nagyságú, ami az indukcióvonalakra merőleges síkra való merőleges vetület mozgását írja le. Ez egy

$$R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}$$

sugarú kör. Ezzel egyidejűleg időben a ponttöltés állandó sebességgel tolódik el az indukcióvonalak irányában. A két mozgás eredője egy csavarvonalú pályán történő egyenletes mozgás. A csavarvonal menetemelkedése:

$$h = v_{\parallel}T = Tv\cos\alpha = \frac{2\pi m}{qB}v\cos\alpha.$$



8.37. ábra

Az elektromos töltésű részecskék elektromos és mágneses mezőben való eltérítését a gyakorlatban elterjedten használják [lásd katódsugárcső (16.4.1. pont), TV-képcsövek (10.7.3.1. alpont), tömegspektroszkópia (31.2.3. pont)]. Mágneses eltérítést alkalmazó katódsugárcsövet mutat a 8.37. ábra. (Szerkezetének részletes leírása a 16.4.2. pontban található.)

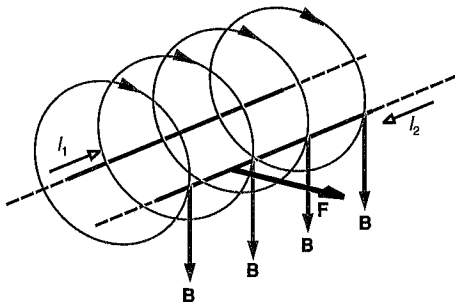
8.2.3. Erőhatások mozgó töltések között

8.2.3.1. Párhuzamos áramvezetők között ható erő. μ_0 és az abszolút amper

Az alábbiakban meghatározzuk, hogy mekkora erő hat két, egymás közelébe helyezett párhuzamos vezetékre, ha azokban áram folyik.

Helyezzünk el egy-egy igen hosszú vezetéket egymással párhuzamosan, egymástól d távolságra! Bocsássunk az egyik vezetékbe I_1, a másikba I_2 erősségű áramot! A gerjesztési törvény szerint az első vezeték tőle d távolságban

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d}$$



8.38. ábra

mágneses mezőt kelt (8.17), tehát ekkora az indukció a másik vezetőhelyén, annak minden pontjában. A $\mathbf{B}_1$ vektor mindenütt merőleges a másik vezetékre, tehát annak l hosszúságú szakaszára ható erő nagysága $F_2 = B_1 I_2 l$ (lásd a 8.38. ábrát!). B_1 értékét az erő kifejezésébe írva megkapjuk az l hosszúságú vezetékszakaszra ható erő nagyságát:

$$\boxed{F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d} l}, \qquad (8.30)$$

vagyis *két párhuzamos, I_1 és I_2 erősségű árammal átjárt hosszú egyenes vezeték bármelyikének l hosszúságú szakaszára ható mágneses erő egyenesen arányos az áramok erősségével, a kiválasztott szakasz hosszával, és fordítottan arányos a köztük levő távolsággal.*

Egyező irányú áramok esetén az erő vonzó, ellentétes irányúak esetén taszító jellegű.

Az abszolút amper. Ez az eredmény lehetőséget ad a μ_0 *vákuumpermeabilitás* nagyságának kísérleti meghatározására. Gondos mérések szerint két, végtelen hosszú, egymástól $d = 1$ m távolságban húzódó párhuzamos vezeték mindegyikének $l = 1$ méterére igen jó közelítéssel $F = 2\cdot10^{-7}$ N erő hat, ha mindkét vezetékben $I_1 = I_2 = 1$ A erősségű áram folyik (az 1 A = 1 C/s értelmezés szerint). Ebből a mérési eredményből a (8.30) egyenlet alapján μ_0 nagysága meghatározható. Ám az egyre fokozódó mérési pontosságú mérések egyre több jegyre adhatják meg μ_0 értékét. μ_0 szerepe azonban annyira általános az elektromosságtanban, hogy előnyösebb lenne végleges, „legpontosabb" értékét ismerni.

A fenti tapasztalatot arra használták fel, hogy *módosítva az amper eredeti értelmezését,* μ_0 értékét rögzítették, és a (8.30) egyenlet $\frac{\mu_0}{2\pi}$ együtthatóját *pontosan* $2\cdot10^{-7}\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$-nek *választották,* vagyis a korábbitól eltérően rögzítették μ_0 értékét:

$$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}. \qquad (8.31)$$

Ezzel elvetették a töltésegység korábbi definícióját, és bevezették helyette az *áramerősség egységének,* az ún. *abszolút ampernek* a következő meghatározását:

Két, egymással párhuzamos egyenes, végtelen hosszú és elhanyagolhatóan kicsi, kör keresztmetszetű vezetékben, amelyek vákuumban egymástól 1 m *távolságban helyezkednek el, akkor folyik* 1 A *erősségű áram, ha ennek hatására méterenként* $2\cdot10^{-7}$ N *erő hat rájuk.*

Ezek után a *töltésegység* új definíciója: 1 C = 1 As. (A korábbi definíciótól nagyságban nem nagy az eltérés: 1 $C_{régi}$ = 0,99985 As = 0,99985 C.)

8.2.3.2. Az elemi mágneses erőtörvény

Most már könnyen meghatározhatjuk a két, *tetszőleges irányú áramelem* között fellépő mágneses erőhatást is. A Biot–Savart-törvény szerint az áramelem keltette mágneses indukció értéke tőle r távolságban (8.14b) szerint $\Delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}$. A $\mathbf{B}$ in-

dukciójú mezőben levő áramelemre ható erő pedig a Lorentz-erőtörvény (8.27 egyenletek) szerint $\mathbf{F} = I\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. Ha tehát egy I_1 erősségű áramot vezető Δl_1 hosszúságú áramelemtől $\mathbf{r}_{12}$ távolságra van egy I_2 erősségű áramot szállító, Δl_2 hosszúságú áramelem, akkor arra az előzőek szerint

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2}{r_{12}^3}\Delta\mathbf{l}_2 \times \left(\Delta\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}\right) \qquad (8.32a)$$

erő hat. (A másik áramelemre ható erő indexcserével nyerhető.) (8.39a. ábra.)

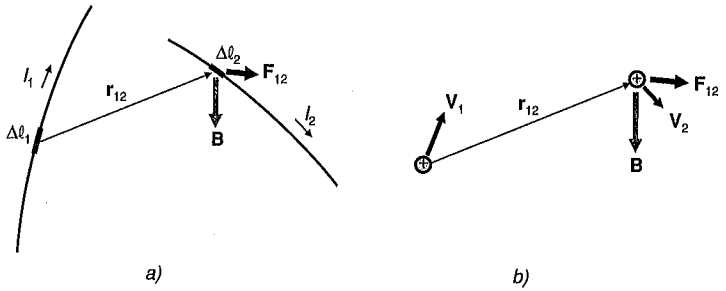
A mozgó *ponttöltések* között ható erő meghatározása hasonlóképpen történik. (8.16b) alapján:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

és a Lorentz-erő kifejezése (8.28b) szerint $\mathbf{F} = e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Ezt a két összefüggést q_1 és q_2 pontszerű töltésekre alkalmazva, ha azok $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ sebességgel haladnak, és egymástól éppen $r = |\mathbf{r}_{12}|$ távolságra vannak:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\mathbf{v}_2 \times \left(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12}\right), \qquad (8.32b)$$

ahol $\mathbf{F}_{12}$ a q_1 töltésű test hatására a q_2-re fellépő erő, $\mathbf{r}_{12}$ pedig q_1-től a q_2-ig húzott helyzetvektor (8.39b. ábra).



a) b)

8.39 ábra

Ezzel leírtuk a legegyszerűbb mozgó töltésrendszer tagjaira ható mágneses Lorentz-erőt. Ez az ún. *elemi mágneses erőtörvény*.

Megjegyezzük, hogy a részletes geometriai elemzésből is kitűnik, hogy $\mathbf{F}_{12}$ erő nem egyenlő $\mathbf{F}_{21}$ erő ellentettjével, vagyis az akció–reakció-törvény e töltött testekre nem érvényes, ha csak magukat a testeket vesszük figyelembe. Ekkor ugyanis a belső erők ellenére a

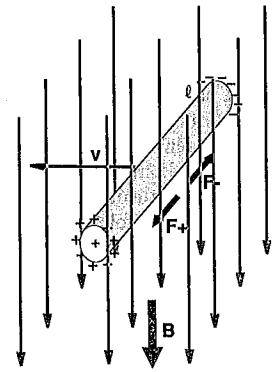
rendszer tömegközéppontja gyorsulva mozog. Itt tűnik ki a mezők anyagi mivoltának szerepe, pl. az is, hogy a mező tömeget, energiát és impulzust hordoz (lásd a 10.4. fejezetet), amelyet a mozgó töltések impulzusához számítva már fennáll a lendület megmaradása.

(Ha két teljes, vagyis zárt áramkörre összegezzük az elemi mágneses erőket, ezek eredője már két, ellentetten egyenlő erőt szolgáltat, noha külön az egyes áramelemekre bármilyen párosítással nem áll fenn a kölcsönhatás törvénye.)

8.3. Mozgó vezeték a mágneses mezőben

8.3.1. Az indukált elektromotoros erő

Mozgassunk fémes vezetőt mágneses mezőben! Ha a sebesség nem párhuzamos az indukcióvonalakkal, a fém (kristályrácsban levő) pozitív, és az azokat körülvevő negatív töltéseire a mágneses Lorentz-erő hat, mégpedig a kétféle töltésre ellenkező irányban. Ennek következtében a fém töltései bizonyos mértékig szétválnak. E szétválás folyamata addig tart, amíg az elkülönült töltések által keltett elektrosztatikus mező a fémen belül éppen egyensúlyt nem hoz létre a töltésekre ható mágneses Lorentz-erővel. Ekkor további töltésszétválás már nem történik (8.40. ábra). Ezt a jelenséget *mozgási indukciónak* nevezzük.



8.40. ábra

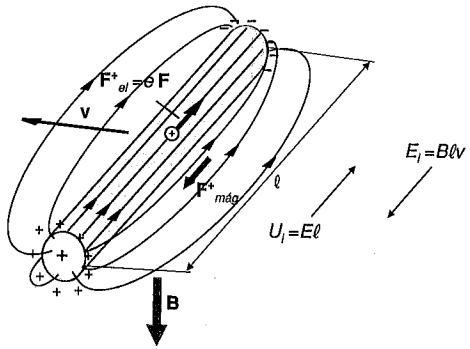
Annak mintájára, ahogyan a galvánelemnél az egységnyi töltés szétválasztásához szükséges munkát mérő elektromotoros erőt értelmeztük, bevezetjük a mágneses mezőben mozgatott töltések egységi mennyiségének szétválasztására fordított munkát mérő *indukált elektromotoros erőt,* amelyet $\mathscr{E}_i$-vel jelölünk. Ezt a mun-

kát a vezetéket mozgásba hozó *külső erő* végzi. (A mágneses Lorentz-erő munkája mindig nulla!) Így tehát

$$\mathscr{E}_i = \frac{W_{\text{külső}}}{Q}.$$

Határozzuk meg az indukált elektromotoros erőt!

Az egyszerűség kedvéért legyen a mágneses mező homogén, az l hosszúságú vezeték merőleges a **B** indukcióvektorra, és a **v** sebesség merőleges mindkettőre (8.41. ábra).



8.41. ábra

A vezeték belsejében levő töltésre ható Lorentz-erő a merőlegesség miatt $F = evB$ nagyságú. A pozitív és negatív töltések térbeli szétválása folytán keletkező statikus Coulomb-mező a fémen belül homogén (ui. a fém minden pontja azonos sebességgel halad, így a homogén eloszlású Lorentz-erőt csak homogén elektrosztatikus erő képes kompenzálni). Az elektrosztatikai erő $F = eE_{st}$. Egyensúlyban $eE_{st} = evB$, tehát az indukált statikus elektromos térerősség $E_{st} = vB$ értéket vesz fel.

A feszültség az l hosszúságú vezeték két vége között $U = E_{st}l$, vagyis az *indukált feszültség* a vezeték +(*A*) és a –(*B*) pontja között

$$U_{iAB} = Blv. \tag{8.33}$$

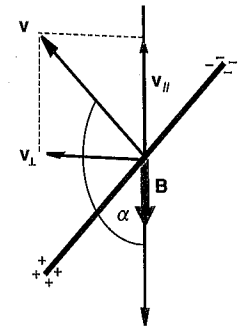
(Ez felel meg az áramforrások U_0 belső feszültségének.)

A töltésszétválasztó $\mathscr{E}_i$ indukált elektromotoros erő ezzel ellentétes „esésű", nagysága természetesen Blv. Ha a pozitív mérőirányt *A*-tól *B* felé választjuk, akkor írható, hogy

$$\mathscr{E}_i = -Blv. \tag{8.34a}$$

Ha a **v** sebesség és a **B** indukció tetszőleges α szöget zár be egymással (de a vezeték továbbra is merőleges **v**-re és **B**-re, vagyis e két vektor síkjára), a szuperpozícióból következően $\mathscr{E}_i$ nagysága (8.42. ábra):

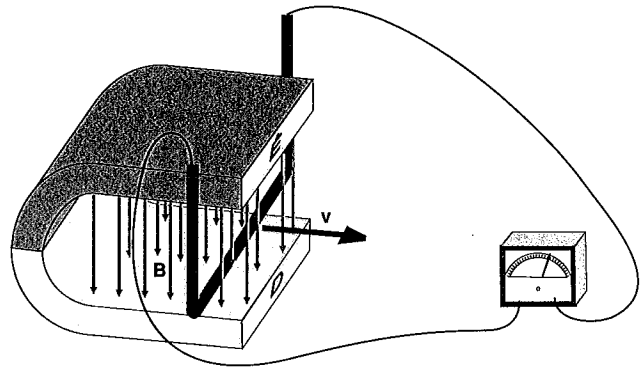
$$\mathscr{E}_i = -Blv \sin \alpha. \tag{8.34b}$$



8.42. ábra

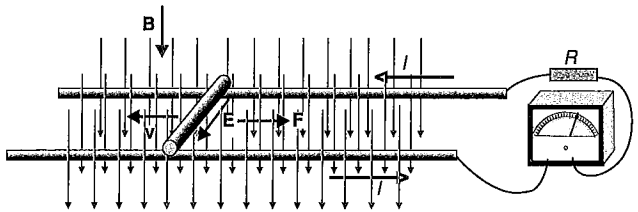
Levezetés nélkül: ha általános esetben a sebesség és vezetékszakasz egymással bezárt szöge α, valamint az egyenes vezetékszakasz β szöget, a sebességvektor γ szöget zár be az indukcióvektorral, az indukált feszültség nagysága:

$$U = Blv\sqrt{1 - \left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$



8.43a. ábra

Az indukált áram. Ha a mozgó vezetéket fémesen zárt áramkörré egészítjük ki úgy, hogy a többi vezeték nyugalomban maradjon, a körben áram indul meg. Erre példa a 8.43a. és 8.43b. ábra, amely mágnespatkó között mozgatott vezetékszakaszban keletkező áramot, illetve egy R ellenállással és árammérővel lezárt két párhuzamos vezető sínen, **B** indukciójú mágneses mezőben csúszó egyenes vezetékben keletkező áramot mutat.



8.43b. ábra

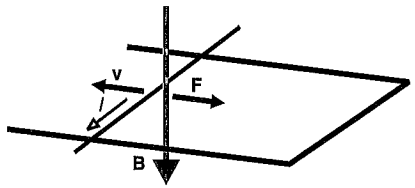
Az indukált elektromotoros erő hatására ui. a *mozgó* vezetékszakaszban a töltések folyamatosan szétválnak, a kör többi részén pedig a töltések szétválása miatt keletkező elektrosztatikus mező tovább hajtja a töltéseket: zárt áramkör alakul ki.

Ha a teljes kör ellenállása R, az indukált áram erősség Ohm törvénye szerint $I = \mathcal{E}_i/R$, vagyis

$$I = \frac{1}{R} Blv \qquad (8.35)$$

nagyságú, és olyan irányú, amerre az $\mathcal{E}_i$ elektromotoros erő „esik".

Lenz törvénye. Abban a pillanatban, amint a mozgó vezetékszakaszban áram folyik, „újabb" Lorentz-erő lép fel, amelynek nagysága $F = BIl$. Ennek az erőnek az iránya az $\mathbf{F} = I\mathbf{l}\times\mathbf{B}$ összefüggés alapján olyan (8.44. ábra), hogy „akadályozza" a vezetékszakasz mozgását, mert annak **v** sebességével ellentétes irányban hat. Ez *Lenz törvénye* a mozgási indukció jelenségére.

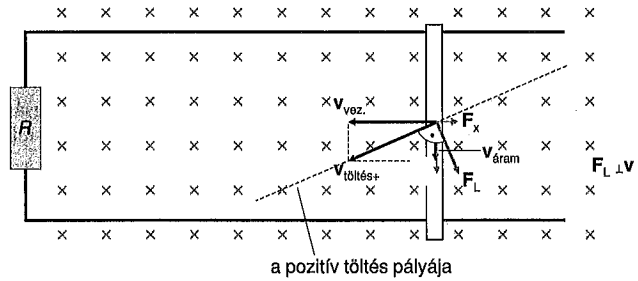


8.44. ábra

Ebben a törvényben az energia megmaradása nyer kifejezést: ha nem lenne így, hanem ellentétesen hatna az indukált áramra a Lorentz-erő, akkor a kis lökés-

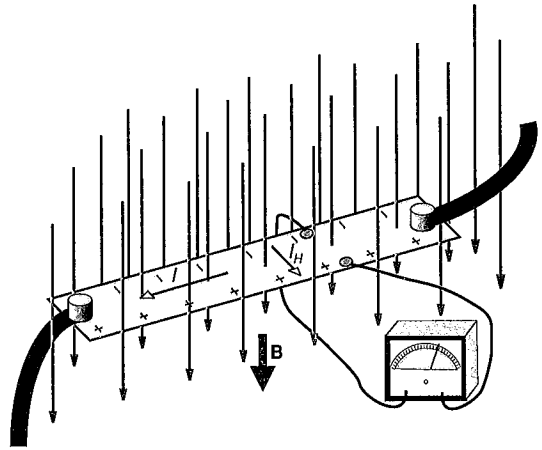
sel elindított vezeték egyre gyorsabban haladna, és egyre több áramot szolgáltatna a fogyasztónak mindenféle munka befektetése nélkül.

Hangsúlyozzuk, hogy az áramot *nem a Lorentz-erő* munkája tartja fenn, mert a Lorentz-erő az $\mathbf{F} = e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ összefüggésből következően *merőleges* a sebességre, s így *nem végez munkát.* A munkavégzés (és így az $\mathcal{E}$ elektromotoros erő keletkezése is) a mechanikai energia rovására történik, adott esetben a kezünk által végzett munka árán (8.45. ábra).



8.45. ábra

A Hall-effektus. A Hall-effektus a mágneses mezőnek a mozgó töltésekre gyakorolt hatásának példája. Vegyünk egy téglalap alakú vezetőt, amelyben a téglalap hosszabbik oldalával párhuzamosan I erősségű áram folyik a lap teljes keresztmetszetében. Ha ezt a vezetőt a téglalapra merőleges mágneses mezőbe helyezzük, akkor egy keresztirányú áram indul meg, amely onnan származik, hogy az áramot hordozó töltések mozgását a mágneses mező befolyásolja: a Lorentz-erő a töltéseket a mágneses mezőre és a mozgás irányára merőleges irányban téríti el (8.46. ábra).



8.46. ábra

Ez az áram csak addig tart, míg a vezeték két szélén felhalmozódó töltésekből eredő elektrosztatikus mező elektromos térerőssége meg nem akadályozza a töltések további felhalmozódását, vagyis amíg az elektromos Coulomb-erő egyensúlyt nem tart a mágneses Lorentz-erővel. A vezeték két széle között így kialakult feszültséget *Hall-feszültségnek* nevezzük. Ha zárjuk a kört, az ún. Hall-áram indul meg.

A Hall-feszültség könnyen meghatározható. Az áramot alkotó elemi töltéshordozókra ható Lorentz-erő nagysága (a merőleges irányok miatt):

$$F = evB,$$

amely erő merőleges **B** és **v** irányára. Legyen a téglalap alakú vezető vastagsága a, szélessége b! Az áram erőssége a töltéshordozók koncentrációjával és töltésével kifejezve:

$$I = nevA = neva b,$$

ahonnan a töltéshordozók (drift-) sebessége

$$v = \frac{I}{neab}$$

és ezzel a Lorentz-erő:

$$F = evB = \frac{BI}{abn}$$

Az elektromos Coulomb-erő nagysága:

$$F_C = Ee = \frac{U}{b}e,$$

ahol E a töltésszétválás miatt kialakult keresztirányú elektromos térerősség.
E két erő egyenlővé tételével:

$$\frac{U}{b}e = \frac{BI}{abn}.$$

Innen a Hall-feszültség:

$$U = \frac{BI}{nea},$$

vagyis egyenesen arányos az áram erősségével, a mágneses indukcióval, fordítottan arányos a lemez vastagságával és a szabad töltéshordozók koncentrációjával.

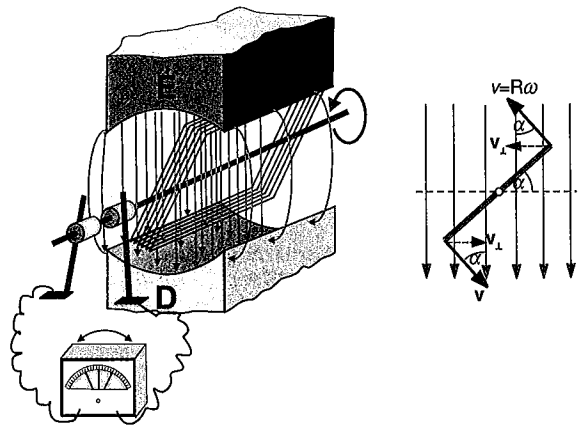
8.3.2. Váltakozó áram előállítása

A mozgási indukció jelenségét a galvánelemeknél hatásosabb áramforrások létrehozására használhatjuk fel.

Állandó mágnes (lásd a 26.1. szakaszt) közelítőleg homogén mezejében forgassunk állandó ω szögsebességgel téglalap alakú lapos, N menetszámú vezető keretet az indukcióra merőleges tengelye körül (8.47. ábra). A vezeték minden egyes, a tengellyel párhuzamos, l_1 hosszúságú szakaszában $\mathcal{E} = Bl_1v \sin\alpha$ elektromotoros erő indukálódik, ahol a keret az indukcióvonalakra merőleges kezdőhelyzetétől való elfordulás szöge. Így a keretben keletkező teljes elektromotoros erő nagysága:

$$\mathcal{E}_i = Blv \sin\alpha,$$

ahol l a **B**-re merőleges forgástengellyel párhuzamos vezetékpár $2Nl_1$ összhossza. (A másik, ezekre merőleges vezetékdarabokban hosszirányú elektromotoros erő nem keletkezik.)



8.47. ábra

Az indukált elektromotoros erő nagysága a szög függvényében állandóan változik. Pillanatértéke az *idő függvényében* is kifejezhető, ha az $\alpha = \omega t$ összefüggést figyelembe vesszük:

$$\boxed{\mathcal{E}_i = Blv \sin\omega t}. \qquad (8.36)$$

Ha a forgatott vezető keret kivezetései nem zártak, végpontjai között ugyanekkora indukált feszültség keletkezik:

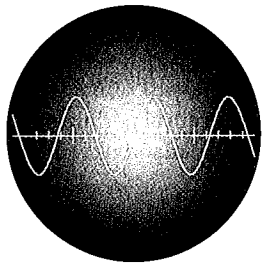
$$\boxed{u_i = Blv \sin\omega t} \qquad (8.37)$$

(amely az indukált elektromotoros erővel ellentétes esésű).

Ez a feszültség a csúcsértékét sin $\omega t = 1$ esetén veszi fel, vagyis amikor a keret síkja az indukcióvonalakkal párhuzamos. Ekkor $u_{max} = Blv$. Így tehát időben szinuszosan változó, ún. *váltakozó feszültséget* kapunk:

$$\boxed{u_i = u_{max} \sin \omega t} . \qquad (8.38)$$

(A váltakozó mennyiségek pillanatértékét kis-, az (állandó) átlagértékeket nagybetűvel jelöljük.)



8.48. ábra

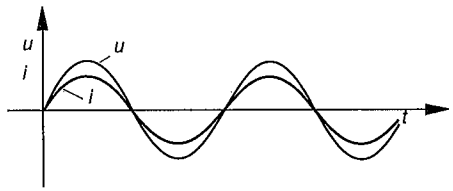
Ha a forgatott keret kivezetéseit (pl. csúszóérintkezők útján) álló fogyasztóval kötjük össze, abban időben szinuszosan változó elektromos áram folyik (8.48. ábra). Ohm törvénye szerint:

$$i = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = \frac{1}{R} Blv \sin \omega t = \frac{u_{max}}{R} \sin \omega t,$$

ahol $\frac{u_{max}}{R} = i_{max}$ a maximális áramerősség, tehát

$$\boxed{i = i_{max} \sin \omega t} , \qquad (8.39)$$

vagyis a feszültséggel *azonos fázisban* váltakozó áram keletkezik (8.49. ábra).



8.49. ábra

8.3.3. A váltakozó áram effektív értéke

A váltakozó feszültség és áram gyors változás esetén mutatós műszerrel nem mérhető. Teljesítménye is pillanatról pillanatra változik. A felhasznált energia mérésére tehát olyan mennyiség bevezetésének igénye merül fel, amellyel a hosszabb idő alatt felhasznált energiát mérni tudjuk. Ezért a pillanatértékek mellett bevezetjük az áram hőhatásával értelmezett ún. *effektív (hatásos) értékek*, lényegében bizonyos átlagértékek fogalmát a következő értelmezéssel:

A váltakozó áramköri szakasz effektív feszültségén, illetve áramerősségén annak az egyenáramnak a feszültségét, illetve áramerősségét értjük, amely ugyanabban a vezetőben (tehát ugyanakkora R ellenálláson) ugyanannyi idő alatt ugyanannyi hőt fejleszt, mint az adott váltakozó áram.

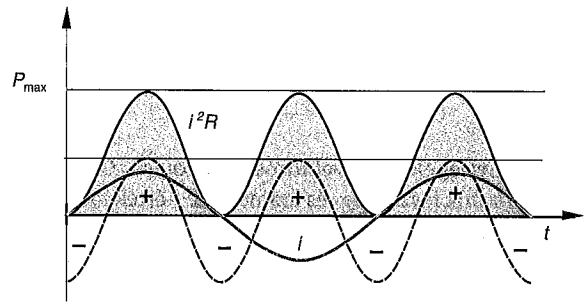
Az effektív feszültség és áramerősség a szinuszosan váltakozó áramköri szakasz maximális feszültségével (csúcsfeszültség) és maximális áramerősségével a következő kapcsolatban van:

$$U_{eff} = U = \frac{u_{max}}{\sqrt{2}} \qquad (8.40)$$

és

$$I_{eff} = I = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}} . \qquad (8.41)$$

Ez az összefüggés a következőképpen látható be. Mivel a munka a teljesítmény és az idő szorzata, ezért a teljesítmény–idő grafikon alatti területtel arányos (8.50. ábra). A pillanatnyi teljesítmény–idő grafikon a $P = i^2R = i^2_{max} \sin^2 (\omega t)R$ függvény képe.



8.50. ábra

A trigonometriából ismert összefüggést alkalmazva, amely szerint $\sin\alpha = \sqrt{(1-\cos 2\alpha)/2}$,

a pillanatnyi teljesítményre a

$$P = i_{max}^2 \frac{1-\cos(2\omega t)}{2} R = \frac{P_{max}}{2} - \frac{P_{max}}{2}\cos(2\omega t)$$

függvényt kapjuk. A grafikon alatti terület meghatározásához a két tagot külön-külön ábrázolhatjuk, és az egyes függvények képe alatti területeket előjelesen összeadjuk. Látható, hogy a teljesítmény időbeli közepes értéke az összeg első, *állandó* tagjával egyenlő, mivel a második tag közepes értéke zérus (a pozitív és negatív mérőszámú területek miatt). Így az effektív teljesítmény:

$$P_{eff} = P = \frac{P_{max}}{2} = \frac{i_{max}^2}{2} R = I^2 R.$$

Innen az effektív áramerősség és effektív feszültség valóban

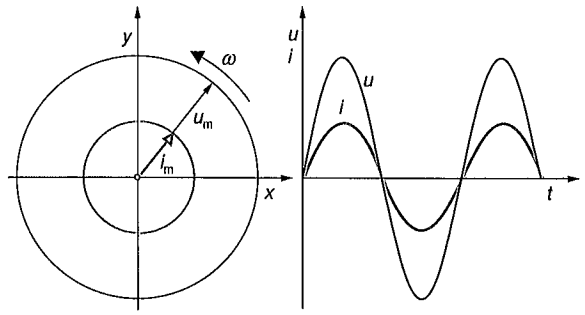
$$I_{eff} = I = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad U_{eff} = I_{eff} R = \frac{i_{max} R}{\sqrt{2}} = \frac{u_{max}}{\sqrt{2}}.$$

A szinuszosan váltakozó áram effektív munkája, illetve teljesítménye tehát ugyanúgy írható fel, mint az egyenáramoknál:

$$\boxed{W = IUt = I^2 Rt = \frac{U^2}{R} t}, \tag{8.42}$$

$$\boxed{P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}}. \tag{8.43}$$

A váltakozó mennyiségek forgóvektoros ábrázolása. Gyakran használatos a váltakozó áramú hálózatok feszültség- és áramerősség-értékének ún. forgóvektoros ábrázolása. A koordináta-rendszer kezdőpontjából az x tengelyre a váltakozó feszültség, illetve áramerősség csúcsértékét mérjük fel, amelyet irányított mennyiségnek tekintünk (8.51. ábra). Ha ω szögsebességgel pozitív forgásirányban forgatni kezdjük e vektorokat, az y tengelyre eső vetületük éppen a váltakozó feszültség és áramerősség pillanatnyi értékeit adja meg nagyság (és egymáshoz viszonyított) irány szerint. (Hangsúlyozzuk, hogy a feszültség és áramerősség *nem vektor*, kizárólag az ábrázolásukhoz használt szakaszokat kezelhetjük vektorként.)



8.51. ábra

9. Az időben változó mágneses mező

9.1. Az elektromágneses indukció. A mágneses mező energiája

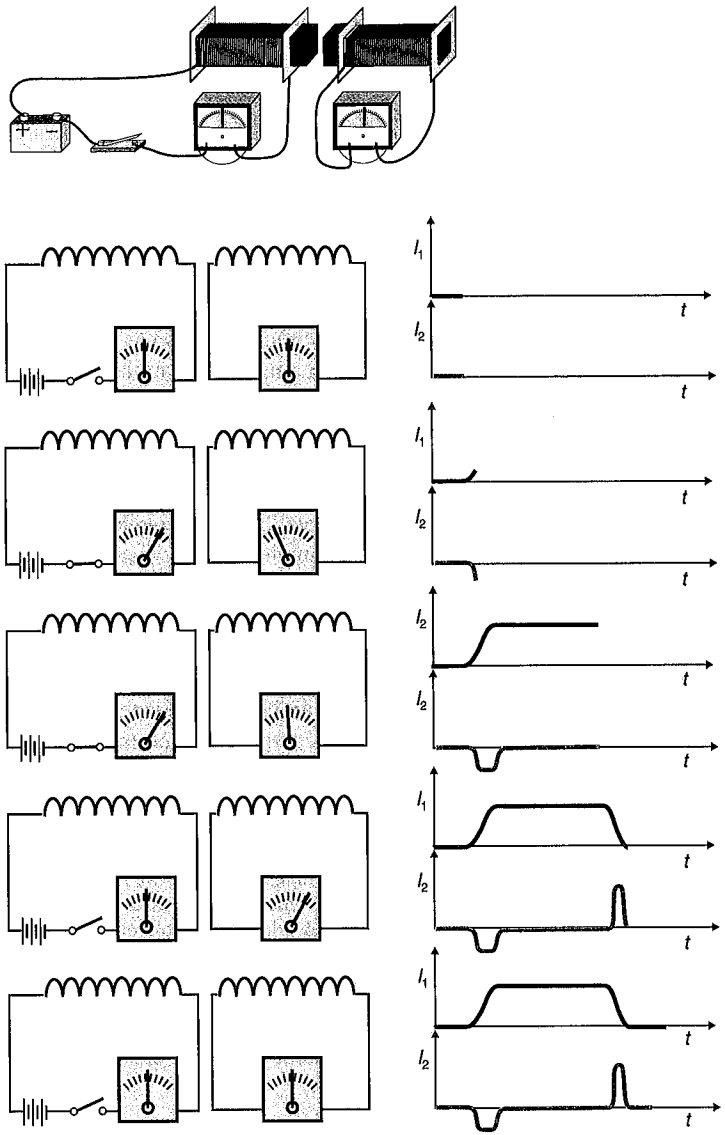
9.1.1. A nyugalmi indukció

Kapcsoljuk ki-be egy tekercs áramkörét! Ha ennek közelébe egy másik tekercset helyezünk, a vele sorba kapcsolt középállású ampermérő mutatója minden kapcsolásnál hol jobbra, hol balra kilendül, jelezve, hogy a második tekercsben felváltva ellentétes irányú áramlökések keletkeznek (9.1. ábra). Ezek az áramlökések a második tekercs körében keletkező *elektromotoros erőre* utalnak. Ez azonban se kémiai, se mechanikai töltésszétválasztó hatásra nem vezethető vissza. A jelenséget *nyugalmi indukciónak* nevezzük, tekintve, hogy a vezetékek nyugalomban vannak. Az $\mathscr{E}_i$ indukált elektromotoros erő nem lehet a mágneses Lorentz-erő következménye, mert a második tekercs nem mozog. A 9.2. ábrán vázolt kísérletben is létrejön indukált áram, pedig a második tekercs vezetéke messze elkerüli az első tekercs belsejében levő mágneses mezőt.

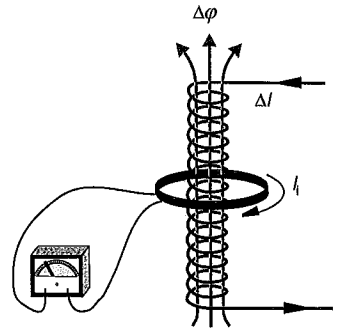
A jelenséget csak úgy lehet magyarázni, hogy *az első tekercs változó mágneses mezeje maga körül elektromos mezőt hoz létre,* amely elér egészen a második tekercsig, és abban az eredetileg nyugvó töltéseket megragadva áramot indít el. Ezt az elektromos mezőt tehát közvetlenül nem a töltések hozzák létre, hanem a *változó mágneses mezők keltik* (9.2. ábra).

Kísérletünkben a zárt vezetőhurokban (ez volt a második tekercs) nyugvó töltések lódultak meg: áram keletkezett. Ebből arra kell következtetni, hogy az indukált elektromos mező *nem konzervatív,* tehát csak *örvényes mező* lehet! Az is tapasztalat, hogy ha a változó mágneses fluxust *nem* veszik körül a második tekercs menetei, *nem keletkezik* benne indukált áram. Így tehát az indukált elektromos mező erővonalai csak olyan zárt görbék lehetnek, amelyek körül is járják a változó mágneses fluxust (9.3. ábra).

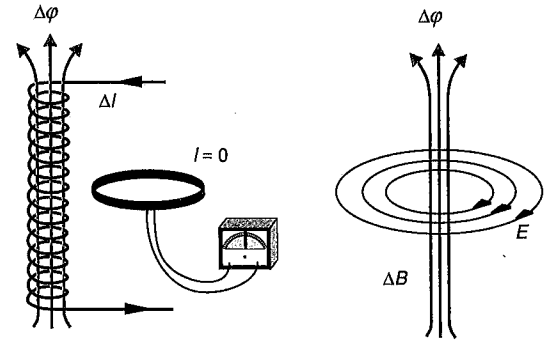
Az indukált elektromotoros erő. A keletkezett indukált áramból következtethetünk az indukált elektromotoros erőre, és abból a keltett elektromos mező térerősségére, végső soron a mező *szerkezetére.*



9.1. ábra



9.2. ábra

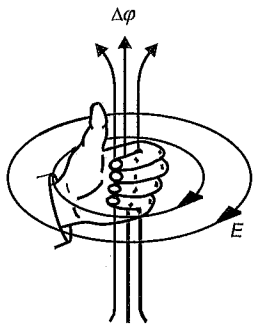


9.3. ábra

Mérések szerint a gerjesztőtekercset körülvevő *egyetlen menetű hurokban indukált áram erőssége egyenesen arányos a vezető által körülfogott mágneses fluxus változási sebességével, és fordítottan arányos a teljes vezetőkör ellenállásával, ugyanakkor független a vezetőkör alakjától és területétől:*

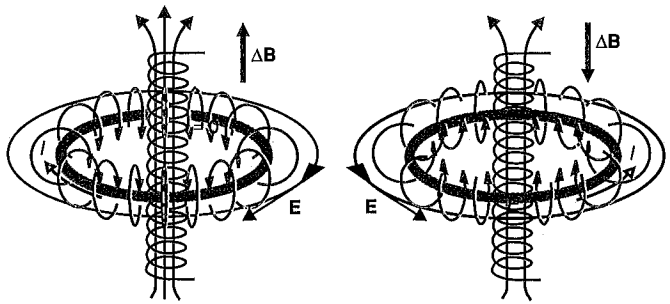
$$\boxed{I = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}. \qquad (9.1)$$

Az itt szereplő negatív előjel azt a tapasztalatot fejezi ki, hogy a körben keletkező áram és a mágneses fluxusváltozás (illetve $\Delta\mathbf{B}$) iránya *balsodrású* rendszerben vannak összekapcsolva egymással. Ezt fejezi ki a *balkéz-szabály:* ha bal kezünk kinyújtott hüvelykujja a mágneses indukció *változásának* irányában áll, akkor a begörbített ujjaink a körben folyó áram irányába mutatnak (9.4. ábra).



9.4. ábra

E szabály mögött is az energiamegmaradás törvénye rejlik. Eszerint ui. **az indukált elektromos mező a zárt vezetőkörben olyan irányú áramot kelt, amelynek saját mágneses tere ellentétes irányú az azt keltő mágneses fluxusváltozás irányával,** *akadályozza az azt keltő hatást* (9.5a–b. ábra). Ez *Lenz törvénye* a nyugalmi indukcióra. (Ellenkező esetben ui. bármilyen kis fluxusváltozás egyre nagyobb áramot hozna létre, mert az áram saját mágneses tere erősítőleg adódna hozzá a külső mágneses térhez, így növelné annak az indukált elektromos mezőt keltő hatását, ami tovább növelné az indukált áramot...)



9.5. ábra

Az áramerősségre kapott (9.1) egyenletünkből a vezetőkör mentén indukált elektromotoros erőre (a galvánelemnél bevezetett elektromotoros erő mintájára) a következőt kapjuk:

$$\mathscr{E}_i = IR = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \tag{9.2}$$

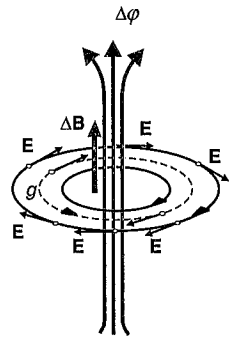
vagyis **egy zárt kör mentén indukált elektromotoros erő arányos a kör által körülfogott mágneses fluxusváltozás sebességével, és nem függ a vezeték méreteitől, alakjától.**

A $\Delta\Phi/\Delta t$ szerepe felel meg a galvánelem elektromotoros erejének, ezzel mérhetjük a mező által a pozitív egységtöltés egyszeri körbeviteléhez befektetett munkát.

Ha a vezeték N-szer kerüli meg a változó mágneses fluxust, akkor az előbbinek N-szerese lesz a vezeték mentén működő indukált elektromotoros erő:

$$\boxed{\mathscr{E}_i = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}. \tag{9.3}$$

Az indukált elektromos mező térerőssége. Hozzunk létre indukált elektromos mezőt úgy, hogy *hosszú, egyenes tekercsben* folyó áram erősségét változtatjuk! Ebben – a szimmetria miatt – az erővonalak a tekercs tengelyére merőleges síkban, a tekercs tengelyével koncentrikus köröket képeznek (9.6. ábra). Írjuk fel az örvényerősséget egy ilyen elektromos erővonal mentén felvett mérőgörbére! A g mérőgörbe irányítását az indukcióvektor *változásának* irányával pozitív (jobbsodrású) rendszerben felvéve :



9.6. ábra

$$\ddot{O}_E = \overset{\circ}{\sum_g} \mathbf{E}\Delta\mathbf{r} = E\cos\alpha \overset{\circ}{\sum_g} \Delta r = -E\cdot 2r\pi,$$

hiszen $|\mathbf{E}| = E$, egy kör mentén állandó, $\cos\alpha = -1$, $\overset{\circ}{\sum_g}\Delta r$ pedig éppen a körvonal hossza.

A $\overset{\circ}{\sum_{g}} E\Delta r$ összeg a kör mentén emelkedő és eső elemi elektromotoros erők összegét is jelenti, ezért az örvényerősség az elektromos „körfeszültséget", más szóval az indukált elektromotoros erőt is adja:

$$\mathscr{E}_i = \ddot{O}_E = -E \cdot 2r\pi.$$

Mivel

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

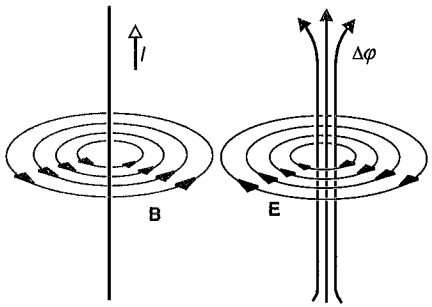
így

$$-E \cdot 2r\pi = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

ahonnan

$$E = \frac{1}{2r\pi}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{9.4}$$

Eszerint az *indukált elektromos mező* szerkezete nagyon hasonlít az áram mágneses terének szerkezetéhez: *örvényes és forrásmentes mező.* Az indukált mező térerőssége a tekercsen kívül a távolság első hatványával fordított arányban csökken. Azonban míg a mágneses indukcióvonalak áramokat kerülnek meg, az indukált elektromos mező erővonalai mágneses fluxusváltozást vesznek körül. Így az indukált elektromos mező „tükörképe" az áram keltette mágneses mezőnek (9.7. ábra).



9.7. ábra

Az indukált elektromos mező szerkezetét az elektromos örvényerősségre vonatkozó Maxwell-törvény (7.23.) *kiegészítésével* írhatjuk le:

Ha a mágneses mező fluxusa időben változik, akkor elektromos mező keletkezik. A mezőben felvett tetszőleges *A* felület menti elektromos örvényerősség arányos a felület *g* határgörbéje által körülfogott *Φ* mágneses fluxus változásának sebességével:

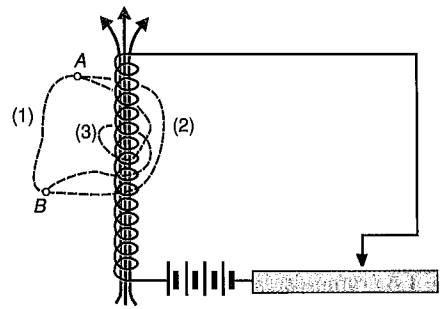
$$\ddot{O}_E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{9.5}$$

Ez *Faraday indukciós törvénye,* amely Maxwell II. törvényének a változó mezőkre vonatkozó kiegészítése.

A tekercsben indukált feszültség. Ha nyitott tekercs vesz körül változó mágneses fluxust, kivezetésein az indukált örvényes elektromos mező által szétválasztott pozitív és negatív többlettöltés jelenik meg. A töltésszétválás addig tart, amíg a vezeték belsejében a töltésektől származó sztatikus (konzervatív) elektromos Coulomb-mező térerőssége egyensúlyt nem tart az indukált örvényes elektromos mező térerősségével. Így tehát a tekercs két kivezetése között indukált *elektromos feszültséget* mérhetünk, amelynek nagysága:

$$U_i = -\mathscr{E}_i = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{9.6}$$

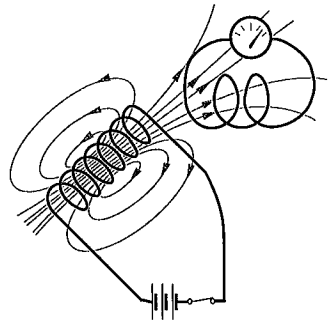
Megjegyzés: Míg az elektrosztatikus mezőben bármely két pont között a pálya alakjától függetlenül egyértelmű feszültséget értelmezhetünk, az örvényes elektromos mezőben a $\overset{\circ}{\sum_{g}} E\Delta r$ szorzatösszeg (és így a töltésen végzett munka is) *függ* a pályagörbétől, tehát abban se szintfelület nem jelölhető ki, se potenciál nem értelmezhető (9.8. ábra). Ha azonban az *A* és *B* pont között *rögzítjük* a pályagörbét – pl. egy tekercs vezetékével kijelölve –, akkor a tekercs két kivezetése között már egyértelművé válik a fenti szorzatösszeg és így a feszültség is.



9.8. ábra

9.1.2. A kölcsönös induktivitás és öninduktivitás

A kölcsönös indukció. Ha egy tekercsben változik az áram erőssége, és az általa gerjesztett változó mágneses mező egy része behatol egy másik tekercsbe, az abban elektromos feszültséget indukál (9.9. ábra). A két tekercs elektromágneses kapcsolatát jellemzi a kölcsönös indukciós együttható.



9.9. ábra

Az első (primer) tekercs által létrehozott mágneses fluxus a gerjesztési törvény szerint arányos a benne folyó áram I_1 erősségével, s így a második (szekunder) tekercsen áthaladó része is. Az indukció törvénye szerint viszont a második tekercsben keletkező U_{i2} feszültség arányos a második tekercs belsejében levő fluxus változási sebességével, így közvetve az első tekercs áramerősségének változási sebességével:

$$\boxed{U_{i2} = L_{12}\frac{\Delta I_1}{\Delta t}}. \qquad (9.7)$$

Az L_{12} arányossági tényező neve: *kölcsönös induktivitás (kölcsönös indukciós együttható).* Értéke vákuumban csak a két tekercs egymáshoz viszonyított helyzetétől, geometriai adataitól (hossz, menetszám, keresztmetszet, alak, távolság) függ. Minél nagyobb L_{12} értéke, a két áramkör között annál szorosabb a *csatolás.*

Az induktivitás egysége az $1\frac{\text{Vs}}{\text{A}}$, neve *henry,* jele: H. Eszerint egységnyi a kölcsönös induktivitása annak a rendszernek, amelynek egyik vezetékében 1 másodperc alatt végbemenő 1 A áramerősség-változás a másik vezetőkörben 1 V feszültséget hoz létre.

Elméleti megfontolásokkal bebizonyítható, hogy $L_{12} = L_{21}$, vagyis az egyik tekercsnek a másikra vonatkozó kölcsönös induktivitása megegyezik a második tekercsnek az elsőre vonatkozó induktivitásával, hacsak nincsenek ferromágneses anyagok a tekercsben.

Önindukció. Ha egy tekercsben áram indul meg, vagy az áram erőssége megváltozik, az a saját mágneses fluxusát teljes egészében körülveszi, azaz egyszerre „primer" és „szekunder" tekercs szerepét tölti be. Ezért ilyenkor minden olyan tekercsben, amelyben megváltozik saját áramának erőssége, indukciós elektromotoros erő keletkezik. Ezt a jelenséget *önindukciónak* nevezzük. A tekercs önmagával való csatolásának szorosságát fejezi ki az *öninduktivitás (önindukciós együttható),* amelyet a következő egyenlet definiál:

$$U_{\text{öi}} = L\frac{\Delta I}{\Delta t}, \qquad (9.8a)$$

illetve az indukált elektromotoros erővel kifejezve:

$$\mathscr{E}_{\text{öi}} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}, \qquad (9.8b)$$

(1 H az öninduktivitása annak a vezetékrendszernek, amelyben 1 s alatt végbemenő 1 A egyenletes áramerősség-változás hatására 1 V indukált elektromotoros erő jön létre.)

Fontos összefüggéshez jutunk, ha az elektromotoros erő két kifejezését összehasonlítjuk. Mivel egyrészt (9.3) alapján $\mathscr{E}_{\text{öi}} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, másrészt $\mathscr{E}_{\text{öi}} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$, a két kifejezés jobb oldala megegyezik, tehát az L induktivitás és az ún. $N\Phi$ *tekercs-fluxus* közötti egyszerű kapcsolat:

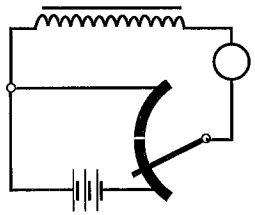
$$\boxed{N\Phi = LI}, \qquad (9.9)$$

(ui., ha $I = 0$, akkor $\Phi = 0$).

Az önindukció jelenségének fontos gyakorlati szerepe van *tekercseket tartalmazó áramkörök be- és kikapcsolásakor.* Bekapcsoláskor az áram maximális erőssége sokmenetű, a vasmagos tekercsben (lásd a 26. fejezetet!) *késik* a bekapcsolás pillanatához képest, kikapcsoláskor pedig az áram *szikra* formájában még tovább tart. Ha az áramforrást rövidre zárással iktatjuk ki (9.10. ábra), az áram lassan „cseng le".

Mindezek Lenz törvényének következményei: bekapcsoláskor az indukált elektromotoros erő ellenkező irányú a (növekvő erősségű) árammal, kikapcsoláskor pedig a már kialakult árammal egyirányú, mert annak csökkenését, vagyis az indukált elektromotoros erőt létrehozó *változást* akadályozza. Indukciós teker-

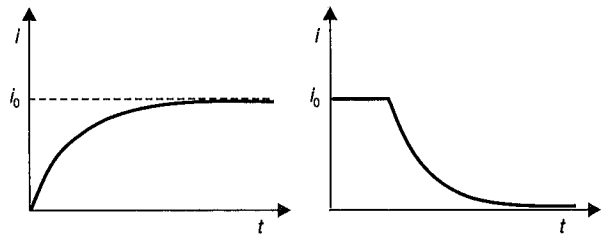
csek kikapcsolásánál igen nagy önindukciós feszültségek jöhetnek létre, amelyek károsíthatják a vezetékek szigetelését!



9.10. ábra

Elméleti számítások szerint a bekapcsoláskor és az áramforrás rövidre zárással történő lekapcsolásakor kialakuló áram erőssége az időnek exponenciális függvénye (9.11. ábra):

$$I=\frac{U_m}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=I_0\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right),\quad \text{illetve}\quad I=\frac{U_m}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=I_0e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (9.10a, b)$$



9.11. ábra

A vezetőhurok induktivitása az áram változásával szemben mutatott *tehetetlenségének* mértékeként is felfogható.

Példaként álljon itt egy hosszú, egyenes tekercs (szolenoid) induktivitása:

$$L=\mu_0\frac{N^2A}{l}, \qquad (9.11)$$

ui. egy tekercscsel (8.19) szerint $\Phi = \mu_0 INA/l$ fluxust lehet létrehozni, amely kifejezést az önindukciós feszültség $U_{öi} = N\Delta\Phi/\Delta t$ képletébe írva:

$$U_{öi}=\mu_0\frac{N^2A}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Eredményünket összehasonlítva az induktivitással felírt indukált feszültség

$$U_{öi}=L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

kifejezésével, a szolenoid induktivitásának valóban a (9.11) képletét kapjuk.

9.1.3. A mágneses mező energiája vákuumban

Amikor a nagy induktivitású tekercsről lekapcsoljuk az áramforrást (vagyis pl. a kémiai energiaforrást kiiktatjuk), szikra formájában, nagy csattanás és fényfelvillanás kíséretében egy (rövid) ideig még folyik az áram. A hang, hő és fény energiafelszabadulásról tanúskodik. Ennek az energiának az eredete az áram által gerjesztett mágneses mezőnek tulajdonítható. Amikor egy tekercsben mágneses mezőt hozunk létre, akkor ennek a mezőnek az energiáját megfelelő nagyságú munka árán tudjuk felépíteni. (Ha a mező már felépült, és állandó erősségű, fenntartásához további energiabefektetés nem szükséges. Az elektromágnesek további működtetésénél az áram hőhatását mint veszteséget kell csak pótolni.)

A mágneses mező tehetetlensége. Láttuk, hogy a nagy induktivitású tekercsben keletkező önindukciós feszültség *bekapcsoláskor* ellentétes irányú az áramot indító feszültséggel, *kikapcsoláskor* pedig egyező vele. Bekapcsoláskor késlelteti az áramerősség (fluxus) teljes kialakulását, kikapcsoláskor késlelteti a megszűnését. Hatása tehát mindig a meglevő állapotot fenntartani igyekszik. Viselkedése hasonló egy nagy tehetetlenségi nyomatékú lendítőkerékhez, amely „ellenszegül" a gyorsító forgatónyomatéknak, csak lassan éri el a végső fordulatszámot, és ha a gyorsító forgatónyomaték megszűnik, még hosszabb ideig forgásban marad (munkát képes végezni). Ugyanez a helyzet a testek tömegével jellemzett tehetetlenségnél is: gyorsításkor hatása ellentétes a rá ható erő irányával, lassításkor megegyezik vele: mozgásállapotát lomhán változtatja:

$$U=L\frac{\Delta I}{\Delta t},\qquad F=m\frac{\Delta v}{\Delta t},\qquad M=\Theta\frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Az áram lassú növekedése és lassú elhalása a mágneses mező „tehetetlenségének" a következménye, ugyanis a fluxus felépülése és megszűnése nem történhet pillanatszerűen (lásd a 9.11. ábrát!). Míg feszültség pillanatszerűen rákapcsolható egy vezetékre, benne az áram és az áram keltette mágneses fluxus tehetetlenül viselkedik. (Mechanikában az erő, forgatónyomaték, mechanikai feszültség felel meg az elektromotoros erőnek, a tömeg, a tehetetlenségi nyomaték az áramerősségnek, illetve mágneses fluxusnak.)

A mágneses mező energiája. A mágneses mező energiáját úgy kapjuk meg, hogy meghatározzuk azt a munkát, amelyet az áramforrás végez ahhoz, hogy létrehozza a vezeték áramához tartozó mágneses mezőt.

A tekercs áramát a tekercsre kapcsolt feszültség és az indukált elektromotoros erő együttesen szabja meg:

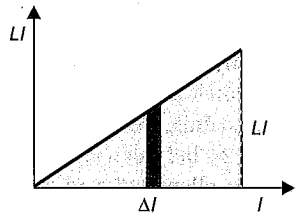
$$U - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = IR.$$

A munka változó áramerősség esetén $W = \sum_0^t UI\Delta t$. A feszültség az előző egyenletből beírva:

$$W = \sum_0^t I^2 R\Delta t + \sum_0^t L\frac{\Delta I}{\Delta t} I\Delta t.$$

Az első tag a vezetékben keletkező (irreverzibilis) Joule-hőt adja meg, s csak a második tag írja le a mágneses mező létrehozására fordított (reverzibilis) munkát (amelyet a mező leépülése során visszanyerhetünk). Tehát (Δt-vel egyszerűsítve):

$$W_{\text{mág}} = \sum_0^t LI\Delta I.$$



9.12. ábra

Ennek értéke a 9.12. ábra szerint a grafikon alatti terület meghatározásával:

$$\boxed{W_{\text{mág}} = E_{\text{mág}} = \frac{1}{2}LI^2}, \qquad (9.12)$$

vagyis *egy áramrendszer teljes mágneses mezejének energiája a rendszer öninduktivitásával és a benne folyó áram erősségének négyzetével egyenesen arányos.*

Energiasűrűség. Fejezzük ki a tekercs mágneses energiáját a *mező* jellemzőivel! A hosszú, egyenes tekercs belsejében a homogénnek tekinthető mágneses mező indukciója $B = \mu_0 IN/l$ nagyságú, a tekercs induktivitása pedig $L = \mu_0 N^2 A/l$. Az

áramerősség az előző képletből $I = Bl/\mu_0 N$. Ezt és L-et a mágneses energia (9.12) képletébe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$E_{\text{mág}} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2 A}{l}\frac{B^2 l^2}{\mu_0^2 N^2} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 Al.$$

Vegyük észre, hogy az Al szorzat a tekercs belsejének a V térfogata, vagyis az a térrész, amelyet a mágneses mező kitölt. (A *hosszú,* egyenes tekercs esetén a szórt mező elhanyagolható a tekercs belsejében levőhöz képest.) A homogén mező V térfogatú része tehát

$$\boxed{E_{\text{mág}} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 V} \qquad (9.13)$$

energiát tárol!

Homogén mágneses mezővel kitöltött térrész mágneses energiája egyenesen arányos a mágneses indukció négyzetével és a térrész térfogatával.

A legtöbbször azonban inhomogén mezővel találkozunk. Ha a mező inhomogén, akkor az egységnyi térfogatban levő mágneses energiát mérő *energiasűrűséget* célszerű bevezetni a $\rho_m = \Delta E_m/\Delta V$ értelmezéssel. Ennek egysége: J/m^3. Eszerint tehát a mező valamely *pontjában* a mágneses energiasűrűség

$$\boxed{\rho_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2} \quad \text{vagy} \quad \boxed{\rho_m = \frac{1}{2}BH}. \qquad (9.14a, b)$$

A V térfogatban tárolt energia az elemi térfogatokban levő energiák összege:

$$E_{\text{mág}} = \sum_V \frac{1}{2\mu_0}B^2\Delta V, \qquad \text{illetve} \qquad E_{\text{mág}} = \sum_V \frac{1}{2}BH\Delta V.$$

9.2. Az energia terjedése az áramforrástól a fogyasztóig. A Poynting-vektor

Az áramforrás kémiai, mechanikai, fény- stb. energia rovására állít elő elektromos energiát, amelynek eredményeként a zárt vezetékben áram indul meg, s ez az áram a fogyasztóban munkát képes végezni. Kérdés: az áramforrás kapcsai között felhalmozódott energia hogyan jut el a fogyasztóhoz? Az eddigiek szerint a Joule-törvényre hivatkozva csak azt mondhatjuk, hogy a körben folyó áram ott ad le nagy teljesítményt, ahol nagy az ellenállás (pl. fűtőtest): ott leadja azt az energiát, amelyet odaszállított.

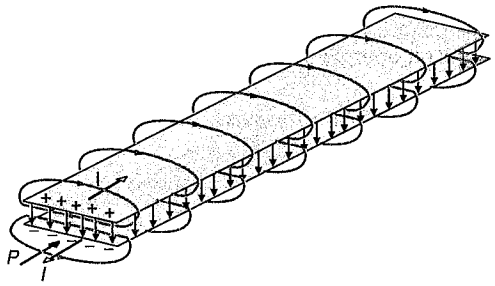
Milyen módon szállítja a mozgó töltés (áram) az energiát? Kinetikai energia formájában biztosan nem! Az elektronok túl lassan haladnak, és tömegük is ele-

nyésző ($v \approx 0{,}02$ mm/s, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg). Induljunk ki abból, hogy az energia a tapasztalat szerint a vezeték vonalán halad.

A energia csak akkor terjed, ha áram is folyik. Ekkor pedig elektromos *és* mágneses mező *együtt* van jelen. Okkal feltételezhetjük tehát, hogy az energiát éppen ezek hordozzák, és *bennük* áramlik az energia a fogyasztó felé.

Az energiaátadást legjobban az időegység alatt leadott energiával jellemezhetjük, amelyet a teljesítménnyel mérünk. Az elektromos teljesítmény a vezeték végpontjai között mérhető feszültséggel és a benne folyó áram erősségével kifejezve: $P = UI$. Ha ezt a teljesítményt a mező szállítja, célszerű a mezőre jellemző adatokkal, úm. a feszültséget és áramot kísérő *elektromos és mágneses mezők jellemzőivel* kifejezni! Ekkor megkapjuk azt a kapcsolatot, amely a mezők és az általuk szállított energia között van.

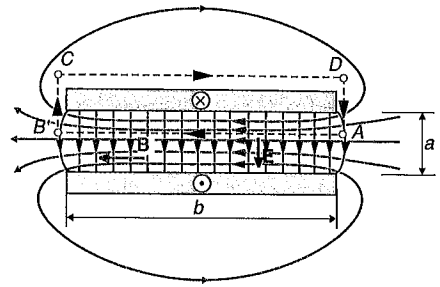
A számítás egyszerűsítése kedvéért válasszunk áramvezetőnek szokatlan „huzalokat": két vékony, széles, párhuzamos vezetőszalagot! Ez legyen a távvezeték. A körülötte kialakuló elektromos és mágneses mezőt a 9.13. ábra szemlélteti. Folyjon mindkét vezetőszalagban I erősségű áram a végei között mérhető U feszültség hatására! Első esetben legyen a távvezeték ellenállása elhanyagolható a fogyasztó ellenállása mellett! Ekkor az elektromos erővonalak közelítőleg merőlegesen lépnek ki a + pólushoz kapcsolt vezetékből és merőlegesen lépnek be a – pólushoz kapcsolódó vezetékbe. (A vezetékekre +, illetve – töltések „ülnek" ki, amelyek biztosítják a vezeték belsejében a töltésáramláshoz szükséges elektromos mezőt.)



9.13. ábra

A 9.14. ábra a vezetékek keresztmetszetét mutatja (nem méretarányosan) a mezők elektromos erő- és mágneses indukcióvonal-szerkezetével. A mágneses indukcióvonalak egy része az egyik, más része a másik vezetéket veszi körül. A két vezeték között homogén mágneses mező alakul ki, a vezetékeken kívül elenyészővé válik B értéke. Legyen a szalagszélesség b, a két szalag egymástól való távolsága a. A vezetékek közötti homogén elektromos mezőben a feszültség a térerősséggel kifejezve:

$$U = Ea.$$



9.14. ábra

Az áramerősség az *ABCDA* zárt görbére felírt gerjesztési törvényből (felhasználva, hogy a szalagokon kívül B értéke elhanyagolható):

$$\sum_{ABCDA}^{\circ} \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} = Bb = \mu_0 I,$$

mert

$$\sum_{ABCDA}^{\circ} \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} = \sum_{A}^{B} \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} + \sum_{B}^{C} \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} + \sum_{C}^{D} \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} + \sum_{D}^{A} \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} = Bb + 0 + 0 + 0 = Bb,$$

ugyanis a mérőgörbe (szaggatott vonal) *BC* és *DA* szakasza merőleges az indukcióvonalakra ($\cos\alpha = 0$), a *CD* szakaszon pedig $B \approx 0$.

Az áramerősség tehát az áram keltette indukcióval kifejezve:

$$I = \frac{Bb}{\mu_0}.$$

A feszültség és áramerősség most kapott kifejezéseit a teljesítmény képletébe helyettesítve az áramló energia teljesítményét a mezők jellemzőivel fejeztük ki:

$$P = \frac{1}{\mu_0} EBab, \quad \text{illetve} \quad P = \frac{1}{\mu_0} EBA_n,$$

ahol az $A_n = ab$, energia terjedésére *merőleges* keresztmetszet területe.

Levezetésünk szerint *az energiaterjedésre merőlegesen felvett A_n területű felületen egységnyi idő alatt átáramló energia egyenesen arányos a területtel, valamint az elektromos és mágneses térerősséggel, illetve indukcióval.*

Ha az elektromos térerősség és a mágneses indukció nem merőleges egymásra, akkor az A területen átáramló teljesítmény kisebb EBA_n/μ_0-nál. Ha **E** és **B** párhuza-

mos, egyáltalán nem áramlik energia. (Ez érthető, hiszen ha lenne olyan irány, amelyben áramlana energia, az sértené az **E** és **B** párhuzamosságából adódó szimmetriát, az energiaáramlás indokolatlanul kitüntetne egy irányt.)

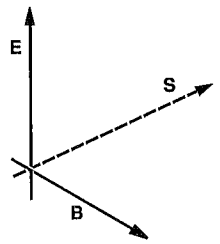
Ha **E** és **B** egymással α szöget zár be, a szuperpozíció elve alapján pl. **E**-t egy **B**-vel párhuzamos és egy rá merőleges komponensre bontva a teljesítményáramlásra írható, hogy

$$P=\frac{1}{\mu_0}EBA_n\cdot\sin\alpha. \qquad (9.15)$$

Inhomogén mezők esetén (és ez a leggyakoribb eset) az *egységnyi területen* áthaladó teljesítménnyel pontonként jellemezhetjük a mezőben történő energiaterjedést. Ezt az ún. *energiaáramsűrűség-* vagy *teljesítménysűrűség-vektor, illetve* (felismerőjéről elnevezve) *Poynting-vektor* adja meg. Ennek nagysága az

$$S=\frac{P}{A}=\frac{1}{\mu_0}EB\sin\alpha$$

egyenletből olvasható ki.



9.15. ábra

Az energiaáram-sűrűség (teljesítménysűrűség) mértékegysége a $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^2}=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$.

A 9.14. és 9.15. ábrából látható, hogy az energiaterjedés iránya az **E** és **B** vektorokkal (ebben a sorrendben) jobbsodrású rendszert alkot, tehát a teljesítménysűrűség vektoriálisan így írható:

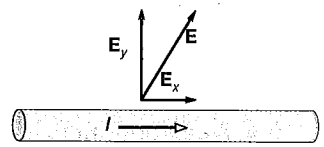
$$\boxed{\mathbf{S}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}} \quad \text{vagy} \quad \boxed{\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}}. \qquad (9.16a, b)$$

Általánosan is érvényes, hogy **az energiaterjedés irányára merőleges egységnyi területen egységnyi idő alatt átáramló energia** *(vagyis a teljesítménysűrűség)*

egyenesen arányos az E térerősséggel, a B indukcióval és a köztük levő α szög szinuszával.

Más szóval: a tér azon pontjában, amelyben *egyszerre* **E** térerősségű elektromos és **B** indukciójú mágneses mező van jelen, ott egyszersmind *E*-vel, *B*-vel és az **EB** szög szinuszával arányos energia is áramlik az **EB** síkra merőleges irányban.

A mezők energiahordozása azt is jelenti, hogy az energia *nem* a vezetékben áramlik a fogyasztóhoz, hanem a vezeték *mellett*, a vákuumban vagy a szigetelőben. A vezeték csak „tereli" az energiát: úgy alakítja az elektromos és mágneses mezőket, hogy az energia oda kerüljön, ahol a fogyasztó van. Jogos kérdés: hogyan kerül az energia a fogyasztóba (hiszen adott esetben az is csak egy áramot szállító vezeték)? A fogyasztó azzal tűnik ki a hozzá kapcsolt vezetékek közül, hogy igen nagy az ellenállása. Ha viszont nagy az ellenállás, akkor ott az elektromos mező **E** térerőssége az áram irányába előre dől (9.16. ábra), hiszen a térerősség $\mathbf{E}_x$ komponensének kell kiadnia a fémen belül a töltéseket hajtó térerősséget. Itt tehát az $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ már nem a vezetékkel párhuzamos, hanem kissé a vezeték tengelye (tehát a belseje) felé irányul.



9.16. ábra

Az **S** vektor vezetékkel párhuzamos komponense írja le a vezeték mentén, a rá merőleges komponense a *vezetékbe* irányuló energiaáramlást. A Joule-hőt okozó rész:

$$S_yA=P_{\text{Joule-hő}}=\frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{E}_x\times\mathbf{B}\right)\mathbf{A}=\frac{1}{\mu_0}E_xBA.$$

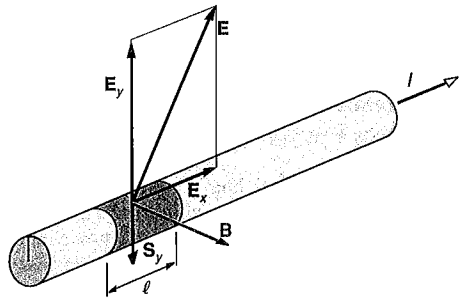
A beáramló teljesítmény sűrűsége:

$$S_y=\frac{1}{\mu_0}E_xB=\frac{1}{\mu_0}\frac{U}{l}B=\frac{1}{\mu_0}\frac{IR}{l}B=\frac{1}{\mu_0}\frac{IR}{l}\mu_0\frac{I}{2r\pi}=\frac{R}{2r\pi}\frac{I^2}{l},$$

ahol l a vezeték hossza, r a vezeték sugara. Innen a beáramló teljesítmény:

$$P=S_yA=S_y2r\pi l=I^2R,$$

ahol A a vezeték kiválasztott szakasza palástjának a területe (9.17. ábra). Visszakaptuk tehát a kísérletileg korábban már ellenőrzött értéket!



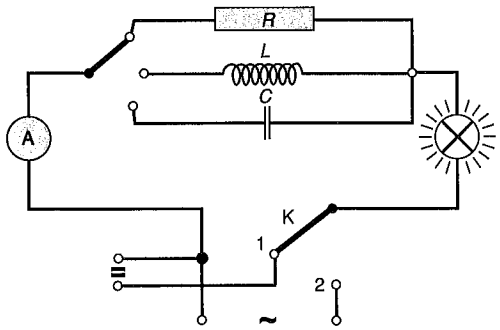
9.17. ábra

Az elektromos energia szállításakor a veszteségek elkerülésére cél, hogy a távvezeték R ellenállása vagy az áramerősség kicsi legyen. Nagy feszültségen elérhető, hogy kis áramerősség mellett az energia sokkal nagyobb hányada jusson a fogyasztóra, mint a távvezetékre ($R_f \gg R_{vez}$).

9.3. Az impedancia

9.3.1. Az ohmikus, induktív és kapacitív ellenállás

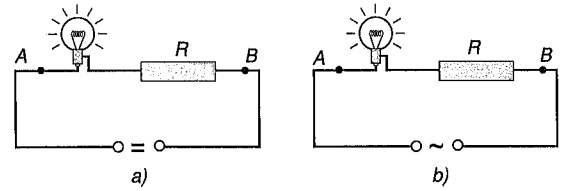
A 9.18. ábrán vázolt áramkörben az A és a B pontok közé felváltva beiktatható:
- nagy ellenállású egyenes huzal;
- az előbbivel egyenlő ellenállású, sokmenetű vasmagos tekercs;
- kondenzátor.



9.18. ábra

Az áramkör 1-es és 2-es kapcsolóállásban felváltva táplálható egyen-, illetve váltakozó áramú áramforrásról.

Ohmikus ellenállás. Kapcsoljuk először az egyenes vezetéket egyenáramú áramforrásra! A lámpa világít, a műszer áramot jelez. Ha ugyanezt a kört váltakozó áramú áramforrásra kapcsoljuk, amelynek effektív feszültsége az egyenáramú forrásával megegyező, a lámpa éppen olyan fényesen izzik, mint az előbb, a műszer is azonos áramerősséget jelez (9.19a–b. ábra).



9.19. ábra

Kísérletünkből következik, hogy az egyenes vezeték ellenállása mind egyen-, mind váltakozó árammal szemben azonos. Az ellenállás kizárólag a vezeték adataitól függ: fajlagos ellenállásától, hosszától, keresztmetszetének területétől:

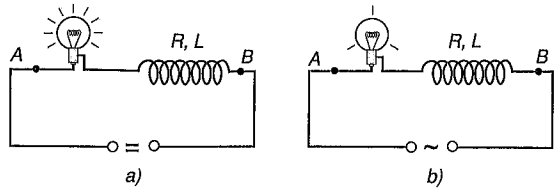
$$R = \rho \frac{l}{A}.$$

Ezt a mennyiséget *ohmikus ellenállásnak (rezisztenciának)* nevezzük.

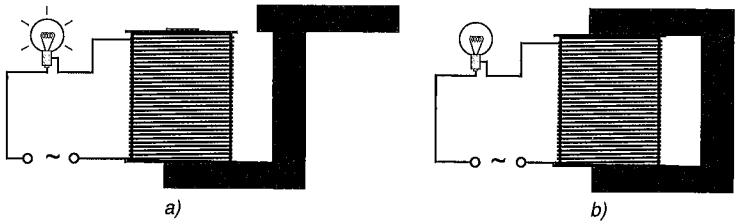
A csak ohmikus ellenállással rendelkező egyenes vezetéken eső $u = u_0 \sin(\omega t)$ feszültség fázisban van a rajta átfolyó áram $i = i_0 \sin(\omega t)$ erősségével, hiszen Ohm törvénye szerint $u = iR$.

Mivel Ohm törvénye a csúcsértékekre is fennáll, ebből az következik, hogy $\sqrt{2}$-vel való osztás után kapott *effektív értékekre is érvényes Ohm törvénye.*

Induktív ellenállás. Érdekes tapasztalatot szerezhetünk, ha a hosszú, egyenes vezetéket tekerccsé görbítjük! Kapcsoljunk az előző összeállításban az egyenes vezető helyébe egy ugyanakkora ohmikus ellenállású tekercset! Egyenfeszültségű áramforráshoz való csatlakoztatás esetén az izzó változatlan fénnyel világít, a műszer az előzővel azonos erősségű áramot mutat. Ha viszont váltakozó feszültségre kapcsoljuk a kört, az izzó halványan világít, a műszer jóval kisebb áramerősséget jelez (9.20a–b. ábra). Ha nagy menetszámú, zárható vasmaggal ellátott tekercs (ún. indukciós tekercs) vasmagját beljebb toljuk vagy zárjuk, vagyis az *induktivitást* növeljük, az izzólámpa világítása teljesen meg is szűnhet, vagyis a kör ellenállása jelentősen megnőtt (9.21a–b. ábra).



9.20. ábra



9.21. ábra

Kísérleteink tanúsága szerint a vezeték váltakozó árammal szemben mutatott ellenállása függ a vezeték alakjától (egyenes vezeték helyett tekercs) és a környezetében levő mágnesezhető anyagoktól, vagyis az induktivitástól. Ha növeljük a frekvenciát, a tekercs ellenállása is növekszik. Egyenárammal szemben nincs ilyen többletellenállás. A tekercsnek a váltakozó árammal szemben tanúsított többletellenállása az önindukció következménye. Ezt az ellenállást *induktív ellenállásnak* (induktív reaktanciának) nevezzük, és X_L-lel jelöljük. Egysége az ohm.

Ideális tekercs ($R = 0$) esetén az induktív ellenállás könnyen meghatározható. Ha a tekercsre $u_k = u_0 \sin(\omega t)$ váltakozó feszültséget kapcsolunk, az teljes egészében az önindukciós elektromotoros erővel tart egyensúlyt:

$$u_k + \mathcal{E}_{öi} = iR = 0 \qquad (R = 0).$$

Innen a kapocsfeszültség:

$$u_k = -\mathcal{E}_{öi} = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = u_L.$$

A kapocsfeszültség tehát a tekercs áramának változási sebességével arányos.

Az egyenlet bal oldalán időben szinuszosan változó kapocsfeszültség szerepel: $u_k = u_0 \cdot \sin(\omega t)$.

Keressük elemi úton az egyenletet kielégítő áramerősség–idő függvényt! Az 1.1.5.5. alpontban láttuk, hogy harmonikus rezgések esetén a kitérés, a sebesség és a gyorsulás az időnek a következő függvényei:

$$y = y_0 \sin(\omega t),$$

$$v = y_0 \omega \cos(\omega t),$$

$$a = -y_0 \omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 y,$$

ahol bármelyik mennyiség az előző változásának sebessége. Az áramerősség és a kapocsfeszültség között hasonló kapcsolat van, mint a rezgő test sebessége és gyorsulása között, hiszen ha az $u_k = u_0 \cdot \sin(\omega t)$ függvényt (előjeltől eltekintve) a rezgés gyorsulásának feleltetjük meg, akkor az $u_k = L\frac{\Delta i}{\Delta t}$ törvényben az áramerősség a rezgés sebességének feleltethető meg.

A rezgés mozgástörvényeiből leolvashatjuk, hogy a cos (ωt) függvény változási sebessége $-\omega$ sin (ωt)-vel egyenlő minden t időpillanatban. Ebből következik, hogy ha a kialakuló áram erősségét $i = -i_0 \cos(\omega t)$ függvény szerint változónak vesszük, az kielégíti mind az $u_k = L\frac{\Delta i}{\Delta t}$, mind az $u_k = u_0 \cdot \sin(\omega t)$ feltételeket, hiszen az

$$u_0 \sin(\omega t) = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = Li_0\omega \sin(\omega t) \qquad (9.17)$$

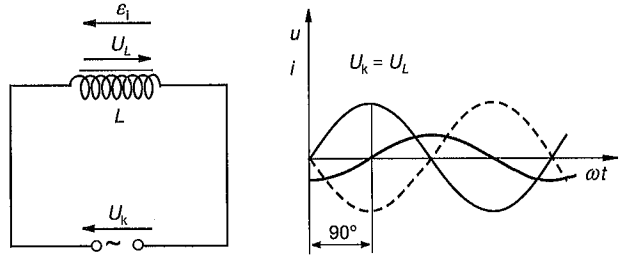
egyenlőség minden pillanatban teljesül, ha $u_0 = Li_0\omega$. (Ezt az eredményt differenciálszámítással közvetlenül megkaphatjuk.)

A fentiekből két fontos tanulság vonható le.

1. Az ideális tekercsre kapcsolt $u_k = u_0 \cdot \sin(\omega t)$ feszültség a tekercsben

$$\boxed{i = i_0 \sin(\omega t - 90°)}, \qquad (9.18)$$

vagyis az áram $\varphi = 90°$-kal *késik* a kapocsfeszültséghez képest (9.22. ábra).



9.22. ábra

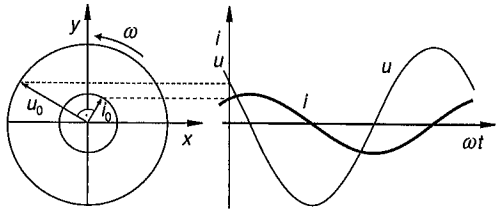
2. A tekercs induktív ellenállása

$$\boxed{X_L = \omega L}, \qquad (9.19)$$

ugyanis az ellenállás értelmezése szerint $X_L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{u_0}{i_0}$, és (9.16) szerint $\frac{u_0}{i_0} = \omega L$.

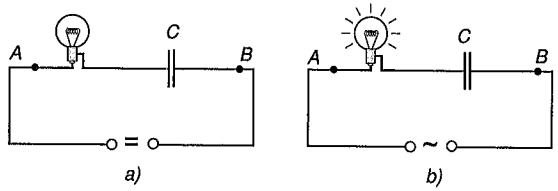
Az induktív ellenállás tehát *a körfrekvencia és az önindukciós együttható szorzatával egyenlő.*

Az áram és a kapocsfeszültség forgóvektorokkal a 9.23. ábra szerint szemléltethető.



9.23. ábra

Kapacitív ellenállás. Kapcsoljuk a tekercs helyére most a kondenzátort! Egyenfeszültség esetén nem folyik áram, a kondenzátor megszakítást jelent. Ha viszont váltakozó feszültségre kapcsoljuk a kört, az izzó világít, az áramerősség-mérő áramot jelez (9.24. ábra). Az áram erőssége nő, ha a kondenzátor kapacitását (pl. több kondenzátor párhuzamos kapcsolásával) növeljük, és ugyancsak nő, ha növeljük (megfelelő váltakozó áramú generátorral) a hálózat körfrekvenciáját. A kondenzátor tehát a váltakozó árammal szemben véges ellenállást (vezetőképességet) képvisel. Az $U_{\text{eff}}/I_{\text{eff}}$ hányadost itt *kapacitív ellenállásnak* (kapacitív reaktanciának) nevezzük és X_C-vel jelöljük. Egysége természetesen az ohm.



9.24. ábra

A körben azért folyik váltakozó áram, mert a kondenzátor periodikusan feltöltődik és kisül. A kapocsfeszültség – a tisztán kondenzátort tartalmazó körben – most a kondenzátoron „esik le":

$$u_k = u_C.$$

A kondenzátor feszültsége minden pillanatban

$$u_C = \frac{q}{C},$$

vagyis a pillanatnyi töltésével arányos. A kondenzátor töltését az i erősségű töltőáram szállítja. Δt idő alatt szállított Δq töltés $i\Delta t$ nagyságú, ha Δt elegendően kicsiny. Az áram pillanatnyi értéke és a kondenzátor pillanatnyi feszültsége között ezek alapján a következő kapcsolat áll fenn:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C\frac{\Delta u_C}{\Delta t}.$$

A kialakuló áram erőssége tehát nem a feszültséggel, hanem a *feszültségváltozás sebességével arányos.*

Ha a kapocsfeszültség $u_k = u_0 \sin(\omega t)$ függvény szerint változik, akkor a változás sebessége a harmonikus rezgés összefüggései alapján $u_0 \cos(\omega t)$. Innen a kondenzátort töltő (kisütő) áram erőssége:

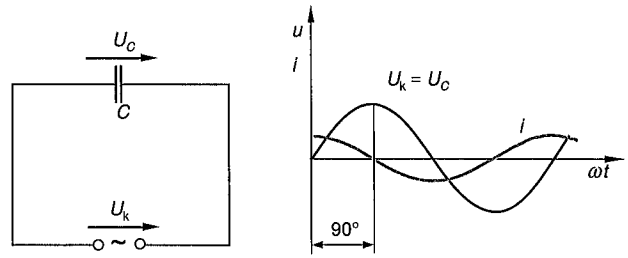
$$i = C\frac{\Delta u_C}{\Delta t} = u_0 C\omega \cos(\omega t). \qquad (9.20)$$

Mindebből két eredmény következik:

1. A kondenzátorra kapcsolt $u_k = u_0 \sin(\omega t)$ feszültség a körben

$$\boxed{i = i_0 \sin(\omega t + 90°)} \qquad (9.21)$$

időfüggésű áramot hoz létre, vagyis az áram erőssége $\varphi = 90°$-kal *siet* a kapocsfeszültséghez képest[1] (9.25. ábra).



9.25. ábra

[1] Természetesen az áram nem indulhat meg a feszültség bekapcsolása előtt. A rendszerben bekapcsoláskor átmeneti jelenségek jönnek létre, az áram egyszerre indul a feszültséggel, de hamarosan kialakul a fent leírt állandósult állapot a 90°-os fázissietéssel.

2. A kondenzátor kapacitív ellenállása:

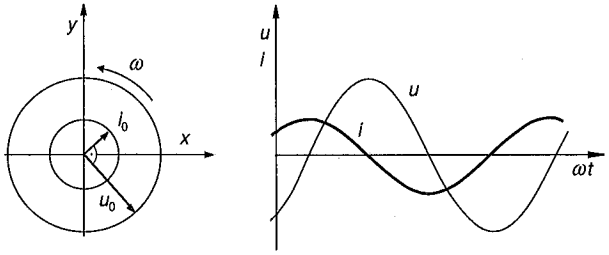
$$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}, \qquad (9.22)$$

ui. az áramerősség és a feszültség csúcsértékei között (9.20) és (9.21) szerint $i_0 = u_0 C\omega$ a kapcsolat. Innen a kapacitív ellenállás:

$$X_C = \frac{U_{C\,\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}} = \frac{u_0}{i_0} = \frac{1}{\omega C}.$$

A kapacitív ellenállás a hálózat körfrekvenciája és a kondenzátor kapacitása szorzatának a reciprokával egyenlő.

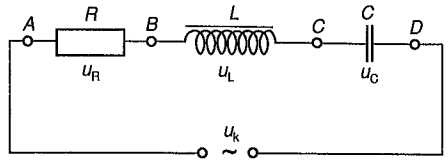
Az áram és a kapocsfeszültség forgóvektorokkal a 9.26. ábra szerint szemléltethető.



9.26. ábra

Az *RLC*-kör. Ha ohmikus ellenállású fogyasztót, tekercset és kondenzátort[2] kapcsolunk sorba, akkor ún. soros *RLC* kört kapunk (9.27. ábra). Ha erre a rendszerre $u_k = u_0 \sin(\omega t)$ feszültséget kapcsolunk, abban $i = i_0 \sin(\omega t - \varphi)$ időfüggésű áram jön létre. Vajon mekkora a φ fáziseltolódás szöge, és mekkora a kör $U/I = Z$ eredő ellenállása? Az U/I értéket látszólagos ellenállásnak vagy *impedanciának* nevezzük. Kérdésünkre a választ legegyszerűbben grafikusan, a forgóvektorok segítségével kaphatjuk meg.

[2] Megjegyezzük, és a későbbiekben fontossá válik, hogy minden vezetéknek egyszerre van ohmikus ellenállása, induktivitása és kapacitása. Aszerint beszélünk indukciós tekercsről, ohmikus ellenállásról, kapacitásról, hogy melyik tulajdonsága dominál a többi mellett.



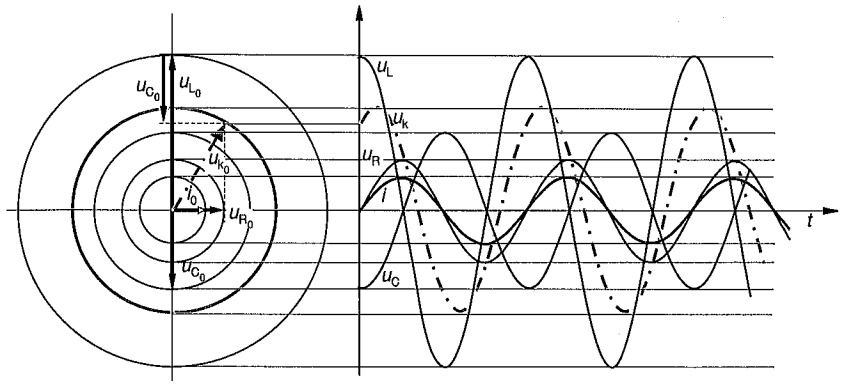
9.27. ábra

A generátor u_k kapocsfeszültsége a három kapcsolási elemen oszlik meg:

$$u_k = u_R + u_L + u_C.$$

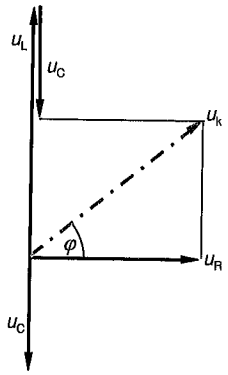
(Ez az összefüggés Maxwell II. törvényét fejezi ki, de csak a *pillanatértékekre* érvényes, az effektív értékekre nem, hiszen az egyes kapcsolási elemek *különböző* időpillanatokban veszik fel pillanatértékként az effektív értéket!)

Az áram mindegyik, sorba kapcsolt kapcsolási elemen adott pillanatban azonos nagyságú. Az előzőek szerint ez az áramerősség az ellenálláson eső u_R feszültséggel fázisban van, tehát a kondenzátoron eső u_C feszültség csúcsértéke az u_R csúcsértékéhez képest 90°-kal késik, u_L csúcsértéke pedig u_R-éhez viszonyítva 90°-ot siet. A 9.28. ábra mutatja a fázisviszonyokat. Az egymáshoz képest mereven forgó, ω szögsebességű vektorok y tengelyre eső vetületei adják fázishelyesen a pillanatértékeket.

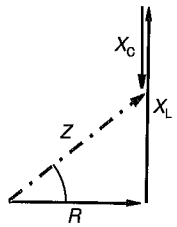


9.28. ábra

Mivel a vektorok vetületének összege egyenlő a vektorok összegének vetületével, a kapocsfeszültséget a forgóvektorok eredőjének vetülete adja. Ezt a forgóvektoros ábrából kiemelve a 9.29. ábra szemlélteti.



9.29. ábra



$$Z=\frac{U_k}{I} \qquad R=\frac{U_R}{I} \qquad Z=\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}$$

9.30. ábra

Ha a csúcsfeszültségeket $\sqrt{2}$-vel és a kialakuló áram effektív erősségével elosztjuk, az egyes kapcsolási elemek ellenállásaira és az eredő impedanciára kapunk összefüggést, amelyet a 9.30. ábra szemléltet.

Ezekből az ábrákból a következőket szűrhetjük le:

1. A feszültségek csúcsértékei között az

$$u_{k0}^2=u_{R0}^2+\left(u_{L0}-u_{C0}\right)^2$$

összefüggés áll fenn. Az egyenlet 2-vel való osztása és gyökvonás után az *effektív feszültségek* közötti összefüggést kapjuk meg:

$$\boxed{U_k=\sqrt{U_R^2+\left(U_L-U_C\right)^2}}. \qquad (9.23)$$

2. A kapocsfeszültséget az áramerősséggel osztva megkapjuk az impedanciát:

$$\boxed{Z=\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (9.24)$$

3. Az áram erőssége az u_k kapocsfeszültséghez viszonyítva φ szöggel van eltolódva, ahol

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{R}{Z}}, \quad \text{illetve} \quad \boxed{\operatorname{tg}\varphi=\frac{X_L-X_C}{R}}. \qquad (9.25a, b)$$

Az effektív áramerősség természetesen:

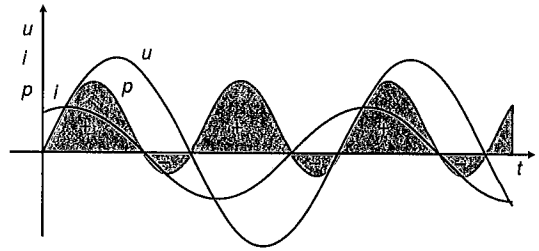
$$I=\frac{U_k}{Z}=\frac{U_R}{R}=\frac{U_L}{X_L}=\frac{U_C}{X_C}.$$

Ha a fázisszög pozitív ($\varphi > 0$), akkor az áram *késik* a kapocsfeszültséghez képest, vagyis az induktív ellenállás az uralkodó. Ekkor a kör ellenállását *induktív impedanciának* mondjuk. Ha $\varphi < 0$, a kapacitív ellenállás van túlsúlyban, a körnek *kapacitív impedanciája* van. Ha $\varphi = 0$, a fázis siettető és fázis késleltető hatás kiegyenlíti egymást. Ekkor $X_L = X_C$ és $Z = R$.

9.3.2. Teljesítmény és munka az RLC-körben

Láttuk, hogy *ohmikus ellenállással* (rezisztenciával) rendelkező áramköri elemen a váltakozó áram $P = UI = I^2R$ teljesítményt ad le, ahol I és U az áramerősség és a feszültség *effektív* értékeit jelenti. Ennek megfelelően az R ellenálláson leadott energia („az áram munkája")[3] t idő alatt $W = IUt = I^2Rt$. Ez a munkavégzés nyugvó vezetékek esetén teljes egészében a vezeték belső energiáját növeli (lásd Joule-hő).

Ha azonban az áramerősség és a feszültség nincs fázisban, vagyis az áramköri elemnek nemcsak ohmikus ellenállása van, a pillanatnyi feszültség és áramerősség szorzata grafikonjának (vagyis a pillanatnyi teljesítménygörbének) az értékei pozitív és negatív értékeket egyaránt felvesznek (9.31. ábra).

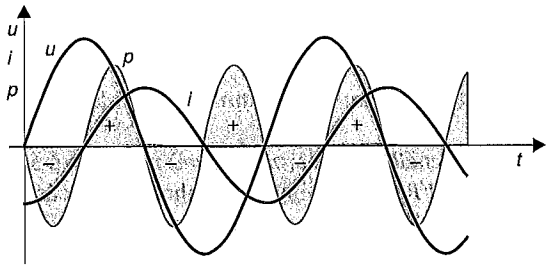


9.31. ábra

Így a végzett munka előjele is egyes intervallumokban pozitív, másokban negatív. A *pozitív munkák* jelentik az *ellenálláson leadott és az elektromos és mágneses mezők felépítésére* fordított energiák összegét, a *negatív munkák* pedig a felépült mezők megszűnése során *a hálózatba visszatáplált* energiát. A két érték különbsége (a grafikon alatti területek előjeles összege) a *hatásos munka,* amely a fogyasztó R ellenállásán hővé alakul (vagy esetleg mechanikai munkát fedez, pl. motorokban). A pozitív periódusban az áramkör fogyasztóként, a negatívban termelőként (áramforrásként) működik.

[3] Mint láttuk, nem az áram (mozgó töltések) végzi a munkát, hanem az elektromágneses mező, amelynek teljesítménysűrűségét a Poynting-vektorral jellemeztük.

Ha a fáziskülönbség az áram és a kapocsfeszültség között +90° vagy –90°, a teljesítménygörbe alatti terület negatív és pozitív részei egymással megegyező nagyságúak. Az áram munkája ekkor minden befejezett periódusra zérus. Az ilyen áramot *meddő (watt nélküli) áramnak* nevezzük (9.32. ábra).



9.32. ábra

Ha a fáziskülönbség tetszőleges φ érték, vagyis $-90° \le \varphi \le +90°$, a *hatásos* (vagy *wattos*) *teljesítmény* nyugalomban levő vezetékeken $P = I^2R$. Ez kifejezhető az $U_k = U$ kapocsfeszültséggel is, figyelembe véve a fáziseltolódás szögét. Mivel $\cos \alpha = R/Z$, és $Z = U/I$, ezeket az effektív teljesítmény képletébe írva azt kapjuk, hogy

$$P = IU \cos \varphi , \qquad (9.26)$$

és ennek megfelelően a leadott energia (munka):

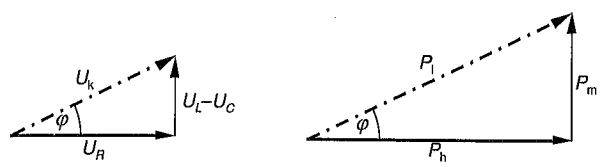
$$W = IUt \cos \varphi , \qquad (9.27)$$

ahol $\cos \varphi$-t *teljesítménytényezőnek* nevezzük.

Az IU szorzatot a váltakozó áram *látszólagos teljesítményének* hívják. (Ez az adott feszültség és ohmikus ellenállás esetén elérhető legnagyobb teljesítmény. Ekkor $\varphi = 0$.)

A feszültségek vektorábrájából látszik, hogy ha minden feszültséget megszorzunk a kör effektív áramerősségével, megkapjuk az eredő látszólagos teljesítményt, amelynek a „hatásos vetülete" $P_h = IU \cos \varphi$, vagyis *a hatásos teljesítmény*, „meddő vetülete" $P_m = IU \sin \varphi$ pedig az ún. *meddő teljesítmény*. Ez az, ami a látszólagos teljesítményből nem alakítható hasznos munkává. A 9.33. ábra mutatja az összefüggéseket:

$$UI = P_l, \quad U_R I = P_h = UI \cos \varphi, \quad (U_L - U_C)I = P_m = UI \sin \varphi,$$



9.33. ábra

és ezek alapján:

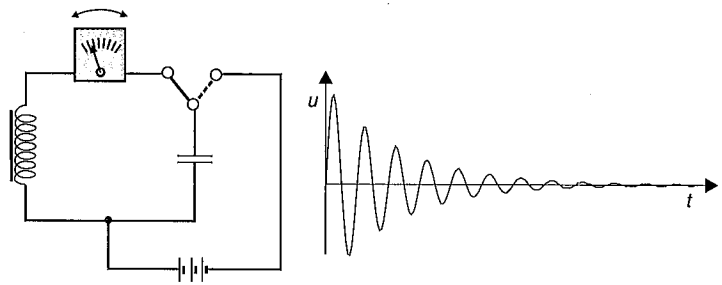
$$P_l = \sqrt{P_h^2 + P_m^2} . \qquad (9.28)$$

Az elektromos gépeknél a látszólagos teljesítményt szokták feltüntetni, mivel a vezetékeket maximális áramerősségre és maximális feszültségre kell méretezni. A különböző teljesítményfajtákat „mértékegységeikben" is kifejezésre juttatják. A hatásos teljesítmény egysége a W (watt), a látszólagos teljesítményé a VA (voltamper) és a meddőé a var (voltamper reaktív).

9.4. Szabad és kényszerített elektromágneses rezgések

9.4.1. Rezgőkörök szabad rezgései

Töltsünk fel egy nagy kapacitású kondenzátort, majd zárjuk rövidre egy kis ohmikus ellenállású, nagy induktivitású tekerccsel! Ha érzékeny középállású ampermérőt kapcsolunk a körbe, vagy a kondenzátorról egy oszcilloszkóphoz csatlakozunk, azt tapasztaljuk, hogy a kondenzátor rövidre zárását nem pillanatszerű áramlökés kíséri, hanem váltakozó áram indul meg a körben, amelynek amplitúdója fokozatosan csökken (9.34. ábra).



9.34. ábra

A jelenség okát az indukciós tekercs és a kondenzátor energiatároló képességében és a mágneses mező tehetetlenségében találjuk meg. Az áram nem szűnik

meg, miután a kondenzátor elvesztette töltését, hanem tovább folytatódik, amit az indukciós tekercs mágneses terének megszűnése miatt fellépő indukált feszültség tart fenn. Ennek következtében a folytatódó áram az előzővel ellentétes töltéssel látja el a kondenzátor lemezeit.

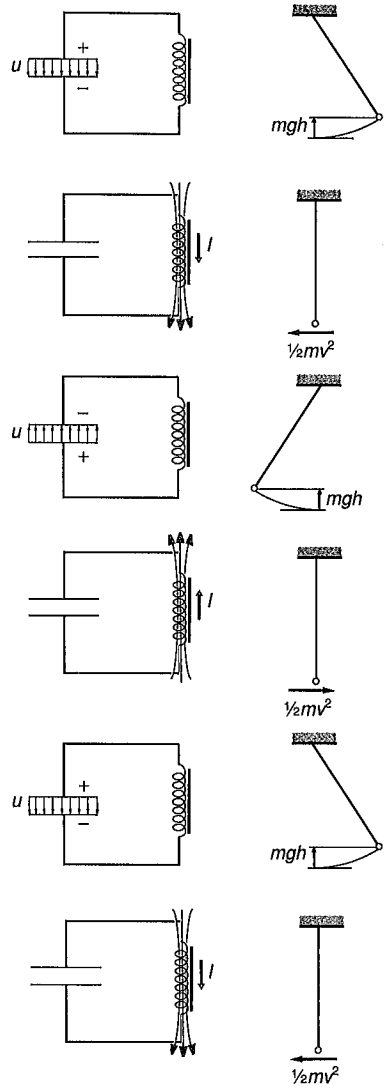
A kezdőpillanatban a kondenzátornak $E_{el} = \frac{1}{2} C u_m^2$ energiája volt, amely az elektromos mezőben halmozódott fel. Amikor zártuk az áramkört, a tekercsen áram folyt keresztül, ami mágneses mezőt létesített. A kondenzátor energiája fokozatosan a tekercs energiájába ment át. Feltételezve, hogy az ohmikus ellenállás $R = 0$, a töltését teljesen elveszített kondenzátor kezdeti energiája teljes egészében a tekercs $E_{mág} = \frac{1}{2} L i_m^2$ energiájával egyenlő. (u_m és i_m a feszültség és az áramerősség maximális értékei.) Nyilvánvaló, hogy a kondenzátor feszültsége és a kör áramerőssége között 90°-os fáziseltolódás van, mert amikor a kondenzátor feszültsége 0, a tekercs energiája maximális, és mivel az összenergia állandó, ekkor annak teljes egészében a tekercsben kell megjelennie. Ez pedig a maximális áramerősség esetén áll fenn.

Ahogy a mágneses fluxus nem keletkezhet pillanatszerűen, úgy pillanatszerűen nem is képes eltűnni. A tekercs önindukciós elektromotoros ereje *Lenz törvénye* szerint a gyengülő áramerősséget fenntartani igyekszik, tehát a kondenzátor teljes kisülése után a tekercs *energiaforrássá* válik. Az áram tehát tovább folyik, míg a kondenzátor ellenkezőleg fel nem töltődik. Ezután a folyamat az előzőnek időbeli tükörképe lesz.

A kondenzátorból és tekercsből álló zárt kört *elektromos rezgőkörnek* nevezzük. Az ideális ($R = 0$) rezgőkörben a folyamat korlátlanul folytatódhatna, ami azt jelenti, hogy az u_m és i_m amplitúdók állandóak.[4] Az ilyen rezgéseket *csillapítatlan harmonikus rezgéseknek* nevezzük. A 9.35. ábrán a rezgőkört mechanikai megfelelőjével együtt látjuk: az ingamozgásnál a helyzeti és mozgási energia alakul egymásba. (A helyzeti az elektromos feszültségnek, vagyis az elektromos mező energiájának, a mozgási az áramerősségnek, vagyis a „tehetetlen" mágneses mező energiájának felel meg.)

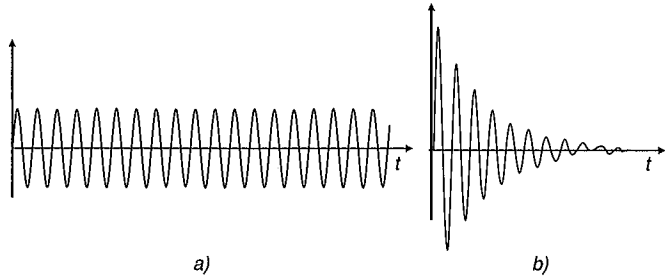
A valóságban minden rezgőkörnek van ohmikus ellenállása, aminek következtében a kezdetben betáplált energia fokozatosan csökken, s a rezgések egy idő

[4] Valójában az ilyen rezgőkör rezgései is megszűnnek egy idő után, ui. nemcsak ohmikus ellenálláson fejlődő Joule-hővel veszít energiát a rendszer, hanem a gyorsuló töltése elektromágneses sugárzása is folyamatosan elvisz a rendszerből energiát (lásd a 10.2. fejezetet!).



9.35. ábra

múlva elhalnak. Az ilyen rezgéseket *csillapodó* rezgéseknek nevezzük. A csillapítatlan és a csillapodó rezgések áramerősség-változásait a 9.36a–b. ábra mutatja.



9.36. ábra

A sajátfrekvencia. Az áramnak a rezgőkörben végbemenő olyan rezgéseit, amelyek idegen, külső, kényszerítő energiaforrás nélkül jönnek létre, *szabad elektromágneses rezgéseknek*, a rezgőkör szabad rezgéseinek frekvenciáját a kör *sajátfrekvenciájának* nevezzük.

Ideális rezgőkör sajátfrekvenciáját könnyen meghatározhatjuk. Az energiamegmaradás törvényét alkalmazva írható, hogy $Cu_m^2/2 = Li_m^2/2$. A váltakozó áramú áramkörre felírt Ohm-törvény szerint a kondenzátoron folyó áram és a kondenzátorfeszültség effektív értékei között az $U = IX_C = I/\omega C$ összefüggés áll fenn, ami a csúcsértékekre is érvényes: $u_m = i_m/\omega C$, ahol ω a létrejövő áram körfrekvenciája. Ezt az energiaegyenletbe írva:

$$\frac{1}{2} C \frac{i_m^2}{\omega^2 C^2} = \frac{1}{2} L i_m^2,$$

ahonnan az áram keresett körfrekvenciája:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}, \qquad (9.29a)$$

és a sajátfrekvencia, illetve a periódusidő:

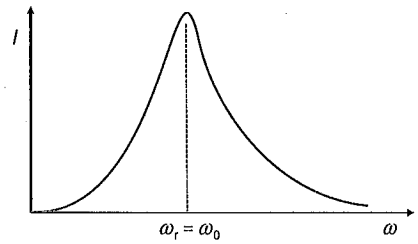
$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}, \quad \text{illetve} \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}. \qquad (9.29b, c)$$

A (9.28c) összefüggést *Thomson-képletnek* nevezik.

9.4.2. Rezgőkörök kényszerített rezgései. Impedanciák soros és párhuzamos kapcsolása

9.4.2.1. Soros *RLC*-kör. Feszültségrezonancia

Kapcsoljunk állandó effektív kapocsfeszültségű, változtatható körfrekvenciájú hálózatra sorosan ellenállást, tekercset és kondenzátort, valamint ampermérőt (soros *RLC*-kör), (lásd a 9.27. ábrát!). A körben periodikus külső elektromotoros erő hatására ún. *kényszerített* vagy *gerjesztett elektromágneses rezgések* jönnek létre. Ha a hálózat frekvenciáját (pl. a generátor fordulatszámának növelésével) 0-ról fokozatosan növeljük, azt tapasztaljuk, hogy az effektív áramerősség eleinte lassan, majd hirtelen megnő. Legnagyobb értékét egy meghatározott ω_r körfrekvenciánál veszi fel, majd a frekvenciát tovább növelve ismét csökkenni kezd (9.37. ábra).



9.37. ábra

Hasonló jelenséget tapasztalunk, ha állandó körfrekvenciájú hálózatra kapcsoljuk a rendszert, de a tekercs L induktivitását vagy a kondenzátor C kapacitását változtatjuk folyamatosan.

A 9.3. szakaszból tudjuk, hogy egy ilyen soros *RLC*-kör impedanciája

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

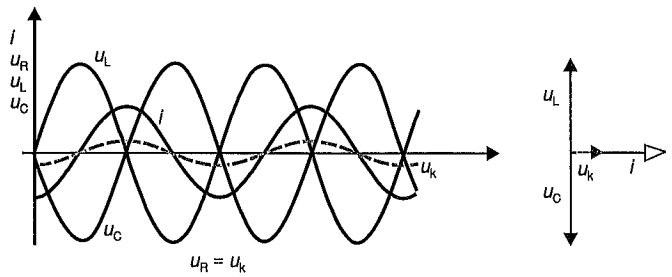
nagyságú [lásd a (9.24) képletet]. Ebből leolvasható, hogy adott L és C esetén található olyan ω, amelyre az $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ kifejezés zérussá válik. Ekkor lesz az eredő impedancia minimális, noha az induktív és kapacitív elemek X_C és X_L ellenállása külön-külön igen nagy lehet. Ekkor az eredő Z impedancia az R ohmikus ellenállás értékét veszi fel. Ha R elegendően kicsiny, az adott U_k kapocsfeszültség hatására az $I = U_k/Z = U_k/R$ egyenlet szerint igen tekintélyes áram folyhat át a rendszeren. Ilyenkor viszont külön a tekercsen, illetve kondenzátoron $U_L = U_C = IX_L = IX_C$ ab-

szolút értékű feszültség esik, ami az X_L és X_C nagy értékei miatt a kapocsfeszültség több százszorosát is elérheti! Ezt a jelenséget nevezzük *feszültségrezonanciának.*

Első kísérletünkben egy rezgőképes rendszer sajátfrekvenciájához hangoltuk a hálózat frekvenciáját, és így értük el a kényszerített rendszerrel való rezonanciát. A második esetben a rezgőkört hangoltuk a hálózathoz: a kör sajátfrekvenciáját változtatva értük el a feszültségrezonanciát.

A mechanikai rezonanciához (lásd a 2.4.10. pontot) hasonló esettel állunk szemben. A rezonancia a rendszer szabadrezgéseihez tartozó rezgésszámon jön létre. Z ui. akkor minimális, ha $\omega L = 1/(\omega C)$ ahonnan $\omega = 1/\sqrt{LC}$, illetve $\nu = 1/2\pi\sqrt{LC}$, a szabad rezgőképes rendszer sajátfrekvenciája.

A soros rezgőkört felhasználhatjuk feszültségemelésre, ui. a rezonanciafrekvencián a kör kapcsain levő kis feszültség mellett a kondenzátoron, illetve a tekercsen igen nagy feszültség léphet fel. Természetesen ez a két feszültség a kör áramához képest +90°-kal, illetve –90°-kal el van tolva, egymáshoz viszonyítva tehát 180°-os fáziseltolódás jön létre. Ezért minden pillanatban 0 az ideális tekercsen és kondenzátoron együttesen mért feszültség (9.38. ábra). Veszteséges tekercs esetén ez a fáziseltolódás kisebb.

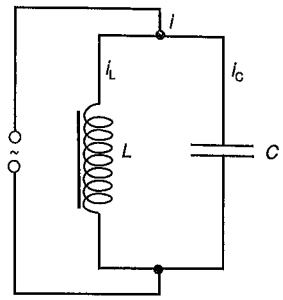


9.38. ábra

A feszültségrezonancia sok esetben nem kívánatos, ui. a tekercsen megjelenő igen nagy feszültség a szigetelést átütheti, a berendezés tönkremehet.

9.4.2.2. Párhuzamos *LC*- és *RLC*-kör. Áramrezonancia

Ideális *LC*-kör. A kényszerrezgés érdekes esete a párhuzamos rezgőköré. Párhuzamosnak nevezzük az *LC* rezgőkört, ha az *L* és *C* elemeket zártan kapcsoljuk az áramforrásra, vagyis úgy, hogy a generátor kapcsain a tekercs és a kondenzátor párhuzamosan csatlakozzék (9.39. ábra).

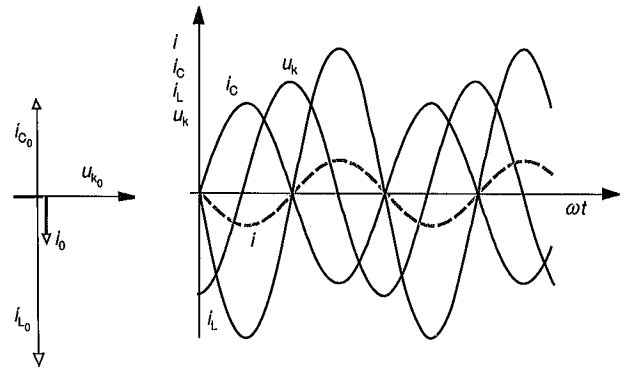


9.39. ábra

Párhuzamos rezgőkör esetén a tekercs és a kondenzátor ugyanazon feszültségen van: a generátor kapocsfeszültségén. Az áram két részre ágazik. Az áramerősség *pillanatnyi értékeire* Kirchhoff törvénye érvényes: $i = i_L + i_C$, vagyis a főág áramának pillanatnyi értéke az osztott ágak áramerősségei pillanatnyi értékeinek algebrai összege. Az áramok *effektív értékeire* pedig Kirchhoff törvénye az ún. vektorösszegezéssel érvényes (lásd a forgóvektoros ábrázolást, 9.3.1. szakasz 9.28. ábra).

Ismeretes [lásd a (9.18) és a (9.21) képleteket!], hogy a kondenzátorágban folyó áram 90°-kal *siet* a feszültséghez képest ($\varphi = -90°$), a tekercs árama ugyanennyivel *késik* ($\varphi = +90°$).

A párhuzamos rezgőkör áramának és kapocsfeszültségének fázisviszonyait a 9.40. ábra mutatja.



9.40. ábra

Mivel $i_L = \frac{u_k}{L\omega}\sin\left(\omega t - 90°\right)$ és $i_C = u_k C\omega \sin(\omega t + 90°)$, felhasználva a $\sin(\omega t - 90°) = -\sin(\omega t + 90°)$ azonosságot, a főágban folyó áram erőssége a következőképpen írható:

$$i = i_L + i_C = u_k \left| C\omega - \frac{1}{L\omega} \right| \sin\left(\omega t \pm 90°\right). \qquad (9.30)$$

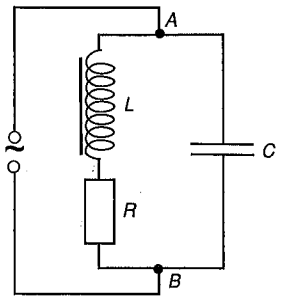
A fázisszög előjele attól függ, hogy $C\omega$ nagyobb vagy kisebb, mint $1/L\omega$ (lásd a 9.40. ábrát).

A párhuzamos *LC*-kör *eredő impedanciája* a $Z = U_k/I = u_{km}/i_m$ értelmezés alapján (9.30)-nak az $i = i_m \sin(\omega t - \varphi)$-vel való összehasonlítás szerint:

$$Z = \frac{1}{\left| C\omega - \frac{1}{L\omega} \right|}. \qquad (9.31)$$

A kapocsfeszültség és a főág árama közötti *fáziskülönbség* ±90°. (A főág árama vagy az egyik, vagy a másik osztott ág áramával van azonos fázisban.)

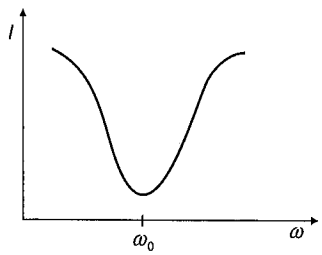
Veszteséges *LC*-kör. A valóságos esetben mindig van ohmikus ellenállása a tekercsnek, még ha kicsi is, ezért a fázisviszonyok az előzőektől kissé eltérnek. A 9.41. ábra egy veszteséges *LC*-kör kapcsolását mutatja, ahol a tekercs ohmikus ellenállását a tekercs elé, vele sorba kötött ellenállással vettük figyelembe.



9.41. ábra

Helyezzünk a két ágba és a generátor áramkörébe egy-egy igen kicsiny ellenállású ampermérőt! Ezekkel az *effektív áramerősségeket* mérjük. Legyen a kondenzátor kapacitása változtatható. Miközben ezt kis értékről fokozatosan növeljük, az egyes ágak műszerei mutatják, hogy az egyes ágakban folyó áramok erőssége hogyan változik, de a főágban mért áramerősség nem egyezik az osztott ágakban mért értékek összegével (a mért értékek nem pillanatértékek!). Ugyanakkor azt is ta-

pasztaljuk, hogy a főágban eleinte csökken az áram erőssége, majd egy minimális érték után ismét növekedni kezd (9.42. ábra).



9.42. ábra

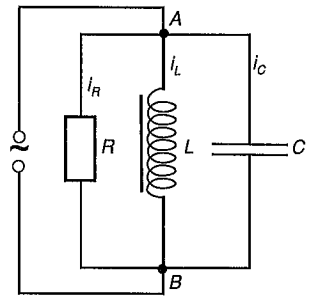
Ez azt jelenti, hogy a rezgőkör az *A* és *B* pontja között egy meghatározott kapacitásértéknél képviseli a generátorárammal szemben a maximális ellenállást. A főágban akkor *minimális* az áram erőssége, amikor mindkét mellékágban az áramerősség értéke megközelítően egyenlő. Kicsi *R* ohmikus ellenállás esetén ez igen nagy abszolút értékű lehet. Ezt az esetet *áramrezonanciának* nevezzük.

Áramrezonancia esetén az energia a kondenzátor és tekercs között leng, mint a rezgőkör szabad rezgéseinél, a generátor csak a veszteséget pótolja. Ekkor legnagyobb ui. a kör ellenállása. Ebből következik, hogy az áramrezonancia is akkor áll fenn, ha a gerjesztőáram frekvenciája megegyezik a *rezgőkör sajátfrekvenciájával,*

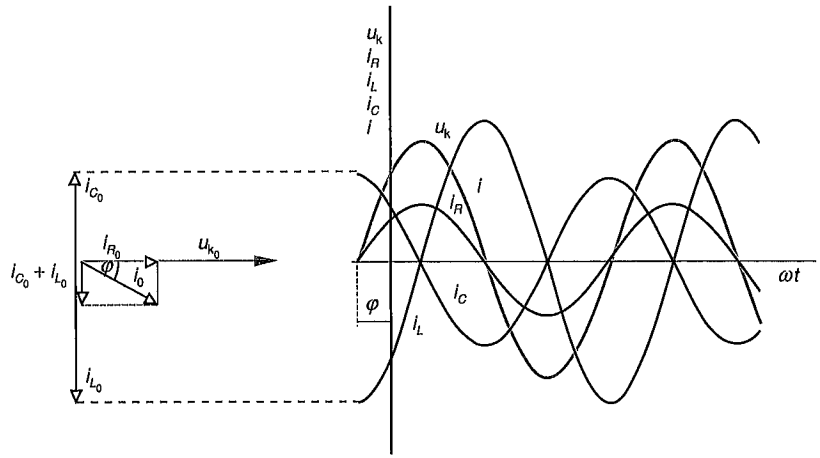
vagyis midőn $L\omega = 1/\omega C$, tehát $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$.

Párhuzamos *RLC*-kör. Ha a generátorra *R* ohmikus ellenállást, *L* induktivitású, veszteségmentes tekercset és *C* kapacitású kondenzátort párhuzamosan kapcsolunk, párhuzamos *RLC*-kört kapunk (9.43. ábra). A mellékágakban

$$I_R = \frac{U}{R}, \qquad I_L = \frac{U}{L\omega} \qquad \text{és} \qquad I_C = UC\omega$$



9.43. ábra



9.44. ábra

erősségű áramok folynak, ahol U a generátor kapocsfeszültsége. A 9.44. ábra az u_k kapocsfeszültséghez mint „alapvektorhoz" viszonyítva tünteti fel az ágak áramait. A főágban folyó áram erőssége az ábra alapján:

$$I=\sqrt{I_R^2+\left(I_C-I_L\right)^2}=U\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)^2}=\frac{U}{Z}. \tag{9.32}$$

Innen a *látszólagos vezetőképesség* (a látszólagos ellenállás reciproka):

$$Y=\frac{1}{Z}=\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)^2}, \tag{9.33}$$

és a főág árama és kapocsfeszültsége közötti fáziseltérés szöge:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)}{\frac{1}{R}}=R\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right). \tag{9.34}$$

9.4.2.3. Rezgőkörök csatolása

Ha két rezgőkört egymás mellé helyezünk úgy, hogy pl. az egyik tekercsének mágneses fluxusa részben átmenjen a másik rezgőkör tekercsén is, a két tekercs között energiacsere megy végbe. Ez esetben *csatolt rezgésekről, illetve* csatolt rezgőkörökről beszélünk. A kölcsönös induktivitás nagyságától függően a csatolás szoros vagy laza.

A rezgőkörök között *rezonancia* akkor lép fel, ha a két kör sajátfrekvenciája megegyezik. Ekkor a rezgésidők egyenlőségéből:

$$2\pi\sqrt{L_1C_1}=2\pi\sqrt{L_2C_2},$$

vagyis a két rezgőkör rezonanciában van, ha kapacitásuk és indukciós együtthatójuk szorzata megegyezik:

$$\boxed{L_1C_1=L_2C_2}. \tag{9.35}$$

Rezgőkörök rezonanciára való beállítását *hangolásnak* nevezzük. Ez megvalósítható akár forgókondenzátor kapacitásának változtatásával, akár az indukciós együttható változtatásával, pl. a vasmag helyzetének változtatásával.

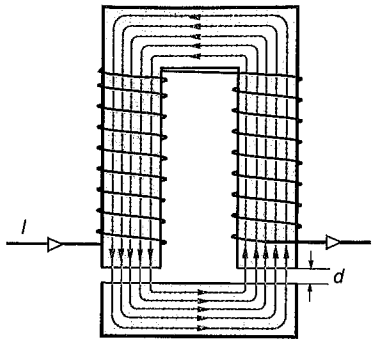
9.5. Gyakorlati alkalmazások

9.5.1. Az elektromágnes

Ha egy áramjárta tekercs belsejét vassal töltjük ki (vasmag), a tekercs által keltett **B** mágneses indukció és a $\Phi = BA$ mágneses fluxus igen nagy mértékben megnő. Ugyanakkor a zárt vasmag anyaga nem engedi szétszóródni az indukcióvonalakat, mintegy magába zárva „vezeti" azokat. Mindennek részletes magyarázatát a 26. fejezetben találjuk. Az alábbiakban a vas e tulajdonságait felhasználjuk.

Elektromágnest kapunk, ha lágyvasat a köré csévélt vezetékben folyó áram segítségével mágnesezünk fel. Az áram kikapcsolása után a lágyvas azonnal elveszti mágnességét (az ún. visszamaradó mágnesség elhanyagolható). Az elektromágnesek jól szabályozott erő kifejtésére alkalmasak.

A 9.45. ábrán látható elektromágnes vasmagjának homloklapjai és a rajta felfekvő záró vasmag között fellépő erőt (az elektromágnes maximális erőkifejtését) a mágneses energia megváltozásának és a vasmag és záróvas közötti rés megnövelésekor végzett munkának összehasonlításával határozhatjuk meg.



9.45. ábra

Távolítsuk el az elektromágnes véglapjaitól igen kicsiny d távolságra a záróvasat az indukcióvonalakkal párhuzamos irányban! (d legyen olyan kicsi, hogy az ún. szórt mágneses mező mindvégig elhanyagolható maradjon.) A vastömbök széthúzásakor végzett munkánk nagysága $W = Fd$. Ez a munka a $\Delta V = Ad$-vel megnövekedett térfogat mágneses energianövekedésével egyenlő.

Amikor még vas töltötte ki ezt a térrészt, ennek mágneses energiája az $E_m = \rho_m V$ összefüggés alapján [(9.13), (9.14a, b)]:

$$E_{m1} = \frac{1}{2\mu_0\mu_r} B^2 Ad.$$

volt. A vastömbök széthúzása után keletkezett légrés megnövekedett energiája:

$$E_{m2} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 Ad.$$

A térrész mágneses mezőjének energianövekedése az általunk kifejtett F' erő munkájának rovására történt, tehát

$$F'd = \Delta E_m = E_{m2} - E_{m1} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 Ad\left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right).$$

Fenti meggondolásunk eredményeképpen a következőt kapjuk:

A kölcsönhatás törvénye szerint a vasmag homloklapja ugyanakkora erőt fejt ki a záróvasra, mint amekkorát mi fejtettünk ki a széthúzáskor: $|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}'|$. Mivel a jó elektromágneseknél $\mu_r \gg 1$, az $1/\mu_r \approx 0$, tehát jó közelítéssel érvényes, hogy

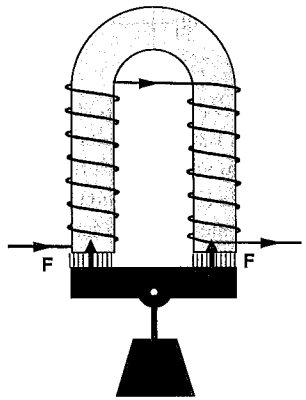
$$\boxed{F = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} A}. \qquad (9.36)$$

Innen a homloklap területegységére jutó húzóerő, vagyis a mechanikai feszültség (erősűrűség) értéke:

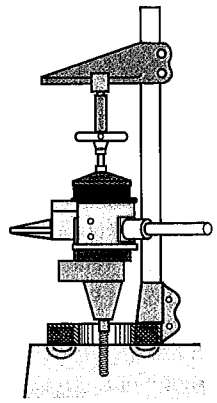
$$\boxed{f = \frac{F}{A} = \frac{B^2}{2\mu_0}}. \qquad (9.37)$$

Az elektromágnesek alkalmazása igen széles körű. Például vasterhek emelésére az *elektromágneses daruban,* munkadarabok rögzítésére, befogására az *elektromágneses asztalban* (9.46. és 9.47. ábrák).

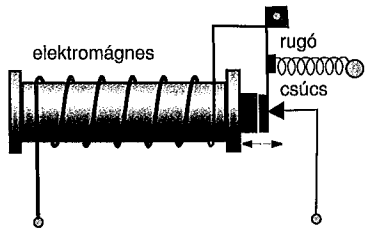
Az *elektromágneses szaggató* és a *villanycsengő* a 9.48. és 9.49. ábrán látható módon működik. A kapcsoló zárásakor az elektromágnes magához rántja a rugalmas lemezen rögzített lágyvaslapocskát. Ebben a pillanatban az áramkör megszakad, és a mozgó részt a rugalmas lemez visszarántja. Az érintkezőn keresztül ismét záródik az áramkör.



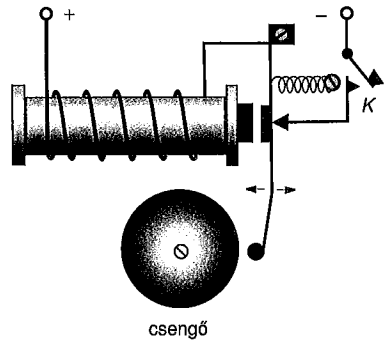
9.46.ábra



9.47. ábra

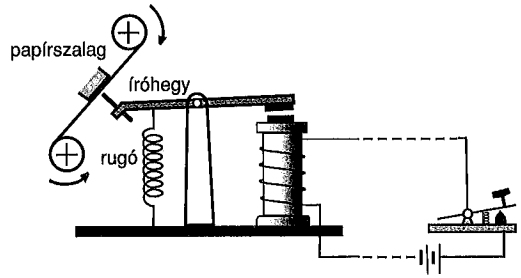


9.48. ábra



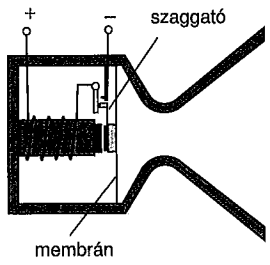
9.49. ábra

A 9.50. ábra szemlélteti a (ma már leginkább csak technikatörténeti jelentőségű) *elektromágneses távíró* működését. A morzebillentyű lenyomásakor a vevőállomáson az elektromágnes magához rántja az írószerkezet vaslemezkéjét, ezzel együtt a toll az egyenletes sebességgel elhúzott papírszalagra rövid vagy hosszú jelet rajzol az áramkör zárásának megfelelően.

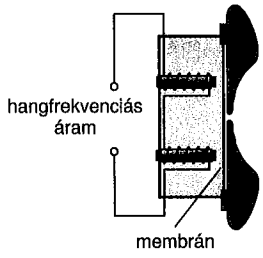


9.50. ábra

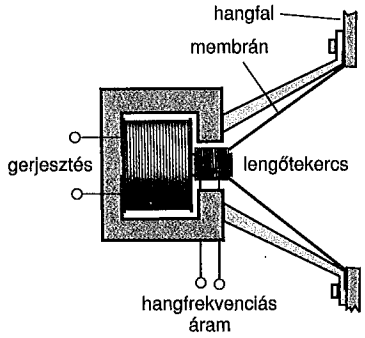
Elektromágnes működteti az *elektromos kürtöt* (9.51. ábra), a *telefonkagyló hallgatóját* (9.52. ábra) és a *hangszórót* (9.53. ábra). Ezek rezgő lemezét (membránját) a hangfrekvenciás elektromos áram ütemében változó mágneses erő mozgatja. A telefonkagylónál állandó mágnes vonzóerejét (indukcióját) a rátekercselt vezeték hangfrekvenciás árama változtatja, így a vaslemezből készült membrán rugalmas feszültsége (alakja) a rá kényszerített frekvenciával változik. A hangszórónál állandó mágnes mágneses terében folyó, változó erősségű áramra ható Lorentz-erő hozza rezgésbe a membránt.



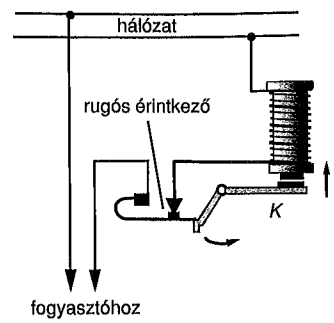
9.51. ábra



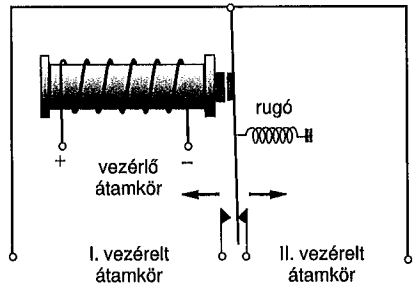
9.52. ábra



9.53. ábra



9.54. ábra



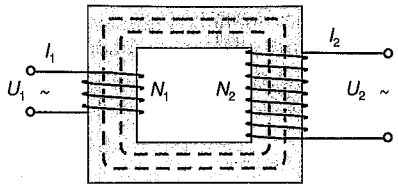
9.55. ábra

Az *elektromágneses túláramkioldó* (biztosíték) elektromágnese a megengedettnél nagyobb áramerősség elérése esetén behúz egy kart, amely felold egy rugós érintkezőt, és ezáltal az áramkör megszakad (9.54. ábra).

Az *elektromágneses jelfogók* (relék) segítségével kicsiny áramokkal nagy teljesítményű áramkörök távolról (távvezérlés) ki-be kapcsolhatók. Nagy szerepük van a távbeszélő-technikában, vasúti jelzőberendezések működésében, gépjármű-villamossági kapcsolásokban (9.55. ábra).

9.5.2. A transzformátor. Energiaátvitel

A transzformátor feladata a váltakozó feszültségek amplitúdójának átalakítása. A kölcsönös indukció elvén működik. Elvi elrendezését a 9.56. ábra mutatja. Az elektromos energiát felvevő tekercset *primer* (első), a leadó tekercset *szekunder* (második) tekercsnek nevezzük. A két tekercs közös, zárt vasmagra van csévélve, ezért a szórt mágneses fluxus általában elhanyagolható.



9.56. ábra

A vasmag vékony lemezekből van összetéve, amelyek egymástól vékony rétegekkel el vannak szigetelve, hogy ezzel megakadályozzák a melegedést – energiaveszteséget – okozó *örvényáramok* keletkezését. Enélkül ugyanis a vas teljes térfogatában örvénylő mozgásra kényszerülnének a vezetési elektronok.

Egyszerű kapcsolat van a transzformátor tekercseinek menetszámai és a tekercseken mérhető feszültségek között.

Legyen a primer tekercs ellenállása R_1, menetszáma N_1, a szekunderé R_2, illetve N_2! Ha a primer tekercset váltakozó áramú áramforrásra kapcsoljuk, mindkét tekercsben áram indul meg, ui. az első tekercs Φ_1, időben változó fluxust hoz létre, amelyet a szekunder tekercs menetei körülvesznek, s így a második tekercsben indukált elektromotoros erő jön létre, amely az R_2 ellenállású zárt körben áramot indít. A primer tekercs létrehoz Φ_1, a szekunder – (Lenz törvénye értelmében) azt lerontó – Φ_2 fluxust. Így mindkét tekercsen *azonos* $\Phi_0 = \Phi_1 - \Phi_2$ *fluxus megy át!*

Az első tekercs áramának pillanatnyi értékét a hálózat u_1 kapocsfeszültsége és az indukált $\mathscr{E}_{i1}$ elektromotoros erő együttesen szabja meg:

$$u_1 - \frac{\Delta\Phi_0}{\Delta t} N_1 = i_1 R_1.$$

A szekunder kör nem tartalmaz áramforrást, így abban csak az $\mathscr{E}_{i2}$ elektromotoros erő működik:

$$-\frac{\Delta\Phi_0}{\Delta t} N_2 = i_2 R_2.$$

Ha a primer tekercs ohmikus ellenállása az impedancia mellett elhanyagolható, az áramforrás kapocsfeszültsége az indukált feszültséggel tart egyensúlyt:

$$u_1 = \frac{\Delta\Phi_0}{\Delta t} N_1.$$

Ha ugyanakkor a szekunder kört *nem terheljük,* abban nem folyik áram, a kapcsain megjelenő feszültség és az indukált elektromotoros erő minden pillanatban ellentetten egyenlő:

$$u_2 = \frac{\Delta\Phi_0}{\Delta t} N_2.$$

A két egyenletet osztva egymással, a primerre kapcsolt és a szekunderen megjelenő feszültségek arányára azt kapjuk, hogy:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Levezetésünk eredményeképpen (utolsó egyenletünk bal oldalát $1/\sqrt{2}$ -vel bővítve) az effektív feszültségekre a következő adódik:

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}}, \qquad (9.38)$$

vagyis *a terheletlen transzformátor primer és szekunder feszültségei úgy aránylanak egymáshoz, mint a menetszámaik.*

A menetszámok arányát *áttételnek* nevezzük.

A jó hatásfokú transzformátoroknál a primer tekercs által felvett teljesítmény megegyezik a szekunder tekercs által leadott teljesítménnyel. A terhelt transzformátor primer és szekunder teljesítménye ekkor közelítőleg egyenlő:

$$U_1 I_1 \cos\varphi_1 = U_2 I_2 \cos\varphi_2.$$

A transzformátorok úgy vannak méretezve, hogy ha a névleges árammal terheljük, a $\cos\varphi_1$ és $\cos\varphi_2$ közel azonos érték. Így a primer és szekunder tekercs áramerőssége fordítottan arányos a menetszámokkal:

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}}. \qquad (9.39)$$

Energiaszállítás távvezetéken. A 9.2. szakasz végén láttuk, hogy az energia távvezetéken való szállítása akkor gazdaságos, ha nagyfeszültségen (kis áramerősség mellett) történik. Ekkor a fogyasztó ellenállásának megfelelő növelésével elérhető lenne, hogy a generátorból kiáramló energia sokkal nagyobb hányada áramoljon a fogyasztóba, mint a távvezetékbe. A fogyasztóra ilyen módon veszélyesen nagy feszültség jutna. A megoldást a távvezeték két végén a feszültség fel-, illetve letranszformálásával érhetjük el.

Állandó generátorteljesítmény esetén (az egyszerűség kedvéért csak ohmikus ellenállású fogyasztót feltételezve, vagyis $Z = R$):

$$P = UI.$$

Itt U a távvezeték generátor oldali kapocsfeszültsége.

A távvezetéken Joule-hő formájában elvesző energia teljesítménye

$$P_v = I^2 R_v,$$

ahol R_v a távvezeték ellenállása. Az áramerősség értékét beírva:

$$P_v = \left(\frac{P}{U}\right)^2 R_v,$$

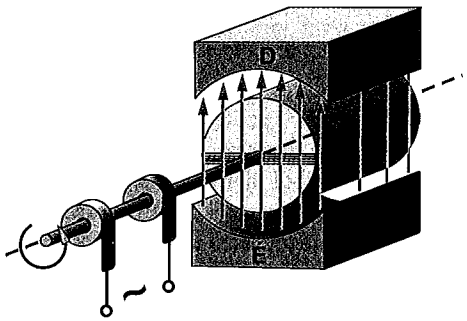
vagyis a távvezetékre kapcsolt feszültség *négyzetével* arányosan csökken a veszteség.

Az elektromos energiát az erőművek néhány kV feszültségéről 120...700 kV-os feszültségre transzformálják fel, majd a fogyasztóknál – általában több lépésben – ismét letranszformálják, Európában 230 V-ra.

9.5.3. Generátorok

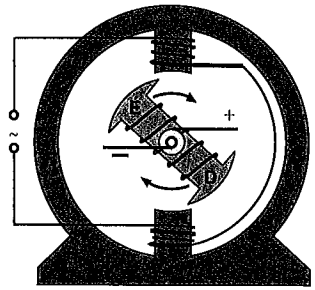
9.5.3.1. Váltakozó áramú generátorok

Egyfázisú generátor. Az erősáramú technikában generátoroknak nevezzük azokat a gépeket, amelyek mechanikai energiát elektromos energiává alakítanak át. Az egyfázisú váltakozó áramú generátor alapelvét a 8.3.2. pontban ismertük meg, elvi felépítését a 8.40. ábra mutatja. A gyakorlatban vasmagra erősített tekercset alkalmaznak, és a kivezetéseit egymástól elszigetelt csúszógyűrűkhöz forrasztják. Ezekről csúszóérintkezőkkel (ún. kefékkel) vezetik el a váltakozó áramot (9.57. ábra).



9.57. ábra

Ha a mágneses mezőt elektromágnessel állítják elő, nagy teljesítmény leadására alkalmas generátort kapnak. Ekkor a mágneses mezőt előállító elektromágnes forog az ún. állórész tekercsei között, amelyekben a változó mágneses mező feszültséget indukál. Ily módon a nagyfeszültség levételekor a csúszóérintkezőknél mindig fellépő szikrázás elkerülhető (9.58. ábra).



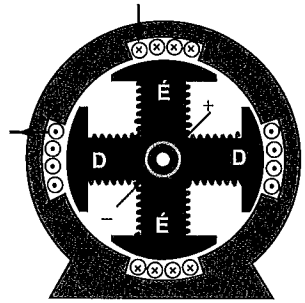
9.58. ábra

Ha a gerjesztő-tekercspárt többszörözzük, ugyanakkora frekvencia eléréséhez kisebb fordulatszámra van szükség. A váltakozó áram frekvenciája ekkor

$$f = np,$$

ahol n a fordulatszám, p a póluspárok száma.

Az állórész és forgórész egyenlő számú póluspárt, illetve tekercspárt tartalmaz. Az egymás után következő tekercsek ellentétes csévélésűek, és sorba vannak kapcsolva egymással (9.59. ábra). Így minden tekercsben azonos előjelű feszültség keletkezik, és ezek összeadódnak.



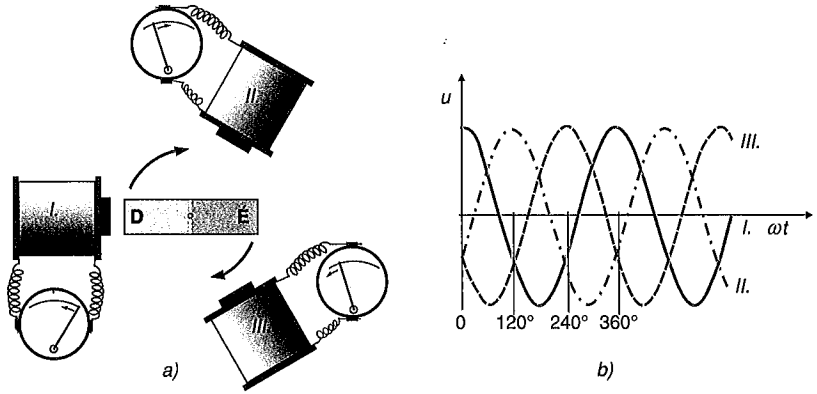
9.59. ábra

Háromfázisú generátor. A háromfázisú generátor tulajdonképpen három egyfázisú generátor alkalmas módon egybeépítve. Egy közös forgórész három, egymástól független, egymáshoz képest 120°-kal elforgatott helyzetű tekercspárban indukál feszültséget. A keletkező feszültségek között egyharmad periódus fáziskülönb-

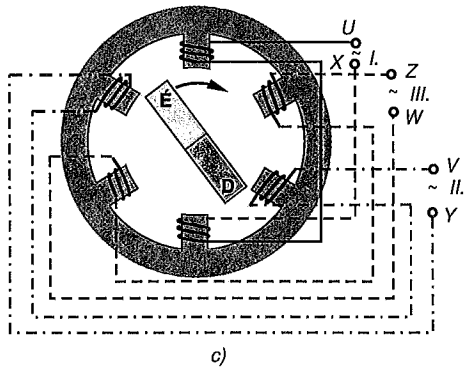
ség van (9.60a–b–c. ábra). A 9.60a. ábra demonstrációs kísérletet mutat tekercspárok helyett egy-egy tekerccsel.

A háromfázisú generátor kétféle módon kapcsolható a hálózatra. Ha a három tekercs egy-egy megfelelő kivezetését összekötjük, és a szabadon maradó másik három kivezetést a fogyasztókhoz vezetjük, az ún. *csillagkapcsolást* hoztuk létre. A közös ponthoz csatlakozó vezetéket *nullavezetéknek,* a többit *fázisvezetéknek* nevezzük. Ezek jele rendre R, S és T.

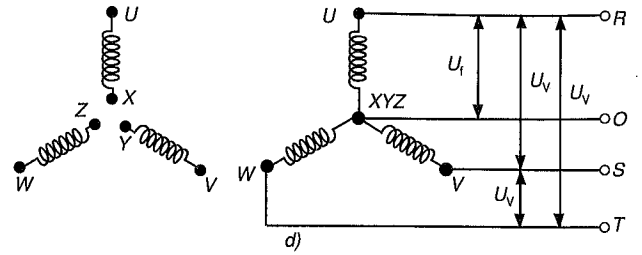
A fogyasztónál kétféle feszültség jelenik meg. A fázisvezeték és nullavezeték között az ún. *fázisfeszültséget* (U_f), két-két fázisvezeték között pedig az ún. *vonalfeszültséget* (U_v) kapjuk (9.60d. ábra).



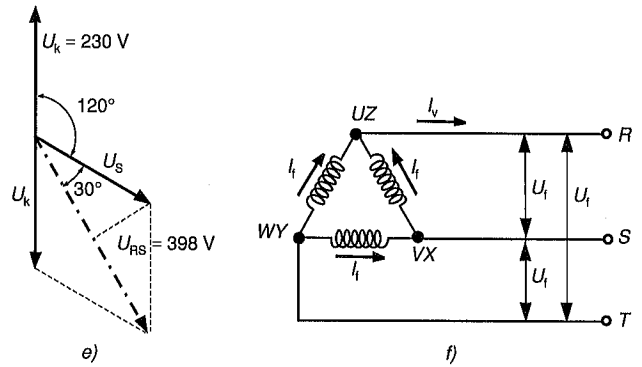
9.60a–b. ábra



9.60c. ábra



9.60d. ábra



9.60e–f. ábra

A 9.60e. ábra a feszültség forgóvektoros diagramját mutatja. Innen leolvasható a vonal- és fázisfeszültségek közötti kapcsolat:

$$U_{RS} = U_R - U_S,$$

tehát

$$U_v = \sqrt{3} U_f.$$

(Pl. ha a fázisfeszültség U_f = 230 V, akkor a vonalfeszültség U_v = 398,37 V.)

Háromszögkapcsolást kapunk, ha a három tekercset sorba kapcsoljuk (9.60f. ábra). Itt a fázis-, illetve vonalfeszültségek megegyeznek (bármely tekercs két ki-

vezetése között megjelenő U_v feszültség a vezetékpárok között mérhető U_f feszültséggel megegyezik). Egyenletes terhelés esetén az egyes áramkörök fogyasztóin a tekercsek fázisáramának $\sqrt{3}$ -szorosa folyik:

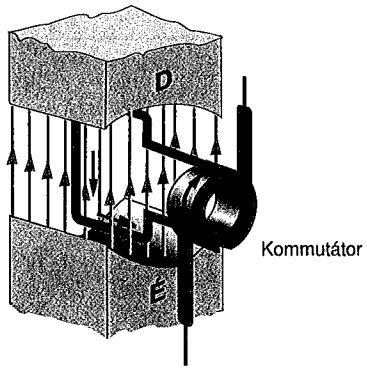
$$I_v = \sqrt{3} I_f.$$

Ugyancsak egyenletes terhelésnél a három fázis együttes effektív teljesítménye mind csillag-, mind háromszögkapcsolásban:

$$P = 3U_f I_f \cos \varphi.$$

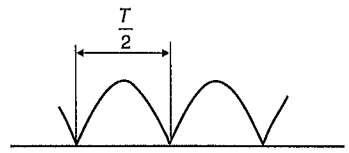
9.5.3.2. Egyenáramú generátorok

Ha a homogén mágneses mezőben forgatott tekercs kivezetéseit egyetlen csúszógyűrű két, egymástól elszigetelt szeletéhez forrasztjuk, akkor a mágneses mezőhöz képest álló helyzetben levő csúszóérintkezőkön (keféken) minden félperiódusban azonos irányú áram folyik (9.61. ábra).



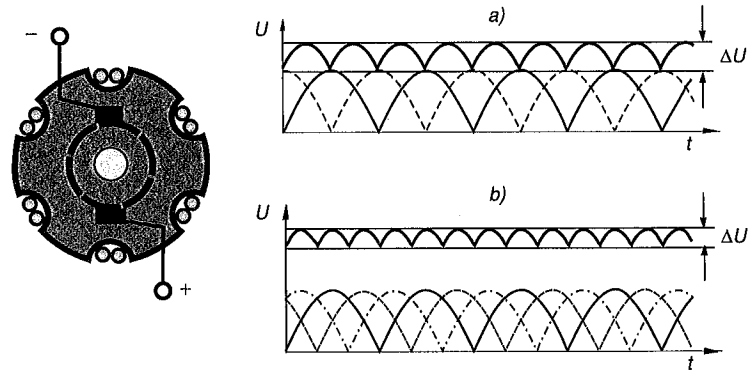
9.61. ábra

A feszültség értéke zérus és maximum között az $u = |u_0 \sin(\omega t)|$ függvény szerint változik (9.62. ábra). A szeletelt csúszógyűrűt *kommutátornak* nevezzük. A kommutátor a forgó részhez viszonyítva váltakozó irányú feszültséget az álló csúszóérintkezőkhöz viszonyítva egyenirányítja, és így a generátor ún. *lüktető egyenáramot* szolgáltat.



9.62. ábra

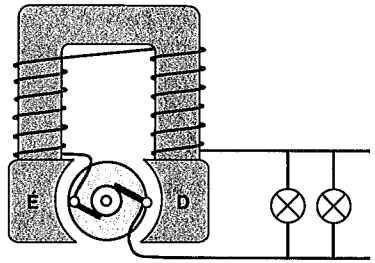
A lüktetés mértéke csökkenthető, ha a mágneses mezőben több, egymáshoz képest azonos szöggel elforgatott helyzetben levő tekercset helyezünk a forgórészre, és ezeket sorba kötjük. Minden tekercsvéget kivezetünk egy-egy kommutátorszelethez, amelyek száma a tekercsek számával egyezik. Elegendő számú tekercs alkalmazásával a lüktetés mértéke elenyészővé válik. A keféken megjelenő feszültség az összes tekercs feszültségének összegével egyenlő (9.63. ábra).



9.63. ábra

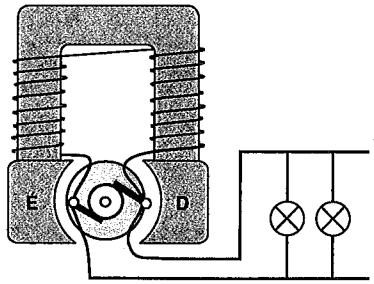
A generátorokban a mágneses mezőt létesítő elektromágnest eleinte külön egyenáramú áramforrásokkal (akkumulátorok) táplálták. *Jedlik Ányos* magyar fizikus jutott először arra a gondolatra, hogy a generátor elektromágnesét is maga a generátor táplálja. Ez az ún. *öngerjesztés elve,* vagy *dinamóelv*. A generátor elektromágnesének vasmagjában ui. mindig van kevés remanens mágnesség (lásd a 26. 1.2. fejezetet!). Ha a generátor forgórészét forgásba hozzuk, akkor abban egy igen gyenge mágneses mező igen kis áramot kelt. Ha ezt az áramot a gerjesztő elektromágnesbe visszük, a mágneses mező már erősebbé válik, ami ismét erősebb áramot kelt a forgórészben. Ez a folyamat a vas telítődéséig fokozható.

A *főáramkörű dinamó* állórésze kis ellenállású tekercselést tartalmaz, és a fogyasztókkal *sorosan* van kapcsolva. Ennél a rendszernél az indukált feszültség a külső terheléstől függ, hiszen a mágneses mező indukciója függ a gerjesztő áram erősségétől (9.64. ábra).



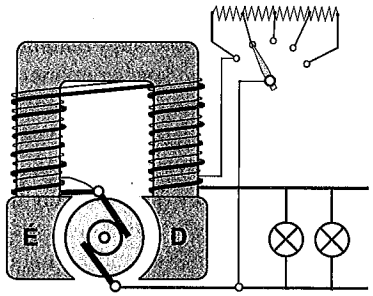
9.64. ábra

A mellékáramkörű (sönt-) *generátor* gerjesztőtekercse a fogyasztókkal *párhuzamosan* van a forgórészre kapcsolva, és nagy az ellenállás (sokmenetű). Így a külső terhelés alig befolyásolja a feszültségét (9.65. ábra).



9.65. ábra

A *kettős gerjesztésű* (vegyes) *generátor* gerjesztő mágnesét két tekercs veszi körül. Az egyik kis ellenállású, és a fogyasztókkal sorba van kapcsolva, a másik nagy ellenállású (sokmenetű), és a fogyasztókkal párhuzamosan kapcsolt. Nagy teljesítmények szolgáltatására képes (9.66. ábra). Ott alkalmazzák, ahol a terhelésben nagy ingadozások lépnek fel (kohók, elektromos vontatás, erőművek).



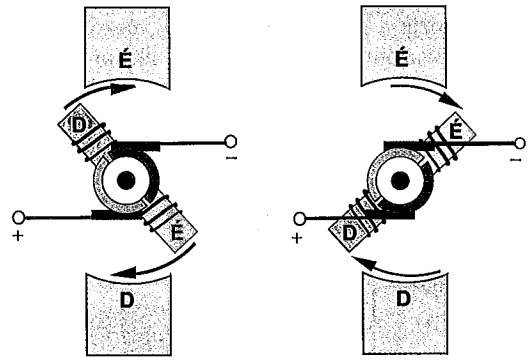
9.66. ábra

9.5.4. Motorok

9.5.4.1. Egyenáramú motorok

Ha a kommutátoros egyenáramú generátorba a keféken keresztül egyenáramot vezetünk, akkor az forgásba jön: az elektromos energia mechanikai energiává alakul, egyenáramú motort kapunk.

Működési elve: a forgórész tekercsébe vezetett egyenáram elektromágnessé teszi a forgórészt, így az állórész pólusai forgatónyomatékot gyakorolnak rá, aminek hatására a forgórész elfordul. Amint a mező forgatónyomatéka ellenkezőjére válna, s így a forgás lefékeződne, a kommutátor megfordítja a forgórész tekercsében az áram irányát. Ekkor a mező ismét az előzővel azonos irányú forgatónyomatékot gyakorol a forgórészre, és a forgás folyamatossá válik. (9.67. ábra). Ha több tekercset alkalmazunk (dobarmatúra), a forgás egyenletessé válik.



9.67. ábra

Ha a motor állórészének mágneses mezejét elektromágnes gerjeszti, egyaránt használható egyenáramú és váltakozó áramú hálózatra kapcsolva *(univerzális motorok)*. A forgó- és állórészben ui. ilyenkor egyidejűleg változik az áram iránya, s így relatív irányuk nem változik, ezért kölcsönhatásuk azonos az egyenáramú üzemeltetéskor fennállóval

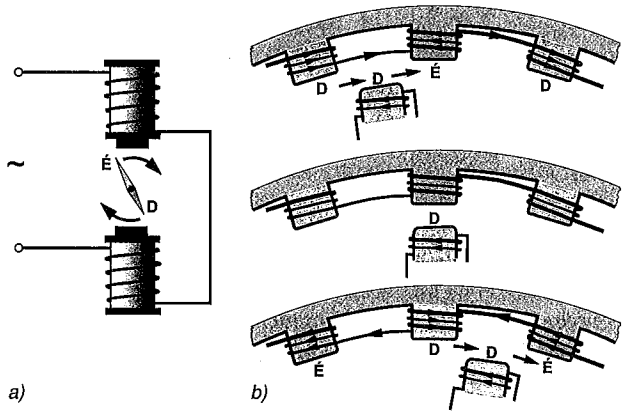
A főáramkörű vagy soros motornak mind a gerjesztőtekercsén, mind a forgórészén azonos áram folyik, így a keletkező nyomaték az áramerősség négyzetével arányos. Nagy indítónyomatéka miatt főként elektromos vontatásban alkalmazzák.

A mellékáramkörű vagy söntmotor elektromágnesét a főáramkör áramerősségének kb. 5...8%-a gerjeszti. Elektromágnese közel állandó feszültséget kap, fordulatszáma változó terhelés esetén is közel állandó. Főleg szerszámgépekben alkalmazzák.

A kettős gerjesztésű motor egyesíti a fő- és mellékáramkörű motor előnyeit: nagy erővel indít, nagy nyomatéka van, közel állandó a fordulatszáma. Az ilyen motorokat főleg vontatásra (trolibusz, fogaskerekű vasút) használják (lásd a 9.64., 9.65 és 9.66. ábrákat, ahol a fogyasztó helyére egyenáramú áramforrást kell helyettesíteni). Az indításkor fellépő nagy áramfelvételt sorba kapcsolt, majd fokozatosan kiiktatott ún. *indító-ellenállással* akadályozzák meg.

9.5.4.2. Váltakozó áramú motorok

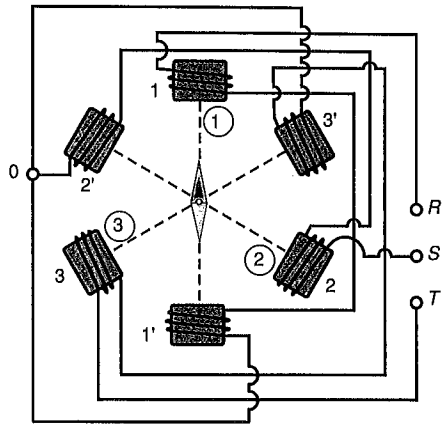
Szinkronmotorok. Ha az egyfázisú generátor állórészébe váltakozó feszültséget kapcsolunk és a forgórészt megpörgetjük, az szinkronban forog a váltakozó feszültséget szolgáltató generátorral – amennyiben elérte a megfelelő fordulatszámot. A megpörgetett forgórészre mint állandómágnesre az állórész váltakozó mágneses tere a szinkron fordulatszám elérése esetén mindig egyirányú forgatónyomatékot gyakorol: mire megváltozik a gerjesztett mágneses mező, addigra fél fordulatot tesz meg a forgórész (9.68a. ábra). Több tekercspár alkalmazásával a forgórész fordulatszáma csökkenthető (9.68b. ábra). Kis teljesítményük miatt a szinkronmotorokat főleg hálózati órákban használják. Indításkor fel kell pörgetni őket.



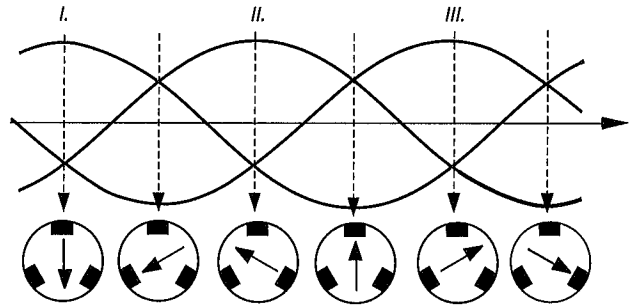
9.68. ábra

Forgó mágneses mező. Indukciós vagy aszinkronmotorok. Ha három vasmagos tekercset 120°–120°-os szögben helyezünk el egy kör mentén, majd csillagkapcsolásban háromfázisú áramrendszerre kapcsoljuk, a tekercsek közé helyezett iránytű forgásnak indul, és szinkronban forog az árammal anélkül, hogy megpörgettük volna. A tekercsek középpontjában kialakult mágneses mező indukcióvektora ui. egyenletes szögsebességgel forog a középpont körül (9.69. és 9.70. ábra).

Forgásának periódusa megegyezik a váltakozó áraméval. Az ilyen mágneses mezőt *forgó mágneses mezőnek* nevezzük.

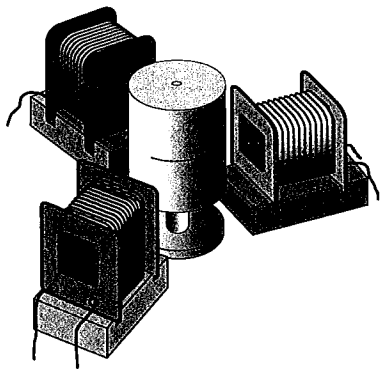


9.69. ábra



9.70. ábra

Helyezzünk forgó mágneses mezőbe tűhegyre függesztett fémdobozt (pl. üres konzervdobozt), fémtárcsát vagy rövidre zárt vasmagos tekercset! Azt tapasztaljuk, hogy forgásba jönnek anélkül, hogy megindítottuk volna, vagy áramforráshoz kapcsoltuk volna őket. A jelenséget az indukcióval és Lenz törvényével magyarázhatjuk. A fémtárcsában a mágneses mező forgása következtében *örvényáramok* keletkeznek, s ezeknek a külső mezővel való kölcsönhatása forgásba hozza a fémtárcsát. Lenz törvénye szerint ui. az indukált áram mezeje olyan, hogy akadályozza az indukált áram keletkezésének az okát, vagyis a mező és a fémtárcsa relatív forgását. A tárcsa a mezővel egy irányban forog (9.71. ábra).



9.71. ábra

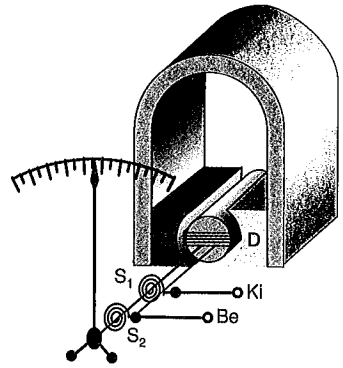
Külső mechanikai terheléskor ismét megnő a relatív szögsebesség (lecsökken a forgás sebessége), ezzel együtt megnő a forgórészre ható mágneses forgatónyomaték. Ha nincs terhelés, a forgórész ismét felpörög, de nem érheti el a forgó mágneses tér szögsebességét, mert akkor megszűnne a mágneses forgatónyomatéka, s nem lenne képes kompenzálni a súrlódási erőket. Így a forgórésznek mindig „csúszása" van a mágneses mezőhöz képest (szlip). Mivel a tárcsa nem forog együtt a mezővel, *aszinkron motorként* működik. A forgó mágneses tér elvén alapuló háromfázisú motorokat *indukciós* vagy *aszinkron motoroknak* nevezzük. Az állórész tekercselése megegyezik a háromfázisú generátorokéval.

Az indukciós motorok indítónyomatéka, vonóereje és terhelhetősége nagy, fordulatszámukat (állandó terhelés esetén) jól megtartják. Szerkezetük rendkívül egyszerű, szikrázásmentes, mivel kefékre nincs szükség. Felvonószerkezetek hajtására, vasúti villamos vontatásra, valamint elektronikus eszközök forgó alkatrészeink (magnetofonok, lemezjátszók) működtetésére használják.

9.5.5. Mérőműszerek

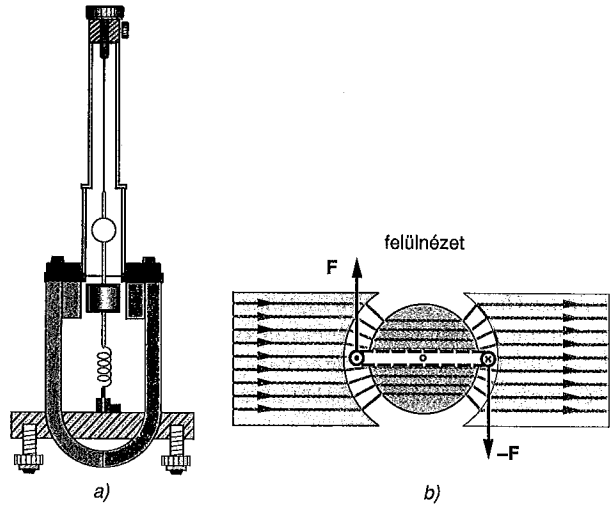
Forgótekercses vagy **Deprez-műszerek.** Működési elvüket a 9.72. ábra szemlélteti. Az állandómágnes sarkai között elhelyezkedő saruk és lágyvasból készült henger segítségével olyan mágneses mezőt állítunk elő, amelynél a **B** indukció sugárirányú, és nagysága – a légrés kihasznált részében – közel állandó. Így a rögzített vashenger köré tekercselt (attól függetlenül mozgó) lapos tekercsre az áram erősségével arányos forgatónyomaték hat. Ezt a forgatónyomatékot az S_1 és S_2 spirálrugó forgatónyomatéka egyensúlyozza ki. Mivel ez utóbbi a szögelfordulással arányos, a skálabeosztás egyenletes. A tekercshez erősített mutató állásáról

közvetlenül áramerősség olvasható le. Egyenirányítóval váltakozó áram mérésére is alkalmas. Érzékenysége nagy, méréshatára 0,1 mA-ig is csökkenthető.



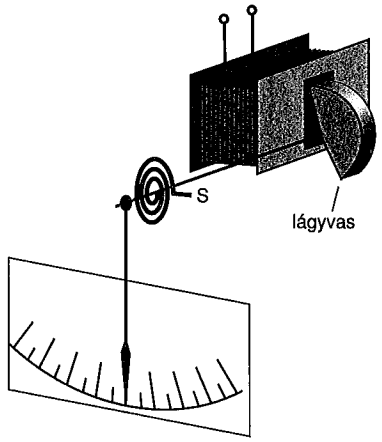
9.72. ábra

Lengőtekercses tükrös galvanométer. Igen kis erősségű áramok mérésére alkalmas műszerek. Működési elvük azonos Deprez (ejtsd döpré) forgótekercses műszerével, azonban az érzékenység fokozására a tekercset igen vékony rugalmas szálra (torziós szálra) függesztik (9.73. ábra). Rendszerint fénymutatós kivitelben készülnek. A tükrös, fénymutatós galvanométerek 50 mm/(10^{-9}A) érzékenységűre készíthetők, ahol az *érzékenység* a mm-ben kifejezett fénypontelmozdulást jelenti áramerősség-egységenként.



9.73. ábra

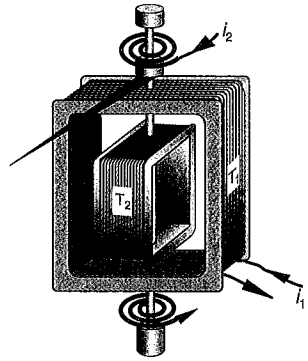
Lágyvasas műszerek. Működési elvük a 9.74. ábrán látható. A tekercsen átfolyó áram a rugós felerősítésű lágyvaslemezkét annál erősebben húzza magához, minél nagyobb a gerjesztő áram erőssége. A skálabeosztás egyenletessé tehető a vaslemezke alakjának megfelelő kialakításával. Mivel az erő iránya független az áram irányától, egyen- és váltakozó áramok mérésére egyaránt alkalmas. Pontossága és érzékenysége sokkal kisebb, mint a forgótekercses műszereké. Ugyanakkor kevésbé kényes a szerkezete.



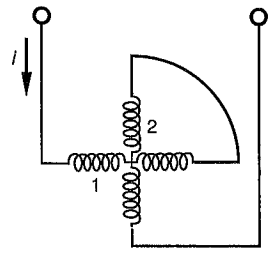
9.74. ábra

Elektrodinamikus műszerek. Ezekben a műszerekben az állandómágnes mezejét egy tekercs elektromágneses mezejével helyettesítjük. A 9.75. ábra alapján látható, hogy az álló tekercsben (T_1) folyó i_1 erősségű áram állítja elő a mágneses mezőt, amelyben az i_2 erősségű árammal átjárt forgótekercs (T_2) elfordul. A geometriai viszonyok alkalmas megválasztásával elérhető, hogy a forgótekercs meneteinek elfordulási tartományában a mágneses mező a tengelyhez viszonyítva radiális legyen. Ezért a forgórészre ható erő nyomatéka $i_1 i_2$-vel arányos.

Amper- és voltmérő-kapcsolás. Ha az elektrodinamikus műszer két tekercsét sorba kapcsoljuk (9.76. ábra), a műszer egyen- és váltakozó áram és feszültség mérésére alkalmas. Ha a két tekercsen ugyanaz az áram folyik át, akkor i^2-tel arányos kitérést kapunk, tehát skálamenete négyzetes. Voltmérőként alkalmazva megfelelő előtét-ellenállást kell vele sorba kapcsolni. Az átfolyó áram erőssége ekkor kivezetésén megjelenő feszültséggel arányos.



9.75. ábra

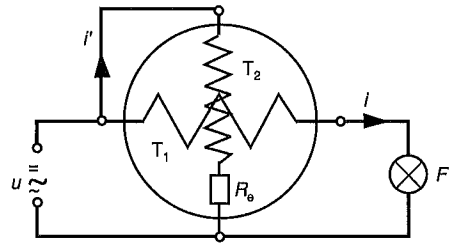


9.76. ábra

Wattmérő-kapcsolás. Kapcsoljuk az elektrodinamikus műszert úgy, hogy az álló tekercsen (T_1) folyjék át a fogyasztó (F) teljes árama (i_1), a mozgó tekercsen (T_2) pedig a fogyasztó sarkain uralkodó feszültség (u) jelenjék meg. Ekkor a mozgó tekercs árama az u feszültséggel arányos: $i' = k_1 u$. A mutató kitérésének szöge – mindkét áram erősségével arányos lévén –:

$$\alpha = k_2 i i' = k_1 k_2 i u = k_3 i u = k_4 P_h.$$

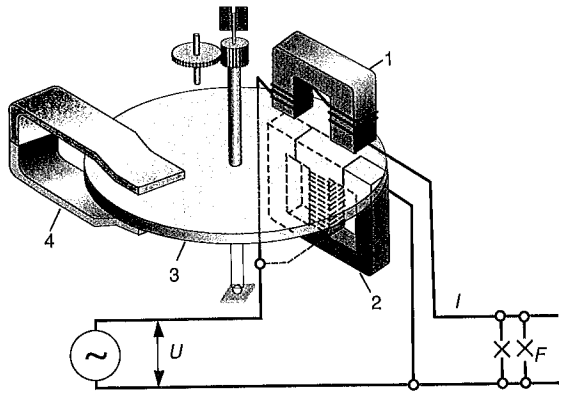
A műszer tehát a fogyasztó által felvett hasznos teljesítményt méri (9.77. ábra).



9.77. ábra

Tárcsás indukciós fogyasztásmérő. A fogyasztásmérőnek a $W = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi \cdot t$ szorzatot kell mérnie, amely az áramerősség, a feszültség, és a fáziseltolódás értékén kívül az időnek is függvénye.

A fogyasztásmérő két tekercset tartalmaz (9.78. ábra). Az ún. áramtekercs (1) kevés menetű, kis ellenállású.



9.78. ábra

Ezt a fogyasztóval (*F*) sorba kapcsolják. Az ún. feszültségtekercs (2) sokmenetű, nagy induktivitású és a fogyasztóval párhuzamos kapcsolású. Ebben a nagy önindukció miatt az áramerősség közel 90°-kal késik a feszültséghez képest. A keletkező forgó mágneses mező a két tekercs között elhelyezett, könnyen forgatható alumíniumtárcsában (3) örvényáramot kelt, amely Lenz törvénye értelmében forgásba hozza a tárcsát (lásd indukciós motorok). A tárcsa állandóan gyorsulna, míg el nem érné a mágneses mező szögsebességét. Ha azonban a tárcsa egy patkómágnes (4) sarkai között forog, akkor az szintén örvényáramot indukál benne, amely *fékezi* a tárcsa forgását. Így egyenletes forgás jön létre az egyensúlyi sebességen, amely a forgatónyomaték nagyságától függ. A mágneses indukció az áramtekercs áramával, a feszültségtekercs árama pedig a feszültséggel, ezért a tárcsa fordulatszáma a teljesítménnyel arányos. Mivel az összes fordulat száma az idővel arányos, így a koronghoz kapcsolódó számlálószerkezet éppen ezek szorzatát, vagyis a munkát (fogyasztást) méri. Rendszerint kilowattórában kalibrálják.

10. Az időben változó elektromos mező. Az elektromágneses hullámok és a fény

10.1. Az eltolási áram. Maxwell törvényeinek rendszere

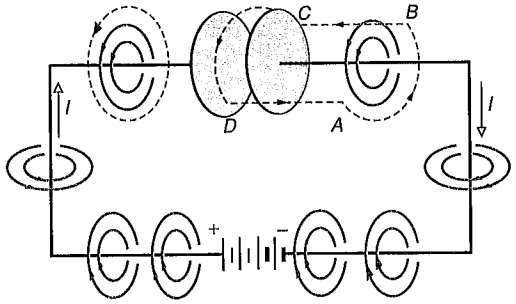
Mint tudjuk, az 1860-as évek közepéig a fizikusoknak csak arról az egyoldalú hatásról volt tudomásuk és kísérleti tapasztalatuk, hogy az időben változó mágneses mező (örvényes) elektromos mezőt kelt, amelyet a Faraday-féle indukciótörvény ír le, s amelyet Maxwell az általa összefoglalt elektrodinamikai axiómarendszerébe foglalt. Faraday indukciótörvénye szerint az időben változó mágneses mező forrásmentes, örvényes elektromos mezőt kelt. Ezt Maxwell öntötte matematikai alakba, az örvényerősség (cirkuláció) fogalmának felhasználásával:

$$\ddot{O}_E = \overset{\circ}{\sum_g} E\Delta r = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Ez az egyoldalú hatás azonban ellenkezve a kölcsönhatás szimmetriájának elvével, Maxwellt nem hagyta nyugodni, míg végül feltételezett egy addig (és ezután még vagy 20 évig) minden kísérleti próbálkozás alól magát kivonó hatást. Noha kísérletekkel nem igazolhatta, Maxwell mégis feltételezte, hogy *az elektromos mező időbeli változása* is kelt mezőt, mégpedig *örvényes mágneses mezőt.* 1868 táján vette észre, hogy az *addig* felismert elektromágneses jelenségek és az azokat leíró törvények nem elegendőek az elektromágnesség egységes magyarázatához, sőt ellentmondásra is lehet jutni alkalmazásukkal. Maxwell tehát *a mezők törvényrendszerének ellentmondásmentességét úgy tudta biztosítani, hogy összekapcsolta a változó elektromos mező fluxusváltozási sebességét egy általa keltett mágneses mező örvényerősségével.*

Alkalmazzuk pl. a gerjesztési törvényt [(8.11.) egyenlet] egy kondenzátorral megszakított áramkörre (10.1. ábra)! Az *ABCD* szaggatott vonallal jelzett zárt görbére képezett örvényerősség értékének egyrészt $\frac{1}{2}\mu_0 i$ -nek kell lennie, ami éppen a fele a $\mu_0 i$ örvényerősségnek, hiszen a $\overset{\circ}{\sum_g} B\Delta r$ összeg csak az *AB* félkör mentén különbözik zérustól, mivel a *BC* és *DA* szakaszokon cos $\alpha = 0$, a *CD* szakasz pedig a kondenzátorlemezek között halad, ahol eddigi tapasztalataink szerint nincs mágneses tér, mivel ott nem folyik

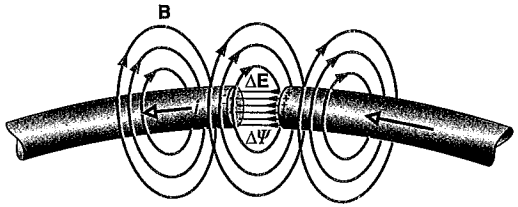
áram. Másrészt viszont az örvényerősség 0 kell hogy legyen, mert a zárt görbénk valójában *nem vesz körül áramot:* a kondenzátorlemezek között nincs töltésmozgás.



10.1. ábra

Maxwell arra következtetett, hogy a lemezek között is kell lennie mágneses mezőnek, amíg az áram folyik a hozzá vivő vezetékekben. Ez az áram fokozatosan tölti (vagy éppen kisüti) a kondenzátort, így *ezalatt* változik a lemezek közötti elektromos mező térerőssége. A keletkező mágneses mezőt tehát a töltésmozgás hiányában[1] egy másik objektív fizikai változás: az elektromos mező időbeli változása hozza létre.

Mivel a kondenzátorlemezek között addig tart az elektromos mező *változása,* míg a hozzákapcsolt vezetékekben áram folyik, ezért mágneses szempontból az így keletkező elektromos térerősség-változás éppen a *vezetékben folyó áram folytatásaként* fogható fel (10.2. ábra).



10.2. ábra

Milyen kapcsolat van az elektromos térerősség-változás és a keletkezett mágneses mező között?

A kondenzátort töltő áram pillanatnyi erőssége:

$$i=\frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

[1] Valójában a lemezek közötti szigetelőanyag polarizációja töltésmozgással, „töltéseltolódással" jár, azonban a jelenség vákuumban is végbemegy, ahol töltések nincsenek. *Maxwell* még úgy gondolta, hogy a vákuumot kitöltő éterrészecskék *eltolódása* okozza a töltésmozgást, illetve a mágneses mező létrejöttét.

A Δq töltéstöbblet Gauss tétele szerint

$$\Delta EA=\frac{1}{\varepsilon_0}\Delta q$$

erővonalszám-változást hoz létre (lásd a (7.14a) képletet). Innen Δq értékét az áramerősség kifejezésébe írva a következőt kapjuk:

$$i=\frac{\varepsilon_0\Delta EA}{\Delta t}=\frac{\varepsilon_0\Delta\Psi}{\Delta t}.$$

Az elektromos fluxusváltozás sebességét tehát ekkora erősségű áramnak kell felfognunk:

$$\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}=\frac{1}{\varepsilon_0}i.$$

Maxwell tehát feltételezte – majd 20 évvel később Hertz kísérletileg is kimutatta –, hogy *az elektromos mező változási sebességének* $\varepsilon_0\Delta\Psi/\Delta t$*-vel jellemzett mértéke ugyanolyan kapcsolatban van a mágneses mező örvényerősségével, mint a vezetési áram erőssége:*

$$\boxed{\ddot{O}_B=\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}}. \qquad (10.1)$$

A (8.11) gerjesztési törvény Maxwell által kiegészített alakja tehát

$$\boxed{\ddot{O}_B=\mu_0 i+\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}}, \qquad (10.2)$$

ami már nincs ellentmondásban az elektromágneses jelenségekkel. Részletesen:

$$\ddot{O}_B=\overset{\circ}{\sum_g}\mathbf{B}\Delta\mathbf{r}=\mu_0 i+\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}=\mu_0\left(i+\varepsilon_0\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}\right). \qquad (10.3)$$

Az $i_e=\varepsilon_0\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}$ mennyiséget történeti okokból *eltolási* (vagy *eltolódási*) *áramnak* nevezték el (lásd az 1. lábjegyzetet).

Ezzel teljessé vált Maxwell törvényrendszere, amely ellentmondásmentesen leírja az elektromágneses mező alaptulajdonságait. Ennek vákuumra érvényes alakja:

$$\text{(I.)}\quad N_E=\frac{1}{\varepsilon_0}Q, \qquad \text{(III.)}\quad N_B=0,$$

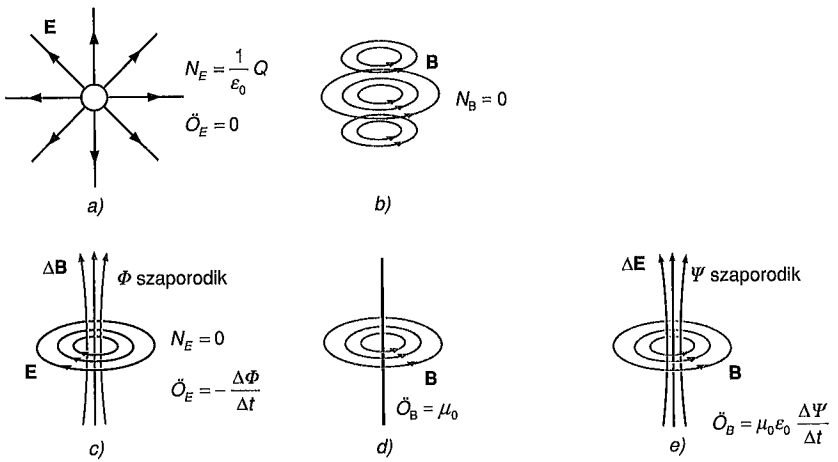
$$\text{(II.)}\quad \ddot{O}_E=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \qquad \text{(IV.)}\quad \ddot{O}_B=\mu_0\left(i+\varepsilon_0\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}\right).$$

Ugyanez részletesebben:

$$(\mathrm{I.})\ \sum_A^{\circ} \mathbf{E}\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_V \rho_e \Delta V, \qquad (\mathrm{III.})\ \sum_A^{\circ} \mathbf{B}\Delta\mathbf{A} = 0,$$

$$(\mathrm{II.})\ \sum_g^{\circ} \mathbf{E}\Delta\mathbf{r} = -\frac{1}{\Delta t}\sum_A \mathbf{B}\Delta\mathbf{A}, \qquad (\mathrm{IV.})\ \sum_g^{\circ} \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} = \mu_0\left(\sum_A \mathbf{j}\Delta\mathbf{A} + \frac{\varepsilon_0}{\Delta t}\sum_A \mathbf{E}\Delta\mathbf{A}\right)$$

Az elektromos mezőt töltések és változó mágneses mezők, a mágneses mezőt áramok és változó elektromos mezők keltik. A nyugvó töltések keltette elektromos mező forrásos és örvénymentes, a mágneses mezők és a változó mágneses mezők körül keletkező elektromos mezők pedig örvényesek és forrásmentesek (10.3a–e. ábrák).



10.3. ábra

10.2. Gyorsan változó mezők. Elektromágneses hullámok

Maxwell II. és IV. törvényének következménye, hogy ha valahol akár a **B** mező, akár az **E** mező megváltozik, akkor azok egymást keltve képesek önállósulni is: forrásaikról (a töltésekről, illetve áramokról) leszakadva önmagukat fenntartják.

Az elektromágneses mezőnek a testekről leváló, azoktól függetlenül tovaterjedő változatát elektromágneses sugárzásnak vagy elektromágneses hullámoknak nevezzük.

A gyorsuló töltés. Megismertük azt a jelenséget, hogy a *nyugvó* elektromos töltés elektrosztatikus mezőt hoz létre. Ez a mező tisztán elektromos abban az értelemben, hogy minden pontjában *csak* elektromos térerősség lép fel, mágneses nem. Ha a töltést *mozgásba* hozzuk, akkor *mágneses* mező is létrejön. Mind a két fajta mezőnek van egy közös tulajdonsága: a *térerősség (indukció) a távolság négyzetével arányosan csökken.*

A *nyugvó Q* elektromos töltés sztatikus mezejének térerőssége:

$$E_{st} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

a *v sebességgel mozgó* töltések által létrehozott mágneses mezők („sebességi mezők") indukciója:

$$B_{seb} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qv}{r^2}\sin\alpha$$

nagyságú. (Látható, hogy a sebességi mező kis sebességek esetén sokkal gyengébb, mint a sztatikus mező, a sztatikus mező térerősségének együtthatója 9.10^9, a sebességi mezőé 10^{-7} nagyságrendű!)

A fenti jelenségektől egészen független, új jelenség lép fel, ha a töltés *gyorsuló mozgást* végez. Ekkor is keletkezik a már megismert sztatikus, illetve sebességi mező, merőben új jelenség azonban, hogy egy *a gyorsulással mozgó* elektromos töltés

$$\boxed{E_{sug} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qa}{r}\sin\alpha} \qquad (10.4a)$$

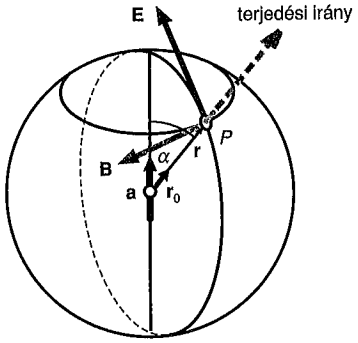
és

$$\boxed{B_{sug} = \frac{\mu_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{4\pi}\frac{Qa}{r}\sin a} \qquad (10.4b)$$

nagyságú, és egymásra merőleges, azonos fázisban levő sugárzási mezőt hoz létre. Vektoriálisan:

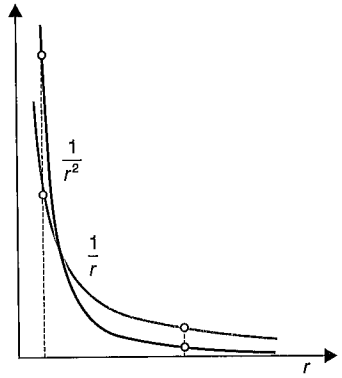
$$\mathbf{E}_{sug} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q(\mathbf{a}\times\mathbf{r}_0)\times\mathbf{r}_0}{r}, \qquad \text{illetve} \qquad \mathbf{B}_{sug} = \frac{\mu_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{4\pi}\frac{Q\mathbf{a}\times\mathbf{r}_0}{r},$$

ahol $\mathbf{r}_0$ a töltéstől a tér vizsgált pontjáig mutató **r** vektorral egyirányú egységvektor, α pedig az **a** gyorsulásvektor és **r** vektor által bezárt szög (10.4 . ábra).



10.4. ábra

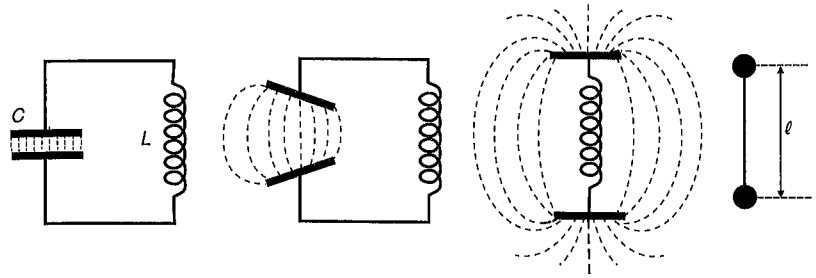
Látható, hogy a sugárzási mezők térerőssége, illetve indukciója a távolságnak csak az első hatványával fordítottan arányos, vagyis a gyorsuló töltéstől nagyobb távolságban a gyorsulás által létrehozott mező sokkal erősebb lesz, mint a sztatikus Coulomb- vagy a sebességi mezők (10.5. ábra).



10.5. ábra

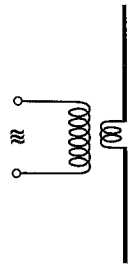
Egy sugárforrás, az antenna. Folytonos elektromágneses sugárzás akkor jön létre, ha a töltések huzamos ideig gyorsulnak. A sugárzási mező térerőssége azonban csak rendkívül nagy gyorsulások esetén számottevő, tehát ha egyenes vonalú egyenletes gyorsulással akarnánk sugárzást létrehozni, csak rövid ideig lennénk képesek sugárzást kelteni. Folytonosan sugárzó mezőt úgy is kelthetünk, hogy a töltéseket periodikus rezgésben tartjuk.

Az elektromágneses hullámok kisugárzását legkönnyebben *nyílt rezgőkörrel* oldhatjuk meg.



10.6. ábra

A 10.6. ábra mutatja, hogy hogyan kell elképzelni a zárt rezgőkör fokozatos nyitásával a nyílt rezgőkört, más néven *dipólantennát* (részletesebben a 10.7.2. pontban). Ennek kapacitását is, induktivitását is maguk a vezetékdarabok képviselik. Mindkét érték igen kicsiny, ami a $\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ összefüggés szerint a nagyfrekvenciára való hangolást lehetővé teszi. Az antennát induktív csatolással nagyfrekvenciás generátorról táplálják (10.7 ábra).



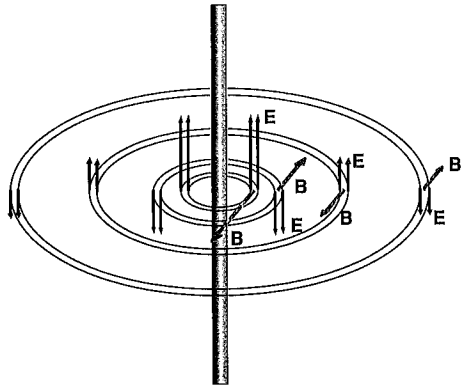
10.7. ábra

Az antennával állandó frekvencián kisugárzott hullám szinuszos lefolyású mind időben, mind a terjedés mentén a térben.

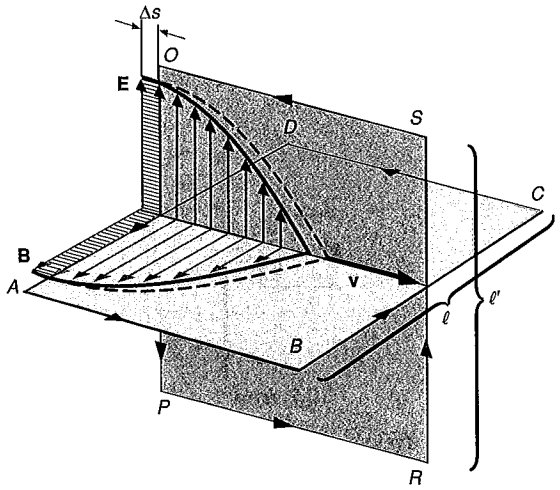
Az elektromágneses hullám terjedési sebessége vákuumban. Maxwell törvényeiből következik, hogy az *elektromágneses kölcsönhatás véges sebességgel terjed.*

Dipólantennában keltsünk nagyfrekvenciás váltakozó áramot!

A 10.8. ábra egy, a dipólusra merőleges egyenes mentén mérhető elektromos térerősséget és mágneses indukciót mutatja. A 10.9. ábra pedig az elektromágneses mezőnek egy *elektromos* és egy *mágneses* síkmetszetét mutatja, távol az antennától, ahol már a sztatikus és sebességi terek elhaltak.



10.8. ábra



10.9. ábra

Az ábrán a hullám „orrát" láthatjuk egy adott pillanatban, és (szaggatott vonallal) egy kicsiny Δt idővel később. Kimutatjuk, hogy az ezzel a pillanatképpel ábrázolt mezőnek jobbra *kell* haladnia, és ha ez a haladás megfelelő ütemű, akkor e mezők kielégítik a Maxwell-egyenleteket, vagyis e haladási sebességet Maxwell törvényei *határozzák meg!*

Fejezzük ki mind az elektromos, mind a mágneses örvényerősséget a 10.9. ábrán felvett *ABCDA*, illetve *OPRSO* zárt, téglalap alakú görbére! (A zárt görbéket az elektromos mező térerősségével, illetve a mágneses indukcióvektorral jobbsodrású rendszer szerint kell irányítani!)

Az *ABCDA* görbére számított **mágneses** *örvényerősség* $\ddot{O}_B = Bl$, mivel az *AB* és *CD* szakasz merőleges a **B** indukcióvektorra (sin $\alpha = 1$, és **B** = konstans), a *BC* szakaszig pedig *még nem jutott el a mező.* Maxwell IV. törvényéből következik, hogy – mivel az *ABCDA* zárt vonal *nem fog körül áramot* – a **B** mező $\ddot{O}_B$ örvényerősségét *csak az* **E** *mező fluxusának időbeli változása okozhatja.* Ez pedig csak a mező *térbeli továbbhaladása* útján jöhet létre. Annyival lesz az *ABCDA* hurok Ψ fluxusa nagyobb, amennyi *újabb* erővonal kerül be a hullám eltolódásával a hurok *belsejébe.* Ha ez megfelelő sebességgel történik, akkor kielégül az

$$\ddot{O}_B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}$$

egyenlet.

Számítsuk ki az *ABCDA* zárt vonal által körülhatárolt terület *elektromos fluxusváltozását!* Mint az ábrából kitűnik, akkor *nő* a fluxus, ha *jobbra* tolódik el a mező. Legyen Δt igen kicsiny idő (a periódusidőhöz képest), amely alatt Δs-sel mozdul el a hullám eleje. Az ábrából leolvashatjuk, hogy az elektromos fluxus növekedése

$$\Delta \Psi = E \Delta s l.$$

(Δt-t olyan kicsinek választottuk, hogy ez alatt az idő alatt a térerősség *megváltozása* magához a térerősséghez képest elhanyagolható.)

Maxwell IV. egyenlete akkor elégül ki, ha fennáll, hogy:

$$Bl = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{E \Delta s l}{\Delta t} = \mu_0 \varepsilon_0 v l,$$

és innen

$$B = \mu_0 \varepsilon_0 v,$$

ahol $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, a „pillanatkép" tovahaladásának sebessége.

Felhasználva **Maxwell II. egyenletét,** hasonlót mondhatunk az *OPRSO* zárt vonal **elektromos** *örvényerősségére.* Az ábrából látszik, hogy az *OP* szakaszon cos $\alpha = -1$, és ezért $\ddot{O}_E = -El'$. (A többi szakaszon zérus a szorzatösszeg járuléka.)

A Maxwell II. egyenlete kielégül, ha az

$$-El' = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{B \Delta s l'}{\Delta t}$$

egyenlőség fennáll, vagyis

$$E = Bv.$$

Ezt beírva B korábban kapott kifejezésébe:

$$B = \mu_0 \varepsilon_0 B v^2.$$

B-vel egyszerűsítve a hullám terjedési sebességéhez jutunk.

Fenti levezetésünk eredményeként megkaptuk a Maxwell-egyenleteket kielégítő hullámsebességet:

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}. \qquad (10.4)$$

Ha $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am) és $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ As/(Vm) ismert értékeit beírjuk, az elektromágneses hullám terjedési sebességére vákuumban a $v = c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s $\approx$ $\approx$ 300 000 km/s értéket kapjuk. Ez pontosan egyezik a fény (Maxwell korában már ismert) terjedési sebességével! Maxwell ebből azonnal levonta a következtetést: a *fény elektromágneses hullám!* (Ez az elektromágneses fényelmélet.)

Megjegyzés: μ_0 definíciószerűen $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$, az ε_0 állandó új meghatározása éppen a fény jól mérhető terjedési sebességén alapul a következő definícióval: $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$. Számértéke a fénysebesség egyre pontosabban *megmért* értékétől függ. Jelenleg a fénysebességre a legpontosabb adat: $c = 2{,}997\ 924\ 58 \cdot 10^8$ m/s, így a vákuumpermittivitás ma ismert legpontosabb értéke: $\varepsilon_0 = 8{,}854\ 187\ 819 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$.

(Így a Coulomb-törvény-ben szereplő k is csak közelítőleg $9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$, pontosabb értéke $k = 8{,}987551788 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$.)

10.3. Az elektromágneses hullámok terjedési tulajdonságai

Fázisviszonyok. A sugárzási mezők elektromos és mágneses térerőssége, illetve indukciója között a két mező örvényerősségén keresztül találunk kapcsolatot:

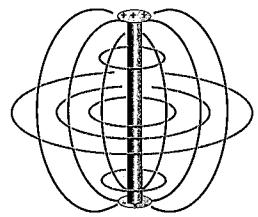
$$\oint_g \mathbf{E}\Delta\mathbf{r} = -\frac{\Delta BA}{\Delta t},$$

$$\oint_g \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\Delta EA}{\Delta t}.$$

(Itt az A felület elegendően kicsiny, és merőleges a mágneses indukcióra, illetve elektromos térerősségre.)

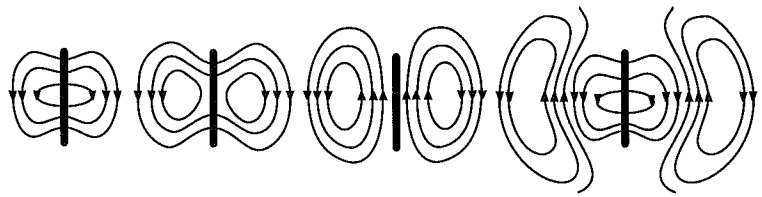
A töltésekről, illetve áramokról leszakadt, ún. *sugárzási mezőt* ez a két egyenlet írja le.

A dipólantennában az elektromos töltések fel-le gyorsulnak (10.10a. ábra). Elegendően nagy frekvencia esetén Δt pl. a felfutó szakaszban olyan kicsiny lehet, hogy az i áram keltette mágneses mező és a q töltés keltette sztatikus elektromos mező mellett a sugárzási mező is számottevővé válik. Míg *az antenna közelében* mindkét elektromos és mágneses mező szuperpozíciója alakítja ki az eredő térerősséget, illetve indukciót, *az antennától egyre távolodva a sugárzási mező válik uralkodóvá.* Míg a Coulomb-mező és az áramelem mágneses mezeje az antennától való távolság négyzetével csökkenő térerősségű, illetve indukciójú, *a sugárzási mező térjellemzői a távolságnak csak az első hatványával fordítottan arányosan csökkennek.* Az antenna körül kialakuló mező néhány pillanatképét a 10.10b. ábra, a mező elektromos és mágneses metszetét a 10.10c. ábra mutatja.



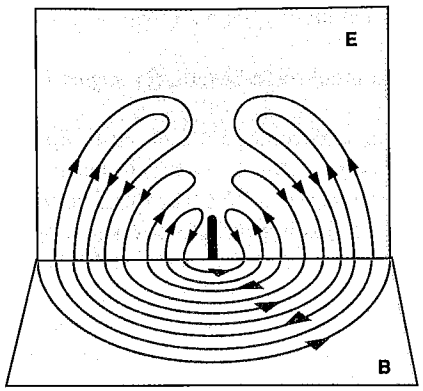
a)

10.10a. ábra



b)

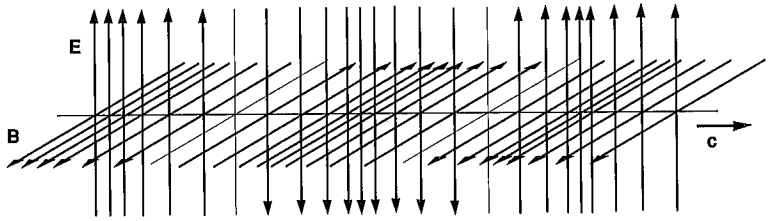
10.10b. ábra



c)

10.10c. ábra

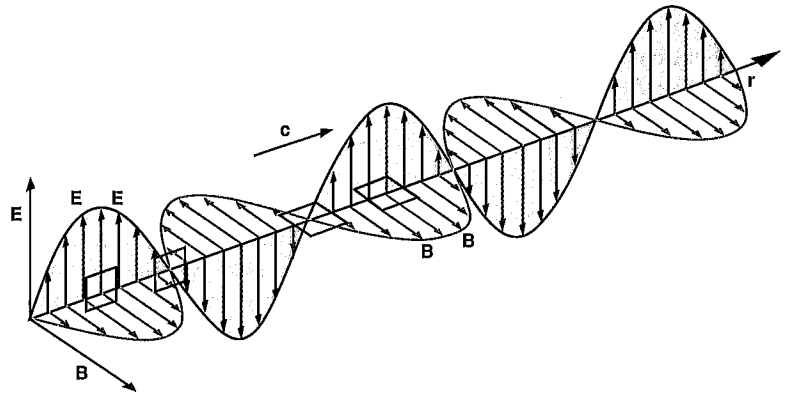
Az antennától távol – az ún. sugárzási tartományban – az elektromos mező **E** térerősségvektora és a mágneses mező **B** indukcióvektora *egymásra merőlegesek,* és mindkettőjük merőleges a hullám terjedési irányára úgy, hogy a **c** sebességvektor, az **E** és **B** vektorokkal ebben a sorrendben jobbrendszert alkot (10.11. ábra, amely a dipólantenna sugárzási mezejének irányviszonyait mutatja egy sugár mentén).



10.11. ábra

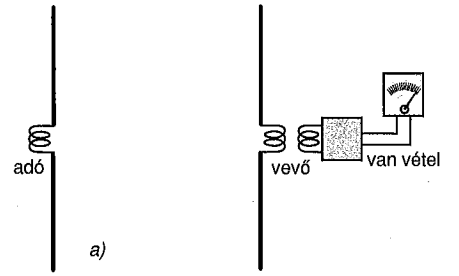
Ugyancsak a Maxwell-törvényekből következik, hogy az **E** és a **B** vektor *azonos fázisban rezeg* (10.12. ábra).

Azt kell tehát bizonyítani, hogy ugyanabban a pontban az **E** és **B** vektor egy időben veszi fel a 0, illetve maximális értékét. A 10.12. ábrán két helyen: **E** maximuma és **E** = 0 helyének környezetében szimmetrikusan felvett téglalapra képezzük az elektromos mező örvényerősségét! Ahol **E** maximális, $\ddot{O}_E = 0$, mert a téglalap két vízszintes oldala merőleges **E**-re ($\cos \alpha = 0$), a másik két oldalán pedig az $\mathbf{E}\Delta\mathbf{r}$ szorzat ellentetten egyenlő ($\Delta\mathbf{r}$ előjelet vált, míg **E** nem!). $\ddot{O}_E$ tehát ott nulla, ahol **E** maximális. Maxwell II. törvénye szerint azonban $\ddot{O}_E = -\Delta BA/\Delta t$. ΔB pedig ott nulla, ahol B maximális (a szinuszgörbe változási sebessége a maximum helyén 0). Tehát *B maximuma valóban ott van, ahol E maximuma.*

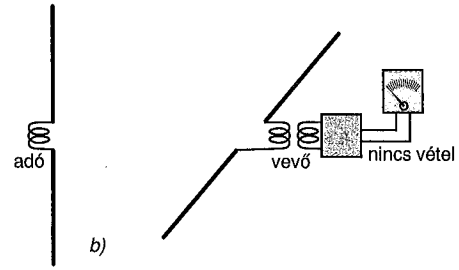


10.12. ábra

Ahol viszont **E** = 0, ott $\ddot{O}_E$ maximális, mert a 0-hely körül **E** mindig $\Delta\mathbf{r}$ irányú (**E** is, $\Delta\mathbf{r}$ is előjelet vált a függőleges szakaszokon). Ugyanakkor $\Delta BA/\Delta t$ ott maximális, ahol a szinuszgörbe a legmeredekebb, vagyis ahol a szinusz értéke 0. Így valóban, **E** = 0-hoz **B** = 0 tartozik. (Hasonlóképpen látható be a $\mu_0\varepsilon_0\Delta E/\Delta t$ és a hozzá tartozó **B** indukció maximumának – és minimumának – egybeesése.)



a)



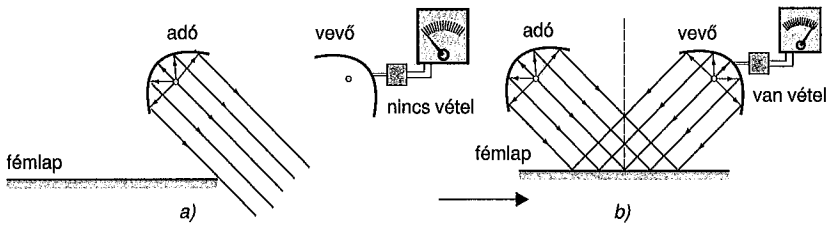
b)

10.13. ábra

Polarizáció. A 10.13a–b. ábra olyan kísérleti elrendezéseket mutat, amelyekkel a kisugárzott hullám térerősségének iránya vizsgálható. A vevő dipólantennájára eső elektromágneses hullám **E** térerőssége az antenna elektronjait $e\mathbf{E}$ erővel rezgésbe hozza. Az a) ábra elrendezésében van vétel, mert a két dipólantenna egymással párhuzamos, így kialakulhat a vezeték mentén nagyfrekvenciás áram, amelyet az erősítő helyi energiaforrásból táplálva felerősít, és a mérőműszer jelez.

Ha a b) ábra szerint egymásra merőlegesen helyezzük el az adó- és vevőantennát, nincs vétel, mert az **E** térerősségnek nincs vezetékirányú összetevője. A kísérletből következik, hogy mind az **E** vektor, mind a **B** vektor egy-egy (egymásra merőleges) síkban rezeg. A dipólsugárzás tehát *síkban poláros hullám* v. lineárisan poláros (lásd a 2.8.1.1. alpontot). Ez azt is jelenti, hogy az elektromágneses hullám *transzverzális hullám*.

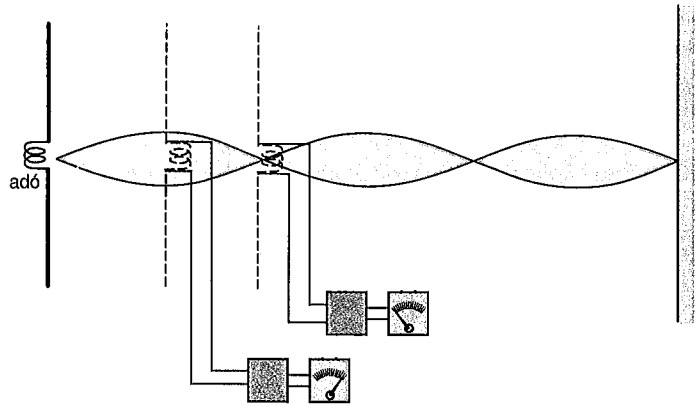
Visszaverődés. A 10.14a–b. ábra egy parabolatükörrel irányított adó és vevő sematikus képét mutatja. Ha az adó és a vevő adási, illetve vételi iránya nem egyezik, nincs, vagy igen gyenge a vétel. Ha ezen irányok szögfelezőjére merőleges sík fémlapot helyezünk el, a vétel erőssége megnő.



10.14. ábra

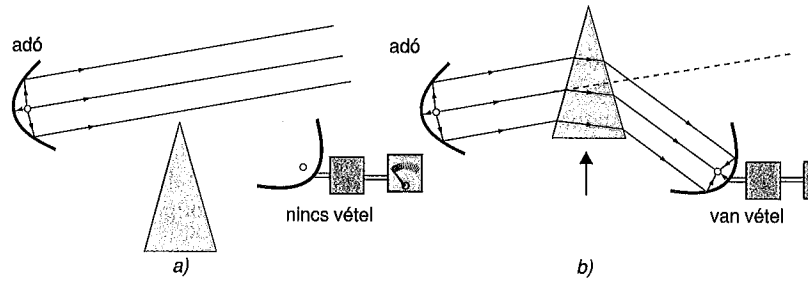
A fémfelületről az elektromágneses hullámok visszaverődnek, a hullámtanban megismert visszaverődési törvény szerint. (Az adó kisugárzott hullámainak fokuszálására használt parabolatükör is a hullámok visszaverődésének jelenségét használja ki.)

Interferencia. Elektromágneses állóhullámok. Ha az adóantennáról érkező elektromágneses hullám fém síklapra érkezik, arról visszaverődik. A 10.15. ábra elrendezésében az adóból merőlegesen érkeznek a hullámok a sík fémfelületre, amelyről önmagukba verődnek vissza. Ha az adó és a sík távolságát megfelelően választjuk (a fél hullámhossz egész számú többszöröseire), akkor a vevőantennával végigszondázva az adó és a síklap közötti térrészt váltakozva erősödő és gyengülő vételt tapasztalunk. Az egymással találkozó hullámok interferálnak. Ennek az interferenciának érdekes eredménye: szabad *elektromágneses állóhullámok* létrejötte. A vevő duzzadóhelyeket és csomópontokat mutatott ki.



10.15. ábra

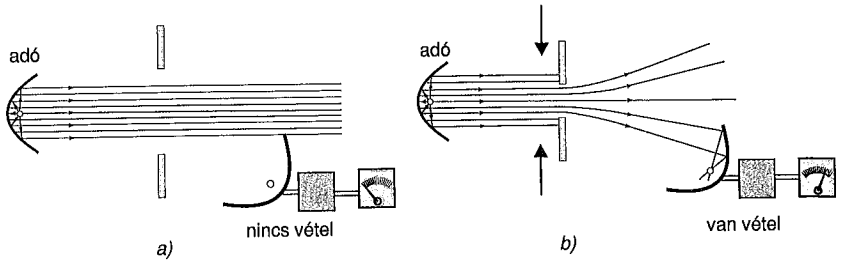
Törés. A 10.16a–b. ábra egy adót és egy vevőt tüntet fel, amelyek vételi, illetve adási irányai nem esnek egy egyenesbe: igen gyenge a vétel. Ha azonban a paraffinból készített hasábot (prizmát) megfelelően közéjük toljuk, megnő a vétel erőssége, jelezve, hogy az elektromágneses hullám az új közegben belépéskor is, kilépéskor is megtört. A szigetelőanyag nemcsak átengedi az elektromágneses hullámot, hanem annál nagyobb szögben, minél nagyobb a permittivitása, meg is töri. A törés törvénye megegyezik a mechanikai hullámoknál megismerttel. A törés jelensége arra mutat, hogy az elektromágneses hullám terjedési sebessége a különböző anyagi közegekben más és más (lásd 10.5.1.1 alfejezetet).



10.16. ábra

Elhajlás. A 10.17a–b. ábra ismét két, nem egy egyenesbe eső tengelyű parabolatükörrel ellátott adót és vevőt mutat. Noha az adó a fokuszált hullámot a vevő mellett sugározza el, mégis érzékelhetjük a sugárzást, ha egy réssel ellátott fémlapot helyezünk a hullám útjába, illetve ha a hullám útjába helyezett széles rést le-

szűkítünk. A Huygens-elvnek megfelelő *elhajlás* (lásd a 2.8.2. pontot) az elektromágneses hullámok esetén is létrejön, ha a rés szélessége összemérhető a hullámhosszal. Így ott is észlelünk hullámokat, ahová azok egyenes vonalú terjedés esetén nem jutnának el.



10.17. ábra

10.4. Az elektromágneses hullámok dinamikai tulajdonságai. A sugárzó anyag

Az elektromágneses hullám a töltésekről és áramokról leváló és önállósuló mező. Az elektromágneses hullám a testekkel kölcsönhatásra képes: energiát, impulzust (lendületet), perdületet ad át nekik. Ezért *az anyag egyik változatának kell tekintenünk.*

Az energia és az impulzus megmaradásának törvénye csak akkor tartható fenn, ha a mezőknek is energiát és impulzust tulajdonítunk, és ezeket hozzászámítjuk a testek energiájához és impulzusához.

Az elektromágneses hullám energiája. A Nap sugárzása melegíti a Földet. A fény kémiai folyamatokat is létrehoz (pl. fotoszintézis). A kőszénben, olajban tárolt energia, amelyet ma fűtésre, közlekedésre használunk fel, ugyancsak évmilliárdok alatt felhalmozódott, elektromágneses energia formájában ideérkezett energia. A Napból átlagosan 1400 joule energia érkezik másodpercenként a Föld felső légrétegének 1 négyzetméterére.

Az elektromos és mágneses energia „lüktetve" áramlik a szinuszos elektromágneses síkhullámban. Az egységnyi idő alatt egységnyi területen áthaladó energiát a Poynting-vektor [lásd a (9.16a) képletet] írja le:

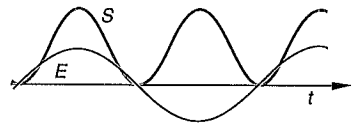
$$\mathbf{S}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

Ha a tér egy adott pontjában $\mathbf{E}=\mathbf{E}_{\max}\sin(\omega t)$ és $\mathbf{B}=\mathbf{B}_{\max}\sin(\omega t)$, akkor $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ egymásra való merőlegessége miatt a Poynting-vektor nagysága:

$$S=\frac{1}{\mu_0}E_{\max}B_{\max}\sin^2(\omega t).$$

A 10.18. ábra jól mutatja a vizsgált ponton átáramló energia időbeli lüktetését. Az energiaáram-sűrűség időbeli átlaga (a 8.50. ábra és a hozzá tartozó levezetés gondolatmenetével beláthatóan) a csúcsérték fele:

$$\boxed{\bar{S}=\frac{1}{2}S_{\max}=\frac{1}{2\mu_0}E_{\max}B_{\max}}. \qquad (10.5)$$



10.18. ábra

A tér egy adott helyén átvonuló hullám *teljes (elektromos és mágneses) energiasűrűsége* (7.36) és (9.14) alapján:

$$\rho_{e,m}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2,$$

vagyis elegendően kicsiny (homogénnek tekinthető) térrész

$$W=\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2\right)\Delta V$$

energiát tartalmaz.

Ebben az energiában *az elektromos $\varepsilon_0E^2/2$ és a mágneses $B^2/2\mu_0$ energiasűrűség nagysága egyenlő.* A 10.2. szakasz levezetéséből látható, hogy $E/B=c$, vagyis a sugárzási mezőben az elektromos térerősség és a mágneses indukció aránya szigorúan állandó, éppen a vákuumbeli fénysebességgel egyenlő. Ezért E helyébe $B/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ írható. Ezt a teljes elektromágneses energiasűrűség kifejezésének első tagjába írva:

$$\rho_{e,m}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{B^2}{\varepsilon_0\mu_0}+\frac{1}{2\mu_0}B^2=\frac{1}{2\mu_0}B^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2,$$

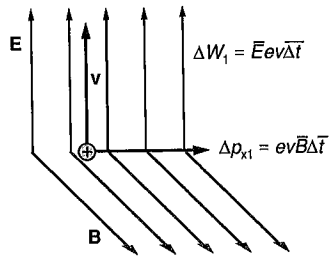
vagyis valóban

$$\rho_{el}=\rho_{mág}.$$

Az elektromágneses hullám impulzusa (lendülete). Ha elektromágneses hullám visszaverő vagy elnyelő anyagra (fémlapra, vagy szigetelőre) esik, arra nyomást fejt ki, impulzust ad át neki. A Napból a Földre érkező fénysugár másodpercenként $1,27\cdot10^9\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$ impulzust szállít.

Essen a hullám merőlegesen egy fémlapra! A beérkező hullám **E** térerősségű elektromos mezeje egy – kezdetben nyugvó – vezetési elektronon $\Delta W_1 = F_{el}\Delta s = e\bar{E}\bar{v}\Delta t$ munkát végez, ahol $\bar{E}$, illetve $\bar{v}$ a (nagyon rövid) Δt időre számított átlagos térerősség, illetve átlagos, **E** irányú sebesség. Ugyanerre a részecskére a hullám mágneses mezeje $F_m = e\bar{v}\bar{B}$ átlagos erőt fejt ki a hullám haladási irányában (10.19. ábra), vagyis $F_m\Delta t = e\bar{v}\bar{B}\Delta t$ értékkel változtatja meg a hullám terjedési irányába eső lendületét. A részecske tehát a hullámból egyszerre $\Delta p_{x1} = e\bar{v}\bar{B}\Delta t$ impulzust, és $\Delta W_1 = e\bar{E}\bar{v}\Delta t$ energiát vett ki. Képezzük a két érték *arányát:*

$$\frac{\Delta p_{x1}}{\Delta W_1} = \frac{e\bar{v}\bar{B}\Delta t}{e\bar{v}\bar{E}\Delta t} = \frac{B}{E} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}.$$



10.19. ábra

Ha abban az egységnyi térfogatban, amelybe a hullám behatol, N számú szabad töltéshordozó van, egységnyi térfogat impulzus- és energiakivétele ugyanennyi:

$$\frac{g}{\rho_{e,m}} = \frac{N\Delta p_{x1}}{N\Delta W_1} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0},$$

ahol g a hullám impulzussűrűsége, vagyis – dimenziótól eltekintve – a térfogategység impulzusa (lendülete). Innen

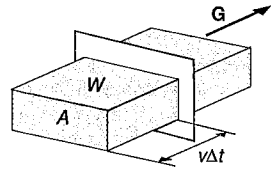
$$g = \rho_{e,m}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}.$$

Az impulzussűrűség könnyen kifejezhető a hullámbeli elektromos térerősséggel, illetve mágneses indukcióval. A 10.20. ábrából látszik, hogy az áramlásra merőleges A területen keresztül Δt idő alatt átáramló $\rho_{e,m}$ sűrűségű energia a $V = AV\Delta t$ térfogatú hasábban foglal helyet. Így ennek az energiának az értéke $W = \rho_{e,m}Av\Delta t$. Az energiaáram teljesítménysűrűsége pedig $S = W/(A\Delta t)$. Így tehát a hullám energiaáram-sűrűségére

$$\rho_{e,m}v = S,$$

vagy – elektromágneses hullámról lévén szó – $v = c$ és $S = EB/\mu_0$:

$$\rho_{e,m} = \frac{1}{c}S = \frac{1}{c}\frac{1}{\mu_0}EB.$$



10.20. ábra

Ezt az impulzussűrűség kifejezésébe írva, figyelembe véve, hogy $c = \left(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\right)^{-1}$, azt kapjuk, hogy $g = \varepsilon_0 EB$.

Levezetésünkből következik, hogy *az elektromágneses hullám egységnyi térfogatának impulzusa* (impulzussűrűség):

$$g = \varepsilon_0 EB, \tag{10.6a}$$

illetve vektoriálisan

$$\boxed{\mathbf{g} = \varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}}. \tag{10.6b}$$

Másképpen

$$g = \varepsilon_0\mu_0 S = \frac{1}{c^2}S, \tag{10.7a}$$

illetve

$$\boxed{\mathbf{g} = \varepsilon_0\mu_0\mathbf{S} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}}. \tag{10.7b}$$

Elegendően kicsiny ΔV térfogat teljes impulzusa:

$$\boxed{G = g\Delta V}. \tag{10.8}$$

Szinuszos elektromágneses hullám pillanatnyi impulzussűrűsége a tér azon pontjában, amelyben a térerősség, illetve indukció csúcsértéke E_m, illetve B_m:

$$g = \varepsilon_0 E_m B_m \sin^2(\omega t). \tag{10.9}$$

Az *átlagos impulzussűrűség* a (10.5)-höz hasonlóan:

$$\overline{g} = \frac{1}{2} g_{max}. \tag{10.10}$$

A szinuszos síkhullámban a V térfogat *teljes impulzusa* (az átlagos impulzussűrűség × térfogat):

$$\overline{G} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_m B_m V. \tag{10.11}$$

Az elektromágneses hullám nyomása (fénynyomás). A fénynyomás jelenségét először *Lebegyev* mutatta ki 1901-ben. Nagyon vékony szálon felfüggesztett rudacska végéhez kisméretű tükröt rögzített. A légritka térbe helyezett tükörre periodikusan fényt bocsátott, s a tükör a fénynyomás következtében kissé elfordult: rezonanciával lengésbe lehetett hozni. A fénynyomás létét ma már lézerek segítségével könnyen igazolhatjuk.

A fénynyomás jelensége az égbolton is megfigyelhető: az üstökösök csóvája görbe, és az üstökösből kiindulva a Naptól távolodó irányban elhajlik. A csóva finom porból áll, a porszemcsék pedig a napsugár fénynyomásának hatására a Naptól távolodó irányba áramlanak.

A Napból a Földre érkező fény nyomása átlag $4{,}67 \cdot 10^{-6}$ N/m^2. Bár ez csekély érték, a csillagok belsejében ugyanolyan nagyságrendű lehet, mint a gáznyomás vagy a gravitáció!

Az elektromágneses hullám nyomása az általa kifejtett erőnek és a rá merőleges felület területének hányadosa. Az erő pedig az egységnyi idő alatt átadott impulzussal egyenlő, tehát a *sugárnyomás* (fénynyomás):

$$p = \frac{F}{A} = \frac{\Delta(mv)}{A\Delta t} = \frac{g\Delta V}{A\Delta t} = \frac{gAc\Delta t}{A\Delta t} = gc = \frac{1}{c} S = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} EB,$$

vagyis a fény *elnyelődése* során

$$p = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} EB \tag{10.12}$$

nyomást fejt ki a molekuláris anyagra. 100 %-os *visszaverődés* esetén ennek kétszerese a fellépő nyomás.

Az átlagos sugárnyomás *szinuszos* elektromágneses hullám esetén $\overline{p} = p_{max}/2$, tehát *elnyelődéskor*

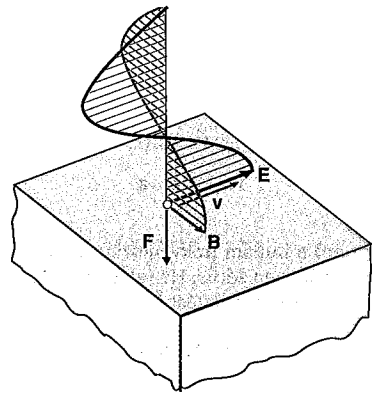
$$\overline{p} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m B_m, \tag{10.13a}$$

visszaverődéskor

$$\overline{p} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m B_m. \tag{10.13b}$$

A fénynyomás mechanizmusa. Ha a fény fémlapra (ideális vezető) esik, rá nyomást fejt ki. Ha átlátszó szigetelőre, arra nem fejt ki nyomást, hiszen magával viszi impulzusát. Hogyan nyomja a hullám a fémfelületet, és miért megy át nyom nélkül az átlátszó anyagokon?

A *fémfelületre* érkező fény elektromos térerőssége a felületen *áramot* hoz létre Ohm törvényének megfelelően: *növekvő* **E** térerősséghez *növekvő* i áramerősség tartozik. Az elektromágneses hullámban az elektromos mezővel együtt érkező *mágneses mező* a fém mozgásba hozott vezetési elektronjaira erőhatást fejt ki, amelyet az $F = evB$ Lorentz-erő ír le (10.21. ábra) (**v**||**E**⊥**B**).

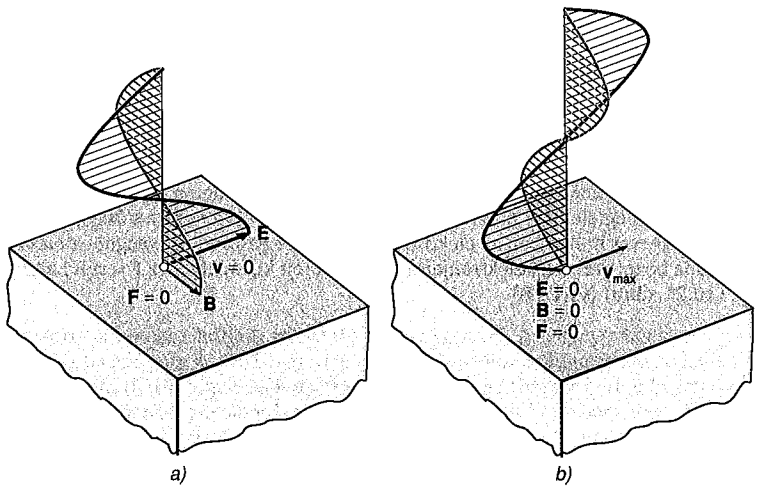


10.21. ábra

Ez az erő – mint tudjuk – az **E** és **B** vektorokra merőleges. Figyelembe véve a „jobbkéz-szabályt" valamint azt, hogy az elektron töltése negatív, láthatjuk, hogy az erő éppen a sugárzási mező *haladási irányában hat!* Mivel az elektromágneses hullámban **E** és **B** *azonos fázisban rezeg,* az erőhatás bár lüktető ugyan, de *mindig ugyanabba az irányba mutat!* (Az erő zérus, amikor **E** = **B** = 0, és maximális, amikor **E** és **B** egyidejűleg maximális. Az időben gyorsan lüktető erő folytonos hatásként jelentkezik.)

Ha *szigetelőre* esik az elektromágneses hullám, mint ismeretes, keresztülhalad rajta. (Szobában lehet hallgatni a táskarádiót, mobiltelefont!) Ez azonban csak úgy lehetséges, hogy a hullám magával viszi energiáját, impulzusát, s így a szigetelőre számottevő nyomást nem fejthet ki. Miért nem hat a szigetelőre sugárnyomás?

A válasz abban rejlik, hogy a szigetelőkben a (polarizációs) áramerősség és a beérkező hullám elektromos térerőssége között *fáziseltolódás* jön létre. A (ideális, kristályos) szigetelőkben ui. nincsenek szabad vezetési elektronok. Az atomban levő töltések *rugalmas erőkkel* vannak a maghoz kötve. Ezért a harmonikus rezgőmozgás erőtörvénye szerint a töltésre ható $e\mathbf{E}$ erő és a $\mathbf{v}$ sebesség között (közel) 90°-os a fáziseltolódás (10.22a–b. ábra).



10.22. ábra

Ezért az $F = evB$ Lorentz-erő a hullám frekvenciájának kétszeresével *változtatja az irányát!* Ennek az erőnek az időátlaga zérus. Ha tehát az elektromágneses hullám szigetelőn halad át, valóban nem gyakorol rá hatást.[2]

Az elektromágneses tömeg. Az elektromágneses hullámban hordozott tömeg a következő gondolatmenettel határozható meg. Mivel az elektromágneses anyag

[2] Röntgenfénnyel fémeket is át lehet világítani (öntési hibák keresése). Ennek a röntgensugár igen nagy frekvenciája a magyarázata. A vezetési elektronok kis tehetetlenségük ellenére sem tudják pontosan követni a térváltozásokat, így itt is fellép a fáziseltolódás. Ugyanakkor a fény sem halad át minden szigetelőn. Míg a rádióhullámok hullámhossza sokkal nagyobb a szigetelőkben fellépő inhomogenitásokhoz képest, a látható fény kicsiny hullámhossza miatt szóródik a szigetelő felületén. A szigetelő felületéről visszavert fény miatt láthatók a nemfémes tárgyak is. Az üstökösök csóvája is szigetelőszemcsékből áll.

c sebességgel mozog, a mező ΔV térfogatában foglalt m tömeget a mechanikai impulzusfogalom alapján a következőképpen értelmezzük:

$$m\mathbf{c} = \mathbf{g}\Delta V, \tag{10.14}$$

ahol $\mathbf{g}$ az impulzussűrűség. Mivel Δt idő alatt az A területű felületre merőlegesen c sebességgel átáramló tömeg $\Delta V = Ac\Delta t$ térfogatban van, ezért

$$mc = gAc\Delta t.$$

A (10.7a) összefüggés figyelembevételével:

$$mc = \frac{1}{c} SA\Delta t.$$

Itt $SA\Delta t$ éppen az elektromágneses hullám által Δt idő alatt az A területen átszállított energia, vagyis $SA\Delta t = W$. Az *elektromágneses tömeg* az energiával a következő kapcsolatban van:

$$\boxed{m = \frac{W}{c^2}}, \tag{10.15}$$

vagy *Einstein* jelölésével: $\boxed{E = mc^2}$. ((10.16)

Az elektromágneses hullám *tömegsűrűsége* (anyagsűrűség) az előzőek szerint

$\rho = \frac{m}{\Delta V}$, vagyis

$$\boxed{\rho = \frac{1}{c} g}, \tag{10.17a}$$

illetve

$$\boxed{\rho = \varepsilon_0 EB\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{10.17b}$$

Az elektromágneses mező tehát tömeget, impulzust, energiát hordoz, nyomást fejt ki a vele kölcsönhatásban álló molekuláris anyagra. Az Univerzum anyagának túlnyomó többségét elektromágneses anyag alkotja.

Napunk évmilliárdok óta másodpercenként $4{,}4 \cdot 10^9$ kg tömeget veszít egyenletes sugárzással!

Az elektromágneses perdület (impulzusnyomaték, impulzusmomentum). Az áramló anyag mindenkor tömeget, energiát, impulzust visz magával. Ebből következik, hogy valamely tetszőlegesen rögzített pontra vonatkoztatva általában perdülete is van.

A villamos motor mechanikai perdülete az elektromágneses mező és a motor forgórészének kölcsönhatása következtében változik. A magnetométerre ható forgatónyomaték a mezőből a keretbe áramló perdületet közvetíti. A perdületet a mező szállította a megforgatott tekercsbe. Mint tudjuk a mechanikából, a test valamely kiválasztott O pontra vonatkozó perdülete (lásd a 2.1.3.2. alpontot):

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{I}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}.$$

Ennek megfelelően az elektromágneses mező valamely (elegendően kicsiny) ΔV térfogatú darabjának perdülete (10.6b) alapján:

$$\boxed{\Delta\mathbf{N}_{\mathrm{e,m}}=\mathbf{r}\times\Delta m\mathbf{c}=\mathbf{r}\times\left(\varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\Delta V}\,.$$

Ezzel a perdületmegmaradás tétele a mezőkkel kölcsönhatásban levő rendszerekre:

$$\mathbf{N}_{\mathrm{mech}}+\mathbf{N}_{\mathrm{e,m}}=\text{állandó},\qquad\text{illetve}\qquad\Delta\mathbf{N}_{\mathrm{mech}}=-\Delta\mathbf{N}_{\mathrm{e,m}},$$

valahányszor nincs külső forgatónyomaték.

A mező által kifejtett *forgatónyomaték:*

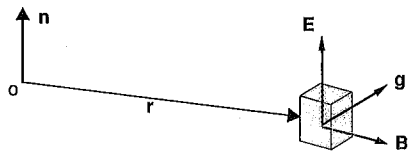
$$\mathbf{M}=\frac{\Delta\mathbf{N}_{\mathrm{mech}}}{\Delta t}=-\frac{\Delta\mathbf{N}_{\mathrm{e,m}}}{\Delta t}.$$

$$\left(\text{Pl.}\quad -\frac{\Delta\mathbf{N}_{\mathrm{e,m}}}{\Delta t}=\mathbf{M}=I\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\frac{\Delta\Theta\omega}{\Delta t}=\frac{\Delta\mathbf{N}_{\mathrm{mech}}}{\Delta t}.\right)$$

Az elektromágneses perdületsűrűség ($\Delta\mathbf{N}/\Delta V$):

$$\mathbf{n}=\mathbf{r}\times\rho\mathbf{c}=\mathbf{r}\times\mathbf{g},\qquad\text{illetve}\qquad\mathbf{n}=\mathbf{r}\times\left(\varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)$$

(10.23. ábra), ahol $\rho=\Delta m/\Delta V$ a tömegsűrűség.



10.23. ábra

Az elektromágneses mező V térfogatának teljes perdülete:

$$\mathbf{N}=\sum_V\left(\mathbf{r}_\mathrm{i}\times\mathbf{g}_\mathrm{i}\right)\Delta V_\mathrm{i},\qquad\text{illetve}\qquad\sum_V\left[\mathbf{r}_\mathrm{i}\times\left(\varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\right]\Delta V_\mathrm{i},\ ^3$$

Példa a sztatikus terekben áramló energiára, illetve az elektromágneses perdületre:

Függesszünk fel és töltsünk fel egy hengerkondenzátort, majd helyezzük a tengelyével párhuzamos homogén mágneses mezőbe! A fentiek szerint a kondenzátor belsejében együtt kialakult elektromos és mágneses mezőben körbe-körbe kell áramlania az elektromágneses tömegnek, energiának, vagyis a rendszernek elektromágneses perdülete van, noha időben állandó, sztatikus mezők hozzák azt létre. Kísérleti tapasztalat az, hogy ha hirtelen akár az elektromos mezőt (a kondenzátor kisütésével), akár a mágneses mezőt megszüntetjük, a hengerkondenzátor – a perdületmegmaradás tételének engedelmeskedve – forgásba lendül, mechanikai perdület formájában átvéve a mezőtől annak megszűnő perdületét!

Kiszámítható: a Q töltéssel ellátott, a tengelyével párhuzamos B indukciójú homogén mágneses mezőbe helyezett R_1 belső és R_2 külső sugarú hengerkondenzátor perdülete

$$N=\frac{1}{2}QB\left(R_2^2-R_1^2\right)$$

nagyságú.

10.5. Hullámoptikai jelenségek

10.5.1. A fény terjedése különböző közegekben

Mint láttuk, Maxwell elméletéből következik, hogy *a fény elektromágneses hullám. Terjedési tulajdonságait az elektromágneses mező és a molekuláris anyagi közegek kölcsönhatása szabja meg.*

A mechanikai hullámok fizikájából tudjuk, hogy a hullámterjedést a közegekben található akadályok (inhomogenitások) a hullámhosszhoz viszonyított méreteiktől függően befolyásolják. Amíg ui. ezen akadályok (rések) méretei sokkal nagyobbak a hullámhossznál, éles árnyékjelenséget figyelhetünk meg az akadályok mögött, ami a hullám egyenes vonalú terjedését mutatja homogén izotróp közegben. Ha a rés vagy akadály összemérhető a hullámhosszal, akkor olyan helyre is érkezik hullám, ahová az egyenes vonalú terjedés esetén nem jutna el.

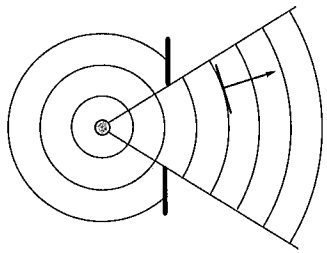
[3] A fenti összefüggésekből is látszik, hogy a tömeg-, energia-, impulzusáramlás, perdület *nemcsak* a sugárzó elektromágneses mezőben (elektromágneses hullámban) van jelen, hanem a sztatikus mezőkkel kitöltött tér minden olyan pontjában is, ahol egymással nem párhuzamos E és B térjellemzők (elektromos *és* mágneses mezők) egyidejűleg vannak jelen (pl. megdörzsölt ebonitrúd mellé tett acélmágnes környezete). Ilyen esetben az energiaáramlás a testek körül maradó örvényes mozgás, nem távozik el a testektől.

A fizikának azt a fejezetét, amely a *fény terjedését* olyan körülmények között vizsgálja, amelyben a fény útjába kerülő akadályok, illetve rések a fény hullámhosszánál sokkal nagyobbak, történeti okokból *geometriai optikának* vagy *sugároptikának* nevezik. Ezekben az esetekben ui. a fényforrásból kiáramló fény lehatárolásával éles határvonalú *fénynyalábot,* vagy ennek igen keskeny változatát, az ún. *fénysugarat* lehet előállítani, amely a fény terjedésének tanulmányozására különösen alkalmas. Ebben az esetben egyszerű, *geometriai módszerekkel írhatjuk le* a fény terjedését, nem kell a hullám fázisviszonyaira, szuperpozíciójára stb. tekintettel lenni.

Azokkal a jelenségekkel, amelyekben az akadályok (inhomogenitások) a hullámhosszal összemérhetők, az ún. *fizikai* vagy *hullámoptika* foglalkozik. Ezekben az esetekben már nem használható olyan jól a fénysugár fogalma, hiszen pl. egy kis rés után a fény legyezőként szétterül. E jelenségeket a fény hullám mivoltával lehet megmagyarázni úgy, hogy az időbeliséget is figyelembe vesszük.

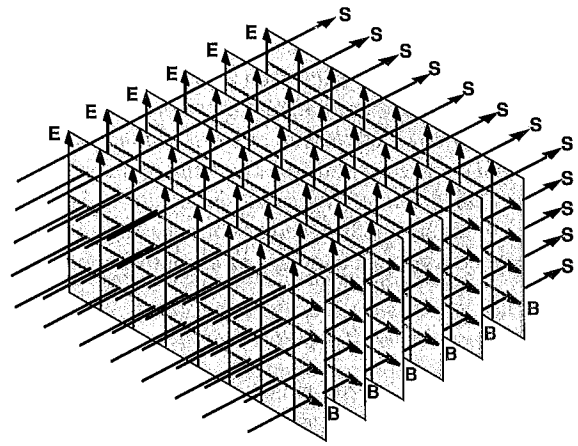
Látható, hogy a geometriai optika a hullámoptikának határesete, amelyben a hullámhossz közelít zérushoz: $\lambda \to 0$. A két leírási mód ezért könnyen összeötvözhető, ha az egymásnak megfelelő fogalmakat összevetjük.

Terjedési irány. A fény terjedésének iránya a geometriai optikában a fénysugár egyenese. A fizikai optika fogalmaival: a tér adott pontján áthaladó fényhullám terjedési iránya az e pontra illeszkedő fázisfelületének (hullámfrontjának) normálisa (a hullámfront érintősíkjára az adott pontban állított merőleges) (10.24. ábra).



10.24. ábra

Ez felel meg az *energiaterjedés irányának* az $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ összefüggés szerint, hiszen a hullámfront az azonos **E**-vel és **B**-vel jellemzett pontok halmaza (10.25. ábra).



10.25. ábra

Fénysugár. A fénysugár a geometriai optikában a lehető legkisebb keresztmetszetűre határolt fénynyaláb, amely a lehatároló nyílás után nem terül szét (párhuzamos nyaláb marad). A fizikai optikában a fénysugár a hullámfrontok normálisai kis nyalábjának felel meg. Ebben az értelemben a geometriai optika fénysugarát a hullámoptikában is használhatjuk *még abban az esetben is,* amikor a kiinduló nyaláb már nem marad együtt, pl. kis nyílású rés után.

Fényforrások. A fény a legkönnyebben előállítható elektromágneses hullám. Elég csak egy gyufát meggyújtani. Fényt bocsátanak ki az izzó testek (izzószál, láng stb.), a hidegen sugárzó testek (gázkisülési csövek, lásd a 17.2.1. alpontot). Ezekben az atomok olyan állapotváltozáson mennek keresztül, amelynek eredményeképpen elektromágneses hullám hagyja el az atomot, miközben az atom energiája lecsökken.

Az „önállóan világító" testeket szokásos *elsődleges fényforrásoknak* nevezni, míg *másodlagos fényforrásoknak* nevezik az olyan testeket, amelyekre fény esik, és annak egy részét visszaverik. (Megjegyezzük, hogy a fény visszaverése is a beeső fény energiáját felhasználó atomi *fénykibocsátási* folyamat.)

10.5.1.1. A fény terjedése homogén közegben

Vákuumban a Maxwell-törvények értelmében az elektromágneses hullám – és így a látható fény is – *egyenes vonalban terjed. Terjedési sebessége* $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, amely a jelenlegi mérési adatok szerint 299 792 458 (±1,2) m/s. Gyakorlati számításokban ezt jó közelítéssel $3 \cdot 10^8$ m/s-nak vehetjük mind vákuumban, mind levegőben.

A fény terjedési sebességét először O. Römer dán csillagász csillagászati úton mérte meg (1676). Laboratóriumi méréssel először Fizeau (1849), később Foucault (1862) határozta meg, 926-ban Michelson $2{,}99769 \cdot 10^8$ m/s-ot mért.

Ha a fény homogén izotróp közeg határára érkezik, annak molekuláival, ionjaival kölcsönhatásba lép. *A fény* **E** *elektromos térerőssége a molekulák (ionok) töltését rezgésre kényszeríti, ami által azok másodlagos hullámforrássá válnak. A belőlük kiinduló és az eredeti, beérkező hullámok szuperpozíciója alakítja ki a hullámtér eredő hullámfrontjait.* Ezek az új (átlátszó) közegben kisebb sebességgel terjednek, mint vákuumban. A fény fázissebességének nagysága az ε_r relatív permittivitású közegben:

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}. \qquad (10.18)$$

Mivel a látható fény frekvenciatartományába eső hullámokra minden átlátszó anyagban $\mu_r \approx 1$, a fény az ε_r *relatív permittivitású közegben*

$$\boxed{c = 1/\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0} = c_0/\sqrt{\varepsilon_r} < c_0} \qquad (10.19)$$

sebességgel terjed, ahol c_0 a fény vákuumbeli terjedési sebessége.

A fény vákuumbeli és az adott közegbeli sebességének arányát, amelynek értéke

$$\boxed{n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}}, \qquad (10.20)$$

az illető közeg *abszolút törésmutatójának*[4] nevezzük (lásd a 2.8.2.1. fejezetet!).

Ha a fény nem vákuumból, hanem valamely más közegből lép át egy új közegbe, a terjedésre a két közegbeli sebességének aránya lesz jellemző. A második közegnek az elsőre vonatkoztatott *relatív törésmutatója* a fény két közegbeli c_1, illetve c_2 terjedési sebességének hányadosa:

$$\boxed{n_{21} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}}, \qquad (10.21)$$

[4] A függvénytáblázatokban található relatív permittivitás (relatív dielektromos állandó) a kondenzátorokat kitöltő anyag sztatikus elektromos terében létrejövő polarizációjával kapcsolatos, amely nem egyezik meg a nagyfrekvenciás terekben kialakuló átlagos polarizáció mértékével, így ezekből az adatokból a törésmutató nem számolható.

ui. $n_1 = \frac{c_0}{c_1} \rightarrow c_1 = \frac{c_0}{n_1}$, és ugyanígy $c_2 = \frac{c_0}{n_2}$, azaz a két terjedési sebesség aránya:

$n_{21} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_0}{n_1} \cdot \frac{n_2}{c_0} = \frac{n_2}{n_1}$, ahol n_1 és n_2 az első, illetve a második közeg abszolút törésmutatója. Ha $n_{21} > 1$ (illetve $n_2 > n_1$), a második közeget *optikailag sűrűbbnek* nevezzük, ellenkező esetben *optikailag ritkábbnak.*

Diszperzió. Az ε_r relatív permittivitást a (7.27a) összefüggéssel a kondenzátort kitöltő dielektrikumra értelmeztük, ha arra egyenfeszültséget kapcsolunk. A szigetelőanyag szerepe részecskéinek dielektromos polarizációjával függ össze. Mivel az adott **E** térerősséghez tartozó polarizáció mértéke az időben változó mezők esetén függ a változás frekvenciájától, minden anyag relatív permittivitása, így tehát az abszolút törésmutatója is függ a ráeső fény frekvenciájától, vagy másként: a vákuumbeli hullámhosszától. Ebből következik, hogy *a különböző hullámhosszú fénysugarak ugyanabban az anyagi közegben különböző sebességgel terjednek.* Ezt a jelenséget a fény *diszperziójának* (fényszórás, illetve színszórás, lásd később) nevezzük.

Az anyagok abszolút törésmutatóját a hullámhosszfüggés miatt egy meghatározott hullámhosszra szokták megadni. A 10.1. táblázat néhány anyag abszolút törésmutatóját tartalmazza 20 °C-on, a nátrium ún. D-vonalának 589,3 nm hullámhosszú fényére.

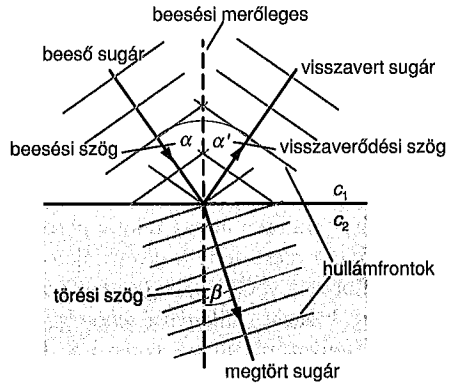
10.1. táblázat. Néhány anyag abszolút törésmutatója 20 °C-on, a nátrium D-vonalának megfelelő 589,3 nm hullámhosszúságú fényre

Az anyag megnevezése	n	Az anyag megnevezése	n
Alkohol	1,3617	Koronaüveg	1,515
Benzol	1,5013	Kősó	1,5443
Flintüveg	1,6128	Kvarcüveg	1.459
Gyémánt	2,4172	Mészpát	1,6584
Jég (0 °C-on)	1,309	Szénkéneg	1,6277
Kanadabalzsam	1,542	Víz	1,3330

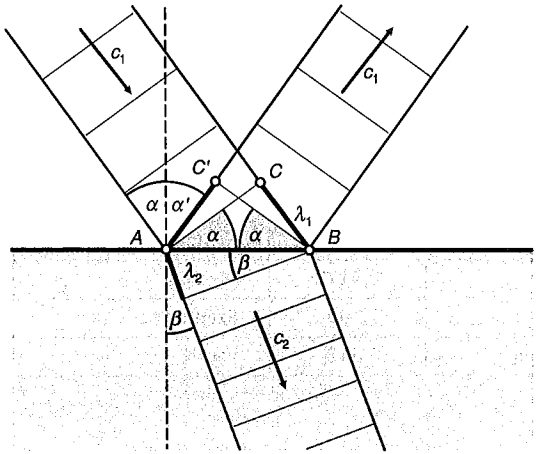
10.5.1.2. A fény két közeg határán. Visszaverődés, törés

Ha a fény két, különböző törésmutatójú (vagyis relatív permittivitású) közeget elválasztó felülethez érkezik, akkor ott részben visszaverődik, részben megtörik. A határon három hullám jelenik meg: a beeső, a visszavert és a behatoló, megtört

hullám. E három hullám terjedési irányát jól szemlélteti a beeső, visszavert és a megtört fénysugár, amit a 10.26. ábra a hullámfrontokkal és jellemző szögekkel együtt szemléltet. A 10.27. ábra segítségével megkapjuk a visszaverődés és törés törvényeit.



10.26. ábra



10.27. ábra

Az egyszerűség kedvéért az ábrán szereplő *AB* távolságot akkorának választottuk, hogy az *A*-ba érkező *hullámfronttól B* éppen egy hullámhossznyira (λ_1) legyen. Az *ABC* és *ABC'* háromszögek egybevágóak, ui. $AC = BC'$, mert azonos kö-

zegben a terjedési sebesség és így a hullámhossz a beeső és visszavert sugárnál megegyezik. Ebből következik, hogy *a beeső sugár és a beesési merőleges közötti α szög egyenlő a beesési merőleges és a visszavert sugár α' visszaverődési szögével:*

$$\boxed{\alpha = \alpha'}. \qquad (10.22a)$$

Kísérletekből megállapítható, hogy a *beeső sugár, a beesési merőleges és a visszavert sugár egy síkban vannak.*

A második közegbe behatoló hullám terjedési iránya megváltozik (megtörik). A törésre az ábrából a következő olvasható le:

$$AB = \frac{\lambda_2}{\sin\beta} = \frac{\lambda_1}{\sin\alpha}.$$

Innen $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_1 T}{c_2 T} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21} = \text{állandó}.$$

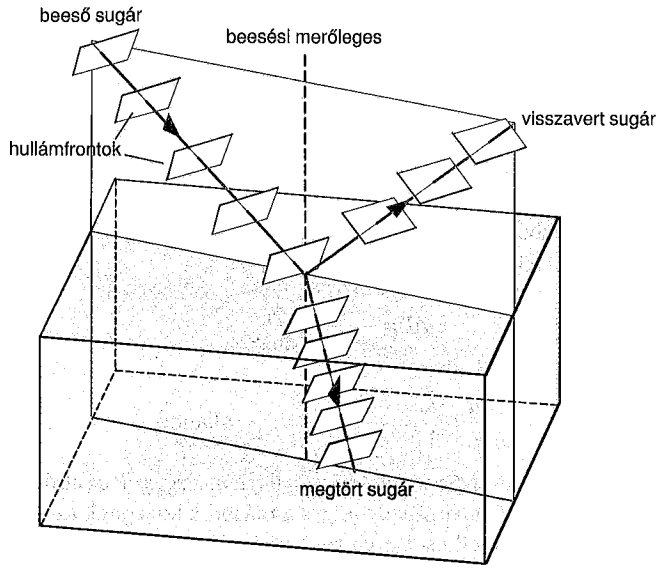
A beesési szög és a törési szög szinuszának aránya megegyezik az első és a második közegbeli terjedési sebesség arányával, vagyis a második közegnek az elsőre vonatkozó törésmutatójával (Snellius–Descartes-törvény):

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}}. \qquad (10.22b)$$

Itt n_{21} a második közegnek az elsőre vonatkoztatott relatív törésmutatója. A megtört sugárra is fennáll: *a beeső sugár, a beesési merőleges és a megtört sugár egy síkban vannak.*

A térbeli viszonyokat a 10.28. ábra szemlélteti. [Megjegyezzük, hogy a (10.22b) összefüggés természetesen a *visszaverődésre* is érvényes.]

Teljes visszaverődés. Amikor fény érkezik egy új, átlátszó közeg határához, energiájának egy része mindig visszaverődik (ezért látjuk az ablaküveget, nemcsak az ablakkeretet). Ha a fény optikailag sűrűbb közegből halad optikailag ritkább közegbe ($n_{21} < 1$), a törési szög nagyobb a beesési szögnél. Zérusról növelve a beesési szöget, a fény energiájának egyre nagyobb hányada áramlik a visszavert hullámban, azaz egyre kevesebb energia jut át ugyanazon idő alatt a második közegbe. Elérve egy α_h ún. *határszöget,* amelyhez 90°-os törési szög tartozik, már minden energia visszaverődik a közeghatárról. Az $\alpha \geq \alpha_h$ beesési szögek esetén az ún. *teljes visszaverődés* (totális reflexió) jön létre (10.29. ábra), ui. $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_{21}}$

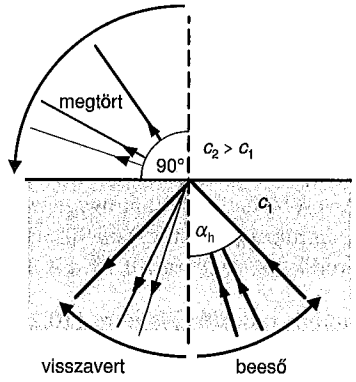


10.28. ábra

nem válhat 1-nél nagyobbá. A határszög értelmezése szerint $\sin \beta = 1$ lévén,

$$\sin \alpha_h = n_{21}, \tag{10.23}$$

vagyis *a határszög szinusza egyenlő a ritkább közegnek a sűrűbb közegre vonatkoztatott törésmutatójával.*



10.29. ábra

A relatív törésmutató fogalmából következik, hogy a második közegnek az első közegre vonatkozó törésmutatója egyenlő az első közegnek a másodikra vonatkozó törésmutatójának reciprokával:

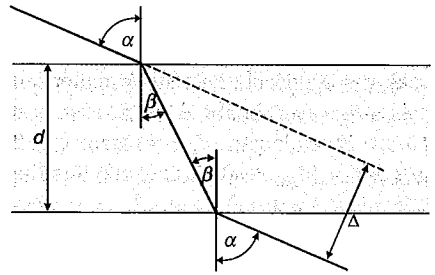
$$n_{21} = \frac{1}{n_{12}}, \tag{10.24}$$

Ha a fény több közegen, illetve visszaverő felületen (pl. tükrön) változtatja irányát, és az utolsó közegből kilépő sugarat ellenkező terjedési irányú sugárral cseréljük fel (önmagába tükrözzük), a „visszafelé" haladó fény ugyanazon a pályán fut végig ellenkező irányban, mint az eredeti fénysugár *(a fény útjának megfordíthatósága)*. Mindez a tükrözés és törés törvényeiből következik az α, illetve α', illetve α és β felcserélésével.

Síklapokkal határolt törőközegek. Ha két párhuzamos síkfelülettel határolunk el egy környezetétől valamely homogén, átlátszó közeget, ún. *planparalel lemezt kapunk.* Különösen fontos az az eset, melyben a lemez két oldalán ugyanazon anyagú közeg van. Ekkor a lemezre eső fénysugár kétszer törik meg úgy, hogy a belépő és a kilépő sugarak párhuzamosak lesznek, mindössze eltolódnak egymástól. Az eltolódás mértéke függ a lemez vastagságától, a törésmutatótól és a beesés szögétől. Egyszerű számítással igazolható, hogy a sugáreltolódás mértéke

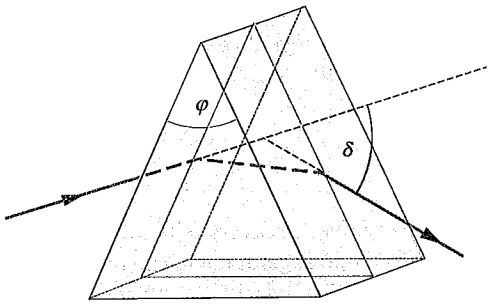
$$\Delta = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \tag{10.25}$$

(10.30. ábra).

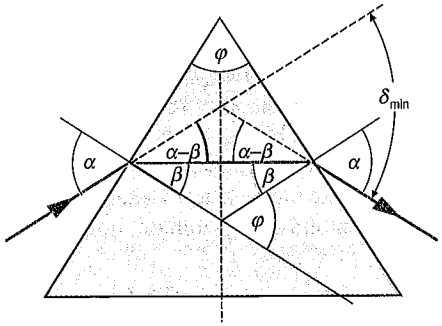


10.30. ábra

Fénytani hasábot (prizmát) kapunk, ha a fénytörő közeget zérustól különböző szögben hajló sík felületek határolják. A prizma a rá eső fénysugarakat kétszer töri meg. A kilépő sugár iránya különbözik az eredeti (belépő) sugár irányától (10.31. ábra).



10.31. ábra



10.32. ábra

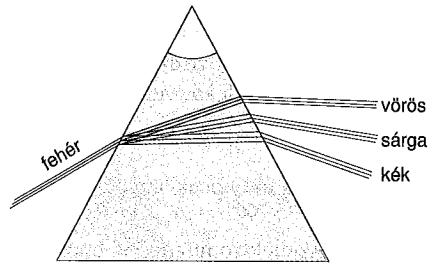
A határolósíkok metszésvonala a prizma ún. *törőéle,* hajlásszögük a *törőszög* (φ), a prizmát egy a törőélre merőlegesen metsző sík a *fősík*. A fősíkban haladó, kétszeresen megtört sugár az eredeti sugárral δ szöget zár be. Ez az *eltérés (deviáció)* szöge. Ez a szög akkor a legkisebb, ha a sugármenet szimmetrikus ($\alpha_1 = \beta_2$).

A legkisebb eltérítés szöge (minimális deviáció) ismeretében a törésmutató meghatározható. A 10.32. ábra alapján ui. a törőszög $\varphi = 2\beta$ és $\delta_{min} = (\alpha - \beta) = 2\alpha - \varphi$. Innen $\beta = \varphi/2$ és $\alpha = (\delta_{min} + \varphi)/2$. Ezeket a Snellius–Descartes-törvénybe (10.22b) írva:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{\delta_{min}+\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}. \qquad (10.26)$$

10.5.1.3. A színek

Ha keskeny fehér fénynyalábot ejtünk egy prizmára a 10.33. ábra szerint, a nyaláb a prizma mindkét lapján megtörik. A kilépő nyaláb útjába helyezett fehér kartonlapot távolítva a prizmától azt tapasztaljuk, hogy a keskeny nyaláb egyre jobban kiszélesedik, és a fényfoltban a vöröstől az ibolyáig a szivárvány minden színe megjelenik. Ha e színeket másik prizmával újra egyesítjük, ismét fehér fényt kapunk. Ez azt mutatja, hogy *a fehér sokféle színű fény keveréke.*



10.33. ábra

A jelenség a diszperzióval magyarázható (lásd a 10.5.1.1. alpontot), vagyis azzal, hogy az ε_r permittivitás a fény hullámhosszától (rezgésszámától) függ. (A nevét is innen kapta a jelenség: diszperzió = szétszórás, a fény színek szerinti szétszóródása.) Ezenfelül fel kell még tennünk, hogy a *különböző színérzetet okozó fényhullámok hullámhossza* (és így a frekvenciája) *különböző.*

Mivel a törésmutató $n \approx \sqrt{\varepsilon_r}$, a különböző hullámhosszúságú fényhullámok mindkét törésnél azonos forgásirányban eltérülve egyre jobban szétválnak egymástól. A legkevésbé a vörös, a legjobban az ibolya térül el a prizmán.

Az ernyőn felfogott színes sáv a *színkép* vagy *spektrum.* A benne található sok színárnyalat közül hat ún. *főszínt* különböztetünk meg: *vörös, narancs, sárga, zöld, kék, ibolya.* A színkép színei nem bonthatók tovább. Ezért ezeket *homogén* (egynemű) színeknek, és az ilyen fényt *monokromatikus*nak (egyszínűnek) nevezzük. A monokromatikus fényt alkotó hullámok hullámhossza állandó.

Ha a homogén színek mindegyikét vagy egy részüket egyesítjük, különféle *keverékszíneket* kaphatunk. Ha a fehér fény színképéből egy színt kitakarunk, a többi színt egyesítve *összetett szín* jön létre, amelyet a kitakart szín *kiegészítő színének* nevezünk. Egymást kiegészítő színek:

vörös–zöld,
narancs–kék,
sárga–ibolya.

Ha az összes spektrumszínt egyesítjük, fehéret kapunk. De fehéret ad az egymást kiegészítő monokromatikus, tiszta spektrumszínek keveréke is. Szemünkkel az egyszerű (monokromatikus) és az összetett színt nem tudjuk egymástól megkülönböztetni.

Az átlátszatlan tárgyak színe attól függ, hogy a rájuk eső fényből milyen színeket és milyen arányban vernek vissza. A tárgy színét a visszavert színek keveréke adja. Az átlátszó anyagok színét az határozza meg, hogy az áthaladó fényből milyen színű fény *nem* nyelődik el.

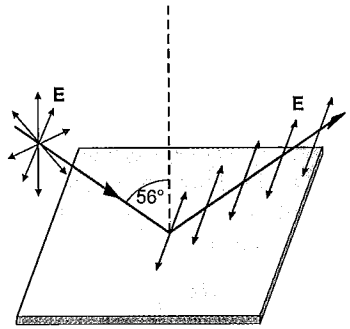
A *fekete* felület minden ráeső fényt elnyel, a *fehér* felület pedig minden színt (vagy csak a kiegészítő színpárok egyikét) veri vissza. A *szürke* különböző árnyalatait az olyan felületek adják, amelyek minden színt azonos arányban vernek vissza, de a beeső fénynek csak bizonyos százalékát verik vissza, a többit pedig elnyelik.

10.5.2. A fény polarizációja

Polarizáció visszaverődéssel. Az elektromágneses dipólsugárzás polarizált (lásd a 10.13. ábrát), vagyis a hullámban rezgő **E** vektorok mindenütt párhuzamos egyenesek mentén rezegnek.

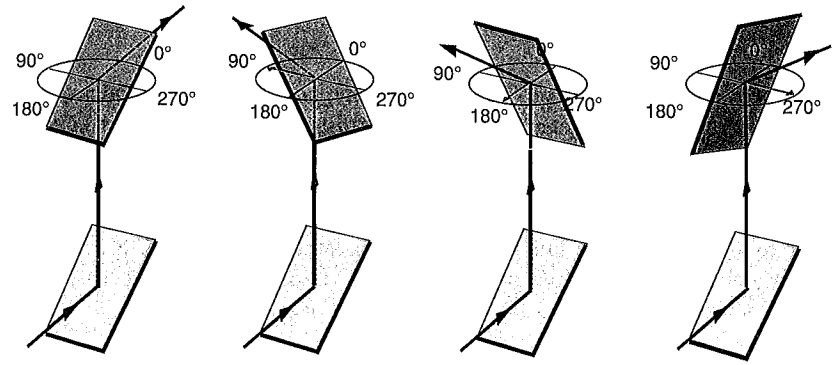
Természetes vagy *polarizálatlan fénynek* nevezzük az olyan fényt, amelyben egyenlő mértékben találhatók *minden irányban rezgő* **E** és **B** vektorok. Noha egyetlen atom által egy aktusban kisugárzott hullámvonulat *síkban polarizált,* a természetes fény igen sok atom spontán, rendezetlen hullámkibocsátásának eredménye, így minden rezgésirány megtalálható benne.

Ha üveglapra kb. 56°-os beesési szögben fénynyalábot ejtünk, az arról visszaverődő fénynyaláb polárossá válik. A visszavert fényben az **E** elektromos térerősség-vektorok az üveglemez felületével párhuzamos, a terjedés irányára merőleges egyenes mentén rezegnek (10.34. ábra).



10.34. ábra

A visszavert fény síkban poláros voltáról meggyőződhetünk úgy, hogy ennek útjába egy második üveglemezt *(analizátor)* helyezünk, amelyre ismét 56°-os beesési szögben érkezik a fénysugár (10.35. ábra). Ha ez az újabb lemez párhuzamos az első üveglemezzel *(polarizátor),* akkor a róla visszavert fény erőssége megegyezik a beesőével. Ha azonban a második lemezt a rá beeső sugár mint tengely mentén körülforgatjuk, akkor a róla visszavert fénysugár fokozatosan halványodik, majd ismét erősödik: 90°-nál és 270°-nál 0-ra csökken, 180°-nál és 360°-nál maximális a visszavert fény erőssége. Ez azzal magyarázható, hogy a második üveglemezre már polarizált fény esik, és az teljesen kioltja a visszavert fényt, ha annak polarizációs síkja merőleges az analizátor által polarizált fény polarizációs síkjára. (Megjegyezzük, hogy az **E** vektorok síkját *rezgési síknak,* a **B** vektorokét *polarizációs síknak* nevezzük.)



10.35. ábra

A tapasztalat azt mutatja, hogy ha természetes fény tetszőleges $0 < \alpha < \pi/2$ beesési szögben érkezik két izotróp szigetelő elválasztó felületéhez, a visszaverődő és a megtört fényhullámok *részben polarizáltak.* A visszavert hullámban a beesési síkra merőleges **E** vektorok vannak túlsúlyban, a megtört hullámban pedig a beesési síkkal párhuzamosak.

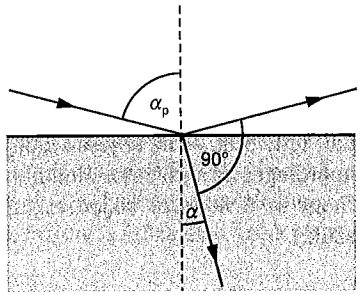
A *polarizáció mértéke* függ a beesési szögtől. *A visszavert sugár teljesen poláros lesz, ha a visszavert, valamint a másik közegbe behatoló megtört sugár egymásra merőleges* (*Brewster törvénye,* 10.36. ábra).

Ekkor a beesési szög (α_p) és a törésmutató kapcsolata:

$$n = \frac{\sin \alpha_p}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_p}{\sin\left(90° - \alpha_p\right)} = \frac{\sin \alpha_p}{\cos \alpha_p} = \operatorname{tg} \alpha_p,$$

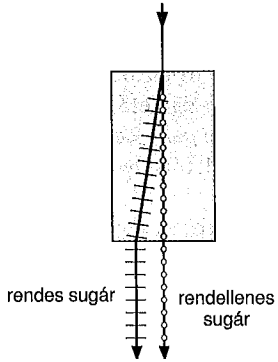
illetve $\boxed{\alpha_p = \operatorname{arctg} n}$. (10.27)

Pl. az 1,54 törésmutatójú üvegre α_p = arctg 1,54 = 57°.



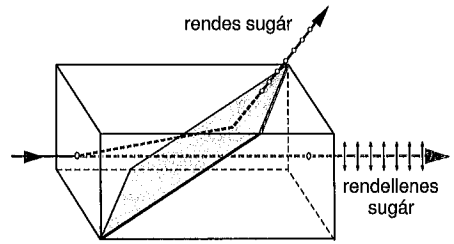
10.36. ábra

Polarizáció kettős töréssel. Tapasztalati tény, hogy a mészpát- (kalcit-) kristály a ráeső fénysugarat két részre bontja *(kettőstörés)*. Az egyik sugár követi a fénytörés törvényeit (*rendes* vagy *ordinárius sugár*), míg a másik nem (*rendellenes* vagy *extraordinárius sugár*). Mindkét sugár polarizált, és analizátorral kimutatható, hogy polarizációs síkjaik egymásra merőlegesek (10.37. ábra). Mivel a kétféle sugár terjedési sebessége különböző, tehát törésmutatójuk eltérő, a két sugár planparalel kristályból kilépés után egymáshoz viszonyítva eltolódik. (A rendes sugárra nézve a törésmutató 1,66, a rendellenesre nézve 1,49.)



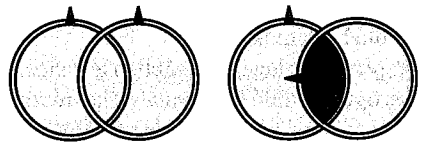
10.37. ábra

Polarizált fény előállítására megfelelő szögben csiszolt mészpátkristályt alkalmaznak, amelyet kettévágnak, majd a vágási felületeknél kanadabalzsammal összeragasztanak (*Nicol-prizma,* 10.38. ábra). A prizmára eső fény a törőfelületen kettősen megtörik. A rendes sugár a kanadabalzsamon teljes visszaverődést szenved és oldalra eltérül, míg a rendellenes sugár, amely már polarizált, kilép a kristályból. (A kanadabalzsam abszolút törésmutatója 1,54, a mészpátkristályé a rendes sugárra nézve 1,66, így a teljes visszaverődéssel való elválasztás megvalósítható.)



10.38. ábra

Polarizált fényt ún. *polárszűrőkkel* is elő lehet állítani. Üveg- vagy celluloidlapra kettősen törő kristályokból álló vékony réteget visznek fel. Ezek a kristályok a kettős töréssel szétválasztott két fénysugár közül az egyiket nagymértékben elnyelik, a szűrőrétegen át ezért csak a másik, meghatározott síkban polarizált fénysugár halad át. Ha két ilyen szűrőt egymásra helyezünk, és természetes fényt ejtünk rá, az áteső fény erőssége maximum és minimum között változik, miközben a polárszűrőket egymáson fokozatosan elforgatjuk (10.39. ábra).



10.39. ábra

10.5.3. A fény interferenciája

Ha két, azonos síkban poláros hullám a tér különböző pontjaiban időben azonos fáziskülönbséggel találkozik, a szuperpozíció eredménye időben állandó intenzitáseloszlású eredő hullám lesz [lásd a (2.176) összefüggést, a 2.8.3. pontot és a (10.36) képletet]. Ezt a feltételt az azonos frekvenciájú monokromatikus hulla-

mok teljesítik (*koherens* hullámok). A szuperpozíciónak ezt az esetét *interferenciának* nevezzük.

Az interferáló hullámok terében lesznek olyan helyek, ahol a hullámok erősítik, más helyen pedig gyengítik, esetleg kioltják egymást. *Erősítést* azokon a helyeken találunk, ahol a fáziskülönbség $-\frac{2}{3}\pi < \Delta\varphi < \frac{2}{3}\pi$; maximális az erősítés, ha $\Delta\varphi = 0$.

Gyengítés olyan helyeken lép fel, ahol a találkozó hullámok fáziskülönbsége $s_1 - s_2 = \left(2k+1\right)$ Maximális gyengítés – egyenlő amplitúdójú összetevők esetén kioltás – ott lesz, ahol a fáziskülönbség $\Delta\varphi = \pi$. Mint a mechanikai hullámok tanából ismert (lásd az 1.1.5.6. alpontot), az eredő hullám amplitúdója az összetevők amplitúdójának és fáziskülönbségének függvényében:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}, \qquad (10.28)$$

(ahol a $2A_1A_2\cos\Delta\varphi$ előjeles tagot *interferenciatagnak* nevezzük). A fénynél az A amplitúdónak az **E** elektromos térerősség maximuma felel meg.

Egymástól független fényforrásokból kisugárzott természetes fénynél nem teljesülnek az interferencia feltételei. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a természetes fény – általában – nem koherens *(inkoherens)*. Ha azonban egy fényforrás igen kis területéről kiinduló fénynyalábot használunk, az egymáshoz közeli atomok által kisugárzott hullámvonulatokra a koherenciafeltételek már teljesülnek. (Pontszerű fényforrás.)

Igen erős koherens fényt bocsát ki a lézer (lásd a 27.1. szakaszt), amelyben rendkívüli mértékben monokromatikus, azonos síkban polarizált hullámok keletkeznek.

A koherencia annál jobban teljesül, minél kisebb útkülönbséggel találkoznak az azonos pontból kiinduló hullámok.

Fényinterferenciát úgy tudunk legegyszerűbben létrehozni, hogy egy pontszerű fényforrásból kis nyílásszögű kiinduló fénynyalábot két részre bontunk, és (töréssel vagy tükrözéssel) különböző hosszúságú utakon végigfuttatva újra egyesítünk.

Interferencia kettőstükörrel. Ha vékony, monokromatikus fénynyalábot olyan kettőstükörre bocsátunk, amelynek lapjai igen kicsi szöget zárnak be egymással *(Fresnel-féle kettőstükör)*, a róluk visszavert fény útjába helyezett ernyőn világos és sötét párhuzamos sávok jelennek meg. Ha ugyanezt a kísérletet fehér fénnyel végezzük, a világos sávok a színkép színeire bomlanak. A jelenséget az interferenciával magyarázhatjuk. Ha a pontszerű fényforrásból bizonyos útkülönbséggel érkező hullámok találkoznak, erősítés, illetve kioltás jön létre attól függően, hogy az azonos fázissal induló hullámok az újbóli egyesüléskor mekkora fáziskülönbséggel találkoznak. A maximális erősítés feltétele, mint a mechanikai hullámoknál a 2.8.3. szakaszban láttuk:

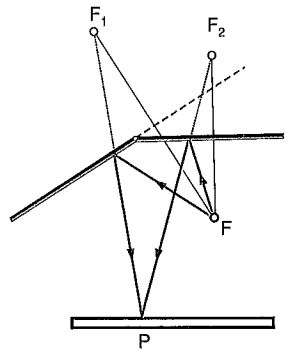
$$s_1 - s_2 = 2k\frac{\lambda}{2} \quad \left(k = 0, 1, 2, 3, \ldots\right),$$

a maximális gyengítés feltétele:

$$s_1 - s_2 = \left(2k+1\right)\frac{\lambda}{2},$$

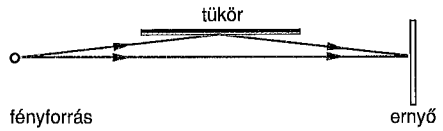
vagyis ha az útkülönbség a félhullámhossz páros számú többszöröse, maximális erősítés, ha páratlan számú többszöröse, maximális gyengítés (esetleg kioltás) jön létre.

A Fresnel-féle kettőstükör szerepét a 10.40. ábrából olvashatjuk le. A pontszerű fényforrásból kiinduló fény a kettőstükörről visszaverődik, és a két tükörlemezről visszavert nyalábok találkoznak egymással. Az F fényforrásból származó hullámok között az ernyő különböző pontjaiban általában útkülönbség áll elő. Az ernyő P pontjába érkező hullámok akkora utat tesznek meg a P pontig, mintha az F fényforrás helyett az F_1-gyel és F_2-vel jelölt tükörképéből – mint látszólagos fényforrásokból – indultak volna ki.



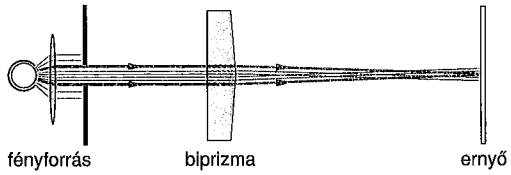
10.40. ábra

Interferencia egyetlen tükörrel. Ha keskeny fénynyalábbal közel párhuzamosan helyezünk el egyetlen tükröt (10.41. ábra), akkor az ernyőre a tükrözésmentesen és a tükröt szinte súrolva érintően érkező nyalábok között útkülönbség áll elő. Az ernyőn keletkező sötét és világos csíkok e két nyaláb interferenciájának következményei.



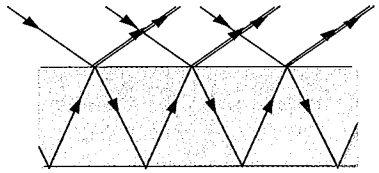
10.41. ábra

Interferencia kettősprizmával. A kettősprizma vagy *biprizma* a ráeső keskeny, párhuzamos fénynyaláb egy-egy sávja között útkülönbséget hoz létre (10.42. ábra).



10.42. ábra

Interferencia vékony hártyákon. Ha a vékony ($d \approx 0{,}05$ mm vastagságú) planparalel lemezre homogén fényt ejtünk, a fény egy része visszaverődik a lemez első felületéről, másik része behatolva a lemez anyagába, annak második felületéről (ugyancsak részben) visszaverődik. A két út különbsége miatt interferenciajelenséget látunk: bizonyos irányokban világos, más irányokban sötét csíkokat (10.43. ábra).

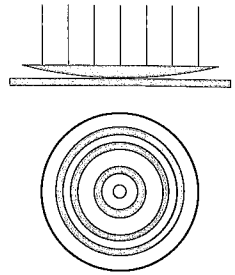


10.43. ábra

(Ilyen hártyát képezhet pl. a szappanbuborék, víz felületén szétterülő vékony olajréteg, az acélon képződő oxidréteg, két, egymáshoz szorított üveglap közötti levegőhártya stb.)

Ha bármelyik interferenciakísérletet fehér fénnyel végezzük, az ernyőn színkép jelenik meg. Az útkülönbség nélkül érkező fénysugarak találkozásánál – pl. az ernyőnek a biprizma közepével szemköztes helyén – fehér csíkot kapunk (minden hullámhosszra azonos fázisú találkozás jön létre). Az ernyő többi pontjaiban a különböző λ hullámhosszakra (színekre) más-más helyen lesz teljes kioltás, így ezeken a helyeken a kioltott szín kivételével a többi szín különböző árnyalatú összetételével keverékszín jelenik meg.

Newton-féle színes gyűrűk. Ha üveglapra igen kis görbületű sík-domború lencsét (lásd a 10.7.4. pontot) helyezünk, és fehér fénnyel megvilágítjuk a lencsét, az érintkezés helye körül koncentrikus színes gyűrűket látunk (10.44. ábra).



10.44. ábra

Monokromatikus fényben világos és sötét gyűrűk keletkeznek *(Newton-gyűrűk)*. Létrejöttüket a két üvegfelület közötti légréteg határfelületéről visszaverődő hullámok interferenciája okozza. (Ez a jelenség okozza pl. az üvegezett, kissé hullámos színes diaképek vetítésekor keletkező kellemetlen interferenciacsíkok megjelenését is.)

10.5.4. A fény elhajlása (diffrakció)

A mechanikai hullámokhoz hasonlóan az elektromágneses hullámokra is – így a fényre is – érvényes a *Huygens–Fresnel-elv* (lásd a 2.8.3.3. alpontot), és ennek következménye, a hullámok elhajlása akadályok szélén, keskeny réseken.

Optikai rés. Mivel a látható fény hullámhossza igen kicsiny, csak nagyon keskeny résen való áthaladás után észlelhető az elhajlás és az azt követő interferencia.

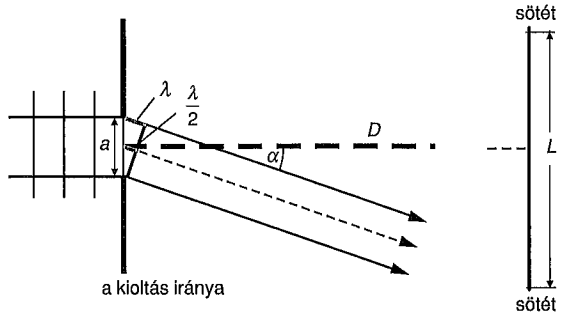
A 10.45. ábra a fény hosszú, keskeny résen való elhajlását mutatja. A rés után a minden irányban terjedő hullámból azt az irányt választottuk ki, amelynek sávjában kiinduló sugarak találkozáskor éppen kioltják egymást (lásd a 2.8.3.2. alpontot). A mechanikai hullámtanban megismerteket összefoglalva és a fényre alkalmazva a következőket állapíthatjuk meg.

A résen elhajló egyszínű fénynyaláb a réstől távoli ernyőn elhajlási képet hoz létre. Olyan α_k irányokban találunk sötét csíkokat *(kioltás)*, amelyekben a *szélső sugarak* Δs útkülönbsége:

$$\Delta s = 2k\frac{\lambda}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

és olyan β_k irányokban van *maximális erősítés,* amelyekben

$$\Delta s = \left(2k+1\right)\frac{\lambda}{2}.$$



10.45. ábra

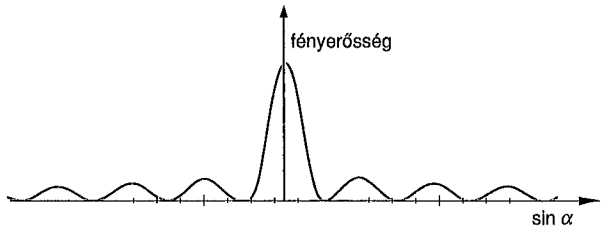
Az ábrából $\Delta s = a \sin \alpha_k$ alapján (ahol a a rés szélessége):
A *kioltási irányokra*

$$\sin \alpha_k = \frac{2k}{a}\frac{\lambda}{2}, \tag{10.29a}$$

az *erősítési irányokra*

$$\sin \beta_k = \frac{2k+1}{a}\frac{\lambda}{2}. \tag{10.29b}$$

[Lásd a (2.191) és (2.192) képleteket!]



10.46. ábra

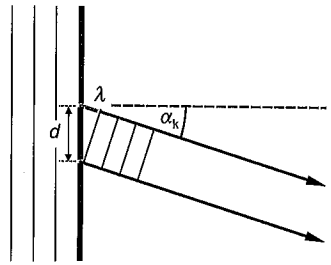
A 10.46. ábra a fényerősség eloszlását mutatja. Távol elhelyezett ernyő esetén, midőn $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{L}{2D}$, a hullámhossz is könnyen meghatározható:

$$\lambda = \frac{aL}{2D}, \tag{10.30}$$

ahol L a középtől mért két szomszédos *sötét* csík távolsága, és D a rés–ernyő távolság.

Ha a rész szélessége nő, az interferenciacsíkok fényesednek és összezsugorodnak, majd összefolyva eltűnnek: megjelenik a rés éles képe (geometriai optika). Ha a rész szélességét a fél hullámhossznál kisebbre választjuk, a $k = 1, 2, \ldots$-höz tartozó maximumok kitolódnak a végtelenbe, és a középső fényes csík az ernyőn szétfolyik és elhalványul, de sehol sem lesz kioltás.

Kettősrés. Essen két hosszú, párhuzamos keskeny résre síkjukra merőlegesen monokromatikus fényhullám! A két résből kiinduló hullámok azonos fázisban vannak. Így azokban az α_k irányokban, amelyekben a két rés azonos oldali szélső sugarainak útkülönbsége $2k\frac{\lambda}{2}$, *erősítés,* a β_k irányokban, amelyekre az útkülönbség $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$, *kioltás jön létre* (10.47. ábra).



10.47. ábra

Így tehát eltérően az egyetlen rés esetétől, *a főmaximumok irányaira:*

$$\sin \alpha_k = \frac{2k}{d}\frac{\lambda}{2}, \tag{10.31a}$$

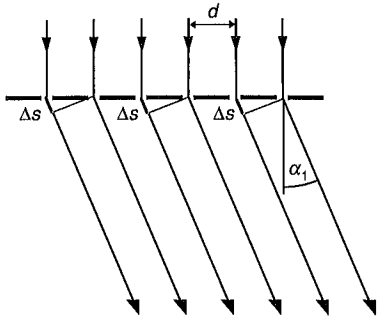
a kioltások irányaira:

$$\sin \beta_k = \frac{2k+1}{d}\frac{\lambda}{2}, \tag{10.31b}$$

ahol d a két rés egymástól mért távolsága ($d > a$).

Optikai rács. A nagyszámú, egyenlő szélességű, egymást egyenlő távolságra követő párhuzamos optikai rések összességét optikai rácsnak nevezzük. Leggyakrabban üvegre karcolt barázdákkal állítják elő. A karcolások *köze* fényáteresztő *rés,* amelynek szélessége a. A karcolás maga fényt át nem eresztő akadály. Egy rés

és egy barázda együttes szélessége a *rácsállandó,* jele: d (10.48. ábra). (Ma már előállítanak olyan rácsokat, amelyeken cm-enként több mint 20 000 rés van.)



10.48. ábra

Készíthetők olyan rácsok is, amelyek tükröző felületre vitt vékony, fűrészfog-profilú karcolatok sorozatából állnak *(reflexiós rács).* A róla visszaverődő fénynyaláb hasonló interferenciaképet hoz létre, mint a rések alkotta rács. Ilyen hatása van pl. a hanglemeznek, CD és DVD lemezeknek, amelyek tükröző felületén igen sűrű, vékony csíkokban elhelyezkedő barázdákat tartalmaznak.

Ha a rácsot merőlegesen beeső monokromatikus fénnyel világítjuk meg, a fénymaximumok és -minimumok irányai megegyeznek a kettősrésnél leírtakkal [(10.31) képlet]. A nagyszámú karcolás miatt fényerős és igen éles maximumokkal rendelkező elhajlási interferenciaképet kapunk.

Az el nem térített sugarak, vagyis amelyek az $\alpha_0 = 0$ irányban folytatják útjukat, az interferencia *nulladrendű maximumát* adják. A $k = 1, 2, 3, \ldots$-hoz tartozó irányokban az ún. *első-, másod-, harmadrendű maximumok* alakulnak ki.

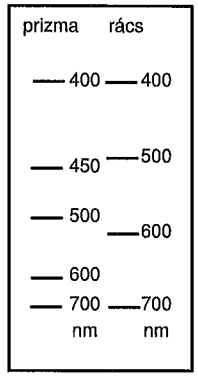
Fehér (vagy kevert) fénnyel megvilágított rács a különböző hullámhosszú sugarakat különbözőképpen téríti el. Az egyes hullámhosszaknak, vagyis a színeknek más és más α irányba eső éles vonalak felelnek meg, azaz a rács – akár a prizma – homogén színekre bontja a fehér fényt. Így tehát fehér fény esetén a középső képtől balra és jobbra a $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ stb. értékekhez tartozó első-, másod, …-rendű *elhajlási színképet* (más szóval *rácsszínképet,* azaz diffrakciós és nem diszperziós színképet) kapunk. Ezek mindegyike középtől kifelé az ibolyától a vörösig minden tiszta spektrumszínt tartalmaz (10.49. ábra), lásd még a színes mellékletet!



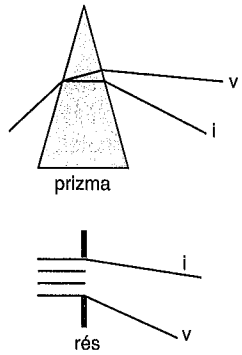
10.49. ábra

A rácsszínképben az eltérés a λ hullámhosszal egyenesen arányos. A rácsszínképet ezért *normál színképnek* nevezzük. Ugyanezért a tulajdonságért és nagy felbontóképessége miatt az optikai ráccsal előállított színkép a fényhullámhossz mérésére kiválóan alkalmas.

A 10.50. ábra a prizmával és a ráccsal előállított színkép néhány hullámhosszának megfelelő eltérítést mutatja. A 10.51. ábrán a kétféle (diszperziós és diffrakciós) spektrum néhány színének sugármenete látható.



10.50. ábra



10.51. ábra

A spektrum különböző színeihez tartozó hullámhosszakat, illetve rezgésszámokat a 10.2. táblázat tartalmazza.

10.2. táblázat. Néhány fényhullám hullámhossza és rezgésszáma

Színárnyalat	λ hullámhossz vákuumban, nm	ν rezgésszám s^{-1}
Vörös	720,2	$4{,}16257 \cdot 10^{14}$
Narancsvörös	656,469	$4{,}559117 \cdot 10^{14}$
Narancs	600,2	$4{,}99508 \cdot 10^{14}$
Sárga	589,1685	$5{,}088650 \cdot 10^{14}$
Zöld	495,02	$6{,}05463 \cdot 10^{14}$
Zöldeskék	490,1	$6{,}11641 \cdot 10^{14}$
Kék	410,286	$7{,}06741 \cdot 10^{14}$
Ibolya	396,85	$7{,}554302 \cdot 10^{14}$

10.5.5. Optikai színképek

A színképek a fényt kibocsátó anyagra jellemző szerkezetűek. A színképeket a következőképpen osztályozzuk.

Emissziós színképek. Valamely anyag által kibocsátott elektromágneses hullámok színképét *emissziós* vagy *kibocsátási színképnek* nevezzük. Ilyen minden izzó anyag színképe, a hidegen sugárzó gáz által kibocsátott fény színképe. Az ernyőn felfogott színkép skáláján minden pontnak megfelel egy (a kibocsátó anyagra jellemző) hullámhossz és intenzitás (fényerősség, lásd a 10.6. szakaszt).

Abszorpciós színképek. Mint a 17.2.1. alpontban látni fogjuk, minden gáznemű anyag azokat a hullámhosszakat nyeli el, amelyeket izzításkor maga is kibocsát. Ha egy anyag (pl. izzó fém) emissziós színképét előállítjuk, és az anyag által kisugárzott fényt átvezetjük gőzön, gázon vagy híg oldaton, az emissziós színképből hiányoznak bizonyos színek (sötét vonalak formájában vesszük észre), mégpedig azok, amelyeket a gáz, gőz vagy oldat elnyel a rajta átmenő fényből. Ezeknek az *elnyelési* vonalaknak a helyén jelenne meg az ugyanezen gáz izzításakor kibocsátott emissziós színkép vonalserege.

Azoknak az elektromágneses hullámoknak a spektrumát, amelyeket egy anyag a rajta átbocsátott fényből elnyel, az anyag *abszorpciós* vagy *elnyelési színképének nevezzük.*

A gáz, gőz stb. elnyeli az általa is kibocsátott színeket, és azonnal újból kisugározza azokat. A színképen azért látunk sötét vonalakat megjelenni a kisugárzott hullámoknak megfelelő helyen, mert míg az emissziós színképet alkotó direkt fénynyaláb energiaveszteség nélkül érkezik a színképet előállító optikai rácshoz,

az elnyelt komponens újbóli kibocsátáskor a tér minden irányába (a teljes térszögbe)[5] szóródik, amelyből a rácsra, illetve ernyőre elenyésző hányad jut.

Folytonos, vonalas és sávos színképek. Valamely sugárzás színképét *folytonosnak* mondjuk, ha a fényerősség a frekvenciának folytonos függvénye, és széles intervallumban különbözik nullától. A folytonos színkép olyan monokromatikus hullámok keverékéből tevődik össze, amelynek együttesében minden frekvencia előfordul egy legkisebb és egy legnagyobb érték között. Ilyen színképet bocsátanak ki pl. az izzó fémek, általában a szilárd testek és folyadékok.

A sugárzás színképét *vonalasnak* nevezzük, ha a fényerőssége a frekvenciának csak igen kicsiny intervallumban különbözik nullától. Az ernyőn egy-egy ilyen intervallumnak egy-egy *színképvonal* felel meg. Vonalas színképet adnak az izzó gázok, gőzök, híg oldatok (vonalas ez utóbbiak abszorpciós spektruma is). Közelítőleg a vonalas színképet adó fény néhány adott hullámhosszú monokromatikus hullám keverékeként fogható fel. (Valójában bármely éles színképvonalnak véges szélessége van, így nem monokromatikus, hanem és $\nu + \Delta\nu$ intervallumba eső hullámok összességének fogható fel. Hasonlóképpen a folytonos színképekről igen nagy felbontóképességű spektroszkópokkal vizsgálva kiderül, hogy valójában igen sűrű vonalak alkotják.)

A sugárzás színképét *sávosnak* mondjuk, ha a színképvonalak különálló csoportokba, sávokba rendeződnek, vagyis minden sáv sűrűn egymás mellett elhelyezkedő vonalak sokaságából áll.

Ez utóbbi két színképfajta mind emissziós, mind abszorpciós spektrumokban előfordul. Jól értékelhető abszorpciós színképet úgy kaphatunk, ha a gázon átvezetett fény izzó szilárd vagy folyékony anyagból származik, amelyből a gáz által elnyelt hullámok vonalai helyén sötét csíkok jelennek meg. (A gáz emissziós színképe komplementere a folytonos színképének, amelyből ugyanezen gáz abszorpció útján vonalakat takar ki, lásd a színes mellékletet!)

A színképek anyagvizsgálat céljaira használhatók.

[5] Térszögnek nevezzük a dimenzió nélküli $\Omega = A/R^2$ mennyiséget, ahol A az R sugarú gömbfelület egy darabjának a felszíne. A térszög a tér egy részét határozza meg, amelyet az A felületre támaszkodó kúp határol, amelynek a csúcsa a gömb középpontjában van. 1 szteradián (sterad, sr) az a térszög, amely az egységsugarú gömb felületének egységnyi területű részét metszi ki (alakjától függetlenül). A teljes térszög 4π sr, röviden 4π.

10.5.6. A teljes elektromágneses színkép

A Maxwell-féle elektromágneses fényelmélet szerint a fény elektromágneses hullám. A látható fény színképének kiterjesztésével az összes elektromágneses hullámot egységes, egyetlen, ún. *teljes elektromágneses színképbe* sorolhatjuk. Noha lényegileg csak hullámhosszban (frekvenciában) különböznek az egyes hullámok, keltésük módja, terjedési tulajdonságaik, a kémiai anyaggal való kölcsönhatásuk is eltérő.

A 10.3. táblázat az egyes, külön névvel ellátott elektromágneses hullámtartományokat tünteti fel (vákuumbeli) hullámhossz és frekvencia szerint. Látható, hogy az egyes tartományok között átfedések is előfordulnak.

10.3. táblázat. A teljes elektromágneses színkép főbb tartományai

Megnevezés	Hullámhossz (m)	Frekvencia (Hz)
Technikai váltakozó áram	18 000...3 000 km	16,67...10^2
Hangfrekvenciás váltakozó áram	3000...30 km	10^2...10^4
Hertz-féle hullámok	30 km...0,03 mm	10^4...10^{13}
Hosszúhullámok	2...1 km	$1{,}5\cdot10^5$...$3\cdot10^5$
Középhullámok	600...150 m	$5\cdot10^5$...$2\cdot10^6$
Rövidhullámok	50...15 m	$6\cdot10^6$...$2\cdot10^7$
Ultrarövidhullámok	15...1 m	$2\cdot10^7$...$3\cdot10^8$
Mikrohullámok	1 m...0,03 mm	$3\cdot10^8$...10^{13}
Infravörös fény	0,3 mm...760 nm	10^{12}...$3{,}9\cdot10^{14}$
Látható fény	760 nm...380 nm	$3{,}9\cdot10^{14}$...$7{,}8\cdot10^{14}$
Ultraibolya fény	380 nm...10 nm	$7{,}8\cdot10^{14}$...$3\cdot10^{16}$
Röntgensugarak	10 nm...1 pm	$3\cdot10^{16}$...$3\cdot10^{20}$
γ-sugarak	0,3 nm...30 fm	10^{18}...10^{22}
Kozmikus sugarak	30 fm...0,3 fm	10^{22}...10^{24}

Rádióhullámok. Előállításuk rezgőkörökben történik, antennával sugározzák ki azokat. Léteznek természetes rádióhullám-források. A tejútrendszerből, de más galaxisokból is érkezik hozzánk rádiófrekvenciás sugárzás bizonyos égitestekből (pl. kvazárokból).

Hosszúhullámok. Túlnyomórészt a Föld felülete mentén terjednek. Szokásos teljesítményű adókkal több ezer km távolságok is áthidalhatók velük.

Középhullámok. Ezek a hullámok már az egyenes vonalú terjedést mutatják. Terjedésükben néhány száz km-ig a felület mentén terjedő hullámok is szerepet kapnak, de a hírközlésben az ionoszféráról visszaverődő hullámok jelentősek.

Rövidhullámok. Ezek már csak az egyenes vonalú terjedéssel jutnak el a vevőkhöz. Az ionoszféráról és a Földről való többszöri visszaverődéssel jutnak el az adótól akár több ezer km-re is.

Ultrarövidhullámok. A szokásos akadályokat nem kerülik ki: ezek is csak egyenes vonalban terjednek. Nagyobb távolságra nem sugározhatók a Földön elhelyezett vevőkhöz, mert a Föld görbületét nem követik, az ionoszférán pedig áthatolnak, nem verődnek vissza. Műholdas átjátszással oldható meg a nagy távolságra való üzenetváltás.

Mikrohullámok. Terjedésük a látható fényéhez teljesen hasonló. Különböző tárgyak helyének és sebességének meghatározására használják őket. (Az ilyen berendezések a rádiólokátorok vagy radarok.) A rövidhullámok és mikrohullámok a *dielektrikumokban* is elnyelődnek, felmelegítve azokat. (Diatermiás kezelés, PVC-hegesztés, grillsütők stb.)

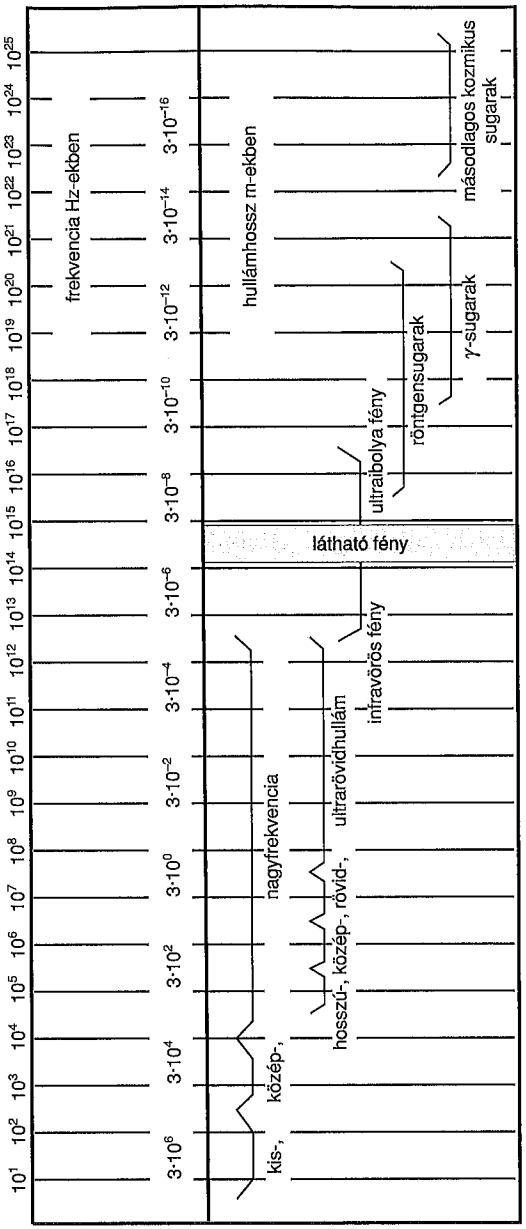
Optikai hullámok. Előállításukra a rezgőkörök az igen nagy frekvencia miatt nem alkalmasak. Felmelegített, esetleg izzó anyagok, gázkisülések, foszforeszkáló anyagok bocsátják ki.

Infravörös hullámok. Minden test sugároz infravörösben. Szemmel nem látható sugárzás. Bőrünkkel felfogva melegként érzékeljük, szokás ezért *hősugaraknak* is nevezni. Infravörösre érzékenyített negatívokkal az emberi test egészségi állapotára, gépek, épületek, földfelületek kisugárzására jellemző *hőfényképek* készíthetők. Az infravörös sugarakat használják fel a sötétben látó készülékek, és alkalmazzák a tévékészülékek távirányítóiban, valamint automata kapunyitó szerkezetekben is.

Látható fény. A vöröstől az ibolyáig tejed. A látható fénytartomány rezgésszámaránya kb. egy oktávnak (1:2 aránynak) felel meg, azaz igen kis sávja a teljes elektromágneses színképnek. A külvilágról a legtöbb információt (és leggyorsabban) közvetíti az ember számára.

Ultraibolya sugárzás. Szemünkkel már nem érzékelhető, bőrfelületünk azonban fokozott pigmentképződéssel reagál rá (lebarnulás). A napfény és higanygőzlámpa spektruma gazdag ultraibolyában. A közönséges üveg elnyeli, az ún. kvarcüveg átengedi (kvarclámpa, „kvarcolás"). A napfényből az uv-sugárzás nagyon rövid hullámhosszú komponensét a földi légkör kiszűri. Ez a sugárzáskomponens rákos sejtburjánzást, illetve szövetelhalást okoz. A nagyobb hullámhosszú (kisebb energiájú) ultraibolya hullámok biológiailag hasznosak, elősegítik a szervezetben a D-vitamin képződését.

Röntgenhullámok. Keletkezésük kétféle lehet. Gyors elektronok fémnek ütközve lefékeződnek, és gyorsulásuk miatt elektromágneses hullámot bocsátanak



10.52. ábra

ki *(fékezési sugárzás),* illetve atomok a lezárt héjukról kilökött elektronok helyére történő elektronátmenetekor sugároznak röntgentartományban (lásd a 31.2.2. pontot). Megkülönböztetünk *folytonos* és *karakterisztikus* röntgensugárzást. Az előbbi a röntgentartományban mindenféle frekvenciát tartalmaz (fékezési sugárzás), az utóbbi a kibocsátó anyag atomjaira jellemző, vonalas spektrumot ad. A kis energiájú összetevőt *lágy,* a nagy energiájút *kemény sugárzásnak* mondjuk. Anyaghibák felismerésére, gyógyászatban az emberi test átvilágítására, sejtburjánzások kiirtására alkalmazzák. A röntgensugarak elhajlását a kristályszerkezetek vizsgálatára használják.

Gamma-sugarak. Az atommag mesterséges és természetes átalakulása, valamint gerjesztett állapotainak megszűnése során keletkeznek (lásd a 31.5.3. pontot). Alkalmazása azonos a röntgensugarakéval. Ezenkívül az élelmiszeriparban konzerválásra (sterilizálásra) használják.

Kozmikus sugárzás. A világűrből (kozmosz) érkező sugarak. E sugarak igen nagy energiájú elemi részecskék (lásd a 33. fejezetet), főleg protonok a sztratoszféra atommagjaival ütköznek és széthasítják azokat. Ezen atommagok átalakulása során keletkeznek az ún. *másodlagos kozmikus sugárzásból* eredő elektromágneses hullámok. A teljes elektromágneses színkép összefoglalását a 10.52. ábra is mutatja.

10.6. Fotometriai alapfogalmak

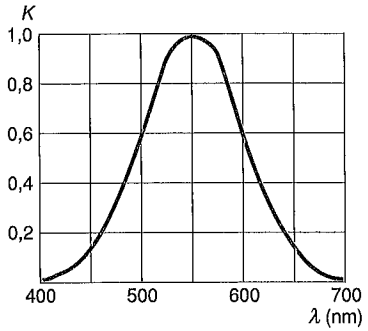
A fotometria az optikai elektromágneses hullámok energetikai leírásával és az ezzel kapcsolatos mennyiségek mérésével foglalkozik.

A fotometriai mennyiségek három fajtáját különböztetjük meg. Ezek: a fényforrásra, a fény áramlására és a megvilágított felületre jellemző mennyiségek. Mindegyik mennyiség történhet objektíven (fotoelektromos műszerek alapján) és szubjektíven, a látható fénynek a szemre gyakorolt hatása alapján (vizuális fotometria). Így kétféle mennyiségcsoportot különböztetünk meg. Az első csoport alapja a sugárzó energia mérése (ezek az ún. *energetikai mennyiségek,* amelyeket e indexszel látunk el), a másik csoport alapja az a vizuális fényhatás, amelyet egy etalonnak választott fényforrás idéz elő (ezek az ún. *fénymennyiségek,* amelyeket v indexszel jelölünk).

Láthatóság, láthatósági függvény. A szem a látható színkép különböző részei iránt nem egyformán érzékeny, más szóval a fényhullám energiája és a szemmel észlelt fényerősség nem arányosak egymással. A szubjektív vizsgálatok alapján megállapított fényerősség és a méréssel meghatározott energia egymáshoz való viszonyát a sugárzás *fényhasznosításának* nevezzük, és *K*-val jelöljük. E koeffi-

ciensnek a hullámhossztól való függését a *láthatósági függvény* (spektrális fényhasznosítás) fejezi ki (10.53. ábra).

Az egészséges emberi szem a $\lambda = 555$ nm hullámhosszú sárgászöld fényre a legérzékenyebb. Ez azt jelenti, hogy az azonos energiával sugárzott különböző hullámhosszú fények közül ezt látja legfényesebbnek, vagyis K ennél a hullámhossznál a maximális, $K = K_{max}$. Ezért szokás adott sugárzás esetén a szemmel észlelt fényerősséget azzal jellemezni, hogy a sugárzás fényhasznosítása hányszorosa az 555 nm-es sugárzás fényhasznosításának.



10.53. ábra

A K/K_{max} mennyiséget a sugárzás *fényhatásfokának* vagy *láthatósági tényezőjének* nevezzük és V-vel jelöljük. A láthatósági tényező értéke az 555 nm-es fényhullámra 1. Eszerint, ha valamely hullámhosszú fényre a láthatósági tényező 1/2, 1/3, akkor ugyanolyan erősségű fényérzet kiváltásához 2-szer, 3-szor nagyobb fényenergia szükséges, mint 555 nm-es fényhullám esetén.

10.6.1. A fotometria energetikai alapú mennyiségei (radiometria)

A fényforrás energetikai fényerőssége (sugárerősség) egy adott irányra vonatkoztatva az adott irány körüli egységnyi térszögbe kisugárzott teljesítmény:

$$I_e = \frac{\Delta P}{\Delta \Omega}. \qquad (10.33)$$

A képletből kiolvasható, hogy a fényforrás energetikai fényerősségének mérőszáma megegyezik az 1 szteradián térszögbe 1 s alatt kisugárzott energia mérőszámával. Egysége a watt/szteradián (W/sr).

Az energetikai fényerősség a fényforrás adott irányból mért erősségére jellemző. Különböző irányokban más és más lehet. Reflektorok tükrei egy adott irányba gyűjtve az energiát képesek a fényerősséget akár százszorosára is növelni.

A kisugárzott teljesítmény (kisugárzott fényáram) számértéke a fényforrás által egy adott térszögbe egységnyi idő alatt kisugárzott energia nagyságával azonos:

$$P_e = \frac{W}{t}. \qquad (10.34)$$

Ez a mennyiség a fényforrás kisugárzott teljesítménye a teljes hullámhossztartományban. Egysége a watt. Eszerint a fényforrás fényerőssége adott irányban az adott térszögbe kisugárzott fényáram és a térszög hányadosaként is megadható.

A sugárzó felületek energetikai fényességének (a kisugárzott felületi teljesítmény) számértéke az egységnyi felület által a teljes féltérbe kisugárzott teljesítmény, vagyis egy adott ΔA terület által kisugárzott ΔP teljesítmény osztva a területtel:

$$M_e = \frac{\Delta P}{\Delta A}. \qquad (10.35)$$

Egysége a W/m^2. (Pl. a volfrám energetikai fényessége 2500 K-en kb. 50 000 W/m^2.)

A fénysugár energetikai áramsűrűsége (teljesítménysűrűsége) a Poynting-vektor értéke [lásd a (9.16a,b) képletet]: az áramlásra merőleges felületen áthaladó teljesítmény osztva a felület területével:

$$S_e = \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{\Delta W}{\Delta A \Delta t}. \qquad (10.36)$$

Egysége a W/m^2.

Az energetikai megvilágításerősség, az ún. *besugárzott felületi teljesítmény* a kisugárzott fényáram (P_e) egy *megvilágított felületre* (ΔA) *eső* ΔP részének és a megvilágított felület ΔA területének a hányadosa:

$$E_e = \frac{\Delta P}{\Delta A}. \qquad (10.37)$$

Egysége a W/m^2. (Másképpen fogalmazva a felületre beérkező fényteljesítmény.) A jól megvilágított munkaasztalon az izzólámpa 10 W/m^2, a Nap a Föld felületén 1350 W/m^2 energetikai megvilágításerősséget hoz létre.

10.6.2. A fotometria vizuális alapon értelmezett mennyiségei

A fényforrás fényerőssége egy adott irányban a sugárzás fényérzet alapján megítélt erősségének viszonya ahhoz a térszöghöz, amelyben a fény terjed:

$$I_v = \frac{\Delta \Phi_v}{\Delta \Omega} . \qquad (10.38)$$

Egysége a *kandela* (cd). A kandela SI-alapmennyiség: 1 *kandela az a fényerősség, amellyel normális légköri nyomáson* (101 325 N/m^2), *a platina dermedési hőmérsékletén* (2042,5 K) *levő abszolút fekete testnek* (lásd a 6.3. fejezetet) *az* 1/600 000 m^2 (= 1/60 cm^2) *területű felülete rá merőleges irányban sugároz.*

Ehhez mint etalonhoz hasonlítva hitelesítik a mérésekhez használt ún. *normál lámpák* fényerősségét. A leggyakoribb fényforrások fényerősségét a 10.4. táblázatban adtuk meg.

10.4. táblázat. Néhány fényforrás fényerőssége

Fényforrás	Fényerősség cd	Fényforrás	Fényerősség cd
Gyertya	0,5...1	Katonai fényszóró	80 millió
Petróleumlámpa	5...50	Kis vetítőlámpák	500...2000
Izzólámpák	25...250	Mozigép vetítőlámpái	20 000

A fényáram (fluxus) a fényforrás által egy adott térszögbe kisugárzott teljesítmény:

$$\Phi_v = \frac{\Delta W}{\Delta t} . \qquad (10.39)$$

Fénytechnikai mértékegysége a *lumen* (lm). 1 lumen fényáramot létesít az 1 kandela fényerősségű, minden irányban egyenletesen sugárzó pontszerű fényforrás az egy szteradián térszögben. Így 1 lm = 1 cd·sr.

A fényáram a fényforrás fényerősségével kifejezve:

$$\Delta \Phi_v = I_v \Delta \Omega . \qquad (10.40)$$

I_v = 1 cd erősségű pontszerű fényforrás a térbe összesen $\Phi = 4\pi$ lm fényáramot sugároz. Általában

$$\Phi_{összes} = 4\pi I_v . \qquad (10.41)$$

Pl. a közönséges izzólámpa wattonként kb. 1 lm, a vetítőizzó 10^5 lm, reflektor néhányszor 10^6 lm fényáramot sugároz.

A szem maximális érzékenységnél, vagyis 555 nm hullámhosszon 1 watt energetikai fényáramnak 680 lumen felel meg.

A kisugárzott felületi fényáram (vagyis a sugárzó felületek fényessége) a fényáram viszonya azon felület nagyságához, amely azt kibocsátja:

$$M_v = \frac{\Delta \Phi_v}{\Delta A} . \qquad (10.42)$$

Egysége a *lux* (lx). 1 lx = 1 lm/m^2. Tehát 1 lux a felület fényessége, ha önmagára merőleges irányban négyzetméterenként 1 lumen fényáramot sugároz ki.

A fénysugár fényáramsűrűsége a fénysugárra merőleges felületen átáramló fényáram viszonya a területhez:

$$S_v = \frac{\Delta \Phi_v}{\Delta A_n} . \qquad (10.43)$$

Egysége a lm/m^2 = 1 lux.

A megvilágítás erőssége a ΔA felületre eső $\Delta \Phi_v$ fényáramnak és a megvilágított felület területének hányadosa:

$$E_v = \frac{\Delta \Phi_v}{\Delta A} . \qquad (10.44)$$

Egysége a lux. 1 lux a megvilágítás erőssége azon a felületen, amelynek minden négyzetméterére 1 lm fényáram esik. A 10.5. táblázatban megadunk néhány megvilágításértéket.

10.5. táblázat. Néhány megvilágításérték

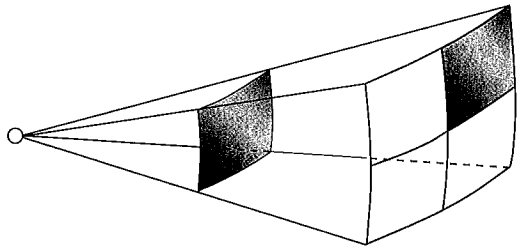
Megnevezés	Megvilágítás lx
Csillagos, Hold nélküli éjszaka	0,002
Holdas éjszaka	0,5
Nappal szabadban	2 000
Nyári napsütésben	10 000
Szem küszöbérzékenysége	10^{-7}
Utcák megvilágítása	2...15
Durva munkákhoz	20...40
Közepes finomságú munkákhoz	40...80
Olvasás-íráshoz	60...90
Rajzoláshoz	150...300
Finom munkákhoz	150...2 000
Filmvetítésekhez	$5 \cdot 10^6 ... 15 \cdot 10^6$

10.6.3. A fotometria két alaptörvénye

1. *A felületek pontszerű fényforrás által okozott megvilágításerőssége fordítottan arányos a fényforrásoknak a megvilágított felülettől való távolsága négyzetével:*

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}}\,. \qquad (10.45)$$

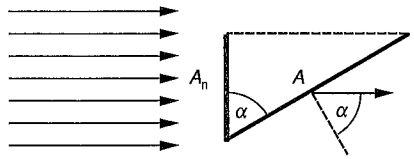
Mivel a pontszerű fényforrást körülvevő koncentrikus gömbfelület felszíne arányos a gömb sugarának négyzetével, a fénysugarakra merőleges azonos nagyságú, de kétszer, háromszor nagyobb távolságra levő felületet már csak négyszer, kilencszer kisebb fényáram éri (10.54. ábra).



10.54. ábra

2. *Egy felületnek a ferdén beeső fényáram által okozott megvilágítása azon szög koszinuszával arányos, amelyet a sugarak iránya a felület normálisával bezár.* A magyarázat a 10.55. ábráról olvasható le:

$$A_n = A\cos\alpha\,.$$



10.55. ábra

A megvilágítás erőssége a merőleges felületen:

$$E_n=\frac{\Phi}{A_n},$$

míg a ferde felületen:

$$E=\frac{\Phi}{A}=\frac{\Phi}{\frac{A_n}{\cos\alpha}}=\frac{\Phi\cos\alpha}{A_n},$$

ahonnan

$$\boxed{E=E_n\cos\alpha}\,. \qquad (10.46)$$

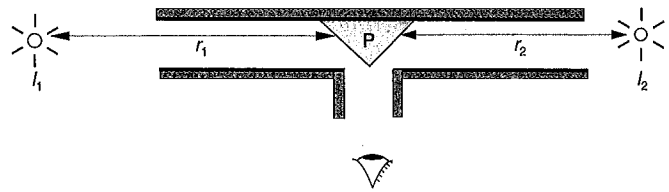
Egybefoglalva: *a pontszerű fényforrás által* (a tőle távoli) *felületen okozott megvilágítás egyenesen arányos a fényforrás I fényerősségével, fordítottan arányos a köztük levő r távolság négyzetével, és függ a beesés szögétől:*

$$\boxed{E=\frac{I}{r^2}\cos\alpha}\,. \qquad (10.47)$$

Pontszerű fényforrás esetén ui. $E_n = \Phi_{össz}/4\pi r^2 = 4\pi I_v/4\pi r^2 = I/r^2$ [l. a (10.41) képletet].

10.6.4. Fotométerek

A vizuális fotometria legalapvetőbb mérése a fényerősségmérés: annak meghatározása, hogy egy fényforrás I_2 fényerőssége hányszorosa egy hitelesített fényforrás (ún. normál lámpa) I_1 fényerősségének. Ez a két fényforrás által megvilágított azonos minőségű felületek megvilágításának szemmel való összehasonlítása útján lehetséges. A 10.56. ábra egy erre alkalmas készüléket, a *Ritchie-féle fotométert* illusztrálja.



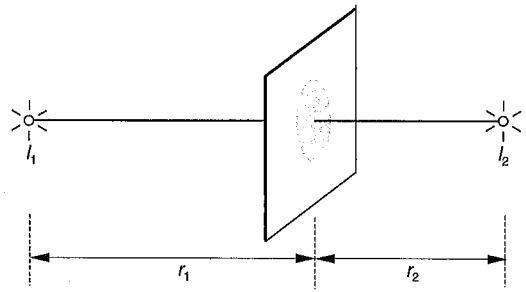
10.56. ábra

Belül feketére festett csőben derékszögű gipszék van elhelyezve (*P*), amelynek egyik oldalát az ismert I_1 erősségű, másik oldalát az ismeretlen I_2 erősségű fényforrás világítja meg. E pontszerű fényforrások r_1 és r_2 távolságát addig változtatjuk, amíg a gipszprizma két oldalát egyenlő világosnak ítéljük. (Ekkor a prizma

két oldalát elválasztó él látszólag eltűnik.) Ekkor a két felület megvilágítása egyenlő: $E_1 = I_1/r_1^2 = I_2/r_2^2 = E_2$, ahonnan

$$I_2 = I_1 \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Ennél az eszköznél is egyszerűbb a *Bunsen-féle zsírfoltos fotométer* (10.57. ábra). Lényege egy fehér papírernyő, közepén egy kör alakú zsírfolttal. Ha ezt csak egyik oldaláról világítjuk meg, a zsírfolt a fényforrás oldaláról sötétebbnek, a másik oldalról világosabbnak látszik a papír többi részénél, ui. a zsírfolt több fényt enged át, kevesebbet ver vissza, mint a papír többi része. Ha az ernyőt két oldalról egyszerre világítjuk meg az ismert, illetve az ismeretlen erősségű fényforrással, a zsírfolt annál jobban beleolvad a környezetébe, minél kevésbé tér el a két oldalról való megvilágítás értéke. Az egyik fényforrás távolságát addig változtatjuk, amíg a zsírfolt el nem tűnik. Ekkor a távolságok lemérésével az ismert fényerejű lámpa fényerősségével (10.48) szerint kiszámítható az ismeretlen fényerősség.



10.57. ábra

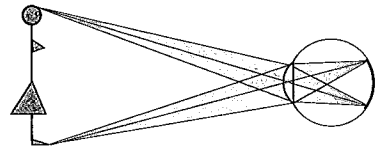
A vizuális fotometria szubjektív módszereivel az ún. *fénymennyiségeket* határozhatjuk meg. *Az energetikai fotometriai mennyiségek* meghatározására olyan objektív eljárásokat alkalmazunk, amelyek a fénynek valamilyen jól mérhető energiaátalakulásával kapcsolatosak. Így pl. a fotocella a fényelektromos, termoelem (lásd a 25.5. szakaszt) a hőelektromos hatás alapján alkalmazható a fényerősség mérésére. Ezek különböző hullámhossztartományokban különbözőképpen érzékenyek.

10.7. Gyakorlati alkalmazások

10.7.1. Optika

10.7.1.1. Az optikai leképezés

Ha egy tárgyat megvilágítunk (vagy önállóan fényt sugároz), felületének minden pontjából a tér minden irányába fényhullámok indulnak ki, amelyek a pont fényerősségével arányos energiát szállítanak. A tárgynak bármelyik kiszemelt pontjából szemünkbe érkező (igen kis térszögben széttartó) fénynyaláb minden sugara az ideghártyán ismét egy-egy pontban találkozik, az általa szállított energiát erre a pontra koncentrálva (10.58. ábra). Ez az energia ingerületet indít el az agyba. A tárgy minden egyes pontjának ezen a módon az ideghártyán egy pont felel meg, és ezen pontok energiaeloszlása megegyezik a tárgy felületi pontjainak energia-eloszlásával (fényességeloszlásával). A szem tehát a tárgy pontjait a fénysugarak segítségével pontonként leképezi az ideghártyára (pontszerű leképezés). A tárgyat azért látjuk alakhűen, mert a leképezés sorrend- és aránytartó.



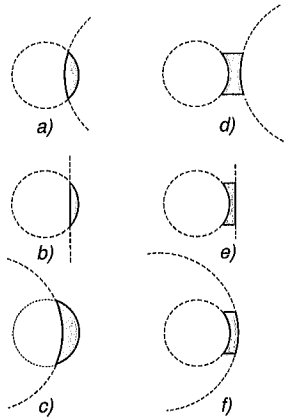
10.58. ábra

Általában *optikai leképezésnek* nevezzük azt a folyamatot, amely egy tárgy pontjaiból kiinduló fénynyalábok energiáját egy felületen ismét egy pontba egyesíti, és a tárgy, valamint a kép pontjainak megfeleltetése alaktartó. (Ha fehér, matt felületre történik a leképezés, a kép szemünk számára ismét tárgyként viselkedik, s így szemlélhetjük az első tárgy képét, amelyet most *ernyőn* fogtunk fel.)

Ilyen leképezésre tehát nemcsak a szem képes, hanem a leképezés különféle optikai eszközökkel is megvalósítható.

10.7.1.2. Optikai leképezés törő közegekkel

Optikai lencsék. Ha homogén átlátszó közegből két gömbfelülettel határolt darabot vágunk ki, *optikai lencséhez* jutunk. A gömbfelületek elhelyezkedésétől és sugarától függően kétfajta lencsét különböztetünk meg: az ún. *domború* és *homorú* lencséket. Ezek további három-három típusba sorolhatók. A 10.59. ábrán (a–f-ig) ezek láthatók:

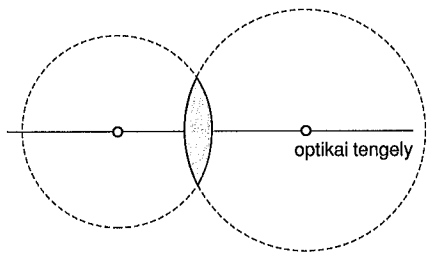


10.59. ábra

a) kétszeresen domború (bikonvex)
b) sík-domború (plánkonvex)
c) homorúan domború (konkáv-konvex)
d) kétszeresen homorú (bikonkáv)
e) sík-homorú (plánkonkáv)
f) domborúan homorú (konvex-konkáv).

Mint látható, a domború lencsék középen vastagabbak, a homorúak pedig középen vékonyabban a szélüknél. A domború lencséket *gyűjtő-*, a homorúakat *szórólencséknek* nevezzük. Az alábbiakban ezeknek a tulajdonságait foglaljuk össze. A továbbiakban csak *kis nyílásszögű, vékony lencsékkel* foglalkozunk, vagyis olyanokkal, amelyeknél a határoló gömbfelületek sugara sokkal nagyobb, és középen mért vastagsága sokkal kisebb a lencse átmérőjénél.

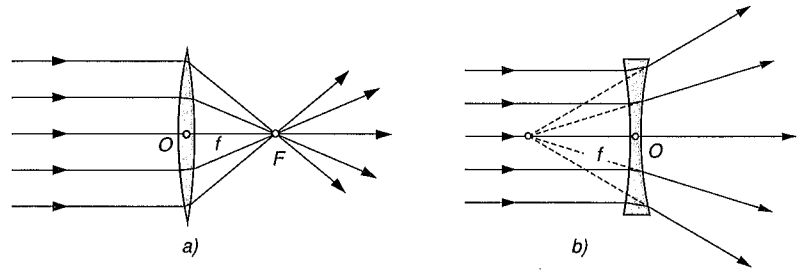
Optikai tengelynek nevezzük a lencsét határoló két gömb középpontját összekötő egyenest (10.60. ábra).



10.60. ábra

Ha a lencsére az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarak esnek, azok a gyűjtőlencse esetén a lencse után az optikai tengelyen metszik egymást, szórólencse esetén pedig széttartóvá válnak, mégpedig úgy, mintha a lencse előtt levő pontból indultak volna ki (a sugarak visszafelé való meghosszabbításai metszik egymást az optikai tengelyen). Mindkét esetben ezt a metszéspontot *fókusznak (gyújtópontnak)* nevezzük, és *F*-fel jelöljük (10.61a–b. ábra).

A lencse *fénytani középpontja* (optikai középpont) az optikai tengelynek a lencse közepére eső pontja (*O*). A fókuszpont és az optikai középpont közötti távolság a *fókusztávolság* (*f*). A domború lencséknél *valódi,* a homorú lencséknél *látszólagos* (virtuális) fókuszról beszélünk.



10.61. ábra

Dioptriának nevezzük a (méterben mért) fókusztávolság reciprokát. A lencse dioptriáját anyagának törésmutatója és a lencsét határoló gömbök sugara határozza meg. Kissé hosszadalmas számítás szerint:

$$D=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right). \qquad (10.49)$$

Ez az összefüggés mindenfajta vékony lencsére érvényes, ha a *domború felületek görbületi sugarát pozitív, a homorúakét negatív előjellel vesszük számításba.* (A sík felületek görbületi sugara természetesen végtelen, reciproka nulla.) *Gyűjtőlencsékre f pozitív* (valódi fókusz), *szórólencsékre f negatív* (virtuális fókusz).

Megjegyezzük, hogy a domború lencse is lehet szórólencse olyan közegben, amelynek a törésmutatója nagyobb a lencse anyagának törésmutatójánál. Ilyenkor az *n* relatív törésmutató 1-nél kisebb, és a fókusztávolságra negatív érték adódik. Hasonlóképpen homorú lencse is lehet gyűjtőlencse.

Lencsék képalkotása. A leképezési törvény. A tapasztalat alapján a *domború lencse* a fénylő tárgyakról pontszerű leképezést valósít meg. A tárgy egyes pontjaiból kiinduló fényhullámok energiáját ismét egy-egy pontba koncentrálja. Mate-

matikailag a lencsék *távolságtörvénye* vagy *leképezési törvénye* írja le a tárgy, a lencse és a kép elhelyezkedését.

Állítsuk a (síkbeli) tárgyat az optikai tengelyre, rá merőleges síkba! Az optikai középpont és a tárgy alappontjának távolságát *tárgytávolságnak* (t), a keletkezett kép tengelypontjának és az optikai középpontnak a távolságát *képtávolságnak* nevezzük. A tárgy-, kép- és fókusztávolság között a vékony és kis nyílású domború lencsékre az alábbi leképezési törvény érvényes:

$$\boxed{\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}}, \quad \text{illetve} \quad \boxed{k=\frac{tf}{t-f}}. \qquad (10.50a,b)$$

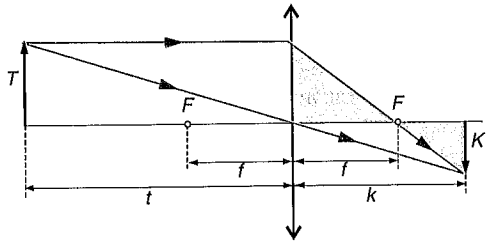
A 10.62. ábra alapján ui. a két hasonló háromszögben szereplő K *képnagyság* és T *tárgynagyság* aránya:

$$\boxed{\frac{K}{T}=\frac{k}{t}}, \qquad (10.50c)$$

a besatírozott két háromszögből pedig:

$$\frac{K}{T}=\frac{k-f}{f},$$

ahonnan $k/t = (k-f)/f$. Innen rendezéssel a (10.50a,b) egyenletet kapjuk.



10.62. ábra

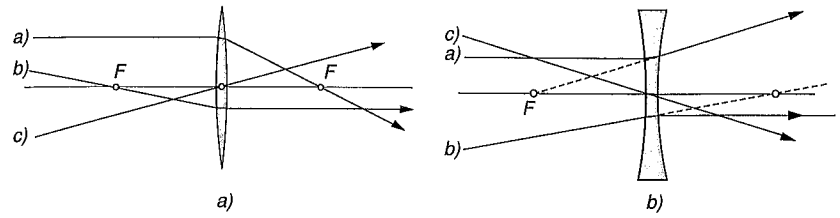
Az $N = K/T$ mennyiséget *nagyításnak* nevezzük.

Adott tárgytávolság esetén a képtávolság nemcsak a leképezési törvényből határozható meg számítással, hanem *nevezetes sugármenetek* felhasználásával szerkesztés útján is. Ilyen nevezetes sugármenetek (10.63a–b. ábra):

a) *Az optikai tengellyel párhuzamos sugár* domború lencsénél a lencse utáni fókuszponton halad át, homorú lencsénél pedig úgy halad tovább, mintha a lencse előtti fókuszból indult volna.

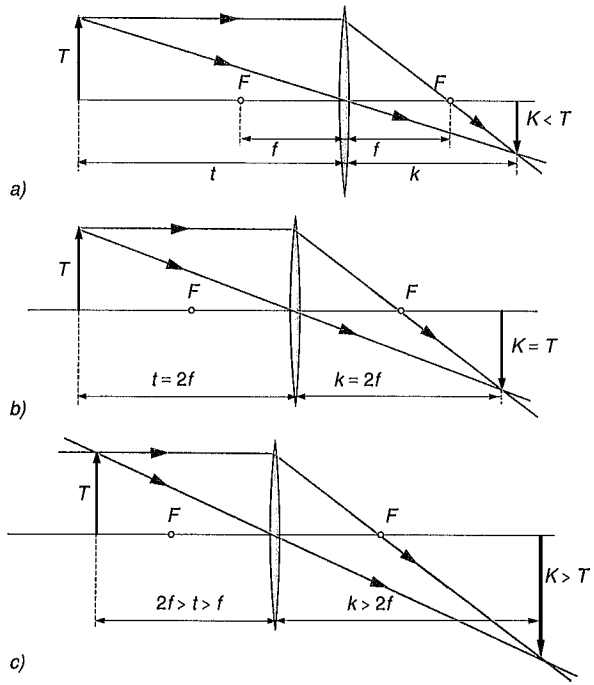
b) *A fókuszponton átmenő sugár* az optikai tengellyel párhuzamosan halad a gyűjtőlencsénél, szórólencsénél pedig a *túloldali fókusz felé* tartó sugár halad a lencse után a tengellyel párhuzamos irányban.

c) *Az optikai középponton áthaladó sugár* irányváltoztatás nélkül halad tovább, hiszen erre a sugárra nézve a lencse közepe planparalel lemezként szerepel. Vékony lencsénél a sugár eltolódása elhanyagolható.

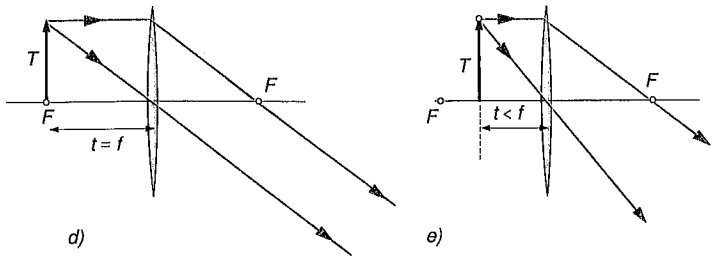


10.63. ábra

A gyűjtőlencse képalkotásai. A 10.64a–e. ábra mutatja a domború lencse képalkotásának jellegzetes eseteit.



10.64a–c. ábra



10.64d–e. ábra

a) Ha a tárgy a kétszeres fókusztávolságon kívül helyezkedik el, a kép az egyszeres fókusztávolságon belül van, kicsinyített ($N < 0$) és fordított állású.

b) Ha a tárgy a kétszeres fókusztávolságban helyezkedik el, a kép a lencse másik oldalán szintén a kétszeres fókusztávolságban keletkezik. A tárggyal egyenlő nagyságú ($N = 1$) és fordított állású.

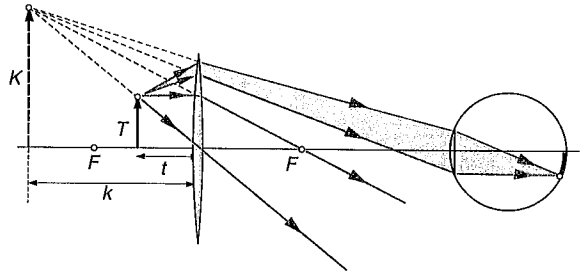
c) Ha a tárgy az egyszeres és kétszeres fókusz között van, a kép a kétszeres fókuszon kívülre kerül, nagyított ($N > 1$) és fordított állású. Minél nagyobb a kép, annál fényszegényebb.

d) Ha a tárgy az egyszeres fókuszban van, a pontjaiból kiinduló sugarak a „végtelenben találkoznak" (párhuzamosan haladnak a lencse után), így a kép „a végtelenbe tolódik".

e) Ha a tárgy a fókusz és az optikai középpont között van, a pontjaiból kiinduló sugarak a lencse után még széttartóbbak lesznek, többé nem találkoznak, energiájuk nem koncentrálódik sehol, *leképezés nem történik.*

A látszólagos vagy virtuális kép. A 10.65. ábrán láthatjuk, hogy ha a tárgy az egyszeres fókusztávolságon belül van, leképezés ugyan nincs, de a sugarak a lencse után nem rendszertelenül szóródnak, hanem úgy haladnak, mintha a lencse előtt egy-egy pontból indultak volna. Az ilyen sugarak egy másik, domború lencsére esve ismét találkozhatnak, mégpedig pontszerű leképezést létrehozva. Ilyen *második leképező rendszer* pl. a szemünk is. Ha a széttartó sugarak irányába nézünk, az *ideghártyán valódi kép* keletkezik, amely (az eredeti tárgyról kisugárzott energiát ismét koncentrálva) agyunkban olyan élményt kelt, mintha az első lencse mögött egyenes állású, nagyított tárgyat látnánk. Mivel a szem a beérkező sugarak irányát és fényességét érzékeli (nem kap információt a beérkező sugarak „előéletéről"), nem képes megkülönböztetni a látott „képet" a helyére tett, vele azonos nagyságú tárgytól. Így az olyan esetekben, amelyekben a leképező rendszereken áthaladó sugarak *meghosszabbításai* metszik egymást, *látszólagos* (virtuális) *képről* beszélünk. Itt természetesen az első lencse után energiakoncentráció nincs (ernyőn nem fogható fel a látszólagos kép), csak egy másik leképező rendszer adhat róla a tárggyal azonos energiaeloszlású (valódi) képet. (Itt tehát csak *matematikai*

értelemben van leképezés, egy ponthalmazhoz szerkesztés útján egy másik ponthalmaz pontjait rendeljük kölcsönös egyértelmű hozzárendeléssel. A virtuális kép tehát csak akkor létezik, ha *nézzük.*)



10.65. ábra

Így megkülönböztetünk *valódi képet,* amely a sugarak valóságos találkozásának helyén alakul ki, és *látszólagos (virtuális)* képet, amelyet a sugarak meghosszabbításának geometriai metszéspontjai alkotnak.

A 10.65. ábrán tehát a lencse a tárgyról látszólagos képet alkot, amely nagyított, egyenes állású. Ezzel a leképezés fogalmát némileg *általánosítottuk.*

A szórólencse képalkotása. A szórólencse a tárgy pontjaiból kiinduló sugarakat minden esetben még széttartóbbá teszi, valódi képalkotásra nem képes. A szórólencse a tárgyról virtuális, egyenes állású és kicsinyített képet ad (10.66a. ábra).

A leképezési törvény mind a gyűjtő-, mind a szórólencsékre egyaránt érvényes a tárgy bármely helyzetében. Alkalmazásához a következő előjelszabályt kell figyelembe venni.

$$\text{a görbületi sugár } r \begin{cases} >0 \text{ domború} \\ <0 \text{ homorú} \end{cases} \text{ felületre,}$$

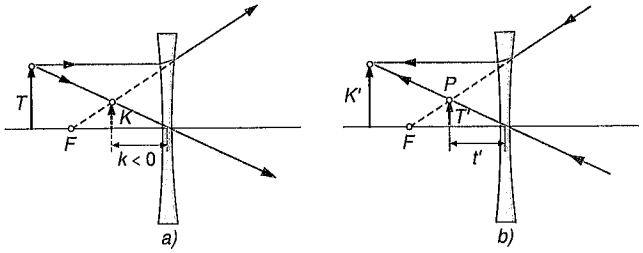
$$\text{a fókusztávolság } f \begin{cases} >0 \text{ gyűjtő} \\ <0 \text{ szóró} \end{cases} \text{ lencsére,}$$

$$\begin{matrix} \text{a tárgytávolság} \\ \text{és tárgynagyság} \end{matrix} \; t, T \begin{cases} >0 \text{ valódi} \\ <0 \text{ virtuális} \end{cases} \text{ tárgy esetén,}$$

$$\begin{matrix} \text{a képtávolság} \\ \text{és képnagyság} \end{matrix} \; k, K \begin{cases} >0 \text{ valódi} \\ <0 \text{ virtuális} \end{cases} \text{ kép esetén,}$$

$$\text{a nagyítás } N \begin{cases} >0 \text{ ha a tárgy és a kép egyaránt valódi,} \\ <0 \text{ ha a tárgy és a kép közül valamelyik virtuális.} \end{cases}$$

Virtuális tárgyról beszélünk akkor, ha a lencsét *összetartó* fénynyaláb éri, amelyik a lencse *után* találkozik. A virtuális tárgy fogalma a következőképpen tehető szemléletessé.



10.66. ábra

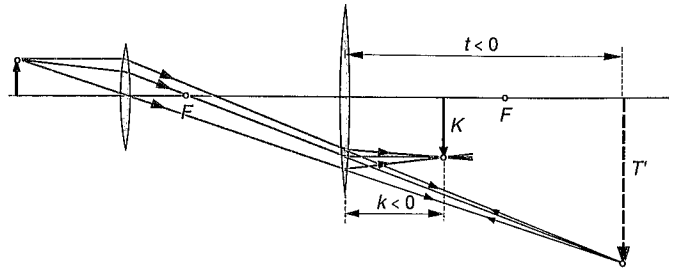
A tükrözés (10.22a) és a törés (10.22b) törvényéből következik, hogy ha a beeső és visszavert (illetve megtört) fénysugarak irányát ellenkezőjére cseréljük, a fény útvonala ugyanaz lesz. Ez azt is jelenti, hogy a tárgy és a *valódi kép* egymással felcserélhető (10.64. ábra). Azonban ha a kép virtuális, abból nem indul ki fénysugár (tehát nem cserélhető fel a tárgy és a kép), mert ha a virtuális kép helyére világító tárgyat tennénk, egészen más helyen keletkezne a kép (vagy nem is keletkezne, pl. egy tükör mögött). Igaz azonban a következő: Ha egy tárgyról a virtuális képet létrehozó fénysugarakat a leképező rendszeren való áthaladás után visszafordítjuk, az eredeti tárgy helyén valódi kép keletkezik (10.66a–b. ábra).

Mindebből általánosítható a következő tétel: Ha a leképező rendszerre olyan összetartó fénynyaláb érkezik (10.66b. és 10.67. ábra), amelyik a rendszer után találkozna, ha nem lenne útjában a rendszer, (valódi vagy virtuális) képet hoz létre, mégpedig olyat, amelynek a képtávolsága a távolságtörvényből meghatározható, ha az összetartó nyaláb P tartópontjának a lencsétől való távolságát *negatív tárgytávolságként* vesszük figyelembe. A P pontot ezen leképezés szempontjából *virtuális tárgynak* nevezzük.

Ez egyszerűen belátható a 10.66a–b. ábra alapján, amelyeken valamely T tárgy K virtuális képét ($k < 0$) szerkesztettük meg, illetve a leképező sugarakat megfordítottuk. Ha ui. a lencse jobb oldalán széttartó fénysugarakat megfordítjuk (10.66b), a lencsére eső olyan összetartó sugarakat kapunk, amelyek a lencse után találkoznának, és amelyeket a lencse a $K' = T$ valódi képbe képez le. Erre a leképezésre az előző (virtuális) képszerkesztés (10.66a. ábra) alapján érvényes, hogy az ottani K képnek a T' „tárgy" felel meg $t' = k < 0$ tárgytávolsággal. Így tehát T' valóban virtuális tárgyként szerepel.

Látható, hogy a szórólencse valódi képet is alkothat, ha a tárgy virtuális, és $|t| > |f|$.

A virtuális tárgy és képe közötti kapcsolatot domború lencse esetén a 10.67. ábra szemlélteti.



10.67. ábra

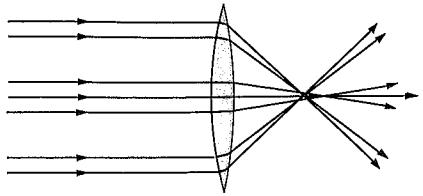
Lencserendszer. Ha több vékony lencsét közös optikai tengelyen helyezünk el úgy, hogy optikai tengelyük egybeessen, *lencserendszert* kapunk. Az így előálló rendszer dioptriája abban az esetben, ha a lencsék szorosan összeérnek, az egyes lencsék dioptriáinak összege:

$$D = D_1 + D_2 + \ldots + D_n.$$

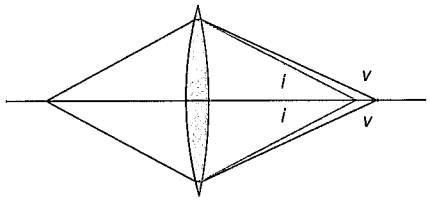
Lencsehibák (leképezési hibák). Bármilyen gondosan elkészített lencsével is alkotunk képet, az soha nem lesz ideálisan hű vetülete a tárgynak. A lencsék leképezésének főbb hibái a következők:

1. *Gömbi eltérés (szferikus aberráció).* Egyszínű (monokromatikus) fénnyel történő leképezés esetén is előálló hiba, amelyet az okoz, hogy a lencse szélein áthaladó sugarak nagyobb eltérítést szenvednek, mint az optikai tengellyel kis szöget bezáró fénysugarak, Ezért ugyanarról a pontról a lencse szélein áthaladó sugarak a lencséhez közelebbi pontban alkotnak képet, míg a közepén áthaladók a lencsétől távolabb metszik egymást (10.68. ábra).

2. *Színi eltérés (kromatikus aberráció).* A fehér fénnyel történő leképezés során keletkezett kép különböző részei különbözőképpen színeződnek el. Ennek az az oka, hogy a lencse törésmutatójának értéke függ a fény színétől is, aminek következtében a széleken áthaladó, tehát nagyobb mértékben eltérített fénysugarak jobban színeikre bomlanak (lásd prizma, színszórás), mint a lencse közepén áthaladók. Így a kép belső része kékes, külső része vöröses elszíneződést mutat (10.69. ábra). Ugyanakkor ez a kép *helyének* torzulását is okozza, mert a különböző színekre más és más a lencse fókusztávolsága, s ez az ernyőn életlenséget okoz. Ez a jelenség korrigálható különböző törésmutatójú és görbületi sugarú lencsékből készített összetett lencserendszerekkel.

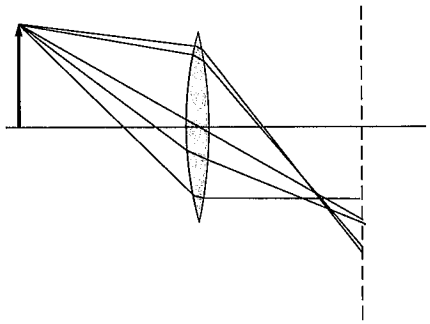


10.68. ábra



10.69. ábra

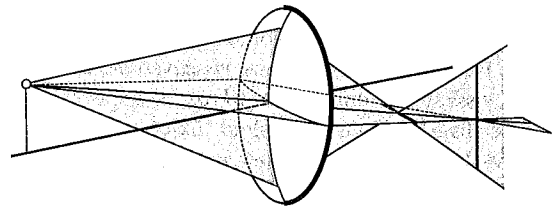
3. *Üstököshiba (kóma).* A főtengelytől távoli pontból nagyon ferdén és nagy nyílásszögben érkező fénysugarak az ernyőn pontszerű kép helyett üstököscsóvához hasonló fényfoltot alkotnak. A kóma oka, hogy a tárgypontból kiinduló sugarak a lencsén különböző eltérítést szenvednek (10.70. ábra).



10.70. ábra

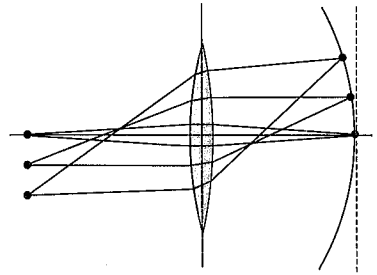
4. *Nem pontszerű leképezés (asztigmatizmus).* Bármilyen keskeny fénynyaláb esik is a lencsére, ha az az optikai tengellyel nagy szöget zár be (ferde beesés), nem képeződik le egyetlen pontba, hanem egy rövid, éles vonallá húzódik össze. Egyszer a lencséhez közelebb, majd egy erre merőleges, másik vonallá egyesül a lencsétől távolabb. A két képvonalat a tárgypontból különböző irányban induló sugarak hozzák létre. Az optikai tengely és a tárgypont által meghatározott sík és a lencse metszésvonalát nagyobb görbületű vonalak alkotják, mint amit az erre

merőleges sík metsz ki a lencséből. Az ezekben a síkokban érkező sugarak közül az előbbiek a lencséhez közelebb, az utóbbiak attól távolabb egyesülnek (10.71. ábra).



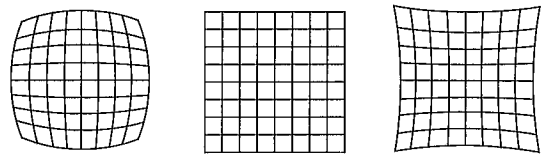
10.71. ábra

5. *Képgörbület (képmezőelhajlás).* Ha a lencse főtengelyére merőleges, nagy kiterjedésű sík tárgyat képezünk le, a róla keletkező képpontok nem egy síkban, hanem görbe felületen keletkeznek (10.72. ábra).



10.72. ábra

6. *Torzítás.* A kép élességétől független, a kép alakjára vonatkozó torzítási hiba. A tárggyal való geometriai hasonlóságtól való eltérés jellegétől függően *hordó,* illetve *párna* alakú torzításról beszélünk, amelyek úgy alakulnak ki, hogy a nagyítás a kép különböző részein nem egyforma. A hordó alakú torzításnál a nagyítás a középen nagyobb, mint a széleken, a párna alakúnál pedig fordítva, a széleken nagyobb (10.73. ábra).

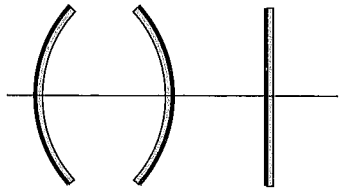


10.73. ábra

A leképezési hibák különböző törésmutatójú és alakú lencsék alkotta lencserendszerekkel, valamint a lencsék felületére felvitt, többszörös visszaverődést megakadályozó vékony, átlátszó rétegek alkalmazásával csökkenthetők.

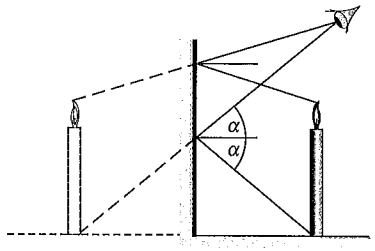
10.7.1.3. Optikai leképezés visszaverő felületekkel

Optikai tükrök. Ha igen sima felületekre, pl. jól csiszolt fémfelületre vagy foncsorozott üveglemezre fény esik, az túlnyomó részben csak meghatározott irányba verődik vissza. Ezt nevezzük *szabályos visszaverődésnek* vagy *tükrözésnek*. A fényt ily módon visszaverő felületek a *tükrök*. Leképezéshez síktükröket és gömbtükröket (speciális esetekben paraboloid tükröket) használunk. A gömbtükör *homorú* (konkáv), ha a visszaverő felülete a gömb középpontja felé esik, ellenkező esetben *domború* (10.74. ábra).



10.74. ábra

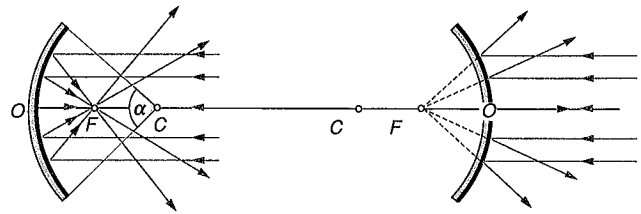
Síktükör leképezése. Ha egy világító tárgyról fény esik a síktükörre, arról a visszaverődés szabályai szerint ugyanabba a féltérbe verődik vissza, és széttartó nyalábot alkot. Valódi leképezés nem jön létre. Ha a visszavert nyalábot gyűjtőlencsével – vagy szemünkkel – összetartóvá tesszük, olyan valódi képet kapunk, mint amilyet egy a tükör mögött levő, a tárggyal azonos nagyságú és állású tárgyról kaptuk volna, amely ugyanolyan messze van a tükörtől, mint az eredeti tárgy. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a síktükör a visszavert sugarak tükör mögötti meghosszabbításainak metszéspontjaiban „leképezi" a tárgyat, arról *virtuális képet* alkot. Erre nézve $T = K$, $t = k$; a kép egyenes állású (10.75. ábra).



10.75. ábra

Homorú és domború tükrök képalkotása. A gömbtükör *geometriai középpontja* annak a gömbnek a középpontja, amelyből síkkal kimetszettük. A geometriai középpontból a tükör széléig tartó szakaszok alkotta kúp nyílásszöge a tükör

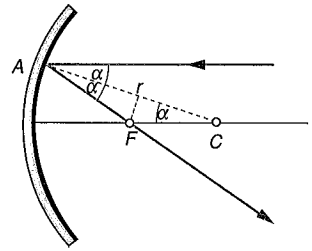
nyílásszöge (10.76. ábra). A tükröző felület középpontja a gömbtükör *optikai középpontja*. Az optikai középpontra (O) és a geometriai középpontra (C) illeszkedő egyenes a gömbtükör *optikai tengelye*.



10.76. ábra

Ha a gömbtükörre az optikai tengellyel párhuzamos fénynyaláb érkezik, az – kis nyílásszögű tükör esetén – arról visszaverődve úgy halad tovább, hogy homorú tükör esetén annak minden sugara az optikai tengely egyazon pontján megy keresztül *(valódi fókuszpont)*, domború tükör esetén széttartóvá válik úgy, hogy a tükör mögötti meghosszabbított sugarai metszik egymást az optikai tengelyen *(virtuális fókusz)*.

A fókuszpont mindkét esetben az optikai középponttól $f = r/2$ távolságra van, ahol r a gömbtükör sugara.

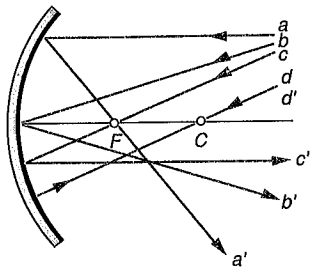


10.77. ábra

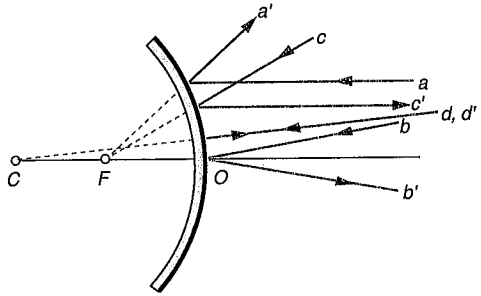
A 10.77. ábra alapján ui. a tükörre érkező fénysugár A talppontja, a C geometriai középpont és az F tengelymetszeti pont egyenlő szárú háromszöget alkot. Mivel $AC = r$, következik, hogy $r/2 = FC \cos \alpha$, illetve $FC = r/(2 \cos \alpha)$. Ha az α szöget csökkentjük (kis nyílásszögű tükör), akkor $\cos \alpha \approx 1$ lesz, és FC valóban $r/2$-nek adódik. Így tehát

$$\boxed{f = \frac{r}{2}}. \qquad (10.51)$$

Nevezetes sugármeneteket kapunk néhány speciális fénysugár felhasználásával (10.78. ábra homorú, 10.79. ábra domború tükör esetén):



10.78. ábra



10.79. ábra

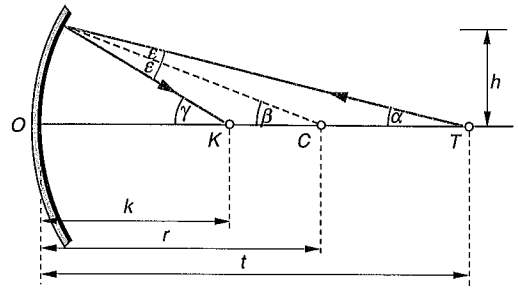
a) Az optikai tengellyel párhuzamos sugarak visszaverődés után a fókuszponton haladnak át. (Domború tükörnél a sugarak tükör mögötti meghosszabbításai átmennek a fókuszon.)

b) Az optikai középpontba futó sugarak az optikai tengelyre tükrösen, azonos szögben verődnek vissza.

c) A fókuszponton áthaladó sugarak az optikai tengellyel párhuzamosan verődnek vissza. (Domború tükörnél az olyan sugarak verődnek vissza az optikai tengellyel párhuzamosan, amelyek tükör mögötti meghosszabbításai átmennek a fókuszon.)

d) A geometriai középponton áthaladó sugarak önmagukba verődnek vissza. (Domború tükörnél azok a sugarak verődnek önmagukba vissza, amelyeknek a tükör mögötti meghosszabbításai átmennek a geometriai középponton.)

A homorú és domború tükrök azonos leképezési törvény szerint alkotnak képet a domború és homorú lencsékkel, azzal a különbséggel, hogy a domború lencsének a homorú tükör, a homorú lencsének a domború tükör felel meg. A 10.80. ábra szerint ui. az $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ szögek között a következő összefüggések vannak:



10.80. ábra

$$\beta=\alpha+\varepsilon \qquad \text{és} \qquad \gamma=\beta+\varepsilon,$$

ahonnan $\alpha+\gamma=2\beta$. Kis nyílásszögű tükrök esetén e szögek mindegyike helyébe a szög tangense írható:

$$\alpha\approx\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{t}, \qquad \beta\approx\operatorname{tg}\beta=\frac{h}{r}, \qquad \gamma\approx\operatorname{tg}\gamma=\frac{h}{k},$$

ahol t az optikai tengelyen levő T tárgypont tárgytávolsága, k a K képpont képtávolsága, és r a tükör görbületi sugara. Ha ezeket az értékeket az $\alpha=\gamma=2\beta$ egyenletbe írjuk, felhasználva az $r/2=f$ összefüggést, az

$$\boxed{\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}}$$

leképezési törvényhez (10.50) jutunk.

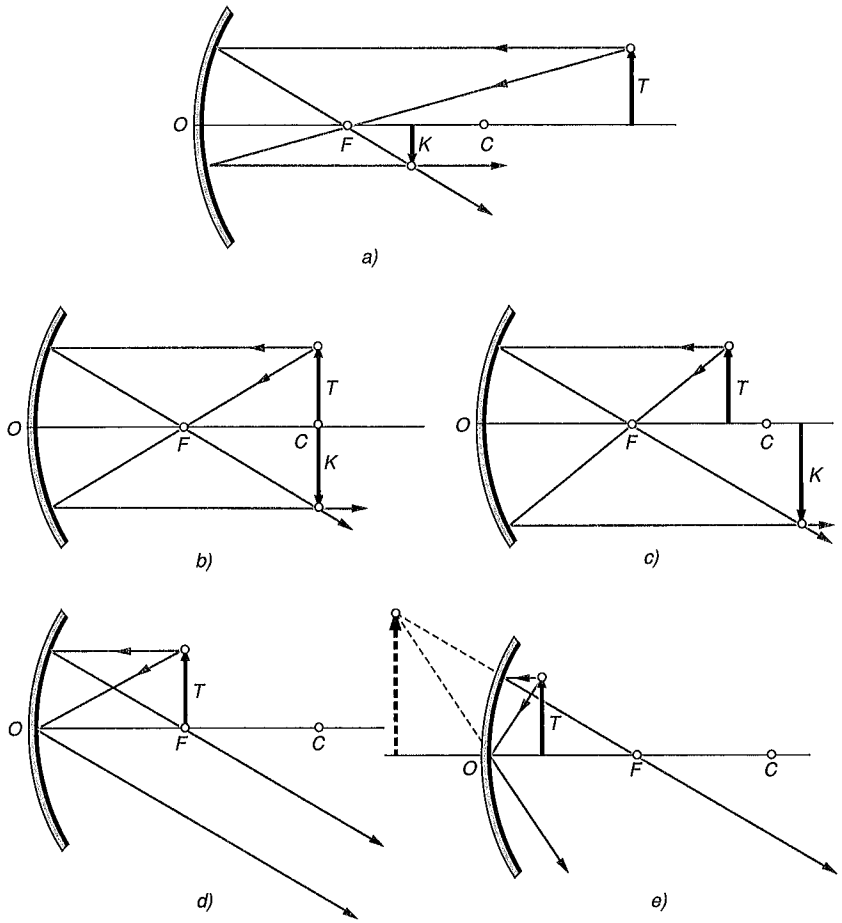
Az előjelekre nézve lásd a lencsékre megadott összefoglalást, a domború–homorú felcserélésének figyelembevételével. Hasonlóképpen értelmezzük az $N=K/T=k/t$ *nagyítást.*

A képalkotás jellegzetes esetei gömbtükröknél:

a) Ha a tárgy a kétszeres fókuszon kívül van ($t>2f$), akkor a kép a fókusz és a geometriai középpont között keletkezik ($f<k<2f$), valódi, kicsinyített, fordított állású.

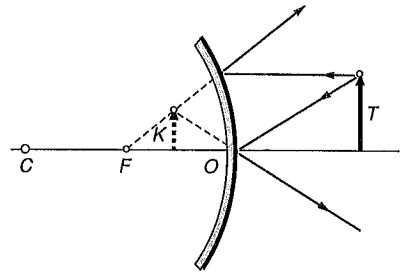
b) Ha a tárgy a kétszeres fókusztávolságban van ($t=2f$), a kép ugyanott keletkezik ($k=2f$), valódi, a tárggyal egyenlő nagyságú, fordított állású.

c) Ha a tárgy a geometriai középpont és fókuszpont között van ($f < t < 2f$), a kétszeres gyújtótávolságon kívül keletkezik ($k > 2f$), valódi, fordított állású, nagyított.
d) Ha a tárgy a gyújtópontban van, a kép a végtelenbe tolódik.
e) Ha a tárgy az optikai középpont és fókuszpont között van, virtuális, nagyított, egyenes állású kép keletkezik ($t < f$, $k < 0$, $N < -1$). Ezeket az eseteket szemlélteti a 10.81a–e. ábra.



10.81. ábra

A domború gömbtükör minden esetben kicsinyített, egyenes állású, virtuális képet ad a tárgy bármely helyzetében (10.82. ábra).



10.82. ábra

10.7.1.4. A Fermat-elv. Az optikai úthossz

A geometriai optika bármely sugármenetének törvényét le lehet vezetni az ún. Fermat-elvből (legrövidebb fényút elve), amelynek az egyik megfogalmazása a következő: *az az idő, amely alatt a fény – adott közegek esetén – egy P_1 pontból a P_2 pontba eljut, szélsőérték* (többnyire minimum).

Fermat elvéből következik az is, hogy a fény homogén közegben egyenes vonalban terjed. A minimális idő meghatározása vezet a tükrözés és törés törvényeinek jól ismert alakjához is.

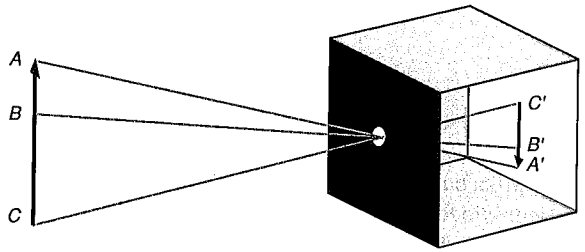
Egy homogén közeg n törésmutatójának és s geometriai úthosszának szorzata az ún. *optikai úthossz* vagy *fényút*. Több közeg esetén a fényút a $\sum_{i=1}^{n} n_i s_i$ szorzatösszeg. Mivel $n = \frac{c_0}{c} = \frac{c_0 t}{ct} = \frac{s_0}{s}$, ezért ns egyenlő azzal az úttal, amelyet a fény ugyanakkora idő alatt a vákuumban tenne meg.

Fermat elve az optikai úthosszakra így is megfogalmazható: *két adott pont között a fény azon úton halad, amelyen az optikai úthossz szélsőérték* (általában minimális: legrövidebb fényút elve), vagyis P_1 és P_2 pontokat összekötő „szomszédos görbék" mentén a $\Sigma n\Delta s$ szorzatösszeg minimális.

10.7.1.5. Optikai eszközök

A sötétkamra. Ha egy minden oldalról zárt doboz egyik falán kis lyukat képezünk, az ezzel szembeni falat pedig homályos üvegből vagy pauszpapírból alakítjuk ki, ún. sötétkamrát kapunk. Ha egy világító tárgyat a sötétkamra lyukkal ellátott falával szemben helyezünk el, akkor az arról kiinduló fénysugarak egy része áthalad a lyukon, és a vele szembeni falon megjelenik a tárgy fordított állású képe, amely a homályos üvegen át kívülről is szemlélhető.

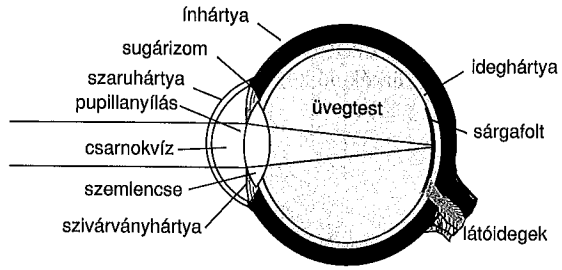
A jelenség a fény egyenes vonalú terjedésének, valamint annak a következménye, hogy az ugyanazon felületen (a kis nyíláson) áthaladó, különböző helyről kiinduló fénysugarak egymást nem befolyásolják. (10.83. ábra).



10.83. ábra

A szem. A látás (külső) szerve a szem. Metszetét a 10.84. ábra mutatja. A kb. 2,5 cm átmérőjű szemgolyó optikai szempontból fontos része a *szemlencse,* amely előtt az 1,336 törésmutatójú *csarnokvíz* mint plánkonvex lencse működik, az 1,408 törésmutatójú bikonvex lencsével optikai rendszert alkotva. A szemlencse mögötti teret a kocsonyás, a csarnokvízzel azonos törésmutatójú *üvegtest* tölti ki a szem hátsó felületén levő *ideghártyáig* (retina). Az emberi szem ideghártyájában kétféle fényérzékeny idegvégződés van, a *csap* és a *pálcika*. A csapokkal 10^5 és 10^{-2} lux erősségű megvilágítássértékek között látunk, a pálcikák pedig 1 és 10^{-5} lux között működnek. Az ideghártyáról a fényinger hatására a *látóidegszálakon* keresztül jut el az ingerület az agyba, amely azt látásélménnyé dolgozza fel. (Nem a szem lát, hanem az agykéreg!). A szem mint optikai eszköz a tárgyról fordított állású, kicsinyített, valódi képet ad az ideghártyán, azonban mi azt kezdettől fogva egyenes állásúnak dolgozzuk fel a környezetünkből egyéb érzékszervekkel szerzett tapasztalataink alapján. Miközben kialakul az éleslátás, nem kell tehát „megfordítani a képet", vagyis a csecsemő egy pillanatig sem „látja fordítva a világot!"

A szemlencse és a csarnokvíz közötti *szivárványhártya* nyílását pupillának nevezzük, amelynek átmérője 2 és 6 mm között változtatható, reflexszerűen alkalmazkodva a fényerősséghez.

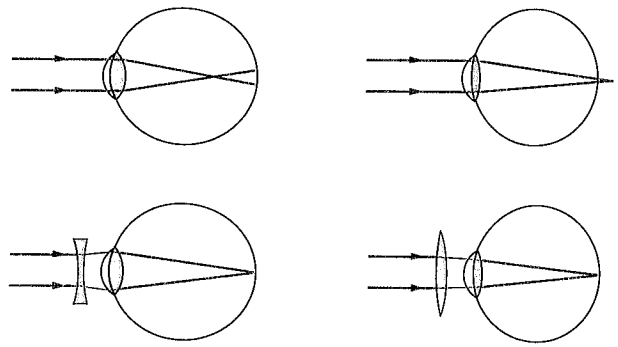


10.84. ábra

A szem esetében a képtávolság állandó lévén, a különböző távolságban levő tárgyakhoz a szemlencse az őt körülvevő izmok segítségével alkalmazkodik *(akkomodáció),* változtatva görbületi sugarát, s ezzel a fókusztávolságát. Közeli tárgyak nézésekor domborúbb, távolabbiaknál laposabb a szemlencse. Azt a távolságot, amelyben a tárgyakat a legkisebb megerőltetés nélkül szemlélhetjük, a *tiszta látás távolságának* nevezzük. Egészséges szem esetén ez átlagosan 25 cm.

Azt a legkisebb látószöget, amely mellett két pont képe szemünkben még különálló pontok érzetét kelti, a szem *feloldási határának* nevezzük.

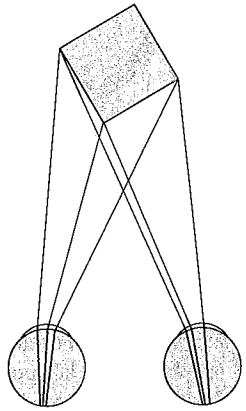
A *rövidlátó* ember szeme az éles képet az ideghártya elé képezi le, amit a szem akkomodációjával nem képes kompenzálni (csak igen közeli tárgyak esetén). Ezt homorú lencsével készült szemüveggel lehet korrigálni. A *távollátó* ember szemében a közeli tárgy képét fókuszálja az ideghártya mögé. Ezen domború lencséből készült szemüveggel lehet segíteni (10.85. ábra).



10.85. ábra

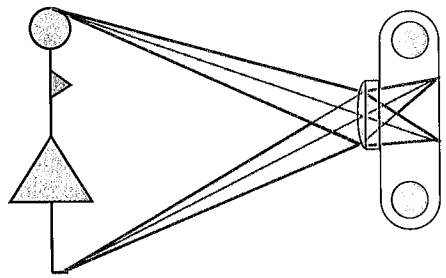
A két szem tengelyének egymástól való távolsága átlagosan 6,5 cm. Ezért a (nem túl messze levő) tárgyakról a két szem kissé eltérő képet alkot, hiszen az

egyik szem a tárgyat kissé balról, a másik szem ugyanazt a tárgyat kissé jobbról látja. Ez a különbség a tárgytávolságtól függ. Az agyban ez a két különböző kép egyetlen, a térbeli mélységet érzékelő képpé olvad össze (sztereoszkopikus látás) (10.86. ábra).



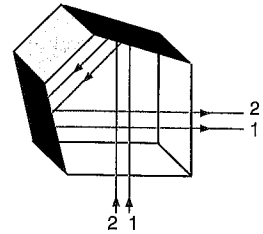
10.86. ábra

A fényképezőgép. Két fő része a fényérzékeny filmet tartalmazó *sötétkamra* és a rendszerint több lencséből összetett leképező rendszer, az *objektív*. Ez a tárgyról valódi, fordított állású, (általában) kicsinyített képet állít elő a fényérzékeny lemezen vagy filmen (10.87. ábra).



10.87. ábra

Az objektív fókusztávolsága (az ún. gumioptikáktól eltekintve) állandó. Exponálás előtt a lencsét be kell állítani úgy, hogy a tárgy éles képe a film síkjában keletkezzék. A kép élesre állítása pl. mattüvegre való vetítéssel ellenőrizhető. Gyakran alkalmazzák tükör és megfelelően csiszolt ötszögű, ún. pentaprizma (10.88. ábra) együttesét a lencserendszer beállítására.



10.88. ábra

A fényérzékeny filmre leképezett kép megfelelő fényenergiáját egyrészt a *megvilágítási idő* (expozíció), másrészt a *fényrekesz* (blende) helyes megválasztásával szabályozhatjuk.

A *megvilágítás erőssége* a (10.37) képlet szerint $E_e = \Delta P/\Delta A_k$, ahol A_k a képfelület területe. A ΔP fényteljesítmény a fényrekesz nyílásának területétől (A), a tárgy I_e fényerősségétől és a tárgytávolságtól (t) függ. A (10.33) összefüggés alapján ΔP arányos I_e-vel, ugyanazon fényforrás és felület esetén a megvilágított felületre eső fényáram arányos a távolság négyzetének reciprokával, és egyenesen arányos a megvilágított területtel (jelen esetben a fényrekesz nyílásával). Ezt egybevéve:

$$\Delta P = \frac{I_e A}{t^2}.$$

Ezt a megvilágítás erősségébe írva:

$$E_e = \frac{I_e A}{A_k t^2}.$$

A kép A_k területét a tárgy méretei, a kép- és tárgytávolság határozzák meg: $A_k/A_t = K^2/T^2 = k^2/t^2$, ahonnan $A_k t^2 = A_t k^2$, ahol A_t a tárgy felületének nagysága. Ezt felhasználva:

$$E_e = \frac{I_e A}{A_t k^2}.$$

Kör alakú fényrekesz esetén $A = a^2\pi/4$, ahol a a blende átmérője. A gyakorlatban legtöbbször megvalósuló esetben $k \approx f$, mivel a kép a fókuszsík közvetlen közelében jön létre (a tárgytávolság igen nagy a képtávolsághoz képet), így:

$$\boxed{E_e = \frac{\pi}{4}\frac{I_e}{A_t}\left(\frac{a}{f}\right)^2}. \qquad (10.52)$$

A fényképezőgépben levő blende maximális nyílásánál a leképező nyalábot a lencse foglalata határolja. Nyitott blende esetén a kép fényerőssége a lencse átmérőjének és fókusztávolságának arányától függ.

A lencse átmérőjének és fókusztávolságának arányát (a/f) *viszonylagos nyílásnak,* ennek négyzetét a *lencse fényerejének* nevezzük. A viszonylagos nyílás reciproka (f/a) a *rekeszszám.*

Ha a kép megvilágítását felére, negyedére stb. csökkentjük, a viszonylagos nyílás ennek négyzetgyökével változik, a rekeszszám tehát 1; $\sqrt{2}$; $\left(\sqrt{2}\right)^2$; $\ldots\left(\sqrt{2}\right)^n$ sorozatot alkot. Ha pl. $f/a = 2$, az objektíven a következő (kerekített) rekeszszámokat találjuk:

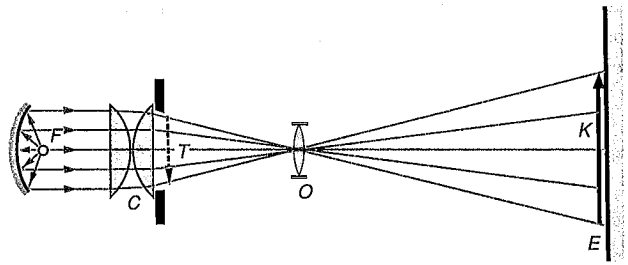
2; 2,8; 5,6; 8; 11; 16; 22.

Mivel a fényérzékeny lemezen a megvilágítás (expozíciós idő) a viszonylagos nyílás négyzetével fordítottan arányos, egy rekeszszámcsökkenés vagy -növelés kétszer hosszabb, illetve rövidebb expozíciós idő beállítását igényli.

Ugyanakkora megvilágításhoz tehát több rekeszszám-megvilágítási idő értékpár tartozik. Hogy melyiket válasszuk, abban főleg két körülmény befolyásolhat. A fényrekesz szűkítésével a kép *mélységélessége* fokozódik, vagyis egyre élesebb képet kapunk a leképezési törvény szerint beállított tárgytávolságnál kisebb és nagyobb távolságra levő tárgyakról is. Csökkenthetők ezzel a lencsehibák is. Ugyanakkor a megnövelt expozíciós idő miatt az esetleg mozgó tárgyról elmosódott képet kapunk (elmozdulásos életlenség). A túl nagy blende és túl kicsi expozíciós idő mozgásban lévő tárgyakról életszerűtlenül kimerevített képet adhat.

Vetítőkészülékek. A vetítőberendezésekkel erősen megvilágított, átlátszó vagy átlátszatlan tárgyakról valódi, általában nagyított képet állítanak elő adott távolságban elhelyezett ernyőn.

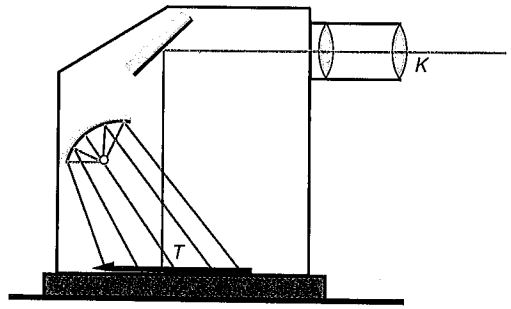
A diaszkóp (diavetítő) – általában ún. diapozitív filmre készült – képek vetítésére alkalmas. Az egyenletesen átvilágított film mint tárgy (T) szerepel, amelyet a vetítő objektív (O) (lencse vagy lencserendszer) képez le az ernyőre (E) (10.89. ábra). A nagy fényerejű fényforrás mögé általában homorú tükröt helyeznek, és az általa visszavert és a direkt fényt gyűjtőlencse-rendszerrel (C, kondenzor) a diaképre koncentrálják. A diafilm közvetlenül a kondenzor előtt helyezkedik el, az objektív pedig a fénynyaláb legkisebb átmérőjű keresztmetszetébe kerül, hogy legkisebb legyen a leképezés hibája.



10.89. ábra

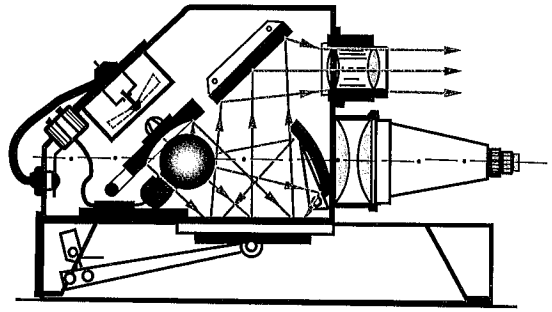
A mozgófilmvetítő optikai szempontból diavetítő, amely a másodpercenként általában 16, 18 vagy 24 képkockát vetít ki úgy, hogy a képváltás alatt a fény útját *forgóblendével* (szektorblende) elzárja, majd amikor egy időre álló helyzetbe kerül a filmkocka, ismét kinyitja. (Hogy vibrálásmentesebb legyen a kép, egyes vetítőkben egy képváltáskor, illetve állókép ideje alatt kétszer zár, illetve nyit a forgózár.) A gyors egymásutánban vetített képek a folytonos mozgás benyomását keltik a nézőben. (Szemünkben a fényérzet a fény megszűnése után még kb. 0,1 s-ig megmarad.)

Az *episzkóp* az átlátszatlan tárgyak vetítésére alkalmas (könyvbeli ábrák, reprodukciók, fényképek stb.). Az igen erős fényforrás fénye a tárgyról *visszaverődve* (tükör közbeiktatásával) jut el az objektívre, amely a távoli ernyőre azt leképezi. Jellemzője, hogy fényszegényebb képet ad, mint a diavetítő, viszont nagyobb felületek leképezhetők vele (10.90. ábra).



10.90. ábra

Az *epidiaszkóp* egy episzkóp és egy diavetítő egybeépítése (10.91. ábra). (Mind a diaszkóp, mind az episzkóp ma már inkább technikatörténeti érdekesség, ezeket



10.91. ábra

felváltották az elektronikus úton, digitálisan rögzített információk nagy teljesítményű kivetítésére alkalmas projektorok.)

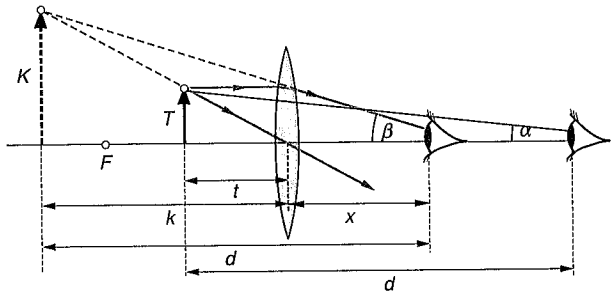
Nagyítókészülékek. Apró vagy igen távoli tárgyak szemlélésére alkalmas eszközök, amelyek a tárgyak apró, szabad szemmel nem látható részleteit láthatóvá teszik.

Egy tárgy *látószöge* két, legtávolabbi pontjából szemünkbe érkező fénysugár egymással bezárt szöge. A csapocskák, illetve pálcikák véges sűrűsége miatt szemünk csak akkor lát két pontot különbözőnek, ha a róluk érkező sugarak 1 ívpercnél nagyobb szöget zárnak be. A kicsiny tárgyak látószögét *nagyítókkal,* a távoliakét *távcsövekkel* lehet megnövelni. A látószög növelésének leírására az $N = K/T$, ún. *lineáris nagyítás* nem alkalmas. Ehelyett a *szögnagyítást* használjuk. A szögnagyítás a tárgyról az optikai eszközön keresztül létrejött kép látószögének (β) és a szabad szemmel megfigyelt tárgy látószögének (α) hányadosa:

$$\boxed{N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}, \qquad (10.53)$$

(kis szögek esetén ui. $\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$)

Az egyszerű nagyító (lupe). Egy gyűjtőlencse, amelyet úgy helyezünk el, hogy a tárgy a fókusz és az optikai középpont közé kerüljön (10.92. ábra). Erről a lencse egyenes állású, virtuális, nagyított képet ad.



10.92. ábra

A képlet a tiszta látás távolságából szemlélve érvényes:

$$k = -\left(d - x\right), \qquad (10.54)$$

ahol d a tiszta látás távolsága, x a lencsének a szemtől mért távolsága, k a (negatív) képtávolság. Az ábrából leolvasható, hogy a szögnagyítás ebben az esetben jó közelítéssel a lineáris nagyítással egyenlő:

$$N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{K/d}{T/d} = \frac{K}{T}. \qquad (10.55)$$

A (10.50d), valamint (10.54) képletek felhasználásával a szögnagyítás értéke:

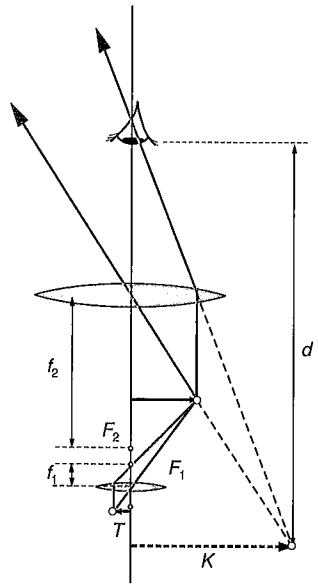
$$N_{sz} = -\left(1 + \frac{d}{f}\right) + \frac{x}{f}.$$

A szögnagyítás akkor a legnagyobb, ha a lencsét közvetlenül a szemünk elé teszszük ($x \approx 0$):

$$\boxed{N_{sz} = -\left(1 + \frac{d}{f}\right)}. \qquad (10.56)$$

A mikroszkóp (összetett nagyító). Egyszerű nagyítóval torzítás nélkül legfeljebb 25–30-szoros nagyítást lehet elérni. Ennél nagyobb szögnagyításhoz már lencserendszerek szükségesek.

A mikroszkóp két gyűjtőlencséből (vagy lencserendszerből) áll. Az erősen megvilágított tárgyról a *tárgylencse* (objektív) fordított állású, nagyított, valódi képet ad (10.93. ábra).



10.93. ábra

A tárgyat a fókusz közelébe helyezzük el. A tárgylencse által előállított kép a *szemlencse* (okulár) fókusztávolságán belül keletkezik. Ezt a szemlencsével (mint egyszerű nagyítóval) szemléljük, s így az eredeti tárggyal fordított állású, látszólagos, nagyított képet kapunk.

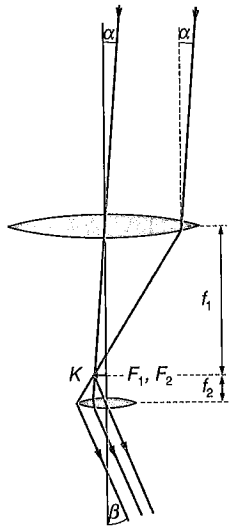
A mikroszkóp szögnagyítása:

$$N_{sz} = \frac{dl}{f_1 f_2}, \qquad (10.57)$$

ahol d a tisztalátás távolsága, l az ún. *optikai tubushossz* (a két lencse fókuszpontjainak egymástól való távolsága: $l = k_1 - f_1$), f_1 és f_2 a két lencse fókusztávolsága.

A megvilágított tárgyon létrejövő fényelhajlási jelenségek miatt a mikroszkóp szögnagyítása nem fokozható korlátlanul. Közönséges fénymikroszkóppal kb. 2000-szeres nagyítást lehet elérni.

Távcsövek. Az igen távoli tárgyak látószögének megnövelésére szolgálnak a távcsövek vagy látcsövek. Távoli csillagok szemlélése esetén – noha a szögnagyítás után kapott látószög is rendkívül kicsi marad – a szembe jutó fényáram a szabad szemmel való megfigyeléshez viszonyítva megsokszorozódik, így távcsővel olyan gyenge fényű csillagok is megfigyelhetők, amelyeket szabad szemmel nem észlelnénk.



10.94. ábra

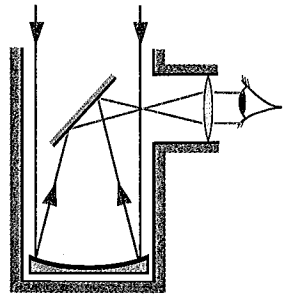
A *Kepler-féle* (vagy *csillagászati*) *távcső* optikailag a mikroszkóphoz hasonló felépítésű. Közös optikai tengelyen két gyűjtőlencse van elhelyezve. A tárgylencse (objektív) átmérője és fókusztávolsága egyaránt nagy. Ez a lencse a tárgyról valódi, fordított állású, kicsinyített képet ad a saját fókuszsíkjában. A szemlencse belső fókuszát egybeejtik a tárgylencse belső fókuszával, így a tárgy bármely pontjából a szemlencsébe érkező sugarak (a nagy távolság miatt gyakorlatilag párhuzamosak lévén) a szemlencséből is párhuzamosan lépnek ki. Erről szemünk alkot valódi képet az ideghártyán (végtelenre akkomodált szemmel). A szögnagyítása 10.94. ábra alapján:

$$N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{K/f_2}{K/f_1},$$

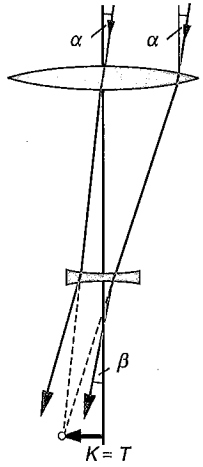
ahonnan

$$N_{sz} = \frac{f_1}{f_2}. \qquad (10.58)$$

A nagyméretű (fényerős) objektív lencsék helyett gyakran alkalmaznak (könnyebben előállítható) tükröket. A tükör által összegyűjtött és visszavert sugarak útjába prizmát vagy síktükröt helyezve a leképező sugarakat oldalt kivezetik (10.95. ábra). A tükrös távcsöveket *reflektoroknak*, a lencseobjektívvel működőket *refraktoroknak* nevezzük.



10.95. ábra



10.96. ábra

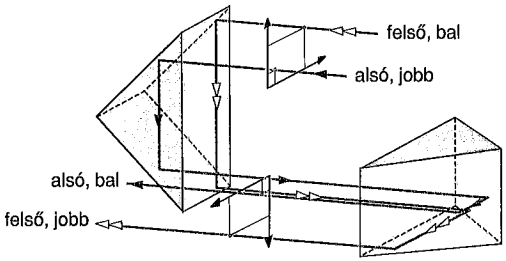
A csillagászati távcsövek fordított állású képet adnak, ami a csillagászati megfigyeléseket nem zavarja. A földi tárgyak megfigyeléséhez a képet meg kell fordítani.

A *Galilei-féle* (vagy *hollandi*) *távcső* objektívje gyűjtőlencse, okulárja olyan szórólencse, amelyet a gyújtólencsével összetartóvá tett sugarak útjába helyeznek (10.96. ábra).

Mivel a szórólencse külső fókusza esik egybe a gyűjtőlencse belső fókuszával, az első lencse fókuszsíkjában (okulár nélkül) metsződő sugarak a szórólencséből párhuzamosan indulnak ki, lényegesen nagyobb szögben. A Galilei-féle távcső

szögnagyítása megegyezik a Kepler-féle távcsőével [lásd a (10.58) képletet]. A hollandi távcsőben egyenes állású (virtuális) kép keletkezik.

Földi tárgyak szemlélésére (pl. *színházi látcső, prizmás kézi látcső*) a képet meg kell fordítani. Erre a célra vagy egy harmadik lencsét, vagy *képfordító prizmát* alkalmaznak (10.97. ábra). Két, teljesen visszaverő, egymásra merőleges törőélű prizma fordítja meg egyenes állásúra a tárgyhoz képest fordított állású képet. Az egyik prizma a kép bal és jobb oldalát, a másik az alsó és felső részét fordítja meg. A prizmák egyúttal a tubus hosszát lerövidítik.



10.97. ábra

Az optikai eszközök felbontóképessége. Az optikai eszközök képalkotására jellemző adat az eszköz ún. felbontóképessége vagy feloldóképessége. Azt fejezi ki, hogy mekkora annak az egymáshoz legközelebb fekvő két pontnak a d távolsága, amelyet a képen még éppen meg tudunk egymástól különböztetni. A d mennyiséget *feloldási határnak,* ennek reciprokát, az $1/d$ értéket *felbontóképességnek* nevezzük. (Ez annál nagyobb, minél kisebb távolságra levő pontok különböztethetők meg a képen.)

A felbontóképesség az alkalmazott fény hullámhosszától is függ. Annak oka, hogy egy optikai eszköz felbontóképessége nem lehet tetszőlegesen nagy, az, hogy a kép keletkezésénél az elhajlási jelenségek is szerepet játszanak. A leképező rendszer szélein fellépő interferenciajelenségek következtében a megvilágított tárgypontról nem kapunk pontszerű képet, hanem a szélein elmosódó (korong alakú) interferenciaképet. Ahhoz, hogy a két tárgypontról alkotott két, nem pontosan egymásra eső, korong alakú kép megkülönböztethető legyen, az szükséges, hogy egyesített képükön a középpontjuknak megfelelő megvilágítási maximumok közé elegendően sötét minimum essék. Az elhajláselmélet alapján következik, pl. hogy a *távcső* felbontóképessége λ hullámhosszú fényben:

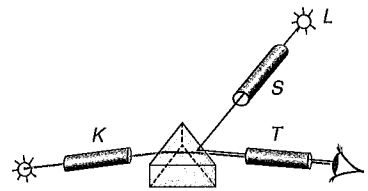
$$\frac{1}{d}=\frac{D}{1,22\lambda f},$$

ahol f a távcső D átmérőjű objektívjének gyújtótávolsága. A *mikroszkóp* felbontóképessége:

$$\frac{1}{d}=\frac{n\sin u}{0,61\lambda},$$

ahol n a tárgylemez és objektív közötti anyag törésmutatója, u az objektív nyílásszöge, és λ az alkalmazott fény hullámhossza. (Pl. ultraibolya fénnyel készített mikroszkopikus fényképezéssel d értéke 10^{-4} mm-re szorítható le, vagyis a maximális felbontóképesség 10^7 1/m-re növelhető.)

Színképelemző készülékek. A fényt kibocsátó anyagok spektrumában található vonalak jellemzőek az anyag összetételére. Ezek vizsgálatával foglalkozik a *színképelemzés* vagy *spektálanalízis (spektroszkópia).* Erre a célra hullámhosszskálával ellátott *spektroszkópot* alkalmaznak (10.98. ábra).



10.98. ábra

Az ábrán látható spektroszkóp három csövet tartalmaz. Az S cső az L lámpával megvilágított skálát vetít a prizmára, amely azt visszaveri, és onnan a T vizsgálótávcsőbe jut. A harmadik (K) cső elé helyezik a (rendszerint üvegcsőben levő, elektromos árammal gerjesztett) izzó gőzt, amelyet a vizsgálandó anyagból állítottak elő. Ennek fényét a prizma színeire bontja, és ugyancsak a T vizsgálótávcsőbe juttatja. A színképvonalak eloszlását és hullámhosszát a skálán leolvasott helyéből határozhatjuk meg.

A spektrumok rögzítésére alkalmassá tett spektroszkópokat *spektrográfoknak* nevezzük.

10.7.2. Hangtechnika

Az alábbiakban főként azokról az elvekről és módszerekről lesz szó, amelyek a hanghullámok elektromos jellé alakítását, illetve ennek megfordítottját teszik lehetővé. A modern hangtechnika két, egymástól távol álló fizikai jelenségcsoport összekapcsolásából jött létre: az akusztika és az elektronika célirányos keverékéből. Mivel azonban a hangtechnika eszközei közvetlenül az emberhez – annak anatómiai, fiziológiai tulajdonságaihoz – kapcsolódnak, a hangtechnika nem nél-

külözheti a pszichológia, az orvostudomány, a nyelvészet stb. ide vonatkozó eredményeit sem. A hangtechnika tehát több, egymástól távol álló szakterület harmóniáján alapul.

10.7.2.1. Hanghullámok keltése, terjedése

Az ember számára érzékelhető hanghullámok a 20 Hz... 20 kHz közötti frekvenciatartományba esnek. A hang hullámhossza a terjedési sebesség és a frekvencia ismeretében könnyen meghatározható. A hallható hangok hullámhossza 1,7 cm-től 17 m-ig terjed.

Az emberi fül az 1000 Hz körüli hangokra a legérzékenyebb; ezek hullámhossza kb. 34 cm.

Az emberi szem, valamint a mindennapi életben használt fényforrások méretei sok nagyságrenddel nagyobbak, mint a látható fény hullámhossza. Ezzel szemben mind az ember akusztikai szempontból fontos méretei (pl. a két fül távolsága, a gége stb.), mind pedig a hangtechnikai eszközök méretei (hangszóró, mikrofon) lényegében a hallható hangok hullámhossztartományába esnek.

A nagyságrendek érzékeltetésére nézzünk néhány példát. Az ember füleinek távolságát vegyük 21 cm-nek. A hang terjedési sebessége levegőben 344 m/s (10.99a. ábra).

a) Ha az ember fejét oldalirányból f = 1000 Hz-es hanghullámok érik, a két fület érő hullámok között

az időkülönbség: $t = \frac{d}{c} = 610\ \mu s$,

a fáziskülönbség $\varphi = \frac{d}{\lambda} \cdot 360° = 219°$ (λ a hang hullámhossza).

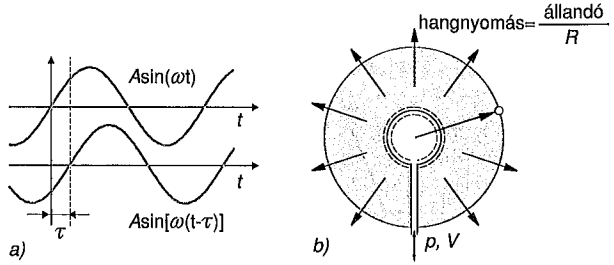
A fáziskülönbség tehát a hullámhossznak is függvénye.

b) Az *irányhallás* részben a két fület érő hanghullámok közötti különbségből adódik. Mivel szemből érkező hanghullámok esetén kb. 3° fejelfordítás már jól érzékelhető, és ez távoli forrásból jövő hangoknál $k = d \sin 3° = 1{,}1$ cm útkülönbséget jelent, a fül időfelbontó képessége tehát $t = \frac{k}{c} = 32\ \mu s$.

c) Ha egy D = 20 cm átmérőjű hangszóró 10 kHz-es hangokat sugároz, a hangszóró-membránra (körkörösen) kb. 6 teljes hullám, míg 100 Hz-es hangok sugárzása esetén csupán egy töredékhullám fér. Ezért előfordulhat, hogy 10 kHz sugárzása során a hangszórómembrán egyes részei különböző fázisban rezegnek. A kisebb frekvencián a hangszórómembrán egyetlen merev darabként viselkedik.

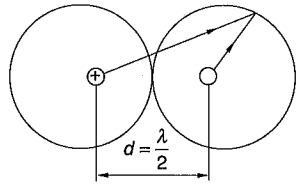
A hanghullámok által keltett akusztikus tér legegyszerűbben az ún. *gömbsugárzók* keltette hatással követhető nyomon. Egy léggömbre kell gondolni, amelyet periodikusan kicsit felfújunk, illetve leeresztünk – vagyis változtatjuk a nyomását,

térfogatát. A gömbsugárzó körül radiális irányú hanghullámok alakulnak ki. Ezek minden irányban egyformán – gömbszimmetrikusan – terjednek, amplitúdójuk a sugárzótól való távolsággal fordított arányban csökken (10.99b. ábra). Az azonos fázisú levegőmolekulák gömbfelületen helyezkednek el.



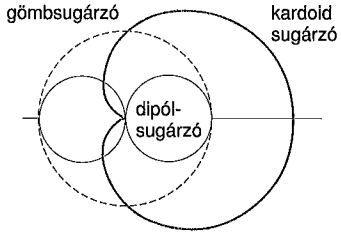
10.99. ábra

Képzeljük el, hogy két, egymástól félhullámhossznyi távolságban levő, azonos intenzitással sugárzó gömböt ellenkező fázisban működtetünk. Ha a két gömbsugárzó keltette hullámokat a Huygens–Fresnel-elvnek megfelelően fázishelyesen összegezzük, akkor az azonos intenzitású pontok a 10.100. ábrán látható két körön helyezkednek el. Így kapjuk az ún. *dipólsugárzó* sugárzási karakterisztikáját.



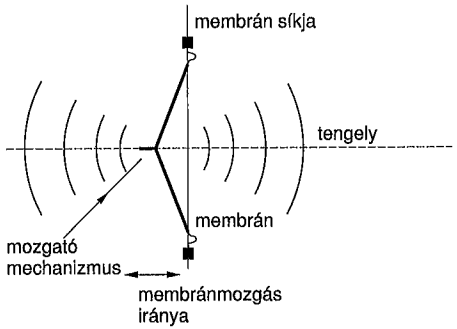
10.100. ábra

Nagyon érdekes sugárzási karakterisztikához jutunk, ha egy gömbsugárzó és egy dipólsugárzó akusztikus terét egyesítjük. Az eredmény az ún. *kardioid* karakterisztika (10.101. ábra). Eszerint a hanghullámok lényegében csak az egyik irányban terjednek.



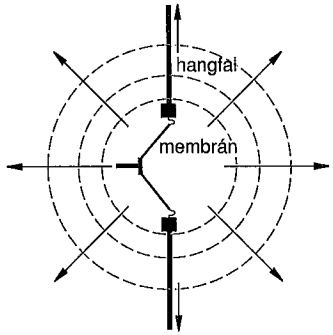
10.101. ábra

A hangsugárzók többsége egy membránból és egy elektromechanikus mozgató mechanizmusból áll (10.102. ábra). A membrán természetesen mindkét oldalra sugároz, az elindított hullámok azonban ellenkező fázisúak. A Huygens-elv értelmében a membrán síkját is elérik a hullámok, itt azonban az ellentétes fázis következtében kioltják egymást. Szabadon álló hangszóró esetén számottevő hangnyomás csak a hangszóró tengelye mentén keletkezik.



10.102. ábra

Változik ez a helyzet, ha a hangszórót egy végtelen (vagyis az előforduló hullámhosszaknál jóval nagyobb) méretű *hangfalba* helyezzük. Ekkor ez a hullámkioltás elmarad, és a hangszóró lényegében gömbsugárzóként működik (10.103. ábra).

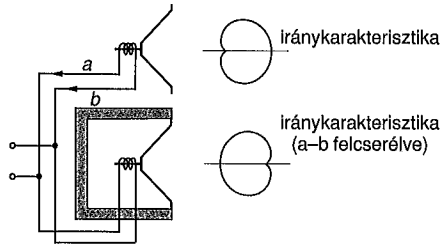


10.103. ábra

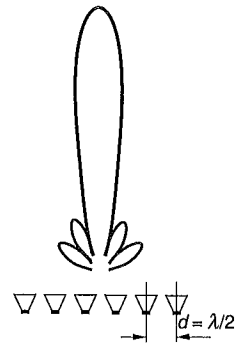
Más a helyzet a véges méretű hangfal esetén. A hullámok a hangfal mentén nem tudják kioltani egymást, a hangfal tehát az effektív sugárzási felületet növeli meg, ha annak mérete legalább fél hullámhossznyi. Nyilvánvaló, hogy mindez nem igaz a hangfal méreténél jóval hosszabb hullámokra, vagyis ezek kisugárzása változatlanul igen kicsiny hatásfokú. Mindennek igen fontos gyakorlati következményei vannak:

- Ha egy hangszórót kicsiny méretű hangfallal látunk el (vagyis az ellenkező fázisban kisugárzott hullámok kioltása már viszonylag nagy frekvenciákon bekövetkezik), akkor a kérdéses konstrukciótól nem várhatjuk a mély hangok hatásos átvitelét sem. Másképpen: a zsebrádióknak, kisméretű magnetofonoknak stb. soha nincsen jó mélyhangátvitelük.
- Ha a membrán („sugárzó dugattyú") átmérője kisebb, mint az általa keltett hanghullám hullámhosszúságának a fele, a hangszóró rossz hatásfokkal sugároz. A jó mélyhangsugárzók mindig nagy átmérőjűek.

A fentiek illusztrálására nézzük a 10.104. ábrát! Itt egy dipólsugárzót és egy gömbsugárzót helyeztünk egymás fölé, hogy kardioid karakterisztikát nyerjünk. A valóságban egy hangdoboz nélküli hangszórót és egy dobozba zárt hangszórót használtunk. Vegyünk észre egy nagyon fontos jelenséget: ha a doboz nélküli hangszóró vezetékeit felcseréljük, a rendszer az ellenkező irányba fog sugározni. Az elv nagyon fontos (nemcsak a hangtechnikában), mivel elektromosan könnyen változtatható paraméterek – fázishelyzet – megváltoztatásával módosítani tudjuk dipólusokból összetett rendszerek sugárzási karakterisztikáját. A 10.105. ábrán arra látunk példát, hogy egy több hangszóróból álló elrendezéssel – ún. hangoszloppal – milyen nagy mértékben tudjuk alakítani a hangszórók eredetileg dipól-, illetve gömbsugárzási karakterisztikáját.



10.104. ábra



10.105. ábra

(A sugárzás erősen irányított, a sugárzási karakterisztikában a főhurok mellett azonban mellékhurkok is keletkeznek).

Meggondolásaink lényegében változatlanul igazak mikrofonokra is, ezek iránykarakterisztikája is széles határok között változtatható, részben a geometriai elrendezések és méretek módosításával, részben pedig több mikrofon elektromos jelei célirányos kombinációjának kialakításával.

Ami pedig nagyon fontos: ez az eljárás az elektromágneses sugárzás keltésére és detektálására szolgáló antennák esetében is használható.

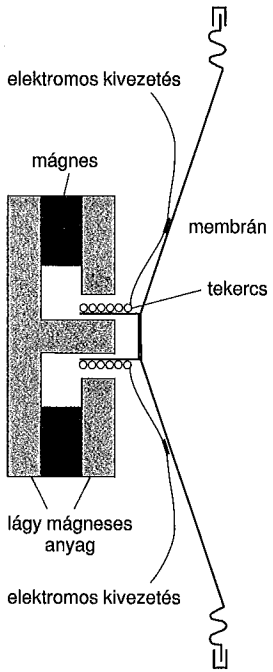
10.7.2.2. Elektroakusztikus átalakítók

A közhasználatú akusztikus átalakítók elektromos jelből hoznak létre hanghullámokat, illetve megfordítva, hanghullámokból állítanak elő elektromos jelet. Az átalakítók többségében valamely felület elmozdulását vezérlik vagy detektálják.

Leggyakrabban a 10.106. ábra szerinti elrendezéssel találkozunk. A tekercsen átfolyó áram és a mágneses mező kölcsönhatásaként erő keletkezik, amely a membránt nyugalmi helyzetéből kimozdítja. A membrán rugalmasságát a membrán szélének hullámos kiképzése biztosítja, ez a rugóerő tart egyensúlyt a Lorentz-erővel

$$B \cdot i(t) \cdot n2r\pi = Dx,$$

ahol B a mágneses indukció, i az áramerősség, n a tekercs menetszáma és r egy menet sugara, D a membrán rugóállandója és x az elmozdulás.

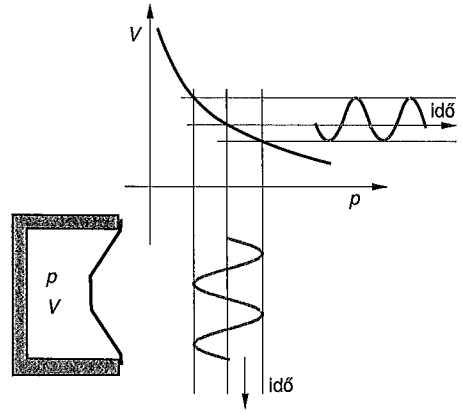


10.106. ábra

Az elmozdulás tehát az áramerősséggel arányos. Ha az áram hangfrekvenciás váltakozóáram, akkor a membrán elmozdulása periodikus nyomáshullámokat –

hanghullámokat – kelt. Ez a ma elterjedten alkalmazott ún. *dinamikus hangszóró* és *dinamikus mikrofon* működési elve. Az utóbbinál a hanghullámok hatására a membrán elmozdul, és a tekercsben a mágneses tér hatására feszültség indukálódik. Mindkét esetben egy rugalmas és egy kényszererő hatására mozog valamely tömeg (a membrán és a tekercs együttese). A hangszóróknak tehát van egy bizonyos mechanikai rezonancia- vagy sajátfrekvenciájuk, amelyen viszonylag kicsiny erőhatásra is nagy kitéréssel válaszolnak. Az ilyen frekvenciájú jeleket nagy intenzitással sugározzák ki. Ez általában előnytelen, egy jó hangszórótól azt várjuk el, hogy minden frekvenciát azonos módon kezeljen. A hangszóró-konstrukció egyik érdekes problémája, hogyan lehet a membrán tömegét és a rugalmas erőt úgy megválasztani, hogy a mechanikai rezonanciafrekvencia ne a hallható hullámok sávjába essen, illetve minél kisebb frekvenciákra kerüljön.

Elterjedten alkalmazzák azt a megoldást, amikor a hangszórómembrán rugalmas visszatérítő erejét egy zárt levegőtérfogat rugalmassága biztosítja (10.107. ábra). Ilyenkor azonban az erőhatás és az elmozdulás közötti összefüggés csak kis szakaszon tekinthető lineárisnak.



10.107. ábra

A bezárt légtömeg nyomása és térfogata között összefüggés van, amely korántsem lineáris. (Gondoljunk a Boyle–Mariotte-törvényre, amely szerint állandó hőmérséklet esetén $p \cdot V$ = állandó.) Az ábrán láthatjuk, hogy ha a bezárt levegő nyomását szinuszosan változtatjuk, akkor a térfogatváltozás – ezzel együtt a membrán elmozdulása – már nem lesz szinuszos. Ez pedig nem kívánatos, mert az eredeti szinuszos jel mellett annak felharmonikusai is megjelennek, a hang tehát eltorzul. (A jelenség csak nagy membránkitérések esetén jelent gondot.)

A fizikai törvények közvetlen hangmódosító hatásának másik példájaként képzeljük el, hogy egy dinamikus hangszóróra olyan szinuszos jelkeveréket adunk, amely nagy amplitúdójú 100 Hz-es jelből és jóval kisebb amplitúdójú 1000 Hz-es jelből áll, vagyis a

100 Hz-es frekvenciával mozgó membránnal akarjuk kisugározni az 1000 Hz-es jelet is. A 100 Hz-es jel (mondjuk) 3 mm-es kitérést okoz. Észlelhető-e ilyen körülmények között a Doppler-effektus frekvenciamódosító hatása az 1000 Hz-es jelre?

A kis frekvenciájú mozgás következtében $v = 3\text{mm}\cdot 100\ \text{Hz}\cdot 2\pi = 2000$ mm/s-os sebességmaximumok alakulnak ki. Ezek pedig

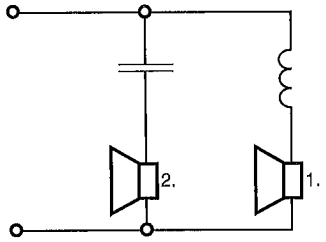
$$f' = f \cdot \frac{c}{c \pm v}$$

frekvenciájú jelet keltenek a nyugvó észlelőben. Így tehát a kisebb amplitúdójú, eredetileg 1000 Hz-es jel 994 Hz és 1006 Hz között fog 100 Hz-es frekvenciával ingadozni.

Ma elektrosztatikus átalakítóként gyakran és sok helyen alkalmaznak *piezoelektromos anyagokat.* Ezek különleges tulajdonsága, hogy nyomás hatására felületükön a nyomás értékével arányos mennyiségben polarizációs töltések jelennek meg, illetve hogy elektromos tér hatására a térerősséggel arányos mechanikai elmozdulással felelnek. Számos ilyen anyag található, a legismertebbek a kvarckristály, a Rochelle-só ($KNaC_4H_4O_6\cdot 4H_2O$), a bárium-titanát ($BaTiO_2$). Sok szerves anyag is mutat ilyen tulajdonságot, pl. a szarvasmarhák Achilles-ina megszárított állapotban.

A piezoelektromos anyagok sok technikai eszközben találhatók meg. A kvarckristályok nagyon stabil, állandó frekvenciájú oszcillátorok alapjául szolgálnak. Ezek nagyon fontosak: nélkülük nem lenne lehetséges a mai hírközlés. Ezek megjelenése vezetett az órák mechanikus vezérlő szerkezetének háttérbe szorulásához.

A piezoelektromos anyagok mechanikai hatásra (leginkább nyomásra) hatalmas feszültségeket képesek létrehozni: gondoljunk csak az elterjedt gázöngyújtókra, amelyekben több kV-os szikrák gyújtják meg lángot.



10.108. ábra

Piezoelektromos anyagokból mikrofonok készülnek, sőt hangszórók is, főleg a nagyfrekvenciájú hangok sugárzására. Kis tömegük, érzékenységük, mérsékelt mechanikai elmozdulási lehetőségeik szinte kínálják ilyen alkalmazásukat. A korszerű hangfalakban rendszerint több – legalább kettő – hangszórót helyeznek el, egyet a kis frekvenciájú hangok kisugárzására, egy másikat a nagy frekvenciájú hangok keltésére. Rendszerint egyszerű elektromos áramkörökkel (10.108. ábra)

biztosítják azt, hogy mindkét hangszóró csak azokat a jeleket kapja meg, amelyeknek sugárzására alkalmas. (Az ábrán az 1 hangszóróra lényegében csak a mély, a 2-re csak a magas hangok jutnak.) Ezzel az eljárással az ún. intermodulációs torzítások – amelyekre a Doppler-hatás lehet egy példa – jelentősen csökkenthetők.

A kerámiaanyagokat előszeretettel használják hangsugárzóként olyan helyeken, ahol takarékoskodni kell energiával, hellyel, és a hangminőség kérdése másodlagos, pl. karórák, háztartási eszközök „csipogói"-ban, a mobiltelefonok hangszóróiban stb.

10.7.2.3. Hullámok összetétele és felbontásuk

A 19. század elején Joseph Fourier matematikus igen fontos összefüggést fedezett fel. Eszerint minden periodikus jel/hullámalak felfogható egy alapfrekvenciájú szinuszos/koszinuszos jelnek és annak felharmonikusainak összetételeként. Ez az elgondolás a jelek vizsgálatának alapja lett szinte minden szakmában: elektromosságtan, orvostudomány, geológia stb. (Nem véletlen, hogy a manapság megjelenő tudományos publikációkban megemlítve Fourier neve sorrendben követi Einstein és Darwin nevét.)

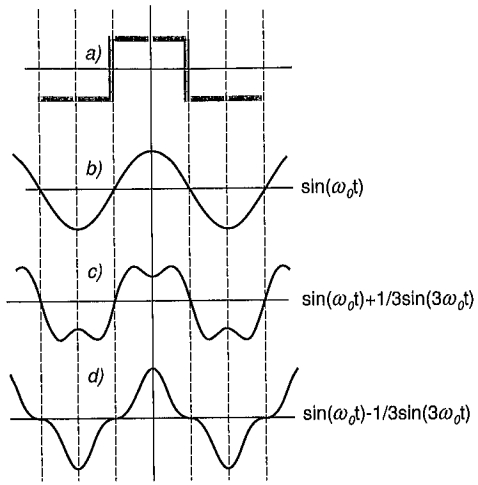
A Fourier-komponenseknek és azok amplitúdójának meghatározására ma már pontosan kidolgozott megoldások léteznek, általában számítógépes változatban.

A 10.109. ábrán próbáljuk egy példán követni ezt a vizsgálati módot. Az a) egy T periodusidejű négyszöghullám egy teljes periódusát mutatja. A b) ábra az alapfrekvenciájú szinuszos jelet mutatja $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$. Ez a jel csak nagy fantáziával hasonlít az eredeti négyszöghullámra. Ha azonban megfelelő amplitúdóval hozzáadjuk a harmadik felharmonikust c), akkor az eredmény már felismerhetően hasonlít az eredeti jelalakra.

Az eljárás egyik szépsége az, hogy minél több felharmonikust veszünk figyelembe, annál pontosabban közelíthetjük a kiindulási jelalakot. Így mód nyílik arra, hogy megállapítsuk, hogy egy olyan szűrő, amelyik csak bizonyos frekvenciákig viszi át a jeleket, mekkora és milyen jeltorzulást okoz.

A Fourier-sorba fejtés a felharmonikusok amplitúdójának meghatározását jelenti. Példánkban a harmadik felharmonikus amplitúdója az alap frekvenciájú jel harmada, előjele negatív, a második harmonikus amplitúdója pedig zérus.

Figyelemre méltó a d) ábra is. Itt a harmadik harmonikus inverzét vettük, vagyis a negatív előjel helyett pozitívnak tekintjük. Jól látható, hogy az ebben az esetben kapható összegjel az eredetire egyáltalán nem hasonlít. A jelenséget értelmezhetjük úgy is, hogy a harmadik felharmonikust „fázistorzítással" vittük át.



10.109. ábra

A fázisátviteli hibákat a híradástechnikában alaposan vizsgálják, mind a tervezésnél, mind pedig a zavarok elhárításánál. Képzeljük el, hogy a tévéképek esetén az ilyen hibák a képek alakját, vagy azok színeit élvezhetetlenné tehetik.

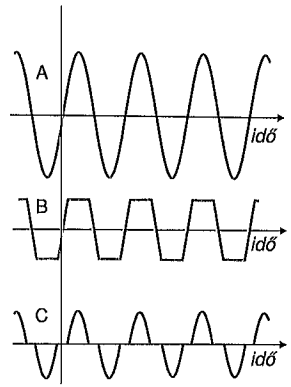
Nagyon érdekes az, hogy az emberi fül az összetevők fázishelyzetére nem érzékeny, így a c) és d) ábra szerinti jelek a radikális különbözőség ellenére ugyanazt a hangérzetet keltik. Ezen a tényen alapulnak a hangszínszabályozók, amelyek a hangfrekvenciás sáv egyik vagy másik részét csillapítják vagy kiemelik.

A 10.110. ábrán egy szinuszos jelet két részre osztottunk, a szinuszok szélső értékeit „levágtuk" (A = B + C). A torzított B jelet úgy tekinthetjük, mintha egy hibátlan szinuszos jelhez hozzáadnánk a levágott jelsorozat inverzét: (A–C). Ez a fajta jel akkor keletkezik, ha a hangerősítőt „nagyon felcsavarjuk", mert ilyenkor a rendszer már képtelen az elvárható amplitúdójú szinuszt kipréselni magából.

A levágott jelek periodikusak, Fourier komponensekre bonthatók. Ez azt jelenti, hogy a torzított jelben az alapfrekvencia felharmonikusai is megjelennek, amelyeket fülünk torzításnak érzékel.

A hangszórók nagyon szerteágazó, érdekes fiziológiai és tudományos problémákat hordoznak magukkal. (Na meg persze pénzügyit...) Csak néhány, érdekesnek tekinthető példát említünk:

- nem közömbös a hangszóró membránjának anyaga. Vannak fémmembrános hangszórók, és olyanok is, amelyek kevlarból készülnek (nagyon könnyű és nagyon erős műanyag),



10.110. ábra

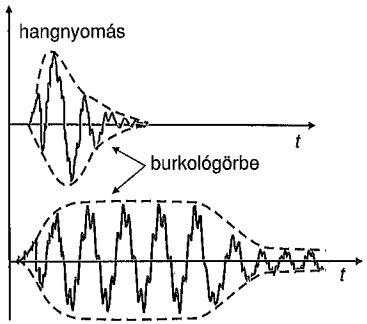
- működnek olyan hangszórók, amelyeknél egy vezető plazmacsíkot mozgatnak elektromos térrel, hangfrekvenciás jelekkel. A vezetőcsíkot plazmakeltéssel vagy lánggal hozzák létre.
- a hangszórók befoglaló dobozainak tervezése is eléggé bonyolult kérdés,
- léteznek digitális hangszórórendszerek, amelyeknél az egyes hangszórók csak a maximális és minimális kitérést produkálják,
- próbálkoznak nyomtatott áramkörös, lapos kivitelű hangszórók létrehozásával is, amelyek jobban illeszkednek a lakások felépítéséhez,
- vannak olyan személyek, akik a hangvisszaadó eszközökkel szemben nagyon kritikusak („vájtfülűeknek" szokás nevezni őket). Kifogásolják a félvezetőkből készített hangfrekvenciás erősítők minőségét, és helyettük visszatérnek az elektroncsöves változathoz. A berendezéseik összekötésére speciális kábeleket használnak, néha még azok irányára is ügyelnek stb.

10.7.2.4. Hang- és beszédfelismerés

Korunk egyik jellegzetes terméke a zeneszintetizátor, amely rendkívül sokféle hangszer szerepét képes átvenni. Elsősorban azért említjük meg, mert ez az eszköz jól mutatja, hogy a hangfrekvenciás tartományban a mai elektronika szinte minden feladat megoldására alkalmas. Extrém példaképpen: van hangverseny-zongora-utánzat is...

A hangszerek hangja elsősorban a jelek frekvenciaspektruma (az alaphang és a felharmonikusok egymáshoz képesti viszonya), valamint a jelek időbeli intenzitás-

változása alapján különböztethető meg. A 10.111. ábrán két, azonos hangmagasságérzetet keltő jelet látunk. Az első egy pengetős hangszer jellegzetességeit mutatja: a nagyon meredek felfutást egy exponenciálisan csökkenő szakasz követi. A másik egy fúvós hangszertől származhat; a jel hossza igen széles határok között változhat. A keletkező hang hangszíne a kibocsátott jel frekvenciaspektrumától függ, pl. a viszonylag intenzív ötödik felharmonikus a fafúvósok hangjára jellemző.

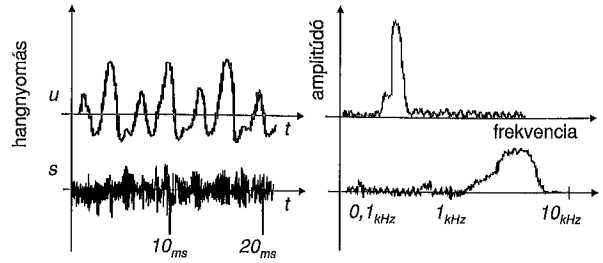


10.111. ábra

A zeneszintetizátorban egy változtatható frekvenciájú elektronikus oszcillátor jelei mellett nagyszámú felharmonikust is előállítanak. Ezeket a felharmonikusokat meghatározott arányban összegezik, ez adja meg a hang színezetét. Az összegezett jeleket egy amplitúdómodulátorra vezetik, amellyel a jelek burkológörbéjét adják meg. A szintetizátorokkal nagyon sok hangszer hangját lehet meglehetősen élethűen utánozni, és ezen túlmenően sok olyan hangeffektus is kelthető velük, amelyek soha nem létezett hangszerek hangjával szórakoztatnak bennünket.

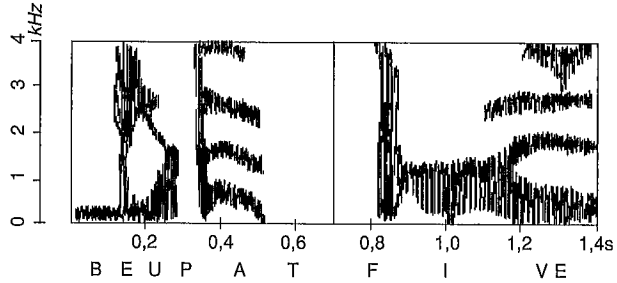
A modern akusztikai és számítástechnikai módszerek együttese a *beszédszintetizátorokban, illetve a beszédfelismerő gépekben* éri el csúcsteljesítményét. Tekintsük át röviden ezeknek az eszközöknek a működési alapelvét!

Az emberi beszéd hangok egymásutánjából áll. Ezek a hangok időben lezajló, időben változó hangnyomás-ingadozások, amelyeknek jellegzetes frekvenciaspektrumuk van. A 10.112. ábrán az „u" magánhangzó és az „s" mássalhangzó időbeni lefutását és frekvenciaspektrumát láthatjuk. Nagyon fontos és érdekes felismerés volt, hogy ha ezeknek a hangoknak a magassága változik (pl. férfi vagy nő ejti ki őket), akkor a spektrum egésze feljebb vagy lejjebb tolódik, de a spektrum alakja – a komponensek egymáshoz való viszonya – nem változik.



10.112. ábra

A 10.113. ábrán egy néhány angol szóból álló mondat „hangképét" láthatjuk (be up at five). Ez úgy készül, hogy az időben lezajló hangjelet 10 ms-os szakaszonként részletesen megvizsgálják, és előállítják a szakasz frekvenciaspektrumát. Az ábrán a frekvenciaskála függőleges, az egyes komponensek intenzitását az egyes zónák sötétedési mértéke jelzi. Ez az ábra tulajdonképpen háromdimenziós: az idő–frekvencia síkon létrejövő „hegyek" magasságát a feketedés mértéke jelzi.



10.113. ábra

A beszédfelismerő rendszer ezt a háromdimenziós „makettet" ismeri fel. Egy kissé olyképpen, mint ahogy egy turista vagy egy pilóta képes felismerni a tájat akkor is, ha a térképet fordítva tartja a kezében, vagy a tájat oldalról látja. A számítógép tárában helyezik el a felismerni kívánt „makettek" képét, és egy keresőmechanizmus igyekszik kiválasztani azt a tárolt makettet, amelyik leginkább hasonlít az éppen vizsgált mondat vagy szövegrész „makettjéhez".

A módszer fogyatékossága, hogy csupán olyan hangképek felismerésére képes, amelyeket előre tároltak. Ezzel együtt azonban igen nagy jelentőségű, mert nagymértékben egyszerűsíti az ember és számítógép közötti kommunikációt.

Az emberi beszéd ilyen vizsgálatából a beszélő bizonyos akusztikai jellemzői is meghatározhatók, kiszámolhatók. Ennek alapján a beszélőről amolyan „akuszti-

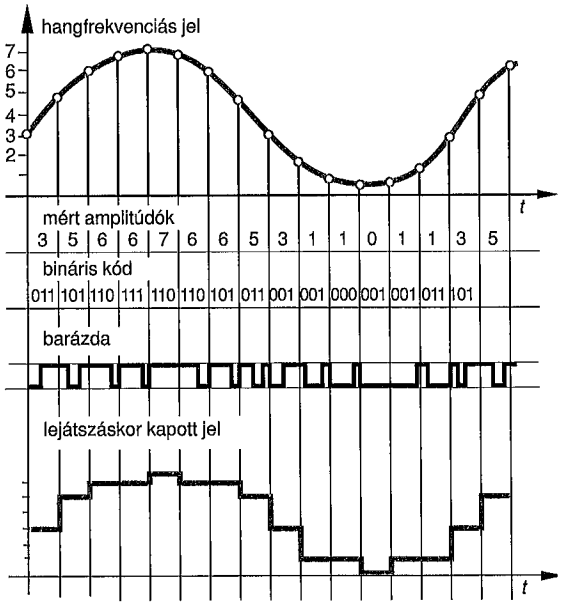
kai ujjlenyomat" készíthető, amelynek alapján felismerhető. E módszernek a bűnüldözésben van nagy jelentősége.

A beszédszintézis lényegében szintén a beszélt hangok frekvenciaspektrumának elemzéséből indul ki. Megállapították, hogy hosszan kitartható hangjaink (pl. az a, o, u, m, f, s stb.) kibocsátása során két jelentős mechanizmus érvényesül:

- Hangszálaink megfeszítésével vagy periodikus impulzussorozatot keltünk, vagy a keletkező hang zajszerű, nagyon sok komponenst tartalmaz. (Példaképpen: az „s" hang sustorgó hanghatása szinte azonos azzal, mint amit egy színház tapsoló közönsége kelt tenyerével, véletlenszerű kis csattanások összegeképpen.)
- Beszédünk során szájüregünk, nyelvünk stb. változtatásával akusztikai rendszerünk geometriai méreteit változtatjuk, és ezzel a gégefőből származó hangokat egy változtatható frekvenciaátvitelű szűrőn bocsátjuk át.

10.7.2.5. Hangrögzítés (CD)

A hangrögzítés és -visszaadás korszerű változata az ún. digitális *lemez* („cédé" – Compact Disc), illetve lejátszó.



10.114. ábra

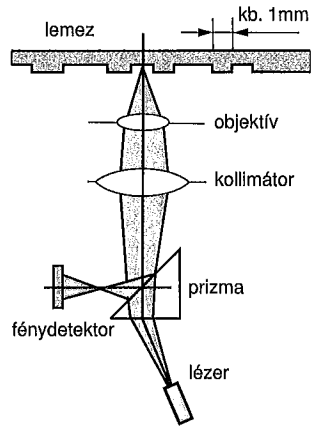
Egy műanyagból készült hanghordozó CD általában két csatorna – sztereo hangcsatorna – információit tárolja, 16 bites formában, 44.1 kHz mintavételi frekvenciával. A 120 mm-es átmérőjű lemez kb. 80 percnyi felvétel tárolására alkalmas. (A lemez méretének kialakításánál az volt a meghatározó szempont, hogy Beethoven IX. szimfóniája biztonsággal férjen rá...)

A lemezre írt információ kialakítása legfontosabb lépéseinek vázlatát a 10.114. ábra mutatja. A hangfrekvenciás jel ún. analóg jel, pillanatnyi értékei akármilyen kicsit is változhatnak. Ezeket periodikusan megmérik, és a jelet digitális számokká alakítják. Ezeknek a számoknak bináris kódot feleltetnek meg. A bináris kódsorozatnak megfelelően készítik el a lemezt (a barázdákat). Lejátszáskor a folyamat fordítottja játszódik le. A visszakapott jelben található „ugrásokat" megfelelő frekvenciakarakterisztikájú szűrővel tartják távol a kimenettől.

A lemezen kicsike „gödröcskék" léte vagy nemléte jelenti a digitális információ alapegységét (bit). Méretük: mélység: 100 nm, hosszúság: 1000 nm. A spirális sávok 1,6 mm távolságra vannak egymástól.

A CD olvasása egy 780 nm hullámhosszúságú félvezető lézerrel történik. A „gödröcskék" néha ténylegesen változó mélységűek, néha pedig csak egy vékony festékréteg helyenkénti elszínezéséből állnak.

A lemez letapogatását jól fokuszálható lézersugárral végzik. (A lézerfókusz beállításáról külön automatikai rendszer gondoskodik.) A fénydetektálási rendszerrel elkerülhető a lemezek kopása, minőségük függetlenné válik a lejátszások számától. A lejátszófej felépítésének vázlata a 10.115. ábrán látható. A visszaverődő fénysugár intenzitása függ attól, hogy az a fókuszból verődik-e vissza vagy sem. A fénydetektor elektromos kimenő jele tehát követi a lemez barázdáinak változásait.



10.115. ábra

Hangsúlyoznunk kell, hogy a valóságos viszonyok az előbb leírtaknál lényegesen bonyolultabbak. A hanginformációt speciális eljárással kódolják. Ezenkívül a biztonság érdekében ún. hibajavító kódot is használnak, amelyik lehetővé teszi a rövidebb hibás szakaszok javítását.

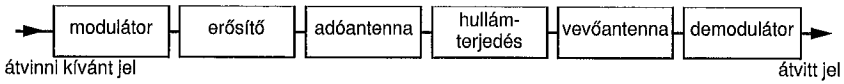
Említést érdemel, hogy CD-k alkalmasak nemcsak hang, hanem más információk digitális tárolására is (képek, számítógépprogramok, enciklopédiák stb.).

A CD-hez hasonló elveken hozták létre a DVD-ket is. Technológiai újítások eredményeképpen ezek tárolási kapacitása sokkal nagyobb: egyetlen egyrétegű lemezen 4,7, kétrétegű lemezen 8,5 gigabyte információ tárolható.

10.7.3. Elektromágneses hullámok keltése és vétele

Ebben a fejezetben az elektromágneses hullámokon alapuló jelátvitelt, a hírközlés legfontosabb alapelveit, technikai megoldásait tekintjük át. Valószínűleg nem szorul különösebb bizonygatásra, hogy az elektromágneses hullámok segítségével történő információtovábbítás mennyire hozzátartozik hétköznapjainkhoz. A rádió, a televízió nélkül életünk sokkal szürkébb lenne; elektromágneses sugárzó- és detektálórendszerek nélkül nem lenne biztonságos légi forgalom, nem lehetne űrhajókat felbocsátani stb.

Az elektromágneses hullámok keltésével és vételével kapcsolatos legfontosabb fázisokat a 10.116. ábrán láthatjuk.



10.116. ábra

Az átvinni kívánt jelet, jelzést természetesen elektromos jellé (feszültséggé, feszültségváltozássá) kell alakítani. Ez a jel az ún. moduláció során összekeveredik azzal a nagyfrekvenciás jellel (az ún. vivőjellel), amely majd felerősítve kisugárzásra kerül. Az adóantenna biztosítja a váltakozó áram energiájának elektromágneses hullámokká történő jó hatásfokú átalakítását és megfelelő irányba való sugárzását. Az elektromágneses hullámok ezután a földközelben, a levegőben, az ionoszférában, az űrben haladnak – különböző csillapítási és iránymódosítási viszonyok között. A vevőantenna feladata a sugárzási térből elektromos feszültség-, illetve áramjelek előállítása. E jelek általában igen kicsinyek, ezért erősítésre szorulnak. Általában ezután kerül sor az ún. demodulációra, amelynek során a nagyfrekvenciás rezgéseket leválasztják róluk, hogy a vevő kimenetén – lehetőleg kevéssé torzított – a bemenő jeltől minimálisan eltérő jelet nyerjenek.

10.7.3.1. Moduláció

A fénysebességgel mozgó elektromágneses hullámokra nagyon sokféle információforrás jelét bízzák. Továbbítanak beszédet, zenét, képeket, adatokat, idő- és navigációs jelzéseket, csak hogy a legfontosabbakat említsük. Ezek a jelek ugyancsak különböznek egymástól: elsősorban abban, hogy milyen frekvenciájú jelekből tevődnek össze, időbeni változásaik mennyire gyorsak. A leggyakoribb információforrások jelei azonban megegyeznek abban, hogy alkalmatlanok arra, hogy antennákkal közvetlenül kisugározzák őket. Az elektromágneses hullámok elméleti vizsgálatából ugyanis egy nagyon fontos gyakorlati szabály következik: *csak olyan frekvenciájú jelek sugározhatók ki jó hatásfokkal, amelyek hullámhossza az antenna geometriai méreteivel (pl. hosszával) nagyságrendileg azonos.*

(Ez természetesen sokkal pontosabban is megfogalmazható, az antennák méreteinek megbecsléséhez azonban elegendő. Ha egy 1 kHz-es elektromágneses jelet próbálnánk közvetlenül kisugározni, e hullámok hossza: $\lambda = c/f = 300$ km lenne. Ilyen méretű antennát építeni nyilvánvalóan lehetetlen.)

Az ún. modulációra azért van szükség, hogy az átvinni kívánt jeleket valahogy ráültessük azokra a nagyfrekvenciás jelekre, amelyek már racionális méretű antennát igényelnek. (Csak példaképpen: a Kossuth rádió 519 kHz frekvenciájú jelének kisugárzásához néhány száz méternyi adótorony szükséges.)

Fontos látni: a nagyon magas frekvenciájú jel és a nála jóval lassabb jelek összegezése nem elegendő! A nagyfrekvenciás jelet az antenna kisugározza, a kisfrekvenciásat nem, az „ott marad".

Tegyük fel, hogy van egy nagyfrekvenciás jelünk (amelyet egyébként *vivőfrekvenciás jelnek* is neveznek) az alábbi formában

$$V = A \sin\left(\omega_v t + \varphi\right),$$

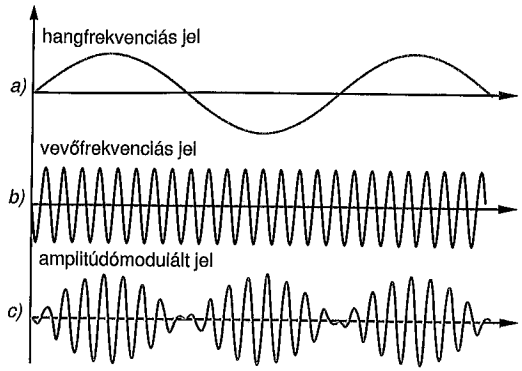
ahol A a jel amplitúdója, ω_v a körfrekvenciája, φ pedig a fázisa. E jelnek három jellemzőjét módosíthatjuk:

- az amplitúdóját, ezt hívják *amplitúdómodulációnak (AM);*
- a frekvenciáját, ez az ún. *frekvenciamoduláció (FM);*
- a fázisát, akkor pedig *fázismodulációról* beszélünk *(PM).*

Ha az átvinni kívánt hangfrekvenciás jel $V = B \sin(\omega_h t)$ alakú, akkor az ún. amplitúdómoduláció abból áll, hogy a nagyfrekvenciás jel pillanatnyi amplitúdóját a hangfrekvenciás jel szabályozza. Vagyis az amplitúdómodulált jel

$$V_{AM} = A\left(B \sin\left(\omega_h t\right) \sin\left(\omega_v t + \varphi\right)\right).$$

A két jelet tehát össze kell szorozni. A 10.117. ábrán ezt láthatjuk.



10.117. ábra

Az a) ábra a hangfrekvenciás jel, a b) a vivőfrekvenciás jel, a c) pedig az amplitúdómodulált jel hullámalakját mutatja.

Érdekes eredményre jutunk, ha elvégzünk néhány egyszerű, trigonometriai azonosságon alapuló átalakítást. A jelek összeszorzásának – amplitúdómodulációjának – eredményeképpen két új jel keletkezett, $\omega_v + \omega_h$ és $\omega_v - \omega_h$ és frekvenciával. Ha $\omega_v \gg \omega_h$, akkor a két jel elegendően közel van ω_v-hez, és kisugározható egy ω_v sugárzására alkalmas antennával.

$$V_{AM} = A\left[B\sin\left(\omega_h t\right)\sin\left(\omega_v t+\varphi\right)\right]=$$

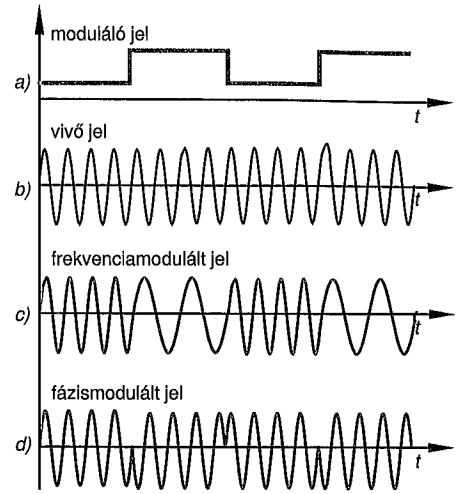
$$=\frac{AB}{2}\left\{\sin\left[\left(\omega_v+\omega_h\right)t+\varphi\right]+\sin\left[\left(\omega_v-\omega_h\right)t+\varphi\right]\right\}$$

A frekvenciamoduláció során ω_v értékét módosítják a moduláló jel függvényében, természetesen ω_v értékéhez képest csak kicsiny mértékben, hogy a jel egyetlen antennával kisugározható maradjon. A jel pillanatnyi frekvenciája tehát: $\omega = \omega_v + m \sin(\omega_h t)$ lesz. Az m modulációs index adja meg hogy a moduláló jel milyen mértékben módosítja a pillanatnyi frekvenciát. A modulált jel tehát

$$V_{FM} = A\sin\left\{\left[\omega_v + m\sin\left(\omega_h t\right)t\right]+\varphi\right\}$$

alakú lesz.

Frekvenciamodulált jelre a 10.118c. ábrán láthatunk példát. Az ábrán a moduláló jel négyszöghullám. A modulált jel frekvenciája a moduláló jeltől függ; a nagyobb amplitúdójú moduláló jelhez kisebb frekvencia tartozik (persze fordítva is lehetne).



10.118. ábra

Természetesen frekvenciamoduláció esetén is keletkeznek összeg- és különbségi frekvenciájú jelek, ahogy ezt már az *AM* esetben láttuk. *FM* esetben azonban sokkal több komponensből fog állni a modulált jel spektruma, így a modulált jel átviteléhez sokkal szélesebb frekvenciatartomány szükséges.

A fázismoduláció értelemszerűen a vivőhullám fázisának a moduláló jellel történő módosításából áll. Ezzel részletesen nem foglalkozunk. Azt gondolhatjuk róla, hogy ez a frekvenciamoduláció egyik különleges esete, hiszen a frekvencia a pillanatnyi fázis differenciálhányadosaként is értelmezhető. A 10.118d. ábrán példát azonban mutatunk a fázismodulált jelre is. A moduláló jel itt is – a viszonyok könnyebb áttekintése érdekében – négyszöghullám.

A különböző modulációs lehetőségek áttekintése után röviden foglalkoznunk kell azokkal az elvekkel és megoldásokkal, amelyeket a vivőfrekvenciás jelek modulálására a gyakorlatban alkalmaznak.

Láttuk, hogy az amplitúdómoduláció szorzóáramkört igényel. (A szorzóáramkörök – különösen integrált áramkörű kivitelben – könnyen hozzáférhetők.) Velük a moduláció kb. 50 MHz frekvenciáig nem okoz gondot. (A szorzóáramkör egyáltalán nem hasonlít a zsebszámológépekben, számítógépekben található megoldáshoz, mivel nem digitális működésű, hanem ún. analóg eszköz. A kimeneten megjelenő jel pillanatnyi értéke a bemeneteken található jelek pillanatnyi értékének szorzatával arányos.)

[A tranzisztorok áram–feszültség karakterisztikája közismerten nem lineáris (lásd a 25.5.3. fejezetet)]. Ennek felhasználásával is lehet amplitúdómodulátort készíteni – ahogy ezt olcsó készülékekben meg is teszik.

Egy félvezető dióda záróirányba kapcsolva kapacitásként használható. A lezárt dióda kapacitása a zárófeszültségtől is függ, ennek következtében lehet viszonylag egyszerűen frekvenciamodulátort készíteni. Ha a zárófeszültséget lassan változtatjuk (mondjuk hangfrekvenciával), és a félvezető dióda kapacitását egy oszcillátor rezgőkörében használjuk, akkor máris előállt a kívánt funkció.

10.7.3.2. Erősítők, oszcillátorok

Egy rádióadó jelei annál könnyebben és zajmentesebben vehetők, minél közelebb van a vevő az adóállomáshoz. Az adóállomás által keltett térerősség (E) a vétel helyén az adótól mért távolsággal (R) fordított arányban csökken

$$E \cong \sqrt{P} / R,$$

ahol P az antennarendszer által kisugárzott teljesítmény. Abban az esetben, ha a rádiórendszerrel nagy távolságot kell áthidalni, és nagy felületet kell többé-kevésbé egyenletesen „beszórni", hatalmas rádiófrekvenciás teljesítményeket kell előállítani. A nagy teljesítményű nagyfrekvenciás jelek előállítása pedig sokszor nem egyszerű feladat.

A műsorszóró rádióállomások (100 kHz...500 MHz frekvenciatartományban) extrém teljesítményű végfokozataikban ma is elektroncsöveket használnak, mert a kb. 1 kW-nál nagyobb teljesítményű jeleket a mai félvezetőelemek még nem tudják megfelelően kezelni, erősíteni.

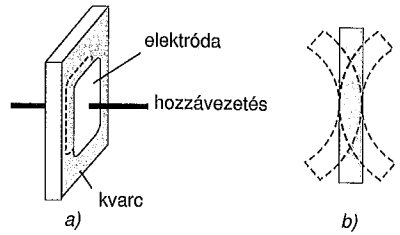
A továbbiakban kitérünk néhány érdekes megoldásra, amelyek legelőször a rádióadóknál voltak nagyon fontosak. Ezek közvetlenül érintenek valamilyen fizikai alapelvet.

A rádióállomások számának növekedése, a minőségükkel szemben támasztott növekvő követelmények egyre pontosabb vivőfrekvenciájú jelek előállítását igényelték.

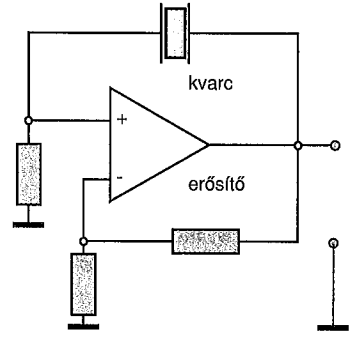
A pontos időmérés, a digitális információk precíz időzítése nélkül a mai összetett hírközlő hálózatok nem működnének (műholdas navigáció, internet, mobil telefónia stb.).

Igen gyakran használnak frekvenciareferenciaként ún. kvarcoszcillátort.

A 10.119a. ábrán kvarckristályból kivágott szeletkét láthatunk, amelynek szemközti lapjain fémelektródák kaptak helyet. A kvarclapka piezoelektromos tulajdonságú, tehát a kristály mechanikai alakváltozása során felületén töltések jelennek meg, illetve az elektródákra adott feszültség hatására mechanikai erőhatások ébrednek, amelyeket alakváltozás követ. Egy ilyen kvarclapka tehát – alkalmasan megválasztott szinuszos elektromos jel hatására – mechanikai rezgésbe jöhet (pl. 10.119b. ábrán látható módon, vagy valamely más mechanikai rezgési módusban rezeghet). A meglepő: e rezgések frekvenciája a kvarclapka geometriai méreteitől függ, és igen nagy mértékben állandó, alig függ a környezeti hőmérséklet változásaitól, mivel a kvarc hőtágulási együtthatója igen kicsi. (A kvarckristályok átlagos stabilitása 10^{-6}–10^{-7} értékű. Ez azt jelenti, hogy ha egy ilyen kristály felhasználásával készítünk órát – ahogy a mai kvarcórákban ezt ténylegesen megteszik –, akkor 10^6–10^7 másodperc alatt fog óránk 1 másodpercnyi eltérést mutatni. A 10^6–10^7 másodperc pedig 10...100 napnyi időtartamot jelent. Az említett stabilitásadatok a frekvencia spontán, pl. hőmérsékletfüggő változásaira utalnak. A kristály rezgési frekvenciájának értéke a másik nagyon fontos jellemző: nem közömbös, hogy mennyire fog sietni vagy késni az óránk, ha mondjuk az internetet használjuk. Különleges célokra 10^{-8}–10^{-9} stabilitásértékű kvarcoszcillátorokat is előállítanak, amelyekben a kvarc hőmérsékletét stabilizálják.)



10.119. ábra



10.120. ábra

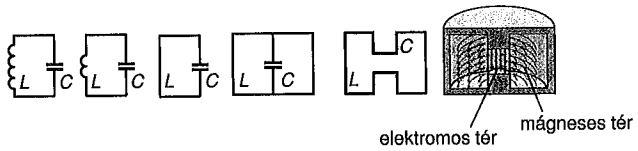
A 10.120. ábrán azt mutatjuk be, hogy ha egy fázist nem fordító erősítő bemenete és kimenete közé egy ilyen kristályt helyezünk, az a kristály mechanikai rez-

gési frekvenciáján rezegni kezd, és igen nagy stabilitású elektromos jelet hoz létre. A kvarckristály – mint elektromos alkatrész – ugyanis jó minőségű soros rezgőkörként viselkedik. Így a rendszer begerjedése, oszcillációja a kristály mechanikai adatai által megszabott frekvencián következik be.

10.7.3.3. Mikrohullámú rezgések

Érdekes és fontos szakterület az igen nagy frekvenciájú jelek előállítási technikája, különösen az ún. mikrohullámú rezgések (>1000 MHz) létrehozása.

Mielőtt a mikrohullámú elektronikus elemek ismertetésére rátérnénk, röviden érintenünk kell a mikrohullámú rezgőköröket, az ún. *üregrezonátorokat.* Ha egy rezgőkör sajátfrekvenciáját növelni akarjuk, akkor mind kapacitását, mind induktivitását csökkenteni kell. A 10.121. ábrán ezt a folyamatot látjuk: a tekercs egyetlen hurokká válik, majd több egymenetes tekercset kötünk párhuzamosan, egészen addig, míg ezek mintegy beburkolják a középen elhelyezkedő kondenzátort. Az ábrán feltüntettük azt is, hogy egy ilyen üregrezonátorban hogyan fog kialakulni a mágneses és elektromos tér.



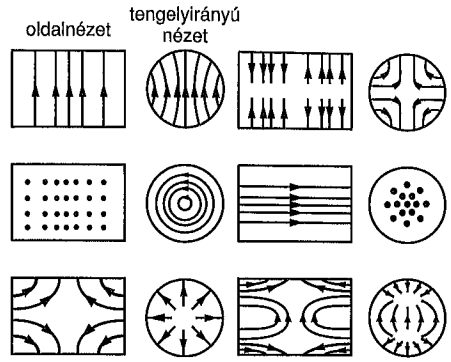
10.121. ábra

Az elektromágneses rezgések sokféleképpen kialakulhatnak, pl. a hengeres testek belsejében is kialakulhatnak különböző formájú – ún. módusú – rezgések. Ezek abban térnek el egymástól, hogy az elektromos és mágneses tér állóhullámai különbözőképpen formálódnak. A 10.122. ábrán néhány esetre bemutatjuk egy hengeres testben kialakuló elektromos térerősségképeket.

Természetesen az üregrezonátor-rezgőkörök is veszteségesek, tehát az egyszer létrejött hullámforma előbb-utóbb lecseng.

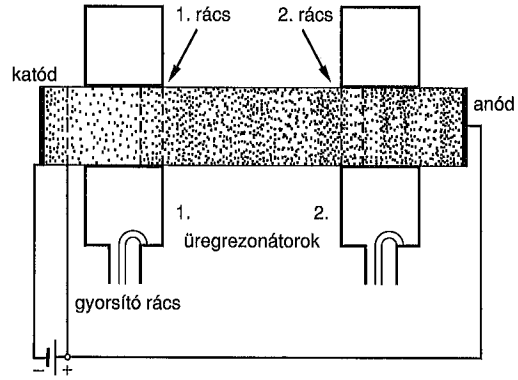
A rezgés csillapodik még akkor is, ha – elterjedt technikai megoldásként – az üregek belső falát ezüsttel vagy arannyal vonják be. A rezgés fenntartásához tehát kívülről valahogy hozzá kell járulni.

Nagyszámú szellemes eszközt – oszcillátort – konstruáltak, amelyek igen nagy frekvenciás rezgéseket képesek előállítani. Ezek mindegyikének rövid áttekintése is meghaladná a könyv kereteit. Ezért példaként csak két megoldást mutatunk be.



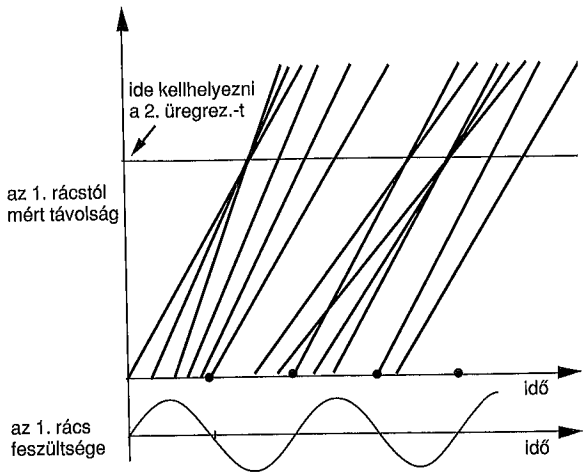
10.122. ábra

A *klisztron* olyan elektroncső, amelyben elektronok haladnak a pozitív feszültségű anód felé (10.123. ábra). Útjukban keresztülhaladnak egy rácsrendszeren, amely egy üregrezonátor „kondenzátora". Ha az üregben rezgés van, akkor annak egyik félperiódusában a rácsok közötti feszültség gyorsítja, másik félperiódusában lassítja az elektronokat.



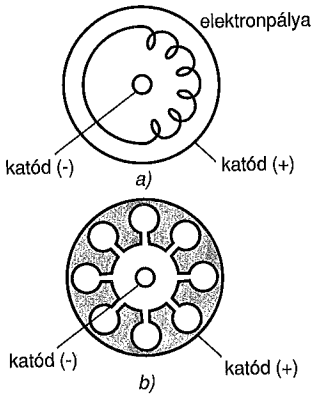
10.123. ábra

A 10.124. ábrán az elektronok pályáját rajzoltuk fel: a különböző időpontban belépő elektronok különböző sebességgel haladnak tovább, ezt fejezi ki a különböző meredekségű pályaegyenes. A különböző sebességgel haladó elektronok mozgásuk során „csomósodnak", a lassúakat utolérik a gyorsak, ezért bizonyos távolságra a rácstól jókora áramimpulzust kapunk. Ha ide egy újabb üregrezonátort helyezünk, akkor ebben felerősített rezgések alakulhatnak ki. Ha ezek egy részét az első rácsrendszerre vezetjük, akkor nem csillapodó rezgéseket kelthetünk.

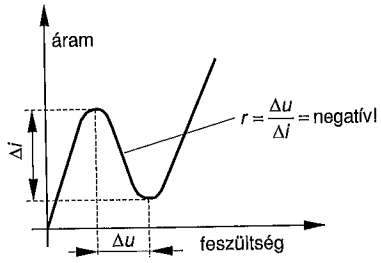


10.124. ábra

Nem lehet kihagyni az egyik legfontosabb nagyfrekvenciás generátor ismertetését, a *magnetront*. Ennek lényege egy hengeres kiképzésű elektroncső (dióda?), ahol az elektronok az anódfeszültség hatására az anód felé repülnek, a pályájukra merőleges mágneses tér azonban gördülő körszerű mozgásra készteti őket. Ezen a furcsa pályán az elektronok elhaladnak az apró üregrezonátorok előtt, és ezekben rezgést indukálnak. Ennek hatására az elektronnyaláb „csomóssá" válik, ami az üregek (rezgőkörök) rezgését folyamatosan biztosíthatja.



10.125. ábra



10.126. ábra

A magnetron világpolitikai szerepéről is meg kell emlékeznünk. Ezt az eszközt a II. világháború kritikus szakaszában Angliában fedezték fel – azt mondják róla, hogy ez az akkor már vitális elektronikus küzdelem egyértelmű eldöntését hozta.

A 10.125a. ábra az elektronok pályáját mutatja, a 10.125b. ábra pedig az ún. üreges magnetron vázlatát. Az igen egyszerű konstrukciójú eszköz jó hatásfokkal alakítja át az egyenáramot mikrohullámmá, és impulzusüzemben MW nagyságrendű csúcsteljesítményekre is képes. Jó hatásfoka miatt ipari melegítő, hőkezelő berendezések, valamint a lakossági felhasználásra készített mikrohullámú sütők nélkülözhetetlen alapeleme (csak egy példa: a házi mikrohullámú sütők 1100 W-ot vesznek fel a hálózatból, amelynek 60–70 százalékát mikrohullámú teljesítménnyé alakítják). A magnetronok impulzusüzemben is megállják helyüket, nem ritkák a több MW-os impulzuscsúcsértékek. Ezek a radarberendezésekhez és az űrkommunikációhoz nélkülözhetetlenek.

A félvezető-technika fejlődése számos olyan eszköz létrejöttéhez is hozzájárult, amelyek a mikrohullámú rezgéskeltésben, jelerősítésben hoztak újfajta megoldásokat. A félvezető eszközök egy részének karakterisztikájában ugyanis ún. negatív ellenállású szakaszok találhatók (10.126. ábra). E szakaszokban növekvő feszültséghez csökkenő áram tartozik, az eszköz tehát az Ohm-törvénnyel ellentétes viselkedést mutat. Az ilyenfajta eszközökkel általában igen egyszerűen lehet oszcillátorokat készíteni. A soros rezgőkörben elkerülhetetlenül megjelenő ellenállás a veszteségeket jelképezi. A veszteségek elkerülhetetlenek: ohmos ellenállás nélkül nincsenek tekercsek, a kondenzátorok dielektrikuma sem végtelen nagy ellenállású, nem is beszélve arról, hogy elsősorban a magasabb frekvenciájú rezgések óhatatlanul sugároznak a környezetükbe is. Tudjuk, hogy egy meglökött rezgőkör csak folyvást csillapodó amplitúdójú rezgésre képes. Ha azonban a rezgőkörbe be tudjuk iktatni egy negatív ellenállást mutató eszköz negatív ellenállású szakaszát, akkor a két ellenállás eredője zérus lehet, és a rendszer csillapodás nélküli rezgésekre képes.

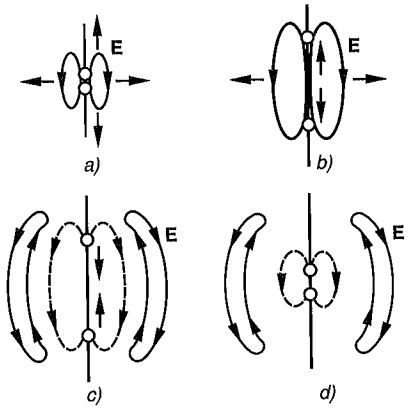
Az ún. *Gunn-diódákkal* igen egyszerűen lehet kis teljesítményű mikrohullámú oszcillátorokat készíteni.

A Gunn-diódák különleges szerkezetűek: a többi megszokott dióda p–n rétegétől eltérően ezek csak különböző szennyezettségű n rétegekből épülnek fel. Ezen diódáknak is van a karakterisztikájukban negatív ellenállású szakasz. Berezgetésükhöz mindössze egy frekvenciamegszabó üregrezonátorra vagy kábeldarabra és egy megfelelő értékű egyenárammal táplált diódára van szükség. (Félreértés ne essék, a mikrohullámú energia nem a semmiből keletkezik, hanem a dióda üzemeléséhez használt egyenfeszültségű telep energiájából. Energiaforrás nélkül az ilyen oszcillátorok sem működnek!)

10.7.3.4. Adóantennák

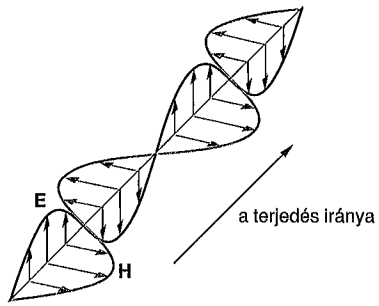
Az adóantennák, antennarendszerek célja a rádiófrekvenciás teljesítmény jó hatásfokú átalakítása elektromágneses hullámokká, és e hullámoknak a kívánt irányba történő kisugárzása. Az adóantennák szinte kivétel nélkül fémből készülnek, alakjuk igen változatos. Kiképzésük legfontosabb jellemzőit a kisugárzandó frekvencia szabja meg. Már említettük, hogy az antennák geometriai méreteinek el kell érniük vagy meg kell haladniuk a hullámhossz nagyságrendjét.

Az adóantennák és vevőantennák között elvi különbség nincs. Az adóantenna is képes hullámok vételére, és egy vevőantenna is sugározhat. Természetesen egy vékony huzalból készített vevőantenna nem alkalmas nagy áramok elviselésére, így nagyobb teljesítményt nem is lehet kisugározni vele. Az adóantennák általában költségesebb, gondosabb konstrukciók, a vevőantennák viszonylag olcsóbbak. Ne feledkezzünk azonban meg arról, hogy az adóantennát mindössze egy példányban kell csak elkészíteni!



10.127. ábra

Az antennák működésének megértésében kulcsszerepe van a félhullám hosszúságú dipólsugárzó ismeretének (lásd még a 10.3. szakaszt), a 10.127. ábra erre utal. A dipólsugárzó nem más, mint két, közös tengelyű, árammal táplált egyenes vezetőszakasz. Az oszcilláló áram hatására leváló hullámokat az ábrán láthatjuk, ezek az adótól elegendően távol már a 10.128. ábra szerinti síkhullámként viselkednek.

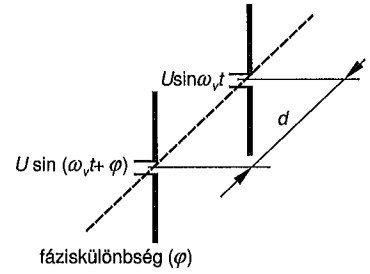


10.128. ábra

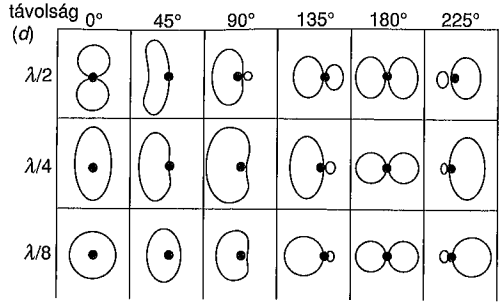
Nagyon fontos az antenna sugárzási karakterisztikájának tervezése, ismerete. A dipólus – tengelye felől nézve – körszimmetrikusan sugároz (az azonos intenzitású pontok egy körön helyezkednek el). A dipólus tengelyének irányába nem sugároz.

Általában a dipólus sugárzási terének alakja technikai célokra nem megfelelő. Ha pl. csak egy kitüntetett irányba akarunk hullámokat küldeni, a nem kívánt irányba történő sugárzás energiapazarlás.

A sugárzási tér alakja több sugárforrás egyidejű alkalmazásával is módosítható. A teret mind a sugárforrások közötti távolsággal, mind pedig az egyes sugárzókat tápláló nagyfrekvenciás jelek egymáshoz képesti fázisának változtatásával befolyásolhatjuk. A 10.129. ábrán két dipólusból épített rendszer látható; a dipólusok közötti távolság, valamint az antennákat tápláló jelek fáziskülönbségének függvényében kialakuló sugárzási képek egy részletét látjuk (10.130. ábra).



10.129. ábra



10.130. ábra

Vegyük észre, hogy a geometriai elrendezés módosítása nélkül is lehet a sugárzási karakterisztikát változtatni. E lehetőség igen nagy jelentőségű. (Így válik lehetővé a légtér letapogatása álló helyzetű antennával, ezért lehetséges völgykatlanba telepített, óriás felületű mikrohullámú teleszkópantennának a „mozgatása" a völgykatlan mozgatása nélkül stb.)

Az antennák igen fontos jellemzője az ún. antennanyereség. Ez azt fejezi ki, hogy az antenna bizonyos irányba mennyivel hatékonyabban sugároz, mint a körszimmetrikusan sugárzó dipólus. Meghatározásához megmérik, hogy egy dipólsugárzó táplálásához – egy adott távolságban előírt térerősség létrehozásához – mekkora teljesítmény szükséges. Majd a vizsgált antennarendszert a mérési pont felé irányítják, és meghatározzák, hogy ugyanakkora térerősséghez mekkora teljesítményt kell betáplálni ebbe az antennába.

Mivel a rádióhullámok hullámhossztartománya nagyjából az 1 km-től a milliméterig terjed, ennek megfelelően az antennák mechanikai kialakítása is igencsak különböző. A hosszúhullámú sugárzók általában nagyméretű fémtornyok, fémoszlopok; a meghatározott irányba sugárzó rövidhullámú antennarendszerek nagyobb méretű fémkeret- és fémhálórendszerek; az ultrarövid-hullámú adóantennák egy részén jól láthatók a dipólsugárzók, más részük „furcsán" hajtogatott fémvázas ketrec benyomását kelti. A mikrohullámú antennák dipólusai mögé fémből készült parabolatükrök kerülnek. A tükör átmérője a hullámhossz sokszorosa, így ebben a tartományban a geometriai optika törvényeinek alapján lehet visszaverő rendszereket (tükröket) tervezni.

Az adóantennák tengelyének irányával megszabják a hullámok polaritását is. Egy függőleges tengelyű dipólsugárzó függőleges síkú elektromos térerősséget hoz létre. (Az E vektor síkját tekintik a hullám polarizációs síkjának.) Ha a dipólsugárzót vízszintes helyzetbe állítjuk, a hullám vízszintes polarizációjú lesz. A polarizáció módosításával közeli frekvenciákon dolgozó adóállomásokat lehet jobban szelektálni, illetve a jelvisszaverődésen alapuló jelterjedés körülményeit befolyásolni.

Befejezésként talán nem felesleges felhívni a figyelmet arra, hogy az antennák (és üregrezonátorok) esetében a fémek már nem ekvipotenciális felületek. A fém különböző pontjai között pillanatonként igen jelentős feszültségkülönbségek lehetnek, ugyanígy a fémek bizonyos pontjai között áramok folyhatnak, amelyek sok esetben nem a fémben, hanem fém felülete mentén az ún. eltolási áramban folytatódnak.

10.7.3.5. Az elektromágneses hullámok terjedése

A valóságos rádióhullámok nem vákuumban terjednek, hanem olyan közegben, amelynek tulajdonságai lényegesen módosítják pályájukat. Ha a hullám egyik közegből egy másikba érkezik, a határfelületén visszavert hullám keletkezhet, illetve a hullám iránya megváltozik. Természetesen a közeg csillapító tulajdonságú is lehet, amely a hullám energiáját folyamatosan felemészti.

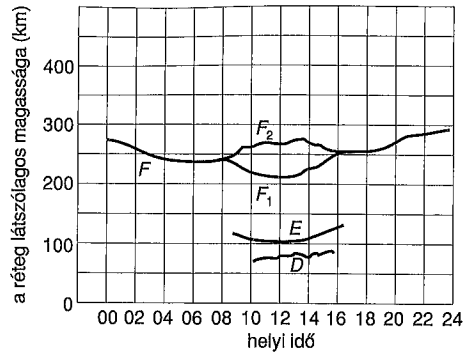
A hullámterjedést két dolog befolyásolja lényegesen: a Föld, valamint a Földet körülvevő, ionizált atomokat tartalmazó rétegek, övek.

A Föld igazából sem nem dielektrikum, sem nem vezető, hanem a kettő közötti átmenet. Tulajdonságai erősen függenek a környezet nedvességtartalmától. A sós tengervíz például eléggé jó vezetőnek tekinthető, amelyről az elektromágneses hullám jól visszaverődik. Természetesen a száraz sivatagról is visszaverődnek a hullámok, csak jóval kisebb mértékben.

A Föld permittivitása és vezetőképessége felelős az elsősorban kisebb frekvenciákon (hosszúhullám, középhullám) kialakuló ún. *felületi hullámokért.* Az antennák által kisugárzott hullám egy része a Föld felületéhez közel, mintegy ahhoz hozzátapadva terjed, lehetővé téve azt, hogy középhullámú és hosszúhullámú műsorszóró adókkal viszonylag nagy területet lehessen „beteríteni".

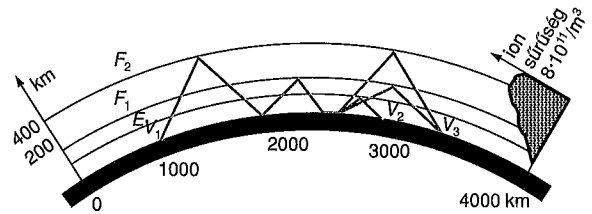
A felületi hullámokkal ellentétben az ún. *térhullámok* könnyűszerrel elérhetik a Földet körülvevő ionizált zónák valamelyikét. E zónák a földfelszín felett különböző magasságban helyezkednek el, és tulajdonságaik erősen függenek a napszaktól is. Ionizáltsági fokuk függ továbbá az évszaktól is, valamint a naptevékenység mértékétől. (Egy napkitörés hosszabb-rövidebb időre a rövidhullámú vételt szinte lehetetlenné teszi.)

A 10.131. ábrán a rétegek magasságáról és előfordulási idejükről kapunk tájékoztatást. Az F_1, és F_2 rétegek teszik lehetővé a nagy távolságú rövidhullámú és nagyfrekvenciás összeköttetéseket az éjszakai órákban. A nappali órákban ugyanezt a lehetőséget az E réteg teremti meg. A D réteg erősen elnyelő tulajdonságú, e réteg megszűnése ad módot a középhullámú nagy távolságú rádiózásra az esti, éjszakai órákban.



10.131. ábra

Az ionizált rétegek tulajdonságainak megismerésével váltak lehetővé a nagy távolságú rádió-összeköttetések. A 10.132. ábra azt illusztrálja, hogy az ionizált rétegekről való – egyszeres vagy többszörös – visszaverődés miként eredményezheti a jóval a horizonton túli rádiózást. Az ábra arra is utal, hogy a V_3 vevőantennára esetleg többféle úton terjedő hullámok is kerülhetnek, természetszerűleg valamilyen fáziskülönbséggel. Ha a visszaverő rétegek magassága nem állandó, akkor ez a fáziskülönbség változhat, a rövidhullámú vétel ismert ingadozásait (fading) eredményezve.



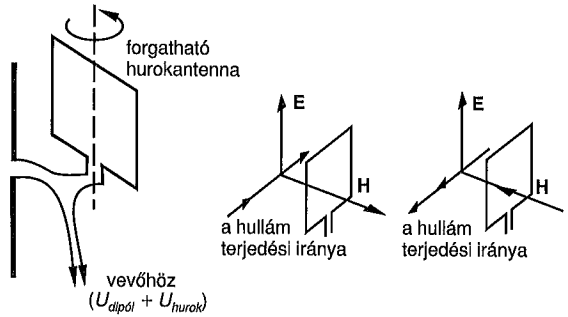
10.132. ábra

Meg kell említenünk azt is, hogy az elektromágneses hullámok terjedési közege sokszor aktív, ugyanis maga is kelt elektromágneses hullámokat. Ezek részben a légkör elektromos jelenségein (villámok, egyéb kisülések), részben az ionoszféra dinamikus tulajdonságain alapulnak, és felelősek a rádióvételt zavaró „sercegésekért", füttyszerű hangokért és még sok egyéb zavaró jelenségért.

Arra is érdemes felfigyelni, hogy a kommunikációs műholdak létrejötte és egyre gyakoribb használata lényegesen befolyásolja az előbb elmondottakat. Természetesen nem a fizikai tények és ismeretek változtak, hanem a technikai feltételek, amelyek újabb, érdekesebb alkalmazásokhoz vezettek.

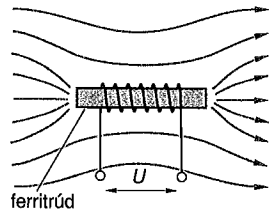
10.7.3.6. Vevőantennák

Mint mondottuk, a vevő- és adóantennák között lényeges elvi különbség nincs, minden antenna egyformán alkalmas hullámok vételére vagy keltésére. Néhány érdekes vonásra azonban felhívjuk a figyelmet, ezek az antennafogalom jobb megértéséhez is vezetnek.



10.133. ábra

Az antenna vételi iránykarakterisztikája megegyezik sugárzási karakterisztikájával, ugyanis a vevőantenna is irányítható. Erre sokszor szükség is van: pl. a jelzaj viszony javításakor. Nagyon egyszerű és gyakran alkalmazott irányérzékeny antennát mutat a 10.133. ábra. Itt egy függőleges antenna és egy *hurokantenna* jelét adják össze, és eredményül intenzív irányfüggést mutató rendszerhez jutnak. (A dipólantenna a függőleges elektromos térerősséggel arányos kimenő jelet ad.) A hurokantenna – vagy *keretantenna* – azonban a hullám mágneses térerősségével arányos kimenő jelet kelt. A dipólantenna kimenő jele nem függ a hullám haladási irányától, a hurokantennában azonban az ellenkező irányban haladó hullám mágneses tere ellenkező fázisú feszültséget indukál. Ha a dipólantenna és a hurokantenna kimenő jele azonos nagyságú, akkor az egyik irányból érkező hullámokra egyáltalán nem lesz érzékeny, az átellenes irányra azonban annál inkább.

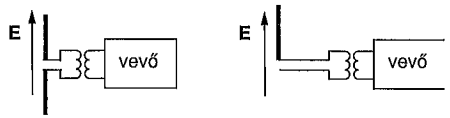


10.134. ábra

A keretantenna napjainkban gyakran alkalmazott változata az ún. *ferritantenna.* Zsebrádiókban, mobiltelefonokban, helymeghatározó készülékekben alkalmazzák őket. Ez az antenna lényegében nem más, mint egy tekercs, amelyet különleges ferromágneses anyaggal töltenek ki (10.134. ábra).

A tekercsen áthaladó mágneses tér változása feszültséget kelt, ez szolgáltatja a rádió bemenő jelét. Bizonyára mindenki megfigyelte, hogy a ferritantennával ellátott középhullámú rádió egy meghatározott irányba állítva elhalkul, esetleg a vétel teljesen megszűnik. Ennek az a magyarázata, hogy ha a ferritantenna a mágneses erővonalakra merőlegesen áll, nem keletkezik benne indukált feszültség. Az antenna hatásos felületének növelését szolgálja a ferritből készített rudacska. A ferrit ferromágneses anyagot tartalmazó kerámia. A mágneses tulajdonságú szemcsék szétválasztása az örvényáramú veszteségeket csökkenti, enélkül nem kaphatnánk a tekercs kimenetén mérhető rádiófrekvenciás feszültséget.

Röviden szólnunk kell a legegyszerűbb antennákról, a rádiókból kinyúló *teleszkopikus botantennákról* vagy a még ennél is egyszerűbb megoldásról, a rádió antennabemenetéhez kötött, „levegőben lógó" huzaldarabról. A 10.135. ábra két részből felépített függőleges antennát mutat a készülékhez csatlakozó áramkörrel.

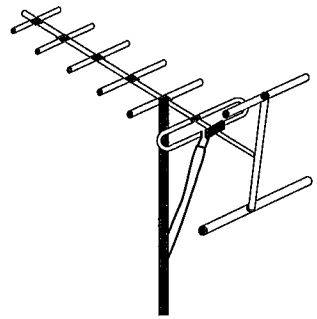


10.135. ábra

Szándékosan nem nevezzük dipólantennának, mivel mérete biztosan nem éri el a hullámhossz negyedét, illetve felét. Ha a sugárzás elektromos tere függőleges irányú, akkor különböző magasságokhoz különböző elektromos potenciálérték tartozik, ezek között természetszerűleg indulhat áram. Amennyiben tehát az antenna alsó részét egy nagyobb vízszintes fémdarabbal helyettesítjük, az antenna függőleges része és vízszintes szakasza között az elektromágneses sugárzás hatására áram keletkezik, mivel magasságuk különböző.

A 10.135. ábra vízszintes fémrészét általában a rádió-vevőkészülék alaplapja és áramkörei alkotják. A fenti meggondolásból értelemszerűen az adódik, hogy a jó vételi lehetőségeket teremtő egyszerű antennának általában minél hosszabbnak kell lennie, és irányának meg kell egyeznie a venni kívánt hullám elektromos térerősségének irányával.

Természetesen néha a vevőantennák is bonyolultabb felépítésűek. A 10.136. ábrán – gyakran látható ismerősként – egy tévé-vevőantennát láthatunk. Az antenna lényege tulajdonképpen az ún. hajlított dipólus, amelyik előtt és mögött elhelyezett fémdarabok a hullámok szűrését, illetve a dipólus irányába történő visszaverését szolgálják. Az antennakarakterisztika erősen irányított, az antennanyereség jelentős, azaz egy egyszerű dipólantennához képest ezzel a megoldással kb. 10-szer nagyobb vett jelhez jutunk.

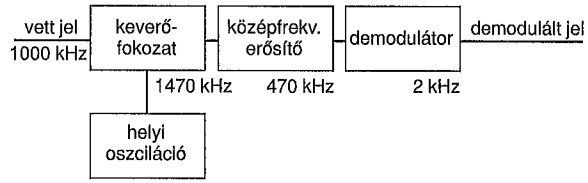


10.136. ábra

Mikrohullámú jelek vételéhez általában fém reflektáló felület előtt elhelyezett antennákat használnak. Köznapi elnevezésük: parabolaantenna. A parabola ugyanis olyan tulajdonságú, hogy a tengelyével párhuzamosan beeső hullámokat a fókuszpontban egyesíti. Mivel a parabolaantennák tányérjának mérete a hullámhosszúság sokszorosa, igen erősen irányítottak lehetnek.

10.7.3.7. A vett jelek demodulálása

A vevőantennáról érkező jelek amplitúdója általában kicsiny (0,1 μV...10 mV közötti értékű). Mivel a demodulátor-áramkörök hatékony működéséhez néhány száz mV – esetleg 1–2 V – nagyságú jelek szükségesek, a jelek *erősítést* igényelnek. A jelek erősítését célszerű olyan frekvenciatartományban végezni, amelyben viszonylag olcsó, megbízható erősítőket lehet működtetni. A 10.137. ábra egy meglehetősen általánosnak tekinthető vevőkészülék vázlatát mutatja. Az antennáról érkező jel egy ún. keverőfokozatra kerül, a helyi oszcillátor jelével együtt. Ez a fokozat tulajdonképpen a már említett szorzóáramkörű, amely a bemenetére jutó jelek frekvenciaösszegével és különbségével arányos jelet is előállít.



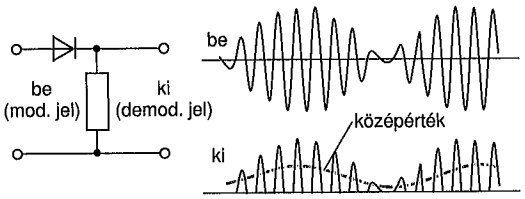
10.137. ábra

Általában az alacsonyabb, a különbségi frekvenciájú jel kerül az ún. középfrekvenciás erősítőbe, amelynek kimenetén a vett jel jelenik meg – esetleg felerősítve –, és a helyi oszcillátor frekvenciájával módosítva.

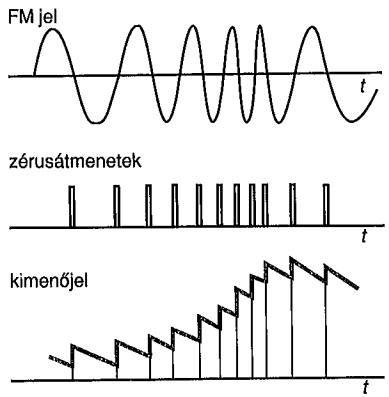
Egyszerű példaként a 10.137. ábrán feltüntetett számok ezt a gondolatot illusztrálják. Tegyük fel, hogy a vett jel 1 MHz frekvenciájú, amely 2 kHz-es hangfrekvenciás jellel van modulálva. Ha a helyi oszcillátor frekvenciája 1470 kHz, akkor a 470 kHz-re hangolt középfrekvenciás erősítő kimenetén 470 kHz-es, 2 kHz-cel amplitúdómodulált jelet kapunk. (Ez az ún. *szuperheterodin* vagy egyszer transzponált vevő lényege.) Ezt vagy hasonló megoldást nagyon sok helyütt alkalmaznak, pl. TV-készülékekben, műholdas vevőkben stb.

A *demodulálás* az a folyamat, amelynek során az adó oldalon beadott, átvinni kívánt jelet (hang, kép, jelzések stb.) eredeti formában kapjuk vissza. Nyilvánvaló, hogy a különböző modulációtípusokhoz más és más áramköri megoldásokat alkalmaznak, a demoduláláshoz is megfelelő eljárásokat kellett találni.

Az *amplitúdómodulált jelek demodulálásának elvét* és egyszerű áramköri vázlatát is a 10.138. ábrán láthatjuk. A dióda csak az egyik – jelen esetben pozitív – polaritású jelszakaszokat engedi tovább. Az ellenálláson kialakuló hullámalak középértéke a moduláló jel változásait mutatja.



10.138. ábra



10.139. ábra

A *frekvenciamodulált jelek demodulálására* sokfajta érdekes, bonyolult működésű áramkört fejlesztettek ki. Mi most röviden egy nagyon egyszerű elvet ismertetünk, amely az integrált áramkörök megjelenése óta sűrűn kerül gyakorlati alkalmazásra.

A 10.139. ábra frekvenciamodulált jelet mutat. A jel feldolgozásához a zérusátmenetek mindegyikéhez egy rövid impulzust rendelnek hozzá. Mindegyik impulzus ugyanakkora töltésmennyiséget továbbít egy kondenzátorból és ellenállásból álló áramkörbe. Az áramkör feszültsége arányos lesz az időegységre eső impulzusok számával, vagyis lényegében a bemenetre érkező jel frekvenciájával.

10.7.4. Képek előállítása és továbbítása

A templomok freskóitól a fényképezésen át a mozifilmekig, majd a televízión keresztül a manapság elterjedt számítógépes képfeldolgozó rendszerekig hosszú és érdekes út vezetett.

A képérzet keletkezéséhez egyrészt látószervre, másrészt a szem által detektált jelek emberi idegrendszeri feldolgozására van szükség. Ebben a fejezetben megpróbáljuk összegezni a televízió és az elektronikus képalkotás, -továbbítás technikai alapjait.

A képek szemlélésénél az emberi látásnak a következő, „átlagoló" (integráló) képességeit használjuk.

- Térbeli átlagolás. Sok, megfelelő méretű és tónusú egyedi pontból álló képen az alkotóelemek nem tűnnek különállónak. Az újságok „fényképei" sok elemi pontból tevődnek össze, mégis egységes benyomást keltenek. A szemben lévő fényérzékelő idegsejtek is véges geometriai méretűek, ahogy az ingereket az agyba továbbító ideghálózatok elemei is.
- Színátlagolás. A nagyon sok fajta lehetséges színárnyalat többsége előállítható három alapszín – kék, zöld és piros – összegeként. Ezeket a komponenseket nem észleljük külön, hanem pl. szépia színt látunk.
- Időbeni átlagolás. Ha szemünk által látott különböző képek megfelelő sebességgel változnak, összefüggő mozgásérzet alakul ki bennünk. A moziképeket nem látjuk vibrálónak, ha másodpercenként kb. 24 képet vetítenek. (Tulajdonképpen a 24 képből 48-at „csinálnak", mivel minden képet kétszer vetítenek ki, hogy a vibrálásérzetet csökkentsék.)

A televíziós rendszerek kidolgozásánál ezeket a tulajdonságokat alaposan kihasználták. (Az állatok általában nem „látják" a tévé képeit, nem is reagálnak rá.)

10.7.4.1. Televíziózás, fogalmak, szabványok

A képfeldolgozás lényege: lencserendszerekkel a háromdimenziós világ kétdimenziós képét állítjuk elő, ezt valamilyen módszerrel-eszközzel „letapogatjuk", a fényerősség lokális változásait továbbítjuk vagy tároljuk, hogy egy későbbi időpontban felhasználhassuk.

Meg kell ismerkednünk néhány alapvető, az idők folyamán szinte kötelező szabvánnyá módosult fogalommal, amelyek a televízió kifejlődésének köszönhetők.

A televíziórendszerek a képet soronként *balról jobbra és felülről lefelé* mozgva tapogatják le (úgy, ahogy pl. egy könyvoldalt olvasunk). Ez a tradicionális eljárás még az újabb eszközök többségében is megmarad.

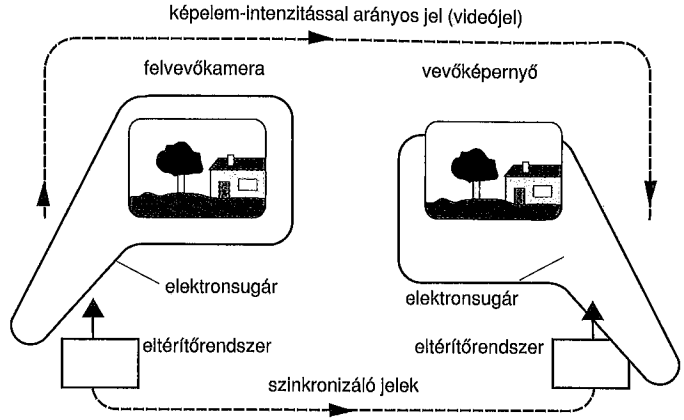
A másodpercenkénti *képváltások* számát általában az elektromos hálózati frekvenciához igazítják. Így Magyarországon az 50 Hz-es hálózatnak megfelelően másodpercenként 50 félképet, 25 teljes képet továbbítanak. (A félkép ügyes televíziós trükk: a teljes képet úgy továbbítják, hogy először a páratlan sorokat, majd a párosakat.)

A kép minőségét jelentősen befolyásolja, hogy mekkora az egy képhez tartozó *sorok száma*. Ezt a számot általában 500 és 800 közötti értékre választják a különböző országok, illetve világrészek televíziós szabványai. Nálunk ez az érték 625.

A képváltások frekvenciájával (f_k = 25 Hz) és az n = 625 sorral tulajdonképpen megszabtuk a rendszer időbeni viselkedését. A 10.141b. ábrán látható képrészlet az ún. „sakktábla", a fekete-fehér képrészletek maximális sűrűségű változása. Egy teljes kép $n \cdot f_k$ = 15 625 sorból áll, ezért tehát egy képsor továbbításához $1/(n \cdot f_k)$ = 64 μs idő áll rendelkezésre.

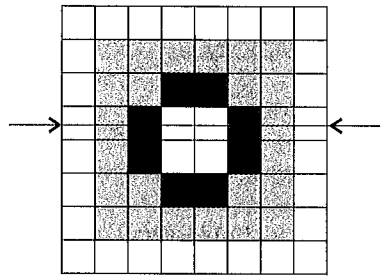
A *pixel* (picture element) nagysága szabja meg, hogy monitor- vagy tévéképernyőn mekkora az a legkisebb méret, amely még külön kijelölhető, „címezhető". Az egymás melletti pixelek tehát különböző intenzitásúak, színűek lehetnek. A tévéképcsöveken és számítógép-monitorokon ez általában 0,2–0,3 mm geometriai méretű. Minél kisebb ez a szám, annál finomabb a *képfelbontás*. Ne feledkezzünk meg arról, hogy a pixel a kék, zöld, piros színek kibocsátására is alkalmas, tehát a képmegjelenítők igen finoman strukturált eszközök. (Érdemes megnézni nagyítóval egy fehér színű képernyőt, hogy megérezzük, milyen finom technológiai lépések lehetnek a háttérben.)

Könnyen megbecsülhetjük, hogy egy tévékép hány pixelből tevődik össze. A függőleges felbontást a kép sorainak száma szabja meg. A vízszintes felbontásnak legalább ilyen pontosnak kell lennie (illetve jobbnak, mert a kép szélességi mérete 4/3 arányban nagyobb), tehát hozzávetőleg 400–600 ezer pixelből áll egy kép. A pixel fogalmat a felvevőkamerák jellemzésére is felhasználják.

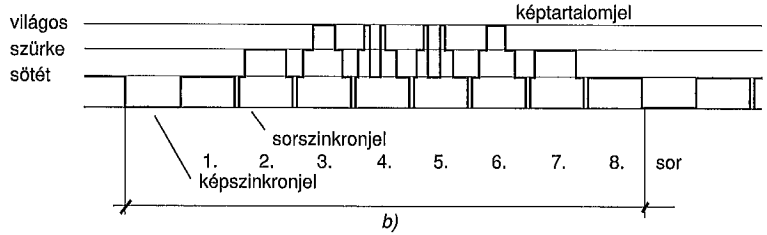


10.140. ábra

Hogyan alakul ki egy televíziós kép továbbításához alkalmas jelsorozat? A videofelvevőből természetesen el kell vinnünk az egyes pixelek intenzitás- (fényesség) értékeit, valamint az ún. szinkronizáló jeleket is. (10.140. ábra) Ez utóbbiak jelölik ki a kép, valamint az egyes sorok kezdő időpontjait. Ezt a jelegyüttest komplex videojelnek hívják.



a)



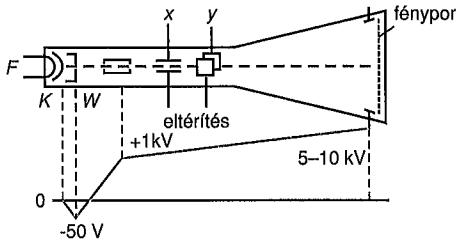
b)

10.141. ábra

A 10.141. ábrán ennek a folyamatnak a meghatározó részleteit látjuk. A „kép" az áttekinthetőség kedvéért csak 8 × 8 pixelből áll. Vannak rajta világos, szürke és sötét részek is, ezek a kimenőjelben intenzitásarányosan, pozitív polaritással jelennek meg. Az ábrát a már említett módon tapogatjuk le, a bal felső sarokból lefelé. A szinkronjelek negatív polaritásúak. A képszinkronjel időben hosszabb, a sorszinkronjelek rövidebb impulzusokból állnak. Ezeket szétválogatni viszonylag egyszerű elektronikus áramkörökkel lehet.

Ha a videokamera színes jelek feldolgozására is alkalmas, akkor a komplex videojelnek ki kell egészülnie a színinformációval is. Már láttuk, hogy a pixelméret kb. 0,24 mm nagyságú, ebben a három alapszín mindegyikét el kell helyezni. A sor időtartamon belül mintegy ezer pixel található, vagyis egyetlen színes pixelrész felvillantásához 64 μs /1000 = 64 ns időtartam pontossággal kell a pásztázó elektronsugárral „céloznunk".

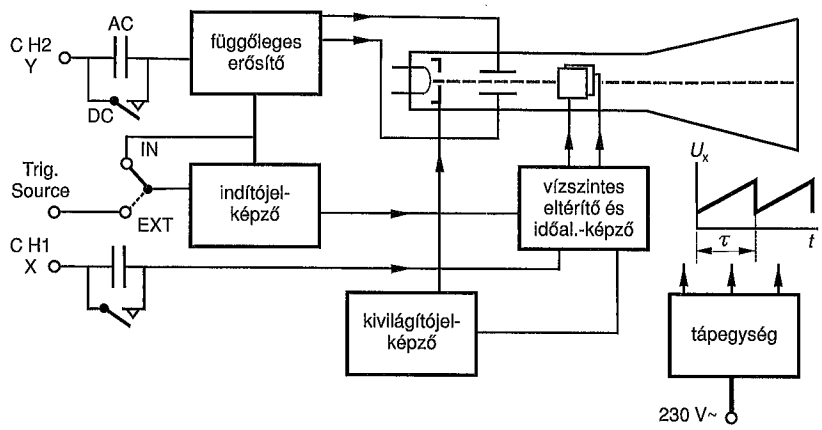
A televíziózás kifejlődésének korában mind a képfelvevőkben, mind pedig a képcsövekben főszerepet kapott az elektronsugár. Az ún. elektronágyúkból kiinduló cérnavékony elektronsugár eltérítésére elektromos, illetve mágneses tereket alkalmaztak. Elektromos eltérítés esetén a szögeltérítés mértéke korlátozott, ha a képernyő nagyméretű, akkor ez csak hosszú képcsővel lehetséges. Ezért lettek a klasszikus tévévevők nagy térfogatúak, bumfordiak.



10.142. ábra

A 10.142. ábrán egy klasszikus katódsugaras képcső vázlatos felépítése látható. A katód közelében elhelyezkedő elektróda az ún. elektronágyú áramát változtatja, így a képpontok különböző intenzitással világíthatnak. Az elektronsugár eltérítését elektromos tér (feszültség) biztosítja. Az újabb megoldások ennél sokkal összetettebbek. Ezeknél az eltérítést az ún. mágneses eltérítő tekercsek áramával szabályozzák. Három elektronágyút tartalmaznak, és az egyes színeknek megfelelő elektronsugarak fókuszálás, eltérítés és gyorsítás után érkeznek meg a képernyőre. A képernyő megfelelő pontjain olyan anyagokat helyeznek el, amelyek a beeső elektronok hatására három különböző színű fényt bocsátanak ki. Ezeknek a pontos működését egy fémből készült maszk teszi lehetővé, mely csak a rajta található lyukak helyén engedi át az elektronokat.

Meg kell említeni, hogy az elektroncsöves kijelzők nemcsak a tévékben szerepelnek, hanem az elektronikus áramkörök fejlesztésénél nélkülözhetetlen oszcilloszkópokban is. Ezek felépítésének vázlata a 10.143. ábrán látható.



10.143. ábra

Az általában időben lefutó/változó jelalakok a kijelző függőleges kitérését vezérlik, míg a vízszintes eltérítés lineáris időlefutású. Ez utóbbinak a frekvenciája igen széles határok között változtatható, és mód van egyetlen vízszintes eltérítés kiváltására is. Így lehetséges az összetett jelalakok vizsgálata is, pl. a komplex videojelek egyes részleteinek elemzése is

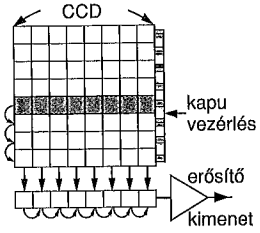
10.7.4.2. A képfelvevők és képmegjelenítők újabb típusai

A félvezetőgyártás szédítő iramú fejlődése magával hozta a hagyományos megoldások meghaladását. Új típusú képfelvevők és képmegjelenítők keletkeztek, ezekről fogunk kissé elnagyolt, lényegi ismereteket közölni.

A képfelvevő lényegében egy összetett félvezető-struktúra, amely csak fejlett technológiájú helyeken gyártható. A feldolgozandó fény egy szilíciumlapkára esik, amelyik eléggé bonyolult részletekből tevődik össze. Ennek elemi része (pixel) egy-egy kis fotodióda. Ha erre fény esik, akkor vele arányos elektromos töltést kelt, amelyet egy kis kondenzátor tárol. Ezek a kis kondenzátorok a szomszédjaikkal elektronikus kapukkal összeköttetésben lehetnek. Sőt a rendszer arra is képes, hogy ezek a töltések együttesen, vezényszóra mozgathatók.

A 10.144. ábra mutatja ezt: itt a kis kondenzátorok viszonylag egyszerűen kötődnek egymáshoz, ezért – egy elektromos taktusjel hatására – egyik a másiknak a

töltését át tudja venni, miközben a saját töltését már továbbította. Ezt a rendszert elterjedten (még magyarul is) CCD-nek nevezik, ami a Charge Coupled Device (töltéscsatolt eszköz) név rövidítése. A CCD tehát képes arra, hogy amolyan hurkatöltőként a kép vízszintesen elhelyezkedő pixeleinek a töltéseit egymás után a kimenetre tolja, ahol ezekből feszültség–idő függvény keletkezik, amelyet már könnyebb kezelni.



10.144. ábra

Világosnak látszik, hogy színes képek esetén a rendszer bonyolódik, mert lényegében mindegyik színkomponenssel külön kell foglalkozni. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy minden pixel fölé színszűrőt kell készíteni. Sajnos, ezzel az eszköz töltésgenerálási hatékonysága csökken, így a kép valamelyest zajosabb lesz. Ennek javítására már vannak bevált módszerek: pl. az, hogy az emberi szem spektrális érzékenységének jellege miatt a zöld színt nagyobb súllyal kell figyelembe venni, mint a kéket és pirosat. Az egyes pixelek tényleges színtartama csak a saját és szomszédjai színértékeinek átlagából állapítható meg.

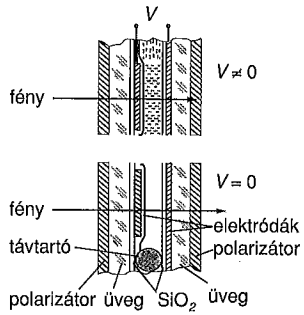
A megszokott kézikamerákban is ilyen képátalakítók vannak. Felbontásuk: 2–10 megapixel. A CCD-k geometriai mérete 0,5–1,5 cm, csak ekkora oldalélű képet kell a félvezető eszközre leképezni, vagyis jóval egyszerűbb/olcsóbb lencserendszerek is megfelelők lesznek.

Ezeket a CCD típusú felvevőrendszereket nagyon sok helyütt használják: mobiltelefonokban, kézikamerákban, filmes kamerák kiváltására, csillagászatban, számítógépekhez kötött – a webtelefóniát lehetővé tevő – információátvitelre stb.

Lapos képcsövek, megjelenítők. Elsőként a folyadékkristályos megjelenítőket (LCD – Liquid Crystal Device) vizsgáljuk meg.

Nagyon sokat érő felfedezés, határozott előrelépés volt a folyadékkristályok kezelése, használatba vétele. Vannak olyan anyagok, amelyek molekulái bizonyos körülmények között folyadékként, máskor pedig kristályként viselkednek. Ha a két állapot például olyan módon különböztethető meg, hogy az egyik átengedi a fényt, a másik pedig nem – és ezt a változást egy elektromos jellel tudjuk létrehozni –, akkor igen sok helyütt használható eszközhöz juthatunk.

A 10.145. ábra egy folyadékkristályos elem vázlatos felépítését mutatja. (A folyadékkristályok tulajdonságairól, elméletükről lásd a 29.5. fejezetet.)



10.145. ábra

A kijelzőben több réteg kapcsolódik egymáshoz, hogy a kívánt működés elérhető legyen. Röviden csak annyit jegyzünk meg, hogy a folyadékkristály fázisátmenete nemcsak az átláthatóságot változtatja meg, hanem az átható fény polarizáltságának mértékét is. Ennek változtatása egy olyan elektródával oldható meg, amely nagyon vékony, átlátszó fémrétegként van rápárologtatva a folyadékkristályt elválasztó üvegfelületre. Ezen rétegek feszültségének (V) a változtatásával lehet a fény útját megnyitni vagy megszakítani. Érthető, hogy a legelső kézikalkulátorokban miért volt ez áttörést jelentő megoldás. A kijelző egyes rétegei között ugyanis nem folyik áram, tehát nem fogyasztott állandó elektromos teljesítményt, csak a kapacitások feltöltése és kisütése volt energiaigényes.

A sok-sok pixeles színes monitorokhoz és képcsövekhez még hosszú út vezet. Ezekben a pixelek geometriai méretei 0,2–0,3 mm – tehát igen részletes felbontásra van szükség, amit csak a félvezető technikában kidolgozott lépésekkel lehet elérni. Mindenekelőtt meg kellett oldani az LCD elemek három alapszínű – folyamatosan változtatható – fényátvitelét, radikális csökkentést igényelt a hibás pixelek aránya, jócskán kellett javítani a kontrasztarányon (a legfényesebb és legsötétebb pixelek arányán). A folyadékkristályok átkapcsolási idejével is sokat kellett foglalkozni, hogy a televíziós képek gyors váltásait is követni lehessen a megjelenítővel. Számos ötletet igényelt a sok pixel közötti huzalozások, vezérlések optimális tervezése, kivitelezése stb.

A folyadékkristályos megjelenítők jóval kevesebb elektromos energiát fogyasztanak, mint az elektroncsöves változatuk, sokkal kisebb a térfogatigényük is. Ezek tették lehetővé a hordozható „laptop" számítógépek megjelenését és elterjedését.

Plazmamegjelenítők. A neongáz ismert tulajdonsága, hogy abban elektromos feszültség hatására pirosas-lilás fényű kisülés (plazma) keletkezik. Ez évtizedek óta

sok helyütt felhasznált jelenség. A fénycsőkészítési tapasztalat tanított meg bennünket arra, hogy e kisülések képesek bizonyos anyagokat (ún. fényporokat) intenzív fénykibocsátásra gerjeszteni (a közismert fehéres fényű fénycsövekre kell gondolnunk, ahol az ultraibolya fénnyel gerjesztett fényporkeverék világít).

Ezen elven a piros-kék-zöld színű pixelek sokasága is megvalósítható, ha ezt a mikroelektronika eszközeivel készítjük el. Természetesen gondoskodni kell arról is, hogy az alapszínek intenzitását is változtatni kell, hogy a teljes színskálát előállíthassuk. Két megoldás közül választhatunk:

- az ún. impulzusszélesség-moduláció, ahol az egyes színek nem azonos ideig világítanak. Itt kihasználjuk az emberi szem „tehetetlenségét" – amit már említettünk.
- beépíthetünk a fény útjába folyadékkristályos intenzitásszabályozót is, ekkor elektromos jellel tudjuk vezérelni a három alapszín relatív értékeit.

A plazma- és a folyadékkristályos megjelenítők alapjában megváltoztatták a klasszikusnak nevezhető elektronsugaras képcsövek helyzetét. Ezek ugyanis 2–4 cm vastagságúak, felületük általában nagyobb, energiafogyasztásuk határozottan kisebb, mint elődjüké, élettartamuk pedig jóval hosszabb. A rajtuk megjelenő képek nyugodtabbnak tűnnek, szinte egyáltalán nem villódznak. Persze vannak hátrányos jellemzőik is: pl. a lapos képcsövek igazában csak akkor adnak jó képet, ha a képfelületet „szemből" nézzük, oldalról nem igazán élvezhetők.

Külön említést érdemelnének a nagy fényerejű, nagy felületű képet előállító kivetítő berendezések (pl. előadótermekben, közlekedésirányításban stb.). Ezek a fizika újabb eredményeit hasznosítják, például a lézertechnikát is alkalmazzák bennük.

10.7.5. Mágneses lebegő rendszerek

Hazánkban és egész Európában elterjedt mondás: „lebeg, mint Mohamed koporsója". Honnan származik, és van-e ennek valami, ma is érthető fizikai háttere?

A mondás nem a mohamedán hit valamely leírt, vagy hagyományként őrzött részeként lett ismertté. A szólásmondás eredete sokkal inkább fűződik a Talmudhoz és az európai középkori zsidó iratokhoz, mint bármi egyébhez. Ezekben nem is ritkán szerepel a „lebegés". A lebegés objektumaként előfordul itt az aranyborjú, a király koronája, Áron és Mózes koporsója stb.

Mohamed koporsója kicsit részletesebb, technikailag is használhatóbbnak tűnő leírást kapott: „...a vaskoporsó a mekkai templomban a négy sarokban elhelyezett mágnesek segítségével függ". Ez már szinte fizikailag értelmezhető kép: vaskoporsót tartanak lebegve a mágnesek. Persze nem tudjuk, hogy a mágnesek a koporsó alatt vagy felett voltak elhelyezve... Az idézet a 15. századból való, amikor a

jelenségek valóságos vagy legalább modell szintű kísérleti igazolása még egyáltalán nem tartozott a tudományos igazság kritériumai közé.

Ne ütközzünk meg azon sem, hogy aranytárgyak mágneses lebegéséről hallunk. Tekintsük ezt a kreatív fantázia túlzásainak. De vegyük észre azt, hogy a gravitáció „nyűgétől" való megszabadulás évszázadok óta kísérti az emberiséget.

Samuel Earnshaw neve elkerülhetetlen hivatkozásként tűnik fel azokban az írásokban, amelyek a lebegéssel vagy részecskecsapdákkal foglalkoznak. Ma már köztudott, hogy tisztán elektrosztatikus vagy mágneses lebegést nem lehet létrehozni, ez olyan jelentős alapelv, ami számos amatőr feltalálónak, kísérletezőnek szegi manapság is a kedvét.

Earnshaw erre vonatkozó írása 1842-ben jelent meg, „On the nature of molecular forces which regulate the constitution of the luminoferous ether". [A molekuláris erőkről, amelyek a fénytovábbító éter felépítését szabályozzák.] A cikk címe ma kissé nehezen érthető: ezzel ő korának egyik nagy problémájára kívánt válaszolni.

Earnshaw azt kereste, hogy az éter alkotóelemei (molekulái) lehetnek-e stabil egyensúlyi állapotban, ami az izotróp fényterjedés triviális feltételének tűnt. A fény által keltett hullámszerű „zavarokat" csak egy stabil egyensúlyi helyzetet elfoglaló részecskékből álló rendszer képes továbbítani. Az elektrosztatikus, mágneses és gravitációs terek $1/r^2$ típusúak, vagyis a távolsággal négyzetesen csökken az intenzitásuk.

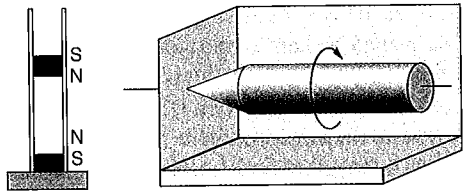
Earnshaw arra következtetett, hogy az éter részecskéi között nem csupán $1/r^2$ jellegű erőknek kell hatniuk, mivel ezek a tér egyetlen – nem kihasználható – pontjában hoznak létre stabil egyensúlyi feltételeket. Ez azt jelenti, hogy a részecskét egyensúlyi helyzetéből kimozdítva, az nem tér oda vissza. Felesleges tehát hosszadalmasan kísérletezni a ma már könnyedén elérhető kerámiamágnesekkel, elektromosan feltöltött papírdarabkákkal, hogy azok valamelyikét ténylegesen lebegő helyzetbe lehessen tartani.

Earnshaw vonatkozó tételét viszonylag könnyen lehet igazolni a vektoralgebra közismert tételeinek segítségével. Ez azonban meghaladja ennek a könyvnek a feltételezett ismeretanyagát.

Az elektromos – mágneses – gravitációs lebegésre vonatkozó Earnshaw-elvet ma már számos módon ki lehet játszani. Ezekből többet meg fogunk ismerni. Azonban a 19. század közepén ilyen lehetőségek aligha juthattak Earnshaw eszébe. A tanulmány jóval Maxwell előtt íródott, akkor, amikor az elektromosságtan törvényszerűségei még nem alkottak összefüggő ismereteket, és az elektron fogalma, koncepciója is ismeretlen volt.

10.7.5.1. Látszólagos lebegések

Számos játékot, demonstrációs eszközt vásárolhatunk, amelyek egyes részei lebegnek, pontosabban lebegni látszanak. Persze ezek nem igazán lebegnek: valamilyen módon a környezet szolgáltatja a egyensúlyi feltétel valamelyik erőhatását: rudacska, fonalszál, támasztási felület.



10.146. ábra

A 10.146. ábrán két példát mutatunk. A bal oldalon üvegcsőbe helyezett ferromágneseket látunk, amelyek átmérője kicsit kisebb, mint az üvegcsőé. A cső akadályozza meg, hogy a hengeres alakú mágnesek átforduljanak. A felső látszólag lebeg az alsó felett, ha a dipólusok ellenkező irányúak. Ezt az elrendezést a mágnesek remanenciájának kvalitatív mérésére is fel lehet használni.

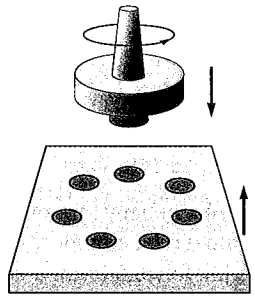
A jobb oldali ábrán egy ceruza alakú tárgy „lebeg" oly módon, hogy hegye csak egy függőleges falszakaszhoz támaszkodik. A ceruzában és az alsó lapban permanens (ferrit- vagy kerámia-) mágnesek vannak ügyesen elhelyezve úgy, hogy a ceruza stabil helyzetben tartását az az erő biztosítja, amelyik a ceruza hegyén keresztül lényegében vízszintesen hat. A ceruza viszonylag könnyedén „megtalálja" egyensúlyi helyzetét. Érdekes, hogy ha a ceruzát megperdítjük, akkor hegye körül forgásban marad, meglepően hosszú ideig, mert a súrlódási erő igen kicsi lehet.

(Érdemes elgondolkozni, hány és milyen módon elhelyezett mágnes szükséges ennek a látványos játékszernek az elkészítéséhez.)

10.7.5.2. Valódi lebegések

Elsősorban meg kell említenünk a Levitront. Ez nagyon érdekes játékszer a valódi mágneses lebegés illusztrálására. Egy alaplapban kör alakban elhelyezve hengeres kerámiamágnesek vannak elhelyezve, azonos irányultsággal. Ezek mágneses tere – a laptól valamekkora magasságban – kehely alakú lesz. Ebbe a térbe kerül be egy elegendően nagy szögsebességgel forgó mágneses dipól pörgettyű, ellenkező irányúan mágnesezve.

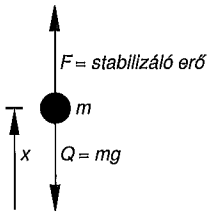
A forgó pörgettyű igyekszik megőrizni forgástengelyét, ez biztosítja, hogy a forgó mágnes a kehely alakú mágneses térben lebeghet (10.147. ábra). Az egész kis készülék – bár a lebegést hosszú percekig fenntartja – nagyon kritikus beállítást, vízszintezést, a pörgettyű súlyának pontos beszabályozását, továbbá nehézkes mechanikai indítási feltételeket kíván. A röviden vázolt működési elv látszólag könnyen követhető, a fizikai viszonyok és a stabilitás feltételei nagyon összetett számításokat igényelnek.



10.147. ábra

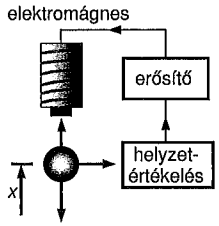
Szabályozott (szervo-) rendszer. A 10.148. ábrán egy m tömegű – legalább részben ferromágneses anyagból készített – golyót látunk, függőlegesen x magasságban. Ha szabadon hagynánk, súlya hatására lefelé gyorsulna. Ha azonban a stabilizáló erő felfelé hat, és ez akkora, hogy a golyó súlyát éppen kompenzálja, akkor egy helyben maradhatna.

$$mg - F_{EM}(x) = 0.$$



10.148. ábra

Ne feledkezzünk meg arról, hogy az F erő szükséges nagysága az (x) helyzetnek is függvénye. Fontos azt is látni, hogy az elektromágnes és a ferromágneses objektum közötti erőhatás – a tekercs állandó gerjesztőárama mellett – ugyancsak függ a golyó függőleges helyzetétől, vagyis a golyó és az elektromágnes relatív helyzetétől. Ez a függés korántsem lineáris.



10.149. ábra

Egészítsük ki ezt az elrendezést néhány, ma már egyszerűen megvalósítható, megszokottnak tekinthető elemmel (elvi elrendezés: 10.149. ábra).

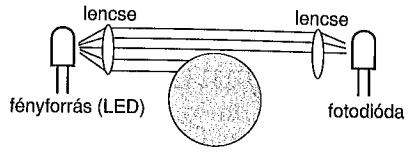
Valamilyen módszerrel mérjük folyamatosan a golyó $x(t)$ helyzetét, hogy függőleges magasságával arányos elektromos jelet kapjunk. Ezzel a jellel vezérelhetünk egy elektromos erősítőt, amelyik az elektromágnes áramát állítja be. Ha a golyó lefelé mozdul el, akkor a helyzetdetektorból származó jel az erősítő kimenő áramát növeli, ez megnöveli a felfelé ható erőt, és szerencsés körülmények között a golyó lényegében változatlanul lebegő helyzetben maradhat.

Van azonban egy kis bökkenő. A helyzetdetektor a lebegtetni kívánt objektum helyzetét méri, és ennek időben változásait detektálja. A szabályozóhurkot úgy kell megterveznünk, hogy az elektromágnes által keltett erőhatás az objektum gyorsulását tartsa zérus értéken. Az elektromágnes keltette erőhatásnak tehát nem az objektum helyzetével kell arányosnak lennie, hanem annak időbeni gyorsulásával. Az erőhatás vezérléséhez tehát az $y(t)$ függvény kell előállítanunk.

$$y(t)=\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Az időfüggvények kezelésére – integrálására, differenciálására – az elektronikus eszköztár kifejezetten alkalmas. Kicsit leegyszerűsítve: ehhez az erősítőbe kell beiktatnunk megfelelő kondenzátorokat vagy induktivitásokat.

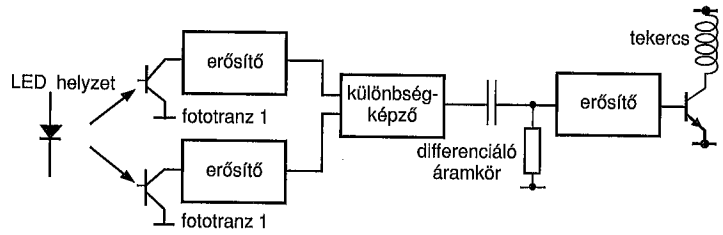
Ezzel a meggondolással egy elektronikus elemekből felépített, visszacsatolt szabályozó rendszert hoztunk létre (ezt szokás szervorendszernek is nevezni). Ennek stabilitási viszonyai jól követhetők, és tervezési módszerei ma már nagyon alaposan ki vannak munkálva.



10.150. ábra

A 10.150. ábrán egy nagyon egyszerű felépítésű helyzetdetektort láthatunk – itt a lebegő gömb (tárgy) helyzete szabályozza, hogy a fényforrásból mekkora mennyiség jut a fotodetektorra.

A 10.151. ábra egy elektronikusan stabilizált rendszer vázlatát mutatja. Ennek lényege, hogy a helyzetdetektor jelével az elektromágneses tekercs áramát lehessen vezérelni. A LED fénye a helyzetdetektor működését biztosítja. A fényt fototranzisztorok alakítják elektromos jelekké. A differenciáló áramkör a már említett, fontos része a rendszernek. A háttér detektálása elsősorban azért szükséges, hogy a környezeti, változó fényhatások zavarását csökkentse.

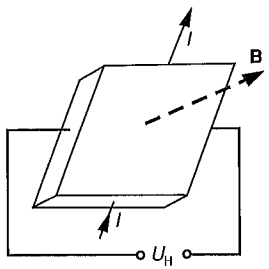


10.151.ábra

Kvalitatíve könnyen belátható, hogy az ilyen módon felépített rendszerben egy ferromágneses tárgy – legalábbis elvben – ténylegesen stabilizáltan lebeghet.

A fentiek szellemében épített egyszerű modellkísérlet részletesebb méreteit és működését tekintjük át. Ez a demonstrációs modell nem egy gömböt, hanem egy 20–40 grammos mágnesezhető csavart képes lebegve tartani. Az elektromágnes egy vastag csavarra tekert 100 menetes tekercsből áll. Az elektromágnes és a lebegő csavar közötti távolság 2–15 mm. A helyzetdetektor természetesen most a lebegő csavar helyét detektálja.

A kereskedelemben ilyen játékszerű eszközök sok helyütt kaphatók. Ezek kicsit másként működnek. A helyzet detektálásához egy „igen erős" permanens mágnes van beépítve a lebegő tárgyba. Az elektromágnes közelében Hall-generátorok (pontosabban Hall-elemek) vannak elhelyezve. Ezek a félvezető elemek a permanens mágnes terét érzékelik, és azzal arányos elektromos feszültséget keltenek. A rendszer a fentebb leírtak alapján működik.



10.152. ábra

A Hall-elemek felépítése és szerkezete nagyon egyszerű: 10.152. ábra. Ha egy félvezető lapkát mágneses térbe helyezünk, és erre merőleges irányban elektromos áramot folyatunk keresztül rajta, akkor a Lorentz-törvény szerint a lapka két, a mágneses térre merőleges oldala között feszültségkülönbség keletkezik. Megjegyezzük, hogy ez az eszköz igen sok helyütt használható. Segítségével lehet kefe nélküli villanymotorokat készíteni (pl. a PC processzorának hűtőmotorjában), vagy fémes kontaktus nélküli végálláskapcsolókat. A mai gépkocsik gyújtásjeladója, illetve az üzemanyag-befecskendező jeladó rendszere is ezen alapul.

Példák az elektronikusan előállított lebegés gyakorlati hasznáról. 1. Képzeljük el, hogy egy visszacsatolt szabályozórendszerben kicsit megnöveljük a stabilizálandó objektum súlyát! Ha ez a változás a szabályozási tartományon belüli, akkor természetesen megnövekszik az elektromágnes árama, hogy a súlynövekedést kompenzálja. Vagyis kezünkben van az egyszerű elektronikus súlymérési lehetőség. Nagyon érzékeny analitikai mérlegekben használják is ezt a megoldást.

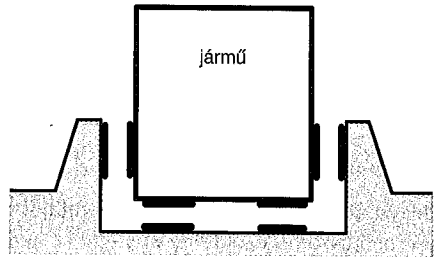
2. Tegyük fel, hogy egy repülőgép repülési viszonyait kell tanulmányoznunk a tervezés vagy építés fázisában! Ezt általában modellkísérletekben végzik, ahol a gép kicsinyített mását egy szélcsatornába helyezik el. Triviálisnak tűnik, hogy ilyenkor a repülőgépet felfüggesztő huzalok a mérési eredményt jelentősen meghamisíthatják. Háromdimenziós mágneses felfüggesztést alkalmazva a huzalok kiküszöbölhetők. További haszon, hogy a stabilizáló áramkörök a modellrepülőgépre kifejtett erőhatások mérésére is nagy pontosságú, közvetlen lehetőséget teremtenek.

3. Sok helyütt van szükség arra, lehetőleg súrlódásmentes csapágyazást alkalmazzunk. Egy ilyen példa: az uránium két közel azonos tömegű izotópjának szétválasztása. Erre a hagyományos centrifugális szeparálás nem nagyon hatékony. Más lesz a helyzet akkor, ha igen nagy fordulatszámú ultracentrifugákat használunk. Vákuumban forgó, súrlódásmentesen csapágyazott rendszerrel azonban ez is megoldható.

Az itt leírt alkalmazások általában költségesek, nagyon kifinomult gyártástechnológiai hátteret igényelnek.

Lebegő vonatok. Beszélnünk kell egy idetartozó témáról is: hogyan fokozták a sínhez kötött vonatok sebességét. Eléggé triviális, hogy elsősorban a súrlódást kellett csökkenteni: a több száz (majdnem 600) kilométer óránkénti sebességhez ez múlhatatlanul szükséges.

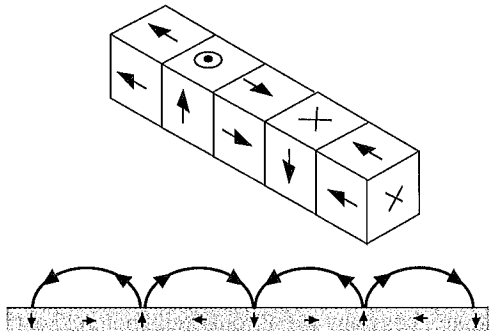
A súrlódás csökkentésének kézenfekvő megoldása, hogy egy kicsit a levegőbe emeljük a vonatot. Ennek egy változata az, hogy szárnyszerű elemekkel nagy mozgási sebességeknél mintegy légpárnás „repülőgépet" csinálunk belőle. A másik megoldás, a mágneses lebegtetés gondolata is régóta kísértette a konstruktőröket. Könnyen átlátható, hogy egy egész vonat milliméterekkel történő felemelése hatalmas erőket – így hatalmas mágneseket is – igényel. A taszító hatásnak a sínek és a vonat között kell ébrednie, közben gondoskodni kell arról, hogy a vonat ne térjen le a sínekről. Ez látható igen vázlatosan a 10.153. ábrán.



10.153. ábra

Nagyon nagy mágneses teret előállítani leginkább szupravezetőkkel (lásd a 24.6. fejezetet) szokás, mivel ezeknél az áramot szinte semmi sem limitálja. Persze ezzel együtt jelentős számú járulékos technológiai probléma is fellép: pl. a hűtőrendszer üzemeltetése. Azonban mindenképpen meg kell említenünk egy érdekes jelenséget.

A 10.154. ábrán permanens mágnesekből álló egyszerű elrendezést látunk. A jelek egyértelműen mutatják a mágnesek pólusainak elhelyezkedését. Ez azzal a furcsa tulajdonsággal rendelkezik, hogy a mágneses tér csak az egyik oldalon jelenik meg (az ábra alsó része). A mágnesek ilyen elrendezésével sok helyütt lehet találkozni. A szabadelektron-lézer ezen alapul, a fizikusok gyorsító berendezéseiben is szerephez jut. Furcsaságként: így lehet olyan, jégszekrényre „cuppantható" mágneslapot készíteni, amelyiknek csak az egyik fele tapad az általában ferromágneses anyagból álló ajtóra, oldalfalra. Persze ez kicsit szokatlan tulajdonságú, technikai jelentősége eléggé kicsi.

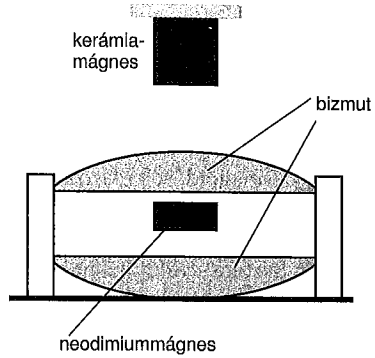


10.154. ábra

Fontosabb azonban az, hogy mozgás közben az ilyen mágnes egy a közelében elhelyezett vezetőhurokban olyan áramot indukál, mely magát a mágnest taszítja, tehát felemelheti, vagy tovább mozdíthatja. Ezzel mód nyílik egy szokatlan elvű, lineáris haladó mozgást előállító rendszer előállítására. Visszatérve a lebegő vonathoz, ehhez most egy kocsi tartozik, amelyikben ilyen furcsán elrendezett elektromágnesek kapnak helyet. Ha a vonat egy sebességküszöböt elér, akkor felemelkedik a sínről, és a továbbiakban a saját maga által keltett indukciós áramok lökik tovább.

Diamágneses lebegés. Az anyagok diamágneses tulajdonságai csak újabban váltak ismertté. (az Earnshaw-tétel ezekre az anyagokra nem vonatkozik.) A mi szempontunkból a diamágneses anyagok a mágneses tér hatására a paramágneses anyagokhoz képest fordítva viselkednek: ezek taszítják a mágneses teret. Bár minden anyagnak van diamágneses tulajdonsága is, ezt azonban az anyagok többségében a paramágnesség elnyomja. A mellékelt táblázat néhány diamágneses, para- és ferromágneses anyag szuszceptibilitását (lásd a 26.1. fejezetet) mutatja.

Anyag	Szuszceptibilitás
Víz	$-1{,}2\cdot10^{-5}$
Bizmut	$-16{,}6\cdot10^{-5}$
Grafit (*)	$-45{,}0\cdot10^{-5}$
Alumínium	$2{,}2\cdot10^{-5}$
Vas	220



10.155. ábra

A 10.155. ábra nagyon egyszerű elrendezést mutat, amelyiken két bizmutlap között egy kisméretű mágnes lebeg. (A bizmut az ólomhoz hasonló tulajdonságú anyag, nem mérgező, sok helyütt, pl. vadászfegyverek sörétjének is használják.) A jelenség könnyen magyarázható: a ferromágnest az alsó és a felső bizmutlap egyaránt taszítja, egy távolabb elhelyezett permanens mágnes a lebegés pontos helyének beállítására szolgál. A dolog lényege: a lebegő mágnesnek nagy remanens mágneses értékűnek kell lennie. Ez manapság könnyen elérhető a kereskedelemben kapható neodímiummágnesekkel.

A fenti táblázatból látszik, hogy a víz is diamágneses anyag. Az emberi test is zömmel ebből áll. (Extrém, nem valós példaképpen: az embernek taszítani kéne minden mágnest...) Ha a két bizmutlapot a hüvelykujj és a mutatóujj helyettesíti, akkor közöttük egy kis neodímiummágnes lebeghet. Mivel a víz diamágneses szuszceptibilitása elég kicsi, ezért a jelenség csak igen intenzív mágneses térben lehetséges.

Hasonló effektus érhető el kisebb élőlények (rovarok, békák) vízburokban történő lebegtetésével, ugyancsak igen erős mágneses terekben. Az élőlények általában túlélik ezt a megpróbáltatást.

A diamágneses lebegések egyik esete, hogy egy szupravezető állapotú anyag fölé elhelyezett mágnes is lebegni tud. A szupravezető állapot az anyagot lényegében ideális diamágnessé teszi, a fentiek alapján a jelenség könnyen értelmezhető.

A leírt diamágneses jelenségek technikai jelentősége elég kicsi, csak bemutatásokra – demonstrációra – használják őket. Ennek oka, hogy az effektusok kicsike térrészben következnek csak be, és általában különleges környezeti körülmények között.

10.7.6. Nagy rendszerek

10.7.6.1. Földrajzi helymeghatározás (GPS)

A földfelszín adott helyének pontos meghatározása évszázadok óta ismert, kutatott probléma. Gondoljunk arra, hogy a kontinensekre kiterjedő hajózás sem fejlődhetett volna ki erre vonatkozó megoldások hiányában. A 20. században megjelenő elektronikus eszközök alapvetően megváltoztatták az addigi, lényegében csillagászati elveken alapuló gyakorlatot. Lényegében az elmúlt évtizedben kialakított GPS (Global Positioning System – földi helymeghatározó rendszer) valaha elképzelhetetlen pontossággal oldja meg a helymeghatározás gondját.

Ez a rendszer az amerikai Védelmi Minisztérium kezdeményezésére alakult ki, de lehetővé teszi széles körű polgári célú felhasználását is. Jelenleg folyik egy ettől független európai megoldás tervezése, megvalósítása is.

Nagyon vázlatosan megkíséreljük ezen összetett technikai objektum elvének leírását.

A Föld körül mintegy harminc műhold kering ismert magasságban és pályán. Ezek mikrohullámú jeleket küldenek a Föld irányába. A jelek tartalmazzák az egyes műholdak geometriai helyzetének adatait, valamint a műholdakon elhelyezett órák által szolgáltatott pontos időt. A működés alapja: a Földön elhelyezkedő vevő veszi ezeket a jeleket, ezekből meghatározza a választott műholdak és a kérdéses helyszín távolságát, majd az adatokból kiszámítja a vevőkészülék helyzetét.

A távolságmérés azonban csak áttételesen valósítható meg elektronikus eszközökkel. Valójában csak időkülönbséget tudunk mérni, amiből – a fénysebesség ismeretében – következtethetünk a távolságra. (A fénysebesség értéke ismert: ebben a környezetben azt kell írnunk, hogy pontosan 300 m/μs. A 300 méter emberileg belátható távolság, a mikroszekundum azonban az ember által nem érzékelhetően rövid időtartam. Szerencsére elektronikai – impulzustechnikai – módszerekkel ebben az időtartományban viszonylag könnyen tudunk mérni, adatokat kiértékelni.)

Könnyen kiszámolhatjuk, ha távolságot akarunk mérni – mondjuk 3 m pontossággal – egy jelforrás és egy detektor között, akkor a 300 m egytized részének megtételéhez szükséges időtartamot kell megállapítanunk, vagyis a μs századrészét, 10 ns-ot. (Az elektronika jelenlegi helyzete ennél pontosabb lehetőségeket is biztosít.)

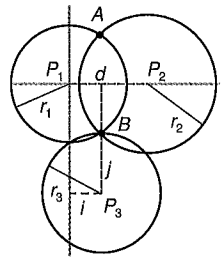
A talán legfontosabb kulcsszó az órák pontossága. Éppen ennek biztosítására a műholdakon ún. atomórákat helyeznek el. 1967 óta a másodperc definíciója: 9 192 631 770 teljes ciklusa a cézium alapállapotú rezgései egyik átmenetének. Azóta a cézium alapú „atomórák" az idő- és frekvenciamérések alapjai. Pontosságuk, illetve stabilitásuk eléri a 10^{-13}–10^{-14} értéket. Ez azt jelenti, hogy egy ilyen pontosságú óra kb. 300 000–3 000 000 év alatt késik vagy siet egyetlen másodpercet. A földi egyszerű vevőkészülékekben csak viszonylag olcsó kvarckristályok szolgálnak az időmérés alapjául.

A GPS három komponensből tevődik össze:

- a műholdakból (amelyek az idő- és helyjeleket sugározzák),
- a földi kiszolgálórendszerből (amelyek adásra és vételre is alkalmasak),
- a vevőkészülékből (amelyek csak veszik a műholdak jeleit).

A viszonylag nagy számú, 24 ezer kilométer magasságban keringő műhold azért szükséges, hogy a Föld bármely helyén lévő vevőkészülékkel (majdnem) bármikor lehessen legalább négy műhold jeleit detektálni. A műholdak órái nagy pontossággal össze vannak hangolva. Erről hatalmas méretű földi kiszolgálórendszer gondoskodik, valamint arról is, hogy mindegyik műhold aktuális geometriai helyzetét figyelje és közölje a műholddal, amelyet az folyamatosan sugároz a Föld felé, a műholdak ugyanis nincsenek erre a funkcióra kiképezve.

A vevőkészülék antennája nem irányított, egyszerre több műhold jele is éri. Ezeket azonosítani kell, és közülük kell kiválogatni azokat, amelyek az adott hely meghatározásához leginkább megfelelőek. A vevőkészülékben elhelyezett (cél)-számítógépnek nagyon sok feladata van, aligha tétlenkedhet.



10.156. ábra

Ennek kell kiszámítania a bejövő jelek alapján a helyszín koordinátáit. Az eljárás vázlatát a 10.156. ábrán láthatjuk. Tegyük fel, hogy három távolságadat (r_1, r_2, r_3) áll rendelkezésre az időmérésekből. Egyetlen adat egy körpályát jelöl ki, két adat a két távolsági kör metszéspontjait adja meg. Három adat a hely azonosítását teszi lehetővé. (Valójában – a pontosság fokozása érdekében – egy helymeghatározáshoz négy műholdat használnak. Ezek közül három a látóhatár széle körül legyen, a negyedik pedig az égbolt legmagasabb helyének – zenit – közelében.)

A rendszer adatokat közöl arról is, hogy a jelterjedést mennyire befolyásolja az ionoszféra és a troposzféra egyes rétegeinek állapota, mert ez az idő–távolságmérés hibáját okozza. Abból is zavar származhat, ha valamelyik földi tárgyról is verődik vissza a műhold jele, mert ez az időkésés bizonytalanság forrása lehet. A számítógépnek ezeket a hibákat is kompenzálnia kell.

Magától értetődő, hogy a GPS rendszer lehetővé teszi a vevő mozgási sebességének és a mozgás irányának meghatározását is. Ennek jelentőségét lehetetlen túlbecsülni.

A helymeghatározó rendszer bevonult a mozgó közlekedési eszközök (autók, hajók, repülőgépek stb.) alapfelszereléseibe. Jól használható a térképészetben is, a földmérésekben, a kontinensek egymáshoz képesti elcsúszásának vizsgálatában stb. Nem szabad megfeledkeznünk a kifejlesztését kezdeményező katonai alkalmazásokról sem.

10.7.6.2. Mobil telefónia (GSM)

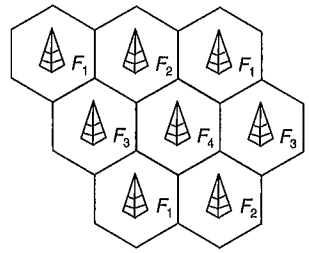
A mobil telefónia az egyik legelterjedtebb technikai rendszer. Több mint kétmilliárd készülék üzemel 230 államban és területen szétosztva. Ez a rövid ismertetés mindössze az egyértelműen a fizikához kapcsolódó alapokról szól. A technikai részmegoldások igen nagy számúak és esetenként igen összetettek, ezért ezekre nincs módunk kitérni.

A mobilrendszerek csak akkor képesek működni, ha minden készülék betartja a nemzetközileg előírt szabványokat. (GSM – Global System for Mobile Communications.) E szabványok miatt (is) a mobilrendszerek többsége 900 és 1800 MHz-en működik, vagyis igen nagy frekvencián, mikrohullámon. A hullámhossz hozzávetőleg 15–20 cm.

Ezek a hullámok általában csak egyenesen terjednek, ami annyit jelent, hogy a készülékeknek látniuk kell egymást. Persze a mobilkészülék és a földi állomások között nem kell mindig szó szerint érteni a láthatóságot: a hullámok a fák között áthatolhatnak, az épületek falai is átengedik azokat, csak a földalatti alagútjába nem jutnak le. Mindenki tapasztalhatja, hogy fémdobozokban (autók, egyéb járművek) szintén lehetséges a működésük. (Nincs semmi baj a Faraday-kalicka tanult működésével, de az ilyen hosszúságú hullámok 5–10 cm átmérőjű lyukon is képesek „bebújni". A mikrohullámú sütők előlapján a lyuggatott fémlap lehetővé teszi, hogy a belső teret megfigyelhessük, de azokon a kicsi lyukakon az elektromos tér nem képes kijönni.)

A mobiltelefon-rendszer a mozgatható készülékből és egy nagy hálózatból áll. A hálózat a földön szétszórva adó-vevő készülékeket tartalmaz, mindegyik eleme csak a közvetlen közelében elhelyezkedő mobileszközökkel tud kapcsolatot teremteni. A hálózatot úgy kell kialakítani, hogy a terület lefedettsége minél nagyobb legyen. Ezért látunk például Budapest területén számos épület tetején GSM antennarendszereket.

Tegyük fel, hogy egy autóban utazunk, és használjuk a mobil telefont. Ha kiérünk abból a zónából, ahol a jeleinket fogadó/küldő állomás van, akkor automatikusan át kell kapcsolódnunk a következő, szomszédos zónához.



10.157. ábra

A 10.157. ábrán található vázlat erre utal. A működési terület „sejtszerűen" lefedett. Természetesen a valóságban ezek a zónák korántsem ilyen szép, szabályos hatszögek. Ez az „átváltás" tulajdonképpen a mobilkészülék vételi frekvenciájának átváltásával jár. Az ábrából az is kiderül, hogy az egyes működési frekvenciák többszörösen is felhasználhatók, ha elegendően nagy közöttük a geometriai távolság. A mobiltelefon-rendszerek nem csupán a fenti elven működhetnek. Az elektronika lehetőséget teremt arra is, hogy minden területi adó ugyanazt a frekvenciát használja, azonban mindegyiket egy kódsorozat különbözteti meg egymástól.

A mobiltelefon-rendszerek információátviteli – lényegében modulációs – eljárásai igen változatosak, ezért a beszélgetések biztonsági szempontból eléggé védettek. Házi, amatőr eszközökkel lehallgatásuk nem nagyon lehetséges.

IV. RELATIVITÁSELMÉLET

11. Előzmények

11.1. A klasszikus mechanika és a Galilei-transzformáció

A klasszikus (newtoni) mechanika törvényei eredeti megfogalmazásukban csak „gyorsulásmentes", tehetetlenségi vonatkoztatási rendszerekben, ún. *inerciarendszerekben* érvényesek. Az inerciarendszerben minden magára hagyott (más testek által nem „befolyásolt") test megtartja nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú, egyenletes mozgását; ez a tehetetlenség törvénye (lásd a 2.1.1. pontot).

Az inerciarendszer gyakorlati megvalósítása bizonyos nehézségekbe ütközik a mindenütt jelenlevő, leárnyékolhatatlan gravitációs kölcsönhatás miatt. Ezeket a nehézségeket egy kicsiny méretű térrészben (lokálisan) le lehet küzdeni oly módon, hogy egy szabadon mozgó laboratóriumban (pl. egy űrállomáson) végezzük a kísérleteinket. Ebben a gyorsuló (nem inerciális) vonatkoztatási rendszerben éppen olyan tehetetlenségi erők lépnek fel, amelyek kiegyenlítik a gravitációs erők hatását. Úgy is „kikapcsolhatjuk" a gravitációt, ha vízszintes, nagyon csúszós jégpályán, vagy légpárnás asztalon vizsgáljuk a testeket; ekkor – legalábbis a vízszintes síkban – „súlytalanságot", erőmentes (szabad) mozgást észlelünk.

Ha egy vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, akkor a hozzá képest egyenes vonalú, egyenletes mozgást végző *valamennyi* koordináta-rendszer ugyancsak inerciarendszer. Ezek az inerciarendszerek minden szempontból egyenértékűek, közöttük semmiféle fizikai kísérlettel, méréssel nem tudunk különbséget tenni. Ez a *Galilei-féle relativitáselv*.

Az inerciarendszerek egyenértékűségét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a különböző (inerciális) vonatkoztatási rendszerek egyikét sem tekinthetjük kitüntetettnek a többihez képest, egyikről sem mondhatjuk, hogy az az *abszolút nyugvó* koordináta-rendszer. A testek mozgásánál csak az egymáshoz viszonyított, *relatív* sebességeknek van fizikai jelentése, abszolút sebességet (sem abszolút nyugalmat) a klasszikus mechanika keretei között nem lehet kimutatni.

Ha az egyik, K-val jelölt inerciarendszerben egy pontszerű test $\mathbf{r}$ helyvektorának koordinátái x, y és z, akkor a K-hoz képest állandó $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0xy}, v_{0z})$ sebesség-

gel mozgó K' vonatkoztatási rendszerben a test helyvektora $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t$, azaz a koordináták között fennáll az

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - v_{0x} t, \\ y' &= x - v_{0y} t, \\ z' &= z - v_{0z} t \end{aligned}} \tag{11.1}$$

összefüggés. Ezekben a képletekben t a mindkét koordináta-rendszerben használatos *univerzális* időparamétert jelöli. A klasszikus, newtoni fizikában fel sem merül, hogy az idő mérőszáma az egyik inerciarendszerben esetleg más lehet, mint a másik vonatkoztatási rendszerben. A továbbiak szempontjából fontos, hogy ezt az észrevételt az itt még nem sokat mondó

$$\boxed{t' = t} \tag{11.2}$$

egyenlettel is kifejezzük.

A Galilei-transzformáció (11.1) és (11.2) képleteiből leolvashatjuk, hogy ha egy test sebessége a K rendszerben $\mathbf{v}$, akkor a K' inerciarendszerben a sebesség

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \tag{11.3}$$

a gyorsulás viszont minden inerciarendszerben ugyanakkora:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}.$$

Hasonló módon koordináta-rendszertől független két tetszőleges test relatív helyzete (és távolsága)

$$\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

valamint az ettől függő kéttest-erőhatás is:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}.$$

A 2.1.7.1. pontban láttuk, hogy a Galilei-transzformáció a K-ban érvényes newtoni mozgástörvényeket *változatlan alakban* érvényben maradnak a K' inerciarendszerben is. Emiatt mondhatjuk: az egymáshoz képest egyenes vonalú, egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerek *teljesen egyenértékűek*, közöttük sem elvi megfontolásokkal, sem kísérletekkel nem tudunk különbséget tenni. Ez a *Galilei-féle relativitáselv*.

A Galilei-elv értelmében nincs semmi alapunk valamelyik inerciarendszert (abszolút) nyugvónak tekinteni; csak az egymáshoz viszonyított, *relatív* mozgásoknak van fizikai jelentése. Erre a viszonylagosságra utal a Galilei-elv nevében a relativitás szó, s ezzel a kérdéskörrel, egyes fizikai mennyiségek relatív, mások abszolút voltával fogunk foglalkozni a fejezet további részeiben is.

A relatív – tehát a vonatkoztatási rendszertől függő – fizikai mennyiségek közül nem mindegyik változik olyan egyszerűen Galilei-transzformáció során, mint a helyvektor, illetve a sebességvektor. A mozgási energia például a K rendszerben $E = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2$, a K' rendszerben pedig

$$E' = \frac{1}{2} m\mathbf{v}'^2 = \frac{1}{2} m \left(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\right)^2 = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 - m\mathbf{v}\mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} m\mathbf{v}_0^2 = E - m\mathbf{v}\mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} m\mathbf{v}_0^2.$$

Látjuk, hogy a mozgási energia a két koordináta-rendszerbeli értéke nem csupán egy állandóban különbözik egymástól, hanem még egy olyan tagban is, amely a test sebességétől is és a koordináta-rendszerek relatív sebességétől is függ.

A (11.3) képlet, a *Galilei-féle sebesség-összeadási törvény* a hétköznapi tapasztalattal összhangban helyesen írja le azt a tényt, hogy a testek sebessége függ attól, milyen vonatkoztatási rendszerből nézzük. Általában azokat a fizikai mennyiségeket, amelyek értéke függ a megfigyelő vonatkoztatási rendszerétől, *relatívnak* nevezzük, azokat pedig, amelyek attól függetlenek, *abszolútnak* tekintjük.

A klasszikus mechanikában a testek helyvektora, sebessége, mozgási energiája relatív, de a gyorsulásuk, a rájuk ható erők, továbbá a kiterjedt testek mérete, két test térbeli távolsága, egymáshoz viszonyított sebessége, valamint az idő abszolút.

II.2. A Michelson–Morley-kísérlet

A hullámok terjedését vizsgálva és a Galilei-féle sebességösszeadási törvényt alkalmazva könnyen beláthatjuk, hogy a különböző, egymáshoz képest egyenletesen mozgó koordináta-rendszerekben a hullámok nem minden irányban terjednek ugyanakkora sebességgel. A hanghullámok például abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyből nézve a hullámot „hordozó" közeg, a levegő áll, minden irányban azonos módon, ugyanakkora c sebességgel terjednek. Ha viszont egy megfigyelő a levegő nyugalmi rendszeréhez képest v sebességgel mozog, akkor azt tapasztalja, hogy a mozgásának irányában terjedő hanghullámok sebessége $c - v$, az ellenkező irányban terjedőké pedig $c + v$ lesz. Úgy is fogalmazhatunk: a hang terjedése szempontjából *van* egy kitüntetett koordináta-rendszer, a levegő nyugalmi rendszere. Ezt célszerű *nyugvó* koordináta-rendszernek tekinteni, mert ebben a vonatkoztatási rendszerben a legegyszerűbb (nevezetesen irányfügget-

len) a hullámok terjedése. Gondos méréseket végezve el lehet dönteni, hogy mekkora sebességgel mozog a megfigyelő a hullám hordozóközegéhez képest. (A mérés technikailag igen nehézzé válik akkor, ha v sokkal kisebb, mint c. Ilyenkor a kétféle terjedési sebesség alig tér el egymástól, s ahhoz, hogy a különbségükből a megfigyelő sebességére lehessen következtetni, a mérés igen pontos kell legyen!)

A 19. század végére a fizikusok megismerték az elektrodinamika alaptörvényeit. Maxwell elméleti munkássága és H. Hertz kísérletei nyomán világossá vált, hogy az elektromos és a mágneses mező periodikus változásai hullámszerűen tovaterjednek. Az elektromágneses hullámok (pl. a látható fény vagy a „rádióhullámok") terjedési sebessége a kísérletek tanúsága szerint jó közelítéssel $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

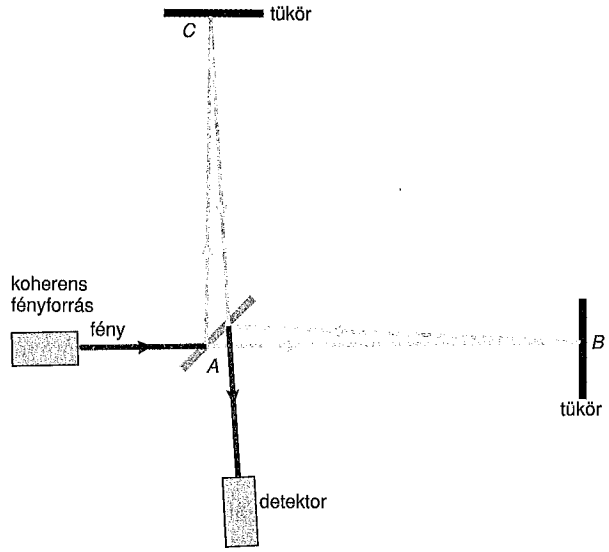
A hangnál tapasztaltakhoz hasonlóan itt is feltehető a kérdés: melyik inerciarendszerben terjed a fény minden irányban ugyanakkora sebességgel, s vajon a földi laboratóriumunk mekkora sebességgel mozog ehhez a kitüntetett vonatkoztatási rendszerhez képest. Az elektromágneses hullámok „hordozó közegét" (vagyis azt az elképzelt, hipotetikus anyagot, amelynek rezgései az elektromágneses hullámok) *éter*nek nevezték el. A klasszikus fizikai érvelés szerint a fény terjedési sebességének függenie kell attól, hogy a mérést végző műszer mekkora sebességgel mozog az éter nyugalmi rendszeréhez viszonyítva. Ha ezt a sebességfüggést gondos mérésekkel meghatározzuk, azokból ki tudjuk számítani, hogy mekkora pl. a Föld sebessége az *abszolút nyugvónak* nevezhető éterhez viszonyítva – gondolták a fizikusok a 19. század végén.

A mérés tényleges elvégzését nehezítette, hogy a fény sebessége sokkal nagyobb, mint a szokásos körülmények között elérhető földi sebességek. Még a Földnek a Nap körüli keringési sebessége (kb. 30 km/s) is mintegy *tízezerszer kisebb* a vákuumbeli fénysebességnél, így a viszonylag kicsiny eltérések kísérleti kimutatására csak nagyon precíz mérésekkel nyílhat lehetőség. Ilyen precíz mérésekre a hullámok fáziskülönbségét kihasználó *interferenciakísérletek* a legalkalmasabbak.

Michelson és Morley amerikai fizikusok (Maxwell elgondolását követve) 1887-ben végezték el világhírűvé vált kísérletüket, amely a relativitáselmélet egyik legfontosabb kísérleti alapját képezi. A 11.1. ábrán vázolt, interferométernek nevezett berendezést állították össze.

Koherensnek tekinthető fényforrásból fény érkezik egy – a fénysugárral kb. 45°-os szögben álló – „féligáteresztő" tükörre, amely a fényt két részre bontja. Mindkét fénysugár visszaverődik egy-egy tükörről, másodszor is elérik a féligáteresztő tükröt, s azon áthaladva, illetve visszaverődve egyesülnek, majd egy fényérzékelő berendezésbe (detektorba) jutnak. A detektorban, amely lehet pl. egy távcső, a két fény „interferál", és a fázisviszonyoktól függően erősíti vagy gyengíti egymást. Az interferencia jellege nagyon erősen függ a fény terjedési sebességétől, illetve annak kicsiny megváltozásától, hiszen ha az egyik fénysugár valamilyen ok miatt csupán a látható fény (mindössze 10^{-15} másodperc nagyságrendű!)

periódusidejének felével később érkezik a detektorba, mint a másik fénysugár, az interferencia jellege éppen az ellenkezőjére változik.



11.1. ábra

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy az interferométer „karjai", vagyis az ábrán látható AB és AC távolságok egyforma nagyok, egyaránt d hosszúságúak. (A valóságban ez általában nem teljesül, de ennek a mérés kiértékelése szempontjából nincs jelentősége.) Ha a mérőberendezés áll az éterhez képest, akkor a fény minden irányban ugyanakkora c sebességgel terjed, és így az A pontban szétváló (azonos fázisú) fénysugarak ugyanannyi $\left(\frac{2d}{c}\right)$ idő múlva érnek vissza a féligáteresztő tükörhöz. Így a fáziskülönbségük továbbra is nulla marad, s a detektorban interferometrikus erősítést észlelünk.

Mi történik akkor, ha a berendezés valamekkora v sebességgel mozog az éterhez képest, mondjuk az AB kar irányában. (Feltehetően $v \ll c$.) Ebben az esetben a fény az AB utat odafelé $c - v$ sebességgel, visszafelé $c + v$ sebességgel teszi meg, ez összesen

$$t_1 = \frac{d}{c-v} + \frac{d}{c+v} = \frac{2dc}{c^2 - v^2} = \frac{2d}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{11.4}$$

ideig tart. Ez az idő egy kicsit hosszabb annál, mintha a műszer nyugalomban volna.

Ugyancsak megváltozik a másik kar mentén terjedő fény haladási ideje. Mialatt a fény az A pontból bizonyos t idő alatt a C tükörhöz ér, a tükör is elmozdul, méghozzá az eredeti irányára merőlegesen, vt távolságnyit. A fénynek tehát nem d, hanem nagyobb utat kell megtennie, akkorát, amekkora egy d és vt befogókkal rendelkező derékszögű háromszög átfogója:

$$ct = \sqrt{d^2 + (vt)^2}.$$

Az ehhez szükséges idő

$$t = \frac{d}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

az oda-vissza futás ideje pedig $2t$, azaz

$$t_2 = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{11.5}$$

Ez az idő is hosszabb, mint amennyi a nyugalomban levő műszernél lenne, de az eltérés mértéke különbözik (11.4)-től: $t_1 \neq t_2$. Az időkülönbség miatt a detektorba jutó fényhullámok között fáziskülönbség lép fel, s az interferencia nem erősítő, hanem részben gyengítő, esetleg kioltó is lehet. Az interferencia jellegét a

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2d}{c}\left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{2d}{c}\left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)\right] = \frac{d}{c}\frac{v^2}{c^2} \tag{11.6}$$

időkülönbség határozza meg. (A közelítésnél felhasználtuk a kicsiny ε mennyiségekre érvényes $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ formulát.)

Ha az interferométer karjai nem pontosan egyforma hosszúak, hanem pl. egy ezred milliméterrel rövidebb az egyik, mint a másik, ez a tény már önmaga is elrontja a terjedési idők egyenlőségét, és emiatt még $v = 0$ esetben sem észlelünk erősítést. Az interferencia ilyen vagy olyan voltából tehát még nem vonhatunk le következtetést a v sebességre, de megtehetjük ezt az interferencia *változásából*. Michelson és Morley az interferométert egy nagy homokkő sziklára erősítette, és

az egészet egy higannyal telt kádba helyezte. A higanyon úszó berendezést könnyen, az optikai viszonyok megváltoztatása nélkül el lehetett forgatni úgy, hogy hol az AB kar, hol pedig az AC kar mutasson a Föld feltételezett sebességének irányába. Az átfordítás alatt a karok hossza változatlan marad, viszont a szerepük felcserélődik, emiatt a (11.6) időkülönbség előjelet vált. Ezt a detektorban az interferenciakép fokozatos eltolódásaként kellene érzékelnünk.

A kísérletet ténylegesen elvégezték, és azt tapasztalták, hogy az elfordítás során az interferenciakép egyáltalán *nem változott meg*, jóllehet a berendezés olyan érzékeny volt, hogy már az interferenciacsíkok századrészének megfelelő eltolódást is ki tudta volna mutatni. A különböző technikákkal leggondosabban elvégzett és sokszor megismételt kísérletek mind azt mutatták, hogy *a fény terjedési sebessége nem függ a terjedés irányától*, tehát – a klasszikus fizika fogalmaival értelmezve az eredményt – a helyzet olyan, mintha a mérőberendezés éppen állna az éter nyugalmi rendszeréhez viszonyítva. Tegyük fel, hogy ez ténylegesen így van, de akkor egy fél évvel később, amikor a Nap körül keringő Föld éppen ellentétes irányban mozog, bizonyosan nem marad az éterhez képest mozdulatlan. A kísérletet egy fél évvel később is elvégezték, de akkor se találtak interferenciakép-változást a berendezés elforgatása közben.

A Michelson–Morley-kísérlet negatív eredménye azt mutatja, hogy nemcsak a mechanikai jelenségek, hanem az elektromágneses hullámok terjedése is ugyanúgy, irányfüggetlen módon zajlik le minden inerciarendszerben, és emiatt ezzel az optikai kísérlettel nem lehet megtalálni azt a vonatkoztatási rendszert, amelyben a fényhordozó „éter" nyugalomban van.

Levonhatjuk a következtetést: a fény (vákuumbeli) terjedési sebessége *irányfüggetlen* (izotrop), nagysága független a megfigyelő által használt koordinátarendszerektől. Ezek a megállapítások azt mutatják, hogy a Galilei-féle sebességösszeadás törvénye nem helyes, s a tapasztalt furcsaság megértéséhez elkerülhetetlenül szükséges a tér és idő fogalmának alapos átgondolása, átértékelése.

A Michelson–Morley-kísérlet negatív eredményét Lorentz egy furcsa elgondolással próbálta „megmagyarázni". Tegyük fel – mondta Lorentz –, hogy az éterhez képest v sebességgel mozgó testek (legyenek azok méterrudak vagy egy interferométer karjai) a mozgás irányában „megrövidülnek", méretük az eredeti érték $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ -szerese lesz. Ezt az elképzelt rövidülést kitalálója után Lorentz-kontrakciónak (Lorentz-rövidülésnek) nevezik. A feltételezett rövidülés valóban magyarázza az interferenciacsíkok megváltozásának elmaradását, hiszen ha a (11.4) képletben d helyébe a Lorentz-kontrakcióval rövidült értéket írjuk, t_1 a (11.5)-tel megadott t_2-vel válik egyenlővé, és (11.6)-nak megfelelően $\Delta t = 0$ lesz. Ha a karokat felcseréljük, akkor AC szenved Lorentz-rövidülést, s így az időkülönbség továbbra is nulla marad.

A Lorentz-kontrakció feltételezése elmozdulást jelentett a klasszikus fizika Galilei-féle transzformációs képleteitől, és emiatt fontos lépés volt az Einstein-féle relativitásel-

mélet felé, de nem tekinthető ez utóbbival egyenértékűnek. Az időt – a newtoni fizikához hasonlóan – univerzálisnak tekintette, s nem szakadt el az éter fogalmát felhasználó „abszolút nyugvó" koordináta-rendszerétől, jóllehet annak és a többi vonatkoztatási rendszernek relatív sebességét kimutathatatlannak tartotta.

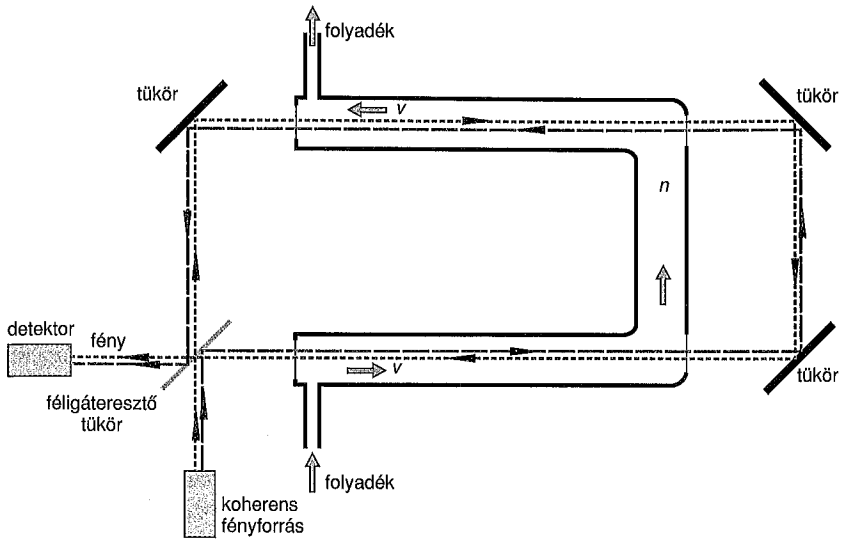
II.3. A Fizeau-kísérlet

A Michelson–Morley-kísérlet eredménytelenségét a Lorentz-kontrakció hipotézisén kívül más elképzelésekkel is próbálták elfogadhatóvá tenni. Az egyik ilyen feltételezés azt állította, hogy a Föld a Nap körüli mozgása során egy bizonyos környezetben „magával ragadja" az étert, hasonlóan ahhoz, ahogy a földi légkör sem marad el a Földtől, hanem követi azt. Ha ez így van, akkor nem meglepő, hogy a földi laboratóriumokban a fény minden irányban ugyanakkora sebességgel terjed, hiszen a fényjelenségek mindig az álló éterben mennek végbe, sehol „nem fúj az éterszél". Ennek az elfogadhatónak tűnő elképzelésnek azonban ellentmond a Bradley által már 1725-ben észlelt és helyesen magyarázott *aberráció* jelensége. Ennek lényege: egy csillagból jövő fény észlelésekor a távcső tengelyét nem pontosan a csillag felé, hanem attól kicsit eltérő irányba kell állítani amiatt, hogy a Nap körül keringő Föld (és vele együtt a távcső) mozog a csillaghoz képest. Az aberráció jelenségét – a megfigyelt csillag éves periódusú mozgását az égbolton – úgy lehet magyarázni, hogy a Föld úgy halad keresztül a nyugvó éteren, hogy *nem ragadja magával* azt.

Az egyik jelenség magyarázatához azt kellett feltételezni, hogy a Föld magával ragadja az étert, egy másik jelenség értelmezéséhez pedig ennek éppen az ellenkezőjére volt szükség. Ezek mellett érdemes még megemlékezni egy harmadik fontos kísérletről, Fizeau méréseiről is. Ő az 1850-es években azt vizsgálta, hogyan változik meg a fény terjedési sebessége *mozgó közegekben,* például bizonyos sebességgel áramló vízben. Mivel a víz sebessége igen kicsi a fény terjedési sebességéhez viszonyítva, a mozgó vízben a fény sebessége várhatóan csak igen kicsit fog eltérni az állóvízben mérhető fénysebességtől. Ilyen kicsi sebességváltozások kimutatása – a Michelson-kísérlethez hasonlóan – csak interferencia-módszerrel remélhető.

A mérési elrendezés vázlata a 11.2. ábrán látható. Ebben egy féligáteresztő tükör segítségével két részre osztják egy koherens fényforrás fényét, majd az egyes résznyalábokat tükrök segítségével áramló vizen vezetik keresztül. Az egyik nyaláb a vízzel azonos irányban halad, a másik pedig éppen ellenkezően, a víz folyásirányával szemben. A két nyaláb a féligáteresztő tükör segítségével ismét egyesíthető, s a detektorba jutva interferenciát hozhat létre. Az interferencia erősítő vagy gyengítő jellege a két nyaláb fáziskülönbségétől, az pedig a terjedési sebességük

különbségétől függ.



11.2. ábra

Fizeau mérései alapján meghatározta, hogy mennyivel tér el az áramló vízben terjedő fény c' sebessége az állóvízben érvényes c/n sebességtől (n a víz törésmutatója). A klasszikus fizika sebességösszeadási képlete alapján azt várjuk, hogy a különbség éppen a víz áramlási sebessége, v lesz. Fizeau kimutatta, hogy a mozgó vízben a fény (azonos irányú mozgásuk esetén) valóban gyorsabban terjed, mint az állóvízben, de az eltérést nem a Galilei-féle sebességösszeadás (11.3) képlete adja meg, hanem így számolható:

$$c' = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v \,. \qquad (11.7)$$

A várakozással ellentétben az áramló víz sebessége egy 1-nél kisebb számmal szorozva jelenik meg a képletben. A Fizeau-kísérletet úgy is értelmezhetjük, hogy a mozgó folyadék bizonyos (a törésmutatótól függő) mértékben magával viszi az étert.

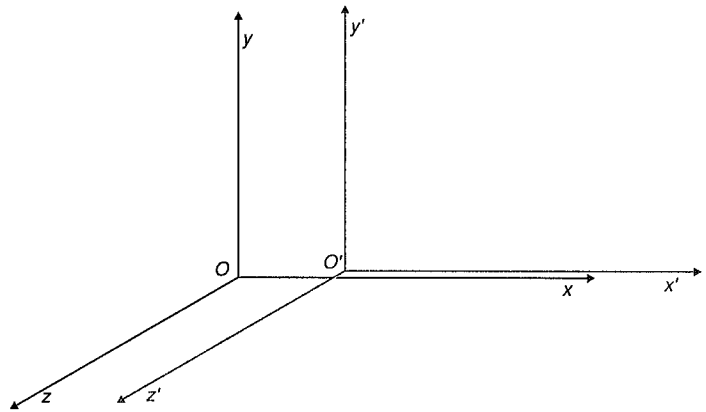
A Michelson–Morley-kísérlet, az aberráció jelensége és a Fizeau-kísérlet különkülön még beilleszthetők lennének a klasszikus fizika kereteibe, de mindegyikük megértése más és más elméleti feltételezéseket igényel; együtt már semmiképpen

nem férnek össze a klasszikus fizika gondolatvilágával. Ez vezette Einsteint arra, hogy a klasszikus fizika kereteit feladva a tér és idő fogalmát új, a kísérleteket egységesen magyarázni képes rendszerbe foglalja.

Ebben az új rendszerben semmi szerepe nem maradt a mérések számára megfoghatatlannak bizonyuló éternek, ezért ezt a „haszontalan valamit" Einstein teljes egészében kiiktatta a fizikai fogalmak sorából. Ez nem ment könnyen, hiszen sok, a mindennapi élet tapasztalatai alapján jól bevált fogalmat, összefüggést, törvényt kellett újragondolnia, átértékelnie. Az éter, amelynek feltételezett rugalmas tulajdonságai segítették Maxwellt híres egyenletei megfogalmazásában, a hétköznapi beszédben mind a mai napig fennmaradt. A rádióbemondók gyakran „az éter hullámain keresztül" üzennek a hallgatóknak, a filozófusok pedig néha „éteri tisztaságot" emlegetnek. A fizika eszköz- és fogalomtárából azonban az elmúlt 100 év során teljesen kiszorult, és ma már a tudománytörténet egyik zsákutcájaként emlegetjük csupán.

12. A téridő*

A továbbiakban magyarázatot próbálunk találni a fényterjedés kísérletileg észlelt furcsaságaira. Ennek a próbálkozásnak az első lépése az lesz, hogy meggondoljuk, milyen összefüggésekkel kell felváltanunk a hibásnak bizonyult Galilei-féle transzformációs képletet, ha át akarunk térni az egyik inerciarendszerből egy másik, hozzá képest egyenletesen mozgó vonatkoztatási rendszerre. Úgy állítjuk be a koordináta-rendszereket, hogy azok megfelelő tengelyei párhuzamosak legyenek egymással, és a vesszős jelzésű rendszer a vesszőtlenhez képest annak x tengelye mentén mozogjon v sebességgel.



12.1. ábra

(Természetesen ekkor a vesszőtlen rendszer sebessége a vesszőshöz viszonyítva az x' tengely irányában $-v$ lesz.)

* Ez a fejezet Károlyházy Frigyes professzornak az ELTE fizikushallgatói, illetve középiskolások számára tartott előadásai alapján íródott.

A két inerciarendszer közötti kapcsolat többféle módon, többféle alapfeltevésből kiindulva is megkapható. Az alábbiakban egy olyan utat követünk, amely néhány egyszerű (és a „józan ész" számára is elfogadható) szimmetriafeltevésből kiindulva elemi matematikai műveleteket és geometriai szerkesztéseket alkalmazva elvezet a tér és idő újszerű (igaz, néhol kissé meghökkentő, de logikus és a tapasztalattal teljes összhangot mutató) relativisztikus elméletéhez.

12.1. Térkép a városról, téridő-térkép a mozgásokról

A következőkben – az egyszerűség kedvéért – olyan mozgások vizsgálatára korlátozódunk, amelyekben csak *egyetlen térbeli dimenzió* játszik lényeges szerepet. Ilyen például egy hosszú, egyenes autópálya forgalma, vagy a csillagközi térben elképzelt „űrfolyosón" közlekedő űrhajók mozgása a távoli jövőben. Ez utóbbi azért is tanulságos, mert azt viszonylag könnyen el tudjuk képzelni, hogy minden égitesttől távol (tehát a gravitáció hatásától mentesen) kikapcsolt hajtóművű űrhajók nagy, akár a fényével összemérhető sebességgel mozognak. Bár ez technikailag még távol áll a realitástól, de elvben nem lehetetlen, és így a relativitáselmélettel való ismerkedésünk során nagyon hasznos szemléltetésnek bizonyul.

Az egydimenziós (egy adott egyenes mentén történő) mozgások a kétdimenziós papírlapon ábrázolhatók, szemléltethetők. (Ez már a klasszikus fizikában is igaz volt, hiszen pl. egy egyenletesen mozgó kiskocsi, vagy egy szabadon eső test mozgását út–idő diagram segítségével is jellemezhettük, ábrázolhattuk.) Tételezzük fel, hogy ez a keresett, új elméletben is így van, vagyis hogy az *egydimenziós mozgások* valamilyen módon *leképezhetők a kétdimenziós papírlapra* (vagy a számítógép monitorjára), hasonlóan ahhoz, ahogy egy város úthálózatáról, épületeiről, hegyeiről és folyójáról térképet tudunk készíteni. A testek mozgásának, tér- és időbeli viszonyainak ábrázolását *téridő-térkép*nek, vagy röviden *téridő*nek fogjuk nevezni.

A téridő csak akkor fér el a 2 dimenziós (más szóhasználattal 1 + 1 dimenziós) papírlapon, ha a mozgások 1 térbeli dimenzióban történnek, a másik két térbeli kiterjedés nem játszik lényeges szerepet. Ha a valódi helyzetet, mindhárom térbeli kiterjedést figyelembe akarnánk venni, akkor 3 + 1, azaz négydimenziós ábrázolásra lenne szükségünk. Ezt a sík papírlapon nyilván nem tehetjük meg, de kicsit bonyolultabb matematikai képletekkel le tudjuk írni az ilyen mozgásokat is. Mivel azonban ez a leírás egyáltalán nem szemléletes, a továbbiakban maradunk az 1 + 1 dimenziós esetnél.

A téridő-térképen a legegyszerűbb alakzat egy pont. Ez minden értelemben – tehát térben is és időben is – kis kiterjedésű valami, az „itt" és „most" megfelelője, vagyis egy jól meghatározott helyen történő, igen rövid idő alatt végbemenő *esemény*. Ilyen esemény lehet pl. két autó ütközése a hosszú, egyenes autópályán, vagy egy űrhajó lámpájának felvillanása a képzeletbeli űrfolyosón.

Egy kis térbeli kiterjedésű test mozgása események sorozataként képzelhető el (hiszen a test mindig van valahol), ennek a téridő-térképen nyilván egy (általában görbe) vonal, az ún. *világvonal* felel meg.

A különböző jellegű mozgások különböző jellegű görbékkel szemléltethetők a téridő-térképen. A legegyszerűbb mozgásforma a *szabad mozgás*. Jó közelítéssel így mozog egy nagy tömegű, áramvonalas autó az autópályán, ha a vezető nem ad gázt és nem is fékez, vagy egy kikapcsolt hajtóművű űrhajó, ha minden más testtől távol van a világűrben. Természetes gondolat, hogy a legegyszerűbb mozgásnak a téridőn a legegyszerűbb „görbét", az *egyenes*t feleltessük meg. A vákuumban szabadon terjedő fényfelvillanás ugyancsak egyszerű mozgás, ennek is egyenes felel meg a téridőn. (Ne feledjük, hogy a térbeli dimenziók közül csak 1-et tudunk figyelembe venni a téridő-ábrázolásnál. Így amikor fényfelvillanást említünk, akkor ne a magasban felrobbanó tűzijátékgránát minden irányban terjedő fényére, hanem az autópályán „fénykürttel" jelzést adó személy lényegében egy irányban terjedő fényhullám-vonulatára gondoljunk.)

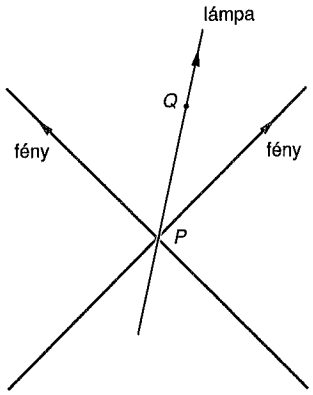
Összefoglalva az eddigi megállapításainkat a téridő-térképről:

EGYDIMENZIÓS MOZGÁSOK	⇔	TÉRIDŐ
pillanatszerű esemény	⇔	pont a téridőn
kicsiny test mozgása	⇔	vonal a téridőn (világvonal)
szabad mozgás	⇔	egyenes világvonal
felvillanó fényjel terjedése	⇔	egyenes világvonal

Vajon mennyire van „megkötve a kezünk", amikor a téridő-térképünk elkészítéséhez hozzákezdünk, s mennyi szabadsággal, választási lehetőséggel rendelkezünk, amikor a különböző mozgásokat ábrázolni akarjuk a térképen?

Egyetlen eseményt, például egy lámpa felvillanásának megfelelő *P*-t (12.2. ábra) a téridő-térkép bármely pontjára felrajzolhatjuk, ugyanúgy, ahogy például Budapest térképének elkészítésekor az üres papír tetszőleges helyére rajzolhatjuk az első tájékozódási pontot, mondjuk a Parlament épületét.

A lámpa felvillanása során keletkező egyik fényjelet ugyancsak tetszőlegesen irányított, de a *P* eseményre illeszkedő egyenessel ábrázolhatjuk, hasonlóan ahhoz, ahogy Budapest térképén bármilyen irányba berajzolhatjuk a Duna (Parlament környékén egy kis szakaszon egyenesnek tekinthető) vonalát. A lámpából (egy térbeli dimenzió esetén) kétféle fénysugár indul ki, úgy, mintha egy autónak előre- és hátrafelé egyaránt lenne fényszórója, s a fénykürt egyszerre villantaná fel ezeket.



12.2. ábra

Nem nyilvánvaló, de igaz: nemcsak az egyik (mondjuk „jobbra" haladó), de még a másik („balra" haladó) fényjel világvonalát is tetszőleges irányban rajzolhatjuk a téridő-térképre, csupán arra kell figyelnünk, hogy illeszkedjék a *P* eseményre, és különbözzék az első fényjel világvonalától. (Budapest térképének készítésénél nem rendelkezünk ennyi szabadsággal! Ha például már bejelöltük a Parlament helyét és a Duna vonalát, akkor a Kossuth Lajos utcát nem vehetjük fel akármilyen irányban, hanem csak a Duna vonalára nagyjából merőlegesen; feltéve, hogy elvárjuk: a térképen a valóságnak megfelelő szögeket lássunk. A téridőn ilyen „szögtartást" nem követelünk meg.)

Bárhogyan vettük is fel a fényjeleket a téridő-térképen, a térkép alkalmas elforgatásával és valamelyik irányban történő megnyújtásával elérhetjük, hogy a (kék vonallal jelölt) két fényjel egymással derékszöget, a papír „függőlegesével" pedig ±45°-os szöget zárjon be, ahogy az a 12.2. ábrán látható. (A fényjeleket nyilakkal is elláttuk, ezek az idő múlásának irányát, a korábban-később viszonyokat jelzik.) A továbbiakban mindig ezt a (derékszögben rajzolt fényjeleknek megfelelő) téridő-ábrázolást fogjuk használni.

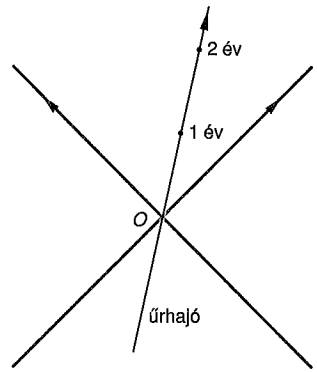
Ha egy másik esemény során újabb fényjeleket indítunk el, akkor azok világvonalát a korábbi fényjelekével *párhuzamosan* kell ábrázoljuk, összhangban azzal a tapasztalati ténnyel, hogy egyik fényjel sem terjed gyorsabban a másiknál, tehát nem is érheti utol azt.

Berajzolhatjuk a téridő-térképre a fényjeleket kibocsátó lámpa világvonalát is. Ha ez a lámpa egy – a távoli világűrben szabadon mozgó – űrhajó fényszórója, akkor a világvonala egyenes. Belátható, hogy ez a világvonal mindig a két fényjel nyilakkal jelzett „ágai" között kell haladjon. Ha nem így lenne, akkor előfordulhatna, hogy egy későbbi *Q* esemény során elindított fényjel találkozna a korábban ellenkező irányban indított fénnyel, ami lehetetlen!

12.2. Időmérés

A természetben számos periodikus jelenséget figyelhetünk meg, s ezek felhasználásával „ketyegő szerkezeteket", órákat készíthetünk. Ilyen szerkezet pl. a Földön egy ingaóra, de ennél jobb és megbízhatóbb (és még a súlytalanság állapotában is használható) kvarcóra, vagy egy atomóra. Ezek bármelyike elvben alkalmas az időtartamok mérésére, lényegében az idő fogalmának „értelmezésére".

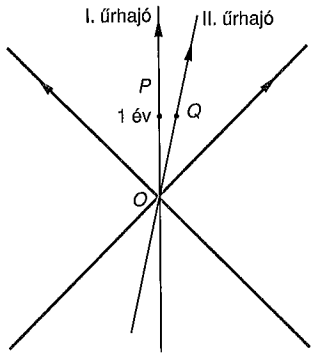
Képzeljünk el egy szabadon mozgó űrhajót, amely egy adott pillanatban egy-egy fényjelet bocsát ki. Ezt az eseményt az űrhajó világvonalán *O*-val jelöljük. Az űrhajón levő órát éppen akkor indítjuk el, amikor a fényjeleket, tehát az *O* eseménykor (12.3. ábra). Vajon hová rajzoljuk a téridő-térképre azt az eseményt, amikor az űrhajó órája egységnyi idő (mondjuk 1 év) elteltét jelzi. Az űrhajó világvonalának *bármelyik* (*O*-hoz képest a nyíllal jelölt irányba eső) pontjához rajzolhatjuk, hiszen a rajzon akármilyen léptéket használhatunk. (Egy város térképének elkészítésekor is rendelkezünk léptékválasztási szabadsággal; az úthálózat rajzát tetszőleges méretarányban elkészíthetjük.) Ha viszont egyszer már lerögzítettük az időléptéket, a méretarányt, akkor a többi időtartamot arányosan, léptékhelyesen fogjuk ábrázolni. A 2. év elteltét jelző eseményt az űrhajó világvonalán kétszer távolabbra rajzoljuk az *O* eseménytől, mint az 1 évnek megfelelőt.



12.3. ábra

Tekintsünk most egy olyan helyzetet, amelyben két, egymáshoz képest mozgó űrhajó (jelöljük ezeket I-gyel és II-vel) találkozik a képzeletbeli űrfolyosón. (A találkozáskor természetesen el kell tekintenünk a szigorúan értelmezett 1 dimenziós leírásmódtól, hiszen nem szeretnénk, ha az űrhajók összeütköznének!) A találkozás eseményét jelöljük a téridőn *O*-val, és tételezzük fel, hogy a találkozáskor egy-egy fényjel is útjára indult valamelyik űrhajóból. Mindezeket (az űrhajók vi-

lágvonalát és a fényjeleket) a téridő-térképen is ábrázoltuk (12.4. ábra), és azt a P eseményt is bejelöltük, amikor az I. űrhajón levő atomóra a találkozástól számított 1 év elteltét jelzi.



12.4. ábra

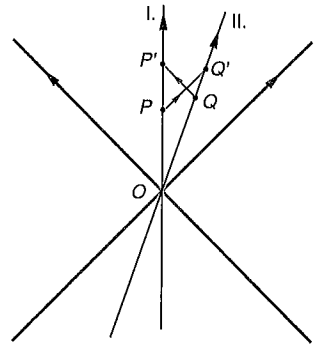
Vajon hová kell berajzolnunk a téridőre azt a Q eseményt, amikor a II. űrhajón levő szabványos, a másikkal azonos felépítésű atomóra ugyancsak 1 év elteltét mutatja? Első sejtésünk az lehet, hogy Q ugyanolyan messze kell legyen O-tól, mint a P esemény, hiszen mindkettő ugyanannyi időtartamot (1 évet) hivatott jelezni. Ez a sejtés azonban *hibás;* ha így járunk el, megsértünk egy nagyon fontos, a tapasztalat által igazolt szimmetriaelvet!

A Michelson–Morley-kísérlet negatív eredménye azt mutatja, hogy a természetben nincsen kitüntetett, abszolút nyugvónak tekinthető test (vonatkoztatási rendszer), így az egymáshoz képest mozgó testeknél csak relatív, egymáshoz viszonyított sebességekről van értelme beszélni. Eszerint az előző példában szereplő I-es és II-es űrhajóknak is csak a relatív sebességét vizsgálhatjuk, s ez (egy előjeltől eltekintve) mindkettő számára ugyanakkora. A két űrhajó minden szempontból egyenrangú szerepet játszik, *fizikailag egyenértékű*. Ennek a szimmetriának valamilyen módon a téridő-térképen is meg kell mutatkoznia, és figyelembevétele, mint látni fogjuk, a különböző űrhajó-világvonalakon az időegység pontos helyét is meghatározza.

Tételezzük fel, hogy éppen akkor, amikor a két űrhajó találkozott, vagyis az O eseménykor mindkét űrhajó kapitányának megszületik az első gyermeke. (A csillagközi űrutazásoknál feltehetően a földihez hasonlóan zajlik majd az élet, de ha nem így lesz, egy gondolatkísérletben akkor is mindenféle, egyébként elég valószínűtlen feltételezés megengedett.)

A találkozást követően az űrhajók eltávolodnak egymástól, mindegyiken zajlik a megszokott élet, s egyszer csak elérkezik az I. űrhajón levő gyermek első

születésnapja (vagyis az az esemény, amikor az ottani óra 1 év elteltét jelzi). Ezt a nevezetes eseményt a kapitány egy fényjelüzenettel tudatja a II. űrhajón levő társaival. Az üzenet valamikor elérkezik a II. űrhajóra, jelöljük ezt az eseményt Q'-vel (12.5. ábra).



12.5. ábra

Teljesen hasonlóan jár el a II. űrhajó kapitánya is: amikor az ő gyermeke betölti az 1. életévét (vagyis az ottani atomórák által jelzett 1 év elteltével) fényjelet küld az I. űrhajó irányába, s ennek a fényjelnek a megérkezését P'-vel jelöljük. A két űrhajó (a két vonatkoztatási rendszer) egyenértékűsége akkor áll fenn, ha a P' eseménykor az I. űrhajó órája ugyanannyi idő elteltét jelzi, mint amennyit a II. űrhajó órája Q'-kor:

$$\frac{OP'}{OP}=\frac{OQ'}{OQ}. \qquad (12.1)$$

Könnyen belátható, hogy ha az OP és OQ távolságokat egyforma hosszúra választjuk a téridő-térképen, akkor (12.1) *nem* teljesül! Itt szembesülünk a téridő-térkép elkerülhetetlen aránytalanságával: a valóságban azonos hosszúságú időtartamok a különböző egyenes világvonalakon nem azonos hosszúságú szakaszokkal ábrázolhatók, tehát a térkép *torzít!* (Ehhez hasonló torzítással a valódi térképeknél is találkozunk, amikor a gömb alakú Föld felszínének nagy darabját, pl. egy egész kontinenst akarunk ábrázolni egy sík papírlapon.)

A (12.1) aránypárt más alakban is felírhatjuk. Keressük meg az I. űrhajó világvonalán azt a P'' eseményt, amelyből elindított fényjel éppen akkor ér a II. űrhajóhoz, amikor az ottani gyermek 1. születésnapját ünneplik (12.6. ábra). Hasonló háromszögek oldalainak

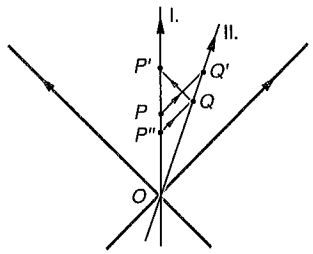
$$\frac{OQ'}{OQ}=\frac{OP}{OP''}$$

arányosságát kihasználva (12.1) így is felírható:

$$\frac{OP'}{OP}=\frac{OP}{OP''},$$

vagyis

$$OP'\cdot OP''=OP^2. \qquad (12.2)$$



12.6. ábra

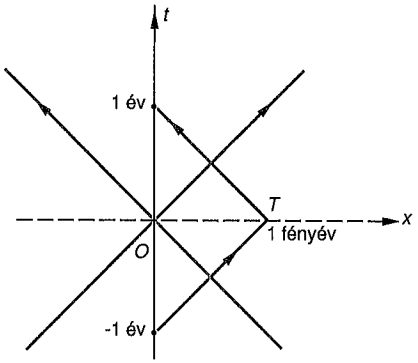
Látható, hogy a II. űrhajó világvonalán a *Q* esemény akkor felel meg ugyanakkora (egységnyi) időtartamnak, mint az I. űrhajó órájának *P* eseménye, ha a téridő-térképen az *OP* szakasz hossza *mértani közepe* a *Q*-ból kiinduló, illetve az oda beérkező fényjelek által kijelölt *OP'* és *OP''* szakaszok hosszának.

12.3. Távolságmérés, koordináta-rendszer

Foglalkozzunk most ismét csak egyetlen szabadon mozgó űrhajóval, amelyen alkalmasan választott órával időtartamokat tudunk mérni. Célszerű az idő egységének (az SI-ben megszokott másodperc helyett) az *évet* választani. Jelöljük be a téridő-térképen az űrhajó világvonalán az időmérés (önkényesen választott) kezdőpontját, valamint a +1 és –1 évnek megfelelő eseményeket (12.7. ábra).

Vajon hol lesz ezen az ábrán az a távolabbi, mondjuk az űrhajótól egységnyi távolságra történő esemény, amelyet logikusan tekinthetünk az *O* eseménnyel egyidejűnek? Ennek megszerkesztéséhez gondoljuk el, mi történik, ha az űrhajóról akkor, amikor annak órája –1 évet mutat, elindítunk egy fényjelet az űrfolyosó mentén. Tegyük fel, hogy a fényjel valamikor és valahonnan (például egy másik űrhajón levő tükörről) visszaverődik, és éppen akkor érkezik vissza hozzánk, amikor az óránk +1 évet mutat. A fény visszaverődésének *T* eseményéről nyilván azt

fogjuk állítani, hogy az akkor történt, amikor a mi óránk 0 évet mutatott, tehát az *O* eseménnyel *azonos időben*.



12.7. ábra

Milyen messze volt tőlünk az a tükör, amely a fényjelet visszaverte? Mivel a fény 1 év alatt tette meg az űrhajó és a tükör közötti utat, a kérdéses távolság éppen 1 *fényév*. Ha a távolság egységének ezt választjuk (az SI-ben használt méter helyett), akkor a fénysebesség számértéke:

$$\boxed{c=\frac{1\ \text{fényév}}{1\ \text{év}}=1}.$$

A továbbiakban ezt az egységrendszert fogjuk használni, ez illeszkedik legjobban, legtermészetesebb módon a relativitáselmélet képleteihez.

Ha vissza akarunk térni a szabványos SI egységekhez, akkor a képletekben a megfelelő helyekre *c*-nek olyan hatványait kell beírnunk, amelyek a képleteket mértékegység szempontjából (dimenzionálisan) helyessé teszik.

Az egyidejű események megtalálása és a hosszúságegység megválasztása után a szabadon mozgó űrhajóhoz egy *koordináta-rendszer*t kapcsolhatunk. Az 1 + 1 dimenziós koordináta-rendszer időtengelyét (*t* tengelyt) az űrhajótól nulla távolságra levő események alkotják: ez maga az űrhajó világvonala. Az *x* tengely pontjai az *O* eseménnyel egyidejű események, ilyen például *T*, továbbá az *OT* egyenes valamennyi pontja. Ezt az egyenest a 12.7. ábrán azért jelöltük szaggatott vonallal, hogy kihangsúlyozzuk: nincs olyan valóságos test, amelynek ez lenne a világvonala.

A téridő minden eseményéhez, tehát a téridő-térkép minden pontjához egyértelműen hozzárendelhetünk egy (*t*, *x*) számpárt, más néven *téridő-vektor*t. Ez a

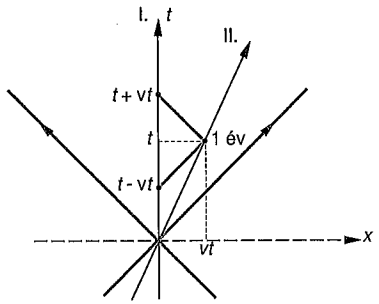
számpár alkotja az esemény téridő-koordinátáit az űrhajóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben. (Ha a mozgásokat nem 1, hanem 3 térbeli dimenzióban vizsgáljuk, akkor a téridő-vektorok (t, x, y, z) alakú számnégyesek, ún. négydimenziós vektorok.)

12.4. Idődilatáció

Vizsgáljunk most két, egymáshoz képest mozgó űrhajót az egyik, I jelzésű űrhajóhoz rögzített koordináta-rendszerből! A másik, II jelzésű űrhajó mozogjon v sebességgel az első űrhajóhoz képest; ekkor világvonala minden pontjának (eseményének) téridő-koordinátái között fennáll az

$$\frac{x}{t}=v$$

összefüggés (12.8. ábra).



12.8. ábra

Hol található a téridő-térképen a II. űrhajó órája által 1 évet jelző esemény? A (12.2) összefüggés szerint ezt az eseményt az jellemzi, hogy a $(t, x) = (t, vt)$ koordinátákkal jellemzett pontból fényjeleket (45°-os egyeneseket) bocsátva a koordináta-rendszer t tengelyére, a tengelymetszetek mérőszámának mértani közepe 1-et kell adjon:

$$x=vt,$$

azaz

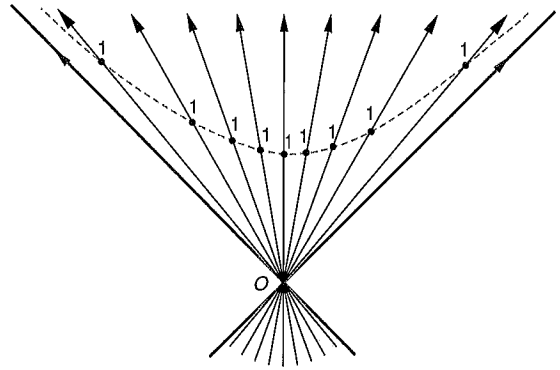
$$(t+vt)(t-vt)=1,$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{és} \quad x=\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{12.3}$$

Látható, hogy az az esemény, amely a II. űrhajón 1 év elteltét jelzi, az I. űrhajón $t=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}>1$ évnek felel meg. Úgy tűnik tehát, mintha az I. űrhajóhoz képest mozgó órák járása lelassult volna, vagy fordítva: az általuk mutatott időt az I. űrhajó vonatkoztatási rendszerébe átszámítva nagyobbnak találjuk. Ezt a furcsa jelenséget időmegnyúlásnak, *idődilatáció*nak nevezik.

A hétköznapi életben az idődilatációnak semmi nyomát nem tapasztaljuk. Ennek az az oka, hogy a makroszkopikus testek általában a fénynél sokkal lassabban mozognak, vagyis – az általunk választott $c = 1$ egységrendszerben számolva – v sokkal kisebb 1-nél. Ilyen körülmények között $\sqrt{1-v^2}\approx 1$, az idődilatáció számfaktora tehát nem tér el számottevően 1-től. Atomi részecskék azonban a fénnyel összemérhető sebességgel is mozoghatnak, s ilyeneknél (pl. a légkör felső részében pionok bomlásakor keletkező, majd tovább bomló müonoknál (lásd a 34.2.2. pontot) ténylegesen megfigyelték az idődilatációnak megfelelő „lelassulást".)

Ha nemcsak kettő, hanem több, egymáshoz képest mozgó űrhajót (vonatkoztatási rendszert) vizsgálunk, s mindegyik világvonalán bejelöljük az 1 évnek megfelelő eseményt, akkor a 12.9. ábrán látható, szaggatott vonallal jelölt görbét kapjuk.



12.9. ábra

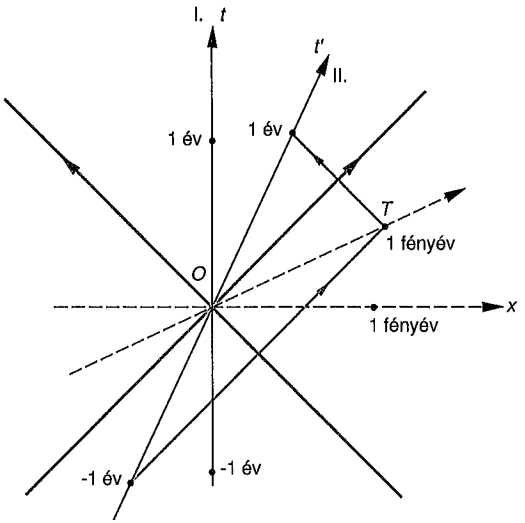
Ez a görbe – mint az a (12.3) egyenletekből leolvasható – egy hiperbola, amelynek egyenlete:

$$t^2-x^2=1,$$

és a hiperbola aszimptotái a fényjelek világvonalai. A téridő furcsa, bizonyos távolságokat torzítottan ábrázoló geometriája rokonságot mutat a Bolyai–Lobacsevszkij-féle ún. hiperbolikus geometriával.

12.5. A Lorentz-transzformáció

Tanulmányozzuk most ismét az I. és a hozzá képest v sebességgel mozgó II. űrhajó téridő-ábrázolását! Mindkét test világvonalán bejelölhetjük az egységnyi időnek megfelelő eseményeket, és (a korábban alkalmazott eljárást megismételve) meghatározhatjuk, hogy a II. űrhajó vonatkoztatási rendszeréből nézve hol található az a T esemény, amely O-val egyidejű, és tőle egységnyi távolságra van (12.10. ábra).



12.10. ábra

Az O és T eseményeken keresztül fektetett egyenes lesz a II. űrhajóhoz rögzített K' koordináta-rendszer x' tengelye, a t' időtengely pedig maga a II. űrhajó világvonala. (Látható, hogy a vesszős rendszer nem derékszögű, hanem ún. *ferdeszögű* koordináta-rendszert alkot.)

Látható, hogy a téridő minden pontjához, vagyis minden eseményhez mind az I. űrhajó K koordináta-rendszerében, mind pedig a II. űrhajó K' rendszerében tér- és időkoordinátákat, azaz téridő-vektorokat rendelhetünk, s ezen (t, x) és (t', x') számpárok egymásba átszámíthatók. Ha például $t' = 1$ és $x' = 0$, akkor (12.3)-nak megfelelően

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{és} \quad x=\frac{v}{\sqrt{1-v^2}},$$

és hasonló megfontolásokkal kapjuk, hogy a $t' = 0$ és $x' = 1$ esetén

$$t=\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{és} \quad x=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

A fenti két képletpárból leolvasható az általános transzformációs szabály is, amely megadja, hogyan térhetünk át az egyik inerciarendszer tér- és időkoordinátáiról egy másik, hozzá képest v sebességgel mozgó rendszer koordinátáira:

$$\boxed{t=\frac{t'+vx'}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{és} \quad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2}}}. \tag{12.4}$$

Ezek a képletek, melyeket *Lorentz-transzformáció*nak neveznek, veszik át a klasszikus fizika Galilei-transzformációjának szerepét. Ha a $c = 1$ egységrendszerről visszatérünk az SI-ben használt *méter* és *másodperc* egységekre, akkor a Lorentz-transzformáció képleteit így kell felírnunk:

$$\boxed{t=\frac{t'+\frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{és} \quad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}. \tag{12.5}$$

Abban a határesetben, amikor $v \ll c$, a (12.5) képlet átmegy az x tengely irányú relatív mozgást leíró Galilei-transzformáció (11.1) és (11.2)-nek megfelelő $x = x' + vt$ és $t = t'$ összefüggéseibe.

A (12.4) transzformációs képletek megfordíthatók, a vesszős koordináta-rendszer adatait is ki tudjuk fejezni a vesszőtlen rendszer adataival:

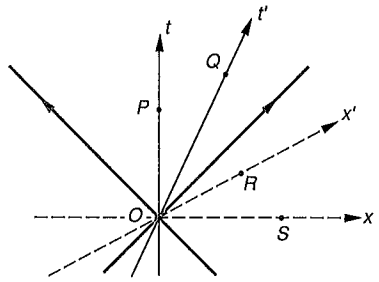
$$\boxed{t'=\frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{és} \quad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}}. \tag{12.6}$$

Ez a képletpár csak annyiban különbözik (12.4)-től, hogy benne a v sebesség előjele az ottanival ellentétes, s ez természetes is, hiszen ha a K' rendszer v sebességgel mozog K-hoz képest, akkor K sebessége K'-höz viszonyítva $-v$.

Eddigi megfontolásainkat 1 térbeli dimenzióra korlátoztuk. Ha a másik két térbeli koordinátát is figyelembe akarjuk venni, a fentieket ki kell egészítenünk a magától értetődő $y = y'$ és $z = z'$ „transzformációs" képletekkel.

12.6. Egyidejűség, egyhelyűség, oksági viszonyok

A téridő-térképen is jól látható, és a Lorentz-transzformáció képleteiből is kiolvasható, hogy az *egyidejűség* és az *azonos hely* (egyhelyűség) nem abszolút jelentéssel bíró fogalmak, hanem a vonatkoztatási rendszertől függő kijelentések. A 12.11. ábrán látható *O* és *P* esemény a vesszőtlen rendszerből nézve *ugyanott* történik, a vesszős rendszerben pedig *különböző helyeken*. Az *O* és *Q* eseményekkel éppen fordított a helyzet: a vesszős rendszerben *ugyanakkora* a helykoordinátájuk, a vesszőtlenben *viszont különböző*.



12.11. ábra

Az *O* és *S* eseményekről azt mondhatjuk, hogy a vesszőtlen rendszerből nézve *ugyanakkor* történnek, a vesszős rendszerben viszont *S korábban* megy végbe, mint *O*. Az *O* és *R* események közül *R* a vesszőtlen rendszerben *később* történik, mint *O*, a vesszős rendszerben viszont *egyidejűek*.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az egyidejűség és az azonos hely fogalma az új elméletben *relatív* fogalmak, erre (is) utal a relativitáselmélet elnevezés. Felmerül a kérdés: van-e egyáltalán ebben az új elméletben olyan mennyiség, olyan fogalom, ami abszolút, a vonatkoztatási rendszertől független jelentéssel bír. A válasz: *igen*.

A Lorentz-transzformáció képleteiből kiolvashatjuk, hogy egy *P* esemény idő- és térkoordináta négyzetének különbsége minden inerciarendszerben ugyanakkora:

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2 = I. \tag{12.7}$$

3 + 1 dimenzióban a fenti képlet az

$$\boxed{t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = I}$$

alakot ölti. Az *I* mennyiséget, amely tehát független a vonatkoztatási rendszer választásától, más szóval *invariáns*, szokás *intervallum*nak nevezni. Az intervallum lehet pozitív mennyiség, de lehet negatív, sőt nulla is. (Egyes könyvekben *I*, vagy

annak (–1)-szerese intervallumnégyzetként szerepel. Ez csalóka elnevezés, hiszen *I* előjele bármilyen lehet, emiatt csak a komplex számok körében írható fel „valami" négyzeteként.)

A pozitív *I* intervallum abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a *P* esemény térkoordinátája nulla, tehát az esemény az origónak választott *O*-val azonos helyen történik, éppen az idő négyzetével egyezik meg. Ebben a kiválasztott (az *O* és *P* eseményeken átmenő világvonalú testhez rögzített) vonatkoztatási rendszerben mért időt *sajátidő*nek nevezzük, és τ-val jelöljük. A pozitív intervallum nagysága τ^2-tel egyenlő. Ha egy test valamely inerciarendszerhez képest v sebességgel mozog, akkor a világvonala pontjaihoz tartozó intervallum

$$\tau^2 = t^2 - x^2 = t^2 - \left(vt\right)^2 = t^2\left(1 - v^2\right),$$

ahonnan leolvasható, hogy az adott vonatkoztatási rendszerhez tartozó „koordinátaidő" és a sajátidő kapcsolata:

$$\boxed{t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2}}}. \tag{12.8}$$

Látható, hogy a koordinátaidő (vagyis az adott rendszerben mért idő) mindig nagyobb a sajátidőnél, vagy esetleg egyenlő vele. Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a test sebessége a kérdéses inerciarendszerben nulla, vagyis a test áll.

Ha az *I* intervallum negatív, akkor található olyan koordináta-rendszer, amelyben *O* és *P* azonos időben történik, tehát a *P* esemény időkoordinátája nulla. Ebben a rendszerben az intervallum a térbeli koordináta négyzetének (–1)-szerese: $I = -x^2$.

Végül vizsgáljuk azt az esetet, amikor az *I* intervallum nulla; ez a (jobbra vagy balra haladó) fényjel téridő-pontjaira jellemző. Ha $I = 0$ az egyik inerciarendszerben teljesül, akkor bármelyik másikban is igaz; ez fejezi ki azt a tapasztalati tényt, hogy *a fény minden inerciarendszerben ugyanakkora* (a választott egységeket használva egységnyi) *sebességgel terjed.*

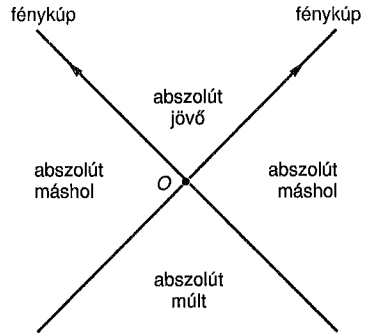
Az intervallum (12.7) képlete emlékeztet az euklideszi sík valamely pontjának x és y koordinátáiból képzett $x^2 = y^2 = s^2$ kifejezésre. Ez a mennyiség, amely az origótól mért távolság négyzetével egyenlő, az origó körül elforgatott valamennyi koordináta-rendszerben ugyanakkora, tehát forgatásokra nézve *invariáns* mennyiség. A különbség az euklideszi távolságnégyzet és a téridő intervalluma között „mindössze" annyi, hogy az előbbiben a négyzetes tagok előjele megegyezik, míg az utóbbiban az idő- és a térkoordináták négyzete különböző előjellel szerepel a képletben.

A relativitáselmélet történetének korai szakaszában megpróbálták a fenti analógiát kihasználni, és az $x_4 = it$ (vagy SI egységrendszerben $x_4 = ict$) tisztán imaginárius negyedik koordináta bevezetésével a Lorentz-transzformációt formálisan forgatásként értelmezni. Ez a megfeleltetés azonban nem segíti a fizikai tartalom jobb megértését, hanem

éppen az ellenkező hatást éri el: elrejti, „szőnyeg alá söpri" az euklideszi sík és a téridő közötti alapvető fogalmi különbségeket.

A téridő geometriai tulajdonságait először Minkowski vizsgálta 1908-ban, emiatt a téridőt szokták Minkowski-síknak, több dimenzió esetén Minkowski-térnek nevezni.

Ha egy eseménynek az O origóhoz viszonyított I intervalluma negatív, akkor ez az esemény és az O origó *minden* vonatkoztatási rendszerben máshol vannak, s emiatt nem köthetők össze semmilyen valóságos test világvonalával vagy fényjellel. Ezek az események O-hoz képest *abszolút máshol* levőnek tekintendők, és O-val semmiféle ok-okozati kapcsolatban nem lehetnek (12.12. ábra). (Az ábrán a „fénykúp" felirat arra utal, hogy az O eseményből kiinduló fényjelek világvonala csak 1 + 1 dimenzióban egyszerűsödik le két egymást metsző egyenesre, 2 térbeli kiterjedés, tehát 2 + 1 dimenziós téridő esetén kúpfelületet alkotnak.)

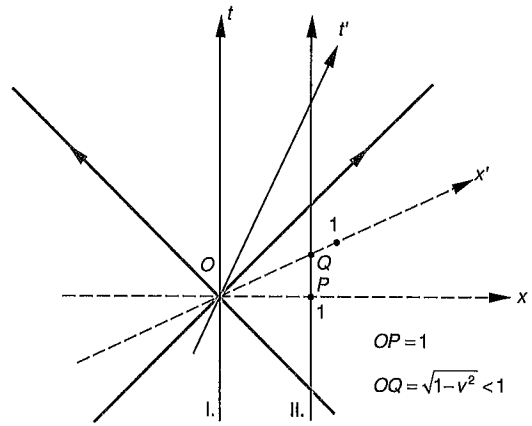


12.12. ábra

A pozitív I intervallummal jellemezhető események egy része O-nál később történik, vagyis az időkoordinátája minden inerciarendszerben pozitív. Ezeket O *abszolút jövő*jének nevezzük, és az események kiváltója, oka esetleg lehet az O esemény. A pozitív intervallumú események másik fele O-nál korábban történik, vagyis az időkoordinátája minden inerciarendszerben negatív. Ezeket O *abszolút múlt*jának nevezzük, és ezek az események esetleg lehetnek az O esemény kiváltói, okozói.

12.7. Lorentz-kontrakció

Képzeljünk el két űrhajót, amelyek egymáshoz képest nem mozognak, és a távolságuk az egyikük által meghatározott K inerciarendszerben éppen egységnyi! A két űrhajó világvonala a 12.13. ábrán látható két párhuzamos egyenes.



12.13. ábra

Vajon milyen távolinak észleljük a két űrhajót a K-hoz képest v sebességgel mozgó K' rendszerből nézve? A testek távolságát úgy határozhatjuk meg, hogy megnézzük: mekkora egy *adott pillanatban* a térbeli koordinátáik különbsége. (Ha nem ugyanabban a pillanatban néznénk meg a koordináták különbségét, ugyanúgy becsapnánk magunkat, mintha egy gyorsan mozgó vonat hosszát úgy „határoznánk meg", hogy megmérjük, hol van a szerelvény vége reggel, és hol a mozdony délben, majd e két adatot kivonnánk egymásból.)

Legyen a kérdéses időpont a vesszős rendszerbeli $t' = 0$, s az ezeknek megfelelő események O és Q. Az I. űrhajó ekkor az $x' = 0$ helyen, a II. űrhajó pedig (12.4)-nek, valamint $t' = 0$-nak és $x = 1$-nek megfelelően az $x' = \sqrt{1-v^2}$ helyen található.

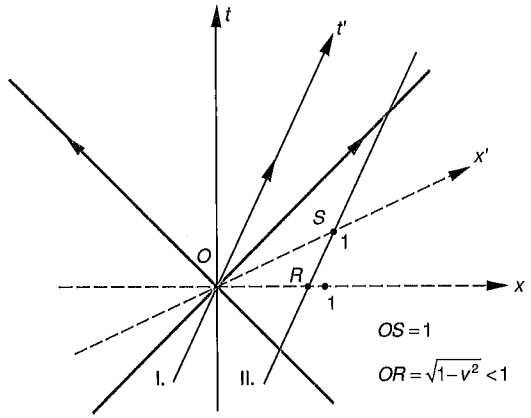
A fentebb tárgyaltak általánosabb formában: a koordináta-rendszerhez képest v sebességgel mozgó, egymáshoz képest mozdulatlan két test l távolsága a nyugalmi rendszerükben mért l_0 távolságnál kisebb, annak $\sqrt{1-v^2}$ -szerese (SI egységrendszerben számolva $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ -szerese):

$$\boxed{l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (12.9)$$

A rövidülés mértéke éppen a 11.2. pontban említett *Lorentz-kontrakció* szorzófaktorával egyezik meg, de a képlet fizikai jelentése lényegesen különbözik az ottanitól. Lorentz egy kitüntetett koordináta-rendszerben, az éter nyugalmi rend-

szerében mérhető „igazi" hosszúsághoz viszonyított tényleges alakváltozásról beszélt, a relativitáselméletben viszont a testek nyugalmi rendszerben mérhető nyugalmi hossz és egy másik vonatkoztatási rendszerbeli hosszúság eltéréséről van szó. Lorentz eredeti elgondolásában az idő minden vonatkoztatási rendszerben ugyanazzal a számmal jellemezhető, a relativitáselméletben viszont az idő transzformációja az elmélet szerves részét képezi.

A Lorentz-kontrakció a relativitáselméletben teljesen szimmetrikusan jelenik meg a különböző inerciarendszerek távolságmérőszámaiban.



12.14. ábra

Ha két – egymáshoz és a vesszős rendszerhez képest mozdulatlan – űrhajó távolsága a vesszős rendszerben egységnyi (lásd a 12.14. ábrát), akkor a vesszőtlen rendszerben észlelt távolságuk $\sqrt{1-v^2}$, vagyis az egységnél rövidebb lesz.

12.8. Relativisztikus sebesség-összetevés

Vizsgáljuk meg, mekkora a sebessége valamely K koordináta-rendszerből nézve annak a testnek, amely a K-hoz képest v sebességgel mozgó K' rendszerben u sebességgel rendelkezik! Helyettesítsünk a (12.4) képletben x' helyébe ut'-t (hiszen ez felel meg annak, hogy a test a K' rendszerben u sebességgel mozog), majd x és t hányadosaként számítsuk ki a test K-beli w sebességét:

$$w=\frac{x}{t}=\frac{x'+vt'}{t'+vx'}=\frac{ut'+vt'}{t'+uvt'}=\frac{u+v}{1+uv}. \qquad (12.10)$$

Ez a relativisztikus sebesség-összetevés képlete, ami az SI egységrendszerben

$$\boxed{w=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}} \qquad (12.11)$$

alakot ölti. (Nevezhetnénk a képletet „sebesség-összeadásnak" is, de ez az elnevezés félrevezető lenne, hiszen látható, hogy nem egyszerűen összegződnek a sebességek, hanem annál bonyolultabb formula szerint tevődnek össze.)

A relativisztikus sebesség-összetevés formulája a fénynél sokkal kisebb sebességek határesetében visszaadja a Galilei-féle sebesség-összeadás (11.3)-nak megfelelő képletét. Valóban, ha $u \ll 1$ és $v \ll 1$ akkor (12.10) jobb oldalának nevezője 1-gyel közelíthető, és így a sebességek összetevésének szabálya: $w \approx u + v$. Ha viszont a sebességek összemérhetők a fénysebességgel, akkor a relativisztikus képlet lényegesen különbözik a klasszikustól. Mozogjon például egy űrhajó az egyik vonatkoztatási rendszerből nézve a fénysebesség felével, tehát legyen $u=\frac{1}{2}$, és legyen a két rendszer relatív sebessége ugyancsak a fénysebesség fele, azaz $v=\frac{1}{2}$! A Galilei-féle sebesség-összeadás képlete azt mondaná, hogy a test a másik rendszerből nézve éppen a fénysebesség $\left(w=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\right)$, míg a helyes relativisztikus (12.10) összefüggés szerint

$$w=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}<1.$$

Belátható, hogy a fénysebességnél kisebb sebességek (12.10) alapján történő „összeadásakor" az eredmény mindig 1-nél (tehát a fénysebességnél) kisebb lesz.

Amennyiben magának a *fény*nek a sebességét ($u = 1$) akarjuk átszámítani az egyik rendszerből egy másik, hozzá képest v sebességgel mozgó rendszerbe, akkor (12.10) alapján a

$$w=\frac{1+v}{1+1\cdot v}=1$$

eredményt kapjuk. A vákuumban terjedő fény sebessége tehát *minden inerciarendszerben ugyanakkora*. (Ezen természetesen nem kell csodálkoznunk, hiszen éppen ebből az alapfeltevésből „vezettük le" a relativitáselmélet formuláit, a Lorentz-transzformáció és a sebesség-összetevés képleteit.)

Hogyan értelmezhető a relativitáselméletben a 11.3. pontban ismertetett Fizeau-kísérlet furcsa, a klasszikus fizikai várakozástól eltérő eredménye? A vízben terjedő fény a vízhez képest $u=\frac{c}{n}$ sebességgel mozog, ahol n a víz törésmutatója. (Itt most célszerű, ha az SI egységrendszert használjuk, tehát a vákuumbeli fénysebesség nagyságát *nem* tekintjük egységnyinek.) Mekkora a fény sebessége a laboratórium vonatkoztatási rendszerében, ha a víz v sebességgel áramlik a csövekben? (Természetesen fennáll, hogy $v \ll c$.) A relativisztikus sebesség-összetevés (12.11) képlete szerint

$$w=\frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{nc}}=\frac{\left(\frac{c}{n}+v\right)\cdot\left(1-\frac{v}{nc}\right)}{1-\frac{v^2}{n^2c^2}}\approx\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

ez éppen a Fizeau által mért (11.7) érték. (A számolás végén alkalmazott közelítésben a folyadék sebességének négyzetével arányos, másodrendűen kicsiny tagokat elhanyagoltuk.)

12.9. Relativisztikus Doppler-effektus

Már a klasszikus fizikában felismerték, hogy ha egy hullámforrás, amely f_0 frekvenciájú hullámokat bocsát ki, v_f sebességgel mozog a hullámot c sebességgel továbbító közeghez képest, akkor egy álló „megfigyelő" által észlelt frekvencia

$$f=f_0\frac{c}{c+v_f} \tag{12.12}$$

lesz. Ez a Doppler-effektus egyik képlete (lásd a 2.8.1.3. pontot). Ugyancsak frekvenciaeltolódás lép fel akkor, amikor a hullámforrás áll, de a megfigyelő mozog v_m sebességgel a közeghez képest. Ilyenkor az észlelt frekvencia:

$$f=f_0\frac{c-v_m}{c}. \tag{12.13}$$

Mindkét képlet azt az esetet tükrözi, amikor a hullámforrás és a megfigyelő *távolodik* egymástól. (Ha a hullámforrás és a megfigyelő közeledik egymáshoz, akkor a fenti képletekben v_f, illetve v_m előjelét meg kell fordítanunk.)

A relativitáselméletben is feltehetjük a kérdést: vajon észlelünk-e frekvenciaváltozást a vákuumban terjedő fény esetében, ha a fényforrás vagy a megfigyelő mozog. Itt azonban (az éter fogalmának száműzése után) nincs értelme azt feszegetni, hogy a forrás mozog-e a hullámot továbbító közeghez képest, vagy a megfigyelő; csak és kizárólag az *egymáshoz viszonyított* v sebességüknek van fizikai realitása. Emiatt a Doppler-effektus két klasszikus képletét egyetlen relativisztikus formulának kell felváltania. Ezt a formulát a Lorentz-transzformáció (12.5) képletei alapján könnyen meghatározhatjuk.

Tekintsünk egy jelforrást, amely a K' koordináta-rendszer origójában áll, és – a saját rendszerében érvényes időegységekben mérve – T_0 időközönként egy-egy fényjelet bocsát ki! Az n-edik fényjel kibocsátásának eseményét ebben a vonatkoztatási rendszerben a

$$t'=nT_0 \quad \text{és} \quad x'=0$$

koordinátákkal jellemezhetjük.

Ugyanennek az eseménynek a koordinátái abban a K rendszerben, amely K'-től v sebességgel távolodik:

$$t=\frac{t'+\frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{nT_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{és} \quad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{v\cdot nT_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ezen esemény során kibocsátott fényjel a K rendszer origójában álló megfigyelőhöz

$$t_n=t+\frac{x}{c}=\frac{nT_0+\frac{v}{c}nT_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=nT_0\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=nT_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

időpillanatban érkezik meg. Két egymást követő jel között tehát az időkülönbség a K rendszerben nyugvó megfigyelő számára:

$$T=t_{n+1}-t_n=T_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Ha a fényjelek helyébe egy $f_0=\frac{1}{T_0}$ frekvenciájú fény hullámhegyeit gondoljuk, akkor $f=\frac{1}{T}$ megadja a K rendszerben észlelhető fény frekvenciáját:

$$\boxed{f=f_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}}.$$

Ez a relativisztikus Doppler-effektus formulája, amely a klasszikus (12.12) és (12.13) képletek egyikével sem egyezik, hanem azok szorzatának négyzetgyökéből (tehát a „mértani közepükből") kapható meg.

A relativisztikus Doppler-képlet érvényességét nagy (a fénnyel összemérhető) sebességgel mozgó atomok által kibocsátott fény spektruma kísérletileg is igazolta.

12.10. Ikerparadoxon

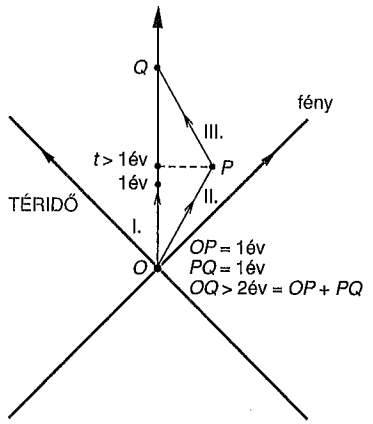
A relativitáselmélet a hétköznapi tapasztalatokhoz képest meglehetősen szokatlan, furcsa, de nem ellentmondásos elmélet. A 20. század elején, amikor az elmélet fogalmai és összefüggései – elsősorban Einstein munkássága nyomán – zárt rendszerré összeálltak, sokan és sokféle módon próbáltak logikai ellentmondást találni ebben a rendszerben. Ez mindmáig senkinek nem sikerült, de a kitalált „paradoxonok", ellentmondásosnak tűnő gondolatkísérletek elemzése tanulságos lehet, átgondolásuk az elmélet jobb megértését segíti.

Az egyik leghíresebb vélt ellentmondás az időtágulás furcsaságát boncolgató ikerparadoxon. Tételezzük fel, hogy egy, a távoli világűr űrfolyosóján közlekedő (I jelű) űrhajón születik két ikertestvér, Péter és Pál. A testvérek annyira egyformák, hogy jogosan gondolhatja róluk mindenki: ugyanolyan ütemben jár a „biológiai órájuk", tehát mindketten ugyanolyan ütemben fognak majd „öregedni".

Nem sokkal a születésük után találkozik velük egy másik, (II jelzésű) űrhajó, s – valamilyen ok miatt – az egyik gyermek, Péter átszáll erre az űrhajóra; Pál a születési helyén marad. Péterék űrhajója egy rövid, de erőteljes gyorsítási szakasz után nagy sebességre tesz szert Pál tartózkodási helyéhez képest, majd a két űrhajó – immár kikapcsolt hajtóművel – gyors ütemben eltávolodik egymástól (12.15. ábra). Mindkét űrhajó szabad mozgást végez, tehát vonatkoztatási rendszerük inerciarendszernek tekinthető.

Amikor a II. űrhajón levő órák 1 év elteltét mutatják, tehát amikor Péter éppen 1 éves lett, az űrhajó találkozik egy másik, „szemből" (azaz az I jelűvel ellentétes irányból) érkező III számú űrjárművel. Az ábrán ezt az eseményt *P* jelöli, és az elmondottak szerint az *OP* világvonalhoz tartozó sajátidő pontosan 1 év. Másrészt az is igaz, hogy az I. űrhajó vonatkoztatási rendszerben (ahonnan Pál szülei „űrmobiltelefonon" gondosan nyomon követik másik gyermekük útját) a *P* eseménynek (az időtágulási képletnek megfelelően) 1 évnél *nagyobb* időkoordinátát tulajdonítanak.

A *P* esemény nemcsak a születésnap megünneplését jelöli, hanem azt is, hogy Péter átkerül a III jelű űrhajóra, hogy visszatérhessen a szüleihez. Meg is érkezik, és ezt az eseményt a téridő-térképen *Q*-val jelöltük (12.15. ábra). Ha a III. űrhajó ugyanakkora sebességgel mozog az I jelzésűhöz képest, mint amekkorával korábban II távolodott I-től, akkor a *PQ* világvonalhoz tartozó sajátidő ugyancsak 1 év, Péter tehát éppen 2 éves korában ér vissza a családjához. Ugyanakkor az I. űrhajó koordináta-rendszerében az *O* és *Q* események között nem 2 év, hanem annál *több* telt el, Pál tehát a találkozáskor 2 évnél *idősebb* kell legyen.



12.15. ábra

Ez a következtetés – jóllehet a relativitáselmélet képleteiből kiindulva kaptuk – azért tűnik paradoxonnak, mert a két, egymástól eltávolodó, majd ismét összetalálkozó ikertestvér látszólag szimmetrikus helyzetben van, s éppen a relativitáselmélet egyik alapfeltevése, hogy a szimmetrikus szerepet játszó inerciarendszerek között semmiféle fizikai különbség nem létezhet.

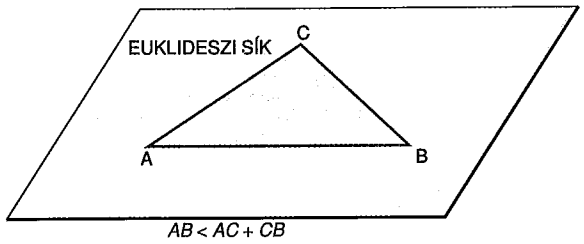
A látszólagos ellentmondás azért „sokkoló", mert nem olyan absztrakt fogalmakra hivatkozik, mint egy eseménynek egyik vagy másik vonatkoztatási rendszerben érvényes idő- és térkoordinátái, hanem olyan objektív különbségre, hogy az ikertestvérek találkozásakor a 2 éves Péter mondjuk még beszélni is alig tud, a 8 évet „öregedett" Pál pedig esetleg már folyékonyan olvas. (Ilyen arányú eltéréshez természetesen nagyon nagy eltávolodási és visszatérési sebességre, a fénysebesség 97 százalékára lenne szükség; ez azonban csak technikai nehézség, nem elvi lehetetlenség.)

Mi hát az ikerparadoxon feloldása, magyarázata? A 12.15. ábrán jól látható, hogy a két iker, Péter és Pál „sorsa" nem teljesen egyenrangú, nem mondhatjuk, hogy egyikük sincs kitüntetett helyzetben a másikhoz képest. Pál *OQ* világvonala ugyanis a téridő *egyenes* vonala (szabad mozgás), míg Péter világvonala az *OP* és *PQ* vonalakból összetevődő *tört* vonal. Geometriára lefordítva az ikerparadoxon kérdését: vajon a téridő *OPQ* háromszögének két oldala együttesen ugyanakkora hosszúságú-e, mint a harmadik oldal? (Ne feledjük, hogy a téridőn a mozgó testek világvonalának hossza igazából az időt, nevezetesen a sajátidőt jelenti.) A válasz: *nem*. Ezen nem kell csodálkoznunk, az lenne a meglepő, ha nem így lenne!

A „közönséges" euklideszi síkon sem csodálkozunk azon, hogy egy háromszög két oldalhosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza:

$$AB < AC + CB, \tag{12.14}$$

ez a jól ismert háromszög-egyenlőtlenség (12.16. ábra).



12.16. ábra

Hasonló a helyzet a téridőn is: bármely – valódi testek világvonalai által kifeszített – háromszögben fennáll (a 12.15. ábra jelöléseit használva) az alábbi egyenlőtlenség:

$$\boxed{\tau_{OP} + \tau_{PQ} \leq \tau_{OQ}}. \tag{12.15}$$

(12.14)-et és (12.15)-öt összevetve látjuk, hogy a „hiperbolikus geometriájú" téridőn éppen fordított irányú a háromszög-egyenlőtlenség, mint az euklideszi geometriát követő síkon. Az egyenlőtlenség irányának megfordulása is a kétféle geometria különbözőségét jelzi.

Az ikerparadoxon, vagyis Péter és Pál eltérő „korosodásának" magyarázatát egyesek megpróbálták a két testvér eltérő mozgásformájában keresni. Míg Pál mindvégig erőmentesen, szabadon mozgott, addig Péternek gyorsulnia is kellett akkor, amikor a II. űrhajóból a III jelzésű űrhajóba átszállt – mondják. Ha Péter a találkozóra fiatalabban érkezik, mint Pál, és a mozgásuk csak a P esemény környékén történt fékezésben különbözik egymástól, akkor nyilván a P esemény során fiatalodott meg hirtelen Péter – állítják egyesek. Ez azonban éppúgy téves értelmezés, mintha valaki azt mondaná: egy papírlapra rajzolt háromszögnél az AC és CB szakaszok meghúzása közben azért fogy több festék a golyóstollunkból, mint amennyi az AB oldal rajzolásakor, mert a C pontban irányt kellett változtassunk; az „elpazarolt" festéket tehát a C pont környékén kell keresnünk!

13. Relativisztikus kinematika

13.1. Vektorok a téridőn

A klasszikus, newtoni fizikában egy tömegpont mozgását jól lehet jellemezni a sebességével. Ezt a vektoriális mennyiséget a test $\mathbf{r}$ helyvektorának kicsiny $\Delta\mathbf{r}$ megváltozása és a változáshoz szükséges Δt idő hányadosaként értelmezzük (lásd az 1.1.2. alfejezetet):

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Ez a hányados az anyagi pont *átlagsebességét* adja meg a kérdéses időtartamra; ebből a pillanatnyi sebesség ($\mathbf{v}$) határértékképzéssel, Δt egyre kisebbre választásával adódik:

$$\boxed{\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}}}.$$

Ha a 3 dimenziós helyvektor komponensei

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

akkor a sebesség komponensei:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}.$$

Ezeket a klasszikus fizika alapfogalmakat csak azért idéztük fel, mert a relativitáselméletben is hasonlókkal lehet leírni a pontszerű részecskék mozgását olyan esetekben, amikor az nem tekinthető szabad mozgásnak.

A megfontolások alapját az a követelmény képezi, hogy a törvények legyenek minden inerciarendszerben *ugyanolyan alakúak*, vagyis a Lorentz-transzformációra nézve *invariánsak*. Ehhez olyan mennyiségeket kell keresnünk, amelyek az egyik vonatkoztatási rendszerből a másikba ugyanúgy számíthatók át, mint a tér- és időkoordinátákból képzett $\mathbf{R} = (t, x, y, z)$ téridő-négyesvektorok. (A téridőn értelmezett vektorokat, az ún. négyesvektorokat vastag nagybetűvel fogjuk jelölni. Az 1 tér- és 1 időkoordinátát tartalmazó téridőn ezeknek a vektoroknak természetesen csak 2 komponense van.)

13.1.1. Négyessebesség

Az egyik legegyszerűbb példa négyesvektorra az ún. *négyessebesség*, amely a téridő-vektor kicsiny megváltozásának és a sajátidőnek a hányadosa:

$$\boxed{\mathbf{V} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}\tau}}.$$

A négyessebesség értelmezésénél azért a sajátidővel osztottuk a téridő-térképen leolvasható elmozdulást, és nem az „igazi" idővel, mert ez utóbbi függ attól, hogy melyik vonatkoztatási rendszerben végezzük el ezt a műveletet. A sajátidő viszont *invariáns* (a vonatkoztatási rendszer választásától független) mennyiség.

A négyessebesség a téridőn rajzolt (általában nem egyenes) világvonal *érintő*jének irányába mutat. Az idődilatáció jelenségének bemutatásakor láttuk, hogy a sajátidő és a koordinátaidő kapcsolata:

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-v^2}},$$

ahol v a test sebessége a kérdéses koordináta-rendszerben. Ennek felhasználásával a négyessebességet kifejezhetjük a klasszikus fizikából ismert $\mathbf{v} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ hármassebességgel:

$$\mathbf{V} = \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t}.$$

(Az egyszerűbb írásmód kedvéért a határérték jelét a képletekben nem írtuk ki, de valamennyi megváltozást kicsinek, határértékben nullának tekintünk.). Mivel $\Delta\mathbf{R}$ komponensei $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = (\Delta t, \Delta\mathbf{r})$, a négyessebesség így írható:

$$\mathbf{V} = \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(1, \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right),$$

azaz

$$\mathbf{V} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right).$$

Abban a vonatkoztatási rendszerben, amely a testtel együtt mozog (tehát a test nyugalmi rendszerében), a négyessebesség különösen egyszerű alakú:

$$\mathbf{V}' = (1, 0, 0, 0).$$

A négyessebesség „hossza" (vagyis az első komponensének négyzetéből a többi négyzetösszegét levonva, majd négyzetgyököt vonva adódó szám) minden koordináta-rendszerben 1; a négyessebesség tehát a téridőn egy „egységvektor".

13.1.2. Négyesgyorsulás. Egyenletesen gyorsuló mozgás

A négyessebességből képezhetünk egy másik négyesvektort, az ún. négyesgyorsulást. Ez a négyessebesség kicsiny megváltozásának és a sajátidőnek a hányadosa:

$$\boxed{\mathbf{A} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\Delta\mathbf{V}}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}\tau}}.$$

Abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a test sebessége éppen nulla (vagyis a test pillanatnyi nyugalmi rendszerében), a négyesgyorsulás

$$\mathbf{A}' = (0, \mathbf{a}),$$

ahol $\mathbf{a}$ a klasszikus fizikából ismert (hármas-)gyorsulás.

Vajon melyik az a mozgás, amely a klasszikus fizika

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_0 t, \qquad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}_0}{2} t^2$$

képletekkel leírható egyenletesen gyorsuló mozgásának felel meg a relativitáselméletben? Ennek a kérdésnek csak akkor van értelme, ha megmondjuk, hogy melyik koordináta-rendszerben legyen a test gyorsulása állandó. Ha pl. a pillanatnyi nyugalmi rendszer az, ahol a négyesgyorsulás állandó, akkor belátható, hogy a kezdetben álló test sebessége így változik:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathbf{a}_0 t}{\sqrt{1 + a_0^2 t^2}}.$$

Kezdetben (kis sebességeknél) közelítőleg a nemrelativisztikus képlet érvényes, hosszú idő múlva azonban a sebesség nem nő korlátlanul, hanem $c = 1$ határsebességhez tart. Ha a gyorsulás az x tengely irányában történik, akkor az út–idő függvény:

$$x(t)=\frac{1}{a_0}\left(\sqrt{1+a_0^2t^2}-1\right),$$

amely a mozgás kezdetekor (kis sebességeknél) a newtoni kinematikából jól ismert $x=\frac{1}{2}a_0t^2$ *paraboláv*al közelíthető, általánosan azonban az

$$\left(a_0x+1\right)^2-\left(a_0t\right)^2=1$$

egyenletű *hiperbola* alakú görbe a téridőn.

14. Relativisztikus dinamika

Egy pontszerűnek tekinthető test anyagmennyiségét egy skalár mérőszámmal, az m-mel jelölt tömegével jellemezhetjük. A tömeg és a test sebességének szorzata, vagyis a test

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}$$

módon kiszámítható *impulzusa* a klasszikus fizikában alapvető szerepet játszik a mozgások dinamikájának leírásában. Ütközéseknél például az impulzusok vektori összege állandó marad, általában pedig (ismert külső erők hatására) az impulzus Newton II. törvényének megfelelő módon változik.

A továbbiakban megkeressük a newtoni fizikában előforduló dinamikai mennyiségek (impulzus, energia, erő stb.) relativisztikus megfelelőit, és a rájuk vonatkozó egyenletekből is megadunk néhányat.

14.1. Négyesimpulzus. Relativisztikus ütközések

A négyessebességből eljuthatunk egy olyan mennyiséghez, amely egy anyagi pont (pl. egy atomi részecske) lendületét, impulzusát jellemzi a relativitáselméletben. Ha egy m-mel jelölt skalár számmal adjuk meg, hogy mennyi a test „anyagmennyisége", más szóval a test tömege, akkor a

$$\boxed{\mathbf{P}=m\mathbf{V}=\left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}},\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right)}$$

négyesvektor egyszerre függ attól, hogy mekkora anyagdarab mozog és hogy mekkora ennek a testnek a sebessége. Ezt a vektort a test *négyesimpulzus*ának nevezik. Az elnevezést az indokolja, hogy $\mathbf{P}$ utolsó 3 komponense „nemrelativiszti-

kus" (a fényhez képest lassú) mozgásoknál éppen a klasszikus fizikából ismert $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ hármasimpulzussal egyezik meg.

Akár a klasszikus fizikában, a relativisztikus ütközéseknél is igaz, hogy az ütközésben részt vevő részecskék impulzusainak összege állandó. A különbség azonban lényeges: ez a megmaradási tétel nemcsak a hármasimpulzusra, hanem a *teljes négyesimpulzusra érvényes*.

14.2. Relativisztikus impulzus. Nyugalmi tömeg, relativisztikus tömegnövekedés

P utolsó három komponense (ún. térszerű része) a

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \tag{14.1}$$

kifejezéssel adható meg. Ez a részecske *relativisztikus impulzusa,* amelyet SI egységrendszerben

$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{v}}$$

alakban írhatunk fel.

A sebesség előtt álló $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ kifejezést szokás *relativisztikus tömegnek,* vagy *megnövekedett tömegnek* nevezni, értéke mozgó testeknél mindig nagyobb m-nél. Ennek az elnevezésnek előnye, hogy vele a relativisztikus impulzus formálisan ugyanúgy írható fel, mint a newtoni mechanikában: impulzus = tömeg · sebesség. Ilyen szóhasználat mellett m a nulla sebességhez tartozó, ún. nyugalmi tömeg, amelyet éppen ezért m_0-val jelölnek. A relativisztikus tömeg fogalmának használata azonban számos hátránnyal is jár. Nagysága nem csupán a mozgó test anyagmennyiségétől, hanem annak mozgásállapotától, sebességétől is függ. Emiatt a megnövekedett tömeg számértéke függ a vonatkoztatási rendszer választásától! Másrészt a relativisztikus tömeg felírása elkendőzi azt a tényt, hogy a gyorsan mozgó részecskék impulzusa *nem* egyenesen arányos a sebességükkel, hanem bonyolultabb módon függ attól.

14.3. Relativisztikus energia. Nyugalmi energia, mozgási energia, teljes energia

A négyesimpulzus ütközések során érvényes megmaradása nemcsak a **p** vektorok összegének, hanem a **P**-kben szereplő első komponensek összegének megmaradását is jelenti. Ezek a mennyiségek, vagyis az $\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$ kifejezések kis sebességek ($v \ll 1$) esetén így írhatók:

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m\left(1-v^2\right)^{-1/2} \approx m\left(1+\frac{1}{2}v^2\right) = m+\frac{1}{2}mv^2.$$

Ha visszatérünk a szokásos SI egységrendszerre, a fenti formula jobb oldala

$$\frac{1}{c}\left(mc^2+\frac{1}{2}mv^2\right)$$

alakot ölti. A zárójelben álló kifejezés első tagja egy – a sebességtől független – állandó, a második pedig a részecske jól ismert *mozgási energiája*. Ennek a mennyiségnek (pontosabban ilyenek összegének) megmaradása a rugalmas ütközésekre jellemző energiamegmaradás törvényével egyenértékű. A **P** négyesimpulzus első (ún. „időszerű") komponensét ezek szerint (egy $\frac{1}{c}$ szorzófaktortól eltekintve) a részecske *relativisztikus energiájával* azonosíthatjuk:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{14.2}$$

a hagyományos SI egységrendszerben pedig

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}.$$

Az energia relativisztikus képlete (egy lényegtelen szorzófaktortól eltekintve) éppen a relativisztikus (megnövekedett) tömeg formulájával egyezik meg. Ez utóbbi használata már csak azért is felesleges, mert – mint látjuk – tulajdonképpen egy korábbról már ismert fizikai mennyiséggel, az energiával egyenlő.

Külön figyelmet igényel a nulla sebességhez tartozó

$$\boxed{E_0 = mc^2}$$

„nyugalmi energia". Ez a mennyiség a newtoni mechanikában nem fordult elő, de a relativitáselmélet formuláinak lényeges eleme. Létezését – részecskegyorsítókban történő ütközéseknél, részecskék keltése vagy eltűnése során – kísérletileg sokszorosan ellenőrizték.

Egy részecske teljes energiájának és a nyugalmi energiájának különbségét szokás mozgási energiának nevezni:

$$E_{\text{mozgási}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2.$$

Ez a mennyiség kis sebességek esetén – mint láttuk – a klasszikus fizikából ismert

$$E_{\text{mozgási}} \approx \frac{1}{2}mv^2$$

képlettel közelíthető, a fénnyel összemérhető sebességeknél azonban lényegesen különbözik attól. Egymással kölcsönhatásba kerülő (pl. ütköző vagy elbomló) részecskéknél sem a nyugalmi energiára, sem pedig a mozgási energiára nem érvényes külön-külön megmaradási törvény; csak *a teljes energiák összege marad a folyamat során állandó*.

14.4. Az energia-impulzus vektor hossza. Nulla nyugalmi tömegű részecskék

A $\mathbf{P} = (E, \mathbf{p})$ vektort (vagyis a négyesimpulzus vektort) a benne szereplő mennyiségek fizikai jelentése miatt *energia-impulzus vektor*nak is szokták nevezni. A relativisztikus energia (14.2) és a relativisztikus impulzus (14.1) képletét négyzetre emelve és kivonva egymásból, a sebesség kiesik, és az energia, illetve impulzus között a következő összefüggést kapjuk:

$$E^2 - p^2 = m^2, \tag{14.3}$$

avagy SI egységrendszerben:

$$\boxed{E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2}.$$

Ez az egyenlet azért hasznos, mert akkor is alkalmazható, ha a részecske (nyugalmi) tömege nulla. Ilyen részecske például a fény kvantuma, a *foton* vagy (jó közelítéssel) a *neutrínó* (lásd a 34.1.2. pontot). Az ilyen részecskék energiája: $E = pc$, a

sebességük pedig c. Az energia és impulzus sebességgel kifejezett alakja ilyen esetekben (a nevezőben levő nulla miatt) nyilván nem alkalmazható.

A sebesség is kifejezhető az energiával és az impulzussal, vagy pl. az impulzussal és a tömeggel:

$$v = \frac{cp}{E}c = c\sqrt{\frac{p^2}{p^2+m^2c^2}}.$$

Ha $m = 0$, akkor $v = c$, hiszen egy nulla tömegű részecske csakis a fény sebességével mozoghat.

Az energia-impulzus vektor, ha a téridő-térképen ábrázoljuk, éppen olyan irányba mutat, mint amerre a hozzá tartozó részecske világvonala halad. Az energia-impulzus vektor „hossza" (ha azt a komponensek négyzetének különbségéből vont négyzetgyök segítségével számoljuk, éppen úgy, mint a téridő-vektorból a sajátidőt) a részecske tömegével egyezik meg. A nulla tömegű részecskék (például a foton) négyesimpulzusának hossza nulla.

14.4.1. Relativisztikus mozgásegyenlet

Az energia és az impulzus relativisztikus képleteinek ismeretében a munkatétel felhasználásával eljuthatunk a newtoni dinamika $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ alapegyenletének relativisztikus megfelelőjéhez.

Ha egy pontszerűnek tekinthető, $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó testre kicsiny Δt ideig $\mathbf{F}$ erő hat, mivel a test elmozdulása ezalatt $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\Delta t$, a testen végzett munka

$$W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\cdot\Delta t.$$

Ez a munka a test mozgási energiáját, és ezzel együtt a teljes E energiáját növeli. Mivel a relativitáselméletben az energia (12.14) szerint az $E = \sqrt{m^2+p^2}$ képlettel adható meg, ennek kicsiny megváltozása

$$\Delta E = \sqrt{m^2+(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^2} - \sqrt{m^2+p^2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{m^2+(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^2} - \sqrt{m^2+p^2}\right)\left(\sqrt{m^2+(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^2} + \sqrt{m^2+p^2}\right)}{\sqrt{m^2+(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^2} + \sqrt{m^2+p^2}} =$$

$$= \frac{2\mathbf{p}\cdot\Delta\mathbf{p}+(\Delta\mathbf{p})^2}{\sqrt{m^2+(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^2} + \sqrt{m^2+p^2}} \approx \frac{\mathbf{p}\cdot\Delta\mathbf{p}}{\sqrt{m^2+p^2}}.$$

A munkatétel $W = \Delta E$ képletéből és a fenti összefüggésekből leolvashatjuk az erő és az impulzusváltozás kapcsolatát:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\cdot\Delta t = \frac{\mathbf{p}\cdot\Delta\mathbf{p}}{\sqrt{m^2+p^2}},$$

ami a sebesség és a relativisztikus impulzus közötti, (14.1)-ből származtatható $\mathbf{v}\sqrt{m^2+p^2} = \mathbf{p}$ összefüggés kihasználásával az

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}} \qquad (14.4)$$

mozgásegyenletet sugallja.

Az itt ismertetett érvelés nem tekinthető levezetésnek, hiszen benne nem az erő vektora, hanem annak v-vel skalárisan szorzott alakja fordul elő. (A rövid számolás csupán annyit igazol, hogy a mozgásegyenlet fenti alakja – amelyhez más módon is el lehet jutni – összhangban áll a munkatétellel.) A relativisztikus mozgásegyenlet formálisan ugyanolyan alakú, mint a newtoni mechanikában, a különbség „mindössze" annyi, hogy benne az impulzus relativisztikus alakja szerepel.

14.4.2. Speciális problémák a relativisztikus dinamikában

14.4.2.1. A Compton-szóródás

A relativisztikus ütközés képleteinek illusztrálására tekintsünk egy példát! Ütközzön egy álló, m tömegű részecskének (pl. egy elektronnak) E energiájú foton, amely azután eredeti haladási irányával ellentétesen, „visszafelé" szóródik. Határozzuk meg a szórt foton energiáját nemrelativisztikus ($E \ll m$), illetve ultrarelativisztikus ($E \gg m$) határesetben!

Válasszuk a koordináta-rendszert úgy, hogy annak x tengelye a szóródás előtti foton haladási irányába mutasson, és használjuk a $c = 1$ egységrendszert! Az ütközés előtt a foton energia-impulzus vektora (a térbeli komponensek közül csak a folyamatban lényeges x irányú komponenst írva ki):

$$\mathbf{P}_{\text{foton}} = (E, E),$$

az álló elektroné pedig

$$\mathbf{P}_{\text{elektron}} = (m, 0).$$

Az ütközés során az elektron valamekkora p' impulzusra teszt szert, a visszaszóródó foton energiája pedig E' lesz. Ismerve a szóródó részecskék tömegét, felírhatjuk a szórt foton, illetve a meglökött proton energia-impulzus vektorát:

$$\mathbf{P}'_{\text{foton}} = (E', -E'),$$

illetve

$$\mathbf{P}'_{\text{elektron}} = (\sqrt{m^2+p'^2}, p').$$

Ezek felhasználásával a relativisztikus energia- és impulzusmegmaradás törvénye így fogalmazható meg:

$$\mathbf{P}_{\text{foton}} + \mathbf{P}_{\text{elektron}} = \mathbf{P}'_{\text{foton}} + \mathbf{P}'_{\text{elektron}},$$

azaz

$$E + M = E' + \sqrt{m^2+p'^2} \qquad \text{és} \qquad E + 0 = -E' + p'.$$

Az impulzusmegmaradást kifejező egyenletből p'-t kifejezve és az energiaképletbe helyettesítve

$$E + M - E' = \sqrt{m^2 + \left(E+E'\right)^2},$$

innen pedig algebrai átalakítások után

$$E' = \frac{m}{2E+m}E$$

adódik. Nemrelativisztikus határesetben $2E$ elhanyagolható m mellett a nevezőben, s így $E' \approx E$; a foton tehát változatlan energiával (változatlan frekvenciával) visszaverődik az elektronról, éppen úgy, mint ahogy egy tükörről tenné. Ultrarelativisztikus energiáknál viszont a képlet nevezőjében m hanyagolható el $2E$ mellett, s emiatt $E' \approx m/2$. (Mindkét eredmény leolvasható a téridő-térképen felrajzolt energia-impulzus vektorok összegének megmaradásából is.)

A fentihez hasonlóan – a relativisztikus energia- és impulzusmegmaradás – törvényének alkalmazásávalmegkapható a Compton-szórás (lásd a 18.2. pontot) általános képlete is. Ha egy m tömegű részecskének E energiájú foton (vagy más

nulla tömegű részecske) ütközik, majd a meglökött m tömegű részecske mellett egy ϑ szögben szóródó, E' energiájú foton távozik, akkor fennáll:

$$\frac{1}{E'}-\frac{1}{E}=\frac{1}{m}\left(1-\cos\vartheta\right).$$

14.4.2.2. Nehéz részecske bomlása

Az energia- és impulzusmegmaradás törvénye nemcsak a szigorú értelemben vett ütközési folyamatokban, hanem pl. *bomlások*nál is érvényes.

Tekintsük azt az esetet, amikor egy M tömegű nyugvó részecske m tömegű részecskére és egy fotonra bomlik. Számítsuk ki, mekkora energiára tesz szert az m tömegű részecske, és mekkora lesz a foton impulzusa! A bomláskor keletkező foton impulzusát p-vel jelölve, a másik részecske impulzusa ugyanekkora nagyságú, de ellentétes irányú kell legyen, a részecskék energiája pedig a tömegük ismeretében kifejezhető az impulzusukkal. Az energia-impulzus vektor megmaradását így írhatjuk fel:

$$(M,0)=(\sqrt{m^2+p^2},-p)+(p,p).$$

Az impulzus megmaradását már figyelembe vettük, az energia megmaradása pedig így írható:

$$M=\sqrt{m^2+p^2}+p,$$

ahonnan a foton impulzusa

$$p=\frac{M^2-m^2}{2M}.$$

A másik részecske energiája:

$$\sqrt{m^2+p^2}=\frac{M^2+m^2}{2M}.$$

14.4.2.3. Rugalmatlan ütközés, tömegdefektus

Mozogjon két, egyaránt m (nyugalmi) tömegű részecske egymással szemben, ugyanakkora p nagyságú, de ellentétes irányú impulzussal. A két részecske összeütközik, és összeolvadva egyetlen M tömegű részecskévé alakul. A négyesimpulzus megmaradása így írható fel:

$$(\sqrt{m^2+p^2},p)+(\sqrt{m^2+p^2},-p)=(M,0).$$

Az impulzusmegmaradást már figyelembe vettük, amikor a keletkező részecske impulzusa helyébe nullát írtunk. Az energiamegmaradás törvényéből azonban lényeges információhoz jutunk:

$$M=2\sqrt{m^2+p^2}>2m.$$

Azt látjuk, hogy a keletkezett részecske M tömege nem egyezik meg az ütközésben részt vevő két részecske tömegének összegével, $2m$-mel, hanem *nagyobb* annál! Az össztömegek különbsége, a tömegváltozás:

$$\Delta m=M-2m=2\left(\sqrt{m^2+p^2}-m\right)=\sum E_{\text{mozgási}},$$

vagyis az ütközésben részt vevő részecskék „eltűnő" mozgási energiájával egyenlő. Ez az összefüggés, amelyet SI egységrendszerben még egy c^2 szorzófaktorral ki kell egészíteni, a híres Einstein-féle

$$\boxed{\Delta E=\Delta m\cdot c^2}$$

képlet speciális esete, amit tömeghiány (tömegdefektus) képletének is neveznek.

Einstein tömeg-energia képletét szokás úgy interpretálni, hogy *a tömeg energiává alakul,* vagy fordítva: *az energia változása tömegváltozást eredményez.* Ez az értelmezés azonban félreértések forrása lehet, hiszen – mint láttuk – az energia nem tűnt el, összességében megmaradt, csupán az egyik része, a mozgási energiák összege nem maradt állandó. Ennek ellenére, ha kellő körültekintéssel járunk el, az Einstein-képlet sikerrel alkalmazható a magfizikában és a részecskefizikában, elsősorban olyan esetekben, amikor nem a mozgási energia, hanem kötési energia mutatkozik meg a nyugalmi tömeg változásában.

14.4.2.4. Mozgás állandó erő hatására

A klasszikus fizika legegyszerűbb változó mozgása az állandó erő hatására létrejövő mozgás. Ilyen például a szabadesés, vagy egy töltött részecske mozgása homogén elektromos mezőben. Mi ezen mozgások relativisztikus megfelelője?

A relativisztikus dinamika (14.4) alapegyenlete szerint állandó F_0 erő hatására egy részecske impulzusa időben egyenletesen változik:

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}=F_0 t.$$

Innen a sebesség kifejezhető:

$$v(t)=\frac{a_0 t}{\sqrt{1+a_0{}^2 t^2}},$$

ahol $a_0 = F_0/m$ az adott erőnek és tömegnek megfelelő, klasszikus fizikai gyorsulás. A fenti képlettel leírt mozgás éppen a 13.1.2. pontban ismertetett, a pillanatnyi nyugalmi rendszerben egyenletes gyorsuló mozgással egyezik meg. Ez a formula – most a dinamika oldaláról – ad hangsúlyt annak a kijelentésnek, hogy a fénysebesség ($c = 1$) az elmélet *határsebessége,* azt átlépni egyetlen test sem képes!

A lineáris részecskegyorsítókban az elektromosan töltött részecskék (jó közelítéssel) egyenletesen gyorsulnak, és előfordul, hogy a végsebességük a fénysebességtől csak a 8. tizedesjegyben tér el! Az ilyen (ultrarelativisztikus) részecskék energiája sokszorosan meghaladja a nyugalmi energiájukat, emiatt a viselkedésük sok szempontból a nulla nyugalmi tömegű fotonokhoz hasonló.

14.4.2.5. Töltött részecske mozgása homogén mágneses mezőben

Egy q töltésű, **v** sebességgel mozgó részecskére homogén, **B** indukcióvektorral jellemzett mágneses mezőben $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ erő, a Lorentz-erő hat. A részecske relativisztikus mozgásegyenlete

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}=q\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right),$$

ahol

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}$$

a relativisztikus impulzus.

A Lorentz-erő merőleges a részecske sebességére, emiatt nem végez munkát; a részecske sebességének nagysága tehát a mozgás során állandó. Ennek következtében a részecske mozgásegyenlete éppen olyan, amilyen a klasszikus fizikában lenne, csak az m tömeget kell $\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$-tel helyettesíteni.

A 8.2.2. pontban láttuk, hogy – a klasszikus fizika törvényei szerint – egy töltött részecske homogén mágneses mezőben (a mezőre merőleges kezdeti sebesség esetén) körpályán mozog, és a körülfordulásának ideje

$$T_{\text{klasszikus}}=\frac{2\pi m}{qB}.$$

A megfelelő relativisztikus mozgás annyiban tér el a klasszikustól, hogy a tömeg helyébe a korrigált értéket kell írnunk. Eszerint a relativisztikus mozgás is egyenletes körmozgás lesz, amelynek körülfordulási ideje

$$T_{\text{relativisztikus}}=\frac{2\pi m}{qB\sqrt{1-v^2}}.$$

Érdekes, hogy a klasszikus képlet szerint a körülfordulás periódusideje nem függ a részecske sebességétől, tehát a lassabb részecskék ugyanannyi idő alatt futnak be egy teljes kört, mint a gyorsabbak. Ezt a sajátos helyzetet használták ki a korai részecskegyorsítók, a ciklotronok, amelyekben a töltött részecskék – periodikusan változó elektromos mező hatására – egyre gyorsabban (és emiatt egyre nagyobb sugarú pályán) mozogtak. Sajnos a relativisztikus tartományban az ún. ciklotronfrekvencia (a körüljárási idő reciproka) *függ a sebességtől,* így az egyre nagyobb sebességű részecskék csak úgy tarthatók „szinkronban", ha a mágneses indukció nagyságát az egyre csökkenő $\sqrt{1-v^2}$-es faktor reciprokának megfelelő ütemben növeljük. Így működnek a relativisztikus tömegnövekedéshez szinkronizált részecskegyorsítók, az ún. *szinkrotronok.*

14.4.3. Megmaradó mennyiségek

Foglaljuk össze, hogy milyen mennyiségek maradnak *változatlanok,* és melyekre *nem* érvényesek megmaradási tételek ütközési (vagy bomlási) folyamatokban a klasszikus fizika, illetve a relativitáselmélet törvényei szerint!

A klasszikus fizikában:

A rendszer összimpulzusa *állandó.*

Rugalmas ütközésnél a mozgási energiák összege *állandó.*

Rugalmatlan ütközésnél a mozgási energiák összege *nem marad változatlan.*

A folyamatban részt vevő részecskék össztömege *állandó.*

A relativisztikus fizikában:

A rendszer összimpulzusa *állandó.*

Mindenfajta (akár rugalmas, akár rugalmatlan) ütközésnél (vagy bomlásnál) a részecskék teljes energiáinak összege *állandó.*

A folyamatban részt vevő részecskék össztömege *nem marad változatlan.*

15. Az általános relativitáselmélet alapgondolata

15.1. Az ekvivalenciaelv

Már Galileinek feltűnt, hogy *a különböző anyagi minőségű testek* – ha a levegő fékező hatása nem számottevő – *szabadon elejtve ugyanolyan módon esnek.* Newton ezt a tapasztalati tényt úgy fogalmazta meg fizikai törvény formájában, hogy kijelentette: a testek tehetetlenségére jellemző adat, a *tehetetlen tömeg* és a gravitációs erőhatásra jellemző mennyiség, a *súlyos tömeg* között univerzális (anyagi minőségtől független) arányosság érvényes. Az arányossági tényező megfelelő mértékegység választásával egységnyivé tehető.

A súlyos és tehetetlen tömeg egyenlőségét Eötvös Loránd ingakísérletei a 20. század elején 8 tizedesjegy pontossággal igazolták. Ezt a pontosságot fél évszázaddal később 11, majd 13 tizedesjegyre fokozták! Az, hogy van-e valamilyen mélyebb oka ennek az egyenlőségnek, vagy egyszerűen csak véletlen egyezésnek tekinthető, sokáig nyitott kérdés volt. Einstein (valamint a matematikus Hilbert) munkássága vezetett el a gravitáció- és a relativitáselmélet olyan egységes keretbe helyezéséhez, az ún. *általános relativitáselmélet* megszületéséhez, amely természetes módon értelmezte a súlyos és a tehetetlen tömeg egyenlőségét.

Einstein az új elmélet alapfeltevései közé iktatta azt az állítást, hogy a gravitációs tér és egy alkalmasan gyorsuló vonatkoztatási rendszer – kis méretű laboratóriumban vizsgálódva – minden szempontból megkülönböztethetetlen egymástól. Ez az *ekvivalenciaelv.*

Einstein az ekvivalenciaelv állítását egy egyszerű és szemléletes gondolatkísérlettel, a híres liftkísérlettel érzékeltette. Eszerint ha egy fizikus kicsiny liftkabinban kísérleteket végez, de eközben nem tud kitekinteni a kabinból a külvilágba, akkor kísérletei egyikével sem tudja eldönteni, hogy a liftben levő tárgyak „súlyát" külső gravitációs erőtér vagy netán a kabin gyorsulása okozza. Einstein ebből a liftkísérletből – már az általános relativitáselmélet részletes kidolgozása előtt – megsejtette, hogy a gravitációnak hatást kell gyakorolnia a fényre. Egy gyorsuló liften keresztülhaladó, az inerciarendszerből nézve egyenesen terjedő fénysugár pályáját a gyorsulva mozgó liftben ülő megfigyelő görbének észleli. Ha érvényes az ekvivalenciaelv, ugyanilyen elgörbülést kell tapasztalnunk a gravitációs térben terjedő fénynél is.

15.2. A görbült téridő

A klasszikus fizika keretei között a testek gyorsulását, egyenes vonalú egyenletes mozgástól való eltérésüket más testek *erőhatásának* tulajdonítjuk. Az ilyen mozgások a téridő-térképen görbe világvonalakként jelennek meg.

A gravitáció olyan furcsa kölcsönhatás, amely minden testre ugyanolyan módon hat, a testek tömegétől függetlenül ugyanolyan „görbe" mozgásra kényszeríti őket. Einstein felismerése volt, hogy ezt az univerzális viselkedést a téridőnek valamilyen furcsa tulajdonsága, „görbültsége" okozhatja. Éppen úgy, ahogy egy görbe betonteknőben manőverezés nélkül szabadon guruló gördeszkás pályája is görbe és a mozgása nem egyenletes (ráadásul mindezek függetlenek attól, hogy kövér-e vagy sovány a gördeszkázó), a korábban gravitációs erőhatásnak vélt jelenségeket is a téridő görbültségében kell keresnünk – állítja az általános relativitáselmélet.

A kétdimenziós felületek görbültsége még jól szemléltethető, hiszen készíthetünk földgömböt, vagy pl. kúpfelület alakú makettet, s ezeken tanulmányozhatjuk a sík és a görbült felületek közötti különbségeket. A görbültséget akkor látjuk a legjobban, ha egy további, harmadik dimenzióban eltávolodunk a felülettől (pl. egy űrállomásról szemléljük a Földet). Ezt a 3 tér- és 1 idődimenziót magában foglaló téridővel nyilván nem tehetjük meg, nem tudunk „kilépni" abból, hogy távolabbról fedezzük fel a görbültségét.

Erre azonban nincs is szükség! A kétdimenziós felületek esetleges görbültsége is felfedezhető úgy, hogy mindvégig a felületen maradunk. Ha pl. a Föld felszínén – a lehető legegyenesebb vonalakat húzva – rajzolunk egy háromszöget (ún. gömbháromszöget), s megmérjük ennek szögeit, azt tapasztaljuk, hogy a szögek összege eltér a síkban megszokott 180°-tól! (Haladjunk például az Egyenlítő mentén keletre egy negyedkört, ott forduljunk északnak, és menjünk el az Északi-sarkra, majd onnan egy újabb derékszögű fordulat után térjünk vissza a kiindulási pontunkhoz. A bejárt gömbháromszög szögeinek összege 270°.)

Hasonló módon – bár jóval bonyolultabb matematikai apparátussal – jellemezhető a négydimenziós téridő görbültsége is. Ha valahonnan meg tudjuk mondani, hogy milyen ez a görbültség, akkor a benne *szabadon* mozgó testek világvonalát egy egyszerű elv határozza meg: a mozgás a téridő két pontja (két eseménye) között azon a világvonalon megy végbe, amelynek a legnagyobb a „hossza". (A világvonalak hossza a rajta mozgó test által észlelt sajátidővel egyenlő.)

A gravitáció einsteini elméletében gravitációs erőtér egyáltalán nem létezik, a gravitációnak vélt kölcsönhatás látszatát *a téridő görbültsége okozza.* De vajon honnan tudjuk, hogy mennyire és milyen módon görbült a téridő? Einstein erre is megtalálta a választ: *a téridő görbültségét a benne levő anyag,* annak energia- és impulzustartalma *okozza.*

Ez így nem tűnik túl bonyolultnak, a részletes matematikai megfogalmazás, az ún. Einstein-féle téregyenletek azonban már annál inkább azok. Ezek az egyenletek, melyekre Einstein általános szimmetriaelvek feltételezésével, hosszú keresgélés után talált rá, végül egyetlen szabadon választható állandót tartalmaztak. Ezt Einstein abból határozta meg, hogy megvizsgálta, milyen mozgást végeznek a testek gyengén görbült téridőben (régi szóhasználattal: gyenge gravitációs mezőben). A mozgásokat ebben a határesetben éppen a Newton-féle $\gamma mM/r^2$-es gravitációs erőtörvénynek megfelelő egyenletek írják le, ha az Einstein-féle egyenletben szereplő ismeretlen állandót a γ gravitációs állandónak megfelelő nagyságúra választjuk.

15.3. Az általános relativitáselmélet kísérleti bizonyítékai

A gravitáció Einstein-féle elmélete nem túl erős gravitációs hatások, illetve nem túl gyors mozgások esetén visszaadja a tömegvonzás Newton-féle elméletét. Pontosabb számítások azonban a két elmélet között kisebb-nagyobb eltérést mutattak, s ezek az eltérések több esetben kísérletileg is ellenőrizhetőnek bizonyultak. A mérések – ahol kiszámítható különbségek voltak – minden esetben az általános relativitáselmélet jóslatait igazolták.

Az alábbiakban vázlatosan ismertetünk az elmélet kísérleti bizonyítékai közül néhányat.

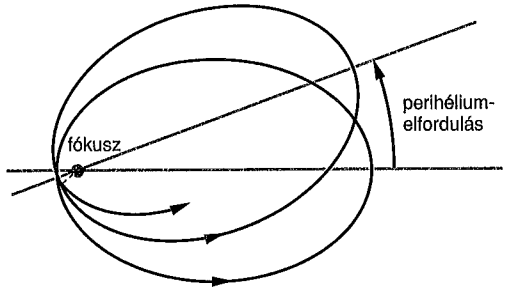
15.3.1. A Merkúr perihéliumelfordulása

Ha egy bolygóra csak a Nap gravitációs erőtere hatna, akkor – Kepler I. törvénye, továbbá a Newton-féle mozgásegyenletek szerint – a bolygó ellipszis alakú pályán mozogna. Ennek az ellipszisnek a nagytengelye egy inerciarendszerben (az „állócsillagokhoz" képest nem forgó, nem gyorsuló koordináta-rendszerben) mindig ugyanabba az irányba mutatna.

Ténylegesen azonban a bolygókra nemcsak a Nap, hanem a többi bolygó gravitációs vonzóereje is hat, igaz, hatásuk sokkal gyengébb, mint a Napé. Ezt a zavaró (perturbáló) hatást már a newtoni elméletben is figyelembe tudták venni, és a számítások azt mutatták, hogy a bolygópályák ellipszisének nagytengelye igen lassan elfordul az állócsillagokhoz képest. Ezt az elfordulást a bolygópálya Naphoz legközelebbi pontjának, az ún. perihéliumpontnak gondos megfigyelésével lehet mérni, *perihéliumelfordulásnak* (perihéliumprecessziónak) nevezik (15.1. ábra).

Az összes bolygó közül a Merkúr pályája a leginkább elnyújtott, ezért – és a Naphoz való közelsége miatt – a Merkúr a legalkalmasabb a perihéliumelfordulás mérésére. Hosszan tartó és gondos megfigyelések szerint a megfigyelt érték: 575 ívmásodperc évszázadonként! Az összes bolygó zavaró hatását figyelembe véve a

newtoni elmélet alapján számított érték viszont csak 534 ívmásodpercnek adódott évszázadonként. Az eltérés (41 ± 2)"/évszázad, a mérési hiba sokszorosa.



15.1. ábra

A pontosság érzékeltetésére gondoljuk meg, hogy a Nap és a Hold látszólagos átmérője 30 ívperc, kb. ötvenszer akkora, mint a 100 év alatt felgyülemlő 41 ívmásodpercnyi eltérés! Érdekesség, hogy a Merkúr perihéliumprecesszióját sokáig egy a Naphoz a Merkúrnál is közelebb lévő – Vulkán nevű – hipotetikus bolygó létével próbálták magyarázni, természetesen a Newton-féle mozgásegyenletek alkalmazásával.

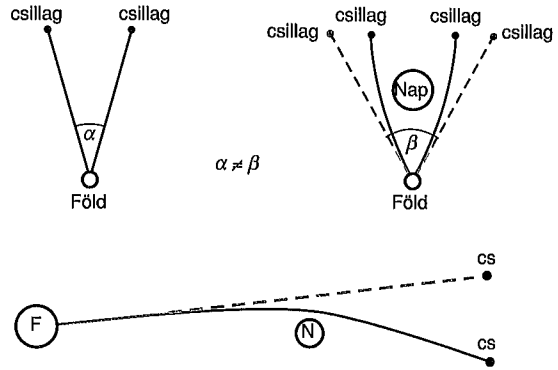
Az általános relativitáselmélet keretei között is kiszámítható a Nap által meggörbített téridőben szabadon mozgó bolygók pályája, és az nem álló, hanem egy lassan elforduló ellipszisnek adódik. Az elfordulás számított értéke a Merkúr esetében: 43"/évszázad, éppen a (többi bolygó zavaró hatásának levonása után maradó) megfigyelt eltolódás!

A Merkúr perihéliumprecessziójának magyarázata volt az általános relativitáselmélet első sikere, melyet számos további is követett.

15.3.2. Fénysugár elgörbülése a Nap mellett. Gravitációs lencsehatás

Einstein már az ekvivalenciaelv megfogalmazásakor megsejtette, hogy gravitáció hatására a fénysugarak nem egyenes vonalban terjednek, hanem „elgörbülnek". A görbült téridő egyenleteinek felírása után az eltérülés mértékét is ki lehetett számítani. Az eredmény: ha a Nap tömegének megfelelő tömegű test mellett olyan távol halad el egy fénysugár, amekkora a Nap sugara, akkor az 1,75 ívmásodpercnyi szöggel térül el eredeti irányától.

Az elméleti jóslat kísérleti ellenőrzésére először 1919-ben került sor. Ekkor – egy teljes napfogyatkozáskor – olyan két csillagot figyeltek meg, amelyek majdnem pontosan a Nap „mellett" látszottak az égen (15.2. ábra).



15.2. ábra

A csillagok β látószöge nem egyezett meg azzal az α szöggel, amelyet olyankor mértek, amikor a Nap távolabb volt a csillagokból érkező fénysugaraktól, tehát amikor a Nap fénygörbítő hatása nem érvényesült. Az eltérés (viszonylag nagy, 30 százalékos hibahatáron belül) megegyezett a számított értékkel. Egy későbbi napfogyatkozás során (1973-ban) már 10 százalék pontossággal sikerült igazolni Einstein elméletének érvényességét.

1967-ben igen pontos rádiócsillagászati módszerekkel megmérték a 3C273 és a 3C279 jelű kvazárok (nagyon távoli csillagszerű objektumok) sugarainak elhajlását a napkorong közelében. Ez a két pontszerű égi rádióforrás minden év október 8-án (látszólag) egészen közel kerül a Nap korongjához. A rádiócsillagászok ezen a napon minden évben megfigyelik a két kvazár sugarainak elhajlását, hogy több és pontosabb méréssel ismételten ellenőrizzék az általános relativitáselméletet.

A fényt nemcsak a Nap, hanem pl. távoli galaxisok is eltéríthetik. A galaxisok közelében elhaladó fény- vagy rádióhullámokat a téridő görbültsége bonyolult irányváltozásra készteti. Ennek eredményeképpen (a különböző törésmutatójú üvegekből készített lencsék képalkotásához hasonlóan) akár optikai leképezés is létrejöhet. Ezt a jelenséget *gravitációs lencsehatás*nak nevezik; különböző formáinak megfigyelése az utóbbi években számos fontos csillagászati felfedezésre vezetett.

15.3.3. Gravitációs vöröseltolódás

A görbült téridőben terjedő fénysugarak „távolsága", vagyis időkülönbsége még akkor is megváltozhat, ha kezdetben egymással párhuzamosan haladtak a téridőtérképen.

Ez a jelenség egy görbült kétdimenziós felületen, pl. egy műanyag ásványvizes palackon is szemléltethető. Ha a palack hengeres oldalának alsó felére egymással párhuzamos „függőleges" vonalakat rajzolunk, és ezeket a palack nyaka felé a lehető legegyenesebben meghosszabbítjuk, akkor a vonalak távolsága a kupak közelében már sokkal kisebb lesz, mint amekkora a palack aljánál volt.

A gravitációs térben terjedő fény hullámhossza (színe) a téridő görbültsége miatt megváltozik. Ha a fény – newtoni fogalmakkal kifejezve – alacsonyabb gravitációs potenciálú helyről magasabb potenciálra kerül, akkor a hullámhossza megnő, színe a vörös irányába tolódik el. A relatív hullámhosszváltozás mértéke

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{\Delta\Phi}{c^2},$$

ahol $\Delta\Phi$ a gravitációs potenciálok különbsége a két hely között, c pedig a fénysebesség.

Ezt a – *gravitációs vöröseltolódás*nak nevezett – jelenséget kísérletileg is kimutatták. A Nap felszíne és egy attól távoli pont közötti potenciálkülönbség a fény hullámhosszának milliomodrésznyi megváltozását okozza. A Nap felszínén azonban az atomok erős hőmozgása lehetetlenné teszi ilyen kicsi különbség észlelését. Hasonlóan reménytelen a vöröseltolódás kimutatása távoli, nagy tömegű csillagokról érkező fény esetében, mert a színképben megfigyelt hullámhosszváltozás nem különíthető el a csillag távolodásából származó Doppler-effektustól. A gravitációs vöröseltolódást az 1960-as években földi körülmények között mutatták ki, az ún. Mössbauer-effektus felhasználásával. Azt figyelték meg, hogy egy víztorony aljánál elhelyezett sugárforrásban bizonyos atommagok által kibocsátott gammasugárzás frekvenciája nagyon kicsit megváltozik, mire a torony tetejénél, 22 méter magasságban elhelyezett detektorhoz érkezik. Az eltérés csak a 15. tizedes jegyben mutatkozik meg, de mérhető!

15.3.4. Időkésés

Az általános relativitáselmélet egyik kijelentése szerint az órák járására (vagyis az idő múlásának ütemére) hatással van a téridő görbülete (régi szóhasználattal: a gravitáció).

A rádiójelek relativisztikus késését a Nap gravitációs terében 1964-ben mérték meg először. A Mariner-6, -7 és -9 űrszondák megfigyelését használták az időkésés mérésére. Egy másik módszer a Merkúr, a Vénusz és a Mars felszínéről visszaverődő radarjelek mérése. Ha például a Vénusz, a Nap és a Föld egy vonalban helyezkednek el, a Vénuszról visszavert radarjelek összesen körülbelül 1000 másodpercig utaznak. Az általános relativitáselmélet szerint a Nap gravitációs tere 0,0002 másodperccel hosszabbítja meg ezeknek a hullámoknak a menetidejét.

A mérések százaléknyi pontossággal igazolták az általános relativitáselmélet jóslatát.

15.3.5. Gravitációs hullámok

Ha a téridő görbülete valahol, valamilyen ok miatt megváltozik, a görbületlen állapottól való eltérés hullámszerűen tovaterjed. Ezt a hullámot, amely az elmélet jóslata szerint fénysebességgel terjed, *gravitációs hullám*nak nevezik.

A gravitációs hullámok közvetlen kimutatása – bár nagyon komoly erőfeszítéseket tettek a kutatók – eddig még nem járt sikerrel. Ennek az a magyarázata, hogy a gravitáció nagyon gyenge kölcsönhatás, emiatt a gravitációs hullámok keltéséhez nagyon nagy tömegű testek nagyon gyors mozgására lenne szükség. Földi körülmények között gravitációs hullámokat kibocsátó adó- és a hullámokat érzékelő vevőberendezés készítésére technikailag nincs lehetőség. Jelenleg több olyan (lézeres interferometrián alapuló) berendezés is épül, amely távoli és nagy (csillagászati méretű) tömegmozgások gravitációs hullámait próbálja majd észlelni.

Közvetett úton azonban sikerült meggyőző bizonyítékokat gyűjteni arról, hogy a gravitációs hullámok valóban léteznek a természetben. 1974-ben Hulse és Taylor egy olyan érdekes pulzárt (periodikus jeleket kibocsátó objektumot) fedezett fel, amelynek jelei néha kicsit *korábban,* néha pedig *később* érkeztek a Földre, mint azt a szabályos váltakozásuk alapján várni lehetett volna. A jelek sietése és késése kb. 7 órás időközönként ingadozott.

A megfigyelést úgy értelmezték, hogy a jelek egy olyan kettőscsillag-rendszerből származnak, amelynek tagjai a mi Napunkkal kb. megegyező tömegű és a közös tömegközéppontjuk körül igen gyorsan keringő ún. neutroncsillagok. Hosszan tartó megfigyeléssorozat alapján ki tudták számítani a keringő csillagok minden lényeges adatát. Megfigyelték, hogy a keringési idejük fokozatosan csökken, ami arra utal, hogy a két csillag egyre közelebb kerül egymáshoz, összenergiájuk egyre csökken. (Hasonló figyelhető meg a földi légkör határán fékeződő, és emiatt egyre kisebb sugarú pályán egyre gyorsabban keringő mesterséges holdaknál is.) A kettőscsillag keringésének felgyorsulásából kiszámított energiaveszteség éppen akkorának bizonyult, mint amennyi energiát (Einstein elmélete alapján számolva) a gravitációs hullámok a rendszerből elszállítanak.

A számítások és a kísérleti tények egyezése annyira meggyőzőnek bizonyult, hogy Hulse és Taylor 1993-ban fizikai Nobel-díjban részesült.

15.3.6. Geodetikus precesszió

Ha egy – a Föld körül keringő – űrszondában a súlytalanság állapotában egy tökéletesen gömb alakú testet megpörgetünk, ez a pörgettyű a klasszikus fizika törvényei szerint megtartja forgásirányát, a forgástengelye az állócsillagokhoz viszonyítva mindig ugyanabba az irányba mutat. Az általános relativitáselmélet azonban mást jósol, azt, hogy a pörgettyű forgástengelye az űrszonda keringési síkjában lassan elfordul, precesszál. Az elfordulás mértéke nem nagy, mindössze 6 ívmásodperc évenként (ha a szonda a Föld „sarkai" felett is áthaladó, ún. poláris pályán kering)!

A technikailag rendkívül nehéz kísérletet – mintegy 40 évnyi előkészítés után – ténylegesen 2004-ben kezdték el. Egy mesterséges holdra a cseppfolyós hélium hőmérsékletére hűtött pörgettyűket helyeznek el. A négy pingponglabda nagyságú pörgettyűt olvasztott kvarcból készítették el. Ezek a világ legpontosabb golyói, felszínüket szupravezető nióbiumréteg borítja. A pörgettyűk forgástengelyének helyzetét a mágneses dipólmomentumuk segítségével mérték. Ennek során a műhold távcsövét a Pegasus csillagkép egyik csillagára irányították rá, és 16 parányi rakéta segítségével ezt az irányt tartósan biztosították. A mérések több éven át folytak, s 2007-ben jutottak el arra a szintre, hogy bejelenthessék: a forgástengely precesszióját kimutatták, s annak számértéke összhangban áll az Einstein-féle általános relativitáselmélet jóslatával.

V. ATOMFIZIKA ÉS KVANTUMMECHANIKA

16. Az anyag atomos szerkezete

A környezetünkben található tárgyak, a szilárd, folyékony és gáz állapotú anyagok tulajdonságainak értelmezése régóta foglalkoztatja a természettudósokat. A kémikusok és a fizikusok az anyagi jellemzőket az anyagokat felépítő részecskék tulajdonságaiból, azok kapcsolódási módjából származtatják.

Kémiai szempontból az anyagok két nagy csoportra oszthatók: *elemekre* és *vegyületekre*.

A *vegyületek* kémiai reakciók során elemekből keletkeznek. A vegyületek azon legkisebb építőegységei, amelyek még rendelkeznek a vegyület valamennyi kémiai tulajdonságával, a *molekulák*. A kémiai reakciók során az anyag eredeti kémiai tulajdonságai megváltoznak, a molekulák átalakulnak. A legtöbb vegyület kémiai módszerekkel elemekre bontható.

Az *elemek* kémiai szempontból a legegyszerűbb anyagok. Az elemek legkisebb építőegységei az atomok. Az atomok, bár kémiai szempontból oszthatatlanok, maguk is összetett rendszerek; *atommagból* (ezek *protonokból* és *neutronokból*) és a mag körüli, elektronokból felépülő *„elektronhéjból"* állnak. Az atomok szerkezetével és az ezzel magyarázható tulajdonságaival az atomfizika foglalkozik. Az atomfizika magában foglalja az atommag és a körülötte levő elektronok kapcsolatát vizsgáló ún. *héjfizikát,* és az atommag szerkezetével foglalkozó *magfizikát*. Szorosan kapcsolódik az atomfizikához a belőle kifejlődött, de már új tudományágnak számító *részecskefizika* is. A következőkben a héjfizika tárgyalására szorítkozunk (szűkebb értelemben ezt nevezik ma atomfizikának), a magfizikával, illetve az elemi részek fizikájával később foglalkozunk.

Az atomok szerkezetéről vallott mai elképzelésünk hosszú kísérleti és elméleti kutatómunka eredménye. A kvantummechanikai atommodell jobb megértéséhez és értékeléséhez a kísérleti alapokat és az elméleti előzményeket történeti sorrendjükben, fejlődésükben tekintjük át.

16.1. A súlyviszonytörvények. Avogadro törvénye

Az *állandó súlyviszonyok törvénye* szerint *a kémiai reakciókban részt vevő anyagok csak meghatározott tömegarányban reagálnak maradéktalanul egymással.* Ha a kedvező súlyarány nem áll fenn, akkor a reakció során az egyik vagy másik kiindulási anyagból több-kevesebb megmarad (J. L. Proust, 1801).

A *többszörös súlyviszonyok törvénye* szerint: *ha két elem, pl. A és B, többféleképpen is vegyül egymással (a reakció végterméke különböző), akkor az A elem azon mennyiségei, amelyek a B egy adott mennyiségével maradéktalanul reagálni képesek, úgy aránylanak egymáshoz, mint a kis egész számok* (J. Dalton, 1808).

Mindkét törvény egyszerűen magyarázható, ha feltesszük, hogy az elemek atomjai a kémiai reakciók során változatlanok maradnak és meghatározott arányban egyesülve alkotják a vegyületek molekuláit. Ha pl. egy kémiai reakcióban A és B elem egyesül vegyületté, ez azt jelenti, hogy az A anyag a számú, egyenként m_A tömegű atomjával a B anyag b számú, egyenként m_B tömegű atomja kapcsolódik össze egy $am_A + bm_B$ tömegű molekulává. A két anyag akkor vegyül maradéktalanul egymással, ha a reagáló anyagok tömegeinek (M_A-nak, illetve M_B-nek) arányára fennáll, hogy

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{am_A}{bm_B}. \tag{16.1}$$

Azonos kiindulási anyagokból különböző végtermékekre vezető reakciók mennyiségi viszonyai alapján *Dalton* a molekulát felépítő atomok viszonylagos tömegére is következtetett. Atomsúlytáblázatának megszerkesztésekor a legkisebbnek bizonyuló hidrogénatom tömegét egységnyinek választotta, és a többi atom tömegét ehhez viszonyította.

Mai gyakorlatunk szerint az atomok tömegét a 12 tömegszámú semleges szénatom tömegének 1/12 részéhez mint egységhez hasonlítjuk. Az ilyen egységekben kifejezett atomtömeget nevezzük relatív atomtömegnek vagy atomsúlynak.

Az Avogadro-törvény. *Gay-Lussac* a gázreakciók mennyiségi viszonyait vizsgálta és megállapította, hogy az egymással maradéktalanul vegyülő gázok térfogatai azonos nyomás és hőmérséklet esetén úgy aránylanak egymáshoz, mint a kis egész számok. Gay-Lussac megfigyeléseit és a daltoni súlyviszonytörvényeket összekapcsolva *Avogadro törvénye* (1811) azt mondja ki, hogy *különböző gázok egyenlő térfogataiban azonos nyomás és hőmérséklet esetén a molekulák száma a gáz anyagi minőségétől függetlenül egyenlő.*

Az anyag atomos szerkezetének kutatásában igen fontos lépést jelentett az a felismerés, hogy ha különböző gázokból pontosan annyi grammot mérnek le, amennyi a gázok *molekulasúlya,* vagyis a molekulában levő atomok atomsúlyának összege (ezt az illető gáz *mólnyi mennyiségének* nevezzük), akkor azonos hőmérséklet és nyomás esetén a különböző gázok térfogata ugyanakkora. Avogadro törvénye értelmében ez azt jelenti, hogy a fenti mennyiségű gázok azonos számú molekulát tartalmaznak. A későbbiek során beigazolódott, hogy a megállapítás nem csak a gázokra igaz. Tetszőleges halmazállapotú anyagból (gáz, folyadék, szilárd) lemérhetünk annyi grammot, amennyi az illető anyag molekulasúlya, és az ilyen mennyiségű anyagok pontosan azonos számú molekulát tartalmaznak. Az egy mólnyi anyagban található molekulák számát az ún. *Avogadro-féle szám* (N_A) adja meg.

16.2. Az Avogadro-szám és az atomok méretének meghatározása a kinetikus gázelmélet alapján

A kémiai atomelmélet kialakulásával gyakorlatilag párhuzamosan, a fizikában is egyre elfogadottabbá vált, hogy az anyag atomos szerkezetű. Az első hatékony bizonyítékot az atomok létére a gázok sajátságait sikeresen értelmező *kinetikus gázelmélet* adta.

A kinetikus elmélet segítségével meghatározható a gázrészecskék *átlagos szabad úthossza* (lásd a 22.2.1. pontot). Eszerint egy gázban a molekulák által két ütközés között megtett átlagos távolság (λ) a molekulák hatáskeresztmetszetével (σ), valamint az egységnyi térfogatban levő gázmolekulák számával (n) fordított arányban áll:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}. \tag{16.2}$$

A molekulák átlagos szabad úthossza pl. normál állapotú levegőben kb. $1{,}3 \cdot 10^{-7}$ m. Mivel a σ hatáskeresztmetszet r_0 sugarú gömbnek képzelt molekulák esetén gyakorlatilag $4r_0^2\pi$-vel egyenlő. Egy mólnyi gázt véve n az Avogadro-szám és a V móltérfogat hányadosával fejezhető ki ($n = N_A/V$). Az átlagos szabad úthossz mérésekkel meghatározott értéke hozzásegít r_0 és N_A meghatározásához. Természetesen a fenti egyetlen egyenlet a két ismeretlen meghatározásához nem elegendő, további összefüggésre is szükségünk van. Jó támpontot kínál ehhez például a *gázok belső súrlódásának* kinetikus elmélettel történő értelmezése. Eszerint a gázok jól mérhető η *viszkozitása* a molekulák átlagos szabad úthosszával (λ), a molekulák átlagos sebességével (v) és a térfogategységben levő molekulák számával (n) a következő kapcsolatban áll:

$$\eta = \frac{1}{3} nv\lambda. \tag{16.3}$$

A gázmolekulák átlagos sebessége ugyancsak megbecsülhető a kinetikus gázmodell alapján az *ekvipartíciós tétel* (lásd a 22.1.2.3. alpontot) felhasználásával:

$$v=\sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Az átlagos szabad úthosszra felírt korábbi és a molekulák átlagsebességét megadó második egyenlet segítségével, λ és η mért értékeinek felhasználásával a molekulák mérete és az Avogadro-szám kiszámítható.

Az Avogadro-szám értéke:

$$N_A=6,022\cdot10^{23}\text{ részecske / mól.} \tag{16.4}$$

A gázmolekulák méretének nagyságrendje pedig:

$$d=2r_0\cong1,5\cdots2\cdot10^{-10}\text{ m.} \tag{16.5}$$

16.3. Az elektromosság „atomos" szerkezete

16.3.1. Az elektrolízis Faraday-törvényei

Faraday, a 19. század legnagyobb kísérleti fizikusa két, azóta a nevét viselő törvényben foglalta össze az elektromosan vezető folyadékokon *(elektrolitokon)* átfolyó elektromos áram sajátosságait. Az elektromos áram hatására az elektrolitból szilárd vagy gáz állapotú anyagok válnak ki. A kiváló anyagok minősége az elektrolit minőségétől függ. Az elektromos áram hatására oldatból történő anyagkiválasztást *elektrolízisnek* nevezzük.

Faraday első törvénye kimondja, hogy az *elektrolízis során az elektródokon kiváló anyagok mennyisége az elektroliton áthaladt töltés mennyiségével arányos.*

Q töltés hatására az elektrolitokból

$$m=kIt=kQ \tag{16.6}$$

tömeg válik ki, ahol k az anyagtól függő állandó, az ún. *elektrokémiai egyenérték. k* számértékileg azt adja meg, hogy 1 C töltés hány mg anyagot választ ki. *A különböző anyagok elektrokémiai egyenértékei úgy aránylanak egymáshoz, mint kémiai egyenértéksúlyaik. Egy anyag kémiai egyenértéksúlyán A atomsúlyának és z vegyértékének hányadosát értjük.*

Faraday második törvénye szerint azonos töltésmennyiség különböző elektrolitokból kémiailag egyenértékű anyagmennyiségeket választ ki.

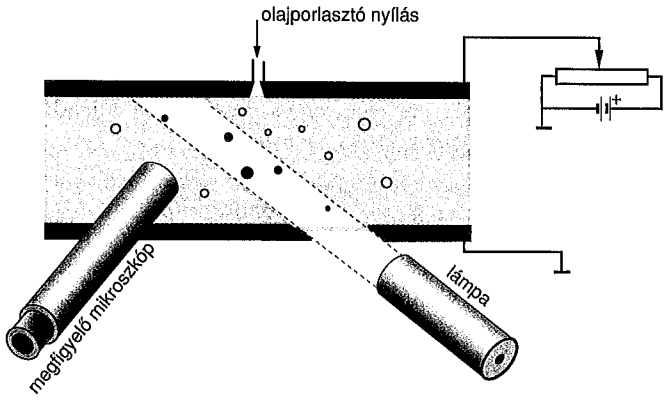
Az azonos töltés hatására kiváló anyagmennyiségek kémiailag azért egyenértékűek, mert vegyületképzés esetén az ilyen anyagmennyiségek maradéktalanul reagálnak egymással. A tapasztalat szerint *1 mólnyi egy vegyértékű anyag kiválasztásához* F = 96 500 C *töltés szükséges.* Az F mennyiséget *Faraday-állandónak* nevezik.

Ha feltételezzük, hogy a vegyületképzés töltésátviteli folyamatok eredménye, Faraday elektrolízistörvényei alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy az elektromosság is meghatározott elemi részecskékből áll. Az elemi elektromos töltés nagyságát (e) a Faraday-állandó és az Avogadro-szám hányadosa adja meg:

$$e=\frac{F}{N_A}=\frac{96500\text{ C}}{6\cdot10^{23}}=1,6\cdot10^{19}\text{ C.} \tag{16.7}$$

16.3.2. Az elemi töltés meghatározása Millikan módszerével

Az elemi töltés nagyságának közvetlen meghatározására a legismertebb kísérleti módszer *R. A. Millikan* amerikai fizikus (1909) nevéhez fűződik. Berendezésének elvi vázlatát a 16.1. ábra mutatja.



16.1. ábra

Millikan a vízszintesen elhelyezett kondenzátor lemezeire egyenfeszültséget kapcsolt, majd a lemezek közti térrészbe finom cseppekké porlasztott olajat juttatott. A porlasztással kapott olajcseppek egyszerű dörzselektromos hatás révén gyengén negatív töltésűvé váltak. Millikan a cseppek mozgását figyelte.

A kondenzátor lemezei között az apró cseppek mozgását a *nehézségi erő,* az elektromos tér által a csepp töltéseire gyakorolt *elektromos erő,* a *levegő felhajtóereje* és a *közegellenállás* együttesen szabja meg. A négy erő együttes hatására a cseppek egy idő után egyenletes mozgást végeznek. Az állandó sebesség feltétele, hogy a négy erő eredője zérus legyen. Ha például egy r sugarú, Q töltésű csepp az elektromos tér hatására v_1 sebességgel egyenletesen emelkedik, az erőkre a következő összefüggés írható fel:

$$EQ+\frac{4r^3\pi}{3}\rho_1 g-\frac{4r^3\pi}{3}\rho_o g-6\pi\eta r v_1=0. \qquad (16.8)$$

Az egyenlet első tagja az elektromos erőt, a második a levegőben a cseppre ható felhajtóerőt (ϱ_l a levegő sűrűsége), a harmadik tag a cseppre ható nehézségi erőt (ϱ_o az olaj sűrűsége), a negyedik a sebességgel ellentétes irányú Stokes-féle közegellenállási erőt (lásd a 2.7.3. pontot, ahol η a levegő viszkozitása) adja meg. Az egyenlet alapján a csepp r sugarának és v_1 mozgási sebességének ismeretében a Q töltés meghatározható. A cseppek mozgása a berendezés oldalára szerelt mikroszkópon keresztül figyelhető meg. A mikroszkóp látóterébe beépített skála lehetővé teszi, hogy a cseppek sebességét meghatározzuk. Ehhez pusztán arra van szükség, hogy megmérjük, mennyi idő alatt teszi meg a csepp a skála két osztásvonala közti távolságot.

A legnagyobb problémát az okozza, hogy a cseppek különbözők, és a mikroszkópon keresztül pontos méretük nem határozható meg. A felmerülő nehézséget Millikan egyszerűen megkerülte. Miután megmérte egy csepp v_1 sebességét az elektromos térben, a kondenzátort kisütötte, majd megmérte, milyen állandó v_2 sebességgel süllyed az előbbi csepp elektromos erőtér nélkül. Állandó sebességgel süllyedő cseppre újból felírható az erők egyensúlya:

$$\frac{4r^3\pi}{3}\rho_1 g-\frac{4r^3\pi}{3}\rho_o g+6\pi\eta r v_2=0. \qquad (16.9)$$

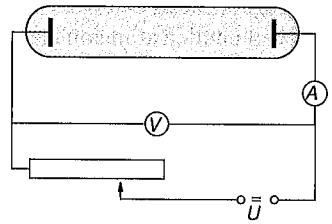
E második összefüggésből a csepp sugara kifejezhető és az első egyenletbe helyettesíthető, amiből így már meghatározható a csepp Q töltése.

Millikan sok-sok olajcsepp töltését meghatározta az előbbi módon, és megmutatta, hogy valamennyi mérési eredményének van közös osztója, azaz a cseppek töltése az e elemi töltés egész számú többszörösével fejezhető ki. Az elemi töltés Millikan módszerével kapott értéke jól egyezik az elektrolízis törvényei alapján számolható $1{,}6\cdot10^{-19}$ C értékkel.

16.4. Az elektron

16.4.1. A katódsugarak

Mai atomfizikai ismereteinkhez döntően hozzájárult a gázkisülések kísérleti vizsgálata. A gázok elektromos vezetőképességét, illetve az ehhez kapcsolódó látványos gázkisüléseket már a 19. században részletesen vizsgálták. A kísérleti összeállítást a 16.2. ábra mutatja.



16.2. ábra

A gázt légmentesen lezárt üvegedénybe, ún. *kisülési csőbe* töltötték, és a csőbe benyúló két fémelektród közé nagy feszültséget kapcsoltak. Megfelelően nagy feszültség hatására az elektródok között áram indul meg, amit jellegzetes fénytünemény kísér. A jelenséget *gázkisülésnek* nevezzük.

A gázkisülés során kibocsátott fény színe a gáz anyagi minőségétől függ, spektruma csak néhány színképvonalat tartalmaz. A gáz nyomásának csökkentésével a kisülést kísérő fényjelenség eltűnik. Egészen kicsi, mindössze néhány Pa nyomáson a negatív elektródról (a katódról) láthatatlan sugárzás, az ún. *katódsugárzás* lép ki, és halad a pozitív elektród (az anód) felé. A láthatatlan sugárzás azáltal vehető észre, hogy hatására az üvegcső fala, különösen a katóddal szemben, zöldes fénnyel villog.

A 19. század végén kiváló kutatók sora vízsgálta a titokzatos katódsugarak tulajdonságait. Megállapították, hogy

- a katódsugár a katódból lép ki;
- egyenes vonalban terjed;
- elektromos és mágneses térrel eredeti irányától eltéríthető (az eltérülés irányából arra lehet következtetni, hogy a *sugárzás negatív töttésű*);
- több anyagon *fluoreszcenciát* okoz;
- a katódsugarak energiát szállítanak (ha például vékony fémlemezbe csapódnak, azt felmelegítik);
- a katódsugárnak impulzusa van (a sugárzás útjába helyezeti könnyű kis lapátkerék a rá eső katódsugarak hatására forgásba jön).

J. J. Thomson angol fizikus a katódsugarak tulajdonságait azzal értelmezte, hogy a sugárzást negatív elemi töltésű, parányi részecskék árama alkotja. Thomson elektromos és mágneses eltérítés együttes alkalmazásával meghatározta a katódsugarak részecskéinek ún. *fajlagos töltését,* a töltés és a tömeg hányadosát. Az elemi töltés nagyságának ismeretében kiszámította a részecskék tömegét is. Thomson kísérleti tapasztalatai szerint a katódsugarat alkotó részecskék tulajdonságai, pl. a fajlagos töltésük nem függött sem az elektródok anyagától, sem a kisülési csőben levő kis nyomású gáz minőségétől. Ezekből a tényekből Thomson arra következtetett, hogy a katódsugarak részecskéi az eddig oszthatatlannak tartott atomokból származnak, ráadásul minden atomban megtalálhatók. Ezeket a negatív töltésű részecskéket nevezzük *elektronok*nak.

Az *elektronok töltése*:

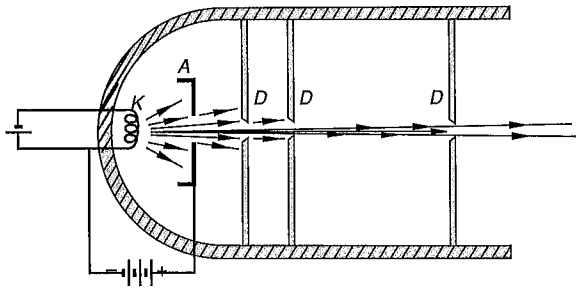
$$Q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}. \tag{16.10}$$

Az *elektronok nyugalmi tömege:*

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}. \tag{16.11}$$

16.4.2. Az elektronok fajlagos töltésének mérése

Az elektron fajlagos töltésének mérése napjainkban jóval egyszerűbben és pontosabban elvégezhető, mint Thomson idejében. A változás a vákuumtechnika fejlődésének és az *izzókatódos elektroncső* (régi nevén katódsugárcső) feltalálásának köszönhető. Az újabb mérőberendezésekben az elektronnyalábot a vákuumcső egyik végében elhelyezett segédberendezés, az ún. elektronágyú (16.3. ábra) szolgáltatja.



16.3. ábra

Az elektronágyú két elektródból (katód és anód) és az azt követő résekből áll. A negatív potenciálú *K* katódot fűtőárammal izzítják. A negatív töltésű izzó fémből tömegesen lépnek ki elektronok, amelyek a pozitív *A* anód vonzó hatására gyorsulnak. Az anód azonban középen lyukas, így a nagy sebességre felgyorsult elektronok döntő többsége átrepül a nyíláson, és nem csapódik be az anódra. Az anód után elhelyezett *D* diafragmák (rések) a széttartó sugárnyalábból vékony párhuzamos elektronnyalábot – katódsugarat – választanak ki.

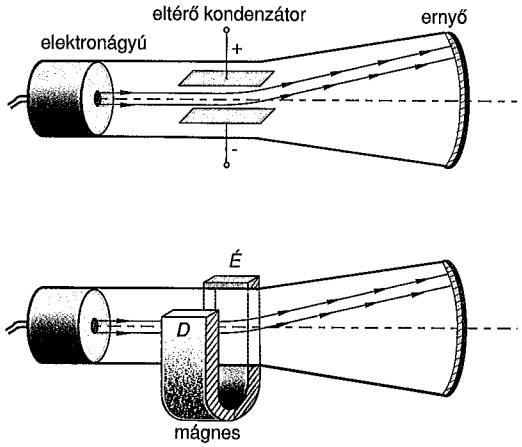
Az elektronok az izzó katódból gyakorlatilag nulla sebességgel lépnek ki, ezért a katódsugárban haladó elektronok sebességét az elektronágyú két elektródjára kapcsolt *gyorsítófeszültség* (U_a) szabja meg. (Statisztikus fizikai módszerekkel kiszámítható, hogy például egy 2400 K, azaz 2127 °C-ra felizzított volfrám-katódból kilépő elektronok közül mindössze 0,1% rendelkezik 1,42 eV-nál, és 0,0001% 2,85 eV-nál nagyobb energiával.)

A munkatétel értelmében a gyorsító elektromos tér munkája a felgyorsított elektron mozgási energiájával egyezik meg, azaz

$$QU_a = \frac{1}{2} m v_0^2. \tag{16.12}$$

Az összefüggésből kiszámítható a katódsugár elektronjainak sebessége.

Az elektronok fajlagos töltésének a mérése a katódsugarak elektromos térrel és mágneses térrel történő eltérítésén alapul. Ha eltérítő hatás nincs, az elektronágyúból kilépő sugarak egyenes irányban haladva csapódnak a vákuumcső túlsó üvegfalát bevonó fluoreszkáló anyagba. A katódsugárzás becsapódási helyén a fluoreszkáló bevonat zöld fénnyel világít. A fajlagos töltés mérésére szolgáló katódsugárcsövekben az elektronnyalábot síkkondenzátor lemezei közt, illetve alkalmasan kialakított elektromágnes pofái közt vezetik át. Az elektromos tér, illetve a mágneses tér segítségével az elektronok az illusztráló 16.4. ábra szerint eltéríthetők eredeti mozgásirányuktól.



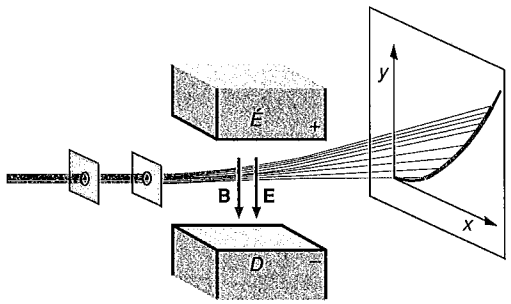
16.4. ábra

Az eltérülés nagyságát a fluoreszkáló ernyőn megmérve, és ismerve az eltérítő tér erősségét, az elektronok fajlagos töltése kiszámítható. Az elektronok fajlagos töltésének meghatározására kidolgozott Thomson-módszer tudománytörténeti jelentősége mellett ma is tanulságos.

16.4.2.1. Az elektron mozgása egyszerre ható elektromos és mágneses térben (Thomson módszere)

Az elektron fajlagos töltése egyszeri mágneses eltérítés alapján is meghatározható, ha a vákuumcsőben elhelyezett elektronágyúból kilépő elektronok sebessége azonos, és nagyságát – a gyorsítófeszültséget ismerve – meghatározhatjuk. J. J. Thomson, aki klasszikus kísérletét gázkisülési csőből nyert katódsugarakkal végezte, a részecskék sebességét nem ismerte, sőt abban sem lehetett biztos, hogy a sebességek azonosak. E problémák megoldására egyszerre alkalmazott elektromos és mágneses eltérítést. Mindkét eltérülés, amint azt az előzőekben láttuk, a fajlagos töltés mellett az elektron sebességétől is függ, a kettős eltérítés tehát lehetőséget ad a sebesség hatásának kifejtésére.

Kísérleti berendezését Thomson úgy alakította ki, hogy az elektromos és mágneses tér iránya párhuzamos legyen, ily módon az elektromos és a mágneses hatásból adódó eltérülés éppen merőleges egymásra. Ha a katódsugárcső fluoreszkáló ernyőjén elhelyezünk egy (x, y) koordináta-rendszert, és az eltérítetlen nyaláb becsapódásával kijelölt pontot választjuk origónak, akkor a 16.5. ábra rajzon bemutatott kísérleti elrendezés esetén az elektromos tértől származó eltérülés x irányú, míg a mágneses tértől származó y irányú.



16.5. ábra

Az ernyő valamely $P(x, y)$ pontjába becsapódó, v_0 sebességű részecske x, y koordinátáit a mágneses, illetve elektromos eltérítésből meghatározhatjuk. Eredményül az adódik, hogy

$$y = \frac{Q}{m}\frac{U_e}{d}\frac{lL}{v_0^2}, \tag{16.13}$$

$$x = \frac{Q}{m}BlL\frac{1}{v_0}. \tag{16.14}$$

Mivel mind x, mind y függ a sebességtől, a különböző sebességű elektronok az ernyő különböző pontjaiba csapódnak be. A becsapódási pontok parabolaíven fekszenek, a parabola $y = f(x)$ egyenlete a fenti két formulából a v_0 paraméter kiküszöbölésével kapható meg:

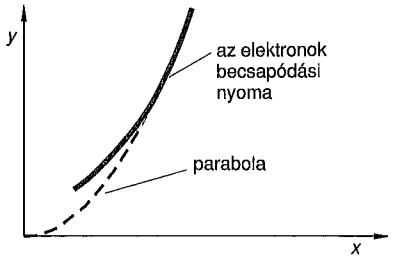
$$y = \frac{m}{Q}\cdot\frac{U_e}{dB^2Ll}x^2 \tag{16.15}$$

Thomson a becsapódási pontok koordinátáit leolvasva ennek az egyenletnek az alapján határozta meg Q/m értékét. A fajlagos töltés meghatározásának ezt a módszerét *Thomson-féle parabolamódszernek* nevezzük.

16.4.3. Az elektronok tömegének sebességfüggése

A századfordulón a relativitáselmélet kialakulásának idején izgalmas kérdés volt a tömeg sebességfüggésének vizsgálata. A Thomson által kidolgozott parabolamódszer a fajlagos töltés nagy pontosságú mérését tette lehetővé. Az érzékeny Q/m mérés segítségével *Kaufmann* igazolta az elektron fajlagos töltésének csökkenését (a tömeg növekedését) nagy sebességű elektronok esetében.

Egyszerű katódsugárcsőben előállított elektronok esetén a sebesség nem nagy, ezért az effektus nem jelentkezik. Kaufmann radioaktív bomlásból származó (*β-bomlás,* lásd a 31.1. pont alatt) elektronok eltérülését vizsgálta. Az ilyen sugárzásban kis és nagy sebességű elektronok egyaránt előfordulnak. A parabolamódszerrel végzett mérés azt mutatta, hogy a becsapódási pontokról kirajzolt görbe a koordináta-rendszer origójának közelében eltér a 16.6. ábra szerinti parabolától.



16.6. ábra

Az elektromos eltérülés mértéke a mágneses eltérüléshez viszonyítva megnőtt. A változást az elektron tömegének relativisztikus növekedésével, a fajlagos töltés csökkenésével lehet magyarázni. A mérések szerint a nyugalmi állapotban m_0 tömegű elektrontömeg a sebességgel az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{16.16}$$

összefüggés szerint változik, ahol c a fénysebesség. Látható, hogy $v \ll c$ esetén a tömeg változása elhanyagolható. A relativisztikus tömegnövekedéssel a 14.2. pontban foglalkozunk.

17. Atommodellek

A 20. század elején már számos kísérleti tény utalt arra, hogy az atom valójában nem oszthatatlan.

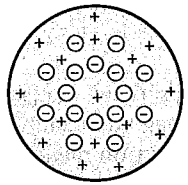
- A katódsugarakkal végzett kísérletek alapján Thomson arra következtetett, hogy az elektron minden anyag atomjának része. Mivel az atom egészében semleges, a negatív töltésű elektron mellett az atomban pozitív töltésnek is lennie kell.
- Az atomok oszthatatlansága ellen döntő érv a századforduló éveiben felfedezett és vizsgált *természetes radioaktivitás jelensége*. Bebizonyosodott, hogy néhány ún. radioaktív anyag pozitív töltésű héliumion-részecskéket *(α-sugárzás)*, illetve elektronokat *(β-sugárzás)* bocsát ki. (Mind az α-, mind a β-sugárzást nagy energiájú elektromágneses sugárzás *(γ-sugárzás)* kísérheti.) A radioaktív sugárzás kibocsátása következtében a sugárzó anyag átalakul, más elemmé válik.
- *D. J. Mengyelejev* orosz vegyészprofesszor 1869-ben megszerkesztette az elemek róla elnevezett *periódusos rendszerét*. A rendszer alapját az a felismerés adja, hogy a különböző elemek kémiai tulajdonságai a növekvő atomsúly függvényében szakaszosan ismétlődnek. A 19. század végén, a 20. század elején egyre többen vallották, hogy a periódusos rendszer törvényszerűségeinek magyarázatát az atomok szerkezeti tulajdonságaiban kell keresni.

17.1. Az első atommodellek

Az anyag szerkezetével foglalkozó legnagyobb fizikusok a 20. század első éveitől kezdve kísérleti munkájukhoz kapcsolódva az atomok szerkezetéről való elképzeléseiket is összefoglalták. Így születtek meg a ma már inkább tudománytörténeti jelentőséggel bíró első atommodellek. Bár a mai felfogásunk az atomról lényegesen eltér a korai modellekétől, áttekintésük ma is hasznos, mert jól nyomon követhető rajtuk a természet megismerésének döntően kísérletekre alapozó folyamata.

17.1.1. Thomson atommodellje

Az atom szerkezetéről az első tudományos igényességű modellt *J. J. Thomson* adta 1904-ben. Thomson hipotézise szerint az atomot egyenletes sűrűségű, nagy tömegű pozitív töltésfelhő alkotja, amelyben kis tömegű, pontszerű elektronok helyezkednek el. Az atom össztöltése zérus. Az elektronok elrendeződését Thomson a klasszikus elektrodinamika segítségével határozta meg. Eszerint az elektronok a pozitív töltésfelhőben a középpontra szimmetrikusan, nagyszámú elektron esetén koncentrikus gyűrűrendszert képezve helyezkednek el (17.1. ábra).



17.1. ábra

Az elektronokat harmonikus (a kitérítéssel arányos) erő tartja egyensúlyi helyzetben. A harmonikus erővel kötött elektronok rezgésével magyarázta Thomson pl. az atomok fénykibocsátását. Ez a magyarázat azonban nem bizonyult alkalmazhatónak a vonalas színképek esetére.

17.1.2. Az atommag felfedezése. A Rutherford-kísérlet

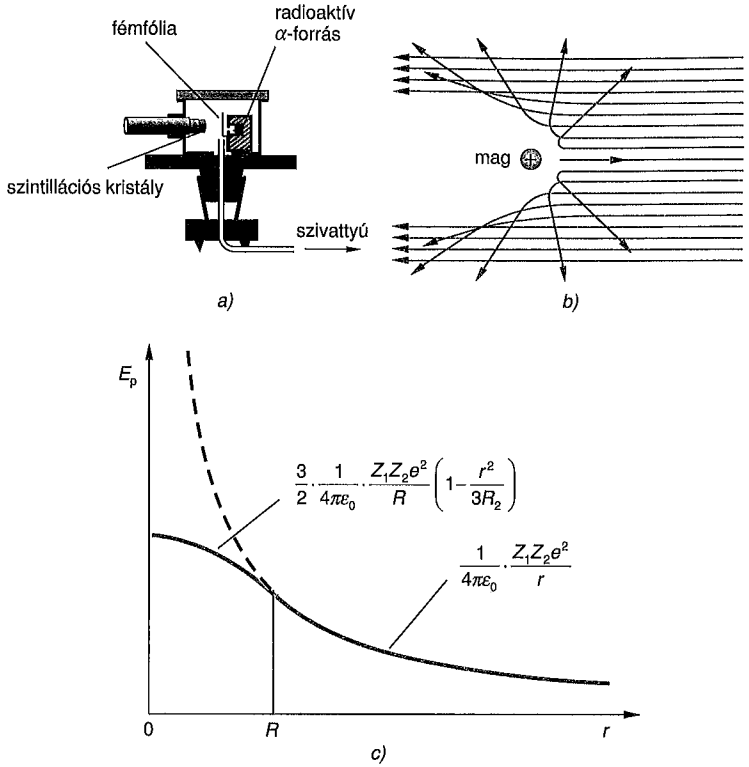
Az atommag felfedezéséhez a radioaktív α-sugárzás tulajdonságainak vizsgálata vezetett el. Az α-részecskék elektromos és mágneses térben eltérülnek eredeti mozgásirányuktól. Az eltérítés mértékéből következtettek a részecskék pozitív töltésére és az elektronokhoz képest igen nagy tömegére. (Ma már tudjuk, hogy az α-részecskék héliumatommagok.)

Ernest Rutherford α-részecskék áthaladását vizsgálta különböző anyagokon, így többek között vékony fémfóliákon is. A sugárzást Rutherford ún. szcintillációs ernyőn fogta fel, amely a becsapódó részecskék hatására felvillan (17.2a. ábra).

A sugárzás döntő része szinte akadálytalanul hatolt át a fólián, a részecskék kis hányada azonban eltérült eredeti mozgásirányától. Különösen érdekes volt az a néhány eset, amikor a becsapódó részecske látszólag visszapattant a fóliáról.

A jelenség a Thomson-féle képpel semmiféleképpen sem volt magyarázható. Rutherford a tapasztaltak értelmezésére a következő feltételezéseket tette:

– Az atom pozitív töltése az atom közepén kicsiny „magban" helyezkedik el.



17.2. ábra

– A mag és az α-részecskék közti (eltérítést okozó) kölcsönhatás az elektromos (Coulomb-) taszítás.
– A magban koncentrálódik az atom csaknem teljes tömege. Az α-részecske centrális ütközésekor a mag gyakorlatilag mozdulatlan, míg az α-részecske „visszapattan" róla.

Rutherford elméletileg kiszámította, hogy e feltételezések alapján a szórt sugárzás intenzitása hogyan csökken az eltérülés szögének függvényében. Az elméleti számítások eredménye jól egyezett a mérési tapasztalatokkal – ez igazolta Rutherfordnak a szórás mechanizmusára, illetve az atommag létezésére tett feltételezését. Az α-részecskék pályájának változását az atommag környezetében a 17.2b. ábra mutatja.

A Rutherford-kísérlet eredménye a Thomson-féle atommodell alapján nem értelmezhető. Vizsgáljuk meg ugyanis egy Z_1e pozitív töltésű részecske potenciális

energiájának menetét homogén, Z_2e pozitív töltésű, R sugarú gömb terében! Az elektrodinamika szerint a részecske potenciális energiája a gömb középpontjából mért r távolság függvényében a következőképpen adható meg (17.2c. ábra):

$$E_{\text{pot}}(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Z_1Z_2e^2}{r}, & \text{ha} \quad r\geq R\\ \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Z_1Z_2e^2}{R}\cdot\left(1-\dfrac{r^2}{3R^2}\right), & \text{ha} \quad r<R.\end{cases}$$

A töltött gömbtől nagyon távol a potenciális energia elhanyagolhatóan kicsiny, így a részecskének csak E_0 mozgási energiája van. Ha olyan nagy energiájú részecskékkel bombázzuk, hogy

$$E_0>\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Z_1Z_2e^2}{R}, \tag{17.1}$$

akkor a részecske áthaladhat az elektromos potenciáldombon. „Visszapattanást", nagy szögű eltérülést nem tapasztalhatunk. Rutherford kísérletében a (17.1) egyenlőtlenség biztosan nem teljesült, hiszen voltak nagy szöggel eltérített részecskék. Ezért az atommagot bombázó α-részecskékre

$$E_0<\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Z_1Z_2e^2}{R},$$

illetve átrendezve,

$$R<\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Z_1Z_2e^2}{E_0}.$$

Rutherford számításai és a szóráskísérletek eredményei alapján megadható az atommag közelítő mérete. A mag átmérője $10^{-15}\ldots10^{-14}$ m, négy-öt nagyságrenddel kisebb az egész atom átmérőjénél. Ugyancsak a szóráskísérletek alapján meghatározható az atommagok pozitív töltésének nagysága is. A különböző anyagok atommagjainak töltése az elemi töltés egész számú többszörösének adódott. További eredmény volt az a felismerés, hogy a magban levő pozitív töltések száma megegyezik az illető anyagnak a Mengyelejev-féle periódusos rendszerben kapott rendszámával.

17.1.3. A Rutherford-féle atommodell

Az atommag felfedezését követően Rutherford az atomokat parányi naprendszerhez hasonlónak képzelte. Eszerint a pontszerű, kis tömegű, negatív töltésű elektronok úgy keringenek kisebb-nagyobb körpályákon a pozitív töltésű, nagy tömegű, de szintén pontszerűen kicsiny atommag körül, mint a bolygók a Nap körül.

A Rutherford-féle atommodell az atommag felismerése révén jelentős előrelépés volt a Thomson-modellhez képest. Érdekes azonban, hogy szinte a modell megalkotásának pillanatában felmerültek a vele kapcsolatos alapvető nehézségek is. A Rutherford-modell sajátos ellentmondása, hogy bár az elektromosságtan törvényei alapján „működik", a klasszikus elektromágneses sugárzáselmélettel mégis ellentmondásban van. A keringő elektronok ugyanis gyorsulnak, a gyorsuló töltés pedig elektromágneses sugárzást bocsát ki. Az energiamegmaradás törvénye értelmében ez a sugárzás a keringő elektron energiáját felemésztené, és az elektron végül belezuhanna az atommagba. A „Rutherford-atom" tehát a klasszikus fizika törvényei szerint nem lehet stabil.

17.2. A modern atomfizika kísérleti alapjai

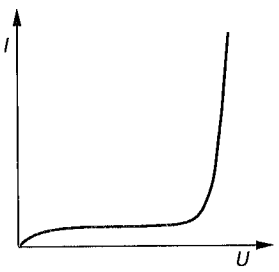
17.2.1. A gázkisülések

Az atom elektronjainak energetikai viszonyairól a spektroszkópiai módszerekkel, elsősorban a gázkisülések színképének vizsgálatával kapunk információkat.

A 17.3. ábra egy gázkisülési cső áramának változását mutatja a feszültség függvényében.

Eszerint a gázok nem abszolút szigetelők, már kis feszültség esetén, csekély mértékben ugyan, de vezetik az áramot. Eleinte az áram nő a feszültség növekedtével, hamarosan azonban telítődés lép fel, és az áram széles feszültségtartományban állandó marad. Ha a feszültséget tovább növeljük, egy kritikus érték meghaladása után a kisülési cső árama rohamosan növekszik. Az adott feszültség mellett mérhető áram függ a gáz nyomásától.

A gázok ilyen viselkedését röviden a következőkkel magyarázzuk. A gázokban kis számban mindig találhatók ionok. (A gázatomokból ionok keletkezhetnek radioaktív sugárzás, kozmikus sugárzás hatására is.) A kisülési cső elektródjaira kapcsolt feszültség hatására a pozitív ionok a katód, a negatív ionok az anód felé gyorsulnak. Mozgásuk során az ionok minduntalan molekulákkal, illetve más ionokkal ütköznek. Ezen ütközések során az ionok egy része elveszíti elektromos töltését – rekombinálódik. A feszültség növekedtével az ionok gyorsabban érik el az elektródokat, és így a rekombináció valószínűsége kisebb – ez az oka, hogy a ki-



17.3. ábra

sülési cső árama eleinte nő a feszültséggel. További feszültségnövelés hatására az áram telítődik, ilyenkor az ionok rekombinációja már elhanyagolható, gyakorlatilag minden ion eléri az elektródot. Tovább növelve a feszültséget, az áramerősség ismét növekszik, ennek magyarázatát az egyre nagyobb számban keletkező ionok adják. Nagy feszültség hatására a gázban eleve meglevő ionok annyira felgyorsulnak, hogy ütközéskor a semleges gázatomokat ionizálják. Mivel ilyenkor a töltéshordozók számát nem a külső ionizáló hatás szabja meg, hanem azok a vezetés mechanizmusa során keletkeznek, *önfenntartó gázkisülésről* beszélünk.

Az önfenntartó gázkisülések látványos kísérője a fénykibocsátás. A kibocsátott fény hullámhossz szerinti összetételét vizsgálva megállapítható, hogy a világító gázok által kisugárzott fény csak kevés, jól meghatározható hullámhosszú (frekvenciájú) színképvonalat tartalmaz. A színképvonalak sorozata (a vonalak hullámhossza, intenzitása) jellemző a fényt kisugárzó gáz anyagi minőségére.

További érdekes tapasztalat, hogy ha folytonos színképű fehér fénnyel világítunk át valamilyen gázt, úgy a gázon való áthaladás után a színképben fekete vonalak figyelhetők meg. Az ilyen ún. *abszorpciós színképből* pontosan azok a hullámhosszak hiányoznak, amelyeket az illető gáz önmaga kibocsátana kisülés közben.

A gázok nemcsak kisülési csőben, elektromos feszültség hatására sugároznak ki fényt. Hasonló fénykibocsátás figyelhető meg magas hőmérsékleten is. Ha például színtelen alkoholba vagy gázlángba különböző sókat szórunk, a meleg lángban a vegyületek felbomlanak, az alkotórészek elpárolognak, miközben jellegzetesen megfestik a lángot. A színes lángot spektroszkóppal vizsgálva a gázkisüléshez hasonló vonalas színkép figyelhető meg.

A gázok vonalas színképének vizsgálatával a 19. században több jelentős kutató foglalkozott. Kiemelkedik közülük a svájci középiskolai fizikatanár, *J. J. Balmer,* aki a periódusos rendszer első eleme, a hidrogén esetén kereste, hogy milyen törvényszerűség szerint követik egymást a színképvonalak. Megállapította, hogy a színképvonalak hullámhossza a

$$\lambda = 3645{,}6\,\frac{n^2}{n^2-4} \qquad (17.2)$$

formulával adható meg, ahol n helyébe a 3, 4, 5, 6 egész számokat kell rendre behelyettesíteni.

Balmer a hidrogén spektrumát a látható fény hullámhossztartományában vizsgálta. A későbbiek során kiderült, hogy a hidrogén a látható fénynél kisebb, illetve nagyobb frekvenciatartományban is sugároz. A teljes elektromágneses spektrum leírását *J. R. Rydberg* a következőképpen foglalta össze:

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right), \qquad (17.3)$$

ahol ν a kibocsátott sugárzás frekvenciája, m és n természetes számok, és $n > m$, R, az ún. *Rydberg-állandó* (értéke $3{,}29 \cdot 10^{15}$ 1/s).

A Rydberg-formula $m = 2$ esetén Balmer összefüggését adja vissza.

A részletes spektroszkópiai mérések, a felismert empirikus összefüggések (Rydberg-formula) megfelelő kísérleti alapot, illetve ellenőrzési lehetőséget kínálnak az atom szerkezetére vonatkozó elméletek (atommodellek) kidolgozásához.

17.2.2. A hőmérsékleti sugárzás

Tapasztalati tény, hogy minden test *hőmérsékletétől függően* folyamatosan elektromágneses sugárzást bocsát ki – *emittál*. Ezt a sugárzást nevezzük *hőmérsékleti sugárzásnak*. A sugárzás energiája a hőmérséklet növekedésével rohamosan nő, és frekvenciaeloszlása változik.

Kirchhoff (1860) ismerte fel, hogy egy test hőmérsékleti sugárzása nem független a test sugárzást elnyelő – *abszorbeáló* – képességétől. A testek ugyanis nemcsak folyamatosan sugároznak, hanem a környezetükből rájuk eső elektromágneses hullámok egy részét folyamatosan abszorbeálják. Környezetükkel termikus egyensúlyban lévő testek energiakibocsátása és elnyelése megegyezik. Figyelembe véve azt a köztudott tényt, hogy a sötét színű, fekete testek jobban elnyelik az elektromágneses sugárzást, arra a következtetésre vezet, hogy ezeknek a testeknek sugárzása is erősebb.

A hőmérsékleti sugárzás törvényeinek vizsgálatához célszerűnek mutatkozott a legerősebben sugárzó (és elnyelő) testtel kísérletezni. Ilyen célra ideális az *abszolút fekete test* lenne. Természetesen abszolút fekete test, amely a ráeső teljes elektromágneses sugárzást elnyeli, a valóságban nincs, jó közelítéssel így viselkedik azonban egy belül feketére kormozott doboz oldalára fúrt kis nyílás. A nyíláson bejutó elektromágneses hullámok energiájának nagy része a doboz fekete falára esve azonnal elnyelődik. Ami nem, az a koromtól kissé rücskös falon diffúz módon szóródik és addig verődik ide-oda a dobozban, míg az ismételt ütközések során gyakorlatilag teljesen abszorbeálódik. A doboz falán lévő lyuk tehát abszo-

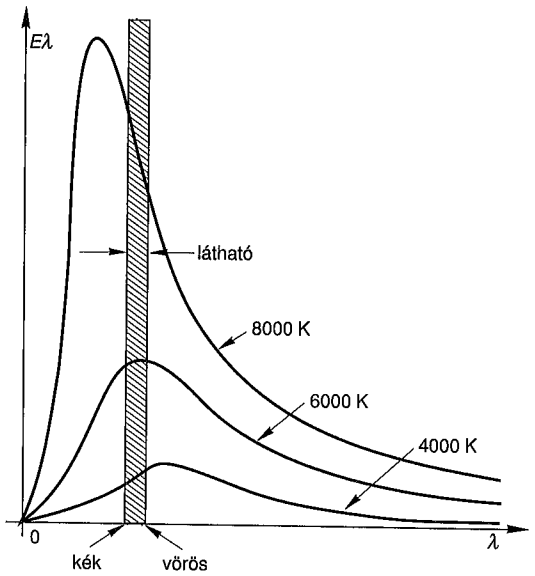
lút fekete testnek tekinthető. A múlt század utolsó évtizedeiben a fizikusok részletesen vizsgálták az abszolút fekete test hőmérsékleti sugárzásának sajátságait. A belül kormozott falú üreget fűtötték, és a falon lévő kis nyíláson kilépő sugárzás intenzitását és frekvenciaeloszlását mérték.

Stefan és Boltzmann megállapították, hogy az abszolút fekete test egységnyi felületéről kisugárzott E energia a test abszolút hőmérsékletének negyedik hatványával arányos, azaz

$$E = \sigma T^4,$$

ahol a σ arányossági tényező értéke, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2K^4}$, *(Stefan–Boltzmann-törvény)*.

A kisugárzott teljes energia a különböző hullámhosszúságú elektromágneses hullámok energiájából tevődik össze. A sugárzás különböző hőmérsékleteken mért intenzitáseloszlását a hullámhossz függvényében a grafikon mutatja.



17.4. ábra

A hőmérsékleti sugárzás intenzitása maximumgörbe szerint változik a hullámhossz függvényében. A hőmérséklet növekedésével a görbék maximuma egyre határozottabbá válik és a kisebb hullámhosszak felé tolódik el. A tapasztalat szerint a

maximumhoz tartozó hullámhossz (λ_{max}) és a hőmérséklet (T) fordított arányban állnak egymással *(Wien-féle eltolódási törvény)*.

Az abszolút fekete test sugárzását a 19. század utolsó éveiben nem sikerült elméletileg kielégítően értelmezni, *Max Planck* német elméleti fizikus volt az, aki a századfordulón megoldotta a problémát, és ezzel új fejezetet nyitott a modern fizikában. *Planck feketetest-sugárzási elméletéből fejlődött ki a kvantumfizika.*

Planck abból a kézenfekvő feltevésből indult ki, hogy az abszolút fekete testet modellező fűtött üreg nyílásán kilépő sugárzás intenzitása arányos az üregben kialakult sugárzási tér energiasűrűségével, továbbá hogy a kilépő nyalábban a különböző hullámhosszak az üregbeli arányoknak megfelelően vannak képviselve. Így a hőmérsékleti sugárzás problémájának megoldása az üregben kialakult elektromágneses tér leírásával adható meg.

Planck feltételezte, hogy az üreget határoló test falában atomi méretű rezgő dipólusok – oszcillátorok – működnek, és ezek sugározzák ki az elektromágneses hullámokat. Az atomi oszcillátorok azonban az őket érő elektromágneses sugárzás hatására kényszerrezgést is végeznek. Az üregben az oszcillátorok és a sugárzás bonyolult kölcsönhatásának eredményeként egyensúly áll be: amennyi energiát a falban levő oszcillátorok kisugároznak, ugyanannyit el is nyelnek.

Az üregben elektromágneses állóhullámok alakulnak ki. A hőmérsékleti sugárzás fent ismertetett tulajdonságainak értelmezéséhez az üregben kialakult állóhullámok energiájának, illetve frekvenciaeloszlásának hőmérsékletfüggését kell meghatározni. Planck úgy találta, hogy a hőmérsékleti sugárzás spektrális energiaeloszlása csak akkor értelmezhető, ha feltételezi, hogy a sugárzó oszcillátorok energiája nem lehet tetszőleges. Feltételezése szerint a ν frekvencián működő oszcillátor energiája csak

$$E = n \cdot h \cdot \nu \qquad (17.4)$$

lehet, ahol $n = 1, 2, \ldots$ és h állandó. Az oszcillátor akkor sugároz, ha egy magasabb energiájú állapotból egy alacsonyabb energiájú állapotba kerül. Az így kibocsátott elektromágneses sugárzás energiája – az oszcillátor sugárzás előtti és utáni energiájának a különbsége – tehát csak a $h\nu$ energiaadag, az ún. energiakvantum egész számú többszöröse lehet. Az oszcillátorokat a termikus energia, illetve az abszorbeált elektromágneses sugárzás gerjeszti magasabb energiájú állapotba.

A makroszkopikus mérések tapasztalatai azt mutatják, hogy a fizikai mennyiségek értéke folyamatosan, tetszőleges kicsi értékkel is változhat. A 19. század végén ezek a tapasztalatok még egyértelműen meghatározták a fizikusok szemléletét. Planck történelmi jelentőségű lépése az, hogy ellent mert mondani az általános felfogásnak, és feltételezte, hogy az oszcillátorok energiája csak meghatározott nagyságú energiaadagokban – kvantumokban – változhat meg.

A Planck merész feltevéséből kiinduló számítások tökéletes egyezést mutatnak a hőmérsékleti sugárzásra vonatkozó kísérleti tapasztalatokkal, ha az energiakvantum kifejezésében szereplő h állandó értéke

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34}, \text{ dimenzója joule/sec} \qquad (17.5)$$

A h állandóval az atomi részecskék leírásánál, a kvantumfizikában nagyon gyakran találkozunk. *h-t a fizika univerzális állandói közé soroljuk,* és Max Planck tiszteletére *Planck-állandónak* nevezzük.

17.3. A Bohr-féle atommodell

Az atomokról alkotott elképzeléseink fejlődésében lényeges előrehaladást jelentett *Niels Bohr* modellje. Bohr atommodellje Thomson és Rutherford kísérleti tapasztalatain, a gázok fénykibocsátására vonatkozó spektroszkópiai méréseken, és Planck a hőmérsékleti sugárzást értelmező elméletén alapul. A Bohr-modell legnagyobb érdeme, hogy kiindulásul szolgált a modern atomelmélet, a kvantummechanika kidolgozásához.

Niels Bohr Planck kvantumhipotézisének felhasználásával fejlesztette tovább Rutherford atommodelljét. Elmélete két önkényesnek tűnő feltételre, az ún. *pályafeltételre* és az ún. *frekvenciafeltételre* épül.

17.3.1. A Bohr-féle pályafeltétel

A feltétel szerint az elektronok csak *meghatározott sugarú pályákon* keringhetnek az atommag körül. Ezeken a pályákon a keringő elektronra nem érvényesek a klasszikus elektrodinamika törvényei – az elektron itt nem sugároz, így energiája állandó marad. Az ilyen stabil elektronpályák sugarát az egyenletes körmozgás esetén állandó értékű impulzusmomentumnak (perdületnek) a kvantálásával kaphatjuk meg. A Bohr-féle pályafeltétel kimondja, hogy *a megengedett elektronpályákon az elektron impulzusmomentuma (perdülete) csak $h/2\pi$ egész számú többszöröse lehet,* azaz

$$m_e v r = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \qquad (17.6)$$

ahol m_e az elektron tömegét, v a sebességét, r a pálya sugarát jelöli, az n „kvantumszám" pozitív egész (n = 1, 2, ...), $\hbar$ a Planck-állandó. A $h/2\pi$ hányados szokásos jelölése $\hbar$ (olvasd h-vonás).

A Bohr-féle pályafeltétel alapján meghatározható az atomok *elektronpályáinak sugara.* A legegyszerűbb atom, a hidrogénatom esetén az első megengedett elektronpálya sugara egyben az atom méretét is jellemzi. A Bohr-elmélet egyszerű ellenőrzésére kínálkozik, hogy egy hidrogénatom számított elektronpálya-méretét összehasonlítsuk más adatokkal, például a kinetikus gázelmélet alapján meghatározható atomátmérővel.

A keringő elektron centripetális gyorsulását az elektron és a mag között működő Coulomb-vonzás biztosítja:

$$k \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \qquad (17.7)$$

ahol $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$..

Az összefüggést célszerűen átalakítva (az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk mr^3-bel, majd rendezzük át), és felhasználva az elektron impulzusmomentumára kimondott Bohr-féle kvantumfeltételt, az

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{kme^2} \qquad (17.8)$$

összefüggéshez jutunk. A H-atom első elektronpályájának (n = 1) sugara ebből:

$$r_H = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \qquad (17.9)$$

ami jól egyezik a kinetikus elméletből kapható eredménnyel [lásd a (16.5) képletet].

A pályafeltétel alapján meghatározható az elektronok energiája a lehetséges pályákon. A hidrogénatomban az n-edik pályán keringő elektron energiája kinetikus és potenciális energiából tevődik össze:

$$E_n = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{ke^2}{r_n}, \qquad (17.10)$$

ahol a második tag a pozitív e töltésű atommagtól r_n távolságban levő elektron potenciális energiája. Figyelembe véve, hogy az elektront a Coulomb-vonzás tartja körpályán:

$$E_n = -\frac{ke^2}{2r_n}. \qquad (17.11)$$

Behelyettesítve ide r_n-re kapott korábbi kifejezésünket, az n-edik pályán keringő elektron energiájára azt kapjuk, hogy

$$E_n = -\frac{k^2 e^4 m}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \qquad (17.12)$$

Az elektron energiája tehát a pályát jellemző kvantumszám függvénye. A negatív előjel mutatja, hogy az elektron a mag környezetében *kötött állapotban* van.

Ilyen nagyságú energiát kell a H-atom elektronjával közölni; hogy összenergiája nullára emelkedjék. Ekkor az elektron kötött állapota megszűnik, és elhagyhatja az atomot: a H-atom ionizálódik. Ezért $|E_n|$-et ionizációs energiának nevezzük, és I-vel jelöljük.

A H-atomra vonatkozó eredmény egyszerűen általánosítható tetszőleges Z rendszámú atomra is: Az elektronok közötti kölcsönhatást elhanyagolva a Ze nagyságú magtöltés miatt a összefüggés

$$E_n = -\frac{k^2 Z^2 e^4 m}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \tag{17.13}$$

alakúra módosul.

17.3.2. A Bohr-féle frekvenciafeltétel

Az atomok fénykibocsátását Bohr két állandó energiájú pálya közti elektronátmenettel értelmezte. Ha az elektron egy nagyobb energiájú, a magtól távolabb levő pályáról egy kisebb energiájú, a maghoz közelebbi pályára lép át, az atom ΔE energiát sugároz ki. Az atomok által kisugárzott energiát szállító elektromágneses hullám ν frekvenciája Planck kvantumfeltételét alkalmazva:

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{E_n - E_m}{h}, \tag{17.14}$$

ahol $E_n - E_m = \Delta E$ két tetszőleges elektronpálya közti energiakülönbséget jelöl. Ez a Bohr-féle frekvenciafeltétel.

A Bohr-féle frekvenciafeltételt alkalmazva értelmezhetjük a gázok vonalas színképét. Az egyes színképvonalakhoz tartozó sugárzás ν frekvenciája meghatározható, ha a Bohr-féle frekvenciafeltételbe behelyettesítjük az elektronok energiájára a Bohr-féle pályafeltételből adódó energiaértékeket.

$$\nu = \frac{1}{h} \frac{k^2 Z^2 e^4 m_e}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \tag{17.15}$$

A legegyszerűbb esetben, a hidrogén esetén a modellből számított és a mért spektroszkópiai eredmények pontosan egyeznek.

A színképvonalak frekvenciájára a Bohr-modellből kapott kifejezést összevetve az empirikusan meghatározott Rydberg-formulával, az R Rydberg-állandó (lásd 17.2.1. pont) értéke elméletileg kiszámítható. R számított és mért értéke jól megegyezik.

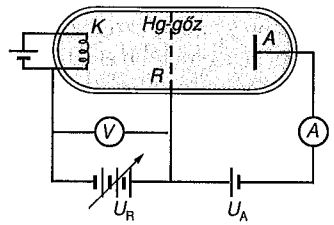
A fénykibocsátás fordított mechanizmusaként a Bohr-modellel az *elnyelési* (abszorpciós) *színképet is magyarázni lehet.* Az atom olyan ν frekvenciájú hullámokat nyel el, amelyeknek energiája révén az elektron egy alacsonyabb E_n energiájú pályáról egy magasabb E_m energiájú pályára kerül át.

Az atomok energiájának kvantált jellegét a spektroszkópiai mérések mellett egy közvetlen ennek vizsgálatára végzett ellenőrző mérés, az ún. *Franck–Hertz-kísérlet* is igazolja.

17.3.3. A Franck–Hertz-kísérlet

Bohrnak azt a feltételezését, amely szerint az atomban levő elektronok energiája kvantált, a spektroszkópiai megfigyeléseken túl a Franck–Hertz-kísélet is igazolja.

James Franck és Gustav Hertz speciális elektroncsövet szerkesztettek, és ezzel vizsgálták elektronok és gázatomok ütközését. Berendezésüket a 17.5. ábra szemlélteti.

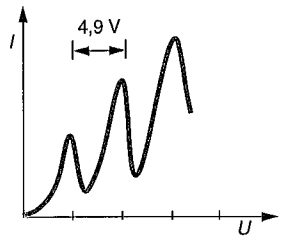


17.5. ábra

Az elektroncső K izzó katódjából kilépő elektronokat a katód és az R rács közé kapcsolt U_R pozitív feszültség felgyorsítja. Az A anód a rácshoz képest $-U_p$ kis negatív feszültségen van. Így az anód és a rács közti térrészben az elektronok fékeződnek, mozgási energiájukat fokozatosan elveszítik. Az anódot csak azok az elektronok érhetik el, amelyek E_k kinetikus energiája fedezi az ellentér legyőzéséhez szükséges munkát, azaz amelyekre

$$E_k \geq QU_A \tag{17.16}$$

Az elektroncsőben kis nyomású Hg-gőz van. A mérés során fokozatosan növeljük az U_R gyorsítófeszültséget (ezzel az elektronok kinetikus energiáját) és mérjük a cső anódáramát (az anódra eljutott elektronok számát). A mérés közben a $-U_A$ fékezőfeszültség értéke állandó. Az anódáram–gyorsítófeszültség görbe jellegzetes, lokális maximumokat és minimumokat mutató növekvő függvény (17.6. ábra).



17.6. ábra

A gyorsítófeszültség növekedtével kezdetben az áram monoton nő, egy kritikus U_1 feszültséget elérve azonban az áram hirtelen lecsökken. A rácsfeszültség további növekedése újabb gyors áramerősség-növekedést okoz, majd U_2 gyorsítófeszültség-értéknél az áram újból lecsökken, míg U_2-t túllépve az áram ismét nő. Az U_1 és U_2 kritikusnak nevezhető feszültségeken túl több hasonló U_3, U_4 stb. olyan gyorsítófeszültség-érték található, amelynél hirtelen lecsökken az anódot elérő elektronok száma. Ez a kísérleti eredmény az atomok diszkrét energiaszintjeit feltételezve jól értelmezhető, így a kvantumos feltételezés bizonyítékául szolgál.

A katód és a rács közé kapcsolt gyorsítófeszültség növelésével ugyanis egyre nő az elektronok kinetikus energiája, egyre több elektron jut el az anódra. (Az elektronok energiáját nem csak a gyorsítófeszültség határozza meg, az izzó katódból kilépő elektronoknak is van már kisebb-nagyobb sebessége.) Az elektroncsőben az elektronok ütköznek a gázatomokkal. Az ütközések eleinte nem járnak energiaveszteséggel – tökéletesen rugalmasak. Ezt bizonyítja a rácsfeszültséggel együtt növekvő anódáram. Az U_1 gyorsítófeszültség elérésekor az áram hirtelen csökkenése arra utal, hogy az elektronok jó részének az energiája lecsökkent, és így ezek nem érték el az anódot. Az energiacsökkenés oka, hogy az elektronok és a gázatomok között az ütközés veszteségessé – rugalmatlanná vált. A Franck–Hertz-kísérlet tapasztalatai szerint az elektron ütközése csak meghatározott E_k kinetikus energia elérésekor válik rugalmatlanná, azaz az atomok az elektronokkal való ütközéskor csak meghatározott nagyságú energiaadagok felvételére képesek.

A legegyszerűbb Franck–Hertz-berendezések segítségével csak az elektron alapállapota és az ezt követő első energiaszint (első gerjesztett nívó) közti energiakülönbség mérhető ki. Ilyenkor $U_2 \approx 2U_1$, $U_3 \approx 3U_1$ stb. A többi lehetséges energiaátmenetre a mérési pontosság növekedésével a görbe finomszerkezetéből lehetett következtetni.

A Franck–Hertz-kísérlet eredményei és a színképelemzések adatai egymástól függetlenül, de egymással jól egyezve bizonyítják, hogy az atom energiája kvantált.

17.3.4. A Bohr-modell eredményei és hiányosságai

A Bohr-féle atommodell igen lényeges előrelépést jelentett az atomok tulajdonságainak megismerésében. Számos korábban nem értelmezhető jelenségre adott mennyiségi és minőségi magyarázatot:

- A modell alapján kvalitatívan érthetővé vált a gázok vonalas színképe, magyarázatot nyertek a spektroszkópia empirikus törvényei (Balmer-formula, Rydberg-formula). A legegyszerűbb atom, a hidrogénatom színképét a Bohr-modell segítségével ki lehet számítani; a számított és mért értékek jól megegyeznek.
- A kísérleti tapasztalatok szerint a gázok színképe mágneses tér hatására megváltozik. Mágneses térben minden eredeti színképvonal helyett több egymáshoz közeli átlóvonal figyelhető meg. A jelenséget felfedezőjéről *Zeeman-effektusnak* nevezzük. Bohr modellje alapján lényegében a Zeeman-effektus is értelmezhető.
- Az atommag körül keringő elektront elemi köráramként kezelve lehetővé vált az anyagok mágneses tulajdonságainak jobb megértése is. A diamágnesség értelmezésekor többnyire ma is a szemléletes Bohr-modellhez nyúlunk vissza (lásd a 26.2.2. pontot).
- Alapvető szerepet játszott a Bohr-modell a kémia gyors fejlődésében is.

A felsorolt látványos eredmények mellett azonban a Bohr-modellnek alapvető fogyatékosságai is vannak:

- A hidrogénatomot például a modell szerint kis lapos korongnak kellene elképzelnünk, ami ellentétben áll a kinetikus gázmodell jól bevált „golyó" hipotézisével.
- A Bohr-modell alapján a hidrogén spektrumát sikerült értelmezni, a magasabb rendszámú elemek színképét azonban már nem. Az egyes spektrumvonalak közötti intenzitáskülönbségekre még a hidrogénspektrum esetében sem ad magyarázatot a Bohr-modell.
- Nem ad számot a modell a színképek ún. finomszerkezetéről. Az egyre pontosabb vizsgálatok ugyanis azt mutatják, hogy a kezdetben egyetlen vonalnak hitt színképvonalak valójában több, egymáshoz igen közel álló vonalból állnak – ezt nevezik a spektrum *finomszerkezetének*.
- A modell belső logikai ellentmondásokat is tartalmaz. A klasszikus fizika törvényrendszerét ugyanis nem veti el, alapfeltevései azonban ellentmondanak ezeknek a törvényeknek. Ez az ellentmondás a modellen belül nem oldható fel.

Az eredményeket és a hiányosságokat együttesen figyelembe véve a Bohr-modellt már szinte a megalkotásától kezdve nem tekintették véglegesnek, dolgoztak kiegészítésén, továbbfejlesztésén (pl. Sommerfeld a körpályák mellett ellipszispályákat is figyelembe vett stb.).

Az egyre pontosabb és részletesebb kísérleti vizsgálatok és az elméleti erőfeszítések együtteseként beigazolódott, hogy a klasszikus fizika törvényei az atomok jelenségeinek értelmezésére általában nem alkalmazhatók, sajátos, új törvények felismerésére, illetve ezek megfelelő matematikai leírására van szükség. Ezek az új törvények sejthetők meg a Bohr-modell eredményesnek bizonyuló „ad hoc" feltevései mögött. Az atomi részecskék tulajdonságait leíró, a klasszikus fizika törvényeitől eltérő egységes törvényrendszert a fizika 20. században kialakult új ága, a kvantummechanika foglalja össze. Az atomok tulajdonságai az új törvényeket alkalmazó kvantummechanika segítségével egységesen értelmezhetők.

18. A fény részecsketermészete

Planck és Bohr munkássága nyomán a fénykibocsátást kvantált atomi folyamatnak tekintjük. Korábbi tapasztalataink szerint a fény hullám formájában terjed. A hullámok energiája azonban folytonosan változhat, s ez ellentétesnek látszik a kvantált energiakibocsátási folyamattal.

18.1. A fotoeffektus

A 19. század második felében fedezték fel, hogy fémekből megvilágítás hatására elektronok lépnek ki. A jelenséget *fényelektromos hatásnak* vagy *fotoeffektusnak* nevezzük. A fotoeffektus jelenségköre részletesen tanulmányozható a *fotocella* segítségével. A fotocella két elektródot tartalmazó vákuumcső. Az egyik elektródot alkalmasan megválasztott fémből nagy felületűre képezik ki, ez az ún. *fotokatód* (ezt világítják meg), a másik, vékony fémdrótból készült elektród az anód. Ha a fotokatódot megfelelő színű fénnyel világítják meg, a katódról elektronok lépnek ki, és repülnek át az anódra. Az elektronok kilépésével a katód fokozatosan pozitív töltésű, míg az anód (ide rakódnak le az elektronok) egyre inkább negatív töltésű lesz. Ha az így kialakuló „ellentér" elegendően naggyá válik, a megvilágított katódból már nem juthat át újabb elektron az anódra. A kilépő elektronokat az elektromos tér lefékezi, majd visszaszippantja a katódra. A kilépő elektronok E_k kinetikus energiáját ilyenkor éppen felemészti az ellentér leküzdéséhez szükséges QU munka:

$$E_k = QU \tag{18.1}$$

A részletes kísérleti vizsgálatok tapasztalatai a következőképpen foglalhatók össze:

- A megvilágított fotokatódból elektronok csak akkor lépnek ki, ha a megvilágító fény frekvenciája meghalad egy ν_0 küszöbértéket. A ν_0 frekvenciaküszöb értéke a fém anyagára jellemző.
- A kilépő elektronok maximális E_k kinetikus energiája (sebessége) a megvilágító fény frekvenciájával lineárisan nő, de nem függ a megvilágítás erősségétől.
- A kilépő elektronok száma a megvilágítás erősségétől függ. Ha a megvilágító fény frekvenciája meghalad egy ν_0 értéket, akkor az elektronok kilépése a megvilágítással egy időben, azonnal bekövetkezik, még akkor is, ha a megvilágító fény intenzitása igen kicsi.

A fotoeffektus kísérleti tapasztalatait 1905-ben *Einstein* – Planck kvantumhipotézisét felhasználva – értelmezte. Einstein feltételezte, hogy a fény $h\nu$ energiájú *részecskékből* áll. A megvilágító fény részecskéje átadja energiáját az elektronnak, és az ennek hatására lép ki a fémből. Ha a fény frekvenciája kicsi, azaz $\nu < \nu_0$, akkor az átadott energia nem elegendő ahhoz, hogy az elektron elhagyja a fémet. Ahhoz, hogy az elektron kilépjen, minimálisan $h\nu_0 = W$ energiával kell rendelkeznie, ahol W az ún. *kilépési munka,* a fém anyagára jellemző. Amennyiben a megvilágító fény frekvenciája ν_0-nál nagyobb, úgy a kilépő elektron kinetikus energiáját az

$$E_k = h\nu - W \tag{18.2}$$

összefüggés, az ún. *Einstein-féle fényelektromos egyenlet* adja meg. Eszerint a fémből kilépő elektron kinetikus energiája a kísérleti tapasztalatoknak megfelelően a megvilágító fény frekvenciájával lineárisan változik.

A klasszikus fizika számos kísérlete bizonyítja, hogy a fény elektromágneses hullám. A fotoeffektus ezzel szemben arról tanúskodik, hogy a fény nem folytonosann hanem $h\nu$ adagokban adja le energiáját, azaz *a fény részecskeként viselkedik.* Einstein nyomán az energiaadagokat szállító fényrészecskéket *fotonoknak* nevezzük.

18.2. A Compton-jelenség

A fény részecsketulajdonságát igazolja az, hogy a fény és az elektron kölcsönhatása két részecske, a foton és az elektron rugalmas ütközéseként írható le. Ezt bizonyítja az ún. *Compton-jelenség.*

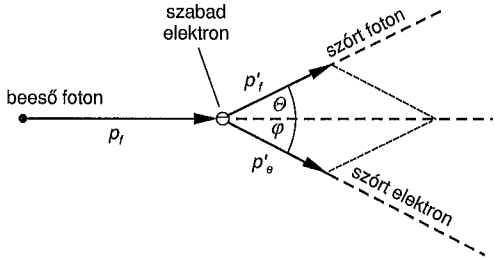
Compton röntgensugarak szóródását vizsgálta paraffinon, és azt tapasztalta, hogy a szórt sugárzás hullámhossza nagyobb (frekvenciája kisebb), mint a megvilágító röntgenfényé. A megfigyelt jelenséget *Compton-jelenségnek* vagy *Compton-szórásnak* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a Compton-szórás csak olyan anyagokon figyelhető meg, amelyekben gyengén kötött, majdhogynem szabad elektronok vannak, és a jelenség annál inkább észlelhető, minél nagyobb energiájú (keményebb) röntgenfénnyel dolgozunk.

A jelenség az elektromágneses hullámok segítségével nem magyarázható. Eszerint ugyanis a beeső hullám és a szóródó sugárzás hullámhossza azonos. (A változó elektromágneses tér kényszerrezgésbe hozza az anyag elektronjait. A rezgő töltés által kibocsátott sugárzás – a szórt sugárzás – frekvenciája megegyezik a kényszerrezgést kiváltó hullám frekvenciájával.)

A Compton-jelenség jól értelmezhető, ha a röntgensugárzást $h\nu$ energiájú részecskék – fotonok – áramának fogjuk fel.

A szórást a fotonok és az anyagban levő elektronok ütközésével magyarázzuk. Az ütközés következtében a foton eltérül eredeti mozgásának irányától (szóródik), és energiája is megváltozik. Az ütközés tökéletesen rugalmasnak tekinthető, ha az impulzusmegmaradás törvénye mellett érvényes az energiamegmaradás törvénye is. A két megmaradási törvényből kiindulva kiszámítható a szóródó sugárzás hullámhosszának megváltozása.



18.1. ábra

A 18.1. ábra az ütközés impulzusviszonyait szemlélteti. Figyelembe véve, hogy a relativitáselmélet szerint $E = mc^2$ (ahol E az energia, m a tömeg, c a fénysebesség), a foton impulzusára a $p = \frac{E}{c}$ összefüggés alapján

$$p_f = \frac{h\nu}{c} \tag{18.3}$$

adódik. A becsapódó foton impulzusa $\frac{h\nu}{c}$, míg az ütközés következtében Θ szögben szóródó foton impulzusa $\frac{h\nu'}{c}$. Feltesszük, hogy a fénysebességgel becsapódó fotonhoz

képest az elektron az ütközés előtt nyugalomban levőnek tekinthető, azaz kezdeti impulzusa zérus. Az ütközés során az elektron sebessége annyira megnő, hogy számolnunk kell a relativisztikus tömegnövekedéssel is (lásd a 14.2. pontot).

A v sebességű elektron impulzusa $\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, ahol m az elektron nyugalmi tömege, c a fénysebesség.

Ezeket figyelembe véve az impulzusmegmaradás törvényét az ütközésre az ábra segítségével, x és y komponensben kifejezve a

$$\frac{h\nu}{c}=\frac{h\nu'}{c}\cos\Theta+\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cos\varphi, \tag{18.4}$$

$$0=\frac{h\nu'}{c}\sin\Theta-\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sin\varphi \tag{18.5}$$

alakban írhatjuk fel.

A foton–elektron rugalmas ütközésre felírt energiamegmaradási törvény pedig a

$$h\nu+m_0c^2=h\nu'+mc^2 \tag{18.6}$$

formát ölti, ahol a meglökött elektron energiájának kifejezésében ismét figyelembe vettük a relativisztikus tömegnövekedést.

A felírt megmaradási törvények segítségével a foton megváltozott frekvenciáját a Θ szóródási szög függvényében kifejezhetjük.

A számítások végeredményeként a szórt röntgensugárzás hullámhosszának változása a

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\Theta) \tag{18.7}$$

kifejezéssel adható meg. Az elméleti leírást Compton első kísérletei után további részletes mérésekkel igazolták, kimutatták a hullámhosszváltozás szögfüggését, illetve az elektronok meglökődését is.

18.3. A fénynyomás

Kísérleti tény, hogy a fény nyomást fejt ki a megvilágított anyagokra. A jelenségét az elektromágneses hullámok vizsgálata során már tárgyaltuk (lásd a 10.4. szakaszt). Itt mindössze arra hívjuk fel a figyelmet, hogy a fénynyomást a fotonok ütközésének alapján is értelmezhetjük. A jelenség fotonok ütközésével történő leírása az elektromágneses hullámelméletben tárgyalt leírással azonos eredményt szolgáltat.

18.4. A fotonok tulajdonságai

Az ismertetett kísérletek szerint az elektromágneses hullámok és a korpuszkuláris (azaz részecskékből álló) anyag kölcsönhatása egyszerűen értelmezhető, ha az elektromágneses sugárzáshoz energia- és impulzushordozó részecskét – *fotont* – rendelünk. A λ hullámhosszúságú, ν frekvenciájú elektromágneses sugárzáshoz tartozó foton tulajdonságai a következőkben foglalhatók össze:

A foton energiája: $E = h\nu$.

A foton fénysebességgel halad – nyugvó foton nincs.

A foton impulzusa: $p_f=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}$

A foton nyugalmi tömege zérus.

A fotonok lényeges tulajdonságainak teljessé tétele érdekében megemlítjük, hogy a fotonnak saját impulzusmomentuma *(spinje)* is van. A *fotonok egész spinű ún. Bose-részecskék (bozonok)* (lásd a 20.3.4. pontot).

19. Az anyaghullámok

19.1. De Broglie hipotézise

A fény tulajdonságainak hullám–részecske kettőssége 1924-ben arra indította *Louis de Broglie* francia fizikust, hogy feltételezze, ez a kettősség az anyagi világ általános sajátsága. Annak mintájára, hogy a hullámtulajdonságú fényhez részecske (foton) rendelhető, de Broglie a *részecskéknek* (elektron, proton stb.) *hullámot feleltetett meg*. A hullám jellemzőinek (λ, ν) meghatározásához a fotonra vonatkozó összefüggéseket fogadta el. Eszerint egy E energiájú, m tömegű, u sebességű részecskéhez

$$\nu = \frac{E}{h} \tag{19.1}$$

frekvenciájú és

$$\lambda = \frac{h}{mu} \tag{19.2}$$

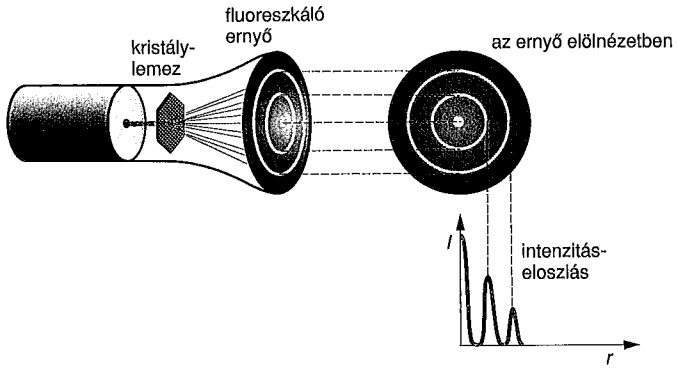
hullámhosszúságú síkhullám rendelhető.

De Broglie hipotézise jól illeszkedett az atomról alkotott kezdeti elképzeléshez, a Bohr-modellhez. Ha ugyanis elfogadjuk, hogy az elektronhoz a fenti egyenletek szerint hullám rendelhető, akkor a Bohr-féle elektronpályák önkényesnek tűnő kiválasztására magyarázat adódik. Az atommag körül az elektron olyan pályákon kering stabilan (sugárzás nélkül), amelyekre teljesül, hogy a pálya hossza épp az elektron λ hullámhosszának egész számú többszöröse.

19.2. Az elektron hullámtermészetének kísérleti igazolása

De Broglie részecske–hullám hipotézisét 1927-ben sikerült kísérletileg bizonyítani. *Davisson* és *Germer* interferenciakísérlettel igazolta az elektron hullámtulajdonságát, a hullámhossz és a részecske impulzusának de Broglie által feltételezett

kapcsolatát. Davisson és Germer eredeti kísérletének egy módosított változatát mutatja a 19.1. ábra.



19.1. ábra

Katódsugárcsőben a felgyorsított elektronok útjába vékony grafitkristályt vagy fémfóliát helyezünk el. A szabályosan rendeződött atomokon az elektronnyaláb elhajlik és a fluoreszkáló ernyőn koncentrikus gyűrűkből álló interferenciaképet hoz létre. Az interferenciakép alapján az elektronhullám hullámhosszúsága meghatározható.

(Hasonló interferenciaképet kapunk az elektromágneses (pl. röntgen-) hullámok kristályokon történő diffrakciója esetén is.) A 10.5.4. pontban foglalkoztunk a fény hullámhosszának meghatározásával optikai rácson történő diffrakció esetén. Az elektronhullám hullámhosszának meghatározása az interferenciamaximumok távolságának mérésével, a kristály és az ernyő távolságának ismeretében, az optikából ismert

$$\lambda = a \sin\alpha \approx a\frac{d}{l}$$

összefüggéssel határozható meg [lásd a (10.30a) képletet]. A λ hullámhossz és az elektronok impulzusa (sebessége) közti kapcsolatot szemléletesen bizonyítja, hogy a diffrakciós maximumok távolsága változik, ha a katódsugárcső gyorsítófeszültségét változtatjuk. Mérésekkel a $\lambda = \frac{h}{mv}$ összefüggés igazolható.

19.3. Az anyaghullámok tulajdonságai

Louis de Broglie az mv impulzusú részecskéhez $\lambda = \frac{h}{mv}$ hullámhosszúságú végtelen síkhullámot rendelt. Az impulzus és a hullámhossz kapcsolatát a kísérletek a mérési hibán belül igazolták. Ezt a képet azonban mégsem fogadhatjuk el maradéktalanul. A mozgó részecske kiterjedése ugyanis véges kell hogy legyen. (Ezt bizonyítja például, hogy az elektronok a katódból kilépve véges sebességgel, mérhető idő alatt érik el a fluoreszkáló ernyőt, továbbá hogy az ernyőn minden egyes elektron becsapódását egy-egy pontszerű felvillanás jelzi.) Ez mindenképpen ellentmond a „végtelen kiterjedésű síkhullám" elképzelésnek.

Az ellentmondás egyszerű számítással is kimutatható.

Tegyük fel, hogy a részecskét de Broglie szerint a $\lambda = h/mv$ hullámhosszú,

$$\psi(x,t) = A\sin(\omega t - kx) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \tag{19.3}$$

hullámfüggvénnyel jellemzett hullám írja le. Kézenfekvőnek tűnik, hogy a hullám terjedési sebessége a részecske sebességével azonos. Határozzuk meg ezt a sebességet!

A hullám terjedési sebessége:

$$v = \lambda \cdot \nu, \tag{19.4}$$

amely az $E = h\nu$, valamint a $\lambda = h/mv$ összefüggések felhasználásával

$$\nu = \frac{h}{mv}\frac{E}{h} = \frac{E}{mv} \tag{19.5}$$

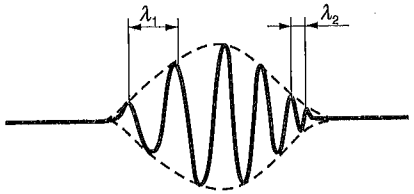
alakban fejezhető ki. A relativitáselmélet értelmében egy részecske teljes energiája:

$$E = mc^2, \tag{19.6}$$

ahol m a mozgó részecske relativisztikus tömege. Ezt visszahelyettesítve az előző kifejezésbe, a hullám terjedési sebességére $v = c$ eredmény adódik. A részecske terjedési sebessége eszerint megegyezne a fénysebességgel, ami ellentmondásban van a relativitáselmélet alaptételével (lásd a 14.1. fejezetet).

19.3.1. A hullámcsomag

A fenti ellentmondások feloldhatók, és a Davisson–Germer-kísérlet tapasztalatainak is eleget teszünk, ha a részecskéhez nem végtelen kiterjedésű síkhullámot, hanem a 19.2. ábrán bemutatott *véges hullámvonulatot–hullámcsoportot* (gyakran nevezik *hullámcsomag*nak is) rendelünk.

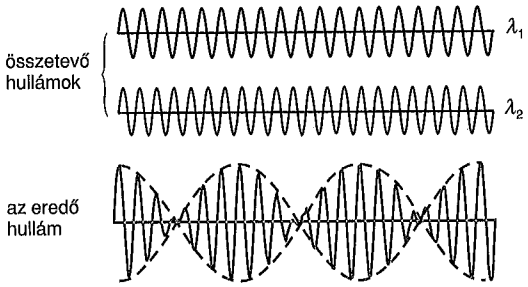


19.2. ábra

Hullámcsoport esetén a hullámfüggvény amplitúdója csak a tér egy kisebb-nagyobb tartományában különbözik zérustól (19.2. ábra). A hullámcsoporttal jellemzett részecske nem végtelen kiterjedésű, hanem a térnek abban a tartományában található, ahol $\Psi(x, t) \neq 0$.

Az ábrán bemutatott hullámcsomagot több különböző hullámhosszúságú szinuszhullám szuperpozíciójaként lehet előállítani (lásd a 2.8.3. pontot).

A legegyszerűbb eset két, egymástól kicsit eltérő frekvenciájú hullámnak a szuperpozíciója, a 19.3. ábrán bemutatott ún. *„lebegési görbe"*. A lebegés jellegzetes hullámképe egymást szabályosan követő hullámcsomagokból áll.



19.3. ábra

Több különböző hullámhosszúságú összetevő esetén a lebegési görbe periódustávolsága egyre növekszik. Megmutatható, hogy amennyiben λ_1-től λ_2-ig minden lehetséges hullámhosszú síkhullám (λ folytonosan változik) részt vesz a hullámcsomag kialakításában, akkor a lebegési periódustávolság végtelen, és az eredő hullám a tér egy korlátozott tartományára kiterjedő egyetlen hullámcsoport.

A hullámcsoport Δx kiterjedése annál nagyobb, minél kevésbé tér el egymástól λ_1 és λ_2 értéke, illetve annál kisebb, minél tágabb az összetevő síkhullámok hullámhossztartománya.

A λ_1 és λ_2 hullámhosszhatárok közé eső végtelen sok különböző hullámhosszúságú hullám eredőjeként adódó hullámcsoport nem szabályos szinuszhullám, nincs pontosan meghatározható hullámhossza. A hullámcsoport amplitúdóingadozását csak közelítő értékekkel jellemezhetjük. A hullámcsoporthoz rendelt λ egy olyan szinuszos síkhullámnak a hullámhossza, amely viszonylag jól fedésbe hozható a csoport hullámvonulatával. Az interferenciakísérletekkel igazolt de Broglie-összefüggés a hullámcsoportra jellemző közelítő λ értéket határozza meg, illetve hozza kapcsolatba a részecske impulzusával. (A λ közelítő jellegéből adódó impulzusbizonytalansággal a következő szakaszban foglalkozunk.)

A hullámcsoport bevezetésével feloldódik a de Broglie-hullámokkal jellemzett részecske terjedési sebességének és a relativitáselméletnek látszólagos ellentmondása. A térben lokalizált részecske sebessége ugyanis nem a hullám fázissebességével, hanem az egész hullámcsomag előrehaladási sebességével, az ún. *csoportsebességgel* (lásd a 2.8.3.5. alpontot) azonos. A hullámvonulat fázissebességének nincs szemléletes fizikai tartalma.

A fentiek illusztrációjaként foglalkozzunk egy egyszerű esettel! Állítsuk elő az

$$y_1 = A\sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{és} \quad y_2 = A\sin(\omega_2 t - k_2 x) \tag{19.7}$$

hullámok szuperpozíciójából adódó hullámot, és határozzuk meg a csoportsebességet, ha a két összetevő hullám fázissebessége azonos, tehát

$$v_f = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}. \tag{19.8}$$

A

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \tag{19.9}$$

azonosság felhasználásával és a $k = 2\pi/\lambda$ hullámszám bevezetésével adódik, hogy

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{\Delta k x - \Delta\omega t}{2}\sin(\bar{k}x - \bar{\omega}t), \tag{19.10}$$

ahol $\Delta k = k_2 - k_1$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, a hullámszámok, illetve a körfrekvenciák közötti eltérés, és

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \qquad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \tag{19.11}$$

Amennyiben $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$ és $\Delta k \ll \bar{k}$, az eredő hullám a 19.3. ábrán láthatóhoz hasonló.

A gyorsan változó, kicsiny hullámhosszúságú hullám amplitúdóját egy lassú, nagy hullámhosszúságú függvénnyel írhatjuk le. A két hullám összege végtelen sok hullámcsomag egymásutánjaként fogható fel.

A hullámcsomag sebességét, az ún. csoportsebességet esetünkben az amplitúdómoduláció terjedése szabja meg;

$$v_{cs} = \frac{\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \tag{19.12}$$

A $\Delta k \to 0$, illetve $\Delta\omega \to 0$ határesetben

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk}. \tag{19.13}$$

Felhasználva az

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \qquad k = \frac{p}{\hbar},$$

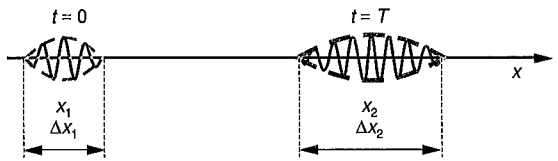
valamint az

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \tag{19.14}$$

összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$v_{cs} = \frac{dE}{dp} = v. \tag{19.15}$$

A hullámcsomag szétfolyása. A 19.4. ábra az x tengely mentén v sebességgel mozgó részecskének megfelelő hullámvonulat terjedését szemlélteti. A $t = 0$ pillanatban a részecske az $x_1 \pm \frac{\Delta x_1}{2}$ helyen található (Δx_1a hullámcsomag kiterjedését jelöli). Egy későbbi $t = T$ időpillanatban a részecske már elmozdult korábbi helyéről, a hullámcsoport az x tengely mentén eltolódva az $x_2 \pm \frac{\Delta x_2}{2}$ helyen található. Az ábra egy érdekes jelenséget szemléltet. A részecske mozgása során az azt jellemző hullámvonulat *térbeli kiterjedése megnőtt.*



19.4. ábra

A jelenséget a hullámcsoportról már elmondottak segítségével szemléletesen értelmezhetjük. A hullámcsoportot csak közelítő λ hullámhosszal jellemezhetjük. Az ilyen közelítő hullámhossz megadása azonban nem teljesen egyértelmű, több olyan ideális síkhullám is található, amelyek hullámhossza kicsit különböző, a hullámcsoport amplitúdóingadozásait azonban mindegyik egyaránt jól közelíti. Tegyük fel, hogy a mozgó ábrán bemutatott hullámcsoport egyformán jól jellemezhető a λ_1, illetve $\lambda_2 (\lambda_1 > \lambda_2)$ hullámhosszakkal, illetve a de Broglie-összefüggés értelmében a $p_1 = mv_1$, illetve $p_2 = mv_2$ impulzusokkal ($p_1 < p_2$). A mozgó részecske helye T idő elteltével így egyaránt megadható az

$$x_2 = x_1 + v_1 T, \tag{19.16}$$

illetve az

$$x_2 = x_1 + v_2 T \tag{19.17}$$

kifejezéssel. Ez csak akkor lehetséges, ha a hullámcsomag kezdeti Δx_1 kiterjedése T idő alatt $\Delta x_2 = \Delta x_1 + (v_2 - v_1)T$ értékűre növekedett. Az ábra azt is jól érzékelteti, hogy a hullámcsoport kiszélesedése nem a hullámhosszak növekedésének, hanem új maximum- és minimumhelyek megjelenésének következménye. A kiszélesedett hullámvonulatnak a terjedés irányába eső tartománya inkább a kisebb (λ_2), a hátsó része inkább a nagyobb (λ_1) hullámhosszal jellemezhető.

A fenti példa egy általános törvény speciális esete. A hullámcsomagok részletesebb matematikai vizsgálata mutatja, hogy *a magára hagyott* (erőmentesen mozgó) *hullámcsomag mindig szétterül. A szétfolyás annál gyorsabb, minél keskenyebb volt az eredeti szélesség.*

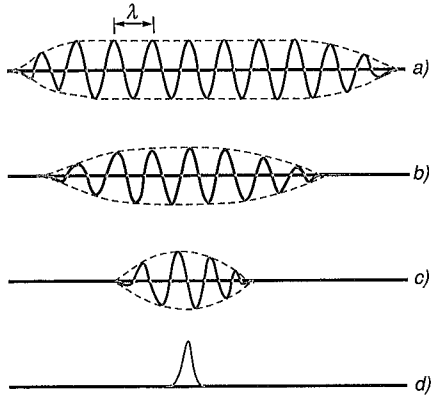
19.4. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció

Az előző fejezetben megmutattuk, hogy a szabadon mozgó részecskékhez (pl. elektronhoz) hullámcsoport rendelhető. Már ebből érthetően következik, hogy a mozgó részecske pontos helyéről nem beszélhetünk. A „részecske helye" kifejezésen a hullámcsoport Δx kiterjedésének megfelelő tartományt kell értenünk, ennél pontosabb helymeghatározás lehetetlen.

A következőkben a hullámcsomag sajátságaiból kiindulva a kvantummechanika egyik legfontosabb alapösszefüggésével, az ún. *Heisenberg-féle határozatlansági relációval* foglalkozunk.

A mozgó részecskéhez rendelt hullámcsomagot térbeli kiterjedése, Δx, valamint átlagos hullámhossza (illetve annak egyértelműsége vagy éppen nagy bizonytalansága) jellemzi.

A 19.5. ábrán néhány egyszerű elképzelt hullámvonulatot mutatunk be.



19.5. ábra

Az első rajzon a) szélesen kiterjedt hullámvonulat látható, középső része szinte egyetlen tökéletes szinuszhullám. Az ilyen hullámcsoporttal jellemzett részecske helyéről csak igen keveset mondhatunk, a részecske a térnek abban a széles tartományában található, amelyre a hullámvonulat kiterjed. A részecske impulzusát azonban igen pontosan megmondhatjuk, hiszen a hullámcsoport λ-ja jól meghatározható.

A b) hullámcsoport kiterjedése kisebb, de egyúttal a középső szabályos tartomány mérete is csökkent, a torzult periodicitású szélső tartományok relatív aránya megnőtt. Az így jellemzett részecske helyét jóval pontosabban ismerjük, mint az előző esetben, a jellemző hullámhossz, illetve az ehhez kapcsolódó impulzus megadása azonban sokkal bizonytalanabb, mint a korábbi hullámvonulatnál.

A c) és különösen a d) ábrán a hullámcsomag már nagyon élesen egy helyre korlátozódik, olyannyira, hogy a hullám periodicitása is nehezen ismerhető fel. Az ilyen hullámcsomag csak nagyon széles hullámhossztartományba eső harmonikus hullámok összetételével állítható elő. Az ilyen hullámcsomaggal jellemzett részecske helyét jó pontossággal ismerjük, impulzusa felől azonban csak nagy bizonytalansággal nyilatkozhatunk.

A fenti ábrákra támaszkodó szemléletes gondolatmenetből arra következtethetünk, hogy *a részecskék helye és impulzusa nem határozható meg egyszerre tetszőleges pontossággal.*

A 19.5. ábrasor alapján egyszerű becslést adhatunk a hely és impulzus együttes pontosságára. A részecske helyének bizonytalanságát a hullámcsomag kiterjedésével, azaz a

$$\Delta x \approx n\lambda = \frac{nh}{p} \tag{19.18}$$

mennyiséggel becsülhetjük meg. Az impulzus pontossága a hullámhossz pontosságán múlik, s az utóbbi nyilván annál pontosabb, minél több hullámvonulatból áll a hullámcsomag. Így a hullámhossz $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ relatív bizonytalanságára $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{1}{n}$. Mivel $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta p}{p}$, így

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{1}{n} \tag{19.19}$$

A hely és az impulzus bizonytalanságára adott becslésből a hely és impulzus bizonytalanságának szorzatát kifejezve azt kapjuk, hogy

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h. \tag{19.20}$$

A speciális alakú hullámfüggvényekre intuitív úton kapott összefüggés tetszőleges jelalak esetén az alábbi, csekély mértékben módosított formában áll fenn:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{19.21}$$

Ezt a Heisenberg által 1927-ben kimutatott összefüggést *határozatlansági relációnak* nevezzük. Hasonló összefüggés teljesül természetesen mindhárom hely- és impulzuskomponensre, azaz

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2},$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2},$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{19.22}$$

A határozatlansági reláció – mint látni fogjuk – jól használható bizonyos fizikai mennyiségek nagyságrendi becslésére. Ezekben a becslésekben a határozatlansági relációt többnyire a

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar \tag{19.23}$$

alakban használjuk.

A makroszkopikus szemléletünk számára rendkívül szokatlan határozatlansági reláció annak a következménye, hogy a mikrofizikai mérésekben a mérőeszköz mindig befolyásolja a mérés eredményét. A makroszkopikus mennyiségek mérésekor természetes, hogy tetszőleges pontosságú mérés esetén található olyan módszer, amellyel a mérőeszköz hatása kiküszöbölhető az eredményből. A mikrofizikai mérésekre ez nem teljesül!

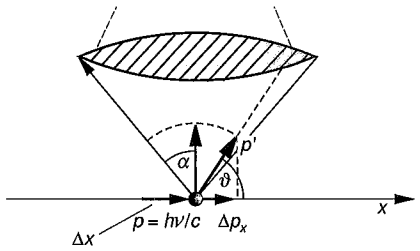
A határozatlansági összefüggés igazolására sok gondolatkísérletben követték végig a mérőeszköz és a mért mennyiség közötti kölcsönhatást. A legismertebb példa az ilyen gondolatkísérletek közül, az ún. „Heisenberg-féle mikroszkópkísérlet".

Vizsgáljuk mikroszkópban a K katódból kibocsátott és U feszültséggel x irányban felgyorsított elektronnyalábot! A nyaláb elektronjainak impulzusa ekkor $p_x = \sqrt{2meU}$ (a másik két impulzuskomponens zérus: $p_y = p_z = 0$). Az egyes elektronok helye a nyalábban gyakorlatilag teljesen határozatlan.

Az elektronok helyének meghatározására figyeljük meg a mikroszkóp lencséjén keresztül egy, az x tengelyre merőlegesen haladó $h\nu_0$ energiájú fotonokból álló fénynyaláb szóródását az elektronokon! A képsíkon áthaladó fotonok helyéből visszakövetkeztethetünk az elektron és a foton ütközésének helyére, azaz az elektron helyzete az ütközés pillanatában lokalizálható. A mikroszkóp azonban a tárgyponthoz nem egyetlen képpontot rendel, hanem egy *diffrakciós képet,* s ez határt szab a mikroszkóp felbontóképességének. Esetünkben a helymeghatározás bizonytalansága nyilván a mikroszkóp által még különállónak észlelhető két tárgypont távolsága, azaz (lásd a 10.7.4.5. alpontot)

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin \alpha}, \tag{19.24}$$

ahol az α szög értékét a 19.6. ábrán látható módon a mikroszkóp geometriája szabja meg.



19.6. ábra

A fotonnal való ütközés következtében a szórt foton x irányú impulzusának

$$\Delta p_x = \frac{h\nu}{c}\cos\vartheta - \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}(\cos\vartheta - 1) \tag{19.25}$$

változása miatt az elektron impulzusa

$$\Delta p_x = (1 - \cos\vartheta)\frac{h}{\lambda} \tag{19.26}$$

értékkel változik (19.6. ábra). A ϑ szórási szögről azonban csak annyit tudunk, hogy $90° - \alpha$ és $90° + \alpha$ közé esik, hiszen a szórt foton bejutott a mikroszkópba. Így az elektron p_{ex} impulzusa az ütközés után a

$$p_x - \frac{h}{\lambda}\sin\alpha < p_{ex} < p_x + \frac{h}{\lambda}\sin\alpha \tag{19.27}$$

tartományba esik. Az impulzus bizonytalansága tehát:

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\lambda}\sin\alpha. \tag{19.28}$$

A hely és impulzus bizonytalanságának szorzata:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h. \tag{19.29}$$

Valóban teljesül tehát a Heisenberg-féle határozatlansági reláció ebben a konkrét esetben is.

Általában elmondható, hogy tetszőleges konkrét mérésre mindig megbecsülhető a hely és impulzus bizonytalanságának szorzata, s adott esetben mindig megtalálható a fizikai oka annak, hogy a két mennyiség miért nem adható meg egyszerre pontosan. A határozatlansági reláció éppen azt mondja ki, hogy a bizonytalanság minden esetben – a körülményektől függetlenül – fennáll.

Végül megjegyezzük, hogy az impulzus- és helykoordinátára vonatkozó határozatlansági relációhoz hasonló összefüggés áll fenn pl. egy részecske megfelelő *szög- és impulzusmomentum-koordinátáinak bizonytalansága* között is, azaz

$$\Delta\alpha \cdot \Delta N_\alpha \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{19.30}$$

ahol α egy adott tengely körül vett elfordulás mértéke, N_α pedig az erre a tengelyre vonatkozó impulzusmomentum.

Általában egy rendszer tetszőleges q koordinátájának és az ehhez tartozó p impulzusnak a bizonytalanságára teljesül, hogy

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{19.31}$$

Ugyancsak érvényes a

$$\Delta E \cdot \tau \geq \frac{\hbar}{2} \tag{19.32}$$

összefüggés is, ahol ΔE az energia bizonytalansága, τ pedig az adott folyamat időbizonytalanságát jelöli. Ez utóbbi határozatlansági összefüggésből azonnal következtethetünk például arra, hogy ha egy elektron gerjesztett állapotának energiája ΔE szélességű, akkor az alapállapotba történő visszatérés – azaz a megfelelő energiájú foton kisugárzása – τ időtartam erejéig bizonytalan. A gerjesztett állapot élettartama így

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta E} \tag{19.33}$$

nagyságúra becsülhető.

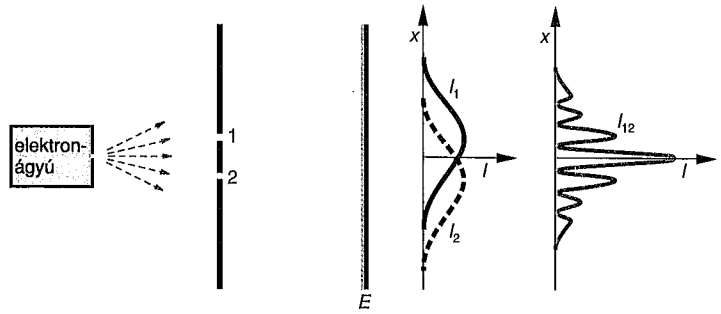
19.5. A hullámfüggvény fizikai értelmezése

Az elektroninterferencia kísérleti tényére építve megmutattuk, hogy a mozgó elektronhoz (általában minden részecskéhez) hullámvonulat rendelhető. A hullámcsoportot a $\Psi(x, t)$ hullámfüggvény jellemzi, amelynek közelítő hullámhosszát a de Broglie-összefüggés adja meg. *A hullámfüggvény a részecske helyét* (a hullámcsomag szélességén keresztül), a részecske *impulzusát* (a de Broglie-hullámhosszon keresztül), *röviden a részecske állapotát jellemzi.* A $\Psi(x, t)$ hullámfüggvényt ezért gyakran *állapotfüggvénynek* nevezik. Vizsgáljuk meg, hogy milyen közvetlen, kísérletileg meghatározható jelentés adható az állapotfüggvénynek, és milyen mérési eljárással kapjuk a legközvetlenebb információt $\Psi(x, t)$-ről! Nyúljunk vissza ismét az alapvető kísérleti tapasztalatunkhoz, az elektroninterferenciához!

Az elektronok hullámtulajdonságát kristályrács segítségével előállított interferenciakép bizonyította. A legegyszerűbb interferenciakísérlet elvi vázlatát a 19.7. ábra mutatja. (A kísérlet gyakorlati kivitelezése igen nehéz. A mérést csak 1961-ben sikerült O. Jönssonnak elvégeznie.)

Az elektronágyúból kilépő elektronok útjába helyezett falon két kis nyílás van. A két résen áthaladó elektronnyaláb az E ernyőn interferenciaképet hoz létre. Az ábrán feltüntettük, hogy hogyan változik az ernyőn a sugárzási intenzitás (I), ha csak az egyik, illetve ha csak a másik rés van nyitva, valamint azt, hogy milyen az intenzitáseloszlás (I), ha mindkét rés nyitott. Ha a két rés közül csak az egyik van nyitva, akkor az ernyőn folytonos intenzitáseloszlást (I_1, illetve I_2) észlelünk, amelynek maximuma pontosan a nyitott réssel szemben van. Ha mindkét rés nyitott, az ernyőn jellegzetes intenzitásingadozást mutató interferenciakép jelenik

meg. Érdekes, hogy a legerősebb intenzitásmaximum éppen a kísérleti elrendezés tengelyébe esik, noha vele szemben a falon nincs nyitott rés.



19.7. ábra

Az interferenciaképet a legegyszerűbben fotografikus módszerrel lehet rögzíteni. Ilyenkor ernyőként fotolemezt alkalmaznak. A fotolemez fényérzékeny bevonata pontszerűen megfeketedik ott, ahová elektron csapódik be. Érdekes megfigyelés tehető, ha különböző expozíciós időkkel készült felvételeket hasonlítunk össze. Nagyon rövid időtartamok esetén a lemezen látszólag véletlenszerű eloszlásban itt-ott találunk fekete pontokat. Az időtartamok növekedtével az intenzitásmaximumok és -minimumok fokozatosan rajzolódnak ki. Az interferenciakép optimális kirajzolódásához szükséges idő az elektronágyúból kilépő sugárzási intenzitástól függ. Az egységnyi idő alatt kibocsátott elektronok számának csökkenésével a szükséges expozíciós idő növekszik.

Az elektronok becsapódását részleteiben tanulmányozhatjuk, ha fotolemez helyett az ernyő síkjában mozgatható kis felületű elektronikus érzékelőt alkalmazunk. A detektor hangjelzést ad, ha a felületét egy kritikus értéknél nagyobb energia éri. Az érzékenység szabályozható.

Kísérletsorozatot végezve a berendezéssel a következőket tapasztaljuk:

- Ha az elektronnyaláb intenzitása elegendően kicsi, akkor a detektor mindig hasonló, impulzusszerű hangjelzést ad.
- Az ernyő egy adott pontján elhelyezett érzékelő teljesen véletlenszerűen jelez. Hosszabb mérési időtartam alatt ismételten meghatározva a kattanások számát, az egy átlagos érték körül ingadozik. A detektor helyétől függően ez az átlagos beütésszám változik. Az átlagos beütésszámot ábrázolva a hely függvényében, a fotolemezen rögzített intenzitáseloszláshoz hasonló görbét kapunk. Két nyitott rés esetén az eloszlási görbe jellegzetes interferenciakép.
- Ha a gyenge sugárzást egyetlen érzékelő helyett egyszerre többel detektáljuk, további fontos megfigyelést tehetünk. Az ernyő különböző pontjaiban elhelyezett detektorok közül véletlenszerűen hol egyik, hol másik szólal meg, de *két detektor egyszerre soha nem jelez.*

A kísérleti tapasztalatok az elektron sajátos, klasszikus szemléletünk számára szokatlan tulajdonságaira mutatnak rá.

Az elektronok *osztatlan egészként* mint egy apró golyó csapódnak be az ernyő egy-egy pontjába. Nem tudjuk megmondani, hogy melyik elektron az ernyő mely pontjára érkezik, sőt még azt sem, hogy mikor csapódik be egy-egy elektron egy kiválasztott pontba. Az elektronok becsapódása *véletlenszerű*. Az osztatlan egészként becsapódó elektronok tapasztalatával a klasszikus szemlélet szerint ellentmondásban áll az ernyőn felfogható interferenciakép. *Az interferencia térben kiterjedt hullámokra utal. Különösen érdekes az a tény, hogy az interferenciakép akkor is kirajzolódik, ha az elektronnyaláb intenzitása olyan kicsi, hogy biztosak lehetünk, egyszerre csak egyetlen elektron tartózkodik a berendezésben.* Ilyenkor nem lehet tehát szó több elektronhullám interferenciájáról – az elektron látszólag önmagával interferál, majd becsapódik az ernyő egy adott pontjára. A hulláminterferenciának megfelelő intenzitáseloszlás sok-sok elektron becsapódásának eredménye. Az intenzitásmaximumok, illetve -minimumok helyét az elektronok de Broglie-hullámhosszát felhasználva a hulláminterferencia klasszikus szabályai szerint lehet meghatározni.

A de Broglie-féle hullámok fizikai értelmezését elsőként *Max Born* adta meg. Eszerint az elektronok $\Psi(x, t)$ hullámfüggvénye meghatározza a becsapódás valószínűségét az ernyő különböző pontjaiban. A hullámfüggvény azonban, mivel negatív értékű is lehet, nem azonosítható közvetlenül a valószínűséggel. Az elektron becsapódási valószínűsége az ernyő egy adott helyén a kiszemelt helyen vett hullámfüggvény abszolút értékének négyzetével[1] arányos. Ez olvasható le a kétréses interferenciakísérlet intenzitásgörbéiről is. Egyetlen rés esetén az ernyőn mérhető intenzitás a berendezés szimmetriatengelyében:

$$I_1 = I_2 \sim \left|\psi_{10}\right|^2 = \left|\psi_{20}\right|^2. \tag{19.34}$$

Két nyitott rés esetén:

$$I_{12} \sim \left|\psi_{10} + \psi_{20}\right|^2 = 4\left|\psi_{10}\right|^2, \tag{19.35}$$

$$I_{12} \sim 4I_1 = 4I_2, \tag{19.36}$$

[1] A Ψ függvény általában ún. komplex függvény, amely $\Psi = \alpha + i\beta$ alakban írható fel. Itt α és β a szokásos hullámfüggvények, és $i = \sqrt{-1}$. Mivel fizikai jelentése csak valós függvénynek lehet, ezért kellett a megtalálási valószínűséget a Ψ függvény abszolút értékének négyzetével kapcsolatba hozni. Definíció szerint:

$$|\Psi|^2 = (\alpha + i\beta)\cdot(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2; \quad (\Psi)^2 = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2.$$

Látható, hogy amennyiben $\beta \equiv 0$, azaz az állapotfüggvény valós, akkor $|\Psi|^2 = \Psi^2$.

azaz két rés esetén az intenzitás az ernyő közepén éppen négyszerese az egyetlen rés esetén kapott intenzitásnak.

Általánosan megfogalmazva: Az anyaghullámokat leíró $\Psi(x, t)$ hullámfüggvény (állapotfüggvény) ismeretében megmondható, hogy az adott részecske a térnek valamely kis ΔV tartományában milyen valószínűséggel mutatható ki. A részecske megtalálási valószínűsége egy tetszőlegesen kiszemelt ΔV térfogatban arányos a hullámfüggvény adott r helyen vett abszolút értékének négyzetével:

$$P(r) = \left|\psi(r)\right|^2 \Delta V, \tag{19.37}$$

ahol $P(r)$ a megtalálási valószínűséget jelenti az r-nél levő ΔV térfogatban, $|\Psi(r)|^2$ pedig a hullámfüggvény r helyen vett abszolút értékének négyzetét jelöli.

Figyelembe véve, hogy az egész térben a vizsgált részecske biztosan megtalálható – azaz ennek a valószínűsége 1 – adódik, hogy

$$\sum \left|\psi\right|^2 \Delta V = 1, \tag{19.38}$$

illetve

$$\int_V \left|\psi\right|^2 \mathrm{d}V = 1. \tag{19.39}$$

A hullámfüggvény négyzete tehát a részecske térbeli megtalálási valószínűségsűrűségét jellemzi.

20. Az atomok kvantummechanikai jellemzése

20.1. A Schrödinger-egyenlet

Az előző fejezetekben kísérleti tapasztalatok alapján megállapítottuk, hogy az elektron, de általában más mikrorészecskék is, leírhatók hullámfüggvénnyel. A hullámfüggvény jellemzi a mikrorészecske fizikai állapotát. A szabad részecskéket (pl. szabad elektront) leíró hullámfüggvényt – a hullámcsomagot – intuitív alapon írtuk fel. Nyilvánvaló, hogy általános érvényű és jól használható mikrofizikai elmélethez csak akkor juthatunk, ha megtaláljuk azt a törvényt, amelynek segítségével a hullámfüggvény tetszőleges probléma esetén meghatározható.

Erwin Schrödinger osztrák fizikus optikai analógia alapján írta fel elsőként azt az egyenletet, amelynek megoldásaként tetszőleges körülmények közt megkaphatjuk adott részecske vagy részecskerendszer hullámfüggvényét. Az egyenlet, amelyet az ő tiszteletére *Schrödinger-egyenletnek* nevezünk, a mikrofizikában leggyakrabban használt alapösszefüggés. Az Erwin Schrödinger által felírt hullámegyenletek megoldásai a mikrorészecskék leírására szolgáló de Broglie-féle hullámfüggvények.

A Schrödinger-egyenlet egydimenziós alakja a következő:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V\psi, \qquad 20.1.$$

ahol m az adott részecske nyugalmi tömege (14.2. szakasz), ψ a részecske állapotát jellemző hullámfüggvény, $V = V(x, t)$ az a potenciál, amelyben a mikrorészecske mozog. A részecske állapotát jellemző hullámfüggvény a helynek és az időnek is függvénye. A $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ún. *parciális derivált* jelölés a hullámfüggvény idő szerinti deriváltját jelöli (miközben a hely állandó), a $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ jelölés a ψ hely szerinti második deriváltját jelöli (miközben t állandó). Az egyenletben szereplő i értéke: $i=\sqrt{-1}$.

A Schrödinger-egyenlet megoldásai ún. *komplex függvények,* amelyek általában $\psi = \alpha + i\beta$ alakban írhatók fel $\left(i = \sqrt{-1}\right)$. A komplex függvényeknek fizikai jelentése nincs. Ez azonban az adott esetben nem jelent problémát, mert mint már láttuk, fizikai tartalmat az előzőekben is csak a $|\psi|^2 = \alpha^2 + \beta^2$ függvénynek tulajdonítottunk, s ez a függvény már valós.

20.1.1. A Schrödinger-egyenlet elméleti alátámasztása

A Schrödinger-egyenlet nem vezethető le a fizika más alaptörvényeiből, a kvantumfizika önálló alaptörvénye. Bevezetése azonban sokféle elméleti meggondolással is alátámasztható. A következőkben ilyen gondolatmenetet mutatunk be. Végiggondolását csak azoknak ajánljuk, akik tisztában vannak a differenciálszámítás elemeivel.

Abból indulunk ki, hogy a fizika törvényei általában differenciálegyenletekkel fogalmazhatók meg matematikai alakban. Feltételezhetjük tehát, hogy a részecskék állapotát leíró

$$\psi\left(x,t\right) = A\sin\left(\omega t - kx\right)$$

hullámfüggvény is valamilyen differenciálegyenlet megoldásaként adható meg. Természetesen ilyen egyenlet sokféle létezhet! Keressünk most olyat, amelyik kapcsolatba hozható egy részecske mozgásával! Induljunk ki ehhez a V potenciáltérben mozgó, E összenergiájú részecskére vonatkozó

$$\frac{p^2}{2m} + V = E$$

energiamegmaradási törvényből! Tekintsük érvényesnek továbbá, az energiára vonatkozó Planck-féle $E = h\nu$ kvantumfeltételt, valamint de Broglie $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$ hullámhosszra vonatkozó feltevését! Könnyen belátható, hogy a k hullámszám, illetve az ω körfrekvencia a hullámfüggvény segítségével a $k^2 = -\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, illetve $\omega = -\frac{1}{i\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}$ alakban írható fel. Behelyettesítve ezeket az energiamegmaradást

kifejező egyenletbe, és a kapott összefüggést ψ-vel beszorozva az

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$$

hullámegyenlethez jutunk. Az egyenletnek a de Broglie-hullámfüggvény nyilvánvalóan megoldása. Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy ez a gondolatmenet nem levezetés, hanem a kvantummechanika alapegyenletének analógiai alapon történő bevezetése.

A Schrödinger-egyenlet megoldása általában matematikailag nagyon bonyolult. Egzakt megoldás csak a legegyszerűbb esetekben lehetséges. Szabad részecskék esetén megoldásként a már megismert de Broglie-hullámok – a hullámcsomag – adódik. A Schrödinger-egyenlet igazi jelentősége azonban az, hogy felhasználásával kötött részecskék, például az atomban kötött elektronok hullámfüggvénye is meghatározható.

20.2. Kötött részecskék kvantummechanikai leírása

Az atomban a pozitív töltésű mag vonzó hatására a negatív elektron megkötődik a mag környezetében. *Az atommag Coulomb-terében kötött elektronok állapotfüggvényeit* meghatározva megnyugtató válasz adódik mindazokra az atomfizikai problémákra (pl. az atomok színképe, beleértve a spektrumok finomszerkezetét is, a periódusos rendszer felépítése, a kémiai kötés értelmezése stb.), amelyekre sem a klasszikus atommodellek, sem az őket követő félklasszikus Bohr-modell nem tudott igazi magyarázatot adni.

A kötött elektronok megtalálási valószínűsége csak a mag közelében számottevő. Ez azt jelenti, hogy a részecskét leíró hullámfüggvény mindig csak az atommag közelében különbözik nullától, vagyis az elektron a mag környezetében lokalizálódik. (Ez lényeges eltérés az eddig tárgyalt szabadelektron-hullámfüggvényhez, a hullámcsomaghoz képest, amely az idő múlásával egyre szélesedik, „szétfolyik".)

A Schrödinger-egyenlet alapján meghatározhatók a kötött elektronok állapotfüggvényei. Ebben az esetben a hullámegyenlet kissé egyszerűsíthető, mivel olyan megoldásfüggvényeket keresünk, amelyek nem függnek az időtől (időben állandóak, stacionáriusak).

A stacionárius állapotfüggvények meghatározását adó egyszerűsödött egyenlet, az ún. időtől független Schrödinger-egyenlet. Az időtől független Schrödinger-egyenlet egydimenziós alakja a következő:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\big(E-V(x)\big)\psi=0, \tag{20.2}$$

ahol E az elektron összenergiája, ψ pedig a most már csak helytől függő állapotfüggvény. (Az állapotfüggvénynek természetesen most is van időtől függő része, ez azonban a mechanikai állóhullámok esetéhez hasonlóan mindenütt ugyanolyan.)

A kötött részecskék állapotát leíró hullámfüggvények – *állóhullámok*. Az állóhullámokat leíró hullámfüggvények sokszor intuitív úton közvetlenül is felírhatók. Ez lehetővé teszi, hogy néhány egyszerűbb kvantummechanikai problémát a Schrödinger-egyenlet megoldása nélkül is tárgyaljunk. A következőkben ezzel a módszerrel, a bonyolult számítások kikerülésével érzékeltetjük a kötött elektronok kvantummechanikai leírását.

20.2.1. Dobozba zárt részecske leírása

Az atommaghoz kötött elektronok tárgyalása előtt mintegy bevezetőként megvizsgáljuk, hogyan határozhatók meg az olyan mikrorészecske lehetséges hullámfüggvényei, amelyet a lehető legegyszerűbb módon azzal tettünk kötötté, hogy merev falú képzeletbeli *dobozba zártuk*.

Egyszerűsítsük tovább a problémát oly módon, hogy feltesszük, hogy a doboz *„egydimenziós”*, azaz a részecske az x tengely mentén a $0 \le x \le a$ tartományban szabadon mozoghat, de onnan ki nem léphet. (Fizikailag ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a részecske potenciálja a $0 \le x \le a$ tartományon belül zérus, ezen kívül pedig mindenhol végtelen nagy.)

A probléma egzakt megoldásához a $0 \le x \le a$ tartományban az időtől független Schrödinger-egyenletet kell megoldani.

A megoldandó egyenlet:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-E\psi. \tag{20.3}$$

Nyilvánvaló, hogy a $0 \le x \le a$ tartományon kívül az állapotfüggvény értéke mindenütt zérus, hiszen a részecske nem lehet végtelen energiájú helyen. Amennyiben az

E energia ismert állandó, akkor a Schrödinger-egyenlet matematikai alakja megegyezik a harmonikus rezgő mozgást végző tömegpont mozgásegyenletével. Így a megoldást a

$$\psi(x)=C\sin(kx+\delta) \tag{20.4}$$

alakban kereshetjük, ahol $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. Ilyen megoldást tetszőleges E energia esetén találhatunk. Esetünkben azonban a hullámfüggvénynek a tartomány két végén el kell tűnnie, azaz

$$\sin\delta=0 \quad \text{és} \quad \sin(ka)=0. \tag{20.5}$$

Teljesülnie kell tehát a $\delta = 0$, valamint a $ka = n\pi$, $n = 1,2,3\ldots$ feltételnek is. Ez a feltétel azonban megszabja a lehetséges energiaértékeket is, ugyanis felhasználva az előző k értéket,

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}a=n\pi. \tag{20.6}$$

A $\psi(x)$ függvényben szereplő C állandó értéke abból a feltételből határozható meg, hogy a részecske biztosan a $0 \le x \le a$ intervallumban tartózkodik, tehát

$$\int_0^a|\psi|^2\,dx=1. \tag{20.7}$$

Ebből azt kapjuk, hogy az n-edik energia-sajátértékhez a

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{20.8}$$

sajátfüggvény tartozik.
A számítások szerint az energiaértékekre adódó eredmény:

$$E_n=\frac{n^2\pi^2}{2m}\left(\frac{\hbar}{a}\right)^2. \tag{20.9}$$

Az adott részecske energiája stacionárius állapotban tehát csak az E_n értékek valamelyikével lehet egyenlő. A fenti egyszerű példa mutatja, hogy az energia azért válik kvantálttá, mert a részecske térbeli mozgását korlátoztuk.

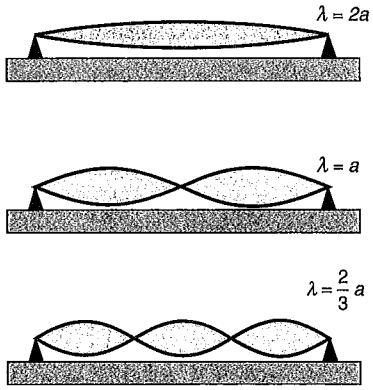
Általában igaz, hogy a kötött részecskék mozgása csak meghatározott energiák, az ún. *energia-sajátértékek* mellett állandósulhat. Az energia-sajátértékekhez tartozó állapotfüggvényeket *energia-sajátfüggvényeknek* nevezzük.

20.2.1.1. A húrmodell

Az a szakaszon kötött részecske lehetséges állapotfüggvényei a Schrödinger-egyenlet megoldása szerint állóhullámok. Az eredményhez a hullámegyenlet megoldása nélkül, egyszerű analógia alapján is eljuthatunk. Az állóhullámok elképzeléséhez a mechanikában megismert, a hosszúságú, mindkét végén befogott rugalmas húron kialakuló állóhullámok jó analógiaként szolgálnak. A húron létrejövő állóhullám amplitúdója olyan, mint az a hosszúságú szakaszra kényszerített részecskét jellemző $\psi(x)$ állapotfüggvény. A húron kialakuló állóhullámok esetén a húr két befogott végén csomópont van, azaz a kitérés zérus. A csomópont létrejöttéhez az szükséges, hogy az a távolságon a hullámhossz felének egész számú többszöröse férjen el, azaz

$$a = n\frac{\lambda}{2}. \tag{20.10}$$

Ennek a feltételnek megfelelő legegyszerűbb állóhullám-alakzatokat mutatja a 20.1. ábra.



20.1. ábra

Hasonló feltételnek kell teljesülnie a mikrorészecske hullámfüggvényére is. Így a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ *hullámszám* bevezetésével és a de Broglie-összefüggés ($p = \hbar k$) felhasználásával adódik, hogy

$$a = n\frac{\pi\hbar}{mv}. \tag{20.11}$$

Miután az a szakaszon a részecske energiája tisztán kinetikus energia, $mv = \sqrt{2mE}$, így

$$a = n\frac{\pi\hbar}{\sqrt{2mE}}, \tag{20.12}$$

amiből az n-edik energiaértékre ismét az

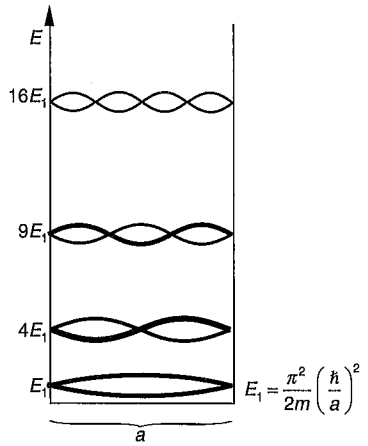
$$E_n = n^2\frac{\pi^2}{2m}\left(\frac{\hbar}{a}\right)^2 \tag{20.13}$$

eredmény adódik.

A húrmodell alapján kapott energiakifejezésből látható, hogy a részecske lehetséges energiaértékeit az $n = 1, 2, \ldots$ értékekkel számlálhatjuk. Az n számot *kvantumszámnak* nevezzük. A kvantumszám szemléletesen azt mutatja meg, hogy az állapotfüggvénynek az adott szakaszon hány csomópontja van. Ha a kvantumszám értéke n_i, akkor a hullámfüggvénynek $n_i - 1$ belső, illetve a két végével együtt összesen $n_i + 1$ csomópontja van. A minimális energiájú állapotot, amely az $n_i = 1$ kvantumszámhoz tartozik, a részecske *alapállapotának* nevezzük.

Alapállapotban a részecske energiája $E = \frac{\pi^2}{2m}\left(\frac{\hbar}{a}\right)^2$.

A részecskék alapállapottól különböző olyan állapotait, amelyben a hullámfüggvénynek belső csomópontjai vannak, *gerjesztett állapotoknak nevezzük*. A lehetséges energiaértékek sorozata adja a részecske *energiaspektrumát*.



20.2. ábra

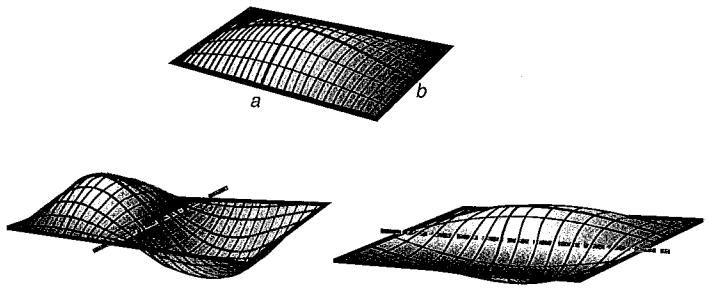
A dobozba zárt elektron lehetséges energiaértékeire és hullámállapotára kapott eredményeinket szemléletesen grafikus ábrázolással is megjeleníthetjük.

Az a szélességű, végtelen potenciálfalakkal határolt egydimenziós „dobozba" úgy rajzoltuk be az elektronállapotoknak megfelelő állóhullám-alakokat, hogy a hullámok (gerjesztési) szintje az állapot energiáját jellemezze.

20.2.1.2. A membránmodell

Az egydimenziós példa alapján egyszerűen eljuthatunk a síkban, illetve térben elzárt részecskére vonatkozó eredményekhez is.

Az a, b élhosszúságú, téglalap alakú tartományba kényszerített részecske stacionárius állapotai az élei mentén befogott lap rezgéseivel modellezhetők. A lapon az élek mentén egymástól függetlenül alakulhatnak ki a húr mentén megismert állóhullámalakok. Ennek megfelelően az energia a két egymásra merőleges irányban kialakuló állóhullám energiájának összege. Természetesen ebben az esetben csomópontok helyett az ábrán látható *csomóvonalak* jelennek meg



20.3. ábra

Hasonló módon az a, b, c élhosszúságú téglatest alakú térrészbe zárt részecske energiája az élek mentén három egymásra merőleges irányban kialakuló, egymástól független állóhullám energiájának összege. Ebben az esetben az állapot három kvantumszámmal (n_x, n_y, n_z) jellemezhető, s így az energia:

$$E\left(n_x, n_y, n_z\right) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left[\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{c}\right)^2\right]. \qquad (20.14)$$

Az n_x, n_y, n_z kvantumszámok azt jelentik, hogy az a él mentén haladva $n_x - 1$, a b él mentén $n_y - 1$, a c él mentén pedig $n_z - 1$ *csomósíkot* találunk. A térbeli esetben is a legkisebb energiájú állapotot nevezzük alapállapotnak. Az alapállapot az

(1, 0, 0), (0, 1, 0), illetve a (0, 0, 1) kvantumszámokkal megadott állapotok egyike. Vegyük észre, hogy kocka alakú doboz esetén a három különböző állapot energiája ugyanakkora.

Az olyan állapotokat, amelyekben lényegesen különböző hullámfüggvényekhez azonos energia tartozik, *elfajuló* (idegen szóval *degenerált*) *állapotoknak* nevezzük.

Felvetődhet az a kérdés, hogy a csomósíkokat miért a téglatest éleivel párhuzamosan, és pl. miért nem az átló síkjában helyeztük el? A csomósíkok természetesen nem csak az élekkel párhuzamosan jelölhetők ki. Megmutatható azonban, hogy szabadon választott irányítású, de egymásra merőleges három csomósíksereg révén adódó állapotfüggvényekből matematikai módszerekkel tetszőleges más stacionárius állapotfüggvény előállítható. Sőt ennél több is igaz! Az időben állandósult állapotokból tetszőleges nem stacionárius állapot hullámfüggvénye is kikeverhető.

A kötött állapotú részecskék leírását illusztráló mesterséges példa – a dobozba zárt elektron példája – néhány esetben alkalmas a természetben megfigyelhető jelenségek szemléletes értelmezésére is. Korábbi gondolatmenetünk alapján magyarázható egyes hosszú láncmolekulájú anyagok (pl. karotin) színe. A molekulák elektronjai általában a látható fény fotonjainál jóval nagyobb energiákkal gerjeszthetők. Egyes *hosszú láncmolekulájú* anyagok elektronjai ezzel szemben már a közönséges fény hatására gerjesztődnek. Az ilyen anyagok a rájuk eső fehér fényből elnyelik azokat a megfelelő energiájú fotonokat, amelyek az elektronokat gerjeszthetik – ezért az anyagról a szemünkbe jutó fény már nem fehér, hanem színes lesz (az elnyelt szín kiegészítő színét látjuk). A hosszú láncmolekulában az elektronok gyakorlatilag szabadon mozogva, a lánc egész hosszában állóhullámokat képeznek. A hosszú szakaszon kialakuló állóhullám-állapotok energiái egymáshoz közel esnek, így az elektronokat már a kis energiájú fotonok is gerjeszteni tudják.

A levelek zöld színét adó klorofillmolekula atomjai síkbeli elrendezésűek, a molekula alakja egy kissé torzult négyzethez hasonlít.

Ideális négyzet esetén az egész molekulában megtalálható, ún. *delokalizálódott* elektronok, (0, 1, 0), illetve (0, 0, 1) kvantumszámokkal jellemezhető állapotainak energiája azonos. A klorofillmolekula csekély „torzultsága" miatt ezek az energiák kissé különböznek. Ez az energiakülönbség azonban olyan kicsi, hogy már a kis energiájú vörös fény fotonjai elegendők ahhoz, hogy az alacsonyabb energiájú állapotból a magasabb energiájú állapotba gerjesszék az elektronokat. A klorofillmolekulák a fehér fényből elnyelik a vöröset, így a levelekről a vörös kiegészítő színe – a zöld – jut a szemünkbe. Ezért látjuk zöld színűnek a klorofillt tartalmazó leveleket.

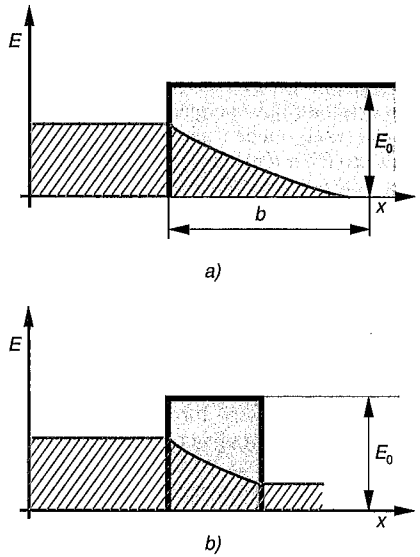
20.2.2. Az alagúteffektus

Az egydimenziós dobozba zárt elektron tárgyalásakor feltételeztük, hogy a dobozt végtelen magas „potenciálfal" határolja. Ekkor az elektron megtalálási valószínűsége az adott $0 < x < L$ tartományon kívül zérus, s az elektront a doboz belsejében állóhullám reprezentálja. Az állóhullám képhez úgy is eljuthatunk, hogy a mechanikai, illetve fényhullámok analógiájára feltételezzük, hogy az elektronhullám a

doboz falának ütközve visszaverődik, és önmagával interferálva alakítja ki az időben stabilisan fennmaradó állóhullámot.

A fényről azonban tudjuk, hogy új közeg határára érve csak részben verődik vissza, s a hullám bizonyos mértékben mindig behatol az új közegbe is. Ez csekély mértékben még teljes visszaverődés esetén is bekövetkezik.

A részletes kvantummechanikai számítások azt mutatják, hogy amennyiben a bezárt részecske mozgását csak *véges magasságú és szélességű potenciálgát* korlátozza, akkor az anyaghullámok is a fényhez hasonlóan viselkednek. Kimutatható, hogy az anyaghullámok véges valószínűséggel olyan potenciálgátakkal határolt területre is behatolhatnak, amelyek magassága jóval nagyobb a részecske összenergiájánál, s amennyiben a gát keskeny (20.4. ábra), akkor a hullám át is hatolhat rajta.



20.4. ábra

A hétköznapi tapasztalataink szerint különösnek tűnő jelenséget *alagúteffektusnak* nevezzük.



20.5. ábra

Az elnevezés onnan ered, hogy a klasszikus mechanikában egy test nem juthat át az előtte tornyosuló hegy (potenciálgát) túloldalára, ha nincs elegendő energiája a hegy „megmászására", csak ha a hegybe fúrva alagutat talál.

Ez a viselkedés a klasszikus fizika szabályai szerint teljesen lehetetlen. Amennyiben hasonló mozgás makroszkopikus körülmények között is végbemehetne, akkor ez azt jelentené, hogy a hegyoldalon felfelé gurított golyó esetenként akkor is átkerülne a szomszédos völgybe, ha mozgási energiája a hegy lábánál kisebb, mint a hegy tetején a helyzeti energia, azaz $\frac{1}{2}mv_0^2 < mgh$. Az áthatolás azonban nem mindig következne be, hanem csak véletlenszerűen, s a hegy magasságának és szélességének növekedtével egyre ritkábban. Tovább növelné az ilyen ritka események furcsaságát az, hogy a szomszéd völgyből a hegyen átjutó golyót sohasem a hegy tetején, hanem mindig az $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$ összefüggésnek megfelelő h magasságában pillantanánk meg először.

Ilyenkor úgy képzelhetjük, mintha a potenciálgáton áthaladó részecske nem a gátat megmászva, hanem egy alagúton keresztül került volna át az akadályon.

Az alagútjelenség jellegzetesen kvantummechanikai természetét a határozatlansági reláció segítségével érthetjük meg pontosabban. Ahhoz, hogy a részecskét a d szélességű akadályban kimutassuk, helyzetét $\Delta x \approx d$ bizonytalansággal kell lokalizálnunk. Így az impulzus bizonytalansága $\Delta p \approx \frac{\hbar}{d}$ lesz, ami

$$\Delta E = \frac{(p+\Delta p)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} = \frac{2p\Delta p}{2m} + \frac{(\Delta p)^2}{2m} \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m}$$

energiabizonytalansághoz vezet. Tehát

$$\Delta E > \frac{\hbar^2}{2md^2}.$$

Egy részecske akkor hatolhat át potenciálgáton, ha energiájának bizonytalansága eléri a potenciálgát magasságának (U_0) és a részecske energiájának (E) különbségét, tehát ha

$$U_0 - E \approx \Delta E \approx \frac{\hbar^2}{2md^2}.$$

Adott $U_0 - E$ energiakülönbség esetén tehát a részecske körülbelül

$$d = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0 - E)}}$$

mélységig hatol a potenciálfalba.

Pontosabb számítások szerint eddig a távolságig a részecske körülbelül 1/3 valószínűséggel jut el. Azonnal adódik, hogy kétszer ekkora távolságba 1/9, háromszoros mélységbe pedig 1/27 valószínűséggel kerül a részecske. A behatolás mélysége tehát a gát szélességével exponenciálisan csökken.

Az alagúteffektus hatékonysága a potenciálgát szélessége mellett az alagutazó részecske tömegének, illetve a potenciálgát magasságának növekedésével csökken. Az alagúteffektus általában a könnyű elektronok mozgásakor jelentős, de szerepet játszik az α-sugárzás kibocsátásakor is.

20.2.3. A lineáris oszcillátor

Vizsgáljuk az x tengely mentén az $F = -Dx$ erő hatására mozgó részecskét! A részecske harmonikus rezgőmozgást végez, ezért nevezzük *harmonikus oszcillátornak*.

A klasszikus fizika törvényei szerint a harmonikus oszcillátor energiája az

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \qquad (20.15)$$

összefüggéssel adható meg. Ebből adott E energia mellett a részecske amplitúdójára $A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$ adódik, ahol $\omega=\frac{2\pi}{T}$ (T a rezgésidő).

A harmonikus oszcillátor mozgása a dobozba zárt elektron mozgásához hasonlóan úgy is szemléltethető, mintha a részecske mozgását az

$$U(x)=\frac{1}{2}Dx^2$$

potenciálgödör korlátozná. Nyilvánvaló, hogy a klasszikus fizika törvényei szerint a harmonikus rezgőmozgást végző részecske energiája tetszőleges lehet, valamint az is, hogy az E energiájú részecske nem hagyhatja el a $-A \le x \le A$ tartományt.

A kvantummechanikai törvények figyelembevételével az oszcillátor viselkedése gyökeresen megváltozik, a részecske energiája kvantálttá válik.

A klasszikus fizika szerint a zérusenergiájú részecske mozdulatlanul állna az origóban. Kvantummechanikai oszcillátor esetén ez azonban azt jelentené, hogy mind impulzusát, mind helyét teljesen pontosan ismernénk. A határozatlansági reláció értelmében azonban ez lehetetlen, vagyis a részecske energiája, s így a mozgás amplitúdója sem válhat zérussá.

Tegyük fel, hogy a részecskét a $\Delta x \approx A$ tartományba korlátoztuk. Ekkor

$$p \ge \Delta p \approx \frac{\hbar}{A},$$

így a részecske energiájára fennáll, hogy

$$E \ge \frac{p^2}{2m} \ge \frac{\hbar^2}{2mA^2}. \qquad (20.16)$$

Ezt összeszorozva a klasszikus harmonikus oszcillátor $E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$ energiakifejezésével azt kapjuk, hogy $E^2 \ge \frac{\hbar^2\omega^2}{4}$, vagyis

$$E \ge \frac{\hbar\omega}{2}.$$

A harmonikus oszcillátor energiája sohasem lehet kisebb, mint $\frac{\hbar\omega}{2}$. Ezt az energiát *zérusponti energiának* nevezzük, mert a klasszikus értelemben nyugvónak tekinthető oszcillátor energiájának is legalább ennyinek kell lennie.

A mikrorészecskék kötött mozgása, így pl. egy kristály atomjainak az egyensúlyi helyzet körüli rezgése gyakran modellezhető harmonikus rezgéssel. A kristályok atomjainak rendezetlen hőmozgása is ilyen mozgásnak tekinthető. A zérusponti energia létezése azt jelenti, hogy a kristály atomjainak rendezetlen mozgása a kvantumos mozgás miatt még az abszolút zérus hőmérsékleten sem áll le.

A parabolikus potenciálgödörben mozgó részecske energiaszintjeit a dobozba zárt részecske energiaszintjének meghatározásakor felhasznált állóhullám képpel határozhatjuk meg. A potenciálfalak között a részecske olyan energiával mozoghat stabilisan, amelyre fennáll a

$$2A=(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

összefüggés, azaz ha a potenciálgödör falain visszaverődő anyaghullám önmagával interferálva állóhullámot alkot. A részletes kvantummechanikai számítások szerint az adódik, hogy az oszcillátor energiaszintjei az

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (20.17)$$

összefüggés szerint változnak. A zárójelben szereplő 1/2 tag a zérusponti energia

figyelembevételére szolgál. A magasabb energiájú állapotok esetén az $\frac{1}{2}\hbar\omega$ járulék már többnyire elhanyagolható, ezért az oszcillátor energiáját gyakran az

$$E_n = n\hbar\omega \tag{20.18}$$

összefüggéssel adjuk meg.

20.3. A hidrogénatom

Az anyag szerveződésének szempontjából legfontosabb az, hogy az atomok elektronjainak viselkedését megértsük. A legegyszerűbb atom a *hidrogénatom,* amely egyetlen protonból és egyetlen elektronból áll. Vizsgáljuk most a hidrogénatom elektronjának tulajdonságait! Az elektron a mag potenciálterében mozog, így a $V(r) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$ Coulomb-potenciál (e a mag töltése, r a magtól való távolság) esetén kell meghatározni a stacionárius hullámfüggvényeket.

Az erre az esetre vonatkozó Schrödinger-egyenlet megoldása igen bonyolult, ezért most közelítő gondolatmenetre, s ennek alapján az eredmények kvalitatív ismertetésére szorítkozunk.

20.3.1. Az elektron energiája

Az elektron lehetséges energiaértékeit a hidrogénatomban a Bohr-modell jól visszaadta. Az elektron megengedett energiaértékei eszerint

$$E_n = \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{20.21}$$

összefüggéssel adhatók meg. Az n kvantumszám értéke a pozitív egész számokon fut végig. A kvantummechanikai leírás sem ad más eredményt, mint a Bohr-féle energiakifejezés, a formula levezetése, illetve értelmezése azonban alapvetően más.

A hidrogénatom elektronjának energiája a következő kvantummechanikai gondolatmenettel is indokolható.

A mag gömbszimmetrikus potenciálterében kialakuló stacionárius állapotokat a dobozba zárt elektron mintájára képzelhetjük el. Tételezzük fel először, hogy az elektron csak az önkényesen választott r sugarú gömbben tartózkodhat. A stacionárius állapot létrejöttéhez ebben a gömbben kell állóhullámoknak kialakulniuk. Az elektron esetünkben azonban nem merev falú dobozba került, hiszen a potenciálfal nem végtelen magas, így az adott gömb sugara változhat. Az elektron energiája stabilis állapotban minimális. Klasszikus közelítésben ez azt jelentené, hogy az elektron csak akkor kerülhet egyensúlyi állapotba, ha belezuhan a magba. Ezt azonban lehetetlenné teszi a Heisenberg-féle határozatlansági reláció! Ha az elektront igen kicsiny sugarú gömbbe szorítjuk, akkor az igen pontos helykoordináta miatt a $v = 0$ átlagsebesség mellett igen nagy sebességbizonytalanság lép fel.

Az r sugarú gömbben tartózkodó elektron esetén a hely bizonytalanságát a gömb sugarával jellemezhetjük, tehát a határozatlansági reláció értelmében az elektron sebességét a $v \approx \frac{\hbar}{mr}$ formulával közelíthetjük.

Az elektron energiája ekkor:

$$E = \frac{p^2}{2m} + eV(r) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Határozzuk meg az energia minimális értékét! Ehhez a $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = 0$ feltételnek kell teljesülnie, tehát

$$-\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0,$$

ahonnan

$$r_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \approx 0,0529 \text{ nm}.$$

A kapott eredmény megegyezik a Bohr-féle atommodell első pályájának sugarával. A H-atom sugarának tehát ezt a kb. 0,05 nm-es értéket tekinthetjük. Az érték jól egyezik a folyékony hidrogén 1,7 g/cm^3-es sűrűségéből kiszámítható atomsugárral. A kiszámított r érték felhasználásával adódó $E = 2\cdot10^{-18}$ J értékű elektron kötési energia hasonló módon jó egyezést mutat a kísérleti tapasztalatokkal.

Az alapállapothoz hasonló módon határozható meg a gerjesztett állapotok energiája is, ha figyelembe vesszük, hogy az első gerjesztett állapotban az adott tartományban két félhullámhosszúságú állóhullám képződik. Mivel $p = \frac{h}{\lambda}$, ez azt jelenti, hogy változatlan sugár mellett az eredeti $\frac{\hbar}{r}$ impulzus megkétszereződne. Az n-edik gerjesztett állapotban n félhullámhosszúságú állóhullám keletkezik, így az eredeti impulzus $n\frac{\hbar}{r}$-re változik. Ennek megfelelően az n-edik gerjesztett állapot energiája:

$$E_n = \frac{p^2}{2m} + eV(r_n) = n^2\frac{\hbar^2}{2mr_n^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}. \tag{20.22}$$

A gerjesztett állapot energiáját, s a hozzá tartozó gömb sugarát most is az energiaminimum-

elvből, azaz a $\frac{dE_n}{dr_n}=0$ összefüggésből határozzuk meg. Ebből

$$-n^2\frac{\hbar^2}{2m}\frac{2}{r_n^3}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}=0,$$

és innen

$$r_n=n^2\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}=n^2r_0.$$

Vegyük észre, hogy ismét a Bohr-modell alapfeltevéseivel jól egyező eredményt kaptunk. (Bohr a Balmer-formulára alapozva éppen azt tételezte fel, hogy a stabilis elektronpályák sugara n^2r_0.)

Az $r_n = n^2r_0$ értékek felhasználásával az elektron energiájára az

$$E_n=-\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\qquad (n=1,2,\ldots)$$

összefüggés adódik. Ezeknek az energiáknak a felhasználásával, a Bohr-modell tárgyalásakor alkalmazott gondolatmenettel, a hidrogénatom színképében megfigyelt hullámhosszak mennyiségileg is meghatározhatók.

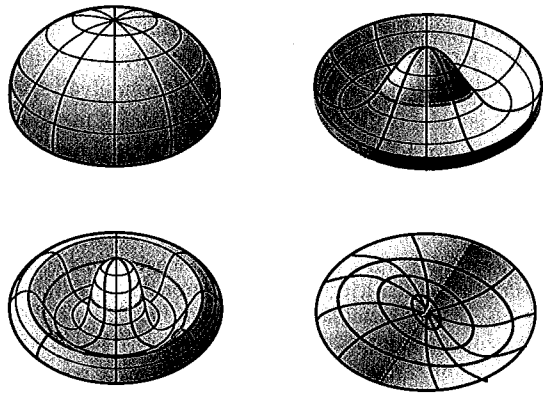
20.3.2. Az állapotfüggvények

Az előzőekben meghatároztuk a hidrogénatom lehetséges energiaértékeit. Megállapítottuk, hogy az energia egyetlen kvantumszámtól függ. Ennek az ún. *főkvantumszámnak* az értéke eggyel nagyobb a hullámfüggvény *belső csomófelületeinek* f számánál, azaz $n = f + 1$.

Mivel a térbeli állóhullámok elképzelése és kísérleti vizsgálata nehéz, a 20.6. ábrán – mintegy rávezetésként – dob felületén kialakuló állóhullámokat mutatunk be. A képek kör alakú rugalmas lemez rezgése során stroboszkopikus megvilágítással könnyen megfigyelhetők. Látható, hogy a téglalap alakú tartomány csomóegyenesei mellett itt a körszimmetria miatt „csomókörök" is kialakulnak.

A dobon kialakuló állóhullámok analógiájára gömbben az állóhullámok kitérésmentes részei *csomósíkokat* és *csomógömböket* alkotnak. Jelöljük g-vel a csomógömbök, l-lel a csomósíkok számát! Nyilvánvaló, hogy $f = n - 1 = g + l$, hiszen f-fel az összes csomófelületek számát jelöltük. Ennek alapján látható, hogy az $l = 0$ állapotok mindig gömbszimmetrikusak, és szemléletesen sugárirányú lüktetésként képzelhetők el. Az $l \neq 0$ állapotok már térbeli irányítottságot is tartalmaznak.

Ez az irányítottság a csomósík elhelyezkedésétől függ. A csomósíkok elhelyezésére most – a gömbszimmetria miatt – előzetesen nem következtethetünk. Általánosan igaz azonban, hogy l csomósíkot $(2l + 1)$-féle, lényegesen különböző irányítottsággal helyezhetünk el.

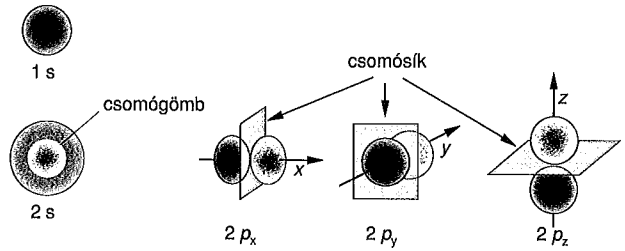


20.6. ábra

Amennyiben nemcsak az elektron energiáját, hanem az állapotfüggvény elhelyezkedését is jellemezni akarjuk, akkor az n főkvantumszám mellett meg kell adni a csomósíkok l számát is. Ezt a számot *mellékkvantumszámnak* nevezzük. A két kvantumszám, n és l ismeretében a csomógömbök g száma már meghatározható.

Nem ismerjük azonban még a csomósíkok pontos orientációját. Ennek meghatározása – mint látni fogjuk – újabb kvantumszám (m) bevezetését igényli. *Az állapotfüggvény megadása tehát a hidrogénatom esetén három kvantumszám segítségével lehetséges.*

Tudjuk, hogy fizikai jelentése csak az elektron megtalálási valószínűségét meghatározó $|\Psi|^2$ függvénynek van, ezért a 20.7. ábrán ezt a függvényt rajzoltuk fel az n = 1, 2, főkvantumszám-értékek mellett.

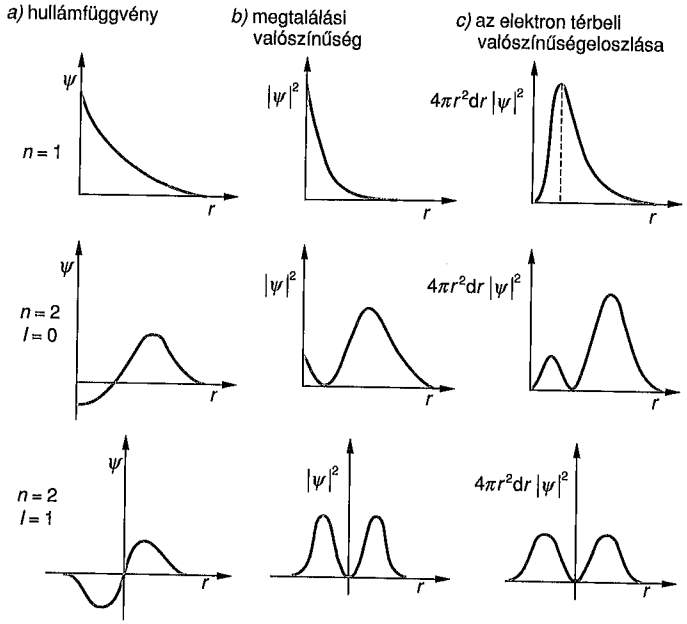


20.7. ábra

Ezek az ábrák mennyiségi becslésekre nem alkalmasak. Lényegében csak azt mutatják, hogy az elektronok megtalálási valószínűsége ($|\psi|^2$) hol különbözik zérustól. Azokat a tartományokat, ahol az állapotfüggvény eredetileg pozitív volt, kék színnel jelöltük.

Az elektronpályák. A $|\psi|^2$ függvények alakja mutatja, hogy a különböző gerjesztett állapotokban az elektron a tér más és más tartományában helyezkedik el nagy valószínűséggel. Ezeket az egyes állapotfüggvényekhez tartozó tértartományokat elektronpályáknak nevezzük. Az egyes elektronpályák alatt feltüntettük a kémiában szokásos jelölést is. Eszerint a főkvantumszám mellé *s* betűt írunk, ha $l = 0$, *p* betűt, ha $l = 1$, *d*-t, ha $l = 2$ és *f*-et, ha $l = 3$. A betű mellé írt index a pálya orientációjára utal. A $2p_x$ jelölés pl. azt jelenti, hogy a főkvantumszám értéke kettő, s az egyetlen csomólap az *x* tengelyre merőleges.

A $|\psi|^2$ valószínűségsűrűség-függvény ismeretében meghatározható, hogy a magtól milyen távolságban tartózkodnak a leginkább az elektronok. Annak valószínűsége, hogy az elektron *r* távolságban *dr* vastagságú gömbhéjban tartózkodjék, $P(r) = 4r^2\pi|\psi|^2 dr$. A $4r^2\pi|\psi|^2$ függvény az elektron térbeli valószínűség-eloszlását jellemzi.



20.8. ábra

A 20.8a. ábra az $n = 1, 2$ főkvantumszámokhoz tartozó állapotfüggvényeket, a 20.8b. ábrán a hozzájuk tartozó $|\psi|^2$ megtalálási valószínűség-sűrűségeket és az elektron térbeli valószínűség-eloszlását mutatja a magtól mért távolság függvényében. Az elektron térbeli valószínűség-eloszlását jellemző függvény jellegzetes maximumokat mutat. Annak a valószínűsége, hogy az elektron a magtól *r* távolságban *dr* vastagságú gömbhéjban tartózkodik, $4r^2\pi|\psi|^2 dr$ (20.8c. ábra). A számítások azt mutatják, hogy ezeknek a függvényeknek a maximumhelyei a Bohr-féle pályák sugarával egyeznek meg. A Schrödinger-elmélet szerint az elektron maximális valószínűséggel éppen a Bohr-pályák környezetében tartózkodik.

20.3.3. Az elektron pálya-impulzusmomentuma és mágneses momentuma

Niels Bohr félklasszikus atommodellje a mag körül keringő elektron impulzusmomentumára tett kvantálási feltételre épült. Vizsgáljuk most az elektronok impulzusmomentumát a Schrödinger-féle hullámmechanikai egyenlet alapján! Eszerint *az elektron már nem kering* a mag körül klasszikus értelemben, és így elveszítettük azt a szemléletes képet, amellyel az elektron impulzusmomentuma könnyen meghatározható lenne. *Az elektron azonban a hullámmechanikai leírás szerint is rendelkezik jól meghatározott impulzusmomentummal.*

A hidrogénatom elektronjára felírt Schrödinger-egyenlet pontos megoldása szerint a különböző elektronállapotokhoz tartozó impulzusmomentum nagysága (abszolút értéke) az

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar \qquad (20.23)$$

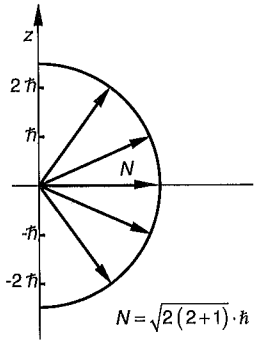
összefüggés szerint kvantált. Fontos továbbá, hogy az elektron impulzusmomentumának iránya nem adható meg pontosan. Annyit mondhatunk csak, hogy *amennyiben fizikailag kiválasztottunk (pl. mágneses térrel) egy irányt, s az ebbe az irányba mutató impulzusmomentum-összetevő értékét pontosan meghatározzuk, akkor az impulzusmomentum másik két összetevőjének az iránya bizonytalan.* (A bizonytalanság mértékére egy határozatlansági relációval adhatunk becslést.)

A kiválasztott irányban sem változhat azonban folytonosan az impulzusmomentum értéke. Ha pl. *a z tengelyt a kiválasztott irányban vesszük fel, akkor az impulzusmomentum N_z összetevője csak ħ egész számú többszöröse lehet,* azaz

$$N_z = m\hbar \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (20.24)$$

A kiválasztott irány természetesen a tér bármely iránya lehet! Ezt úgy kell értenünk, hogy amennyiben az impulzusmomentum adott irányba eső összetevőjét pontosan mérjük, akkor magával a méréssel kitüntetünk egy irányt.

A 20.9. ábra $l = 2$ esetén mutatja, hogy az $N = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$ nagyságú impulzusmomentum adott irányba eső vetülete hogyan lehet $\hbar$ egész számú többszöröse. A hidrogénatom elektronjának impulzusmomentuma tehát *iránykvantált*.



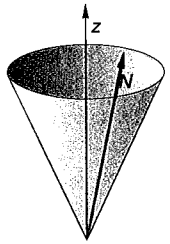
20.9. ábra

Magyarázatra szorul, hogy miért nem adható meg az impulzusmomentum pontos iránya, és miért nem vehető fel a kiválasztott z tengely ebben az irányban.

A felvetett kérdésre egy határozatlansági reláció ad magyarázatot. Kimutatható, hogy az impulzusmomentum komponensei nem adhatók meg egyszerre tetszőleges pontossággal. Amennyiben az egyik, pl. z komponens $N_z = m\hbar$, akkor fennáll a

$$\Delta N_x \cdot \Delta N_y \geq \frac{\hbar}{2}\left|\mathbf{m}\right| \tag{20.25}$$

határozatlansági reláció. Ez a magyarázata, hogy az impulzusmomentum abszolút értéke nem egyezhet meg az N_z összetevő $l\hbar$ maximális értékével. Ha ugyanis ez utóbbi fennállna, úgy mind az N_x, mind az N_y komponensek értékének pontosan zérusnak kéne lennie, ami a fenti határozatlansági relációval összeegyeztethetetlen.



20.10. ábra

Ezt a határozatlanságot a pörgettyű precessziós mozgásával szemléltethetjük. Az impulzusmomentum-vektor ilyenkor úgy jár körül egy irányt, hogy ebbe az irányba eső vetülete állandó marad. Az impulzusmomentum-vektor maga viszont kúpfelületet söpör végig, az adott irányra merőleges két komponense tehát állandóan változik (20.10. ábra).

A mágneses kvantumszám. Az impulzusmomentum kvantálási szabályaiból adódik, hogy adott l mellékkvantumszám esetén $2l + 1$ különböző állapotfüggvény lehetséges. Már az előző pontban, a hullámfüggvények számbavételekor utaltunk arra, hogy az állóhullám állapotokat a csomófelületek száma mellett a csomósíkok irányítottságával lehet jellemezni. Ez az irányítottság éppen az impulzusmomentummal adható meg. Így az elektronok állapotfüggvénye az n fő- és az l mellékkvantumszám mellett az impulzusmomentum irányítottságára utaló m kvantumszámmal jellemezhető. Az m kvantumszám értéke a

$$-l \leq m \leq l \tag{20.26}$$

tartományon belül egész értékeket vehet fel.

Az impulzusmomentum iránykvantálására utaló m kvantumszámot *mágneses kvantumszámnak* nevezzük. Az elnevezést az elektron mágneses tulajdonságai és az impulzusmomentuma közti szoros kapcsolat indokolja. Ez a kapcsolat szemléletesen mutatható meg a Bohr-modell keringő elektronja kapcsán. *A keringő elektron köráramot képvisel,* amelynek mágneses momentuma van.

A μ mágneses momentum nagyságát az elektron N impulzusmomentumával a

$$\boxed{\mu = -\frac{e}{2m_e} N} \tag{20.27}$$

alakban fejezhetjük ki, ahol e az elektron töltése, m_e az elektron tömege. Az impulzusmomentum és a mágneses momentum arányát megadó $\frac{e}{2m_e}$ tényezőt *giromágneses faktornak* nevezzük. Az elektronok mágneses momentumának nagysága az N impulzusmomentumnak megfelelően kvantált. A mágneses momentum értéke csak a μ_B alapérték többszöröse lehet, azaz

$$\mu = \sqrt{l(l+1)} \cdot \mu_B, \tag{20.28}$$

ahol μ_B az ún. *Bohr-magneton,* amelynek értéke:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}. \tag{20.29}$$

A keringő elektronra egyszerűen felírható összefüggés *az elektron hullámmechanikai leírása esetén is érvényes marad.*

Állításunkat, a bizonyító erejű számításokat mellőzve, azzal támaszthatjuk alá, hogy érzékeltetjük, kapcsolat teremthető az elektron-állóhullámok és a körpályán keringő elektron elképzelése közt. Tekintsünk egy $l = 1$ mellékkvantumszámú elektront! A három egymásra merőleges elektronrezgésnek megfelelő állóhullám közül kettőnek az eredője keringésként is felfogható, hasonlóan ahhoz, ahogy a klasszikus mechanikában két merőleges rezgés körmozgássá összegződik [lásd (1.52) egyenlet.]

Az impulzusmomentum iránykvantáltságának megfelelően az elektron mágneses momentumának iránya is kvantált. Ezt jellemzi az m mágneses kvantumszám. Az elektron mágneses momentumának ez a tulajdonsága akkor válik lényegessé, ha az atom mágneses térbe kerül. Ilyenkor a külső tér irányához képest különböző irányú mágneses momentummal rendelkező elektronok energiája különbözővé válik. Mágneses térben az elektronok energiája az n főkvantumszám mellett az m mágneses kvantumszámtól is függ.

Az elektronok impulzusmomentumáról, illetve mágneses momentumáról mondottak jól egyeznek a spektroszkópiai tapasztalatokkal. A színképvizsgálatok során megfigyelték, hogy a színképvonalak száma mágneses tér hatására megnő. Egy-egy eredeti színképvonal több egymáshoz közel álló vonalra hasad szét. Ez a jelenség az ún. *Zeeman-effektus*. A jelenség kvalitatív magyarázata a következő: Adott l mellékkvantumszámhoz $2l + 1$ számú különböző, a mágneses kvantumszámban eltérő elektronállapot tartozik. Külső mágneses tér hiányában ezek energiája nem különbözik egymástól. Az ilyen állapotok $(2l + 1)$-szeresen *degeneráltak*. A különböző degenerált energiaszintek közötti átmeneteknek egy-egy színképvonal felel meg. Mágneses tér hatására a degeneráltság megszűnik, az elektronállapotok energiái különbözővé válnak. Így az energianívók számának növekedtével nő a lehetséges energiaátmenetek, azaz a megfigyelhető színképvonalak száma is.

20.3.4. Az elektron saját-impulzusmomentuma, a spin

Stern és *Gerlach* az atomok elektronoktól származó mágneses momentumát vizsgálta oly módon, hogy atomokból álló részecskenyalábot mágneses téren vezetett keresztül. *Inhomogén térben* a mágneses momentumokra erő hat, ezért az atomok eltérülnek eredeti mozgásirányuktól. Az atomok eltérüléséből, valamint a mágneses tér inhomogenitásának mértékéből az atomok mágneses momentuma meghatározható. A kísérlet azonban nem csak erre alkalmas! Eldönthető belőle az is, hogy valóban fennáll-e az elektron impulzusmomentumának a Schrödinger-egyenlet megoldásából adódó iránykvantáltsága. Amennyiben az impulzusmomentum és a vele együtt járó mágneses momentum iránya nem lenne kvantált, úgy az atomok mágneses momentumának iránya tetszőleges lehetne a külső tér irányához képest, és ezért az eltérített részecskék folytonos eloszlásban csapódnának az ernyőre. Azonban, ha az iránykvantáltság fennáll, akkor az eltérített atomok csak néhány jól elkülönülő foltban érik az ernyőt. A *Stern–Gerlach-kísérlet* meggyőzően bizonyítja az impulzusmomentum iránykvantáltságát.

A Stern–Gerlach-kísérletet hidrogénatomokkal elvégezve meglepő eredményt kapunk, *az atomok két foltban csapódnak be az ernyőre.*

A hidrogénatom alapállapotban levő elektronjának mellékkvantumszáma $l = 0$, így az elektronnak az eddigiekben tárgyalt mágneses momentuma nem lehet. A Stern–Gerlach-kísérlet ezen utóbbi eredménye csak úgy magyarázható, ha feltesszük, hogy *az elektronnak magának is van mágneses momentuma, és az – irányítottsága szerint – kétféle lehet.* A mágneses momentum nagysága:

$$\mu_s = \frac{e\hbar}{2m_e}. \tag{20.30}$$

Az elektronspin. Mivel a mágneses momentum mindig impulzusmomentummal jár együtt, a fenti kísérleti eredmények azt bizonyítják, hogy az elektronoknak az előzőekben tárgyalt ún. *pálya-impulzusmomentumtól* függetlenül rendelkezniük kell egy másik, ún. *saját-impulzusmomentummal* is. *Az elektronok saját-impulzusmomentumát spinnek nevezzük.* A pálya-impulzusmomentumhoz hasonlóan az elektron spinje is iránykvantált. A saját-impulzusmomentumnak valamely kitüntetett irányra, pl. a külső mágneses tér irányára vonatkoztatott vetülete mindig

$$s_z = \pm\frac{\hbar}{2}. \tag{20.31}$$

Látható, hogy a spin és a vele társuló mágneses momentum *aránya (a giromágneses faktor)* most éppen kétszerese az előbbinek.

A spin irányának jellemzésére *Goudsmit* és *Uhlenbeck* javaslatára bevezették az *s spinkvantumszámot,* amely a $+\frac{1}{2}$ vagy a $-\frac{1}{2}$ értéket veheti fel. Így az elektronállapot teljes jellemzéséhez négy kvantumszám szükséges: *n, l, m, s*.

Az elektron saját-impulzusmomentumáról, spinjéről mondottakat a Stern–Gerlach-kísérlet mellett egy másik jelentős kísérlet is bizonyítja. A híres *Einstein–de Haas-kísérlettel* a ferromágnesesség tárgyalása kapcsán a 26.1 szakaszban foglalkozunk részletesen.

Az eddigiekben csak az elektron spinjéről szóltunk. A kísérleti és elméleti vizsgálatok bizonyítják, hogy más elemi részecskéknek is van spinjük. A proton és neutron spinje például az elektronokéhoz hasonlóan $\pm\frac{1}{2}$, a fotonok spinje 1, a mezonoké pedig zérus.

A spinnel együtt az elemi részek általában mágneses momentummal is rendelkeznek. A foton mágneses momentuma azonban pl. zérus. Mind a proton, mind a neutron rendelkezik saját mágneses momentummal, a spin és a mágneses momentum aránya azonban különböző. A feles spinű részecskéket *fermionoknak,* az egész spinűeket pedig *bozonoknak* nevezzük.

20.3.5. A hidrogénatom elektronjának jellemzése kvantumszámokkal

A Schrödinger-féle hullámmechanikai leírás szerint a *hidrogénatom elektronja,* (de bármely más atom tetszés szerinti elektronja is) négy kvantumszám segítségével jellemezhető.

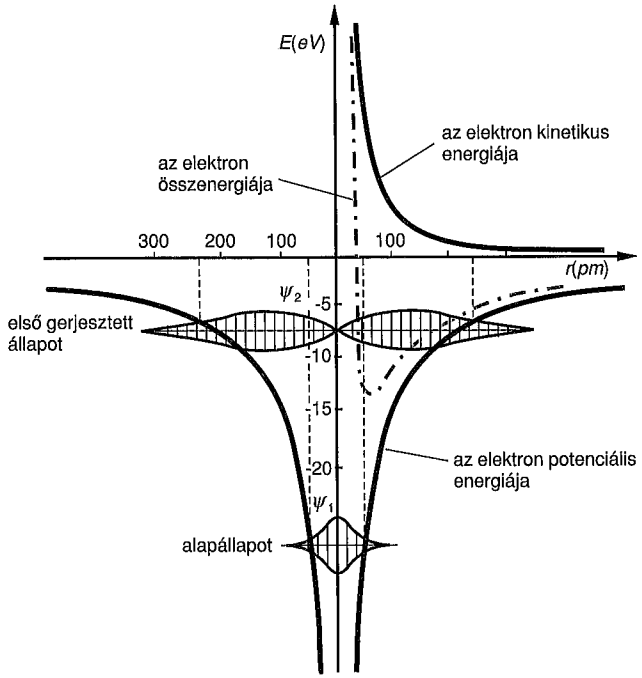
Az n főkvantumszám döntően meghatározza az elektron energiáját.

Az l mellékkvantumszám az elektron-állóhullámok csomósíkjainak számát adja meg, és ezzel a hullámfüggvény alakját, az elektron megtalálási valószínűségének anizotrópiáját jellemzi.

Az m mágneses kvantumszám az elektron-állóhullámok térbeli orientációját szabja meg az iránykvantált impulzusmomentum meghatározásán keresztül.

Az s spinkvantumszám az elektron sajátperdületének állását határozza meg.

Adott kvantumszámsorozat esetén az elektron állapota meghatározható. Az állapotfüggvény pontos felírásával azonban itt nem foglalkozunk. A H-atom kvantummechanikai modelljét az ábra mutatja.



20.11. ábra

20.4. A Pauli-elv és a periódusos rendszer

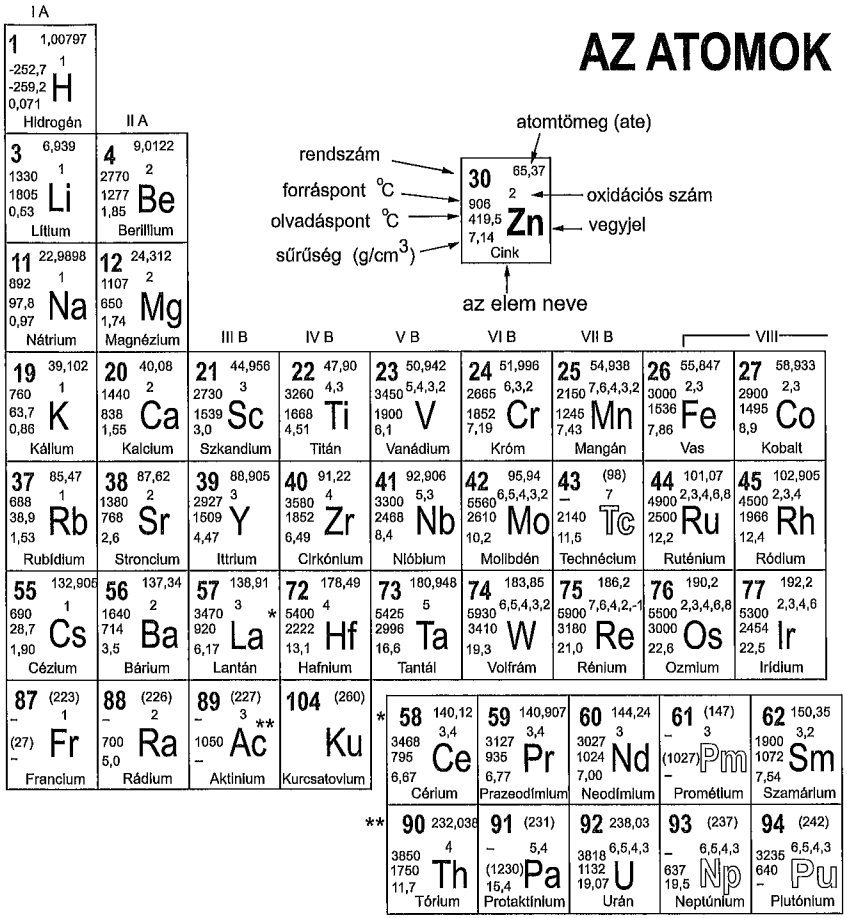
Az előzőekben részletesen tárgyaltuk a hidrogénatomban elhelyezkedő elektron lehetséges állapotait. *A magasabb rendszámú atomokat gondolatban úgy is felépíthetjük,* hogy a Z számú protont tartalmazó mag terében először egy elektront helyezünk el, majd fokozatosan egyre több elektronnal népesítjük be a mag környezetét. A $+Ze$ töltésű mag terében elhelyezett egyetlen elektron lehetséges állapotai lényegében megegyeznek a hidrogénatom elektronjainak állapotaival. A két eset gyakorlatilag csak a mag potenciáljának erősségében különbözik. A következő elektron elhelyezése azonban már problémát okoz. A magból és két elektronból álló rendszer Schrödinger-egyenlete jóval bonyolultabb, mint a hidrogénatom elektronját leíró egyenlet. Az eltérést az okozza, hogy a mag és az elektron kölcsönhatása mellett az elektronok kölcsönhatását is figyelembe kell venni. A több elektront tartalmazó atomokat leíró Schrödinger-egyenlet megoldása egzakt módon nem lehetséges. Szemléletes és jó közelítést kaphatunk azonban, ha figyelembe vesszük a sokrészecske-rendszerekre vonatkozó *Pauli-féle kizárási elvet.*

A Pauli-elv. A Pauli-elv szerint *a több elektront tartalmazó kvantummechanikai rendszerekben* (atom, molekula, kristály stb.) *minden egyes elektron más-más kvantumállapotban van.* Ennek megfelelően *az atomokban az elektron állapotát jellemző négy kvantumszám közül legalább egynek különbözőnek kell lennie, ha az atom bármely két elektronját összehasonlítjuk.*

> *A Pauli-elv az elektronokon kívül minden feles spinű részecskére* – ún. fermionra (pl. elektron, proton, neutron stb.) – *általánosan érvényes.* Bármely kvantummechanikai rendszerben egynél több fermion nem tartózkodhat ugyanabban a kvantumállapotban. Az egész spinű részecskék – az ún. bozonok – esetén ilyen tiltás nem létezik, így tetszés szerinti számú bozon tartózkodhat ugyanabban az állapotban.

A periódusos rendszer felépítése. A Pauli-elv alapján a magasabb rendszámú atomok felépítését első közelítésben a hidrogénatom mintájára képzelhetjük el. A $+Ze$ töltésű mag terében egyetlen elektron állapotfüggvényei a hidrogénatom állapotfüggvényeinek mintájára az n, l, m, s kvantumszámokkal adhatók meg. Hanyagoljuk el az elektronok kölcsönhatását! Ekkor a $+Ze$ töltésű mag terének elektronokkal való feltöltése úgy képzelhető el, hogy az elektronokat egyre újabb és újabb „hidrogénszerű" pályákon helyezzük el. Az újabb elektronok elhelyezkedése tehát olyan, mintha az egyetlen elektron számára lehetséges gerjesztett állapotokat töltenék be. A Pauli-e1v értelmében *egy elektronpályán legfeljebb két ellentétes spinű elektron lehet.* Az atomhoz tartozó elektronok mindegyike más és más kvantumszám-négyessel jellemezhető.

A többelektronos atomban adott n főkvantumszámhoz tartozó elektronpályák száma n^2. A mágneses kvantumszám miatt ugyanis minden l értékhez $2l + 1$ álla-

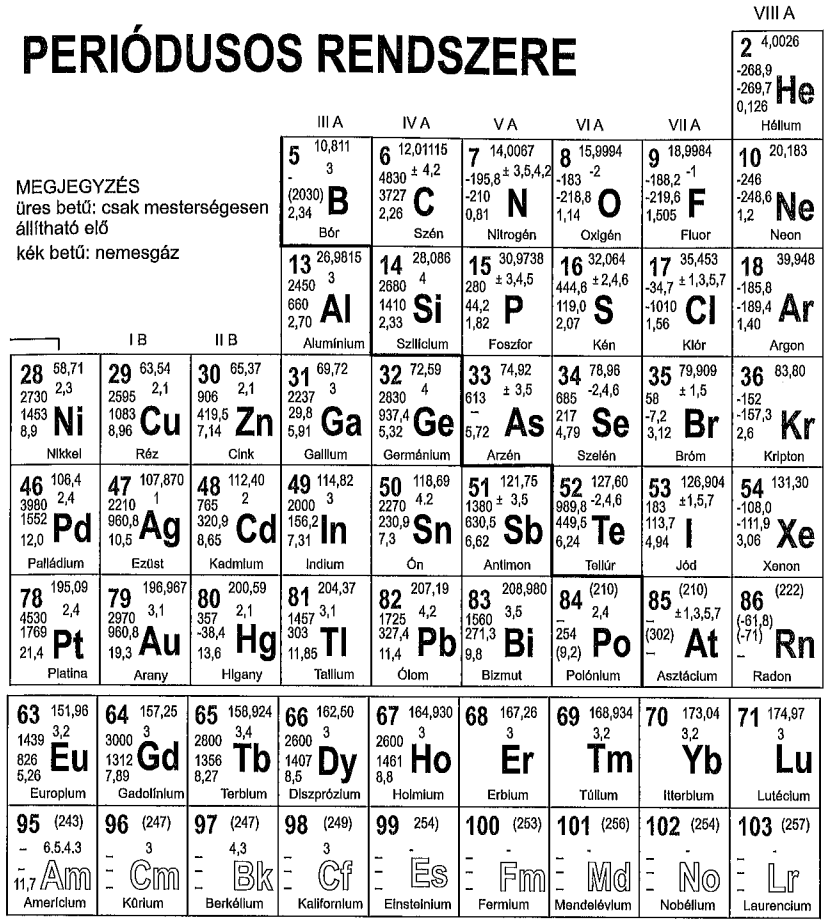


20.12a/1. ábra

pot tartozik, s adott n mellett l a 0, 1, 2, ..., n–1 értékeken fut végig, a pályák száma tehát:

$$\sum_{l=0}^{n-1}\left(2l+1\right)=n^2.$$

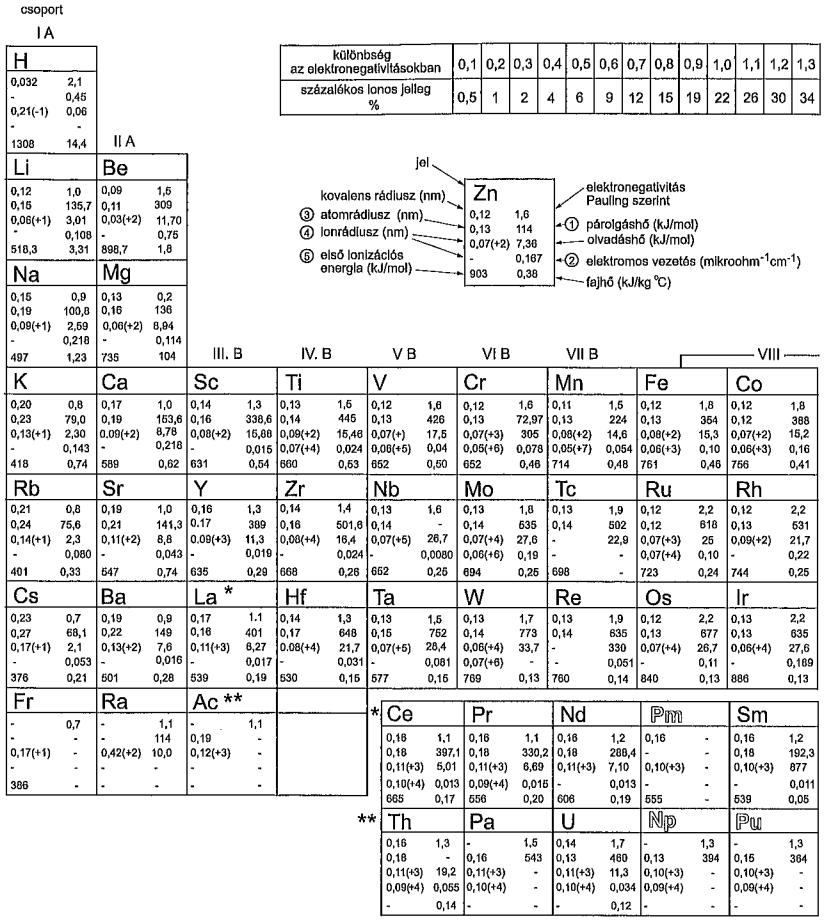
Így az n főkvantumszámmal jellemzett pályákon a spin két különböző értéke miatt összesen $2n^2$ elektron tartózkodhat. Az adott n főkvantumszámmal jellem-



20.12a/2. ábra

zett pályák összességét *elektronhéjnak,* ezen belül az adott l mellékkvantumszámmal jellemzett pályákat *alhéjnak* nevezzük.

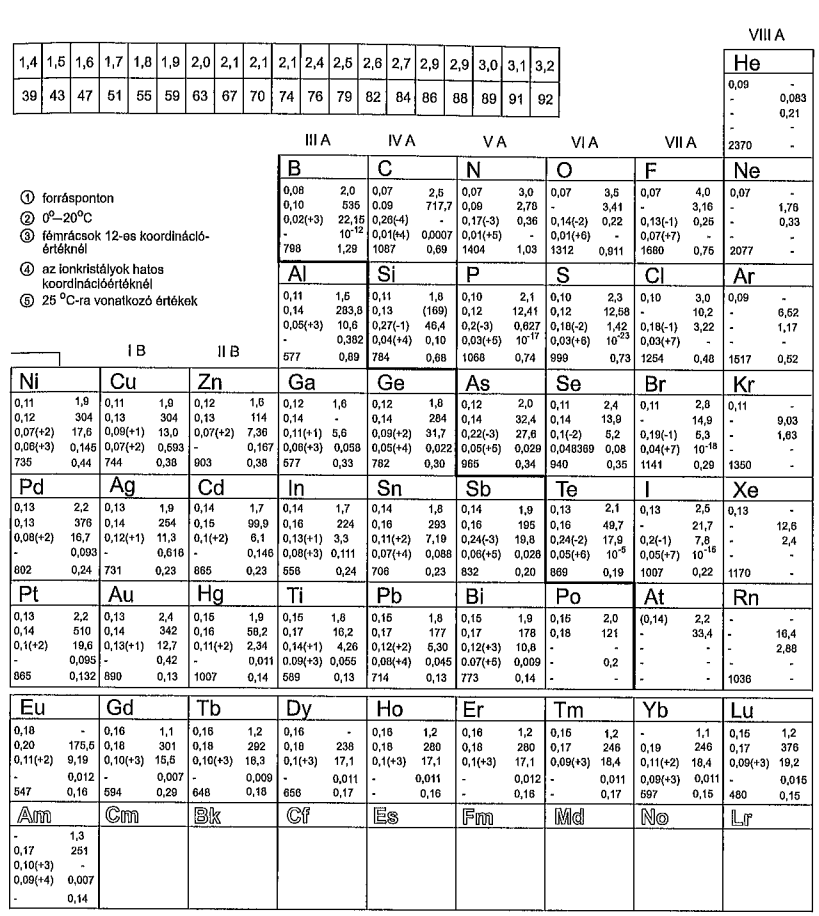
A többelektronos *atomok héjszerkezete* alapján megmagyarázható az elemek *Mengyelejev-féle periódusos rendszere*. *Mengyelejev* a periódusos rendszert a növekvő atomsúlyok szerint szakaszosan ismétlődő kémiai tulajdonságok alapján szerkesztette meg. A rendszerben az elemek egymás alá rendezett hét sorban – periódusban – úgy helyezkednek el, hogy az egymás alatti elemek nyolc oszlopot alkot-



20.12b/1. ábra

nak. Az egy oszlopban levő kémiai elemek viselkedésük szerint igen *hasonlóak*. Az egyre növekvő rendszámú (a rendszámmal együtt növekszik az atomsúly) atomokban az elektronhéjak és ezen belül az alhéjak betöltődési sorrendje az első három periódusban megfelel a kvantumszámok növekvő sorrendjének.

Az első elektronhéjon ($n = 1$) a mellékkvantumszám csak zérus lehet, így alhéj nincs. Az ennek megfelelő 1*s* pályán összesen két elektron helyezkedhet el; egy elektronja van a *hidrogénatomnak* (H), két elektronja a *héliumnak* (He). A második elektronhéjon ($n = 2$) az $l = 0$ és $l = 1$ mellékkvantumszámoknak megfelelően



20.12b/2. ábra

két alhéj alakul ki. Ezek a 2*s*-, illetve 2*p*-pályákból állnak. A gömbszimmetrikus 2*s*-pályán helyezkednek el a *lítium* (Li) és a *berillium* (Be) elektronjai. Ezután töltődik fel a 2*p* alhéj három pályája ($2p_x$, $2p_y$, $2p_z$), amelyen összesen hat elektron helyezkedhet el. A második héjat a tízelektronos *neon* (Ne) zárja le. Hasonló módon töltődnek fel a 3. elektronhéj 3*s* és 3*p* alhéjai. A 3*p* alhéj betöltődése a 18 elektronos *argonnal* (Ar) fejeződik be.

Ezután nem a 3*d* alhéj betöltődése folytatódik, hanem elkezdődik az $n = 4$ főkvantumszámmal jellemezhető negyedik periódus *s* alhéjának betöltődése úgy,

hogy az $n = 3$ héj d-állapotai (összesen 10 elektronhely) még betöltetlenek. Az eddigi betöltési szabályok látszólagos megsértését az elektronok közti taszítással magyarázhatjuk. Az eddigiekben a többelektronos atomok elektronállapotait és azok energiáját is a hidrogénatom gerjesztett állapotaihoz hasonlítottuk. Az elektronok közti taszítás azonban megváltoztatja az egyes állapotok energiáját (az állapotfüggvények gyakorlatilag változatlanok maradnak). Ez az első két periódusban csak azzal az elhanyagolható következménnyel jár, hogy a „p-elektronok" energiája megnő az s-állapotok energiájához képest. *Az $n = 2$-nél nagyobb főkvantumszámú héjak esetén az elektronok taszítása miatt a d-állapotok energiája már annyira megnő, hogy nagyobbá válik a következő főkvantumszámú pálya s-elektronjainak energiájánál.* Az energiaminimum-elv értelmében tehát az n-edik héj ($n \geq 3$) ns- és np-állapotainak betöltődése után mindig a következő elektronhéj ($n + 1$) s-állapotai töltődnek be, és csak ezután kezdődik meg az nd, illetve $n \geq 4$ esetén az nf alhéjak feltöltődése.

Kémiai tulajdonságok. Az elemek kémiai tulajdonságait általában az atom legnagyobb főkvantumszámú héjának s- és p-állapotú elektronjai, az ún. *vegyértékelektronok* szabják meg. Ezek az alhéjak a periódusos rendszer 8 oszlopának megfelelően 8 elektront tartalmazhatnak.

Az első két oszlop elemeinek külső két elektronhéját s-elektronok alkotják. Ezen elemek (*alkáli fémek* és *alkáli földfémek*) reakcióképessége nagy. (Megjegyezzük, hogy a fémek kémiai aktivitása az oszlopokban fentről lefelé nő.) A p állapotok fokozatos betöltődésének megfelelően az elemek *fémes* tulajdonságai csökkennek.

A periódusos rendszer VI. és VII. oszlopában található elemek (oxigéncsoport, halogének) kifejezetten *nemfémes* tulajdonságúak. Az elemek nemfémes aktivitása az oszlop tetején a legnagyobb, fentről lefelé haladva csökken. A nyolcadik oszlop elemei, a *nemesgázok* kémiailag közömbösek, csak különleges körülmények közt lépnek reakcióba más anyagokkal. A nemesgázok telített s- és p-pályáin levő elektronok gyakorlatilag gömbszimmetrikusan, minden oldalról egyenletesen veszik körbe az atommagot. Ez az oka annak, hogy kémiailag közömbösek.

A d és f elektronállapotok betöltésével a legkülső héj elektronjainak száma nem változik, ezért ezek az elemek kémiai viselkedésükben többé-kevésbé hasonlítanak egymáshoz, pl. valamennyien fémek. Mengyelejev a d- és f-elektronok beépülésével jellemezhető ún. *átmeneti fémeket* nem tudta ellentmondásmentesen besorolni a rendszer nyolc oszlopába, ezért az oszlopokban második elemként ún. mellékcsoportokba szervezve helyezte el őket. A mellékcsoportok egymás alatti elemei hasonlítanak egymáshoz, de alapvetően különböznek az oszlop főcsoportját alkotó elemektől.

A hosszú periódusos rendszer. A periódusos rendszer elektronszerkezeti hátterének felismerése után az eredeti, fő- és mellékcsoportokat tartalmazó rendszert

az ún. *„hosszú" periódusos rendszerrel* helyettesítették, ebben az átmeneti fémek az elektronállapotok betöltési sorrendjének megfelelően helyezkednek el (20.12. ábra). A hosszú periódusos rendszerben a kettő s-, a hat p- és a tíz d-elektronnak megfelelően összesen 18 oszlop van. Ebben a B-vel jelölt csoportok az eredeti csoportosítás szerinti mellékcsoportok. (Mind a 18 oszlopba csak a negyedik periódustól kezdődően kerül elem.) A hatodik, illetve hetedik periódusban a negyedik, illetve ötödik héj f-állapotainak betöltésére is sor kerül.

Az f állapotok betöltésével kialakuló csoport elemei, az ún. *„lantanidák"* és *„aktinidák"* (a csoport első elemeiről kapták nevüket) tulajdonságai igen hasonlóak. Ezeket a csoportokat a periódusos táblázatból kiemelve külön szokás feltüntetni.

A századik elem, a *fermium* után következő elemeket transzfermium elemeknek nevezzük. Jelenleg már a 109 rendszámú elemet is előállították. Ezek az elemek rendkívül bomlékonyak, és esetenként csak néhány molekulát sikerült létrehozni belőlük. Több esetben az elem neve is esetenként vitatott volt. A IUPAP (International Union of Pure and Applied Chemistry) csak mintegy évtizede döntötte el az elemek elnevezését, amely több esetben eltér a korábban használt és megszokott névtől. A transzfermium elemek érvényes elnevezése és vegyjele a következő: 101 *mendelévium* (Md), 102 *nobélium* (No), 103 *laurencium* (Lr), 104 *rutherfordium*(Rf), 105 *dubnium*(Db), 106 *seaborgium* (Sg), 107 *bohrium* (Bh), 108 *hassium* (Hs), 109 *meitnerium* (Mt).

Az elemek táblázatos formájú periódusos rendszerében az elemek vegyjele mellett, amennyiben ismert, feltüntettük jellemző fizikai és kémiai paramétereiket is.

20.5. A sokrészecske-rendszerek kvantummechanikai leírása

A hidrogénatom esetén a Schrödinger-egyenlet pontosan megoldható, a több elektront tartalmazó atomok esetén azonban csak *közelítő megoldások* lehetségesek. A periódusos rendszer viszonylag jó magyarázatát kaptuk meg úgy, hogy a magasabb rendszámú atomok esetén a lehetséges energiaállapotokat *„hidrogénszerű" sajátállapotokkal közelítettük*. Eszerint az elektronokat a $+Ze$ töltésű mag körül keringő egyetlen elektron számára lehetséges gerjesztett állapotokban helyeztük el.

Ebben a közelítésben két fontos hatást hanyagoltunk el. Egyrészt figyelmen kívül hagytuk az elektronok közötti *Coulomb-taszítást,* másrészt nem törődtünk az elektronok *megkülönböztethetetlenségével,* s az egyes állapotokat egy-egy elektronnal töltöttük be.

Az elektronok megkülönböztethetetlensége lényegében a határozatlansági reláció következménye. Képzeljük el például, hogy adott pillanatban adott térrészbe korlátozott

két elektron helyét pontosan ismerjük! Impulzusuk ekkor teljesen határozatlan. Ebből következik, hogy mozgásuk nem követhető, és a kezdetben egy pontba lokalizált állapotfüggvény gyorsan szétfolyik, kitöltve a teljes térfogatot. Így, ha egy későbbi pillanatban a tartomány valamely helyén egy elektront észlelünk, nem dönthető el, hogy melyiket regisztráltuk.

A Coulomb-kölcsönhatás és a megkülönböztethetetlenség figyelembevétele már a kételektronos rendszer (pl. He-atom) esetén is a lehetséges energiák megváltozását eredményezi. Jelöljük $E_{1,2}$-vel a héliumatom elektronjainak a hidrogénszerű sajátállapotok alapján számított energiáját. Az 1, 2 index azt jelenti, hogy az egyik elektron az n_1, a másik az n_2 főkvantumszámmal jellemzett pályán tartózkodik.

A pontos számítások szerinti a héliumatom elektronjainak energiája az elektronok spinjének ellentétes beállása esetén

$$E^e_{1,2} = E_{1,2} + C + A, \tag{20.32}$$

az elektronspinek egyirányú állása esetén pedig

$$E^p_{1,2} = E_{1,2} + C - A, \tag{20.33}$$

itt C az elektronok Coulomb-kölcsönhatásából származó energia, így mindig pozitív. Az A energiának klasszikus fizikai megfelelője nincs, annak a jellegzetesen kvantummechanikai hatásnak a következménye, hogy az azonos részecskéket nem lehet „szétosztani" az egyes állapotok között. Az elektronok mindig „kicserélődnek" az állapotok között. Ezért ezt az energiatagot *kicserélődési energiának* nevezzük.

A héliumatom esetén az elektronspinek egyirányú beállásakor a negatív kicserélődési energia miatt energianyereség csak az elektronok gerjesztett állapotában léphet fel. Alapállapotban ugyanis a két elektron n, l és m kvantumszáma azonos, így a Pauli-elv miatt az elektronok spinje csak ellentétes lehet. A kicserélődési kölcsönhatásból származó energiacsökkenés csak a magasabb kvantumszámú pályák betöltésében okoz jelentős változást. Ennek következtében az n főkvantumszámmal jellemzett pálya, amelyen $2n^2$ elektron helyezkedhet el, különböző energiájú szintekre hasad. Mivel A értéke adott főkvantumszámú pályán elhelyezkedő elektronok esetén pozitív, az egyirányú spinbeállású állapotok energiája általában alacsonyabb. Így amíg a Pauli-elv engedi, az elektronok azonos irányú spinekkel helyezkednek el az adott pályán. Ez a magyarázata a kémiában *Hund-szabályként* ismert törvénynek, amely szerint az azonos energiájú degenerált állapotokat az elektronok először párhuzamos spinbeállással töltik be!

A C Coulomb-energia és az A kicserélődési energia kiszámításához ismerni kell a rendszer állapotfüggvényét. Minthogy a Schrödinger-egyenletet ilyen esetben egzakt módon nem lehet megoldani, az állapotfüggvényt C és A kiszámításakor többnyire a „hidrogénszerű" sajátfüggvények segítségével közelítik. Így természetesen az $E^p_{1,2}$ és $E^e_{1,2}$ energiaértékek is csak közelítések.

Általában az N elektronból álló rendszer állapotfüggvénye egyetlen $3N$-változós függvény. Az elektronok közötti kölcsönhatásokat is figyelembe véve az állapotfüggvény pontos alakja nem határozható meg. A leggyakrabban használt ún. egyelektron-közelítés szerint az N elektronból álló rendszer állapotfüggvényét egymástól függetlennek tekintett elektronok állapotfüggvényeiből képzett N-elemű szorzatok összegeként állítják elő. Az így nyert sajátfüggvényekhez tartozó energiaszinteket a kölcsönhatást figyelembe véve utólag kissé módosítják.

Általánosan igaz azonban az, hogy az N elektronból álló rendszer energiaszintjei $4N$ kvantumszámtól függenek (a spinekkel együtt). Így adott rendszer állapota lényegében e kvantumszámok megadásával ismertnek tekinthető.

21. Kémiai kötések

A természetben igen ritkán találhatók magányos atomok. Az atomok általában egymással összekapcsolódva molekulákat, kristályokat képeznek. Az atomok összekapcsolódása, az ún. *kémiai kötés* kialakulása rendszerint energiafelszabadulással járó „spontán" folyamat, amelynek révén az anyag az atomos állapotnál alacsonyabb energiájú állapotba kerül. A kémiai kötés három alaptípusa: a *kovalens,* a *fémes* és az *ionos* kötés.

A *kovalens kötéssel* összekapcsolódó atomokból *molekulák* vagy *kristályok keletkeznek*. A molekula az anyagnak az a legkisebb részecskéje, amely még rendelkezik az adott anyag kémiai tulajdonságaival, és önállóan létezhet. A molekulák általában néhány atomból állnak, de vannak olyanok is – az ún. *makromolekulák* –, amelyeket több tízezer atom épít fel. Kovalens kémiai kötés tartja össze az atomokat az ún. *atomrácsú kristályokban* is. Ilyenkor nem szoktunk molekuláról beszélni, hiszen az egész kristály egyetlen molekulának tekinthető.

Fémes kötés a *fémkristályok* atomjait kapcsolja össze.

Az *ionos kötés* töltéssel rendelkező atomi részecskék sokaságát kapcsolja össze *elektrosztatikus kölcsönhatással* kristállyá. A pozitív, illetve negatív ionok a semleges atomok kölcsönhatása révén alakulhatnak ki. Az ionvegyületekben az ionok össztöltése mindig zérus.

Az egyes kötéstípusok tulajdonságait a következőkben részletesen is ismertetjük.

Az atomok összekapcsolódásának gyakorlati törvényeivel a kémia foglalkozik. A fizika feladata az, hogy az atomok közti kötéseket elméleti szinten értelmezze.

21.1. A kovalens kötés

A legegyszerűbb kovalens kötéssel kialakuló molekula a hidrogénmolekula. Vizsgáljuk meg, hogyan kapcsolódhat össze két hidrogénatom egyetlen molekulává! A kötés kialakulása a következő gondolatkísérlettel szemléltethető.

21.1.1. A hidrogénmolekula-ion és a hidrogénmolekula

Induljunk ki egy semleges, alapállapotú hidrogénatomból, amelyhez igen távolról magányos protont (H-atommagot) közelítünk. Amíg a távolság nagy, a két részecske különállóan létezik, a közeledéssel a változás mindössze annyi, hogy a hidrogénatom eredetileg gömbszimmetrikus *elektronfelhője* egyre inkább *deformálódik*, elhúzódik a közeledő pozitív töltés irányába. Ha a protonnal kb. két hidrogénatom-átmérőnyire megközelítettük az atomot, minőségi változás következik be. A két atommagnak az elektronra gyakorolt vonzóhatása egyenlővé válik, azaz az elektron már mindkét maghoz egyenlő mértékben kötődik. Az ilyen *közössé vált elektron egyetlen kvantummechanikai rendszerré kapcsolja össze a két protont.*

A két protonból és egy „közös" elektronból álló rendszert hidrogénmolekula-ionnak (H_2^+) nevezzük.

A H-molekulaion kötési energiáját egyszerű számítással megbecsülhetjük. Modellezzük a két mag vonzásterében elhelyezkedő elektron-állóhullámot egy húr mentén kialakuló állóhullámmal! Az elektron alapállapotban jórészt a két proton között helyezkedik el, így a húr hosszát a két proton R távolságánál kissé nagyobbra becsülve $1{,}2R$-nek vehetjük. Ez a hosszúság alapállapotban éppen egy fél hullámnak felel meg, tehát az elektron impulzusa ebben az esetben $p=\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{2{,}4R}$.

A molekulaion protonjainak *egyensúlyi távolságát* az energiaminimum-elvből határozhatjuk meg. A molekulaion $E(R)$ energiája a protonok közötti taszításból adódó $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$ elektrosztatikus energiának, a protonok és az elektron vonzásából származó ugyancsak elektrosztatikus energiának, valamint az elektron mozgási energiájának összege. Mivel az elektron legnagyobb valószínűséggel pontosan a két proton között helyezkedik el, a proton–elektron rendszer Coulomb-energiáját közelítőleg úgy számíthatjuk ki, mintha az elektron mindkét protontól $R/2$ távolságban helyezkedne el. Így erre az energiajárulékra a $-2\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\left(R/2\right)}$ eredmény adódik. A molekulaion teljes energiája ennek megfelelően (felhasználva a $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ összefüggést):

$$E(R)=3{,}4\frac{\hbar^2}{mR^2}-\frac{3e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (21.1)$$

Ez a kifejezés (ahogyan azt a $\frac{dE}{dR}=0$ egyenletből megkaphatjuk) az

$$R=\frac{6{,}8}{3}\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \qquad (21.2)$$

helyen veszi fel minimumát. Az ennek megfelelő energia:

$$E=-1{,}32\frac{me^4}{2\cdot(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2}\approx-2{,}9\cdot10^{-18}\text{J}. \qquad (21.3)$$

Ez az energia alacsonyabb, mint a hidrogénatom $-2{,}2\cdot10^{-18}$ J kötési energiája, így *a hidrogénmolekula-ion stabilabb, mint a magányos* H-*atomok.*

Bár a hidrogénmolekula-ion kötési energiája mintegy $0{,}7\cdot10^{-18}$ J-lal alacsonyabb az alapállapotú hidrogénatom energiájánál, a természetben a hidrogénmolekula-ion nem fordul elő, kísérleti kimutatása csak igen speciális körülmények között lehetséges. Ennek az az oka, hogy a H_2^+-ion egy elektron felvételével még alacsonyabb energiájú állapotba kerülhet, H_2-molekulává alakulhat.

A H_2^+-ion létezését hidrogénnel töltött gázkisülési csövekben spektroszkopikus módszerekkel mutatták ki. A H_2^+-ion szikrakisülés hatására keletkezik, élettartama azonban igen rövid, mert újabb elektron felvételével hamarosan H_2-molekulává alakul.

A molekulaionból *semleges molekula* akkor jöhet létre, ha a második elektron spinje ellentétes a már meglevő elektron spinjével. Ha ez a feltétel teljesül, *a második elektron az elsőhöz hasonlóan szétterül a két proton közti térrészben.* A két elektron minden szempontból egyenértékű, egymástól megkülönböztethetetlen. A H_2-molekula kötési energiája majdnem kétszerese a molekulaion kötési energiájának. A második elektron felvételével járó energiafelszabadulást gyakorlatilag ugyanaz a mechanizmus, tehát az elektron szétterülése határozza meg, mint az első elektron esetén. Az elektronok közötti taszítás a felszabaduló energiát csak csekély mértékben csökkenti. Ennek megfelelően *a hidrogénmolekula két protonját közössé vált elektronpár kapcsolja össze.* A kötést biztosító elektronok megtalálási valószínűsége mindkét mag körül azonos. A hidrogénatomokat molekulává kapcsoló kötés általánosításaként a kovalens kémiai kötés a következőképpen jellemezhető:

A kovalens kémiai kötést olyan elektronpár vagy elektronpárok hozzák létre, amelyek egyidejűleg két vagy több atommaghoz tartoznak. A közös elektronok megtalálási valószínűsége döntően a tér egy meghatározott tartományára koncentrálódik, ezt a tartományt az atomi elektronpályák fogalmának analógiájára molekulapályáknak nevezzük.

Az így összekapcsolódó atomok külső elektronhéja (a molekulapályákon levő elektronok beszámításával) általában a nemesgázok elektronszerkezetéhez válik hasonlóvá. A hidrogénmolekulában a két elektron a He-atomhoz hasonlóan alkotja az elektronhéjat.

21.2. A molekulák felépítése

A hidrogénmolekula létrejöttén keresztül szemléletesen illusztráltuk a kovalens kötés lényegét. A kvantummechanika módszereivel a molekula elektronállapotai, ezen keresztül a molekula szerkezete és fizikai tulajdonságai számítással meghatározhatók.

21.2.1. Kötő- és lazítópályák

Az elektronok Schrödinger-egyenlete molekulák esetén is felírható. A megoldás azonban jóval bonyolultabb, mint az atomok esetén, hiszen ekkor az elektronok már egyszerre több vonzócentrum potenciálterében mozognak. A Schrödinger-egyenlet több magot, illetve több elektront tartalmazó rendszerekre – a H_2^+-iont kivéve – nem oldható meg egzakt módon. A közelítő eljárások lényege az, hogy megfelelő egyszerűsítések és elhanyagolások útján olyan állapotfüggvényt keresünk, amely az adott rendszerre vonatkozó kísérleti tapasztalatokat többé-kevésbé jól tükrözi. (Sok vegyület molekulájának szerkezetét kémiai és fizikai kísérletek eredményéből biztosan ismerjük. Ezek a molekulák hasznos segítséget jelentenek a jó kvantummechanikai közelítő eljárások megtalálásához.) A következőkben a legegyszerűbb közelítő módszer lényegét ismertetjük.

A molekulapályák közelítő meghatározása. A több mag terében megvalósuló molekulapályákat a molekulát alkotó atomok atomi elektronpályáinak *szuperpozíciójával* közelíthetjük.

Az eljárás azt a feltételezést fejezi ki, hogy a két közeli atom atomi elektronpályái változás nélkül egyszerűen átfedésbe kerülnek. Eszerint az elektronok taszító kölcsönhatásától eltekintünk, valamint figyelmen kívül hagyjuk azt, hogy a közeli magok kölcsönösen módosíthatják a szomszéd elektronpályáit. (A szuperpozíció matematikailag az állapotfüggvények lineáris kombinációjával adható meg.)

A molekulapályákon természetesen ugyanannyi elektron számára kell helyet biztosítani, mint ahány elektron az eredeti atompályákat elfoglalhatta. Így pl. az A és B hidrogénatom Ψ_A és Ψ_B elektronpályáiból olyan molekulapályákat kell „kikeverni", amelyeken négy elektron helyezkedhet el. A matematikailag legegyszerűbb

$$\psi = C\left(\psi_A + \psi_B\right) \tag{21.4}$$

állapotfüggvénnyel jellemezhető pályán a Pauli-elvnek megfelelően két ellentétes spinű elektron tartózkodhat.

A megtalálási valószínűség. A Ψ állapotfüggvénnyel jellemzett molekulapályán az elektron megtalálási valószínűsége:

$$\left|\psi\right|^2 = C^2\left|\psi_A + \psi_B\right|^2 = C^2\left[\left|\psi_A\right|^2 + \left|\psi_B\right|^2 + 2\left|\psi_A\psi_B\right|\right]. \tag{21.5}$$

A kifejezésből látható, hogy a két mag közti tartományban az elektron megtalálási valószínűség-sűrűsége $C^2 \cdot 2\Psi_A\Psi_B$-vel nagyobb, mint ami a két eredeti atom elektronsűrűségének egyszerű összegzése esetén adódna. *Ez a többlet-elektronsűrűség leárnyékolja a magok taszítását,* és döntően hozzájárul a kötés kialakulásához. Az ilyen molekulapályát *kötőpályának* nevezik. Mint említettük, a molekulapályán a Pauli-elv értelmében két ellentétes spinű elektron tartózkodhat. A fenti molekulapálya így akkor alakulhat ki, ha a két kapcsolódó hidrogénatom elektronjának spinje ellentétes.

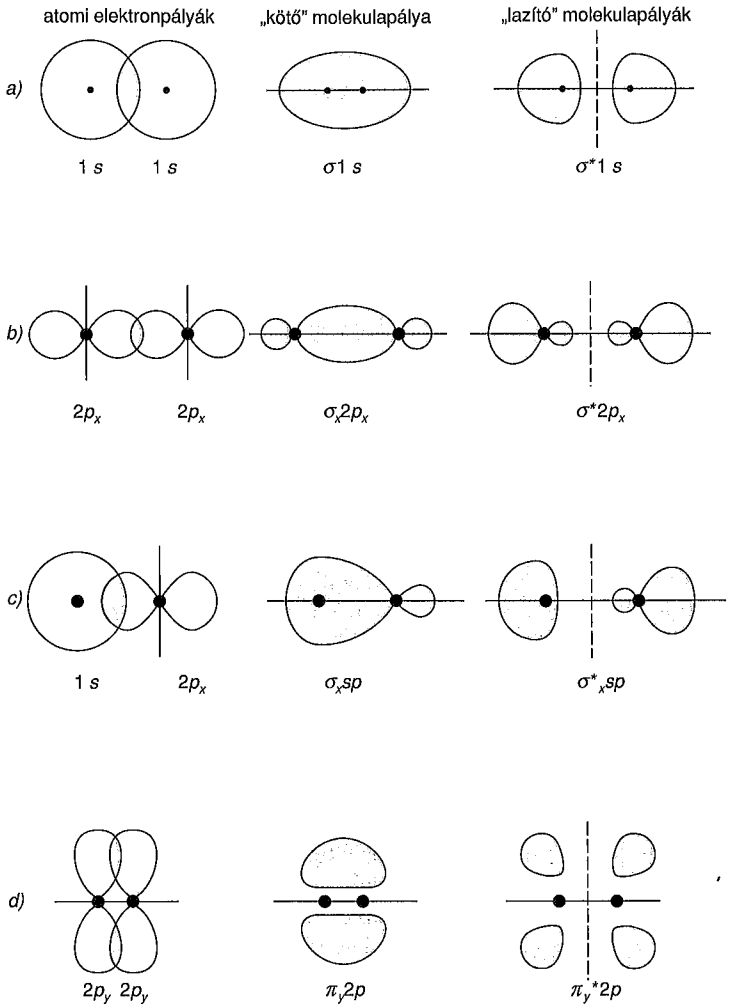
A C arányossági tényezőre azért van szükség, mert a hullámállapotok szuperpozíciója következtében nem változhat az összes töltésmennyiség. A magok közötti térrészben jelentkező „többlettöltés" tehát nem tényleges töltésnövekedést jelent, csupán a töltéseloszlás változását. A lokális töltésnövekedésnek az az ára, hogy a külső tartományok elektronsűrűsége lecsökken.

A hidrogénmolekula hullámfüggvényei. Mivel az eredeti H-atombeli atompályákon összesen négy elektron helyezkedhet el, ezért a Ψ_A és Ψ_B hullámfüggvényekből további molekulapályát is fel kell építeni. Ez fizikailag a H-molekula gerjesztett állapotának felel meg. Ezt a pályát az eredeti Ψ_A és Ψ_B állapotfüggvényekből pl. a

$$\psi = C\left(\psi_A - \psi_B\right) \tag{21.6}$$

összefüggéssel képezhetjük. Az így meghatározott molekulapályán az elektron megtalálási valószínűsége a két mag között a négyzetre emelés során adódó $-2|\Psi_A\Psi_B|$ tag miatt csökken. Ennek a molekulapályának *a két proton közt csomósíkja van.* Ez az elektroneloszlás vonzó hatásával nem ellensúlyozza a protonok erős taszítását, ezért az elektronok energiája ebben az állapotban nagyobb, mint a hidrogénatomban. Az ilyen elektronpályát *lazítópályának* nevezik.

A hidrogénmolekula lehetséges elektronállapotait (az elektron megtalálási valószínűségét) a 21.1. ábra szemlélteti és foglalja össze. (Az ábra magyarázatát a 21.2.2. alfejezetben adjuk meg.)



21.1. ábra

A hidrogénmolekula esetén a *lazító elektronpályák* nem töltődnek be, ha az elektronokat ezekre a pályákra gerjesztjük, a molekula felbomlik.

Pályák a többelektronos atomokból létrejövő molekulákban. Ha a többelektronos atomok kapcsolódásakor létrejövő molekulák külső pályáit az atompályák szuperpozíciójával közelítjük, akkor mindig egyenlő számú kötő- és lazítópálya keletkezik. Általában, ha a kötőpályák energiája ΔE-vel kisebb, akkor a lazítópályáké ugyanennyivel nagyobb, mint az eredeti atompályák energiája. Az azonos atomokból álló kétatomos molekulák létrejöttét úgy képzelhetjük, hogy az elektronok először mindig az alacsony energiájú kötőpályákat töltik be, s csak akkor lépnek lazítópályára, ha a kötőállapotok már mind foglaltak.

Két atom akkor kapcsolódik össze molekulává, ha a kötőállapotok száma nagyobb, mint a betöltött lazítópályák száma. A telítődött kötő- és lazítópályák számának különbsége megadja, hogy a kapcsolódó atomok hány „vegyértékkel" kötődnek egymáshoz. (Az oxigénmolekulában a kötő- és a betöltött lazítópályák különbsége kettő, a nitrogénmolekulában három, ami megfelel annak, hogy az oxigénatomok két vegyértékkel kapcsolódnak össze, míg a nitrogénmolekulában három vegyértékű a kötés.)

Ha a betöltött kötő- és lazítópályák száma azonos, nem jön létre molekula, hiszen ennek az állapotnak az energiája nem alacsonyabb a különböző atomokbeli állapotok energiájánál. (A héliumatomok nem kapcsolódnak He_2-molekulává, mert a képzeletbeli héliummolekulában a kötő- és a lazítópályák száma megegyezik.)

21.2.2. Szigma- és pi-kötés

Az elektronok megtalálási valószínűsége a mag körüli térben a különböző elektronállapotok esetén más és más. Az *s*-elektronok eloszlása gömbszimmetrikus, a *p*-elektronoké az *x, y, z* koordinátatengelyek szerint irányított súlyzókhoz hasonló stb. A molekulapályákat az elektronok térbeli megtalálási valószínűség-eloszlása szerint két különböző típusba soroljuk, és ezeket σ és π betűkkel jelöljük.

σ-kötésről (σ-pályáról) beszélünk, ha a molekulapálya elektronjainak megtalálási valószínűsége a két kapcsolódó atom magját összekötő tengelyre nézve forgásszimmetrikus. Két *s* állapotú atompálya átfedéséből (pl. hidrogénmolekulában) mindig σ molekulapálya jön létre (21.1a. ábra), de σ-pálya keletkezhet két azonos orientációjú *p*-pálya (21.1b. ábra) vagy egy *s*- és egy *p*-pálya szuperpozíciójával (21.1c. ábra) is. A σ-kötés a szuperponálódó hullámfüggvények előjele szerint lehet kötő és lazító jellegű is, ez utóbbit rendszerint σ^*-gal jelöljük.

A molekulapályák másik típusa, a π-pálya forgásszimmetria helyett tükörszimmetriával rendelkezik. Ennek megmutatásához tekintsünk két atomot, és vizsgáljuk meg, milyen átfedések jöhetnek létre az atomi *p*-pályák között, ha a két atomot pl. *x* irányból közelítjük egymáshoz!

A két atom p_x-pályái hengerszimmetrikus σ-pályát alakítanak ki. Az *y* irányítású *p*-pályák átfedésével olyan molekulapálya jön létre, amelynek az *xy* sík csomósíkja. Az elektronok megtalálási valószínűsége az *xy* síkra nézve tükörszimmetrikus. Ebben a síkban fekszik a két atommagot összekötő egyenes is. A *z* tengely irányában elhelyezkedő pályákból kialakuló molekulapályának a tükörsíkja az *xy* sík.

A két atomi p-pályából létrejövő, tükörszimmetriával jellemezhető molekulapályákat π-pályáknak nevezzük. A π-pályák a σ-pályákhoz hasonlóan lehetnek „kötő"- vagy „lazító"-pályák, az utóbbit π-gal szokás jelölni.*

A σ- és π-pályák energetikailag nem egyenértékűek. A kötő σ-pályákon a magok közti térrészben sűrűsödő elektron kompenzálja a magok taszítását, és ezzel döntően csökkenti a rendszer energiáját. A kötő π-pályák esetén az elektron megtalálási valószínűsége a magokat összekötő egyenes mentén zérus, így a molekulapálya elektronjai nem árnyékolják a magok taszítását. Ezért a π-pálya energiája jóval nagyobb, mint a megfelelő σ-pályáé. Két atom összekapcsolódásakor először mindig σ-kötés alakul ki, és π-pályák csak ezután keletkeznek. A π-kötés tehát mindig csak akkor alakul ki, ha két atom több vegyértékkel kapcsolódik össze. (A két vegyértékkel összekapcsolt oxigénmolekulában pl. az egyik kötés σ-, a másik π-típusú, a hármas kötéssel összekapcsolódó nitrogénmolekula esetén egy σ- és két π-kötés található.)

A σ- és π-kötés között további lényeges különbség is van, amely a molekulák térszerkezetének kialakításakor válik meghatározóvá. Ha a molekula két atomját σ-kötés kapcsolja össze, akkor a molekula két része az atomokat összekötő egyenes mint tengely körül szabadon elfordulhat. Ha σ-kötés mellett egy π-kötés is összekapcsolja a két atomot, a szabad forgás lehetősége megszűnik, a két molekularész egymáshoz viszonyított helyzete állandó marad.

21.2.3. A hibridizáció

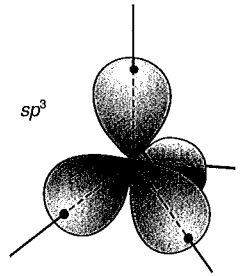
A kovalens kötésű vegyületek számos tulajdonsága csak a molekulák térszerkezetének ismeretében érthető meg. A molekulák térszerkezetét, a kapcsolódó atomok távolságát és egymáshoz viszonyított térbeli irányítottságát kísérleti vizsgálatokból számos anyag esetén ismerjük. A molekulák kvantummechanikai leírása ezekkel a tapasztalatokkal egyezésben kell hogy legyen. Ezt azért hangsúlyozzuk, mert a Schrödinger-egyenlet egzakt megoldása nem lehetséges, és a különböző közelítő megoldásokból származó eredmények lényegesen eltérőek lehetnek.

Az eddigiekben a két azonos atomból álló molekulák kialakulását tárgyaltuk. A Schrödinger-egyenlet közelítő megoldásaként jónak bizonyult az az eljárás, hogy az elektronok molekulapályáit a két atom elektronállapotait jellemző hullámfüggvények lineáris kombinációjával írtuk le. Számos esetben azonban ez a módszer nem vezet célhoz. Atomos állapotban, pl. a szén külső elektronhéja 2 db *s*-elektronnal és 2 db *p*-elektronnal rendelkezik. Az eddig mondottak alapján nehezen érthető az a közismert tény, hogy a szén a vegyületeiben négy vegyértékű, és a kötési irányok leggyakrabban tetraéderes irányítottságúak (pl. metán (CH_4), gyémánt stb.) A szén és sok más atom esetében is célszerűbb a molekulapályákat olyan elektronpályákra visszavezetnünk, amelyek az eddig használt „hidrogénszerű" pályák megfelelő kombinációjából adódnak.

A Schrödinger-egyenlet lineáris differenciálegyenlet, ezért ha Ψ_1 és Ψ_2 az egyenlet két megoldása, akkor $(\alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2)$ is megoldás. Ezzel a módszerrel a megoldásfüggvények szinte korlátlan módon sokszorozhatók. Természetesen felmerül az a kérdés, hogy az így előállítható állapotfüggvények mennyiben azonosak vagy különbözőek. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy *lényegesen különbözőek azok az állapotok, amelyekhez tartozó megtalálási valószínűségek térben erősen elkülönülnek.* Matematikailag pontosabban fogalmazva ez azt jelenti, hogy a két állapotfüggvény szorzatának átlaga a teljes tér döntő részében zérust ad (röviden szólva a hullámfüggvények nem vagy csak kevéssé fedik át egymást). Ennek alapján a hidrogénszerű pályák helyett használhatók az azokból szuperpozícióval előállítható más ún. hibrid pályarendszerek is. Az ezeken elhelyezkedő elektronok száma természetesen azonos az eredeti pályákon elhelyezkedő elektronok számával.

A szén hibridizációja. A szén négy egyenrangú elektronpályáját a hidrogénszerű *s* és *p* állapotok megfelelő szuperpozíciójával állíthatjuk elő. Matematikailag ez a $2s$, $2p_x$, $2p_y$ és a $2p_z$ állapotfüggvények alkalmas szorzófaktorokkal vett lineáris kombinációinak felel meg. Az így előállított elektronállapotokat *hibrid állapotoknak* nevezik.

A szén esetén a négy egyenrangú „hibrid pálya" egy *s*- és három *p*-pályából adódik, ezért ezt az állapotot sp^3 *hibrid állapotnak* nevezzük. A négy, tetraéderesen elhelyezkedő hibrid pályát a szénatom egy-egy elektronja foglalja el. Az egyes hibrid pályák más elektronpályákkal való átfedésekor alakulnak ki a molekulapályák. A metán (CH_4) molekulapályái egy-egy tetraéderes hibrid pálya és egy-egy hidrogénatom gömbszimmetrikus *s*-állapotú elektronpályájának szuperpozíciójával jönnek létre a 21.2. ábrán bemutatott módon.



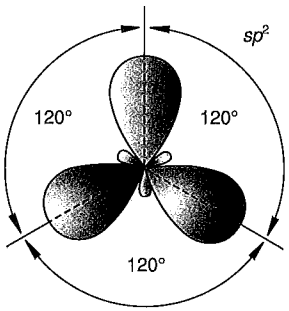
21.2. ábra

A gyémántkristályban szén a szénhez kapcsolódik, a molekulapályák a szomszédos atomok hibrid pályáinak átfedésével alakulnak ki.

A hibrid pályák energiájának összege nagyobb, mint a hidrogénszerű elektronpályák energiaösszege. Ebből arra következtethetünk, hogy az alapállapotú magányos szénatom elektronszerkezete a hidrogénszerű elektronállapotokkal írható le.

A szén elektronpályáinak átrendeződése – a *hibridizáció* – energiabefektetést igényel, és így csak a kémiai reakció során, annak mintegy részfolyamataként következik be. Ezt bizonyítja az a tény is, hogy a szén vegyületeiben nem kizárólag sp^3 hibrid állapotú, hanem gyakran olyan hibrid pályákkal jellemezhető, amelyek egy *s*- és két *p*-pályából alakulnak ki. Ezeket sp^2 hibrid pályáknak nevezzük.

Az sp^2 hibrid pályák egy síkban, egymással 120°-os szöget bezárva helyezkednek el (a grafitkristályban a szén sp^2 hibrid állapotú).



21.3. ábra

A vegyületképzéshez szükséges energiabefektetés azonban „megtérül". A kialakuló molekula (vagy kristály) energiája akkor minimális, ha a szénatom hibrid pályáiból alakulnak ki a molekulapályák.

A szén példájával illusztrált hibridizáció a molekulák térszerkezetének értelmezéséhez igen gyakran használt, jól bevált kvantummechanikai közelítő módszer.

21.3. Poláros molekulák. Az elektronegativitás

A sósav (HCl) természetes állapotában gázállapotú vegyület. Molekulája kovalens kötéssel kapcsolódó klór- és hidrogénatomból áll. Az atomok közti σ-kötés a hidrogén *s*-pályájának és a klór egyik *p*-pályájának szuperpozíciójaként jön létre. A molekulapályán levő két elektron azonban mégsem egyenrangúan tartozik mindkét atommaghoz. Erre mutat az a kísérleti tapasztalat, hogy a sósavmolekulának erős dipólusmomentuma van (a sósav ezért oldódik jól vízben). Ugyancsak erre következtethetünk a sósavszintéziskor (hidrogén és klórgáz egyesítésekor) felszabaduló jelentős energia alapján is.

A H_2- vagy a Cl_2-molekulában a közös elektronok egyenlő mértékben tartoznak mindkét atomhoz. Ha ez a sósavmolekula esetén is így lenne, akkor az eredeti molekulák felbontásához szükséges energia és a képződésekor felszabaduló

energia kb. azonos lenne. A tapasztalatok szerint azonban két sósavmolekula lényegesen mélyebb energiaszintet jelent a két H- és a két Cl-atom számára, mint a H_2-, illetve Cl_2-állapot.

A hidrogénatom gömbszimmetrikus *s* állapota és a klór *p* elektronpályájából olyan molekulapálya jön létre, amelyben az elektronok megtalálási valószínűsége a klór atommagjának erős lokális vonzása miatt eltolódik a klóratom irányába. A jelenség szemléletes magyarázata a következő: A klór atommagjában levő 17 proton pozitív töltését a 17 elektron nem árnyékolja minden oldalról egyenletesen. A legkülső héj telítetlen *p*-pályája olyan hatású, mintha „lyuk" lenne a magot árnyékoló elektronburkon. Ezen a „lyukon" keresztül a mag erős elektronvonzó hatása fokozottan érezhető, és nagysága meghaladja a hidrogénmag egyetlen protonjának gömbszimmetrikusan egyenletes vonzóhatását. A HCl-molekula klór felőli része így relatív elektrontöbbletet mutat, míg a hidrogén felőli oldalon viszonylagos pozitív töltés érezhető – a molekula elektromos dipólusként viselkedik.

A dipólusmomentummal rendelkező molekulákat poláros molekuláknak nevezzük. A kovalens kötésű vegyületek legtöbbje poláros molekulájú (ilyen pl. a víz, az ammónia, a kén-hidrogén stb.). A kovalens kötésű molekulák többségének poláros jellege annak a következménye, hogy a különböző minőségű atomok a molekulapályán levő elektronokat eltérő mértékben vonzzák maguk felé.

E vonzás mennyiségi jellemzésére vezette be *L. Pauling* amerikai fizikus az *elektronegativitás* fogalmát. Pauling a különböző molekulák felbontásához szükséges energiákból kiindulva a különböző atomokhoz energia dimenziójú számot, az ún. *elektronegativitást* rendelte hozzá. Pauling meggondolásának menetét itt nem részletezzük. Az elemek elektronegativitását a periódusos rendszer tartalmazza Az elektronegativitás értékének ismeretére általában két anyag összehasonlításakor van szükség. *Minél nagyobb az elektronegativitás értéke, annál inkább ragaszkodik az atom a kötést létesítő elektronokhoz. Minél jobban különbözik egymástól a molekulát alkotó atomok elektronegativitása, annál erősebb a molekula poláros jellege.*

21.4. Az ionos kötés

Az ionos kémiai kötés az előző szakaszban tárgyalt *poláros molekulákban* keletkező kötés határesetének tekinthető. Olyan esetekben, amikor a kapcsolódó atomok közül az egyiknek igen nagy, a másiknak nagyon kicsi az elektronegativitása, a nagy elektronegativitású atom teljesen magához szippantja partnerének elektronját. Így az egyik atom negatív töltésű, a másik pozitív töltésű ionná válik. Az ionokat mint ellentétesen töltött kis golyókat elektrosztatikus erők tartják össze. Az

ilyen ún. *ionvegyületek,* néhány különleges esetet kivéve, nem párosával kapcsolódva (molekula) találhatók meg a természetben, hanem millió és millió ellentétes töltésű ion együtteseként vagy kristályos állapotban.

21.5. A fémes kötés

A fématomok közt szilárd, valamint olvadékállapotban működő kémiai kötés az ún. *fémes kötés*. A kötés lényege, hogy a kapcsolódó atomok külső, általában *s*-állapotú elektronjai közössé válnak. Az ilyen közös elektronok megtalálási valószínűsége a kristály bármely atomja körül azonos, az elektronok delokalizálódnak. A fématomok jellegzetesen olyanok, hogy könnyen elvesztik külső elektronjaikat, illetve, hogy a kristályban vagy fémolvadékban a külső elektronok már nem egyetlen atomhoz, hanem egyenlő mértékben az összes atomhoz tartoznak. Ez a tulajdonság jól tükröződik az elektronegativitás-értékekben is. A fémek elektronegativitása az elemek közt a legkisebb.

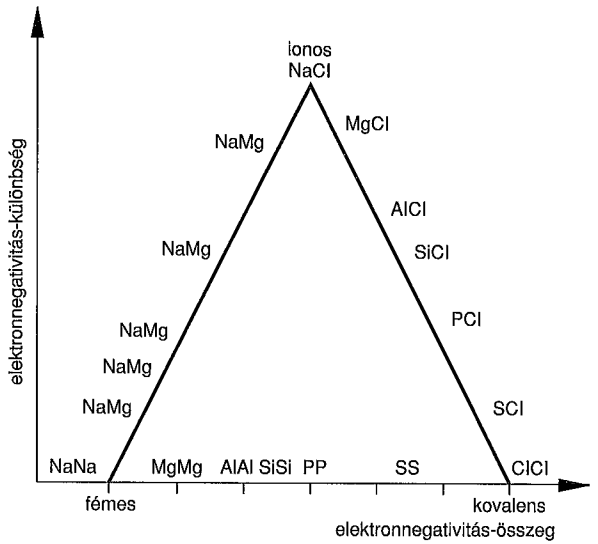
A fémes kötés magyarázata az, hogy a delokalizációval az elektronok energiája erősen lecsökken. Ennek az az oka, hogy a kristályban mindenütt egyenlő valószínűséggel megtalálható elektronok állapotfüggvényeit jellemző hullámhossz gyakorlatilag a fém makroszkopikus méreteire nő. A megnövekedett hullámhossz a *de Broglie-összefüggés* és a *Heisenberg-féle határozatlansági reláció* értelmében a kinetikus energia csökkenését jelenti. Az elektronok kinetikus energiájának csökkenése miatt a delokalizált elektronokat tartalmazó rendszer energiája jóval kisebb, mint az atomi állapotok energiájának összege.

21.6. Az elektronegativitás és a kötéstípus kapcsolata

A kovalens, ionos és fémes kötés a kémiai kötés három ideális határesetének tekinthető. A különböző vegyületek általában e kötéstípusok közötti valamilyen átmenetet valósítanak meg. Az elektronegativitások összevetésével tapasztalati szabályok állapíthatók meg, amelyek jó áttekintést nyújtanak a két elem között kialakuló kötés típusáról.

A 21.4. ábra a harmadik periódus elemeinek néhány lehetséges vegyületét mutatja az elektronegativitások összegének és különbségének koordináta-rendszerben.

A harmadik periódus elemeire vonatkozó tapasztalatok általánosan is igazak. Megállapítható, hogy *kovalens kötés esetén:* az elektronegativitások összege nagy, különbsége kicsi, ideális esetben (azonos atomok esetén) zérus.



21.4. ábra

Fémes kötés akkor keletkezik, ha az elektronegativitások összege kicsi; a különbsége pedig közel zérus.

Az ionos kötésnél az elektronegativitások összege és különbsége is nagy.

A kovalens–fémes átmenetnél az elektronegativitások különbsége változatlanul kicsi, míg az összeg csökken. Fémes–ionos átmenetnél mind az elektronegativitások összege, mind a különbsége nő. Végül az ionos és kovalens kötés határeseteiben az elektronegativitások összege nő, a különbségük azonban csökken.

Az elektronegativitások ismeretében tehát a kémiai kötések finom átmenetei is jól jellemezhetők.

VI. SOKRÉSZECSKE-RENDSZEREK VALÓSZÍNŰSÉGI LEÍRÁSA

22. A kinetikus gázelmélet

Könyvünk előző fejezeteiben összefoglaltuk a makroszkopikus anyag tulajdonságait leíró törvényeket.

Bizonyított, hogy az anyag elemi építőkövekből, atomokból, molekulákból áll. (Az atomok további elemi részekre bonthatók, ez azonban számunkra pillanatnyilag nem fontos.) A makroszkopikus anyagok (gázok, folyadékok, szilárd testek) olyan pontrendszernek tekinthetők, amelyben a tömegpontok az egymással mechanikai és elektromágneses kölcsönhatásban levő atomok. A 19. században vetődött fel először az a magától értetődő igény, hogy az anyagok fizikai tulajdonságait az atomok mozgásával értelmezzék. Ehhez azonban új módszereket kellett kidolgozni. Ha ugyanis minden egyes atomot nyomon akarnánk követni, akkor a makroszkopikus testek tulajdonságainak értelmezéséhez 10^{23}–10^{25} részecske adatát kellene megadnunk.

Az ilyen méretű számítási feladatok még a legnagyobb számítógépekkel sem oldhatók meg. Ugyanakkor érezhető az is, hogy a probléma ilyen megoldása esetén nem tudnánk mit kezdeni a rendszer pillanatnyi állapotát leíró hatalmas adattömeggel, nehéz lenne például kiolvasni belőle a hőtágulás mértékét, vagy esetleg a gáz cseppfolyósodásának kezdetét.

Ezért az egyes részecskék mozgásának pontos nyomon követése helyett a rendszert a részecskék átlagos mozgásával jellemezzük. Az atomok átlagos viselkedésének meghatározásához az eddig megismert fizikai törvények mellett *statisztikus módszereket* és a *valószínűség-számítás törvényeit* használjuk fel. A mikroszkopikus anyagok tulajdonságainak ilyen módszerekkel megvalósított leírásával foglalkozik *a statisztikus fizika*.

A következőkben a sokrészecske-rendszerek leírására alkalmas módszereket ismertetjük. A jobb érthetőség kedvéért először viszonylag erős megszorításokat tartalmazó, de szemléletes és matematikailag egyszerű eljárásokkal foglalkozunk. Egyes törvényeket a legegyszerűbben kezelhető sokrészecske-rendszer, az ideális gáz példáján, a szemléletre és a részecskék mozgását szimuláló programra alapozva sokszor csak intuitív úton állapítunk meg. A kinetikus gázelméletben esetenként csak körvonalazott törvényekre később visszatérünk, és egzaktabb alapozásukat is megmutatjuk.

22.1. A kinetikus gázmodell

Magas hőmérsékleten és alacsony nyomáson az anyagok gázállapotúak. A gázállapotú anyagnak nincs saját alakja, nincs állandó térfogata, a tartóedényt egyensúlyban egyenletes sűrűséggel tölti ki. A gáz az edény falára nyomást fejt ki. Ez a nyomás adott térfogat esetén az anyag mennyiségétől és a hőmérséklettől függ. A nyomás (p), a térfogat (V), az anyagmennyiség (mólszám, n) és a hőmérséklet (T) a gáz állapotát jellemző ún. *állapotjelzők*. A gázok állapotjelzői nem függetlenek egymástól, kapcsolatukat a fenomenologikus termodinamikában megismert

$$pV = nRT \tag{22.1}$$

általános gázegyenlet írja le, ahol R az univerzális gázállandó.

A különböző anyagi minőségű gázok viselkedése nagyon hasonló. *Avogadro törvénye* szerint *a gázok egyenlő térfogataiban azonos nyomás és hőmérséklet esetén a molekulák (atomok) száma azonos, függetlenül az anyagi minőségtől.*

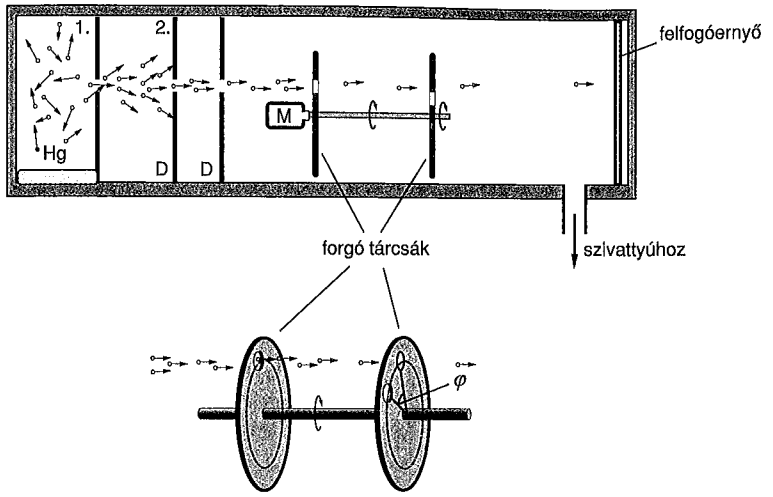
A gázok tulajdonságainak értelmezése a részecskék átlagos mozgásának statisztikus módszerekkel történő leírásával adható meg. A törvények megértéséhez érdemes néhány, a gázmolekulák mozgásával, illetve sebességével kapcsolatos kísérleti tapasztalattal foglalkozni.

22.1.1. A gázok sebességeloszlása

Az, hogy a gázok mindig egyenletes sűrűséggel kitöltik az edény térfogatát, arra utal, hogy a gázrészecskék nem kötődnek egymáshoz és állandó mozgásban vannak.

A gázrészecskék sebességének meghatározására Stern 1920-ban több ötletes mérési módszert is kidolgozott. Stern egyik berendezésének elvi vázlata a 22.1. ábrán látható.

Az 1. szabályozható hőmérsékletű edény kis nyíláson keresztül kapcsolatban van a 2. tartállyal, amely szivattyúhoz csatlakoztatva légteleníthető. Helyezzük az 1. edény aljára folyékony állapotban azt az anyagot (pl. Hg-t), amelyet később, gázállapotban vizsgálni akarunk, majd mindkét edényt evakuáljuk. A párolgó folyadék molekulái kitöltik az 1. tartályt. A nagyszámú gázrészecske közül néhány a falon levő kis nyíláson keresztül kijut a 2. tartályba. A kijutó széttartó sugárnyalábból a D diafragmák párhuzamos nyalábot választanak ki. A sugárnyalábban haladó molekulák sebessége kettős forgóblenderendszerrel mérhető meg, amely két, a sugárnyaláb útjába helyezett, közös tengelyen rögzített forgatható tárcsából áll. Mindkét tárcsán a tengelytől számított azonos magasságban kicsiny lyuk van, a két nyílás azonban φ_0 szöggel elforgatott helyzetben van egymáshoz képest. A második korong mögött levő detektorral (érzékelővel) észlelhetjük a blenderendszeren átjutó molekulákat.



22.1. ábra

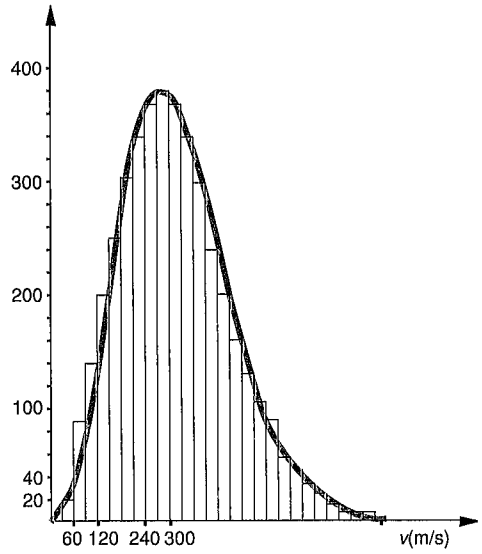
Amennyiben a korongok nem forognak, a molekulanyaláb nem éri el az érzékelőt. A korongokat alkalmas sebességgel forgatva a molekulák egy része a két nyíláson átjutva eléri az érzékelőt. Adott fordulatszám esetén azok a részecskék jutnak el a detektorhoz, amelyek az első nyíláson áthaladva éppen akkora idő alatt futották be a két forgó tárcsa közti távolságot, mint amekkora idő alatt a tárcsák φ_0 szöggel elfordulnak.

Stern mérései szerint, a detektorra akkor is jutnak el molekulák, ha a tárcsák sebességét széles tartományban változtatjuk. Ez arra utal, hogy a molekulanyalábban a részecskék sebessége nem ugyanakkora, hanem viszonylag széles tartományon belül változik. A kísérleti berendezés alkalmas a különböző sebességű részecskék számarányának meghatározására is.

Ez a nehéznek tűnő feladat alkalmas érzékelővel egyszerűen megoldható. Használjunk detektorként olyan hűtött lemezt, amelyre a becsapódó részecskék rátapadnak! Kellő számú molekula lerakódása esetén a lemezen látható bevonat képződik. A tapasztalat szerint ahhoz, hogy a „felpárologtatott" réteg éppen látható legyen, meghatározott számú molekulának kell a detektorra érkezni. Minél nagyobb tehát az adott sebességgel érkező molekulák száma, annál rövidebb idő alatt képződik látható bevonat az érzékelőn. Legyen N_1 a v_1 sebességű, N_2 pedig a v_2 sebességű molekulák száma a nyalábban, t_1 és t_2 pedig a látható bevonat képződéséhez szükséges idő. Ekkor:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{t_1}{t_2}. \tag{22.2}$$

Az előbb ismertetett kísérlet segítségével tehát meghatározhatjuk azon molekulák számarányát, amelyek a v és $v + \mathrm{d}v$ sebességintervallumba eső sebességgel mozognak. A tapasztalat azt mutatja, hogy ez az eloszlás adott anyag esetén csak a molekulanyalábot kibocsátó tartály hőmérsékletétől függ.



22.2. ábra

A 22.2. ábra higanygőzzel végzett molekulasebesség-mérés eredményét mutatja. A vízszintes tengelyre a sebességet mértük fel m/s-ban, a függőleges tengelyre pedig az ilyen sebességű molekulák egységnyi sebességintervallumba eső *relatív gyakoriságát* önkényes egységekben. A kapott görbe mutatja, hogy a gyakorisággörbe jól meghatározott maximummal rendelkezik, azaz adott v_{max} sebességnél a relatív gyakoriság maximálissá válik. A v_{max} sebesség a *molekulasebesség legvalószínűbb értéke*. Ha a diagramot adott atomtömegű gáz kiválasztása mellett különböző hőmérsékleten felrajzoljuk, akkor az ábráról leolvasható az is, hogy a hőmérséklet növekedésével az eloszlásgörbe maximuma a nagyobb sebességek felé tolódik el, ugyanakkor azonban a maximum nagysága csökken. Látható továbbá, hogy a molekulák többsége a v_{max} sebességhez közeli sebességgel mozog, s a v_{max}-nál sokkal kisebb, illetve sokkal nagyobb sebességű mozgás valószínűsége elenyészően csekély.

A higanygőz esetén kapott eredményhez hasonló sebességeloszlást kapunk más anyagok esetén is. A kapott eloszlást *James Clerc Maxwell* angol fizikus értelmezte először elméleti megfontolások alapján, ezért *Maxwell-féle sebességeloszlásnak* nevezzük.

A Maxwell-féle sebességeloszlás különböző anyagok esetén adott hőmérsékleten más-más sebesség mellett veszi fel maximumát. A hidrogénmolekulák legvalószínűbb sebessége 0 °C-on 1510 m/s, 100 °C-on 1765 m/s. Oxigénmolekulák esetén ezek a sebességek rendre 378, illetve 442 cm/s, higanygőzben pedig 151, illetve 176,5 m/s.

Megállapítható az is, hogy *a különböző gázokban adott hőmérsékleten a legnagyobb valószínűségű sebességek fordítottan arányosak a molekulatömegek négyzetgyökével:*

$$\frac{v_{1\,max}}{v_{2\,max}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}, \tag{22.3}$$

ahol v_{1max} és v_{2max} az egyes gázok molekulái által legnagyobb valószínűséggel felvett sebességeket, m_1 és m_2 pedig a gázmolekulák tömegét jelenti.

Mivel a Maxwell-féle sebességeloszlás görbéje a maximális valószínűségű sebességre csaknem szimmetrikus, *a maximális valószínűségű sebesség értéke közelítőleg megegyezik a gázmolekulák sebességének átlagával.* (Természetesen itt a sebesség nagyságának átlagos értékéről van szó.)

Így a fenti összefüggésből azonnal következik az is, hogy a különböző gázok molekuláinak *átlagos kinetikus energiája* adott hőmérsékleten egyenlő:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1\,max}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2\,max}^2. \tag{22.4}$$

Megjegyzés: A maximális valószínűségű sebesség értéke, a sebesség abszolút értékének $\overline{v}$ átlaga és a sebesség négyzetes átlaga csekély mértékben különbözik egymástól $\left(v_{max} = 1{,}13\overline{v};\quad v_{max} = 0{,}82\sqrt{v^2}\right)$. Ezzel a kérdéssel a későbbiekben még részletesen foglalkozunk. A különböző gázok kinetikus energiájának hőmérsékletfüggésére kimondott tétel azonban az alkalmazott közelítéstől függetlenül pontosan érvényes.

22.1.2. Az ideális gáz kinetikus modellje

A tapasztalat szerint a különböző gázok tulajdonságai nagymértékben hasonlóak. Ez a hasonlóság teszi lehetővé, hogy a gázok tulajdonságait egyetlen szerkezeti modell – az ideális gáz kinetikus modellje – segítségével egységesen értelmezzük.

A modell alapfeltevései a következők:

- A gázmolekulák rendszertelen mozgást végző kicsiny gömböknek tekinthetők, amelyek egymással és a gázt tartalmazó edény falával tökéletesen rugalmasan ütköznek.
- A gázmolekulák között a rugalmas ütközéskor fellépő kölcsönhatás mellett egyéb kapcsolat nincsen.
- A gázmolekulák össztérfogata elhanyagolhatóan kicsiny a gáz által kitöltött össztérfogathoz képest.

22.1.2.1. Az ideális gáz nyomása

A kinetikus modell segítségével meghatározható a V térfogatú, a, b, c élhosszúságú, tégla alakú edénybe zárt ideális gáz nyomása! A nyomás azért keletkezik, mert a gáz molekulái az edény falával rendszertelenül ütköznek. Az ütközések következtében fellépő erőhatás meghatározására foglalkozzunk először egyetlen molekulával.

Válasszunk ki egy molekulát, amelynek sebessége az edény éleihez rögzített koordináta-rendszerben v_x, v_y, v_z! Ütközzön ez a molekula az edény x tengelyre merőleges, bc felületű lapjába! Mivel az edény fala sima, és az ütközés tökéletesen rugalmas, a molekula v_x sebessége az ütközés következtében ellentétesre változik, míg v_y és v_z értéke változatlan marad. Így az edény falának átadott impulzus:

$$\Delta I_x^{(1)} = 2mv_1. \tag{22.5}$$

A v_x sebességű részecske a két, bc területű fal közötti távolságot $\tau = \frac{a}{v_x}$ idő alatt teszi meg, azaz Δt idő alatt az egyik fallal $\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\tau}$ -szor ütközik, tehát összesen

$$\Delta I_x = \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\tau}\Delta I_x^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{v_x \Delta t}{a} 2mv_x \tag{22.6}$$

impulzust ad át a falnak, azaz átlagosan

$$F_x^{(1)} = \frac{\Delta I_x^{(1)}}{\Delta t} = \frac{mv_x^2}{a} \tag{22.7}$$

erőt fejt ki. Hasonló módon számítható ki a többi molekula által kifejtett erő is, így a bc területű falra ható átlagos erő az

$$F_x = \sum_{i=1}^{N} F_x^{(i)} = \frac{m}{a}\sum_{i=1}^{N} v_x^{(i)2} \tag{22.8}$$

összefüggéssel fejezhető ki. Ez az összefüggés a sebességnégyzetek átlagértékére vonatkozó

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_x^{(i)2} \tag{22.9}$$

definíció felhasználásával az

$$F_x = N\frac{m\overline{v_x^2}}{a} \tag{22.10}$$

alakra hozható, amiből a bc területű lapra ható nyomásra

$$p = N\frac{m\overline{v_x^2}}{abc} = N\frac{m\overline{v_x^2}}{V} \tag{22.11}$$

adódik.

A fenti gondolatmenettel az ac és ab lapokra ható nyomás is meghatározható, és eredményül rendre

$$p = N\frac{m\overline{v_y^2}}{abc} = N\frac{m\overline{v_y^2}}{V} \tag{22.12}$$

és

$$p = N\frac{m\overline{v_z^2}}{abc} = N\frac{m\overline{v_z^2}}{V} \tag{22.13}$$

adódik. Természetesen a nyomásnak az edény mindhárom lapján azonosnak kell lenni, így a nyomásra kapott három összefüggés egybevetéséből azt kapjuk, hogy

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}, \tag{22.14}$$

azaz a sebesség-összetevők négyzetének átlaga egyenlő egymással. Mivel a sebesség abszolút értékének négyzete

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}, \tag{22.15}$$

így

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}, \tag{22.16}$$

vagyis a nyomásra kapott összefüggéseket a

$$p = \frac{1}{3}N\frac{m\overline{v^2}}{V} \tag{22.17}$$

formában is felírhatjuk. Az utóbbi formulát átrendezve azt kapjuk, hogy

$$pV = \frac{1}{3}Nm\overline{v^2}. \tag{22.18}$$

22.1.2.2. Az ideális gáz hőmérséklete

A $pV=\frac{1}{3}Nm\overline{v^2}$ összefüggésben $\overline{v^2}$ a kísérleti tapasztalatok szerint, csak a hőmérséklet függvénye. Ezt az összefüggést és a fenomenologikus termodinamikában megismert $pV = nRT$ univerzális gázegyenletet összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy

$$\frac{1}{3}Nm\overline{v}^2 = nRT. \tag{22.19}$$

Írjuk fel most ezt az összefüggést 1 mólnyi gázmennyiségre! Ekkor $n = 1$ és a molekulák száma az Avogadro-számmal egyezik meg, azaz $N = N_A = 6\cdot10^{23}$. Így

$$\frac{1}{3}m\overline{v^2} = \frac{R}{N_A}T. \tag{22.20}$$

Ezt az összefüggést az egy molekulára jutó átlagos kinetikus energia (22.4) segítségével és az $\frac{R}{N_A}=k$ jelölés bevezetésével a

$$\frac{2}{3}\overline{E}_k = kT \tag{22.21}$$

alakra hozhatjuk. A k tényező az ún. *Boltzmann-állandó*. A k Boltzmann-állandó definíció szerint az általános gázállandó és az Avogadro-szám hányadosa, így maga is természeti állandó. Értéke: $1{,}38\cdot10^{-23}$.

A hőmérséklet fogalmát tapasztalati úton, hőérzetünkre alapozva a higanyos hőmérőhöz rögzített empirikus skála segítségével vezettük be. A definíciót később a gázhőmérővel mért értékhez rögzítettük. A kinetikus gázelméletből a hőmérséklet mélyebb, molekuláris szintű jelentéséhez jutottunk, hiszen a $\frac{2}{3}\overline{E}_k = kT$ összefüggésből leolvasható, hogy a hőmérséklet a molekulák átlagos kinetikus energiájával arányos:

$$T = \frac{2}{3}\frac{\overline{E}_k}{k}. \tag{22.22}$$

Vegyük észre, hogy a kinetikus gázelméletben, vagyis molekuláris szinten ezt az összefüggést tekinthetjük a hőmérséklet meghatározásának. Igen lényeges megszorítást jelent azonban ebben az esetben az, hogy a definíció csak kölcsönhatásmentes rendszerekre vonatkozóan tekinthető érvényesnek.

22.1.2.3. Az ekvipartíciótétel

A gázrészecskék haladó mozgásából származó átlagos kinetikus energiája (22.21) szerint:

$$\overline{E}_k = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_x^2} + \frac{1}{2}m\overline{v_y^2} + \frac{1}{2}m\overline{v_z^2} = \frac{3}{2}kT.$$

Mivel a sebességkomponensek négyzetének átlaga egyenlő egymással, ezért ebből az összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_y^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_z^2} = \frac{1}{2}kT. \tag{22.23}$$

A gázmolekulák között nincs kölcsönhatás, így a részecskék csak kinetikus energiával rendelkeznek. Az egyatomos molekulájú gázokban a mozgási energiát a v_x, v_y, v_z sebesség-összetevők négyzetei szabják meg, azaz a gázmolekulák energiájában három négyzetes tag szerepel.

Az energiakifejezésben szereplő négyzetes tagok számát termodinamikai szabadsági foknak nevezzük. Az egyatomos gáz egy molekulája *három szabadsági fokkal* rendelkezik. Megállapítható tehát, hogy a gázban minden szabadsági fokra átlagosan $\frac{1}{2}kT$ energia jut. Az energia tehát nemcsak az egyes atomokon, hanem azok szabadsági fokain is egyenletesen oszlik el. Ezt nevezzük *ekvipartíciótételnek.*

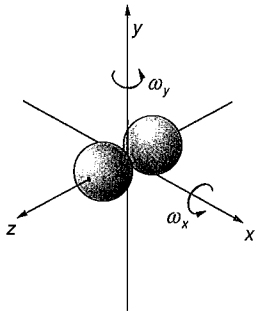
Az ekvipartíciótételt a fentiekben egyatomos ideális gázra vonatkozó gondolatmenettel támasztottuk alá. *Általánosan érvényes, hogy az egyensúlyi állapotban levő klasszikus fizikai sokrészecske-rendszerekben az egyes részecskék minden szabadsági fokára átlagosan $\frac{1}{2}kT$ energia jut.* Az ekvipartíciótétel másképpen úgy is megfogalmazható, hogy a klasszikus mechanikai törvényekkel leírható rendszerek *szabadsági fokai energetikailag egyenértékűek.*

22.1.2.4. A kétatomos molekula szabadsági fokainak száma

Kétatomos gáz esetén a molekulák általában nemcsak a haladó mozgásból származó ún. transzlációs mozgási energiával, hanem forgási energiával is rendelkeznek. A súlyzószerűnek képzelt molekula mozgási energiája az

$$E_k = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}\theta_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}\theta_y\omega_y^2 \tag{22.24}$$

alakban írható fel, ahol $v = (v_x, v_y, v_z)$ a molekula tömegközéppontjának sebessége, Θ_x, Θ_y, az x és y főtehetetlenségi tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok, ω_x és ω_y pedig a szögsebesség x és y összetevője (22.3. ábra).



22.3. ábra

Az ω_z komponenst tartalmazó tag azért nem szerepel az energiakifejezésben, mert a molekula z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka zérus.

Megállapítható tehát, hogy a merev kétatomos molekula energiakifejezésében levő négyzetes tagok száma, azaz a molekula termodinamikai szabadsági fokainak száma 5.

A szabadsági fokok száma tovább növekedhet, ha a molekula nem merev. Ekkor úgy képzelhetjük, mintha a részecskék rugóval lennének összekötve, vagyis a molekula rezgésbe jöhet. Bebizonyítható, hogy a rezgő molekula egydimenziós harmonikus oszcillátorként viselkedik. Energiája tehát mozgási és rugalmas részből tevődik össze:

$$E_v = \frac{1}{2} Dx^2 + \frac{1}{2} mv^2. \qquad (22.25)$$

Ebben az energia kifejezésben újabb két négyzetes tag szerepel, azaz az energiatárolásra alkalmas szabadsági fokok száma kettővel gyarapodik. A legáltalánosabb mozgás esetén tehát a kétatomos molekula szabadsági fokainak száma hét.

22.1.2.5. A szabadsági fokok megszámlálása általános esetben

Az előzőekben a kétatomos gázok szabadsági fokainak számbavétele során láttuk, hogy az energiatárolási lehetőségek vizsgálatakor a transzlációs mozgás mellett a forgást és a molekula rezgéseit is figyelembe kell venni.

Az Z részecskéből álló molekula szabadsági fokainak száma térbeli molekula esetén: 3 transzlációs, 3 forgási és $2(3Z - 6)$ rezgési szabadsági fokból tevődik

össze, maximálisan tehát $(6Z - 6)$ lehet. A lineáris molekulák 3 transzlációs, 2 rotációs és $2(3Z - 5)$, összesen tehát $(6Z - 5)$ szabadsági fokkal rendelkezhetnek.

Az Z részecskéből álló molekula szabadsági fokai általánosan a következőképpen határozhatók meg. Az Z részecskéből álló kötetlen rendszer tagjainak helyzete a térben általában $3Z$ helykoordinátával adható meg. Amennyiben a molekula merev, akkor a szabadsági fokok száma hatra szűkül, mert elegendő megadnunk a tömegközéppont helyzetét (3 koordináta) és a tömegközéppontban felvett és a testhez rögzített koordináta-rendszer tengelyeinek irányát (3 koordináta). Mozgás szempontjából ez megfelel annak, hogy megadjuk a tömegközéppont sebességének három koordinátáját, valamint a test szögsebességének három összetevőjét az ún. főtehetetlenségi rendszerben. Ekkor a molekula energiája az

$$E_k = \frac{1}{2} mv_x^2 + \frac{1}{2} mv_y^2 + \frac{1}{2} mv_z^2 + \frac{1}{2} \theta_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} \theta_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} \theta_z \omega_y^2 \qquad (22.26)$$

alakban írható fel. A szabadsági fokok száma ebben az esetben a molekula alakjától függően lehet öt vagy hat. Ha a molekula lineáris, akkor a molekula egyenesébe eső tengelyre vonatkozóan a tehetetlenségi nyomaték zérus, így az e tengely körüli forgásban energia nem tárolható, azaz a szabadsági fokok száma öt. Ha a molekula síkbeli vagy térbeli alakzatot alkot, akkor a szabadsági fokok száma hat.

Nehezebben áttekinthető a helyzet, ha a molekula részecskéit rugalmas kapcsolat tartja össze. Bebizonyítható, hogy ebben az esetben a molekula rezgésbe jön, s a rezgési energia térbeli molekula esetén a maradék $3Z - 6$ szabadsági fok számával egyező számú lineáris oszcillátor energiájával, illetve lineáris molekula esetén $3Z - 5$ darab oszcillátor energiájával adható meg.

Megjegyzés: A molekulát alkotó részecskék közötti kapcsolat általában nagyon erős, ezért a rezgések gerjesztéséhez általában nagy energia kell. Emiatt a rezgési szabadsági fokok még a szobahőmérséklet környékén is általában „be vannak fagyva". Ez azt jelenti, hogy a hőmozgás miatt a molekula nem rezeg, merev testként viselkedik.

22.1.2.6. Az ideális gáz belső energiája és fajhője

Az ideális gáz belső energiája az egyes atomok energiájának összegezésével kapható meg.

Egyatomos gáz esetében ez az egyes atomok transzlációs kinetikus energiájának összege, amely az ekvipartíciótétel felhasználásával az

$$U = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} mv^{(i)^2} = N\bar{E}_k = \frac{3}{2} NkT \qquad (22.27)$$

alakban adható meg.

Kétatomos merev molekulákból álló gáz esetén a szabadsági fokok száma öt. Így az ekvipartíciótétel alapján a gáz belső energiája:

$$U=\frac{5}{2}NkT. \tag{22.28}$$

Kétatomos rugalmas molekulák esetén a szabadsági fokok száma hét, a belső energia tehát

$$U=\frac{7}{2}NkT. \tag{22.29}$$

Hasonló gondolatmenet alapján adódik, hogy az N részecskéből álló Z atomos lineáris merev molekulájú gáz belső energiája

$$U=\frac{5}{2}NkT, \tag{22.30}$$

rugalmas molekulák esetén

$$U=\left(3Z-5\right)NkT. \tag{22.31}$$

Az N részecskéből álló Z atomos térbeli merev molekulákból álló gáz belső energiája

$$U=3NkT, \tag{22.32}$$

rugalmas molekulák esetén

$$U=\left(3Z-6\right)NkT. \tag{22.33}$$

Mólhő, fajhő. A belső energia kifejezéséből egyszerűen megállapítható az ideális gáz állandó térfogaton vett hőkapacitása, illetve fajhője. Definíció szerint a hőkapacitás:

$$C_V=\frac{\Delta U}{\Delta T}. \tag{22.34}$$

Ha ΔU a mólnyi mennyiségű anyag belső energiájának ΔT hőmérséklet-változás hatására bekövetkező megváltozása, akkor C_V a mólhőt adja.

A fenti összefüggés valójában a $(T,\ T+\Delta T)$ intervallumra vonatkozó átlagos mólhőt adja meg. A mólhő adott hőmérsékleten vett pontos értékét a

$$C=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta T}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} \tag{22.35}$$

deriválttal definiáljuk.

A mólhő definícióját, valamint az ideális gáz mólnyi mennyiségének belső energiáját megszabó kifejezéseket felhasználva azt kapjuk, hogy az egyatomos gáz mólhője

$$C_{V_1}=\frac{\frac{3}{2}N_Ak\left(T+\Delta T\right)-\frac{3}{2}N_AkT}{\Delta T}=\frac{3}{2}N_Ak, \tag{22.36}$$

a kétatomos merev molekulákból állóké pedig

$$C_{V_2}=\frac{5}{2}N_Ak. \tag{22.37}$$

Felhasználva, hogy $N_Ak=R$, adódik, hogy az egyatomos gázok mólhője anyagi minőségtől függetlenül:

$$C_{V_1}=\frac{3}{2}R=12,47\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{molK}}, \tag{22.38}$$

a kétatomosoké pedig

$$C_{V_2}=\frac{5}{2}R=20,78\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{molK}}. \tag{22.39}$$

A mólhőből a

$$c=\frac{C}{M} \tag{22.40}$$

összefüggés alapján, a moláris tömeggel való osztással azonnal adódnak a megfelelő fajhőértékek.

A fentiek alapján az f szabadsági fokú részecskékből álló gáz állandó térfogaton vett fajhője a

$$c_V=\frac{f}{2}\frac{Nk}{m},\quad \text{ill.}\quad c_V=\frac{f}{2}\frac{N_Ak}{M} \tag{22.41}$$

összefüggéssel adható meg. A fenomenologikus termodinamikából ismert a $C_p-C_V=R$ összefüggés, amelyben C_V az állandó térfogaton, C_p pedig az állandó nyomáson vett mólhő. Megállapítottuk továbbá, hogy $N_Ak=R$. Így az *f szabadsági fokú részecskékből álló gáz állandó nyomáson vett mólhője:*

$$C_p=R+C_V=N_Ak\left(1+\frac{f}{2}\right), \tag{22.42}$$

azaz

$$C_p=N_Ak\frac{f+2}{2}, \tag{22.43}$$

fajhője pedig

$$c_p = \frac{C_p}{M} = \frac{N_A k}{M} \frac{f+2}{2}. \tag{22.44}$$

A következő táblázatban néhány gáz mért és számított fajhőadatát hasonlítjuk össze.

Gázok	mért (0 °C, 1 bar)	számított
Argon (Ar)	0,317	0,312
hidrogén (H_2)	10,090	10,390
klór (Cl_2)	0,372	0,293
Neon (Ne)	0,623	0,617
Nitrogén (N_2)	0,740	0,742
Oxigén (O_2)	0,652	0,651

A táblázatban szereplő számított és mért adatok többnyire igen jól egyeznek, számottevő eltérés csak a klór esetén van. Az eltérést az okozza, hogy a gázok csak magas hőmérsékleten – a kritikus pont felett – viselkednek ideális gázként. A klór forráspontja –34,7 °C, így 0 °C-on még csak viszonylag durva közelítéssel kezelhető ideális gázként.

22.1.2.7. Az ideális gáz belső energiájának kifejezése a nyomás és a térfogat segítségével

A $pV = NkT$ gázegyenletben a jobb oldalt az ekvipartíciótétel alapján kifejezhetjük a belső energia segítségével is. Egyatomos gáz esetén

$$U_1 = \frac{3}{2} NkT, \tag{22.45}$$

kétatomos gáz esetén

$$U_2 = \frac{5}{2} NkT. \tag{22.46}$$

A kT értéket kifejezve ezekből az összefüggésekből és beírva a gázegyenletbe azt kapjuk, hogy egyatomos gázra

$$pV = \frac{2}{3} U_1, \tag{22.47}$$

kétatomosra pedig

$$pV = \frac{2}{5} U_2. \tag{22.48}$$

22.1.2.8. A gáz energiájának megváltozása munkavégzés hatására

Hőszigetelt hengeres edényt egyik oldalán könnyen mozgó dugattyú zár le. Az edényben T hőmérsékletű ideális gáz van. Az edény egyik oldala könnyen elmozdulhat anélkül, hogy a gáz kiszökne. A dugattyút állandó w sebességgel lassan befelé mozgatjuk. A kinetikus modell alapján belátható, hogy a t idő alatt a gázon végzett munka megegyezik a gázmolekulák mozgási energiájának megváltozásával.

Azt, hogy a w sebességgel mozgó fallal rugalmasan ütköző molekulák mozgási energiája megváltozik, könnyen beláthatjuk, ha az impulzustételt a dugattyúhoz rögzített koordináta-rendszerben írjuk fel, majd a sebességeket visszatranszformáljuk a nyugvó koordináta-rendszerbe. A v sebességgel a dugattyú felé mozgó részecske sebessége a dugattyúhoz képest $v + w$. Ez a részecske a dugattyúhoz rögzített koordináta-rendszerben $v + w$ sebességgel távolodik a dugattyútól. A gázmolekulák tehát egy ütközés során $2m(v + w)$ impulzust kapnak. Tegyük fel, hogy t idő alatt a dugattyú N molekulával találkozik. Így a t idő alatt átadott impulzus $2Nm(v + w)$, következésképpen a mozgó dugattyú által kifejtett erő $F = \frac{2Nm\left(v+w\right)}{t}$.

A dugattyúhoz képest $v + w$ sebességgel elpattanó molekula sebessége a nyugvó koordináta-rendszerben $v + 2w$. Így egyetlen molekula kinetikus energiájának megváltozása:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m\left(v+2w\right)^2 - \frac{1}{2} mv^2 = 2mw\left(v+w\right).$$

Mivel a dugattyú t idő alatt N molekulával találkozik, a gáznak $2Nmw(v + w)$ energiát ad át. Figyelembe véve, hogy $2Nmw(v + w) = Ftw$, valamint azt, hogy a fal elmozdulása t idő alatt $s = wt$, azt kapjuk, hogy a gáz mozgási energiájának

$$N\Delta E_k = 2Nm\left(v+w\right)w = Ftw = Fs$$

növekedése megegyezik a dugattyú által t idő alatt végzett munkával. Ezzel egy speciális esetre igazoltuk a termodinamika I. főtételét.

22.1.3. A reális gázok állapotegyenlete

A tapasztalat szerint a $pV = NkT$ állapotegyenlet a gázok viselkedését csak a kritikus hőmérséklet felett írja le pontosan. Általánosabb érvényű, de természetesen bonyolultabb egyenlethez jutunk, ha nem hanyagoljuk el a molekulák saját térfogatát, továbbá figyelembe vesszük, hogy a gázmolekulák között kölcsönhatás jöhet létre.

Ha egyetlen molekula saját térfogata b, akkor a gázrészecskék mozgására az edényben *csak $V - Nb$ térfogat áll rendelkezésre*. Ezt a korrekciót figyelembe véve a nyomásra a

$$p = \frac{NkT}{V - Nb}$$

kifejezést kapjuk. *A nyomás azonban a molekulák között fellépő vonzóerő miatt ennél az értéknél kisebb.* A fal felé haladó molekulákat a többi molekula által kifejtett vonzóerő lassítja. Ez az erő az egységnyi térfogatban levő gázmolekulák számával, azaz a gáz n részecskesűrűségével arányos. Mivel a falba ütköző molekulák száma is arányos ezzel, a falra gyakorolt nyomás egy n^2-tel arányos taggal csökken, vagyis

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - an^2, \tag{22.49}$$

ahol a az adott gázra jellemző arányossági tényező. A gáz $n = \frac{N}{V}$ részecskesűrűségének felhasználásával és némi átrendezéssel a

$$\left(p + \frac{aN^2}{V^2}\right)\left(V - Nb\right) = NkT \tag{22.50}$$

összefüggéshez jutunk. *Ezt az egyenletet van der Waals-egyenletnek nevezzük.*

Az egyenletet gyakran átalakítják úgy, hogy a térfogat helyett a $v = \frac{V}{n}$ móltérfogat szerepeljen benne. Ekkor az egyenlet a

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)\left(v - b'\right) = RT \tag{22.51}$$

alakot ölti, ahol b' a mólnyi mennyiségű molekula saját térfogata.

A van der Waals-egyenlet pontosabban írja le a valódi gázok viselkedését, mint az általános gázegyenlet. A pontosság növelésével azonban elveszítjük a gázegyenlet anyagi minőségtől független általános érvényességét.

A van der Waals-egyenlettel – itt nem részletezhető módon – a gázok cseppfolyósodása is leírható. A cseppfolyósodás a részecskék közötti vonzóerő következménye.

22.2. A gázok diffúziója

Köznapi tapasztalat hogy a frissen vágott hagyma szaga, a nyitott kölnisüveg illatanyaga néhány perc alatt az egész helyiségben érezhető. A különböző gáznemű anyagok hosszabb-rövidebb idő alatt tökéletesen elkeverednek.

A különböző gázok elkeveredésével eltűnnek a gáztérben kezdetben meglevő koncentrációkülönbségek, inhomogenitások. A térbeli inhomogenitások eltűnését eredményező *anyagáramlást, amelynek során impulzusáram nincs, diffúziónak nevezzük.*

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy miképpen származik a *molekulák rendezetlen hőmozgásából határozott irányú anyagáramlás* – diffúzió.

22.2.1. A molekulák mozgása a gázban. Az átlagos szabad úthossz

Szabad úthossznak azt az utat nevezzük, amelyet egy gázmolekula, a többi részecskékkel való két ütközés között átlagosan megtesz. Tekintsük a molekulákat r sugarú gömböknek, és az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy csak az általunk vizsgált molekula mozog, míg a többi nyugalomban van! Ekkor a mozgó molekula azokkal ütközik, amelyek középpontja a sebesség iránya mint középvonal köré rajzolt $2r$ sugarú hengeren belülre esik. Az ütközés miatt a molekula haladási iránya általában megváltozik. Gondolatban „egyenesítsük" ki ezt a pályát, azaz mérjük fel az egyes ütközések között megtett szakaszokat egymás után egy egyenesre! Számításainkat ez nem befolyásolja, mivel mint látni fogjuk, a pálya alakja sehol sem játszik szerepet. A v átlagsebességgel mozgó molekula t idő alatt $l = vt$ utat tesz meg, s ezalatt azokkal a molekulákkal ütközik, amelyek középpontja a $\sigma = (2r)^2\pi$ keresztmetszetű és l magasságú hengerbe esik. A σ mennyiséget a molekula *ütközési hatáskeresztmetszetének nevezzük.*

A fent leírt hengerbe eső középpontú molekulák száma

$$N = n\sigma l = n\sigma vt, \tag{22.52}$$

ahol n az egységnyi térfogatban levő molekulák száma. Így a mozgó molekula időegységenként

$$z = \frac{N}{t} = n\sigma v \tag{22.53}$$

ütközést szenved. Ennek reciproka a két ütközés között eltelt átlagos t idő, azaz

$$\tau = \frac{1}{n\sigma v}. \tag{22.54}$$

Ez alatt az idő alatt a molekula, ütközés nélkül, szabadon mozog. Az átlagos szabad úthossz tehát:

$$\lambda = v\tau = \frac{1}{n\sigma}. \tag{22.55}$$

A fenti számítás során viszonylag durva, egyszerűsítő feltevéseket alkalmaztunk, a kapott eredmény azonban egy szorzófaktortól eltekintve helyes. A pontosabb számítások szerint, amelyek a többi molekula mozgását is figyelembe veszik, az időegységre jutó ütközések száma

$$z = \sqrt{2}n\sigma v, \tag{22.56}$$

az átlagos szabad úthossz pedig:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}. \tag{22.57}$$

22.2.2. A diffúziót leíró törvények

Vizsgáljuk meg, hogy mi határozza meg a diffúziós anyagáramlás intenzitását, valamint hogy miképpen változik a diffúzió eredményeként a vizsgált anyag koncentrációja a rendszer valamely kiválasztott térfogatrészében az idő függvényében!

Tekintsünk egy hosszú, A keresztmetszetű hengeres edényt, amelyet középen válaszfal oszt két részre! A henger egyik felét meghatározott gáz tölti ki, a másik felében ugyanezen gáz radioaktív izotópja található. A két térfélben a gáz hőmérséklete és nyomása azonos. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha kivesszük a válaszfalat! A fal eltávolításakor megkezdődik a két gáztér molekuláinak összekeveredése, diffúziós anyagáramlás indul meg.

Kövessük a radioaktív részecskék áramlását olyan koordináta-rendszerben, amelynek kezdőpontját az edény közepén az eltávolított válaszfal helyén rögzítettük, és x tengelye egybeesik a hengeres edény tengelyével!

Az *eredő részecskeáramot* úgy kapjuk meg, hogy az adott felületen időegység alatt pozitív és negatív irányban átlépő molekulák számának különbségét vesszük. Vizsgáljuk azokat a molekulákat, amelyek a választott határfelülettől jobbra és balra elhelyezkedő λ (λ az átlagos szabad úthossz) magasságú hasábokban vannak. Feltételezhetjük, hogy ebben a tartományban az x irányban haladó részecskék nem ütköznek. Jelöljük a radioaktív molekulasűrűséget ezekben a hasábokban rendre n_1-gyel és n_2-vel! Mivel a gázrészecskék sebességének iránya teljesen véletlenszerű, feltételezhetjük, hogy átlagosan a molekulák egy hatoda mozog az egyes koordinátairányokban. Így a molekulák hatoda mozog az x tengely mentén pozitív és negatív irányban is. Ily módon az x helyen levő keresztmetszeten pozitív irányban $\frac{1}{6}n_1 A\lambda$, negatív irányban pedig $\frac{1}{6}n_2 A\lambda$ radioaktív molekula halad át a t átlagos ütközési idő alatt.

Az x irányú I_{n_x} részecskeáram tehát

$$I_{n_x} = \frac{1}{6}\frac{A\lambda}{\tau}\left(n_1 - n_2\right) = \frac{1}{6}\frac{A\lambda}{\tau}\Delta n. \tag{22.58}$$

Alakítsuk tovább a részecskeáramra kapott kifejezést a

$$\frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{n_1 - n_2}{x_1 - x_2}$$

összefüggés felhasználásával! A $\frac{\Delta n}{\Delta x}$ mennyiség a radioaktív molekulakoncentráció x tengely menti változását jellemzi. A

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta}{\Delta x} n\left(x\right) = \frac{dn}{dx}$$

mennyiséget *koncentrációgradiensnek* nevezzük. A koncentrációgradiens a molekulakoncentráció megváltozásának meredekségét adja a hely függvényében. A

$$\frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{n_1 - n_2}{x_1 - x_2}$$

különbségi hányados az $x_1 - x_2 \ll 1$ esetben általában jól közelíti a koncentrációgradienst.

Írjuk n_1 helyébe az n molekulakoncentráció $x + \lambda$ helyen vett értékét, n_2 helyébe pedig az $x - \lambda$ helyen vett értéket! Ekkor formálisan felírhatjuk a

$$\Delta n = \frac{\Delta n}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t = \frac{\Delta n}{\Delta x}\frac{2\lambda}{\tau}\tau$$

összefüggést, amiből

$$\Delta n = \frac{\Delta n}{\Delta x}\left(x_1 - x_2\right) = \frac{\Delta n}{\Delta x}2\lambda.$$

Ezzel és a $\frac{\lambda}{\tau} = v$ összefüggés felhasználásával a részecskeáramra kapott kifejezés az

$$I_{n_x} = \frac{1}{6}\frac{A\lambda}{\tau}\Delta n = \frac{1}{3}\lambda v A\frac{\Delta n}{\Delta x} \tag{22.59}$$

alakot ölti. Ezt az összefüggést nevezzük *Fick I. törvényének. A törvény azt fejezi ki, hogy az A területű síkfelületen a rá merőleges x irányban időegység alatt átdiffundáló molekulák száma arányos A-val és a koncentrációeséssel.* A

$$D = \frac{1}{3}\lambda v \tag{22.60}$$

arányossági tényezőt *diffúziós együtthatónak* nevezzük. A diffúziós együttható a molekulák átlagos szabad úthosszától és a molekulák átlagsebességétől függ.

A részecskeáramra vonatkozó egyenletekből könnyen megkaphatjuk a tömegáramra vonatkozó összefüggést, ha Fick I. törvényét az m molekulatömeggel beszorozzuk,

$$mI_{n_x} = \frac{1}{3}\lambda v A m \frac{\Delta n}{\Delta x}.$$

Mivel $m\frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{\Delta(mn)}{\Delta x} = \frac{\Delta\rho}{\Delta x}$ és $mI_{n_x} = I_{m_x}$, ahol I_{m_x}-szel az A felületen x irányban áthaladó tömegáramot jelöltük, így Fick I. törvénye az

$$I_{m_x} = \frac{1}{3}\lambda v A \frac{\Delta\rho}{\Delta x} = DA\frac{\Delta\rho}{\Delta x} \tag{22.61}$$

alakot ölti. *Az egyenlet azt fejezi ki, hogy a tömegáram arányos a felülettel és a sűrűséggradienssel.* A *részecskeáram helyett gyakran használjuk a J_{n_x} részecskeáram-sűrűséget,* amely definíció szerint a részecskeáram egységnyi felületre jutó része, azaz

$$J_{n_x} = \frac{I_{n_x}}{A} = \frac{1}{3}\lambda v \frac{\Delta n}{\Delta x}. \tag{22.62}$$

Ezt az összefüggést a molekulatömeggel beszorozva a tömegáram-sűrűségre vonatkozó

$$J_{m_x} = \frac{1}{3}\lambda v \frac{\Delta\rho}{\Delta x} \tag{22.63}$$

egyenlethez jutunk. A részecske-, illetve tömegáram-sűrűség a diffúziós mozgást lokálisan, adott pontban jellemzi. A J_{n_x} és J_{m_x} áramsűrűségekkel az x irányú áramlás írható le. Általános esetben azonban a diffúziós áramlás tetszőleges irányú lehet. Így az áramsűrűség általában vektormennyiség, amelynek komponenseire az x összetevőre vonatkozó egyenletekkel analóg összefüggések érvényesek. Ily módon pl. a tömegáram-sűrűséget J_m-mel jelölve a (22.55) egyenlet a

$$J_m = -D\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta s}\right)\mathbf{e}_s \tag{22.64}$$

alakot ölti, ahol az $\mathbf{e}_s$ egységvektor abba az irányba mutat, amely mentén a sűrűség a leggyorsabban változik. $\Delta\rho$ az ebben az irányban mért Δs hosszra jutó sűrűségváltozás.

Fick I. törvénye a sűrűségkülönbség miatt fellépő áramsűrűséget szabja meg. Időben állandó (stacionárius) sűrűségeloszlás esetén ez az áramsűrűség is állandó. Természetesen ezt az állapotot valamilyen egyéb külső hatással, pl. nyomás- vagy hőmérséklet-különbséggel lehet csak fenntartani. Amennyiben ilyen hatás nincs, a részecskekoncentráció, illetve a sűrűség nemcsak a hely, hanem az idő függvénye is, azaz $n = n(\mathbf{r}, t)$, $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$.

22.3. A gázmolekulák véletlenszerű mozgásának valószínűségi leírása

Az előzőekben az ideális gáz tulajdonságainak leírásakor feltételeztük ugyan a molekulák rendezetlen mozgását, de a törvények levezetésekor mindig valamilyen egyszerűsítő feltétel bevezetése mellett kapott átlagérték (átlagsebesség, átlagos kinetikus energia stb.) felhasználásával nyertük eredményeinket.

A következőkben kissé részletesebben vizsgáljuk, hogy mit jelent a gázrészecskék mozgásának véletlenszerűsége.

22.3.1. Miért véletlenszerű a részecskék mozgása?

Első közelítésként a gázmolekulákat egymástól megkülönböztethető klasszikus fizikai részecskéknek szokás tekinteni. Ezen feltevés alapján a Newton-törvényekből az egyes molekulák mozgása meghatározható, ha adott pillanatban a részecskék sebességét és helyét ismerjük. Így a rendszer kezdeti állapotát ismerve pusztán a Newton-törvényeket figyelembe véve a molekulák mozgása látszólag már determinált. Ez azonban tévedés! Az egyes részecskék mozgásának meghatározásához tökéletes pontossággal kellene ismernünk a részecskék közötti erőket. A molekuláris erőtörvényeket azonban nem ismerjük pontosan, így a közelítő törvényekből kiindulva a számításokat már néhány molekula esetén is csak rövid időtartamokra (két-három ütközésre) lehet kellő pontossággal elvégezni. Reális mennyiségű részecske ($\approx 6\cdot10^{23}$) esetén pedig még az ilyen rövid távú előrejelzés is illuzórikussá válik az adathalmaz nagysága miatt. Elvi problémát vet fel a kezdeti feltételek pontos megadása is, s mint látni fogjuk, még egészen egyszerű, mesterségesen konstruált rendszerek is „véletlenszerűen" viselkednek, ha a részecskék kezdeti adatait nem túlságosan speciálisan választjuk meg.

Ily módon célszerűnek tűnik, hogy a részletes leírás helyett valamilyen egyszerű, a rendszert globálisan leíró valószínűségi feltevést válasszunk a sokrészecskerendszerek viselkedésének értelmezésére. Ehhez természetesen csak a tapasztalat vezethet el.

Az egyes molekulák mozgásának részletes vizsgálata helyett *foglalkozzunk egyelőre csak a molekulák térbeli eloszlásával!* Vizsgáljunk egy környezetétől minden szempontból elszigetelt edényben levő N molekulából álló gázt! Osszuk az edényt gondolatban két egyenlő részre, és figyeljük, hogy hány részecske található az egyik, illetve a másik térfélben! Legyen n_j a jobb oldalon, n_b a bal oldalon levő részecskék száma! Természetesen

$$n_j + n_b = N.$$

Ha N elég nagy, akkor

$$n_j \approx n_b \approx \frac{1}{2} N,$$

hiszen egyébként diffúzió indulna a két térrész közötti sűrűségkülönbség kiegyenlítésére.

Az $n_j \approx n_b \approx \frac{1}{2} N$, összefüggés azonban csak közelítőleg teljesül, hiszen a tartályban véletlenszerűen ütköző molekulák könnyen átkerülhetnek az edény egyik feléből a másikba. Így időről időre az edény egyik felébe eső molekulák száma több, illetve kevesebb lehet 0,5N-nél, azaz a molekulaszám időben állandóan fluktuál. Általában azonban ezek a fluktuációk igen kicsik. Minthogy azonban semmilyen fizikai törvény sem akadályozza az egyes molekulákat abban, hogy az edény bármely részébe eljussanak, elvileg az is lehetséges, hogy adott pillanatban minden részecske az edény egyik felében gyűljön össze. Ennek valószínűsége azonban igen csekély.

Ahhoz, hogy ennek az eseménynek a valószínűségét meghatározhassuk, valamilyen feltevéssel kell élnünk arra vonatkozóan, hogy a gáz egyes molekulái milyen valószínűséggel tartózkodnak az edény egyik, illetve másik felében. Mivel a molekulák mozgása szempontjából az edény két fele teljesen egyenértékű, azért kézenfekvőnek tűnik, hogy *az egyes részecskék azonos valószínűséggel tartózkodnak az edény egyik, illetve másik felében.* Ezzel a feltételezéssel tulajdonképpen a rendszer tulajdonságait egy egyszerű valószínűségi törvénnyel jellemezzük, amelynek segítségével – mint látni fogjuk – a rendszer makroszkopikus viselkedése tökéletesen leírható. Az *egyes részecskék pontos mozgására ebből természetesen nem következtethetünk.*

A fenti feltevéssel tetszőleges molekulaeloszlás valószínűségét egyszerűen meghatározhatjuk. Annak valószínűsége, hogy minden részecske az edény bal oldali felében gyűlik össze:

$$P_b(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^N}$$

Természetesen ugyanekkora valószínűséggel tartózkodik az összes molekula az edény jobb oldali részén is.

Általában annak a valószínűsége, hogy n molekula van a bal oldalon és $N - n$ a jobb oldalon, a

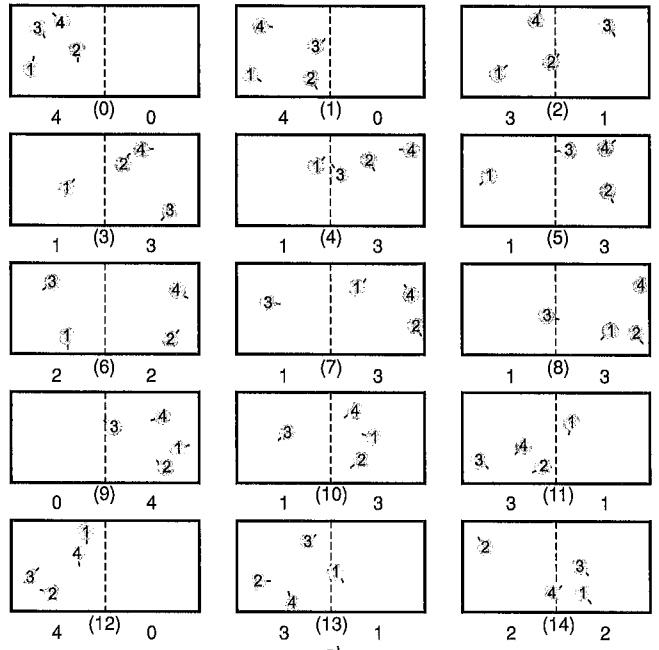
$$P_b(N) = \frac{\binom{N}{n}}{2^N} \qquad (22.65)$$

összefüggéssel határozható meg. Itt a nevezőben az összes molekulaelrendezések száma, a számlálóban pedig a feltételnek megfelelő eloszlások száma áll. Az az eset, amikor minden részecske az edény bal oldali felében gyűlik össze, csak

egyetlenegy módon valósulhat meg, így valószínűsége nagy N érték mellett rendkívül kicsiny. Hasonló módon kicsiny az $N > n \gg \frac{N}{2}$ esetek megvalósulásának valószínűsége is. Ezeket a kicsiny valószínűséggel előforduló elrendezéseket, melyek nem teljesen véletlenszerűek, részben rendezettnek nevezzük.

Nagy valószínűséggel az egyenletes eloszláshoz közeli elrendezések valósulnak meg, hiszen az $\binom{N}{n}$ binomiális együttható n = 0,5N-nél veszi fel maximumát. Az ilyen, igen sokféle módon megvalósuló elrendezést nevezzük rendezetlennek.

A megfigyelések azt mutatják, hogy *sok részecskéből álló rendszerekben általában a nagy valószínűséggel bekövetkező állapotokat tapasztaljuk, s az egyenletes eloszlástól nagymértékben eltérő helyzet csak speciális esetekben valósulhat meg.* Fizikailag ezt azzal magyarázhatjuk, hogy a rendezett esetekben, pl. ha minden molekula az edény bal oldali részén helyezkedik el, a részecskéknek igen speciális feltételeket kielégítő módon kellene mozogniuk ahhoz, hogy ez a helyzet továbbra is fennmaradjon. Ilyen korlátozó feltételek azonban nincsenek a gázokban.



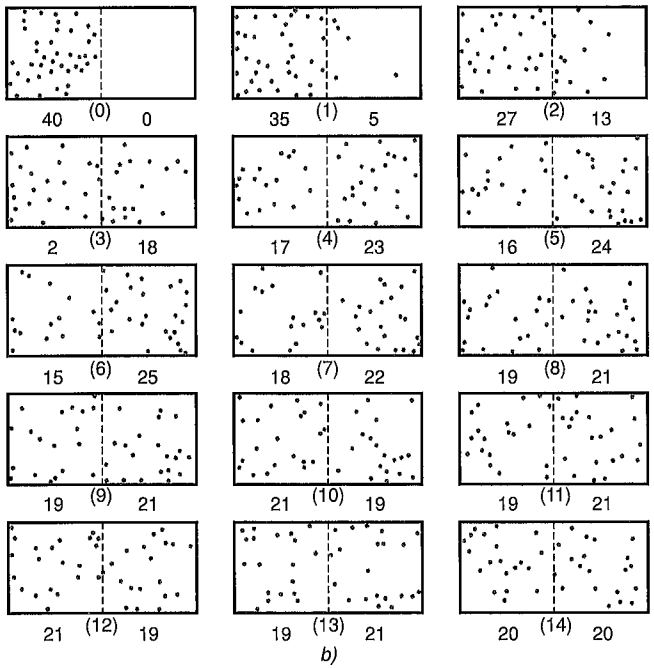
a)

22.4a. ábra

A most kimondott valószínűségi törvény szerinti egyenletes eloszlás és a mechanikai törvények összhangját néhány molekula esetén számítással is egyszerűen követhetjük. Nagyobb, de még mindig nem túlságosan nagy részecskeszám ($N < 1000$) mellett a törvények ellenőrzése már csak számítógép felhasználásával lehetséges.

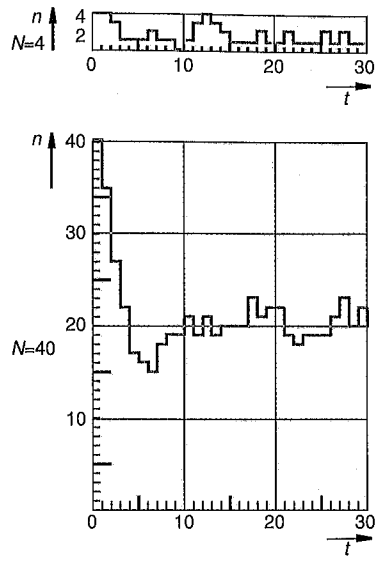
A 22.4a. és 22.4b. ábrasorok egymással és az edény falával tökéletesen rugalmasan ütköző golyók mozgásáról számítógép felhasználásával készültek. A 22.4a. ábra négy részecske mozgásáról készült pillanatfelvételeket mutat. Kezdetben a részecskék mindegyike az edény bal oldalán helyezkedett el. Sebességük irányát a körökre rajzolt vonalkák mutatják. Az ábra mutatja, hogy kisszámú részecske esetén viszonylag rövid idő alatt megismétlődik a kezdeti extrém állapot.

A 22.4b. ábra negyven részecskéből álló rendszer fejlődését mutatja. A kezdeti pillanatban minden molekula a bal oldalon helyezkedett el. A molekulákat véletlenszerűen választott sebességgel indítottuk. Látható, hogy az eloszlás viszonylag hamar megközelíti az egyenletes eloszlást, és a továbbiakban nagyjából egyenletes is marad.



b)

22.4b. ábra



22.5. ábra

A 22.5. ábra a bal oldalon elhelyezkedő részecskék számát mutatja a 22.4a. és 22.4b. ábrák képeinek sorrendjében. Mivel az egyes képek a rendszerről egyenlő időközönként készült pillanatfelvételek, a 22.5. ábra a részecskeszámot az idő függvényében mutatja. A negyven részecskéről készített hisztogramról leolvasható, hogy bár a teljesen egyenletes eloszlás csak ritkán valósul meg, a fluktuációk sem túlságosan nagyok.

A valóságos makroszkopikus rendszerekben a részecskék száma nagyságrendekkel meghaladja a legnagyobb számítógépek segítségével követhető rendszerek részecskéinek számát is. Így a valószínűségi feltevések helyessége ilyen méretű rendszerek esetén csak a valószínűségi leírás alapján a makroszkopikus változókra adódó eredmények tapasztalati ellenőrzésével lehetséges. Ehhez azonban a valószínűségi leírást még finomítanunk kell.

Nyilvánvaló, hogy nem elegendő annak megállapítása, hogy adott molekula milyen valószínűséggel található az edény egyik felében. Olyan valószínűségi törvényt kell keresnünk, amely kifejezésre juttatja, hogy egyensúlyi állapotban a gáz egyenletesen (vagy legalábbis közel egyenletesen) tölti ki a rendelkezésre álló teret.

22.3.2. Sűrűségingadozások

Mivel a gázmolekulák számára az edény egyik része sem kitüntetett, ezért annak valószínűsége, hogy egy tetszőleges molekula a V térfogatú edény V' térfogatú részén tartózkodik:

$$p=\frac{V'}{V}. \tag{22.66}$$

Így annak valószínűsége, hogy n molekula a térfogatban, $N-n$ molekula pedig a térfogatban tartózkodik,

$$P_{V'}(n)=\binom{N}{n}p^n(1-p)^{N-n}=\binom{N}{n}\left(\frac{V'}{V}\right)^n\left(\frac{V-V'}{V}\right)^{N-n}, \tag{22.67}$$

hiszen az N részecskéből $\binom{N}{n}$-féleképpen választhatjuk ki azt az n-et, amely a V' térfogatban található.

Foglalkozzunk azzal, hogy hogyan ingadozik a V térfogatú edény V' térfogatú részébe eső molekulák száma, azaz határozzuk meg az $\overline{n}'$ átlagértéket és a szórást!

A fentiek felhasználásával a V térfogatú edény V' térfogatú részébe eső molekulák számának $\overline{n}'$ átlagértéke és a szórása meghatározható. Egy részecske $p=\frac{V'}{V}$ valószínűséggel tartózkodik a V' térfogatban, így az N molekulából átlagosan

$$\overline{n}'=Np=N\frac{V'}{V} \tag{22.68}$$

található ebben a térrészben.

A szórásnégyzet

$$\sigma^2=\overline{\left(n'-\overline{n}'\right)^2}=\overline{n'^2}-\overline{n}'^2$$

definíciója szerint, valamint felhasználva a

$$\overline{n'^2}=\sum P(n')n'^2$$

átlagképzési szabályt,

$$\overline{n'^2}=\sum_{n'=0}^{N}n'^2\binom{N}{n'}p^{n'}(1-p)^{N-n'}. \tag{22.69}$$

Ez az összefüggés a binomiális együtthatókra vonatkozó

$$\binom{N}{n'}=\frac{N!}{(N-n')!n'!}=\frac{N}{n'}\frac{(N-1)!}{(N-1-(n'-1))!(n'-1)!}$$

azonosság felhasználásával az alábbi módon alakítható át:

$$\overline{n'^2}=Np\sum_{n'=1}^{N}n'\binom{N-1}{n'-1}p^{n'-1}(1-p)^{N-n'}.$$

Az $n'=k+1$ jelölés bevezetésével a jobb oldalon szereplő összeg két tagra bontható:

$$S=\sum_{n'=1}^{N}n'\binom{N-1}{n'-1}p^{n'-1}(1-p)^{N-n'}=$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}k\binom{N-1}{k}p^k(1-p)^{N-1-k}+\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}p^k(1-p)^{N-1-k},$$

ami a két tag összegének hatványaira vonatkozó

$$(a+b)^N=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^kb^{N-k}$$

összefüggés felhasználásával az

$$S=(N-1)p+1$$

alakra egyszerűsödik. Így

$$\overline{n'^2}=N(N-1)p^2+Np. \tag{22.70}$$

Ezt, valamint az $\overline{n}'^2=N^2p^2$ összefüggést felhasználva a szórásnégyzetre a

$$\sigma^2=Np(1-p)$$

összefüggés adódik.

Így a V' térfogatban a molekulaszám átlagos ingadozása

$$\frac{|\Delta n'|}{\overline{n}'}=\frac{\sqrt{Np(1-p)}}{Np}=\sqrt{\frac{1-p}{p}}\frac{1}{\sqrt{N}}=\sqrt{\frac{V-V'}{V}}\frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{22.71}$$

Az összefüggés mutatja, hogy a fluktuáció a molekulaszám négyzetgyökével fordítottan arányos. Látszik továbbá az is, hogy *minél kisebb térfogatban vizsgáljuk a molekulaszám statisztikus ingadozásának értékét, annál nagyobb értéket kapunk.*

Alkalmazzuk a fenti eredményt a $V'=\frac{V}{2}$ esetben! Ekkor $p=\frac{1}{2}$, $\overline{n}'=\frac{N}{2}$, $\sigma^2=\frac{N}{4}$.

Így a molekulaszám relatív ingadozása:

$$\frac{|\Delta n'|}{\bar{n}'} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Megjegyzés: A sűrűségingadozások létezésének egyik legszebb bizonyítéka az ég kék színe. Vizsgáljuk a levegőn áthaladó napfény szóródását! Ekkor a fény hullámhosszának nagyságrendjébe eső lineáris méretű térfogatban bekövetkező részecskeszám-ingadozásokat kell figyelembe vennünk. Bár az ilyen méretű térfogatelem igen kicsiny, az atomi méreteknél még mindig sok nagyságrenddel nagyobb, így makroszkopikusnak tekinthető (kb. 10^6 molekula található benne). Amennyiben a gázmolekulák száma minden ilyen méretű térfogatelemben állandó lenne (azaz a levegő eloszlása térben teljesen homogén lenne), akkor a beeső fénysugarak csak megtörnének, de nem szóródnának. Ez azonban azt jelentené, hogy az égbolt mélyfekete hátterén a vakítóan fénylő Nap mellett nappal is látnánk a csillagokat.

Bár 10^6 molekula esetén a véletlen ingadozások nagyságrendje $\frac{1}{\sqrt{N}} \approx 10^{-3}$ igen csekély, mégis azért okoz jelentős effektust, mert a fény hosszú úton jut el hozzánk. A szórás erősebb a fény rövid hullámhosszúságú tartományában, s a hullámhossz hosszabbodásával gyengül. Ezért látjuk az égboltot egyenletesen kéknek, s ugyanakkor a Nap irányából jövő sugarakat sárgásvörösnek.

22.3.3. Irreverzibilis folyamatok

Megállapítottuk, hogy *a gázokban még egyensúlyi állapotban is vannak inhomogenitások, a sűrűség állandóan fluktuál egyensúlyi értéke körül.* Ezek az ingadozások azonban kicsik, az egyensúlyi állapottól vett nagy eltérések csak külső behatással hozhatók létre. Térbeli eloszlás szempontjából ilyen, az egyensúlyi helyzettől erősen eltérő eset pl. az, ha minden gázmolekula a rendelkezésre álló térfogat egyik felében helyezkedik el.

A tapasztalat szerint az ilyen *erősen rendezett helyzetben magára hagyott rendszer időben úgy változik, hogy legrendezetlenebb állapota felé közeledik.* Legrendezetlenebb állapotában a rendszer egyensúlyban van.

Jól alátámasztják ezt a tapasztalatot a 22.4b. ábra számítógépes képei is. Látható, hogy a 40 részecskéből álló rendszer is viszonylag gyorsan kitölti a rendelkezésre álló teret, majd a továbbiakban kisebb fluktuációktól eltekintve ebben az állapotban marad.

A tapasztalat tehát azt mutatja, hogy a magukra hagyott, sok részecskéből álló rendszerek jól meghatározott irányban fejlődnek, s a már bekövetkezett változások fordítottja magától (spontán) sohasem következik be. Az ilyen spontán folyamatokat *megfordíthatatlan vagy irreverzibilis folyamatoknak nevezzük.*

Vegyük észre, hogy *az irreverzibilitás nem következik az egyes részecskékre vonatkozó mozgástörvényből!* Az egyes atomok (molekulák) mozgása, ütközése mindig lejátszódhatna időben megfordított irányban is. Képzeljük el, hogy az ideális gázról készített molekuláris részletességű filmet visszafelé forgatjuk le. A speciális kezdeti feltétellel rendezett gáz részecskéinek mozgását vizsgálva csak akkor vesszük észre, hogy a filmet visszafelé forgatjuk, ha a vetítővásznon sok részecske mozgását tudjuk egyszerre követni. Ha nagy nagyítást alkalmazunk, s egyszerre csak néhány részecske mozgását figyeljük, a folyamat megfordításáról nem szerzünk tudomást.

Az irreverzibilitás tehát jellegzetesen a sok részecskéből álló rendszer tulajdonsága.

22.3.4. Az energia eloszlása

Tegyük fel, hogy az N molekulából álló ideális gáz már elérte az egyensúlyi, azaz legrendezetlenebb állapotát. Az eddigiekben csak a molekulák térbeli elrendeződésével foglalkoztunk, s megállapítottuk, hogy *a teret a részecskék a legrendezetlenebb eloszlás esetén homogén módon töltik ki.*

A részecskék mozgását azonban térbeli helyzetük mellett sebességük (vagy impulzusuk is) jellemzi. A térbeli rendezetlenség mellett tehát figyelembe kellene venni az impulzusbeli rendezetlenséget is.

Célszerűbb azonban, ha *a molekulák kinetikus energiájának eloszlását vizsgáljuk.* Azzal ugyanis, hogy a gázt adott térfogatban környezetétől elzárjuk, a gáz összenergiáját és térfogatát állandó értéken tartjuk.

Így a térkitöltéshez hasonlóan *célszerűbb azt a kérdést felvetni, hogy hogyan oszlik el a rendszer teljes E energiája az egyes gázmolekulák között.* Elvileg elképzelhető lenne az a speciális helyzet, hogy a molekulák egy része igen nagy sebességgel mozogva nagy kinetikus energiával rendelkezne, egy másik csoportnak pedig igen lassú mozgása miatt csak kicsiny kinetikus energiája lenne. A véletlenszerű ütközések miatt azonban ez a speciális helyzet nem sokáig maradhat fenn, és a különböző energiájú csoportok hamarosan összekeverednek. Az egyensúlyi helyzetnek megfelelően a legrendezetlenebb állapotban végül is minden molekula átlagosan egyenlő energiával rendelkezik. Ez természetesen nem azt jelenti, hogy az egyensúlyi állapotban minden molekulának ugyanakkora az energiája. A részecskék között adott pillanatban lehetnek igen gyorsak és lassúak is. *Időátlagban azonban az egy-egy részecskére jutó energia egyenlő.*

Az ekvipartíciótétel tárgyalásakor láttuk, hogy ennél több is igaz, *időátlagban a részecskék minden szabadsági fokára ugyanannyi energia jut.*

A fentiekben lényegében intuitív úton kimondott törvényeket a következőkben pontosabban is megalapozzuk és igazoljuk.

23. Statisztikus fizika

Ebben a fejezetben a termodinamikai egyensúlyban levő rendszerek statisztikus fizikai leírásával foglalkozunk.

23.1. Alapfogalmak

23.1.1. A makroállapot

A termodinamikában egy rendszer állapotát néhány jól mérhető mennyiséggel, ún. *állapotjelzővel* (pl. nyomás, térfogat, hőmérséklet stb.) adjuk meg. Az állapotjelzők értéke egyensúlyi helyzetben állandó. Egy rendszer jellemzésére nagyszámú állapotjelző használható, azonban ezek nem függetlenek egymástól, hanem közöttük a vizsgált rendszerre jellemző kapcsolatok, ún. *állapotegyenletek* állnak fenn. (Ilyen állapotegyenlet pl. ideális gázra a $pV = nRT$ általános gázegyenlet és a belső energiát megszabó $U = c_v mT$ kalorikus állapotegyenlet.)

Azt, hogy egy rendszer termodinamikai egyensúlyának egyértelmű meghatározásához hány állapotjelző szükséges, tapasztalati úton dönthetjük el. A homogén anyagú és szerkezetű ún. *egyszerű rendszerek* állapota a tapasztalat szerint három állapotjelzővel adható meg.

Megjegyzés: Az állapotjellemzésére nem használhatunk tetszőleges három állapotjelzőt! A három állapotjelző között mindig kell lennie legalább egy extenzív paraméternek. A fenomenologikus termodinamikában zárt rendszerek esetén a tisztán extenzív állapotjelzőkkel való jellemzés a célszerű.

A sok részecskéből álló *makroszkopikus* rendszerek *termodinamikailag jellemzett állapotát makroállapotnak* nevezzük. A gáz makroállapota tehát pl. a gáz részecskéinek N számával, T hőmérsékletével és p nyomásával adható meg. A mikroszkopikus paraméterektől való elkülönítés kiemelésére az állapotjelzőket szokás *makroszkopikus* vagy *fenomenologikus paramétereknek* nevezni.

23.1.2. A mikroállapot

A makroszkopikus testek igen sok részecskéből állnak, s a termodinamikai egyensúly, a makroállapot megadása csak „globálisan" jellemzi a testet, egyes részecskéinek állapotáról nem nyújt felvilágosítást, hiszen az adott makroszkopikus érték nagyon sokféle mikroszkopikus részecskeelrendeződés útján is megvalósulhat. (Cseréljük fel pl. az ideális gázban két részecske sebességét – a csere csak mikroszkopikusan jelent különbséget, makroszkopikusan semmilyen változást nem észlelünk.)

23.1.2.1. A mikroállapot klasszikus fizikai meghatározása

A klasszikus fizikában a pontszerű test pillanatnyi állapotát a test helye és impulzusa adja meg. Az N részecskéből álló rendszer *mikroállapotán* az egyes részecskék állapotának teljes részletességű leírását értjük, azaz a mikroállapotot az egyes részecskék hely- és impulzuskoordinátáinak összessége határozza meg.

23.1.2.2. A mikroállapot kvantummechanikai meghatározása

Kvantummechanikai szempontból a sokrészecske-rendszer teljes leírása az állapotfüggvénnyel valósítható meg. Így *kvantummechanikailag a mikroállapot az állapotfüggvénnyel adható meg.*

A környezetétől elzárt, termodinamikai egyensúlyba került rendszer részecskéinek száma és a rendszer összenergiája állandó, s többnyire állandó a rendszer térfogata is. A makroállapotot tehát ebben az esetben az E, N, V paraméterekkel adhatjuk meg. A makroállapot természetesen megszorítást jelent a lehetséges mikroállapotokra vonatkozóan is. Az adott esetben a helykoordináták csak a tér meghatározott tartományába eshetnek, s az energia állandósága korlátozza az elérhető impulzustartományt is.

A statisztikus leírás fontos lépése, hogy a makroállapot s az azt megvalósító ún. *lehetséges mikroállapotok* száma között keresünk kapcsolatot. Lényeges tehát, hogy mind a klasszikus, mind a kvantummechanikai leírásban a mikroállapotok megszámlálhatók legyenek.

A rendszer egyetlen mikroállapotának leírásához szükséges független koordináták számát a rendszer (kinematikai) *szabadsági fokának* nevezzük. A sokrészecske-rendszerek szabadsági foka általában igen nagy szám. Az N független részecskéből álló rendszer szabadsági fokainak száma $3N$.

23.1.3. A mikroállapotok megszámlálása

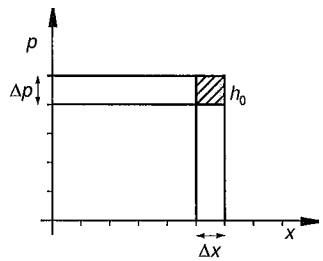
23.1.3.1. A mikroállapotok megszámlálása a klasszikus fizikában. A fázistér

Az N részecskéből álló rendszer adott állapotának leírásához $3N$ impulzus- és $3N$ helykoordináta, összesen tehát $6N$ adat szükséges. A szóhasználat egyszerűsítésére ezeket az adatokat a $6N$ dimenziós térben elhelyezkedő pont koordinátáinak tekintjük. Így a rendszer pillanatnyi állapotát – a mikroállapotot – ebben a $6N$ dimenziós térben, az ún. fázistérben egyetlen ponttal jellemezhetjük.

A háromdimenziós térben adott pont helyzetét tetszőleges koordináta-rendszerben megadott koordinátahármassal jellemezhetjük. Ennek analógiájára tekintjük a $6N$ adatból álló számsorozatot a $6N$ dimenziós térben fekvő pont koordinátáinak.

A hely- és impulzuskoordináták azonban a klasszikus fizika szerint folytonosan változhatnak, ily módon a makroállapot által megszabott fázistértartomány pontjainak megfelelően végtelen sok lehetséges mikroállapothoz jutnánk. Az egyes részecskék helyét és impulzusát azonban méréstechnikailag és – mint a kvantummechanikában már láttuk – elvileg sem adhatjuk meg teljes pontossággal. Ily módon a mikroállapotok kicsiny hely- és impulzustartományokban azonosnak tekinthetők. A következőkben megmutatjuk, hogy a mikroállapotok száma az N dimenziós térben a rendszer számára elérhető fázistértartomány h_0^{3N} egységekben mért térfogatával adható meg.

A fentiek megértését megkönnyíti, ha először egyetlen, az x tengely mentén mozgó részecskék mozgásával foglalkozunk. Az egyetlen részecskéből álló, egyenes mentén mozgó rendszer kétdimenziós fázistere könnyen ábrázolható olyan koordináta-rendszerben, ahol az egyik tengelyen a hely, a másikon az impulzus van felmérve. Osszuk fel az x tengelyt Δx, az impulzustengelyt Δp hosszúságú intervallumokra!



23.1. ábra

Ezzel a részecske kétdimenziós fázisterét $h_0 = \Delta x \Delta p$ területű cellákra bontottuk. Amennyiben Δx és Δp értéke, s így a h_0 cellaméret is elég kicsiny, az egyes cellákba eső fázispontokkal meghatározott állapotokat azonosnak tekinthetjük. A részecske egyes mikroállapotait tehát az egyes fáziscellák határozzák meg. A részecske

makroállapota megszabja, hogy az adott állapotban a részecske a fázistér mely részén mozoghat. A h_0 cellaméret megválasztásával az adott állapotban elérhető fázistértartományt véges számú részre osztottuk. Mivel a lehetséges mikroállapotok száma megegyezik a fáziscellák számával, az adott makroállapotokhoz tartozó mikroállapotok száma az elérhető fázistér tartomány h_0 egységekben mért területével azonos.

Ez a gondolatmenet minden további nélkül általánosítható az N részecskéből álló rendszerre. Legyen jellemezhető ugyanis a rendszer a $q_0, q_2, \ldots q_{3N}$ helykoordinátákkal és a hozzájuk tartozó $p_1, p_2, \ldots p_{3N}$ impulzusokkal, tehát $6N$ változóval. A lehetséges állapotok megszámlálására osszuk fel a q_i koordinátáknak és a p_i impulzusoknak a rendszer számára elérhető tartományát kicsiny Δq_i és Δp_i intervallumokra, ahol

$$\Delta p_i \Delta q_i = h_0.$$

Ezzel a $6N$ dimenziós fázisteret megszámlálható számú cellára osztottuk, s a rendszerállapotot jellemző fázispont mindig beleesik valamelyik ilyen cellába. A háromdimenziós térbeli összefüggések egyszerű általánosításaként az ilyen fáziscella térfogata:

$$\Delta q_1 \Delta p_1 \Delta q_2 \ldots \Delta q_{3N} \Delta p_{3N} = h_0^{3N}. \qquad (23.1)$$

Így a mikroállapotok száma ebben az esetben az elérhető fázistértartomány h_0^{3N} egységekben mért térfogatával adható meg.

23.1.3.2. A mikroállapotok megszámlálása a kvantummechanikai leírás alapján

Kvantummechanikailag egy rendszer az állapotfüggvénnyel jellemezhető. Az adott makroállapotú rendszer állapotfüggvénye mindig előállítható az energia-sajátfüggvényekből, így mikroállapotként elegendő csak a rendszer energia-sajátállapotait figyelembe venni, s az ún. kevert állapotokkal nem kell foglalkoznunk. A véges térfogatú rendszerekben az energia-sajátállapotok diszkrét kvantumszámokkal adhatók meg, így a mikroállapotok összeszámlálásához azt kell megadnunk, hogy az adott makroállapotban a rendszert jellemző – természetesen rendkívül nagyszámú – kvantumszám lehetséges értékeiből hányféle különböző változat állítható össze. Vegyük észre, hogy a mikroállapotok számának meghatározásához az állapotfüggvények pontos ismerete nem szükséges!

23.1.3.3. A klasszikus és kvantummechanikai állapotszám közötti kapcsolat

A klasszikus fizikai és kvantummechanikai számítások eredményét általában úgy hangoljuk össze, hogy a kvantummechanikai eredmények határesetben visszaadják a klasszikus fizika eredményeit. Ennek az elvnek az alkalmazásával létesíthetünk kapcsolatot a mikroállapotok megszámlálásakor nyert eredmények között is.

Klasszikus fizikai közelítésben h_0 értékét tetszőlegesen kicsinynek választhatjuk – határértékben zérushoz is tarthatunk vele. A későbbiek során látni fogjuk, hogy a klasszikus fizikai számítások általában nem is függenek h_0 értékének megválasztásától. Amennyiben azonban határesetben a klasszikus mechanikai és kvantummechanikai törvényeket össze kívánjuk hangolni, akkor h_0 csökkentésének határt szab a Heisenberg-féle határozatlansági reláció, amely szerint egy részecske helye és impulzusa nem mérhető egyidejűleg tetszőleges pontossággal. Minden összetartozó hely- és impulzuskoordináta pontosságára fennáll ugyanis a következő összefüggés:

$$\Delta q_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Általánosságban, ha a kvantummechanikailag megszámlált mikroállapotok számát határesetben a klasszikus fizikai úton nyert mikroállapotok számával tesszük egyenlővé, akkor *a kétdimenziós fázistér cellájának méretére h, a 6N dimenziós fázistér cellájának térfogatára pedig h^{3N} adódik.* Ez a legkisebb értelmes cellaméret tehát, amelyet a kvantummechanika megenged.

A kvantummechanikai és klasszikus fizikai leírás között további különbséget jelent az is, hogy a kvantummechanikában az azonos típusú részecskéket megkülönböztethetetlennek tekintjük, s ezt a feltevést az állapotfüggvény eleve tartalmazza. A klasszikus fizika szerint a részecskék megkülönböztethetőek, így ha az N azonos részecskéből álló rendszer klasszikus fizikai alapon számított mikroállapotszámát össze akarjuk hangolni a kvantumfizika szerint nyert mikroállapotszámmal, akkor a egységben mért fázistérfogatot meg kell szoroznunk $\frac{1}{N!}$-sal. Ezzel vehetjük figyelembe azt, hogy a részecskék egymás közötti permutálása nem ad új mikroállapotot.

23.1.4. A részecskék megválasztása

Az ideális gáz példájára gondolva természetesnek tűnik, hogy a statisztikus leírásban részecskeként a gáz molekuláit tekintjük. Tudjuk azonban, hogy a molekulák atomokból, az atomok pedig protonokból és elektronokból állnak. Tudjuk továbbá azt is, hogy a gázmolekulák csak a szobahőmérséklet közelébe eső hőmérsék-

let-tartományban mozognak egyetlen részecskeként, a hőmérséklet növekedtével atomokra, illetve ionokra esnek szét. Az ilyen magasabb hőmérséklet-tartományban az atomokat, molekulákat, illetve ionokat kell részecskének tekintenünk. Ezáltal természetesen a molekulákból álló egyszerű rendszer is összetetté válik, s a makroállapot leírásához is több állapotjelző szükséges.

Általában azt mondhatjuk, hogy a rendszernek olyan elemeit célszerű részecskeként választani, amelyek szerkezete az adott körülmények (hőmérséklet, nyomás) között nem változik.

A statisztikus fizikai leírást nagyban megkönnyíti, ha a rendszert olyan részrendszerekre bontjuk, amelyek között a kölcsönhatás gyenge. Részrendszerként akár a rendszert alkotó részecskéket, akár a rendszernek valamilyen nagyobb, de makroszkopikusan még mindig kicsiny részét is választhatjuk. A feltevés azt jelenti, hogy az egyensúlyi állapot beálltával a részecskék kölcsönhatása elhanyagolhatóvá válik, s a rendszer teljes energiája az egyes részecskék energiájából additív módon tevődik össze, azaz

$$E=\sum_i \varepsilon_i, \tag{23.2}$$

ahol E a rendszer összenergiája, ε_i pedig az egyes részecskék energiája.

Vegyük észre, hogy ez nem azt jelenti, hogy a részecskék között egyáltalán nincsen kölcsönhatás, hiszen ebben az esetben a rendszer tetszőleges állapota változatlanul fennmaradna. A kölcsönhatás tehát lényeges szerepet tölt be az egyensúlyi helyzet kialakításában, s csak az egyensúly (a makroállapot) beállta után hanyagolható el.

23.1.5. A folyamatok leírása

Adott kezdeti állapotból indulva a rendszerben általában mikroszkopikus változások mennek végbe. (Változhat a rendszer anyaga pl. kémiai reakció útján, vagy változhat a rendszerben az anyageloszlás stb.) A magára hagyott rendszerben azonban több-kevesebb idő elteltével a makroszkopikus skálán nyugalom áll be, a rendszer termodinamikai egyensúlyba kerül.

A rendszer mikroállapota azonban még termodinamikai egyensúly esetén is folyamatosan változik. Az adott makroállapot jellemezhető a rendszer adott makroállapotát megvalósító mikroállapotok számával.

Könyvünkben a testek állapotának leírását mind a termodinamikában, mind a statisztikus fizikában az *egyensúlyi állapotok vizsgálatára korlátozzuk*. Így a fizikai változások ezen elmélet alapján folyamatukban nem követhetők, hiszen a folyamatok közben sem a makroállapotot, sem a mikroállapotot nem értelmeztük.

Az adott elmélet keretében a folyamatokról lényegében kétféle módon vonhatunk le következtetéseket:

1. A valódi folyamatok idealizált határeseteként bevezetjük a nagyon lassú, csupa egyensúlyi helyzeten keresztül végbemenő ún. *kvázisztatikus folyamatokat*. Az ilyen kvázisztatikus, csak egyensúlyi állapotokat tartalmazó folyamatokban mind a makro-, mind a mikroállapotok meghatározhatók, tehát követhetők az egyensúlyi helyzetekre kimondott törvények segítségével.
2. A folyamatok követése helyett csak a kezdeti és végállapotot meghatározó egyensúly tulajdonságait hasonlítjuk össze.

23.1.6. A statisztikus leírásmód alapfeltevései

Az ideális gáz esetén láttuk, hogy a sok részecskéből álló rendszer makroszkopikus állapota és a mikroszkopikus jellemzők között kapcsolatot találhatunk.

Egyszerű valószínűségi feltevések nemcsak ideális gáz esetén, hanem tetszőleges sok részecskéből álló rendszerre is kimondhatók. *Ezeket a posztulátumokat bizonyítás nélkül, axiómaként fogadjuk el.* A statisztikus fizika posztulátumainak egy lehetséges megfogalmazása a következő:

a) A környezetüktől elszigetelt sokrészecske-rendszerek egyensúlyi állapotban minden lehetséges mikroállapotukat azonos valószínűséggel veszik fel.

b) Ha a környezetétől elszigetelt rendszer egyes mikroállapotaiban nagyobb valószínűséggel található meg, mint a többiben, akkor a rendszer nincs egyensúlyban. Ebben az esetben a magára hagyott rendszer addig változik, míg egyensúlyi állapotát el nem éri, azaz míg minden lehetséges mikroállapota egyenlő valószínűségűvé nem válik.

Megjegyzés: A posztulátumok érvényessége jól követhető, pl. az ideális gáz légüres térrészbe történő tágulásán. Amikor gázzal telt edény csapját megnyitjuk, akkor a lehetséges mikroállapotok száma megnő, azonban a gáz még nagy valószínűséggel a kezdeti térfogatban található, tehát egyes mikroállapotainak valószínűsége nagyobb. A tágulás során a gáz fokozatosan kitölti az egész rendelkezésre álló teret, és mikroállapotainak valószínűsége egyenlővé válik.

Mivel a mikroállapotok valószínűsége egyenlő, tetszőleges fizikai mennyiség *átlagos értéke* kiszámítható, ha a rendszer statisztikus egyensúlyban van. Legyenek például valamely fizikai mennyiség lehetséges értékei $y_1, y_2, \ldots y_n$, és jelöljük rendre $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$-nel azoknak a mikroállapotoknak a számát, amelyek esetén az egyes y_i értékek megvalósulnak. Az egyes értékek valószínűsége:

$$p\left(y_i\right)=\frac{Y_i}{Y}, \tag{23.3}$$

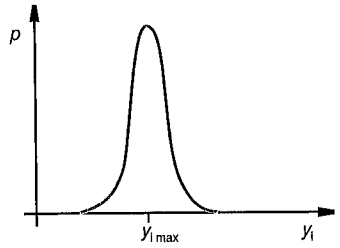
ahol $Y = \Sigma Y_i$ az összes lehetséges mikroállapotok száma. Így az y paraméter átlagos értéke:

$$\bar{y} = \frac{\sum p(y_i) y_i}{\sum p(y_i)} = \sum p(y_i) y_i = \frac{1}{Y} \sum Y_i y_i, \qquad (23.4)$$

mert $\sum p(y_i) = 1$.

Az ismertetett módszerrel y szórása is kiszámítható.

A tapasztalat szerint *a makroszkopikus testek lényeges tulajdonsága, hogy adott makroállapotban a testet jellemző fizikai mennyiségek a legvalószínűbb értéküket veszik fel.* (Ez a valószínűségi összefüggés természetesen nem vonatkoztatható azokra a mennyiségekre, amelyekkel az adott makroállapotot rögzítjük.) Fizikailag ez azt jelenti, hogy a makroszkopikus rendszerekben kicsik a fluktuációk, így a legvalószínűbb érték közel van az átlagértékhez. Matematikailag kifejezve ezt az adódik, hogy az y paraméter $\bar{y}$ átlagértéke jó közelítéssel megegyezik azzal az értékkel, amelyre a $p(y_m) = \frac{Y_m}{Y}$ valószínűség maximális. A makroszkopikus rendszerekre vonatkozóan tehát tetszőleges fizikai mennyiség valószínűség-eloszlását igen keskeny, a legvalószínűbb érték köré koncentrálódó görbe jellemzi.



23.2. ábra

Szemléletesen azt mondhatjuk tehát, hogy az y_m értéket megvalósító állapotokon kívül csak kevés állapot fordul elő, azaz *a maximális valószínűségű értéket megvalósító állapotok száma közelítőleg megegyezik az összes állapotok számával!*

Ez a megállapítás az előzőekben megfogalmazott posztulátumokból nem következik, tapasztalati tényként kell kezelnünk.

23.1.7. A lehetséges mikroállapotok száma

A statisztikus leírásmód mennyiségi alkalmazásához alapvetően szükséges a lehetséges mikroállapotok számának meghatározása.

A mikroállapotok számának meghatározása azonban általában igen bonyolult feladat, s a pontos érték kiszámítása az adott rendszertől függően többnyire csak egyedi módszerek felhasználásával lehetséges. Közös tulajdonsága azonban a makroszkopikus rendszereknek, hogy a mikroállapotok száma igen nagy, ezért még mennyiségi összefüggések megállapításához is elegendőek lehetnek bizonyos nagyságrendi becslések.

A környezetétől elszigetelt rendszer energiája állandó, így *a lehetséges mikroállapotok számát a rendszer E energiájának függvényében célszerű meghatározni.*

Megjegyzés: A statisztikus fizika egzakt megalapozásával kimutatható, hogy környezetétől elszigetelt rendszer esetén a mikroállapotok száma csak a mozgásállandók függvénye lehet, tehát csak a rendszer energiájától, illetve impulzusának és impulzusmomentumának komponenseitől függhet. A zárt rendszer impulzusa és impulzusmomentuma azonban a rendszer egészének mozgásával kapcsolatos, ezért a statisztikus állapot adott külső feltétel mellett csak az energiától függ.

Az állapotok számának meghatározására használjunk olyan energiaskálát, amelynek δE osztásrészei makroszkopikusan kicsinyek. δE tehát mikroszkopikus értelemben még nagy, makroszkopikusan azonban kicsi. Bármely ilyen kicsiny δE intervallum tehát a rendszer igen sok energiaállapotát tartalmazza. Jelöljük $Y(E)$-vel az E és $E + \delta E$ közé eső energiával rendelkező energiaállapotok számát! Az $Y(E)$ szám nyilván függ a δE energiaintervallum nagyságától és az E energia értékétől. Az $Y(E)$ függvény felírható

$$Y(E) = \rho(E)\,\delta E \qquad (23.5)$$

alakban, ahol a $\rho(E)$ *állapotsűrűség* független az energiaintervallum szélességétől.

Mivel az egyes δE energiaintervallumok igen sok állapotot tartalmaznak, $Y(E)$ csak csekély mértékben változhat, ha egy intervallumból a vele szomszédos intervallumra térünk át. $Y(E)$ tehát az energia simán változó, folytonos függvényének tekinthető.

Az $Y(E)$ függvény mellett gyakran hasznos egy további $\Phi(E)$ függvény bevezetése is. $\Phi(E)$-vel jelöljük azon állapotok számát, amelyek energiája kisebb, mint E. Így:

$$Y(E) = \Phi(E + \delta E) - \Phi(E). \qquad (23.6)$$

Amennyiben δE kicsiny, jó közelítéssel használható a következő összefüggés:

$$Y(E) = \frac{\mathrm{d}\Phi(E)}{\mathrm{d}E}\,\delta E. \qquad (23.7)$$

Az $Y(E)$ mennyiség a környezetétől elszigetelt rendszer pillanatnyi állapotától függ, tehát állapotjelző. A termodinamikából tudjuk, hogy az adott számú részecskét tartalmazó egyszerű rendszerek két független állapotjelzővel egyértelműen jellemezhetők, azaz bármely állapotjelzőjük meghatározható két, megfelelően választott állapotjelző segítségével. Várható tehát, hogy $Y(E)$ sem pusztán E-től, hanem valamilyen más állapotjelzőtől is függ. A rendszer zártságát többnyire úgy biztosítjuk, hogy a rendszert merev hőszigetelő falakkal állandó térfogatba kényszerítjük. Az E és $E + \delta E$ intervallumba eső állapotok száma így a rendszer térfogatának is függvénye.

A következőkben mielőtt az $Y(E)$ függvény általános alakjára vonatkozó megállapításokat tennénk, néhány speciális példát vizsgálunk.

23.1.7.1. Dobozba zárt részecske állapotsűrűsége

A kvantummechanikából tudjuk, hogy ha az m tömegű részecske csak az L oldalélű kockában mozoghat, akkor a részecske energiája csak az

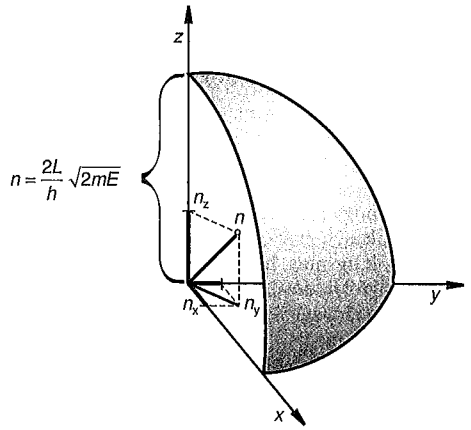
$$E=\frac{h^2}{8m}\frac{1}{L^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right),\qquad \left(n_x,n_y,n_z=1,2,\ldots\right) \tag{23.8}$$

diszkrét értékeket veheti fel. Általában azonban az $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2$ érték olyan nagy, hogy az energia értékének változása a kvantumszámokkal folytonosnak tekinthető. Ha a kocka makroszkopikus méretű, akkor a $\frac{h^2}{8m}\frac{1}{L^2}$ szorzó igen kicsiny, így közönséges körülmények között az $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2$ összeg igen nagy. (Pl. L = 1 cm esetén az $m \approx 5\cdot10^{-26}$ kg tömegű nitrogénmolekulára $\frac{h^2}{8m}\frac{1}{L^2}\approx10^{-39}$ J. Mivel szobahőmérsékleten a nitrogénmolekulák átlagos energiája $\approx10^{-21}$ J, adódik, hogy $n^2 \approx 10^{18}$ nagyságrendű.) Ha ilyen nagy n^2 mellett valamelyik kvantumszám 1–2 egységgel megváltozik, akkor az energia csak elhanyagolható mértékben változik. Annak ellenére tehát, hogy mind n^2, mind E csak diszkrét értékeket vehet fel, az egyes energiaértékek olyan sűrűn követik egymást, hogy az $E(n^2)$ függvényt folytonosnak tekinthetjük.

Fejezzük ki az energiával n^2-et az $E=\frac{h^2}{8m}\frac{1}{L^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right),\quad \left(n_x,n_y,n_z=1,2,\ldots\right)$ összefüggésből! Azt kapjuk, hogy

$$n^2=n_x^2+n_y^2+n_z^2=\left(\frac{L}{h}\right)^2\cdot8mE. \tag{23.9}$$

Az n_x, n_y, n_z értékeket derékszögű koordináta-rendszerben egy-egy pont koordinátáinak tekintve megállapítható, hogy az adott E energiánál kisebb energiájú állapotoknak megfelelő $P(n_x, n_y, n_z)$ pontok az $n=\frac{2L}{h}\sqrt{2mE}$ sugarú gömb belsejében vannak (23.3. ábra).



23.3. ábra

Ennek megfelelően az E-nél kisebb energiájú állapotok $\Phi(E)$ száma megegyezik az n sugarú gömb pozitív térnyolcadába eső egész koordinátájú pontok számával. Az egész koordinátájú pontok egységnyi térfogatú kockákat határolnak. Így adott térrészbe eső egész koordinátájú pontok száma jó közelítéssel megegyezik a kiválasztott térrész térfogatával. Tehát esetünkben:

$$\Phi\left(E\right)=\frac{1}{8}\frac{4}{3}n^3\pi=\frac{\pi}{6}\left(\frac{2L}{h}\right)^3\left(2mE\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{23.10}$$

Az E és $E + \delta E$ közé eső állapotok száma az $n=\frac{2L}{h}\sqrt{2mE}$ sugarú gömb fölött elhelyezkedő gömbréteg térfogatának nyolcadrésze. Az R sugarú, ΔR vastagságú gömbréteg térfogata $4R^2\pi\Delta R$, tehát az E és $E + \delta E$ közé eső állapotok száma:

$$Y\left(E\right)=\frac{1}{2}\frac{4L^2\pi}{h^2}2mE\Delta n. \tag{23.11}$$

Az energia δE megváltozása miatt bekövetkező Δn változás a

$$\Delta n=\left(\frac{2L}{h}\right)\sqrt{2m}\left(\sqrt{E+\delta E}-\sqrt{E}\right)=\frac{2L}{h}\sqrt{2m}\sqrt{E}\left(\sqrt{1+\frac{\delta E}{E}}-1\right)\approx\frac{L}{h}\sqrt{\frac{2m}{E}}\delta E \tag{23.12}$$

összefüggéssel közelíthető. (A közelítéshez felhasználtuk, hogy kicsiny x-re $\sqrt{1+x}\approx1+\frac{1}{2}x$.)

Következésképpen

$$Y\left(E\right)=\frac{2L^3\pi}{h^3}\left(2m\right)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}\Delta E. \tag{23.13}$$

Látható tehát, hogy $Y(E)$ az energiának növekvő függvénye. Ugyanakkor megállapítható az is, hogy az energia mellett valóban függ a doboz $V = L^3$ térfogatától is. $Y(E)$ az

$Y\left(E\right)=\frac{\mathrm{d}\Phi\left(E\right)}{\mathrm{d}E}\delta E$ közelítés közvetlen felhasználásával is megkapható a

$\Phi\left(E\right)=\frac{\pi}{6}\left(\frac{2L}{h}\right)^3\left(2mE\right)^{\frac{3}{2}}$ függvényből.

Vegyük észre továbbá, hogy bár az állapotsűrűség meghatározásakor a kvantummechanikai leírásból indultunk ki, lényegében a klasszikus határesetre vonatkozó számítást végeztünk. Megállapítottuk ugyanis, hogy a rendszer energianívói olyan sűrűn helyezkednek el, hogy az energiát folytonosnak tekinthetjük. Így az E és $E + \delta E$ energiaintervallumba eső állapotok számát lényegében az adott makroállapothoz tartozó fázistér tartomány térfogatával határoztuk meg.

23.1.7.2. Az ideális gáz mikroállapotainak száma

Határozzuk meg az N részecskéből álló, E energiájú és V térfogatú egyatomos ideális gáz mikroállapotainak számát!

Az ideális gáz részecskéinek mozgása egymástól teljesen függetlenül zajlik. Függetlenek továbbá az egyes részecskék hely- és sebességkoordinátái is, hiszen egy részecske bármely helyen azonos valószínűséggel veszi fel az egyes sebességértékeket. Ebből már következik, hogy a mikroállapotok összeszámlálásakor egymástól függetlenül vizsgálhatjuk a térbeli elrendezéseknek csak a $f(V)$ térfogattól függő és a sebességeloszlásból adódó lehetőségeknek csak az energiától függő $g(V)$ számát. A mikroállapotok száma tehát ebben az esetben két, egymástól független tényező szorzataként állítható elő, azaz

$$Y\left(E,V\right)=f\left(V\right)g\left(E\right). \tag{23.14}$$

Az $f(V)$ tényező értékét egyszerűen megbecsülhetjük, hiszen ha figyelembe vesszük, hogy minden részecske azonos valószínűséggel tartózkodik a rendelkezésre álló térrész bármely egyenlő térfogatú részében, akkor adódik, hogy egy részecske esetén a térbeli elrendezések miatt a térfogattal arányos számú mikroállapot létezik. A részecskék függetlensége miatt ezek a lehetőségek összeszorzódnak, így:

$$f\left(V\right)\sim V^N. \tag{23.15}$$

A mikroállapotok száma és az energia közötti összefüggés megállapításához írjuk fel az energiát a részecskék p_i impulzusának függvényében! Azt kapjuk, hogy

$$E=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}+\dots+\frac{p_N^2}{2m}=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m}. \tag{23.16}$$

Fejezzük ki az egyes impulzusokat derékszögű koordinátáikkal a következő alakban:

$$p_i^2=p_{ix}^2+p_{iy}^2+p_{iz}^2. \tag{23.17}$$

Így az energiát $3N$ négyzetes tag összege határozza meg. Tekintsük a p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} (i = 1, 2,... N) impulzuskomponenseket egy $3N$ dimenziós térbeli $\mathbf{P}$ vektor összetevőinek. A térbeli Pitagorasz-tétel analógiájára ennek a vektornak a hossza

$$P=\left|\mathbf{P}\right|=\sqrt{p_{1x}^2+p_{1y}^2+p_{1z}^2+\dots+p_{Nx}^2+p_{Ny}^2+p_{Nz}^2}. \tag{23.18}$$

Megjegyzés: A geometriai analógia teljesen formális. A háromnál több dimenziós tér geometriailag elképzelhetetlen. A két- és háromdimenziós tér vektorai azonban mindig megadhatók megfelelően választott egységvektorok lineáris kombinációjaként, azaz pl. térbeli vektor esetén $\mathbf{r}=\sum_{i=1}^{3}x_i\mathbf{e}_i$. Az x_i számokat az $\mathbf{r}$ vektor koordinátáinak nevezzük. Az $\mathbf{e}_i$ vektorok koordinátái: $\mathbf{e}_1$ = (1, 0, 0), $\mathbf{e}_2$ = (0, 1, 0), $\mathbf{e}_3$ = (0, 0, 1). Ebben az esetben az $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ és $\mathbf{s}(y_1, y_2, y_3)$ vektor skaláris szorzata $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, az $\mathbf{r}$ vektor négyzete $\mathbf{r}^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$, így hossza $\mathbf{r}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

A fentiek analógiájaként bizonyos szám-n-eseket n dimenziós vektorok koordinátáinak tekinthetünk. Ilyenkor $\mathbf{e}_1$ = (1, 0, ..., 0), $\mathbf{e}_2$ = (0, 1, ..., 0), $\mathbf{e}_3$ = (0, 0, ..., 1). Az egységvektorok koordinátái n – 1 db zérusból és 1 db 1-esből állnak. Ebben a konstrukcióban a háromdimenziós tér vektoraira vonatkozó műveleti szabályok változatlanul fennállnak, csak az összegzéseket kell az 1, ..., N komponensekre kiterjeszteni.

A rendszer energiája pedig:

$$E=\frac{P^2}{2m}. \tag{23.19}$$

Mivel az energia állandó, $\mathbf{P}$ végpontja n dimenziós gömb felszínén fut végig, amelynek sugara:

$$P=\sqrt{2mE}. \tag{23.20}$$

Megjegyzés: A háromdimenziós gömb analógiájára n dimenziós gömbnek nevezzük az egyenlő hosszúságú vektorok végpontjaival meghatározott alakzatot. Az n dimenziós gömb térfogata arányos r^n-nel, felszíne pedig r^{n-1}-nel, ahol r a gömb sugara.

A dobozba zárt részecske tárgyalásakor már megállapítottuk, hogy szokásos körülmények között az energiaszintek igen sűrűn helyezkednek el, azaz az energia folytonos mennyiségként kezelhető. Hasonló módon folytonosnak foghatjuk fel az energiát sok részecskéből álló rendszer esetén is. Így az E és $E + \Delta E$ közé eső energiaállapotok $g(E)$ száma a $\sqrt{2mE}$ és $\sqrt{2m\left(E+\Delta E\right)}$ sugarú gömbök közé eső $3N$ dimenziós gömbhéj térfogatával arányos, azaz

$$g\left(E\right)\sim E^{\frac{3N-2}{2}}\Delta E. \tag{23.21}$$

Látható, hogy ez az eredmény N = 1-re visszaadja a dobozba zárt részecskéknél kapott $E^{\frac{1}{2}}$-es összefüggést. Ideális gáz esetén tehát:

$$Y\left(E,V\right)\sim V^N E^{\frac{3N-2}{2}}\Delta E. \tag{23.22}$$

A részecskék számának növekedése tehát gyorsan növeli a mikroállapotok számát.

Az egyetlen részecske állapotsűrűségének meghatározásakor alkalmazott eljáráshoz hasonlóan most is lényegében klasszikus közelítést alkalmaztunk. A közelítés során egyrészt a diszkrét energiaállapotok sűrű elhelyezkedése miatt folytonos energiaeloszlásra tértünk át, másrészt a függetlenrészecske-közelítés alkalmazásakor nem vettük figyelembe, hogy a részecskék megkülönböztethetetlenek. A folytonos energiaeloszlás feltételezése miatt az állapotok számát tulajdonképpen most is az E és $E + \Delta E$ energiáktól meghatározott fázistértartomány térfogatával közelítettük. A részecskék megkülönböztethetetlenségét azonban a (23.22) állapotsűrűség meghatározásakor nem vettük figyelembe. A mikroállapotok száma a rendszert alkotó részecskék megkülönböztethetetlensége esetén az

$$Y\left(E,V\right)\sim\frac{1}{N!}V^N E^{\frac{3N-2}{2}}\Delta E$$

arányossággal fejezhető ki.

23.1.7.3. A makroszkopikus testek mikroállapotainak száma

A fenti példákhoz hasonló módon a tapasztalat azt mutatja, hogy általában is fennáll a következő: Sok részecske esetén mindig kimutatható, hogy nagyon kivételes esetektől eltekintve $Y(E)$ az energiával rendkívül gyorsan nő. Általában

$$Y\left(E\right)\approx\left(E-E_0\right)^f, \tag{23.23}$$

ahol E_0 a rendszer minimális energiája, f pedig igen nagy, a rendszer szabadsági fokainak nagyságrendjébe eső szám. Az $Y(E)$ mennyiség ugyanakkor függhet még energetikailag környezetüktől elszigetelt rendszerek esetén is bizonyos makroszkopikus változóktól, amelyek értékét külső kényszerek szabják meg. Ilyen külső kényszert jelenthet például, hogy a rendszer térfogata állandó.

23.1.7.4. Az Einstein-kristály mikroállapotainak száma

Az ideális gázzal szemben a kristályok atomjai szigorúan kötött rendbe szerveződnek. Energiájuk már nem határozható meg az egyes részecskék energiájának összegeként. Mégis, a kristályok atomjai (molekulái) első közelítésben azonos mozgást végeznek, úgy tekinthetők, mintha egymástól független rezgőképes rendszerek, harmonikus oszcillátorok lennének. A közelítés fizikailag azzal magyarázható, hogy a kristály atomjai a kristály többi atomja által keltett átlagos erőtérben mozognak, s ez az átlagos környezet a kristályban helytől függetlenül mindenütt ugyanolyan. Ennek az átlagos környezetnek a figyelembevételére *Einstein* nyomán a következő modellt alkothatjuk. *Tekintsük a kristály atomjait egymástól független harmonikus oszcillátoroknak, amelyek rezgési frekvenciája ugyanakkora!* Mivel a kristály atomjai három irányban rezeghetnek, további egyszerűsítésként minden atomot három, egymásra merőleges egyenes mentén mozgó harmonikus oszcillátor helyettesít!

Az egyes oszcillátorok között csak igen laza kapcsolatot tételezünk fel, amely abban nyilvánulhat meg, hogy a kristály atomjai energiát adhatnak át egymásnak. *Az energiaátadás azonban csak kvantált formában történhet,* azaz az atomok csak meghatározott ε_0 energia egész számú többszöröseit adhatják át egymásnak. Természetesen ez a modell rendkívül mesterkélt és leegyszerűsített, azonban mint látni fogjuk, sok tekintetben jól tükrözi a valódi kristályok tulajdonságait, ugyanakkor a statisztikus fizika módszereit is egyszerűbben követhetjük rajta.

Rendelkezzen az $\frac{N}{3}$-atomból álló kristályt modellező N oszcillátor r számú energiaadaggal, azaz a kristály összenergiája legyen $E = r\varepsilon_0$!

A kristály mikroállapotát most azzal jellemezhetjük, hogy melyik oszcillátor hány energiaadaggal rendelkezik. Így a mikroállapotok számát az adja meg, hogy az oszcillátor között hányféleképpen oszthatunk fel r energiaadagot. Ezt az N elem r-ed rendű ismétléses kombinációjának száma adja, tehát

$$Y\left(E\right)=\binom{N+r-1}{r}=\frac{\left(N+r-1\right)!}{r!\left(N-1\right)!}. \tag{23.24}$$

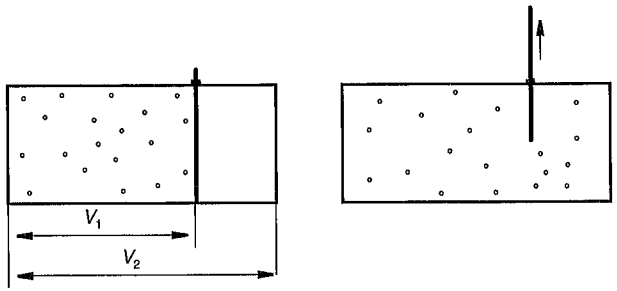
Megjegyzés: Az összefüggésben az energia látszólag nem szerepel, nyilvánvaló azonban, hogy adott E összenergia esetén $r=\frac{E}{\varepsilon_0}$. Matematikai eszközökkel kimutatható, hogy a (23.24) állapotsűrűség most is $Y(E) \sim (E)^N$ alakra hozható, azaz a 23.1.2.2. alpontban kimondott, a makroszkopikus testekre vonatkozó tapasztalati törvény az Einstein-kristály esetén is teljesül.

23.2. A folyamatok iránya

A következőkben a spontán végbemenő folyamatok iránya és a rendszer mikroállapotainak száma között keresünk összefüggést.

23.2.1. Az ideális gáz szabad tágulása vákuumba

A V_1 térfogatú ideális gázt engedjük szabadon tágulni úgy, hogy térfogata V_2-re növekedjék!



23.4. ábra

A 23.4. ábra szerint a két térfogatrészt elválasztó fal eltávolításának pillanatában a gáz csak a V_1 térfogatnak megfelelő mikroállapotokban található meg egyenlő valószínűséggel. A fal eltávolításakor újabb mikroállapotok válnak lehetővé, és a statisztikus fizika alapelveinek megfelelően megindul a lehetséges mikroállapotok valószínűségének kiegyenlítődése. Az új egyensúlyi állapot beállása után a lehetséges mikroállapotok valószínűsége egyenlővé válik.

A lehetséges mikroállapotok száma azonban megnő. A növekedés esetünkben a térfogatváltozás következménye, hiszen az ideális gáz energiája a szabad tágulás során nem változhat. Így az előző fejezetben levezetett (23.22) összefüggés értelmében:

$$Y\left(E,V_2\right)>Y\left(E,V_1\right) \tag{23.25}$$

és

$$\frac{Y\left(E,V_2\right)}{Y\left(E,V_1\right)}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N. \tag{23.26}$$

A kapott eredmény mutatja, hogy az eredeti helyzetet, tehát azt, hogy a gáz V_1 térfogatban legyen, pusztán a fal visszahelyezésével nem tudjuk visszaállítani. A V_2 térfogatra kiterjedt gáz ugyanis feltételünk szerint egyenlő valószínűséggel „látogatja" mikroállapotait. Így a V_1 térfogatú makroállapot bekövetkezésének valószínűsége éppen $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^N$. Ez a szám azonban igen kicsiny érték, hiszen a makroszkopikus rendszerekben N nagyon nagy.

Megjegyzés: A mikroállapotok számának arányát közvetlenül is megkaphatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy minden egyes molekula $\frac{V_1}{V_2}$ valószínűséggel tartózkodik a V_1 térfogatban, s a molekulák függetlensége miatt a teljes gázmennyiségre vonatkozó valószínűséget az egyes molekulákra vonatkozó valószínűségek szorzata adja.

A fal visszahelyezésével a gáz eredeti állapota akkor lenne visszaállítható, ha a rendszer spontán fluktuációit figyelve addig várnánk, míg a gáz minden részecskéje egy adott pillanatban visszakerülne a V_1 térfogatba, s ekkor a falat hirtelen visszahelyeznénk. Ez az esemény azonban a lehetetlenségig valószínűtlen.

Megállapítható tehát, hogy az ideális gáz spontán tágulásakor a lehetséges mikroállapotok száma nő, s az eredeti állapot spontán visszaállítása gyakorlatilag lehetetlen.

Az eredeti állapot természetesen visszaállítható, hiszen a gázt összenyomhatjuk eredeti V_1 térfogatára. Ekkor azonban munkát végzünk a gázon, így energiája megváltozik, s ahhoz, hogy a kezdeti energiaérték visszaálljon, még hűteni kell. Az eredeti állapot visszaállítása tehát többféle külső hatást igényel, s nem lehetséges a fal kölcsönhatásmentes visszahelyezésével.

23.2.2. Irreverzibilis változások

Az ideális gáz szabad tágulásakor megfigyelt jelenség tetszőleges rendszer esetén is ugyanúgy zajlik.

Ha egy rendszer egyensúlyi állapotát valamilyen mennyiség (pl. a térfogat) külső kényszer útján történő beállításával szabtuk meg, akkor a kényszer eltávolítása után a rendszerben spontán folyamatok történhetnek. Ilyen folyamatok akkor jönnek létre, ha a kényszer eltávolításával a lehetséges mikroállapotok száma nő. Ha $Y_{\text{végső}} \gg Y_{\text{kezdeti}}$, akkor a fordított irányú folyamat spontán bekövetkezése lehetetlen. A spontán változás azt jelenti, hogy a folyamat a külső kényszer megszűntekor önként végbemegy, az eredeti állapot visszaállítása pusztán a külső kényszer visszaállításával – egyéb környezeti változtatás nélkül – azonban lehetetlen.

Ezeket a folyamatokat nevezzük *megfordíthatatlan* vagy *irreverzibilis folyamatoknak.*

23.2.3. Kölcsönható rendszerek

A hőjelenségek kísérleti tanulmányozásából tudjuk, hogy az egymással kölcsönhatásban álló testek munkavégzés, illetve hőközlés útján cserélhetnek energiát. A következőkben mikroszkopikus szempontból vizsgáljuk ezeket a kölcsönhatásokat.

A két rendszerből összetett rendszer lehetséges mikroállapotai úgy határozhatók meg, hogy az egyik rendszer minden mikroállapotához hozzávesszük a másik rendszer minden mikroállapotát. Így a két rendszerből álló teljes rendszer mikroállapotainak Y_t száma a részrendszerek Y_1 és Y_2 mikroállapotai számának szorzata, azaz:

$$Y_t = Y_1 Y_2. \tag{23.27}$$

A szigetelések feloldása után a két részrendszer között akkor mennek végbe spontán folyamatok, ha ennek következtében a teljes rendszer mikroállapotainak száma nő, vagyis ha

$$Y_t < Y_t', \tag{23.28}$$

illetve

$$Y_1 Y_2 < Y_1' Y_2', \tag{23.29}$$

ahol vesszővel jelöltük a megfelelő rendszerekben a szigetelések eltávolítása után beálló új egyensúlyi állapot mikroállapotainak számát.

A (23.29) összefüggés felírásakor kihasználtuk, hogy a rendszer legvalószínűbb állapotához tartozó makroállapotok száma jó közelítéssel megegyezik az összes mikroállapotok számával. Csak ennek felhasználásával írhatjuk fel ugyanis, hogy a szigetelések feloldása után a rendszer mikroállapotainak száma a két, már csak gondolatban szétválasztott rendszer mikroállapotszámának szorzatával egyenlő.

A fenomenologikus termodinamikából tudjuk, hogy két rendszer között akkor zajlanak le spontán folyamatok, ha a két rendszerben az intenzív állapotjelzők (pl. nyomás, hőmérséklet) valamelyike nem egyezik meg. A spontán folyamatok és a mikroállapotok számának növekedése közötti kapcsolat alapján a továbbiakban mód nyílik a fenomenologikus termodinamikában szereplő *állapotjelzők statisztikus értelmezésére is*.

23.3. A termodinamika II. főtétele. Az entrópia

23.3.1. Az entrópia

Az összetett rendszer mikroállapotainak száma – (23.27) szerint – szorzódó mennyiség, azaz

$$Y_t = Y_1 Y_2.$$

A szokásos termodinamikai mennyiségek körében ilyen típusú mennyiség nincsen. Az intenzív állapotjelzők (nyomás, hőmérséklet) *egyensúlyi állapotban mindenütt azonosak*, tehát a rendszer „darabolásával" nem változnak. Az extenzív állapotjelzők (térfogat, energia) *additívak*, azaz a teljes rendszert jellemző mennyiség a részrendszerek jellemzőinek összege.

A *multiplikatív* (szorzódó) mikroállapotokból egyszerűen kaphatunk additív, tehát extenzív mennyiséget, ha a mikroállapotok *számának logaritmusát vesszük*. Ebben az esetben ugyanis

$$\ln Y_t = \ln Y_1 + \ln Y_2. \tag{23.30}$$

Ennek alapján a statisztikus fizikában a mikroállapotok száma helyett a sokrészecske-rendszer állapotát az

$$S = k \ln Y \tag{23.31}$$

mennyiséggel szokás jellemezni, ahol k a Boltzmann-állandó, ln pedig az ún. *természetes logaritmust* jelenti. Az így értelmezett S mennyiséget entrópiának nevezzük. Az entrópia additív állapotjelző.

Vegyük észre, hogy az entrópia definíciójakor a logaritmus alapszámaként tetszőleges, 1-nél nagyobb számot is használhattunk volna. A későbbiekben látni fogjuk, hogy az e alapszám miért célszerű.

Az $S = k \ln Y$ összefüggés kijelöli az entrópia zéruspontját. Az egyetlen mikroállapottal megvalósuló makroállapot entrópiája zérus. Amennyiben az állapotokat kvantummechanikailag jellemezzük, akkor ez azt jelenti, hogy a rendszer alapállapotban van. Ilyenkor a rendszer állapota egyetlen kvantumszámsorozattal jellemezhető.

Könnyen megérthetjük ezt pl. a kristályokat modellező Einstein-kristályon. Az Einstein-kristály oszcillátorai alapállapotban csak a zérusponti energiával rendelkeznek. Az oszcillátorok energiája ehhez a zérusponti energiához képest növekszik azonos energiaadagokkal. Az alapállapotot megvalósító mikroállapotok száma tehát egy. Ez az állapot jelöli ki a kristály zérusentrópiájú állapotát is.

Nehezebb a probléma abban az esetben, ha az anyaghalmaz viselkedését klasszikus határesetben közelítjük. Ilyenkor az entrópia értéke egy *konstans erejéig határozatlan*. A mikroállapotok száma ugyanis attól is függ, hogy milyen finom skálát választunk az állapotok megszámlálásakor. Általában azonban nem arra van szükségünk, hogy a mikroállapotok számát, s így az entrópiát pontosan meghatározzuk, hanem csak arra, hogy tudjuk, két meghatározott állapot közül melyikhez tartozik több mikroállapot, azaz melyiknek nagyobb az entrópiája, illetve adott folyamat esetén *mennyit változik az entrópia*.

Az entrópia megváltozása nem függ a mikroállapotok megszámlálásakor választott skálától. Így az entrópia megváltozása a

$$\Delta S = k\ln Y_2 - k\ln Y_1 = k\ln\frac{Y_2}{Y_1} \tag{23.32}$$

összefüggésből egyértelműen meghatározható.

Klasszikus számítások esetén tehát az entrópia skála zéruspontját szabadon választhatjuk, hasonlóan pl. a helyzeti vagy belső energia nullaszintjéhez.

23.3.2. A második főtétel

A környezetüktől elszigetelt sokrészecske-rendszerekben a spontán folyamatok során a mikroállapotok száma nő. Ugyanez igaz az entrópiára is, hiszen Y növekedésével $\ln Y$ is nő.

Megállapítható tehát, hogy a *zárt rendszerben olyan folyamatok mehetnek végbe, amelyekben az entrópia nő, vagyis zárt anyaghalmaz entrópiája nem csökkenhet,* tehát

$$\Delta S \geq 0. \tag{23.33}$$

Ez a *termodinamika II. főtételének zárt rendszerekre érvényes alakja.*

A termodinamika II. főtételéből azonnal következik, hogy *zárt rendszer entrópiája egyensúlyi helyzetben maximális,* hiszen amíg spontán folyamatok zajlanak a rendszerben, addig az entrópia folyamatosan nő.

Megjegyzés: Ezt az állítást gyakran entrópiamaximum-elvnek nevezik. Az entrópiamaximum-elv csak következménye a termodinamika második főtételének, de nem egyenértékű vele. A zárt rendszerre vonatkozó maximumelvből ugyanis nem következtethetünk a nyílt folyamatokra.

Az entrópiamaximum-elvvel kapcsolatban igen sok félreértés terjedt el. A félreértések legfőbb oka, hogy az elv kimondásakor gyakran megfeledkeznek arról, hogy csak zárt rendszerre vonatkozóan érvényes, azaz csak akkor alkalmazhatjuk, ha a vizsgált

rendszer energiája állandó. A termodinamika II. főtétele a fenomenologikus termodinamika keretében is megfogalmazható. Az entrópia definíciójában ott makroszkopikus változók szerepelnek. Kimutatható azonban, hogy a statisztikus fizikai és fenomenologikus termodinamikai definíció egyenértékű.

23.3.3. A termodinamika I. főtételének mikroszkopikus értelmezése

Amint az előzőekben megállapítottuk, az anyagi rendszerek mikroállapotainak száma függ a rendszer energiájától. A termodinamika I. főtétele szerint a belső energia munkavégzéssel és hőközléssel növelhető:

$$\Delta U = Q + W. \tag{23.34}$$

Ahhoz, hogy a rendszer energiamérlegét kifejező első főtételt pontosan értsük, szükséges, hogy az I. főtételben makroszkopikusan értelmezett mennyiségek mikroszkopikus jelentését is megvizsgáljuk.

Belső energián a testnek azt az energiáját értjük, amelyet akkor kapunk, ha a teljes energiából elhagyjuk azokat az energiatagokat, amelyek a rendszer valamilyen makroszkopikus mozgásából származnak. Pl. egy futball-labdában levő levegő belső energiája nem különbözik elrúgás előtt és elrúgás után, azaz az egész labda együttes mozgásából nem származik belsőenergia-járulék.

Általában azt mondhatjuk, hogy a belső energiát a rendszer tömegközéppontjához rögzített koordináta-rendszerben számított összenergia adja meg.

Megjegyzés: Egyes esetekben még egyéb megszorításokat is kell tenni. A tömegközéppont mozgásából származó energiajárulékon kívül ugyanis a tömegközéppont körüli rendezett forgásból, illetve a külső (pl. gravitációs, elektromos) terekből származó energia sem ad belsőenergia-járulékot.

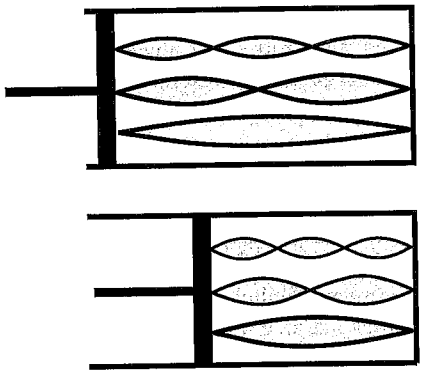
Mikroszkopikus szempontból ezt úgy fogalmazhatjuk, hogy a *belső energia egy állandó értéktől eltekintve a rendszer mikroszkopikus szabadsági fokain eloszló energiák összege.*

Mikroszkopikus szabadsági fokon értjük azokat a szabadsági fokokat, amelyek a sokrészecske-rendszer *egyes elemeinek mozgásával* kapcsolatosak.

A hő és a munka mikroszkopikus jelentésének megértéséhez vegyük példaként ismét az ideális gázt. Egy V térfogatú hengeres edényben, amelyet egyik oldatról mozgatható dugattyú zár le, helyezkedjen el m tömegű, U energiájú ideális gáz!

Az I. főtétel szerint a gáz energiája munkavégzéssel és hőközléssel is megváltoztatható. Megfelelő külső feltételek biztosításával ez a két folyamat jól szétválasztható, és egymástól függetlenül is megvalósítható. Makroszkopikus szempontból a hőközlés mértékét a gáz belső energiájának rögzített dugattyúállás mellett bekövetkező megváltozása adja.

A munkavégzés folyamata csak akkor követhető végig, ha az energiaközlés kvázisztatikusan és a környezettől hőszigetelten megy végbe. Az ideális gáz esetén ez azt jelenti, hogy a dugattyút végtelenül lassan, csupa egyensúlyi helyzeten keresztül toljuk befelé. A kétféle folyamat során lényegesen különböző mikroszerkezeti változások mennek végbe a gázban. Ennek megértésére vizsgáljuk egyetlen dobozba zárt részecske energiájának változását! Amennyiben a részecske energiáját munkavégzéssel, azaz a dugattyú lassú befelé tolásával növeljük,



23.5. ábra

akkor az ábrának megfelelően megváltoznak a részecske energiaszintjei. Az n_x, n_y, n_z kvantumszámokkal jellemzett állapotú részecske energiája az eredeti

$$E\left(n_x, n_y, n_z\right)=\frac{h^2}{8m}\left[\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2+\left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2+\left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2\right]$$

értékről

$$E'\left(n_x, n_y, n_z\right)=\frac{h^2}{8m}\left[\left(\frac{n_x}{L'_x}\right)^2+\left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2+\left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2\right]$$

értékre növekszik, ha a tartály irányban mért hosszúsága L_x-ről L'_x-re csökken.

Mivel a dugattyú mozgása „végtelen lassú", a részecske megmarad az eredeti n_x, n_y, n_z kvantumszámokkal jellemzett stacionárius állapotában. A nagyon lassú folyamat nem gerjeszthet ugrásszerű változásokat. *A befektetett munka tehát teljes mértékben az energiaszintek eltolódása miatt bekövetkező energiaváltozásra* fordítódott, vagyis

$$W=\frac{h^2}{8m}\left[\left(\frac{1}{L'_x}\right)^2-\left(\frac{1}{L_x}\right)^2\right]n_x^2.$$

Az ideális gáz molekulái egymástól teljesen függetlenek, ezért a tartály térfogatának megváltoztatása hasonló változást idéz elő minden egyes molekula energiaszintjeiben.

Hőközléskor a tartály falai makroszkopikusan rögzítettek, az energiaközlés a tartály falát alkotó molekulák élénkülő rezgőmozgása révén megy végbe. Ezt az energiát a gáz részecskéi úgy veszik fel, hogy *magasabb energiájú állapotba gerjesztődnek*. Közben természetesen a lehetséges energiaszintek nem változnak.

Az ideális gáz példáján tett megállapítások általánosan is igazak.

Tetszőleges rendszer esetén a *kvázisztatikus folyamatokban végzett munka a rendszer lehetséges energiaállapotait, a rendszer ún. energiaspektrumát változtatja meg, a rendszerrel közölt hő pedig, az energiaszintek megváltoztatása nélkül, a rendszert gerjeszti magasabb energiájú állapotokba.* A hőközlés tehát a lehetséges mikroállapotokat meghatározó *kvantumszámokat,* az adiabatikus munkavégzés pedig, az adott kvantumszámokhoz tartozó *energiaértékeket* változtatja meg.

23.3.4. Az entrópia megváltozása hőközlés hatására. Reverzibilis folyamatok

Az előzőekben tisztáztuk a rendszerrel közölt hő és munka hatására bekövetkező mikroszkopikus változásokat. Vizsgáljuk meg most, hogy ezen folyamatok hatására hogyan változik az entrópia!

A kvázisztatikus munkavégzéskor – mint megállapítottuk – a lehetséges mikroállapotokat jellemző kvantumszámok maguk nem változnak, csak a hozzájuk tartozó energiaérték nő. A lassú változás során a rendszer mikroállapotai mintegy „átnőnek" az új egyensúlyi állapot mikroállapotaiba, s így a rendszer minden eredetileg lehetséges mikroállapotának megfelel egy új mikroállapot.

A kvázisztatikus adiabatikus munkavégzés során tehát a lehetséges mikroállapotok száma, s *így a rendszer entrópiája nem változik.*

Tegyük fel, hogy két, egymással kapcsolatban álló és a külső környezettől egyébként teljesen elszigetelt rendszer között az energiacsere kvázisztatikus munka útján valósul meg. Ekkor az energiacsere ellenére mind a részrendszerek, mind a teljes rendszer entrópiája állandó marad. Következésképpen sem a termodinamika I., sem a II. főtétele nem tiltja, hogy ez a folyamat fordított irányban is végbemenjen. Az ilyen folyamatokat *megfordítható* vagy *reverzibilis folyamatoknak nevezzük.*

A hőközlés során a rendszer energiaszintjei változatlanok, a kvantumszámok, tehát a lehetséges mikroállapotok azonban változnak.

A rendszer entrópiája hőközlés hatására nő. Ez azért van így, mert hőközléskor úgy változik a rendszer energiája, hogy közben a rendszer egyéb, a külső kényszerek által megszabott állapotjelzői nem változnak. Mint láttuk, állandó anyagmennyiségű egyszerű rendszerek esetén a rendszer jellemzésére elegendő két állapotjelző, pl. az energia és a térfogat. A lehetséges mikroállapotok száma mind a térfogat, mind az energia növekedtével nő. Mivel a hőközlés során a rendszer

energiája úgy nő, hogy közben térfogata állandó, ezért a *hőközlés növeli a mikroállapotok számát, s így az entrópiát is.*

A kvantumállapotra alapozott gondolatmenet alapján jól érthető, hogy az adiabatikus munkavégzés miért nem növeli az entrópiát. Makroszkopikusan azonban ez kevésbé világos, hiszen a munkavégzés növeli a rendszer energiáját, s ezzel úgy látszik, mintha a mikroállapotok számának is növekednie kellene. Ha a gázon munkát végzünk, csökken a gáz térfogata, ami viszont a mikroállapotok számának csökkenését eredményezi. *Kvázisztatikus munka esetén ez a két hatás éppen kompenzálja egymást.*

Megjegyzés: Az eddigiekben megállapítottuk, hogy a környezetétől egyébként elzárt rendszeren végzett kvázisztatikus munka nem növeli a rendszer entrópiáját. Ezt a megállapítást a térfogati munka példájával indokoltuk, kimutatva, hogy a lassú térfogatváltozás nem növeli a lehetséges kvantumállapotok számát. A szokásos fizikai rendszerekben nemcsak térfogati, hanem egyéb típusú (kémiai, elektromos, mágneses stb.) munkavégzés is lehetséges. Anélkül, hogy ezeknek vizsgálatába belemennénk, megállapíthatjuk, hogy kvázisztatikus folyamatokban a hőcserén kívüli egyéb típusú munkavégzések nem növelik az entrópiát. Ennek lényegében az az oka, hogy adott rendszer kvantumállapotainak energiája mindig függ a külső kényszerektől (térfogat, mágneses tér, elektromos tér stb.), s a kvázisztatikus munkavégzés általában az ilyen kényszerfeltételek lassú változásával jár, amelynek során csak a kvantumállapotok energiája s nem betöltöttsége változik.

Kivételt képez azonban ez alól a szabály alól a súrlódási munka. A súrlódási munkához ugyanis nem szükséges, hogy a rendszer állapotát (energiaszintjeit) megszabó külső körülmények, s ezáltal a rendszer állapotjelzői (pl. térfogat) megváltozzanak. Így a súrlódási munka útján közölt energia az állapotok betöltöttségén változtat, vagyis az energia növekedése mikroszerkezetileg a hőközléshez hasonlóan megy végbe.

A súrlódásos folyamatok tehát mindig irreverzibilisek, a súrlódási munka a hőközléshez hasonlóan növeli az entrópiát.

Ellenőrzésképpen kövessük végig egyetlen részecske esetén a mikroállapotok számának változását! Tegyük fel, hogy az m tömegű részecske kezdetben L élhosszúságú egydimenziós dobozban mozog v sebességgel az x tengely mentén. A részecske mozgását az korlátozza az adott szakaszra, hogy az L szakasz két végén elhelyezett ütközőn tökéletesen rugalmasan ütközik. Ekkor – amint azt a kinetikus gázelmélet tárgyalásakor megállapítottuk – a részecske átlagosan

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{2mv}{2\frac{L}{v}}=\frac{mv^2}{L}$$

erőt fejt ki az ütközőkre. Rövidítsük meg kicsiny ΔL-lel a szakasz hosszát! Ehhez

$$W=F\Delta L=\frac{mv^2}{L}\Delta L$$

munkát kell végezni. Beláttuk, hogy az egydimenziós dobozba zárt részecske mikroállapotainak számára fennáll az

$$Y\sim L\sqrt{E}$$

arányosság. Az energiaközlés után a mikroállapotok száma:

$$Y'\sim\left(L-\Delta L\right)\sqrt{E+\frac{mv^2}{L}\Delta L},$$

és mivel ΔL kicsiny, a négyzetgyökös kifejezés jól közelíthető a

$$\sqrt{a+x}\approx\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}x$$

formula szerint (a közelítő összefüggés a négyzetgyökfüggvény a helyen vett sorfejtésének első két tagja). Ily módon:

$$Y'\sim\left(L-\Delta L\right)\left(\sqrt{E}+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{mv^2}{L}\Delta L\right).$$

Elvégezve a beszorzást, és a ΔL-ben másodrendűen kicsiny tagokat elhanyagolva azt kapjuk, hogy

$$Y'\sim L\sqrt{E}-\Delta L\sqrt{E}+L\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{mv^2}{L}\Delta L.$$

Mivel $E=\frac{1}{2}mv^2$, azonnal látható, hogy $Y=Y'$, vagyis az adiabatikus munkavégzés nem változtat a mikroállapotok számán, s így a „rendszer" entrópiáján sem.

23.4. A hőmérséklet statisztikus fizikai értelmezése

Az előzőekben már megállapítottuk, hogy két egymással kölcsönhatásba hozott és egyébként a környezetétől elszigetelt rendszer között olyan folyamatok indulnak meg, amelyek az *egyesített rendszer* mikroállapotainak számát, s így az entrópiáját is növelik. Részletezzük mikroszkopikus szempontból, hogy hogyan megy végbe az energiacsere két egymással kapcsolatba hozott, de környezetétől elszigetelt mikroszkopikus részrendszer között!

A termodinamika II. főtétele szerint a két részrendszer között akkor játszódhatnak le folyamatok, tehát akkor következhet be energiacsere, ha közben a teljes rendszer entrópiája nő, azaz

$$\Delta S_1+\Delta S_2\geq 0, \tag{23.35}$$

ahol ΔS_1 az első, ΔS_2 a második részrendszer entrópiájának a folyamatban bekövetkező változását jelenti. A továbbiakban az egyes részrendszerek állapotjelzőit rendre az 1, illetve a 2 indexszel látjuk el.

Tegyük fel, hogy a rendszerben csak hőcsere történik, amelynek során a második rendszer Q_2 hőt vesz fel, az első pedig Q_1 hőt ad le, és vezessük be a

$$Q_2 = -Q_1 = Q \tag{23.36}$$

jelölést! Rendezzük át az entrópia változásra vonatkozó egyenlőtlenséget és oszszuk el Q-val:

$$\frac{\Delta S_2}{Q} \geq -\frac{\Delta S_1}{Q}. \tag{23.37}$$

Q helyett beírva ide az egyes testekre jellemző hőátadás mértékét azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta S_2}{Q_2} \geq \frac{\Delta S_1}{Q_1}. \tag{23.38}$$

Az egyenlőtlenség reciprokát véve a

$$\frac{Q_2}{\Delta S_2} \leq \frac{Q_1}{\Delta S_1} \tag{23.39}$$

összefüggéshez jutunk.

A $\frac{Q}{\Delta S}$ hányados az egyes részrendszerek által felvett energia és az ennek hatására bekövetkező entrópiaváltozás arányát adja meg. Levezetésünk mutatja, hogy *az a rendszer ad át a másiknak energiát, amelyre a* $\frac{Q}{\Delta S}$ *hányados nagyobb.* A hőközlés szempontjából tehát a $\frac{Q}{\Delta S}$ hányadossal jellemezhetjük a kristály *energiaátadási képességét.*

A $\frac{Q}{\Delta S}$ hányadossal tehát végeredményben a rendszer állapotát jellemezhetjük, s ez az állapotjelző azt szabja meg, hogy két egymással kontaktusba hozott test esetén *milyen irányban zajlik a hőcsere.*

Makroszkopikus testek esetén a hőcserét a kölcsönhatásban levő testek hőmérséklete határozza meg. A környezetüktől elszigetelt rendszerek között a hő mindig a magasabb hőmérsékletű testről kerül át az alacsonyabb hőmérsékletű testre.

A statisztikus fizikában tehát a

$$T = \frac{Q}{\Delta S}$$

hányadossal definiálhatjuk a hőmérsékletet.

23.4.1. A hőmérséklet és az entrópia kapcsolata

A mikroszkopikus kép alapján értelmezett ΔS entrópiaváltozás segítségével a hőmérsékletet a

$$T = \frac{Q}{\Delta S} \tag{23.40}$$

összefüggéssel definiáljuk.

A fenomenologikus termodinamikában az entrópia kicsiny megváltozását a

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \tag{23.41}$$

összefüggéssel értelmeztük, ahol Q a reverzibilis úton közölt hőmennyiséget jelentette. A reverzibilitás kikötésére azért volt szükség, mert az energiacsere nemcsak hőközlés, hanem irreverzibilis munkavégzés útján is végbemehet. Mivel az előzőekben kizárólag hőcserefolyamatokat engedtünk meg, az entrópiát definiáló fenomenologikus kifejezés és a mikroszerkezeti kép alapján a hőmérsékletet meghatározó összefüggés összhangban van.

A továbbiakban azt kell még ellenőriznünk, hogy a hőmérséklet statisztikus fizikai definíciója akkor is fenntartható-e, ha az energiaváltozás nem pusztán hőközlés formájában megy végbe. Ez azonban nyilvánvalóan következik abból, hogy a reverzibilis munkavégzés az entrópiát nem változtatja meg. Így a

$$T = \frac{Q^{\text{rev}}}{\Delta S} \tag{23.42}$$

összefüggés a hőmérsékletnek a fenomenologikus termodinamikával összhangban álló definíciója.

23.4.1.1. Az ideális gáz hőmérséklete

A hőmérséklet definícióját a termodinamikában a $pV = NkT$ általános gázegyenlettel is megadtuk. A következőkben példaként az ideális gázra megmutatjuk, hogy a statisztikusan értelmezett hőmérséklet megegyezik a gázegyenletben szereplő hőmérséklettel.

Illusztrációként válasszunk először speciális folyamatot! Táguljon a V térfogatú, N atomból álló ideális gáz kicsiny ΔV térfogattal úgy, hogy közben hőmérséklete ne változzék! Ha az ideális gáz hőmérséklete állandó, akkor energiája sem változik, így a gáznak a munka formájában leadott $p\Delta V$ energia fedezésére hőt kell felvennie, tehát

$$Q = p\Delta V. \tag{23.43}$$

A folyamat során a gáz entrópiája megváltozik. Az entrópiaváltozás a

$$\Delta S = k\ln\frac{Y_{\text{végső}}}{Y_{\text{kezdeti}}} = kN\ln\frac{V+\Delta V}{V} = kN\ln\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right). \tag{23.44}$$

A felvett hő és az entrópiaváltozás segítségével a hőmérséklet a

$$T = \frac{p\Delta V}{kN\ln\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)} \tag{23.45}$$

alakban írható fel.

A kicsiny térfogatváltozás során a munkavégzést $p\Delta V$ alakban írtuk fel, azaz a nyomást is állandónak tekintettük. Amennyiben ez a közelítés érvényes, akkor a hőmérséklet kifejezésének nevezőjében szereplő logaritmus az

$$\ln\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right) \approx \frac{\Delta V}{V}$$

összefüggéssel helyettesíthető. Így a hőmérsékletre

$$T = \frac{pV}{kN} \tag{23.46}$$

adódik, ami megegyezik a gázegyenletből kapottal.

A munkavégzés, illetve a logaritmus meghatározásakor alkalmazott közelítések tulajdonképpen azt jelentik, hogy végtelen kicsiny ΔV térfogatváltozást, azaz ún. elemi folyamatot vizsgáltunk. A hőmérséklet meghatározásához ekkor a

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta V}{\ln\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)} = \lim_{\frac{\Delta V}{V}\to 0}\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\ln\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)}V$$

határértéket kell meghatározni. Az elemi analízisből ismeretes, hogy

$$\lim_{\frac{\Delta V}{V}\to 0}\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\ln\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)} = 1.$$

A statisztikus fizikai és a gáztörvényre alapozott fenomenologikus hőmérséklet azonosságához tehát szükséges, hogy e alapú logaritmust használjunk. Amennyiben más alapszámot választanánk, akkor a statisztikus fizikai és fenomenologikus hőmérséklet között csak arányosság és nem egyenlőség állna fenn.

A statisztikus és a fenomenologikus hőmérséklet- és entrópiafogalom összhangját igazoló további eredményhez jutunk, ha az ideális gázon olyan elemi folyamatot

hajtunk végre, amelyben a gáz térfogata nem változik. Ekkor a folyamat során közölt hő megegyezik a gáz belső energiájának megváltozásával, azaz $\Delta E = Q$.

Ebben a folyamatban az entrópia

$$\Delta S = k\ln\frac{Y\left(E+\Delta E\right)}{Y\left(E\right)}$$

értékkel változik, ami az állapotsűrűség általános kifejezésének felhasználásával

$$\Delta S = \frac{3N-2}{2}k\ln\frac{E+\Delta E}{E} \approx \frac{3N}{2}k\ln\left(1+\frac{\Delta E}{E}\right)$$

alakra hozható. ΔS helyére beírva a hőmérséklet definíciójából adódó $\frac{\Delta E}{T}$ kifejezést, és felhasználva, hogy kicsiny ΔE esetén $\ln\left(1+\frac{\Delta E}{E}\right) \approx \frac{\Delta E}{E}$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta E}{T} = \frac{3N}{2}k\frac{\Delta E}{E}, \tag{23.47}$$

azaz az ideális gáz belső energiája:

$$E = \frac{3}{2}NkT, \tag{23.48}$$

ami megegyezik a kinetikus gázelméletben levezetett összefüggéssel.

23.4.1.2. Az Einstein-kristály hőmérséklete

Az Einstein-kristály mesterséges konstrukció, így a $T = \frac{Q}{\Delta S}$ definíció alapján meghatározott hőmérsékletét nem vethetjük össze kísérleti tapasztalatokkal. Példaként azonban megmutatjuk, hogy két egymással energiacsere-kapcsolatba hozott Einstein-kristály esetén az entrópia akkor nő, ha a magasabb hőmérsékletű rész ad át energiát az alacsonyabb hőmérsékletűnek. A modellkristályon az energiacsere-folyamatok igen könnyen követhetők, hiszen feltételeink szerint az Einstein-kristály csak meghatározott adagokban vehet fel energiát.

Jelöljük az egyik kristályfél adatait 1-es, a másikéit 2-es indexszel! Legyen a részecskék száma N_1, illetve N_2, az energiaadag nagysága ε_1, illetve ε_2, az energiaadagok száma pedig r_1, illetve r_2! Jelöljük továbbá Y_1-gyel, illetve Y_2-vel és S_1-gyel, illetve S_2-vel a két kristályfél mikroállapotainak számát, illetve entrópiáját az

energiacsere-folyamat előtt, és legyenek ugyanezek a mennyiségek rendre Y'_1, Y'_2 és S'_1, illetve S'_2 az energiacsere-folyamat után!

Tegyük fel, hogy az első kristály $q_1\varepsilon_1$ energiát ad át a második kristálynak! Ez a folyamat csak akkor mehet végbe, ha közben a teljes kristály entrópiája nő, azaz ha

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 \geq 0.$$

Az entrópiaváltozás a mikroállapotok számával a

$$\Delta S = k \ln \frac{Y'}{Y}$$

alakban fejezhető ki.

Az Einstein-kristály mikroállapotainak száma (23.24) szerint:

$$Y(r) = \binom{N+r-1}{r} = \frac{(N+r-1)!}{r!(N-1)!}$$

A mikroállapotok száma q energiaadag felvételének hatására az

$$Y(r+q) = \binom{N+r+q-1}{r+q} = \frac{(N+r+q-1)!}{(r+q)!(N-1)!}$$

értékre változik. A mikroállapotok számának hányadosát az

$$\frac{Y(r+q)}{Y(r)} = \frac{N+r+q-1}{r+q} \frac{N+r+q-2}{r+q-1} \cdots \frac{N+r}{r+1}$$

összefüggéssel adhatjuk meg. Amennyiben N és r is elegendően nagy, és a rendszer $q \ll r$ számú energiaadagot vesz fel, akkor a jobb oldalon álló q darab szorzótényező mindegyike az

$$\frac{N+r}{r} = 1 + \frac{N}{r}$$

számmal közelíthető. Ennek alapján az energiafelvétel után a mikroállapotok száma jól közelíthető az

$$Y(r+q) = \left(1 + \frac{N}{r}\right)^q Y(r) \tag{23.49}$$

összefüggéssel. Így q energiaadag felvételének hatására a kristály entrópiája

$$\Delta S = kq \ln\left(1 + \frac{N}{r}\right) \tag{23.50}$$

értékkel változik.

Térjünk vissza most a két kristály teljes entrópiaváltozásának meghatározására!

Az első kristály által leadott $q_1\varepsilon_1$ energiát a második kristály $q_2 = \frac{q_1\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ adagban veszi fel. Az energiacsere feltétele tehát az, hogy teljesüljön a

$$-kq_1 \ln\left(1 + \frac{N_1}{r_1}\right) + k\frac{q_1\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln\left(1 + \frac{N_2}{r_2}\right) \geq 0 \tag{23.51}$$

egyenlőtlenség. Ebből átrendezéssel az adódik, hogy az energiacsere akkor megy végbe, ha

$$\frac{\varepsilon_2}{\ln\left(1 + \frac{N_2}{r_2}\right)} \leq \frac{\varepsilon_1}{\ln\left(1 + \frac{N_1}{r_1}\right)}. \tag{23.52}$$

Szorozzuk meg a bal oldali törtet $\frac{q_2}{q_2}$-vel, a jobb oldalt pedig $\frac{q_1}{q_1}$-gyel! Azt kapjuk, hogy

$$\frac{q_2\varepsilon_2}{\ln\left(1 + \frac{N_2}{r_2}\right)^{q_2}} \leq \frac{q_1\varepsilon_1}{\ln\left(1 + \frac{N_1}{r_1}\right)^{q_1}}. \tag{23.53}$$

A törtek számlálójában éppen a kicserélt $Q = q_1\varepsilon_1 = q_2\varepsilon_2$ hő, a nevezőkben pedig az ennek hatására az egyes kristályokban bekövetkező entrópiaváltozás abszolút értéke áll. Így a (23.52) egyenlőtlenség az

$$\left|\frac{Q}{\Delta S_1}\right| \geq \left|\frac{Q}{\Delta S_2}\right| \tag{23.54}$$

alakra hozható. Ez pedig azt jelenti, hogy az 1. kristály hőmérséklete magasabb.

Végül az ideális gázhoz hasonlóan határozzuk meg az Einstein-kristály esetén is, hogyan függ a kristály energiája a hőmérséklettől!

Minthogy az Einstein-kristállyal csak hő formájában közölhetünk energiát, az entrópiaváltozás $Q = \Delta E$ energia felvételének hatására

$$\Delta S = \frac{\Delta E}{T} \tag{23.55}$$

értékkel változik.

Mivel a kicsiny $\Delta E = q\varepsilon$ energia felvételekor:

$$\Delta S = kq\ln\left(1+\frac{N}{r}\right). \tag{23.56}$$

Helyettesítsük be ebbe az összefüggésbe a $q=\frac{\Delta E}{\varepsilon}$ és a kristály E összenergiájára vonatkozó $E = r\varepsilon$ összefüggésből adódó $r=\frac{E}{\varepsilon}$ kifejezéseket! Az entrópiára vonatkozó fenti egyenletek jobb oldalát egyenlővé téve azt kapjuk, hogy

$$k\frac{\Delta E}{\varepsilon}\ln\left(1+\frac{N\varepsilon}{E}\right)=\frac{\Delta E}{T}, \tag{23.57}$$

amiből

$$1+\frac{N\varepsilon}{E}=e^{\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{23.58}$$

Kifejezve innen E-t, az Einstein-kristály energiájára

$$E=\frac{N\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1} \tag{23.59}$$

adódik. Az energiakifejezésből az egyetlen oszcillátorra jutó átlagos energia:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{E}{N}=\frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}. \tag{23.60}$$

Ez az összefüggés sok esetben jól közelíti a valódi kristályok egy atomra jutó átlagos energiáját is.

Az átlagos energia tehát a hőmérséklet mellett a kristály által felvehető energiakvantum nagyságától is függ. Amennyiben $\varepsilon \ll kT$, akkor használhatjuk a kis x-re vonatkozó $e^x \approx 1 + x$ közelítést, azaz

$$\bar{\varepsilon}\approx\frac{\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{kT}-1}=kT, \tag{23.61}$$

vagyis ebben az esetben a kristályt alkotó egyetlen rezgőrendszerre átlagosan kT energia jut. Ezzel tulajdonképpen azt bizonyítottuk, hogy az Einstein-kristály esetén is, az $\varepsilon \ll kT$ feltétel mellett érvényes az ekvipartíciótétel, hiszen a lineáris harmonikus oszcillátor energiája $\frac{1}{2}Dx^2+\frac{1}{2}mv_x^2$ alakban írható fel; szabadsági fokainak száma tehát kettő.

Az $\bar{\varepsilon} = kT$ összefüggés felhasználásával könnyen meghatározhatjuk az Einstein-kristály mólhőjét is. Az $N/3$ atomból álló valódi kristályt N lineáris oszcillátorral modelleztük, így a kristály energiája T hőmérsékleten:

$$E = N\bar{\varepsilon} = NkT. \tag{23.62}$$

Mivel

$$C=\frac{\Delta E}{\Delta T}=\frac{Nk\left(T+\Delta T\right)-NkT}{\Delta T}, \tag{23.63}$$

így

$$C = Nk. \tag{23.64}$$

Egy mólnyi anyag esetén $N/3$ megegyezik az Avogadro-számmal, azaz

$$C = 3R = 24,8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}. \tag{23.65}$$

A valódi kristályok mólhője igen alacsony hőmérsékletektől eltekintve 24–26 J/K, azaz az Einstein-kristály ebből a szempontból igen jó modellje a valódi kristályoknak. Azt a tényt, hogy *nem túl alacsony hőmérsékleten a kristályok mólhője jó közelítéssel 3R, Dulong–Petit-szabálynak nevezzük.*

A kristályos anyagok fajhője igen alacsony hőmérsékleten erősen hőmérsékletfüggővé válik. Megmutatjuk, hogy az Einstein-kristály is tükrözi ezt a hőmérsékletfüggést. Alacsony hőmérsékleten ugyanis kT igen kicsinnyé válik, ezért az $\varepsilon \ll kT$ közelítés helyett $\varepsilon \gg kT$ lép érvénybe. Ekkor az átlagos energiát megadó formula nevezőjében $e^{\frac{\varepsilon}{kT}} \gg 1$, így jó közelítéssel:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}\approx\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{23.66}$$

Tehát az $N/3 = N_A$ atomból álló kristály energiája most:

$$E=3N_A\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{23.67}$$

Ebből a mólhőre:

$$C=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T}=3N_A\frac{\varepsilon^2}{kT^2}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \tag{23.68}$$

adódik.

23.5. Az energia eloszlása állandó hőmérsékletű rendszerben

A környezetünkben levő rendszerek általában nincsenek egymástól elszigetelve. A szobában levő tárgyak között pl. szabadon mehet végbe hőcsere.

Adott, a környezetéhez képest kicsiny részrendszer számára a termikus egyensúlyban levő környezet hőtartály szerepét játssza, azaz tetszőleges mennyiségű energia átadására, illetve felvételére képes anélkül, hogy saját hőmérséklete megváltozna. A kiválasztott kicsiny részrendszer és a környezete együtt már állandó energiájú, izolált rendszernek tekinthető. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy *a környezetéhez képest kicsiny részrendszer milyen valószínűséggel kerül adott energiájú állapotba.*

A gondolatmenet teljesen általánosan érvényes tetszőleges rendszer esetén, amelyben a rendszer energiája a részrendszerek energiájából additív módon tevődik össze. Így pl. vizsgálhatjuk azt, hogy az ideális gáz egy molekulája milyen valószínűséggel rendelkezik adott energiával, miközben a rendszer teljes energiája állandó.

23.5.1. A Boltzmann-eloszlás

Jelöljük A-val a kiválasztott kicsiny részrendszert (pl. az ideális gáz egy molekuláját), B-vel pedig a környezetet (az ideális gáz *többi molekuláját*)! Legyen az A és B rendszer együttes energiája E, és vizsgáljuk, hogy az A rendszer milyen valószínűséggel található adott ε energiájú állapotában! Ha az A rendszer ε energiájú állapotban van, akkor a B rendszer energiája $E-\varepsilon$, azaz az A rendszer ε energiájú állapotai a teljes (az A és B egyesítéséből keletkező) rendszer azon mikroállapotaiban valósulnak meg, amikor a B rendszer energiája $E-\varepsilon$.

Ennek megfelelően az egyesített rendszerben ennek az állapotnak

$$Y_A(\varepsilon)\,Y_B(E-\varepsilon) \tag{23.69}$$

számú mikroállapot felel meg, hiszen a két rendszer mikroállapotai egymástól függetlenül változtathatók. Így az A rendszer ε energiájú állapotának $P_A(\varepsilon)$ valószínűsége

$$P_A(\varepsilon)=\frac{Y_A(\varepsilon)\,Y_B(E-\varepsilon)}{Y(E)}, \tag{23.70}$$

ahol $Y(E)$ az egyesített rendszer mikroállapotainak száma. Vezessük be továbbá a

$$w_A(\varepsilon)=\frac{P_A(\varepsilon)}{Y_A(E)}=\frac{Y_B(E-\varepsilon)}{Y(E)} \tag{23.71}$$

valószínűséget, amely az A rendszer egyetlen ε energiájú állapotának valószínűségét adja meg.

Az $\dfrac{1}{Y(E)}$ arányossági tényező meghatározásának elkerülésére viszonyítsuk a $w_A(\varepsilon)$ valószínűséget az A rendszer zérusenergiájú egyetlen állapotának valószínűségéhez, azaz vizsgáljuk a

$$\frac{w_A(\varepsilon)}{w_A(0)}=\frac{Y_B(E-\varepsilon)}{Y_B(E)} \tag{23.72}$$

hányadost!

Az $\dfrac{Y_B(E-\varepsilon)}{Y_B(E)}$ mennyiség a B rendszer $E-\varepsilon$ és E energiájú állapotához tartozó mikroállapotok számának hányadosa. A mikroállapotok számának megváltozása azonban meghatározható a hőmérséklet $T=\dfrac{Q}{\Delta S}$ (ahol most $Q=\varepsilon$) definíciója segítségével, ha feltételezzük, hogy az energiacsere hőközlés útján megy végbe. Mivel

$$\Delta S=k\ln\frac{Y(E-\varepsilon)}{Y(E)},$$

azt kapjuk, hogy

$$-\frac{\varepsilon}{kT}=\ln\frac{Y_B(E-\varepsilon)}{Y_B(E)}, \tag{23.73}$$

tehát

$$e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}=\frac{Y_B(E-\varepsilon)}{Y_B(E)}, \tag{23.74}$$

ahonnan

$$\frac{w_A(\varepsilon)}{w_A(0)}=e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

vagyis

$$w_A(\varepsilon)=w_A(0)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{23.75}$$

Az összefüggésből látható, hogy *a zérusenergiájú állapot valószínűségének ismeretében tetszőleges ε energiájú állapot valószínűsége meghatározható.* A zérusenergiájú állapot valószínűségét meghatározhatjuk abból a feltételből, hogy

$$\sum_i w_A(\varepsilon_i)=1,$$

ahol ε_i végigfut az A részrendszer összes lehetséges energiaállapotán. Az összegzés elvégzéséhez azonban ismernünk kell az adott rendszer lehetséges energiáit, így ezzel csak konkrét példák kapcsán foglalkozunk.

A betöltési valószínűségekre vonatkozó $w_A(\varepsilon)$ valószínűség-eloszlást most J. W. Gibbs általános gondolatmenete szerint vezettük le. Az eloszlásfüggvényt azonban – ideális gázra – először Boltzmann határozta meg, ezért *Boltzmann-eloszlásnak* nevezzük.

Az (23.75 és 23.76) eloszlásfüggvény alapján azonnal megállapítható, hogy az A részrendszer ε energiájú állapotát

$$P_A(\varepsilon)=Y_A(\varepsilon)w_A(0)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \tag{23.76}$$

valószínűséggel tölti be, ahol $w_A(0)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ az egyetlen ε energiájú kvantumállapot betöltési valószínűsége, és $Y_A(\varepsilon)$ az A rendszer ε energiájú állapotainak száma. Az ε energiájú állapot valószínűségét tehát az állapotok $Y_A(\varepsilon)$ számának és az egyetlen energiájú kvantumállapot valószínűségének szorzata adja.

A valószínűségek összehasonlítása mutatja, hogy amennyiben egyes kvantumállapotok valószínűségét hasonlítjuk össze, akkor mindig a zérusenergiájú állapot a legvalószínűbb. Mivel azonban az alapállapotnál nagyobb energiák esetén sok kvantumállapothoz tartozik ugyanaz az energia, az ε energiájú állapot valószínűsége jóval meghaladhatja a zérusenergiájú állapot valószínűségét. Klasszikus határesetben, a zérusenergiájú állapotban az állapotsűrűség zérus, tehát a zérusenergiájú állapot valószínűsége is zérus.

23.5.2. A részecskék energia szerinti eloszlása

Az előzőekben levezetett Boltzmann-eloszlás minden olyan rendszerre alkalmazható, amelyben a részrendszerek kölcsönhatása elhanyagolható. Ennek a feltételnek gyakran eleget tesznek atomokból, illetve molekulákból álló rendszerek is. Elhanyagolható pl. a kölcsönhatás az Einstein-kristályt alkotó oszcillátorok, illetve az ideális gáz molekulái között is. Ilyen esetekben részrendszerként egyetlen molekulát is választhatunk.

Az azonos részecskékből álló rendszer tagjai teljesen egyformák, tehát a rendszer minden egyes részecskéje azonos valószínűséggel veszi fel ε energiájú állapotát.

Így az N független részecskéből álló rendszerben az ε energiával rendelkező részecskék $n(\varepsilon)$ száma a (23.76) valószínűség-eloszlás alapján az

$$n(\varepsilon)=NY(\varepsilon)w(0)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \tag{23.77}$$

összefüggéssel adható meg.

23.5.2.1. Az Einstein-kristály energiaeloszlása

Az $N/3$ atomból álló kristályt az Einstein-modell szerint N egymástól független harmonikus oszcillátorral helyettesítettük. Feltételeztük továbbá, hogy az egyes oszcillátorok ε energiája csak az ε_0 energiakvantum egész számú többszöröse lehet ($\varepsilon = l\varepsilon_0$).

A részecskeszámra vonatkozó összefüggés szerint az ε energiájú oszcillátorok száma:

$$n(\varepsilon)=NY(\varepsilon)w(0)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{23.78}$$

Mivel esetünkben az ε energiájú állapot nem degenerált (egy oszcillátor esetén minden energiához egyetlen kvantumállapot tartozik), $Y(\varepsilon) = 1$, azaz

$$n(\varepsilon)=Nw(0)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{23.79}$$

Ebből azonnal adódik, hogy $N(0) = n(0)$, vagyis az exponenciális függvény szorzótényezője a zérusenergiájú részecskék számával egyezik meg, tehát

$$n(\varepsilon)=n(0)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{23.80}$$

Ez az eredmény azt mutatja, hogy *az Einstein-kristályban mindig a zérusenergiájú atomok (oszcillátorok) száma a legnagyobb.*

Az $n(0)$ érték esetünkben egyszerűen meghatározható a részecskeszámra vonatkozó

$$N=\sum_{l=0}^{\infty} n(0)e^{-\frac{l\varepsilon_0}{kT}}=n(0)\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\frac{l\varepsilon_0}{kT}} \tag{23.81}$$

feltételből. A szumma jel alatti kifejezés végtelen mértani sor, amelynek hányadosa $e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}$, így az összeg a

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\frac{l\varepsilon_0}{kT}} = \frac{1}{1-e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}} \tag{23.82}$$

alakban fejezhető ki. Ennek segítségével $n(0)$-ra azt kapjuk, hogy

$$n(0) = N\left(1-e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}\right). \tag{23.83}$$

Mivel az Einstein-kristályban a lehetséges energiaállapotok igen egyszerűen megadhatók, könnyen kifejezhetjük az adott $\varepsilon_{l_0} = l_0\varepsilon_0$ küszöbenergiánál nagyobb energiájú részecskék számát:

$$N(\varepsilon > l_0\varepsilon_0) = \sum_{j=0}^{\infty} n(0)\, e^{-\frac{(l_0+j)\varepsilon_0}{kT}}. \tag{23.84}$$

Ebből az $e^{-\frac{l_0\varepsilon_0}{kT}}$ tényező kiemelésével

$$N(\varepsilon > l_0\varepsilon_0) = e^{-\frac{l_0\varepsilon_0}{kT}} \sum_{j=0}^{\infty} n(0)\, e^{-\frac{j\varepsilon_0}{kT}}. \tag{23.85}$$

adódik. Figyelembe véve, hogy a szumma jel alatti kifejezés éppen a rendszer N részecskeszámával egyezik meg, az $l_0\varepsilon_0$-nál nagyobb energiájú részecskék számát az

$$N(\varepsilon > l_0\varepsilon_0) = Ne^{-\frac{l_0\varepsilon_0}{kT}} \tag{23.86}$$

formulával fejezhetjük ki.

A nagy energiájú részecskék száma azért fontos számunkra, mert a fizikai folyamatok többnyire csak adott küszöbenergia felett indulnak meg, így általában csak a gyors részecskék vehetnek részt a folyamatban.

23.5.2.2. Az egyatomos ideális gáz energiaeloszlása

Alkalmazzuk az

$$n(\varepsilon) = Nw(0)\,Y(\varepsilon)\,e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \tag{23.87}$$

eloszlást az egyatomos ideális gáz részecskéire! Részrendszerként tehát válasszuk a gáz atomjait! Megállapítottuk, hogy a $V = L^3$ térfogatú dobozba zárt részecske energiaszintjei közönséges körülmények között olyan sűrűn követik egymást, hogy a részecske energiája már folytonosnak tekinthető. Ebben az esetben az ε és közötti $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ energiaállapotok számát $Y(\varepsilon)\Delta\varepsilon$ adja meg, ahol most $Y(\varepsilon)$ az állapotsűrűség. A (23.13) formula szerint ezt az

$$Y(\varepsilon)\Delta\varepsilon = \frac{2V\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\Delta\varepsilon \tag{23.88}$$

összefüggés határozza meg. Ily módon a gáz atomja közül

$$n(\varepsilon)\Delta\varepsilon = Nw(0)\frac{2V\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\Delta\varepsilon \tag{23.89}$$

rendelkezik ε és $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ közé eső energiával. A $w(0)$ szorzótényező értékét az összrészecskeszámra vonatkozó

$$N = \int_0^{\infty} n(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = Nw(0)\frac{2V\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty}\varepsilon^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\mathrm{d}\varepsilon \tag{23.90}$$

feltételből határozhatjuk meg. Integráltáblázatok szerint a jobb oldalon álló integrál értéke:

$$\int_0^{\infty}\varepsilon^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}(kT)^{\frac{3}{2}}}{2}. \tag{23.91}$$

Ennek megfelelően:

$$w(0) = \frac{h^3}{V(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}. \tag{23.92}$$

A $w(0)$ érték felhasználásával a gázatomok energia szerinti eloszlását meghatározó Boltzmann-eloszlás az

$$n(\varepsilon) = N\frac{2\pi}{(\pi kT)^{\frac{3}{2}}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \tag{23.93}$$

alakot ölti. Ezt felhasználva az

$$\overline{\varepsilon} = \frac{E}{N} = \int_0^{\infty} n(\varepsilon)\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\infty}\varepsilon^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\mathrm{d}\varepsilon \tag{23.94}$$

összefüggésből meghatározható az ideális gáz egy atomjának átlagos energiája. Integráltáblázatok szerint

$$\int_0^\infty \varepsilon^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = \frac{3\pi^{\frac{1}{2}}}{4}\left(kT\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{23.95}$$

azaz

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT.$$

A kapott eredmény ideális gázra vonatkozóan igazolja az ekvipartíciótételt.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az $Y(\varepsilon)$ függvény (23.88) alakjának megválasztásával folytonos energiaeloszlásra tértünk át, így a nyert eredmények klasszikus fizikai közelítésben igazak.

23.5.2.3. A Maxwell-féle sebességeloszlás

A Boltzmann-eloszlás alapján egyszerűen meghatározhatjuk az egyatomos gázok sebességének nagyság szerinti eloszlását is.

Határozzuk meg, hogy az N molekulából álló gázban hány molekula rendelkezik v és $v + \Delta v$ közé eső sebességgel! Az eloszlás egyszerűen adódik a Boltzmann-eloszlásból kapott részecskeszám-eloszlásból, ha behelyettesítjük az

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}mv^2}$$

és

$$\Delta\varepsilon = \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\Delta v$$

formulákat. Eszerint

$$n\left(v\right)\Delta v = Nw\left(0\right)\frac{2V\pi}{h^3}\left(2m\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} mv\Delta v, \tag{23.96}$$

amiből a $w(0)$ értékét meghatározó (lásd. egyatomos ideális gáz energiaeloszlása) összefüggés felhasználásával és rendezéssel adódik, hogy

$$n\left(v\right)\Delta v = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 \Delta v. \tag{23.97}$$

A (23.97) függvényt, mint már említettük, Maxwell határozta meg, ezért Maxwell-féle sebességeloszlásnak nevezzük. Belátható, hogy többatomos, ideális gázra is ugyanez a

sebességeloszlás adódik. Az eloszlásfüggvény szélsőértékhelyét, tehát a legvalószínűbb sebességet az

$$n'\left(v\right) = 0$$

egyenletből határozhatjuk meg. A deriválást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} - \frac{mv^2}{kT}e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0,$$

amiből

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{23.98}$$

Vegyük észre, hogy ez a sebesség sem a molekulák $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{m}}$ átlagsebességével, sem a $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ négyzetes középsebességgel nem egyezik meg pontosan. A molekulák átlagos mozgása azonban e három átlaggal szinte egyenértékű módon jellemezhető.

23.6. A Gibbs-eloszlás

A Boltzmann-eloszlás levezetésére alkalmazott Gibbs-féle gondolatmenet során kihasználtuk, hogy a vizsgált A részrendszer térfogata is és részecskeszáma is állandó, s így a részrendszer a rendszer többi tagjával csak hő formában cserélhet energiát. Általános esetben azonban nem tételezhetjük fel, hogy a vizsgált részrendszerben lévő részecskék száma állandó, s a részrendszert csak térfogatának rögzítésével választhatjuk meg. Ebben az esetben a részrendszer és a környezete között kémiai munka árán is létrejöhet energiacsere.

A Boltzmann-eloszlás levezetésekor alkalmazott gondolatmenetet általánosítva határozzuk meg, annak a valószínűségét, hogy egy makroszkopikusan kicsiny A részrendszer ε energiával és N_A darab részecskével rendelkezik, ha környezettel energiát és részecskéket is cserélhet. Jelöljük az A részrendszer környezetét B-vel, és legyen az A és B egyesítéséből adódó zárt rendszer részecskeszáma N, energiája E!

Az egyesített rendszer olyan mikroállapotainak száma, amelyben A részecskeszáma N_A, energiája ε, az $Y_A(\varepsilon, N_A)Y_B(E-\varepsilon, N-N_A)$ szorzattal adható meg. Ennek megfelelően az A részrendszer (ε, N_A) állapota

$$P_A\left(\varepsilon,\ N_A\right) = \frac{Y_A\left(\varepsilon, N_A\right)Y_B\left(E-\varepsilon, N-N_A\right)}{Y\left(E\right)} \tag{23.99}$$

valószínűséggel következik be. A (23.99) összefüggésből azonnal leolvasható, hogy az A rendszer egyetlen (ε, N_A) kvantumállapotának valószínűsége:

$$w\left(\varepsilon,\ N_A\right)=\frac{P_A\left(\varepsilon,\ N_A\right)}{Y_A\left(\varepsilon\right)}=\frac{Y_B\left(E-\varepsilon, N-N_A\right)}{Y\left(E\right)}. \tag{23.100}$$

Hasonlítsuk össze ezt a valószínűséget azzal, amikor $\varepsilon_A = 0$, $N_A = 0$! Azt kapjuk, hogy

$$\frac{w\left(\varepsilon,\ N_A\right)}{w\left(0,\ 0\right)}=\frac{Y_B\left(E-\varepsilon, N-N_A\right)}{Y_B\left(E\right)}. \tag{23.101}$$

A kapott hányados csak a B rendszer adatait tartalmazza, s az entrópia definíciója értelmében

$$\frac{\Delta S}{k}=\ln\frac{Y_B\left(E, N\right)}{Y_B\left(E-\varepsilon, N-N_A\right)}, \tag{23.102}$$

ahol ΔS a B rendszer entrópiájának megváltozását fejezi ki, ha energiája ε-nal, részecskeszáma N_A-val növekedik. Ennek megfelelően:

$$Y_B\left(E-\varepsilon, N-N_A\right)=Y_B\left(E, N\right)e^{-\frac{\Delta S}{k}}. \tag{23.103}$$

Tudjuk azonban, hogy

$$\Delta S=\frac{Q}{T}, \tag{23.104}$$

valamint, hogy a termodinamika I. főtétele szerint

$$Q=\Delta E+W$$

Esetünkben a munkavégzés mechanikai és kémiai részből tevődik össze, így

$$Q=T\Delta S=\Delta E+p\Delta V-\mu\Delta N. \tag{23.105}$$

Most $\Delta V = 0$, $\Delta E = \varepsilon$, és $\Delta N = N_A$, azaz

$$\Delta S=\frac{\varepsilon-\mu N_A}{T}. \tag{23.106}$$

Behelyettesítve ezt a (23.102) formulába, majd az eredmény segítségével kifejezve a $w(\varepsilon, N_A)$ valószínűséget, azt kapjuk, hogy

$$w\left(\varepsilon,\ N_A\right)=w\left(0,0\right)e^{\frac{\mu N_A-\varepsilon}{kT}}. \tag{23.107}$$

A $w(0, 0)$ szorzó meghatározható abból a feltételből is, hogy

$$\sum_{\varepsilon,N_A} w\left(\varepsilon, N_A\right)=1, \tag{23.108}$$

tehát

$$w\left(0,0\right)=\frac{1}{\sum\limits_{\varepsilon,N_A} e^{\frac{\mu N_A-\varepsilon}{kT}}}. \tag{23.109}$$

A (23.107) eloszlást *Gibbs-eloszlásnak* nevezzük.

23.6.1. A Gibbs-eloszlás alkalmazásai

A Gibbs-eloszlás segítségével is meghatározhatjuk, hogy egy független részecskékből álló rendszerben átlagosan hány részecske rendelkezik meghatározott ε_k energiával.

Az ε energiájú és N_A részecskeszámú alrendszer energiája az egyes részecskék ε_k energiáival az

$$\varepsilon\left(N_A\right)=\sum_k n_k\varepsilon_k \tag{23.110}$$

összefüggéssel, az N_A részecskeszám pedig az

$$N_A=\sum_k n_k \tag{23.111}$$

összeggel adható meg. Az n_k számsorozatot szokás *betöltési számoknak* is nevezni, hiszen az $n_1, n_1, \ldots n_k \ldots = \{n_k\}$ sorozat azt adja meg, hogy az A alrendszerben hány részecske tölti be az $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_k, \ldots$ állapotokat.

Ennek megfelelően $w(0, 0)$ az egyes betöltésiszám-sorozatok segítségével átírható a

$$w\left(0,0\right)=\frac{1}{\sum\limits_{n_1,\ldots,n_k} e^{-\frac{1}{kT}\left[n_1\left(\varepsilon_1-\mu\right)+n_2\left(\varepsilon_2-\mu\right)+\ldots\right]}}. \tag{23.112}$$

alakra, ahol az összegezést minden betöltésiszám-sorozatra ki kell terjeszteni.

Határozzuk meg most annak a valószínűségét, hogy az ε_j energiájú állapotot éppen n_j számú részecske tölti be! Ezt úgy kaphatjuk meg, hogy az n_j érték rögzítése mellett összegezünk az összes, e feltétel mellett lehetséges betöltésiszám-sorozatokra, azaz

$$w\left(n_j\right)=\frac{\sum\limits_{n_1,\ldots,n_{j-1},n_{j+1},\ldots n_k,n_j=\text{állandó}} e^{-\frac{1}{kT}\left[n_1\left(\varepsilon_1-\mu\right)+n_2\left(\varepsilon_2-\mu\right)+\ldots\right]}}{\sum\limits_{n_1,\ldots,n_j,\ldots} e^{-\frac{1}{kT}\left[n_1\left(\varepsilon_1-\mu\right)+n_2\left(\varepsilon_2-\mu\right)+\ldots\right]}}. \tag{23.113}$$

A tört elemzésével belátható, hogy ezt a kifejezést, a közös tényezőkkel egyszerűsítve a

$$w\left(n_j\right)=\frac{e^{-\frac{n_j\left(\varepsilon_j-\mu\right)}{kT}}}{\sum\limits_{n_j} e^{-\frac{n_j\left(\varepsilon_j-\mu\right)}{kT}}} \tag{23.114}$$

alakra hozhatjuk.

A kapott összefüggés megadja annak a valószínűségét, hogy az ε_j energiájú állapotban n_j számú részecske tartózkodik.

Mivel n_j tetszőleges lehet, ezért az ε_j energiájú állapotban található részecskék átlagos száma a (23.114) alatti valószínűség segítségével:

$$\bar{n}_j=\sum_{n_j} n_j w\left(n_j\right)=\frac{\sum\limits_{n_j} n_j e^{-\frac{n_j\left(\varepsilon_j-\mu\right)}{kT}}}{\sum\limits_{n_j} e^{-\frac{n_j\left(\varepsilon_j-\mu\right)}{kT}}}. \tag{23.115}$$

Az átlagos betöltési számot azonban erősen befolyásolja, hogy fermionokból vagy bozonokból álló rendszerrel foglalkozunk.

23.6.1.1. A Fermi-eloszlás

A Pauli-elv szerint adott kvantumállapotban csak egyetlen fermion tartózkodhat. Vizsgáljuk meg, hogyan alakul a (23.114) eloszlásfüggvény, ha fermionokra alkalmazzuk! Az összefüggés jelentősen egyszerűsödik, hiszen a nevezőben az összegezést csak a 0 és 1 értékre kell elvégezni. Ily módon az állapot betöltöttségének valószínűsége

$$w\left(\varepsilon\right)=\frac{e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}}{e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}, \tag{23.116}$$

illetve a számlálót és nevezőt is $e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}$-vel beszorozva:

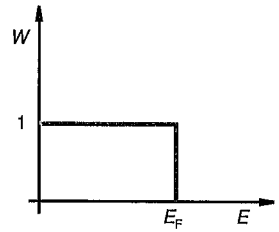
$$w\left(\varepsilon\right)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}. \tag{23.117}$$

Ezt a függvényt Fermi-féle eloszlásfüggvénynek nevezzük. Az eloszlásfüggvényben a μ *kémiai potenciálnak* szemléletes valószínűségi jelentést is adhatunk. Az $\varepsilon=\mu$ helyen $w\left(\varepsilon\right)=\frac{1}{2}$, azaz a μ energiájú állapotok betöltöttségének valószínűsége 50%.

Érdemes megfigyelni a Fermi-eloszlásfüggvény jellegzetes változását, ha $T\to 0$. Abszolút nulla hőmérsékleten·

$$w_{T=0}\left(\varepsilon\right)=\begin{cases}1, & \text{ha } \varepsilon<\mu,\\ 0, & \text{ha } \varepsilon>\mu,\end{cases} \tag{23.118}$$

azaz a μ energiaszint alatt minden állapot betöltött, felette pedig minden állapot üres.



23.6. ábra

A határeset vizsgálata jól mutatja, hogy az összes megengedett állapot betöltöttségében jelentkező lyukakat a termikus mozgás okozza.

Megjegyzés: μ-t szokás *Fermi-energiának* is nevezni és E_F-fel jelölni. A Fermi-energia értéke általában a hőmérsékletnek is függvénye.

23.6.1.2. A Bose-eloszlás

Bozonok esetén az ε energiájú állapot tetszőleges számú részecskével betölthető. Ebben a esetben 23.115 számlálójában és nevezőjében is 0-tól végtelenig kell összegezni. Vezessük be a $q=e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}$ jelölést! Ezzel (23.115) az

$$\bar{n}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n}$$

alakra egyszerűsödik. A végtelen mértani sor összegképlete szerint

$$\sum q^n=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}}.$$

Az $\bar{n}$-ot megadó kifejezés számlálójában szereplő összeg mértani sorozatok összegére bontható és összegezhető:

$$\sum nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}}{\left(1-e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}\right)^2}.$$

Így az ε energiájú állapotban átlagosan

$$\bar{n} = \frac{q}{1-q} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}}{1-e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1} \tag{23.119}$$

részecske található.

Ezt az összefüggést *Bose–Einstein-statisztikának* vagy *Bose-eloszlásnak nevezzük.*

23.7. Az eloszlásfüggvények közötti kapcsolat

23.7.1. A klasszikus közelítés érvényességi köre

A Boltzmann-eloszlás felírásakor lényegében két olyan feltevést használtunk, amely kvantummechanikai közelítésben nem érvényes. Egyrészt folytonosnak tekintettük az energiaeloszlást, másrészt nem vettük figyelembe, hogy a részecskék megkülönböztethetetlenek.

Vizsgáljuk meg ezeknek a közelítéseknek az érvényességi körét az ideális gáz példáján. Nézzük először az energia folytonosságát!

A (23.117) Gibbs-eloszlás szerint a szomszédos energiaállapotok betöltöttségének valószínűsége nagyon különböző, ha a szintek $\varepsilon = \Delta E$ energiakülönbségére $\Delta E \gg kT$. A fordított esetben, tehát amikor $\Delta E \ll kT$, akkor a betöltési valószínűség állapotról állapotra csak csekély mértékben változik. Ezáltal elhanyagolhatóvá válik az, hogy az energia folytonosan, vagy kvantáltan változik.

Az eloszlásfüggvény tehát csak akkor használható klasszikus közelítésben, ha

$$kT \gg \Delta E.$$

Térjünk át most a megkülönböztethetőségre vonatkozó feltevés vizsgálatára! A gázatomok megkülönböztethetőségét az okozza, hogy a gáz igen ritka, így az atomok pályája elkülöníthető.

A klasszikus leírás kvantummechanikai korlátait, mint már említettük, a

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

Heisenberg-féle határozatlansági relációval adhatjuk meg. Itt az egyszerűség kedvéért egydimenziós mozgásra írtuk fel a határozatlansági relációt, amelyben Δp a részecske impulzusának, Δx pedig helyének bizonytalansága. Ahhoz, hogy egy részecskét klasszikus fizikailag írhassunk le, a részecskét pontszerűnek, illetve bizonyos jellegzetes S_0 hossznál kisebb szakaszra lokalizáltnak kell tekintenünk. Legyen a részecske impulzusának tipikus értéke p_0! A klasszikus közelítés akkor alkalmazható, ha

$$S_0 p_0 \gg \hbar. \tag{23.120}$$

A gázmolekulák sebességének legvalószínűbb értéke $v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, ennek megfelelően impulzusuk legvalószínűbben $p_0 = \sqrt{2mkT}$. Ehhez az értékhez a

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p_0} \approx \frac{\hbar}{\sqrt{2mkT}} \tag{23.121}$$

de Broglie-hullámhossz tartozik. Ahhoz, hogy a molekulákat megkülönböztessük, az szükséges, hogy a legközelebbi molekulák távolsága is nagyobb legyen, mint λ_0. (A hullámhosszal jó közelítéssel becsülhetjük a részecskék kvantummechanikai lokalizálhatóságát.) Az S_0 távolságot megbecsülhetjük az

$$S_0^3 N = V$$

egyenletből. A becslés alapját a molekulaeloszlás egyenletessége szolgáltatja. (Ekkor az egy molekulára jutó átlagos térfogat V/N.) Így

$$S_0 = \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}} = n^{\frac{1}{3}},$$

ahol n az egységnyi térfogatra eső molekulák számát jelenti. Így a határozatlansági relációból kapott $S_0 \gg \lambda$ összefüggés szerint azt kapjuk, hogy klasszikus fizikai közelítés esetén

$$\frac{\lambda_0}{S_0} \approx \hbar \frac{n^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2mkT}} \ll 1 \tag{23.122}$$

kell hogy legyen. Látható tehát, hogy a közelítés nagy tömegű, magas hőmérsékletű ($\frac{1}{\sqrt{mT}}$ ekkor kicsi) és ritka ($n^{\frac{1}{3}}$ kicsi) gázokra érvényes.

23.7.2. A ritka gázok eloszlásfüggvénye

Ritka gázok esetén a lehetséges állapotok száma olyan nagy, hogy az átlagos betöltési szám tetszőleges állapotban sokkal kisebb, mint egy ($\bar{n} \ll 1$), azaz az állapotok többsége üres.

Így a (23.114)-gyel adott

$$w(n) = \frac{e^{-\frac{n(\varepsilon-\mu)}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{n(\varepsilon-\mu)}{kT}}} \tag{23.123}$$

valószínűségnek az $n = 0$ helyen jó közelítéssel 1-nek kell lennie, tehát

$$w(0) = \frac{1}{\sum_n e^{-\frac{n(\varepsilon-\mu)}{kT}}} \approx 1, \tag{23.124}$$

amiből

$$\sum_n e^{-\frac{n(\varepsilon-\mu)}{kT}} \approx 1. \tag{23.125}$$

Az átlagos betöltési szám meghatározására az

$$\bar{n} = \sum_n n w(n)$$

összefüggésben az összeget ebben az esetben az első nem zérus tagjával közelíthetjük. Mivel w exponenciálisan csökken n-nel,

$$\bar{n} = w(1) \cdot 1, \tag{23.126}$$

(23.125)-öt (23.123)-ba behelyettesítve, a $w(1)$ valószínűség közelítésére azt kapjuk, hogy

$$w(1) = e^{-\frac{(\varepsilon-\mu)}{kT}}. \tag{23.127}$$

Ebből az adódik, hogy ritka gázokban az átlagos betöltési szám az

$$\bar{n} = e^{-\frac{(\varepsilon-\mu)}{kT}} \tag{23.128}$$

összefüggéssel közelíthető. A kapott eloszlás az

$$\bar{n} = Ae^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \tag{23.129}$$

alakra hozható, ahol $A = e^{\frac{\mu}{kT}}$. A (23.129) formula a Boltzmann-eloszlással egyenértékű, ha az e energiájú állapot nem elfajuló.

23.7.3. A Bose-, Fermi- és a Boltzmann-eloszlás kapcsolata

A Boltzmann-eloszlás (23.129) alakjának felhasználásával azonnal adódik, hogy $\varepsilon - \mu \gg kT$ esetén mind a Fermi-, mind a pedig a Bose-eloszlás a Boltzmann-eloszlásba megy át.

Ekkor ugyanis $e^{\frac{(\varepsilon-\mu)}{kT}} \gg 1$ és

$$\frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon-\mu)}{kT}} + 1} \approx \frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon-\mu)}{kT}}} = e^{-\frac{(\varepsilon-\mu)}{kT}}, \tag{23.130}$$

illetve

$$\frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon-\mu)}{kT}} - 1} \approx \frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon-\mu)}{kT}}} = e^{-\frac{(\varepsilon-\mu)}{kT}}. \tag{23.131}$$

A közelítések mutatják, hogy nagy energiákon a klasszikus fizika törvényei érvényesek (Boltzmann-statisztika). Ezért nevezik a kifejezetten kvantumos viselkedést leíró Bose- és Fermi-eloszlásfüggvényeket kvantumstatisztikáknak.

VII. AZ ANYAGOK SZERKEZETE

Környezetünk érzékelhető anyagait atomok, molekulák sokasága – halmaza – alkotja. A halmazt alkotó részecskék kölcsönhatásban vannak egymással. Ez a kölcsönhatás többé-kevésbé módosítja az egyedi atomok, molekulák szerkezetét, ezért a halmazok tulajdonságai lényegesen különböznek az egyes részecskék sajátosságaitól. Az atomok, molekulák kölcsönhatása meghatározza a részecskék egymáshoz viszonyított elhelyezkedését, mozgási szabadságát. A részecskék elrendeződésétől és mozgási szabadságától, azaz a halmaz állapotától függenek az anyagok makroszkopikus fizikai sajátságai. Az anyagok ezek alapján csoportokba, ún. *halmazállapotokba* sorolhatók.

Szilárd halmazállapotban a részecskék közti, viszonylag erős kölcsönhatás minden egyes atom helyét rögzíti. Az atomok helyhez kötöttsége leggyakrabban olyan szabályos geometriai elrendeződést eredményez, amely mindhárom térirányban szakaszosan ismétlődik – az ilyen anyagokat nevezzük kristályoknak vagy *szilárdtesteknek* (lásd a 24–28. fejezeteket). A kristályokban az atomok egyensúlyi helyzetük körül rezgőmozgást végezhetnek.

*Folyadék*állapotban (lásd a 29. fejezetet) a részecskék szigorú helyhez kötöttsége megszűnik, bár az atomok továbbra is számottevő kölcsönhatásban vannak. A kölcsönhatás következtében a folyadékban is rendeződnek a részecskék. A közvetlen szomszédok elhelyezkedése hasonló, mint a kristályos állapotban. Az így kialakult csoportok azonban nem hosszú életűek, az erős hőmozgás miatt minduntalan felbomlanak, majd kicsit másként újjáalakulnak. A folyadék annál „hígabb", annál kisebb viszkozitású, minél erősebb a hőmozgás, azaz minél bomlékonyabbak a kis kiterjedésű rendezett tartományok. Azokat a nagy viszkozitású folyadékokat, amelyek mechanikai értelemben már szilárdnak tekinthetők, *üvegeknek* nevezzük.

Gáz halmazállapotban az atomok, molekulák hőmozgása erős, a részecskék közti átlagos távolságok olyan nagyok, hogy számottevő kölcsönhatás nem lép fel köztük.

Az atomok, molekulák szerkezete a kvantummechanika módszereivel írható le. A kvantummechanika elvileg egzakt módon alkalmas a halmazok szerkezeti tulajdonságainak leírására is. Az ilyen leírásmód azonban gyakorlati nehézségekbe ütközik. Beláthatjuk ui., hogy 10^{23} nagyságrendű, egymással bonyolult kölcsönhatásban álló részecske leírását adó *Schrödinger-egyenlet* (lásd a 20.1. szakaszt) megoldása csak jelentős egyszerűsítő feltevésekkel lehetséges. Az elvégezhető számítások végeredménye a legtöbb esetben lényegesen pontatlanabb, mint ami megengedhető. Ha pl. egy mólnyi kristályos réz vagy magnézium Schrödinger-egyenletét megoldva kellene megmondanunk, hogy melyik fém kristályosodik felületen középpontos kockarácsban, illetve hatszöges kristályszerkezetben, ez biztosan lehetetlen lenne. A két kristályszerkezet energiája ui. mindössze 4,18 kJ/mol értékben különbözik egymástól, és ez biztosan kisebb, mint a közelítő számítások várható hibája. A kvantumos tárgyalás helyett ezért célszerűbb a kristályok, folyadékok legtöbb szerkezeti tulajdonságát egyszerű fenomenologikus módszerekkel leírni, és kvantumos meggondolásokat csak ott alkalmazni, ahol az észlelt kísérleti tapasztalatok értelmezéséhez azok feltétlenül szükségesek.

24. Kristályok

24.1. Az ideális kristály szerkezete

A környezetünkben található szilárd anyagok döntő többsége kristályos szerkezetű (ásványok, kőzetek, fémek stb.). *Kristályos szerkezetről akkor beszélünk, ha az anyagot felépítő atomok (ionok, molekulák) a tér mindhárom irányában szigorú rendben ismétlődve kapcsolódnak egymáshoz.*

A kristályos anyagok egy kisebb csoportja síklapokkal határolt, makroszkopikus, szabályos geometriai formájával már következtetni enged a szabályos belső szerkezetre. Egy évszázaddal ezelőtt még csak ezeket a kristálygyűjteményekben megcsodálható anyagokat tekintették kristályoknak. Ma ezeket „egykristályoknak" nevezzük, megkülönböztetve a kristályos anyagok nagyobb részét adó ún. „polikristályoktól". A polikristályos anyagok makroszkopikusan nem mutatnak szabályos kristályformát. Ilyen a gyakorlatban felhasznált anyagaink többsége, köztük a kőzetek, fémek, kerámiák. Ezek az anyagok egymással szorosan összenőtt apró kristályszemcsékből állnak. A szabálytalan alakú kristályszemcsék kőzetekben és a fémekben mikroszkóppal tanulmányozhatók. A kristályszemcséket nagyon sok, szabályosan egymás mellé rendeződött atom építi fel, az egyes szemcsék illeszkedése azonban viszonylag szabálytalan, ezért az ilyen anyagok külső megjelenésében nem tükröződik a belső szerkezet szabályossága.

24.1.1. A kristályos anyag szabályos belső szerkezetére utaló jelenségek

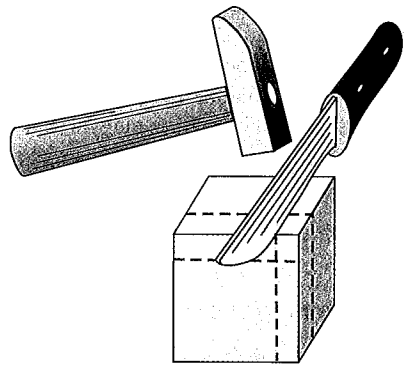
A kristályok szabályos geometriai formájának vizsgálata, a kristályok növekedésének megfigyelése alapján megállapíthatjuk, hogy *egyazon anyagból, ugyanolyan kísérleti körülmények között képződő kristályok alakja hasonló, a kristályok jellemző szimmetriatulajdonságai azonosak.*

Gyakori eset, hogy a kristály szabad növekedését valami megzavarja, ilyenkor egyes kristálylapok mérete megnő, míg másoké lecsökken. A lapok méretarányváltozása a kristály alakját külsőleg megváltoztatja, de a megfelelő kristálylapok által bezárt szög ilyen esetekben sem tér el az ideális alakú kristályétól. Ezt nevezik a *lapszögek állandósága* törvényének. Ma már tudjuk, hogy a lapszögek állandóságának törvénye a kristály belső szerkezeti szabályosságának következménye. Az elmúlt századok tudósai számára ez nem volt ilyen egyszerű. Ők éppen a lapszögek állandóságának törvényét felismerve következtettek a kristályok szerkezeti rendjére.

A kristályok szabályos belső rendezettségére következtethetünk további egyszerű kísérletek, mérési tapasztalatok alapján is. A kristályok legtöbb fizikai tulajdonsága irányfüggő, azaz a különböző irányokban lényeges eltéréseket mutathatnak. (A különböző irányokat itt a kristály szabályos alakjához viszonyítva kell értenünk.) A kristályoknak ezt a sajátságát *anizotrópiának* nevezzük.

Az irány szerint változó fizikai tulajdonságok közül a belső szerkezetre legközvetlenebbül egyes ionkristályok *hasadási tulajdonságai* utalnak. Jól hasítható pl. a kősó (NaCl), a kalcit ($CaCO_3$), a csillám stb.

Nagyméretű, kocka alakú kősókristállyal végzett hasítási kísérletet illusztrál a 24.1. ábra.



24.1. ábra

A kősó három egymásra merőleges irányban, a kockalapokkal párhuzamosan könnyen hasítható. Más irányú erős behatásra a kristály nem elhasad, hanem látszólag szabálytalan felület mentén eltörik. A töretfelületen azonban nagyítóval, mikroszkóppal újból felfedezhetők a kockalapokkal párhuzamos hasadások nyomai. A kősókristály hasításokkal apró kockákra darabolható.

Érdemes megemlíteni, hogy speciális körülmények között a kősó kocka forma helyett oktaéder formában kristályosodik, hasításkor azonban az ilyen test is a kockalapok mentén hasad.

Kalcitkristályok szabályos hasadását vizsgálva *René Just Haüy* abbé, francia természettudós a 18. században már következtetett a kristályok rácsszerű belső szerkezetére. Haüy tapasztalta, hogy a kalcitkristályok kisebb és kisebb romboéderekké hasíthatók. Feltételezte azonban, hogy a kristályok hasítással nem aprózhatók a végtelenségig. A legkisebb romboéder az, amely már csak úgy bontható, hogy egyúttal az anyag kémiai sajátságai is megváltoznak. Haüy és követői szerint a makroszkopikus kalcitkristályok parányi, még mikroszkóppal is láthatatlan romboéder alakú „kristálytéglákból" épülnek fel. Hasonló gondolatmenet szerint a kockalapok mentén hasadó kősó építőelemei szorosan egymás mellé illeszkedő kockák.

A hasadási tulajdonságokon túl a kristályok más mechanikai sajátságai is mutatnak irányfüggést, így pl. a különböző irányokban mások a rugalmassági állandók, más és más nagyságú feszültség kell a képlékeny alakváltozás megindításához stb.

A kristályszerkezetek anizotrópiája az anyag *optikai* tulajdonságaiban is jelentkezik. Az átlátszó kristályok legtöbbje optikailag kettősen törő, azaz egy természetes fénynyaláb a kristályban két, síkban polarizált, eltérő sebességű nyalábra bomlik. Az ilyen kristályokban a fény sebessége irányfüggő.

Az ionkristályok elektromos polarizálhatósága a különböző irányokban más, így a kristályok permittivitása (dielektromos állandója) erősen irányfüggő.

Egyes fémek (pl. a vas) igen jól mágnesezhetők. A mágnesezhetőség szintén irányfüggő tulajdonság. A vas kristályszerkezete kockaszimmetriát rnutat. Ha a külső mágneses tér iránya a kockalapokra merőleges, a vas könnyen mágnesessé válik, ezzel szemben a kocka térátlójának irányában nehezebben mágnesezhető.

Mindezen irányfüggő fizikai tulajdonságok magyarázata érthetővé válik, ha elfogadjuk, hogy a kristályokban az atomok szabályos térbeli rendben helyezkednek el. Az anizotrópia oka, hogy a különböző térirányokban változik az atomok ismétlődése.

24.1.2. A rácsszerkezet közvetlen kísérleti igazolása

A rácsszerkezet létezésének egyértelmű kísérleti igazolását *Max von Laue, W. Friedrich* és *P. Knipping* a 20. század elején adta meg. Max von Laue számításokat végzett a feltételezett kristályrács és az elektromágneses hullámok kölcsönhatásáról. Az elméleti megfontolások igazolására Friedrich és Knipping $CuSO_4$ kristályt világítottak át röntgensugarakkal. A kristály mögött elhelyezett fotolemezen diffrakciós maximumok foltrendszere rajzolódott ki. A diffrakciós kép egyértelműen igazolta a kristályok térrácsszerkezetét.

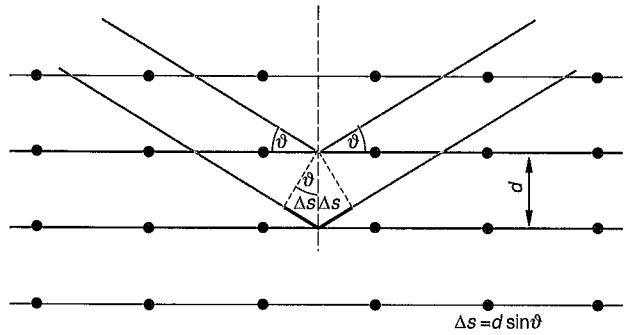
24.1.3. A röntgendiffrakciós szerkezetkutatás alapjai

A röntgendiffrakciós felvételek a kristályrács létének igazolásán túl lehetőséget adnak a különböző kristályok rácsszerkezetének pontos meghatározására is.

Az optikából ismeretes, hogy ha sok vonalat tartalmazó optikai rácsot monokromatikus fénnyel átvilágítunk, akkor egy felfogóernyőn jellegzetes sávos szerkezetű *diffrakciós (elhajlási) képet* kapunk (lásd a 10.5.3. pontot). A diffrakciós képen az intenzitásmaximumok távolságát lemérve, a fény hullámhosszának, valamint az ernyő és a rács távolságának ismeretében, egyszerű számolás után megmondhatjuk, hogy milyen periodicitású (milyen rácsállandójú) rács okozta a fényelhajlást [lásd a (10.31.) képletet].

A röntgen-szerkezetvizsgálat lényegében hasonló feladat. Ennek a feladatnak a megoldását azonban jelentősen megnehezíti, hogy itt háromdimenziós, térbeli rácson következik be az elhajlás.

Az elhajlási kép és a kristályrács tulajdonságait összekapcsoló egyszerű mennyiségi összefüggést *W. Bragg* határozta meg először. Bragg a bonyolult számítások végeredményét egyszerű szemléletes képpel tette közérthetővé. Eszerint a kristályon elhajló hullámok *úgy tekinthetők,* mintha a kristály egy-egy meghatározott atomokat tartalmazó síkjáról, mint valami „tükörről" verődtek volna vissza. Az ernyőn fényes intenzitásmaximumot észlelünk, ha a szomszédos kristálysíkokról „visszaverődő" hullámok útkülönbsége a λ hullámhossz egész számú többszöröse.



24.2. ábra

Az intenzitásmaximum feltétele így a 24.4. ábra segítségével

$$2d \cdot \sin \vartheta = n\lambda \qquad (24.1)$$

alakban fogalmazható meg, ahol d a szomszédos síkok távolsága, ϑ a beeső sugár és a sík által bezárt szög, λ a röntgensugár hullámhossza, n pozitív egész szám (n = 1, 2, 3, ...). Az összefüggést *Bragg-egyenletnek* nevezzük.

A Bragg-egyenlet a röntgendiffrakciós vizsgálatok alapegyenlete, segítségével meghatározható a kristály rácsszerkezete. Az eljárás lényege a következő. Az elhajlási képről a berendezés paramétereinek ismeretében leolvasható a megvilágító sugár és valamely intenzitásmaximumot adó sugár által bezárt szög (2ϑ). A megvilágító sugár hullámhosszát ismerve a Bragg-egyenlet felhasználásával meghatározható a „reflektáló" rácssíkok d távolsága. Hasonló módon a diffrakciós kép valamennyi intenzitásmaximumához egy-egy d érték rendelhető. A különböző síkok helyzete a beeső röntgensugár irányához viszonyítva (vagyis a 2ϑ szög) ismert. A különböző helyzetű, meghatározott távolságra ismétlődő kristálysíkok seregének segítségével a kristály rácsszerkezete „kirajzolható".

A röntgenfelvételekről a Bragg-egyenlet segítségével a kristály rácsszerkezete, az atomok rendeződésének geometriai szabályai határozhatók meg. Arra, hogy milyen atomok, atomcsoportok foglalják el a rácsszerkezet által kijelölt helyeket, a diffrakciós kép maximumainak intenzitásviszonyaiból lehet következtetni.

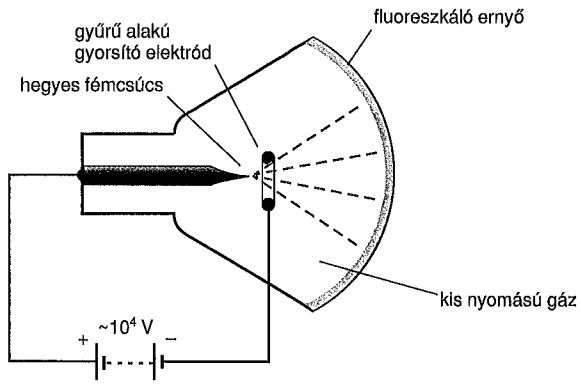
Kezdetben a kristályszerkezet vizsgálatára kizárólag a röntgendiffrakciós vizsgálatok szolgáltak. A tudomány és a technika fejlődése azonban egyre újabb szerkezetvizsgálati módszerek kidolgozását tette lehetővé. Ilyenek pl. az *elektron-* és a *neutrondiffrakciós* eljárás.

Az elektron- és a neutrondiffrakció a röntgenvizsgálatokhoz hasonló technika. Mivel a korpuszkuláris anyag is rendelkezik hullámtulajdonságokkal (de Broglie-hullámok), a kristályok az elektronokból és neutronokból álló sugárzást is elhajlítják, ha azok hullámhossza a kristálybeli atomtávolságokkal (rácsállandóval) összemérhető nagyságrendbe esik. Az ezekben az esetekben kapható diffrakciós kép hasonlít a röntgensugárzással kapotthoz. Bár a röntgen-, az elektron- és a neutronsugárzás kölcsönhatása a kristály atomjaival lényegesen különböző, a diffrakciós kép geometriai tulajdonságai mindhárom esetben azonosak.

24.1.4. A térion-mikroszkóp

A térion-mikroszkópia segítségével a kristályrácsba rendeződött egyedi atomok közvetlenül láthatóvá válnak. A térion-mikroszkópnak különös jelentőséget ad az, hogy alkalmazásával nemcsak a kristály szabályos rendje, de ezt a szabályos rendet megbontó hibák (lásd a 28. pontot) atomi elrendeződése is közvetlenül megfigyelhető.

A térion-mikroszkóp elvi felépítését a 24.3. ábra mutatja. Félgömb alakú, fluoreszkáló anyaggal bevont üvegbura közepén helyezik el a vizsgálandó mintát. A vizsgálat lényeges feltétele, hogy a mintát hegyes tűvé lehessen kiképezni. (A csúcs hegyének görbületi sugara kb. 0,1 μm kell hogy legyen, ami fémek esetén valósítható meg jól.) A burából a levegőt kiszivattyúzzák, majd a vákuumba igen kevés héliumgázt juttatnak. Ha a kristálytű és a búra közé 10 000 V nagyságrendű feszültséget kapcsolnak, akkor a fluoreszkáló ernyőn világos és sötét foltok szabályos rendszere jelenik meg. A képen minden fénylő pont a kristály egy-egy atomjának kivetítődő képe.



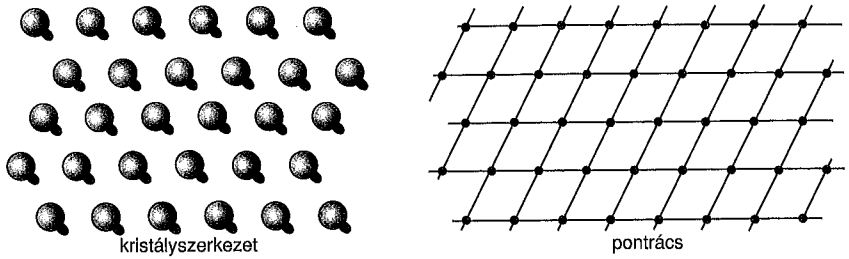
24.3. ábra

A térion-mikroszkóp működésének alapja az elektrosztatikában megismert csúcshatás. A hegyes, pozitívan töltött fémcsúcs környezetében a térerősség olyan nagy, hogy a tűhegy közvetlen közelében levő héliumatomokról elektront képes leszakítani. A pozitív töltésű héliumionok a sugárirányú elektromos erővonalak mentén felgyorsulva becsapódnak a fluoreszkáló ernyőre. Az ernyő a becsapódás helyén világít. Mivel a fémtű felületének azon pontjai, ahol a kristályban atomok vannak, jobban ionizálnak, mint azok, ahol nincs atom, a kristály felületén elhelyezkedő atomok elrendeződése az ernyőre vetítődik. A térion-mikroszkóp nagyítása mintegy kétmilliószoros.

24.1.5. A kristály geometriai szerkezete. A pontrács

Az atomok térbeli elrendeződését a kristályban az ún. *pontráccsal* jellemezzük. A pontrácsban a kristály szabályosan ismétlődő atomjait, anyagi minőségüktől függetlenül, egy-egy pont jelképezi. A pontok rendszere tükrözi a kristály geometriáját, de semmit nem mond arról, hogy milyen atomok, ionok, molekulák építik fel a kristályt. A 24.4. ábra két dimenzióban szemlélteti a pontrács és a kristályszerkezet kapcsolatát.

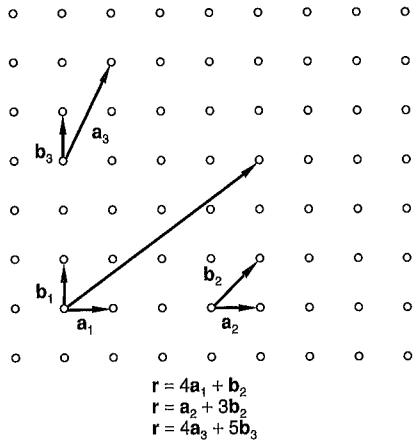
A pontrács rácspontjai a tér különböző irányaiban szabályosan ismétlődnek. A szerkezet ismétlődése legegyszerűbben a következőképpen jellemezhető. Kiválasztjuk a pontrács egy tetszőleges pontját, és ebből három, nem egy síkban fekvő irányba, a legközelebbi rácspont felé egy-egy vektort irányítunk. (A vektorok által



24.4. ábra

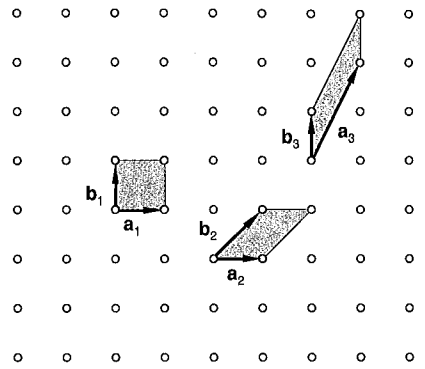
bezárt szög nem lehet nagyobb, mint 90°). Az így meghatározott **a, b, c** vektorokat a rácsszerkezet *elemi rácsvektorainak* nevezzük. Bármelyik ilyen vektor egész számú többszöröse szintén rácspontba mutat, sőt a három elemi rácsvektor bármely egész számú többszörösének vektori eredője is rácspontot határoz meg. Ha egy ilyen vektor mentén a kristályt eltoljuk, akkor önmagával fedésbe kerül. Ezt a tulajdonságot a kristály *eltolási vagy transzlációs szimmetriájának* nevezzük.

Egy adott pontrács esetén az elemi rácsvektorok többféleképpen is kijelölhetők (24.5. ábra).



24.5. ábra

A három elemi rácsvektor által meghatározott három egyenes szakasz úgy is tekinthető, mint egy paralelepipedon egy sarokba összefutó három éle. Az így meghatározott paralelepipedont a kristály *elemi cellájának* nevezzük. Az elemi cella minden sarka rácspont. A rács a szorosan egymás mellé helyezett elemi cellákból, mint „téglákból" építhető fel. Egy-egy adott pontrács természetesen többféle elemi cellából is felépíthető (24.6. ábra).

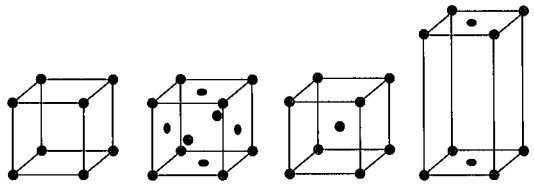


24.6. ábra

A rácspontok szabályos ismétlődésén túl a pontrács a szerkezet egyéb geometriai tulajdonságait is tükrözi. Ezek az ún. *tükör- és forgásszimmetriák. Tükörszimmetriája* van a rácsnak akkor, ha található olyan sík, amelyre nézve a kettéosztott kristály mindkét fele egyben a másik tükörképe is. *Forgásszimmetriáról* beszélünk akkor, ha a rácsban kijelölhető olyan egyenes, amely körül mint tengely körül elforgatva a rácsot az eredeti helyzetével egyenértékű helyzetbe kerül, még mielőtt a teljes körülforgatást elérnénk. Kristályszerkezetek esetén 60°, 90°, 120°, 180°-os forgásszimmetria lehetséges. (A 60°-os esetben egy teljes körbefordulás alatt hatszor, 90° esetén négyszer stb. kerül eredeti helyzetével fedésbe a kristály.) *Egy-egy kristályszerkezetet a transzlációs szimmetria, valamint a forgási és tükrözési szimmetriák összessége jellemez.*

A rács elemi cellája rendszerint nem tükrözi a szerkezet jellemző szimmetriáit. Ezért célszerű a kristályban azt a legkisebb egységet elemi cellának felvenni, amely a tükrözési és forgatási szimmetriákat is mutatja. Az így választott elemi cellákat *Bravais-rácsoknak* nevezzük.

A leggyakrabban előforduló Bravais-rácsokat a 24.7. ábra mutatja.



24.7. ábra

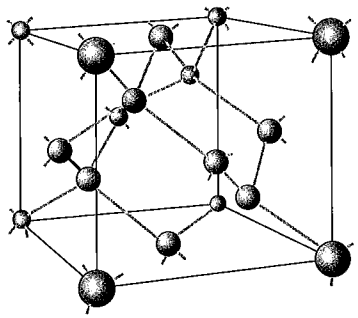
24.2. A kristályszerkezetek jellemzése a kémiai kötés típusa alapján

A kristály geometriai rendjét az atomok (ionok, molekulák) közötti kölcsönhatás határozza meg. A továbbiakban, a kristályt felépítő részecskék közötti kémiai kötésekből kiindulva megmutatjuk, hogy a kötés természete miként határozza meg a rács geometriáját, illetve a kristály jellemző fizikai tulajdonságait.

A rácsot összetartó kémiai kötések szerint a kristályok négy csoportba sorolhatók: *atomrácsok, ionrácsok, fémesrácsok és molekularácsok.*

24.2.1. Atomrácsok

Atomrácsról beszélünk akkor, ha a kristály rácspontjaiban atomok helyezkednek el, és az atomokat *kovalens kémiai kötések* kapcsolják össze (lásd a 21. fejezetet). A kovalens kötések térben irányított molekulapályák kialakulásával jönnek létre. A molekulapályák, azaz a kötések irányítottsága a kristály belső geometriáját is meghatározza. A kovalens kötés erőssége miatt az atomrácsú kristályok nagy keménységűek és magas olvadáspontúak. Az atomrács tipikus képviselője a *gyémánt* (24.8. ábra).



24.8. ábra

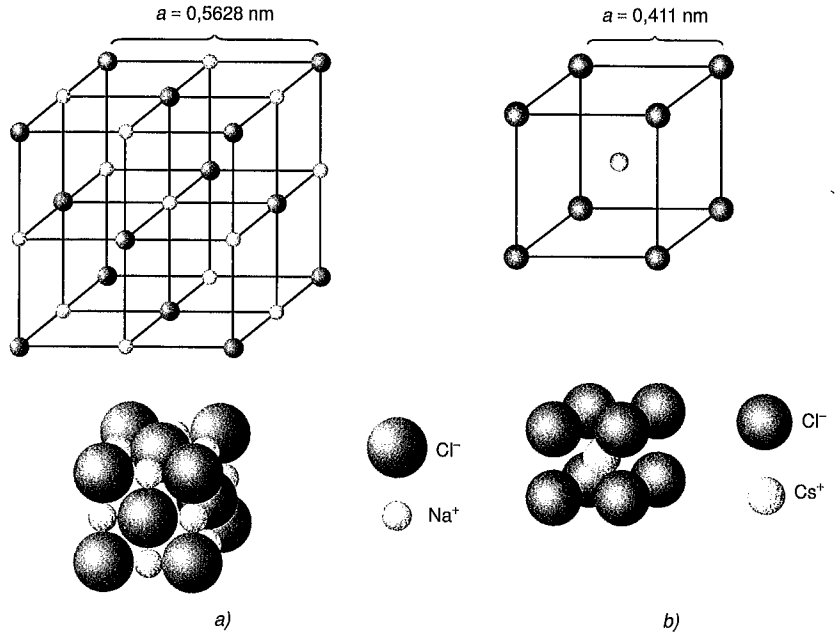
A gyémánt a szén egyik kristályos módosulata (a másik a grafit). A kristály minden szénatomja négy másik szénatommal létesít kovalens kötést. A négy kötés egyenértékű, a térben tetraéderesen irányított. A szénatomok ilyen összekapcsolódása csak magas hőmérsékleten és különlegesen nagy nyomáson valósulhat meg. (Közönséges körülmények között a szén grafitként kristályosodik.) A gyémánthoz hasonló szerkezetű a szilícium- és a germániumkristály is. Ez utóbbi két kristály a félvezetőgyártás legfontosabb alapanyaga.

24.2.2. Ionrácsok

Ionrácsról (ionkristályról) akkor beszélünk, ha a kristályban *váltakozva pozitív és negatív ionok* foglalnak helyet (lásd 21. fejezet). Az ionrácsú kristályok belső geometriáját három döntő tényező szabja meg.

a) Az ionrácsot az ellentétes töltésű ionok közti *Coulomb-vonzás* tartja össze. Az elektrosztatikus vonzóerő a tér minden irányában egyformán hat. Az ionkristályokban tehát nincsenek kitüntetett kötési irányok, az ionok a rácsban úgy rendeződnek, hogy az ellentétes töltésű ionok minden irányból, minél közelebb és mennél nagyobb számban vehessék körbe egymást.

b) A különböző ionok mérete eltérő. Ez jelentősen befolyásolja azt, hogy a különböző ionok hogyan helyezkednek el a legtömörebben egymás körül. Az ionok méretének a kristályszerkezetet meghatározó szerepe a NaCl (nátrium-klorid) és a CsCl (cézium-klorid) eltérő rácsszerkezetével (24.9. ábra) illusztrálható.



24.9. ábra

A kősó kristályrácsában a nagyméretű kloridionok közötti térrészben foglalnak helyet a kicsi nátriumionok. Minden kloridionnak 6 nátriumion és minden nátriumionnak 6 kloridion a közvetlen szomszédja. A cézium-klorid kristályrácsát kloridionok és a nátrium-

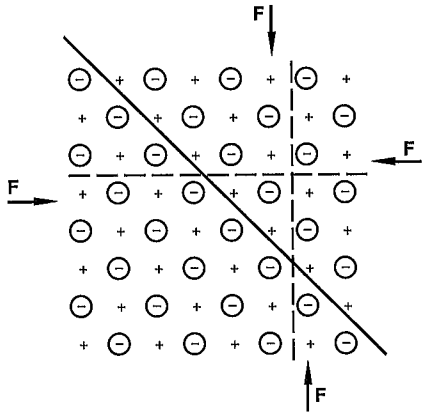
ionnál jóval nagyobb céziumionok építik fel. A céziumionok nem férnek el a kloridionok között a kősóéhoz hasonló szerkezetben. A cézium-klorid kristályrácsában minden kloridiont 8 céziumion, illetve minden céziumiont 8 kloridion vesz körbe.

c) Az ionkristályok elektromosan semlegesek. Ez megköveteli, hogy a kristály ismétlődő alapegységét, az elemi cellát felépítő pozitív és negatív ionok össztöltése nulla legyen.

Az ionkristályok fizikai tulajdonságai. A kristályos anyagok jelentős része ionrácsban kristályosodik (általában a szervetlen vegyületek). Az ionok közötti erős elektrosztatikus vonzóerő miatt az ionkristályok kemények, magas olvadáspontúak. A legtöbb ionvegyület vízben jól *oldódik*.

Ez utóbbi sajátság a következőképpen magyarázható: A víz molekulái elektromos dipólusmomentumot hordoznak. A vízmolekulák dipólusuk ellentétes pólusával a kristály legszélső ionjai köré csoportosulnak. A vízmolekulák vonzása és a hőmozgás hatására egyre újabb és újabb ionok válnak le a kristályról. A rácsból kivált ionokat a víz molekulái azonnal körbeveszik, és ezáltal elektromosan annyira leárnyékolják, hogy az már nem épül be újból a kristályrácsba.

Az ionkristályok mechanikai tulajdonságai nagymértékben irányfüggőek. Ennek egyik szemléletes bizonyítéka a kősókristályok könnyű hasadása a kockalapok mentén.



24.10. ábra

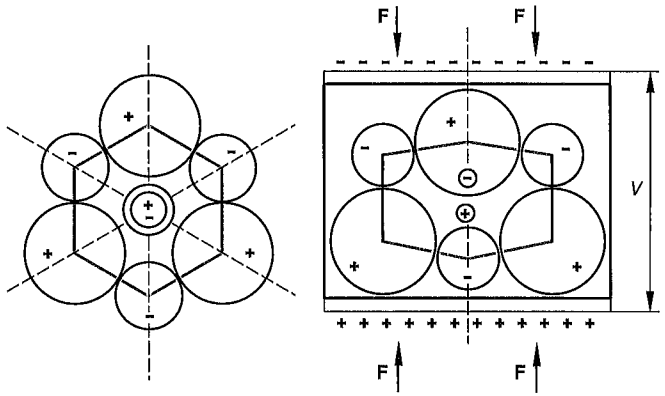
A kősó hasadását a 24.10. szerkezeti ábra alapján egyszerűen magyarázhatjuk.

A vázlatos rajz a kősó egy kockalapjával párhuzamos kristálysíkjának szerkezetét szemlélteti. A síkban négyzethálóba rendezve pozitív és negatív ionok helyezkednek el váltakozva. A kristály a nyíllal jelölt irányú erőhatásra a szaggatott vonal mentén hasad. A hasadás akkor következik be, amikor a vonal két oldalán levő kristályfél éppen egy rácsállandónyival elcsúsznа egymáshoz képest. Ekkor ui. a vonal két oldalán éppen ellentétes töltésű ionok kerülnek szembe egymással, ezért az ionpárok közötti taszítás következtében a kristály kettéválik. Érdemes megemlíteni, hogy az ábrán folytonos vonallal

bejelölt sík mentén a kristály deformálható anélkül, hogy hasadna. A sík két oldalán ui. a töltések ellentétesek, így a sík mentén elcsúszó két kristályfél állandóan vonzza egymást.

A kősó hasadásához hasonlóan magyarázható a többi jól hasítható ionkristály (pl. kalcit) hasadása is. A hasadás oka itt is az elektromos taszítás.

Egyes ionkristályok, mint pl. a kvarc vagy a „házilag" is könnyen növeszthető Seignette-só, különösen érdekes tulajdonságot mutatnak: *piezoelektromosságot*. Az ilyen kristályok mechanikai deformáció hatására elektromosan polarizálódnak, illetve megfordítva: ha elektromos térbe kerülnek, mechanikai deformációt szenvednek. A jelenséget a 24.11. ábra szerkezeti rajza teszi érthetővé:

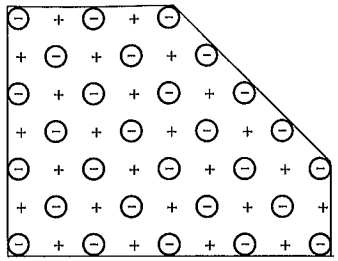


24.11. ábra

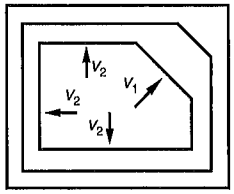
A piezoelektromos kristályokban – deformációmentes állapotban – a pozitív és a negatív ionok töltésközéppontja egybeesik. Rugalmas deformáció esetén a pozitív ionok kimozdulása az egyensúlyi helyzetüktől különböző mértékű, mint a negatív ionoké, ezért rugalmas deformáció hatására a két töltésközpont különválik. Az így elektromosan polarizálódott kristály egyes lapjai között elektromos feszültség jelenik meg.

Az ionvegyületek igen gyakran nagyméretű síklapokkal határolt szabályos kristályokat képeznek. A kősó példáján egyszerűen érzékeltethető a kapcsolat a rácsszerkezet és a kristály alakja között.

Tekintsük a 24.12. ábrán mutatott kicsi sókristályt! A kristály újabb és újabb nátrium- és kloridionok beépülésével növekszik. A környező folyadékban „úszkáló" nátrium- és kloridionok azokon a pontokon kötődnek meg leggyakrabban, ahol a már rácsba rendeződött, ellentétes töltésű ionok vonzóhatása a legerősebb. A rajzon a „ferde" helyzetű kristálylap mentén a legerősebb a pozitív ionokra ható vonzás, a sarkokon már kisebb, míg a kockalapok mentén a negatív ionok vonzása mellett a pozitív rácspontok taszítása is erősen érvényesül. A kristály tehát a ferde kristálylapokon jóval gyorsabban növekszik, mint a kockalapok irányában. Az egyenlőtlen ütemű növekedés következtében a kristály eredeti alakjának változását a 24.13. ábra rajza mutatja.



24.12. ábra



24.13. ábra

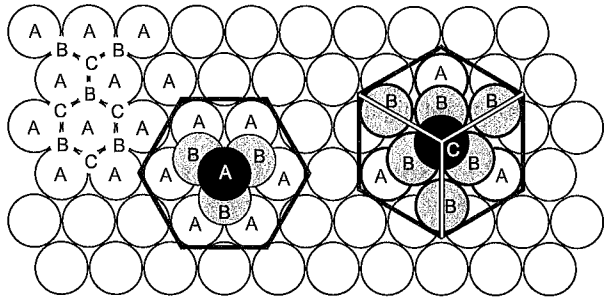
A kristálynövekedés során a gyors növekedési irányra merőleges kristálylapok mérete csökken, míg a lassú növekedési sebességgel kitolódó lapok mérete fokozatosan nő. A kristály alakját a legkisebb növekedési sebesség irányára merőleges lapok határozzák meg.

A tiszta körülmények közt növekvő kősókristályok alakja az elmondottak értelmében kocka forma. Előfordul azonban, hogy pl. az oldatban lévő szennyezések hatására a kristálynövekedés sebességviszonyai megváltoznak. Ha pl. az oktaéderlapok kitolódási sebessége lecsökken, a kősókristályokon megfigyelhetők a kocka sarkait ferdén levágó oktaéderlapok is.

24.2.3. A fémek kristályszerkezete

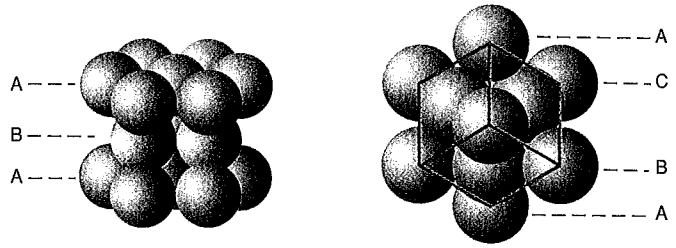
A fématomokat kristályrácsba rendező *fémes kötés* (lásd a 21.5. szakaszt) azáltal jön létre, hogy az *atomok legkülső elektronhéjukon levő elektronjai delokalizálódnak,* miközben a pozitív töltésű fémionok kristályrácsba rendeződnek. A kötés kialakulása csak a kvantummechanika segítségével értelmezhető. Bár az egymáshoz közel elhelyezkedő pozitív fémionok taszítása növeli az energiát, a rendszer teljes energiája mégis lecsökken, mert a delokalizálódó elektronok kinetikus energiacsökkenése az előbbinél sokkal jelentősebb. A fémes kötés nem tüntet ki egyetlen térirányt sem, így a kristályrácsban a legtöbb fém ionjai szorosan rendeződnek egymás mellé.

Ha a fématomokat jó közelítéssel golyóknak feltételezzük, könnyen megállapíthatjuk, milyen elrendezés valósítja meg a legjobb térkitöltést. Egy síkban a legtöbb golyót úgy tudjuk elhelyezni, ha szorosan egymás mellé illesztjük őket. Így minden golyónak 6 közvetlen szomszédja van. A legsűrűbb térkitöltésben az ilyen ún. *szoros illeszkedésű* síkokat kell a legtömörebben egymásra rétegezni. Ezt elérhetjük, ha a két réteget úgy illesztjük össze, hogy a felső réteg minden golyója az alsó réteg három érintkező golyója közötti mélyedésbe kerüljön. Ha két ilyen réteget már elhelyeztünk (*A*, illetve *B* helyzet), akkor a harmadik réteg atomjait a 24.14. ábra szerint vagy a legalsó réteg atomjai fölé (azaz ismét *A* helyzetbe), vagy egy harmadik fajta (*C*) helyzetbe illesztjük.



24.14. ábra

A szoros illeszkedésű síkok egymásra rétegezésével tehát kétféleképpen is megvalósíthatjuk a tömör térkitöltést. Az első esetben a rétegek atomjai rendre *ABAB...* sorrendben illeszkednek egymás fölé. Ilyen rendben kristályosodik pl. a Zn és a Cd. Az elrendezést *hatszöges (hexagonális) szoros illeszkedésnek* nevezzük. A szerkezetet a 24.15a. ábra mutatja.



hexagonális elemi cella
a)

feületen centrált köbös elemi cella
b)

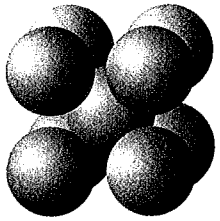
24.15a–b. ábra

A második esetben az egymásra helyezett rétegek atomjai az *ABCABCABC...* helyeket foglalják el. Ebben az elrendezésben kristályosodnak a *felületen centrált köbös (lapközéppontos kockarácsú)* fémek, pl. az Al, a Cu, a Ni, az Ag, az Au stb.

A szerkezetet a 24.15b. ábra mutatja, az atomok a csúcsokon és a kockalapok közepén helyezkednek el. Mivel a lapok átlója mentén a gömbszerű fémionok érintkeznek egymással, a kristály a rácsállandója az atomok R sugarával az $a=\frac{4R}{\sqrt{2}}$ formulával fejezhető ki.

A fémek többsége a szoros térkitöltésű kristályszerkezetek valamelyikében kristályosodik, vannak azonban kivételek, amelyeknek a rácsszerkezete a fentiektől eltérő. A legfontosabbak ezek közül a tércentrált köbös (térben középpontos kocka) rácsú fémek. Tércentrált köbös kristályszerkezetűek az alkáli fémek (K, Na stb.), a magas olvadáspontú fémek (W, V, Cr stb.) és leggyakrabban a vas is. A tércentrált köbös elemi cellát a 24.16. ábra mutatja, az atomok a csúcsokon és a kocka közepén helyezkednek el. Az R sugarú fémionok itt a kocka térátlója mentén érintkeznek, ezért az R atomi sugár és az a rácsállandó közti kapcsolat:

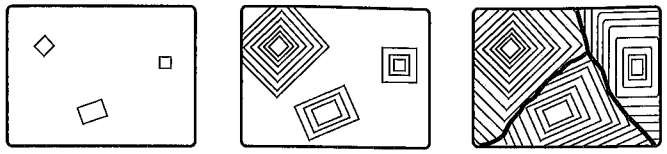
$$a=\frac{4R}{\sqrt{3}}.$$



24.16. ábra

A polikristályos szerkezet. A fémek, bár kristályos szerkezetűek, mégsem mutatnak síklapokkal határolt szabályos kristályformát. A fémolvadék lehűlésekor az anyag megőrzi az öntőforma alakját. A fémtárgyak ui. nagyon sok, egymással szorosan összenőtt apró kristályból, ún. *kristályszemcséből,* más néven *krisztallitból* állnak. Az ilyen anyagot *polikristályos* szerkezetűnek mondjuk.

A 24.17. ábra a polikristályos szerkezet kialakulását szemlélteti. A dermedő fémolvadékban egymástól függetlenül kialakulnak kristálycsírák, amelyek azután a növekedés törvényeinek megfelelően síklapok által határolva növekednek egészen addig, míg össze nem érnek. A szomszédos szemcsék találkozási pontján a növekedés megszűnik, de a krisztallitok közötti, még olvadékkal töltött tartományokban a kristálynövekedés tovább folytatódik egészen addig, amíg a kristályok egészen összeérnek. A szomszédos krisztallitok rendszerint szabálytalan felület mentén illeszkednek egymáshoz. Sem a fémtárgy egésze, sem az egyes kristályok alakja nem tükrözi a belső szerkezet szabályosságát.



24.17. ábra

Azokat a fémeket, amelyek nem polikristályos szerkezetűek, hanem egyetlen krisztallitnak tekinthetők, *fémegykristálynak* nevezik. A fémegykristályok előállítása különleges tisztaságú anyagokat és nagyon lassú, szabályozott kristályosodást biztosító speciális berendezéseket igényel.

24.2.4. Molekularácsok

Molekularácsról (molekulakristályról) akkor beszélünk, ha a kristály *semleges molekulák* szabályos egymás mellé rendeződésével alakul ki. A molekulák maguk is összetettek, atomokból épülnek fel, amelyeket erős kovalens kötés tart össze. A zárt elektronszerkezetű, alacsony energiájú molekulák közt erős kémiai kötés már nem jöhet létre, a molekulák ún. *másodlagos kötések* következtében rendeződnek kristályrácsba. A másodlagos kötések közül a *van der Waals-kötés* és a *hidrogénhíd-kötés* (H-híd) a legfontosabb.

24.2.4.1. Van der Waals-kötésű kristályok

A legtöbb vegyület molekulájában az elektronok térbeli elrendeződése nem egyenletes, az atommagok pozitív és az elektronok negatív töltésközéppontja nem esik egybe. Az ilyen molekulák ellentétes töltéspárjaikkal egymás felé fordult *elektromos dipólusokként vonzzák egymást.* A dipólusok között kialakuló kötés gyenge, ezért a molekularácsos anyagok *puhák, alacsony olvadáspontúak,* gyakran *illékonyak.* Tipikus molekularácsos vegyület a szilárd szén-dioxid („szárazjég"). Molekularácsban kristályosodik a legtöbb szerves vegyület.

Nagyon alacsony hőmérsékleteken a nemesgázok is kristályos állapotúak. Ezek a kristályok szintén a molekularácsok közé sorolhatók. A nemesgázok atomjai egyenletes töltéseloszlásúak, ezért a közöttük ébredő dipólus-kölcsönhatás első pillanatban nehezen érthető. A nemesgázok atommagját gömbszimmetrikus elektronfelhő veszi körül. Ez a gömbszimmetria azonban csak hosszabb idő átlagában jellemzi az elektronok eloszlását, és nem zárja ki azt, hogy egy-egy időpilla-

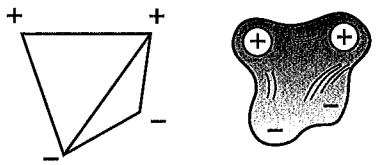
natban az elektronfelhő alakja a gömbtől eltérő legyen. Az atom ezért pillanatszerűen rendelkezhet elektromos dipólusmomentummal. A pillanatról pillanatra változó dipólusmomentum hosszabb időtartamra vett átlaga zérus. A kristályrácsba rendeződött nemesgázatomok pillanatnyi dipólus jellegük miatt kötődnek egymáshoz. A szomszédos atomok dipólusmomentumának iránya pillanatról pillanatra összehangoltan változik, így az atomok közti vonzóerő állandó marad.

A van der Waals-kötéssel összekapcsolódó atomok a lehető legszorosabb térkitöltéssel kondenzálódnak. A kristályos nemesgázok rendszerint lapcentrált köbös szerkezetűek. A molekularács geometriai szerkezetét a molekulák mérete, alakja döntően befolyásolja.

24.2.4.2. Hidrogénhíd-kötésű kristály. A jég szerkezete

A jégkristályban minden vízmolekula négy másik vízmolekulához kapcsolódik. A molekulákat H-híd-kötések tartják össze. A H-híd-kötés kialakulását a víz molekulaszerkezetéből kiindulva magyarázhatjuk.

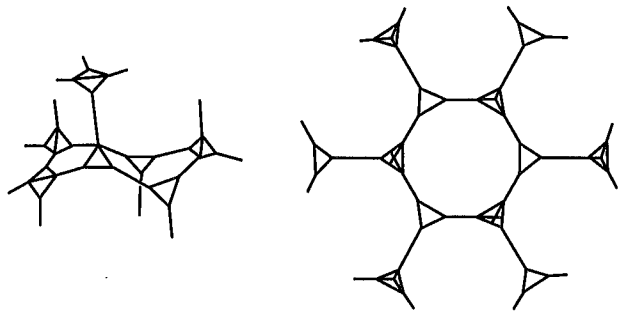
A vízmolekula egy oxigén- és két hidrogénatom összekapcsolódásával képződik. A hidrogénatomok 105°-os szöget bezáró irányokból kovalens kötéssel kapcsolódnak az oxigénatomhoz. Az oxigén erősen elektronvonzó tulajdonságú, ezért a kovalens kötés elektronjai a hidrogénatomok magját csak kevéssé árnyékolják le, így a molekulának ezen részei lokálisan pozitív töltést mutatnak. A vízmolekulának van két, elektronban különösen „gazdag" és ezért lokálisan negatív töltésű pólusa is. A pozitív és negatív pólusok tetraéderes irányokban a 24.18. ábrán bemutatott módon helyezkednek el.



24.18. ábra

Az egyenetlen töltéseloszlás miatt a vízmolekulák között kötések jönnek létre. A molekulák ellentétes pólusaikkal fordulnak egymás felé, majd a kevéssé árnyékolt hidrogénatommag a szomszéd molekula elektronfelhőjét is többé-kevésbé magára húzza. A két szomszédos molekula a hidrogénatommag hatására az egyszerű dipólus-kölcsönhatásnál jóval erősebb kötéssel kapcsolódik össze. A hidrogén „közvetítésével" kialakult kötést nevezzük *hidrogénhíd*-kötésnek. A hidrogénhíd-kötések tetraéderes irányokban kapcsolják össze a szomszédos molekulákat. A jégkristály rácsszerkezetét a hidrogénhíd-kötések tetraéderes irányítottsága határozza meg.

A jégben a vízmolekulák a tetraéderes kötéseknek megfelelően meglehetősen rossz térkitöltéssel kapcsolódnak össze. A szerkezet egymás fölé rendeződött hattagú gyűrűkből áll. A gyűrűkben minden H_2O molekula H-híd-kötéssel három szomszédhoz kapcsolódik. Az egyes molekulák a tetraéderes kötésirányokból adódóan felváltva a gyűrű síkja alatt és felett helyezkednek el. Ezek a hattagú gyűrűk a kristályban szabályosan egymás fölé rendeződnek. Az egymás fölé rendeződött gyűrűk összekapcsolódását molekulákként egy H-híd-kötés biztosítja. Az egymás fölé rendeződő gyűrűk viszonylag nagy méretű csatornaszerű üregeket képeznek a jégkristályban. A jégkristály hatszöges rétegszerkezete eredményezi a hópelyhek jellegzetes kristályformáit is. A jég kristályszerkezetét a 24.19. ábra mutatja.



24.19. ábra

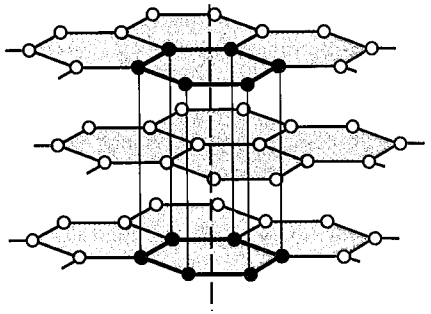
24.2.5. A polimorfia jelensége. A gyémánt és a grafit

Gyakori a természetben, hogy kémiai szempontból azonos anyagok különböző rácsszerkezetű kristálymódosulatokban is megtalálhatók. A jelenséget *többalakúságnak vagy polimorfiának* nevezik.

Valamely anyag többféle kristálymódosulata közül mindig csak egy az adott körülmények között stabil szerkezet, a többi módosulat *metastabil*. A metastabil módosulat atomjai szempontjából kedvező lenne az átalakulás a stabil szerkezetbe, de az atomok átrendeződésének feltételei nem adottak. Az energiafelszabadulással járó átrendeződés megindításához ugyanis olyan nagy kezdeti energia-befektetésre lenne szükség, amely az adott körülmények között nem biztosított. A metastabil állapot mintegy „befagyottnak" tekinthető. Ez azt eredményezi, hogy

a stabil szerkezet mellett a metastabil kristálymódosulat is hosszú időn át megmarad. A szén két, természetben is megtalálható kristályos módosulata a gyémánt és a grafit. Normál légköri nyomáson és hőmérsékleten a grafit a stabil, a gyémánt a metastabil módosulat.

A gyémánt és grafit példáján szemléletesen illusztrálhatjuk, hogy az eltérő kristályszerkezet milyen lényeges különbségeket okoz a fizikai tulajdonságokban. A rendkívül kemény, átlátszó, magas olvadáspontú, elektromosan szigetelő tulajdonságú gyémánt kristályszerkezetét az atomrácsok jellemzése során ismertettük. A gyémántrács magas hőmérsékleten és nagy nyomáson alakul ki, és ilyen körülmények között stabil. Közönséges körülmények között szén grafitként kristályosodik. A grafit a gyémánthoz hasonlóan magas olvadáspontú, de nem rendelkezik a gyémánt keménységével. A grafit könnyen rétegekre hasítható, egyszerű dörzsöléssel elkoptatható. A grafit fémesen csillogó, szürkés színű, az elektromosságot a fémekhez hasonlóan jól vezeti. A grafit tulajdonságait a rácsszerkezet segítségével értelmezhetjük.



24.20. ábra

A grafit rácsszerkezetét a 24.20. ábra mutatja. A grafitrácsban minden szénatom három másik szénatomhoz kapcsolódik, kovalens kötéssel. Az atomok közti kötést kialakító molekulapályák egy síkban fekszenek, és páronként 120°-os szöget zárnak be. Ily módon hatszöges szimmetriájú rétegek alakulnak ki. Egy-egy ilyen réteg egy óriásmolekulának tekinthető, amelynek különös sajátossága, hogy szénatomonként egy-egy elektron az egész rétegre kiterjed. A réteg mentén delokalizálódott elektronfelhő könnyen gerjeszthető, ezzel magyarázható a grafit fényes szürke színe és jó elektromos vezetőképessége. A grafitkristály a hatszöges óriásmolekula-rétegek egymásra épülésével alakul ki. A rétegek viszonylag távol, egymáshoz képest kicsit eltolva helyezkednek el. A rétegeket gyenge másodlagos

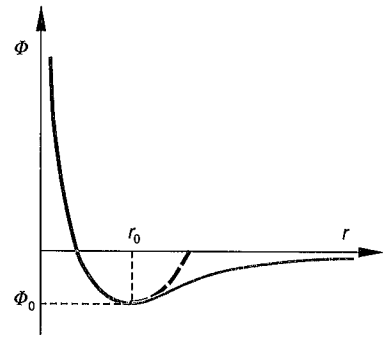
kötések tartják össze. A rétegek közötti gyenge kötőerő magyarázza a grafit „puhaságát", koptathatóságát. A rétegeken belül az atomokat összekapcsoló erős kovalens kötések biztosítják a grafit magas olvadáspontját.

A polimorfia nemcsak a „befagyott", metastabil kristálymódosulatok esetén fontos, hanem akkor is, ha pl. hőmérséklet-változás hatására bekövetkezik a szerkezet átalakulása. Egyszerű példa erre a közönséges körülmények között tércentrált köbös szerkezetű vas. A tiszta vas légköri nyomáson egészen 911 °C-ig tércentrált köbös szerkezetű, ha azonban e kritikus hőmérséklet fölé hevítjük, kristályszerkezete átalakul szoros térkitöltésű, lapközéppontos kockaráccsá. A kristályszerkezet-változást jellegzetes térfogatcsökkenés kíséri és teszi megfigyelhetővé.

25. A kristályos anyagok fizikai tulajdonságainak értelmezése az ideális kristályszerkezet alapján

A kristályos anyagok legtöbb fizikai tulajdonsága az atomok szabályos elrendeződése, a rácsszerkezet tulajdonságai alapján értelmezhető. Így magyarázhatók a rugalmas tulajdonságok, a fajhő, az elektromos vezetőképesség, a mágneses sajátosságok stb. (Egyes jelenségekre, pl. a kristályok képlékenységi tulajdonságaira az ideális rácsszerkezet segítségével nem adható magyarázat, ezek a jelenségek a szabályos szerkezet helyi hibáinak tulajdoníthatók.)

Az atomok közötti kölcsönhatás sok esetben jól jellemezhető az ún. *párpotenciál-függvény* segítségével. Ez a függvény megadja, hogy miként változik egy két atomból álló rendszer potenciális energiája a köztük levő távolság függvényében. A párpotenciál-függvény jellegzetes alakját a 25.1. ábra szemlélteti.



25.1. ábra

A koordináta-rendszer origóját az atompár egyik atomjához (egy rácsponthoz) rögzítjük, a másik atom ehhez viszonyított helyzetét a koordináta-rendszer vízszintes tengelyén mérjük. A függőleges tengelyen a rendszer potenciális energiája adott. A grafikonról leolvasható, hogy nagy távolságban az atomok között gyakorlatilag nincs kölcsönhatás. A két atomot közelítve a köztük ébredő és egyre intenzívebb vonzóerő miatt a potenciális energia egyre negatívabb, míg r_0 távolságnál minimumot ér el. Tovább közelítve a két részecskét, a potenciális energia nő, és

taszítóerő lép fel. Energetikailag az a legkedvezőbb, ha a két atom távolsága r_0. A potenciálfüggvény alakja a minimumhely kis környezetében jól közelíthető parabolával. Nagyobb tartományban vizsgálódva az eltérés egyre jelentősebb, a „potenciálgödör" aszimmetrikus, csökkenő távolságoknál az energia meredekebben növekszik, mint az r_0-nál nagyobb távolságok esetén. A 25.1. ábrán grafikusan bemutatott függvény az ún. Lenard–Jones-potenciálfüggvénnyel

$$\Phi = \frac{A}{r^m} - \frac{B}{r^n} \tag{25.1}$$

írható le, ahol, A, B, m és n konstansok.

Sok atomból álló kristályban a részecskék elrendeződését ugyancsak az energiaminimum határozza meg. Minden atom potenciális energiáját az összes többi atommal történő párkölcsönhatás eredőjeként kell kiszámítani. E bonyolult számítás elvégzésére azonban szerencsés esetben nincs szükség. Egyszerű köbös kristályrács esetén például a részecskék potenciális energiáját lényegében csak a közvetlen szomszédok határozzák meg. A kristály rácsállandója 0 K-en tehát a kétrészecske-potenciál minimumhelyével azonos r_0 érték.

A Lenard–Jones-potenciálfüggvényben szereplő konstansok értéke anyagi minőségtől és rácstípustól függően eltérő, meghatározásuk makroszkopikus mérési adatok (pl. kompresszibilitás, rácsenergia, rácsállandó stb.) felhasználásával, számítások segítségével történik. A mérési tapasztalatok alapján ionrácsos anyagok esetén $n = 1$, $m \approx 6$; molekularácsok esetén $n = 6$, $m \approx 12$. Mivel a függvény pontos felírása csak a kísérleti (empirikus) eredmények alapján lehetséges, a függvényt *empirikus potenciálfüggvénynek* nevezik.

A kristály atomjainak kölcsönhatását jellemző pár potenciálfüggvény ismeretében egyszerűen értelmezhetők a szilárdtestek rugalmassági állandói, a kristályok rácsenergiája, a hőtágulás jelensége, az atomok rezgésére visszavezethető fajhő.

25.1. A kristályok rugalmas tulajdonságai

A kristályos szerkezetű szilárd anyagok külső mechanikai hatásra deformálódnak. Ha a deformáló hatás egy, az anyagra jellemző küszöbérték alatt marad, akkor a testek alakváltozása rugalmas, a külső hatás megszűntével a test visszanyeri eredeti alakját. Ha az erőhatás egy adott mértéket meghalad, a test maradandóan deformálódik.

A mechanikában a klasszikus rugalmasságtan általánosan vizsgálja a külső hatás, illetve az anyagban ennek következtében kialakuló feszültségállapot és deformáció közötti összefüggést (Hooke-törvény). A mechanikában alkalmazott fenomenologikus leírás

az egyes anyagfajták eltérő rugalmas sajátosságait különböző paraméterekkel, anyagállandókkal veszi figyelembe. Általános esetben az anyag rugalmasság szempontjából 21, a homogén izotrop anyag két független anyagállandóval jellemezhető.

A szilárdtestfizika anyagszerkezeti szempontból vizsgálja a kristályos anyagok mechanikai tulajdonságait. A klasszikus mechanika rugalmas állandóit a kristályszerkezetre, az atomok között működő erőkre vezeti vissza.

Terhelésmentes állapotban a kristály atomjai az r_0 egyensúlyi távolságban helyezkednek el egymáshoz képest. A kristályt rugalmasan deformáló erő hatására a szomszédos atomok közti r_0 egyensúlyi távolság egy kicsit megváltozik. A kristály részecskéit jellemző Lenard–Jones-potenciálfüggvény az r_0 rácsállandó Δr környezetében jól helyettesíthető a lineáris erőtörvénynek megfelelő $\Phi = Kr^2$ *parabolapotenciállal.* Ennek alapján a rugalmas tulajdonságok értelmezésekor a *kristályt ideális rugókkal összekötött, tömegpontokból álló térrácsnak tekintjük.*

25.2. A kristályok belső energiája

A kristályok kialakulásakor az atomok a közöttük ébredő vonzó- és taszítóerők eredményeként a legalacsonyabb energiájú állapotnak megfelelő térbeli elrendeződést valósítják meg. Két szomszédos atom kölcsönhatását a 25.1. ábra párpotenciál-függvénye jellemzi. Energetikailag a legkedvezőbb, ha a legközelebbi atomok a potenciálfüggvény minimumához tartozó r_0 távolságban helyezkednek el. Az r_0 távolság a kristály rácsállandója 0 K-en, az r_0-hoz tartozó negatív függvényérték (Φ_0) a két részecske kötési energiája. Legtöbbször a potenciálvölgy szélessége elegendően kicsi, így a második szomszéd helyén a kölcsönhatási energia első közelítésben már elhanyagolható. Ilyen esetben az egész kristály kötési energiája atompárok közötti kötési energiák összegzésével kapható meg:

$$U_0 = \sum \Phi_0. \tag{25.2}$$

0 K hőmérsékleten a kristály belső energiája U_0 és U_z az *zérusponti energia* összege. Bármely, 0 K-nél nagyobb hőmérsékleten az atomok – a rácspont mint egyensúlyi helyzet körül – a tér minden irányában termikus rezgőmozgást végeznek. A rezgések intenzitása (energiája) a hőmérséklet függvénye. A kristály belső energiája nem túl magas T hőmérsékleten az U_0 kötési energiának, a rácsatomok rezgési energiájának és az U_z zérusponti energiának az összegével adható meg:

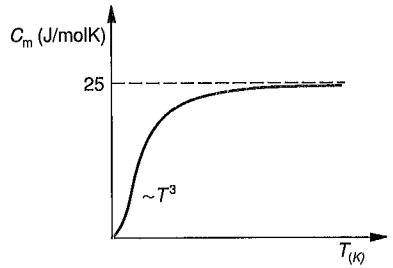
$$U = U_0 + \sum_i u_{ri} + \sum_i u_{zi}. \tag{25.3}$$

Ahol u_{ri} egy (az i-edik) rácsatom rezgési, u_{zi} pedig zérusponti energiája (lásd a 20.2.3. pontot).

25.2.1. A szilárdtestek mólhője

Kristályos anyagok melegítésekor a befektetett energia a kristály belső energiáját növeli. (A szilárdtestek hőtágulása kicsi, ezért a tágulással járó térfogati munka elhanyagolható.) A belső energia növekedése a rácsatomok fokozódó rezgésében nyilvánul meg. Vizsgáljuk meg, hogyan értelmezhető a szilárdtestek fajhője a rácsatomok rezgésével! A különböző anyagi minőségű kristályok tulajdonságai egységesen tárgyalhatók, és így jól összehasonlíthatók, ha a fajhő helyett az anyag *mólhőjét* vizsgáljuk. A mólhő egy mólnyi anyag egy fokkal történő felmelegítéséhez szükséges energia. Mivel *Avogadro törvénye* (lásd a 22.1. szakaszt) szerint minden anyag mólnyi mennyisége $6 \cdot 10^{23}$ db részecskét tartalmaz, a mólhő $6 \cdot 10^{23}$ db rácsatom rezgési energiájának megváltozását jellemzi, ha a kristály hőmérséklete egy fokkal változik. (A továbbiakban csak egyszerű, atomos szerkezetű kristályok mólhőjével foglalkozunk.)

A 25.2. ábra a kristályok C_m mólhőjének hőmérsékletfüggését mutatja.



25.2. ábra

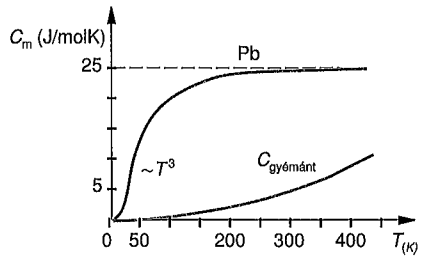
A mólhő alacsony hőmérsékleteken erősen függ a hőmérséklettől. Pontos mérésekből tudjuk, hogy $T = 0$ környezetében, szigetelők esetén, a mólhő az abszolút hőmérséklet harmadik hatványával arányosan változik, azaz $C_m = aT^3$. A kifejezésben szereplő a együttható a kristály anyagi minőségétől függ. Fémek esetén a hőmérsékletfüggés leírásához még egy lineáris tag kell, azaz $C_m = at^3 + bT$. A hőmérséklet növelésével a fajhő hőmérsékletfüggése csökken. Szobahőmérsékletnél alig magasabb hőmérsékleteken a legtöbb kristályos anyag mólhője közelítőleg azonos, 24...25 J/mol (Dulong–Petit-szabály).

A *Dulong–Petit-szabály*t, valamint azt, hogy a mólhő csökken a hőmérséklet csökkenésekor, először *Albert Einsteinnek* sikerült közelítőleg értelmeznie.

Einstein egyszerű kristálymodelljével és az ennek alapján számított mólhővel a 23.4.1.2. alpontban már foglalkoztunk.

Az Einstein-féle elmélet a kristály atomjainak rezgését azonos frekvenciájúnak tekinti. Ez az erős egyszerűsítő feltételezés az oka, hogy a fajhő hőmérsékletfüggésére levezetett Einstein-féle formula a valóságos T^3-ös hatványfüggvény helyett exponenciális függést ad. A modell segítségével azonban magyarázatot kaphatunk a Dulong–Petit-szabályra, valamint arra a kísérleti tapasztalatra, miszerint alacsony hőmérsékleteken a fajhő erősen függ a kristály anyagi minőségétől. Einstein egy adott kristályban minden atom rezgését azonos frekvenciájúnak tekintette, de feltételezte, hogy ez a frekvencia a kristály anyagi minőségétől függ. A rezgési frekvencia kiszámításakor a klasszikus mechanikai rezgések elméletéből indul ki. Eszerint a sajátfrekvenciát a rezgő test (atom) tömege és a rugóállandó (az atomok közötti kötés erőssége) határozza meg.

Hasonlítsuk össze ennek alapján a gyémánt- és az ólomkristályokban a részecskék rezgési frekvenciáját! A kemény gyémántkristályt erős kötésben levő kis tömegű szénatomok alkotják. Az puha ólomban a nagy tömegű atomokat viszonylag gyenge kötések tartják össze. A kristályrácsban rezgő atomok frekvenciája ennek megfelelően a gyémántkristályban jóval nagyobb, mint az ólomban. A rezgő atomok frekvenciájának nagysága szabja meg azt, hogy milyen mértékben csökken a fajhő a hőmérséklet csökkenésével, illetve hogy milyen hőmérsékletérték fölött tekinthető a mólhő a hőmérséklettől független állandó értéknek. Az ólom és a gyémánt mólhőjének változása a hőmérséklet függvényében a 25.3. ábra sematikus grafikonján látható.



25.3. ábra

A szilárdtestek fajhőjének pontos értelmezését Peter Debye adta meg. Debye elméletében a kristály atomjai nem végeznek független rezgőmozgást, hanem az egyes atomok rezgései a kristályban rugalmas állóhullámokká csatolódnak. A hullámok terjedési sebessége a hangsebesség, a lehetséges hullámhosszakat az atomok távolsága és a kristály geometriai méretei határozzák meg. Számításokkal igazolható, hogy N atomból álló kristályban összesen $3N$ állóhullám alakulhat ki. A kristály termikus energiája az állóhullámok energiájának összege. Itt nem rész-

letezett számításokkal belátható, hogy a rugalmas állóhullámok energiája hasonló a rugón rezgő tömegpont energiakifejezéséhez. Energetikai szempontból a kristály rugalmas állóhullámai egy-egy megfelelő frekvenciájú rezgéssel (harmonikus oszcillátorral) helyettesíthetők. Az állóhullámok energiája így a harmonikus oszcillátor energiájához hasonlóan csak $h\nu$ energiaadagokkal változhat. A kristály belső energiája a különböző frekvenciájú és átlagenergiájú állóhullámok energiájának az összege. Debye érdeme, hogy olyan becslést adott az állóhullámok frekvenciaeloszlására, amelynek segítségével a kristály belső energiáját úgy lehetett meghatározni, hogy a belőle számított fajhő a kísérleti eredményeknek megfelelően a hőmérséklet köbével arányosan csökken.

A határozott $h\nu$ energiájú fényhullámot sokszor energiahordozó részecskeként kezeljük és *fotonnak* nevezzük. A határozott energiájú rugalmas hullámokat a kristályban – a foton analógiájára – a képzeletbeli energiahordozó részecskéknek tekintjük és *fononoknak* nevezzük. Az állóhullámok közt nincs energetikai kölcsönhatás, a kristály energiája a fononok energiáinak egyszerű összegzéséből adódik, hasonlóan ahhoz, ahogy az atomok energiájának összegéből adódik az ideális gáz belső energiája. Ennek a hasonlóságnak az értelmében szokás azt mondani, hogy a kristály termikus belső energiáját „a fonongáz" energiája adja. Az így meghatározott belső energia alapján számítható fajhő a kísérleti eredményekkel jó egyezésben van.

25.3. A szilárdtestek hőtágulása

A szilárdtestek atomjai között fellépő kölcsönhatást a párpotenciál-függvény írja le. A kristályok rugalmas tulajdonságainak értelmezésekor (lásd a 25.1. szakaszt) feltételeztük, hogy az atomokra az egyensúlyi helyzetüktől mért kitéréssel arányos visszatérítő erő hat. A kristályos anyagok fajhőjét – ugyancsak a lineáris erőtörvény alapján – a rácsatomok harmonikus rezgésével magyaráztuk. Mindkét esetben a kristályrács részecskéinek párpotenciál-függvényét az egyensúlyi r_0 távolságra (rácsállandóra) szimmetrikus parabolapotenciállal (lásd a 25.1. ábrát) helyettesítettük. A *hőtágulás, hővezetés* jelenségére ebből a közelítésből nem adható magyarázat. Ezen jelenségek értelmezéséhez figyelembe kell vennünk, hogy az atomi párpotenciál-függvény valójában aszimmetrikus.

Vizsgáljuk a kristály szomszédos részecskéinek kölcsönhatási energiáját a 25.1. ábra grafikonja alapján! A grafikonon szaggatott vonal jelzi a harmonikus közelítésnek megfelelő parabolát, folytonos vonal mutatja a valódi helyzetnek megfelelő Lenard–Jones-potenciált. Az ábrázolt potenciálfüggvény a szomszédos atomokra együttesen jellemző.

A $T > 0$ K hőmérsékleten az atomok egyensúlyi helyzetük körül rezgőmozgást végeznek. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az (1) részecske nyugalomban van, és csak a (2) mozog. A rezgő (2) atom mozgási energiája abban a pillanatban maximális (E_k), amikor a részecske az egyensúlyi helyzetén (r_0) halad keresztül. Az ábrán az E_k mozgási energiát a potenciálgödör aljától mértük fel. Amikor a (2) atom balra mozog, mozgási energiája az (1) részecske taszítása ellen végzett munkára fordítódik, a kinetikus energia kölcsönhatási energiává alakul át. A (2) részecske potenciális energiája maximálisan E_k értékében tér el az egyensúlyi $U(r_0)$ potenciális energiától, miközben a részecske $r_0 - x_1$ távolságra közelíti meg az (1) atomot, azaz

$$U\left(r_0 - x_1\right) - U\left(r_0\right) = E_k. \tag{25.4}$$

Hasonló a helyzet, ha a (2) részecske a rezgés során ellenkező irányba tér ki. A kinetikus energiáját ebben az esetben az (1) atom egyre gyengülő vonzása csökkenti. Az egyensúlyi helyzettől mért maximális eltávolodást ebben az esetben az

$$U\left(r_0 - x_2\right) - U\left(r_0\right) = E_k \tag{25.5}$$

egyenlet szabja meg.

Amennyiben a kristályrácsban rezgő atomok mozgását valóban tiszta harmonikus erők szabnák meg (parabolapotenciál), úgy x_1 és x_2 egyenlő lenne, s a rezgés geometriai középpontja $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ egybeesne az egyensúlyi helyzettel. Ilyen esetben hőtágulás nem léphetne fel, hiszen a hőmérséklet emelésével ekkor csak a rezgés „tágassága" változna, az atomok távolsága azonban nem.

A valóságban a potenciálgödör nem szimmetrikus. Az aszimmetria miatt a részecskék x_2 távolodása nagyobb mértékű, mint az x_1 közeledése. Az atomok hosszabb ideig tartózkodnak az r_0 egyensúlyi helyzetnél távolabbi tartományban, mint az egyensúlyi helyzetnél kisebb távolságban.

A hőtágulás annak következtében lép fel, hogy a rácsatomok egymástól mért távolságának időbeli átlaga nagyobb, mint az r_0 egyensúlyi távolság. A rácsatomok távolságának időbeli átlaga a kristály rácsállandója. A rácsállandó – a mérések szerint – növekszik a hőmérséklet emelkedésével. Mivel a szilárdtest hossza a rácsállandóval arányos, így melegítéskor a testek hossza nő, a kristályos anyag hőtágul.

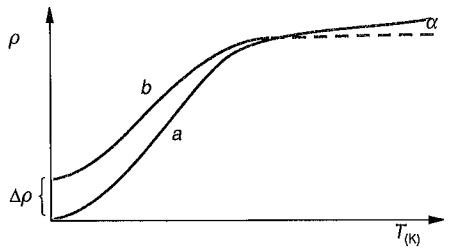
25.4. A szilárdtestek elektromos tulajdonságai. A sávszerkezet

25.4.1. Kísérleti tapasztalatok

Az elektromos tulajdonságok közül gyakorlati szempontból a legjelentősebb a *vezetőképesség*. Ha egy kristályos anyag két pontja között elektromos feszültséget (U) létesítünk, a kristályban töltésáramlás (I) indul meg. Az adott potenciálkülönbség hatására kialakuló áramerősséget a kristály ellenállása, ezen belül az anyagi minőségre jellemző fajlagos ellenállása szabja meg. A fajlagos ellenállás nagysága szerint a kristályokat három nagy csoportba soroljuk:

Vezetők azok az anyagok, amelyekben már csekély feszültség hatására is számottevő áram folyik. A vezetők fajlagos ellenállása kicsi, szobahőmérsékleten $\rho = 10^{-9}...10^{-2}$ Ω·cm nagyságrendű. Ilyen anyagok a fémek és a grafit. A vezetők fajlagos ellenállása függ az anyag kémiai tisztaságától és a hőmérséklettől.

A 25.4. ábra grafikonja a fémek fajlagos ellenállásának változását mutatja a hőmérséklet függvényében. Az α görbe a tiszta fém ellenállására jellemző. A fajlagos ellenállás nullához tart az abszolút nulla fok környezetében. A görbe alacsony hőmérsékletekhez tartozó része T^n alakú hatványfüggvénnyel írható le, ahol n sok esetben 5 körüli érték. Magasabb hőmérséklet-tartományban az ellenállás a hőmérséklettel egyenes arányban növekszik. A b görbe szennyezett fém (ötvözet) ellenállását szemlélteti. Az ötvözők hatására a görbe egy hőmérséklettől független állandóval magasabbra tolódik. A $T \approx 0$ K-hez tartozó konstans ellenállásérték az ötvözet ún. *maradék-ellenállása*. A maradék-ellenállás nagyságát döntően az ötvözők mennyisége szabja meg.



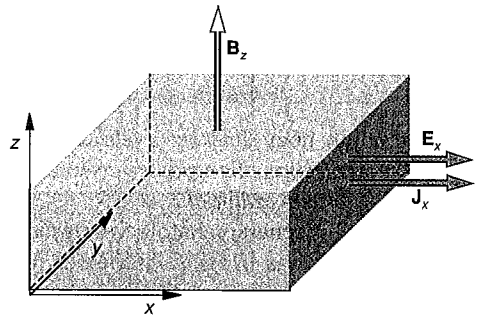
25.4. ábra

Szigetelők azok a kristályok, amelyekben, nagy feszültségek hatására sem folyik számottevő áram. Meg kell jegyeznünk, hogy tökéletes szigetelő nincs, elegendően nagy feszültség esetén mindig mérhető csekély áramerősség. A szigetelők fajlagos ellenállása nagy, $\rho = 10^{+9}...10^{+18}$ Ω·cm. A szokásos hőmérsékleteken szigetelő tulajdonságúak az ionkristályok, a molekularácsú anyagok, valamint az atomrácsú kristályok közül a gyémánt.

Félvezetők azok az anyagok, amelyek fajlagos ellenállása szobahőmérsékleten $\rho = 10^{-2}...10^{+9}$ Ω·cm nagyságrendű, azaz sem a vezetők, sem a szigetelők közé nem sorolhatók. Félvezető a legtöbb atomrácsú anyag, a legfontosabb közülük a szilícium és a germánium. A kísérleti tapasztalatok szerint a tiszta félvezetők ellenállása exponenciálisan csökken a hőmérséklet emelkedésével. Szennyezett (n, illetve p típusú) félvezetők esetén a fajlagos ellenállás a hőmérséklettől gyakorlatilag független.

Az elektromos vezetésben részt vevő töltések minőségéről (pozitív, illetve negatív) és a töltéshordozók térfogategységre jutó számáról mágneses térben végzett mérések alapján kaphatunk adatokat.

A mérés elvi alapja a következő: A 25.5. ábra rajzának megfelelően vegyünk egy téglatest alakú kristályt, és válasszuk a kristály három élét koordinátatengelynek!



25.5. ábra

Ha a kristályra x irányú E_x elektromos teret kapcsolunk, x irányú j_x áramsűrűségű áram indul meg. Helyezzük ezután z irányú, B_z indukciójú mágneses térbe az árammal átjárt kristályt! Az áramot adó mozgó töltésekre a mágneses térben y irányú *Lorentz-erő* (lásd a 8.2.1. pontot) hat:

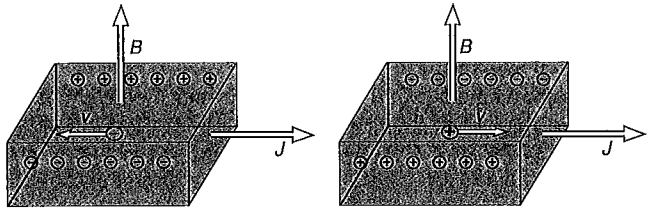
$$F_y = qv_x \cdot B_z, \tag{25.6}$$

ahol q a töltést, v_x a mozgó töltés sebességét jelöli. A Lorentz-erő hatására a mozgó töltések eltérülnek eredeti x irányukból az y tengely irányába. Ez az eltérülés mindaddig tart, amíg a kristály oldalfala mentén felhalmozódó azonos töltések egyre erősödő elektromos terétől származó taszítás (qE_y) ki nem egyenlíti a Lorentz-erőt:

$$qE_y = qv_x B_z. \tag{25.7}$$

Az y tengelyre merőleges oldallapok között ilyenkor elektromos feszültség mérhető, amelyet a jelenség felfedezőjéről *Hall-feszültségnek* neveznek. (A jelenség maga az ún. *Hall-effektus*.)

A Hall-feszültség polaritása alapján a vezetésben részt vevő töltéshordozók természetére tudunk következtetni. Ahogy a 25.6. ábra magyarázó rajzain látszik, a pozitív, illetve negatív töltéshordozók esetén – változatlan áramirány és mágneses tér mellett – a Hall-feszültség polaritása éppen ellentétes.



25.6. ábra

Ilyen mérések alapján tudjuk, hogy *fémekben az elektromos áramot negatív töltéshordozók – elektronok – hozzák létre, míg egyes szennyezett félvezetőkben (p típusú félvezető) az áramot pozitív töltések szállítják.*

A Hall-effektus segítségével meghatározható a vezetésben részt vevő töltéshordozók térfogategységre jutó száma (N) is. A kísérletben mérhető j_x áramsűrűség ui. kifejezhető a töltésekkel (q), azok sebességével (v_x) és térfogategységre eső számával (N):

$$j_x = qv_xN.$$

A korábbi egyenlet felhasználásával a vezetésben részt vevő töltéshordozók térfogategységre vonatkoztatott számára adódik:

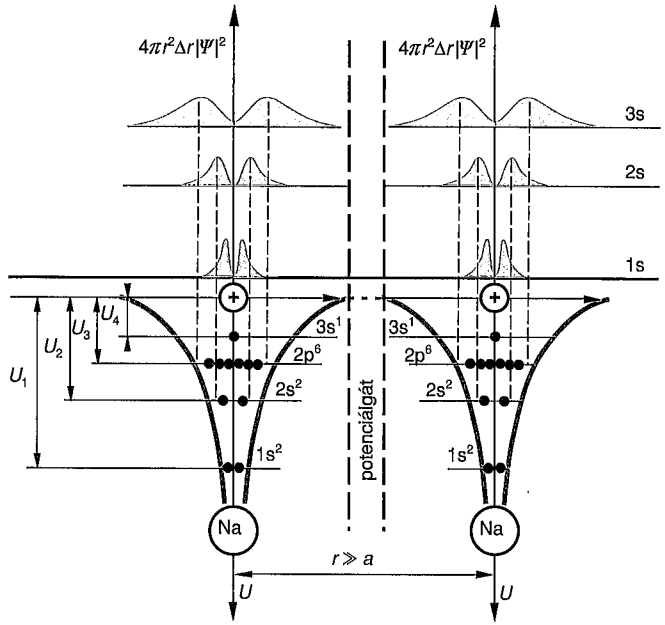
$$N = \frac{B_z}{E_y q} j_x,$$

ahol a B_z a kísérleti összeállítás paramétere, j_x a mintán átfolyó áram méréséből, E_y a minta két oldala közt mérhető feszültségből ismert.

25.4.2. A kristályok elektronszerkezete

A szilárdtestek vezetési tulajdonságai a kristályok elektronszerkezetének ismeretében értelmezhetők. A kristályrácsba rendeződött atomok egymás közvetlen közelében helyezkednek el, így bármely atom elektronjaira nemcsak saját atommagjának a tere hat, hanem a közvetlen szomszédok potenciáltere is. A kristályban levő atomok elektronállapotai lényegesen különböznek a magányos atom energiaállapotaitól. Ezt a különbséget az alábbi egyszerű példán érzékeltetjük.

Képzeljünk el egy nátriumatomokból álló háromdimenziós rácsot, amelyben az atomok a valódi kristályrácshoz hasonlóan helyezkednek el, a rácsállandó azonban olyan nagy, hogy az atomok közötti kölcsönhatás már elhanyagolható. Az ilyen rácsban az egyes atomok energiaszintjei megegyeznek a magányos Na-atom energiaszintjeivel. A 25.7. ábra két szomszédos atom energianívóit szemlélteti.



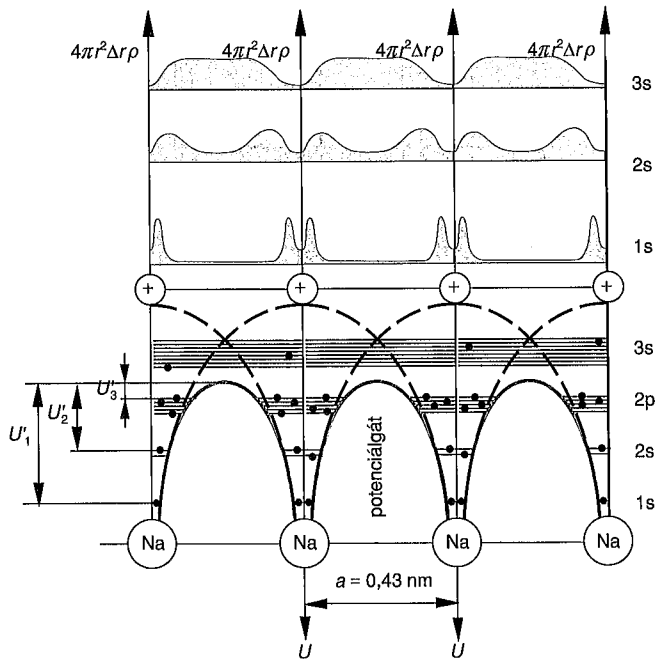
25.7. ábra

Mindkét atommag orsó alakú, mély potenciálgödrében bejelöltük az $1s$, $2s$, $2p$ és $3s$ elektronok energiaszintjeit. (A felső indexek a szinten levő elektronok számát jelölik.) A szabad Na-atomban az $1s$, $2s$ és $2p$ energiaszintek teljesen betöltöttek, a $3s$ nívó félig betöltött, míg a magasabb energiájú szintek üresek. Az ábrán a két potenciálgödröt elválasztó gát szélessége, r sokkal nagyobb a tényleges rácsállandó (a) értékénél. (Az ábra kettős szaggatott vonala a potenciálgát nagy kiterjedését jelzi.) A potenciálgát magassága a különböző szinteken levő elektronok szempontjából más és más, ezt az ábrán rendre U_1, U_2, U_3, U_4 jelöli. A potenciálgát megakadályozza, hogy az elektronok az egyik atomtól a másikhoz kerüljenek. Ha

feltesszük, hogy az atommagok távolsága $r = 3$ nm, úgy az ábrán jelölt legmagasabb energiaszinten levő 3*s* elektron, a kvantummechanikai számítások szerint, átlagosan 10^{20} évenként egyszer kerülhet át az egyik atomtól a másikhoz.

A 25.7. ábra felső részén az elektronok *megtalálási valószínűségét* (lásd a 19.5. szakaszt) ábrázoltuk a magoktól mért távolság függvényében. A valószínűségsűrűség-görbe maximumhelyei jó közelítéssel megegyeznek a Bohr-féle elektronpályák sugarával. A mondottak alapján képzeletbeli Na-rácsunkban csak az atomok elrendeződése szabályos, az egyes atomok elektronszerkezetüket tekintve különállóak.

Zsugorítsuk most a képzeletbeli Na-rácsot mindaddig, amíg elérjük a valódi Na-kristály rácsállandóját! A rácspontok közötti távolság csökkenésével az atomi potenciálfüggvények egyre inkább átfedésbe kerülnek. A Na-kristályra jellemző potenciálviszonyokat a 25.8. ábra mutatja.



25.8. ábra

Az atomi potenciálfüggvények (szaggatott vonallal rajzolva) átfedése miatt az atomok közötti potenciálgát szélessége és magassága csökken. A megváltozott potenciálgátak (folytonos vonallal rajzolva) szélessége a rácsállandónak felel meg,

magassága pedig nem éri el az energiaskála zérusszintjét. A potenciálgát magassága az 1*s*, 2*s*, 2*p* elektronok energiaszintjéhez viszonyítva rendre: U'_1, U'_2, U'_3. A Na-atomok legkülső vegyértékelektronjainak eredeti 3*s* szintje az új potenciálgát fölé került. Ez azt jelenti, hogy a 3*s* elektronok szabadon mozoghatnak a kristályban egyik atomtól a másikig.

A megváltozott potenciálviszonyoknak megfelelően az elektronok megtalálási valószínűség-sűrűsége is megváltozik. A potenciál grafikonja fölé rajzolt ábra mutatja, hogy a 3*s* elektronok valószínűség-sűrűsége olyan mértékben átfedésbe került, hogy gyakorlatilag a vegyértékelektronok egyenletes eloszlásáról beszélhetünk az egész kristályban. Az ilyen elektronokat *delokalizált elektronoknak, szabad elektronoknak* vagy az elektronok összességét *szabadelektron-gáznak* is nevezik.

25.4.3. A kristály elektronjainak energiaspektruma. Sávszerkezet

Az előző pontban levő nagy rácsállandójú, képzeletbeli Na-rácsban energetikai szempontból minden atom különállónak számít. *N* atomból felépülő rács esetén a szerkezetben összesen *N* db 1*s*, ugyanennyi 2*s*, 3*N* db 2*p* és *N* db 3*s* elektronállapot létezik. Az atomokat a valódi Na-kristály rácsállandójának megfelelő távolságra közelítve az atomok kölcsönhatásba kerülnek. Az *N* atommag és valamennyi elektron energetikailag egyetlen rendszert alkot. A *Pauli-elv* (lásd a 20.4. szakaszt) értelmében egy kvantummechanikai rendszerben nem lehet több azonos elektronállapot. Ezért a kristályban a szabad atom minden egyes energianívója *N* egymáshoz közeli energiaszintre hasad fel. Az egymáshoz közeli energiaszintek ún. *energiasávokat* alkotnak. Az atomi energianívók felhasadása jól értelmezhető a következő szemléletes képpel.

A kristályban minden elektron energiája egy potenciális és egy mozgási energiatagból tevődik össze. Vizsgáljuk a magányos atom 1*s* energiaszintjét! Itt az elektron energiája a $-U_1$ potenciális energia és a $\frac{p^2}{2m}$ kinetikus energia összegéből adódik. Az elektron *p* impulzusa és az elektron-állóhullám λ hullámhossza között a $p = \frac{h}{\lambda}$ de Broglie-összefüggés áll fenn (lásd a 19.1. szakaszt). A szabad atomban az 1*s* elektron olyan állóhullámnak tekinthető, amelynek hullámhossza éppen kétszerese a potenciálgödör $-U_1$ mélységéhez tartozó szélességének. A kristályban az elektronok nincsenek szigorúan atomhoz kötve, az eredetileg $-U_1$ potenciális energiájú elektron hullámhossza *N* atom összekapcsolódása esetén éppen *N*-féle lehet.

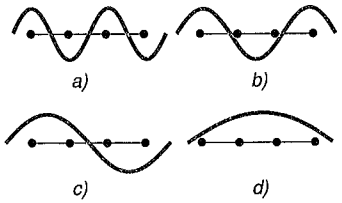
Ez egyszerűen érzékelhető *N* db *a* távolságra ismétlődő atomból álló láncon. Vizsgáljuk meg, hogy hányféle módon alakítható ki állóhullám a rögzítettnek képzelt végek között!

Állóhullám kialakulásának a feltétele, hogy a lánc Na hossza a λ hullámhossz felének egész számú többszöröse legyen, azaz

$$Na = K\frac{\lambda}{2}. \tag{25.8}$$

Figyelembe véve, hogy a λ hullámhossz nem lehet tetszőlegesen kicsi, legfeljebb a rácsállandó kétszerese ($\lambda_{min} = 2a$), így N atom kapcsolódása esetén a K egész szám értéke maximálisan N lehet. Mindezekből adódik, hogy a láncon N különböző állóhullám-állapot alakulhat ki.

A lehetséges állóhullámok alakját, $N = 4$ esetén a 25.9. ábra szemlélteti:



25.9. ábra

Az N különböző hullámhosszú elektronhullám kinetikus energiája mind különböző. A kristályban tehát a szabad atom minden $-U_1$ energiaszintjének N különböző energiájú szintből álló energiasáv felel meg.

A kristályokban általában az ugyanazon sávon belüli szintek energiakülönbsége rendkívül kicsiny. Egy 1 m^3 térfogatú kristály 10^{28} atomot tartalmaz. Egy ilyen kristályban egy 1 eV szélességű sáv szintjeinek átlagos távolsága 10^{-28} eV. Ilyen kis energiakülönbségek esetén a sávokban az energiaeloszlás folytonosnak tekinthető, a sáv elektronbefogadó képessége azonban korlátozott. N atomból álló kristály egy-egy energiasávja szintenként két, eltérő spinű, összesen $2N$ elektront tartalmazhat.

Az atomok kölcsönhatása azoknak az elektronoknak – az ún. *vegyértékelektronoknak* – az energiáját változtatja meg leginkább, amelyek a legmagasabb energiaszinten voltak. Általában a vegyértékelektronokból álló energiasáv a legszélesebb. Az atommaghoz erősebben kötött belső elektronok energiáját a kristállyá szerveződés kevéssé befolyásolja. Az ilyen elektronok által alkotott energiasávok igen keskenyek (lásd a 25.8. ábrát).

A kristályban tehát minden szabad atombeli energiaszintnek egy energiasáv felel meg. A sávokba eső energiaértékekkel rendelkezhetnek a kristály elektronjai. A sávok közé eső energiákkal nem lehetnek elektronok a kristályban. A sávok közötti energiazónákat *tiltott sávoknak* nevezik. Mivel a megengedett energiasávok a megfelelő atomi szintek energiájának növekedtével szélesednek, a tiltott sávok szélessége az energia növekedésével csökken.

Abszolút zérusfok-hőmérsékleten minden elektron a lehető legalacsonyabb energiájú állapotban van. A Pauli-elv értelmében azonban egy-egy energianívóra csak két, ellentétes spinű elektron kerülhet. A kristály elektronjai először a legalsó sáv energiaszintjeit foglalják el. Miután ez a sáv betelt, a tiltott zóna kimarad, és a következő megengedett energiasáv töltődik be. Az abszolút nulla fokon elektronokkal teljesen betöltött legnagyobb energiájú sávot *vegyértéksávnak (valenciasávnak),* a vegyértéksáv feletti, részben vagy teljesen üres energiasávot *vezetési sávnak* nevezik. Az abszolút nulla fokon még betöltött utolsó energianívó a *Fermi-nívó (Fermi-szint),* a hozzá tartozó E_F energiaérték a *Fermi-energia* (részletesebben lásd a 23.6.1.1. pontot). A Fermi-energiának a sávban elfoglalt helye és értéke jellemző a kristály elektronszerkezetére. Abszolút zérus fokon nincsenek a kristályban a Fermi-szint feletti energiával rendelkező elektronok, a Fermi-szintnél magasabb energiájú sávok üresek.

A kristályok ismertetett sávszerkezetének mennyiségi (kvantitatív) leírása nehéz kvantummechanikai számításokat igényel. Az elektronok mozgását (hullámfüggvényét) a szabályosan elrendeződött atommagok $V(r)$ potenciálterében a *Schrödinger-egyenlet* (lásd a 20.1. szakaszt) írja le.

Az atommagok szabályos térbeli elrendeződése miatt a $V(r)$ potenciál rácsperiodikus. A Schrödinger-egyenlet matematikai vizsgálata azt mutatja, hogy ilyen potenciál esetén az elektronok mozgásállapotát egy olyan síkhullám jellemzi, amelynek amplitúdója a rács periodicitásával összhangban szabályosan ingadozik. Az ilyen hullámfüggvényt *Bloch-függvénynek,* az így leírható elektronokat *Bloch-elektronoknak* nevezik. A Bloch-elektronok Schrödinger-egyenletét megoldva bonyolult számítások végeredményeként adódik a kristály energiaspektruma vagy más néven a sávszerkezete.

A következőkben a fém, a szigetelők és a félvezetők elektromos tulajdonságait a kristályok sávszerkezetéből kiindulva értelmezzük.

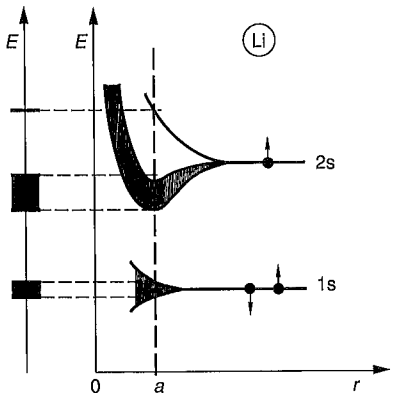
25.4.4. A fémek sávszerkezete

A fémek elektromos szempontból legfontosabb tulajdonsága az, hogy jó vezetők. Ha külső elektromos tér hatására a kristály bizonyos elektronjai mozgásba jönnek a fémben, áram indul meg. Az elektronok mozgásba hozatalakor a tér munkát végez, az elektronok energiája megnő. Vizsgáljuk meg, milyen feltételek esetén nőhet meg egy elektron energiája, azaz mikor vehet részt egy elektron a vezetésben!

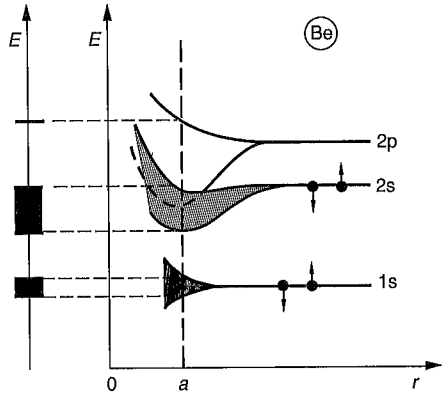
A kristály sávszerkezetéről mondottak értelmében *az elektron csak meghatározott energiaértékekkel rendelkezhet.* A Pauli-elv (lásd a 20.4. szakaszt) szerint *a kristályban több azonos állapotú elektron nem lehet.* E két feltétel együttes figyelembevételével arra a következtetésre juthatunk, hogy *csak azok az elektronok ve-*

hetnek részt a vezetésben (vehetnek fel energiát a térből), *amelyekhez közel megengedett, de még betöltetlen energiaszint található.*

A fémek legtöbbje a periódusos rendszer első két oszlopában található, egy vagy két vegyértékelektronnal rendelkezik. Az egy, illetve két vegyértékű fémek jellemző sávszerkezetét a lítium (Li: egy vegyértékű) és a berillium (Be: két vegyértékű) példáján a 25.10. és a 25.11. ábrán mutatjuk be. Az ábrák az atomi energianívók felhasadását az atomok távolságának függvényében mutatják. A felsorolt energiaszintek közül a legalacsonyabbat és a legmagasabbat rajzoltuk be, a szintek betöltöttségét a sáv vonalkázása jelzi. A kristály sávszerkezete a grafikonról az a rácsállandó távolságnak megfelelően olvasható le.



25.10. ábra



25.11. ábra

A magányos Li-atomnak két $1s$ állapotú és egy $2s$ állapotú elektronja van. Az N atomot tartalmazó lítiumkristályban az $1s$ atomi energiaszint N nívóra hasad fel, amelyek keskeny energiasávot alkotnak. A kristálynak ez az alsó energiasávja $2N$ elektront tartalmaz, és teljesen betöltött. A $2s$ energiaszint ismét N nívóra hasad fel. Ez a második energiasáv azonban csak félig van betöltve, hiszen az N nívón $2N$ elektron számára van hely, míg a kristályban csak N darab ilyen ($2s$) elektron található. A lítium fém elektromos vezetését a betöltetlen energiasáv segítségével értelmezhetjük. A sávon belül sűrűn, szinte folytonosan helyezkednek el a megengedett energianívók, a sáv legmagasabb energiaszintjein levő elektronok tehát felvehetnek energiát a telep elektromos teréből, és magasabb energianívóra átlépve részt vehetnek az áramvezetésben.

A berillium a periódusos rendszerben közvetlen szomszédja a lítiumnak. Atomjai két $1s$ és két $2s$ állapotú elektronnal rendelkeznek. A kristályban az atomi energiaszintek felhasadnak. A lítiumhoz hasonló felhasadás esetén a második sáv teljesen betöltött lenne, így a kristály nem vezethetne. A berilliumnak (és a többi, vele azonos oszlopban található két vegyértékű fémnek is) az az érdekes sajátossága, hogy a $2s$ és a $2p$ állapotok felhasadásával kialakuló sávok átfedik egymást. A két egymást átfedő sávban összesen

($N + 3N$) közeli energianívó található, amelyen $2N + 6N$ elektron számára van hely. A sáv ezért csak részben betöltött a $2s$ atomi szintekről származó $2N$ elektronnal. Az elektromos vezetést a sáv üresen maradt energiaszintjei magyarázzák.

25.4.5. A fémek fajlagos ellenállásának értelmezése

Az elektromos áram, amint azt az előző pontban tárgyaltuk, a részlegesen betöltött energiasávokban levő elektronok mozgásával magyarázható. Tegyük fel, hogy a vezetésben térfogat-egységenként N elektron vehet részt. Ha a kristályra E elektromos teret kapcsolunk, az elektronok energiája (sebessége) növekszik. Ha feltesszük, hogy az elektromos tér pozitív pólusa felé az elektronok éppen $\overline{v}$ átlagos sebességgel haladnak, akkor az elektromos áramsűrűség

$$J = -eN\overline{v} \tag{25.8}$$

alakban írható fel, ahol az e elemi töltést jelöli. A mérési tapasztalatok szerint a J áramsűrűség értéke adott vezető és E elektromos tér esetén nem változik. Az áramsűrűség állandó értéke alapján arra következtethetünk, hogy az elektronok állandó $\overline{v}$ átlagsebességgel mozognak, azaz a telep által az elektronok gyorsítására fordított energiát valami belső súrlódás jellegű mechanizmus folyamatosan felemészti. Ezt legegyszerűbben úgy képzelhetjük el, hogy az elektronok nem mozoghatnak szabadon a kristályban, ezért energiájukat átlagosan $\Delta\tau$ időtartamonként, ütközés miatt elveszítik. Két ütközés között az elektron $-eE$ erő hatására gyorsul, a $\Delta\tau$ időtartam alatt

$$\overline{v} = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\Delta\tau \tag{25.10}$$

átlagos sebességgel rendelkezik. Fejezzük ki a J áramsűrűséget $\overline{v}$-gal:

$$J = \frac{e^2NE}{2m}\Delta\tau. \tag{25.11}$$

Az így felírt áramsűrűséget a differenciális Ohm-törvénybe ($E = \rho \cdot j$) helyettesítve, a ρ fajlagos ellenállásra a következő adódik:

$$\rho = \frac{2m}{e^2N\Delta\tau}. \tag{25.12}$$

Eredményünk szerint a fajlagos ellenállás értékét a kristály térfogategységében levő „mozgóképes" elektronok száma, tömege és a $\Delta\tau$ átlagos ütközési idő határozza meg.

Meg kell jegyeznünk, hogy az elektronok m tömege itt az ún. *„effektív tömeg”*, amelynek nagysága eltér a szabad elektron tömegétől. Az eltérés oka az, hogy az elektronokra a külső tér mellett a kristály belső erői is hatnak. Ezen belső erők miatt az elektron gyorsulása általában nem arányos a külső erővel, ezért az elektron mozgását pusztán a külső erők hatásaként tekintve a problémát úgy kezelhetjük, mintha az elektron tehetetlensége megváltozott volna.

Az elektromos ellenállás elméletének legérdekesebb feladata, hogy értelmezzük az elektronok ütközését, és ezen keresztül meghatározzuk a $\Delta\tau$ átlagos ütközési időt.

A kristályban az elektronok tulajdonságait rácsperiodikus hullámfüggvények (Bloch-függvények, lásd a 25.4.3. pontot) írják le. Az ilyen elektronok mozgását a rácsatomok mindaddig nem akadályozzák, amíg a rács periodicitása hibátlan. (Abszolút zérus fokon a tiszta fémek ellenállása nulla.) Magasabb hőmérsékleteken a hőmozgást végző atomok többé-kevésbé kimozdulnak egyensúlyi helyzetükből, és ezzel megzavarják a kristály szabályos rendjét. A rácsrezgések hatására az elektronhullámok már nem mozoghatnak zavartalanul a rácsban. A rácsrezgéseknek és a kristályban mozgó elektronhullámnak a kölcsönhatását mint a fononok (lásd a 25.2. szakaszt) és az elektronok ütközését lehet felfogni. A hőmérséklet emelkedésével a rácsrezgések erősödnek, a fononok száma nő, ezért a $\Delta\tau$ átlagos ütközési idő csökken. (A fémek elektromos ellenállása a hőmérséklet növekedésével nő.)

Ha a kristály szabályosságát szennyezések vagy más szerkezeti hibák zavarják, úgy ezek is akadályozzák az elektronhullámok szabad mozgását. A kristályhibák a fém ellenállását számuktól függő mértékben növelik meg.

25.4.6. A szigetelők sávszerkezete

Az elektromosan szigetelő kristályok egyik tipikus képviselője a gyémánt. A gyémántban az 1*s* energiaszint felhasadásából keletkezik a legalsó, teljesen betöltött energiasáv. A szénatom $n = 2$ főkvantumszámú szintjén két 2*s* és két 2*p* elektron található. A kristályban a szén négy egyenrangú kötést létesít, az eredetileg 2*s* és 2*p* elektronok négy egyenrangú *molekulapályát* (lásd a 21.2. szakaszt) képeznek. A kristályban a 2*s* és a 2*p* állapotok *hibridizációjából* (lásd a 21.2.3. pontot) négy, egymást részben átfedő (átlapoló) energiasáv alakul ki. Ezek a sávok 0 K-en teljesen betöltöttek. Az átlapolódással létrejött, betöltött sáv után széles tiltott zóna következik, amely felett ismét megengedett állapotok vannak. A második, teljesen telített sáv, az ún. *„vegyértéksáv”*, a felső sáv, amelyben nincs elektron, a *„vezetési sáv”*. A hőmérséklet emelkedésével előfordulhat, hogy a vegyértéksáv felső szintjéről egy-egy elektron a tiltott sávot „átlépve” a vezetési energiasávba jut. A szigetelőanyagok esetén azonban a tiltott sáv szélessége olyan nagy, hogy még magas hőmérsékletek esetén is csak elenyésző azoknak az elektronoknak a száma, amelyek a termikus ingadozások révén ekkora energiára tesznek szert.

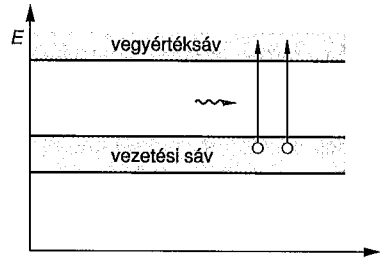
25.5. Félvezetők

A félvezetők sávszerkezete a szigetelők sávszerkezetével azonos, tiltott sávjuk azonban keskenyebb.

A tiltott sáv azért jön létre, mert a lényegében kovalens kötésű félvezető anyagokban a sávok a kötő és lazító pályákból alakulnak ki. Az ezek között atomi szinten meglevő nagy energiakülönbség a sávszerkezetben is megmarad.

$T = 0$ K környezetében a félvezetők szigetelőként viselkednek. Magasabb hőmérsékleten termikus aktiválás hatására néhány elektron a legfelső, még betöltött sávból (vegyértéksáv) a következő energiasávba (vezetési sáv) kerül. Külső elektromos tér hatására a szinte üres vezetési sávban levő elektronok igen könnyen elmozdulnak, de áram indul meg a vegyértéksávban visszamaradó betöltetlen elektronállapotoknak megfelelő ún. *lyukak* mozgása révén is. Ha a hőmérsékletet növeljük, a vegyértéksávból egyre több és több elektron kerül a vezetési sávba, s ezzel növekszik a mozgásra képes elektronok és lyukak száma, így a félvezető ellenállása csökken.

Érthető az is, hogy a félvezetők érzékenyen reagálnak egyéb fizikai hatásokra is. A vegyértéksáv elektronjai ui. nemcsak termikus aktiválás miatt, hanem más gerjesztőhatások eredményeként is a vezetési sávba kerülhetnek. Ilyen gerjesztést eredményezhet pl. a fény is (lásd a 25.12. ábra).



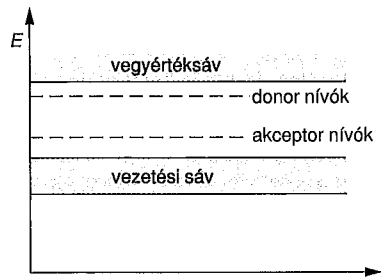
25.12. ábra

A két legfontosabb félvezető elem a germánium (Ge) és a szilícium (Si). A Ge tiltott sávja 0,75, a szilíciumé pedig 1,1 eV szélességű. Atomi állapotban ezen elemek külső elektronhéján 4-4 elektron található. A külső *s* és *p* héjon elhelyezkedő elektronok sp^3 hibridizációjával az egyes atomok között négy egyenrangú kovalens kötés jön létre, ezért a tiszta szilícium és germánium gyémántrácsban kristályosodik. A két elem gyakorlati felhasználhatóságát egyéb tulajdonságaik mellett a szennyezések hatására megjelenő új elektronállapotok teszik lehetővé.

A leggyakrabban alkalmazott *szennyezők* a három, illetve öt vegyértékelektronnal rendelkező elemek. Három vegyértékelektronnal rendelkezik pl. a bór (B),

az indium (In) és a gallium (Ga), öttel pedig az arzén (As), az antimon (Sb) és a foszfor (P). Ezek az elemek könnyen beépülnek a germánium-, illetve szilíciumrácsba, és módosítják az alapkristály sávszerkezetét. *Öt vegyértékű* szennyező esetén az alapkristályhoz képest *többletelektronok* kerülnek a rácsba. Ezért az öt vegyértékű szennyezőket *donor* (adományozó) atomoknak nevezzük. A többletelektronok könnyen leszakadnak a szennyezőatomról, azaz a kristályban könnyen delokalizálttá válnak. A szennyezőkön levő többletelektronok a tiszta félvezető tiltott sávjában a vezetési sáv közelében fekvő, ezért könnyen gerjeszthető energiaállapotokat hoznak létre. A donor nívóról az elektronok már kis termikus aktiválásra is, szinte maradéktalanul átjutnak a kristály vezetési energiasávjába. (Ez szemléletesen azt jelenti, hogy az ötödik elektron leszakad a kristályrácsba beépült szennyező atomról és delokalizálódik a kristályban.) A külső elektromos tér hatására ezek az elektronok vesznek részt a vezetésben. Az öt vegyértékű szennyezőket tartalmazó félvezetőket, a töltéshordozók (elektronok) negatív töltésére utalva *„n típusú"* félvezetőknek nevezzük.

A három vegyértékű szennyezőatomok úgy tudnak jól beépülni a tetraéderes kötésű Si vagy Ge kristályrácsába, ha elektronhiányukat pótolják. Mivel ezek az atomok az alaprács egyes elektronjainak befogására képesek, *akceptor* (befogadó) atomoknak nevezzük őket. Az akceptor szennyezők a tiszta félvezetők sávszerkezetét úgy módosítják, hogy a tiltott sáv alsó részén, a vegyértéksáv közelében hoznak létre üres energianívókat (akceptor nívó). A vegyértéksáv elektronjai könnyen gerjesztődnek az akceptor nívóra, hiszen ehhez jóval kisebb energia kell, mint tiszta félvezetők esetén a tiltott sáv átlépéséhez. Külső elektromos tér hatására ezekben az anyagokban is áram indul meg. A töltésmozgás során a vegyértéksáv elektronjai gerjesztődnek a vegyértéksávban megüresedett olyan elektronállapotokba, amelyekből az elektronok a szennyezőkhöz kerültek. Egyszerűsödik a magyarázatunk, ha az elektronok helyett az üres elektronállapotok, az ún. *„lyukak"* mint pozitív töltéshordozók nyomon követésével írjuk le a vezetési folyamatot. A elektronhiányt jelentő lyukak olyan *pozitív töltéshordozóknak* tekinthetők,



25.13. ábra

amelyek az elektronokkal ellenkező irányban mozognak. A pozitív töltéshordozókra utalva ezeket a félvezetőket *p* (pozitív) típusú félvezetőknek nevezzük. (A lyukak értelmezésével a 25.5.1.1. pontban részletesebben foglalkozunk.)

A szennyezett félvezetők sávszerkezetét a 25.13. ábra illusztrálja.

Természetesen a szennyezett félvezetők is elektromosan semleges anyagok. A szennyezőatomok elektrontöbblete, illetve elektronhiánya csak annyit jelent, hogy ezek az atomok az alaprács atomjaihoz képest több vagy kevesebb könnyen leszakítható elektronnal rendelkeznek.

25.5.1. Elektroneloszlás félvezetőkben

A következőkben a félvezetők külső elektromos tér jelenléte nélkül kialakuló elektroneloszlásának hőmérsékletfüggését tárgyaljuk.

25.5.1.1. A lyuk fogalma

A félvezetők elektronszerkezetével kapcsolatban a *lyuk* fogalmának pontos értelmezésére van elsősorban szükségünk. A félvezetőkkel foglalkozó szakirodalom a lyuk fogalmát a vegyértéksáv betöltetlen elektronállapotainak, illetve az ezekkel kapcsolatos vezetési folyamatnak a leírására használja. Ismét hangsúlyozzuk azonban, hogy a vezetés ebben a sávban is mindig elektronmozgás útján jön létre. A vegyértéksávban azonban általában igen sok elektron van, ezért célszerűbb a betöltetlen állapotok (lyukak) mozgásának követése.

Ennek jogosságát a következőképpen láthatjuk be. Az N állapotot és $M < N$ elektront tartalmazó sáv elektromos szempontból egyenértékű egy N elektronból és $N - M$ pozitív töltésből álló képzeletbeli rendszerrel. Egy ilyen helyettesítő rendszerben tehát a tényleges M elektronon kívül még további $N - M$ elektron és az ezek hatását semlegesítő $N - M$ pozitív töltésű részecske egyidejű jelenlétét tételezzük fel.

Mind az elektronok, mind a lyukak eloszlását a *Fermi-féle eloszlásfüggvény* [lásd a (23.117) képletet] szabja meg.

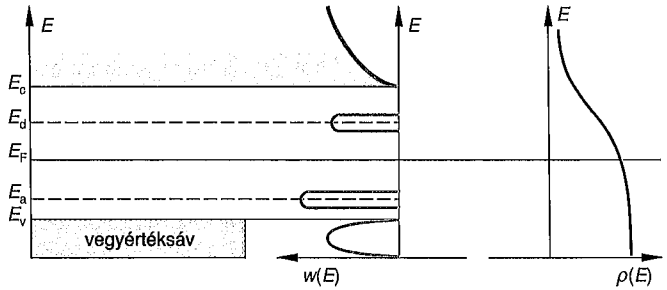
25.5.1.2. A töltéshordozók eloszlása és a Fermi-energia

A töltéshordozók eloszlását a lehetséges energiaállapotok és az energiaállapotok betöltöttségét jellemző eloszlásfüggvény szabja meg. Matematikailag ezt úgy fe-

jezhetjük ki, hogy az E és az $E + \Delta E$ energiák közötti ΔE intervallumba eső részecskék ΔN számát a

$$\Delta N = \rho(E)\, w(E)\, \Delta E \tag{25.13}$$

összefüggésből határozhatjuk meg, ahol $\rho(E)$ az állapotsűrűség, $w(E)$ pedig az adott részecskékre vonatkozó *eloszlásfüggvény* (betöltési valószínűség; elektronok és lyukak esetén a Fermi-féle eloszlásfüggvény).



25.14. ábra

A 25.14. ábra a donor- és akceptorszintek jelenlétében kialakuló energiaviszonyokat mutatja.

Adott sávban a töltések számát az

$$n = \int_{E_1}^{E_2} \rho(E)\, w(E)\, \Delta E \tag{25.14}$$

integrállal határozhatjuk meg, ahol E_1 és E_2 a sáv alsó, illetve felső határa.

A $\rho(E)$ állapotsűrűség meghatározása általában bonyolult feladat, megoldására különböző közelítéseket használnak. Az akceptor- és donorszennyezőket is tartalmazó anyagok esetén kialakuló kvalitatív viszonyokat az ábra mutatja. A 25.14. ábrán a $\rho(E)$ állapotsűrűséget és a $w(E)$ betöltési valószínűséget a sávszerkezet energiatengelyét követve ábrázoltuk.

Az elektronok tényleges számát az állapotsűrűség mellett erősen befolyásolja a $w(E)$ betöltési valószínűség is. Fontos jellemző a betöltési valószínűség függvényében szereplő E_F Fermi-energia.

A félvezetőkkel kapcsolatos meggondolásokhoz az eloszlásfüggvényben szereplő Fermi-energia (Fermi-szint) elhelyezkedését feltétlenül ismerni kell!

Tiszta félvezetők esetén, tehát ha sem donor, sem akceptor típusú szennyezők nincsenek, a Fermi-energia értéke jó közelítéssel:

$$E_F = \frac{E_V + E_C}{2}, \tag{25.15}$$

ahol E_V a vegyértéksáv felső, E_C pedig a vezetési sáv alsó éle. Tiszta félvezetőkben tehát az 1/2 valószínűséggel betöltött állapot pontosan a tiltott sáv közepén helyezkedik el. Ez természetesen nincs ellentmondásban azzal, hogy a tiltott sávban nem helyezkedhet el elektron. A Fermi-eloszlásból csak az olvasható ki, hogy a különböző energiaállapotok betöltöttsége termikus egyensúly esetén milyen valószínűségű. Ettől függetlenül kell megvizsgálni, hogy valamely rendszerben milyen energiaállapotok lehetségesek és milyenek nem.

Az „n" típusú félvezetők esetén a donornívók, és ezzel együtt a donor elektronok megjelenése azt eredményezi, hogy a Fermi-nívó a tiltott sávban a vezetési sáv alsó éle és a donornívó közé emelkedik.

A „p" típusú félvezetők Fermi-szintje az akceptornívók és a vegyértéksáv felső éle közé kerül.

A vezetési elektronok száma a fentebb már közölt

$$n = \int_{E_1}^{E_2} \varrho(E)\, w(E)\, \Delta E$$

képlettel határozható meg.

Tiszta félvezetőkre ebből a vezetési elektronok n és a lyukak p számára egyaránt az

$$n = p \sim e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} \tag{25.16}$$

eredmény adódik, ahol ΔE a tiltott sáv szélessége. A vezetési elektronok és a lyukak száma tehát exponenciálisan függ a hőmérséklettől.

A lyukak és vezetési elektronok száma szennyezett félvezetők esetén sem független. A Fermi-nívó eltolódása miatt, ha pl. a vezetési elektronok koncentrációja nő, akkor a lyukaké csökken. Általában teljesül az

$$np \approx n_i^2$$

összefüggés.

Az „n" típusú félvezetőkben elsősorban a donorszintekről gerjesztődnek az elektronok a vezetési sávba, és

$$n \sim \sqrt{N_d}\, e^{-\frac{E_0 - E_d}{kT}}, \tag{25.17}$$

azaz a vezetési elektronok száma a szennyezőkoncentráció négyzetgyökével arányos, és exponenciálisan függ a hőmérséklettől.

A hőmérséklet emelkedésével azonban egy idő után a donorszintek kiürülnek. Ekkor jó közelítéssel $n = N_d$. Ezt a hőmérséklet-tartományt nevezzük telítési zónának. További hőmérséklet-emelkedés hatására a vezetési sávban levő elektronok száma a vegyértéksáv elektronjainak gerjesztésével tovább növekedhet. Ilyenkor

$$n = \alpha e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} + N_d, \tag{25.18}$$

ahol α arányossági tényező. Amennyiben a hőmérséklet már olyan magas, hogy N_d elhanyagolható a vegyértéksávból a vezetési sávba gerjesztett elektronok számához képest, akkor az „*n*" típusú félvezető a tiszta félvezetőkhöz hasonlóan viselkedik.

A félvezetőkre jellemző, hogy akár negatív elektronokat („*n*" típusú félvezető) akár pozitív töltésű vegyértékelektron-hiányokat – lyukakat – („*p*" típusú félvezető) létrehozhatunk igen tág koncentrációhatárok között, donor és akceptor atomok tudatos adalékolásával. Ez a lehetőség lényegében a mikroelektronika alapja.

25.5.2. A félvezetők elektromos vezetőképessége

A félvezetők vezetési tulajdonságai a sávszerkezet alapján meghatározhatók. Az elmélet azonban igen bonyolult, így itt csak egy közelítő modell tárgyalására, illetve a vezetőképességre vonatkozó ismeretek kvalitatív ismertetésére szorítkozunk.

Tiszta félvezetők. A vezetőképességet, illetve a fajlagos elektromos ellenállást a fémek szabadelektron-modelljéhez hasonló elképzelés alapján a következőképpen értelmezhetjük.

Tegyük fel, hogy a félvezetőben a vezetési elektronok és a lyukak szabad részecskékként elmozdulhatnak. Ha a félvezetőre elektromos teret kapcsolunk, akkor az elektronok, illetve lyukak rendezetlen hőmozgására egy, a térrel ellentétes, illetve azonos irányú vándorlási (drift) sebesség is szuperponálódik. A töltött részecskék vándorlása azért tekinthető egyenletesnek, mert az elektromos tér gyorsítóhatását kompenzálják a ráccsal való ütközések. Az elektronok, illetve lyukak vándorlása miatt adódó áramsűrűséget a

$$J_e = env_e, \tag{25.19}$$

illetve

$$J_p = (-e)pv_p \tag{25.20}$$

formulákkal határozhatjuk meg, ahol e az elektron töltése, v_e az elektronok, v_p pedig a lyukak vándorlási sebessége. A fajlagos vezetés (fajlagos vezetőképesség)

$$\sigma = \frac{J}{E}$$

definíciója alapján az „*n*" típusú félvezetők fajlagos vezetése

$$\sigma_e = en\frac{v_e}{E}, \tag{25.21}$$

a „*p*" típusú vezetőké pedig

$$\sigma_p = ep\frac{v_p}{E} \tag{25.22}$$

alakban írható fel. Ha mindkét típusú töltéshordozó szerepet játszik a vezetésben, akkor a fajlagos vezetést az elektronok és a lyukak fajlagos vezetéseinek

$$\sigma = e\left(n\mu_e + p\mu_p\right) \tag{25.23}$$

összege adja, ahol bevezettük a $\mu_e = \frac{v_e}{E}$ ún. *„elektronmozgékonyságot"* és a $\mu_p = \frac{v_p}{E}$ *„lyukmozgékonyságot"*. A mozgékonyságra bevezetett kifejezések a tapasztalat szerint a $\mu \sim T^{\frac{2}{3}}$ arányosságnak megfelelően függenek a hőmérséklettől. Az arányossági tényező csak a félvezető anyagi minőségétől függ.

Felhasználva, hogy a tiszta félvezetőkben az elektronok és a lyukak száma $e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}$-vel arányos, azt kapjuk, hogy

$$\sigma \sim T^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\mu_e + \mu_p\right) e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}, \tag{25.24}$$

amiből a ρ fajlagos ellenállásra:

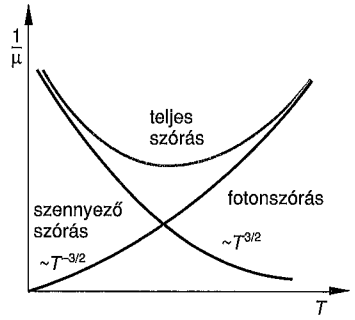
$$\frac{1}{\sigma} = \rho \sim T^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\mu_e + \mu_p} e^{\frac{\Delta E}{2kT}}. \tag{25.25}$$

Egyszerű modellünk segítségével sikerült tehát értelmeznünk a tiszta félvezetők ellenállására vonatkozó kísérleti megfigyelést.

Szennyezett félvezetők. A szennyezett félvezetők ellenállásának értelmezése már bonyolultabb. Erről kvalitatíven a következőket mondhatjuk. Az ellenállást a töltéshordozók szóródása és a töltéshordozók száma együttesen szabja meg.

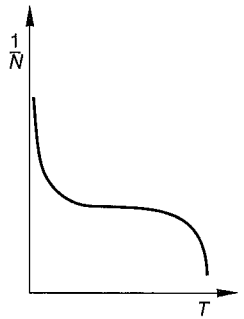
A szórási folyamatok közül alacsony hőmérsékleten a szennyezőkön való szóródás, magas hőmérsékleten pedig a kristályrács rezgései miatt fellépő szórás (fononszórás) dominál. A 25.15. ábrán a töltéshordozók mozgékonyságának recipro-

kát (ez ui. arányos a szórás valószínűségével) ábrázoltuk a hőmérséklet függvényében.



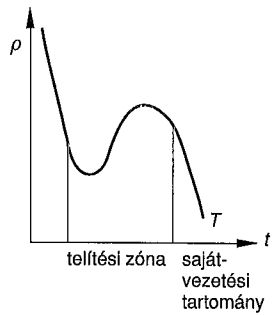
25.15. ábra

A teljes szórási valószínűségnek a hőmérséklet függvényében minimuma van. A fajlagos ellenállás egyenesen arányos a szórási valószínűséggel és fordítottan arányos a töltéshordozók számával. A szennyezett félvezetők fajlagos ellenállásának jellemzéséhez tehát a töltéshordozók $N = n + p$ számának reciprokát is vizsgálnunk kell a hőmérséklet függvényében. Az $1/N$–T grafikont a 25.16. ábra mutatja.



25.16. ábra

A fajlagos ellenállás hőmérsékletfüggését az $1/\mu$–T és az $1/N$–T függvények szorzataként kapjuk. Az eredményt mutató grafikonról (25.17. ábra) leolvasható, hogy a szennyezett félvezetők fajlagos ellenállása a hőmérséklet növekedésével gyorsan csökken, a telítési zónában (ahol a lokális szennyezőnívók már lényegében kiürültek) lokális minimuma és maximuma van, majd a sajátvezetési tartományban ismét gyorsan csökken a hőmérséklettel.



25.17. ábra

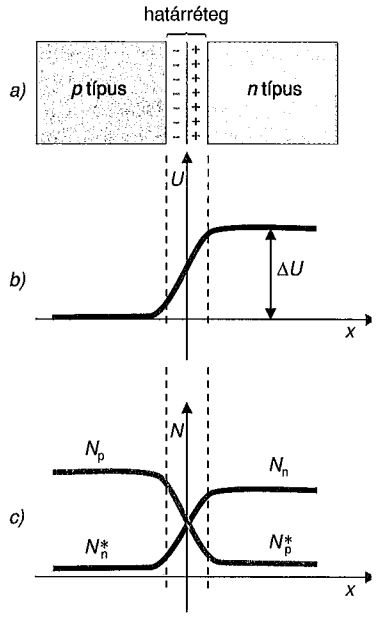
25.5.3. A mikroelektronika alkalmazásai

A félvezetők az elektronikai gyakorlatban igen sokoldalúan használhatók fel. Valamennyi azon alapszik, hogy a félvezető kristályba lokálisan „*n*", illetve „*p*" típusú szennyezőket juttatunk. A szennyezőkkel bevitt töltéshordozók (elektronok vagy lyukak) lokálisan megváltoztatják a kristály eredeti elektromos állapotát. *Mivel a töltéseloszlás nem egyenletes, elektromos tér nélkül is diffúziós töltésáramlás indul meg. A diffúzió miatt a lyukakban feldúsult rétegből lyukak, az n rétegből pedig elektronok vándorolnak a másik típusú félvezető anyagba, s ott atomi szinten mérve jelentős távolságba eljuthatnak. Ezt a jelenséget töltésinjekciónak nevezzük. A töltésinjekció különböző típusú félvezetők, illetve vezetők szoros illeszkedésekor természetes módon megtörténik, a mikroelektronikai eszközök működése ezeknek a határrétegeknek a viselkedésén alapul. A könnyen mozgó töltéshordozók vándorlása miatt meginduló kiegyenlítődési folyamatok a kontaktus környezetében új, egyensúlyi eloszlást alakítanak ki. Az új egyensúly kialakulása során az érintkezésbe hozott fémek, félvezetők Fermi-szintje kiegyenlítődik.*

Az új egyensúlyi állapot külső hatásokkal jelentősen befolyásolható. Így a hőmérséklet, a megvilágítás, a külső elektromos feszültség egyaránt alkalmas lehet a célszerűen kialakított félvezető elektromos tulajdonságainak változtatására. E hatásokon alapul a különböző kristálydiódák, tranzisztor, a termisztor, a fényemittáló dióda (LED), a fotóellenállás, a napelemcella stb. működése. A következőkben – a teljesség igénye nélkül – az alkalmazási gyakorlat szempontjából fontos félvezető eszközök elvi felépítésével és működésük fizikai alapjaival foglalkozunk, nem térünk ki azonban sem az eszközök előállítására, sem alkalmazásuk konkrét eseteire.

25.5.3.1. A *p*–*n* átmenet termikus egyensúlyban

Mikroelektronikai szempontból alapvető jelentőségű a különböző módon – *p*, illetve *n* adalékanyaggal – szennyezett kristálytartományok érintkezési határfelülete, az ún. „*p*–*n*" átmenet. A *p*–*n* átmenet sajátságainak megértéséhez képzeljük el, hogy egy donor atomokkal szennyezett (*n* típusú) germániumkristályt és egy akceptor atomokkal szennyezett (*p* típusú) germániumkristályt szorosan összeillesztettünk, és a kristályszerkezetet hibátlanul „összeforrasztottuk". Ezt az ideális állapotot illusztrálja a 25.18. ábra.



25.18. ábra

A kristály bal térfele *p* típusú, a jobb *n* típusú félvezető. (A valóságban ezt egyetlen kristály kétféle szennyezésével valósítják meg. Természetesen itt a két kristálytartományt inkább határsáv választja el, mint egzakt határfelület. Ez a sáv azonban a kristály méretéhez viszonyítva keskeny, így az idealizált modellre tett megállapítások a valóságban is érvényesek.)

A határfelület donor atomokkal szennyezett (*n* típusú) oldalán, a Ge-kristály magas energiájú vezetési sávjában szabad elektronok „mozognak". Az akceptor atomokkal szennyezett (*p* típusú) térfélen a vezetési sáv üres, de az alacsonyabb energiájú vegyértéksáv sem teljesen telített, itt az üres elektronállapotokat jelentő

„lyukak" vándorolnak szabadon. A két tartományban szabadon mozgó töltéshordozók természetesen eljutnak a határfelületig.

Mivel a kristály alapszerkezete azonos, a töltéshordozók először akadálytalanul átlépnek a határfelületen. A másik térfélre történő átlépés azonban lényeges változásokkal jár. Az „*n*" oldalról érkezett elektronok a határ túloldalán gyorsan összetalálkoznak az ott nagy sűrűségben lévő lyukak valamelyikével, és a határ közelében helyhez kötődnek – „rekombinálódnak" –, a határt „*p*" oldalról átlépő lyukaknak hasonló sorsa lesz a túloldalon.

A határ két oldalán tehát elfogynak a szabad töltéshordozók, miközben a határréteg elektromos töltésegyensúlya is megbomlik. A határ „*p*" oldala az átlépő és megkötődő elektronok miatt negatív polaritású, az *n* oldal az elektronkoncentrációt csökkentő átvándorolt lyukak miatt pozitív polaritású lesz (25.18a. ábra). A kialakuló tér forrása természetesen nem a kondenzátorok terét kialakító felületi töltéseloszlás, hanem a keskeny tartományra kiterjedő ún. *tértöltési zóna*. A határ két oldalának ellentétes polaritása hatékonyan akadályozza a további töltésátlépést. A kristály két térfele közti feszültségviszonyokat (a szokásoknak megfelelő módon a pozitív töltésmozgás vonatkozásában) a 25.18b. ábra illusztrálja. Ez szemléletesen mutatja, hogy a bal oldalról a határhoz érkező pozitív lyukak csak akkor léphetnek át a határsávon, ha leküzdik a ΔU magasságú potenciáldombot. A kristály T hőmérsékletén erre a lyukaknak csak az a kis hányada képes, amely legalább $q\Delta U$ termikus energiával rendelkezik. Ezek száma, és így a lyukvándorlásból adódó áram nagysága a már ismert Boltzmann-faktorral arányos:

$$I_{ly} \sim N_{ly} e^{-\frac{\Delta U}{kT}},$$

ahol N_{ly} a lyukak egységnyi térfogatra jutó száma a *p* tartományban. Hasonlókat mondhatunk az elektronok szabad mozgásának akadályoztatásáról, illetve az *n* térfélről a *p* felé haladó áramösszetevőről is. Természetesen számolnunk kell az ellentétes irányú töltésáramlásokkal is. Mivel a határ *n* oldalán is vannak lyukak, bár csekély koncentrációban (25.18c. ábra), az *n* oldalról visszafelé is létrejön lyukáram. Ezen lyukak mozgását a határ két oldala közti potenciálkülönbség nem gátolja. A visszafelé folyó lyukáram intenzitása (I_{ly}^*) az *n* kristályfél kisebbségi töltéshordozóinak (lyukak) csekély N_{ly}^* koncentrációjával arányos

$$I_{ly}^* \sim N_{ly}^*.$$

Hasonlóan a *p* térfélről is folyik csekély áramlás az *n* oldal felé is, amit a tér itt sem akadályoz. A *p*–*n* átmenet akkor kerül egyensúlyi állapotba, ha a határon ke-

resztül fellépő lyuk- és elektronáramlás is dinamikus egyensúlyba kerül, azaz a szembe folyó lyukáramok és elektronáramok is éppen kiegyenlítik egymást:

$$I_{ly} = I_{ly}^*,$$

$$I_e = I_e^*, \quad \text{illetve}$$

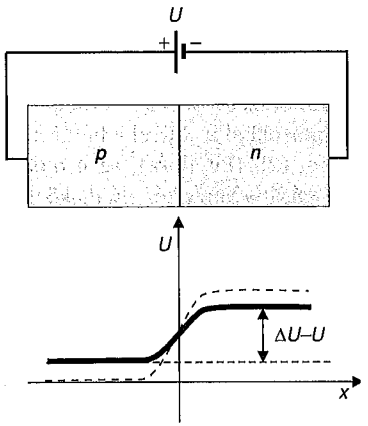
$$\frac{N_{ly}^*}{N_{ly}} = e^{-\frac{q_{ly}\Delta U}{kT}} \quad \text{és} \quad \frac{N_e^*}{N_e} = e^{-\frac{q_e\Delta U}{kT}}.$$

Összefoglalva: az egyensúly beálltakor a határsávban lecsökken a töltéshordozók koncentrációja, miközben a két kristályfél közt a megfelelő kisebbségi töltéshordozók polaritásának megfelelő feszültség lép fel. (Részletesebb tárgyalás nélkül megjegyezzük, hogy a határrétegben történő töltésátrendeződés következtében a két kristálytérfél eredetileg különböző Fermi-energiái is megváltoznak, azonos értékűvé válnak.)

A mikroelektronikai eszközök működése a *p–n* átmenet itt leírt egyensúlyi állapotának külső hatásokra történő megbomlásával kapcsolatos.

25.5.3.2. A kristálydióda működése – egyenirányítás

Vizsgáljuk meg mi történik, ha a *p–n* átmenetet tartalmazó félvezető kristály két felére *U* feszültségű telepet kapcsolunk, és így megváltoztatjuk a *p–n* réteg egyensúlyát! Vegyük először azt az esetet, amikor a telep pozitív pólusát a *p* típusú kristályfélhez, a negatív pólusát az *n* típusú kristályfélhez csatlakoztatjuk (25.19. ábra).

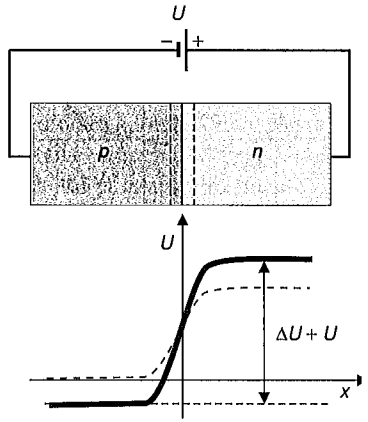


25.19. ábra

A korábban tárgyalt egyensúlyi potenciálviszonyok megváltoznak, a *p* típusú kristályfél potenciálja emelkedik, az *n* típusú kristályfélé csökken, amiből adódik, hogy a határrétegben kialakult potenciáldomb eredetileg ΔU relatív magassága $\Delta U - U$ értékre csökken. Ez azt jelenti, hogy a *p* térfélről a határon átlépő lyukáram erőssége és az *n* térfélről ellentétes irányba folyó elektronáram erőssége a korábbi

értékhez viszonyítva $e^{-\frac{qU}{kT}}$-szeresére nő.

A telepet ellenkező polaritással kapcsolva a kristályra, csak igen kis áramot mérhetünk, amelynek a nagysága a feszültség növekedésével sem növelhető. Ennek egyszerű magyarázata az, hogy a telep feszültsége $\Delta U + U$ értékre növeli a többségi töltéshordozók átjutását gátló potenciált a határrétegben (25.20. ábra).



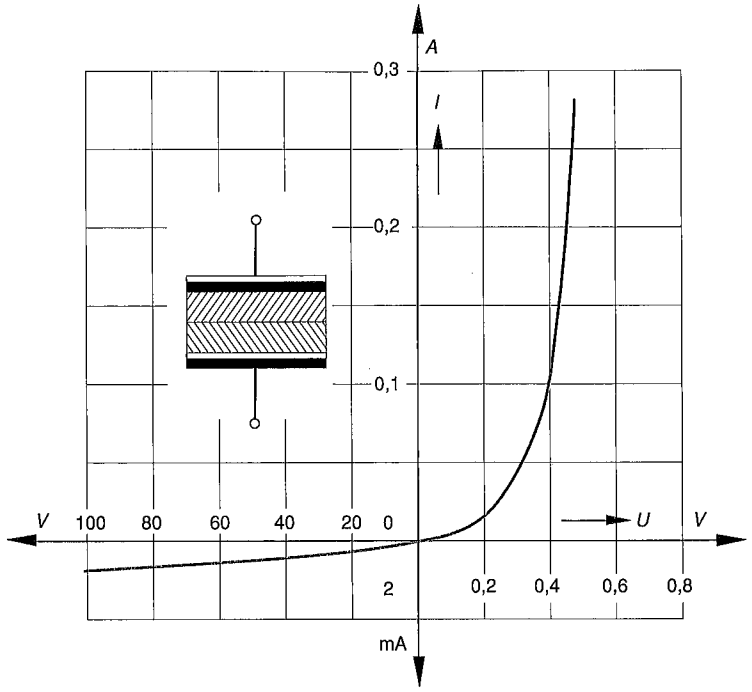
25.20. ábra

A kis j_0 áramot a kisebbségi töltéshordozók csekély, de akadálytalan árama adja. A félvezető kristályban kialakított *p–n* átmenet vezetőképessége a rákapcsolt feszültség polaritására aszimmetrikusan reagál, így váltófeszültség egyenirányítására alkalmas.

A *p–n* átmenet (kristálydióda) áramerősség–feszültség függését a

$$j = j_0\left(e^{\frac{qU}{kT}} - 1\right)$$

kifejezéssel írhatjuk le. A karakterisztikát a 25.21. ábra mutatja.



25.21. ábra

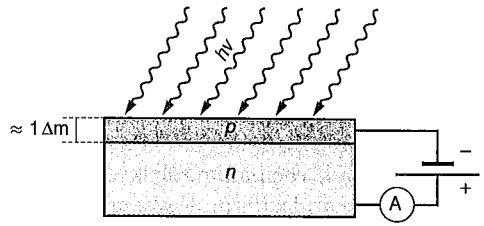
Nyitóirányú előfeszítés esetén az áramerősség exponenciálisan nő, ellenkező (záróirányú) előfeszítés esetén az ún. szaturációs értékhez (j_0) tart.

A kristálydióda *p–n* átmenete egyenirányításra használható, a diódán csak nyitóirányú feszültség esetén folyik számottevő áram.

25.5.3.3. Optikailag aktív p–n átmenetek, optikai érzékelők, napelemcellák, világító diódák

Az utóbbi évtizedek fejlődésének következtében az optikai és mikroelektronikai technika különösen az információtárolás, illetve információközvetítés és -kijelzés területén szoros kapcsolatba került. A *p–n* átmenetek szerepe ezen a területen is jelentős. A félvezetők sávszerkezete, a tiltott sáv szélessége lehetővé teszi, hogy a félvezetők fényt nyeljenek el, s ennek hatására elektromos áram induljon bennük, illetve elektromos térerősség hatására a rekombinálódó elektron–lyuk-párok miatt fényt bocsássanak ki.

Optikai érzékelők. Optikai érzékelők számára olyan félvezető kristályok alkalmasak, amelyek esetén a tiltott sáv szélessége a detektálandó fény energiájával egyezik meg. A fényérzékelők *p–n* átmenetét a 25.22. ábrán bemutatott sajátos formában készítik.

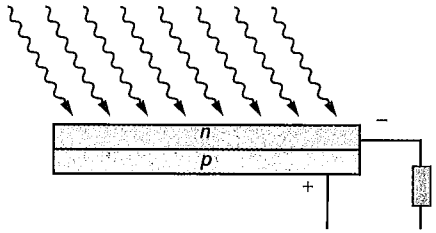


25.22. ábra

A viszonylag vastag *n* rétegre nagy felületű vékony *p* réteget visznek fel, úgy, hogy a fény az utóbbi felületét érje. A diódát záróirányú feszültségre kapcsolják, azaz a *p* réteget a telep negatív, az *n* réteget a telep pozitív pólusához. Az így megnövelt potenciálgát a *p–n* határrétegben megakadályozza a többségi töltéshordozók átjutását a határon, a diódán keresztül nem folyik áram. Ha azonban a dióda felső *p* rétegét fény éri, a félvezetőben párképződéssel elektron–lyuk töltéspárok képződnek. Az eszköz működését az így létrehozott kisebbségi töltéshordozók (a *p* rétegbeli elektronok) biztosítják. Mivel a réteg vékony, az elektronok jelentős része rekombináció nélkül jut el a határra, ahol számukra nem potenciálgát, hanem „potenciállejtő" biztosítja az átjutást az *n* tartományba. Itt többségi töltéshordozóként a telep hatására akadálytalanul mozoghatnak. A telep áramkörében tehát a sugárzás által keltett elektronok számának megfelelő áram folyik.

A látható fényt érzékelő fotodetektorokhoz hasonló elven működnek az infravörös érzékelők és a nagyobb energiájú sugárzások kimutatására szolgáló detektorok is. A különböző sugárzási tartományban működő érzékelők az alkalmazott félvezető anyag tiltott sávjának szélességében térnek el egymástól. Meghatározott sugárzás érzékeléséhez a tiltott sávszélességnek kisebbnek kell lennie a kérdéses sugárzás fotonjának energiájánál.

Napelemcella. A fényelemcella két nagy felületű, vékony szilíciumrétegből áll.



25.23. ábra

A felső réteg rendszerint *n*, az alsó pedig *p* típusú félvezető, közöttük jön létre a már megismert *p–n* átmenet. Fényhatás nélkül a határrétegben a többségi töltéshordozók diffúziója révén kialakul a ΔU magasságú potenciálgát, és a két réteg dinamikus egyensúlyba kerül. Ha a cellát fény éri, fotonok nyelődnek el, és a határréteg két oldalán elektron–lyuk-párok képződnek. A töltéshordozó párok száma a megvilágítás intenzitásától függ. A *p–n* réteg ΔU feszültsége mindkét rétegből gátolja a többségi töltéshordozók átjutását a határon, viszont a kisebbségi töltéshordozókat segíti ebben. Így az *n* réteg negatívan töltötté, a *p* pozitívan töltötté válik. A terheletlen cella sarkai közt feszültség mérhető. Ha az így létrejött cellára terhelő áramkört csatlakoztatunk, a körben áram folyik. Az eszköz a fény energiáját közvetlenül elektromos energiává alakítja át. A gyakorlatban egy-egy cella nem ad nagyobb feszültséget néhány tized voltnál, és teljesítménye is csekély, ezért a cellákat sokszorozva kapcsolják hálóba. A napelemek hatásfoka 20–25%.

Világító dióda (LED). A világító diódák működése is a félvezető *p–n* átmeneten alapszik. Ha a dióda két pólusára elegendően nagy nyitóirányú feszültséget kapcsolunk, a külső elektromos tér annyira lecsökkenti a határrétegben kialakult potenciálgát hatását, hogy a diódán keresztül számottevő áram folyik. A határrétegen átjutó töltéshordozók azonban az új térfélen kisebbségi töltéshordozónak számítanak, ezért előbb-utóbb rekombinálódnak. A vezetési sáv elektronjait befogják a valenciasávban lévő lyukak. A rekombináció során jellemzően a tiltott sáv szélességének megfelelő energia szabadul fel. Általában (pl. közönséges Ge-dióda esetén) ez az energia hő formájában melegíti a kristályt. Vannak azonban olyan félvezető kristályok, pl. *germánium-arzenid* (GeAs), amelyben a tiltott sáv szélessége a látható fény energiatartományába esik. Ezek a diódák a töltések rekombinációjakor fényt bocsátanak ki. (Ezt nevezzük sugárzásos rekombinációnak.)

A dióda anyagának változtatásával (adalékok hozzáadásával) a kristály energiaszintjeit, a tiltott sáv szélességét változtatni lehet. Így állíthatók elő különböző színű fényt kibocsátó LED-ek.

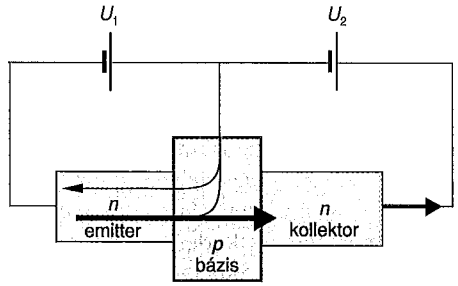
A világító dióda ugyanúgy az áramforrás elektromos energiáját alakítja át fényenergiává, mint az izzólámpa. A lényeges különbség a két eszköz működési mechanizmusában van. A hagyományos izzólámpák esetén a telep energiája az izzószálat melegíti, aminek következménye a sugárzás. Az izzólámpa fénykibocsátási hatásfoka kicsi, a hőveszteségek nagyok. A LED hatásfoka sokkal jobb, itt alig van hőveszteség. Az áramforrás energiája közvetlenül arra fordítódik, hogy a töltéshordozókat átsegítse a határréteg potenciálgátján, ami után a rekombinálódó töltések fény formájában kisugározzák a kapott energiát.

25.5.3.4. A tranzisztor

A félvezetők leginkább közismert felhasználását a tranzisztorok jelentik. A tranzisztorok típusai és alkalmazási köre szinte áttekinthetetlenül széles körű, ezért itt csak a „tranzisztorelv" rövid ismertetésére szorítkozunk.

A közönséges tranzisztor. A tranzisztorok *p–n–p* vagy *n–p–n* típusú félvezető rétegekből állnak. A kétféle típusú tranzisztor működése hasonló, ezért csak az *n–p–n* tranzisztorral foglalkozunk. Ha az *n–p–n* tranzisztorra feszültséget kapcsolunk, akkor az egyik *p–n* átmenetre nyitó-, a másikra záróirányú feszültség kerül.

A tranzisztor középső, keskenyebb rétegeit bázisnak, a két szélsőt pedig emitternek, illetve kollektornak nevezzük. A bázis az emitterhez képest pozitív, a kollektorhoz képest negatív feszültségre kerül

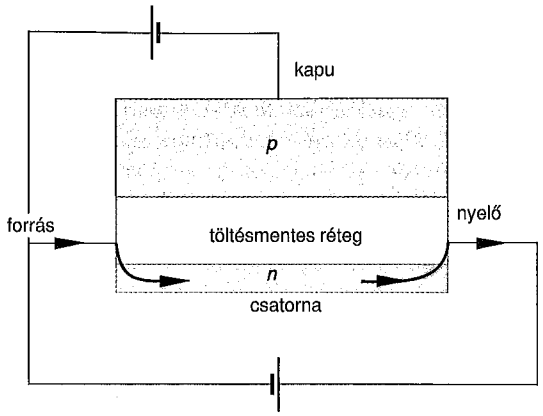


25.24. ábra

A tranzisztor legfontosabb mikroszerkezeti tulajdonsága az, hogy az emitter szennyező koncentrációja sokkal nagyobb, mint a bázisé. Ezért az emitter–bázis-körben a létrejövő záróirányú áramot elsősorban az elektronvándorlás hozza létre. Mivel a bázis igen keskeny, a bázisba jutott elektronok számottevő rekombináció nélkül juthatnak a kollektorba. A kollektor azonban pozitív feszültségű, ezért az áram itt már fennmarad.

A kollektoron keresztül tehát csak akkor folyhat áram, ha a záró irányban előfeszített emitter–bázis-átmeneten át elektronok kerülhetnek a bázisba. Ez azt jelenti, hogy az emitter–bázis-feszültség döntően befolyásolja a kollektoráramot.

Így a tranzisztor a tródához hasonlóan erősítésre használható. A tranzisztorban a bázis játssza a rács szerepét. Természetesen a trióda rácsáramához hasonlóan a tranzisztor emitter–bázis-körében is folyik áram. Ezt az áramot azonban esetünkben, a kisebbségben lévő lyukak hozzák létre, és nagysága elhanyagolható a többségben lévő elektronok áramához képest.



25.25. ábra

Térvezérlésű (FET) tranzisztor. A FET (field effect) tranzisztort Schockley javasolta 1952-ben. Lényeges részét egyetlen *n* típusú félvezető darabka képezi, amelyhez két fémes kontaktuson keresztül csatlakozhatunk. Az egyiket forrásnak, a másikat nyelőnek nevezzük. Az *n* típusú félvezetőhöz egyik oldalán illeszkedik még egy *p* típusú félvezető is, az ún. kapu. Ha a *p–n* átmenetet záró irányban előfeszítjük, akkor ezen az átmeneten gyakorlatilag nem folyhat áram, az *n* típusú kristályban pedig létrejön egy töltéshordozó-mentes tartomány, amelynek szélessége a *p–n* átmenet záróirányú előfeszítésének növekedésével nő. Az áram az *n* típusú rétegben a töltéshordozó-mentes tartománytól szabadon hagyott csatornán folyik a forrástól a nyelő felé. A csatorna keskenyedésével az áramerősség csökken. A kapufeszültség változtatásával tehát szabályozható a tranzisztor árama.

25.5.3.5. A félvezető–fém átmenet

A félvezető elemeket fém kontaktusok segítségével csatlakoztatjuk az áramkörbe. A félvezető és a fém határfelületén is fellép az elektronszerkezet eltéréseiből adódó kontaktpotenciál. A félvezető–fém átmenet elmélete azonban bonyolultabb, mint a *p–n* átmeneté, s nem is pontosan tisztázott még. Ebben az esetben ugyanis igen fontos szerepet játszanak az ún. felületi energiaállapotok, amelyek elméleti tárgyalása igen nehéz.

Annyi mindenesetre biztos, hogy a félvezető és fém termikus egyensúlya esetén a Fermi-nívók kiegyenlítődése miatt potenciálgát alakul ki. Ez a potenciálgát a *p–n* átmenet potenciálgátjához hasonlóan a különböző polaritású feszültséggel szemben aszimmetrikusan viselkedik, ezért ez az átmenet is egyenirányítóként használható.

A fém–félvezető átmenetnek ezt a tulajdonságát használták fel egyenirányításra régebben a kristálydetektoros rádiókban, ma pedig az ún. tűs egyenirányítókban.

25.5.3.6. Egyéb mikroelektronikai félvezető elemek

Termisztorok. Megállapítottuk, hogy a félvezetők fajlagos ellenállása igen erősen (exponenciálisan) függ a hőmérséklettől, ezért a félvezetőkből hőmérő készíthető. Ezeket a hőmérőket nevezzük termisztoroknak. A termisztorok kicsiny tömegük miatt jól használhatók kisméretű tárgyak hőmérsékletének mérésére.

Mágnesestérerősség-mérők. A félvezetőkben viszonylag gyenge mágneses tér esetén is erős a Hall-effektus. Egyes félvezetők esetén a Hall-effektus arányos a mágneses térerősséggel, és kevéssé függ a hőmérséklettől, így ezek a félvezetők a mágneses tér mérésére használhatók.

25.6. Dielektrikumok

A fémek és félvezetők tulajdonságait a sávszerkezet alapján értelmeztük. Röviden foglalkoztunk a dielektrikumok (szigetelők) sávszerkezetével is. A szigetelők – mint megállapítottuk – abban különböznek a félvezetőktől, hogy betöltött sávjuk sokkal szélesebb (2,5 eV, illetve ennél nagyobb).

A következőkben a dielektrikumok tulajdonságait, a mágnességhez hasonlóan, a sávszerkezet figyelembevétele nélkül, lényegében az elektromágneses elmélet alapján tárgyaljuk.

25.6.1. A dielektromos polarizáció mikroszkopikus magyarázata

Az elektrodinamikában megállapítottuk, hogy az elektromos teret a szigetelőanyagok erősen módosítják. A tér hatására a szigetelőanyag egységnyi térfogatában dipólusmomentum jön létre, amelyet a **P** *elektromos polarizációval* adhatunk meg. Sok esetben teljesül a

$$\mathbf{P}=\chi\varepsilon_0\mathbf{E}$$

összefüggés, ahol χ az *elektromos szuszceptibilitás*. Az elektromos polarizáció segítségével a **D** dielektromos eltolást a

$$\mathbf{D}=\mathbf{P}+\varepsilon_0\mathbf{E}=\varepsilon_0\left(1+\chi\right)\mathbf{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}$$

alakban definiáljuk, ahol ε_r a relatív permittivitás.

A következőkben röviden megmutatjuk, hogy az ε_r relatív permittivitás hogyan vezethető vissza mikroszerkezeti állandókra. Alapfeltevésként a makroszkopikus mágneses tulajdonságok mikroszerkezeti magyarázatához hasonlóan azt használjuk, hogy a makroszkopikusan észlelhető dipólmomentum az anyagot alkotó mikrorészek dipólmomentumainak eredője.

A mikroszkopikus tulajdonságoktól függően a polarizáció három, egymástól lényegesen eltérő módon alakulhat ki.

Deformációs polarizáció. Ha a dielektrikum részecskéi külső tér hiányában semlegesek, a külső tér hatására a részecskék addig egybeeső töltésközéppontja – elsősorban a könnyű elektronok elmozdulása révén – szétválik. Ennek következtében minden részecske **E**-vel megegyező irányú dipólmomentumhoz jut.

Lényegében a deformációs polarizáció egy fajtájának tekinthető az *ionos polarizáció*. Az ionkristályok rácspontjaiban pozitív és negatív töltésű részecskék helyezkednek el. Külső tér hiányában a pozitív és negatív töltésközéppontok egybeesnek, az anyagnak makroszkopikus dipólmomentuma nincs. Elektromos tér hatására azonban az ellentétes töltésű ionoknak, illetve az ionok elektronhéjának elmozdulása miatt ezek az anyagok is polarizálódnak.

Orientációs polarizáció. Ha a dielektrikum részecskéi eleve elektromos dipólusok, a külső tér ezeket a dipólusokat egy irányba rendezi. A rendeződést a hőmozgás természetesen szétzilálja. Az orientációs polarizáció a paramágnességgel analóg módon tárgyalható.

Ferroelektromos polarizáció. Egyes anyagokban, pl. az ún. *elektrétekben* az elemi dipólmomentumok tartományonként rendezetten helyezkednek el. A külső tér ezeket a tartományokat változtatja úgy, hogy a tér irányába rendezett rész egyre nagyobb legyen. Ez az elektromos jelenség hasonló ahhoz, ahogy a ferromágneses anyagok doménszerkezete változik a mágneses tér hatására. A dielektromos polarizációnak ez a típusa éppen erre az analógiára utalva kapta nevét.

25.6.1.1. A gázok permittivitása

A gázok atomjai és molekulái között a kölcsönhatás gyenge, ezért gázokban csak deformációs és orientációs polarizáció léphet fel.

A nem poláros gázokban az elektromos tér hatására minden egyes molekulának

$$\mathbf{p}=\alpha\mathbf{E}$$

dipólmomentuma lesz. Az α állandó a molekula szerkezetétől függően általában két részre bontható:

$$\alpha=\alpha_e+\alpha_i.$$

Az α_e az atomi polarizációnak az elektronburok eltolódásából származó járulékát jellemzi, α_i pedig a gázmolekulát alkotó ionok távolságának megváltozása miatt létrejövő ionos polarizációt adja meg. Az elektronpolarizáció elsősorban a nemesgázokra és az azonos atomokból felépülő kovalens kötésű molekulákból álló anyagokra jellemző, míg az ionos polarizáció a heteroatomos, ionos jellegű molekulák esetén dominál. Amennyiben a tér hatására minden molekula azonos módon polarizálódik, és n az egységnyi térfogatra jutó részecskék száma, akkor az elektromos polarizáció (az egységnyi térfogatra jutó eredő dipólmomentum)

$$\mathbf{P}=n\alpha\mathbf{E}.$$

Ezt felhasználva

$$\chi=\frac{n\alpha}{\varepsilon_0} \quad \text{és} \quad \varepsilon_r=1+\frac{N\alpha}{\varepsilon_0}.$$

Az állandó dipólmomentummal rendelkező molekulákból álló gázok (pl. szénmonoxid, víz stb.) permittivitását a paramágnesség magyarázatakor felhasznált gondolatmenettel értelmezhetjük. Külső tér hiányában ezek a molekulák a hőmozgás hatására véletlenszerűen állnak be, ezért a gáznak eredő dipólmomentuma nincs. A külső tér hatására megindul az atomi dipólmomentumok rendeződése. A rendeződés ellen dolgozik azonban a molekulák hőmozgása. A mágnesség esetén alkalmazott egyszerű modell analógiájaként az adódik, hogy

$$\mathbf{P}\approx\frac{np^2}{3kT}\mathbf{E},$$

ahol p az egyes molekulák dipólmomentuma, n a részecskesűrűség. Innen az elektromos szuszceptibilitás

$$\chi=\frac{np^2}{3\varepsilon_0 kT}.$$

Adott sűrűség (n = áll.) mellett tehát az ilyen gázok permittivitása fordítottan arányos a hőmérséklettel. (Ez az eredmény természetesen csak $pE \ll kT$ esetén érvényes.)

25.6.1.2. A folyadékok és a szilárdtestek permittivitása

A gázok permittivitásának értelmezésekor feltételeztük, hogy minden molekulára az **E** külső tér hat, s a környező molekulák tere elhanyagolható. Nagy sűrűség esetén ez nyilvánvalóan nem teljesül, s az egyes molekulák polározódását a külső térből és a környező molekulák teréből adódó $\mathbf{E}_i$ *effektív tér* szabja meg, azaz

$$\mathbf{p}=\alpha\mathbf{E}_i.$$

Az $\mathbf{E}_i$ effektív tér meghatározása általában bonyolult, egyes esetekben azonban a Lorentz-féle

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$$

összefüggés jó közelítésnek tekinthető. Ebből a $\mathbf{P}$ polarizációvektor

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha\mathbf{E}_i$$

definícióját felhasználva az adódik, hogy

$$\mathbf{P} = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}}\mathbf{E}.$$

A *relatív permittivitás* tehát az

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{n\alpha}{\varepsilon_0\left(1 - \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}\right)}$$

összefüggéssel adható meg. Ezt a formulát átalakítva a szokásosabb, ún. *Clausius–Mosotti-egyenlethez* jutunk:

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}$$

A Clausius–Mosotti-egyenlet érvényes pl. a paraffin, benzol és a folyékony O_2, N_2, H_2 esetén.

Néhány szilárd anyag, így pl. a Seignette-só, valamint a bárium-titanát ($BaTiO_3$) a ferromágnességhez hasonló elektromos viselkedést mutat.

A ferroelektromos anyagokban a polarizációvektor nem egyértékű függvénye a térerősségnek, a polarizáció az elektromos tér változásával a mágnességnél tapasztalt hiszterézishuroknak megfelelően változik. Ezekre az anyagokra érvényes a *Curie–Weiss-törvény,* azaz

$$\varepsilon \sim \frac{C}{T - T_{kr}},$$

ahol C állandó, Z_{kr} pedig a kritikus hőmérséklet. A kritikus hőmérséklet felett a ferroelektromosság megszűnik.

25.6.2. A permittivitás frekvenciafüggése

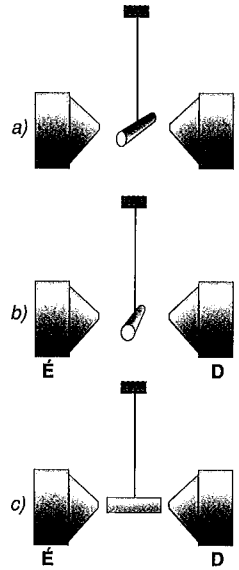
Az eddigiekben a szigetelők polarizációját állandó elektromos térben vizsgáltuk. Változó elektromos térben vizsgálva a szigetelőket, a különböző polarizációs mechanizmusok megjelenése a frekvenciától függ. A könnyen mozgó elektronok ugyanis nagy frekvenciákig jól követik a gerjesztő rezgést, különleges, rezonanciaszerű jelenségek csak az ultraibolya tartományban következnek be. A nagyobb tehetetlenségű ionok esetén a rezonancia a vörösben vagy az infravörösben jelentkezik. A poláros dielektrikumokban a részecskék rendeződése csak viszonylag kis frekvenciákon követi a külső tér változását.

A fentiek miatt az optikai frekvenciák tartományában a polarizálhatóság és így az átlátszó közegek törésmutatója szinte teljes mértékben az elektronpolarizációtól függ.

26. Az anyagok mágneses tulajdonsága

26.1. Anyagok csoportosítása mágneses tulajdonságaik alapján

A szilárd anyag és a mágneses tér kölcsönhatását egyszerű kísérlettel demonstrálhatjuk, amely egyúttal lehetőséget ad az anyagok csoportosítására mágneses térben mutatott viselkedésük alapján. A vizsgálandó anyagból készített rudacskát lógassuk torziós szálon elektromágnes kúposan kiképzett pofái közé!



26.1. ábra

A mágneses tér bekapcsolása után a torziós szálra függesztett rudacska kifordul eredeti helyzetéből (26.1a. ábra).

Az inhomogén mágneses térben tapasztalt viselkedésük alapján az anyagokat három csoportba soroljuk:

Diamágneses anyagoknak nevezzük azokat az anyagokat, amelyekből készült rudacska úgy fordul el, hogy ezáltal kisebb mágneses indukciójú térrészbe kerül (26.1b. ábra). Ilyen anyagok, pl. a gyémánt, az arany, az ezüst stb.

Paramágneses anyagok azok, amelyekből készített rudacska a leírt kísérletben a nagyobb térerősségű tartományok felé fordul el (26.1c. ábra). Paramágneses anyag pl. az alumínium, a platina, az oxigén stb.

Ferromágneses anyagok esetén a rudacska szintén a nagyobb térerősségű helyek felé mozdul el. A paramágneses anyagoktól való megkülönböztetést az indokolja, hogy itt a tér és az anyag kölcsönhatása sokkal *intenzívebb* (az erőhatás kb. ezerszerese a paramágneses anyagok esetén tapasztaltnak). A ferromágneses anyagok közé tartozik pl. a vas, a nikkel és a kobalt. Itt jegyezzük meg, hogy míg a dia- és paramágneses viselkedés a folyadékoknál és gázoknál is megfigyelhető, addig *ferromágneses tulajdonság csak a szilárd anyagokra jellemző.*

Az atomfizikában az atomok és a mágneses tér kölcsönhatását az *atomok mágneses dipólusmomentumával* magyarázzuk. A szilárd anyag és a mágneses tér kölcsönhatását ehhez hasonlóan tárgyalhatjuk. A mágneses tér hatására az anyagoknak makroszkopikus mágneses dipólusmomentumuk lesz. Jelöljük **M**-mel az anyag térfogategységre jutó dipólusmomentumát, amelyet *mágnesezettségnek* nevezünk. A kísérleti tapasztalatok szerint az **M** mágnesezettség és a térre jellemző **H** *mágneses térerősség* között dia- és paramágneses anyagok esetén egyenes arányosság áll fenn:

$$\mathbf{M} = \mu_0 \chi \mathbf{H}, \tag{26.1}$$

ahol a χ arányossági tényező, az ún. *mágneses szuszceptibilitás* az anyagra jellemző. Diamágneses anyagok esetén $\chi < 0$ és $|\chi| < 1$, azaz a diamágneses anyagok mágnesezettsége a külső térrel ellenkező irányú. Paramágneses anyagok esetén $0 < \chi < 1$, így az anyag mágnesezettsége a külső térrel megegyező irányú.

A ferromágneses anyagok mágnesezettsége szintén a külső tér irányával egyezik meg. **M** és **H** kapcsolata azonban csak akkor írható le a fenti összefüggéssel, ha χ-t nem tekintjük állandónak, hanem **H** függvényeként kezeljük.

Az anyag belsejében a mágneses indukciót a külső mező és a mágnesezettség határozza meg:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu_0 \left(1 + \chi\right) \mathbf{H}. \tag{26.2}$$

Az

$$1 + \chi = \mu_r \tag{26.3}$$

mennyiséget *relatív (mágneses) permeabilitásnak* nevezzük. A relatív permeabilitás értéke a szuszceptibilitás értékének megfelelően diamágnesekre $\mu_r < 1$, paramágnesekre $\mu_r > 1$. A ferromágneses anyagok permeabilitása 10^3 nagyságrendű, azaz jóval nagyobb, mint a paramágneseseké.

26.1.1. A dia- és paramágneses anyagok tulajdonságai

A *diamágneses anyagok* esetén $|\chi| < 1$ és χ negatív. Ez azt jelenti, hogy az ilyen anyagok a külső tér irányával ellentétesen mágneseződnek. A szuszceptibilitás a diamágnesekben a külső mágneses tértől és a hőmérséklettől is független anyagi állandó.

Paramágneses anyagok esetén a diamágneses anyagokhoz hasonlóan $|\chi| < 1$, de $\chi > 0$, hiszen ezek az anyagok a külső tér irányával egyezően mágneseződnek. A paramágneses anyagokban χ értéke normál körülmények között független a mágneses tértől. Alacsony hőmérsékleten és erős mágneses térben azonban az **M** mágnesezettség aszimptotikusan közelít egy állandó $\mathbf{M}_t$ telítési értékhez. Ebben a tartományban χ értelmetlenné válik. A jelenséget *paramágneses telítődésnek* nevezzük.

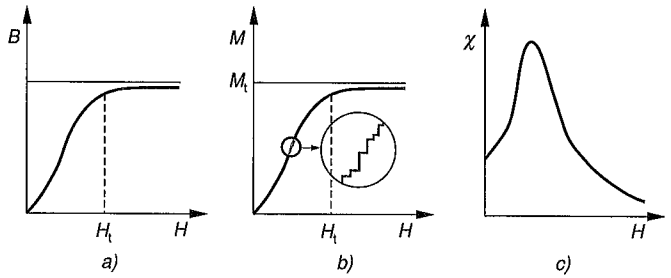
Adott mágneses tér esetén a χ paramágneses szuszceptibilitás a

$$\chi = \frac{C}{T} \tag{26.4}$$

Curie-törvény szerint függ a hőmérséklettől, ahol C az anyagi minőségtől függő Curie-állandó.

26.1.2. A ferromágneses anyagok tulajdonságai

A ferromágnesek viselkedése jóval bonyolultabb a para- és diamágneses anyagoknál.

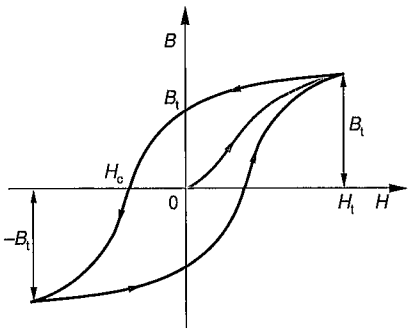


26.2. ábra

A 26.2. ábrán rendre a ferromágneses anyagokra jellemző $B = B(H)$, $M = M(H)$ és $\chi = \chi(H)$ összefüggéseket ábrázoltuk. Látható, hogy a mágneses tér növekedésével eleinte mindhárom mennyiség gyorsan nő. A továbbiakban azonban B és M is telítődik, azaz egy állandóhoz tart. A χ mágneses szuszceptibilitás gyorsan nő, majd miután elérte maximális értékét, M és B telítődésének megfelelően zérushoz tart.

Az $M = M(H)$ mágnesezettségi görbe részletes vizsgálata mutatja, hogy a mágnesezés H növekedésével nem folytonosan, hanem diszkrét lépésekben történik. Ezt mutatja az $M = M(H)$ görbét mutató 26.2b. ábrán a kinagyított részlet. A mágnesezettség szakaszos növekedését felfedezőjéről *Barkhausen-effektusnak* nevezzük.

A ferromágneses anyagok további fontos tulajdonsága az ún. *mágneses hiszterézis*. A 26.3. ábra *lágyvas* teljes átmágnesezési ciklusát mutatja. A grafikon felvétele során a külső mágneses teret zérusról a H_t telítési értékre növelik, majd fokozatosan, a zérus értéken keresztül $-H_t$-re változtatják, és ezután ismét nullára csökkentik. Látható, hogy a külső mágneses teret B csak késéssel követi, és $H = 0$ esetén az anyag ún. *remanens mágnességgel* rendelkezik, ami csak ellentétes irányú mágneses tér alkalmazásával szüntethető meg. A B mágneses indukció lemaradását *mágneses hiszterézisnek,* a teljes mágneses ciklust leíró görbét *hiszterézishuroknak* nevezzük. A hiszterézishurok területe arányos az átmágnesezés során betáplált munkával. Az így befektetett energia a folyamat során maradéktalanul hővé alakul.



26.3. ábra

Azokat az anyagokat, amelyekben a B_t remanens mágnesség megszüntetéséhez szükséges – *koercitív erőnek* nevezett – H_c mágneses tér kicsiny, azaz a hiszterézishurok szűk, *lágymágneses* anyagoknak nevezzük. Szemben velük a *keménymágneses* anyagok remanens mágnessége nagy, s így a hiszterézishurok széles.

Gyakori eset az is, hogy a hiszterézishurok az egymást követő ciklusok során változtatja alakját. Így ezekben az anyagokban a mágneses tér nemcsak H-tól, hanem az anyag mágneses előéletétől is függ.

A ferromágneses anyagokban a hőmérséklet emelkedésével jellegzetes változás megy végbe. Minden ferromágneses anyag esetén létezik olyan T_c kritikus hőmérséklet, amelyet túlhaladva χ, B és M értéke is ugrásszerűen csökken. A T_c hőmérsékletet *ferromágneses Curie-pontnak* nevezzük. A Curie-pont felett a ferromágnesség megszűnik, és az addig ferromágneses anyagok is paramágnesekként

viselkednek. A $T > T_c$ tartományban a szuszceptibilitás hőmérsékletfüggése jól leírható a Curie-törvény módosításával kapott

$$\chi = \frac{C}{T - \theta} \tag{26.5}$$

Curie–Weiss-törvénnyel. Itt θ az ún. paramágneses Curie-hőmérséklet, amely kissé magasabb T_c-nél, C pedig az anyagi minőségtől függő *Curie-állandó*. θ értéke vas esetén 770 °C, kobaltra 1130 °C, nikkelre pedig 360 °C.

Megállapították, hogy a *ferromágneses kristályok különböző irányokban különbözőképpen mágnesezhetők.* Tapasztalták továbbá azt is, hogy a mágneses tér erősségétől és irányától függően a ferromágnesek hossza is változik. Ez a jelenség a *magnetostrikció*. A vas- és acélrudak hossza, pl. gyenge mágneses térben nő, erős térben pedig csökken, míg a kobalt pontosan fordított módon viselkedik.

26.2. A dia- és paramágnesség anyagszerkezeti értelmezése

A mágneses tulajdonságok értelmezése anyagszerkezeti alapon adható meg. Megértésükhöz az előzőekben bevezetett makroszkopikus mennyiségeket (χ, μ, M) kell visszavezetnünk mikroszkopikus jellemzőkre. A témakör rendkívül bonyolult, és sok vonatkozásban még jelenleg is tisztázatlan. A mikroszerkezeti értelmezésben az atomok mágneses tulajdonságai mellett jelentős szerepet játszik az atomok makroszkopikus szerveződése is (pl. kristályszerkezet).

26.2.1. Az atomok mágneses tulajdonságai

Az atomok mágneses tulajdonságait alkotóelemeik, az elektronok és a mag mágneses sajátosságai alapján értelmezhetjük. Így az atomi mágnesség lényegében háromféle hatásra vezethető vissza:

- a mag körül mozgó, köráramként felfogható *elektronok pályamágneses momentumára;*
- az *elektronok spinjével* kapcsolatos *saját mágneses momentumra* és
- az *atommagot alkotó részecskék saját mágneses momentumára.*

A magok mágneses momentumának járuléka az anyagok nagy többsége esetén elhanyagolható, így *az atomok mágneses tulajdonságai döntő módon az elektronok pályamágneses momentumával és spinjével kapcsolatosak.*

A mikroszerkezeti tulajdonságokat pontosan leíró kvantummechanikai elmélet a mágnesség esetén igen bonyolult, ezért itt többnyire a könnyebben érthető és lényegében helyes eredményre vezető klasszikus közelítés ismertetésére szorítkozunk.

26.2.2. A diamágnesség anyagszerkezeti értelmezése

A tapasztalat szerint azok az anyagok tiszta diamágnesesek, amelyekben az elektronok ellentétes spinű párokat alkotnak, s így *ezen anyagok diamágnesessége az elektronok pályamomentumából származik.* Az anyagok diamágnesessége jól értelmezhető a *Bohr-féle atommodell alapján is.*

A diamágneses anyagok jellegzetessége, hogy bennük a mágneses tér hatására ún. *indukált mágneses momentum* jön létre.

Mágneses térben minden anyag esetén keletkezik indukált dipólmomentum. Az ebből származó diamágneses effektus azonban nagyon gyenge. A para- és ferromágneses anyagokban ennél jóval erősebb hatások is fellépnek, amelyek *a minden atomban meglevő diamágneses hatást elnyomják.*

A hélium diamágnesessége. Foglalkozzunk *példaként* egy He-atommal! A He-atom magját két proton és két neutron alkotja, a mag töltése tehát $2e$. *Tegyük fel,* hogy az elektronok r_0 sugarú körpályán v sebességgel keringenek! Ekkor egy elektron $I = -\frac{ev}{2\pi r_0}$ erősségű köráramnak felel meg, amelynek mágneses momentuma:

$$m_0 = -\frac{ev}{2\pi r_0} r_0^2 \pi = -\frac{evr_0}{2},$$

illetve az elektron

$$N_0 = m_e v r_0 \tag{26.6}$$

impulzusmomentumával kifejezve:

$$m_0 = -\frac{e}{2m_e} N_0. \tag{26.7}$$

Az m_0 pályamágneses momentum vektormennyiség, amely merőleges a pálya síkjára, és iránya a köráram mágneses momentumára vonatkozó jobbkéz-szabállyal határozható meg.

Mivel a He-atom eredő mágneses momentuma külső mágneses tér híján zérus, azonnal adódik, hogy a két elektronnak ellentétes irányban kell keringenie a mag körül.

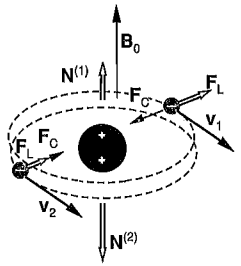
Kerüljön most a He-atom $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ külső mágneses térbe, amelynek iránya az egyszerűség kedvéért legyen merőleges a keringő elektronok pályasíkjára! Ekkor – az elektronok közötti taszítást elhanyagolva – az elektronok körpályán tartását a mag által kifejtett vonzóerő mellett a Lorentz-erő is befolyásolja. Így az elektronokat körpályán tartó centripetális erő:

$$\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} - ev_1 B = \frac{m_e v_1^2}{r_0} \tag{26.8}$$

és

$$\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} + ev_2 B = \frac{m_e v_2^2}{r_0} \tag{26.9}$$

alakban írható fel. Az összefüggések felírásakor figyelembe vettük, hogy a Lorentz-erő az egyik elektron esetén a pálya középpontja felé, a másik esetén pedig az ellentétes sebesség miatt, sugárirányban kifelé mutat.



26.4. ábra

A centripetális erőre felírt egyenlőségből következik, hogy az egyik elektron sebessége kisebb ($v_1 < v$), a másiké pedig nagyobb ($v_2 > v$) a mágneses tér nélküli helyzethez képest. Ennek megfelelően változik a mágneses momentum értéke is, és az atom a külső mágneses tér hatására

$$m_2 - m_1 = -\frac{er_0}{2}\left(v_2 - v_1\right) \tag{26.10}$$

eredő mágneses momentumhoz, ún. *indukált mágneses momentumhoz jut.* A sebességek különbségét egyszerűen meghatározhatjuk, ha a második mozgásegyenletből kivonjuk az elsőt. Ekkor az

$$eB\left(v_1 + v_2\right) = \frac{m_e}{r_0}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

összefüggéshez jutunk, amiből

$$v_2 - v_1 = \frac{eBr_0}{m_e} = \frac{er_0}{m_e}\mu_0 H. \tag{26.11}$$

Behelyettesítve ezt az eredő mágneses momentumot adó kifejezésbe, azt kapjuk, hogy a héliumatom indukált mágneses momentuma:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 = -\frac{e^2 r_0^2}{2m_e}\mu_0 \mathbf{H}, \tag{26.12}$$

ahol a vektoriális írásmód használatával azt juttattuk kifejezésre, hogy *az indukált mágneses momentum és a külső tér iránya ellentétes.*

Az atomi mágneses momentum ismeretében egyszerűen meghatározhatjuk a mágnesezettséget, hiszen $\mathbf{M}$ a térfogategységre jutó mágneses dipólusmomentum. Ha a héliumatomok térfogati sűrűsége n, akkor

$$\mathbf{M} = -\frac{e^2 r_0^2 n}{2m_e}\mu_0 \mathbf{H}, \tag{26.13}$$

s így a szuszceptibilitás 26.1 szerint:

$$\chi = -\frac{e^2 r_0^2 \mu_0 n}{2m_e}, \tag{26.14}$$

ami a kísérleti tapasztalatnak megfelelően valóban független a mágneses tértől és a hőmérséklettől is.

A fenti modellből az $r_0 = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ m pályasugár és a normál körülmények között adódó $n = 2{,}69 \cdot 10^{25}$ m^{-3} sűrűség felhasználásával a He szuszceptibilitására $-1{,}2 \cdot 10^{-9}$ adódik, ami a modell egyszerűségéhez mérten kiválóan egyezik a mérési eredmények szerinti $-2{,}25 \cdot 10^{-9}$ értékkel.

A diamágnesség mechanizmusa magasabb rendszámú atomok esetén. A diamágnesség *magasabb rendszámú anyagok esetén is* a hélium mágnesességére talált magyarázattal értelmezhető. Ekkor azonban az elektronpályák különböző sugara miatt az atom indukált dipólmomentumát az

$$m = -\frac{e^2 \mu_0 H}{6m_e} \sum_{i=1}^{Z} \overline{r_i^2} \tag{26.15}$$

összefüggéssel kell számolni, ahol $\overline{r_i^2}$ az egyes elektronpályák sugarának négyzetes átlaga.

A $\sum_{i=1}^{Z} \overline{r_i^2}$ összeg azonban helyettesíthető a $Z\overline{a^2}$ szorzattal, ahol $\overline{a^2}$ az összes elektron távolságának négyzetes átlaga. Ezt felhasználva, a mágnesezettségre

$$\mathbf{M} = -\frac{Ze^2 n \overline{a^2} \mu_0}{6m_e} \mathbf{H} \tag{26.16}$$

adódik, amiből a mágneses szuszceptibilitás:

$$\chi = -\frac{Ze^2 n \overline{a^2} \mu_0}{6m_e}.$$

Az $a \approx 10^{-10}$ m és $n \approx 5 \cdot 10^{28}$ m^{-3} közelítéssel ebből szilárd és folyékony anyagokra a tapasztalattal jól egyező $\chi = 10^{-6}\, Z$ összefüggés adódik. Gázok esetén a szorzótényező a gázok és a szilárd anyagok sűrűségének $\frac{\rho_{sz}}{\rho_g} \approx 1000$ miatt $\approx 10^{-9}$.

A diamágnességnek a klasszikus fizikai kép alapján alkotott magyarázatát a kvantummechanika felhasználásával módosították. A kvantummechanikai leírás szerint kapott eredmények azonban csak csekély mértékben térnek el a fenti modell becslésétől. A legfontosabb eltérés az, hogy a Bohr-modellel ellentétben az $l = 0$ *mellékkvantumszámú* pályákon az elektron pálya-impulzusmomentuma zérus.

26.2.3. A paramágnesség értelmezése

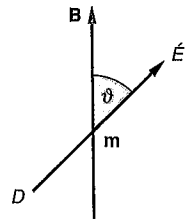
A paramágneses anyagok tulajdonságai is az atomok mágneses tulajdonságainak ismeretében értelmezhetők. A tapasztalat szerint *a paramágneses anyagok atomjai állandó mágneses momentummal rendelkeznek*. Külső mágneses tér nélkül ezek az atomi dipólusmomentumok véletlenszerűen állnak be, így a mágnesezettség – amely a egységnyi térfogatban levő dipólusmomentumok vektori összege – zérus. A külső tér hatására azonban az atomi mágnesek rendeződnek, és a térerősséggel párhuzamos irányba állnak be. A molekulák termikus mozgása azonban időről időre szétzilálja a külső tér által kialakított rendet, így adott pillanatban az elemi mágneseknek csak egy része áll be a külső tér irányába.

A következőkben néhány egyszerűsítő feltevés bevezetésével meghatározzuk, hogy az egységnyi térfogatban n darab m momentumú elemi mágnest tartalmazó anyagban a **B** külső tér hatására milyen mágnesezettség alakul ki.

A **B** térbe helyezett **m** mágneses momentummal rendelkező elemi mágnes energiája:

$$E = -mB\cos\vartheta, \tag{26.17}$$

ahol ϑ a tér és a dipólus által bezárt szög.



26.5. ábra

A Boltzmann-statisztika szerint az egységnyi térfogatba eső atomok közül átlagosan

$$n(\vartheta) = ne^{-\frac{E(\vartheta)}{kT}} \tag{26.18}$$

számú áll a mágneses térrel ϑ szöget bezáró irányba. Ennek alapján kiszámítható az egységnyi térfogatú anyag átlagos dipólusmomentuma. Ezt a számítást a matematikai összefüggések egyszerűsítésére csak néhány, a levezetés lényegét nem érintő egyszerűsítő feltétel bevezetésével végezzük el.

Tegyük fel, hogy külső mágneses tér nélkül az elemi mágnesek nem teljesen rendezetlenül, hanem egy derékszögű koordináta-rendszer tengelyei mentén áll-

nak be. A mágnesezettség zérus értékét az biztosítja, hogy az egyes tengelyek pozitív és negatív irányai mentén a molekuláris mágnesek hatodrésze áll.

Helyezzük ezt az anyagot x irányú B mágneses térbe, és tegyük fel, hogy az elemi mágnesek továbbra is csak a koordinátatengelyek mentén állhatnak be! Nyilvánvaló, hogy a mágneses tér hatására az x tengely mentén a különböző állású dipólusok egyensúlya megbomlik. Ha n_1 a B irányával megegyező, n_2 pedig az azzal ellentétes irányú dipólusok száma egységnyi térfogatban, akkor a mágnesezettségre

$$\mathbf{M}=\left(n_1-n_2\right)\mathbf{m} \tag{26.19}$$

adódik. A térrel párhuzamosan álló dipólusok energiája, mint már megállapítottuk, cos $\vartheta = 1$ miatt:

$$E_1=-Bm, \tag{26.20}$$

az ellentétesen álló dipólusoké pedig cos $\vartheta = -1$ miatt:

$$E_2=Bm. \tag{26.21}$$

Így a 26.18 Boltzmann-eloszlás szerint:

$$n_1=\frac{n}{6}e^{\frac{Bm}{kT}} \qquad \text{és} \qquad n_2=\frac{n}{6}e^{-\frac{Bm}{kT}}. \tag{26.22}$$

Mivel az atomi dipólusmomentumok értéke nagyon kicsiny, közönséges hőmérsékleteken alkalmazható az

$$n_1=\frac{n}{6}e^{\frac{Bm}{kT}}\approx\frac{n}{6}\left(1+\frac{Bm}{kT}\right) \tag{26.23}$$

és az

$$n_2=\frac{n}{6}e^{-\frac{Bm}{kT}}\approx\frac{n}{6}\left(1-\frac{Bm}{kT}\right) \tag{26.24}$$

közelítés. Ezek felhasználásával a mágnesezettségre az

$$\mathbf{M}=\left(n_1-n_2\right)\mathbf{m}=\frac{nm^2}{3kT}\mathbf{B}=\frac{nm^2\mu_0}{3kT}\mathbf{H} \tag{26.25}$$

összefüggést kapjuk. Következésképpen a mágneses szuszceptibilitás

$$\chi=\frac{nm^2\mu_0}{3kT} \tag{26.26}$$

alakban adható meg.

A paramágneses szuszceptibilitásra kapott eredmény jól visszaadja a kísérletileg tapasztalt $\frac{1}{T}$-vel arányos hőmérsékletfüggést, azaz a Curie-törvényt.

A χ-re kapott eredmény alapján megbecsülhetjük egyes gázok szobahőmérsékleti szuszceptibilitását: $n = 2{,}69\cdot10^{25}\ \mathrm{m}^{-3}$, $T = 300$ K, és ezzel $\chi\approx 2{,}3\cdot10^{-7}$.

A mérések szerint a gázok szuszceptibilitása 20 °C-on $0{,}5\cdot10^{-7}$ és $20\cdot10^{-7}$ között van, az egyezés tehát nagyságrendileg jó. Szilárd anyagokra a körülbelül ezerszer nagyobb sűrűség miatt a szuszceptibilitásra is kb. ezerszer nagyobb érték adódik. Az összehasonlítás kedvéért közöljük, hogy a platina szuszceptibilitása $\chi \approx 2{,}6\cdot10^{-4}$, a lítiumé pedig $\chi \approx 2{,}3\cdot10^{-5}$.

A mérési eredmények és az elméleti becslés mutatja, hogy a paramágneses szuszceptibilitás értéke mintegy ezerszerese a diamágneses szuszceptibilitásnak. A paramágneses hatások tehát valóban elnyomják a diamágneseseket.

Megemlítjük még, hogy a levezetésben alkalmazott

$$\frac{Bm}{kT}\ll 1 \tag{26.27}$$

feltevés alacsony hőmérsékleten érvényét veszti ($Bm \approx kT$, ha $T = 1$ K). Ilyen alacsony hőmérsékleteken a hőmozgás már nem zavarja az atomi dipólusok beállását, így a paramágneses anyagok mágnessége telítődik, azaz minden elemi mágnes a tér irányába áll be.

Végül hangsúlyozzuk, hogy a mágnesezettségre és a szuszceptibilitásra kapott eredmény a levezetés egyszerűsítései ellenére klasszikus közelítésben pontos, és a kvantummechanikai hatások figyelembevétele is csak az összefüggésben szereplő állandók értékén változtat.

Alacsony hőmérséklet előállítása. A telítődéssel kapcsolatos a paramágneses anyagok alacsony hőmérsékletek előállítását célzó felhasználása. Mágneses tér hiányában a paramágneses momentumok a tér minden irányába rendezetlenül állnak be. Ez a rendezetlenség a paramágneses anyagok entrópiájához ún. konfigurációs entrópia járulékot ad. Legyen ez az entrópia S_{konf}. Alacsony hőmérsékleten minden elemi mágnes a tér irányába áll be, így a konfigurációs entrópia zérussá válik. (Az adott állapotot egyetlen mikroállapot valósítja meg.) Ennek megfelelően $Q = TS_{\mathrm{konf}}$ hő szabadul fel, amely pl. folyékony héliummal való hűtéssel elvezethető. Ezután, ha a mágneses teret kikapcsoljuk, az elemi mágnesek ismét rendezetlenné válnak, a konfigurációs entrópia S_{konf}-ra nő. Az ehhez szükséges hőt az anyag a rácsrezgésektől vonja el, azaz a paramágneses anyag lehűl. Ezzel a módszerrel 10^{-3} K-es hőmérsékletet sikerült elérni.

26.2.4. Az elektrongáz paramágnessége

A paramágneses anyagok mágneses szuszceptibilitása a (26.4) Curie-törvény szerint fordítottan arányos a hőmérséklettel. Egyes fémek esetén azonban a *hőmérséklettől független paramágnességet* tapasztaltak. Wolfgang *Pauli* bizonyította, hogy ez a *szabad elektronok paramágnességének* következménye. A jelenség csak kvantummechanikai ismeretek felhasználásával érthető meg.

Az elektronok szuszceptibilitásának hőmérsékletfüggetlensége a Pauli-elv következménye, ami lehetetlenné teszi, hogy a mélyebb energiaszinteket elfoglaló elektronok is gerjesztődjenek.

Megjegyezzük, hogy pályamozgásuk miatt a vezetési elektronok viszonylag erős diamágneses tulajdonsággal is rendelkeznek. Ez az ún. *Landau-féle diamágnesség* azonban a paramágneses hatásnak csak mintegy harmadrésze.

26.3. A ferromágnesség értelmezése

A ferromágnesség értelmezésekor is az atomok mágneses tulajdonságaiból kell kiindulnunk. A kísérleti tapasztalatok szerint ferromágnesség csak kondenzált anyagokban jön létre. Megállapították azt is, hogy az egykristályok a különböző kristálytani irányokban különbözőképpen mágnesezhetők. Mindez arra utal, hogy a ferromágnesség döntő módon az atomok kollektív viselkedésének következtében jön létre. Annak eldöntésére, hogy a ferromágneses anyagok mágnessége atomi szinten a pályamágneses momentum, vagy a spinmágneses momentum következménye, pl. az Einstein–de Haas-kísérlet alkalmas. A kísérlet eredménye szerint ebben az esetben a spinmágnesség a döntő.

26.3.1. Az Einstein–de Haas-kísérlet

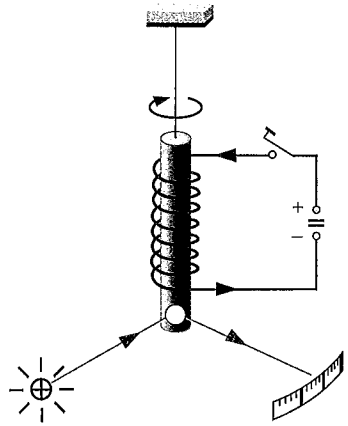
A kísérlet azon alapul, hogy a mágneses momentum mindig impulzusmomentummal jár együtt, s a két mennyiség aránya az ún. *giromágneses faktor,* amelynek értéke pályamozgásból eredő hatások esetén:

$$\frac{m_p}{N_p} = \frac{e}{2m_e}, \tag{26.28}$$

ahol m_p egy elektron pályamágneses, N_p pedig pályaimpulzus-momentuma, m_e az elektron tömege. A spinből eredő hatások esetén pedig

$$\frac{m_s}{N_s} = \frac{e}{m_e}. \tag{26.29}$$

Az *Einstein–de Haas-kísérletben* tekercs belsejében torziós szálon kicsiny vasrudacskát függesztettek fel (26.6. ábra).



26.6. ábra

Ezután felmágnesezték a rudat. A mágnesezés során a rúd elcsavarta a torziós szálat. A pontosabb méréseknél a rudat torziós rezgéseinek frekvenciájával megegyező ütemben többször átmágnesezték, és ezáltal rezgésbe hozták.

Az első pillanatban meglepő jelenséget az okozza, hogy a mágneses tér hatására a rúdban lévő elemi mágnesek a tér irányába állnak be, s ezzel együtt impulzusmomentumuk is azonos irányúvá válik. Így az impulzusmomentum-megmaradás törvénye értelmében a rúdnak olyan irányban kell elfordulnia, hogy a teljes impulzusmomentum zérus maradjon. A kísérlet alapján a felmágnesezett rúd **M** mágneses momentumának és **N** impulzusmomentumának aránya meghatározható. Ez a hányados pedig megegyezik, az anyagban levő elemi mágnesek mágneses és impulzusmomentumának arányával.

Az Einstein–de Haas-kísérletből erre az arányra

$$\frac{M}{N} = \frac{m_s}{N_s} = \frac{e}{m_e} \tag{26.30}$$

adódott, ami bizonyítja, hogy *a ferromágnességet atomi szinten a spin mágneses momentum okozza.*

A ferromágneses anyagok elektronszerkezete. A mágneses tulajdonság és a *spin* között kapott kapcsolat összhangban van a ferromágneses anyagok elektronszerkezetének sajátosságaival is. Valóban, ha a ferromágnesesség a spinekkel kapcsolatos, akkor ferromágneses tulajdonság nem várható sem a zárt héjakon elhelyezkedő elektronoktól (ezek spinjének eredője zérus), sem a külső héjak vegyértékelektronjaitól, amelyek a fémes kötésben *delokalizálódnak*. Ferromágnesesek azok az elemek lesznek, amelyek lezáratlan héjjal rendelkeznek. Ilyenek a lezáratlan 3*d* alhéjjal rendelkező elemek és a ritka földfémek, amelyekben a 4*f* alhéj lezáratlan.

A spinek párhuzamos beállásának magyarázatára sokféle hipotézis született, a helyes magyarázat azonban csak a kvantummechanika segítségével adható meg. A spinek párhuzamos beállása lényegében a *Pauli-elv* és az elektronok Coulomb-taszításának következménye. Az elektronrendszer energiája ui. nem pusztán a klasszikus Coulomb-kölcsönhatásból adódó Coulomb-energia, hanem ehhez járul még egy tisztán kvantummechanikai effektus, az ún. *kicserélődési kölcsönhatás* és a hozzá tartozó ún. kicserélődési energia is.

A kicserélődési kölcsönhatás eredménye legegyszerűbben két hidrogénatom kölcsönhatásán szemléltethető. Ennek a rendszernek az energiája:

$$U = 2E_0 + \frac{K + A}{1 + S^2}, \tag{26.31}$$

ahol E_0 az egyes független hidrogénatomok energiája, K a Coulomb-kölcsönhatásból származó energia, S az ún. átfedési integrál, amelyre $0 \leq S \leq 1$, végül A a kicserélődési energia. Kimutatható, hogy $A = J(s_1, s_2)$, ahol s_1 és s_2 a kölcsönható atomok eredő spinje, J pedig a kicserélődési integrál.

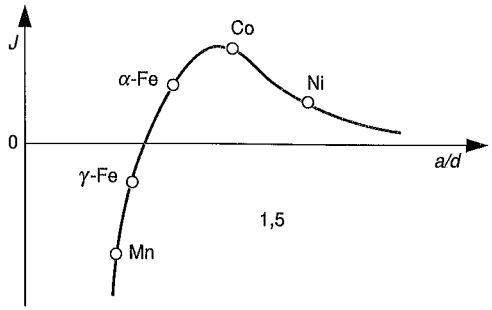
A kicserélődési integrál igen sok tényező függvénye, és mind pozitív, mind negatív értéket felvehet. J előjele azonban megszabja, hogy adott esetben a parallel vagy antiparallel spinbeállás az előnyös.

Negatív J esetén A értéke akkor lehet negatív – vagyis a rendszer energiája akkor lesz minimális –, ha a szomszédos spinek ellentetten állnak be. Ez felel meg az atomok közötti *kovalens kötésnek*.

Ha a J kicserélődési integrál pozitív, akkor ahhoz, hogy A negatív legyen, a spineknek párhuzamosan kell beállniuk. Lényegében ez magyarázza a 3*d* elektronok párhuzamos spinbeállását.

26.3.2. Hosszú távú rend a ferromágneses anyagokban

A ferromágneses anyagokban nemcsak az atomon belüli 3*d* elektronok mágneses momentumai válnak párhuzamossá mindaddig, amíg a *Pauli-elv* megengedi, hanem a szomszédos atomok is spontán egy irányba álló mágneses momentummal rendeződnek. Ez annak a következménye, hogy az elektronrendszer energiája ebben az esetben válik minimálissá. Az, hogy az energia az elemi mágnesek egyirányú vagy ellentétes irányú rendeződésekor lesz minimális, a kicserélődési integrállal magyarázható.



26.7. ábra

a kicserélődési integrál értékének változását mutatja a vascsoport elemeire vonatkozóan, az a rácsállandónak és a d héj d átmérőjének $\frac{a}{d}$ aránya függvényében. Látható, hogy a közismerten ferromágneses anyagokra a kicserélődési integrál pozitív, ennek következtében a szomszédos atomok spinjének valóban a párhuzamos állása a kedvező. A mangán esetén a kicserélődési integrál negatív, így ez az elem nem ferromágneses. Amennyiben azonban a mangán rácsállandója valamilyen hatás következtében csekély mértékben megnőne, és elérné az 1,5*d* értéket, akkor ez az anyag is ferromágnesessé válna. A csekély mértékű rácstorzulás kis mennyiségű nitrogénzárvány hatására már bekövetkezik, s ekkor a mangán ferromágnesessé válik. Hasonló módon a Mn–Cu–Al ötvözetek is ferromágnesesek, bár egyetlen összetevőjük sem az.

A kísérleti tapasztalatok azt mutatják, hogy a *ferromágneses anyagok nagy tartományaiban, az ún. doménekben az atomi mágneses dipólusok azonos irányba állnak be*. A szomszédos domének mágnesezettsége azonban ellentétes.

A doménszerkezet kísérletileg az ún. *Bitter-technikával* mutatható ki. Ha olajban finom mágneses port szuszpendálunk, és a keveréket mágneses anyag polírozott felületére kenjük, a mágnespor a doménfalak mentén gyűlik össze.

Felvetődik a kérdés, hogy miért nem válik azonossá az anyag teljes térfogatában az elemi mágnesek iránya? Képzeljük el, hogy a kristályos anyag egy darabjában az elemi mágnesek azonos irányban álltak be! Nyilvánvaló, hogy energetikailag a szomszédos zónában ezzel ellentétes mágnesezettség az előnyösebb. A szomszédos domének ekkor ui. kicsiny mágnesrudaknak tekinthetők, amelyek minimális energiájú helyzete az, amikor ellentétes pólusaik találkoznak. Az atomi mágnesek rendezésére irányuló tendencia tehát nem érvényesülhet a kristály teljes térfogatában. Az *energetikailag legkedvezőbb doménméret* igen sok paramétertől függ, általában azonban *nem nagyobb néhány mikrométernél*.

A fentiekben elmondottak lényegében egykristályokra, illetve a *polikristályos* anyagok szemcséire érvényesek. A szemcsehatárok általában a mágnesezettség irányán is változtatnak, mivel a szomszédos kristályszemcsék orientációja külön-

böző, s a doménszerkezetet kialakító spontán mágneseződés minden szemcsében a könnyű mágneseződési irányokban megy végbe.

A doménszerkezet alapján jól érthető a ferromágneses anyagok mágnesezési görbéje. A spontán mágneseződéssel létrejött doménszerkezet általában olyan, hogy makroszkopikusan az anyagnak nincs mágnesezettsége. Bekapcsolva a mágneses teret, mindig lesznek olyan domének, amelyekben a mágnesezettség vektora párhuzamos és egyirányú a külső térrel. Ezek a domének minimális energiájú állapotban vannak, így egyensúlyi helyzetük stabilis. A stabilis helyzetű domének szomszédjaiban a mágnesezettség a külső térrel ellentétes irányú, ezért ezek a mágneses térben maximális energiájú állapotban vannak, s egyensúlyuk labilis. A minimális energiájú helyzet elérésére a labilis állapotú domén egyes mágneses momentumai átfordulnak, így a doménfal áthelyeződik, s az egyik domén növekedni kezd a másik rovására. A mágneses tér bekapcsolása után a doménfalak mozgása még viszonylag könnyen történik, ezért a mágnesezettség gyorsan nő. Ahogyan a mágneses tér nő, egyre több doménfal „akad" meg valamilyen kristályhibán (szemcsehatáron vagy diszlokációkötegen, lásd 28.2. és 28.3. szakasz), s ezért a mágnesezettség növekedése lassul. A kristályhibák miatt megmaradó, kedvezőtlen helyzetű atomi mágnesek energiája azonban a mágneses tér növekedésével egyre nagyobbá válik, s elérve egy kritikus értéket, a doménfal hirtelen keresztülszalad a hibán. Ez az oka a mágnesezési görbén észlelt kis lépcsőknek – a *Barkhausen-effektusnak* (26.1.2. szakasz). Azonnal érthető ennek alapján a hiszterézis jelensége is, hiszen a mágneses tér csökkentésével a doménfalak általában nem tudnak eredeti helyükre visszaállni, mert a kristályhibák a visszafelé történő mozgást megakadályozzák. A lemágnesezés után tehát egészen más doménszerkezet marad vissza, mint ami a mágnesezés előtt létezett.

A mágnesezettség akkor kezd telítésbe menni, amikor az egyes kristályszemcsékben valamennyi domén beállt a mágneses tér irányával legkisebb szöget bezáró könnyű mágnesezési irányba. A további mágnesezés ilyenkor már csak a doméneknek a tér irányába való forgatásával lehetséges, s ehhez általában nagy mágneses térerősség szükséges.

A mágneses momentumok egyirányú beállását azzal indokoltuk, hogy a kicserélődési kölcsönhatás miatt a szomszédos részecskék alacsonyabb energiájú állapotba kerülnek, ha spinjeik párhuzamosak. A párhuzamos beállás szabályosságát $T > 0$ K hőmérsékleten megzavarja a hőmozgás, amely időről időre egyes momentumokat kibillent a helyéről. Amennyiben a hőmérséklet elegendően magas, akkor a termikus energia a rendeződést is lehetetlenné teszi. Ezért szűnik meg a ferromágnesség a Curie-hőmérséklet felett.

26.3.3. Antiferromágnesség

1933-ban Landau elméletileg jutott arra a következtetésre, hogy léteznie kell olyan anyagoknak, amelyekben *alacsony hőmérsékleten a szomszédos mágneses momentumok ellentétes irányban állnak be.* 1938-ban felfedezték, hogy pl. a MnO, MnS és a Cr_2O_3 valóban ilyen sajátosságokkal rendelkező anyagok.

Mivel az ilyen anyagok *nem mágnesezhetők, antiferromágneseknek* nevezik ezeket. A ferromágnesességhez hasonlóan az antiferromágnesesség is a mágneses momentumok szabályos rendjének következménye, ez a tulajdonság is csak addig maradhat fenn, amíg a termikus mozgás szét nem zilálja.

Az antiferromágnesesség kritikus hőmérsékletét *Neél-hőmérsékletnek* nevezzük. A Neél-hőmérséklet felett az antiferromágneses anyagok *paramágnesessé* válnak.

Érdekes tulajdonságú anyagok az ún. ferritek, amelyek ferromágneses és antiferromágneses alrács egyesítéséből jönnek létre. Ezek az anyagok jól mágnesezhetők, ugyanakkor elektromos ellenállásuk nagy, ezért jól használhatók nagyfrekvenciás áramkörökben vasmagként, valamint számítógépek tárelemeiként.

26.4. A szupravezetés

Kamerlingh-Onnes holland fizikus 1908-ban a fémek alacsony hőmérsékleti ellenállását vizsgálva fedezte fel a *szupravezetés* jelenségét. Megállapította, hogy 4,2 K-nél a higany ellenállása hirtelen zérusra csökken. Azóta sokféle anyag esetén mutatták ki kísérletileg a szupravezetést, és határozták meg a szupravezető átmenetre jellemző, 1–20 K közé eső T_c kritikus hőmérsékletet.

Szupravezető pl. a tiszta anyagok közül az irídium, a titán, a kadmium, az ólom stb. az ötvözetek közül pedig a MoC, NbN, Nb_3Sn stb. A szupravezetést kísérletileg lényegében kétféle módon szokás bizonyítani. Az egyik esetben áramjárta vezető két vége között fellépő feszültséget vizsgáljuk, az anyag folyamatos hűtése közben. A kritikus hőmérsékletet elérve ez a potenciálkülönbség hirtelen zérussá válik. A másik, talán „látványosabb" eljárás az, hogy a vizsgált anyagból zárt vezetőgyűrűt készítenek, s ezt a gyűrűt a síkjára merőleges mágneses térbe helyezik. Ezután a vezetőgyűrűt a kritikus hőmérséklet alá hűtik, majd a mágneses teret kikapcsolják. A keletkező indukciós lökés hatására a gyűrűben áram keletkezik. Kutatóintézetekben több évig „őriztek" ilyen áramjárta szupravezető gyűrűket anélkül, hogy az áramerősségben csökkenést észleltek volna. Az indukciós lökés által keltett áram gyakorlatilag végtelen élettartama igazolja, hogy az adott anyag ellenállása zérus, hiszen közönséges vezetőkben az így keltett áram kb. 10^{-12} s alatt lecseng.

A hőmérséklet mellett a mágneses tér is befolyásolja a szupravezető anyagok tulajdonságait. A kritikus hőmérséklet alatt megszűnik a szupravezető állapot, ha az anyag elegendően nagy térerősségű mágneses térbe kerül. A mágneses teret

keltheti külső hatás, de létrehozhatja a szupravezető saját árama is. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a szupravezetőkben adott hőmérsékleten nem folyhat a kritikus I_c-nél nagyobb áram, mert a keletkező nagy mágneses tér miatt az anyag szupravezető tulajdonsága megszűnik. A különböző anyagokkal végzett mérések szerint a kritikus mágneses térerősség nagysága adott T hőmérsékleten a

$$H_c = H_0\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2 \qquad (26.32)$$

összefüggéssel adható meg.

A zérus elektromos ellenállás mellett a szupravezetők jellegzetes tulajdonsága, hogy belsejükben a mágneses indukcióvektor értéke zérus. Ezt úgy is szokás fogalmazni, hogy a szupravezetőből a mágneses tér „kiszorul". Ez a mágneses térben fokozatosan hűtött szupravezetőkben úgy valósul meg, hogy a kritikus hőmérsékletet elérve a szupravezető anyagban olyan áram keletkezik, amelynek mágneses tere az anyag belsejében éppen kioltja a külső mágneses teret. Ezt a hatást nevezzük *Meissner-effektusnak*. A Meissner-effektus következtében a szupravezető anyagok ideális diamágnesekként viselkednek, amelyekre a mágneses szuszceptibilitás $\chi = -1$ és a permeabilitás $\mu = 1 + \chi = 0$.

A gyakorlatban alkalmazott szupravezetőkbe a mágneses tér csekély mértékben mégis behatol, és a mágneses fluxus csak mintegy 10^{-5} cm mélységben válik zérussá. Ez az oka annak, hogy a nagyon vékony szupravezető rétegek sohasem tökéletes diamágnesek.

A szupravezetés mikroszerkezeti magyarázatát 1957-ben *John Bardeen, Leon Cooper és Robert Schrieffer* adták meg. A nevük kezdőbetűit idéző *BCS*-elméletért Nobel-díjat kaptak. A szupravezetés jellegzetesen kvantummechanikai effektus, amelyben a kvantummechanikai hatások makroszkopikusan is megnyilvánulnak. Az elmélet rendkívül bonyolult, ezért itt csak legfőbb vonásainak érzékeltetésére szorítkozunk.

A *BCS-elmélet* alapja az, hogy a fémek elektronjai között a Coulomb-taszítás mellett a kristályráccsal való kölcsönhatáson keresztül sajátos vonzóerők is fellépnek. Az alacsony hőmérsékleten létrejövő szupravezető állapotban ezek a vonzóerők dominánssá válnak, és a vezetési elektronokat ún. *Cooper-párokká* kapcsolják össze. A kapcsolódás mechanizmusa, illetve a vonzóerő létrejötte durván azzal magyarázható, hogy a fémben mozgó elektron kissé deformálja a pozitív ionokból álló kristályrácsot. Ennek eredményeként az elektront pozitív töltésfelhő veszi körül, amely más elektronokra vonzó hatást gyakorol. Az elektronokat párba rendező vonzás tehát az ionrács közvetítésével jön létre azáltal, hogy a mozgó elektron zavart okoz a rácsrezgésekben.

A párba kapcsolódó elektronokat azonban nem képzelhetjük úgy, mintha két elektron egyszerűen összetapadva együtt mozogna. Az elmélet szerint a Cooper-párok tagjainak impulzusa és spinje is ellentétes, és a két elektron távolsága 10^{-4} cm, azaz több nagyságrenddel nagyobb, mint a kristály atomjainak távolsága.

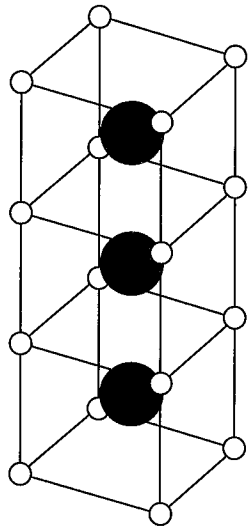
Nem minden vezetési elektron kapcsolódik Cooper-párrá. A hőmérséklet növekedtével pedig egyre valószínűbbé válik a párok bomlása, a $T = T_c$ hőmérsékleten minden Cooper-pár felbomlik.

A szupravezetés jelensége az elektronpárok kialakulása alapján a következőképpen magyarázható.

A Cooper-párok ellentétes impulzusú elektronokból állnak. Az ilyen rendszer összimpulzusa zérus, így a kvázirészecske $\frac{h}{p}$ de Broglie-hullámhossza végtelen naggyá válik. A teljes fémre kiterjedő elektronpár ily módon nem „érzékeli' a fémrács hibahelyeit, amelyek az elektromos ellenállás forrásai. Ugyanakkor az ellentett spinű elektronokból álló kvázirészecske spinje zérus, így *a Cooper-párokra a Fermi–Dirac-statisztika helyett a Bose–Einstein-féle eloszlásfüggvényt alkalmazhatjuk.*

A zérus spinű részecskékből tetszőleges számú lehet adott energiaállapotban, így a Cooper-párok többsége alapállapotban van. Ily módon a fémben nagy mennyiségű, energetikailag is egyenértékű részecske jön létre, amelyek kollektív mozgásba hozhatók, és mozgásuk ellenállásmentesen fennmarad.

Napjainkban a szupravezetőknek már technikai alkalmazásai is vannak. Így pl. használják a szupravezetőket igen kis mágneses térerősségek mérésére.



26.8. ábra

A szupravezetéssel kapcsolatos kutatásokban 1986-ban teljesen új fejezetet nyitott két svájci kutató, *Bednorz* és *Müller*. Kerámiaanyagból 35 K-es kritikus hőmérsékletű szupravezetőt állítottak elő, s ezzel áttörték a kritikus hőmérsékletre mind elméletileg, mind kísérletileg maximálisnak hitt 30 K körüli határt. Felfedezésük után a szupravezetéssel foglalkozó kutatók különböző összetételű kerá-

miaanyagokban egyre magasabb és magasabb hőmérsékleteken tapasztaltak szupravezető tulajdonságot. Jelenleg a rekord már kevéssel 100 K felett van. A 30 K feletti kritikus hőmérséklettel bíró anyagokat nevezzük magas hőmérsékleti szupravezetőknek.

A magas hőmérsékleti szupravezetés elméleti magyarázata jelenleg még nem tisztázott, bár a jelek arra utalnak, hogy a töltéshordozók ez esetben is *Cooper-párok*. Gyakorlati alkalmazásuk, bár nagy reményekre jogosítana, elsősorban a *kerámiákkal* kapcsolatos megmunkálási nehézségek miatt még viszonylag szegényes.

A 26.8. ábra a leghíresebb szupravezető kerámia, az ún. 1–2–3 anyag $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ elemi celláját mutatja. Az anyagban az oxigén aránya enyhén változhat, erre utal az összetételt mutató képletben a $7-x$ jelölés. A feltételezések szerint a szupravezető tulajdonságok kialakulásáért az oxigén a felelős.

27. A lézer

27.1. Alapfogalmak

A kvantummechanika alapján érthetővé vált a fénykibocsátás, illetve általánosan az elektromágneses sugárzás kibocsátásának mechanizmusa. Az elektromágneses sugárzást gerjesztett állapotban levő atomok vagy molekulák bocsátják ki, miközben alacsonyabb energiájú állapotba kerülnek. Általában a gerjesztett atomok időben és térben teljesen véletlenszerűen sugározzák ki a fényhullámokat. Ez a magyarázata, hogy a közönséges fény nem koherens és nem is monokromatikus.

A lézerek olyan berendezések, amelyek segítségével az atomok fénykibocsátása mintegy szinkronizálható, s ezáltal monokromatikus és koherens sugárzás kelthető.

A lézerek működése azon alapul, hogy speciális eljárások segítségével egyes alkalmas anyagok molekuláinak többségét gerjesztett állapotba hozzák, majd egyszerre kényszerítik alacsonyabb energiájú állapotba történő visszaugrásra. Ennek eredményeként lényegében minden atom egyszerre sugároz ki ugyanolyan frekvenciájú fényt.

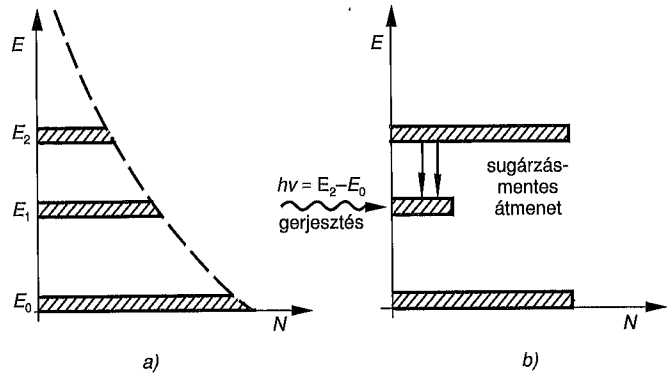
Az indukált sugárzás. Általában mind az atomok gerjesztése, mind a „lavinaszerű" fénykibocsátás megvilágítás hatására jön létre. Einstein jött rá arra, hogy ha adott energiájú fotonok elnyelésére képes anyagot megvilágítunk, akkor nemcsak fényelnyelés következik be, hanem ún. *indukált sugárzás,* más néven indukált emisszió is keletkezik. A beérkező fotonok ugyanis meggyorsítják a gerjesztett állapotban levő atomok sugárzási folyamatait. Ez a felismerés teszi lehetővé, hogy a gerjesztett atomok kisugárzását szinkronizáljuk.

Közönséges körülmények között a magasabb energiájú állapotokat egyre kevesebb és kevesebb elektron tölti be (Boltzmann-statisztika), így az indukált emissziós folyamatok, bár az elnyeléssel azonos valószínűségűek, csak ritkán következhetnek be. Jelentőssé csak olyan esetben válhatnak, ha egyes magasabb energiaszinteken több elektron helyezkedik el, mint az alacsonyabb szinten. Ezt a természetes állapothoz képest fordított energiaeloszlást nevezzük *populációinverziónak*.

Populációinverzió természetes körülmények között nem valósul meg. Létrehozásához megfelelő energiaszintekkel rendelkező anyag és külső energia befekteté-

se szükséges. Populációinverzió csak olyan anyagokban hozható létre, amelyek három vagy több energiaszinttel rendelkeznek.

A lézer működése. Modellként foglalkozzunk a három energiaszintes rendszerrel! Az ábra ezen szintek csökkenő betöltöttségét mutatja egyensúlyi körülmények között. Világítsuk meg ezt az anyagot $\nu = \frac{E_2 - E_0}{h}$ frekvenciájú intenzív fényárammal! A fényelnyelés hatására az N_2 és N_0 betöltöttség kiegyenlítődik



27.1. ábra

A lézeranyagok többsége olyan, hogy a közbülső E_1 energiájú szint élettartama hosszabb, mint az E_2 szinté. Ekkor az elektronok a 2-es állapotból mintegy „lecsorognak" az 1-es állapotba, s ott összegyűlnek. Az $E_2 \to E_1$ átmenet sok lézeranyag esetén sugárzásmentes, a felszabaduló energiát az anyag a továbbiakban belső energiaként tárolja. Így az E_1 és E_0 energiájú szintek között alakul ki tartósan inverz eloszlás.

A lézerfény ezután úgy jön létre, hogy vagy kívülről jövő $h\nu = E_1 - E_0$ energiájú foton, vagy az $E_1 \to E_0$ szintek közötti spontán átmenetkor létrejött foton lavinaszerűen megindítja a populációinverzió leépülését. Az egyes indukált emisszióval keltett fotonok ugyanis egyre újabb és újabb átmeneteket gerjesztenek, hiszen energiájuk éppen a gerjesztéshez szükséges energia. Így a fényintenzitásnak a kezdeti kiváltó fotonnal azonos fázisú halmozódó növekedése következik be.

A lézerek technikai megvalósításakor a lavinaszerű gerjesztő hatást azzal is fokozzák, hogy a többnyire henger alakú lézeranyagot egyik végén tökéletesen tükrözővé teszik, másik végén pedig részlegesen tükröző ablakkal látják el.

A spontán meginduló emissziós folyamatok során a fotonok egy része a henger oldalán kilépve szétszóródik. A rúd tengelyével párhuzamosan haladó fotonok azonban a tükröző felületeken visszaverődve újabb és újabb gerjesztett atomokat kényszerítenek az adott frekvenciájú sugárzás kibocsátására. Így a nyaláb a rúd tengelye mentén felerősödik. A felerősödött monokromatikus és igen jól irányított nyaláb (a lézerfény) a részlegesen tükröző felületen keresztül lép ki. Mivel a fény rövid időn belül sokszor ide-oda haladhat a lézer tengelye mentén, ezért annak ellenére, hogy az egyes áthaladásoknál a kilépési ablakon keresztül átbocsátott energiahányad kicsi, az áteresztett összenergia még rövid idő alatt is nagy lehet.

Az első lézert 1960-ban készítették, lézeranyagként rubinrudat használtak. A *rubinlézer* impulzusüzemben működik, folyamatos fénykibocsátásra nem alkalmas, mert a gerjesztő villanó fénylámpák segítségével a populációinverzió csak rövid ideig tartható fenn.

A rubinlézerhez hasonló elvek alapján egyes *gázokból* (He–Ne gázkeverék, CO_2 stb.), illetve *festékekből* folytonos üzemű lézerek is készíthetők, sőt a félvezetőkkel bizonyos tartományokban még a lézerfény frekvenciájának folyamatos változtatása is megoldható

A lézerfény tulajdonságai. A lézerfény legfontosabb tulajdonságai a következők:

1. A kibocsátott fény *monokromatikus*.
2. A fénynyaláb *koherens,* és igen nagy távolságon is csak kevéssé szóródik.
3. A lézerfény segítségével kicsiny felületeken *nagy energiasűrűség* érhető el.

A fenti tulajdonságok folytán a lézerfénynek rendkívül sokféle technikai alkalmazása lehetséges. A szerteágazó alkalmazásokból ízelítőül néhányat felsorolunk.

Nagy teljesítményű lézereket anyagmegmunkálásra használnak. Ezekben az eljárásokban a lézereket lényegében lokális hőforrásként használják. Lézerrel fémek, műanyagok hegeszthetők, vághatók, fúrhatók.

Hasonló hatásokon alapul a lézerek gyógyászati felhasználása. Közismert a levált retina lézeres „visszahegesztése", valamint a lézeres fogfúrás.

A lézerfény csekély divergenciája miatt jól hasznosítható nagy távolságok pontos mérésére is.

Lézereket alkalmaznak a hírközlésben és az információtechnikában is.

Az alkalmazások elvileg talán legérdekesebb ága a holográfia.

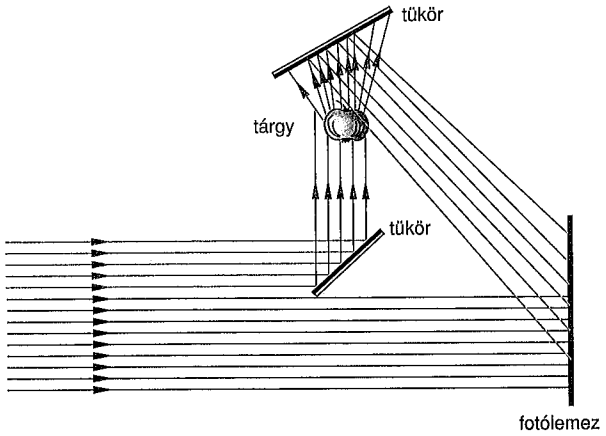
27.2. A holográfia

A lézerfény lehetővé tette az optikai információ szokásos fényképeknél hatásosabb tárolásának, a holográfiának kifejlesztését.

A fényképek készítése. A fényképek készítésekor a tárgyról visszavert fénysugarak által hordozott információt rögzítjük a fényképezőlemezen. A tárgyak a rájuk eső fénynyalábnak az amplitúdóját és fázisviszonyait is megváltoztatják. Így a tárgy különböző pontjairól visszavert fénynyaláb amplitúdója mellett a hullám fázisviszonyai is közvetítenek információt a tárgyról.

A fényképezéskor a fotolemezben végbemenő kémiai változások a beeső fény energiájával arányosak, így normál fényképezéskor csak a beeső fény amplitúdóviszonyait rögzítjük, hiszen a fényhullám intenzitása az amplitúdó négyzetével arányos.

A hologram. A lézerfénnyel speciális módon készített felvételek, az ún. hologramok a tárgyról szóródó fényhullám fázisviszonyaiban rejlő információt is rögzítik. Ennek megértésére röviden áttekintjük a hologramkészítés egy módszerét. A hologram készítésekor a megvilágító monokromatikus lézer fénynyalábot az ábrán



27.2. ábra

látható módon kettéválasztják. A nyaláb első felét, az ún. *referencianyalábot* tükrök segítségével közvetlenül a fényérzékeny hololemezre vezetik, míg a nyaláb másik fele a tárgyon szóródva jut ugyanide. A hololemezen a tárgyról szórt fény és a referencianyaláb interferál, az előhívott hologram ezt az interferenciaképet rögzíti. Ha ezután az előhívott hololemezt a referencianyalábbal megvilágítjuk, a lemezen rögzített interferenciavonalakon elhajló fény első elhajlási rendje pontosan reprodukálja a tárgyról szórt nyalábot.

A folyamat lényegében az optikai rácson létrejövő elhajláshoz hasonlóan megy végbe. A hologramról kiinduló fénynyaláb a tárgyról visszavert hullámot mind amplitúdó-, mind fázisviszonyaiban hűen másolja le, ezért a kép térben jelenik meg.

A hologram tulajdonságai. A hologram a térbeli képalkotás mellett egyéb érdekes tulajdonságokkal is rendelkezik. Elvileg a hologram tetszőleges része tartalmazza a tárgyról jövő összes információt, így ha a hololemezt kettévágjuk, akkor mindkét rész alkalmas a teljes kép létrehozására. A tördeléssel való sokszorosításnak a fotoemulzió finomsága szab határt. A fotoemulzió kicsiny részein kevés a fény hatására reagáló atom, így a kép mégsem tükrözhet pontosan minden részletet.

A holográfiát *Gábor Dénes magyar fizikus* fedezte fel, a lézerek megjelenése előtt. Használható hologramok azonban csak a megfelelő referenciahullámot adó lézerek megalkotása óta készülnek.

A holográfia a felfedezése óta sokat fejlődött, jelenleg már készülnek ún. *napfényhologramok* is. Ezeknek csak az elkészítéséhez szükséges lézerfény, a kép fehér fénnyel megvilágított hologram esetén is látható.

28. Eltérések az ideális kristályszerkezettől. A kristályhibák

Egy kristályt ideálisnak vagy tökéletesnek nevezünk, ha minden atomja vagy ionja az adott szerkezet (kristályrács) által meghatározott helyen (rácspontban) helyezkedik el. A valóságban a kristályok atomi rendje sohasem teljesen tökéletes. A tökéletes kristály ideális rendjétől történő eltéréseket *kristályhibáknak* vagy *rácshibáknak* nevezzük. A kristályos anyagok tulajdonságainak jelentős részét a kristályszerkezetben lévő hibák magyarázzák.

Rácshibák esetén a kristály kisebb-nagyobb tartományában megszűnik az atomok szabályos rendje, a szomszédos atomok egymáshoz viszonyított elhelyezkedése az ideálistól eltérő lesz. Minden hiba egy sajátos atomelrendeződést jelent.

Kristályhibák rendszerint már a kristályosodás során keletkeznek, de a kristályt érő külső hatások is hibákat okozhatnak a belső szerkezetben.

A kristályhibákat legegyszerűbben kiterjedésük szerint csoportosíthatjuk. Ennek alapján az alábbi hibákat különböztetjük meg:

- *ponthibák* (rácslyukak, intersticiális és szennyezőatomok),
- *vonalhibák* (diszlokáció),
- *felületi hibák* (rétegződési hiba, szemcsehatár),
- *térfogati hibák* (idegen anyagrészek).

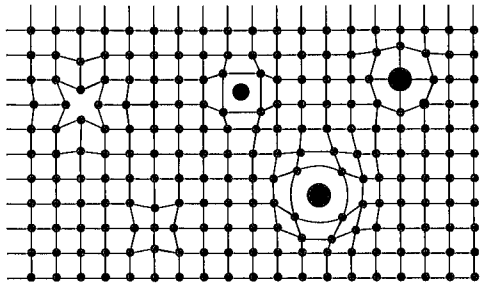
28.1. Ponthibák

Ponthibákról beszélünk, ha a kristályban az ideálistól eltérő atomelrendeződés a kristályrács egyetlen geometriai pontjára vezethető vissza. A valóságban a kristály pontszerű hibái geometriai értelemben nem pontszerűek, az atomok elrendeződése a hibapont környezetében is megváltozik, mivel a kristályrács rugalmasan torzul.

A ponthibák alaptípusai a következők:

- rácslyukak vagy vakanciák,
- rácsközi vagy intersticiós atomok,
- szennyező, illetve ötvöző atomok.

A ponthibák típusait és a kristályrács jellegzetes torzulását a ponthibák környezetében a 28.1. ábra szemlélteti.



28.1. ábra

Rácslyuk vagy vakancia. A legegyszerűbb ponthiba a kristályban az üresen maradt rácshely. A hiányzó atom helyén és ennek közvetlen környezetében a kristály tulajdonságai helyileg módosulnak. Az ilyen ponthibát *rácslyuknak* vagy *vakanciának* nevezzük. A rácslyukakkal és a hozzájuk kapcsolódó anyagi tulajdonságokkal részletesen is foglalkozunk.

Rácsközi vagy intersticiós atom. A *rácsközi vagy intersticiális atom* olyan ponthiba, amely azáltal keletkezik, hogy egy atom nem a kristályrács rácspontjában helyezkedik el, hanem szabálytalanul ékelődik be a rács atomjai közé. A rácsközi atomokat megkülönböztetjük aszerint, hogy a kristály saját atomja illeszkedik hibásan a szerkezetbe, vagy idegen szennyező atomok ékelődtek a rácsba. A sajátatom intersticiálisok rendszerint vakanciákkal egyszerre keletkeznek termikus hatásra vagy a kristályt érő nagy energiájú sugárzás hatására. Előfordul, hogy a kristály belsejében egyes atomok a termikus energiaingadozások következtében akkora energiára tesznek szert, hogy szomszédaik vonzóhatását legyőzve kilépnek helyükről. Ilyenkor az atom eredeti helyén rácslyuk marad vissza, míg a kilépő atom rácsközi (intersticiális) helyzetbe szorul.

Vakancia és intersticiális atom keletkezik, ha a kristályba nagy energiájú atomi részecske (elektron, proton, neutron stb.) lép be.

Szennyező vagy ötvöző atomok. A valódi anyagok sohasem teljesen tiszták, mindig tartalmaznak több-kevesebb idegen atomot is. Ezek az idegen atomok, ha sajátságaik (méretük, kémiai természetük) nem különbözik lényegesen a saját atomok tulajdonságaitól, beépülhetnek a rácsba egy-egy saját atom helyére – ilyenkor *helyettesítő atomról* beszélünk. Gyakran, különösen ha mérete kicsi, az idegen atom rácsközi helyekre ékelődik be, ilyenkor *intersticiális szennyezőről* beszélünk.

28.1.1. Rácslyuk vagy vakancia

A rácslyukak létezéséről közvetlen bizonyítékul szolgálnak a *térion-mikroszkópos* megfigyelések (lásd a 24.1.4. pontot). A 28.2. ábrán látható atomi felbontású térion-mikroszkópos képen fénylő pontok jelzik a kristály atomjait, az atomok közti sötét folt a rácslyuk. A rajzos kiemelés a kép értelmezését segíti.



28.2. ábra

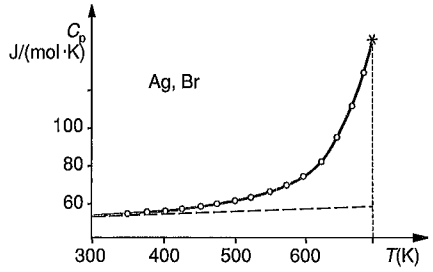
A rácslyukak létezésének közvetett bizonyítékai azok a kísérleti tények, amelyek a rácslyukak segítségével értelmezhetők. Ezek arra mutatnak, hogy a kristályokban normál körülmények között mindig nagyon sok rácslyuk van.

A rácslyukak képződésében döntő jelentősége van a termikus hatásoknak, illetve az anyagot érő sugárzásoknak.

28.1.1.1. A rácslyukak képződése termikus hatásra, egyensúlyi vakanciakoncentráció

Számos kísérleti tény bizonyítja, hogy rácslyukak spontán módon, a hőmozgás következtében keletkeznek a kristályokban. A szilárd anyagok olvadásponthoz közeli viselkedése több olyan sajátos vonást mutat, amely arra utal, hogy a hőmérséklet növekedésekor egyre több rácslyuk keletkezik az anyagban. Erre utaló legfontosabb két kísérleti tapasztalat a következő:

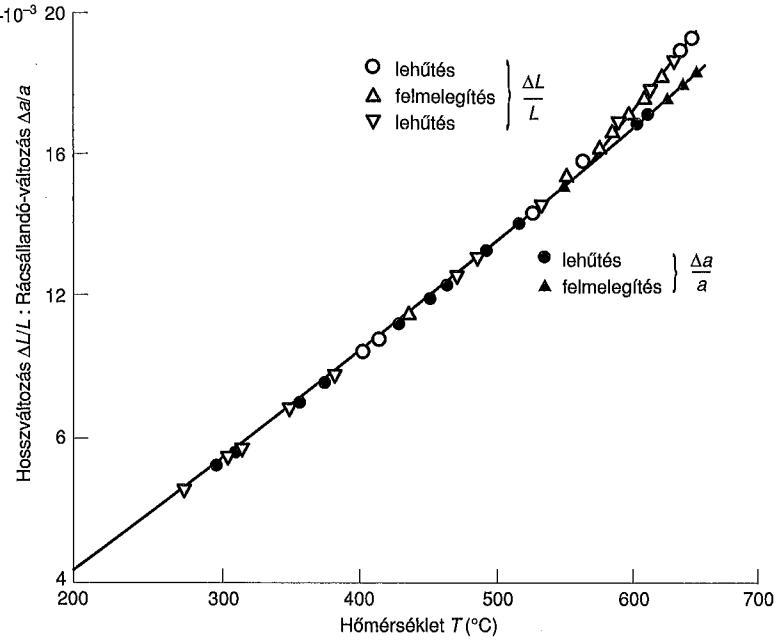
- a kristályos anyagok fajhője az olvadáspont előtt jelentősen nő a hőmérséklettel (28.3. ábra);
- a makroszkopikus hőtágulás nagyobb mértékű, mint amelyet a rácsállandó (röntgendiffrakciós vizsgálatokkal mérhető) növekedése okoz (28.4. ábra).



28.3. ábra

Ezek a jelenségek könnyen értelmezhetők, ha fellépésüket a hőmérséklettel egyre növekvő számú rácslyuknak tulajdonítjuk. A rácslyukak koncentrációjának szükségszerű növekedése a hőmérséklet függvényében számítással is viszonylag egyszerűen igazolható. A levezetés részletezésével nem foglalkozunk, de egy rövid meggondolást érdemes tennünk annak érdekében, hogy belássuk, miért szükséges a termikus egyensúlyhoz vakanciák jelenléte a kristályban.

A statisztikus fizika elemeiből tudjuk azt, hogy egy nagyszámú részecskéből álló rendszer adott makroállapotának kialakulása annál valószínűbb, mennél nagyobb számú mikroállapottal valósítható meg. Tekintsünk most egy kristályt, amely N azonos atomból épül fel! Tegyük fel, hogy az N atom tökéletesen betölti az N rácspontból álló kristályrácsot (tehát a kristályban nincs üres rácspont)! Nyilvánvaló, hogy ez az állapot csak egyetlen mikroállapottal valósítható meg, hiszen pl. két azonos atom felcserélése két adott rácsponton nem eredményez új mikroállapotot. Hozzunk létre gondolatban egy vakanciát, azaz álljon most a kristály $N + 1$ rácspontból! A kristály egyetlen rácslyukat tartalmazó makroállapotát most $N + 1$különböző módon, $N + 1$ mikroállapottal valósíthatjuk meg, hiszen a vakancia tetszés szerint



28.4. ábra

bármelyik rácspont helyén lehet. Egy mólnyi anyagban $6 \cdot 10^{23}$, tehát igen nagyszámú atom van, ezért egy makroszkopikus méretű kristályban a vakanciák jelenléte miatt a lehetséges mikroállapotok száma, így a kristály konfigurációs entrópiája nagyon nagy mértékben megnő. Ez az oka annak, hogy bár minden rácslyuk létrehozása energiabefektetést igényel, és így a kristály belső energiája növekszik, a termikus egyensúlyban mégis kedvező bizonyos számú vakancia jelenléte.

A vakanciaképződés során az anyag állandó hőmérsékletű és nyomású környezetben van. Az ilyen típusú nyílt folyamatokban az egyensúlyi állapot akkor következik be, amikor a $G = U + pV - TS$ szabad entalpiaértéke minimálissá válik (lásd az 5.5. pontot).

Az egyensúlyhoz tartozó vakanciák számát az a határeset jelöli ki, amikor a mikroállapotok számának, s így az entrópiának növekedéséből adódó kedvező hatást a belső energia növekedése már lerontja. Ez a határeset a statisztikus fizika módszereivel egyértelműen meghatározható.

Közelítő becslést mi is végezhetünk az egyensúlyi vakanciák számára vonatkozóan.

Egy vakanciát gondolatban úgy hozhatunk létre, hogy egy atomot a kristály belsejéből a felületére viszünk. Nyilvánvaló, hogy ez a folyamat energiabefektetést igényel. Egy vakancia létrehozásához szükséges E_v energiát *képződési energiának* nevezzük. A vakanciák képződési energiája általában 1–2 eV (0,16...0,32 aJ). Tudjuk azt, hogy a kristály rácspontjaiban levő atomok nincsenek nyugalomban, hanem a hőmozgás következtében az egyensúlyi helyzetük körül rezgőmozgást végeznek. Az ehhez tartozó átlagos energia T hőmérsékleten $3kT$ (k a Boltzmann-állandó). Ez az energia meglehetősen kicsiny, szobahőmérsékleten mindössze kb. 0,08 eV (0,001 28 aJ). Ez azonban csak az átlagos energia, ami nem zárja ki azt, hogy nullától különböző valószínűséggel legyenek olyan atomok, amelyek energiája egy adott időpillanatban ennél lényegesen nagyobb. Vakanciák olyan atomok helyén keletkezhetnek, amelyek energiája nagyobb vagy egyenlő, mint a képződési energia. Az ilyen atomok száma a Boltzmann-statisztika (lásd a 23.5.1 pontot) szerint:

$$n = Ne^{-\frac{E_v}{kT}}. \tag{28.1}$$

Eredményünk jó közelítéssel megadja a vakanciák számát, amely egyezik a kísérleti tapasztalattal is. Ha bevezetjük a $c = \frac{n}{N}$ definícióval a vakanciakoncentrációt, akkor eredményünket a következő alakban is felírhatjuk:

$$c = e^{-\frac{E_v}{kT}}. \tag{28.2}$$

Mivel a hőmérséklet a negatív értékű kitevő nevezőjében van, ezért a vakanciakoncentráció növekvő hőmérséklettel rohamosan nő.

28.1.1.2. A rácslyukak képződése sugárzás hatására, sugárzási károsodás

A nagy energiájú sugárzások hatására a kristályos anyagokban rácshibák képződnek. A sugárzás részecskéi behatolva az anyagba, a kristály atomjaival rugalmatlanul ütközve lefékeződnek. Az ütközés a rácsatomokat kilöki a helyéről. A folyamat során rácslyukak, intersticiós atomok keletkeznek. Ezek a folyamatok alapvetően fontosak pl. az atomreaktorok üzemelése során. A reaktor szerkezeti elemeiben elkerülhetetlenül keletkeznek ilyen kristályhibák. A keletkezett kristályhibák az anyagok fizikai tulajdonságait jelentősen megváltoztathatják – ilyenkor beszélünk *sugárzási károsodásról.* Érdekességként említjük, hogy a sugárzás hatására keletkező rácslyukak több reaktorbalesetet is okoztak, amíg a szakemberek rájöttek a probléma megoldására.

Rácslyukak és atomreaktorok. Egyensúlyi állapotban a kristályban mindig találhatók rácslyukak. Mennyiségük a hőmérséklet függvénye. Egyes különleges esetekben, például erős radioaktív vagy neutronsugárzás hatására a rácslyukak száma a hőmérséklettől függetlenül is nőhet. A sugárzás nagy energiájú részecskéi a rácsatomokkal ütközve kilökik a helyükről azokat, és így rácslyukat hoznak létre. A sugárzás és a rácslyukak kapcsolatának vizsgálatát az angliai Windscale-ben történt baleset indította el 1957-ben.

A reaktor egy jelentéktelennek tűnő üzemzavar következtében túlmelegedett és felrobbant. A baleset okával a kor legnevesebb atomtudósai foglalkoztak. A magyarázatot és a hasonló esetek elkerülésének módját Wigner Jenő adta meg. (A jelenséget azóta Wigner-effektusnak hívják.)

A reaktor működése során erős neutronsugárzás éri a reaktor szerkezeti anyagait. A Windscale-ben működő reaktorban a magreakció sebességét grafitrudakkal szabályozták. A grafitban tömegesen keletkeztek rácslyukak. Megfelelő körülmények között ez még nem jelenti a rácslyukak korlátlan felszaporodását, hiszen a helyükről kiütött atomok miután elvesztették a sugárzástól kapott energiájukat, előbb-utóbb betöltenek egy rácslyukat. Így a lyukak fokozott ütemű képződésével együtt nő a rácslyukak eltűnésének sebessége is. Az angliai baleset oka az volt, hogy a túlzott hűtés miatt a helyükről kiütött atomoknak arra sem maradt energiájuk, hogy egy rácslyukat keressenek maguknak, és ismét beépüljenek a kristályba. A rácslyukak száma tehát rendkívüli módon felszaporodott. A baj a hűtőkörben keletkezett csekély üzemzavarral kezdődött, a reaktor melegedni kezdett, és a hőmérséklet addig nőtt, míg végül bekövetkezett a robbanás. Az történt ugyanis, hogy hűtés csökkenésével az atomi mozgás megélénkült, és a korábban „befagyott" rácslyukfelesleg rohamosan csökkenni kezdett. Minden rácslyuk eltűnésekor energia szabadult fel (pontosan annyi, amennyit a rácslyuk létrehozásánál be kellett fektetni). Az így felszabaduló energia tovább melegítette a grafitot, tovább élénkítette a rácsközi helyzetbe szorult szénatomok mozgását, és ami ennek egyenes következménye, gyorsította a rácslyukak energiafelszabadulást okozó eltűnését. A balesetet az így kialakult lavinaszerű melegedési folyamat okozta.

Wigner Jenő a fenti magyarázat mellett a baleset megelőzésére is tett javaslatot: az üzemszerű működés közben, szabályos időközönként a grafit hőmérsékletét kissé emelni kell. Ez a hőmérsékletemelés lehetővé teszi, hogy a grafit atomjai újrarendeződjenek.

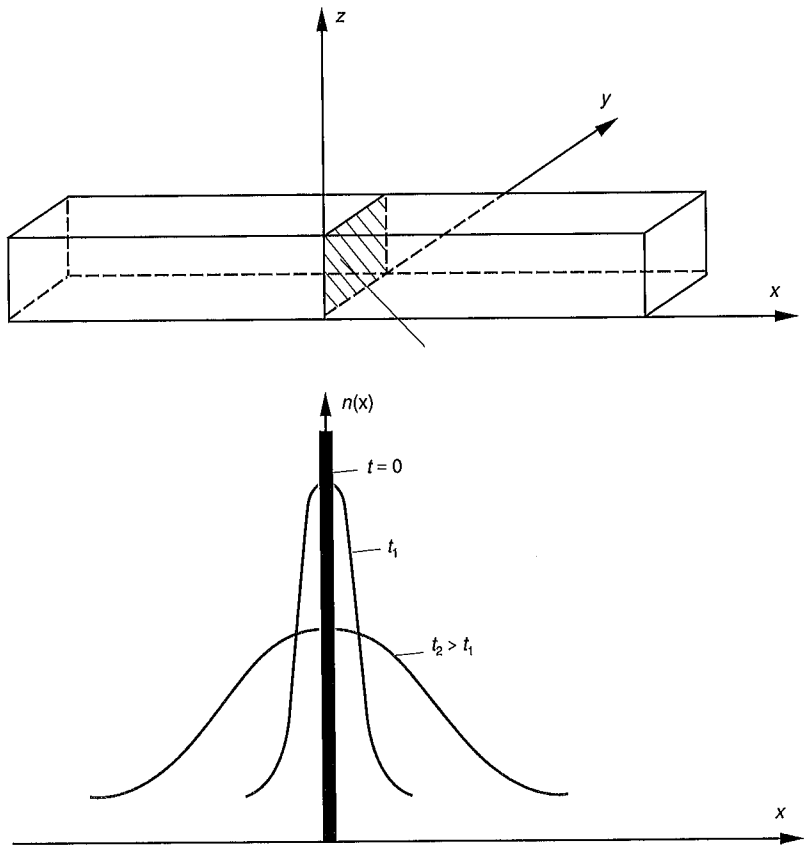
A véletlenek szerencsétlen összejátszása folytán bekövetkező reaktorbalesetek mellett a sugárzás hatására keletkezett rácslyukaknak sokkal prózaibb következménye is van. A rácslyukak sokszor olyan módon tűnnek el a kristályos anyagból, hogy sokadmagukkal összeolvadva az eredetileg tömör anyagban belső üregeket, mikrorepedéseket hoznak létre. Az így porózussá váló anyag fizikai paraméterei megváltoznak. Mivel elsősorban nagy mechanikai terhelésnek kitett anyagokról van szó, a legfontosabb változás a mechanikai szilárdság csökkenése. Ez a szerkezeti változás – az ún. „sugárzási károsodás" – igen lényeges a reaktor biztonságos üzemeltetése szempontjából. A reaktor anyagának sugárzási károsodását folyamatosan vizsgálják, mégpedig szellemes módon. Már az építés során elhelyeznek a sugárzásnak kitett ún. aktív zónába olyan, üzemelés közben is kivehető mintákat, amelyek anyaga azonos a reaktorköpeny anyagával. Ezekből a mintákból időről időre kivesznek egyet, és gondosan megvizsgálják. A kapott eredményekből következtetni lehet a hasonló sugárzásnak kitett reaktorelemek károsodására is.

28.1.2. A rácslyukak szerepe a kristályos anyagok tulajdonságaiban

A vakanciáknak lényeges szerepük van a kristályos anyagok tulajdonságaiban. Ezek közül vannak olyanok, amelyek minden anyag esetén fontosak, ilyen például a diffúzió, de vannak olyanok is, amelyek csak egy-egy kristálytípus esetén érdekesek. A következőkben ezekről adunk rövid áttekintést.

28.1.2.1. Diffúzió kristályokban

A kísérleti tapasztalatok szerint a kristályos anyagban sincsenek szigorúan helyhez kötve az atomok, vándorolni képesek a kristályban. A jelenség jól kimutatható radioaktív izotópok segítségével. Az eljárás a következő: A vizsgálandó kristály (egyszerűbb esetben egykristály) egyik végére a saját atomok egy radioaktív izotópjából vékony réteget képeznek. A radioaktív atomok minden szempontból hasonlóan viselkednek a kristályban, mint az eredeti rácsatomok. A kristályban történő mozgásuk azonban radioaktív sugárzásméréssel egyszerűen nyomon követhető.



28.5. ábra

A kísérletek során a mintákat különböző hőmérsékleteken különböző időtartamokig hőkezelték. A hőkezelés hatására a radioaktív ólomatomok eredeti helyükről bevándoroltak a rúd belsejébe. A jelenséget egyszerűen ki lehetett mutatni úgy, hogy a hőkezelés végeztével a rudat felszeletelték, és a sorrendben megszámozott szeletek radioaktív sugárzását megmérték. Minél több radioaktív ólomatom jutott el a vizsgált szeletig, a műszer annál erősebb sugárzást érzékelt.

A kísérleti eredményeket a 28.5. ábra mutatja. Kezdetben a radioaktív atomok éles eloszlást mutatnak. A hőkezelés hatására az eloszlás az idő múlásával laposodik. Az atomok vándorlása először gyors, majd egyre lassul, de a diffúzió mindaddig kimutatható, amíg a radioaktív részecskék eloszlása az egész kristályban teljesen egyenletessé válik. A diffúzió kísérleti vizsgálata századunk első felében indult, kiemelkedő magyar kutatója volt Gróh Gyula, a pesti tudományegyetem kémiaprofesszora.

A kristályokban az atomok számottevő helyváltoztató mozgása, a *diffúzió* a rácslyukak segítségével valósul meg. Azok az atomok ugyanis, amelyek egy rácslyuk közvetlen szomszédságában helyezkednek el a kristályban, már viszonylag csekély többletenergia segítségével kiszakadhatnak eredeti helyükről, és a szomszédos üres helyre ugorhatnak. Természetesen ilyenkor a vakancia is „elmozdul", hiszen az elmozduló atom korábbi helyére kerül. Röviden azt mondhatjuk, hogy szilárdtestekben a diffúzió (az atomok mozgása a kristályrácsban) a vakanciák mozgásával megy végbe. Az atomok helyváltoztató mozgása erősen függ a hőmérséklettől. Az eddigiek alapján ezt a hőmérsékletfüggést könnyen, meghatározhatjuk. Világos ugyanis, hogy az időegységenkénti atomi ugrások száma arányos egyrészt a kristályban levő rácslyukak számával (ennyi helyre ugorhat át atom), másrészt arányos annak a valószínűségével, hogy a vakanciák melletti atomok rendelkeznek-e akkora energiával, amekkora a vakancia helyére történő ugráshoz szükséges. Ez utóbbi valószínűség arányos $e^{-\frac{E_M}{kT}}$-vel, ahol E_M az átlépéshez szükséges energia (a vakancia mozgási aktiválási energiája). Az egyensúlyi vakanciakoncentrációra kapott összefüggés felhasználásával, a független események valószínűségét összeszorozva kifejezhetjük az időegység alatti atomi helyváltoztató ugrások valószínűségi számát:

$$N \approx e^{-\frac{E_v}{kT}} \cdot e^{-\frac{E_M}{kT}}.$$

Termodinamikai egyensúlyban levő kristály esetén az atomi mozgásnak nincs határozott iránya, a vakanciák „bolyonganak" a kristályban. Azonban ha a kristály nem homogén, pl. az idegen atomok koncentrációja nem teljesen kiegyenlített, vagy a kristályban valamilyen külső hatás miatt lokálisan felszaporodnak a kristályhibák, a vakanciák céltalan bolyongása határozott irányú anyagáramlás hor-

dozójává válik. A meginduló diffúziós anyagáramlás csökkenti az inhomogenitást a kristályban, és mindaddig tart, amíg a termodinamikai egyensúly be nem áll.

A diffúziós folyamatok a félvezetőeszközök, integrált áramkörök gyártásában és a fémkohászatban kiemelkedően fontosak. Megfelelő minőségű termékek előállításához a diffúziós folyamatok részleteinek ismeretére is szükség van.

Megjegyezzük még, hogy a diffúziós folyamat részletes leírására a kristályok esetén is érvényes a gázdiffúzióra levezetett *Fick-törvény* (lásd a 22.2.2. pontot).

28.1.3. Ponthibák sókristályokban

Bármely típusú kristályban csak olyan ponthibák keletkezhetnek, amelyeknél a kristály elektromos egyensúlya nem bomlik meg. Az ionos kristályokban ezért nem keletkezhet csak egy negatív, vagy csak egy pozitív ion helyén vakancia, mert ez az elektromos egyensúlyt megbontaná. Az ionrácsban egyidejűleg mindig két vakancia keletkezik, egyik egy negatív, a másik egy pozitív ion helyén. Az ilyen vakanciapárost *Schottky-hibának* nevezzük.

A ponthibák az ionkristályok magas hőmérsékleten jelentkező elektromos vezetésében és sok esetben a kristályok színében játszanak meghatározó szerepet.

Magas-hőmérsékleti elektromos vezetés ionkristályokban. Az ionkristályok közönséges hőmérsékleteken jó szigetelők. Ennek oka az, hogy szobahőmérsékleten nincsenek a kristályban mozgásra képes töltések, az ionok a rácsban helyhez kötöttek.

Magas hőmérsékleteken, ahol a nagyszámú rácslyuk lehetővé teszi az ionok számottevő diffúzióját, a kristály vezeti az áramot. Az elektromos térben a pozitív ionok a negatív, a negatív ionok a pozitív sarok felé diffundálnak. A vezetőképesség a diffúziósebesség hőmérsékletfüggésének megfelelően exponenciálisan nő a hőmérséklettel.

Színcentrumok alkáli-halogenid kristályokban. Az ionkristályok többsége színes. A kristály színét adhatják a magukban is színes ionok (például a rézgálickristály a hidratált rézionoktól kapja kék színét, vagy a kálium-bikromát kristály, amely a bikromátionok narancssárga színét mutatja), de gyakori az is, hogy a kristályt felépítő ionok nem színesek, a kristály mégis az. Ilyenkor az sem ritka, hogy a különböző lelőhelyekről származó, de ugyanolyan kémiai összetételű és rácsszerkezetű kristályok színe különböző. Közismert példát adnak erre a sokszínűségre a szilícium-dioxid „kvarc" kristálymódosulatai.

A tiszta kvarc vízszerűen átlátszó anyag, amelyet „hegyikristálynak" szoktak nevezni. Hasonlóan szilícium-dioxid, és rácsszerkezetében is azonos vele a szürkésbarna füstkvarc, vagy a féldrágakövek közé sorolt lila színű ametiszt és a pirosas jácintkvarc is. A kvarc esetén tehát a szín a kristály másodlagos tulajdonsága, döntően a

kristályosodás helyén lévő szennyezések határozzák meg. A szennyezőatomok általában ponthibák formájában épülnek be a kristályba, és megváltoztatják annak fényelnyelési spektrumát. A színt okozó ponthibákat *színcentrumoknak* nevezzük.

Érdekes jelenség, hogy a színtelen, tiszta alkáli-halogenid kristályok rácshibákat létrehozva utólagosan is megszínezhetők. Az optikailag átlátszó ionkristályok, pl. KCl, KBr, NaCl tiszta állapotban teljesen színtelenek. Színesekké válnak azonban, ha alkálifém gőzében hevítik, vagy ionizáló, pl. röntgensugárzásnak teszik ki őket. A jelenség kísérleti vizsgálatával Mollwo foglalkozott részletesen. Megállapította, hogy ugyanazon beavatkozással a különböző alkálihalogenid kristályok eltérő színűek lesznek. A szín oka az, hogy a kristály a ráeső fehér fényből bizonyos frekvenciákat elnyel. Mollwo megállapította, hogy az elnyelt fény frekvenciája fordítottan arányos a kristály rácsállandójával. Az ilyen kristályok az elnyelt fény komplementer színét mutatják. A tiszta alkáli-halogenid kristályokban utólagos kezeléssel létrehozott színcentrumok neve (a német *„Farbe"= szín* szóból származóan) *F-centrum*.

Az F-centrumok a negatív ionok helyén képződő vakanciákból alakulnak ki. A negatív ionok helyén képződött rácslyuk negatív töltéshiányt, azaz kompenzálatlan, lokális pozitív töltést jelent. Ha a kristályba valahonnan szabad elektronok kerülnek, azok beépülnek ezekre a helyekre. A negatív ion helyén lévő rácslyukba befogott elektron sajátos kvantummechanikai rendszert alkot, amely a „dobozba zárt elektron" elemi kvantummechanikai modelljéhez hasonlóan tárgyalható.

A jelenséget olyan kristályhibák létrejöttével értelmezhetjük, amelyek jelenléte a kristály elektron-sávszerkezetében okoz változást. A hiba környezetében a kristályban olyan új elektronállapotok alakulnak ki, amelyek megengedik, hogy a kristálybeli elektronok a látható spektrum valamely színét elnyelve gerjesztődjenek.

Ha alkáli-halogenid kristályokat alkálifémek gőzében hevítenek, majd sötétben tartva szobahőmérsékletre hűtik őket, a kristályban F-centrumok keletkeznek. A korábban színtelen NaCl kristály F-centrumok hatására sárgásbarnára, a KCl kékre színeződik.

Az F-centrumok kialakulása a következő folyamattal történik. A magas hőmérsékletű hevítéskor a fémgőzből alkáliatomok lépnek be a kristályba, ahol egy alkáliion helyére kerülve elektront adnak le a kristálynak. Mivel a kristályban a negatív ionok hiányából adódó ún. negatívion-vakanciák negatív töltéshiányt, azaz pozitív töltést képviselnek, befogadják az alkáliatom által leadott elektront. Az elektron azonban nincs erősen kötve a vakanciákhoz. Az elektron és a pozitív töltést képviselő vakancia kölcsönhatását a hidrogénatom elektronfelhő–proton kölcsönhatásához hasonlíthatjuk. A hidrogén 1s alapállapotához hasonlítható elektronállapot fényabszorpcióval a 2p hidrogénállapotnak megfelelő energiaszintre gerjeszthető. A kristály tehát a látható színkép egyes hullámhosszait elnyeli, és így színesnek látszik.

Hasonló elszíneződést tapasztalhatunk, ha az eredetileg színtelen alkáli-halogenid kristályt például röntgensugárzásnak tesszük ki.

28.1.4. Ponthibák hatása a fémek (ötvözetek) tulajdonságaira

Fémek esetén a rácslyukak mellett a kristályba beépülő idegen atomoknak van döntő jelentőségük. Ha az idegen atomokat akarattal, a tiszta fém eredeti tulajdonságainak megváltoztatása céljából juttatják az anyagba, ötvözésről beszélünk. A fémeket a gyakorlatban többnyire ötvözetek formájában alkalmazzák. Az ötvöző atomok mérete és kémiai tulajdonságai általában eltérnek az alapfém atomjaitól, ezért nem tudnak zavartalanul beépülni a kristályrácsba. Az ötvözőket tartalmazó fém tulajdonságai így lényegesen eltérhetnek az alapfém tulajdonságaitól. A gyakorlati felhasználás szempontjából a fémek mechanikai és elektromos tulajdonságai a leglényegesebbek.

A mechanikai tulajdonságok változásának oka az, hogy a kristályba beépülő ötvöző atomok környezetében a rács deformálódik, a kristályban rugalmas feszültségek ébrednek. Az ilyen belső feszültségekkel teli anyag keményebb, nehezebben deformálható (lásd még a 28.2.3. pontot).

A ponthibák, elsősorban a szennyező- és az ötvözőatomok jelentősen hozzájárulnak a fémek elektromos ellenállásához. A kristály periodikus potenciálterében mozgó elektronhullámok ugyanis szóródnak (állapotuk megváltozik) a rács szabályos periodicitását megzavaró hibákon.

Kis koncentrációban az idegen atomok rendszerint a kristályban egyenletesen szétszóródva, egymástól függetlenül helyezkednek el. Ilyenkor „szilárd oldat" állapotú ötvözetről beszélünk. Az elnevezés arra utal, hogy termodinamikai szempontból a rendszer a folyadékoldatokkal mutat hasonlóságot. Az „oldott" ötvözők vagy a kristály rácspontjaiban helyettesítik a saját atomokat, vagy a kristályrács intersticiális helyeit foglalják el. Ez utóbbi általában akkor következik be, ha az ötvözőatomok mérete kicsi. Jó példa az ilyen ötvözetekre az acél, ahol a vasatomok illeszkedési hézagaiba ékelődnek be a szénatomok.

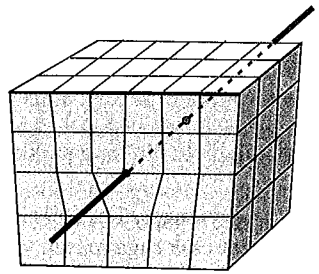
Az ötvözők koncentrációját növelve az „oldott" állapot megszűnik, az idegen atomok csoportosulnak, saját kristályrácsba rendeződnek. Az anyakristályba beágyazódott ilyen szennyezőkristályt fáziskiválásnak nevezzük. A fáziskiválás a kristály jellegzetes térfogati hibája.

28.1.5. Ponthibák atomrácsban

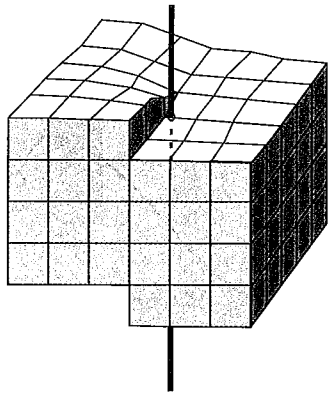
Az atomrácsú kristályokban a ponthibák különösen az elektromos vezetési tulajdonságokat befolyásolják (lásd a 25.5.2. pontot). Ezen hatások pontos ismerete különösen a félvezetők gyártásában fontos.

28.2. Vonalhiba a kristályban; diszlokáció

A kristályok vonalszerű hibái a *diszlokációk*. A diszlokációk két alaptípusát a 28.6. és 28.7. ábra szemlélteti.



28.6. ábra



28.7. ábra

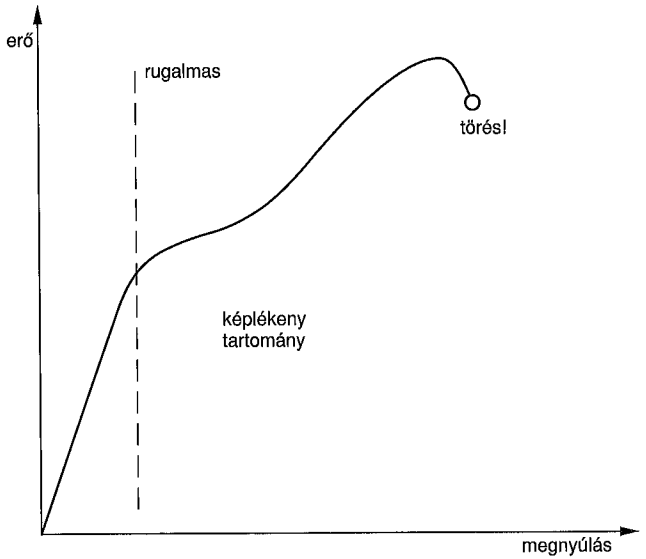
A 28.6. ábra egy egyszerű köbös kristály keresztmetszetét mutatja. A kristály felső felében eggyel több rácssík található, mint az alsó térfélen. A többletsíknak nincs folytatása az alsó részben, a sík éle (utolsó sora) mentén a kristály hibás. A hibavonal, az ún. *éldiszlokáció* a rajz síkjára merőlegesen húzódik a kristályban. A 28.7. ábra a kristály egy részének elcsúszásával létrejövő vonalhibát szemlélteti, a hibavonal most függőleges irányban húzódik végig a kristályon. A hibás vonalat az atomok csavarvonal mentén elhelyezkedve veszik körül, az ilyen hibavonalat *csavardiszlokációnak* nevezik.

A diszlokációk közvetlen megfigyelésére alkalmas kísérleti eszköz az elektronmikroszkóp. A hibavonalak mentén a kristály szerkezete torzul, és ez jellegzetes kontrasztot ad az elektronmikroszkópos képen.

A diszlokációknak döntő szerepük van a kristályok maradandó deformációjában. A kristályos anyagok közül elsősorban a fémek alakíthatósága fontos. Képlékenységük számos érdekes jelensége nem értelmezhető a tökéletes kristályszerkezet alapján, a megoldást a diszlokációk elméletének segítségével kaphatjuk meg.

28.2.1. A kristályok képlékeny alakváltozása

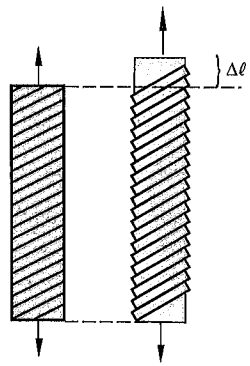
A legegyszerűbb deformáció az egytengelyű nyúlás. Ha a húzóerőt fokozatosan növeljük, akkor a próbatest először csak rugalmasan változtatja alakját, majd egy kritikus deformáló feszültséget elérve az alakváltozás maradóvá válik. Ez a képlékeny alakváltozás kezdete. Ha a mintát tovább akarjuk deformálni, ahhoz egyre növekvő feszültség szükséges. A deformációnak ebben a szakaszában az anyag egyre nagyobb ellenállást mutat a további alakítással szemben – alakítással keményedik. Bizonyos mértékű alakítás után az anyag eltörik.



28.8. ábra

A 28.8. ábra a fenti deformációs szakaszoknak megfelelő sematikus húzóerő–nyúlás diagramot mutat. A valóságban a különböző anyagok a terhelés hatására nem pontosan ennek a diagramnak megfelelően nyúlnak. A szerkezeti sajátságoktól függően az egyes nyúlási tartományok aránya erősen megváltozhat. Egyes ún. *rideg anyagok* szinte képlékeny alakváltozás nélkül már a rugalmas tartomány végén eltörnek, míg mások szinte alig növekvő húzófeszültség hatására is hosszan nyújthatók.

A kristályok képlékeny tulajdonságainak és a kristályszerkezetnek a kapcsolatát olyan mintákon célszerű tanulmányozni, amelyek nem polikristályos szerkezetűek, hanem a próbatest egésze egyetlen kristály. Ilyen egykristályokon végzett kísérletek megmutatták, hogy a maradandó nyújtás során a kristály egyes „rétegei" csúsznak el egymáshoz képest, hasonlóan egy kártyacsomag lapjaihoz. Egykristály-minta réteges elcsúszás révén bekövetkező megnyúlását szemlélteti a 28.9. ábra.

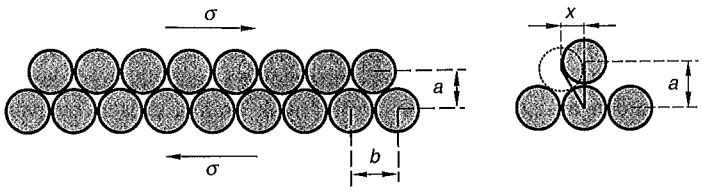


28.9. ábra

Az elcsúszásokat a próbadarab eredetileg sima felszínén megjelenő lépcsők egyértelműen jelzik. A tapasztalatok szerint könnyen következik be elcsúszás a fémkristály olyan szoros illeszkedésű rétegei mentén, amelyek közel párhuzamosan feküdtek a csúszási iránnyal. A külső feszültség irányától jelentősen eltérő irányú kristálysíkok mentén az elcsúszás csak jóval nagyobb feszültség esetén indul meg. A polikristályos minták nyújtásakor az egyes kristályszemcsékben mikroszkóppal szintén megfigyelhetők a csúszási nyomok.

A kísérleti tapasztalatok alapján a makroszkopikus deformáció egy elemi lépéseként a kristály két térfelének egy rácssík menti, rácsállandónyi elcsúszását kell tekintenünk. Az elcsúszás akkor következik be, ha a deformáló feszültségnek a síkba eső komponense a $(10^{-4}–10^{-5})G$ értéket meghaladja, ahol G a kristály nyírási rugalmassági modulusa.

Vizsgáljuk meg, hogyan képzelhető el a kristály rétegeinek elcsúszása tökéletes kristály esetén!



28.10. ábra

A 28.10. ábra a két egymás feletti szoros illeszkedésű atomsík metszetét mutatja. Ha a két réteget egymáshoz képest kissé elmozdítjuk, akkor a felső réteg atomjai *egyszerre mozogva* kiemelődnek az egyensúlyi helyzetnek megfelelő mélyedésekből. A rétegek elcsúsztatásához eleinte egyre nagyobb erőt kell befektetni, majd ez az erő csökken. Ahogy a rétegek relatív elmozdulása eléri az atomtávolság (b) felét, az erő zérussá válik, a további egyenletes sebességű csúszás biztosításához már ellentétes értelmű erőre van szükség. Ha a két sík egymáshoz képest egy atomtávolsággal, azaz b-vel mozdul el, akkor új egyensúlyi helyzet áll elő. A maradandó alakváltozás elemi lépésének a két atomsík egy atomtávolságnyi elcsúszását tekintjük. Egy ilyen elcsúszás akkor következik be, ha a külső deformáló erő nagyobb vagy egyenlő a két sík $x \geq \frac{b}{2}$ elmozdításához szükséges maximális erőnél.

Az elmondott modell alapján megbecsülhető a képlékeny deformáció megindításához szükséges kritikus nyírási feszültség.

Eddigi meggondolásunkból következik, hogy az atomsíkok között működő erő az elmozdulás függvényében b szerint periodikus. Első közelítésben a periodicitást szinuszosnak tételezhetjük fel. Ezért az atomok közti erőhatásból származó visszatérítő feszültség a következő alakban vehető fel:

$$\tau = B \sin\left(\frac{2\pi}{b} \cdot x\right). \tag{28.3}$$

B értékét abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy kicsiny x elmozdulások esetén a szinuszfüggvényt argumentumával lehet helyettesíteni. Ilyen kis elmozdulások esetén az alakváltozás még rugalmas, a fenti összefüggés tehát a Hooke-törvényt kell hogy visszaadja:

$$\tau = B \frac{2\pi}{b} \cdot x = G\gamma. \tag{28.4}$$

Az összefüggésben szereplő τ a rugalmas nyírási modulus, γ pedig a nyírás szöge. Kis γ értékek esetén $\gamma \approx \operatorname{tg}\gamma = x/a$. Ebből $B = Gb/2\pi a$, tehát tetszőleges x-re

$$\tau = \frac{Gb}{2\pi a} \sin\left(\frac{2\pi}{b} x\right). \tag{28.5}$$

Ennek maximuma felel meg modellünk szerint a tökéletes kristály kritikus csúsztató (nyírási) feszültségének, tehát $\tau_{krit} \approx \frac{G}{2\pi}$, mivel $a \approx b$.

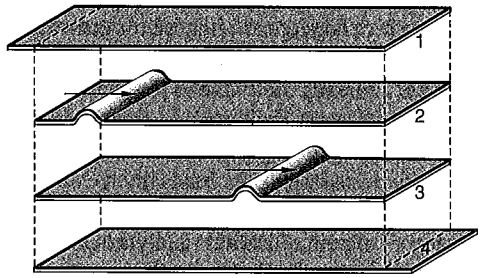
A kristályrétegek egyidejű, egymáson történő elcsúszását számításba vevő modell nagyságrendekkel nagyobb eredményt ad a folyáshatárra, mint ami a mérésekből adódik. (A számított érték $0{,}1G$, a mért érték $10^{-4}G$–$10^{-5}G$.) Ilyen jelentős eltérés nem magyarázható a modellszámításokban alkalmazott közelítésekkel. Az ellentmondás jelzi, hogy a képlékeny deformáció mikromechanizmusa nem lehet olyan, mint amit a modellben feltételeztünk.

Ezt csak erősíti az is, hogy a modell az alakítási keményedésre sem ad magyarázatot. A két félsíknak minden egyes b-vel való elcsúszása után az új helyzet az eredetivel megegyezik, a kristály tökéletes atomi rendje megmarad. Ezért a növekvő alakváltozáskor nem érthető, miért kell egyre nagyobb deformáló erőket alkalmazni.

Az említett ellentmondások abból származnak, hogy a valódi kristályok nem tökéletesek, hanem tartalmaznak olyan rendellenességeket (kristályhibákat), amelyek a képlékeny alakváltozás mechanizmusában alapvető szerepet játszanak.

A kristályhibák szerepét a képlékeny deformációban *Orován Egon* és *Polányi Mihály* magyar, valamint *G. I. Taylor* angol kutatók ismerték fel 1934-ben.

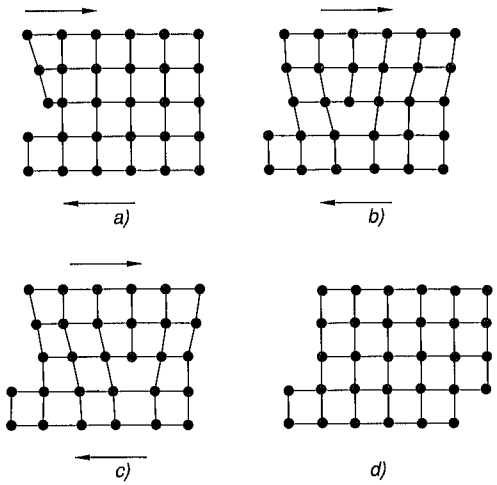
Gondolatmenetük megértéséhez nézzünk egy egyszerű példát! Tegyük fel, hogy azt a feladatot kapjuk, hogy mindössze 5 cm-rel húzzunk arrébb egy igen hosszú és nehéz futószőnyeget. A feladat megoldásának egyik módja az, hogy a szőnyeg végét megfogva nagy erő befektetésével az egész szőnyeget egyszerre húzzuk el 5 cm-rel (ez a megoldás analóg a fent elvégzett számításunkkal). Lehetséges azonban egy másik megoldás is. Ha eltoljuk a szőnyeg egyik végét 5 cm-rel, akkor a szőnyegen egy gyűrődés keletkezik (28.11. ábra). Ezt a gyűrődést kell csak végigtolnunk a szőnyeg másik végéig, és így az első, „direkt" megoldáshoz képest minimális erőbefektetéssel sikerül az egész szőnyeget elmozdítanunk a kívánt mértékben.



28.11. ábra

Orován, Polányi és Taylor elméletének alapját az képezi, hogy a csúszás lokális folyamat; a képlékeny alakváltozás bizonyos elcsúszott tartományok fokozatos kiterjedése révén, nem pedig a csúszási síkok egyidejű, homogén elcsúszásával megy végbe. Ebből pedig nyilvánvaló, hogy létezik a csúszósíkban olyan határvonal, amely a már elcsúsztatott és a még el nem csúszott tartományokat választja el. Ezek a határok a kristályban hibavonalak, diszlokációk. A kristályrétegek elcsúszása a diszlokációk mozgásán keresztül történik (az elcsúszott tartományok, a határvonal kiterjedése a határvonal elmozdulásával jár).

Vizsgáljuk meg a 28.12. ábra fázisrajzai alapján, hogy a csúszásnak ez a mechanizmusa milyen szerkezeti változásokat jelent a kristályban!



28.12. ábra

A deformáló erő hatására a kristály legszélső rácspontjait elfoglaló atomok az erőhatás következtében a rács következő rétegére torlódnak, és azt beljebb taszítva az eredeti helyükhöz képest egy rácsállandónyival elmozdulva újra egyensúlyi helyzetbe kerülnek. Ezzel azonban a következő réteg atomjai jutnak kedvezőtlen „rácsközi" helyzetbe, és azok ismét csak további szomszédok kiszorításával tudnak közelítőleg rácspontba kerülni. Az ily módon megkezdett folyamatban „sűrűsödés" vonul végig a csúsztatófeszültség hatására az elmozduló kristályfélen. A „sűrűsödést" okozó, rácsközi helyzetbe ékelődött atomsík és a csúszási sík metszésvonala (az elcsúszott és el nem csúszott kristálytartományok határa a csúszási síkban) a diszlokáció. A diszlokációvonal mentén az egyes atomok körüli szomszédok elhelyezkedése jelentősen eltér az egyszerű köbös elrendezéstől. Ha a diszlokáció végigmozog a csúszósíkon (a kristály egyik oldalától a másikig), akkor a

kristályon egy atomtávolságnyi maradandó alakváltozás lép fel. A képlékeny alakváltozást tehát jellegzetes hibavonalak – diszlokációk – mozgásával értelmezhetjük. Az elektronmikroszkópos vizsgálatok egyértelműen igazolták a diszlokációk szerepét a képlékeny deformáció során.

28.2.2. A diszlokációk tulajdonságai

A diszlokációvonal környezetében levő atomok többé-kevésbé kimozdulnak egyensúlyi helyzetükből. A kristályrács így rugalmasan deformálódik. A diszlokáció létrehozásakor a hibavonal torzult környezetében rugalmas energia halmozódik fel. A torzult kristályrács rugalmas energiáját a diszlokáció *sajátenergiájának* nevezzük. A diszlokációk sajátenergiája a klasszikus rugalmasságtan módszereivel határozható meg. A diszlokáció viszonylag hosszú távon érezhető feszültségterén keresztül kölcsönhatásba léphet a kristályban fellépő minden más rugalmas feszültséggel. A kristályokban már a kristályosodás során kialakulnak diszlokációk. A kristály képlékeny deformációja a külső deformálóerő hatására bekövetkező diszlokációmozgással történik. A diszlokáció elmozdulása a külső erő által a kristályban keltett rugalmas feszültségtér és a diszlokáció saját feszültségtere közti kölcsönhatás eredménye. Ezt a kölcsönhatást úgy kell felfognunk, hogy a kristály egyes részein a külső erő és a diszlokáció egymásra rakódó hatása lokálisan megváltoztathatja az atomok elrendeződését, s ezzel természetesen az adott helyen ébredő feszültséget is.

28.2.3. A képlékeny deformáció diszlokációs mechanizmusa és az alakítási keményedés

A képlékeny deformációt megindító külső feszültség az anyagban már meglevő diszlokációkra hat, és mozgásba hozza azokat. Igen gyakran előfordul, hogy a csúszási síkban mozgó diszlokáció egy-egy darabja áthatolhatatlan akadályba ütközik és megakad. Ilyen akadályok lehetnek pl. idegen (ötvöző-) atomokból kialakult, kis térfogatú ún. kiválások, amelyek tulajdonságai jelentősen eltérhetnek az alapanyagétól. Különösen érdekes azonban, hogy épp az ily módon megakadt diszlokáció egy sajátos mechanizmusú forrásként működve újabb diszlokációk sokaságát termeli.

Amint azt a 28.2.1. pontban már említettük, a fémek képlékeny alakítása eleinte könnyen, viszonylag kis feszültségek hatására megindul, de a deformáció fokozódásával egyre nagyobb és nagyobb erő befektetésére van szükség a további alakításhoz. Ezt a jelenséget nevezzük *alakítási keményedésnek.*

Az alakítási keményedés magyarázata az, hogy rugalmas feszültségterükön keresztül a diszlokációk egymással is kölcsönhatnak. Az alakítás folyamán a diszlokációforrások működésének következményeként a kristály diszlokációtartalma egyre nő. A diszlokációk mozgását azonban nemcsak a deformáló erő által keltett feszültség, hanem a többi diszlokáció által kialakított feszültségtér is befolyásolja. Amíg a külső deformáló feszültség a diszlokációt mozgatni igyekszik, a kristályban levő többi diszlokáció feszültségtere a mozgást akadályozza. A deformáció előrehaladtával ezért egyre nagyobb külső erőre van szükség ahhoz, hogy közben egyre szaporodó többi diszlokáció feszültségtere ellenében a mozgást továbbra is fenntartsuk, azaz hogy a képlékeny alakítást tovább folytassuk.

28.2.4. A diszlokációk hatása a kristály termikus egyensúlyára

A ponthibák (vakancia, intersticiális atom) tárgyalása során kitűnt, hogy a termikus egyensúly megköveteli bizonyos, a hőmérséklettől függő számú ponthiba létezését.

A diszlokációk termikus stabilitásának vizsgálatához számba kell vennünk, hogy milyen hatással van egy diszlokáció a kristály egyensúlyára, a G szabad entalpia értékére. A diszlokáció hatására is változik a kristály belső energiája és az entrópiája. A rugalmas energia révén a diszlokáció a kristály belső energiáját jelentősen növeli, az entrópiacsökkenés azonban nem olyan jelentős, hogy ezt kompenzálná (mint a ponthibák esetében). Így a diszlokációk termodinamikailag nem stabil hibák. A kristály melegítésekor diszlokációk nem keletkeznek termikus hatásra (mint a ponthibák), hanem eltűnnek a kristályból, és így csökkentik a szabad entalpiát. A diszlokációknak ez utóbbi sajátságát használják ki évszázadok óta a fémművesek, amikor a hidegen alakított, felkeményedett fémeket utólagos hőkezeléssel kilágyítják, vagy az alakítási keményedés hatását azáltal kerülik el, hogy a fémeket melegen, izzó állapotban alakítják. Mindkét esetben az történik, hogy magas hőmérsékleten a kristály termikus stabilitását csökkentő diszlokációk jelentős része eltűnik az anyagból.

28.3. Felületi hibák a kristályban

A kristályok tulajdonságainak általános leírása során (lásd a 24. fejezetet) már említettük, hogy a kristályos szerkezetű anyagok többsége, így pl. a kőzetek, a fémek sok egymással szorosan összenőtt kristályból állnak. Az ilyen ún. *polikristályos* szerkezetben az egyes kristályszemcséket határfelületek választják el, illetve

kötik össze. A *szemcsehatár-felületek* jellegzetes felületi hibái a kristálynak. A szemcsehatárok mentén elhelyezkedő atomok gyengébben kötődnek a szomszédaikhoz, ezért viszonylag könnyen, már kis energiabefektetéssel elhagyják helyüket. A határsáv lazább szerkezete miatt itt a diffúzió *(szemcsehatár-diffúzió)* sokkal intenzívebb, mint az egyes krisztallitokban. A szemcsehatár gyengébben kötődő – magasabb energiaszinten levő – atomjai kémiai reakcióba is sokkal könnyebben lépnek, mint az egyes szemcsék belsejében helyet foglaló társaik. Ez a magyarázata a fémtárgyak igen sok technikai problémát jelentő *szemcsehatár menti korróziójának*. A szemcsehatárok jelenléte az anyag mechanikai tulajdonságait is erősen befolyásolja. A képlékeny deformáció során a krisztallitokban mozgó diszlokációk a szemcsehatárokon nem tudnak keresztülhaladni, és így a határon feltorlódnak, a feltorlódó diszlokációk feszültségtere gátolja a további diszlokációmozgást, ezért a polikristályos anyagokban fokozott mértékű az alakítási keményedés.

A szemcsehatárok mint nagy energiájú belső határfelületek, termodinamikailag instabil hibák. A polikristályos fémek melegítésekor a szemcsehatárok relatív mennyisége az anyagban fokozatosan csökken, vagyis a szerkezet átlagos szemcsemérete nő. A szemcsehatárok fentebb említett tulajdonságait figyelembe véve érthető, hogy hőkezelésekkel az anyag tulajdonságai jelentősen megváltozhatnak.

A fémek kristályszerkezetének tárgyalásakor láttuk, hogy a szoros térkitöltésű atomi elrendezést szoros illeszkedésű síkok kétféle egymásra rétegezésével lehet megvalósítani. Könnyen elképzelhető, hogy adott rétegezési sorrend (pl. AB AB...) esetén egy oda nem illő réteg is bekerül. Ilyenkor a kristályban egy speciális felületi, ún. *rétegződési hiba* keletkezik.

28.4. A törés

A törésnek két jellegzetes típusát különböztetjük meg. *Képlékeny* vagy ún. *szívós törésről* beszélünk, ha az anyag a törés helyén először jelentős képlékeny alakváltozást szenved, és csak ezután szakad el. *Rideg törésről* beszélünk, ha az anyag gyakorlatilag képlékeny deformáció nélkül, a rugalmas alakváltozási szakasz végén hirtelen törik. A kétféle esetben a töretfelület is jellegzetesen különbözik.

Polikristályos anyagok rideg törése általában a szemcsehatárok mentén következik be, ilyenkor a töretfelületen felismerhetőek a szemcsék. Üvegszerű anyagok rideg töréskor „kagylós" felülettel törnek. Szívós törés esetén a töretfelületen jól felismerhetők az erős képlékeny deformáció nyomai, a felszínt kráterek és kiemelkedések mintázzák.

28.4.1. A rideg törés

A rideg töréshez szükséges húzófeszültség, a σ_0 szakítószilárdság elméleti becslésére sokféle próbálkozás történt. A képlékeny alakváltozás diszlokációs elméletét kidolgozó Polányi például feltételezte, hogy rideg töréskor az anyag egész keresztmetszetében egyszerre válnak el egymástól az érintkező atomok. A törés akkor következik be, ha a szakadási felület két oldalán lévő atomokat egy rácsállandónyira távolítjuk el egymástól. Az ehhez szükséges munka értéke A keresztmetszetű, σ_0 szakítószilárdságú és b rácsállandójú próbatest esetén

$$W = Ab\sigma_0.$$

E munkavégzés a keletkezett új töretfelület ($2A$) felületi energiájának fedezésére fordítódik. A felületi feszültség (fajlagos felületi energia) α értékét ismerve tehát

$$Ab\sigma_0 = 2A\alpha. \tag{28.6}$$

Polányi becslése szerint az anyagok szakítószilárdsága a felületi feszültségnek rácsállandó felével osztott hányada. Réz esetén például $\alpha = 1{,}7\ \mathrm{J/m^2}$, $b = 3{,}6\cdot10^{-10}$ m, a számított szakítószilárdság $\sigma_0 = 10^{10}$ Pa.

A szakítószilárdság meghatározása a párolgási hő alapján is lehetséges. Feltehetjük ugyanis, hogy a töréskor befektetett munka megegyezik egy A keresztmetszetű monomolekuláris (egy molekula vastagságú) réteg elpárologtatásához szükséges energiával:

$$\sigma_0 Ab = mQ, \tag{28.7}$$

ahol m az A felületű monomolekuláris réteg tömege, azaz $m = Ab\rho$. A kapott eredmény réz esetén így is 10^{10} Pa nagyságrendű.

Az energetikai becslések a molekuláris kölcsönhatás pontos figyelembevételével kissé finomíthatók. A húzott anyag biztosan elszakad, ha teljes keresztmetszetében minden molekuláris kötésre a molekulák között lehetséges maximális erő (f_{max}) jut, azaz

$$\sigma_0 = N_A f_{max},$$

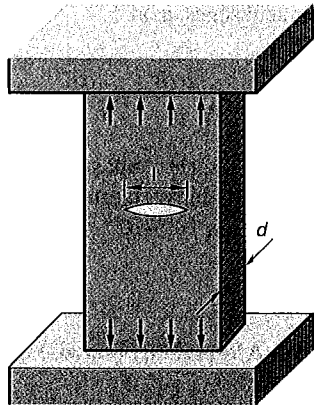
ahol N_A az egységnyi felületre jutó molekulák számát jelenti. A molekulák közti maximális erő (f_{max}) értékét a diszlokációk bevezetésénél alkalmazott gondolatmenet alapján határozhatjuk meg, figyelembe véve, hogy kicsiny elmozdulások esetén az erőhatás még rugalmas. Tehát

$$\sigma_0 \approx \frac{E}{2\pi},$$

ami a réz adatait felhasználva ismét 10^{-9}–10^{-10} Pa nagyságrendű szakítószilárdságot ad.

A különböző becslésekből adódó elméleti szakítószilárdság-értékek 50–100-szor nagyobbak, mint a reális anyagokon mért adatok. Az elméleti becslés hibáját, a folyáshatár esetén adott becsléshez hasonlóan most is az okozza, hogy ideális, hibátlan kristállyal számol. A valódi anyagokban mindig jelenlevő szerkezeti hibák nagymértékben befolyásolják a szilárdságot. Jelenlegi felfogásunk szerint a törést elsősorban a törés helyének közelében, a törés előtt képződő *mikrorepedések* okozzák. A mikrorepedések az anyag teljes térfogatában véletlenszerűen képződnek, a terhelés hatására végbemenő diszlokációmozgás következtében. A kicsiny, de már makroszkopikus méretű repedések leggyakrabban az anyag mikroszkopikus méretekben lazább tartományai (pl. a szemcsehatárok), mentén alakulnak ki. Repedések képződhetnek azonban az anyag lokálisan erősen terhelt részein, pl. valamilyen akadály előtt feltorlódott diszlokációhalmaz közelében is. A repedések véletlenszerű képződése és növekedése okozza, hogy adott próbatest esetén nem jósolható meg, hogy a terhelés hatására melyik keresztmetszetben következik be a törés. Ennek az esetlegességnek a kiküszöbölésére a törésvizsgálatokhoz időnként oldalirányú bevágással gyengítik a próbatestet.

A repedések tulajdonságaira alapozva *Griffith* dolgozta ki a törés rideg anyagokra jól alkalmazható egyszerű elméletét, és becsülte meg az anyagok szakítószilárdságát. Gondolatmenete a következő: nyújtsunk egy vékony, lemez alakú mintát, amelyben a húzás irányára merőleges l hosszúságú, a minta teljes d vastagságát átérő mikrorepedés húzódik (28.13. ábra)!



28.13. ábra

A repedés megjelenésével az anyag belsejében $A_l = 2ld$ szabad felület képződik, s ezáltal a próbatest energiája

$$\Delta U_1 \approx 2ld\alpha$$

értékkel nő, ahol α a felületi feszültség. Ugyanakkor azonban a repedés környezetéből a rugalmas feszültségek eltűnnek, így a rugalmas energia csökken. A σ húzófeszültséggel terhelt anyag rugalmas energiasűrűsége $\frac{\sigma^2}{2E}$, a repedés körül kialakuló feszültségmentes tartomány térfogata pedig Griffith szerint jó közelítéssel l^2d. Így a repedés képződése miatt az összenergia

$$\Delta U = 2ld\alpha - \frac{\sigma^2}{2E} l^2 d$$

értékkel megváltozik. Ebből meghatározható a maximális energiaváltozást okozó l_{kr} kritikus repedéshossz:

$$l_{kr} = \frac{2\alpha E}{\sigma^2}.$$

A kritikusnál rövidebb repedések növeléséhez energiát kell befektetni. Amint azonban egy repedés eléri kritikus méretét, már spontán nő tovább, hiszen hosszabbodása energiafelszabadulással jár. Ennek alapján a rideg törés akkor következik be, amikor a feszültség eléri azt az értéket, amely az anyagban levő repedések spontán növekedéséhez szükséges, azaz

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2\alpha E}{l}} \approx \beta \sqrt{\frac{\alpha E}{l}}.$$

Az elmélet igen jól egyezik a kísérleti tapasztalatokkal, és apróbb finomításai csekély mértékben változtattak a β tényező értékén. A tapasztalat szerint tehát a törés előtt a különböző anyagokban 10^{-6}–10^{-7} m hosszúságú mikrorepedések fejlődnek ki.

28.4.2. A képlékeny (szívós) törés

A képlékeny törés előtt a próbatest jelentős képlékeny deformációt szenved, ezért ez a folyamat sokkal bonyolultabb az előzőnél. A képlékeny szakadás jellegzetes tulajdonsága, hogy a szakadás előtt a nyújtott mintán valahol egy befűződés, ún.

„nyak" képződik. A próbatest elszakadása végső soron a keresztmetszet-csökkenés miatt bekövetkező lokális feszültségnövekedés következménye. A nyakképződés a képlékeny alakváltozás során lezajló nagymérvű diszlokációmozgás következtében véletlenszerűen történik.

Egyes nagyon homogén és finom szemcseszerkezetű anyagokban a nyakképződés nehezen következik be, a nyúlás sokáig homogén marad. Ezek a fémek eredeti hosszuk 5–20-szorosára is megnyújthatók.

A képlékeny nyúlás és törés rendkívül bonyolult folyamat, elméleti magyarázata jelenleg sem pontosan tisztázott.

29. A folyadékok szerkezete

A folyadékállapot átmenetet képez az anyag szilárd és gáz halmazállapota között. Makroszkopikus fizikai tulajdonságai részben a gázok, részben a kristályos anyagok sajátosságaira emlékeztetnek. A folyadéknak nincs meghatározott alakja, mindig az edény alakját veszi fel (ebben a gázokhoz hasonlít); térfogata viszont állandó, megváltoztatásához nagy erőkre van szükség (ebben a kristályos anyaghoz hasonlít). A folyadékok sűrűsége gyakorlatilag megegyezik a kristályos állapotú anyag sűrűségével (általában annál 5...20%-kal kisebb). A folyadékokban a diffúzió sebessége lényegesen nagyobb, mint a kristályokban, de kisebb, mint gázállapotban. A kristályok megolvasztásához szükséges energia (olvadáshő) sokkal kisebb, mint a folyadék elpárologtatásához szükséges energia (forráshő). Az olvadáshő és forráshő különbsége alapján (leszámítva a forrásnál jelentős térfogati munkát) következtethetünk az anyag belső energiájának változásaira. Eszerint a folyadékok energetikai szempontból közelebb állnak a kristályos anyagokhoz, mint a gázokhoz.

Ezen általános érvényű megállapításokon túl, a különböző folyadékok tulajdonságaiban lényeges különbségek is mutatkoznak. A fizikai tulajdonságokban jelentkező különbségek szerkezeti okokra vezethetők vissza. A folyadékokat szerkezeti szempontból öt nagy csoportra oszthatjuk:

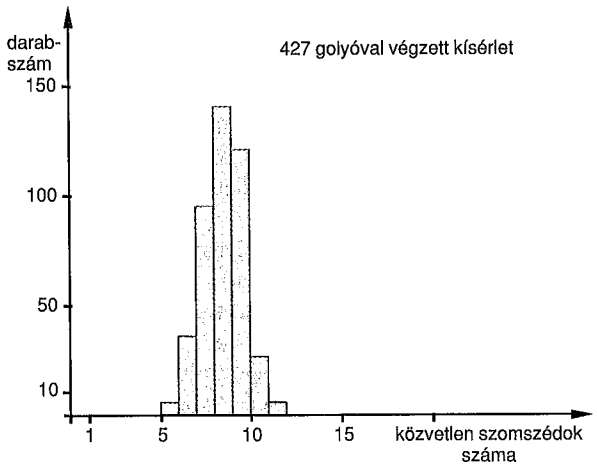
- *egyszerű folyadékok* (olvadt fémek, cseppfolyós nemesgázok);
- *poláros folyadékok* (ionvegyületek olvadékai);
- *molekuláris folyadékok* (a molekulák dipólus tulajdonságúak);
- *asszociált folyadékok* (víz, glicerin);
- *óriásmolekulájú anyagok* (olajok, műanyagok stb.).

A következőkben az egyszerű folyadékok és a víz (asszociált folyadék) szerkezetével foglalkozunk részletesebben.

29.1. Az egyszerű folyadékok Bernal-féle golyómodellje

Az olvadásponthoz közeli hőmérsékleten a fémolvadékok sűrűsége, összenyomhatósága a kristályállapotú fémekével közel azonos. A tiszta fémek szerkezeti szempontból a legegyszerűbb anyagok közé tartoznak. Azonos atomokból épülnek fel, kristályszerkezetük legtöbb esetben maximális sűrűséggel egymásra helyezett golyókkal modellezhető. E tényből indulva *Bernal* a 20. század harmincas éveiben a fémolvadékok szerkezetét is golyósokasággal modellezte. Bernal egy rugalmas hálót sok (kb. 400) egyforma acél csapágygolyóval töltött meg. A golyókat nem rendezte el, csak egyszerűen egymásra dobálta, végül a hálót szorosra húzta. Azt tapasztalta, hogy az így egymásra dobált golyósokaság térfogata mindössze 15–20%-kal nagyobb annál a térfogatnál, amelyet ugyanennyi golyó a szoros, kristályos rendbe rakva töltene ki. Ez a térfogatváltozás jól egyezik a fémek olvadásakor mérhető térfogat-növekedéssel.

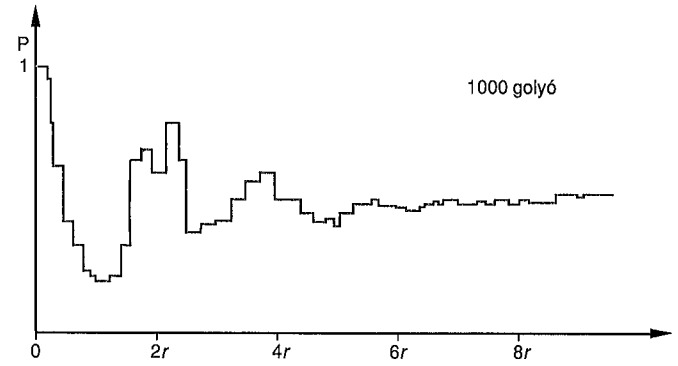
Bernal kimutatta, hogy a rendezetlenül egymásra dobált golyók egymáshoz illeszkedésében statisztikus törvények jelentkeznek. A hálóban összehúzott golyósokaságot festékbe mártotta, majd miután a festék megszáradt, szétszedte a golyókat. Ahol a golyók egymáshoz nyomódtak, ott nem lettek festékesek, és így utólag megállapítható volt, hogy egy-egy golyó hány másikkal érintkezett. A vizsgálat eredményét Bernal gyakorisággörbén ábrázolta.



29.1. ábra

A 29.1. ábra diagramjáról leolvasható, hogy a felhasznált 427 golyóból hánynak volt 5, 6,..., 12 szomszédja. (Bernal tapasztalatai szerint minden golyónak legalább 5 de legfeljebb 12 közvetlen szomszédja volt.) A gyakorisággörbe azt mutatja, hogy egy golyó legnagyobb valószínűséggel 9-10 szomszéddal érintkezett. A szoros térkitöltésű kristályszerkezetben minden atomot 12 másik vesz körül. A kristályos szerkezetekben és a folyadékszerkezeti modellben tehát a közvetlen szomszédos részecskék száma nem nagyon tér el egymástól. Ebből az sejthető, hogy folyadékállapotban az atomok többségének közvetlen környezete – a szomszédos atomok számát tekintve – nem sokban különbözik a kristályszerkezetre jellemző elrendeződéstől. A modell további vizsgálata azonban egyértelműen megmutatja, hogy ez a hasonlóság csak néhány atomátmérőnyi távolságig figyelhető meg. Bernal meghatározta a golyók távolabbi szomszédainak (másod-, harmadstb. rendű szomszédok) számát és elrendeződését is, és azt tapasztalta, hogy ezek számában egyre nagyobb a véletlenszerű ingadozás.

A folyadékszerkezetet modellező golyók egymáshoz viszonyított elhelyezkedése a $P(r)$ valószínűség-függvénnyel jellemezhető. Ez a függvény azt adja meg, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott golyótól sugárirányban távolodva mekkora valószínűséggel található egy-egy újabb golyó. A függvényt – mivel a különböző távolságokra levő golyópárok előfordulásának valószínűségét adja meg – *párkorrelációs függvénynek* nevezik. 1000 golyóval végzett kísérlet eredményét a 29.2. ábra mutatja



29.2. ábra

A grafikon origója a kiválasztott atomhoz van rögzítve, a vízszintes tengelyen ettől a központi atomtól mért távolságot skáláztuk be, a függőleges tengelyen pedig annak valószínűségét mértük fel, hogy az adott távolságban található-e atom. A bemutatott görbén – az origótól távolodva – a maximum- és minimumhelyek szabályosan követik egymást, a szomszédos szélsőértékek különbsége azonban gyorsan csökken. A központi atomtól 4-5 atomátmérőnyi távolságban a grafikon kisimul.

A párkorrelációs függvény segítségével megadható egy önkényesen választott (központi) részecskétől r távolságban elhelyezkedő Δr vastagságú gömbhéj térfogatban levő atomok ΔN száma:

$$\Delta N = 4\pi N_0 P(r) r^2 \cdot \Delta r, \tag{29.1}$$

ahol N_0 a térfogategységre jutó részecskeszám.

Bernal egyszerű golyómodellje a fémolvadékok szerkezetéről jó képet ad. A modell amellett, hogy tükrözi a kristályos fém és az olvadék sűrűségviszonyait, a folyadékokon végzett diffrakciós kísérletek eredményeivel is egyezésben van.

Fel kell azonban hívnunk a figyelmet a golyómodell és a folyadékok valódi szerkezete közti lényeges különbségre! A Bernal-modellben a golyók mozdulatlanok, míg a folyadékban az atomok állandó mozgásban vannak. A golyósokaság elrendeződését a folyadék szerkezetét jellemző „kimerevített" pillanatfelvételnek kell tekintenünk. A folyadékban a hőmozgás pillanatról pillanatra (másodpercenként kb. 10^4-szer) felbomlasztja, majd kis változtatással újra létrehozza a modellben megfigyelt jellegzetes atomcsoportosulásokat. Az atomok illeszkedése tehát egy-egy tartományon belül folyamatosan változik, de a folyadék egészét tekintve a kép változatlan. Bernal sztatikus modellje ezt az átlagos szerkezetet érzékelteti.

29.2. A folyadékok diffrakciós szerkezetvizsgálata

Az anyag szerkezetéről, az atomok elrendeződéséről a legközvetlenebb információt a röntgen-, az elektron- és a neutrondiffrakciós vizsgálatok adják (lásd a 24.2.3. pontot).

A diffrakciós vizsgálatok során az anyagot érő hullám (röntgen-, elektron-, illetve neutronsugárzás) az atomokon szóródik. A különböző atomokról szóródó hullámok a minta mögött elhelyezett fotolemezen (képernyőn) találkozva interferenciaképet hoznak létre. Az interferencia eredménye a találkozó hullámok fáziskülönbségétől (útkülönbségétől) függ, így az interferenciaképet az atomok egymáshoz viszonyított elhelyezkedése határozza meg. A kristályokat szigorú geometriai rendben egymás mellé épülő atomok építik fel. Ez a szabályos geometriai rend eredményezi, hogy a diffrakciós képen szabályosan elrendezett fénylő pontok láthatók. (Az interferenciamaximumok elrendeződése az adott kristályos anyagra jellemző, de függ attól is, hogy a sugárzás milyen irányból éri a kristályt.) Minden egyes fénylő pont nagyon sok, egymáshoz viszonyítva azonos helyzetű atomparon szóródó hullám találkozásának eredménye.

A folyadékról készült diffrakciós felvételen koncentrikus gyűrűk láthatók. A gyűrűk szélesek, fényességük középről a gyűrű szélei felé fokozatosan csökken. A legbelső gyűrű a legintenzívebb, a nagyobb sugarú gyűrűk intenzitása kisebb.

Az interferenciaképet a Bernal-féle folyadékmodell segítségével egyszerűen értelmezhetjük. A modell szerint a folyadék atomjainak közvetlen környezete hasonló a kristály atomjainak környezetéhez. Tehát a folyadék atomjaival közvetlenül szomszédos atomok a központi atomtól majdnem ugyanakkora távolságra vannak. Így a közvetlen szomszédos atomokról azonos irányban szóródó hullámok útkülönbsége is nagyjából állandó, tehát a folyadékban és a kristályban kb. ugyanazon irányokban teljesül a maximális erősítés feltétele. A folyadék lokálisan rendezett atomcsoportjainak irányítottsága azonban a megvilágító sugárzáshoz viszonyítva véletlenszerű, ezért az első szomszédokról szóródó hullámok egy, a megvilágító sugár – mint tengely – köré írt körkúp alkotóinak irányában adnak maximumot: a diffrakciós kép körgyűrű. A gyűrű elmosódottsága arra utal, hogy a szórócentrumok (a közvetlen szomszédos atomok) nem pontosan ugyanazon távolságra vannak a központi atomtól. A diffrakciós kép második, harmadik stb. gyűrűje a második, harmadik stb. szomszédokon szóródó hullámoktól származik. A gyűrűk intenzitása egyre csökken, és szélességük egyre növekszik. Ennek oka, hogy a kristálybeli szabályos rendhez képest a második, harmadik stb. szomszédok száma csökken, és elhelyezkedésük bizonytalansága nő.

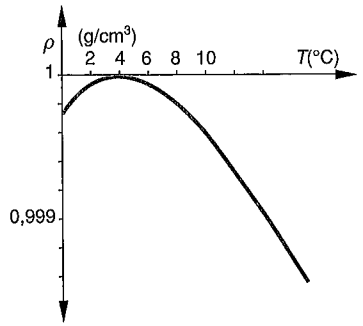
A diffrakciós felvétel kvantitatív kiértékelésekor első lépésként az intenzitásmaximumok intenzitáseloszlását mérik a gyűrűrendszer középpontjától számított távolság függvényében. Ennek ismeretében kiszámítható a folyadékszerkezetre jellemző párkorrelációs függvény. (A mért intenzitás az éppen kedvező helyzetben levő atomok számával, illetve ezek adott helyhez tartozó megtalálási valószínűségével azonos.) Az intenzitáseloszlás-görbe alapján meghatározható a folyadékban egy-egy atomot körülvevő első, második stb. szomszédok száma is. Fémolvadékokon végzett diffrakciós vizsgálatok egyértelműen igazolják, hogy ezek atomos szerkezetéről a Bernal-féle golyómodell jó képet ad. Hasonló szerkezetűnek bizonyultak a cseppfolyósított nemesgázok is.

A diffrakciós szerkezetvizsgálatok azonban egyértelműen megmutatták azt is, hogy az egyszerű folyadékok csoportjába a folyadékoknak csak elenyésző kis hányada sorolható be. A víz, a szerves molekulájú folyadékok, a sóolvadékok nem tartoznak az egyszerű folyadékok közé. Szerkezetük nem modellezhető véletlenszerűen egymásra dobált golyók sokaságával.

29.3. A víz

29.3.1. A víz fizikai tulajdonságai

A víz normál légköri nyomáson 0 °C és 100 °C hőmérséklethatárok között folyadék, 0 °C alatt jégkristály, 100 °C felett gőz. Nagyobb nyomáson a folyadékállapothoz tartozó hőmérséklet-tartomány megnő: a forráspont emelkedik, és a fagyáspont csökken.



29.3. ábra

A víz sűrűsége a 29.3. ábrán bemutatott sajátos módon változik a hőmérséklet függvényében. Legnagyobb a +4 °C-os víz sűrűsége: 1000 kg/m^3. A 4 °C-nál alacsonyabb, illetve magasabb hőmérsékleten ennél kisebb a sűrűség. Itt említjük meg, hogy a 0 °C-os jég sűrűsége kb. 9%-kal kisebb, mint a 0 °C-os vízé.

A víz felületi feszültsége és viszkozitása – más folyadékokéhoz viszonyítva – feltűnően nagy. A felületi feszültség és a viszkozitás a hőmérséklet emelkedésével csökken.

A víz melegítéséhez viszonylag sok energia szükséges. A víz fajhője 4,18 kJ/kg, kétszerese a jég fajhőjének, közel tízszerese a vas és harmincszorosa a platina fajhőjének. A víz 2,25 10^3 kJ/kg forráshője szintén figyelemreméltóan magas.

A tiszta (desztillált) víz színtelen, szagtalan, átlátszó folyadék. Az elektromos áramot gyakorlatilag nem vezeti. Permittivitása nagy, elektromos tér hatására jól polarizálódik.

A víz jó oldószer. A kristályos anyagok közül az ionkristályok jól oldódnak a vízben. Egyes gázok ugyancsak jól oldhatók. Az oldódási folyamatok többségét hőeffektus kíséri. Ez arra utal, hogy az oldódáskor a víz és az oldott anyag részecskéi nemcsak egyszerűen „elkeverednek", hanem intenzív kölcsönhatásba is kerülnek egymással.

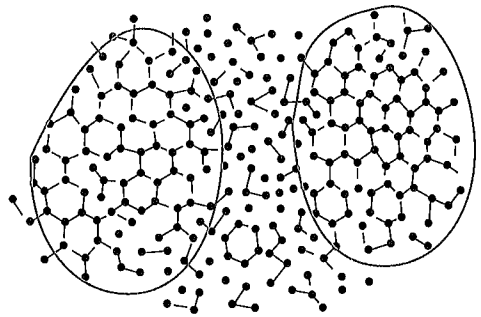
A vizes oldatok fizikai tulajdonságai eltérnek a tiszta (desztillált) vízétől. Az eltérés mértéke az oldott anyag minőségétől és az oldat töménységétől függ. A legfontosabb eltérések a következők:

- Az oldatok fagyáspontja 0 °C alá süllyed, forráspontja 100 °C fölé emelkedik. Az oldatok tehát nagyobb hőmérséklet-tartományban folyékonyak, mint az oldószer.
- Az oldott anyagok hatására megváltozik a legtöbb fizikai tulajdonság, pl. sűrűség, a felületi feszültség, a viszkozitás, az elektromos vezetőképesség.

29.3.2. A víz szerkezeti modellje

A víz szerkezetéről, molekuláinak elrendeződéséről diffrakciós szerkezetvizsgálatok adnak közvetlen információt. Ezek a vizsgálatok azt mutatják, hogy a cseppfolyós vízben egy-egy molekulát átlagosan alig több mint négy másik molekula fog közre. A közvetlen szomszédok száma a hőmérséklet növekedésével ugyan kissé nő, de ez a szám még 80 °C-on is átlagban csak 4,9. A diffrakciós vizsgálatok tehát egyértelműen mutatják, hogy a víz szerkezetét nem lehet a Bernal-féle golyómodell szerint elképzelni, hiszen a Bernal-modellben egy-egy golyó közvetlen szomszédainak átlagos száma kb. 10.

A víz – szerkezeti szempontból – a *jégkristállyal* (lásd a 24.2.4.2. pontot) mutat erős hasonlóságot. A jégben minden vízmolekula négy másik vízmolekulához kapcsolódik. A molekulákat tetraéderes irányokban elhelyezkedő H-*híd*-kötések rendezik kristályrácsba.



29.4. ábra

A víz szerkezetét a jég szerkezetének ismeretében a 29.4. ábra segítségével képzelhetjük el: A vízben a H_2O molekulák viszonylag nagy méretű csoportokba szerveződnek. Ilyen csoportokhoz tartozik a molekulák mintegy 70%-a. A csoportok 20 °C-on átlagosan 80...90 molekulából állnak. A csoportokban a molekulák

H-híd-kötéssel kapcsolódnak össze. Az összekapcsolódó molekulák többsége a jég szerkezetéhez hasonlóan tetraéderes irányokban kötődik, de az az eset is gyakori, hogy a kiszemelt molekulának a négy lehetséges szomszédjából egy-kettő hiányzik. A nagyméretű molekulacsoportok közötti tartományokat magányos, illetve kettesével, hármasával összeálló, esetleg hatos gyűrűkbe kapcsolódó molekulák töltik ki, véletlenszerű elrendeződésben. Feltehetően az sem ritka, hogy a laza, jég szerkezetű rajok belső üregeiben, csatornáiban magányos vízmolekulák helyezkednek el.

A víz szerkezetét azonban nem szabad statikusnak képzelnünk. A H-híd-kötés ugyanis 0 °C fölött – a molekulák hőmozgása miatt – csak igen rövid élettartamú. Egy-egy kötés másodpercenként átlagosan 10^{10}-szer felbomlik, majd újjáalakul. A molekulacsoportok ennek megfelelően állandó változásban vannak, részlegesen vagy teljesen felbomlanak, átszerveződnek. (A csoportok felbomlásában szerepet játszanak a rendezett tartományok között levő magányos molekulák is. Ezek ugyanis kis tömegük következtében gyorsan mozogva szüntelenül „bombázzák" a csoportokat.) A víz szerkezete tehát egy folytonos átalakulásban lévő dinamikus egyensúlyi szerkezet.

29.3.3. A víz néhány jellegzetes tulajdonságának értelmezése a szerkezeti modellel

29.3.3.1. A víz sűrűségváltozása a hőmérséklet függvényében

A vizet 0 °C-ról melegítve sűrűsége eleinte nő, 4 °C-on maximális, majd fokozatosan csökken. A sűrűségváltozást a melegítés során bekövetkező mikroszerkezeti változások okozzák. A melegítés hatására egyrészt csökken a vízben levő szervezett molekulacsoportok mérete, másrészt élénkül a molekulák hőmozgása. Az előbbi növeli, az utóbbi csökkenti a makroszkopikusan mérhető sűrűséget.

0 °C-on a H-híd-kötéssel összekapcsolódott H_2O molekulák nagyméretű, szabálytalan alakú csoportokat alkotnak. Ezek a nagy molekulacsoportok rossz helykihasználással, hézagosan illeszkednek egymás mellé. A hőmérséklet növekedésével egyre több H-híd-kötés szakad fel időegységenként, így a nagy molekulacsoportok felaprózódnak. A kisebb méretű csoportok jobb térkitöltéssel illeszkednek egymáshoz. Ugyancsak lényeges, hogy magasabb hőmérsékleteken a magányos vízmolekulák száma is növekszik, és ezek kitölthetik a molekulacsoportok illeszkedési hézagait, belső üregeit. Ezek a szerkezeti változások növelik a víz sűrűségét. A részecskék hőmozgása azonban melegítéskor erősödik, és így az egy molekula által elfoglalt térfogat megnő. A hőtágulás a víz sűrűségcsökkenését okozza. A két, ellentétes értelmű hatás közül a 0–4 °C tartományban az első a domináns, magasabb hőmérsékleten a második válik meghatározóvá.

29.3.3.2. A víz hőtani adatainak értelmezése

A víz fajhőjének és forráshőjének viszonylagosan nagy értékét a molekulák között levő H-híd-kötés magyarázza. A jég melegítésekor a kristály belső energiájának növekedése a helyhez kötött molekulák hőmozgásának fokozásában jelentkezik. A folyékony állapotú víz melegítésekor azonban a közölt energia nem csupán a hőmozgás fokozására fordítódik, hanem fedezi az egyre több H-híd felszakadásához szükséges munkát is.

A víz forráshőjének felhasználásával kiszámítható, hogy egy mól 100 °C-os (18 g) víz elforralásakor a belső energia megváltozása kb. 37 kJ. (A belső energia változását megkapjuk, ha a forráshőből levonjuk a keletkezett gőz által végzett tágulási munkát.) Ha feltételezzük, hogy a belső energia megváltozása H-híd-kötések felszakadásából adódik, úgy a H-híd kötési energiáját (kb. 5. 10^{-20} J) felhasználva meghatározható, hogy egy mól 100 °C-os vízben

$$\frac{37\cdot10^{3}}{5\cdot10^{-20}}=7,4\cdot10^{23}$$

számú H-híd-kötés van, azaz egy molekulára átlagosan 1,2 H-híd-kötés jut. Figyelembe véve, hogy a jégkristályban egy-egy vízmolekulára két H-híd-kötés esik, az összehasonlítása arra vezet, hogy még 100 °C-os a vízben is csoportokba szerveződve található a molekulák többsége.

29.3.3.3. A víz mint oldószer

A víz számos anyagnak, többek közt a sóknak jó oldószere. Az oldódás a só és a víz részecskéi között ébredő kölcsönhatás eredménye. Az oldódás mechanizmusának megértéséhez vizsgáljuk meg közelebbről az ionkristályokat!

Az ionkristályok felülete csak az emberi szem számára tűnik egységesen simának. Atomi mértékkel mérve a felületeken sakktáblaszerűen elrendeződött pozitív és negatív ionok helyezkednek el. A vízbe helyezett kristály felületén levő ionok magukhoz vonzzák az erős dipólus tulajdonságú vízmolekulák ionnal ellentétes pólusait, így a vízmolekulák a kristály ionjait szorosan közreveszik. A vízmolekulák által az ionokra kifejtett erő – különösen a kristály élein, csúcsain, ahol sok vízmolekula férkőzhet az ion közelébe – olyan nagy lehet, hogy a hőmozgást végző ion kiszakad a kristályból. A kiszakított ion körül a vízmolekulák ún. hidrátburkot képeznek. Ez a burok erősen leárnyékolja az ionok töltését, ezáltal megakadályozza azt, hogy ezek visszatérjenek a kristályrácsba.

Az oldódás energiaviszonyait pl. a kálium-klorid (KCl) oldódásának esetén vizsgálhatjuk meg. A kálium-klorid a kősóéhoz hasonló szerkezetű kristály. Ionjai

között akkora vonzóerő hat, hogy 1 mólnyi kristály ionokra bontásához 717,4 kJ energia szükséges. (Ekkora energiát a hőmozgás csak magas hőmérsékleten képes fedezni, ezért van az, hogy az ionkristályok olvadáspontja magas.) Ugyanezen kristály 1 mólnyi tömegének feloldásához (az oldás is ionokra bontás!) azonban csupán 38,4 kJ energiát kell az oldat melegítésére fordítanunk. Ez a tény azt bizonyítja, hogy az ionokra bomláshoz szükséges további (717,4 – 38,4 kJ =) 679 kJ energiát a vízmolekulák és az ionok kölcsönhatása szolgáltatja. A kölcsönhatási energia nagysága az ionok minőségétől függ. A kálium-hidroxid (KOH) vízben oldásakor pl. nem hogy kivülről nem kell (hő formájában) energiát közölni az oldattal, hanem maga az oldat melegszik fel az oldódási kölcsönhatás következtében. Ez azt jelzi, hogy a kölcsönhatási energia meghaladja a kristályrács szétbontásához szükséges energiát.

Az oldott ionok hatására az oldat számos tulajdonsága eltér a vízétől. A tiszta víz és az oldatok tulajdonságainak eltérését az okozza, hogy az ionok hatására megváltozik a víz szerkezete. A különféle ionok hatását lehetetlen egyetlen szemléletes képbe sűríteni. Általánosságban csak annyit mondhatunk, hogy az oldott ionok hatására megváltozík a víz molekulacsoportjainak átlagos mérete, és a csoportokban levő molekulák átlagos száma is. Az oldott ionok ugyanis minden oldalról magukhoz vonzzák a vízmolekulákat. A hidrátburok vízmolekulái tehát nem tetraéderes rendben, hanem gömbszimmetrikusan helyezkednek el, ily módon akadályozzák a vízre jellemző molekulacsoportok kialakulását.

A víz nem csupán az ionkristályokat oldja, hanem a dipólus molekulájú gázokat és folyadékokat is.

29.4. Az üvegek szerkezete

A szilárd állapotú anyagok alakja, térfogata állandó, illetve csak nagy erő hatására változik. A mechanikai értelemben szilárd anyagok azonban szerkezeti szempontból erősen különbözhetnek egymástól. Többségük kristályos szerkezetű, de vannak olyanok is, amelyek nem kristályosak. Ez utóbbiak az *üvegek*.

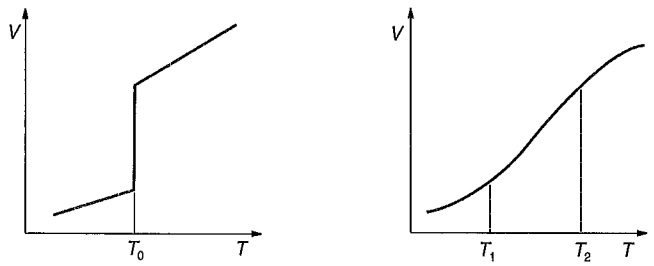
Az „üveg" szó itt nem kizárólag a köznapi értelemben vett üveget (szilikátüveg) jelenti, hanem a nemkristályos szerkezetű fémeket (fémüveg) és a műanyagokat is. Az üvegek – szerkezeti szempontból – folyadékok, amelyekben az olvadék gyors lehűlése miatt nem következik be kristályosodás. A továbbiakban az üvegek tulajdonságaival és szerkezetével, az üvegállapot létrejöttével foglalkozunk.

29.4.1. Az üvegek fizikai tulajdonságai

Az üvegek tulajdonságait a kristályok és a folyadékok sajátosságaival összehasonlítva érdemes összefoglalni.

A kristályos anyagok fizikai jellemzői (keménység, rugalmasság, törésmutató, permittivitás stb.) általában irányfüggő mennyiségek. Röviden: a kristályos anyagok *anizotropok*. Az üvegek fizikai tulajdonságai azonban nem függenek az iránytól, az üvegek *izotrop* anyagok. Az anizotrópia a kristályszerkezetről, az izotrópia ennek hiányáról tanúskodik.

Az üvegek és a kristályok különbözősége jól mutatkozik abban is, hogy az egyes fizikai tulajdonságokat jellemző paraméterek hőmérsékletfüggése erősen eltérő.



29.5. ábra

A 29.5. ábra a kvarckristály és kvarcüveg fajtérfogatának változását mutatja a hőmérséklet függvényében. Jól látható, hogy a kristály térfogata egy határozott T_0 hőmérsékleten (az olvadásponton) ugrásszerűen megváltozik. (Hirtelen változást mutatnak az olvadásponton a kristály más fizikai tulajdonságai is.) A gyors változás azt jelzi, hogy az olvadással lényegesen megváltozott az anyag szerkezete.

Az üvegnek nincs határozott olvadáspontja, így térfogatváltozása sem ugrásszerű. A határozott T_0 olvadáspont helyett itt egy T_2–T_1 hőmérséklet-tartomány, az ún. *lágyulási hőmérséklet-intervallum* figyelhető meg. (Ez a tartomány az anyagi minőségtől függően tíz vagy akár száz fok nagyságrendű is lehet.) A melegítés során az üvegek ebben az intervallumban egyre képlékenyebbek, lágyabbak lesznek, és a tartomány felső határán már sűrű folyadékként viselkednek. A lágyulási folyamatot egyszerűen megfigyelhetjük, ha egy kb. 30 cm hosszú, vékony (kb. 5 mm vastagságú) üvegrudat vagy csövet két végénél fogva középen gázlánggal hevítünk. Az üvegek tulajdonságainak folyamatos változása arra mutat, hogy az üveg részecskéinek helyhez kötöttsége nem egy határozott hőmérsékleten következik be, illetve szűnik meg.

Az anyag szerkezeti felépítéséről a diffrakciós vizsgálatok adják a legközvetlenebb információt. Az üvegekről készített diffrakciós felvételeken a folyadékokra

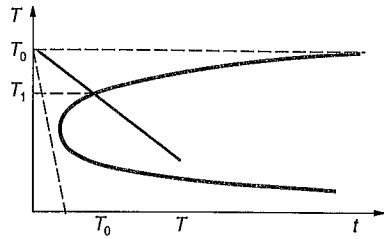
jellemző elmosódó gyűrűrendszer figyelhető meg. A diffrakciós mérések egyértelműen igazolják, hogy az üvegek szerkezete a folyadékokéhoz hasonló.

29.4.2. Az olvadék túlhűtése; az üvegállapot kialakulása

A melegített kristályos anyag olvadása azonnal megindul, ha a kristály hőmérséklete az olvadáspontot eléri. További melegítés hatására a hőmérséklet mindaddig nem változik, míg az egész anyag meg nem olvadt. Ha fordított irányban járunk el – vagyis ha az olvadékot hűtjük –, akkor az olvadáspontot elérve általában nem indul meg azonnal a kristályosodás. Az olvadékot mindig az olvadáspont alá kell hűteni ahhoz, hogy megjelenjenek benne az első kristályok. Amikor a kristályosodás már megindult, akkor az anyag hőmérséklete az olvadáspontra emelkedik, s mindaddig nem csökken, amíg az egész anyag kristályos állapotba nem jutott.

A legtöbb olvadékban már néhány fokkal az olvadáspont alatt megindul a kristályosodás. Néhány anyag olvadéka azonban (pl. timol, szalol, fixírsó) jóval az olvadáspont alá hűthető, és ezen az alacsony hőmérsékleten is tartósan folyadékállapotban tartható. A túlhűtött folyadék kristályosodását egy apró kristálydarab beledobásával (esetleg az edény rázásával) indíthatjuk meg. A folyadékok túlhűtését a következőképp értelmezhetjük.

A folyadékban, mint ahogy azt már láttuk, a részecskék kölcsönhatása nem nagyon különbözik a kristályos anyagra jellemzőtől. A lényeges eltérés abban van, hogy míg a kristályok egész térfogatában rendezettek a részecskék, addig a folyadékban az erős hőmozgás miatt ez a rendeződés csak kis tartományokra terjed ki. Ezek a tartományok csak a másodperc tört részéig változatlanok, minduntalan felbomlanak és újjáalakulnak. Az olvadékot hűtve a hőmozgás intenzitása csökken, a csoportok átlagos élettartama és mérete nő. Az olvadáspontra hűtött olvadékban azonban még a legnagyobb molekulacsoportok sem tekinthetők kristályoknak. Ezek a csoportok még mindig állandó változásban vannak. A folyadékot tovább hűtve egyes csoportok a kedvező véletlenek folytán akkorára nőhetnek, hogy a környező részecskék állandó „bombázása" már nem képes széttördelni őket. Ezeket a kritikus méretet meghaladó méretű molekulacsoportokat, mivel szerkezetük állandó, már apró kristályoknak, ún. *kristálykezdeményeknek, „csíráknak"* tekinthetjük. Ha az olvadék csak kicsit hűlt az olvadáspont alá, akkor csak a különlegesen nagy molekulacsoportokból válik kristálycsíra. A túlhűlés mértékének fokozásával a kristálycsira kritikus mérete csökken. Ha a kristálycsírák kialakultak az olvadékban, az anyag kristályosodása ezek növekedésével már gyorsan végbemegy. A kristályosodás döntő feltétele tehát a kristálycsírák képződése. Gyors és folyamatos hűtés esetén előfordulhat hogy a kristálycsírák nem tudnak kialakulni ezért az olvadék szerkezeti átalakulás nélkül megdermed. A kristálycsíra kialakulásáig szükséges átlagos várakozási idő a 29.6. ábra grafikonján bemutatott módon függ a hőmérséklettől.



29.6. ábra

A grafikonról leolvasható, hogy kristálycsíra képződéséhez az olvadásponton nagyon hosszú (végtelen) várakozási időre van szükség. Hűtve az olvadékot, a csírák kialakulásához szükséges idő először csökken, majd ismét növekszik. A grafikon jellege minden olvadékra hasonló, a görbe pontos alakja azonban anyagonként eltér. Ha ismerjük valamely olvadékra vonatkozóan a grafikon alakját, úgy megmondható, hogy a hűtési sebességtől függően mikor indul meg a kristályosodás. Ha például az olvadékot a grafikonra berajzolt folytonos egyenes vonalnak megfelelően hűtjük, a kristályosodás a T_1 hőmérsékleten indul meg. Az ábrán az is látszik, hogy ha a hűtés sebessége elegendően nagy (szaggatott egyenes), akkor az olvadékban nem alakulhatnak ki kristálycsírák, azaz a kristályosodás elmarad.

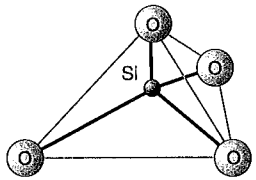
A folyadék hőmérsékletének csökkenésével a viszkozitás rohamosan növekszik. A kristályosodás nélkül erősen lehűlt olvadékok viszkozitása olyan nagy, hogy az anyag mechanikai szempontból már szilárdnak tekinthető. Ilyen anyagok az *üvegek*. Az üvegek tehát nem különleges anyagok. Elvileg minden anyag olvadékából keletkezhet üveg, ha az olvadékot elegendően nagy sebességgel hűtjük.

A mindennapi életben üvegként ismert anyag a *szilikátüveg*. Előállítása könnyű, mert lassú hűtés során sem kristályosodik ki. Ugyancsak könnyen dermeszthető üveggé számos műanyag is. Ezzel szemben a fémolvadékokból készült ún. fémüvegek előállítása különlegesen nagy hűtési sebességet, bonyolult gyártási technológiát kíván.

29.4.3. A szilikátüvegek szerkezete

A közönséges üvegek – a szilikátüvegek – alapanyaga a kristályos szilícium-dioxid (SiO_2), a kvarchomok. A kémiai név (és az SiO_2 képlet) a szilícium- és az oxigénatomok arányát tükrözi.

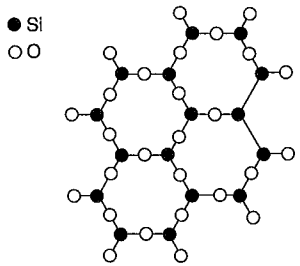
A szilícium-dioxid kristályszerkezete tetraéderes egységekből épül fel. A tetraéder csúcsaiban négy oxigénatom helyezkedik el, a tetraéder közepén pedig – a nagyméretű oxigénatomoktól körülfogva – foglal helyet a kis szilíciumatom. A 29.7. ábrán bemutatott SiO_4 tetraéderek szabályos összekapcsolódásával épül fel a kvarckristály. (A kvarckristály szerkezete emlékeztet az ugyancsak tetraéderes egységekből felépülő jég kristályszerkezetére)



29.7. ábra

A kvarckristály 1710 °C-on megolvad, de ha hűtjük az olvadékot, rendszerint nem kristályos anyag, hanem üveg keletkezik. A kvarc esetében ugyanis az egyszerű lehűlés is túl gyors ahhoz, hogy a szabályos kristályszerkezet alakuljon ki. A kvarckristály és a kvarcüveg szerkezetének összehasonlítására a térbeli szerkezet könnyen ábrázolható síkbeli vetületét használjuk.

A kvarckristály síkbeli vetületét mutató 29.8. ábrán a fekete körök a szilícium-, a fehérek az oxigénatomokat jelölik. A síkban minden Si-atom 3 oxigénnel kapcsolódik. A térbeli szerkezetben a szomszédos Si-atomok felváltva, egyszer a rajz síkja alatt, máskor a rajz síkja felett kapcsolódnak a negyedik oxigénhez, és így kötik össze a rétegeket. A kvarckristály síkbeli rajza szabályos, egyforma hatszögű gyűrűkből áll.

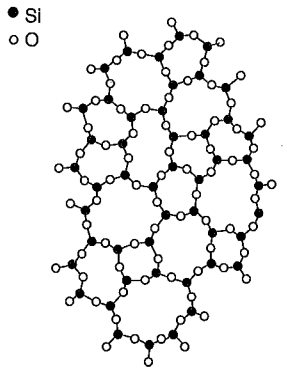


29.8. ábra

A kvarcüvegben a szabályos rácsszerkezet helyett szabálytalan térbeli hálószerkezet alakul ki, amelyet a 29.9. ábra szemléltet a síkban. Megfigyelhető, hogy az atomok kapcsolódási módja a kvarcüvegben hasonló a kristálybelihez.

A kvarcüveg fizikai tulajdonságait a szerkezete magyarázza. Az atomokat térhálóba összetartó kötés igen erős, kapcsolódó atomok gyakorlatilag helyhez kötöttek, ezért az üveg kemény, szobahőmérsékleten rideg, törékeny. A hőmérséklet emelésével a hálószerkezet fokozatosan felszakadozik, miközben az üveg egyre inkább alakíthatóvá válik. Az üveg hálószerkezetét összetartó kötés ionos–kovalens jellegű, a kötést létrehozó

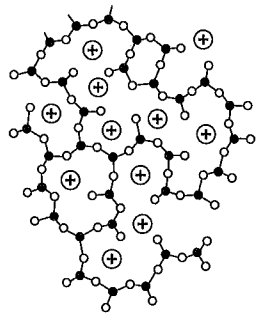
elektronok energiája olyan alacsony, hogy közönséges fény hatására az elektronok nem gerjesztődnek – az üveg ezért színtelen és átlátszó.



29.9. ábra

A hétköznapi célokra kevés kvarcüveget használunk. Ennek az az oka, hogy a kvarcüveg lágyulása csak olyan magas hőmérsékleten következik be, amely már rendkívül megnehezíti az üveg feldolgozását. A nagy mennyiségben előállított közönséges üvegek azáltal válnak a kvarcüvegnél jóval alacsonyabb hőmérsékleteken feldolgozhatóvá, hogy a gyártás során a SiO_2 olvadékhoz különféle fémoxidokat adagolnak. A fémionok megbontják a kvarcüveg zárt hálószerkezetét, ennek következtében az üveg lágyuláspontja csökken, alakíthatósága javul.

A leggyakoribb ablaküveg például nátrium-oxid és kalcium-oxid adagolásával készülő ún. „nátronüveg" vagy „mész-alkáli" üveg. A nátronüveg síkbeli szerkezetét illusztrálja a 29.10. ábra.



29.10. ábra

Az olvadékban a Na^+ ionok a szilíciumionokat kiszorítva a hálószerkezet oxigénatomjaihoz kapcsolódnak. A fémionok azonban csak egy kötést tudnak kialakítani, ezért a térbeli hálószerkezet felszakadozik.

29.4.4. Polimerüvegek

A műanyagok óriásmolekuláinak szerkezete annyira bonyolult, hogy az óriásmolekulák csak rendkívüli körülmények között rendeződnek kristályos alakzatba. Ez az oka annak, hogy a műanyagok általában kristályosodás nélkül szilárdulnak meg. Elegendően alacsony hőmérsékleten minden ilyen műanyag üvegállapotú, rideg, törékeny. A hőmérséklet emelésével a legtöbb műanyag fokozatosan elveszti ridegségét, és egyre rugalmasabbá válik.

29.4.5. Fémüvegek

Igen gyors (10^5...10^6 °C/s) hűtési sebességgel a fémolvadékok is üveggé dermeszthetők. Az üvegállapotban előállítható fémek általában bonyolult összetételű, többkomponensű ötvözetek. Az ilyen anyagok kristályosodási sebessége ugyanis – éppen összetettségük miatt – viszonylag kicsi, ezért olvadékuk túlhűtése könnyebb, mint a színfémeké.

Az üvegfémek előállításának egyik gyakran alkalmazott módszere az, hogy az olvadékot vékony kapilláriscsőből gyorsan forgó, hűtött hengerre fecskendezik. A hideg hengerrel érintkezésbe kerülő olvadék rendkívül gyorsan, kristályosodás nélkül megszilárdul. A gyorsan forgó hengerről a centrifugális erő repíti le az üvegfémszalagot.

Az üvegfémek külső megjelenése a kristályos fémekéhez hasonló. Fémes csillogásuk, jó elektromos vezetőképességük bizonyítja, hogy atomjaikat fémes kötés kapcsolja össze. Az üvegállapotú fémek azonban egy sor lényeges tulajdonságukban eltérnek a kristályos fémektől. Szerkezetük instabilitását mutatja, hogy egyes fémüvegek, ha meggyújtják őket, lángolva égnek. Mechanikai tulajdonságaik (kopásállóság, nagy rugalmasság, nagy szakítószilárdság) és mágneses tulajdonságaik miatt a fémüvegek az elkövetkező évtizedekben várhatóan fontos ipari alapanyagokká válnak.

29.5. A folyadékkristályok

A folyadékkristályok olyan anyagok, amelyek mind a szerkezetüket, mind a fizikai tulajdonságaikat tekintve átmenetet mutatnak a kristályos szilárd anyagok és a folyadékok között.

Folyadékkristályok nagy, hosszúkás, a hossztengelyük irányában poláros molekulák részleges rendeződésével keletkezhetnek. A molekulák tengelye az anyag viszonylag nagy tartományaiban rendeződik, egymással többé-kevésbé párhuzamosan áll be – ez a hosszú távú rend kristályos sajátság. A molekulák tömegközéppontjai azonban a folyadékokhoz hasonlóan véletlenszerűen oszlanak el, elhelyezkedésüket a folyadékokra jellemző rövid távú rend jellemzi. Ez a molekulák elhelyezkedésében tapasztalható rendezetlenség, illetve a tengelyállás irány szerinti rendezettsége határozza meg a folyadékkristályok tulajdonságait. A rendezetlenséggel magyarázható a folyadékkristályok széles tartományban változó, a folyadékokhoz hasonló viszkozitása. A molekulák irányítódása következtében a folyadékkristályok a valódi kristályokhoz hasonló optikai anizotrópiát, kettőstörést (lásd a 10.5.2. pontot) mutatnak. A folyadékkristályokat leggyakrabban optikai kijelzők és érzékeny felületi hőmérők készítésére használják. A folyadékkristályos óraszám lapok, műszerkijelzők vagy tv-képernyők működése azon alapul, hogy a folyadékkristályok optikai tulajdonságai elektromos térben megváltoznak. 0,5...10 V/μm-es elektromos tér hatására már vékony (10...50 μm vastagságú) folyadékkristály-filmek is megváltoztatják a rajtuk áthaladó fény erősségét, irányát, illetve polarizációs állapotát.

Egyes folyadékkristályokban az elektromos feszültség hatására ugyanis a folyadékkristály poláros molekulái az elektródák felé mozognak, s az eredetileg lényegében nyugvó anyagban örvényes áramlás keletkezik, amely megszünteti a réteg átlátszóságát. Más esetekben a kettősen törő kristály az elektromos tér hatására eltérő mértékben forgatja el a poláros fény síkját. Így ha egy átlátszó és egy tükröző elektróda közé fogott folyadékkristály-rétegre feszültséget kapcsolunk, akkor a visszavert fényt ennek segítségével módosíthatjuk. Ha az elektródákat négyzetekre osztjuk, s az egyes négyzetekre különböző feszültségeket kapcsolunk, akkor akár 200 vonal/cm felbontóképességű kijelzőt is készíthetünk.

Egyes folyadékkristályok színe kicsiny, helyi hőmérséklet-különbségek hatására megváltozik. Ennek segítségével felületek mentén „hőmérsékleti térképek" készíthetők. (Korai stádiumában kimutatható pl. egy daganat, mert környezetében a hőmérséklet kissé magasabb.)

30. Az óriásmolekulájú anyagok (műanyagok) tulajdonságai

A korábbiakban tárgyalt kristályos anyagok és folyadékok szerkezeti alapegységeit atomok vagy néhány atom összekapcsolódásával kialakult molekulák képezték. Az ilyen szerkezetű anyagoktól lényegesen eltérő fizikai tulajdonságokkal rendelkeznek az ún. *óriásmolekulájú (makromolekulájú)* anyagok. Ezek alapegységei, molekulái több tízezer atom összekapcsolódásával jönnek létre. Az óriásmolekulájú anyagok közé sok természetes anyag (pl. a *természetes gumi,* a növényi rostok anyagát adó *cellulóz,* a *gyapjú* és a *hernyóselyem* anyaga stb.) és szinte megszámlálhatatlanul sok mesterségesen előállított, ún. *műanyag* tartozik.

Valamennyi óriásmolekula közös sajátossága, hogy egyszerűbb szerkezeti egységek, ún. *monomermolekulák* összekapcsolódásával – *polimerizációjával* – jönnek létre. A makromolekulák kialakulására utalva nevezik az ilyen anyagokat gyakran *polimeranyagoknak.*

A polimerek, elsősorban a mesterségesen előállított műanyagok ipari jelentősége rohamosan növekszik. Széles körű felhasználhatóságuk döntően sajátos mechanikai tulajdonságaiknak köszönhető.

Ezen anyagok érdekes sajátsága, hogy mechanikai tulajdonságaikat (de a többi fizikai tulajdonságukat is) nem annyira a kémiai összetétel, mint inkább a molekulák geometriai alakja és összekapcsolódásának módja határozza meg. Gyakran kémiailag igen különböző anyagok mutatnak azonos tulajdonságokat, így például a természetes gumi és a szilikongumi, a selyem és a különböző műselymek stb.

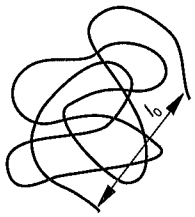
Az óriásmolekulák morfológiai szempontból két nagy csoportba sorolhatók. Megkülönböztethetünk *láncmolekulájú anyagokat* és *térhálós szerkezetű polimereket.* A láncmolekulájú anyagok hosszú sorban – láncszerűen – összekapcsolódó monomer egységekből épülnek fel. (A hosszú láncok gyakran leágazásokat is tartalmaznak.) Az ilyen anyagok melegítés hatására fokozatosan lágyulnak (hőre lágyuló műanyagok vagy elasztomerek), oldószerekkel oldhatóak. Ebbe a csoportba tartozik például a *polietilén, polipropilén.*

A térhálós szerkezetű anyagok a tér minden irányába erős kovalens kötéssel összekapcsolódó egységekből épülnek fel. Az ilyen műanyag melegítéssel nem lágyítható, oldószerek hatására legfeljebb megduzzad (oldószert fogad magába),

de nem oldódik fel. Térhálós szerkezetűek a különböző műgyanták. A következőkben a láncmolekulájú polimerek egyes jellemző tulajdonságainak tárgyalására szorítkozunk.

30.1. A molekulalánc tulajdonságai

A hosszú molekulalánc összeilleszkedő egységei közt nincs merev kapcsolat. A monomerek, egy valódi lánc szemeihez hasonlóan, többé-kevésbé szabadon elfordulhatnak egymáshoz képest. Az elforduláshoz szükséges energiát a termikus fluktuációk biztosítják, így egy-egy molekulán belül hol egyik, hol másik „láncszemnél" következik be véletlenszerű elfordulás. A molekula tehát gyakorlatilag sohasem egyenes lánc, hanem egy pillanatról pillanatra változó alakú láncgombolyag. A molekulagombolyagot azzal a l_0 távolsággal jellemezhetjük, amely két szabad vége között a leggyakrabban mérhető (lásd 30.1. ábra)



30.1. ábra

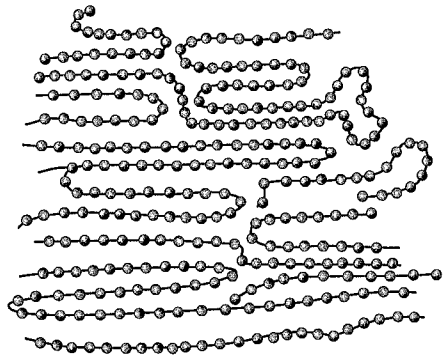
A láncmolekulák véletlenszerű felgombolyodása alapvető a polimerek fizikai tulajdonságainak kialakításában. Egyetlen óriásmolekula tulajdonságainak ismerete azonban kevés a makroszkopikus anyag viselkedésének megértéséhez. Ehhez ismernünk kell, hogy a láncmolekulák hogyan szerveződnek anyaggá, vagyis a szomszédos molekulák közt milyen a kapcsolat.

30.2. A láncmolekulák szerveződése

30.2.1. „Kristályos" polimerek

A hosszú molekulaláncok közt fellépő kötés általában gyenge van der Waals-kötés. Ha a láncot alkotó atomcsoportok mérete olyan (általában kicsi), hogy sok atom kerülhet egymás közelébe, akkor az egyenként gyenge másodlagos kötések megsokszorozódó hatása szilárd kapcsolatot hoz létre a molekulaszakaszok között. Ekkor a molekulaláncok szorosan egymás mellé illeszkedve rendeződnek.

A rendeződés általában egy-egy lánc fölhajtogatódásával indul meg, majd más láncok csatlakozásával gyakorlatilag az egész anyagra kiterjedhet. A láncmolekulák ilyen rendeződését, amelyet a kristályosodás egy sajátos típusának tekinthetünk, a 30.2. ábra szemlélteti.



30.2. ábra

A „kristályos" szerkezetű műanyagokban a molekulaláncok rendezettsége azonban sohasem tökéletes, ahogy ez az ábrán is megfigyelhető. A rendezett láncok közt viszonylag nagy tartományokat kuszált molekulaláncok töltenek ki. A molekulák rendezettsége következtében az ilyen anyagok fizikai tulajdonságai irányfüggést mutatnak. (Az anyag nyújthatósága például eltérő a hajtogatott láncokkal párhuzamos és az arra merőleges irányban; egyes átlátszó anyagok optikailag kettőstörők stb.) Az anyag tulajdonságait azonban a rendezetlen tartományok is befolyásolják. Ezeknek tulajdonítható például, hogy az ilyen műanyagokból készült tárgyak (pl. polietilénből, polipropilénből készült edények, játékok) „törhetetlenek". Az anyagot érő hirtelen ütésre ugyanis a rendezetlen molekulaláncok szinte akadálytalanul mozdulnak el, és ezzel felemésztik az ütés energiáját.

30.2.2. Óriásmolekulájú „folyadékok"

A láncmolekulájú anyagok kristályosodásának feltétele az, hogy a molekulákat alkotó atomcsoportok mérete és alakja lehetővé tegye a láncok szoros egymás mellé simulását. Amennyiben a molekulaláncokhoz oldalcsoportok is kapcsolódnak, a láncok rendeződési készsége csökken. Az oldalcsoportok miatt csak néhány pontban érintkeznek a molekulák, ezért a közöttük kialakuló kötés gyenge. Míg a rendezett polimerláncok kötéseinek felszakításához szobahőmérsékleten a termikus energia nem elég (az anyagot ehhez fel kell melegíteni), addig az oldalcsoporto-

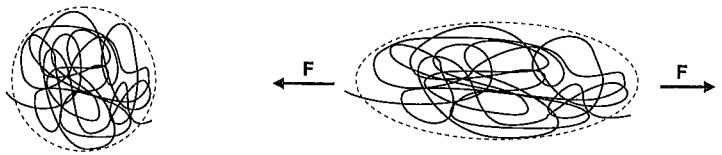
kat is tartalmazó láncok közti kötések felszakítására gyakran már a szobahőmérsékletre jellemző hőmozgás is elegendő. Az ilyen anyag a szabad molekulához hasonlóan láncgombolyagokból áll, a különböző láncok azonban többszörösen is egymásba gubancolódnak. Mivel a molekulaláncok már kis nyíróerők hatására is elcsúszhatnak egymáson, az ilyen anyagok viszkózus folyadékok. (Szobahőmérsékleten ilyen például a szurok, a vulkanizálatlan nyersgumi, a nagy molekulájú szilikonolajok stb.)

Ha ezeket az erősen viszkózus folyadékokat lehűtjük, az összekuszálódott láncok hőmozgása befagy, a molekulák megmerevednek – polimerüveget kapunk. Az anyag az üveghez hasonlóan rideg, törékeny, ilyen például a közismert *plexiüveg*.

30.2.3. Gumiszerűen rugalmas anyagok

A gumiszerűen rugalmas polimerek a makromolekulájú folyadékokhoz hasonlóan felgombolyodott és egymásba kuszálódott láncmolekulákból épülnek fel. A láncmolekulák azonban egy-egy ponton erős kémiai kötéssel kapcsolódnak egymáshoz. Ezek a kötések nem befolyásolják a közéjük eső láncszakaszok szabad hőmozgását, a molekulák egymástól való elszakadását azonban meggátolják. Az ilyen anyagok tehát nem folynak szét, állandó, határozott alakkal rendelkeznek. Erő hatására a gumiszerű anyagok rugalmasan deformálódnak. Ez az alakváltozás rendszerint nagymértékű, és nem követi a kristályos anyagok rugalmas deformációját leíró Hooke-törvényt.

A mikroszerkezeti kép alapján könnyen megérthető a gumi rugalmas viselkedése. Egyszerű befőttesgumi nyújtásával is tapasztalhatjuk, hogy a gumiszál aránylag könnyen, eredeti hosszának többszörösére nyújtható. Ezután azonban a további nyújtáshoz szükséges erő ugrásszerűen megnő, és a szál hamarosan elszakad. A kezdeti (kis feszültség hatására bekövetkező) nagy relatív alakváltozásnak az az oka, hogy a hőmozgás miatt felgombolyodott molekulák a húzás hatására könnyen kiegyenesednek. Az erőhatás megszűntével a hőmozgás újra összekuszálja a láncokat.



30.3. ábra

Ha a molekulaláncok már kiegyenesedtek, további alakváltozás már csak akkor lehetséges, ha a szénatomok közötti kötéstávolságot növeljük. Ekkor a gumiszál „felkeményedik".

VIII. MAGFIZIKA

31. Az atommagok összetétele. A radioaktivitás

Az atommagok összetett részecskék. *Protonokból és neutronokból,* közös néven *nukleonokból* állnak. A proton és a neutron az elektronnál mintegy kétezerszer nehezebb ($m_p = 1{,}672648 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_n = 1{,}674953 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_e = 9{,}10953 \cdot 10^{-31}$ kg). A proton egységnyi pozitív töltésű, a neutron pedig elektromosan semleges. Az atommagban levő protonok számát Z, a neutronok számát N, együttes számukat pedig A betűvel jelöljük. A neve: tömegszám;

$$A = Z + N, \tag{31.1}$$

Az atommagok elektromos töltése:

$$Q = Ze, \tag{31.2}$$

ahol e az elemi töltés.

Az atommag Z *rendszáma* határozza meg az atomnak a periódusos rendszerben elfoglalt helyét. Az azonos protonszámú (Z), de különböző neutronszámú (N) atommagok az *izotópok*. Az izotópmagokat tartalmazó atomok az elemek periódusos rendszerének azonos helyén vannak, tehát *kémiai* tulajdonságaik megegyeznek. (Izotóp: a görög *„izo toposz"* szóból ered, amely azonos helyet jelent.) Az atommagokat a következőképpen jelöljük:

$$\overset{A}{Z}\text{vegyjel}. \tag{31.3}$$

Például $^{22}_{10}$Ne jelöli a neon 22 tömegszámú izotópját, és azt jelenti, hogy a neonatommag 22 részecskéje közül 10 proton és 12 neutron.

31.1. A radioaktív sugárzások tulajdonságai és érzékelésük

Az atommagoknak két nagy csoportja van: a stabil és a radioaktív atommagok. Ez utóbbiak nagy energiájú sugárzást kibocsátva más atommagokká alakulnak át. Ez a sugárzás elektromos és mágneses térben való eltérülése alapján három összetevőre bontható: az α- (alfa-) *sugarak* nehéz, kétegységnyi pozitív elektromos töltésű részecskék – He atommagok –, a β- (béta-) *sugarak* nagy energiájú elektronok; a γ- (gamma-) *sugarak* pedig nagy energiájú elektromágneses fotonok. A He atommagok rendszáma 2, tömegszáma pedig 4, ezért α-bomláskor az atommag rendszáma 2-vel, tömegszáma 4-gyel csökken. β-bomláskor a rendszám eggyel változik, a tömegszám pedig állandó; γ-bomláskor pedig a bomló atommagnak sem a rendszáma, sem a tömegszáma nem változik. A γ-bomlás általában α- vagy β-bomlást követően jelentkezik. Ez teszi lehetővé, hogy az újonnan keletkezett atommag felesleges energiájától további rendszám-, illetve tömegszámváltozás nélkül megszabaduljon.

A radioaktív elemek atommagjai bomlásuk közben minden külső energiaforrás nélkül milliószor nagyobb energiákat sugároznak ki, mint amekkora energia egy-egy kémiai reakció során felszabadul. Ez ellentmondani látszik az energiamegmaradás törvényének. Erre majd a 31.5. szakaszban adunk magyarázatot.

Az atommagok stabil és radioaktív magokra való felosztása önkényes. Még a stabilnak mondott atommagok többsége is elbomlik, csak itt a bomlás emberi léptékkel mérve megfigyelhetetlenül hosszú idő alatt következik be. Azokat az atommagokat szokás stabilnak tekinteni, amelyek felezési ideje sokkal hosszabb, mint Univerzumunk életkora.

31.1.1. Aktivitás, felezési idő

A radioaktív anyagok mennyisége időben fokozatosan csökken, hiszen a bomlásra képes atommagok egy része elbomlik. Az időegység alatt bekövetkező bomlások a számát a radioaktív anyag *aktivitásának* nevezzük:

$$a = -\frac{\Delta n}{\Delta t}. \tag{31.4}$$

Itt Δn a radioaktív atommagok számának Δt idő alatt történő megváltozását jelenti. Az atommagok száma csökken, ezért Δn negatív szám. Az a aktivitás tehát pozitív értékű.

Az aktivitás egysége a bequerel (ejtsd: bekerel). Az elnevezést a radioaktivitás felfedezőjéről (*Henri Becquerel* 1852–1908) kapta.

$$1\ \text{Bq} = 1\ \text{bomlás/s}, \tag{31.5}$$

Az aktivitás régi egysége a curie (ejtsd: küri). 1 Ci = $3{,}7\cdot10^{10}$ Bq. Ez az elnevezés a rádium felfedezőinek, a Curie házaspárnak (*Pierre Curie* 1859–1906, és *Maria Sklodowska-Curie* 1867–1934) állít emléket.

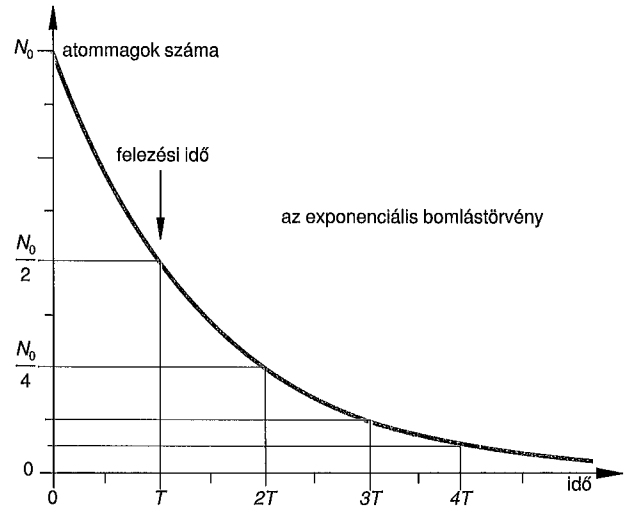
Radioaktív forrás aktivitása egyenesen arányos a forrásban levő bomlásra képes atommagok számával (N):

$$a = \lambda\cdot N, \tag{31.6}$$

λ neve: *bomlásállandó*. Mértékegysége: 1/s.

A bomlás miatt a radioaktív atommagok száma – s ezzel a minta aktivitása is – csökken. Ez a *csökkenés mértani sorozat szerint történik:* ha T idő után a kezdetben meglevő radioaktív atommagok N_0 száma éppen a felére csökken, akkor újabb T idő elteltével a felének a felére, és így tovább:

$$\frac{N(t)}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 2^{-\frac{t}{T}}. \tag{31.7}$$



31.1. ábra

Itt $N(t)$ a t időpontban még meglevő radioaktív atommagok számát jelenti. T neve: *felezési idő*. Ezt az összefüggést *exponenciális bomlástörvény*nek nevezzük.

Az a aktivitás és N (31.6) szerinti egyenes arányossága miatt hasonló összefüggés érvényes a radioaktív anyag aktivitására is:

$$\frac{a(t)}{a(0)} = 2^{-\frac{t}{T}}. \tag{31.8}$$

A felezési idő és a bomlásállandó összefüggenek:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{T}. \tag{31.9}$$

Az exponenciális bomlástörvényt szokásos még a következő alakban felírni:

$$a(t) = a(0) \cdot e^{-\lambda t}. \tag{31.10}$$

Ebben a képletben e = 2,718 28, a természetes logaritmus alapszáma. A kitevőben a bomlásállandó szerepel.

A radioaktív bomlás statisztikus jelenség, ezért törvényei gyakorlatilag csak nagyszámú atommag bomlására alkalmazhatók. Egyes atommagok bomlására csak valószínűségi kijelentéseket tehetünk. Annak a valószínűsége például, hogy egy kiszemelt atommag T idő alatt elbomlik (T a felezési idő), éppen 1/2. Újabb T idő alatt bekövetkező bomlás valószínűsége ismét 1/2, attól függetlenül, hogy az atommag mióta vár már a bomlásra.

Annak a valószínűsége, hogy t idő alatt egy a aktivitású radioaktív forrásban pontosan k bomlás következzen be, *Poisson-eloszlást* követ:

$$P(k,t) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}. \tag{31.11}$$

Ez az összefüggés addig használható, amíg az a aktivitás időben állandónak tekinthető, azaz amíg $t \ll T$.

31.1.2. Bomlási sorok, radioaktív egyensúly

Radioaktív sugárzás kibocsátásakor (a γ-sugárzás kivételével) új atommag keletkezik. Ha a keletkezett atommag ismét radioaktív, a bomlás tovább folytatódik. Több, egymásra következő bomlás sorozatát *radioaktív bomlási sornak* nevezzük. A radioaktív bomlási sorban általában α-, β-, és γ-bomlások követik egymást. Láttuk korábban, hogy ezek közül egyedül az α-bomlás változtatja meg az A tömegszámot: néggyel csökkenti. Így négy bomlási sort különböztetünk meg attól függően, hogy a bomlási sorban levő elemek tömegszáma néggyel osztva milyen maradékot ad. Ezek a következők:

- A 4k család: első elem a $^{232}_{90}$Th, $T = 1,8 \cdot 10^{10}$ év, utolsó eleme a $^{208}_{82}$Pb.
- A 4k + 1 család: első elem a $^{237}_{93}$Np, $T = 2,14 \cdot 10^{6}$ év, utolsó eleme a $^{209}_{83}$Bi (A rövid felezési idő miatt ennek a családnak a tagjai már elbomlottak, s így csak mesterségesen állíthatók elő).
- A 4k + 2 család: első elem a $^{238}_{92}$U, $T = 4,54 \cdot 10^{9}$ év utolsó eleme a $^{206}_{82}$Pb.
- A 4k + 3 család: első elem a $^{235}_{92}$U, $T = 7,04 \cdot 10^{8}$ év utolsó eleme a $^{207}_{82}$Pb.

A radioaktív bomlási családokat a 31.2a–d. ábrák mutatják.

Hosszú idő alatt a bomlási sor tagjai között radioaktív egyensúly áll be: időegység alatt ugyanannyi atommag bomlik el az egyik fajtából, mint amennyi a bomlási sor azt megelőző tagjából keletkezett. Egyensúlyban tehát a bomlási sor egyes tagjainak az aktivitása egyenlő.

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots \tag{31.12}$$

A (31.6) és a (31.9) összefüggések felhasználásával ebből azonnal adódik, hogy radioaktív egyensúlyban levő elemekre:

$$N_1 : N_2 : N_3 : \ldots = T_1 : T_2 : T_3 : \ldots \tag{31.13}$$

Itt $N_1, N_2, N_3, \ldots$ a bomlási sor egyes tagjaiból meglevő atommagok számát, T_1, T_2, T_3, pedig a megfelelő felezési időket jelöli.

Radioaktív egyensúly fennállása esetén a (31.13) összefüggés alapján egy anyagdarabban levő radioaktív elemek felezési ideje alapján azok koncentrációjára lehet következtetni.

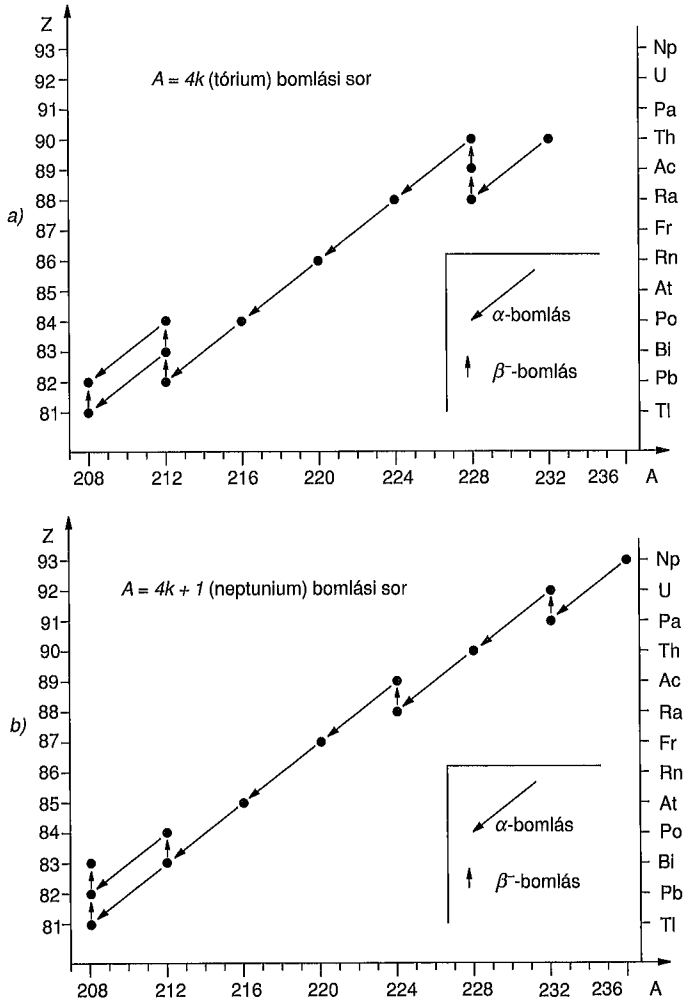
Példaként kiszámítjuk, legalább mekkora tömegű uránszurokércet kellett feldolgoznia a Curie házaspárnak 1 g tiszta rádium előállításához. (A rádium az urán bomlási sorának egyik tagja, felezési ideje 1602 év.)

Első közelítésként feltesszük, hogy az ásványban csak $^{238}_{92}$U és $^{226}_{88}$Ra atommagok vannak. A keresett mennyiségű ásvány 1 g rádiumot tartalmaz.

Ebben $n_{Ra} = \frac{1}{226} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 2,65 \cdot 10^{21}$ rádium atommag van.

Az urán atommagok száma ekkor:

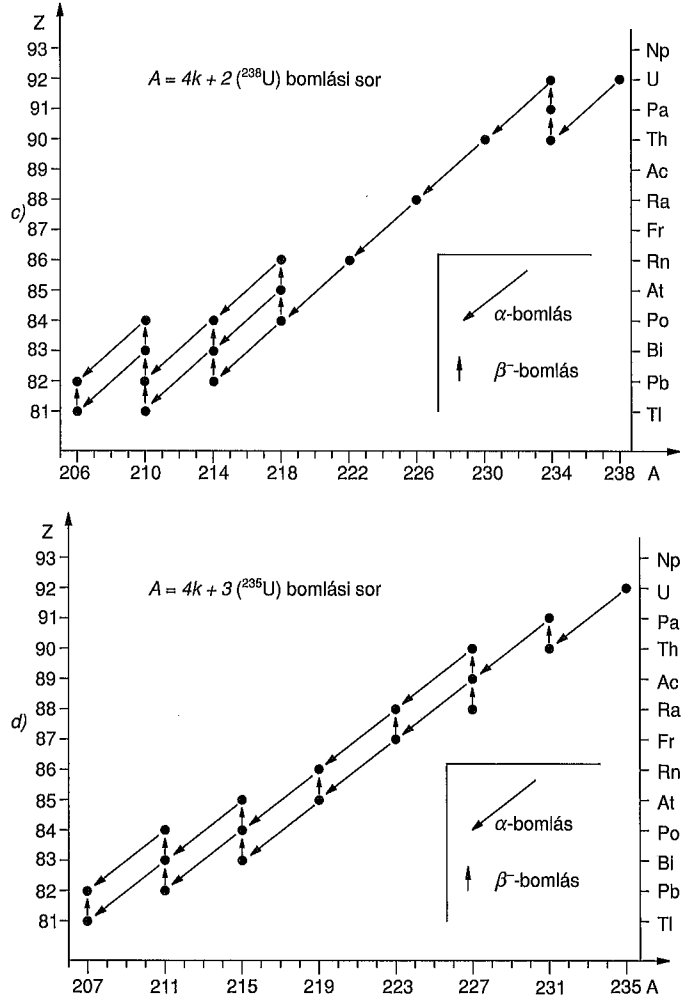
$$n_U = \frac{T_U}{T_{Ra}} \cdot n_{Ra} = \frac{4,51 \cdot 10^9 \text{ év}}{1602 \text{ év}} \cdot 2,65 \cdot 10^{21} = 7,46 \cdot 10^{27}.$$



31.2a–b. ábra

Ennyi uránatom tömege pedig

$$m_U = \frac{7,46 \cdot 10^{27}}{6 \cdot 10^{23}} \cdot 238\ \text{g} = 2,96 \cdot 10^6\ \text{g} = 2960\ \text{kg!}$$



31.2c–d. ábra

További közelítésként kiszámíthatnánk az urán bomlási sora többi tagjának a hatását is. Az eredmény csak a negyedik jegyben módosul. Mégis a Curie házaspárnak a fentebb számítottnál jóval nagyobb tömegű szurokércet kellett feldolgoznia egyetlen gramm tiszta rádium előállításához, mert az ásvány nagy mennyiségben tartalmazott olyan elemeket is, amelyek nem tartoznak az urán bomlási sorába, s így nem szerepelnek a számításunkban.

A (31.13) képlet alapján kőzetek korát is meg lehet határozni. Urántartalmú kőzetek korát pl. $^{206}_{82}Pb$-tartalmuk alapján határozhatjuk meg. A $^{206}_{82}Pb$ a $^{238}_{92}U$ bomlási sorának utolsó tagja. Ha pl. egy urántartalmú kőzetben minden harmadik uránatomra jut egy ólomatom, a kezdetben meglevő urán mennyiségének ¼ része már elbomlott ólommá, s így csak a ¾ része maradt meg. Ezért $\frac{3}{4}=2^{-\frac{t}{T}}$, ahol t az ásvány keletkezése óta eltelt idő, T pedig az urán felezési ideje ($T = 4{,}51\cdot10^9$ év). A keresett t az egyenlet logaritmálásával egyszerűen meghatározható:

$$-\frac{t}{T}\cdot\lg 2=\lg\frac{3}{4},$$

s ebből

$$t=-T\frac{\lg\frac{3}{4}}{\lg 2}=-4{,}51\cdot10^9\cdot\frac{-0{,}125}{0{,}301}=1{,}87\cdot10^9 \text{ év}.$$

31.1.3. A radioaktív sugárzások terjedése vákuumban

Sugárzások *intenzitásán* (I) általában a sugárzás irányára merőleges, egységnyi felületen időegység alatt áthaladt energiát értjük. Az intenzitás egysége tehát $\frac{\text{J}}{\text{m}^2\cdot\text{s}}$. Radioaktív sugárzások esetében (erősen kvantumos jellegük miatt) még egy másik fogalmat is bevezetünk. Egységnyi felületen egységnyi idő alatt áthaladt részecskék számát a sugárzás *fluxusának* nevezzük. A fluxus jele Φ, egysége: $\frac{1}{\text{m}^2\cdot\text{s}}$. A fluxus és az intenzitás egyenesen arányosak:

$$I = E\cdot\Phi, \tag{31.14}$$

ahol E a sugárzás részecskéinek átlagenergiáját jelöli.

Határozzuk meg egy a aktivitású, pontszerű sugárforrástól r távolságban a radioaktív sugárzás fluxusát! Ha a sugárzás vákuumban terjed, azaz a kibocsátott részecskék nem nyelődnek el valamilyen közegben, akkor a forrást körülvevő bármely r sugarú gömb $4\pi r^2$ felületén is ugyanannyi részecske lép át időegységenként, mint amennyit a forrás kibocsát. Az egységnyi felületre eső részecskék száma tehát:

$$\Phi(r)=\frac{a}{4\pi\cdot r^2} \tag{31.15}$$

A fluxus tehát a forrástól mért távolság négyzetével fordítottan arányos. Hasonló összefüggés érvényes az intenzitásra is.

31.1.4. A sugárzás terjedése anyagban. Lineáris energiaátadás

Anyaggal kölcsönhatásban a sugárzás részecskéi energiájukat a közeg atomjainak, molekuláinak ionizálására vagy gerjesztésére fordíthatják. Legnagyobb valószínűséggel az elektromos töltésű részecskék (az α- és a β-sugárzás) ionizálnak, az elektromágneses röntgen- vagy γ-fotonok kevésbé. A semleges neutron csak protonok vagy más atommagok meglökése révén, illetve magreakciókkal tud kölcsönhatásba lépni az anyaggal. Ezek a másodlagosan keltett vagy meglökött, nagy energiájú töltött részecskék pedig már ionizálnak.

Lineáris energiaátadásnak nevezzük a közegnek egységnyi úthosszon átadott energiát (angolul: linear energy transfer, LET). Egysége: J/m.

Elektromos töltésű részecskék lineáris energiaátadása függ egyrészt a részecskétől, másrészt a közegtől, amelyben a részecske mozog.

$$\frac{dE}{dx}=\text{konst}\cdot\left(\frac{z^2}{v^2}\right)\cdot\left(\frac{Z\cdot\rho}{A}\right)\cdot K. \tag{31.16}$$

Az első zárójelben lévő mennyiségek a *részecskére* vonatkoznak: töltés (z), illetve sebesség (v).

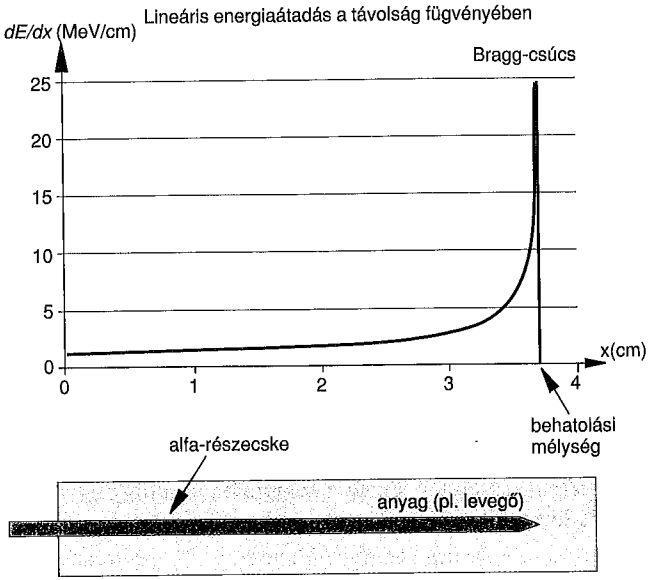
A második zárójel a *közeg* adatait tartalmazza: ρ a közeg átlagos sűrűsége, Z a közeg atomjainak átlagos rendszáma, A pedig az atomok átlagos tömegszáma.

A képletben szereplő konstans értéke: $\text{konst}=\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\cdot\frac{4\pi N_A}{m_e}$.

Itt $N_A = 6\cdot10^{23}$ az Avogadro-szám, e az elemi töltés, m_e pedig az elektron tömege. A K mennyiség lassan változó függvény (nagyságrendileg 1 körüli értékű), amely függ a közeg atomjainak átlagos gerjesztési potenciáljától, tartalmaz anyagsűrűség-korrekciót, héjkorrekciót, valamint relativisztikus korrekciót.

A képlet ilyen formában csak az elektronoknál nehezebb töltött részecskékre (pl. alfa-részecske, proton stb.) vonatkozik.

A közegnek átadott energia miatt a sugárzás részecskéi veszítenek energiájukból. (31.16) szerint a lineáris energiaátadás $\sim 1/v^2$, azaz a (kezdeti) nagy sebességű részecskék lassabban, a lelassult részecskék pedig egyre gyorsabban veszítik el az energiájukat (lásd 31.3. ábra).



31.3. ábra

Emiatt az azonos kezdeti energiájú részecskék az elnyelő anyagdarab többékevésbé jól meghatározott mélységű rétegéig jutnak el, s ott fogva maradnak. Ezt nevezzük *behatolási mélységnek,* illetve *hatótávolságnak.* Miután itt haladnak a leglassabban, ennek a közelében ionizálnak a legsűrűbben (lásd Bragg-csúcs az ábrán).

Töltött részecskék behatolási mélységét (D) jól közelíti a következő empirikus összefüggés:

$$D = \frac{C}{\rho_e} \cdot \frac{E^{1,73}}{A \cdot Z^2}, \qquad (31.17)$$

ahol C a közegre jellemző állandó, ρ_e az elektronok sűrűsége a közegben, E, A, Z pedig rendre a bejövő részecske energiája, tömegszáma, illetve rendszáma.

Elektromágneses (röntgen- és gamma-) sugarak az anyagban jóval ritkábban ionizálnak, mint az elektromos töltésű részecskék, ezért rájuk nézve egyszerűbb

összefüggés érvényes. A fluxus (az $1/r^2$-es távolságfüggés mellett) mértani sorozat szerint változik:

$$\Phi(r) = \frac{a}{4\pi r^2} \cdot 2^{-\frac{r}{R}}. \qquad (31.18)$$

A képletben R a *felező rétegvastagság.* Ennek a nagysága függ a közegtől és a γ-sugarak energiájától. R a γ-sugár energiájának növekedésével és az elnyelő anyag rendszámának és sűrűségének csökkenésével nő. A felező rétegvastagságnak szemléletes jelentést adhatunk: azt a távolságot jelenti, amely után a párhuzamosan haladó sugárnyaláb fluxusa a felére csökken. Azokat a sugárzásokat, amelyekre vonatkozóan az R felezési rétegvastagság nagy értékű, nagy áthatolóképességű sugárzásoknak nevezzük.

A 2,5 MeV (0,4 pJ) energiájú γ-sugarakra vonatkozó R értékek néhány anyagra vonatkozóan:

Anyag	R (cm)
Hó	50
Fa	25
Víz	23
Talaj	14
Beton	10
Páncél	2,8
Ólom	1,8

Nagy energiájú *elektronok* – a gammasugarakhoz hasonlóan – inkább az exponenciális fluxusgyengülés törvényét követik, míg kis energiák esetén inkább a behatolási mélység és a (31.17) összefüggés használható.

Összehasonlításképpen megemlítjük, hogy pl. 1,7 MeV (0,27 pJ) részecskeenergia esetén a behatolási mélység alumíniumban α-részecskére vonatkozóan 0,0065 mm, elektronokra pedig 3,3 mm.

Pontszerű γ-forrás fluxusának távolságfüggését gyakran más alakban adják meg:

$$\Phi(r) = \frac{a}{4\pi r^2} \cdot e^{-\mu \cdot r}.$$

μ neve: *abszorpciós együttható*. R és μ kapcsolata pedig:

$$\mu = \frac{\ln 2}{R} = \frac{0,693}{R}. \qquad (31.19)$$

31.1.5. Az ionizáló sugárzások biológiai hatása

Radioaktív sugárzások által az élő anyagnak átadott energia az atomok, molekulák ionizálására, értékes kémiai kötések felszakítására, végső soron a kémiai–biokémiai folyamatok megzavarására, a szervek, szövetek károsodására vezet. Az emberiség a kozmikus sugárzás és a természetes radioaktív elemek sugárzása révén állandó sugárzásnak van kitéve már évmilliók óta. Ezt a besugárzást szervezetünk felmérhető károsodás nélkül viseli el. Fontos megjegyezni, hogy ennek a háttérsugárzásnak az intenzitása a Föld különböző helyein, sőt még különböző évszakokban is más és más lehet. Annak mértékében akár tízszeres ingadozások is lehetnek. Statisztikailag nem kimutatható, hogy a Föld azon területein, ahol a háttérsugárzás magasabb, több lenne a rákos vagy genetikailag károsult személy, mint a lényegesen kisebb intenzitású háttérsugárzásos területeken. Ezért úgy tűnik, hogy az emberi szervezet a háttérsugárzásban bekövetkező ingadozásokra nem érzékeny.

A háttérsugárzásénál jóval nagyobb sugárdózisok azonban biológiai károsodásokhoz vezetnek. Ezek a károsodások több szempont szerint is csoportosíthatók. A leggyakrabban használt szempontok a következők:

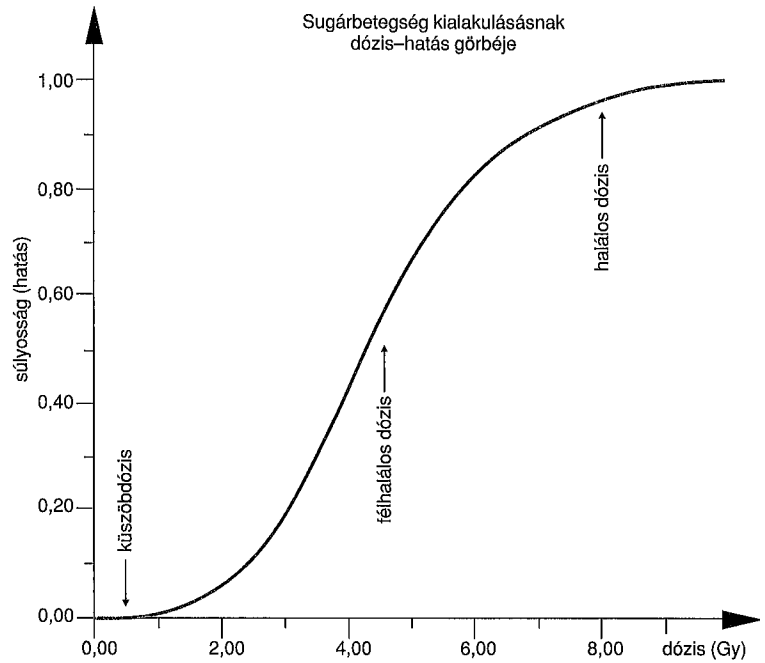
- A sugárdózist kapott testrész szerint
  - „egésztest"-besugárzás,
  - egyes szervek, szövetek besugárzása.
- A dózist kapott és a károsodott személye szerint:
  - szomatikus (a károsodott személy ugyanaz, mint aki a sugárdózist kapta),
  - genetikus (a károsodott személy nem kapott dózist, csak „örökli" a károsodást).
- A károsodás jelentkezési ideje szerint
  - „azonnali" (a károsodás a besugárzást követő rövid időn belül jelentkezik),
  - „késői" (a károsodás akár több év múlva jelentkezik).
- A károsodás fellépésének módja szerint
  - „determinisztikus" (a károsodás szükségszerűen, mindig fellép),
  - véletlenszerű vagy sztochasztikus (a károsodás fellépése valószínűségi törvényeket követ).

Itt nincs lehetőségünk arra, hogy valamennyi lehetőséget számba vegyük.

Megemlítjük azonban, hogy a sugárzás *genetikai* hatását emberen annak ellenére sem sikerült kimutatni, hogy Hirosimában és Nagaszakiban a bombatámadást túlélő emberek százezrei kaptak kisebb-nagyobb sugárdózist. A sugárzás elmúltát követően fogant gyermekeiken azonban máig sem sikerült megemelkedett gyakoriságú genetikai rendellenességeket kimutatni a sugárzást nem kapott csoportok gyermekeihez képest.

A fenti csoportosításban az „azonnali" károsodások általában determinisztikusak (ezt hívjuk sugárbetegségnek), a késői károsodások pedig sztochasztikusak (véletlenszerűek).

Egésztest-besugárzást követő „azonnali", determinisztikus károsodások. Azonnali hatásnak azt nevezzük, amikor a sugárbetegség a besugárzást követő 3 hónapon belül kialakul. Az ezekre vonatozó dózishatásgörbét a 31.4. ábra mutatja.



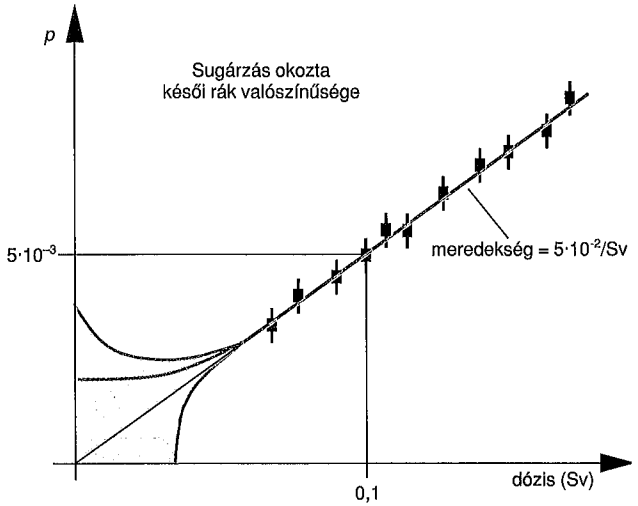
31.4. ábra

A sugárbetegség kialakulásának van egy küszöbdózisa, kb. 0,25 Gy. (A Gy az elnyelt dózis egysége. Pontos definícióját lásd később.) Ennél kisebb sugárdózist kapott egyéneken soha nem figyeltek meg sugárbetegséget. A küszöbdózis fölött azonban a sugárbetegség determinisztikusan kialakul, és a *súlyossága* függ a kapott dózistól. A sugárbetegségből – a súlyosságától függően – fel lehet gyógyulni, illetve akár bele is lehet halni. A görbe közepe táján már annyira súlyos kimenetelű a betegség, hogy a betegek fele meghal (a többiek felgyógyulnak). Az ehhez tartozó értéket *félhalálos dózis*nak nevezzük. Értéke (egyszeri egésztest-besugárzás esetén) kb. 4,5 Gy. A görbe „telítődik", hiszen a legsúlyosabb kimenet az, ha a beteg meghal

(súlyosság = 1). Ez kb. 8–10 Gy esetén már biztosan bekövetkezik. Ez a halálos dózis.

Hasonló görbék írják le a különböző szervek, szövetek sugársérüléseit, illetve elhalását is. Azokra vonatkozóan azonban természetesen más – a szervtől függő – sugárdózisértékek jelentik a küszöbdózist, illetve a „halálos" dózist.

A sugárdózisok késői, sztochasztikus hatásai. A sugárdózisoknak vannak késői, gyakran évekkel később jelentkező, biológiai hatásai is. Ezek daganatos betegségek (leukémia, rák) formájában jelentkeznek. Fontos különbség az azonnali sugárbetegséghez képest, hogy itt nem a betegség súlyossága, hanem a betegség kialakulásának valószínűsége (előfordulási gyakorisága) függ a korábban elszenvedett sugárdózistól. Ezért az ezekre vonatozó dózis–hatás görbének a függőleges tengelyén is egy valószínűség szerepel (lásd 31.5. ábra).



31.5. ábra

Az ábra mutatja, hogy a nagyobb dózisok tartományában „mérési pontok" vannak. Ezeket legnagyobbrészt a hirosimai és nagaszaki túlélők több százezres populációján végzett vizsgálatok szolgáltatták. Ilyen módon a radioaktív sugárzások késői hatásainak kockázatát *kísérleti úton* jól ismerjük (jobban, mint a legtöbb egyéb ipari kockázati tényezőt). Az ábra alapján a halálos kimenetelű rákos megbetegedések kockázati tényezője kb. 5% sievertenként. (Sv az egyenértékdózis és az effektív dózis egysége. A pontos definíciókat lásd később.)

Az ábra arra is felhívja a figyelmet, hogy az igen kis dózisok kockázatát nem ismerjük pontosan. Ennek olyan egyszerű oka van, hogy ilyen kis kockázatok pontos meghatározásához igen nagy populációra lenne szükség.

(Pl. 10^{-6} kockázat azt jelenti, hogy egymillió, azonos körülmények között „besugárzott" emberből egyetlen többlet rákos megbetegedést kellene kimutatni. Ez nyilván lehetetlen, ha figyelembe vesszük, hogy egymillió emberből „természetes" körülmények között kb. 240 000-en halnak meg valamilyen rákban).

A sugárvédelem a kis dózisok tartományában is a lineáris extrapolációt fogadja el.

Védekezés ionizáló sugárzások ellen. Láttuk, hogy van olyan sugárzási szint (a háttérsugárzásnál jóval magasabban), amely rövidebb-hosszabb idő alatt biológiai károsodást okozhat. Ezért a szervezetet ért ionizáló sugárzások mennyiségét e lehető legkisebbre kell csökkenteni

Ennek érdekében csak indokolt esetben szabad sugárveszélyes tevékenységet folytatni, és akkor is

- minimumra kell csökkenteni az ionizáló sugárforrások közelében eltöltött *idő* nagyságát;
- csipeszek, fogók, manipulátorok segítségével növelni kell a sugárforrás *távolságát;*
- megfelelő *árnyékoló anyagokat* (abszorbenseket) kell alkalmazni.

Dózismennyiségek. Az ionizáló anyagok biológiai hatásával, az embereket ért sugárzások dózisainak megállapításával és a sugárzások elleni védekezéssel a sugárbiológia és dozimetria foglalkozik.

Az alábbiakban röviden ismertetjük a sugárvédelemben leggyakrabban használatos egységek definícióját.

Elnyelt dózis. A tömegegységenként elnyelt energia az elnyelt dózis:

$$D = \frac{\Delta E}{\Delta m}. \tag{31.20}$$

Egysége a gray (Gy). 1 Gy = 1 J/kg. Az angol *Louis Harold Gray* (1905–1965) radiobiológusról nevezték el.

Az okozott sugársérülés azonban nemcsak az elnyelt energiától függ, hanem attól is, hogy az elnyelt energia milyen fajta változásokat hoz létre. Ezt viszont a besugárzó részecske minősége, másrészt az elnyelő élő szövet tulajdonságai határozzák meg. Ezeknek az elméleti leírása bonyolult volna, ezért ezeket a különbségeket empirikusan megállapított arányossági tényezőkkel vesszük figyelembe.

Egyenértékdózis. Azonos fokú biológiai károsodást okozó, de különböző típusú részecskéktől eredő dózisokat biológiai szempontból egymással egyenértékűnek tekintünk.

Az egyenértékdózis tehát

$$H = w_R \cdot D, \tag{31.21}$$

ahol D az elnyelt dózis és w_R a sugárzás minőségi tényezője. w_R értéke röntgen-gamma- és béta-sugárzásra 1, neutronsugárzásra – a neutronok energiájától füg-

gően 2...10, míg nagyobb töltött részecskék (pl. alfa-sugárzás) esetén 10...20 is lehet. Az egyenértékdózis egysége a sievert (Sv). Az egységet *Rolf Maximilian Sievert* (1896–1966) svéd orvos-fizikusról nevezték el.

Effektív dózis. Ha nem az egész testet éri valamilyen egyenletes sugárterhelés, hanem az egyes szervek, szövetek más és más dózisokat kapnak, akkor a sugárzások késői hatásaképpen létrejövő betegségek (elsősorban daganatos betegségek, rák, leukémia) kialakulásában a különböző szerveknek, szöveteknek is más és más szerepük lesz. Az egyes szerveknek, szöveteknek a késői hatások (rák) kialakulásához való hozzájárulását egy w_T „súlyfaktorral" szokás figyelembe venni. Azaz, ha egy valamilyen T szövet H_T egyenérték-dózisnyi besugárzást kapott, az a rák kialakulásának kockázata szempontjából olyan, mintha az egész test ($w_T \cdot H_T$) egyenérték-dózisnyi besugárzást kapott volna. Az effektív dózist úgy kapjuk meg, hogy összegezzük a test minden szervére, szövetére (T) az így súlyozott értékeket. Azaz

$$H_{\text{eff}} = \sum_T w_T H_T. \tag{31.22}$$

Az effektív dózis mértékegysége is a sievert, mivel a w_T súlytényezők dimenzió nélküli számok.

Míg tehát az egyenértékdózis a *sugárzások* különbözőségét veszi figyelembe, az effektív dózis a *szervek, szövetek* különbözőségét veszi figyelembe a késői hatás szempontjából. A gyorsan osztódó sejtek, szövetek általában érzékenyebben reagálnak a sugárhatásra, mint a lassabban osztódók. Ez lehet hasznos is, mivel ez teremti meg a rákos szövetek sugárkezelésének alapjait (hiszen a rákos szövetek gyorsan osztódó, burjánzó sejtekből állnak). Másrészről azonban ennek az is a következménye, hogy a fiatalok, a csecsemők (és még inkább a magzat) sokkal sérülékenyebbek, mint egy felnőtt vagy egy idős ember. Az alábbi táblázat néhány legfontosabb szervre, szövetre mutatja a w_T súlyfaktorokat.

T	w_T	T	w_T
Ivarszervek	0,20	Pajzsmirigy	0,05
Vörös csontvelő	0,12	Máj	0,05
Vastagbél	0,12	Nyelőcső	0,05
Tüdő	0,12	Bőr	0,01
Gyomor	0,12	Csontfelszín	0,01
Hólyag	0,05	Egyéb	0,05
Mellkas	0,05	*Összesen*	1,00

31.1.5.1. A sugárvédelem alapelvei

A bennünket ért sugárzás dózisa a kozmikus sugárzás és a természetes radioaktivitás miatt nem csökkenthető nullára. Mint korábban említettük, a szervezet a természetes háttérsugárzásnál magasabb dózist is elvisel anélkül, hogy kimutatható egészségkárosodás jönne létre. A nukleáris alkalmazásoknak nagy társadalmi haszna van, hiba lenne lemondani ezekről a kismértékű sugárzástól való indokolatlan félelem miatt. Más oldalról viszont azt sem szabad megengedni, hogy az embereket a feltétlenül szükségesnél nagyobb mértékű, vagy pedig az egészségre biztosan káros, mesterséges eredetű sugárterhelés érje. Ezt a célt szolgálja a sugárvédelem hármas alapelve.

A sugárvédelem első alapelve az *indokoltság elve:* Eszerint kizárólag olyankor végezhető sugárterheléssel járó tevékenység, ha az a társadalomra egyértelmű haszonnal jár. A haszon kiszámításánál figyelembe kell venni a tevékenység (vizsgálat) költségeit, a sugárvédelem költségeit és a – pénzben nehezen kifejezhető – sugárkárosodáshoz rendelhető költségeket is. Sugárveszélyes tevékenységet kizárólag akkor szabad végezni, ha nem áll rendelkezésre hasonló költséggel, hasonló eredményt adó, de sugárveszéllyel nem járó módszer.

A második alapelv az *optimálás elve (ALARA-elv).* A sugárveszéllyel járó tevékenységet oly módon kell végrehajtani, amely biztosítja, hogy a sugárterhelés olyan kicsi legyen, amekkora még ésszerűen elérhető. Az ALARA szó az angol *„As Low As Reasonably Achievable"* kifejezés (= annyira kicsi, amennyire az még ésszerűen elérhető) kezdőbetűiből alkotott betűszó.

A harmadik alapelv a *korlátozás elve.* Egyetlen személynél vagy embercsoportnál sem léphet fel a társadalom által elviselhetőnek ítélt kockázatot jelentő évi dóziskorlátnál nagyobb sugárterhelés. A korlátozás elvének végrehajtását a dóziskorlátok rendszere teszi lehetővé.

Dóziskorlátok. A korlát valamely mennyiségnek az az értéke, amelyet nem szabad túllépni. A sugárvédelemben korábban többféle korlátot használtak (elsődleges korlát, másodlagos korlát, származtatott korlát, működési korlát stb.). Mi itt csak a jelenleg egyedül hivatalos elsődleges korlátokat ismertetjük. Ezek egyenértékdózisra vagy effektív dózisra vonatkoznak. Az elsődleges dóziskorlátokat – a Nemzetközi Sugárvédelmi Bizottság, az ICRP ajánlásai alapján – az egyes országok nemzeti hatóságai határozzák meg. A jelenleg érvényben levő nemzetközi előírások szerinti dóziskorlátokat a következő táblázat foglalja össze (külön a sugárveszélyes helyen dolgozókra és külön a lakosságra):

Csoport	Egész testre	Szervek (mSv/év)
Dolgozók	5 évenként 100 mSv, de egyik évben sem lépheti túl az 50 mSv-et	bőrfelület: 500 szemlencse: 150
Lakosság	1 mSv/év	bőrfelület: 50 szemlencse: 15

Külső és belső sugárterhelés. Különböző fajlagos ionizációjuk miatt az alfa-, béta- és gamma-sugárzások különbözőképpen veszélyesek.

Kívülről jött sugárzás esetén legkevésbé veszélyes az alfasugárzás, mert nagy fajlagos ionizációja miatt már a bőr legfelső rétegében elnyelődik. A béta-sugárzás – energiájától függően – a testszövetbe néhány mm-től akár néhány cm-ig is behatolhat. A gamma-sugárzás kis fajlagos ionizációjú, ezért nagy áthatolóképességű, így belső szöveteket is károsíthat. A védekezés a kívülről jött alfa-sugárzás ellen a legkönnyebb; ezt már néhány cm-es levegőréteg, vékony papírlap vagy ruhaszövet is teljesen elnyeli. A béta-sugarak hatótávolsága levegőben már néhányszor 10 cm, fémekben pedig 0,1 mm-től néhány mm-ig terjed. A gamma-sugarak ellen vastag, nagy rendszámú elemekből (pl. ólom) készült árnyékolással lehet védekezni.

A testbe bejutott (inkorporált), azonos aktivitású radioaktív anyagok közül a legveszélyesebb az alfa-sugárzó, mert a teljes energiáját nagyon kis térrészben adja le. Ezért ott nagy roncsolást, égési sebekhez hasonló elváltozásokat okoz (tüdő, tápcsatorna, nyálkahártyák stb.). A többi inkorporált sugárforrás nagyobb testrészeket, esetleg az egész testet, de kisebb fajlagos károsítással veszélyeztet.

31.1.6. A sugárzások érzékelése, detektálása

A sugárzások érzékelése közvetett módon történik. Azt a hatást észleljük, illetve erősítjük fel makroszkopikus méretűre, amelyet a sugárzás által a környezetnek átadott energia a környezetben kivált. Ezért legkönnyebben a nagy fajlagos ionizációjú sugárzásokat lehet detektálni. Az érzékelőberendezéseknek két nagy csoportja van: a részecskék nyomát láthatóvá tevő detektorok, illetve a részecskeszámlálók.

31.1.6.1. Részecskék nyomát láthatóvá tevő detektorok

Fotoemulzió. Fényérzékeny rétegben töltött részecskék pályája mentén olyan centrumok jönnek létre, ahol a lemez előhívásakor a fotokémiai reakciók végbemennek, s a lemez megfeketedik. A részecskenyomok vastagságából a részecske

fajlagos ionizációs képességére, a nyomok hosszából pedig a részecske teljes energiájára lehet következtetni.

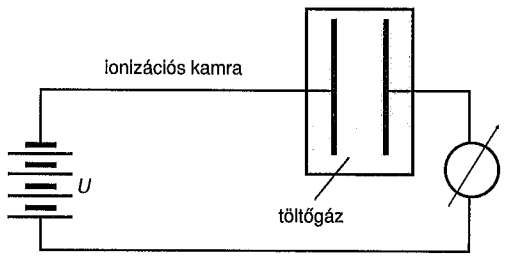
Szilárdtest-nyomdetektorok. Egyes műanyagokban, illetve ásványokban (pl. csillámpala) haladó ionizáló részecskék pályájuk mentén olyan károsodásokat okoznak, amelyek megfelelő oldószerrel elegendően hosszú ideig történő kezeléssel, mikroszkóp alatt láthatóvá tehetők. Egy ilyen ásvány „emlékezik" az élete során kapott összes radioaktív sugárzás nyomaira. Így számunkra ezek történelem előtti korok radioaktív sugárzási viszonyairól is hírt adhatnak.

Ködkamra. Túltelített gőzben nagy sebességű töltött részecskék pályájuk mentén páralecsapódási centrumokat képeznek. Így a részecskék nyoma vékony ködfonál formájában láthatóvá válik.

Buborékkamra. Nagy sebességű részecskék nyomainak láthatóvá tételére a ködkamra nem alkalmas, mert a benne levő gáz kis sűrűsége miatt kicsi a fajlagos ionizáció, s csak nagyon kevés ionizációs centrum képződik. Túlhevített folyadék – nagyobb sűrűsége miatt – sokkal alkalmasabb nagy energiájú részecskék nyomainak kimutatására. Az ionizáló részecskék pályája mentén a túlhevített folyadék forrása megindul, s a részecskék nyoma vékony buborékfonál formájában láthatóvá válik. A buborékkamra a nagy energiájú fizika egyik fontos eszköze.

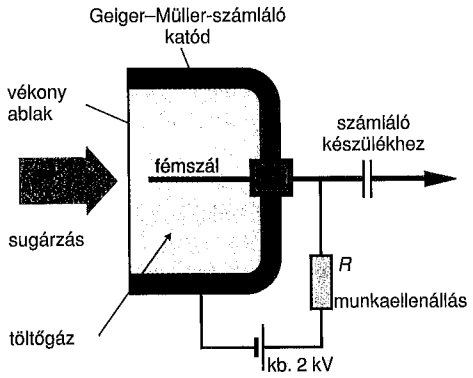
31.1.6.2. Részecskeszámlálók

Ionizációs kamra. Ritkított gázban haladó ionizáló sugárzás az energiájával egyenesen arányos számú atomot, illetve molekulákat ionizál. A szétválasztott pozitív és negatív töltéseket elektródokkal összegyűjtve, áramlökést kapunk, amelynek nagysága a bejövő részecske által a gázban leadott energiával arányos. Az áramlökés (impulzus) amplitúdóját alkalmas elektronikus eszközökkel megmérve a bejövő részecske energiáját, az impulzusok számából pedig az ionizáló sugárzás részecskéinek számát határozhatjuk meg.



31.6. ábra

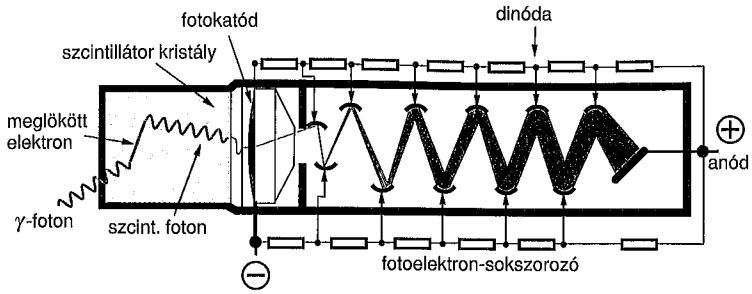
Geiger–Müller-számlálócső (GM-cső). Működési elve hasonlít az ionizációs kamráéhoz. Annyi a különbség, hogy az ionizáló részecske által keltett elsődleges töltéshordozókat külső elektromos térrel nemcsak összegyűjtjük, hanem annyira felgyorsítjuk, hogy újból tudjanak ionizálni. Így a csőben lavinaszerű kisülési folyamat indul meg. Ennek eredményeképpen olyan nagy áramlökés jön létre, amelyet már sokkal egyszerűbb elektronikus eszközökkel is meg lehet számlálni. A lavinakisülést a bejövő részecske csupán elindítja, s így az áramlökés amplitúdójából a részecske energiáját már nem lehet meghatározni. A 31.7. ábra egy végablakos GM-cső elvi felépítését mutatja. A vékony, hártyaszerű végablakon át az elektromos töltésű részecskék (α-, illetve γ-sugarak) is be tudnak lépni a cső gázterébe, ahol az ionizációs lavinát el tudják indítani. A vékony fémszál közelében jön létre az a nagy térerősség, amely az elsődleges ionizáció során keltett elektronokat felgyorsítja a lavinafolyamat létrehozásához szükséges energiára.



31.7. ábra

Szcintillációs számláló. Az egyik legősibb részecskeszámlálási módszer. Azon alapul, hogy ionizáló részecskék egyes anyagokban (pl. ZnS, NaI, CsI, illetve egyes szerves kristályok) fényfelvillanásokat, ún. szcintillációkat okoznak. A kibocsátott fény színe a szcintillátor anyagától függ, a fény erőssége pedig a részecskék által az anyagban leadott energiával arányos. A magfizika őskorában ezeket a felvillanásokat sötéthez szoktatott szemmel közvetlenül érzékelték és számolták. Ma az észlelésre és a felvillanások intenzitásának mérésére nagy érzékenységű elektronikus eszközöket, ún. fotoelektron-sokszorozókat használnak (31.8. ábra).

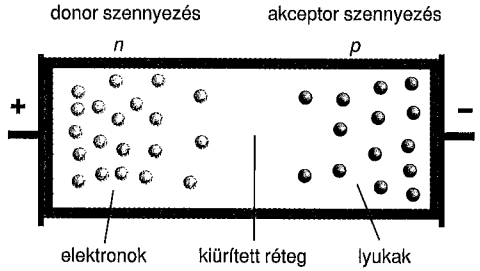
Termolumineszcens dózismérő. A sugárzás hatására létrejövő lumineszcencia jelenségét hasznosítja. Megfelelően szennyezett szcintillációs anyagban a radioaktív sugárzás által gerjesztett elektronok befogódhatnak a kristály hibahelyeire, s így egy részük nem hoz létre közvetlen fényfelvillanást. Az anyagot azonban később (már a besugárzás után) felmelegítve a hibahelyekre korábban befogódott



31.8. ábra

elektronok kiszabadulnak, s így termikusan indukált lumineszcenciát okoznak. A kifűtés során nyert fénymennyiség arányos az anyagot korábban ért radioaktív sugárzás dózisával.

Félvezető-detektor. Működése azon alapul, hogy záróirányba előfeszített félvezető-diódában (lásd a 25.5.3. pontot) töltéshordozóktól mentes, kiürített réteg alakul ki.



31.9. ábra

Ha ebbe a rétegbe ionizáló sugárzás érkezik, töltéshordozó-párok szabadulnak fel, amelyek a fennálló elektromos térerősség hatására az anód, illetve a katód felé vándorolnak, s így áramlökést okoznak. A felszabadult töltéshordozó-párok száma az ionizáló sugárzás által a kiürített rétegben leadott energiával arányos. Így az áramlökés amplitúdója (pontosabban az áramlökésben áramló teljes töltésmennyiség) a beérkezett részecske energiájával arányos. Az áramlökéseket nagy érzékenységű elektronikus eszközökkel megszámlálhatjuk, illetve amplitúdóikat megmérhetjük. Ma már olyan nagy tisztaságú félvezetőket is elő lehet állítani, amelyek – megfelelően lehűtve – szinte szigetelőként viselkednek. Amikor azonban ionizáló részecske érkezik a félvezetőbe, a felszabaduló töltéshordozópárokat a félvezetőre kapcsolt elektromos mező begyűjti, és áramlökés keletkezik. Így működnek a HPGe- (High Purity Germanium) detektorok.

31.2. Az atommag jellemzői

31.2.1. Az atommag mérete

Az atommag sugarát először Rutherford határozta meg (lásd a 17.1.2. pontot). Nagy energiájú α-sugarakkal vékony fémfóliákat bombázott, és a részecskék eltérülését vizsgálta.

Az atommag méretére más töltött részecskék eltérülése alapján is következtethetünk, α-részecskék helyett elektronokkal is kitapogathatjuk az atom belsejét.

Első pillanatban úgy látszik, hogy már kb. 1000 V feszültséggel felgyorsított elektronok is alkalmasak erre a célra. Az elektronokra ugyanis az elektronburok taszítása hat, amelynek nagyságrendileg 10^{-8} cm a sugara. Ilyen „nagy" gömbnek azonban alacsony potenciáldomb felel meg, s így már viszonylag kis energiájú elektronok is áthatolhatnak rajta, s az atommag közelébe férkőzhetnek (lásd a 17.1.2. pontot). A kvantummechanika szerint azonban az ilyen kis energiájú elektronoknak nagyon nagy a hullámhossza az atommag méreteihez képest, ezért alkalmatlanok ilyen kis objektumok felderítésére.

Az atommag megfigyeléséhez nem elegendő a (17.1) feltétel teljesülése, ezenkívül még teljesülni kell a $\lambda \sim R$ feltételnek is (λ a szóródó részecskék hullámhossza, R az atommag sugara). Egyszerű számítással ellenőrizhetjük, hogy a Rutherford által használt α-részecskék hullámhossza valóban az atommag méretének nagyságrendjébe esik.

A hullámhosszfeltétel miatt csak ~100 MeV (16 pJ), vagy ennél nagyobb energiájú elektronok használhatók jól az atommagok tulajdonságainak vizsgálatára. Ezeket gyorsítóberendezésekkel állítják elő.

Nagy energiájú elektronokkal Hofstädter szisztematikusan megmérte nagyon sok atommag sugarát. Mérései szerint az atommagok térfogata egyenesen arányos a bennük levő nukleonok számával ($V \sim A$):

$$\frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A. \tag{31.23}$$

Ebből köbgyököt vonva kapjuk:

$$R = r_0 \sqrt[3]{A} = r_0 A^{1/3}. \tag{31.24}$$

Itt $r_0 = 1{,}20 \cdot 10^{-15}$ m „egyetlen nukleon sugara".

Ezekből következik, hogy *az atommagok sűrűsége* – a folyadékcseppekéhez hasonlóan – *állandó*.

Nagy energiájú gyorsítók, a részecskefizika „mikroszkópjai". λ hullámhosszúságú részecskékkel csak olyan objektumokról nyerhetünk képet, amelyek

mérete a hullámhossznál nem sokkal kisebb. Egyre finomabb részletek felderítéséhez tehát egyre kisebb hullámhosszúságú részecskékre van szükség.

A hullámhossz csökkentésének – a de Broglie-összefüggés alapján (lásd a 19.1. szakaszt) – két útja van: a részecskék tömegének, illetve energiájának (sebességének) növelése.

Az elektronmikroszkóp azért ad részletdúsabb képet az anyag szerkezetéről, mint a fénymikroszkóp, mert a használt elektronok hullámhossza több nagyságrenddel kisebb a látható fény hullámhosszánál.

Az atommagok, illetve a még kisebb nukleonok további finomszerkezetének felderítéséhez még rövidebb hullámhosszúságú, még nagyobb energiájú részecskékre van szükség. Ezért építenek egyre nagyobb és nagyobb energiájú gyorsítóberendezéseket. A részecskegyorsítóknak két fő típusa van: lineáris (egyenes vonalú), illetve ciklikus (körpályás). Mindkét típusban csak töltött részecskéket lehet gyorsítani. A gyorsítás elektromos vagy mágneses mezővel történik. A ciklikus gyorsítóknál erős mágneses mezővel a részecskéket körpályára kényszerítjük, s így a gyorsítóelektródok között többször is áthaladva egyre nagyobb és nagyobb energiákra tesznek szert. A ciklikus gyorsítók fő típusai: betatron (elektrongyorsító), ciklotron, illetve szinkrotron.

31.2.2. Az atommagok töltése

Az atommagok töltése Ze. Z meghatározása az atomok *vonalas röntgenszínképe* alapján lehetséges.

Gyors elektronokkal bombázva a vizsgálni kívánt anyagot a Coulomb-taszítás következtében egy kötött elektron kilökhető az atomból. Kilökés után egy külső pályáról elektron ugorhat a megürült állapotba. Eközben az atom fotont sugároz ki, amelynek energiája.

$$h\nu = E_n - E_1 = Z^2 I_H \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{31.25}$$

Itt I_H a hidrogénatom ionizációs energiája (lásd a 20.3.1. pontot). (31.25) felírásakor feltételeztük, hogy a kilökött elektron az 1s állapotból távozott, és helyébe az n főkvantumszámú állapotból ugrott be egy másik. A képlet $Z \neq 1$ elektront tartalmazó atom esetén kissé módosítandó, mert az atommag körül maradt elektronok részben leárnyékolják az atommag elektromos töltését. Ezért az elektron Ze-nél kisebb magtöltést „érez":

$$\nu = \frac{I_H}{h} \left(Z - z\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Itt z az árnyékoló elektronok effektív számát fejezi ki. $n = 2$ főkvantumszámú állapotból az 1s „lyukba" történő röntgenátmenet esetén $z = 1$, hiszen csak az 1s pályán maradt egyetlen elektron árnyékol. Ezért ekkor

$$\nu = C\left(Z-1\right)^2,$$

ahol C az átmenetre jellemző konstans. Ez a *Moseley-törvény* 1s elektronok esetén (K vonalakra). A Moseley-törvény segítségével az atommagok töltése az atomok röntgenszínképe alapján kísérletileg is meghatározható.

Henry Gwyn Jeffreys Moseley (1887–1915) angol fizikus. Korábban, amíg az elemeket a relatív atomtömegük (lásd 31.2.3 szakasz) alapján helyezték el a periódusos rendszerben, az 58,7 relatív atomtömegű nikkel megelőzte az 58,9 relatív atomtömegű kobaltot. A Moseley-törvény alapján azonban kísérletileg meghatározták, hogy a kobalt atommag töltése $Z = 27$, és a nikkelé $Z = 28$. Ennek alapján fel kellett cserélni a nikkel és a kobalt helyét a periódusos rendszerben.

31.2.3. Az atommagok tömege

Az atommagok tömegének leírására a fejezet elején bevezetett A tömegszám fogalma nem alkalmas. Ehelyett az A_M *relatív atomtömeg* fogalmát használjuk. A relatív atomtömeg megmutatja, hogy az atom tömege hányszor nagyobb, mint a semleges $^{12}_{6}$C-atom tömegének tizenketted része. Ez utóbbit *atomi tömegegységnek* hívjuk és u-val jelöljük.

$$1\ \mathrm{u} = \frac{M(^{12}_{6}\mathrm{C})}{12} = (1{,}660\,43 \pm 0{,}000\,02)\cdot 10^{-24}\ \mathrm{g}.$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az atomi tömegegységet a szén*atom* tömegéből $\left(M\left(^{12}_{6}\mathrm{C}\right)\right)$ származtatják, s ez pedig az atommag tömege mellett tartalmazza a körülötte elhelyezkedő 6 db elektron tömegét is!

Az A tömegszám mindig egész szám, mert azt mutatja meg, hogy az atommag hány részecskére (nukleonra) bontható, az A_M relatív atomtömeg pedig általában nem egész szám. Az atomokat alkotó alapvető alkotórészek relatív atomtömegei:

A_M(proton) = (1,007 276 443±0,000 000 8) u,

A_M(neutron) = (1,008 664 97±0,000 000 4) u,

A_M(elektron) = (5,485 97±0,000 03) · 10^{-4} u.

Az atomok tömegének pontos meghatározásával a *tömegspektroszkópia* foglalkozik. Az atommagok tömegét az atom tömegéből az elektronok tömegének levonása után nyerjük.

Tömeghiány. A $^{4}_{2}$He atommagjában 2 proton és 2 neutron van. Ezért az előbbiek alapján azt várjuk, hogy tömege az alkotórészek tömegének összege legyen, azaz

$$M(^{4}_{2}\mathrm{He}) = M(2,4) = (2\cdot 1{,}007\,272\,443 + 2\cdot 1{,}008\,664\,97)\,\mathrm{u} = 4{,}031\,882\,826\ \mathrm{u}.$$

A mérések alapján a $^{4}_{2}$He atommag tömege nem ennyi, hanem

$$M(2,4) = 4{,}001\,506\,1\ \mathrm{u}.$$

Ez a tömeg majdnem egy százalékkal kisebb, mint az alkotórészek tömegének összege. Ez a tömeghiány (tömegdefektus) jelensége. Magyarázata csak az energia és a tömeg egyenértékűségének alapján ($E = mc^2$, lásd a 13.3. szakaszt) adható meg.

A $^{4}_{2}$He atommag protonokra és neutronokra történő szétbontásához energia szükséges. Ez a $^{4}_{2}$He atommag *kötési energiája*. Ezzel az energiával egyenértékű tömeg fedezi a tömeghiányt, amikor az atommagot részeire bontjuk. A későbbiekben előforduló átszámítások megkönnyítésére megadjuk az atomi tömegegységgel egyenértékű energia kifejezését is (c a vákuumbeli fénysebesség):

$$1\ \mathrm{u} = 149{,}232\,09\ \frac{\mathrm{pJ}}{c^2} = 931{,}478\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2}.$$

31.2.4. Az atommagok egyéb tulajdonságai

Perdület (impulzusmomentum). Az atommag alkotórészeinek az elektronhoz hasonlóan $\frac{1}{2}\hbar$ nagyságú perdületük (spinjük) van. Ez egy kiválasztott irányhoz képest kétféleképpen állhat: azzal megegyező vagy ellentétes irányba mutat.

Páros számú protont és páros számú neutront tartalmazó atommagok (az ún. páros-páros magok) eredő perdülete 0, mert a protonpárokban, illetve a neutronpárokban a részecskék egymás perdületét közömbösítik (ellentétes irányba áll a spinjük).

Megjegyzés: ez önmagában még nem lenne elegendő ahhoz, hogy a proton-, illetve neutronpárok eredő perdülete nulla legyen, hiszen a spin mellett a részecskéknek pálya-perdülete is van. A proton-, illetve neutronpárok azonban oly módon kapcsolódnak egymáshoz egy különleges párkölcsönhatás révén, hogy még a pályaperdületeik is ellentétesek, és ez végül nulla perdületet eredményez.

Mágneses momentum. Az atommagok egy részének mágneses dipólusmomentuma (μ) van. Ennek révén a **B** mágneses mezővel kölcsönhatásba lépnek. A kölcsönhatási energia a két vektor skaláris szorzatával fejezhető ki:

$$E = \mu \cdot \mathbf{B}, \tag{31.26}$$

ahol **B** a mágneses indukcióvektor, μ pedig a mágneses momentumvektor. A magfizikai mágneses momentumokat magmagneton (μ_N) egységben fejezzük ki:

$$1\mu_N = \frac{e \cdot \hbar}{2M_p \cdot c} = 5{,}05 \cdot 10^{-27}\ \text{J/T}$$

A képletben M_p a proton tömegét jelenti.

A protonoknak és a neutronoknak saját mágneses momentumuk is van:

$$\mu_p = 2{,}7927 \cdot \mu_N, \qquad \mu_n = -1{,}9131 \cdot \mu_N.$$

A neutron mágneses momentuma a spinjével ellentétes irányú, erre utal a negatív előjel.

Az atommagok eredő mágneses momentumát a nukleonok saját mágneses momentumai, illetve a protonok pályamozgásából adódó mágneses momentum együttesen alakítják ki.

Magmágneses rezonancia. Mágneses momentummal rendelkező atommagok energiája mágneses mezőben felhasad. A felhasadt állapotok között rádiófrekvenciás (MHz-es) váltakozó elektromágneses mezővel hozhatunk létre átmenetet. Ez a magmágneses rezonancia jelensége (Nuclear Magnetic Resonance: NMR). A rezonancia feltétele:

$$h\nu = 2\mu \cdot B, \tag{31.27}$$

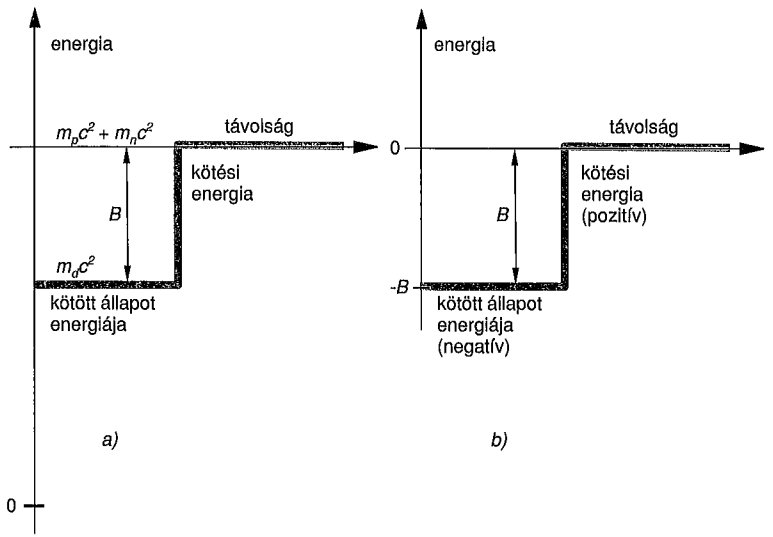
ahol ν a gerjesztő elektromágneses mező frekvenciája.

31.3. Az atommagok kötési energiája

Fontos megkülönböztetnünk az *energiát* a kötési energiától. Egy rendszer teljes energiáját az Einstein-féle $E = mc^2$ képlet szerint a rendszer teljes tömegének alapján lehet megadni. Itt az energiaskála nullpontja a tömeg és energia nélküli, „anyagmentes" állapot. Ezen a skálán minden létező rendszer energiája pozitív.

Tekintsünk példaként egy egyszerű atommagot, a deuteront! Ennek a teljes energiája a tömegével kifejezhető: $E_d = m_d \cdot c^2$. Bontsuk szét ezt egy protonra és egy neutronra, és a két részecskét vigyük olyan távol, hogy már ne álljanak egymással

kölcsönhatásban! A második rendszer teljes energiája tehát: $E_2 = m_p \cdot c^2 + m_n \cdot c^2$. A szétbontáshoz B energiát kellett befektetni, tehát magasabb energiájú állapotot kapunk: $m_p \cdot c^2 + m_n \cdot c^2 = m_d \cdot c^2 + B$. Ezeket a viszonyokat mutatja a 31.10. ábra *a)* oldala.



31.10. ábra

Gyakran csak az az energiaváltozás érdekel minket, amely egy kötött rendszer létrejöttekor történik. Ilyenkor – megállapodás szerint – ott vesszük fel a rendszer energiájának a nullaszintjét, amikor a rendszer elemei még végtelen távol vannak egymástól, azaz nincsenek kötésben (az ábra *b* oldala). Amikor létrejön a kötés, a rendszer mélyebb energiájú állapotba kerül, tehát az *energiája* negatív lesz ($E < 0$). Ahhoz, hogy onnan kihozzuk – a kötést megszüntessük –, pozitív energiát (B) kell befektetnünk. Ezt a pozitív energiát nevezzük *kötési energiának*. Más szóval

$$E + B = 0, \quad \text{azaz} \quad B = -E. \tag{31.28}$$

A kötési energia tehát pozitív, a kötött rendszer energiája viszont negatív.

Az atommagok nukleonokra történő *teljes* szétbontásához energia szükséges. Ez a B energia az atommag teljes *kötési energiája*. Egy (Z, A) összetételű, $M(Z, A)$ tömegű atommag kötési energiája a 31.2.3. pontban a tömeghiányról mondottak alapján a következőképpen számítható ki:

$$B = [Z \cdot M_p + (A - Z) \cdot M_n - M(Z, A)] \cdot c^2,$$

ahol M_p a proton tömege, M_n a neutron tömege, c pedig a fénysebesség. Ennek alapján pl. a $^4_2$He atommag kötési energiája:

$$B(^4_2\text{He}) = (2 \cdot 1{,}007\,276\,433\ \text{u} + 2 \cdot 1{,}008\,664\ \text{u} - 4{,}001\,506\ \text{u}) \cdot c^2 = \\ = 4{,}533\ \text{pJ} = 28{,}3324\ \text{MeV}.$$

A hélium atommag *energiája* – szétbontott állapothoz képest – ennyivel van mélyebben, azaz

$$E(^4_2\text{He}) = -B(^4_2\text{He}) = -4{,}533\ \text{pJ}.$$

A későbbiekben használni fogjuk még az egy *nukleonra jutó átlagos kötési energia* fogalmát. Ennek értéke (B/A).

Hasonlóan, egyetlen nukleon átlagos *energiája* az atommagban: $E/A = -B/A$.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy (B/A) értéke nem azonos egyetlen nukleon leválasztásához szükséges energiával. A magban levő nukleonok különböző erősséggel kötöttek, azaz leválasztásukhoz különböző nagyságú energia befektetése szükséges. Vannak nukleonok, amelyek (B/A)-nál erősebben, mások ennél gyengébben kötöttek. Legkönnyebben természetesen azokat a nukleonokat lehet kiszabadítani, amelyek a leggyengébben kötöttek. Az ehhez szükséges energiát az *utolsó nukleon kötési energiájának* hívjuk. Ugyanígy következik, hogy az egyes nukleonok *energiája* is különböző lehet az atommagban: vannak, amelyek energiája $-(B/A)$-nál nagyobb, másoké kisebb.

31.3.1. Az atommag-átalakulások energiaviszonyai

Atommag-átalakulásoknál mind az elektromos töltés, mind a nukleonszám (tömegszám) megmaradó mennyiségek. Emellett atommag-átalakulásoknál is érvényes az energiamegmaradás törvénye. Mégis, gyakran beszélünk az atomenergia „felszabadításáról". Mit jelent az energia felszabadítása, amikor tudjuk, hogy az egyes folyamatokban az energia *megmarad?*

Energia „felszabadítása" atommag-reakciókban. Példaként tekintsük a következő atommag-reakciót:

$$a + b \rightarrow c + d.$$

Így jelöljük, hogy a kezdeti „a" és „b" atommagokból keletkezik egy „c" és egy „d" atommag. Természetesen ezek az atommagok mozoghatnak is, a mozgási

energiáikat jelöljük rendre T_a, T_b, T_c, T_d-vel. Erre a folyamatra az energiamegmaradás tétele a következőképpen írható fel:

$$\left(M_a \cdot c^2 + T_a\right) + \left(M_b \cdot c^2 + T_b\right) = \left(M_c \cdot c^2 + T_c\right) + \left(M_d \cdot c^2 + T_d\right). \qquad (31.29)$$

Az itt szereplő M_i mennyiségek az egyes atommagok „nyugalmi" tömegei, c pedig a fénysebesség.

Ezt az egyenletet kissé átrendezzük:

$$\left[\left(M_a + M_b\right) - \left(M_c + M_d\right)\right] \cdot c^2 = \left(T_c + T_d\right) - \left(T_a + T_b\right). \qquad (31.30)$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldalán éppen a tömeghiány áll (c^2-tel szorozva)! Ez egy energiajellegű mennyiség, jelöljük Q-val.

$$\left[\left(M_a + M_b\right) - \left(M_c + M_d\right)\right] \cdot c^2 = Q. \qquad (31.31)$$

A szaknyelv ezt az atommagreakció *reakcióenergiájának,* vagy Q-értékének szokta nevezni. Ez az egyenlet azt mutatja meg, hogy ez hogyan határozható meg a kezdeti és a végállapotban résztvevő részecskék tömegeinek ismeretében. Másrészt viszont (31.30) alapján:

$$\left(T_c + T_d\right) - \left(T_a + T_b\right) = Q. \qquad (31.32)$$

Eszerint a reakció „Q"-értékének más fizikai jelentése is van: megmutatja, hogy a *mozgási energiák* hogyan változnak a folyamat során. Ha Q pozitív, akkor az átalakulás során *mozgási energiát* nyerünk, míg negatív Q esetén az átalakulás létrejöttéhez mozgási energia befektetése szükséges. Amikor tehát egy folyamat során energiafelszabadításról beszélünk, mindig arra gondolunk, hogy az átalakulás után nagyobb a részecskék mozgási energiájának összege, mint az átalakulás előtt volt.

A mozgási energia szerepe azért kitüntetett, mert a keletkezett részecskék mozgási energiája ütközések révén szétoszlik a közeg többi részecskéje között, így az anyag *felmelegszik.* Ezt a – makroszkopikusan is megjelenő – hőt tudjuk azután hasznosítani. Ez az oka annak, hogy a $Q > 0$ típusú reakciókat *exoterm* (hőtermelő) reakcióknak, a $Q < 0$ esetén végbemenő reakciókat pedig *endoterm* (hőfogyasztó, illetve pontosabban: „mozgásienergia-fogyasztó") reakcióknak szokás nevezni.

31.3.2. A magerők

Az atommagokban levő protonok pozitív elektromos töltésüknél fogva erősen taszítják egymást, s ezt a taszítást a semleges neutronok elektromosan nem befolyásolhatják. Az atommagok kötési energiáját tehát elektromos jellegű erőkkel nem magyarázhatjuk. Léteznie kell ezért egy olyan kölcsönhatásnak, amely vonzó jellegű, az elektromos taszításnál erősebb, s így képes összetartani az atommagot. Ez a nukleáris vagy erős kölcsönhatás, más szóval: *magerő*. A magerők tulajdonságai proton–proton, illetve proton–neutron szóráskísérletek alapján a következőkben foglalhatók össze:

- rövid hatótávolságúak ($\sim 10^{-15}$ m)
- a hatótávolságon belül erősen vonzóak,
- töltésfüggetlenek (közelítőleg azonos magerők hatnak proton–proton, neutron–neutron és proton–neutron között).

A fentiek a nukleáris kölcsönhatás leglényegesebb vonásait tükrözik. A valódi kölcsönhatás sokkal bonyolultabb, minden részlete még ma sem tisztázott kielégítően. Biztos azonban, hogy tartalmaz a nukleonok spinjétől függő erőket, párerőket, nagyon rövid távolságon belül vonzóból taszítóvá válik stb. A magerőknek ezek a részletei azonban csak a pontos magfizikai számításoknál jelentősek, az atommagok viselkedésének főbb vonásai ezek nélkül, az előbbi tulajdonságok alapján is megérthetők.

31.4. Az atommagmodellek

Ahhoz, hogy az atommagokról kialakítsunk egy képet magunknak, a tudományban olyan gyakran alkalmazott modellezéshez folyamodunk. Az atommagot lényeges tulajdonságai szempontjából valamilyen, már ismert objektumhoz hasonlítjuk. Az atommagokra a tudományban – különböző szempontok alapján – két modellt alkalmazunk: a héjmodellt és a cseppmodellt.

31.4.1. A héjmodell

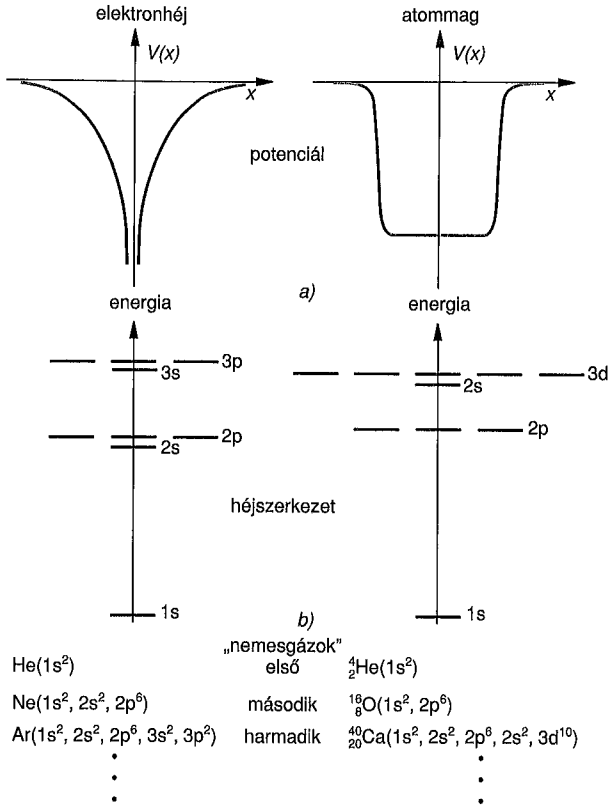
Az atomok tulajdonságainak értelmezésében bevált az elektronok héjmodellje. Ebből kiindulva megpróbálhatunk az atommagokra vonatkozóan is hasonló modellt kiépíteni.

Az elektronburok és az atommag tulajdonságainak összehasonlítása azt mutatja, hogy a részecskék tömegében, energiájában és a rendszer geometriai méretében fennálló több nagyságrendnyi különbség ellenére az elektronok rendszere

és a nukleonok rendszere hasonlít egymáshoz abban, hogy mindkettőben a részecskék tipikus de Borghie-hullámhossza a rendszer geometriai méretének nagyságrendjébe esik. Ez azt jelenti, hogy a hullámmodellt, amelyet eredményesen használtunk az elektronok tulajdonságainak értelmezésére, az atommag szerkezetének vizsgálatára is alkalmazhatjuk. További hasonlóságot jelent, hogy mind az elektronokra, mind pedig a protonokra és neutronokra külön-külön érvényes a Pauli-elv. Eszerint a protonok és a neutronok ugyanúgy kettesével töltik be a rendelkezésükre álló lényegesen különböző hullámállapotokat, mint az elektronok teszik azt az atomburok felépítésénél. Ebből azonnal következik, hogy az s állapotokba 2 proton és 2 neutron fér, a p állapotokba 6 proton és 6 neutron, a d állapotokba 10 proton és 10 neutron és így tovább. Az egyes hullámállapotok energiáját a mozgási és a potenciális energia határozza meg. A mozgási energia – a hullámmodellből adódóan – hasonló, mint az elektronoknál, a potenciális energia azonban különböző. Az elektronok esetében a központi atommag mély Coulomb-potenciálkutat létesít, amelyet az egyes elektronok árnyékoló hatása csak kissé módosít. A nukleonokra ható potenciál meghatározása reménytelenül bonyolult feladatnak látszik, hiszen az atommagban nincs központi vonzó centrum. A nukleonok „saját maguk" alakítják ki a potenciált, mozgásuk módosítja azt, a potenciál megváltozása pedig visszahat a nukleonok mozgására. Az ördögi körből egy egyszerűsítő feltevés vezet ki: feltételezzük, hogy a nukleonok kölcsönhatása következtében kialakul egy „átlagpotenciál". Ezt rögzítettnek gondoljuk, s feltesszük, hogy a nukleonok ebben a potenciálban már egymástól függetlenül mozognak, s mozgásukat csak az átlagpotenciál határozza meg. Ez az atommag „függetlenrészecske-héjmodellje".

Az átlagpotenciál alakját elsősorban az szabja meg, hogy a magerők rövid hatótávolságúak. Egy nukleon számára ennek következtében „teljesen mindegy", hogy az atommag belsejében hol helyezkedik el, hiszen úgyis csak egy kis környezetből érzékeli a többi nukleon hatását. Eszerint az átlagpotenciál legfontosabb tulajdonsága, hogy a magon belül állandó, s csak egy kis felületi rétegben változik gyorsan. A 31.11a. ábra összehasonlítja az elektronokra ható Coulomb-potenciált a nukleonokra ható átlagpotenciállal.

Az átlagpotenciál magon belüli állandósága ahhoz vezet, hogy a nukleonok energiáját elsősorban a hullámmintázatból adódó mozgási energia határozza meg. Ebből következően a csomómentes 1s állapotot nem a 2s, hanem az annál nagyobb hullámhosszúságú 2p állapotok követik. A 2s állapot pedig feljebb csúszik, s nagyjából a 3d állapotokkal azonos energiájú lesz. Az egymáshoz közel eső energiájú állapotok halmazát héjnak nevezzük. Mivel a 2s és a 3d állapotok energiája egymáshoz közel esik, ezért egy héjat alkotnak. Nyilvánvalóan a héjak között nagyobb energiahézagok vannak (hiszen ha nem lennének, akkor az ott lévő álla-



31.11. ábra

potokat is a héjhoz kellene sorolni). Az atommagok héjszerkezetének kezdete tehát a 31.11b. ábra jobb oldalának megfelelően alakul.

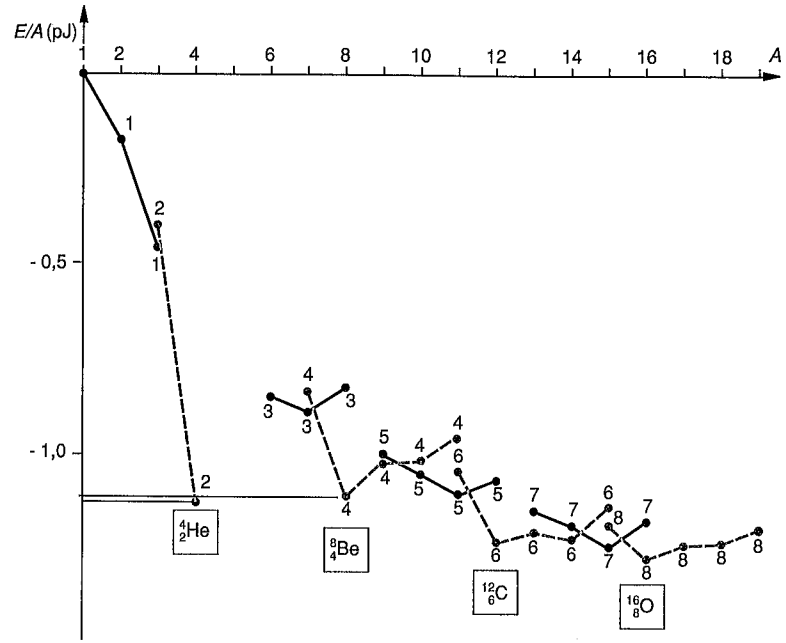
A $^{4}_{2}$He atommag az első „nukleáris nemesgáz", hiszen az 1s állapot éppen betelt 2 protonnal és 2 neutronnal. A következő héj (2p) az $^{16}_{8}$O atommagnál telik be, az ezután következő (2s, 3d) pedig $^{40}_{20}$Ca-nál. Ezek az atommagok jelentik tehát a nukleáris periódusos rendszer egymás után következő „nemesgázait".

A lezárt héjú *atommagokat mágikus* atommagoknak, a héjak lezárásához szükséges nukleonszámokat pedig *mágikus számoknak* nevezik. Az atommagokra vonatkozó mágikus számok a következők:

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126,...

A mágikus atommagok kitűnnek különleges stabilitásukkal, a közeli rendszámú atommagokhoz képest különösen erős kötésükkel. A héjak definíciója alapján ez érthető is, hiszen egy héj „fölött" nagy energiahézag van, ezért lezárt héjú atommagokat csak viszonylag nagy energia befektetésével lehet gerjeszteni.

Illusztrációképpen két példát említünk:



31.12. ábra

A 31.12. ábra könnyű atommagokban lévő nukleonok átlagos energiáját (*E/A*) ábrázolja *A* függvényében. (A pontok mellé írt szám a rendszám.) Jól megfigyelhető, hogy a $^{4}_{2}$He atommagban különösen mélyen kötöttek a nukleonok, valamint az, hogy a $^{8}_{4}$Be, $^{12}_{6}$C, $^{16}_{8}$O atommagokban is – környezetükhöz viszonyítva – mélyen vannak. Látszik az is, hogy a $^{4}_{2}$He atommag különösen nagy stabilitása miatt a $^{8}_{4}$Be atommag mégsem stabil: energetikailag kedvezőbb, ha szétesik két $^{4}_{2}$He-részecskére.

A nagy tömegszámú, természetes radioaktív elemek bomlási sorai (lásd a 31.1.2. pontot) mind mágikus atommagokon végződnek: az ólomizotópokban mágikus számú (82) proton van, a $^{237}_{93}$Np bomlási sorának végső elemében, a $^{209}_{83}$Bi-izotópban pedig 126 neutron. A nehéz atommagok közül a $^{208}_{82}$Pb kitűnik különleges stabilitásával: benne mind a protonok, mind a neutronok száma mágikus (82, illetve 126).

31.4.2. A cseppmodell és az atommagok kötési energiájának általános jellegzetességei

A héjmodell magyarázatot ad egyes lezárt héjú atommagok átlagostól eltérő stabilitására. Az atommagok átlagos viselkedésének megértéséhez azonban más megközelítést kell választanunk. Az atommagot töltött folyadékcsepphez hasonlítjuk, s ennek alapján határozzuk meg energiáját. Ez a *cseppmodell*. Alkalmazhatóságát a következő összehasonlítás érzékelteti:

	Folyadékcsepp	Atommag
Alkotórészek	Molekulák	Nukleonok
Kölcsönhatás	Rövid hatótávolságú, vonzó, nem tesz különbséget a folyadékrészecskék között, (pl. van der Waals-erők).	Rövid hatótávolságú, vonzó, nem tesz különbséget a nukleonok között: töltésfüggetlen (nukleáris).

A kölcsönhatás hasonlósága az oka az atommagok és a folyadékcseppek nagyfokú hasonlóságának. Ennek egy megnyilvánulását korábban már láttuk: az atommagok sűrűsége állandó [lásd a (31.23) képletet] éppen úgy, mint a folyadékcseppeké.

Ahhoz, hogy a csepp belsejéből szakítsunk ki részecskéket, nagyobb energia szükséges, mint ahhoz, hogy a csepp felszínéről, hiszen a csepp belsejében minden részecskének több „szomszédja" van, több kötést tud létrehozni. A folyadékoknál ezért különbözik a párolgás és a forrás, ennek következménye a felületi feszültség is. Ezért az atommagoknál is megkülönböztetjük a kötési energia szempontjából a „belső", illetve a „felszíni" nukleonokat. Egy belső nukleon kötési energiáját jelöljük b_a-val, egy felszíniét b_f-fel. A fentiek alapján $b_f < b_a$.

A felszínen levő nukleonok száma az atommag $4\pi R^2$ felületével arányos:

$$N_f = c \cdot 4\pi R^2,$$

itt c egy arányossági tényező. A „belső" nukleonok száma tehát:

$$N_b = A - N_f = A - c \cdot 4\pi R^2.$$

Az atommag nukleáris kötési energiája az egyes nukleonok kötési energiáiból tevődik össze:

$$B_n\left(Z, A\right) = b_a\left(A - N_f\right) + b_f N_f = b_a A - \left(b_a - b_f\right) N_f = b_a A - c \cdot 4\pi\left(b_a - b_f\right) R^2.$$

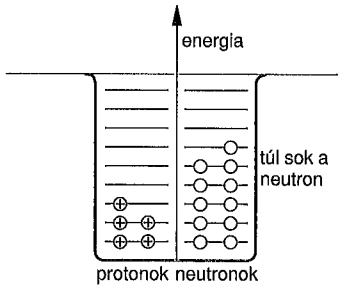
Legyen $b_b = c(b_a - b_f)$. Ekkor kapjuk:

$$B_n\left(Z, A\right) = b_a A - b_b \cdot 4\pi R^2.$$

A protonok – töltésüknél fogva – taszítják is egymást, s így a nukleáris energiatagok mellett Coulomb-energiatag is fellép, amely tovább gyengíti a kötést:

$$B_c = -b_C \frac{Z^2}{R}.$$

Mindenképpen figyelembe kell venni – még a cseppmodellben is –, hogy az atommag nem klasszikus objektum, hiszen a részecskék hullámhossza az objektum méretével összemérhető. A Pauli-elv miatt az energiaszintek párosával töltődhetnek be, s így a protonok és neutronok számának eltérése többletenergiát eredményez. A protonoknál magasabb szintre szorult neutronok száma $(N - Z)$.



31.13 ábra

De ugyancsak $(N - Z)$-vel arányosan magas szintig töltődik be a többi energiaszint is (31.13. ábra). Ezért a Pauli-elvből adódó többletenergia $(N - Z)^2$-tel lesz arányos:

$$B_p = -b_p \frac{\left(N-Z\right)^2}{A} = -b_p \frac{\left(A-2Z\right)^2}{A}.$$

Az aszimmetria miatt magasabb energiaszintre szorult nukleonok gyengébben kötöttek. Az aszimmetriaenergia (más néven Pauli-energia) tehát gyengíti a kötést, ezért vettük fel negatív előjellel.

Az *atommagok kötési energiáját* végül a következőképpen becsülhetjük meg:

$$B\left(Z, A\right) = B_n + B_c + B_p,$$

azaz

$$B(Z, A) = b_a A - b_b \cdot 4\pi R^2 - b_C \cdot \frac{Z^2}{R} - b_p \frac{\left(A-2Z\right)^2}{A}. \qquad (31.33)$$

A (31.33) kifejezés egyes tagjainak neve rendre: *térfogati, felületi, Coulomb- és Pauli- (vagy aszimmetria-)energia.* A képletben szereplő R az atommag sugara, amelyet (31.24) alapján a következőképpen számíthatunk:

$$R = r_0 \cdot A^{1/3}.$$

Ezt (31.33)-ba helyettesítve kapjuk, hogy

$$B(Z,A) = \gamma_a A - \gamma_b A^{2/3} - \gamma_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \gamma_p \frac{(A-2Z)^2}{A}, \qquad (31.34)$$

ahol bevezettük a $\begin{cases} \gamma_a = b_a \\ \gamma_b = 4\pi \cdot r_0^2 \cdot b_b \end{cases}$ és $\begin{cases} \gamma_c = \dfrac{b_c}{r_0} \\ \gamma_p = b_p \end{cases}$ új konstansokat. (31.35)

A cseppmodell nem ad felvilágosítást arra nézve, hogy mekkorák a γ_a, γ_b stb. együtthatók. Ezeket a modellparamétereket úgy kell megválasztanunk, hogy a (31.34) összefüggés minél jobban megadja az összes atommag kísérletileg megmért kötési energiáját. Ha a

$$\gamma_a = 2{,}52\ \text{pJ}, \quad \gamma_b = 2{,}85\ \text{pJ},$$

$$\gamma_c = 0{,}11\ \text{pJ}, \quad \gamma_\pi = 3{,}8\ \text{pJ} \qquad (31.36)$$

értékeket használjuk, a (31.34) energiaképlet a legtöbb atommag kötési energiáját 2%-nál pontosabban adja vissza.

Ezt a 2%-ot tovább lehetne finomítani, ha figyelembe vennénk még a proton–proton, illetve neutron–neutron párok létrejöttével járó párenergiát, illetve a mágikus számok közelében a héjmodell alapján létrejövő korrekciókat is. További céljainknak azonban a (31.34) kifejezés által adott pontosság elegendő.

A kötési energia ismeretében az egyes atommagok *energiája* is egyszerűen megadható: $E(Z, A) = -B(Z, A)$ (lásd 31.3. pont).

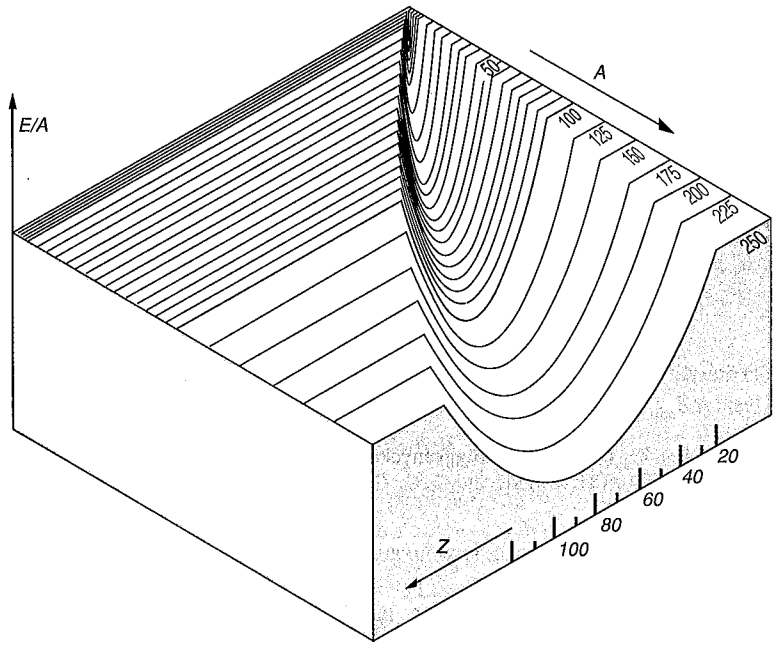
31.4.3. Az átlagos nukleonenergia-felület jellegzetességei

Két atommag összehasonlításakor a teljes kötési energiák összehasonlítása helyett célszerűbb azt vizsgálni, hogy az egyes atommagokban átlagosan milyen energiájú állapotban vannak a nukleonok. A (31.34) kötési energia alapján egyetlen *nukleon átlagos energiája* könnyen kiszámítható:

$$\varepsilon(Z,A) = -B/A = -\gamma_a + \gamma_b \frac{1}{A^{1/3}} + \gamma_C \frac{Z^2}{A^{4/3}} + \gamma_p \frac{(A-2Z)^2}{A^2}. \qquad (31.37)$$

Nyilvánvaló, hogy egy nukleonrendszer annál erősebben kötött, minél nagyobb abszolút értékű negatív szám az ε, azaz minél „mélyebben" vannak benne (átlagosan) a nukleonok.

ε a Z rendszám és az A tömegszám függvénye, s így egy felülettel ábrázolható (31.14. ábra). Ezt a továbbiakban *(átlagos) nukleonenergia-felületnek* hívjuk. (Az átlagos jelzőt a rövidség kedvéért elhagyjuk)



31.14. ábra

Láttuk korábban, hogy az atommag-átalakulások egyik legfontosabb jellemzője az átalakuláskor felszabaduló energia. A *nukleonenergia-felület* lehetővé teszi számunkra ezeknek az energiaviszonyoknak szisztematikus vizsgálatát, rendszerezését, s ezáltal az eddigi – főként kísérleti alapokon nyugvó – ismeretek össze-

foglalását, elméleti értelmezését. Ezért először megvizsgáljuk a nukleonenergia-felület főbb jellegzetességeit.

Rögzített A mellett ε a Z változó másodfokú függvénye (parabola):

$$\varepsilon\left(Z,A\right)\Big|_{A=\text{állandó}} = C_1 - C_2\cdot Z + C_3\cdot Z^2, \tag{31.38a}$$

ahol

$$C_1 = \gamma_p - \gamma_a + \frac{\gamma_b}{A^{1/3}}, \qquad C_2 = \frac{4\gamma_p}{A}, \qquad C_3 = \frac{\gamma_C}{A^{4/3}} + \frac{4\gamma_p}{A^2}. \tag{31.38b}$$

A (31.38) parabolát más paraméterekkel is felírhatjuk:

$$\varepsilon\left(Z,A\right)\Big|_{A=\text{állandó}} = C_3\cdot\left(Z - Z_{\min}\right)^2 + \varepsilon_{\min}. \tag{31.39}$$

Ebben a felírásmódban $Z_{\min}$ a parabola „csúcspontjának" a helyét, $\varepsilon_{\min}$ pedig a csúcspont mélységét mutatja meg. Mivel mindegyik γ pozitív, ezért (31.38b) alapján $C_3 > 0$, vagyis a parabola „felfelé nyílik", azaz a csúcsánál minimuma van (31.15a. ábra).

$Z_{\min}$ és $\varepsilon_{\min}$ értéke könnyen kifejezhető C_1-gyel C_2-vel és C_3-mal. (31.39)-ben elvégezve a négyzetre emelést, és Z hatványainak együtthatóit összehasonlítva kapjuk:

$$Z_{\min} = \frac{C_2}{2C_3}, \qquad \varepsilon_{\min} = C_1 - C_3\cdot Z_{\min}^2 = C_1 - \frac{C_2^2}{4C_3}. \tag{31.40}$$

Természetesen A-nak más és más rögzített értéket adva $Z_{\min}$ és $\varepsilon_{\min}$ is más és más lesz. A $Z_{\min}(A)$ és $\varepsilon_{\min}(A)$ függvényeket mutatja a 31.15b. és c. ábra.

Megjegyzés: a $Z_{\min}(A)$ és $\varepsilon_{\min}(A)$ függvényeket algebrailag is megadhatjuk, ha (31.40)-be behelyettesítjük a (31.38b) szerinti C_1, C_2, C_3 értékeket. Ennek a végrehajtását az olvasóra bízzuk.

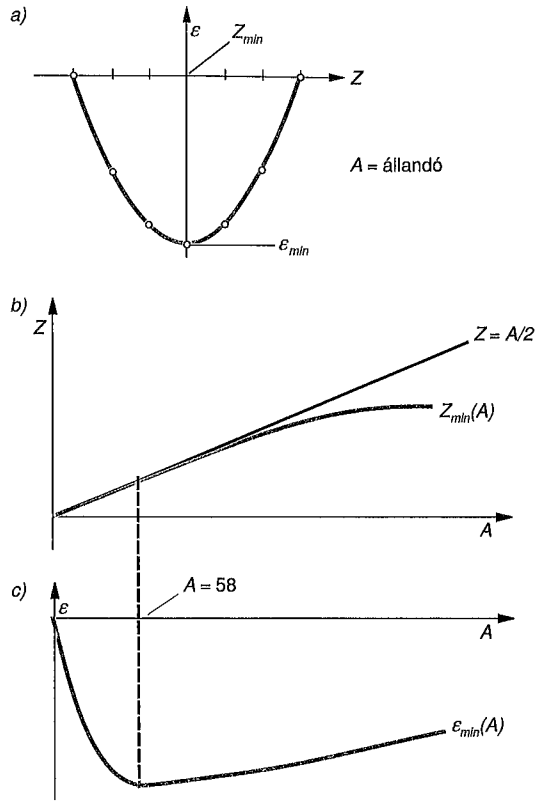
A nukleonenergia-felület leglényegesebb vonásai a 31.15. ábrák alapján a következők:

a) A = const. metszetei parabolák. A parabolák minimumpontjait $Z_{\min}(A)$ és $\varepsilon_{\min}(A)$ jellemzi.

b) $Z_{\min}(A)$ a könnyű atommagoknál a $Z = A/2$ egyenes közelében halad, a nehéz atommagoknál azonban elkanyarodik a kisebb Z értékek felé

c) $\varepsilon_{\min}(A)$ a könnyű atommagoktól elindulva gyorsan csökken, majd $A \sim 58$ körül minimális, s a nagyobb tömegszámok felé haladva lassan ismét növekszik.

A *b)* tulajdonság fizikai magyarázatát a Coulomb-energia és a Pauli-energia összjátékában kereshetjük. Nagyobb atommagok esetén az egymástól „távol" eső



31.15. ábra

protonok között megszűnik a rövid hatótávolságú vonzó, nukleáris kölcsönhatás, s ezért a hosszú hatótávolságú Coulomb-taszítás egyre nagyobb szerepet kap. Emiatt az atommag kötése gyengül. Rögzített A mellett ezt úgy ellensúlyozhatjuk, hogy protonokat neutronokra „cserélünk". Ezzel csökken a Coulomb-taszítás, de nő a Pauli-energia. Ha a Coulomb-taszítás csökkenése nagyobb mértékű, mint a Pauli-energia növekedése, akkor a proton–neutron csere alacsonyabb energiájú, erősebben kötött állapothoz vezet: $Z_{\min}$ értéke a kisebb protonszámok felé eltolódik.

A *c)* tulajdonság a felületi és a Coulomb-energia közötti összjáték eredménye. A tömegszám változásával változik az atommag sugara is, s ez a könnyű atommagoknál a felületi energia súlyának megnövekedéséhez vezet. A tömegszám változása természetesen $Z_{\min}$ változását is maga után vonja, ezért a Coulomb-energia is változik. A két hatás ellentétes irányú, hiszen A növekedésével csökken a felület

szerepe (s ez a kötést erősíti), a Coulomb-taszítás növekedése viszont a kötést gyengíti. A két ellentétes hatás eredménye $\varepsilon_{min}(A)$ megfigyelt változása: a könnyű atommagok nagy relatív felületük miatt, a nehéz atommagok pedig nagy elektromos töltésük miatt kevésbé kötöttek, mint a közepes tömegszámúak.

31.5. A radioaktivitás értelmezése

A nukleonenergia-felület jellegzetességei alapján a radioaktív bomlás jelenségét is megérthetjük.

A termodinamika II. főtétele értelmében „hideg" környezetben az anyag a minimális energiájú állapot felé törekszik. (Az energiaminimum elvének pontosabb megfogalmazását lásd az 5.5. szakaszban.) Az atommag anyaga a radioaktív bomlások segítségével változtathatja állapotát, s haladhat a legmélyebb energiájú állapot felé. Olyan átalakulás mehet végbe spontán, ahol az átalakulás után a nukleonok mélyebb energiájú állapotban lesznek az új atommagban, mint a régiben. Ez az energiakülönbség felszabadul az átalakuláskor és a környezetbe távozik (a keletkező részecskék elviszik). A sokféle radioaktív bomlás tehát egyetlen közös okra vezethető vissza: *az anyag vándorlására a nukleonenergia-felület legmélyebb energiájú állapotai felé.*

Ezek szerint a stabil atommagokat a nukleonenergia-felület „alján" kell keressük, hiszen ezek már nem tudnak alacsonyabb energiájú állapotba elbomlani. Adott A tömegszámú atommagok közül a Z_{min} rendszám közelébe eső (a 31.39 parabola csúcsánál lévő) atommagok a stabilak, illetve a leghosszabb felezési idejűek.

31.5.1. A β-bomlások

A β-bomlások a maganyag minimális energiájú állapotra való törekvésének olyan módjai, amikor a bomlás során az atommag Z rendszáma eggyel változik, de A tömegszáma nem. A bomlások során a keletkezett atommag Z rendszáma eggyel közelebb kerül a $Z_{min}(A)$ értékéhez.

Ezek alapján egyszerű megérteni, hogy *a β-bomlások során könnyű, töltött részecske sugárzódik ki.* „Könnyű" kell legyen (nem lehet nukleon), hiszen A = áll. és elektromosan töltött kell legyen, hiszen a protonok száma (Z) változik, de a teljes rendszerben az elektromos töltések összegének meg kell maradni.

A β-bomlások két csoportra bonthatók: rendszámnövelő ($\Delta Z = +1$), illetve rendszámcsökkentő ($\Delta Z = -1$) bomlásokra. Adott A mellett e két bomlástípus a (31.39) parabola két oldalán elhelyezkedő atommagokra jellemző. $Z > Z_{min}$ esetén rendszámcsökkentő, $Z < Z_{min}$ esetén rendszámnövelő β-bomlásokkal találkozunk.

A rendszámnövelő β-bomlásnál képletesen szólva egy magbeli neutron protonná alakul, s közben egy elektron és egy antineutrínó (lásd a 33.2. szakaszt) keletkezik:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}.$$

(Mivel $M_n > M_p + M_e$, ezért egy önállóan álló, „szabad" neutron is elbomlik.)

Egy $X(Z, A)$ összetételű atommagra ez tehát a következőképpen írható fel:

$$^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \tilde{\nu}. \qquad (31.41)$$

Ez a *negatív bétabomlás* (β^-). A bomlás során felszabaduló energián a keletkező elektron és az antineutrínó véletlenszerűen osztozik, így a kilépő elektron energiája 0-tól egy maximális értékig folyamatosan változhat.

A rendszámcsökkentő β-bomlásoknak két módja van:

Az egyiknél – képletesen – egy magbeli proton neutronná alakul, s közben egy pozitív elektromos töltésű, elektronhoz hasonló részecske – pozitron – sugárzódik ki egy neutrínó kíséretében:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu.$$

(Ez a fajta átalakulás szabad proton esetén nem megy végbe, hiszen a proton tömege kisebb, mint a neutron tömege, így a folyamat csak energia befektetésével lenne megvalósítható).

Egy $X(Z, A)$ összetételű atommagban ez az átalakulás a következőképpen írható fel:

$$^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu. \qquad (31.42)$$

Ez a *pozitív bétabomlás* (β^+). A kilépő pozitron energiája itt is folytonosan változhat.

A másik típusnál egy magbeli proton befog egy elektront az atom elektronhéjáról, s ezzel neutronná alakul. A folyamatban egy neutrínó is keletkezik, amely a felszabaduló energiát elviszi:

$$^A_Z X + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu. \qquad (31.43)$$

Ez az *elektronbefogás.* Ez a fajta radioaktív bomlás csak közvetett úton érzékelhető, hiszen a felszabaduló neutrínó nagyon kis valószínűséggel lép csak kölcsönhatásba az anyaggal. Ezért a bomlás létrejöttéről csak a befogott elektron helyére történő „beugráskor" kibocsátott röntgenfoton ad hírt. Az atommag helyén legnagyobb valószínűséggel az 1s pálya elektronjai tartózkodnak, így leggyakrabban innen történik az elektronbefogás. Az 1s héj régebbi jelöléséből kiindulva ezt a folyamatot ezért gyakran *K-befogásnak* is nevezik.

31.5.2. A tömegszám csökkentése: az α-bomlás

Adott A tömegszámú mag β-bomlással a nukleonenergia-völgy oldallejtőjén közelít a $Z_{min}(A)$ protonszámhoz (31.39), a völgy mélyvonalához (lásd 31.15b. ábra). A mélyvonal azonban maga is lejt az $A = 58$ tömegszám felé (31.15c. ábra). A nehezebb atommagok az A tömegszám csökkentésével még mélyebb energiájú állapotba kerülhetnének. Erre ad lehetőséget az α-bomlás. Ebben a folyamatban a tömegszám néggyel csökken, hiszen egy $^4_2$He atommag (α-részecske) bocsátódik ki. A könnyebb atommagoknál a tömegszám csökkentése nem energianyereséges, ezért α-bomló magokat csak a nehezebb atommagok között találhatunk.

Első pillantásra meglepő, hogy négy nukleont ki tudnak egyes atommagok bocsátani, ugyanakkor egyetlen nukleon kibocsátása általában nem lehetséges, mert az atommagok kötött rendszerek (a nukleonok energiája negatív).

Előfordulhat persze, hogy valamilyen folyamatban olyan nagy energiával gerjesztett atommag keletkezik, amelyben az utolsó nukleon energiája pozitív lesz. Ez a nukleon azonban szinte megfigyelhetetlenül rövid idő alatt ki is lökődik, olyan atommagot hagyva hátra, amely már nukleonkibocsátással szemben stabil.

A megoldás abban rejlik, hogy α-bomláskor nukleonok *csoportja* lép ki az atommagból (2 proton és 2 neutron). Ennek energetikailag több előnye is van egyetlen nukleon kibocsátásával szemben:

- Az atommag tömegszáma nemcsak eggyel csökken, így az anyag a lankás nukleonenergia-völgyben nem „lépked", hanem ugrik a minimum felé, ezért egy lépésben több energia szabadulhat fel.
- A kibocsátott nukleonok nem magas energiájú, szabad állapotban keletkeznek, hanem energetikailag sokkal kedvezőbb, egymáshoz erősen kötött helyzetben vannak. Ehhez járul még, hogy az atommagok héjszerkezete miatt az α-részecskében a nukleonok különösen erősen kötöttek (lásd a 31.12. ábrát). Ezért nehéz magok tömegszámcsökkentésének leggyakoribb módja az α-bomlás.

A (31.34) és a (31.35) képletek, illetve az α-részecske kötési energiája ($B(2, 4) = 4{,}533$ pJ) ismeretében az is meghatározható, hogy milyen (Z, A) összetételű atommagok esetén várhatunk α-bomlásokat!

A spontán α-bomlás energetikai feltétele: $M(Z, A) \geq M(Z-2, A-4) + M(2, 4)$. A $B(Z, A)$ kötési energia bevezetésével ez a következő alakra hozható:

$$B(Z, A) \leq B(Z-2, A-4) + B(2, 4).$$

Felhasználva, hogy $B(2, 4) = 4{,}533$ pJ, kapjuk:

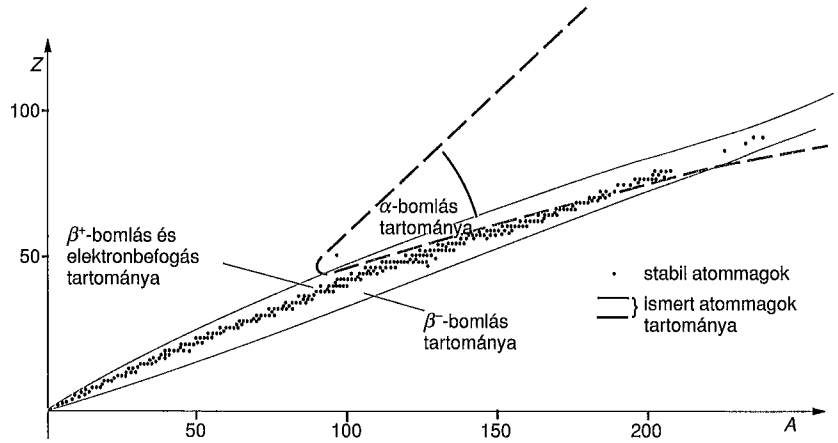
$$B(Z, A) - B(Z-2, A-4) - 4{,}533 \leq 0.$$

Behelyettesítve $B(Z, A)$ alakját, a (31.34) és a (31.35) összefüggések felhasználásával adódik:

$$5{,}447 - 2{,}85 \cdot \left(A^{2/3} - (A-4)^{2/3} \right) - 0{,}11 \cdot \left(\frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{(Z-2)^2}{(A-4)^{1/3}} \right) + 15{,}2 \cdot \frac{(A-2Z)^2}{A(A-4)} \leq 0. \qquad (31.44)$$

Rögzített A esetén a bal oldal Z másodfokú függvénye. Az egyenlőség akkor áll fenn, amikor Z ennek a függvénynek valamelyik gyöke (Z_1, illetve Z_2).

Z^2 együtthatója: $a = \frac{60{,}8}{A(A-4)} - 0{,}11 \cdot \left(\frac{1}{A^{1/3}} - \frac{1}{(A-4)^{1/3}} \right)$. Minthogy minden fizikailag értelmes A-ra $a > 0$, így az egyenlőtlenség a két gyök közötti tartományra teljesül, azaz $Z_1 \leq Z \leq Z_2$ esetén. Rögzített A esetén a gyökök könnyen meghatározhatók a másodfokú egyenlet megoldó képlete alapján. (Valós megoldás csak $A \geq 90$ mellett van, egyébként a diszkrimináns negatív.) A 31.16. ábra mutatja, hogy a fenti egyenlőtlenség milyen (Z, A) értékpárok esetén teljesül.



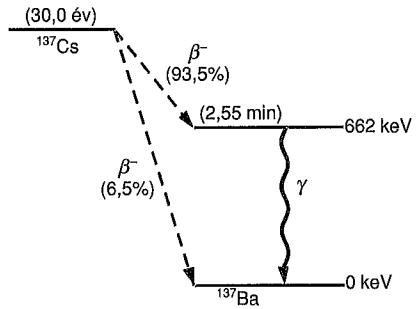
31.16. ábra

A 31.16. ábrán feltüntettük a stabil atommagoknak megfelelő (Z, A) pontokat, és azt a tartományt, amelyben a jelenleg ismert, illetve előállított radioaktív atommagok elhelyezkednek. Az ábra összefoglalja, hogy a különböző (Z, A) tartományokban elhelyezkedő atommagok milyen bomlási móddal szabadulhatnak meg energiájuktól. A kísérletileg megfigyelt bomlási módok tökéletes összhangban vannak a nukleonenergia-felület vizsgálata alapján elméletileg jósolt bomlásokkal.

31.5.3. A γ-bomlás

Az atommagok a Földön a (Z, A) összetételük által meghatározott legmélyebb energiájú állapotban vannak. Ennek az állapotnak a kötési energiáját éppen a (31.34) képlet szerinti $B(Z, A)$ kötési energia adja meg. Radioaktív α-, illetve β-bomláskor gyakran előfordul azonban, hogy az új atommag nem az összetételének megfelelő legalacsonyabb energiájú állapotban keletkezik, hanem annál magasabb energiával. Szemléletesen szólva: az új atommag a nukleonenergia-felület megfelelő (Z, A) koordinátájú pontja „fölött" keletkezik. Az ilyen atommagot *gerjesztett atommag*nak nevezzük. A gerjesztett atommag fölös energiájától nagyon könnyen, összetételének változtatása nélkül megszabadulhat, miközben azt elektromágneses foton formájában kisugározza. Ez a *γ-bomlás*. Egy vagy több γ-bomlással a gerjesztett atommag gyorsan visszakerül a nukleonenergia-felületre, az összetétele által meghatározott minimális energiájú állapotába, az *alapállapot*ba. Minthogy a γ-bomlás nem jár összetétel-változással, így nagyon gyors folyamat. Néhány kivételtől eltekintve a gerjesztett atommagok kb. 10^{-15} s felezési idővel, szinte megfigyelhetetlenül rövid idő alatt elérik alapállapotukat. Ezért γ-bomlást általában csak más, hosszabb felezési idejű, α- vagy β-bomlás kísérő jelenségeként figyelhetünk meg.

A 31.17. ábra a ^{137}Cs radioaktív izotóp bomlását mutatja. A ^{137}Cs atommag 30 éves felezési idővel, β-bomlással bomlik.



31.17. ábra

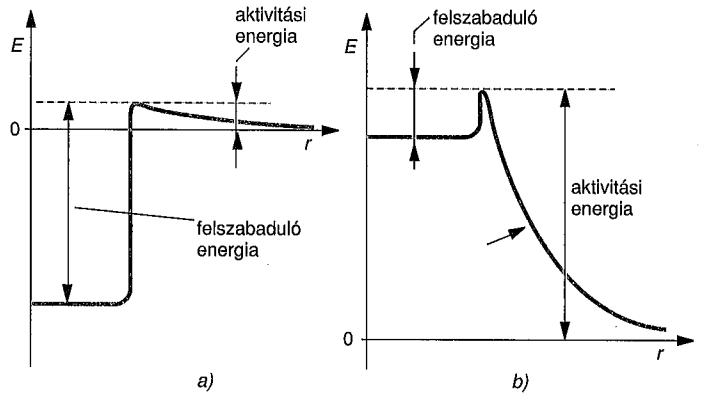
Az esetek 6,5%-ában a ^{137}Ba atommag alapállapotban keletkezik, így további bomlás nem történik, míg 93,5%-ban a bomlás a ^{137}Ba gerjesztett, 662 keV energiájú állapotára vezet. Ez az állapot a legtöbb γ-bomlás 10^{-15} s nagyságrendű felezési idejéhez képest igen hosszú, ~2,55 perces felezési idővel, γ-sugárzás kibocsátásával bomlik tovább a ^{137}Ba alapállapotára. A hosszú felezési idejű, γ-bomlással bomló atommagállapotokat *izomer* állapotoknak nevezzük.

31.5.4. A bomlási sorok magyarázata

A nukleáris anyag tehát a radioaktivitás különböző típusaival, az α-, β- és γ-bomlásokkal halad legmélyebb energiájú állapota, a nukleonenergia-völgy mélypontja felé. A sok nukleont tartalmazó nehéz atommagok α-bomlással közelíthetnek a völgy mélypontja felé. Az α-bomlás kettővel csökkenti Z-t és néggyel A-t. A nehéz elemeknél azonban a völgy mélyvonala – a Coulomb- és a Pauli-energia összjátékának eredményeképpen – elkanyarodik a $Z = A/2$ egyenestől. Így az α-bomlások „lépésiránya" nem a völgy mélyvonalának irányába esik, s ezért a létrejött új atommagok már a völgy oldalán helyezkednek el. Innen pedig a völgy mélyvonalát (negatív) β-bomlásokkal érhetik el. A nehéz atommagok nukleáris anyaga tehát kombinált, egymást követő α- és β-bomlások sorozatával haladhat a nukleonenergia-völgy mélypontja felé. Ezért a természetes radioaktív bomlási sorokban α- és β-bomló izotópokat egyaránt találunk (lásd a 31.2. ábrát). Az α-, illetve β-bomlások természetes kísérője a γ-bomlás, amellyel a nem alapállapotban keletkezett atommagok összetétel-változás nélkül csökkenthetik energiájukat.

31.5.5. Az energiaminimum elérését gátló és segítő tényezők

Az előzőek alapján jogosan vetődik fel a kérdés, hogy miért van világunkban olyan sokféle stabil atommag, amikor az anyag legmélyebb energiájú állapota az $A = 58$ tömegszámú atommagok környezetében van? A könnyű atommagok összeolvadása *(fúziója)*, illetve a nehéz atommagok felbomlása, széthasadása mélyebb energiájú állapotot hozna létre. Mi az oka annak, hogy ezek mégsem következnek be? A választ a 31.18. ábra alapján érthetjük meg.



31.18. ábra

A fúzió. A fúzió energiaviszonyait mutatja a 31.18a. ábra. Ahhoz, hogy két, (Z_1, A_1) és (Z_2, A_2) összetételű atommag összeolvadhasson, először meg kell hogy közelítsék egymást annyira, hogy a rövid hatótávolságú magerők működésbe léphessenek. A megközelítés azonban energiaigényes, hiszen az atommagok – azonos elektromos töltésüknél fogva – taszítják egymást. Kölcsönhatási energiájuk így a Coulomb-kölcsönhatás $\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Z_1Z_2e^2}{r}$ szerint a távolság (r) csökkenésével nő egészen addig, amíg a nukleáris erők működésbe nem lépnek. Ekkor viszont a nukleáris erők hatására az összeolvadt magban a nukleonok mélyebb energiájú állapotba kerülnek, mint a könnyebb magokban voltak: energia szabadul fel, s a maganyag az energiaminimum felé közeledik.

A fúzió azonban „hideg" földi környezetben nem következik be, hiszen az atommagoknak nincsen elegendő mozgási energiájuk, hogy a Coulomb-taszítás ellenében egymást kellően megközelítsék. A fúzió beindításához energiabefektetés – *aktiválási energia* – szükséges. Napjainkban nagy méretekben csak a Napban és a csillagokban van olyan magas hőmérséklet, hogy a részecskék hőmozgásból adódó mozgási energiája a Coulomb-taszítást legyőzheti, s a fúzió végbemehet. A Nap és a csillagok óriási mennyiségű kisugárzott energiája éppen az anyag fúziós lejtőn történő vándorlásának következménye az energiaminimum felé. Az atommagok fúziójának földi megvalósítására irányuló kísérletekkel majd a 32. fejezetben foglalkozunk.

Természetesen nemcsak könnyű atommagok fúzióját lehet elképzelni, hanem bármely két, (Z_1, A_1), illetve (Z_2, A_2) atommagét is. Közepes méretű atommagok fúziójakor azonban az energiaviszonyok a 31.18b. ábrához hasonlóan alakulnak. Egyrészről a Coulomb-taszítás sokkal erősebb – hiszen Z_1 és Z_2 most nagyobb, mint a könnyű atommagok esetében –, másrészt pedig a nukleonok energetikailag kedvezőtlenebb, magasabb energiájú helyzetben lesznek a létrejött nehéz magban, mint voltak kezdetben. (A közepes és nehéz atommagok fúziójával ma a magfizika egyik legmodernebb ága, a *nehézion-fizika* foglalkozik.) A könnyű magok fúziójával szemben a közepes atommagok fúziója végeredményben is endoterm, azaz nemcsak hogy aktivációs energia befektetése szükséges hozzá, hanem a folyamat során kevesebb energiát nyerünk vissza, mint amennyit befektettünk.

Az α-bomlás és a maghasadás. Vizsgáljuk meg most a fúziós folyamat megfordítottját, amikor atommagok két, (Z_1, A_1), illetve (Z_2, A_2) összetételű atommagra széthasadnak. Ez a maghasadás jelensége. Vegyük észre, hogy $Z_1 = 2$ és $A_1 = 4$ esetén az α-bomlást mint a maghasadás egy speciális esetét kapjuk.

Ha a maghasadást a fúziós folyamat megfordítottjaként képzeljük el, a 31.18b. ábra alapján könnyű válaszolni arra a kérdésre, hogy miért nem hasadnak szét azonnal a nehéz atommagok. A Coulomb-gát „belülről" is gát, nem csak „kívülről". Energiát kell tehát ahhoz is befektetnünk, hogy a két „hasadvány" atommagot a nukleáris erők ellenében olyan messzire eltávolítsuk egymástól, hogy köztük már csak a Coulomb-taszítás hatása érvényesüljön. A maghasadás beindításához tehát éppen úgy szükséges egy aktiválási energia, mint a magfúzióéhoz. Hideg világunkban az atommagok általában nem kapják meg ezt az energiát, s így létezhetnek a stabil nehéz atommagok.

Az energiaminimum elérését segítő folyamat, az alagúteffektus. A fentiekben megértettük, hogy miért stabilak a különböző atommagok. Ezek után viszont érthetetlenné vált az, hogy a Coulomb-gát ellenére hogyan bomlanak el földi körülmények között is egyes atommagok – esetleg több millió éves felezési idejű – α-bomlással. Hiszen vagy megvan a hőmozgásból a bomláshoz szükséges aktiválási energia, s ekkor az atommag azonnal elbomlik, vagy pedig nincs meg, s ekkor semmi esélye sincs arra, hogy elbomoljon! Az α-bomlás viszont – a többi radioaktív bomláshoz hasonlóan – statisztikus jelenség, azaz még több millió éves felezési idő esetén is vannak olyan atommagok, amelyek most, a jelen hideg körülmények között elbomlanak.

Most is a részecskék hullámtermészete nyújtja a magyarázatot.

Vizsgáljuk meg először egy E összenergiájú, konstans V_0 potenciális energiájú részecske hullámfüggvényét! Az energiatételből

$$\frac{p^2}{2m}+V_0=E,$$

azaz

$$\frac{p^2}{2m}=E-V_0. \tag{31.45}$$

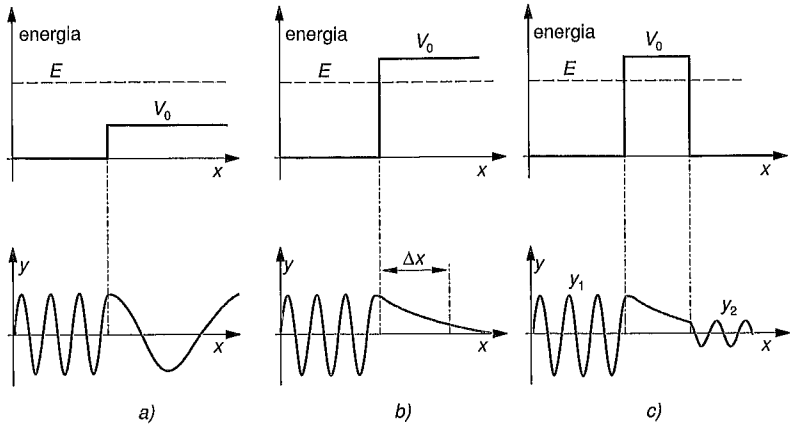
A $\lambda=\frac{h}{p}$ de Broglie-összefüggés (lásd a 19.1. szakaszt) felhasználásával a terjedő részecske hullámhossza kifejezhető:

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m\left(E-V_0\right)}}. \tag{31.46}$$

A 31.19a. ábra a hullámfüggvény alakulását mutatja arra az esetre, amikor (az ábrán balról) olyan részecske érkezik egy V_0 potenciállépcsőhöz, amelynek energiájára

$$E > V_0.$$

Mi történik a részecske hullámfüggvényével, ha $E < V_0$? (31.45) szerint a mozgási energiára negatív szám adódna, ami (31.46)-ban ahhoz vezet, hogy a gyökjel



31.19. ábra

alatt negatív szám áll. Ilyenkor tehát *nem lehet* adott λ hullámhosszúságú hullámmal a részecskét jellemezni. Klasszikus tapasztalatunk is azt sugallja, hogy egy részecske nem mászhat fel magasabb potenciáldombra, mint amekkora a kezdeti mozgási energiája volt. Abban a tartományban tehát, ahol $E < V_0$ a hullámfüggvénynek meg kell szűnni, bele kell simulnia az alapvonalba (31.19b. ábra). Ez azonban nem történhet nagyon hirtelen, hiszen ekkor igen nagy lendületváltozás lépne fel, ami a mozgási energiát feleslegesen nagyra növelné. A hullámfüggvénynek ez a része inkább egy Δx szélességű hullámcsomaghoz hasonlítható. A hullámfüggvény úgy tud egyáltalán nullától különböző értéket felvenni a V_0 potenciális energiájú helyen, ha a „megszűnéséből" adódó Δp akkora, hogy az általa képviselt $\frac{(\Delta p)^2}{2m}$ „kvantumnyüzsgés" éppen kipótolja azt, ami a részecske E energiájából a V_0 potenciálhegy megmászásáig hiányzik:

$$E+\frac{(\Delta p)^2}{2m}=V_0.$$

Azaz

$$\Delta p=\sqrt{2m\left(V_0-E\right)}.$$

A Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés (lásd a 19.4. szakaszt) alapján ekkor a hullámfüggvény lokalizációja:

$$\Delta x=\frac{\hbar}{\Delta p}=\frac{\hbar}{\sqrt{2m\left(V_0-E\right)}}.$$

A hullámfüggvény tehát átlagosan ilyen mélyen „hatol be" a tiltott tartományba.

Ha a részecske nem potenciálisenergia-lépcsőhöz, hanem egy d szélességű potenciálhegyhez érkezik (31.19c. ábra), a behatolt hullámfüggvény $d < \Delta x$ esetén még „kibújik" a túloldalon. Ez azt jelenti, hogy a részecske bizonyos valószínűséggel a potenciálhegy *mögött* is megtalálható, annak ellenére, hogy energiája nem elegendő a hegy megmászásához. A jelenség ahhoz hasonlít, mintha a részecske a megmászhatatlan hegybe fúrt alagútra talált volna, s azon keresztül jutott volna át a túloldalra.

A pontosabb számítások szerint a „hegy alatt" az állapotvonal csökkenése exponenciális: $0{,}693 \cdot \Delta x$ távolságon csökken a felére, majd újra ekkora távolság múlva a negyedére, és így tovább. A hegy túloldalán tehát a bejövő amplitúdónak a $2^{-\left(\frac{d}{0{,}693\cdot\Delta x}\right)}$-ed része bújik ki. A két oldalon levő megtalálási valószínűségek aránya (a potenciálgáton való áthaladás valószínűsége) tehát:

$$\frac{|\Psi_2|^2}{|\Psi_1|^2}=2^{-\left(\frac{2d}{0{,}693\cdot\Delta x}\right)}=2^{-\left(\frac{2d\sqrt{2m\left(V_0-E\right)}}{0{,}693\hbar}\right)}. \qquad (31.47)$$

A szakasz elején feltett kérdésre tehát a magyarázatot az alagúteffektus adja meg (lásd a 20.2.2. pontot): az α-részecske kis valószínűséggel ki tud jutni egy potenciálheggyel körülvett dobozból is – az *atommagból* –, s így az atommag bomlása lehetővé válik.

Az alagúteffektus természetesen a fúziónál is szerepet kap. A fúzió beindulásához sem kell olyan nagy energiájú részecskéket használni, mint a Coulomb-gát magassága. Alagúteffektussal (kis valószínűséggel) már ennél kisebb energiák (alacsonyabb hőmérséklet) esetén is beindul a fúzió.

A nehéz atommagok szétesése alagúteffektussal nemcsak α-részecskék kibocsátásával történhet. Nagyobb tömegű magtöredékek is kiléphetnek: az atommag széthasadhat. Ez a *spontán maghasadás* jelensége. A spontán maghasadás valószínűsége azonban – egyébként azonos viszonyok mellett – sokkal kisebb az α-bomlásénál, hiszen (31.47)-ben a kitevőben levő m tömeg az α-részecske tömegének sokszorosa lehet. A spontán maghasadás ezért csak a legnehezebb (általában mesterségesen előállított) atommagok esetében játszik szerepet a nukleáris anyag energiaminimum felé való törekvésében.

32. Az atomenergia felszabadítása

32.1. Az atomenergia felszabadításának két útja

A nukleonenergia-völgy (lásd 31.4.3. szakasz) vizsgálata alapján azonnal nyilvánvaló, hogy nukleáris energiát úgy nyerhetünk, hogy a nagyobb energiájú atommagokat mesterségesen olyan atommagokká alakítjuk, amelyekben a nukleonok erősebben kötöttek. Az átalakulás során leadott többletenergiát hasznosíthatjuk. Mivel nagyobb energiájú atommagok a völgy „elején" és „végén" vannak, így a nukleáris energia felszabadításának is két útja van:

a) Kis tömegszámú elemek egyesítésekor, *fúziójakor* a völgy mélypontját a kis rendszámú elemek felől közelítjük meg.

b) Nagy tömegszámú, nehéz elemekből az atommagok szétbontásával hozhatunk létre az energiavölgy közepe táján levő, erősen kötött atommagokat. Erre a legjobban felhasználható folyamat a *maghasadás*.

A nukleáris energia „eredete". Honnan származik az az energia, amelyet maghasadáskor, illetve magfúziókor nyerünk?

Ha ezt a kérdést csak a közvetlen atommag-átalakulásra vonatkoztatjuk, akkor a válasz a nukleonenergia-felület ismeretében egyszerűen megadható (lásd a 31.3.1. szakaszt).

Ugyanerre a kérdésre azonban sokkal nehezebb válaszolni, ha nem a közvetlen atommag-átalakulásra összpontosítunk, hanem arra kérdezünk rá, hogy mi az oka annak, hogy *vannak még* világunkban egyáltalán nagyobb energiájú atommagok? Honnan nyerték ezek a többletenergiájukat? Azt az energiát, amelyet mi végső soron fel kívánunk használni?

A kérdésre csak a Világegyetem fejlődéstörténetének (lásd a 34. fejezetet) ismeretében adhatunk választ. Fúzióra képes könnyű atommagok azért léteznek még (igen nagy arányban), mert univerzumunk *fiatal*. A mintegy 14 milliárd évvel ezelőtti ősrobbanás hatalmas energiája nem engedte az anyagot kötött állapotba kerülni, hanem azt nem kötött formájában (protonok, neutronok) szétszórta. Mire az anyag annyira lehűlt, hogy kötött atommagok létrejöhettek volna, már annyira ritka lett, hogy nem nagyon találkoztak a nehezebb magok létrejöttéhez szükséges részecskék nagyobb számban.

Egy részük persze befogódott, és kissé nagyobb atommagokat hozott létre. Ezt nevezzük „eredeti atommag-felépülésnek", idegen kifejezéssel ez a „primordiális nukleoszintézis". Ebben különösen a neutronoknak volt igen nagy szerepe. Ez az oka annak, hogy a mostani univerzum látható anyagának kb. 24%-a $^4_2$He-ból, míg 75%-a protonokból áll. A nehezebb elemek alig 1%-nyi mennyiségben vannak csak jelen, de ezek legtöbbje már a csillagok fejlődése során keletkezett, nem az Ősrobbanáskor.

Később azonban, az anyag sűrűsödési pontjaiban – a csillagokban – sok részecske találkozott, s így a nagyobb atommagok kialakulása – a fúzió – is csak ott mehetett végbe. Ez a folyamat napjainkban is tart, a csillagok a fúzióból nyerik az energiát. Amikor tehát mi a magfúzió energiáját hasznosítjuk, végeredményben az univerzumunkat teremtő hatalmas ősrobbanás energiájából merítünk.

Más a helyzet a maghasadással. Maghasadáskor nehéz atommagokat bontunk szét, azokban pedig az optimálisnál több nukleon sűrűsödött össze. Ez arra utal, hogy a nehéz atommagok olyan körülmények között jutottak többletenergiájukhoz, amikor az anyag nagyon sűrű, összenyomott állapotban volt. Jelenlegi ismereteink szerint bizonyos típusú csillagok „halálakor" a hatalmas méretű gravitációs összehúzódás a csillag anyagát összepréseli, majd a csillag egy része óriási energiafelszabadulás mellett szétrobban. Ez a *szupernóva-robbanás* (lásd 34. fejezet). A szupernóva-robbanás után a valamikori csillag közepén egy hatalmas méretű „atommag" marad vissza, amely csaknem teljes egészében neutronokból áll. Ez a *neutroncsillag*. Itt ugyan a neutron–proton arány teljes felbomlásának következtében nagyon megnő a Pauli-energia, de ezt a hatalmas, összehúzódott tömeg miatt fellépő gravitációs energiacsökkenés kompenzálni képes. A szupernóva-robbanáskor a csillag sűrű anyagának egy része szétfröccsen, s így nagy energiájú, nehéz atommagokkal szennyezi be a környezetét. Így keletkeznek a nehéz atommagok. Amikor tehát nehéz atommagok hasításából szabadítunk fel energiát (mint pl. a Paksi Atomerőműben), akkor tulajdonképpen a Földünk anyagát létrehozó, mintegy 5 milliárd évvel ezelőtt bekövetkezett szupernóva-robbanás napjainkig „elraktározott" energiamorzsáit hasznosítjuk.

32.1.1. Az energiafelszabadítás makroszkopikus méretekben történő megvalósítása (a láncreakció)

Bár a nukleáris energia felszabadításának elemi folyamataiban (egyetlen maghasadás, illetve egyetlen fúziós folyamat) felszabaduló energia több milliószor akkora, mint egyetlen kémiai reakció során keletkezett energia, makroszkopikus szempontból azonban még mindig nagyon kicsiny (néhányszor 10^{-12} J). A makroszkopikus méretű hasznosításhoz az kell tehát, hogy rövid idő alatt *nagyon sok* elemi folyamat jöjjön létre. Ennek jelenleg ismert egyetlen technikai megvalósítási lehetősége a *láncreakció*.

A láncreakció létrejöttéhez az szükséges, hogy a reakciónak legyen olyan *terméke,* amely segíti a további reakciók létrejöttét. (A szabályozáselméletben ezt pozitív visszacsatolásnak nevezik.)

A reakciók létrejöttéhez általában *aktiválási energia* befektetése szükséges (lásd a 31.18. ábrát), ezért a láncreakció legkézenfekvőbb megvalósítása az, amikor a pozitív visszacsatolást közvetlenül a felszabaduló energia segítségével hozzuk létre.

Termikus aktiválás. Az aktiválási energiát gyakran a folyamatban részt vevő részecskék mozgási energiája formájában tudjuk biztosítani. *Termikus aktiválás* módszerének azt nevezzük, amikor az aktiválási energiát a részecskék hőmozgása (termikus mozgása) fedezi. Emiatt a közeg T hőmérséklete és a reakció aktiválási energiája (E_a) szorosan összefüggenek.

$$\frac{3}{2}kT = E_a. \tag{32.1}$$

A közeget nem kell folyamatosan kívülről melegíteni, hiszen a mikroszkopikus egyedi folyamatok során a reakció*termékek* mozgási energiája (amely exoterm folyamatnál nagyobb, mint a kiindulási mozgási energiák összege, lásd 31.3.1. szakasz) ütközések révén szétoszlik a közeg többi részecskéje között, és az anyagot tovább melegíti. Legfeljebb a láncreakció beindításához van szükség kezdeti melegítésre („gyufa").

Ez a módszer – bár nagyon kézenfekvőnek és egyszerűnek tűnik, s bár a mindennapi életben ismert legtöbb kémiai láncreakció így működik – a magfizikai láncreakciók esetében több problémát is felvet:

a) Könnyű atommagok *fúziójakor* az aktiválási energia 10^{-16} J nagyságrendű, s ennek a (32.1) összefüggés alapján mintegy tízmillió (!) fokos hőmérséklet felel meg. Az atommag*hasadás* aktiválási energiája még magasabb: több százmillió fokon lenne csak aktiválható! (A kémiai reakciók – pl. szén vagy az olaj égése – aktiválási energiája sok nagyságrenddel kisebb, ezért azok már néhány száz fokos hőmérsékleten is végbemennek.) A tízmillió fokos hőmérséklet azonban mindenféle kémiai kötést felszakít. Felbomlanak nemcsak a molekulák, hanem az atomok is. Az anyag atommagokra és elektronokra szakad szét, ún. *plazmaállapotba* kerül. Az ilyen állapotú anyagnak az összetartása, bezárása nagy technikai gondot jelent. Érthető, hogy a *termonukleáris* (termikusan aktivált, nukleáris láncreakción alapuló) fúziós erőművek megvalósítása szorosan összekapcsolódik a plazmafizikai kutatásokkal.

b) A termikus aktiválás esetén gond lehet még a láncreakció szabályozása. A láncreakció beindulásakor ugyanis a felszabaduló energia miatt a hőmérséklet elkezd növekedni, s ez egyre több új reakció beindulásához vezet: a láncreakció „megszaladhat".

Ennek klasszikus példája a hagyományos kémiai robbanószerek esete. Az energiafelszabadulás üteme mindaddig növekszik, amíg csak az „üzemanyag" el nem fogy, illetve amíg a felszabaduló energia és a megnövekedett hőmérséklet miatt előállott nagy nyomás szét nem szórja az üzemanyagot. Azonban vannak a kémiában is olyan láncreakciók, amelyek nem szaladnak meg! Ilyenre példa a szén vagy az olaj égése. Itt a szabályozást az biztosítja, hogy az égés csak a széndarab, illetve az olajfolt *felületén* megy végbe, oxigén jelenlétében. A kályha tüzének folyamatos, nem robbanásszerű égését az teszi lehetővé, hogy az oxigén csak lassan, áramlás révén vezetődik a termikusan aktivált éghető anyaghoz. Közismert azonban, hogy ha a reakcióhoz szükséges alkotórészek mind együtt vannak, egymással nagy felületen érintkeznek, akkor az a kémiában is megszaladó láncreakcióhoz (robbanáshoz) vezet: pl. szénporrobbanás, benzingőzrobbanás stb.

Úgy tűnik, hogy az atomenergia *fúziós úton* való felszabadítása egyedül termikus aktiválással lehetséges, bármilyen nehéz technikai feladatot kell is ehhez megoldani.

(A szenzációval beharangozott „hideg fúziós" kísérleteket senkinek sem sikerült megismételnie, ezért ennek a lehetősége tudományosan nem bizonyított.) A fúziós energiatermeléssel a 32.3. szakaszban még kissé részletesebben is foglalkozunk.

Láncreakció neutronokkal (neutronos aktiválás). A maghasadásnak van egy olyan kísérőjelensége, amely lehetővé teszi egy *nem energiára alapuló* visszacsatolás létrehozását, s így láncreakció fenntartását. A nukleonenergia-felület vizsgálatakor megértettük, hogy a nagy tömegszámú, nehéz atommagokban a neutronok aránya nagyobb, mint a közepesekében, azaz a $Z_{\min}(A)$ függvény egyre inkább eltávolodik a $Z = A/2$ egyenestől (pl. a ^{235}U-ban a neutron–proton arány $N/Z = 1{,}554$, míg a fele akkora rendszámú palládium legnehezebb stabil izotópjában, a ^{110}Pd-ban is csak $N/Z = 1{,}39$). Ezért ha egy ilyen atommag két részre hasad, feltétlenül maradnak feleslegben neutronok a stabil állapothoz képest, hiszen egy neutrongazdag atommagból két, neutronban szegényebb atommag keletkezik. Például a $n + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{110}_{46}\mathrm{Pd} + {}^{110}_{46}\mathrm{Pd}$ folyamatban (ha így menne végbe a maghasadás), 16 neutron lenne „feleslegben". A többletneutronok egy része benne marad a maghasadáskor keletkező töredékmagokban (hasadványokban). Emiatt ezek erősen radioaktívak, és több, egymást követő β-bomlás során igazítják a neutron–proton arányukat, közelítve a nukleonenergia-völgy mélyvonala felé. Van azonban a többletneutronoknak olyan része is, amely óhatatlanul kilép. A nehéz atommagok széthasadását tehát szükségszerűen *neutronok kilépése* kíséri. A hasadás mint elemi folyamat termékei tehát a következők: két (radioaktív) hasadvány, energia, neutronok.

A kilépő neutronok léte lehetővé tesz egy neutronokra alapozott visszacsatolást, mivel a nehéz atommagok egy része (pl. ^{235}U, ^{233}U, ^{239}Pu stb.) már nagyon kis energiájú *neutronok befogásakor* is elhasad! Ilyenkor a befogott neutron *kötési*

energiája fedezi a maghasadás aktiválási energiáját, s így vezet a neutronbefogás maghasadáshoz.

Ezekre az anyagokra vonatkozóan fennáll tehát a pozitív visszacsatolás feltétele: a folyamat (maghasadás) olyan termékre vezet (neutron), amely elősegíti további reakciók (újabb maghasadások) létrejöttét.

A neutronokra alapozott láncreakciós folyamatban tehát a főszerepet a neutronok játsszák, az energiafelszabadulás a láncreakció szempontjából csak „mellékes".

A felszabadult energia legnagyobbrészt a hasadványok mozgási energiájának formájában jelenik meg. Ezek pedig *erősen töltött részecskék lévén* a közegben hamarosan lefékeződnek, s ütközések révén szétosztják energiájukat: a közeg felmelegszik. A felszabadult energiát tehát itt is hő formájában hasznosíthatjuk.

Mivel az aktiválási energiát most már nem a hőmozgás, hanem a neutronok kötési energiája fedezi, ezért a neutronos láncreakció működhet alacsony hőmérsékleten is. Ezzel a magas hőmérséklet problémáját megoldottuk. Mi a helyzet a *szabályozhatósággal,* a láncreakció „megszaladásával"? Nyilvánvaló, hogy itt is a neutronok számának befolyásolásával érünk el eredményt. Vannak olyan anyagok, amelyek szívesen „nyelnek el" neutronokat (a „szívesen" azt jelenti, hogy nagy a neutronok befogásával szemben mutatott hatáskeresztmetszetük). Ilyen pl. a bór vagy a kadmium. Ezekkel az anyagokkal szabályozhatjuk a reaktorban mindenkor meglevő és hasadást előidézni képes neutronok számát. Ha sok neutront „vonunk el", a láncreakció leáll, ha keveset, újraindul. A ma működő, maghasadáson alapuló atomerőművekben neutronelnyelő anyagokból készült rudak ki- és betologatásával, illetve a reaktoron átáramló víz bórtartalmának változtatásával szabályozzák az erőmű teljesítményét. A szabályozhatóság néhány kérdésére még a neutronos láncreakció részletesebb vizsgálata (lásd 32.2.1. szakasz) után visszatérünk.

32.2. Maghasadással működő reaktorok

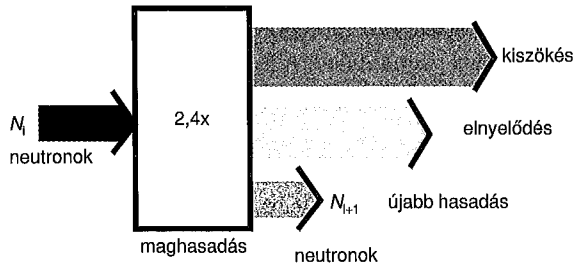
Maghasadáson alapuló, neutronokkal megvalósított szabályozott láncreakcióval működő reaktorokat több célra is lehet használni. Az atomerőműveket *energetikai reaktorok* látják el energiával. Vannak azonban olyan reaktorok is, ahol a termelt energia csak felesleges melléktermék, mert nem az energiát, hanem a reaktorban lévő neutronokat kívánják hasznosítani (pl. radioaktív izotópok előállítására, besugárzására, ipari vagy magfizikai kutatások végzésére). Ezek a *kutatóreaktorok.* Más típusok esetén magának a reaktornak a vizsgálata a fontos. Új reaktorfizikai, illetve reaktortechnikai eljárásokat, módszereket próbálnak ki rajtuk, a reaktor viselkedését, szabályozhatóságát kutatják extrém körülmények hatására. Ezek a *ki-*

sérleti reaktorok. Ismét más típusokon a jövő reaktormérnökeit, reaktorfizikusait képezik. Ezek a *tanreaktorok,* vagy *oktatóreaktorok.* Természetesen nem szabad ezt az osztályozást mereven elhatároltnak tekinteni, hiszen sok átfedés lehetséges. Magyarországon energetikai reaktorok Pakson vannak az atomerőműben, kutató- és kísérleti reaktor Csillebércen a Központi Fizikai Kutatóintézetben, oktatóreaktor pedig a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen.

Mindenfajta atomreaktor működésének alapfeltétele azonban az, hogy a láncreakció neutronok közvetítésével fennmaradjon. Ezért a következőkben ezzel foglalkozunk egy kicsit részletesebben.

32.2.1. A működés fizikai alapjai

A láncreakció fennmaradásának feltétele. Korábban említettük, hogy a nehéz elemek hasadásakor egynél több neutron válik szabaddá. A hasadási neutronok átlagos számát jelöljük $\overline{\nu}$-vel. Az ^{235}U lassú neutronokkal indukált hasadására vonatkozóan $\overline{\nu} \approx 2{,}4$. Kövessük végig, hogy mi történhet a hasadáskor kibocsátott neutronokkal! Jelöljük az i-edik időpillanatban maghasadást létrehozó neutronok számát N_i-vel! A 32.1. ábra mutatja, hogy három „életút" lehetséges: egy részük „kiszökik" a reaktorból, más részük „elnyelődik" (anélkül, hogy maghasadást hozna létre), és csak a harmadik részük lesz hasznos a láncreakció számára, hiszen az hozza létre a maghasadások – és ezzel a hasadási neutronok – újabb „generációját" (N_{i+1}).



32.1. ábra

Önfenntartó láncreakciót akkor kapunk, ha minden hasadási eseményből kilépett neutronból *átlagosan legalább egy* újabb maghasadást hoz létre. Ennek pontosabb, mennyiségi megfogalmazására vezessük be az *effektív sokszorozási tényező* vagy kritikussági tényező fogalmát: Ha N_i számú hasadásból keletkezett neutronból átlagosan N_{i+1} számú idéz elő újabb hasadást, akkor az (N_{i+1}/N_i) arányt effektív sokszorozási tényezőnek nevezzük, és k_{eff}-fel jelöljük:

$$k_{\text{eff}} = \frac{N_{i+1}}{N_i}. \tag{32.2}$$

$$\text{Ha } k_{\text{eff}} \begin{cases} < 1, \text{ a láncreakció csökkenő (leáll) (}\textit{szubkritikus}\text{ állapot),} \\ = 1, \text{ a láncreakció állandó teljesítményű (}\textit{kritikus}\text{ állapot),} \\ > 1, \text{ a láncreakció növekvő (}\textit{szuperkritikus}\text{ állapot).} \end{cases} \tag{32.3}$$

A nukleáris terminológiában használatos „kritikus" szó a láncreakcióra utal, *semmi köze* a köznapi értelemben használt „veszélyt jelző", „válságos", „súlyos" kifejezéshez (pl. „a beteg állapota kritikusra fordult"). Egy reaktor kritikus állapotban szépen, egyenletesen működik!

A neutronok számának időbeli megváltozására is kaphatunk becslést. A (32.2) összefüggés alapján látszik, hogy a neutronok száma generációnként *mértani sor* szerint változik, hiszen két egymást követő tag hányadosa állandó. Emiatt az n-edik tag:

$$N_n = N_0 \cdot \left(k_{\text{eff}}\right)^n,$$

ahol N_0 a „kezdeti", ($n = 0$) neutronszámot jelenti.

Nyilván egy hasadási eseményben keletkezett neutron nem azonnal hoz létre újabb maghasadást, hanem valamennyi idő el kell teljen két, egymást követő neutrongeneráció között. Jelöljük ezt az időt ℓ-lel („generációs idő"). Ekkor t idő alatt $n = \frac{t}{\ell}$ neutrongeneráció követi egymást. A neutronok számának időbeli megváltozása tehát:

$$N\left(t\right) = N_0 \cdot \left(k_{\text{eff}}\right)^{t/\ell}.$$

Térjünk át az eléggé szokatlan k_{eff} alapról a tudományban és a műszaki életben szokásos „e" alapra:

$$N\left(t\right) = N_0 \cdot e^{\left(\ln k_{\text{eff}}\right) t/\ell}.$$

Vegyük még figyelembe, hogy az atomreaktorok normális működése során k_{eff} nem nagyon tér el az egytől, azaz $k_{\text{eff}} \approx 1$. Ekkor pedig $\ln k_{\text{eff}} \approx k_{\text{eff}} - 1$. Így kapjuk végül:

$$N\left(t\right) = N_0 \cdot e^{\left(\frac{k_{\text{eff}}-1}{\ell}\right) \cdot t}. \tag{32.4}$$

A neutronok száma tehát az idő exponenciális függvénye. Ha $(k_{\text{eff}} - 1) > 0$, akkor a neutronszám exponenciálisan növekszik, ha $(k_{\text{eff}} - 1) < 0$ akkor pedig exponenciálisan csökken.

A késő neutronok szerepe az atomreaktor szabályozásában. Ezen a ponton szólunk még egy fontos kérdésről a szabályozhatósággal kapcsolatban. A magreakciók az emberi időskálához viszonyítva igen nagy sebességgel mennek végbe. Tipikus időtartamuk $10^{-20}...10^{-15}$ s. A kilépett neutronok is nagyon rövid idő után (a másodperc tíz-, illetve százezred része alatt) találkoznak más atommagokkal, s hoznak létre magreakciókat, például újabb maghasadást. Így a maghasadások két „generációja" között mindössze $10^{-5}...10^{-4}$ s telik el. Ez viszont azt jelenti, hogy egyetlen másodperc alatt több tízezer, esetleg több százezer generáció jön létre! Ennek következtében a reakciók számának növekedési üteme igen gyors!

Nézzük meg ezt egy egyszerű számpéldán. Legyen k_{eff} mindössze egy ezrelékkel nagyobb, mint egy, azaz $k_{\text{eff}} = 1{,}001$ (ez azt jelenti, hogy 1000 maghasadás 1001 újabb maghasadáshoz vezet), és, $\ell = 10^{-4}$ s. Ekkor egy másodperc alatt ($t = 1$) a (32.4) összefüggés alapján:

$$N(1) = N_0 \cdot e^{\left(\frac{1{,}001-1}{0{,}0001}\right)\cdot 1} = N_0 \cdot e^{10} = 22026 \cdot N_0,$$

azaz a maghasadások száma 1 s alatt a kezdeti érték huszonkétezerszeresére nő!

Nem jelenti-e ez azt, hogy mire a növekedést észrevesszük, s mire egyáltalán beavatkozhatunk, addigra már késő lesz?

Itt ismét nagy szerencsénk van. A maghasadáskor kilépő neutronok kis hányada (kb. 6 ezreléke) nem azonnal, hanem már a hasadványok β-bomlása után létrejött radioaktív magokból repül ki, és így viszonylag hosszú, több másodperces felezési idővel jelenik meg. Ezek a *késő neutronok*. Az azonnal kilépő neutronokat *prompt neutronoknak* nevezik (*prompt:* azonnali). A késő neutronok „generációs ideje" tehát meghosszabbodik a neutronkibocsátást megelőző béta-bomlás idejével. Így (32.4) nevezőjébe több nagyságrenddel nagyobb szám kerül, és az exponenciális felfutása is sokkal lassabb lesz.

A reaktorokat úgy építik és úgy üzemeltetik, hogy a *prompt neutronokkal* (a késő neutronok nélkül) ne jöhessen létre növekvő láncreakció, a késő neutronokkal együtt viszont lehessen $(k_{\text{eff}} > 1)$-et elérni. Ez utóbbira például akkor van szükség, amikor be akarjuk indítani a reaktort, vagy teljesítményt akarunk növelni. Tilos olyan üzemi körülményeket teremteni, amikor a késő neutronok nélkül is létrejöhet növekvő láncreakció, mert ilyenkor a reaktor szabályozhatatlanná válik. Az ilyen (baleseti) állapotot *prompt szuperkritikus* állapotnak nevezik.

A késő neutronok létezése teremti meg tehát a lehetőséget a szabályozott, neutronos láncreakció technikai megvalósítására.

„Végtelen nagy" atomreaktor. A reaktorok működésének megértéséhez legalább hozzávetőlegesen sorra vesszük azokat a tényezőket, amelyek k_{eff} értékét befolyásolják. Először tekintsünk el a „kiszökéstől" (lásd 32.1. ábra). Ezt úgy szokás megtenni, hogy „végtelen nagy" reaktorral foglalkozunk. Ekkor ugyanis biztos, hogy minden neutron benne marad, semennyi sem tud kiszökni. A végtelen nagynak képzelt reaktor sokszorozási tényezőjét k_∞-el jelöljük.

Neutronok energiaspektruma. Ha nincs kiszökés, akkor már csak az elnyelődés és a hasadás „versenyeznek" egymással (lásd 32.1. ábra). A dolgot azonban bonyolítja, hogy az elnyelődés és a hasadás viszonya különböző energiájú neutronokra más és más lehet. Maghasadáskor viszonylag nagy energiájú neutronok keletkeznek, amelyek a reaktorban többszörösen ütközve lelassulnak. Ezért a reaktorban egészen kis energiájú (termikus) neutronoktól kezdve a nagy energiájúakig (gyors neutronok) mindenfajta neutron megtalálható sajátos eloszlásban. A reaktorban levő neutronok energiaeloszlását reaktorspektrumnak nevezik.

A neutronok lassítása. A neutronok lelassulása nem egy „szükséges rossz", ennek több előnye is van. Ezek miatt a reaktorok legtöbbjét tudatosan úgy építik, hogy abban a neutronok lelassuljanak. A lassú neutronok ugyanis a nukleáris üzemanyagba sokkal nagyobb valószínűséggel fogódnak be, és hoznak létre maghasadást. Lassú neutronokkal tehát könnyebb létrehozni a láncreakció fennmaradásának feltételét. A világon jelenleg üzemben levő atomerőművek több mint 80%-a lassú neutronokkal működik. (Van a gyorsneutronos erőműveknek is előnye a nukleáris üzemanyag-gazdálkodásban. Erre még majd a 32.2.3. pontban kitérünk.)

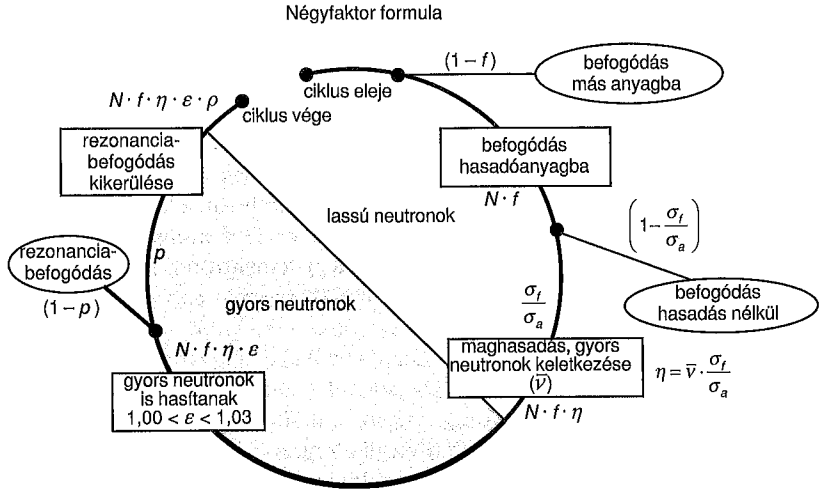
A neutronok lelassítását a nehéz atommagokból álló nukleáris üzemanyag, valamint a reaktor középnehéz atommagokból (pl. vas) álló szerkezeti elemei csak nagyon rossz hatásfokkal végzik. Egy rugalmas ütközés során a neutron szinte „visszapattan" a nála sokkal nagyobb tömegű atommagról, alig veszítve az energiájából. Legjobb neutronlassító a hidrogén, hiszen a proton tömege szinte megegyezik a neutronéval, s így (centrális ütközés esetén) a neutron teljes energiáját átadhatja a protonnak. Az ütközés után – a biliárdgolyóhoz hasonlóan – a neutron „állva marad". A legolcsóbb hidrogéntartalmú anyag a víz, ezt használhatjuk neutronok lassítására. Sajnos a vízben túlnyomórészt található könnyűhidrogén részben el is nyeli a neutronokat, miközben nehézhidrogénné (deutériummá) alakul:

$${}_1^1\text{H} + \text{n} \rightarrow {}_1^2\text{H}.$$

Ez az elnyelődés súlyát növeli a hasadásért folyó versenyben. Természetes uránból álló üzemanyagban (amelyben csak 0,71% a hasadóképes ^{235}U részaránya) ez az effektus már k_{eff} olyan mértékű csökkenéséhez vezet, hogy láncreakció nem jöhet létre még végtelen nagy atomreaktor esetén sem. Ilyenkor könnyűvíz helyett nehéz hidrogént tartalmazó *nehézvizet* használnak lassítóközegként, mert

a nehézhidrogén nem nyeli el a neutronokat. A nehézvíz nagyon drága, előállítása nagyon energiaigényes, ezért a világon csak kevesen választották ezt az utat erőművek létrehozására (ilyen pl. a kanadai CANDU típusú atomerőmű, amilyen a romániai Cernavodában is üzemel). A legtöbb atomerőmű könnyűvizes lassítással és dúsított urán fűtőelemekkel üzemel. A Paksi Atomerőmű lassító közege is könnyűvíz, de az üzemanyagban a természetes uránhoz képest 3–5-ször nagyobb arányban van jelen az ^{235}U.

Négyfaktor-formula. Vizsgáljuk most meg, milyen tényezőktől függ a k_∞. Tekintsük a (hipotetikus) végtelen kiterjedésű reaktor egy véges térfogatát! Tegyük fel, hogy ebben N termikus neutron van. Vizsgáljuk meg, mi minden történik ezekkel, amíg elérünk a neutronok következő generációjáig (32.2. ábra)!



32.2. ábra

Mivel a rendszer végtelen nagy, ezért minden neutron befogódik előbb vagy utóbb, de a meglévő neutronoknak csak f hányada fogódik be hasadóanyagba (f neve: *termikus neutronhasznosítási tényező*). Az üzemanyagba befogódott neutronoknak csak egy része okoz maghasadást, másik része úgy nyelődik el, hogy nem hoz létre maghasadást. Jelöljük a maghasadás arányát $\frac{\sigma_f}{\sigma_a}$-val. Ahogy említettük korábban, hasadásonként átlagosan $\bar{\nu}$ gyorsneutron bocsátódik ki. Ezek alapján minden, az üzemanyagba befogódott neutron átlagosan $\eta = \bar{\nu} \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma_a}$ gyors-

neutront hoz létre (η neve: *termikus neutronhozam*). A neutronciklusnak ebben a szakaszában tehát $N \cdot (f \cdot \eta)$ gyorsneutronunk lesz. A reaktorunk üzemanyaga mindig tartalmaz ^{238}U-at is. Ez, és az ^{235}U is bizonyos (nem túl nagy) valószínűséggel a gyorsneutronok hatására is el tud hasadni. Ezáltal újabb gyorsneutronok jönnek létre. Ezért ezt a hatást egy ε *(gyorshasítási)* tényezővel vesszük figyelembe (tipikusan $1 < \varepsilon < 1{,}03$). Gyorsneutronjaink száma tehát most már $N \cdot (f \cdot \eta \cdot \varepsilon)$. A ciklus befejezéséig a gyorsneutronoknak le kell lassulniuk, hiszen a ciklust termikus neutronoktól indítottuk. Lelassulásuk közben azonban veszteség is van, mert a szerkezeti anyagok – és különösen a ^{238}U – nagy valószínűséggel, rezonanciaszerűen fog be közepes energiájú (epitermikus) neutronokat. Jelöljük p-vel a neutronoknak azt az arányát, amely kikerüli ezt a rezonanciaszerű befogódást, és végül le tud lassulni termikus energiákig. p neve: *rezonanciakikerülési tényező*. A ciklus végére értünk. A meglévő termikus neutronok száma tehát: $N' = N \cdot (f \cdot \eta \cdot \varepsilon \cdot p)$. Ennek alapján a végtelen reaktorra vonatkozó sokszorozási tényező:

$$k_\infty \equiv \frac{N'}{N} = f \cdot \eta \cdot \varepsilon \cdot p. \qquad (32.5)$$

Ez a *négyfaktor-formula*.

Véges méretű reaktor. Véges méretű reaktornál figyelembe kell venni még azt is, hogy a neutronok egy része a reaktor széleinél eltávozik, és így csak a P-ed része marad bent a reaktorban (P neve: kilépési tényező). Ezért véges méretű reaktorra az effektív sokszorozási tényező:

$$k_{\text{eff}} = k_\infty \cdot P = f \cdot \eta \cdot \varepsilon \cdot p \cdot P. \qquad (32.6)$$

A képletben η a használt hasadóanyag magfizikai sajátosságaitól függ, míg a többi tényező az üzemanyag összetételétől, a reaktor konstrukciójától, geometriai felépítésétől, a használt szerkezeti anyagok minőségétől stb.

A rezonanciakikerülés és a heterogén atomreaktor. Említettük, hogy a mérések szerint az ^{238}U atommagok neutron-befogóképessége (a neutronbefogás hatáskeresztmetszete) különösen nagy a közepes energiájú neutronokra vonatkozólag (ezek az ún. rezonancianeutronok). Ezért mindenképpen el kell azt kerülni, hogy lassulásuk közben a neutronok akkor találkozzanak az ^{238}U atommagokkal, amikor ezen a különösen érzékeny energiatartományon „áthaladnak". Szilárd Leó ötlete alapján a hasadóanyagot tartalmazó üzemanyagot (amelyekben szükségszerűen van ^{238}U is) vékony rudakba sajtolják, s így helyezik őket a neutronlassító közegbe. A hasadáskor keletkező gyors neutronok gyorsan kilépnek a nagy relatív felületű rúdból, s a lassító közegben lelassulnak. Csak a már nagyon lelassult (termalizálódott) neutronok tévednek vissza. A rúdban levő ^{238}U atommagok tehát vagy csak a nagyon gyors, vagy csak a nagyon lassú neutronokkal találkoznak, s ezzel a neutronelnyelésre különösen érzékeny energiatartományt elkerülik.

32.2.2. Nukleáris üzemanyagok

Az eddigiek alapján összefoglalhatjuk, hogy milyen feltételeknek kell eleget tenniük azoknak az anyagoknak, amelyeket hasadásos energiatermelésre használhatunk:

- Létezzenek a Földön! (Felezési idejük ne legyen túl rövid!)
- A maghasadás neutronokkal (lehetőleg lassú neutronokkal) legyen aktiválható, azaz a neutron befogásakor felszabaduló kötési energia legyen nagyobb a maghasadás aktiválási energiájánál.
- A hasadásonként kibocsátott neutronok száma legyen minél nagyobb (de feltétlenül egynél nagyobb), hogy láncreakciót lehessen létrehozni.

Ezek a feltételek nagyon leszűkítik a szóba jöhető atommagok körét. Lényegében csak a ^{232}Th, ^{235}U és a ^{238}U esetén találunk megfelelő jelölteket. A lassú neutronokkal való maghasadás feltétele azonban a ^{232}Th és ^{238}U atommagokat is kizárja: ezeknél egy lassú neutron befogásakor kevesebb energia szabadul fel, mint amely a hasadás aktiválásához szükséges. A Földön található több száz természetes izotóp közül *egyedül a* ^{235}U*-izotóp* alkalmas arra, hogy vele hasadásos láncreakciót létrehozzunk!

Ennek felezési ideje 700 millió év, ezért ma már a természetes uránnak mindössze 0,7%-át teszi ki.

Az urán dúsítása. Mivel a láncreakció szempontjából csak az ^{235}U atommagok jöhetnek szóba, így a természetes uránban mellettük található ^{238}U atommagok is az „egyéb" elnyelő anyagok közé tartoznak. A (32.5) képletben az f tényezőt tehát nemcsak a reaktor szerkezeti anyagai, hanem az ^{238}U jelenléte is csökkenti. A természetes uránban ma már olyan nagy az ^{238}U hányad, hogy a hasításra képes neutronokat elfogyasztja az ^{235}U elől, s így semmilyen, természetes uránból álló tömbben sem indulhat meg a láncreakció.

Az ^{238}U neutronelnyelő hatását úgy lehet csökkenteni, hogy az üzemanyagban növeljük az ^{235}U arányát. Ez kétszeresen hatékony, hiszen ezáltal adott mennyiségű üzemanyagban nő a hasadóképes ^{235}U mennyisége, és ugyanakkor kevesebb neutronelnyelő ^{238}U lesz. Ez a folyamat a *dúsítás.* (Az üzemanyagot ^{235}U-ban dúsítjuk.)

A két izotóp kémiailag azonos, s így kémiai módszerekkel elválaszthatatlanok. A fizikai módszerek a két izotóp *tömegében* fennálló különbséget használják ki. Ez a tömegkülönbség azonban alig egyszázaléknyi, így ezek a módszerek is csak lassan, többszöri alkalmazás után vezetnek eredményre. A fizikai dúsítási módszerek közül a centrifugálást és a gázdiffúziós módszert említjük meg.

Mindkét módszer az urán gáz halmazállapotú vegyületével, az UF_6-dal (uránhexafluorid) működik.

Urándúsítás nagy fordulatszámú centrifugával (ultracentrifugával). A centrifugálásnál a nehezebb ^{238}U atommagokat tartalmazó molekulák aránya az ultracentrifuga külső széle felé, míg a könnyebb ^{235}U atommagokat tartalmazó molekulák aránya a centrifuga közepe felé növekszik meg. A centrifuga egyik tartományából tehát ^{235}U-ban dúsabb anyagot, másik oldalon pedig ^{235}U-ban „szegényebb" keveréket kapunk. Egyetlen ultracentrifuga azonban csak nagyon kis dúsítást tesz lehetővé. Megfelelő dúsítás eléréshez több ezer ultracentrifugából álló telepet kell építeni.

Urándúsítás diffúziós módszerrel. A diffúziós módszer azon alapszik, hogy hőmérsékleti (termodinamikai) egyensúlyban a könnyebb ^{235}U atommagokat tartalmazó UF_6 molekuláknak valamivel nagyobb a sebességük, s ezért könnyebben diffundálnak. Diffúziós fokozatok egymás utáni, kaszkádszerű kapcsolásával a szétválasztás hatásfoka fokozható. De még így is több tízezer diffúziós cellát kell használni ahhoz, hogy megfelelő dúsítást el lehessen érni.

Az urán dúsítása drága és eszközigényes folyamat. Ezért dúsítóművek építése csak egy bizonyos kapacitás fölött térül meg. A gazdasági okok mellett szigorú nemzetközi egyezmények és előírások is korlátozzák dúsítóművek létesítését. Dúsítóművek segítségével ugyanis olyan összetételű (olyan magas dúsítású) nukleáris anyagot is elő lehet állítani, amely atomfegyverek készítésére is alkalmas.

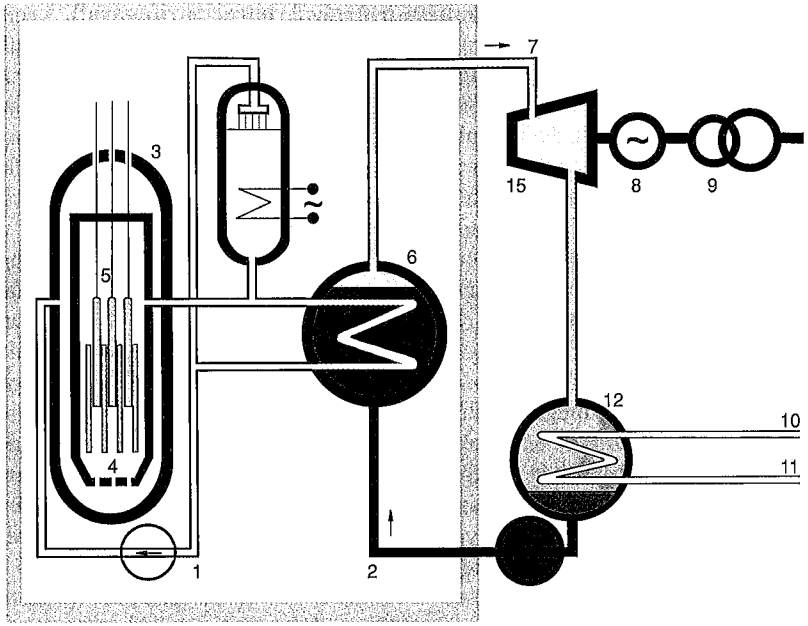
32.2.3. A heterogén atomreaktorok felépítése

A heterogén atomreaktorokban a nukleáris fűtőanyag nem egyenletesen (homogén módon) oszlik el, hanem a fűtőanyagot tartalmazó és nem tartalmazó tartományok váltakoznak. Ez több műszaki előnnyel jár:

- könnyebben biztosítható a fűtőanyagban termelődött hő elvezetése,
- a neutronok keletkezése és lassítása helyileg szétválik, s ezzel jelentősen csökkenthető az ^{238}U neutronelnyelő hatása (lásd 32.2.1. pont, rezonanciakikerülés),
- könnyebben lehetséges a teljesítményeloszlás szabályozása.

Egy vízhűtésű, heterogén atomreaktor vázlatos felépítése a 32.3. ábrán látható. Az ábra alapján ismertetjük az egyes szerkezeti részeket, illetve a működés alapelveit.

Az aktív zóna. A reaktornak azt a tartományát, ahol az energiatermelő magreakciók lezajlanak, *aktív zónának* nevezzük. A heterogén atomreaktorokban az aktív zónában helyezkednek el a nukleáris *fűtőelemek,* illetve fűtőelemkötegek (4), amelyek a reaktor üzeméhez szükséges hasadóanyagot tartalmazzák. A fűtőelemekből kilépő gyors hasadási neutronokat az atomreaktorok legtöbb típusában a fűtőelemek között levő közeg (víz, nehézvíz, BeO, grafit stb.) lelassítja, megnövelve ezzel a neutronok által keltett újabb maghasadások valószínűségét. Ezt a



32.3. ábra

lassítóközeget nevezzük *moderátornak.* A maghasadások által felszabaduló energia legnagyobb részét a hasadványok hordozzák mozgási energia formájában, s ezek lefékeződése a fűtőelemeket felmelegíti. A fűtőelemrudak belsejének hőmérséklete üzem közben az 1000 °C-ot is meghaladhatja. A keletkező hő elvezetésére a fűtőelemeket folyamatosan hűteni kell. Ezért az aktív zóna mindig tartalmaz valamilyen *hűtőközeget,* s végül is ennek segítségével nyerjük ki a reaktorban felszabadult energiát.

A vízzel, illetve nehézvízzel működő reaktorokban a hűtőközeg egyszersmind a moderátor szerepét is ellátja. Vannak olyan konstrukciók is (pl. grafitmoderátoros, gázhűtésű), amelyeknél e két feladat teljesítését különböző közegek látják el.

Az eddigieken túl az aktív zónában kapnak helyet a reaktort vezérlő *szabályozóelemek,* illetve szabályozóelem-kötegek (5), amelyek neutronelnyelő anyagokból állnak, s amelyeknek ki- és betolásával az aktív zóna teljesítményét változtatni lehet.

Ideális esetben az aktív zóna minden részén azonos hőmérséklet uralkodik, s egyenletes az energiafelszabadulás. Minthogy azonban a zóna szélein a neutronok egy része szükségszerűen megszökik, így a széleken kisebb a neutronsűrűség. Ezért természetesen (ha a zóna széle ugyanolyan összetételű, mint a közepe) kevesebb az időegység alatt bekövetkező hasadások száma, s így kisebb a teljesítmény is. Ezt a teljesítményinhomogenitást egyrészt a zónát körülvevő neutronviszszaverő anyagok – ún. *reflektorok* – alkalmazásával, másrészt pedig a zóna külső részein levő fűtőelemek nagyobb mértékű dúsításával lehet kompenzálni.

Az aktív zóna egyenletes, optimális működésének beállítása bonyolult reaktorfizikai számításokat igényel, amelyek csak nagy teljesítményű számítógépekkel végezhetők el.

Változások üzem közben. Működés közben az aktív zónában – de a neutronsugárzásnak kitett többi reaktorrészben is – alapvető változások zajlanak le:

- fogy a hasadóanyag az aktív zónában;
- felgyűlnek a hasadás végtermékei, a hasadványok;
- az intenzív neutronsugárzás az atommagok egy részéből *nem hasadásos magreakciókkal* új, radioaktív izotópokat hoz létre.

Ezek a változások természetesen visszahatnak a reaktor működésére is, s ezért a reaktor üzemi paramétereit folyamatosan utána kell állítani. A hasadóanyag fogyását egy darabig kompenzálni lehet a neutronelnyelő anyagok reaktorbeli koncentrációjának fokozatos, lassú csökkentésével. Egy idő után azonban ez a módszer már nem vezet eredményre, mert a reaktor már neutronelnyelő anyagok nélkül sem működik: „kiégett" az üzemanyag. Ilyenkor új, friss fűtőelemek behelyezése szükséges, a kiégett fűtőelemeket el kell távolítani, az aktív zónát át kell rendezni. Ez az *átrakás.* Ezt a műveletet rendszeres időközökben, előre betervezett hosszabb-rövidebb üzemszünet során hajtják végre. (Vannak olyan konstrukciók is, ahol ez a reaktor működése közben is végrehajtható.) Hazánkban a Paksi Atomerőműnél az aktív zóna átrendezése évenként egyszer kerül sorra. Az átrendezés idejére a reaktorblokk leáll. Ezért Pakson az atomerőműben az energiatermelés éves ciklusokban – ún. kampányokban – történik.

Az üzem közben bekövetkező változások mértékét és bonyolultságát a következő példán szemléltetjük.

Kövessük nyomon 1000 kg (1 t), 3,3%-ban dúsított urán sorsát a reaktorba történt behelyezéstől a 3 évvel később történt kivételig! Az 1000 kg uránban kezdetben 33 kg ^{235}U-izotópunk van, a 3,3%-os dúsításnak megfelelően. Három év elteltével az ^{235}U-ból már csak 8 kg marad, az ^{238}U atommagok mennyisége pedig 943 kg-ra csökken. A maghasadások következtében mintegy 35 kg erősen radioaktív, közepes tömegszámú atommag keletkezik. A maradék – mintegy 14 kg-nyi – tömeget nagy tömegszámú elemek formájában találjuk meg, amelyek a 3 év alatt az ^{235}U-ból és az ^{238}U-ból kiindulva sorozatos neutronbefogásokkal, illetve azt követő radioaktív bomlásokkal keletkeztek. A néhány legfontosabbat felsoroljuk: ^{236}U 4,6 kg, ^{237}Np 0,5 kg, ^{239}Pu 8,9 kg (!), ^{243}Am 0,12 kg, ^{244}Cm 0,04 kg. Ha az 1000 kg urán három évvel későbbi „leszármazottainak" összes tömegét *pontosan* össze tudnánk adni, csak 999,966 kg-ot találnánk! A hiányzó 43 g tömeg a három

év alatt energiává alakult, s ennek fejében 860 millió kWh ($3{,}1 \cdot 10^{15}$ J) energiát nyertünk. Ez az energia nagyrészt hő formájában szabadult fel, s így sajnos csak mintegy 33%-a alakítható át villamos energiává. Erőművünk tehát 3 év alatt az 1000 kg uránból mintegy 275 millió kWh ($9{,}91 \cdot 10^{14}$ J) villamos energiát termelt.

A reaktortartály és a biológiai védelem. A reaktor üzeme közben keletkezett újabb atommagok általában radioaktívak. Egy 1000 MW teljesítményű erőművi reaktorban olyan intenzitású radioaktív sugárzás is kialakulhat, amely mintegy 10 000 t (!) rádium sugárzásával egyenértékű (aktivitása elérheti a 10^{21} Bq-t is). Ilyen nagy aktivitás, ha kiszabadul, nagy veszélyt jelent a környezetre. Ezért a reaktor aktív zónáját többszörösen biztosítva, hermetikusan el kell szigetelni. (A 32.3. ábrán a biológiai védelmet világosszürkével jelöltük.) A radioaktív termékek útjába több műszaki gátat is helyezünk. Az első védelem maga az üzemanyag-pasztilla: a radioaktív hasadási termékek adszorbeálódnak, és csak nehezen tudnak kijönni. A második védelmi fal az üzemanyagpálcák fala, amely hermetikusan elzárja az üzemanyag-pasztillákat a hűtővíztől. Az aktív zónát vastag, nyomásálló, rozsdamentes acéltartállyal veszik körül, amely biztosítja, hogy a benne levő anyagok (fűtőelemek, hűtőközeg, moderátor stb.) még az üzemi nyomásnál magasabb nyomás esetén se kerüljenek ki a környezetbe. Ez a reaktortartály (3), amely a harmadik védelmi falat jelenti. Negyedik védelmi falként a reaktortartályt újabb, hermetikusan zárható réteg veszi körül. Ez több méter vastag, különleges vasbetonból épített falakból készül, amelyek még a reaktortartály meghibásodása esetén is megvédik a külvilágot a radioaktív elszennyeződéstől. Ezeknek a szerkezeti elemeknek a méretezésekor az atomerőmű helyén 10 000 év alatt várható legnagyobb földrengés károsító hatásából indulnak ki. A méretezést még egy ennél is egy fokkal erősebb földrengésre végzik, így ezeknek az elemeknek az ésszerűség határain belül várható minden természeti katasztrófát túl kell élniük. A vastag betonfalak – különlegesen magas kötött víztartalmuknál és a belekevert neutronelnyelő anyagoknál fogva – a reaktortartályból üzem közben kilépő neutronsugárzástól is megvédik az erőmű területén dolgozókat.

Minthogy az atomerőművek üzeme közben az egyetlen veszélyforrást a radioaktív szennyezés kiszabadulása jelenti, így a reaktorok biológiai védelmét nagy körültekintéssel, szigorú nemzetközi előírások alapján, többszörös biztosítással tervezik, és pártatlan nemzetközi ellenőrök felügyelete mellett építik meg. Az atomerőművek létesítési költségeinek jelentős hányadát éppen a legkorszerűbb biztonsági feltételek megteremtése emészti fel.

Primer kör, szekunder kör. A fűtőelemekben keletkezett radioaktív anyagok egy része bekerülhet a fűtőelemek között áramló hűtőközegbe is. A hűtőközeg ezenkívül a reaktortartály falából is kioldhat fémionokat, amelyek az intenzív neutronsugárzás hatására radioaktív atommagokká alakulnak. Ezek együttes eredményeként az aktív zónát hűtő közeg mindenképpen radioaktívvá válik, s így meg

kell akadályozni, hogy a környezetbe kerülhessen. Ezért az aktív zóna hűtését zárt rendszerben cirkuláltatott közeggel oldják meg. Ez a zárt keringtetőrendszer a 32.3. ábrán 1-gyel jelölt primer kör. A primer körben keringő hűtőközeg a reaktorból elvitt energiát hőcserélőkben adja át a tőle hermetikusan elzárt szekunder körben (2) keringő hűtőközegnek. A szekunder kör hűtőközege már nem válik radioaktívvá, hiszen a reaktortartályon nem halad át, s így nincs kitéve intenzív neutronsugárzásnak sem! Ezen a módon a reaktorban fejlődő hő „tisztán", kísérő radioaktív vagy egyéb szennyezések nélkül vonható ki. A hőcserélő szekunderköri oldalán lévő hűtőközeg felforr, ezért a hőcserélőt gyakran gőzfejlesztőnek is nevezik.

Az atomerőmű szekunder körének a hőcserélő utáni része hőtani szempontból tulajdonképpen megegyezik egy hagyományos hőerőművel. Ennek megfelelően találunk benne gőzturbinákat (15), illetve generátorokat (8), valamint transzformátorokat (9), amelyek a hőcserélőben kapott energiát végső soron villamos energiává alakítják. Ezekkel a fokozatokkal itt részletesen nem foglalkozunk.

32.2.4. Reaktortípusok

Termikus reaktorok. Az aktív zónában levő neutronok energiaspektruma alapján megkülönböztetünk termikus reaktorokat, illetve gyorsneutronos reaktorokat. Az előbbieknél a maghasadásos láncreakciót létrehozó neutronok döntő többsége lelassult, termalizálódott neutronokból áll, amelyek mozgási energiája a reaktor hőmérsékletének megfelelően kb. 10^{-20} J. Az atomerőművekben jelenleg termelt energia több mint 90%-át termikus reaktorokból nyerik. Ezek előnye az egyszerűség, a viszonylagosan kis létesítési költség, a kidolgozott, megbízható technológia, az üzembiztonság.

A termikus reaktoroknak két fő típusa van: a forralóvizes és a nyomottvizes reaktorok. A *forralóvizes* reaktorban az aktív zónában fejlődött hő a reaktortartályon belül elforralja a primer kör hűtővizét, amely azután általában közvetlenül a gőzturbinákra kerül (egyes típusoknál a hőcserélőben visszakondenzálódik, átadva energiáját a szekunder körnek). Ha a reaktortartályban fejlődött gőz közvetlenül a gőzturbinákat hajtja meg, különleges szigetelésről kell gondoskodni, hogy a radioaktív gőz ne kerülhessen ki a környezetbe.

Környezetvédelmi és műszaki szempontból is előnyösebb a *nyomottvizes* reaktor (lásd a 32.3. ábrát). Ilyen a mi atomerőművünk is Pakson. Ennél a típusnál az aktív zónában termelődött hő felmelegíti ugyan a primer kör vizét, de a primer körben uralkodó nagy nyomás miatt a víz itt nem indul forrásnak. Ezért a hűtőközeg keringetése gyorsabb lehet, s így a reaktortól is több energiát lehet elvonni időegység alatt: a reaktor nagyobb teljesítménnyel működhet. Biztonsági és kör-

nyezetvédelmi szempontból is előnyösebb ez a megoldás, hiszen a gőzturbinákra már csak a szekunder kör nem radioaktív vizéből (6) fejlődött gőz kerül (7), s így egy esetleges gőzszivárgás sem okoz nagy gondot.

Gyorsneutronos, „tenyésztő"-reaktorok. A termikus reaktorok a felsorolt előnyeik ellenére az emberiség energiagondjait csak időlegesen oldhatják meg. Olyan fűtőanyagot használnak ugyanis – az ^{235}U-izotópot –, amely a természetes uránban csak nagyon kis arányban (0,71%-ban) áll rendelkezésre. Kissé leegyszerűsítve: 1000 kg uránt kell kitermelni, feldolgozni, hogy 7,1 kg-ot használhassunk fel belőle fűtőanyagként. A termikus reaktorba bekerült többi, 99% fölötti arányú anyagrész pedig az energiatermelés számára véglegesen elvész. Energiaínséges időnkben ez a módszer meglepő pazarlásnak tűnik! Termikus neutronokkal önfenntartó láncreakciót háromfajta atommaggal is megvalósíthatunk: ^{233}U, ^{235}U, ^{239}Pu. Ezek közül a természetben csak az ^{235}U található meg, a másik kettő már „rövid" felezési ideje miatt (160 000 év az ^{233}U-ra és 24 000 év ^{239}Pu-ra) a Föld keletkezése óta elbomlott. Észrevehetjük azonban, hogy mindkét izotóp felezési ideje emberi léptékkel mérve hosszú! Ezért, ha a természetben is megtalálható elemekből nagy mennyiségben elő tudnánk állítani, fel lehetne ezeket is használni nukleáris energiatermelésre.

Neutronbefogással (és azt követő β-bomlásokkal) mindkét atommag előállítható a természetben megtalálható atommagokból. A megfelelő folyamatok:

$$^{232}_{90}\mathrm{Th} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{233}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow{\beta} {}^{233}_{91}\mathrm{Pa} \xrightarrow{\beta} {}^{233}_{92}\mathrm{U}, \qquad (32.7)$$

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{239}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta} {}^{239}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta} {}^{239}_{94}\mathrm{Pu}. \qquad (32.8)$$

Különösen érdekes a második reakció, hiszen ennek kiindulási anyaga éppen az ^{238}U, amely eddig csak a „szükséges rossz" szerepét játszotta, hiszen elnyelte az ^{235}U-atommagok elől a neutronokat. Látjuk, hogy a neutronok segítségével a nukleáris energiatermelésre közvetlenül felhasználhatatlan ^{238}U is átalakítható jó nukleáris üzemanyaggá, ^{239}Pu-má! Ha ezt sikerülne nagy mennyiségben megvalósítani, akkor a kibányászott uránból több mint 100-szor annyi energiát nyerhetnénk, mint az ^{235}U-ra alapozott módszerekkel! Az első reakció pedig arra is lehetőséget nyújt, hogy a nukleáris energiatermelésbe ne csak az uránizotópokat vonjuk be, hanem a tóriumot is. A Föld tóriumkészletei még az uránkészleteknél is nagyobbak. Ezek számunkra új energiaforrásokat jelentenek, s a belőlük kinyerhető energia megsokszorozná tartalékainkat.

Lehet olyan atomerőműveket építeni, hogy több ^{239}Pu keletkezik a reaktorban levő ^{238}U-ból, mint amennyi ^{235}U-t elhasználunk. Ezeket *tenyésztőreaktoroknak* nevezzük. A tenyésztőreaktoroknál tulajdonképpen csak a beindításhoz szükséges az oly kis százalékban megtalálható ^{235}U, mert ezek működésük közben – miközben fogyasztják az ^{238}U-t – mindig újratermelik a láncreakció fenntartásához szükséges hasadóanyagot, a ^{239}Pu-t. Már működik néhány ilyen erőmű, bár ezek létesítése hatalmas technikai hátteret kíván.

Itt a tenyésztőerőművek néhány alapkérdését tekintjük csak át. A „tenyésztés" neutronbefogással kezdődik, s így a láncreakciótól von el neutronokat. Következésképpen a nukleáris üzemanyagnak sokkal nagyobb dúsításúnak kell lennie, mint a korábbi „hagyományos" erőműveknél. Másfelől viszont a reaktorban sok ^{238}U-nak kell lenni, hogy lehetőleg sok ^{239}Pu keletkezzen. A két, egymásnak ellentmondani látszó feltételt a következőképpen lehet összhangba hozni.

Viszonylag kis aktív zónát építenek, amelyben azonban nagy dúsítású fűtőelemek vannak! A kis méret miatt sok neutron megszökik a zónából (ezért kell a nagy dúsítás, hogy ennek ellenére önfenntartó láncreakciót lehessen a kis zónában létrehozni). Vegyük körül ezt a zónát természetes uránnal, vagy ^{235}U-ban szegényített (nagy százalékban ^{238}U-t tartalmazó) uránnal! Az aktív zónából megszökött neutronok az ^{238}U-ba befogódva elnyelődnek, s közben ^{239}Pu keletkezik. Ha elérjük, hogy a hasadásonként átlagosan keletkezett 2,4 neutronból átlagosan egynél több fogódjon be az aktív zónát körülvevő ^{238}U-ban, akkor minden elhasadt ^{235}U atommagra átlagosan egynél több ^{239}Pu atommag keletkezése jut. Több hasadóanyag keletkezik mint amennyit elhasználtunk! A tenyésztőreaktorban az aktív zónát tehát hasadásonkénti 1,3–1,4 neutronra kell méreteznünk: nagy dúsítású fűtőanyag, kis neutronelnyelésű, de nagy hőátadású hűtőközeg szükséges.

A tenyésztőreaktorok aktív zónájában nagyon nagy a teljesítménysűrűség: kis térfogatban sok energia szabadul fel. A hasadási neutronok termalizálódása, lassulása sem kívánatos. Emlékezzünk arra, hogy az ^{238}U a közepes energiájú neutronokat nyeli el nagy valószínűséggel (lásd 32.2.1., rezonanciák), ezért a tenyésztés szempontjából is hasznos, ha a neutronok nem lassulnak le nagyon. Ezért nevezik ezeket gyakran *gyorsneutronos* reaktoroknak. A túlzott lassulás elkerülésére az ilyen típusú reaktorok aktív zónája magasabb hőmérsékletű, mint a termikus reaktoroké, ezért persze intenzívebb hűtést is igényel. A jelenleg működő tenyésztőreaktorok hűtésére a primer körben folyékony nátriumfémet (!) használnak. A nátrium neutronsugárzás hatására rövid felezési idejű ^{24}Na-má alakul át. Levegőn elég, vízzel, nedvességgel hevesen reagál, s vegyileg is rendkívül aktív (korrozív). Ezért a tenyésztőreaktorok biztonságos üzemeltetése csak igen fejlett technika és technológia mellett képzelhető el. Mindezek ellenére a tenyésztőreaktorok a hasadáson alapuló nukleáris erőművek új perspektíváit nyitják meg, s az emberiség számára hatalmas mennyiségű újabb energiaforrást tehetnének hozzáférhetővé. Elterjedésüket – a csúcstechnika és a magas technológiai fegyelem mellett – a nukleáris energiatermelés járulékos problémái, többek között az atomfegyverek gyártására alkalmas anyagok illetéktelen kezekbe jutásának a veszélye is akadályozza.

32.2.5. A nukleáris energiatermelés járulékos problémái

Radioaktív hulladékok kezelése és tárolása. A kiégett fűtőelemek – mint korábban említettük – sok új izotópot tartalmaznak. Ezek között vannak igen hosszú felezési idejű (több mint 10 000 év) radioaktív elemek is. Ezért a kiégett fűtőelemek sugárvédelmi szempontból különleges kezelést igényelnek. Feltétlenül gondoskodni kell a kiégett, erősen radioaktív fűtőelemek hosszú idejű, biztonságos tárolásáról. Mielőtt azonban erre sor kerülne, ki kell vonni a használt fűtőelemekből azokat a nagyon hasznos és drága anyagokat, amelyek a reaktor üzeme során bennük létrejöttek. Az energiatermelés szempontjából itt a ^{239}Pu a legfontosabb, amely – mint láttuk – az ^{238}U-ból jön létre a neutronbefogást követő két béta-bomlással (32.8). De emellett említhetnénk még a többi transzurán elemet, illetve egyes, a maghasadások következtében létrejött közepes rendszámú elemet is, amelyek ipari, illetve orvosi szempontból hasznosak.

Az erősen radioaktív kiégett fűtőelemek *újrafeldolgozása,* a hasznos anyagok – többnyire kémiai úton történő – szétválasztása magas technikai színvonalú, nagyon költségigényes üzemek létesítését kívánja meg. A gazdasági szempontok mellett politikai szempontok is szerepet kapnak abban, hogy jelenleg a világon a reprocesszáló üzemek létesítését és üzemét szigorú nemzetközi megállapodások korlátozzák. A feldolgozott fűtőelemekből származó, tovább már nem hasznosítható, de még erősen radioaktív hulladékokat több ezer évre biztonságosan kell tárolni. Erre jelenleg több megoldás is létezik. Az egyik ilyen megoldás, hogy mélyen fekvő sóbányákban keresnek ki hatalmas, összefüggő rétegeket, s azokban épített betonbunkerekben, rozsdamentes acélhordókba zárva tartják a radioaktív hulladékot. A sóbánya léte a biztosíték arra, hogy azon a területen talajvíz nincs, és a nagy, összefüggő sótömbök létezése pedig arra utal, hogy nemcsak történelmi, de geológiai időskálán mérve is nagyon ritka egy-egy pusztító erejű földrengés. Ha pedig mégis megsérülne egy ilyen sótömb, rövid időn belül átkristályosodik, azaz az esetleg létrejött repedések „öngyógyuló" tulajdonságúak. Egy-egy ilyen végleges tárolóhely hatalmas mennyiségű radioaktív hulladékot képes befogadni.

Az atomerőművek biztonsága. A társadalmi vita másik fontos területe az atomerőművek biztonsága, illetve veszélyessége. Az alábbiakban kifejezetten a nyomottvizes, termikus atomerőművekre koncentrálunk, hiszen ezek a legelterjedtebbek.

Korábban a láncreakció tárgyalásakor szó volt arról, hogy ha az effektív sokszorozási tényező (k_{eff}) egynél nagyobb, akkor a láncreakció növekvő. Vajon nem nőhet-e minden határon túl a láncreakció egy atomerőműben? Vajon lehet-e egy erőműből „atombomba"? A válasz egyértelmű: *nem.*

Képzeljük el ugyanis, hogy valahol a világon egy működő atomerőművet magára hagynak éppen akkor, amikor a láncreakció növekvő. Az aktív zóna egyre nagyobb teljesítménnyel működik, a hőmérséklet emelkedik. Bármekkora is a nyomás, a víz előbb-utóbb elforr, a biztonsági szelepeken keresztül elhagyja a reaktortartályt, és bennmarad a hermetikusan lezárt betonbunkerben, a biológiai védelem belsejében. A víz távozásával azonban megszűnik a neutronok lassítása, s ez lecsökkenti a maghasadás bekövetkezésének valószínűségét: *a láncreakció magától leáll.* A radioaktív elemek bomlásából származó hő ugyan még tovább melegíti az aktív zónát – esetleg össze is olvadhat –, de mindez hiába, mert víz nélkül, neutronlassítás nélkül nem jön létre hasadásos láncreakció. A termikus atomreaktorok szerkezete olyan, hogy nemcsak a magasan fejlett (de meghibásodható) műszaki biztonsági berendezések és számítógépek, hanem a „soha meg nem hibásodó" fizikai természettörvények akadályozzák meg, hogy az atomerőművek „atombombává" váljanak. Az atomreaktoroknál fellépő kizárólagos veszélyforrás a nagy aktivitású radioaktív elemek környezetbe jutása. Ez ellen pedig a több rétegből álló műszaki gátak és a jól megszervezett biológiai védelem megbízható védelmet ad.

Itt jegyezzük meg, hogy a történelem eddigi legsúlyosabb reaktorbalesete Csernobilban 1986-ban *nem* nyomottvizes, vízzel moderált atomerőműben következett be. A csernobili RBMK típusú atomerőműben a moderátor grafit volt, és a víz csak a reaktor hűtését biztosította. Ezért a teljesítmény növekedésekor – amikor a víz elforrt – a moderátor (a grafit) ottmaradt, a láncreakció nem állt le. Sőt, a víz távozásával neutronelnyelő anyag távozott, ezért a láncreakció még inkább nekilendült. Ennek a reaktortípusnak a hibáira az Egyesült Államokban az ötvenes években a Teller Ede által vezetett reaktorbiztonsági bizottság már felhívta a figyelmet, és ezért az ilyen konstrukciójú reaktorokat a nyugati világban már akkor leállították.

Atomfegyverek elterjedése és illetéktelen kezekbe jutása. Az atomenergiával kapcsolatban a műszaki és gazdasági megfontolásokon túl lépten-nyomon találkozunk politikai jellegű korlátokkal is. Ezek elsősorban a dúsításra és az újrafeldolgozásra vonatkoznak, de sajnos érintik a nukleáris üzemanyagban rejlő energiát maximálisan hasznosító tenyésztő erőműveket is.

A láncreakcióban felhasználható izotópok – az ^{233}U, az ^{235}U, a ^{239}Pu – elegendően nagy dúsításban alkalmasak atomfegyver készítésére is. Ezért mindazon országok, amelyek ezeket tisztán elő tudják állítani, atomfegyvert is gyárthatnak. Az atomfegyverek elterjedésének megakadályozására nemzetközi egyezmények tiltják olyan üzemek létesítését, sőt különálló berendezések és alkatrészeik kereskedelmi forgalmát is, amelyek magasan dúsított formában ezekhez az izotópokhoz vezethetnek.

Az atomenergia békés felszabadítása csak békében lehetséges. Háború esetén – még hagyományos fegyverekkel vívott háború esetén is – az atomerőmű potenciális veszélyforrás, hiszen a biológiai védelem lerombolható (szétbombázható,

felrobbantható). Ennek beláthatatlan következményei lehetnek nemcsak a megtámadott, de a támadó országra is. Egyes számítások szerint ha pl. Németországban szétbombáznának egy működő atomerőművet, akkor annyi radioaktív hulladék kerülne a levegőbe, hogy – a széljárástól függően – vagy egész Nyugat-Európa, vagy pedig Közép-Európa több évtizedre alkalmatlanná válna tartós emberi élet számára.

Az utóbbi évtizedben újabb fenyegetés jelentkezett: a nemzetközi terrorizmus. Elemzők szerint ugyan kevéssé valószínű az, hogy terrorcsoportok atomfegyverhez jussanak, azaz ki tudják játszani az atomfegyverek elterjedését nagyon sok szinten ellenőrző nemzetközi rendszert, azonban azt, hogy ún. „piszkos bombát" készítsenek, sajnos nem lehet teljességgel kizárni (piszkos bomba: hagyományos robbanószerrel működő szerkezet, amely azonban radioaktív anyagot szór szét). Egy ilyen eszköznek azonban valószínűleg jóval kisebb egészségügyi következményei lennének, mint egy atomfegyvernek.

32.3. A fúziós energiatermelés alapjai

A maghasadáson alapuló energiatermelés mellett a nukleáris energia felszabadításának másik útja a *magfúzió*. A fúzió során a periódusos rendszer elején levő, kis rendszámú elemek egyesülnek. Nagyobb tömegszámú, erősebben kötött atommag jön létre, s ezáltal kötési energia szabadul fel. A fúziót az atommagok elektrosztatikus (Coulomb-) taszítása gátolja, ezért csak valamekkora aktiválási energia befektetésével hozható létre..

A Coulomb-gát hidrogénizotópok esetén a lehető legkisebb, ezért ezeknek a fúziója aktiválható a legkönnyebben. A fúzió létrejöttét segíti az alagúteffektus (lásd a 20.2.2. pontot), s ezért kis valószínűséggel a Coulomb-gát alatti energiáknál is végbemehet.

A maghasadásnál a láncreakciót a neutronokkal tudtuk megvalósítani, mert a neutronok befogásakor a hasadás aktiválásához elegendő energia szabadult fel. Sajnos a fúziónál ilyen lehetőség nincs. A fúzióhoz ugyanis *két atommag* szükséges, amelyek elegendően nagy sebességgel *mozognak* egymás felé. Sebességükből eredő mozgási energiájuknak kell fedezni a Coulomb-gát megmászásához szükséges energiát. Makroszkopikus méretű, láncreakcióra alkalmas módon történő mozgás csak *hőmozgással* tűnik megvalósíthatónak. Ezért a fúziós energiatermelés egyedüli járható útja jelenleg a *termikus aktiválás*.

Megemlítjük, hogy laboratóriumban, magfizikai kísérletek céljaira kevés számú részecskét elektrosztatikusan is fel lehet gyorsítani elegendően nagy sebességre, s így a fúziós reakció kis méretekben létrehozható. Ezen az elven működnek az ún. *neutrongenerátorok*. Nevük onnan ered, hogy segítségükkel a kísérletező fizikusok a fúziós folyamatok során kilépő, nagy energiájú neutronokat állítják elő. A neutrongenerátorokban alkalmazott elektrosztatikus gyorsítás azonban makroszkopikus méretű, energiafelszabadító láncreakció létrehozására alkalmatlan.

> Ennek az az oka, hogy a fúzió létrejöttének a valószínűsége sokkal kisebb, mint egyéb folyamatoké (pl. rugalmas szóródás, ionizálás stb.). Amikor a nagy sebességre felgyorsított részecskék behatolnak az anyagba, az „egyéb" folyamatokban a bejövő, nagy energiára felgyorsított részecskék gyorsan elveszítik az energiájukat, és alkalmatlanná válnak fúzió létrehozására. Ezeknek a folyamatoknak a következtében a bejövő részecskék mozgási energiája addig csökken, amíg termikus egyensúlyba nem kerülnek a közeggel. Ezért a termikus mozgás energiáját kell olyan magas értéken tartani, hogy az már elég legyen a fúzió aktiválásához.

A termikus aktiváláshoz mintegy $10^7 \ldots 10^8$ K körüli hőmérséklet szükséges. Ezen a hőmérsékleten az anyag már teljesen ionizált állapotba kerül. Ezt az állapotot nevezzük *plazmának*. A plazma kifelé elektromosan teljesen semleges, mivel egyenlő számban tartalmaz elektronokat és pozitív ionokat. A plazma sok szempontból a közönséges gázokhoz hasonlítható, lényeges különbség azonban az, hogy a plazma jól vezeti az elektromosságot, míg a semleges gázok nem. Hasonlítanak viszont abban, hogy a részecskék sebessége nem egy meghatározott érték, hanem jellegzetes elosztást – ún. Maxwell-elosztást (lásd a 23.5.2.3. pontot) – követ.

32.3.1. Fúziós folyamatok

Emlékezve a ${}^4_2\mathrm{He}$ atommag kiemelkedően nagy kötési energiájára, első pillanatban a következő fúziós folyamatra gondolhatunk:

$$ {}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He}. $$

Közelebbi vizsgálat azonban megmutatja, hogy két összeütköző deutérium atommag nem egyesülhet egyetlen újabb atommaggá (${}^4_2$He-má), mert ilyen ütközésnél nem teljesülhet egyszerre az energiamegmaradás és a lendületmegmaradás. A fúziós energiatermelés szempontjából legértékesebb reakciók a következők:

$$ {}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \mathrm{n} + 3{,}25\ \mathrm{MeV}, \qquad (32.9a) $$

$$ {}^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + \mathrm{n} + 17{,}6\ \mathrm{MeV}. \qquad (32.9b) $$

32.3.2. Fúzió a csillagokban és a hidrogénbombában

A termikusan aktivált fúzió létrehozásához magas hőmérséklet ($10^7 \ldots 10^8$ K) szükséges. A csillagok belsejében az összegyűlt, hatalmas mennyiségű anyag gravitációs nyomása ellensúlyozni képes a sűrű, magas hőmérsékletű plazma nyomását. A csillag egyensúlyi módon, folyamatosan termeli az energiát a belsejében, hidrogénatomok fúziójával. A hidrogénre alapozott fúzióval energiát termelő csillagok a csillagfejlődés kezdeti szakaszában vannak. Ezeket H-égő csillagoknak nevezzük.

A csillagok (pl. a Nap) színképéből azonban kiderül, hogy bennük alig van deutérium és trícium. A H-égő csillagok tehát *nem* a (32.9) reakciókkal működnek. Bennük érdekes módon a könnyű hidrogénből (proton) keletkezik a hélium.

A proton–proton ciklus (pp-ciklus). Ez első pillanatban lehetetlennek látszik, hiszen a ${}_1^1\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H} \rightarrow {}_2^2\mathrm{He}$ reakció nem mehet végbe, mivel – magfizikai okoknál fogva – két proton nem tud kötött állapotot létrehozni. A gyenge kölcsönhatás azonban itt is segít! Roppant kis valószínűséggel az alatt a rövid idő alatt, amíg a két proton egymás közelében, a Coulomb-taszítás által létrehozott magasabb energiájú állapotban van, végbemehet az egyik proton neutronná alakulása:

$$ {}_1^1\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H} \rightarrow {}_1^2\mathrm{H} + \mathrm{e}^+ + \nu, \qquad Q = 0,42\ \mathrm{MeV}. \tag{32.10a} $$

A keletkezett deuteron már gyorsan találkozik egy protonnal, és fuzionál:

$$ {}_1^2\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H} \rightarrow {}_2^3\mathrm{He} + \gamma, \qquad Q = 5,49\ \mathrm{MeV}. \tag{32.10b} $$

Végül két ^{3}He atommag fúziója fejezi be a ^{4}He felépítését:

$$ {}_2^3\mathrm{He} + {}_2^3\mathrm{He} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + {}_1^1\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H}, \qquad Q = 12,86\ \mathrm{MeV}. \tag{32.10c} $$

Összegezve ezeket a folyamatokat végeredményben négy protonból lesz egy héliumatommag (közben két pozitron és két neutrínó is keletkezik):

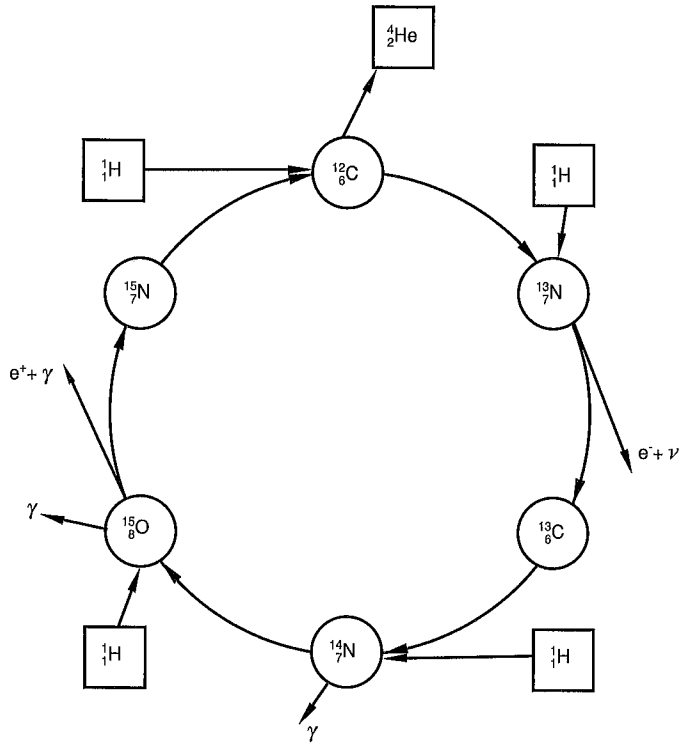
$$ 4\left({}_1^1\mathrm{H}\right) \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + 2\mathrm{e}^+ + 2\nu, \qquad Q = 26,12\ \mathrm{MeV}. \tag{32.10d} $$

Megjegyzés: a pp-ciklusnak vannak egyéb „oldalágai" is, ezekkel azonban itt most nem foglalkozunk.

Mint említettük, a fúziós lánc „indulása", a (32.10a) reakció roppant kis valószínűségű. Annyira kicsi, hogy egy kiszemelt proton másodpercenként több milliárdszor ütközve másik protonnal évmilliárdokig bolyonghat a Nap roppant sűrű

és sok millió fokos középpontjában, amíg egyszer véletlenül létrejön ez a reakció. Gondoljunk bele, hogy ez a roppant vékony szálon csordogáló magreakció *a fék*, amely lehetővé teszi, hogy a Nap hidrogénjében rejlő hatalmas fúziós energia évmilliárdok alatt szabaduljon fel csaknem egyenletes ütemben, elegendő időt hagyva a Naprendszer egyik – megfelelő távolságban lévő – bolygóján élet kialakulására és az evolúcióra. Ennek köszönhetjük a létünket! Ez az a fék, amely megakadályozza, hogy a Nap (és a többi hasonló csillag) nagyon rövid idő alatt iszonyú égi tűzijáték formájában, gigantikus hidrogénbombaként szétrobbanjon.

A CNO-ciklus. A csillagokban lejátszódó folyamatokat vizsgálva a közvetlen fúziós reakciókon túl érdekes katalizálási lehetőségre mutatott rá H. Bethe Nobeldíjas fizikus. A csillagban levő, nagyobb rendszámú elemek – pl. a ^{12}C – a hidrogénfúzióban katalizátor szerepet kaphatnak (32.4. ábra).



32.4. ábra

A körfolyamat végén a ^{12}C magot ismét visszakapjuk, de közben négy H-ból egy He, két pozitron és két neutrinó keletkezett (ugyanúgy, mint a pp-ciklusban lásd 32.10d). A CNO-ciklusban a béta-bomlások, valamint a reakcióban résztvevő atommagok nagyobb rendszáma miatt magasabb Coulomb-gátak, illetve nagyobb aktiválási energiák játsszák a „fék" szerepét.

Hidrogénbomba. Földi méretekben makroszkopikus méretű fúziós energiafelszabadulást mindeddig csak szabályozatlan módon, a H-bombában sikerült megvalósítani. A hidrogénbombában a fúzió beindításához szükséges magas hőmérsékletet egy atombomba (hasadásos bomba) felrobbantásával állítják elő. Itt nincs semmi „fék", hiszen a fúziós reakció a (32.9b) szerint zajlik, és a másodperc törtrésze alatt kiterjed. Semmi sem tudja a magas hőmérsékletű plazmát összetartani, így a fúzió rövid idő alatt leáll, hiszen az anyag szétrepül. (Megjegyezzük, hogy a H-bomba kísérleti kipróbálása előtt sok vezető fizikus kételkedett a bomba működésében, s úgy vélte, hogy az anyag szétrepül, mielőtt még a fúzió egyáltalán beindulhatna.)

32.3.3. A szabályozott magfúzió lehetőségei

A szabályozott fúzió megvalósítására irányuló erőfeszítések szorosan kapcsolódnak a plazmafizikai kutatásokhoz. A kísérleti tapasztalatok szerint a fúzió megindulása és fennmaradása szempontjából a plazmát elegendően nagy *sűrűséggel,* elegendően magas *hőmérsékleten,* elegendő hosszú *ideig* együtt kell tartani.

A Lawson-kritérium. A hőmérséklet – mint korábban már említettük – legalább $10^7 \ldots 10^8$ K kell hogy legyen. A fúziós teljesítménysűrűség (P_f) a plazma sűrűségének (n) a négyzetével arányos (a C_1 arányossági tényező függ a plazma T hőmérsékletétől).

$$P_f = C_1(T) \cdot n^2. \tag{32.11}$$

A sűrűség négyzetétől való függést könnyű megérteni. Tekintsünk egy kiválasztott térfogatot! Adott hőmérsékleten időegység alatt ebben a térfogatban bekövetkező fúziós reakciók száma (amely a fúziós teljesítményt adja) a térfogatban összesen bekövetkező atommagütközések számával lesz arányos (hiszen egyetlen ütközéskor adott valószínűséggel következik be fúziós reakció). Egyetlen deutérium atommag időegységre eső ütközéseinek száma nyilván a plazma sűrűségével arányos, hiszen ettől függ, hogy hány másik atom van a kiszemelt környezetben. Viszont az is a plazma sűrűségével arányos, hogy adott térfogatban hány deutérium atommag van. Így az időegység alatt adott térfogatban bekövetkező összes ütközés száma a sűrűség négyzetével lesz arányos.

Ha a plazmát nem fűtené a fúzió, akkor bizonyos idő alatt lehűlne. Ezt a veszteségi teljesítménysűrűséggel tudjuk kifejezni:

$$P_v = \frac{n \cdot C_2(T)}{\tau}. \tag{32.12}$$

A számlálóban a plazma „belsőenergia-sűrűsége" szerepel, amely természetes módon a plazma sűrűségével arányos. Az arányossági tényező itt is függ a hőmérséklettől. A nevezőben szereplő idő dimenziójú mennyiség (τ) neve: *„energia-összetartási idő".*

Ahhoz, hogy a fúzió által leadott teljesítmény fenn tudja tartani a plazmát, az kell, hogy

$$P_f \geq P_v.$$

Behelyettesítve kapjuk:

$$C_1(T) \cdot n^2 \geq \frac{n \cdot C_2(T)}{\tau}.$$

Átrendezve, és a hőmérséklettől függő konstansokat összevonva egyetlen $C(T)$ együtthatóvá kapjuk:

$$n \cdot \tau \geq C(T).$$

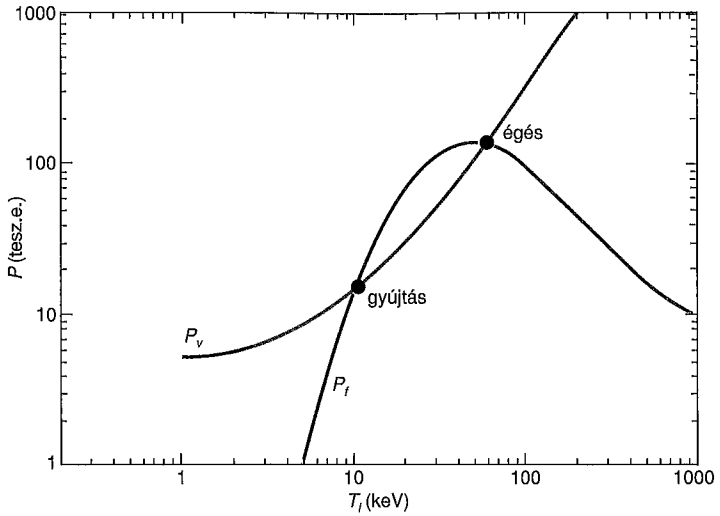
A $C(T)$ konstanst deutérium–trícium plazmára, és $\frac{3}{2}kT = 20$ keV hőmérsékletre ki lehet számítani. Így kapjuk, hogy a plazma n sűrűségének és a τ energiaösszetartási idejének szorzata meg kell haladjon egy kritikus értéket:

$$n \cdot \tau > 10^{20} \ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^3}. \tag{32.13}$$

Ez az ún. *Lawson-kritérium.*

Az erőfeszítések ellenére mind a mai napig nem sikerült egyetlen olyan fúziós rendszert sem létrehozni, amely a Lawson-kritériumot elérte volna.

Ezen a ponton kell szólnunk a stabilitás kérdéséről is. Magfizikai okoknál fogva a fúziós reakciók sebessége egy bizonyos hőmérséklet fölött csökkenni kezd (a részecskék már túl gyorsan mozognak, és rövid ideig tartózkodnak egymás közelében, emiatt csökken a reakció valószínűsége). Ugyanakkor a veszteségi teljesítmény a hőmérséklet növelésével monoton növekszik. A $P_f = P_v$ egyenlet két munkapontban is teljesülhet (lásd 32.5. ábra).



32.5. ábra

A $P_f > P_v$, és az ebből fentebb levezetett Lawson-kritérium a két pont közötti tartományon teljesül. Amikor tehát a plazmát felfűtjük, először a „gyújtási pontot" érjük el: itt a fúziós teljesítmény nagyobb lesz, mint a veszteségi, a plazma gyorsan – szinte robbanásszerűen – melegszik tovább. Azonban ez a melegedés véget ér az „égési pontban". Ez egy stabil munkapont. Ha ugyanis a plazma tovább melegedne, a fúziós teljesítmény már nem lenne elég a veszteségek fedezésére, a plazma gyorsan visszahűlne. Fordítva is igaz: ha a plazma kicsit lehűl, a fúziós teljesítmény nagyobb lesz, mint a veszteségi, és ezért gyorsan visszamelegszik. Az ábra alapján megérthető, hogy a fúziós energiatermelés során a plazma önszabályozó módon viselkedik, szépen egyenletesen ég, nem tud „megszaladni".

32.3.3.1. A Lawson-kritérium teljesítésének két útja

Az inerciális fúzió. Az egyik lehetőség az, hogy nem törődünk az energia-összetartási idővel, hagyjuk hogy a plazma táguljon, sugározzon, hűljön, ahogyan a tehetetlensége engedi, viszont nagyon nagy sűrűséget próbálunk elérni. Ez az ún. inerciális (tehetetlenségi) fúzió. Itt deutériumból és tríciumból álló, alacsony hőmérsékletű, kis megfagyasztott gömböcskéket melegítünk fel több millió fokra nagyon gyorsan, hatalmas teljesítményű lézerekkel. A gömböcskék felszínéről gyorsan elpárolgó anyag visszalökő ereje olyan nagy, hogy a maradék anyag belsejében igen nagy nyomás – s ezáltal igen nagy sűrűség – is kialakul, és beindul a fúzió. A kis gömböcske úgy robban fel, mint egy mini-hidrogénbomba. Bár több helyen is folynak a világban ilyen kísérletek, a megvalósulás még messze van attól, hogy ettől a módszertől hamarosan ipari méretű, pozitív mérlegű energiatermelést várhatnánk.

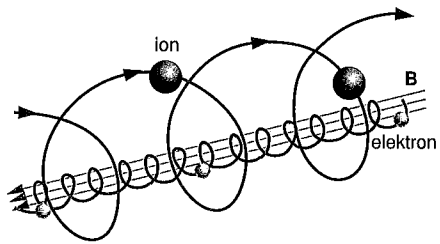
A mágneses mezőbe zárt plazma. A másik út az, hogy megpróbáljuk a plazma energia-összetartási idejét növelni olyan mértékig, hogy a Lawson-kritérium teljesüljön. Ehhez a plazmát hosszú ideig össze kell tartani, minimalizálni a veszteségi teljesítményt. Az egyik legnehezebb probléma a forró plazma tárolása. Ha a több millió fokos plazma kölcsönhatásba lép a környezetével, egyrészt lehűl, másrészt pedig tönkreteszi azt a berendezést, amelyben előállították. A plazma tárolására jelenleg ismert leghatásosabb módszer a plazma bezárása mágneses mezőbe.

A plazmában elektronok és ionok mozognak, ezek pedig mágneses mezőben körpályára kényszerülnek. Alkalmas elrendezéssel elérhető, hogy a plazma részecskéi körpályájuk során ne találkozzanak a plazmát tartó edény falával: a plazma „mágneses palackba" kerül. Technikai megvalósításuk szerint kéttípusú plazmatárolót különböztetünk meg:

- nyílt rendszer (cső alakú), ahol a plazma kiáramlását a cső két végén speciális mágneses „tükrök" gátolják meg.
- zárt rendszer, ahol a plazmát gyűrű alakú (tórusz) tartályban gázkisüléssel hozzák létre, koaxiális mezőben.

A nyílt rendszerrel végzett kísérleteket mára már feladták, mert a cső két végén nem lehet megakadályozni a plazma kiszivárgását és a veszteségeket.

A mágneses mezőbe való bezárásnak az a fizikai alapja, hogy az elektromos töltésű részecskék a Lorentz-erő hatására a mágneses erővonalak mentén, spirális pályán mozognak (lásd 32.6. ábra).



32.6. ábra

Az indukcióvonalra merőleges síkra vetítve a részecskék körmozgást végeznek, melyhez a centripetális erőt a mágneses Lorentz-erő adja.

A mágneses Lorentz-erő $\mathbf{F} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. Emiatt a körmozgásra

$$mr\omega^2 = qvB,$$

s ebből (figyelembe véve, hogy $r\omega = v$) kapjuk

$$\omega = \frac{q}{m} B. \tag{32.14}$$

Ez *a Larmor-frekvencia*. Látható, hogy ez nem függ a részecskék sebességétől, a pálya sugarától stb., csak az alkalmazott mágneses indukciótól és a részecske fajlagos töltésétől $\left(\frac{q}{m}\right)$. A plazmában elektronok és (hidrogén)ionok mozognak, ugyanabban a mágneses mezőben. A H-ionok és az elektronok elektromos töltése azonos abszolút értékű (+e, illetve –e), az elektronok tömege azonban majdnem 4000-szer kisebb, mint a deutériumionoké. Emiatt az elektronok Larmor-frekvenciája kb. 4000-szer akkora, mint a deutériumionoké.

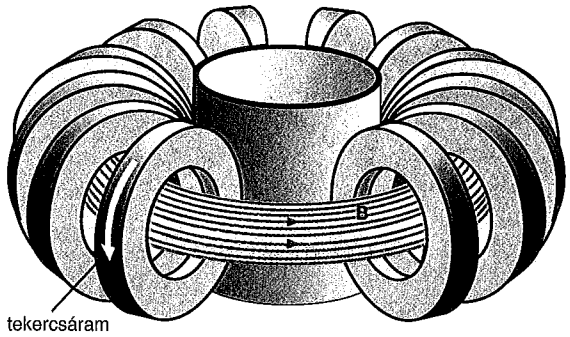
A Lorentz-erőnek nincs az indukcióvonalakkal párhuzamos komponense, az indukcióvonalak mentén a részecskék „szabadon" mozognak. Az indukcióvonalakra merőlegesen azonban nem tudnak messzebb elmenni, mint a spirális pálya sugara. Az indukcióvonalakkal tehát „terelni" lehet a részecskéket, hiszen nem tudnak azoktól eltávolodni.

Kis átalakítással (32.14)-ből a spirális pályák sugarára is kapunk egy összefüggést. Ha m tömegű részecskének E mozgási energiája van, akkor a pálya sugarára kapjuk:

$$r^2 \leq m\left(\frac{2E}{q^2B^2}\right).$$

A hőmozgás energiája néhányszor tíz keV a magas hőmérsékletű plazmában az elektronokra és az ionokra egyaránt. A töltés ugyanakkora, és a B is ugyanakkora. Mivel a deutériumionok tömege kb. 4000-szer akkora mint az elektronoké, ezért az ionok jóval nagyobb sugarú spirálon haladnak az erővonalak mentén, mint az elektronok. Még ennél is nagyobb sugarú lesz a fúziós reakcióban keletkező $^4_2$He-ionok pályája, hiszen azoknak nemcsak tömege, de energiája is sokkal nagyobb (kb. 3200 keV). Ha tehát azt akarjuk, hogy a keletkezett ionok a plazmában adják le az energiájukat, akkor nagy átmérőjű plazmaoszlopot kell előállítanunk.

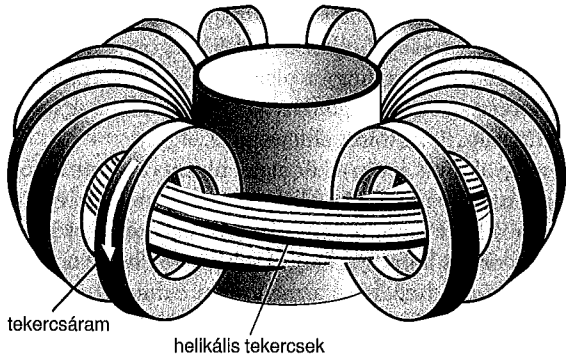
A plazma „bezárására" a legkézenfekvőbb megoldás az, amikor az indukcióvonalak zártak (tórusz, „autógumi-geometria"). Ekkor a részecskék körbe-körbe szabadon szaladnak a tórusz mentén *(„toroidálisan")*, azonban arra merőleges irányba nem tudnak elmozdulni, be vannak zárva. Ezt megfelelő tekercsekkel meg lehet valósítani (32.7. ábra).



32.7. ábra

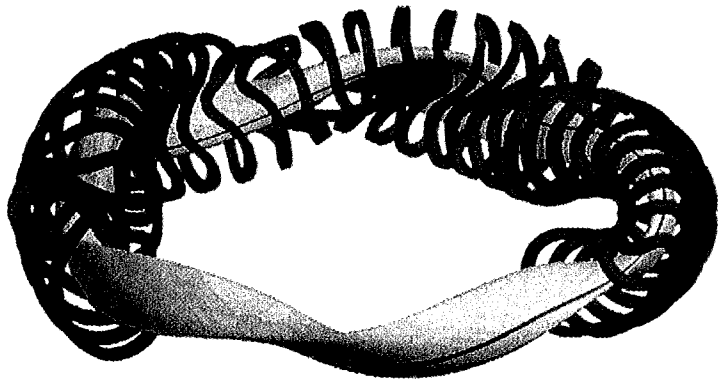
A részletes számítások megmutatják, hogy csak akkor tud a plazma stabilan elhelyezkedni, ha az indukcióvonalak spirálisan „meg vannak csavarva" a tórusz belsejében. Ennek az okát itt terjedelmi okok miatt nem részletezhetjük. Az erővonalak spirális megcsavarását kétféle módon lehet elérni.

Stellarátor. Kisegítő, megcsavart tekercsekkel hozzuk létre a megcsavart mágneses mezőt.



32.8. ábra

Ilyen típusú kísérleti berendezések épültek, és most is vannak építés előtt álló kísérleti berendezések. Ma már számítógépekkel olyan mágnestekercs-rendszert tudnak tervezni, amellyel szinte tetszőleges alakú mágneses mezőt – s így plazmaalakot is – elő lehet állítani.



32.9. ábra

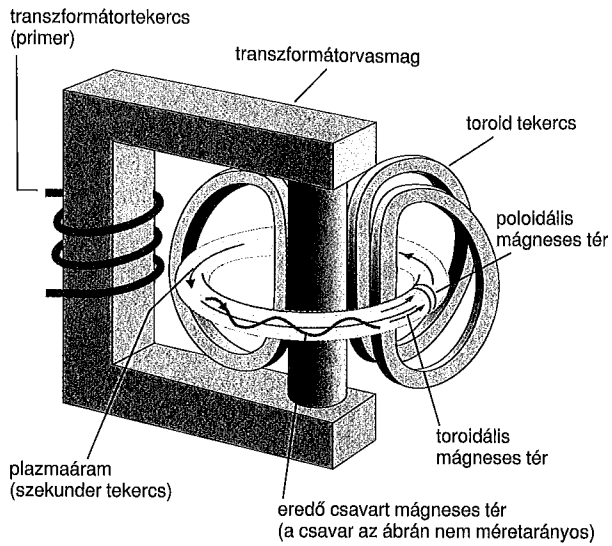
Példaként a 32.9. ábra a Németországban építés alatt álló Wendelstein-7 stellarátor mágneses mezejét és az azt előállító tekercsrendszer (egy részletének) alakját mutatja. A stellarátorok nagy előnye, hogy folyamatos üzemben tudnak működni.

A TOKAMAK. A másik megoldás a mágneses erővonalak „megcsavarására" az, hogy a plazmán áramot hajtunk át. Ennek az áramnak a (vezetőt körülvevő, poloidális) mágneses tere hozzáadódik a külső mágnesek által létrehozott toroidális mágneses mezőhöz, és ezzel együtt hozza létre a megcsavart erővonalakat. Ennek a megoldásnak további előnye, hogy a plazmán áthajtott áram a Joule-hő révén egyúttal fűti is a plazmát. Ezt a megoldást a Szovjetunióban fejlesztették ki, orosz rövidítésből származik a TOKAMAK elnevezés is.

A technikai megvalósítás során a kör alakú plazma egy transzformátor egymenetű szekunder tekercseként viselkedik, és a primer tekercsben (lineárisan) növekvő áram időben állandó áramot indukál a plazmában (lásd 32.10. ábra).

Ennek a megoldásnak hátránya, hogy csak rövidebb-hosszabb ideig tartó impulzusüzemben működik, hiszen a plazmaáramot indukáló, időben lineárisan növekvő mágneses tér nem nőhet akármekkorára. A TOKAMAKban létrehozott plazmaimpulzust a kísérletező fizikusok „lövésnek" hívják.

Világviszonylatban eddig a legjobb eredményeket TOKAMAK jellegű kísérleti berendezések szolgáltatták. (Hazánkban is működött egy kisebb berendezés a Központi Fizikai Kutató Intézetben Budapesten, de ezt a 20. század végén a gazdasági megszorító intézkedések következtében leszerelték.) Bár ezek a készülékek csak kísérleti jellegűek, s nem az energiafelszabadítást, hanem a fúziós reaktorokkal kapcsolatban felvetődő számos műszaki-technikai vagy fizikai probléma kutatását szolgálják, egészen biztos, hogy ezek nélkül soha nem haladna a kutatás előre, és soha nem érnénk el a termonukleáris reaktor megépítését.



32.10. ábra

A plazma fűtése. A fúziós reakciók beindításához a plazmának igen magas hőmérsékletűnek (több tízmillió K) kell lennie. Ezt a plazma fűtésével tudjuk elérni – legalábbis kezdetben, amíg az önfenntartó plazma meg nem valósul. A plazma fűtésének egyéb haszna is van, hiszen azzal a Lawson-kritériumban szereplő energia-összetartási időt is meg lehet növelni, s közelebb kerülünk a kritérium teljesítéséhez.

A plazma felmelegítésére, *hevítésére* többféle megoldás ismert.

- *Ohmikus hevítés.* A plazma vezeti az elektromos áramot, s ezért a rajta átáramló elektromos áram hatására felmelegszik ($P = I^2 \cdot R$). Ez a hevítési módszer kb. 5 millió K felett már nem hatékony, mivel ilyen hőmérsékleten a plazmaoszlop „ellenállása" már nagyon lecsökken. A TOKAMAK típusú berendezések erősen kihasználják ezt a fűtési módot.
- *Nagyfrekvenciás fűtés I.* (ECRH, Elektron-Ciklotron-Rezonancia fűtés): A plazmában levő *elektronokat* nagyfrekvenciás mezővel gyorsítjuk. A kapott energiát az elektronok ütközések révén átadják az ionoknak is – a plazma felmelegszik. A legjobb energiabetáplálás akkor érhető el, ha a nagyfrekvenciás mező frekvenciája éppen a mágneses mezőben lévő elektronok Larmor-frekvenciájával egyezik meg [lásd (32.14)]. Ez általában GHz (mikrohullámok) tartományba esik.
- *Nagyfrekvenciás fűtés II.* (ICRH, Ion-Ciklotron-Rezonancia fűtés): A plazmában levő *ionokat* gyorsítjuk a nagyfrekvenciás mezővel. A legjobb energiabetáplá-

lás akkor érhető el, ha a nagyfrekvenciás mező frekvenciája éppen a mágneses mezőben lévő ionok Larmor-frekvenciájával egyezik meg [lásd (32.14)]. Ez általában MHz (rádióhullámok) tartományba esik.

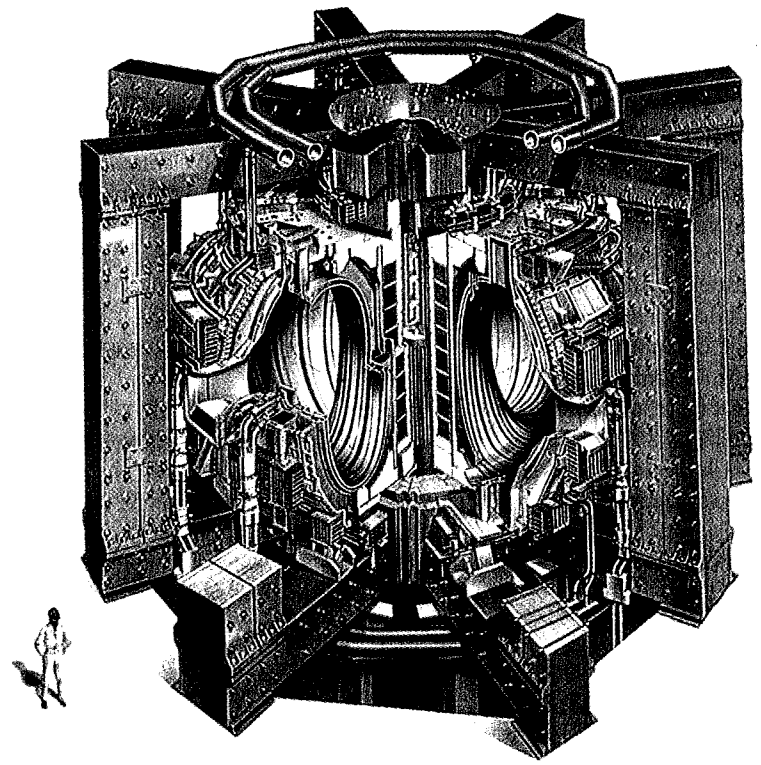
- *Nagy intenzitású részecskebesugárzás* (NBI, „Neutral Beam Injection"): Itt nagy energiára felgyorsított semleges atomnyalábot lőnek a plazmába (azért kell semleges legyen, mert ha ionokból állna, akkor a mágneses mező eltérítené, és nem jutna be a plazmába). Először természetesen ionokat gyorsítanak, majd a felgyorsított ionokból állítanak elő nagy sebességű semleges atomnyalábot, és végül ezt lövik be a plazmába.
- *Lézeres hevítés.* Az inerciális fúzióban alapvető, de a mágneses összetartású plazma fűtésére is lehet használni.

A fúziós energiatermelés jövője. A JET és az ITER. A végső célt, a termonukleáris reaktor gyakorlatilag hasznosítható megoldását eddig még nem sikerült elérni. A fúziós erőművek egy szinte kimeríthetetlen mennyiségű energiahordozóra, a tengervízben nagy mennyiségben található deutérium felhasználására épülnek majd. A tríciumot a helyszínen állítják elő, a Földön ugyancsak nagy mennyiségben található lítiumból, felhasználva a fúziós reakcióban keletkező neutronokat:

$$
\begin{aligned}
&{}^{2}_{1}\mathrm{H}+{}^{3}_{1}\mathrm{H}\rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He}+\mathrm{n}+17{,}6\ \mathrm{MeV} \qquad \text{és}\\
&{}^{6}_{3}\mathrm{Li}+\mathrm{n}\rightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{H}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}+4{,}78\ \mathrm{MeV}.
\end{aligned}
\tag{32.15}
$$

Ennek a megoldásnak kettős előnye is van. Egyrészt hasznosítja a reakcióban keletkező, egyébként „felesleges" neutronokat (amelyek egyébként az energia 80%-át is elviszik), másrészt pedig biztosítja a fúziós reakcióhoz szükséges tríciumot, amelyet egyébként máshol kellene fáradságosan és sok energiát befektetve előállítani. A trícium szállítása is veszélyes lenne, mivel radioaktív anyag. A helyszíni előállítás ezt a problémát is megoldja.

Szerte a világon intenzív kutatások folynak a szabályozott termonukleáris fúzió megvalósítására, nemcsak a kimeríthetetlen energiaforrás ígérete miatt, hanem azért is, mert a termonukleáris erőművek működése közben nem keletkeznek hosszú felezési idejű radioaktív termékek. A fúziós reakciókban keletkező neutronok persze fel tudják aktiválni a reaktor szerkezeti elemeit. Reméljük, hogy egyrészt sikerül a neutronok nagy részét tríciumtermelésre hasznosítani, másrészt megfelelő anyagok kiválasztásával sikerül elérni, hogy a szerkezeti elemekben a maradék neutronok hatására keletkezett radioaktív anyagok rövid felezési idejűek legyenek, s így ne okozzanak hosszú távon tárolási problémákat. A fúziós erőművek tehát a világ energiagondjait beláthatatlanul hosszú időre megoldhatnák komolyabb környezeti szennyezés veszélye nélkül. Sajnos, a magas hőmérsékletű plazma és a járulékos műszaki-technikai problémák olyan hatalmasak, hogy azokat csak nemzet-



32.11. ábra

közi összefogással lehet leküzdeni. A legígéretesebbek éppen ezért a több ország együttműködésével épülő hatalmas fúziós kísérleti létesítmények.

JET. Ízelítőül, és azért, hogy az erőfeszítések mértékéről képet adjunk, ismertetjük a jelenleg működő egyik legnagyobb fúziós berendezés, a nyugat-európai országok közös vállalkozásának, a JET-nek (Joint European Torus) néhány adatát.

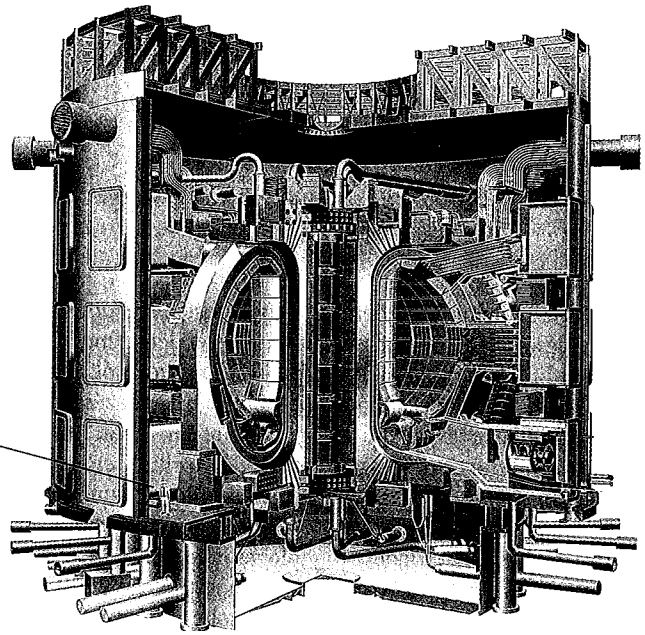
A TOKAMAK rendszerű létesítményt 1984. április 9-én nyitották meg az angliai Culhamban (32.11. ábra). A gyűrű alakú kisülési vákuumkamra közepes sugara 2,96 m, a kamra keresztmetszete D alakú, magassága 4,2 m, szélessége 2,5 m. A kamrában a plazma kiterjedése függőleges irányban 2,1 m, vízszintesen 1,25 m. A mágneses mezőt létrehozó központi vasmag tömege 2800 tonna, a toroidális mezőt létrehozó tekercsekben folyó áram teljesítménye 380 MW. A toroidális mágneses indukciót 1999-ben 4 T-ra emelték. A plazma fűtésének mintegy 20 másodperces ideje alatt a plazmában kb. 4 800 000 A erősségű áram folyik. A kezdeti

5 MW fűtőteljesítményt 1988-ig több lépcsőben 25 MW-ra emelték újabb fűtőrendszerek üzembe helyezésével. 1997-ben három hónapon át deutérium–trícium plazmával is végeztek kísérleteket. Ezek a következő „világcsúcsokat" jelentő eredményeket hozták a JET számára:

- egy impulzusban 22 MJ fúziós energia szabadult fel,
- 16 MW fúziós csúcsteljesítményt értek el,
- 4 MW állandó fúziós teljesítményt tudtak fenntartani 4 s ideig,
- az ionhőmérséklet ~40 keV volt (~200 millió K),
- a fúziós teljesítmény a plazmát fűtő teljes teljesítménynek már a 65%-át biztosította ($Q = 0{,}65$).

Mindezek ellenére a JET még csak egy plazmafizikai kísérletek részére épített kísérleti berendezés, amely több energiát fogyaszt, mint termel. A következő nagy lépés az ITER megépítése lesz.

ITER (International TOKAMAK Experimental Reactor). Az ITER ötlete 1985-ben merült fel először az egykori Szovjetunió, az Egyesült Államok, az Európai Unió és Japán közötti együttműködés keretében, a Nemzetközi Atomenergia Ügynökség (IAEA) pártfogásával. A nemzetközi konzorciumot ma az Európai Unió,



32.12. ábra

Japán, a Kínai Népköztársaság, Oroszország, a Koreai Köztársaság, az Egyesült Államok és India alkotják. Várhatóan új országok is csatlakoznak majd, ahogy az ITER a kivitelezés fázisába lép.

Az ITER berendezés európai helyszínen, a dél-franciaországi Cadarache-ban épül fel. A cadarache-i helyszín már most is a Francia Atomenergia Bizottság (CEA) energiakutatási központjaként szolgál. A telephely kb. 40 hektárnyi területet ölel fel, további 30 hektár használható átmenetileg az építkezési szakaszban. Az ITER helyszínének követelményei közé tartozik a 450 MW-os hűtési kapacitás és a 120 MW-ig terjedő elektromos energiaforrás.

Az építkezési szakasz 2007-ben elkezdődött, és ha minden jól megy, 2018-ban kigyúl az első ITER plazma.

Az ITER olyan TOKAMAK lesz (32.12. ábra), amely 500 millió watt (500 MW) fúziós energiát lesz képes 10 percig folyamatosan előállítani. Harmincszor nagyobb teljesítményű lesz, mint a JET berendezés, és közel akkora, mint a jövőbeni kereskedelmi erőművek. A tudósok az ITER program keretén belül tudják majd először tanulmányozni az „égő" plazma fizikáját – olyan plazmáét, amelyet túlnyomórészt a belső fúziós reakciók hevítenek, nem pedig külső hőforrás (lásd 32.5. ábra). Az ITER egyik célja, hogy bemutassa és tökéletesítse azokat a kulcsfontosságú technológiákat, amelyek a fúzió mint biztonságos és környezetbarát energiaforrás fejlesztéséhez szükségesek.

Az ITER kísérletben a plazma tízszer annyi energiát termel majd, mint amennyi a hidrogénplazma előállításához és hevítéséhez szükséges ($Q = 10$). A kísérlet során tesztelni fogják a majdani valódi erőművekben szükséges fűtési, ellenőrző, diagnosztikai, valamint távkarbantartó rendszereket. Az ITER működése során emellett a plazma utántöltésére és a szennyeződések kivonására szolgáló rendszereket és eljárásokat is kifejlesztik.

DEMO. Az ITER alapozza meg egy későbbi, elektromos áramot is termelő „demonstrációs" erőmű (DEMO) megalkotását. Ez lesz a fúziós energiához vezető következő fontos lépés, s egyben az utolsó lépcsőfok a hálózatra termelő fúziós erőművek előtt. Ez utóbbiakra – a szakemberek szerint – csak a 21. század közepe táján számíthatunk.

IX. ELEMI RÉSZEK ÉS AZ UNIVERZUM

Könyvünk utolsó részében megpróbáljuk érzékeltetni, hogy hol tart ma a fizika a Természet határterületeinek kutatásában, a legkisebb, illetve a legnagyobb méretű objektumok, a mikrorészecskék, illetve az univerzum legtávolabbi részeinek (esetleg az „egészének") megismerésében. Az ismertetés – a jelenségkör összetettsége és a részletes leírásához szükséges matematikai ismeretek bonyolultsága miatt – természetesen csak vázlatos és erősen leegyszerűsített lehet, de talán némi kitekintést nyújt a modern fizika aktuális problémáira, a részben megértett és a még megértésre váró kérdéseire.

33. Alapvető kölcsönhatások

A természetben nagyon sokféle jelenség, a fizika szóhasználatával élve: *kölcsönhatás* figyelhető meg. Eleinte, amikor a jelenségek leírása elsősorban a különböző testek (pl. a bolygók) mozgásának vizsgálatára korlátozódott, a fizikusok a kölcsönhatás szó helyett az *erőhatás* kifejezést használták, és megpróbálták feltérképezni, hányféle *erő* figyelhető meg a világban.

Sok-sok kísérleti tapasztalat összegyűjtése és az ezeket rendszerező elméleti megfontolások finomodása, letisztulása után állíthatjuk: *négy* „alapvető" kölcsönhatás segítségével értelmezhetők, leírhatók a megfigyelt mikro- és makrofizikai jelenségek, folyamatok. Bizonyos jelek arra mutatnak, hogy még ez a négy kölcsönhatás sem független egymástól, közöttük mélyebb kapcsolat, rokonság fedezhető fel.

33.1. A gravitációs kölcsönhatás

Newton – a 17. században – felismerte, hogy minden test (legyen az földi vagy égi eredetű), matematikai képletekkel meghatározható nagyságú és irányú erőt fejt ki a többi testre: ez a *gravitáció,* más néven általános tömegvonzás jelensége (lásd a 2.1.2.4. pontot). A gravitáció newtoni elméletét Einstein a 20. század elején lényegesen finomította (lásd a 15. fejezetet). Az általános relativitáselmélet szerint gravitációs erő nincsen, a korábban annak tulajdonított jelenségeket a téridő görbültsége okozza.

A gravitáció jelenségeiben, tehát a gravitációs kölcsönhatásban minden test, minden részecske részt vesz, ez tehát a legáltalánosabb, leginkább egyetemes (univerzális) kölcsönhatás. Erőssége nem túl nagy (sőt, inkább gyengének mondható), emiatt földi (kis tömegű) testek gravitációs hatása szinte észrevehetetlen, csak igen finom mérésekkel mutatható ki. Nagyméretű testeknél, még akkor is, ha azok messze vannak egymástól, a gravitáció az egyetlen meghatározó kölcsönhatás, ezért csillagászati méretekben a szerepe döntő.

A gravitációs kölcsönhatás képes létrehozni „kötött" rendszereket, olyanokat, melyek tagjai a gravitációs erők hatására hosszú ideig egymás közelében maradnak. Ilyen kötött rendszer pl. a Naprendszer, vagy egy bolygó és a körülötte keringő holdak, a kettőscsillagok, továbbá a galaxisok és galaxishalmazok. A kötött rendszerek mellett a gravitációs kölcsönhatás ún. „szórási állapotok" leírására is alkalmas, ilyen pl. a Naprendszert elhagyó űrszonda, bizonyos üstökösök vagy egy – a csillagközi térből érkező és a Föld mellett elhaladó – kozmikus sugárzási részecske.

33.2. Az elektromágneses kölcsönhatás

A gravitáció sikeres alkalmazása a csillagászatban felcsillantotta azt a reményt, hogy a világ valamennyi jelensége (valamilyen mikroszkopikus szinten) visszavezethető a gravitációra. Ez a sejtés azonban nem igazolódott be! A 19. században nyilvánvalóvá vált, hogy az elektromos és a mágneses jelenségek nem vezethetők vissza a gravitációra, attól alapvetően különböző, új kölcsönhatás megnyilvánulásai. Ez a kölcsönhatás sem írható le pusztán erőhatásként (jóllehet az álló töltések között ható Coulomb-erő és a mágnesek közötti erőhatás részét képezi a jelenségkörnek), hanem annál összetettebb és bonyolultabb. Tartalmazza pl. az indukció jelenségét és az áramok által gerjesztett mágneses terek létrejöttét, ezek nyilván nem írhatók le valamilyen erőképlettel; ezért indokolt az általánosabb kölcsönhatás szó a jelenségkör megnevezésére.

Az elektromágneses kölcsönhatás erőssége sokkal nagyobb, mint a gravitációé. Két töltött részecske, például egy elektron és egy proton között az elektromos vonzóerő is és a gravitáció is (ha ez utóbbit a newtoni erőképlettel írjuk le) a távolság négyzetével fordított arányban csökken, de a Coulomb-erő 40 nagyságrenddel (kb. 10^{40}-szer!) erősebb, mint a gravitáció. Emiatt atomi méretekben a gravitáció teljes mértékben figyelmen kívül hagyható, és nagyobb méretekben is csak akkor kap szerepet, ha a kölcsönhatásban részt vevő testek elektromos (össz)töltése nulla.

Az elektromágneses kölcsönhatás képes kötött állapotokat létrehozni (ilyenek az atomok és a molekulák), de szórási állapotot is leírhat (ilyen az atomot ionizálás során elhagyó elektron vagy az atomokon szóródó fény).

Sokáig úgy vélték, hogy a természetben nagyon sok, egymástól alapvetően különböző erőhatás, kölcsönhatás létezik. Csak a 20. század elején, az anyag kvantumos tulajdonságainak és az atomok szerkezetének megismerése után vált világossá, hogy a hétköznapi életben tapasztalható valamennyi jelenség elektromágneses eredetű. Így pl. a rugóerőt is az atomok, molekulák között ható elektromos és mágneses jelenségek hozzák létre; ezek felelősek a folyadékok összenyomhatatlanságáért, a „merev testek" alaktartásáért, a prizma színbontásáért és a megfagyó víz térfogatának növekedéséért. Ezek határozzák meg többek között a hang terjedési sebességének nagyságát, az üveg törésmutatóját, az acél Young-modulusát, továbbá a legkülönbözőbb kémiai folyamatok sebességét. Elektromágneses kölcsönhatás ismeretében érthető meg a szigetelők, fémek és félvezetők közötti különbség, a szupravezetés és a szuperfolyékonyság jelensége, a számítógépek adathordozóinak és kijelzőberendezéseinek működése stb.

33.3. Az erős kölcsönhatás

A gravitáció és az elektromágneses kölcsönhatás sikeres alkalmazása a 19. század végén ismét felcsillantotta a reményt, hogy a természet valamennyi jelensége (valamilyen mikroszkopikus szinten) esetleg visszavezethető erre a két jelenségkörre. Ez a sejtés sem igazolódott be! A 20. század 30-as éveiben nyilvánvalóvá vált, hogy az atommagok jelentős részének stabilitása nem vezethető vissza sem a gravitációra, sem pedig az elektromágneses „erőkre", hanem egy attól alapvetően különböző, új kölcsönhatás, az erős kölcsönhatás megnyilvánulása (lásd a 31. fejezetet).

Az erős kölcsönhatás, amelyet kezdetben magerőnek is neveztek, sokszor – mintegy százszor, bizonyos körülmények között akár ezerszer is – *erősebb,* mint az elektromágneses kölcsönhatás. Az elnevezése is erre a tulajdonságára utal.

Az erős kölcsönhatás fontos tulajdonsága, hogy nagyon *rövid a hatótávolsága.* A magerők kb. 10^{-15} m-ig fejtik ki hatásukat, azután elhanyagolhatóan kicsivé válnak (lásd a 31.3.2. pontot).

Az erős kölcsönhatás is létrehozhat kötött állapotokat (ilyenek az atommagok), de leírhat egymáson szóródó magrészecskéket (nukleonokat) is.

33.4. A gyenge kölcsönhatás

Az atommagok megfigyelt átalakulásainak egyike, a negatív β-bomlás során az atommag Z rendszáma eggyel nő, de a tömegszáma nem változik (lásd a 31.5.1. pontot). Ezt a folyamatot úgy értelmezik, hogy a bomlás során az egyik magbeli neutron protonná alakul át, s eközben még egy elektron és egy új (antineutrínónak nevezett) részecske is keletkezik. Az ilyen – és hozzá hasonló – folyamatok olyan ritkán, annyira kicsiny valószínűséggel következnek be, hogy nem lehetnek sem az igen heves erős kölcsönhatás, sem pedig az elektromágneses kölcsönhatás „termékei", hanem egy új, az előzőktől teljesen eltérő kölcsönhatás, az ún. *gyenge kölcsönhatás* megnyilvánulásai.

Hosszas és gondos kísérleti vizsgálódás során feltérképezték a gyenge kölcsönhatás legfontosabb tulajdonságait. Megállapították, hogy az „erőssége" a gravitációhoz képest ugyan nagy, de az elektromágneses (és az erős) kölcsönhatáshoz viszonyítva nagyon kicsi. Erre utal az elnevezése is. Hatótávolsága még az erős kölcsönhatásnál is rövidebb, az atommagok méretét sem éri el.

A gyenge kölcsönhatás annyira gyenge, hogy egyáltalán nem képes kötött állapot kialakítására. Nincs olyan objektum a természetben (se kicsi, se nagy), amelyet a gyenge kölcsönhatás tartana össze! Emiatt ennek a kölcsönhatásnak a tulajdonságai csak bomlási vagy szórási folyamatokban tanulmányozható.

34. Elemi részecskék

Az előző fejezetben áttekintettük a sokféle fizikai jelenség mögött meghúzódó alapvető kölcsönhatásokat. Most rátérünk ezen kölcsönhatásokban részt vevő atomi részecskék felsorolására, tulajdonságaik ismertetésére.

A természetben nagyon sokféle test, alakzat figyelhető meg, s ezek tulajdonságai is nagyon változatosak, szinte áttekinthetetlenül szerteágazóak. A helyzet azonban – szerencsére – nem ennyire bonyolult! Ha egyre kisebb és kisebb méretű objektumokat vizsgálunk, a méretek csökkenésével az *alapvetően különböző* résztvevők száma is fogy, s így a tulajdonságaik feltérképezése is reális esélye lehet a kutatóknak. Az elképzelhetetlenül nagyszámú kémiai vegyület mindegyike olyan egységekből, atomokból tevődik össze, melyek között a különbözőek száma még a 100-at sem éri el. Az atomok atommagból és elektronokból állnak, az atommagok pedig protonokból és neutronokból.

A 20. század első harmadának végéig a fizikusok nagyjából azt gondolták az anyag szerkezetéről, hogy az *három részecske,* az elektron, a proton és a neutron segítségével megérthető. Ezt a három részecskét az erős és az elektromágneses kölcsönhatás tartja együtt; az előbbi a protonokból és a neutronokból atommagokat, az elektromágneses erők pedig az atommagokból és az elektronokból atomokat „építenek fel". Az építkezés módját, annak játékszabályait nem a klasszikus (newtoni) fizika, hanem a *kvantumelmélet* törvényei határozzák meg.

Ebben a viszonylag egyszerű képben szereplő részecskéket – mivel további összetevőkre utaló jeleket nem láttak – *elemi részecskék*nek nevezték el. Az elnevezés később – újabb és újabb részecskék felfedezése miatt – megkérdőjelezhetővé vált, s egyre inkább csak részecskeként emlegették ezeket az (atomi méreteknél is kisebb) objektumokat.

34.1. Részecskék „születése" és „halála"

Az atomok és atommagok világában eleinte úgy nézett ki, hogy az „elemi" részecskék, (elektronok, protonok és neutronok) *összetevői* minden nagyobb, bonyolultabb rendszernek, s az anyagi tulajdonságok megváltozása az összetevők *átrendeződéseként* értelmezhető. Az atomok gerjesztésekor vagy ionizálásakor az atomi elektronok csak más állapotba, más helyre kerülnek, de mindig megtalálhatók valahol. Hasonló a helyzet a magreakcióknál is. Az atommagok bomlása, vagy hasadása során a protonok és neutronok csak átrendeződnek, máshová és más állapotba kerülnek, de nem tűnnek el, és nem is bukkannak elő a semmiből. (Klasszikus hasonlattal élve az atomfizikai vagy magfizikai folyamatok elemi összetevői olyanok, mint a biliárdasztalon ütköző golyók; csak a helyüket és a sebességüket tudjuk megváltoztatni, egyéb jellemző tulajdonságaikat vagy a darabszámukat nem!) Ezt a képet az 1930-as évek két felfedezése alaposan felforgatta, és tarthatatlanná tette.

34.1.1. Részecskék és antirészecskék. Lyukelmélet. Párkeltés és annihiláció

A relativitáselméletet és a kvantumelméletet, a modern fizika két csodálatos szellemi termékét Dirac angol elméleti fizikus munkássága egy különösen sikeres egyenletben, az elektron relativisztikus hullámegyenletében „forrasztotta össze". A Dirac-egyenlet – mert ma már mindenki így hívja ezt az egyenletet – az elektron hullámtermészetét (lásd a 19. fejezetet) a téridő fogalmával és a Lorentz-transzformáció (lásd a 12.5. pontot) szimmetriatulajdonságaival kapcsolta össze. Sikeresen magyarázta a hidrogénatom színképének finom részleteit, a Balmer-formulán (lásd a 17.2. pontot) túlmutató *finomszerkezetet,* továbbá szervesen tartalmazta az elektron *spin*jét és a hozzá kapcsolódó *mágneses momentum*ot (lásd a 20.3.4. pontot).

A Dirac-egyenletnek – sok sikere mellett – volt egy szépséghibája, először érthetetlennek tűnő furcsa melléktermék. Mivel a relativitáselmélettel összhangban álló egyenlet volt, az elektron E energiája és $\mathbf{p}$ impulzusa között érvényes relativisztikus relációból, a (12.18) egyenletből indult ki. Eszerint

$$E^2-\left(\mathbf{p}c\right)^2=\left(mc^2\right)^2,$$

azaz

$$E=\pm\sqrt{(\mathbf{p}c)^2+(mc^2)^2}.$$

A speciális relativitáselméletben a négyzetgyök előtt álló előjel csak pozitív lehet, negatív energiának nincs semmiféle fizikai jelentése. A kvantumelméletben azonban mindkét előjelet meg kell tartani, enélkül ellentmondásos lenne a leírás.

Dirac megpróbált fizikai jelentést tulajdonítani olyan elektronállapotoknak is, amelyek annál kisebb energiájúak, minél nagyobb bennük az elektron impulzusa. Ha ilyen állapotok léteznének a természetben, akkor a „rendes", pozitív energiájú elektronok energiakisugárzás után „belezuhannának" ezekbe az energetikailag kedvező állapotokba. Ezt a lehetőséget csak egy dolog tilthatja meg: *a Pauli-elv* (lásd a 20.4. pontot).

Tételezzük fel, hogy valamennyi negatív energiájú kvantumállapotban tartózkodik egy-egy elektron, amelyeket a szimmetrikus elrendeződésük miatt nem veszünk észre – mondta Dirac. Ekkor a Pauli-féle kizárási elv értelmében további elektronok már nem kerülhetnek ezekbe az állapotokba; a pozitív energiájú elektronok világa tehát stabil maradhat.

Hogyan szerezhetünk tudomást a „tengernyi" negatív energiájú elektronról, az ún. Dirac-tenger létezéséről? Éppen úgy, mint a tengervízben a légbuborékokról. Ha az egynemű (és ezért szinte megfigyelhetetlen) vízből valahol hiányzik egy kevés víz, és a helyét levegőbuborék tölti ki, akkor ez a vízhiány a földi gravitációs tér hatására éppen ellenkező irányban kezd mozogni, mint ahogy a víz tenné; felfelé száll. Ha az egyenletesen eloszló (és ezért megfigyelhetetlen) elektrontengerből valahonnan hiányzik egy negatív energiájú részecske, ezt a „hiányt" egy olyan pozitív energiájú részecskeként észleljük, amely külső elektromos tér hatására éppen ellenkező irányban gyorsul, mint az elektronok tennék. Ezt a „hiányrészecskét" Dirac pozitív elektronnak, *pozitron*nak nevezte el, hiszen elektromos mezőben úgy mozog, ahogy egy pozitív elektromos töltésű részecske tenné.

A pozitront (kozmikus sugárzást tanulmányozva) hamarosan fel is fedezték, s kiderült, hogy a tömege, spinje és mágneses momentuma éppen akkora, mint az elektroné, töltése viszont ellentettje az elektronénak. A pozitron volt az elsőként megismert *antirészecske*.

A pozitron, amelyet a töltése miatt e^+ módon jelölnek, úgy hozható létre, hogy egy nehéz részecskével (pl. egy atommaggal) elegendően sok (legalább $2mc^2$) energiát közlünk. Ezt egy nagy energiájú foton (γ-kvantum) közvetítésével tehetjük meg. Ekkora energia elegendő ahhoz, hogy a negatív és a pozitív energiájú állapotok közötti $2mc^2$ széles sávot áthidalja, s egy negatív energiájú elektront „átemelje" a pozitív energiájú tartományba. A γ-kvantum tehát a „semmiből" egy negatív elektront és a Dirac-tengerben egy lyukat, vagyis egy pozitront hoz létre. Ez a *párkeltés* jelensége, amelyet a kémiai reakcióegyenletekhez hasonló képlettel is leírhatunk:

$$\gamma+\text{atommag}=e^-+e^++\text{atommag}.$$

Az atommag jelenléte nélkül a folyamat nem mehetne végbe, mert nem teljesülhetne egyszerre az energia- és az impulzusmegmaradás törvénye. Ezt legkönnyebben a keletkező elektron–pozitron pár tömegközépponti rendszeréből lehet megérteni. Itt a folyamat végén (atommag nélkül) a részecskék összimpulzusa nulla lenne, a folyamat elején viszont, amikor csak egyetlen foton volt jelen, az összimpulzus nem lehetett nulla.

A párkeltési folyamat ellentettje a részecske–antirészecske megsemmisülés, annihiláció jelensége. Eszerint egy elektron és egy pozitron találkozásakor az elektron beleeshet a negatív energiájú elektronok tengerében levű lyukba (ezt nem tiltja a Pauli-elv, hiszen ott most nincs részecske), s a „felesleges" energia fotonok formájában távozik:

$$e^- + e^+ = \gamma + \gamma.$$

Az annihilációs folyamatban legalább 2 fotonnak kell keletkeznie, az egyetlen fotonná alakulást tiltja az energia–impulzus-megmaradási törvény.)

34.1.2. β-bomlás és a neutrínók

Az atommagok egyik bomlási folyamatában, az ún. β-bomlásban (lásd a 31.5.1. és a 33.4. pontokat) az atommag egyik alkotórésze, egy elektromosan semleges neutron (jele: n, vagy a töltésének hiányára utalva: n^0) átalakul pozitív protonná (jele: p, vagy a töltését is kifejezve: p^+) és egy elektronná. Pauli (a folyamatban megfigyelhető részecskék energiáját és impulzusát, valamint a részecskék spinjét vizsgálva) rájött arra, hogy a β-bomlásban kell még keletkeznie egy semleges, sok szempontból furcsa, „megfoghatatlan" részecskének. Ezt a részecskét később neutrínónak nevezték el, és a görög nű betűvel (ν) jelölték. (A neutrínó semleges neutron nevének olaszos kicsinyítő képzővel ellátott alakja.) A folyamat reakcióegyenlete:

$$n^0 \to p^+ + e^- + \nu.$$

A β-bomlás, a párkeltés és az annihiláció jelensége azt mutatja, hogy az atomoknál is kisebb „elemi" részecskék kölcsönhatásai nem korlátozódnak pusztán átrendeződésre, hanem a reakciók során részecskék tudnak *keletkezni* („születni") és *eltűnni* („meghalni"). A β-bomlás során megjelenő elektron a bomlás előtt nem volt jelen az atommagban, és az elektron–pozitron pár sem volt benne az atommagban, még kevésbé a fotonban, hanem az ütközés (a kölcsönhatás) során keletkezett. A gerjesztett atomok vagy atommagok által kisugárzott foton is a folyamat során jön létre, tehát keletkezik, és az elnyelődésekor eltűnik, megsemmisül.

34.2. Részecskecsaládok

A részecskék közül néhány (például a proton és az elektron) „örök életű", ún. *stabil* részecske, a többségük azonban *bomlékony*. Az instabil (külső hatás nélkül, önmaguktól más „objektumokká" átalakulni képes) részecskék fontos jellemzője az (átlagos) *élettartam*uk, továbbá az, hogy melyek a bomlástermékeik. A szabad (nem atommagban kötött) neutron élettartama például 14 perc (ez nagyon hosszú idő a részecskék világában), bomlástermékei pedig a már említett proton, elektron és neutrínó.

34.2.1. Leptonok

A részecskék (legyenek azok stabilak vagy bomlékonyak) gyorsítóberendezésekben részecskék ütköztetésével állíthatók elő, vagy a természetes eredetű kozmikus sugárzásban (a Földön kívülről érkező, nagy energiájú részecskék „záporában") kereshetők. Kozmikus sugárzásban fedezték fel 1936-ban a később *müon*nak elnevezett és a görög mű (μ) betűvel jelölt részecskét, amelynek kétféle töltésű változata is létezik: a negatív μ^- és a pozitív μ^+. Ezek egymás antirészecskéi (éppen úgy, mint az elektron és a pozitron), és a tulajdonságaik nagyon hasonlóak az elektron és a pozitron tulajdonságaihoz. Elektromos töltésük nagysága az elemi töltés, spinjük (lásd a 20.3.4. pontot) $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ egységekben mérve $\frac{1}{2}$, tömegük viszont az elektron (és a pozitron) nyugalmi tömegének 207-szerese. Hasonló tulajdonságaik miatt az elektront és a müont (antirészecskéikkel együtt) egy részecskecsaládba, a *leptonok* családjába soroljuk. (Az elnevezés a görög „könnyű" szóra utal.)

A leptoncsalád tagjai közé tartozik a neutrínó, pontosabban ide tartoznak a neutrínók is. Azért kell többes számot használnunk, mert kiderült, hogy többféle neutrínó létezik a természetben: az elektronnal rokonságot mutató elektron-neutrínó ν_e és a müon „testvére", a müon-neutrínó ν_μ. Ráadásul mindegyik neutrínónak van antirészecskéje is, jóllehet az elektromos töltésük nulla. Az antirészecske jelölésére a részecske betűjele fölé húzott vonalat is használják, ez a jel akkor is alkalmazható, ha az elektromos töltés nulla. A neutron β-bomlásánál pl. „anti-elektron-neutrínó" keletkezik, a bomlási egyenlet tehát így helyes:

$$n^0 \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e.$$

A müonok bomlékony részecskék, kb. $2 \cdot 10^{-6}$ s alatt elektronná (vagy pozitronná) és neutrínókká alakulnak át:

$$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e, \quad \text{illetve} \quad \mu^+ \to e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e.$$

Az 1970-es években fedezték fel a leptoncsalád „harmadik generációját", a müonnál is nehezebb (sőt, még a protonnál is nagyobb nyugalmi tömegű) taurészecskéket és a hozzájuk tartozó neutrínókat (τ^+, τ^-, ν_τ, $\overline{\nu}_\tau$). A „nehéz leptonok" a müonnál sokkal gyorsabban, $3 \cdot 10^{-13}$ s alatt elbomlanak.

A leptonok – mai tudásunk szerint – szerkezet nélküli elemi részecskék. Spinjük ($\hbar$ egységekben mérve) $\frac{1}{2}$, tehát ún. *feles spinű* részecskék (más néven *fermionok*). Érvényes rájuk a Pauli-elv. Az erős kölcsönhatásban nem vesznek részt, csak a gyenge kölcsönhatás, valamint (elektromosan töltött leptonoknál) az elektromágneses kölcsönhatás határozza meg a viselkedésüket.

34.2.2. Mezonok

Ugyancsak a kozmikus sugárzásban fedezték fel 1950 táján a π-mezonnak, röviden *pion*nak elnevezett részecskéket. Létezésüket Yukawa elméleti megfontolások (a magerők hatótávolsága) alapján már korábban megjósolta. Háromféle piont ismerünk: a pozitív töltésű π^+-t, a negatív π^--t (ezek egymás antirészecskéi) és az elektromosan semleges π^0-t. Mindhárom részecske kb. ugyanakkora tömegű (ezért is gondoljuk, hogy egy részecskecsalád tagjai). Ez a tömeg az elektron tömegénél mintegy 200-szor nagyobb, a proton (s a neutron) tömegénél viszont kb. 7-szer kisebb; erre a „közepes" tömegértékre utal a „mezon" elnevezés.

A pionok instabil részecskék, lehetséges bomlási módozataik:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu,$$

$$\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu,$$

$$\pi^0 \to 2\gamma.$$

Spinjük nincs, emiatt nem érvényes rájuk a Pauli-elv; ún. *bozonok*. Részt vesznek az erős kölcsönhatásban is, emiatt nagyon könnyen létrehozhatók gyorsítóberendezésekben, pl. proton–proton ütközésekben.

A pionok felfedezését követően még egy sor hozzájuk hasonló (0 vagy 1 spinű, erősen kölcsönható) részecskét állítottak elő gyorsítóberendezésekben (K-mezon, η-mezon, ρ-mezon, J/Ψ-részecske stb.), számuk még ma is gyarapszik. A nagyon sok hasonló tulajdonságú részecske léte természetes módon vetette fel azt a gondolatot, hogy ezek a részecskék nem igazán elemiek, hanem valamilyen szerkezettel, belső struktúrával rendelkező képződmények.

34.2.3. Barionok

A részecskék ezen csoportjába többek között az atommag összetevői, *nukleonok* (a *protonok* és a *neutronok*), valamint hozzájuk hasonló, de nagyobb tömegű részecskék, a *hiperonok* (pl. Λ^0-hiperon, Σ^+-hiperon, Ξ^--hiperon, Ω^--hiperon) tartoznak. Ezek a részecskék feles vagy félegész spinűek (sajátimpulzus-nyomatékuk $\hbar$ egységekben $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots$) Érvényes rájuk a Pauli-elv, ún. *fermionok*. Az erős kölcsönhatásban részt vevő részecskék, emiatt ütközésekben könnyen létrehozhatók, de általában igen gyorsan el is bomlanak. Számuk igen nagy, és még ma is fedeznek fel újabb és újabbakat közülük. A barionok is kisebb alcsoportokba (egymáshoz hasonló alegységekbe) sorolhatók, ez (és a nagy számuk) arra utal, hogy belső szerkezettel rendelkező, valamilyen „építőelemekből" összetehető objektumok.

34.2.4. Kvarkok

A mezonok és a barionok (közös nevük: *hadronok*) szerkezetét évtizedeken keresztül nagy erőkkel kutatták. A kísérleti és elméleti erőfeszítések az 1970-es években sikerre vezettek. Nagy energiájú (ultrarelativisztikus) elektronoknak protonokon és neutronokon történő szóródását tanulmányozva fokozatosan kibontakozott (és további kísérletekben megerősítésre került) az a kép, amelyet ma a részecskefizika *standard modell*jének neveznek.

A standard modell szerint a leptonok „elemi részecskék", a mezonok és a barionok azonban összetett objektumok. Valamennyi ismert hadron néhány pontszerűnek tekinthető feles spinű részecske, ún. *kvark* (és antikvark) kötött rendszerének tekinthető. A kvarkoknak 6 különböző típusa létezik a természetben, ezeket (az angol elnevezésük kezdőbetűire utalva) u, d, s, c, t, b módon jelölnek. (Az antikvarkok jele: $\overline{\text{u}}$, $\overline{\text{d}}$, $\overline{\text{s}}$, $\overline{\text{c}}$, $\overline{\text{t}}$ és $\overline{\text{b}}$.) A kvarkok elektromos töltése igen furcsa: az elemi töltés *tört része!* Az u-kvark töltése pl. $\frac{2}{3}$, a d-kvarké pedig $-\frac{1}{3}$ elemi töltés.

A barionok 3 kvarkból tevődnek össze, a proton például uud, a neutron pedig udd módon. (Töltésük ennek megfelelően $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=1$, illetve $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=0$ egység.) A mezonok kvarkokból és antikvarkokból állnak, a π^0 mezon pl. $u\overline{u}$ és $d\overline{d}$ keveréke, π^+ pedig $u\overline{d}$ összetételű.

A kvarkokból felépülő hadronok azért térnek el lényegesen a fizika korábbi története során megismert összetett rendszerektől (atomok, atommagok), mert *nem bonthatók szét*

külön-külön létező, egymástól messzire eltávolítható részekre, önálló kvarkokra! Akármilyen nagy energiával ütköztetnek össze hadronokat, a keletkező részecskék mindig csak összetett rendszerek, hadronok maradnak, nem pedig szétszakított kvarkok. A kvarkok között ható erők jellegének megismerése azért nagyon nehéz feladat, mert nem végezhető el a Rutherford-kísérlethez (lásd a 17.1.2. pontot) hasonló kvark–kvark szóráskísérlet. Ha Rutherford nem pontszerűnek tekinthető töltött részecskéket, hanem semleges atomokat ütköztetett volna egymással, akkor a Coulomb-erő helyett csak a van der Waals-erők atomeltérítő hatásait figyelhette volna. Ez annyira bonyolult szórási képre vezet, amelyből nem (vagy csak nagyon nehezen) juthatott volna el az atommag felfedezéséig.

34.3. Megmaradási tételek

A részecskék nagy száma nagyon sokféle ütközési és bomlási folyamatot tesz lehetővé. Ezek között a folyamatok között bizonyos szabályszerűségek, az ún. megmaradási tételek segítenek rendet teremteni. Ezek a tételek – melyeket nagyon sok kísérlet elemzése után ismertek fel – azt állítják, hogy az ütközési és bomlási folyamatokban bizonyos fizikai mennyiségek összértéke nem változik meg. Ilyen „megmaradó mennyiség" pl. a relativisztikus energia és impulzus, az impulzusnyomaték, az elektromos töltés, továbbá még néhány (az elektromos töltéshez hasonló) töltés jellegű mennyiség: leptonszám, barionszám, ritkaság stb.

A megmaradási törvények egy részét (pl. az elektromos töltés megmaradását) valamennyi kölcsönhatás „tiszteletben tartja", mások viszont csak némelyik kölcsönhatásban érvényesek, bizonyos körülmények között azonban „megsérülhetnek". Ilyen sérülő tétel a térbeli tükrözésre vonatkozó paritásmegmaradás tétele, amely az elektromágneses és az erős kölcsönhatásban érvényes, a gyenge kölcsönhatásban azonban érvényét veszti. Ugyancsak sérti a gyenge kölcsönhatás a részecske–antirészecske szimmetriát, pedig az elektromágneses és az erős kölcsönhatásban az „jól működik".

34.4. Közvetítő részecskék

A relativitáselmélet értelmében a kölcsönhatások terjedéséhez időre van szükség. Az egyik részecske által okozott „hatás" legfeljebb fénysebességgel terjedhet, juthat el egy másik részecskéig. A relativitáselmélet és a kvantumfizika követelményeit egyaránt figyelembe vevő tárgyalásmód, az ún. *kvantumtérelmélet* úgy írja le a részecskék egymásra hatását, hogy az egyik részecske a téridő valamelyik pontjában kelt (létrehoz) egy – a kölcsönhatásra jellemző – részecskét, amely – kvantumosan viselkedő hullámként – eljut a másik részecskéig, és ott elnyelődik. Ez a közvetítő „erőtérkvantum" az elektromágneses kölcsönhatás esetében a nulla nyugalmi tömegű *foton,* a gyenge kölcsönhatásnál az elektromosan töltött W^+ és W^-, valamint a semleges Z^0 részecskék. (Az utóbbi 3 részecske még a nukleonoknál is sokkal nagyobb tömegű). A neutron bomlása (β-bomlás) a közvetítő részecskék segítségével így írható le:

$$n^0 \to p^+ + W^-, \qquad W^- \to e^- + \overline{\nu}_e.$$

Az erős kölcsönhatás közvetítőrészecskéi a „ragacs"-részecskéknek is nevezett *gluonok.* (A gluonok a kvarkokhoz hasonlóan nem figyelhetők meg önálló részecskeként, nem tudnak kiszabadulni a hadronok belsejéből.) A gravitáció feltételezett közvetítője a *graviton,* ennek kísérleti észlelése azonban még közvetett úton sem történt meg.

34.5. A kölcsönhatások egyesítése

A négy alapvető kölcsönhatás között – számos különbözőségük ellenére – rokon vonások fedezhetők fel. A gyenge kölcsönhatást közvetítő részecskékről kiderült, hogy (a nagy tömegük ellenére) egy családba tartoznak a nulla nyugalmi tömegű fotonnal. Emiatt állíthatjuk, hogy az elektromágneses és a gyenge kölcsönhatás tulajdonképpen egyetlen kölcsönhatás kétféle megnyilvánulása (éppen úgy, ahogy az elektromosság és a mágnesség sem alapvetően különböző hatások, hanem egyetlen közös jelenségkör különböző megnyilvánulásai.) Az 1970-es években az „elektrogyenge" néven is emlegetett kölcsönhatás vette át a korábbi két – függetlennek gondolt – kölcsönhatás jogkörét. Folynak erőfeszítések (mind kísérleti, mind pedig elméleti oldalon) az elektrogyenge és az erős kölcsönhatás egységesítésére is. Ez a – jelenleg még nem létező – elmélet lenne a Nagy Egyesített Elmélet, amely talán még a gravitációt is magába foglalná.

Figyelemre méltó, hogy kölcsönhatások mindegyikének jelenleg ismert elmélete ugyanazzal a matematikai apparátussal, az ún. *mértékelméletek* nyelvén írható le. Ez a tény is a kölcsönhatások közötti mélyebb kapcsolatra utalhat.

A részecskék áttekintő táblázata a mellékletben található.

35. Az univerzum fizikai problémái

A természet megismerésére irányuló kutatások többféle irányban és változatos módszerekkel képzelhetők el. Az előző fejezetben vázolt részecskefizikai kutatások az egyre kisebb és kisebb méretek (és ami ezzel együtt jár: az egyre nagyobb energiájú folyamatok) világát vizsgálják. A méretskála másik oldalán az egyre nagyobb és nagyobb képződmények tanulmányozása, a Föld kozmikus környezetének megismerése, a tejútrendszer és távolabbi galaxisok vizsgálata, és végül az *univerzum* egészének valamilyen szintű megismerése áll. A „legkisebb" és a „legnagyobb" kutatása között a közepes méretű világ is tartogat érdekes, még megoldatlan kérdéseket; itt az összetettség (a komplexitás) vizsgálata áll a kutatás homlokterében. Mindegyik terület kutatható a fizika módszereivel, és az eddig elért eredmények azt mutatják, hogy ezek a területek kapcsolatban állnak egymással. Az egyik „határvidéken" felismert törvényszerűségek a másik végen is alkalmazást találnak, az egyik helyen sikeresen alkalmazott módszerek sokszor távolabbi területeken is hasznosnak bizonyulnak.

Az alábbiakban a nagy távolságok fizikáját, az univerzum egészének fizikai vizsgálatát célzó kozmológiát mutatjuk be röviden, különös tekintettel annak legfrissebb eredményeire és még megoldatlan kérdéseire.

35.1. A forró univerzum elmélete

Évszázadok (vagy talán évezredek) óta foglalkoztatja az embereket az a kérdés, hogy vajon milyen idős a világ, mindig létezett-e, vagy valamikor, valahogyan keletkezett, és ha ez utóbbi a helyzet, akkor hogyan változott, „fejlődött" az idő multával, mire elérte a ma megfigyelhető arculatát. Ezekre a filozofikus jellegű kérdésekre próbál a fizika (Newton, majd Einstein gravitációelméletének megszületése, illetve a modern mag- és részecskefizika kibontakozása után) a saját eszközeivel érdemi választ adni. Az ezredfordulóra az erőfeszítések számos területen sikerre vezettek.

Már a 19. században felismerték, hogy a végtelen térben nagyjából egyenletesen eloszló csillagok léte (az univerzumot a legtermészetesebb ilyennek elképzelni) különböző paradoxonokra, a megfigyeléseknek nyilvánvalóan ellentmondó fizikai következtetésekre vezet.

Az Olbers-paradoxon szerint az égboltnak éjszaka is világosnak, sőt végtelen fényesnek kellene lennie, ha a csillagok végtelen hosszú ideje léteznek, és egyenletesen töltik ki a teret. Egy adott irányba (adott térszögbe) nézve a távolság növekedtével egyre több és több csillagot észlelünk, és még ha a távoli csillagok hozzánk érkező fénye egyre gyengébb is, az eredő fényintenzitás végtelen nagy kellene legyen!

A Seeliger-paradoxon a távoli csillagok gravitációs erőhatását összegzi, és azt végtelen nagynak találja. (Igaz ugyan, hogy a gravitációs erő a távolság négyzetével fordított arányban csökken, de a távoli csillagok száma – egy adott irányt vizsgálva – a távolság négyzetével arányosan nő!) A nagyon nagy (határesetben végtelen nagy) erőhatás – még ha szimmetriaokokból a különböző irányú erők eredője nulla is – instabilitásra vezet; az ilyen anyageloszlás nem lehet stabil, hanem a legkisebb zavar hatására felszakadozik kisebb anyagszigetekre.

A Clausius-féle paradoxon a hőtan II. főtétele oldaláról támadja meg az időben állandó világ elképzelését. Ha az univerzum végtelen hosszú ideje létezne, benne az entrópia már régen elérte volna a maximumát, a hőmérséklet-különbségek eltűntek volna, a világnak tehát a „hőhalál" állapotában kellene lennie.

Mai ismereteink szerint az univerzum nincs sztatikus egyensúlyi állapotban, hanem állandóan *változik*. A világ (vagy legalábbis annak általunk belátható, megfigyelhető része) 13,7 milliárd évvel ezelőtt a maitól nagyon eltérő, igen forró állapotban volt, s azóta a „mérete" egyre nő, az univerzum *tágul*. Hubble amerikai csillagász 1929-es megfigyelése szerint a távoli galaxisok annál nagyobb sebességgel távolodnak tőlünk, minél messzebb vannak tőlünk. A Hubble-törvény szerint a Földtől (lényegében a tejútrendszertől) r távolságra levő galaxis távolodási sebessége:

$$v = Hr,$$

ahol $H \approx 70$ km/s/megaparszek az ún. Hubble-állandó. (A parszek a csillagászatban használt távolságegység, 1 parszek = 3,26 fényév = $3 \cdot 10^{13}$ km.) A fenti egyenletben látszólag kitüntetett szerepe van a Földnek vagy a mi galaxisunknak, a tejútrendszernek. Ez azonban nincs így; ha bármelyik másik galaxisról szemlélnénk a világot (a többi galaxist), onnan nézve is ugyanazt a távolodási törvényt észlelnénk, az ottani megfigyelések is a Hubble-törvényt követnék.

Az univerzum tágulását nem szabad úgy elképzelni, mint egy tűzijáték gránátjának a robbanását, amelyben a tűzgömb átmérője egyre nő. A világ „mérete" régen is végtelen nagy volt, és most is az; a növekedés a galaxisok átlagos távolságának változásában mutatkozik meg. Egy szemléletes hasonlat szerint a táguló univerzum a kelésben levő (tehát egyre csökkenő sűrűségű), de végtelen nagy kiterjedésű kenyértésztához hasonlítható, amelyben a már kialakult légbuborékok (galaxisok) átlagos távolsága egyre nő. A légbuborékok egyikének sincs kitüntetett szerepe; bármelyikük helyéről néznénk is a többi buborékot, azt találnánk, hogy azok „tőlünk" távolodnak.

Ha az univerzum tágulása korábban is mindig a Hubble-törvényt követte, könnyen kiszámíthatjuk, hogy

$$T = \frac{r}{v} = \frac{1}{H}$$

idővel ezelőtt valamennyi galaxis (ha azok egyáltalán léteztek) *ugyanazon* (vagy közel ugyanazon) *a helyen* kellett legyen. Ennyi idővel ($T \approx 14$ milliárd évvel) ezelőtt tehát az univerzum – a feltételezés szerint – *nagyon sűrű* és emiatt feltehetően *nagyon forró* állapotban kellett legyen. Ebből az állapotból az univerzum robbanásszerűen kezdett tágulni, az egész elképzelés kezdeti „szingularitását" *Ősrobbanás* néven emlegetik.

A forró univerzum Ősrobbanás-hipotézisét – amelyet az 1950-es években vetettek fel először – ma már precíz kísérletek sora támasztja alá. Ezek közül a legfontosabbak (a Hubble-törvény mellett) a mikrohullámú háttérsugárzás és a könnyű elemek előfordulási gyakorisága.

35.1.1. A mikrohullámú háttérsugárzás

Ha elfogadjuk a táguló univerzum elméletét, néhány paramétert (pl. az univerzumban található anyag átlagsűrűségét) beállítva képzeletben végigkövethetjük a világ egészének alakulását, fejlődését bemutató „történetet". Eszerint az univerzum adiabatikusan tágult, s közben a hőmérséklete fokozatosan *csökkent*. A tágulás üteme nem volt egyenletes, hiszen azt a világban levő anyag gravitációs hatása fékezte. Az általános relativitáselmélet alapegyenletei alapján a fizikusok ki tudták számítani a tágulás ütemét, annak időbeli lefolyását.

A táguló univerzum történetének korai szakaszában a fotonok (és esetleg más részecskék) hőmérséklete olyan magas volt, hogy stabil (semleges) hidrogénatomok még nem alakulhattak ki, hanem csak különálló elektronok és protonok léteztek. A fotonok szóródtak az elektromosan töltött részecskéken, emiatt nem tudtak egyenes vonalban terjedni. Ezt az állapotot az jellemezte, hogy az anyag nem engedte át a fényt, az univerzum a fény számára *átlátszatlan* volt.

Amikor a hőmérséklet körülbelül 3000 K alá csökkent (ez a számítások szerint 300 000 évvel az Ősrobbanás után történt), az elektronok és a protonok semleges hidrogénatomokká álltak össze (rekombinálódtak). Ekkor az univerzum hirtelen átlátszóvá vált a fény számára. (Kozmikus időskálán mérve ez szinte pillanatszerűen következett be.) A történet további részében a fotonok már nem léptek kölcsönhatásba a többi anyagfajtával, hanem csak annyi történt velük, hogy a tágulás ütemének megfelelően csökkent a hőmérsékletük, lehűltek. Napjainkban a kezdetben nagyon forró fotongáz már 3 K hőmérsékletre hűlt le, ez a mikrohullámú rádióhullámoknak megfelelő elektromágneses sugárzás.

Az 1960-as évek elején két amerikai kutató, Penzias és Wilson olyan rádióantennákkal dolgozott, amelyek a távközlési műholdakkal tartották a kapcsolatot. Minden erőfeszítésük ellenére sem sikerült az antennák „zaját" egy zavaró küszöbérték alá csökkenteni. A zaj nem valamilyen azonosítható forrásból, hanem a „háttérből", minden irányból szinte tökéletesen egyenletesen érkezett. Kiderült, hogy az Ősrobbanás emlékét őrző, de mostanra már 3 K-re lehűlt háttérsugárzást fedezték fel. (A sugárzás maximuma 160 GHz frekvenciának felel meg, ez két nagyságrenddel nagyobb, mint a mobiltelefonok frekvenciája.)

35.1.2. A könnyű elemek gyakorisága

Ha időben még korábbi szakaszait vizsgáljuk az univerzum fejlődésének, akkor még magasabb hőmérsékletű és nagyobb nyomású állapotokat kell tanulmányoznunk. Egy bizonyos hőmérséklet felett már az atomok magjai sem stabilak, szétbomlanak az őket alkotó protonokra és neutronokra. A hőmérséklet csökkenésével megnyílik a lehetőség arra, hogy az egymással ütköző protonok és neutronok stabil atommagokat hozzanak létre. Erre a folyamatra azonban csak viszonylag rövid idő áll rendelkezésre, mert az általános tágulás miatt a nehezebb magok kialakulásához szükséges többszörös ütközések valószínűsége igen kicsivé válik.

Az elemek kialakulásának ilyen, elsődleges formájában csak könnyű atommagok keletkezhetnek, elsősorban hélium, nagyon kevés lítium; a magasabb tömegszámú atommagok gyakorlatilag nem is keletkeznek. A részletes számítások azt mutatják, hogy az összes atommag 75 tömegszázaléka hidrogén, 25 tömegszázaléka pedig hélium kell legyen. Csillagászati megfigyelések bizonyítják, hogy a csillagok anyagának és a csillagközi gázfelhőknek az összetétele megfelel ennek az aránynak. Nehezebb elemek csak a csillagokban zajló magfúzió (lásd a 32.3.2. pontot), illetve a szupernóva-robbanások során jönnek létre, és ezek részaránya még ma is elenyésző.

35.2. Precíziós kozmológia

Az Ősrobbanásra alapozott kozmológiai elmélet a 20. század végére általánosan elfogadottá vált. (Az elmélet néhány zavaró problémáját egy további, *infláció*nak nevezett elképzeléssel sikerült orvosolni; ennek ismertetése azonban meghaladná könyvünk lehetőségeit és célkitűzéseit.)

Az ezredforduló környékén a kutatókat már az foglalkoztatta, hogy miként lehetne az elmélet jellemző adatait (paramétereit) a lehető legpontosabban megmérni, vagy mérési adatok felhasználásával kiszámítani. Ilyen adat például a Hubble-állandó, az univerzum átlagsűrűsége, továbbá a tágulás esetleges gyorsulásáért felelős ún. kozmológiai állandó. Ezeket a mennyiségeket kellően pontosan ismerve választ kaphatunk olyan izgalmas kérdésekre is, hogy vajon megfordul-e a tágulás valamikor, és utána összeroppan a világ, vagy végtelen hosszú ideig folytatódni fog a jelenleg látszó folyamat.

A precíziós mérések közül a legfontosabb azt vizsgálta, hogy mennyire irányfüggetlen (izotrop) az 1965-ben felfedezett, kb. 3 K hőmérsékletű mikrohullámú háttérsugárzás. A sugárzás erőssége átszámítható hőmérsékletre, a háttérsugárzás esetleges irányfüggésének kérdése tehát így is feltehető: mennyire egyenletes a hőmérséklet az égbolt különböző pontjain? Ez a kérdés azért lényes, mert segítségével lehet talán megérteni, hogyan jöttek létre a galaxisok, galaxishalmazok az univerzumban. Ezen alakzatok, struktúrák kialakulását az anyag sűrűségének kicsiny egyenetlenségei (inhomogenitása) segítették elő, és a kezdeti „hullámosságnak" a háttérsugárzás egyenetlenségeiben is meg kell mutatkoznia.

A háttérsugárzás ingadozásait a földi légkör zavaró hatása miatt csak űreszközökről lehet nagyon pontosan megmérni. 1989-ben bocsátották Föld körüli pályára a COBE nevű űrszondát, amely 4 éven keresztül végzett igen precíz (esetenként 10^{-5} relatív pontosságú) mikrohullámú méréseket. Az adatok kiértékelése után megállapították, hogy a háttérsugárzás mai hőmérséklete 2,725 K, amelyet azonban a szonda mozgása – a Doppler-effektus következtében – kicsit eltorzít. (A szonda Föld körül kering 8 km/s-os sebességgel, a Föld a Nap körül kering 30 km/s sebességgel, a Napnak a tejútrendszer középpontja körüli keringésből származóan 220 km/s a sebessége, és végül maga a tejútrendszer is „zuhan" a környező galaxisok sűrűbb régiói felé.) A COBE mérései szerint a galaxisunk sebessége kb. 600 km/s.)

A mikrohullámú háttérsugárzás – Doppler-eltolódáson felüli – kicsiny egyenetlenségeiből (amelyet a 2001-ben felbocsátott WMAP nevű űrszonda mért meg), továbbá egyéb precíziós mérésekből egy sor kozmológiai adatot sikerült viszonylag pontosan meghatározni. Ezek szerint az univerzum „életkora" (vagyis az ősrobbanás óta eltelt idő) $13{,}4 \pm 0{,}3$ milliárd év, a Hubble-állandó értéke pedig (72 ± 3) km/s/megaparszek. Kiderült továbbá, hogy a táguló univerzum görbülete nullának tekinthető, tehát az *euklideszi* geometriával írható le. Az univerzum anyagának jelentős hányada optikai vagy másfajta távcsövekkel nem látható, ún. *sötét anyag*. És végül: a tágulás üteme gyorsul, soha nem fog visszafordulni; ezt egy még nem teljesen megértett, „sötét energiának" is nevezett taszító hatás hozza létre.

A további precíziós mérések elvégzése és kiértékelése, a galaxisok kialakulásának, valamint a sötét anyag és sötét energia mibenlétének megértése a 21. század fizikusaira váró feladat.

Név- és tárgymutató

A, Á

aberráció 762
abszolút amper 537
– fekete test 410, 831
– – – sugárzása 410, 666, 831
– hőmérsékleti skála 344
– idő 778
– jövő 780
– máshol 780
– múlt 780
– nyugvó vonatkoztatási rendszer 755
– páratartalom 385
– permeabilitás 515, 528, 537
– permittivitás 421, 450, 620
– törésmutató 638
– zérus fok 344, 397
abszorpciós együttható 1139
– hűtőgép 408
– színkép 658, 830, 837
adhéziós erők 279
adiabatikus folyamat 372
– munkavégzés 345
adóantennák 724
afélium 175
akceptor 1032
– nívó 1032
akkomodáció 689
aktív zóna 1191
aktiválási energia 1174, 1181
aktivitás, radioaktív anyagé 1130
akusztikai sűrűség 309
akusztikus átalakító 704
alagúteffektus 871, 1175
alak-ellenállási tényező 106
alakítási keményedés 1099
alakváltozás (deformáció) 234
alapállapot 869
alapfrekvencia 323
alapvető kölcsönhatások 1217
– – (elektromágneses) 1218
– – (erős) 1219
– – (gravitációs) 1218
– – (gyenge) 1220
– – hatótávolsága 1219
α-bomlás 1170
α-részecske 826
α-sugár 826, 1130
alhéj 889
állandó gyorsulású mozgás 47
állandó súlyviszonyok törvénye (Proust) 814
állapot, alap- 869
–, elfajuló (degenerált) 871, 884
–, hibrid 905
–, gerjesztett 869
állapotegyenlet 347, 355
–, ideális gázoké 355
állapotfüggvény (hullámfüggvény) 858, 878

állapotjelzők 347, 355, 400, 912, 941
–, extenzív 347
–, intenzív 347
– statisztikus értelmezése 958
állapotsűrűség 949
–, dobozba zárt részecskéé 950
állapotváltozás 349
–, adiabatikus 372
–, izobár 356, 371
–, izochor 357, 372
–, izotermikus 355, 369
–, politrop 374
állásszilárdság 233
állócsiga 225
állóhullám 323, 668, 1017
–, egydimenziós 321, 334, 866
–, háromdimenziós 325, 870
–, kétdimenziós 325, 870
–, szabad elektromágneses 624
általános gázállandó 369
– gázegyenlet 912
– gáztörvény 358
– relativitáselmélet alapgondolata 805
amper 464
Amper-féle gerjesztési törvény 516
ampermérő 496
– kapcsolása 497
amplitúdó, harmonikus rezgőmozgásé 59
–, eredő 63
–, hullámé 291
–, rezonancia- 195
– távolságfüggése 303
amplitúdómoduláció 715
analitikai mérleg 223
analizátor 647
anizotrop test 993
anizotrópia 1117
annihiláció (megsemmisülés) 1224
antenna, adó- 616, 617, 724
–, bot- 730
–, dipól- 621
–, ferrit- 730
–, hurok- (keret-) 729
–, parabola- 731
–, vevő- 729
antennanyereség 726
antiferromágnesség 1071
antirészecske 1223
anyaghullámok 847
anyagi pont 29
anyagok mágneses tulajdonsága 1055
anyagszerkezet 991
áram, elektromos 463
– erőssége 463
–, indukált 542, 553
–, meddő 578
–, örvény- 594
–, részecske- 928
–, rövidzárási 477
–, tömeg- 930
–, váltakozó 545, 546
áramelem-vektor 518
áramerősség 463
–, áramlásé 80
–, effektív 547
áramerősség mérése 496
áramerősség-mérő 606
áramfelvétel 493, 494
áramforrás 472
– belső ellenállása 475
– belső feszültsége 474
– belső feszültségesése 475
– elektromotoros ereje 474
– kapocsfeszültsége 476
– külső ellenállása 475
– üresjárási feszültsége 477
–, galvánelem 472
–, – (Daniell-elem) 472
áramforrás, galvánelem (Leclanché-elem) 474
–, – (szárazelem) 474
–, – (Volta-elem) 473
– kapcsolása 491
– –, párhuzamos 492
– –, soros 491
– –, vegyes 493
áramirány 463
áramkör 478
áramlás erőssége (intenzitása) 80
–, hő- 409
–, lamináris (réteges) 288
–,stacionárius 79
–, turbulens (gomolygó) 288
áramlási cső 81, 273
– tér 79
áramló folyadék 79
– gáz 79
áramrezonancia 587
áramsűrűség 467
áramvezetők között ható erő 536
áramvonal 79
archimedesi (v. hatvány-) csigasor 225
Arkhimédész törvénye 261
árnyékolás, elektromos 452
árnyéktér 306
aszinkronmotor 604
asztigmatizmus 680
átalakítás, ellenálláshű 484
–, ipszilon–delta (csillag–háromszög, Y–D) 485
–, delta–ipszilon (háromszög–csillag, D–Y) 484
átkristályosodás 1011
átlagerő 120
átlagérték 947
átlaggyorsulás 40
átlagos betöltési szám 984
– impulzussűrűség 630
– szabad úthossz 927
– teljesítménysűrűség 627
átlagsebesség 36
átlagsűrűség 264
átlagteljesítmény 303
átmeneti fém 892
atom 813
– héjszerkezete 889
atombomba 1198, 1204
atomerőmű (reaktor) 1183
–, maghasadással (fisszió) működő 1183
–, fúzióval működő 1212
atomfizika 813
atomi oszcillátor 977
– tömegegység 1152
atommag 813, 826, 829, 1130, 1150
– Coulomb-energiája 1164
– cseppmodellje 1158
– felületi energiája 1164
– független részecskemodellje 1159
– héjmodellje 1158
– kötési energiája 1154, 1163, 1164
– mágneses momentuma 1154
– nyugalmi tömege 1157
– Pauli-energiája 1164
– perdülete (impulzusmomentuma) 1153
–, radioaktív, bomlékony 1130
–, stabil 1130
– sugara 1150
– sűrűsége 1150
– térfogati energiája 1164
– töltése 1151
– tömege 1152
atommag-átalakulás reakcióenergiája 1157
atommaghasadás 1181
atommagreakció 1156

atommodell 825
–, Bohr-féle 834
– Rutherford-féle 829
– Thomson-féle 826
atomrács 1000
atomrácsú kristály 897
atomreaktor 1183
– állapota, kritikus 1185
– –, prompt szuperkritikus 1186
– –, szubkritikus 1185
– –, szuperkritikus 1185
– biológiai védelme 1194
– felépítése 1191
–, gyorsneutronos (tenyésztő) 1196
– primer köre 1194
– szekunder köre 1194
–, termikus 1195
atomsúly l. relatív atomtömeg 814
áttétel 595
átütési szilárdság 455
Avogadro törvénye 814, 912
Avogadro-szám 816, 918

B

balkéz-szabály 553
Balmer-formula 830
balsodrású rendszer 553
Bardeen 1072
barion 1227
barionszám 1228
barionszám-megmaradás 1228
Barkhausen-effektus 1058
barométer 268
barometrikus magasságformula 258
bázis 1047
BCS-elmélet 1072
becquerel (Bq) 1130
beesési merőleges 308, 641
– szög 308, 641
behatolási mélység 1138
belső ellenállás 475
– energia 337, 366, 961
– –, ideális gázé 921
– –, kristályé 921
– erők 139
– feszültség 474
– –, eredő 491
– feszültségesés 475
– folyamat 398
– súrlódás 286
– –, gázé 273, 815
Bernal-féle golyómodell 1111
Bernoulli-törvény 275
besugárzási dózis 1140
besugárzott felületi teljesítmény 665
beszédfelismerő rendszer 709, 710
beszédszintetizátor 710
β-bomlás 1130, 1168, 1224
β-sugár 1130
betöltési szám 983
– –, átlagos 984
– valószínűség 1034
bimetallszalagos hőmérő 344
Biot–Savart-törvény 517
biológiai védelem, atomreaktoré 1194
biprizma 652
biztosíték 593
blende 691
Bloch-elektronok 1027
Bloch-függvény 1027
Bohr-féle atommodell 834, 881, 1060
– frekvenciafeltétel 836
– pályafeltétel 834
Bohr-magneton 883
Boltzmann-állandó 918
Boltzmann-eloszlás 974
bolygómozgás 175
bolygó pályája 175
bomlásállandó 1131
bomlási család 1133
– sor 1132, 1173
bomlástörvény (exponenciális) 1131
Born, Max 860
Bose–Einstein-statisztika 986
Bose-eloszlás 985
Bose-részecskék (Bozonok) 845, 885, 1226
Bourdon-csöves manométer 268
Boyle–Mariotte-törvény 260, 355
Bose–Einstein-statisztika 986
bozon 885, 985, 1226
Bragg-egyenlet 995
Braun-féle elektrométer 451
Bravais-rács 999
Brewster-törvény 647
Broglie-hullámok 849, 851
buborékkamra 1147
Bunsen-égő 277
Bunsen-féle zsírfoltos fotométer 670

C

Carnot-féle körfolyamat 390
– – hatásfoka 392
Carnot-gép 392, 403
Cavendish 97
Celsius-féle hőmérsékleti skála 342
CCD rendszer 738
centrális erő 107
– – tétele 108
– ütközés 208
centrifugális erő 136, 182
– szivattyú 272
centripetális erő 197
– gyorsulás 40
Chladni-féle ábrák 327
ciklikus részecskegyorsító 1151
ciklois 73
cirkuláció 441,
cirkulárisan poláros hullám 295
Clausius 389, 393
Clausius paradoxona 1232
Clausius-féle egyenlőtlenség 394
Clausius–Mosotti-egyenlet 1082
compact disc (CD) 712
Compton-effektus (Compton-jelenség) 842
Compton-szórás 798, 842
Cooper-pár 1072
Coriolis-erő 136, 183
– nagysága 138, 183
coulomb (C) 417
Coulomb-energia 1068, 1164, 1166, 1167
Coulomb-gát 1174
Coulomb törvénye 418
curie (Ci) 1131
Curie 1131
Curie-állandó 1057
Curie-hőmérséklet, paramágneses 1059
Curie-pont, ferromágneses 1058
Curie-törvény 1057
Curie–Weiss-törvény 1052, 1059

Cs

csatolás 197
csatolt rezgés 197
– rezgőkör
csavar 229
csavarás (torzió) 243
csavarási inga 191
csavardiszlokáció 1093

cseppfolyósítás, gázé 375
cseppmodell 1162
csiga 225
–, álló- 225
–, differenciál- 226
–, mozgó- 225
csigasor 225
–, archimedesi (v. hatvány-) 225
csillapodó rezgőmozgás 192, 193
csillag 1232
csillag–háromszög átalakítás 484, 485
csillagászati távcső 696
csillagkapcsolás 600
csillagnap 182
csillapítatlan rezgőmozgás 193, 582
csillapodó rezgőmozgás 192
csomófelület 327
csomópont 323
csomóponti törvény 478
csomósík 870
csomóvonal 326, 870
csoportsebesség 329
csúcshatás 453
csuklós rögzítés 220
csúszási súrlódási együttható 103
csúszási súrlódási erő 103
csúszásmentes gördülés 72, 203
csúszóellenállás 488
csúsztatás 243
csúsztatási rugalmassági modulus 243
csúszva gördülés 73

D

Dalton 814
Daniell-elem 472
Davisson és Germer kísérlete 847
de Broglie hipotézise 847,
de Broglie-hullám 849, 851
Debye, Peter 1017
deformáció 234
–, csavarás 243
–, hajlítás 241
–, homogén 234
–, inhomogén 234
–, nyírás 236, 243
–, nyújtás 235
–, összenyomás 235
deformációs polarizáció 1050
degenerált állapot 871
– energiaszint 884
dekadikus ellenállás 490
delokalizáció 908
delokalizált elektron (szabad elektron) 1004, 1025
demodulálás 731
dér 382
Deprez-műszer 606
Descartes-féle derékszögű koordináták 30
Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer 29
deviáció, minimális 644
– szöge 644
diamágneses anyag 1056
– lebegés 748
diamágnesség, Landau-féle 1066
diaszkóp 692
diavetítő 692
dielektrikum 448, 1049
dielektromos állandó 421, 450
––, abszolút 450
––, relatív 449
– eltolás 450, 1058
– polarizáció 415, 448, 1049
differenciálcsiga 226
differenciális Ohm-törvény 467
diffrakció 653, 995, 996
diffrakciós színkép 656
– vizsgálat 1110
diffúzió 927, 1046, 1088
– kristályokban 1088
diffúziós áramlás 1038
– együttható 930
– szivattyú 271
dinamika 83
– alaptörvénye 89
–, relativisztikus 793
dinamikai tömegmérés 86, 91
– viszkozitás (belső súrlódási együttható) 286
dinamikus egyensúly 376
– hangszóró 700, 702
– hőegyensúly 471
– mikrofon 705
dinamó 601
dinamóelv 601
dióda, félvezető 1042
–, fém–félvezető 1048
–, fényemittáló (LED) 1039
–, Gunn- 723
–, világító 1044, 1046
dioptria 673
dipólantenna 621
dipólmomentum, elektromos 427, 1050
–, mágneses 1056
dipólsugárzó 701
dipólus 415, 426
dipólusnyomaték l. dipólmomentum
Dirac-egyenlet 1222
Dirac-tenger 1223
direkciós nyomaték 191
diszlokáció 1093
–, csavar- 1093
–, él- 1093
– mozgása 1098
– sajátenergiája 1099
diszperzió 298, 328, 639
disszipatív erő 287, 387
disszonancia 335
dízelmotor 406
dobozba zárt részecske 866, 950
domének 1069
donor atom 1032
– nívó 1032
Doppler-effektus 298
dózis, effektív 1144
– egyenérték- (besugárzási) 1143
–, elnyelt 1143
–, – egysége 1143
–, –– (sievert, Sv) 1144
–, –– (gray Gy) 1143
– súlyfaktora 1144
dóziskorlátok 1145
dózismennyiségek 1143
driftsebesség 465
dugattyús gőzgép 404
– légszivattyú 270
Dulong–Petit-szabály 362, 973, 1016
dúsítás 1190
duzzadóhely 323

E, É

effektív (hatásos) értékek 547
– áramerősség 547, 576
– feszültség 547, 576
– munka 548
– sokszorozási tényező 1184, 1198
– teljesítmény 547, 548
– tér 1051
– tömeg (elektroné) 1026
egész spinű részecske 885, 887
egycentrum-probléma 177

egyatomos ideális gáz 979
– – – energiaeloszlása 979
egydimenziós állóhullám 321
– hullám 290
egyenáram 464
– lüktető 600
egyenáramú generátor 600
– motor 603
egyenes áramvezető 512
– tekercs 522
– ütközés 208
egyenes vonalú egyenletes mozgás 35
– – egyenletesen gyorsuló vonatkoztatási rendszer 133
– – – változó mozgás 47, 58
– – mozgás 35
– – terjedés 310, 319, 333, 626, 635
egyenirányítás 1038
egyenletes forgómozgás 69
– körmozgás 55
– – fordulatszáma 55
– – periódusideje (keringési idő) 56
– – szögsebessége 56
– mozgás 35
egyenletesen gyorsuló mozgás 47
– lassuló mozgás 49
– változó körmozgás 57
– – mozgás 47
egyensúly 217, 282, 938
–, dinamikus 376
– feltétele 218, 219, 252
–, merev testé 218, 220
–, pontszerű testé 218
–, radioaktív 1133
–, úszó testé 263
egyensúlyi állapot 946
– –, kétfázisú 382
– helyzetek 231
– –, közömbös (indifferens) 232
– –, labilis 232
– –, stabilis 232
egyfázisú generátor 604
egyhelyűség 778
egyidejűség 778
egyirányú hullámok szuperpozíciója 328
egykomponensű rendszer 378
egyoldalú emelő 223
egyoldalú összenyomás 235
egységvektor 29
egyszerű folyadék 1107
– gép 222, 230
– – energetikai hatásfoka 231
– nagyító 694
– rendszer 941
Einstein, Albert 764
Einstein–de Haas-kísérlet 885, 1066
Einstein-féle fényelektromos egyenlet 842
Einstein-kristály 955, 959, 969, 973
– energiaeloszlása 977
– energiája 972
– hőmérséklete 969
– mikroállapotainak száma 954
mólhője 973
ék 227
ekvipartíciós tétel 816, 919
ekvipotenciális felület 128, 439, 440
– pont 128
– tartomány 128
ekvivalenciaelv 805
éldiszlokáció 1093
elektroakusztikus átalakítók 704
elektrodinamika 413
elektrodinamikus műszer 608
elektrokémiai egyenérték 816
elektrolit 806
elektrolitkondenzátor 457
elektrolízis 806
elektromágnes 589

elektromágneses állóhullám 624
– asztal 591
– daru 591
– fényelmélet 620
– háttérsugárzás 1233
– hullám 611, 614, 617
– – dinamikai tulajdonságai 626
– – elhajlása 625
– – energiája 626
– – energiasűrűsége 626
– – fázisviszonyai 620
– – impulzusa (lendülete) 628
– – impulzussűrűsége 628
– – interferenciája 624
– – keltése 714
– – nyomása (fénynyomás) 630, 844
– – polarizációja 621
– – teljesítménysűrűsége 566
– – terjedése 620
– – terjedési sebessége 618
– – tömegsűrűsége 633
– – törése 625
– – vétele 714
– – visszaverődése 624
– jelfogó (relé) 593
– kölcsönhatás 1218
– kürt 592
– mező 633
– perdület 634
– perdületsűrűség 634
– rezgés, kényszerített 583
– –, szabad 579
– sugárzás 410, 412, 614, 724,
– szaggató 591
– távíró 592
– telefonkagyló 592
– tömeg 632
– túláramkioldó 593
– villanycsengő 591
elektrométer, Braun-féle 451
elektromos alapjelenségek 414
– állapot 414
– áram 463
– – erőssége 464
– – iránya 464
– –, rövidzárási 477
– áramsűrűség 467
– árnyékolás 452
– dipólus 415, 426
– –, elemi 415
– – nyomatéka (dipólmomentum) 427
– ekvipotenciális felület 440
– ellenállás 465, 1038
– –, eredő 480
– –, fajlagos 469
– –, induktív 569
– –, kapacitív 572
– –, ohmikus 569
– eltolási fluxus 450
– eltolásvektor 450
– energia 461
– energiasűrűség 461
– energiaterjedés 563
– erő 426
– erőtér 413, 416, 423
– erőtérkvantum 1229
– erővonal 421
– – sűrűsége 423
– feszültség 437
– fluxus 423
– forráserősség 413
– hálózat 478
– helyzeti (potenciális) energia 439
– kettősréteg 474
– megosztás 443
– mérőműszerek 496, 606
– –, áramerősség-mérő 496
– –, elektrodinamikus 608
– – előtét-ellenállása 498

elektromos mérőműszerek, elektrométer 451
– –, feszültségmérő 498
– –, forgótekercses (Deprez) 606
– –, lágyvasas 608
– –, lengőtekercses, tükrös galvanométer 607
– – méréshatára 497
– – végkitérése 497
– – söntellenállása 497
– –, tárcsás indukciós fogyasztásmérő 609
– mező (erőtér) 413, 416, 423
– – energiája 461
– – energiasűrűsége 461
– – forráserőssége 429
– –, forrásmentes 551, 557, 614
– –, forrásos 428, 614
– –, homogén 423
– –, időben állandó (elektrosztatikus) 413
– –, időben változó 611
– –, inhomogén 423
– –, indukált 554
– – munkája 434
– –, örvényes 555
– – örvénymentes 441
– –, pontszerű töltésé 418
– – szuperpozíciója 417
– – teljes energiája 462
– örvényerősség 441, 556
– polarizáció 1049
– polarizációvektor 1049
– potenciál 440
– rezgőkör 579, 583, 584
– szigetelők 415, 1053
– szuszceptibilitás 1049
– tér 413, 416, 423
– térerősség 418
– töltés 414, 416
– –, elemi 817
– –, fajlagos 469, 533
– – -megmaradás elve 414
– vezetőképesség (vezetés, konduktivitás) 467, 1038
– –, eredő 481, 482
– teljesítmény 472
elektromotoros erő 474
– –, indukált 554, 555
elektron 820
–, Bloch- 1027
– effektív tömege 1030
– energiaértékei atomban 836
–, delokalizált 1025
– fajlagos töltése 820
– héjmodellje 813, 889
–, hidrogénatomé 889
– hullámtermészete 847
– nyugalmi tömege 820
– impulzusmomentuma 834, 881
– spinje 885
– töltése 820
– mágneses momentuma 881
–, szabad 1025
–, vegyérték- 903, 1026
–, vezetési 467
elektronágyú 820
elektronbefogás 1169
elektroncső, izzókatódos 820
elektronegativitás 906
elektrondiffrakció 848
elektroneloszlás félvezetőkben 1033
elektronhéj 889, 890
elektronhullám 847
elektronikus stabilizátor-rendszer 745
elektronmozgékonyság 1037
elektronok megkülönböztethetetlensége 893
elektronpálya (s,p,d,f,g,...) 835, 880, 891
elektronpolarizáció 1051
elektronspin 885
elektronszerkezet, kristályoké 1022
elektroszkóp 451
–, Braun-féle 451
elektrosztatika 413
– I. alaptörvénye 428, 428
– II. alaptörvénye 441, 443
elektrosztatikai erőtörvény 420
elektrosztatikus mező 497
elem 813
elemi cella 998
– elektromos töltés 817
– elektrosztatikai erőtörvény 420
– mágneses erőtörvény 537
– – Lorentz-erő 531
– munka 116
– rácsvektor 998
– részecske 1217, 1221
elfajuló állapot 871
elhajlás, hullámé 306, 319, 625, 653
elhajlási színkép 656
ellenállás, csúszó- (toló-) 488
–, dekadikus 490
–, elektromos 465
–, eredő 480, 481
–, fajlagos 466
–, huzal- 487
–, induktív 569
–, kapacitív 572
– kapcsolása 480
– –, soros 480
– –, párhuzamos 481
– –, vegyes 483
– –, híd 483
–, karos 489
–, közeg- 289
–, látszólagos 568, 570, 574
–, maradék 1020
– mérése 499
– – helyettesítéssel 500
– – Ohm-törvény alapján 499
– – Wheatstone-híddal 501
–, ohmikus 569
–, réteg- 487
–, technikai 487
–, váltakozó áramú (impedancia) 576
ellenállásszekrény 489
elliptikusan polározott hullám 295
elmozdulás 31, 33
elmozdulásvektor 31, 33
– koordinátái 33
elnyelési színkép 658, 837
elnyelt dózis 1143
eloszlás 931
–, egyenletes 933
–, energia- 939
–, legrendezetlenebb 939
–, térbeli, molekuláké 931
eloszlásfüggvény, ritka gázoké 988
elrendezés, rendezetlen 833
–, részben rendezett 833
elsőfajú perpetuum mobile 346
eltérítés (deviáció) szöge 644
eltolási áram 613
– fluxus 450
– szimmetria 998
eltolódási törvény, Wien-féle 411
emelő 222, 223
–, egyoldalú 223
–, kétoldalú 222
emissziós színkép 658
empirikus potenciálfüggvény 1014
emitter 1047
endoterm átalakulás 1157
energetikai fényerősség 664
– fényesség 665
– megilágításerősség 665

energia 123
–, aktiválási 1174, 1200
–, belső 337, 346, 361
– bizonytalansága 858
–, Coulomb- 1068, 1164
–, Einstein-kristályé 972
–, elektromágneses hullámé 626
–, elektromos 439, 461
–, – mezőé 462
–, felületi 281
–, Fermi- 985, 1027
–, forgási 167
–, fotoné 842
–, gerjesztett állapoté 877, 878
–, gravitációs 129
–, harmonikus hullámoké 299
–, helyzeti l. energia, potenciális
–, ionizációs 836
–, kémiai 472
–, kicserélődési 894
–, kinetikus l. mozgási 122
–, kondenzátoré 461
–, magassági- 128
–, mágneses mezőé 562
–, mechanikai (kinetikus) 122
–, mozgási 123, 124, 156, 166, 167
–, oszcillátoré 833, 875
–, Pauli- 1164
–, potenciális 126
–, –, elektromos 439
– ,–, mechanikai 123
–, – , – gravitációs 129
–, –, – rugalmas 130, 245
–, rezgő mozgásé 186
–, relativisztikus 795
–, rugalmassági 130, 245
–, szabad 399
–, tekercsé 562
–, térfogati 1164
–, zérusponti 875
–, energiaátadási képesség 966
– eloszlása 974
– –, Boltzmann- 974
– –, Bose- 985
– –, egyatomos ideális gázé 979
– –, Einstein-kristályé 977
– –, Fermi- 984, 1027
– –, Gibbs- 981
energiaáramsűrűség-vektor 566
energia-impulzus vektor 796
energiakvantum 833
energiamegmaradás elve, általános 346
energiaminimum elve 400
energia-sajátérték 867
energia-sajátfüggvény 867
energiasáv 1026
–, tiltott 1026
energiaspektrum 869, 963
–, kristályé 1025
energiasűrűség, elektromos- 461
–, elektromágneses hullámé 627
–, elektromos mezőé 462, 463
–, időbeli átlaga 302
–, mágneses 562
–, mechanikai hullámé 301
–, rugalmassági 246
energiaszállítás távvezetéken 595
entalpia, szabad 399
entrópia 393, 395
–, konfigurációs 1065
entrópiamaximum elve 396
entrópianövekedés elve 397
entrópiaváltozás 396, 397
Eötvös Loránd 98
epidiaszkóp 693
episzkóp 693
érintőleges gyorsulás 40
erő 85, 91
–, adhéziós 279

erő, belső 139
–, centrális 107
–, centrifugális 136
–, centripetális 197
–, Coriolis- 136
–, csúszási súrlódási 103
–, disszipatív 287, 387
–, elektromos 414, 416
–, eredő 172
–, felhajtó- 260
–, felületen eloszló 160
–, felületi 160
–, fiktív (látszat-) 134
–, fonál- 206
–, gravitációs 97
– hatásvonala 85, 159
–, húzó- 237
–, kényszer- 101
–, koercitív 1058
–, kohéziós 279
–, konzervatív 118
–, közegellenállási 106
–, külső 139
–, mag- 1129,1150
– mérési utasítása 85
–, nagy hatótávolságú 159
–, nehézségi 93,183
–, nyíró- 237
– nyomatéka 112, 113
–, nyomó- 237, 258, 252
–, periodikus 195
–, pontba koncentrált 159
–, rövid hatótávolságú 1158, 1162
–, rugalmassági 93
–, súly- 93
–, súrlódási 103
–, szabad 101
– támadáspontja 159
–, tapadási 103
–, tehetetlenségi 134
–, térfogati 159
–, valódi 134, 139
erőcentrum 107
erőhatások függetlenségének elve 88
erőkar 165
erőlökés 89
erőmentes pörgettyű 215
erőpár 171
– forgatónyomatéka 171
erőrendszer 168, 173
erős kölcsönhatás 1219
erősítési hely 314, 655
erősítők 718
erőtér 126
–, elektromos l. mező, elektromos
–, gravitációs 49, 50, 52, 97
–, konzervatív 126, 436
–, mágneses 503, 551, 613, 614
erőtörvény 85, 92
–, elektrosztatikai 513, 516
–, gravitációs 97
–, lineáris 90, 130
–, mágneses 529
–, –, elemi 531
erővonal, elektromos 421, 422
erővonalsűrűség 424
érzékenység 607
esemény 766
esés ellenálló közegben 180
éter 758
éterelmélet 758, 762
exoterm folyamat 1157
exponenciális bomlástörvény 1131
expozíció 692
extenzív állapotjelző 347
extraordinárius sugár 648

F

fagyás 378
fagyáshő 363
fagyáspont 343, 378
fájdalomküszöb 333
fajhő 361, 362, 365, 366, 923, 924
–, folyadéké 361,
–, ideális gázé 366, 924
–, szilárd testé 362, 1016
–, vízé 1112
fajlagos ellenállás 466, 469, 1029, 1038
– – hőfoktényezője 466
– ionizáció 1146
– töltés 820
– –, elektroné 533, 820
– vezetőképesség (– vezetés) 467, 1028
farad 445
Faraday 416, 461, 816
– első törvénye 816
– indukciós törvénye 557
– második törvénye 816
Faraday-állandó 817
fázis 59
fázisátalakulás 363
fázisátalakulási hő 363, 366
– – (fagyás) 363
– – (forrás) 363, 380
– – (lecsapódási) 363
– – (olvadás) 363
– – (párolgás) 363, 379
fáziscella 943
– mérete 943
fázisdiagram 382
fáziseltolódás szöge 571, 573, 576, 588
fázisfeszültség 598
fázismoduláció 715
fázissebesség 329
fázisszög 59
fázistér 943
fázisvezeték 598
fecskendőüveg 271
fehér fény 645
feketetest-sugárzás 833
fékezési sugárzás 663
fékút 52
félárnyék 306
felbontóképesség 698
feles spinű részecskék (fermionok) 885, 1227
felezési idő 1131
– rétegvastagság 1139
felhajtóerő 260
felharmonikusok 65, 323
feloldási határ 698
felületen centrált köbös fém 1005
felületi energia 281
– erő 160
– feszültség 281
– hiba 1081, 1100
– hullám 304, 727
– nyomaték 241
félvezető 1021, 1031
– elektromos vezetőképessége 1036
–, n típusú 1022, 1035
–, p típusú 1022, 1035
–, szennyezett 1037
–, tiszta 1036
félvezető-detektorok 1149
fém, átmeneti 892
– fajlagos ellenállása 1029
– kristályszerkezete 1004
– sávszerkezete 1027
fém–félvezető átmenet 1049
fémegykristály 1007
fémes kötés 908
– rács 1000
fémes–ionos átmenet 909
fenomenologikus paraméter 941
fémkristály 897
fémolvadék 1108, 1110, 1122
fémüveg 1116, 1122
fény 635
– diszperziója 639
– elhajlása (diffrakciója) 653
– energetikai áramsűrűsége 665
–, fehér 645
– interferenciája 649
– – egy tükörrel 651
– – kettőstükörrel 650
– – kettősprizmával 652
– – vékony hártyákon 652
– kettős törése 648
–, látható 660, 661
–, lézer- 1075, 1077
–, monokromatikus 645
– kisugárzott teljesítménye 665
– polarizációja 646
– – kettős töréssel 646
– – visszaverődéssel 646
– részecsketermészete 841
– teljes visszaverődése 641
– terjedési iránya 636
– természetes 646
– törése 639
– útjának megfordíthatósága 643
– visszaverődése 639
fényáram 665, 666, 667
fényáramsűrűség 667
fényelektromos egyenlet 842
– hatás 841
fényerősség 664, 666
fényesség 667, 735
fényforrás 637
fényhasznosítás 663
féyhatásfok 664
fényképezőgép 690, 691
fénykúp 780
fénynyomás 630, 844
– mechanizmusa 630
fényrekesz 691
fénysebesség 620, 773, 802
fénysugár 637
fénytani hasáb (prizma) 643
– középpont 673
ferde hajítás 52
– ütközés 211
Fermat-elv 687
Fermi-eloszlás 984
Fermi-energia 985, 1027
Fermi-nívó (Fermi-szint) 1027
fermion 885, 1227
ferrit 1071
ferritantenna 730
ferroelektromos polarizáció 1050
ferromágneses anyag 1056, 1057
– Curie-pont 1058
feszültség, belső 474
–, effektív 547
–, elektromos 437
–, fázis- 598
–, felületi 279, 280, 1102
–, Hall- 544, 1022
–, húzó 237
–, indukált 540, 545, 557
–, kapocs- 476
–, kör- 441, 479, 556
–, mechanikai 237
–, nyíró- (csúsztató) 238
–, nyomó- 237
–, rugalmas 234
–, üresjárási 477
–, váltakozó 546
feszültségmentes állapot 96, 238
feszültségmérő 496, 608
feszültségosztó 488
feszültségrezonancia 584

Fick I. törvénye 929
fiktív erő 134
Fizeau-kísérlet 762
fizikai inga 189
– – redukált hossza 190
fluktuáció 932, 935, 937, 948
fluxus, elektromos 423
–, sugárzásé 1136
fogyasztásmérő 609
fókusz 673
folyadék, áramló 79, 273
–, asszociált 1107
–, egyszerű 1107
–, ideális 273
–, molekuláris 1107
–, nedvesítő 280
–, nem nedvesítő 280
– mechanikája 247
–, molekuláris 1107
–, nyugvó 247
–, óriásmolekulájú 1107, 1125, 1127
–, poláros 1107
–, reális 279, 286
– szabad felülete 248
– szerkezete 1107
–, túlhevített 380
folyadékállapot 991
folyadékfelszín 284
folyadékkristály 1122
folyadék permittivitása 1051
folyadékok sztatikája (hidrosztatika) 247
folyadékos hőmérő 344
– manométer 268
folyamatok iránya 387, 955
– –, irreverzibilis (megfordíthatatlan) 387, 938
– –, reverzibilis (megfordítható) 387
folyás (képlékenység) 240, 1094
folyáshatár 240
folytonos röntgensugárzás 663
– színkép 659
fonálerő 206
foton 1223, 1229
fordulatszám 55
forgási energia 164
forgási szimmetria 999
forgástengely 68, 69, 74
–, eredő 78
–, pillanatnyi 74, 78
forgatónyomaték 112
–, erőpáré 171
–, tengelyre vonatkoztatott 155
– munkája 167
forgatónyomaték-vektor 113
forgó mágneses mező 604
– vonatkoztatási rendszer 136
forgókondenzátor 457
forgómozgás 68
– alaptörvénye 165
–, egyenletes 69
–, egyenletesen változó 69
forgótekercses műszer 606
forgóvektor 548
forgóvektoros ábrázolás 549, 575
forrás 380
forráserősség (elektromos) 413, 428
–, mágneses 503, 509, 511
forráshő 380
forrásmentes mező 511, 614
forrásos mező 614
forráspont 380
forró univerzum 1231
fotocella 841
fotoeffektus (fényelektromos hatás) 841
fotoemulzió 1147
fotokatód 841
fotométer 669
–, Bunsen-féle 670
–, Ritchie-féle 670
fotometria (radiometria) 663
–, vizuális 666
–, energetikai 663
fotometria két alaptörvénye 668
foton 796, 842, 1229
Foucault 638
Foucault-inga 185
Fourier-együtthatók 65
Fourier-tétel 65
fő tehetetlenségi nyomaték 163
főáramkörű dinamó 601
– motor 603
főkvantumszám 878
földelés 451
földrajzi helymeghatározás (GPS) 750
főtengely 163
Franck–Hertz-kísérlet 837
frekvencia 59
–, alap- 323
–, gerjesztő 196
–, harmonikus rezgőmozgásé 59
–, hullámé 291
–, lebegésé 64
–, saját- 195, 323
frekvenciafeltétel, Bohr-féle 836
frekvenciamoduláció 715
Fresnel-féle kettőstükör 650
fúzió 1174, 1202, 1203, 1204
– csillagokban 1202
– – (proton–proton ciklus) 1202
– – (CNO-ciklus) 1203
–, inerciális 1206
–, mágneses mezős 1207
fúziós energiatermelés 1200
– reaktor 1210
– – (TOKAMAK) 1210
– – (ITER) 1214
– – (JET) 1213
független csomóponti egyenletek 484
független hurokegyenletek 484
függetlenrészecske-modell 1159
függőleges hajítás 50

G

Gábor Dénes 1079
galaxis 1218, 1223, 1235
Galilei-féle relativitási elv 133, 755
– sebesség-összeadási törvény 757
– távcső 6801
– úttörvény 48
Galilei-transzformáció 755
galvánelemek 472, 474
galvanométer 501, 607
γ-bomlás 1130, 1172
γ-sugár 663, 1130
Gauss-féle módszer 224
Gauss-tétel 428, 433
Gay–Lussac 367
– I. törvénye 356
– II. törvénye 357
gáz, áramló 79, 80
– belső súrlódása 815
– cseppfolyósítása 375
– halmazállapot 375, 991
– ideális 355
– mechanikája 247
–, nemes- 892
– nyomása 260, 269
–, nyugvó 247
– permittivitása 1050
–, reális- 375
–, ritka 988
– viszkozitása 815
gázállapot 991

gázgépek 404
gázhőmérő 343
gázkisülés 819
–, önfenntartó 829
gázok diffúziója 927
gázok sebességeloszlása 912
gázsugaras motor 407
gázturbina 406
gázturbinás motor 406
Geiger–Müller-számlálócső (GM-cső) 1148
generátor 596
–, egyfázisú 596
–, főáramkörű (dinamó) 601
–, háromfázisú 597
–, kettős gerjesztésű 604
–, mellékáramkörű 602
–, egyenáramú 600
–, váltakozó áramú 596
–, van de Graaf-féle 455
geodetikus precesszió 812
gerjesztés 327
–, mágneses 527
gerjesztési törvény 512, 516
gerjesztett állapot 869
– – energiája 877
gerjesztett rezgés 195, 583
gerjesztettség, mágneses 527
gerjesztő frekvencia 195, 196
gerjesztő rezgés 195
Gerlach 884
germánium 1021
Germer 847
Gibbs 946
Gibbs-eloszlás 981
giromágneses faktor 885, 1066
gluon 1229
GM-cső l. Geiger–Müller-számlálócső
gomolygó áramlás 288
Goudsmit 885
gömb kapacitása 446
gömbi eltérés 679
gömbsugárzó 700
gömbszimmetrikus potenciáltér 877
görbe vonalú mozgás 42
görbület 32
görbületi kör 33
– középpont 54
– nyomás 282
– sugár 33
görbült téridő 806
gördülés 72
–, csúszásmentes 72, 203
–, csúszva 73
gőz 375
–, telítetlen 375
–, telített 375
gőzgép 404
gőzturbina 404
grafit 1009
gravitáció 97, 1214
gravitációs állandó 97
– energia 129
– erő 97
– – munkája 119
– erőtér 126
– erőtörvény 97
– gyorsulás 183
– hullámok 811
– kölcsönhatás 1218
– lencsehatás 808
– összehúzódás 1180
– potenciál 130
– vöröseltolódás 809
gray (Gy) 1143
gumiszerűen rugalmas anyagok 1128
Gunn-dióda 723

Gy

gyémánt 1009
gyenge kölcsönhatás 1220
gyengítés 650
–, maximális 312
gyorsan változó mezők 614
gyorsneutronos reaktor 1196
gyorsulás 35
–, átlag- 40
– centripetális komponense 40
– érintőleges (tangenciális) komponense 40
–, gravitációs 813
– koordinátái 40
–, nehézségi 50, 183
–, normál (centripetális, radiális) 40
–, pillanatnyi 40
–, szög- 57
–, tangenciális (érintőleges) 40
–, tömegközépponté 150
gyorsulásvektor 35, 36
gyorsuló töltés 615
– koordinátarendszer 220
– vonatkoztatási rendszer 132
gyújtópont 673
gyűjtőlencse 673

H

H-bomba l. hidrogénbomba
hadron 1227
Hagen–Poiseuille-törvény 287
hajítás 50
–, ferde 52
– – távolsága 53
–, függőleges 50
– – emelkedési ideje 52
–, vízszintes 54
hajlítás 241
hajszálcsövesség 285
haladó mozgás 68
hallásküszöb 333
Hall-effektus 543, 1022
Hall-feszültség 543, 1022
hallásküszöb 333
hallható hang 331
halmazállapotok 991
–, folyadék 991
–, gáz 991
–, szilárd 991
–, üveg 991
halmazállapot-változások (fázisátalakulások) 378
hálózat, elektromos 478
hálózat átalakítása, csillag–háromszög 485
– –, egyenértékű 484
– –, háromszög–csillag 484
hang 331
–, alap- 332
–, felharmonikusok 332
– hallható 331
–, infra- 331
– szubjektív jellemzői 331, 332
– terjedési sebessége 331
– – tulajdonságai 333
–, tiszta 332
–, ultra- 331
–, zenei 332
hang- és beszédfelismerés 709
hangfal 702
hanghullám 332, 333, 699, 700
– interferenciája 333
hanghullámok keltése 700
hangintenzitás 331
hangköz 335

hangolás 617
hangosság 332
hangrögzítés 712
hangskála (hangsor) 336
hangszerek 334
hangszín 332
hangszínszabályozó 708
hangszóró 702
hangtechnika 699
hangteljesítmény 332
haránt-összehúzódási együttható 239
hármaspont 383
harmonikus hullám 291
– oszcillátor 874, 955
– rezgés felbontása 65
– rezgések összetétele 60
– rezgőmozgás 58, 185
– –, csillapítatlan 185
– –, csillapodó 192
– – dinamikai feltétele 186
– – előállítása 187
– – energiája 186
– – rezgésideje (periódusideje) 186
– – amplitúdója 59
– – fázisa 59
– – frekvenciája 59
– – kitérése 59
– – körfrekvenciája 59
– – összetétele 60, 61
háromdimenziós állóhullám 325
háromfázisú generátor 597
háromszög–csillag átalakítás 484
háromszögkapcsolás 485, 487
háromtest-probléma 140
határozatlansági reláció 853, 855, 856, 987
határréteg 1040, 1043
határsebesség 802
határszög 309, 641
hatás–ellenhatás törvénye 88
hatásfok 231
–, egyszerű gépeké 231
–, termodinamikai 391
hatáskeresztmetszet 815
hatásvonal 159
hatótávolság 1138, 1158
háttérsugárzás 1140
–, mikrohullámú 1233
–, radioaktív 1140
hatványcsigasor 225
Heisenberg 853
Heisenberg-féle határozatlansági reláció 853
– mikroszkópkísérlet 856
héjfizika 813
héjmodell 1158
helyettesítő atom 1082
helyvektor 30
– koordinátái 30
helyzeti energia 126
– –, pontrendszeré 158
– –, elektromos 439
– –, gravitációs 129
– –, rugalmas 131
hengerkerék 226
henry (H) 558
Heron-labda 271
Hertz, Gustav 613, 837
heterogén atomreaktor 1189
– – aktív zónája 1191
– – fűtőelemei 1192
– – moderátora 1192
– – szabályozó elemei 1192
hibrid állapot 905
hibridizáció 904, 906
hibridpálya 905
hidrátburok 1115
hidraulikus sajtó 250
hidrodinamikai felhajtóerő 289
hidrogénatom 876
– elektronja 881, 886
hidrogénbomba 1204
hidrogénhíd-kötés 1008
hidrogénmolekula 898
hidrogénmolekula-ion 898
hidrosztatikai nyomás 248, 251
– összenyomás 236
– paradoxon 253
hiperbolapálya 177
hiperon 1227
hiszterézis 246, 1058
hiszterézishurok 246, 1058
hollandi távcső 697
holográfia 1078
hologram 1078
homogén deformáció 234
– gravitációs tér 157
– elektromos mező 423
– mágneses mező 522
– test 87, 144
Hooke-törvény 239, 1014
hordó alakú torzítás 681
hosszkontrakció (Lorentz-kontrakció) 781
hosszúhullám 660, 726
hő 340
–, fagyási 363, 381
–, faj- 361, 365
–, fázisátalakulási 381
–, forrás- 363, 364
–, halmazállapot-változási 363
–, Joule-féle 470
–, lecsapódási 363
–, mól- 362
–, olvadás- 363
–, párolgás- 363, 380
–, szublimációs 382
– terjedése 409
hőanyag-elmélet 340
hőáramlás (konvekció) 409
hőcsere (hőközlés) iránya 966
hőegyensúly 341
hőerőgép 390, 403
– termodinamikai hatásfoka 391
hőérzet, szubjektív 342
hőfolyamat 340
hőhalál állapot, Univerzumé 1232
hőkapacitás 362
hőközlés 963
hőmennyiség 340
hőmérő 343
–, bimetálszalagos 344
–, ellenállás- 344
–, gáz- 343
–, lázmérő 344
–, maximum- és minimum- 344
–, termoelemes 344
hőmérséklet 342
–, Einstein-kristályé 969
–, ideális gázé 918, 967
–, kritikus 375
–, Neél- 1071
– statisztikus fizikai értelmezése 965
hőmérsékleti együttható (hőfokténye ző) 466
– skála 342
– –, Celsius-féle- 342
– –, Fahrenheit-féle- 343
– –, termodinamikai v. abszolút 344, 393
– sugárzás 411, 831
– –, abszolút fekete testé 410, 411
hőmozgás 831
hősugárzás 409
hőszigetelő 341, 1020
hőszivattyú (hőpumpa) 402, 408
hőtágulás 349, 1018
–, felületi 353
–, lineáris 349

hőtágulás, szilárd anyagé 349
–, térfogati 351
hőtágulási együttható 349
– –, lineáris 349
– –, térfogati 351
hőtan 337
hőtartály 370
hővezetés (kondukció) 409
hővezetési tényező 409
Hubble-állandó 1232
Hubble-törvény 1232
hullám 290
–, álló- 323
–, – alapfrekvenciája 323
– ,– Chladni-féle ábrái 327
–, – csomófelületei 327
–, – csomópontjai 323
–, – csomóvonalai 326
–, – duzzadóhelyei 323
–, –, egydimenziós 321
–, – felharmonikusai 323
–, –, kétdimenziós 325, 327
–, – módusai 323
–, – sajátfrekvenciája 323
– amplitúdója 291
– amplitúdójának távolságfüggése 305
–, anyag- 847, 848
–, de Broglie-féle 851
– árnyéktere 306
– beesési merőlegese 308, 641
– beesési szöge 308, 641
– csoportsebessége 329
– diszperziója 298, 328
–, egydimenziós 290, 321
–, elektromágneses 611, 614
–, elektron- 848, 860
– elhajlása 306, 319, 625, 653
– energiája 299,
– energiasűrűsége 301
– fázisa, fázisszöge 292
– fázissebessége 292, 329
– félárnyéka 306
–, felületi 290
– frekvenciája 291
–, gravitációs 811
–, hang- 290, 305, 699, 700
–, harmonikus 291
–, háromdimenziós 290
–, hosszú- 660, 727
– hullámhossza 291
– infravörös 661
– intenzitása 303
– intenzitásának távolságfüggése 303
– kétdimenziós 290
– kezdőfázisa 292
–, koherens 312
–, közép- 661
–, longitudinális 292
–, mechanikai 196, 290
–, mikro- 660, 661, 720
–, optikai 661
–, periodikus 291
–, polarizált 295
–, rádió- 660
–, röntgen- 661
–, rövid- 661
–, sík- 290
–, szinuszos 291
– sugárzási teljesítménye 302, 303
– teljes visszaverődése 309, 641
– terjedése 305
– –, egyenes vonalú 305, 319
– terjedési iránya 290
– terjedési sebessége 291, 296, 297
– törése 308, 320, 641
–, transzverzális 292
–, ultraibolya 661
–, ultrarövid- 661
– visszaverődése 307, 320, 641

hullámcsomag 329, 850
– szétfolyása 330, 852
hullámcsoport 850
hullámforrás 290
–, pontszerű 290
–, vonalszerű 304
hullámfront 290
hullámfüggvény 849
– stacionárius 865, 866
hullámhossz 291
hullám interferencia 312, 313, 315, 316
– (erősítés irányai) 317
– (erősítési hely) 314
–, észlelhető 316
hullámok szuperpozíciója 312
hullámoptika (fizikai optika) 635
hullámszám 864, 868
Hund-szabály 894
húr 334
húrmodell 868
hurok 479
Huygens-elv 309
Huygens–Fresnel-elv 319
huzalellenállás 487
húzóerő 237
húzófeszültség 237
hűtőgép 402, 407
–, abszorpciós 408
– hatásfoka 403
–, kompresszoros 407

I

ideális folyadék 273
– gáz 355
– – belső energiája 366, 921
– – energiaeloszlása 979
– – fajhője 367
– – hőmérséklete 918, 967
– – mikroállapotainak száma 952
– – nyomása 916
– – nyílt folyamatai 369
– kristály 992
– LC-kör 584
– tekercs 570
időben változó elektromos mező 611
időbizonytalanság 858
idődilatáció 774
igénybevételek 238
ikerparadoxon 786
illesztés 494
impedancia 568, 576
–, induktív 577
–, kapacitív 577
impulzus 89
–, elektromágneses hullámé 628
–, fotoné 843
– megváltozása 91
–, négyes 793
–, pontrendszeré 140, 150
–, relativisztikus 794
impulzusmegmaradás törvénye 90, 141
impulzusmomentum (impulzusnyomaték) 107, 1153
–, elektroné 881, 884
– komponensei 882
impulzusmomentum-tétel (perdülettétel) 112
impulzussűrűség, elektromágneses hullámé 628, 629
impulzustétel 89, 141,
indifferens egyensúlyi helyzet 232
indító-ellenállás 604
indukált áram 542
– elektromos mező 554
– – – térerőssége 555
– elektromotoros erő 539

indukált elektromos erő mozgó vezetékben 539
– – – nyugvó vezetékben 551
– feszültség 540
– – tekercsben 557
– mágneses momentum 1060
– sugárzás (emisszió) 1075
indukció, mágneses 539
–, kölcsönös 558
–, mozgási 539
–, nyugalmi 551
indukciófluxus 510
indukciós együttható, kölcsönös 558
– –, ön- 559
– motor 604
– törvény 557
indukcióvektor, mágneses 503, 507
indukcióvonal, mágneses 510
induktív ellenállás 569
– impedancia 569
induktivitás 558
–, kölcsönös 558
–, ön- 559
inercia-időskála 84
inerciális fúzió 1206
inerciarendszer 84
infláció 1234
infrahang 331
infravörös hullám 661
inga 188
–, fizikai 189
–, Foucault- 185
–, matematikai 188
–, torziós (csavarási) 191
inhomogén deformáció 234
– elektromos mező 423
– mágneses mező 551
– test 234
intenzitás 91, 303
–, hangé 331
–, sugárzásé 1136
– távolságfüggése 303
intenzív állapotjelző 347
interferencia 312
–, azonos fázisú hullámoké 313
–, ellentett fázisú hullámoké 315
interferenciakísérlet 847
interferenciatag 650
interferométer 758
intersticiális atom 1082
intervallum 778
ionizáció 836
–, fajlagos 1146
ionizációs energia 836
– kamra 1147
– manométer 270
ionizáló sugárzás 1140
ionos és kovalens határeset 909
ionos kötés 907
– polarizáció 1050
ionrács 1000
ionkristály 1002
irányhallás 700
iránykvantálás 882
irányszög 63
irreverzibilis folyamat 384, 387, 938, 957
– körfolyamat 394
izobár 357
– állapotváltozás 356
– folyamat 371
izochor állapotváltozás 357
– folyamat 372
izomer állapot 1172
izoterm állapotváltozás 355
– folyamat 355, 369
– tágulás 371
izoterma 356
izotópok 1129
izotrópia 1117
izotrop test 234, 993
– – rugalmassági állandói 244
izzókatódos elektroncső 820

J

Jedlik Ányos 601
jég 1008
jobbkéz-szabály 432
jobbrendszer 432
Joule-hő 470
Joule-kísérlet 345, 346
Joule törvénye 470
Jönsson kísérlete 858

K

kalorimetria 361
kamera 738
Kammerling-Onnes 1071
kandela (cd) 666
kapacitás 444, 448, 457
–, eredő 457
kapacitív ellenállás 572
– impedancia 577
kapilláris emelkedés 286
kapocsfeszültség 476
karakterisztikus röntgensugárzás 663
karcolási keménység 245
kardioid karakterisztika 701
karos ellenállás 489
katódsugárcső 820
katódsugárzás 819
Kaufmann 823
kelvin (K) 344
keménymágneses anyag 1058
keménység 244
–, karcolási 245
kémiai energia 472
– kötés 897
– munka 401
– potenciál 401, 984
kényszererő 101, 199
– munkája 121
kényszerfeltétel 101, 140
kényszermozgás 100, 207
kényszerrezgés 195
képalkotás 673, 675, 677, 683
–, gyűjtőlencséé 675
–, szórólencséé 685
képcső (katódsugaras) 736
képfelbontás 734
képfeldolgozás 734
képfelvevők 737
képfordító prizma 698
képgörbület 681
képlékeny alakváltozás 1094
– törés 1104
képlékenység 1094
Kepler-féle távcső 698
Kepler 175
Kepler I. törvénye 175
Kepler II. törvénye 176
Kepler III. törvénye 176
képmegjelenítők 738
képmezőelhajlás 681
képtartalomjel 735
képváltás 734
keringési idő 56
késő neutronok 1186
kétdimenziós állóhullám 325
– hullám 290, 310, 319
kétfázisú egyensúlyi állapot 382
kétoldalú emelő 222
kettősgerjesztésű generátor 602
kettőspólus 426
kettősprizma 652
kettősrés 655

kettőstörés 648
kettőstükör 650
kétütemű motor 405
keverékszín 645
kezdőfázis 59
kezdőpont 31, 37, 50
kibocsátási színkép 658
kicserélődési energia 894, 1068
kicserélődési kölcsönhatás 1068
kiegészítő szín 645
kihajlás 242
kilépési munka 842
kinematika 29, 789
–, anyagi ponté 29
–, folyadéké 79
–, gázé 79
–, merev testé 68
kinematikai szabadsági fok 942
kinetikus energia 124
– –, átlagos 914
– gázelmélet 911
– gázmodell 912
kioltás 312, 650
Kirchhoff I. törvénye 478
Kirchhoff II. törvénye 479
Kirchhoff-törvény 410
kisebbségi töltéshordozó 1041
kísérleti reaktor 1184
kisugárzott fényáram 665
kisugárzott felületi fényáram 667
– – teljesítmény 665
kisülési cső 819
kitérés 59
kiterjedt test 29
– – tömegközéppontja 150
klisztron 721
Knipping 994
koercitív erő 1058
koherencia 312
koherens hullám 312, 650
kohéziós erők 279
kollektor 1047
kóma 680
kommutátor 600
kompressziómodulus 241
kompresszor 270
kompresszoros hűtőgép 407
koncentrációgradiens 929
kondenzátor 446
–, blokk- 456
–, elektrolit- 457
– elektromos energiája 460
–, forgó- 457
–, sík- 447
–, tömb- 456
konduktivitás 467
konfigurációs entrópia 1065, 1085
konszonancia 335
kontinuitási egyenlet 273
konzervatív erők 118, 436
– – munkája 118,
– mező 436
koordináta 29
–, gyorsulásé 40
–, helyvektoré 30
–, polár- 30
–, sebességé 35
koordináta-rendszer (vonatkoztatási rendszer) 30
–, gyorsuló 132
–, mozgó 44
–, nyugvó 44
– origója 30
koordinátatengelyek 29
kovalens kötés 908
kovalens–fémes átmenet 909
kozmikus sebesség 176
– –, első (körsebesség) 176
– –, második (parabola) 179
– –, szökési 179

kozmikus sugárzás 663, 1140, 1145, 1218, 1225
ködkamra 1147
kölcsönhatás 85, 1217
–, elektrogyenge 1229
–, elektromágneses 413, 614, 1218
–, erős 413, 1219
–, gravitációs 413, 755, 1218
–, gyenge 1220
–, mágneses 504
–, nukleáris 1158
–, pár- 90
kölcsönhatások egyesítése 1229
kölcsönös indukció 558
– induktivitás 558
köráram 505, 883
– mágneses nyomatéka 508
körfeszültség 556
körfolyamat 369
–, Carnot-féle 390
körfrekvencia 59
körmozgás 55
–, egyenletes 55, 197
–, egyenletesen változó 57
körsebesség 176
körtekercs 524
körvezető 525
kötés, fémes 908, 1004
– hidrogénhíd- 1008
– ionos 907
– kémiai 897
– kovalens 897, 908
– másodlagos 1007
–, pi- 903
–, szigma- 903
– van der Waals- 1007
kötési energia 898, 1153, 1154, 1155
– –, atommagé 1155
– –, elektroné 877
– –, neutroné 1183
– –, utolsó nukleoné 1156
kötőpálya 901
kötött állapot 836
– elektron 865
– – állapotfüggvénye 865
– rendszer 176
– részecske 866
– vektor 31
közegellenállás 106, 288
közeg-ellenállási erő 106
középhullám 661
középtávolság 175
közlekedőedény 254
közömbös egyensúlyi helyzet 232
közvetítő részecskék 1128
– – (fotonok) 1229
– – (gravitonok) 1229
– – (gluonok) 1229
krisztallit 1006
kristály 897, 992
–, atomrácsú 897
– belső energiája 1015
–, Einstein- 954, 959, 969
–, fém- 1004
– elektronszerkezete 1022
–, ideális 1013
–, kvarc- 1003
– rugalmas tulajdonságai 1014
kristálydióda 1042
kristályhibák 1081
– (felületi hibák) 1081
– (ponthibák) 1081, 1082
– (térfogati hibák) 1081
– (vonalhibák, diszlokációk) 1081, 1093
kristálymódosulat 1009
kristályos polimerek 1126
kristályrács l. rács
kristályszemcse 1006
kristályszerkezet 992

krisztallit 1006
kritikus hőmérséklet 375
– nyírási feszültség 1096
– nyomás 375
kromatikus aberráció 679
kuktaedény 381
Kundt-féle cső 334
külső ellenállás 475
– erő 139
kvantumfizika 833
kvantumhipotézis 842
kvantummechanika 813, 942
kvatumstatisztikák 989
kvantumszám 869
–, fő- 878
–, mágneses 883
–, mellék- 879
–, spin- 885
kvarckristály 1117
kvark 1227
kvázisztatikus adiabatikus munkavégzés 963
– folyamat 947, 963

L

labilis egyensúlyi helyzet 232
lágymágneses anyagok 1058
lágyulási hőmérséklet-intervallum 1117
lágyvas 589, 1058
lágyvasas műszer 608
lamináris (réteges) áramlás 288
láncmolekulájú anyagok 1125, 1127
láncreakció 1180, 1184
–, önfenntartó 1184
– fennmaradásának feltétele 1184
Landau 1071
Landau-féle diamágnesség 1066
Lange 84
lapközéppontos kockarácsú fém 1005
lapos képcsövek 738
–, folyadékkristályos (LCD) 738
lapszögek állandóságának törvénye 993
Larmor-frekvencia 1208
látható fény 637, 661, 663
láthatóság 663
láthatósági függvény 664
– tényező 664
látószög 689, 694
látszaterő 134
látszólagos (virtuális) kép 676
– erő 134
– fényforrás 651
– fókusz 673
– tárgy 678
– teljesítmény 578
Lawson-kritérium 1205
laza csatolás 197, 589
lazító pálya 900, 901
lázmérő 344
LC-kör 584
–, ideális 584
–, veszteséges 586
lebegés, folyadékban, gázban 264
–, hangtani 328
–, –, frekvenciája 64
–, rezgéseké 64
–, hullámoké 328
lebegési görbe 850
lebegő vonatok 747
Leclanché-elem 474
lecsapódási hő 363
légfék 250
léggömb 263
légnyomás 257
– mérése 268
légnyomásmérők (barométerek) 268
– (aneroid barométer) 268
– (Bourdon-csöves manométer) 268
– (folyadékos manométer) 268
– (ionizációs manométer) 270
– (McLeod-féle kompressziós manométer) 269
– (Torricelli-cső) 257
légszivattyú 270
lehajlás 241
lejtő 227
–, mozgó 100, 102
–, nyugvó 100, 132
–, súrlódásmentes 132, 199
–, súrlódásos 201
leképezés, optikai 671
–, domború lencséé 673, 675
–, domború tüköré 687
–, homorú tüköré 685, 686
–, homorú lencséé 677
–, síktüköré 682
leképezési hiba 679
– törvény 673, 674, 685
lemezes elektroszkóp 451
Lenard–Jones-potenciálfüggvény 1014
lencse fényereje 692
lencsehibák 679
– (asztigmatizmus) 680
– (képgörbület) 681
– (szférikus eltérés) 679
– (színi eltérés) 679
– (torzítás) 681
– (üstököshiba, kóma) 680
lencserendszer 679
lendület 89
lengésidő 189, 191
–, fizikai ingáé 191
–, matematikai ingáé 189
–, torziós (csavarási) ingáé 191
Lenz törvénye 542, 554
lényegesen különböző állapotok 905
lepton 1225, 1227
leptonszám 1228
levitron 742
Lawson-kritérium 1204
lézer 1075
–, félvezető 1077
–, rubin- 1077
lézerfény 1076, 1077
lineáris energiaátadás 1137
– erőtörvény 130
– excentricitás 175
– hőtágulási együttható 349
– részecskegyorsító 1151
– oszcillátor 874
Lissajous-görbék 67, 68
lóerő 122
longitudinális hullám 293
– – terjedési sebessége 296
Lorentz-erő 530, 531, 532, 1021
Lorentz-féle összefüggés 1052
Lorentz-kontrakció 780
Lorentz-transzformáció 776
lumen (lm) 666
lux (lx) 667
lüktető egyenáram 464, 600
lyuk 1031, 1033, 1041
lyukelmélet (Dirac-féle) 1222
lyukmozgékonyság 1037
lyukvezetés 1032

M

magassági energia 128
magerő 1158
– hatótávolsága 1158
– töltésfüggetlensége 1158
magfizika 813, 1129

maghasadás 1174
–, spontán 1177
mágikus atommag 1160
– számok 1160
magmágneses rezonancia 1150
mágneses anyagok 1056
– –, lágy 1058
– –, kemény 1058
– elemi erőtörvény 537
– dipólusmomentum 1056
– energiasűrűség 563
– fluxus (indukciófluxus) 510
– forráserősség 509, 511
– gerjesztés 527
– gerjesztettség 527
– hiszterézis 1058
– indukció jelensége 539
– –, mozgási 539, 542
– –, nyugalmi 551, 554
– indukció-vektor 506
– indukcióvonalak 510
– kölcsönhatás 504
– kvantumszám 883
– lebegő rendszerek 740
– mező 503, 614
– – energiája 561
– – energiasűrűsége 562
– – forráserőssége 509, 511
– –, forgó 604
– –, időben állandó 503
– –, időben változó 551
– – örvényerőssége 512, 513
– –, örvényes 511
– momentum 883, 884, 1154
– –, elektroné 883
– –, indukált 1060
– nyomaték-vektor 506, 507, 508
– örvényerősség 523
– permeabilitás 515
– –, abszolút 528
– –, relatív 528
– rezonancia (NMR) 1154
– szuszceptibilitás 1056
– tér l. mágneses mező
– –, egyenes áramvezetőé 521
– –, egyenes tekercs belsejében (szolenoid) 522
– –, körtekercs (toroid) belsejében 524
– –, körvezető középpontjában 525
– –, körvezető tengelyén 526
– –, mozgó ponttöltésé 520
– térerősség 527
– térerősség-vektor 1056
– tulajdonságok 1055
– vákuumállandó l. permeabilitás
mágnesezettség-vektor 1056
magnetométer 505
magnetostrikció 1059
magnetron 722
Magnus-effektus 289
makroállapot 941
makromolekulák 897
makroszkópikus paraméter 941
manométer 268
–, Bourdon-csöves 268
–, folyadékos 268
–, ionizációs 270
–, McLeod-féle 269
maradék-ellenállás 1020
másodfajú perpetuum mobile 389
második kozmikus sebesség 179
másodlagos fényforrás 367
– kozmikus sugárzás 663,
– kötés 1007
másodrendű (felületi) nyomaték 241
matematikai inga 188
– – lengésideje 189
Maxwell I. törvénye 432, 433
– II. törvénye 443
Maxwell II. törvénye kiegészítve 556
– III. törvénye 511
– IV. törvénye 516, 613
– teljes egyenletrendszere 614
Maxwell-féle sebességeloszlás 980
Mc Leod-féle kompressziós manométer 269
mechanika 29
mechanikai egyensúly 217
– energia 123
– – megmaradásának elve 131
– – – –, pontrendszeré 157
– feszültség 237
– hullám 290
meddő (watt nélküli) áram 578
– teljesítmény 578
megfordíthatatlan folyamat 387, 938, 957
megfordítható folyamat 387, 963
megmaradási tételek 1224
– –, barionszámé 1228
– –, elektromos töltésé 414, 1228
– –, impulzusé 90, 1224
– –, impulzusnyomatéké (perdületé) 153, 1228
– –, leptonszámé 1228
– –, mechanikai energiáé 131
– –, perdületé 152
– –, relativisztikus energiáé és impulzusé 1228
– –, ritkaságé 1228
megosztás, elektromos 443
megtalálási valószínűség 861, 901
– valószínűségsűrűség 861
megvilágítás erőssége, energetikai 665
– –, vizuális 667
megvilágítási idő 691
Meissner-effektus 1072
mellékáramkörű generátor 602
– motor 603
mellékkvantumszám 879
mélységélesség 692
membránmodell 870
Mengyelejev 825
Mengyelejev-féle periódusos rendszer 889
mennyiségek legvalószínűbb értéke 948
méréshatár 497
–, ampermérőé 497
–, voltmérőé 498
– kiterjesztése 497
– –, ampermérőé 497
– –, voltmérőé 498
merev test 68
– – dinamikája
– – egyensúlya 218
– – forgómozgása 68
– – haladó mozgása 68
– – perdülete 161
– – síkmozgása 68, 71, 165
– – tengely körüli forgása 68
Merkúr perihéliumelfordulása 807
mérleg, analitikai 224
– érzékenysége 224
–, torziós 97
mértékelmélet 1229
merülés 264
mesterséges hold 176
mezon 1226
–, π- (pion) 1226
mező 126
–, elektromágneses
–, elektromos 52, 413, 416, 418, 555
–, elektrosztatikus 413
– fluxusa 423
– forrása 425
–, forrásmentes 511, 614

mező, forrásos 428, 614
–, homogén 423
–, indukált elektromos 555
–, inhomogén 423
–, konzervatív 436
–, mágneses 503
–, örvényes 512, 614
–, örvénymentes 441, 614
–, sugárzási 615
Michelson 638
Michelson–Morley-kísérlet 757
mikroállapot 942
– kvantummechanikai meghatározása 942
mikroállapotok száma 942
–, Einstein-kristályé 954
–, ideális gázé 952
–, makroszkopikus testeké 954
mikroelektronika 1039
mikroelektronikai eszközök 1039
– – (mágneses térerősségmérők) 1049
– – (termisztor) 1049
– – (kristálydióda) 1042
– – (napelemcella) 1035
– – (optikai érzékelők) 1045
– – (tranzisztor) 1047, 1048
– – (világító dióda, LED) 1046
mikrohullám 661
mikrohullámú háttérsugárzás 1233
mikrohullámú rezgés 720
mikroszkóp 695
mikroszkóp-kísérlet, Heisenberg-féle 856
Millikan 817
Millikan-kísérlet 817
minimálfelület 282
minimális deviáció 644
– – szöge 644
Minkowski-sík 780
Minkowski-tér 780
mobil telefónia (GSM) 752
moderátor 1192
moduláció 715
–, amplitúdó- 715
–, fázis- 715
–, frekvencia- 715
módus 323
Mohs-féle skála 245
moláris tömeg 359
molekula 813, 897
molekulák energiaeloszlása 939
molekulák térbeli eloszlása 931
molekulalánc 1126
molekulapálya 900
–, kötő 901
–, lazító 902
molekularács 1000, 1007
molekuláris erő 96, 131,
molekulasúly, mólsúly 815
mólhő 362, 922
–, Einstein-kristályé 973
–, szilárdtesteké 1016
–, valódi kristályé 973
mólnyi mennyiség 814
mólsúly 359
móltömeg 359
monokromatikus fény 658
monomermolekula 1125
Morley 758
Moseley-törvény 1152
motor, aszinkron- (indukciós) 604
–, belsőégésű 404
–, dízel- 406
–, egyenáramú 603
–, gázsugaras (tolósugaras) 407
–, gázturbinás 406
–, kétütemű 405
–, négyütemű, Otto-féle 404
–, rakétameghajtású 407
–, szinkron- 604

motor, váltakozóáramú 604
mozgás 35
–, állandó gyorsulású 47
–, egyenes vonalú 47
–, – – egyenletes 46
–, egyenletes 46
–, –, forgó 69
–, egyenletesen lassuló 39
–, – változó 36
–, – – kör- 57
–, – – forgó 69
–, folyadékoké 79
–, forgó 69
–, gázoké 79
–, görbe vonalú 32, 47
–, haladó (transzlációs) 68
–, kényszer- 100
–, kör- 55
– leírása (kinematika) 29
–, rezgő- 58
–, sík- 68
–, szabad 49
–, változó 36
mozgásállapot 59
mozgásegyenlet 89
–, relativisztikus 797
mozgási energia 124
– –, merev testé 166
– –, pontrendszeré 156
– indukció 539
mozgásmennyiség 89
mozgékonyság 1037
–, elektron- 1037
–, lyuk- 1037
mozgó felület 102
– koordinátarendszer 44
– lejtő 100
– ponttöltés 520, 532, 533,
mozgócsiga 225
mozgófilmvetítő 693
Mössbauer-effektus 810
munka 115
–, effektív 548
–, elektromos mezőé 434, 471
–, elemi 116
–, forgatónyomatéké 167
–, gravitációs erőé 120
–, hatásos 548
–, kémiai 401, 474
–, kényszererőé 121
–, kilépési 842
–, konzervatív erőé 118
–, nehézségi erőé 119
–, rugóerőé 118
–, súrlódási erőé 118
–, térfogati 338
munkatétel 123, 125
– pontrendszerre 156
munkavégzés, adiabatikus 345, 373
műanyagok 1107, 1116, 1122
müon 1225

N

n típusú félvezető 1022, 1035
Nagy Egyesítés Elmélet 1229
nagy hatótávolságú erő 159
nagyítás 674
nagyító 694
–, egyszerű (lupe) 694
–, összetett 695
nagytengely 175
napelemcella 1041
napfényhologram 1079
navigációs rendszer (GPS) 750
Neél-hőmérséklet 1071
nedvesítő folyadék 280
négyes helyvektor 790
négyesgyorsulás 791

négyesimpulzus 793
négyessebesség 790
négyesvektor 790
négyfaktor-formula 1189
négyütemű benzinmotor, Otto-féle 404
nehéz részecske bomlása 800
nehézion-fizika 1174
nehézségi erő 93, 183
– – munkája 119
– gyorsulás 50, 183
nem pontszerű leképezés 680
nemesgáz 892
nemkristályos szilárd test 379
Nernst tétele 397
neutrális réteg 241
neutrínó 796, 1224
neutron 1129
–, azonnali (prompt) 1186
–, késő 1186
–, termikus 1189
neutronbefogás 1182
neutroncsillag 1180
neutrondiffrakció 996
neutrongenerátor 1200
neutronok lassítása 1187
– –, nehézvizes 1187
neutronos aktiválás 1182
nevezetes sugármenetek 674
newton (N) 87
Newton 97
– I. törvénye 83
– II. törvénye 86
– III. törvénye 88
– IV. törvénye 88, 92
Newton-féle színes gyűrűk 652
Nicol-prizma 649
nívófelület 439
normál gyorsulás 40
– színkép 645
normállámpa 666
nukleáris fűtőanyag 11091
– kölcsönhatás 1158
nukleon 1129, 1162
nukleonenergia-felület 1164
nullavezeték 598
numerikus excentricitás 175

Ny

nyílt folyamat 369
– ideális gázokkal 369
– – – –, adiabatikus 372
– – – –, izobár 371
– – – –, izochor 372
– – – –, izoterm 369
– – – –, politrop 374
– rendszer 398
– rezgőkör 579
nyírás 236
nyírási feszültség, kritikus 1096
– modulus 243
nyitóirányú előfeszítés 1044
nyomás 248
–, fényé 630
–, folyadéké 248
–, gázé 259
–, görbületi 282
–, hidrosztatikai 251
–, ideális gázé 916
–, kritikus 375
–, lég- 257
–, szublimációs 381
nyomásmérő 168
– (aneroid barométer) 268
– (Bourdon-csöves manométer) 268
– (folyadékos manométer) 268
– (ionizációs manométer) 270
nyomásmérő (McLeod-féle kompressziós manométer) 269
– (Torricelli-cső) 257
nyomaték 112
–, forgató- 112
–, másodrendű (felületi) 241
–, tehetetlenségi 161
nyomóerő 237
nyomófeszültség 237
nyugalmi elektromágneses indukció 551
– energia 796
– hossz 782
– tömeg 794
nyugvó felület 121
– folyadék 247
– – felülete 247
– gáz 247
– lejtő 100
– rendszer 44
– töltéseloszlás 435
nyújtás 235, 238
nyújtási diagram 240
nyúlás 1094

O, Ó

objektív 690, 692, 695
ohm (Ω) 465
Ohm törvénye 465
ohmikus ellenállás (rezisztencia) 569
okulár 695, 697
Olbers-paradoxon 1232
oldódás 1112
olvadás 363, 364, 378, 1117, 1118
olvadáshő 363, 364
olvadáspont 378, 1108, 1116, 1118
optika 635
–, hullám- (fizikai) 635
–, sugár- (geometriai) 635, 671
optikai érzékelők 1044
optikai eszközök 688
– – (diaszkóp) 692
– – (egyszerű nagyító, lupe) 694
– – (epidiaszkóp) 693
– – (episzkóp) 692
– – felbontóképessége 698
– – feloldási határa 698
– – (fényképezőgép) 690
– – (mikroszkóp) 695
– – (mozgófilmvetítő) 693
– – (sötétkamra) 688
– – (spektrográf) 699
– – (szem) 688
– – (színképelemző készülék, spektroszkóp) 699
– – (távcső) 696, 697, 698
– érzékelők 1045
– hullám 661
– kettősrés 655
– középpont 673
– lencse 672
– –, domború 672
– –, homorú 677
– leképezés 671
– rács 655
– rés 653
– sűrűség 639
– tengely 672, 683
– tubushossz 696
– tükör 682
– –, domború 682
– –, homorú 682
– –, sík- 682
– úthossz 687
ordinárius sugár 648
óriásmolekula 1125
óriásmolekulájú (makromolekulájú) anyagok 1125

óriásmolekulájú folyadék 1127
orientációs polarizáció 1050
oszcillátor 718, 833
–, atomi 833, 977
– energiája 833
– energiaszintjei 875
–, harmonikus 874
–, lineáris 874
Otto-féle négyütemű benzinmotor 404

Ö, Ő

önfenntartó gázkisülés 830
– láncreakció 1184
önindukció 559
önindukciós együttható (öninduktivitás) 559
örvény 288,
örvényáram 594
örvényerősség 434, 441, 555, 613
–, elektromos 441
–, mágneses 512, 513, 613
örvényes áramlás 289
– elektromos mező 551, 557
– mágneses mező 512, 613
– mező 551, 556, 614
örvénymentes mező 443, 614
ősrobbanás 1180, 1233
összenyomás 235, 240
összetett áramkör 478
– nagyító 695
– szín 645
ötvözet 1092

P

p-pálya 891, 903, 904
p típusú félvezető 1022, 1035
pálya 31
–, bolygóé 176
– egyenlete 31
–, ellipszis- 176
– görbülete 32
– görbületi köre 33
– görbületi sugara 33
–, hiperbola- 177
– inflexiós pontja 102
– ívhossza 31
–, kör- 55, 154, 176
–, parabola- 53, 150, 177, 201
– paraméteres egyenletei 31
– szelője 34
–, tehetetlenségi 84
pályafeltétel, Bohr-féle 834
pályaperdület (impulzusnyomaték) 151
parabola-potenciál 1015
paramágneses anyag 1056
– Curie-hőmérséklet 1059
– telítődés 1057
páratartalom 384
–, abszolút 384
–, relatív 385
párhuzamos kapcsolás 458
–, áramforrásoké 492
–, ellenállásoké 481
–, kondenzátoroké 457
– rezgőkör 584
– –, ideális 585
– –, veszteséges 586
– RLC-kör 584
parciális nyomások 360
párkeltés 1223
párkorrelációs függvény 1110

párkölcsönhatás 90, 91
párna alakú torzítás 681
párolgás 379
párolgáshő 363, 380, 1102
párolgási sebesség 384
párpotenciál-függvény 1013
pascal (Pa) 237
Pascal törvénye 249
Pauli 1066, 1223
Pauli-elv 887, 1159, 1223
Pauli-energia 1163
Pauli-neutrínó 1224
Pauling 907
Pelton-kerék 279
pentaprizma 690
perdület 107, 111
–, merev testé 161,
–, pálya- 151
–, pontra vonatkoztatott 111
–, pontrendszeré 151
–, pontszerű testé 107, 111
–, saját- 151
–, tengelyre vonatkoztatott 154
perdületmegmaradás elve 152
perdülettétel 154
–, saját- 154
perdületvektor 112
perihélium 175, 807
perihélium-elfordulás 807, 808
periodikus erő 150
– hullám 291
periódusidő 56
–, harmonikus rezgőmozgásé 59
–, harmonikus hullámé 291
periódusos rendszer 887
permeabilitás 515
–, abszolút 528
–, relatív 528
–, vákuum- 515
permittivitás 449, 1050, 1052
–, abszolút 450
– frekvenciafüggése 1053
–, relatív 449, 1049
perpetuum mobile 346
– –, első fajú 346
– –, másodfajú 389
perturbáció 178
phon 332
piezoelektromos anyag 706
– kristály 1003
piezoelektromosság 1003
π-kötés 903
π-pálya 903
piknométer 267
pillanatnyi forgástengely 75, 167
– gyorsulás 40
– impulzussűrűség 630
– sebesség 36
– sugárzási teljesítmény 303
– szöggyorsulás 69
– teljesítmény 122, 547
– teljesítménysűrűség 303, 629
pion 1226
pipetta 271
pixel 734
Planck, Max 389
– kvantumhipotézise 834
Planck-állandó 834
planparalel lemez 643
plazma 1181
plazmaállapot 1181, 1201
plazmafűtés 1231
– ohmikus hevítéssel 1231
– nagyfrekvenciás mezővel 1231
plazmamegjelenítők 739
p–n átmenet 1040
poise 286
Poisson-eloszlás 1132
Poisson-szám (harántösszehúzódási együttható) 239

Polányi Mihály 1097
polarizáció 295
–, deformációs 1050
–, dielektromos 415, 1049
–, elektromos 1049
–, elektromágneses hullámé 624
–, elektron- 1051
–, ferroelektromos 1050
–, hullámé 295
– ,–, cirkulárisan 295
–, –, elliptikusan 295
–, –, lineárisan 295
–, ionos 1050
–, orientációs 1050
polarizációs sík 647
polarizálatlan fény 646
polarizált fény 648
– hullám 298
polarizátor 295, 647
polárkoordináták 30
polaroidszűrő (polárszűrő) 649
poláros molekulák 906
polikristályos szerkezet 1006
polimeranyag 1125
–, láncmolekulájú 1125
– térhálós szerkezete 1125
polimerüveg 1128
polimorfia 1009
politrop állapotváltozás 374
politrop index 374
pontban koncentrált erők 159
ponthiba 1081
pontrács 997
pontrendszer 139
– helyzeti energiája 157
– impulzusa (lendülete) 140, 150
– mozgási energiája 156
– perdülete 151
– tömegközéppontja 141
–, zárt 139
pontszerű hullámforrás 303
– test l. anyagi pont
– – egyensúlya 218
– – koordinátái 29
– – – derékszögű rendszerben 29
– – perdülete
– töltés 418
– – elektromos tere 418
– – térerőssége 418
populációinverzió 1075
porlasztó 276
potenciál 130, 434, 438
–, elektromos 440
–, gravitációs 130
–, kémiai 984
– mérése 451
–, parabola- 1015
–, termodinamikai 398
potenciálfal 870
potenciálfüggvény, empirikus 1014
– Lenard–Jones-féle 1014
–, pár- 1013
potenciálgát 872
potenciálgödör 874
potenciális energia 126
potenciáltér 864, 876,
potenciométer 488
Poynting-vektor 566
pozitron 1219
pörgettyű 215
–, erőmentes 215
–, súlyos- 215
–, szimmetrikus 215
precesszió 215
precíziós kozmológia 1234
primer tekercs 597
prizma 643
–, képfordító 698
–, kettős- 652
–, penta- 690

próbatest 416, 505
prompt szuperkritikus állapot 1186
prompt-neutronok 1186
proton 1129
proton–proton ciklus 1202
Proust 814

Q

Quincke-féle interferenciacső 333

R

rács, atom- 1000
–, fémes 1000, 1004
– –, felületen centrált köbös 1005
– –, hatszöges szoros illeszkedésű 1005
–, ion- 1000, 1001
–, kristály- 995
–, molekula- 1000, 1001, 1007, 1010
–, optikai 655
–, reflexiós 656
–, polikristályos 1006
–, pont- 992, 997
rácsállandó 656
rácshiba 1081
rácsközi atom 1082
rácslyuk 1082
rácsrezgés 464
rácsszínkép 656
radar 661
radiális gyorsulás 40
radioaktív anyag 1130, 1194, 1212
– bomlás 1130
– – (alfa-, α-) 1130, 1170, 1174
– – (béta-, β-) 1130, 1168, 1224
– – (gamma-, γ-) 1130, 1172
– – (negatív béta-, β^--) 1169
– – (pozitív béta-, β^+-) (K-befogás) 1169
– bomlási család 1133
– – sor 1133
– egyensúly 1132
– hulladék 1198
– sugárzás 1130
– – (α-) 826, 1126
– – (β-) 1130
– – (γ-) 1130
– – intenzitása 1136
radioaktivitás 1168
rádióhullám 660
– (hosszúhullám) 660
– (középhullám) 661
– (mikrohullám) 661
– (rövidhullám) 661
– (ultrarövidhullám) 661
rádiólokátor 661
radiometria 664
rakéta 179
– tömegaránya 180
– végsebessége 180
rakétameghajtású gép 407
reaktancia 570
–, induktív 570
–, kapacitív 572
reaktor 1183
–, kísérleti 1184
–, kutató- 1183
–, tan- 1184
reaktorspektrum 1187
reaktortípusok 1195
–, termikus 1195
– –, forralóvizes 1195
– –, nyomottvizes 1195
reális folyadék 279
– gáz 375
– – állapotegyenlete 926

referencianyaláb 1079
reflexiós rács 656
reflektor 697
refraktor 697
regeláció (újrafagyás) 378
rekeszszám 692
rekombináció 829, 1041,
–, sugárzásos 1046
relatív atomtömeg 814
– dielektromos állandó l. relatív permittivitás
– hosszváltozás 349
– megnyúlás 235
– móltömeg 359
– páratartalom 385
– permeabilitás 528, 1056
– permittivitás 446, 449
– térfogatváltozás 236, 351
– törésmutató 638
relativisztikus dinamika 793
– Doppler-effektus 784
– energia 795
– időkésés 810
– impulzus 794
– kinematika 789
– mozgásegyenlet 797
– sebességösszetevés 782
– tömeg 794, 824
relativitáselmélet 755
–, általános 805
–, speciális 755, 766, 789
relativitási elv, Galilei-féle 133, 755
relé 593
remanens mágnesség (remanencia) 1058
rendellenes sugár 648
rendes sugár 648
rendezetlen elrendezés 933
rendszám 1129
repülés alapelve 289
rés, optikai 653
–, kettős- 655
részben rendezett elrendezés 933
részecskeáram 930
részecskeáram-sűrűség 930
részecskecsaládok 1225
– (barionok) 1226
– (hiperonok) 1227
– (nukleonok) 1227
– (kvarkok) 1227
– (leptonok) 1225
– (mezonok) 1226
részecskedetektorok 1146
– (buborékkamra) 1147
– (fotoemulzió) 1146
– (ködkamra) 1147
– (szilárdtest-nyomdetektor) 1147
részecskegyorsító 1151
részecskék eloszlása 933
– energia szerint 976
– sebesség szerint 980
részecskeszámláló 1147
– (félvezető detektorok) 1149
– (Geiger–Müller-számlálócső, GM-cső) 1148
– (ionizációs kamra) 1147
– (szcintillációs számláló) 1148
– (termolumineszcens dózismérő) 1148
rétegellenállás 487
réteges áramlás 288
rétegződési hiba 1081, 1101
reverzibilis folyamatok 387, 963
– körfolyamat 394
rezgés 59, 185
–, csatolt 197, 589
–, csillapítatlan 194, 580,
–, csillapodó 192, 582
–, elektromágneses 582
–, eredő 61, 62
rezgés, eredő, amplitúdója 63
–, –, fázisszöge 63
– felbontása 65
– felharmonikusai 65
–, gerjesztett 195
–, gerjesztő 195
–, kényszer- 195
–, –, rezonanciája 196
–, mikrohullámú 720
–, rács- 464, 1030, 1017
–, saját- 195
–, szabad- 579
–, torziós 244
rezgések összetétele 60
rezgési állapot 291, 293
– sík 295, 647
rezgésidő 59, 186
–, saját- 195, 825
rezgőkör 579
–, csatolt 589
–, elektromos 579
– hangolása 589
–, párhuzamos 587
– sajátfrekvenciája 582
–, soros 584
rezgőmozgás 58
– amplitúdója 59
–, csillapodó 192, 193
– fázisa 59
–, harmonikus 58
– kitérése 59
rezisztencia 465, 459, 569
rezisztivitás 466
rezonancia 195
–, áram- 587
–, feszültség- 584
–, hangtani 333
rezonanciaamplitúdó 196
rezonanciagörbe 195
rezonanciakatasztrófa 196
rideg anyag 1095
– törés 1101
Ritchie-féle fotométer 669
ritka gázok 987
– – eloszlásfüggvénye 988
ritkaság 1228
RLC-kör 574, 583
–, párhuzamos 584
–, soros 583
Robert–Mayer-egyenlet 369
rotációs légszivattyú 270
Römer 938
röntgenhullám 661, 1137
röntgensugárzás 663
röntgendiffrakciós szerkezetvizsgálat 995
röntgenszínkép 1151
rövidhullám 661
rövidzárási áram 477
rubinlézer 10787
rugalmas alakváltozás 238
– erő 93
– feszültség 238
– pontsor 290
– tulajdonságok, kristályé 1013, 1015
rugalmassági állandó 244
– energia 130, 245
– – sűrűsége 245
– erő 93, 245
– határ 238
– modulus (Young-modulus) 239
– –, nyírási (csúsztatási) 243
rugalmatlan ütközés 209
rugóállandó 93
rugóerő munkája 118
Rutherford, Ernest 827
Rutherford-féle atommodell 829, 1150
Rutherford-kísérlet 826
Rydberg-állandó 831
Rydberg-formula 831

S

saját rezgésidő
sajátfrekvencia 195, 323
–, rezgőköré 582
sajátidő 779
sajátperdület 152
sajátperdület-tétel 154
sajátrezgés 195
Savart 517
sávos színkép 659
sávszerkezet 1020
–, fémeké 1027
–, szigetelőké 1030
Schrieffer, Robert 1072
Schrödinger 863
Schrödinger-egyenlet 863, 864, 1027
–, időtől független 865
– megoldásai 867
sebesség 35
–, átlag- 36
–, csoport- 328, 851
–, drift- 465
–, fázis- 328, 851
– koordinátái 35
–, kozmikus 176
– legvalószínűbb értéke 914
–, kör- (első kozmikus sebesség) 176
–, négyes- 790
–, parabola- (szökési v. második kozmikus sebesség) 176
–, párolgási 379
–, pillanatnyi 36
–, szög- 56
–, szökési l. parabolasebesség
–, terjedési 291, 295, 297, 617, 620
–, területi 107, 176
–, változó 36
–, vándorlási l. driftsebesség
sebességeloszlás 912
–, gázoké 912
–, Maxwell-féle 980
sebesség–idő függvény 46
sebesség-összeadás 783
sebességtér 79
sebességvektor 35, 38
–, négyes 790
Seeliger paradoxona 1232
sievert (Sv) 1144
síkhullám 302, 626, 630
síkidom tömegközéppontja 144
síkkondenzátor 446
– kapacitása 448
síklapokkal határolt közegek 643
–, fénytani hasáb (prizma) 643
–, planparalel lemez 643
síkmozgás 68, 165
– pillanatnyi forgástengelye 75
simuló kör (pálya görbületi köre) 33
skalár 45
skakáris szorzat 115
Snellius–Descartes-törvény 641
sokrészecske rendszerek 893
– – valószínűségi leírása 911
sokszorozási tényező (effektív) 1184
Sommerfeld 840
soros kapcsolás 459
– RLC-kör 574
söntellenállás 497
sötét anyag 1235
sötét energia 1235
sötétkamra 688
speciális Lorentz-transzformáció 776
spektrálanalízis 699
spektrális fényhasznosítás 664
spektrográf 699
spektroszkóp 699
spektrum 664
–, energia- 963, 1025
– finomszerkezete 839
spektrum, reaktor- 1187
spin 845, 884, 885
–, egész spinű részecskék 845, 885
–, feles spinű részecskék 845, 885
spinkvantumszám 885
spontán folyamat 955, 957, 1168
– maghasadás 1177
stabil atommag 1130
– egyensúlyi helyzet 232
stacionárius állapot 867, 870
– állapotfüggvény 866, 871
– áram (elektromos) 464
– áramlás 79, 273
– – alaptörvénye 81
– hullámfüggvény 876
standard modell 1227
statika 217
–, anyagi ponté 217
–, folyadékoké 247
–, gázoké 247
–, merev testé 218
statikai tömegmérés 224
statikailag határozatlan feladat 234
statisztikus fizika 911, 941
– – alapposztulátumai 947
Stefan–Boltzmann-törvény 411, 832
Steiner-tétel 162
Stern 884
Stern-Gerlach-kísérlet 885
Stern-kísérlet 912
Stokes-törvény 288
sugár, rendellenes (extraordinárius) 648
–, rendes (ordinárius) 648
sugárbetegség 1141
sugárerősség 1146
–, belső 1146
–, külső 114
sugárdózis 1140
–, félhalálos 1141
sugárterhelés 1144
–, belső 1146
–, külső 1146
sugárvédelem 1145
sugárzás, abszolút fekete testé 410, 666, 831
–, α- 825, 826
–, β- 825
–, elektromágneses 614
–, fékezési 663
– fluxusa 1136
–, γ- 825
–, háttér- 1140
–, hő- 410
–, hőmérsékleti 410
–, indukált 1075
–, intenzitása 1136
–, katód- 819
–, kozmikus
–, röntgen- 661
–, –, folytonos 663
–, –, karakterisztikus 663
–, –, kemény 663
–, –, lágy 663
sugárzás detektálása 1146
– – fotoemulzióval 1147
– – ionizációs kamrával 1147
– – ködkamrával 1147
– – szilárdtest-nyomdetektorral 1147
sugárzási karakterisztika 701
– károsodás 1086, 1140
– –, azonnali 1140
– –, determinisztikus 1140
– –, genetikus 1140
– –, késői 1140
– –, szomatikus 1140
– –, sztochasztikus (véletlenszerű) 1140
– mező 616, 620, 827
– teljesítmény 302

sugárzásos rekombináció 1046
sugárzó anyag 626
súly 93
súlyerő 95
súlyos és tehetetlen tömeg 805
súlyos pörgettyű 215
súlypont 174
súlyszázalék 264
súlytalanság állapota 96
súlyviszonyok törvénye 814
súlyvonal 146, 147
súrlódás, belső 286
súrlódási együttható 103
– –, csúszási 103
– –, tapadási 105
– –, –, mérése 202
– – erő 103
– –, csúszási 103
– –, tapadási 104
– – munkája 121, 193
– – tényező l. súrlódási együttható
– –, belső 273
– –, tapadási 104, 105
súrlódásmentes (ideális) lejtő 199
súrlódásos lejtő 201
sűrítő 446
sűrűség 87
–, akusztikai 309
–, áram- 467
–, átlag- 264
– egysége 87, 88
–, erővonalaké 442
–, folyadéké 87, 1107
–, vízé 1112
sűrűséggradiens 930
sűrűségingadozások 936
– mérése 266
– – Arkhimédész törvénye alapján 266
– – piknométerrel 267
– – úszó sűrűségmérővel 266

Sz

szabad elektromágneses állóhullám 624
– – rezgés 579
– elektron (delokalizált elektron) 1024
– mozgás 767
– úthossz, átlagos 467, 815, 927
szabadelektron-gáz 1025
szabadenergia 399
szabadentalpia 399
szabaderő 101
szabadesés 49
szabadsági fok, kinematikai 942
– –, termodinamikai 919
szabad töltés elektromos mezőben 533
szabad töltés mágneses mezőben 534
szabad vektor 31
szabályos visszaverődés 682
szabályozott fúzió 1204
szakítószilárdság 240, 1102
szalaggenerátor 455
szárazelem 474
szcintillációs számláló 1148
szekunder tekercs 593
szélerőmű 279
szem 688
– feloldási határa 689
szemcsehatár 1081, 1101
szemlencse 695
szennyezett félvezetők 1037
szennyező atomok 1032, 1040
szerkezetvizsgálat 995, 1110
szférikus aberráció 679
szigetelő kristály 1030
szigetelőanyag 448
szigetelők 415, 1016, 1020
– sávszerkezete 1030
σ-kötés 903
σ-pálya 903
szilárdságtan 234
szilárd halmazállapot 991
szilárdtest 991
– elektromos tulajdonságai 1020
– fajhője 1016
– hőtágulása 1018
– mólhője 1016
–, nemkristályos 379
szilárdtest-nyomdetektor 1147
szilícium 1021
szilikátüveg 1116
szimmetria 999
–, eltolási v. transzlációs 998, 999
–, forgás- 999
–, tükör- 999
szimmetrikus pörgettyű 215
szín 645
–, fehér 645
–, fő- 645
–, homogén 645
–, keverék- 645
–, kiegészítő 645
–, monokromatikus 645
–, összetett 645
színcentrum (F-centrum) 1090
színestelevízió-rendszerek 738
színi eltérés 679
színkép (spektrum) 645, 656
–, abszorpciós (elnyelési) 658, 830
–, diszperziós 657
–, elektromágneses, teljes 660
–, elhajlási (rács-) 656
–, emissziós (kibocsátási) 658
–, folytonos 659
–, normál- 656, 657
–, röntgen- 1151
–, sávos 659
–, vonalas 659
színképelemzés 699
színképelemző készülék 699
szinkronmotor 604
szinkrotron 803
színszórás 639
szintetizátor 710
–, beszéd- 710
–, zene- 709, 710
szintfelület (nívófelület) 439
szinuszos hullám 291
szivattyú, centrifugális 272
–, diffúziós 271
–, lég- 269, 270
–, –, dugattyús 270
–, –, rotációs 270
–, vízlégsugár- 271
szívókút 271
szívónyomó kút 272
szivornya 272
szlip 606
szolenoid 522
szórás, alfa- 826
–, Compton- 842
–, fény- 639
szóráskísérlet (Rutherford-féle) 826
szórólencse 673, 677
szoros csatolás 197, 558
szöggyorsulás 57
–, pillanatnyi 69
szöggyorsulás-vektor 79
szögnagyítás 694
szögsebesség 56
szögsebesség-vektor 78
–, eredő 78
szökési sebesség 176
sztereoszkópikus látás 690
szubjektív hőérzet 342

szublimáció 381
szublimációs görbe 383
– hő 382
– nyomás 381
szupernóva 1234
szupernóva-robbanás 1180, 1234
szuperpozíció elve 88, 92, 417
–, erőké 88
–, hullámoké 312
szupravezetés 1071

T

támadáspont 159
tangenciális gyorsulás 40
tanreaktor 1184
tapadási erő 104
– súrlódási tényező 104
tárgylencse 695
tehetetlen tömeg 98
távcső, Galilei-féle (hollandi) 697
–, Kepler-féle (csillagászati) 696
–, tükrös 697
–, színházi- (prizmás, kézi) 698
távolságfüggés, hullámamplitúdóé 305
–, intenzitásé 303
tehetetlen tömeg 98
tehetetlenség törvénye 83
– – Lange-féle megfogalmazása 84
tehetetlenségi erő 132, 133, 182
– nyomaték 160
– –, fő- 163
– pálya 31
tekercs, ideális 570
– induktív ellenállása 570
tekercsfluxus 559
teleszkópikus botantenna 730
televízió 733, 734
telítetlen gőz 375
telített gőz 375
telítődési zóna 1041
teljes elektromágneses színkép 660
– fluxus 425
– Lorentz-erő 532
– visszaverődés 309, 641
teljesítmény 122
–, átlag- 122
–, effektív 578
–, felületi 665
–, hang- 332
–, hatásos (wattos) 578
–, kisugárzott 665
–, látszólagos 578
–, meddő 578
–, pillanatnyi 122
–, sugárzási 302,
teljesítménysűrűség (energiaáram-sűrűség) 303
–, átlagos 303, 566
–, fénysugáré 629
–, hullámé 303
– időátlaga 627
–, pillanatnyi 627
–, – elektromágneses hullámé 626
–, – mechanikai hullámé 303
teljesítménysűrűség-vektor 566
teljesítménytényező 578
tengelyre vonatkoztatott forgatónyomaték 155
– – perdület 154
tenyésztő reaktor 1196
térben középpontos kockarácsú fém 1006
tércentrált köbös fém 1006
térerősség, elektromos 416
–, indukált elektromos 540, 555
–, mágneses 527, 1056
–, ponttöltésé 418

térfogati energia 1164
– erők 159
– hiba 1081
– hőtágulás 351
– hőtágulási együttható 351
– munka 338, 346
térfogatszázalék 264
térhálós szerkezetű anyag 1125
térhullám 727
téridő 765
– görbülete 810
téridő-négyesvektor 790
térion-mikroszkóp 996
terjedés, fényé 620
–, hangé 333
–, hullámé 290, 305
–, nyomásé 248
–, radioaktív sugárzásé 1136
terjedési irány, elektromágneses hullámé 616, 622
– –, fényé 616, 637
– –, hangé 305
– –, hullámé 290, 302
– sebesség, elektromágneses hullámé 637
– –, fényé 637
– –, hangé 331
– –, hullámé 291, 296
térkitöltés 1004
természetes fény 646
termikus aktiválás 1181
– reaktor 1195
termisztor 1049
termodinamika 337
– nulladik főtétele 342
– I.főtétele 345
– II. főtétele 389, 959, 960
– III. főtétele 397
–, kémiai 401
termodinamikai hatásfok 391
– hőmérsékleti skála 393
– potenciál 398
– szabadsági fok 919
termoelemes hőmérő 344
termolumineszcens dózismérő 1148
termonukleáris fúziós erőmű 1181
térszög 659
területi sebesség 107, 176
területvektor 432
tesla (T) 506
Thomson 820
Thomson-féle atommodell 827
Thomson-féle parabolamódszer 822
Thomson-képlet 582
tiltott sáv 1026
tiszta félvezetők 1036
– gördülés feltétele 205
– hang 332
– látás távolsága 689
TOKAMAK 1210
tolósugár-motor 407
toroid 524
Torricelli 257
Torricelli-kísérlet 257
Torricelli tétele 278
torzió 191
torziós inga 191
– mérleg 97, 418
totális reflexió l. teljes visszaverődés
többalakúság l. polimorfia
többfokozatú rakéta 181
– szivattyú 271
többkomponensű rendszer 378
többszörös súlyviszonyok törvénye (Dalton) 814
tökéletes (tömör) térkitöltés 1005
tökéletesen rugalmas ütközés 209
– rugalmatlan ütközés 209
töltés, elektromos 414, 415
–, fajlagos 533, 820

töltés mozgása elektromos térben 532
– – mágneses térben 533
–, pontszerű 415, 418, 532
töltésegység 417
töltéshordozó 443
töltésmegmaradás elve 414
tömbkondenzátor 456
tömeg 86
– egysége 86
–, elektromágneses 632
–, fotoné 845
–, mól- 359
–, moláris 359
–, mozgási 794
–, nyugalmi 794
–, relativisztikus 794
–, tehetetlen 98
tömegáram 930
tömegdefektus 801,1153
tömeghiány 1153
tömegközéppont 99, 141
– gyorsulása 150
– helyvektora 143
–, kiterjedt testé 143
– mozgásának tétele 150
–, pontrendszeré 141
–, sebessége 147
–, síkidomé 144
– tétele 147
tömegmérés 91
–, dinamikai 91
–, statikai 224
tömegpont 29
tömegspektroszkópia 1152
tömegsűrűség, elektromágneses hullámé 633
tömegszám 1129
tömegszázalék 264
törés 308, 320, 641, 625, 639, 1094
–, hullámé 308, 320, 641
–, képlékeny 1101, 1104
–, rideg 1101, 1102
– törvénye 308, 641
törési szög 308, 641
– törvény 301
törésmutató 308, 638
–, abszolút 638
–, relatív 638
törőél 644
törőszög 644
transzformáció, Galilei-féle 755
–, Lorentz-féle 776
transzformátor 593
– primer tekercse 593
– szekunder tekercse 593
transzlációs (haladó) mozgás 68
– (eltolási) szimmetria 998
transzverzális hullám 293
– – terjedési sebessége 297
tranzisztor 1043
–, közönséges 1047
–, térvezérlésű (FET-) 1048
túlhevített folyadék 380
túlhűtés 379
turbina 278
turbulens (gomolygó) áramlás 288
tükör, gömb- 682
–, kettős- 650
–, optikai 624
–, parabola- 624
–, sík- 624
tükörszimmetria 999
tükrözés 682

U, Ú

Uhlenbeck 885
újrafagyás (regeláció) 378
ultrahang 331
ultraibolya sugárzás 661
ultrarövidhullám 661
Univerzum 1231
– hőhalál állapota 1232
–, táguló 1232
urándúsítás 1190
– diffúzióval 1191
– ultracentrifugálással 1191
úszás 264, 265
úszó sűrűségmérő 267
úszó test egyensúlya 363
út 31
út–idő függvény 49
– grafikon 46
utolsó nukleon kötési energiája 1156
úttörvény, Galilei-féle 48

Ü, Ű

üregrezonátor 720
üresjárási feszültség 477
üstököshiba 680
ütközés 208
– állandó sebességű fallal 213
–, centrális 208
–, egyenes 208
–, ferde 211
– normálisa 208
–, rugalmatlan 209
–, tökéletesen rugalmatlan 209
–, tökéletesen rugalmas 209
–, valódi 210
ütközési hatáskeresztmetszet 927
– normális 208
– szám 211
üveg 991, 1116
–, fém- 1116, 1122
–, kvarc- 1117, 1119
–, polimer- 1122
–, szilikát- 1116

V

vakancia 1081, 1082
vakanciakoncentráció 1084
vákuumpermittivitás (vákuum dielektromos állandója) 421
vákuumállandó, mágneses 515
vákuumpermeabilitás 515
valenciasáv l. vegyértéksáv
valódi erő 134, 139
– fókuszpont 673
– kép 677
– kristály mólhője 973
– ütközés 210
valószínűség, megtalálási 860, 861
valószínűségsűrűség, megtalálási 861
váltakozó áram 546
váltakozó áramú motor 604
váltakozó feszültség 545
változó elektromos mező 611, 613
– mágneses mező 551, 556
van de Graaff-féle szalaggenerátor 455
van der Waals-kötésű kristályok 1007
van der Waals-féle állapotegyenlet 375, 926
van der Waals-kötés 1007
vándorlási sebesség 1036
vegyérték 903
vegyértékelektron 892, 1026

vegyértéksáv 1027
vegyes kapcsolás 483
vegyület 813
vektor abszolút értéke 30
–, elmozdulás- 33
–, forgó 572
–, hely- 30
– karja 111
–, négyes- 774
vektoriális szorzat 108
véletlenszerű mozgás 931
veszteséges LC-kör 586
vevőantenna l. antenna
vezetés 467
vezetési elektron 464, 467
– sáv 1027
vezető 415, 443, 465, 466, 1020
– elektrosztatikus mezőben 443
vezetőképesség 467, 1020
–, látszólagos 588
videójel 735
világító dióda (LED) 1046
világvonal 767
villanycsengő 591
virtuális fókusz 673
– kép 676
– tárgy 678
viszkozitás 286, 379, 815
–, gázé 815
–, vízé 1112
viszonylagos nyílás 692
visszaverődés 307, 308, 320, 641
–, szabályos 682
–, teljes 309, 641
– törvénye 308, 641
visszaverődési szög 308, 641
visszhang 333
vitorlázó repülőgép 289
vivőfrekvencia 715
víz 1112
– fajhője 1112, 1115
– felületi feszültsége 1112
– forráshője 1115
– sűrűsége 1114
– szerkezete 1113
– viszkozitása 1112
vízikerék 278
vízlégsugár-szivattyú 271
vízszintes hajítás 54
volt (V) 437
Volta-elem
voltmérő 498
– kapcsolása 498
von Laue, Max 994
vonalas színkép 659
vonalfeszültség 598
vonalhiba 1081, 1093
vonalszerű hullámforrás 304
vonatkoztatási pont 111, 126
– rendszer 29
– –, abszolút nyugvó 755
– –, egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló 132
– –, forgó 136
– sík 158
– szint 129

W

watt (W) 122
– nélküli áram 578
wattmérő kapcsolása 609
wattos teljesítmény 578
weber (Wb) 510
Weber–Fechner-féle törvény 332
Wheatstone-híd 501
Wien-féle eltolódási törvény 832
Wien-törvény 411
Wilson 1234

Y

Young-modulusz 239
Yukawa 1226
Yukawa-mezon 1226

Z

záróirányú előfeszítés 1044
zárt rendszer 139, 341
Zeemann-effektus 884
zenei hang 332
zeneszintetizátor 709
zérusentrópiájú állapot 959
zérusponti energia 875

Zs

Zsukovszkij-profil 289

TULAJDONA

MELLÉKLET